

S kvaternioni preko štirih dimenzij do računalniških iger



FILIP RUS

→ V srednji šoli spoznamo naslednje zaporedje številskih množic:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Matematiki so se dolgo časa spraševali, ali lahko zaporedje smiselno nadaljujemo in definiramo novo množico števil, ki bi vsebovala vse prejšnje. Ker so kompleksna števila dvodimenzionalna »nadgradnja« realnih števil, bi bila rešitev problema lahko konstrukcija novih, tridimenzionalnih števil.

Tako idejo je imel tudi irski matematik William Rowan Hamilton (1805–1865). Kompleksnim številom lahko dodamo novo komponento, označeno z j , za katero velja $j^2 = -1$. Tako dobimo tridimenzionalni prostor $\{a + bi + cj \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, kjer je $i^2 = j^2 = -1$. Problem, ki je mučil Hamiltona, pa je bila smiselna definicija množenja takih števil. Kot je produkt dveh kompleksnih števil vedno kompleksno število, je želel, da je produkt dveh elementov te množice ponovno element iste množice. Vendar, kako smiselno definirati $i \cdot j$? 16. oktobra leta 1843, ko se je z ženo sprehajal po dublinskem kanalu Royal Canal, se mu je utrnila nova zamisel. Čeprav načina za množenje tridimenzionalnih števil ni poznal, pa se je spomnil definicije novih, štiridimenzionalnih števil. Poleg komponente j je kompleksnim številom dodal komponento k in tako dobil novo mno-



SLIKA 1.

Spominska plošča na mostu Broom Bridge, posvečena Williamu Hamiltonu.





žico števil $\{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$. Preko nje lahko vstopimo v tridimenzionalni svet, če parameter a nastavimo na 0. Pravila za množenje elementov te množice $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ in $ijk = -1$ je Hamilton v navalu navdušenja vklesal na bližnji most Broom Bridge. Množico je poimenoval kvaternioni, ime, ki se je ohranilo vse do danes. Po Hamiltonu množico kvaternionov označujemo s $\mathbb{H}$.

Računske operacije s kvaternioni

Množico kvaternionov sestavljajo torej štiridimenzionalni elementi oblike $a + bi + cj + dk$, kjer so a, b, c in d realna števila, na primer $6 + \sqrt{2}i + \frac{1}{2}j - k$. Podmnožico realnih števil iz množice kvaternionov dobimo, če vzamemo $b = c = d = 0$, kompleksnih pa, če na 0 nastavimo parametra c in d . Prav zato, ker so kvaternioni razširitev kompleksnih števil, je tudi računanje z njimi podobno. Kvaternione seštevamo in odštevamo po komponentah. Velja torej

$$\blacksquare (3 + 7i + 2j - 3k) + (5 + 2i - 2j + 4k) = 8 + 9i + k$$

in

$$\blacksquare (8 + 2i + 6j + 9k) - (9 + 7i + 6j + 8k) = -1 - 5i + k.$$

Pričakovano poteka tudi množenje kvaterniona z realnim skalarjem:

$$\blacksquare 5(2 - 4i + 3j - 2k) = 10 - 20i + 15j - 10k.$$

Bolj pazljivi moramo biti pri množenju kvaternionov. V uvodu smo že definirali pravila za množenje $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ in $ijk = -1$. S pomočjo tega lahko izpeljemo, kako se med seboj množijo komponente i, j, k . Začnimo z enakostjo

$$\blacksquare ijk = -1.$$

Če enakost pomnožimo s k z desne, dobimo

$$\blacksquare ijk^2 = -k.$$

Ker velja $k^2 = -1$, pridemo do zveze

$$\blacksquare ij = k.$$

Če začetno enakost pomnožimo z i z leve, pa dobimo

$$\blacksquare i^2jk = -i$$

oziroma

$$\blacksquare jk = i.$$

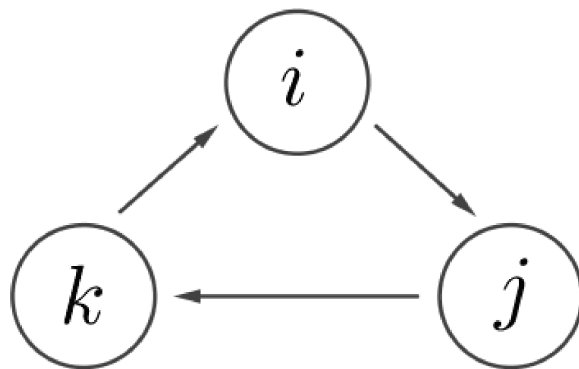
Enakost zdaj pomnožimo še z j z leve. Dobimo

$$\blacksquare ji = -k.$$

Vidimo, da velja $ij = -ji$. Množenje kvaternionov torej ni komutativno, zato moramo biti posebej pozljivi glede vrstnega reda, v katerem elemente množimo. Podobno lahko izpeljemo enakosti

$$\begin{aligned} \blacksquare ij &= -ji = k, \\ jk &= -kj = i, \\ ki &= -ik = j. \end{aligned}$$

Formule si lahko zapomnimo po shemi na sliki 2.



SLIKA 2.

Schema množenja elementov i, j, k . Produkt dveh zaporednih elementov v smeri urnega kazalca je naslednji element, v obratni smeri pa mu dodamo nasprotni predznak.

Kot primer zmnožimo $2 + i - k$ in $i + 3j$. Produkt je enak

$$\begin{aligned} \blacksquare (2 + i - k)(i + 3j) &= 2i + 6j + i^2 + 3ij - ki - 3kj \\ &= 2i + 6j - 1 + 3k - j + 3i \\ &= -1 + 5i + 5j + 3k. \end{aligned}$$

Podobno kot konjugiranje kompleksnih števil lahko definiramo tudi konjugiranje kvaternionov. Če vzamemo kvaternion $h = a + bi + cj + dk$, je konjugiran kvaternion $\bar{h}$ enak $a - bi - cj - dk$. Račun pokaže, da velja

$$h\bar{h} = \bar{h}h = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

kar lahko, podobno kot pri kompleksnih številih, interpretiramo kot kvadrat dolžine kvaterniona $|h|^2$.

Za konec pogledjmo še deljenje kvaternionov. Da poenostavimo kvocient kvaternionov $\frac{u}{v}$, lahko podobno kot pri kompleksnih številih števec in imenovalc pomnožimo z $\bar{v}$. V imenovalcu bomo dobili kvadrat dolžine $|v|^2$, v števcu pa produkt $u\bar{v}$. Velja torej

$$\frac{u}{v} = \frac{u\bar{v}}{v\bar{v}} = \frac{u\bar{v}}{|v|^2}.$$

Deljenje si oglejmo na primeru:

$$\begin{aligned} \frac{7i + 5k}{2 + i + 3j + k} &= \frac{(7i + 5k)(2 - i - 3j - k)}{2^2 + 1^2 + 3^2 + 1^2} \\ &= \frac{12 + 29i + 2j - 11k}{15}. \end{aligned}$$

Uporaba kvaternionov v geometriji

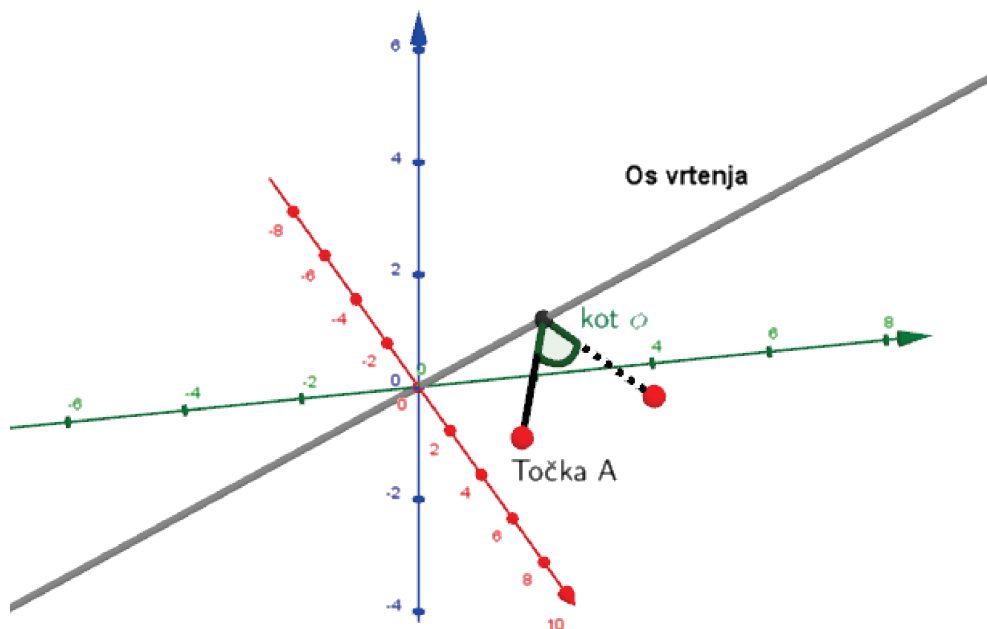
Hamilton je pričakoval, da se bodo kvaternioni uveljavili kot učinkovito orodje za opis operacij v trirazsežni geometriji, toda sčasoma jih je izrinil običajni vektorski zapis z operacijama skalarnega in vektorskega produkta. Kljub temu kvaternioni danes igrajo pomembno vlogo v računalniški grafiki, robotiki in astronomiji, kot je predstavljeno v tem razdelku.

Denimo, da imamo podano točko $A = (x, y, z)$, ki bi jo radi zavrteli okoli neke osi za kot ϕ .

Pri rotiranju si lahko pomagamo s kvaternioni. Točko A lahko predstavimo kot kvaternion $v = xi + yj + zk$. Definiramo še enotski vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, ki kaže v smer osi vrtenja in mu priredimo kvaternion $h = \cos \frac{\phi}{2} + (u_1i + u_2j + u_3k) \sin \frac{\phi}{2}$, pri čemer je ϕ želen kot rotacije. Komponente točke A , zavrtene za kot ϕ v smeri urnega kazalca (gledano iz koordinatnega izhodišča vzdolž osi) okoli osi, dane z vektorjem $\vec{u}$, lahko preberemo iz produkta

$$h \cdot v \cdot \bar{h}.$$

Oglejmo si še primer. Denimo, da želimo zavrteti



SLIKA 3.

Rotacija točke A za kot ϕ okoli dane osi.

→ točko $A = (1, 0, 0)$ za kot $\phi = \frac{2\pi}{3}$ okoli osi v smeri vektorja $(1, 1, 1)$. Najprej definiramo enotski vektor $\vec{u}$ v smeri osi vrtenja. Ta je enak $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Pripadajoč kvaternion h je enak

$$\begin{aligned} & \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k) \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = \\ & = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k) \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ & = \frac{1}{2}(1 + i + j + k). \end{aligned}$$

Točko $A = (1, 0, 0)$ lahko identificiramo s kvaternionom $v = i$. Da dobimo novo lego točke po vrtenju, moramo izračunati produkt

$$h \cdot v \cdot \bar{h} = \frac{1}{2}(1 + i + j + k) \cdot i \cdot \frac{1}{2}(1 - i - j - k).$$

Če upoštevamo pravila za množenje kvaternionov in pazimo na njihovo nekomutativnost, račun pokaže, da je zgornji produkt enak j . Podobno kot prej lahko ta kvaternion identificiramo s točko $(0, 1, 0)$. Če torej točko $(1, 0, 0)$ zavrtimo za kot $\frac{2\pi}{3}$ okoli osi v smeri vektorja $(1, 1, 1)$, dobimo novo točko s koordinatami $(0, 1, 0)$.

Da bi lažje razumeli ozadje formule za rotacijo, pogledjmo geometrijsko interpretacijo množenja kvaternionov. Najprej množimo poljuben kvaternion $a + bi + cj + dk$ s kvaternionom i z leve. Dobimo

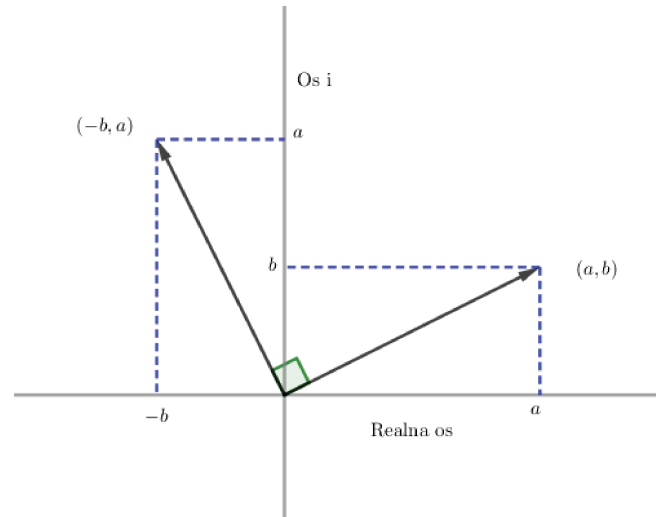
$$i(a + bi + cj + dk) = -b + ai - dj + ck.$$

Štiridimenzionalni prostor lahko razdelimo na dve ravnini. Prvo sestavljata realna os in os i , drugo pa osi j in k . Komponenti (a, b) po množenju postane $(-b, a)$, kar ustreza rotaciji za 90° v prvi ravnini. Hkrati komponenti (c, d) postaneta $(-d, c)$, kar prav tako ustreza rotaciji za 90° v drugi, jk ravnini.

Kaj pa, če kvaternion množimo z $-i$ z desne? Dobimo

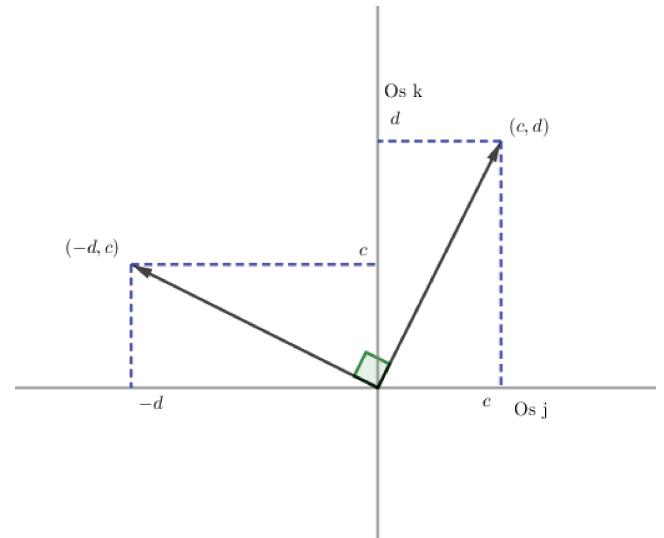
$$(a + bi + cj + dk)(-i) = b - ai - dj + ck.$$

V ravnini jk dobimo popolnoma enako rotacijo kot prej, v prvi ravnini pa dobimo rotacijo za 90° v nasprotni smeri kot pri množenju z i z leve. Zdaj lahko brez računanja ugotovimo, čemu je enak produkt $i(a + bi + cj + dk)(-i)$. V prvi ravnini pride do



SLIKA 4.

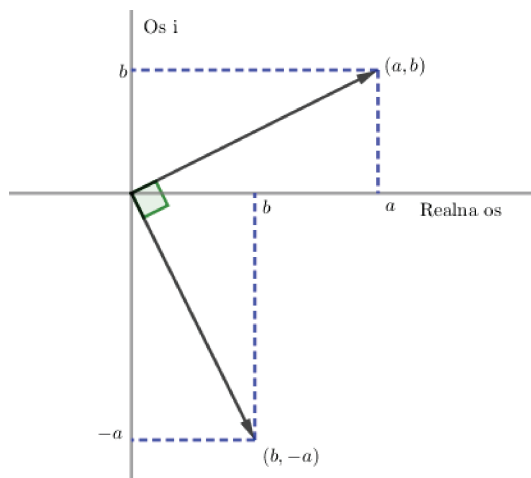
Rotacija v prvi ravnini pri množenju z i z leve.



SLIKA 5.

Rotacija v drugi ravnini pri množenju z i z leve.

dveh nasprotno izključujočih se rotacij, zato komponenti (a, b) ostaneta nespremenjeni, v drugi pa dvakrat rotiramo za 90° v isti smeri, kar ustreza rotaciji za 180° . Tako komponenta (c, d) postane $(-c, -d)$.



SLIKA 6.

Rotacija v prvi ravnini pri množenju z $-i$ z desne.

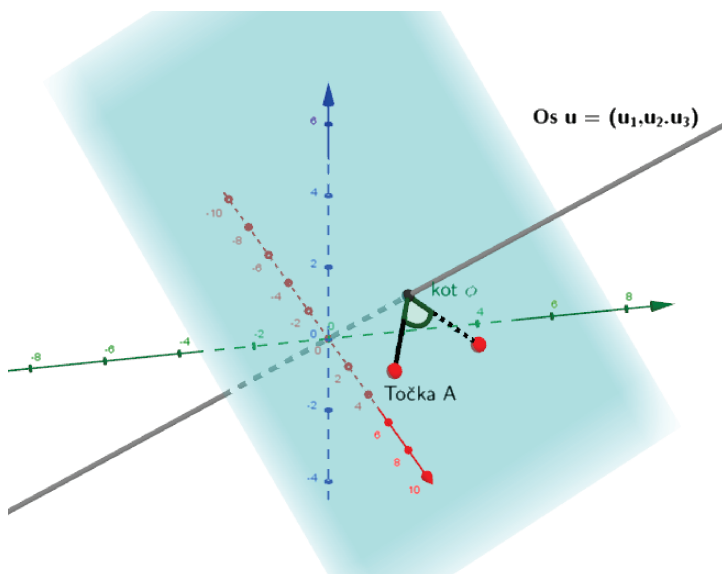
Velja torej

$$\blacksquare i(a + bi + cj + dk)(-i) = a + bi - cj - dk.$$

Pri množenju točke $ai + bj + cj$ s kvaternionom $h = \cos \frac{\phi}{2} + (u_1 i + u_2 j + u_3 k) \sin \frac{\phi}{2}$ z leve in $\bar{h} = \cos \frac{\phi}{2} + (-u_1 i - u_2 j - u_3 k) \sin \frac{\phi}{2}$ z desne lahko prostor razdelimo na prvo ravnino, ki jo določata realna os in os v smeri vektorja $u = (u_1, u_2, u_3)$, drugo ravnino pa predstavlja njen ortogonalni komplement.

Rotaciji v prvi ravnini se izničita, torej realna komponenta točke, ki jo rotiramo, ostane 0, nespremenjena pa ostane tudi njena lega vzdolž osi u . Hkrati poteka rotacija v drugi ravnini, ki pa ustreza ravno dvakratni rotaciji za kot $\frac{\phi}{2}$ okoli osi (u_1, u_2, u_3) .

Ko je Hamilton pred približno dvesto leti prvič definiral kvaternione, si ni mogel predstavljati, kakšno vlogo bodo danes igrali v vsakdanjem življenju. S tehnološkim napredkom so kvaternioni postali pomembno orodje na številnih področjih, pred-



SLIKA 7.

Z modro barvo je označena ravnina, v kateri poteka rotacija. Njena normala je ravno u .

→ vsem znotraj računalništva, kljub temu da gre za štiridimenzionalne objekte, kar se na prvi pogled ne sklada z našim tridimenzionalnim svetom. Nobeno presenečenje ne bi bilo, če bi v prihodnosti podoben razcvet doživeli še drugi manj znani večdimenzionalni številski sistemi, kot na primer oktonioni. Raziskovanje takih objektov je torej še kako pomembno, saj lahko kakršno koli novo spoznanje znotraj njihovega sveta še dodatno poenostavi svet okoli nas.

Literatura

[1] Spominska plošča na mostu Broom Bridge, posvečena Williamu Hamiltonu, [ogled 12. 1. 2024], dostopno na https://en.m.wikipedia.org/wiki/File:Inscription_on_Broom_Bridge_%28Dublin%29_regarding_the_discovery_of_Quaternions_multiplication_by_Sir_William_Rowan_Hamilton.jpg.

[2] M. Brešar, *Uvod v algebro*, DMFA - založništvo, Ljubljana, 2018.

[3] G. Günaştı, *Quaternions Algebra, Their Applications in Rotations and Beyond Quaternions*, [ogled 8. 10. 2023], dostopno na <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:535712/FULLTEXT02>.

[4] Yan-Bin Jia, *Quaternions and Rotations*, [ogled 8. 10. 2023], dostopno na <https://graphics.stanford.edu/courses/cs348a-20-winter/Papers/quaternion.pdf>.

[5] N. Reed, *Why do Quaternions Double-Cover?*, [ogled 8. 10. 2023], dostopno na <https://www.reedbeta.com/blog/why-quaternions-double-cover/>.

Popravek

V članku *Rešitve matematičnih nalog s Plemljeve mature* v 3. številki 51. letnika Preseka na strani 12 v levem stolpcu spodaj je napaka. Namesto $n = \log a / \log A = n = 92,64$ mora biti $n = \log(a/A) / \log r = 92,64$ let. Za neljubo napako se bralcem iskreno opravičujemo.

Križne vsote

↓↓↓ → Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

	16	18	
14			
			5
20			
		5	

↓↓↓ REŠITEV KRIŽNE VSOTE

1	4		
4	6	7	
	5	6	
		18	16