

## STEFANOVA NALOGA

STANISLAV JUŽNIČ

Univerza v Oklahomi

Ključne besede: Stefanova naloga (Stefanov problem), Koller, zgodovina matematične fizike

Stefan se je povzpел na Parnas svetovne znanosti s podporo svojega mentorja Bohinjca Mariana Kollerja. Opisan je razvoj raziskovanja Stefanove naloge.

### STEFAN PROBLEM

Stefan climbed the Parnassus of World Science with the support of his mentor, the Bohinj native Marian Koller. The development of research on Stefan Problem is described.

### Uvod

Pol stoletja po Kollerjevem obisku Pariza je Kollerjev varovanec Jožef Stefan nadgradil raziskavo Charlesa Cagniarda de la Toura o faznih prehodih iz trdnine v tekočino v svojih šestih razpravah med letoma 1889 in 1891; te so se nanašale na širši kontekst njegovega in Boltzmannovega zanimanja za transportne pojave, zlasti spremembe faze iz tekočega v plinasto [14]. V počastitev Stefanovega raziskovanja meje med trdnino in kapljevino, ki se s časom prosto premika na polarnih ledenih kapah, se dandanes v raziskavah večfaznih sistemov pogosto uporabljata koncepta Stefanov problem (naloga) in brezdimenzijsko Stefanovo število [15].

Stefanova naloga ponazarja dinamiko nestalne meje med različnima fazama. Stefanovega raziskovanja toplotne prevodnosti niso več spodbujali Laméjevi problemi hlajenja Zemlje in Sonca, temveč težave s poledenelim oceanom, ki je delal preglavice habsburškemu iskanju severnih prehodov k Ameriki in Kitajski. Z nenadno Stefanovo smrtjo je rojevajoča se panoga raziskovanja zamrla, še preden so njegovi učenci množično začeli raziskovati ta novi Stefanov problem, saj so Stefanovemu poglavitnemu učencu Boltzmannu bolj dišala abstraktnejša znanstvena iskanja v termodinamiki. Kmalu je za nameček sledila usodna bolezen celotne habsburške monarhije. Zato Stefanov problem dolgo ni mogel razviti pomembnega področja raziskav, severovzhodni prehod pa nikoli ni postal zelo uporaben, razen sodobnega transporta ruskega plina in nafte. To je bil razlog za naslednja štiri

desetletja zanemarjanja Stefanovega problema, ki je znova postal priljubljen komaj med sodobnimi raziskovalci, zaposlenimi v sovjetski naftni industriji in metalurgiji.

### Stefanovi dosežki

Med letoma 1889–1891 je Stefan predstavil svoje ideje, ki jih danes imenujemo Stefanov problem. Sedem zaporednih publikacij mu je natisnila dunajska akademija, nekatere so bile ponatisnjene v *Annalen der Physik*, uvodno raziskavo o izhlapevanju in raztapljanju kot pojavih difuzije pa je urno povzel *Philosophical Magazine* že januarja 1890. V nasprotju s Stefanovim zakonom sta bila vsaj dva zgodnja Stefanova članka o Stefanovem problemu hitro objavljena v *Philosophical Magazine* in v Parizu.

Leta 1831 sta Lamé in Clapeyron objavila prvi evropski poskus splošne rešitve uganke, pozneje imenovane Stefanov problem [8]. Marcel Brillouin je v Parizu leta 1929 ob Clapeyronovih dosežkih razpravljal o Stefanu [1] in skoval naziv Stefanov problem [2]. Akademik s Collège de France Marcel Brillouin je resno obravnaval Stefanov problem kot prvi po Stefanu. Njegov sin je bil vodilni kvantni mehanik Léon Brillouin.

Danes priljubljeni naziv Stefanov problem je Lev Isakovich Rubinstein (1914–2009 Jeruzalem) po prestajanju kazni v gulagu Vorkuta leta 1947 ponovno uveljavil v sovjetski naftni industriji [9, 10, 11].

To je bil drugi znova slovanski domet Stefanovega problema: od zamrzovanja ledu, preko naftne industrije, pa vse do metalurgije. Kot nekakšna dialektika teze-antiteze-sinteze.

### Stefanov problem zunaj zamrzovanja

Sovjetski uspeh pri reševanju Stefanovih problemov je spodbudil raziskave v sovjetskih satelitskih državah, vključno z Bolgarijo, ki je po srečnih naključjih razvila tesne predvojne znanstvene vezi s Parižani, podobno kot njim sosednji pravoslavni Srbi s Pavlom Savićem. Louis de Broglie je imel na Sorbonni bolgarskega doktorskega študenta Schrödingerjeve enačbe, ki je doktoriral junija 1938. To je bil sloviti Asen Borisov Datsev (1911–1994), ki je pozneje raziskoval klasični problem toplotne prevodnosti. To ga je privedlo do drugega problema v teoriji toplotne prevodnosti, ki se imenuje problem zamrzovanja ali Stefanov problem. V številnih svojih delih je Datsev poleg temeljne kvantne mehanike razvil metodo za reševanje Stefanovega problema v različnih situacijah – pri različnem številu faz, pri različnih robnih pogojih. Proučeval je nastajanje ali izginotje faze. Leta 1963 je z de Brogliejevim predgovorom Datsev v pariških *Mémoires de science physiques*

objavil monografijo *Linearni Stefanov problem*. Datsev je obdelal spreminjanje temperature v prostoru, ki sta ga zasedli dve fazi določene snovi, običajno trdna in tekoča faza, na primer voda in led. Funkcije, ki predstavljajo območja različnih faz, ustrezajo relevantnim enačbam toplote, pri čemer je neznana ločevalna površina faz pri konstantni temperaturi, kar je povezano s kalorimetričnim pogojem. Stefanov problem vodi do reševanja sistemov (paraboličnih) parcialnih diferencialnih enačb z robnimi pogoji, od katerih so nekateri spremenljivi in jih je treba v vsakem posameznem primeru določiti sproti. Stefanov problem ima različna pomembna praktična področja uporabe, na primer hidrodinamiko, letalstvo, raketarstvo, zamrzovanje in odtajanje ledu, notranja gibanja v Zemlji, rast kristalov ali taljenje kovin. Datseva pariška knjiga vsebuje rezultate njegovih raziskav o linearnem Stefanovem problemu, objavljenih v Bolgariji in ZSSR predvsem med letoma 1947–1956, kot jih je izpostavil med več predavanji na Matematičnem inštitutu firenške univerze maja 1967, kjer je Datsev spoznal raziskovalno ekipo Giorgia Sestinija [3].

V prvem delu svoje knjige je Datsev obravnaval različne primere enodimenzionalnega Stefanovega problema, začevši z dvema neomejenima fazama in prehajajoč zaporedoma do primerov omejenih faz, spremenljivih faz in različnih mejnih pogojev. V drugem in tretjem delu knjige je posplošil rezultate za dvodimenzionalne in tridimenzionalne primere, vključno z anizotropnimi telesi. Ključ Datsevega pristopa je bila metoda zlepkov. Datsev je objavljajal pri Sovjetski akademiji znanosti v Leningradu ter v Parizu in Firencah na obeh straneh železne zavese, kar pomeni, da se je popolnoma zavedal Rubinsteinovih zaslug, prav tako pa dela de Brogliejevega kolega Louisa Marcela Brillouina [4], čeprav Datsev ni omenil, da je bil Stefan slovenskega izvora kot on sam. Princ de Broglie in Leon Brillouin sta med prvo svetovno vojno sodelovala pri vzpostavljanju brezžičnih komunikacij s podmornicami. Med letoma 1919–1922 se je de Broglie seznanil z deli Louisa Marcela Brillouina o Stefanovem najljubšem hidrodinamičnem modelu atoma, ki ga je de Broglie poskušal povezati z rezultati teorije vodikovega atoma N. Bohra. Leta 1967 je Datsev prevedel delo Alberta Einsteina in Leopolda Infelda *Evolucija fizike iz francoščine v bolgarščino*. Spodbujal je raziskave in konference o vakuumu, kvantni mehaniki in Einsteinovi relativnosti v Bolgariji.

Datsevov firenški sodelavec pri raziskovanju Stefanovega problema je bil firenški doktorski študent Giovannija Sansoneja (1888–1979), Giorgio Sestini (1908–1991). Sestini je bil profesor racionalne mehanike v Parmi od novembra 1949 do leta 1956, nato pa je poučeval v Firencah. V svojem zadnjem obdobju v Parmi je k študiju Stefanovega problema pristopil z učinkovitim prikazom procesa strjevanja ali utekočinjanja, ki ga je uspešno

razvil po svoji vrnitvi v domače Firenze. V Parmi je Sestini organiziral matematični inštitut v sodelovanju s prijateljem Antoniom Mambrianijem. Bil je tajnik in skrbnik časopisa Matematika Univerze v Parmi (*Rivista di matematica dell'Università di Parma*) od prve številke, ki je izšla leta 1950, do leta 1956. Tam je objavljaj tudi o Stefanovem problemu. Sredi dvajsetega stoletja je začel raziskovati probleme, rešljive s paraboličnimi enačbami. Leta 1957 je objavil svoje prve rešitve problemov faznih sprememb: O izreku o enoličnosti pri enodimenzionalnih problemih, analognih Stefanovim [12]. V decembru 1960 je v svojem prispevku, posvečenem 70. rojstnemu dnevu mentorja Sansoneja, že citiral Laméja, Clapeyrona, Neumanna, Stefana, Brillouina in Datsevo reševanje dvodimenzionalnega in tridimenzionalnega Stefanovega Problema [13].

Sestini je pri svojem pristopu k Stefanovemu problemu reševal parcialne diferencialne enačbe na domenah, katerih meja je delno neznana: na primer med strjevanjem tekočine vmesna plast s strjenim delom spreminja svojo lego, torej ni znana vnaprej. Da bi realno opisali postopek strjevanja, je treba na tej vmesni plasti preveriti nekatere ravnovesne pogoje med nezveznimi notranjimi vplivi snovi na vmesno strjeno plast med faznim prehodom tekočina-trdna snov. Ravno ti pogoji nosijo Stefanovo ime. Pri transportnih problemih, proučevanih med faznimi prehodi, denimo pri zaledenitvi vode, mora biti hitrost naraščanja vmesne plasti odvisna od nezveznega toplotnega toka. Sestini se je prvi v Italiji spopadel s to veliko in plodno skupino Stefanovih problemov. Nanjo je opozoril italijansko in evropsko matematično skupnost. Njegove raziskave Stefanovega problema so odprle novo področje, ki je še danes aktivno, tudi za pomembne industrijske namene. Sestinijeve ideje so bile osnova za nadaljnji razvoj, ki so ga omogočila proučevanja njegovih učencev. V teh smereh se je razvijala njegova firenška šola, ki se je mednarodno uveljavila na področju matematične fizike.

### **Stefanov problem iz Vorkute v Novi svet: ZDA**

Bolgarski in italijanski privrženci Rubinsteinovega dela so kmalu dobili svoje tekmece in posnemovalce v prekomorski tujini. Stefanov problem so začeli raziskovati v Novem svetu takoj po ameriški objavi angleškega prevoda Rubinsteinovega dela. Za zgodnji odmev sta poskrbela George William Evans II (1922–1972) in Eugene Isaacson (1919–2008), ki sta sledila svojemu bolnemu mentorju Jamesu Keeneu Lorneju MacDonaldu (1905–1950) na Univerzi v New Yorku. George W. Evans II se je kasneje pridružil Raziskovalnemu inštitutu Univerze Stanford.

Leta 1928 je MacDonald doktoriral na Univerzi McGill v kanadskem Montrealu, kjer je Ernest Rutherford delal v letih 1898–1907. 14. oktobra

1949 so Evans, Isaacson in MacDonald z Univerze v New Yorku poslali v objavo svojo študijo nalog, podobnih Stefanovemu problemu, ob citiranju Rubinsteina in Datseva [6].

Evansova dela je pohvalil Jim Douglas jr. v svojem izreku o rešitvi Stefanovega problema. Douglas je menil, da sta Datsev in Sestini dokazala obstoj rešitve Stefanovega problema; vendar nista predložila nobenega zadovoljivega dokaza enoličnosti. Le-tega je predlagal Evans, vendar ga je komaj Douglas končno dokazal po predlogu za poenostavitev svojega kolega na Univerzi Duke Thomasa Muira Galliea Jr. (1925–2019). Kasneje se je Gallie izkazal kot profesor matematike in računalništva; ob ustanovitvi oddelka za računalništvo je izprosil nepovratna sredstva za nakup prvega računalnika na Univerzi Duke. Douglas ni omenil Brillouina ali Rubinsteina: morda njunih del ni pobilže poznal. Douglas je izjavil, da je Stefanov problem reševanje parabolne diferencialne enačbe, ki je podrejena robnim pogojem na gibljivi meji, katere lega ni podana vnaprej, temveč je določena kot del problema. Številni problemi v fiziki zahtevajo takšne robne pogoje, vključno s prevodnostjo toplote, ki vključuje fazno spremembo ob taljenju ali zamrzovanju ledu, izhlapevanju ali kondenzaciji, oziroma prekristalizacija kovin kot uporaben postopek čiščenja snovi. Drugi vključujejo različne postopke izpodrivanja v inženirstvu rezervoarjev kot veji naftnega inženirstva, pri katerih ena tekočina delno izpodrine drugo (prvotno rezidenčno) tekočino, ki teče skozi porozno snov, vključno z nafto. To je bilo izjemno pomembno za delodajalca Douglasa v Houstonu, Humble Oil and Refining Co. [5]. Douglas je hkrati delal kot vodja projektov na Inštitutu Rice na Univerzi Duke v uradu za znanstvene raziskave letalskih sil ZDA.

Evans, Isaacson in MacDonald so kmalu dobili svoje naslednike na Univerzi v New Yorku, ki so nadaljevali njihova prizadevanja pri raziskavah Stefanovega problema, začeta leta 1950. Konec petdesetih in šestdesetih let je študent Richarda Couranta (1888–1972), Joseph B. Keller (1923–2016), organiziral raziskavo Stefanovega problema na Courant Institute Univerze v New Yorku. Med njegovimi poddoktorskimi študenti je bil Walter Thomas Kyner (1926–1999), ki je doktoriral na Univerzi Berkeleyju v Kaliforniji in preživel dve poddoktorski leti na Inštitutu Courant Univerze v New Yorku. Leta 1959, ko je že prebival v Kaliforniji, je objavil svoje poddoktorske raziskave o nelinearnem Stefanovem problemu, opravljene na Inštitutu Courant. Hkrati je bil Kellerjev doktorski študent na Inštitutu Courant v New Yorku Willard L. Miranker (1932–2011), ki je tam doktoriral leta 1956. O Stefanovem problemu sta skupaj objavljala leta 1960.

Velik del raziskav Stefanovega problema je pripadal ameriškim podjetjem celo zunaj univerz. William F. Trench (1931–2016) je bil med letoma 1957–1959 višji inženir in inženirski specialist v podjetju Philco Corporation,

Philadelphia, PA. Junija 1959 je objavil eksplicitno metodo za reševanje Stefanovega problema kot skrajšano disertacijo iz matematike, opravljeno na Univerzi v Pensilvaniji, ki jo je kot izredni študent ob delu zagovarjal leta 1958 z navedbami Evansa, Isaacsona, MacDonalda, Rubinsteina in Sestinija. Skliceval se je na delo študenta Lawrencea Bragga iz Manchestra, ki je postal strokovnjak za difuzijo na Univerzi Brunel v Actonu. To je bil John Crank (1916–2006). Trench je pohvalil tudi članek Landaua, objavljen leta 1950. Hyman Garshin Landau (1909–1966) se je rodil v Ruskem imperiju, tako kot pet let pozneje njegov judovski kolega raziskovalec Stefanovega problema Lev Rubinstein. Landau je imel smolo med preganjanjem levičarjev v ZDA. Leta 1946 je doktoriral iz statistike v Pittsburghu in se pridružil Ballistic Research Laboratories, Aberdeen Proving Ground. Od tam je poslal v objavo svojo raziskavo prevodnosti toplote v taljeni trdni snovi, povezano s Stefanovim problemom [16]. Po letu 1950 se je Landau pridružil oddelku za matematično biologijo Univerze v Chicagu, ki ga je moral zapustiti po mučnih zasliševanjih zaradi obtožb odbora za protiameriške dejavnosti. Leta 1952 je tako Landau postal žrtev obdobja Josepha McCarthyja. Podobno kot so Rubinsteina pestile težave v Sovjetski zvezi, je bil tudi Landau zaslišan zaradi domnevnega subverzivnega vpliva v izobraževalnem procesu. Landau je imel srečo, saj je nato le našel delo na Univerzi Columbia. Vendar zanimanje Landaua za tako imenovane turnirje (teorije grafov) ni izhajalo iz njegovega proučevanja športnih tekmovanj. Kot se to pogosto dogaja v matematiki, je bil Landauov interes nekaj povsem drugega. Zanimalo ga je namreč vedenje živali, še posebej hierarhija v kljuvanju pri piščancih, kot so jo predhodno raziskali nacisti Konrad Lorenz (1903–1989) in Lorenzov prijatelj SS nacistični princ Alfred Auersperg (1899–1968). Landau je bil starejši brat umorjenega televizijskega režiserja Jacka Landaua (1922–1967), kar je prav tako lahko vplivalo na njegove politične težave v ZDA.

Stefanov problem je kmalu postal zanimiv tudi za letalstvo in razvoj raket. Arthur Louis Ruoff (1930–) je doktoriral na Univerzi v Utahu leta 1955. Nato je kot strokovnjak za visoke tlake delal na oddelku za inženirsko mehaniko in snovi Univerze Cornell, leta 1958 tudi v Wright-Pattersonu na Letalski bazi v Ohio. Leta 1958 je objavil nadomestno rešitev Stefanovega problema.

### Stefanov problem v Novem svetu: Kanada

Proučevanju Stefanovega problema so se poleg ZDA pridružili tudi Kanadčani. Julija 1966 je Norvežan James R. Gunderson kot Lockov podiplomski študent na magistrskem študiju v Alberti uporabil izraza Stefanov problem in Neumann-Stefanov problem. Skliceval se je na Evansa, Redozubova in

Leonarda Rose Ingersolla (1880–1958). Ingersoll je zaslovel kot profesor fizike na Univerzi Wisconsin-Madison, kjer je ustanovil Muzej fizike kot prvi muzej v ZDA, ki se osredotoča izključno na fiziko. Gunderson je navedel tudi raziskavo strjevanja jekla, ki jo je leta 1929 in 1930 objavil Nicholas Morpeth Hutchinson Lightfoot (1902–1962) s kolidža Heriot-Watt v Edinburgu [7]. Izraz Stefanovo število je bil torej na drugi strani železne zavese skovan veliko prej, kot so doslej opazili mnogi, ki navajajo Lockove pionirske zasluge. Gundersonov profesor strojništva na Univerzi Alberta v Edmontonu v Kanadi je bil Gerald Seymour Hunter Lock (1935–), ki je leta 1969, dve desetletji po prevajanju Rubinsteinovega dela v ZDA, raziskoval Stefanovo število brez sklicevanja na Brillouinove razprave.

### Zaključek

Po doktoratu in habilitaciji v Parizu v letih 1979 in 1991 se je Domingo Alberto Tarzia (1950–) pridružil Universidad Austral v Buenos Airesu v Argentini, hkrati pa je deloval kot direktor raziskav Stefanovih premikajočih se meja faznih prehodov na Univerzi Nevada v mestu Reno. Njegovo delo dopolnjuje Slovenec Šarler, kar daje Stefanovemu problemu dodaten slovenski pridih.

Stefanov problem gibljive meje ostaja živa inovativna veja znanosti tudi pri nas.

### LITERATURA

- [1] M. Brillouin, *Sur quelques problèmes non résolus de la Physique Mathématique classique: Propagation de la fusion*, Annales de l'Institut Henri Poincaré **1** (1930), 285–308; ponatis: Pariz, 1931, str. 287, 280, 294, 296, 301.
- [2] M. Brillouin, 1931, str. 300.
- [3] A. Datsev, O трехмерной проблеме Стефана (O trirazsežnem Stefanovem problemu), Doklady Akad. Nauk. SSSR, **101** (1955), 629–632; A. Datsev, *Sur le problème linéaire de Stefan*, Mémoires de sciences physiques **69**, Gauthier-Villars, Paris, 1970, str. 3, 4, 5.
- [4] A. Datsev 1970, str. 2, 3.
- [5] J. Douglas, *A Uniqueness Theorem for the Solution of a Stefan Problem*, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 402–408; G. Evans, *A Note on the Existence of a Solution to a Problem of Stefan*, Quart. Appl. Math. **9** (1951), 185–193; G. Sestini, *Esistenza di una soluzione in problemi analoghi a quello di Stefan*, Rivista di Matematica della Università di Parma **3** (1952), 3–23; G. Sestini, *Esistenza ed unicità del problema di Stefan relativo a campi dotati di simmetria*, Rivista di Matematica della Università di Parma **3** (1952), 103–113; A. Datsev, 1950.

- [6] G. Evans, E. Isaacson in J. MacDonald, *Stefan-like problems*, Quart. Appl. Math. **8** (1950), 312–319.
- [7] J. R. Gunderson, *A study of heat conduction with phase change*, magistrska naloga, University of Alberta, Edmonton, 1966, str. 1, 3.
- [8] L. Rubinstein, *The Stefan Problem*, Translations of Mathematical Monographs, AMS, Providence, 1971, 4–5.
- [9] L. Rubinstein, *On the Dynamics of Evaporation of Polycomponent Solutions in a Nonvolatile Solvent*, U.S. Atomic Energy Commission, Technical Information Service, Oak Ridge, 1953.
- [10] L. Rubinstein, Об определении положения границы раздела фаз в одномерной задаче Стефана (Stefanov problem). Докл. АН СССР (Doklady Akademii Nauk SSSR) serija A **58** (1947), 217–220; L. Rubinstein, К вопросу о численном решении интегральных уравнений задачи Стефана (К врашању numerične rešitve integralske enačbe Stefanovega problema), Изв. вузов. Матем. (Известия высших учебных заведений. Математика, Reports of Higher Schools of Mathematics) **4** (1958), 202–214; L. Rubinstein in I. Rubinstein, *Partial differential equations in classical mathematical physics*, Cambridge University Press, New York, 1995.
- [11] L. Rubinstein, *The Stefan Problem*, Translations of Mathematical Monographs, AMS, Providence, 1971, str. 4; A. N. Tikhonov, *Functional equations of Volterra type and their applications to certain problems of mathematical physics*, Bulletin of Lomonosov University in Moscow **1** (1938), 1–25; L. S. Leibenzon, Руководство по нефтепромысловой механике, Москва, 1931; L. S. Leibenzon, К вопросу о затвердевании земного шара из первоначального расплавленного состояния. Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Geograf. i Geofiz. **6** (1939), 625–660.
- [12] G. Sestini, *Sopra un teorema di unicità in problemi unidimensionali analoghi a quello di Stefan*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana Serie 3 **12** (1957), 516–519.
- [13] G. Sestini, *Sul problema unidimensionale non lineare di Stefan in uno strato piano indefinito*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **51** (1960), 203–204; Datsev 1955.
- [14] B. Šarler, *O Stefanovih raziskavah večfaznih sistemov*, Predavanje na Institutu Jožef Stefan, 14. december 2011, neobjavljeno, str. 21, 87.
- [15] B. Šarler, *Stefan's work on solid-liquid phase changes*, Engineering analysis with boundary elements **16** (1995), 83–92; J. Stefan, *Über die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Eismeere*, Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien **98** II a (1889), str. 965; B. Šarler, *O Stefanovih raziskavah večfaznih sistemov*, Predavanje na Institutu Jožef Stefan, 14. december 2011, neobjavljeno, str. 10.
- [16] W. F. Trench, *On an explicit method for the solution of a Stefan problem*, J. Soc. Indust. Appl. Math. **7** (1959), 184–204. 1959, 7/2, 181–182.