Bojan Kuzma
ZBIRKA DOMAČIH NALOG IZ MATEMATIKE

(Zbirka Izbrana poglavja iz matematike, št. 4)

Urednica zbirke: Petruša Miholič

Izdala in založila:
Knjižnica za tehniko, medicino in naravoslovje – TeMeNa,
Univerza na Primorskem
Primorski inštitut za naravosloven in tehnične vede Koper
Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
UNIVERSITÀ DEL LITORALE
UNIVERSITY OF PRIMORSKA

Titov trg 4, SI – 6000 Koper
Tel.: + 386 5 611 75 00
Fax.: + 386 5 611 75 30
E-mail: info@upr.si
http://www.upr.si

Koper, 2009

CIP - Katložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

51(075.8)(076.1)

KUZMA, Bojan
Zbirka domačih nalog iz matematike [Elektronski vir] / Bojan Kuzma. - El. knjiga. - Koper : Knjižnica za tehniko, medicino in naravoslovje - TeMeNa, 2009. - (Zbirka Izbrana poglavja iz matematike ; št. 4)

Način dostopa (URL): http://temena.famnit.upr.si/files/files/zv_4_DS.pdf

ISBN 978-961-92689-3-3

246642944

Zbirka domačih nalog iz matematike

Bojan Kuzma

Koper, 2009

Kazalo

1 Predgovor

Zaradi stalnih in ponavljajočih se želja slušateljev po primerkih starih izpitnih vprašanj sem se odločil izdati zbirko vseh kolokvijev in izpitov pri predmetih kjer sem svojčas sam vodil vaje. Temu sedaj dodajam tudi zbirko vseh domačih nalog.

Zbirka je nastajala skozi več let. V tem času sem vodil vaje na Univerzi v Mariboru in kasneje na Univerzi v Ljubljani. Žal je bil curriculum pri tedanjih predmetih malce drugačen kot je sedaj. Zato sem se odločil, da bom zbirko zgolj v grobem razdelil kronološko. Tako sem iz te zbirke izpustil vse naloge, katerih tematika sega v področje Analize I oz. Analize II — take naloge najdete v drugih zbirkah. To je tudi razlog, da se zbirka začne s peto nalogo, in ne z prvo, kot bi pričakovali. Tu pa tam se kakšna od nalog ponovi v več letih. Primerilo se je, da se je ponovila kar celotna skupina nalog — v tem primeru sem iz zbirke odstranil vse nadaljnje tovrstne repeticije. Zbirko sem začel z nekaj primeri že rešenih nalog. Vabim vas, da jih poskusite rešiti najprej sami; mogoče pa predlagana rešitev ni najbolj elegantna? Na koncu sem dodal tudi nekaj nalog iz linearne algebre, ter eno (rešeno) nalogo iz kompleksne analize.

Na tem mestu bi rad dodal, da naloge niso moje. Večinoma sem jih črpal iz znanih zbirk nalog kot so

(i) M. Ušćumlić, P. Miličić: Zbirka zadataka iz više matematike 1. Beograd. Naučna knjiga, 1984.

(ii) B. G. Sergeevič, B. P. Demidovič (prevajalec I. Uremović): Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke. Zagreb. Tehnička knjiga, 1978.

(iii) M. Dobovišek, M. Hladnik, M. Omladič: Rešene naloge iz analize I. Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, 1972.

(iv) V. Batagelj: Diskretne strukture. 1 - naloge. Ljubljana, IMFM FNT, Oddelek za matematiko, 1979.

(v) M. Dobovišek, B. Magajna: Naloge iz algebre 1. Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, 1984.

(v) M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena, a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre. Ljubljana, Pedagoška fakulteta, 1996.

(vi) P. Mizori-Oblak, B. Krušič (avtor dodatnega besedila): Matematika za študente tehnike in naravoslovja, Del 1. Ljubljana, Fakulteta za strojništvo, 1997.

(vii) P. Mizori-Oblak, Matematika za študente tehnike in naravoslovja, Del 2. Ljubljana, Fakulteta za strojništvo, 1991.

(viii) P. Mizori-Oblak, Matematika za študente tehnike in naravoslovja, Del 3. Ljubljana, Fakulteta za strojništvo, 1986.

(ix) E. Kramar, Rešene naloge iz linearne algebre. Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, 1989.

Tu in tam pa se najde tudi kakšna izvirna naloga.

Čisto na konec sem dodal še nekaj nalog, ki sem jih razdelil na predavanjih v letu 2008/2009. S časoma, ko se bo tovrstnih nalog nabralo več, bo ta razdelek postal daljši. Naj na koncu zaželim obilo veselja pri reševanju.

2 Analiza III – računske naloge

Izračunaj $1{\cdot}01^{0{\cdot}98}$ z razvojem v Taylorjevo vrsto reda 2 in izračunaj napako.

Pomagamo si s funkcijo dveh spremenljivk $f(x,y) := x^y$; izračunali pa bi radi $f(1{\cdot}01, 0{\cdot}98) = f(1 + 0{\cdot}01, 1 - 0{\cdot}02)$. Torej razvijmo f okoli točke $\mathbf{a} = (1,1)$.

Taylorjeva formula reda $p = 2$ za funkcijo dveh spremenljivk se v točki $\mathbf{a} = (a,b)$, perturbirani z $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ glasi

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}+\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{a}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a})x_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{a})y_0 + \\ + \frac{1}{2!}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{a})x_0^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{a})x_0 y_0 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{a})y_0^2\Big) + \\ + \frac{1}{3!}\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\boldsymbol{\Theta})x_0^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\boldsymbol{\Theta})x_0^2 y_0 + \\ + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\boldsymbol{\Theta})x_0 y_0^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\boldsymbol{\Theta})y_0^3\Big) \end{aligned}$$

kjer je $\boldsymbol{\Theta} = (\mathbf{a} + \theta \mathbf{x}_0)$ pri nekem številu $\Theta \in [0,1]$, torej je $\boldsymbol{\Theta}$ neka točka na daljici med $\mathbf{a}$ in $\mathbf{a} + \mathbf{x}_0$. Zadnji sumand nam da napako. Ocenimo ga!

Najprej je pri naši nalogi $\mathbf{a} = (1,1)$ in $\mathbf{x}_0 = (0{\cdot}01, -0{\cdot}02)$. To vstavimo v zadnji sumand.

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial x^y}{\partial x^3}\Big|_{\substack{x=1+\theta x_0\\ y=1+\theta y_0}} \cdot x_0^3 + 3\,\frac{\partial x^y}{\partial x^2 \partial y}\Big|_{\substack{x=1+\theta x_0\\ y=1+\theta y_0}} \cdot x_0^2 y_0 + \right.\\ &\left. + 3\,\frac{\partial x^y}{\partial x \partial y^2}\Big|_{\substack{x=1+\theta x_0\\ y=1+\theta y_0}} \cdot x_0 y_0^2 + \frac{\partial x^y}{\partial y^3}\Big|_{\substack{x=1+\theta x_0\\ y=1+\theta y_0}} \cdot y_0^3 \right) \end{aligned}$$

Pri nas so parcialni odvodi enaki

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^y}{\partial x^3} &= x^{-3+y}\,(-2+y)\,(-1+y)\,y \\ \frac{\partial x^y}{\partial x^2 \partial y} &= x^{-2+y}\,(-1+y) + x^{-2+y}\,y + x^{-2+y}\,(-1+y)\,y\,\ln(x) \\ \frac{\partial x^y}{\partial x \partial y^2} &= 2\,x^{-1+y}\,\ln(x) + x^{-1+y}\,y \ln^2 x \\ \frac{\partial x^y}{\partial y^3} &= x^y \ln^3 x \end{aligned}$$

Odvode moramo računati v točkah $x = 1 + \theta x_0 = 1 + 0{\cdot}01\theta$ oziroma $y = 1 + \theta y_0 = 1 - 0{\cdot}02\theta$. Pri tem lahko v $\frac{\partial x^y}{\partial x^3}$ faktor x^{y-3} navzgor ocenimo z

$$|x^{y-3}| \le 1;$$

saj je $y - 3$ strogo negativno število, in je $x \ge 1$. Podobno velja za $\frac{\partial x^y}{\partial x^2 \partial y}$ ter $\frac{\partial x^y}{\partial x \partial y^2}$. V zadnjem odvodu nastopa x^y; le–tega ocenimo z

$$|x^y| = (1 + 0{\cdot}01\theta)^{1-0{\cdot}02\theta} \le (1 + 0{\cdot}01\theta)^1 \le 1{\cdot}01.$$

Dalje, povsod kjer nastopajo logaritmi, je $|\ln x| = |\ln(1+0\text{˙}01\theta)| \leq \ln e = 1$. Torej je

$$\begin{aligned}
|R_2| \leq & \frac{1}{3!}\,\Big(1\cdot|-2+1-0\text{˙}02\theta|\cdot|-1+1-0\text{˙}02\theta|\cdot|1-0\text{˙}02\theta|\cdot(0\text{˙}01\theta)^3+\\
&+3\Big(1\cdot|-1+1-0\text{˙}02\theta|+1\cdot|1-0\text{˙}02\theta|+1\cdot|-1+1-0\text{˙}02\theta|\cdot 1\Big)\cdot(0\text{˙}01\theta)^2\,(0\text{˙}02\theta)+\\
&+3\Big(2+1\cdot|1-0\text{˙}02\theta|\Big)\cdot(0\text{˙}01\theta)\,(0\text{˙}02\theta)^2+1\text{˙}01\cdot(0\text{˙}02\theta)^3\Big)\leq\\
&\leq\frac{1}{3!}\,\big(1\text{˙}02\cdot 0\text{˙}02\cdot 1\cdot 0\text{˙}01^3+3\big(0\text{˙}02+1+0\text{˙}02\big)\cdot 0\text{˙}01^2\cdot 0\text{˙}02+\\
&\qquad\qquad+3\big(2+1\big)\cdot 0\text{˙}01\cdot 0\text{˙}02^2+0\text{˙}01\cdot 0\text{˙}02^3\big)=\\
&\leq\frac{2\text{˙}04\cdot 10^{-8}+6\text{˙}24\cdot 10^{-6}+3\text{˙}60\cdot 10^{-5}+4\text{˙}00\cdot 10^{-6}}{3!}\\
&\leq 10^{-5}
\end{aligned}$$

Napako smo ocenili, da je največ 10^{-5}. Še približna vrednost $1\text{˙}01^{0\text{˙}98}$:

$$\begin{aligned}
1\text{˙}01^{0\text{˙}98} \doteq & f(1+0\text{˙}01,1-0\text{˙}02)=f(1,1)+\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\cdot x_0+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\cdot y_0\Big)+\\
&+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(1,1)\cdot x_0^2+2\frac{\partial f^2}{\partial x\partial y}(1,1)\cdot x_0y_0+\frac{\partial f^2}{\partial y^2}(1,1)\cdot y_0^2\Big)\\
&=1+\big(1\cdot 0\text{˙}01+0\cdot(-0\text{˙}02)\big)+\frac{1}{2}\big(0+2\cdot 0\text{˙}01\cdot(-1\text{˙}02)+0\big)=\\
&=1.0098.
\end{aligned}$$

Mimogrede: ‘točna’ vrednost bi bila $1\text{˙}01^{0\text{˙}98}=1.009799023\ldots$. Zakaj pa smo uporabili narekovaje? Zato, ker najbrž tudi vhodna podatka nista točna, temveč predstavljata zgolj dvodecimalni približek.

V. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA II

1. V parcialno diferencialno enačbo

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

za funkcijo $u = u(x, y)$ vstavi polarne koordinate

$$x = r\cos\phi \quad y = r\sin\phi.$$

Naloga iz uporabe verižnega pravila.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}. \tag{1}$$

Za izračun $\frac{\partial r}{\partial x}$ bi morali poznati $r = r(x, y)$ ter $\phi = \phi(x, y)$. Mi pa poznamo njuna inverza, $x = x(r, \phi)$ ter $y = y(r, \phi)$. Da vseeno dobimo $\frac{\partial r}{\partial x}$ si pomagamo z izrekom o lokalni inverzni preslikavi,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\frac{\sin(\phi)}{r} & \frac{\cos(\phi)}{r} \end{pmatrix}.$$

Vstavimo v (1); dobimo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\phi + \frac{\partial u}{\partial \phi}(-\frac{\sin\phi}{r}).$$

Še enkrat moramo odvajati po x:

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\phi + \frac{\partial u}{\partial \phi}(-\frac{\sin\phi}{r})\Big) = \frac{\partial\Big(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\phi + \frac{\partial u}{\partial \phi}(-\frac{\sin\phi}{r})\Big)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\Big(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\phi + \frac{\partial u}{\partial \phi}(-\frac{\sin\phi}{\phi})\Big)}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}$$
$$= \Big(\cos^2(\phi)\frac{\partial u^2}{\partial r^2} - \frac{\sin(2\phi)}{r}\frac{\partial u^2}{\partial r\partial\phi} + \frac{\sin^2(\phi)}{r^2}\frac{\partial u^2}{\partial \phi^2}\Big) + \frac{\sin^2(\phi)}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\sin(2\phi)}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \phi}.$$

Podobno postopamo pri $\frac{\partial u^2}{\partial y^2}$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\sin\phi + \frac{\partial u}{\partial \phi}\cdot\frac{\cos\phi}{r},$$

in s tem

$$\frac{\partial u^2}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\sin\phi + \frac{\partial u}{\partial \phi}\cdot\frac{\cos\phi}{r}\Big) = \frac{\partial\Big(\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\sin\phi + \frac{\partial u}{\partial \phi}\cdot\frac{\cos\phi}{r}\Big)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial\Big(\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\sin\phi + \frac{\partial u}{\partial \phi}\cdot\frac{\cos\phi}{r}\Big)}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial y}$$
$$= \left(\sin^2(\phi)\frac{\partial u^2}{\partial r^2} + \frac{\sin(2\phi)}{r}\frac{\partial u^2}{\partial r\partial\phi} + \frac{\cos^2(\phi)}{r^2}\frac{\partial u^2}{\partial \phi^2}\right) + \frac{\cos^2(\phi)}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin(2\phi)}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \phi}.$$

Seštejmo, in pokrajšajmo, pa dobimo

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} = \frac{\partial u^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

2. Poišči definicijsko območje funkcije

$$f(x,y) := xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}$$

V točkah, v katerih še ni definirana, jo definiraj tako, da bo postala povsod zvezna. Ali je dobljena funkcija parcialno odvedljiva v točki $(0,0)$?

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Funkcija f je produkt dveh zveznih funkcij, torej je zvezna povsod, kjer je definirana. Definirajmo jo 'se v $(0,0)$, da bo tudi tu zvezna. Ker je funkcija sin omejena, je $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$. Torej postavimo

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}; & (x,y)\neq(0,0)\\ 0; & (x,y)=(0,0)\end{cases},$$

in ta funkcija je zvezna. Parcialne odvode v $T(0,0)$ moramo računati po definiciji:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\lambda\to 0}\frac{f(\lambda,0)-f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{0-0}{\lambda} = 0,$$

Podobno obstaja tudi $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

3. Poišči ekstrem funkcije

$$f(x,y) := (x-y)^2 + (y-1)^3$$

na enotskem kvadratu.

Gre za kvadrat z oglišči v $T(0,0)$, $T(1,0)$, $T(0,1)$, $T(1,1)$. Najprej v notranjih točkah. Tam mora biti gradient ničeln, torej $\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-y) = 0$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = 3(y-1)^2 - 2(x-y) = 0$. Rešitev sistema teh dveh enačb je ena sama $T_0 = (1,1)$, ki ravno še leži na enotskem kvadratu.

Poglejmo še ekstreme na robnih daljicah. Prvi dve imata parametrizacijo $\lambda \mapsto (\lambda, 0)$ oz. $\lambda \mapsto (0,\lambda)$. Tu je $f(\lambda,0) = \lambda^2 - 1$ z ekstremom v točki $\lambda = 1/2$, torej v točki $T_1(1/2,0)$. Podobno je $f(0,\lambda) = \lambda^2 + (\lambda-1)^3$, ki pa nima lokalnih ekstremov, saj strogo narašča. Drugi dve robni daljici imata parametrizacijo $\mu \mapsto (\mu, 1)$ oz. $\mu \mapsto (1,\mu)$. Tu je $f(\mu,1) = (\mu-1)^2$, ki ima lokalni ekstrem pri $\mu = 1$, torej v $T_2(1,1)$ (to točko že poznamo). Podobno je $f(1,\mu) = (1-\mu)^2 + (\mu-1)^3$, ki ima lokalne ekstreme pri $\mu = 1/3$ oz pri $\mu = 1$, kar nam prinese še eno novo točko $T_3(1,1/3)$. Funkcija ima ekstrem bodisi v notranjih točkah, bodisi na robu, torej v eni izmed naslednjih točk $T_0 = T_2, T_1, T_3$ oz. v ogliščih $T_4 = (0,0)$, $T_5 = (1,0)$, $T_6 = (1,1) = T_0$, $T_7 = (0,1)$. Izračunamo vrednost funkcije v vsaki od teh 7 točk, in dobimo, da je $\min f = -1$, zavzet v $T_4(0,0)$ ter $\max f = 4/27$, zavzet v $T_3(1,1/3)$.

4. Razvij v Taylorjevo vrsto funkcijo
$$f(x,y) := 2\frac{\sin(x^2y^3)}{xy^3} + 3(x - 2yx + 5y^2x^2)(y^4 - 2xy^3 + 5x + 1)$$
okoli točke 0.

Uporabimo enoličnost Taylorjeve formule. Najprej je
$$\sin t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}.$$
Vstavimo $t := x^2y^3$, in dobimo
$$\frac{\sin(x^2y^3)}{xy^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{(x^2y^3)^{2k+1}}{xy^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{4k+2-1} y^{6k+3-3}.$$
V preostalem sumandu zgolj odpravimo oklepaje. Dobimo
$$\begin{aligned} f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} &\frac{2(-1)^k}{(2k+1)!} x^{4k+2-1} y^{6k+3-3} + \\ &+ 15x^2y^6 - 30x^3y^5 - 6xy^5 + 12x^2y^4 + 3xy^4 - 6x^2y^3 + \\ &+ 75x^3y^2 + 15x^2y^2 - 30x^2y - 6xy + 15x^2 + 3x. \end{aligned}$$

V. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA II za višješolce

1. Preveri, če funkcija $z = z(x, y)$, definirana implicitno z
$$4\sin(3x + 2y + 5z) = 3x + 2y + 5z$$
ustreza enačbi
$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + 1 = 0.$$

2. Poišči definicijsko območje funkcije
$$f(x, y) := xy \cos \frac{1}{x^2 + y^2}$$
V točkah, v katerih še ni definirana, jo definiraj tako, da bo postala povsod zvezna. Ali je dobljena funkcija parcialno odvedljiva v točki $(0, 0)$?

3. Poišči ekstrem funkcije
$$f(x, y) := (x - y)^2 + (y - 1)^3$$
znotraj enotskega kvadrata.

4. Razvij v MacLaurinovo vrsto funkcijo
$$f(x, y) := \ln(1 + x + y)$$
do polinoma četrte stopnje.

IX. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA II

1. Funkcijo $f(x) := \sin(zx)$ razvij v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$. Nato izračunaj vsoto
$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{k \sin kx}{z^2 - k^2}$$

2. Funkcijo $f(x) := \cos(zx)$ razvij v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$. Nato izračunaj vsoto
$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z}{z^2 - k^2}$$

3. Razvij liho nadaljevanje funkcije $y = x^2$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-1, 1]$.

4. Razvij sodo nadaljevanje $f(x) := e^{ax}$ v Fourierovo vrsto na $[-\pi, \pi]$.

IX. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA II za višješolce

1. Sodo nadaljevanje funkcije $f(x) := \sin(zx);\ x > 0$ razvij v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.
2. Liho nadaljevanje funkcije $f(x) := \cos(zx);\ x > 0$ razvij v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.
3. Razvij funkcijo $y = x^2 + 1$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-1, 1]$.
4. Razvij funkcijo $f(x) := e^{ax}$ v Fourierovo vrsto na $[-\pi, \pi]$.

X. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA II

1. Določi funkcijo f, če je
$$f(x+y, x-y) = xy + y^2$$

2. Naj bo $z(x,y) = xf(\frac{y}{x})$. Poišči funkciji f in z, če je $z = \sqrt{1+y^2}$ za $x = 1$.

3. Poišči definicijsko območje funkcijama
$$f(x,y) := \frac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}, \qquad g(x,y) := \sqrt{\sin(x^2+y^2)}$$

4. Razvij $f(x) := e^{ax}$ v Fourierovo vrsto na $[-\pi, \pi]$. Za katere x je $f(x)$ enaka svoji Fourierovi transformiranki $s(x)$?

XI. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA II

1. Pokaži, da je funkcija

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x = 0 = y \end{cases}$$

zvezna pri fiksirani spremenljivki $x = x_0$ in zvezna pri fiksirani spremenljivki $y = y_0$. Ali je zvezna tudi kot funkcija dveh spremenljivk?

2. Poišči parcialne odvode funkcije

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}; & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x = 0 = y \end{cases}$$

v točki $T(x_0, y_0)$ (lahko sta tudi obe enaki 0).

3. Preveri veljavnost identitete

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z,$$

če je $z = z(x,y) = xy + xe^{y/x}$.

4. Preveri veljavnost identitete

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

če je $u = (x-y)(y-z)(z-x)$.

XII. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA II

1. V diferencialno enačbo
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$$
uvedi polarne koordinate $x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi$.

2. Transformiraj enačbo
$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
z uvedbo novih spremenljivk $\xi = x^2 + y^2$ in $\eta = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

3. Preveri, v katerih točkah elipse $2x^2 + y^2 = C^2$ je smerni odvod funkcije $f(x,y) := \frac{y^2}{x}$ v smeri normale na elipso enak nič.

4. V katerih točkah elipsoida
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
oklepa normala na elipsoid enake kote s koordinatnimi osmi?

5. Pokaži, da se ploskvi z enačbama
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad \text{in} \quad x^2 + y^2 + \left(z - \frac{b^2 + c^2}{c}\right)^2 = \frac{b^2\ (b^2 + c^2)}{c^2}$$
dotikata v točki $T(0, \pm b, c)$.

XIII. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA II

1. Naj bo w dvakrat zvezno odvedljiva funkcija, ki zadošča enačbi

$$2\,\frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial y}+2w\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}=1$$

   Vanjo vstavi novo funkcijo $z=w^2+x$; nato tudi poišči rešitev gornje enačbe.

2. S pomočjo Euler–McLaurinove formule seštej

$$\sum_{k=1}^{n} k^6$$

3. S pomočjo Euler–McLaurinove formule približno izračunaj

$$I_n := \prod_{k=1}^{n}(1+1/k^2).$$

   (Nasvet: $\ln(I_n)=\sum \ln(1+1/k^2)$. Nato uporabi Euler–McLaurinovo formulo pri $p=3$ in oceni napako.)

4. V katerih točkah elipsoida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

   oklepa normala na elipsoid enake kote s koordinatnimi osmi?

5. Pokaži, da se ploskvi z enačbama

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}, \qquad \text{in} \qquad x^2+y^2+\left(z-\frac{b^2+c^2}{c}\right)^2=\frac{b^2\,(b^2+c^2)}{c^2}$$

   dotikata v točki $T(0,\pm b,c)$.

XIV. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ANALIZA II

1. Implicitno je podana krivulja.

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$$

   Poišči največjo razdaljo med točkami na tej krivulji.

2. Implicitno sta podani krivulji.

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad xy = 1$$

   Poišči razdaljo med njima.

3. V katerih točkah elipsoida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

   oklepa normala na elipsoid enake kote s koordinatnimi osmi?

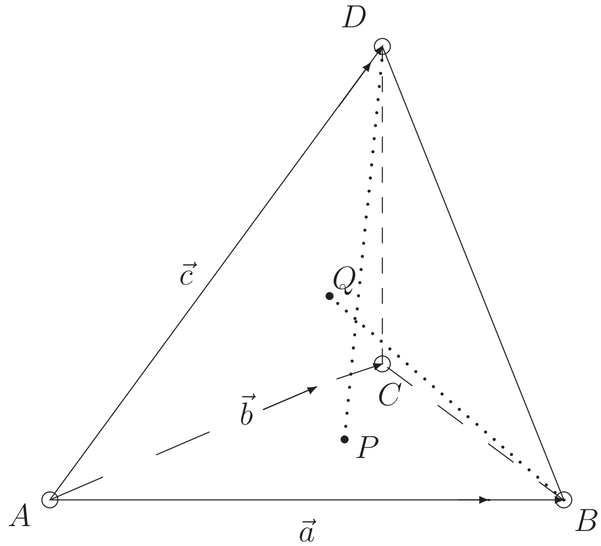
4. Pokaži, da se ploskvi z enačbama

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad \text{in} \quad x^2 + y^2 + \left(z - \frac{b^2 + c^2}{c}\right)^2 = \frac{b^2\ (b^2 + c^2)}{c^2}$$

   dotikata v točki $T(0, \pm b, c)$.

3 Linearna Algebra – računske naloge

Pokaži, da se v pokončni tristrani piramidi višini sekata natanko tedaj, ko sta nasprotni si stranici pravokotni



Točka Q—presečišče višine iz B s stransko ploskvijo—leži v ravnini, ki jo določajo točke A, C, D. Torej tudi vektor $\overrightarrow{AQ}$ leži v tej ravnini, kar pomeni, da je

$$\overrightarrow{AQ} = \vec{a} + \overrightarrow{BQ} = \mu_b\,\vec{b} + \mu_c\,\vec{c};$$

tj.

$$\vec{BQ} = -\vec{a} + \mu_b\,\vec{b} + \mu_c\,\vec{c}.$$

Velja seveda še, da je $\overrightarrow{BQ}$ višina iz B na stranico ACD, torej

$$\overrightarrow{BQ} \cdot \vec{b} = 0 = \overrightarrow{BQ} \cdot \vec{c}$$

Dobimo dve linearni enačbi

$$\begin{aligned} \mu_b\,|\vec{b}|^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} + \mu_c\,\vec{b}\cdot\vec{c} &= 0 \\ \mu_c\,|\vec{c}|^2 - \vec{a}\cdot\vec{c} + \mu_b\,\vec{b}\cdot\vec{c} &= 0 \end{aligned}$$

z rešitvijo

$$\{\{\mu_b \to \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})\,|\vec{c}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{c})\,(\vec{b}\cdot\vec{c})}{|\vec{b}|^2\,|\vec{c}|^2 - (\vec{b}\cdot\vec{c})^2}, \mu_c \to \frac{(\vec{a}\cdot\vec{c})\,|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})\,(\vec{b}\cdot\vec{c})}{|\vec{b}|^2\,|\vec{c}|^2 - (\vec{b}\cdot\vec{c})^2}\}\}$$

To pa pomeni, da je vektor $\overrightarrow{BQ}$ enak:

$$\overrightarrow{BQ} = -\vec{a} + \frac{\vec{c}\,\left((\vec{a}\cdot\vec{c})\,|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})\,(\vec{b}\cdot\vec{c})\right)}{|\vec{b}|^2\,|\vec{c}|^2 - (\vec{b}\cdot\vec{c})^2} + \frac{\vec{b}\,\left((\vec{a}\cdot\vec{b})\,|\vec{c}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{c})\,(\vec{b}\cdot\vec{c})\right)}{|\vec{b}|^2\,|\vec{c}|^2 - (\vec{b}\cdot\vec{c})^2}$$

Sedaj pa: višina BQ seka višino DP, če na daljici BQ obstaja taka točka X, da vektor $\overrightarrow{DX}$ leži v smeri vektorja $\overrightarrow{DP}$; da je torej $\overrightarrow{DX}$ pravokoten na ploskev ABC, kar je isto, kot da je pravokoten na vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Torej je

$$0 = \overrightarrow{DX} \cdot \vec{a} = \left(-\vec{c} + \vec{a} + \lambda \overrightarrow{BQ}\right) \cdot \vec{a}$$

in

$$0 = \overrightarrow{DX} \cdot \vec{b} = \left(-\vec{c} + \vec{a} + \lambda \overrightarrow{BQ}\right) \cdot \vec{b}$$

Glede na dejstvo, da je

$$\begin{aligned}\left(-\vec{c} + \vec{a} + \lambda \overrightarrow{BQ}\right) &= (1-\lambda)\,\vec{a} + \frac{\lambda \vec{b}\left(\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)|\vec{c}|^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\right)}{|\vec{b}|^2\,|\vec{c}|^2 - \left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)^2} + \\ &+ \frac{\vec{c}\left(\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)|\vec{b}|^2 - \lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right) + \left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)^2 - |\vec{b}|^2\,|\vec{c}|^2\right)}{|\vec{b}|^2\,|\vec{c}|^2 - \left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)^2},\end{aligned}$$

je očitno, da ima prva enačba rešitev:

$$\{\{\lambda \to \frac{\left(|\vec{a}|^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\right)\left(|\vec{b}|^2\,|\vec{c}|^2 - \left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)^2\right)}{2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right) - \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2|\vec{c}|^2 + |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2\,|\vec{c}|^2}\}\} \tag{2}$$

Druga enačba pa se pokrajša v:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{c} = 0$$

Trdimo, da imata obe skupaj rešitev natanko tedaj, ko je $\vec{b}$ pravokoten na $\vec{a} - \vec{c} = \overrightarrow{DB}$ — to pa tudi želimo pokazati.

Potrebnost pogoja $\vec{b}\cdot(\vec{a} - \vec{c}) = 0$ smo ravnokar izpeljali. Glede njegove zadostnosti pa je potrebno še preveriti naslednje: Čim je $\vec{b}\cdot(\vec{a} - \vec{c}) = 0$ ima sistem gornjih enačb rešitev. To vidimo takole. Najprej se zaradi $\vec{b}\cdot(\vec{a} - \vec{c}) = 0$ rešitev λ iz (2) pokrajša v

$$\{\{\lambda \to \frac{\left(|\vec{a}|^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\right)\left(-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2 + |\vec{b}|^2\,|\vec{c}|^2\right)}{-\left(|\vec{a}|^2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2\right) + 2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) - \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)^2|\vec{b}|^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2|\vec{c}|^2 + |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2\,|\vec{c}|^2}\}\}; \tag{3}$$

seveda je ta λ rešitev natanko tedaj, ko je imenovalec različen od nič. Sedaj si s pomočjo Gram–Schmidtove ortogonalizacije izberimo ortonormirano bazo prostora, generiranega z vektorji $\left(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\right)$— torej je

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (\alpha, 0, 0)\\ \vec{c} &= (x, y, 0)\\ \vec{b} &= (\beta_1, \beta_3, \beta_3)\end{aligned}$$

Zaradi linearne neodvisnosti $\vec{a}$ in $\vec{c}$ je seveda $\alpha \neq 0 \neq y$. Dalje, $\vec{b}\cdot(\vec{a} - \vec{c}) = 0$, kar pomeni, da je $b_2 = \frac{\beta_1(\alpha - x)}{y}$. Upoštevaje vse to, dobimo, da je imenovalec izraza (3) za λ enak

$$\begin{aligned}&-\left({\beta_1}^2\,\alpha^4\right) + 2\,{\beta_1}^2\,\alpha^3\,x - \alpha^2\,x^2\left({\beta_1}^2 + {\beta_3}^2 + \tfrac{{\beta_1}^2\,(\alpha - x)^2}{y^2}\right) - {\beta_1}^2\,\alpha^2\left(x^2 + y^2\right) + \\ &+ \alpha^2\left({\beta_1}^2 + {\beta_3}^2 + \tfrac{{\beta_1}^2\,(\alpha - x)^2}{y^2}\right)\left(x^2 + y^2\right) = (\alpha y \beta_3)^2 \gneqq 0,\end{aligned}$$

torej se višini res sekata.

Mimogrede: točka presečišča, tj. vektor $\overrightarrow{DX}$ ima koordinate

$$\begin{aligned}
&\frac{\vec{c}\,|\vec{a}|^2\,(\vec{a}\cdot\vec{c})\,|\vec{b}|^2-\vec{a}\,(\vec{a}\cdot\vec{c})^2\,|\vec{b}|^2-\vec{c}\,|\vec{a}|^2\,(\vec{a}\cdot\vec{b})\,(\vec{b}\cdot\vec{c})-\vec{b}\,|\vec{a}|^2\,(\vec{a}\cdot\vec{c})\,(\vec{b}\cdot\vec{c})+2\,\vec{a}\,(\vec{a}\cdot\vec{b})\,(\vec{a}\cdot\vec{c})\,(\vec{b}\cdot\vec{c})-\vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b})\,(\vec{a}\cdot\vec{c})\,(\vec{b}\cdot\vec{c})}{-\left((\vec{a}\cdot\vec{c})^2\,|\vec{b}|^2\right)+2\,(\vec{a}\cdot\vec{b})\,(\vec{a}\cdot\vec{c})\,(\vec{b}\cdot\vec{c})-|\vec{a}|^2\,(\vec{b}\cdot\vec{c})^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\,|\vec{c}|^2+|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2\,|\vec{c}|^2}+\\
&+\frac{\vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c})^2\,(\vec{b}\cdot\vec{c})+\vec{c}\,|\vec{a}|^2\,(\vec{b}\cdot\vec{c})^2-\vec{a}\,(\vec{a}\cdot\vec{c})\,(\vec{b}\cdot\vec{c})^2+\vec{b}\,|\vec{a}|^2\,(\vec{a}\cdot\vec{b})\,|\vec{c}|^2-\vec{a}\,(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\,|\vec{c}|^2+\vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\,|\vec{c}|^2-\vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{b})\,(\vec{a}\cdot\vec{c})\,|\vec{c}|^2}{-\left((\vec{a}\cdot\vec{c})^2\,|\vec{b}|^2\right)+2\,(\vec{a}\cdot\vec{b})\,(\vec{a}\cdot\vec{c})\,(\vec{b}\cdot\vec{c})-|\vec{a}|^2\,(\vec{b}\cdot\vec{c})^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\,|\vec{c}|^2+|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2\,|\vec{c}|^2}-\\
&-\frac{\vec{c}\,|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2\,|\vec{c}|^2+\vec{a}\,(\vec{a}\cdot\vec{c})\,|\vec{b}|^2\,|\vec{c}|^2}{-\left((\vec{a}\cdot\vec{c})^2\,|\vec{b}|^2\right)+2\,(\vec{a}\cdot\vec{b})\,(\vec{a}\cdot\vec{c})\,(\vec{b}\cdot\vec{c})-|\vec{a}|^2\,(\vec{b}\cdot\vec{c})^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\,|\vec{c}|^2+|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2\,|\vec{c}|^2}
\end{aligned} \tag{4}$$

I. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ALGEBRA

1. Zapiši enačbo ravnine, ki je pravokotna na premico

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$$

in poteka skozi točko, kjer gornja premica prebode ravnino xy.

Parametrična oblika:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ravnino prebode v točki ko $z = 0$, torej bo $\lambda = 0$, in točka enaka $T(-1, 1, 0)$. Premica ima smerni vektor $\vec{s} = (2, 3, 1)$. To je istočasno normalni vektor naše ravnine. Le-ta vsebuje tudi točko T. Njena enačba:

$$2(X+1) + 3(Y-1) + (Z-0) = 0.$$

2. Na premici, določeni z enačbo

$$x + y + z = 0 \quad x - z + 4 = 0$$

poišči točko, ki je enako oddaljena od točk $A(5, 3, 1)$ in $B(3, 1, -3)$.

Rešitev sistema $x + y + z = 0$ in $x - z + 4 = 0$ je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix};$$

dobimo ga bodisi z eliminacijo spremenljivk, bodisi z Gaussovim postopkom. Poiskati moramo točko, ki je enako oddaljena od A in B, torej $(x-5)^2+(y-3)^2+(z-1)^2 = (x-3)^2+(y-1)^2+(z+3)^2$. Ker točka $T(x, y, z)$ leži na naši premici, dobimo

$$((\lambda-4)-5)^2 + ((-2\lambda+4)-3)^2 + (\lambda-1)^2 = ((\lambda-4)-3)^2 + ((-2\lambda+4)-1)^2 + (\lambda+3)^2,$$

z rešitvijo $\lambda = 4$. Iskana točka: $(x, y, z) = (0, -4, 4)$.

3. Dan je pravilni tetraeder z robom dolžine 1. Izračunaj razdaljo med poljubnima njegovima daljicama.

Razdalja med daljicama, ki delita skupno oglišče, je 0. Potrebujemo še razdaljo med dvema mimobežnicama v tetraedru.

Najprej poiščimo ustrezne enačbe. Pravilni tetraeder ima za svoje stranice pravilne, tj. enakostranične trikotnike. Potrebne enačbe zelo enostavno dobimo s pomočjo kompleksnih števil — enakostranični trikotnik, iz osnovne ploskve postavimo tako, da njegovo središče sovpada s koordinatnim izhodiščem, leži v ravnini xy, eno oglišče pa ima v točki $T_1 = 1 + 0i = (1, 0, 0)$. Potem sta drugi dve oglišči osnovne ploskve v točkah

$$T_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\cos\frac{2\pi}{3} = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

ter

$$T_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\cos\frac{4\pi}{3} = \left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right).$$

Četrta točka pravilnega tetraedra leži na pravokotnici skozi osnovno ploskev, ki poteka skozi njeno središče. Torej leži na z osi. Razdalja od te točke do drugih treh oglišš je enaka razdalji med oglišči v osnovni ploskvi, saj je tetraeder pravilen. Torej $d(T_4, T_1) = d(T_1, T_2)$, oziroma $z^2 + 1 = \sqrt{3}^2$. Vzamemo le pozitivno rešitev, se pravi, da $T_4 = (0, 0, \sqrt{2})$. Izračunati moramo le še razdaljo med mimobežnicama skozi T_1, T_2 in skozi T_3, T_4. Podaja jo formula

$$d = \frac{|(T_4 - T_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2)|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}$$

Ustrezni smerni koeficienti so $\vec{s}_1 = T_1 - T_2 = (\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ ter $\vec{s}_2 = T_3 - T_4 = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{2})$. Njihov vektorski produkt je

$$\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \det\begin{pmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}, \tfrac{3}{\sqrt{2}}, \sqrt{3}\right)$$

z normo $|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2| = 3$. V števcu moramo izračunati mešani produkt

$$(T_4 - T_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = -3\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Razdalja je torej enaka $\frac{|-3\sqrt{\frac{3}{2}}|}{3} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

II. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ALGEBRA

1. Katere od danih množic tvorijo bazo R^3

   (a) $\{(1,2,0),(1,2,3),(0,1,0)\}$

   (b) $\{(2,1,3),(3,2,1),(0,0,0)\}$

   (c)$\{(3,1,2),(3,2,-1),(0,1,0),(1,0,0)\}$

   (d)$\{(3,1,2),(1,0,1),(1,2,-1)\}$

   (e)$\{(3,1,2),(1,1.-1),(0,4,5)\}$

   Izrazi vektor $(3,2,1)$ kot linearno kombinacijo danih vektorjev, če je mogoče.

2. V enakokrakem trapezu $ABCD$ naj bo $\vec{AB}= 2\,\vec{a}$, $\vec{DC}= \vec{a}$in $\vec{AD}=\vec{b}$. Naj bo E razpolovišče stranice BC, F razpolovišče stranice DC, S pa presečišče daljic AE in BF. Izrazi $\vec{AS}$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Primerjaj ploščino trikotnika ΔABS s ploščino trapeza.

3. Dan je trikotnik ABC. Točke P, Q in R delijo stranice AB, BC in CA v razmerju 1:2. Daljici AQ in CP se sekata v točki D daljici AQ in BR v točki E, daljici BR in CP pa v točki F. Pokaži, da je ploščina trikotnika DEF enaka $\frac{1}{7}$ ploščine trikotnika ABC.

4. Zapiši enačbo ravnine, ki je pravokotna na premico
$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$$
   in poteka skozi točko, kjer gornja premica prebode ravnino xy.

5. Na premici, določeni z enačbo
$$x + y + z = 0 \quad - x - 2y + z = 1$$
   poišči točko, ki je enako oddaljena od točk $A(5, 3, 1)$ in $B(3, 1, -3)$.

6. Dan je pravilni tetraeder z robom dolžine a. Izračunaj razdaljo med poljubnima njegovima daljicama.

III. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ALGEBRA

1. V $\mathbb{R}^3$ imamo vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ z dolžinami $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ in $|\vec{c}| = 4$. Vektorja $\vec{b}$ in $\vec{c}$ oklepata kot $\frac{\pi}{4}$, kot med vektorjem $\vec{a}$ in ravnino, ki jo razpenjata $\vec{b}$ in $\vec{c}$, pa meri $\frac{\pi}{6}$. Izračunaj volumen tetraedra, napetega na vektorje $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$,

   $\vec{y} = \vec{b} - \vec{c}$ in $\vec{z} = \vec{a} + 2\vec{c}$.

2. Poišči enačbo premice, ki leži v ravnini $\Sigma : x - 4y + 2z - 7 = 0$ in ki pod pravim kotom seka premico, ki je podana s presekom ravnin

   $\Pi_1 : x - 2y - 4z = -3$ ter $\Pi_2 : 2x + y - 3z = -1$.

3. Poišči premico skozi točko $T(0, -1, 1)$, ki seka premici

   $p : \frac{x+3}{2} = 2 - y = z$ in $q : \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = z - 1$.

4. Ugotovi, ali se premici

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1} \quad \text{in} \quad x + 3 = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{4}$$

   sekata. Določi tudi enačbo ravnine, ki je enako oddaljena od obeh premic.

5. Denimo, da so vektorji $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ in $\vec{c} \times \vec{a}$ komplanarni (ležijo na isti ravnini). Pokaži, da so tedaj tudi kolinearni.

6. Določi volumen paralelepipeda, katerega tri stranske ploskve leže na ravninah

$$x + z = 1 \qquad 2x - 5y + 2z = -3 \qquad 2y - z = 2$$

   eno od oglišč pa ima v točki $T(-1, 4, 7)$.

IV. DOMAČA NALOGA PRI PREDMETU ALGEBRA

1. Določi enačbo ravnine Σ, ki vsebuje presek ravnin $\Omega : 2x + y + z = 1$ in $\Pi : x - 3y + z = 0$ ter točko $T(1, 0, 2)$. Kam se preslika točka $S(2, 4, 0)$ pri zrcaljenju čez Σ ?

2. Poišči pravokotno projekcijo premice $p : x + y - z = 1,\ x + z = 2$ na ravnino $\pi : x - y + z = 1$.

3. Dan je trikotnik ABC; dolžina stranice AB bodi c, dolžina stranice AC pa b, medtem ko naj bo a dolžina stranice BC. Izračunaj dolžino simetrale kota z vrhom pri A.

4. Poišči enačbo premice skozi točko $A(0, 1, 2)$, ki seče premico, podano s presekom ravnin
$$x + y + z = 0 \quad \text{in} \quad x - z = -4$$
pod pravim kotom. (Enačba naj bo v vektorski, parametrični in kanonični obliki.)

5. Zapiši enačbo premice, ki je zrcalna slika premici
$$(2, -1, 1) \times \vec{r} = (-1, 1, 3)$$
glede na ravnino $2x + 2y + 4z = 0$. (Enačba naj bo v vektorski, parametrični in kanonični obliki.)

6. Poišči simetrično točko od $T(2, -1, 0)$ glede na premico
$$(5, 0, 2) \times \vec{r} = (0, 4, 0)$$

V. DOMAČA NALOGA IZ LINEARNE ALGEBRE

1. Katere od danih množic tvorijo bazo $\mathbb{R}^3$
   (a) $\{(1,2,0),(1,2,3),(0,1,0)\}$
   (b) $\{(2,1,3),(3,2,1),(0,0,0)\}$
   (c) $\{(3,1,2),(3,2,-1),(0,1,0),(1,0,0)\}$
   (d) $\{(3,1,2),(1,0,1),(1,2,-1)\}$
   (e) $\{(3,1,2),(1,-1,-1),(0,4,5)\}$
   Izrazi vektor $(-3,2,-1)$ kot linearno kombinacijo danih vektorjev, če je mogoče.

2. Določi kot med vektorjema $\vec{c}$ in $\vec{d}$, če je $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{d}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\left|\vec{b}\right|=2\left|\vec{a}\right|$ in $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{3}\,\vec{a}\,\vec{b}$.

3. Poišči pravokotno projekcijo premice $p: x+y-z=1,\ x+z=2$ na ravnino $\pi: x-y+z=3$.

4. Poišči enačbo premice, ki leži v ravnini $\Sigma: x-4y+2z-7=0$ in ki pod pravim kotom seka premico, ki je podana s presekom ravnin $\Pi: x-2y-4z=-3$ ter $\Omega: 2x+y-3z=-1$.

5. Dana je množica
   $$\mathcal{M}=\{(a,2a)\mid a\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^2$$
   in operaciji
   $$(a,2a)+(b,2b)=(a+b,2a+2b),$$
   $$\lambda(a,2a)=(\lambda a,2\lambda a),\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$
   Prepričaj se, da je množica $\mathcal{M}$ s tema dvema operacijama realen vektorski prostor!

6. Katere od danih množic tvorijo bazo $\mathbb{R}^4$
   (a) $\{(0,2,1,0),(1,0,0,1),(0,1,0,0),(0,0,1,2)\}$
   (b) $\{(0,2,1,0),(1,0,0,1),(0,1,0,0)\}$
   (c) $\{(2,3,0,1),(3,1,0,0),(2,1,3,0),(3,-1,3,-1)\}$
   (d) $\{(1,0,2,1),(2,3,0,1),(3,1,0,2),(2,0,1,0)\}$
   (e) $\{(0,2,1,0),(1,0,0,1),(0,1,0,0),(0,0,0,0)\}$

VI. DOMAČA NALOGA IZ LINEARNE ALGEBRE

1. Dane so tri točke paralelograma $A(-1,3,a+5), B(a,2,4)$ in $C(3,a,1)$. Določi parameter a tako, da bo za četrto točko D veljalo $\left|\vec{BD}\right| = 3$,

   R: $a = 0$, $a = \frac{7}{3}$

2. Določi pogoj, kateremu morajo zadoščati realna števila a, b, c, da bodo polinomi

   $$p_1(t) := (t-a)(t-b); \quad p_2(t) := (t-b)(t-c); \quad p_3(t) := (t-a)(t-c)$$

   linearno neodvisni.

   R: $(a-b)(a-c)(b-c) \neq 0$

3. Določi enačbo ravnine Σ, ki vsebuje presek ravnin $\Omega : 2x + y + z = 1$ in $\Pi : x - 3y + z = 0$ ter točko $T(1,0,2)$. Kam se preslika točka $S(2,4,0)$ pri zrcaljenju čez Σ ?

   R: $x + 4y = 1$, $(0,-4,0)$

4. Poišči enačbo premice, ki je simetrična premici $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+3}{5}$ glede na ravnino $x + y + 4z = 9$.

   R: $x = 3 + 4t$, $y = -2$, $z = 2 + 13t$

5. Premica $-x = \frac{y-2}{2} = z - 1$ seka ravnini z enačbama $z = 0$ in $y = 2$ v točki A oziroma B. Določi na preseku danih ravnin točko C tako, da bo imel trikotnik ABC najmanjšo možno ploščino.

   R: $C(\frac{1}{5}, 2, 0)$

6. Poišči bazo podprostora W v $\mathbb{R}^3$ napetega na vektorje $(1,2,1)$, $(3,2,1)$, $(7,6,3)$ in $(1,6,3)$. Dopolni bazo W do baze celega prostora.

   R: $B_W = \{(1,2,1),(3,2,1)\}$,

VII. DOMAČA NALOGA IZ LINEARNE ALGEBRE

1. V prostoru $\mathbb{P}_4$ polinomov stopnje največ štiri sta dani množici

$$U := \{p \in \mathbb{P}_4;\ \ 0 \text{ je } \textit{vsaj} \text{ dvojna ničla polinoma } p\}$$

$$V := \{p \in \mathbb{P}_4;\ \ p(1) = p(2)\}$$

   Pokaži, da sta U ni V vektorska podprostora in poišči bazo za $U \cap V$.

   R: Baza za U je $\{x^2, x^3, x^4\}$, baza za V je $\{1, x^3 - \frac{7\,x^4}{15}, x - \frac{x^4}{15}, x^2 - \frac{x^4}{5}\}$.

2. Določi parameter a tako, da bo vektor $(-1, a+2, -2, a^2+a+1)$ pripadal podprostoru v $\mathbb{R}^4$, razpetemu na vektorje $(1, 0, 2, 4)$, $(3, 1, 1, 2)$, in $(5, 1, 5, 3)$!

3. Naj bo P_2(—R) vektorski prostor polinomov največ druge stopnje z realnimi koeficienti. Katere od naslednjih množic vektorjev iz tega prostora so linearno neodvisne? Če je množica linearno odvisna, izrazi en njen element kot linearno kombinacijo ostalih!

   (a) $\{1, t, t^2 - 1\}$,
   (b) $\{t^2 + 1, t - 2, t + 3\}$,
   (c) $\{2t^2 + t, t^2 + 3, t\}$,
   (d) $\{2t^2 + t + 1, 3t^2 + t - 5, t + 13\}$.

4. V prostoru P_3 sta dani množici polinomov:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{t^3, t^3 - t^2, t^3 + t^2, t^3 - 1\}, \\ S_2 &= \{t^2 - 1, t + 1, t^3 - 1\}. \end{aligned}$$

   Če je množica linearno neodvisna, ji dodaj tak polinom, da postane linearno odvisna. Če pa je množica linearno odvisna, ji odvzemi tak polonom, da postane linearno neodvisna.

5. V $\mathbb{R}^4$ imamo podprostora:

$$\begin{aligned} S &= \mathcal{L}\{(1, 1, 1, 1), (2, 3, 1, 0), (1, -1, 1, -1)\}, \\ T &= \mathcal{L}\{(1, -1, -1, 1), (2, -2, 0, 0), (3, -1, 1, 1)\}. \end{aligned}$$

   Poišči bazi prostorov $S \cap T$ in $S + T$!

6. Naj bosta U in V podmnožici prostora $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} U &= \big\{(a, b, c, d) \mid b + c + d = 0\big\}, \\ V &= \{(a, b, c, d) \mid a + b = 0 \quad \text{in} \quad c = 2d\}. \end{aligned}$$

Pokaži, da sta U in V vektorska podprostora v $\mathbb{R}^3$ ter poišči baze prostorov U, V, $U \cap V$ in $U + V$!

VIII. DOMAČA NALOGA IZ LINEARNE ALGEBRE

1. Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna vektorja v $\mathbb{R}^3$. Preslikava $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podana s predpisom: $A\vec{x} = \vec{a} \times (\vec{x} \times \vec{b})$. Dokaži, da je A linearna preslikava!

2. Pokaži, da je preslikava $A : P_4 \to P_4$, podana s predpisom: $Ap(t) = p(t+3) - p(t+2) + p(t+1)$, linearna!

3. Linearna preslikava $L : P_1 \to P_1$ je definirana s predpisoma: $L(t-1) = t+2$ in $L(t+1) = 2t+1$.

   (a) Izračunaj $L(5t+1)$!

   (b) Določi $L(at+b)$ za poljubna $a, b \in \mathbb{R}$.

4. V $\mathbb{R}^4$ naj bo U podprostor, napet na vektorja $(1,1,0,0)$ in $(1,-1,-2,0)$; V_t pa podprostor, ki ga razpenjata vektorja $(2t,-1,-1,t)$ oz. $\big(-t+1, t+1, t, 2t(t-1)\big)$. Pri katerih vrednostih parametra t ta dva prostora sovpadata?

   R: $t = 0$

5. Transformacija $A : P_2 \to P_2$ je podana s predpisom

$$(Ap)(t) := p(1) \cdot (1 + t + t^2) + \lambda p(t)$$

   Poišči njeno jedro pri glede na različne izbire vrednosti parametra λ.

   R: $\lambda = 0$, tedaj je $\operatorname{Ker} A = \big\{\alpha(1-t) + \beta(1-t^2);\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\big\}$. Pri $\lambda = -3$ je $\operatorname{Ker} A = \big\{\alpha(1+t+t^2);\quad \alpha \in \mathbb{R}\big\}$. Pri ostalih parametrih je $\operatorname{Ker} A = 0$.

6. Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno noedvisna vektorja. Preveri, da je preslikava

$$\mathcal{A} : \vec{x} \to (\vec{x} \cdot \vec{a})\vec{a} + \vec{x} \times \vec{b}$$

   linearna, in poišči njej pripadajočo matriko v bazi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$. Ali je preslikava surjekcija?

   R: $A = \begin{pmatrix} a^2 & \vec{a} \cdot \vec{b} & -b^2 \\ 0 & 0 & \vec{a} \cdot \vec{b} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Surjekcija je natanko tedaj, ko $\vec{a}$ in $\vec{b}$ nista pravokotna.

X. DOMAČA NALOGA IZ LINEARNE ALGEBRE

1. Obravnavaj naslednje sisteme enačb glede na različne vrednosti parametrov, ki v njih nastopajo, ter poišči vse rešitve, kadar obstajajo!

$$(a)\quad \begin{array}{rcrcrcl} x & + & \alpha y & + & z & = & 1 \\ 4x & + & 2y & & & = & 6 \\ \alpha x & + & 4y & + & \alpha z & = & 2 \end{array} \qquad (b)\quad \begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & 2z & + & u & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & 2z & - & u & = & 0 \\ 5x & + & 5y & - & 2z & - & u & = & \beta \end{array}$$

$$(c)\quad \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & \alpha \\ 6x_1 & - & 17x_2 & + & 2x_3 & + & \beta x_4 & = & 3 \end{array} \qquad (d)\quad \begin{array}{rcrcrcl} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}$$

2. Reši matrično enačbo $AX = B$, če sta:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Naj bodo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{bmatrix}.$$

in I identična matrika. Poišči matriko X, ki zadošča enačbi: $AXB + AXI = C$!

4. Poišči takšno matriko Y, da bo zadoščala enačbi $B + Y = YA - BA$, pri čemer sta:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Dani sta matriki:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Reši matrično enačbo $X^T C = D^{-1}$!

6. Podana je matrična enačba:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

kjer je $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, $x, y, z, w \in \mathbb{R}$.

(a) Pri katerih vrednostih parametra α je enačba rešljiva?

(b) Določi matriko X za $\alpha = 3$!

XI. DOMAČA NALOGA IZ LINEARNE ALGEBRE

1. V vektorskem prostoru $\mathbb{R}^3$ definirajmo (nov) skalarni produkt s predpisom:

$$\langle (a,b,c),(x,y,z)\rangle = a(x-z) + 2by + c(2z-x).$$

   Preveri, da predpis res ustreza vsem lastnostim skalarnega produkta! V tem novem skalarnem produktu ortonormiraj standardno bazo prostora $\mathbb{R}^3$!

2. V prostoru polinomov P_3 imamo skalaren produkt

$$\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

   Poišči ortonormirano bazo podprostora $U = \{p \in P_3 \mid p'(-1) = p'(1)\}$ glede na ta skalaren produkt!

3. V prostoru $\mathbb{R}^4$ imamo vektorje $a_1 = (1,0,1,0)$, $a_2 = (0,-1,1,0)$, in $a_3 = (-1,0,0,1)$.
   (a) Ortonormiraj množico $\{a_1, a_2, a_3\}$ glede na običajni skalarni produkt v $\mathbb{R}^4$!
   (b) Označimo z $\mathcal{A}$ podprostor v $\mathbb{R}^4$, napet na vektorje a_1, a_2 in a_3. Izračunaj razdaljo vektorja $b = (1,0,0,0)$ do prostora $\mathcal{A}$!

4. Naj bo $W = \{(x,y,z,w) \mid x+z=0 \quad \text{in} \quad 2x+w=y\}$. Pokaži, da je W podprostor vektorskega prostora $\mathbb{R}^4$ in poišči tisti element $w \in W$, ki je najmanj oddaljen od elementa $v = (-1,2,6,0)$. Kolikšna je ta razdalja?

5. Za vsako od naslednjih matrik poišči lastne vrednosti, izračunaj lastne vektorje in ugotovi, ali jo lahko diagonaliziramo. V primeru pozitivnega odgovora na zadnje vprašanje poišči še ustrezne prehodne matrike.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Naj bo linearna preslikava $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ podana s predpisom: $f(x,y,z) = (2x + 3y, -y + 4z, 3z)$. Poišči njene lastne vrednosti in lastne vektorje!

7. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Določi parameter a tako, da bo ena izmed lastnih vrednosti matrike A enaka 2. Poišči še ostale lastne vrednosti ter lastne vektorje, ki pripadajo največji lastni vrednosti!

4 Kompleksna Analiza – računske naloge

Bodi $\mathcal{D}$ območje, ki ga iz enotskega kroga odreže krog s središčem v točki i in polmera $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Konformno preslikaj $\mathcal{D}$ na enotski krog!

Iščemo presek krogov z enačbama

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{in} \quad x^2 + (y-1)^2 = 1/2.$$

Presečišča so v

$$\{\{x \to \frac{-\sqrt{7}}{4}, y \to \frac{3}{4}\}, \{x \to \frac{\sqrt{7}}{4}, y \to \frac{3}{4}\}\}$$

Določimo še kote med krogoma: Najprej koti med obema krivuljama v točki $T_1 := \{-\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{3}{4}\}$. Da bomo določili smer tangente na enotski krog v tej točki, moramo krožnico parametrizirati:

$$x = \cos t, y = \sin t$$

Točki presečišča sta tedaj v polarnih koordinatah podani z enačbo $\sin t = \frac{3}{4}$. Torej je vektor enak

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\cos t, \sin t\big) = (-\sin t, \cos t)\big|_{\sin t = \frac{3}{4}}.$$

Če je $\sin t = \frac{3}{4}$, je $\cos t = \pm\sqrt{1 - \frac{3}{4}^2}$; tangenta torej leži v smeri vektorja

$$-\Big(-\frac{3}{4}, \frac{-\sqrt{7}}{4}\Big)$$

(Predznak - je zato, ker mora gledati v naše območje.)

Še drugi krog: V parametrični obliki ima enačbo

$$\Big(\frac{\cos t}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{\sin t}{\sqrt{2}}\Big)$$

V presečišču druga koordinata ustreza $y = 3/4$, oziroma $\sin t \to \frac{-1}{2\sqrt{2}}$, tangenta pa poteka v smeri vektorja:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\cos t}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{\sin t}{\sqrt{2}}\Big) = (-\frac{\sin t}{\sqrt{2}}, \frac{\cos t}{\sqrt{2}})\big|_{\sin t = \frac{-1}{2\sqrt{2}}} = \Big(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{7}}{4}\Big)$$

Cosinus kota je tedaj

$$\cos\phi = \Big\langle \big(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\big), \big(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{7}}{4}\big) \Big\rangle = -\frac{1}{4} \longrightarrow \phi \simeq 104.478°.$$

Naprej postopamo takole: točko $(\frac{-\sqrt{7}}{4}, \frac{3}{4})$ preslikamo v izhodišče in naredimo inverzijo $z \mapsto \frac{1}{z}$. Zahtevajmo še, da gre točka i v točko 1. Möbiousova preslikava, ki to naredi je

$$f(z) := \frac{b + a\,z}{d + c\,z};$$

zanjo veljajo enačbe

$$
\begin{aligned}
f(i) = 1 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{i\,a+b}{i\,c+d} = 1,\\
f\left(\frac{3\,i}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \infty \quad &\Longrightarrow \quad \frac{-3\,i\,a+\sqrt{7}\,a-4\,b}{-3\,i\,c+\sqrt{7}\,c-4\,d} = \infty \Longrightarrow -3\,i\,c+\sqrt{7}\,c-4\,d=0\\
f\left(\frac{3\,i}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}\right) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{3\,i\,a+\sqrt{7}\,a+4\,b}{3\,i\,c+\sqrt{7}\,c+4\,d} = 0
\end{aligned}
$$

Rešitev je

$$\{\{b \to i\,c, d \to \frac{\left(-3\,i+\sqrt{7}\right)\,c}{4}, a \to -\frac{\left(i+\sqrt{7}\right)\,c}{-i+\sqrt{7}}\}\}$$

oziroma

$$f(z) = \frac{1+i\,\sqrt{7}-i\,z-\sqrt{7}\,z}{1-i\,\sqrt{7}-i\,z+\sqrt{7}\,z},$$

ki jo komponiramo še s preslikavo $w \mapsto w^{\frac{\pi}{\arccos(-\frac{1}{4})}}$, pa se nam $\mathcal{D}$ preslika na zgornjo polravnino.

5 Analiza III – teoretične naloge

Domače naloge iz teorije pri predmetu Analiza III — funkcije več spremenljivk

(2008-2009)

1. Bodi (M, d) metrični prostor realnih števil z običajno razdaljo. Pokaži, da so intervali povezane množice.

2. Bodi $f : (M, d) -> (\mathbb{R}, |.|)$ zvezna funkcija, ki metrični prostor (M, d) slika v realna števila z običajno razdaljo. Če je podmnožica A v M povezana, pokaži, da je tudi njena slika, $f(A)$ povezana.

   (in je torej interval, kot vemo že iz 2. DN)