K-NUMERIČNI ZAKLAD MATRIKE

MIRKO DOBOVIŠEK

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 01A50, 01A55

Za vsako $n \times n$ matriko A in vsak $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, je k-numerični zaklad definiran kot $\Lambda_k(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : PAP = \lambda P$ za neki ortogonalni projektor P ranga $k\}$. V članku je pregled nekaterih novejših rezultatov o k-numeričnem zakladu matrike. Dokazana je njegova konveksnost in dodan kratek program za risanje $\Lambda_k(A)$.

HIGHER RANK NUMERICAL RANGE

For any $n \times n$ complex matrix A and any $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, let $\Lambda_k(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : PAP = \lambda P, P^2 = P, P^* = P, \text{rank } P = k\}$. An overview of some new results about rank k numerical range is given in the article. Its convexity is proved, and a short program in MATLAB is given for computation of $\Lambda_k(A)$.

S $\mathbb{C}^n$ bomo označevali vektorski prostor kompleksnih n-terk nad obsegom kompleksnih števil. Skalarni produkt vektorjev x in y iz $\mathbb{C}^n$ bomo označili z $\langle x, y\rangle$, normo vektorja x pa z $\|x\|$. Množico kompleksnih matrik velikosti $n \times n$ bomo označevali z $\mathbb{M}_n$. Osnovne pojme linearne algebre, ki jih bomo uporabljali, lahko bralec najde v [7].

Definicija 1. *Numerični zaklad* matrike A je podmnožica kompleksnih števil, definirana z

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle; x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1\}. \tag{1}$$

Osnovne lastnosti tega numeričnega zaklada lahko bralec najde dokazane v [4, 5, 1] in še marsikje drugod. Tu jih samo na kratko navedimo. Numerični zaklad matrike je vedno zaprta, konveksna in neprazna množica v kompleksni ravnini. Vedno vsebuje vse lastne vrednosti matrike in numerični zaklad normalne matrike je konveksna ogrinjača njenih lastnih vrednosti. Pomembna je tudi klasifikacija sebiadjungiranih operatorjev s pomočjo numeričnega zaklada. Če je namreč numerični zaklad operatorja na realni osi, je operator sebiadjungiran. Zgornje lastnosti se da posplošiti tudi na operatorje na Hilbertovem prostoru in na elemente operatorskih algeber.

V zadnjih letih so se matematiki ponovno začeli zanimati za k-numerični zaklad matrik. Njegove lastnosti namreč potrebujemo pri študiju možnosti odprave napak pri kvantnih operacijah (kanalih). Oglejmo si, kaj je motivacija za študij k-numeričnega zaklada.

Pri kvantnem računanju so osnovni elementi informacije kubiti. Te lahko reprezentiramo kot $Q = vv^*$, kjer je v enotski vektor v $\mathbb{C}^2$. Če Q zapišemo kot matriko, je

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+z & x+iy \\ x-iy & 1-z \end{bmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Stanje k kubitov pa predstavimo kot tenzorski produkt k takih 2×2 matrik

$$Q_1 \otimes \cdots \otimes Q_k.$$

Informacijo prenesemo po kvantnem kanalu tako, da jo najprej zakodiramo kot stanje n ($n \geq k$) kubitov. Potem jo pošljemo skozi kvantni kanal, kjer se lahko doda nezaželen šum. Na koncu jo dekodiramo in iz stanja n kubitov s šumom dobimo stanje k kubitov. Če imamo kakšne informacije o vzorcu napak kvantnega kanala, lahko konstruiramo operator za korekcijo kvantnih napak. Tu se ne bomo spuščali v podrobnosti procesa. Povejmo le še to, da je kvantni kanal/operacija kot preslikava na stanju n kubitov linearna preslikava

$$\Phi : \mathbb{M}_{2^n} \to \mathbb{M}_{2^n},$$

ki jo lahko zapišemo v obliki

$$\Phi(X) = \sum_{j=1}^{r} T_j X T_j^*, \quad \sum_{j=1}^{r} T_j^* T_j = I_{2^n},$$

za neke operatorje $T_j, j = 1, 2, \ldots, r$ [2]. Izkaže se, da kadar obstaja podprostor $V \subset \mathbb{M}_{2^n}$ dimenzije 2^k in kvantna operacija $\Psi : \mathbb{M}_{2^n} \to \mathbb{M}_{2^n}$, za katero velja

$$\Psi(\Phi(X)) = X, \quad \text{za vse} \quad X \in P_V \mathbb{M}_{2^n} P_V,$$

lahko napake kvantnega kanala Φ odpravimo [6]. S P_V smo označili ortogonalni projektor iz $\mathbb{C}^{2^n}$ na V.

Brez dokaza povejmo, da je to ekvivalentno obstoju podprostora V in nekih števil λ_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, r$, da je

$$P_V T_i^* T_j P_V = \lambda_{ij} P_V, \quad \lambda_{ij} \in \mathbb{C} \quad i, j = 1, 2, \ldots, r. \tag{2}$$

Za vsak i in j nas torej zanima obstoj kompleksnih števil, za katera velja (2).

Zapišimo definicijo:

Definicija 2. Naj bo A matrika velikosti $n \times n$ in $k \geq 1$ naravno število. Množico

$$\Lambda_k(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : PAP = \lambda P \quad \text{za neki ortogonalni projektor } P \text{ ranga } k\} \tag{3}$$

imenujemo *k-numerični zaklad matrike A*.

Pri $k = 1$ dobimo običajni numerični zaklad matrike, $\Lambda_1(A) = W(A)$, katerega nekaj lastnosti lahko bralec spozna v članku [4]. Osnovne lastnosti obeh numeričnih zakladov so podobne. Dokazi so trivialni.

- Za poljubni števili α in β je $\Lambda_k(\alpha A + \beta I) = \alpha\Lambda_k(A) + \beta$.
- Za poljubno unitarno matriko U je $\Lambda_k(U^*AU) = \Lambda_k(A)$.
- Če je B $r \times r$ matrika, ki pripada zožitvi operatorja, podanega z matriko A, in $r \geq k$, je $\Lambda_k(B) \subseteq \Lambda_k(A)$.

Lahko pa se zgodi, da je $\Lambda_k(A)$ za večje k prazna množica. Če ta množica ni prazna, je konveksna. Ta lastnost je bila dokazana razmeroma pozno [11]. Nekaj teh numeričnih zakladov bomo kasneje tudi narisali.

Preden se lotimo dokaza konveksnosti k-numeričnega zaklada matrike, dokažimo ekvivalentno definicijo.

Trditev 1. *Naj bo A matrika velikosti $n \times n$ in k naravno število. Potem je $\lambda \in \Lambda_k(A)$ natanko tedaj, ko obstaja k-razsežen podprostor $S \subseteq \mathbb{C}^n$, za katerega velja*

$$(A - \lambda I)S \perp S. \tag{4}$$

Dokaz. Naj bo $\lambda \in \Lambda_k(A)$. Potem je za neki projektor P ranga k

$$PAP = \lambda P.$$

Potem pa za vsak $x \in \mathrm{Im}P = S$ velja

$$\langle (A - \lambda I)x, x\rangle = \langle (A - \lambda I)Px, Px\rangle = \langle (PAP - \lambda P)x, x\rangle = 0.$$

Tudi obratno je očitno. Naj bo S k-dimenzionalen podprostor, za katerega velja (4). Če za P vzamemo ortogonalni projektor na S, je za vse $x \in \mathbb{C}^n$ vektor $PAPx - \lambda Px$ v S. Zato je $\langle PAPx - \lambda Px, PAPx - \lambda Px\rangle = 0$. Sledi $PAPx = \lambda Px$ za vse x. Torej $\lambda \in \Lambda_k(A)$. ∎

Pri dokazu konveksnosti običajnega numeričnega zaklada problem prevedemo na konveksnost numeričnega zaklada 2×2 matrike, ki je elipsa (ali degenerirana elipsa). Tu problem prevedemo na konveksnost numeričnega zaklada $2k \times 2k$ matrike. To je naredil H. W. Woerdeman leta 2007 [11]. Pri tem si je pomagal z rezultati M. D. Choia [3] iz istega leta.

Trditev 2. *Množica $\Lambda_k(A)$ je konveksna, če je konveksna za vse $2k \times 2k$ matrike.*

Dokaz. Naj bosta λ in μ različna elementa $\Lambda_k(A)$. Potem po trditvi 1 obstajata k-dimenzionalna podprostora L in M, za katera velja:

$$(A-\lambda I)L \perp L \quad \text{in} \quad (A-\mu I)M \perp M. \tag{5}$$

V preseku $L \cap M$ je lahko samo vektor 0, saj za $x \in L \cap M$ velja

$$\langle Ax, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle \quad \text{in} \quad \langle Ax, x\rangle = \mu\langle x, x\rangle,$$

kar pomeni $x = 0$. Vsota podprostorov L in M, označimo jo z $L + M = S$, je tako $2k$-razsežen podprostor. Označimo ortogonalni projektor na S s P_S. Zožitev T preslikave $P_S A$ na podprostor S lahko sedaj obravnavamo kot preslikavo $2k$-razsežnega prostora S vase. Numerični zaklad takšne preslikave pa je po predpostavki konveksna množica. Torej za vsak $\nu = t\lambda+(1-t)\mu, t \in [0, 1]$, obstaja projektor P_R ranga k na podprostor R, za katerega velja

$$P_R T P_R = \nu P_R.$$

Ker je R podprostor prostora S, je $Q = P_R P_S$ ortogonalni projektor ranga k. Velja tudi

$$QAQ = P_R P_S A P_R P_S = P_R T\Big|_S P_R P_S = \nu P_R P_S = \nu Q.$$

Torej je $\nu \in \Lambda_k(A)$. ∎

Lema 3. *Naj bosta matriki T in S kongruentni. Potem je $0 \in \Lambda_k(T)$ natanko tedaj, ko je $0 \in \Lambda_k(S)$.*

Dokaz. Če je $0 \in \Lambda_k(T)$, potem obstaja k-dimenzionalen podprostor L, da je

$$TL \perp L. \tag{6}$$

Naj bo $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ ortonormirana baza prostora L in A matrika, ki ima za stolpce vektorje te baze. Zaradi (6) je

$$Tu_j \perp L, j = 1, 2, \ldots, k. \tag{7}$$

Zato je

$$A^*TA = 0.$$

Ker je S kongruentna matriki T, obstaja nesingularna matrika X, da je $S = XTX^*$. Če je $B = (X^*)^{-1}A$, je

$$B^*SB = 0.$$

Matrika B ima rang k. Naj bo C matrika, ki stolpce matrike B preslika v ortonormirane, in pišimo $BC = E$. Dobimo

$$E^*SE = C^*B^*SBC = C^*0C = 0,$$

kar pomeni, da je $0 \in \Lambda_k(S)$. ∎

Trditev 4. *Množica $\Lambda_k(T)$ je konveksna za vsako matriko T.*

Dokaz. Trditev 2 nam pove, da je dovolj, da trditev pokažemo za $2k \times 2k$ matrike. Ker je k-numerični zaklad $\Lambda_k(T)$ zaprta množica, je za dokaz konveksnosti dovolj pokazati, da je razpolovišče vsake daljice s krajiščema v $\Lambda_k(T)$ spet v množici $\Lambda_k(T)$.

Naj bosta λ in μ elementa množice $\Lambda_k(T)$. Z afino preslikavo lahko λ in μ premaknemo v -1 in 1. Sedaj moramo dokazati, da je $0 \in \Lambda_k(T)$. Trditev 1 pove, da obstajata taka k-razsežna podprostora S_+ in S_-, da je

$$(T - I)S_+ \perp S_+, \quad (T + I)S_- \perp S_-.$$

Prostora se sekata trivialno. Definirajmo preslikavo $V : \mathbb{C}^{2k} \to \mathbb{C}^{2k}$, ki je identiteta na S_+, ortogonalni komplement $S_+^\perp$ pa naj izometrično preslika na S_-. Potem je

$$(V^*TV - I)S_+ \perp S_+ \quad \text{in} \quad (V^*TV + I)S_+^\perp \perp S_+^\perp.$$

Glede na razcep $\mathbb{C}^{2k} = S_+ \oplus S_+^\perp$ je bločni zapis matrike

$$S = V^*TV = \begin{bmatrix} I & X \\ Y & -I \end{bmatrix}.$$

Pokazati moramo le še, da je $0 \in \Lambda_k(S)$.

Tudi iz dejstva, da obstaja matrika B velikosti $2k \times k$, ranga k, za katero velja $B^*SB = 0$, lahko sklepamo, da je $0 \in \Lambda(S)$. Ravnamo kot v dokazu trditve 3. Gotovo obstaja taka obrnljiva matrika C (velikosti $k \times k$), da so stolpci matrike $A = BC$ ortonormirani vektorji. Potem pa je $A^*SA = C^*B^*SBC = C^*0C = 0$. Zaradi tega so stolpci matrike A baza prostora L, za katerega je $SL \perp S$. Trditev 1 pove, da je $0 \in \Lambda_k(S)$. Iščemo torej matriko Z, da bo

$$\begin{bmatrix} I & Z^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X \\ Y & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ Z \end{bmatrix} = 0. \tag{8}$$

Ko matrike v (8) zmnožimo, dobimo enačbo

$$I + XZ + Z^*Y - Z^*Z = 0. \tag{9}$$

Pri dokazu eksistence rešitve enačbe (9) si pomagamo z algebrajsko Riccatijevo enačbo, ki je v splošnem videti takole:

$$A + HB^* + BH - HRH = 0, \tag{10}$$

kjer so $A = A^*$, B in $R > 0$ linearni operatorji, ki delujejo na $\mathbb{C}^n$. Enačba (10) se pojavi pri obravnavi optimalnega vodenja linearnih sistemov, zato je že zelo podrobno raziskana. Veliko lahko o tej enačbi zvemo v knjigi [10]. Tam je tudi dokaz, da ima Riccatijeva enačba

$$I + \left(B - \frac{1}{2}I\right) H + H \left(B - \frac{1}{2}I\right)^* - HRH = 0 \tag{11}$$

sebiadjungirano rešitev za poljuben operator $R > 0$. Pokažimo, da od tod sledi eksistenca rešitve enačbe (9). Najprej predpostavimo, da sta X in Y v enačbi (9) takšni matriki, da je matrika $X - Y^*$ obrnljiva. Označimo njen inverz z $J = (X - Y^*)^{-1}$. Če vzamemo v enačbi (11) za $B = XJ$ in $R = J^*J$ in je H sebiadjungirana rešitev enačbe (11), kratek račun pokaže, da je

$$Z = JH$$

rešitev enačbe (9). Kadar pa $X - Y^*$ ni obrnljiva matrika, najprej rešujemo enačbe

$$I + \left(X + \frac{1}{m}I\right) Z + Z^*Y - Z^*Z = 0, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Sedaj so razlike $(X + \frac{1}{m}I) - Y^*$ obrnljive matrike, razen za kvečjemu končno mnogo m-jev. Pripadajoče rešitve Z_m lahko omejimo neodvisno od m. Iz (12) dobimo oceno

$$\|Z_m\|^2 = \|Z_m^* Z_m\| \leq 1 + (\|X\| + 1/m + \|Y\|)\|Z_m\|,$$

ki pove, da je zaporedje matrik $\{Z_m\}$ omejeno. Prostor je končno razsežen in zaradi kompaktnosti ima zaporedje $\{Z_m\}$ vsaj eno konvergentno podzaporedje. Limita katerega koli od teh podzaporedij je rešitev enačbe (9). ∎

Opomba 1. Pri $n = 1$ je (11) enačba v $\mathbb{C}$

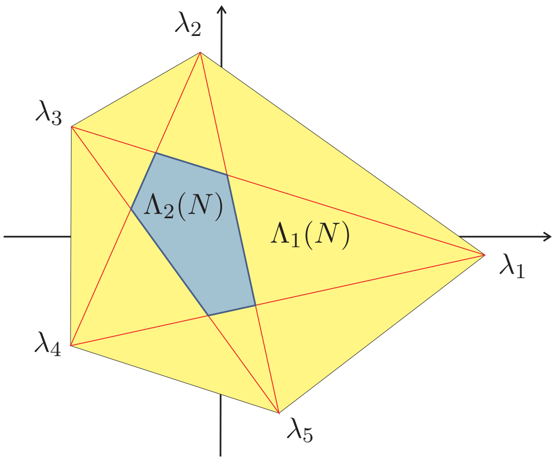
$$1 + (b - 1/2)h + h(\overline{b} - 1/2) - rh^2 = 0.$$

Če pišemo $c = (b + \overline{b}) - 1$, je $c \in \mathbb{R}$ in enačba se spremeni v kvadratno enačbo

$$1 + ch - rh^2 = 0, \quad r > 0.$$

Diskriminanta te enačbe je pozitivna za vse $r > 0$ in vse $c \in \mathbb{R}$ in enačba ima realno rešitev $h = \overline{h}$. Za $n > 1$ do rešitve ne moremo priti na tako enostaven način.

Kasneje je bilo dokazano [8], da je vsak k-numerični zaklad presek polravnin in zato avtomatično konveksna množica. Rezultat je naslednji:



Slika 1

Izrek 5. *Naj bo A $n \times n$ matrika in označimo z $\lambda_1(t) \geq \lambda_2(t) \geq \cdots \geq \lambda_n(t)$ lastne vrednosti matrike $e^{it}A + e^{-it}A^*$, urejene po velikosti. Potem je*

$$\Lambda_k(A) = \{\mu \in \mathbb{C} : e^{it}\mu + e^{-it}\overline{\mu} \leq \lambda_k(t), \quad t \in [0, 2\pi)\}. \tag{13}$$

V istem članku je tudi dokaz, da je k-numerični zaklad normalne matrike presek konveksnih ogrinjač množic, ki vsebujejo po $n-k+1$ lastnih vrednosti matrike (štetih z njihovimi večkratnostmi). Če ima normalna matrika N lastne vrednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, je

$$\Lambda_k(N) = \bigcap_{1 \leq j_1 < \cdots < j_{n-k+1} \leq n} \operatorname{conv}\{\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_{n-k+1}}\}.$$

Očitno je pri večjem k množica $\Lambda_k(N)$ lahko prazna.

Narišimo te numerične zaklade normalne matrike N velikosti 5×5, ki ima različne lastne vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$. Ker je matrika normalna, je $\Lambda_1(N) = W(N)$ petkotnik z oglišči v lastnih vrednostih. Po zgornji formuli je $\Lambda_2(N)$ presek štirikotnikov, ki jih dobimo, ko izpuščamo po eno od lastnih vrednosti (oglišč). Pri $k = 3$ je $\Lambda_3(N)$ že prazna množica: ko izpustimo dve oglišči, dobimo trikotnike, in presek vseh teh trikotnikov je prazna množica.

S formulo (13) si lahko pomagamo pri skiciranju k-numeričnega zaklada. Premico v kompleksni ravnini lahko zapišemo kot

$$\overline{a}z + a\overline{z} = 2b, \quad b \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Ko vstavimo za $z = x + iy$ in za $a = a_1 + ia_2$, se zgornja formula spremeni v enačbo premice v realni ravnini

$$a_1x + a_2y = b.$$

Zato je množica vseh $\mu = x + iy$, ki zadoščajo neenačbi

$$e^{it}\mu + e^{-it}\overline{\mu} \leq \lambda_k(t),$$

polravnina

$$x \cos t - y \sin t \leq \lambda_k(t).$$

Če torej želimo narisati k-numerični zaklad, je treba za $0 \leq t \leq 2\pi$ določiti po velikosti k-to največjo lastno vrednost matrike $e^{it}A + e^{-it}A^*$. Numerični zaklad je potem presek polravnin.

S programom Matlab to naredimo recimo z naslednjo funkcijo:

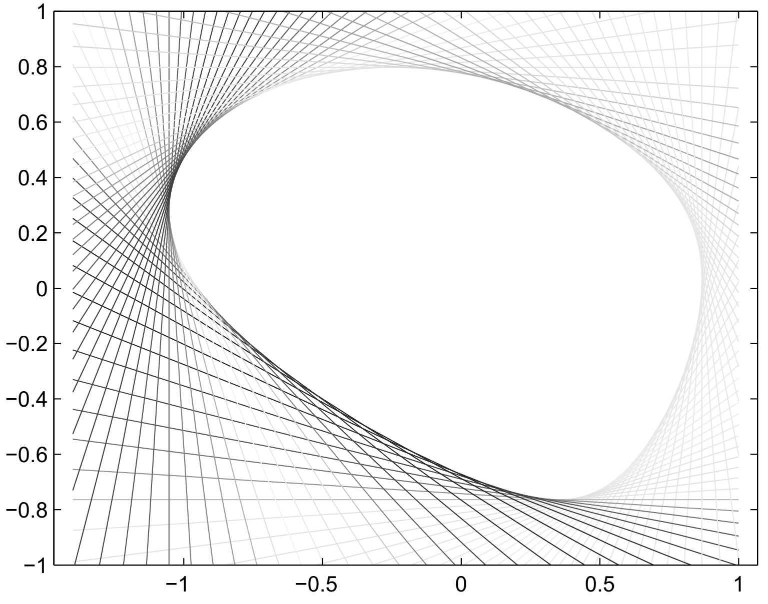
```
function [rerange, imrange] = nrange(A, P, k, a, b, c, d);}
% A matrika katere k numerični zaklad bi želeli narisati
% P želeno število premic
% riši na pravokotniku [a,b]x[c,d]
[m, n] = size(A);
if m ~= n
    error('ni kvadratna matrika');
end
for t=0:P
    T=(cos(t*2*pi/P)+i*sin(t*2*pi/P))*A;
    ReT=.5*(T+T');
    ure = sort((eig(ReT)));
    lk = ure(n-k+1) ;
    [x y]= meshgrid(a:0.2:b, c:0.2:d);
    contour(x,y,2*(x.*cos(t*2*pi/P) - y.*sin(t*2*pi/P)),[lk lk])
    axis equal
    hold on
end
```

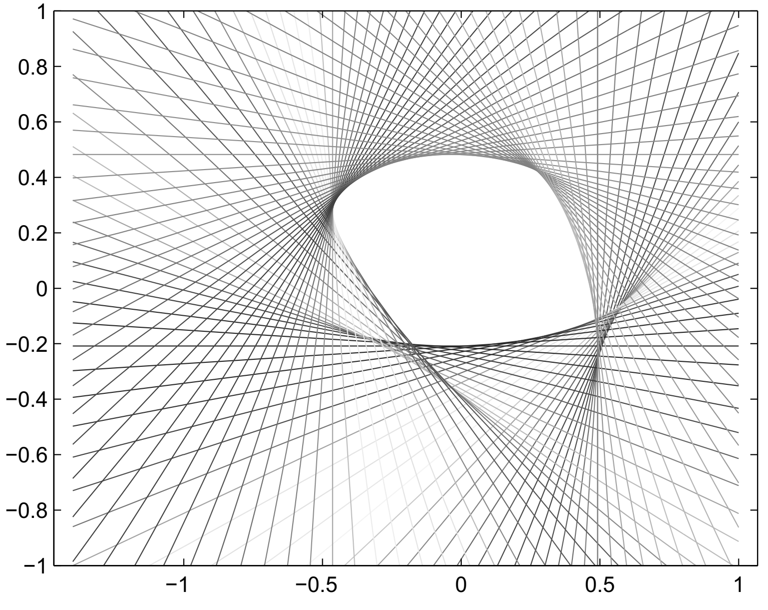
Najprej podamo matriko A in pokličemo funkcijo `nrange`.

Na sliki 2 sta $\Lambda_1(A)$ in $\Lambda_2(A)$ matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 & i & 1 & 0 \\ -1 & 0.2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1+i \end{bmatrix}, \quad \text{na} \quad [-1.4, 1] \times [-1, 1], P = 100.$$

Na koncu povejmo, da je Liju, Poonu in Szeju uspelo dokazati [9], da je pri danem n k-numerični zaklad $\Lambda_k(A)$ neprazen za poljubno matriko, če


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−1
−0.5
0
0.5
1


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−1
−0.5
0
0.5
1

Slika 2

je $n \geq 3k-2$. Pri $n < 3k-2$ pa že lahko najdemo $n \times n$ matriko, katere k-numerični zaklad je prazna množica.

Za operator A, delujoč na neskončno razsežnem Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$, k-numerični zaklad definiramo takole:

$$\Lambda_k(A) = \{\gamma \in \mathbb{C} : X^*AX = \gamma I_k, X : \mathbb{C}^k \to \mathcal{H}, X^*X = I_k\}.$$

V članku [9] je dokazano, da je v primeru, ko je $\mathcal{H}$ neskončno razsežen, $\Lambda_k(A) \neq \emptyset$ za vsa naravna števila k.

LITERATURA

[1] F. Bonsall in J. Duncan, *Numerical Ranges of Operators on Normed Spaces and Elements of Normed Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 1971.

[2] M. Choi, *Completely Positive Linear Maps on Complex Matrices*, Linear Algebra Appl. **10** (1975), 285–290.

[3] M. Choi, M. Giesinger, J. A. Holbrook in D. W. Kribs, *Geometry of higher-rank numerical ranges*, Linear and Multilinear Algebra **56** (2008), 53–64.

[4] M. Dobovišek, *Ponceletove krivulje*, Obzornik mat. fiz. **60** (2013), 4–14.

[5] K. E. Gustafson in D. K. M. Rao, *Numerical Range*, Springer, New York, 1997.

[6] E. Knill in R. Laflamme, *Theory of quantum error-correcting codes*, Physical Review A **55** (1997), 900–911.

[7] F. Križanič, *Linearna algebra in linearna analiza*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1993.

[8] C. K. Li, N. S. Sze, *Canonical forms, higher rank numerical ranges, totally isotropic subspaces, and matrix equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), 3013–3023.

[9] C. K. Li, Y. T. Poon in N. S. Sze, *Condition for the higher rank numerical range to be non-empty*, Linear and Multilinear Algebra **57** (2009), 365–368.

[10] P. Lancaster in L. Rodman, *Algebraic Riccati equations*, Oxford Science Publications, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1995.

[11] H. Woerderman, *The higher rank numerical range is convex*, Linear and Multilinear Algbra **56** (2008), 65–67.

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/

http://www.obzornik.si/