

GEOMETRIJA TRIKOTNIKA, OROSLAN IN RAVELLO

BOJAN HVALA

Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Univerza v Mariboru

Math. Subj. Class. (2010): 51M04, 51M15, 51N20

V članku predstavimo Seebachov izrek iz geometrije trikotnika. Dogajanje, podobno kot pri vodenih ogledih filmov, poteka na dveh kanalih. Na enem poteka matematična predstavitev tematike, na drugem pa klepet o možnostih, dilemah in ozadjih.

TRIANGLE GEOMETRY, OROSLAN AND RAVELLO

In this article, we present Seebach's theorem, which is a topic in triangle geometry. The events, as during guided online film screenings, take place on two channels. On one, there is a mathematical presentation of the topic, and on the other, a chat about possibilities, dilemmas, and backgrounds.

Uvod

Pred kratkim sem si ogledal slovenski film Oroslan režiserja Matjaža Ivanišina. Film kot medij za prenašanje sporočil spremljam z velikim zanimanjem. Posebej rad imam evropski avtorski film. Oroslan mi je vzbudil zanimanje že ob pripravah na snemanje. Zgodbo Zdravka Duše, ki se je dogajala na Tolminskem, so avtorji prenesli v Porabje. Sledimo dolгим meditativnim posnetkom in dogajanju pripenjamo nabor lastnih asociacij. Film teče počasi, časa za osebni prispevek je dovolj. Pozneje sem na spletu zasledil možnost vodeneга ogleda filma. Film teče, vzporedno pa se moderator in avtor pogovarjata o ozadjih, idejah in možnostih. Ogled se je izkazal za dragocenega. Pogosto je potrdil ustreznost lastne percepcije filma in jo razširil v številne, prej neslutene smeri.

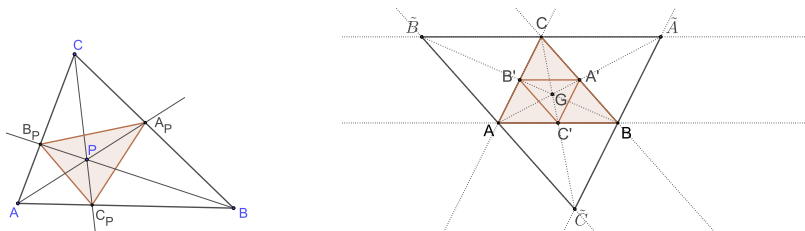
Od tod ideja o podobni eksperimentalni predstavitvi, tokrat matematične teme. Nivoja se ločita po pisavi. Matematični nivo je pisan v običajni pisavi, nivo klepeta v ozadju pa boste prepoznali po zapisu *v taki pisavi*.

Geometrija trikotnika je veja matematika, ki se ukvarja s fiksnim trikotnikom ABC in z njim povezanimi značilnimi točkami, premicami, krožnicami in drugimi objekti. Nekatere teme iz geometrije trikotnika so bile v Obzorniku že prisotne. Tako je bil v članku [7] predstavljen pojem značilne točke trikotnika, v [12] pa kubične krivulje trikotnika.

Izvrstna vstopna točka v geometrijo trikotnika je spletna stran ameriškega matematika Clarka Kimberlinga [1], ki med drugim prinaša seznam značilnih točk trikotnika z vsemi enciklopedično zbranimi podrobnostmi. V tem članku bomo uporabljali tam nastopajoče oznake, ki so v geometriji trikotnika standardne. Tako bomo notranje kote trikotnika označevali z $\angle A, \angle B, \angle C$, njihove velikosti pa kar z A, B, C . Povod za to izbiro je dejstvo, da bomo grške črke potrebovali za druge namene. Kimberling v svojih pojasnilih tudi ugotavlja, da je ta zapis praktičen in da sega nazaj vse do Eulerja. Na ta način res z isto črko označimo dve stvari, oglišče trikotnika in velikost notranjega kota, a je verjetnost, da bi pri tem prišlo do nesporazuma, zelo majhna.

Seebachov izrek

Definicija 1. Naj bo ABC trikotnik v ravnini in P točka znotraj trikotnika. Poltraki AP, BP in CP sekaajo stranice a, b, c trikotnika ABC v točkah A_P, B_P in C_P . Trikotnik $A_P B_P C_P$ imenujemo Cevov trikotnik trikotnika ABC glede na točko P .



Slika 1. Levo: Cevov trikotnik glede na točko P . Desno: središčni in antikomplementarni trikotnik.

V problemski rubriki revije *American Mathematical Monthly* je bil leta 1995 objavljen problem, ki je spraševal, ali znotraj trikotnika obstaja točka P , glede na katero bi bil Cevov trikotnik enakostraničen. Odgovor je pozitiven, rešitev je bila objavljena leta 1997 v [3]. Pozneje se je izkazalo, da je veliko splošnejši rezultat v članku [11] že deset let prej objavil nemški matematik Karl Seebach. Rezultatu rečemo Seebachov izrek.

Izrek 2. Naj bo $A_1 B_1 C_1$ poljuben trikotnik. Potem obstaja natanko ena taka točka P znotraj trikotnika ABC , da je Cevov trikotnik $A_P B_P C_P$ trikotnika ABC glede na točko P direktno podoben trikotniku $A_1 B_1 C_1$.

Direktna podobnost (oznaka $A_P B_P C_P \approx A_1 B_1 C_1$) pomeni, da sta trikotnika podobna na način, da za ustrezne kote velja $A_P = A_1$, $B_P = B_1$ in $C_P = C_1$.

Iz izreka seveda takoj sledi, da je znotraj trikotnika natanko ena točka, katere Cevovov trikotnik je enakostraničen. Ta točka sodi med značilne točke trikotnika. V zgoraj omenjeni Kimberlingovi Enciklopediji značilnih točk trikotnika [1] nosi oznako X_{370} .

Na sliki 1 desno so razpolovišča stranic trikotnika ABC označena z A', B', C' , težišče pa z G . Trikotniku $A'B'C'$ rečemo *središčni trikotnik* trikotnika ABC . Znano dejstvo je, da velja $A'B'C' \approx ABC$. Seveda je $A'B'C'$ Cevov trikotnik trikotnika ABC glede na točko G . Iz Seebachovega izreka torej izhaja, da je težišče G edina točka znotraj trikotnika, katere Cevov trikotnik je podoben osnovnemu trikotniku ABC .

Znani so primeri pomembnih matematikov, ki so poleg svojih glavnih področij z velikim veseljem gojili tudi geometrijo. Taká sta bila recimo Euler in Plemelj. Nekateri drugi matematiki pa geometriji niso naklonjeni. Geometrijske rezultate doživljajo nekáko takole: Imamo nekó družino geometrijskih objektov in potem dokážemo, da je lega neké točke glede na te objekte nekaj čisto posebnega.

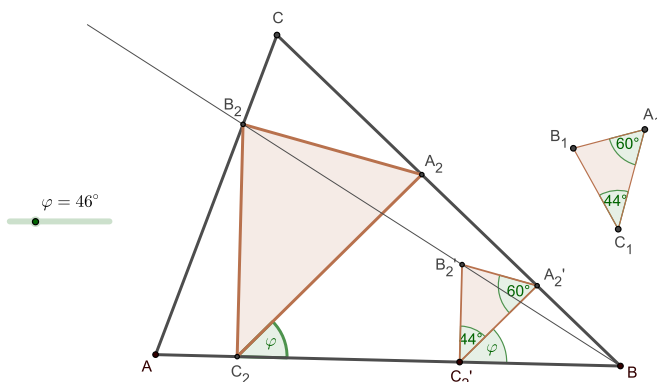
To je včasih celo res. Seebachov izrek nam recimo sporoča informacijo o izjemnosti točke X_{370} . Sporoča nam tudi dodatno informacijo o izjemnosti težišča. Vendar pa, če pogledamo na pravi način, lahko v teh ugotovitvah pogosto zaznamo zelo lepe in globoke rezultate.

Narišimo sliko v GeoGebri in premikajmo točko P . (Bralca prijazno vabim, da to dejansko naredi!) Ríšejo se nam različni Cevovi trikotniki. Iz Seebachovega izreka sledi, da na ta način dobimo galerijo prav vseh možnih oblik trikotnikov. Vsaki obliki pripada točno določena točka P . Znotraj poljubnega trikotnika je torej na preprost način zakódirana informacija o prav vseh oblikah trikotnikov.

Geometrija je nazorna in vizualno predstavljiva. To pomeni, da za razliko od nekaterih drugih vej matematike problem lahko hitro razumemo in ga sorazmerno zlahka predstavimo tudi nespecialistu. Izziv je zdaj, kako ta problem rešiti. Včasih se izkaže, da kljub preprosti formulaciji dokaz niti približno ni lahek. To se zgodi tudi v primeru Seebachovega izreka. Originalni dokaz je dolg, nepregleden in kar kliče po izboljšavah.

Včasih se v matematičnih raziskavah podajamo v zelo abstraktne daljne svetove, vendar pa potem tam niti ne počnemo kaj zares ekstremnega. Kot bi poslali vozilo na Mars in se potem veselili vsakega drobnega premika po njem. Seveda je, na primer, prvi marsovski polet z dronom velik dosežek. Sploh ob misli na možnost opazovanja in snemanja površja. A tako veliki preboji so redki. Po drugi strani pa ima tudi gibanje po stari dobri Zemlji svoje prednosti. V začetku morda ekspedicija ni videti tako spektakularna, zato pa nam omogoča, da opravimo res izdaten sprehod do neznanih čudes bližnjih grebenov, sotesk in jam, z izjemnimi razgledi in z inovativno izbranimi prehodi.

Kot rečeno je originalni dokaz Seebachovega izreka računski, dolgotrajen in nepregleden. Velik napredek v smeri preglednosti je leta 2006 napravil jordanski matematik M. Hajja, ki je v članku [4] predstavil nov dokaz. Osnovna ideja je naslednja.



Slika 2. Dokaz M. Hajje, konstrukcija vrtanega trikotnika.

Imamo trikotnik $A_1B_1C_1$ in se sprašujemo po točki P , da bo veljalo $A_P B_P C_P \approx A_1 B_1 C_1$. Izberimo neki kot φ in trikotniku ABC vrtajmo trikotnik $A_2 B_2 C_2$ tako, da bo $A_2 B_2 C_2 \approx A_1 B_1 C_1$ in bo kot $\angle BC_2 A_2 = \varphi$ (slika 2). To naredimo tako, da najprej izberemo neko točko $C'_2 \in c$, odmerimo kot φ , dobimo točko $A'_2 \in a$, nato pa od daljice $C'_2 A'_2$ odmerimo kota A_1 in C_1 ter dobimo točko B'_2 . Tako je $A'_2 B'_2 C'_2 \approx A_1 B_1 C_1$. Zdaj pa naredimo razteg s središčem v točki B , ki trikotnik $A'_2 B'_2 C'_2$ preslika v podoben trikotnik $A_2 B_2 C_2$ tako, da točka B_2 leži na stranici b . Namesto uporabe raztega si lahko mislimo tudi, da izbrano točko C'_2 premikamo po stranici c toliko časa, da ustrezna točka B'_2 pade na stranico b .

Na ta način, s spreminjanjem kota φ , dobimo družino vseh v trikotnik ABC včrtanih trikotnikov, ki so podobni trikotniku $A_1B_1C_1$. Zdaj pa moramo dokazati le še, da se samo pri enem trikotniku iz te družine daljice AA_2, BB_2 in CC_2 sekajo v neki skupni točki P , kar pomeni, da je to Cevov trikotnik glede na neko točko P (slika 3). Pri tem se opremo na Cevov izrek [14], ki pravi, da se daljice AA_2, BB_2 in CC_2 sekajo v skupni točki natanko tedaj, ko velja

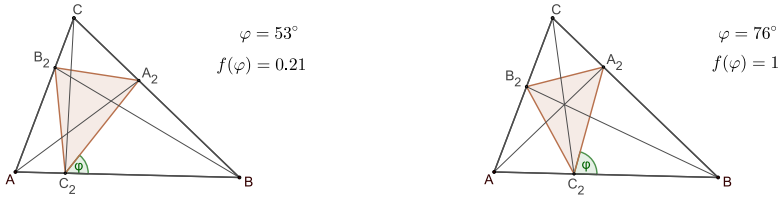
$$\frac{|BA_2|}{|A_2C|} \cdot \frac{|CB_2|}{|B_2A|} \cdot \frac{|AC_2|}{|C_2B|} = 1.$$

Avtor je nato izračunal levo stran zgornjega izraza kot funkcijo f spremenljivke φ , premislil, na katerem intervalu se giblje kot φ , in dokazal, da je f na tem intervalu monotono naraščajoča funkcija, ki zavzame vse pozitivne vrednosti. Zato vrednost 1 zavzame natanko enkrat. Med vsemi v trikotnik ABC včrtanimi trikotniki $A_2B_2C_2 \approx A_1B_1C_1$ je torej natanko en Cevov trikotnik glede na neko točko P .

Ena od prednosti geometrije je, da nam nudi možnost vizualizacije. Vsebinsko lahko približamo s sliko. Še posebej učinkovito to lahko storimo z računalniškimi programi za dinamično geometrijo, ki so se pojavili pred kakimi 30 leti in so geometriji dali močan dodatni zagon. Zelo pomemben pri tem je pridevnik dinamični, kar pomeni, da lahko že narisane objekte interaktivno premikamo, ob tem pa dinamično spremljamo spreminjajočo se sliko. Med prvimi takimi programi sta bila Geometer's Sketchpad in Cabri Geometry, v naših razmišljanjih pa smo že nekajkrat omenili GeoGebro. V nadaljevanju jo bomo še večkrat.

Obravnavani Hajjov dokaz lahko s pomočjo GeoGebre učinkovito ilustriramo, ob tem pa premislimo tudi nekatere detajle.

Najprej na podlagi slike 2 premislimo, kako iz trikotnika $A'_2B'_2C'_2$ dobimo trikotnik $A_2B_2C_2$. Zgrabimo točko C'_2 in jo pomikamo na levo (oz. na desno), dokler točka B'_2 ne zadene stranice b . Ker si to premikanje lahko predstavljamo kot delovanje raztegov s središčem v točki B in z različnimi koeficienti, je jasno, da pri tem postopku točka B'_2 teče po poltraku z izhodiščem v točki B . Zato je končna točka B_2 kar presečišče tega poltraka s stranico b . Argument z raztegi nam da tudi, da so stranice nastopajočih trikotnikov pri premikanju vzporedne. Zato je stranica B_2A_2 vzporedna stranici $B'_2A'_2$. Pri narisanim trikotniku $A'_2B'_2C'_2$ torej v prvem koraku dobimo točko B_2 , z nadaljnijima dvema vzporednicama pa še točki A_2 in C_2 .



Slika 3. Dokaz M. Hajje, funkcija f je naraščajoča.

V GeoGebri lahko tudi označimo daljice iz izraza $\frac{|BA_2|}{|A_2C|} \cdot \frac{|CB_2|}{|B_2A|} \cdot \frac{|AC_2|}{|C_2B|}$ in pri danem kotu φ izpišemo vrednost tega izraza, torej $f(\varphi)$ (slika 3). Potem na drsniku spreminjamo kot φ in eksperimentalno doživimo dejstvo, da je funkcija f monoton naraščajoča. Pri kotu φ , kjer funkcija f zavzame vrednost 1, tudi nazorno vidimo, da se ustrezne tri daljice sekajo v skupni točki. To je tista edina točka, ki jo trikotniku $A_1B_1C_1$ zagotavlja Seebachov izrek.

Slika v GeoGebri nam tudi omogoči premisliti in testirati drobne detajle v dokazu, kot je recimo interval, na katerem lahko pri danih podatkih izbiramo kot φ . Upoštevajoč trikotnik $C'_2BA'_2$ mora veljati $\varphi < 180^\circ - B$. Če to velja, lahko narišemo daljico $C'_2A'_2$. V nadaljevanju od nje odmerimo kota C_1 in A_1 . Če naj bo točka B'_2 znotraj kota $\angle B$, mora na spodnji strani veljati $\varphi + C_1 < 180^\circ$. Podoben razmislek na zgornji strani nam da $\varphi > A_1 - B$. Potegnemo poltrak in dobimo točko $B_2 \in b$. Zdaj nam manjkata le še dve vzporednici. Če želimo, da bo točka C_2 ležala na stranici c in ne na njenem podaljšku, mora biti $\varphi + C_1$ zunanji kot trikotnika AC_2B_2 in zato večji od A . Od tod sledi $\varphi > A - C_1$. Podobno pri obravnavi točke A_2 dobimo $\varphi < A + A_1$. Veljati mora torej: $\varphi \in (m, M)$, kjer je

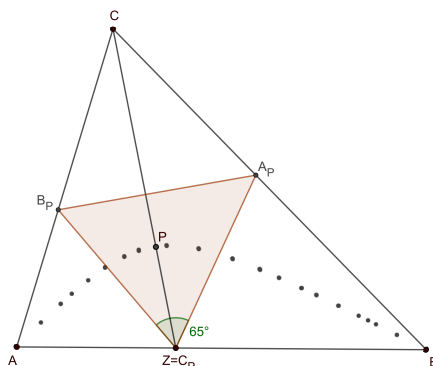
$$m = \max\{0, A_1 - B, A - C_1\} \quad \text{in} \quad M = \min\{180^\circ - B, 180^\circ - C_1, A + A_1\}.$$

Množica (m, M) ni prazna, saj je vsak od elementov iz množice na levi manjši od vsakega elementa množice na desni.

Posplošeni Seebachov izrek

Kljub velikemu napredku pri dokazu M. Hajje je še vedno ostal vtis, da bi bilo k dokazu mogoče pristopiti še bolj neposredno. Okvirna ideja je naslednja. Imamo trikotnik $A_1B_1C_1$ in iščemo točko P , za katero bo $A_P B_P C_P \approx A_1B_1C_1$. Kaj če bi šli postopoma in bi najprej poiskali točke P , pri katerih je v trikotniku $A_P B_P C_P$ ustrezen en kot, na primer $C_P = C_1$. Izberimo

točko $Z \in c$ in si oglejmo Cevove trikotnike točk P z daljice ZC (slika 4). Ko točko P premikamo od Z proti C , koti $\angle A_P C_P B_P$ tečejo od 180° proti 0° . Zato na tej daljici obstaja natanko ena točka, imenujmo jo P_Z , za katero bo ta kot meril C_1 . Če izrišemo vse točke P_Z , ko Z preteče stranico c , dobimo neko krivuljo, recimo ji Γ_C (slika 4). Na njej so točke P , ki imajo Cevove trikotnike z ustreznim kotom pri oglišču C_P . Podobno obstajata analogni krivulji Γ_B in Γ_A s točkami, katerih Cevovi trikotniki imajo ustrezní kot pri ogliščih B_P oz. A_P . Iskane točke z vsemi tremi ustreznimi koti so presečišča teh treh krivulj.



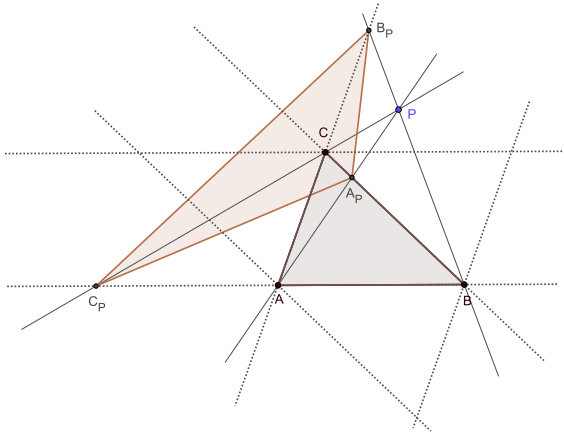
Slika 4. Krivulja točk z z enim ustreznim kotom.

Presečišče dveh od teh krivulj je točka, katere Cevov trikotnik ima ustrezen kot pri dveh ogliščih. Torej ga ima tudi pri tretjem. Skozi presečišče dveh krivulj tako zagotovo poteka tudi tretja.

Načrt je torej naslednji: poiskati je treba enačbe krivulj Γ_A, Γ_B in Γ_C in rešiti dobljeni sistem enačb. Videli bomo, da je ta pristop mogoč in da prinaša še dodatne prednosti. Doslej smo namreč točke P izbirali samo znotraj trikotnika. Koncept zlahka posplošimo tudi na (skoraj vse) točke zunaj njega.

Definicija 3. Naj bo ABC trikotnik v ravnini. Nosilke stranic trikotnika označimo z n_a, n_b, n_c . Vzparednico premici n_a skozi oglišče A označimo s q_a , analogno definiramo premici q_b in q_c . Množico vseh točk v ravnini, ki ne ležijo na nobeni od premic $n_a, n_b, n_c, q_a, q_b, q_c$, označimo z E .

Izberimo točko $P \in E$. Premice AP, BP in CP sekajo nosilke stranic n_a, n_b, n_c v točkah A_P, B_P, C_P . Tudi v tem primeru trikotnik $A_P B_P C_P$ imenujemo Cevov trikotnik trikotnika ABC glede na točko P .



Slika 5. Cevov trikotnik glede na točko P zunaj trikotnika ABC .

Množica E je predstavljena na sliki 1 desno. To je ravnina brez šestih premic. Premice q_a, q_b, q_c se paroma sekajo v točkah $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$, ki so oglišča tako imenovanega *antikomplementarnega trikotnika* $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$. Ime izhaja iz dejstva, da sliko neke točke T z raztegom $\delta_{G,-1/2}$ imenujemo *komplement* točke T , sliko z inverzno transformacijo, torej raztegom $\delta_{G,-2}$, pa *antikomplement* točke T . Razteg $\delta_{G,-2}$ premice n_a, n_b, n_c zaporedoma preslika v njim vzporedne premice skozi točke A, B in C , torej v premice q_a, q_b, q_c . Ker točka A leži na n_b in n_c , bo njena slika ležala na q_b in q_c . Zato je \tilde{A} antikomplement točke A . Analogno velja za \tilde{B} in \tilde{C} .

V definiciji 3 smo se bili prisiljeni odreči točkam z omenjenih šestih premic. V primeru $P \in n_a$ premici AP in n_a sovpadata, kar pomeni, da presečišče A_p v tem primeru ni definirano. V primeru $P \in q_a$ je zadeva podobna, a manj kritična. Premici AP in n_a sta zdaj vzporedni, zato presečišče A_p v klasičnem smislu ne obstaja. Obstaja pa, če nekoliko spremenimo perspektivo in se preselimo v projektivno ravnino.

Prišli smo do točke, ko se bomo morali za nadaljevanje zgodbe nekoliko tehnično podkovati. Brez ustreznih orodij od tu naprej ne gre več.

Ob misli na ustvarjanje novih orodij se mi v spomin vrača prizor iz mesteca Ravello na italijanski Amalfijski obali. Nad obalo se dvigajo strme vzpetine, pejsaži so presunljivo lepi, a prostora za bivališča in obdelovanje zemlje je malo. Toda ljudje so se znašli. V strme hribe so vrezali terase in tam posadili oljke in limonovce. Ob bregove so stisnili bivališča in ob njih uredili vrtove. Poti so posuli z belim peskom ter dodali slikovite ograje in kipe. Naravo so

začinili z osupljivo lepo arhitekturo. Ob neki vili so izdelali teraso in nanjo postavili oder za simfonični orkester. Ob poletnih večerih tam potekajo koncerti.

Skratka, moč človeške domišljije je navdušujoča. Včasih smo ob pogledu na našo civilizacijo pesimistični in upravičeno kritični. Marsikaj je v zgodovini res šlo narobe in še vedno gre. Vendar ob tem vseeno ne smemo pozabiti, koliko čudovitega smo kot človeška vrsta ustvarili. Ravello je sinonim za ta ponos. V ta kontekst kot pomemben dejavnik sodi tudi matematika. Če se kot člani človeške vrste čutimo ponosne ob pogledu na čudesa Ravella, smo lahko upravičeno ponosni tudi na to, kako smo v teku stoletij iz nič ustvarili najrazličnejše matematične objekte in teorije ter kako smo jih na presenetljive načine uspeli povezati in preplesti.

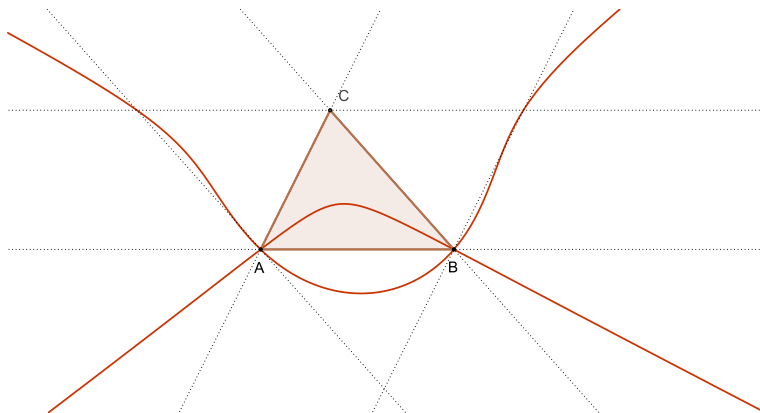


Slika 6. Levo: Ravello, vila Rufolo. Desno: Ravello, detajl.

Ko so težave s tem, da se dve premici v ravnini včasih sekata, včasih pa ne, postale nadležne, se je nekdo spomnil, da bi za vsak snop vzporednih premic tam nekje v neskončnosti dodal eno dodatno točko. V njej se zdaj te premice sekajo. Tako dobimo družino dodatnih točk, ki ji rečemo *premica v neskončnosti*. Ravnini s pridruženimi točkami na premici v neskončnosti potem rečemo *projektivna ravnina* [8, str. 5–6]. V projektivni ravnini se torej poljubni dve premici sekata. Če se zgodi, da presečišče leži na premici v neskončnosti, to pomeni, da sta premici v klasičnem smislu vzporedni. Kot smo v ravnino uvedli kartezične koordinate, lahko uvedemo ustrezne koordinate tudi v projektivno ravnino. Z njimi enakovredno obravnavamo običajne točke kot tudi točke v neskončnosti. Ena od možnih uvedb koordinat v projektivno ravnino so *trilinearne koordinate*. Če so kartezične koordinate definirane glede na dve pravokotni koordinatni osi, so trilinearne koordinate definirane glede na neki trikotnik. Izkaže se, da so te koordinate izjemno primerne za delo v razmerah, ko imamo vsekoli v obravnavi en fiksen trikotnik. Kot smo omenili že v uvodu, tej veji matematike rečemo *geometrija trikotnika*.

Trilinearne koordinate smo v Obzorniku že srečali, in sicer v članku [12]. Na tem mestu povejmo le, da točke opisujemo v obliki $T = \alpha : \beta : \gamma$, pri čemer so to razmerja predznačenih oddaljenosti točke T od nosilk stranic trikotnika ABC . Pri tem je predznak koordinate α pozitiven, če točka leži na istem bregu nosilke stranice a kot trikotnik ABC , in negativen sicer. Analogno to velja za preostali koordinati. Delo s trilinearnimi koordinatami je omogočilo neslutni razvoj geometrije trikotnika. S tem orodjem zlahka preverimo dejstva, za dokaz katerih bi sicer pogosto potrebovali precej inovativnosti. Poznavanje podrobnosti teh tehničnih orodij za spremljanje nadaljevanja naše zgodbe ni nujno potrebno. Radovednemu bralcu pa priporočam vire [1, 9, 10, 15].

Človekova zmožnost, da na strma pobočja vreže terase, zasadi vrtnice, postavi kipe in zgradi amfiteater za simfonični orkester, je navdušujoča. Prav tako pa je navdušujoča tudi zmožnost matematikov, da v trenutku, ko se stvari zapletajo, ustvarijo inovativna orodja, prilagojena situaciji, ki omogočajo izvrsten vpogled in udobno delo.



Slika 7. Prva krivulja četrtega reda, Γ_C .

Vrnimo se k našemu problemu. Pri danem trikotniku $A_1B_1C_1$ iščemo točke $P \in E$, da velja $A_P B_P C_P \approx A_1 B_1 C_1$. Kot smo zastavili našo zgodbo, pot do rešitve vodi preko krivulj Γ_A, Γ_B in Γ_C . V ravnino uvedemo trilinearne koordinate glede na osnovni trikotnik ABC . Označimo $k_a = \cot A_1$, $k_b = \cot B_1$ in $k_c = \cot C_1$. Z uporabo analitične geometrije v trilinearnih

koordinatah brez večjih težav izpeljemo [5] enačbe zgoraj omenjenih krivulj Γ_A, Γ_B in Γ_C :

$$\begin{aligned}\alpha^2\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 + \alpha^2\beta^2 &= 2\alpha\beta\gamma(-\alpha\cos A + k_a\beta\sin B + k_a\gamma\sin C) \\ -\alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 + \alpha^2\beta^2 &= 2\alpha\beta\gamma(k_b\alpha\sin A - \beta\cos B + k_b\gamma\sin C) \\ \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2 &= 2\alpha\beta\gamma(k_c\alpha\sin A + k_c\beta\sin B - \gamma\cos C).\end{aligned}$$

Gre za krivulje četrte stopnje, zapisane v trilinearnih koordinatah. Ker se pri pretvorbi v kartezične koordinate stopnja krivulj ohranja, gre za krivulje četrte stopnje v običajnem smislu.

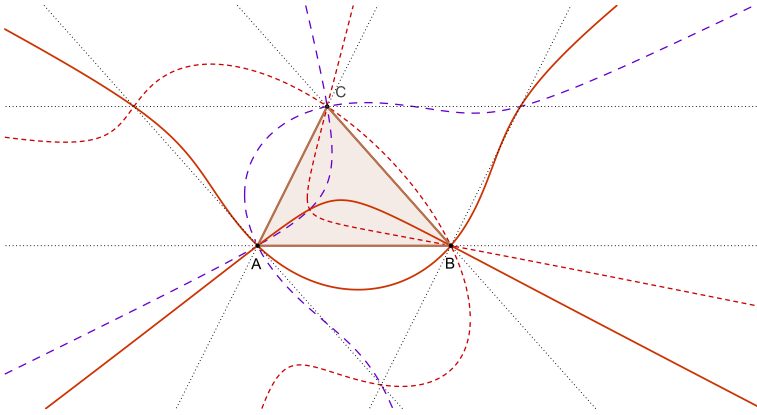
Ko matematiki izpeljemo nove enačbe, jih najprej premerimo s kritičnim pogledom. Je vse v redu? Pri pravkar zapisanih enačbah najprej opazimo elegantno simetrično strukturo, kot pri kakšni snežinki. Kot pravi H. G. Hardy: »Lepota je prvi test, na svetu ni trajnega prostora za grdo matematiko.« Seveda pa eleganca še ni zagotovilo za to, da so zapisane enačbe brezhibne in da bo njihova uporaba učinkovita.

Za potrditev se zatečemo k eksperimentu z GeoGebro. Ta omogoča risanje krivulj v kartezičnih koordinatah, v trilinearnih pa ne. Lotimo se torej pretvorbe danih enačb v kartezične koordinate in nato izrisa krivulj. Spomnim se vznemirjenja, ko je bilo delo opravljeno in je bilo treba pritisniti le še zaključni Enter. Rezultat je na sliki 7.

Narišimo še vse tri krivulje hkrati, to je slika 8. Takoj opazimo, da se glavna poanta na sliki potrdi. Znotraj trikotnika se krivulje sekajo v natanko eni skupni točki. Nadalje opazimo, da smo dogajanje iz notranjosti trikotnika uspešno prenesli tudi navzven. Naslednji pogled pa prinese presenečenje. Pričakovali smo, da bo skozi vsako presečišče dveh krivulj potekala tudi tretja. Na sliki ni vedno videti tako. A nekaj na sliki dodanih elementov razblini dvome. Nepričakovana presečišča dveh krivulj, skozi katera ne poteka tudi tretja, so bodisi oglišča trikotnika ABC bodisi oglišča antikomplementarnega trikotnika $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$, torej točke zunaj množice E , znotraj katere rešujemo problem.

Zdaj se lahko prepustimo naslednjemu vzgibu ob pogledu na zgornje enačbe. Da bi namreč enačbe preoblikovali, jih ustrezno sešteli ter pridobili ekvivalenten in morda preprostejši sistem enačb.

Oglišča trikotnika imajo trilinearne koordinate $A = 1 : 0 : 0$, $B = 0 : 1 : 0$ in $C = 0 : 0 : 1$. Seštejmo po dve zgornji enačbi in izpostavimo skupne faktorje. Zlahka opazimo, da točka $P \notin \{A, B, C\}$ zadošča zgornjemu sistemu

Slika 8. Vse tri krivulje: Γ_A, Γ_B in Γ_C .

natanko tedaj, ko zadošča sistemu

$$\begin{aligned}\beta\gamma &= \alpha (m_A \alpha + n_{c,B} \beta + n_{b,C} \gamma) \\ \alpha\gamma &= \beta (n_{c,A} \alpha + m_B \beta + n_{a,C} \gamma) \\ \alpha\beta &= \gamma (n_{b,A} \alpha + n_{a,B} \beta + m_C \gamma),\end{aligned}$$

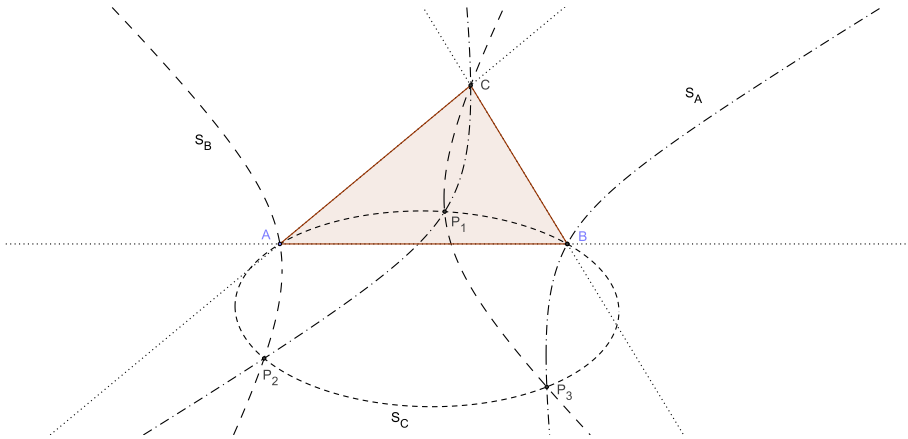
kjer je $m_A = (k_c + k_b) \sin A$, $n_{c,B} = (k_c \sin B - \cos B)$ in so ostali koeficienti definirani analogno.

Tokrat imamo sistem treh enačb drugega reda. Točka P je torej presečišče treh stožnic, označimo jih S_A, S_B, S_C . Premislimo, da ima lahko ta sistem največ tri rešitve. Poleg že znane rešitve znotraj trikotnika lahko torej pričakujemo še največ dve rešitvi zunaj.

Stožnici S_A in S_B se lahko sekata največ v štirih točkah. Ob tem prva očitno poteka skozi točki B in C , druga pa skozi točki A in C . Eno od potencialnih štirih presečišč je torej točka C , ki pa ne leži v množici E in za naš namen ni zanimiva. Tako smo prišli do dodatne informacije glede Cevovih trikotnikov točk zunaj trikotnika ABC .

Izrek 4. *Naj bo $A_1B_1C_1$ poljuben trikotnik. Potem obstajajo največ tri točke P v ravnini, da velja $A_P B_P C_P \approx A_1 B_1 C_1$.*

Do točk se dokopljemo z reševanjem zgornjega sistema. Dobimo kubično enačbo ene spremenljivke, ki ima lahko tri ali pa samo eno realno rešitev. Tako se dejansko zgodi, da imamo včasih tri rešitve, včasih pa eno samo. Na sliki 9 vidimo primer, ko se ustrezne stožnice pri danih trikotnikih ABC in $A_1B_1C_1$ sekajo v treh točkah.



Slika 9. Tri stožnice: S_A, S_B in S_C .

Obravnavani postopek ima pred predhodnimi kar nekaj prednosti. Omogoča nam obravnavo točk P zunaj trikotnika. Poleg tega nam ne sporoča samo števila ustreznih točk P , pač pa tudi omogoči, da preko zgornjih enačb izračunamo njihove trilinearne koordinate. Na ta način je točko včasih možno neposredno prepoznati, ali pa recimo dokazati, da je ne moremo konstruirati samo s šestilom in ravnilom. V članku [5] je tako na primer dokazano, da v splošnem točke X_{370} samo z ravnilom in šestilom ni mogoče konstruirati.

Cevianske sestre in sestrične

V tem razdelku bomo spoznali nekaj uporab pravkar predstavljenega pristopa. Opravili bomo kratek informativni sprehod po okolici.

Definicija 5. Naj bo ABC trikotnik v ravnini in $P \in E$ poljubna točka. Točka $Q \in E$, $Q \neq P$ je cevianska sestra točke P , če sta njuna Cevova trikotnika direktno podobna. Točka Q je cevianska sestrična točke P , če sta njuna Cevova trikotnika podobna, a nista direktno podobna.

Recimo, da bi pripravili obrazec, v katerem bi zbirali podatke o določeni točki P v ravnini. Med drugim bi vanj vpisali njene trilinearne koordinate glede na osnovni trikotnik ABC , pa oddaljenosti od oglišč tega trikotnika itd. Na točno določeno mesto v tem obrazcu bi vpisali podatke o velikosti kotov Cevovega trikotnika trikotnika ABC glede na točko P , torej trojico (A_P, B_P, C_P) . Celotnemu obrazcu bi potem lahko rekli *genom* točke P , omenjeni trojici pa *cevianska sekvenca* tega genoma. Točki P in Q sta torej

cevianski sestri, če imata identično ceviansko sekvenco genoma. Točki sta *cevianski sestrični*, če cevianski sekvenci nista identični, vsebujeta pa iste tri kote.

Premislimo zdaj, kaj nam o cevianskih sestrah in sestričnih poljubne točke $P \in E$ sporočata izreka 2 in 4. Za točko P znotraj trikotnika iz izreka 4 sledi, da ima največ dve cevianski sestri. Obe se nahajata zunaj trikotnika. Lahko pa se zgodi, da točka P cevianske sestri sploh nima. Točka $P \in E$ zunaj trikotnika pa ima natanko dve cevianski sestri. Po izreku 2 ima namreč znotraj trikotnika natanko eno ceviansko sestri, kar pomeni, da ima kubični polinom iz argumentacije izreka 4 dve realni ničli, potem pa je realna tudi tretja.

Pri cevianskih sestričnih se bomo omejili samo na točke znotraj trikotnika. Iz definicije izhaja, da je množica kotov Cevovega trikotnika cevianske sestrične Q enaka množici kotov Cevovega trikotnika točke P , torej $\{A_P, B_P, C_P\}$. Denimo, da so to trije različni koti. Ker se sekvenci ne smeta povsem ujemati, imamo na voljo pet permutacij teh treh kotov, vsaka od njih pa nam znotraj trikotnika zagotavlja natanko eno ceviansko sestrično. Če torej točka P leži znotraj trikotnika in je njen Cevov trikotnik raznostraničen, ima znotraj trikotnika natanko pet sestričen.

Na splošno je obravnava te tematike sorazmerno zapletena, zato se omejimo samo na dva posebej lepa primera: $P = X_{370}$ in $P = G$.

Cevov trikotnik točke $P = X_{370}$ je enakostraničen, zato točka nima cevianskih sestričen. V članku [5] obravnavamo njene cevianske sestri in ugotovimo, da te obstajajo samo, če je osnovni trikotnik ABC izrazito topokoten.

Videli smo že, da je težišče G edina točka znotraj trikotnika, katere Cevov trikotnik je direktno podoben osnovnemu trikotniku ABC . V članku [5] obravnavamo možne cevianske sestri točke G . Izkáže se, da te obstajajo natanko tedaj, ko je trikotnik ABC topokoten. Dokažemo tudi, da sta v tem primeru ustrezni cevianski sestri presečišči očrtane krožnice trikotnika ABC z očrtano krožnico antikomplementarnega trikotnika $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$. Bralca vabim, da nariše sliko v GeoGebri in to preveri.

V članku [6] obravnavamo cevianske sestrične točke G . Najprej dokažemo, da nobene od petih cevianskih sestričen znotraj trikotnika na splošno ne moremo konstruirati samo s šestilom in ravnilom. Nadaljevanje zgodbe odkrije dodatni skriti potencial pristopa, opisanega v poglavju 3.

Že stari Grki so se ukvarjali s problemom, kako neki objekt konstruirati samo s šestilom in ravnilom. Od tod zgodba o trisekciji kota, podvojitvi kocke in kvadraturi kroga. Ključna pri kasnejši razrešitvi tovrstnih problemov je teorija razširitev polj. S tem sredstvom dokažemo,

da nobena od treh naštetih konstrukcij v splošnem ni mogoča. Isti argumenti so tudi v jedru dokaza, da v splošnem s šestilom in ravnilom ni mogoče konstruirati cevianskih sestričen točke G .

Ob tem se nam zastavi vprašanje, ali bi bilo katero od konstrukcij, ki niso izvedljive samo s šestilom in ravnilom, mogoče izvesti, če bi imeli na voljo še kako dodatno sredstvo? Katero bi to dodatno sredstvo lahko bilo? Znano je npr., da je trisekcijo kota možno izvesti, če imamo dodatno na voljo orodje, imenovano tomahavk [2]. Ob tem se vprašamo, ali je to res najbolj naravna izbira. Da bi se namreč matematik po ravnilu in šestilu najprej oborožil ravno s tomahavkom?

Razmislijajmo v naslednji smeri. Če imamo na voljo ravnilo, skozi obstoječe točke neke konstrukcije lahko potegnemo premice. Če dodatno v uporabo dobimo šestilo, lahko rišemo krožnice. Tako npr. s šestilom in ravnilom lahko narišemo krožnico skozi dane tri točke, trikotniku lahko očrtamo krožnico. Nove točke pridobivamo kot presečišča tako narisanih premic in krožnic.

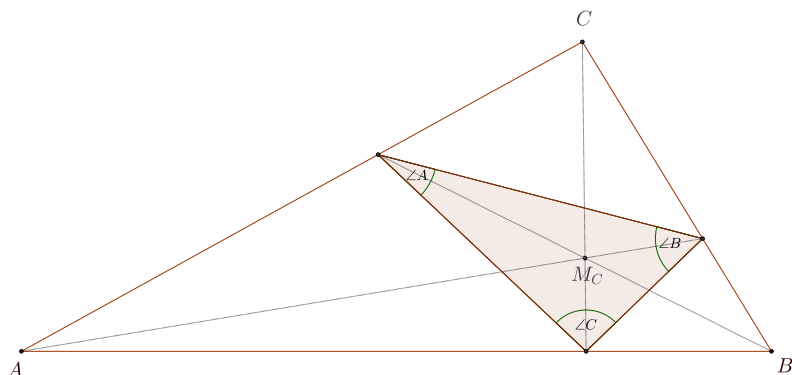
Takšne so naše možnosti, če imamo na voljo ravnilo in šestilo. Kaj bi bil naslednji naravni korak? Da bi poleg risanja premic in krožnic imeli na voljo možnost risanja naslednjih najpreprostejših krivulj, to je stožnic. Gre torej za orodje, ki bi skozi danih pet točk v ustrezni legi narisalo edino stožnico, ki poteka tam skozi. V GeoGebri je tako orodje na voljo, in to pod gumbom, namenjenim stožnicam.

Cevov trikotnik glede na točko G je torej podoben osnovnemu trikotniku, zato ima v cevianski sekvenci genoma zapisane kote tega trikotnika (A, B, C) . Nakažimo, kako bi z uporabo dodatnega orodja za risanje stožnic skozi danih pet točk konstruirali sestrično M_C točke G s ceviansko sekvenco genoma (B, A, C) .

Naša metoda iz 3. poglavja nam je ustrezne točke dala kot presečišča treh stožnic (slika 9). Če bi znali narisati dve od njih, bi kot edino presečišče znotraj trikotnika dobili točko M_C .

Premislimo najprej, kaj na splošno vemo o omenjenih treh stožnicah. Stožnica S_A ne glede na vhodne podatke (torej kote A_1, B_1, C_1) vedno poteka skozi točki B in C , kar je jasno razvidno iz njene enačbe. Poleg tega smo krivuljo S_A dobili s seštevanjem enačb za krivulji Γ_B in Γ_C , za kateri smo svoj čas presenečeni ugotovili, da se sekata v točki \tilde{A} . Koordinate točke \tilde{A} torej zadoščajo enačbam za Γ_B in Γ_C , po seštevanju pa tudi enačbi za S_A . Tako vidimo, da vse krivulje S_A potekajo skozi točke B, C in \tilde{A} . Če uspemo konstruirati še dve točki na tej stožnici, lahko uporabimo orodje za risanje stožnic skozi pet točk in stožnico narišemo.

Ti dodatni dve točki bosta seveda odvisni od vhodnih podatkov. V našem primeru upoštevamo enakost kotov $A_1 = B, B_1 = A, C_1 = C$ in izra-



Slika 10. Točka M_C s ceviansko sekvenco (B, A, C) .

čunamo ustrezne koeficiente iz enačbe stožnice S_A , torej: $m_A = \frac{b}{c}$, $n_{c,B} = \frac{b^2 - c^2}{ac}$, $n_{b,C} = \frac{c^2 - a^2}{ab}$. Tako dobimo enačbo te stožnice:

$$abc\beta\gamma = ab^2\alpha^2 + b(b^2 - c^2)\alpha\beta + c(c^2 - a^2)\alpha\gamma.$$

Oblika te enačbe nas takoj napelje k zamenjavi trilinearnih koordinat $\alpha : \beta : \gamma$ s ploščinskimi koordinatami $X : Y : Z$, ki so s trilinearnimi povezane takole $X = a\alpha, Y = b\beta$ in $Z = c\gamma$. V ploščinskih koordinatah se enačba stožnice S_A glasi:

$$a^2YZ = b^2X^2 + (b^2 - c^2)XY + (c^2 - a^2)XZ.$$

Izračunajmo ploščinske koordinate presečišč U in V stožnice S_A z nosilkama stranic b in c , torej s premicama $Y = 0$ in $Z = 0$. Dobimo $U = (a^2 - c^2) : 0 : b^2$ in $V = (c^2 - b^2) : b^2 : 0$. Za ilustracijo si oglejmo, kako bi konstruirali točko V .

Matematiko včasih primerjajo z alpinizmom. Turo začnemo v izhodišču in zaključimo na določenem cilju. Pogosto se zgodi, da so zares zahtevni le kratki odseki poti, preostanek je neproblematičen. Če je kritična točka ena sama, je pot iz izhodišča do začetka kritičnega odseka jasna, prav tako pot od konca kritičnega odseka do cilja. Prednost matematike je v možnosti predhodne obravnave teh neproblematičnih odsekov. Od izhodišča napredujemo, dokler gre, iz cilja se pomikamo nazaj, spet dokler gre in na ta način osamimo ključni problematični odsek. Temu se potem lahko posvetimo s polno pozornostjo in z vsemi močmi.

Naš cilj je točka s ploščinskimi koordinatami $V = (c^2 - b^2) : b^2 : 0$. Ni težko uganiti, da bo izhodišče točka $L = a^2 : b^2 : c^2$. To je Lemoinova točka trikotnika z oznako X_6 v Kimberlingovi Enciklopediji značilnih točk trikotnika [1]. Konstruiramo jo tako, da v trikotniku ABC nosilko težiščnice na stranico a prezrcalimo preko simetrale notranjega kota pri oglišču A . Analogno storimo z nosilkama težiščnic na preostali dve stranici. Dobljene tri premice se sekajo v točki L .

Naš vzpon bo torej potekal od točke L do točke V . Za uspešno pot potrebujemo nekaj preprostih splošnih informacij.

Najprej sta tu koncepta Cevovega in anticevovega trikotnika. Pojem Cevovega trikotnika že poznamo. Anticevov trikotnik trikotnika ABC glede na točko P je tak trikotnik $\tilde{A}_P\tilde{B}_P\tilde{C}_P$, da je trikotnik ABC Cevov trikotnik tega trikotnika glede na točko P . Za ilustracijo si lahko pomagamo kar s sliko 1, saj je antikomplementarni trikotnik $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ anticevov trikotnik trikotnika ABC glede na težišče G .

Z osnovnimi metodami analitične geometrije v ploščinskih koordinatah izpeljemo koordinate oglišč Cevovega trikotnika glede na točko $P = X_P : Y_P : Z_P$:

$$A_P = 0 : Y_P : Z_P \quad B_P = X_P : 0 : Z_P \quad C_P = X_P : Y_P : 0.$$

Pri obravnavi koordinat anticevovega trikotnika začnemo z neznanimi devetimi koordinatami točk $\tilde{A}_P, \tilde{B}_P, \tilde{C}_P$ in zapišemo zahteve iz definicije: točka A leži na nosilkah daljic $\tilde{B}_P\tilde{C}_P$ in \tilde{A}_PP , analogno za B in C . Rešimo sistem in dobimo:

$$\tilde{A}_P = -X_P : Y_P : Z_P \quad \tilde{B}_P = X_P : -Y_P : Z_P \quad \tilde{C}_P = X_P : Y_P : -Z_P.$$

Oglišča anticevovega trikotnika pri dani točki P so torej enolično določena. Za njihovo konstruktibilnost je ključno dejstvo, da je točka \tilde{A}_P harmonična konjugiranka točke P glede na točki A in A_P [13]. Od tod sledi, da jo lahko konstruiramo celo samo z ravnilom [15, str. 3].

Od nujnih informacij zdaj potrebujemo le še enačbo premice v neskončnosti. V trilinearnih koordinatah se ta glasi $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$, v ploščinskih pa $X + Y + Z = 0$.

Zdaj za osnovo vzamemo Lemoinovo točko $L = a^2 : b^2 : c^2$ in se napotimo proti točki $V = (c^2 - b^2) : b^2 : 0$. Do točke $\tilde{C}_L = a^2 : b^2 : -c^2$ že znamo priti. Nadaljujmo na drugem koncu poti, pri točki V . Ta je C -točka Cevovega trikotnika glede na točko $W_Z = (c^2 - b^2) : b^2 : Z$ in to ne glede na izbiro števila Z . Določimo Z tako, da bo točka W_Z ležala na premici v neskončnosti, ki ima enačbo $X + Y + Z = 0$. To dosežemo z izbiro $Z = -c^2$. Naj bo torej $W = (c^2 - b^2) : b^2 : -c^2$. Premica CW seka nosilko stranice c v točki V

in zato točka W leži na premici CV . Vendar pa glede na svoje koordinate točka W očitno leži tudi na premici s preprosto enačbo $c^2Y + b^2Z = 0$. Na tej premici pa ležita tudi točki $A = 1 : 0 : 0$ in $\tilde{C}_L = a^2 : b^2 : -c^2$.

Točka W torej leži na premici v neskončnosti in je presečišče premic $A\tilde{C}_L$ in CV . Ker se ti dve premici sekata na premici v neskončnosti, sta dejansko vzporedni. Od tod sledi, da je točka V presečišče vzporednice premici $A\tilde{C}_L$ skozi točko C in nosilke stranice c .

Ilustrirali smo pot do konstrukcije točke V . Podobna, a morda še malo zahtevnejša je pot do točke U , zato ta detajl tokrat izpustimo. Omenimo le, da je konstrukcija točk U in V najbolj inovativni del celotne zgodbe.

Ta odsek poti je posebej zanimiv, ker znotraj geometrijske teme ključno vlogo odigra žongliranje s simboli, ki je sicer bolj značilno za algebro. Matematične teorije in koncepti se na nenavadne načine prepletajo in oplajajo.

Ko enkrat imamo točki U in V , skozi točke B, C, \tilde{A}, U in V z dodatnim orodjem za risanje stožnic skozi danih pet točk narišemo stožnico S_A . Podobno narišemo stožnico S_B . Njuno edino presečišče znotraj trikotnika je točka M_C .

Na podoben način, a z drugačnimi rešitvami v inovativnem vložku, konstruiramo tudi preostale štiri sestrične težišča G .

Zaključek

Ameriški matematik John E. Wetzel, zaslužni profesor na University of Illinois v Urbani-Champaign, je izjavil:

Geometrija trikotnika ima več čudežev na kvadratni meter kot katera koli druga veja matematike.

To pogosto citirano izjavo lahko zasledimo na primer v uvodu h knjigi [9, str. 1] ali med zahvalami spletne strani [1]. Izjavo je seveda treba obravnavati dobronamerno in z določeno mero smisla za humor. Vsekakor pa je v njej dobro povzeto bistvo fascinacije z geometrijo trikotnika. Gre za občutek očaranosti nad presenečenji, ki se tu pojavljajo nenavadno pogosto. Zato si želim, da bi se geometrija trikotnika obdržala v študijskih programih matematike in da bi k tej tematiki (vsaj občasno) pristopalo več radovednih

raziskovalcev. To želim tudi številnim drugim živopisnim vejam matematike. Bojim se namreč, da se s časom matematična diverziteteta vse bolj krči in siromaši. Povedano v jeziku biologov pozivam k ohranjanju širokega spektra raznovrstne matematične flore in favne.

Na ta način smo spoznali Seebachov izrek, temo iz geometrije trikotnika. Kaj pa v naslovu počneta Oroslan in Ravello?

Oroslan na eni strani simbolizira eksperiment obravnave tematike na dveh kanalih. Prvi se skuša držati vseh pravil pisanja matematičnega teksta, drugi pa ta pravila krši, a vsebino nadgrajuje z informacijami, ki bi za bralca utegnile biti zanimive. Preklop na drugi kanal zato pomeni drugačen pristop k branju in evalvaciji teksta. Ima pa Oroslan tudi določene simbolne podtone. Oroslan je nekdo, ki je onstran. V tem smislu simbolizira brezčasen, nepretenciozen pogled na razmere.

Ravello je kraj, kjer cvetita narava in ustvarjalnost, vsaka zase in v povezavi druga z drugo. Simbolizira lepoto stvarstva v iskreni, izvorni, v času preverjeni obliki. Ne gre za šopirjenje ali razstavo preračunljivosti, pač pa za razmah človeškega duha, ki s svojo svežino razveseljuje vse okrog sebe.

LITERATURA

- [1] *Encyclopedia of Triangle centers*, dostopno na faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html, ogled 4. 4. 2021.
- [2] M. Barile, *Tomahawk*, dostopno na mathworld.wolfram.com/Tomahawk.html, ogled 9. 4. 2021.
- [3] D. Goering, *Solution to Problem 10358*, Amer. Math. Monthly **104** (1997), 567–570.
- [4] M. Hajja, *The arbitrariness of the Cevian triangle*, Amer. Math. Monthly **113** (2006), 443–447.
- [5] B. Hvala, *A generalized Seebach's theorem*, Beitr. Algebra Geom. **55** (2014), 471–478.
- [6] B. Hvala, *Cevian cousins of a triangle centroid*, J. Geom. Graph. **19** (2015), 211–218.
- [7] B. Hvala, *Značilne točke trikotnika kot funkcije*, Obzornik Mat. Fiz. **61** (2014), 1–14.
- [8] R. A. Johnson, *Advanced Euclidean geometry*, Dover Publications, 2007.
- [9] C. Kimberling, *Triangle centers and central triangles*, Congr. Numerantium **129** (1998).
- [10] G. Leversha, *The geometry of the triangle*, United Kingdom Mathematics Trust, 2013.
- [11] K. Seebach, *Ceva-Dreiecke*, Elem. Math. **42** (1987), 132–139.
- [12] T. Veber, *Kubične krivulje trikotnika*, Obzornik Mat. Fiz. **59** (2012), 50–62.
- [13] E. W. Weisstein, *Anticevian triangle*, dostopno na mathworld.wolfram.com/AnticevianTriangle.html, ogled 1. 6. 2021.
- [14] E. W. Weisstein, *Ceva's Theorem*, dostopno na mathworld.wolfram.com/CevasTheorem.html, ogled 31. 5. 2021.
- [15] P. Yiu, *Introduction to the Geometry of the triangle*, dostopno na math.fau.edu/Yiu/YIUIntroductionToTriangleGeometry121226.pdf, ogled 3. 5. 2021.