KAKO IŠČE GOOGLE?

MARJETA KRAMAR FIJAVŽ

Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 15B48, 15A18, 47H10

Srce spletnega iskalnika Google je algoritem PageRank. V sestavku predstavimo osnovno idejo algoritma ter si ogledamo njegovo teoretično ozadje. Konvergenco algoritma bomo utemeljili na dva načina, s Perron-Frobeniusovo teorijo za pozitivne matrike ter s pomočjo Banachovega izreka o negibni točki.

HOW GOOGLE WORKS?

We present the main idea of the PageRank algorithm which is the core of the Google search engine. We concentrate on the theoretical background of the algorithm and prove its convergence in two different ways, by the Perron-Frobenius theory for positive matrices and using Banach fixed point theorem.

Uvod

Že od začetka leta 1989 (za ustanovitelja velja Tim Berners-Lee) se je svetovni splet zelo hitro širil in kmalu dobil glavno vlogo v prenosu informacij. Svetovni splet je ogromen[1] in neprestano raste. Poleg tega se stalno spreminja: 40 % strani spremeni vsebino tedensko, nastajajo nove in izginjajo stare strani. Splet je samoorganiziran s pomočjo raznovrstnih medsebojnih povezav. Gre torej za ogromno knjižnico podatkov, ki nima ne kataloga ne knjižničarjev. Kako se tu znajti?

Vzporedno z nastajanjem spleta so se razvili spletni iskalniki, ki uporabniku z vnosom ključnih besed pomagajo najti ustrezno stran. Med različnimi iskalniki je zadnja leta najbolj znan Google. Spletni iskalnik Google[2] sta leta 1998 zagnala Sergey Brin in Larry Page, takrat doktorska študenta na Stanfordski univerzi v Kaliforniji.

Vsak spletni iskalnik ima svojo bazo spletnih strani, ki se seveda neprestano spreminja. Gradi jo s pomočjo avtomatskega programa, ki po spletu stalno pošilja virtualne robote, imenovane *pajki*. Pajki potujejo po spletnih povezavah ter vsako obiskano stran oštevilčijo in indeksirajo njeno vsebino (naslov, ključne besede, imena povezav, sidra ipd.). Tako nastane baza spletnih strani s stvarnim kazalom. Ko uporabnik v iskalnik vtipka poizvedbo,

[1] 19. 1. 2014 obstaja vsaj 1.75 milijarde spletnih strani, `http://www.worldwidewebsize.com/`.

[2] Ime Google naj bi izviralo iz angleške besede »googol« (sl. gúgol), ki pomeni število 10^{100}.

želi na vrnjenem seznamu videti najbolj relevantne strani na vrhu. In kako spletni iskalnik določi relevantnost strani? To je ena najzahtevnejših nalog iskalnika, in prav zaradi pametnega razvrščanja je Google, takoj ko se je pojavil, pometel s konkurenco.

Spletni iskalniki rangirajo spletne strani na podlagi dveh osnovnih kriterijev. Prvi kriterij je vsebinski. Tu upoštevajo, kolikokrat se iskani izraz pojavi na posamezni spletni strani, ali se pojavi v naslovu, podnaslovu, poudarjeno ipd. Drugi kriterij pa je *pomembnost* strani, in tega si bomo podrobneje ogledali. Algoritem razvrščanja strani po pomembnosti PageRank sta Brin in Page prvič opisala v članku [3] in je še vedno srce iskalnika Google. Podrobnejši opis celotnega postopka delovanja spletnih iskalnikov najde radovedni bralec v izvrstni knjigi [7].

V naslednjem razdelku si bomo ogledali osnovno idejo, na kateri temelji algoritem PageRank. Definirali bomo *Googlovo matriko* in videli, da želimo poiskati lastni vektor te matrike k lastni vrednosti 1. Zato bomo obravnavali spektralne lastnosti pozitivnih matrik in utemeljili konvergenco algoritma. Na koncu bomo pokazali obstoj iskanega lastnega vektorja tudi s pomočjo Banachovega izreka o negibni točki.

Pri tem poudarimo, da nas predvsem zanima teoretično ozadje problema in uporaba metod linearne algebre oziroma funkcionalne analize. Konkretnega izračuna ne bomo obravnavali.

Rangiranje spletnih strani

Posvetimo se vprašanju, kako določiti pomembnost spletne strani. Povezave med spletnimi stranmi si lahko predstavljamo kot demokratične volitve. Avtor spletne strani naredi povezave na druge strani, ki se mu zdijo pomembne (kot glasovi na volitvah). Skupek teh subjektivnih glasov dá globalni pomen strani (zmagovalca volitev).

Uvedimo najprej nekaj oznak. Denimo, da imamo n spletnih strani:

$$\mathcal{W} = \{W_k \mid k = 1, \dots, n\}.$$

Za posamezno stran W_k označimo z $I_k := \{i \mid W_i \to W_k\}$ množico indeksov vseh *vstopnih povezav*, z $O_k := \{j \mid W_k \to W_j\}$ množico indeksov vseh *izstopnih povezav* ter z $x_k > 0$ *rang* strani W_k. Kako čim bolje definirati x_k?

Stran je gotovo pomembnejša, če nanjo kaže več povezav, torej bi lahko za rang strani vzeli število vstopnih povezav. Tako so delali prvi iskalniki, a dobljeni seznami strani niso bili najboljši, poleg tega je tudi hitro prišlo do zlorab (ustvarjalci strani so npr. umetno ustvarili povezave na določeno stran). Brin in Page sta tu odgovorila:

Stran je pomembna, če nanjo kaže druga <u>pomembna</u> stran!

Njuna definicija ranga strani je zato rekurzivna:

$$x_k := \sum_{i \in I_k} \frac{x_i}{|O_i|}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{1}$$

Pri tem sta spet uporabila načelo demokratičnosti in utežila glasove volivcev glede na število oddanih glasov $|O_i|$. Torej, če ima stran W_i veliko izhodnih povezav, je njen kazalec na določeno stran W_k proporcionalno manj vreden. Ob tem predpostavimo, da nobena stran ne pokaže nazaj nase. Enačba je na prvi pogled videti krožno odvisna. Poglejmo, ali je res tako.

Svetovni splet si lahko predstavljamo kot ogromen usmerjen graf na n točkah (tj. spletnih straneh), povezanih s spletnimi povezavami. Priredimo mu *uteženo matriko sosednosti* H velikosti $n \times n$, kjer je

$$H_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{|O_j|}, & \text{če } W_j \to W_i, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases} \tag{2}$$

Elemente H_{ij} lahko razumemo kot verjetnosti dostopanja do strani W_i s strani W_j.

Zberimo range strani v *vektor rangov* $x := (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$. Rekurzivno enačbo (1) lahko zapišemo v matrični obliki

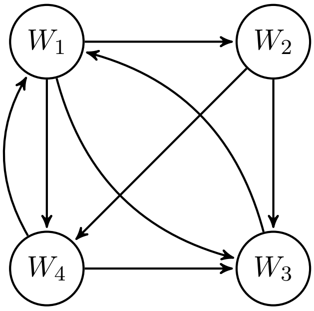
$$x = Hx. \tag{3}$$

Iščemo torej lastni vektor matrike H, ki pripada lastni vrednosti 1. Takemu vektorju rečemo tudi *fiksen ali negiben vektor* matrike H. Od tu naprej bomo privzeli, da je vektor rangov *normiran*, tj. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n x_i = 1$. Zanima nas, ali normiran vektor rangov, ki ustreza enačbi (3), vedno obstaja in ali je enolično določen.

Primer 1. Vzemimo za primer usmerjen graf na sliki 1. Njegova utežena matrika sosednosti je

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

njeni fiksni vektorji pa so oblike $\alpha(12, 4, 9, 6)^\top$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Normiran vektor rangov je v tem primeru en sam, njegove koordinate na 2 decimalni mesti natančno so: $x = (0.39, 0.13, 0.29, 0.19)^\top$. Po pomembnosti razvrščene strani so tako: $1, 3, 4, 2$. Če bi upoštevali le število vstopnih povezav, bi bil vrstni red drugačen: $3, 1\&4, 2$. Če pa pri definiciji ranga ne bi upoštevali uteži $\frac{1}{|O_i|}$ glede na število izhodnih povezav (oziroma postavili v matriki H vse neničelne vrednosti na 1), rekurzivna enačba (1) sploh ne bi imela neničelne rešitve!



Slika 1. Primer usmerjenega grafa na 4 točkah.

Pozitivne matrike

Oglejmo si nekaj rezultatov iz teorije pozitivnih matrik, ki jih bomo pri naši obravnavi potrebovali.

Definicija 1. Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ imenujemo *pozitiven vektor*, če so vse njegove koordinate pozitivna realna števila: $x_i \geq 0$. Matriko $A = (a_{ij})_{n\times n}$ imenujemo *pozitivna matrika*[3], če enako velja za vse njene elemente: $a_{ij} \geq 0$.

Za vektorja $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ in $y = (y_1, \dots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ označimo

$$x \leq y \iff x_i \leq y_i \text{ za vse } i = 1, \dots, n.$$

Absolutna vrednost vektorja $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{C}^n$ je vektor

$$|x| := \big(|x_1|, \dots, |x_n|\big)^\top$$

in *absolutna vrednost matrike* $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$, je matrika

$$|A| := \big(|a_{ij}|\big)_{n\times n}.$$

Naslednje lastnosti je enostavno preveriti, dokaz prepuščamo bralcu.

Lema 1. *Za poljubno matriko $A = (a_{ij})_{n\times n}$ veljajo trditve:*

(i) A je pozitivna natanko tedaj, ko je $Ax \geq 0$ za vse $x \geq 0$.

(ii) $|Ax| \leq |A|\,|x|$ za poljuben vektor x.

[3] Nekateri avtorji tako matriko imenujejo *nenegativna* ter za pozitivne matrike zahtevajo, da so vsi členi strogo pozitivni: $a_{ij} > 0$.

(iii) *Če je A pozitivna matrika, je $|Ax| \le A\,|x|$ za poljuben vektor x.*

Ponovimo še nekaj izrazov. *Spekter* matrike A je množica vseh lastnih vrednosti matrike,

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists x \neq 0 : Ax = \lambda x\}.$$

Spektralni radij matrike A je enak

$$r(A) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Teorija pozitivnih matrik je doživela razcvet v začetku 20. stoletja. Eden od pionirjev te teorije je nemški matematik Perron[4], ki je v članku [9] dokazal naslednji izrek:

Izrek 2 (Perron, 1907). *Naj bo A pozitivna matrika s spektralnim radijem $r = r(A)$. Potem je r lastna vrednost matrike A in pripadajoči lastni vektor je pozitiven.*

Dokaza izreka na tem mestu ne bomo navedli, radovedni bralec ga najde npr. v [8, 2]. V članku [8] je prikazanih tudi veliko primerov uporabe Perronovega izreka na različnih področjih, od numerične matematike in teorije verjetnosti do biologije in ekonomije.

Definirajmo še nekaj pojmov. Pozitivno matriko A imenujemo:

(i) *vrstično stohastična*, če je $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ za vse $i = 1, \dots, n$;

(ii) *stolpčno stohastična*, če je $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ za vse $j = 1, \dots, n$;

(iii) *stohastična*, če je vrstično in stolpčno stohastična.

Utežena matrika sosednosti H v primeru 1 je stolpčno stohastična, ni pa vrstično stohastična.

Trditev 3. *Za vrstično ali stolpčno stohastično matriko A je spektralni radij $r(A) = 1$ in je lastna vrednost matrike A.*

Dokaz. Najprej se spomnimo znane Gelfandove enačbe za spektralni radij matrike:

$$r(A) = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}, \tag{4}$$

ki velja za katerokoli matrično normo (dokaz najdemo npr. v [10, izrek 8], [2, Prop. 3.1.3] ali [7, Example 7.10.1]). Za vrstično stohastično matriko A je

$$\|A\|_\infty := \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = 1,$$

[4] Oskar Perron (1880–1975)

za stolpčno stohastično pa

$$\|A\|_1 := \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = 1.$$

Zaradi enačbe (4) je tako v vsakem primeru $r(A) = 1$.

Naj bo $e := (1, \dots, 1)^\top$ in A vrstično stohastična matrika. Potem je $Ae = e$, torej je $r(A) = 1$ lastna vrednost matrike A. Če je A stolpčno stohastična, je $A^\top$ vrstično stohastična in po gornjem velja $1 \in \sigma\left(A^\top\right) = \sigma(A)$. ■

V dokazu zadnje trditve opazimo, da je za vrstično stohastično matriko normiran lastni vektor k lastni vrednosti 1 enak $\frac{1}{n}(1, \dots, 1)^\top$ in je strogo pozitiven. Pri stolpčno stohastični matriki pa zaradi Perronovega izreka vemo le, da je lastni vektor k lastni vrednosti 1 pozitiven. Nikakor pa ne moremo še ničesar reči o dimenziji ustreznega lastnega podprostora (to je o enoličnosti normiranega lastnega vektorja).

Perron je v [9] ob predpostavki, da so vsi členi matrike strogo pozitivni ($a_{ij} > 0$), pokazal tudi močnejšo različico izreka 2. Tu velja, da je lastni vektor k lastni vrednosti r strogo pozitiven in do skalarja natančno določen. Nadomestimo pogoj o strogi pozitivnosti z neko splošnejšo lastnostjo matrike, za katero bomo videli, da je lepo povezana s strukturo grafa, ki ji pripada (glej trditev 8).

Definicija 2. Matrika $A = (a_{ij})_{n\times n}$ je *razcepna*, če obstaja taka neprazna indeksna množica $M \subsetneqq \{1, \dots, n\}$, da je linearen podprostor

$$J_M := \left\{(x_1, \dots, x_n)^\top \mid x_i = 0 \text{ za } i \in M\right\}$$

invarianten za A. Matrika, za katero to ne velja, je *nerazcepna*.

Opozorimo, da je ta lastnost matrike odvisna od izbire baze: za obrnljivo matriko P je matrika $P^{-1}AP$ lahko razcepna, čeprav je A nerazcepna, in obratno! Vendar pa hitro opazimo, da permutacija standardnih baznih vektorjev (ne)razcepnost ohranja. Torej je A razcepna natanko tedaj, ko lahko standardne bazne vektorje $\mathbb{R}^n$ preuredimo tako, da je za neki indeks $1 \leq k < n$ podprostor

$$J_k := \left\{(x_1, \dots, x_n)^\top \mid x_{k+1} = \dots = x_n = 0\right\} \tag{5}$$

invarianten za A. Matrika v preurejeni bazi je torej bločno trikotna. Preureditev baze pomeni, da v matriki na enak način permutiramo vrstice in stolpce. Dobili smo novo karakterizacijo nerazcepnosti, ki jo je enostavneje preveriti.

Trditev 4. *Matrika A je razcepna, če obstaja taka permutacijska matrika P, da je matrika $P^\top AP$ bločno trikotna:*

$$P^\top AP = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix},$$

pri čemer sta X in Z kvadratni matriki.

Primer 2. Navedimo dva primera nerazcepnih matrik:

(i) matrika $A = (a_{ij})_{n\times n}$ s strogo pozitivnimi nediagonalnimi elementi: $a_{ij} > 0$ za $i \neq j$, ter

(ii) permutacijska matrika

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Pojem (ne)razcepnosti je uvedel nemški matematik F. G. Frobenius[5]. V delu [6] je pokazal, da Perronov izrek za strogo pozitivne matrike velja tudi za nerazcepne pozitivne matrike.

Izrek 5 (Perron-Frobenius, 1912). *Naj bo A pozitivna nerazcepna matrika. Potem je spektralni radij $r = r(A)$ lastna vrednost matrike A, pripadajoč lastni podprostor je enorazsežen in napet na strogo pozitiven lastni vektor $z = (z_1, \dots, z_n)^\top$.*

Dokaz. Najprej uporabimo Perronov izrek 2, ki nam zagotavlja obstoj pozitivnega vektorja $z = (z_1, \dots, z_n)^\top$, $z_i \geq 0$, za katerega velja $Az = rz$.

Denimo, da z ni strogo pozitiven. Bazne vektorje preuredimo tako, da velja: $z_i > 0$ za $i = 1, \dots, k$ in $z_i = 0$ za $i = k+1, \dots, n$. To pomeni, da za poljuben $y \in J_k$ (glej (5)) obstaja $c > 0$, za katerega je $|y| \leq c \cdot z$. Uporabimo lemo 1 in dobimo

$$|Ay| \leq A|y| \leq c\,Az = cr \cdot z,$$

od koder sledi $Ay \in J_k$. Torej je J_k invarianten podprostor za A, kar je v nasprotju z nerazcepnostjo A. Vektor z je zato strogo pozitiven.

[5]Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917)

Pokazati moramo še, da je lastni podprostor, ki pripada lastni vrednosti r, enorazsežen. Denimo, da ima A poleg zgoraj omenjenega strogo pozitivnega lastnega vektorja z še en neničeln lastni vektor $y \in \mathbb{R}^n$ k lastni vrednosti r (realnost vektorja y lahko predpostavimo zato, ker sta tako matrika A kot lastna vrednost r realni; sicer obravnavamo realni in imaginarni del posebej). Potem lahko najdemo tako število $c \in \mathbb{R}$, da je vektor $x := z - cy$ pozitiven, a ne strogo pozitiven. Zdaj ponovimo razmislek iz prejšnjega odstavka in neničelnim koordinatam vektorja x priredimo podprostor J_M, ki je invarianten za A. To je ponovno v nasprotju z nerazcepnostjo A, zato je $z = cy$. ∎

V resnici sta Perron in Frobenius ob istih predpostavkah dokazala še malce več: za spektralni radij velja: $r > 0$ in r je pol prvega reda resolvente $R(\cdot, A) := (\,\cdot - A)^{-1}$, dokaz tega najdemo npr. v [2]. Strogo pozitiven vektor z v izreku imenujemo *Perronov vektor* za A in je določen do množenja s skalarji natančno (tj. je enoličen, če privzamemo $\|z\|_1 = 1$).

Če združimo trditev 3 in izrek 5, dobimo naslednjo posledico za stohastične matrike:

Posledica 6. *Če je pozitivna nerazcepna matrika A vrstično ali stolpčno stohastična, je spektralni radij $r(A) = 1 \in \sigma(A)$, pripadajoč lastni podprostor je enorazsežen in napet na strogo pozitiven lastni vektor.*

Omenimo še eno lastnost pozitivnih matrik, ki ima pomembno vlogo v limitnih procesih. Pozitivno nerazcepno matriko imenujemo *primitivna*, če je $r(A)$ njena edina lastna vrednost na spektralni krožnici $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = r(A)\}$. Naslednjo karakterizacijo primitivnosti je podal že Frobenius (najdemo jo npr. v [7]).

Lema 7. *Pozitivna matrika A je primitivna natanko tedaj, ko je pri nekem $m > 0$ matrika A^m strogo pozitivna.*

Googlova matrika

Vrnimo se zdaj k reševanju enačbe $x = Hx$ v (3), katere rešitev je iskani vektor rangov. Zanima nas torej, ali obstaja enolično določen normiran strogo pozitiven vektor, ki jo reši. V luči posledice 6 bi že imeli pozitiven odgovor, če bi bila matrika H pozitivna, nerazcepna ter vrstično ali stolpčno stohastična.

Kaj od tega velja za uteženo matriko sosednosti H, podano z (2)? Gotovo je pozitivna, a ni nujno stohastična, saj strani brez izstopnih povezav pripada v H ničelni stolpec. Kakor hitro pa neka stran W_j ima vsaj eno izhodno povezavo, je

$$\sum_{i=1}^{n} H_{ij} = \sum_{i \in O_j} \frac{1}{|O_j|} = 1.$$

Če torej vse ničelne stoplce v H nadomestimo s stolpcem $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)^\top$, dobimo stolpčno stohastično matriko. Označimo jo s $\widetilde{H}$.

Brin in Page sta ta korak utemeljila s t. i. *naključnim obiskovalcem.* Uporabnik z verjetnostjo H_{ij} zapusti stran W_j po povezavi na stran W_i. Če pa pristane na strani brez izhodnih povezav, se od tam reši tako, da v naslovno vrstico brskalnika naključno vtipka neki nov naslov in pri tem skoči na novo stran z verjetnostjo $\frac{1}{n}$.

Kako pa je z nerazcepnostjo matrike H (oziroma $\widetilde{H}$)? Odgovor nam dá naslednja trditev (dokazana je npr. v [2, Prop. 6.1.1]).

Trditev 8. *Matrika sosednosti nekega grafa je nerazcepna natanko tedaj, ko je pripadajoč graf* krepko povezan *(tj. za vsak $i \neq j$ obstaja v grafu pot od W_i do W_j in nazaj).*

Očitno pri spletu to ne velja! Brin in Page sta v odgovor na to težavo definirala *Googlovo matriko* kot

$$G := \alpha\widetilde{H} + (1-\alpha)S, \tag{6}$$

kjer za matriko S velja $S_{ij} = \frac{1}{n}$ za vse $1 \leq i, j \leq n$, $\alpha \in [0, 1]$ pa je neki parameter. Interpretacija je podobna kot zgoraj: naključni obiskovalec spletne strani se kdaj pa kdaj odloči ročno vtipkati neki nov naslov, tudi če na strani obstajajo izhodne povezave.

Googlova matrika G je strogo pozitivna in ji očitno pripada krepko povezan graf. Po trditvi 8 je torej G nerazcepna. Ker je tudi stolpčno stohastična, nam posledica 6 zagotavlja obstoj enoličnega strogo pozitivnega enotskega fiksnega vektorja matrike G.

Posledica 9. *Normiran strogo pozitiven vektor rangov je rešitev enačbe*

$$x = Gx, \quad \|x\|_1 = 1, \tag{7}$$

vedno obstaja in je enolično določen.

Iskani vektor lahko izračunamo z uporabo enostavne numerične metode, imenovane *potenčna metoda*, pri kateri na začetnem približku uporabljamo vedno večje potence matrike G. Definirajmo zaporedje približkov $x^{(k)}$ z

$$\begin{aligned} x^{(0)} &\geq 0, \quad \|x^{(0)}\|_1 = 1 \text{ (začetni vektor)}, \\ x^{(k)} &= Gx^{(k-1)} = G^k x^{(0)}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Opazimo, da je matrika G tudi primitivna (lema 7), torej je $\lambda_1 = 1$ njena edina lastna vrednost na enotski krožnici. S spektralno teorijo pozitivnih matrik lahko pokažemo, da $x^{(k)}$ vedno konvergira k lastnemu vektorju, ki pripada dominantni lastni vrednosti 1 matrike G (dokaz je npr. vsebovan v [2]).

V resnici pravi izračun seveda ni tako enostaven. Googlova matrika je ogromna, velikost gre v milijarde. Za (čim hitrejše) potenciranje tako velikih matrik je treba uporabiti ustrezne algoritme, ki jih na tem mestu ne bomo obravnavali.

Namenimo le še nekaj besed parametru α. Povezan je z drugo največjo lastno vrednostjo λ_2 matrike G, velja $|\lambda_2| \leq \alpha$, zato vpliva na hitrost konvergence potenčne metode. To pomeni, da bo za manjše α metoda hitreje konvergirala. Hkrati želimo imeti čim večji α, da bodo rangi dovolj različni med seboj (pri $\alpha = 0$ dobimo $G = S$ in vektor rangov $x = (1, \ldots, 1)^\top$). Parameter α uteži preferenco obiskovalca do potovanja po povezavah v grafu. Google uporablja $\alpha = 0.85$.

Banachov izrek o negibni točki

Za konec si poglejmo še elegantnejši dokaz obstoja vektorja rangov s pomočjo funkcionalne analize. Pri tem si pomagamo z znanim in zelo uporabnim izrekom, ki velja v poljubnem polnem metričnem prostoru (M, d).

Preslikavo $T : M \to M$ imenujemo *skrčitev*, če obstaja tako pozitivno število $q < 1$, da za vse $x, y \in M$ velja

$$d\left(T(x), T(y)\right) \leq q \cdot d(x, y).$$

Število q v zgornji enačbi imenujemo *skrčitvena* oz. *Lipschitzeva konstanta.*

Izrek 10 (Banach, 1922). *Naj bo (M, d) poln metričen prostor in naj bo preslikava $T : M \to M$ skrčitev. Potem obstaja natanko ena* negibna (ali fiksna) točka *preslikave T, tj. $x^* \in M$, za katero velja $T(x^*) = x^*$. Še več, če za poljuben $x^{(0)} \in M$ definiramo*

$$x^{(k)} := T\left(x^{(k-1)}\right), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

potem zaporedje $\left(T\left(x^{(k)}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira k x^*, ko gre $k \to \infty$.

Izrek se imenuje Banachov[6] izrek o negibni točki (ali tudi Banachovo skrčitveno načelo) in njegov dokaz bralec najde npr. v učbeniku [11, izrek 14.14].

Pokažimo, kako lahko ta izrek uporabimo v našem primeru. Vzemimo

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, \|x\|_1 = 1\} \quad \text{in} \quad d(x, y) := \|x - y\|_1.$$

[6]Stefan Banach (1892–1945)

Ni težko videti, da je (M, d) poln metrični prostor. Opazimo tudi, da za Googlovo matriko G velja: $G(M) \subseteq M$ (uporabimo lemo 1(i) in dejstvo, da stolpčno stohastična matrika ohranja $\|\cdot\|_1$-normo pozitivnega vektorja).

Za konstantno matriko $S = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\times n}$ je $Sx = \frac{1}{n}(1, \dots, 1)^\top$ za vse $x \in M$ in zato

$$S(x-y) = (0, \dots, 0)^\top \text{ za poljubna } x, y \in M. \tag{8}$$

Po zgornjem in zaradi $\|\widetilde{H}\|_1 = 1$ tako dobimo

$$\begin{aligned} \|Gx - Gy\|_1 &= \|\alpha\widetilde{H}(x-y) + (1-\alpha)S(x-y)\|_1 \\ &\leq \alpha\|\widetilde{H}\|_1\|x-y\|_1 = \alpha\|x-y\|_1 \end{aligned}$$

za vse $x, y \in M$. Torej je G skrčitev na M s skrčitveno konstanto α. Po Banachovem izreku o negibni točki je zato enačba (7) vedno enolično rešljiva in potenčna metoda konvergira.

Priznati moramo, da je naš kratki dokaz o obstoju enoličnega vektorja rangov močno odvisen od lastnosti (8) matrike S. Če le-to malo spremenimo tako, da njeni elementi niso več konstantni, a še vedno ostane strogo pozitivna in stolpčno stohastična, naš dokaz ne bo več dober, medtem ko dokaz s pomočjo Perron-Frobeniusove teorije še vedno deluje. Taka sprememba je seveda smiselna, saj lahko vrednosti S_{ij} interpretiramo kot verjetnosti skoka s strani W_j na stran W_i, ki niso nujno vse med seboj enake (strani z bolj podobno vsebino bolj asociirajo druga na drugo, čeprav ne vsebujejo direktne povezave).

LITERATURA

[1] David Austin, *How Google Finds Your Needle in the Web's Haystack*, Feature Column from the AMS, december 2006.

[2] A. Batkai, M. Kramar Fijavž in A. Rhandi, *Positive Operator Semigroups and Applications*, 17th Internet Seminar on Evolution Equations 2013/14, skripta, `http://isem17.unisa.it`, dostopano: 3. 11. 2014.

[3] Sergey Brin in Lawrence Page, *The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine*, Computer Networks and ISDN Systems, **33** (1998), 107–117.

[4] Kurt Bryan in Tanya Leise, *The $25,000,000,000 Eigenvector. The Linear Algebra behind Google*, SIAM Review **48** (2006), 569–581.

[5] Matthias Frick, *Mathematik hinter Google*, Zulassungsarbeit, Eberhard-Karls Universität Tübingen, 2007.

[6] G. Frobenius, *Über Matrizen aus nicht negativen Elementen*, S.-B. Preuss, Akad. Wiss. (Berlin), 456–477.

[7] Amy Langville in Carl Meyer, *Google's PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings*, Princeton University Press, 2006.

[8] C. R. MacCluer, *The Many Proofs and Applications of Perron's Theorem*, SIAM Review **42** (2000), 487–498.

[9] Oskar Perron, *Zur Theorie der Matrizen*, Math. Ann. **64** (1907), 248–263.

[10] Ivan Vidav, *Linearni operatorji v Banachovih prostorih*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 1982.

[11] Jože Vrabec, *Metrični prostori*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 1990.