



Geometrijska predstava

Geometric Visualisation

Ludmila Kroulíková

Faculty of science,
Palacky University,
Olomouc

Matija Lokar

Univerza v Ljubljani
Fakulteta
za matematiko in fiziko,

Σ Povzetek

V članku so predstavljeni prvi rezultati študije, ki se je bila izvedena na nekaterih slovenskih osnovnih in srednjih šolah. Namen študije je raziskati nivo geometrijske predstave učencev osnovnih in srednjih šol. V ta namen so učenci reševali test s področja geometrijske predstave v ravnini, povezan z enakostraničnim trikotnikom.

Ključne besede: geometrijska predstava, testiranje, osnovna šola, srednja šola

Σ Abstract

The paper discusses the first results of a study conducted at primary and secondary schools in Slovenia. The aim of the study was to research the level of geometric visualisation of students at primary and secondary schools in Slovenia. Students took a test of geometric visualisation in a 2D equilateral triangle.

Key words: geometric visualisation, testing, primary school, secondary school

α Uvod

Geometrijska predstava

Pojem geometrijska predstava v ravnini vključuje sposobnost ustvarjanja in manipulacije z geometrijskimi liki v mislih, prepoznavanje geometrijskih lastnosti, povezovanje slik z geometrijskimi koncepti in izreki ter odločanje, kdaj in kako začeti, ko rešujemo geometrijski problem. Geometrijska predstava je vrsta spretnosti, ki omogoča predstavo, ustvarjanje in manipulacijo geometrijskih likov, ko rešujemo geometrijske probleme (Fujita, Jones, Yamamoto, 2004). Je pomembna spretnost v vsakdanjem življenju.

Na podlagi spoznavanja opredmetenih stvari lahko otroci razvijajo svojo domišljijo. Ker je sposobnost predstave pomembna za vsakogar, je pomembno, da jo razvijamo. Ljudje z dobro geometrijsko predstavo imajo boljše možnosti zaposlitve na tehničnih in umetniških področjih. Otroci v času izobraževanja potrebujejo dobro geometrijsko predstavo, predvsem na naravoslovnih področjih kot je matematika (Zdráhal, Hodaňová, 2011).

Pilotna študija

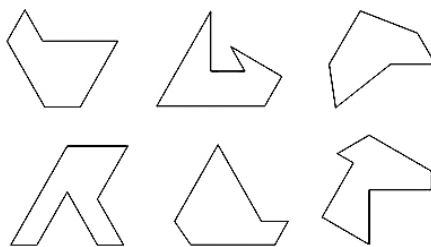
V prispevku opisano testiranje, s katerim proučujemo geometrijsko predstavo učencev, je nadaljevanje študije, ki jo je v svoji doktorski disertaciji opisala Jana Slezáková (Slezáková 2011). Na podlagi idej te študije je bil pripravljen nov skupek nalog, ki so raziskovale geometrijsko predstavo učencev v povezavi z enakostraničnim trikotnikom.

Naloga je bila, da geometrijski lik s pomočjo ene ravne črte razdelimo na dva dela (glej sliko 1), tako da iz dobljenih delov lahko sestavimo enakostranični trikotnik.



[Slika 1] Grafična navodila za reševanje

Test je sestavljalo štirideset tovrstnih nalog. Čas za reševanje je bil 20 minut. Naloge za osnovno in srednjo šolo so se deloma razlikovale, nekaj nalog pa je bila enakih. Na sliki 2 je prikazano šest primerov nalog, ki so bili skupni tako za OŠ kot SŠ.



[Slika 2] Primeri nalog

Na sliki 3 pa vidimo primera nalog za srednjo šolo, ki nista bila uporabljena pri osnovni šoli.



[Slika 3] Primera nalog, uporabljena v srednji in ne v osnovni šoli

Učenci so teste reševali anonimno, a če so želeli zvedeti svojo uspešnost, so se lahko podpisali z vzdevkom.

β Testiranje v Sloveniji

Pilotna študija s tovrstnimi nalogami je bila najprej izvedena na Češkem. Študijska izmenjava v okviru CEEPUS projekta *Active Methods in Teaching and Learning Mathema-*

tics and Informatic je omogočila enomesečni študijski obisk v Sloveniji. Na osnovi pilotnih študij je bil pripravljen nov test za osnovno in srednjo šolo. Naloge so bile enake kot v pilotni študiji, le razvrščene so bile drugače. V novem testu so bile naloge razvrščene glede na uspešnost reševanja posamezne naloge v pilotni študiji. Naloga, ki so jo češki vrstniki najuspešneje reševali, je imela torej zaporedno številko 1, najtežja pa številko 40.

Med tem obiskom smo izvedli testiranje na štirinajstih osnovnih in sedmih srednjih šolah po vsej Sloveniji. Ker smo testiranje morali izvesti v sklopu samega obiska, ni bil narejen noben poseben izbor sodelujočih šol. Želeli smo le testirati kar se da veliko učencev in dijakov.

Osnovne šole

V testiranju jo sodelovalo 1541 učencev osnovnih šol. Šole so bile iz naslednjih krajev: Bled, Cankova, Dobrepolje, Gradec, Izola, Kočevje, Kuteževo, Laško, Litija, Ljubljana, Ljutomer, Naklo, Stročja vas in Vače.

Pravilen odgovor je prinašal eno točko, brez negativnih točk za napačne ali manjka-joče odgovore. Tako je bil minimalni možni rezultat 0 in maksimalni 40 točk. V tabeli 1 so prikazani skupni rezultati po razredih.

razred	6	7	8	9
število učencev	354	349	395	442
povprečje točk	15.243	17.352	20.089	23.197
mediana	14	16	20	24
standardni odklon	9.974	9.587	9.322	10.380
maksimum (40 točk)	1 učenec	0 učencev	2 učenca	11 učencev
minimum (0 točk)	5 učencev	11 učencev	1 učenec	3 učenci

[Preglednica 1] Rezultati: osnovna šola

Kot vidimo, se rezultati pričakovano izboljšujejo z razredom. Najmanjši napredek je med šestim in sedmim razredom. Pogosto predpostavljamo, da imajo dečki boljšo geometrijsko predstavo kot dekleta. Naši rezultati tega ne potrjujejo (tabela 2).

	deklice	dečki
število učencev	751	704
povprečje točk	19,454	18,816
mediana	19	18
standardni odklon	9,983	10,264

[Preglednica 2] Primerjava deklice/dečki

Srednje šole

V testiranju je sodelovalo 772 dijakov iz srednjih šol. Šole so bile iz Celja, Kopra, Krškega, Ljubljane, Murske Sobote in iz Želimlja. Šole so bile različnih tipov – gimnazije, tehnične šole ... Točkovanje je bilo enako kot pri osnovni šoli. Rezultati so podani v tabeli 3.

letnik	1	2	3	4
število učencev	226	178	204	164
povprečje točk	25,996	28,371	29,872	30,787
mediana	28	31	33	34
standardni odklon	9,42	9,648	10,066	9,403
minimum (0 točk)	4	0	2	3

[Preglednica 3] Rezultati v srednjih šolah

Če primerjamo rezultate med gimnazijami in ostalimi tipi srednjih šol, vidimo, da so rezultati v gimnazijah za približno 10 % boljši. To je nekoliko presenetljivo, saj je večina

dijakov, ki niso bili gimnazijci, prihajalo iz tehničnih šol in iz šole za oblikovanje.

	gimnazije	ostale srednje šole
število učencev	311	461
povprečje točk	30,315	27,6
mediana	32	30
standardni odklon	9,091	10,075

[Preglednica 4] Primerjava gimnazije/ostale srednje šole

γ Rezultati posameznih nalog

Vrstni red nalog na testu je bil določen glede na uspešnost reševanja nalog v obeh pilotnih študijah (za osnovno in srednjo šolo), ki sta se prej izvedli na Češkem (Slezáková, 2011). Prva naloga je bila torej tista, ki so jo učenci oz. dijaki na Češkem najbolj uspešno reševali, zadnja pa tista, ki je delala največ težav.

Rezultati za osnovno šolo so podani v preglednici 5.

Osnovna šola – 1542 učencev

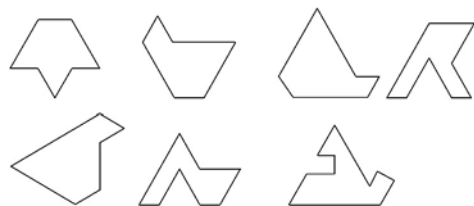
naloga	pravilno		napačno		brez rešitve	
1	1355	87,87 %	131	8,50 %	56	3,63 %
2	1168	75,75 %	327	21,21 %	47	3,05 %
3	500	32,43 %	678	43,97 %	364	23,61 %
4	1228	79,64 %	254	16,47 %	60	3,89 %
5	545	35,34 %	632	40,99 %	365	23,67 %
6	877	56,87 %	348	22,57 %	289	18,74 %
7	1294	83,92 %	200	12,97 %	48	3,11 %
8	1303	84,50 %	202	13,10 %	28	1,17 %
9	413	26,78 %	598	38,78 %	528	34,24 %
10	464	30,09 %	719	46,63 %	359	23,28 %
11	554	35,93 %	791	51,30 %	197	12,78 %
12	283	18,35 %	734	47,60 %	525	34,05 %
13	326	21,14 %	706	45,78 %	510	33,07 %
14	1194	77,43 %	312	20,23 %	36	2,33 %
15	1401	90,86 %	107	6,94 %	34	2,20 %
16	560	36,32 %	743	48,18 %	239	15,50 %
17	549	35,60 %	684	44,36 %	319	20,69 %
18	811	52,59 %	452	29,31 %	269	17,44 %
19	642	41,63 %	707	45,85 %	197	12,78 %
20	1222	79,25 %	249	16,15 %	60	3,89 %
21	692	44,88 %	603	39,11 %	247	16,02 %

Osnovna šola – 1542 učencev

naloga	pravilno		napačno		brez rešitve	
22	716	46,43 %	582	37,74 %	253	16,41 %
23	925	59,99 %	409	26,52 %	211	13,68 %
24	285	18,48 %	832	53,96 %	425	27,56 %
25	944	61,22 %	406	26,33 %	177	11,48 %
26	310	20,10 %	629	40,79 %	603	39,11 %
27	1160	75,23 %	291	18,87 %	91	5,90 %
28	451	29,25 %	514	33,33 %	575	37,29 %
29	735	47,67 %	493	31,97 %	314	20,36 %
30	793	51,43 %	598	38,78 %	151	9,79 %
31	766	49,68 %	563	36,51 %	213	13,81 %
32	666	43,19 %	547	35,47 %	342	22,18 %
33	402	26,07 %	595	38,59 %	543	35,21 %
34	260	16,86 %	798	51,75 %	484	31,39 %
35	980	63,55 %	374	24,25 %	201	13,04 %
36	150	9,73 %	827	53,63 %	565	36,64 %
37	850	55,12 %	522	33,85 %	180	11,67 %
38	760	49,29 %	482	31,26 %	310	20,10 %
39	692	44,88 %	574	37,22 %	276	17,90 %
40	484	31,39 %	618	40,08 %	439	28,47 %

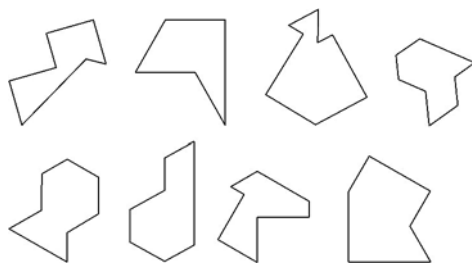
[Preglednica 5] Rezultati po posameznih nalogah: osnovna šola

Vidimo, da so določene razlike v tem, katere naloge so bile lažje slovenskim in katere češkim učencem. Najlažje naloge za slovenske učence so bile naloge 15, 1, 8, 7, 4, 20 in 14, ki jih vidimo (v navedenem vrstnem redu) na sliki 4.



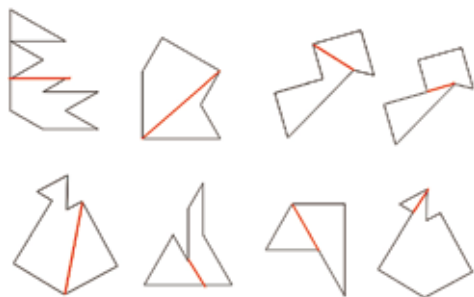
[Slika 4] Osnovnošolcem najlažje naloge

Najtežje naloge so bile 36, 34, 24, 12, 26, 13, 9, 33 (glej sliko 5). Največje presenečenje je bilo slabše reševanje nalog 9 in 12, ki so jih češki vrstniki precej uspešno reševali.



[Slika 5] Najtrši orehi za osnovnošolce

Na sliki 6 je prikazano nekaj tipičnih napak.



[Slika 6] Tipične napake

Domnevamo lahko, da so bile določene napake posledica nerazumevanja navodil. Učenci so si včasih predstavljali sestavljeni trikotnik, ki ni bil enakostranični, ali pa mislili, da morajo v liku poiskati »skriti« trikotnik.

Oglejmo si rezultate še za srednje šole (preglednica 6).

Srednja šola – 772 dijakov

naloga	prav	napačno	brez rešitve
1	700	59	13
2	715	41	16
3	673	15	84
4	704	59	9
5	635	80	57
6	719	44	9
7	697	68	7
8	619	111	42
9	665	74	33
10	663	89	20
11	611	122	39
12	640	88	44
13	674	65	33
14	677	80	15
15	595	146	31
16	657	84	31
17	624	120	28
18	604	111	51
19	619	130	23
20	562	127	83
21	526	223	23

Srednja šola – 772 dijakov

naloga	prav		napačno		brez rešitve	
22	598	77,46 %	119	15,41 %	55	7,12 %
23	594	76,94 %	102	13,21 %	76	9,84 %
24	528	68,39 %	174	22,54 %	70	9,07 %
25	518	67,10 %	130	16,84 %	124	16,06 %
26	480	62,18 %	178	23,06 %	114	14,77 %
27	519	67,23 %	205	26,55 %	48	6,22 %
28	497	64,38 %	140	18,13 %	135	17,49 %
29	460	59,59 %	209	27,07 %	103	13,34 %
30	404	52,33 %	203	26,30 %	165	21,37 %
31	397	51,42 %	242	31,35 %	133	17,23 %
32	508	65,80 %	110	14,25 %	154	19,95 %
33	414	53,63 %	169	21,89 %	189	24,48 %
34	333	43,13 %	321	41,58 %	118	15,28 %
35	398	51,55 %	253	32,77 %	121	15,67 %
36	559	72,41 %	121	15,67 %	92	11,92 %
37	309	40,03 %	264	34,20 %	199	25,78 %
38	369	47,80 %	261	33,81 %	142	18,39 %
39	349	45,20 %	142	18,39 %	227	29,40 %
40	357	46,24 %	216	27,98 %	199	25,78 %

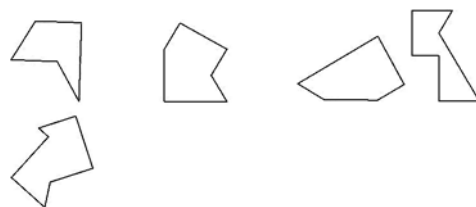
[Preglednica 6] Rezultati po posameznih nalogah: srednja šola

Srednješolcem najlažje naloge so bile naloge 6, 2, 4, 1 in 7 (glej sliko 7).



[Slika 7] Srednješolcem najlažje naloge

Najtežje naloge so bile 38, 40, 39, 34, in 37 (glej sliko 8). Kot vidimo, so slovenskim srednješolcem povzročale težave (oz. jim bile lahke) iste naloge kot njihovim češkim vrstnikom (Slezáková, 2011).



[Slika 8] Srednješolcem najtežje naloge

Na sliki 9 si lahko ogledamo nekaj tipičnih napak, ki so jih delali srednješolci.



[Slika 9] Tipične napake med srednješolci

δ Zaključek

Geometrijska predstava je pomembna veščina, ki omogoča, da v mislih ustvarjamo in spreminjamo grafične like, da prepoznamo geometrijske lastnosti in podobno. Ta študija je namenjena preučevanju geometrijske predstave v ravnini, ki jo imajo učenci in dijaki.

Potrjen je bil pričakovan rezultat, da se geometrijska predstava razvija s starostjo. Opazili pa smo, da ni bilo razlik v rezultatih med dečki in deklicami. Nekoliko nas je presenetilo, da so bili rezultati v gimnazijah

za približno 10 % boljši. Pričakovali smo, da razlik ne bo oziroma da bodo rezultati v drugih šolah kvečjemu boljši, saj je večina dijakov, ki niso bili gimnazijci, prihajalo iz tehničnih šol in iz šole za oblikovanje.

V nadaljevanju projekta bo treba opraviti predvsem natančnejšo analizo tipičnih napak, ki so jih delali učenci in dijaki. Raziskati bo treba, ali so te napake posledica neustreznih navodil ali res napačnih predstav, ki jih imajo učenci oziroma dijaki. Tovrstne rezultate bi lahko uporabili avtorji geometrijskih učbenikov in drugih gradiv s področja geometrije, da bi omogočili boljši razvoj geometrijske predstave.

Zahvala

Ta študija je bila deloma podprta s projektom *CMEPIUS project HU-0028 Active Methods in Teaching and Learning mathematics and Informatics*.

Avtorja se želita zahvaliti vsem sodelujočim šolam, še posebej pa učiteljem, ki so omogočili izvedbo testiranja.

ε Literatura

1. Molnár, J. (2004): Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii. Olomouc: VUP.
2. Slezáková, J. (2011): Geometrická představivost v rovině (dizertační práce). Olomouc: PřF UP.
3. Fujita, T., Jones, K. and Yamamoto, S. (2004), Geometrical Intuition and the Learning and Teaching of Geometry. *10th International Congress on Mathematical Education, (ICME-10)*, Copenhagen, Denmark. Dostopno na <http://eprints.soton.ac.uk/14687/>.
4. Zdráhal T., Hodaňová J. (2011): Matematická abstrakce – Makos 2011. Olomouc: PřF UP, JČMF.