

UDK: 630*812.701

Ortotropna elastičnost lesa

Orthotropic elasticity of wood

avtor **Niko TORELLI**, Gozdarski inštitut Slovenije, Večna pot 2, 1000 Ljubljana

izvleček / Abstract

Elastična deformacija lesa je posledica raztezanja in veženja kemičnih vezi polimernih sestavin. Tudi pri daljši obremenitvi predstavlja elastična deformacija večinoma poglavitno komponento celotne deformacije lesa. Zato lahko v praksi časovno deformacijo zanemarimo in les v prvem približku obravnavamo kot linearno elastičen material. Predstavljeni sta podajnostna in elastičnostna matrika in izvedena inženirska oblika Hookeovega zakona. Prkazane so elastične konstante za les in nekaj važnih izotropnih materialov. Posamezne elastičnostne konstante so diskutirane z vidika anizotropne zgradbe lesa.

In wood the elastic deformation occurs by bond stretching and distortion of polymeric constituents. The elastic strain is for the most part the major component of the total strain, even at very long times. For practical purposes the time dependent deformation may be neglected. Accordingly the wood can be treated to a first approximation as a linear elastic material. The compliance and stiffness matrices are presented and related to the engineering form of Hooke's law. Values of elastic constants for wood and some important isotropic materials are presented. The differences among the elastic constants of wood are related to the anisotropy of wood structure.

Ključne besede: les, anizotropija, ortotropna elastičnost, podajnostna matri-

ka, elastičnostna matrika, inženirski elastičnostni parametri

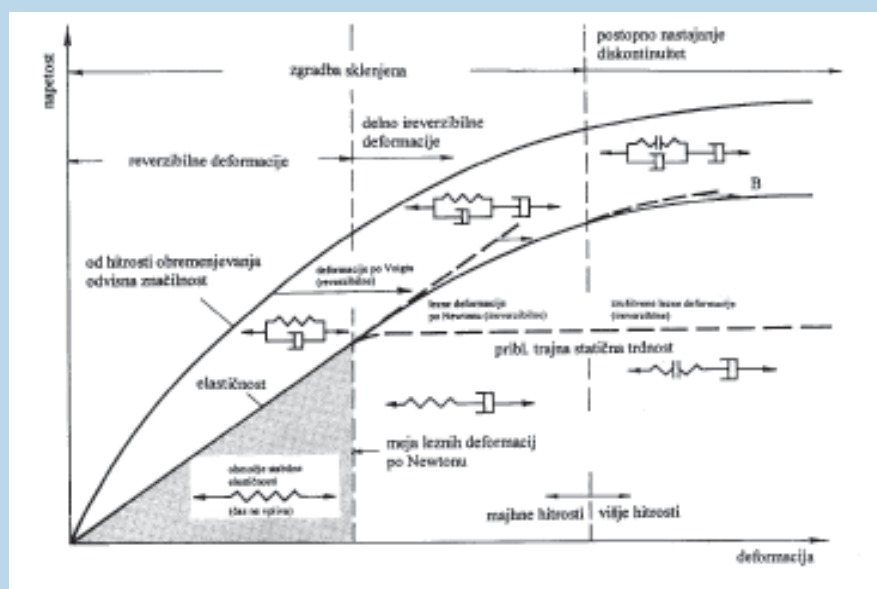
Keywords: wood, anisotropy, orthotropic elasticity, compliance matrix, stiffness matrix, engineering elastic parameters

Deformacijsko obnašanje lesa določajo izrazita anizotropija, vlažnost, velika variabilnost in časovna odvisnost - tudi v normalnih ambientnih pogojih.

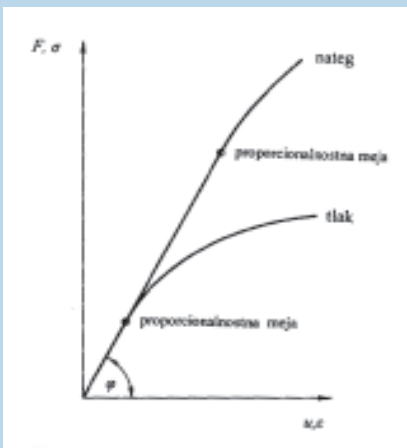
Slika 1 prikazuje napetostno deformacijsko krivuljo viskoelastičnega materiala (les, polimerne snovi) z ustreznimi reološkimi modeli. Obnašanje lesa v stabilnem elastičnem območju, kjer

je zveza med počasi naraščajočo napetostjo in deformacijo linearna, lahko ponazorimo s Hookeovim idealnim, linearno elastičnim telesom ali materialom (vijačna vzmet). Izkaže se, da je linearnost v območju reverzibilnih (elastičnih) deformacij artefakt in da nanjo močno vpliva hitrost obremenjevanja (slika 1). Deformacije so sicer elastične, vendar zadržane. Mehansko jih lahko ponazorimo s Kelvin/Voigtovim materialom. Z naraščajočo napetostjo (in hitrostjo obremenjevanja) postanejo deformacije ireverzibilne. Slednjič se začno pojavljati v zgradbi diskontinuitete.

Na sliki 2 sta tipični napetostno-



□ Slika 1. Napetostno-deformacijska krivulja viskoelastičnega materiala (risba po Kühne-ju 1970)



□ Slika 2. Napetostno-deformacijski krivulji za nateg in tlak

deformacijski krivulji lesa za nateg in tlak z mejama proporcionalnosti.

Pri številnih rabah lesa, kjer je napetost (znatno) pod *elastičnostno oz. proporcionalnostno mejo* in kratkotrajna, lesna vlažnost pa nizka, je časovna deformacija le manjši del celotne deformacije, zato jo lahko zanemarimo. Tedaj lahko les v prvem približku obravnavamo kot linearno elastičen material. Klasična teorija elastičnosti je dognana in jo je mogoče uspešno uporabiti tudi pri lesu. Vpliv časa upoštevamo z varnostnimi faktorji.

Zveza med napetostjo in deformacijo je do proporcionalnostne meje linearna in velja Hookeov zakon

$$\sigma = E \cdot \epsilon, \quad (1)$$

kjer je ϵ specifična deformacija (sprememba dimenzije/prvotna dimenzija), σ napetost (sila/presek), E pa faktor proporcionalnosti, ki ga imenujemo *elastični modul*.

V nateznem preizkusu lahko elastični modul preprosto definiramo kot napetost, pri kateri bi se (teoretično) preizkušaneč elastično podaljšal na dvojno dolžino. Tolikšna napetost je seveda nekajkrat večja od natezne trdnosti lesa. Tako je za bukovino pri osnem nategu elastični modul 18,0

GPa, porušna obremenitev (natezna trdnost aksialno) pa le 1,6 GPa. Elastični modul je razmerje med napetostjo in deformacijo; slednja je lahko normalna (dolžinska), tangencialna (kotna) ali volumenska. Elastični modul je definiran kot

$$\tan \phi = E = s/\epsilon. \quad (2)$$

Vemo, da je sorazmernost med napetostjo in deformacijo pravzaprav idealizacija, saj pri počasnem obremenjevanju in zelo natančnem merjenju izgine. Za nekatere materiale (lito železo, steklo, granit) tudi v pogojih standardnih trdnostnih preizkusov zveza med napetostjo in deformacijo ni linearna in jo definiramo z enačbo, ki je podobna Hookeovemu zakonu, vendar razširjena tako, da upošteva vse materiale:

$$s = E \cdot \epsilon^n. \quad (3)$$

To je potenčni zakon. Za materiale z linearno zvezo med napetostjo in deformacijo, kamor sodijo masiven les pa tudi jeklo in aluminij, je $n = 1$ in je enačba identična s Hookeovim zakonom, za druge materiale pa je $n > 1$ (beton, granit, siva litina) ali pa je $n < 1$ (usnje, konopljena vrvi).

Kot pri večini v tehniki uporabljanih materialov je tudi pri lesu tik nad *proporcionalnostno mejo elastičnosti*. Do tod se material obnaša elastično. V praksi težimo k temu, da napetosti ne prekoračijo te meje, sicer se pojavijo trajne deformacije. Dejstvo, da obe meji praktično sovpadata, bistveno olajšuje trdnostne izračune, saj velja v večini primerov linearna zveza med napetostjo in deformacijo po enačbi (1) do elastičnostne meje.

Nad proporcionalnostjo oz. elastičnostno mejo zveza med napetostjo in deformacijo ni več linearna. Zgornja meja krivulje je *porušna napetost*, t.j. največja napetost, ki jo material lahko zdrži (trdnost). Na njeno vrednost vpli-

vajo pri lesu poleg anatomske zgradbe in gostote še vlažnost, temperatura, hitrost in trajanje obremenitve. Porušno območje je za uporabo zelo pomembno, saj kaže, ali je bila zrušitev popolna ali delna. Deli konstrukcij, ki se niso povsem porušili, še lahko nosijo nekaj bremena, kar je pomembno z varnostnega vidika. Površina pod krivuljo $s - \epsilon$ predstavlja specifično deformacijsko delo oz. energijo, ki je uskladiščena v deformiranem telesu in jo običajno izračunavamo do proporcionalnostne meje, do maksimalne napetosti ali do popolne porušitve. Iz slike 2 se vidi, da je proporcionalnostna meja pri osnem nategu pribl. 60 % porušne obremenitve oz. napetosti, pri osnem tlaku pa med 30 in 50 %. Sicer pa se elastični moduli iz natega in tlaka praktično ne razlikujeta. Iz slike 2 se tudi vidi, da je natezna trdnost večja od tlačne.

Elastične deformacije pripisujemo raztezanju in veženju vezi med atomi in molekulami polimernih lesnih sestavin (Bodig 1982, Schniewind 1981, Winandy & Rowell 1984).

Za označitev enostavnih zvez med napetostjo in deformacijo pri enosnem nategu, tlaku in strigu zadostuje le en elastični parameter: elastični modul E ali strižni modul G . Za popoln opis zveze napetostjo in deformacijo je potrebnih več parametrov. V povsem splošnem primeru velja:

$$\sigma_i = \sigma_{i,j} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (4)$$

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{21}, \quad \epsilon_{13} = \epsilon_{31}, \quad \epsilon_{23} = \epsilon_{32}.$$

Enako velja tudi za napetost. V primeru anizotropnega elastičnega telesa s popolno anizotropijo lahko vsaka komponenta napetosti povzroči vse komponente deformacije in obratno.

Izrazimo vseh šest komponent deformacije s produkti ustreznih napetostnih komponent in *podajnostnih koe-*

ficentov S . Tedaj so konstitutivne enačbe:

$$\sigma_1 = S_{11}\epsilon_1 + S_{12}\epsilon_2 + S_{13}\epsilon_3 + S_{14}\epsilon_{23} + S_{15}\epsilon_{13} + S_{16}\epsilon_{12}$$

$$\sigma_2 = S_{21}\epsilon_1 + S_{22}\epsilon_2 + S_{23}\epsilon_3 + S_{24}\epsilon_{23} + S_{25}\epsilon_{13} + S_{26}\epsilon_{12}$$

$$\sigma_3 = S_{31}\epsilon_1 + S_{32}\epsilon_2 + S_{33}\epsilon_3 + S_{34}\epsilon_{23} + S_{35}\epsilon_{13} + S_{36}\epsilon_{12} \quad (5)$$

$$\sigma_{23} = S_{41}\epsilon_1 + S_{42}\epsilon_2 + S_{43}\epsilon_3 + S_{44}\epsilon_{23} + S_{45}\epsilon_{13} + S_{46}\epsilon_{12}$$

$$\sigma_{13} = S_{51}\epsilon_1 + S_{52}\epsilon_2 + S_{53}\epsilon_3 + S_{54}\epsilon_{23} + S_{55}\epsilon_{13} + S_{56}\epsilon_{12}$$

$$\sigma_{12} = S_{61}\epsilon_1 + S_{62}\epsilon_2 + S_{63}\epsilon_3 + S_{64}\epsilon_{23} + S_{65}\epsilon_{13} + S_{66}\epsilon_{12}$$

ali v matrični obliki (6):

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$$

Podobno je mogoče napisati zgornji sistem enačb tudi eksplicitno na komponente napetostnega tenzorja, t.j. izraziti vseh šest komponent napetosti z ustreznimi deformacijskimi komponentami in elastičnostnimi koeficienti:

$$\sigma_1 = C_{11}\epsilon_1 + C_{12}\epsilon_2 + C_{13}\epsilon_3 + C_{14}\epsilon_{23} + C_{15}\epsilon_{13} + C_{16}\epsilon_{12}$$

$$\sigma_2 = C_{21}\epsilon_1 + C_{22}\epsilon_2 + C_{23}\epsilon_3 + C_{24}\epsilon_{23} + C_{25}\epsilon_{13} + C_{26}\epsilon_{12}$$

$$\sigma_3 = C_{31}\epsilon_1 + C_{32}\epsilon_2 + C_{33}\epsilon_3 + C_{34}\epsilon_{23} + C_{35}\epsilon_{13} + C_{36}\epsilon_{12} \quad (7)$$

$$\sigma_{23} = C_{41}\epsilon_1 + C_{42}\epsilon_2 + C_{43}\epsilon_3 + C_{44}\epsilon_{23} + C_{45}\epsilon_{13} + C_{46}\epsilon_{12}$$

$$\sigma_{13} = C_{51}\epsilon_1 + C_{52}\epsilon_2 + C_{53}\epsilon_3 + C_{54}\epsilon_{23} + C_{55}\epsilon_{13} + C_{56}\epsilon_{12}$$

$$\sigma_{12} = C_{61}\epsilon_1 + C_{62}\epsilon_2 + C_{63}\epsilon_3 + C_{64}\epsilon_{23} + C_{65}\epsilon_{13} + C_{66}\epsilon_{12}$$

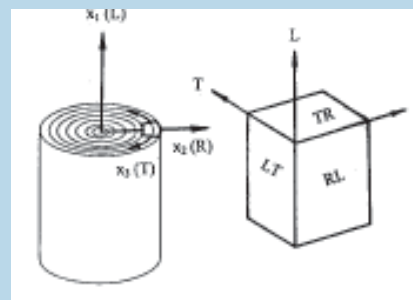
ali v matrični obliki (8):

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix}$$

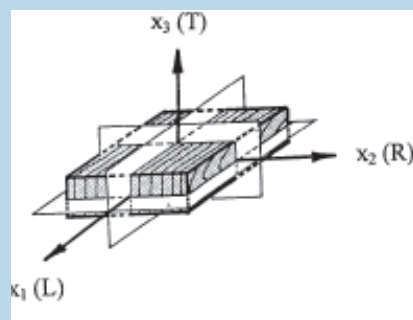
Vsega je 36 podajnostnih oz. elastičnostnih (togostnih) koeficientov. Urejena nabora 6x6 koeficientov S_{ij} oz. C_{ij} sta podajnostna in elastičnostna matrika in sta druga drugi inverzni. Iz termodinamskih razlogov je $S_{ij} = S_{ji}$ in $C_{ij} = C_{ji}$ (matriki sta simetrični), kar zmanjša v najbolj splošnem primeru število podajnostnih in elastičnostnih koeficientov na 21. Če pa v materialu obstaja kakršnakoli elastičnostna simetrija, se število medsebojno neodvisnih koeficientov še zmanjša, saj so nekateri od 21 koeficientov bodisi enaki ali enaki 0.

Pri ortotropnih (ortogonalno anizotropnih) materialih, ki imajo tri med seboj pravokotne ravnine elastičnostne simetrije, se število neodvisnih konstant zmanjša na samo 9 (glej dalje). Z določenim približkom in predpostavkami so ortotropni tudi les in številni njegovi kompoziti. Na slikah 3 in 4 je ortotropni model kosa lesa z osjo X_1 v smeri drevesne osi (vzdolžna ali longitudinalna os), X_2 v smeri trakov (radialna os) in X_3 v smeri letnic oz. drevesnega oboda (tangencialna os) (Bodig 1982, sliki 3,4). Opomba: v literaturi uporabljajo različne notacije za anatomske smeri, praviloma v smislu desne roke.

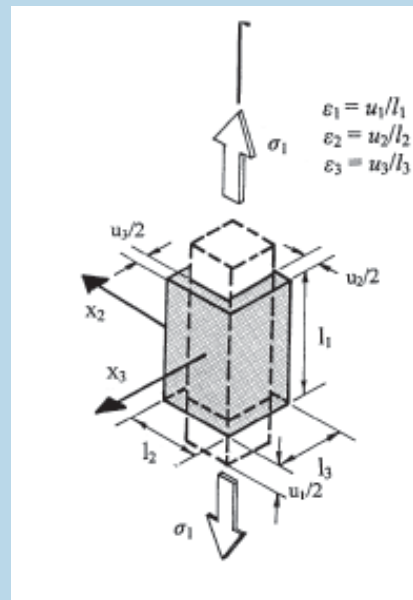
Ni si težko predstavljati, da vsaj na periferiji debla z velikim premerom potekajo letnice približno pravokotno na ne preveč divergirajoče trakove; oboji pa pravokotno na drevesno os. Večina lesnih kompozitov je prav tako ortotropnih, nekaj pa jih je približno izotropnih in njihove lastnosti niso odvisne od smeri. Hookeov zakon za masiven lesa in za ortotropne kompozite



□ Slika 3. Glavne osi in ravnine v lesu



□ Slika 4. Ortotropni model kosa masivnega lesa (risba po Bodig-u 1982)



□ Slika 5. Specifične deformacije ortotropnega materiala pri enosni natezni napetosti (risba po Jayne-u 1972)

napišemo, če v preprostem miselnem poskusu obremenimo prostorninski lesni element z vsako od šestih sil oz. napetosti posebej (na sliki 5: z enoosno natezno napetostjo σ_1).

Počasna aplikacija napetosti σ_1 povzroči normalne deformacije ϵ_1, ϵ_2 in ϵ_3 . Na sliki 6 so prikazane zveze med $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ in σ_1 . Napetost σ_1 povzroči (le) vse tri normalne deformacije: ϵ_1, ϵ_2 in ϵ_3 , pri čemer deformaciji ϵ_2 in ϵ_3 nastaneta zaradi prečne kontrakcije

(Poissonovega učinka).

Linearizirajmo naklon deformacijsko-napetostne krivulje s tangentami in označimo tangense njihovih naklonskih kotov s S_{11}, S_{21} in S_{31} (slika 8). Tedaj je

$$\epsilon_1 = S_{11} \sigma_1; \epsilon_2 = S_{21} \sigma_1; \epsilon_3 = S_{31} \sigma_1. \quad (9)$$

Konstante S_{11}, S_{21} in S_{31} , so podajnostni koeficienti.

Prvo od enačb (9) intepretiramo takole: napetost σ_1 povzroči deformacijo ϵ_1 , katere velikost je podana s

produktom $S_{11} \sigma_1$. Napetost σ_1 producira tudi deformacijo ϵ_2 z velikostjo $S_{21} \sigma_1$ in ϵ_3 z velikostjo $S_{31} \sigma_1$. Če nadaljujemo z miselnim eksperimentom, lahko na ta način določimo še podajnostne module S_{12}, S_{22} in S_{32}, S_{13}, S_{23} in S_{33} in s tem še preostalih pet deformacijsko-napetostnih enačb:

$$\epsilon_1 = S_{12} \sigma_2; \epsilon_2 = S_{22} \sigma_2; \epsilon_3 = S_{32} \sigma_2, \quad (10)$$

$$\epsilon_1 = S_{13} \sigma_3; \epsilon_2 = S_{23} \sigma_3; \epsilon_3 = S_{33} \sigma_3. \quad (11)$$

Skupno deformacijo, ki nastane zaradi delovanja vseh treh normalnih napetostnih komponent, dobimo s preprostim seštevanjem (princip superpozicije):

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= S_{11} \sigma_1 + S_{12} \sigma_2 + S_{13} \sigma_3, \\ \epsilon_2 &= S_{21} \sigma_1 + S_{22} \sigma_2 + S_{23} \sigma_3, \\ \epsilon_3 &= S_{31} \sigma_1 + S_{32} \sigma_2 + S_{33} \sigma_3. \end{aligned} \quad (12)$$

Strižna napetost σ_{23} povzroči le strižno deformacijo ϵ_{23} z velikostjo

$$\epsilon_{23} = S_{44} \sigma_{23}. \quad (13)$$

Podajnostni koeficient S_{44} prav tako dobimo iz deformacijsko-napetostnega diagrama (slika 7). Na enak način določimo še druga podajnostna koeficienta S_{55} in S_{66} in strižni deformaciji ϵ_{13} in ϵ_{12} :

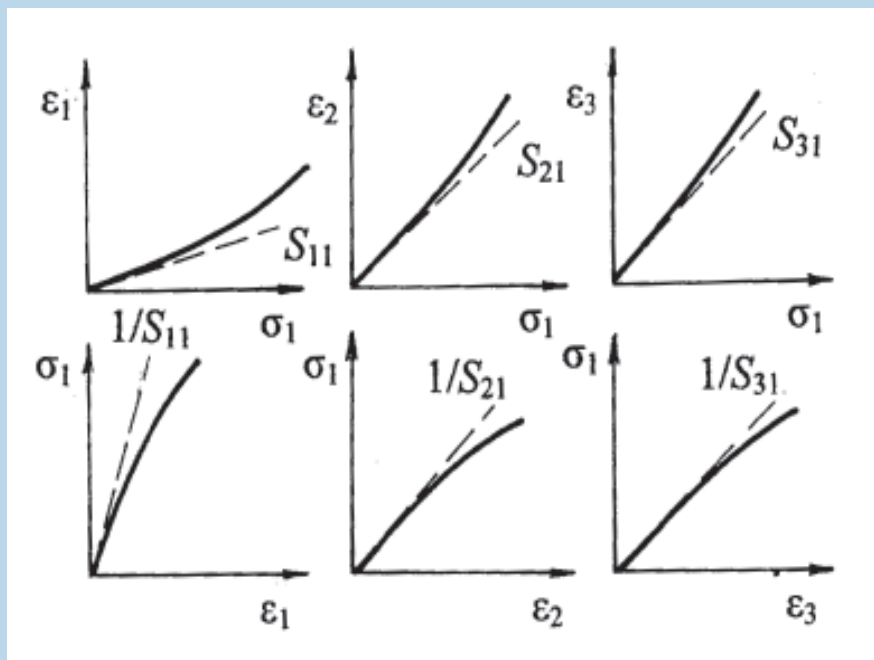
$$\epsilon_{13} = S_{55} \sigma_{13}; \epsilon_{12} = S_{66} \sigma_{12}. \quad (14)$$

Z dobljenimi enačbami lahko končno formuliramo Hookeov zakon za ortotropne materiale (14):

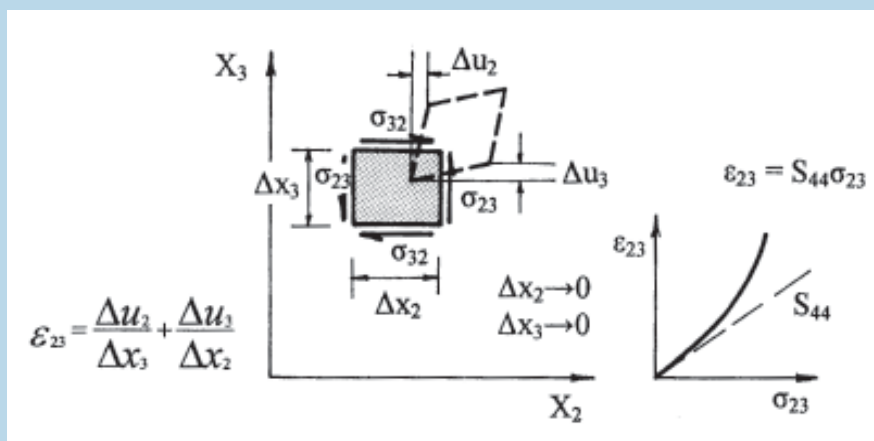
$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= S_{11} \sigma_1 + S_{12} \sigma_2 + S_{13} \sigma_3, \\ \epsilon_2 &= S_{21} \sigma_1 + S_{22} \sigma_2 + S_{23} \sigma_3, \\ \epsilon_3 &= S_{31} \sigma_1 + S_{32} \sigma_2 + S_{33} \sigma_3, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{23} &= S_{44} \sigma_{23} \\ \epsilon_{13} &= S_{55} \sigma_{13} \\ \epsilon_{12} &= S_{66} \sigma_{12} \end{aligned}$$

in v matrični obliki (16):



□ Slika 6. Določitev podajnostnih koeficientov S_{11}, S_{21} in S_{31} iz deformacijsko-napetostnih krivulj



□ Slika 7. Strižna podajnost v 2-3 ravnini in določitev podajnostnega koeficienta S_{44}

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$$

Če primerjamo gornjo matriko z (8), vidimo, da je več podajnostnih parametrov ortotropnega lesa in nekaterih njegovih kompozitov enakih 0. Normalne napetosti ne povzročajo strižnih deformacij in strižne napetosti ne povzročajo normalnih deformacij. Strižne napetosti povzročajo strižne deformacije le v ravnini delovanja. Vse strižne podajnosti, razen S_{44} , S_{55} in S_{66} , so enake 0. Takšna oblika Hookeovega zakona za ortotropne materiale velja le, če simetrijske in geometrijske osi sovpadajo, sicer je njegova oblika bolj kompleksna. Če pa slednje ne sovpadajo, omenjeni koeficienti nimajo vrednosti 0 in normalne napetosti lahko povzročijo strižne deformacije in obratno: strižne napetosti povzročijo normalne deformacije. Takšno neorientirano stanje (angl. "of angle") v praksi imenujemo "čez les" (angl. *cross grain*), kar pomeni, da rast (splošni potek aksialnih elementov) ni vzporedna z daljšo geometrijsko osjo vzorca. V takšni situaciji pride do kombinacije upogiba in torzije. Vzorec, na katerega deluje upogibni moment, se zvija in upogiba ali upogiba in zvija, če je podvržen torzijskemu momentu (Schniewind 1989, str. 77).

Dasi sta podajnostna in elastičnostna oblika Hookeovega zakona najenostavnejši za uporabo, se elastično obnašanje lesa in njegovih kompozitov tradicionalno podaja s tehničnimi elastičnostnimi parametri. Ortotropen material označuje 6 modulov elastičnosti. Trije so količniki med normalno napetostjo in normalno deformacijo v glavnih smereh, trije pa količniki med strižno napetostjo in strižno deformacijo v ortotropnih ravninah:

$$\sigma_1/\sigma_1 = E_1 \quad \sigma_2/\sigma_2 = E_2 \quad \sigma_3/\sigma_3 = E_3, \quad (17)$$

$$\sigma_{12}/\sigma_{12} = G_{12} \quad \sigma_{13}/\sigma_{13} = G_{13} \quad \sigma_{23}/\sigma_{23} = G_{23}.$$

E_1, E_2 in E_3 so elastičnostni ali Youngovi moduli, G_{12}, G_{13} in G_{23} pa strižni moduli. Primerjava zgornjih enačb z enačbami 9,13, 14 daje naslednje zveze:

$$E_1 = 1/S_{11} \quad E_2 = 1/S_{22} \quad E_3 = 1/S_{33}, \quad (18)$$

$$G_{23} = 1/S_{44} \quad G_{13} = 1/S_{55} \quad G_{12} = 1/S_{66}.$$

Moduli elastičnosti so torej recipročne vrednosti podajnostnih koeficientov S na glavni diagonalni matrike.

Po definiciji je *Poissonovo razmerje* ν količnik med prečno ("pasivno") deformacijo ν_{ij} in vzdolžno ("aktivno") deformacijo ε_{ij} :

$$\nu_{ij} = \nu_{ij}/\varepsilon_{ij}. \quad (19)$$

(Različno od Bodiga (1982) in Schniewinda (1989), Kollmann (1968) in Dinwoodie (2000) notirajo isto Poissonovo razmerje kot $-\nu_{ji}$!).

Za označitev izotropnih materialov zadostuje eno samo Poissonovo razmerje, medtem ko jih je za ortotropne potrebnih 6: trije so vezani z elastičnostnim modulom, trije pa so neod-

visni. Z vstavljanjem enačbe (9) v (19) dobimo Poissonovi razmerji ν_{12} in ν_{13} :

$$-\nu_{12} = S_{21}/S_{22} \quad -\nu_{13} = S_{31}/S_{11}. \quad (20)$$

Podobno, s substitucijo enačb (10, 11) v enačbo (19) dobimo:

$$-\nu_{21} = S_{12}/S_{22} \quad -\nu_{23} = S_{32}/S_{22}, \quad (21)$$

$$-\nu_{31} = S_{13}/S_{33} \quad -\nu_{32} = S_{23}/S_{33}. \quad (22)$$

Gornje enačbe podajajo Poissonova razmerja s podajnostnimi parametri. Z vstavitvijo treh modulov elastičnosti (18) v te enačbe dobimo naslednje zveze:

$$S_{12} = -\nu_{21}/E_2 \quad S_{13} = -\nu_{31}/E_3 \quad S_{23} = -\nu_{32}/E_3, \quad (23)$$

$$S_{21} = -\nu_{12}/E_1 \quad S_{31} = -\nu_{13}/E_1 \quad S_{32} = -\nu_{23}/E_2.$$

Z uporabo enačb (18) in (23) lahko izrazimo vse podajnostne koeficiente s tehničnimi elastičnostnimi parametri (24):

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & -\nu_{13}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E_1 & -\nu_{32}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$$

Končno zamenjajmo še indeksni sistem števil za označevanje koordinatnih osi lesa z bolj razumljivimi oz-

□ **Preglednica 1. Elastičnostni in strižni moduli ter Poissonova razmerja za važnejše materiale in nekaj komercialnih lesov (po raznih virih, za lesove po Hearmonu 1948)**

Material	E [GPa]			G [GPa]			ν					
siva litina	100			40			0,25					
temprana litina	170			68			0,30					
jeklo, jeklena lit.	210			81			0,30					
baker	125			48			0,30					
aluminij	72			28			0,30					
umetne smole	4-16			1,4-5,5			0,45					
steklo	56			22			0,25					
beton	14-50			-			0,17					
Les	E_L	E_R	E_T	G_{LT}	G_{LR}	G_{RT}	ν_{TR}	ν_{RL}	ν_{RT}	ν_{TL}	ν_{LR}	ν_{LT}
smreka	10,7	0,71	0,43	0,62	0,50	0,046	0,31	0,030	0,51	0,025	0,38	0,51
rdeči bor	16,3	1,10	0,57	0,68	1,16	0,066	0,31	0,038	0,68	0,015	0,42	0,51
bukev	13,7	2,24	1,14	1,06	1,61	0,460	0,36	0,073	0,75	0,044	0,45	0,51
jesen	15,8	1,51	0,80	0,89	1,34	0,270	0,36	0,051	0,71	0,030	0,46	0,51

načbami anatomskih smeri: L (longitudinalno, vzdolžno, aksialno, osno), R (radialno) in T (tangencialno). S tem dobi Hookeov zakon za les in njegove kompozite bolj popularno obliko (25):

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_R \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_{RT} \\ \varepsilon_{LR} \\ \varepsilon_{TL} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_L & -\nu_{LR}/E_L & -\nu_{LT}/E_L & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{LR}/E_L & 1/E_R & -\nu_{RT}/E_R & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{LT}/E_L & -\nu_{RT}/E_R & 1/E_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{RT} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{LR} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{TL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_L \\ \sigma_R \\ \sigma_T \\ \sigma_{RT} \\ \sigma_{LR} \\ \sigma_{TL} \end{pmatrix}$$

Primerjajmo les z drugimi materiali (preglednica 1)!

Če upoštevamo nizko gostoto lesa, E_L nikakor ni nizek, izstopa pa izrazita anizotropija. Razmerje $E_T:E_R:E_L$ je pri iglavcih približno 1:1,7:20 in pri listavcih 1:1,7:13. Daljše osi večine celic in mikrofibrile v njihovih stenah potekajo bolj ali manj vzporedno z drevesno osjo, zato je E_L je znatno večji od E_R in E_T . Zaradi izjemno velikega razmerja $E_L:E_T$ je les od vseh znanih materialov najbolj ortotropen material. Razmerje med elastičnostnimi moduli drugih naravnih materialov, npr. kristalov ali umetnih proizvodov, kot so npr. steklena vlakna, ne dosegajo vrednosti 4. Zaradi radialno potekajočih trakov in radialno orientiranih nizov celic je E_R vselej nekoliko večji od E_T . Trakovi so praviloma širši pri listavcih, radialna urejenost pa je zaradi manjše apikalne intruzivne rasti aksialnih traheid in odsotnosti trahej bolj izrazita pri iglavcih in evolucijsko primitivnejših listavcih. Majhna razlika med E_R in E_T pojasnjuje, zakaj je mogoče zanemariti ukrivljenost prirastnih plasti in obravnavati les kot ortotropen material. Strižni modul G_{RT} je pri iglavcih in listavcih vselej znatno manjši od drugih dveh strižnih modulov, saj skuša strižna napetost v ravnini RT (prečna ravnina) zvežiti prečni prerez večine cevastih celic: kot če bi zaboju odstranili zgornjo in spodnjo stranico in ga obremenili na strig! (prim. Schniewind

1981). Poissonovi razmerji ν_{RL} in ν_{TL} sta zelo majhni, saj predstavljata razmerji med zelo majhno prečno deformacijo v vzdolžni smeri in veliko deformacijo v radialni oziroma tangencialni smeri. Nekatera od Poissonovih razmerij so večja od 0,5, kar pa ob majhnih razmerjih v drugih smereh ni kontradiktorno. Ker sta ν_{RT} in ν_{TL} zelo majhni, ju je težko določiti. Lahko jih izračunamo iz simetrijskih relacij:

$$\nu_{LT}/E_L = \nu_{TL}/E_T, \nu_{LR}/E_L = \nu_{RL}/E_R \text{ in } \nu_{TR}/E_T = \nu_{RT}/E_R.$$

Razmerje strižnih modulov $G_{LR}:G_{LT}$ je pri iglavcih približno 1:1, pri listavcih pa 1,3:1. Strižni modul G_{RT} (prečna ravnina) je pri iglavcih zaradi sklenjenih pasov ranega lesa z relativno nizko gostoto in togostjo le približno 10 %, G_{LT} pri listavcih pa 40 % G_{LR} . Prečna podajnost v tangencialni smeri ($-S_{31}$) je večja od prečne podajnosti v radialni smeri ($-S_{21}$) (preglednica 2).

Zaradi večjega deleža trakovnega tkiva, ki zmanjšuje togost in trdnost v vzdolžni smeri, je les listavcev manj anizotropen od lesa iglavcev. Tako odpade na trakovno tkivo pri smreki v povprečju 4,7 %, pri bukvi pa kar 27,0 % (Wagenführ 1966 str. 99). Les listavcev je večinoma gostejši, kar zmanjšuje učinek geometrijskih dejavnikov. Razlike med elastičnostnimi konstantami je torej mogoče pojasniti z značilno anatomsko zgradbo lesa in njenimi posebnostmi pri listavcih in iglavcih (prim. npr. Schniewind 1981).

Z vlažnostjo in temperaturo se znižujejo vrednosti za elastičnostne in strižne module (Kollmann 1960, Noack & Geissen 1976, Neuhaus 1983). Poissonova razmerja ν_{RT}, ν_{TR} in ν_{LT} z vlažnostjo naraščajo, ν_{LR} pa pada (Carrington 1922). □

□ **Preglednica 2. Prečna podajnost/kontrakcija [10⁻⁵mm²/N]**

Lesna vrsta	$-S_{31}$	$-S_{21}$	$-S_{32}$
smreka	3,3	2,7	60
rdeči bor	2,7	2,8	54
bukev	3,7	3,2	31

literatura

- Bodig, J., Jayne, B.J. 1982.** Mechanics of wood and wood composites. Van Nostrand Reinhold Comp, New York itd.
- Carrington, H. 1922.** The elastic constants of spruce as affected by moisture content. Aeronautical Journal 26:462-471.
- Dinwoodie, J.M. 2000.** Timber: Its nature and behaviour. 2. zd. E & FN Spon, London, New York.
- Hearmon, R.F.S. 1948.** Elasticity of wood and plywood. Special Report No 7 on Forest Products Research, London.
- Kollmann, F. 1960.** Die Abhängigkeit der elastischen Eigenschaften von Holz von der Temperatur. Holz Roh-Werkstoff 18:308-314.
- Kollmann, F.F.P, Côté, W.A. Jr. 1968.** Principles of wood science and technology. I. Solid wood. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- Kühne, H.R. 1970.** The role of plastics in building. Int. Symposiums-Bericht "Plastics in Building", Rotterdam.
- Neuhaus, H. 1983.** Über das elastische Verhalten von Fichtenholz in Abhängigkeit von der Holzfeuchtigkeit. Holz Roh-Werkstoff 41:21-25.
- Noack D., Geissen, A. 1976.** Einfluß von Temperaturen und Feuchtigkeit des Holzes im Gefrierbereich. Holz Roh- Werkstoff 34:55-62.
- Schniewind, A.P. 1981.** Mechanical behaviour and properties of wood. V: Wood - its structure and properties, izd. F. Wangaard, str. 225-270. Pennsylvania State Univ, Pennsylvania.
- Schniewind, A.P. 1989.** Deformation under load. V: Concise encyclopedia of wood & wood-based materials, izd. A.P. Schniewind, str. 75-79, Pergamon Press, Oxford etc.
- Wagenführ, R. 1966.** Anatomie des Holzes. VEB Fachbuchverlag, Leipzig.
- Winandy, J.E., Rowell, R.M. 1984.** The chemistry of wood strength. V: The chemistry of solid wood, Advances in chemistry series No. 207, izd. R. M. Rowell, American Chemical Society, Washington, D.C.