

Also available at <http://amc-journal.eu>
ISSN 1855-3966 (printed edn.), ISSN 1855-3974 (electronic edn.)
Ars Mathematica Contemporanea Volume 5, Issue 2, Year 2012, Pages 269–288

Posets of geometric graphs

Debra L. Boutin, Sally Cockburn, Alice M. Dean, Andrei M. Margea

Abstract

A *geometric graph* \bar{G} is a simple graph drawn in the plane, on points in general position, with straightline edges. We call \bar{G} a *geometric realization* of the underlying abstract graph G . A *geometric homomorphism* $f: \bar{G} \rightarrow \bar{H}$ is a vertex map that preserves adjacencies and crossings (but not necessarily non-adjacencies or non-crossings). This work uses geometric homomorphisms to introduce a partial order on the set of isomorphism classes of geometric realizations of an abstract graph G . Set $\bar{G} \preceq \hat{G}$ if \bar{G} and \hat{G} are geometric realizations of G and there is a vertex-injective geometric homomorphism $f: \bar{G} \rightarrow \hat{G}$. This paper develops tools to determine when two geometric realizations are comparable. Further, for $3 \leq n \leq 6$, this paper provides the isomorphism classes of geometric realizations of P_n , C_n and K_n , as well as the Hasse diagrams of the geometric homomorphism posets (resp., P_n , C_n , K_n) of these graphs. The paper also provides the following results for general n : each of P_n and C_n has a unique minimal element and

a unique maximal element; if $k \leq n$ then P_k (resp., C_k) is a subposet of P_n (resp., C_n); and K_n contains a chain of length $n-2$.

Keywords: Geometric graph, homomorphism, poset.

Math Sci Net: [05C62 \(06A06 06A07\)](#)

Delno urejene množice geometrijskih grafov

Povzetek

Geometrijski graf \bar{G} je enostaven graf, narisani v ravnini tako, da so njegova vozlišča v splošni legi, povezave pa predstavljene z ravnimi črtami. Grafu \bar{G} pravimo *geometrijska realizacija* osnovnega abstraktnega grafa G . *Geometrijski homomorfizem* $f: \bar{G} \rightarrow H$ je preslikava točk, ki ohranja sosednost in križanje povezav (ni pa nujno, da ohranja ne-sosednost in ne-križanje povezav). Naše delo uporablja geometrijske homomorfizme za predstavitev delne urejenosti na množici razredov izomorfnih geometrijskih realizacij abstraktnega grafa G . Pišimo $\bar{G} \preccurlyeq \hat{G}$, če sta \bar{G} in \hat{G} geometrijski realizaciji grafa G in obstaja vozliščno-injektiven geometrijski homomorfizem $f: \bar{G} \rightarrow \hat{G}$. V tem članku razvijemo orodje za določitev, kdaj sta dve geometrijski realizaciji primerljivi. Poleg tega za $3 \leq n \leq 6$ navedemo izomorfne razrede geometrijskih realizacij grafov P_n , C_n in K_n , pa tudi Hassejeve diagrame delno urejenih množic geometrijskih homomorfizmov grafov P_n , C_n , K_n . V članku podamo tudi naslednji rezultat za poljubno naravno število n : za vsakega od grafov P_n in C_n v delno urejenih množicah obstaja enolično določen minimalen element in enolično določen maksimalni element; če je $k \leq n$, potem je delno urejena

množica za graf P_k (oz. C_k) podmnožica delno urejene množice za graf P_n (oz. C_n); delno urejena množica za graf K_n pa vsebuje verigo dolžine $n-2$.

Ključne besede: Geometrijski graf, homomorfizem, delno urejena množica.