**Mag. Božidar Brudar, dipl. inž.,**
**Železarna Jesenice**

**DK: 519.24**
**ASM/SLA: S12K**

# Faktorski poskusi in ortogonalni polinomi

*V članku je opisan primer, kjer smo z metodo ortogonalnih polinomov obdelali podatke, ki smo jih dobili pri faktorskem poskusu 3 × 3 × 3. Z analizo variance smo ugotovili, kateri faktor je statistično pomemben. S pomočjo ortogonalnih polinomov smo zapisali tudi regresijsko enačbo (polinom), v kateri so bili vsi členi statistično pomembni.*

## UVOD

Faktorski poskus lahko zelo uspešno uporabimo, če želimo raziskati, kakšna je povezava med neko odvisno spremenljivko in več neodvisnimi vplivi (faktorji), ki jih lahko poljubno spreminjamo. Ni nujno, da so ti vplivi vedno kvantitativni, t. j. da se posamezni faktorji dajo izraziti s številkami. Lahko imamo opraviti s kvalitativnimi vplivi, kjer različnih vrednosti faktorja ne moremo izraziti s številkami. Poseben primer take faktorske analize je tudi latinski kvadrat, ki je bil že opisan v Železarskem zborniku.[1]

Omejili se bomo na opis faktorskega poskusa s kvantitativnimi faktorji. Preden se lotimo poskusa, t. j. merjenja opazovane spremenljivke, določimo nekaj diskretnih vrednosti posameznih faktorjev, pri katerih nameravamo meriti vrednosti odvisne spremenljivke Y. Tem vrednostim faktorjev pravimo nivoji. Zaželeno je, da si nivoji enega faktorja sledijo po aritmetičnem zaporedju, t. j. da so razlike med posameznimi vrednostmi nivojev enega faktorja konstantne. Potrebujemo toliko meritev odvisne spremenljivke, kolikor je možnih različnih kombinacij nivojev vseh faktorjev.

V splošnem tako dobimo neko končno število različnih vrednosti opazovane spremenljivke Y, ki so porazdeljene z večjo ali manjšo varianco okrog neke srednje vrednosti $\overline{Y}$.

Efekt posameznih faktorjev imenujemo spremembo vrednosti odvisne spremenljivke, ki nastane zaradi spremembe vrednosti nekega faktorja. Če ta efekt določimo tako, da računamo spremembo povprečja vrednosti $\overline{Y}$ po nivojih vseh ostalih faktorjev, rečemo takemu efektu glavni efekt. V primeru, ko je efekt enega faktorja odvisen od nivojev nekega drugega faktorja, pravimo, da imamo opraviti z interakcijo.

Vse te efekte lahko najbolj zanesljivo ugotovimo z analizo variance, ki je tudi že bila opisana v Železarskem zborniku.[2] Vsoto kvadratov odstopanj posameznih vrednosti odvisne spremenljivke Y od povprečja $\overline{Y}$ lahko namreč razstavimo na prispevke posameznih efektov.

## ANALIZE VARIANCE PRI FAKTORSKEM POSKUSU 3 × 3 × 3

Omejimo se na primer faktorskega poskusa s tremi faktorji: A, B in C. Pri tem bomo odvisno spremenljivko Y na primer opazovali pri a nivojih faktorja A, b nivojih faktorja B in c nivojih faktorja C. Potrebovali bomo a×b×c poskusov, če bomo pri vsaki kombinaciji naredili le po eno meritev.

Označimo neko določeno vrednost odvisne spremenljivke z $Y_{i,j,k}$, kjer indeks i, j, k pomeni, da pripada i-temu nivoju faktorja A, j-temu nivoju faktorja B in k-temu nivoju faktorja C.

Povprečno vrednost $\overline{Y}$ izračunamo:

$$\overline{Y} = \frac{1}{abc} \sum_{i,j,k} Y_{i,j,k}$$

Vsoto kvadratov Q odstopanj posameznih vrednosti $Y_{i,j,k}$ od $\overline{Y}$ izračunamo po znani formuli:

$$Q = \sum_{i,j,k}^{a,b,c} (Y_{i,j,k} - \overline{Y})^2 = \sum_{i,j,k}^{a,b,c} Y^2_{i,j,k} - \frac{\left(\sum_{i,j,k}^{a,b,c} Y_{i,j,k}\right)^2}{a.b.c}$$

Vrednost Q razstavimo na vsoto prispevkov posameznih efektov:

$$Q = A_Y + B_Y + C_Y + (AB)_Y + (AC)_Y + (BC)_Y + + O_Y$$

Pri tem so prispevki glavnih efektov definirani s sledečimi izrazi:

Faktor A:

$$A_Y = \sum_{i=1}^{a} \frac{\left(\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c} Y_{i,j,k}\right)^2}{b.c} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c} Y_{i,j,k}\right)^2}{a.b.c}$$

Faktor B:

$$B_Y = \sum_{j=1}^{b} \frac{\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{c} Y_{i,j,k}\right)^2}{a.c} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c} Y_{i,j,k}\right)^2}{a.b.c}$$

Faktor C:

$$C_Y = \sum_{k=1}^{c} \frac{\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{i,j,k}\right)^2}{a\,.\,b} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c} Y_{i,j,k}\right)^2}{a\,.\,b\,.\,c}$$

Prispevek interakcij:

Faktorja A in B: $(AB)_Y = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\sum_{k=1}^{c} Y_{i,j,k}\right)^2}{c} -$
$- A_Y - B_Y$

Faktorja A in C: $(AC)_Y = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{c}\left(\sum_{j=1}^{b} Y_{i,j,k}\right)^2}{b} -$
$- A_Y - C_Y$

Faktorja B in C: $(BC)_Y = \frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\left(\sum_{i=1}^{a} Y_{i,j,k}\right)^2}{a} -$
$- B_Y - C_Y$

Ostanek O: $O_Y = Q - A_Y - B_Y - C_Y - (AB)_Y -$
$- (AC_Y) - (BC)_Y$

Te izraze navadno prikažemo s primerno tabelo (Tabela I.)

Vrednosti F izračunamo tako, da delimo posamezne povprečne kvadrate s $s^2_O$ in jih primerjamo s tabeliranimi vrednostmi pri izbrani vrednosti za napake prve vrste ($\alpha$). Te namreč potrebujemo pri testiranju ničelne hipoteze, t. j. pri ugotavljanju, če ne gre morda pri določeni variaciji le za slučajnostne vplive. Trdimo, da je efekt statistično pomemben, če je izračunana F-vrednost večja od tabelirane vrednosti[2] in je pri tem $\alpha$% verjetno, da smo naredili napako prve vrste.[3]

V primeru, ko imamo opraviti s kvantitativnimi faktorji, ki so definirani v več nivojih, pa lahko z metodo ortogonalnih polinomov pridemo še do dodatnih informacij. Ne ugotovimo le tega, če je na primer glavni efekt faktorja A statistično pomemben, ampak tudi za kakšno odvisnost pri tem gre. Če zapišemo glavni efekt v obliki polinoma nivojev faktorja A, lahko s to metodo ugotovimo, katera stopnja polinoma je statistično pomembna in katera ne. Pri tem pa je najvišja stopnja polinoma (a — 1).

To je namreč zelo pomembno, če želimo poiskati regresijsko odvisnost Y od vseh kvantitativnih faktorjev. Če je več faktorjev z večjim številom nivojev, je možnih členov v polinomnem razvoju lahko zelo veliko.

## ORTOGONALNI POLINOMI V FAKTORSKEM POSKUSU 3 × 3 × 3

Oglejmo si, kako bi si s to metodo lahko pomagali v primeru, če imamo opraviti z analizo podatkov, kjer smo variirali 3 faktorje v treh nivojih in smo meritev izvršili samo enkrat. Tako smo dobili 27 podatkov.

Faktor A ... nivoji $X_i$ ($i = 1, 2, 3$)
Faktor B ... nivoji $X_j$ ($j = 1, 2, 3$)
Faktor C ... nivoji $X_k$ ($k = (1, 2, 3)$

V takem primeru bi bila regresijska enačba:

$$\hat{Y}_{i,j,k} = b_o + b_1 X_i + b_2 X_j + b_3 X_k + b_4 X_i^2 + b_5 X_j^2 + b_6 X_k^2 + b_7 X\ X_j + b_8 X_i X_k + b_9 X_j X_k + b_{10} X_i^2 X_j + b_{11} X_i^2 X_k + b_{12} X_i X_j^2 + b_{13} X_j^2 X_k + b_{14} X_i X_k^2 + b_{15} X_j X_k^2 + b_{16} X_i^2 X_j^2 + b_{17} X_i^2 X_k^2 + {}_{18} X_j^2 X_k^2$$

pri čemer bi bile $X_i$ posamezne vrednosti nivojev faktorja A, $X_j$ bi bile vrednosti nivojev faktorja B in $X_k$ vrednosti nivojev faktorja C. Prvih 7 členov predstavlja glavne efekte, ostali pa interakcije.

*Tabela I.*

| Vir variacij | Vsota kvadratov | Stopnje prostosti | Povprečni kvadr. | F-vrednost |
|---|---|---|---|---|
| Glavni efekti | | | | |
| A | $A_Y$ | a — 1 | $s^2_A$ | $s^2_A/s^2_O$ |
| B | $B_Y$ | b — 1 | $s^2_B$ | $s^2_B/s^2_O$ |
| C | $C_Y$ | c — 1 | $s^2_C$ | $s^2_C/s^2_O$ |
| Interakcije | | | | |
| AB | $(AB)_Y$ | (a — 1) (b — 1) | $s^2_{AB}$ | $s^2_{AB}/s^2_O$ |
| AC | $(AC)_Y$ | (a — 1) (c — 1) | $s^2_{AC}$ | $s^2_{AC}/s^2_O$ |
| BC | $(BC)_Y$ | (b — 1) (c — 1) | $s^2_{BC}$ | $s^2_{BC}/s^2_O$ |
| Ostanek | | | | |
| O | $O^Y$ | (a — 1) (b — 1) (c — 1) | $s^2_O$ | |
| Vsota | Q | (abc — 1) | | |

Kateri pa so statistično pomembni?

Na to vprašanje nam odgovori metoda ortogonalnih polinomov. Da se dokazati, da se zgornja regresijska enačba da zapisati v obliki:

$$\hat{Y}_{i,j,k} = A_0 + A_1 \xi_{1i} + A_2 \xi_{1j} + A_3 \xi_{1k} + A_4 \xi_{2i} + A_5 \xi_{2j} + A_6 \xi_{2k} + A_7 \xi_{1i} \xi_{1j} + A_8 \xi_{1i} \xi_{1k} + A_9 \xi_{1j} \xi_{1k} + A_{10} \xi_{2i} \xi_{1j} + A_{11} \xi_{2i} \xi_{1k} + A_{12} \xi_{1i} \xi_{2j} + A_{13} \xi_{2j} \xi_{1k} + A_{14} \xi_{1i} \xi_{2k} + A_{15} \xi_{1j} \xi_{2k} + A_{16} \xi_{2i} \xi_{2j} + A_{17} \xi_{2i} \xi_{2k} + A_{18} \xi_{2j} \xi_{2k},$$

pri čemer so $\xi_i$, $\xi_{1j}$, $\xi_{1k}$ ortogonalni polinomi[4] prve stopnje, $\xi_{2i}$, $\xi_{2j}$, $\xi_{2k}$ pa ortogonalni polinomi druge stopnje. Če si nivoji posameznega faktorja sledijo po aritmetičnem zaporedju z razliko, ki je enaka enoti, so ti polinomi enaki:

$\xi_1 : -1{,}0, +1$

$\xi_2 : +1, -2, +1$

Zaradi lastnosti

$$\sum_i \xi_{1i} \xi_{2i} = 0$$

$$\text{in} \sum_i \xi_{1i} = \sum_i \xi_{2i} = 0$$

lahko izračunamo koeficiente $A_0$ do $A_{18}$ po formulah:

$$A_0 = \frac{\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} Y_{i,j,k}}{27}$$

$$A_1 = \frac{\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} Y_{i,j,k} \cdot \xi_{1i}}{3 \cdot 3 \cdot \sum_{i=1}^{3} (\xi_{1i})^2} \qquad (1)$$

$$\vdots$$

$$A_{18} = \frac{\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} Y_{i,j,k}\, \xi_{2j} \xi_{2k}}{3 \cdot \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} (\xi^2_{2j} \xi^2_{2k})} \qquad (18)$$

Podobno lahko izračunamo za tak primer tudi prispevke posameznih členov k vsoti kvadratov:

$$\sum_{ijk} Y^2_{ijk} - \frac{\left(\sum_{ijk} Y_{ijk}\right)^2}{27} = \sum_{ijk} Y^2_{ijk} - 27 A^2_0 =$$

$$= 27 A^2_0 + 9 A^2_1 \sum_{i=1}^{3} \xi^2_{1i} + 9 A^2_2 \sum_{i=1}^{3} \xi^2_{2i} + \ldots - 27 A^2_0$$

Prispevek prvega člena, oziroma prvega glavnega efekta (linearnega) faktorja A:

$$Q_{A1} = A^2_1 \cdot 9 \cdot \sum_{i=1}^{3} \xi^2_{1i} = \left( \frac{\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} Y_{ijk} \cdot \xi_{1i}}{9 \cdot \sum_{i=1}^{3} (\xi_{1i})^2} \right)^2 \cdot$$

$$\cdot 9 \cdot \sum_{i=1}^{3} \xi^2_{1i} = \frac{\left( \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} Y_{ijk}\, \xi_{1i} \right)^2}{9 \cdot \sum_{i=1}^{3} (\xi_{1i})^2}$$

## ANALIZA VARIANCE — RAČUNSKI PRIMER

Oglejmo si praktični primer obdelave podatkov faktorskega poskusa $3 \times 3 \times 3$.[5]

Merili* smo čas (Y), ki je bil potreben za popolno redukcijo rude v odvisnosti od temperature (T), debeline plasti (P) in pretoka vodika (L). Vsak faktor je bil podan v treh nivojih. Nivoje smo označili z $-1$, $0$, $+1$, da smo tako ustregli zahtevam nadaljnje obdelave z ortogonalnimi polinomi.

Nivoji posameznih faktorjev:

| | | |
|---|---|---|
| Faktor T (temperatura) | | |
| | $T_0 = 700^0$ C | $-1$ |
| | $T_1 = 600^0$ C | 0 |
| | $T_2 = 500^0$ C | $+1$ |
| Faktor P (debeline plasti) | | |
| | $P_0 = 1{,}0$ cm | $-1$ |
| | $P_1 = 1{,}5$ cm | 0 |
| | $P_2 = 2{,}0$ cm | $+1$ |
| Faktor L (pretok plina) | | |
| | $L_0 = 45{,}4$ l/h | $-1$ |
| | $L_1 = 37{,}8$ l/h | 0 |
| | $L_2 = 30{,}3$ l/h | $+1$ |

V tabeli II so podane opazovane vrednosti v minutah, ki pripadajo različnim nivojem posameznih faktorjev. Meritev je bila narejena le enkrat.

*Tabela II.*

| | $P_0$ | | | $P_1$ | | | $P_2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $L_0$ | $L_1$ | $L_2$ | $L_0$ | $L_1$ | $L_2$ | $L_0$ | $L_1$ | $L_2$ |
| $T_0$ | 35 | 44 | 58 | 48 | 60 | 77 | 63 | 78 | 98 |
| $T_1$ | 50 | 63 | 82 | 68 | 86 | 110 | 90 | 112 | 147 |
| $T_2$ | 78 | 95 | 115 | 104 | 126 | 161 | 143 | 166 | 210 |

Najprej izračunamo vsoto vseh vrednosti $Y_{i,j,k}$ in pripadajočo vsoto kvadratov Q:

* Meritve je opravil J. Zaveljcina, dipl. ing. met. pri svojem diplomskem delu. Avtor članka Brudar Božidar — strokovni sodelavec raziskovalnega oddelka — se mu za posredovane podatke in sodelovanje najlepše zahvaljuje.

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} Y_{i,\,j,\,k} = 2567$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} Y^2_{i,\,j,\,k} = 290633$$

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} Y_{i,\,j,\,k}\right)^2}{27} = 244055$$

$$Q = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} Y^2{}_{ijk} - \frac{\left(\sum_{3}^{i=1}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} Y_{ijk}\right)^2}{27} = 46578$$

Nato prepišemo tabelo II v primernejšo obliko za računanje glavnih efektov in interakcij. V naslednjih tabelah so podane vrednosti, ki pripadajo posameznim nivojem tretjega faktorja:

T × L

| | $L_0$ | $L_1$ | $L_2$ | Vsota |
|---|---|---|---|---|
| $T_0$ | 146 | 182 | 233 | 561 |
| $T_1$ | 208 | 261 | 339 | 808 |
| $T_2$ | 325 | 387 | 486 | 1198 |
| Vsota | 679 | 830 | 1058 | 2567 |

T × P

| | $P_0$ | $P_1$ | $P_2$ | Vsota |
|---|---|---|---|---|
| $T_0$ | 137 | 185 | 239 | 561 |
| $T_1$ | 195 | 264 | 349 | 808 |
| $T_2$ | 288 | 391 | 519 | 1198 |
| Vsota | 620 | 840 | 1107 | 2567 |

L × P

| | $P_0$ | $P_1$ | $P_2$ | Vsota |
|---|---|---|---|---|
| $L_0$ | 163 | 220 | 296 | 679 |
| $L_1$ | 202 | 272 | 356 | 830 |
| $L_2$ | 255 | 348 | 455 | 1058 |
| Vsota | 620 | 840 | 1107 | 2567 |

V vsaki tabeli izračunamo vsoto kvadratov posameznih vrednosti (groba vsota kvadratov) in jo delimo s 3, ker smo pri vsaki vrednosti v teh tabelah morali sešteti po tri podatke. Nato odštejemo vrednost izraza $\frac{\left(\sum_{ijk} Y_{i,\,j,\,k}\right)^2}{27}$ in imenujemo razliko totalna vsota kvadratov.

Iz tabele T × L dobimo:

| | | |
|---|---|---|
| Groba vsota kvadratov: | 275541,66 | |
| Korektura za povprečje: | 244055,14 | |
| Totalna vsota kvadratov: | 31486,52 | (19) |

Iz tabele T × P dobimo:

| | | |
|---|---|---|
| Groba vsota kvadratov: | 281607,66 | |
| Korektura za povprečje: | 244055,14 | |
| Totalna vsota kvadratov: | 37552,52 | (20) |

Iz tabele L × P dobimo:

| | | |
|---|---|---|
| Groba vsota kvadratov: | 265754,33 | |
| Korektura za povprečje: | 244055,14 | |
| Totalna vsota kvadratov: | 21699,19 | (21) |

Grobo vsoto nekega glavnega efekta dobimo tako, da seštejemo kvadrate vsot vrednosti, ki pripadajo posameznim nivojem ostalih faktorjev. Rezultat delimo z 9, saj je vrednost pri vsakem nivoju nekega faktorja sestavljena iz 9 vrednosti Y, ki pripadajo ostalim faktorskim nivojem.

Tako dobimo na primer grobo vsoto kvadratov za glavni efekt faktorja T takole:

$(561^2 + 808^2 + 1198^2) : 9 = 2669765$

Od te vrednosti je treba odšteti korekturo za povprečje $\frac{\left(\sum_{ijk} Y_{i,\,j,\,k}\right)^2}{27}$ in tako dobimo vsoto kvadratov za glavne efekte:

Vsota kvadratov za T : 266976,5 — 244055,1 = = 22921,4

Vsota kvadratov za L : 252145,0 — 244055,1 = = 8089,9

Vsota kvadratov za P : 257272,1 — 244055,1 = = 13217,0

Prispevke k vsoti kvadratov Q od interakcij med pari faktorjev izračunamo tako, da od totalne vsota kvadratov (19, 20, 21) odštejemo oba glavna efekta.

Tako dobimo za interakcijo T × L:

31486,5 — 22921,4 — 8089,9 = 475,2

Vsota kvadratov, ki pripada interakciji T × P: 37552,5 — 22921,4 — 13217,0 = 1414,1

Vsota kvadratov, ki pripada interakciji L × P: 21699,2 — 8089,9 — 13217,0 = 392,3

Končno lahko zapišemo že znano tabelo za analizo variance v obliki (Tabela III)

Vsoto kvadratov, ki pripada ostanku, smo določili tako, da smo od skupne vsote Q odšteli prispevke glavnih efektov in interakcijskih efektov.

Ako želimo vedeti, če ni morda prispevek nekega faktorja statistično nepomemben, primerjamo izračunano F-vrednost z ustrezno vrednostjo iz tabel.(2) Pri $\alpha = 0{,}05$ so vsi efekti pomembni.

*Tabela III.*

| Vir variacij | Vsota kvadratov | Prost stopnje | Povprečni kv. | F - vredno. |
|---|---|---|---|---|
| Glavni efekti | | | | |
| T | 22921,4 | 2 | 11460,7 | 1348 |
| L | 8089,9 | 2 | 4045,0 | 476 |
| P | 13217,0 | 2 | 6608,5 | 777 |
| Interakcije: | | | | |
| T × L | 475,2 | 4 | 118,8 | 14 |
| T × P | 1414,1 | 4 | 353,5 | 42 |
| L × P | 392,3 | 4 | 98,1 | 12 |
| Ostanek: | 68,1 | 8 | 8,5 | |
| Vsota | 46578,0 | 26 | | |

## RAČUNSKI PRIMER Z ORTOGONALNIMI POLINOMI

S pomočjo ortogonalnih polinomov lahko še nadalje razcepimo prispevke k vsoti kvadratov. Ker imamo le po tri nivoje posameznih faktorjev, bo najvišja druga stopnja polinoma pri glavnih efektih, oziroma četrta stopnja pri interakcijah.

Za praktično računanje je ugodno, če si izdelamo sledečo tabelo (Tabela IV):

V stolpcu z naslovom Linearna komponenta so navedene vrednosti števcev, izračunane po formulah za linearne regresijske koeficiente glavnih efektov. V stolpcu z naslovom Kvadratna komponenta pa so navedene vrednosti števcev, ki so izračunane po formulah za kvadratne regresijske koeficiente glavni efektov (formule od 1 do 6). Divizor, ki pripada vsakemu stolpcu, je imenovalec iz pripadajočih formul. Vsoto kvadratov določimo tako, da vsako komponento kvadriramo in delimo s pripadajočim divizorjem. Skupna vsota kvadratov se mora ujemati z vrednostjo iz tabele III.

Podobno naredimo tudi pri interakcijskih členih. V tabeli V so navedene vrednosti števcev in imenovalcev, ki so izračunane iz formul za regresijske koeficiente (formule od 7 do 18). Na povsem enak način kot za glavne efekte lahko izračunamo tudi prispevke k vsoti kvadratov za interakcijske efekte.

Končno pridemo do izboljšane forme za analizo variance (Tabela VI.), iz katere je razvidno tudi, kolikšen je prispevek posameznih komponent efektov. Ker pripada vsaka komponenta efekta eni prostostni stopnji, primerjamo izračunane vrednosti F le s tabelirano vrednostjo $F_{1,8}$, ki znaša pri $\alpha = 0{,}05$ 5,317, pri $\alpha = 0{,}01$ pa 11,259. Statistično pomembni efekti so označeni z zvezdico.

*Tabela IV.*

| Faktor | Linearna komponenta | Divizor | Kvadr. komp. | Divizor | Vsota kvadratov Lin. komp. | Vsota kvadratov Kvadr. komp. | Totalna vsota |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | 637 | 18 | 143 | 54 | 22542,7 | 378,7 | 22921,4 |
| L | 379 | 18 | 77 | 54 | 7980,1 | 109,8 | 8089,9 |
| P | 487 | 18 | 47 | 54 | 13176,1 | 40,9 | 13217,0 |

*Tabela V.*

| Interakcija AB | $L_A L_B$ | D | $Q_A L_B$ | D | $L_A Q_B$ | D | $Q_A Q_B$ | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| TL | 74 | 12 | —14 | 36 | 22 | 36 | 2 | 108 |
| TP | 129 | 12 | 25 | 36 | 19 | 36 | —1 | 108 |
| LP | 67 | 12 | 25 | 36 | —5 | 36 | 5 | 108 |

S črko L je označena linearna komponenta in-terakcije, s Q kvadratna, D pa predstavlja divizor.

*Prispevki k vsoti kvadratov:*

| Interakcija AB | $L_A L_B$ | $Q_A L_B$ | $L_A Q_B$ | $Q_A Q_B$ | Skupaj |
|---|---|---|---|---|---|
| TL | 456,3 | 5,4 | 13,4 | 0,0 | 475,1 |
| TP | 1386,8 | 17,4 | 10,0 | 0,0 | 1414,2 |
| LP | 374,1 | 17,4 | 0,7 | 0,0 | 392,2 |

*Tabela VI.*

| Vir variacij | | Vsota kvadratov efekta | Vsota kvadratov komponent | Prost. stop. | Povpreč. kvadrat | F-vredn. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Glavni efekti | | | | | | |
| T | linearni | 22542,7 | 22921,4 | 1 | | 2648,2* |
| | kvadratni | 378,7 | | 1 | | 444,9* |
| L | linearni | 7980,1 | 8089,9 | 1 | | 937,5* |
| | kvadratni | 109,8 | | 1 | | 12,9* |
| P | linearni | 13176,1 | 13217,0 | 1 | | 1547,9* |
| | kvadratni | 40,9 | | 1 | | 4,8 |
| Dvofaktorske interakcije | | | | | | |
| $L_L L_T$ | | 456,3 | 475,1 | 1 | | 53,6* |
| $L_L Q_T$ | | 5,4 | | 1 | | 0,6 |
| $Q_L L_T$ | | 13,4 | | 1 | | 1,6 |
| $Q_L Q_T$ | | 0,0 | | 1 | | 0,0 |
| $L_L L_P$ | | 374,1 | 392,2 | 1 | | 43,9* |
| $L_L Q_P$ | | 0,7 | | 1 | | 0,1 |
| $Q_L L_P$ | | 17,4 | | 1 | | 2,0 |
| $Q_L Q_P$ | | 0,0 | | 1 | | 0,0 |
| $L_P L_T$ | | 1386,8 | 1414,2 | 1 | | 162,9* |
| $L_P Q_T$ | | 17,4 | | 1 | | 2,0 |
| $Q_P L_T$ | | 10,0 | | 1 | | 1,2 |
| $Q_P Q_T$ | | 0,0 | | 1 | | 0,0 |
| Ostanek | | 68,1 | | 8 | 8,5 | |
| Skupaj | | 46577,9 | | 26 | | |

**REGRESIJSKA ENAČBA**

Koeficiente dobimo tako, da posamezne komponente v tabelah IV in V delimo s pripadajočimi divizorji. Seveda upoštevamo le tiste komponente, ki so se izkazale pomembne pri razčlenitvi vsote kvadratov. Regresijsko enačbo torej zapišemo v obliki:

$$\hat{Y}_{i,j,k} = 95{,}07 + 35{,}39\,\xi_{1i} + 2{,}65\,\xi_{2i} + 6{,}17\,\xi_{1i}\,\xi_{1j} + 27{,}06\,\xi_{1k} + 21{,}06\,\xi_{1j} + 1{,}43\,\xi_{2j} + 5{,}58\,\xi_{1j}\,\xi_{1k} + 10{,}75\,\xi_{1i}\,\xi_{1k}$$

Pri tem zavzamejo linearne komponente $\xi_1$ vrednosti $-1{,}0, +1$, kvadratne pa $1, -2, 1$. Indeksi i označujejo nivoje faktorja T, j nivoje faktorja L in k nivoje faktorja P.

Zelo ugodno je, če prikažemo to regresijsko enačbo z nomogramom (Slika 1).

Če si na primer izberemo temperaturo 600° C, debelino plasti 1,5 cm in pretok plina 37,8 l/h, lahko pričakujemo, da bo čas, potreben za totalno redukcijo, približno 87 minut.

Če pa potrebujemo enačbo zapisano tako, da v njej nastopajo prave vrednosti (temperatura T v °C, pretok L v l/h in debelina P v cm) in ne le ortogonalni polinomi, moramo v zgornji enačbi nadomestiti $\xi_1$ in $\xi_2$ s sledečimi izrazi:

$$\xi_{1i} = \frac{600^\circ\,C - T}{100^\circ\,C} \qquad \xi_{2i} = 3\,.\,\xi_{1i}^2 - 2$$

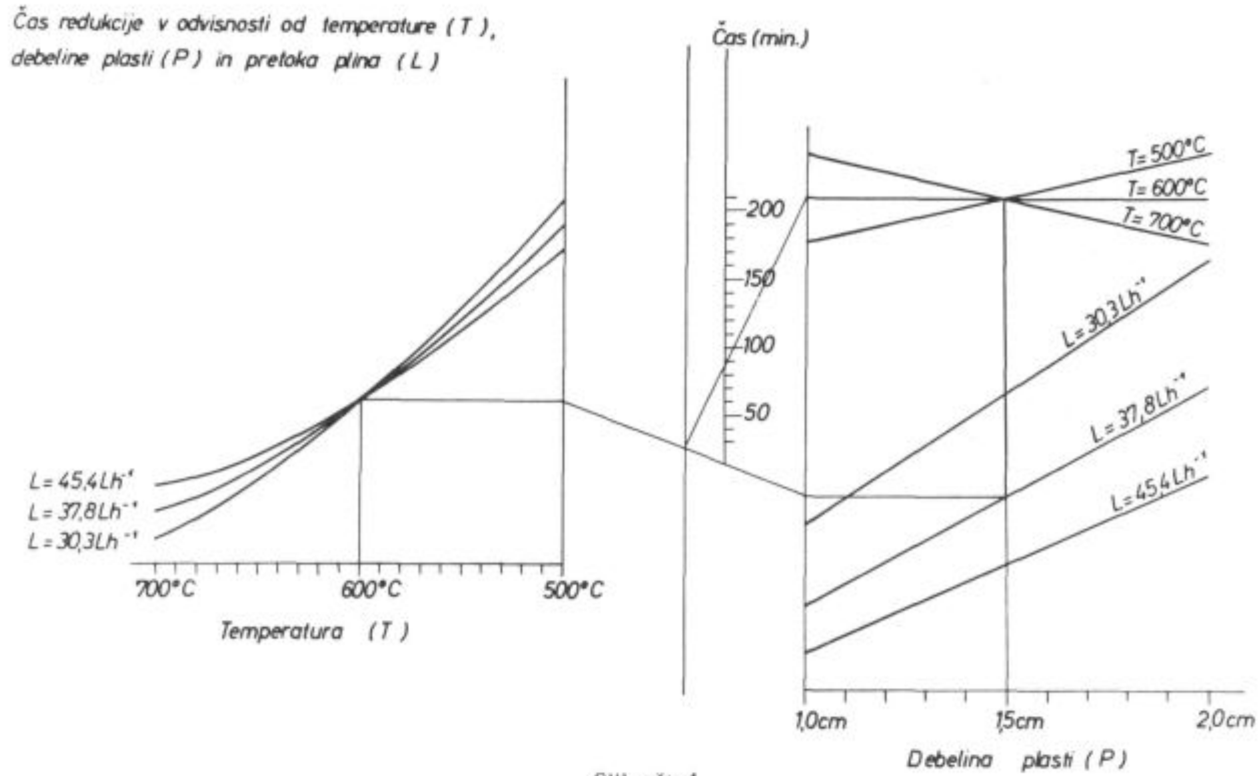
$$\xi_{1j} = \frac{37{,}8\ l/h - L}{7{,}5\ l/h} \qquad \xi_{2j} = 3\,.\,\xi_{1j}^2 - 2$$

$$\xi_{1k} = \frac{P - 1{,}5\ cm}{0{,}5\ cm} \qquad \xi_{2k} = 3\,.\,\xi_{1k}^2 - 2$$

**ZAKLJUČEK**

Pri raziskovalnem delu zelo pogosto iščemo odvisnost med eno odvisno in več neodvisnimi spremenljivkami. Če prav planiramo poskus, lahko na zelo učinkovit način z manjšim številom poskusov pridemo do odgovora na vprašanje, kateri faktor je statistično pomemben. Metoda ortogonalnih polinomov pa nam da še bolj koristno informacijo: pove nam, katera potenca polinoma je statistično pomembna. Regresijska enačba, ki je zapisana z ortogonalnimi polinomi, je primernejša za risanje nomograma.

V opisanem primeru smo zahtevali, da je med nivoji posameznih faktorjev konstantna razlika. To namreč olajšuje delo. Če nivoji niso enako odda-




Slika št. 1

ljeni med seboj, je potrebna primerna transformacija, kar pa delo močno zakomplicira. Za obdelavo podatkov faktorskega poskusa 3×3×3 smo na raziskovalnem oddelku jeseniške železarne izdelali tudi program za naš računalnik IBM/360.

Računski primer, ki je opisan v tem članku, naj bi koristil tudi tistim raziskovalcem, ki nimajo na razpolago modernega elektronskega računalnika, saj takšna obdelava ne traja tako dolgo.

Literatura

1. Rode Boštjan: Latinski kvadrat, Železarski zbornik št. 2, leto 1969, stran 141.
2. Rode B., J. Rodič: Statistično planiranje in vrednotenje metalurških raziskav, Železarski zbornik št. 2, leto 1968, str. 99.
3. Brudar Božidar: Preverjanje statističnih hipotez s pomočjo operacijskih karakteristik, Železarski zbornik št. 3, leto 1972, stran 175.
4. Brudar Božidar: Interpretacija diagramov, Železarski zbornik št. 1, leto 1973, stran 53.
5. Janez Zaveljcina: Diplomsko delo, FNT oddelek za montanistiko leto 1972.

## ZUSAMMENFASSUNG

Die Aufgabe zahlreicher Untersuchungen ist die Abhängigkeit zwischen der abhängigen Veränderliche und einer grösseren oder kleineren Zahl unabhängiger Veränderlichen zu finden. Üblicherweise helfen wir uns so, dass die Werte der unabhängigen Veränderlichen geändert und die Werte der abhängigen Veränderliche, die sich da herausstellen, gemessen werden.

Wie gross der Einfluss der einzelnen unabhängigen Veränderlichen ist zeigt uns schon die übliche Varianzenanalyse.

Die Methode der ortogonalen Polynome ermöglicht uns auch zu erfahren, um was für eine Abhängigkeit sich bei den einzelnen Faktoren handelt. Es kann festgestellt werden, ob die Abhängigkeit linear oder quadratisch ist bzw. wenn irgendeine höhere Potenz des Polynomen statistisch gesichert ist. Es ist günstig diese Faktoren so zu wählen, dass die Unterschiede zwischen einzelnen Werten (Stufen) der unabhängigen Veränderlichen konstant gehalten werden.

Die nötige Versuchszahl soll der möglichen Zahl der einzelnen Faktorenstufen gleich sein.

Im Artikel ist ein Beispiel für eine Analyse 3 × 3 × 3 angegeben, wo drei unabhängige Veränderliche in drei Stufen geändert worden sind. Wir erhielten dadurch 27 Daten. Danach war eine Regressionsgleichung zu finden, welche die Abhängigkeit zwischen der abhängigen und unabhängigen Veränderliche deuten sollte und in welcher alle Glieder statistisch gesichert sein sollten.

Die Anleitung für eine solche Bearbeitung ist beschrieben, wenn uns keine moderne Elektronnenrechenmaschinen zur Verfügung stehen.

## SUMMARY

In many fields of research the relationship between some dependent variable and some number of independent variables (factors) is to be found. The values of the independent variables are usually varied and the values of the dependent variable are measured. The importance of some specified independent variable can be found by the analysis of variance.

Using the method of orthogonal polynomials the type of this dependence can be found out. It can be namely decided which term in the polynomial expansion is sta-

tistically important. It is convenient to choose such values of the factor that the difference between two sequent values of the factor is constant. These values are called levels. The number of the necessary experimental values is equal to the number of the possible combinations with the levels of different factors.

In the article the example of an analysis $3 \times 3 \times 3$ is given where there are three independent variables varied in three levels. So we got 27 experimental data. Then we wished to find the regression equation describing the relation between the dependent variable and the independent variables so that only the statistically important terms would be taken into account.

Is it also described how such an analysis could be done in the case where modern computer is not available.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В разных областях исследований желаем определить зависимость между зависимой переменной и большим или малым числом независимых переменных (факторов). При этом пользуемся способом изменения величин независимых переменных и измеряем величину принятую зависимой переменной. Какое влияние имеют отдельные независимые переменные нам указывает обыкновенный вариационный анализ.

Метод ортогональных многочленов нам позволяет узнать также о какой зависимости суть, что касается отдельных факторов. Возможно также определить и дифференцировать линейную зависимость от квадратной зависимости; также случай если какая нибудь высшая степень полинома имеет статистическое значение. При этом нам содействует случай, если выбор факторов таков, что разницы между отдельными величинами (что касается уровня) независимых переменных представляют постоянную величину. Необходимо выполнить такое количество опытов, чтобы оно отвечало числу возможных комбинаций отдельных факторов уровня.

Рассмотрен пример для анализа $3 \times 3 \times 3$, т. е. случай при котором изменяли три независимые переменные в трёх уровнях. В результате получено 27 данных. Последовало определение уравнения регрессии, которое обьясняет зависимость между зависимой и независимыми переменнами. Это уравнение дольжно содержать также все члены полинома, которые имеют статистическое значение.

Данно указание, каким образом выполнить такую обработку данных в случае, если не имеем в распоряжении современный электронный счётчик.