Dubl

NEUNZEHNTER JAHRESBERICHT

DER K. K.

OBER-REALSCHULE

IN GÖRZ

AM SCHLUSSE DES SCHULJAHRES 1879

HERAUSGEGEBEN

VOM DIRECTOR

Dr EGID SCHREIBER

INHALT:

GÖRZ

Gedruckt bei Mailing — Selbstverlage der Lehranstalt.

NEUNZEHNTER JAHRESBERICHT

DER K. K.

OBER-REALSCHULE

IN GÖRZ

AM SCHLUSSE DES SCHULJAHRES 1879

HERAUSGEGEBEN

VOM DIRECTOR

D.r EGID SCHREIBER

INHALT:

GÖRZ

Gedruckt bei Mailing — Selbstverlage der Lehranstalt.

PROJECTIVE BEHANDLUNG

DER

STRAHLENFLÄCHEN.

EIN BEITRAG ZU DEM UNTERRICHTE DER

DARSTELLENDEN GEOMETRIE IM NEUEREN SINNE.

VON

PROF. CL. BARCHANEK.

Vorwort.

Die projective Behandlung der Pyramiden und Prismen, so wie der Kegel und Cylinder bildet einen wesentlichen Theil der descriptiven Lehraufgabe unserer Realschulen. Die Darstellung dieser Gebilde an und für sich bietet schon eine schöne und vielseitige Gelegenheit, den bereits vorgetragenen Lehrstoff in seiner praktischen Anwendung an concreten Aufgaben wiederholt durchzuüben und Lust und Liebe zum Construiren zu wecken; es sind ja diese Gestalten doch eigentlich nur alte traute Bekannte der Jugend, in deren Phantasie sie allerdings oft wunderbare Rollen gespielt. Der erste geometrische Anschauungsunterricht entledigte sie alles Zierrats und liess nichts übrig als ihre nüchternen Formen, welchen er Namen gab, und diese wurden zu Begriffen, deren gemeinsame und unterschiedliche Merkmale die erste Übung in der Kunst des richtigen Sehens kennzeichnete. Seither kehrten diese Gebilde in den verschiedenen Unterrichtszweigen des öftern wieder, und nur zu bald machte sich das Bedürfnis nach planen Bildern derselben geltend, bei deren Skizzirung oft unrichtige Anschauung und völlige Willkür geherscht. Wenn nun die darstellende Geometrie, desselben Gegenstandes sich bemächtigend, diese Jugendsünden absolvirt, Gesetz und Ordnung schafft, wo ehedem nur Haltlosigkeit oder im besten Falle eine ahnungsvolle Vorempfindung gewaltet; wenn nun die Bilder über Gestalt, Grösse und Lage der Raumgebilde keinen Zweifel zulassen, und sogar eine zuverlässige Reconstruction des Objectes ermöglichen; dann wird der Schüler den gewaltigen Fortschritt in seinen geometrischen Studien an den gewonnenen Resultaten wol selbst abschätzen.

Die Pyramiden und Prismen, die Kegel und Cylinder sind für die technische Praxis von grosser Wichtigkeit, erregen in rein stereometrischer Beziehung ein hohes Interesse, und ihre Anwendung in verschiedenen Wissenschaften ist so weittragend, dass es vollkommen berechtigt erscheint, wenn der Lehrplan gerade diese Gebilde in richtiger Erkenntnis ihrer fun-

damentalen Bedeutung für jedes weitere mathematische und technische Studium ausführlich und gründlich gepflegt wissen will. Soll aber dieses Ziel erreicht werden, so muss die Behandlung des Gegenstandes einerseits der Wissenschaft, welcher doch nur ausschliesslich das Mittel des Projicirens zu eigen ist, vollkommen entsprechen, und andererseits auch den Bedürfnissen der modernen Schule Rechnung tragen, d. h. in knapp zugemessener Zeit das Lehrpensum bewältigen, den häuslichen Fleiss der Schüler nicht erheblich in Anspruch nehmen und dem Unterrichtserfolge doch eine reife Frucht sichern. Diesen vielseitigen und hohen Anforderungen bestmöglichst zu genügen vermag nur eine gründlich durchgebildete Unterrichtsmethode, welche kaum wo anders ein dankbareres Feld findet als eben hier.

Die darstellende Geometrie fasst die Pyramiden und Prismen, die Kegel und Cylinder allgemeiner auf und behandelt sie in ganz anderer Weise als die Geometrie des Masses. Es ist daher gerechtfertigt und im Interesse einer guten Methode auch notwendig, diese Gebilde von dem Gesichtspunkte ihrer Eigenschaften, die wir dem Raume unmittelbar absehen, zu betrachten und nach dem Gesetze ihrer gemeinsamen Entstehung als Strahlenflächen zu definiren. Diese Auffassung, welche von der sonst üblichen abweicht, gewährt sowohl in meritorischer als auch in didaktischer Hinsicht nicht zu unterschätzende Vortheile. Hiernach erscheinen die Strahlenflächen unmittelbar als ein Resultat des Projicirens, ihre Beziehungen zu anderen Gebilden lassen sich zumeist als eine Consequenz desselben erklären, und dem gemeinsamen Entstehungsgesetze muss dann auch eine einheitliche, zusammenfassende und übersichtliche Behandlung notwendig folgen.

Die projective Methode wird nicht blos eine lichtvolle Darstellung vermitteln, sondern auch eine logisch richtige Anordnung des Lehrstoffes bedingen und manchem Übelstande in dem descriptiven Unterrichte steuern. Nach der Gepflogenheit unserer gangbaren Lehrbücher werden z. B. die Schnitte der Strahlenflächen zuvor, und in weiterer Folge erst die Tan-

gentialebenen vorgetragen. Nach dieser Eintheilung kann aber die Behandlung der ebenen Schnitte der Kegel- und Cylinderflächen wol nicht anders als verwässert ausfallen, während man sich doch der Einsicht kaum erwähren wird, dass die Berührungsebenen der Strahlenflächen zu den Scheitelebenen (Ebenen, welche durch den Scheitel der Strahlenfläche gehen,) gehören, und folglich auch daselbst ihren Platz zu finden haben. Die Scheitelebenen können aber die Strahlenflächen nur nach Geraden schneiden, was aus dem Begriffe der Strahlenflächen unmittelbar hervorgeht; und da der Unterricht bei grösseren und schwierigen Aufgaben stets von dem einfachsten Falle ausgehen soll, so steht es fest, dass in der vorliegenden Frage den Reigen der ebenen Schnitte die Scheitelebenen zu eröffnen haben. Dieselben geben auch sofort als einen besonderen und dem Schüler sich von selbst aufdrängenden Fall, die Berührungsebenen, welche auch gleich erledigt werden sollen, wenn die weitere Behandlung der Aufgabe entsprechen soll. Das Wesen und die Bedeutung der Berührungsebenen an Strahlenflächen braucht nicht erst aus der allgemeinen Theorie der Tangentialebenen krummer Flächen überhaupt und der aufwickelbaren insbesondere abgeleitet zu werden, sondern soll an und mit der Strahlenfläche durch die projective Methode zur Anschauung gebracht werden. Es ist ja einleuchtend, dass eine Curve und eine Tangente derselben aus einem beliebigen Raumpunkte durch eine Strahlenfläche und eine Ebene projicirt werden, dass diese Ebene mit der Fläche eine geradlinige Erzeugende gemein habe, dass die diesem Strahle zunächst liegenden Theile der Ebene auf derselben Seite der Strahlenfläche liegen; dass also diese Ebene eine Berührungsebene der Strahlenfläche sei, welcher ein Flächenstrahl als Berührungselement entspricht. Ebenso muss auch zugegeben werden, dass jede Gerade der Berührungsebene eine Tangente an die Strahlenfläche sei; denn sie schneidet den Berührungsstrahl in einem Punkte und hat mit der Fläche eben nur diesen Punkt gemein, während die demselben zunächst liegenden Theile der Geraden auf derselben Seite der Fläche liegen; und wir erkennen, dass diese Berührungsebene *der geometrische Ort jener Flächentangenten sei, deren Berührungspunkte auf demselben Flächenstrahle liegen.*

Im weiteren Verfolg der ebenen Schnitte der Strahlenflächen führt die projective Methode zu überraschend schönen Resultaten. Sie ordnet den Lehrstoff mustergiltig nach dem gegenseitigen Zusammenhange der Schnittfiguren im Raume und nach den Gesetzen der geometrischen Verwandtschaft, welche sich in ihren Projectionen aussprechen. Perspectivisch congruente, ähnliche, affine und collineare Systeme werden uns vorgeführt und stereometrisch so gut begründet, dass man fortan viele Aufgaben lediglich nach den Eigenschaften der Lage behandeln, aber auch gleichzeitig an derselben Figur die stereometrische Lösung interpretiren kann. Die charakteristischen Linien geometrisch verwandter Systeme, wie z. B. die Verschwindungsgeraden bei der perspectivischen Collineation, werden stereometrisch gerechtfertigt, und jeder Eigenschaft der Lage ein stereometrischer Satz gegenüber gestellt. Selbst die involutorischen Systeme, welche in der Geometrie der Lage manche Schwierigkeiten bereiten, kommen uns ungesucht entgegen, um auch ihre stereometrische Weihe und räumliche Deutung zu erhalten.

Die Construction der ebenen Schnitte der Strahlenflächen legt auch die Beziehungen der Linien zweiter Ordnung unter einander und zu anderen Gebilden sehr nahe. Die Eigenschaften der Lage, welche die Projection des Schnittes und die Leitlinie eines Kreiscylinders oder Kreiskegels beherschen, brauchen nur richtig gelesen zu werden, um unmittelbar als constructive Lösungen wichtiger Aufgaben aus dem Gebiete der Kegelschnittslinien zu gelten, wie sie sich auf anderem Wege kaum so einfach und sicher ergeben. Ein Kreiscylinder kann z. B. nach einer Ellipse geschnitten, und die schneidende Ebene so zweckmässig gewählt werden, dass wir in der Projection auf der Basisebene sofort eine neue und sehr brauchbare Ellipsenconstruction finden, oder ein bisher nur mechanisch geübtes Verfahren auf stereometrischem Wege beweisen. — Aus den Projectionen der *ebenen Schnitte des Kreiskegels wird sich ebenso zeigen, wie jede Linie zweiter Ordnung auf einen Kreis bezogen werden kann, mit dessen Hilfe viele den Kegelschnitt betreffende Fragen leicht beantwortet werden. Die projective Behandlung der Strahlenflächen wird sohin auch mit Rücksicht auf den mathematischen Unterricht sich als sehr fruchtbar erweisen, indem sie die Kenntnis der Kegelschnittslinien wesentlich fördert und ergänzt.*

Der Aufsatz, welcher in den folgenden Blättern den Weg der Öffentlichkeit betritt, ist ein Versuch einer projectiven Behandlung der Strahlenflächen im Sinne der vorentwickelten Grundsätze und mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse unserer Realschulen, an welchen die darstellende Geometrie als allgemeines Bildungsmittel und als notwendige Vorbereitung für die technischen Studien ebenso wissenschaftlich gelehrt werden soll wie die Mathematik. Der enge Rahmen eines Programmartikels liess eine Besprechung der Beziehungen der Strahlenflächen unter einander nicht mehr zu, und wenn auch dieser Abschnitt einer anderen Gelegenheit vorbehalten bleibt, so bilden die ebenen Schnitte der Strahlenflächen immerhin einen zulässigen Abschluss dieser Arbeit.

Dem Wohlwollen und dem gerechten Urtheile der Herren Fachcollegen empfiehlt hiemit der Verfasser eine beachtenswerte Lehrmethode, deren Begründer Professor Schlesinger ist. Es ist sehr zu bedauern, dass Schlesingers Lehrbuch in unseren Schulkreisen kühl bis an's Herz hinan aufgenommen wurde, was unter anderm auch dem Umstande zugemuthet werden kann, dass es wol nicht leicht als Lehrbuch für Mittelschulen zu empfelen war. Bei einer übergrossen Fülle an Lehrstoff verfolgt es weitgehende Ziele und enthält gleich anfänglich einen zwar hübschen, aber für unsere Realschulen doch sehr bedenklichen Abschnitt aus der Geometrie der Lage. Die Ausstattung des Buches ist nichts weniger als bestechend, und die Figuren sehr dünn gesäet. Trotz alledem hätte aber das Kind nicht sammt dem Bade verschüttet werden sollen, weil gerade dieses ganz eigenthümliche Werk mehr denn jedes andere berufen war, einen gewaltigen

Einfluss auf die descriptive Unterrichtsmethode zu üben. Und dies geschah bislang nicht, weil das Buch ungeachtet der grossen inneren Vorzüge einer völligen Gebrauchsanweisung kaum entraten konnte und die seinerzeitige Stellung Schlesingers getreu widerspiegelt: an der Hochschule eine rege Thätigkeit entwickelnd, diente er opferwillig der Mittelschule, und hatte doch nirgends festen Fuss.

Schliesslich noch eine kleine Bemerkung, die vorliegende Abhandlung betreffend. Wenn in den folgenden Zeilen auch die Collineation ebener Systeme behandelt wird, so ist dies nicht etwa ein Eingriff in das Gebiet der Geometrie der Lage, sondern eine sachgemässe Discussion rein stereometrischer Resultate, welche mit dem Lehrplane gewiss nicht im Widerspruche steht. Die Verwandschaft ebener Systeme wird hier nicht in einem separaten Abschnitte aus der neueren Geometrie nachgeschlagen, sondern auf stereometrischem Wege von Fall zu Fall begründet; auch wurde sie nicht gesucht, konnte vielmehr bei erschöpfender und wissenschaftlicher Behandlung des Gegenstandes kaum umgangen werden, da die Abhängigkeit geometrischer Figuren von einander doch ihren Ursprung und ihre Heimat in der darstellenden Geometrie hat, in deren Haushalte sie auch eine hervorragende Rolle spielt. Einige der Geometrie der Lage angehörige Benennungen wurden lediglich aus Opportunitätsgründen beibehalten.

Sollte übrigens diese Lehrmethode, welche nach den Erfahrungen des Verfassers recht erfreuliche Unterrichtserfolge verbürgt, auch eine gute Vorbereitung zu dem Studium der Geometrie der Lage bieten, so wird man ihr deswegen doch nicht gram sein.

Görz, im Juni 1879.

CLEMENS BARCHANEK.

Entstehung, Eintheilung und Darstellung der Strahlenflächen.

Zieht man durch einen Punkt **a** einen unbegrenzten Strahl **p**, so sagt man, der Punkt **a** wurde projicirt und nennt **p** in Bezug auf **a** einen projicirenden Strahl. Ziehen wir von einem Punkte **S** durch die beliebig im Raume gewählten Punkte **a**, **b**, **c**, ... die Strahlen **p**, **q**, **r**, ..., so ist bekanntlich **S** das gemeinsame Projectionscentrum von **a**, **b**, **c**, .., und die Strahlen **p**, **q**, **r**, ... werden central projicirende Strahlen genannt. Läge das gemeinsame Projectionscentrum in unendlicher Ferne, so könnte es nur durch die Richtung angegeben werden, d. h. durch eine Gerade, zu welcher alle projicirenden Strahlen parallel wären.

Liegen die Punkte **a**, **b**, **c**, ... und das Projectionscentrum in einer und derselben Ebene, so bilden die projicirenden Strahlen **p**, **q**, **r**, ... je nach der Lage des Projectionscentrums Elemente eines Central- oder Parallelstrahlenbüschels. Folgen die Punkte **a**, **b**, **c**, ... stetig auf einander, dann ist auch die Aufeinanderfolge von **p**, **q**, **r**, ... eine stetige. Die Gesammtheit der Punkte **a**, **b**, **c**, ... wird einen Linienzug bilden, und der geometrische Ort der projicirenden Strahlen **p**, **q**, **r**, ... wird ein vollkommener Winkel sein, weil wir jeden Strahl in seiner Vollkommenheit auffassen, mithin, wenn das Projectionscentrum endlich liegend ist, auch über **S** hinaus verlängern.

Liegt das Punktsystem **a**, **b**, **c**, ... und das Projectionscentrum **S** nicht in derselben Ebene, dann bilden die projicirenden Strahlen **p**, **q**, **r**, ... Elemente eines Central- oder Parallelstrahlenbündels, und wenn noch überdies **a**, **b**, **c**, ... stetig auf einander folgend einen Linienzug bilden, dann entspricht den projicirenden Strahlen **p**, **q**, **r**, ... als geometrischer Ort eine Fläche, die wir als ein Resultat desProjicirens ansehen und eine Strahlenfläche nennen wollen. Der Linienzug **a**. **b**, **c**, ... heisst die Leitlinie der Strahlenfläche und **S** der Scheitel oder die Spitze derselben. Der Einfachheit wegen wollen wir die Leitlinie stets als ein ebenes Gebilde annehmen, welche Voraussetzung der Allgemeinheit der folgenden Untersuchungen keinen Eintrag thut, da jeder andere Fall sich auf diesen zurückführen lässt. Die Ebene der Leitlinie hat für die Strahlenfläche eine besondere Bedeutung, wir wollen sie daher als die Basisebene der Strahlenfläche bezeichnen.

Nach der Lage des Scheitels theilen wir die Strahlenflächen in Central- und Parallelstrahlenflächen ein.

Bei den Centralstrahlenflächen ist der Scheitel endlich liegend und theilt jeden Flächenstrahl in zwei Halbstrahlen. Die Fläche selbst besteht aus zwei Mänteln, welche den Scheitel gemeinsam haben. Nach dem Charakter der Leitlinie werden die Centralstrahlenflächen in Kegel- und Pyramidenflächen eingetheilt; bei ersteren ist die Leitlinie eine Curve und bei letzteren ein Polygon. Durch die Leitlinie und den Scheitel ist eine Centralstrahlenfläche vollkommen bestimmt.

Fig. 1 Fig. 1 skizzirt uns das Bild einer Kegelfläche. In der Basisebene **U** wurde die Curve **m n** ersichtlich gemacht, welche als Leitlinie einer Strahlenfläche, deren Scheitel **S** ist, dienen soll. Wir sehen die Abbildung der Fläche in der Weise vorgenommen, dass eine Reihe von geeigneten Linien, durch welche wir uns die Fläche erzeugt denken können, zur Darstellung gelangte. Für die Abbildung der Strahlenflächen eignen sich vorzugsweise die geradlinigen Erzeugenden der Fläche, welche je nachdem sie vom projicirenden Auge gesehen oder nicht gesehen werden, auch im Bilde entweder voll gezogen oder gestrichelt erscheinen. Die äussersten Strahlen, welche das Bild der Fläche begrenzen, sollen Contourstrahlen heissen. Ist in Fig. 1 **a** derjenige Punkt der Leitlinie, welcher dem Contourstrahle **S a** entspricht, so müssen in unserem Bilde die dem Punkte **a** zunächst liegenden Theile der Geraden **S a** auf derselben Seite der abgebildeten Curve **m n** liegen; $\overline{\mathbf{Sa}}$ ist daher eine Tangente derselben und **a** ihr Berührungspunkt. Sind also die Leitlinie und der Scheitel einer Centralstrahlenfläche in **m n** und **S** abgebildet, so gehören die von **S** an die Curve **m n** möglichen Tangenten mit zur Contour des Bildes. Können von **S** aus Randstrahlen wie z. B. $\overline{\mathbf{Sm}}$ und $\overline{\mathbf{Sn}}$ gezogen werden, so sind diese ebenfalls als Contourstrahlen zu betrachten.

Die einfache Vorstellung zeigt uns schon, dass man auf der Kegelfläche nicht nach allen Richtungen gerade Linien ziehen kann, und wir müssen daher die Kegelflächen zu den krummen Flächen rechnen.

Fig. 2 Fig. 2 zeigt uns das Bild einer Pyramidenfläche. In der Basisebene **U** ist ein Polygon **a b c d** als Leitlinie einer Strahlenfläche gegeben, deren Scheitel **S** sein soll. Diese Fläche ist von eben so vielen vollkommenen Winkeln begrenzt, als die Leitlinie Seiten hat. Ein Flächenstrahl, welcher zwei von diesen ebenen Winkelflächen gleichzeitig angehört, heisst eine Kante. Jeder Ecke des Basispolygons entspricht eine Kante.

Es ist selbstverständlich, dass wir von den beiden Mänteln einer Centralstrahlenfläche nur begrenzte Stücke abbilden können, indem wir uns allenfalls vorstellen, beide Flächenmäntel wären von zur Basis parallelen Ebenen geschnitten, und der zwischenliegende Theil der Fläche wurde abgebildet. Sehr häufig werden wir bei gegebenen Aufgaben nur einen Mantel berücksichtigen, folglich auch nur einen Theil desselben abbilden.

Bei den Parallelstrahlenflächen liegt der Scheitel in unendlicher Ferne; alle Flächenstrahlen sind mithin unter einander parallel. Nach dem Charakter der Leitlinie werden die Parallelstrahlenflächen in Cylinder- und Prismenflächen eingetheilt; bei ersteren ist die Leitlinie eine Curve und bei letzteren ein Polygon.

In Fig. 3 wurde in der Ebene **U** die Curve **m n** als Leitlinie einer Cylinderfläche angenommen und der unendlich ferne Scheitel durch die Richtung **S** bestimmt. Von den parallelen Flächenstrahlen wurden nur jene dargestellt, welche das Bild der Fläche begrenzen; darunter sehen wir einen, welcher dem Punkte **a** der Leitlinie entspricht, und weil die diesem Punkte zunächst liegenden Theile des Contourstrahles auf derselben Seite der Curve **m n** liegen, so muss derselbe eine Tangente an das Bild der Leitlinie sein. Auf der Cylinderfläche können wir nicht nach allen Richtungen gerade Linien ziehen, folglich gehört sie auch zu den krummen Flächen. Fig. 3

Fig. 4 soll uns das Bild einer Prismenfläche geben, deren Leitlinie das in der Ebene **U** liegende Polygon **a b c d e f** ist und deren unendlich ferner Scheitel durch die Richtung **S** bestimmt sein soll. Wir sehen diese Prismenfläche von so vielen ebenen Parallelstreifen begrenzt, als das Basispolygon Seiten hat. Von den Flächenstrahlen wurden nur jene abgebildet, welche zwei Begrenzungsebenen gleichzeitig angehören. Diese werden Kanten genannt und zwei davon gehören zur Contour der Fläche. Fig. 4

Das Ergebnis unserer Betrachtung über Entstehung, Eintheilung und Darstellung der Strahlenflächen können wir nun folgends zusammenfassen:

Durch die Bewegung eines Strahles, welcher durch einen fixen Punkt, den Scheitel, geht und eine gegebene Leitlinie stets schneidet, wird eine Strahlenfläche erzeugt. Es giebt Central- und Parallelstrahlenflächen, je nachdem der Scheitel endlich oder unendlich ferne liegt. Zu den nicht gekrümmten Strahlenflächen gehören die Pyramiden- und die Prismenflächen; bei ersteren liegt der Scheitel endlich und bei letzteren unendlich ferne. Durch die Leitlinie und den Scheitel ist eine Strahlenfläche vollkommen bestimmt. Bei Parallelstrahlenflächen wird der Scheitel durch die Richtung angegeben. Eine Strahlenfläche wird abgebildet, indem man den Scheitel und die Leitlinie derselben abbildet und noch überdies einige Flächenstrahlen zur Anschauung bringt, hauptsächlich jene, welche das Bild der Fläche begrenzen. Sind von der Projection des Scheitels an die Projection der Leitlinie Tangenten möglich, so gehören diese zur Contour des Bildes und müssen ersichtlich gemacht werden. Die Projection eines Flächenstrahles wird nur dann voll gezogen, wenn der Strahl von dem projicirenden Auge gesehen wird; dasselbe gilt von der Leitlinie. Ein Körper, welcher von einem Theile einer Pyramiden- oder Kegelfläche und von *einer* Ebene, der Basisebene, begrenzt ist, wird eine Pyramide oder ein Kegel im engeren Sinne des Wortes genannt, und der Schnitt der Basisebene mit der Strahlenfläche wird gemeinhin als die Leitlinie gedacht. Der Abstand des Scheitels von der Basisebene heisst die Höhe. Hat die Leitlinie einen Mittelpunkt und fällt der Fusspunkt der Höhe mit diesem zusammen, so erhalten wir einen senkrechten Kegel oder eine senkrechte Pyramide. Ein Körper, welcher von einem Theile einer Parallelstrahlenfläche und zwei parallelen Ebenen begrenzt wird, heisst schlechtweg ein Cylinder oder ein Prisma, je nachdem die Leitlinie eine Curve oder ein geschlossenes Polygon ist. Der Abstand der zwei Parallelebenen heisst die Höhe, und stehen die Erzeugenden der Strahlenfläche auf der Basisebene senkrecht, so erhalten wir einen senkrechten Cylinder oder ein senkrechtes Prisma.

Darstellung der Strahlenflächen durch orthogonale Bilder.

Die Darstellung der Strahlenflächen durch zugeordnete orthogonale Bilder wollen wir an einigen Beispielen kennen lernen.

Fig. 5 Es sollen die orthogonalen Bilder einer Pyramide dargestellt werden, deren Leitlinie das in der ersten Bildebene liegende Viereck **a b c d** und deren Scheitel **S** sei.

Liegt ein Punkt auf einer Geraden, so liegen auch die Bilder desselben in den Bildern der Geraden; wir verbinden daher $\mathbf{S}_1$ mit $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{d}_1$ und erhalten sofort die ersten Bilder der Kanten. Unter einem finden wir, dass die Kanten **b S** und **d S** für die erste Bildebene die Contour bilden, und haben nunmehr das Sichtbare von dem Gedeckten in Bezug auf das orthogonal projicirende Auge Eins zu trennen. Jene Seiten- und Basiskanten, welche zur Contour gehören, können nicht gedeckt sein, weil sie den sichtbaren Umriss bilden. Die blosse Vorstellung zeigt, dass die Ecke **c** von dem Auge Eins nicht gesehen wird, somit sind die ersten Bilder aller Kanten, welche von ihr ausgehen zu stricheln. Das zweite Bild der Leitlinie muss nach unserer Voraussetzung in der Axe liegen; wir verbinden $\mathbf{S}_2$ mit $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{d}_2$ und erhalten das 2te Bild der gegebenen Pyramide. Die Kanten **a S** und **c S** bilden in der zweiten Bildebene die Contour und theilen die übrigen Kanten in 2 Gruppen; die vorne liegenden werden vom Auge zwei gesehen, und die Bilder der übrigen sind zu stricheln.

Wir haben seinerzeit bei den Ebenen zwei Hauptstellungen unterschieden: nämlich jene, bei welcher die Oberseite mit der Vorderseite identisch ist, und bemerkten, dass in diesem Falle beide orthogonal projicirende Augen dieselbe Seite der Ebene sehen, und dass man bei den orthogonalen Bildern begrenzter Ebenen schon aus der gleichstimmigen Aufeinanderfolge der die Projectionen der Eckpunkte bezeichnenden Buchstaben auf diese Hauptstellung der Ebene ohneweiters schliessen kann.

Als zweite Hauptstellung erkannten wir jene, bei welcher die Oberseite mit der Rückseite identisch ist. Hier sehen die projicirenden Augen verschiedene Seiten der Ebene, und bei den orthogonalen Bildern begrenzter Ebenen können wir aus der ungleichstimmigen Aufeinanderfolge der die Ecken bezeichnenden Buchstaben schon auf diese Hauptstellung schliessen. Von einer Ebene, welche als Seitenfläche eines Prisma oder einer Pyramide vorkommt, kann nur eine Seite, die wir allenfalls als die Aussenseite bezeichnen könnten, gesehen werden. Ist die Hauptstellung dieser Ebene jene, bei welcher die Oberseite der Vorderseite gleich ist, und wird diese von einem der orthogonal projicirenden Augen gesehen, so muss sie auch in der zugeordneten Bildebene sichtbar sein. Wäre eine solche Ebene in einer Bildebene gedeckt, so muss sie auch in der zugeordneten Bildebene gedeckt sein. Ist bei der Seitenfläche eines Polyeders die Oberseite gleich der Rückseite, so muss diese Ebene notwendig in einer Bildebene sichtbar und in der zugeordneten gedeckt sein. Dieses Merkmal setzt uns in den Stand, eine fertige Zeichnung auf ihre Richtigkeit prüfen zu können, ohne auch nur im mindesten sich auf die Vorstellung oder Versinnlichung des Raumgebildes verlassen zu müssen. Wir greifen eine beliebige Ebene heraus z. B. in Fig. 5 die Seitenfläche **S c d**, lesen in der ersten Bildebene $\mathbf{S_1}$ $\mathbf{c_1}$ $\mathbf{d_1}$ und in der 2ten im entgegengesetzten Sinne $\mathbf{S_2}$ $\mathbf{c_2}$ $\mathbf{d_2}$, folglich ist bei der Ebene **S c d** die Oberseite gleich der Rückseite; und da das orthogonal projicirende Auge Eins diese Ebene sieht, so muss sie in der zweiten Bildebene notwendig gedeckt sein. Nehmen wir noch eine zweite Ebene her; wir lesen in der ersten Bildebene $\mathbf{S_1}$ $\mathbf{b_1}$ $\mathbf{c_1}$ und in der zweiten in demselben Sinne $\mathbf{S_2}$ $\mathbf{b_2}$ $\mathbf{c_2}$, folglich ist bei dieser Ebene die Oberseite gleich der Vorderseite. In der ersten Bildebene ist die Fläche **S b c** gedeckt, folglich muss sie auch in der zweiten Bildebene gedeckt sein.

Bei unserem einfachen Beispiele ist es wol nicht notwendig, diese Merkmale als Prüfstein herzunehmen. Bei complicirteren Annahmen und hauptsächlich auch deswegen, weil dieses Kriterium für jedes Polyeder giltig ist, wollen wir es in Erinnerung behalten, damit wir einen aus irriger Vorstellung begangenen Fehler sofort entdecken.

Aufgabe: Eine senkrechte Pyramide darzustellen (Fig. 6), deren Basis ein in der horizontal projicirenden Ebene **U** liegendes Quadrat ist; die Höhe soll der Diagonale des Quadrates gleich sein. Fig. 6

Wir denken uns die Basisebene **U** um ihre erste Spur in die erste Bildebene umgelegt und zeichnen die Umlegung der Basis **a′ b′ c′ d′** in der Grösse und Lage, wie sie durch gegebene Daten etwa bestimmt sein könnte. Fällen wir nun von **a′**, **b′**, **c′** und **d′** Perpendikel auf $\overline{\mathbf{U_1}}$, so erhalten wir sofort $\mathbf{a_1}$ $\mathbf{b_1}$ $\mathbf{c_1}$ $\mathbf{d_1}$ als das erste Bild der Basis. $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{b_2}$, $\mathbf{c_2}$ und $\mathbf{d_2}$ liegen in den Ordinalen und die Ordinaten dieser Punkte werden der Umlegung entnommen. Ziehen wir in dem umgelegten Quadrate die Diagonalen, so bekommen wir **0′**, den Fusspunkt der Höhe in der Umlegung, woraus sofort $\mathbf{0_1}$ und $\mathbf{0_2}$ resultiren. Die Höhe steht senkrecht auf der Ebene **U**; ihre Bilder stehen mithin senkrecht auf $\mathbf{U_1}$ und $\mathbf{U_2}$. Bemerken wir noch, dass in der ersten Bildebene sich die Höhe in wahrer Grösse projicirt, so erhalten wir sofort $\mathbf{S_1}$ und in der Ordinale $\mathbf{S_2}$ als die Bilder des Scheitels. Die Bilder der Kanten können nun gezogen werden und wir werden weiter auch keine Schwierigkeit finden, in jeder Bildebene das Sichtbare von dem Gedeckten zu trennen.

In vielen Fällen ist eine Strahlenfläche darzustellen, deren Leitlinie gegeben ist, und die Spitze muss erst aus anderen gegebenen Daten bestimmt werden. Es sei z. B. in Fig. 7 eine Pyramide darzustellen, deren Basis das in der ersten Bildebene liegende gleichseitige Dreieck **a b c** ist; die Spitze soll so bestimmt werden, dass die Seitenflächen ebenfalls gleichseitige Dreiecke seien. Fig. 7

Denken wir uns **S** in der richtigen Lage im Raume und legen sodann um $\mathbf{a_1}$ $\mathbf{b_1}$ und $\mathbf{b_1}$ $\mathbf{c_1}$ als Drehungsaxen die Dreiecke **ab S** und **bc S** in die erste Bildebene um. Diese Umlegungen werden sich in wahrer Grösse zeigen, und können daher in $a_1\, b_1\, S'$ und $b_1\, c_1\, S''$ gezeichnet werden. Nun haben wir diese Dreiecke aus der Umlegung wieder in die ursprüngliche Lage zurück zu drehen. Die Punkte a_1, b_1 und b_1, c_1 bleiben nach wie vor unverändert, weil sie in den Drehungsaxen liegen. Legen wir nun durch S' und S'' die Drehungsebenen U und V, welche in unserem Falle horizontal projicirend sind, und ziehen ihre ersten Spuren $\mathring{U}_1$ und $\mathring{V}_1$, beide offenbar durch S' und S'' und senkrecht auf die entsprechenden Drehungsaxen, so muss im Schnitte beider S_1 liegen; warum? — S_1 mit a_1, b_1 und c_1 verbunden, und wir erhalten sofort das erste Bild der Pyramide. S_2 liegt in der Ordinale und in einem solchen Abstande von der Axe, welcher der Strecke SS_1 gleich ist. Diese finden wir als Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes $SS_1\,\omega$, von welchem wir die andere Kathete und die Hypotenuse $=\omega S'$ kennen. Will man überflüssige Constructionslinien vermeiden, so mache man $\alpha\beta = \omega S'$, nehme $\omega S'$ in den Zirkel und durchschneide von β aus die durch S_1 gezogene Ordinale in S_2. Nun kann auch das zweite Bild der Pyramide gezeichnet werden. Dass der Fusspunkt der Höhe mit S_1 zusammenfällt, und dass dieser Punkt auch der Mittelpunkt der Basis ist, bedarf wol keines Beweises. Schliesslich bemerken wir noch, dass diese Pyramide zu den regulären Körpern beigezählt werden muss; sie ist von 4 congruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzt, und wir erkennen sie als einen von den fünf Platonischen Körpern, als das Tetraeder.

Aufgabe: Eine Kegelfläche darzustellen, deren Basis ein in der ersten Bildebene liegender Kreis und deren Scheitel der beliebig ge-
Fig. 8 wählte Raumpunkt S sein soll (Fig. 8). Sollen die Bilder dieser Kegelfläche gezeichnet werden, so bemerke man, dass das zweite Bild der Basis in der Axe liegt, und wir haben in jeder Bildebene nur noch die Contourstrahlen zu ziehen. In der ersten Bildebene sind es die von S_1 an den Kreis möglichen Tangenten und in der zweiten Bildebene die von S_2 an das zweite Bild der Basis möglichen Randstrahlen. In der ersten Bildebene ist nur ein Theil der Basis sichtbar, und die den Contourstrahlen entsprechenden Berührungspunkte trennen den sichtbaren Theil von dem gedeckten. Dieser Kegel wird auch der schiefe Kreiskegel genannt.

Fig. 9 In Fig. 9 sei abermals ein in der ersten Bildebene liegender Kreis als Leitlinie einer Kegelfläche gegeben und der Scheitel S wurde so gewählt, dass S_1 mit dem Mittelpunkte des Kreises zusammen fällt. Da S_1 mit dem Fusspunkte der Höhe identisch ist, so erhalten wir den senkrechten Kreiskegel. Von S_1 sind hier an das erste Bild der Leitlinie weder Tangenten noch Randstrahlen möglich; der Kreis selbst bildet die Contour in der ersten Bildebene. — Es soll gezeigt werden, dass S von allen Punkten der Leitlinie gleich weit absteht, und dass alle geradlinigen Erzeugenden mit der Basisebene gleiche Winkel einschliessen. — Hätten wir einen Kreiskegel in einer allgemeineren Lage im Raume darzustellen, so muss die Spitze, die Basisebene und die Lage und Grösse des Kreises in derselben gegeben sein. Bei solchen Aufgaben werden wir gemeinhin die Basisebene um eine ihrer Spuren in die Bildebene umlegen, zeichnen in der Umlegung den Kreis in wahrer Grösse und Lage, und drehen dieses Gebilde wieder in die ursprüngliche Lage im Raume zurück. In Figur 10 wollen wir ein ähnliches Beispiel ausführen.

Aufgabe: Eine Ebene **U**, deren erste Spur einen Winkel von 45° mit der Bildaxe einschliesst, ist die Basisebene eines gleichseitigen Kegels (die Seite gleich dem Durchmesser der Basis), welcher mit einer geradlinigen Erzeugenden auf der ersten Bildebene aufliegt. Der Radius der Basis sei gegeben; es sollen die orthogonalen Bilder dieses Kegels construirt werden. (Fig. 10). Fig. 10

Wir ziehen einen Strahl unter 45° zu ${}_1X_2$, und bezeichnen ihn mit $\overline{U}_1$ als die erste Spur der Basisebene, führen sodann eine dritte Bildebene ein und ordnen sie der ersten so zu, dass die Ebene **U** für die dritte Bildebene projicirend sei. Zu diesem Behufe ziehen wir, ${}_1X_3 \perp \overline{U}_1$ und zeichnen $\overset{\circ}{U}_3$ unter einem Winkel von 60° zu ${}_1X_3$; denn dieser Winkel entspricht beim gleichseitigen Kegel der Neigung der Seite zur Basis. Mit Rücksicht auf die gestellte Aufgabe muss der horizontale Neigungswinkel der Ebene **U** diesem Winkel, der sich in der dritten Bildebene in wahrer Grösse zeigt, gleich sein. Das dritte Bild der Basis liegt in $\overset{\circ}{U}_3$ und zeigt sich als eine Strecke $a_3\,b_3$, welche dem Durchmesser des Kreises gleich ist. Wir können $a_3\,b_3$ auch als das dritte Bild jenes Kreisdurchmessers **a b** ansehen, welcher zu der dritten Bildebene parallel ist und sich mithin daselbst in wahrer Grösse projicirt. Der conjugirte Durchmesser **c d** muss daher auf der dritten Bildebene senkrecht stehen, projicirt sich da als ein Punkt und in der ersten Bildebene in wahrer Grösse.

Wählt man S_3 in ${}_1X_3$ so, dass $a_3\,b_3\,S_3$ ein gleichseitiges Dreieck wird, so hat man das dritte Bild des Kegels. Wählen wir nun a_1 als das zugeordnete Bild von a_3, so ergeben sich auch unmittelbar b_1, c_1, d_1 als die Endpunkte der Axen, aus welchen das erste Bild der Basis gezeichnet werden kann. Die Höhe **So** steht senkrecht auf **U**, mithin $o_1\,S_1$ senkrecht auf $\overline{U}_1$, und überdies muss noch S_1 zugeordnet zu S_3 liegen. Die zweiten Bilder von **a**, **b**, **c**, **d** und **S** liegen in den Ordinalen und die entsprechenden Ordinaten werden der dritten Bildebene entnommen. Das zweite Bild der Basis wird aus den conjugirten Diametern $a_2\,b_2$ und $c_2\,d_2$ construirt. Werden schliesslich von S_1 und S_2 an das erste und zweite Bild der Basis die möglichen Tangenten gezogen, so sind die orthogonalen, zugeordneten Bilder des gesuchten Kegels dargestellt.

Die Darstellung der Parallelstrahlenflächen ist ebenso wie die der centralen Strahlenflächen vorzunehmen. Wir wollen einige Aufgaben hierüber folgen lassen.

In Figur 11 sei ein in der ersten Bildebene liegendes Viereck **a b c d** als Basis einer Prismenfläche gegeben, und durch die Richtung **S** sei der unendlich ferne Scheitel derselben bestimmt. Ziehen wir durch a_1, b_1, ... Parallele zu S_1 und durch a_2, b_2, ... Parallele zu S_2, so erhalten wir die Bilder der Kanten. In der ersten Bildebene bilden die Strahlen **b** und **d**, in der zweiten die Strahlen **a** und **c** die Contour, Fig. 11

Trennen wir noch das Sichtbare von dem Gedeckten und bemerken, dass wir uns die Fläche nach oben hin unbegrenzt denken wollen.

Fig. 12 In Figur 12 wurde in der ersten Bildebene das Dreieck **a b c** als Basis einer Prismenfläche angenommen. Die Richtung **S**, durch welche der unendlich ferne Scheitel bestimmt ist, soll senkrecht auf der Basisebene stehen. In unserem Falle ist das Dreieck a_1 b_1 c_1 schon das erste Bild des Prisma, weil alle Seitenebenen für die erste Bildebene projicirend sind. Eine solche Prismenfläche wird auch eine horizontal projicirende genannt.

Fig. 13 In Fig. 13 wollen wir einen allgemeineren Fall über die Darstellung der Prismenflächen behandeln. In der doppelt geneigten Ebene **U**, bei welcher die Oberseite der Rückseite gleich ist, soll ein Dreieck von bestimmter Lage und Grösse als Basis einer senkrechten Prismenfläche angenommen werden; es sind die zugeordneten Bilder derselben darzustellen.

Denken wir uns die Ebene $\mathring{U}$ um die erste Spur in die erste Bildebene umgelegt und zeichnen daselbst das Dreieck a' b' c' in bestimmter Lage und Grösse. Sodann wird eine dritte Bildebene senkrecht auf $\overline{U}_1$ eingeführt, der ersten Bildebene zugeordnet und $\mathring{U}_3$ gesucht. Das dritte Bild der Basis liegt in $\mathring{U}_3$ und giebt sofort das zugeordnete erste Bild a_1 b_1 c_1. In den Ordinalen liegen a_2, b_2, c_2 und die entsprechenden Ordinaten werden der dritten Bildebene entnommen. Steht eine Gerade senkrecht auf einer Ebene, so stehen ihre Bilder senkrecht auf den Spuren dieser Ebene; wir können daher in jeder Bildebene die Bilder der Kanten zeichnen.

Fig. 14 In Fig. 14 sei ein in der zweiten Bildebene liegender Kreis als Leitlinie einer Cylinderfläche gegeben, und deren unendlich ferner Scheitel durch die Richtung **S** bestimmt. Die parallel zu S_2 an den Kreis möglichen Tangenten bilden die Contour für das zweite Bild, und ihre Berührungspunkte trennen in der Leitlinie den sichtbaren Theil von dem gedeckten. In der ersten Bildebene werden parallel zu S_1 die möglichen Randstrahlen gezogen, und diese bilden die Contour des ersten Bildes.

Fig. 15 In Fig. 15 wurde in der ersten Bildebene ein Kreis als Leitlinie einer Cylinderfläche angenommen; der Scheitel sei durch die auf der ersten Bildebene senkrechte Gerade **S** bestimmt. Unter dieser Voraussetzung ist der Kreis selbst das erste Bild der Fläche, weil alle Flächenstrahlen horizontal projicirend sind; diese Fläche heisst daher eine horizontal projicirende Cylinderfläche. In der zweiten Bildebene werden parallel zu S_2 die möglichen Randstrahlen gezogen, und diese bilden die Contour.

Ein allgemeiner Fall über die Darstellung der Cylinderflächen wird eine ähnliche Behandlung erheischen, wie in Fig. 13 bei einer Prismenfläche gezeigt wurde.

Aufgaben:

1. Eine Pyramide darzustellen, deren Basis ein in einer gegebenen Ebene liegendes Quadrat ist, und deren Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind.
2. Eine Pyramide darzustellen, deren Basis ein reguläres Fünfeck ist, und deren Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind.

3. Von einer Pyramide sind die drei Ebenen einer Ecke gegeben; die Bilder dieser Pyramide sind zu construiren.
4. In einer horizontal projicirenden Ebene **u** liegt ein Kreis als Basis eines Kegels, dessen Höhe dem dreifachen Radius der Basis gleich ist; die Bilder dieses Kegels zu construiren.
5. In einer doppelt geneigten Ebene **u** liegt ein beide Spuren dieser Ebene berührender Kreis als Basis eines gleichseitigen Kegels, dessen orthogonale Bilder dargestellt werden sollen.
6. In einer Ebene, welche durch die Axe geht und deren horizontale Neigung 30° beträgt, liegt ein reguläres Sechseck als Basis einer senkrechten Prismenfläche, deren Bilder darzustellen sind.
7. In einer Ebene, welche durch die Axe geht und den von den Projectionsebenen gebildeten Winkel im zweiten Raume halbirt, liegt ein reguläres Fünfeck als Basis einer Prismenfläche, deren Kanten zur zweiten Bildebene parallel sind und mit der ersten einen Winkel von 60° einschliessen; die Bilder dieser Fläche darzustellen.
8. In einer horizontal projicirenden Ebene **u** liegt ein Kreis als Basis einer Cylinderfläche, deren Strahlen parallel zur Bildaxe sind; die Bilder dieser Fläche darzustellen.
9. In einer doppelt geneigten Ebene **u** liegt ein Kreis als Basis einer Cylinderfläche, deren Strahlen auf der Basisebene senkrecht stehen; es sind die orthogonalen Bilder dieser Strahlenfläche zu construiren.

Beziehungen der Punkte zu Strahlenflächen.

Aus dem Entstehungsgesetze der Strahlenfläche folgt unmittelbar, dass durch jeden Punkt dieser Fläche eine geradlinige Erzeugende gezogen werden kann, und dass diese die Leitlinie in einem Punkte treffen müsse. Denken wir uns auf einer Strahlenfläche ein Punktsystem **a, b, c, ...** angenommen, ziehen durch diese Punkte die Flächenstrahlen **p, q, r, . . .** und bezeichnen deren Schnitte mit der Leitlinie mit $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, so haben wir die Punkte **a, b, c, . . .** mit den Punkten der Leitlinie perspectivisch gepaart. Einem jeden Punkte des Systems **a, b, c, . . .** haben wir einen ganz bestimmten Punkt der Leitlinie zugeordnet, und je zwei so zugeordnete Punkte liegen auf demselben Flächenstrahle. Daraus folgt weiter, dass mehrere Punkte der Fläche, welche auf demselben Flächenstrahle liegen, auf einen und denselben Punkt der Leitlinie bezogen erscheinen.

Einen Punkt auf einer Strahlenfläche anzunehmen. $\mathbf{a}_1$ sei das erste Bild eines auf der Strahlenfläche liegenden Punktes (Fig. 16); $\mathbf{a}_2$ zu bestimmen. Fig. 16

Das erste Bild des durch den Punkt **a** gehenden Flächenstrahles ist durch $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{a}_1$ bestimmt und kann sofort gezogen werden. Mit α_1 bezeichnen wir den Schnitt dieses Strahles mit dem ersten Bilde der Leitlinie, α_2 liegt zugeordnet und in dem 2ten Bilde derselben. Auf dem Strahle $S_2\ \alpha_2$ und in der Ordinale liegt $\mathfrak{a}_2$. — Das durch $S_1\ \mathfrak{a}_1$ bestimmte erste Bild des Flächenstrahles hätten wir ebenso gut im anderen Sinne verlängern und im Punkte α'_1 mit dem ersten Bilde der Leitlinie zum Schnitt bringen können. Es giebt also noch einen zweiten Flächenstrahl α' S, auf welchem $\mathfrak{a}$ ebenfalls liegen kann. Wir notiren in der Bildaxe α'_2, ziehen $\alpha'_2\ S_2$ und finden im Schnitte mit der durch $\mathfrak{a}_1$ gezogenen Ordinale $\mathfrak{a}'_2$. Es ist sofort ersichtlich, dass diese zweite mögliche Position des fraglichen Punktes auf dem zweiten Mantel der Strahlenfläche zu suchen ist.

Die Construction der zweiten Bilder $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}'_2$ beruht wesentlich auf der Voraussetzung, dass sich der Schnitt der Ordinale mit dem zweiten Bilde des Flächenstrahles benützbar und sicher ergiebt. Nähert sich das erste Bild des Flächenstrahles der Ordinallage, oder fällt es mit derselben zusammen, so wird die vorige Construction unsicher oder ganz unbrauchbar. Nehmen wir z. B. an, zu dem Punkte $\mathfrak{b}_1$ (Fig. 16) sei $\mathfrak{b}_2$ so zu bestimmen, dass der Raumpunkt $\mathfrak{b}$ auf der Strahlenfläche liege. Ziehen wir $S_1\ \mathfrak{b}_1$, so finden wir diese Gerade in der Ordinallage. Bezeichnen wir mit β_1 und β'_1 die Schnitte derselben mit der Leitlinie, so erkennen wir, dass es abermals zwei Flächenstrahlen β S und β' S giebt, auf denen der gesuchte Punkt $\mathfrak{b}$ liegen kann. β_2 und β'_2 liegen in demselben Punkte der Axe, und wir sehen gleich, dass auch die zweiten Bilder der dem Punkte $\mathfrak{b}$ entsprechenden Flächenstrahlen ebenfalls in der Ordinallage sind. Erinnern wir uns nun, dass das Theilungsverhältnis einer Strecke im Raume auf die Bilder unverändert übergeht, so haben wir sofort eine brauchbare Construction zur Hand. Wir ziehen durch S_2 den beliebigen Strahl $\mathfrak{p}$ und machen $S_2\ \mathfrak{b}_0 = S_1\ \mathfrak{b}_1$ und $S_2\ \beta_0 = S_1\ \beta_1$, legen das Lineal an β_2 und β_0, verschieben es parallel bis es durch $\mathfrak{b}_0$ geht, notiren den Schnitt $\mathfrak{b}_2$ mit $S_2\ \beta_2$, und wir haben eine der Auflösungen gefunden. Machen wir weiter $S_2\ \beta'_0 = S_1\ \beta'_1$, legen das Lineal an β'_2 und β'_0, verschieben es parallel bis es durch $\mathfrak{b}_0$ geht, so erhalten wir im Schnitte mit $\beta'_2\ S_2$ die zweite der gestellten Aufgabe entsprechende Auflösung.

Wäre in Figur 16 $\mathfrak{c}_2$ als das zweite Bild eines auf der Strahlenfläche liegenden Punktes gegeben, und soll das erste Bild desselben bestimmt werden, so ziehen wir $S_2\ \mathfrak{c}_2$, notiren den Schnitt in dem Bilde der Basis mit γ_2; in der Ordinale und im Schnitte mit dem ersten Bilde der Leitlinie finden wir γ_1 und γ'_1 als die Fusspunkte jener Strahlen, auf denen $\mathfrak{c}$ liegen kann. Wir ziehen die ersten Bilder derselben und bezeichnen im Schnitte mit der durch $\mathfrak{c}_2$ gezogenen Ordinale $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}'_1$ als die zwei möglichen Auflösungen, welche die gestellte Aufgabe zulässt.

Fig. 17 Wäre in Fig. 17 $\mathfrak{a}_2$ als das zweite Bild eines auf der Parallelstrahlenfläche liegenden Punktes gegeben, und soll das erste Bild gesucht werden, so ziehen wir durch $\mathfrak{a}_2$ das zweite Bild des Flächenstrahles und bezeichnen α_2 den Schnitt desselben mit dem zweiten Bilde der Leitlinie. In dem ersten Bilde derselben und in der Ordinale finden wir ebenfalls zwei Punkte α_1 und α'_1. Auf den entsprechenden Strahlen und $\mathfrak{a}_2$ zugeordnet liegen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}'_1$ als die zwei möglichen Resultate dieser Aufgabe.

Fig. 18 *Aufgabe*: Eine Strahlenfläche und ein Punkt $\mathfrak{a}$ sind Fig. 18 gegeben; es soll untersucht werden, ob der Punkt $\mathfrak{a}$ auf der Strahlenfläche liege. Wir ziehen den Strahl **S a** und sehen nach, ob derselbe ein Flächenstrahl sei. Die Gerade **S a** zum Schnitt mit der Basisebene gebracht; dieser Schnittpunkt α kann auf der Leitlinie liegen, oder er liegt nicht auf derselben. Im ersteren Falle ist **Sa** ein Flächenstrahl, und **a** liegt mithin auf der Strahlenfläche; im letzteren Falle liegt **a** nicht auf der Strahlenfläche, und dann haben wir zwei Fälle zu unterscheiden. Sind von dem Spurpunkte α Tangenten oder Randstrahlen an die Leitlinie möglich, wie in Fig. 18, dann sagen wir, α liege ausserhalb der Curve und der Strahl **S** α liege ausserhalb der Fläche; dasselbe gilt auch von jedem auf **S** α liegenden Punkte. Der Punkt **a** liegt mithin ausserhalb der Fläche.

Untersuchen wir in derselben Figur die Lage des Punktes **b** zu der Strahlenfläche. Wir ziehen den Strahl **S b** und suchen seinen Schnittpunkt β mit der Basisebene. β_1 liegt nicht auf der Leitlinie, folglich liegt auch **b** nicht auf der Strahlenfläche. Von β_1 sind weder Tangenten noch Randstrahlen an die Leitlinie möglich, und wir wollen daher sagen, β_1 liege innerhalb der Leitlinie und ebenso liegt der Strahl **S** β innerhalb der Fläche; dasselbe gilt von jedem Punkte dieses Strahles, folglich liegt auch der Punkt **b** innerhalb der Fläche.

Die vorstehende Aufgabe, zu entscheiden, ob ein Punkt auf einer Strahlenfläche liege, kann auch unter folgendem Gesichtspunkte gelöst werden: Wir nehmen eines der Bilder des gegebenen Punktes her, erklären es als das Bild eines auf der Fläche liegenden Punktes und suchen das zugeordnete. Fällt dieses mit der gleichnamigen Projection des Punktes zusammen, so liegt der Punkt auf der Fläche; im anderen Falle liegt er nicht auf der Fläche.

Scheitel- und Berührungsebenen der Strahlenflächen.

Jede Ebene, welche durch den Scheitel einer Strahlenfläche geht, soll eine Scheitelebene heissen. Zu jeder Strahlenfläche sind unendlich viele Scheitelebenen denkbar, und aus dem Entstehungsgesetze der Strahlenflächen geht unmittelbar hervor, dass sie von Scheitelebenen nur nach geradlinigen Erzeugenden geschnitten werden können. Hat eine Scheitelebene keinen Punkt mit der Leitlinie gemein, dann kann auch kein Flächenstrahl in dieser Ebene liegen; sie enthält nur den Punkt **S** und geht sonst an der Fläche vorüber. Hat eine Scheitelebene mit der Leitlinie die Punkte α, β, . . . gemein, so schneidet sie die Fläche, in ebenso vielen Strahlen; **S** α, **S** β, . . . sind jene Strahlen, welche sowohl auf der Fläche, als auch in der Scheitelebene liegen, folglich sind es die Schnitte der Ebene mit der Strahlenfläche.

In einer Ebene **U** (Fig. 19), welche zu der ersten Bildebene parallel ist, liege ein Kreis als Basis einer Strahlenfläche, deren Scheitel **S** in der ersten Bildebene angenommen wurde. Durch **S** wurde eine Ebene **V** beliebig gelegt; es soll untersucht werden, ob **V** die Strahlenfläche schneide. Fig. 19

Wir sehen nach, ob **V** mit der Leitlinie der Strahlenfläche Punkte gemein habe. Zu diesem Behufe bringen wir **V** mit der Basisebene **U** zum Schnitte und werden wahrnehmen, wie sich diese Schnittgerade **p** zu der Leitlinie verhalte. $\mathbf{p}_1$ geht an dem ersten Bilde des Kreises vorüber, folglich kann kein Punkt dieser Leitlinie auf **p** und mithin auch nicht in **V** liegen. Die Ebene **V** hat daher mit der Strahlenfläche keine Erzeugende gemein. Ziehen wir in **V** einen beliebigen Strahl **q**, so können wir von demselben sofort behaupten, dass er mit der Fläche keinen Punkt gemein habe; es wäre denn, dass **q** durch **S** geht, in welchem Falle **q** auch nur den Punkt **S** mit der Fläche gemein hätte.

Fig. 20 In Figur 20 sei eine Parallelstrahlenfläche und $\overline{\mathbf{U}_1}$ als die erste Spur einer Scheitelebene gegeben; $\mathbf{U}_2$ soll construirt werden.

Wir nehmen auf $\overline{\mathbf{U}_1}$ einen beliebigen Punkt α an und ziehen durch denselben die Gerade α **S**, welche in unserem Falle einen Strahl **p** giebt, der zu den Flächenstrahlen parallel ist, weil **S** unendlich ferne liegt. Nun ist die Ebene durch die zwei sich schneidenden Geraden $\overline{\mathbf{U}_1}$ und **p** vollkommen bestimmt, und es kann daher $\mathbf{U}_2$ ermittelt werden. Bei unserer Annahme ist **p** eine Zweierspurparallele, daher muss $\overline{\mathbf{U}_2}$ durch den Axenpunkt gehen und zu $\mathbf{p}_2$ parallel sein. Die Leitlinie liegt in der ersten Bildebene, folglich ist $\overline{\mathbf{U}_1}$ der Schnitt von **U** mit der Basisebene und hat mit dem Kreise die Punkte **a** und **b** gemein. Die Flächenstrahlen, welche diesen Punkten entsprechen, resultiren als der Schnitt von **U** mit der Strahlenfläche. Nehmen wir in der Ebene **U** eine beliebige Gerade $\beta\,\gamma$ an, so muss diese, da jede Gerade einer Ebene jede andere Gerade derselben Ebene schneidet, auch die Flächenstrahlen **a**, **b** in den Punkten **A**, **B** schneiden, und diese Punkte müssen wir als die Schnitte der Geraden $\beta\,\gamma$ mit der Strahlenfläche bezeichnen. Die Punkte **A** und **B** liegen auf der Fläche; die Strecke **A B** ist daher eine Sehne der Fläche.

Die Punkte der inneren Strecke $\overline{\mathbf{A\,B}}$ liegen innerhalb und alle anderen Punkte des Strahles $\beta\,\gamma$ liegen ausserhalb der Fläche. Zu demselben Ergebnisse gelangen wir bei jeder anderen in **U** liegenden Geraden, wenn sie nicht durch den Scheitel geht. Die Strahlen **a** und **b** enthalten alle Punkte der Ebene **U**, welche auf der Fläche liegen, und theilen alle übrigen Punkte dieser Ebene in zwei Gruppen; die zwischen den Strahlen **a** und **b** liegenden Punkte befinden sich innerhalb und alle übrigen Punkte der Ebene liegen ausserhalb der Strahlenfläche. Ist die Leitlinie geschlossen, so können wir von keinem Punkte ausserhalb zu einem innerhalb liegenden Punkte gelangen, ohne die Fläche zu überschreiten. Jede in **U** liegende Gerade wird, wenn sie nicht durch den Scheitel geht, eine Sekante der Fläche sein, und auf jeder Sekante liegt eine Sehne der Fläche.

Fassen wir die vorigen Wahrnehmungen zusammen, so erkennen wir, dass die Scheitelebenen an der Strahlenfläche entweder vorüber gehen, oder dieselbe schneiden. Im ersteren Falle geht der Schnitt der Scheitelebene an der Leitlinie vorüber; im zweiten ist er eine Secante derselben. Neben diesen Lagen der Scheitelebene müssen wir auf einen Grenzfall ganz besonders Rücksicht nehmen.

In Fig. 21 wurde die Leitlinie einer Strahlenfläche in der ersten Bildebene angenommen und U_1 als die erste Spur einer Scheitelebene so gezogen, dass sie mit der Leitlinie nur einen Punkt gemein hat, und die diesem Punkte zunächst liegenden Theile von U_1 auf derselben Seite der Leitlinie liegen. Unter dieser Voraussetzung muss U_1 eine Tangente an die Leitlinie und **a** ihr Berührungspunkt sein. Die Scheitelebene **U** hat mit der Fläche nur den Strahl **a S** gemein; wäre noch ein zweiter Strahl möglich, welchen diese Ebene mit der Fläche gemein hätte, so müsste demselben ein von **a** verschiedener Punkt der Leitlinie entsprechen, der ebenfalls auf U_1 liegen müsste, was aber der Voraussetzung widerspricht. Ziehen wir in **U** einen beliebigen Strahl **p**, so muss er notwendig den Strahl **S a** in einem Punkte **A** schneiden. **A** ist der einzige Punkt, welchen **p** mit der Strahlenfläche gemein hat, und die diesem Punkte zunächst liegenden Theile von **p** liegen auf derselben Seite der Fläche. Eine Gerade von dieser Eigenschaft wollen wir eine Flächentangente und **A** ihren Berührungspunkt nennen. Wären die dem Punkte **A** zunächst liegenden Theile von **p** nicht auf derselben Seite der Fläche, so müsste es noch einen zweiten Punkt geben, welchen **p** mit der Fläche gemein hätte, weil man von keinem innerhalb liegenden Punkte zu einem ausserhalb gelegenen gelangen kann, ohne die Fläche zu überschreiten. Fig. 21

Wir können diesen Beweis auch so führen: Wenn die dem Punkte **A** zunächst liegenden Theile von **p** nicht auf derselben Seite der Strahlenfläche lägen, so könnten auch die dem Punkte **a** zunächst liegenden Theile von U_1 nicht auf derselben Seite der Leitlinie liegen, was gegen die Voraussetzung wäre. Denn jedem Punkte von **p** können wir einen ganz bestimmten Punkt von U_1 dadurch zuweisen, dass wir die ersteren Punkte von **S** aus auf U_1 projiciren, und alle Punkte eines solchen projicirenden Strahles sind in Bezug auf die Strahlenfläche gleichliegend, d. h. sie liegen alle entweder ausserhalb oder innerhalb der Fläche. **p** ist eine beliebige in der Ebene **U** gewählte Gerade, und wir könnten daher ebenso von jeder anderen Geraden der Ebene **U** zeigen, dass sie eine Flächentangente sei, und einen in **S a** liegenden Punkt zum Berührungspunkte habe. Die Ebene **U** ist daher der geometrische Ort aller an die Strahlenfläche möglichen Flächentangenten, deren Berührungspunkte in **S a** liegen. Eine Ebene von dieser Eigenschaft soll eine Tangentialebene und **S a** ihr geradliniges Berührungselement heissen. Die Ebene **U** hat mit der Strahlenfläche nur den Strahl **S a** gemein, und alle diesem Strahle zunächst liegenden Theile der Ebene liegen auf derselben Seite der Fläche. Aus dieser bemerkenswerten Eigenschaft der Tangirungsebene wollen wir noch eine weitere Folgerung ziehen. Denken wir uns eine beliebige Ebene **V**, welche **U** in einer Geraden **q**, das Berührungselement **S a** in dem Punkte **B** und die Strahlenfläche in einer Curve **K** schneidet. **q** hat mit **K** den Punkt **B** gemein, und es müssen auch die diesem Punkte zunächst liegenden Theile von **q** auf derselben Seite der Curve **K** liegen. Daraus geht aber hervor, dass **q** eine Tangente der Schnittcurve **K** und **B** ihr Berührungspunkt sei. Wenn wir eine neue Basisebene einführen, so muss demnach ihr Schnitt mit **U** ebenfalls eine Tangente an die neue Leitlinie sein, und der Berührungspunkt muss auf dem Strahle **S a** liegen.

Bei der Ableitung der Berührungsebenen an Strahlenflächen wurde vorausgesetzt, dass an die Leitlinie Tangenten möglich sind, mithin kann von Tangirungsebenen nur bei Kegel- und Cylinderflächen die Rede sein. Gleichwohl giebt es auch bei Pyramiden und Prismen ein Analogon. In Fig. 22 wurde ein in der ersten Bildebene liegendes 4Eck als Leitlinie einer Strahlenfläche angenommen. Durch a_1 wurde wie vorhin U_1 als die erste Spur einer Scheitelebene so gezogen, dass die dem Punkte a_1 zunächst liegenden Theile der Spur auf derselben Seite der Leitlinie liegen. Die Ebene **U** hat mit der Strahlenfläche nur die Erzeugende **a** gemein, und es sind auch hier die dem Strahle **a** zunächst liegenden Theile der Ebene **u** auf gleichnamiger Seite der Prismenfläche. Diese Ebene soll eine Grenz- oder Randebene heissen. Denken wir uns nämlich jene Ebenen, welche parallel zu **U** gelegt werden können, so bildet die Ebene **U** die Grenze zwischen den Ebenen, welche die Fläche schneiden, und jenen, welche an derselben vorüber gehen. Bei einer Pyramidenfläche erstreckt sich dieser Begriff der Grenze nur auf einen Mantel der Fläche. Diese Grenzebenen werden uns bei den verschiedenartigen Aufgaben über Pyramiden- und Prismenflächen denselben Dienst erweisen, wie die Berührungsebenen an Kegel- und Cylinderflächen, aber merken müssen wir uns, dass zwischen den Grenzebenen bei Pyramiden und Prismen und den Tangentialebenen an Kegel und Cylinderflächen ein wesentlicher Unterschied herscht, welcher besonders hervorzuheben ist. In Figur 21 ist U_1 eine Tangente an die Leitlinie, welche in dem Berührungspunkte a_1 stetig gekrümmt ist. In diesem Punkte ist nur eine einzige Tangente an die Leitlinie möglich, und wir können uns ebenso gut vorstellen, die Tangente habe mit der Curve ein Element, d. h. ein kleines Bogenstück, welches mit der zugehörigen Sehne merklich zusammenfällt, gemein. Dem entsprechend ist auch die Strahlenfläche stetig gekrümmt und hat mit der Ebene **U** ein geradliniges Flächenelement gemein, d. h. zwei unmittelbar auf einander folgende Flächenstrahlen, die wir sinnlich wahrnehmbar nicht mehr zu trennen vermögen, obgleich durch diese zwei sich schneidenden Geraden eine E-
Fig. 22 bene, die Tangentialebene nämlich, vollkommen bestimmt ist. In Figur 22 bildet die Leitlinie im Punkte a_1 eine Ecke; U_1 hat mit der Basis nur den Punkt a_1 gemein, und wir könnten ausser U_1 noch unzählig viele Gerade in der ersten Bildebene ziehen, welche mit der Leitlinie auch nur diesen Punkt gemein hätten. Ebenso hat die Ebene **U** mit der Strahlenfläche nur die Kante **a** gemein, und es sind wieder unzählig viele Ebenen denkbar, welche dieselbe Eigenschaft zeigen, wie z. B. die in Fig. 22 ersichtlich gemachte Ebene **V**. Diese Ebenen haben mit der Strahlenfläche lediglich einen Strahl gemein; von einer Berührung in der zuvor erläuterten Bedeutung kann hier keine Sprache sein. Dagegen können wir von den Tangentialebenen behaupten:

Die Tangential- oder Berührungsebene hat mit der Strahlenfläche ein geradliniges Flächenelement gemein und berührt sie in jedem Punkte desselben.

Sollen Tangentialebenen an Kegel- oder Cylinderflächen unter gegebenen Bedingungen construirt werden, dann erinnern wir uns, dass der Schnitt der Berührungsebene mit der Basisebene eine Tangente an die

Leitlinie, und der dem Berührungspunkte entsprechende Flächenstrahl das Berührungselement sei, und durch diese zwei sich schneidenden Geraden ist die Tangentialebene bestimmt. Jede Berührungsebene enthält den Scheitel der Fläche; wir können uns daher auch merken, dass durch die an die Leitlinie gezogene Tangente und den ausserhalb liegenden Punkt **S** die Berührungsebene an die Strahlenfläche vollkommen bestimmt sei.

Wäre zu entscheiden, ob eine gegebene Scheitelebene **U** eine Berührungsebene der Strahlenfläche sei, so bringe man **U** mit der Basisebene zum Schnitt, und wenn diese Gerade die Leitlinie berührt, so ist **U** eine Berührungsebene der Strahlenfläche.

Aufgaben: 1. Ein in der ersten Bildebene liegender Kreis ist die Leitlinie eines Kegels von der Spitze **S**. Durch den gegebenen Punkt **A** sollen die möglichen Berührungsebenen an den Kegel gelegt werden. Fig. 23

Ziehen wir die Scheitellinie **S A**, so erhalten wir sofort eine Gerade, welche in der gesuchten Ebene liegt, weil die Punkte **S** und **A** darin liegen. Bringen wir den Strahl **S A** mit der Basisebene zum Schnitt, so muss durch diesen Punkt δ die Schnittlinie gehen, welche die gesuchte Ebene in der Basisebene erzeugt, und wir wissen, dass diese Gerade eine Tangente der Leitlinie sei. Die von δ_1 an den Kreis möglichen Tangenten geben mit Rücksicht auf unsere spezielle Annahme sofort die ersten Spuren der Berührungsebenen **U** und **V**, welche beide der gestellten Aufgabe entsprechen. Notiren wir die Berührungspunkte **a** und **b**, so erhalten wir in **a S** und **b S**. Die Berührungselemente dieser Ebenen. Ziehen wir durch **S** die Einserspurparallelen **S** α und **S** β, suchen ihre zweiten Spurpunkte α_2 und β_2, so können wir auch die zweiten Spuren der gesuchten Berührungsebenen construiren.

Wären von δ_1 an die Leitlinie keine Tangenten möglich, dann gäbe es auch durch **A** keine Berührungsebenen an die Fläche, in welchem Falle **A** innerhalb derselben läge. Was liesse sich von **A** behaupten, wenn von δ_1 nur eine Tangente an den Kreis möglich wäre?

2. Durch einen Punkt **A** an eine Cylinderfläche die möglichen Berührungsebenen zu legen. Fig. 24. Fig. 24

Durch **A** die Scheitellinie gezogen und diese zu den Flächenstrahlen parallele Gerade **l** mit der Basisebene zum Schnitt gebracht. Die von dem Spurpunkte δ an die Leitlinie möglichen Tangenten **p** und **q** bestimmen mit **l** die zwei der gestellten Aufgabe entsprechenden Tangentialebenen (**pl**) und (**ql**). Die durch die Berührungspunkte **a** und **b** gehenden Flächenstrahlen **r** und **t** sind ihre Berührungselemente.

3. Parallel zu einer gegebenen Geraden **l** die möglichen Berührungsebenen an eine Kegelfläche zu legen. (Fig. 25). Fig. 25

Die zu **l** parallel gezogene Scheitellinie giebt eine Gerade der gesuchten Ebenen. **p** mit der Basisebene zum Schnitt gebracht, und von diesem Punkte δ die möglichen Tangenten **q** und **r** an die Leitlinie gezogen. Zwei Ebenen entsprechen der Aufgabe. Eine derselben ist durch **p**, **q** und die andere durch **p**, **r** bestimmt. Notiren wir die Berührungspunkte **a** und **b**, so erhalten wir sofort auch die den gesuchten Ebenen entsprechenden Berührungselemente.

Fig. 26 4. Parallel zu einer gegebenen Geraden **p** die möglichen Berührungsebenen an eine Cylinderfläche zu legen.

Durch einen auf **p** beliebig angenommenen Punkt **o** einen Strahl **q** parallel zu den Cylinderstrahlen gezogen. Die Geraden **p**, **q** bestimmen eine Ebene **R**, welche zu der gesuchten Ebene parallel ist, weil sie parallel sind zu zwei in dieser Ebene liegenden Geraden. Parallele Ebenen haben parallele Schnitte; wir bringen daher die Ebene **p q** mit der Basisebene zum Schnitt, ziehen parallel zu dieser Geraden die möglichen Tangenten an die Leitlinie, notiren ihre Berührungspunkte und die denselben entsprechenden Flächenstrahlen. Jede der gesuchten Berührungsebenen erscheint dann durch zwei sich schneidende Gerade bestimmt.

In unserem Beispiele Fig. 26 liegt die Leitlinie in der ersten Bildebene, folglich sind die vorerwähnten Paralleltangenten U_1 und V_1 schon die ersten Spuren der parallel zu **p** an die Strahlenfläche möglichen Tangentialebenen **U** und **V**.

5. Durch eine gegebene Gerade **p** an eine Strahlenfläche Berührungsebenen zu legen.

Die durch **p** und den Scheitel der Fläche bestimmte Ebene bringen wir mit der Basisebene zum Schnitt, und wenn diese Gerade eine Tangente der Leitlinie ist, so ist die Ebene **p S** eine Berührungsebene; im anderen Falle ist durch **p** keine Berührungsebene an die Strahlenfläche möglich.

6. Parallel zu einer gegebenen Ebene **U** die möglichen Berührungsebenen an eine Strahlenfläche zu legen.

Bei einer Kegelfläche legen wir durch **S** eine Ebene **V** parallel zu **U** und untersuchen, ob **V** eine Berührungsebene sei. Ist der Schnitt von **V** mit der Basisebene keine Tangente der Leitlinie, so lässt diese Aufgabe keine Auflösung zu.

Bei einer Cylinderfläche untersuchen wir, ob **u** zu den Flächenstrahlen parallel sei. Nur dann, wenn dies der Fall ist, sind parallel zu **U** an die Cylinderfläche Berührungsebenen möglich und ihre Bestimmung ist aus den früheren Aufgaben ersichtlich.

Beziehungen der Geraden zu Strahlenflächen.

Hat eine Gerade mit einer Strahlenfläche einen Punkt gemein, und befinden sich die diesem Punkte zunächst liegenden Theile der Geraden auf verschiedenen Seiten der Strahlenfläche, dann sagen wir, dass die Gerade die Fläche in diesem Punkte schneide. Die Anzahl der Punkte, in welchen eine Gerade die Strahlenfläche schneiden kann, hängt von der Leitlinie und von der Lage der Geraden ab. Geht eine Gerade durch den Scheitel der Strahlenfläche, so hat sie entweder nur diesen Punkt mit der Fläche gemein, oder sie ist mit einem Flächenstrahle identisch. Hat eine Gerade ausser dem Scheitel noch einen anderen Punkt mit der Fläche gemein, dann liegt sie ihrer ganzen Ausdehnung nach auf der Strahlenfläche. Durch jede Gerade, welche nicht durch den Scheitel der Fläche geht, ist eine Scheitelebene bestimmt, und die

Gerade schneidet die Strahlenfläche in ebenso vielen Punkten, als ihre Scheitelebene mit der Fläche Strahlen gemein hat.

In Fig. 27 sei ein in der ersten Bildebene liegendes Dreieck **a b c** als Basis der Pyramide **S** und eine Gerade **p** gegeben; es soll der Schnitt von **p** mit der Pyramide gesucht werden. Fig. 27

Wir legen durch **p** und den Punkt **S** eine Ebene **U** und bringen diese mit der Basisebene zum Schnitt. Zu diesem Behufe nehmen wir auf **p** einen beliebigen Punkt **m** an und suchen von der Geraden **S m** den ersten Spurpunkt $\mathfrak{n}_1$. $\mathfrak{p}_2$ wurde parallel zur Bildaxe angenommen, folglich ist der durch $\mathfrak{n}_1$ parallel zu $\mathfrak{p}_1$ gezogene Strahl $\overline{U}_1$ die erste Spur der Scheitelebene **p S** und $\overline{\alpha}$ **S**, β **S** ihre Schnitte mit der Pyramide. Die Punkte **A** und **B**, in welchen diese Strahlen **p** schneiden, sind die gesuchten Schnittpunkte, und weil sie in Seitenebenen liegen, welche beiden projicirenden Augen sichtbar sind, so werden auch **A** und **B** von denselben gesehen.

In Fig. 28 soll der Schnitt der doppelt geneigten Geraden **p** mit einem Kreiscylinder, dessen Strahlen zur Axe parallel, und dessen Basisebene **U** auf der Bildaxe senkrecht steht, gesucht werden. Fig. 28

Wir legen durch **p** eine Scheitelebene und ziehen zu diesem Zwecke durch den auf **p** liegenden Punkt **o** den Strahl **q** parallel zu den Erzeugenden des Cylinders. Die Geraden **p**, **q** bestimmen die Scheitelebene, und die Punkte **m**, **n** ihren Schnitt mit der Basisebene. Weil **U** für beide Bildebenen projicirend ist, so legen wir den Kreis und den Strahl **m n** um $\overline{U}_1$ in die erste Bildebene um. Mittels der Umlegung finden wir die Flächenstrahlen **a**, **b**, und die Schnitte derselben mit **p** geben die gesuchten Punkte **A** und **B**. **A** liegt auf einem Flächenstrahle, welcher von keinem der projicirenden Augen gesehen wird, folglich ist auch **A** in beiden Bildebenen gedeckt, dagegen ist der Punkt **B** in beiden Bildebenen sichtbar, weil er auf einem sichtbaren Strahle liegt.

Soll eine Gerade eine Tangente zu einer Strahlenfläche sein, so muss sie in einer Berührungsebene derselben liegen.

In Fig. 29 ist ein Kegel **S** und ein Raumpunkt **a** gegeben; parallel zur ersten Bildebene sollen durch **a** die möglichen Tangenten an Fig. 29 diese Strahlenfläche gezogen werden.

Wir legen durch **a** die Berührungsebenen **U** und **V** an die Fläche, suchen ihre ersten Spuren und ihre Berührungselemente β **S** und γ **S**. Die gesuchten Tangenten sind Einserspurparallele der Ebenen **U** und **V**; ihre ersten Bilder $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{q}_1$ gehen durch $\mathfrak{a}_1$ und parallel zu $\overline{U}_1$ und $\overline{V}_1$. Die zweiten Bilder $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{q}_2$ gehen durch $\mathfrak{a}_2$ parallel zur Axe. Die Berührungspunkte **b** und **c** ergeben sich im Schnitte von **p**, **q** mit den Strahlen β **S** und γ **S**.

Ebene und zur Basis parallele Schnitte der Parallelstrahlenflächen.

Ein in der ersten Bildebene liegendes Viereck **a b c d** wurde
Fig. 30 in Fig. 30 als Leitlinie einer Parallelstrahlenfläche, deren Erzeugende zu beiden Bildebenen geneigt sind, angenommen; es soll der Schnitt dieser Fläche mit der zur ersten Bildebene parallelen Ebene **U** gesucht werden.

Unsere Prismenfläche ist begrenzt von vier ebenen Streifen, deren Schnitte mit **U** Strecken geben, welche durch die in den Kanten liegenden Schnittpunkte bestimmt sind. Der Schnitt von **U** mit der Strahlenfläche ist ein Polygon, welches offenbar ebenso viele Seiten hat als die Basis. Da parallele Ebenen parallele Schnitte haben, und gleichliegende Parallelwinkel gleich sind, so müssen die Seiten und Winkel des Schnittpolygons nach der Ordnung gleich sein den Seiten und Winkeln der Basis. Die Ebene **U** schneidet also die Prismenfläche nach einem der Basis congruenten Polygon. In unserem Beispiele ist **U** verticalprojicirend, folglich geben die Schnitte der zweiten Bilder der Kanten mit $\overset{\circ}{U}_2$ unmittelbar a'_2, b'_2, c'_2 und d_2 als die zweiten Bilder der Eckpunkte des Schnittpolygons, deren erste Bilder in den Ordinalen und in den entsprechenden ersten Bildern der Kanten liegen.

Wenden wir unser Augenmerk der ersten Bildebene zu, so finden wir hier die zwei congruenten Gebilde $a_1\, b_1\, c_1\, d_1$ und $a'_1\, b'_1\, c'_1\, d'_1$. Die letztere Figur ist aber nicht etwa ein zufälliges Viereck, welches dem ersteren congruent gezeichnet wurde; es ist vielmehr festzuhalten, dass es ein projectives Resultat sei, d. h. ein Gebilde, welches durch das Verfahren des Projicirens erhalten wurde. In der planen Zeichnung sehen wir $a_1\, b_1\, c_1\, d_1$ angenommen und durch Parallelstrahlen nach $a_2\, b_2\, c_2\, d_2$ und von hier wieder durch Parallelstrahlen nach $a'_2\, b'_2\, c'_2\, d'_2$ projicirt. Die Ordinalen dieser Punkte, so wie die ersten Bilder der Prismenkanten gelten ebenfalls als parallel projicirende Strahlen, und im Schnitte von je zwei derselben, welche demselben projectivischen Gange entsprechen, notiren wir schliesslich $a'_1\, b'_1\, c'_1\, d'_1$. Wir sind daher berechtigt, das letztere Gebilde in Bezug auf das erste ein projectiv verwandtes zu nennen, und es entsprechen beiden Gebilden Eigenschaften, die eine notwendige Folge des Projicirens sind. Diesen projectiven Zusammenhang können wir aus der Zeichnung unmittelbar ablesen: „Jedem Punkte und jeder Geraden in einem Gebilde entspricht wieder ein Punkt oder eine Gerade in dem anderen. Wenn wir je zwei in dieser Weise einander entsprechende Elemente als verwandte bezeichnen, so liegen je zwei verwandte Punkte auf einem projicirenden Strahle, und alle projicirenden Strahlen gehen demselben unendlich fernen Projectionscentrum zu. Verwandte Punkte liegen in verwandten Geraden, und diese gehen wieder durch verwandte Punkte. Ie zwei verwandte Gerade sind parallel, und ihren unendlich fernen Schnittpunkt denken wir uns auf der unendlich fernen Geraden, in welcher die Ebene **U** die Basisebene schneidet. — Betrachten wir das unendlich ferne Centrum, von welchem die je zwei verwandte Punkte projicirenden Strahlen herkommen, als den optischen Mittelpunkt eines abbildenden Auges, dann müssen wir $\mathbf{a}_1\,\mathbf{b}_1\,\mathbf{c}_1\,\mathbf{d}_1$ und $\mathbf{a}'_1\,\mathbf{b}'_1\,\mathbf{c}'_1\,\mathbf{d}'_1$ als perspectivische Gebilde bezeichnen, und weil sie noch überdies congruent sind, so nennen wir diesen Grad geometrischer Verwandschaft die *perspectivische Congruenz.*

Gestützt auf diese projectiven Ergebnisse, könnten wir in Fig. 35 einen beliebigen Punkt $\mathbf{A}_1$ als dem System der Basis gehörig annehmen, und suchen, ganz unabhängig von dem stereometrischen Zusammenhang nach den Sätzen der perspectivischen Congruenz, den verwandten Punkt in dem anderen Gebilde. Wir ziehen durch $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{d}_1$ einen Strahl $\mathbf{p}_1$, dessen verwandte Gerade $\mathbf{p}'_1$ durch $\mathbf{d}'_1$ und parallel zu $\mathbf{p}_1$ geht. Auf dieser und in dem parallel projicirenden Strahle liegt der verwandte Punkt $\mathbf{A}'_1$.

In Fig. 31 wurde ein in der ersten Bildebene liegender Kreis als Basis einer Cylinderfläche, deren Strahlen zur zweiten Bildebene parallel sind, angenommen; es soll der Schnitt dieser Fläche mit der Ebene $\mathbf{u}$, welche zu der Basisebene parallel ist, construirt werden. Fig. 31

Bringen wir die Erzeugenden der Strahlenfläche in ihrer Aufeinanderfolge mit $\mathbf{U}$ zum Schnitt und verbinden die ersten Bilder dieser Schnittpunkte durch einen stetigen Linienzug, so erhalten wir das erste Bild des Schnittes von $\mathbf{U}$ mit der Cylinderfläche. Wir müssen in diesem Falle das Bild der Schnittlinie punktweise suchen, und nehmen zu diesem Behufe auf der Leitlinie einen Punkt $\mathbf{a}$ an, ziehen durch denselben den Flächenstrahl und bezeichnen seinen Schnittpunkt mit $\mathbf{a}'$. Ebenso können wir noch beliebige andere Strahlen wählen, und wir sehen, dass jedem Punkte der Leitlinie auch ein ganz bestimmter Punkt in dem $\mathbf{a}$ Bilde der Schnittlinie entspricht, und dass die einander entsprechenden Punkte auf parallel projicirenden Strahlen, den Bildern der Flächenstrahlen, liegen. Construiren wir nun jene Berührungsebene $\mathbf{V}$, welche den Cylinder in dem Strahle $\mathbf{a}\,\mathbf{a}'$ berührt, und suchen ihren Schnitt $\mathbf{p}'_1$ mit $\mathbf{U}$, so muss diese Gerade, welche bei unserer Annahme eine Einserspurparallele der Ebene $\mathbf{V}$ ist, eine Tangente der gesuchten Schnittlinie in dem Punkte $\mathbf{a}'$ sein. Daraus entnehmen wir, dass jeder Tangente in dem Systeme der Basis wieder eine Tangente in dem ersten Bilde der Schnittlinie entspricht. Diese Ergebnisse zusammen gehalten, führen uns zu dem Schluss, dass die Ebene $\mathbf{U}$ die Cylinderfläche nach einer der Leitlinie congruenten Curve schneidet, so wie wir auch erkennen, dass die Bilder der Leitlinie und die entsprechenden Bilder der Schnittcurve perspectivisch congruente Gebilde sind.

Wenn wir die durch parallele Scheitelebenen erzeugten ebenen Schnitte der Parallelstrahlenflächen ausschliessen, so können wir folgenden Satz allgemein aussprechen.

Die orthogonalen Projectionen paraller ebener Schnitte sind bei Parallelstrahlenflächen perspectivisch congruente Gebilde.

Von dieser bemerkenswerten Eigenschaft der Parallelstrahlenflächen, können wir in sehr vielen Fällen der Praxis einen erheblichen Nutzen ziehen.

Fig. 32 Es wäre z. B. (Fig. 32) in der Ebene **U** eine Curve von ganz allgemeiner Art als Basis einer Cylinderfläche, deren Erzeugende zur Bildaxe parallel sind, gegeben, und es soll der Schnitt dieser Fläche mit der zu **U** parallelen Ebene **V** gesucht werden.

Wir suchen auf bekannte Art den Schnitt eines Flächenstrahles mit **V** und bezeichnen die Bilder dieses Schnittpunktes mit $\mathbf{n}'_1$ und $\mathbf{n}'_2$. Beschränken wir uns lediglich auf die Construction des zweiten Bildes der Schnittcurve, so nehmen wir auf dem zweiten Bilde der Leitlinie geeignete Punkte $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{c}_2$, ... an, ziehen die Strahlen $\mathbf{n}_2\,\mathbf{a}_2$, $\mathbf{n}_2\,\mathbf{b}_2$, $\mathbf{n}_2\,\mathbf{c}_2$, ... und hiezu durch $\mathbf{n}'_2$ Parallele. Auf diesen und in den durch $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{c}_2$, ... gezogenen Bildern der Flächenstrahlen liegen $\mathbf{a}'_2$, $\mathbf{b}'_2$, $\mathbf{c}'_2$, ..., welche wir sofort als die verwandten Punkte des Bildes der Schnittlinie erkennen. Ziehen wir nun in $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_2$, ... die Tangenten $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{q}_2$, ... an das Bild der Leitlinie und hiezu durch $\mathbf{a}'_2$, $\mathbf{b}'_2$, ... die Parallelen $\mathbf{p}'_2$, $\mathbf{q}'_2$, ..., so sind letztere offenbar auch Tangenten an das Bild der Schnittlinie, welches alsdann sicher und mühelos gezeichnet werden kann.

Ebene und zur Basis parallele Schnitte der Centralstrahlenflächen.

Fig. 33 In Fig. 33 sei das in der ersten Bildebene liegende Dreieck **a b c** die Leitlinie einer Pyramidenfläche **S**, deren Schnitt mit der Ebene **U**, welche parallel zu der Basisebene angenommen wurde, zu suchen ist.

Der Schnitt von **U** mit der Pyramide wird ebenfalls ein Dreieck sein. Die Ecken desselben liegen auf den Kanten, die Seiten sind parallel zu den Basiskanten, daher auch dessen Winkel als gleichliegende Parallelwinkel nach der Ordnung den Winkeln des Basispolygons gleich sein müssen. Daraus geht hervor, dass die Ebene **U** die Pyramide nach einem der Basis ähnlichen Gebilde schneidet.

In der ersten Bildebene projicirt sich das Schnittpolygon in wahrer Grösse. Wir sehen hier $\mathbf{a}_1\,\mathbf{b}_1\,\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{a}'_1\,\mathbf{b}'_1\,\mathbf{c}'_1$ als zwei ähnliche und ähnlich liegende Gebilde, deren Punkte von $\mathbf{S}_1$ aus perspectivisch gepaart erscheinen, und wir finden alle bei der perspectivischen Congruenz angeführten Eigenschaften der Lage wieder, nur liegt hier das Projectionscentrum $\mathbf{S}_1$ endlich, und Strecken in einem System entsprechen parallele und proportionale Strecken in dem anderen Systeme. Diese Art projectivischen Zusammenhanges zwischen zwei geometrischen Gebilden heisst die perspectivische Ähnlichkeit.

Nehmen wir Fig. 33 einen beliebigen Punkt $\mathbf{A}_1$ in der Ebene der Zeichnungfläche an, weisen ihn dem Systeme der Basis zu und suchen nach den Gesetzen der perspectivischen Ähnlichkeit den verwandten Punkt $\mathbf{A}'_1$ im anderen System. Wir ziehen durch $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{c}_1$ die Gerade $\mathbf{p}_1$, deren verwandte $\mathbf{p}'_1$ durch $\mathbf{c}'_1$ und parallel zu $\mathbf{p}_1$ gehen muss; auf dieser und dem projicirenden Strahle $\mathbf{A}_1\,\mathbf{S}$ liegt der gesuchte Punkt $\mathbf{A}'_1$.

In Fig. 34 ist in der horizontal projicirenden Ebene $\mathbf{u}$ ein Dreieck $\mathbf{a\,b\,c}$ als Leitlinie einer Pyramidenfläche von der Spitze $\mathbf{S}$ gegeben; es soll der Schnitt dieser Fläche mit jener zu $\mathbf{U}$ parallelen Ebene $\mathbf{V}$ gesucht werden, welche von $\mathbf{S}$ ebenso weit absteht als die Basisebene $\mathbf{U}$. Fig. 34

Die Ebene $\mathbf{V}$ wird der gestellten Bedingung zu Folge den zweiten Mantel der Pyramidenfläche schneiden. $\overline{\mathbf{V}_1}$ wird zu $\overline{\mathbf{U}_1}$ parallel sein und beide müssen von $\mathbf{S}_1$ denselben Abstand haben. Wenn wir die Bilder des Schnittes $\mathbf{a'\,b'\,c'}$ construiren, so sehen wir sofort, dass die Verticalprojectionen der Basis und des Schnittpolygons alle Merkmale perspectivisch ähnlicher Gebilde an sich tragen. Wir finden aber noch überdies, dass das Centrum $\mathbf{S}_2$ die auf den projicirenden Strahlen liegenden und von je zwei einander entsprechenden oder verwandten Punkten begrenzten Strecken $\overline{\mathbf{a}_2\,\mathbf{a}'_2}$, $\overline{\mathbf{b}_2\,\mathbf{b}'_2}$, . . . halbirt, folglich entspricht jeder Strecke des einen Systems eine parallele und gleiche Strecke in dem anderen. Das Gebilde $\mathbf{a}_2\,\mathbf{b}_2\,\mathbf{c}_2$ ist daher congruent mit $\mathbf{a}'_2\,\mathbf{b}'_2\,\mathbf{c}'_2$. Systeme von dieser Eigenschaft und Lage sollen centrische Gebilde heissen und $\mathbf{S}_2$ das Centrum oder der Mittelpunkt ihrer Lage. Von centrischen Gebilden sagt man auch, dass sie involutorisch liegen, d. h. es sind dies solche in einander liegende Gebilde, deren Punkte in einer bestimmten Ordnung genommen, einander doppelt entsprechen. Das folgende Beispiel soll uns den Begriff der involutorischen Lage klarer machen.

In der ersten Bildebene liegt (Fig. 35) ein Quadrat $\mathbf{a\,b\,c\,d}$ als Basis einer senkrechten Pyramidenfläche von dem Scheitel $\mathbf{S}$. Es soll der Schnitt dieser Strahlenfläche mit jener zu der ersten Bildebene parallelen Ebene $\mathbf{U}$ gesucht werden, welche von $\mathbf{S}$ ebenso weit absteht als die erste Bildebene. Der Schnitt $\mathbf{a'\,b'\,c'\,d'}$ hat sein zweites Bild in $\overset{\circ}{\mathbf{U}}_2$, und das erste Bild $\mathbf{a}'_1\,\mathbf{b}'_1\,\mathbf{c}'_1\,\mathbf{d}_1$ projicirt sich auf das erste Bild der Leitlinie. Obwohl sich diese beiden Gebilde decken, so sind sie nach ihrer Entstehung und gegenseitiger Zuordnung doch nicht identisch; wir sehen vielmehr, dass auch hier einem beliebigen Punkte $\mathbf{a}_1$ des einen Gebildes ein ganz bestimmter Punkt $\mathbf{a}'_1$ in dem anderen entspricht, und dass je zwei verwandte Punkte auf projicirenden Strahlen liegen, welche sämmtlich durch $\mathbf{S}_1$ gehen. Einer Strecke $\mathbf{a}_1\,\mathbf{b}_1$ entspricht im anderen Systeme die parallele und gleiche Strecke $\mathbf{a}'_1\,\mathbf{b}'_1$. Fig. 35

Diese beiden Gebilde, obwohl in einander liegend, müssen wir doch als perspectivisch ähnliche und centrische Gebilde, deren Centrum $\mathbf{S}_1$ ist, auffassen, nur muss hier jeder Punkt zweimal gedacht werden. Nehmen wir z. B. den Punkt $\mathbf{b}_1$ im Systeme der Basis, so erhalten wir auf dem projicirenden Strahle $b_1 S_1$ den verwandten Punkt b'_1 in dem System des Schnittpolygons. Wir können aber den ersteren Punkt ebenso gut dem System des Schnittes zuweisen und etwa mit d'_1 bezeichnen, und finden in dem projicirenden Strahle $d'_1 S_1$ denselben Punkt wie früher, nur gehört er diesmal dem Systeme der Basis an, und wird daher mit d_1 bezeichnet. An diesem Beispiele ist das doppelte Entsprechen eines verwandten Punktpaares augenfällig, und es ist auch klar, dass diese Eigenschaft allen anderen einander entsprechenden Punkten zukommt. Solche Gebilde, deren verwandte Punkte einander doppelt entsprechen, sollen ivolutorische Gebilde heissen. S_1 wird das Centrum der Involution genannt, und von hier aus erscheinen die Punkte der in einander liegenden Gebilde involutorisch gepaart. Dass auch die zuvor betrachteten centrischen Gebilde $a_2 b_2 c_2$ und $a'_2 b'_2 c'_2$ in Figur 34 involutorisch liegen, werden wir leicht einsehen. Es entspricht beispielsweise dem Punkte a_2 im Systeme der Basis der Punkt a'_2 im Systeme des Schnittes. Weisen wir den ersteren Punkt dem Systeme des Schnittes zu, bezeichnen ihn allenfalls mit n'_2 und suchen nach den Gesetzen der perspectivischen Ähnlichkeit seinen verwandten Punkt im Systeme der Basis, so finden wir denselben Punkt wie früher, nur muss er diesmal mit n_2 bezeichnet und als dem System der Basis gehörig betrachtet werden.

Dass dieselben Ergebnisse, welche wir bezüglich der parallelen Schnitte bei Pyramidenflächen gefunden haben, auch für Kegelflächen gelten, könnten wir schon aus dem Umstande schliessen, dass wir jede Curve als ein Polygon von sehr vielen Seiten ansehen, und mithin auch die Kegelfläche als einen Grenzfall der Pyramidenfläche betrachten können. Wir wollen aber in Fig. 36 diesen Fall wegen seiner Wichtigkeit selbständig behandeln.

In der ersten Bildebene sei ein Kreis als Leitlinie einer Kegelfläche, deren Scheitel S ist, gegeben; man soll den Schnitt dieser Fläche mit der zur Basisebene parallelen Ebene U construiren.

Nehmen wir einen beliebigen Flächenstrahl $a\,S$, suchen seinen Schnitt ($a'_1\, a'_2$) mit U, so erhalten wir einen Punkt des Schnittes. Legt man in dem Strahle $a\,S$ die Berührungsebene V an die Fläche, so muss ihr zu V_1 paralleler Schnitt mit U eine Flächentangente und a' ihr Berührungspunkt sein. Diese Gerade p ist auch eine Tangente der gesuchten Curve, mithin p'_1 auch eine Tangente ihres ersten Bildes. Beziehen wir nun das erste Bild der Leitlinie und des Schnittes auf einander, so finden wir, dass jedem Punkte a_1 des einen Gebildes ein ganz bestimmter Punkt a'_1 in dem anderen entspricht, und diese verwandten Punkte liegen auf Strahlen, welche sich in S_1 schneiden. Ziehen wir in a_1 die Tangente p_1 an die Leitlinie, so entspricht ihr in dem anderen System wieder eine Paralleltangente, deren Berührungspunkt der zu a_1 verwandte Punkt a_1 ist.

Es entspricht also jedem Curvenelemente des einen Gebildes ein paralleles Element in dem anderen, und die von den auf einander folgenden Tangenten gebildeten Winkel sind in beiden Systemen der Ordnung nach gleich. Hiemit haben wir die perspectivische Ähnlichkeit auch für diesen Fall dargethan und können nun allgemein den Satz aussprechen:

Die orthogonalen Projectionen der Schnitte centraler Strahlenflächen mit parallelen Ebenen sind perspectivisch ähnliche Gebilde.

Von dieser Eigenschaft können wir in manchen Fällen eine practische Anwendung machen. Es sei z. B. in Fig. 37 eine beliebige Curve als Leitlinie einer Kegelfläche von der Spitze **S** gegeben; man construire den Schnitt dieser Fläche mit der zur Basisebene parallelen Ebene **V**. Fig. 37

Von einem beliebigen Strahle **n S** suchen wir auf gewöhnliche Art den Schnitt n'_1, n'_2 mit **V** und können nun die Projection der Schnittlinie ohne Rücksicht auf den stereometrischen Zusammenhang construiren. Wir ziehen z. B. durch n_2 die Strahlen $n_2\ a_2$, $n_2\ b_2$, $n_2\ c_2$,.... und hiezu durch n'_2 Parallele. Auf diesen und in den Strahlen $a_2\ S_2$, $b_2\ S_2$, $c_2\ S_2$,.... liegen die verwandten Punkte a'_2, b'_2, c'_2, ... Construiren wir in a_2, b_2, ... die Tangenten p_2, q_2, ... an das zweite Bild der Leitlinie und hiezu die Parallelen durch a'_2, b'_2, ..., so sind dies die entsprechenden Tangenten an das Bild der Schnittcurve, welches nun leicht und sicher gezeichnet werden kann.

Ebene und zur Basis geneigte Schnitte der Parallelstrahlenflächen.

Es sei Fig. 38 das in der ersten Bildebene liegende Viereck **a b c d** die Leitlinie einer Prismenfläche, deren geradlinige Erzeugende einer gegebenen Richtung parallel sind; man soll den Schnitt dieser Fläche mit der doppelt geneigten Ebene **U** construiren. Fig. 38

Bringen wir die Kante **a** mit **U** zum Schnitt, so erhalten wir a'_1, a'_2, die Bilder eines dem Schnittpolygon gehörigen Punktes **a'**. Die Kanten **a** und **d** bestimmen eine Ebene, deren Schnitt mit **U** wir nun suchen wollen. $\overline{a_1\ d_1}$ bis zum Schnitt mit $\overline{U_1}$ verlängert giebt den Punkt α_1, welcher mit **a'** die Schnittgerade bestimmt. Hievon wollen wir die auf der Seitenfläche **a d** liegende Strecke besonders hervorheben und ihren Schnitt auf der Kante **d** mit **d'** bezeichnen. Auf dieselbe Art können wir auch die übrigen Seiten und Ecken des Schnittpolygons erhalten. Beziehen wir nun das erste Bild der Leit- und der Schnittlinie projectivisch auf einander, so finden wir, dass Punkten und Geraden eines Gebildes wieder Punkte und Gerade in dem anderen entsprechen. Die verwandten Punkte liegen auf parallelen Strahlen (den Bildern der Flächenstrahlen), und je zwei verwandte Gerade begegnen sich in einem Punkte einer fixen Geraden (dem Schnitte von **U** mit der Basisebene), welche wir gemeinhin als die Begegnungsgerade bezeichnen wollen. Da parallelen Ebenen parallele Schnitte und diesen wieder parallele Bilder entsprechen, so müssen parallelen Geraden in einem Systeme wieder parallele Gerade in dem anderen Systeme entsprechen.

Geometrische Gebilde, welche durch die eben aufgezählten Eigenschaften der Lage sich auszeichnen, heissen perspectivisch affine Gebilde, und der Grad ihrer projectivischen Verwandtschaft wird perspectivische Affinität genannt.

Wenn wir einen beliebigen Punkt in der Zeichnungsfläche annehmen, so können wir denselben dem Systeme der Basis oder des Schnittes zuweisen und suchen seinen verwandten Punkt in dem anderen Systeme nach den Gesetzen der perspectivischen Affinität, unbekümmert um jeden stereometrischen Zusammenhang. In Fig. 38 wurde A_1 beliebig angenommen und dem Systeme der Basis zugewiesen; der verwandte Punkt A'_1 soll gesucht werden. Zu diesem Behufe ziehen wir eine beliebige, dem System der Basis gehörige Gerade durch A_1, z. B. die Gerade $d_1 A_1$, und bezeichnen ihren Schnitt auf der Begegnungsgeraden mit η. Auf der Verwandten Geraden $\eta\, d'_1$ und im projicirenden Strahle liegt A'_1.

Ist in perspectivisch affinen Systemen eine Gerade parallel zur Begegnungsgeraden, so muss auch ihre verwandte Gerade im anderen Systeme der Begegnungsgeraden parallel sein, weil beide denselben unendlich fernen Punkt gemein haben.

Legen wir das Schnittpolygon $a'\, b'\, c'\, d'$ um $\overline{U_1}$ in die erste Bildebene um, so erhalten wir $a_0\, b_0\, c_0\, d_0$, die wahre Grösse desselben. Einen Punkt der Umlegung, etwa a_0, suchen wir wie gewöhnlich; die übrigen ergeben sich in den Spuren der Drehungsebenen ohneweiters, wenn wir die in $\overline{U_1}$ liegenden Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, welche bei der Drehung unverändert bleiben, benützen. Bei einiger Aufmerksamkeit bemerken wir sogleich, dass das erste Bild des Schnittes und die Umlegung $a_0\, b_0\, c_0\, d_0$ ebenfalls perspectivisch affine Gebilde sind; $\overline{U_1}$ ist ihre Begegnungsgerade, und die Richtung des parallel projicirenden Strahles steht senkrecht auf $\overline{U_1}$.

Beziehen wir die Umlegung $a_0\, b_0\, c_0\, d_0$ projectivisch auf die Leitlinie $a_1\, b_1\, c_1\, d_1$, so finden wir, dass Punkten und Geraden in einem Systeme wieder Punkte und Gerade in dem anderen entsprechen, und dass je zwei verwandte Gerade sich in demselben Punkte von $\overline{U_1}$ begegnen. Zeigen wir noch, dass je zwei verwandte Punkte in parallel projicirenden Strahlen liegen, dann müssen wir auch diese Gebilde als perspectivisch affin bezeichnen.

Denken wir uns durch die Raumpunkte $a', b', c' \ldots$ die Strahlen $p, q, r, \ldots$ gezogen, welche, in den Drehungsebenen dieser Punkte liegend, mit der Ebene U und mit der ersten Bildebene gleiche Winkel einschliessen, so geben ihre ersten Spurpunkte $a_0, b_0, c_0 \ldots$ Die Kanten der Punkte $a', b', c', \ldots$ bestimmen mit den Strahlen $p, q, r, \ldots$ parallele Ebenen, welche in der Basisebene die parallelen Schnitte $a_1\, a_0$, $b_1\, b_0$, $c_1\, c_0$, erzeugen, und von diesen Strahlen war eben zu zeigen, dass sie parallel seien.

Diese projectivische Verwandschaft der Umlegung des Schnittes zu der Leitlinie können wir zur directen Bestimmung der wahren Grösse benützen. Zu diesem Behufe bringen wir eine Kante mit U zum Schnitt und legen diesen Punkt um; die anderen Punkte der Umlegung finden wir nach den Gesetzen der perspectivischen Affinität.

Betrachten wir noch die orthogonalen zugeordneten Bilder des Schnittes $a'_1\, b'_1\, c'_1\, d'_1$ und $a'_2\, b'_2\, c'_2\, d'_2$, so finden wir, dass jedem Punkte des einen Gebildes wieder ein bestimmter Punkt in dem anderen entspricht, und je zwei einander entsprechende Punkte liegen auf parallel projicirenden Strahlen, nämlich auf den Ordinalen; ebenso entsprechen parallelen Geraden in einem System wieder parallele Gerade in dem anderen. Wenn wir noch beweisen, dass diese beiden Systeme von einer Begegnungsgeraden beherscht werden, so können wir sagen, dass die orthogonalen zugeordneten Projectionen ebener Raumgebilde perspectivisch affine Figuren sind. Die Existenz dieser Geraden wollen wir stereometrisch auf folgende Art erweisen:

Denken wir uns einen Punkt im zweiten Raume, also ober der ersten und hinter der zweiten Bildebene, welcher von beiden Bildebenen gleich weit absteht, so wissen wir, dass die orthogonalen Bilder desselben nach der Vereinigung der Bildebenen sich decken. Dieselbe Eigenthümlichkeit zeigen die Bilder jedes im 4ten Raume liegenden Punktes, welcher von beiden Bildebenen gleich weit absteht. Die Gesammtheit aller dieser Punkte bildet eine Ebene **M**, welche durch die Axe geht und unter 45° zu beiden Bildebenen geneigt ist. Jede Ebene im Raume schneidet **M** nach einer Geraden, deren orthogonale Bilder nach der Vereinigung der Bildebenen sich decken. Wir sehen also, dass es in jeder Ebene eine und einzige Gerade von der Eigenschaft giebt, dass ihre orthogonalen Projectionen nach der Vereinigung der Bildebenen zusammenfallen.

Die Schnittgerade π von **U** (Fig. 38) mit **M** muss durch den Axenpunkt der Ebene **U** gehen. Einen zweiten Punkt **m** dieser Geraden finden wir, wenn wir in **U** etwa die Einserspurparallele $a'n$ annehmen und ihre Bilder $a'_1\,n_1$ und $a'_2\,n_2$ so weit verlängern, bis sie sich in dem Punkte **m** schneiden. Die Geraden $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$ und $d'a'$ liegen in der Ebene **U**, folglich müssen sie bei hinreichender Verlängerung auch π in den Punkten 1, 2, 3, 4 schneiden, deren Bilder nach der Vereinigung der Bildebenen sich ebenfalls decken müssen. $a'_1\,b'_1\,c'_1\,d'_1$ und $a'_2\,b'_2\,c'_2\,d'_2$ sind demnach perspectivisch affine Gebilde und die Gerade π ihre Begegnungsgerade.

Ist eine Ebene **V** zu **M** parallel, so sind die orthogonalen zugeordneten Bilder der in **V** liegenden Figuren perspectivisch congruent; warum?

Den Schnitt eines Kreiscylinders mit einer doppelt geneigten Ebene zu construiren.

In Fig. 39 wurde in der ersten Bildebene ein Kreis als Leitlinie einer Cylinderfläche deren Strahlen zur zweiten Bildebene parallel sind, angenommen; es soll der Schnitt dieser Fläche mit der doppelt geneigten Ebene **U** gesucht werden. Fig. 39

Nachdem wir jede Curve als ein Polygon auffassen können, dessen Seiten mit den Elementen der Curve zusammenfallen, so kann auch die Cylinderfläche als ein Grenzfall der Prismenfläche betrachtet werden. Hieraus ziehen wir den Schluss, dass alle in dem vorigen Beispiele an der Prismenfläche erkannten projectivischen Beziehungen auch bei der Cylinderfläche im vollen Umfange giltig sind. Die Bilder der Schnittlinie werden mit den Bildern der Basis perspectivisch affin sein und müssen punktweise bestimmt werden. Zu diesem Behufe legen wir durch einen Flächenstrahl **a** eine Ebene **L**, welche der Einfachheit halber so gewählt wurde, dass $\overline{L_1}$ zu $\overline{U_1}$ parallel ist. $\overline{L_1}$ hat mit der Leitlinie noch den Punkt $\mathbf{b}_1$ gemein, folglich schneidet die Scheitelebene $\mathbf{L}$ die Cylinderfläche auch nach der geradlinigen Erzeugenden $\mathbf{b}$. $\mathbf{L}$ schneidet $\mathbf{U}$ nach der zu $\mathbf{U}_1$ parallelen Geraden $\mathbf{l}$, welche die Strahlen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ in $\mathbf{a}'$ und $\mathbf{b}'$ trifft. Diese sind zwei Punkte der Schnittcurve und $\overline{\mathbf{a}'\,\mathbf{b}'}$ eine Sehne derselben. Legen wir parallel zu $\mathbf{L}$ die Ebene $\mathbf{M}$, welche mit der Strahlenfläche die Erzeugenden $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ gemein hat, suchen ihren Schnitt $\mathbf{m}$ mit $\mathbf{U}$, so erhalten wir in den Strahlen $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ abermals $\mathbf{c}'$ und $\mathbf{d}'$ als zwei Punkte der Schnittlinie, und $\overline{\mathbf{c}'\,\mathbf{d}'}$ wird eine zu $\overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}$ parallele Sehne sein. Auf diese Art können wir eine Schaar paralleler Sehnen der gesuchten Curve construiren. Die Tangentialebenen $\mathbf{N}$ und $\mathbf{P}$, welche parallel zu $\mathbf{L}$ an die Cylinderfläche möglich sind, berühren diese in den Strahlen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, schneiden $\mathbf{U}$ nach den Spurparallelen $\mathbf{n}$, $\mathbf{p}$, welche Tangenten an die Schnittcurve sind und $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$ zu Berührungspunkten haben. Die Flächenstrahlen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ bestimmen eine Ebene $\mathbf{V}$, welche $\mathbf{U}$ nach der Geraden $\mathbf{A}'\,\mathbf{B}'$ schneidet. $\overline{\mathbf{A}_1\,\mathbf{B}_1}$ halbirt die parallelen Sehnen $\overline{\mathbf{a}_1\,\mathbf{b}_1}$, $\overline{\mathbf{c}_1\,\mathbf{d}_1}, \ldots$; dieses Theilungsverhältnis geht durch Parallelprojection auch auf die Sehnen $\mathbf{a}'\,\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'\,\mathbf{d}', \ldots$ unverändert über, und $\mathbf{A}'\,\mathbf{B}'$ ist als der geometrische Ort der Halbirungspunkte dieses Systemes paralleler Sehnen ein Diameter der gesuchten Curve. Eine Gerade kann die Leitlinie unseres Cylinders höchstens in zwei Punkten treffen, folglich kann auch die Schnittlinie höchstens zwei Punkte mit einer Geraden gemein haben. Die Ebene $\mathbf{U}$ schneidet alle Strahlen des Cylinders, folglich muss sie auch einen geschlossenen Schnitt erzeugen. Diese Merkmale zusammen gehalten, führen uns zu dem Schlusse, dass die Ebene $\mathbf{U}$ den Cylinder nach einer Ellipse schneide, und weil die vorerwähnten Eigenschaften auf die Bilder unverändert übergehen, so erkennen wir gleichzeitig, dass die Bilder dieser Ellipse im Allgemeinen wieder Ellipsen sind.

Nachdem $\overline{\mathbf{A}'\,\mathbf{B}'}$ ein Diameter ist, so muss dessen Halbirungspunkt $\mathbf{o}'$ der Mittelpunkt der Ellipse sein. Legen wir hiedurch die zu $\mathbf{L}$ parallele Ebene $\mathbf{Q}$, welche den Cylinder nach den Strahlen $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ schneidet, suchen ihren Schnitt $\mathbf{q}$ mit $\mathbf{U}$, so erhalten wir den zu $\mathbf{A}'\,\mathbf{B}'$ conjugirten Diameter $\mathbf{C}'\,\mathbf{D}'$. Wollten wir in einem Punkte des Bildes, z. B. in $\mathbf{C}'$, die Tangente an die Ellipse construiren, so beziehen wir diese als perspectivisch affines Gebilde auf die Leitlinie und ziehen in dem verwandten Punkte $\mathbf{C}_1$ an den Kreis die Tangente, welche die Begegnungsgerade $\overline{\mathbf{U}_1}$ in ξ_1 trifft; $\overline{\xi_1\,\mathbf{C}'_1}$ giebt sofort die verlangte Tangente an die Ellipse.

Legen wir parallel zu $\mathbf{V}$ die Ebenen $\mathbf{W}$, $\mathbf{Z}, \ldots$, so schneiden diese den Cylinder nach Erzeugenden und die Ebene $\mathbf{U}$ nach Geraden, welche zu $\mathbf{A}'\,\mathbf{B}'$ parallel sind, und im Schnitte beider erhalten wir Punkte der Schnittcurve. Diese Ebenen können daher auch mit Vortheil bei der Construction benützt werden.

Jede Ebene, welche nicht durch den Scheitel der Strahlenfläche geht, können wir als Basisebene wählen, und können daher, die durch Scheitelebenen erzeugten Schnitte ausschliessend, mit Rücksicht auf die vorigen Untersuchungen folgenden Satz aussprechen:

Die orthogonalen Projectionen nicht paralleler ebener Schnitte der Parallelstrahlenflächen sind perspectivisch affine Gebilde.

Anwendungen der perspectivischen Affinität.

Nachdem wir nun wissen, dass ein Kreiscylinder von einer geneigten Ebene nach einer Ellipse geschnitten wird, und dass auch die orthogonale Projection dieses Schnittes auf der Basisebene wieder eine Ellipse ist, welche zu der Leitlinie perspectivisch affin ist, so wollen wir zeigen, wie diese Erkenntnis wichtigen geometrischen Constructionen dienstbar werden kann.

In Fig. 40 wurde in der ersten Bildebene ein Kreis als Leitlinie einer Cylinderfläche angenommen, deren Erzeugende geneigt zur ersten und parallel zur zweiten Bildebene sind; es ist der Schnitt dieser Fläche mit der für die zweite Bildebene projicirenden Ebene **U** zu suchen, welche so angenommen wurde, dass ihre erste Spur durch den Mittelpunkt des Kreises geht. Fig. 40

In der zweiten Bildebene projicirt sich der Schnitt in $\overset{\circ}{\mathbf{U}}_2$, und das zugeordnete Bild kann daher leicht construirt werden. Auf der Leitlinie ein beliebiger Punkt $\mathbf{a}_1$ angenommen, den entsprechenden Flächenstrahl **q** gezogen und mit **U** zum Schnitt gebracht. In $\overset{\circ}{\mathbf{U}}_2$ notiren wir unmittelbar $\mathbf{a}'_2$ und in der Ordinale auf $\mathbf{q}_1$ das zugeordnete Bild $\mathbf{a}'_1$ dieses Schnittpunktes, in welchem die Tangente an die Ellipse auch sofort gezeichnet werden kann. Wir ziehen in $\mathbf{a}_1$ die Tangente an den Kreis, verbinden ihren Begegnungspunkt γ mit $\mathbf{a}'_1$ und erhalten $\mathbf{t}'_1$, die Tangente an das erste Bild der Ellipse. Ebenso können andere Punkte gefunden und in der Art aufgefasst werden, als wären sie durch das Projiciren aus den entsprechenden Elementen der Leitlinie abgeleitet. Hiedurch erscheint die Ellipse auf den Kreis als perspectivisch affines Gebilde bezogen, $\mathbf{U}_1$ als die Begegnungsgerade β, und je zwei Punkte, welche demselben projectivischen Gange entsprechen, wie z. B. $\mathbf{a}'$ und $\mathbf{a}'_1$ als verwandte Punkte. Der Kreisdurchmesser **A B** ist beiden Gebilden gemein, und weil den Punkten **A**, **B** auch parallele Tangenten in dem Systeme der Ellipse entsprechen, so ist er auch ein Durchmesser der Ellipse und sein Halbirungspunkt $\mathbf{o}_1$ der Mittelpunkt derselben.

Ziehen wir durch die Endpunkte des zu $\overline{\mathbf{A\,B}}$ conjugirten Kreisdurchmessers die Flächenstrahlen des Cylinders, suchen ihre Schnitte mit **U** und bezeichnen ihre ersten Bilder mit $\mathbf{C}'_1$ und $\mathbf{D}'_1$, so sind dies die Endpunkte einer Sehne der Ellipse, welche durch deren Mittelpunkt geht und zu $\overline{\mathbf{A\,B}}$ conjugirt ist. **A B** und $\mathbf{C}'_1$ $\mathbf{D}'_1$ sind somit ein Paar conjugirter Durchmesser der Ellipse, und weil sie auf einander senkrecht stehen, so sind sie noch überdies die Axen derselben. Der Tangente $\mathbf{p}_1$ im Punkte $\mathbf{C}_1$ des Kreises entspricht im anderen Systeme die parallele Gerade $\mathbf{p}'_1$, welche die Ellipse in $\mathbf{C}'_1$ berührt; denn der Begegnungspunkt beider liegt in unendlicher Ferne.

Im Hinblicke auf die zweite Bildebene (Fig. 40) kann unmittelbar der Satz, dass die Sehnen des Kreises zu den entsprechenden Sehnen der Ellipse im constanten Verhältnisse stehen, ausgesprochen werden.

Als ein ganz besonderes Ergebnis des in Fig. 40 behandelten Falles wollen wir uns merken, dass eine durch ihre Axen gegebene Ellipse stets als perspectivisch affines Bild eines Kreises angesehen werden kann, welcher mit der Ellipse denselben Mittelpunkt hat und über einer Axe derselben beschrieben wird. Die weitere Zuordnung ist aus Figur 40 ersichtlich. Das folgende Beispiel soll uns zeigen, wie diese projectivische Verwandschaft bei der Behandlung praktischer Aufgaben verwendet werden kann.

Fig. 41 *Es soll* (Fig. 41) *der Schnitt der Geraden* **p** *mit einer durch ihre Axen* **A B** *und* **C D** *bestimmten Ellipse gesucht werden, ohne den Umfang derselben zu benützen.*

Wir betrachten diese Ellipse sammt der Geraden **p** als das Gebilde des einen, und den über **A B** als Durchmesser beschriebenen Kreis als das perspectivisch affine Gebilde des zweiten Systems. **A B** bestimmt die Begegnungsgerade β, und der zweiten Axe **C D** entspricht der zu **A B** senkrechte Kreisdurchmesser **C′ D′** in der Art, dass **C** und **C′** als verwandte Punkte einander zugewiesen werden. Hiedurch ist die projectivische Beziehung beider Gebilde vollkommen bestimmt, und es entspricht unter anderem der durch **C** parallel zu β gezogenen Geraden **l** im System der Ellipse die parallele Gerade **l′**, welche in **C′** den Kreis berührt und seinem Systeme angehört. **p** schneidet **l** in dem Punkte **n**, dessen verwandter Punkt **n′** in dem projicirenden Strahle und in **l′** liegt. Da verwandte Gerade durch verwandte Punkte gehen, so ist durch **n′** und den Begegnungspunkt α die zu **p** verwandte Gerade **p′** bestimmt. Sie schneidet den Kreis in den Punkten **a′** und **b′**, deren verwandte Punkte, in den projicirenden Strahlen und in **p** liegend, sofort die gesuchten Schnittpunkte **a** und **b** geben.

Fig. 42 In Fig. 42 wurde in der ersten Bildebene ein Kreis als Leitlinie einer Cylinderfläche, deren Strahlen zu beiden Bildebenen geneigt sind, angenommen; es soll der Schnitt dieser Fläche mit einer zur zweiten Bildebene senkrechten Ebene **U**, deren erste Spur durch den Mittelpunkt des Kreises geht, gesucht werden.

Ziehen wir einen beliebigen Flächenstrahl **a**, so können wir sofort in $\overset{\circ}{\mathbf{U}}_2$ das zweite Bild $\mathbf{a}'_2$ seines Schnittes mit **U** notiren; $\mathbf{a}'_1$ liegt zugeordnet und auf dem ersten Bilde des Strahles. Denselben Schnittpunkt hätten wir auch in folgender Weise finden können: Wir legen durch **a** jene Scheitelebene **W**, deren erste Spur zur Bildaxe parallel ist; suchen sodann den Schnitt α **a′** von **U** mit **W**, und wo dieser den Strahl **a** schneidet, dort ist ebenfalls **a′**. Die parallel zu **W**, aber sonst beliebig gelegte Ebene **Z** hat mit dem Cylinder den Strahl $\mathbf{c}_1$ gemein, schneidet **U** nach einer Geraden, welche durch den Schnitt γ der ersten Spuren und parallel zu α **a′** geht. Im Schnitte beider erhalten wir **c′**, einen zweiten Punkt der Schnittcurve. Weil parallelen Geraden parallele Bilder entsprechen, so kann die Construction des ersten Bildes der Schnittlinie sehr praktisch vorgenommen werden, indem wir parallel zu **W** noch beliebige andere Ebenen legen und sodann durch einfache Construction von parallelen Geraden sofort Punkte des ersten Bildes der Curve finden. Durch den Mittelpunkt o_1 des Kreises legen wir auch eine dieser parallelen Ebenen **V**, welche den Kreis nach dem Durchmesser C'_1 D_1, den Cylinder nach den Flächenstrahlen **p**, **q** und die Ebene **U** nach der durch o' gehenden Geraden **C' D'** schneidet.

Die perspectivische Zuordnung des ersten Bildes der Schnittcurve zu der Leitlinie ist nun durch diese Construction recht augenfällig. Jedem Punkte der Ellipse entspricht ein bestimmter Punkt im Kreise und je zwei zugeordnete Punkte liegen auf parallel projicirenden Strahlen, nämlich den ersten Bildern der Flächenstrahlen. Parallelen Sehnen im Kreise entsprechen wieder parallele Sehnen in der Ellipse. $\overline{AB}$ ist ein Durchmesser beider Gebilde und der Halbirungspunkt o_1 ihr gemeinsamer Mittelpunkt. C'_1 D'_1 ist der zu **A B** conjugirte Diameter der Ellipse, welchem im Systeme des Kreises ebenfalls der zu **A B** conjugirte Kreisdurchmesser C_1 D_1 entspricht.

Wir können daher auch umgekehrt eine durch ein Paar conjugirter Diameter bestimmte Ellipse als das perspectivisch affine Bild eines Kreises, welcher über einem der Diameter als Durchmesser beschrieben wurde, ansehen; dieser Diameter entspricht sich selbst und der andere dem conjugirten Durchmesser im Kreise. Die folgenden Beispiele sollen eine Anwendung hievon zeigen.

Von einem ausserhalb liegenden Punkte **P** (Fig. 43) *an eine durch zwei conjugirte Diameter* **A B** *und* **C D** *bestimmte Ellipse die möglichen Tangenten zu ziehen und deren Berührungspunkte zu ermitteln.* Fig. 43

Den über **A B** als Durchmesser beschriebenen Kreis betrachten wir als das perspectivisch affine Bild der gegebenen Ellipse, ziehen den Kreisdurchmesser $\overline{C' D'} \perp \overline{AB}$ und ordnen **C** und **C'** als verwandte Punkte einander zu, wodurch auch die Richtung der parallel projicirenden Strahlen bestimmt ist. Nun suchen wir den zu **P** verwandten Punkt **P'** im Systeme des Kreises, ziehen von da die Tangenten an den Kreis, deren verwandte Gerade im anderen Systeme die gesuchten Tangenten und die zu **R'**, **S'** verwandten Punkte deren Berührungspunkte **R** und **S** geben.

Parallel zu der Geraden **l** (Fig. 44) *an eine durch zwei conjugirte Diameter* **A B** *und* **C D** *bestimmte Ellipse die möglichen Tangenten zu ziehen und ihre Berührungspunkte zu ermitteln.* Fig. 44

Wir beziehen die Ellipse auf den über **A B** als Durchmesser beschriebenen Kreis und treffen die Zuordnung wie zuvor. Zu **l** suchen wir im Systeme des Kreises die verwandte Gerade **l'** und ziehen parallel hiezu die Gerade **p'**, welche den Kreis in dem Punkte **P'** berührt und in γ die Begegnungsgerade schneidet. Die verwandte Gerade im Systeme der Ellipse geht durch γ parallel zu **l** und giebt sofort eine der gesuchten Tangenten **p**, deren Berührungspunkt **P** auf dem parallel projicirenden Strahle **P' P** liegt. Die andere Tangente finden wir eben so, oder wir erinnern uns, dass die Berührungspunkte paralleler Tangenten einen Diameter der Ellipse bestimmen, ziehen die Gerade **P** o_1

machen **o R** = **o P** und erhalten **R**, den Berührungspunkt der zweiten Paralleltangente **r**.

Fig. 45 *Die Axen einer durch zwei conjugirte Diameter* **A B** *und* **C D** (Fig. 45.) *gegebenen Ellipse zu construiren.*

Wir beziehen wie in den vorigen Beispielen die Ellipse als perspectivisch affines Bild auf den über **A B** als Durchmesser beschriebenen Kreis. Jedem Paare conjugirter Diameter des Kreises entspricht im anderen Systeme wieder ein Paar conjugirter Diameter der Ellipse, weil in beiden Systemen jeder Durchmesser die Sehnen, welche parallel zu dem anderen gezogen werden, halbirt. Im Kreise stehen alle conjugirten Durchmesser senkrecht auf einander, in der Ellipse giebt es hingegen nur ein einziges Paar conjugirter Diameter, nämlich die Axen, welche dieselbe Eigenschaft zeigen. Wir haben somit in dem Systeme des Kreises dasjenige Paar conjugirter Durchmesser zu suchen, welches sich im zweiten Systeme wieder rechtwinklig projicirt. Da aber parallelen Geraden eines Systemes wieder parallele Gerade in dem anderen entsprechen, so reducirt sich die vorgelegte Aufgabe auf die folgende: In dem Systeme des Kreises einen rechten Winkel so zu construiren, dass ihm im zweiten Systeme wieder ein rechter Winkel entspricht. Errichten wir im Halbirungspunkte der Strecke **C C′** eine Normale, so wird ihr Schnitt ω mit der Begegnungsgeraden der Mittelpunkt eines Kreises sein, welcher durch die Punkte **C**, **C** geht und die Begegnungsgerade in **m** und **n** schneidet. Dem Winkel **m C′ n** im Systeme des Kreises entspricht offenbar im Systeme der Ellipse der Winkel **m C n**, und beide sind als Winkel im Halbkreise rechte Winkel. Ziehen wir durch **o** Parallele zu **m C′** und **n C′**, so erhalten wir in **a′ b′** und **c′ d′** jenes Paar conjugirter Kreisdurchmesser, deren verwandte im anderen System zu **m C** und **n C** parallel sind und folglich die Axen liefern. Suchen wir zu **a′**, **b′**, **c′** und **d′**, die verwandten Punkte, so bestimmen diese **a b** und **c d** als die grosse und die kleine Axe der gegebenen Ellipse.

Es wird nicht schwer fallen, mit Rücksicht auf die vorigen Aufgaben die folgende selbständig zu lösen:

„An eine durch zwei conjugirte Diameter gegebene Ellipse Tangenten zu ziehen, welche mit der grossen Axe derselben bestimmte Winkel einschliessen.“

Zum Schlusse dieses Kapitels noch eine kleine Bemerkung über die Involution perspectivisch affiner Systeme.

Zwei perspectivisch affine Systeme sind vollkommen bestimmt, sobald das Gebilde eines Systems, die Begegnungsgerade und ein verwandtes Punktpaar gegeben sind. In Figur 46 wurde das Parallelogramm **a b c d** als das Gebilde des einen Systemes, die Begegnungsgerade β und **b′** als der zu **b** verwandte Punkt so angenommen, dass die Strecke **b b′** durch den auf der Begegnungsgeraden erzeugten Schnittpunkt α halbirt wird. Suchen wir nun nach den Gesetzen der perspectivischen Affinität das verwandte Gebilde **a′ b′ c′ d′**, so erkennen wir sofort, dass auch die parallelen Strecken $\overline{\mathbf{a\,a'}}$, $\overline{\mathbf{c\,c'}}$, $\overline{\mathbf{d\,d'}}$ durch die Begegnungsgerade halbirt werden, und wir könnten daher die affinen Gebilde **a b c d** und **a′ b′ c′ d′** eben so gut als Erzeugnisse der schiefaxigen Symmetrie auffassen. Bezeichnen wir kurzweg **a b c d** als das Gebilde des ersten und $a' b' c' d'$ als das Gebilde des zweiten Systems. Mit b' lassen wir einen Punkt m des ersten Systems zusammen fallen und suchen seinen verwandten Punkt im zweiten Systems. Zu diesem Zwecke ziehen wir $\overline{m\,c}$ als eine Gerade des ersten Systeme und notiren ihren Schnitt ω auf der Begegnungsgeraden. Durch $c' \omega$ ist die zu $m\,c$ verwandte Gerade bestimmt, welche den durch m gezogenen projicirenden Strahl notwendig in b schneidet, nur müssen wir denselben als dem zweiten Systeme angehörig betrachten und mit m' bezeichnen. Dasselbe gilt von den übrigen Punkten; wenn wir daher die beiden Parallelogramme als ein dem ersten Systeme angehöriges Gebilde $a\,b\,c\,d$, $m\,n\,o\,p$ betrachten und hiezu die perspectivisch affine Figur $a' b' c' d'$, $m' n' o' p'$ construiren, so finden wir, dass sie in der ersteren liegt, ohne mit ihr identisch zu sein; denn es liegen auch hier je zwei verwandte Punkte auf projicirenden Strahlen, welche sich in einem unendlich fernen Centrum S schneiden, und je zwei verwandte Gerade schneiden sich auf der fixen Geraden β. Wir sagen von diesen Systemen, dass sie involutorisch liegen, nennen β ihre Involutionsaxe und S das unendlich ferne Centrum ihrer involutorischen Lage.

Alle Gebilde der normalen und schiefaxigen Symmetrie sind mithin perspectivisch affine Gebilde, welche involutorisch liegen.

Ziehen wir in einer Ellipse, welche als das Gebilde des ersten Systems gegeben sei, ein Paar conjugirter Diameter $A\,B$ und $C\,D$. $\overline{A\,B}$ falle mit der Begegnungsgeraden zusammen und dem Punkte C soll im zweiten Systeme C', welcher mit D zusammenfällt, als der verwandte Punkt entsprechen. Hiedurch ist das Gebilde des zweiten Systems vollkommen bestimmt; suche es!

Ebene und zur Basis geneigte Schnitte der Centralstrahlenflächen.

Ein in der ersten Bildebene liegendes Quadrat $a\,b\,c\,d$ (Fig. 47) sei die Leitlinie einer Pyramidenfläche von der Spitze S; es soll der Schnitt dieser Fläche mit der doppelt geneigten Ebene U gesucht werden. Fig. 47

Eine einfache Auflösung gestattete diese Aufgabe, wenn die schneidende Ebene zu einer Bildebene projicirend wäre, und wir können daher den gegebenen Fall auf jenen zurück führen. Zu diesem Behufe ziehen wir ${}_1X_3$ senkrecht auf U_1, suchen $\overset{\circ}{U}_3$ und das dritte Bild der Pyramide. In der dritten Bildebene übersehen wir die Lage der Ebene U zu der Pyramidenfläche ganz deutlich. In unserem Falle hätte eine zu der schneidenden Ebene U parallele Scheitelebene nur den Scheitel mit der Strahlenfläche gemein, woraus wir andererseits den Schluss ziehen, dass U alle geradlinigen Erzeugenden der Pyramide in endlicher Ferne schneide und in Folge dessen dieser Ebene auch ein geschlossener Schnitt entsprechen müsse. In $\overset{\circ}{U}_3$ notiren wir unmittelbar a'_3, b'_3, c'_3 und d'_3 als die dritten Bilder der Eckpunkte des Schnittpolygons. Die zugeordneten ersten Bilder liegen in den Ordinalen und in den ersten Bildern der Kanten. Ergäben sich hier schiefe Schnitte, so wissen wir, dass das Theilungsverhältnis auf die Bilder unverändert übergeht, und können sohin a'_1, b'_1, c'_1 und d'_1 immer sicher bestimmen; a'_2, b'_2, ... liegen zugeordnet und in den zweiten Bildern der entsprechenden Kanten. Trifft man auch hier auf unsichere Schnitte, so mögen die wahren Grössen der Ordinaten der dritten Bildebene entnommen werden.

Für die Richtigkeit der so ausgeführten Construction haben wir nun eine vielseitige Controle. Die Seite a' d' des Schnittpolygons ist offenbar der Schnitt der Seitenebene a S d mit der Ebene U; verlängert man die Basiskante a_1 b_1 bis zu dem auf $\overline{U_1}$ gelegenen Punkte δ, so gehört dieser offenbar derselben Schnittlinie an, und müssen daher a_1 d_1 und a'_1 d'_1 bei gehöriger Verlängerung sich in δ treffen. Ebenso sind auch die Punkte α, β und γ, welche die Verlängerungen der Basiskanten a_1 b_1, c_1 d_1 und b_1 c_1 auf U_1 erzeugen, die Begegnungspunkte für a'_1 b'_1, c'_1 d'_1 und b'_1 c'_1. Von dieser Eigenschaft der Lage hätten wir übrigens gleich ursprünglich einen constructiven Gebrauch machen können, indem wir einen Punkt des Schnittes auf gewöhnliche Art suchen und die übrigen mittels der Punkte α, β, γ, δ.

Das erste Bild des Schnittes a'_1 b'_1 c'_1 d'_1 und das Basispolygon a_1 b_1 c_1 d_1 erweisen sich wieder als projectivisch verwandte Figuren. Jedem Punkte des einen Gebildes entspricht wieder ein Punkt in dem anderen, und je zwei verwandte Punkte liegen auf projicirenden Strahlen, welche sich in dem endlich liegenden Centrum S_1 schneiden. Einer Geraden entspricht im anderen Syteme wieder eine Gerade, und je zwei verwandte Gerade schneiden sich auf einer fixen Geraden, dem Schnitte von U mit der Basisebene. Den Grad projectivischer Verwandtschaft, welcher durch diese Eigenschaften der Lage gekennzeichnet ist, nennen wir die perspectivische Collineation. Bei collinearen Figuren treffen wir eine viel grössere Allgemeinheit geometrischer Verwandtschaft als in den früher betrachteten Fällen, welche als spezielle Fälle aus der perspectivischen Callineation hervorgehen. Hier entsprechen parallelen Geraden im Allgemeinen nicht parallele Gerade; auch das Theilungsverhältnis der Strecken geht hier auf die verwandten Strecken verändert über; dagegen können endlich liegende Punkte mit unendlich fernen verwandt sein, einem centralen Strahlenbüschel ein Parallelstrahlenbüschel einer Strecke des einen Systems ein Halbstrahl in dem anderen entsprechen. Auf diese Eigenschaften werden wir im folgenden näher eigehen, wollen aber zuvor noch die Umlegung des Schnittes und ihre Verwandtschaft zu den vorhandenen Gebilden betrachten.

Legen wir den Schnitt a' b' c' d' um $\overline{U_1}$ als Drehungsaxe in die erste Bildebene um. Zu diesem Zwecke werden durch a'_1, b'_1 ... die Spuren der Drehungsebenen senkrecht auf $\overline{U_1}$ gezogen, die Drehungshalbmesser etwa der dritten Bildebene in wahrer Grösse entnommen und von den Drehungsmittelpunkten auf den Spuren abgeschnitten. Hiedurch erhalten wir als wahre Grösse des Schnittes das Polygon a_0 b_0 c_0 d_0, dessen Seiten durch die auf $\overline{U_1}$ liegenden Begegnungspunkte α, β, γ, δ gehen müssen, und wir sehen auch unmittelbar ein, dass die Umlegung

$a_0\,b_0\,c_0\,d_0$ und das erste Bild des Schnittes $a'_1\,b'_1\,c'_1\,d'_1$ zwei perspectivisch affine Gebilde sind. Nachdem wir also einen Punkt in der Umlegung bestimmt haben, können die übrigen nach den Gesetzen der perspectivischen Affinität gesucht werden.

Beziehen wir die Umlegung $a_0\,b_0\,c_0\,d_0$ auf das Basispolygon $a_1\,b_1\,c_1\,d_1$, so finden wir, dass je zwei einander entsprechende Gerade sich auf $\overline{U}_1$ als Begegnungsgeraden schneiden. Gelingt es uns zu zeigen, dass auch hier je zwei verwandte Punkte auf projicirenden Strahlen liegen, die sich in einem gemeinsamen Cetrum schneiden, dann haben wir die perspectivische Collineation auch zwischen dem ersten Bilde der Basis und der Umlegung $a_0\,b_0\,c_0\,d_0$ nachgewiesen.

Der Strahl, welcher durch den Punkt a' im Raume und seine Umlegung a_0 bestimmt ist, liegt in der Drehungsebene des Punktes a und schliesst, wie aus der dritten Bildebene sofort ersichtlich, mit der Ebene U und mit der ersten Bildebene gleiche Winkel ein; wir wollen $a'\,a_0$ den congruent projicirenden Strahl von a' nennen. Ziehen wir also durch $a'_1\,b'_1\,c'_1\,d'_1$ die congruent projicirenden Strahlen, so sind diese unter einander parallel, und ihre ersten Spurpunkte geben ebenfalls a_0, b_0, c_0, d_0. Denken wir uns nun durch die Kante $a\,S$ und den Strahl $a'a_0$ eine Ebene gelegt, so ist $a_1 a_0$ die erste Spur derselben. Legen wir ebenso durch jede folgende Kante und den ihremSchnittpunkte entsprechenden congruent projicirenden Strahl Ebenen, so sind $b_1\,b_0$, $c_1\,c_0$, und $d_1\,d_0$ die ersten Spuren derselben. Alle diese Ebenen haben den Punkt S, folglich auch den Strahl p gemein, welcher durch S parallel zu den congruent projicirenden Strahlen gezogen wurde, und durch seinen ersten Spurpunkt M_1 müssen daher auch die ersten Spuren $\overline{a_1\,a_0}$, $\overline{b_1\,b_0}$, $\overline{c_1\,c_0}$ und $\overline{d_1\,d_0}$ gehen. M_1 ist also das Collineationscentrum für das erste Bild der Leitlinie und die Umlegung des Schnittes $a_0\,b_0\,c_0\,d_0$.

Diese merkwürdige Beziehung der Umlegung zu der Basis können wir zur directen Bestimmung der wahren Grösse des Schnittes benützen, ohne zuvor die Bilder zu construiren. Wir suchen die Umlegung eines Eckpunktes wie gewöhnlich, bestimmen das Collineationscentrum M_1 und finden die übrigen Punkte nach den Gesetzen der perspectivischen Collineation. Dieses Verfahren ist namentlich bei Kegelflächen von besonderem Belange und practischem Werte.

Die Mannigfaltigkeit in der Gestaltung collinearer Figuren werden uns die folgenden Beispiele, wo die schneidende Ebene zu einem oder zu zwei Flächenstrahlen parallel ist, noch besser veranschaulichen.

In Fig. 48 sei ein in der ersten Bildebene liegendes Viereck $a\,b\,c\,d$ als Leitlinie einer centralen Strahlenfläche von der Spitze S gegeben; es soll der Schnitt dieser Fläche mit einer Ebene U, welche zu einer Kante der Pyramide parallel ist, gesucht werden. Fig. 48

Legen wir durch die Kante $a\,S$, welche in der zweiten Bildebene zur Contour des Bildes gehört, eine Scheitelebene V und wählen sie der Übersichtlichkeit halber senkrecht zur zweiten Bildebene. Parallel zu V legen wir die Ebene U und suchen ihren Schnitt mit der Pyramidenfläche. In der zweiten Bildebene projicirt sich der Schnitt in $\mathring{U}_2$, und wir notiren daselbst b'_2, c'_2 und d'_2 als die zweiten

Bilder jener Punkte, in welchen die Kanten $\mathbf{b\,S}$, $\mathbf{c\,S}$ und $\mathbf{d\,S}$ die Ebene $\mathbf{U}$ schneiden. Die Kante $\mathbf{a\,S}$ ist parallel zu $\mathbf{U}$; bei unserer speziellen Annahme ist auch $a_2\,S_2$ parallel zu $\overline{U}_2$, und wir bezeichnen daher den unendlich fernen Schnitt von $a_2\,S_2$ mit $\mathring{U}_2$ durch das Symbol $a'_{2\,\infty}$. Die ersten Bilder von b', c' und d' liegen in den Ordinalen und in den entsprechenden Bildern der Kanten.

Die Punkte α und β, in welchen $\overline{U}_1$ das Basispolygon schneidet, gehören der Schnittlinie an, und weil parallelen Ebenen parallele Schnitte entsprechen, so müssen bei richtiger Zeichnung die durch $d'_1\,\alpha$ und $b'_1\,\beta$ bestimmten Geraden parallel zu $a_1\,S_1$ sein, und haben daher mit $a_1\,S_1$ den unendlich fernen Punkt gemein, welchen wir symbolisch mit $a'_{1\,\infty}$ bezeichnen wollen. Die ersten Bilder der Basis und des Schnittpolygons erkennen wir wieder als zwei perspectivisch collineare Gebilde, denen S_1 als Projectionscentrum und U_1 als Begegnungsgerade entspricht. Das collineare Bild des Viereckes $a_1\,b_1\,c_1\,d_1$ ist wieder ein Viereck, von welchem 3 Punkte endlich liegend und der vierte unendlich ferne ist. Dem Punkte a_1 entspricht $a'_{1\,\infty}$, der Strecke $d_1\,a_1$ entspricht der Halbstrahl $d'_1\,a'_{1\,\infty}$ und der Strecke $b_1\,a_1$ der Halbstrahl $b'_1\,a'_{1\,\infty}$. Dieses Beispiel zeigt uns deutlich, dass die Vorstellung, parallele Gerade hätten einen unendlich fernen Punkt gemein, eine wol begründete sei. Das Gebilde $a_1\,b_1\,c_1\,d_1\,a_1$ ist geschlossen, aber nichts hindert uns daran, auch das verwandte Gebilde $a'_{1\,\infty}\,b'_1\,c'_1\,d'_1\,a'_{1\,\infty}$ uns ebenfalls als ein geschlossenes vorzustellen, wobei wir allerdings $a'_{1\,\infty}$ als einen Eckpunkt des Polygons betrachten müssen.

Einen noch allgemeineren Fall in der Gestaltung collinearer Figuren wollen wir in dem folgenden Beispiele Fig. 49 kennen lernen. (Fig. 49) Daselbst wurde in der ersten Bildebene das Viereck $\mathbf{a\,b\,c\,d}$ als Leitlinie einer Pyramidenfläche von der Spitze $\mathbf{S}$ angenommen. Es soll der Schnitt dieser Fläche mit einer Ebene $\mathbf{U}$ gesucht werden, die wir abermals der Einfachheit wegen vertikal projicirend und noch überdies parallel zu einer Scheitelebene $\mathbf{V}$, welche die Strahlenfläche nach den Erzeugenden $\mathbf{m\,S}$ und $\mathbf{n\,S}$ schneidet, annehmen wollen.

Unter dieser Voraussetzung müssen dem Schnittpolygon zwei unendlich ferne Punkte entsprechen, weil die Strahlen $\mathbf{m\,S}$ und $\mathbf{n\,S}$ zu $\mathbf{U}$ parallel sind. In der zweiten Bildebene projicirt sich der Schnitt in $\mathring{U}_2$ und wir notiren daselbst a'_2, b'_2, c'_2 und d'_2 als die zweiten Bilder jener Punkte, in welchen die Pyramidenkanten $\mathbf{U}$ schneiden. Der Punkt a' liegt auf dem zweiten Mantel der Pyramidenfläche, welcher diesmal von der Ebene $\mathbf{U}$ auch geschnitten wird. In den Ordinalen und in den entsprechenden ersten Bildern der Kanten ergeben sich a'_1, b'_1, c'_1 und d'_1 als die ersten Bilder der Eckpunkte des Schnittpolygons. Durch $a'_1\,b'_1$ ist das erste Bild des Schnittes der Seitenfläche $\mathbf{ab\,S}$ mit $\mathbf{U}$ bestimmt, und die zweite Bildebene zeigt uns augenfällig, dass nicht die innere, sondern die äussere Strecke $a'\,b'$ dem Schnitte angehört; denn auf dieser liegt der unendlich ferne Punkt m'_∞, welcher dem zu $\mathbf{U}$ parallelen Flächenstrahle $\mathbf{m\,S}$ entspricht. Ebenso gehört die äussere Strecke $a'\,d'$ dem Schnitte an; denn sie enthält den unendlich fernen

Punkt n'_∞, welchen der zu **U** parallele Flächenstrahl **n S** erzeugt. Die durch $a'\ b'$ bestimmte Schnittlinie muss zu dem Strahle **m S** parallel sein, weil beide demselben unendlich fernen Punkte m'_∞ zugehen; ebenso ist auch die durch $a'\ d'$ bestimmte Gerade zu $\overline{nS}$ parallel.

Das erste Bild des Schnittes und der Leitlinie sind wieder zwei perspectivisch collineare Figuren über deren Verlauf und Zusammengehörigkeit wir eine klare Vorstellung bekommen, wenn wir festhalten, dass zwei verwandte Punkte stets auf einem projicirenden Strahle liegen, welcher durch S_1 geht. Durchschreitet ein Punkt die innere Strecke von a_1 durch n' und über β nach d_1, so bewegt sich der verwandte Punkt von a'_1 durch $n'_{1\,\infty}$ und über β nach d'_1. Hieraus ist gleichzeitig ersichtlich, dass die Gerade $a_1\ b_1$ nur einen unendlich fernen Punkt $m'_{1\,\infty}$ haben kann, in welchem wir uns die äussere Strecke $a'_1\ b'_1$ gerade so zusammenhängend vorstellen sollen, wie die verwandte Strecke $a_1\ b_1$ im Punkte m_1. Dem geschlossenen Polygon $a_1\ b_1\ c_1\ d_1$ entspricht im anderen Systeme das Polygon $a'_1\ b'_1\ c'_1\ d'_1$, welches scheinbar aus zwei Theilen besteht, über deren Zusammenhang wir auf folgende Art uns orientiren können: Bewegt sich ein dem Systeme der Basis entsprechender Punkt von a_1 über m_1 nach b_1, c_1, d_1 und weiter hin durch n_1, bis er wieder in a_1 mit seiner Urlage zusammenfällt, so bewegt sich sein verwandter Punkt in dem anderen Systeme von a'_1 über $m'_{1\,\infty}$ nach b'_1, c'_1, d'_1 und weiter hin durch $n'_{1\,\infty}$, bis er wieder in a'_1 mit seiner Anfangslage zusammenfällt.

Die Verschiedenartigkeit der Gestalt und Lage perspectivisch collinearer Gebilde hat ihren Grund in der Thatsache, dass unendlich fernen Punkten des einen Systems endlich liegende Punkte im anderen Systeme entsprechen können. Wir wollen uns nun mit der Frage beschäftigen, ob und wie viele solcher Punkte es in jedem Systeme giebt und welche stereometrische Bedeutung dieselben haben.

In Fig. 50 sei **S** der Scheitel einer Centralstrahlenfläche, und die vertical projicirende Ebene **U** sei eine diese Fläche schneidende Ebene. Die erste Bildebene werde als die Basisebene vorausgesetzt, und die darin liegende Leitlinie hätte eine ganz allgemeine Lage und Gestalt, welche wir uns beliebig denken und vorderhand gar nicht ersichtlich machen wollen. Es soll vielmehr festgehalten werden, dass jeder Punkt der ersten Bildebene der Leitlinie, welche kurzweg das System der Basis heissen mag, angehören kann. Die Ebene **W**, welche durch **S** parallel zu **U** geht, schneidet die erste Bildebene in einer Geraden q_1, welche offenbar zu U_1 parallel und mit W_1 identisch sein muss. Nehmen wir auf q_1 die beliebigen Punkte x_1, y_1, . . . als jene an, welche die Leitlinie unserer Strahlenfläche **S** mit **q** gemein habe, und bringen die Flächenstrahlen **S x**, **S y**, . . . mit **U** zum Schnitt, so erhalten wir die unendlich fernen Punkte x'_∞, y'_∞, . . ., deren erste Bilder $x'_{1\,\infty}$, $y'_{1\,\infty}$ auf den ersten Bildern der Strahlen und ebenfalls in unendlicher Ferne liegen. Dem Schnitte von **U** mit der Strahlenfläche **S**, so wie auch dessen Horizontalprojection werden eben so viele unendlich ferne Punkte entsprechen, als die Leitlinie Punkte mit q_1 gemein hat; denn q_1 ist jene einzige Gerade im Systeme der Basis, deren verwandtes Bild im zweiten Systeme in unendlicher Ferne liegt. Hat die Leit- **Fig. 50** linie mit q_1 keinen Punkt gemein, dann müssen alle Punkte des verwandten Gebildes endlich liegen. Wäre die Leitlinie eine Curve, welche q_1 in einem Punkte berührt, so hätte das verwandte Gebilde einen unendlich fernen Punkt, und eine unendlich ferne Tangente.

q_1 soll die Verschwindungsgerade des Systems der Basis heissen.

Die Ebene **V**, welche durch **S** parallel zur ersten Bildebene geht, schneidet **U** nach einer Geraden p', welche ebenfalls zur ersten Bildebene parallel sein muss. Denken wir uns auf p' die Punkte m', n',..., deren erste Bilder m'_1, n'_1, ... auf p'_1 liegen müssen, als diejenigen, welche die in **U** liegende Schnittlinie mit p' gemein hat, so sind die durch m' n' ... gehenden Flächenstrahlen $S m'$, $S n'$, ... zur ersten Bildebene parallel und ihre unendlich fernen Punkte $m_1 \infty$, $n_1 \infty$, ... müssen auf der Leitlinie liegen. Wir können nun bezüglich p' und p'_1 dieselben Betrachtungen, wie zuvor mit q_1, anstellen und kommen zu analogen Resultaten. p'_1 ist die Verschwindungsgerade in dem zu der Leitlinie collinear verwandten Systeme.

Bei perspectivisch collinearen Gebilden giebt es also in jedem Systeme eine, aber auch nur eine Gerade, deren verwandte Gerade im zweiten Systeme in unendlicher Ferne liegt, und die stereometrische Bedeutung derselben ist nun auch klar. Der Schnitt der parallel zu der schneidenden Ebene gelegten Scheitelebene mit der Basisebene giebt die Verschwindungsgerade im Systeme der Basis, und die Projection des Schnittes der parallel zur Basis gelegten Scheitelebene mit der schneidenden Ebene giebt die Verschwindungsgerade des andern Systems.

Bezeichnen wir den Abstand S_1 von p'_1 mit $\varDelta$ und den Abstand der Geraden q_1 von der Begegnungsgeraden mit $\varDelta'$, so kann leicht gezeigt werden, dass diese Abstände gleich sind. In der zweiten Bildebene finden wir $\overline{p'_2 S_2} = \overline{A q_2}$ als Parallelogrammseiten. — Da $\overline{p_2 S_2} = \varDelta$ und $A q_2 = \varDelta'$, so muss auch $\varDelta = \varDelta'$ sein. Da parallelen Ebenen parallele Schnitte und diesen wieder parallele Bilder entsprechen, so können wir den Satz aussprechen:

Bei perspectivisch collinearen Systemen sind die Verschwindungsgeraden zur Begegnungsgeraden parallel und haben von dieser und von dem Projectionscentrum beziehungsweise gleiche Abstände.

Diese Verschwindungsgeraden führen uns zu sehr interessanten Resultaten. Betrachten wir z. B. das in der ersten Bildebene liegende centrale Strahlenbüschel l_1, r_1, t_1, ..., dessen Scheitel a_1 auf der Verschwindungsgeraden der Basis liegt, als diesem Systeme angehörig und suchen das collinear verwandte Gebilde, so finden wir das Parallelstrahlenbüschel l'_1, r'_1, t'_1. Der stereometrische Beweis hiefür ist auch leicht erbracht. Das Strahlenbüschel l_1, r_1, t_1, ... wird von **S** aus durch ein Ebenenbüschel projicirt, dessen Ebenen durch (**l**, **S**), (**r**, **S**), (**t**, **S**), ... bestimmt sind. Der Träger oder die Axe dieses Ebenenbüschels ist die Gerade $S a_1$ und parallel zu derselben geht die schneidende Ebene **U**, folglich schneidet sie diese Ebenen nach parallelen Geraden l', r', t'..., denen auch die parallelen Bilder l'_1, r'_1, t'_1 ... entsprechen müssen.

Fig. 51 In Fig. 51 wiederholen wir unter denselben Gesichtspunkten wie früher die Figur 50, und der Scheitel **S** soll hier unter der schneidenden Ebene **U** liegen. Wir machen hier dieselben Wahrnehmungen, nur schneiden die Verschwindungsgeraden p'_1 und q_1 die innere Strecke, welche den Abstand des Centrums S_1 von der Begegnungsgeraden $\overline{U_1}$ misst. Zugleich wurde in Fig. 51 ein Parallelstrahlenbüschel r_1, t_1 ... in dem Systeme der Basis angenommen und ersichtlich gemacht, dass sein verwandtes Gebilde im anderen Systeme das Centralstrahlenbüschel r'_1, t'_1, ... ist, dessen Scheitel a'_1 auf der Verschwindungsgeraden p'_1 und im Schnitte des parallel zu r_1 gezogenen projicirenden Strahles $S_1\,a_{1\,\infty}$ liegen muss.

In Fig. 52 sei abermals in der ersten Bildebene die Leitlinie einer Centralstrahlenfläche, welche durch die vertical projicirende Ebene **U** geschnitten wird. S_1, das erste Bild des Scheitels, wählen wir beliebig, S_2 liegt zugeordnet und wird im Halbirungspunkte der auf der Ordinale liegenden Strecke **m n**, welche von der Bildaxe und $\overset{\circ}{\overline{U}}$ begrenzt wird, angenommen. Legen wir wie zuvor die Scheitelebenen **V** und **W**, suchen alsdann die Verschwindungsgeraden p'_1 und q_1, so zeigt es sich, dass beide in einer einzigen Geraden zusammenfallen, und den Beweis hiefür giebt die Figur 52 selbst. Fig. 52

Wird **S** als die Spitze und $a_1\,b_1\,c_1$ als die Leitlinie einer Pyramidenfläche, deren Schnitt mit **U** gesucht wird, angenommen, so ziehen wir die Bilder der Kanten **a S**, **b S**, **c S** und in $\overset{\circ}{\overline{U_2}}$ ergeben sich unmittelbar a'_2, b'_2, c'_2 als die zweiten Bilder der Eckpunkte des Schnittpolygons. Die ersten Bilder a_1, b_1, c_1 liegen zugeordnet. Das erste Bild des Schnittpolygons und die Basis $a_1\,b_1\,c_1$ sind zwei perspectivisch collineare Figuren, denen S_1 als Centrum und $\overline{U_1}$ als Begegnungsgerade entspricht. Mit der Figur $a'_1\,b'_1\,c'_1$ sei identisch das in der ersten Bildebene liegende Dreieck $\alpha\,\beta\,\gamma$, welches ebenfalls als Leitlinie einer Strahlenfläche von der Spitze **S** gelten soll. Bringen wir diese Fläche mit **U** zum Schnitt, so erhalten wir ein Dreieck $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$, dessen erstes Bild $\alpha'_1\,\beta'_1\,\gamma'_1$ mit der früheren Leitlinie $a_1\,b_1\,c_1$ zusammenfallen muss. Denn die zweiten Bilder je zweier Kanten, wie z. B. $a_2\,a_2$ und $\alpha_2\,\alpha'_2$, bestimmen die Diagonalen eines Viereckes $a_2\,\alpha_2\,a'_2\,\alpha'_2$, dessen Gegenseiten $a_2\,\alpha'_2$ und $\alpha_2\,a'_2$ zu **m n** parallel sein müssen. Die Figuren $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$ und $\alpha'_1\,\beta'_1\,\gamma'_1$ sind wieder zwei perspectivisch collineare Gebilde von dem Centrum S_1, und $\overline{U_1}$ ist ihre Begegnungsgerade.

Betrachten wir nun die zwei Dreiecke $a_1\,b_1\,c_1$ und $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$ als das Gebilde des einen Systems und suchen hiezu das collinear verwandte Gebilde $a'_1\,b'_1\,c'_1$ und $\alpha'_1\,\beta'_1\,\gamma'_1$, so erhalten wir dieselbe Figur. Wir erkennen diese Gebilde sofort als ein involutorisches System und können nun den Satz aussprechen:

„Wenn die Verschwindungsgeraden zweier perspectivisch collinearer Gebilde zusammenfallen, so liegen diese involutorisch.

Einen Kreiskegel nach einer Ellipse zu schneiden. In Fig. 53 wurde in der ersten Bildebene ein Kreis als Leitlinie des Kegels **S** angenommen. Es soll der Schnitt dieser Fläche mit einer vertical projicirenden Ebene **U**, deren Parallele Scheitelebene **H** mit dem Kegel nur den Scheitel **S** gemein hat, gesucht werden.

In der zweiten Bildebene projicirt sich der Schnitt in $\overset{\circ}{\overline{U}}_2$, und behufs einer übersichtlichen Darstellung des ersten Bildes ziehen wir zuvor durch **S** eine Gerade **p**, welche sowohl zu der schneidenden Ebene **U**, als auch zu der Basisebene parallel ist. Nach der vorliegenden Annahme muss **p** zu $\overline{U}_1$ parallel und mithin auch senkrecht zu der zweiten Bildebene sein. Diese Gerade betrachten wir als die Axe eines Ebenenbüschels, von welchem wir einige Ebenen, wie z. B. **V**, ersichtlich machen. $\overline{V}_1$ muss zu p_1 parallel sein und $\overset{\circ}{\overline{V}}_2$ geht durch S_2. Die Ebene **V** schneidet die Strahlenfläche nach den Erzeugenden μ **S** und ν **S** und die Ebene **U** nach einer Spurparallelen; im Schnitte beider bekommen wir μ' und ν' als zwei Punkte des Schnittes und $\overline{\mu' \nu'}$ als eine zu $\overline{U}_1$ parallele Sehne. $\overline{\mu'_1 \nu'_1}$ wird eine Sehne des ersten Bildes der Schnittlinie sein, welche ebenfalls zu $\overline{U}_1$ parallel sein muss. Geben wir der Ebene **V** andere Positionen, so erhalten wir in der Schnittlinie und im ersten Bilde ein System paralleler Sehnen. Durch **p** an die Kegelfläche die möglichen Berührungsebenen **L** und **M** gelegt und ihre Schnitte **r'** und **t'** mit **U** gesucht, so bekommen wir auf den Berührungselementen **a S** und **b S** zwei solche Punkte **a'** und **b'** des Schnittes, denen die Paralleltangenten **r'** und **t'** entsprechen. Die Gerade **a' b'** halbirt alle parallelen Sehnen μ ν, also können wir auch umgekehrt sagen, dass der geometrische Ort paralleler Sehnen in der gesuchten Schnittlinie eine Gerade, nämlich ein Diameter sei. Eine Gerade schneidet höchstens in zwei Punkten die Schnittlinie, deren Punkte sämmtlich endlich liegend sind. Aus diesen Merkmalen, welche auf die Bilder unverändert übergehen, ziehen wir den Schluss, dass der Schnitt von **U** mit der Kegelfläche eine Ellipse sei, welche sich in der 2ten Bildebene in $\overset{\circ}{\overline{U}}_2$ und in der ersten wieder als eine Ellipse projicirt.

Der Punkt ω, welcher den Diameter **a' b'** halbirt, giebt den Mittelpunkt der Ellipse und ω_1 den Mittelpunkt ihres ersten Bildes. Legen wir nun durch **p** und ω die Scheitelebene **K**, was leicht geschehen kann, da $\overset{\circ}{\overline{K}}_2$ durch S_2 und ω_2 bestimmt ist; bringen sodann die Strahlen **S c** und **S d**, nach welchen **K** die Kegelfläche schneidet, mit **U** zum Schnitt, so erhalten wir den zu **a' b'** conjugirten Diameter **c' d'**, und hiedurch ist der Kegelschnitt vollkommen bestimmt.

Sollen beliebige Punkte des Schnittes gefunden werden, so liefert die vorerwähnte Construction mit den Scheitelebenen **V** unsichere oder ganz unbrauchbare Schnitte, wenn die Flächenstrahlen sich der Ordinallage nähern oder mit ihr zusammenfallen. Damit wir auch diese Schnittpunkte einfach und sicher erhalten, ist es nötig, ausser **p** noch eine zweite Scheitellinie **q** vortheilhaft zu ziehen, und dies kann etwa geschehen, wenn **q** parallel zu **U** gewählt wird. In Fig. 53 wurde q_1 noch überdies senkrecht zu $\overline{U}_1$ gezogen, weil diese Gerade eine Symmetrielinie des ersten Bildes der Schnittlinie ist. Durch den ersten Spurpunkt δ_1 gehen die ersten Spuren der durch **q** gelegten Scheitelebenen, welche die Ebene **U** nach parallelen Geraden schneiden müssen. Wäre

z. B. das erste Bild des auf dem Flächenstrahle **S m** liegenden Schnittpunktes zu suchen, so legen wir durch **S m** und **q** eine Scheitelebene; $\mathbf{m}_1$ δ_1 ist die erste Spur derselben, und die durch den Schnittpunkt α parallel zu $\mathbf{q}_1$ gezogene Gerade ist das erste Bild des Schnittes von **U** mit dieser Scheitelebene. $\mathbf{m}'_1$ giebt sofort den gesuchten Punkt, und wir bemerken, dass wir gleichzeitig noch einen zweiten Schnittpunkt $\mathbf{n}'_1$ erhalten, weil die durch **S m** gelegte Scheitelebene noch einen zweiten Strahl **S n** mit dem Kegel gemein hat. Legen wir durch **q** noch andere Scheitelebenen, so ergeben sich mittels derselben ebenso andere Schnittpunkte, welche sehr einfach zu construiren und um so sicherer bestimmt sind, je mehr sich die Flächenstrahlen der Ordinallage nähern.

Das erste Bild der Ellipse und die Leitlinie sind zwei perspectivisch collineare Gebilde, und wir können daher auch unter Rücksichtnahme auf diese projectivische Verwandtschaft Punkte im Bilde des Schnittes finden und auch sofort ihre Tangenten construiren.

Einen schiefen Kreiskegel durch eine doppelt geneigte Ebene **U** *nach einer Ellipse zu schneiden und deren Projectionen durch conjugirte Diameter zu bestimmen.* (Fig. 54). Fig. 54

Parallel zu $\overline{\mathbf{U}}_1$ ziehen wir die Scheitellinie **p** und suchen ihren zweiten Spurpunkt δ_2. Die ersten Spuren der durch **p** gelegten Berührungsebenen sind parallel zu $\overline{\mathbf{U}}_1$ und ihre zweiten Spuren $\overline{\mathbf{V}}_2$ und $\overline{\mathbf{W}}_2$ gehen durch δ_2. Die Einserspurparallelen **q** und **r**, nach welchen **U** von diesen Tangentialebenen geschnitten wird, geben zwei Paralleltangenten der Ellipse, folglich sind ihre Berührungspunkte **a'** und **b'**, welche im Schnitte mit den Berührungsstrahlen **a S** und **b S** liegen, die Endpunkte eines Diameters und $\mathbf{a}'_1$ $\mathbf{b}'_1$, $\mathbf{a}'_2$ $\mathbf{b}'_2$ die Bilder desselben.

Der Halbirungspunkt ω von **a' b'** giebt den Mittelpunkt und die durch ω gezogene Einserspurparallele **l** die Richtung des conjugirten Diameters der Ellipse. Der Strahl ω **S**, weil in der Ebene **a S b** gelegen, trifft die erste Bildebene auf der Geraden $\mathbf{a}_1$ $\mathbf{b}_1$, und durch diesen Punkt η geht $\overline{\mathbf{N}}_1$, die erste Spur der durch **l** gelegten Scheitelebene **N**, welche den Kegel nach den Geraden **c S** und **d S** schneidet, und diese begrenzen auf **l** den zu **a' b'** conjugirten Diameter **c' d'**. Beziehen wir in der ersten Bildebene die Ellipse als perspectivisch collineares Bild auf den Kreis, so finden wir, dass den conjugirten Durchmessern $\mathbf{a}'_1$ $\mathbf{b}'_1$ und $\mathbf{c}'_1$ $\mathbf{d}'_1$ keineswegs wieder conjugirte Durchmesser im Kreise als verwandte Gerade entsprechen, sondern ein Durchmesser und eine conjugirte Sehne. Es entspricht demnach dem Mittelpunkte ω nicht der Mittelpunkt des Kreises. Einem beliebigen Paare paralleler Tangenten des Kreises entspricht in dem Systeme der Ellipse wieder ein Tangentenpaar, welches aber im Allgemeinen nicht parallel sein wird, weil bei der perspectivischen Collineation nur den zur Begegnungsgeraden parallelen Geraden wieder parallele Gerade im anderen Systeme entsprechen. Zwei Tangenten des Kreises, welche sich auf der Verschwindungsgeraden der Basis schneiden, entsprechen im anderen Systeme parallele Tangenten an die Ellipse, und ihre Berührungspunkte bestimmen daher einen Diameter.

Einen Kreiskegel nach einer Parabel zu schneiden.

Fig. 55 In Fig. 55 wurde in der ersten Bildebene ein Kreis als Leitlinie einer Kegelfläche angenommen, deren Spitze der beliebige Raumpunkt **S** ist. Eine Ebene **U**, welche der Einfachheit und Übersichtlichkeit halber vertical projicirend gewählt wird, soll so angenommen werden, dass sie den Kegel nach einer Parabel schneide.

Die Parabel ist eine Curve zweiter Ordnung mit einem unendlich fernen Punkte und einer unendlich fernen Tangente, folglich muss die schneidende Ebene **U** zu einem Flächenstrahle parallel sein, und die ihr parallele Scheitelebene wird eben nur diesen Strahl mit der Fläche gemein haben, d. h. sie wird eine Berührungsebene derselben sein. Nehmen wir daher die vertical projicirende Ebene **V** an, welche den Kegel in dem Contourstrahle **S z** berührt, so ist hiedurch die Stellung der Ebene **U** bestimmt, welche wir sodann parallel zu **V** aber sonst beliebig annehmen.

Nach dieser Anordnung ist vorweg bekannt, dass der Flächenstrahl **S z** den unendlich fernen Punkt der Schnittlinie erzeugt und die Richtung der Parabeldurchmesser, welche bekanntlich unter einander parallel sind, bestimmt. Die erste Spur der Ebene **V**, welche den Kreis in dem Punkte $\mathbf{z}_1$ berührt, erkennen wir sofort als die Verschwindungsgerade in dem Systeme der Leitlinie; ihre verwandte Gerade im Systeme der Parabel giebt die unendlich ferne Tangente mit dem unendlich fernen Berührungspunkte $\mathbf{z}'_2\ \infty$. Zwei Punkte der Parabel bemerken wir in $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{b}_1$, wo $\overline{\mathbf{U}}_1$ die Leitlinie schneidet. Andere zu $\mathbf{a}_1\ \mathbf{b}_1$ parallele Sehnen können nun auch leicht gefunden werden. Durch die parallel zu $\overline{\mathbf{U}}_1$ gezogene Scheitelgerade **p** eine Ebene **N** gelegt, welche die Kegelfläche nach den Strahlen **m S**, **n S** und die Ebene **U** nach einer Einserspurparallelen schneidet. Im Schnitte beider erhalten wir **m'** und **n'** als zwei Punkte der Parabel, und $\overline{\mathbf{m}'\mathbf{n}'}$ giebt eine zu **a b** parallele Sehne. Bei unserer speziellen Annahme notiren wir unmittelbar auf $\overset{\circ}{\overline{\mathbf{U}}}_2$ die zweiten Bilder der den Strahlen **m S** und **n S** entsprechenden Schnittpunkte, deren erste Bilder $\mathbf{m}'_1$ und $\mathbf{n}'_1$ in den Ordinalen und auf den ersten Bildern dieser Strahlen liegen. Bekommt die Ebene **N** andere Positionen, so erhalten wir auf dieselbe Art eine Schaar paralleler Sehnen der Parabel. Unter den Scheitelebenen der Geraden **p** muss die Tangentialebene **W**, welche den Kegel in dem Strahle **A S** berührt, besonders beachtet werden. **W** schneidet **U** nach einer zu $\mathbf{a}_1\ \mathbf{b}_1$ parallelen Flächentangente, welche auch eine Tangente der Parabel ist, und ihr Brrührungspunkt **A'** liegt auf dem Berührungsstrahle **S A**. **A'** ist ein charakteristischer Punkt der Schnittlinie, nämlich der höchste Punkt, weil demselben eine horizontale Tangente entspricht.

Nähert sich die Scheitelebene **V** der Ordinallage, so werden die Schnitte in der ersten Bildebene unsicher und müssen daher durch Scheitelebenen, welchen ein von **p** verschiedener Träger entspricht, construirt werden. Zu diesem Behufe nehmen wir in der Ebene **V** eine beliebige Scheitelgerade an, oder benützen unmittelbar den Flächenstrahl **S z** als solche und ziehen durch $\mathbf{z}_1$ einen beliebigen, in der ersten Bildebene liegenden Strahl $\mathbf{z}_1\ \mathbf{c}_1$, so gilt derselbe als die erste Spur einer durch $\mathbf{S\,z}$ gelegten Scheitelebene, welche die Kegelfläche nach der Erzeugenden $\mathbf{c}_1\ \mathbf{S}_1$ und die Ebene $\mathbf{U}$ nach einer zu $\mathbf{S}_1\ \mathbf{z}_1$ parallelen Geraden $\beta\,\mathbf{c}'$ schneidet. Im Schnitte beider notiren wir $\mathbf{c}'_1$ als einen Punkt der Parabel. Für Flächenstrahlen, wie z. B. $\mathbf{S}_1\,\mathbf{d}_1$, welche auch für die neue Scheitellinie ungünstig liegen, werde in der Ebene $\mathbf{V}$ eine geeignete Scheitellinie gezogen, deren erster Spurpunkt $\mathbf{Y}_1$ auf $\overline{\mathbf{V}}_1$ liegen muss. $\mathbf{V}_1\ \mathbf{d}_1$ ist die erste Spur der durch $\mathbf{S\,d}_1$ gelegten Scheitelebene. Diese schneidet die Ebene $\mathbf{U}$ nach einer zu $\mathbf{y}_1\ \mathbf{S}$ parallelen Geraden, welche durch den auf $\overline{\mathbf{U}}_1$ erzeugten Schnittpunkt γ geht und auf $\mathbf{S\,d}_1$ den Parabelpunkt $\mathbf{d}'$ ganz sicher angiebt.

Die Sehne $\mathbf{m}_1\,\mathbf{n}_1$ des Kreises wird von dem Durchmesser $\mathbf{z}_1\ \mathbf{A}_1$ in dem Punkte φ_1 halbirt. Aus dem Dreiecke $\mathbf{m}_1\ \mathbf{S}\ \mathbf{n}_1$ ist sofort ersichtlich, dass die parallele Parabelsehne $\mathbf{m}'\ \mathbf{n}'$ durch den Strahl $\varphi_1\ \mathbf{S}$ im Punkte φ' auch halbirt wird. Ebenso werden auch die Halbirungspunkte aller zu $\mathbf{m}'\,\mathbf{n}'$ parallelen Sehnen der Parabel in der Ebene $\mathbf{z}_1\,\mathbf{S\,A}_1$ liegen, folglich erkennen wir, dass die Halbirungspunkte dieses Systems paralleler Sehnen auf der Geraden $\omega\ \mathbf{A}'$ liegen, welche offenbar ein Diameter der Parabel ist. Da parallelen Ebenen auch parallele Schnitte entsprechen, so muss $\overline{\omega\,\mathbf{A}'}$ zu dem Strahle $\mathbf{z}_1\ \mathbf{S}$ parallel sein, und wir können diese Eigenschaft bei der Construction des Diameters mit Vortheil benützen. Nachdem alle zuvor erwähnten Theilungsverhältnisse im Raume auf die Bilder unverändert übergehen, so ist auch die horizontale Projection der Schnittlinie eine Parabel, deren Diameter $\omega\ \mathbf{A}_1$ zu $\mathbf{z}_1\ \mathbf{S}_1$ parallel sein muss.

Das erste Bild der Parabel ist zu der Leitlinie perspectivisch collinear. $\mathbf{S}_1$ ist das Projectionscentrum, $\overline{\mathbf{U}}_1$ die Begegnungsgerade und $\overline{\mathbf{V}}_1$ die Verschwindungsgerade des Systems der Leitlinie. Mit Rücksicht auf diese Verwandtschaft können wir auch beliebige Parabelpunkte und ihre Tangenten construiren. Soll z. B. in dem Punkte $\mathbf{d}'_1$ eine Tangente an die Parabel gezogen werden, so notiren wir den Schnittpunkt γ, welchen die Kreistangente des verwandten Punktes $\mathbf{d}_1$ auf der Begegnungsgeraden erzeugt; durch γ und $\mathbf{d}'_1$ ist die verlangte Tangente bestimmt. Bemerkenswert ist die Tangentenconstruction in den Punkten $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{b}_1$, welche die Parabel mit dem Kreise gemein hat. Wir ziehen z. B. in $\mathbf{a}_1$ an den Kreis die Tangente $\mathbf{t}_1$, welche die Verschwindungsgerade $\overline{\mathbf{V}}_1$ in dem Punkte $\mathbf{e}_1$ schneidet, dessen verwandter Punkt auf dem projicirenden Strahle $\mathbf{S}_1\ \mathbf{e}_1$ und in unendlicher Ferne liegt. $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{e}'_{1\,\infty}$ bestimmen die verwandte Tangente, welche mithin ganz einfach durch $\mathbf{a}_1$ und parallel zu $\mathbf{S}_1\ \mathbf{e}_1$ zu ziehen ist. Ebenso construirt man in $\mathbf{b}_1$ die Tangente an die Parabel; sie geht durch $\mathbf{b}_1$ und ist parallel zu dem Strahle $\mathbf{S}_1\ \mathbf{f}_1$.

Ein Diameter und eine ihm conjugirte Sehne bestimmen vollkommen eine Parabel, welche stets als perspectivisch collineares Gebilde auf einen Kreis bezogen werden kann, und die Zuordnung beider Gebilde geht aus der ersten Bildebene in Fig. 55 ganz deutlich hervor. Denken wir uns den Durchmesser $\mathbf{A}'_1\ \omega$ und die ihm conjugirte Sehne $\mathbf{a}_1\ \mathbf{b}_1$

als gegeben, so bestimmt diese die Begegnungsgerade β. Durch den Halbirungspunkt ω der Sehne a_1 b_1 ziehen wir einen Strahl senkrecht auf a_1 b_1 und nehmen darin einen beliebigen Punkt o_1 als Mittelpunkt eines Kreises an, dessen Peripherie durch a_1, b_1 geht und die Gerade $\omega\, o_1$ in den Punkten z_1 und A_1 schneidet. Dem Punkte A_1 ordnen wir A'_1 zu, und die Gerade A_1 A'_1 bestimmt einen projicirenden Strahl, auf dem das Projectionscentrum S_1 liegen muss. Die durch z_1 parallel zu $A'\omega$ gezogene Gerade giebt den dem unendlich fernen Punkte der Parabel entsprechenden projicirenden Strahl, und im Schnitte beider liegt das Projectionscentrum S_1. Ziehen wir noch in z_1 die Tangente an den Kreis, so ist diese die Verschwindungsgerade im Systeme des Kreises. Durch diese Daten ist die perspectivisch collineare Zuordnung beider Gebilde eindeutig bestimmt. Gleichzeitig entnehmen wir, dass es unzählig viele Kreise giebt, welche der gegebenen Parabel perspectivisch collinear zugeordnet werden können. Dass wir bei vorgelegten Aufgaben, die Wahl so treffen werden, dass die gesuchten Elemente sich deutlich ergeben, ist selbstverständlich.

Einen Kreiskegel nach einer Hyperbel zu schneiden.

Fig. 56 In der ersten Bildebene (Fig. 56) sei ein Kreis als Leitlinie eines senkrechten Kegels, von welchem wir beide Mantelflächen in Betracht ziehen wollen, gegeben. Parallel zu einer Scheitelebene V, welche mit dem Kegel die zwei Erzeugenden $m\,S$ und $n\,S$ gemein hat und der Einfachheit wegen vertikal projicirend angenommen wurde, legen wir die Ebene U. Diese schneidet die Kegelfläche nach einer Hyperbel, deren zwei unendlich ferne Punkte von den zu U parallelen Flächenstrahlen $m\,S$ und $n\,S$ erzeugt werden.

Die Punkte a_1 und b_1, in welchen $\overline{U_1}$ die Leitlinie schneidet, sind schon zwei Punkte der Hyperbel und $\overline{a_1\ b_1}$ eine Sehne derselben. Eine andere zu a_1 b_1 parallele Hyperbelsehne liefert die Scheitelebene W, welche durch die zu $\overline{U_1}$ parallel gezogene Scheitelgerade p geht, die Kegelfläche nach den Strahlen c_1 S und d_1 S und die Ebene U nach einer Spurparallelen schneidet. Die Punkte, welche diese Geraden gemein haben, bestimmen eine zu a' b' parallele Sehne c' d'. Bei unserer Annahme bezeichnen wir unmittelbar auf $\overline{U_2}$ die zweiten Bilder dieser Schnittpunkte, deren zugeordnete erste Bilder in den Ordinalen und in den ersten Bildern der Flächenstrahlen liegen. Geben wir der Ebene W andere Positionen, so erhalten wir hiedurch eine Schaar zu a_1 b_1 paralleler Sehnen.

Unter den Scheitelebenen der Geraden p sind die Berührungsebenen M und N bemerkenswert. Sie berühren den Kegel nach den Strahlen $A\,S$, $B\,S$ und schneiden die Ebene U nach den zu $\overline{U_1}$ parallelen Flächentangenten q und r. Diese Geraden sind auch zwei parallele Tangenten an die Schnittlinie; ihre in $A\,S$ und $B\,S$ liegenden Berührungspunkte A', B' bestimmen daher einen Diameter und sein Halbirungspunkt ω den Mittelpunkt der Hyperbel.

Der conjugirte Diameter geht durch ω und ist zu $\overline{U_1}$ parallel. Die Asymptoten der Hyperbel gehen durch den Mittelpunkt und haben die unendlich fernen Punkte m'_∞ und n'_∞ zu Berührungspunkten, mithin geben die durch ω parallel zu $S\,m$ und $S\,n$ gezogenen Geraden die Asymptoten, und ihre Schnittpunkte mit den Paralleltangenten q' und r' bestimmen das den conjugirten Durchmessern umschriebene Parallelogramm 1, 2, 3, 4, wodurch auch der imaginäre Diameter $C'D'$ begrenzt wird. Aus diesen Bestimmungsstücken können die Bilder der Hyperbel unabhängig von ihrem stereometrischen Zusammenhange mit der Kegelfläche gezeichnet werden, oder wir bringen noch andere Flächenstrahlen mit U zum Schnitt und construiren in diesen Punkten die Tangenten, was auf Grundlage der perspectivisch collinearen Verwandtschaft, welche zwischen der Leitlinie und dem ersten Bilde der Hyperbel obwaltet, leicht geschehen kann. Die Scheitelebene W, welche zuvor zur Construction der Hyperbelpunkte benützt wurde, liefert in den der Ordinallage nahen Positionen unsichere und unbrauchbare Schnitte; für diese müssen Scheitelebenen benützt werden, welchen ein von p verschiedener Träger entspricht. Zu diesem Behufe ziehen wir durch S und parallel zu U eine beliebige Gerade; diese muss notwendig in V liegen und die erste Bildebene in einem Punkte von $\overline{V_1}$ treffen. In Fig. 56 wurde diese Scheitellinie $o_1\,S$ in der durch die Strahlen $A\,S$ und $B\,S$ bestimmten Ebene angenommen, weil dann $o_1\,S_1$ eine Symmetrale für das erste Bild der Hyperbel ist. Wird durch o_1 ein beliebiger Strahl in der ersten Bildebene gezogen, so kann derselbe als die erste Spur einer durch $o\,S$ gelegten Scheitelebene K gelten, welche mit der Kegelfläche die Strahlen $c_1\,S$ und $e_1\,S$ gemein hat und die Ebene U nach einer zu $o_1\,S$ parallelen Geraden schneidet; dieselbe geht durch den auf $\overline{U_1}$ und $\overline{K_1}$ liegenden Punkt γ und giebt auf den Flächenstrahlen die Schnittpunkte c' und e' ganz sicher an. Mittels der in der Ebene V liegenden Scheitellinien gestaltet sich die Construction des ersten Bildes der Hyperbel besonders günstig und völlig unabhängig von der zweiten Bildebene. Ziehen wir z. B. durch o_1 noch eine andere Gerade, $\overline{L_1}$, welche den Kreis in f_1, g_1 und $\overline{U_1}$ in η schneidet. $f_1\,S_1$ und $g_1\,S_1$ sind die ersten Bilder der in L liegenden Flächenstrahlen, auf welchen die durch η parallel zu $o_1\,S_1$ gezogene Gerade sofort f'_1 und g'_1 als zwei Punkte des ersten Bildes der Hyperbel angiebt. Wird in dem zu f'_1 verwandten Punkte f_1 eine Tangente an den Kreis gezogen, so ist durch ihren Begegnungspunkt ζ auch die Tangente an die Hyperbel in dem Punkte f'_1 bestimmt.

V_1 ist die Verschwindungsgerade in dem Systeme des Kreises. Der Sehne $m_1\,n_1$ entspricht im anderen Systeme die unendlich ferne Sehne der Hyperbel. Die Punkte m_1 und n_1 theilen den Kreis in zwei Bögen, und wenn wir die perspectivische Zuordnung des ersten Bildes der Hyperbel zu dem Kreise genau verfolgen, so ergiebt sich, dass auf dem Bogen von m_1 über A_1 nach n_1 jene Punkte des Kreises liegen, deren verwandte Punkte den einen Ast der Hyperbel bilden, und die auf dem Bogen von m_1 über B_1 nach n_1 liegenden Punkte entsprechen dem zweiten Aste. In den Punkten m_1 und n_1 hängen die beiden Bögen des Kreises zusammen, und wir haben uns ebenso die beiden Äste der Hyperbel durch die unendlich fernen Punkte m'_∞ und n'_∞ als zusammenhängend zu denken.

Der Tangente, welche den Kreis in $\mathbf{m}_1$ berührt und die Begegnungsgerade in α trifft, entspricht im zweiten Systeme eine Gerade, welche durch α parallel zu $\mathbf{S}_1\,\mathbf{m}_1$ geht, die Hyperbel in dem unendlich fernen Punkte $\mathbf{m}'_{1\,\infty}$ berührt, und daher eine Asymptote ist. Ebenso ist auch die zweite Asymptote der Hyperbel parallel zu $\mathbf{S}_1\,\mathbf{n}_1$ und geht durch den Punkt β, welchen die in $\mathbf{n}_1$ an den Kreis gezogene Tangente auf der Begegnungsgeraden erzeugt.

Fassen wir nun die Resultate unserer Betrachtung über die ebenen und zur Basis geneigten Schnitte der Centralstrahlenflächen zusammen, so können wir den Satz aussprechen:

Die orthogonalen Projectionen nicht paralleler Schnitte centraler Strahlenflächen sind perspectivisch collinear und das eine Gebilde hat eben so viele unendlich ferne Punkte, als das andere Punkte mit seiner Verschwindungsgeraden gemein hat.

Eine Kegelfläche zweiter Ordnung wird von einer zur Basis geneigten Ebene nach einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel geschnitten, je nach dem die Leitlinie mit der Verschwindungsgeraden der Basis keinen, einen oder zwei Punkte gemein hat.

Anwendungen der perspectivischen Collineation.

Bei den ebenen Schnitten der Kegelflächen haben wir schon manche Anwendung von der perspectivischen Collineation gemacht. Wir benützten diese projectivische Verwandtschaft zur bequemen Bestimmung von Punkten und Tangenten in dem Bilde der Schnittcurve. In den folgenden Beispielen soll noch in Kürze angedeutet werden, wie die perspectivische Collineation auch zur Lösung mancher geometrischen Probleme mit Vortheil angewendet werden kann.

Jede Curve zweiter Ordnung kann als das perspectivisch collineare Bild eines Kreises angesehen werden. Bei Aufgaben, in welchen Beziehungen von Punkten und Geraden zu Linien zweiter Ordnung festgestellt werden sollen, betrachte man die gegebenen Stücke als das Gebilde des einen Systems und suche hiezu die verwandten Elemente im Systeme des Kreises, woselbst diese Aufgaben leicht und sicher ausgeführt werden können; zu den gewonnenen Resultaten construire man alsdann die verwandten im zweiten Systeme, und diese entsprechen der gestellten Aufgabe.

Fig. 57 In Fig. 57 soll der Schnitt der Geraden $\mathbf{p}$ mit einer Parabel, welche durch einen Durchmesser $\mathbf{A}\,\omega$ und eine ihm conjugirte Sehne $\mathbf{a}\,\mathbf{b}$ gegeben ist, bestimmt werden.

Mit Rücksicht auf die in Fig. 55 gewonnenen Resultate beschreiben wir über $\mathbf{a}\,\mathbf{b}$ einen beliebigen Kreis, welcher als das perspectivisch collineare Bild der gegebenen Parabel gelten soll. $\overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}$ bestimmt die Begegnungsgerade und der hierauf senkrechte Durchmesser $\mathbf{A}'\,\mathbf{z}'$ wird dem Diameter der Parabel in der Art zugeordnet, dass $\mathbf{A}'$ dem Punkte $\mathbf{A}$ und $\mathbf{z}'$ dem unendlich fernen Punkte der Parabel als verwandte Punkte zugewiesen werden. $\overline{\mathbf{A}'\mathbf{A}}$ und die durch $\mathbf{z}'$ parallel zu $\omega\,\mathbf{A}$ gezogene Gerade bestimmen zwei projicirende Strahlen, in deren Schnitte das

Collineationscentrum **S** liegt, und die Kreistangente in **z'** bestimmt die Verschwindungsgerade **V** im Systeme des Kreises.

Nach dieser Anordnung ist die Parabel eindeutig auf den Kreis bezogen, und wir suchen nun zu **p** die verwandte Gerade im Systeme des Kreises. Der durch **S** und parallel zu **p** gezogene Strahl projicirt den unendlich fernen Punkt $\mathbf{n}_\infty$ von **p**, dessen verwandter Punkt **n'** auf **v** liegen muss. Durch **n'** und den Begegnungspunkt α ist die zu **p** verwandte Gerade **p'** bestimmt; ihre Schnitte **M'** und **N'** mit dem Kreise werden auf **p** zurück projicirt und geben sofort die Punkte **M** und **N**, welche **p** mit der Parabel gemein hat.

In Fig. 58 ist eine Parabel durch den Diameter $\mathbf{A}\,\omega$ und eine ihm conjugirte Sehne **a b** gegeben. Von einem ausserhalb liegenden Punkte **P** sollen an die Parabel die möglichen Tangenten gezogen und ihre Berührungspunkte ermittelt werden, ohne den Umfang der Curve zu benützen. Fig. 58

Wir beziehen die Parabel auf einen über **a b** beliebig gezeichneten Kreis und treffen die projectivische Zuordnung wie in Fig. 57. Dann wird zu **P** der verwandte Punkt **P'** im Systeme des Kreises gesucht. Der Geraden **A P**, welche die Begegnungsgerade in α trifft, entspricht im anderen Gebilde der Strahl $\alpha\,\mathbf{A}'$. Auf diesem und auf dem projicirenden Strahle **S P** liegt **P'**, von welchem sofort die Tangenten $\mathbf{P}'\gamma$ und $\mathbf{P}'\delta$ an den Kreis gezogen und ihre Berührungspunkte **M'** und **N'** bezeichnet werden. Die verwandten Geraden $\gamma\,\mathbf{P}$ und $\delta\,\mathbf{P}$ geben die gesuchten Tangenten, und diese werden von den projicirenden Strahlen **M'S** und **N'S** in den fraglichen Berührungspunkten **M** und **N** geschnitten.

Aufgabe: Den Scheitel einer Parabel zu bestimmen, welche durch einen Diameter und eine conjugirte Sehne gegeben ist.

Wir beziehen die Parabel auf einen Kreis, welcher über der Sehne **a b** beschrieben wird, und treffen die Zuordnung wie in Fig. 57. Parallel zu einer Geraden, welche auf dem gegebenen Diameter senkrecht steht, die Tangente an die Parabel construirt; ihr Berührungspunkt giebt den Scheitel der Parabel.

Die Beziehungen der Geraden zu einer Ellipse oder einer Hyperbel, welche durch einen Diameter und eine conjugirte Sehne gegeben ist, werden constructiv ebenso behandelt wie die vorigen Aufgaben. Die Zuordnung dieser Kegelschnitte zu einem über der gegebenen Sehne beschriebenen Kreise wird sofort klar, wenn man einen schiefen Kreiskegel, dessen Basis in der ersten Bildebene liegt, nach einer Ellipse oder Hyperbel schneidet und die erste Spur der schneidenden Ebene als Secante des Kreises annimmt. *)

Anwendungen der Strahlenflächen.

Wenn eine gegebene Aufgabe unzählig viele Auflösungen zulässt, so heisst die Gesammtheit der letzteren ein geometrischer Ort. Auch die

*) Diese Aufgaben, welche hier nicht weiter ausgeführt werden können, hat der Verfasser in dem heuerigen Maihefte der Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften projectiv und stereometrisch behandelt.

Strahlenflächen und die Berührungsebenen derselben können als geometrische Orte aufgefasst werden, und leisten in dieser Hinsicht bei der constructiven Behandlung vieler Aufgaben sehr gute Dienste. Im folgenden wollen wir nur die einfachsten Fälle, welche an und für sich klar sind, berücksichtigen und führen beispielsweise an:

1. Der geometrische Ort eines Punktes **a**, welcher von einer Geraden **p** einen gegebenen Abstand $\varDelta$ hat, ist ein Kreiscylinder, dessen Axe **p** und der Radius seiner Basis $= \varDelta$ ist.

2. Der geometrische Ort einer Geraden **g**, welche zu dem Strahle **p** parallel ist und von demselben einen gegebenen Abstand hat, ist ein Kreiscylinder, dessen Axe **p** und der Radius seines Normalschnittes $= \varDelta$.

3. Der geometrische Ort einer Ebene **U**, welche zu der Geraden **p** parallel ist und von derselben einen gegebenen Abstand $\varDelta$ hat, ist ein Ebenenbüschel, dessen Elemente Tangentialebenen eines Kreiscylinders von der Axe **p** und dem Querschnittsradius $\varDelta$ sind.

4. Der geometrische Ort einer Geraden, welche den Strahl **p** in dem Punkte **a** schneidet und mit demselben den Winkel α bildet, ist ein Kreiskegel. **a** ist der Scheitel, **p** die Axe desselben, und die Erzeugenden schliessen mit **p** den Winkel α ein.

5. Der geometrische Ort einer Geraden, welche durch einen Punkt **a** geht und mit einer gegebenen Ebene **U** den Winkel α einschliesst, ist ein Kreiskegel, dessen Scheitel **a** ist. Die Axe des Kegels geht durch **a** senkrecht auf **U**, und die Erzeugenden schliessen mit der Axe den Winkel $(90^\circ - \alpha)$ ein.

6. Der geom. Ort einer Ebene, welche durch den Punkt **a** einer gegebenen Geraden **p** geht und mit dieser den Winkel α einschliesst, ist ein Ebenenbüschel, dessen Elemente Tangentialebenen eines Kreiskegels sind. **a** ist der Scheitel, **p** die Axe, und die Erzeugenden schliessen mit **p** den Winkel α ein.

7. Der geometrische Ort einer Ebene, welche durch den Punkt **a** geht und mit einer gegebenen Ebene **U** den Winkel α einschliesst, ist ein Ebenenbüschel, dessen Elemente Tangentialebenen eines Kreiskegels von der Spitze **a** sind. Die Erzeugenden schliessen mit der Axe, welche durch **a** senkrecht auf **U** geht, den Winkel $(90^\circ - \alpha)$ ein.

8. Der geometrische Ort einer Geraden, welche eine Strahlenfläche in einem Punkte derselben berührt, ist die Berührungsebene, welche in diesem Punkte an die Fläche möglich ist.

9. Der geometrische Ort einer Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt **A** geht und eine Strahlenfläche **S** berührt, sind die Berührungsebenen **U** und **V**, welche durch **A** an die Fläche möglich sind. Bei Pyramiden und Prismen können wir nur von Randstrahlen und Rand- oder Grenzebenen sprechen.

Wäre **A** der Sitz einer Lichtquelle, dann enthalten die Ebenen **U** und **V** die Gesammtheit jener Lichtstrahlen, welche die Strahlenfläche tangiren. Die Schnitte von **U** und **V** mit einer vorgelegten Ebene **W** begrenzen den Schlagschatten der Fläche **S** auf dieser Ebene, und die Erzeugenden **p** und **q**, nach welchen **S** von **U** und **V** berührt wird, sind die Trennungslinien zwischen dem direct beleuchteten Theil der Fläche und dem Selbstschatten derselben.

Ist **A** der optische Mittelpunkt eines projicirenden Auges, dann enthalten die Ebenen **U** und **V** die Gesammtheit jener Sehstrahlen, welche die Strahlenfläche tangiren. Die Schnitte von **U** und **V** mit einer vorgelegten Ebene **W** begrenzen das centrale Bild der Fläche **S** auf dieser Ebene, und die Erzeugenden **p** und **q**, nach welchen **S** von **U** und **V** berührt wird, bilden den sichtbaren Umriss, die Contour der Fläche.

10. Der geometrische Ort einer Geraden, welche einer gegebenen Richtung **l** parallel ist und eine Strahlenfläche **S** berührt, sind die Berührungsebenen **U** und **V**, welche parallel zu **l** an **S** möglich sind.

Ist **l** die Richtung parallel einfallender Lichtstrahlen, welche von einer unendlich fernen Lichtquelle herkommen, dann geben **U** und **V** die Gesammtheit jener Lichtstrahlen, welche **S** tangiren. Die Schnitte von **U** und **V** mit einer Ebene **W** begrenzen den Schlagschatten von **S** auf **W**, und die Erzeugenden **p** und **q**, nach welchen **S** von **U** und **V** berührt wird, sind die Trennungslinien zwischen dem direct beleuchteten Theile der Fläche und dem Selbstschatten derselben.

Ist **l** die Richtung parallel einfallender Sehstrahlen, welche einem unendlich fernen Auge zugehen, dann geben **U** und **V** die Gesammtheit jener Sehstrahlen, welche **S** tangiren. Die Schnitte von **U** und **V** mit einer Ebene **W** begrenzen die Parallelprojection von **S** auf **W**. Die Strahlen **p** und **q**, längs welchen **S** von **U** und **V** berührt wird, bilden die Contour.

11. Der geometrische Ort eines Strahles, welcher durch den Punkt **A** geht und ein gegebenes Raumpolygon **P** schneidet, ist eine Pyramide **Q**.

Ist **A** ein leuchtender Punkt, so ist der Schnitt von **Q** mit einer vorgelegten Ebene **W** der Schlagschatten von **P** auf **W**.

Ist **A** der optische Mittelpunkt eines projicirenden Auges, dann ist der Schnitt von **Q** mit einer Ebene **W** das centrale Bild von **P** auf **W**.

12. Der geometrische Ort einer Geraden, welche einer Richtung **l** parallel ist und ein gegebenes Raumpolygon **P** schneidet, ist ein Prisma Q.

Ist **l** die Richtung parallel einfallender Lichtstrahlen, so giebt der Schnitt von **Q** mit einer Ebene **W** den Schlagschatten von **P** auf **W**.

Ist **l** die Richtung der projicirenden Strahlen, welche einem unendlich fernen Auge zugehen, dann ist der Schnitt von **Q** mit **W** die Parallelprojection von **P** auf **W**.

13. Der geometrische Ort einer Geraden, welche durch einen Punkt **A** geht und eine Raumcurve **C** schneidet, ist eine Kegelfläche **K**.

Der Schnitt von **K** mit einer Ebene **W** ist der Schlagschatten oder das centrale Bild von **C** auf **W**, je nachdem **A** eine Lichtquelle oder der Mittelpunkt eines projicirenden Auges ist.

14. Der geometrische Ort einer Geraden, welche einer gegebenen Richtung **l** parallel ist und eine Raumcurve **C** schneidet, ist eine Cylinderfläche **F**.

Der Schnitt von **F** mit einer Ebene **W** ist der Schlagschatten oder die Parallelprojection von **C** auf **W**, je nachdem **l** die Richtung paralleler Licht- oder Sehstrahlen ist.

Aufgaben.

1. Zu zwei parallelen Geraden **p** und **q** eine parallele Gerade **r** zu construiren, welche von **p** und **q** beziehungsweise die Abstände $\varDelta$ und $\varDelta'$ hat.
2. Gegeben: eine Ebene **U** und eine hiezu parallele Gerade **p**. In **U** und parallel zu **p** jene Geraden zu ziehen, deren Abstand von **p** $= \varDelta$ ist.
3. Gegeben: zwei sich kreuzende Gerade **p** und **q**. Auf **p** jene Punkte zu suchen, deren Abstand von **q** dem doppelten kürzesten Abstande **p** von **q** gleich ist.
4. Gegeben: zwei Ebenen **U**, **V** und eine Gerade **p**. Jene Punkte zu suchen, deren Abstände von **U**, **V** und **p** gleich $\varDelta$ sind.
5. Gegeben: eine Ebene **U** und eine Gerade **p**. Suche den geometrischen Ort eines Punktes, dessen Abstände von **U** und **p** $= \varDelta$ sind.
6. Gegeben: zwei sich kreuzende Gerade **p** und **q**. Den geometrischen Ort einer Geraden zu construiren, welche zu **p** parallel ist und von **q** den Abstand $\varDelta$ hat.
7. Gegeben: zwei parallele Gerade **p** und **q**. Durch **p** jene Ebenen zu legen, deren Abstände von **q** $= \varDelta$ sind.
8. Gegeben: eine Gerade **p**, eine Kegelfläche **S** und ein auf **S** liegender Punkt **a**. Eine Gerade **q** zu construiren, welche die Kegelfläche in **a** berührt und **p** schneidet.
9. Gegeben: Eine Ebene **U**, eine Cylinderfläche **S** und ein auf **S** liegender Punkt **a**. Eine Gerade **p** zu construiren, welche **S** in **a** berührt und zu **U** parallel ist.
10. Gegeben: ein Punkt **a**, eine Gerade **p** und eine Kegelfläche **S**. Durch **a** eine Gerade **q** zu ziehen, welche **p** schneidet und **S** berührt.
11. Gegeben: zwei Gerade **p**, **q** und eine Cylinderfläche **S**. Parallel zu **p** eine Gerade **r** zu ziehen, welche **q** schneidet und **S** berührt.
12. Durch eine Gerade **p** Ebenen zu legen, welche mit der ersten Bildebene den Winkel α einschliessen.
13. Durch einen Punkt **a** parallel zu der Geraden **p** Ebenen zu legen, deren verticaler Neigungswinkel α ist.
14. Gegeben: eine Gerade **p** und eine Ebene **U**. In **U** jene Geraden zu construiren, welche die Gerade **p** schneiden und mit derselben den Winkel α einschliessen.
15. Gegeben: eine Gerade **p** und eine Ebene **U**. Durch einen auf **p** liegenden Punkt **a** jene Geraden zu ziehen, welche mit **p** den Winkel α einschliessen und zu **U** parallel sind.
16. Gegeben: zwei Ebenen **U**, **V** und ein in **U** liegender Punkt **a**. Durch **a** jene Geraden zu ziehen, welche in **U** liegen und mit **V** den Winkel α einschliessen.
17. Durch einen Punkt **a** die gemeinsamen Tangenten an 2 Kegelflächen zu ziehen.

18. Durch einen Punkt **a** die gemeinsamen Tangenten an 2 Cylinderflächen zu ziehen.
19. Durch einen Punkt **a** die gemeinsamen Tangenten an eine Kegel- und eine Cylinderfläche zu ziehen.
20. Parallel zu einer Geraden **p** die gemeinsamen Tangenten an 2 Kegelflächen zu ziehen.
21. Gegeben: ein Projectionscentrum **A** und ein Kreis **K**, dessen Ebene horizontal projicirend ist. Das centrale Bild von **K** auf der 2ten Bildebene zu construiren.
22. Gegeben: ein Projectionscentrum **A** und die parallelen Geraden **p**, **q**, **r**. Die centralen Bilder von **p**, **q** und **r** auf der ersten Bildebene zu construiren.
23. Gegeben: ein Projectionscentrum **A** und die Kanten eines Würfels als Seiten des Raumpolygons **P**. Das centrale Bild von **P** auf beiden Bildebenen zu construiren.
24. Gegeben: ein leuchtender Punkt **S** und ein Quadrat **Q** in einer allgemeinen Lage im Raume. Den Schlagschatten von **Q** auf beiden Bildebenen zu construiren.
25. Gegeben: die Richtung **l** der parallel einfallenden Lichtstrahlen und ein schiefer Kreiscylinder, dessen Basis in der ersten Bildebene liegt. Die Selbstschattengrenzen und den Schlagschatten der Cylinderfläche auf den Bildebenen zu construiren.

SCHULNACHRICHTEN

I. Personalstand des Lehrkörpers und Fächervertheilung.

Dr. Egid Schreiber, k. k. Schulrat u. Director, Mitglied des Landesschulrates, fung. Landesschulinspector für die ital. Volksschulen, Director der Prüfungs-Commission für allg. Volks- u. Bürgerschulen, Comitè-Mitglied des landwirtschaftl. Lehrcurses (Naturg. in I. II).

Dr. Cajetan Dittl. Professor, Ordinarius in IV (Geogr. Gesch. in IV, Physik in IV, VI, Mathem. in VI).

Franz Erjavec, Professor, Custos des naturhist. Cabinetes (Naturg. in V, VII, Sloven. in III, IV, V).

Anton Sessich, Professor, Besitzer des gold. Verdienstkreuzes, Mitglied des Bezirksschulrates (Relig. in allen Cl.)

Alois Möstl, Professor, akadem. Historienmaler, Custos der Lehrmittelsammlung für Kalligraphie u. Freihandzeichnen (Kalligr. in II, Freihandzeichn. in II — VII).

Jacob Filippi, Professor, (Italien. in allen Cl.)

Franz Plohl, Professor, Custos der Schülerbibliothek, Ordinarius in III (Deutsch in III, IV, Sloven. in I, II, VI, VII.)

Clemens Barchanek, Professor, Besitzer des Anerkennungsdiploms der Wiener Weltausstellung vom J. 73, Custos des geom. Cabinetes, (geom. Zeichn. u. darstell. Geom. in I, II, V — VII).

Jacob Čebular, Professor, Custos des physik. Cabinetes, Ordinarius in VII (Mathem. in II, V, VII, Physik in VII.)

Emerich Müller, Professor, Custos der Lehrerbibliothek, Ordinarius in VI (Deutsch in I, VI, VII, Geogr. Gesch. in VI, VII.)

Johann Taurer von Gallenstein, Professor, Custos des chem. Cabinetes (Naturg. in VI, Chemie in IV — VII).

Justus Hendrych, Professor, Ordinarius in V (Mathem. in I, III, Physik in III, Französ. in V — VII).

Karl Kleissl, Lehrer, Ordinarius in II, Custos des geograph. Cabinetes (Deutsch in II, V, Geogr. Gesch. in II, III, V.)

Josef Zian, Supplent, Ordinarius in I (darstell. Geom. in III, IV, Mathem. in IV, Italien. u. Kalligr. in I).

Michaêl Komel, Übungsschullehrer, leitete die Vorbereitungscl. A.

Vincenz Dittrich, Volksschullehrer, leitete die Vorbereitungscl. B.

Alois Kurschen, Turnlehrer, leitete den Turnunterricht.

Dienerschaft.

Anton Puspan, Schuldiener.

Josef Trampusch, Schuldiener,

2. Lehrverfassung.

I. CLASSE.

1. **Religion.** 2. St. Biblische Geschichte des alten Bundes.
2. **Deutsche Sprache.** 6 St. Formenlehre auf Grundlage des nackten und durch Wenobjekte erweiterten Satzes. Aussprache und Rechtschreibung. Memoriren u. Reproduciren. Monatl. 2 Schul-u. 4 Hausaufgaben.
3. **Italienische Sprache.** 4 St. Alfabeto italiano, pronuncia delle vocali e delle consonanti, raddoppiamento ed assimiliazione delle medesime, divisione delle sillabe, uso delle lettere majuscole, accento tonico e grafico; dell' interpunzione, delle parti dell' orazione in generale; il sostantivo, l' articolo, l' aggettivo, le voci numerali, il pronome, nomi numerali, comparazione degli aggettivi; conjugazione de' verbi ausiliari e dei verbi deboli. Esercizii di leggere, d' apprendere a memoria, applicazione delle regole grammaticali ed ortografiche con brani di prosa e poesia. 4 compiti al mese.
4. **Slovenische Sprache.** 4 St. Izreka in pravopisje; pravilna in nepravilna sklanja imen; prosti stavek. Čitanje pesni in prozaičnih sestavkov. Vsak mesec po 6 pism. nalog,
5. **Geographie.** 3 St. Grundzüge der mathem. u. physikal. Erdkunde, soweit dieselbe zum Verständnisse der Karte unentbehrlich sind u. in anschaulicher Weise erörtert werden können. Beschreibung der Erdoberfläche in ihrer natürl. Beschaffenheit u. den allgem. Scheidungen nach Völkern u. Staaten auf Grundlage steter Handhabung der Karte.
6. **Arithmetik.** 3 St. Dekadisches Zahlensystem. Die Grundrechnungen mit unbenannten Zahlen ohne u. mit Decimalbrüchen. Grundzüge der Theilbarkeit, grösstes gemeinschaftl. Mass, kleinstes gemeinschaftl. Vielfaches. Gemeine Brüche, Verwandlung derselben in Decimalbrüche und umgekehrt. Rechnen mit benannten Zahlen.
7. **Naturgeschichte.** 3. St. Anschauungsunterricht in der Naturgeschichte. I. Sem. Wirbelthiere, II. Sem. Wirbellose.
8. **Geometrisches Zeichnen.** 6 St. Geom. Anschauungslehre, geom. Gebilde in der Ebene. (Linien, Winkel, Dreieck, Kreis, Ellipse). Combinationen dieser Figuren; das geom. Ornament; Elemente der Geometrie im Raume; Zeichnen nach Draht - u. Holzmodellen.
9. **Kalligraphie.** 1 St. Deutsche Current- u. engl. Schrift.

II. KLASSE.

1. **Religion.** 2 St. Biblische Geschichte des neuen Bundes.
2. **Deutsche Sprache.** 5 St. Wiederholung u. eingehendere Behandlung der gesammten Formenlehre u. die gewöhnlichsten Erweiterungen des einfach. Satzes. Analyse prosaisch. Aufsätze und Memoriren von Gedichten aus dem Lesebuche. 4 schriftl. Arbeiten monatlich.

3. **Italienische Sprache.** 4 St. Riassunto per sommi capi della grammatica della classe prima, quindi osservazioni sulle forme irregolari de' verbi ausiliari e dei verbi deboli: verbi riflessivi, forti, anomali, difettivi, formazioni del futuro; preposizioni, avverbi interposti. Esercizi a voce ed in iscritto come nella prima.
4. **Slovenische Sprache.** 4 St. Glagol: sponina, brezsponina, nepravilna in nepopolna sprega; obraževanje zloženih časov in naklonov; terpevna doba; prislov; predlog; veznik; medmet; skladnja: o stavku ali reku sploh, prosti stavek. Čitanje in slovljenje pesni in proz. sestavkov iz Cvetnika za drugi zazred. Vsak mesec po 4 naloge.
5. **Geographie-Geschichte.** 4. St. Specielle Geographie Asiens und Africas; detaillirte Beschreibung der Terrainverhältnisse u. der Stromgebiete Europas an oftmalige Anschauung u. rationelle Besprechung der Schul- u. Wandkarten anknüpfend; Geographie des westl. Europas. — Übersicht der Geschichte des Alterthums.
6. **Arithmetik.** 3 St. Das wichtigste aus der Mass- und Gewichtskunde, von dem Geld- und Münzwesen, mit besonderer Berücksichtigung des französ. Systems. Mass-Gewichts- und Münzreduction. Verhältnisse u. Proportionen, Theilregel, Ketten- und Allegationsrechnung.
7. **Naturgeschichte.** 3 St. Anschauungsunterricht in der Naturgeschichte I. Sem. Mineralogie, II. Sem. Botanik.
8. **Geometrisches Zeichnen.** 3 St. Planimetrie; Übungen mit dem Zirkel u. Reiszeuge überhaupt; Gebrauch der Reisschiene u. des Dreieckes.
9. **Freihandzeichnen.** 4 St. Die in der Natur vorkommenden u. in der Ornamentik auftretenden Blatt- u. Blütenformen auf Grundlage ebener, geom. Gebilde stylistisch entwickelt. Ornamentmotive des Alterthums mit besond. Rücksicht der classischen Style. Das Zeichnen nach Holzmodellen mit perspectiv. Erläuterung. Entsprechende Gedächtnisübungen.
10. **Kalligraphie.** 1 St. Deutsche Current-, englische und französ. Rondschrift.

III. CLASSE.

1. **Religion.** 2 St. Katholische Religionslehre.
2. **Deutsche Sprache.** 5 St. Conjunctionen, Praepositionen, Interjectionen. Die Erweiterungen des einfachen Satzes. Der zusammengesetzte Satz im allgem. Das wesentlichste üb. Orthographie u. Interpunction. 4 schriftl. Arbeiten monatlich.
3. **Italienische Sprache.** 4 St. Repetizione delle forme irregolari dei verbi, indi forme regolari ed irregolari dei pronomi; derivazione delle parole, composizione delle medesime; sintassi della proposizione semplice e composta. Esercizii a memoria ed in iscritto. 3 compiti al mese. Delle lettere famigliari.
4. **Slovenische Sprache.** 4 St. Ponavljanje sklanje in sprege, Skladje: glasovna vikšava, izpeljav, sestava. Skladnja do glagolov. — Čitanje iz Cvetnika. Učenje na pamet. Vsak mesec po 3 naloge.
5. **Geographie-Geschichte.** 4 St. Deutschland, die Schweiz, Nord- u.

Osteuropa. — Geschichte des Mittelalters mit specieller Berücksichtigung der vaterländischen Verhältnisse.

6. **Arithmetik.** 3 St. Fortgesetzte Uebungen im Rechnen mit besond. Zahlen zur Wiederholung u. Erweiterung des bisherigen Lehrstoffes. Zinseszinsenrechnungen. Die 4 Rechnungsoperationen mit allgem. Zahlen. Quadrirung u. Cubirung des Binoms u. decad. Zahlen. Ausziehung der Quadrat- u. Cubikwurzel.
7. **Physik.** 4 St. Allgem. Eigenschaften der Körper; Wärmelehre. Statik u. Dynamik fester, tropfbarer u. ausdehnsamer Körper.
8. **Geometrisches Zeichnen.** 3 St. Mass u. Messen der Strecken, Proportionalität der Streckenpaare; Ähnlichkeit der Dreiecke, ähnliche u. ähnlich liegende geom. Gebilde in der Ebene; Theilung der Strecke im beliebigen Verhältnisse. Die Kreislehre; Anwendung der Planimetrie auf Beispiele aus der technisch. Praxis.
9. **Freihandzeichnen.** 4 St. Stylisirte Blatt- u. Blumenformen des Mittelalters u. Anwendung derselben zu Flächenverzierungen. Zeichnen von Gruppen geometr. Körper nach perspect. Grundsätzen. Mittheilung von Constructionsmethoden zur Proportionslehre des menschlichen Kopfes. Entsprechende Gedächtnisübungen.

IV. CLASSE.

1. **Religion.** 2 St. Liturgik.
2. **Deutsche Sprache.** 4 St. Der zusammengesetzte Satz; Perioden, uebersichtliche Wiederholung der Formenlehre. Interpunction. Geschäftsaufsätze; Memoriren u. Reproduciren. 4 schriftl. Arbeiten monatlich.
3. **Italienische Sprache.** 4 St. Storia della letteratura italiana del trecento, ed in parte del quattrocento con lettura di brami di prosa e poesia dei principali autori con operazioni grammaticali, stilistiche, storiche e filologiche. Delle più importanti scritture domestiche, dei tropi e delle figure. 3 compiti al mese.
4. **Slovenische Sprache.** 4 St. Ponavljanje vsega oblikoslovja. Skladnja: glagol. zloženi in mnogozloženi stavek, vezava besedi in rekov. — Pravila iz prozodije in metrike; opravilna pisma; deklamatorične vaje; čitanje Cvetnika. Vsak mesec po 3 naloge.
5. **Geographie-Geschichte.** 4 St. Specielle Geographie des Vaterlandes, Americas u. Australiens. — Uebersicht der Geschichte der Neuzeit mit besonderer Berücksichtigung der vaterländischen Verhältnisse.
6. **Mathematik.** 4 St. Ergänzung und erweiternde Wiederholung des gesammten arithm. Lehrstoffes der Unterrealschule; Grundoperationen mit allgem. Zahlen, grösstes Mass, kleinstes Vielfaches, Brüche, Gleichungen des 1. Grades mit 1 und 2 Unbekannten.
7. **Physik.** 2 St. Schall, Licht, Magnetismus, Electricität.
8. **Chemie.** 3 St. Uebersicht der wichtigsten Grundstoffe u. ihrer Verbindungen mit besonderer Berücksichtigung ihres natürlichen Vorkommens.

9. **Geometrisches Zeichnen.** 3 St. Anwendung der 4 algebr. Grundoperationen zur Lösung planimetrischer und stereometrischer Aufgaben. Die perspectivische Ähnlichkeit. Theoretisch constructive Behandlung der Curvenlehre. Die stereometrischen Fundamentalsätze; der Punkt im Raume.
10. **Freihandzeichnen.** 4 St. Die Ornamentik der Renaissance nach Tafelzeichnungen u. plastischen Modellen; der menschl. Kopf mit seinen Proportionsverhältnissen in den verschiedenen Altersclassen in Tafelzeichnungen. Übungen im Zeichnen nach Gruppen geometr. Körper (Holzmodelle) mittelst perspect. Grundsätze. Entsprechende Gedächtnisübungen.

V. CLASSE.

1. **Religion.** 1 St. Fundamentaldogmatik.
2. **Deutsche Sprache.** 3. St. Allgem. Stylistik, insbesondere der histor. Styl. Lehre von der Betonung und Metrik, von den Figuren und Dichtungsarten mit den entsprechenden Proben aus dem Lesebuche. 2 schriftl. Arbeiten monatlich.
3. **Italienische Sprache.** 3. St. Storia della letteratura italiana del secolo V. VI. e VII. Dei diversi componimenti in prosa ed in poesia. 2 compiti al mese.
4. **Slovenische, Sprache,** 3 St. Nauk o podobah, prilikah in pesniških umotvorih ozirom na Cvetnik. Deklamatorične vaje. Čitanje prevodov iz staro- in novoklasičnega slovstava. Vsak mesec po 2 nalogi.
5. **Französische Sprache,** 4 St. Schriftl. Übersetzung deutscher Sätze ins Französische. 1 Schularbeit monatlich.
6. **Geschichte.** 3 St. Pragmatische Geschichte des Alterthums mit steter Berücksichtigung der hiemit im Zusammenhange stehenden geograph. Daten.
7. **Mathematik.** 6 St. Gleichungen des 1. Grades mit mehreren Unbekannten, unbestimmte Gleichungen. — Gleichungen des 2. Grades mit 1 und 2 Unbekannten. — Planimetrie, geom. Constructionen, Anwendungen der Algebra auf Geometrie.
8. **Darstellende Geometrie.** 3 St. Der Punkt und die Gerade im Raume; die Ebene, Beziehungen der Elementargebilde unter einander; die Axendrehung.
9. **Naturgeschichte.** 3 St. Anatom. physiol. Grundbegriffe des Thierreiches mit besonderer Rücksicht auf höhere Thiere: system. Zoologie mit genauerem Eingehen in die niederen Thierformen.
10. **Chemie.** 3 St. Gesetze der chem. Verbindungen, Atome, Molecüle, Aequivalente, Wertigkeit der Aequivalente, Wertigkeit der Atome, Typen, Bedeutung der chem. Symbole u. Formeln. Metalloide und leichte Metalle.
11. **Freihandzeichnen.** 4 St. Erklärung des menschl. Kopfes in Bezug auf Knochen- u. Muskellehre mit entsprechenden Uebungen nach Tafelzeichnungen n. Reliefs. Das antik-classische Ornament in Anwendung auf Geräte dieses Styles. Perspectiv. Darstellung von einfachen Krystallgestalten des tessular. Systems u. deren Zwillinge, sowie architecton. Objecte mit elementarer Schattengebung.

VI. CLASSE.

1. **Religion.** 1 St. Specielle Dogmatik.
2. **Deutsche Sprache.** 3 St. Abschluss der syntakt. Uebungen; Geschichte der deutsch. Literatur bis Klopstock. Lectüre: Wilhelm Tell von Schiller. 2 schriftl. Arbeiten monatlich.
3. **Italienische Sprache.** 2 St. Storia della letteratnra del settecento con lettura di brani di prosa e poesia di migliori autori di questo secolo, quindi dei canti XXXIII e XXXV dell' Inferno e del I al XI del Purgatorio di Dante con osservazioni e commenti. Dei componimenti poetici. 1 compito scolastico al mese.
4. **Slovenische Sprache.** 3 St. Čitanje kakor v V. razredu; prevajanje iz nemškega na slovensko. Staroslov. oblikoslovje; slovanske starožitnosti in pregled staroslov, slovsta. Po 2 nalogi na mesec.
5. **Französische Sprache.** 3 St. Pluralisation der Eigennamen u. der zusammengesetzten Substantiva. Substantiva mit veränderter Pluralbedeutung. Genusregeln, Substantiva mit beiden Geschlechtern. Bildung des Femininums der Subst. u. Adjct. — Gebrauch des bestimt., unbestimt- u. Theilungs-Artikels. 2 schriftl. Arbeiten monatlich.
6. **Geschichte.** 3 St. Geschichte des Mittelalters in gleicher Behandlungsweise wie in V.
7. **Mathematik.** 4 St. Logarithmen; Gleichungen höheren Grades, die sich auf quadratische zurückführen lassen, Exponenzialgleichungen, Reihen, Combinationslehre; das Binom. Ebene und sphaer. Trigonometrie, Stereometrie.
8. **Darstellende Geometrie.** 3 St. Die körperliche Ecke, die Vielflächner. Die Stralenflächner, ihre Eintheilung, Darstellung u. die ebenen Schnitte derselben. Die Umdrehungsflächen. Berührungsebenen an Stralen- u. Umdrehungsflächen. Durchdringungen ebenflächiger Körper.
9. **Naturgeschichte.** 2. St. Anatom. physiol. Grundbegriffe des Pflanzenreiches; systematische Botanik.
10. **Physik.** 4 St. Allgem. Eigenschaften der Körper; Wirkungen der Molekularkräfte, Mechanik, Akustik.
11. **Chemie.** 3 St. Schwere Metalle mit Berücksichtigung der wichtigsten metallurg. Processe. Organische Chemie: Constitution der organ. Verbindungen. Homologe u. heterologe Reihen. Chemie der Alkohole u. deren Derivate. Kohlehydrate, Glukoside.
12. **Freihandzeichnen.** 4 St. Der menschl. Ideal- u. Charakterkopf nach Gypsmodellen. Die Ornamentmotive aus dem Mittelalter. Perspectiv. Darstellung von Krystallen des tessular. Systems u. architekton. Grundformen mit elementarer Schattengebung.

VII. CLASSE.

1. **Religion.** 1. St. Moral.
2. **Deutsche Sprache.** 2 St. Geschichte der deutsch. Literatur bis incl.

Schiller u. Göthe. Lectüre von Probestücken aus dem Lesebuch. 12 schriftl. Arbeiten jährlich.

3. **Italienische Sprache.** 2. St. Storia della letteratura del settecento con lettura di brani di prosa e poesia dei migliori autori di questo secolo, quindi dei canti XXXIII e XXXV dell' Inferno e del I al XI del Purgatorio di Dante con osservazioni e commenti. Dei componimenti poetici. 1 compito scolastico al mese.
4. **Slovenische Sprache.** 2 St. Pregled slovenskega slovstva od Truberja do sedaj s primernim čitanjem. Vsak mesec po eno nalogo.
5. **Französische Sprache.** 3 St. Unregelm. Pluralisation u. Geschlechtswandlung der Substantiva u. Adjectiva. Gebrauch der verschiedenen Arten des Artikels u. der Casus. 2 schriftl. Arbeiten monatlich.
6. **Geschichte.** 3 St. Geschichte der Neuzeit mit besond. Hervorhebung der culturhistor. Momente.
7. **Statistik.** 1 St. Kurze Uebersicht der Statistik Österreich-Ungarns mit eingehender Besprechung der Verfassungsverhältnisse.
8. **Mathematik.** 5 St. Combinationslehre, binom. Lehrsatz, unbestimmte Gleichungen des 1. Grades mil 2 u. 3 Unbekannten; Reihen höherer Ordnung, Kettenbrüche, Stereometrie, sphaerische u. analyt. Trigonometrie.
9. **Darstellende Geometrie.** 3 St. Wiederholung des vorhergegangenen Lehrstoffes. Durchdringung der Stralenflächen. Berührungsebenen an Kegel- und Umdrehungsflächen. Die Schattenlehre. Elemente der Perspective.
10. **Naturgeschichte.** 3 St. Kenntnis der wichtigsten Mineralien nach krystallographischen, physikalischen u. chemischen Grundsätzen; Geognosie, Grundzüge der Geologie.
11. **Physik.** 4 St. Electricität, Magnetismus, Wärme, Optik.
12. **Chemie.** 2. St. Proteinstoffe, Alkaloide, aromat. Substanzen. Uebersichtliche Wiederholung des gesammten chem. Lehrstoffes.
13. **Freihandzeichnen.** Kunstgewerbliche Objecte in Style der Renaissance. Der menschl. Charakterkopf nach Gypsmodellen. Darstellung tessularer Krystallgestalten u. einfacher architekton. Combinationen mit elementarer Schattengebung.

3. Lehrbücher.*)

1. Religion.

Schuster Dr. G. Storia Sacra del vecchio e del nuovo testamento ad uso delle scuole elementari cattoliche. Vienna 1861 (I, II).

— Zgodbe svetega pisma stare in nove zaveze za katoliške ljudske šole. Dunaji 1863 (I, II).

Zenner. Handbuch der kathol. Religionslehre. Wien, 1873. (III).

---

* Die mit einem Stern (*) bezeichneten Bücher kommen mit nächstem Schuljahre ausser Gebrauch.

Wappler Dr. Ant. Cultus der kathol. Kirche zum Gebrauche an Untergymnasien u. Unter-Realschulen, 4. Auflage Wien 1869 (IV).
— Kathol. Religionslehre für höhere Lehranstalten. 4 Aufl. Wien 1868 (V—VII).
Catechismo maggiore ad uso delle scuole elementari. Vienna 1856 (Vorb. Cl.)

2. Deutsche Sprache.

Heinrich Ant. Grammatik der deutschen Sprache für Mittelschulen. 2. Aufl. Laibach 1874 (I—IV).
Neumann Alois und **Gehlen Otto,** Deutsches Lesebuch für Gymnasien u. verwandte Anstalten. 5. Aufl. Wien 1874. I. B. (I), 2. B. (II.), 3. B. (III. IV.)
Jauker u. Noe. Deutsches Lesebuch für die oberen Classen der Realschulen. Wien, 1877. I. B. (V.)
Egger Alois, Deutsches Lehr- u. Lesebuch für höhere Lehranstalten. 4. Aufl. Wien 1875. 2. Th. (VI, VII).
Madiera K. A., Deutsches Lesebuch für die erste Klasse an Gymnasien u. Realschulen. 4. Aufl. Prag 1872 (Vorb. Cl.)

3. Italienische Sprache.

Dematio Fort. Grammatica della lingua italiana ad uso delle scuole. Vienna 1874 (I—III).
— Sintassi della lingua italiana. Innsbruck 1872 (IV).
***Libro di lettura** per le classi del ginnasio inferiore. Vienna, 1865 vol. 1. (I). vol. 2. (II).
Ambrosoli Franc. Letture italiane proposte agli scolari della terza classe dei ginnasj. 2. ediz. Vienna 1858 (III).
Carrara Franc. Antologia italiana proposta alle classi dei ginnasi liceali. Vienna 1853—59. vol. 1. (IV), 2. (V), 3. 4. (VI), 5. (VII).

4. Slovenische Sprache.

Janežič A. Slovenska slovnica za domačo in šolsko rabo. 3. Aufl. Klagenfurt 1864 (I—IV).
— Cvetnik, Berilo za slovensko mladino. Klagenfurt 1865 1 Thl. (I), 2. Th. (II).
— Cvetnik slovenske slovesnosti. Berilo za više gimnazije in realke. Klagenfurt 1868. (III—VII).
Mlikosich Fr. Slovensko berilo za osmi gimnazialni razred. Wien 1853 (V—VII).

5. Französische Sprache.

Plötz, Elementargrammatik der franz. Sprache. Berlin 1876 (V.)
Gruner Fr. Schulgrammatik der franz. Sprache. Stuttgart I. Th. 1863 (V—VII).

Gruner Fr. Uebungsaufgaben über die Wort- u. Satzfügung. Stuttgart 1863 (V—VII).

Gruner und **Wildermuth Fr.** Chrestomathie für Real- und gelehrte Schulen. Stuttgart 1863 (VI—VII).

6. Geographie.

Bellinger, Leitfaden der Geographie. Wien, 1873 (I).

Suppan, Lehrbuch der Geographie. Laibach 1875 (II—IV).

Kozenn B. Geographischer Schulatlas. Wien 1874.

Stieler, Schulatlas der neuesten Erdkunde. Ausgabe für die österr. ung. Monarchie in 39 Karten. 53. Aufl. Gotha u. Wien 1873.

7. Geschichte.

Hannak Em. Lehrbuch der Geschichte für die unteren Klassen der Mittelschulen. Wien 1878. 1. B. (II) 2. B. (III) 3. B. (IV).

— Oesterreichische Vaterlandskunde für die höheren Klassen der Mittelschulen. 4. Aufl. Wien. 1874 (VII).

Gindely Ant. Lehrbuch der allg. Geschichte für die oberen Klassen der Real- u. Handelsschulen. 2. Aufl. Prag, 1870 (V—VII).

8. Mathematik.

Močnik, Lehr- u. Übungsbuch der Arithmetik für Unterrealschul. Prag 1877. (I).

Villicus Fr., Vollständiges Lehr- und Uebungsbuch der Arithmetik für Unterrealschul. Wien 1861—1864 (II—IV).

Salomon Josef Dr. Lehrbuch der Elementar-Mathematik für Oberrealschulen. I. Band. Die Elemente der Algebra. 4. Aufl. Wien 1874 (VI—VII).

Močnik, Lehrbuch der Arithmetik u. Algebra für die oberen Classen der Mittelschul. Wien, Gerold. 1877 (V).

Wittstein, Lehrbuch der Elementar-Mathematik, Hannover 1873, 74. I. B. 1. Planimetrie (V).

Sonndorfer R. Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen der Mittelschulen. 2. Aufl. Wien 1873 (VI—VII.)

9. Darstellende Geometrie.

Močnik, Anfangsgründe der Geometrie in Verbindung mit dem Zeichnen für Unterrealschulen. 15. Aufl. Prag 1873 (I—IV).

Streissler R. Elemente der darstellenden Geometrie. Brünn 1876. (V—VII).

10. Naturgeschichte.

Hayek. Illustrirter Leitfaden der Naturgeschichte des Thierreiches. Wien 1876 (I).

Pokorny. Illustrirte Naturgeschichte des Mineralreiches. 8. Aufl. Prag 1873 (II).

— Illustrirte Naturgeschichte des Pflanzenreiches. 10. Aufl. Prag 1873 (II).

* **Tkomé Otto.** Lehrbuch der Zoologie. Braunschweig 1872 (V).

Bill Fr. Grundriss der Botanik für Schulen. 5. Aufl. Wien 1872 (VI).

* **Kenngott.** Lehrbuch der Mineralogie. Darmstadt 1875 (VII).

11. Physik.

Krist Dr. Josef. Anfangsgründe der Naturlehre. Wien, 1876 (III, IV).

* **Pisko F. J.** Lehrbuch der Physik für die oberen Klassen der Gymnasien u. Realschulen. 3 Aufl. Brünn 1873 (VI, VII).

12. Chemie.

Kauer, Elemente der Chemie, gemäss der neueren Ansichten für Realgymnasien und Unterrealschulen. 3. Auflage. Wien 1874 (IV).

Lorscheid, Lehrbuch der unorgan. Chemie, nach den neuesten Ansichten der Wissenschaft. 2. Aufl. Freiburg, 1872 (V—VII).

Verzeichnis der in den oberen Classen gegebenen Aufsätze.

a) Aus der deutschen Sprache.

V. Classe. Es sind die Erlebnisse in den letzten Ferien in einem Briefe an einen Freund zu schildern.—In einem Briefe gibt der Schüler an, welche von den Lehrgegenständen für ihn am meisten Interesse haben, und belegt seinen Ausspruch mit Gründen.—Analyse des Streites zwischen Agamemnon und Achilles. — Aegypten „ein Geschenk des Nil.“ — Der Schild des Achilles (Beschreibung nach Homers „Ilias“ XVIII, 420—617.)—Lykurgos und Solon. (Eine Parallele.)—Gedankengang in der Rede Sinons nach Virgils „Aeneis“ II. V. 57—193. — Der Aufstand der kleinasiatischen Griechen.—Es ist eine Erzälung zu bilden, in welcher das Sprichwort: „Wer Andern eine Grube gräbt, fällt selbst hinein“ sich bewahrheitet.—Der Sturm auf dem Meere.—Inhalt und Gedankengang in der Satyre „des Dichters höchster Wunsch“ von Horaz.—Die Fabel in der Sophokleischen Tragoedie „Antigone.“ — Characteristik aus Sophokles „Antigone.“ Nach Wahl: a. Antigone, b. Ismene, c. Kreon. —Die antike und die moderne Bühne.—Für sämmtliche Tropen und Figuren sind Beispiele aus der Lectüre anzuführen.

VI. Classe. Ein Tag aus den letzen Ferien.—Welche Bedeutung haben die Kirchenglocken im menschlichen Leben?—Die Vorzüge des Stadtlebens vor dem Landleben. — Sigfrieds Tod. — Der dankbare Obstbaum.—

Die Seefahrt, ein Bild des menschlichen Lebens.—Die Einwanderung der Schweizer in die Schweiz und deren Rechtszustände bis zum Abschlusse des Bundes auf dem Rütli. (Nach Schillers W. Tell.)—Dem Mutigen ist das Glück hold. (Chrie). — Die Reize der Waldeinsamkeit. — Eine Festschule der Meistersänger.—Durch welche Gewaltacte der Landvögte wurden die Schweizer zum Aufstande veranlasst? (Nach Schillers W. Tell).—Welchen Umständen verdankt Venedig im Mittelalter seine Blüthe?—Eine Morgenaussicht von einem Turme.—Süss und ehrenvoll ist der Tod fürs Vaterland.—Ueber die wichtigsten Veränderungen, welche der Mensch in der Natur hervorbringt.—Wozu die Drähte des Telegraphen neben der Eisenbahn?—Wie soll man seine Ferien anwenden?

VII. Classe. Wohltätig ist des Feuers Macht, wenn sie der Mensch bezähmt, bewacht. — Der Baum in den vier Jahreszeiten. — Welche Bedeutung haben die Meeresküsten für die Menschen? Auch ein kleiner Fluss kann Wohltäter einer Landschaft sein.—Inwiefern haben auch irdische Güter einen Wert?—Ueber die Vorzüge des Fussreisens.—Der Krieg von seiner verderblichen und wohltätigen Seite betrachtet. — Des Lebens ungemischte Freude ward keinem Irdischen zu Theil. (Schiller.) — Inwiefern ist die Zunge das wohltätigste und verderblichste Glied des Menschen? — Das Mittelmeer in seiner welthistorischen Bedeutung.—Wer kann im wahren Sinne des Wortes ein Gebildeter genannt werden?—Weshalb ist das Leben Schillers so ergreifend?

b) Aus der italienischen Sprache.

V. Classe. Quando il contadino è soddisfatto e contento nella stagione d'autunno?—Le rive dell'Isonzo vicino a Gorizia.—Il tentativo di Renzo e Lucia narrato da D. Abbondio ad un suo collega (dal Manzoni.)—Espongasi la natura ed i varii usi dell'argento.—La fuga di Angelica (Anosto).—La battaglia delle Termopili.—Il ratto di Lucia (Manzoni).—I pronostici del buono e del cattivo tempo (Alamanni).—Confronto tra la primavera degli anni scorsi con quella di quest'anno.—I ghiacciai e le nevi eterne in relazione colle pianure.—L'avaro.—I piaceri d'un bravo, e diligente scolaro.—I danni della frode seguiti da un racconto.—Come accendevano il fuoco i nostri vecchi e come lo accendiamo noi.—Ariosto e T. Tasso (paralello). — Argomento e scopo della Gerusalemme liberata.—I bachi da seta.

VI. e VII. Classe. 1. Dimostrisi l'importanza e l'utilità delle lettere in genere, ed in particolare delle domestiche. — Si ragioni sulla luce naturale e sulla luce artificiale.—Il cerchio dei traditori (Dante).—Sentimenti che destano le rovine di Cartagine.—Descrizione del Purgatorio, e sunto del canto primo del medesimo. (Dante). — Natura utilità e bellezza dei monti.—La caccia presso gli antichi ed i moderni.—L'acqua ed il fuoco come elementi distruggitori.—Il contenuto del canto VIII del Purgatorio (Dante).—Le ore mattutine d'un lombardo Sardanapalo (Parini).—Superstizioni derivate dai corpi celesti, e specialmente dalle comete.—L'aria e gli esseri, che la popolano.—Considerazioni sull'istinto degli animali chiariti con esempi. — Descrivasi la mietitura ritraendone da essa delle riflessioni morali.

c) Aus der slovenischen Sprache.

V. Classe. 1. Najlepši dan mojih zadnjih počitnic. 2. Jesenski dan. (Obraz iz narave). 3. Ocenite mero v pesmi: Vojska z volkom in psom. 4. Živalsko telo podobno parnemu stroju. 5. Bog nikomur dolžan ne ostane. (Po srbski nar. pesmi.) 6. Trn se izza mlada osti. 7. Smrt Kraljeviča Marka. (Po srb. nar. pesmi.) 8. Imenitnost trav za človeško omiko. 9. Vzetje Troje. 10. Kaj nam pojo zvonovi? 11. Razložite pomen in resničnost pregovora: Nij vse zlato, kar se sveti. 12. Zakon narave je tak, da iz malega izraste veliko. 13. Kako smo proslavili cesarjevo sreberno poroko. (Pismo prijatelju). 14. Platonov dialog „Kriton". (Prevod iz nemškega). 15. Gostba v Polznji. 16. Živenje v bučelnem panji.

VI. u. VII Classe. Misli in sklepi dijaka ob začetku šolskega leta.—Reke so koristne a tudi škodljive.—K prigovoru „roka roko umiva" se naj iznajde ena ali več basni. — Kaj pripoveduje stara lipa sredi vasi?—Trubar slovstveni slovenski Kolumb.—Solza naša zvesta spremljevalka skoz življenje. — Cerkvica, leposloven popis. — Navada je železna srajca (hrija). — Mornar in rudar (primera).—Reka Soča (poosebitev).— Semenj v malem mestu.—Dijaška baklada 24. marca (popis).—Zgodovina nas uči, kako naj živimo. — Reka podoba človeškega življenja. — V. poglavje Lessing-ovega Laokoonta (prestava iz nemškega). — Kateri pomen je imel Rim v starem, kateri v srednjem veku? (za maturo). — Obleka dela človeka. a obleka ne dela človeka.—Kmalo nam bo ura bila, nas po svetu razpodila, Levstik, (govor.)—

Plohl.

V. Freigegenstände.

1. **Analytisch-chemische Uebungen.** Dieselben wurden in 4 Stunden wöchentlich vorgenommen u. vollführte jeder Schüler die qualit. Analyse von 40 einfachen und 2—6 combinirten Salzlösungen. An den von Lehrer Taurer geleiteten Uebungen nahmen im I. Sem. 8, im II. Sem. 6 Schüler Theil.

2. **Stenographie.** I. Curs. 2. St. Wortbildung und Wortkürzung nebst Lese-und Schreibübungen mit besod. Rücksicht auf die stenographische Kalligraphie. II. Curs. 1 St. Die Satz-und Wortkürznng und auf dieselbe bezügliche Schreibübungen nach Kühnelt's Lehrbuch der deutschen Stenographie. — Der von Prof. Barchanek geleitete Curs ward von 38 Schülern besucht.

3. **Gesang**. I. Curs. 2. St. Notensystem, Notenkenntnis; Wertverhältnisse der Noten, Pausen und Tactarten. Einübung der Intervalle zur Uebung des Gehöres. Der richtige Gebrauch der Singorgane.—II. Curs. 1. St. Der mehrstimmige Gesang mit Terzen-und Sextengängen begonen.—Der vom Lehrer Komel geleitete Unterricht ward von 30 Schülern besucht.

4. **Turnen**. 3. St. Ordnungs-und Freiübungen. Gerätübungen, wie; Springen (Hoch-, Weit-, Bock-u. Pferdespringen); Barren-, Steig-, Reck- und Schaukelübungen. Turnspiele. — Anzahl der Schüler 94, Leiter des Unterrichtes: Turnlehrer K u r s c h e n.

6. Statistische Notizen.

Classe	Schülerzahl	Vaterland		Religion			Muttersprache			Lebensalter (Jahre)											Zeugnisclasse 1879						1878		Schulgeld Ertrag		Schulgeldbefreite ganz		Schulgeldbefreite halb		Stipendien		Aufnahmstaxen fl.	Bibliotheksbeiträge fl.	Lehrmittelaufwand							
		Ortsangehörige	Auswärtige	Katholiken	Protestanten	Israëliten	Deutsche	Italiener	Slovenen	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Vorzug	I. Classe	II. Classe	III. Classe	Interimszeugnis	ungeprüft	I. Classe	II. Classe	I. Semester	II. Semester	I. Semester	II. Semester	I. Semester	II. Semester	Zahl	Betrag			Lehrer-Bibliothek	Schüler-Bibliothek	Geograph. Cabinet	Naturhist. Cabinet	Physikal. Cabinet	Geometr. Cabinet	Chem. Laboratorium	Zeichnensal.
Vorb.	86	62	24	85	—	1	4	81	1	22	19	23	14	5	1	1	1	—	—	—	6	48	[illegible]	5	—	—	48	20	302.50	215.--	11	29	—	—	—	—	—	—								
I.	38	21	17	38	—	—	6	21	11	—	2	11	8	9	5	—	3	—	—	—	4	22	[illegible]	6	3	—	28	8	218	208	11	10	4	—	—	—	70	35.20								
II.	35	25	10	35	—	—	7	23	5	—	1	1	5	16	8	2	1	1	—	—	4	18	[illegible]	—	7	—	35	7	118	144	20	13	6	—	—	—	4	32.—								
III.	35	21	14	33	1	1	6	23	6	—	—	1	1	10	9	11	3	—	—	—	3	19	[illegible]	2	7	—	17	9	172	188	10	6	5	2	—	—	4	29.60								
IV.	27	15	12	27	—	—	5	16	6	—	—	—	—	6	7	6	4	4	—	—	—	17	[illegible]	2	5	1	18	4	90	148	11	2	3	—	—	—	8	20.80	128.40 fl.	199.06 fl.	85.26 fl.	225.47 fl.	151.21 fl.	48.25 fl.	169.05 fl.	119.71 fl.
V.	19	9	10	19	—	—	9	7	3	—	—	—	—	1	3	3	10	1	1	—	2	10	[illegible]	1	2	—	10	2	82	140	8	1	3	—	—	—	4	16.40								
VI.	14	7	7	12	1	1	—	8	1	—	—	—	—	—	—	—	4	3	7	—	2	9	[illegible]	—	2	—	8	3	84	80	4	4	2	—	—	—	6	12.80								
VII.	9	4	5	9	—	—	—	6	1	—	—	—	—	—	—	—	—	5	1	3	1	8	[illegible]	—	—	—	5	1	40	52	3	2	2	—	1	60.14	—	7.20								
Sum.	263	164	99	258	2	3	44	185	34	22	22	36	28	47	33	23	26	14	9	3	22	151	47	18	26	1	169	54	1106.50	1175.00	78	67	25	2	1	60.14	96	154.—	Zusammen 1126.41 fl.							
																													2281·50																	

7. Vermehrung der Lehrmittelsammlungen.

A. Lehrerbibliothek.

Durch Schenkung: Movimento della navigazione in Trieste nel 1878 e nel 1877. — Movimento commerciale di Trieste nel 1877. — Navigazione Austro-Ungarica all' Estero nel 1877. — Navigazione e commercio in porti austriaci nel 1877. — Bericht über österreichisches Unterrichtswesen aus Anlass der Weltausstellung i. J. 1873, 2 Bände nebst Tafeln. — Bericht der Wiener Handelskammer über den Handel u. s. w. Niederösterreichs i. J. 1877. — Mehmayer: Die österreichischen Universitäten. — Statistischer Bericht der Handels- und Gewerbekammer in Laibach. —; sämmtliche Werke vom h. k. k. Ministerium für C. u. U. — Austria: Archiv für volkswirtschaftliche Gesetzgebung. — Nachrichten über Industrie und Handel u. s. w. aus dem statistischen Departement des Handelsministeriums; von Sr. Excellenz Herrn Baron von Czörnig. — L. Ranke: Ueber die Verschwörung gegen Venedig im Jahre 1618. — Knigge: Ueber den Umgang mit Menschen. — G. Büchmann: Geflügelte Worte. — Der Citatenschatz des deutschen Volkes. — Baedekers Oesterreich u. Italien. Reisehandbücher. — Temme: Ein Gottvertrauen, eine Criminalgeschichte. — Iwan Turgeniew: Dunst. — W. Scott: Die Jungfrau vom See; sämmtliche Werke von Herrn v. Kanotay. — P. Peyscha; Gesangslehre für Gymnasien, von der Buchhandlung Paternolli. — Bechtel: Französische Chrestomathie für die oberen Klassen der Mittelsch., von der Klinghart'schen Buchhandlung.

Durch Ankauf: Krones: Handbuch der österr. Geschichte (beend.). — J. u. W. Grimm: Deutsches Wörterbuch, 6. Bd., 2. u. 3. Lieferung. — Praktische Anleitung zum Schönschreiben, 2 Bd. mit 28 lithogr. Tafeln. — A. M. Legendre: Die Elemente der Geometrie und der ebenen und sphärischen Trigonometrie. — Z. Venn: Deutsche Aufsätze u. s. w. — König: Deutsche Literaturgeschichte. — Dr. E. Gnad: Populäre Vorträge über Dichtkunst und Dichter, 1. u. 2. Heft. — Düntzer: Erklärungen deutscher Klassiker (Goethe N.o 74—76, 13), (Schiller 48 u. 49), (Klopstock N.r 25 u. 26). — Bernard: Goethe und Schiller in der Schule. — Just: Botanischer Jahresbericht 4. Jhrg. 2. Abth. — Tommaseo: Dizionario della lingua italiana (contin.) — Darwins Werke (vollend.) — Grunert: Archiv. für Mathematik, Jahrg. 1879. — Oesterreichische Gymnasialzeitschrift Jahrg. 1879. — Die Realschule, Jahrg. 1879. — Verordnungsblatt des k. k. Ministeriums f. C. u. U. — Carus: Zoologischer Anzeiger 1879. — Noll: Zoologischer Garten XIX. Jhg. — Thomassen: System der Natur. — Caspari Urgeschichte. 2 Bd. — Kosmos 1879. — Brehm: Thierleben (fortg.).

B. Schülerbibliothek.

Durch Schenkung: Raff: Naturgeschichte für Kinder. — Schönfeld: Istoria della contea di Gorizia. 4 Bde. — Vogel: Geographie für Schule und Haus des Kaisertums Oesterreich. — Eichelberg: Leitfaden zum Unterrichte in der Naturgeschichte. — Pisko: Physik für Unter-Realschulen. — Roller: Unterricht im freien Zeichnen. — Schnedar: Darstellende Geometrie. — Luzzatto: Comedie e poesie. — Busiz: La georgica. — Montorio: Storia e fantasia. — Sämmtliche Werke von der Buchhandlung Paternolli. — Villicus: Arithmetik für Unterrealschulen: 14 Expl. vom Verfasser. — Staré: Občna zgodovina za slov. ljudstvo, srednji vek. — Kuralt: Umni sadjerejec. — Slovenske večernice 24. zvezek. — Gomilšak: Potovanje v Rim. — Herchenbach: Die Welt, Wanderungen über alle Theile der Erde, 4 Bde. — Sämmtlich von Hr. Profess. Sessich. — Franco: La beniamina. — Lorenzo ossia l'eroismo della religione. — Hackländer u. Gerstäcker: Novellen Almanach; von Schüler Umfer. — Schmidt: Sto malih pripovedek; vom Schül. Pečnikar. — Bezenšek: Svečanost o priliki sedemdesetletnice Dr. Bleiweiss; Poznik: Slovanski almanak 1879 vom Schüler Kranjec.

Durch Ankauf: Sealsfield: Toheah oder die weisse Rose. — Weinland: Rulaman, Erzählungen aus der Zeit des Höhlenmenschen und Höhlenbären. — Becker: Erzählungen aus der alten Welt. — Letopis Matice slov. pro 1878. — Naturkräfte 22. 26. 27. und 28. Band. — Talia 40.—43. zvezek. — Körner: Deutsche Götter u. Göttersagen. — Höcker: Fitzpatrik, der Trapper. — Mensch: Kengo der Löwentödter. — Albrecht: Der Steppenvogel oder der Tag des Glücks. — Roth: Kosmos für die Jugend: In den Werkstätten. — Klodič: Materin blagoslov. — Colletta: Storia del reame di Napoli. — Verne: Martino Paz; Cinque settimane in palone; una città galleggiante e i violatori di blocco; il capitano della giovane ardita; dalla terra alla luna; intorno alla luna; viaggio al contro della terra; l'isola ministeriosa, 3 Bde.; il chancellor; attraverso il mondo solare. — Tomšič: Vrtec pro 1877. — Bleiweis: Letopis matice slovenske pro 1878. — Nerne: Potovanje skolo sveta. — Hoffmann: Der neue Robinson; Land u. Seebilder. — Ercoliani: Valvasori Bresciani, 4 Bde. — Wisemann: Fabiola. — Schmidt: Cento racconti: — Tarchetti: Nobile follia. — Schmidt: Uova di pasqua. — Woillez: L' orfano di Mosca. — Lampugnani: Panzane educative. — Robinson svizzero, 4 Bde. — Wagner: Waldläufer. — Lausch: Das illustrierte goldene Kinderbuch. — Defoé: Robinson Crusoe. — Grimm: Märchen des Tausend und ein Tag. — Hoffmann: Jugendbibliothek, Heft 1—30. — Hempel: Deutsche Klassiker, Liefg. 596—712. — Isis 1879.

C. Pysikalisches Cabinet.

Durch Ankauf: 1.) Mikrophan, 2.) Radiometer, 3.) Achtelementige Chrombatterie, 4) Pneumatischer Telegraph, 5) Heron's rotirende Kegel, 6) Dasymeter.

Mehrere Apparate wurden in brauchbaren Stand gesetzt.

D. Naturhistorisches Cabinet.

Durch Schenkung: Ein Chamaeleon von S. Exc. dem Herrn Grafen Carl Coronini-Cronberg.

Vom Custos beigestellt und praepariert wurden: Plecotus auritus L.; Lacerta agilis Wolf; Lacerta vivipara Jacq.; Salamandra atra Laur.; Cottus gobio Cuv.; Barbus caninus C. V.; Barbus plebejus Bonap.; Cyprinus regina Bonap.; Carassius gibelio Nils.; Scardinius erythrophthalmus var. hesperidicus Hekl; Squalius cavedanus Bonap.; Sq. albus Bonap.; Sq. cephalus L.; Telestes Agassizii Heck.: T. Savignyi Bon.?; Alburnus alborella H. u. K.; Leucos aula Bonap.; L. rubella Heck.; Chondrostoma Genei Bonap.; Trutta fario L.; Anguilla fluviatilis Agas.; Petromyzon Planeri Bl.; Porcellio scaber Latr.; Cymothoa sp.; Ascaris lumbricoides L.; Taenia solium L.; Eledone moschata Lam.

Durch Ankauf: Zu den vorhandenen botanischen Modellen wurden weiters angeschafft:

Siliqua Brassicae Napi; Legumen Pisi sativi; Avena sativa; Ribes Grossularia; Taxus baccata; Aconitum Napellus; Oenothera biennis; Sedum acre; Valeriana officinalis; Succisa pratensis; Atropa Belladonna; Primula officinalis; Chenopodium album; Galanthus nivalis; Colchicum autumnale. Equisetum limosum fruct. mit Sporen und Schleudern; Pteris serrulata.

Eine Vogeleier-Sammlung von 97 Arten. — Jahrbuch d. zool. bot. Gesellschaft. Wien 1878.

E. Geometrisches Cabinet.

Durch Ankauf: Ein grosser Transporteur aus Ahornholz. — Ein zwei Meter langes Tafellineal in Centimeter getheilt. — Zwei Tafelzirkel in Messingfassung. — Ein Ellipsen-, ein Parabel- und ein Hyperbellineal für die Schultafel.

F. Geographisches Cabinet.

Durch Ankauf: Falke: Hellas u. Rom. 10 Hft. — Kiepert: physik. Wandkarte von Europa, Asien u. Australien. — Wenz: Materialien und Kartennetze für den geograph. Unterricht.

G. Für das chemische Laboratorium:

Durch Ankauf: Eine Smee'sche Batterie mit 8 Elementen.— Röhren und Pfropfen aus Kautschuk. — ein Dreiweghahn aus Hartkautschuk. — 4 Goldschlägerhaut-Ballons. — Reagentien und Präparate. — Chemisches Central-Blatt (1878). — Journal für praktische Chemie (1878). — Jahresbericht aus der chemischen Technologie v. R. Wagner (1877).

H. Zeichensaal.

Durch Schenkung: Roller, Formensammlung zum Elem. Unterricht im freien Zeichnen; Freiwirth, Methode zum 8 stündg. Schreibunterrichte; von Herrn Paternolli.

Durch Ankauf: Andel: Flachornament Hft. 3—5. — Hübler: Musterblätter Hft. 1. 2. — Bräuer: Vorlegeblätter. — Zahn: Musterblätter u. Vorlagen. — Storck: kunstgewerbl. Vorlegeblätter, Hft. 12.— Grandauer: der Regelkopf. — 12 Modelle.

8. Maturitätsprüfung.

8. Maturitätsprüfung.

Von den im letzten Jahresberichte genannten 6 Abiturienten wurden Prister Victor mit Auszeichnung, Bianchi Anton und Nachtigall Karl einfach für reif erklärt. 1 Maturant wurde auf 1 Jahr reprobirt, 1 trat während der Prüfung zurück; dem Schüler Navajolli Alois ward eine Wiederholungsprüfung aus Geographie-Geschichte gestattet und selbe am 6. October v. J. mit gutem Erfolge bestanden.

Ausserdem meldeten sich nach den Ferien der im Julitermine zurückgetretene Abiturient Peterlunger Richard, sowie der absolvirte Septimaner Lapanja Johann zur Matura, und wurden beide im October v. J. bei der unter dem Vorsitze des k. k. Landesschulinspectors Herrn Anton Klodic abgehaltenen Reifeprüfung approbirt.

Im heurigen Schuljahre meldeten sich die Septimaner Bernardis Vincenz, Borghesaleo Anton, Corgnolan Alois, Franz Emil, Kopriva Ferdinand und Rustia Josef zur Matura.

Die schriftlichen Prüfungen wurden am 16.—20. Juni abgehalten; die hiebei zu lösenden Fragen waren folgende:

Aus dem Deutschen:

Wodurch erlangen die Völker welthistorische Bedeutung?

Aus dem Französischen:

Rodolphe de Habsbourg, v. Le Bas.

Aus dem Italienischen:

Si ragioni sull' eccellenza ed importanza della vista umana e sugli istrumenti che l' uomo inventò per ingrandirla o migliorarla.

Aus dem Slovenischen:

Rimska moc v starem in srednjem veku, loje, železna in duševna moč Rima.

Aus der Mathematik:

1. Es ist die Parabelgleichung $y^2 - 10y - 6x + 7 = 0$ zu construiren, ihre Scheitelgleichung aufzustellen und die Berührungsgrössen des Punktes, dessen Coordinaten ($x_1 = b$, $y_1 = b$) die Scheitelgleichung befriedigen, zu rechnen.

2. Eine Jahresrente von 1800 fl. durch 30 Jahre zahlbar, soll in eine grössere auf 20 Jahre beziehbar umgewandelt werden; wie gross wird dieselbe bei 4½ % Zinseszinsen sein?

2. Ein regelm. Achteck sammt dem umgeschriebenen Kreise dreht sich um eine in seiner Ebene liegende und zum Diameter parallele Axe; wie gross ist das Volumen eines jeden der beiden Rotationskörper, wenn der Abstand der Rotationsaxe vom Centrum 2, und eine Seite des Achteckes 1 beträgt.

Aus der darstellenden Geometrie:

1. Unter Voraussetzung von Parallelbeleuchtung soll von einem gleichseitigen Cylinder, dessen Basis durch die Punkte

$$\left.\begin{array}{l}(a_1)=7\text{ cm}\\(a_2)=3\cdot5\text{ „}\\(a_3)=2\text{ „}\end{array}\right\}a,\quad\left.\begin{array}{l}(b_1)=1\cdot5\text{ cm}\\(b_2)=7\cdot5\text{ „}\\(b_3)=4\text{ „}\end{array}\right\}b,\quad\left.\begin{array}{l}(c_1)=4\text{ cm}\\(c_2)=2\text{ „}\\(c_3)=7\text{ „}\end{array}\right\}c$$

geht, der Selbstschatten sowie auch der Schlagschatten auf die Bildebene construirt werden.

2. An einer hohlen Halbkugel, deren innere Fläche von dem orthog. projicirenden Auge Zwei gesehen wird, sind unter Voraussetzung von Parallelbeleuchtung die sich ergebenden Schattenconstructionen auszuziehen.

3. Von einem Octaëder, welches mit einer Seitenfläche in der Grundebene liegt, ein gefälliges perspectivisches Bild zu construiren.

Die Resultate der auf den 26. bestimmten mündl. Prüfung werden im nächsten Jahre veröffentlicht werden.

Von den heurigen Abiturienten zählten 4 18, 1 19 und 1 20 Jahre; hievon hatten 3 7 und 3 8 Jahre an der Mittelschule zugebracht; von den vorjährigen Maturanten wandten sich 5 der Technik, 1 dem Lehrfache zu.

---

9. Chronik.

Das Schuljahr wurde in üblicher Weise eröffnet und geschlossen; dem Beginne des Unterrichtes gingen die Aufnahms- und Wiederholungsprüfungen voraus.

Im Lehrkörper fanden seit Herausgabe des letzten Programmes folgende Veränderungen statt.

An Stelle des mit Schluss des vorigen Schuljahres aus dem Verbande des Lehrkörpers geschiedenen Lehrers Ernst Lindenthal wurde mit Erlass des k. k. Land. Schulr. vom 26. September 78 Z. 846 der geprüfte Lehramtscandidat Josef Zian als Supplent in Verwendung genommen. — Der durch Pensionirung des Prof. Kos erledigte Lehrposten für Physik ward mittelst h. M. E. v. 29. 8. 78 Z. 13732 dem Professor der aufgelassenen Lehrerinnenbildungsanstalt in Klagenfurt Dr. Cajetan Dittl verliehen. — Durch die h. o. Erlässe vom 17. 10. 78 Z. 919, 28. 12. 78 Z. 1123 und 24. 6. 79 Z. 295 wurden die Lehrer Justus Hendrych, Franz Plohl und Johann Tauer unter Zuerkennung des Professortitels definitiv im Lehramte bestätiget. — Durch Allerhöchste Entschliessung vom 29. 12. 78 wurde dem Berichterstatter der Titel einer k. k. Schulrates verliehen.

Am 14. November verschied nach längerem Leiden im 64. Lebensjahre der Schuldiener Friedrich Marzolla; am 16. gab die Anstalt dem Verstorbenen, welcher der Realschule durch 14. Jahre treu und redlich gedient hatte, das letzte Geleite.

Das erste Semester wurde am 22. März geschlossen, das zweite am 28. d. M. begonnen.

Vom 21.—23. April wurde die Anstalt durch die Inspection des k. k. Landesschulinspectors Herrn Dr. Ernst Gnad beehrt.

Der 24. April, welcher alle Völker Oesterreichs zu freudigen Kundgebungen für unser **Hohes Herrscherhaus** begeisterte, ward auch von unserer Anstalt in festlicher Weise begangen. Nachdem schon am vorangehenden Sonntage der Religionslehrer in der Kirche eine vorbereitende Ansprache gehalten, wurde der Gedenktag selbst durch ein solennes Hochamt unter Absingung der Volkshymne gefeiert. Während nun die Schüler den Tag über an den von der Stadt veranstalteten Festlichkeiten theilnahmen, vereinigte sich abends die Oberrealschule mit dem Obergymnasium zu einem grossartigen Fackelzuge, welcher der ganzen Feier einen würdigen Abschluss gab. Dieser Fackelzug, dem der commandirende General Herr Leo R. v. Schauer über Ansuchen der Directoren die Militär-Capelle beizugeben so gütig war, begab sich nach Anbruch der Nacht von der Realschule zur k. k. Bezirkshauptmannschaft, von wo er sich nach Absingung der Volkshymne und begeisterten Hochrufen auf das **vielgeliebte Kaiserpaar** durch die Hauptstrassen der Stadt zur Anstalt zurückbewegte. — Kein Miston störte die erhabene Feier, welche in allen Stücken als gelungen zu bezeichnen ist und eine um so höhere Bedeutung hat, als sie durchaus der freien Initiative der Realschüler entsprang und daher für die patriotische Gesinnung unserer Jugend das erfreulichste Zeugnis abgibt.

Der 1. Mai ward den Schülern in gewohnter Weise freigegeben.

Die kirchlichen Uebungen wurden im Sinne der h. Min. Verord. vom 5. April 70 Z. 2916 abgehalten.

Der Unterricht erlitt heuer durch öftere Erkrankungen im Lehrkörper häufige Störungen, welche mitunter um so eingreifender waren, als zu wiederholten Malen die Verhinderungen zweier, ja selbst dreier Lehrer zusammenfielen. Besonders hart ward in dieser Richtung Prof. Cebular betroffen, welcher anlässlich eines hartnäckigen Halsübels der Schule wiederholt entzogen wurde und schliesslich erst durch einen einmonatlichen Urlaub die endliche Herstellung erlangte. — Unter den Schülern war der Gesundheitszustand im allgemeinen nicht ungünstig; doch ist auch heuer ein Todesfall zu verzeichnen, indem der vorjährige Tertianer Franz Rossi, welcher schon das ganze Schuljahr hindurch krankheitshalber der Schule fern geblieben war, am 8. Juli seinem Leiden erlag; am 10. erwies die Anstalt dem Dahingeschiedenen die letzte Ehre.

10. Verfügungen der vorgesetzten Behörden.

1. u. 2. Erl. des h. k. k. U. M. v. 16. 6. 78 Z. 4103 u. v. 17. 1. 79. Z. 18618, laut deren der Besuch der Landessprachen seitens der Schüler zwar dem freien Ermessen der Eltern oder Vormünder anheimgestellt, die aus denselben erhaltenen Noten aber bezüglich Feststellung der allg. Fortgangsclasse den obligaten Fächern vollkommen gleich zu halten sind.

3. Erl. des h. k. k. U. M. v. 4. 11. 78 Z. 17722, wonach auch für die halbe Schulgeldbefreiung aus Sitten u. Fleiss die 2 besten Noten erforderlich sind u. jede Befreiung überhaupt nur so lange fortzudauern hat, als die zu deren Erlangung notwendig gewesenen Bedingungen fortbestehen.

4. Erl. des h. k. k. U. M. v. 18. 1. 79 Z. 768, vermöge dessen die III. allg. Fortgangsclasse nur jenen Schülern zu ertheilen ist, welche mindestens in der Hälfte der obligaten Gegenstände ungünstige Noten erhalten, wobei 1 „ganz ungenügend" 2 „nicht genügend" gleich zu halten ist.

5. Erl. des h. k. k. U. M. v. 15. 4. 79 Z. 5607, womit der neue Normal-Lehrplan für Realschulen veröffentlicht wird.

6. Erl. des h. k. k. U. M. v. 30. 4. 79 Z. 4714 infolge dessen das obligate Turnen für die Bestimmung der II. oder III. allg. Fortgangsclasse nicht einzurechnen ist.

7. Erl. des h. k. k. U. M. v. 2. 5. 79 Z. 6531, womit dem Lehrkörper die ehrende Mittheilung wird, dass **Seine Majestät** die von der Anstalt anlässlich der Feier der silbernen Hochzeit **Ihrer Majestäten** dargebrachten patriotischen Kundgebungen wohlgefällig zur Kenntnis zu nehmen geruhten.

8. Erl. des h. k. k. U. M. v. 14. 6. 79 Z. 8238, laut dessen die Noten aus Kalligraphie u. Freihandzeichnen zur Bestimmung der allg. III. Fortgangsclasse nur ausnahmsweise anzurechnen sind.

---

11. Kundmachung,

bezüglich des nächsten Schuljahres.

Das nächste Schuljahr beginnt am 1. October; die Aufnahme der Schüler findet am 27.—30. September von 9—12 vormittags und (den 28. ausgenommen) von 3—5 Uhr nachmittags in der Directionskanzlei statt.

Jeder neu eintretende Schüler hat sich unter Abgabe seines gehörig ausgefüllten Nationales*) in Begleitung seiner Eltern oder deren

*) Die Formulare dafür sind beim Schuldiener zum Preise von 1 kr. per Stück zu haben.

Stellvertreter beim Director zu melden und unbedingt seinen legalen Tauf- oder Geburtsschein beizubringen; jene Schüler, welche bisher eine öffentl. Volksschule besucht hatten, haben laut h. Min. Erl. v. 7. 4. 78. z. 5416 ein diesbezügliches Frequentationzeugnis und Studirende, welche bereits die Mittelschule besuchten, ihr letztes Semestralzeugnis vorzuweisen, das bei von auswärts kommenden die Bestätigung der vorschriftsmässig erfolgten Abmeldung seitens der betreffenden Direction enthalten muss.

Zur Aufnahme in die erste Classe ist der Nachweis über das vollendete oder in dem 1. Quartale des laufenden Schuljahres zur Vollendung gelangende 10. Lebensjahr vorgeschrieben. Ausserdem ist hierzu die Ablegung einer Aufnahmsprüfung erforderlich, bei welcher laut hoher Ministerial Verordn. vom 14. März 1870 Zahl 2370 folgende Anforderungen gestellt werden: *Jenes Mass von Wissen in der Religion, welches in der ersten 4 Jahrescursen der Volksschule erworben werden kann, Fertigkeit im Lesen und Schreiben der Unterrichtssprache und eventuell der lateinischen Schrift, Kenntniss der Elemente aus der Formenlehre der Unterrichtssprache, Fertigkeit im Analysiren einfacher bekleideter Sätze, Bekanntschaft mit den Regeln der Orthographie und Interpunction sowie richtige Anwendung derselben beim Dictandoschreiben, Uebung in den 4 Grundrechnungsarten in ganzen Zahlen.*

Alle Schüler haben den Bibliotheksbeitrag von 80 kr., die neu eintretenden ausserdem noch 2 fl. Aufnahmstaxe zu entrichten.

Zur Aufnahme in die Vorbereitungsclasse ist nur der Nachweis über das vollendete oder im I. Quartale des betreffenden Schuljahres zur Vollendung gelangende 9. Lebensjahr beizubringen; Taxen sind in diesem Falle nicht zu entrichten. Die Aufnahme ist jedoch hier nur eine provisorische und können Schüler, deren Vorbildung sich als ungenügend erweisen sollte, im Sinne des h. Min. Erl. vom 20. Aug. 70 Z. 7648 nach Monatsfrist an die Volksschule zurückgewiesen werden.

Nach Ablauf der oberwähnten Frist kann die Aufnahme nur über Ermächtigung des k. k. Landesschulrates stattfinden.

ANHANG

Location der zum Aufsteigen für reif erklärten Schüler.*)

Vorbereitungsclasse A.

1. **Michellini Johann.**
2. Beučer Franz.
3. Kabalao Peter.
4. Resen Alois.
5. Zorzini Peter.
6. Spazzapan Peter.
7. Gasser Josef.
8. Bodigoj Conrad.
9. Dugulin Johann.
10. Filiput Zurani.
11. Ellard Josef.
12. Franceschini Alois.
13. Nadale Wilhelm.
14. v. Milost Silvius.
15. Nigris Paul.
16. Kovačič Karl.
17. Palla Fortunat.
18. Quain Franz.
19. Bradaschia Victor.
20. Lončarič Anton.
21. Polšak Conrad.

Vorbereitungsclasse B.

1. **Hurdálek Gustav.**
2. **Clement Heinrich.**
3. **Schreiber Egid.**
4. **Ponton Josef.**
5. **Mosettig Paul.**
6. Strechel Josef.
7. Sabatti Ignaz.
8. Madriz Eneas.
9. Peteani Karl.
10. Pelizon Johann.
11. Boschin Josef.
12. Bresca Silvius.
13. Roset Sebastian.
14. Samiz Heinrich.
15. Licen Johann.
16. Gorianz Vincenz.
17. Fidri Anton.
18. Poliak Marius.
19. Budau Emil.
20. Branz Ernst.
21. Jaconcig Josef.
22. Vittori Jacob.
23. Grudina Johann.
24. Brass Eugen.
25. Kodermatz Clemens.
26. Baron Baselli Franz.
27. Bradaschia Alois.
28. Velicogna Isidor.
29. Happacher Canzian.
30. Planiscig August.
31. Franzoni Remigius.
32. Rubbia Clemens.
33. Bressan Emil.

*) Die mit fetter Schrift gedruckten sind Vorzugsschüler.

I. Classe.

1. **Plesnicar Benedict.**
2. **Kaus Franz.**
3. **Pitteri Egid.**
4. **Pacher Andreas.**
5. Slocovich Hermann.
6. Berginec Andreas.
7. Sommariva Theodor.
8. Paulini Karl.
9. Kersevani Anton.
10. Millok Franz.
11. Pecenko Josef.
12. Faidutti Heinrich.
13. Savorgnani Victor.
14. Goffo Isidor.
15. Nitsch Ludwig.
16. Brumat Josef.
17. Failutti Anton.
18. Czar Georg.
19. Grübler Rudolf.
20. Hübel Franz.
21. Bradicich Anton.
22. Kodrich Anton.
23. Seculini Ferdinand.
24. Defranceschi Johann.
25. Perco Andreas.
26. Albisser Victor.

II. Classe.

1. **Albrecht Emil**
2. **Coceancig Jacob.**
3. **Fabris Engel.**
4. **Ussai Anton.**
5. Brosch Johann.
6. Rosanz Eduard.
7. Pecenko Albert.
8. Kovacic Friedrich.
9. Vinzi Franz.
10. Spongia Marius.
11. De Ré Alois.
12. Kornmüller Emil.
13. Schreiber Karl.
14. Presel Johann.
15. Trusnovic Rudolf.
16. Panzera Anton.
17. Jellen Karl.
18. Berzé Ludwig.
19. Hartmann Alois.
20. Czar Emil.
21. Romano Anton.
22. Streinz Josef.

III. Classe.

1. **Huber Alois.**
2. **Kranjec Johann.**
3. **Licen Karl.**
4. Fumis Georg.
5. Venier Valerian.
6. Forcessin Clemens.
7. Fortis Oscar
8. Macutz Eduard.
9. Pan Romeo.
10. Avanzini Karl.
11. Prister Heinrich.
12. Gorian Dominik.
13. Dinarich Franz.
14. Gortani Adolf.
15. Licen Max.
16. Nanut Victor.
17. Genuizzi August.
18. Delchin Josef.
19. Nardini Adolf.
20. Luxa Victor.
21. v. Szüts Karl.
22. Jasnig Friedrich.

IV. Classe.

1. Bertossi Roger.
2. Furlani Ludwig.
3. Sussmel Anton.
4. Bresnig Ludwig.
5. Kaucic Eugen.
6. Frantz Arthur.
7. Dralka Victor.
8. Goglia Victor.
9. Simonis Josef.
10. Umfer Vincenz.
11. Jurissovich Anton.
12. Sellak Alois.
13. Paternolli Guido.
14. Raza Alois.
15. Ratzmann Alois.
16. Lazzar Heinrich.
17. Mreule Felix.

V. Classe.

1. **Haller Karl.**
2. **Veltzé Alois.**
3. Riaviz Eduard.
4. Negri Ernst.
5. Stein Max.
6. Avanzini Michaël.
7. Gaspari Karl.
8. Terčič Josef.
9. Colautti Nicolaus.
10. Cantarutti Alois.
11. Forcellini Lorenz.
12. Heberling Rudolf.

VI. Classe.

1. **Andriani Anton.**
2. **Stegú Anton.**
3. v. Ruepprecht Theodor.
4. Bruschina Anton.
5. Zavnik Johann.
6. Mosettig Franz.
7. Jaconcig Karl.
8. Graf Delmestri Victor.
9. Reggio Arthur.
10. Heberling Franz.
11. Pelican Emil.

VII. Classe,

1. **Franz Emil.**
2. Corgnolan Alois.
3. Borghesaleo Anton.
4. Rustia Josef.
5. Kopriva Ferdinand.
6. Bernardis Vincenz.
7. Bresnig Johann.
8. Möstl Anton.
9. Blasig Karl.

Geogr. L. v. Ferro: 31° 19′ See-Hö… Meter Geogr. B. 45′ 56 Nord.

Uebe…icht

der meteorologischen Beobachtungen im Jah… der meteorologischen Station der

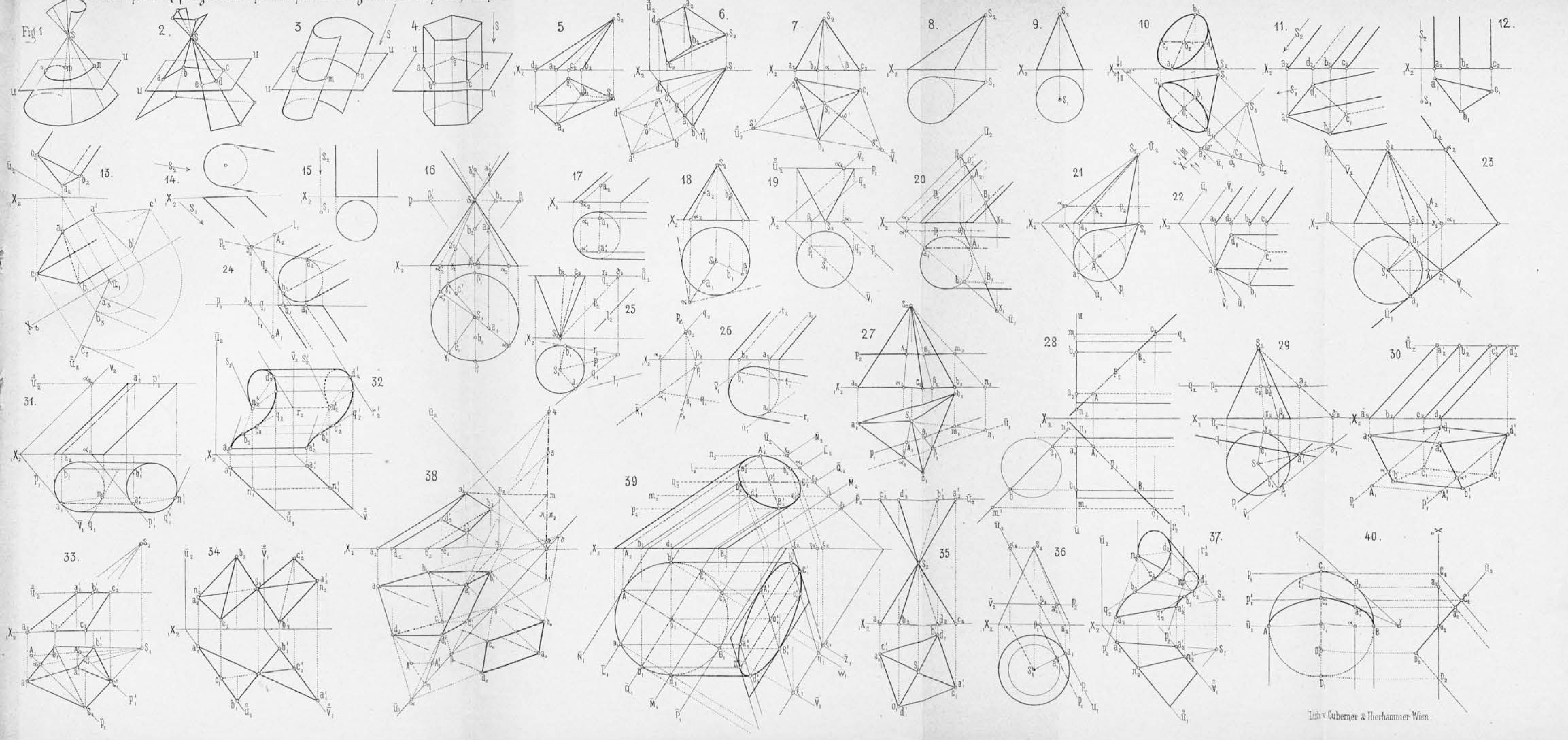
Oberre…chule Goerz.

Monat	Temperatur der Luft					Luftdruck …imetern					Mittlerer Dunst-Druck.	Feuchtigkeit der Luft in %		
	Mittel.	Max.	Tag	Min.	Tag.	Mittel	Max…	…g.	Min.	Tag.		Mittl.	Min.	Tag.
Jänner .	1.39	7.5	17.	—5.8	12.	755.72	767.…	…1.	733.7	25.	3.47	64.84	30	27.
Februar .	4.76	15.1	24.	—3.8	5.	760.83	767.…	…2.	749.9	12.	4.41	67.86	41	24.
März . .	6.71	17.2	4.	—2.3	16.	752.63	765.…	…5.	738.0	24.	4.91	65.32	30	5.
April . .	13.31	22.2	16.	5.4	3.	751.17	75…	…5.	739.0	2.	7.34	66.17	25	10.
Mai . .	18.26	26.4	15.	12.8	26.	752,37	76…	…8.	747.5	26.	10.36	69.06	31	4.
Juni . .	20.81	28.7	25.	14.1	1.	753.25	760.…	8.	743.1	15.	12.13	67.83	33	26.
Juli . .	22.75	32.4	25.	13.5	5.	751.59	759.…	…8.	744.6	26.	14.03	69.81	40	17.
August .	22.30	29.3	30.	17.1	26.	751.04	755.…	9.	740.7	24.	14.10	71.00	39	1.
September	19.80	29.8	9.	11.8	27.	752.56	758.…	5.	741.8	26.	12.01	76.23	37	3.
October .	13.93	21.0	1.	3.6	31.	753.67	763…	3.	745.0	30.	9.93	83.19	47	4.
November	7.47	16.8	28.	0.0	8.	750.96	760.…	…4.	735.4	14.	6.49	82.10	43	3.
Dezember	1.67	8.6	1.	—5.4	17.	748.94	766.…	…5.	736.4	9.	4.12	77.16	49	24 u. 25.
Jahr . .	12.77	32.4	25/7	—5.8	12/1	752.89	767.…	…/2	733.7	25/1	8.28	71.71	25	10/4

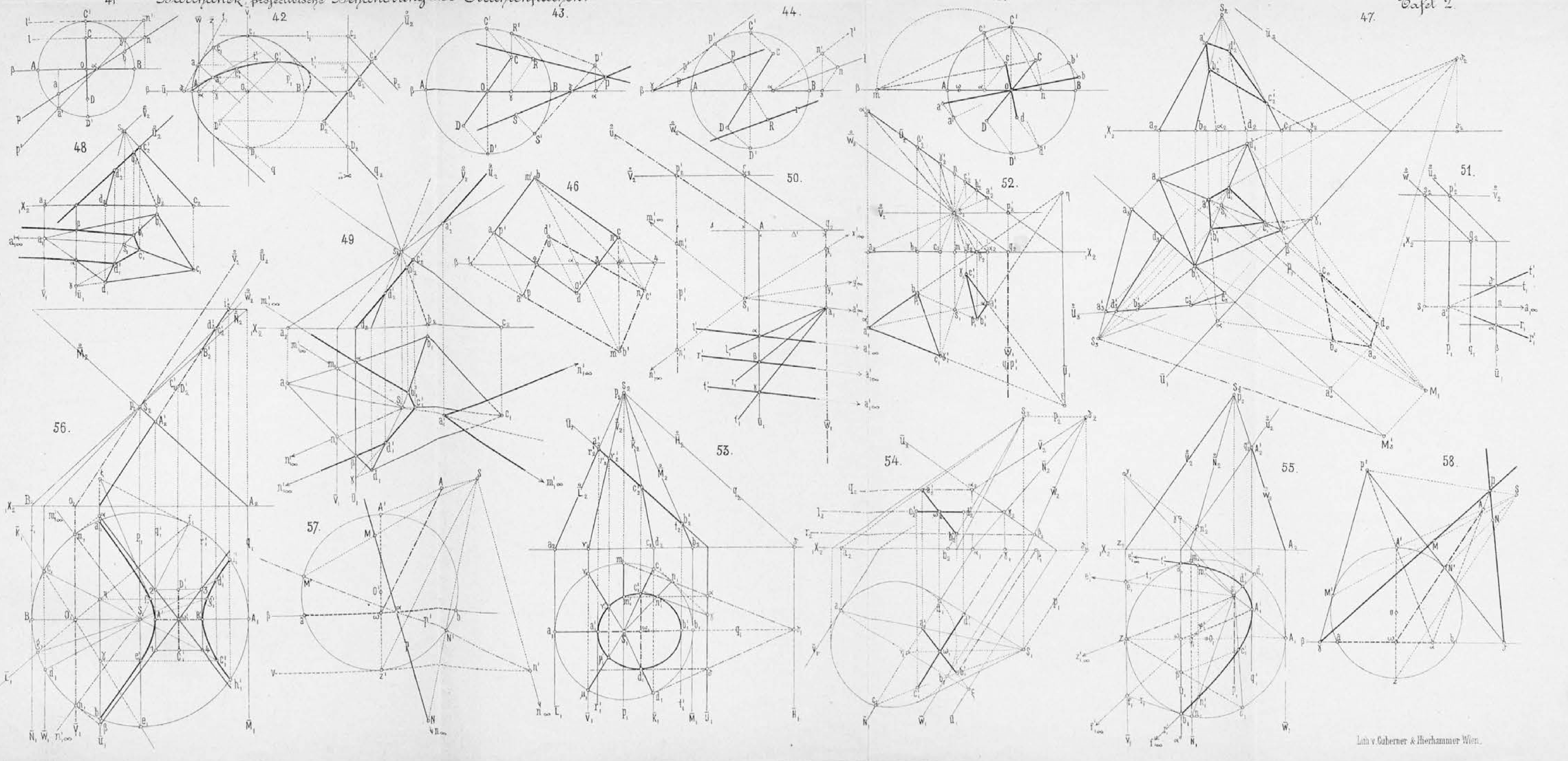
Monat	Niederschlag			Mittlere Bewölkung	Zahl der Tage mit		…dvertheilung nach Percenten								Mittlere Windstärke.
	Mon.Sume	Tag	Max. in 24 Stund.		Niederschlag	Gewitter	N.	NO.	O.	SO.	S.	SW.	W.	NW.	
Jänner .	48.10	8.	20.40	4.0	7	—	3	21	5	21	1	5	—	—	0.0
Februar .	1.10	26.	1.10	2.5	1	—	—	13.	5	12	2	7	2	—	0.9
März . .	112.70	29.	49.40	5.1	14	1	2	14	3	13	4	8	3	1	1.3
April . .	102.20	24.	37.00	5.2	14	2	—	16	4	10	8	14	—	2	0.8
Mai . .	167.30	21.	98.70	5.1	12	1	—	4	4	14	—	22	—	2	0.9
Juni . .	120.40	14.	33.00	4.7	16	4	—	14	—	20	4	16	2	—	0.8
Juli . .	217.30	2.	46.40	4.9	18	5	—	14	5	11	9	11	3	2	1.5
August .	113.40	3.	31.20	4.5	12	5	—	20	3	12	4	8	—	3	0.9
September	415,20	21.	149.20	4.6	12	5	—	29	6	16	2	10	2	2	1.1
October .	380.90	28.	78.00	6.5	23	3	—	20	7	24	9	4	3	2	1.2
November	307.30	15.	84.50	7.2	18	3	—	32	8	20	—	6	2	4	1.0
Dezember	130.80	17.	35.20	6.2	14	—	—	56	2	17	—	2	2	4	0.8
Jahr . .	2116.70	21/9	149.20	5.0	161	29	0.4	21.1	4.3	15.8	8.6	9.5	1.5	1.8	1.0

Barchanek projectivische Behandlung der Strahlenflächen

Tafel 1.



Lith. v. Guberner & Hierhammer Wien.



Lith v. Guberner & Hierhammer Wien.