PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **17** (1989/1990)
Številka 3
Strani 148–152

Marija Vencelj:

ABRAKADABRA ALI ŠTETJE NAJKRAJŠIH POTI V MREŽI

Ključne besede: matematika, kombinatorika, graf, binomski koeficienti, Pascalov trikotnik.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/17/982-Vencelj-abrakadabra.pdf

ABRAKADABRA ali štetje najkrajših poti v mreži

Dandanes besedo *ABRAKADABRA* največkrat uporabljamo kot sinonim za "zapleten nesmisel". V davnih časih pa je bila to čarobna beseda, ki so jo imeli navado v skrivnostnih oblikah vrezovati v amulete, ki naj bi lastnika obvarovali pred boleznijo in drugimi nesrečami.

Primer takega čarobnega zapisa je na sliki 1. Nekaj je gotovo: pred radovednostjo ne zavaruje! Nasprotno! Ob pogledu nanj se kar samo ponuja vprašanje, na koliko načinov lahko v njem preberemo besedo *ABRAKADABRA*. Poglejmo! Pri tem se domenimo, da veljajo le "povezane" besede. To pomeni, da bomo začeli brati pri črki *A* v zgornjem (severnem) vogalu in na posameznem koraku nadaljevali s sosednjo spodnjo črko (jugovzhodno ali jugozahodno), dokler ne bomo dosegli zadnjega *A* na spodnjem (južnem) vogalu.

A

B B

R R R

A A A A

K K K K K

A A A A A A

D D D D D

A A A A

B B B

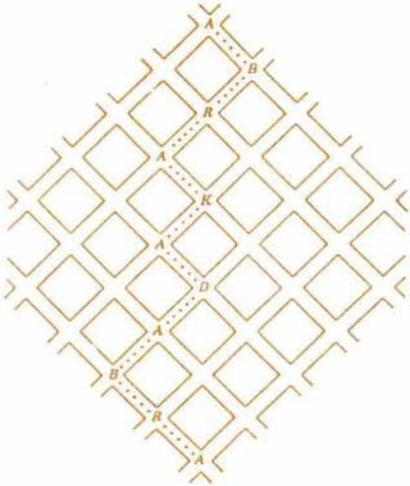
R R

A

Slika 1

Ste poskušali besede prešteti? In obupali?

Poglejmo, kako lahko nalogo posplošimo in hkrati dobimo za reševanje idejo, boljšo od štetja. Problem spominja na hojo ali vožnjo po mestu, v katerem so ulice razvrščene kot na sliki 2. V mreži ulic lahko izbiramo različne poti, ki vodijo od *A* na severu do *A* na jugu. Poti so različnih dolžin; na sliki označena je dolga deset blokov. Očitno ni nobene poti, ki bi bila od nje krajša, je pa več takih, ki so dolge deset blokov. Prav te najkrajše poti ustrezajo branju čarobne besede na sliki 1. Besedo *ABRAKADABRA* torej lahko preberemo na toliko načinov, kolikor je različnih najkrajših povezav med skrajno severno in skrajno južno točko cestne mreže s slike 2.



Slika 2

Ob tem si lahko postavimo tudi vprašanje, koliko je različnih najkrajših povezav severne točke *A* s poljubno točko mreže. Za točke blizu *A* poti ni težko prešteti. Nekaj rezultatov je vpisanih na sliki 3.

Slika 3

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
6 15 20 15 6
21 35 35 21
56 70 56
126 126
252

Slika 4

Naj bo sedaj Z poljubno križišče mreže, križišče X njegov severozahodni in Y njegov severovzhodni sosed kot na sliki 3. Najkrajša pot, ki vodi od A do Z, mora iti ali skozi X ali skozi Y. Če gremo skozi X, je nadaljevanje od X do Z eno samo. Isto velja za vsako pot, ki vodi skozi Y. Od tod sledi:

Število vseh najkrajših poti od A do Z je enako vsoti števila vseh najkrajših poti od A do X in števila vseh najkrajših poti od A do Y.

Na osnovi te ugotovitve ni težko sestaviti tabele za število najkrajših poti od zgornje točke A do dane točke (slika 4). Iz nje razberemo, da poteka od točke A na severu do točke A na jugu 252 najkrajših poti oziroma, da je na sliki 1 čarobna beseda *ABRAKADABRA* zapisana na 252 različnih načinov.

Nekateri ste števila s tabele 4 že prepoznali. Prav imate – to so *binomski koeficienti.* Njihovo trikotno razporeditev, katere začetek je na zgornjem delu slike 3, običajno imenujemo *Pascalov trikotnik.* Načeloma lahko Pascalov trikotnik nadaljujemo v nedogled. Prvo in zadnje število v posamezni vodoravni vrsti sta enaki ena, ostala števila so zaporedne vsote po dveh sosednjih števil iz prejšnje vrste. Tabela na sliki 4 ni nič drugega kot iz večjega Pascalovega trikotnika izrezan kvadraten kos.

Že v 17. stoletju je francoski matematik in filozof Blaise Pascal našel in tudi dokazal eksplicitno formulo za računanje binomskih koeficientov le iz njihove lege v Pascalovem trikotniku (ki ga je sam imenoval aritmetični trikotnik), brez računanja števil v prejšnjih vrsticah. Lego števila lahko opišemo tako, da npr. navedemo, v kateri vodoravni vrsti in na katerem mestu z leve v tej vrsti se nahaja. Drugi podatek nam pove, v kateri poševni vrsti smeri JZ–SV se število nahaja. Pri tem vrste in mesta numeriramo od nič dalje. Če z $\left[{n \atop r}\right]$ označimo število v n–ti vodoravni vrsti na r–tem mestu, je Pascalov trikotnik takle

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \left[{0 \atop 0}\right] & & & & \\
 & & & \left[{1 \atop 0}\right] & & \left[{1 \atop 1}\right] & & & \\
 & & \left[{2 \atop 0}\right] & & \left[{2 \atop 1}\right] & & \left[{2 \atop 2}\right] & & \\
 & \left[{3 \atop 0}\right] & & \left[{3 \atop 1}\right] & & \left[{3 \atop 2}\right] & & \left[{3 \atop 3}\right] & \\
\left[{4 \atop 0}\right] & & \left[{4 \atop 1}\right] & & \left[{4 \atop 2}\right] & & \left[{4 \atop 3}\right] & & \left[{4 \atop 4}\right] \\
 & & & & \cdots & & & & \\
 & & & \left[{n \atop r-1}\right] & & \left[{n \atop r}\right] & & & \\
 & & & & \left[{n+1 \atop r}\right] & & & &
\end{array}
$$

Zveza, ki velja za števila iz notranjosti sheme, se v teh oznakah zapiše:

$$\left[{n+1 \atop r}\right] = \left[{n \atop r-1}\right] + \left[{n \atop r}\right] \quad \text{za } r = 1, 2, \ldots, n \qquad (1)$$

Očitno je še, da sta med seboj enaki števili, ki ležita v isti vrsti simetrično na navpičnico skozi vrh sheme, saj je število najkrajših poti od vrha sheme do simetrično ležečih točk enako. To zapišemo:

$$\left[{n \atop r}\right] = \left[{n \atop n-r}\right] \qquad (2)$$

Pascal je dokazal, da je

$$\left[{n \atop r}\right] = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1.2.3\dots r} \tag{3}$$

in dodatno

$$\left[{n \atop 0}\right] = 1 \tag{4}$$

V našem primeru je $n = 10$ in $r = 5$, torej je število besed ABRAKADABRA enako

$$\left[{10 \atop 5}\right] = \frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5} = 252$$

kar smo prej izračunali na rekurziven način.

Pascal nam v svojih delih ne zaupa, kako je prišel do eksplicitne formule — morda jo je enostavno uganil. Zato bomo tudi mi pustili to vprašanje ob strani in si ogledali le dokaz formule.

Vemo, da so števila ob robovih sheme enaka 1, torej

$$\left[{n \atop 0}\right] = \left[{n \atop n}\right] = 1 \tag{5}$$

kar se ujema s (3) za $r = n$ in s (4). Formulo (3) moramo torej dokazati le še za notranjost sheme, to je za $0 < r < n$. Dokaz bomo napravili s popolno indukcijo po vrstičnem indeksu n.

1^0 Za $n = 1$ sledi pravilnost formule iz (5).

2^0 Naj formula velja za n–to vrsto, to je za neki n in vse ustrezne r. V posebnem je torej

$$\left[{n \atop r}\right] = \frac{n(n-1)\dots(n-r+2)(n-r+1)}{1.2\dots(r-1)\,r}$$

in

$$\left[{n \atop r-1}\right] = \frac{n(n-1)\dots(n-r+2)}{1.2\dots(r-1)}$$

Če ti dve enačbi seštejemo in uporabimo zvezo (1), dobimo

$$\left[{n+1 \atop r}\right] = \frac{n(n-1)\dots(n-r+2)}{1.2\dots(r-1)}\left[\frac{n-r+1}{r} + 1\right] =$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-r+2)}{1.2\dots(r-1)} \cdot \frac{n+1}{r} = \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-r+2)}{1.2.3\dots r}$$

Iz veljavnosti formule v n–ti vrsti torej sledi veljavnost formule v $(n+1)$–ti vrsti, kar potrjuje njeno pravilnost. (Opomba: V dokazu nastopijo navidezno težave za $r = 1$. Tedaj si v skladu z (2) pomagamo s simetrično ležečimi členi.)

Za zaključek si oglejmo še zanimivo lastnost binomskih koeficientov. Poglejmo na Pascalov trikotnik spet z vidika štetja najkrajših poti v mreži. Sedaj že vemo, da vodi od vrha trikotnika do srednjega števila v $2n$–ti vrsti, to je do števila, ki stoji v tej vrsti na n–tem mestu, $\binom{2n}{n}$ najkrajših poti. Te poti vodijo skozi različne točke n–te vrste. Očitno je, da je število tistih izmed teh poti, ki gredo skozi r–to točko n–te vrste, enako produktu dveh števil: števila najkrajših poti od vrha sheme do r–te točke n–te vrste in števila najkrajših poti od te točke do točke, ki leži n vrst niže in v poševni vrsti, ki ima za $n-r$ večji indeks. Ta produkt je torej enak $\binom{n}{r}.\binom{n}{n-r}$. Če seštejemo število prehodov skozi vse točke n–te vrste in upoštevamo (2), dobimo

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

kar je gotovo zanimiva formula.

Zgled: Za $n = 5$ je spodnje število na sliki 4 enako vsoti kvadratov števil v vodoravni diagonali:

$$252 = 1^2 + 5^2 + 10^2 + 10^2 + 5^2 + 1^2$$

Marija Vencelj

Literatura:

G. Polya, *Vom lösen mathematischer Aufgaben*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1966