

# PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 19 (1991/1992)

Številka 5

Strani 268-275

Boris Lavrič:

## FORDOVI KROGI

Ključne besede: matematika, geometrija.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/19/1097-Lavric.pdf>

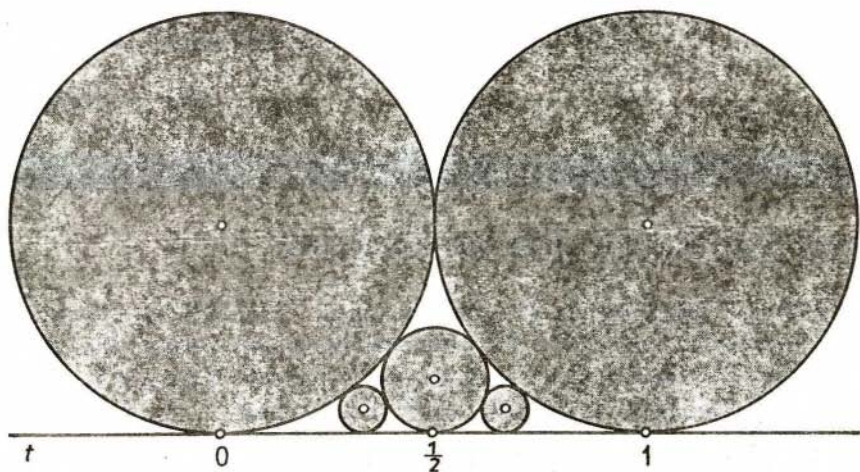
© 1992 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

## FORDOVI KROGI

Na ravnini ležita dva enako velika kroga in se dotikata. To naj bosta prva dva iz družine *Fordovih krogov*, ki jo bomo zdaj zgradili. Skupno tangento  $t$  obeh krogov opremimo s koordinatnim sestavom tako, da se je eden od krogov dotika v točki 0, drugi pa v 1 (točke na  $t$  istovetimo z realnimi števili). Tretji član družine je krog, ki se dotika prvih dveh in tangente  $t$ , seveda v točki  $\frac{1}{2}$ . Nadaljujmo podobno. Vsakemu paru pridelanih Fordovih krogov  $K_1$  in  $K_2$ , ki se dotikata, dodajmo nov krog  $K$ , ki se dotika obeh in še premice  $t$ . Tako dobimo družino vseh Fordovih krogov.



Slika 1. Največjih pet Fordovih krogov

**Naloga 1.** *Kako načrtamo krog  $K$ , če imamo dana kroga  $K_1$ ,  $K_2$  in tangento  $t$ ?*

Na opisani način postopoma pridemo do vsakega Fordovega kroga, vendar moramo pri tem poznati njegove predhodnike. Seveda je to precejšnja ovira, zato bi se ji radi ognili in neposredno spoznali vse kroge. Pa se lotimo te naloge:

Dva podatka bosta dovolj za Fordov krog: njegov polmer in dotikališče s premico  $t$ . Določili ju bomo v nekaj korakih.

Najprej si oglejmo naslednji splošnejši položaj in ga v obliki naloge postavimo bralcu.

**Naloga 2.** Kroga  $K_1$  in  $K_2$  s polmeroma  $r_1$  oziroma  $r_2$  se dotikata skupne tangente  $t$  zaporedoma v točkah  $T_1$  in  $T_2$ . Obeh se dotika tretji krog  $K$  s polmerom  $r$ , ki ima dotikaljšče  $T$  s tangento  $t$  med točkama  $T_1$  in  $T_2$ . Izrazi  $r_1$  in  $r_2$  polmer  $r$  in razdalje  $d = |T_1T_2|$ ,  $d_1 = |T_1T|$  in  $d_2 = |T_2T|$ .

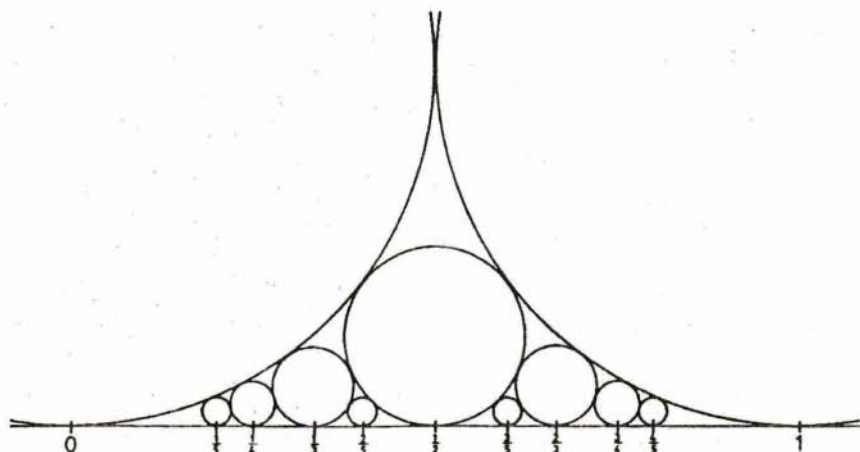
Rešitev naloge najdete v naslednji številki, rezultate pa (skoraj v celoti) razgrnimo kar tu, saj jih bomo takoj potrebovali. Dobimo

$$d = 2\sqrt{r_1r_2}, \quad d_1 = 2\sqrt{r_1r}, \quad d_2 = 2\sqrt{r_2r} \quad (1)$$

in od tod še

$$r = \frac{r_1r_2}{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2}. \quad (2)$$

Uporabimo zdaj te formule za izračun polmerov in dotikaljšč (s tangento  $t$ ) nekaterih največjih Fordovih krogov. Prva dva imata polmera  $\frac{1}{2}$ , dotikaljšči pa v točkah 0 in 1. Tretji se dotika  $t$  v točki  $\frac{1}{2}$ , njegov polmer pa je po formuli (2) enak  $\frac{1}{8}$ . Naslednja dva sta očitno enako velika. Z uporabo (2) dobimo njuna polmera  $\frac{1}{18}$ , s pomočjo (1) pa dotikaljšči  $\frac{1}{3}$  in  $\frac{2}{3}$ . Zabeležimo še podatke nadaljnjih šestih Fordovih krogov. Dva imata polmer  $\frac{1}{32}$ , štirje pa  $\frac{1}{50}$ . Njihova dotikaljšča so v točkah  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{3}{4}$  ter  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{3}{5}$  in  $\frac{4}{5}$ . Kaj opazimo ?



Slika 2.

Polmeri vseh naštetih krogov so oblike  $\frac{1}{2n^2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ustrezna dotikališča s t pa so okrajšani ulomki oblike  $\frac{m}{n}$  z intervala  $[0,1]$ . Navedeni primeri to potrjujejo za največje Fordove kroge, zato brž zaslutimo, da je podobno z vsemi Fordovimi krogi. To obetavno slutnjo oblikujmo v

**Izrek 1.** Za vsak Fordov krog obstaja tak  $n \in \mathbb{N}$ , da je polmer kroga enak  $\frac{1}{2n^2}$ , njegovo dotikališče s t pa je okrajšani ulomek oblike  $\frac{m}{n}$  z intervala  $[0,1]$ .

Bralca vabimo, da se prepriča o pravilnosti naslednjega kriterija, ki ga bomo uporabili pri dokazu izreka 1.

**Naloga 3.** Naj se Fordova kroga  $\mathcal{K}_1$  in  $\mathcal{K}_2$  s polmeroma

$$r_1 = \frac{1}{2n_1^2} \text{ in } r_2 = \frac{1}{2n_2^2}, \quad (n_1, n_2 \in \mathbb{N})$$

dotikata premice t zaporedoma v točkah-ulomkih

$$\frac{m_1}{n_1} \text{ in } \frac{m_2}{n_2}, \quad \left( \frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2} \right).$$

Dokaži, da se  $\mathcal{K}_1$  in  $\mathcal{K}_2$  dotikata med sabo natanko takrat, kadar velja

$$m_2 n_1 - m_1 n_2 = 1. \quad (3)$$

Rešitev naloge preberite v naslednji številki, mi pa začnimo z dokazom izreka:

Krogoma  $\mathcal{K}_1$  in  $\mathcal{K}_2$  iz gornje naloge pridružimo krog  $\mathcal{K}$  tako kot v drugi nalogi in izračunajmo njegov polmer  $r$  ter dotikališče  $x$  s premico  $t$ .

Formula (2) nam da polmer

$$r = \frac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2} = \frac{\frac{1}{2n_1^2} \frac{1}{2n_2^2}}{\left(\frac{1}{n_1\sqrt{2}} + \frac{1}{n_2\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{2(n_1 + n_2)^2}.$$

Od tod s pomočjo formule (1) po kratkem računu dobimo dotikališče

$$x = \frac{m_1}{n_1} + 2\sqrt{r_1 r} = \frac{m_1 n_1 + m_1 n_2 + 1}{n_1(n_1 + n_2)}.$$

Zveza (3) nam  $x$  še poenostavi:

$$x = \frac{m_1 n_1 + m_1 n_2 + (m_2 n_1 - m_1 n_2)}{n_1(n_1 + n_2)} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$$

Postavimo

$$m = m_1 + m_2, \quad n = n_1 + n_2$$

in se prepričajmo, da so dotikališča  $\frac{m_1}{n_1}$ ,  $\frac{m_2}{n_2}$  in  $\frac{m}{n}$  vseh treh krogov okrajšani ulomki. Res, za prva dva to sledi iz zveze (3) (Zakaj?). Ta nam da še enakost

$$m n_1 - m_1 n = m_2 n_1 - m_1 n_2 = 1,$$

ki pove, da je tudi tretji ulomek okrajšan. Krog  $\mathcal{K}$  ima potemtakem polmer  $\frac{1}{2n^2}$  in se dotika premice  $t$  v okrajšanem ulomku  $\frac{m}{n}$ .

Spomnimo se le še na postopek, s katerim pridobivamo Fordove kroge, in dokaz izreka je sklenjen.

Ponovno si ogledjmo največje Fordove kroge in razvrstimo po vrsti dotikaljšča s premico  $t$  za vse tiste, katerih polmeri ne presegajo  $\frac{1}{50}$ :

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$$

Dobili smo naraščajoče zaporedje vseh okrajšanih ulomkov z intervala  $[0,1]$ , katerih imenovalci ne presegajo 5. Ker sta sosednja ulomka  $\frac{m_1}{n_1}$  in  $\frac{m_2}{n_2}$  v tem zaporedju dotikaljšči takih Fordovih krogov, ki se dotikata tudi med sabo, velja zveza (3). Spet se ne moremo upreti skušnjavi posploševanja.

Najprej se ozrimo na splošna zaporedja ulomkov zgornjega tipa. Imenujemo jih *Fareyeva*<sup>1</sup> zaporedja. Natančneje:

*Fareyeva zaporedje*  $\mathcal{F}_k$  reda  $k$  je naraščajoče zaporedje vseh okrajšanih ulomkov z intervala  $[0,1]$ , katerih imenovalci niso večji od  $k$ .

Ulomek  $\frac{m}{n}$  je torej v  $\mathcal{F}_k$  natanko takrat, kadar velja  $0 \leq m \leq n \leq k$  in sta števili  $m, n$  tuji (pri tem pa je število 0 tuje le številu 1). Prej smo torej zapisali Fareyeva zaporedje  $\mathcal{F}_5$ , ki nas je pripeljalo k naslednji domnevi. Ker

<sup>1</sup> Ime ni upravičeno: Farey je namreč leta 1816 le omenil ta zaporedja in brez dokaza zapisal njihovo lastnost iz naloge 4, Haros pa je zaporedja obravnaval že leta 1802 in tudi dokazal lastnosti iz izreka 2 in naloge 4.

bomo videli, da je pravilna, jo strnimo v

**Izrek 2.** Zaporedna člena  $\frac{m_1}{n_1}$  in  $\frac{m_2}{n_2}$ , ( $\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2}$ ) Fareyvega zaporedja  $\mathcal{F}_k$  ustrežata pogoju  $m_2 n_1 - m_1 n_2 = 1$ .

Dokaz bomo oprli na dobro znani rezultat, ki pa ga kljub temu kot nalogo postavimo bralcu.

**Naloga 4.** Dokaži, da za vsak par tujih celih števil  $m, n$  obstajata celi števili  $x, y$ , ki rešita enačbo  $nx - my = 1$ .

Zdaj pa k dokazu izreka 2. Ulomek  $\frac{m_1}{n_1}$  je okrajšan, zato sta števili  $m_1$  in  $n_1$  tuji. Izberimo celi števili  $x_1$  in  $y_1$  tako, da velja

$$n_1 x_1 - m_1 y_1 = 1.$$

Postavimo

$$x = x_1 + p m_1, \quad y = y_1 + p n_1,$$

kjer smo  $p \in \mathbb{Z}$  izbrali tako, da velja ocena

$$k - n_1 < y \leq k. \quad (4)$$

(Zakaj je to možno?) Potem je

$$n_1 x - m_1 y = 1,$$

števili  $x$  in  $y$  sta tuji, zaradi  $n_1 \leq k$  in ocene (4) pa velja  $0 \leq k - n_1 < y \leq k$ . Od tod sledi, da je

$$\frac{x}{y} \in \mathcal{F}_k \text{ in } \frac{x}{y} - \frac{m_1}{n_1} = \frac{1}{n_1 y} > 0. \quad (5)$$

Pokažimo, da velja

$$x = m_2, \quad y = n_2.$$

Če to ni res, je

$$\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2} < \frac{x}{y}$$

in zato

$$\frac{x}{y} - \frac{m_2}{n_2} \geq \frac{1}{n_2 y}, \quad \frac{m_2}{n_2} - \frac{m_1}{n_1} \geq \frac{1}{n_1 n_2}.$$

Seštejmo obe neenakosti in upoštevajmo oceno (4), pa dobimo

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} - \frac{m_1}{n_1} &\geq \frac{1}{n_2 y} + \frac{1}{n_1 n_2} = \\ &= \frac{n_1 + y}{n_1 n_2 y} > \frac{k}{n_1 n_2 y} \geq \frac{1}{n_1 y}. \end{aligned}$$

Prišli smo v protislovje s (5), torej res velja  $x = m_2$  in  $y = n_2$ . Dokaz izreka je s tem sklenjen, saj je

$$m_2 n_1 - m_1 n_2 = n_1 x - m_1 y = 1.$$

**Posledica.** Sosednja člena Fareyvega zaporedja  $\mathcal{F}_k$  z indeksom  $k > 1$  imata različna imenovalca.

**Dokaz.** Enakost, ki ji zadoščata sosednja člena Fareyvega zaporedja  $\mathcal{F}_k$ , pove, da sta njuna imenovalca tuja in zato pri  $k > 1$  različna.

Eno od zanimivih lastnosti Fareyevih zaporedij razkriva naslednja naloga, ki jo bo s pomočjo izreka 1 lahko ugnati:

**Naloga 5.** Naj bodo  $\frac{m_1}{n_1}$ ,  $\frac{m_2}{n_2}$  in  $\frac{m_3}{n_3}$  zaporedni členi nekega Fareyvega zaporedja. Potem velja

$$\frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 + m_3}{n_1 + n_3}.$$

Vrnimo se zdaj k Fordovim krogom. Vemo, da se vsak dotakne premice  $t$  v racionalni točki (ulomku) z intervala  $[0,1]$ . Ali velja tudi obratno: Vsaka racionalna točka z intervala  $[0,1]$  na premici  $t$  je dotikališče Fordovega kroga? Odgovor je pritrđen in ga vključimo v

**Izrek 3.** Dotikališča Fordovih krogov so natanko vse racionalne točke intervala  $[0,1]$  na premici  $t$ .

Zaradi izreka 1 zadošča dokazati, da je vsak okrajšani ulomek  $\frac{m}{n}$  z intervala  $[0,1]$  dotikališče enega od Fordovih krogov. Dokazovali bomo s

pomočjo matematične indukcije po  $n$ :

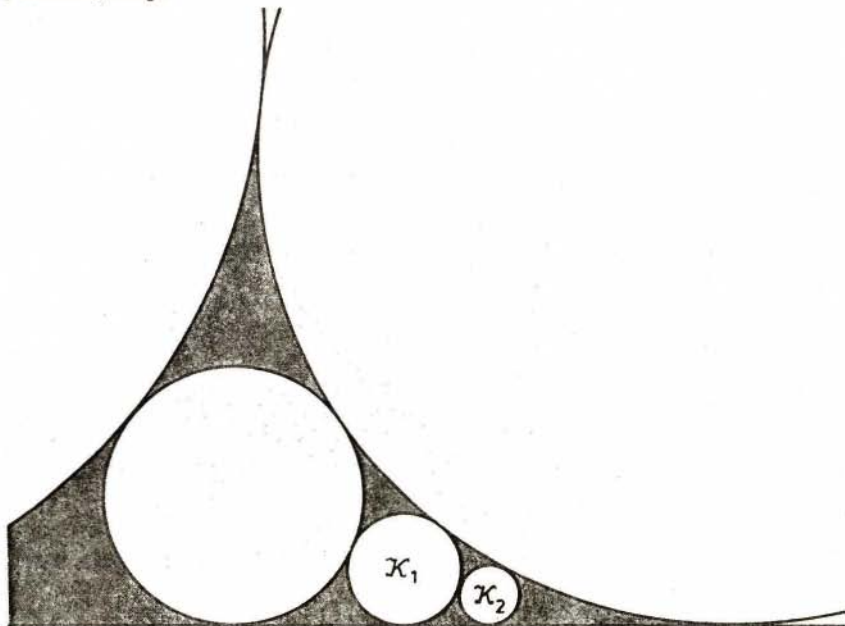
Ulomkov  $\frac{0}{1}$  in  $\frac{1}{1}$  se dotikata največja Fordova kroga, torej pri  $n = 1$  trditev drži.

Naj bo zdaj  $k$  poljubno naravno število, večje od 1. Predpostavimo, da trditev velja za  $n = k - 1$ , in dokažimo, da potem velja tudi za  $n = k$ .

Naj bo  $\frac{j}{k}$  poljuben okrajšani ulomek z intervala  $[0,1]$ . Seveda je  $\frac{j}{k}$  člen Fareyevga zaporedja  $\mathcal{F}_k$ , različen od 0 in 1. Njegova soseda

$$\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2} \left( \frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2} \right)$$

v  $\mathcal{F}_k$  imata po posledici izreka 2 imenovalca manjša od  $k$ , zato sta sosednja člena Fareyevga zaporedja  $\mathcal{F}_{k-1}$ . Po izreku 2 je tedaj  $m_2 n_1 - m_1 n_2 = 1$ , zaradi naše predpostavke pa obstajata Fordova kroga  $\mathcal{K}_1$  in  $\mathcal{K}_2$ , ki se zaporedoma dotikata  $t$  v točkah  $\frac{m_1}{n_1}$  in  $\frac{m_2}{n_2}$ . Naloga 3 pove, da se  $\mathcal{K}_1$  in  $\mathcal{K}_2$  dotikata med sabo. Iz dokaza izreka 1 zvezmo, da se potem Fordov krog  $\mathcal{K}$ , ki se dotika  $\mathcal{K}_1$  in  $\mathcal{K}_2$ , dotakne premice  $t$  v točki  $\frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$ . Z uporabo naloge 5 vidimo, da je



Slika 3.



$$\frac{j}{k} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2},$$

zato je  $\frac{j}{k}$  dotikališče Fordovega kroga  $\mathcal{K}$  s  $t$ .

Indukcijski korak je s tem sklenjen, dokaz izreka pa končan.

Družino Fordovih krogov smo zgradili iz dveh *enako velikih* dotikajočih se krogov, ki sta hkrati njena največja člana. Zdaj pa predpostavimo, da 'začetna' kroga  $\mathcal{K}_1$  in  $\mathcal{K}_2$ , ki se dotikata med sabo, nista enako velika. Prav tako kot Fordove kroge zgradimo iz  $\mathcal{K}_1$  in  $\mathcal{K}_2$  družino krogov, ki jih imenujmo *posplošeni Fordovi krogi*.

V družini vseh posplošenih Fordovih krogov ni nujno največjega kroga. Seveda nas zanima, kdaj pa tak krog vendarle obstaja. Torej ne bo odveč

**Naloga 6.** *Poišči potreben in zadosten pogoj za polmera začetnih krogov  $\mathcal{K}_1$  in  $\mathcal{K}_2$  družine vseh posplošenih Fordovih krogov, da bo v tej družini vsaj en največji krog.*

Članek s tem sklenimo, bralca pa vabimo, da razkrije še kakšno lastnost posplošenih Fordovih krogov.

*Boris Lavrič*