Zbornik gozdarstva in lesarstva, Ljubljana, 41, 1993, s. 203 - 236

GDK 123.456
Math.Subj.Class. 91A22

ŠTIRI POSPLOŠITVE PORAZDELITVE BETA

Anton CEDILNIK [1]

Izvleček

Porazdelitve, opisane v tem sestavku, imajo isti kompleksno analitični funkcijski izraz kot običajna porazdelitev beta, nosilci pa so omejeni, na eno stran omejeni ali neomejeni intervali. Te porazdelitve analiziramo, izračunamo momente, določimo racionalne transformacije in izpeljemo še nekaj limitnih izrekov.

Ključne besede: porazdelitev beta, limitni izrek

FOUR GENERALIZATIONS OF BETA DISTRIBUTION

Anton CEDILNIK [1]

Abstract

The distributions, described in the article, have the same complex-analitic functional expression as the usual beta distribution law; however, the supports are bounded, one side bounded or unbounded intervals. We analyse these distributions, calculate the moments, determine rational transformations and deduce some limit theorems.

Key words: beta distribution, limit theorem

[1] Dr., docent, Biotehniška fakulteta, Oddelek za gozdarstvo, 61000 Ljubljana, Večna pot 83, Slovenija

KAZALO

1. UVOD

Pomembnost porazdelitve beta v gozdarskih in nasploh bioloških vedah je nesporna, ker ima nasproti normalni porazdelitvi (katere uporaba je pretirana) kar nekaj prednosti.

Prva prednost je njena omejenost. Mnoge količine v biotehniških vedah so omejene, vendar jim prilagajamo normalno porazdelitev zaradi domnevne podobnosti, ker so njihovi histogrami pač značilne "zvonaste" oblike. Porazdelitev debelin dreves je že taka količina, ki pa je brez dvoma omejena tako navzgor kot navzdol. Seveda je res, da gre normalna porazdelitev daleč proč od srednje vrednosti zelo hitro proti 0, vendar se vseeno sliši groteskno, da je verjetnost za, na primer, negativno debelino drevesa neničelna.

Druga prednost beta porazdelitve je nesimetričnost poljubne stopnje. Že omenjena debelina drevesa je značilen primer slučajne spremenljivke, ki je v nekaterih (naravnih) sestojih asimetrična v desno, v drugih (redčenih sestojih) pa v levo; prilagajanje take porazdelitve na Prokrustovo posteljo normalne porazdelitve pomeni hudo izgubo informacije, da o dvomljivih rezultatih niti ne govorimo.

Naslednja prednost beta porazdelitve so parametri. Že osnovna porazdelitev beta ima dva, afino deformirana pa ima kar štiri in vsaj dva sta zelo preprosto obvladljiva, kar pa njune učinkovitosti pri prilagajanju prav nič ne zmanjša.

Eksponentna parametra imata, resnici na ljubo, to slabo stran, da povzročita hudo neelementarnost porazdelitvene funkcije; izraža se namreč z nepopolno funkcijo beta, ki je precej bolj sitna kot Gaussov integral (oziroma funkcija napak) pri normalni porazdelitvi.

Posplošeno porazdelitev beta, natančneje, njeno gostoto verjetnosti bomo definirali z istim izrazom, s katerim je definirana navadna porazdelitev beta, le da bodo parametri v splošnem poljubna kompleksna števila, nosilec gostote pa bo kateri koli interval med singularnimi točkami. Kot kompleksna analitična funkcija je torej gostota za vse posebne primere ista. Ti posebni primeri so štirje: navadna beta porazdelitev, ena navzdol neomejena, ena navzgor neomejena in še ena na obe strani neomejena. Izkazalo se bo, da smo tako dobili tudi Snedecorjevo in Studentovo porazdelitev, kar kaže na intimno zvezo med temi porazdelitvami.

Vse štiri porazdelitve bomo podrobno opisali in izračunali njihove momente. Raziskali bomo, kako se porazdelitve spreminjajo, če slučajne spremenljivke utrpijo racionalno transformacijo. Videli bomo, da so prvi trije posebni primeri, omenjeni v prejšnjem odstavku, v tesnem sorodstvu, zadnji, neomejeni tip pa racionalne transformacije v splošnem ne povezujejo s prejšnjimi. V zadnjem poglavju bomo izpeljali limitne izreke za obravnavane porazdelitve. Limitne porazdelitve so gama in njej sorodne porazdelitve ter normalna porazdelitev.

2. DEFINICIJA PORAZDELITVE BETA

1. DEFINICIJA

Posplošena porazdelitev beta je zvezna porazdelitev, podana z gostoto

$$p(x) = \left\{ \begin{array}{lll} A(x-p)^a(x-q)^b & , & x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \\ 0 & , & x \in \mathbb{R} - \mathcal{D} \end{array} \right\} \tag{1}$$

Pri tem so A, p, q, a, b kompleksna števila, $p, q \notin \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ pa je odprt interval, katerega krajišči sta dve izmed *singularnih točk* $p, q, \pm\infty$.

Števila A, p, q, a, b in območje $\mathcal{D}$ morajo biti seveda izbrani tako, da je funkcija $p(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$ realna nenegativna in da je

$$A \int_{\mathcal{D}} (x-p)^a (x-q)^b dx = 1. \tag{2}$$

Najprej uveljavimo zahtevo po realnosti funkcije $p(x)$ na $\mathcal{D}$.

$$p(x) = A \cdot \exp[a \cdot \mathrm{Ln}\ (\mathrm{x} - \mathrm{p}) + \mathrm{b} \cdot \mathrm{Ln}\ (\mathrm{x} - \mathrm{q})] \tag{3}$$

$$\mathrm{Ln}\ (\mathrm{x}-\mathrm{p}) = \mathrm{Ln}\ (\mathrm{x} - \mathrm{p}_1 - \mathrm{ip}_2) = \frac{1}{2}\ln[(\mathrm{x}-\mathrm{p}_1)^2 + \mathrm{p}_2^2] + \mathrm{iArg}\ (\mathrm{x} - \mathrm{p}_1 - \mathrm{ip}_2)$$

$$\mathrm{Ln}\ (\mathrm{x}-\mathrm{q}) = \frac{1}{2}\ln[(\mathrm{x}-\mathrm{q}_1)^2 + \mathrm{q}_2^2] + \mathrm{iArg}\ (\mathrm{x} - \mathrm{q}_1 - \mathrm{iq}_2)$$

$$\begin{aligned} a \cdot \mathrm{Ln}\ (\mathrm{x}-\mathrm{p}) \ + \ \mathrm{b} \cdot \mathrm{Ln}\ (\mathrm{x}-\mathrm{q}) \ &= \ \mathrm{R}_1 + \mathrm{iR}_2 \ = \\ = \ (\frac{1}{2}a_1 \ln[(x-p_1)^2 + p_2^2] &- a_2 \mathrm{Arg}\ (\mathrm{x} - \mathrm{p}_1 - \mathrm{ip}_2) + \\ + \frac{1}{2}b_1 \ln[(x-q_1)^2 + q_2^2] &- b_2 \mathrm{Arg}\ (\mathrm{x} - \mathrm{q}_1 - \mathrm{iq}_2)) + \\ + i(a_1 \mathrm{Arg}\ (\mathrm{x}-\mathrm{p}_1-\mathrm{ip}_2) &+ \frac{1}{2}\mathrm{a}_2 \ln[(\mathrm{x}-\mathrm{p}_1)^2 + \mathrm{p}_2^2] + \\ + b_1 \mathrm{Arg}\ (\mathrm{x}-\mathrm{q}_1-\mathrm{iq}_2) &+ \frac{1}{2}\mathrm{b}_2 \ln[(\mathrm{x}-\mathrm{q}_1)^2 + \mathrm{q}_2^2] \end{aligned} \tag{4}$$

$$p(x) = [(A_1 \cos R_2 - A_2 \sin R_2) + i(A_1 \sin R_2 + A_2 \cos R_2)] \cdot \exp R_1 \tag{5}$$

Zahteva po realnosti je torej na $\mathcal{D}$:

$$A_1 \sin R_2 + A_2 \cos R_2 \equiv 0 \tag{6}$$

Ker je ta izraz konstanten na nepraznem odprtem intervalu, je njegov odvod tam enak 0:

$$(A_1 \cos R_2 - A_2 \sin R_2) \cdot \frac{dR_2}{dx} \equiv 0 \tag{7}$$

Recimo, da je $A_1 \cos R_2 - A_2 \sin R_2 = 0$ za nek $x \in \mathcal{D}$. Pomnožimo to enačbo z A_1 in enačbo (6) z A_2 pa dobimo: $(A_1^2 + A_2^2) \cos R_2 = 0$, kar da: $\cos R_2 = 0$, saj je nujno $A \neq 0$ in z njim tudi: $|A|^2 = A_1^2 + A_2^2 \neq 0$. Potem pa iz obeh pogojev dobimo še: $A_1 \sin R_2 = -A_2 \sin R_2 = 0$, kar da še: $\sin R_2 = 0$ in s tem protislovje. Torej je povsod na $\mathcal{D}$:

$$\frac{dR_2}{dx} \equiv 0. \tag{8}$$

Ker je:

$$\mathrm{Arg}\,(\mathrm{x}-\lambda-\mathrm{i}\mu) = \left\{ \begin{array}{lll} \arctan \frac{x-\lambda}{\mu} - \frac{\pi}{2} + 2k\pi & , \ \mu > 0 & \\ 2k\pi & , \ \mu = 0 & , \ x - \lambda > 0 \\ \pi + 2k\pi & , \ \mu = 0 & , \ x - \lambda < 0 \\ \arctan \frac{x-\lambda}{\mu} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi & , \ \mu < 0 & \end{array} \right\}, \mathrm{k} \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$

iz česar dobimo:

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Arg}(\mathrm{x} - \lambda - \mathrm{i}\mu) = \frac{\mu}{(\mathrm{x} - \lambda)^2 + \mu^2}, \tag{10}$$

dobimo iz identitete (8) naslednjo identiteto:

$$\frac{a_2 x + a_1 p_2 - a_2 p_1}{(x - p_1)^2 + p_2^2} + \frac{b_2 x + b_1 q_2 - b_2 q_1}{(x - q_1)^2 + q_2^2} \equiv 0. \tag{11}$$

Če pomnožimo enačbo z obema imenovalcema, dobimo na levi polinom, katerega vsi koeficienti morajo biti enaki 0. To nam da štiri enačbe:

$$a_2 + b_2 = 0 \tag{12}$$

$$a_1 p_2 - a_2 p_1 - 2a_2 q_1 + b_1 q_2 - b_2 q_1 - 2b_2 p_1 = 0 \tag{13}$$

$$-2a_1 p_2 q_1 + 2a_2 p_1 q_1 + a_2 q_1^2 + a_2 q_2^2 - 2b_1 p_1 q_2 + 2b_2 p_1 q_1 + b_2 p_1^2 + b_2 p_2^2 = 0 \tag{14}$$

$$a_1 p_2 q_1^2 - a_2 p_1 q_1^2 + a_1 p_2 q_2^2 - a_2 p_1 q_2^2 + b_1 p_1^2 q_2 - b_2 p_1^2 q_1 + b_1 p_2^2 q_2 - b_2 p_2^2 q_1 = 0 \tag{15}$$

Upoštevajmo (12) v (13):

$$a_2(p_1 - q_1) = -a_1 p_2 - b_1 q_2 \tag{16}$$

To vstavimo v (14):

$$a_2(p_2^2 - q_2^2) = (p_1 - q_1)(a_1 p_2 - b_1 q_2) \tag{17}$$

Pomnožimo to enačbo s $(p_1 - q_1)$ in upoštevajmo (16):

$$(a_1 p_2 + b_1 q_2)(p_2^2 - q_2^2) = (p_1 - q_1)^2(-a_1 p_2 + b_1 q_2) \tag{18}$$

Sedaj pa (16) pomnožimo s $(p_1 - q_1)$ in iz dobljenega ter iz (17) izračunajmo:

$$-2(p_1 - q_1)b_1 q_2 = a_2[(p_1 - q_1)^2 + (p_2^2 - q_2^2)] \tag{19}$$

$$-2(p_1 - q_1)a_1 p_2 = a_2[(p_1 - q_1)^2 - (p_2^2 - q_2^2)] \tag{20}$$

(15) pomnožimo z $-2(p_1 - q_1)$ in upoštevajmo (19) ter (20):

$$a_2[(p_1 - q_1)^2 + (p_2 + q_2)^2] \cdot [(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2] = 0 \tag{21}$$

Sedaj pa napravimo analizo vseh možnosti!

(1) $p_1 \neq q_1$.
$a_2 = b_2 = 0$ (sledi iz (21)), $a_1 p_2 = b_1 q_2 = 0$ (sledi iz (19) in (20)).

(1.1) $p_2 \neq 0$, $q_2 \neq 0$. $a_1 = b_1 = 0$

(1.2) $p_2 \neq 0$, $q_2 = 0$. $a_1 = 0$

(1.3) $p_2 = 0$, $q_2 \neq 0$. $b_1 = 0$

(1.4) $p_2 = q_2 = 0$.

(2) $p_1 = q_1$.
$a_1 p_2 + b_1 q_2 = 0$ (sledi iz (16)), $a_2(p_2^2 - q_2^2) = 0$ (sledi iz (17)),
$a_1 p_2 (p_2^2 - q_2^2) = 0$ (sledi iz (15)).

(2.1) $p_2 \neq \pm q_2$. $a_2 = b_2 = a_1 p_2 = b_1 q_2 = 0$.

(2.1.1) $p_2 \neq 0$, $q_2 \neq 0$. $a_1 = b_1 = 0$.

(2.1.2) $p_2 \neq 0$, $q_2 = 0$. $a_1 = 0$.

(2.1.3) $p_2 = 0$, $q_2 \neq 0$. $b_1 = 0$.

(2.2) $p_2 = q_2$.

(2.2.1) $p_2 \neq 0$. $\quad b_1 = -a_1$

(2.2.2) $p_2 = 0$.

(2.3) $p_2 = -q_2 \neq 0$. $\quad b_1 = a_1$.

Postavimo: $A = |A| \exp(i\mathrm{Arg}\ \mathrm{A})$. Za $x \in \mathcal{D}$ je tedaj:
$p(x) = |A| \exp i(R_2 + \mathrm{Arg}\ \mathrm{A}) \cdot \exp \mathrm{R}_1$.

To pa pomeni, da je možno Arg A izbrati tako, da $p(x)$ ne bo samo realna, pač pa tudi nenegativna funkcija, ne glede na to, kakšen je sicer R_2. Poslednji kritrij je tedaj normativni pogoj, ki dopusti nasledje štiri možnosti:

$$p(x) = A'(p_1 - x)^{a_1}(q_1 - x)^{b_1}, \quad -\infty < x < p_1 < q_1 \tag{22}$$

$$p(x) = A'(x - p_1)^{a_1}(q_1 - x)^{b_1}, \quad p_1 < x < q_1 \tag{23}$$

$$p(x) = A(x - p_1)^{a_1}(x - q_1)^{b_1}, \quad p_1 < q_1 < x < \infty \tag{24}$$

$$\begin{aligned} p(x) &= A(x - p_1 - ip_2)^{a_1 + ia_2}(x - p_1 + ip_2)^{a_1 - ia_2} \\ &= A'[(x - p_1)^2 + p_2^2]^{a_1} \cdot \exp(-2a_2 \arctan \frac{x - p_1}{p_2}), \quad p_2 \neq 0 \end{aligned} \tag{25}$$

S primernim preimenovanjem parametrov dobimo končne oblike teh štirih porazdelitev:

$$B_1(p,q,a,b): \quad p_1(x) = A(x-p)^{a-1}(q-x)^{b-1}; \quad p < x < q \tag{26}$$

$$a > 0,\ b > 0,\ A = \frac{\Gamma(a+b)}{(q-p)^{a+b-1}\Gamma(a)\Gamma(b)} \tag{27}$$

$$B_2(p,q,a,b): \quad p_2(x) = A\frac{(p-x)^{a-1}}{(q-x)^{a+b}}; \quad -\infty < x < p < q \tag{28}$$

$$a > 0,\ b > 0,\ A = \frac{(q-p)^b\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \tag{29}$$

$$B_3(p,q,a,b): \quad p_3(x) = A\frac{(x-p)^{a-1}}{(x-q)^{a+b}}; \quad q < p < x < \infty \tag{30}$$

$$a > 0,\ b > 0,\ A = \frac{(p-q)^b\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \tag{31}$$

$$B_4(p,q,a,b): \quad p_4(x) = A\frac{\exp[b \arctan(px-q)]}{[(px-q)^2+1]^{\frac{a+1}{2}}}; \ -\infty < x < \infty \tag{32}$$

$$a > 0,\ p > 0,\ A = \frac{p}{F_0(a,b)} \tag{33}$$

Pri tem smo izhajali iz naslednjih rezultatov:

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \mathrm{B}(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{34}$$

$$(\alpha > 0, \beta > 0)$$

$$\int_r^s (x-r)^\alpha (s-x)^\beta dx = \frac{(s-r)^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} \tag{35}$$

$$(\alpha > -1, \beta > -1, r < s)$$

Integral (35) s substitucijo $x = r + (s-r)t$ prevedemo na integral (34).

$$\int_{-\infty}^r (r-x)^\alpha (s-x)^\beta dx = \frac{(s-r)^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha-\beta-1)}{\Gamma(-\beta)} \tag{36}$$

$$(\alpha > -1, \alpha+\beta < -1, r < s)$$

Integral (36) s substitucijo $x = \frac{r-st}{1-t}$ prevedemo na integral (34).

$$\int_s^\infty (x-r)^\alpha (x-s)^\beta dx = \frac{(s-r)^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\beta+1)\Gamma(-\alpha-\beta-1)}{\Gamma(-\alpha)} \tag{37}$$

$$(\beta > -1, \alpha+\beta < -1, r < s)$$

Integral (37) s substitucijo $x = -t$ prevedemo na integral (36).

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\exp[b\arctan(px-q)](x-\frac{q}{p})^n}{[(px-q)^2+1]^{\frac{a+1}{2}}}dx =$$

$$= \frac{1}{p^{n+1}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{bt}(\cos t)^{a-n-1}(\sin t)^n dt = \frac{1}{p^{n+1}}F_n(a,b) \tag{38}$$

$$(p > 0, 0 \leq n < a)$$

Pri tem smo uporabili substitucijo $px - q = \tan t$.

Integrirajmo obe strani naslednje enačbe od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2}$!

$$\frac{d}{dt}[e^{bt}(\cos t)^{a-n-2}(\sin t)^{n+1}] =$$

$$= be^{bt}(\cos t)^{a-n-2}(\sin t)^{n+1} - (a-n-2)e^{bt}(\cos t)^{a-n-3}(\sin t)^{n+2} +$$
$$+(n+1)e^{bt}(cost)^{a-n-1}(\sin t)^n \tag{39}$$

S preureditvijo dobljene enačbe tedaj ugotovimo:

$$F_{n+2}(a,b) = \frac{b}{a-n-2}F_{n+1}(a,b) + \frac{n+1}{a-n-2}F_n(a,b) \tag{40}$$

V naslednjem integralu uporabimo substitucijo $t = -z$:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^{bt}(\cos t)^{a-1}dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-bz}(\cos z)^{a-1}dz \tag{41}$$

To nam da:

$$F_0(a,b) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (e^{bt} + e^{-bt})(\cos t)^{a-1}dt = F_0(a,-b) \tag{42}$$

Integrirajmo od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2}$ še obe strani naslednje enačbe!

$$\frac{d}{dt}[e^{bt}(\cos t)^{a-1}] = be^{bt}(\cos t)^{a-1} - (a-1)e^{bt}(\cos t)^{a-2}\sin t \tag{43}$$

S preureditvijo dobljene enačbe še uvidimo:

$$F_1(a,b) = \frac{b}{a-1}F_0(a,b) = -F_1(a,-b) \tag{44}$$

Če imamo rezultat (42), nam enačbi (40) in (44) induktivno data $F_n(a,b)$ za poljubno naravno število n.

$$F_2(a,b) = \frac{b^2+a-1}{(a-1)(a-2)}F_0(a,b) \tag{45}$$

$$F_3(a,b) = \frac{b(b^2+3a-5)}{(a-1)(a-2)(a-3)}F_0(a,b) \tag{46}$$

$$F_4(a,b) = \frac{b^4+2b^2(3a-7)+3(a^2-4a+3)}{(a-1)(a-2)(a-3)(a-4)}F_0(a,b) \tag{47}$$

Če upoštevamo: $(\sin t)^2 = 1 - (\cos t)^2$, je:

$$F_2(a,b) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{bt}(\cos t)^{a-3}dt - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{bt}(\cos t)^{a-1}dt = F_0(a-2,b) - F_0(a,b) \tag{48}$$

Od tod sledi za vsak $a > 0$:

$$F_0(a+2,b) = \frac{a(a+1)}{b^2+(a+1)^2}F_0(a,b) \tag{49}$$

To pa že tudi pove, da se splača tabelirati funkcijo $F_0(a,b)$ le na območju $2 \le a \le 4, b \ge 0$.

Povejmo še nekaj preprostih lastnosti funkcije $F_0(a,b)$!

$$F_0(a,b) > 0, \quad \frac{\partial F_0(a,b)}{\partial b} > 0 \text{ za } b > 0, \quad \frac{\partial F_0(a,b)}{\partial a} < 0. \tag{50}$$

$$\lim_{a\to 0} F_0(a,b) = \infty, \quad \lim_{a\to\infty} F_0(a,b) = 0, \quad \lim_{b\to\infty} F_0(a,b) = \infty. \tag{51}$$

$$F_0(a,0) = \frac{2^{a-1}\Gamma(\frac{a}{2})^2}{\Gamma(a)} \tag{52}$$

$$F_0(1, b \neq 0) = \frac{1}{b}(e^{\frac{\pi b}{2}} - e^{-\frac{\pi b}{2}}), \quad F_0(1,0) = \pi \tag{53}$$

$$F_0(2,b) = \frac{1}{b^2+1}(e^{\frac{\pi b}{2}} + e^{-\frac{\pi b}{2}}) \tag{54}$$

$$F_0(3, b \neq 0) = \frac{2}{b(b^2+4)}(e^{\frac{\pi b}{2}} - e^{-\frac{\pi b}{2}}), \quad F_0(3,0) = \frac{\pi}{2} \tag{55}$$

$$F_0(4,b) = \frac{6}{(b^2+1)(b^2+9)}(e^{\frac{\pi b}{2}} + e^{-\frac{\pi b}{2}}) \tag{56}$$

Naštejmo za konec razdelka tiste porazdelitve izmed najbolj pogosto uporabljenih, ki so posebni primeri porazdelitev $B_i(p,q,a,b)$!

Enakomerna zvezna porazdelitev: $B_1(p,q,1,1)$

Arkussinusna porazdelitev: $B_1(0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

Porazdelitev beta: $\beta(a,b) = B_1(0,1,a,b)$

Wignerjev polkrožni zakon: $B_1(-r,r,\frac{3}{2},\frac{3}{2})$

Snedecorjeva porazdelitev: $F(g,h) = B_3(0,-\frac{h}{g},\frac{g}{2},\frac{h}{2})$

Cauchyjeva porazdelitev: $B_4(p,q,1,0)$

Studentova porazdelitev: $S(f) = B_4(\frac{1}{\sqrt{f}},0,f,0)$

3. OPIS PORAZDELITVE BETA

(A) $B_1(p,q,a,b)$

$$\lim_{x\searrow p} p_1(x) = \begin{cases} \infty, & a<1 \\ \frac{b}{q-p}, & a=1 \\ 0, & a>1 \end{cases} \qquad \lim_{x\nearrow q} p_1(x) = \begin{cases} \infty, & b<1 \\ \frac{a}{q-p}, & b=1 \\ 0, & b>1 \end{cases} \tag{57}$$

$$\lim_{x\searrow p} p_1'(x) = \begin{cases} -\infty, & a<1 \\ \frac{b(1-b)}{(q-p)^2}, & a=1 \\ \infty, & 1<a<2 \\ \frac{b(1+b)}{(q-p)^2}, & a=2 \\ 0, & a>2 \end{cases} \qquad \lim_{x\nearrow q} p_1'(x) = \begin{cases} \infty, & b<1 \\ \frac{a(a-1)}{(q-p)^2}, & b=1 \\ -\infty, & 1<b<2 \\ \frac{a(-a-1)}{(q-p)^2}, & b=2 \\ 0, & b>2 \end{cases} \tag{58}$$

Ekstrem funkcije $p_1(x)$ na intervalu (p,q):

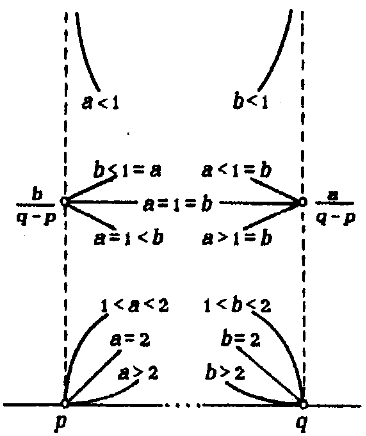
1. $a<1\,\&\,b<1 \Longrightarrow$ minimum

$$x = \frac{(1-a)q+(1-b)p}{2-a-b} \tag{59}$$

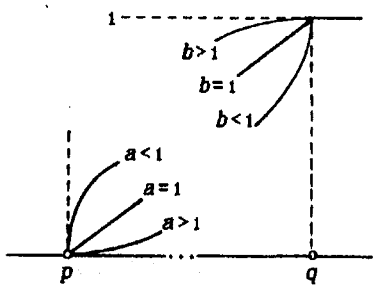
$$p_1(x) = \frac{\Gamma(a+b)(2-a-b)^{2-a-b}}{(q-p)\Gamma(a)\Gamma(b)(1-a)^{1-a}(1-b)^{1-b}} \tag{60}$$

2. $a>1\,\&\,b>1 \Longrightarrow$ maksimum :

$$x = \frac{(a-1)q+(b-1)p}{a+b-2} \tag{61}$$



Slika 1 Gostota porazdelitve $B_1(p,q,a,b)$



Slika 2 Porazdelitvena funkcija $B_1(p,q,a,b)$

$$p_1(x) = \frac{\Gamma(a+b)(a-1)^{a-1}(b-1)^{b-1}}{(q-p)\Gamma(a)\Gamma(b)(a+b-2)^{a+b-2}} \tag{62}$$

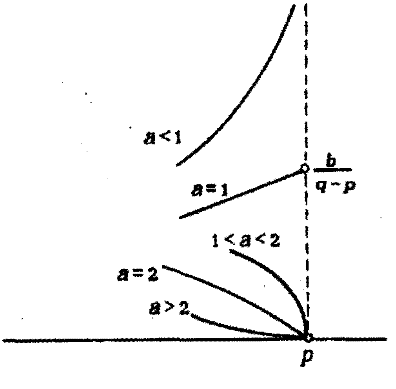
(B) $B_2(p,q,a,b)$

$$\lim_{x \nearrow p} p_2(x) = \begin{cases} \infty, & a < 1 \\ \frac{b}{q-p}, & a = 1 \\ 0, & a > 1 \end{cases} \tag{63}$$

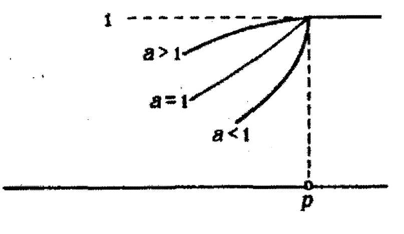
$$\lim_{x \nearrow p} p_2'(x) = \begin{cases} \infty, & a < 1 \\ \frac{b(b+1)}{(q-p)^2}, & a = 1 \\ -\infty, & 1 < a < 2 \\ -\frac{b(b+1)}{(q-p)^2}, & a = 2 \\ 0, & a > 2 \end{cases} \tag{64}$$

Ekstrem funkcije $p_2(x)$ na intervalu $(-\infty, p)$: $a > 0 \Longrightarrow$ maksimum :

$$x = \frac{(a+b)p - (a-1)q}{b+1} \tag{65}$$



Slika 3 Gostota porazdelitve $B_2(p,q,a,b)$



Slika 4 Porazdelitvena funkcija $B_2(p,q,a,b)$

$$p_2(x) = \frac{\Gamma(a+b)(a-1)^{a-1}(b+1)^{b+1}}{(q-p)\Gamma(a)\Gamma(b)(a+b)^{a+b}} \tag{66}$$

(C) $B_3(p,q,a,b)$

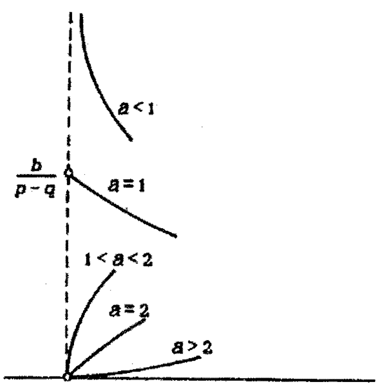
$$\lim_{x\searrow p} p_3(x) = \begin{cases} \infty, & a<1 \\ \frac{b}{p-q}, & a=1 \\ 0, & a>1 \end{cases} \tag{67}$$

$$\lim_{x\searrow p} p_3'(x) = \begin{cases} -\infty, & a<1 \\ -\frac{b(b+1)}{(p-q)^2}, & a=1 \\ \infty, & 1<a<2 \\ \frac{b(b+1)}{(p-q)^2}, & a=2 \\ 0, & a>2 \end{cases} \tag{68}$$

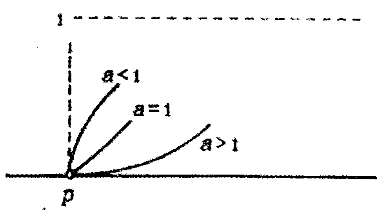
Ekstrem funkcije $p_3(x)$ na intervalu (p,∞) : $a>0 \Longrightarrow$ maksimum :

$$x = \frac{(a+b)p-(a-1)q}{b+1} \tag{69}$$

$$p_3(x) = \frac{\Gamma(a+b)(a-1)^{a-1}(b+1)^{b+1}}{(p-q)\Gamma(a)\Gamma(b)(a+b)^{a+b}} \tag{70}$$



Slika 5 Gostota porazdelitve $B_3(p,q,a,b)$



Slika 6 Porazdelitvena funkcija $B_3(p,q,a,b)$

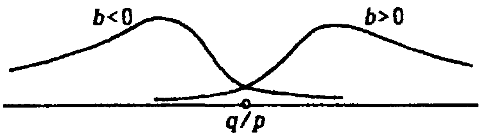
(D) $B_4(p,q,a,b)$

$$p_4(q/p) = \frac{p}{F_0(a,b)} \qquad p_4'(q/p) = \frac{p^2 b}{F_0(a,b)} \tag{71}$$

Ekstrem funkcije $p_4(x)$: maksimum pri

$$x = \frac{1}{p}\left(\frac{b}{a+1} + q\right)$$

$$p_4(x) = \frac{p \cdot \exp[b \arctan \frac{b}{a+1}]}{F_0(a,b)[(\frac{b}{a+1})^2 + 1]^{\frac{a+1}{2}}} \tag{72}$$



Slika 7 Gostota porazdelitve
$B_4(p,q,a,b)$

2. TRDITEV

Simetrične so le porazdelitve $B_1(p,q,a,a)$ (središče pri $(p+q)/2$) in $B_4(p,q,a,0)$ (središče pri q/p).

Dokaz: Porazdelitvi B_2 in B_3 seveda ne moreta biti simetrični. Že iz oblike porazdelitve B_1 pa vidimo, da je potrebno za simetrijo:
$a > 1 \iff b > 1$, $a < 1 \iff b < 1$. Torej ima simetrična porazdelitev razen v primeru $a = b = 1$ ekstrem, ki je seveda točno na sredini med p in q:

$$\frac{(a-1)q + (b-1)p}{a+b-2} = \frac{p+q}{2} \Longrightarrow aq + bp = ap + bq \Longrightarrow (a-b)(q-p) = 0 \Longrightarrow a = b$$

Očitno pa je to tudi zadostno za simetričnost.

Naj bo sedaj $z > 0$.

$$1 + z^2 > 1 - z^2 \Longrightarrow 1 > \frac{1-z^2}{1+z^2} \Longrightarrow \frac{1}{1+z^2} - \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} > 0$$

Nedoločni integral tega izraza $\arctan z - \frac{z}{1+z^2}$ je strogo naraščajoča funkcija. Ker je pri $z = 0$ vrednost te funkcije 0 in ker je povsod zvezna, sledi za pozitivne z:

$$\arctan z - \frac{z}{1+z^2} > 0$$

To pa spet pomeni, da je njen nedoločeni integral $z \cdot \arctan z - \ln(z^2+1)$ za $z > 0$ strogo naraščajoča funkcija, prav tak pa je tudi njegov antilogaritem

$$\frac{e^{z \arctan z}}{1+z^2}.$$

Pri $z = 0$ ima ta funkcija vrednost 1, zato je zaradi njene zveznosti in sodosti:

$$\frac{e^{z \arctan z}}{1+z^2} > 1, \qquad \forall z \neq 0 \tag{73}$$

Vzemimo sedaj, da je neka porazdelitev $B_4(p,q,a,b)$ simetrična. Ker ima en sam maksimum, mora biti:

$$p_4(\frac{1}{p}(\frac{b}{a+1}+q)+c) = p_4(\frac{1}{p}(\frac{b}{a+1}+q)-c), \qquad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Naj bo

$$c = \frac{b}{p(a+1)}$$

Potem je:

$$\frac{p}{F_0(a,b)} \cdot \frac{e^{b \arctan \frac{2b}{a+1}}}{[(\frac{2b}{a+1})^2+1]^{\frac{a+1}{2}}} = \frac{p}{F_0(a,b)}$$

oziroma

$$\frac{e^{\frac{2b}{a+1} \arctan \frac{2b}{a+1}}}{(\frac{2b}{a+1})^2+1} = 1$$

Ta enačba pa za $(2b)/(a+1) \neq 0$ nima rešitve, kot sledi iz (73). ■

4. MOMENTI

(A) $B_1(p,q,a,b)$

$$(x-c)^n = [(x-p)+(p-c)]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-p)^k (p-c)^{n-k} \tag{74}$$

$$
\begin{aligned}
m_n(c) &= A_1 \int_p^q (x-c)^n (x-p)^{a-1} (q-x)^{b-1} dx = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (p-c)^{n-k} (q-p)^k \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+k)} && (75) \\
z_1 &= m_1(0) = \frac{aq+bp}{a+b} = \mathrm{E}(B_1(p,q,a,b)) && (76) \\
z_2 &= m_2(0) = \frac{(aq+bp)^2 + aq^2 + bp^2}{(a+b)(a+b+1)} && (77) \\
m_2 &= m_2(z_1) = \frac{ab(q-p)^2}{(a+b)^2(a+b+1)} = \mathrm{D}(B_1(p,q,a,b)) && (78) \\
\sigma(B_1(p,q,a,b)) &= \frac{q-p}{a+b}\sqrt{\frac{ab}{a+b+1}} && (79) \\
m_3 &= m_3(z_1) = \frac{2ab(b-a)(q-p)^3}{(a+b)^3(a+b+1)(a+b+2)} && (80) \\
\mathrm{A}(B_1(p,q,a,b)) &= \frac{2(b-a)}{a+b+2}\sqrt{\frac{a+b+1}{ab}} && (81)
\end{aligned}
$$

(B) $B_2(p,q,a,b)$.

Uporabimo (74) in dobimo:

$$
m_n(c) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (p-c)^{n-k} (q-p)^k \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b-k)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \qquad (82)
$$

Momenti eksistirajo samo za $n < b$.

$$
\begin{aligned}
z_1 &= p - \frac{a}{b-1}(q-p) = \mathrm{E}(B_2(p,q,a,b)) && (83) \\
z_2 &= \frac{[(b-1)p - a(q-p)]^2 - (b-1)p^2 + a(q^2-p^2)}{(b-1)(b-2)} && (84) \\
m_2 &= \frac{a(a+b-1)(q-p)^2}{(b-1)^2(b-2)} = \mathrm{D}(B_2(p,q,a,b)) && (85) \\
\sigma(B_2(p,q,a,b)) &= \frac{q-p}{b-1}\sqrt{\frac{a(a+b-1)}{b-2}} && (86) \\
m_3 &= \frac{-2a(a+b-1)(2a+b-1)(q-p)^3}{(b-1)^3(b-2)(b-3)} && (87) \\
\mathrm{A}(B_2(p,q,a,b)) &= \frac{-2(2a+b-1)}{b-3}\sqrt{\frac{b-2}{a(a+b-1)}} && (88)
\end{aligned}
$$

(C) $B_3(p, q, a, b)$.

Spet uporabimo (74) in dobimo formulo za $m_n(c)$, ki je enaka (82); od tod podobnost ali celo enakost formul pri (B) in (C).

$$m_n(c) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (p-c)^{n-k} (p-q)^k \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b-k)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

Momenti eksistirajo samo za $n < b$.

$$\begin{aligned}
z_1 &= p + \frac{a}{b-1}(p-q) = \mathrm{E}(B_3(p,q,a,b)) \\
z_2 &= \frac{[(b-1)p + a(p-q)]^2 - (b-1)p^2 - a(p^2-q^2)}{(b-1)(b-2)} \\
m_2 &= \frac{a(a+b-1)(p-q)^2}{(b-1)^2(b-2)} = \mathrm{D}(B_3(p,q,a,b)) \\
\sigma(B_3(p,q,a,b)) &= \frac{p-q}{b-1}\sqrt{\frac{a(a+b-1)}{b-2}} && (89) \\
m_3 &= \frac{2a(a+b-1)(2a+b-1)(p-q)^3}{(b-1)^3(b-2)(b-3)} \\
\mathrm{A}(B_3(p,q,a,b)) &= \frac{2(2a+b-1)}{b-3}\sqrt{\frac{b-2}{a(a+b-1)}} && (90)
\end{aligned}$$

(D) $B_4(p, q, a, b)$

$$m_n(c) = \frac{1}{p^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (q-pc)^{n-k} \frac{F_k(a,b)}{F_0(a,b)} \qquad (91)$$

Momenti eksistirajo le za $n < a$.

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{1}{p}(q + \frac{b}{a-1}) = \mathrm{E}(B_4(p,q,a,b)) && (92) \\
z_2 &= \frac{[(a-1)q + b]^2 + (a-1)(1-q^2) - 2bq}{p^2(a-1)(a-2)} && (93) \\
m_2 &= \frac{b^2 + (a-1)^2}{p^2(a-1)^2(a-2)} = D(B_4(p,q,a,b)) && (94) \\
\sigma(B_4(p,q,a,b)) &= \frac{1}{p(a-1)}\sqrt{\frac{b^2+(a-1)^2}{a-2}} && (95)
\end{aligned}$$

$$m_3 = \frac{4b[b^2+(a-1)^2]}{p^3(a-1)^3(a-2)(a-3)} \quad (96)$$

$$\mathrm{A}(B_4(p,q,a,b)) = \frac{4b}{a-3}\sqrt{\frac{a-2}{b^2+(a-1)^2}} \quad (97)$$

5. TRANSFORMACIJSKI IZREKI

3. IZREK

1. Naj bo X slučajna spremenljivka, porazdeljena po zakonu $B_1(p,q,a,b)$. Tedaj je

$$Y = \frac{X-p}{q-p}$$

slučajna spremeljivka, porazdeljena po zakonu $\beta(a,b)$, in

$$Z = \frac{b(X-p)}{a(q-X)}$$

slučajna spremenljivka, porazdeljena po zakonu $F(2a,2b)$.

2. Naj bo X slučajna spremenljivka, porazdeljena po zakonu $B_2(p,q,a,b)$. Tedaj je

$$Y = \frac{p-X}{q-X}$$

slučajna spremenljivka, porazdeljena po zakonu $\beta(a,b)$, in

$$Z = \frac{b(p-X)}{a(q-p)}$$

slučajna spremenljivka, porazdeljena po zakonu $F(2a,2b)$.

3. Naj bo X slučajna spremenljivka, porazdeljena po zakonu $B_3(p,q,a,b)$. Tedaj je

$$Y = \frac{X-p}{X-q}$$

slučajna spremenljivka, porazdeljena po zakonu $\beta(a,b)$, in

$$Z = \frac{b(X-p)}{a(p-q)}$$

slučajna spremenljivka, porazdeljena po zakonu $F(2a,2b)$.

Dokaz: Dokažimo le 1., dokaza 2. in 3. sta podobna.

$$\begin{aligned} p_Y(x) &= \frac{d}{dx}F_Y(x) = \frac{d}{dx}P(\frac{X-p}{q-p} < x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0,1) \\ \lambda, & x \in (0,1) \end{cases} \\ \lambda &= \frac{d}{dx}P(X < (q-p)x + p) = \frac{d}{dx}F_X((q-p)x+p) = \\ &= (q-p)p_X((q-p)x+p) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1} \end{aligned}$$

To je gostota porazdelitve $B_1(0,1,a,b) = \beta(a,b)$.

$$\begin{aligned} p_Z(x) &= \frac{d}{dx}P(\frac{b(X-p)}{a(q-X)} < x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \lambda, & x > 0 \end{cases} \\ \lambda &= \frac{d}{dx}P(X < \frac{bp+aqx}{b+ax}) = \frac{d}{dx}F_X(\frac{bp+aqx}{b+ax}) = \\ &= \frac{ab(q-p)}{(b+ax)^2}p_X(\frac{bp+aqx}{b+ax}) = \frac{\Gamma(a+b)(\frac{b}{a})^b x^{a-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)(\frac{b}{a}+x)^{a+b}} \end{aligned}$$

To pa je gostota porazdelitve

$$B_3(0, -\frac{b}{a}, a, b) = F(2a, 2b). \quad \blacksquare$$

4. POSLEDICA

Naj bo X slučajna spremenljivka,

$$Y = \frac{\alpha X + \beta}{\gamma X + \delta} \quad \text{in} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0.$$

Če je X porazdeljena po zakonu $B_1(p,q,a,b)$, je:

$$Y = \frac{\alpha(q-p)Z + (\alpha p + \beta)}{\gamma(q-p)Z + (\gamma p + \delta)}.$$

Če pa je X porazdeljena po zakonu $B_2(p,q,a,b)$ ali $B_3(p,q,a,b)$, je:

$$Y = \frac{(\alpha q + \beta)Z - (\alpha p + \beta)}{(\gamma q + \delta)Z - (\gamma p + \delta)}$$

Pri tem je Z slučajna spremenljivka, porazdeljena po zakonu $\beta(a,b)$.

5. IZREK

Naj bo Z slučajna spremenljivka, porazdeljena po zakonu $\beta(a,b)$.

$$\begin{array}{rclcll} Y & = & \lambda Z + \mu & : & B_1(\mu, \lambda+\mu, a, b) & (\text{za } \lambda > 0) \\ & & & & B_1(\lambda+\mu, \mu, b, a) & (\text{za } \lambda < 0) \\ Y & = & \lambda Z^{-1} + \mu & : & B_3(\lambda+\mu, \mu, b, a) & (\text{za } \lambda > 0) \\ & & & & B_2(\lambda+\mu, \mu, b, a) & (\text{za } \lambda < 0) \\ Y & = & \frac{\lambda - \mu Z}{1-Z} & : & B_3(\lambda, \mu, a, b) & (\text{za } \lambda > \mu) \\ & & & & B_2(\lambda, \mu, a, b) & (\text{za } \lambda < \mu) \end{array}$$

Dokaz gre podobno kot dokaz izreka 3.

6. POSLEDICA

$$\begin{array}{lcllcl} X & : & \beta(a,b) & \Longrightarrow & 1-X & : & \beta(b,a) \\ X & : & F(g,h) & \Longrightarrow & X^{-1} & : & F(h,g) \end{array}$$

Opomba: Z nekaj truda se da ugotoviti, da razen transformacij iz izreka 5 nobena druga transformacija iz posledice 4 ne da porazdelitve tipa $B_{1,2,3}$.

7. IZREK

$$\begin{array}{rclcll} & & X & : & B_4(p,q,a,b). & \\ Y & = & \lambda X + \mu & : & B_4(\frac{p}{\lambda}, \frac{\mu p + \lambda q}{\lambda}, a, b) & (\text{za } \lambda > 0) \\ & & & & B_4(\frac{p}{-\lambda}, \frac{\mu p + \lambda q}{-\lambda}, a, -b) & (\text{za } \lambda < 0) \end{array}$$

Dokaz je preprost.

8. IZREK

$$X : B_4(p,q,a,b), \quad Y = \arctan(pX - q).$$

Tedaj je Y slučajna spremenljivka z gostoto

$$p_Y(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{F_0(a,b)} e^{bx} (\cos x)^{a-1}, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{drugod} \end{array} \right\}$$

Dokaz:

$$p_Y(x) = \frac{d}{dx}P(\arctan(pX-q) < x) = \frac{d}{dx}\left\{\begin{array}{ll} 1, & x \geq \frac{\pi}{2} \\ 0, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ P(X < \frac{\tan x + q}{p}), & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} \frac{d}{dx}F_X(\frac{\tan x+q}{p}), & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{drugod} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} p_X(\frac{\tan x+q}{p})\frac{1}{p(\cos x)^2}, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{drugod} \end{array}\right\}$$

■

9. IZREK

$$\begin{array}{rclcll} & & X & : & B_4(p,q,a,0). & \\ Y & = & \lambda(pX-q)^2+\mu & : & B_3(\mu,\mu-\lambda,\frac{1}{2},\frac{a}{2}) & (\text{za } \lambda > 0) \\ & & & & B_2(\mu,\mu-\lambda,\frac{1}{2},\frac{a}{2}) & (\text{za } \lambda < 0) \end{array}$$

V posebnem je:

$$\begin{array}{rclcl} Y & = & a(pX-q)^2 & : & F(1,a) \\ Z & = & \frac{1}{1+(pX-q)^2} & : & \beta(\frac{a}{2},\frac{1}{2}) \end{array}$$

Dokaz: Dokažimo le za $\lambda > 0$, za $\lambda < 0$ bi bil dokaz podoben.

$$\begin{array}{rcl} p_Y(x) & = & \frac{d}{dx}P((pX-q)^2 < \frac{x-\mu}{\lambda}) = \\ & = & \frac{d}{dx}\left\{\begin{array}{ll} 0, & x \leq \mu \\ P(\frac{q-\sqrt{\frac{x-\mu}{\lambda}}}{p} < X < \frac{q+\sqrt{\frac{x-\mu}{\lambda}}}{p}), & x > \mu \end{array}\right\} = \\ & = & \left\{\begin{array}{ll} 0, & x \leq \mu \\ \frac{d}{dx}[F_X(\frac{q+\sqrt{\frac{x-\mu}{\lambda}}}{p}) - F_X(\frac{q-\sqrt{\frac{x-\mu}{\lambda}}}{p})], & x > \mu \end{array}\right\} = \\ & = & \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{2p\sqrt{\lambda}\sqrt{x-\mu}}[p_X(\frac{q+\sqrt{\frac{x-\mu}{\lambda}}}{p}) + p_X(\frac{q-\sqrt{\frac{x-\mu}{\lambda}}}{p})], & x > \mu \\ 0, & x \leq \mu \end{array}\right\} \end{array}$$

■

10. IZREK

Bodita $X : \gamma(r,a)$ in $Y : \gamma(s,b)$ neodvisni slučajni spremenljivki, porazdeljeni po porazdelitvi gama. Potem:

$$
\begin{array}{lll}
\lambda\frac{X}{Y}+\mu & : B_3(\mu,\mu-\frac{\lambda s}{r},a,b) & (\lambda>0) \\
 & : B_2(\mu,\mu-\frac{\lambda s}{r},a,b) & (\lambda<0) \\
\frac{\lambda X+\mu Y}{rX+sY} & : B_1(\frac{\mu}{s},\frac{\lambda}{r},a,b) & (\lambda s>\mu r) \\
 & B_1(\frac{\lambda}{r},\frac{\mu}{s},b,a) & (\lambda s<\mu r)
\end{array}
$$

Posebna primera:

$$
\begin{array}{ll}
\frac{(r/a)X}{(s/b)Y} & : F(2a,2b) \\
\frac{rX}{rX+sY} & : \beta(a,b)
\end{array}
$$

Dokaz je povsem klasičen.

6. LIMITNI IZREKI

11. LEMA

Naj bo $\lambda \in \mathbb{R}$. Tedaj je $(1+\frac{\lambda}{b})^b$ naraščajoča funkcija argumenta b za $\frac{\lambda}{b} > -1$ in je:

$$1-\frac{2\lambda^2}{3b} < \frac{(1+\frac{\lambda}{b})^b}{e^\lambda} < 1 \quad (b > 2|\lambda|)$$

Dokaz:

$$f(b) = (1+\frac{\lambda}{b})^b + \frac{\mu}{b}$$

$$\frac{d}{db}f(b) = (1+\frac{\lambda}{b})^b[\ln(1+\frac{\lambda}{b}) - \frac{\lambda}{b}\frac{1}{1+\frac{\lambda}{b}}] - \frac{\mu}{b^2}$$

V oglatem oklepaju imamo funkcijo

$$g(z) = \ln(1+z) - \frac{z}{1+z}$$

$$g(0)=0, \quad g'(z)>0 \ \text{ za } \ z>0, \quad g'(z)<0 \ \text{ za } \ -1<z<0.$$

Torej je $g(z) \geq 0$, $\forall z > -1$, oziroma $f(b)$ je za $\mu = 0$ naraščajoča funkcija povsod, kjer je je $\frac{\lambda}{b} > -1$.

Sedaj pa izraze v oglatem oklepaju izrazimo z vrstami in dobimo:

$$\frac{d}{db}f(b) = \frac{\lambda^2}{b^2}(1+\frac{\lambda}{b})^b[\frac{1}{2} - \frac{2\lambda}{3b} + \frac{3\lambda^2}{4b^2} - \frac{4\lambda^3}{5b^3} + \ldots] - \frac{\mu}{b^2}$$

Glede na to, da je $\frac{|\lambda|}{b} < \frac{1}{2}$, je vsota v gornjem izrazu zagotovo med $\frac{1}{6}$ in $\frac{3}{2}$ oziroma enaka $\frac{1}{6} + \frac{4}{3}\vartheta(b)$, $\vartheta(b) \in (0,1)$.

Za $\mu = 0$ je tedaj $\frac{d}{db}f(b) > 0$, $f(b)$ je strogo naraščajoča funkcija, zato: $f(b) < \lim_{b\to\infty} f(b)$, kar da:

$$(1 + \frac{\lambda}{b})^b < e^\lambda.$$

Ta rezultat pa takoj izkoristimo za nadaljnji sklep:
za $\mu = \frac{2\lambda^2}{3}e^\lambda$ je $\frac{d}{db}f(b) < 0$, $f(b)$ je strogo padajoča funkcija, kar da: $(1 + \frac{\lambda}{b})^b + \frac{2\lambda^2}{3b}e^\lambda > e^\lambda$. To pa je že končna ocena. ■

12. IZREK

Gostota $p_1(x, b)$ porazdelitve $B_1(p, \frac{b}{r}, a, b)$ (za $r > 0$) po točkah in po normi prostora $L^1(\mathbb{R})$ konvergira z rastočim b proti gostoti

$$p(x) = \begin{cases} \frac{r^a}{\Gamma(a)}(x-p)^{a-1}e^{-r(x-p)} & , \quad x > p \\ 0 & , \quad x \leq p \end{cases}$$

(za $p = 0$ je to kar porazdelitev $\gamma(r, a)$); porazdelitvena funkcija porazdelitve $B_1(p, \frac{b}{r}, a, b)$ pa po točkah konvergira z rastočim b proti porazdelitveni funkciji $\int_{-\infty}^x p(t)dt$.

Dokaz: Naj bo $x > p$ neko fiksno število in $b > m = 1 + 2a + r(2x - p)$. Za $p < t \leq x$ velja:

$$|p_1(t,b) - p(t)| = |\frac{\Gamma(a+b)(t-p)^{a-1}(\frac{b}{r} - t)^{b-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)(\frac{b}{r} - p)^{a+b-1}} - \frac{r^a}{\Gamma(a)}(t-p)^{a-1}e^{-r(t-p)}| =$$

$$= \frac{r^a}{\Gamma(a)}(t-p)^{a-1}e^{-r(t-p)}|\Delta - 1|$$

Pri tem je $\Delta = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(b)(b-rp)^a}e^{r(t-p)}(\frac{b-rt}{b-rp})^{b-1}$.

Funkcijo Γ izrazimo s Stirlingovo formulo:

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(b)(b-rp)^a} = \frac{(1+\frac{a}{b})^b}{e^a}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a}{b}}}e^{\tau(a+b)-\tau(b)}(\frac{a+b}{b-rp})^a$$

kjer je $0 < \tau(z) < \frac{1}{12z}$.

Po prejšnji lemi je $\frac{(1+a/b)^b}{e^a} = 1 - \frac{2a^2\vartheta_1}{3b} < 1,\ \vartheta_1 \in (0,1)$.

$\frac{1}{\sqrt{1+a/b}}$ je naraščajoča funkcija argumenta b, zato je

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a}{b}}} = 1 - \frac{a\vartheta_2}{2b} < 1, \quad \vartheta_2 \in (0,1).$$

$$e^{-\frac{1}{12b}} < e^{\tau(a+b)-\tau(b)} < e^{\frac{1}{12(a+b)}} < e^{\frac{1}{12b}}$$

$$e^{-\frac{1}{12b}} > 1 - \frac{1}{12b}, \quad e^{\frac{1}{12b}} < 1 + \frac{1}{6b} \Rightarrow e^{\tau(a+b)-\tau(b)} = 1 + \frac{3\vartheta_3 - 1}{12b}, \quad \vartheta_3 \in (0,1).$$

To pa še da: $e^{\tau(a+b)-\tau(b)} < 1 + \frac{1}{6m}$

Zlahka tudi dobimo:

$$(\frac{a+b}{b-rp})^a = (1 + \frac{a+rp}{b-rp})^a < \max\{1; (\frac{m+a}{m-rp})^a\}$$

$$e^{r(t-p)}(\frac{b-rt}{b-rp})^{b-1} = \frac{(1-\frac{r(t-p)}{b-rp})^{b-rp}}{e^{-r(t-p)}}(1 - \frac{r(t-p)}{b-rp})^{rp-1}$$

Prvi faktor ima po lemi zgornjo mejo 1 in spodnjo mejo $1 - \frac{2r^2(x-p)^2}{3(b-rp)}$; drugi faktor pa ima za meji 1 in $(1 - \frac{r(x-p)}{m-rp})^{rp-1}$ in sicer je 1 zgornja meja za $pr - 1 \geq 0$ in spodja meja za $rp - 1 < 0$.

Torej je:

$$\triangle = (1 - \frac{2a^2\vartheta_1}{3b})(1 - \frac{a\vartheta_2}{2b})(1 + \frac{3\vartheta_3 - 1}{12b})A(t)B(t)$$

za $p < t \leq x$, pri čemer je še: $1 - \frac{2r^2(x-p)^2}{3(b-rp)} < A(t) < 1$,

$$(1 - \frac{r(x-p)}{m-rp})^{|pr-1|} < B(t) < (1 + \frac{2r(x-p)}{m-rp})^{|rp-1|}.$$

Ocenimo sedaj še zgornjo mejo funkcije $p_1(t,b)$:

$$p_1(t,b) < \frac{r^a}{\Gamma(a)}(t-p)^{a-1}(1 + \frac{1}{6m})\max\{1; (\frac{m+a}{m-rp})^a\}(\frac{b-rt}{b-rp})^{b-1}$$

$$(\frac{b-rt}{b-rp})^{b-1} = (1 - \frac{r(t-p)\frac{b-1}{b-rp}}{b-1})^{b-1}$$

$$r\frac{b-1}{b-rp} \geq r\min\{1;\frac{m-1}{m-rp}\} = R > 0.$$

$$(\frac{b-rt}{b-rp})^{b-1} \leq (1-\frac{R(t-p)}{b-1})^{b-1}$$

Ta izraz je po lemi naraščajoča funkcija argumenta b, zato ga lahko navzgor ocenimo z njegovo limito, ko gre b prek vseh mej, to je z $e^{-R(t-p)}$.

Torej je:

$$p_1(t,b) \leq C(t-p)^{a-1}e^{-R(t-p)},$$

kjer je C izraz neodvisen od t in b.

Izberimo si poljuben $\epsilon > 0$. Očitno eksistira tako število $M_\epsilon > m$, da iz $b > M_\epsilon$ sledi $|\Delta - 1| < \epsilon$.

Najprej vzemimo: $t = x$. To nam da za $b > M_\epsilon$:

$$|p_1(x,b) - p(x)| < \frac{r^a}{\Gamma(a)}(x-p)^{a-1}e^{-r(x-p)}\epsilon,$$

kar je ekvivalentno trditvi:

$$\lim_{b\to\infty} p_1(x,b) = p(x).$$

Znova pustimo t teči od p do x in naj bo $b > M_\epsilon$.

$$|\int_{-\infty}^{x} p_1(t,b)dt - \int_{-\infty}^{x} p(t)dt| = |\int_{p}^{x}[p_1(t,b) - p(t)]dt| \leq$$

$$\leq \int_{p}^{x}|p_1(t,b) - p(t)|dt < \frac{r^a}{\Gamma(a)}\int_{p}^{x}(t-p)^{a-1}e^{-r(t-p)}\epsilon dt <$$

$$< \epsilon\frac{r^a}{\Gamma(a)}\int_{p}^{\infty}(t-p)^{a-1}e^{-r(t-p)}dt = \epsilon,$$

kar je ekvivalentno trditvi:

$$\lim_{b\to\infty}\int_{-\infty}^{x} p_1(t,b)dt = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt.$$

Spet si izberimo $\epsilon > 0$ in naj sedaj t teče od p do ∞.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|p_1(t,b) - p(t)|dt < \int_{p}^{x}|p_1(t,b) - p(t)|dt + \int_{x}^{\infty} p_1(t,b)dt + \int_{x}^{\infty} p(t)dt <$$

$$< \int_p^x |p_1(t,b) - p(t)|dt + C\int_x^\infty (t-p)^{a-1}e^{-R(t-p)}dt + \int_x^\infty p(t)dt.$$

Izberimo najprej x tako velik, da je vsota drugega in tretjega člena manjša od $\varepsilon/2$. Nato poiščimo tak $M_{\varepsilon/2}$, da iz $b > M_{\varepsilon/2}$ sledi:

$$\int_p^x |p_1(t,b) - p(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tako smo našli za izbrani ε tako število $M_{\varepsilon/2}$, da iz $b > M_{\varepsilon/2}$ sledi:

$$\lim_{b\to\infty} ||p_1(t,b) - p(t)||_1 = 0. \quad \blacksquare$$

13. POSLEDICA

Izrek 12 velja tudi za porazdelitvi:

$$B_1(p + \frac{s}{b}, \frac{b}{r} + \frac{s}{b}, a, b),$$

$$B_3(p + \frac{s}{b}, -\frac{b}{r}, a, b)$$

pri $r > 0$ in poljubnem s.

Dokaz: Če je $X : B_1(p, \frac{b}{r}, a, b)$ slučajna spremenljivka in je

$$Y = X + \frac{s}{b} \quad \text{ter} \quad Z = \frac{X + \omega}{1 - \frac{r}{b}X},$$

sta Y in Z slučajni spremenljivki, porazdeljeni po gornjih dveh zakonih; pri tem je

$$\omega = \frac{bs - rbp^2 - spr}{b^2}.$$

Očitno je

$$\lim_{b\to\infty} Y = \lim_{b\to\infty} Z = \lim_{b\to\infty} X. \quad \blacksquare$$

14. POSLEDICA

Na način, opisan v izreku 12, konvergira porazdelitev $F(g,h)$ z rastočim h k porazdelitvi $\gamma(g/2, g/2)$.

15. LEMA

Za vsak $b \in \mathbb{R}$ in vsak $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ velja:

$$\mathrm{ch}(bx) \leq (\cos x)^{-b^2}$$

Dokaz: Ta neenačba je ekvivalentna neenačbi

$$(\cos x)^{b^2} \cdot \mathrm{ch}(bx) \leq 1.$$

Za $x = 0$ velja enakost. Če pokažemo, da je leva stran neenačbe padajoča funkcija, je trditev že dokazana.

$$\frac{d}{dx}[(\cos x)^{b^2} \mathrm{ch}(bx)] = -b^2(\cos x)^{b^2-1} \sin x \ \mathrm{ch}(bx) + b(\cos x)^{b^2} \mathrm{sh}(bx) =$$

$$= b(\cos x)^{b^2} \mathrm{ch}(bx)[\mathrm{th}(bx) - b \tan x]$$

Recimo, da je $b > 0$. Potem je predznak odvoda enak predznaku izraza v oglatem oklepaju.

$$\frac{d^2}{dx^2} \mathrm{th}(bx) = \frac{-2b^2 \mathrm{th}(bx)}{(\mathrm{ch}(bx))^2} \leq 0 \Longrightarrow \mathrm{th}(bx) \text{ je konkavna funkcija.}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(b \tan x) = \frac{2b \tan x}{(\cos x)^2} \geq 0 \Longrightarrow b \tan x \text{ je konveksna funkcija.}$$

$$\frac{d}{dx} \mathrm{th}(bx)|_{x=0} = \frac{d}{dx}(b \tan x)|_{x=0} = b$$

Zato je $b \tan x \geq \mathrm{th}(bx)$ in izraz v oglatem oklepaju, z njim pa tudi cel odvod, je negativen.

Za $b = 0$ je gornja neenačba trivialna, za $b < 0$ pa tudi velja, ker sta obe strani sodi funkciji argumenta b. ■

Vemo, da velja:

$$F_0(a, b) \geq F_0(a, 0) \quad (b \in \mathbb{R}).$$

Velja pa še ena taka ocena!

16. TRDITEV

Za $a > b^2$ je: $F_0(a, b) \leq F_0(a - b^2, 0)$.

Dokaz:

$$F_0(a,b) = 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{ch}(bt)(\cos t)^{a-1} dt \leq$$

$$\leq 2\int_0^{\pi/2} (\cos t)^{a-1-b^2} dt = F_0(a-b^2,0). \quad \blacksquare$$

17. TRDITEV

$$\lim_{a\to\infty} \sqrt{a}F_0(a,b) = \sqrt{2\pi}, \qquad \forall b \in \mathbb{R}$$

Dokaz:

$$\sqrt{a}F_0(a,b) \geq \sqrt{a}F_0(a,0) = \frac{\sqrt{a}\,2^{a-1}\Gamma(\frac{a}{2})^2}{\Gamma(a)} \longrightarrow \sqrt{2\pi}$$

$$\sqrt{a}F_0(a,b) \leq \sqrt{a}F_0(a-b^2,0) = \sqrt{\frac{a}{a-b^2}}\sqrt{a-b^2}F_0(a-b^2,0) \longrightarrow \sqrt{2\pi}$$

$\blacksquare$

18. TRDITEV

Za $a \sim 1$ je:

$$F_0(a,2b) \sim 2^{-a}(e^{\pi b/2} + e^{-\pi b/2})F_0(a,b).$$

Pri tem je $\sim$ ena od relacij $<$, $>$ ali $=$.

Dokaz: Za $a \sim 1$ je $1 \sim (\sin t)^{a-1}$ za $0 \leq t \leq \pi/2$ in zato:

$$F_0(a,2b) \sim \int_0^{\pi/2} (e^{2bt} + e^{-2bt})(\cos t)^{a-1}(\sin t)^{a-1} dt =$$

$$= 2^{1-a}\int_0^{\pi/2} (e^{2bt} + e^{-2bt})(\sin 2t)^{a-1} dt.$$

To je ob substituciji $z = \pi/2 - 2t$ enako:

$$2^{-a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (e^{\pi b/2}e^{-bz} + e^{-\pi b/2}e^{bz})(\cos z)^{a-1} dz =$$

$$= 2^{-a}(e^{\pi b/2} + e^{-\pi b/2})F_0(a,b). \quad \blacksquare$$

19. TRDITEV

Za vsak $a > 0$ je

$$\lim_{b\to\infty} b^a e^{-\pi b/2} F_0(a,b) = \Gamma(a).$$

Dokaz: Naj bo $b > 0$.

$$R(a,b) = \int_0^{\pi/2} (e^{bt} + e^{-bt})(\frac{\pi}{2} - t)^{a-1} dt.$$

Substituirajmo:

$$b(\frac{\pi}{2} - t) = z.$$

$$R(a,b) = b^{-a} \int_0^{\pi b/2} (e^{\pi b/2} e^{-z} + e^{-\pi b/2} e^{z}) z^{a-1} dz =$$

$$= b^{-a} e^{\pi b/2} \int_0^{\pi b/2} z^{a-1} e^{-z} dz + b^{-a} \int_0^{\pi b/2} e^{z} e^{-\pi b/2} z^{a-1} dz =$$

$$= b^{-a} e^{\pi b/2} \int_0^{\infty} z^{a-1} e^{-z} dz - b^{-a} e^{\pi b/2} \int_{\pi b/2}^{\infty} z^{a-1} e^{-z} dz + \frac{\vartheta(a,b)}{b^a} \int_0^{\pi b/2} z^{a-1} dz,$$

kjer je

$$e^{-\pi b/2} < \vartheta(a,b) < 1.$$

$$b^a e^{-\pi b/2} R(a,b) = \Gamma(a) - \int_{\pi b/2}^{\infty} z^{a-1} e^{-z} dz + \frac{\vartheta(a,b) \pi^a b^a}{e^{\pi b/2} 2^a a}.$$

$$\lim_{b\to\infty} b^a e^{-\pi b/2} R(a,b) = \Gamma(a).$$

Naj bo sedaj $a \geq 1$ in $b > 0$.

$$F_0(a,b) \leq R(a,b) \Longrightarrow \limsup_{b\to\infty} F_0(a,b) b^a e^{-\pi b/2} \leq \Gamma(a).$$

Nato pa vzamemo $a \leq 1$ in $b > 0$.

$$F_0(a,b) \geq R(a,b) \Longrightarrow \liminf_{b\to\infty} F_0(a,b) b^a e^{-\pi b/2} \geq \Gamma(a).$$

Toda z upoštevanjem formule (49) dobimo:

$$F_0(a,b) = \frac{b^2 + (a+1)^2}{a(a+1)} F_0(a+2,b) \leq \frac{b^2 + (a+1)^2}{a(a+1)} R(a+2,b).$$

$$\limsup_{b\to\infty} b^a e^{-\pi b/2} F_0(a,b) \leq \lim_{b\to\infty} \frac{b^2+(a+1)^2}{b^2 a(a+1)} b^{a+2} e^{-\pi b/2} R(a+2,b) =$$

$$= \frac{\Gamma(a+2)}{a(a+1)} = \Gamma(a).$$

Torej trditev zagotovo velja za $a \in (0,1]$. Za tak a je tudi:

$$F_0(a+2,b) b^{a+2} e^{-\pi b/2} = \frac{a(a+1)b^2}{b^2+(a+1)^2} b^a e^{-\pi b/2} F_0(a,b) \longrightarrow \Gamma(a+2).$$

Trditev potemtakem drži za $a \in (0,1] \cup (2,3]$.

Sedaj pa naj bo $a \in (1,2]$.

$$\begin{aligned} F_0(a,b) &\geq \int_0^{\pi/2} (e^{bt} - e^{-bt})(\cos t)^{a-1} \sin t dt = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{bt} (\cos t)^{a-1} \sin t dt = F_1(a+1,b) = \frac{b}{a} F_0(a+1,b) \end{aligned}$$

$$b^a e^{-\pi b/2} F_0(a,b) \geq \frac{1}{a} b^{a+1} e^{-\pi b/2} F_0(a+1,b) \longrightarrow \frac{1}{a}\Gamma(a+1) = \Gamma(a).$$

Trditev sedaj velja že na intervalu $a \in (0,3]$.

Dokažimo s popolno indukcijo še naslednjo trditev: Za vsako naravno število n in vsak a iz intervala $(n, n+1]$ velja enačba v tej trditvi.

Za $n = 1$ smo trditev že dokazali. Recimo, da trditev velja za $n \leq k$ in postavimo: $n = k+1$. Tedaj je $a = k+1+c$, $c \in (0,1]$.

$$b^a e^{-\pi b/2} F_0(a,b) = \frac{(a-2)(a-1)b^2}{b^2+(a-1)^2} b^{a-2} e^{-\pi b/2} F_0(a-2,b) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow (a-2)(a-1)\Gamma(a-2) = \Gamma(a). \qquad \blacksquare$$

V dokazu smo mimogrede srečali poseben primer naslednje neenačbe:

20. TRDITEV

$$F_0(a,b) \geq \frac{|b|}{a} F_0(a+1,b), \quad \forall a > 0 \text{ in } \forall b.$$

Dokažemo jo na enak način, le posebej moramo obravnavati možnosti, ko je $b > 0$ ali $b < 0$.

21. IZREK

Naj bo $s > 0$ in m poljubno realno število. Gostota $p_4(x, a)$ porazdelitve $B_4(1/(s\sqrt{a}), m/(s\sqrt{a}), a, b)$ po točkah in po normi prostora $L^1(\mathbb{R})$ konvergira z rastočim a proti gostoti $p(x)$ porazdelitve $N(m, s)$; porazdelitvena funkcija porazdelitve $B_4(1/(s\sqrt{a}), m/(s\sqrt{a}), a, b)$ pa po točkah konvergira z rastočim a proti porazdelitveni funkciji porazdelitve $N(m, s)$. V posebnem konvergirata na omenjene načine gostota in porazdelitvena funkcija porazdelitve $S(f)$ z naraščajočim f proti gostoti in porazdelitveni funkciji standardizirane normalne porazdelitve.

Dokaz:

$$|p_4(t,a) - p(t)| = \left|\frac{\frac{1}{s\sqrt{a}} e^{b \arctan(\frac{t-m}{s\sqrt{a}})}}{F_0(a,b)[(\frac{t-m}{s\sqrt{a}})^2 + 1]^{\frac{a+1}{2}}} - \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-m}{s})^2}\right| =$$

$$= \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} |\Delta - 1|,$$

kjer je $z = (t - m)/s$ in

$$\Delta = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a} F_0(a,b)} e^{b \arctan(z/\sqrt{a})} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{a}}} \frac{e^{z^2/2}}{(1 + \frac{z^2/2}{a/2})^{a/2}}.$$

Vnaprej obravnavajmo samo tako velike a, da je

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a} F_0(a,b)} < 2.$$

Za $|z| < \sqrt{a}$ je

$$|\arctan \frac{z}{\sqrt{a}}| > \frac{2z}{3\sqrt{a}},$$

za

$$|z| < \frac{\sqrt{a}}{|b|}$$

pa je še

$$e^{b \arctan(z/\sqrt{a})} = 1 + \frac{4bz\vartheta_1}{3\sqrt{a}}, \quad \vartheta_1 \in (0,1).$$

Seveda pa velja še

$$e^{b\arctan(z/\sqrt{a})} < e^{\pi|b|/2} \quad (z \in \mathbb{R}).$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2/a}} = 1 - \frac{\vartheta_2 z^2}{2a} \quad \text{za} \quad |z| < \sqrt{a}, \quad \vartheta_2 \in (0,1);$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2/a}} \le 1 \quad (z \in \mathbb{R}).$$

$(1+\frac{z^2/2}{a/2})^{a/2}$ je naraščajoča funkcija argumenta a, zato je za $a > 2$

$$\frac{e^{z^2/2}}{(1+\frac{z^2/2}{a/2})^{a/2}} < \frac{2e^{z^2/2}}{2+z^2} \quad (z \in \mathbb{R}).$$

Za $|z| < \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}$ pa je

$$1 < \frac{e^{z^2/2}}{(1+\frac{z^2/2}{a/2})^{a/2}} < \frac{1}{1-\frac{2z^2}{3a}} < 1 + \frac{4z^2}{3a}.$$

Zato:

$$\frac{e^{z^2/2}}{(1+\frac{z^2/2}{a/2})^{a/2}} = 1 + \frac{4z^2}{3a}\vartheta_3, \quad \vartheta_3 \in (0,1).$$

Torej je za $|z| < \frac{\sqrt{a}}{\max\{\sqrt{2},|b|\}} = \frac{\sqrt{a}}{c}$:

$$\Delta = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}F_0(a,b)}(1+\frac{4bz\vartheta_1}{3\sqrt{a}})(1-\frac{z^2\vartheta_2}{2a})(1+\frac{4z^2\vartheta_3}{3a}).$$

Najprej fiksirajmo t in z njim z. Če gre a prek vseh mej, gre Δ proti 1 in $|p_4(t,a) - p(t)|$ proti 0, s čemer je konvergenca gostot po točkah dokazana.

Izberimo sedaj nek fiksen x.

$$\begin{aligned}
\delta &= |\int_{-\infty}^{x} p_4(t,a)dt - \int_{-\infty}^{x} p(t)dt| \le \int_{-\infty}^{x} |p_4(t,a) - p(t)|dt \le \\
&\le \int_{-\infty}^{m-sR} [p_4(t,a) + p(t)]dt + \int_{m-sR}^{x} |p_4(t,a) - p(t)|dt < \\
&< \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-R} [\frac{4e^{\pi b/2}}{2+z^2} + e^{-z^2/2}]dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{\frac{x-m}{s}} e^{-z^2/2}|\Delta - 1|dz.
\end{aligned}$$

Vzemimo poljuben $\varepsilon > 0$ in poiščimo tak $R > |\frac{x-m}{s}|$, da je cel prvi člen manjši od $\varepsilon/2$. Potem lahko še določimo tak $a > cR$, da je $|\Delta - 1| < \varepsilon/2$, kar nam da:

$$\delta < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{\frac{x-m}{s}} e^{-z^2/2} \frac{\varepsilon}{2} dz < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \varepsilon.$$

To je dokaz konvergence porazdelitvenih funkcij po točkah.

$$\begin{aligned}
\delta' &= \int_{-\infty}^{\infty} |p_4(t,a) - p(t)| dt < \int_{-\infty}^{m-sR} [p_4(t,a) + p(t)] dt + \\
&+ \int_{m+sR}^{\infty} [p_4(t,a) + p(t)] dt + \int_{m-sR}^{m+sR} |p_4(t,a) - p(t)| dt < \\
&< \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{R}^{\infty} [\frac{4e^{\pi|b|/2}}{2+z^2} + e^{-z^2/2}] dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} e^{-z^2/2} |\Delta - 1| dz.
\end{aligned}$$

Spet si izberemo poljuben $\varepsilon > 0$ in poiščemo tak R, da je prvi člen manjši od $\varepsilon/2$. Nato določimo še tak $a > cR$, da je $|\Delta - 1| < \varepsilon/2$, pa je:

$$\delta' < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} e^{-z^2/2} \frac{\varepsilon}{2} dz < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \varepsilon.$$

To pa je konvergenca gostot po normi prostora $L^1(\mathbb{R})$. ■

22. IZREK

Naj bo $r > 0$ in s, u poljubni števili. Gostota $p_4(x,b)$ porazdelitve $B_4(\frac{1}{r}b, \frac{s}{r}b - u, a, b)$ po točkah konvergira z rastočim b proti gostoti:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{r^a}{\Gamma(a)} (x-s)^{-a-1} e^{-\frac{r}{x-s}}, & x > s \\ 0, & x \leq s \end{cases}$$

Če je X slučajna spremenljivka z gostoto verjetnosti $p(x)$, je $Y = \frac{1}{X-s}$ slučajna spremenljivka, porazdeljena po zakonu $\gamma(r, a)$.

Dokaz:

$$p_4(x,b) = r^a \frac{1}{b^a e^{-\pi b/2} F_0(a,b)} \frac{1}{[(x - s + \frac{ur}{b})^2 + \frac{r^2}{b^2}]^{\frac{a+1}{2}}} e^{b[\arctan \frac{b}{r}(x - s + \frac{ur}{b}) - \frac{\pi}{2}]}.$$

$$\lim_{b \to \infty} b^a e^{-\pi b/2} F_0(a,b) = \Gamma(a).$$

$$\lim_{b\to\infty}[(x-s+\frac{ur}{b})^2+\frac{r^2}{b^2}]^{\frac{a+1}{2}}=(x-s)^{a+1}.$$

$$\lim_{b\to\infty} e^{b[\arctan\frac{b}{r}(x-s+\frac{ur}{b})-\frac{\pi}{2}]}=A.$$

$$x=s\Longrightarrow A=\lim_{b\to\infty} e^{-b[\frac{\pi}{2}-\arctan u]}=0$$

$$x<s\Longrightarrow A=\lim_{b\to\infty} e^{-b[\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{b}{r}(s-x-\frac{ur}{b})]}=0$$

$$x>s\Longrightarrow A=\exp(\lim_{b\to\infty} b[\arctan\frac{b}{r}(x-s+\frac{ur}{b})-\frac{\pi}{2}])=\exp(-\frac{r}{x-s})$$

$$p_Y(x)=\frac{d}{dx}P(\frac{1}{X-s}<x)=\frac{d}{dx}\left\{\begin{array}{cc} P((X<s)+(X>s+\frac{1}{x})), & x>0\\ P(s+\frac{1}{x}<X<s), & x<0\end{array}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{array}{cc}\frac{d}{dx}[1-F_X(s+\frac{1}{x})], & x>0\\ 0, & x<0\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{cc}\frac{1}{x^2}p_X(s+\frac{1}{x}), & x>0\\ 0, & x<0\end{array}\right\}$$

To pa je gostota porazdelitve $\gamma(r,a)$. ∎

VIRI

ABRAMOWITZ, M./ STEGUN, I. A., 1965. *Handbook of Mathematical Functions.* -Dover Publications, Inc., New York, 1146 s.

FELLER, W., 1966. *An Itroduction to Probability Theory and Its Applications* I., II. -John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney, 509 s.

FISZ, M., 1967. *Probability Theory and Mathematical Statistics.* -John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney, 679 s.

GRADŠTEJN, I. S./ RYŽIK, I. M., 1962. *Tablicy integralov, summ, rjadov i proizvedenij.* -Gosudarstvennoe izdateljstvo fiziko – matematičeskoj literatury, Moskva, 1100 s.

JAMNIK, R., 1971. *Verjetnostni račun.* -Mladinska knjiga, Ljubljana, 416 s.

RÉNYI, A., 1970. *Probability Theory.* -Akadémiai Kiadó, Budapest, 666 s.

UDC 630*1 / 9 + 674(06)(497. 12) = 12 ISSN 0351-3114
FDC 1 / 9(06)(497. 12) = 863

UNIVERSITY OF LJUBLJANA
BIOTECHNICAL FAKULTY
DEPARTMENTS OF FORERSTRY, WOOD SCIENCE AND TEHNOLOGY
INSTITUTE FOR FOREST AND WOOD ECONOMY

RESEARCH REPORTS

FOREST AND WOOD SCIENCE & TECHNOLOGY

41

LJUBLJANA 1993

Zbornik gozdarstva in lesarstva, Ljubljana 41, 1993, s. 1 - 236