MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#

2

PRESEK LETNIK 49 (2021/2022) ŠTEVILKA **2**

PRESEK

- DOTIKAJOČE SE KROŽNICE IN SREDIŠČNI RAZTEG
- DISPERZIJA
- ASTRONOMSKO TEKMOVANJE PETIH DEŽEL
- PARADOKS SLABOVIDNE PRIČE

ISSN 0351-6652

9 770351 665920

Merjenje temperature jezikov

Zvoki in struktura približno 7000 svetovnih jezikov se neprestano spreminjata – samo primerjajte angleščino v Romeu in Juliji ali španščino v Don Kihotu s sodobno govorico. Toda zgodovinski zapisi dajejo le nepopoln vpogled v evolucijo jezika. Dandanašnji lingvisti vse bolj uporabljajo matematične modele, da bi ugotovili, katere lastnosti jezika se v stoletjih spreminjajo pogosteje in katere redkeje.

Novi model, ki ga je navdihnila fizika, pripiše »temperaturo« različnim zvokom in slovničnim strukturam. Lastnosti z višjo temperaturo so manj stabilne, zato se spreminjajo pogosteje. Že samo trenutna geografska porazdelitev lastnosti jezika nudi raziskovalcem dovolj informacij, da lahko določijo temperaturo te lastnosti. »Vroča« lastnost, ki se bo kmalu spremenila, denimo prisotnost določnega člena the v angleščini, je razpršena enakomerno po vsem svetu. Njeno nasprotje je »hladna« lastnost, ki se upira spremembi in jo najdemo v geografskih gručah. Primer take lastnosti je postavljanje predmeta pred povedek v angleščini.

Novi lingvistični termometer bo pomagal raziskovalcem rekonstruirati nastanek jezikov in predvideti, kako se bodo spreminjali v prihodnosti. Raziskovalci pa pričakujejo, da bodo že kmalu s podobnimi modeli raziskovali tudi evolucijo drugih dejavnikov človeške kulture, npr. pravila porok ali dedovanja lastnine.

Več informacij v članku *Geospatial distributions reflect temperatures of linguistic features*, H. Kauhanen, D. Gopal, T. Galla, R. Bermúdez-Otero, Science Advances **7** (2021).

Izvirno besedilo: Taking the Temperature of Languages, Mathematical moments from the AMS. Prevod in priredba: Boštjan Kuzman.

× × ×

KOLOFON

Presek
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 49, šolsko leto 2021/2022, številka 2

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: info@dmfa-zaloznistvo.si

Naročnina za šolsko leto 2021/2022 je za posamezne naročnike 22,40 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 19,60 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1100 izvodov

ISSN 2630-4317 (Online)
ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **info@dmfa-zaloznistvo.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

SLIKA NA NASLOVNICI: Fotografija na naslovnici kaže ivje. Več o pojavu v prispevku o naravoslovni fotografiji. Foto: Peter Legiša

V razmislek

Aleš Mohorič, odgovorni urednik

Ljubitelji matematike in fizike smo vajeni elegantnih dokazov in trdne veljavnosti matematičnih izrekov. Prav tako čvrsto zaupamo domiselno zastavljenim in izvedenim eksperimentom, s katerimi so bile potrjene fizikalne teorije, o katerih se učimo v šoli. V zadnjih mesecih pa lahko po spletu in medijih spremljamo razgrete razprave o tem, kdo ima v nelahkih razmerah epidemije prav in kdo ne, ko poziva k cepljenju, govori o varnosti cepiv, smiselnosti ukrepov. Veliko slabe volje bi si lahko prihranili, če bi vsi razumeli, kako sprejemati tok informacij.

V moderni dobi interneta in družbenih omrežij pridemo do informacij lažje kot kadarkoli prej - in hkrati težje. Zaradi preobilja informacij lahko svojo pozornost posvečamo le tistim, ki jih izberemo. In tako se odpira pomembno vprašanje, čemu namenjati pozornost. Vsekakor temu, kar nas zanima in kar nam koristi. Kako pa presodimo, kaj nam koristi, katere informacije so prave, še posebej, če si iz različnih virov nasprotujejo? Informacije kritično presojajte po več kriterijih, npr. kdo je avtor, od kod ali koga informacija prihaja, kakšen je motiv avtorja, ali se informacija ujema z vašimi izkušnjami (svojim zmožnostim statistične presoje vseeno ne zaupajte preveč).

Dandanes nastaja vtis, da vsi vedo vse o vsem. Seveda to ne drži. Nekateri pojavi so tako zapleteni, da jih obravnavajo različne vede in niti strokovnjaki z določenega področja ne vedo vsega. Pravo znanje je pravzaprav mozaik koščkov, ki jih prispeva velika množica raziskovalcev in laboratorijev. Sliko si moramo na koncu ustvariti sami. Komu torej zaupati? Kadar razglabljamo o znanstvenih vprašanjih, zaupajmo znanosti. Zakaj prav njej? Znanost je iskanje resnice. V znanosti je komunikacija odprta, vsak ima besedo, ki se tehta po vsebini. Kar kdo izjavi, lahko drug pretehta in preveri. Seveda tudi v znanosti obstajajo interesi, ki bi lahko izkrivljali njena dognanja, a znanost je odprta, dostopna vsem in izpostavljena presoji, kritiki. Znanost je tudi samokritična. Kadar v znanosti odkrijemo napako, jo priznamo in popravimo. Prava znanost vedno daje verodostojne odgovore, v skladu z najboljšim razpoložljivim znanjem. Seveda se tudi znanost lahko zmoti, a to zmoto prizna in zanjo odgovarja, ko se nauči bolje. Običajno pa zmota niti ni zmota, ampak z novim znanjem podamo le natančnejši odgovor.

Znanje se v znanosti izmenjuje na več načinov, najbolj pogosto z objavami v znanstvenih revijah in knjigah. V njih so opisana nova spoznanja in načini, kako smo do njih prišli. Pravilnost zapisanega presojajo ostali strokovnjaki s področja. Tako lahko od vsega, kar najdemo zapisano, še najbolj zaupamo znanstvenim revijam, kjer zapisano temelji na do tedaj uveljavljenem znanju in je izpostavljeno neprestani kritični presoji. Drugače je na spletu, kjer lahko vsakdo objavi skoraj karkoli in redko kdo za zapisano tudi odgovarja. Družbena omrežja skrivajo še eno past. S posebnimi postopki ugotavljajo naš interes in nam kot rezultat našega brskanja po spletu nudijo podobno vsebino. Na ta način se lahko ujamemo v mehurček zmot, iz katerega se le težko izkopljemo.

V Preseku objavljamo vsebine iz osnovnošolske in srednješolske matematike, fizike, astronomije ter računalništva. Zato je prispevkov o epidemijah ali cepivih malo, a tega od naše revije verjetno niti ne pričakujete. Matematiki, fiziki in računalničarji sicer na tem področju lahko marsikaj prispevamo: od modeliranja razvoja epidemije, statistične obravnave rezultatov raziskav, do modeliranja sestave in funkcionalnosti molekul, ki sodelujejo v procesih. A to so teme, ki presegajo obseg in nivo revije. S prispevki v Preseku želimo vas, mlade bralce, vzgajati tako, da boste znali kritično presojati informacije in se v iskanju resnice nasloniti tudi na dediščino klasične matematike in fizike.

× × ×

Dotikajoče se krožnice in središčni razteg

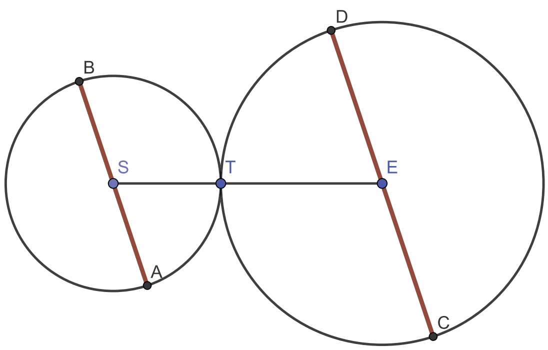
Peter Legiša

Trije problemi

V tem prispevku bomo tri probleme o dotikajočih se krožnicah najprej rešili elementarno, nato pa dva med njimi ponovno z uporabo preproste geometrijske transformacije, imenovane središčni razteg. Kot bomo videli, je ta druga metoda večkrat bolj elegantna in tudi naravna.

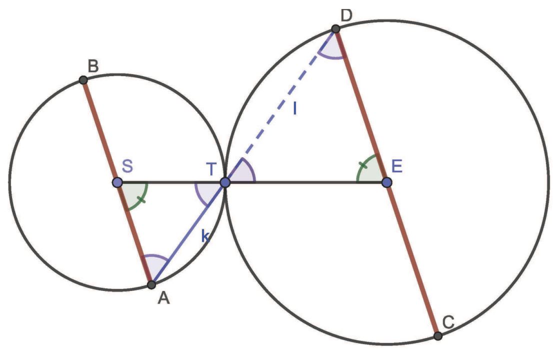
Leta 1802 je bil na univerzi Cambridge na pomembnem izpitu, imenovanem *Mathematical Tripos*, zastavljen ([1, str. 12–13]) kot srednje težak naslednji problem.

1. Imamo dve krožnici, ki se dotikata v točki T. Narišemo dva vzporedna premera, AB in CD teh krožnic kot na sliki 1. Dokažimo, da daljici AD in BC potekata skozi dotikališče T.



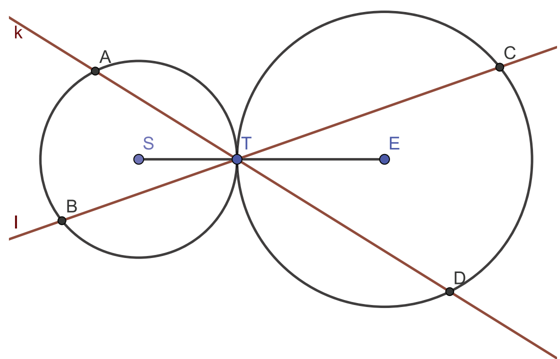
SLIKA 1.
Vzporedna polmera dotikajočih se krožnic

Rešitev. Vemo, da središči S, E obeh krožnic in dotikališče T ležijo na isti premici. Ker sta premera AB in CD vzporedna, oklepata skladna kota s premico skozi točke S, T, E. To smo označili z zeleno



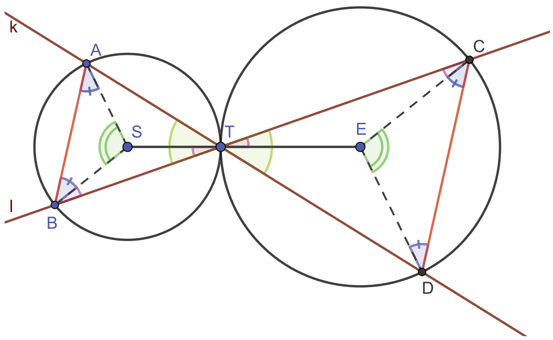
SLIKA 2.
Trikotnika ΔAST in ΔDET sta enakokraka.

barvo na sliki 2. Trikotnika ΔAST in ΔDET sta enakokraka. Kota med krakoma sta skladna. Denimo, da merita α stopinj. Zato sta skladna tudi kota ob osnovnici obeh trikotnikov – oba merita $90° - \frac{1}{2}\alpha$. Tako sta kota $\angle STA$ in $\angle ETD$ skladna. To pa pomeni, da točke A, T, D ležijo na isti premici. Enako vidimo, da B, T, C ležijo na isti premici.



SLIKA 3.
Premici k, l gresta skozi dotikališče krožnic.

2. Na sliki 3 imamo spet dve krožnici s središčema S in E, ki se dotikata v točki T. Premici k, l potekata skozi T in sekata prvo krožnico zaporedoma v točkah A, B in drugo krožnico zaporedoma v točkah D, C kot na sliki 4. Dokažimo, da sta tetivi AB in CD vzporedni. (Tudi ta problem je iz [1, str. 203].)

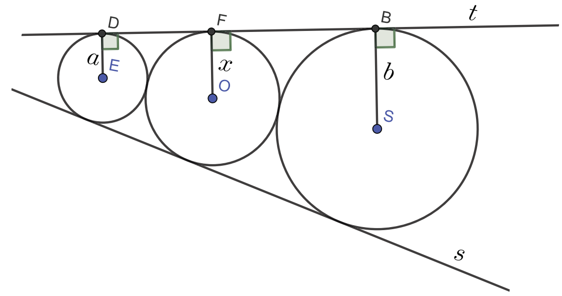


SLIKA 4.
Na sliki imamo več enakokrakih trikotnikov.

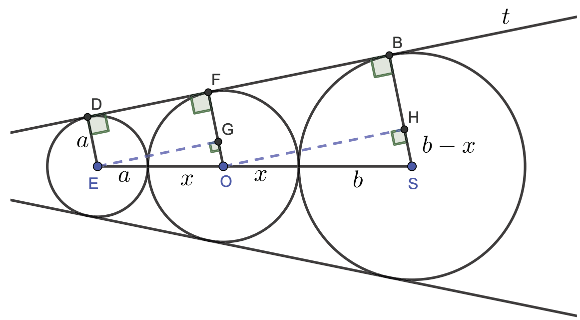
Rešitev. Oglejmo si sliko 4. Kota $\angle STB$ in $\angle ETC$ sta skladna. Trikotnika ΔTBS in ΔTCE sta enakokraka. Zato sta prej omenjenima kotoma skladna tudi $\angle TBS$, $\angle TCE$ (rdeča barva). Kota $\angle ASB$ in $\angle CED$ sta središčna kota z enako velikim obodnim kotom z vrhom pri T. Torej sta tudi skladna (dvojni zeleni lok). Trikotnika ΔASB in ΔCED sta spet enakokraka. Ker imata enako velik kot pri vrhu, imata tudi skladna kota ob osnovnici: to sta modro označena kota $\angle SBA$ in $\angle ECD$. Torej sta tudi kota $\angle TBA$ in $\angle TCD$ skladna. Daljici AB in CD oklepata enak kot s premico l, torej sta vzporedni.

3. Tri krožnice se dotikajo od zunaj in imajo dve skupni tangenti kot na sliki 5. Polmer najmanjše krožnice je a, polmer največje b. Koliko znaša polmer x srednje krožnice?

Rešitev. Tangenta t se dotika najmanjše krožnice v točki D, srednje v točki F, največje v točki B. Središče E najmanjše krožnice je za $a = |DE|$ oddaljeno od premice t (in od druge skupne tangente s). Podaljšajmo tangenti s, t do presečišča A kot na sliki 9. Točka E je središče kroga, včrtanega kotu s krakoma s in t. Zato leži na simetrali p kota med tangentama



SLIKA 5.
Narisani so polmeri do dotikališč.



SLIKA 6.
Modri črtkani črti sta vzporedni tangenti t.

z vrhom v A. Enako velja za središči O, S preostalih krožnic. Točke E, O, S so torej kolinearne.

Na sliki 6 vzporednica skupni tangenti t skozi središče E najmanjše krožnice seka polmer OF srednje krožnice v točki G. Vzporednica skupni tangenti t skozi središče O srednje krožnice seka polmer SB velike krožnice v točki H. Pravokotna trikotnika ΔEOG in ΔOSH imata paroma vzporedne stranice in sta tako podobna. Zato je

- $|OG| : |EO| = |SH| : |OS|$

ali

- $\dfrac{x-a}{x+a} = \dfrac{b-x}{b+x}.$

Znebimo se ulomkov:

- $x^2 + bx - ax - ab = -x^2 + bx - ax + ab$

in od tod $2x^2 = 2ab$. Tako je

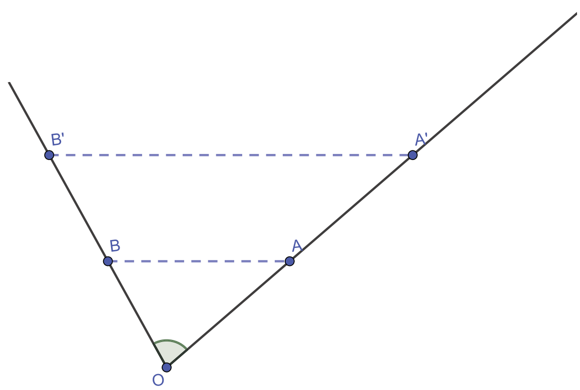
- $x = \sqrt{ab}$.

Središčni razteg v ravnini in prostoru

Po domače središčni razteg pomeni razteg (ali pomanjšanje) za isti faktor v vseh smereh.

Definicija. Vzemimo od 0 različno število k. V ravnini fiksirajmo točko O. Poglejmo si transformacijo, ki vsaki točki A priredi tako točko $A' = f(A)$, da velja:

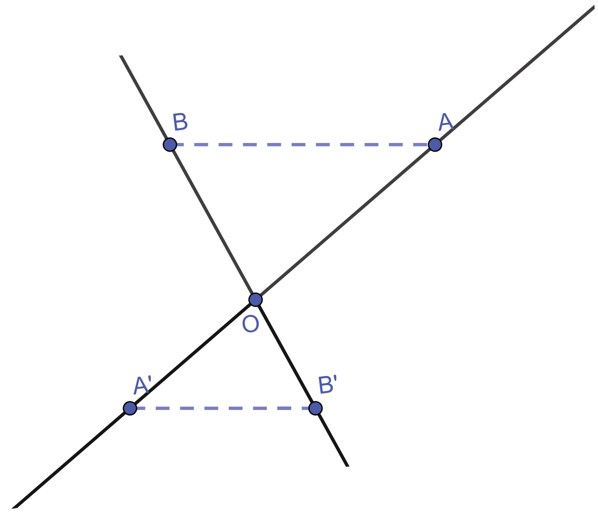
1. Razdalja med O in A' je razdalja med O in A, pomnožena s $|k|$: $|OA'| = |k||OA|$.
2. Če je $k > 0$, leži točka A' na poltraku p iz O skozi A.
3. Če je $k < 0$, leži točka A' na komplementu poltraka p, torej spet na premici skozi O in A, ampak na drugi strani točke O kot A.



SLIKA 7.
Središčni razteg s faktorjem $k = 2$

Na sliki 7 imamo središčni razteg s faktorjem 2, na sliki 8 pa s faktorjem -0,7.

Tej transformaciji rečemo *središčni razteg* (s tujo besedo *homotetija*) f s faktorjem k in s središčem (središčno točko) O. Seveda je $O' = O$, tako da razteg ohranja svoje središče. Če je $k = -1$, je naš razteg *zrcaljenje* preko točke O. Vsak razteg s faktorjem $k < 0$ lahko zapišemo kot sestav raztega s faktorjem $|k|$ in zrcaljenja preko središča.



SLIKA 8.
Središčni razteg s faktorjem $k = -0{,}7$.

Postavimo pravokotni koordinatni sistem z izhodiščem v točki O. Če sta (x, y) koordinati točke A, sta (kx, ky) koordinati točke A'. Funkcija f je bijektivna preslikava ravnine nase in njen inverz je dan s $f^{-1}(x, y) = (k^{-1}x, k^{-1}y)$. Inverzna preslikava je središčni razteg z istim središčem in s faktorjem $1/k$.

Če je s poljubna premica skozi središče O in B točka na s, leži tudi $B' = f(B)$ na s. Funkcija f preslika premico s bijektivno nase. Torej homotetija ohranja premice skozi svoje središče. Za $k \neq 1$ sicer razteg f premakne vsako točko na premici s, razen točke O, a preslikana točka ostane na s.

Vzemimo zdaj trikotnik ΔOAB kot na sliki 7. Razteg f ga preslika na trikotnik $OA'B'$. Oba trikotnika imata enak kot pri oglišču O in velja

- $|OA'| : |OB'| = |k||OA| : |k||OB| = |OA| : |OB|$.

Zato je trikotnik $\Delta OA'B'$ podoben prvotnemu. Trikotnika ΔOAB in $\Delta OA'B'$ imata paroma skladne kote. Zato sta daljici AB in $A'B'$ vzporedni. Velja še

- $|A'B'| = |k||AB|$.

Od tod sledi:

Središčni razteg trikotnik preslika na trikotnik z vzporednimi stranicami, torej paroma skladnimi koti. Oba trikotnika sta zato podobna.

→

Če je k faktor raztega f, ta razteg krožnico s polmerom r in s središčem S preslika na množico točk, ki so za $|k|r$ oddaljene od $S' = f(S)$. Slika krožnice je torej spet krožnica s polmerom $|k|r$ in s središčem S'.

Od tod sledi:

Trditev. Središčni razteg ohranja vsako premico skozi središče raztega. Premico, ki ne poteka skozi središče raztega, preslika na vzporedno premico. Daljico preslika na vzporedno daljico.

Središčni razteg s faktorjem k vse razdalje pomnoži s $|k|$.

Središčni razteg ohranja kote in trikotnik preslika na podoben trikotnik.

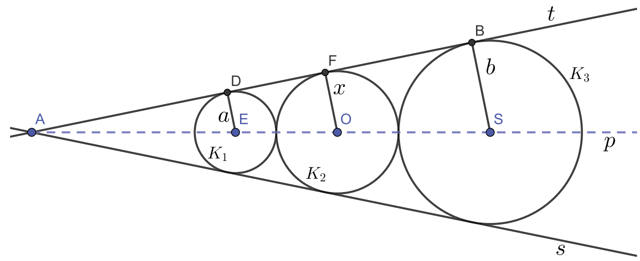
Središčni razteg f s faktorjem k nam krožnico s polmerom r in s središčem S preslika na krožnico s polmerom $|k|r$ in s središčem $f(S)$.

Ponovni pogled na drugo in tretjo nalogo

Poglejmo si stanje na sliki 3. Če je u razmerje polmerov večjega in manjšega kroga, nam središčni razteg f s faktorjem $m = -u$ in s središčno točko T preslika točko S na točko E in tako manjšo krožnico na večjo. Ohranja premici k, l in zato točko A, ki je presečišče leve krožnice in premice k, preslika na presečišče desne krožnice in premice k, torej na točko D. Po enakem premisleku f preslika B na C. Tako f preslika tetivo AB na tetivo DC. Ker f daljico preslika na vzporedno daljico, je dokaz končan.

Na povezavi [2] imamo interaktivno sliko, zasnovano na sliki 3. Število m lahko z drsnikom spreminjamo od -1 do -2. Vidimo, kaj središčni razteg s faktorjem m in s središčem v T naredi z levo krožnico in tetivo AB na njej. Preslikana tetiva ostaja vzporedna originalu. Za primeren m se pokrije s tetivo DC druge krožnice: $A'B' = DC$.

Poglejmo si še enkrat tretjo nalogo (slika 5). Podaljšajmo tangenti s, t do presečišča A kot na sliki 9. Točke E, O, S so enako oddaljene od obeh tangent in tako ležijo na simetrali p kota med tangentama z vrhom v A. Središčni razteg f s središčem A in s faktorjem $k = x/a > 1$ ohranja premico p. Malo krožnico K_1 s polmerom a ta razteg preslika na krožnico s polmerom x in s središčem na p. Ker se mala krožnica dotika obeh tangent in f ohranja tangenti, ima tudi preslikana krožnica natanko eno skupno točko s premico s in natanko eno skupno točko s premico t. Edina taka krožnica s polmerom x pa je srednja krožnica K_2. Torej f preslika K_1 na K_2.



SLIKA 9.
Tangenti se sekata v A.

Središčni razteg f nam unijo krožnic K_1 in K_2 preslika na sestav dveh večjih krožnic s središčema na p, ki imata natanko eno skupno točko in se obenem dotikata obeh tangent. Tako se $f(K_1) = K_2$ in $f(K_2)$ dotikata. Obe preslikani krožnici se tudi dotikata premic s, t. Tako je edino mogoče, da je $f(K_2) = K_3$. Zato je $b = kx = x^2/a$ in od tod $x = \sqrt{ab}$.

Naredili smo še animacijo [3]. Na njej imamo drsnik za število k, ki se lahko giblje od 1 do 2. Vidimo lahko, kaj razteg s središčno točko A in s faktorjem k naredi s sestavom levih dveh krožnic na sliki 9. Za primeren k dobimo desni krožnici na sliki 9. To ilustrira gornjo diskusijo.

Literatura

[1] J. L. Heilbron *Geometry Civilized, History, Culture, and Technique*, Clarendon Press, Oxford, 2000.

[2] *Animacija središčnega raztega krožnice in njene tetive v Geogebri*, dostopno na `www.geogebra.org/m/xwbfmyus`, ogled 12. 10. 2021.

[3] *Animacija središčnega raztega unije krožnic, ki se dotikata v Geogebri*, dostopno na `www.geogebra.org/m/zpchn8vd`, ogled 12. 10. 2021.

× × ×

Neenakosti med pitagorejskimi sredinami dveh števil

Šefket Arslanagić in Daniela Zubović (prevod in priredba Boštjan Kuzman)

Starogrški matematiki so poznali in geometrijsko opisali različne vrste sredine dveh števil, in sicer harmonično, geometrijsko, aritmetično in kvadratno. S pomočjo znanih neenakosti med temi sredinami lahko včasih dokažemo nekatere izreke ali pa uženemo različne probleme, ki jih pogosto srečujemo tudi v nalogah za srednješolce. V prispevku je predstavljenih nekaj zgledov z uporabo sredin za dve števili.

V sodobnem zapisu različne sredine dveh pozitivnih realnih števil x in y definiramo takole:

- *harmonična sredina* $H(x,y)=\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$,
- *geometrijska sredina* $G(x,y)=\sqrt{xy}$,
- *aritmetična sredina* $A(x,y)=\frac{x+y}{2}$,
- *kvadratna sredina* $K(x,y)=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$.

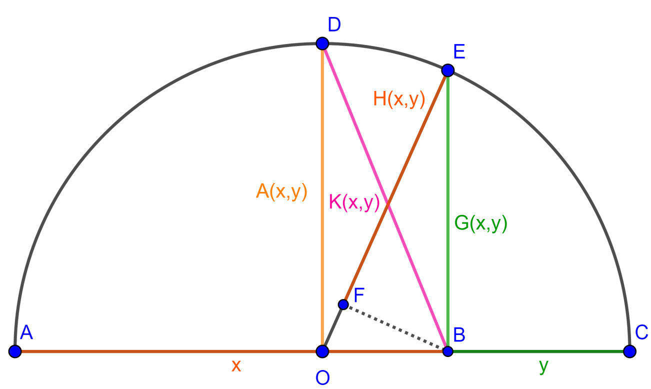
Če, denimo, velja $x=1$ in $y=3$, potem je harmonična sredina teh dveh števil enaka $H(1,3)=3/2$, geometrijska sredina $G(1,3)=\sqrt{3}$, aritmetična sredina $A(1,3)=2$ in kvadratna sredina $K(1,3)=\sqrt{5}$. Razvrstitev teh vrednosti po velikosti opisuje dobro znani klasični izrek.

Izrek. Za poljubni realni števili $x,y>0$ velja

- $H(x,y)\leqslant G(x,y)\leqslant A(x,y)\leqslant K(x,y)$.

V neenakostih velja enačaj natanko tedaj, ko je $x=y$.

Dokaz. Veljavnost neenakosti lahko utemeljimo geometrijsko. Za dani vrednosti x,y najprej narišemo daljico AC dolžine $x+y$ in na njej označimo točko B, ki jo razdeli na dela dolžine x in y, ter točko O, ki predstavlja središče polkroga s premerom AC. Nato z D in E označimo preseka polkrožnice s pravokotnicama skozi O in B, s F pa presek daljice OE s pravokotnico skozi B. Očitno je aritmetična sredina $A(x,y)$ enaka dolžini daljice OD, z uporabo Pitagorovega izreka pa se hitro prepričamo, da je geometrijska sredina $G(x,y)$ enaka dolžini daljice BE, harmonična sredina $H(x,y)$ enaka dolžini daljice FE in kvadratna sredina $K(x,y)$ enaka dolžini daljice BD. Zdaj ni težko premisliti, da za štiri sredine res velja omenjena neenakost.



SLIKA 1.
Predstavitev štirih sredin z dolžinami daljic v polkrogu

V nadaljevanju si oglejmo nekaj nalog, v katerih bomo pri rešitvi uporabili zgornje neenakosti. Naloge je seveda mogoče rešiti tudi kako drugače.

Naloga 1. Dokaži neenakost $(a+b)\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqslant a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$ za $a, b > 0$. Kdaj v izrazu velja enakost?

Rešitev. Neenakost prepišemo v $\frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqslant \sqrt{ab} \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$. Zaradi neenakosti $A(x,y) \geqslant G(x,y)$ za $x = a$ in $y = b$ velja $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, zaradi neenakosti $K(x,y) \geqslant A(x,y)$ za $x = \sqrt{a}, y = \sqrt{b}$ pa velja $\sqrt{\frac{a+b}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2}{2}} \geqslant \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$. Produkt teh dveh neenakosti da iskano neenakost. V njej velja enačaj le tedaj, ko veljata obe posamični enakosti, torej le v primeru $a = b$.

Naloga 2. Dokaži neenakost $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1} > \frac{2}{a}$ za $a > 1$.

Rešitev. Željeno neenakost dobimo s preureditvijo neenakosti $A(x,y) \geqslant H(x,y)$ za vrednosti $x = \frac{1}{a+1}$ in $y = \frac{1}{a-1}$. Enačaj v tem primeru ni mogoč, saj velja $\frac{1}{a+1} \neq \frac{1}{a-1}$.

Naloga 3. Dokaži neenakost $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2 \geqslant \frac{25}{2}$, če je $a, b > 0$ in $a + b = 1$. Kdaj velja enakost?

Rešitev. Naredili bomo dva koraka. Najprej v neenakost $A(x,y) \geqslant G(x,y)$ vstavimo $x = a$, $y = b$, upoštevamo $a + b = 1$ in neenakost kvadriramo, da dobimo $\frac{1}{ab} \geqslant 4$. Nato v neenakost $K(x,y) \geqslant A(x,y)$ vstavimo $x = a + \frac{1}{a}$ in $y = b + \frac{1}{b}$ ter jo kvadriramo, da dobimo

- $$\frac{(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2}{2} \geqslant \left(\frac{a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+\frac{1}{ab}}{2}\right)^2 \geqslant \left(\frac{1+4}{2}\right)^2,$$

od koder sledi iskana neenakost. Enačaj velja le v primeru, ko je $a = b = 1/2$.

Naloga 4. Dokaži neenakost $a^4+b^4+c^4 \geqslant abc(a+b+c)$ za $a, b, c > 0$.

Rešitev. Na dva načina bomo uporabili neenakost med aritmetično in geometrijsko sredino. V neenakost $A(x,y) \geqslant G(x,y)$ vstavimo $x = a^4$ in $y = b^4$, da dobimo $a^4+b^4 \geqslant 2a^2b^2$. Na podoben način dobimo še $a^4+c^4 \geqslant 2a^2c^2$ ter $b^4+c^4 \geqslant 2b^2c^2$. S seštevanjem vseh treh neenakosti dobimo novo neenakost

- $a^4+b^4+c^4 \geqslant a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2$.

Z vstavljanjem $x = a^2b^2$ in $y = b^2c^2$ v neenakost $A(x,y) \geqslant G(x,y)$ sledi $a^2b^2+b^2c^2 \geqslant 2ab^2c$. Po simetrični menjavi parametrov a, b, c dobimo še dve podobni neenakosti in po seštevanju sledi

- $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqslant abc(a+b+c)$.

Iskano neenakost zdaj sestavimo iz obeh vmesnih neenakosti.

Naloga 5. Dokaži neenakost $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$ za $a, b, c > 0$.

Rešitev. Neenakost med harmonično in geometrijsko sredino $H(x,y) \leqslant G(x,y)$ uporabimo trikrat za $x = 1$ in različne $y = \frac{a}{b+c}, \frac{b}{a+c}, \frac{c}{a+b}$. Po seštevanju in preoblikovanju dobimo neenakost $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geqslant 2$. Enakost bi pomenila, da je $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b} = 1$, kar vodi v protislovje.

Zadnjo nalogo v celoti prepuščamo bralcu.

Naloga 6. Dokaži, da velja $\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, kjer so a, b, c dolžine stranic nekega trikotnika.

× × ×

Disperzija

Andrej Likar

Pred časom sva s prijateljem Bogdanom sklenila, da greva peš na daljšo pot od Trojan do Laškega. Pot naju je vodila preko Šentgotarda na Čemšeniško planino, nato na Krvavico, pa Sveto planino (Partizanski vrh), Mrzlico, Gozdnik in končno na Šmohor, od koder sva sestopila v Laško. Pot je sicer dolga, a prav nič zahtevna. Na poti sva imela dovolj časa za izjemne razglede in za počitek v kočah.

Že takoj na začetku poti sva tik ob poti na Čemšeniško planino prišla do tovorne žičnice. Danes jo oskrbniki koče zaženejo le pozimi, ko z oskrbovalnim vozilom ne morejo na pot. Takrat je bila nosilna jeklena vrv na dosegu roke in je bila napeta do spodnjega nosilnega stebra pri cerkvici na pobočju Čemšeniške planine. Prosta in napeta nekaj stometrska vrv je kar klicala po poskusu. Zanimalo me je, kako dolgo potuje val do spodnjega stebra in nazaj. Poiskal sem torej debelejšo palico in narahlo udaril po vrvi. Potem sem nanjo naslonil roko in čakal na »odmev«. Res je po nekaj sekundah prišel, a sem bil nemalo presenečen, kaj je prišlo nazaj. Pričakoval sem pač kratek sunek, kakršnega sem s palico vzbudil prej. Vendar sem pred sunkom otipal brnenje, ki je bilo vse bolj izrazito, temu pa je sledil sunek. Poskus sem ponavljal in ne glede, kako sem vrv udaril, vedno se je sunek napovedal s hitrim tresenjem vrvi. Takrat pojava nisem razumel, a sem si zapomnil izid in pozneje našel razlago.

Pri obravnavi valovanja omenjamo tri bistvene količine: frekvenco ν, valovno dolžino λ in hitrost c širjenja valovanja, pri nas po vrvi. Vse tri količine povežemo v znano enačbo

$$\lambda\nu = c\,.$$

Valovanju s kratko valovno dolžino pripada velika frekvenca. Hitri valovi imajo pri dani frekvenci dolgo valovno dolžino. Odmik vrvi je pri tem harmoničen, kar pomeni, da zapišemo odmik takole:

$$u = y_0 \cos(\omega t - kx)\,,$$

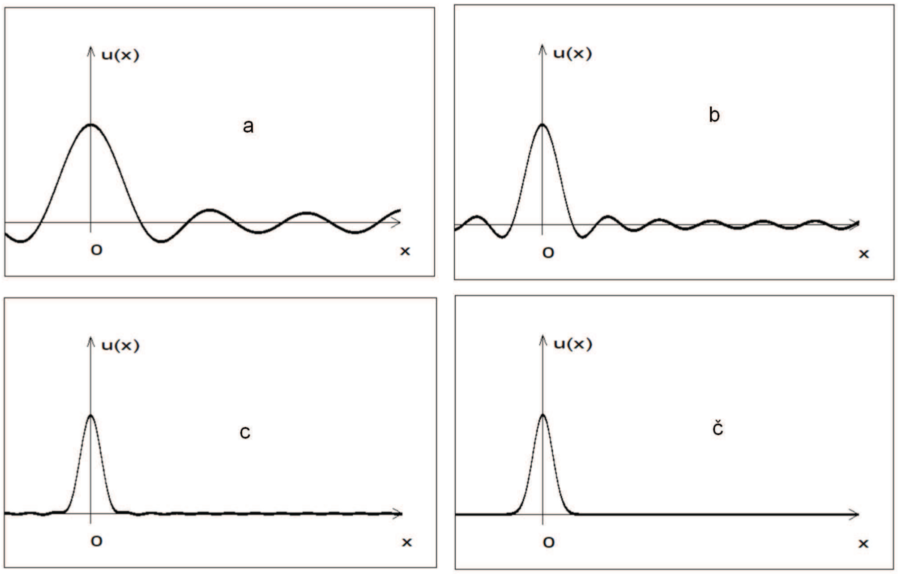
kjer je odmik pri $x = 0$ in $t = 0$ tudi $u = 0$, amplituda valovanja, to je največji odmik, pa y_0. Pri drugačnem odmiku na začetku lahko prištejemo še sinus. Zaradi takega zapisa velja:

$$\omega = 2\pi\nu\,,$$
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}\,.$$

Pri valovanju na vrvi se tu ustavimo. Predvsem nam ne pade na misel, da je potrebno upoštevati še kaj. Predvsem ne pomislimo, da je lahko hitrost valovanja različna pri različnih valovnih dolžinah. Če predpostavimo, da je vrv v nenapetem stanju povsem gibka, lahko pokažemo, da se valovanje po njej širi enako hitro ne glede na valovno dolžino. Vendar jeklena vrv ni povsem gibka, kratek konec take vrvi je bolj podoben jekleni palici kot mehki vrvici. Tu pa je hitrost valovanja nekoliko odvisna od valovne dolžine: krajši valovi potujejo nekoliko hitreje kot daljši. Pri krajših valovih pride negibkost bolj do izraza.

Razlika v hitrostih valovanja pri različnih valovnih dolžinah je zelo majhna in je ni lahko izmeriti. Meritev hitrosti bi bila zelo zahtevna, saj bi morali vzbujati vrv dalj časa s sinusnim odmikom na njenem začetku, kar bi terjalo zelo dolgo vrv in neko ne posebno preprosto napravo.

Najpreprosteje je s kratkim sunkom vzbuditi vrv, kot sem to naredil sam, in opazovati širjenje sunka po vrvi. A tu naletimo na povsem nekaj novega. Kratek sunek pač niti približno ni sinusno valovanje, ki traja, kolikor hočemo dolgo, in se temu primerno razteza na zelo velikem območju. Tu pokličemo na pomoč interferenco. Po vrvi se lahko širijo različni sinusni ali kosinusni valovi, ki se med seboj na določenih mestih ojačujejo ali oslabijo. Ali je mogoče



SLIKA 1.
Gradnja sunka z množico harmoničnih valovanj. Pri a) je teh valovanj malo, potem pa vedno več. Pri č) odmika od pravega sunka ne vidimo več.

sestaviti te valove tako, da bo njihova interferenčna slika kar naš sunek? To izjemno pomembno vprašanje si je prvi zastavil francoski matematik Fourier. In res, ugotovil je, da z izbrano vsoto valovanj možno sestaviti sunek, kjer je odmik znaten le v ozkem območju, drugje pa je interferenca destruktivna tako, da je tam odmik enak nič. Sunek torej vzbudi celo množico kosinusnih ali sinusnih, torej harmoničnih, valov vseh mogočih frekvenc in valovnih dolžin. V času $t = 0$ sestavimo potujoče valove, ki so sedaj »zamrznjeni« tako, da dobimo naš sunek. »Zamrznili« smo jih pač tako, da še ne pustimo teči časa od $t = 0$ naprej. Potem jim pustimo prosto pot, če vemo, s kakšno hitrostjo se širijo. Začuda s takim razmišljanjem dobimo prave rezultate, to je take, ki se skladajo z opazovanji. Nenavadno je, da je na mestih, do katerih sunek še ni prišel in je odmik enak nič, vse polno potujočih valov, ki pa se povsem uničijo. Ali so res ves čas tam? S tem si ne gre preveč beliti glave, pomembno je, da tako razmišljanje privede do pravih izidov.

Pravkar opisana, res genialna Fourirova ideja terja kratko ilustracijo. Oglejmo si interferenco valov, ki postopno gradijo sunek (glej sliko 1). Prva sličica (a) vsebuje le pet valov, to je val z valovnimi vektorji $k = 0, k_0, 2k_0, 3k_0$ in $4k_0$. Tu je k_0 primerno izbran majhen korak valovnega števila. Na drugi (b) smo dodali še valove s $k = 5k_0 \ldots 8k_0$, nato pri (c) valove z valovnimi števili $k = 9k_0, \ldots 16k_0$. Naposled so na (č) vsi valovi do $32k_0$. Na tej zadnji sliki je interferenca povsod izven sunka tako dobro destruktivna, da odmika na sliki sploh ne opazimo. Dodajanje naslednjih valov za naš račun ni potrebno, bi pa še bolj zmanjšalo odmik. Seveda moramo valove dodajati vsakega s svojo, vnaprej predpisano amplitudo, ki je odvisna od oblike sunka. Pravimo, da, tako kot sestavine pri jedeh, primerno namešamo valove.

Vse valove smo namešali pri času $t = 0$. Valovi, tako kot piščeta pod kokljo, le čakajo, da jih s $t > 0$ poženemo v tek. Vsi valovi pa se pri vrvi ne širijo z enako hitrostjo. Pri merjenju hitrosti vala opazujemo, kako se giblje njegov največji odmik. Pri naših valovih, kjer je odmik

- $u = u_0 \cos(\omega t - kx)\,,$

je največji odmik takrat, ko velja

- $\omega t - kx = 0, 2\pi, 4\pi \ldots.$

Hitrost je potem (če vzamemo pri zgornji enačbi kar ničlo)

- $\dfrac{x}{t} = \dfrac{\omega}{k}\,.$

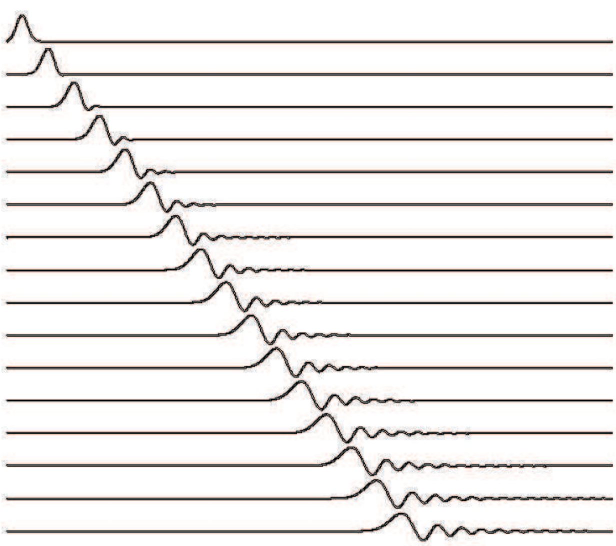
Hitrost vrha pa je odvisna od valovne dolžine, torej od valovnega števila k:

- $c(k) = \dfrac{\omega}{k}\,.$

To odvisnost narekuje sredstvo, po katerem se valovanje širi. V našem primeru je odvisnost takale:

- $c(k) = c_0(1 + \alpha k^2) = \dfrac{\omega}{k}$.

Tu je c_0 hitrost pri zelo dolgi valovni dolžini, α pa je konstanta, ki je odvisna od negibkosti vrvi. Tu bomo le privzeli to odvisnost, ne bomo se spraševali, kako pridemo do nje. Vidimo pa, da so krajši valovi, to je pri vse večjem k, vse hitrejši. Sedaj, ko poznamo hitrost valov, lahko sprostimo čas t in opazujemo, kako naš sunek potuje po vrvi. Na sliki 2 je potovanje prikazano v različnih časih, časi se enakomerno večajo od zgornje slike do spodnje. Vrh se zaradi različnih hitrosti njegovih sestavin preoblikuje, pred njim hitijo valovi s krajšo valovno dolžino, prav to, kar sem zaznal na vrvi tovorne žičnice.



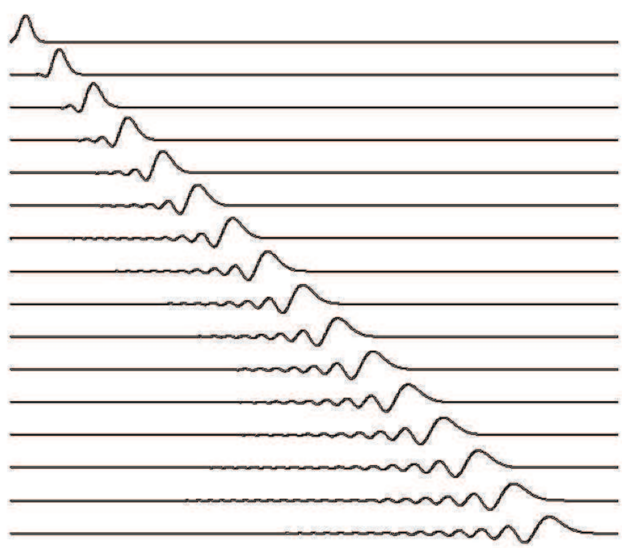
SLIKA 2.
Potovanje sunka po jekleni vrvi

Hitrejši valovi pri višjih frekvencah in manjših valovnih dolžinah torej pri vrvi, napovedo prihod glavnega sunka. Zakaj potem pri cunamijih ne opazujejo prihoda teh kratkih valov, ki napovejo prihod velikega rušilnega vala? Rekli smo, da je odvisnost hitrosti valov odvisna od sredstva, po katerem se valovanje širi. Pri cunamijih je ta odvisnost žal drugačna od tiste pri vrvi:

- $c(k) = c_0(1 - \alpha k^2)$.

Razlikujeta se sicer le za predznak pred α, a to je usodno. Sedaj krajši valovi zaostajajo za glavnim sunkom in ničesar ne napovedujejo. Glavni sunek pride do obale brez opozorila in ruši vse pred seboj. Napovejo ga le s skrbnim opazovanjem gladine in seizmološkimi opazovanji. Dodatna težava je izredno velika hitrost širjenja cunamija, torej hitrost c_0, ki v globljih morjih doseže hitrosti potniških letal. Na sliki 3 vidimo širjenje cunamija, podobno, kot smo prej prikazali širjenje sunka po vrvi.

Še beseda o naslovu tega prispevka. Disperzija je bolj domač pojem iz optike in pomeni razstavitev ali razklon belega svetlobnega curka na spektralne barve. Do razklona pride zaradi različnih hitrosti enobarvnih svetlob v prozornih snoveh. Izraz se je razširil na vsa valovanja s podobno lastnostjo, kjer se torej harmonični valovi širijo z različnimi hitrostmi. Beseda izvira iz latinščine, dispersio pomeni razpršen, dispergere pa razpršiti, kar dobro ponazarja razširanje sunka pri njegovem potovanju skozi sredstvo.



SLIKA 3.
Potovanje cunamija

× × ×

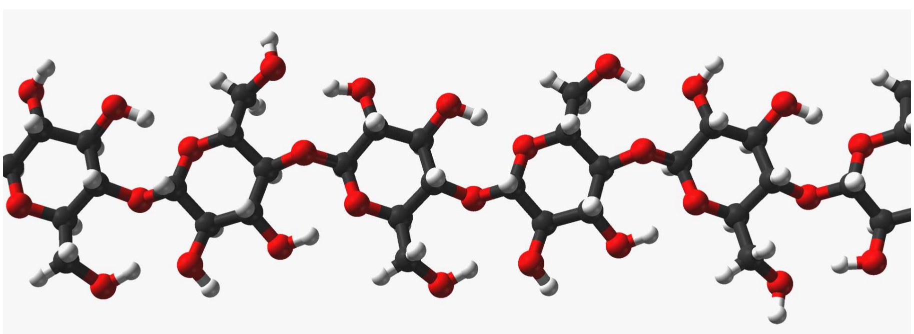
Gorenje lesa

Jože Rakovec

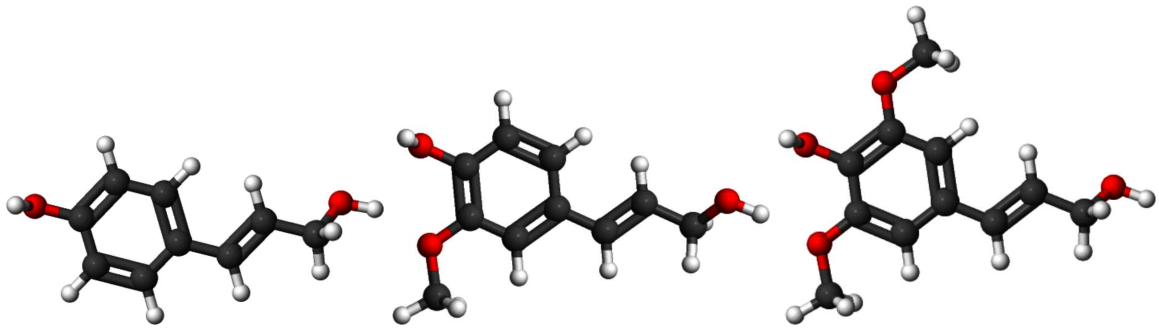
→ Les večinoma gori z rumenim plamenom in z njim pogosto v pečeh dosežemo do 600 °C; če pa je plamen zgolj oranžen, pa okrog 400 °C, (startwoodworkingnow.com/how-hot-does-wood-burn/). Les se vžge pri 230 °C, dobro začne goreti pri 260 °C, pri temperaturi nad 400 °C pa gorijo predvsem plini, ki izhajajo iz razgretega lesa. Seveda je vse to odvisno tudi od vrste drv: breza npr. gori pri nižji temperaturi, bukev pa pri višji, suh les gori bolje, vlažen les slabše. Bolj je plamen svetel, višja je temperatura in manj saj ter dima nastaja – za slednje je potrebno, da je na razpolago dovolj zraka. Kadar v peči zares dobro gori, recimo, s svetlo rumenim plamenom pri 600 °C, sploh ne vidimo, da bi se iz dimnika kadilo, ker »vse zgori« v nevidne pline. Tako je treba kuriti, brez dima in saj, saj tak način najmanj onesnažuje zrak – nič sivega dima, nič saj, pa še izkoristek je višji.

Če les močno segrejemo, začnejo iz njega izhajati plini. Lesni plini so bili med prvimi, ki so jih uporabljali za svečavo in za ogrevanje. Iz www.energetika-lj.si/o-druzbi/zgodovina-2 izvemo, da se je v življenju ljubljanskih meščanov plin prvič pojavil 19. novembra 1861 v obliki prižganih cestnih svetilk, ki so razsvetlile mračne ulice. Najprej so »mestni plin« pridobivali s suho destilacijo lesa, po letu 1903 iz premoga, po letu 1961 iz naftnega plina, leta 1979 pa Ljubljana prvič dobi zemeljski plin. Pridobivanju plina iz trdnih snovi pri visoki temperaturi in pri omejeni količini zraka, kjer torej plini ne zgorijo, ampak se jih lahko shrani in uporabi kasneje, rečemo piroliza (npr. Preskar 2016, dk.um.si/IzpisGradiva.php?id=5706). To je fizikalni in kemijski proces, pri katerem se dolge in v polimere povezane molekule razcepljajo v krajše in na koncu v molekule posameznih plinov. Pri kurjenju lesa pa seveda plini sproti gorijo in s tem sproti zagotavljajo dovolj visoko temperaturo za uplinjanje.

V lesu so glavne sestavine celuloza (40 do 50 %), hemiceluloza (20 do 50 %) in lignin (15 do 35 %), pa še škrob, eterična olja, smole ...cpi.si/wp-content/uploads/2020/08/3-LES_ZGRADBA.pdf.



SLIKA 1.
Shema verige celuloze, pri kateri so prostorske razporeditve atomov prikazane s krogličnim modelom: ogljike predstavljajo črne kroglice, kisike rdeče in vodike manjše, svetlosive kroglice. Prirejeno po Ben Mills iz commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6611880, brez omejitev.



SLIKA 2.

Trije alkoholi, glavni gradniki lignina. Na prvi sliki je p-kumaril, na drugi koniferil in na tretji sliki sinapil. Črne kroglice predstavljajo atome ogljika, rdeče atome kisika in svetlosive atome vodika. Obroči so aromatski, par ogljikovih atomov v stranski verigi (na slikah desno) je povezan z dvojno vezjo (dve palčki). Slika so prirejene po Yikrazul iz en.wikipedia.org/wiki/Paracoumaryl_alcohol#/media/File:P-Coumaryl_alcohol.svg, po Jynto iz commons.wikimedia.org/wiki/File:Coniferyl_alcohol_3D_ball.png, avtor je Jynto, in po DFlyjerz iz commons.wikimedia.org/wiki/File:Sinapyl_alcohol-3D-balls.png.

Celulozo $(C_5H_{10}O_5)_n$ gradijo molekule glukoze, povezane preko kisikovih atomov. Molekulo glukoze predstavlja šestčlenski obroč iz petih ogljikovih in enega kisikovega atoma. Na ta obroč sta vezani hidroksilni skupini (–OH) in hidroksimetilna skupina ($-CH_2OH$). Glukoza se uvršča med sladkorje oziroma ogljikove hidrate. Dodatno sosednje molekule glukoze v polimerni verigi povezujejo še vodikove vezi. V verigi je lahko povezanih zelo veliko število molekul glukoze: n je pri bombažu 13 tisoč (zelo dolga vlakna, odlična za niti, tkanine in pletenine), pri lanu tri tisoč, pri drevju pa le od 300 do 1700. V hemicelulozi so verige krajše, od 50 do 3000 obročev, ki pa so stransko nekaj bolj razvejene, manj podolgovate kot v celulozi. V njih so poleg glukoze še drugi sladkorji, npr. galaktoza, manoza.

V ligninu pa osnovni gradniki niso sladkorji, ampak aromatski alkoholi p-kumaril, koniferil in sinapil. Njihove zgradbe so prikazane na sliki 2. Vsi trije so pri običajni temperaturi v trdnem agregatnem stanju. Aromatski alkoholi so v ligninu povezani preko vezi C—C ali C—O—C. Ker so v ligninu deleži aromatskih alkoholov različni, pa tudi povezave so dokaj zapletene, si kemijsko sestavo lignina lahko predstavljamo kot nekakšno mešanico raznih povezav. Če vas zanima, kako izgleda lignin, pobrskajte po spletu, npr. na sl.wikipedia.org/wiki/Lignin! Če pobrskate še naprej, pa ne boste našli samo ene, ampak mnogo različnih struktur lignina.

Da iz lesa izhajajo molekule plinov, se morajo porušiti povezave med osnovnimi gradniki, sladkorji ali alkoholi, nato pa še vezi znotraj teh gradnikov. To se zgodi ob dodajanju energije ob dovolj visoki temperaturi.

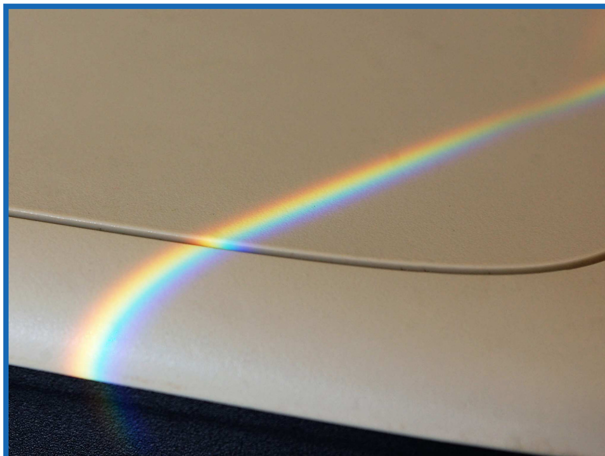
Pri pirolizi (brez kisika) iz lesa nastaja oglje, nekaj tekočih produktov, od plinov pa »sintetični« plin, v katerem je največ CO, nekateri plinasti ogljikovodiki C_xH_y in še nekaj H_2. Nastaja tudi do konca oksidirani CO_2 pa še kaj (glej npr. www.sciencedirect.com/topics/engineering/wood-pyrolysis in dk.um.si/Iskanje.php?type=napredno&lang=slv&stl0=Avtor&niz0=Maja+Preskar). Pri gorenju v peči, kjer z zrakom dovajamo tudi kisik, pa gorljivi plini sproti gorijo v vodno paro H_2O in ogljikov dioksid CO_2.

Bolj porozne vrste lesa gorijo hitro in dajejo nižje temperature (razne vrste borov le krog 350 ℃), bolj goste pa višje (macesen nekaj nad 800 ℃, hrast 900 ℃). Večina ljudi pri nas, prisega na bukova drva (do 950 ℃). Vse to seveda pri optimalnem gorenju (glej npr. startwoodworkingnow.com/how-hot-does-wood-burn/). To se lepo vidi tudi po barvi plamenov: svetlo rumeni plameni so najbolj vroči, oranžni pa manj vroči. Kar nekaj podatkov o barvi plamena in temperaturi je na sl.wikipedia.org/wiki/Ogenj.

Kaj so torej plameni? To so žareči plini, ki se sproščajo iz drv, gorijo nad poleni in zaradi visoke temperature žarijo, svetijo. Svetijo zato, ker oddajajo sevanje, elektromagnetno valovanje. Od dodane energije,

18 nadaljevanje na strani →

Nagradna križanka



AVTOR MARKO BOKALIČ
GRŠKO MITOLOŠKO PODZEMLJE
UMETNA SUROVINA ZA PROIZVODNJO LAKOV
ZIMSKOŠPORTNO SREDIŠČE V ZDA
MISTER
NEMŠKI KEMIK, BOSCHEV SODELAVEC (FRITZ)
PEVEC PESTNER
VRHNJA PLAST LESA RASTLIN
FIZIKALNI POJAV PRI DRSENJU TELESA

NEMŠKI FIZIK IN IZUMITELJ (HERMANN VON)
SESTAV VEČ NAPRAV
PRISTANIŠKA NAPRAVA
TRD, OKROGEL IZTREBEK
NOVOZEL. PAPIGA
NAJMOČNEJŠA ŠAHOVSKA FIGURA
NEKD. FIN. DIRKAČ ROSBERG
IGRALKA RINA
2
NAPRAVA ZA PRENOS VRTENJA ENE GREDI NA DRUGO
DOMENA NIZOZEMSKE
KAZALEC RASTI

DMFA
DIVJA LAMA
IZOLAC. MATERIAL IZ MINERALNE VOLNE
TELESNO "OMREŽJE" ZA PRETOK KRVI
MLADA MATI
DAN V TEDNU
RUSKA FILMSKA REŽISERKA MURATOVA
HUNSKI KRALJ
LITERARNA JUNAKINJA KARENINA
STARA PRIMORSKA TRTA
NAPAČNO MIŠLJENJE

PODATEK, KI OPREDELJUJE KEMIJSKI ELEMENT
STENA
NAŠ VIOLINIST, KONCERTNI MOJSTER (MIRAN)

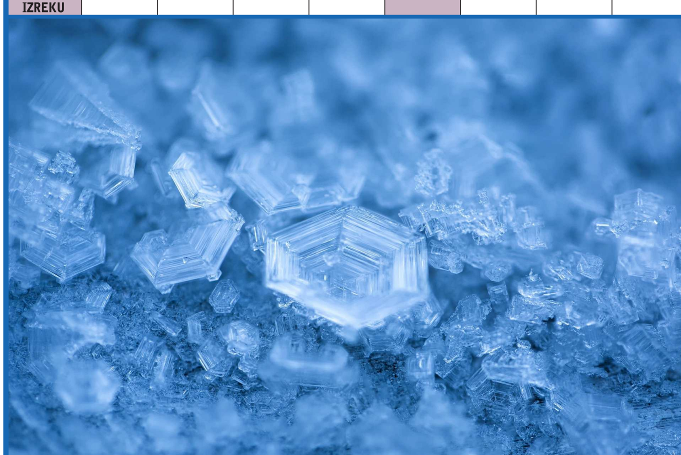
PRISTOJBINA ZA HRAMBO POŠILJKE
6
RIM. ZNAK ZA 1100
BODEČ POLJSKI PLEVEL
JUŽNOAFR. DRŽAVNIK (THABO)
STENSKA PREPROGA

VRSTA METAFORE, KOMPARACIJA
IT. SKLADATELJ IN LIBRETIST (ARRIGO)
BISTVO
PLAVALNO OBLAČILO

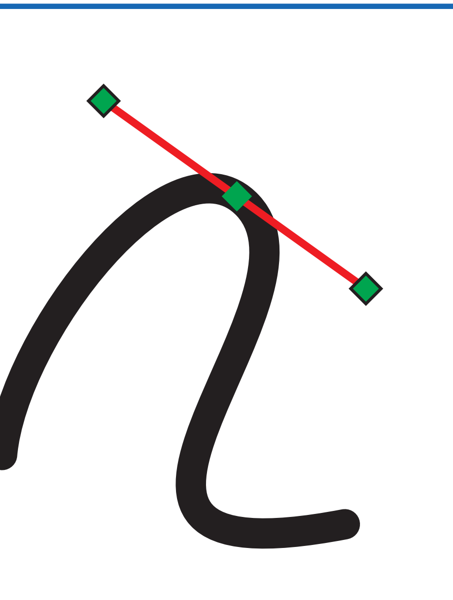
ANTIČNO MESTO NA OBALI BEOCIJE
VOJAK
BERILIJ
4
STANKO LORGER
NASTALA ŠPRANJA, ZEV

PLEČATA GORA NA CERKLJANSKEM
VALOVITA GORIŠKA POKRAJINA
PROSTORNINA
SUNEK PROČ OD SEBE
DELITELJ
IT. FILOZOF IN ASTRONOM (GIORDANO)
STIL

LATINSKI IZRAZ ZA KOCKO V ZNANEM IZREKU
PREHODEN PROSTOR V STAVBI
ITALIJAN. PREDLOG
KRATKO ŽIVLJENJ. PRAVILO
MUSLIMANSKA VERA
NAŠ EKONOMIST (PETER)



AM. FIZIK IN KEMIK (ROBERT)
NAPISANO BESEDILO
NOGOMETNI KLUB IZ LIVERPOOLA
5
POKOJNI IGRALEC DOUGLAS
GALIJ
ZNIŽANI TON A
HLADNO OBDOBJE LETA
MEDVEDEK IZ MILNEJEVE PRAVLJICE
MESTO V INDIJ. DELU PANDŽABA
NOBELIJ
KRATKA RAZLAGA, UTEMELJITEV
SEDMI PLANET OSONČJA
OSJE GNEZDO



GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ
NEKDAJ SPREMLJEVALKA MLADEGA DEKLETA
AMERIŠKI FILOZOF IN PESNIK (RALPH WALDO)
NAPETA MEMBRANA
SABLJAŠKI REKVIZIT
MEŠANICA ENCIMOV ZA RAZGRADNJO BELJAKOVIN
TULIJ
NOVOMEŠKA TOVARNA AVTOMOBILOV
TEKSTILNA TALNA OBLOGA
STRMA VPADNICA V CENTER KRANJA
AZIJSKA BETELOVA PALMA
PODROČJE MATEMATIKE
MERILNIK JAKOSTI ELEKTR. TOKA
1
NASELJE V SPODNJI VIPAVSKI DOLINI
KMEČKO ORODJE
PLAZILEC
REKA V JUŽNEM MAROKU
KRAJ NA TRŽAŠKEM KRASU
TON MED D IN E
NAMESTITEV SESTAVNEGA DELA
ČAS, PRIMEREN ZA DEJAVNOST
TROPSKA MRAVLJA
ŠALA, SMEŠNICA
JAPONSKA LIRIČNA SPEVOIGRA
DRŽAVLJANI LAOSA
DOPUSTNIK, IZLETNIK
OČKA, TATI
VATROSLAV LISINSKI
CITRUSI
LOKALNO RAČUNALNIŠKO OMREŽJE
NAŠ MISIJONAR IN RAZISKOV. AFRIKE (IGNACIJ)
LATINSKI VEZNIK
DMFA
SEZONSKI PREDPLAČNIK
INTELEKT
PRIMORSKO HRIBOVJE
ENAKI ČRKI
NEKDANJI ETIOPSKI CESAR SELASSIE
MANJŠI GRŠKI JONSKI OTOK
AMERIŠKI DRŽAVNIK LINCOLN
ANTIČNO RAČUNALO
ŽIVALSKO GNEZDO Z MLADIČI
POLJSKI PARLAMENT
MUSLIMAN. MOŠKO IME, HOKEJIST ALAGIĆ
ZAGREBŠKA TOVARNA SLADKARIJ
IGRALEC MARVIN
BORILNI ŠPORT
OBVODNA GOSPODAR. DEJAVNOST
AM. PROIZV. PROCESORJEV
VOLILNI MOŽ V ZDA
PRITOK SAVE IZ BOSNE
ZAPOREDNI ČRKI
BRANILEC
PAPIGA S ČOPIČAST. ŠČETINAMI NA JEZIKU
VRSTA ŽITA
7
8
PEVKA SIRK
IT. MESTO V POKRAJINI ROMANJI
PRIIMEK PREMOŽNE FIRENŠKE PLEMIŠKE RODBINE
SRED. DEL ZEMLJE IZ NIKLJA IN ŽELEZA
UPANJE
BOLGARSKA DENARNA ENOTA
MITIČNI ATENSKI KRALJ, TEZEJEV OČE
ZAČIMBNA KVAŠA ZA MESO (LJUDSKO)
OGRODJE ŽELVE
OBMEJNI KRAJ POD ČRN. KALOM
NIKRAGOV. DRŽAVNIK (DANIEL)
SOSEDI ČRKE N
3
GENEALOG
BAJESLOVNO BITJE, KI PONOČI VSTAJA IN LJUDEM SESA KRI
LJUDSKA PRITRDILNICA

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

`www.presek.si/krizanka`

ter ga oddajte do **1. decembra 2021**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

× × ×

→ nadaljevanje s strani 15

toplote pri gorenju, se snovem poviša energijsko stanje, ki pa se potem spet zniža in pri tem oddaja energijo v obliki sevanja. Manjše energijske spremembe so npr. povezane s tem, da atomi, povezani v molekule, začnejo nihati sem in tja glede na težišča molekul, ali pa se začnejo molekule vrteti – oboje pomeni nekaj več energije glede na mirujoče molekule. In ko se taka gibanja ustavljajo, molekule oddajo ravno to energijo v obliki infrardečega sevanja – IR. Oddajanje vidne svetlobe pa je povezano z večjimi spremembami energije pri prerazporejanju elektronov okrog atomskih jeder. Z dodajanjem energije (več energije kot za nihanja in vrtenja molekul), se elektroni prerazporedijo na energijsko višja stanja. Ko se vračajo v osnovno stanje, oddajajo to energijo v obliki izsevanja vidne svetlobe. Je še kar nekaj načinov drugih energijskih prehodov v snovi, a na tem mestu o njih ne bomo govorili.

Vidno svetlobo zaznavamo z očmi; IR sevanja pa ne vidimo, ga pa lahko začutimo. Če npr. dlan obrnemo proti topli peči, začutimo, da se koža segreje, ko na dlan prihaja več energije IR sevanja od peči, kot pa jo dlan oddaja proti peči. Čutnice v koži zaznajo to s spremembo hitrosti prenosa signala po živcih ob povišani temperaturi (`en.wikipedia.org/wiki/Thermoreceptor`, letošnja Nobelova nagrada za fiziologijo!). Torej posredno ob spremembah temperature v čutnicah v koži zaznavamo tudi IR sevanje; zaznamo, ali ga prejemamo več ali manj, kot ga sami oddajamo. IR senzorje in kamere uporabljajo še marsikje: pri IR termometrih, v vojski in policiji, uporabljajo jih tudi inženirji ob pregledovanju šibkih mest pri izolaciji stavb.

Ves les se pri gorenju ne uplini in zgori, nekaj ostane trdnega v obliki oglja, ki je skoraj čisti ogljik. Ta ostaja v peči razžarjen dalj časa in »drži« toploto. Na začetku tudi gori s plamenom, proti koncu pa le še žari kot rdeča in vedno bolj temno rdeča žerjavica. Ko vse skupaj do konca pogori, je v pepelu negorljivi ostanek – razni minerali, ki jih je v lesu vsega skupaj okrog 1 %: Ca, K, Mn, Mg (Leban, učno gradivo, `cpi.si/wp-content/uploads/2020/08/4-les_lastnosti.pdf`). Če smo res učinkovito kurili, je pepel svetlo siv ali skoraj bel, če pa je temnejši, so v njem tudi saje, torej tisto, kar bi sicer lahko zgorelo, ampak ni. Škoda!

× × ×

Barvni sudoku

→ V 8 × 8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2 × 4) nastopalo vseh osem števil.

		7					
4		5	8				3
8			6	7			
		3	1				5
						7	
				2	1	8	
	3						
	6			5		2	

→→→ REŠITEV BARVNI SUDOKU

6	1	7	3	4	8	5	2
4	2	5	8	6	7	1	3
8	5	2	6	7	4	3	1
7	4	3	1	8	2	6	5
2	8	1	4	3	5	7	6
3	7	6	5	2	1	8	4
5	3	8	2	1	6	4	7
1	6	4	7	5	3	2	8

× × ×

Astronomsko tekmovanje petih dežel 2021

↓↓↓
Vid Kavčič

→

Kratek uvodnik

Med 27. in 29. avgustom 2021 je v **Baji na Madžarskem** potekalo tekmovanje petih dežel v znanju astronomije, ki je nekakšna pripravljalnica za Mednarodno olimpijado iz astronomije in astrofizike. Naši tekmovalci so se odlično odrezali in domov prinesli bogat šopek medalj. **Simon Bukovšek** je zasedel **3. mesto** in prejel **zlato medaljo**, **srebrno medaljo** so prejeli **Urban Razpotnik**, **Peter Andolšek** in **Tian Strmšek**, **Vito Levstik** je prejel **bronasto medaljo**, **Miha Brvar** pa **pohvalo**; slovensko ekipo je zastopala tudi **Marija Judež.** Ekipo so vodili **Dunja Fabjan**, **Andrej Guštin** in **Krištof Skok.**

Sam se tekmovanja zaradi drugih obveznosti nisem mogel udeležiti, kljub vsemu pa sem se odločil v prispevku predstaviti rešene **naloge teoretičnega dela tekmovanja**, s katerimi so se tekmovalci spopadali **tri ure**. Za razumevanje nalog in tudi rešitev potrebno poglobljeno poznavanje ter razumevanje osnov astronomije in astrofizike.

Bralce in bralke vabim, da poskusijo astronomske orehe najprej streti sami, saj samostojno reševanje prinese mnogo več užitkov in zadovoljstva kot zgolj pasivno prebiranje rešitev.

1. naloga. Povprečen čas med trki galaksij v jati galaksij

Jata galaksij v Berenikinih kodrih obsega 1000 galaksij znotraj krogle s polmerom 1,5 Mpc. Naj bo srednji presek galaksije 10^{-3} Mpc^2. Disperzija hitrosti galaksij v jati je 880 km/s. Izračunaj povprečen čas med trki galaksij v jati.

SLIKA 1.
Slovenska astronomska ekipa z osvojenimi odličji (Foto: Andrej Guštin)

Podatki: $N = 1000$, $R = 1{,}5$ Mpc, $\Sigma = 10^{-3}$ Mpc^2, $\sigma = 880$ km/s

Za izračun povprečnega časa med trki bomo najprej določili povprečno oddaljenost med galaksijami v jati. Z drugimi besedami, izračunali bomo **srednjo prosto pot** l. Označimo z $n = \frac{N}{V}$ številčno gostoto galaksij v jati. Razvijmo enačbo za srednjo prosto pot:

$$l = \frac{1}{n\Sigma} = \frac{V}{N\Sigma} = \frac{4\pi R^3}{3N\Sigma},$$

kjer smo uporabili enačbo za prostornino krogle $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Povprečen čas med trki preprosto izračunamo kot

$$t = \frac{l}{\sigma} = \frac{4\pi R^3}{3N\Sigma\sigma} = 1{,}57 \cdot 10^{10} \text{ let.}$$

→

2. naloga. Svetlost in izsev sistema treh zvezd

Sistem treh zvezd se nahaja na razdalji 150 pc od Sonca. Na Zemlji izgleda kot ena zvezda z navidezno bolometrično magnitudo 8,00. Izsev prve zvezde je 4,54 $L_\odot$, navidezna bolometrična magnituda druge zvezde pa je 9,41. Izračunaj navidezno in absolutno magnitudo ter izsev tretje zvezde.

Podatki: $r = 150$ pc, $m = 8{,}00$, $L_1 = 4{,}54\ \mathrm{L}_\odot$, $m_2 = 9{,}41$

Absolutno magnitudo druge zvezde izračunamo kot

- $M_2 = m_2 + 5 - 5\log r = 3{,}53.$

Izsev druge zvezde izračunamo iz Pogsovega zakona:

- $L_2 = 10^{0{,}4(M_\odot - M_2)} L_\odot = 3 L_\odot,$

kjer smo upoštevali, da je absolutna magnituda Sonca $M_\odot = 4{,}83$.

Izsev tretje zvezde prav tako izpeljemo iz Pogsonovega zakona:

- $$m_2 - m = 2{,}5\log\left(\frac{L_1 + L_2 + L_3}{L_2}\right)$$
$$L_3 = \left(10^{0{,}4(m_2 - m)} - \frac{L_1}{L_2} - 1\right) L_2$$
$$\therefore L_3 = 3{,}45\ \mathrm{L}_\odot.$$

Za absolutno magnitudo tretje zvezde velja

- $M_3 = M_\odot - 2{,}5\log\frac{L_3}{L_\odot} = 3{,}38,$

za njeno navidezno magnitudo pa

- $m_3 = M_3 - 5 + 5\log r = 9{,}26.$

3. naloga. V sistemu Jupitrovih lun

Dne 15. aprila 2020 je bil Jupiter v kvadraturi. Takrat smo z Zemlje videli njegovo luno Kalisto kot zvezdo z navideznim sijem +6,467. Pri reševanju naloge predpostavi, da je faza Kalista za opazovalca na Zemlji 100 %.

1. Izračunaj največjo kotno velikost Kalista in navidezno magnitudo, ko je najsvetlejši, za opazovalca, ki stoji na površju lune Evropa.

   Srednja premera Kalista in Evrope sta zaporedoma $d_C = 4806$ km in $d_E = 3130$ km. Veliki polosi in ekscentričnosti orbit Kalista in Evrope so zaporedoma $a_C = 1{,}883 \cdot 10^6$ km, $e_C = 0{,}007$ in $a_E = 6{,}7108 \cdot 10^5$ km, $e_E = 0{,}01$. Srednja oddaljenost Jupitra od Sonca je 5,204 ae. Predpostavi, da sta Zemljina in Jupitrova orbita krožni in da je oddaljenost Kalista od Zemlje enaka oddaljenosti Jupitra v trenutku opazovanja.

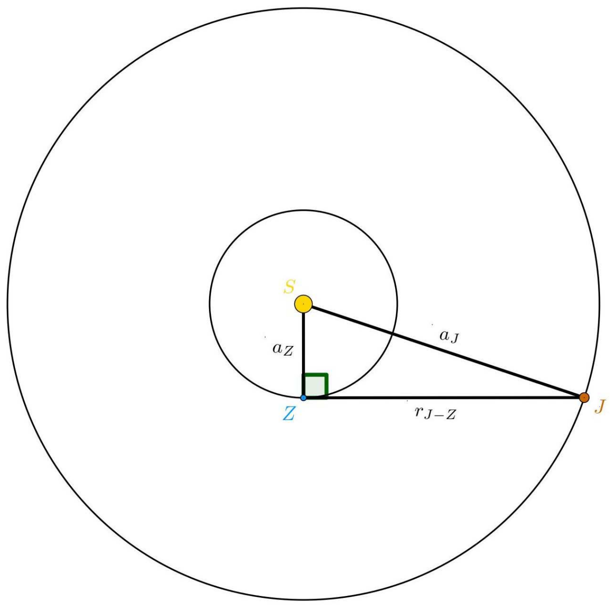
2. Ali je *polni* Kalisto na nebu lune Evropa večji ali manjši kot polna Luna na Zemljinem nebu?

Podatki: $m_1 = +6{,}467$, $d_C = 4806$ km, $d_E = 3130$ km, $a_C = 1{,}883 \cdot 10^6$ km, $e_C = 0{,}007$, $a_E = 6{,}7108 \cdot 10^5$ km, $e_E = 0{,}01$, $a_J = 5{,}204$ ae

1. Najprej moramo izračunati oddaljenost Jupitra v kvadraturi. Takrat je kot Jupiter-Zemlja-Sonce pravi. Z dobro skico (slika 1) ugotovimo, da za izračun zadostuje Pitagorov izrek, pri čemer upoštevamo, da je srednja oddaljenost Zemlje od Sonca po definiciji $a_Z = 1$ ae, kar ustreza približno $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m. Imamo torej

   - $r_{1C} = r_{J-Z} = \sqrt{a_J^2 - a_Z^2} = 7{,}640 \cdot 10^{11}$ m.

   Da bi dobili kotno navidezno velikost Kalista za opazovalca na Evropi, moramo določiti najmanjšo možno razdaljo med površjem Evrope in Kalistom r_{2C}. Upoštevamo, da sta si Evropa in Kalisto najbližje, ko je Kalisto v **perijoviju**,



SLIKA 2.
Jupiter v kvadraturi (skica ni v merilu).

Evropa pa v **apojoviju.** Perijovijsko razdaljo Kalista izrazimo kot $r_{C,peri} = (1-e_C)\,a_C$, apojovijsko razdaljo Evrope pa kot $r_{E,apo} = (1+e_E)\,a_E$. Hkrati pa pri izračunu r_{2C} upoštevamo še polmer Evrope $r_E = \frac{d_E}{2}$. Sledi

- $$r_{2C} = r_{C,peri} - r_{E,apo} - r_E = (1-e_C)\,a_C - (1+e_E)\,a_E - \frac{d_E}{2}$$
  $$\therefore r_{2C} = 1{,}191 \cdot 10^9 \text{ m}.$$

Zdaj, ko poznamo dve razdalji in podatek o magnitudi Kalista za eno od njiju, nam ostane le še preračunati magnitudo Kalista za opazovalca na Evropi m_2, seveda s Pogsonovo definicijo magnitud:

- $$m_2 = m_1 - 2{,}5\log\frac{j_1}{j_2} = m_1 - 2{,}5\log\frac{r_{2C}^2}{r_{1C}^2} = m_1 + 5\log\frac{r_{1C}}{r_{2C}}$$
  $$\therefore m_2 = -7{,}57.$$

2. Ker je premer Kalista v primerjavi z njegovo oddaljenostjo od površja Evrope relativno majhen, lahko njegovo kotno velikost izračunamo kar kot

   - $\varphi \approx \frac{d_C}{r_{2C}} = 0{,}2313^\circ = 13'53''$.

   Ker je kotna velikost polne Lune na našem nebu približno $0{,}5^\circ$, takoj vidimo, da je *polni* Kalisto na nebu Evrope navidezno manjši od polne Lune na našem nebu.

4. naloga. Zvezdne poti po Galaksiji

Sonce pripada tankemu disku naše Galaksije. Gibanje takih zvezd okoli središča Galaksije navadno približno opišemo s tremi periodičnimi gibanji: krožnim gibanjem okoli Galaktične ravnine po krožnici s polmerom R_m, harmoničnim nihanjem v radialni smeri in harmoničnim nihanjem v smeri pravokotno na Galaktično ravnino. Ker zvezda ni vedno v isti ravnini, se vse komponente njene vrtilne količine ne ohranjajo. Projekcija vrtilne količine na os z (pravokotnica na Galaktično ravnino) je edina, ki se ohranja.

Dan je tanek disk zvezd, o katerem veš naslednje: specifična vrtilna količina (vrtilna količina, preračunana na enoto mase) je $|h_z| = 1938$ kpc km/s (količina, ki se ohranja), na največji oddaljenosti od osi z, označimo jo R_a, je komponenta hitrosti $|v_p|(R_a) = 199{,}8$ km/s ($v^2 = v_r^2 + v_t^2 + v_z^2 = v_p^2 + v_z^2$), $R_m = 8{,}8$ kpc, komponenta hitrosti v smeri z v trenutku, ko zvezda prečka Galaktično ravnino $|v_z|(0) = 7$ km/s, največja oddaljenost od Galaktične ravnine $|z|_{max} = 100$ pc, hitrost kroženja na oddaljenosti R_m je $u_c(R_m) = 220$ km/s, krožna frekvenca harmoničnega nihanja v radialni smeri $\kappa_p(R_m)$ in kotna hitrost kroženja pri $R = R_m$, oznaka $\omega_c(R_m)$, sta povezani z enačbo $\kappa_p(R_m) = \sqrt{2}\omega_c(R_m)$.

Določi amplitudo a harmoničnega nihanja glede na R_m in tri periode: periodo kroženja pri $R = R_m$, P_{circ}, periodo harmoničnega nihanja v radialni smeri P_R in periodo harmoničnega nihanja v pravokotni smeri glede na Galaktično ravnino, P_z.

Podatki: $|h_z| = 1938$ kpc km/s, $|v_p|(R_a) = 199{,}8$ km/s, $R_m = 8{,}8$ kpc, $|v_z|(0) = 7$ km/s, $|z|_{max} = 100$ pc, $u_c(R_m) = 220$ km/s

Na poljubni razdalji R od osi z velja $|h_z| = R|v_t|(R)$, od koder lahko izračunamo

- $R_a = \dfrac{|h_z|}{|v_t|(R)} = 9{,}7$ kpc.

Ker je R_a največja oddaljenost, mora biti $v_r = 0$, tako da velja $v_p(R_a) = v_t(R_a)$. Amplitudo a izračunamo kot

- $a = R_a - R_m = 0{,}9$ kpc.

Periodo P_{circ} dobimo z

- $P_{circ} = \dfrac{2\pi}{\omega_c} = \dfrac{2\pi R_m}{u_c(R_m)} = 2{,}39 \cdot 10^8$ let.

Po podatku iz nalog je perioda $P_R = \frac{P_{circ}}{\sqrt{2}} = 1{,}69 \cdot 10^8$ let.

Da dobimo zadnjo periodo, moramo upoštevati, da za harmonično nihanje velja

- $\dfrac{1}{2}v_z^2 + \dfrac{1}{2}\kappa_Z^2 Z^2 = \dfrac{1}{2}\kappa_Z^2 |Z|^2_{max}$,

kjer smo z Z označili odmik. Ker poznamo hitrost $|v_z|(0) = 7$ km/s, v zgornji enačbi upoštevamo $Z = 0$ in to hitrost. Od tod lahko izrazimo κ_Z, če pa upoštevamo še, da je $\kappa_Z = \frac{2\pi}{P_Z}$, dobimo končni odgovor $P_Z = 8{,}55 \cdot 10^7$ let.

5. naloga. Medplanetarni polet s Hohmannovim prehodom

Hohmannov prehod orbite je eliptični prehod med dvema koplanarnima krožnima orbitama z radijema r_1 in r_2, ki zajema dva impulza (hitri spremembi hitrosti). Prehod poteka po eliptični **prehodni** oziroma **Hohmannovi orbiti** s perihelijem na notranji krožni orbiti in afelijem na zunanji krožni orbiti. Osnovna predpostavka, na kateri temelji Hohmannov prehod, je, da na telo, ki nas zanima, deluje gravitacija le enega telesa (v našem primeru Sonca).

Da bi odpotovali na zunanji planet, potrebuje plovilo hitrost, večjo od orbitalne hitrosti Zemlje, zato potrebujemo pozitivno izstrelitveno hitrost (impulz): $\Delta v_p > 0$. Hitrost plovila na Hohmannovi orbiti ob prihodu je manjša od orbitalne hitrosti izbranega zunanjega planeta, zato pri drugem delu prehoda prav tako potrebujemo pozitivno spremembo hitrosti: $\Delta v_a > 0$. Hohmannov prehod je med drugim tudi dober model za prehod vesoljskega plovila z Zemlje na Mars.

1. Pokaži, da je čas poleta vesoljskega plovila po Hohmannovi orbiti z Zemlje na nek zunanji planet s polmerom krožne orbite r_2 enak

   - $T = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\left(1 + \dfrac{r_2}{r_1}\right)^{3/2}$,

   kjer je r_1 polmer Zemljine krožne orbite, čas poleta T pa izražen v letih.
2. Naj bosta v_1 in v_2 zaporedoma orbitalna hitrost Zemlje in izbranega zunanjega planeta. Označimo spremembi hitrosti, ki sta potrebni, da plovilo usmerimo na Hohmannovo orbito oziroma ga izrinemo iz nje na orbito izbranega planeta z $\Delta v_p = v_p - v_1$ in $\Delta v_a = v_2 - v_a$, kjer sta v_p in v_a zaporedoma hitrosti plovila v periheliju in afeliju Hohmannove orbite. Pokaži, da velja

   - $\Delta v_p = v_1\left(\sqrt{\dfrac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1\right)$ in

     $\Delta v_a = v_2\left(1 - \sqrt{\dfrac{2r_1}{r_1 + r_2}}\right)$.
3. Z drugim Keplerjevim zakonom pokaži, da velja

   - $h^2 = GM_\odot\, a(1 - e^2)$,

   kjer je G gravitacijska konstanta, $M_\odot$ masa Sonca, h specifična vrtilna količina (vrtilna količina na enoto mase) ter a in e zaporedoma velika polos in ekscentričnost Hohmannove orbite.

4. Velika polos Marsove orbite je 1,524 ae. Izračunaj ekscentričnost Hohmannove orbite, čas potovanja, opravljeno pot pri poletu plovila z Zemlje na Mars in ustrezne dodatne hitrosti.

   Namig. Če sta a in b zaporedoma velika in mala polos elipse, lahko obseg elipse na podlagi ugotovitve indijskega matematika Srnivasa Ramanujana približamo z obrazcem

   $$o \approx \pi\left(3(a+b) - \sqrt{10ab + 3(a^2+b^2)}\right).$$

5. Kje je Mars v trenutku, ko mora plovilo vzleteti z Zemlje? Njegovo lego podaj s kotom $\angle ZSM$, kjer točke Z, S in M predstavljajo zaporedoma Zemljo, Sonce in Mars.

Podatek: $a_M = 1{,}524$ ae

1. Čas poleta z Zemlje do planeta je enak polovici obhodnega časa telesa na Hohmannovi elipsi. Če merimo razdalje v astronomskih enotah, čas v letih, maso pa v Sončevih masah, potem iz tretjega Keplerjevega zakona sledi

   $$T = \frac{t_0}{2} = \frac{\sqrt{a^3}}{2},$$

   kjer je a velika polos Hohmannove elipse, za katero velja $a = \frac{r_1+r_2}{2}$. Če to enačbo vstavimo v prejšnjo, z nekaj preureditvami dobimo sledeč izraz

   $$T = \frac{1}{4\sqrt{2}} r_1^{3/2} \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right)^{3/2}.$$

   V zgoraj definiranem sistemu enot je $r_1^{3/2}$ ravno obhodni čas Zemlje, katerega vrednost pa je jasno 1. Zato velja

   $$T = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right)^{3/2}.$$

2. Energija prehodne orbite je večja od energije notranje orbite ($a = r_1$) in manjša od energije zunanje orbite ($a = r_2$). Hitrosti v perigeju in apogeju prehodne orbite lahko izrazimo iz enačbe za ohranitev energije kot

   $$v_p = \sqrt{GM_\odot \left(\frac{2}{r_1} - \frac{2}{r_1+r_2}\right)} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r_1}} \sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}}$$

   oziroma

   $$v_a = \sqrt{GM_\odot \left(\frac{2}{r_2} - \frac{2}{r_1+r_2}\right)} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r_2}} \sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}}.$$

   Orbitalni hitrosti v krožnih orbitah sta

   $$v_1 = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r_1}} \quad \text{in} \quad v_2 = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r_2}}.$$

   Od tod lahko izrazimo potrebni spremembi hitrosti v perigeju in apogeju:

   $$\Delta v_p = v_p - v_1 = v_1 \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}} - 1\right)$$
   $$\Delta v_a = v_2 - v_a = v_2 \left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}}\right).$$

3. Ker je vektor hitrosti v perigeju pravokoten na pozicijski vektor, lahko kvadrat specifične vrtilne količine prehodne orbite s pomočjo ugotovitev v delu b) naloge izrazimo kot

   $$h^2 = r_1^2 v_p^2 = r_1^2 \frac{GM_\odot}{r_1} \frac{2r_2}{r_1+r_2} = GM_\odot a(1-e^2),$$

   pri čemer smo upoštevali, da je $a = \frac{r_1+r_2}{2}$.

4. Ta del naloge od nas zahteva le delo s številčnima vrednostima $r_p = r_1 = 1$ ae in $r_a = r_2 = 1{,}524$ ae. Za čas poleta dobimo $T_M = 0{,}709$ leta $= 258{,}9$ dni, za spremembi hitrosti $\Delta v_{p,M} = 2{,}95$ km/s in $\Delta v_{a,M} = 2{,}65$ km/s, ekscentričnost Hohmannove elise pa je

   $$e_M = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = 0{,}208.$$

→

Pri poletu opravljena pot je enaka polovici obsega elipse, ki ga lahko ocenimo iz Ramanujanove formule. Malo polos elipse, ki jo potrebujemo v izračunu, dobimo iz zveze $b = a\sqrt{1-e^2}$. Rezultat za pot je $l_M = 3{,}92$ ae.

5. Iz tretjega Keplerjevega zakona določimo obhodni čas Marsa z enačbo

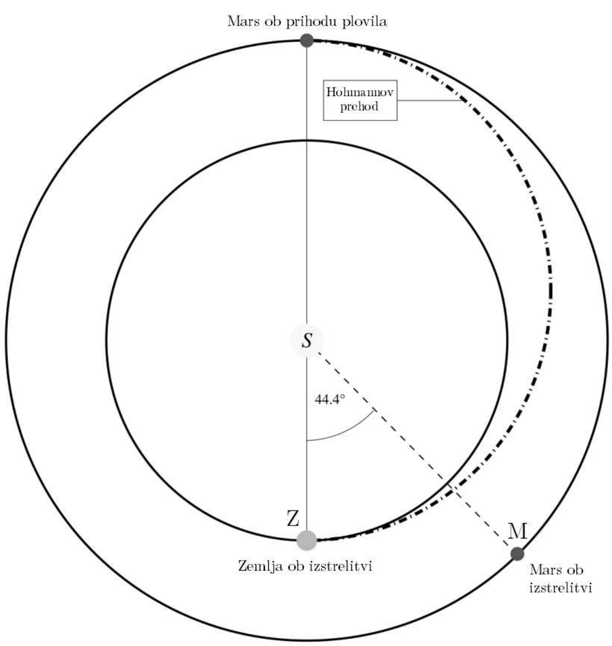
- $t_2 = \sqrt{r_2^3}$,

kjer je čas t_2 izražen v letih, polmer r_2 pa v astronomskih enotah.

V času tega obhodnega časa naredi Mars polni krog, opiše torej kot 2π. Med poletom po Hohmannovi prehodni orbiti rdeči planet opiše kot $2\pi\frac{T_M}{t_2}$. Zato je kot Zemlja-Sonce-Mars v trenutku izstrelitve plovila z Zemlje enak (slika 3):

- $\alpha = \angle ESM = \pi - 2\cdot\dfrac{T_M}{t_2} = \pi\left(1 - 2\dfrac{T_M}{t_2}\right)$

$\therefore\ \alpha = 0{,}77\ \text{rad} = 44{,}4°$.

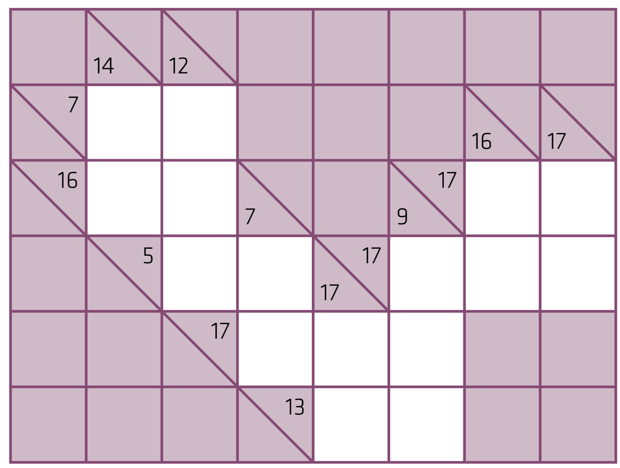


SLIKA 3.
Hohmannov prehod plovila z Zemlje na Mars

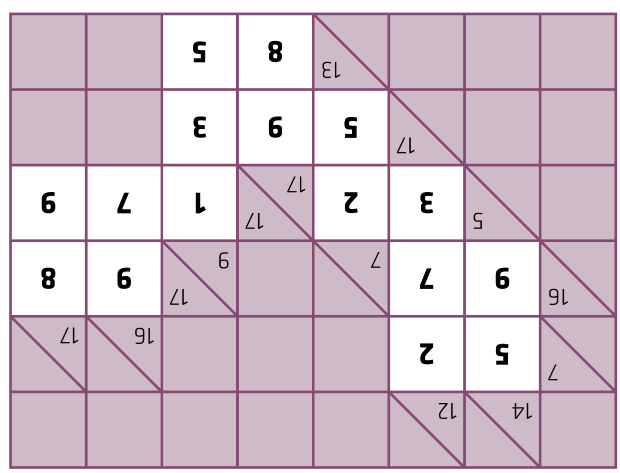
× × ×

Križne vsote

Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



REŠITEV KRIŽNE VSOTE



× × ×

↓↓↓

REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 49/1

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz prve številke Preseka letnika 49 je **Disjunktna množica.** Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Rajko Đudarić iz Celja, Vid Kavčič iz Črnomlja in Stanko Gajšek iz Ljubljane, ki bodo razpisane nagrade prejeli po pošti.

× × ×

Paradoks slabovidne priče

Boštjan Kuzman

V nekem velemestu se je ponoči zgodila prometna nesreča, njen povzročitelj pa je s kraja nesreče pobegnil. Priča nesreče trdi, da je nesrečo povzročil taksi bele barve. Ker je v mestu 90 % taksijev rumenih in le 10 % belih, ta podatek zelo zoži krog osumljencev za policijsko preiskavo. Toda laboratorijski preizkus priče pokaže, da je priča slabovidna in v nočnih razmerah pravilno določi barvo taksija le v 80 % primerov. Čeprav se na prvi pogled zdi priča dovolj zanesljiva, bo natančnejši izračun pokazal nasprotno. Verjetnost, da je nesrečo res povzročil beli taksi, je kljub izjavi priče precej majhna. Danes dobro znani paradoks sta leta 1982 v knjigi o odločanju v negotovih okoliščinah prva opisala matematično izobražena psihologa Amos Tversky in Daniel Kahneman, ki je kasneje prejel tudi Nobelovo nagrado za ekonomijo. V tem prispevku bomo paradoks pojasnili in ga z GeoGebro ponazorili tudi grafično.

Nekatere bralke in bralci bodo v problemu takoj prepoznali pogojno verjetnost in ga rešili s pomočjo Bayesove formule. Toda poskusimo vse skupaj razložiti brez uporabe tovrstnih orodij. Predstavljajmo si, da je v mestu 100 taksijev, med katerimi je 90 rumenih in 10 belih, nesrečo pa je povzročil naključno izbrani taksi. Če vse taksije pokažemo priči v nočnih razmerah, bo priča barvo pravilno določila v 80 % primerov. Torej bo med 90 rumenimi taksiji pravilno prepoznala le 72 rumenih, ostalih 18 pa bo napačno označila za bele. Podobno bo priča med 10 belimi taksiji pravilno prepoznala osem belih, preostala dva pa bo napačno označila za rumena. Skupaj bo priča med 100 taksiji kar $18 + 8 = 26$ taksijev prepoznala kot belih, čeprav je belih v resnici med njimi le osem. Če priča trdi, da je nesrečo povzročil beli taksi, ima torej prav le v osmih primerih od 26, kar je enako $\frac{8}{26} \doteq 31\,\%$. To razmerje predstavlja verjetnost, da je nesrečo res povzročil beli taksi, če tako trdi naša priča, in rezultat je manjši od $1/3$.

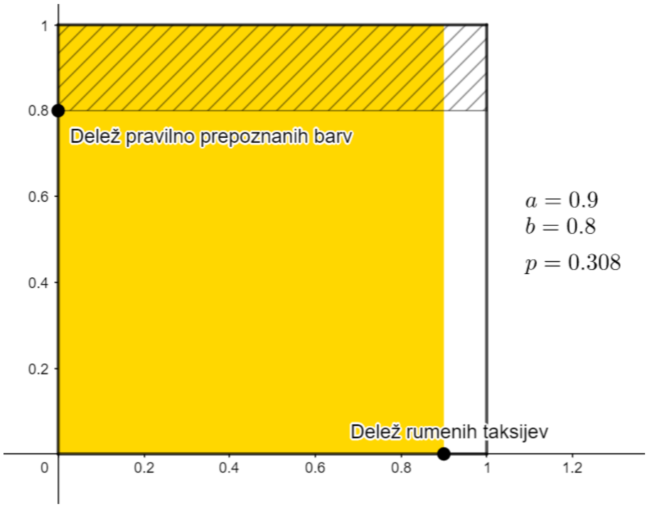
Presenetljivi rezultat lahko pojasnimo z ugotovitvijo, da je belih taksijev le 10 %, zato je verjetnost, da je nesrečo povzročil beli taksi, razmeroma majhna. Le 80 % zanesljivost priče v tej situaciji ni dovolj, da bi se verjetnost bistveno povečala. **Ugotovitev si velja zapomniti: če malo verjeten dogodek potrdi ena razmeroma zanesljiva priča, to ne pomeni nujno velike verjetnosti, da se je dogodek res zgodil.** Drugače pa bi bilo, če bi priča trdila, da je nesrečo povzročil rumeni taksi, in bi določali verjetnost, da je to res. Verjetnost rumenega taksija je 90 % in je že brez pričanja zelo visoka, zato jo dodatno pričanje v to smer še poviša. S podobnim sklepanjem kot prej dobimo rezultat $\frac{72}{72+2} \doteq 97\,\%$, saj bi priča pravilno prepoznala 72 rumenih taksijev, le dva bela taksija pa bi napačno prepoznala kot rumena.

Z GeoGebro lahko opisano situacijo lepo ponazorimo s pomočjo ploščin likov. Ob tem bomo lahko razmerje med belimi in rumenimi taksiji ter zanesljivost priče kasneje tudi spreminjali s pomočjo pomikanja ustreznih točk. Za konstrukcijo uporabimo naslednje korake:

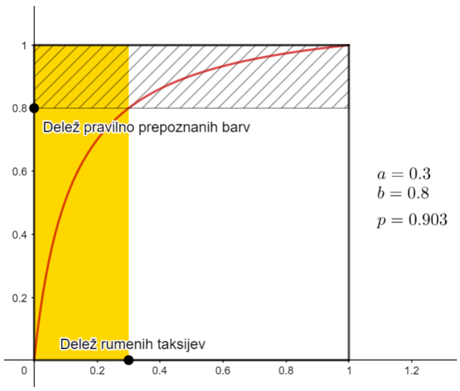
- Izklopimo označevanje novih objektov in z ukazom `Mnogokotnik((0,0),(0,1),(1,0),(1,1))` narišemo enotski kvadrat, ki predstavlja množico vseh taksijev. Obarvajmo ga črno in nastavimo prosojnost na vrednost 0, da bo površina vseeno bela.

- Približamo pogled in na spodnji stranici kvadrata izberemo poljubno točko A. Njena x-koordinata `a=x(A)` bo predstavljala delež vseh rumenih taksijev. Pomaknemo jo na vrednost 0,9, kar ustreza podatkom naloge. Z ukazom `Mnogokotnik((0,0),(a,0),(a,1),(0,1))` narišemo pravokotnik, ki predstavlja rumene taksije. Obarvamo ga rumeno.
- Na levi stranici kvadrata izberemo poljubno točko B. Njena y-koordinata `b=y(B)` bo predstavljala zanesljivost priče, torej delež pravilno prepoznanih taksijev. Postavimo jo na vrednost 0,8 kot v nalogi. Napačno prepoznane taksije bomo označili s šrafiranim pravokotnikom, ki ga narišemo z ukazom `Mnogokotnik((0,b),(1,b),(1,1),(0,1))`.
- Verjetnost, da je nesrečo res povzročil beli taksi, če tako trdi priča, je enaka razmerju med številom pravilno prepoznanih belih taksijev in številom vseh taksijev, za katere priča trdi, da so beli. To razmerje na sliki predstavlja razmerje med ploščino nešrafiranega belega pravokotnika, ki je enaka $(1-a)\cdot b$ in vsoto ploščin nešrafiranega belega in šrafiranega rumenega pravokotnika, ki je enaka $(1-a)\cdot b + a(1-b)$. Splošna formula za iskano verjetnost je torej enaka
  - $$p = \frac{b(1-a)}{a+b-2ab}$$

  in jo lahko izpišemo na zaslon s pomočjo ukazov za besedilo in označevanje točk. Pri začetnih podatkih $a = 0{,}9$ in $b = 0{,}8$ lahko že s pogledom grobo ocenimo, da bo iskana verjetnost približno 1/3, točen rezultat je 0,308.
- Z upoštevanjem doslej navedenih korakov smo dobili situacijo na sliki 1.
- S pomikanjem drsnikov lahko zdaj preprosto opazujemo, kako se spreminja verjetnost, če spreminjamo delež rumenih taksijev a ali zanesljivost priče b. Če sta a in b enaka, bo verjetnost vselej 1/2.
- Na prikaz lahko dodamo še krivuljo, ki predstavlja množico vseh točk (x,y) z isto verjetnostjo $p = p(a,b)$. V enačbi za p zamenjajmo a,b z x,y in izrazimo y z x in p, da dobimo enačbo krivulje $y = \frac{px}{1-x+2px-p}$. To krivuljo narišemo na območju $0 < x < 1$ z ukazom `If(0<x<1, p*x/(1-x+2*p*x-p))`.



SLIKA 1.
Verjetnost, da je nesrečo povzročil beli taksi, če tako trdi priča, je enaka razmerju p_1/p_2, kjer je p_1 ploščina nešrafiranega belega pravokotnika, p_2 pa vsota ploščin nešrafiranega belega pravokotnika in šrafiranega rumenega pravokotnika.



SLIKA 2.
Pri deležu rumenih taksijev $a = 0{,}3$ in nespremenjeni zanesljivosti priče $b = 0{,}8$ je verjetnost približno 0,9. Rdeča krivulja vsebuje vse pare točk (a,b) s to verjetnostjo, območje nad krivuljo pa predstavlja vse točke, pri katerih je verjetnost večja. Iz prikaza zato razberemo, da je za verjetnost nad 0,9 potreben majhen a ali pa velik b.

× × ×

MaRS 2021 je ponovno oživel

Simon Brezovnik

Po lanski spletni izvedbi je šestnajsti zaporedni matematični tabor za srednješolce MaRS (Matematično Raziskovalno Srečanje) letos ponovno potekal v živo v Javorniškem Rovtu med 25. in 31. julijem 2021. Udeležilo se ga je 21 dijakinj in dijakov iz različnih slovenskih srednjih šol, za uspešno pilotiranje po vesolju pa je skrbela osemčlanska posadka, ki so jo sestavljali študentje Bor Grošelj Simić, Žan Hafner Petrovski, David Opalič, Petra Podlogar, Jakob Svetina, Katarina Šipec in Nejc Zajc ter asistent za matematiko Simon Brezovnik.

SLIKA 1.
MaRSovski izlet na planino Stamare

Kot običajno je tabor zaznamovalo delo v projektih. Vsak mentor je svoji skupini predstavil zanimivo matematično temo ali problem, s katerim se je skupina spopadala v naslednjih dneh in do konca tedna v članku zapisala najpomembnejše ugotovitve, do katerih se je dokopala. Letošnji projekti so imeli naslednje naslove: *MaRSovske verige, Naključni sprehodi po* $\mathbb{Z}^n$, *Računanje približkov za* π *z Monte Carlo metodo, Metoda rodovnih funkcij, Kvocientni topološki prostori, Fraktali – čudež Narave* in *Uvod v finančno matematiko.*

Tipičen MaRSovski dan se je pričel z zajtrkom in telovadbo. Ob dopoldnevih je potekala matematična delavnica o konfiguracijah točk in premic, ki jo je vodil dr. Nino Bašić. V njej smo spoznali različne primere konfiguracij in jih narisali s pomočjo GeoGebre, dokazali pa smo tudi nekaj zahtevnejših izrekov. Izvedli smo tudi delavnici programiranja v Pythonu in urejanja matematičnih besedil v LaTeXu, s katerim smo na koncu izdelali članke in predstavitve.

SLIKA 2.
Čokolada za zmagovalca velike MaRSovske pustolovščine

Ob večerih smo bili deležni zanimivih predavanj odličnih gostov. Prvi dan smo prisluhnili predavanju dr. Matevža Črepnjaka, ki nam je razložil pojem metričnih prostorov in na primerih pokazal, da krogle niso vselej okrogle – seveda le, če uspešno zapustimo nam znani evklidski prostor in razdaljo definiramo drugače. Naslednji večer je dr. Urban Jezernik predaval o načinih mešanja kart. Precej nas je zabavalo, da običajno mešanje kart preko roke potrebuje okoli 2500 ponovitev, da bi lahko rekli, da smo karte dobro premešali. Ugotavljali smo, na kakšen način je najbolje mešati karte, da bo kupček kart naključno premešan in bomo pri tem storili najmanj ponovitev. V četrtek zvečer pa je predavateljica Anja Petković Komel na različne načine predstavila koncept enakosti. Ko je uvedla pojem kvocientnih množic, smo ugibali, če je Anja kot mentorica na MaRSu leta 2015 element iste kvocientne množice kot Anja današnja predavateljica.

SLIKA 3.
Med delavnico o programiranju v Pythonu

Ob večerih smo se MaRSovci pomerili v igranju družabnih iger, ki so kdaj pa kdaj trajale tudi pozno v noč (oz. v jutro). Ob večerih so se spletala nova prijateljstva in čas je mineval v prijetnem vzdušju. Različne športne dejavnosti smo sredi tedna popestrili s pohodom na planino Stamare, s katere smo opazovali Julijske Alpe in krave. V petek pa je sledila še tradicionalna Velika MaRSovska pustolovščina. Skupine na poti so na šestih postojankah čakali mentorji z zabavnimi nalogami, odgovore na dodatna vprašanja pa je bilo treba sproti iskati na naključnih mestih. Na koncu je bila pomembna še čistoča obutve, dodatne točke sta pri tej panogi prinašala oba ekstrema. Po opravljeni poti so nekateri utrjevali svoje telo s skokom v toplo jezero. Dan je zaključil tradicionalni MaRSovski piknik, ob katerem smo delili spomine na pretekla MaRSovska potovanja. Kot vsako leto je tudi letos tabor prehitro minil in komaj čakamo prihodnje leto, da skupaj ponovno polni pričakovanj poletimo v vesolje.

Ob koncu tega poročila bralkam in bralcem ponujamo nekaj nalog, o katerih smo razmišljali na letošnjem taboru, bodisi med pripravo projektov bodisi med drugimi dejavnostmi. Za dodatno pomoč si lahko pomagate tudi z našimi članki, ki so objavljeni na spletni strani `MaRS.dmfa.si/projekti/`.

Problem 1. Na voljo imate dva A4 lista, eden je prazen, na drugem pa je narisan krog brez označenega središča. Brez prepogibanja papirja določi središče kroga. Pri tem lahko uporabljaš samo pisalo in oba lista.

Problem 2. Na poti skozi tunel je postavljen radar, ki deluje tako, da izmeri vstopni in izstopni čas ter izračuna povprečno hitrost. Največ koliko se lahko pelješ drugo polovico tunela, da ne boš plačal kazni, če si se prvo polovico peljal 50 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ in je največja dovoljena povprečna hitrost 100 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$?

Problem 3. Marsovce in Zemljane opazujemo, kako se en za drugim pomikajo v vrsti. Verjetnost, da za Zemljanom stoji Marsovec, je 0,75 in 0,25, da za njim stoji Zemljan. Verjetnost, da za Marsovcem stoji Marsovec, je 0,8 in 0,2, da za njim stoji Zemljan. Kolikšen delež vseh pohodnikov na stezi je Marsovcev in kolikšen Zemljanov?

Problem 4. V kupčku je n kart označenih z $1, 2, \ldots, n$. Na začetku so karte premešane, nato pa začnemo ponavljati sledečo operacijo: če je na vrhu karta s številko k, obrnemo vrstni red zgornjih k kart. Dokaži, da bo na vrhu sčasoma številka 1.

Problem 5. Danih je n naravnih števil. Dokaži, da obstaja neprazna podmnožica teh števil, ki ima vsoto deljivo z n.

Problem 6. Podanih je nekaj znanih citatov, ki so popačeno prevedeni. Ugotovi, za katerega od znanih citatov gre:

- Bom čebelji hrbet.
- Zmeden si, snežni Janez.
- Ne boš naredil!
- Zaženi graf brez ciklov, zaženi!
- Do $\aleph_1$.

× × ×

Iz vseh smeri

Aleš Mohorič

Na naslovnici je fotografija ivja, ki je nastalo na vejici. O ivju smo v Preseku že pisali [1, 2]. To je pojav, ko se drobne kapljice vode v podhlajeni megli začnejo nabirati na podlagi v obliki ledenih iglic. Ko kapljica trči ob iglico ivja, na njej takoj primrzne in iglica raste v smer, iz katere veter nosi kapljice.

Na sliki na naslovnici so iglice ivja v vse smeri. To pomeni, da so se smeri zelo rahle sapice v času spreminjale in je sapica nekaj časa nosila drobne kapljice megle iz te smeri, čez čas pa iz druge smeri.

Kadar je gibanje zraka dokaj stalno, je tudi ivje usmerjeno bolj ali manj v eno smer. Profesor Petkovšek je s sodelavci pozimi pred dobrimi 50-imi leti meril smer ter debelino ivja po Ljubljani in nastal je spodnji zemljevid [3]. Dolžina puščic je sorazmerna z debelino nabranega ivja, smer pa je taka, kot je bila smer iglic pri ivju. Na sliki opazimo vzorec, ivje nakazuje gibanje zraka v smeri proti mestnemu središču. To gibanje nastane zato, ker je pozimi zrak v mestu zaradi ogrevanja stavb nekoliko toplejši in se zato zaradi vzgona dviga, na njegovo mesto pa kompenzacijsko doteka hladnejši zrak iz obrobja.

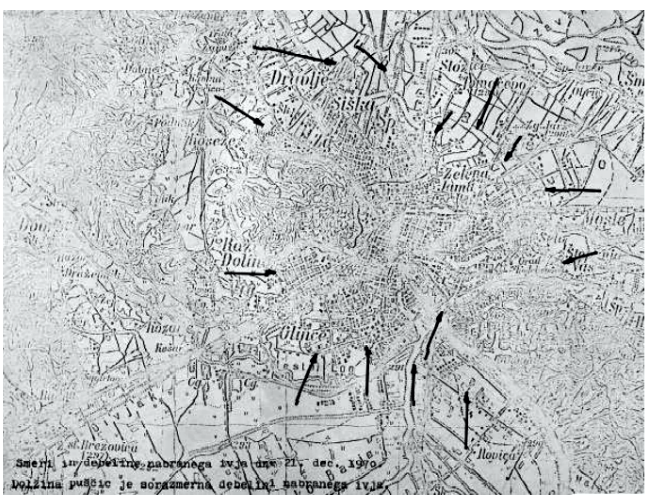
Po zelo različnih smereh iglic ivja na naslovnici lahko torej sklepamo, da je to ivje nastajalo v razmerah, ko je sapica spreminjala svojo smer. Sapica tudi ni bila posebej močna, saj so iglice dokaj tanke.

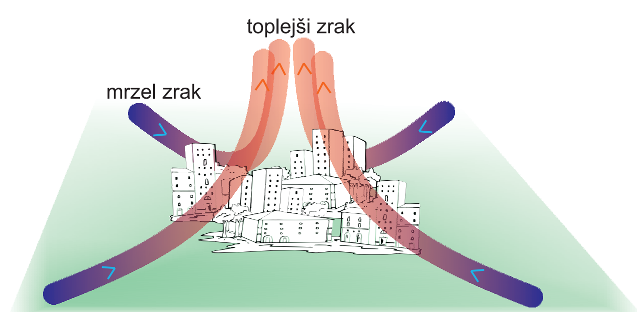
Literatura

[1] A. Mohorič, *Jutranje padavine*, Presek **39** (2011/12), 5, 30–31.

[2] A. Mohorič, *Ivje*, Presek **41** (2013/14), 4, 31.

[3] Z. Petkovšek, A. Hočevar, J. Rakovec in B. Paradiž, *Širjenje onesnaženja zraka v kotlinah. Faza 1.*, Ljubljana: Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo, 1973, 1 zv. (loč. pag.), ilustr. [COBISS.SI-ID 11832064]

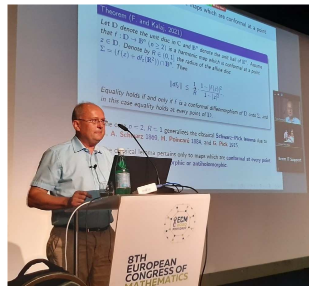




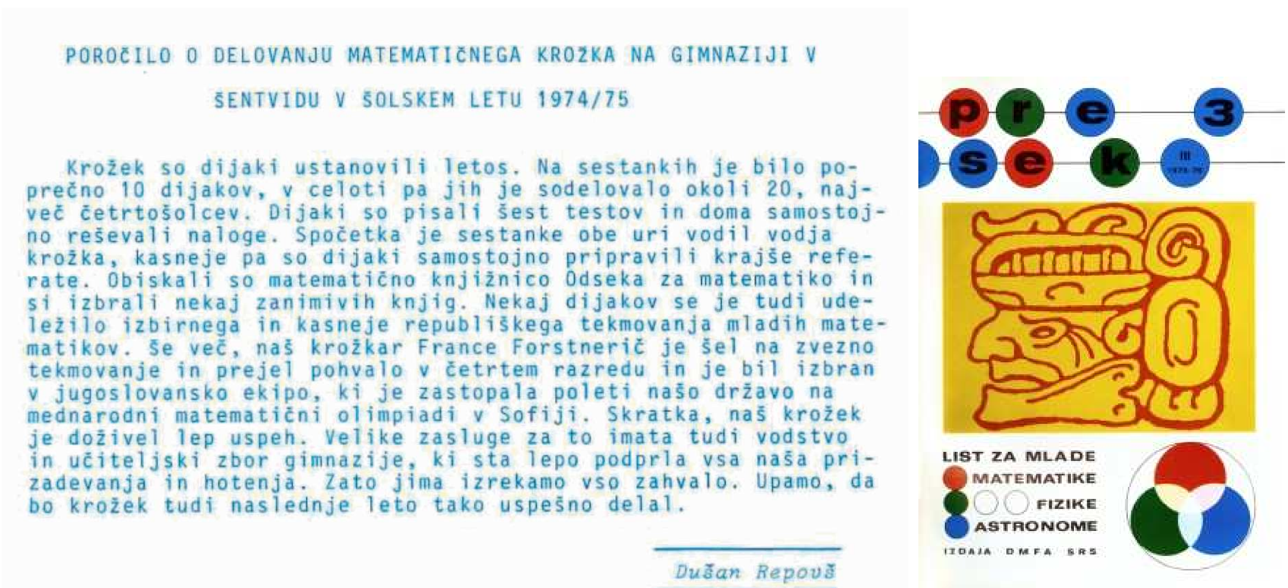
SLIKA 1.

Poročilo o delovanju matematičnega krožka na gimnaziji v Šentvidu v šolskem letu 1974/75

Pred skoraj 50-imi leti so nadobudni mladi matematiki v Preseku takole poročali o dogajanju na svoji šoli. Avtor prispevka Dušan Repovš in dijak France Forstnerič, ki je v njem omenjen, sta danes mednarodno uveljavljena slovenska matematika. Oba sta objavila vrsto izvirnih znanstvenih del, profesor Forstnerič pa je na letošnjem evropskem matematičnem kongresu kot prvi slovenski matematik v zgodovini kongresa nastopil tudi s plenarnim predavanjem. V uredništvu Preseka smo veseli, da na nekaterih slovenskih srednjih šolah še vedno gojijo kakovostne matematične krožke. Morda bodo iz njihovih vrst izšli novi vrhunski matematiki in matematičarke.



SLIKA 2.
Predavanje profesorja Forstneriča na evropskem matematičnem kongresu junija 2021


POROČILO O DELOVANJU MATEMATIČNEGA KROŽKA NA GIMNAZIJI V ŠENTVIDU V ŠOLSKEM LETU 1974/75

Krožek so dijaki ustanovili letos. Na sestankih je bilo poprečno 10 dijakov, v celoti pa jih je sodelovalo okoli 20, največ četrtošolcev. Dijaki so pisali šest testov in doma samostojno reševali naloge. Spočetka je sestanke obe uri vodil vodja krožka, kasneje pa so dijaki samostojno pripravili krajše referate. Obiskali so matematično knjižnico Odseka za matematiko in si izbrali nekaj zanimivih knjig. Nekaj dijakov se je tudi udeležilo izbirnega in kasneje republiškega tekmovanja mladih matematikov. Še več, naš krožkar France Forstnerič je šel na zvezno tekmovanje in prejel pohvalo v četrtem razredu in je bil izbran v jugoslovansko ekipo, ki je zastopala poleti našo državo na mednarodni matematični olimpiadi v Sofiji. Skratka, naš krožek je doživel lep uspeh. Velike zasluge za to imata tudi vodstvo in učiteljski zbor gimnazije, ki sta lepo podprla vsa naša prizadevanja in hotenja. Zato jima izrekamo vso zahvalo. Upamo, da bo krožek tudi naslednje leto tako uspešno delal.

Dušan Repovš

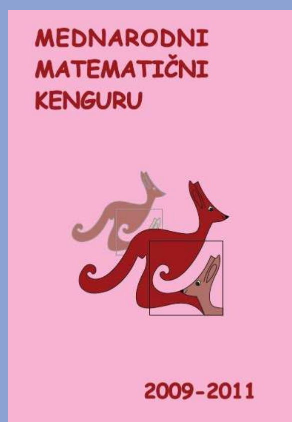
SLIKA 1.

Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.

18,74 EUR



14,50 EUR

23,00 EUR

v pripravi

Pri DMFA – založništvo je izšlo že pet knjig Matematičnega kenguruja. Na zalogi so še:

- *Mednarodni matematični kenguru 2005–2008*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2009–2011*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2012–2016*.

V pripravi na tisk pa je že šesta knjiga Matematičnega kenguruja.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu starejših zbirk nalog pri DMFA – založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!