

OSNOVNI NABOJ IN ŠUM

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko

Univerza v Ljubljani

PACS: 07.50.Hp, 01.65.+g

Čeprav je šum pri prenašanju sporočil nadležen, neposredno opazovanje šuma omogoči merjenje nekaterih količin. Po preprosti poti izpeljemo nekaj osnovnih enačb za šum. Kot zgled obdelamo merjenja osnovnega naboja s šumom. Ta merjenja imajo zanimivo zgodovino.

ELEMENTARY CHARGE AND NOISE

Although noise is an inconvenience in information transmission, direct observation of it enables one to measure some specific quantities. In a simple way some basic equations concerning noise are derived. As an example the measurements of elementary charge by way of noise are considered. These measurements have an interesting history.

Uvod

Številni učbeniki fizike opišejo, kako je Robert Andrews Millikan s sodelavcem v letih od 1910 do 1913 opazoval kapljice med vodoravnima ploščama kondenzatorja in izmeril osnovni naboj. Veliko manj znano je, da so v letih od 1920 do 1925 osnovni naboj izmerili tudi s *šumom*. Zanimivi način merjenja pokaže, da je lahko „šum signal“, čeprav je pri prenašanju sporočil le nadloga. Prek šuma je namreč mogoče izmeriti količine, ki se v povprečjih sploh ne pojavijo. S šumom na primer ugotovijo, da v sklenjenem električnem krogu pri zelo nizki temperaturi med superprevodnikom in navadno prevodno kovino naboj prehaja v parih $-2e_0$, če je e_0 osnovni naboj [1]. Tu ne bomo segali v kvantno fiziko, ampak se bomo v klasičnem okviru dotaknili merjenja osnovnega naboja s šumom.

Šum je prvi sistematično obravnaval leta 1918 Walter Schottky iz laboratorija družbe Siemens [2]. Zanimalo ga je delovanje vakuumskih elektronk, ki so jih začeli na veliko uporabljati. V diodi iz katode izhajajo elektroni z nabojem $-e_0$ ter potujejo proti anodi. Vsi elektroni so enaki in izstopajo iz katode in potujejo na anodo neodvisno drug od drugega. Pri tem mora biti tok nasičen, da anoda posrka vse elektrone, ki izstopijo iz katode. Pri nižji anodni napetosti prostorski naboj okoli katode zavrača elektrone in se

ti ne gibljejo neodvisno drug od drugega. V povprečju po dolgem času meri tok na anodo $\bar{I}$. V kratkem času Δt pa je povprečni tok I . V tem času bi v povprečju na anodo priteklo $\bar{I}\Delta t/e_0$ elektronov, priteče pa jih $I\Delta t/e_0$. Za število neodvisnih elektronov, ki pritečejo na anodo, velja *Poissonova porazdelitev*. Enaka porazdelitev velja tudi za število delcev, ki jih v časovni enoti izseva radioaktivni izvir. Za Poissonovo porazdelitev je značilno, da je povprečni kvadrat odmika števila delcev od povprečja enak povprečnemu številu delcev:

$$\sigma_N^2 = \overline{\left(\frac{I\Delta t}{e_0} - \frac{\bar{I}\Delta t}{e_0}\right)^2} = \frac{\bar{I}\Delta t}{e_0}.$$

Zvezo delimo z $(\Delta t/e_0)^2$ in dobimo povprečni kvadrat odmika toka:

$$\sigma_I^2 = \overline{(I - \bar{I})^2} = \bar{I}^2 - \bar{I}^2 = \frac{e_0 \bar{I}}{\Delta t}. \quad (1)$$

To je *Schottkyjeva enačba*, ki velja za *Poissonov šum*. Enačba kaže, da je šum toka, kakor imenujemo *fluktuacije toka*, to je naključne odmike toka od povprečnega toka, povezan z dejstvom, da je naboj razdeljen na nedeljive enote. Šuma ne bi bilo, če bi bilo naboj mogoče neomejeno deliti, kakor so mislili v času „električnega fluida“. Schottkyjevo ime *Schrotrauschen* in angleško ime *shot noise* opozarjata na to, da naboj sestavljajo enote, ki spominjajo na šibre ali majhne izstrelke.

Osnovne enačbe

Splošna razprava pripelje do koristnih enačb [3]. Zamislimo si fizikalni sistem, ki iz okolice sprejema med seboj enake, po času naključno porazdeljene dražljaje, ki jih imenujmo *dogodki*. Odziv sistema na dogodek opišemo z $Af(t)$, če je A *jakost odziva* in $f(t)$ *osnovni odziv* sistema. V povprečju po dolgem času se nabere B dogodkov na sekundo. V času dt' se je tako v celoti nabralo Bdt' dogodkov. Za povprečno število dogodkov ob času t'' dobimo:

$$\int_{-\infty}^{t''} BAf(t'' - t') dt' = AB \int_0^{\infty} f(t) dt, \quad (2)$$

ko v prvem integralu vpeljemo novo spremenljivko $t = t'' - t'$.

Poiščimo za ta primer še povprečni kvadrat odmika. Pri Poissonovi porazdelitvi leži ob času dt' število dogodkov med $B dt' - \sqrt{B dt'}$ in $B dt' +$

$\sqrt{B dt'}$. Odziv na te dogodke v času t'' se spremeni za $\sqrt{B dt'} Af(t'' - t')$. Prispevki iz različnih časovnih intervalov so med seboj neodvisni, zato je povprečje kvadrata odmika ob času t'' :

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{t''} B dt' A^2 f^2(t'' - t') = A^2 B \int_0^{\infty} f^2(t) dt. \quad (3)$$

Povprečni kvadratni odmik je v taki splošni zvezi že leta 1909 obdelal N. Campbell, ko je raziskoval nezvezne pojave in posebej nezveznosti pri sevanju svetlobe [4]. Zato enačbo (3) včasih imenujejo *Campbellov izrek*. Pri elektronih, ki priletijo na anodo v diodi, je $B = \bar{N} = \bar{I}/e_0$ in $A = e_0$, tako da je $AB = \bar{I}$ in $A^2B = \bar{I}e_0$.

V nadaljevanju raziščimo, kako se odzove na elektrone, ki priletijo na anodo, nihajni krog. Na diodo vzporedno priključimo kondenzator s kapaciteto C ter tuljavo z induktivnostjo L in uporom R . Ta nihajni krog ima lastno krožno frekvenco $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ in koeficient dušenja $\beta = \frac{1}{2}R/L$. Dušenje naj bo tako šibko, da lahko krožno frekvenco dušenega nihanja $\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ nadomestimo z ω_0 . Dogodek, to je oster napetostni sunek, vzbudi v krogu dušeno nihanje napetosti $(e_0/C)e^{-\beta t} \cos(\omega_0 t)$. Z osnovnim odzivom $f(t) = (1/C)e^{-\beta t} \cos(\omega_0 t)$ dobimo $\int_0^{\infty} f^2(t) dt = \int_0^{\infty} (1/C)^2 e^{2\beta t} \cos^2(\omega_0 t) dt = (L/C^2 R)((R/\omega_0 L)^2 + 2)/((R/\omega_0 L)^2 + 4) \approx L/(2C^2 R)$. Z $A^2B = e_0 \bar{I}$ sledi povprečni kvadrat odmika napetosti:

$$\sigma_U^2 = \frac{e_0 \bar{I} L}{2C^2 R}. \quad (4)$$

V primeru, da velja $\bar{U} = 0$, je $\sigma_U^2 = \bar{U}^2$. V magnetnem polju v tuljavi nakopičena energija je v povprečju enaka v električnem polju v kondenzatorju nakopičeni energiji: $L\bar{I}^2 = C\bar{U}^2$. S tem iz enačbe (4) sledi za povprečni kvadrat odmika toka:

$$\sigma_I^2 = \frac{e_0 \bar{I}}{2CR}. \quad (5)$$

Enačbo (5) izkoristimo, da pridemo do spektralne gostote. Opremo se na *Parsevalovo enačbo*, ki povezuje odziv $f(t)$ z njegovo Fourierovo transformiranko $F(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$:

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt = 2 \int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

Pri tem smo dopustili možnost, da opišemo odziv s kompleksno funkcijo $f(t)$. V izrazu $|F(\omega)|^2$ spoznamo spektralno gostoto. Z enačbo (3) sledi:

$$\Delta\sigma_I^2 = 2A^2B\Delta\nu = 2e_0\bar{I}\Delta\nu. \quad (6)$$

To ustreza enačbi (1), če obratno vrednost časa opazovanja nadomestimo z dvojno širino pasu frekvenc, na katere se odzove nihajni krog: $1/\Delta t = 2\Delta\nu$. Spektralna gostota ni odvisna od krožne frekvence, spekter Poissonovega šuma je *bel*.

Enačba (6) nas napelje na daljši račun. Kompleksno napetost U kompleksna impedanca $Z(\omega)$ poveže s kompleksnim tokom I takole: $U = Z(\omega)I$. Iz zveze sledi za povprečni kvadratni odmik napetosti: $\sigma_U^2 = 2e_0\bar{I} \int_0^\infty |Z|^2 d\nu = (e_0\bar{I}/\pi) \int_0^\infty |Z|^2 d\omega$. Tuljava z uporom ima impedanco $R + i\omega L$ in kondenzator impedanco $1/(i\omega C)$. Obratna vrednost impedance njune vzporedne vezave je $1/Z = 1/(R + i\omega L) + i\omega C$. To da impedanco $Z = (R + i\omega L)/(1 - \omega^2 LC + i\omega CR)$. Za kvadrat njene absolutne vrednosti dobimo $|Z|^2 = (R^2 + \omega^2 L^2)/((1 - LC\omega^2)^2 + C^2 R^2 \omega^2) = (x^2 + r^2)G(x)/(\omega_0^2 C^2)$, če vpeljemo $x = \omega/\omega_0$ in $r = R/\omega_0 L$ ter $G(x) = 1/((1 - x^2)^2 + r^2 x^2)$. Nazadnje imamo $\sigma_U^2 = (e_0\bar{I}/\pi\omega_0 C^2) \int_0^\infty (x^2 + r^2)G(x) dx$.

V integralu $\int_0^\infty x^2 G(x) dx$ vpeljemo novo spremenljivko $1/x$ in ugotovimo, da je enak integralu $\int_0^\infty G(x) dx$. To pripelje do $\sigma_U^2 = (e_0\bar{I}/\pi\omega_0 C^2)(1 + r^2) \int_0^\infty G(x) dx$. Integral izračunamo po običajni poti tako, da kvadratni izraz v imenovalcu razcepimo, in dobimo za vrednost integrala $\frac{1}{2}\pi/r$. To da $\sigma_U^2 = e_0\bar{I}l(1 + r^2)/(2C^2 R)$. V nihajnem krogu s šibkim dušenjem smemo r^2 zanemariti proti 1 in sledi enačba (4). S tem smo si pripravili vse potrebne enačbe.

Schottky je tok skozi diodo in nihajni krog razvil v Fourierovo vrsto in naletel na integral $\int_0^\infty G(x) dx$. Zanj pa je izračunal napačno vrednost $2\pi/r^2$ [2]. To je povzročilo precej zapletov [5]. Po napačnem računu naj bi veljalo $\sigma_I^2 = e_0\bar{I}\omega_0$, kar bi pomenilo, da je spektralna gostota odvisna od frekvence in Poissonov šum ni bel. Napako je popravil in navedel pravo vrednost integrala $\pi/(2r)$ leta 1922 John Bertrand Johnson iz družbe Bell

Telephone [6]. Odklonil je tudi Schottkyjev razvoj neurejeno se spreminjajočega toka v Fourierovo vrsto. Popravek je pripeljal do znane enačbe (4). Schottky je popravek sprejel in navedel bližnjico do prave vrednosti integrala [7]. Ob tem je popravil še drugo napako iz svojega prvega članka.¹

Merjenje

Schottky je že spočetka načrtoval, da bi z merjenjem šuma ugotovili osnovni naboj. Merjenja se je leta 1920 lotil njegov asistent C. A. Hartmann v Raziskovalnem laboratoriju družbe Siemens & Halske [4]. Meril je Poissonov šum posebne za ta namen izdelane diode pri frekvencah od 250 do 2500 s⁻¹ ob pettisočkratni ojačitvi. Spremenljivo jakost zvoka, ki ga je dal ojačeni šum v telefonski slušalki, je primerjal z jakostjo zvoka, ki ga je dal znani izmenični tok z enako frekvenco. Tako je kot prvi opazoval šum. Z napačno Schottkyjevo vrednostjo integrala pa je dobil od stokrat do tisočkrat premajhen osnovni naboj. Izid je tem bolj odstopal od pričakovanega osnovnega naboja, čim večja je bila frekvenca. Hartmann je raziskal, ali utegne biti velikega odstopanja krivo uporabljeno vezje. Nazadnje se je pridružil Schottkyjevi razlagi, da elektroni iz katode izstopajo v gručah in niso neodvisni drug od drugega. Enako kot Schottky je možnost, da obstajajo delci z delom osnovnega naboja, omenil samo mimogrede. Schottky je skoraj obupal nad nadaljnjim obravnavanjem šuma. To je eden od maloštevilnih primerov v razvoju fizike, ko je računska napaka pripeljala do resnih načelnih težav in za dalj časa zavrla razvoj.

Težave je odpravilo Johnsonovo opozorilo [6]. Johnson je tudi ugotovil,

¹Po zanimivi poti je enačbo (4) izpeljal R. Fürth [8]. Privzel je, da elektroni prihajajo v enakomernih časovnih razmikih τ na anodo, ki je povezana z elektrodo kondenzatorja. V nihajnem krogu sproži vsak elektron nihanje naboja. Opazujmo elektron n in elektron $n - 1$ pred njim:

$$e = e_0 e^{(R/2L)(t-n\tau)} \sin(\omega_0(t-n\tau)) + e_0 e^{(R/2L)(t-(n-1)\tau)} \sin(\omega_0(t-(n-1)\tau)) + \dots$$

Kdo bi ugovarjal, češ da naboj ne more biti manjši od osnovnega naboja. Vendar je treba upoštevati, da gibanje elektrona z influenco izzove premik drugih elektronov v sosednjih prevodnikih. Nihanja so nekoherentna, zato seštejemo povprečne kvadrate:

$$\overline{e^2} = \frac{1}{2} e_0^2 \sum_n e^{-(R/L)n\tau} = \frac{1}{2} e_0^2 \frac{1}{1 - e^{-R\tau/L}} = \frac{1}{2} e_0^2 \frac{L}{R\tau} = \frac{e_0 \bar{I} L}{2R}.$$

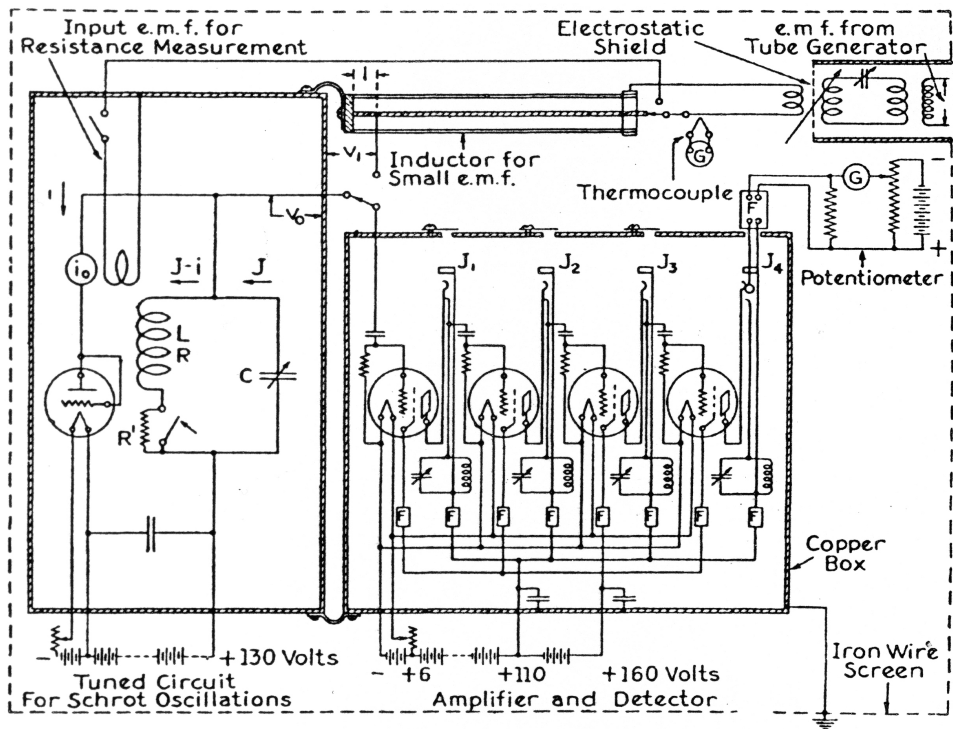
Upoštevali smo izraz za vsoto geometrijskega zaporedja, šibkost dušenja in zvezo $e_0/\tau = \bar{I}$. Enačba $\sigma_e^2 = C^2 \sigma_U^2$ pripelje do enačbe (4).

da Hartmannova merjenja s popravljeno enačbo pri veliki frekvenci dajo pravo velikostno stopnjo osnovnega naboja. Fürth je kritiziral primerjavo dveh različnih vrst zvokov prek slišnega vtisa [8] in menil, da je za odvisnost od frekvence kriva značilnost ušesa. Na novo je analiziral Hartmannove rezultate in enako kot Johnson ugotovil, da dajo pravo velikostno stopnjo osnovnega naboja.

Ponovnega merjenja osnovnega naboja s Poissonovim šumom sta se leta 1925 lotila A. W. Hull in N. H. Williams iz Raziskovalnega laboratorija družbe General Electric [9]. Zanimalo ju je, kolikšen del šuma v tedanjih radijskih sprejemnikih odpade na Poissonov šum. Ugotovila sta, da je treba upoštevati le Poissonov šum. Dotlej se je elektronika precej razvila in sta lahko merila pri višji frekvenci 0,75 MHz. Na plošči kondenzatorja v nihajnem krogu, povezanem z diodo, sta priključila štiristopenjski ojačevalnik. V njem sta na nov način uporabila štiri triode iz vrste, ki so jo kot eno od prvih razvili v General Electric (slika 1). Nihajni krog in ojačevalnik sta z bakreno kletko in še s kletko iz železne mreže zaščitila pred motnjami iz okolice. Ojačeno napetost sta usmerila in merila z enosmernim merilnikom na območju, na katerem je bil odklon sorazmeren s σ_U^2 . Merila sta efektivno napetost navzdol do 10^{-4} V. Nihajni krog se je odzval na šum na ozkem frekvenčnem pasu in ojačevalnik ga je ojačil, a ne vseh frekvenc na pasu enako. Zato sta vpeljala ojačevalni koeficient kot $\mathcal{O}^2 \int_0^\infty x^2 G(x) P(x) dx / (\pi/2\pi)$. Pri tem je $\mathcal{O}$ največje ojačenje in $P(x) < 1$ upošteva frekvenčno odvisnost, ki sta jo ugotovila z merjenjem in integral numerično izračunala. Skrbno sta izmerila elemente nihajnega kroga R , L , in C , kar je bila dokaj zahtevna naloga. Koeficient $\mathcal{O}$ sta določila in hkrati umerila enosmerni merilnik tako, da sta na vhod ojačevalnika priključila sinusno napetost z znano efektivno vrednostjo in krožno frekvenco ω_0 . Za osnovni naboj sta dobila $1,586 \cdot 10^{-19}$ As, kar je bilo le za 0,3 % manj od Millikanovega izmerka $1,591 \cdot 10^{-19}$ As. Omenila sta, da bi bilo mogoče precej izboljšati natančnost.

Zatem nekaj časa ni bilo poskusov, da bi osnovni naboj izmerili s šumom. V tem času pa so pogosto merili na območju prostorskega naboja, na katerem anoda ne posrka vseh elektronov. Že Hull in Williams sta opozorila, da je šum v tem primeru manjši kot pri nasičenem toku. Te rezultate je bilo mogoče neposredno izkoristiti pri gradnji elektronk.

Novega merjenja se je lotil L. Stigmark z Oddelka za fiziko univerze v Lundu leta 1952 [10]. V tem času je elektronika naredila še korak naprej.



Slika 1. A. W. Hull in N. H. Williams sta leta 1924 opazovala šum na posebej za to izdelani diodi (skrajno levo). Med anodo in katodo sta zvezala kondenzator s kapaciteto C ter tuljavo z induktivnostjo L in uporom R (levo). Kondenzator sta priključila na vhod štiristopenjskega ojačevalnika (desno). V ojačevalniku sta uporabila elektronke, ki so bile tedaj pomembna novost, a so jih do danes popolnoma izpodrinili polprevodniški elementi. Napravo sta zaprla v bakrene škatle in obdala z železno mrežo, da sta se izognila motnjam [9].

Uporabil je posebno diodo z dolgo volframsko katodo, ki jo je kot obroč obdajala anoda. S tem je dosegel, da povečanje anodne napetosti v diodi ni vplivalo na izid merjenja. V posebej za ta namen izdelanem ojačevalniku, ki je imel tri med seboj ločene in proti zunanjim motnjam zaščitene dele, je uporabil sedem pentod. Delal je pri frekvencah okoli 0,6 MHz. Ojačeno napetost je nazadnje meril s termoelementom. Podobno kot Hull in Williams je merilnik umeril z izmenično napetostjo z znano efektivno vrednostjo pri frekvenci ω_0 . Upošteval je tudi *termični šum*. Vsakemu nihajnemu načinu v povprečju ustreza energija $k_B T$ z Boltzmannovo konstanto k_B , kar pripelje do $\sigma_{UT}^2 = 4k_B T R \Delta\nu$. Impedanca nihajnega kroga $(R + i\omega L)/(1 - \omega^2 LC +$

$i\omega CR$) v resonanci pri $\omega = \omega_0$ preide v $(R + i\omega L)/(i\omega CR)$ z realnim delom $R_r = L/(CR)$. Za šum v nihajnem krogu, ki se na frekvenčnem pasu s širino $4R_rC$ vede kot upor R_r , neodvisen od frekvence, sledi po zgledu (4) $\sigma_{UT}^2 = 2e_0\bar{I}R_r^2/(4R_rC) = 4k_BTR_r/(4R_rC) = k_BT/C$. To je bilo treba dodati šumu σ_U^2 . Tudi Stigmark je skrbno izmeril elemente nihajnega kroga R , L , in C . Nazadnje je dobil za osnovni naboj $1,5991 \cdot 10^{-19}$ As, kar se na 0,2 % ujema z današnjo vrednostjo $1,602176487 \cdot 10^{-19}$ As.

Pozneje merjenje osnovnega naboja s šumom ni moglo tekmovati z načinom, pri katerem dobijo osnovne konstante z metodo najmanjših kvadratov iz večjega števila merskih podatkov. Merjenja osnovnega naboja s šumom so se preselila v študentske laboratorije [11]. Pri tem so elektronke nadomestili polprevodniški elementi. Študenti pri teh poskusih spoznajo delo z elektronskimi napravami in se seznanijo s fluktuacijami.

LITERATURA

- [1] C. Beenakker in Ch. Schönenberger, *Quantum Shot Noise*, Phys. Today **56** (2003) 5, str. 37–42.
- [2] W. Schottky, *Über spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitätsleitern*, Annalen der Physik **57** (1918), str. 541–567.
- [3] E. Mathieson, *Derivation of noise formulas using Campbell's theorem*, Am. J. Phys. **45** (1977) 12, str. 1184–1186.
- [4] N. Campbell, *The study of discontinuous phenomena*, Proc. Cambr. Phil. Soc. **15** (1909), str. 117–136, *Discontinuities in light emission*, Proc. Cambr. Phil. Soc. **15** (1909), str. 310–328.
- [5] W. Schottky in C. A. Hartmann, *Experimentelle Untersuchung des Schroteffektes in Glühkathodenröhren*, Zeitschrift für Physik **2** (1920) 3, str. 206; C. A. Hartmann, *Über die Bestimmung des elektrischen Elementarquantums aus dem Schroteffekt*, Annalen der Physik **65** (1921), str. 51–78; W. Schottky, *Bemerkungen zu der vorstehenden Arbeit*, Annalen der Physik **67** (1921), str. 79–81.
- [6] J. B. Johnson, *Bemerkung zur Bestimmung des elektrischen Elementarquantums aus dem Schroteffekt*, Annalen der Physik **67** (1922), str. 154–156.
- [7] W. Schottky, *Zur Berechnung und Beurteilung des Schroteffektes*, Annalen der Physik **68** (1922), str. 157–176.
- [8] R. Fürth, *Die Bestimmung der Elektronenladung aus dem Schroteffekt an Glühkathodenröhren*, Physikalische Zeitschrift **23** (1922), str. 354–362.
- [9] A. W. Hull in N. H. Williams, *Determination of elementary charge e from measurement of the shot-effect*, Physical Review **25** (1925) 2, str. 147–173.
- [10] K. A. L. Stigmark, *A precise determination of the charge of the electron from shot-noise*, Arkiv för fysik **5** (1952), str. 399–426.
- [11] D. R. Spiegel in R. J. Helmer, *Shot-noise measurements of the electron charge: An undergraduate experiment*, Am. J. Phys. **63** (1995) 6, str. 554–560.