

PROBLEM POŽREŠNE KOZE

JAN MALEJ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Članek predstavi problem požrešne koze in njegovo naravno posplošitev v n -razsežni evklidski prostor. Rešitev problema v ravnini je izražena implicitno in s pomočjo kompleksne analize tudi eksplicitno. Rešitve problemov v višjih razsežnostih so opisane implicitno s sistemom dveh enačb. Obravnavano je tudi limitno obnašanje rešitev, ko razsežnost prostora narašča preko vseh mej.

THE GRAZING GOAT PROBLEM

The article presents the grazing goat problem and its natural generalization to the n -dimensional Euclidean space. The solution of the problem in the plane is expressed implicitly and explicitly, the latter using complex analysis. Solutions of the problems in higher dimensions are described implicitly with the system of two equations. The limiting behaviour of solutions as the dimension approaches infinity is also discussed.

1. Uvod

V tem članku bomo spoznali problem požrešne koze. Ena izmed variacij problema, s katero se sicer ne bomo ukvarjali, je bila prvič objavljena leta 1748, kot naveda [6]. Problem, ki ga bomo obravnavali, pa je bil prvotno objavljen leta 1894 v prvi izdaji revije *American Mathematical Monthly*.

Zgled 1 (Problem požrešne koze). Imamo pašnik, ograjen z okroglo ograjo, in kozo, ki se tam pase. Kozo z neraztegljivo vrvjo privežemo na ograjo. Kolikšna naj bo dolžina te vrvi, da bo koza lahko pojedla natanko polovico ploščine pašnika?

Problem je na videz zelo preprost, k njemu lahko pristopi vsak z nekaj srednješolskega znanja geometrije in trigonometrije, vendar pa se bo izkazalo, da se je do njegove eksplicitne rešitve presenetljivo težko prebiti.

Načrt našega raziskovanja je sledeč: najprej bomo v 2. poglavju poiskali rešitev prvotno zastavljenega problema. V razdelku 2.1 jo bomo izrazili implicitno, v razdelku 2.2 pa eksplicitno. Slednji opis rešitve je bil zanimivo odkrit šele leta 2020. Nato bomo v 3. poglavju poiskali naravno posplošitev problema v višje razsežnosti. V razdelkih 3.1 in 3.2 bomo našli nove rešitve, v razdelku 3.3 pa bomo opisali njihovo limitno obnašanje ob tem, ko razsežnost evklidskega prostora raste preko vseh meja.

2. Osnovni problem

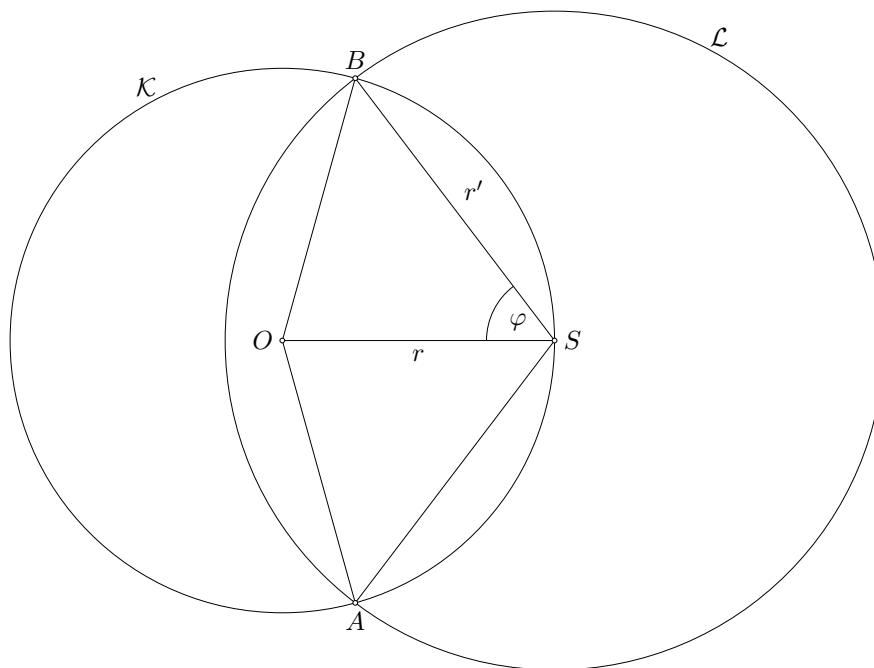
V tem razdelku si bomo ogledali dva pristopa k reševanju osnovnega problema požrešne koze. Najprej problem podajmo na bolj geometrijski način.

Zgled 2 (Problem požrešne koze v ravnini). Naj bo $\mathcal{K}$ krog v ravnini s središčem v točki O in polmerom r . Naj bo S točka na krožnici, ki omejuje krog $\mathcal{K}$, in $\mathcal{L}$ krog s središčem v točki S ter polmerom r' . Kolikšen naj bo polmer r' kroga $\mathcal{L}$, da bo ploščina preseka krogov $\mathcal{K}$ in $\mathcal{L}$ enaka polovici ploščine kroga $\mathcal{K}$?

2.1 Implicitno podana rešitev

Problem bomo za začetek poskusili rešiti z znanjem srednješolske matematike, saj nam bo rezultat pomagal pri iskanju eksplicitno podane rešitve.

Začnimo s skico (slika 1) in uvedimo nekaj osnovnih oznak. Naj bosta A in B presečišči krožnic,



Slika 1. Skica problema požrešne koze v ravnini.

ki omejujeta kroga $\mathcal{K}$ in $\mathcal{L}$, povežimo ju s točkama O in S . Označimo še kot $\angle BSO$ s φ . Implicitno podano rešitev problema požrešne koze v ravnini opiše naslednja trditev, dobljena v [2].

Trditev 3. Če ploščina preseka krogov $\mathcal{K}$ in $\mathcal{L}$ znaša natanko polovico ploščine kroga $\mathcal{K}$, potem za radija r in r' ter kot $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ veljata zvezi:

$$r' = 2r \cos \varphi \quad \text{in} \quad \sin(2\varphi) - 2\varphi \cos(2\varphi) - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Dokaz. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $r = 1$, saj bomo tako dobili razmerje med r' in r . Prav tako lahko zaradi simetrije za točko S izberemo poljubno robno točko kroga $\mathcal{K}$. S pomočjo skice opazimo, da velja $|OS| = |OA| = |OB| = 1$, saj so vse te daljice polmeri kroga $\mathcal{K}$, velja pa tudi $|SA| = |SB| = r'$. Trikotnika $\triangle SOA$ in $\triangle BOS$ sta torej skladna in enakokraka. Dodatno imata oba vrh v točki O in velja

$$\angle SAO = \angle OSA = \angle BSO = \angle OBS = \varphi.$$

Kota $\angle AOS$ in $\angle SOB$ sta torej enaka $\pi - 2\varphi$.

Presek, čigar ploščino želimo izračunati, razdelimo na tri dele: na krožni izsek s središčem v točki S , polmerom r' in središčnim kotom 2φ ter dva krožna odseka, ki ju porodita tetivi SA in SB ter v obeh primerih tudi središčni kot $\pi - 2\varphi$. Zaradi enakosti kotov $\angle AOS = \angle SOB$ sta ta krožna odseka skladna. Ploščina krožnega izseka je enaka

$$\frac{\pi (r')^2 \cdot 2\varphi}{2\pi} = (r')^2 \cdot \varphi,$$

ploščina vsakega od krožnih odsekov pa je enaka

$$\frac{\pi(\pi - 2\varphi)}{2\pi} - \frac{1}{2} \sin(\pi - 2\varphi) = \frac{(\pi - 2\varphi)}{2} - \frac{1}{2} \sin(\pi - 2\varphi).$$

Sedaj vse tri ploščine seštejemo in dobimo, da je ploščina preseka enaka

$$(r')^2 \cdot \varphi + \pi - 2\varphi - \sin(\pi - 2\varphi).$$

S pomočjo sinusnega izreka v trikotniku $\triangle BOS$ dobimo tudi zvezo

$$\frac{r'}{\sin(\pi - 2\varphi)} = \frac{1}{\sin \varphi} \rightsquigarrow r' = 2 \cos \varphi,$$

kjer smo drugo enakost dobili z upoštevanjem $\sin(2\varphi) = \sin(\pi - 2\varphi)$ in formule za sinus dvojnega kota (φ pa očitno ne more biti enak 0 ali $\frac{\pi}{2}$).

S tem smo že izrazili r' v odvisnosti od φ . Dobljeno zvezo vstavimo v izraz za ploščino preseka, ki ga enačimo s $\frac{\pi}{2}$, kolikor znaša polovica ploščine enotskega kroga. Nastalo enakost s pomočjo zvez $\sin(2\varphi) = \sin(\pi - 2\varphi)$ in $\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2}$ preoblikujemo v želeno obliko

$$\sin(2\varphi) - 2\varphi \cos(2\varphi) - \frac{\pi}{2} = 0,$$

s čimer je dokaz končan. ■

Opomba 4. Funkcija $f(x) = \sin(2x) - 2x \cos(2x) - \frac{\pi}{2}$ je zvezna, dodatno pa velja, da je $f(0) = -\frac{\pi}{2}$ ter $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$, torej po izreku o vmesni vrednosti na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ obstaja njena ničla, kar nam zagotovi obstoj takega kota φ . Poleg tega sta (glede na skico) tako obstoj kot enoličnost dobljene rešitve na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ intuitivno očitna. Res, enoličnost rešitve sledi tudi iz dejstva, da je funkcija f na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ strogo naraščajoča, saj za vsak $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ velja

$$f'(x) = 2 \cos(2x) - 2 \cos(2x) + 4x \sin(2x) = 4x \sin(2x) > 0.$$

S tem pristopom smo uspeli dobiti implicitno podano rešitev problema požrešne koze v ravnini. Težava se pojavi, ker je enačba za izračun kota φ *transcendentna*, zato ne moremo poiskati njene eksplicitne rešitve. Približno rešitev lahko izračunamo s pomočjo računalnika ali pa kakšne aproksimacijske metode, na primer z Newtonovo metodo, ki se izkaže za sorazmerno učinkovito. Kot je navedeno v viru [2], izračun pokaže, da sta iskana kot φ in polmer r' :

$$\varphi \approx 0,9528 \approx 54,59^\circ \rightsquigarrow r' \approx 1,1587 \cdot r.$$

2.2 Eksplicitno podana rešitev

V tem razdelku bomo poiskali natančno rešitev problema požrešne koze v ravnini, z drugimi besedami, izrazili jo bomo eksplicitno. Pri tem si bomo pomagali z metodami iz kompleksne analize, kar je že samo po sebi nekoliko presenetljivo, saj se ukvarjamo z geometrijskim problemom v ravnini. Zanimivo je tudi dejstvo, da je bila eksplicitno podana rešitev odkrita dokaj pozno – leta 2020. Razdelek je povzet po viru [6].

Glede na implicitno podano rešitev, ki smo jo izpeljali v prejšnjem razdelku, je ekvivalenten problem eksplicitno izraziti tisto ničlo funkcije

$$f(z) = \sin z - z \cos z - \frac{\pi}{2},$$

ki leži na intervalu $(0, \pi)$. Pri tem smo za lažji zapis namesto 2φ uvedli spremenljivko z , kar pa lastnosti funkcije f ne spremeni, saj smo ustrezno prilagodili opazovano domeno.

Pred naslednjim izrekom se spomnimo še definicije enostavne povezanosti. Množica U je *enostavno povezana*, če je povezana s potmi in če za vsaki zvezni preslikavi (poti) $p: [0, 1] \rightarrow U$ in $q: [0, 1] \rightarrow U$, za kateri velja $p(0) = q(0)$ ter $p(1) = q(1)$, obstaja homotopija $F: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$, za katero velja $F(x, 0) = p(x)$ in $F(x, 1) = q(x)$.

Izrek 5. Naj bo $U \subseteq \mathbb{C}$ odprta in enostavno povezana množica ter $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ neničelna holomorfná funkcija. Potem za vsako enostavno ničlo $z_0 \in U$ funkcije g obstaja enostavna sklenjena krivulja $\mathcal{C}$ v U , da velja

$$z_0 = \frac{\oint_{\mathcal{C}} \frac{z dz}{g(z)}}{\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{g(z)}}.$$

Dokaz. Naj bo $z_0 \in U$ enostavna ničla funkcije g . Tedaj obstajata tak odprt krog $\Delta(z_0, \varepsilon)$ in odprt disk $V \subseteq U$, da je $\overline{\Delta}(z_0, \varepsilon) \subseteq V \subseteq U$ ter z_0 edina ničla funkcije g na V . Naj bo $\mathcal{C}$ robna krožnica kroga $\Delta(z_0, \varepsilon)$. Zaradi enostavnosti ničle z_0 je funkcija $z \mapsto \frac{z - z_0}{g(z)}$ holomorfná na V in posledično po Cauchyjevem izreku velja

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{z - z_0}{g(z)} dz = 0.$$

Zaradi linearnosti integrala lahko sedaj iz te enakosti izrazimo z_0 v želeni obliki. ■

Zgornji izrek bi radi uporabili na funkciji f , ki je seveda holomorfná na celotni kompleksni ravnini. V prejšnjem razdelku smo razmislili, da ima zožitev funkcije f na realna števila natanko eno ničlo na intervalu $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, ki jo označimo z z_0 . Poleg tega velja $f'(z) = z \sin z$, torej je z_0 tudi enostavna ničla, saj ne more biti ničla odvoda f' . Ker je f cela funkcija, moramo torej – podobno kot v dokazu izreka – poiskati tako enostavno sklenjeno krivuljo $\mathcal{C}$ v $\mathbb{C}$, da ničla z_0 leži v notranjosti območja, omejenega s krivuljo $\mathcal{C}$, in je tam tudi edina ničla f , hkrati pa f tudi na $\mathcal{C}$ ne sme imeti ničel.

Krivulja $\mathcal{C}$ seveda ni enolično določena, vendar zaradi doslednosti poiščimo konkretno enostavno sklenjeno krivuljo, ki bo ustrezala pogojem. Pri tem nam bo v pomoč naslednja lema.

Lema 6. Naj bo $D = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z \in [\frac{\pi}{2}, \pi], \operatorname{Im} z \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]\}$. Funkcija f v množici $D - \{z_0\}$ nima ničel.

Dokaz. Najprej si oglejmo imaginarno komponento funkcije f . Velja

$$\operatorname{Im} f(x + iy) = \operatorname{Im} (\sin(x + iy) - (x + iy) \cos(x + iy)).$$

Spomnimo, da za vsak $z \in \mathbb{C}$ veljata zvezi:

$$\begin{aligned} \cos z &= \cosh(iz) \\ \sin z &= -i \sinh(iz). \end{aligned}$$

Hiperbolični funkciji razpišemo po definicijah, namesto z pišemo $x + iy$ in vse skupaj vstavimo v $\operatorname{Im} f(x + iy)$. Po krajšem računu dobimo:

$$\operatorname{Im} f(x + iy) = (\cos x + x \sin x) \sinh y - y \cos x \cosh y.$$

Za $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ velja neenakost $\cos x + x \sin x \geq \cos x$, torej ob pogoju $y > 0$ velja tudi:

$$\operatorname{Im} f(x + iy) \geq -\cos x (y \cosh y - \sinh y).$$

S primerjavo koeficientov v Taylorjevih razvojih funkcij $y \mapsto y \cosh y$ in $y \mapsto \sinh y$ vidimo, da za $y > 0$ velja neenakost $y \cosh y > \sinh y$, torej je za $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ ter $y > 0$ resnična ocena:

$$\operatorname{Im} f(x + iy) \geq -\cos x (y \cosh y - \sinh y) > 0.$$

Posebej obravnavamo še primer, ko je $x = \frac{\pi}{2}$. To vrednost vstavimo v formulo za imaginarni del funkcije f in ob predpostavki, da je $y > 0$, dobimo:

$$\operatorname{Im} f(x + iy) = \frac{\pi}{2} \sinh y > 0.$$

Za konec opazimo, da je $\operatorname{Im} f(x - iy) = -\operatorname{Im} f(x + iy)$, torej je funkcija f za vsak $z \in D - ([\frac{\pi}{2}, \pi] \times \{0\})$ različna od nič. Premislili pa smo že, da je z_0 edina ničla f na intervalu $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. ■

S pomočjo leme 6 tako lahko podamo iskano krivuljo $\mathcal{C}$ kot včrtano krožnico kvadratu, ki omejuje območje D . Enačba krožnice $\mathcal{C}$ je torej:

$$\left| z - \frac{3\pi}{4} \right| = \frac{\pi}{4}.$$

Posledično torej po izreku 5 iskano ničlo funkcije f izrazimo kot:

$$z_0 = \left(\oint_{|z - \frac{3\pi}{4}| = \frac{\pi}{4}} \frac{z dz}{\sin z - z \cos z - \frac{\pi}{2}} \right) \cdot \left(\oint_{|z - \frac{3\pi}{4}| = \frac{\pi}{4}} \frac{dz}{\sin z - z \cos z - \frac{\pi}{2}} \right)^{-1}.$$

Z upoštevanjem trditve 3 tako pridemo do končnega rezultata. Pri tem moramo biti še pozorni na to, da v argument kosinusa vstavimo polovico vrednosti iskane ničle.

Trditev 7. Eksplicitno podana rešitev problema požrešne koze v ravnini je enaka

$$r' = 2r \cos \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\oint_{|z - \frac{3\pi}{4}| = \frac{\pi}{4}} \frac{z dz}{\sin z - z \cos z - \frac{\pi}{2}} \right) \cdot \left(\oint_{|z - \frac{3\pi}{4}| = \frac{\pi}{4}} \frac{dz}{\sin z - z \cos z - \frac{\pi}{2}} \right)^{-1} \right).$$

3. Posplošitev problema

Ena izmed lepih lastnosti problema, s katerim se ukvarjamo, je njegova preprosta formulacija, ki nam omogoča veliko zanimivih posplošitev. Že v ravnini imamo na primer možnost izbrati poljubno metriko in analizirati presek dveh metričnih krogel (več o tem si bralec lahko prebere v viru [1]), vendar se s tem v tem članku ne bomo ukvarjali. V glavnem se bomo osredotočili na posplošitev naloge v višjerazsežne evklidske prostore.

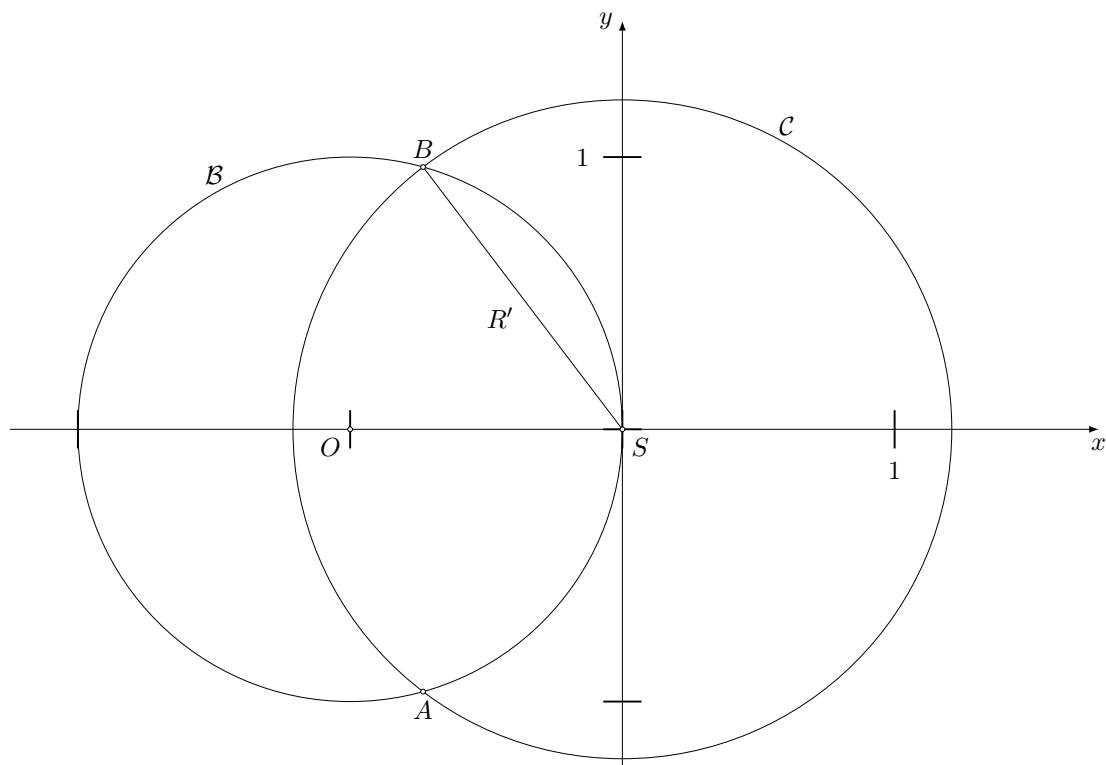
3.1 Rešitev trirazsežnega problema

Preden se lotimo povsem splošne verzije problema si oglejmo, kaj se zgodi, če preidemo iz ravnine v prostor.

Zgled 8 (Trirazsežni problem požrešne koze). Naj bo $\mathcal{B}$ zaprta krogla v prostoru s središčem v točki O in polmerom R . Naj bo S točka na sferi, ki omejuje kroglo $\mathcal{B}$ in naj bo $\mathcal{C}$ zaprta krogla s središčem v točki S in polmerom R' . Kolikšen naj bo polmer krogle $\mathcal{C}$, da bo prostornina preseka krogel $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$ enaka polovici prostornine krogle $\mathcal{B}$?

Zanimivost trirazsežnega problema je, da je v resnici enostavnejši od tistega v ravnini, hkrati pa ima lepšo rešitev. Situacijo tokrat predstavimo v koordinatnem sistemu, saj si bomo pri reševanju pomagali s prostorninami rotacijskih teles (glej sliko 2).

Pokažimo naslednjo trditev, ki opisuje rešitev trirazsežnega problema požrešne koze. Bralec jo lahko najde tudi v viru [4].



Slika 2. Projekcija trirazsežnega problema na ravnino.

Trditve 9. Naj bo $\mathcal{B}$ krogla v prostoru s polmerom $R = 1$. Če je prostornina preseka krogel $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$ enaka polovici prostornine krogle $\mathcal{B}$, potem je polmer $R' \in (1, 2)$ krogle $\mathcal{C}$ ničla polinoma

$$p(x) = 3x^4 - 8x^3 + 8.$$

Opomba 10. Za kroglo s polmerom R ničla polinoma p podaja razmerje R'/R .

Dokaz (trditve). Utemeljitev, da je R' dobro definiran, naredimo popolnoma enako kot v primeru v ravnini – obravnavamo polinoma $p(x)$ in $p'(x)$. Prav tako je očitno, da mora veljati $R' \in (1, 2)$. Pokažimo, da je tak R' res ničla polinoma $p(x)$, pri čemer si pomagamo s skico na sliki 2.

Iščemo prostornino telesa, ki ga dobimo, če območje v zgornji polravnini, omejeno s krožnicama $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$ ter abscisno osjo, zavrtimo okoli le-te. Označimo to telo s P . Enačbi krožnic, ki omejujeta telo P , sta

$$\mathcal{B} : (x + 1)^2 + y^2 = 1 \quad \text{in} \quad \mathcal{C} : x^2 + y^2 = (R')^2.$$

Po kratkem računu ugotovimo, da mora x -koordinata presečišča krožnic zadoščati zvezi $x_0 = -\frac{(R')^2}{2}$. S pomočjo formule za prostornino rotacijskih teles dobimo izraz za prostornino telesa P :

$$V(P) = \pi \int_{-R'}^{-\frac{(R')^2}{2}} ((R')^2 - x^2) dx + \pi \int_{-\frac{(R')^2}{2}}^0 (1 - (x + 1)^2) dx.$$

Integrala v $V(P)$ je preprosto izračunati, saj sta integranda polinoma. Izraz za $V(P)$ se tako

poenostavi:

$$\begin{aligned} V(P) &= \pi \left((R')^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R'}^{-\frac{(R')^2}{2}} - \pi \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_{-\frac{(R')^2}{2}}^0 \\ &= \pi \left(-\frac{(R')^4}{2} + \frac{(R')^6}{24} + \frac{2(R')^3}{3} \right) + \pi \left(-\frac{(R')^6}{24} + \frac{(R')^4}{4} \right) \\ &= -\frac{\pi(R')^4}{4} + \frac{2\pi(R')^3}{3}. \end{aligned}$$

Radi bi, da je prostornina telesa P enaka $\frac{2\pi}{3}$, torej polovici prostornine krogle $\mathcal{B}$. Dobljena izraza enačimo in enakost preuredimo:

$$-\frac{\pi(R')^4}{4} + \frac{2\pi(R')^3}{3} = \frac{2\pi}{3} \iff 3(R')^4 - 8(R')^3 + 8 = 0.$$

Torej je R' res ničla polinoma p . ■

Dobljena rešitev trirazsežnega problema je sicer lepo izražena, vendar ni racionalno število. Kljub temu jo je z bisekcijo enostavno aproksimirati. Kot je navedeno v viru [4], se izkaže, da je približek za razmerje enak

$$R' \approx 1,2285 \cdot R.$$

3.2 Rešitev posplošnega problema

Posplošeni problem definiramo podobno kot trirazsežni problem.

Zgled 11 (Posplošeni problem požrešne koze). Naj bo $\mathcal{B}$ n -razsežna zaprta krogla s središčem v točki O in polmerom r . Naj bo S točka na n -razsežni sferi, ki omejuje kroglo $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$ n -razsežna zaprta krogla s središčem v točki S ter polmerom r' . Kolikšen naj bo polmer krogle $\mathcal{C}$, da bo n -razsežna (Jordanova) prostornina preseka krogel $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$ enaka polovici n -razsežne prostornine krogle $\mathcal{B}$?

Pri reševanju problema v ravnini smo imeli na voljo formule za ploščino krožnega izseka in odseka, v prostoru pa so se integrali za prostornine rotacijskih teles zelo lepo poenostavili. Za izračun rešitve problema v $n \geq 4$ razsežnostih pa ustreznih orodij še nimamo, zato potrebujemo nekaj predpriprave.

3.2.1 Predpriprava

Od zdaj naprej n -razsežno prostornino poenostavljeno imenujmo kar prostornina in podobno n -razsežno (zaprto) kroglo kar krogla. Potrebovali bomo formulo za prostornino krogle s polmerom r , ki jo označimo z $V_n(r)$. Do te bomo prišli s pomočjo n -ternega Riemannovega integrala. Rezultati so povzeti po viru [3].

Brez škode za splošnost smemo predpostaviti, da je središče krogle v koordinatnem izhodišču. Kroglo opisuje enačba

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq r^2.$$

Prostornino krogle $V_n(r)$ torej dobimo po formuli:

$$V_n(r) = 2^n \int_0^r dx_1 \int_0^{s_1} dx_2 \int_0^{s_2} dx_3 \dots \int_0^{s_{n-1}} 1 dx_n,$$

kjer je $s_i := \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_i^2}$ za vse $i = 1, 2, \dots, n-1$. Pri tem smo v resnici izračunali prostornino krogle v enem od *hiperoktantov*, rezultat pa nato zaradi simetrije pomnožili s številom hiperoktantov, za katerega je preprosto preveriti, da je enako 2^n . Pri računanju s prostorninami je uporabna naslednja lema.

Lema 12. Naj bo $r > 0$. Velja zveza

$$V_n(r) = V_n(1) \cdot r^n.$$

Dokaz. Zvezo dokažemo s pomočjo vpeljave novih spremenljivk. V formuli za prostornino krogle za vsak $i = 1, 2, \dots, n$ naredimo substitucijo $u_i = \frac{x_i}{r}$ oziroma $x_i = ru_i$. Jacobijeva determinanta je tedaj očitno $\det J = r^n$, meje integriranja pa se spremenijo na naslednji način:

$$\begin{aligned} x_i = 0 &\implies u_i = 0 \\ x_1 = r &\implies u_1 = 1. \end{aligned}$$

Za vse $i = 2, \dots, n$ pa dobimo

$$x_i = s_{i-1} \implies u_i = \sqrt{1 - u_1^2 - \dots - u_{i-1}^2}.$$

Dodatno označimo $t_i = \sqrt{1 - u_1^2 - \dots - u_{i-1}^2}$ in dobimo

$$V_n(r) = r^n \cdot 2^n \int_0^1 du_1 \int_0^{t_1} du_2 \int_0^{t_2} du_3 \cdots \int_0^{t_{n-1}} 1 du_n = V_n(1) \cdot r^n,$$

kar smo želeli dokazati. ■

Opomba 13. Opazimo, da velja tudi zveza

$$V_n(r) = 2^n \int_0^r dx_1 \int_0^{s_1} dx_2 \int_0^{s_2} dx_3 \cdots \int_0^{s_{n-1}} 1 dx_n = 2 \int_0^r V_{n-1}(s_1) dx_1,$$

iz leme 12 pa sledi

$$2 \int_0^r V_{n-1}(s_1) dx_1 = 2 \cdot V_{n-1}(1) \int_0^r s_1^{n-1} dx_1 = 2 \cdot V_{n-1}(1) \int_0^r (r^2 - x_1^2)^{\frac{n-1}{2}} dx_1.$$

3.2.2 Rešitev

Prišli smo v položaj, ko lahko implicitno podamo rešitev problema v n razsežnostih za poljuben $n \geq 2$. Podaja jo naslednja trditev.

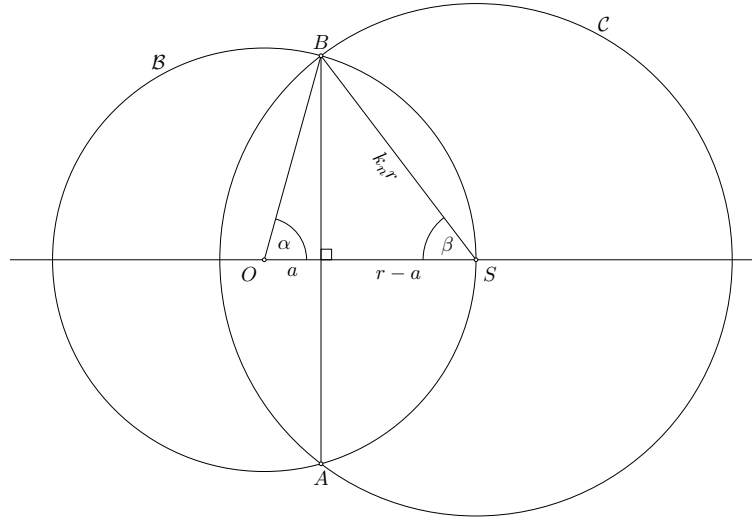
Trditev 14. Naj bo $n \geq 2$ poljubno naravno število. Če število k_n podaja razmerje med polmeroma krogel $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$ v posplošenem problemu požrešne koze, potem zanj velja naslednji sistem enačb:

$$k_n^n = \frac{I_1}{I_2} \quad k_n = 2 \cos \beta,$$

kjer sta

$$I_1 = \int_0^{2\beta - \frac{\pi}{2}} \cos^n \varphi d\varphi \quad \text{in} \quad I_2 = \int_{\frac{\pi}{2} - \beta}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \varphi d\varphi.$$

Ogledali si bomo dokaz trditve, ki je povzet po viru [3]. Preden se lotimo njegove izpeljave, si v koordinatni ravnini ponovno pripravimo skico, ki je za predstavo relevantna kljub temu, da je problem sedaj v n -razsežnem evklidskem prostoru. Z A in B označimo presečišči sfer, ki omejujeta krogli $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$, ter ju povežemo z daljico, polmer OS pa daljica AB razdeli na dva dela, ki sta označena z a in $r - a$. Dodajmo še daljici OB in SB ter označimo kota α in β (glej sliko 3).


 Slika 3. Projekcija n -razsežnega problema na ravnino.

Dokaz. Za začetek lahko podobno kot pri problemu v ravnini upoštevamo, da je $\alpha + 2\beta = \pi$, kar nam s pomočjo sinusnega izreka da zvezo

$$\frac{k_n r}{\sin \alpha} = \frac{r}{\sin \beta},$$

ki jo lahko kot v dokazu trditve 3 preoblikujemo do $k_n = 2 \cos \beta$, s čimer dobimo eno od enakosti.

Želimo izračunati prostornino območja, sestavljenega iz dveh disjunktnih krogelnih odsekov, porojenih s tetivo AB . Po drugi strani bi radi to prostornino izenačili s polovico prostornine krogle $\mathcal{B}$.

Označimo prostornini krogelnih odsekov z W_1 in W_2 . Dobimo ju podobno kot prostornino krogle v 3.2.1, le da moramo bolj pazljivo izbrati meje integracije. Pri izračunu W_1 prva integracijska spremenljivka ne bo na intervalu $[0, r]$, ampak na $[a, r]$. Dodatno moramo biti pozorni še na dejstvo, da se krogelni odsek razteza zgolj preko 2^{n-1} hiperoktantov in ne preko 2^n , kot smo to upoštevali pri prostornini krogle. Tako dobimo

$$W_1 = 2^{n-1} \int_a^r dx_1 \int_0^{s_1} dx_2 \int_0^{s_2} dx_3 \cdots \int_0^{s_{n-1}} 1 dx_n = \int_a^r V_{n-1}(s_1) dx_1,$$

kjer je še vedno $s_i = \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_i^2}$ za $i = 1, 2, \dots, n-1$. Analogno izpeljemo tudi izraz za izračun W_2

$$W_2 = 2^{n-1} \int_{r-a}^{k_n r} dx_1 \int_0^{t_1} dx_2 \int_0^{t_2} dx_3 \cdots \int_0^{t_{n-1}} 1 dx_n = \int_{r-a}^{k_n r} V_{n-1}(t_1) dx_1,$$

kjer je $t_i = \sqrt{(k_n r)^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_i^2}$ za vse $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Problem smo torej prevedli do reševanja enačbe:

$$W_1 + W_2 = \frac{1}{2} V_n(r) \iff \int_a^r V_{n-1}(s_1) dx_1 + \int_{r-a}^{k_n r} V_{n-1}(t_1) dx_1 = \int_0^r V_{n-1}(s_1) dx_1.$$

Sedaj na obeh straneh odštejemo W_1 , na desni strani zamenjamo vrstni red integracijskih mej pri W_1 in upoštevamo aditivnost domene pri integriranju, s čimer dobimo

$$\int_{r-a}^{k_n r} V_{n-1}(t_1) dx_1 = \int_0^a V_{n-1}(s_1) dx_1.$$

Z uporabo leme 12 in premisleka v opombi 13 enačbo nadalje preoblikujemo:

$$V_{n-1}(1) \cdot \int_{r-a}^{k_n r} (k_n^2 r^2 - x_1^2)^{\frac{n-1}{2}} dx_1 = V_{n-1}(1) \cdot \int_0^a (r^2 - x_1^2)^{\frac{n-1}{2}} dx_1.$$

Pokrajšamo $V_{n-1}(1)$ in na vsaki strani vpeljemo novo spremenljivko. Na levi strani vpeljemo $x_1 = k_n r \cdot \sin \varphi$, na desni pa $x_1 = r \cdot \sin \varphi$. Enačbo lahko nato preoblikujemo do želene oblike:

$$k_n^n \cdot \int_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \varphi d\varphi = \int_0^{2\beta-\frac{\pi}{2}} \cos^n \varphi d\varphi,$$

pri čemer upoštevamo trigonometrično identiteto $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ in v postopku pokrajšamo r z obeh strani enačbe. S kratkim premislekom ob skici se bralec lahko prepriča, da so dobljene integracijske meje po vpeljavi novih spremenljivk res prave. ■

V tabeli 1, dobljeni v viru [4], so navedene približne vrednosti k_n za $2 \leq n \leq 5$.

n	$\approx k_n$
2	1,1587
3	1,2285
4	1,2681
5	1,2936

Tabela 1. Približki rešitev n -razsežnega problema požrešne koze za $2 \leq n \leq 5$.

3.3 Limitno obnašanje rešitev

V prejšnjem razdelku smo (implicitno) podali rešitev n -razsežnega problema požrešne koze za vse naravne n , za katere je problem smiselno definiran (torej za $n \geq 2$). Sedaj bomo še opisali obnašanje rešitev k_n , ko n raste preko vseh meja. Dobljeni rezultati so povzeti po [3] in [5].

Opomba 15. Ohranimo dogovor, da n -razsežno (zaprto) kroglo imenujemo krogla, n -razsežno prostornino pa prostornina.

V nadaljevanju bomo skicirali dokaz naslednjega rezultata.

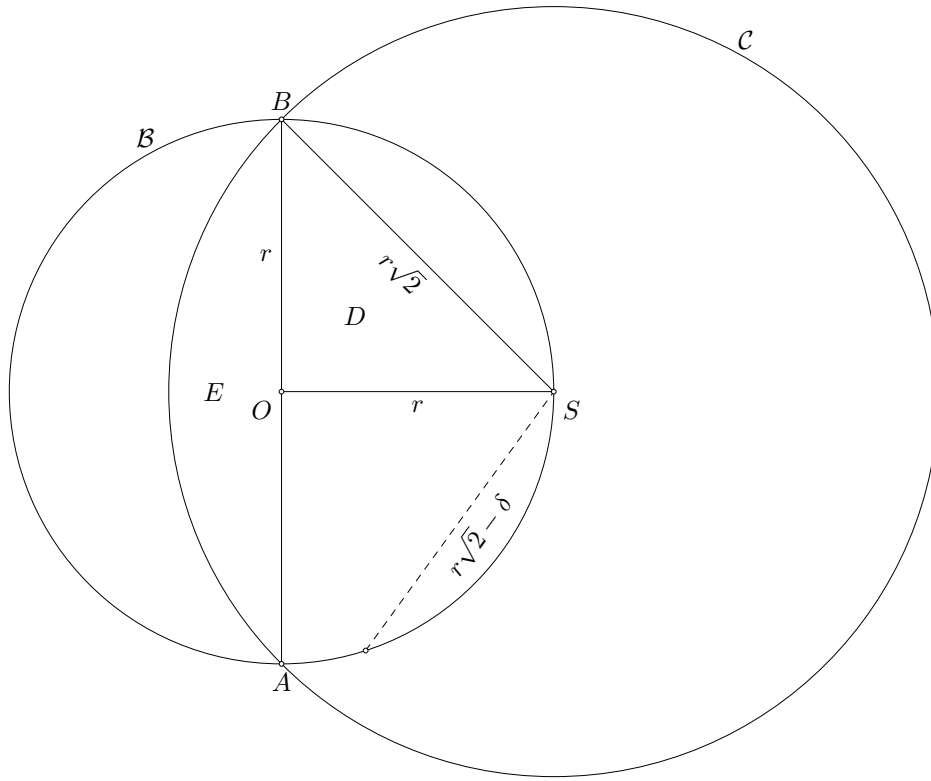
Trditev 16. Naj bo $(k_n)_{n \geq 2}$ zaporedje, kjer s k_n označimo rešitev problema požrešne koze v n razsežnostih. Tedaj je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \sqrt{2}.$$

Za začetek pred skico dokaza premislimo, če je trditev sploh smiselna, saj je vendarle na prvi pogled nekoliko presenetljiva. Na skici (slika 4) dodatno razdelimo presek krogel na območji D in E , kjer območje E leži v levi polovici krogle $\mathcal{B}$, območje D pa v desni. Prostornino območja D označimo z D_n , prostornino območja E pa z E_n . Najprej opazimo, da za noben $n \in \mathbb{N}$ ne more biti $k_n = \sqrt{2}$ oziroma ne more veljati $r' = r\sqrt{2}$, saj bi prostornina porojenega preseka krogel $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$ očitno bila večja od polovice prostornine krogle $\mathcal{B}$ (neodvisno od izbire n). Za vse $n \in \mathbb{N}$ torej velja $k_n < \sqrt{2}$, tudi limita (če obstaja) bo zato kvečjemu $\sqrt{2}$.

S pomočjo naslednjega premisleka o porazdelitvi prostornine krogle, dobljenega v viru [4], bomo najprej premislili, da limita zaporedja $(k_n)_{n \geq 2}$ ne more biti manjša od $\sqrt{2}$. Oglejmo si kvocient $\frac{V_n(1-\delta)}{V_n(1)}$ za poljuben $\delta \in (0, 1)$. Z uporabo leme 12 ga lahko enostavno preoblikujemo:

$$\frac{V_n(1-\delta)}{V_n(1)} = \frac{V_n(1) \cdot (1-\delta)^n}{V_n(1)} = (1-\delta)^n.$$



Slika 4. Pomoč pri obravnavi limitnega primera.

To pa pomeni, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n(1 - \delta)}{V_n(1)} = 0,$$

saj je $0 < |1 - \delta| < 1$. Ta rezultat nam pove, da je v visokih razsežnostih večina prostornine krogle zbrana *blizu njenega roba* in ne blizu središča.

Denimo, da limita zaporedja obstaja in je strogo manjša od $\sqrt{2}$. Na skici lahko opazimo, da v tem primeru del desne polovice krogle $\mathcal{B}$ za noben $n \in \mathbb{N}$ ne bo del preseka krogel $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$. Za velike n bo prostornina tega dela krogle $\mathcal{B}$ postajala vedno manj zanemarljiva (v primerjavi s celotno prostornino krogle $\mathcal{B}$). Hkrati pa bo del prostornine preseka krogel, označen z E_n , predstavljal vedno manjši delež prostornine celotnega preseka krogel. Iz tega sledi, da bo za velike n prostornina preseka krogel (bistveno) manjša od polovice prostornine krogle $\mathcal{B}$, kar pa je v nasprotju s predpostavko, da je k_n rešitev problema.

V skici dokaza trditve bomo uporabili še naslednjo lemo, katere dokaz je na voljo v viru [3].

Lema 17. Naj bo $r \in (0, \infty)$. Potem je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(r) = 0,$$

kjer je $V_n(r)$ prostornina krogle s polmerom r .

Skica dokaza (trditve 16). Za vsak $n \geq 2$ naj bo $g_n : [0, 2] \rightarrow [0, 1]$ funkcija, ki vsakemu realnemu številu $k \in [0, 2]$ priredi razmerje $\frac{V_P}{V}$, kjer je V prostornina krogle $\mathcal{B}$, V_P pa prostornina preseka krogel $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$, kjer je polmer krogle $\mathcal{B}$ enak r , polmer krogle $\mathcal{C}$ pa je $k \cdot r$. Očitno je, da je za vsak $n \geq 2$ funkcija g_n zvezna in naraščajoča. Prav tako smo izpeljali, da za vsak $n \geq 2$ obstaja (enolična) rešitev problema k_n , da je $g_n(k_n) = \frac{1}{2}$. Dokažimo, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}.$$

Fiksirajmo polmer krogle $\mathcal{C}$ na $r\sqrt{2}$. Prostornino preseka krogel $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$ enako kot v predhodnem razmisleku razdelimo na dva dela: D_n in E_n . Za poljuben n je D_n enak polovici prostornine krogle $\mathcal{B}$. Dokazati moramo torej, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 0.$$

Formulo za prostornino krogelnega odseka pa smo že izpeljali, velja

$$E_n = \int_r^{r\sqrt{2}} V_{n-1}(t_1) dx_1 = V_{n-1}(1) \cdot \int_r^{r\sqrt{2}} (2r^2 - x_1^2)^{\frac{n-1}{2}} dx_1.$$

Vpeljemo novo spremenljivko $x_1 = r \cdot \sqrt{2} \sin \varphi$, izraz za E_n postane

$$E_n = 2^{\frac{n}{2}} \cdot r^n \cdot V_{n-1}(1) \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \varphi d\varphi.$$

Dobljeno formulo za E_n lahko ocenimo navzgor, za vsak $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ je namreč $\cos^n x \leq 2^{-\frac{n}{2}}$. Z upoštevanjem leme 12 dodatno dobimo

$$0 \leq E_n \leq 2^{\frac{n}{2}} \cdot r \cdot V_{n-1}(r) \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2^{-\frac{n}{2}} d\varphi = \frac{\pi r}{4} \cdot V_{n-1}(r).$$

Če n pošljemo preko vseh mej, gre po lemi 17 vrednost $V_{n-1}(r)$ proti nič, hkrati pa je $\frac{\pi r}{4}$ konstanta glede na n . Po izreku o sendviču je torej

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 0.$$

Sedaj bi morali preveriti še veljavnost naslednjih izjav:

- (i) za vsak $k \in [0, \sqrt{2})$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(k) = 0$ in
- (ii) za vsak $k \in (\sqrt{2}, 2]$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(k) = 1$,

vendar bomo dokaza izpustili, bralec ju lahko najde v viru [5].

Naposled imamo tako vse, kar potrebujemo za dokaz, da je $\sqrt{2}$ res limita zaporedja rešitev $(k_n)_{n \geq 2}$. Izberimo poljubno majhen $\varepsilon > 0$. Vemo že, da imamo za vsak $n \geq 2$ enoličen k_n , za katerega je $g_n(k_n) = \frac{1}{2}$, po drugi strani pa velja tudi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\sqrt{2} - \varepsilon) = 0 \quad \text{in} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\sqrt{2} + \varepsilon) = 1.$$

To pa pomeni, da mora obstajati tak $N \in \mathbb{N}$, da bo za vse $n \geq N$ veljalo

$$|k_n - \sqrt{2}| < \varepsilon,$$

kar je natanko to, kar smo želeli dokazati. ■

LITERATURA

- [1] G. Bassett, *The goat in the city*, Math. Intelligencer, **44**(1):1–6, 2022.
- [2] M. Fraser, *A tale of two goats*, Math. Mag., **55**(4):221–227, 1982.
- [3] M. Fraser, *The grazing goat in n dimensions*, The College Math. Journal, **15**(2):126–134, 1984.
- [4] M. Harrison, *The grazing goat and spherical curiosities*, Math. Mag., **94**(5):369–382, 2021.
- [5] M. D. Meyerson, *Return of the grazing goat in n dimensions*, The College Math. Journal, **15**(5):430–432, 1984.
- [6] I. Ullisch, *A closed-form solution to the geometric goat problem*, Math. Intelligencer, **42**(3):12–16, 2020.