IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

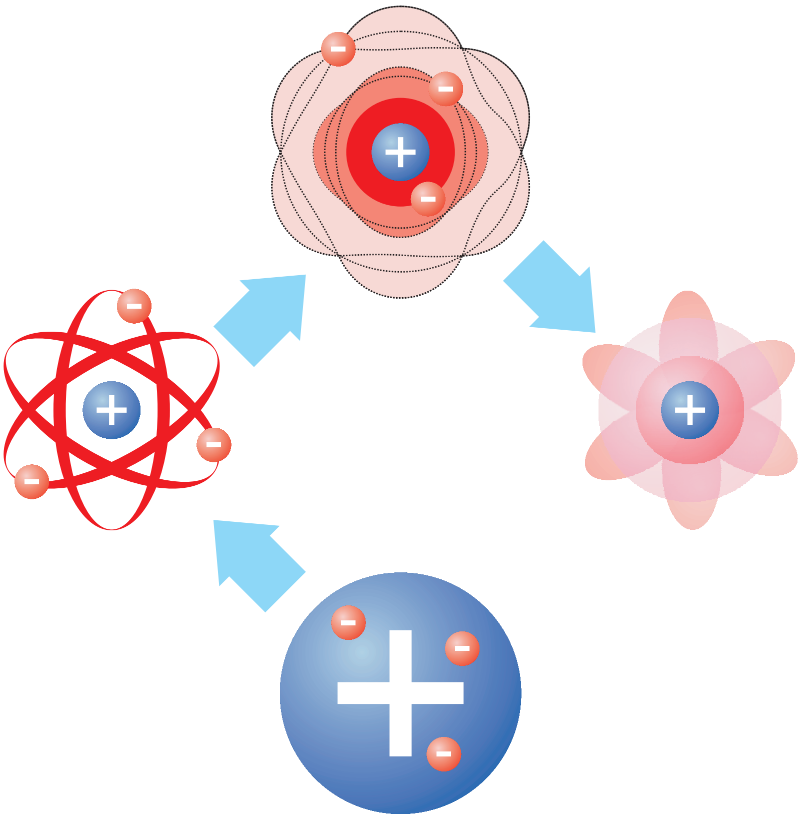
ISSN 0473-7466

2014

Letnik 61

1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 61 • ŠT. 1 • STR 1-40 • JANUAR 2014

C M Y K

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JANUAR 2014, letnik 61, številka 1, strani 1–40

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

 Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

ZNAČILNE TOČKE TRIKOTNIKA KOT FUNKCIJE

BOJAN HVALA

Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Univerza v Mariboru

Math. Subj. Class. (2010): 51M05; 51A20

Kimberlingova enciklopedija značilnih točk trikotnika vsebuje že več kot 5600 točk. V članku definiramo pojem značilne točke trikotnika, kot je to storil Kimberling, in spoznamo nekaj z njimi povezanih zanimivosti.

TRIANGLE CENTERS AS FUNCTIONS

Clark Kimberling's Encyclopedia of triangle centers contains well over 5600 centers. In the article we explain Kimberling's definition of a triangle center and present some related curiosities.

Uvod

Kimberlingovo Enciklopedijo značilnih točk trikotnika [4] uvaja naslednji zapis:

> Pred davnimi časi je nekdo narisal trikotnik in čezenj potegnil tri daljice. Vsaka od njih se je začela v oglišču trikotnika in se končala na sredi nasprotne stranice. Daljice so se sekale v skupni točki. Bil je navdušen in je ponovil poskus, tokrat na trikotniku drugačne oblike. Daljice so se spet sekale. Narisal je še tretji trikotnik, tokrat zelo natančno, z enakim rezultatom. Povedal je svojim prijateljem. Na njihovo presenečenje in navdušenje je do istega pojava prišlo tudi pri njih. Vest o tem se je razširila in čarobnost treh daljic so pripisali delovanju višjih sil. Stoletja so minila, in nekdo je *dokazal*, da se težiščnice v trikotniku res sekajo v točki, ki jo sedaj imenujemo *težišče*. Že v starem veku so našli še druge točke, ki jih danes imenujemo *središče včrtane krožnice*, *središče očrtane krožnice* in *višinska točka*. Spet so minila stoletja, odkrili smo nove in nove tovrstne točke, in pojavila se je definicija *značilne točke trikotnika*. Tako kot pri definiciji zvezne funkcije tudi tej definiciji zadošča neskončno mnogo objektov, od katerih jih bo le končno mnogo kadarkoli našlo svoje mesto v literaturi.

Tekst nas je od začetkov civilizacije v hitrem loku pripeljal do konca 20. stoletja in do glavne teme našega članka – definicije *značilne točke trikotnika*. Ker smo po tem loku zdrveli nekoliko prehitro, zapis osvetlimo s še nekaj dodatnimi informacijami.

Najstarejše starogrške značilne točke trikotnika imajo nekatere preproste geometrijske značilnosti. Središče očrtane krožnice O je enako oddaljeno od vseh treh oglišč trikotnika, središče včrtane krožnice I pa je enako oddaljeno od vseh treh stranic. Če težišče G povežemo z oglišči trikotnika, trikotnik razrežemo na tri ploščinsko enake dele. Najverjetneje je najstarejša značilna točka trikotnika, ki je stari Grki še niso poznali, tako imenovana *Fermatova točka* F_e (*Pierre de Fermat*, 1601–1665). Tudi ta ima lepo geometrijsko značilnost: njene zveznice z oglišči trikotnika razrežejo polni kot pri točki F_e na tri skladne kote po 120°.

Skoraj 2000 let po Evklidu je bila torej na seznam štirih značilnih točk trikotnika dodana peta točka. 18. stoletje sicer ni prineslo novih točk, je pa Euler ugotovil marsikako zanimivost, povezano z že obstoječimi – med drugim to, da tri od njih ležijo na premici, ki jo danes imenujemo *Eulerjeva premica*. Nove značilne točke trikotnika so se začele pojavljati spet v začetku 19. stoletja. Tako smo v naslednjih desetletjih dobili značilne točke trikotnika, ki so svoja imena dobile po matematikih, kot so *Joseph Diaz Gergonne* (1771–1859), *Jakob Steiner* (1796–1863), *Christian Heinrich von Nagel* (1803–1882), *Emile Lemoine* (1840–1912), *Frank Morley* (1860–1937) itd., pa tudi po nematematikih, kot je to v primeru *prve in druge Napoleonove točke*. Seznam se je z zmernim tempom večal nekako do leta 1980, ko je pojav programov za dinamično geometrijo rojevanje novih značilnih točk izrazito pospešil. V razmerah desetin in stotin novih značilnih točk trikotnika se je pojavila potreba po preciznejšem konceptu in sistematičnejšem pristopu. Zanj se moramo zahvaliti ameriškemu matematiku *Clarku Kimberlingu*.

Ta je pojem *značilne točke trikotnika* (v angleščini *triangle center*) definiral v članku [9] iz leta 1993 in nato idejo razvijal v članku [7]. Leta 1998 je izdal knjigo [8], kjer je pregledno predstavil seznam 400 značilnih točk trikotnika in jih zaporedoma označil z $X(n)$. Kasneje je seznam preselil na splet in nastala je Kimberlingova *Enciklopedija značilnih točk trikotnika* (ETC) [4], ki jo avtor ureja še danes. Število točk se veča (že zdavnaj je preseglo 5600), prav tako pa tudi količina z njimi povezanih podatkov. Spletna stran med drugim ponuja tudi učinkovit sistem, s katerim preverimo, ali je morda točka, na katero smo naleteli sami, že uvrščena na seznam. Ob enciklopediji je Clark Kimberling tudi avtor številnih drugih tehtnih publikacij o tej tematiki.

V tem sestavku bomo spoznali glavno idejo Kimberlingove definicije *značilne točke trikotnika kot funkcije* ter nekaj iz nje izhajajočih dejstev. Ob koncu bomo predstavljena spoznanja komentirali, razmišljanja pa začinili z nekaterimi iskrivimi premisleki ameriškega matematika Douglasa Hofstadterja iz uvoda v Kimberlingovo knjigo [8].

Nekaj tehnične predpriprave

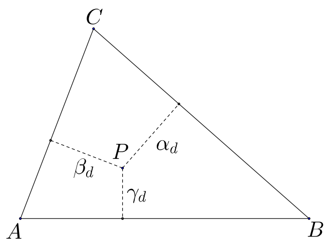
Naj bo vseskozi ABC pozitivno orientiran trikotnik. Dolžine njegovih stranic bomo kot običajno označevali z a, b, c, velikosti notranjih kotov z A, B, C, ploščino pa s S. V nadaljevanju bomo potrebovali trilinearne in baricentrične koordinate v ravnini glede na referenčni trikotnik ABC. Prve so bile v Obzorniku že predstavljene, in sicer v članku [10], druge pa so prvim precej podobne in zanje veljajo tudi podobni rezultati. Zato ponovimo le najnujnejše.

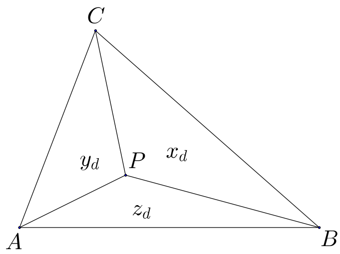
Pri danem trikotniku ABC poljubni točki P v ravnini priredimo trojico števil $\alpha_d, \beta_d, \gamma_d$, ki so predznačene razdalje točke P do nosilk stranic a, b in c. Natančneje: število α_d je enako razdalji točke P do nosilke stranice a s predznakom $+$, če točka leži na istem bregu te nosilke kot oglišče A, ter s predznakom $-$ sicer. Drugi dve števili sta definirani analogno. Trojici $(\alpha_d, \beta_d, \gamma_d)$ rečemo *dejanske trilinearne koordinate* točke P. Točka P natanko določa svoje dejanske trilinearne koordinate in obratno: trojica dejanskih trilinearnih koordinat natanko določa točko P. Pravzaprav je točka P določena že z dvema dejanskima koordinatama: če poznamo npr. α_d in β_d, točko P dobimo kot presečišče dveh vzporednic stranicama a in b na ustrezni razdalji in na ustreznem bregu. Zato je jasno, da dve dejanski trilinearni koordinati določata tretjo. Za točko P znotraj trikotnika ABC je ploščina trikotnika ABC enaka vsoti ploščin trikotnikov ABP, BCP in APC, od koder sledi:

$$a\alpha_d + b\beta_d + c\gamma_d = 2S. \tag{1}$$

Ni težko videti, da ta zveza velja tudi za točke zunaj trikotnika. Zdaj je jasno, kako dve dejanski koordinati določata tretjo. Ta ugotovitev nam omogoča, da lahko namesto z dejanskimi trilinearnimi koordinatami delamo z njihovimi večkratniki. Trojico (α, β, γ) imenujemo *homogene trilinearne koordinate* (ali kar *trilinearne koordinate*) točke P, če obstaja neničelno realno število k, da velja $(\alpha, \beta, \gamma) = k(\alpha_d, \beta_d, \gamma_d)$. Zaradi te definicije homogene trilinearne koordinate označujemo takole: $\alpha : \beta : \gamma$. Iz homogenih trilinearnih koordinat zlahka dobimo dejanske koordinate: te so homogene koordinate, deljene z nekim faktorjem k, ki ga izračunamo iz zveze (1).

Če točki P namesto trojice $(\alpha_d, \beta_d, \gamma_d)$ predznačenih razdalj do nosilk stranic priredimo trojico predznačenih ploščin trikotnikov $((BCP), (CAP), (ABP))$, dobimo *dejanske baricentrične koordinate* točke P, ki jih običajno označujemo (x_d, y_d, z_d). Zveza z dejanskimi trilinearnimi koordinatami je preprosta: $x_d = \frac{1}{2}a\alpha_d$, podobno za preostali koordinati. Enakost (1) tokrat nadomesti še preprostejša zveza $x_d + y_d + z_d = S$. Analogno potem definiramo tudi *(homogene) baricentrične koordinate* $x : y : z$. Omenimo





Slika 1. Trilinearne in baricentrične koordinate.

še, da iz zveze (1) sledi, da za trilinearne koordinate točk v ravnini velja $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$, analogno za baricentrične koordinate $x + y + z \neq 0$.

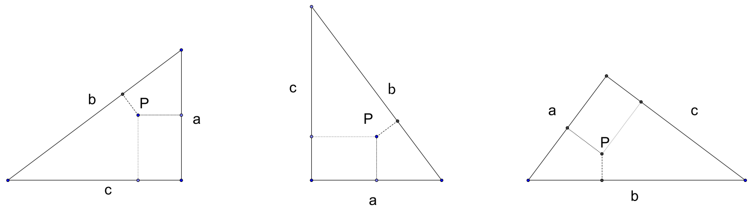
Dilema, ali uporabljati trilinearne ali baricentrične koordinate, je ena od vsakokratnih odločitev pri delu na tem področju matematike. Včasih so bistveno ugodnejše ene, drugič spet druge. Tokratna odločitev je kombinacija obeh. Nekatere sklepe je namreč laže izpeljati, če razmišljamo o razdaljah in ne o ploščinah; zato bomo v začetku uporabljali trilinearne koordinate. Baricentrične koordinate pa tudi imajo svoje prednosti. Ena največjih je preprosto delo z vektorji. Če so namreč $x : y : z$ baricentrične koordinate točke P in so $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{P}$ radij vektorji točk A, B, C in P, potem velja: $\vec{P} = \frac{x}{x+y+z}\,\vec{A} + \frac{y}{x+y+z}\,\vec{B} + \frac{z}{x+y+z}\,\vec{C}$. Od tod je jasno, da je pri delu z vektorji ugodno, če pri računih uporabljamo normirane baricentrične koordinate, torej take, za katere velja $x + y + z = 1$.

Pojem značilne točke trikotnika

Značilna točka trikotnika je predpis, ki vsakemu trikotniku Δ priredi točko P_Δ v ravnini. Točka P_Δ je seveda odvisna od lege trikotnika Δ, zato njeno lego najlaže opišemo z dejanskimi trilinearnimi koordinatami te točke glede na trikotnik Δ, torej $P_\Delta = (\alpha_P, \beta_P, \gamma_P)$. S trojico (a, b, c) dolžin stranic trikotnika Δ je oblika trikotnika določena. Ker je smiselno predpostaviti, da je relativna lega točke P_Δ glede na trikotnik Δ odvisna le od oblike trikotnika, ne pa od njegove lege, lahko dejanske trilinearne koordinate točke P_Δ zapišemo v obliki $(f_d(a, b, c), g_d(a, b, c), h_d(a, b, c))$. Iz tega vidimo, da lahko značilno točko trikotnika razumemo kot preslikavo

$$(a, b, c) \mapsto (f_d(a, b, c), g_d(a, b, c), h_d(a, b, c)),$$

ki trojici dolžin stranic trikotnika priredi dejanske (zato indeks d) trilinearne koordinate prirejene točke.



Slika 2. Ciklična zamenjava stranic.

Funkcije f_d, g_d in h_d so funkcije treh spremenljivk. Natančneje, njihovo definicijsko območje je množica trojic (a, b, c), ki so stranice trikotnika, torej:

$$T = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3;\ 0 < a < b + c,\ 0 < b < a + c,\ 0 < c < a + b\}.$$

Za nekatere značilne točke trikotnika je to definicijsko območje preveliko. Take so denimo značilne točke trikotnika, ki niso definirane, kadar je trikotnik enakostraničen. Zanje definicijsko območje pač ustrezno zmanjšamo.

V nadaljevanju bomo spoznali naravne zahteve, ki jim morajo zadoščati nastopajoče funkcije, da bo predpis $(a, b, c) \mapsto (f_d(a, b, c), g_d(a, b, c), h_d(a, b, c))$ res prinašal to, kar od pojma *značilna točka trikotnika* pričakujemo.

Prva zahteva je, da predpis spoštuje ciklično zamenjavo stranic. Če smo trikotniku s trojico dolžin stranic (a, b, c) priredili točko $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, bomo (skladnemu) trikotniku s trojico (b, c, a) priredili točko $(\beta_0, \gamma_0, \alpha_0)$ (slika 2), trikotniku s trojico (c, a, b) pa točko $(\gamma_0, \alpha_0, \beta_0)$. Izhajali smo iz pričakovanja, da se morajo tedaj, ko srednji in desni trikotnik na sliki 2 izrežemo in ga položimo na levega, tudi prirejene točke prekriti. Iz te zahteve izhaja, da je $g_d(a, b, c) = f_d(b, c, a)$ in $h_d(a, b, c) = f_d(c, a, b)$. Značilno točko trikotnika torej določa ena sama funkcija f_d treh spremenljivk.

Druga zahteva se nanaša na zamenjavo dveh stranic $(a, b, c) \mapsto (a, c, b)$. Ustrezna trikotnika sta tudi tokrat skladna. Zato lahko enega od njiju izrežemo, dvignemo in položimo na drugega. Zahteva, da se morata prirejeni točki tudi zdaj prekriti, tokrat pomeni, da se morata v trojicah $(f_d(a, b, c), f_d(b, c, a), f_d(c, a, b))$ in $(f_d(a, c, b), f_d(c, b, a), f_d(b, a, c))$ prvi komponenti ujemati, preostali dve pa se morata zamenjati. Zlahka vidimo, da je potreben in zadosten pogoj za to lastnost $f_d(a, b, c) = f_d(a, c, b)$ za vse $(a, b, c) \in T$.

Tretja zahteva pa se nanaša na raztege ravnine. Naravno je zahtevati, da bodo v trikotniku $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$, ki ga iz trikotnika (a, b, c) dobimo z raztegom s koeficientom λ, tudi dejanske trilinearne koordinate značilne točke pomnožene z istim koeficientom. Od tod dobimo zahtevo $f_d(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = \lambda f_d(a, b, c)$. Funkcija f_d je torej homogena stopnje 1.

To je vse: značilna točka trikotnika je torej preslikava

$$(a, b, c) \mapsto (f_d(a, b, c), f_d(b, c, a), f_d(c, a, b)),$$

ki trikotniku Δ z dolžinami stranic a, b, c priredi točko P_Δ z dejanskimi trilinearnimi koordinatami $(f_d(a, b, c), f_d(b, c, a), f_d(c, a, b))$, pri čemer je f_d homogena funkcija stopnje 1 z lastnostjo $f_d(a, b, c) = f_d(a, c, b)$ za vse $(a, b, c) \in T$.

Iz določenih praktičnih razlogov pa bomo namesto s funkcijo f_d v nadaljevanju raje delali z neko drugo, z njo tesno povezano funkcijo F. Ker so $(f_d(a, b, c), f_d(b, c, a), f_d(c, a, b))$ dejanske trilinearne koordinate neke točke v ravnini, velja:

$$af_d(a, b, c) + bf_d(b, c, a) + cf_d(c, a, b) = 2S.$$

Definirajmo

$$F(a, b, c) = \frac{af_d(a, b, c)}{2S}.$$

Zanjo velja:

(i) je homogena funkcija stopnje 0;

(ii) $F(a, b, c) + F(b, c, a) + F(c, a, b) = 1$ za vse $(a, b, c) \in T$ in

(iii) $F(a, b, c) = F(a, c, b)$ za vse $(a, b, c) \in T$.

Če je bila $f_d(a, b, c)$ prva od dejanskih trilinearnih koordinat prirejene točke, je $\frac{af_d(a,b,c)}{2}$ prva od dejanskih baricentričnih koordinat, $F(a, b, c)$ pa (zaradi (ii)) prva od normiranih baricentričnih koordinat.

Vsaka funkcija F, ki zadošča zahtevam (i)–(iii), določa preslikavo trikotnika (a, b, c) v točko z normiranimi baricentričnimi koordinatami $F(a, b, c) : F(b, c, a) : F(c, a, b)$. Ta ustreza zgoraj predstavljenim zahtevam in je zato *značilna točka trikotnika*. Funkciji F bomo rekli *trikotniška funkcija* ustrezne značilne točke.

Značilne točke trikotnika so torej preslikave, ki slikajo trikotnike v točke ravnine in jih definiramo prek *trikotniških funkcij*, tj. funkcij treh spremenljivk, ki zadoščajo zahtevam (i), (ii) in (iii).

Posebej preprosto lahko trikotniško funkcijo $F(a,b,c)$ definiramo takole. Naj bo $p(a,b,c)$ homogeni polinom stopnje n z lastnostjo $p(a,b,c) = p(a,c,b)$ za vse $a,b,c \in \mathbb{R}$. Če $p(a,b,c)+p(b,c,a)+p(c,a,b)$ ni ničelni polinom, lahko definiramo

$$F(a,b,c) = \frac{p(a,b,c)}{p(a,b,c)+p(b,c,a)+p(c,a,b)}.$$

To je trikotniška funkcija, saj zadošča zahtevam (i)–(iii). Ker je definirana s pomočjo polinoma, značilni točki trikotnika, ki pripada tovrstni trikotniški funkciji, rečemo *polinomska značilna točka trikotnika*. Omenimo, da je imenovalec tovrstne trikotniške funkcije simetričen polinom treh spremenljivk. Če ima ta za kako trojico $(a,b,c) \in T$ ničelno vrednost, funkcija F ni definirana na celi množici T, kar v praksi pomeni, da za nekatere trikotnike ustrezna polinomska značilna točka trikotnika ne obstaja.

Nekatere znane značilne točke

Oglejmo si najprej štiri klasične antične značilne točke trikotnika, ki so tudi v Kimberlingovi enciklopediji umeščene čisto na začetek.

Središče včrtane krožnice I nosi Kimberlingovo oznako $X(1)$. Dejanske trilinearne koordinate te točke so (r,r,r), kjer je r radij trikotniku včrtane krožnice. Zato je $f_d(a,b,c) = r$, trikotniška funkcija pa $F(a,b,c) = \frac{ar}{2S} = \frac{a}{a+b+c}$. V zadnji enakosti smo upoštevali, da je $S = rs$, kjer je s polovica obsega trikotnika. Središče včrtanega kroga je torej polinomska značilna točka trikotnika, pripadajoča polinomu $p(a,b,c) = a$.

Nadaljujmo s težiščem G trikotnika s Kimberlingovo oznako $X(2)$. Ker daljice AG, BG, CG razrežejo trikotnik na tri ploščinsko enake dele, za dejanske trilinearne koordinate $(\alpha_G, \beta_G, \gamma_G)$ točke G velja $\frac{a\alpha_G}{2} = \frac{b\beta_G}{2} = \frac{c\gamma_G}{2} = \frac{S}{3}$. Od tod dobimo $f_d(a,b,c) = \frac{2S}{3a}$ in $F(a,b,c) = \frac{1}{3}$. Tudi tokrat imamo polinomsko značilno točko trikotnika s pripadajočim polinomom $p(a,b,c) = 1$.

Središče trikotniku očrtane krožnice O ima Kimberlingovo oznako $X(3)$. Radij krožnice označimo z R. Če upoštevamo zvezo med središčnim in obodnim kotom, zlahka izračunamo dejanske trilinearne koordinate točke O, ki so $(R\cos A, R\cos B, R\cos C)$. Vrednost R dobimo iz znane zveze $S = \frac{abc}{4R}$, $\cos A$ pa izrazimo iz kosinusnega izreka. Tako dobimo $f_d(a,b,c) = \frac{a(b^2+c^2-a^2)}{8S}$ in

$$F(a,b,c) = \frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{16S^2} = \frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

Tudi tokrat gre za polinomsko značilno točko trikotnika, definirano s polinomom $p(a,b,c) = a^2(b^2+c^2-a^2)$. Ob tem je treba preveriti še, ali je zapisani imenovalec enak $p(a,b,c)+p(b,c,a)+p(c,a,b)$. Funkcijo F smo definirali s pomočjo dejanskih trilinearnih koordinat in s tem zagotovili, da zadošča lastnosti (ii). Ker je imenovalec vseh treh členov v tej enakosti enak, vsoto lahko damo na skupni imenovalec, in enakost takoj sledi. To se zgodi pri vsaki racionalni funkciji F z lastnostjo (ii), katere imenovalec je simetričen polinom danih treh spremenljivk.

Podobno bi ugotovili, da je tudi višinska točka $H = X(4)$ polinomska značilna točka trikotnika s pripadajočim polinomom $p(a,b,c) = (a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)$.

Če je bila preprostost polinomov pri točkah $X(1)$ in $X(2)$ v skladu z našimi pričakovanji, bi pri točkah $X(3)$ in $X(4)$ morda pričakovali preprostejše polinome. V tem kontekstu naj omenimo debato o *najpomembnejših značilnih točkah trikotnika*, h kateri se bomo vrnili v zadnjem razdelku. V tovrstnem tehtanju nekateri matematiki točkama H in O »zamerijo«, da v topokotnih trikotnikih zapustita trikotnik. Glede na to pomanjkljivost torej niti nista tako zelo »lepi«. V tej luči tudi niso presenetljivi faktorji oblike $(b^2+c^2-a^2)$, ki nastopajo v njunih polinomskih funkcijah.

Omenimo še, da so v dodatku članka [2] predstavljene polinomske funkcije vseh polinomskih značilnih točk trikotnika $X(n)$ za vrednosti $n \leq 100$. Takih je kar 92. Kratek izbor iz tega seznama je predstavljen v tabeli 1.

Morda bi bilo zanimivo spoznati še kako značilno točko trikotnika, ki ni polinomska. Taka je npr. Fermatova točka $X(13)$. Na podlagi zgornjega računa za točko $X(3)$ je mogoče zaslutiti, kaj se lahko zgodi. Če namreč v računu nastopi ploščina S na sodo potenco, je ob upoštevanju Heronovega obrazca to polinom spremenljivk a,b,c. Če pa bi ploščina S nastopila z liho potenco, to ne bi bil več polinom. Točno to se zgodi Fermatovi točki, ki ima trikotniško funkcijo s števcem $a^4 + a^2(b^2+c^2+4\sqrt{3}S) - 2(b^2-c^2)^2$.

Polinomske značilne točke s polinomi prve in druge stopnje

Začnimo s homogenim polinomom prve stopnje. Če naj zadošča lastnosti $p(a,b,c) = p(a,c,b)$, mora biti oblike $p_{u,v}(a,b,c) = ua + v(b+c)$ za neka realna parametra u in v. Trikotniška funkcija je torej oblike $F_{u,v}(a,b,c) = \frac{ua+v(b+c)}{(u+2v)(a+b+c)}$. Označimo $t = \frac{v}{u+2v}$ in dobimo družino trikotniških funkcij $F_t(a,b,c) = \frac{(1-2t)a+t(b+c)}{a+b+c} = \frac{(1-3t)a+t(a+b+c)}{a+b+c}$. Takoj opazimo, da gre pri $t=0$ za središče včrtanega kroga I in pri $t=\frac{1}{3}$ za težišče G.

V drugem razdelku smo omenili, da je prednost dela z baricentričnimi koordinatami možnost prehoda na delo z vektorji: če z $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ označimo

X_n		ime	$p(a,b,c)$
X_1	I	središče včrtane krožnice	a
X_2	G	težišče	1
X_3	O	središče očrtane krožnice	$a^2(b^2+c^2-a^2)$
X_4	H	višinska točka	$(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)$
X_5	O_9	središče krožnice K_9	$a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2$
X_6	K	Lemoineova točka	a^2
X_7	G_e	Gergonnova točka	$(a+b-c)(a-b+c)$
X_8	N_a	Nagelova točka	$b+c-a$
X_9	M	Mittenpunkt	$a(b+c-a)$
X_{10}	S_p	Spiekerjeva točka	$b+c$
X_{11}		Feuerbachova točka	$(b-c)^2(b+c-a)$
X_{20}		de Longchampsova točka	$3a^4-2a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2$
X_{21}		Schifflerjeva točka	$a(a+b)(a+c)(b+c-a)$
X_{23}		točka daleč zunaj	$a^2(-a^4+b^4+c^4-b^2c^2)$
X_{39}		Brocardovo razpolovišče	$a^2(b^2+c^2)$
X_{115}		središče Kiepertove hiperbole	$(b^2-c^2)^2$

Tabela 1. Izbor polinomskih značilnih točk trikotnika.

radij vektorje do oglišč trikotnika in so $x:y:z$ normirane baricentrične koordinate točke T, potem je radij vektor točke T preprosto $\vec{T}=x\vec{A}+y\vec{B}+z\vec{C}$. Naj bo T_t značilna točka trikotnika, pripadajoča trikotniški funkciji F_t. Ker so $F_t(a,b,c):F_t(b,c,a):F_t(c,a,b)$ normirane baricentrične koordinate, je radij vektor te točke

$$\begin{aligned}\vec{T}_t &= F_t(a,b,c)\vec{A}+F_t(b,c,a)\vec{B}+F_t(c,a,b)\vec{C}\\ &= (1-3t)\left(\frac{a}{a+b+c}\vec{A}+\frac{b}{a+b+c}\vec{B}+\frac{c}{a+b+c}\vec{C}\right)+\\ &\qquad +3t\left(\frac{1}{3}\vec{A}+\frac{1}{3}\vec{B}+\frac{1}{3}\vec{C}\right)\\ &= (1-3t)\vec{I}+3t\vec{G}=\vec{I}+3t(\vec{G}-\vec{I}).\end{aligned}$$

Točke $T_t,\ t\in\mathbb{R}$, torej ležijo na premici skozi točki G in I, ki ji rečemo tudi *Nagelova premica*, saj na njej leži Nagelova točka $X(8)=T_1$.

Če trikotnik ni enakostraničen ($G\neq I$), polinomske značilne točke s polinomskimi funkcijami prve stopnje tvorijo Nagelovo premico. Ta seka Eulerjevo premico trikotnika ABC v težišču G. Če ima še kaka točka z Eulerjeve premice polinomsko funkcijo prve stopnje, Nagelova in Eulerjeva premica sovpadata. Tedaj točka I leži na Eulerjevi premici, torej je trikotnik enakokrak. Tako vidimo, da v raznostraničnem trikotniku z izjemo težišča G nobena značilna točka z Eulerjeve premice ni polinomska točka s polinomsko funkcijo prve stopnje.

Posvetimo se zdaj homogenim polinomom druge stopnje. Če naj tak polinom zadošča dodatni zahtevi $p(a,b,c) = p(a,c,b)$, je oblike $p(a,b,c) = sa^2 + t(b^2+c^2) + ubc + va(b+c)$. Ustrezna trikotniška funkcija je tedaj:

$$F(a,b,c) = \frac{sa^2 + t(b^2+c^2) + ubc + va(b+c)}{(s+2t)(a^2+b^2+c^2) + (u+2v)(ab+ac+bc)}.$$

Gre za štiriparametrično družino. Naš nadaljnji načrt je naslednji: fiksirajmo parametra v imenovalcu, recimo $s+2t = 1, u+2v = 2$ in s tem namesto štiriparametrične družine dobimo dvoparametrično družino značilnih točk trikotnika. V konkretno navedenem primeru je to

$$F_{t,v}(a,b,c) = \frac{(1-2t)a^2 + t(b^2+c^2) + va(b+c) + 2(1-v)bc}{(a+b+c)^2}.$$

Naj bo (a,b,c) poljuben raznostranični trikotnik in P poljubna točka v ravnini z normiranimi baricentričnimi koordinatami $x : y : z$. Premislimo, ali je točka P lahko značilna točka trikotnika (a,b,c), določena z eno od funkcij iz zgornje dvoparametrične družine. To je res, če je rešljiv sistem enačb:

$$F_{t,v}(a,b,c) = x, \qquad F_{t,v}(b,c,a) = y, \qquad F_{t,v}(c,a,b) = z.$$

Ker velja $x+y+z = 1$ in je tudi vsota levih strani enačb enaka 1, zadoščata prvi dve enačbi. Če sta izpolnjeni ti, je tretja izpolnjena avtomatično. Upoštevajmo definicijo funkcije $F_{t,v}$ in dobimo sistem dveh linearnih enačb za spremenljivki t in v:

$$\begin{aligned} t(b^2+c^2-2a^2) + v(ab+ac-2bc) &= x(a+b+c)^2 - a^2 - 2bc \\ t(c^2+a^2-2b^2) + v(bc+ba-2ca) &= y(a+b+c)^2 - b^2 - 2ca \end{aligned}$$

z determinanto

$$\begin{aligned} (b^2+c^2-2a^2)(bc+ba-2ca) - (ab+ac-2bc)(c^2+a^2-2b^2) &= \\ = -3(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c). \end{aligned}$$

Ker determinanta ni enaka nič, je sistem enolično rešljiv.

Pri fiksnem raznostraničnem trikotniku torej že samo slike značilnih točk iz naše dvoparametrične družine pokrijejo celotno ravnino. Vsaka točka v ravnini je torej »značilna točka« tega trikotnika glede na eno od funkcij iz te dvoparametrične družine. To pa seveda ni edina dvoparametrična družina polinomov druge stopnje, ki jo lahko sestavimo. Spomnimo se, da smo začeli s štiriparametrično družino in potem dva koeficienta v imenovalcu preprosto določili. Če bi ju določili drugače, bi dobili novo dvoparametrično družino, katere slike pri fiksnem trikotniku bi spet pokrile celo ravnino. Tovrstnih disjunktnih družin polinomov druge stopnje pa imamo ogromno. Pri izbranem raznostraničnem trikotniku in izbrani točki v ravnini že samo med polinomskimi značilnimi točkami trikotnika s polinomom stopnje 2 najdemo neskončno takih, ki konkretni trikotnik preslikajo v izbrano točko. Da o polinomih višjih stopenj sploh ne govorimo.

Na podlagi teh ugotovitev nehote dobimo občutek, da je definicija značilne točke trikotnika zelo široka, morda preširoka. Pojavi se občutek, da bi predstavljenim pogojem, ki jim mora zadoščati značilni točki trikotnika pripadajoča trikotniška funkcija, lahko dodali še kak pogoj, pa bi mu še vedno zadoščala glavnina točk iz Kimberlingove enciklopedije.

V korespondenci s Clarkom Kimberlingom sem preveril, ali morda pozna kak tovrsten poskus, ki bi bil splošneje sprejet. Zdi se, da tvorec definicije značilne točke trikotnika potrebe po bolj restriktivni definiciji ne čuti. Mnenja je, da gre pač za družino funkcij in se torej ni treba preveč ozirati na množico slik enega elementa definicijskega območja, torej enega trikotnika, z vsemi funkcijami iz družine. Podobno, kot se pri realnih funkcijah ni smiselno ustavljati pri fiksnem realnem številu (recimo $\frac{\pi}{4}$) in negodovati nad tem, da ga npr. več trigonometričnih funkcij preslika enako in da množica slik te točke s funkcijami iz družine vseh trigonometričnih funkcij tvori celotno realno os.

A videti je, da vsi matematiki niso povsem njegovega mnenja in je razmišljanje o dodatnih pogojih in alternativnih definicijah v zraku. Tako je npr. japonski matematik Yoshio Agaoka v članku [2] predstavil pojem *stopnje polinomske značilne točke trikotnika* in ugotovil, da je ta za veliko večino začetnih značilnih točk trikotnika iz Kimberlingove enciklopedije racionalno število iz množice $\{(-2)^k,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\infty\}$. Pri tem imajo stopnjo ∞ tiste polinomske značilne točke trikotnika, ki za enakostranični trikotnik niso definirane. Dejansko mi je doslej znana ena sama polinomska značilna točka trikotnika, katere stopnja ne leži v zgornji množici, to je $X(944)$ s stopnjo -20. Vsekakor iz dodatka k omenjenemu članku izhaja, da imajo stopnjo v tej množici prav vse polinomske točke $X(n)$ za $n \leq 100$.

Morda obstaja kak geometrijski argument, da bi definirana stopnja morala ležati prav v tej množici in bi to dejstvo kot pogoj vgradili v izpopolnjeno verzijo definicije značilne točke trikotnika. Tovrstni dodatni pogoj bi morda izločil kako značilno točko iz Kimberlingovega seznama, bi pa pomenil želeno zožitev presplošne definicije.

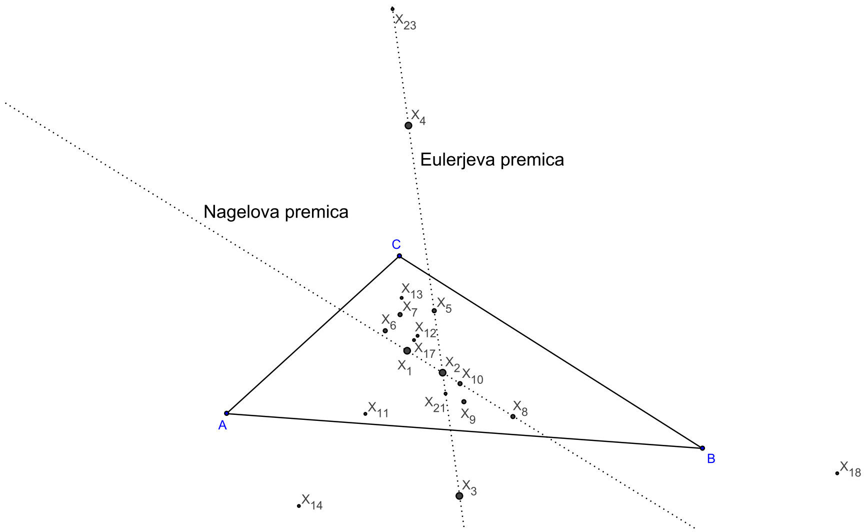
Idejo za kako alternativno in bolj restriktivno definicijo značilne točke trikotnika bi lahko iskali v teoriji množic, kjer so znani paradoksi nakazali potrebo po skrbnejšem pristopu k izgradnji množic. Tako bi tudi v našem primeru množico značilnih točk trikotnika lahko gradili postopoma, induktivno, pri čemer bi začeli npr. z dvema točkama (npr. G in I), nadaljnje pa iz predhodnih induktivno pridobivali na podlagi v ta namen izbranih postopkov. Agaoka [2] predlaga dva postopka: transformacijo ravnine (ki značilni točki priredi novo značilno točko) in dvomestno operacijo, ki novo značilno točko priredi paru (P, Q) značilnih točk. Konkretno gre za izogonalno transformacijo (definirano v [10]) in za $P-$Cevovo transformacijo točke Q. Agaoka je idejo poskusil povezati s prej omenjeno teorijo stopenj polinomskih značilnih točk. Delo je nadaljeval v članku [3], a kljub obsežnosti narejenega zlahka opazimo, da je teorija še precej v povojih: hipotez je veliko, končnih odgovorov pa malo. Z zanimanjem lahko pričakujemo nadaljnji razvoj dogodkov.

Sklepni komentar

O značilnih točkah trikotnika je v uvodu h Kimberlingovi knjigi [8] zanimivo razmišljanje predstavil tudi slavni ameriški znanstvenik Douglas R. Hofstadter. Ta je javnosti najbolj znan kot pisec odmevne in nagrajevane knjige *Gödel, Escher, Bach* [5], v kateri raziskuje skupne značilnosti – predvsem sorodne miselne zanke – v delih treh velikih ustvarjalcev: matematika, slikarja in glasbenika. Hofstadter je po osnovni izobrazbi matematik (mimogrede, po njem so poimenovane tri značilne točke trikotnika, $X(359), X(360)$ in že omenjena $X(944)$). Poleg matematike in fizike se ukvarja tudi z ozadji človeškega uma, torej s problemi inteligence, jaza, umetne inteligence, zavesti, analogij, vzorcev itd., skratka z vprašanji, ki sodijo v multidisciplinarno področje, imenovano *kognitivna znanost*. V slovenskem prevodu imamo knjigo [6], katere sourednik in soavtor je in v kateri so izpod peres različnih avtorjev predstavljeni nekateri vidiki naštetih tematik.

Vrnimo se k značilnim točkam trikotnika in nekaterim Hofstadterjevim razmišljanjem na to temo.

Rdeča nit njegovega razmišljanja je (na prvi pogled morda naivno) vprašanje: *Katera je najpomembnejša značilna točka trikotnika?* Odgovora na to vprašanje avtor ne poda, zato pa predstavi tri zanimive vzporednice. Prva je sorodno vprašanje o najpomembnejših človeških organih in o organih, ki so najtesneje povezani z našim jazom. Tu po avtorjevem mnenju lahko rečemo vsaj to, da v ožji izbor ne morejo priti organi, brez katerih lahko preživimo, recimo lasje, uhlji ali prsti. Tako tudi v trikotniku prvenstva ne moremo zlahka podeliti, lahko pa določene značilne točke iz natečaja



Slika 3. Značilne točke trikotnika (zaradi preglednosti so namesto z $X(n)$ označene z X_n).

izločimo. Razlog za to bi po avtorjevem mnenju lahko bil že ta, da v kakem trikotniku značilna točka ni znotraj trikotnika.

Druga vzporednica je uteženi volilni sistem. Hofstadter najprej s presenečenjem opazi, da je vsaj pri začetnih značilnih točkah trikotnika iz Kimberlingovega seznama mnogo točk kolinearnih. Če bi vzeli 100 točk v splošni legi, bi te določale 4950 različnih premic. Če vzamemo prvih 100 točk s Kimberlingovega seznama, te določajo le kakih 100 tako imenovanih *centralnih premic*. Od tod ideja, da bi pomembnost točke sodili po tem, na koliko pomembnih centralnih premicah se ta nahaja. Seveda pa se tu ujamemo v zanko: pomembne centralne premice so najbrž tiste, ki vsebujejo pomembne značilne točke trikotnika. In smo pri uteženem volilnem sistemu: ko glasujemo o neki temi, bi bilo treba glasove utežiti glede na to, kolikšna avtoriteta je vprašani na določenem področju. Da pa bi to avtoriteto izmerili, bi bilo treba povpraševati ljudi s tega področja, pri čemer bi kompetentnejši vprašanci spet morali imeti večjo težo ...

Tretjič pa Hofstadter ob debati o najpomembnejši značilni točki trikotnika potegne vzporednico s problemom izbora najpomembnejše matematične konstante. Ob tem opazi, da se je v zgodovini naše civilizacije vsaj eden resnih kandidatov za prvenstvo, število e, pojavilo sorazmerno pozno, šele v času Eulerja. Zato dopušča možnost, da so sedanji kandidati za najpomembnejšo značilno točko trikotnika, ne glede na obsežnost Kimberlingove enciklopedije, šele na nivoju očitnih konstant 1 in 0 in bomo morebiti točki na nivoju konstant π in e šele odkrili. Tovrstno upanje pomeni tudi veliko vzpodbudo za nadaljnje raziskovanje.

Končajmo s še eno analogijo, o kateri v predgovoru govori tudi Hofstadter, a je nanjo pred tem opozoril že Kimberling. Gre za primerjavo raziskovanja značilnih točk trikotnika in opazovanja zvezd. Grki so poznali štiri značilne točke trikotnika, podobno kot prosto oko na večernem nebu opazi le najsvetlejše zvezde. Temnejša je noč in bolje kot se pripravimo k opazovanju, več zvezd, tudi manj svetlih, utegnemo opaziti. Včasih se lahko zgodi, da se – gledano iz nekega položaja – dve zvezdi prekrivata. Tudi pri značilnih točkah trikotnika se to pri kakem posebnem trikotniku lahko zgodi. Če pa se iz tega položaja le malo premaknemo (če trikotnik le malo spremenimo), se izkaže, da sta zvezdi dejansko dve (da se značilni točki trikotnika ne prekrivata več). Pogled na zvezdno nebo se tako od točke do točke v vesolju spreminja, nekatere konstelacije pa vendarle ostajajo nespremenjene. Podobno konstelacije značilnih točk trikotnika pri različnih oblikah trikotnikov ohranjajo nekatere osnovne značilnosti.

Tudi v smislu te primerjave ugotovitev iz prejšnjega razdelka nismo preveč veseli. Preneseno na zvezde bi ta spoznanja pomenila, da na nočnem nebu ob pozornejšem opazovanju ni samo več in več zvezd, pač pa, da dejansko sveti čisto vsaka točka na nebu. Zgoraj omenjena potreba po zožitvi definicije značilne točke trikotnika tako dobi še dodaten argument.

LITERATURA

[1] S. Abu-Saymeh in M. Hajja, *Coincidence of centers for scalene triangles*, Forum Geom. **7** (2007), 137–146.

[2] Y. Agaoka, *Degree of triangle centers and a generalization of the Euler line*, Beiträge Algebra Geom. **51** (2010), 63–89.

[3] Y. Agaoka, *Triangle centers defined by quadratic polynomials*, Math. J. Okayama Univ. **53** (2011), 185–216.

[4] *Encyclopedia of Triangle centers*, dostopno na `http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html`, povzeto dne 7. 1. 2013

[5] D. R. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach: an eternal golden braid*, Hassocks: Harvester Press, cop. 1979.

[6] D. R. Hofstadter in D. C. Denett, *Oko duha: fantazije in refleksije o jazu in duši*, Založba Mladinska knjiga, Ljubljana, 1990.

[7] C. Kimberling, *Central points and central lines in the plane of a triangle*, Math. Magazine **67** (1994), 163–187.

[8] C. Kimberling, *Triangle centers and central triangles*, Congr. Numerantium **129**, 1998.

[9] C. Kimberling, *Triangle centers as functions*, Rocky Mountain J. Math. **23** (1993), 1269–1286.

[10] T. Veber, *Kubične krivulje trikotnika*, Obzornik mat. fiz. **59** (2012), 50–62.

VRNITEV BOHROVEGA MODELA

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 31.15.xg

Pred sto leti je model Nielsa Bohra opisal vodikov atom z enim elektronom. Atomov z več elektroni in molekul ni opisal tako uspešno. Novejša raziskovanja pa so pokazala, da je mogoče z modelom opisati tudi nekatere lastnosti večelektronskih atomov in molekul. Članek pojasni dimenzijsko lestvičenje, ki je vrnilo zaupanje v stari model, in navede nekaj rezultatov za energijo vodikove molekule. Novi prijem spodbuja preproste nazorne predstave o gibanju elektronov v atomih in molekulah.

THE RETURN OF THE BOHR MODEL

A hundred years ago Niels Bohr's model described the hydrogen atom with one electron. It did not as well describe atoms with many electrons and molecules. Current research has, however, shown that some characteristics of many-electron atoms and molecules can be described with it. In the article dynamical scaling is explained that returned confidence to the old model and some results are quoted for the energy of the hydrogen molecule. The new approach stimulates simple ideas about the motion of electrons in atoms and molecules.

Niels Bohr je leta 1913 v tridelnem članku o zgradbi atomov in molekul privzel, da v vodikovem atomu elektron kroži okoli jedra. Po zgledu Maxa Plancka pri svetlobi je dodal zahtevo, da se frekvenca kroženja spreminja v skokih. Pojasnil je stanja vodikovega atoma in s prehodi med njimi vodikov spekter [2]. Bohrov opis atomov z več elektroni in molekul pa je bil precej manj uspešen.

V zadnjem času se je pokazalo, da malo prilagojeni Bohrov model nima te pomanjkljivosti. Novi pogled je mogoče utemeljiti z *dinamičnim lestvičenjem.*[1] Vzamejo, da se število dimenzij N spreminja in naredijo prehod $N \to \infty$. Rezultat lahko izboljšajo tako, da računajo z vrsto po potencah $1/N$ in upoštevajo še nekaj členov.[2] Na kratko opišimo pot do vezavne energije vodikove molekule in novi polklasični pogled.

---

[1] Za angleški »scaling« nimamo ustaljenega domačega izraza. Besede lestvičenje ni v *Slovarju slovenskega knjižnega jezika*, vsebuje pa jo spletna različica angleško-slovenskega slovarja. Pravzaprav bi bilo bolje reči »lestvičenje števila dimenzij«. Ob »lestvičenju dimenzij« (velikosti) lahko pomislimo na davno Galileijevo spoznanje, da bi se velikan sesedel pod lastno težo, če bi bil zgrajen v enakem razmerju kot običajni človek in iz enakih snovi.

[2] Dosleden račun v tem okviru pripelje do vezavne energije elektrona v vodikovem atomu $|W_1|(4/N^2)(1 + 2/N + 3/N^2 + \dots)$. Trije členi z $N = 3$ dajo $\frac{8}{9}|W_1|$. Prava vrednost pa je v tem primeru $|W_1|4/(N-1)^2$ [7].

Janez Strnad

Dimenzijsko lestvičenje

Polno energijo vodikovega atoma sestavljata kinetična energija elektrona z maso m in nabojem $-e_0$ in potencialna energija elektrona in jedra, za katerega vzamemo, da miruje v izhodišču:

$$W = \frac{1}{2m}p^2 - \frac{q^2}{r}. \tag{1}$$

Pri tem je p gibalna količina elektrona, r razdalja od izhodišča in $q^2 = e_0^2/(4\pi\varepsilon_0)$. Ali bi bilo mogoče q^2 obravnavati kot spremenljiv parameter? Potem bi potencialno energijo lahko imeli za majhno motnjo kinetične energije prostega elektrona in bi njo in druge količine razvili v vrsto po potencah majhne motnje. To ni mogoče, ker ima q^2 nespremenljivo vrednost [7].

Pri obravnavanju kritičnih pojavov, povezanih s kritičnimi točkami pri faznih spremembah, sta Kenneth Wilson in Michael Fisher tak spremenljivi parameter vpeljala na silo [7]. Vodikov atom je mogoče strogo rešiti in te rezultate primerjati z rezultati lestvičenja. Drugačno vlogo ima lestvičenje v teoriji kritičnih pojavov in v kvantni kromodinamiki, ko rezultatov ni mogoče dobiti po drugi poti.

Kvadrat gibalne količine v (1) nadomestimo z delom operatorja kvadrata gibalne količine, ki ne vsebuje odvisnosti od kotov: $\hat{p}_r^2 = -\hbar^2(d^2\ /dr^2 + (2/r)d\ /dr)$ [3]. Zanimamo se torej le za krogelno simetrične valovne funkcije $\psi(r)$ v osnovnem stanju. Prikličemo si v spomin:

število dimenzij	operator $\hat{p}_r^2$
3	$-(\hbar^2/2m)(d^2\ /dr^2 + (2/r)d\ /dr)$
2	$-(\hbar^2/2m)(d^2\ /dr^2 + (1/r)d\ /dr)$
1	$-(\hbar^2/2m)d^2\ /dr^2$

Sklepamo, da ima operator v N dimenzijah obliko $\hat{p}_r^2 = -(\hbar^2/2m)\cdot(d^2\ /dr^2 + ((N-1)/r)d\ /dr)$. V N dimenzijah se tedaj radialna Schrödingerjeva enačba glasi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{N-1}{r}\frac{d\psi}{dr}\right) - \frac{q^2}{r}\psi = W\psi. \tag{2}$$

Z novo valovno funkcijo $\psi = r^{-(N-1)/2}\phi$ enačba po deljenju z $r^{(N-1)/2}$ preide v:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2\phi}{dr^2} - \frac{(N-3)(N-1)}{4r^2}\phi\right) - \frac{q^2}{r}\phi = W\phi. \tag{3}$$

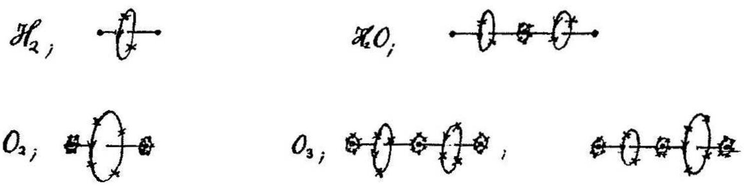
Vstavimo še $r = \frac{1}{4}(N-1)^2R$ in $W = 4E/(N-1)^2$:

$$-\frac{\hbar^2}{2(m\frac{1}{4}(N-1)^2)}\frac{d^2\phi}{dR^2} + \frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{N-3}{N-1}\phi - \frac{q^2}{R}\phi = E\phi. \tag{4}$$

Po prehodu $N \to \infty$ si zaradi velike mase $\frac{1}{4}(N-1)^2 m$ lahko mislimo, da delec miruje in njegova energija ustreza minimumu:

$$V = \frac{\hbar^2}{2mR^2} - \frac{q^2}{R}. \tag{5}$$

Iz $dV/dR = -\hbar^2/(mR^3) + q^2/R^2 = 0$ sledi $R_0 = \hbar^2/(mq^2)$ in $V_0 = -mq^4/(2\hbar^2)$. Za primer $N = 3$ je $\frac{1}{4}(N-1)^2 = 1$ in se r ne razlikuje od R ter ψ od ϕ in W od E. Zato V_0 postavimo enako lastni energiji vodikovega atoma v osnovnem stanju $W_1 = -\frac{1}{2}mq^4/\hbar^2$ in R_0 Bohrovemu polmeru $r_B = \hbar^2/(mq^2)$. Zaupanje v nekdanji Bohrov model se povrne, ko v enačbi (1) v okviru tega modela za osnovno stanje upoštevamo vrtilno količino elektrona $pr = \hbar$. Tako dobimo $W = \hbar^2/(2mr^2) - q^2/r$, to se ujema z minimumom energije (5).



Slika 1. Model preprostih molekul iz Bohrovega *Manchestrskega memoranduma*. Bohr je Rutherfordu pisal: »Model, predlagan za H_2, se zdi edina mogoča ravnovesna razporeditev dveh jeder in dveh elektronov (če ne upoštevamo dveh ločenih atomov), pri kateri jedri mirujeta.«

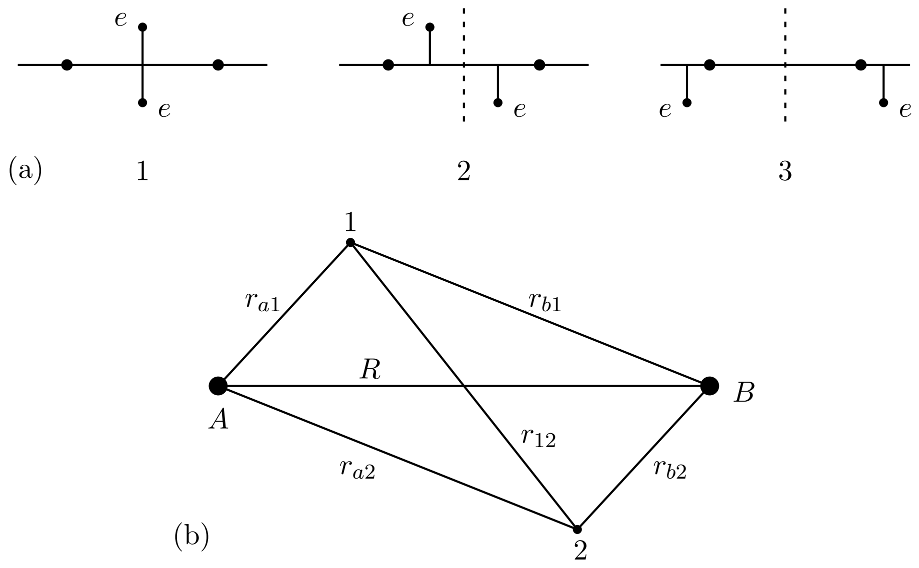
Enačba (1) ima preprosto brezenotsko obliko, če energijo merimo v atomskih enotah energije $mq^4/\hbar^2 = 2|W_1|$ in razdaljo v atomskih enotah razdalje, v Bohrovih polmerih $\hbar^2/(mq^2)$:

$$W = \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{r}. \tag{6}$$

Molekula vodika

Že leta 1912 je Bohr v pismu, znanem kot *Manchesterski memorandum*, Ernestu Rutherfordu na njegovo vprašanje orisal svoj pogled na zgradbo preprostih molekul. Bohr si je predstavljal, da v molekuli vodika jedri mirujeta v dani razdalji, elektrona pa se gibljeta po krogu v simetrijski ravnini tako, da sta vedno na nasprotnih straneh osi (slika 1). Arnold Sommerfeld je spočetka sprejel ta opis, leta 1923 pa je zapisal, da »še ne poznamo pravega modela molekule H_2. Najbrž ne bo tako simetričen kot na sliki.«

Upoštevajmo manj simetrične razporeditve elektronov, kakor je namignil Sommerfeld. Vzamemo, da elektrona ne krožita v simetrijski ravnini



Slika 2. Shematične risbe Bohrovega simetričnega predloga za zgradbo vodikove molekule 1 in dveh sodobnih predlogov 2 in 3 [1] (a). Podrobnejša slika zgradbe (2) (v enačbi za r_{12} je znak $+$) in pregled nad razdaljami med jedroma in elektronoma v tem primeru (b) [1].

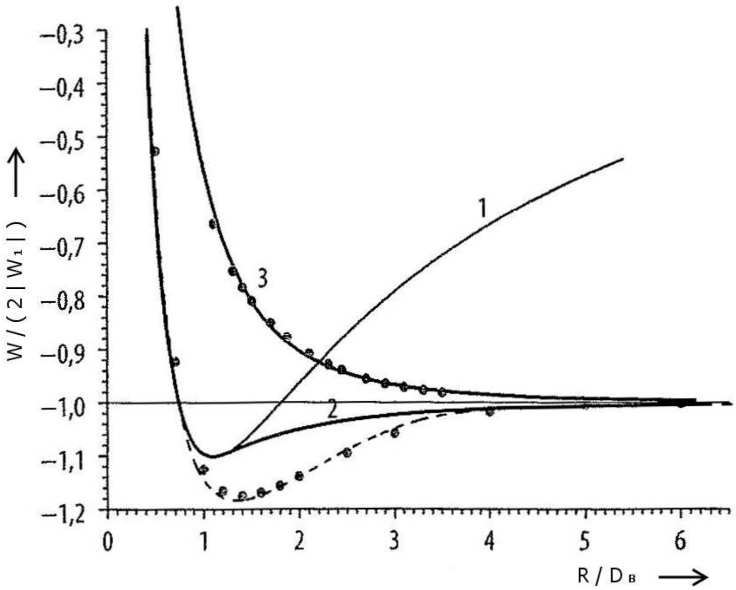
(1 na sliki 2a), ampak v dveh vzporednih ravninah, simetričnih glede na težišče molekule, med jedroma (2) ali zunaj jeder (3) [4-7]. Privzamemo, da elektrona krožita v enaki smeri z enako velikima hitrostma, tako da sta v ravnini osi z ali na isti strani te osi ali na nasprotnih straneh. Za ta primer enačbo (5) razširimo v:

$$W = \frac{1}{2\rho_1^2} + \frac{1}{2\rho_2^2} + V \quad \text{z} \quad V = -\frac{1}{r_{a1}} - \frac{1}{r_{b1}} - \frac{1}{r_{a2}} - \frac{1}{r_{b2}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{R}. \qquad (7)$$

Do te enačbe pripelje tudi dinamično lestvičenje za primer dveh jeder in dveh elektronov [1]. Pri tem sta z_i ($i = 1,\ i = 2$) razdalji ravnin kroženja prvega in drugega elektrona od težišča po osi z, na kateri ležita jedri v razdalji R. Razdalji prvega in drugega elektrona od osi z sta ρ_i. Elektrona sta oddaljena za r_{12} drug od drugega, r_{ai} pa je razdalja prvega ali drugega elektrona od jedra A ter r_{bi} razdalja prvega ali drugega elektrona od jedra B. Razdalje se ne spreminjajo s časom:

$$r_{a1} = \sqrt{\rho_1^2 + (\tfrac{1}{2}R - z_1)^2}, \quad r_{b2} = \sqrt{\rho_2^2 + (\tfrac{1}{2}R - z_2)^2},$$

$$r_{a2} = \sqrt{\rho_2^2 + (\tfrac{1}{2}R + z_2)^2}, \quad r_{b1} = \sqrt{\rho_1^2 + (\tfrac{1}{2}R + z_1)^2},$$



Slika 3. Energija molekule vodika za razporeditve elektronov 1, 2 in 3 v odvisnosti od razdalje med jedroma R. Sklenjene krivulje s točkami kažejo rezultate numeričnih računov na podlagi izmerjenih vrednosti. Novi model 2 za ravnovesni razmik jeder v osnovnem stanju napove $1{,}1 r_B$, kar se ne razlikuje znatno od izmerjenega podatka $1{,}4 r_B$. Kvantnomehanična napoved Walterja Heitlerja in Fritza Londona iz leta 1927, ki je »začela kvantno kemijo«, je bila $1{,}51 r_B$. Napoved za energijo molekule je nekoliko slabša, 0,1 atomskih enot, kar ustreza 2,72 eV (upoštevati je treba lastni energiji dveh atomov vodika, to je $2W_1$). Izmerjena vrednost je 4,75 eV, medtem ko sta Heitler in London navedla 3,14 eV [1].

$$r_{12} = \sqrt{(z_1 + z_2)^2 + (\rho_1 + \rho_2)^2}.$$

Z enačbama $\partial W/\partial \rho_i = 0$, $\partial W/\partial z_i = 0$ ob dani razdalji med jedroma R zahtevamo, da ima energija ekstrem. Za štiri take rešitve je $z_1 = z_2$ in $\rho_1 = \pm\rho_2$. Znak $+$ ustreza elektronoma na nasprotnih straneh osi z, znak $-$ pa elektronoma na isti strani osi (slika 2b). Tako so dobili odvisnost energije W od razdalje jeder R (slika 3). Prave vrednosti, ki jih da kvantnomehanični račun na podlagi izmerjenih podatkov, kažejo točke na sklenjenih krivuljah. Krivulja 1 ustreza Bohrovemu simetričnemu prvotnemu predlogu in da zgrešeno odvisnost energije. Krivulja 2, ki ustreza nesimetričnemu osnovnemu stanju molekul, se ujema z izmerjenimi podatki pri majhnih in velikih razdaljah med jedroma. Krivulja 3, ki ustreza prvemu vzbujenemu stanju molekule, se ujema z izmerjenimi podatki na vsem območju.

Presenetljivo ujemanje je vzbudilo novo zanimanje za Bohrov model. V številnih revijah so se pojavili vzpodbudni zapisi. Nature Physics je o »ponovno rojenem Bohru« leta 2005 zapisala: »Čeprav je mogoče z modelom [sodobnim kvantnomehaničnim] zelo natančno opisati elektronsko zgradbo molekul, tak numerični način daje malo vpogleda v delovanje elektronov na elektrone. Anatolij Svidzinsky in sodelavca so se odpravili na zanimiv izlet po poti spominov in odkrili prijem, ki spodbuja razumevanje kemijske vezi v molekulah in hkrati postavi ›staro kvantno teorijo‹, ki jo je razvil Niels Bohr leta 1913, v svežo perspektivo.« Oživljeni Bohrov model je postal »vez med predkvantnim in pokvantnim opisom kemijske vezi« [1]. »Ne glede na uspeh sodobne računalniške kemije obstaja potreba, da bi zgradbo elektronov razumeli na razmeroma preprost in intuitiven način.«

Na nakazani način se je mogoče lotiti helijevega atoma z dvema elektronoma, molekule HeH s tremi elektroni, molekule He_2 s štirimi elektroni in drugih molekul z več elektroni. Rezultati bolj zapletenih računov se v vseh primerih presenetljivo dobro ujemajo z merjenji. Za ogljikov atom na primer dobijo v osnovnem stanju energijo, ki se samo za 0,08 % razlikuje od izmerjene [1]. Z dinamičnim lestvičenjem je mogoče zajeti tudi vzbujena stanja, če funkcijo (6) v bližini R_0 opišemo v kvadratnem približku [1].

LITERATURA

[1] D. R. Herschbach, M. O. Scully in A. Svidzinsky, *Bohrs comeback*, Physik Journal **12** (2013), 37–41.[3]

[2] J. Strnad, *Atomski model Nielsa Bohra*, Obzornik mat. fiz. **33** (1986), 109–117; *Bohrova dediščina*, Presek **40** (2012/2013), 9–12 (4).

[3] J. Strnad, *Fizika*, 3. del, DMFA – založništvo, Ljubljana 2009, str. 187.

[4] A. Svidzinsky, M. O. Scully in D. R. Herschbach, *Bohr's 1913 model revisited*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **102** (2005), 11985–11988; *Bohr's molecular model a century later*, Phys. Today **67** (2014), 33-39 (1).

[5] A. Svidzinsky, S. A. Chin in M. O. Scully, *Model of molecular bonding based on the Bohr-Sommerfeld picture of atoms*, Phys. Lett. A. **355** (2006), 373–377.

[6] A. Svidzinsky, M. O. Scully in D. R. Herschbach, *Simple and surprisingly accurate approach to the chemical bond obtained from dimensional scaling*, Phys. Rev. Lett. **95** (2005), 080401, 1–4.

[7] E. Witten, *Quarks, atoms, and the 1/N expansion*, Physics Today **33** (1980), 38–43 (7).

[3] Dudley R. Herschbach je upokojeni profesor za kemijo na harvardski univerzi. Leta 1986 je dobil tretjino Nobelove nagrade za kemijo za delo o molekulski dinamiki preprostih kemijskih reakcij. Marlan O. Scully je profesor za fiziko in kemijo na teksaški univerzi A & M. Ukvarja se s kvantno optiko in je dobil več pomembnih nagrad. Anatolij A. Svidzinsky je v Moskvi v skupini Vitalija Ginzburga raziskoval superprevodnost. Po prehodu na stanfordsko univerzo je drugič doktoriral in se ukvarja s kvantno optiko.

PETDESET LET »FEYNMANOVIH PREDAVANJ«

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Leta 1964 so izšla *Feynmanova predavanja o fiziki* (*The Feynman Lectures on Physics*) Richarda P. Feynmana, Roberta B. Leightona in Matthewa Sandsa [4]. Nekateri jih imajo za najznamenitejšo fizikalno knjigo [1], drugi navajajo, da je izšla v največjem številu izvodov [2]. V angleščini jih je izšlo več kot poldrugi milijon. Prevedli so jo v vsaj 12 jezikov in samo v ruščini je izšlo več kot milijon izvodov. Posvetimo učbeniku nekaj pozornosti.

Edini še živeči pisec M. Sands je opisal, kako je prišlo do knjige [2]. Konec petdesetih let prejšnjega stoletja ni bil zadovoljen z uvodnim predavanjem fizike na Kalifornijski tehniški univerzi Caltech. Študenti so se pritoževali, da se v prvih letnikih ne srečajo s sodobno fiziko. Predstojnik oddelka Robert Bacher sprva nad predlogi za spremembe ni bil navdušen. Sands pa je zanje pridobil R. Feynmana. Dobro ga je poznal, odkar sta leta 1944 skupaj delala v Los Alamosu pri načrtu Manhattan. Mnenje so podprli še drugi člani oddelka in Bacher je popustil. Fordova ustanova je načrtu namenila dober milijon dolarjev.[1] Izvajanje načrta je nadzoroval odbor s predsednikom Leightonom in članoma H. Victorjem Neherjem in Sandsom. Neher je kot uspešen eksperimentalist imel na skrbi izdelavo novih poskusov. Leighton je z učbenikom *Principles of Modern Physics* leta 1959 študentom približal sodobno fiziko. Glede sprememb programa pa je bil zadržan. Sestanki so pokazali, da on in Sands ne bosta mogla zbližati stališč.

Že po izstrelitvi Sputnika leta 1957 so osnovali odbor PSSC (Physical Science Study Committe), ki naj bi prenovil ameriško srednješolsko fiziko. Odbor je sprožil tudi pobudo za izboljšanje uvodnega poučevanja fizike na visokih šolah in v ta namen imenoval Komisijo za fiziko na kolidžih (Commission on College Physics). Sands je bil član komisije in ji je med letoma 1964 in 1966 predsedoval.

Sandsu se je zdelo, da zadeve tečejo prepočasi. Pomislil je, da bi šlo hitreje, če bi bil pripravljen prevzeti uvodno predavanje Feynman, ki je bil znan kot uspešen raziskovalec in izreden predavatelj. Sprva so se pojavili ugovori, da še nikoli ni predaval novincem in da je nepogrešljiv na podiplomskem študiju. Postopno se je Feynman navdušil nad predlogom, da lahko uvodno predavanje oblikuje po svoje. Postavil pa je pogoj, da predava samo

[1] Ustanovila sta jo leta 1936 Edsel Ford in Henry Ford z namenom, da deluje v dobro človeštva. Nekaj časa je bila najbolj cenjena ustanova svoje vrste na svetu. Med drugim je podpirala tudi razvoj poučevanja.

enkrat. Naposled so ugovore utišali z mislijo, da ne kaže nasprotovati, če si Feynman želi predavati. Večji del dodeljenih sredstev so porabili za izdelavo novih naprav in za plačilo kolegov, ki so prevzeli prejšnje delo sodelavcev novega predavanja.

Po polletni pripravi je Feynman jeseni 1961 začel z uvodnim predavanjem. Na teden je predaval dvakrat po uro. Študenti so imeli še uro vaj, ki so jih vodili podiplomski študenti ali člani oddelka, in tri ure laboratorija pod Neherjevim nadzorom. Predavanja so snemali z magnetofonom in fotografirali popisano tablo. Strojepiska je sproti pretipkala besedilo s trakov. Leighton je kljub začetni zadržanosti zavzeto sodeloval in ob Sandsovi pomoči sproti urejal zapise, ki jih je nazadnje pregledal Feynman. Tako so študenti kmalu po predavanju dobili v roke zapiske predavanj.

Na drugih univerzah so zvedeli za predavanja in poizvedeli, ali bi bilo mogoče dobiti zapise. Oglasili so se tudi založniki. To je pripeljalo do odločitve o učbeniku. Najboljšo ponudbo je dala založba Addison-Wesley, ki je lahko knjigo izdelala od začetka do konca. Obljubila je dostopno ceno, ker ni bilo avtorskih honorarjev [2]. V knjigi je besedilo teklo na notranji polovici strani, slike in preglednice so prišle na zunanjo polovico strani. Tako stolpcev besedila ni bilo treba posebej lomiti. Na predlog za naslov *Fizika ena* s tremi avtorji se je Feynman odzval užaljeno, češ da sta imela Leighton in Sands zgolj »vlogo stenografov«. Pristal pa je na naslov *Feynmanova predavanja o fiziki.*

Leta 1962 so se nadaljevala predavanja v drugem letniku. Leighton je tedaj ponovil predavanje v prvem letniku in prepustil urejevanje zapiskov Sandsu. Odločili so se tudi, da bo poseben, tretji del namenjen kvantni mehaniki. Nekaj predavanj za ta del je Feynman dodal na koncu leta 1963. Delo se je nekoliko zavleklo, ker je Sands tega leta prevzel mesto pomočnika direktorja Stanfordskega centra za izgradnjo velikega elektronskega linearnega pospeševalnika (SLAC). Kljub temu se je vse končalo po načrtu.

Učbenik je doživel veliko ponatisov in posebnih izdaj. Leta 1964 je Feynman imel izredno predavanje *Gibanje planetov okoli Sonca*, ki so ga izgubili. Ko so ga našli, sta David L. Goodstein in Judith R. Goodstein uredila *Feynman's Lost Lecture.* Leto po Feynmanovi smrti 1988 sta David Goodstein in Gerry Neugebauer pripravila *Commemorative Issue.* Skrajšani različici *Six Easy Pieces* leta 1994 in *Six Not-So-Easy Pieces* leta 1998 sta vsebovali samo po šest poglavij. Sledili sta *New Millenium Edition* v uredništvu Michaela A. Gottlieba in Rudolfa Pfeiferja in *Definitive and Extended Edition.* Gottlieb in Ralph Leighton (sin Roberta in Feynmanov prijatelj, ki je z njim bobnal) sta leta 2005 pripravila *Feynman's Tips on Physics. Exercises for the Feynman Lectures on Physics.* Knjiga je zajela štiri poglavja, ki so jih v prejšnjih izdajah spustili, med njimi tri poglavja o reševanju nalog, ter Sandsove spomine [2]. Naloge je spočetka pripravljal Robert Leighton v sodelovanju z Rochusom Vogtom.

Izšlo je več broširanih izdaj ter zvočnih in video posnetkov, samostojnih ali dodanih knjigam. Težko je dobiti pregled nad vsemi izdajami, uredniki, založbami in lastniki založniških pravic. Osnovna *Feynmanova predavanja* so od konca lanskega leta prosto dostopna na spletu vsaj v dveh različicah, Caltechovi in na spletni strani *Predavanj* [4].

Leighton in Sands sta Feynmanu izročila svoji zasnovi programa, a program predavanj je oblikoval Feynman sam. Kolikor je bilo mogoče, so v besedilu ohranili njegov neposredni slog. Zaradi Feynmanove odsotnosti je peto in šesto predavanje prevzel Sands. Predavanji *Čas in oddaljenost* in *Verjetnost* pa nista posegli v osnovno Feynmanovo zamisel. Prvi del je bil v glavnem namenjen mehaniki, sevanju in toploti, drugi elektrodinamiki in tretji kvantni mehaniki. Feynman pa se ni držal ustaljenega reda. Pogosto je posegel naprej in tudi vpletel veliko snovi, ki je sicer uvodna predavanja ne vsebujejo, na primer *Odnos fizike do drugih znanosti*, *Linearni sistemi in pregled*, *Simetrije v fizikalnih zakonih* itd. Na nekaterih mestih je namignil na svoje raziskovalno delo, na primer pri elektromagnetni masi ali načelu najkrajšega časa in načelu najmanjše akcije. Theodore Welton, ki je s Feynmanom študiral na Massachusettski tehniški univerzi MIT, je omenil, da »številna poglavja izvirajo neposredno iz gradiva, s katerim smo se srečali – dodam naj, da z zadovoljstvom – v teh letih« [3].

Feynman je v svojem predgovoru menil, da je »bila vsa stvar v bistvu poizkus. [. . .] Vprašanje je seveda, kako dobro je poizkus uspel. Moj pogled – zdi se pa, da ga večina ljudi, ki je delala s študenti, ne deli – je pesimističen. Ne mislim, da sem opravil zelo dobro za študente. Če pomislim, kako je večina študentov reševala naloge na izpitih, mislim, da je sistem neuspeh.« Po mnenju Goodsteina in Neugebauerja je bilo novincev na predavanjih vse manj, vse več pa podiplomskih študentov in članov fakultete. Sands je bil drugačnega mnenja. Obžaloval je tudi, da je predlagal predgovor. V naglici ga je Feynman posnel na magnetofon še pod vtisom Sandsovega obvestila o 65-odstotnem uspehu študentov. A kaže, da je Feynman svoje mnenje pozneje spremenil. Enemu od življenjepiscev je namreč izjavil, da so *Predavanja* ena od najboljših stvari, ki jih je naredil. V odzivih v *Fizikalnem forumu* na spletu naletimo na mnenje, da so *Predavanja* »krasne knjige, ki vas bodo naučile pogleda na fiziko od daleč. Navdihnila vas bodo in imeli boste občutek, da prvič v življenju zares razumete. Nikakor pa vas ne bodo naučila reševanja fizikalnih problemov ali vas pripeljala do boljše ocene«. Številni študenti se s tem strinjajo. Večina fizikov pa ima predavanja za prvovrsten dosežek. Feynman je v epilogu zapisal: »Želel sem vam dati nekaj občudovanja čudovitega sveta in fizikov pogled nanj, za kar verjamem, da je velik del prave kulture modernega časa.«

LITERATURA

[1] T. Phillips, *The Feynman Lectures on Physics*, Nature **504** (2013), 30–31.

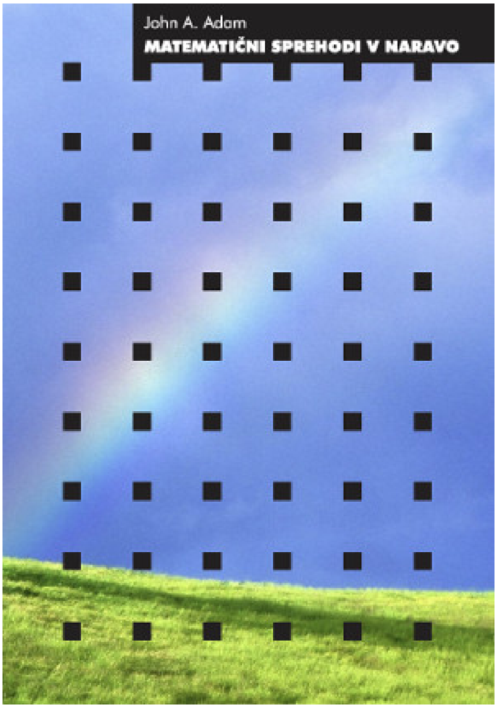
[2] M. Sands, *Capturing the wisdom of Feynman*, Phys. Today **58** (2005), 4, 49–53.

[3] T. A. Welton, *Memories of Feynman*, Phys. Today **60** (2007), 2, 46–52.

[4] *The Feynman Lectures on Physics*, `www.feynmanlectures.caltech.edu`, ogled 31. 1. 2014.

NOVE KNJIGE

John A. Adam, prevod Damjana Kokol Bukovšek, Matematični sprehodi v naravo, Knjižnica Sigma 94, DMFA – založništvo, Ljubljana 2012, 265 str.



To je prevod knjige [1], ki je leta 2009 izšla pri Princeton University Press. Avtor knjige, po rodu Anglež, ima doktorat iz teoretične astrofizike. Že dolgo poučuje matematiko na univerzi Old Dominion v Virginiji v ZDA. Kot sam pravi, ga od mladih nog privlačijo skrivnosti narave. Zelo rad se sprehaja v naravi in tudi obiskuje naravne parke. Ukvarja se z uporabno matematiko in matematičnim modeliranjem. Napisal je knjigo *Mathematics in Nature: Modelling Patterns in the Natural World*. Ukvarja se tudi z modeliranjem rasti tumorjev in modeliranjem dinamike imunskega sistema.

Knjiga je namenjena širši publiki. Nekatere teme zahtevajo le osnovno računsko znanje, druge nekaj trigonometrije in algebre. Znanje odvoda, integrala in najpreprostejših diferencialnih enačb pa, kar se tiče matematike, pravzaprav zadošča za skoraj vso snov knjige. Nekaj podobnega bi lahko rekli tudi za potrebno znanje fizike. Vendar avtor, brž ko fizika postane bolj zapletena, ne izgublja časa z izpeljavami fizikalnih formul, ampak jih kar navede. V tem smislu je obravnava v knjigi bliže bolj matematično usmerjenim bralcem in večinoma izpolnjuje pričakovanja, ki jih vzbuja naslov.

Število tem v knjigi je veliko, kot bomo kmalu videli. Besedilo je precej strnjeno. Knjiga ima tudi obsežen seznam literature, tako da je prava zakladnica informacij s tega področja.

Na primeru taljenja snežne kepe spoznamo matematično modeliranje in omejitve takih modelov. Zanimivi so tudi inverzni problemi: Kaj lahko iz

opazovanj naravnega pojava sklepamo o vzrokih za njegov nastanek (tudi kvantitativno)?

Avtor nato zastavi bralcu nekaj testnih vprašanj, denimo: 1. *Opazuješ enojno pisano mavrico (primarni lok). Katera barva je na vrhu oboka?* . . . 9. *Oceni premer vodne kapljice v (i) hudem nalivu in (ii) v megli.* . . . 11. *Kako dolg je povprečen zvočni val pri človeškem govoru?* . . . 14. *Kako daleč je obzorje, če stojiš na plaži in gledaš na morje?* Ta vprašanja dobijo odgovor v nadaljevanju.

Sledijo nekatera čisto računska vprašanja, kot: 17. *Kako dolgo bi s peskom polnili Grand Canyon v ZDA?* ipd. Vprašanje 21: *Zakaj King Kong ne bi mogel obstajati?* (V filmih je $K.\ K. = K^2$ prikazan kot gorila, linearno povečana na velikost kakih deset metrov.) Tu avtor argumentira takole: »Moč objekta, še posebej K^2, je sorazmerna z velikostjo preseka njegovih kosti, ki so potrebne, da nosijo njegovo težo. Ta presek pa je sorazmeren njegovi površini. Ker imamo opravka z geometrijsko podobnimi objekti, je njegova površina sorazmerna s kvadratom njegove velikosti.« Ta argument se mi zdi po nepotrebnem zakompliciran – ne vem, zakaj je treba na dan vleči površino gorile – ploščina preseka kosti je sorazmerna kvadratu velikosti. Sicer pa na to zgodbo nimam pripomb.

Zanimiva je tudi obravnava samovžiga velike kopice sena. Pri vprašanju 27: *Zakaj so kapljice na pajkovi mreži tako enakomerno razporejene?* pa avtor pokaže svoje znanje netrivialne fizike. Bolj na kratko so obravnavana Fibonaccijeva števila in ustrezni spiralni vzorci v rastlinskem svetu. Vprašanje 32: *Ali lahko oceniš težo buče samo s pogledom?* me je spomnilo na soseda, ki je gojil buče velikanke; enkrat je v ta namen napeljal poganjke celo na streho hiše in jo praktično v celoti prekril z listjem. Vprašanje 35*: Ali moja senca pospešuje?* ima negativen odgovor. Vprašanje 41*: Kako dobro se svetloba zvezd odbija od mirne vodne gladine?* pove vrsto zanimivosti o odboju. Avtor med drugim sprašuje tudi, kaj se zgodi, če svetlobo odbija tudi dno tolmuna: *(ii) Obravnavaj dno tolmuna, kot da odbije 20 odstotkov svetlobe (mogoče je na dnu kos stekla ali druge odbojne snovi)?* Tole s steklom je morda potegavščina. Kdor je kdaj plaval z masko, je verjetno opazil, da steklo v vodi odbija bistveno manj svetlobe kot na suhem in ga je teže opaziti. Vzrok je v tem, da je lomni količnik steklo/voda enak približno $n = 3/2 : 4/3 = 9/8$. Po formuli, ki jo navaja knjiga na isti strani, je delež odbite svetlobe pri pravokotnem vpadu na prvo površino stekla

$$R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 .$$

Celotni delež svetlobe, odbite na obeh površinah ravnega stekla, je $\frac{2R}{1+R}$, kar je v tem primeru manj kot en odstotek. (Mimogrede, prve antirefleksne prevleke na optičnih elementih so slonele prav na podobnem fenomenu, ko so steklo prevlekli s snovjo, ki ima lomni količnik manjši od lomnega količnika stekla.) Bel pesek na dnu tolmuna s čisto vodo pa morda lahko odbija tolikšno količino svetlobe. Na zraku ravno steklo pri pravokotnem vpadu odbija kakih 8 odstotkov svetlobe, pri poševnem vpadu pa seveda še več. To lepo vidimo ob sončnem zahodu.

Vprašanje 44*: Kako daleč se zdi migotanje zraka nad cesto med pripeko?* in 45*: Zakaj je nebo modro?* spet pokažeta avtorjevo znanje fizike; pri zadnjem je tudi nekaj dimenzijskih in podobnih argumentov, ki se jih matematik verjetno ne bi spomnil. Fizik, ki pozna rezultat, pa s tem nima problemov. Vprašanje 48*: Zakaj se oblak kovinsko sveti?* se mi je zdelo zelo zanimivo, saj iridescenco na oblakih okrog sonca pogosto vidimo. V zadnjem odstavku na strani 98 se avtor nekako ne more odločiti, ali bi napisal formulo za jakost uklonjene svetlobe ali ne; govorjenje o uporabi Besselove funkcije je zato še manj jasno, posebno za tistega, ki o tem nič ne ve.

V naslednjih vprašanjih avtor zelo izčrpno obdela mavrice, halo (obroč) okrog sonca in svetlobni (sončni) steber. To so teme, o katerih sta pisala tudi OMF in Presek. Knjiga ima v sredini barvno prilogo z lepimi fotografijami teh in drugih pojavov. Avtor sam rad prispeva tovrstne slike za spletno stran *Earth Science Picture of the Day (EPOD)* [3]. Sledi opis sosonca (parhelija), zenitnega loka in glorije. (Mimogrede, še danes obžalujem, da sem pred leti zadnji dan potovanja porabil poslednji film, na poletu nazaj pa zato nisem mogel slikati krasne glorije okrog sence našega letala na oblaku.)

Posebno poglavje je posvečeno modeliranju oblike ptičjega jajca. Obdelani so razni načini. Eden od njih je podoben tistemu, ki ga je uporabil Tine Golež v [2].

Poglavje *V (ALI NA) VODI* obsega približno trideset strani. Obravnava migljajoče odseve sonca na vodni gladini in vse mogoče o valovih: v plitvi in v globoki vodi, o energiji valov itd. Poglavje se konča z vprašanjem 72*: Kako lahko iz ladijske brazde sklepamo, da je zemlja okrogla?* (in celo ocenimo njen polmer).

Naslednje poglavje nosi naslov *V GOZDU*. Vprašanje 79: *Kako visoko lahko zrastejo drevesa?* ima razlago, ki sem ji težko sledil. Laže je razumeti vprašanje 80: *Koliko sence daje sloj listov sloju pod njim?*, pa zgodbo o neprosojnosti gozda in o rasti bul na drevesu.

Poglavje *V NARODNEM PARKU* prinaša mnogo informacij o rečnih meandrih, tudi podatke raznih meritev teh rečnih oblik. Poglavje *NA NOČNEM NEBU* vsebuje med drugim razlago magnitude zvezd, preprost model zvezde in zelo zanimivo modeliranje sončnega mrka ... Na koncu imamo študijo hoje.

Zaustavimo se še pri obravnavi starega hrasta kot fraktalnega objekta. Tu avtor privzame, da se vsaka veja s polmerom r razcepi v dve veji s polmeroma r_1 in r_2. Iz rokava privleče (brez pojasnila), da je

$$r^3 = r_1^3 + r_2^3. \tag{1}$$

Takoj nato privzame, da je $r_1 = r_2$, torej $r_1 = 2^{-\frac{1}{3}}r$. Predpostavi, da ima deblo premer 1 m, najtanjša veja pa 1 mm. Torej je razmerje polmerov $10^3 \approx 2^{10} = (2^{\frac{1}{3}})^{30}$, kar pomeni, da je razvejitev približno 30. (Iz meni nerazumljivih razlogov avtor v računih operira z 0,794 namesto z $2^{-\frac{1}{3}}$). Ta model nato uspešno uporabi na živalskem ožilju. Kot pravi, je tipični premer najtanjše žile – kapilare – 5 mikronov. Pri psu ima najdebelejša žila morda premer 5 mm. Spet je razmerje polmerov 10^3 in imamo tako približno trideset "generacij" razvejitev na dve žili. Imamo torej (približno) $2^{30} = (2^{10})^3 \approx (10^3)^3 = 10^9$ kapilar, če začnemo z eno samo najdebelejšo žilo. Ker imamo pri vsaki razvejitvi podvojitev, je skupno število žil približno enako

$$\sum_{n=0}^{30} 2^n = 2^{31} - 1 \approx 2 \cdot 10^9.$$

To se dobro ujema s podatkom $1{,}2 \cdot 10^9$ žil iz (starejše) literature. Sumim, da je avtor ta račun najprej naredil za žilni sistem in šele nato prešel na hrast – ker pač drevo bolj ustreza naslovu te knjige. Nato se vrne k hrastu in naredi še eno predpostavko. Obstaja naj število $0 < \alpha < 1$, tako da se vsaka veja z dolžino L razcepi na dve veji z dolžino αL. Če je dolžina debla L_0, je torej dolžina vseh vej plus dolžina debla

$$\sum_{n=1}^{30} (2\alpha)^n L_0 = \frac{(2\alpha)^{31} - 1}{2\alpha - 1} L_0.$$

Pri $\alpha = \frac{2}{3}$ in $L_0 = 3\ m$ dobi tako skupno dolžino vej 67 km. Pri $\alpha = \frac{7}{8}$ pa kar 100 000 km. To je že na prvi pogled nerealno in spominja na potegavščino. Pogoj (1) me je nekako navajal na misel, da bi pri vsaki podvojitvi, če bi razdeljeni veji bili kot prostorska objekta podobni začetni, vsota prostornin obeh razdeljenih vej bila enaka prostornini začetne veje. Avtor sicer privzame nekaj malce drugačnega. Pa sledimo avtorjevi predpostavki in si še mi privoščimo manjšo poenostavitev, in sicer, da je vsaka veja valjaste oblike, s polmerom r in dolžino L. Razcepi se na veji s polmerom $r_1 = 2^{-\frac{1}{3}} r$ in dolžino αL. Vsota prostornin teh dveh vej je

$$2^{\frac{1}{3}} \alpha L \pi r^2,$$

kar je prostornina začetne veje, pomnožena s $k = 2^{\frac{1}{3}} \alpha$. Pri $\alpha = \frac{7}{8}$ je $k \approx 1{,}10243\ldots > 1$ in bi torej vsaka nadaljnja generacija vej imela večjo prostornino in torej po vsej verjetnosti tehtala več kot prejšnja, kar je že samo po sebi rdeči alarm. Skupna prostornina vseh vej bi torej bila več kot tridesetkratna prostornina debla, natančneje bi prostornina lesenih delov bila

$$V_0 \sum_{n=0}^{30} k^n = V_0 \frac{k^{31} - 1}{k - 1} \approx 191 \cdot V_0 \approx 450\ \mathrm{m}^3,$$

saj je prostornina debla $V_0 = \frac{3\pi}{4}\ \mathrm{m}^3$. To je le nekoliko pretirano – čeprav so v debelih drevesih lahko precejšnje količine lesa, kot bomo videli. Vse skupaj je dobra ilustracija avtorjeve začetne ugotovitve, da imajo modeli omejitve in da jih moramo primerjati s stvarnostjo.

Še primer iz slovenske stvarnosti. V vasi Malence v bližini Kostanjevice na Krki, na robu zaščitenega Krakovskega gozda, stoji na Cvelbarjevi domačiji drugi največji hrast dob v Sloveniji. Star je kakih 350 let, obseg debla je 7 m. Premer debla (v višini prsi) je torej več kot dva metra. Pred tremi desetletji je vihar odlomil eno od največjih vej. Gospodar domačije je povedal, da je bilo v odpadli veji okrog štiri kubike uporabnega lesa. Našel sem kratek video o tem drevesu [4]. (Mimogrede: Ta hrast ima srečo, da stoji v vasi. Precej drugih debelih hrastov na tem zaščitenem področju je bilo zadnje leto ilegalno posekanih. Lesni tatovi očitno dobro ocenjujejo prostornine dreves. Dobili so krila, saj v podobnem primeru pred leti kljub odkritim storilcem in trdnim dokazom z DNK nihče ni bil obsojen. Poplavni Krakovski gozd je čudovit, ko zacveti spomladi – v drugi polovici aprila. Vendar vzemite škornje in ostajajte na označenih poteh. Ena od njih se imenuje po izumitelju ladijskega vijaka inženirju Resslu, ki je bil gozdar na tem področju in je dal izkopati več kanalov v gozdu. Poleti in v zgodnji jeseni pa boste le bežali pred komarji.)

Vrnimo se h knjigi. Imamo še *Kratek slovar matematičnih pojmov in funkcij.* Avtor namesto *rotacijski elipsoid* uporablja besedo *sferoid.* Z opisom Besselove funkcije J_1 se avtor ni ravno potrudil, povrhu pa je uporabil sliko, na kateri so še druge (nepotrebne) funkcije.

Če strnem svoje ugotovitve: Avtor je napol fizik, napol matematik. To ima mnoge dobre strani, saj bi zelo težko našli matematika, ki bi toliko vedel o fizikalnem ozadju pojavov v naravi. Po drugi strani avtor razume matematični način razmišljanja in se mu večinoma dobro prilagodi. Zgoraj sem navedel pač vse (po mojem) vprašljive stvari v knjigi. Kot sami vidite, za tako obsežno knjigo tega res ni veliko. To je tudi zasluga prevajalke, ki je v soglasju z avtorjem popravila nekaj stvari iz originala. Veliko je vreden tudi obširen seznam literature. **Predvsem pa bralca pritegne avtorjevo navdušeno preučevanje raznih, nevajenemu očesu tudi komaj opaznih stvari in pojavov v naravi.** Tisti z manj znanja matematike ali fizike bodo morali kaj preskočiti. Vsak, ki bo prebral vsaj nekaj te knjige, pa bo prihodnjič na izletu ali sprehodu verjetno pozoren na nove stvari in bo tako od doživetja narave imel več.

LITERATURA

[1] John A. Adam, *A Mathematical Nature Walk*, Princeton University Press, Princeton 2009, 246 str.

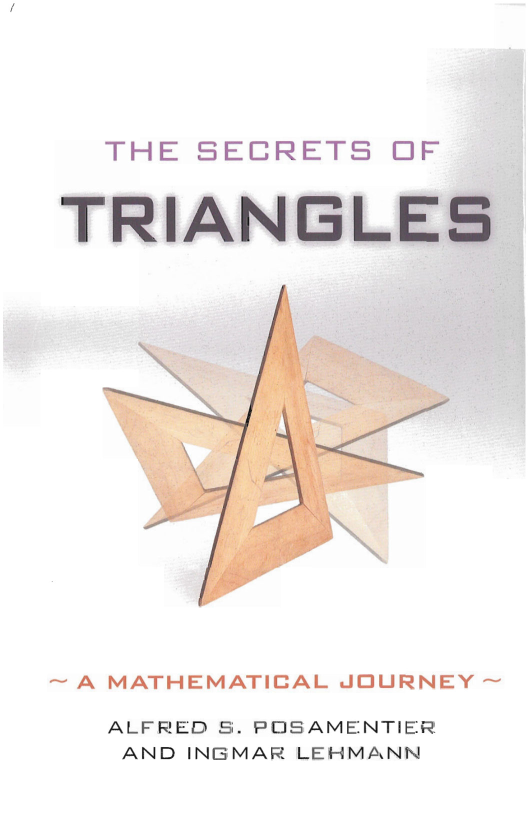
[2] T. Golež, *Prizemljitev infinitezimalnega računa*, Zavod sv. Stanislava, Ljubljana 2012, 64 str.

[3] *Earth Science Picture of the Day (EPOD)* `http://epod.usra.edu/`, ogled 5. 12. 2013.

[4] Malence `http://www.youtube.com/watch?v=Kcy0kq_DCnE`, ogled 5. 12. 2013.

Peter Legiša

Alfred S. Posamentier, Ingmar Lehmann, The Secrets of Triangles: A Mathematical Journey, Prometheus Books, Amherst, New York, 2012, 387 strani.



Čeprav bi morda kdo mislil, da tako preprost matematičen objekt, kot je trikotnik, ne premore kakšnih posebnih skrivnosti, pa je vendarle res, da so številne čudovite in osupljive relacije med različnimi njegovimi elementi (različnimi znamenitimi točkami in daljicami, pa tudi koti in ploščinami v njem) znane le redkim. Tudi matematiki večinoma ne poznajo dobro tega področja, razen tistih, ki se posvečajo geometriji bodisi kot pedagogi bodisi pri svojem raziskovalnem in znanstvenem delu. Če malce parafraziramo Prešernovo pesem Pevcu, lahko to situacijo lepo ilustriramo takole:

GEOMETRU

Kdo zna dokazat', kar pravi Fermat, da se da? (»Spojnice vrhov enakostraničnih trikotnikov nad stranicami trikotnika in njim nasprotnih oglišč se sekajo v isti, t. i. Fermatovi, točki.«)

Kdo ve, kaj nam Čevov izrek pove? (»Za poljubne točke L, M, N na stranicah BC, CA in AB trikotnika ABC se daljice AL, BM, CN sekajo v isti točki natančno takrat, ko je $\frac{AM}{MC} \cdot \frac{BN}{NA} \cdot \frac{CL}{LB} = 1$.«)

Kdo uči, kako se neenakosti v trikotniku dobi? (Na primer, da je skupna dolžina težiščnic manjša od vsote stranic: $t_a + t_b + t_c < a + b + c$.)

Kako bit' hočeš geometer, pa ti pretežko je v rokah držat' al' ravnilo al' šestilo? (in npr. konstruirati trikotnik, če poznaš a, b in višino na a).

Stanu se svoj'ga spomni, geogebraj (uporabljaj program GeoGebra) brez miru!

Pa šalo na stran! Knjiga, ki ne zahteva drugega predznanja kot poznavanje srednješolske matematike, prinaša jagodni izbor izrekov o trikotnikih, predstavljenih na kar se da privlačen način ter z obilico preglednih slik. Do bralca skuša biti kar se da prijazna tudi v smislu oznak in mu pričarati kolikor mogoče kraljevsko, nenaporno pot v matematiko. Dosledno izogibajoč se pastem pretirano stroge evklidske aksiomatske metode (ki bi vzorno oštevilčene trditve in formule dokazovala postopoma in kar se da ekonomično v slogu nekaterih učbenikov geometrije: »sklicujoč se na trditev 1.5.8 in upoštevaje definicijo 2.4., vidimo, da velja izrek 3.12«) zaniha v drugo skrajnost: trditve in formule niza drugo za drugo, včasih tudi brez dokazov (res pa je, da v teh primerih večinoma navaja reference, kjer jih lahko bralec sam poišče), namesto tega pa se vzhičeno navdušuje nad njihovo presenetljivostjo in lepoto (tako npr. Miquelovo odkritje, da »presečišča očrtanih krogov trikotnih delov poljubnega pentagrama ležijo na istem krogu« predstavi le s sliko)! Čeprav bralcu zastavlja tudi matematično-logične izzive v obliki nalog (npr. določene relacije lahko poskusi dokazati sam, preden prebere rešitev, spodbuja pa ga tudi h konstruiranju trikotnikov, pri čemer si lahko pri izboru naloge pomaga s tabelo najrazličnejših možnih trojic podatkov), pa poskuša zbuditi predvsem njegovo ustvarjalno domišljijo s tem, ko pogosto opozarja, na kakšne načine in v kakšnih smereh bi bilo mogoče navedene izreke in relacije izkoristiti kot odskočne deske za nadaljnje raziskovanje (pri tem je lahko v veliko pomoč tudi GeoGebra!).

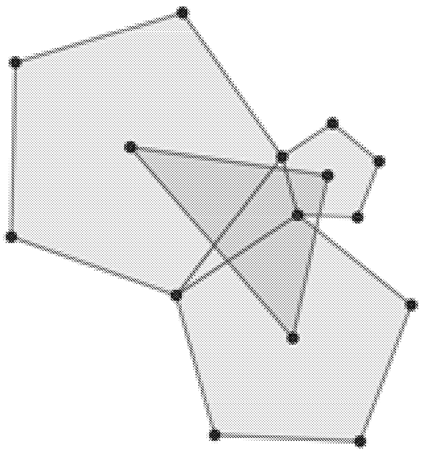
Knjiga obravnava naslednja tematska področja: daljice v trikotniku, ki se sekajo v isti točki, znamenite točke trikotnika in krogi, ki jih vsebujejo, posebne premice v trikotniku (npr. Eulerjeva, na kateri ležijo višinska točka, težišče in središče trikotniku očrtanega kroga), koristni izreki o trikotniku (npr. Routhov izrek (1896), ki izraža razmerje ploščine trikotnika XYZ, katerega oglišča so presečišča treh daljic AD, BE in CF iz oglišč trikotnika ABC do nasprotnih stranic in ploščine trikotnika ABC s pomočjo razmerij $\frac{AF}{FB} = r$, $\frac{BD}{DC} = s$ in $\frac{CE}{EA} = t$, s formulo $\frac{\Delta XYZ}{\Delta ABC} = \frac{(rst-1)^2}{(rs+r+1)(rt+t+1)(st+s+1)}$ in iz katerega se da izpeljati Čevov izrek kot poseben primer), formule za ploščino trikotnika in njegovih delov, neenakosti v trikotniku (npr. s pomočjo trikotnika lahko pokažemo, da veljajo med aritmetično, geometrijsko in harmonično sredino števil a in b relacije $AM \geq GM \geq HM$, kjer je $AM = \frac{a+b}{2}$, $GM = \sqrt{ab}$, $HM = \frac{2ab}{a+b}$), zlate trikotnike, konstrukcije pravilnih n-kotnikov, itd. Posebno poglavje, ki nekoliko štrli iz sicer enotne zasnove knjige, je posvečeno trikotnikom in fraktalom; tu srečamo npr. presenetljivo povezavo med Pascalovim trikotnikom in trikotnikom Sierpinskega, razložen je tudi pojem fraktalne dimenzije, omenjena je Kochova snežinka, pa tudi krivulje, ki zapolnijo bodisi navaden trikotnik bodisi trikotnik Sierpinskega.

V knjigi, iz katere se lahko naučimo veliko koristnih pojmov v zvezi s trikotniki (npr. »Čevova daljica« je daljica od oglišča trikotnika do katerekoli točke nasprotne stranice) najdemo tudi kar nekaj podatkov o znamenitih matematikih, ki so se ukvarjali s trikotniki. Prav tako je v njej veliko pomembnih formul, s pomočjo katerih lahko rešimo mnoge naloge v zvezi s trikotniki. Tako nam npr. Stewartov izrek: $b^2m + c^2n = a(d^2 + mn)$, kjer je $AD = d$, $m = BD$, $n = DC$, pomaga izračunati dolžino poljubne Čevove daljice AD (npr. težiščnice, višine, simetrale kota, itd.). Pomemben je tudi Simsonov izrek: »Presečišča stranic a, b, c trikotnika in pravokotnic TA', TB', TC' nanje, narisanih iz katerekoli točke T trikotniku očrtanega kroga, so kolinearne.«

V knjigi, namenjeni popularizaciji geometrije, seveda ni smel manjkati tudi Napoleonov izrek (»Središča enakostraničnih trikotnikov nad stranicami poljubnega trikotnika so oglišča enakostraničnega trikotnika.«), ki ga je sicer prvi objavil Dr. W. Rutherford leta 1825, štiri leta po Napoleonovi smrti. Avtorja pravita, da še do današnjega dne ni jasno, ali je Napoleon sploh poznal to trditev, ki mu jo pripisujejo. Med posebnimi dragulji, obravnavanimi v tej knjigi, je še zlasti vreden omembe »čudežni« Morleyev izrek iz leta 1900, ki pravi: »Presečišča sosednjih trisektorjev (daljic, ki delijo kot na tri enake dele) v trikotniku oblikujejo enakostranični trikotnik«; v dodatku knjige najdemo kar tri njegove dokaze. Prav tako je častno mesto dodeljeno slavnemu Feuerbachovemu izreku (1822), ki pravi: »Krog, ki gre skozi središča višin trikotnika, se dotika vseh štirih krogov, ki so tangentni na tri stranice trikotnika.«

Poglavitna odlika knjige *Skrivnosti trikotnikov* je v tem, da bralcu zelo hitro odstre lepoto, ki se skriva v resnicah o trikotniku, posreduje pa tudi mnoge koristne formule in čudovite dokaze najpomembnejših izrekov. Toda bodite previdni, ko jo prebirate: to področje vas namreč lahko tako očara, da boste posegli po kakšni še bolj sistematični knjigi o trikotnikih, in geometrija bo ostala vaša strast za vse življenje! Bralcem Obzornika, ki radi rešujejo geometrijske naloge, pa zastavljam naslednji problem, ki se mi je porodil ob branju te knjige: Dokaži ali ovrzi naslednjo hipotezo (če bi bila resnična, bi šlo za posplošitev Napoleonovega izreka): »Za poljuben $n \geq 3$ so središča pravilnih n-kotnikov nad stranicami poljubnega trikotnika oglišča enakostraničnega trikotnika.«

Odgovor: Slika, narisana s pomočjo programa GeoGebra, »jasno kaže«, da za $n = 5$ hipoteza ne velja. Ali znate to tudi *dokazati*, npr. z vektorji?



Jurij Kovič

OPRAVIČILO

V mojem predlogu članom DMFA v Pismih bralcev v lanski tretji številki Obzornika, da bi poiskali nedvoumen način sporočanja številčnih podatkov in primerjav v pogovornem jeziku, npr. pri »enkratenju« (enkrat več), sem uporabil besedo »spakovanje«. Oznaka je povsem neprimerna in mi je žal, da sem jo zapisal. Mnogi govorci »enkratijo« zato, ker so prepričani, da je tako prav.

V peti številki Obzornika je prof. Swansonova enkratenje slovnično prepričljivo razlagala in ga predstavila kot edino možno rešitev. Prof. Hribar pa opozarja, da »je jezik zelo gibek in ga lahko uporabimo na različne načine«, v šoli »čim bližje vsakdanji govorici« ... Radoveden sem, kakšen bi bil rezultat ankete, ki bi jo napravili med (nepripravljenimi!) »vsakdanjimi« anketiranci:

Obkrožite pravilni odgovor:

- 30 je devetkrat več kot 3.
- 30 je desetkrat več kot 3.

Če bi bilo enkratovanje res edina prava, svetovno priznana rešitev – no prav (šolarje pa pripravimo na dvoumnosti, ki jih čakajo)! Vendar se mi zdijo v enkratovanju – sicer pravilne – izjave včasih malce čudne, prav nič vsakdanje:

- Tristo je dvakrat več kot sto.
- Janez je dobil tisoč evrov, bančni direktor je dobil 999-krat več ...
- Če se temperatura poveča enkrat, se energija poveča petnajstkrat.
- Teta ima tretjinokrat več (denarja) kot jaz.
- Število, ki je dvakrat manjše od sto, je negativno.
- Enkrat manj kot sto je ... (npr. »... marca je bil dohodek enkrat manjši« = »... niso dobili plače«?)
- Na cesti je/ni ničkrat manj ljudi ...

Seveda se zadregam lahko izognemo z malce spremenjenim govorjenjem ali pisanjem. Pri najpogostejši uporabi v vsakdanji govorici je dvojna računska operacija (dodajanje produkta, npr. $300 = 100+2\times100$) težje dojemljiva od enkratnega množenja ($300 = 3 \times 100$), in v tem je tudi izvirni greh »enkratne« izbire! Poleg tega enkratenje ne zmore obratne primerjave, ki jo pa vsakdanja govorica zmore: če je Janez (160 cm) dvakrat večji od bratca (80 cm) – potem je bratec dvakrat manjši od Janeza! (Pri tem bratec – revež negativni – sploh ne ve, da dejansko meri polkrat toliko kot Janez; ker še ne pozna ulomkov, ga ne moremo potolažiti niti z dejstvom, da ima množenje s polovico enak učinek kot deljenje z dva!)

Vsakdanja govorica (npr. z dodatkom ŠE) pa omogoča tudi dodajanje in enkratenje: ... (še) enkrat več ..., še dvakrat več ..., če že hočemo po vsej sili enkratiti in dodajati.

Peter Prelog

VESTI

GOSPOD DAVORIN TOMAŽIČ

V novembru se je v enaindevetdesetem letu starosti poslovil gospod Darine Tomažič. V šestdesetih letih prejšnjega stoletja je bilo na Oddelku za fiziko Univerze v Ljubljani pomembnih nekaj profesorjev in gospod Tomažič, ki je bil med profesorji znan kot Darine. Profesorji so skrbeli vsak za svoj predmet, Darine pa, bi lahko rekli, za skoraj vse drugo. Začetki poučevanja fizike na Univerzi v Ljubljani so tesno povezani z didaktično zbirko eksperimentov iz fizike, ki sta jo zasnovala profesorja Kuščer in Moljk, a tudi Darine Tomažič, saj je bila njegova ročna spretnost, požrtvovalnost, predanost in organizacijska sposobnost neprecenljiva za uspeh tega podjetja. Darine je organiziral in vodil delavnice (mehanično, mizarsko, steklopihaško) na oddelku za fiziko, upravljal zgradbe, pomembno sodeloval pri graditvi stavbe na Jadranski 19, razporejal in opravljal delo tehničnih sodelavcev. V predračunalniški dobi je bil nepogrešljiv pri pisanju člankov, saj je le on znal risati grafe s tušem na prozoren papir, kakor so zahtevale tedanje revije. Razporejal je tudi delo pri tipkanju čistopisov člankov na »ta boljši« pisalni stroj. Samo prof. Kuščerju je tako pomagal urediti devet knjig. Poleg tega nas je dolga leta pri predmetu Laboratorijske veščine učil raznih spretnosti od spajkanja, piljenja, žaganja, povezovanja električnih napeljav, ... in nazadnje do pihanja stekla.

Pri tem predmetu smo se morda naučili nekaj skromnosti, ko smo spoznali, da veščine niso kar tako in zahtevajo podoben napor za obvladovanje kakor študij. Pihanje stekla je še danes za mnoge med nami čarovnija, ki jo je Darine izvajal, mi pa je nismo znali nikoli ponoviti. Darinetu smo vedno rekli gospod, čeprav to takrat ni bilo v navadi, ker je bil do vseh, profesorjev in študentov, enako spoštljiv in vedno zvest svoji besedi. Tisti, ki smo ga poznali, ga bomo hranili v spoštljivem spominu.

Andrej Čadež

Davorin Tomažič (rojen 10. 9. 1923 v ljubljanskih Mostah, po izobrazbi elektrotehnik) je neločljivo povezan z zgodovino Oddelka za fiziko Univerze v Ljubljani in DMFA.

Takoj po drugi svetovni vojni so bili na ljubljanski univerzi fiziki zaposleni na dveh fakultetah. Tako sta bila recimo Anton Peterlin in Ivan Kuščer na Prirodoslovno-matematično-filozofski fakulteti (kjer so na leto imeli kako diplomo ali dve iz pedagoške fizike). V okviru Oddelka za kemijo na Tehniški fakulteti pa takrat najdemo med drugim Antona Moljka, Sneguljko Detoni in Davorina Tomažiča, ki so tesno sodelovali s fiziki z druge fakultete. Leta 1952 so na Tehniški fakulteti odprli študij tehnične fizike. Nanj se je prva leta vpisovalo po 20–30, kasneje tudi več študentov. Kot piše Sneguljka Detoni [2]: *... Moljkova ideja je bila, da novi študij temelji na eksperimentalni fiziki, z odličnimi predavanji in poskusi, v celoti enakovreden drugim velikim univerzam ... Posebna zasluga dr. Moljka za fiziko je bila, da je odkril Davorina Tomažiča (Darineta) in ga povabil na fiziko, kjer je ostal do upokojitve (1983). Darine je bil izredno sposoben sodelavec na fiziki, vodja delavnice, upravnik stavb. Velik je njegov delež pri izgradnji eksperimentalne fizike ...*

Del fizike je sprva domoval skupaj z matematiki v osrednji zgradbi Univerze, na Kongresnem trgu. Pod vodstvom Antona Peterlina so ob gradnji Fizikalnega inštituta Akademije (ki se je preimenoval v Inštitut Jožef Stefan) na Jadranski ulici začeli tudi gradnjo *Velike fizikalne predavalnice* (zdaj imenovane *Peterlinov paviljon*). Profesor Peterlin je želel, da bi bila dvorana podobna sodobnim predavalnicam v Švici, zato je poslal Davorina Tomažiča na ogled v Basel in Zürich. Predavalnica je bila odprta novembra 1953 [1]. Postala je središče pouka fizike in je svojo vlogo dobro opravljala vse do leta 2009, ko je doživela prenovo, ne da bi bil prvotni koncept bistveno spremenjen. V akademskem letu 1968/69 sem v njej poslušal Fiziko I. Izvrstna predavanja Janeza Strnada, skupna za fizike, kemike in matematike v nabito polni dvorani s 350 sedeži, so bila podprta z dobro premišljenimi poskusi, pri katerih je pomagal Davorin Tomažič. Dobro se še spomnim, kako je pri ilustraciji ohranjanja vrtilne količine zavrtel profesorja Strnada na stolu. Seveda pa smo videli tudi bolj zapletene poskuse, za katere je bilo treba veliko iznajdljivosti, dela in eksperimentiranja v delavnicah.

Konec petdesetih let se je v Jugoslaviji okrepila ideja, da potrebujemo tudi centre, ki ne bodo primarno usmerjeni v jedrsko fiziko, ampak bi se osredinili na fiziko trdne snovi. Tako sta nastala dva nova fizikalna inštituta v Zagrebu in Beogradu. V Ljubljani je Univerza leta 1960 ustanovila Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko (IMFM) [3]. (Isto leto je bila ustanovljena tudi Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo (FNT), ki je postala center študija fizike.) V drugi polovici šestdesetih let je nastal velikopotezen načrt gradnje dveh petnadstropnih stavb s povezovalnim traktom na Jadranski ulici. Zagotovljena so bila tudi sredstva, za opremo po zaslugi Antona Moljka celo iz zveznih fondov takratne države. Žal je prišlo do zapleta z arhitektom, ki je narisal modernistično fiksno stekleno fasado, in predstavnikoma IMFM Kuščerjem in Moljkom, ki sta želela stavbo, v kateri lahko normalno odpiraš okna. Arhitekt se ni strinjal z željami naročnika in je na koncu raje odstopil, kot da bi spreminjal načrt. Tako je prišlo do velike zamude. Zaradi inflacije je precejšen del denarja skopnel, in tako je bila leta 1969 zgrajena le stavba na Jadranski 19 in temelji stavbe na Jadranski 21 (na pilotih). Novi projektanti so bili bolj dostopni za dialog. Davorin Tomažič je pomagal izboljšati konstrukcijo in opremo. Narisal je mnogo modifikacij originalnih načrtov in nadziral izvedbo.

Za brezhibnost stavb in opreme Oddelka za fiziko in Oddelka za matematiko je Davorin Tomažič skrbel enako ali morda še bolj zavzeto kot za urejenost lastnega (gostoljubnega) stanovanja. Če je bilo treba, je bil na Jadranski tudi v nedeljo. Bil je vljuden in prijazen, a za tiste, ki jih je vodil, nesporna avtoriteta. Odlično se je spoznal na tehnične zadeve in bil učinkovit ter zanesljiv. Imel je »dve desni roki«. Pomagal je pri občnih zborih DMFA in sindikalnih srečanjih. Vodil je tehnična dela pri prvi obnovi Plemljeve hiše na Bledu, ki jo je naše Društvo dobilo v slabem stanju. Precej teh del so opravili on in zaposleni v delavnicah Oddelka za fiziko. Na predlog DMFA je v letu 1974 prejel državno odlikovanje red dela s srebrnim vencem.

LITERATURA

[1] J. Bonča, *Ob odprtju prenovljenega Peterlinovega paviljona*, Obzornik mat. fiz. **56**, (2009), 148–150.

[2] S. Detoni, *Prispevek k zgodovini fizike v Ljubljani* (2007), pregledal ter dopolnil Robert Blinc.

[3] Predstavitev Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko, ur. S. Klavžar in J. Mrčun, IMFM, Ljubljana, 2008, 64 str.

Peter Legiša

PROF. DR. PETER ŠEMRL NOVI PREDSEDNIK ILAS

Peter Šemrl je bil izvoljen za predsednika International Linear Algebra Society (ILAS) za obdobje od 1. marca 2014 do 1. marca 2017. Tako nadaljuje delo uglednih predsednikov tega društva.

Navedimo jih: Hans Schneider (1987–1996), Richard A. Brualdi (1996–2002), Daniel Hershkowitz (2002–2008) in Stephen Kirkland (2008–2014).

Ob tem še povejmo, da je Bojan Kuzma z Univerze na Primorskem eden od urednikov *Image*, glasila tega društva. V zadnji 51. številki te revije je intervju s Thomasom J. Laffeyem, ki ga je naredila Helena Šmigoc, profesorica na University College v Dublinu.

Slovenske matematičarke in matematiki tudi sicer prispevajo viden delež raziskav na področju Linearne algebre. K temu je z izredno obsežnim, kakovostnim in odmevnim raziskovalnim delom ter mentorstvi veliko prispeval prav Peter Šemrl.

Matematik novi direktor ERC (European Research Council)

V glasilu Evropskega matematičnega društva *EMS Newsletter* [1] je bil objavljen zanimiv intervju z **Jean-Pierrom Bourguignonom**, dolgoletnim direktorjem znanega francoskega inštituta IHÉS. Zdaj je postal direktor ERC (European Research Council). Njegov portret je na naslovnici revije.

Kot pravi, sta ga v matematično kariero usmerila dva gimnazijska profesorja. Prvi je dobro razlagal in od njega zahteval, da pomaga sošolcem, zaradi česar se je moral poglobiti v snov. Drugi profesor je bil dober matematik, navdušen za znanost, a slab predavatelj, ki je presegal učni načrt in bil izredno zahteven. Prva ocena, ki jo je dobil pri njem, je bila 0,5 (na lestvici do 20). Bourguignon se je moral zelo truditi, a je z zadovoljstvom opazil, da se to splača, saj so se njegove matematične sposobnosti močno povečale. Vendar zgodbe s tem ni bilo konec. Isti profesor je po maturi vodil priprave na sprejemne izpite na elitnih šolah. Pravi, da je bilo zadnje leto priprav peklensko, saj je profesor za isto oceno od nadarjenih dijakov zahteval mnogo več kot od povprečnih. Kljub trudu ni dobival dobrih ocen. (Opomba: Priganjanje posameznikov in še posebej nadarjenih, da trdo delajo in izkoristijo večino svojih zmožnosti, je edino pametno. Ampak pri nas je to običajno in sprejemljivo le pri športnih treningih zunaj šole. Pri matematiki, fiziki ... bi taka obremenitev dijakov zdaj po mojih izkušnjah hitro pripeljala do prijav šolski inšpekciji. Skopost pri ocenah pred pol stoletja in več je bila kar pogosta – »da se otroci in mladostniki ne bi razvadili in navzeli napuha« – a se je meni zdela krivična in zgrešena. Dobro opravljeno delo zasluži ustrezno plačilo, če že ne pohvale.)

Bourguignon je bil sprejet na slavno École Polytechnique, a bil razočaran, saj so nekatere predmete slabo poučevali diplomanti iste šole, ki so bili povrhu tega brez znanstvenih referenc. Tako je s kolegi organiziral lastne dodatne kurze mehanike in verjetnosti. (Opomba: Kaj takega bi bilo pri nas težko izvesti, saj manjka kritična masa izredno nadarjenih in ambicioznih študentov.) Pouk fizike je bil dober – kar mu je kasneje zelo koristilo. Matematika pa je bila sploh odlična, saj so na šolo prihajali zunanji predavatelji, kot Gustave Choquet in Laurent Schwartz.

Kmalu je Bourguignon dobil stalno raziskovalno mesto na CNRS (Nacionalni center za znanstvene raziskave). Ni le odličen raziskovalec na področju med matematiko in mehaniko, ampak se je že mlad izkazal tudi kot vrhunski voditelj in upravljavec (z diplomatskim stilom in tipično francosko kulturo). Zanimivo je, da intervjuvanec na prvem mestu navaja, da je ponosen na sposobno administracijo, ki jo je najel in ustvaril na inštitutu. Opisuje, kako je s pomočjo prijatelja iz ameriške podružnice francoske banke dal izšolat več svojih uslužbencev za zbiranje donacij in v treh letih za IHÉS tako dobil 13 milijonov evrov. Vsega skupaj so zbrali 38 milijonov evrov in trenutno ima Inštitut 30 milijonov evrov rezerve. Zdi se, da precej ali večina denarja – za francoski inštitut! – izvira iz ZDA. Nekateri donatorji ponujajo denar s pogoji kot: dam vsoto A, če dobite iz drugih virov enako vsoto (angleško se temu pravi: *matching funds*). Tako mora prejemnik prepričati še druge donatorje in je manj možnosti, da bi bil denar neustrezno porabljen. Pa še učinek donacije je podvojen. Pravi, da mora inštitut tako zdaj najti dva milijona evrov k že ponujeni enaki vsoti. (Mimogrede, čeprav to ne sodi na področje znanosti: Goljufanje donatorjev pri odpravljanju posledic vojne v naši neposredni soseščini z desetkrat preplačanimi storitvami je žalostno dejstvo. Pa tudi pri nas bi se našel primer, ko iz doniranih sredstev ni nastalo skoraj nič od obljubljenega.)

Leta 1995 je Bourguignon postal predsednik EMS in iz malo opazne organizacije hitro naredil pomembno društvo – ki se tudi po njegovem štiriletnem mandatu uspešno razvija.

Kot pravi, se evropski denar za raziskave pogosto koncentrira v nekaj središčih, kar se mu ne zdi prav. Srednja in vzhodna Evropa dobita premalo sredstev glede na kakovost raziskovalcev. Prav tako je kritičen do tako imenovanega »zlatega standarda«, prostega objavljanja, pri katerem morajo avtorji sami priskrbeti denar za objavo. Lobisti komercialnih založnikov in britanska vlada so skoraj prepričali EU o podpori temu standardu (le za koga je zlat?), ki bi lahko močno povečal stroške znanstvenega raziskovanja. Na srečo celo nedavno poročilo britanskega parlamenta ugotavlja, da »zlati standard« dolgoročno morda ni v interesu države. Vsa matematična društva v Evropi imajo težave s financiranjem matematičnih publikacij (izjema je London Mathematical Society). Bourguignon meni, da bi morali združiti napore vseh teh malih založnikov pod nekakšnim evropskim dežnikom, saj se čas izteka. Zdi se tudi, da mu je bolj pri srcu »zeleni standard« objavljanja, ko po krajšem časovnem intervalu besedila postanejo prosto dostopna.

Mimogrede, v isti številki glasila EMS je vredno prebrati na straneh 34–38 še besedilo *In the Mirror of Mathematics*, ki ga je napisal romunski matematik Preda Mihăilescu z Univerze v Göttingenu. Je strokovnjak za uporabno matematiko in kriptografijo, ki se je vrnil v čisto matematiko – teorijo števil – in leta 2002 dokazal *Catalanovo domnevo*. Ta pravi, da ima enačba

$$p^n - q^m = 1$$

v naravnih številih edino rešitev $p = m = 3, \quad n = q = 2$.

Zanimivo je njegovo opažanje, da v konfliktih matematik pogosto laže razjasni interese nasprotnih strani kot vpleteni.

Težave z izpiti

Anketa med kanadskimi študenti [2] je pokazala, da manj goljufajo na izpitih, če profesor ocenjuje skrbno, nepristransko in so pogoji za vse enaki. (Meni se je kar obneslo, da sem za vsak teoretični test pred popravljanjem pripravil podroben točkovnik in ga dal študentom na ogledu. Na ustnih izpitih pa si zapisujem posamezna vprašanja in ocene odgovorov nanje, kar zmanjšuje možnost napak, še posebej proti koncu delovnega dneva, ko pozornost popusti.) Študenti posebno zamerijo, če imajo le nekateri med njimi dostop do starih izpitov in testov, ki se skoraj nespremenjeni uporabljajo še naprej. V tem primeru je goljufanja neprimerno več

Tudi če naredimo vse prav, problemov ni konec. Ko sem začel pri poučevanju na drugih fakultetah objavljati besedila preteklih teoretičnih testov, je to sprva imelo dober učinek, saj so vsi študenti videli, kaj lahko pričakujejo. Ker pa se na takih testih mnoga vprašanja nujno ponavljajo, sem kmalu zaplenil natisnjen seznam odgovorov na vprašanja s prejšnjih izpitov. Problem je bil v tem, da so bili nekateri odgovori v tem seznamu napačni ali deloma napačni. Nevroznanost nam pove, da je napačno naučeno zelo težko nadomestiti s pravim, saj moramo najprej »razgraditi« napačne povezave v možganih. (Pri športu je večini jasno, da se napačno naučenih gibov, udarcev z loparjem … težko odvadiš. Pri intelektualnem znanju ni nič drugače!) Naslednja težava je bila, da so se nekateri študenti očitno učili le odgovore na stare teste. Vse to se mi je zgodilo dvakrat zaporedoma – na različnih fakultetah in pri dveh različnih predmetih. Na srečo sem zmeraj v teoretične teste dodajal kratke računske naloge, ki se niso ponavljale in so dobro pokazale operativno znanje. Kasneje besedil teoretičnih testov nisem več objavljal, sem pa na spletni učilnici obdržal nekaj primerov izpitnih vprašanj.

Najbolj bizaren in tudi ilustrativen primer je bila oseba, ki je po več neuspelih poskusih prišla na ustni izpit z »dvojnim znanjem«: s prej omenjenimi pomanjkljivimi odgovori na stare teste in z (verjetno kasneje pridobljenim) fotografskim spominom o zapiskih – ne da bi zmogla ali vsaj poskusila prvo povezati in popraviti z drugim.

Študenti želijo tudi vnaprej vedeti režim pri predmetu. Zato sem na spletni učilnici to preciziral. Blišč in bedo interneta kaže naslednja zgodba. Bodoči naravoslovec je nekaj iz tega besedila skušal zvedeti tako, da je na študentskem forumu objavil vprašanje: »Naj mi kdo pove …, saj se mi ne da brati teh litanij.«

»Litanije« so bile dolge stran in pol v ekstra velikih črkah.

LITERATURA

[1] M. Herzlich, *Interview with Jean-Pierre Bourguignon: »Mathematicians must move up a gear«*, EMS Newsletter 90, Dec. 2013, 29–33, `http://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/2013-12-90.pdf`, ogled 6. 2. 2014.

[2] Why student cheating is rampant, `http://www.cbc.ca/news/technology/why-student-cheating-is-rampant-1.1858067`, ogled 6. 2. 2014.

Peter Legiša

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, JANUAR 2014
Letnik 61, številka 1

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici je razvoj modela atoma: Thomsonov model pudinga z rozinami, Rutherfordov planetarni model, Bohrov model in kvantni model. V Bohrovem modelu elektroni krožijo okoli jedra po krogih z izbranim radijem, tako da je večkratnik njihove Brogliejeve valovne dolžine enak obsegu.