

On edge-girth-regular graphs: lower bounds and new families

István Porupsánszki *

*Department of Geometry and MTA-ELTE Geometric and Algebraic Combinatorics
Research Group, Eötvös Loránd University, 1117 Budapest, Pázmány s. 1/c, Hungary*

Received 13 April 2023, accepted 11 July 2024, published online 22 August 2025

Abstract

An edge-girth-regular graph $egr(n, k, g, \lambda)$ is a k -regular graph of order n , girth g and with the property that each of its edges is contained in exactly λ distinct g -cycles. We present new families of edge-girth regular graphs arising from generalized quadrangles and pencils of elliptic quadrics.

An $egr(n, k, g, \lambda)$ is called extremal for the triple (k, g, λ) if n is the smallest order of any $egr(n, k, g, \lambda)$. We give new lower bounds for the order of extremal edge-girth-regular graphs using properties of the eigenvalues of the adjacency matrix of a graph.

Keywords: Cage problem, extremal graph theory, generalized polygons, ovoids.

Math. Subj. Class. (2020): 05B25, 05C35

*This research was supported in part by the Hungarian National Research, Development and Innovation Office OTKA grant no. SNN 132625.

E-mail address: rupsansz@gmail.com (István Porupsánszki)

Povezavno ožinsko regularni grafi: spodnje meje in nove družine

István Porupsánszki *

*Department of Geometry and MTA-ELTE Geometric and Algebraic Combinatorics
Research Group, Eötvös Loránd University, 1117 Budapest, Pázmány s. 1/c, Hungary*

Prejeto 13. aprila 2023, sprejeto 11. julija 2024, objavljeno na spletu 22. avgusta 2025

Povzetek

Povezavno ožinsko regularen graf $egr(n, k, g, \lambda)$ je k -regularen graf reda n , ožine g z lastnostjo, da je vsaka njegova povezava vsebovana v natanko λ različnih g -ciklih. Predstavimo nove družine povezavno ožinskih regularnih grafov, ki izhajajo iz posplošenih štirikotnikov in snopov eliptičnih kvadrik.

Graf $egr(n, k, g, \lambda)$ imenujemo ekstremalen za trojico (k, g, λ) , če je n najmanjši red med vsemi grafi $egr(n, k, g, \lambda)$. Podamo nove spodnje meje za red ekstremalnih povezavno ožinskih regularnih grafov, pri čemer uporabimo lastnosti lastnih vrednosti matrike sosednosti grafa.

Ključne besede: problem kletke, ekstremalna teorija grafov, posplošeni mnogokotniki, ovoidi.

Math. Subj. Class. (2020): 05B25, 05C35

*To raziskavo je delno podprl Madžarski nacionalni urad za raziskave, razvoj in inovacije (NKFIH) prek OTKA štipendije št. SNN 132625.

E-poštni naslov: rupsansz@gmail.com (István Porupsánszki)