

Matematično simuliranje nateznega preizkusa z upoštevanjem deformacijske hitrosti in odvisnosti utrjevanja od stopnje deformacije

UDK: 620.176.245.174.21:620.178.152.512
ASM/SLA: Q, Q27, Q7h, Q21

M. Zalokar

1. UVOD

Natezni preizkus danega materiala je eden najpogostejših tehnoloških preizkusov v praksi. Kot vemo, je za ta preizkus značilno močno lokalno oženje, ko dosežemo maksimum sile. To je tudi ena glavnih preprek, da bi lahko na osnovi nateznega preizkusa dobili krivuljo plastičnosti. Z matematičnim modelom bomo poskušali opisati pojave, ki nastopajo pri nateznem preizkusu.

Zaradi enostavnosti predpostavimo enoosno napetostno stanje. Upoštevali pa smo:

1. hitrost deformacije;

2. koeficient utrjevanja n , ki pa ni konstanten, temveč je odvisen od stopnje deformacije. Le-to odvisnost smo dobili iz torzijskega preizkusa istega materiala.

Zaenkrat smo natezni preizkus izvedli pri dveh različnih kvalitetah jekla (Č 3990 in KV 10), pri sobni temperaturi in pri temperaturi 100 °C. Vlečna hitrost pa je bila enkrat manjša in drugič večja. Matematično simuliranje je bilo izvedeno za večjo hitrost trganja zaradi razmeroma dolgega časa računanja računalnika. Nobene omejitve ni tudi za manjše hitrosti vlečenja — to pa je tudi pokazano.

Za reševanje diferencialnih enačb je bila uporabljena Hammingova modificirana metoda prediktor — korektor. S pomočjo polinomne regresije pa smo dobili odvisnost utrjevanja od deformacije.

Namen tega članka je prikazati nekaj pristopov za ovrednotenje standardnih tehnoloških preizkusov, v tem primeru nateznega. S tem pa se nam hkrati odpirajo nove možnosti napovedovanja lastnosti materialov, kar pa nam lahko pride zlasti prav pri vseh preoblikovalnih postopkih.

2. TEORETIČNE OSNOVE NATEZNEGA IN TORZIJSKEGA PREIZKUSA

2.1 Enoosni natezni preizkus

Za začetek obravnavamo idealno trgalno epruveto osnosimetrične cilindrične oblike, to je tako,

ki se enakomerno razteza po celotni dolžini pri vlečenju s konstantno hitrostjo v . Za tako epruveto velja:

$$\epsilon_0 = \ln \frac{L(t)}{L_0} = - \ln \frac{A_0(t)}{A_0(0)} \quad (1)$$

L_0 je začetna dolžina, $L(t)$ pa je dolžina epruvete v času t . $A_0(0)$ je začetni prečni presek epruvete, $A_0(t)$ pa je prečni presek v času t . Velja tudi:

$$\dot{\epsilon}_0 = \frac{v}{L_0 + vt} = - \frac{\dot{A}_0(t)}{A_0(t)} \quad (2)$$

Upoštevali smo, da pri hitrosti vlečenja v velja: $L(t) = L_0 + vt$

Naši nadaljnji računi pa bodo temeljili na predpostavki, da je v nekem začetnem trenutku naša epruveta že zožena v sredini. To zmanjšanje prečnega preseka opišemo s funkcijo:

$$A(z, t = 0) = A_0(t = 0) \left[1 - \frac{f}{2} - \frac{f}{2} \cos \left(\frac{2\pi z}{L_0} \right) \right] \quad (3)$$

Splošna odvisnost prečnega preseka od lege in časa pa je seveda:

$$A(z, t) = A_0(t) \left[1 - \frac{f}{2} - \frac{f}{2} \cos \left(\frac{2\pi z}{L} \right) \right] \quad (3')$$

Parameter f v (3), oz. (3') nam podaja velikost nehomogenosti prečnega preseka. Za $f = 0$ bi imeli idealno palico. Iz teh dveh enačb tudi vidimo, da je prečni presek najmanjši v sredini epruvete — $A(z = 0, t) = A_0(t)(1 - f)$ in največji na robu — $A\left(z = \frac{L}{2}, t\right) = A_0(t)$. Na sl. 1 si lahko ogledamo

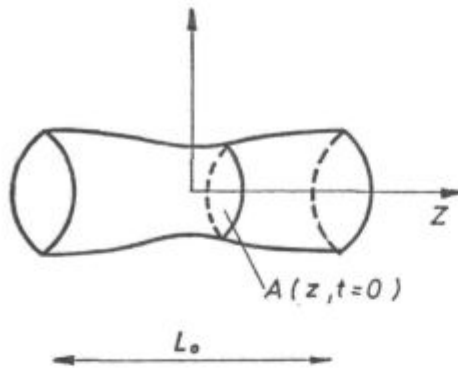
obliko naše trgalne epruvete, če smo predpostavili enačbo (3).

Analična aproksimacija krivulje plastičnosti, ki se največ uporablja, ima obliko potenčne funkcije

$$\sigma = K\epsilon^n$$

K in n sta konstanti, ϵ je efektivna deformacija in σ efektivna napetost. Mi pa uporabimo drugo obliko^{7, 8, 9}:

$$\sigma = K\epsilon^n \dot{\epsilon}^m \quad (4)$$



Slika 1
Oblika trgalne epruvete
Fig. 1
Original shape of tensile bar

V trgalni epruveti zanemarimo odstopanja od osnosimetričnega napetostnega stanja med stabilno deformacijo in na začetku končnega oženja. To pomeni, da so $\sigma_z, \epsilon_z, \dot{\epsilon}_z$ v smeri raztezanja. V (4) nastopa dodatni faktor $\dot{\epsilon}$, ki ga sicer tudi imenujemo intenziteta hitrosti deformacije. Ta faktor je potenciran na vrednost m ; m imenujemo lahko indeks deformacijske hitrosti (v angl. se često uporablja naziv strain — rate sensitivity). O koeficientih K in n bomo govorili kasneje, povem naj, da predpostavimo odvisnost $K(\epsilon)$ in $n(\epsilon)$.

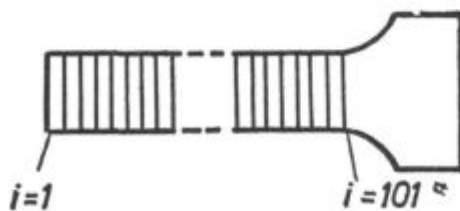
Naš nadaljni postopek pa je tak: polovico trgalne epruvete razdelimo na 100 delčkov (lahko seveda še več ali pa manj). Za to razdelitev rabimo torej $i = 101$ točk, pri čemer je prva točka v sredini epruvete, 101. točka pa na robu. Shematično je ta razdelitev prikazana na sliki 2.

Sila $P(t)$, ki deluje na epruveto v danem trenutku, mora biti v tem trenutku enaka v vsaki točki i vzdolž epruvete. Napišimo to silo $P(t)$:

$$P(t) = \sigma_z(z, t) \cdot A(z, t) = K \epsilon_z^n(z, t) \dot{\epsilon}_z^m(z, t) A(z, 0) e^{-\epsilon_z(z, t)} \quad (5)$$

V (5) smo upoštevali, da je:

$$\epsilon_z(z, t) = -\ln \frac{A(z, t)}{A(z, 0)} \quad (6)$$



Slika 2
Polovica trgalne epruvete, razdeljena na 100 enakih delčkov (101 točk)

Fig. 2
One half of a tensile bar divided into 100 equal elements (101 points)

Zaradi enostavnejšega pisanja od tu dalje ne bomo več pisali indeksa z . Ker velja, da je sila konstantna vzdolž epruvete v danem trenutku, je sila v i točki enaka sili v 101. točki. Za 101. točko pa naj velja (1), oz. (2). Napišemo enakost med tema dvema silama:

$$P(t) = \sigma(z_i, t) \cdot A(z_i, t) = \sigma_0 A_0(t) = \sigma_0 A_0(0) e^{-\epsilon_0(t)} \quad (7)$$

ali:

$$K(\epsilon_i) \epsilon_i^n(\epsilon_i) \dot{\epsilon}_i^m(t) A_i(0) e^{-\epsilon_i(t)} = K(\epsilon_0) \epsilon_0^n(\epsilon_0) \dot{\epsilon}_0^m A_0(0) e^{-\epsilon_0(t)} \quad (7')$$

in velja: $\epsilon_i = \epsilon(z_i)$;

$$\epsilon_0 = \epsilon(z_{i=101}),$$

$$A_i(0) = A_0(0) \left[1 - \frac{f}{2} - \frac{f}{2} \cos \left(\frac{\pi(i-1)}{100} \right) \right]$$

Po preureditvah dobimo končno enačbo za vsako točko i :

$$\dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon}_0 \left[\frac{K(\epsilon_0) \epsilon_0^n(\epsilon_0) A_0(0) e^{\epsilon_0}}{K(\epsilon_i) \epsilon_i^n(\epsilon_i) A_i(0) e^{\epsilon_0}} \right]^{\frac{1}{m}} \quad (8)$$

Sedaj bi radi imeli le še koeficienta K in n , ki ju bomo dobili iz torzijskega preizkusa.

2.2 Torzijski preizkus valjaste epruvete cilindrične oblike

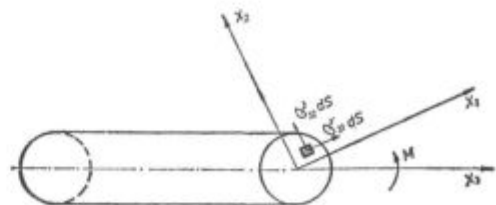
Najprej napišemo nekaj osnovnih enačb, ki veljajo za torzijo, kot je narisana na sl. 3. Za te razmere velja:

$$\sigma_{13} \neq 0; \sigma_{23} \neq 0; \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0 \quad (9)$$

Komponente deformacijskega tenzorja pa so:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} = \frac{\delta u_1}{\delta x_1} = \epsilon_{22} = \frac{\delta u_2}{\delta x_2} = \epsilon_{33} = \frac{\delta u_3}{\delta x_3} = \epsilon_{12} = \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u_1}{\delta x_2} + \frac{\delta u_2}{\delta x_1} \right) = 0 \quad (10) \\ \epsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u_1}{\delta x_3} + \frac{\delta u_3}{\delta x_1} \right) \neq 0 \\ \epsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u_2}{\delta x_3} + \frac{\delta u_3}{\delta x_2} \right) \neq 0 \end{aligned}$$

u_1, u_2 in u_3 so pomiki v smeri odgovarjajočih osi x_1, x_2 in x_3 (x, y, z). Brez izpeljav naj povemo, da



Slika 3
Torzija valjaste epruvete cilindrične oblike

Fig. 3
Torsion of a prismatic bar with circular section

velja za torzijo okrogle epruvete v elastičnem področju, pri kateri prečni prerezi ostanejo ravni:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\alpha x_2 x_3 \\ u_2 &= \alpha x_1 x_3 \\ u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

α je pri tem kot zavrtitve pri torziji na enoto dolžine:

$$\alpha = \frac{\varphi}{L} = \frac{2\pi \cdot \nu t}{L}$$

L je dolžina, ki jo torziramo in ν število vrtljajev v 1 sekundi.

Kot vemo, je splošen izraz za efektivno deformacijo:

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left[(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + (\epsilon_{22} - \epsilon_{33})^2 + (\epsilon_{33} - \epsilon_{11})^2 + \right. \\ &\quad \left. + 6(\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2 + \epsilon_{31}^2) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (12)$$

Z upoštevanjem (10) in (11) dobimo za naš primer:

$$\epsilon = \frac{\alpha r}{\sqrt{3}}; r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}; d\epsilon = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} dr \quad (13)$$

(Izpustili smo pisanje indeksa i)

Zaradi njihovega geometrijskega pomena veljajo formule (13) v elastičnem, pa tudi v plastičnem področju. Za $r = R$, kjer R pomeni polmer torzirajoče epruvete, bi imeli:

$$\epsilon = \frac{\alpha R}{\sqrt{3}}; \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\alpha} R}{\sqrt{3}} \quad (14)$$

$$\text{ali: } \epsilon = \frac{2\pi\nu t R}{L\sqrt{3}}; \dot{\epsilon} = \frac{2\pi\nu R}{L\sqrt{3}}$$

Navor pri torziji pa računamo po:

$$M = 2\pi \int_0^R \frac{\sigma}{\sqrt{3}} r^2 dr = \frac{6\pi\sqrt{3}}{\alpha^3} \int_0^{\epsilon} \sigma \epsilon^2 d\epsilon \quad (15)$$

Ker velja ϵ :

$$\frac{d}{d\alpha} \int_a^{b(\alpha)} F(\alpha) d\alpha = F(b) \frac{db}{d\alpha} \quad (16)$$

izračunamo dalje z upoštevanjem (15):

$$\frac{d(M\alpha^3)}{d\alpha} = 6\pi\sigma \frac{R^3 \alpha^2}{3\sqrt{3}} \quad (17)$$

Ob predpostavki $M = M(\alpha; \dot{\alpha})$ in ker velja

$$\frac{d\dot{\alpha}}{d\alpha} = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}$$

$$\text{imamo: } \frac{dM}{d\alpha} = \frac{\delta M}{\delta \alpha}, \quad \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + \frac{\delta M}{\delta \alpha} \quad (18)$$

Iz (17) in (18) dobimo:

$$\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2\pi \cdot R^3} \left(3M + \alpha \frac{\delta M}{\delta \alpha} + \dot{\alpha} \frac{\delta M}{\delta \dot{\alpha}} \right),$$

oziroma:

$$\sigma(\epsilon, \dot{\epsilon}) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi R^3} M \left(3 + \frac{\delta \ln M}{\delta \ln \epsilon} + \frac{\delta \ln M}{\delta \ln \dot{\epsilon}} \right) \quad (19)$$

ϵ in $\dot{\epsilon}$ sta podana z (14).

$\frac{\delta \ln M}{\delta \ln \epsilon}$ se običajno imenuje faktor utrjevanja n .

$\frac{\delta \ln M}{\delta \ln \dot{\epsilon}}$ pa imenujemo indeks deformacijske hitrosti m .

Sedaj izmerimo torzijsko krivuljo za dani material in iščemo regresijsko odvisnost v obliki⁶:

$$\ln M = a_0 + a_1 \ln \epsilon + a_2 (\ln \epsilon)^2 + \dots + m \ln \dot{\epsilon} \quad (20)$$

V primeru, da so le a_0 , a_1 in a_2 različni od 0, m pa je tudi različen od 0 in konstanten, bo veljalo:

$$M = e^{a_0 + a_1 \ln \epsilon + a_2 (\ln \epsilon)^2 + m \ln \dot{\epsilon}} \quad (21)$$

Če iščemo izraz za σ v en. (19) v obliki $\sigma = K \epsilon^n \dot{\epsilon}^m$, imamo:

$$\frac{\sqrt{3}}{2\pi R^3} e^{a_0 + a_1 \ln \epsilon + a_2 (\ln \epsilon)^2 + m \ln \dot{\epsilon}} (3 + a_1 + 2a_2 \ln \epsilon + m) = K \epsilon^n \dot{\epsilon}^m$$

Od tod izpeljemo koeficient utrjevanja n :

$$n = a_1 + 2a_2 \ln \epsilon \quad (22)$$

Faktor K pa je:

$$K = \frac{\sqrt{3}}{2\pi R^3} e^{a_0} \epsilon^{-a_1} \dot{\epsilon}^{-a_2 \ln \epsilon} (3 + a_1 + 2a_2 \ln \epsilon + m) \quad (23)$$

Z (22) in (23) imamo sedaj dano odvisnost $n = n(\epsilon)$ in $K = K(\epsilon)$. Izraza za n in K vstavimo potem v enačbo (8).

3. EKSPERIMENTALNE MERITVE

Torzijske in trgalne epruvete smo izvedli za 2 kvaliteti, Č 3990 in KV 10. Kemična sestava je dana s tabelo:

	C	Si	Mn	P	S	Cr	Ni	Cu	Al	Sn
Č 3990	.16	.02	1.31	.085	.238	.34	.13	.27	.002	.018
KV 10	.06	.01	.40	.011	.041	.10	.11	.22	.002	.012

Toplotno so bili vzorci obdelani tako, da smo jih najprej mehko žarili 1 uro na temp. 800 °C, potem pa smo jih počasi ohladili na mirujočem zraku.

3.1 Mikrotrgalni preizkus

Izvedli smo ga pri 2 konstantnih hitrostih vlečenja pri temp. 20°C, nato pa še pri temp. 100°C. Vlečni hitrosti sta bili 4.2 mm/min. in 8 mm/min. Na registrirani papir smo posneli silo (v N) v odvisnosti od časa (v s). Preizkušanece je valjaste oblike, dolžine 50 mm, na sredini je tanjši, v dolžini pribl. 28.5 mm, premer tanjšega dela pa je pribl. 4.0 mm.

Na meji elastičnosti smo vlečenje ustavili, da bi lahko izmerili premer vzdolž trgalne epruvete. Ugotovljeno je, da se premer ni zmanjšal enakomerno vzdolž celotnega ravnega dela, temveč je na mestu, kjer se kasneje epruveta pretrga, manjši kot drugje. To zmanjšanje premera ni bilo možno izmeriti pri 100°C, kjer je takrat trgalna epruveta v peči.

3.2 Torzijski preizkus

Izvedli smo ga prav tako pri 20°C in 100°C, hitrost torziranja pa je bila 27 vrt./min. Na registrirni papir smo posneli navor (v Nm) v odvisnosti od časa (v s). Epruveta je valjaste oblike, dolžine 400 mm, ki je na sredini tanjša (premer tanjšega dela je pribl. 6 mm), v dolžini 42.0 mm.

Vse meritve dolžin in premerov so bile izvedene s klasičnimi merilnimi sredstvi — z mikrometrskim vijakom in kljunastim merilom.

4. NUMERICNI IZRAČUN

4.1 Ocenitev koeficientov m in faktorja f

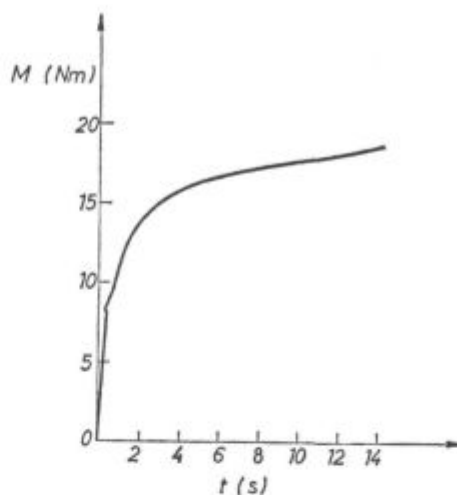
Najprej povemo, da koeficient m, ki je sicer konstanten, zavzame vrednosti med 0.001 in 0.01 za kovinske materiale pri sobnih temperaturah, pri višjih temperaturah pa je že nižji^{7,8,9}. Pri temp. 100°C je pri nas vrednost m že med 0.01 in 0.015. Koeficient m smo določili z preizkušanjem različnih vrednosti, nato pa smo izbrali tistega, pri katerem smo dobili najboljše ujemanje med izračunano in izmerjeno krivuljo. Nobena izmed dosedaj uporabljenih metod za določevanje m namreč še ni splošno veljavna. Celo pri istem materialu nam lahko ena metoda da drugačno vrednost m kot druga metoda¹⁰.

Tudi določevanje faktorja f je zvezano s precej ugibanja. Izhajali smo iz ocene, ki smo jo dobili tako, da smo merili premer na meji elastičnosti in iz podatkov v literaturi.^{7,8} Vrednost f naj bi bila manjša za sobno temperaturo (med 0.002 in 0.01), za večje temperature pa je f že večji od 0.01.

Tu naj še omenimo, da lahko s spreminjanjem f ali m ali pa obeh hkrati dosežemo še boljše ujemanje med izmerjenimi in izračunanimi krivuljami.

4.2 Izračun regresijskih koeficientov

Na elektronskem računskem centru ŽJ imamo narejen program za račun regresijskih koeficientov pri polinomni regresiji.



Slika 4

Navor v odvisnosti od časa, frekvenca $\nu = \frac{27}{60} \text{ s}^{-1}$

Fig. 4

Torque — time curve, frequency $\nu = \frac{27}{60} \text{ s}^{-1}$

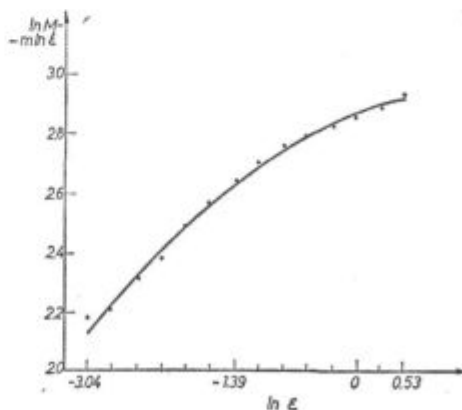
Izmerimo krivuljo navora v odvisnosti od časa.

Zgled je na sl. 4 ($\nu = \frac{27}{60} \text{ s}^{-1}$).

Zaradi (20) želimo dobiti regresijske koeficiente v regresiji:

$$\ln M - m \ln \dot{\epsilon} = a_0 + a_1 \ln \epsilon + a_2 (\ln \epsilon)^2 + \dots$$

Postopoma po naslednjem vrstnem redu: v času t odčitamo vrednost navora M, ϵ in $\dot{\epsilon}$ sta v tem času dana s (14). Izračunamo $\ln M - m \ln \dot{\epsilon}$ in za ta čas. Postopek ponovimo pri različnih časih in dobimo izmerjeno odvisnost $\ln M - m \ln \dot{\epsilon}$ od $\ln \epsilon$. Podatke vstavimo v program za polinomno regresijo in dobimo še zgornjo odvisnost v funkcijski obliki. Tako bi dobili za razmere na sl. 4 naslednje regresijske koeficiente pri regresiji 2. stopnje in za vrednost $m = 0.004$: $a_0 = 2.87035$, $a_1 = 0.11705$, $a_2 = -0.04171$.

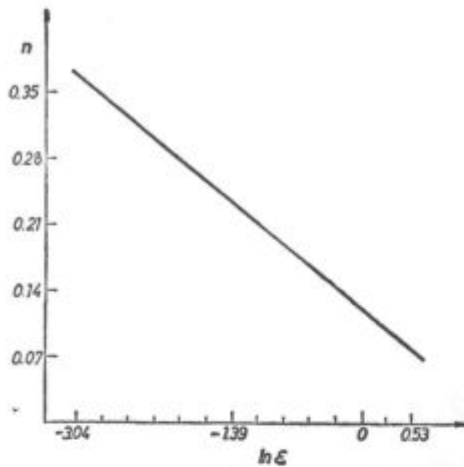


Slika 5

Izračunana (polna črta) in izmerjena (točke) odvisnost $\ln M - m \ln \dot{\epsilon}$ od $\ln \epsilon$

Fig. 5

$\ln M - m \ln \dot{\epsilon}$ as the of $\ln \epsilon$ — calculated (full line) and measured (points)



Slika 6

Izračunana odvisnost med koeficientom n in $\ln \epsilon$

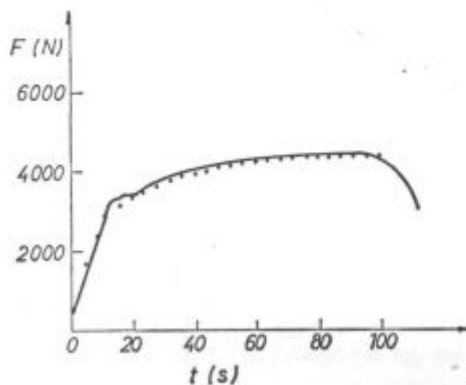
Fig. 6

Strain — hardening exponent n as the function of $\ln \epsilon$

Na sl. 5 je narisana funkcijska odvisnost $\ln M - m \ln \dot{\epsilon}$ od $\ln \epsilon$, ki jo izračunamo (polna črta), in izmerjena odvisnost (točke). Koeficiente a_0 , a_1 in a_2 potem vstavimo v (22), oz. (23). Na sl. 6 pa je še narisana odvisnost n ($\ln \epsilon$), ki jo dobimo iz (22) pri našem primeru.

4.3 Simuliranje mikrotrgalnega preizkusa

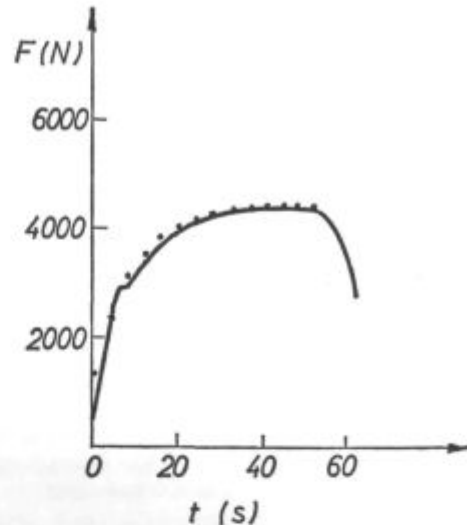
Pri računski metodi prediktor — korektor, ki jo uporabimo za reševanje diferencialnih enačb, moramo poznati vrednosti ϵ_i , $\dot{\epsilon}_i$ v nekem začetnem času t_0 . Bistveno za to metodo je tudi to, da računamo vrednosti rešitev dif. enačb v ekvidistančnih točkah — v našem primeru v ekvidistančnih časovnih intervalih Δt . Kot smo že prej omenili, velja, da se začne trgalna epruveta lokalno zoževati, ko smo še v elastičnem področju. Prav zaradi tega privzemamo obliko trgalne epruvete, ki je dana z (3), že v elastičnem področju. Trenutek t_0 , ko začnemo računati z (3), je naš začetni čas. Do tega



Slika 7

Mikrotrgalni preizkus KV 10, $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, $v = 4.2 \text{ mm/min}$

Fig. 7

Force — time curve for steel KV 10, $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$,
 $v = 4.2 \text{ mm/min}$ 

Slika 8

Mikrotrgalni preizkus KV 10, $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, $v = 8 \text{ mm/min}$

Fig. 8

Force — time curve for steel KV 10, $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, $v = 8 \text{ mm/min}$

trenutka pa upoštevamo homogeno obliko trgalne epruvete — od tu pa lahko izračunamo ϵ_i , $\dot{\epsilon}_i$, ker pač poznamo hitrost vlečenja, in začetni premer. Imamo torej $\epsilon_i(t_0)$, $\dot{\epsilon}_i(t_0)$ v vsaki točki i . Po metodi prediktor — korektor izračunamo $\epsilon_i(t_0 + \Delta t)$, $\dot{\epsilon}_i(t_0 + \Delta t)$ in tako potem nadaljujemo po korakih Δt do konca. Tu naj omenimo, da je lokalno oženje v elastičnem področju res zelo majhno in morda v praksi zanemarljivo, pomembno pa je v naših izračunih prav zaradi enačbe (3).

5. PRIMERJAVA MED IZMERJENIMI IN IZRAČUNANIMI NATEZNIMI KRIVULJAMI

Na vseh naslednjih slikah predstavlja polna črta izmerjeno krivuljo, točke pa so izračunane po prej opisanih postopkih. Vsaka zadnja narisana točka je zadnja vrednost za silo, ki jo računalnik še izračuna.

Regresijski koeficienti a_0 , a_1 in a_2 so srednja vrednost 2 paralelnih torzijskih preizkusov.

5.1 Mikrotrgalni preizkus KV 10 pri temp. $20 \text{ }^\circ\text{C}$ in hitrosti vlečenja $v = 4.2 \text{ mm/min}$ (sl. 7)

Regresijski koeficienti so:

$$a_0 = 2.89018, a_1 = 0.0993, a_2 = -0.04822$$

Za f vrednost postavimo 0.003, m vrednost pa je 0.004

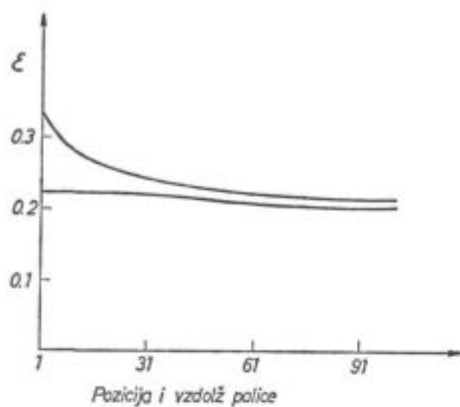
5.2 Mikrotrgalni preizkus KV 10 pri temp. $20 \text{ }^\circ\text{C}$ in hitrosti vlečenja $v = 8 \text{ mm/min}$ (sl. 8)

Regresijski koeficienti so:

$$a_0 = 2.89018, a_1 = 0.0993, a_2 = -0.04822$$

Vrednosti f in m sta:

$$f = 0.003, m = 0.004$$



Slika 9

Deformacija ϵ kot funkcija lege vzdolž trgalne epruvete pri 2 začetnih vrednostih deformacije

Fig. 9

ϵ as the function of position along the tensile bar for 2 stages of deformation

Na sl. 9 narišemo še vrednosti za ϵ v vsaki točki i , če je prvič: $\epsilon(1) = 0.226$ in drugič: $\epsilon(1) = 0.336$

Na sl. 10 pa je narisana odvisnost $\dot{\epsilon}$ v vsaki točki vzdolž trgalne epruvete, če je zopet prvič $\epsilon(1) = 0.226$ in drugič $\epsilon(1) = 0.336$

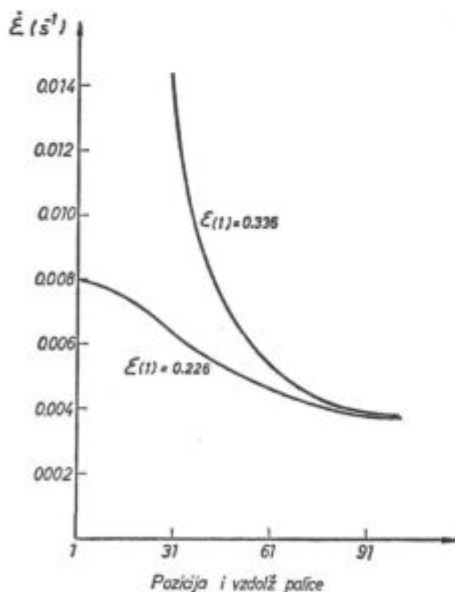
5.3 Mikrotrgalni preizkus KV 10 pri temp. 100 °C in hitrosti vlečenja $v = 8$ mm/min (sl. 11)

Regresijski koeficienti so:

$$a_0 = 2.86535, a_1 = 0.1335, a_2 = -0.04807$$

Vrednost f in m sta:

$$f = 0.015, m = 0.012$$

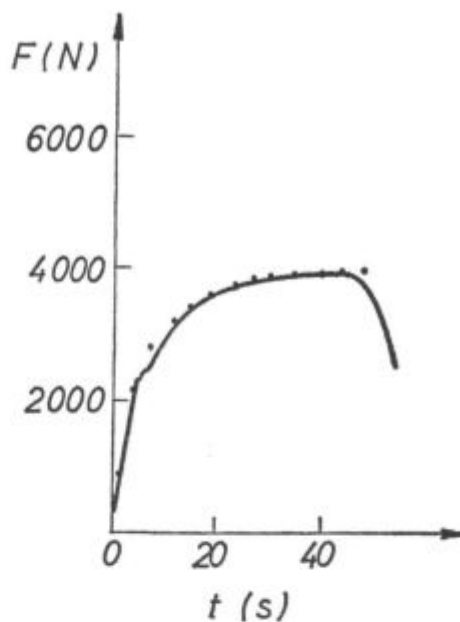


Slika 10

Deformacijska hitrost $\dot{\epsilon}$ vzdolž trgalne epruvete pri deformacijah, ki ustrezajo sl. 9

Fig. 10

Strain — rate $\dot{\epsilon}$ along a tensile bar for deformations of fig. 9



Slika 11

Mikrotrgalni preizkus KV 10, $T = 100$ °C, $v = 8$ mm/min

Fig. 11

Force — time curve for steel KV 10, $T = 100$ °C, $v = 8$ mm/min

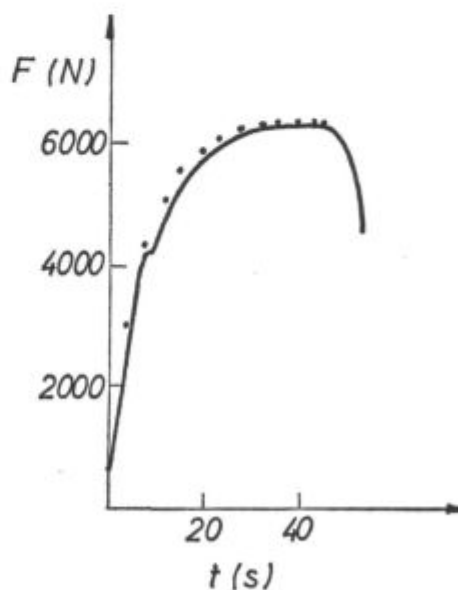
5.4 Mikrotrgalni preizkus Č 3990 pri tem. 20 °C in hitrosti vlečenja $v = 8$ mm/min (sl. 12)

Regresijski koeficienti so:

$$a_0 = 3.09748, a_1 = -0.09558, a_2 = -0.09836$$

Vrednosti f in m sta:

$$f = 0.0024 \text{ in } m = 0.006$$

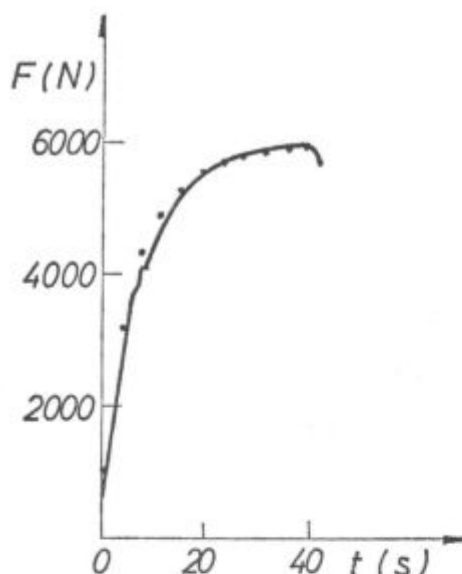


Slika 12

Mikrotrgalni preizkus Č 3990, $T = 20$ °C, $v = 8$ mm/min

Fig. 12

Force — time curve for steel Č 3990, $T = 20$ °C, $v = 8$ mm/min



Slika 13

Mikrotrgalni preizkus Č 3990, $T = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$, $v = 8\text{ mm/min}$

Fig. 13

Force — time curve for steel Č 3990, $T = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$,
 $v = 8\text{ mm/min}$

5.5 Mikrotrgalni preizkus Č 3990 pri temp. $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ in hitrosti vlečenja $v = 8\text{ mm/min}$ (sl. 13)

Regresijski koeficienti so:

$$a_0 = 3.06848, a_1 = -0.01127, a_2 = -0.06654$$

Vrednosti f in m sta:

$$f = 0.015 \text{ in } m = 0.013$$

6. ZAKLJUČEK

V članku smo prikazali simuliranje mikrotrgalnega preizkusa z upoštevanjem enodimenzijskega napetostnega stanja. Naši rezultati se dobro ujemajo z eksperimentom, vendar le do področja, kjer nastopi večje lokalno oženje. Da bi zajeli tudi to področje, bi bilo vsekakor nujno upoštevati tridimenzijsko napetostno stanje.

S pomočjo torzijskega preizkusa smo dobili odvisnost koeficienta utrjevanja n od ϵ . To odvisnost smo sicer dobili iz torzijskega preizkusa, toda iz dobrega ujemanja izmerjene in izračunane natezne krivulje lahko sklepamo, da bi enaka odvisnost veljala tudi pri vseh ostalih preoblikovalnih postopkih. To pa bi bilo zelo koristno, ker vemo, da se pri preoblikovanju materiala različni deli različno deformirajo.

Upoštevali smo tudi deformacijsko hitrost in z njo v zvezi koeficient m . Glede na to, da smo si pri določevanju tega koeficienta predvsem pomagali s podatki iz literature in s preizkušanjem ustreznih posameznih vrednosti za m , bi bilo potrebno izdelati merski ali računski postopek, ki bi nam dal vrednost m za hladno in za toplo preoblikovanje.

Tudi privzetek, da ima trgalna epruveta obliko, ki jo opišemo s kosinusno funkcijo, in da je velikost oženja v sredini odvisna od faktorja f , je le aproksimacija, ki je bila tudi že dana v literaturi^{7, 8}. Tudi tu mislim, da je prava rešitev za določitev oblike trgalne epruvete reševanje elasto in plastomehanskih enačb v 3 dimenzijah.

S spreminjanjem faktorjev f ali m ali pa obeh hkrati je možno doseči še boljše ujemanje izmerjenih in izračunanih krivulj. S tem se je ukvarjalo že dosti raziskovalcev^{7, 8, 9}. Vendar je vprašljivo, če ima to sploh smisel, če poprej ne izdelamo modela trgalnega preizkusa v 3 dimenzijah.

Enodimenzionalno simuliranje pa nam vseeno da rezultate, ki so sicer že znani, in sicer je hitrost oženja v sredini trgalne epruvete, ko se približujemo maksimumu sile, znatno večja, kot na robovih epruvete. Prav tako dobimo, da je deformacija največja v sredini.

Na koncu naj omenimo še, da bi bilo brez uporabe računalnika praktično neizvedljivo računanje polinomne regresije, kot tudi metode prediktor — korektor za reševanje diferencialnih enačb. Zavedati pa se moramo, da je računalnik že eno izmed nepogrešljivih sredstev pri raziskovalnem delu in da bo sčasoma njegova uporaba še bolj vsestranska, kot je sedaj.

DODATEK

Računska metoda prediktor — korektor za reševanje diferencialnih enačb.¹

Pri reševanju dif. enačbe

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

je bistveno, da računamo vrednosti rešitve v ekvidistantnih točkah. Naj bo h razmak med argumenti in:

$$x_i = x_0 + i h, \quad i = 1, 2, \dots$$

Vzemimo, da poznamo poleg začetne še m vrednosti rešitve. Torej naj bo znana tabela:

$$\begin{array}{l} x_0, x_1, \dots, x_m, x_{m+1} \\ y_0, y_1, \dots, y_m \\ y_0, y_1, \dots, y_m \end{array}$$

Cel razred metod tega tipa dobimo z uporabo kvadrature formel posebne oblike. Najprej uporabimo kvadrature formulo oblike:

$$\int_{x_0}^{x_{m+1}} y' dx = y_{m+1} - y_0 \cong \sum_{k=1}^m A_k y_k' \quad (a)$$

Z njo izračunamo vrednost,

$$y_{m+1}^{(p)} = y_0 + \sum_{k=1}^m A_k y_k'$$

ki jo imenujemo predvidena vrednost v točki x_{m+1} . Formulo (a) imenujemo prediktor. Nato pa izračunamo predvideno vrednost odvoda iz

$$y_{m+1}^{(p)'} = f(x_{m+1}, y_{m+1}^{(p)})$$

Sedaj pa uporabim drugo kvadraturno formulo:

$$\int_{x_2}^{x_{m+1}} y' dx = y_{m+1} - y_2 \cong \sum_{k=2}^{m+1} B_k y'_k \quad (b)$$

To formulo imenujemo korektor. Iz (b) izračunamo korigirano vrednost:

$$y_{m+1}^{(k)} = y_2 + \sum_{k=2}^m B_k y'_k + B_{m+1} y_{m+1}^{(p)}$$

in nato korigiramo še odvod:

$$y_{m+1}^{(k)} = f(x_{m+1}, y_{m+1}^{(k)})$$

Prvih m vrednosti moramo računati po kaki drugi metodi. Za metodo tipa prediktor — korektor je značilno:

- a) razmik h mora biti konstanten,
- b) začetne vrednosti moramo izračunati drugače,
- c) na vsakem koraku izračunano dve vrednosti funkcije f(x, y),
- č) za oceno lokalne napake ni treba dodatnih računov

To metodo uporabimo, kadar zahteva f(x, y) veliko računanja, koraka h pa ni treba spreminjati. Pri naših računih pa sta to dva pogoja izpolnjena. Sicer uporabimo Hammingovo modificirano metodo prediktor — korektor, katere postopek je takle¹¹ (kratek povzetek):

Dan je sistem n navadnih dif. enačb prvega reda:

$$y_1' = \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n)$$

$$\dots \dots \dots \text{ali: } F(x, Y) = \begin{pmatrix} f_1(x, Y) \\ \vdots \\ f_n(x, Y) \end{pmatrix}$$

$$y_n' = \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n)$$

z začetnimi vrednostmi:

$$\begin{matrix} y_1(x_0) = y_{1,0} \\ \vdots \\ y_n(x_0) = y_{n,0} \end{matrix} \quad \text{ali: } Y_0 = \begin{pmatrix} y_{1,0} \\ \vdots \\ y_{n,0} \end{pmatrix}$$

Označimo še:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

Naš prejšnji sistem enostavneje zapišemo:

$$Y' = \frac{dY}{dx} = F(x, Y) \quad \text{z } Y(x_0) = Y_0$$

Po Hammingovi modifikaciji klasične Milneove metode prediktor — korektor izračunamo vrednosti v točkah $x_{j+1} = x_j + h$ po naslednjem:

Najprej moramo poznati vrednosti v ekvidistančnih točkah $x_{j-3}, x_{j-2}, x_{j-1}, x_j$.

Prediktor izračunamo po:

$$P_{j+1} = Y_{j-3} + \frac{4h}{3}(2Y'_j - Y'_{j-1} + 2Y'_{j-2}) \quad (1)$$

Izračunamo modifikator:

$$M_{j+1} = P_{j+1} - \frac{112}{121}(P_j - C_j) \quad (2)$$

$$M'_{j+1} = F(x_{j+1}, M_{j+1}) \quad (3)$$

Izračunamo korektor:

$$C_{j+1} = \frac{1}{8}[9Y_j - Y_{j-2} + 3h(M'_{j+1} + 2Y'_j - Y'_{j-1})] \quad (4)$$

In končno vrednost:

$$Y_{j+1} = C_{j+1} + \frac{9}{121}(P_{j+1} - C_{j+1}) \quad (5)$$

Y, Y', P, M, C in F so vektorji z n komponentami, Enačbe (1) in (4) imajo lokalne napake:

$$T_1 = \frac{28}{90} h^5 Y^{(5)}(\xi_1) \quad \xi_1 \in (x_{j-3}, x_{j+1})$$

$$T_2 = -\frac{1}{40} h^5 Y^{(5)}(\xi_2) \quad \xi_2 \in (x_{j-2}, x_{j+1})$$

Rekli pa smo že, da moramo poznati vrednosti funkcij in odvodov teh funkcij v točkah x_0, x_1, x_2 in x_3 . Y_0 in $Y_0' = F(x_0, Y_0)$ so podani v začetku. Za izračun Y_1, Y_1', Y_2, Y_2' in Y_3, Y_3' uporabimo Ralstonovo varianto metode Runge — Kutta (povzetek):

$$\begin{aligned} K_1 &= h Y_0' \\ K_2 &= h F(x_j + 0.4h, Y_j + 0.4K_1) \\ K_3 &= h F(x_j + 0.457372h, Y_j + 0.2969776K_1 + 0.1587596K_2) \\ K_4 &= h F(x_j + h, Y_j + 0.2181004K_1 - 3.0509651K_2 + 3.8328647K_3) \end{aligned}$$

In končno:

$$Y_{j+1} = Y_j + 0.1747602K_1 - 0.5514806K_2 + 1.2055355K_3 + 0.1711847K_4$$

Te formule so primerne za integracijske metode, ki se ne začnejo same, ampak moramo poznati nekaj predhodnih vrednosti.

Literatura:

1. BOHTE, Z.: Numerične metode, Ljubljana, DZS 1978
2. ILJUKOVIČ, B. M., BAKASVILI, V. S., BEDINEJŠVILI, R. V.: Teoretičeskie osnovi obrabotki metallov davleniem, Tbilisi, Sabčota Sokartvelo 1979
3. JAMNIK, R.: Matematična statistika, DZS 1980

4. FILONENKO — BORODIČ, M. M., IZJUMOV, S. M., OLISOV, B. A., KUDRJAVCEV, J. N., MALJGINOV, L. I.: Kurs soprotivlenija materialov, D. 2., Moskva, Gosudarstvenoe izdatel'stvo tehniko — teoretičeskoj literaturi 1956
5. PRELOG, E.: Elasto in plastomehanika, Ljubljana, Univerza v Ljubljani 1973
6. BRUDAR, B.: Torzijski poskus v hladnem, Poročilo raziskovalnega oddelka Železarne Jesenice (januar 1978), str. 1—8
7. MELANDER, A.: Necking in Cylindrical Tensile Specimens, Scandinavian Journal of Metallurgy 9 (1980), str. 51—57
8. GHOSH, A. K.: Numerical Analysis of the Tensile Test for Sheet Metals, Metallurgical Transactions 8A (1977), str. 1221—1232
9. HUTCHINSON, J. W., NEALE, K. W.: Influence of Strain — Rate Sensitivity on Necking under Uniaxial Tension, Acta Metallurgica 25 (1977), str. 839—846
10. WAGONER, R. H.: A Technique for Measuring Strain — Rate Sensitivity, Metallurgical Transactions 12A (1981), str. 71—75
11. System/360 Scientific Subroutine Package (360 A — CM — 03) Version III., IBM Programmer's Manual

ZUSAMMENFASSUNG

Die Simulierung des Mikrozerreissversuches eines runden Stabes mit der Berücksichtigung des eindimensionalen Spannungszustandes in der Ziehrichtung bei konstanter Geschwindigkeit wird gezeigt. Das Ziehen ist bei zwei verschiedenen Geschwindigkeiten, bei 20°C und 100°C durchgeführt worden. Zwei verschiedene Stahlsorten sind untersucht worden. Bei der mathematischen Simulierung ist die Verformungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}$ und der Verfestigungsexponent n berücksichtigt worden. Der Verfestigungsexponent bleibt aber nicht konstant, sondern ist eine Funktion der Verformung. Diese Abhängigkeit ist das Ergebnis des Torsionsversuches desselben Stahles und ist mittels der Anwendung der polinomen Regresie erhalten worden. Ein guter Zusammenhang zwischen den gemessenen (volle Zeile) und der ausgerechneten Kurven (Punkte) — Kraft in Abhängigkeit von der Zeit ist erhalten worden. Dieser Zusammenhang gilt nur bis zum Punkte wo schon eine stärkere lokale Einschnürung auftritt. Auch die Hamming'sche Modifikation der klassischen Methode nach Milne Prediktor — Korrektor die bei unseren Ausrechnungen angewendet worden ist, gibt uns die ausgerechneten Werte für die Kraft nur bis zum Bereich der ausgeprägten Einschnürung (der letzte gezeichnete Punkt an den Bildern ist auch der letzte der noch vom Rechner ausgerechnet wird).

Die Verformungsgeschwindigkeit ist in der konstituiven Gleichung ($\sigma = K \cdot \epsilon^m \cdot \dot{\epsilon}^n$) potenziert durch m , den man auch als Index der Verformungsgeschwindigkeit nennen kann. Der Index hat bei Kaltversuchen einen Wert zwischen

0,001 und 0,1, bei höheren Temperaturen ist er grösser. Der Index n ist durch die Prüfung verschiedener Werte bestimmt worden, wobei die schon bekannten Daten berücksichtigt worden sind. Es wäre nötig ein Mess oder Rechenverfahren auszuarbeiten um genauere Werte für m zu erhalten.

Die Abhängigkeit des Verfestigungskoeffizienten n von der Verformung, erhalten beim Torsionsversuch, ist bei der Simulierung des Zugversuches berücksichtigt worden. Wir nehmen das als berechtigt an, denn die Übereinstimmung der gemessenen und ausgerechneten Werten kann als gut betrachtet werden. Demnach könnte die Abhängigkeit des Verfestigungskoeffizienten n von der Verformung auch bei anderen Verformungsverfahren, wo sich wie bekannt verschiedene Teile des Verformungsstückes verschieden verformen (Walzen, ziehen von Draht, Tiefziehen u. s. w.) angewendet werden.

Bei der Simulierung wurde angenommen, dass der Zerreiisstab am Anfang der Rechnung eine Form hat die mit der Sinusfunktion beschrieben werden kann. Die richtige Form könnte nur durch die Lösung der elasto — plasto mechanischen Gleichungen in 3 Dimensionen erhalten werden. Die Lösung dieser wird nötig um den Zugversuch näher zu beschreiben.

Mit dem eindimensionalen mathematischen Modell werden trotzdem die schon bekannten Ergebnisse erzielt, dass die Einschnürungsgeschwindigkeit und die Verformung allein in der Mitte des Zerreiisstabes viel grösser sind, als an den Enden des Stabes.

SUMMARY

Mathematical model for tensile test of a cylindrical specimen is described. One-dimensional stress state in the direction of drawing with the constant velocity v is considered. Two drawing velocities were chosen at 20 and 100 °C for two different steels. In the mathematical simulation also strain rate and strain-hardening power n are taken in account being not constant but a function of deformation. This relationship was obtained from the torsion test of the same material by a polynomial regression.

The agreement between the measured (full line) and the calculated (dots) values for the force — time curves is rather good till the commencement of final necking. The modification of the Hamming and Milne standard trial and error method is used. This method enables to calculate values of force till the commencement of final necking (the last dot in figures represents also the end of the calculation).

The power m of the strain rate in the equation is strain-rate sensitivity. It can vary between 0.001 and 0.01 for metallic materials at the room temperature. At higher temperatures it is greater. For our model it was deter-

mined from data in references and by testing various values. The necessity exists for developing a numerical or experimental technique to measure the strain-rate sensitivity.

The relationship between the strain-hardening power n and the deformation was obtained from the torsion test. This relation was applied in simulation of the tensile test. This seems to be justified because a very good agreement between the calculated and measured values was obtained. This relation can be applied also for the other deformation processes, e.g. wire drawing, rolling, deep drawing, etc. since in those processes various sections of material are subjected to different deformations.

The original geometry of bar showed slight sine-shaped form. According to our opinion the real form of the bar can be obtained by solving the three-dimensional mechanics equation and therefore it should be the only way to describe exactly the tensile test.

But the one-dimensional mathematical model showed that deformation and strain rate are much greater in the middle of the bar than at the ends.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено моделирование микронспытания на разрыв круглого прутка учитывая одномерное напряжение при константной скорости v прокатки.

Растяжение производилось при применении двух различных скоростей при t -ax 20 °C и 100 °C. Взяты два сорта стали. При математическом подогреве взято во внимание деформация ξ , а также коэффициент упрочнения n , который не представляет собой постоянную величину, а функцию деформации. Эта зависимость получена из испытания того же самого образца на кручение, а именно с употреблением полинома регрессии.

Оказалась хорошее согласование между измеренными (полная линия) и вычисленными кривыми (точки) — сила в зависимости от времени. Это согласование действительно до предела, где наступает сильное локальное сужение. Также модификация по Hamming — у классического метода по Milne — предсказание-коррекция, которую мы употребляли при наших вычислениях дает вычисленные значения для сил только до предела ярко выраженного сужения последняя точка на рисунке представляет также последнюю точку, которую также еще вычисляет счетчик).

Быстрота деформации в конституционном уравнении ($\sigma = K \cdot \epsilon^n \cdot \dot{\epsilon}^m$) возведена в степень m , которую можно обозначить как индекс быстроты деформации. Значение m для испытаний в холодном состоянии лежит между 0,001 и 0,01, а для испытания при более высоких тем-р значение сравнительно больше.

Определение m выполнено изучением отн. исследованием различных значений, причем конечно были взяты во внимание уже известные данные. Было бы необходимо изготовить измерительный или вычислительный способ для точного определения значения.

Зависимость коэффициента упрочнения n полученная из испытания образца на кручение взято во внимание при моделировании испытания на растяжение.

С нашей стороны мы можем заключить, что примененный способ определения коэффициента вполне оправдан: измерения и вычисления уравнения хорошо согласуются. Из этого следует, что зависимость коэффициента упрочнения n от деформации можно применить также при других способов деформации, при которых как это известно деформируются различно отдельные части деформирующего образца (прокатка, волочение проволоки, глубокая вытяжка и пр.). Во время самого моделирования взято, что образец испытания на разрыв имеет в начале вычисления на разрыв форму, которая описана как синусоидная функция. Действительную форму можно бы было получить разрешением эластично и пластично механических уравнений в трех размерах. Разрешение этих уравнений окажется весьма необходимо, так как на основании этого можно будет более точно описать испытание на разрыв. С одномерным математическим модельем мы все-таки получаем уже известные нам результаты т. е., что быстрота сужения и самая деформация в середине образца на разрыв гораздо больше чем на концах самого прутка.