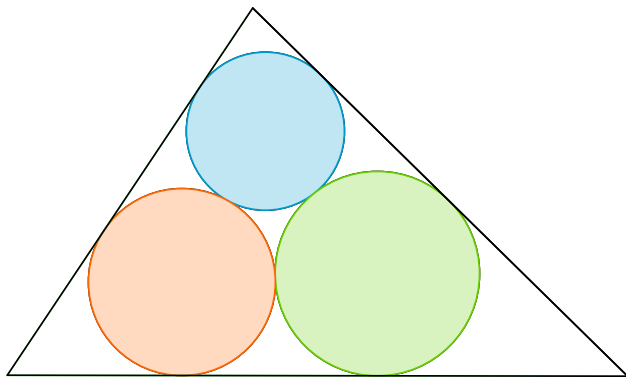


Rešitev Malfattijevega problema

↓↓↓

NADA RAZPET

→ Najprej se spomnimo, kako se glasi naloga: Dan je trikotnik. Kako naj iz trikotnika izrežemo tri kroge tako, da bo njihova skupna ploščina največja?



SLIKA 1.

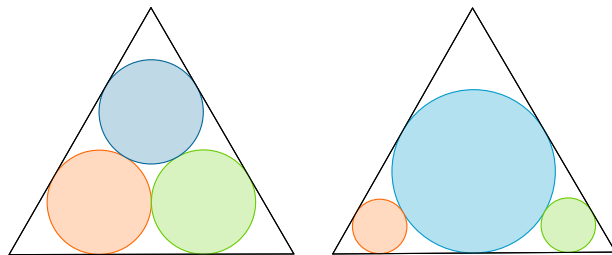
Malfattijeva rešitev naloge, ki pa ni pravilna.

Dolgo je matematike zanimalo le, kako se ti krogi konstruirajo, niso pa razmišljali o pravilnosti Malfattijeve rešitve.

Nato pa sta leta 1929 Lob in Richmond ugotovila, da že za enakostranični trikotnik Malfattijeva rešitev problema ni pravilna (slika 2).

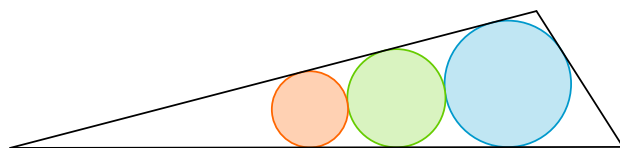
V enakostraničnem trikotniku je vsota ploščin krogov včrtanih tako, kot je to predlagal Malfatti (na sliki 2 levo), manjša kot v primeru na sliki 2 desno.

Howard Eves je 35 let kasneje ugotovil, da Malfattijeva rešitev tudi za dolg ozek trikotnik ni pravilna (slika 3).



SLIKA 2.

Za levi primer je vsota ploščin $\frac{\pi\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^2} \approx 0,729$, za desnega pa $\frac{11\pi}{27\sqrt{3}} \approx 0,739$



SLIKA 3.

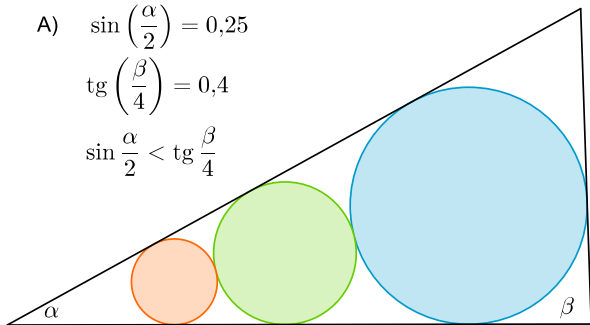
Evesova rešitev Malfattijevega problema za ozek in dolg trikotnik.

Leta 1967 je Goldberg pokazal, da Malfattijeva rešitev ne drži za noben trikotnik. Leta 1994 sta Los in Zalgaller sistematično (z računalnikom) proučila vse možne lege treh krogov, včrtanih v dani trikotnik (obstaja 14 različnih možnosti), in proučila vsote njihovih ploščin. Ugotovila sta, da je najbolje, da je prvi krog kar včrtani krog trikotnika, potem pa se je treba odločiti, kam narisati še preostala dva kroga. Obstajata le dve taki možnosti. Prikazani sta na sliki 4. In kako naj se odločimo v danem primeru? Odločata vrednosti kotnih funkcij $\sin(\alpha/2)$ in $\tan(\beta/4)$.

A) $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0,25$

$\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{4}\right) = 0,4$

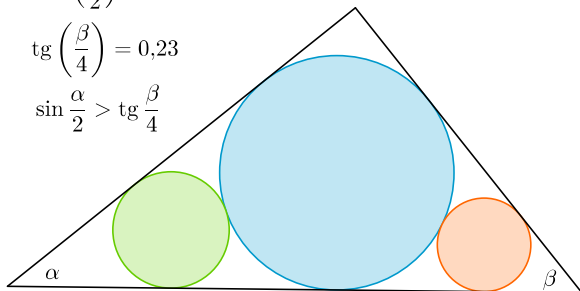
$\sin\frac{\alpha}{2} < \operatorname{tg}\frac{\beta}{4}$



B) $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0,34$

$\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{4}\right) = 0,23$

$\sin\frac{\alpha}{2} > \operatorname{tg}\frac{\beta}{4}$



SLIKA 4.

Zgornja slika velja za primer, ko je $\sin(\alpha/2) \leq \operatorname{tg}(\beta/4)$ (primer A), spodnja pa, ko je $\sin(\alpha/2) \geq \operatorname{tg}(\beta/4)$ (primer B).

Kdaj prva in kdaj druga možnost?

Privzemimo, da za kote v trikotniku velja

▪ $\alpha < \beta < \gamma \quad \gamma = \text{konst} \Rightarrow \alpha + \beta = \text{konst.} \quad (1)$

Če to za dani primer ne drži, kote preimenujemo, da ustrezajo pogoju 1.

Dobro je, da izberemo enoto. Naj bo polmer trikotniku ABC včrtanega kroga $r = 1$. Oznake daljic razberemo s slike 5.

Trikotnik AB_1S je pravokoten, zato velja

▪ $\sin(\alpha/2) = \frac{r}{s}, \quad r = 1, \quad s = \frac{1}{\sin(\alpha/2)}.$

Tudi preostala dva trikotnika AA_1S_1 in AA_2S_2 sta

pravokotna, zato velja:

▪ $\sin(\alpha/2) = \frac{r_1}{s_1} = \frac{r_1}{s - r - r_1},$
 $r_1 = \frac{1 - \sin(\alpha/2)}{1 + \sin(\alpha/2)},$
 $\sin(\alpha/2) = \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_2}{s - r - 2r_1 - r_2},$
 $r_2 = \left(\frac{1 - \sin(\alpha/2)}{1 + \sin(\alpha/2)} \right)^2.$

Opazimo, da so polmeri r , r_1 in r_2 trije zaporedni členi geometrijskega zaporedja. Izrazimo še polmer r_3 s kotom β :

▪ $\sin(\beta/2) = \frac{r}{s_3},$
 $s_3 = \frac{1}{\sin(\beta/2)},$
 $\sin(\beta/2) = \frac{r_3}{s_4} = \frac{r_3}{s_3 - r - r_3},$
 $r_3 = \frac{1 - \sin(\beta/2)}{1 + \sin(\beta/2)}.$

Da bo manj pisanja, zapišimo:

▪ $\sin(\alpha/2) = u, \quad \sin(\beta/2) = v.$

Primerjamo vsoti ploščin

▪ $\pi(r^2 + r_1^2 + r_2^2) > \pi(r^2 + r_1^2 + r_3^2). \quad (2)$

Obe strani neenačbe (2) delimo s π , vstavimo ustrezne izraze in dobimo:

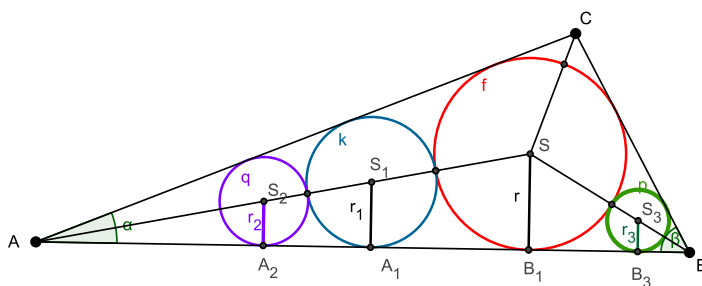
▪ $r^2 + r_1^2 + r_2^2 \geq r^2 + r_1^2 + r_3^2,$
 $r_2^2 \geq r_3^2,$
 $\left(\frac{1-u}{1+u} \right)^4 \geq \left(\frac{1-v}{1+v} \right)^2, \quad (3)$
 $\left(\frac{1-u}{1+u} \right)^2 \geq \frac{1-v}{1+v}. \quad (4)$

Neenačbo (3) smo korenili. To smemo narediti, saj sta tako števec kot imenovalca obeh ulomkov pozitivni števili.

Ker je po dogovoru kot γ največji kot v trikotniku, sta kota α in β manjša od 90° in vrednosti kotnih funkcij sinus in tangens pozitivni števili. Zapišimo povezavo med kotnima funkcijama sinus in tangens:

▪ $\sin(\beta/2) = \frac{2 \operatorname{tg}(\beta/4)}{1 + \operatorname{tg}^2(\beta/4)}.$





$$\begin{aligned} AS &= s \\ AS_1 &= s_1 \\ AS_2 &= s_2 \\ SB &= s_3 \\ S_3B &= s_4 \end{aligned}$$

SLIKA 5.

Trikotniku včrtamo kroge

Torej velja:

$$\begin{aligned} \frac{1-v}{1+v} &= \frac{1-\sin(\beta/2)}{1+\sin(\beta/2)} = \\ &= \frac{1-\frac{2\operatorname{tg}(\beta/4)}{1+\operatorname{tg}^2(\beta/4)}}{1+\frac{2\operatorname{tg}(\beta/4)}{1+\operatorname{tg}^2(\beta/4)}} = \frac{(1-\operatorname{tg}(\beta/4))^2}{(1+\operatorname{tg}(\beta/4))^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Desno stran neenačbe (4) zamenjamo z desno stranjo enačbe (5), neenačbo korenimo in dobimo:

$$\frac{1-\sin(\alpha/2)}{1+\sin(\alpha/2)} \geq \frac{1-\operatorname{tg}(\beta/4)}{1+\operatorname{tg}(\beta/4)}.$$

In z malo računanja dobimo:

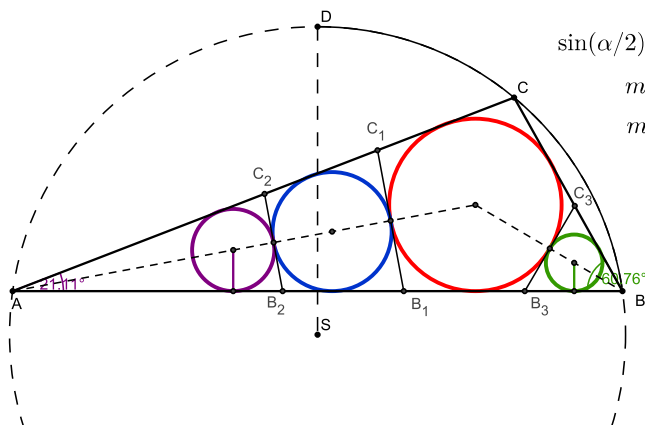
$$\operatorname{tg}(\beta/4) \geq \sin(\alpha/2).$$

Iz neenačbe (6) sledi, da je vsota ploščin krogov v primeru A večja od vsote ploščin krogov v primeru B, če je $\sin(\alpha/2) < \operatorname{tg}(\beta/4)$.

Ploščine proučimo še z GeoGebro

Kako se v posameznem primeru spreminja vsota ploščin, proučimo še z GeoGebro. Naj za kote v trikotniku ABC velja $\alpha \leq \beta < \gamma$. Naj bo kot γ konstanten, torej je tudi vsota kotov $\alpha + \beta$ konstantna. Ko trikotniku včrtamo krog, bo najmanj prostora za preostala kroga v kotu γ , torej bomo včrtali oba kroga v kot α ali pa v vsakega od kotov α in β po en krog.

Vemo, da so koti, ki ležijo nad istim krožnim lokom, med seboj enaki. Zato osnovni trikotnik ABC narišemo tako, da kotu γ pripada največji lok, v našem primeru smo izbrali za ta lok več kot polovico krožnice (slika 6). Da bo tudi $\alpha \leq \beta$, se mora točka C



$$\sin(\alpha/2) \leq \operatorname{tg}(\beta/4) \Rightarrow p_1 \geq p_2$$

$$m_1 = \sin(\alpha/2) = 0,18$$

$$m_2 = \operatorname{tg}(\beta/4) = 0,27$$

$$p_1 = p_r + p_m + p_v$$

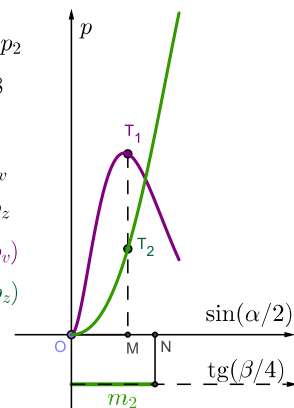
$$p_2 = p_r + p_m + p_z$$

$$T_1 = (\sin(\alpha/2), p_v)$$

$$T_2 = (\sin(\alpha/2), p_z)$$

$$m_1 = OM$$

$$m_2 = ON$$



SLIKA 6.

Ploščini vijoličnega (vijolična krivulja) in zelenega (zeleni krivulja) kroga v odvisnosti od $\sin(\alpha/2)$. Ko je $\sin(\alpha/2) < \operatorname{tg}(\beta/4)$, je $y(T_1) = p_v$ večji od $y(T_2) = p_z$, zato je vsota ploščin $p_1 > p_2$. Vse tri kroge je treba včrtati v kot α .

gibati po loku $\widehat{DB}$. Kota se s spremembo lege točke C spreminjata, pri tem je $\alpha \leq \beta$, njuna vsota pa je konstantna. Če izberemo lego točke C drugače, velja drugačna relacija med koti in moramo vloge kotov v nadaljevanju ustrezno spremeniti.

Trikotniku včrtamo krožnico, poiščemo presečišče te krožnice s simetralama kotov α in β . V teh točkah narišemo pravokotnice na te simetrale. Pravokotnice sekajo stranici c in b oziroma a . Dobimo nove trikotnike AB_1C_1 , AB_2C_2 in B_3BC_3 , v katere zopet včrtamo krožnice.

Vsoto plosčin rdečega (p_r), modrega (p_m) in vijoličnega (p_v) kroga označimo s p_1 , vsoto plosčin rdečega, modrega in zelenega (p_z) kroga pa s p_2 , če je $p_v > p_z$ je $p_1 > p_2$. V koordinatni sistem (na desno strani slike 6) rišemo sled točke $T_1(\sin(\alpha/2), p_v)$, vijolična krivulja, in sled točke $T_2(\sin(\alpha/2), p_z)$, zelena krivulja, ko se oglišče C giblje po loku $\widehat{DB}$. Program riše obe sledi hkrati. Ordinati odebeljenih pik na krivuljah kažeta, kolikšna je ploščina vijoličnega oz. zelenega kroga za trenutno izbrana kota α in β .

Bralci naj še premislijo, kolikšna sta kota α in β , ko je $p_1 = p_2$.

Kaj smo se naučili? Pri geometrijskih nalogah se pogosto zgodi, da pri reševanju upoštevamo odnose med količinami, ki jih razberemo s slike. Ta pa nas lahko zavede, zato je vedno dobro, da rešitev preverimo tudi na kakšnih posebnih primerih, kot v našem primeru na enakostraničnem trikotniku ali pa na zelo dolgem in ozkem trikotniku.

Literatura

- [1] M. Andreatta, A. Bedzek, J. P. Boronski, *The Problem of Malfatti: Two Centuries of Debate*, The Mathematical Intelligencer, Springer, 2010.
- [2] H. Lob, H. W. Richmond, *On the solution to Malfatti's problem for a triangle*, Proc. Lond. Mat. Soc, 2, 30, 287-304, 1930.
- [3] M. Goldberg, *On the original Malfatti problem*, Mathematics Magazine 40, 241-427, 1967.
- [4] V. A. Zalgaller, G. A. Los, *The solution of Malfatti's problem for a triangle*, Journal of the Mathematical Science, 72, No. 4, 3163-3177, 1994.

× × ×

0 pitagorejskih trojicah malo drugače

↓↓↓

MARJAN JERMAN

→ V pravokotnem trikotniku s katetama a in b ter hipotenuzo c velja Pitagorov izrek, ki pravi, da je

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Če dodatno zahtevamo, da so števila a , b in c naravna, trojici (a, b, c) rečemo **pitagorejska trojica**. Posebej slavna pitagorejska trojica, s pomočjo katere so v starem Egiptu načrtovali prave kote, je trojica $(3, 4, 5)$.

Kadar stranice a , b in c nimajo skupnega faktorja, rečemo, da je pitagorejska trojica (a, b, c) **primitivna**. Na primer, $(6, 8, 10)$ je pitagorejska trojica, ki ni primitivna in je dobljena s celoštevilskim raztegom trojice $(3, 4, 5)$.

Pokažimo, da je v vsaki primitivni pitagorejski trojici ena kateta soda in ena liha.

Če sta obe kateti v pitagorejski trojici sodi, je soda tudi hipotenuza. Zato takšna trojica ni primitivna.

Če bi bili obe kateti lihi, enačba

$$(2k - 1)^2 + (2\ell - 1)^2 = 4(k^2 - k + \ell^2 - \ell) + 2$$

pove, da bi dal kvadrat hipotenuze ostanek 2 pri deljenju s 4. Ker kvadrat sodega števila da pri deljenju s 4 ostanek 0, kvadrat lihega števila $(2k - 1)^2 = 4(k^2 - k) + 1$ pa ostanek 1, takšna hipotenuza ni mogoča.

S pomočjo zadnje trdive lahko, recimo, pokažemo, da je $(3, 4, 5)$ najmanjša Pitagorejska trojica.

Ker iščemo najmanjšo pitagorejsko trojico, mora biti iskana trojica (a, b, c) primitivna. Glede na trditev

