PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **14** (1986/1987)
Številka 4
Strani 220–221

Branko Pavšek:

FERMATOVA ŠTEVILA

Ključne besede: matematika, teorija števil.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/14/849-Pavsek.pdf

FERMATOVA ŠTEVILA

Teorija števil je veja matematike, ki proučuje lastnosti naravnih števil. Korenine ima v delih Fermata (P.S. de Fermat, 1601–1665), matematika francoskega rodu. K matematiki je Fermat pristopil kot amater, saj je bil po poklicu pravnik. Vendar pa se je kmalu razvil v mojstra. Danes ga poznamo predvsem kot tvorca moderne teorije števil, čeprav je bil tudi eden izmed začetnikov analitične geometrije in infinitezimalnega računa [1]. V tem sestavku si bomo odgledali tako imenovana *Fermatova števila,* ki jih je Fermat zapustil aritmetiki.

Fermatova števila označujemo s simbolom F_n, določimo pa jih takole:

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

Vstavimo vrednosti za $n = 0, 1, 2, 3, 4$ in poglejmo, kaj dobimo:

$$F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65537$$

Verjetno ste tudi vi opazili, da so vsa zgoraj napisana števila praštevila. To je opazil tudi Fermat in se je lotil raziskovanja teh števil v upanju, da bo našel formulo, ki bi za $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ dala sama praštevila. Misleč, da je F_n takšna formula je postavil trditev, *da so vsa števila oblike (1) praštevila.* Vendar pa je bil tokrat Fermat v zmoti in je pozneje Euler njegovo trditev ovrgel.

Za $n = 5$ je pripadajoče Fermatovo število $F_5 = 4294967297$. Euler je leta

Pierre Fermat (1601—1665)

1732 število F_5 razbil na faktorja $F_5 = 641.6700417$ in tako pokazal, da F_5 ni praštevilo. Za F_6 so leta 1880 pokazali, da ni praštevilo. Pozneje je bilo dokazano, da F_n ni praštevilo za vrednosti:

$$n = 7, 8, 9, 11, 12, 18, 23, 36, 38, 73$$

Verjetno si se že pred tole vrstico, dragi bralec oziroma bralka, vprašal, ali obstaja *končno* ali *neskončno* praštevil oblike F_n. Vendar pa na to vprašanje žal ne morem odgovoriti, saj je ta problem še odprt.

Fermatova števila nam dajejo lep primer povezave med teorijo števil in drugimi vejami matematike. To povezavo nam pokaže Gaussovo (1777–1855) genialno odkritje. To odkritje je bilo hkrati prelomnica v njegovem življenju, saj se je takrat odločil, da se bo posvetil matematiki. Pa si oglejmo njegovo odkritje.

Evklidska konstrukcija je geometrijska konstrukcija, samo z ravnilom in šestilom. Za mnogokotnik (poligon), ki ima vse stranice in vse kote enake, rečemo, da je *pravilen*. Že stari Grki so poznali evklidske konstrukcije za pravilne poligone, ki imajo 4, 8, 16, ... stranic, pa tudi za tiste, ki imajo 3 ali 5 stranic – enakostranični trikotnik in pravilni petkotnik. Z upoštevanjem vsega tega jim ni bilo težko konstruirati pravilne poligone z $2^c.3$, $2^c.5$, $2^c.3.5$ stranicami, kjer je c katerokoli pozitivno celo število. In Grki so tudi pokazali, kako se to dela. Osemnajstletni Gauss pa je v zvezi s tem postavil naslednjo trditev in jo tudi dokazal:

Če je število N oblike 2^c ali 2^c krat produkt različnih Fermatovih praštevil F_n, tedaj obstaja evklidska konstrukcija za pravilne poligone z N stranicami. Velja tudi nasprotno. Če za nek N obstaja evklidska konstrukcija, tedaj ima N zgornjo obliko.

Kot zanimivost naj povem še to, da je eden izmed zagnanih algebristov porabil svoja najboljša leta in kopico listov, ko je poskušal konstruirati ustrezni pravilni mnogokotnik za F_4, ki ima 65537 stranic. Nedokončani rezultat tega uničujočega truda se z dolžnim spoštovanjem hrani v knjižnici neke nemške univerze. Na vso srečo evklidska konstrukcija za pravilni poligon, ki bi imel za osnovo F_5, ni možna, saj F_5 ni praštevilo.

Branko Pavšek

Literatura:
E.T.Bell, *Mathematics Gueen and Servant of Science,* New York 1951, str. 145–147

---

[1] Več o Fermatu lahko bralec najde na straneh 9–14 v III. letniku Preseka.