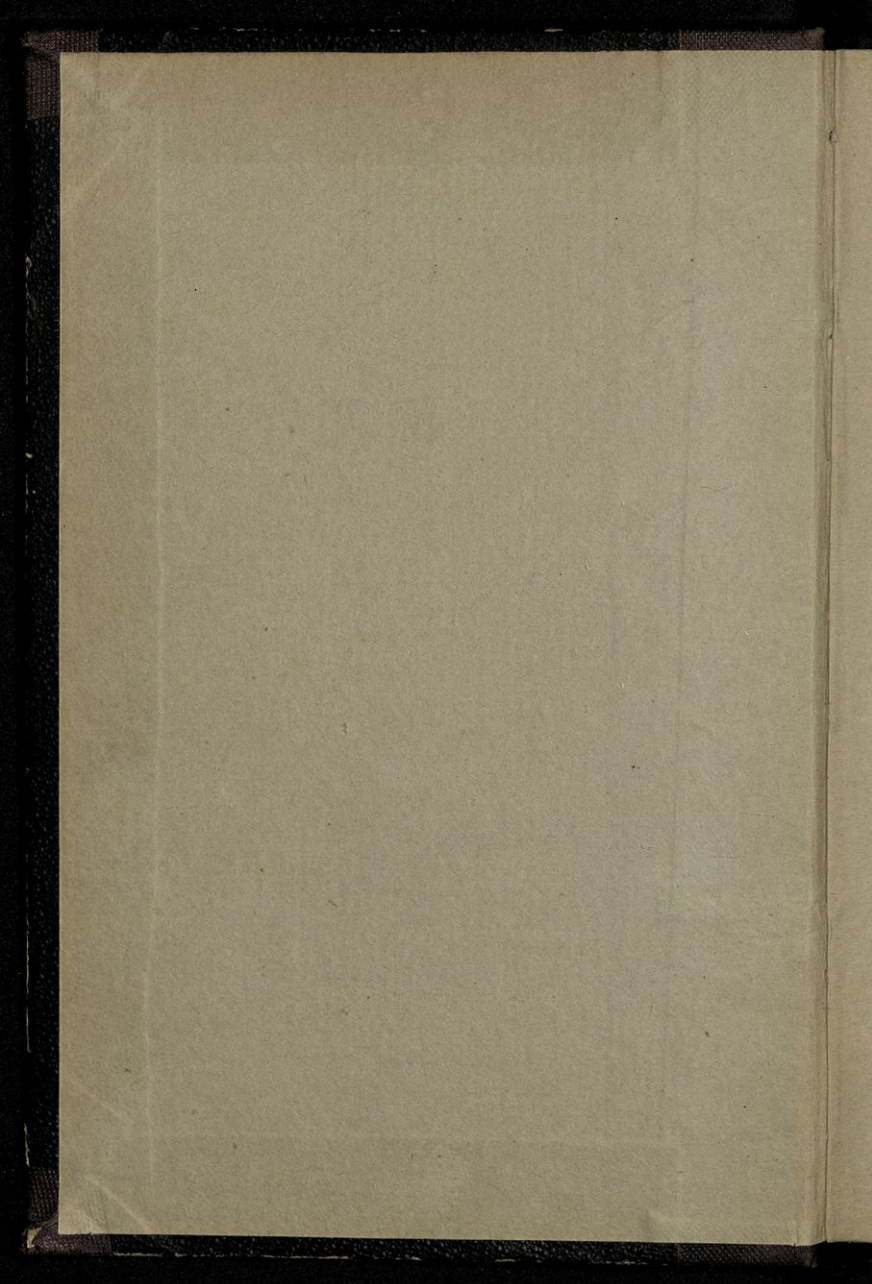


Narodna in univerzitetna knjižnica
v Ljubljani

161613



H. J. B. 11

Dra FRANT. RYT. MOČNÍKA

ARITHMETIKA I ALGEBRA

PRO VYŠŠÍ TRÍDY ŠKOL STŘEDNÍCH.

Dle 14. vydání přeložil

a dodatky spisovatelovými opatřil

F. A. HORA,

prof. na vyšším reálném gymnasiu v Plzni.

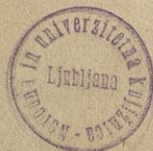
(Se šesti obrázky.)

V PRAZE 1875.

Nákladem B. Tempského.

161613

161613



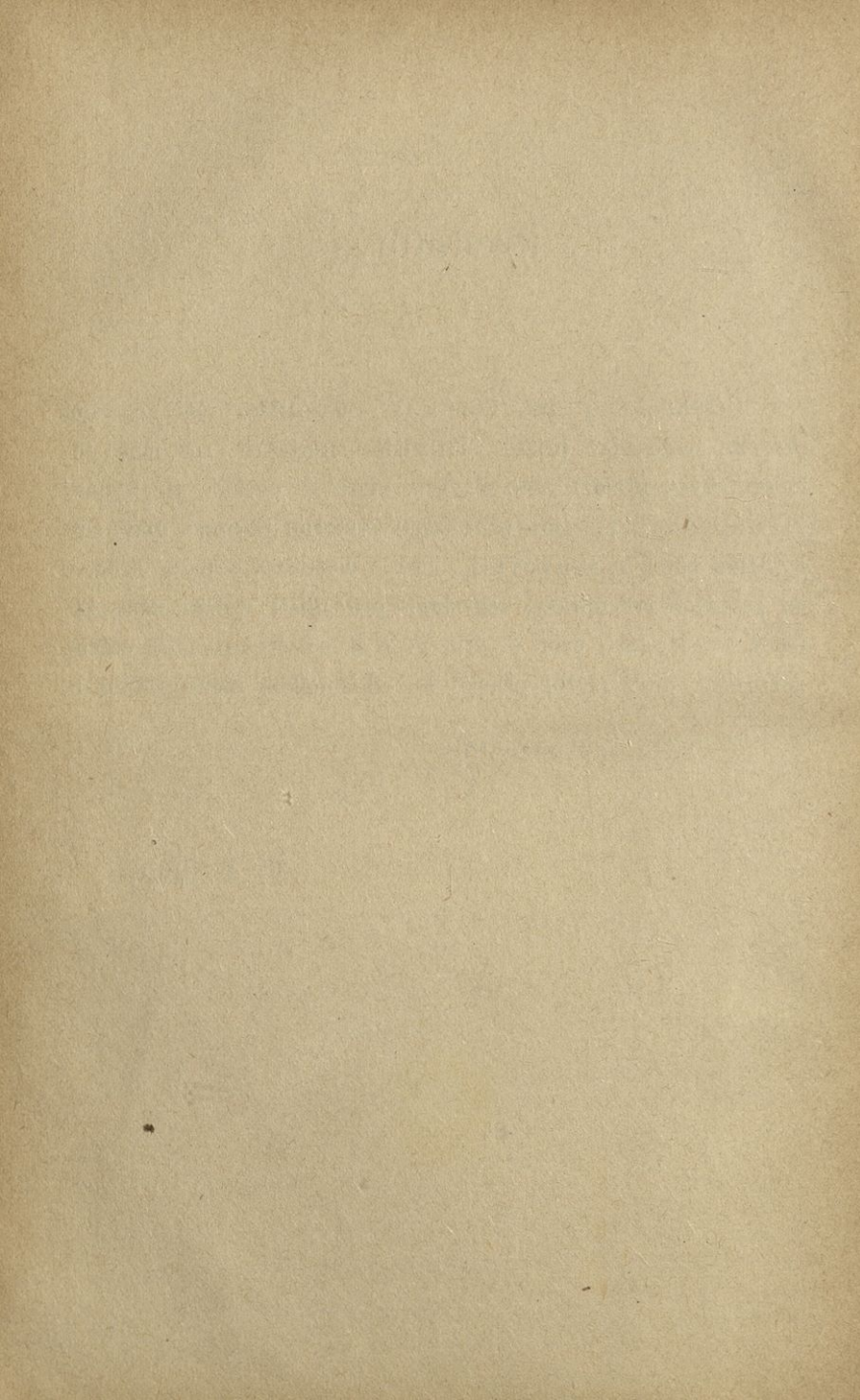
328177 / 1959

Předmluva.

Učebné knihy dra. Frant. ryt. Močníka těší se vším právem neobyčejné přízni v kruzích učitelských, což mne pohrnulo, abych přeložil jeho algebru, která se dočkala již vydání čtrnáctého. Při této příležitosti vyslovuji povinné díky slovutnému panu spisovateli, jenž z vlastního popudu laskavě mi propůjčil své opravy, uchystané pro příští vydání německé, jakož i c. k. univ. prof. p. dru. F. J. Studničkovi za vzácné poznámky, jimiž platně přispěl ku zdokonalení mého rukopisu.

V PLZNI, v červnu 1875.

F. A. Hora.



Obsah.

	Stránka
Úvod	1

Část první.

Sečítání a odčítání.

I. Sečítání prostých čísel celistvých	4
II. Odčítání prostých čísel celistvých	6
III. Pojem čísla rozšířen odčítáním	11
1. Čísla záporná	11
2. Sečítání a odčítání algebraických čísel celistvých	13

Část druhá.

Násobení a dělení.

I. Násobení prostých čísel celistvých	17
II. Dělení prostých čísel celistvých	23
III. Násobení a dělení celistvých čísel algebraických	30
IV. Dekadická čísla celistvá	32
V. Dělitelnost čísel	38
VI. Pojem čísla rozšířen dělením	51
1. Zlomky obyčejné	53
2. Zlomky desetinné	61
3. Zlomky řetězové	74
VII. Poměry a srovnalosti	82
1. Poměry	82
2. Srovnalosti	85
3. Použití srovnalosti	91

Část třetí.

Mocniny, veličiny kořenové, logarithmy.

	Stránka
I. Mocniny s kladnými celistvými mocniteli	93
II. Veličiny kořenové s kladnými celistvými odmocniteli	101
III. Mocniny (a veličiny kořenové) se zápornými a lomenými mocniteli (a odmocniteli)	108
IV. Pojem čísla rozšířen dobýváním kořene	111
1. Čísla neracionální	111
2. Čísla pomyslná	117
V. Druhá a třetí mocnina, dobývání kořene druhého a třetího stupně	125
VI. Logarithmy	140

Část čtvrtá.

Rovnice.

I. Určité rovnice prvního stupně	158
II. Neurčité rovnice prvního stupně	167
III. Určité rovnice druhého stupně	176
IV. Neurčité rovnice druhého stupně	184
V. Některé rovnice vyšší a exponenciální	188

Část pátá.

Posloupnosti.

I. Arithmetické posloupnosti	193
II. Geometrické posloupnosti	195
III. Složitě úrokování a počet o stálém důchodu	198
IV. Konvergence a divergence řad nekonečných	205

Část šestá.

Nauka o kombinacích.

I. Přestavování, sestavování a obměňování	209
II. Počet (pravdě-)podobnosti	216
III. Poučka dvoučlenová (binomiální)	229
IV. Arithmetické řady vyšších řádů	241
V. Řešení vyšších rovnic číselných	249

Dodatek.

Úlohy ku cvičení.

	Stránka
I. Sečítání a odčítání.	
1. Sečítání prostých čísel celistvých	263
2. Odčítání prostých čísel celistvých	263
3. Sečítání a odčítání algebraických čísel celistvých	264
II. Násobení a dělení.	
1. Násobení prostých čísel celistvých	265
2. Dělení prostých čísel celistvých	268
3. Násobení a dělení celistvých čísel algebraických	271
4. Dekadická čísla celistvá	273
5. Dělitelnost čísel celistvých	274
6. Čísla lomená.	
A. Zlomky obyčejné	277
B. Zlomky desetinné	284
C. Zlomky řetězové	287
7. Poměry a srovnalosti; použití jich	288
III. Mocniny, veličiny kořenové, logaritmy.	
1. Mocniny s kladnými celistvými mocniteli	296
2. Veličiny kořenové s kladnými celistvými odmocniteli	297
3. Mocniny (a veličiny kořenové) se zápornými a lomenými mocniteli (a odmocniteli)	301
4. Čísla neracionální a pomyslná	304
5. Druhá a třetí mocnina, dobývání kořene druhého a třetího stupně	308
6. Logaritmy	311
IV. Rovnice.	
1. Určité rovnice prvního stupně	314
2. Neurčité rovnice prvního stupně	327
3. Určité rovnice druhého stupně	330
4. Neurčité rovnice druhého stupně	333
5. Některé rovnice vyšší a exponencialné	341
V. Posloupnosti.	
1. Arithmetické posloupnosti	344
2. Geometrické posloupnosti	347
3. Složité úrokování a počet o stálém důchodu	350
4. Konvergence a divergence řad	355
VI. Nauka o kombinacích.	
1. Přestavování, sestavování a obměňování	356
2. Počet (pravdě-)podobnosti	358
3. Mocniny dvoučlenů	362
4. Arithmetické řady vyšších řádů	363
5. Vyšší rovnice číselné	366

Ú v o d.

§. 1. Vše, co se skládá z částí téhož druhu, aneb co si takto složeno lze pomyslit, nazývá se veličinou. Každou veličinu možná zvětšiti neb zmenšiti. Věda, zanášející se veličinami, jmenuje se matematika.

Množství stejnorodých částí ve veličině obsažených slove její velikost. Chceme-li určití veličinu co do její velikosti, vyšetřujeme, kolikráte jest v ní obsažena známá stejnorodá veličina, kterouž nazýváme jednotí. Výsledek tohoto vyšetřování slove číslo. Vyjádříme-li veličinu číslem, říkáme jí veličina číselná.

Část matematiky, zabývající se vyšetřováním veličin číselných, slove arithmetika.

§. 2. Každé tvoření čísel započíná kladením jednotí. Přidáme-li k jednoti zase jednot, a k číslu takto vzniklému opět jednot a t. d., obdržíme řadu čísel přirozenou.

Tuto přirozenou řadu čísel znázorníme, nanese-li na přímku z bodu 0 v určitém směru stejné délky (jednoti délky); konečné body těchto jednotí představují po sobě jdoucí čísla přirozená.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
.....

Přímku tuto nazveme přímkou číselnou.

(Pozn. Až později v oboru čísel se vyskytnou nové tvary čísel, započatý obraz tento na přímce číselné náležitě také doplníme.)

Jednot, jakož i každé číslo, vzniklé opětným kladením jednotí, slove číslo celistvé. Nebyla-li jednot kladena, vyjádříme to nickou (nullou). Nicku tedy lze míti za bod začátkový při každém tvoření čísel.

V přirozené řadě čísel vznikne každé číslo z předcházejícího přidáním jednotí, a z následujícího čísla odejmutím jednotí. Krácíme-li od jednoho čísla k druhému přidáváním aneb odnímáním jednotí, říkáme, že čítáme, a sice v prvním případě čítáme ku předu, v druhém pak nazpět. V čítání ku předu lze u přirozené řady čísel pokračovati do nekonečna, v čítání nazpět však jen dotud, až odejmutím poslední jednotí přijdeme na nicku.

Čísla, vyjadřující určité množství jednotostí, slovou zvláštní; naznačují se číslicemi. Čísla, představující jakékoli množství jednotostí, jmenují se obecná; značíme je písmeny. Čísla, kteráž jsouce neznáma teprv se mají určití, označují se obyčejně posledními písmeny abecedy.

Zabývá-li se arithmetika jen čísly zvláštními aneb také obecnými, nazývá se arithmetikou zvláštní aneb obecnou.

§. 3. Nehledíme-li při čítání ku druhu jednoti, vzniknou čísla prostá či bezejmenná; vyjádří-li se však při čítání také druh jednoti, vzniknou čísla pojmenovaná. Položíme-li tedy prostou jednotost *akrát*, obdržíme bezejmenné číslo *a*; položíme-li však *akrát* pojmenovanou jednotost *J*, vznikne pojmenované číslo *aJ*, v němž *J* nazývá se jmenem.

§. 4. Mají-li dvě čísla (vůbec dvě veličiny) tutéž hodnotu tak, že můžeme jedno klásti místo druhého, říkáme, že jsou sobě rovna. Abychom naznačili, že *a* se rovná *b*, spojíme obě čísla rovnítkem ($=$), t. j. $a=b$, a čteme to: *a* se rovná *b*. V případě tom zajisté také $b=a$. Výraz tvaru $a=b$ nazývá se rovnicí; $b=a$ jest obrácená rovnice předešlá.

Nemají-li dvě čísla (vůbec dvě veličiny) téže hodnoty, slovou nerovná, a sice ono číslo, k němuž něco musí se přidati, aby dalo číslo druhé, jest menší, druhé pak větší. Jest-li *a* větší než *b*, píšeme: $a > b$, v kterémžto případě zajisté také $b < a$, čili *b* jest menší než *a*. Výrazy tvaru $a > b$, aneb $b < a$ slovou nerovnosti.

Značí-li *a* a *b* jakákoli dvě čísla (aneb veličiny), musí buď $a > b$, aneb $a = b$, aneb $a < b$, což píšeme také takto: $a \gtrless b$.

§. 5. Určíme-li z daných čísel předepsaným jich spojením číslo neznámé — počítáme. Číslo takto určené slove výsledek početný.

Klademe-li ve spojení čísel místo obecných čísel (písmen) zvláštní hodnoty číselné, a provedeme-li jimi počet předepsaný — dosazujeme.

Čítání jest nejjednodušší způsob početný; možná z něho odvoditi všechny ostatní výkony početné.

Sečítati jest, v přirozené řadě čísel od daného čísla pokračovati o daný počet jednotostí; výkon opačný nazývá se odčítáním. Sečítání sobě rovných činitelů slove násobení,

opáčný výkon pak dělení. Násobení sobě rovných čísel přivádí na čísla vyššího řádu; počet, jímž tato vyhledáme, jmenuje se umocňování, z jehož obrácení vychází dobývání kořene a logaritmování.

Jest pak přední úlohou arithmetiky, vyšetřovati zákony výkonů zde naznačených. Nauka, která se zanáší používáním těchto zákonů k řešení úloh tím způsobem, aby vztahy známých a neznámých čísel vyjádřily se rovnicemi, z nich pak vyhledaly se hodnoty čísel neznámých, slove algebra.

(Pozn. Obě tyto části matematiky jmenují se často co celek: všeobecná arithmetika.)

§. 6. Nauky mathematické zakládají se na jistých větách, kteréž jsou patrný tak, že nevyžadují žádného odůvodnění. Takovéto základní věty slovou zásady samozřejmé (axiomata).

Věty, kteréž samy o sobě nejsou zřejmy, jichžto pravdivost teprv z jiných vět za pravé uznaných musí se vyvoditi, nazývají se poučkami; tyto musejí býti dokázány.

Věta, jejíž pravdivost vysvítá přímo z vysvětlení pojmu aneb z věty dokázané, slove výsledek.

§. 7. Všeobecné zásady mathematické:

1) Každá veličina jest sobě rovna; u př. $a = a$.

2) Jsou-li dvě veličiny rovný veličině třetí, jsou i sobě rovný. Je-li u př.

$$\begin{array}{r} a = c \\ a \quad b = c, \\ \text{jest i} \quad \underline{\quad} \\ a = b. \end{array}$$

3) Rovné veličiny stejně změněny dají rovné veličiny.

4) Celek rovná se všem svým částem.

5) Celek jest větší nežli jeho část.

6) Je-li jakási veličina rovna druhé, ale tato větší (menší) nežli třetí, jest i první větší (menší) nežli třetí; u. př.

$$\begin{array}{r} a = b \qquad \qquad \qquad a = b \\ \qquad b > c \qquad \qquad \qquad b < c \\ \text{tedy} \quad \underline{\quad} \qquad \qquad \underline{\quad} \\ \qquad a > c; \qquad \qquad \qquad a < c. \end{array}$$

7) Je-li jakási veličina větší (menší) nežli druhá, a tato opět větší (menší) nežli třetí, jest první veličina tím větší (menší) nežli třetí; u. př.

$$\begin{array}{r} \text{je-li} \quad a > b, \qquad \qquad \qquad a < b, \\ \qquad \qquad b > c, \qquad \qquad \qquad b < c, \\ \text{jest i} \quad \underline{\quad} \qquad \qquad \underline{\quad} \\ \qquad a > c; \qquad \qquad \qquad a < c. \end{array}$$

Část první.

Sečítání a odčítání.

I. Sečítání prostých čísel celistvých.

§. 8. 1) K číslu a připočísti číslo b znamená hledati číslo c , které má tolik jednotek jako a a b dohromady. Píšeme pak $a + b = c$, a číslům a a b říkáme sčítanci, $a + b$ součet; c jest hodnota součtu, kteráž také se vyznačuje uzávorkovaným výrazem $(a + b)$.

Chceme-li provéstí sečítání dvou čísel a a b , kráčíme v přirozené řadě čísel, počínajíce číslem a , o tolik jednotek ku předu, kolik jich obsahuje b ; číslo, k němuž takto dospějeme, jest hledaný součet. U př. $5 + 3 = 5 + 1 + 1 + 1 = 8$.

Výsledek. Je-li jeden sčítanec nulla, součet rovná se sčítanci druhému; u. př. $0 + a = a$; $a + 0 = a$; $0 + 0 = 0$.

2) Součet několika čísel obdržíme, připočteme-li k součtu prvních dvou čísel třetí číslo, k novému součtu číslo čtvrté a t. d. Protož

$$a + b + c = (a + b) + c,$$

$$a + b + c + d = [(a + b) + c] + d.$$

§. 9. Klademe-li obecné číslo několikrát co sčítance, naznačíme součet zkráceně tak, že napíšeme obecné číslo jen jednou, před ním pak postavíme číslo, kteréž ukazuje, kolikrát obecné číslo co sčítanec bylo kladeno; u. př.

$$a + a + a + a + a = 5a.$$

Ve výrazu $5a$ slove a veličina hlavní a 5 součinitel. I obecné číslo může býti součinitelem; u. př.

$$ma = a + a + a + a + \dots \text{ (mkrát).}$$

Výrazy se stejnými veličinami hlavními jmenují se stejnojmenné, u. př. $5a$ a $6a$, $3x$ a x , výrazy s různými veličinami hlavními slovou různojmenné, u. př. $3a$ a $7b$, $5x$ a $5y$.

§. 10. Sčítanci, v kterémkoli pořádku sečítání, dávají tentýž součet.

$$a + b = b + a.$$

$$a + b + c = a + c + b = b + a + c = b + c + a = \dots$$

Důkaz. Množství jednotek obsažených ve sčítancích zůstane totéž, nechť jdou po sobě v kterémkoli pořádku; proto také hodnota součtu musí tatáž zůstat.

§. 11. 1) K součtu se připočte číslo, připočteme-li je k některému sčítanci. U př.

$$(a + b) + c = (a + c) + b = a + (b + c).$$

2) K číslu se připočte součet, připočteme-li k němu po jednom všechny sčítance. U př.

$$a + (b + c) = (a + b) + c = (a + c) + b.$$

3) Dva součty sečítáme, připočteme-li pořadem každého sčítance druhého součtu ku kterémukoli sčítanci součtu prvního. U př.

$$(a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d) = (a + d) + (b + c).$$

Pravdivost těchto tří vět vysvětluje přímo z §. 10.

(Zobrazte předcházející tři věty na přímce číselné [§. 2] pro určité hodnoty veličin a, b, c a d .)

§. 12. Máme-li sečítati stejnojmenné výrazy, sečteme jejich součinitele a napíšeme tento součet před společnou veličinu hlavní.

$$ma + na = (m + n)a.$$

$$\text{Důkaz. } ma = a + a + a + \dots \text{ (mkrát)}$$

$$na = a + a + a + \dots \text{ (nkrát),}$$

$$\text{protož } ma + na = a + a + a + \dots \text{ (m + n)krát} = (m + n)a.$$

$$\text{U př. } 3a + 4a = (3 + 4)a = 7a.$$

§. 13. 1) Rovné k rovnému připočteno dává rovné.

$$a = b$$

$$c = d;$$

$$a + c = b + d,$$

což vysvětluje přímo z §. 7., 3).

2) Rovné připočteno k nerovnému dává nerovné s tímž znaménkem nerovnosti.

$$a > b,$$

$$c = d;$$

$$a + c > b + d.$$

Důkaz. Je-li v číslo, kteréž musí býti připočteno k b , abychom obdrželi a , tedy $a = b + v$, protože dle 1):

$$a + c = b + v + d.$$

Ale $b + v + d > b + d$ (dle §. 7., 5), tedy také $a + c > b + d$.

3) Nerovné připočteno k nerovnému s týmž znaménkem nerovnosti dává nerovné se znaménkem nerovnosti taktéž položeným.

$$\begin{array}{r} a > b, \\ c > d; \\ \hline a + c > b + d. \end{array}$$

Důkaz. Budiž $c = d + v$, tedy dle 2) $a + c > b + d + v$. Ale $b + d + v > b + d$ (§. 7., 5), protože také $a + c > b + d$ (§. 7., 7).

II. Odčítání prostých čísel celistvých.

§. 14. Od čísla a odčítati číslo b znamená, z a jakožto součtu dvou čísel a z b jakožto jednoho sčítance hledati druhého sčítance c . Píšeme pak $a - b = c$, nazývajíce a menšencem, b menšítelem, $a - b$ rozdílem či zbytkem. Číslo c aneb uzávorkovaný výraz $(a - b)$ slove hodnota rozdílu.

Rozdíl vyjadřuje tedy číslo, kteréž připočteno k menšíтели dává menšence, t. j.

$$(a - b) + b = a.$$

Chceme-li provéstí odčítání dvou čísel a a b , kráčíme v přirozené řadě čísel, počínajíce menšencem a , o tolik jednotostí nazpět, kolik jich obsahuje menšítel b ; číslo, k němuž takto dospějeme, jest hledaný rozdíl. U př.

$$7 - 3 = 7 - 1 - 1 - 1 = 4.$$

Odčítání může jen tehdy býti provedeno v přirozené řadě čísel, není-li menšítel větší nežli menšence, jinak bychom od menšence nemohli o tolik jednotostí kráčet nazpět, kolik jich obsahuje menšítel, poněvadž přirozená řada čísel nullou přestává.

U následujících vět zatím tedy budeme předpokládati, že menšítele uvedených rozdílů nejsou větší nežli jejich menšenci.

§. 15. Z pojmu odčítání plynou následující

Výsledky: 1) Připočteme-li menšitele k rozdílu dvou čísel, obdržíme menšence.

$$(a - b) + b = a, \quad b + (a - b) = a.$$

2) Odečteme-li od součtu dvou čísel jednoho sčítance, dostaneme sčítance druhého.

$$(a + b) - a = b, \quad (a + b) - b = a.$$

3) Číslo se nemění, jestliže k němu jakékoli číslo připočteme a zároveň totéž číslo od něho odečteme. U př.

$$a = (a + b) - b, \quad a = (a - b) + b.$$

Sečítání a odčítání jsou tedy výkony protivné; toto jest obrácený výkon onoho.

4) Je-li menšitel roven menšenci, rozdíl rovná se nulle.

$$a - a = 0.$$

5) Je-li menšitel nulla, rozdíl rovná se menšenci.

$$a - 0 = a, \quad 0 - 0 = 0.$$

§. 16. Máme-li číslo odečísti od součtu, odčítáme je od některého sčítance.

$$(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c).$$

Zde se předpokládá dle §. 14., že $a > c$ a $b > c$.

Pravdivost věty této plyne přímo z pojmů sečítání a odčítání. Kráčíme-li totiž v přirozené řadě čísel od a nejprve o b jednotostí v před a odtud o c jednotostí nazpět, dospějeme z a celkem o $b - c$ jednotostí v před, tedy k číslu $a + (b - c)$; k témuž číslu $a + (b - c)$ dospějeme však též, kráčíme-li od a nejprv o c jednotostí nazpět, potom však o b jednotostí v před, poněvadž tím způsobem z a také celkem dospějeme v před o $b - c$ jednotostí.

(Tyto, jakož i následující věty zobrazte na přímce číselné pro určité hodnoty veličin a, b, c .)

Výsledek. Má-li se k číslu připočísti jiné číslo a od něho odečísti třetí, zůstane výsledek tentýž, nechť sečítáme a odčítáme v kterémkoli pořádku.

§. 17. Číslo se připočte k rozdílu, připočteme-li je k menšenci, aneb odečteme-li je od menšitele.

$$(a - b) + c = (a + c) - b = a - (b - c),$$

kde předpokládáme, že $b > c$.

Důkaz podobá se předešlému v §. 16.

§. 18. Číslo se odečte od rozdílu, odčítáme-li je od menšence anebo připočteme-li je k menšiteli.

$$(a - b) - c = (a - c) - b = a - (b + c).$$

Pravdivost věty této plyne jako v §. 16. přímo z pojmu odčítání, použijeme-li zároveň §. 10.

Výsledek. Má-li se od čísla odčítati dvě čísel, odčítejme je buď jednotlivě v kterémkoli pořádku, aneb možná ihned součet obou odečísti.

§. 19. 1) Součet odečte se od čísla, odčítáme-li jednotlivé sčítance. (Obrácení §. 18.)

$$a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b.$$

2) K číslu se připočte rozdíl, připočteme-li menšence a odečteme-li menšitele. (Obrácení §. 16.)

$$a + (b - c) = (a + b) - c = (a - c) + b.$$

3) Od čísla odčítá se rozdíl, odečteme-li menšence a připočteme-li menšitele. (Obrácení §. 17.)

$$a - (b - c) = (a - b) + c = (a + c) - b.$$

§. 20. 1) K rozdílu připočte se rozdíl, odečteme-li od součtu menšenců součet menšitelů.

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d).$$

2) Má-li se rozdíl odečísti od rozdílu, odečteme rozdíl menšitelů od rozdílu menšenců, anebo připočteme k menšenci a menšiteli prvního rozdílu vztažně menšitele a menšence druhého rozdílu a od prvního součtu odečteme druhý.

$$(a - b) - (c - d) = (a - c) - (b - d) = (a + d) - (b + c).$$

Pravdivost těchto dvou vět dokážeme opětným použitím §§. 16. — 19.

§. 21. 1) Součet se nemění, připočteme-li jakési číslo k jednomu sčítanci, a odečteme-li totéž číslo od sčítance druhého. Jest totiž

$$a + b = a + \{(b - c) + c\} \text{ (§. 15., 3) } = (a + c) + (b - c) \text{ (§. 11., 2);}$$

$$a + b = a + \{(b + c) - c\} \text{ (§. 15., 3) } = (a - c) + (b + c) \text{ (§. 19., 2)}$$

2) Rozdíl se nemění, pakli k menšenci a menšiteli totéž číslo připočteme aneb od obou totéž číslo odečteme. Jest totiž

$$a - b = a - \{(b + c) - c\} \text{ (§. 15., 3) } = (a + c) - (b + c) \text{ (§. 19., 3);}$$

$$a - b = a - \{(b - c) + c\} \text{ (§. 15., 3) } = (a - c) - (b - c) \text{ (§. 19., 1).}$$

§. 22. Máme-li odčítati stejnojmenné výrazy, odčítáme součinitele a rozdíl tento napíšeme před společnou hlavní veličinu.

$$ma - na = (m - n)a.$$

Důkaz. $ma = a + a + a + \dots$ (mkrát),

$$na = a + a + a + \dots$$
 (nkrát);

protož $ma - na = a + a + a + \dots (m - n)\text{krát} = (m - n)a.$

U př. $5a - 2a = (5 - 2)a = 3a.$

Sečítání a odčítání mnohočlenů.

§. 23. Mají-li ve spojení čísel, předepsaném znaménky $+$ a $-$, takto naznačené výkony provést se v pořádku, v němž tato čísla se svými znaménky jdou po sobě od levé ruky ku pravé, můžeme vynechati závorky, aniž bychom určitost porušili. Dle toho možná psáti u př.

$$[(a + b) + c] + d = a + b + c + d,$$

$$[(a - b) + c] - d = a - b + c - d,$$

$$[(a - b) - c] - d = a - b - c - d.$$

Výraz, v němž naznačeno jest několikero sečítání a odčítání čísel, nazývá se mnohočlenem (polynom). Čísla, která se mají sečítati, jmenují se sčetené, a která se mají odčítati, odčetené členy výrazu. Člen, před nímž není znaménka, má se za sčetený.

Výraz o dvou členech slove dvoučlen (binom), o třech členech tříčlen (trinom), o jediném členu jednočlen (monom).

Výsledky. 1) V mnohočlenu mohou sčetené a odčetené členy jíti po sobě v kterémkoli pořádku.

Vysvítá z §. 10., §. 16. výsl. a §. 18. výsl.

2) Každý mnohočlen lze proměnit v rozdíl, jehož menšencem jest součet všech členů sčetených, menšitelem pak součet všech členů odčetených.

$$a + b - c + d - e = a + b + d - c - e \\ = (a + b + d) - (c + e), \text{ dle §. 18. výsl.}$$

§. 24. 1) K číslu připočte se mnohočlen, pakli členy jeho jednotlivě k číslu připočteme aneb od něho odečteme, jsou-li jednak sčetené, jinak odčetené.

$$a + (b - c - d + e - f) = a + b - c - d + e - f.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Důkaz. } a + (b - c - d + e - f) \\
 &= a + [(b + e) - (c + d + f)] \text{ dle §. 23., výsl. 2.} \\
 &= [a + (b + e)] - (c + d + f) \text{ dle §. 19., 2.} \\
 &= a + b + e - c - d - f \text{ (§. 11., 2. a §. 19., 1),} \\
 &= a + b - c - d + e - f \text{ (§. 23., výsl. 1).}
 \end{aligned}$$

2) Od čísla odečte se mnohočlen, pakli členy jeho jednotlivě od čísla odečteme aneb k němu připočteme, jsou-li jednak sčtené, jinak odčtené.

$$a - (b - c - d + e - f) = a - b + c + d - e + f.$$

Důkaz podobá se předešlému.

Výsledky. 1. Každý uzávorkovaný výraz můžeme psátí bez závorek; je-li před závorkou znaménko $+$, zůstane pak celý výraz beze změny, je-li však před závorkou znaménko $-$, promění se znaménka všech uzávorkovaných členů v opačná.

Výkonu tomu říkáme: vypustiti závorek. U př.

$$\begin{aligned}
 a - [5b - \{(3a + 2c) - 2b\} + (2a - 4c)] \\
 &= a - 5b + \{(3a + 2c) - 2b\} - (2a - 4c) \\
 &= a - 5b + (3a + 2c) - 2b - 2a + 4c \\
 &= a - 5b + 3a + 2c - 2b - 2a + 4c.
 \end{aligned}$$

2) Naopak možná v každém mnohočlenu několik členů uzávorkovati; klademe-li závorku za znaménko $+$, zůstanou znaménka uzávorkovaných členů beze změny, klademe-li ji za $-$, musíme znaménka všech uzávorkovaných členů proměnit v opačná.

3) Mnohočlen se stejnojmennými členy můžeme snímati; sečteme všechny stejnojmenné členy sčtené, pak odčtené, a tento součet odčítáme od onoho. U př.

$$\begin{aligned}
 6a - 5a - 3a + 8a - 2a &= (6a + 8a) - (5a + 3a + 2a) \\
 &= 14a - 10a = 4a.
 \end{aligned}$$

§. 25. 1) Rovné od rovného odečteno dává rovné.

$$\begin{array}{r}
 a = b, \\
 c = d; \text{ tedy} \\
 \hline
 a - c = b - d,
 \end{array}$$

což plyne přímo z §. 7., 3).

2) Rovné od nerovného odečteno dává nerovné s tímž znaménkem nerovnosti.

Je-li

$$a > b,$$

$$c = d;$$

tedy

$$\frac{a - c > b - d.}{}$$

Důkaz. Nebylo-li by $a - c > b - d$, muselo by $a - c \leq b - d$, ale pak by též $(a - c) + c \leq (b - d) + d$ (dle §. 13., 1) a 2), protož $a \leq b$ (§. 15., 1), což odporuje položené podmínce.

3) Nerovné od rovného odečteno dává nerovné s obráceným znaménkem nerovnosti.

$$\begin{array}{rcl} \text{Je-li} & & a = b, \\ & & c > d, \\ \hline \text{bude} & & a - c < b - d. \end{array}$$

Důkaz. Kdyby $a - c \geq b - d$, muselo by v obou případech $(a - c) + c \geq (b - d) + d$ dle §. 13., 2) a 3), protož $a \geq b$ (§. 15., 1), což se neshoduje s podmínkou.

4) Nerovné od nerovného odečteno při protivných znaménkách nerovnosti dává nerovné se znaménkem nerovnosti, kteréž jest v menšenci.

$$\begin{array}{rcl} \text{Je-li} & & a > b, \\ & & c < d, \\ \hline \text{bude} & & a - c > b - d. \end{array}$$

Důkaz. Kdyby $a - c \leq b - d$, muselo by v obou případech $(a - c) + c \leq (b - d) + d$ dle §. 13., 2) a 3), protož $a \leq b$ (§. 15., 1.), což odporuje podmínce.

III. Pojem čísla rozšířen odčítáním.

1. Číslo záporná.

§. 26. Posud jsme (§. 14.) u všech rozdílů předpokládali, že menšitel jest menší nežli menšenec, poněvadž jen v tomto případě lze provést odčítání v řadě čísel přirozených. Mají-li tedy pravidla vyvinutá o odčítání nabyti platnosti pro kterékoli hodnoty menšence a menšitele, musíme všeobecný pojem odčítání, daný rovnicí $(a - b) + b = a$, rozšířiti také na rozdíl $a - b$, kde $b > a$, z čehož jde, že pak všech vět, dokázaných o rozdílů a zakládajících se vesměs v oné rovnici, použití lze i při tomto posledním rozdílů.

Je-li tedy v rozdílů $a - b$ číslo $b > a$, tak sice, že $b = a + n$, a použijeme-li zde věty §. 19., 1), bude

$$a - b = a - (a + n) = (a - a) - n = 0 - n.$$

v původním směru přímky číselné musíme pak naznačiti znaménkem $+$; neboť kráčíme-li od 0 v původním směru o 2 jednotky ku předu, dojdeme na místo $0 + 2 = + 2$.

§. 27. Čísla opatřená znaménky slovou vztažná (relativná) čili algebraická; čísla beze znamének jmenují se prostá (absolutná).

Každé algebraické číslo se skládá ze znaménka a z hodnoty prosté. Znaménko udává, že číslo se nalézá v řadě čísel na kladné aneb záporné straně; prostá hodnota však udává, které místo algebraické číslo zaujímá v řadě čísel kladných aneb záporných.

(Obou znamének nemusí se vždy užívat; obyčejně vynecháváme znaménko $+$, kde tím ani smysl ani souvislost počtu se neporuší.)

Dvě algebraická čísla, mající tutéž prostou hodnotu ale znaménka rozličná, jmenují se protivná.

Veličiny jako: pohyb na sever a na jih, stoupání a klesání, jmění a dluh, výška nad a pod hladinou mořskou, roky před Kristem a po jeho narození a t. d., kteréž můžeme čítati ve smyslu jednom aneb druhém jemu protivném tak, že stejné množství z obého čítání dává 0, slovou veličiny protivné. V mathematice označujeme jednu z veličin protivných, kteroukoli sice, ale důsledně, znaménkem $+$, druhou znaménkem $-$.

Měli bychom u. př. z následujícího udání vypočítati, kdy se udál děj C : a roků po Kristu stal se příběh A , o b roků později příběh B , a o c roků dříve než B příběh C ; tedy hledaná doba $x = a + b - c$. Dosadíme-li hodnoty za a , b , c a bude-li výsledek $-n$, možno říci, že děj C se udál n roků před Kristem.

Vůbec: záporná hodnota $-n$ hledané veličiny x vždy znamená, že veličina se měří n jednotkami, ale ve smyslu, jenž jest protivou původního v počet uvedeného.

2. Sečítání a odčítání algebraických čísel celistvých.

§. 28. Následkem pojmu čísel, rozšířeného zavedením čísel záporných, musíme přiměřeně rozšířiti také pojmy výkonů, aby poučky, jichžto platnost dokázána byla především pro čísla prostá, mohly se vztahovati také na čísla algebraická.

Dvě algebraická čísla sečítati jest, hledati číslo, kteréž obsahuje tolik kladných a tolik záporných jednotek, kolik oba sčítanci dohromady. Abychom podlé tohoto vysvětlení obdrželi součet dvou čísel algebraických, musíme v řadě čísel od prvního sčítance o počet jednotek druhého (§. 8., 1) pokračovati tak, jak udává druhý sčítanec svým znaménkem, t. j. musíme kráčet ku předu, je-li druhý sčítanec kladný, tudíž nazpět, je-li záporný.

Výsledky. 1) Sečítání kladného čísla jest sečítání jeho prosté hodnoty; sečítání záporného čísla jest odčítání jeho prosté hodnoty.

Je-li b číslo prosté, tedy

$$a + (+b) = a + b, \quad a + (-b) = a - b.$$

2) Máme-li sečítati dvě čísla se stejnými znaménky, sečteme jejich prosté hodnoty a před tento součet napíšeme společné znaménko.

$$(+a) + (+b) = +(a + b), \quad (-a) + (-b) = -(a + b).$$

3) Dvě čísla s různými znaménky sečítáme, jestliže menší prostou hodnotu odečteme od větší a před rozdíl napíšeme znaménko větší prosté hodnoty.

$$(+a) + (-b) = +(a - b), \text{ aneb } = -(b - a),$$

$$(-a) + (+b) = -(a - b), \text{ aneb } = +(b - a).$$

4) Součet dvou protivných čísel rovná se nulle. (Dvě protivná čísla se ruší.)

$$(+a) + (-a) = 0, \quad (-a) + (+a) = 0.$$

§. 29. O odčítání algebraických čísel platí beze změny, co v §. 14. všeobecně bylo vysvětleno. Chceme-li zde obdržeti rozdíl čítáním, musíme dle §. 14. v řadě čísel od menšence pokračovati o počet jednotek menšitele tak, jak udává menšitel svým znaménkem, t. j. kráčet nazpět, je-li menšitel kladný, a ku předu, je-li menšitel záporný.

Výsledky. 1) Odčítání kladného čísla jest odčítání prosté jeho hodnoty; odčítání čísla záporného jest sečítání jeho prosté hodnoty.

Je-li b číslo prosté, tedy

$$a - (+b) = a - b, \quad a - (-b) = a + b.$$

2) Dvě algebraická čísla sečítáme, jestliže k nezměněnému menšenci připočteme menšitele s opačným znaménkem.

$(+a) - (+b) = (+a) - b = (+a) + (-b)$ dle §. 28. výsl. 1),
 $(+a) - (-b) = (+a) + b = (+a) + (+b)$,
 $(-a) - (+b) = (-a) - b = (-a) + (-b)$,
 $(-a) - (-b) = (-a) + b = (-a) + (+b)$.

§. 30. Součet, jehožto sčítanci jsou čísla algebraická, nazýváme součtem algebraickým. U př.

$$(+a) + (-b) + (-c) + (+d) + (-f).$$

Rozdíl dvou čísel algebraických můžeme psáti jakožto součet algebraický (§. 29. výsl. 2).

1) Každý mnohočlen proměníme v algebraický součet, jestliže považujeme znaménka početná za znaménka jakosti a čísla, která takto obdržíme, klademe co sčítance.

$$a - b - c + d = (+a) + (-b) + (-c) + (+d).$$

Vysvítá z §. 28. výsl. 1).

2) Každý algebraický součet proměníme v mnohočlen, vypustíme-li závorky a znaménka sečítání, a považujeme-li pak znaménka jakosti za znaménka početná.

$$(+a) + (-b) + (-c) + (+d) = a - b - c + d.$$

Plyne z 1).

3) V algebraickém součtu mohou sčítanci jíti po sobě v kterémkoli pořádku.

Vysvítá z 1) a 2) a zároveň z §. 23. výsl. 1).

§. 31. V algebraických součtech všeobecně vynechávají se závorky, jakož i znaménka sečítání. V tomto tvaru součet algebraický liší se od mnohočlenu jen tím, že početná znaménka $+a -$ v mnohočlenu musíme v algebraickém součtu považovati za znaménka jakosti, t. j. sčtené a odčtené členy mnohočlenu v algebraickém součtu vztažně za sčítance kladné a záporné. Na hodnotu obou tento rozličný význam znamének nemá vlivu, jakož vysvítá z §. 28. výsl. 1).

Z toho jde vzhledem k §. 24., 1) a 2):

1) K číslu se připočte součet algebraický, připočteme-li k němu jednotlivé sčítance v kterémkoli pořádku s jejich znaménky jakosti.

2) Od čísla odečteme součet algebraický, jestliže k němu připočteme jednotlivé sčítance v kterémkoli pořádku s opačnými znaménky jakosti.

§. 32. Všecky věty o součtech a rozdílech odvozené pro čísla prostá lze konečně svést na poučku o výměně sčítanců

(§. 10). Ale tato poučka jest platna (dle §. 30., 3) i pro čísla algebraická; protož všechny věty dokázané posud o prostých číslech celistvých vztahují se také k celistvým číslům algebraickým.

Dodatky. 1) Tím jest zároveň zrušeno omezení, vyslovené o rozdílech v závěrečném odstavci §. 14.

2) Nerovnost dvou čísel (§. 4.) dlužno nyní vysvětliti způsobem tím, že ono číslo jest menší, k němuž musíme připočísti číslo kladné, abychom obdrželi číslo druhé.

Je-li $m > n$, musí $-m < -n$. Mimo to jest vůbec $+m > 0$, $-m < 0$, a $-m < +n$.

3) Toto vysvětlení musíme zachovati, chceme-li věty o spojení rovností a nerovností sečítáním a odčítáním (§§. 13. a 25.) rozšířiti na čísla algebraická.

Část druhá.

Násobení a dělení.

I. Násobení prostých čísel celistvých.

§. 33. 1) Číslo a násobiti číslem b znamená, a položití tolikráte co sčítance, kolik jednotí b obsahuje. Číslo a slove násobenec, b násobitel, obě čísla jmenují se činitelé. Výsledku říkáme součin. Součin jest tedy součet rovných sčítanců; násobenec jest onen rovný sčítanec, násobitel pak udává množství těchto sčítanců. Násobenec může být pojmenován, násobitel jest vždy číslo bezejmenné. Součin násobence a a násobitele b značí se $a \times b$, aneb $a \cdot b$ (t. j. a b krát), aneb jsou-li oba činitelé obecná čísla, též pouze ab .

Součin dvou čísel celistvých slove také násobek násobence. U př. $12 = 4 \cdot 3$, protože 12 trojnásobek čísla 4.

Výsledky. a) Je-li jeden z činitelů 1, součin rovná se činiteli druhému.

$$a \cdot 1 = a, \quad 1 \cdot a = a, \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

b) Je-li jeden z činitelů nulla, součin se též rovná nulle.

$$a \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot a = 0, \quad 0 \cdot 0 = 0.$$

2) Součin několika čísel obdržíme, násobíme-li součin prvních dvou čísel třetím číslem, tento součin číslem čtvrtým a t. d.

$$a \cdot b \cdot c = (ab) \cdot c,$$

$$a \cdot b \cdot c \cdot d = [(ab) \cdot c] \cdot d, \text{ a t. d.}$$

§. 34. Součin několika rovných činitelů naznačíme zkráceně tím, že napíšeme jediného činitele a v pravo nahoře kládeme k němu číslo, kteréž udává, kolik jest rovných činitelů v součinu; u př.

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5.$$

Součin rovných činitelů slove mocnina; počet rovných činitelů jmenuje se mocnitel, a činitel, jenž tolikrát přichází, kolik jednotostí obsahuje mocnitel, slove mocněnec (kořen, základ). V mocnině a^m , kteroužto čteme: a na m tou (mocninu povýšeno), aneb a povýšeno na mocninu m tého stupně, jest a mocněnec, m mocnitel. Druhá mocnina (a^2) jmenuje se zvláště také čtverec, třetí mocnina (a^3) kostka či kubus čísla a .

Každé číslo samo o sobě považuje se za mocninu prvního stupně, tudíž $a = a^1$.

Přichází-li v mnohočlenu několik mocnin o stejných mocněncích, pořádáme pro lepší přehled jednotlivé členy dle mocnitelů tak, že na první místo klademe mocninu nejvyšší, po té pak mocniny nižší až do nejnižší, aneb naopak, že nejprve napíšeme nejnižší mocninu (aneb člen bez mocniny) společného mocněnce, načež postupem mocniny vyšší až do nejvyšší. V prvním případě mnohočlen jest spořádán sestupně, v druhém vzestupně. U př. mnohočlen

$$3x^2 + 4 + 5x - 6x^3 + x^4$$

bude sestupně spořádán takto:

$$x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 5x + 4,$$

a vzestupně:

$$4 + 5x + 3x^2 - 6x^3 + x^4.$$

§. 35. Činitelé v kterémkoli pořádku násobení dávají tentýž součin.

Máme-li a násobiti číslem b , utvořme b řad, z nichžto každá obsahuje a jednotostí, totiž:

$$\begin{array}{l} 1 + 1 + 1 + 1 + \dots \quad (\text{akrát}) \\ + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots \\ + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots \\ + \dots \end{array}$$

(b krát),

čím obdržíme patrně stejné množství jednotostí, tedy totéž číslo, jako bychom čítali jednotosti všech řad vodorovných, aneb všech řad svislých. V prvním případě obdržíme a b krát, čili $a \cdot b$, v druhém pak b a krát, čili $b \cdot a$. Jest tedy

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Tato věta jest platna pro kterýkoli počet činitelů. Poněvadž totiž v součinu několika činitelů můžeme vždy dva a dva činitele při nezměněném postavení ostatních vzájemně vyměnit,

může opětovaným vyměňováním dvou činitelů každý činitel položen býti na každé místo předepsané. Tak u př.

$$a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b = c \cdot a \cdot b = c \cdot b \cdot a = b \cdot c \cdot a = b \cdot a \cdot c.$$

Součin několika činitelů zůstane tedy tentýž, násobíme-li činitele v kterémkoli pořádku.

Zde jsme předpokládali, že jsou činitelé bezejmenní. Je-li násobenec pojmenované číslo aJ , kde J značí jmeno, bude $aJ \cdot b = (ab) J = (ba) J$; ale poněvadž také $bJ \cdot a = (ba) J$, tedy $aJ \cdot b = bJ \cdot a$ (§. 7., 2). Smíme tedy i v tomto případě vyměnit činitele, ale pak musí původní násobenec také jmeno své postoupiti násobiteli, jenž se stane nyní násobitelem. U př. $8 \text{ zl.} \times 5 = 5 \text{ zl.} \times 8 = 40 \text{ zl.}$

Výsledek. Součinitele můžeme považovati za činitele u hlavní veličiny, před nížto se nachází. U př.

$$3a = a + a + a = a \cdot 3 = 3 \cdot a.$$

§. 36. 1) Máme-li součin násobiti číslem, násobme jím kteréhokoli činitele.

$$(ab) \cdot c = (ac) \cdot b = a \cdot (bc).$$

2) Číslo se násobí součinem, násobíme-li je činitelem prvním a součin tento činitelem druhým.

$$a \cdot (bc) = (ab) \cdot c = (ac) \cdot b.$$

Tyto dvě věty plynou přímo z §. 35.

§. 37. Mocniny o stejných mocněncích se násobí, povýšíme-li společného mocněnce na mocninu, kterou udává součet mocnitelů.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

$$\begin{aligned} \text{Důkaz. } a^m \cdot a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m\text{krát}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{krát}} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{(m+n)\text{krát}} \\ &= a^{m+n}. \end{aligned}$$

U př. $a^5 \cdot a^2 = a^7$; $a^4 \cdot a = a^5$.

§. 38. 1) Máme-li součet násobiti číslem, násobíme každého sčítance a sečteme částečné součiny.

$$(a + b) \cdot c = ac + bc.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Důkaz. } (a + b) \cdot c &= \underbrace{(a + b) + (a + b) + (a + b) + \dots}_{\text{ckrát}} \\
 &= \underbrace{a + a + a + \dots}_{\text{ckrát}} + \underbrace{b + b + b + \dots}_{\text{ckrát}} \\
 &= ac + bc.
 \end{aligned}$$

Výsledek. Dva součiny, mající společného činitele, sečítáme, jestliže společným činitelem násobíme součet ostatních činitelů.

$$ac + bc = (a + b) \cdot c.$$

2) Rozdíl násobí se číslem, násobíme-li jím menšence i menšitele a odčítáme-li druhý součin od prvního.

$$(a - b) \cdot c = ac - bc.$$

Důkaz podobá se předešlému.

Výsledek. Dva součiny, mající společného činitele, odčítáme, jestliže společným činitelem násobíme rozdíl ostatních činitelů.

$$ac - bc = (a - b) \cdot c.$$

Výkony provedené v obou těchto výsledcích slovou vysazení společného činitele.

§. 39. 1) Číslo se násobí součtem, násobíme-li je každým sčítancem a sečteme-li částečné součiny.

$$a \cdot (b + c) = ab + ac.$$

Důkaz. $a \cdot (b + c) = (b + c) \cdot a$ (de §. 35.) $= ba + ca$ (§. 38., 1) $= ab + ac$ (§. 35.).

2) Máme-li číslo násobiti rozdílem, násobíme je menšencem i menšitelem, a součin druhý odčítáme od prvního.

$$a \cdot (b - c) = ab - ac.$$

Důkaz podobá se předešlému.

§. 40. Součet neb rozdíl se násobí součtem neb rozdílem, násobíme-li každý člen násobence každým členem násobitele a klademe-li částečné součiny sččetně aneb odččetně, mají-li totiž činitelé vztažně stejná nebo různá znaménka.

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd,$$

$$(a + b)(c - d) = ac + bc - ad - bd,$$

$$(a - b)(c + d) = ac - bc + ad - bd,$$

$$(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd.$$

Důkaz. Dle §. 38., 1) a 2) jest

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d),$$

$$(a + b)(c - d) = a(c - d) + b(c - d),$$

$$(a - b)(c + d) = a(c + d) - b(c + d),$$

$$(a - b)(c - d) = a(c - d) - b(c - d),$$

z čehož dle §. 39., 1) a 2), pak dle §. 23, výsl. 1) plynou rovnice ve výroku uvedené.

Dodatky.

$$1) (a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2, a$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2;$$

t. j. čtverec součtu aneb rozdílu dvou čísel rovná se součtu čtverců těchto čísel, vztažně zvětšenému aneb zmenšenému o dvojnásobný součin obou čísel.

$$2) (a + b)(a - b) = a^2 - b^2;$$

t. j. součet dvou čísel násoben jejich rozdílem dává rozdíl jejich čtverců.

§. 41. 1) Mnohočlen se násobí číslem, násobíme-li jím každý člen mnohočlenu, a přidáme-li částečným součinům znaménka jednotlivých členů násobence.

$$(a - b - c + d - e) \cdot f = af - bf - cf + df - ef.$$

2) Máme-li číslo násobiti mnohočlenem, násobíme je každým členem mnohočlenu, a částečné součiny klademe sččetně aneb odččetně, jak totiž vzniknou z násobení sččetnými aneb odččetnými členy.

$$a \cdot (b - c - d + e - f) = ab - ac - ad + ae - af.$$

3) Mnohočlen se násobí mnohočlenem, jestliže každý člen násobence násobíme každým členem násobitele, a částečné součiny klademe sččetně neb odččetně, jak totiž vzniknou násobením členů se stejnými nebo různými znaménky početnými.

$$(a - b + c)(d - e - f) = ad - bd + cd - ae + be - ce - af + bf - cf.$$

Pravdivost těchto tří pouček vysvětluje §. 38.—40.

Dodatek. Máme-li násobiti mnohočleny, jichžto členy mají stejné mocnence, spořádejme je dříve vzestupně nebo sestupně, částečné součiny, které budou taktéž spořádané, píšme tak, aby stejnojmenné členy byly pod sebou, konečně snímejme.

$$\text{U př. } 4a^2 - 3a - 4 \text{ (násobenec)}$$

$$3a^2 - 7a + 5 \text{ (násobitel)}$$

$$\hline 12a^4 - 9a^3 - 12a^2$$

$$- 28a^3 + 21a^2 + 28a$$

$$+ 20a^2 - 15a - 20$$

$$\hline 12a^4 - 37a^3 + 29a^2 + 13a - 20 \text{ (součin).}$$

§. 42. Z vět předešlých §§. můžeme k určení součinu z dvou členů kterýchkoli výrazů sestaviti následující pravidla:

1) Co do znaménka jest nám klásti součin dvou členů sčtetně aneb odčtetně, jak totiž tyto členy mají stejná neb rozličná znaménka početná.

2) Součinitele v součinu dvou členů obdržíme násobením součinitelů těchto členů; neboť

$$3a \cdot 4b = 3 \cdot a \cdot 4 \cdot b = 3 \cdot 4 \cdot a \cdot b = 12 ab.$$

3) Hlavní veličinu v součinu dvou členů obdržíme, jestliže činitele, přicházející v hlavních veličinách těchto členů, klademe vedle sebe v abecedním pořádku, a při mocninách o stejných mocněncích povýšíme společného mocněnce na mocninu, kterou udává součet mocnitelů.

§. 43. 1) Rovné násobeno rovným dává rovné.

$$\text{Je-li } a = b,$$

$$c = d,$$

$$\hline \text{tedy } ac = bd,$$

což plyne přímo z §. 7., 3).

2) Rovné násobeno nerovným dává nerovné s týmž znaménkem nerovnosti.

$$\text{Je-li } a = b,$$

$$c > d,$$

$$\hline \text{tedy } ac > bd.$$

Důkaz. Budiž $c = d + v$, tedy dle 1) $ac = b(d + v)$, čili $ac = bd + bv$. Ale $bd + bv > bd$ (§. 7., 5), tedy také $ac > bd$.

3) Nerovné násobeno nerovným při témže znaménku nerovnosti dává nerovné s týmž znaménkem nerovnosti.

$$\text{Je-li } a > b,$$

$$c > d,$$

$$\hline \text{tedy } ac > bd.$$

Důkaz dle 2) a §. 39., 1) podobá se předešlému.

II. Dělení prostých čísel celistvých.

§. 44. Číslo a dělití číslem b znamená, že součin a dvou čísel a z b jakožto jednoho z těchto činitelů hledati činitele druhého. Daný součin a slove dělenec, daný činitel b dělitel, a činitel, kterého hledáme, podíl: Tohoto označujeme $a : b$ aneb $\frac{a}{b}$.

Podíl je tedy výraz čísla, jehož součin s dělitelem rovná se dělenci, t. j.

$$\frac{a}{b} \cdot b = a.$$

(Je-li dán násobitel co dělitel, dělení co do pojmu podstatně se liší od dělení, kdy násobenec dán jest co dělitel. V prvním případě jest skutečné dělení, při němž hledá se díl, jenž tolikrát položen, kolik udává dělitel, dá dělence; dělitel v tom případě jest číslo bezejmenné, dělenec může míti jmeno, jež podrží pak i podíl. U př. 15 zl. : 3 = 5 zl. V druhém případě dělení jest porovnání čili měření, při čem se vyšetřuje, kolikrát jest dělitel obsažen v dělenci; je-li zde dělenec pojmenován, musí dělitel býti stejnojmenný, podíl jest číslo bezejmenné. U př. 15 zl. : 3 zl. = 5.

Podíl co pouhé číslo musí však při stejném dělenci a děliteli v obou případech býti tentýž (§. 35.); při odvozování pravidel o dělení není tedy třeba tyto dva druhy dělení zvláště rozeznávati.)

Chceme-li provéstí dělení, hledáme buď v řadě čísel ono číslo, jež tolikrát položeno, kolik udává dělitel, dá dělence, aneb odčítáme dělitele nejprvé od dělence, pak pokaždé od zbytku, kolikrát vůbec možná; číslo, kteréž udává, kolikrát jsme odčítali, jest podíl. Dělení dvou čísel možná jen tehdy provéstí v přirozené řadě čísel, je-li dělenec násobkem dělitele (§. 33., 1).

V následujících větách budeme tedy prozatím předpokládati, že dělenci přicházejících podílů jsou násobky svých dělitelů.

§. 45. Výsledky. 1) Podíl dvou čísel násoben dělitelem dává dělence.

$$(a : b) \cdot b = a; \quad b \cdot (a : b) = a.$$

2) Součin dvou čísel dělen jedním činitelem dává druhého činitele.

$$ab : a = b; \quad ab : b = a.$$

3) Číslo se nemění, násobíme-li a dělíme-li je týmž číslem.

$$a = (ab) : b; \quad a = (a : b) \cdot b.$$

Násobení a dělení jsou tedy výkony protivné; toto jest obrácený výkon onoho.

4) Každé číslo děleno sebou samým dává 1 za podíl.

$$a : a = 1; \text{ neboť } 1 \cdot a = a.$$

5) Každé číslo děleno 1 dává sebe samo za podíl.

$$a : 1 = a; \quad 1 : 1 = 1.$$

6) Nulla dělena číslem, které se liší od nuly, dává za podíl nullu.

$$0 : a = 0; \text{ neboť } 0 \cdot a = 0.$$

7) Nulla dělena nullou dává za podíl číslo kterékoli.

$$0 : 0 = a, \text{ kde } a \text{ jest číslo kterékoli; neboť } a \cdot 0 = 0.$$

Výraz $\frac{0}{0}$ je tedy význak neurčitosti.

8) Číslo (konečné), které se liší od nuly, děleno nullou dává podíl nekonečně veliký, t. j. číslo větší nežli každé číslo možné či stanovitelné.

Nekonečně veliké číslo označujeme ∞ .

Je-li $a : b = c$, tedy $cb = a$, a ubývá-li dělitele b při témže dělenci, bude c toutéž měrou růsti; je-li pak dělitel $b = 0$, bude c větší nežli kterékoli číslo stanovitelné, t. j. nekonečně veliké, protož

$$a : 0 = \infty.$$

9) Číslo (konečné), které se liší od nuly, děleno nekonečně velikým číslem dává za podíl nullu.

$$a : \infty = 0.$$

§. 46. Součin se dělí číslem, dělíme-li jím kteréhokoli činitele.

$$\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot b = a \cdot \frac{b}{c}.$$

$$\text{Důkaz. 1) } \frac{ab}{c} = \frac{\{(a:c) \cdot c\} \cdot b}{c} (\S. 45., 3) = \frac{\{(a:c) \cdot b\} \cdot c}{c} (\S. 36., 1) \\ = (a:c) \cdot b \text{ (dle §. 45., 2).}$$

$$2) \frac{ab}{c} = \frac{ba}{c} = \frac{b}{c} \cdot a \text{ (dle 1.)} = a \cdot \frac{b}{c}.$$

Výsledek. Má-li se číslo násobiti jakýmsi číslem a opět jiným číslem dělití, nezáleží na tom, v kterém pořadu násobíme a dělíme.

§. 47. Podíl se násobí číslem, násobíme-li jím dělence aneb dělíme-li jím dělitele.

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b} = \frac{a}{b:c}$$

Důkaz. a) $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$, což plyne z §. 46.

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{a}{b} \cdot c &= \left\{ \left(\frac{a}{b} \cdot c \right) \cdot \frac{b}{c} \right\} : \frac{b}{c} \text{ (dle §. 45., 3)} \\ &= \left\{ \frac{a}{b} \cdot \left(c \cdot \frac{b}{c} \right) \right\} : \frac{b}{c} \text{ (§. 36., 1)} = a : \frac{b}{c} \text{ (§. 45., 1).} \end{aligned}$$

§. 48. Podíl se dělí číslem, dělíme-li jím dělence aneb násobíme-li jím dělitele.

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a:c}{b} = \frac{a}{bc}$$

Důkaz. a) $\frac{a}{b} : c = \left\{ \left(\frac{a}{b} \cdot c \right) \cdot b \right\} : b \text{ (§. 45., 3)} = (a:c) : b$
(dle §§. 47. a 45., 1).

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{a}{b} : c &= \left[\left(\frac{a}{b} : c \right) \cdot bc \right] : bc \text{ (§. 45., 3)} = \left[\left\{ \left(\frac{a}{b} : c \right) \cdot c \right\} \cdot b \right] : bc \\ &\text{(dle §. 36., 2)} = a : bc \text{ (§. 45., 2) a 1).} \end{aligned}$$

Výsledek. Máme-li číslo dělití dvěma čísly, nezáleží na tom, v kterém pořádku jimi dělíme.

§. 49. 1) Číslo dělí se součinem, dělíme-li je jedním z činitelů, podíl pak druhým činitelem. (Obrácení §. 48.).

$$\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b.$$

2) Číslo se násobí podílem, pakli je násobíme dělencem a součin ten dělíme dělitelem. (Obrácení §. 46.)

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot b.$$

3) Číslo se dělí podílem, pakli je dělíme dělencem a podíl tento násobíme dělitelem. (Obrácení §. 47.)

$$a : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}.$$

§. 50. 1) Podíl se násobí podílem, jestliže součin dělenců dělíme součinem dělitelů.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

$$\text{Důkaz. } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{b} : d \text{ (§. 49., 2)} = \frac{ac}{bd} \text{ (§. 48.).}$$

2) Podíl se dělí podílem, dělíme-li podíl dělců podílem dělitelů, aneb násobíme-li dělence podílu prvního dělitelem druhého a součin tento dělíme součinem dělitele podílu prvního a dělence podílu druhého.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d} = \frac{ad}{bc}.$$

$$\text{Důkaz. a) } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b} \cdot d \text{ (§. 49., 3)} = \frac{a : c}{b : d} \text{ (§. 47.);}$$

$$\text{b) } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{b} : c \text{ (§. 49., 3)} = \frac{ad}{bc} \text{ (§. 48.).}$$

§. 51. 1) Součin se nemění, jestliže jednoho činitele jakýmsi číslem násobíme a druhého činitele tímž číslem dělíme.

$$ab = ac \cdot (b : c) = (a : c) \cdot bc.$$

$$\text{Důkaz. } ab = a \cdot \{(b : c) \cdot c\} \text{ (§. 45., 3)} = ac \cdot (b : c) \text{ (§. 36., 2)}$$

$$ab = a \cdot \{(b : c) : c\} \text{ (§. 45., 3)} = (a : c) \cdot bc \text{ (§. 49., 2).}$$

2) Podíl se nemění, pakli dělence i dělitele tímž číslem násobíme aneb dělíme.

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} = \frac{a : c}{b : c}.$$

$$\text{Důkaz. } \frac{a}{b} = \frac{a}{bc : c} \text{ (§. 45., 3)} = \frac{ac}{bc} \text{ (§. 49., 3);}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{(b : c) \cdot c} \text{ (§. 45., 3)} = \frac{a : c}{b : c} \text{ (§. 49., 1).}$$

(Předešlé věty o dělitelnosti §§. 46.—51. jsou podobny větám o sečítání §§. 16.—21.).

§. 52. Dělíme-li mocniny téhož mocněnce, podíl rovná se společnému mocněnci povýšenému na mocninu, kterou udává rozdíl mocnitele v dělenci a děliteli.

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Důkaz. Zde musíme předpokládati, že n není větší nežli m , abychom dle §. 44. mohli provéstí dělení. Položme tedy $m = n + v$, čili $m - n = v$, kde může též $v = 0$; bude pak

$$a^m : a^n = a^{n+v} : a^n = a^n \cdot a^v : a^n \text{ (§. 36.)}$$

$$= a^v \text{ (§. 45., 2)} = a^{m-n}.$$

$$\text{U př. } a^5 : a^2 = a^3; a^4 : a = a^3.$$

Dodatek. Dle této věty jest $a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$. Z §. 45., 4) vysvítá však, že $a^m : a^m = 1$, protož také $a^0 = 1$, t. j. každá konečná veličina, která se liší od nuly, povýšena na nulltou mocninu rovná se 1.

§. 53. 1) Součet se dělí číslem, dělíme-li jím každého sčítance a sečteme-li částečné podíly.

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

$$\begin{aligned} \text{Důkaz. } (a+b):c &= \left(\frac{a}{c} \cdot c + \frac{b}{c} \cdot c \right) : c \text{ (§. 45., 3)} \\ &= \left[\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} \right) \cdot c \right] : c \text{ (§. 38., 1) výsl.)} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \text{ (§. 45., 2).} \end{aligned}$$

Výsledek. Dva podíly o stejném děliteli se sečítají, dělíme-li součet jejich dělenců společným dělitelem.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

2) Rozdíl dělí se číslem, jestliže jím dělíme menšence i menšitele a druhý podíl odčítáme od prvního.

$$\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}.$$

Důkaz je tentýž jako v případě 1).

Výsledek. Dva podíly o stejném děliteli se odčítají, pakli rozdíl jejich dělenců dělíme společným dělitelem.

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Kterak se sečítají aneb odčítají podíly o různých dělitelích, bude vysvětleno později (§. 97. a 99.).

§. 54. Mnohočlen dělíme číslem, pakli jím dělíme každý člen mnohočlenu a částečným podílům dáme početná znaménka jednotlivých členů dělence.

$$\frac{a-b-c+d-e}{f} = \frac{a}{f} - \frac{b}{f} - \frac{c}{f} + \frac{d}{f} - \frac{e}{f}.$$

Pravdivost věty této vysvítá z opětného použití §. 53., 1) a 2).

§. 55. Měli bychom vyvinouti podíl $\frac{A}{B}$, kde A a B jsou mnohočleny spořádané týmž způsobem. Poněvadž dělenec A jest součin dělitele B a podílu, musí dle §. 41., 3) první člen dělence

A rovnati se součinu prvního členu v děliteli B a prvního členu v podílu. Protož určíme první člen q podílu, dělíme-li první člen dělence prvním členem dělitele, tudíž

$$\frac{A}{B} = q + x,$$

kde x znamená ostatní část podílu. Tuto pak určíme následovně:

$$x = \frac{A}{B} - q = \frac{A}{B} - \frac{Bq}{B} = \frac{A - Bq}{B} \text{ (výsl. §. 53., 2); protož}$$

$$\frac{A}{B} = q + \frac{A - Bq}{B}.$$

Ostatní část podílu tedy obdržíme, pakli dělitele násobíme prvním členem podílu, součin odečteme od dělence a zbytek dělíme dělitelem.

Na opětém použití vzorce $\frac{A}{B} = q + \frac{A - Bq}{B}$ spočívá tudíž následující způsob dělení dvou mnohočlenů:

Je-li dělenec i dělitel stejně spořádan, dělme první člen dělence prvním členem dělitele, čím obdržíme první člen podílu; tímto částečným podílem násobme celého dělitele a součin odečteme od celého dělence. Se zbytkem naložíme tak jako s původním dělencem, abychom obdrželi druhý člen podílu a t. d.

$$\text{U př. } (3a^2 - 4ab - 4b^2) : (3a + 2b) = a - 2b$$

$$\begin{array}{r} 3a^2 + 2ab \\ - \quad - \\ \hline - 6ab - 4b^2 \\ - 6ab - 4b^2 \\ + \quad + \\ \hline 0 \end{array}$$

Zvláštní podíly jsou:

$$1) (a^2 - b^2) : (a + b) = a - b; \quad 2) (a^2 - b^2) : (a - b) = a + b;$$

$$\begin{array}{r} a^2 + ab \\ - \quad - \\ \hline - ab - b^2 \\ - ab - b^2 \\ + \quad + \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2 - ab \\ - \quad + \\ \hline + ab - b^2 \\ + ab - b^2 \\ - \quad + \\ \hline 0 \end{array}$$

t. j. rozdíl čtverců dvou čísel dělen součtem (rozdílem) těchto čísel dává za podíl rozdíl (součet) týchž čísel.

§. 56. Dle předešlých vět můžeme k určení podílu dvou členů kterýchkoli výrazů sestaviti následující pravidla:

1) Co do znaménka jest nám klásti podíl dvou členů sččetně aneb odččetně, jak totiž tyto členy mají stejná nebo rozličná znaménka početná. (Plyne z §. 41. a §. 45., 2).

2) Součinitel podílu dvou členů rovná se podílu součinitelů těchto členů.

3) Hlavní veličinu v podílu dvou členů obdržíme, jestliže v hlavních veličinách těchto členů vynecháme stejný počet společných činitelů, tudíž při mocninách o stejných mocněncích povýšíme tohoto mocněnce v podílu na mocninu, kterou udává rozdíl mocnitelů tohoto společného mocněnce.

§. 57. 1) Rovné děleno rovným dává rovné.

$$\begin{array}{l} \text{Je-li} \\ a = b, \\ c = d, \\ \hline \text{tedy} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \end{array}$$

což plyne přímo z §. 7., 3).

2) Nerovné děleno rovným dává nerovné s tímž znaménkem nerovnosti.

$$\begin{array}{l} \text{Je-li} \\ a > b, \\ c = d, \\ \hline \text{bude} \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{d}. \end{array}$$

Důkaz. Kdyby nebylo $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$, muselo by $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{d}$; pak by vztažně také $\frac{a}{c} \cdot c \leq \frac{b}{d} \cdot d$ (§. 43., 1) a 2), protož $a \leq b$ (dle §. 45., 1), což se neshoduje s podmínkou.

3) Rovné děleno nerovným dává nerovné s opačným znaménkem nerovnosti.

$$\begin{array}{l} \text{Je-li} \\ a = b, \\ c > d, \\ \hline \text{bude} \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{d}. \end{array}$$

Důkaz. Kdyby $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{d}$, muselo by v obou případech

$\frac{a}{c} \cdot c > \frac{b}{d} \cdot d$ (§. 43., 2) a 3), protože $a > b$ (§. 45., 1), což se neshoduje s podmínkou.

4. Nerovné děleno nerovným s opačným znaménkem nerovnosti dává nerovné s prvotním znaménkem nerovnosti.

Je-li

$$\begin{array}{l} a > b, \\ c < d, \end{array}$$

tedy

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{d}.$$

Důkaz. Kdyby $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$, muselo by v obou případech

$\frac{a}{c} \cdot c < \frac{b}{d} \cdot d$ (§. 43., 2) a 3), tudíž $a < b$ (§. 45., 1), což jest proti podmínce.

III. Násobení a dělení celistvých čísel algebraických.

§. 58. Pojem násobení, ustanovený pro čísla prostá (§. 33.), musí být rozšířen pro čísla kladná a záporná z ohledu k jejich protivě, tak sice, že zde musíme podlé kladného aneb záporného násobitele násobence položit v témž nebo v protivném smyslu, t. j. s nezměněným nebo protivným znaménkem tolikrát co sčítance, kolik jednotostí obsahuje násobitel.

Dva činitelé se stejnými znaménky dávají součin kladný, dva činitelé se znaménky opačnými dávají součin záporný.

$$(+ a) \cdot (+ b) = + ab,$$

$$(- a) \cdot (- b) = + ab,$$

$$(+ a) \cdot (- b) = - ab,$$

$$(- a) \cdot (+ b) = - ab,$$

Důkaz. $(+ a) \cdot (+ b)$ znamená, že máme násobence $+ a$ položit b krát co sčítance, čím dle §. 28. výsl. 2) obdržíme součin kladný.

$(- a) \cdot (- b)$ udává, že máme násobence $- a$ se znaménkem opačným, tedy $+ a$ položit b krát co sčítance, čím opět obdržíme kladný výsledek.

V třetím a čtvrtém případě vedeme důkazy podobně.

Výsledky. 1) Součin dvou čísel algebraických se nemění, vyměnímeli násobence za násobitele.

Součin $(\pm a) \cdot (+b) = \pm ab$, $a(+b) \cdot (\pm a) = \pm ba = \pm ab$ (§. 35.);
protož $(\pm a) \cdot (+b) = (+b) \cdot (\pm a)$. Taktéž

$$(\pm a) \cdot (-b) = (-b) \cdot (\pm a).$$

2) Součin několika kladných čísel jest kladný.

3) Součin záporných čísel jest kladný aneb záporný, buď že počet činitelů jest sudý aneb lichý (§. 76. dodatek 2).

§. 59. Součet dvou algebraických čísel násobí se číslem algebraickým, pakli jím násobíme každého sčítance a sečteme částečné součiny.

Důkaz. Jsou-li čísla b a c čísla prostá, tedy

$$1) (a \pm b) \cdot (+c) = \underbrace{(a \pm b) + (a \pm b) + (a \pm b) + \dots}_{\text{ekrát}} \quad (\S. 58.)$$

$$= \underbrace{a + a + a + \dots}_{\text{ekrát}} + \underbrace{(\pm b) + (\pm b) + (\pm b) + \dots}_{\text{ekrát}} \quad (\S. 30., 3)$$

$$= a \cdot (+c) + (\pm b) \cdot (+c) \text{ dle } \S. 58.$$

$$2) (a \pm b) \cdot (-c) = -a - (\pm b) - a - (\pm b) - a - (\pm b) - \dots \text{ekrát} \quad (\S. 58.)$$

$$= \underbrace{-a - a - a - \dots}_{\text{ekrát}} - \underbrace{(\pm b) - (\pm b) - (\pm b) - \dots}_{\text{ekrát}} \quad (\S. 30., 3)$$

$$= a \cdot (-c) + (\pm b) \cdot (-c) \text{ dle } \S. 58.$$

§. 60. Pojem dělení, ustanovený v §. 44. pro čísla prostá, má platnost i pro čísla algebraická.

Podíl dvou čísel algebraických jest kladný aneb záporný, buď že mají obě čísla stejná aneb opačná znaménka.

$$(+a) : (+b) = +q,$$

$$(-a) : (-b) = +q,$$

$$(+a) : (-b) = -q,$$

$$(-a) : (+b) = -q,$$

značí-li q prostou hodnotu podílu.

Důkaz. Je-li dělenec (součin) kladný, musejí dle §. 58. dělitel i podíl (oba činitelé) míti stejná znaménka; tudíž

$$(+a) : (+b) = +q, \text{ a } (+a) : (-b) = -q.$$

Je-li dělenec záporný, musejí dělitel a podíl míti různá znaménka; protož $(-a) : (+b) = -q$, a $(-a) : (-b) = +q$.

§. 61. Všecka pravidla dokázaná o součinech a podílech celistvých čísel možná pouhým přetvořením odvoditi z pouček

$$a + b = b + a \text{ (§. 10.),}$$

$$ab = b \cdot a \text{ (§. 35.), a}$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \text{ (§. 38.),}$$

kde a, b, c značí prostá čísla celistvá. Poněvadž pak tyto tři poučky jsou platny též pro čísla algebraická (§. 30., 3), §. 58. výsl. 1) a §. 59.), vztahují se všechny věty o součinech a podílech, dokázané pro celistvá čísla prostá, též na celistvá čísla algebraická.

Zvláště jsou věty o násobení a dělení mnohočlenů (§§. 41., 42., 54.—56.) platny též pro součty algebraické; jen že zde početné a odčtené členy (ohledem k §. 31.) musíme považovati za kladné a záporné sčítance.

Co se týče vět o spojení rovností a nerovností (§. 43. a 57.), má platnost poznámka učiněná v §. 32. dodatek 2).

IV. Dekadická čísla celistvá.

1. Soustavy číselné.

Soustavy číselné vůbec.

§. 62. Přehledné spořádání všech zvláštních čísel k tomu cíli, abychom několika číselnými výrazy představili každé číslo jakkoli veliké, nazývá se soustavou číselnou.

Máme-li utvořiti soustavu číselnou, čítáme v přirozené řadě čísel jen až k určitému, 1 však převyšujícimu číslu b , kteréž ještě bezprostředně chceme pojmuti, a jemuž říkáme základ soustavy číselné. Považujeme-li toto číslo za novou jednotu, a přijdeme-li dalším čítáním na číslo, kteréž obsahuje tuto novou jednotu tolikráte, kolik udává základ, tedy na číslo $b \cdot b = b^2$, považujeme opět toto číslo za novou jednotu, čili za jednotu nejbližší vyššího řádu. Dospějeme-li dalším čítáním k číslu, kteréž obsahuje vyšší jednotu b^2 tolikrát, kolik b udává, tedy k číslu $b^2 \cdot b = b^3$, považujeme toto číslo za jednotu řádu ještě vyššího. Pokračujeme-li v tomto čítání, můžeme utvořiti nové jednoty řádů vždy vyšších.

Jednosti po sobě jdoucí $b, b^2, b^3 \dots$ jeví se co mocniny základu b , a slovou dle mocnitelů jednoty řádu prvního, druhého, třetího. . . Původní jednot b lze také nazvati jednotí řádu nulltého proto, že $1 = b^0$ (§. 52. dod.).

Každé číslo můžeme představit co součet částí, z nichžto každá obsahuje jednotu určitého řádu se součinitelem, kterýž jest menší základu.

Důkaz. Je-li b^n nejvyšší jednot, přicházející v celistvém čísle N , můžeme položit

$$N = a_n b^n + N_1,$$

kde musí býti $a_n < b$ a $N_1 < b^n$. Rovněž možná dále položit:

$$N_1 = a_{n-1} b^{n-1} + N_2, \text{ kde } a_{n-1} < b, N_2 < b^{n-1};$$

$$N_2 = a_{n-2} b^{n-2} + N_3, \text{ kde } a_{n-2} < b, N_3 < b^{n-2};$$

$$\dots \dots \dots$$

$$N_{n-2} = a_2 b^2 + N_{n-1}, \text{ kde } a_2 < b, N_{n-1} < b^2;$$

$$N_{n-1} = a_1 b + a_0, \text{ kde } a_1 < b, a_0 < b.$$

Dosadíme-li znenáhla hodnoty $N_1, N_2, \dots, N_{n-2}, N_{n-1}$ do N , obdržíme

$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + a_{n-2} b^{n-2} + \dots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$,
v čem ostatně někteří aneb veškerí součinitelé $a_{n-1}, a_{n-2} \dots a_1, a_0$ mohou rovnati se nulle.

Tento výraz je tedy všeobecný tvar kteréhokoli celistvého čísla v číselné soustavě, jejíž základem jest b .

Máme-li v této soustavě pojmenovati všecka čísla libovolná, postačí, jestliže pouze číslům menším nežli b , jakož i po sobě jdoucím mocninám čísla b přidáme zvláštní jmena. Chceme-li v této soustavě všecka čísla libovolná písemně představit, máme potřebu zvláštních znamének (číslic) jen pro čísla menší nežli b a znaménka 0, kde není určité mocniny b , tedy celkem tolika číslic, mnoholi udává základ b .

Můžeme zbudovati nesčíslné množství soustav číselných proto, že lze položit za základ každé celistvé číslo, kteréž jest větší nežli 1. Nejméně znamének požaduje dyadická soustava číselná, jejíž základ jest 2, poněvadž tu každé číslo lze představit znaménky 0 a 1; ale přece soustava tato jest nepohodlna proto, že i malá čísla musejí býti psána mnoha číslicemi

Dekadická (desetinná) soustava číselná.

§. 63. Všeobecně užívá se dekadické soustavy číselné, jejížto základ jest deset.

V soustavě této vyjadřujeme prvních devět čísel (jednotí) známými číslovkami jedna, dvě, tři, čtyry, pět, šest, sedm, osm, devět, a jmenujeme jednotu řádu prvního, druhého, třetího, čtvrtého vztažně desítky, sta, tisíce, desettisíce, statisíce Spojíme-li s číslovkami předešlými jména po sobě jdoucích řádů jednotí, můžeme tím pojmenovati číslo kterékoli velikosti.

K písemnému naznačení čísel dekadických stačí číslice pro prvních devět čísel: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, k nimž připojíme 0.

Označíme-li písmeny a, b, c, p, q, r některé z čísel 0, 1, 2, 8, 9, jest výraz

$$r \cdot 10^n + q \cdot 10^{n-1} + p \cdot 10^{n-2} + \dots + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a$$

všeobecný tvar celistvého čísla dekadického. Ale tento tvar krátime tak, že vynechávající mocniny čísla 10 píšeme jen součinitele (číslíce) a každé číslici dáváme desateronásobnou hodnotu, postavíme-li ji o jedno místo v levo. V tom smyslu jest u př.

$$\begin{aligned} 35684 &= 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 4, \text{ čili} \\ &= 30000 + 5000 + 600 + 80 + 4. \end{aligned}$$

Řád každé jednotlivé číslice určíme mocnitelem oné mocniny desítky, za jejíhož součinitele musíme číslici považovati; tohoto mocnitele desítky možná tedy nazvati řadným mocnitelem. U př. v čísle 35684 má číslice 6 řadného mocnitele 2, nejvyšší číslice 3 řadného mocnitele 4.

Výsledky. 1) V každém dekadickém čísle jest řadný mocnitel nejvyššího místa o 1 menší nežli počet cifer.

2) Hodnota každého čísla dekadického jest menší nežli jednotu vyššího místa její nejvyšší číslici bezprostředně předcházející. Neboť kdyby i každá číslice tohoto čísla měla největší možnou hodnotu 9, museli bychom přece jednu jednotu připočísti, abychom obdrželi jednu jednotu onoho vyššího místa.

3) Každé mciferné číslo jest $\geq 10^{m-1}$, ale $< 10^m$, což plyne z 1) a 2).

2. Počítání čísla dekadickými.

Sečítání čísel dekadických.

§. 64. Počítání celistvými čísly dekadickými spočívá na pravidlech, odvozených pro počítání mnohočleny spořádanými dle mocnin téhož mocněnce; ale z příčiny jednoduššího představení čísel dekadických číslicemi vedle sebe psanými musíme ohled míti k řádu jednotlivých těch číslic. Je-li

$$\begin{array}{rcll} M & = & d \cdot 10^3 + & c \cdot 10^2 + & b \cdot 10 + & a, & a \\ N & = & & r \cdot 10^2 + & q \cdot 10 + & p, & \text{tedy} \end{array}$$

$$M + N = d \cdot 10^3 + (c + r) \cdot 10^2 + (b + q) \cdot 10 + (a + p).$$

Při sečítání dekadických čísel kladou se tedy číslice téhož řadného místa pod sebe, pod ně pak pořadem součet číslic pod sebou stojících.

Je-li tento součet číslic dvouciferný, u př. $b + q = 1 \cdot 10 + m$, podržíme na tomto místě jenom nižší číslici m , vyšší pak připočteme k číslicím tohoto vyššího místa řadného. Hořejší součet by v tom případě nabyl tvaru:

$$M + N = d \cdot 10^3 + (c + r + 1) \cdot 10^2 + m \cdot 10 + (a + p).$$

§. 65. Součet dvou čísel má buď tolik číslic kolik větší sčítanec aneb o jednu číslici méně.

Má-li M m a N n číslic, a je-li $M > N$, tedy $M \geq 10^{m-1}$ ale $< 10^m$, taktéž $N \geq 10^{n-1}$, ale $< 10^n$; protož $M + N \geq 10^{m-1} + 10^{n-1}$, ale $< 10^m + 10^n$, tedy $M + N > 10^{m-1}$, ale $< 2 \cdot 10^m$. Součet $M + N$ má tedy nejméně m , a nejvýš $m + 1$ číslici.

Odčítání čísel dekadických.

§. 66. Je-li

$$\begin{array}{rcll} M & = & d \cdot 10^3 + & c \cdot 10^2 + & b \cdot 10 + & a, & a \\ N & = & & r \cdot 10^2 + & q \cdot 10 + & p, & \text{tedy} \end{array}$$

$$M - N = d \cdot 10^3 + (c - r) \cdot 10^2 + (b - q) \cdot 10 + (a - p).$$

Při odčítání dekadických čísel kladou se číslice téhož řadného místa opět pod sebe a pod ně rozdíl číslic pod sebou stojících.

Je-li číslice v menšiteli na některém řadném místě větší nežli číslice v menšenci, zvětšíme tuto o 10, abychom mohli odčítati; ale pak také menšitele zvětšíme o 10 jednotostí téhož řádu

aneb o 1 jednotu na nejbližší vyšším místě řádném, aby rozdíl zůstal beze změny (§. 21., 2). Je-li u př. $q > b$, předešlý rozdíl nabude tvaru následujícího:

$$M - N = d \cdot 10^3 + [c - (r + 1)] \cdot 10^2 + [(b + 10) - q] \cdot 10 + (a - p).$$

§. 67. Rozdíl dvou dekadických čísel má nejvyšší tolik číslic kolik menšenec, může jich však také míti neurčitě méně.

Je-li M číslo *mciferné*, N však *nciferné*, $M - N = D$, a $M = N + D$, tudíž (dle §. 65.) M má tolik číslic kolik větší z obou sčítanců N a D , aneb o jednu více. Proto D nemůže míti tolik číslic, kolik jich má M , ovšem pak neurčitě méně, pokud $N > D$.

Násobení čísel dekadických.

§. 68. 1) Je-li

$$M = e \cdot 10^4 + d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a, \text{ bude}$$

$$M \cdot p = ep \cdot 10^4 + dp \cdot 10^3 + cp \cdot 10^2 + bp \cdot 10 + ap.$$

Mnohociferné číslo se násobí jednociferným, násobíme-li jednotku, desítky, sta . . . násobence násobitelem, a napíšeme-li jednotlivé součiny pod násobené číslice.

Je-li některý tento součin dvouciferný, u př. $cp = r \cdot 10 + s$, podržme na tomto místě jenom nižší číslici s , vyšší r pak připočteme k součinu na tomto řádném místě vyšším.

2) Je-li M jakékoli číslo mnohociferné, a

$$N = p \cdot 10^3 + q \cdot 10^2 + r \cdot 10 + s, \text{ tedy}$$

$$M \cdot N = Mp \cdot 10^3 + Mq \cdot 10^2 + Mr \cdot 10 + Ms.$$

Máme-li tedy násobiti dvě čísla mnohociferná, násobme násobence každou číslicí násobitele, nejvyšší počínajíce; částečné součiny pořadem pak násobme sestupnými mocninami desítky, což se stane, pošineme-li každý následující součin o jedno místo vpravo, konečně sečteme pod sebou stojící číslice částečných součinů.

$$\begin{array}{r} \text{U př.} \quad 7318 \\ \quad 473 \\ \hline 2927200 \\ 512260 \\ 21954 \\ \hline 3461414 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{aneb} \quad 7318 \\ \quad 473 \\ \hline 29272 \\ 51226 \\ 21954 \\ \hline 3461414 \end{array}$$

Dodatek. Položíme-li násobitele pod násobence tak, aby jeho nejvyšší číslice přišla pod jednotní násobence, a napíšeme-li nejnížší číslici prvního částečného součinu pod nejnížší číslici násobence: jsou jednotlivé číslice v součinu téhož řádu jako přímo nad nimi stojící číslice v násobiteli.

§. 69. Součin dvou dekadických čísel má buď tolik číslic kolik oba činitelé dohromady, aneb o jednu číslici méně.

Budiž M číslo m ciferné a N n ciferné, tedy $M \geq 10^{m-1}$, ale $< 10^m$, taktéž $N \geq 10^{n-1}$, ale $< 10^n$; protož $MN \geq 10^{m+n-2}$, ale $< 10^{m+n}$. Součin MN má tedy nejméně $m+n-1$ a nejvýš $m+n$ číslic.

Dělení čísel dekadických.

§. 70. Dělcem budiž součin

$M = cr \cdot 10^4 + (br + cq) \cdot 10^3 + (ar + bq + cp) \cdot 10^2 + (aq + bp) \cdot 10 + ap$
kterýž pro snadnější přehled píšme takto:

$$M = cr \cdot 10^4 + \begin{array}{c} br \\ + cq \end{array} \cdot 10^3 + \begin{array}{c} ar \\ + bq \\ + cp \end{array} \cdot 10^2 + \begin{array}{c} aq \\ + bp \end{array} \cdot 10 + ap,$$

a dělitelem budiž číslo

$$N = c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a,$$

tedy dle §. 55. obdržíme

$$M:N = (cr \cdot 10^4 + \begin{array}{c} br \\ + cq \end{array} \cdot 10^3 + \begin{array}{c} ar \\ + bq \\ + cp \end{array} \cdot 10^2 + \begin{array}{c} aq \\ + bp \end{array} \cdot 10 + ap) : (c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a) = r \cdot 10^2 + q \cdot 10 + p$$

$$\begin{array}{r} cr \cdot 10^4 + br \cdot 10^3 + ar \cdot 10^2 \\ - \\ + cq \cdot 10^3 + bq \cdot 10^2 + bp \cdot 10^2 \\ - \\ + cq \cdot 10^3 + bq \cdot 10^2 + bp \cdot 10^2 \\ - \\ + cp \cdot 10^2 + bp \cdot 10^2 + bp \cdot 10^2 \\ - \\ + cp \cdot 10^2 + bp \cdot 10^2 + bp \cdot 10^2 \\ - \\ 0 \end{array}$$

$$+ cq \cdot 10^3 + bq \cdot 10^2 + aq \cdot 10$$

$$+ cp \cdot 10^2 + bp \cdot 10^2 + bp \cdot 10^2$$

$$+ cq \cdot 10^3 + bq \cdot 10^2 + aq \cdot 10$$

$$+ cp \cdot 10^2 + bp \cdot 10^2 + bp \cdot 10^2$$

$$+ cp \cdot 10^2 + bp \cdot 10^2 + bp \cdot 10^2$$

0

Považujeme tedy, poněvadž cr může být i dvouciferný, tolik nejvyšších číslic dělence, kolik jich má dělitel, aneb kdyby

tyto byly menší nežli dělitel, o jednu více za prvního částečného dělence, násobíme vyhledanou nejvyšší číslici podílu celého dělitele a odčítáme součin od prvního částečného dělence. Ku zbytku připsíme nejbližší následující číslici dělence, určíme z tohoto nového částečného dělence druhou číslici podílu, a pokračujeme v tomto výkonu, až jsou všechny číslice z dělence v počet položeny. Při tom dlužno míti na zřeteli, že zbytek vzniklý odčítáním částečných součinů, musí býti vždy menší nežli dělitel, poněvadž bychom jinak v podílu obdrželi druhou číslici téhož místa řadného.

U př. $43741 : 83 = 527$, aneb 43741 , aneb 43741

$$\begin{array}{r} 415 \\ \underline{224} \\ 166 \\ \underline{581} \\ 581 \\ \underline{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 83 \\ \underline{527} \\ 415 \\ \underline{224} \\ 166 \\ \underline{581} \\ 581 \\ \underline{0} \end{array}$$

(V třetím tvaru jsme částečné součiny odčítali hned při násobení a psali jsme jenom zbytky.)

Dodatek. Napíšeme-li dělitele pod prvního částečného dělence, a první číslici podílu pod jednotu dělitele, každá číslice podílu je téhož řádu jako číslice v dělenci přímo nad ní stojící.

§. 71. Podíl má buď tolik číslic, kolik činí rozdíl počtu číslic v dělenci a děliteli, aneb o jednu číslici více.

Je-li M číslo *mciferné* a N *nciferné*, kde $M > N$ a $M : N = Q$, tudíž $M = N \cdot Q$, má (dle §. 69.) M tolik číslic, kolik činitelé N a Q dohromady, aneb o jednu číslici méně. Proto musí Q míti buď tolik číslic, kolik jich má M více nežli N , aneb ještě o jednu více.

V. Dělitelnost čísel.

§. 72. Dělíme-li číslo a číslem b , a podíl jest číslo celistvé, říkáme, že a jest dělitelno číslem b . Dělenec a slove v tom případě násobek (§. 33., 1) čísla b , a b jest míra čili dělitel čísla a .

Číslo, kteréž jest dělitelno jenom jedničkou a samo sebou, jmenuje se prvočíslo na prosto (absolutné), také pouze prvočíslo; každé jiné číslo nazývá se číslem složeným.

Číslo, jímž několik jiných čísel jest dělitelno, slove jejich společná míra. Čísla, nemající mimo jedničku žádného společného dělitele, jmenují se prvočísla vespolek (relativná).

Číslo, jež dvěma nebo několika jinými čísly jest dělitelno, slove jejich společný násobek.

Není-li číslo a dělitelno číslem b , jmenuje se číslo r , kteréž obdržíme, odečteme-li od dělenice a největší násobek čísla b , jenž v něm se nalézá, u př. bq , zbytek při dělení. Tudiž $r = a - bq$, z čehož $a = bq + r$.

1. Věty všeobecné.

§. 73. 1) Je-li několik čísel dělitelno jakýmsi číslem, jest jím dělitelný i jich součet.

Důkaz. Budiž m měrou čísel a, b, c , a $a : m = \alpha$, $b : m = \beta$, $c : m = \gamma$, kde α, β, γ znamenají čísla celistvá, tedy $a = m\alpha$, $b = m\beta$, $c = m\gamma$, a $a + b + c = m\alpha + m\beta + m\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)m$; proto $(a + b + c) : m = \alpha + \beta + \gamma =$ číslu celistvému.

2) Jsou-li dvě čísla dělitelna třetím číslem, jest jím i jich rozdíl dělitelný.

Důkaz. Budiž $a : m = \alpha$, $b : m = \beta$, tedy $a = m\alpha$, $b = m\beta$, a $a - b = m\alpha - m\beta = (\alpha - \beta)m$; protož $(a - b) : m = \alpha - \beta =$ číslu celistvému.

§. 74. 1) Je-li některé číslo dělitelno jiným, jest i každý jeho násobek tímto číslem dělitelný.

Důkaz. Budiž $a : m = \alpha$, tedy $a = m\alpha$, a $ap = mp\alpha$, z čehož $ap : m = p\alpha =$ číslu celistvému.

2) Je-li číslo jakési dělitelno složeným číslem, jest i dělitelno všemi jeho činiteli.

Důkaz. Budiž a dělitelno číslem m , a $m = pqr$; položíme-li $a : m = \alpha$, tedy $a = m\alpha$, čili $a = pqr\alpha$, z čehož $a : p = qr\alpha$, $a : q = pr\alpha$, $a : r = pq\alpha$.

3) Je-li jakési číslo dělitelno dvěma relativními prvočíslly, jest i dělitelno jich součinem.

Důkaz. Budiž a dělitelno relativními prvočíslly m a n . Poněvadž tato čísla nemají žádného společného činitele, a však

musí obsahovati všechny činitele čísel m a n , musí a obsahovati všechny činitele součinu mn , tedy musí býti a dělitelno součinem mn .

4) Je-li součin dvou činitelů dělitelný číslem, kteréž jest relativním prvočíslem s ohledem k jednomu z činitelů, je druhý činitel tímto číslem dělitelný.

Důkaz. Budiž součin ab dělitelný m , a čísla m a a buďtež prvočísla vespolek. Poněvadž a a m nemají společného činitele, musejí s ohledem k §. 46. veškerí činitelé čísla m býti obsaženi v b , aby totiž dle podmínky součin ab byl dělitelný m , t. j. b musí býti dělitelno číslem m .

5) Číslo, jež s dvěma aneb několika čísly jest prvočíslem relativním, jest jím také k jich součinu.

Důkaz. Je-li m prvočíslem relativním k a , b a c , t. j. nemá-li žádné z těchto čísel činitele, jenž by též v m byl obsažen, nemůže i součin abc , jenž dle §. 36. obsahuje pouze činitele čísel a , b a c , míti činitele čísla m .

6) Mocniny dvou relativních prvočísel jsou též prvočísla vespolek.

Důkaz. Jsou-li a a b prvočísla vespolek, musejí dle předešlé věty také a a bb , pak aa a bb a t. d., vůbec a^m a b^n býti prvočísla vespolek.

§. 75. 1) Je-li dělenec a dělitel jakýmsi číslem dělitelný, jest i zbytek při dělení týmž číslem dělitelný.

Důkaz. Má-li a a b společnou míru m , a dá-li a děleno b za podíl q se zbytkem r , bude $r = a - bq$ (§. 72.). Poněvadž jest a dělitelno m , taktéž b , tudíž i jeho násobek bq , musí i rozdíl $a - bq$, jenž rovná se r , býti dělitelný m .

Výsledek. Každá společná míra dělence a dělitele jest i společnou měrou dělitele a zbytku.

2) Každá míra dělitele a zbytku při dělení jest i měrou dělence.

Důkaz. Dá-li a děleno b za podíl q se zbytkem r , načež $a = bq + r$ (§. 72.), a je-li m společnou měrou b a r , bude i násobek bq dělitelný m , tudíž také součet $bq + r$, jenž se rovná dělenci a , dělitelný číslem m .

Výsledek. Každá společná míra dělitele a zbytku při dělení jest i společnou měrou dělence a dělitele.

2. Znamky dělitelnosti čísel dekadických.

§. 76. Dekadické číslo jest dělitelno dvěma anebo pěti, je-li nejnižší jeho číslice dělitelna vztažně dvěma anebo pěti.

Důkaz. Značí-li v dekadickém čísle N písmena $a, b, c, d, e, \dots$ pořadem číslice na místě jednotek, desítek, set, tisíc, desítitísíc $\dots$, bude

$$N = \dots 10000e + 1000d + 100c + 10b + a, \text{ protož}$$

$$N : 2 = \dots 5000e + 500d + 50c + 5b + \frac{a}{2}, a$$

$$N : 5 = \dots 2000e + 200d + 20c + 2b + \frac{a}{5}.$$

Je-li tedy a dělitelno dvěma nebo pěti, bude také N dělitelno těmi čísly.

Dodatky. 1) Dekadické číslo je dělitelno desíti, je-li nejnižší jeho číslice 0.

2) Číslo, mající na místě jednotek 0, 2, 4, 6 aneb 8, t. j. čísla dělitelná dvěma, slovou sudá. Číslo sudé, jakožto násobek 2, značí se vůbec $2m$, kde m představuje kterékoli číslo celistvé.

3) Číslo, mající na místě jednotek 1, 3, 5, 7 aneb 9, t. j. čísla, která nejsou dělitelna dvěma, slovou lichá. Poněvadž liché číslo jest o 1 větší nebo menší nežli sudé, jest $2m + 1$ aneb $2m - 1$ všeobecný tvar čísel lichých.

Výsledky. 1) Součet a rozdíl dvou čísel sudých aneb lichých jest číslo sudé.

2) Součet aneb rozdíl čísla sudého a lichého jest číslo liché.

3) Součin dvou sudých čísel jest sudý, součin dvou lichých čísel jest lichý:

4) Součin čísla sudého a lichého jest sudý.

§. 77. Dekadické číslo jest dělitelno čtyřmi aneb 25ti, jsou-li jeho nejnižší dvě číslice, za číslo považovány, dělitelny vztažně čtyřmi aneb 25ti.

Důkaz. $N = \dots 1000d + 100c + 10b + a$, tudíž

$$N : 4 = \dots 250d + 25c + \frac{10b + a}{4}, a$$

$$N : 25 = \dots 40d + 4c + \frac{10b + a}{25}.$$

Dodatek. Dekadické číslo jest dělitelno stem, jsou-li jeho nejnižší dvě číslice nuly.

§. 78. Dekadické číslo jest dělitelno osmi aneb 125ti, jsou-li jeho nejnižší tři číslice, za číslo považovány, dělitelny vztažně osmi aneb 125ti.

Důkaz. $N = \dots 10000e + 1000d + 100c + 10b + a$, protože

$$N : 8 = \dots 1250e + 125d + \frac{100c + 10b + a}{8}, a$$

$$N : 125 = \dots 80e + 8d + \frac{100c + 10b + a}{125}.$$

Dodatek. Dekadické číslo jest dělitelno tisícem, jsou-li jeho nejnižší tři číslice nuly.

§. 79. Dekadické číslo jest dělitelno třemi aneb devíti, je-li součet jeho číslic dělitelný třemi aneb devíti.

Důkaz. $N = \dots 1000d + 100c + 10b + a$,

$$= \dots 999d + d + 99c + c + 9b + b + a,$$

$$= \dots 999d + 99c + 9b + \dots + d + c + b + a, \text{ tudíž}$$

$$N : 3 = \dots + 333d + 33c + 3b + \frac{\dots + d + c + b + a}{3},$$

$$N : 9 = \dots + 111d + 11c + b + \frac{\dots + d + c + b + a}{9}.$$

Dodatek. Číslo dělitelné dvěma a třemi, jest i dělitelno šesti (§. 74., 3).

§. 80. Dekadické číslo jest dělitelno jedenácti, je-li rozdíl součtu číslic na místech lichých a součtu číslic na místech sudých buď 0, buď dělitelný jedenácti.

$$\begin{aligned}
 \text{Důkaz. } N &= \dots 100000f + 10000e + 1000d + 100c + 10b + a, \\
 &= \dots 100001f - f + 9999e + e + 1001d - d + 99c + c + \\
 &\quad 11b - b + a, \\
 &= \dots 100001f + 9999e + 1001d + 99c + 11b + (\dots e + c \\
 &\quad + a) - (\dots f + d + b),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{protož } N:11 &= \dots 9091f + 909e + 91d + 9c + b + \\
 &\quad + \frac{(\dots e + c + a) - (\dots f + d + b)}{11}.
 \end{aligned}$$

3. O prvočíslech zvlášť.

§. 81. Číslo n jest prvočíslo, je-li menší nežli čtverec čísla a , a není-li mimo jedničkou dělitelno žádným jiným číslem menším nežli a .

Důkaz. Dejme tomu, že n by bylo dělitelno jakýmsi číslem p , tedy by muselo $p \geq a$. Budiž pak $n : p = x$, čili $n = px$, kde x znamená číslo celistvé; pak by též $n : x = p$, čili n by bylo dělitelno x . Z $n < a^2$ a $p \geq a$ plyne však, že $n : p < a$, čili $x < a$. Bylo by tedy n dělitelno číslem $x < a$, což se neshoduje s podmínkou v poučce vyslovenou; protož n musí býti prvočíslo.

§. 82. Úloha. Mají se určiti všechna prvočísla až do vytknuté meze.

Utvořme čtverce přirozených čísel, až poslední čtverec překročí mez :

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, \dots$$

Prvočísla jsou pak všechna čísla v mezích 1 a 4, která mimo jedničku nejsou dělitelna žádným číslem menším nežli 2, tedy 1, 2 a 3; dále všechna čísla mezi 4 a 9, která mimo jedničku nejsou dělitelna žádným číslem menším nežli 3, t. j. 5 a 7, a t. d. což vysvítá z §. 81.

§. 83. Každé konečné složené číslo lze rozvésti na samé prvočinitele.

Každé složené číslo možná rozvésti aspoň na dva činitele; jsou-li to čísla složená, lze je opět rozvésti na činitele, kteřížto jsou buď již prvočísla aneb opět čísla složená; pokračujeme-li v posledním případě v rozvádění, musíme posléz obdržeti pouhé prvočinitele. Kdyby bylo jinak, muselo by dané číslo se skládati z nekonečného množství činitelů vesměs větších nežli 1,

muselo by tedy samo býti nekonečné, což se neshoduje s podmínkou.

§. 84. Složené číslo má se rozvésti na prvočinitele.

Dělme dané číslo nejmenším prvočíslem, jímž jest dělitelné, 1 vyjímajíce; podíl dělme opět nejmenším prvočíslem, kterým je dělitelný, ani předešlé prvočíslo co dělitele nevyjímajíce, a tak pokračujme, až co poslední podíl objeví se prvočíslo. Jednotliví dělitelé takto nalezení a poslední podíl jsou pak prvočinitelé daného čísla.

Máme-li u př. číslo 630 rozvésti na prvočinitele, bude

$$\begin{array}{rcl} 630 : 2 = 315 & \text{čili} & 630 \\ 315 : 3 = 105 & & 315 \\ 105 : 3 = 35 & & 105 \\ 35 : 5 = 7 & & 35 \\ & & 7 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{array}$$

protož $630 = 2 \cdot 315 = 2 \cdot 3 \cdot 105 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 35 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Dodatek. Chceme-li určití všechny činitele daného čísla, rozvedme toto číslo na prvočinitele, násobme druhým prvočinitelem prvního, třetím pak oba předcházející prvočinitele a složeného činitele, a tak násobme každým následujícím prvočinitelem všechny předcházející prvočinitele i složené činitele. U př.

$$\begin{array}{l|l} 210 & 2 \\ 105 & 3, 6 \\ 35 & 5, 10, 15, 30 \\ 7 & 7, 14, 21, 42, 35, 70, 105, 210. \end{array}$$

§. 85. Úloha. Obecné číslo má se rozvésti na činitele.

1) U jednočlenu představují jednotlivá písmena prvočinitele; jsou-li v něm obsaženy mocniny, položíme mocněnce tolikrát co činitele, kolik jednotstí má mocnitel. U př.

$$\begin{aligned} abc &= a \cdot b \cdot c; \\ ab^2m^3 &= a \cdot b \cdot b \cdot m \cdot m \cdot m; \\ 21a^2mx^2 &= 3 \cdot 7 \cdot a \cdot a \cdot m \cdot x \cdot x. \end{aligned}$$

2) Pro rozvádění mnohočlenů na činitele není obecných pravidel; zde budtež tedy uvedeny jen zvláštní případy častěji přicházející:

a) Mnohočlen, jehožto všechny členy mají společnou míru, rozvede se na činitele dle §. 38., jestliže vysadíme společnou míru co jednoho činitele, co druhého činitele pak položíme podíl, ježž určíme dělením mnohočlenu společnou měrou. U př.

$$1) 3ax - 4bx = x(3a - 4b);$$

$$2) 20x^4 - 16x^3 + 12x^2 = 4x^2(5x^2 - 4x + 3).$$

b) Zvláště pak plyne z §. 40., dod.:

$$1) a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b);$$

$$2) a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)(a - b);$$

$$3) a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

c) Tříčlen tvaru $x^2 \pm mxy \pm ny^2$ často lze rozvésti na činitele tím způsobem, že součinitele m druhého členu, jak totiž n jest kladné aneb záporné, vyjádříme co součet aneb rozdíl dvou čísel, jichžto součin rovná se n , načež vysadíme společné činitele. U př.

$$1) x^2 - 5xy + by^2 = x^2 - (3+2)xy + by^2 = x^2 - 3xy - 2xy + by^2 \\ = x(x-3y) - 2y(x-3y) = (x-3y)(x-2y).$$

$$2) a^2 + 3a - 10 = a^2 + (5-2)a - 10 = a^2 + 5a - 2a - 10 \\ = a(a+5) - 2(a+5) = (a+5)(a-2).$$

4. Největší společná míra.

§. 86. Největší společná míra několika čísel jest největší číslo, jímž tato čísla jsou dělitelna.

Úloha. Má se vyhledati největší společná míra dvou čísel.

Řešení. 1) Rozvedme daná čísla na prvočinitele; součin všech prvočinitelů, společných oběma číslům, dává hledanou největší míru společnou.

Důkaz. Součin takto utvořený jest zajisté společnou měrou obou čísel proto, že všickni jeho činitelé jsou v nich obsaženi; jest však také největší jejich měrou, neboť kdybychom s ním spojili ještě jednoho činitele, obě čísla nebyla by již tímto součinem dělitelna. U př.

Máme-li vyhledati nejv. sp. míru čísel 300 a 420, tedy

$$300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5,$$

$$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7;$$

tudiž nejv. sp. míra $= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

2) Řešení. (Bez rozvádění na prvočinitele.) Dělme větší dané číslo menším, dělitele pak zbytkem při dělení, nového dělitele opět novým zbytkem a t. d., až konečně zbytek se rovná nulle; poslední dělitel jest největší společnou měrou daných dvou čísel.

Důkaz. Jsou-li a a b obě daná čísla, $a > b$, a $r_1, r_2, r_3, r_4, \dots$ po sobě jdoucí zbytky při dělení, lze průběh početný představit takto:

Dělenec a ,	dělitel b ,	zbytek r_1 ,
" b ,	" r_1 ,	" r_2 ,
" r_1 ,	" r_2 ,	" r_3 ,
" r_2 ,	" r_3 ,	" r_4 , a t. d.

Nejprv jest patrné, že při takovémto dělení některý zbytek musí se rovnati nulle, poněvadž jest zbytek pokaždé číslo celistvé a nejméně o 1 menší nežli dělitel, jenž byl zbytkem předešlým. Budiž u př. $r_4 = 0$.

Pak jest zajisté r_3 společnou měrou čísel a a b . Z posledního dělení plyne, že r_3 jest společnou měrou čísel r_2 a r_3 ; ale r_2 a r_3 přicházejí v předešlém dělení co dělitel a zbytek, protož (§. 75., 2) výsl.) jest r_3 také společnou měrou dělence r_1 a dělitele r_2 , tudíž opět dle předcházejícího dělení, v němž r_1 a r_2 jsou vztažně dělitelem a zbytkem, r_3 jest spol. měrou čísel b a r_1 , konečně dle prvního dělení r_3 také spol. měrou daných čísel a a b .

Ale r_3 jest také největší společnou měrou a a b . Dejme tomu, že by tato čísla měla ještě větší společnou míru $m > r_3$, muselo by (dle §. 75., 1) výsl.) v prvním dělení, kde jest a dělencem a b dělitelem, m býti měrou dělitele b a zbytku r_1 , tedy dle druhého dělení také m měrou r_1 a r_2 , konečně dle třetího dělení by dělitel r_2 a zbytek r_3 musel býti dělitelný měrou m , což se však neshoduje s podmínkou $m > r_3$. Tudíž jest r_3 nejv. sp. měrou čísel a a b .

Příklady. 1) Máme-li vyhledati nejv. sp. míru čísel 1134 a 3654, tedy

3654 : 1134 = 3 se zbytkem 252	aneb 1134	3654	3
1134 : 252 = 4 " "	126	252	4
252 : 126 = 2 " "	0	0	2

Nejv. sp. míra = 126.

2) Nejv. sp. míra čísel 377 a 848.

377	448	2	Zde jest nejv. sp. míra = 1, daná čísla jsou tedy prvočísla vespolek.
1	94	4	
	0	94	

3) Podobně určíme nejv. sp. míru dvou mnohočlenů, u př.

$$3a^3 - 2a^2 - 3ab^2 + a + 2b^2 + b \quad \text{a} \quad a^2 - b^2.$$

$$(3a^3 - 2a^2 - 3ab^2 + a + 2b^2 + b) : (a^2 - b^2) = 3a - 2$$

3a ³	- 3ab ²	
- 2a ²	+ a	+ 2b ² + b
- 2a ²	+ 2b ²	
+ a	+ b	zbytek

$$(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b.$$

Nejv. sp. míra jest poslední dělitel $a + b$.

U obecných výrazů musíme mnohdy, abychom mohli provést dělení, násobiti dělence číslem, kteréž není činitelem dělitele, aneb dělitele děliti číslem, jež není činitelem dělence. Tím se nikterak nemění nejv. sp. míra obou výrazů, což plyne přímo z pojmu největší společné míry dvou čísel.

Příklad. Máme-li vyhledati nejv. sp. míru mnohočlenů

$$10x^2 + 14x - 12 \quad \text{a} \quad 7x^2 + 22x + 16,$$

násobme první mnohočlen číslem 7, kteréž není měrou druhého výrazu, abychom mohli provést dělení v celistvých číslech, totiž

$$(70x^2 + 98x - 84) : (7x^2 + 22x + 16) = 10$$

$$70x^2 + 220x + 160$$

- 122x	- 244	zbytek, dělen (-122)ti, dá x + 2.
--------	-------	-----------------------------------

$$(7x^2 + 22x + 16) : (x + 2) = 7x + 8$$

$$7x^2 + 14x$$

+ 8x	+ 16	Nejv. sp. míra jest $x + 2$.
+ 8x	+ 16	
0		

§. 87. S tímto způsobem určování největší společné míry bez rozvádění daných čísel na prvočinitele souhlasí také postup při vyhledávání nejv. spol. míry kterýchkoli dvou veličin stejnorodých (u př. dvou přímek). Odnímáme totiž menší

veličinu od větší tolikráte, pokud možná, pak od menší veličiny zbytek, od toho opět nový zbytek a t. d. Není-li zbytku při některém tom odnímání, jest poslední zbytek, jenž nezmizí, nejv. sp. měrou obou daných veličin.

Zde však nepřichází, jako u čísel celistvých, vždy zbytek $= 0$, poněvadž jsou zbytky sice vždy menší a menší, ale nestává meze sebe menší, již by tyto zbytky nemohly dosáhnouti. Nepřichází-li tedy při tomto určování nejv. sp. míry nikdy zbytek $= 0$, obě veličiny nemají spol. míry.

Dvě veličiny, mající společnou míru, slovou směřitelné, nemají-li však společné míry, jmenují se nesměřitelné.

§. 88. Má se vyhledati největší společná míra několika čísel.

Řešení. 1) Rozvedme daná čísla na prvočinitele; součin prvočinitelů, společných všem daným číslům, jest hledaná největší společná míra. (§. 86., řeš. 1).

U př. Máme-li určití nejv. společnou míru čísel 320, 400 a 680, tedy

$$320 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5,$$

$$400 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5,$$

$$680 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 17,$$

a nejv. sp. míra $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$.

Řešení 2) (bez rozvádění na prvočinitele). Máme-li určití nejv. sp. míru čísel a , b , c a d , vyhledejme ji nejprvé k číslům a a b ; je-li tato m , určí se nejv. sp. míra k číslům m a c , a je-li tato n , vyhledejme ji k n a d , tato budiž p ; tedy bude p nejv. sp. měrou čísel a , b , c a d .

Postup tento lze znázorniti následovně:

$$\begin{array}{ccccccc} a & & b & & c & & d \\ & & \underline{\hspace{1cm}} & & | & & | \\ & & m & & & & \\ & & & & \underline{\hspace{1cm}} & & \\ & & & & n & & \\ & & & & & & \underline{\hspace{1cm}} \\ & & & & & & p \end{array}$$

Dle podmínky obsahuje m všechny společné činitele čísel a a b ; n obsahuje všechny společné činitele čísel m a c , tedy také čísel a , b a c ; p konečně obsahuje všechny společné činitele čísel n a d , tedy také čísel a , b , c a d , protož jest p nejv. sp. měrou všech daných čísel a , b , c a d .

Příklady. 1) Hledáme-li nejv. sp. míru čísel 1554, 3552 a 5143, tedy

1554	3552	2	
222	444	3	222 jest nejv. sp. míra čísel 1554 a 3552.
	0	2	
222	5143	23	37 jest nejv. sp. míra čísel 222 a 5143, tedy
0	703		také čísel 1554, 3552 a 5143.
	37	6	

2) Má se určití nejv. sp. míra mnohočlenů:

$$3x^2 - 2xy - 5y^2, \quad 2x^2 + 9xy + 7y^2 \quad \text{a} \quad 2x^2 - 2y^2.$$

Největší společná míra mnohočlenů $3x^2 - 2xy - 5y^2$ a $2x^2 + 9xy + 7y^2$ jest $x + y$.

U dvoučlenů $x + y$ a $2x^2 - 2y^2$ jest nejv. sp. míra $x + y$, kteráž jest tedy zároveň nejv. sp. měrou daných tří mnohočlenů.

5. Nejmenší společný násobek.

§. 89. Nejmenší společný násobek několika čísel jest nejmenší číslo, kteréž těmito všemi čísly jest dělitelno.

Úloha. Má se vyhledati nejmenší společný násobek několika čísel.

Řešení 1. Rozvedme všechna daná čísla na prvočinitele, z těch pak vezmeme všechny rozličné činitele, a sice každého s největším mocnitelem, kterého má v daných číslech. Součin těchto činitelů dá nejmenší společný násobek.

Důkaz. Součin takto utvořený je zajisté nejmenším sp. násobkem, poněvadž obsahuje všechny činitele každého daného čísla; jest to však i nejmenším sp. násobkem proto, že by vynecháním jednoho z oněch činitelů součin přestal býti dělitelným všemi danými čísly.

U př. Měli bychom určití nejmenší sp. násobek čísel 60, 108 a 1050.

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5,$$

$$108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3,$$

$$1050 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7,$$

tedy nejmenší sp. násobek $= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 18900$.

Řešení 2. (bez rozvádění na činitele). a) Máme-li určití nejmenší sp. násobek dvou čísel, vyhledejme nejprve jejich nejv.

sp. míru, touto dělme jedno z daných čísel a podílem násobme číslo druhé.

Důkaz. Nemají-li daná čísla a a b společné míry, bude součin ab zároveň jejich nej. sp. násobek. Nejsou-li však a a b prvočísla vespolek, budiž m jejich nejv. sp. měrou, a $a : m = \alpha$, $b : m = \beta$, tak sice, že α a β nemají žádného sp. činitele. Bude pak $a = m\alpha$, $b = m\beta$. Každý násobek čísla a musí tedy obsahovati činitele m a α , každý násobek čísla b však činitele m a β , protož každý společný násobek čísel a a b bude obsahovati činitele m , α a β . Tudiž součin, obsahující jen tyto tři činitele, bude zajisté nej. sp. násobek čísel a a b . Tento nej. sp. nás. možná také následovně vyjádřiti:

$$\begin{aligned} m\alpha\beta &= m\alpha \cdot \beta = a(b : m) \\ &= m\beta \cdot \alpha = b(a : m). \end{aligned}$$

Příklady. 1) Má se určiti nej. společný násobek čísel 648 a 972.

$$\begin{array}{r|l} 648 & 972 \\ 0 & 324 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ 324 \text{ jest nejv. sp. míra.} \end{array}$$

648 : 324 = 2; 972 : 2 = 1944, aneb
972 : 324 = 3; 648 : 3 = 1944; tudíž nej. sp. násob. = 1944.

2) Má se vyhledati nej. sp. násobek mnohočlenů $9a^4x^2 - 4b^2y^4$ a $9a^4x^2 - 12a^2bxy^2 + 4b^2y^4$.

Nejv. sp. míra obou výrazů jest $3a^2x - 2by^2$, tudíž

$$\begin{aligned} (9a^4x^2 - 12a^2bxy^2 + 4b^2y^4) : (3a^2x - 2by^2) &= 3a^2x - 2by^2, \text{ a} \\ (9a^4x^2 - 12a^2bxy^2 + 4b^2y^4) (3a^2x - 2by^2) &= 27a^6x^3 - 18a^4bx^2y^2 \\ &\quad - 12a^2b^2xy^4 + 8b^3y^6 \\ &\quad \text{nej. sp. násob.} \end{aligned}$$

b) Je-li dáno více než dvě čísel, vyhledejme nejprvé nej. sp. násobek dvou čísel, pak nej. sp. násobek právě určeného násobku a třetího čísla, a pokračujeme tím způsobem až k poslednímu číslu danému. Nej. sp. násobek posledně určený jest pak zároveň nej. sp. násobek všech daných čísel.

Důkaz vede se podobně jako v §. 88., řeš. 2).

§. 90. Má-li dvě aneb několik daných čísel společnou míru, můžeme bez porušení nej. sp. násobku místo těchto čísel položití jejich společnou míru jen jednou a zároveň podíly, kteréž obdržíme dělením těch čísel společnou měrou (důkaz k a) řeš. 2) v §. 89.). Je-li jedno z daných čísel měrou druhého většího

čísla, nemusíme k menšímu číslu nikterak přihlížeti, aniž bychom tím nejím. sp. násobek porušili.

Nejm. sp. násobek několika čísel vyhledáme tudíž následující praktickým způsobem:

1) Napišme daná čísla vzestupně vedle sebe a vynechme menší čísla, která jsou ve větších beze zbytku obsažena.

2) Má-li zbývajících dvě nebo více čísel společného prvočinitele, vysadíme jej v pravo co společnou míru, a dělíme všechna čísla jím dělitelná; podíly, jakož i čísla, která nejsou dělitelná tím prvočinitelem, píšme v nové řadě vedle sebe.

3) V této řadě počínáme si jako v původní, a tak pokračujeme, až konečně obdržíme řadu, v níž jsou pouze prvočísla vespolek.

4) Součin všech těchto prvočísel a vysazených v pravo dělitelů jest nejím. sp. násobek daných čísel.

Příklad. Má se vyhledati nejím. sp. násobek čísel 2, 3, 4, 18, 24, 32, 45 a 50.

2, 3, 4, 18, 24, 32, 45, 50	
9, 12, 16, 45, 25	2
6, 8, 45, 25	2
3, 4, 45, 25	2
4, 9, 5	5

$$\text{Nejm. sp. násobek} = 4 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 7200.$$

VI. Pojem čísla rozšířen dělením.

Čísla lomená.

§. 91. Posud jsme (§. 44.) u všech podílů předpokládali, že dělenec jest násobkem dělitele, poněvadž jen v tomto případě bylo možná provéstí dělení v řadě čísel celistvých. Abychom pak zrušili toto omezení a pravidla odvozená pro dělení aby nabyla platnosti pro kterékoli hodnoty dělence a dělitele, musíme všeobecný pojem dělení, jenž dán jest v rovnici $\frac{a}{b} \cdot b = a$, roz-

šířiti také na podíl $\frac{a}{b}$, kde a není násobkem dělitele b , čím pak věty o podílech nabudou platnosti též pro tento podíl, poněvadž plynou vesměs z rovnice hořejší.

Použijeme-li u podílu $\frac{a}{b}$ věty z §. 46., obdržíme

$$\frac{a}{b} = \frac{1 \cdot a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a.$$

Ale $\frac{1}{b}$, tedy také $\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a$ dle dosavadního pojmu čísla nemá smyslu, poněvadž b není činitelem čísla a ; aby tudíž podíl tento nabyl významu i v tom případě, není-li a násobkem čísla b , musíme výraz $\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a$ co nový tvar čísla uvést do arithmetiky.

V tomto všeobecném smyslu, kdy a není násobkem čísla b , podíl $\frac{a}{b}$ naproti všem dosavadním číslům celistvým nazýváme číslem lomeným čili zlomkem; a slove čítec, b jmenovatel zlomku.

Nyní musíme také lomeným číslům v řadě čísel vykáhati náležité místo. Dle všeobecného pojmu podílu znamená $\frac{1}{b}$ číslo, kteréž násobeno b , dává za součin 1. Rozdělíme-li tedy jednotku na b stejných částí, představuje každá taková část číslo $\frac{1}{b}$, poněvadž b krát položena co sčítanec dává opět jednotku. Abychom tedy v řadě čísel znázornili čísla tohoto nového druhu, třeba řadu celistvých čísel samu v sobě rozšířiti způsobem tím, že odlehlost vždy dvou po sobě jdoucích čísel této řady, t. j. každou původní jednotku vložením nových čísel rozdělíme na tolik stejných částí, kolik udává jmenovatel b , a takovou část považujeme za novou jednotku k čítání; obdržíme pak řadu čísel

$$\dots - \frac{5}{b}, - \frac{4}{b}, - \frac{3}{b}, - \frac{2}{b}, - \frac{1}{b}, 0, + \frac{1}{b}, + \frac{2}{b}, + \frac{3}{b}, + \frac{4}{b}, + \frac{5}{b} \dots$$

kterouž nazýváme řadou b tin (u př. třetin, pětín a t. d.). Zlomek $+\frac{a}{b}$ znamená v této řadě a té číslo ve směru čísel kladných, $-\frac{a}{b}$ pak a té číslo ve směru čísel záporných.

Zlomky jsou tedy čísla, jichžto jednotka výslovně jest udána co část původní jednotky. Jmenovatel ukazuje, na kolik

stejných částí původní jednotky má býti rozdělena, aby taková část dala novou jednotku zlomku; číselník udává, kolikrát zlomek obsahuje jednotku udanou jmenovatelem.

Řada čísel vyplněná vložením zlomků nazývá se řadou čísel lomených pro určitého jmenovatele. I takovéto řady lze znázorniti přímkami číselnými. Tak u př. pro řadu třetin bude

$$\begin{array}{ccccccccc} -2 & & -1 & & 0 & & +1 & & +2 \\ \hline -\frac{7}{3} & -\frac{6}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{3}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & +\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} & +\frac{3}{3} & +\frac{4}{3} & +\frac{5}{3} & +\frac{6}{3} & +\frac{7}{3} \end{array}$$

Zlomek, který jest menší nežli jednotka, jehož číselník jest tedy menší nežli jmenovatel, slove pravý, každý jiný zlomek jmenuje se nepravý.

Zlomek, jehož číselník jest číslo celistvé dekadické, a jehož jmenovatel jest mocnina desítky, slove desetinný, každý jiný zlomek jmenuje se obyčejný.

Zvláštní druh zlomků obyčejných tvoří zlomky řetězové, o nichž později bude pojednáno.

1. Zlomky obyčejné.

Věty všeobecné.

§. 92. Z pojmu zlomku plyne:

1) Násobíme-li zlomek jeho jmenovatelem, obdržíme za součin jeho číselník.

$$\frac{1}{b} \cdot b = 1, \quad \frac{a}{b} \cdot b = a.$$

2) Mají-li dva zlomky stejné jmenovatele, jest větší ten, jenž má většího číselníka.

3) Při stejných číselnících jest větší zlomek ten, jenž má menšího jmenovatele.

Dodatek. Každý všeobecný zlomek, jehož číselníkem jest jednočlen, jmenovatelem však mnohočlen, možná vyjádřiti nekonečnou řadou členů, mnohdy dle jistého zákona utvořenou, dělíme-li totiž číselník jmenovatelem dle pravidel o dělení platných (§. 55.).

U př. $\frac{a}{1-x} = a : (1-x) = a + ax + ax^2 \dots$ do nekonečna.

$$\begin{array}{r}
 a - ax \\
 - \quad + \\
 \hline
 + ax \\
 + ax - ax^2 \\
 - \quad + \\
 \hline
 + ax^2
 \end{array}$$

Položíme-li zde $x = 1$, bude

$\frac{a}{1-1} = a + a + a + a + \dots$ do nekonečna, čili

$$\frac{a}{0} = \infty,$$

což jest novým důkazem věty v §. 45., výsl. 8.

§. 93. 1) Každý nepravý zlomek lze uvést na součet celistvého čísla a pravého zlomku.

Je-li $a > b$, bude $\frac{a}{b} = a : b = q + \frac{r}{b}$, kde q jest největší celistvé číslo, přicházející v podílu $a : b$; r pak jest zbytek při dělení, tudíž $\frac{r}{b}$ pravý zlomek proto, že musí býti $r < b$.

Výraz, jehož tvar jest $q + \frac{r}{b}$, slove číslo smíšené.

2) Každé celistvé číslo lze proměnit ve zlomek s daným jmenovatelem, pakli jmenovatelem tím se násobí a součin se klade co čísel.

Jest totiž $a = \frac{an}{n}$ (§. 45., 3).

Zlomek, jehož čísel jest násobek jmenovatele, t. j. rovná-li se zlomek celistvému číslu, slove nevlastní.

3) Hodnota zlomku se nemění, násobíme-li nebo dělíme-li čísel i jmenovatele týmž číslem.

$$\frac{a}{b} = \frac{an}{bn} = \frac{a:n}{b:n} \quad (\S. 51., 2).$$

§. 94. Úlohy. 1) Daný zlomek má se proměnit v jiný téže hodnoty s daným jmenovatelem, jenž jest násobek jmenovatele původního.

Dělme nového jmenovatele původním, a podílem násobme čísel daného zlomku; součin jest hledaný čísel.

Správnost řešení vysvítá z §. 93. 3).

Má-li se u př. zlomku $\frac{a}{b}$ dáti jmenovatel bm , bude

$$bm : b = m; a \cdot m = am; \text{ tudíž } \frac{a}{b} = \frac{am}{bm}.$$

2) Dvě nebo více zlomků má se uvést na nejmenšího společného jmenovatele.

Vyhledejme nejmenší násobek jmenovatelů daných zlomků, jenž bude zároveň nejmenším společným jmenovatelem, a uveďme dané zlomky (dle řeš. 1.) na tohoto nového jmenovatele.

Příklad. Zlomky $\frac{a}{2b}$, $\frac{3m}{4bc}$, $\frac{4n}{c^2d}$ mají se uvést na nejmenšího jmenovatele.

Nejmenší násobek všech jmenovatelů, tudíž nejmenší jmenovatel jest $4bc^2d$. Bude pak

$$4bc^2d : 2b = 2c^2d, \quad 2c^2d \cdot a = 2ac^2d, \quad \text{protož } \frac{a}{2b} = \frac{2ac^2d}{4bc^2d};$$

$$4bc^2d : 4bc = cd, \quad cd \cdot 3m = 3cdm, \quad \text{„ } \frac{3m}{4bc} = \frac{3cdm}{4bc^2d};$$

$$4bc^2d : c^2d = 4b, \quad 4b \cdot 4n = 16bn, \quad \text{„ } \frac{4n}{c^2d} = \frac{16bn}{4bc^2d}.$$

§. 95. Úloha. Zlomek, jehož číselník i jmenovatel má společnou míru, zkrátiti, t. j. bez porušení jeho hodnoty vyjádřiti menšími čísly.

Dělme číselník i jmenovatele jich společnou měrou.

$$\text{U př. } \frac{4am}{6bn} = \frac{2am}{3bn}; \quad \frac{12a^2bx^2}{15acx^3} = \frac{4ab}{5cx}.$$

O zlomku, jehož číselník a jmenovatel jsou prvočísla, jenž tudíž nemůže býti vyjádřen menšími čísly, říkáme, že jest psán nejmenšími čísly.

Dodatek. Zkrácením všeobecných zlomků vyhneme se často neurčitosti, která se v nich vyskytuje při zvláštním dosazení. Tak u př. zlomek $\frac{x^2 - a^2}{2x - 2a}$ nabývá neurčité hodnoty $\frac{0}{0}$,

dosadíme-li $x = a$. Zkrácením však obdržíme

$$\frac{x^2 - a^2}{2x - 2a} = \frac{(x + a)(x - a)}{2(x - a)} = \frac{x + a}{2},$$

kterýžto zlomek pro $x = a$ nabývá určité hodnoty $\frac{2a}{2} = a$.

Vůbec je-li číselník i jmenovatel zlomku mnohočlen dle x spořádaný, a dosazením určité hodnoty za x , u př. $x = a$, zlomek nabývá neurčitého tvaru $\frac{0}{0}$, jest to známka, že číselník i jmenovatel má společného činitele $x - a$, jenž pro $x = a$ mění se v nullu, a jímž tedy zlomek se má zkrátiti. Má-li zlomek takto zkrácený při $x = a$ ještě tvar $\frac{0}{0}$, opakujeme krácení činitelem $x - a$.

Počítání obyčejnými zlomky.

§. 96. Rozšiřivše obor čísel zavedením lomených čísel, musíme také dosavadní pojmy početných výkonů rozšířiti tak, abychom jich mohli použiti též u čísel nového tvaru.

Poněvadž dle §. 93., 2) každé celistvé číslo lze proměnit ve zlomek s kterýmkoli jmenovatelem, a dle §. 94., 2) vždy dvě zlomky lze uvést na společného jmenovatele, postačí s ohledem na sečítání a odčítání, abychom při rozšíření pojmu měli na zřeteli zlomky téže řady čísel lomených.

§. 97. Ku zlomku $\frac{a}{m}$ připočísti zlomek $\frac{b}{m}$ znamená (§§. 8. a 28.), v řadě lomených čísel, a sice m tin od prvního sčítance $\frac{a}{m}$ kráčet ve směru kladném aneb záporném, jak totiž druhý sčítanec jest kladný nebo záporný, o tolik m tin, kolik jich obsahuje druhý sčítanec $\frac{b}{m}$; zlomek, k němuž takto dospějeme, jest hledaný součet.

Výsledek. Součet zlomků o stejných jmenovatelích rovná se součtu jejich číselníků, lomenému společným jmenovatelem.

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a + b}{m}.$$

Dodatek. Máme-li sečítati zlomky o různých jmenovatelích, aneb celistvé číslo a zlomek, přivedeme sčítance na společného jmenovatele a sečítáme dle předešlého pravidla.

U př. $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{19}{12} = 1 \frac{7}{12}$.

$$a + \frac{m}{n} = \frac{an}{n} + \frac{m}{n} = \frac{an + m}{n}.$$

§. 98. Součet dvou zlomků se nemění, sečítáme-li je v kterémkoli pořádku.

$$\begin{aligned} \frac{a}{m} + \frac{b}{n} &= \frac{an}{mn} + \frac{bm}{mn} = \frac{an + bm}{mn} \quad (\S. 97.) \\ &= \frac{bm + an}{mn} \quad (\S. 10.) = \frac{bm}{mn} + \frac{an}{mn} \quad (\S. 97.) \\ &= \frac{b}{n} + \frac{a}{m} \quad (\S. 93., 3). \end{aligned}$$

§. 99. Od zlomku $\frac{a}{m}$ odečísti zlomek $\frac{b}{n}$ (§§. 14. a 29.) znamená, v řadě $mtin$ od menšence $\frac{a}{m}$ kráčet ve směru kladném aneb záporném, jak totiž menšitel jest záporný nebo kladný, o tolik $mtin$, kolik jich obsahuje menšitel $\frac{b}{m}$; zlomek, k němuž tím způsobem dospějeme, jest hledaný rozdíl.

Výsledky. 1) Odčítání zlomku jest sečítání zlomku protivného (§. 97.).

2) Rozdíl dvou zlomků o stejných jmenovatelích rovná se rozdílu čístatelů, lomenému společným jmenovatelem.

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a - b}{m}.$$

Dodatky. 1) Máme-li odčítati zlomky o různých jmenovatelích aneb celistvé číslo a zlomek, přivedeme obě čísla na společného jmenovatele a odčítáme dle pravidla předšlého. U př.

$$\begin{aligned} \frac{7}{8} - \frac{3}{4} &= \frac{7}{8} - \frac{6}{8} = \frac{1}{8}. \\ \frac{a}{m} - \frac{b}{n} &= \frac{an}{mn} - \frac{bm}{mn} = \frac{an - bm}{mn}. \\ a - \frac{m}{n} &= \frac{an}{n} - \frac{m}{n} = \frac{an - m}{n}. \end{aligned}$$

2) Zvláště pak jest

$$a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}, \text{ a takéž } \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2},$$

$\frac{a+b}{2}$ nalezá, se tedy uprostřed čísel a a b , od nichžto se liší týmž rozdílem; výraz ten slove arithmetický průměr čísel a a b .

§. 100. 1) Zlomek násobíme celistvým číslem, buď násobíme-li jím čitatele aneb dělíme-li jím jmenovatele.

$$\frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b} = \frac{a}{b:m} \text{ (§. 47.).}$$

Dodatek. Druhý způsob násobení zlomku celistvým číslem jest praktický jen v tom případě, je-li jmenovatel zlomku celistvým číslem dělitelný.

2) Zlomek dělíme celistvým číslem, buď dělíme-li jím čitatele aneb násobíme-li jím jmenovatele.

$$\frac{a}{b} : m = \frac{a:m}{b} = \frac{a}{bm} \text{ (§. 48.).}$$

Dodatek. Prvního způsobu dělení používáme jen tehdy, je-li čísel dělitelný číslem celistvým.

§. 101. Číslo a násobiti zlomkem $\frac{m}{n}$ znamená (§§. 33. a 58.), násobence a s týmž anebo protivným znaménkem, jak totiž násobitel jest kladný nebo záporný, rozdělití na tolik stejných částí, kolik udává jmenovatel n , a jednu takovou část položití tolikrát co sčítance, kolik jednotostí obsahuje čísel m .

Výsledky. 1) Číslo se násobí zlomkem, dělíme-li je jmenovatelem a násobíme-li podíl čísel.

$$a \cdot \frac{m}{n} = \frac{a}{n} \cdot m = \frac{am}{n} \text{ (§. 100., 1).}$$

2) Zlomek násobí se zlomkem, jestliže součin čísel lomíme součinem jmenovatelů.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \left(\frac{a}{b} : n \right) \cdot m = \frac{a}{bn} \cdot m \text{ (§. 100., 2) = } \frac{am}{bn} \text{ (§. 100., 1).}$$

Dodatek. Násobíme-li číslo pravým nebo nepravým zlomkem, obdržíme součin vztažně menší aneb větší nežli násobenec.

Je-li $m < n$, tedy $\frac{m}{n} < 1$, bude $a \cdot \frac{m}{n} < a \cdot 1$, čili $a \cdot \frac{m}{n} < a$;
 je-li však $m > n$, tedy $\frac{m}{n} > 1$, bude $a \cdot \frac{m}{n} > a \cdot 1$, tudíž $a \cdot \frac{m}{n} > a$.

3) Součin dvou zlomků se nemění, násobíme-li je v kterémkoli pořádku.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{am}{bn} = \frac{ma}{nb} \text{ (§. 35.)} = \frac{m}{n} \cdot \frac{a}{b} \text{ (dle 2).}$$

4) Součet se násobí zlomkem, násobíme-li jím každého sčítance a sečteme-li částečné součiny.

$$(a + b) \cdot \frac{m}{n} = \frac{a + b}{n} \cdot m = \frac{am + bm}{n} \text{ (§. 38.)} = \frac{am}{n} + \frac{bm}{n} \text{ (§. 53.)}$$

$$= a \cdot \frac{m}{n} + b \cdot \frac{m}{n} \text{ (dle 1).}$$

§. 102. Rovná-li se součin dvou čísel 1, každé z obou čísel jest převratná hodnota druhého.

Tak u př. $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, $\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = 1$, protož jest $\frac{1}{a}$ převratná hodnota čísla a , $\frac{n}{m}$ převratná hodnota zlomku $\frac{m}{n}$.

§. 103. Ze všeobecného pojmu dělení, vysvětleného v §. 44. plynou následující pravidla o dělení zlomkem:

1) Každé číslo dělí se zlomkem, dělíme-li je čitatelem a násobíme-li podíl tento jmenovatelem, aneb násobíme-li dělence zlomkem obráceným.

$$\text{Důkaz. } a : \frac{m}{n} = \frac{a}{\frac{m}{n}} \cdot n \text{ (§. 49., 3)}$$

$$= \frac{an}{m} = a \cdot \frac{n}{m} \text{ (§. 101., 1).}$$

Dodatek. Poněvadž $1 : \frac{m}{n} = 1 \cdot \frac{n}{m} = \frac{n}{m}$, můžeme všeobecně převratnou hodnotu čísla a naznačiti $1 : a$ čili $\frac{1}{a}$.

2) Zlomek se dělí zlomkem, násobíme-li jej obráceným dělitelem, aneb lomíme-li podíl čítelů podílem jmenovatelů.

Dle 1) jest $\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m}$, čili

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{m}{n}} = \left(\frac{a}{b} : m \right) \cdot n \text{ (dle 1) } = \frac{a : m}{b} \cdot n \text{ (§. 100., 2)} \\ = \frac{a : m}{b : n} \text{ (§. 100., 1).}$$

Posledního pravidla užíváme zvláště při dělení dvou zlomků o stejných jmenovatelích. U př.

$$\frac{27}{100} : \frac{9}{100} = \frac{3}{1} = 3; \quad \frac{a}{m} : \frac{b}{m} = a : b.$$

Dodatek. Dělíme-li číslo zlomkem pravým anebo nepravým, podíl je vztažně větší nebo menší nežli dělenec.

Je-li $m < n$, tedy $\frac{m}{n} < 1$, bude $a : \frac{m}{n} > a : 1$, protože $a : \frac{m}{n} > a$;

je-li však $m > n$, tedy $\frac{m}{n} > 1$, bude $a : \frac{m}{n} < a : 1$, protože $a : \frac{m}{n} < a$.

§. 104. Zlomek, jehož číselník aneb jmenovatel, aneb oba zároveň jsou opět zlomky, slove složitý. Takovýto zlomek jest vlastně jen naznačené dělení zlomků; proměníme jej tedy ve zlomek jednoduchý, provedeme-li dělení. U př.

$$\frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{n}} = \frac{a}{m} : b = \frac{a}{bm}; \quad \frac{\frac{a}{m}}{\frac{n}{n}} = a : \frac{m}{n} = \frac{an}{m}; \\ \frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{n}} = \frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{an}{bm}.$$

§. 105. Všecky dosavadní poučky, dokázané pro čísla celistvá, vztahují se také k číslům lomeným.

Neboť všechny tyto poučky spočívají na větách

$$a + b = b + a,$$

$$a \cdot b = b \cdot a,$$

$$(a + b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m;$$

tyto tři věty vztahují se však též ku zlomkům, jakož v §. 98. a §. 101., 3) a 4) bylo dokázáno.

Dodatek. Tím je také zrušeno omezení vyslovené o podílech v §. 44.

2. Zlomky desetinné.

§. 106. Všeobecný tvar desetinného zlomku (§. 91.) jest $\frac{A}{10^m}$, kde A a m značí kterákoli celistvá čísla dekadická.

Zlomky desetinné slovou také čísla desetinná.

Desetinné zlomky píšeme bez jmenovatelů; třeba jest však v čitateli od pravé ruky k levé tolik číslic oddělití tečkou desetinnou, kolik jednotostí obsahuje mocnitel desítky ve jmenovateli, aneb, což je totéž, kolik null přichází ve jmenovateli; kdyby nebylo dosti číslic, abychom je mohli oddělití, vyplníme nedostávající se číslice v levo nullami.

$$\begin{aligned} \text{U př. } \frac{78317}{10^3} &= \frac{78317}{1000} = 78\cdot317, \\ \frac{5483}{10^4} &= \frac{5483}{10000} = 0\cdot5483, \\ \frac{37}{10^5} &= \frac{37}{100000} = 0\cdot00037. \end{aligned}$$

Číslice v pravo za tečkou jmenují se desetinné; $\frac{A}{10^m}$ představuje tedy desetinný zlomek s m desetinnými číslicemi.

Abychom poznali význam číslic desetinného zlomku, budiž dán zlomek $\frac{A}{10^4}$, jenž má 4 číslice desetinné; číslo před desetinnou tečkou budiž m , číslice desetinné pak pořadem od levé ruky ku pravé naznačme písmeny a, b, c, d, tedy bude

$$\begin{aligned} A &= m \cdot 10^4 + a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d, \text{ z čehož} \\ \frac{A}{10^4} &= \frac{m \cdot 10^4 + a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d}{10^4} \\ &= m + \frac{a}{10} + \frac{b}{10^2} + \frac{c}{10^3} + \frac{d}{10^4}. \end{aligned}$$

Číslo před tečkou desetinnou znamená tedy číslo celistvé; první číslice desetinná znamená desetiny, druhá setiny, třetí tisíciný, čtvrtá desítitisíciny a t. d.

$$\begin{aligned} \text{U př. } 34\cdot781 &= \frac{34781}{1000} = \frac{34000 + 700 + 80 + 1}{1000} \\ &= 34 + \frac{7}{10} + \frac{8}{100} + \frac{1}{1000}. \end{aligned}$$

Zlomek desetinný se vysloví, jestliže nejprve vyslovíme celé před tečkou desetinnou, potom každou číslici desetinnou o sobě s příslušným jmenovatelem. Při tom můžeme jmenovatele jednotlivých desetinných míst i vynechat; pak vyslovíme pořadem všechny číslice desetinné, ani nullu nevyjímajíce.

Čísla desetinná jsou rozšíření dekadické soustavy číselné (§. 63.) v tom způsobu, že řada číselných řádů tisíce, sta, desítky, jednotky, nepřestává jednotkami, nýbrž dle téhož zákona jest rozšířena tak, že každá nižší jednotka běže se co desátá část jednotky nejbližší vyššího řádu, čím obdržíme desetiny, setiny, tisíciny Desetinná tečka odděluje pak původní řadu číselných řádů od tohoto pokračování.

Dle toho jest

. . . $c \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + a \cdot 10 + J + \frac{\alpha}{10} + \frac{\beta}{10^2} + \frac{\gamma}{10^3} + \dots$
všeobecný tvar čísla v dekadické soustavě, kde J , a , b , c . . .
značí číslice jednotek, desítek, set, tisíců, . . . α , β , γ , . . .
čísllice desetin, setin, tisícin

Výsledky. 1) Hodnota desetinného zlomku se nemění, připíšeme-li v pravo za platnými číslicemi několik null; u př.

$$0.23 = 0.230 = 0.2300 = 0.23000.$$

2) Hodnota každého čísla desetinného jest menší nežli jednotka vyššího místa, předcházející přímo před její nejvyšší platnou číslicí; u př. $0.00783 < \frac{1}{10^2}$. Neboť kdyby i každá číslice desetinného čísla měla největší možnou hodnotu 9, museli bychom ještě jednu jednotku nejnižšího místa k němu připočísti, abychom obdrželi jednotku onoho místa vyššího.

Proměňování obyčejného zlomku v desetinný a naopak.

§. 107. Úloha. Obyčejný zlomek má se proměnit v desetinný. Dělme čitatele jmenovatelem a v podílu napišme desetinnou tečku za celými, na jichž místo klademe nullu, má-li se pravý zlomek proměnit v desetinný. Ku zbytku připišme nullu, dělme opět, a vyhledanou číslici podílu postavme za tečku desetinnou; ku každému následujícímu zbytku připišme zase nullu, a tak pokračujme v dělení, až konečně zbytek některý se

rovná nulle, aneb nestane-li se tak, až obdržíme žádaný počet číslic desetinných.

$$\text{Důkaz. } \frac{a}{b} = \frac{a \cdot 10^m}{b \cdot 10^m} (\S. 93., 3.) = \frac{a \cdot 10^m : b}{10^m} (\S. 49., 1).$$

$$\text{U př. } \frac{3}{4} = 30 : 4 = 0.75 \quad \frac{329}{125} = 329 : 125 = 2.632$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 790 \\ 400 \\ 250 \\ 0 \end{array}$$

Dodatky. 1) Má-li desetinný zlomek úplně se rovnati obyčejnému zlomku $\frac{a}{b}$, musí býti konečný, tudíž $a \cdot 10^m$ dělitelno jmenovatelem b . Jsou-li a a b prvočísla vespolek, bude to však možno jen tehdy (§. 74., 4), je-li 10^m dělitelno b , t. j. neobsahuje-li b mimo 2 a 5 žádného jiného činitele.

Kdykoli jmenovatel b se skládá mimo z 2 a 5 ještě z jiných činitelů, nemůže obyčejný zlomek $\frac{a}{b}$, psaný nejmenšími čísly, nikdy úplně býti vyjádřen zlomkem desetinným. Přibližně však možná vždy vyvinouti desetinný zlomek, jenž od obyčejného zlomku o převelmi málo se liší. Neboť není-li součin $a \cdot 10^m$ dělitelný jmenovatelem b , podíl možná považovati za smíšené číslo. Budiž tedy

$$\frac{a \cdot 10^m}{b} = p + \frac{r}{b},$$

kde $r < b$, tudíž

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{10^m} + \frac{r}{b \cdot 10^m}, \text{ z čehož}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{p}{10^m} = \frac{r}{b \cdot 10^m}.$$

Poněvadž pak $r < b$, tedy $\frac{r}{b} < 1$, musí $\frac{r}{b \cdot 10^m} < \frac{1}{10^m}$.

Rozdíl zlomku obyčejného $\frac{a}{b}$ a desetinného $\frac{p}{10^m}$ je tudíž menší nežli $\frac{1}{10^m}$, t. j. menší nežli jedna jednotka posledního desetinného místa ještě vyvinutého; čím větší bereme m , tím menší bude $\frac{1}{10^m}$,

tím menší také bude onen rozdíl, až konečně můžeme jej učiniti menším nežli kterékoli sebe menší číslo stanovitelné.

$$\text{U př. } \frac{23}{78} = 23:0 : 78 = 0.29487 \dots$$

Vyvineme-li 5 číslic desetinných, dopustíme se chyby, kteráž jest menší nežli $\frac{1}{10^5}$.

2) Jestliže obyčejný zlomek, jež nelze dokonale vyjádřiti zlomkem desetinným, přibližně proměníme ve zlomek desetinný, musejí se při tom některé číslice desetinné v témže pořádku opakovati. Neboť při dělení jest zbytek vždy menší nežli dělitel; obdržíme tedy jen tolik různých zbytků, kolik jest celistvých čísel menších nežli dělitel, tak sice, že v nejnepríznivějším případě z tolika zbytků, kolik jednotostí obsahuje dělitel, objeví se opět některý předešlý zbytek, od něhož pak opakují se tytéž číslice v podílu a tytéž zbytky jako dříve. U př.

$$\begin{array}{r} \frac{7}{15} = 7:0 : 15 = 0.46666 \dots \quad \frac{18}{37} = 18:0 : 37 = 0.486486 \dots \\ \begin{array}{r} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 10 \end{array} \quad \begin{array}{r} 320 \\ 240 \\ 180 \\ 320 \\ 240 \\ 18 \end{array} \end{array}$$

Desetinné zlomky, v nichžto určité množství číslic v témž pořádku se opakuje, slovou občíslné (periodické); řada čísel stále se opakujících jmenuje se občíslí (perioda). Občíslí píšeme obyčejně jen jednou, označujeme je však tím, že nad první a poslední její číslici klademe tečku; tak u př.

$$\frac{7}{15} = 0.4\dot{6}; \quad \frac{18}{37} = 0.\dot{4}8\dot{6}.$$

§. 108. Desetinný zlomek má se proměnití v obyčejný.

1) Konečný zlomek desetinný proměníme v obyčejný, píšeme-li jej na způsob zlomku obyčejného, jež co možná zkrátíme. U př.

$$0.75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}; \quad 31.325 = 31\frac{325}{1000} = 31\frac{13}{40}.$$

2) Desetinný zlomek naprosto občíslný, t. j. takový, v němž hned po tečce desetinné opakuje se buď jedna nebo několik číslic desetinných, promění se ve zlomek obyčejný, klademe-li co čitatele číslice periody, co jmenovatele pak číslo psané tolika devítkami, kolik číslic přichází v občísli.

Důkaz. Znamená-li b periodu, n pak počet číslic jejích, bude naprosto občíslný zlomek desetinný

$$x = \frac{b}{10^n} + \frac{b}{10^{2n}} + \frac{b}{10^{3n}} + \frac{b}{10^{4n}} + \dots$$

Násobíme-li tento výraz 10^n , obdržíme

$$x \cdot 10^n = b + \frac{b}{10^n} + \frac{b}{10^{2n}} + \frac{b}{10^{3n}} + \dots$$

a odečteme-li dřívější výraz od tohoto, bude

$$x \cdot 10^n - x = b, \text{ čili } (10^n - 1) \cdot x = b,$$

z čehož
$$x = \frac{b}{10^n - 1}.$$

U př. $0.\dot{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}; \quad 0.\dot{4}\dot{5} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11};$

$$2.\dot{3}0\dot{1} = 2\frac{301}{999}; \quad 15.\dot{3}\dot{5}\dot{1} = 15\frac{351}{999} = 15\frac{13}{37}.$$

3) Desetinný zlomek smíšeně občíslný, t. j. takový, v němž po desetinné tečce před periodou přicházejí ještě jiné číslice desetinné, promění se ve zlomek obyčejný, jestliže považujeme číslice před periodou i s periodou za číslo, od něho odečteme číslice před periodou rovněž co číslo, a rozdíl ten lomíme číslem, kteréž psáno jest tolika devítkami, kolik číslic přichází v občísli, s tolika nullami v pravo připsanými, kolik číslic stojí před občíslem.

Důkaz. Znamená-li b periodu, n počet jejích číslic, a číslo před periodou a m počet jeho číslic, bude vzorec smíšeně občíslného zlomku desetinného

$$x = \frac{a}{10^m} + \frac{b}{10^{m+n}} + \frac{b}{10^{m+2n}} + \frac{b}{10^{m+3n}} + \dots$$

kterýžto výraz, násoben nejprve 10^{m+n} , pak 10^m , dá dva výrazy:

$$x \cdot 10^{m+n} = a \cdot 10^n + b + \frac{b}{10^n} + \frac{b}{10^{2n}} + \dots$$

$$x \cdot 10^m = a + \frac{b}{10^n} + \frac{b}{10^{2n}} + \frac{b}{10^{3n}} + \dots$$

Odečteme-li tento výraz od předešlého, obdržíme

$$\begin{aligned} x \cdot 10^{m+n} - x \cdot 10^m &= a \cdot 10^n + b - a, \text{ aneb} \\ x \cdot 10^m (10^n - 1) &= (a \cdot 10^n + b) - a, \text{ z čehož} \\ x &= \frac{(a \cdot 10^n + b) - a}{(10^n - 1) \cdot 10^m}. \end{aligned}$$

U př. $0.2\dot{1}\dot{5} = \frac{215 - 2}{990} = \frac{213}{990} = \frac{71}{330}$

$$3.3170\dot{8} = 3^3 \frac{1708 - 31}{99900} = 3^3 \frac{1677}{99900} = 3^3 \frac{10559}{33300}.$$

Počítání úplnými zlomky desetinnými.

§. 109. Počítání desetinnými zlomky, spočívajíc na týchž základech jako počítání čísla celistvými, požaduje jen zvláštní ohled na řád jednotlivých číslic, t. j. na položení tečky desetinné.

Máme-li desetinné zlomky sečítati aneb odčítati, píšeme jejich stejnojmenná místa, tudíž i tečky desetinné správně pod sebe, a sečítáme aneb odčítáme je pak od pravé ruky k levé jako čísla celistvá. Nedostávající se místa desetinná můžeme si vyplniti nullami.

35.312	
0.5678	215.3456
39.2	91.45923
součet 75.0798	rozdíl 123.88637

§. 110. 1) Desetinný zlomek násobí se mocninou desítky, pomkneme-li desetinnou tečku o tolik míst v pravo, kolik null má násobitel.

$$\frac{a}{10^m} \cdot 10^n = \frac{a}{10^m : 10^n} = \frac{a}{10^{m-n}}.$$

2) Zlomky desetinné násobíme bez ohledu na desetinnou tečku jako čísla celistvá (§. 68.), v součinu však od pravé k levé oddělíme tečkou desetinnou tolik míst, kolik jich mají činitelé dohromady.

$$\frac{a}{10^m} \cdot \frac{b}{10^n} = \frac{ab}{10^{m+n}}.$$

Dle téhož pravidla násobíme desetinný zlomek číslem celistvým.

Není-li v součinu tolik číslic, kolik jich třeba oddělit, vyplníme nedostávající se místa v levo nullami.

Dodatek. Napíšeme-li násobence, násobitele a jednotlivé částečné součiny pod sebe způsobem naznačeným v dodatku §. 68.,

pozná se řád každé číslice v součinu přímo z jejího místního postavení, jelikož pak desetinná tečka v součinu bude se nalézati pod desetinnou tečkou násobitele.

$$\text{U př. } 8\cdot056 \times 53\cdot1$$

$$\begin{array}{r} 53\cdot1 \\ \hline 40280 \\ 24168 \\ 8056 \\ \hline 4277736 \end{array}$$

$$13\cdot7934 \times 0\cdot00156$$

$$\begin{array}{r} 0\cdot00156 \\ \hline 137934 \\ 689670 \\ 827604 \\ \hline 0021517704 \end{array}$$

§. 111. 1) Desetinný zlomek dělí se mocninou desítky, pomkneme-li desetinnou tečku o tolik míst v levo, kolik null má dělitel.

$$\frac{a}{10^m} : 10^n = \frac{a}{10^{m+n}}.$$

2) Zlomky desetinné se dělí, zjednáme-li dělenci a děliteli připsáním null stejný počet míst desetinných a dělíme-li pak bez ohledu na tečku desetinnou jako čísla celistvá (§§. 70. a 107.).

$$\frac{a}{10^m} : \frac{b}{10^m} = \frac{a : b}{10^m : 10^m} = a : b.$$

Dle téhož pravidla dělíme také, je-li dělenec nebo dělitel číslo celistvé.

Prakticky počítáme dle následujících jednoduchých pravidel, jejichžto pravdivost jest patrna:

1) Desetinný zlomek dělí se číslem celistvým, dělíme-li jej jako číslo celistvé; v podílu klademe desetinnou tečku, jakmile k ní při dělení v dělenci přijdeme.

$$\text{U př. } 487\cdot75 : 25 = 19\cdot51$$

$$\begin{array}{r} 237 \\ 127 \\ 25 \\ 0 \end{array}$$

2) Číslo se dělí zlomkem desetinným, násobíme-li dělence i dělitele takovou mocninou desítky, aby dělitel se proměnil v číslo celistvé, a dělíme-li pak dle pravidla 1).

$$\text{U př. } 0\cdot05496 : 36\cdot84 = 5\cdot496 : 3684 = \dots$$

$$34461 : 0\cdot63 = 3446100 : 63 = \dots$$

Dodatek. Napíšeme-li dělence, dělitele a podíl pod sebe způsobem naznačeným v dodatku §. 70., pozná se řád jednotlivých

číslic v podílu přímo z jejich místního postavení, jelikož pak desetinná tečka v podílu bude se nalézati pod desetinnou tečkou dělence.

U př.	0·5 25632 : 3·056	87 6·5 : 18·95
	3·056	18·9 5
	0·1 72	4 6·25 ..
	2 2003	11 850
	6112	4800
	0	11100
		1625

Počítání zkrácenými zlomky desetinnými.

§. 112. Desetinný zlomek, jenž nějakou číselnou hodnotu, vzniklou z provedeného počtu aneb měření, nepředstavuje zcela určitě, nýbrž přibližně, slove zkrácený či neúplný, a naopak desetinný zlomek jest úplný, pakli onu hodnotu určitě vyjadřuje.

Neúplný zlomek desetinný naznačuje se připojenými tečkami, u př. 3·14

Dostačí-li ku zvláštnímu některému účelu menší určitost, můžeme úplný desetinný zlomek zkrátiti, t. j. můžeme jednu nebo několik jeho číslic desetinných vynechati.

Poznačíme-li m prvních desetinných číslic desetinného zlomku a písmenem p , následující pak q , r . . . , bude

$$a . . . = \frac{p}{10^m} + \frac{q}{10^{m+1}} + \frac{r}{10^{m+2}} + . . .$$

Poněvadž dle §. 106., výsl. 2) desetinné číslo $\frac{q}{10^{m+1}} + \frac{r}{10^{m+2}} + . . . < \frac{1}{10^m}$, bude

$$\frac{p}{m} < a < \frac{p+1}{10^m}.$$

$a . . .$ tedy vězí v mezích $\frac{p}{10^m}$ a $\frac{p+1}{10^m}$, jichžto rozdíl jest $\frac{1}{10^m}$. Z toho jde:

1) Položíme-li místo $a . . .$ desetinný zlomek $\frac{p}{10^m}$, dopu-

stíme se chyby menší nežli $\frac{1}{10^m}$. Vynecháme-li tedy v desetinném čísle všechny desetinné číslice, následující za m místy, chyba bude menší nežli jednot m tého místa desetinného.

2) Je-li $q < 5$, bude $a \dots u \frac{p}{10^m}$ blíže nežli $u \frac{p+1}{10^m}$, protož $a \dots - \frac{p}{10^m} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^m}$. Je-li tedy první vynechaná číslice menší nežli 5, chyba bude menší nežli $\frac{1}{2}$ jednoti posledního ponechaného místa.

3) Je-li $q \geq 5$, bude $a \dots$ blíže $u \frac{p+1}{10^m}$ nežli $u \frac{p}{10^m}$; protož $-(a \dots - \frac{p+1}{10^m}) < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^m}$. Je-li tedy první vynechaná číslice 5 aneb větší nežli 5, zvětšíme (opravíme) poslední ponechané místo o 1, aby i zde chyba byla menší nežli $\frac{1}{2}$ jednoti místa tohoto.

Zkrácený desetinný zlomek $a \dots$ můžeme tedy vždy představití úplným m místným zlomkem desetinným a tak určitě, aby chyba byla menší nežli polovice jednoti m tého místa; proto možná položit

$$a \dots = a + \alpha,$$

kde $\alpha < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^m}$, ostatně může α býti kladné nebo záporné.

Při počítání zkrácenými zlomky desetinnými třeba jest věděti, s jakou spolehlivostí v každém případě lze určití výsledek, z čehož naopak možná souditi, jak přesná musejí býti daná čísla, abychom obdrželi výsledek až do jistého místa desetinného spolehlivý. Ve větách, kteréž o tom vyslovíme, budeme vesměs předpokládati u desetinných zlomků zkrácených takovou přesnost, že chyba jest menší nežli polovice jednoti jejich posledního místa.

§. 113. 1) Chyba v součtu několika desetinných zlomků zkrácených na stejný počet míst jest menší nežli tolik polovic jednoti posledního místa, kolik jest sčítanců.

2) Chyba v rozdilu dvou desetinných zlomků zkrácených na stejný počet míst jest menší nežli jednot posledního místa.

Správnost těchto vět jest patrna.

Výsledky. 1) V součtu několika zkrácených zlomků desetinných jest v nejnepříznivějším případě tolik nižších míst nejistých, kolik číslic má polovičný počet sčítanců, u př. jedno místo, je-li méně nežli 20 sčítanců.

2) V rozdílu dvou zkrácených zlomků desetinných jest v nejnepříznivějším případě jedno místo nespolehlivé.

§. 114. 1) Chyba v součinu dvou desetinných zlomků zkrácených na stejný počet míst jest menší nežli tolik polovic jednotostí posledního místa, kolik udává součet obou činitelů.

Jsou-li desetinné zlomky $a . . .$ a $b . . .$ zkráceny na m desetinných míst, tedy

$$a . . . = a + \alpha, \quad a . . . = b + \beta,$$

kde α a β jsou menší nežli $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^m}$; tudíž

$$a . . . \times b . . . = ab + a\beta + b\alpha + \alpha\beta,$$

aneb vynecháme-li člen $\alpha\beta$ jakožto převelmi malý naproti ostatním,

$$a . . . \times b . . . = ab + a\beta + b\alpha.$$

Chyba v úplně vyvinutém součinu ab jest $a\beta + b\alpha$, tudíž menší nežli $(a + b) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^m}$.

Jsou-li u př. $7.846 . . .$ a $3.142 . . .$ zkrácené zlomky desetinné, bude $7.846 \times 3.142 = 24.652132$; chyba jest menší nežli $(7.846 + 3.142) \cdot \frac{0.001}{2}$, t. j. menší nežli 0.005494 . Součin správný ve dvou místech je tudíž 24.65 .

2) Násobíme-li zkrácený desetinný zlomek úplný m , chyba jest menší nežli tolik polovic jednotostí posledního místa, kolik udává činitel úplný.

Má-li $a . . .$ dřívější hodnotu, a je-li b úplný zlomek desetinný, bude

$$a . . . \times b = ab + b\alpha,$$

tudíž chyba $b\alpha < b \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^m}$.

U př. Součin $8.0256 . . . \times 17.8$ lze vyvinouti na 3 správná desetinná místa proto, že chyba jest menší nežli $17.8 \cdot \frac{0.0001}{2}$, t. menší nežli 0.00089 .

§. 115. Chceme-li v součinu dvou čísel vyvinouti jen místa spolehlivá, vůbec jen určitý počet míst desetinných, a vyhnouti se zbytečnému počítání, násobíme zkráceně takto:

1) Napišeme (§. 68. dodatek a §. 110. dod.) násobitele pod násobence tak, aby nejvyšší platná číslice onoho přišla pod jednotky tohoto; ponecháme v násobiteli tolik míst desetinných, kolik jich v součinu chceme míti, a v násobenci taktéž jen desetinná místa nad zkráceným násobitelem.

2) Násobme nejvyšší číslici v násobiteli zkráceného násobence a první číslici částečného součinu napišme pod nejnižší místo zkráceného násobence. Aby však tato první číslice byla správná, násobme dříve první číslici vynechanou v násobenci, a desítky tohoto součinu připočítejme co náhradu či opravu k první číslici součinu částečného.

3) Taktéž násobme druhou, třetí, . . . číslici v násobiteli, při čem však pokaždé vynecháme nejnižší číslici dřívějšího násobence, a tudíž také nepíšeme částečné součiny vždy o jedno místo v pravo, nýbrž první jejich číslice klademe pod sebe. Konečně násobme také první číslici v násobiteli vynechanou a napišme desítky tohoto součinu jakožto poslední součin částečný.

4) Sečítejme všechny částečné součiny, a v součtu dejme desetinnou tečku přímo pod desetinnou tečku násobitele.

Příklad. Má se vypočítati součin neúplných zlomků desetinných 7.4281 . . a 0.9822 . .

Poněvadž chyba v součinu úplně vyvinutém bude menší nežli $(7.4281 + 0.9822) \cdot \frac{0.0001}{2}$, t. j. menší nežli 0.00042 , možná vypočítati součin správně až na 3 desetinná místa:

a) úplně:	b) zkráceně na 3 des. místa:
7.42 81	7.42 81
0.9 82 2	0.9 82
6 6 85 29	6 6 8 5
5 94 248	5 9 4
14 8562	1 5
1 48562	1
7.2 95 87982	7.2 9 5

(Pro ne zcela spolehlivé náhrady bývá při zkráceném násobení poslední číslice nejistá; chceme-li tedy v součinu obdržeti určitý počet spolehlivých číslic desetinných, vyvineme zkráceným násobením o jedno desetinné místo více nežli žádáno, a výsledek zkrátíme o jedno číslici.)

§. 116. 1) Chyba v podílu dvou desetinných zlomků zkrácených na stejný počet míst jest menší nežli tolik polovic jednotostí posledního místa, kolik udává součet dělenec a dělitele, dělený čtvercem dělitele.

Znamenají-li $a \dots a$ $b \dots b$ totéž co v §. 114., 1), bude

$$\frac{a \dots a}{b \dots b} = \frac{a}{b} + \frac{-a\beta + b\alpha}{b(b + \beta)}.$$

V nejnepríznivějším případě mají α a β protivná znaménka; pak jest chyba $\frac{a\beta + b\alpha}{b(b + \beta)}$, aneb vypustíme-li β jakožto převelmi malé naproti b , chyba se rovná $\frac{a\beta + b\alpha}{b^2}$, jest tedy menší nežli $\frac{a + b}{b^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^m}$.

Máme-li u př. vypočítati $5.134 \dots : 3.862 \dots$, bude chyba menší nežli

$$\frac{5.134 + 3.862}{3.862^2} \cdot \frac{0.001}{2} < \frac{8.996}{3.8^2} \cdot \frac{0.001}{2} = 0.00062 \dots$$

V podílu daných dvou desetinných zlomků lze tedy vyvinouti tři spolehlivé číslice desetinné, totiž

$$5.134 \dots : 3.862 \dots = 1.329 \dots$$

2) Dělíme-li zkrácený zlomek desetinný úplným, chyba bude menší nežli tolik polovic jednotostí posledního místa, kolik udává převratná hodnota dělitele.

Má-li $a \dots a$ dřívější hodnotu, a je-li b úplný zlomek desetinný, bude

$$\frac{a \dots a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{\alpha}{b}.$$

Chyba je zde $\frac{\alpha}{b}$, tedy menší nežli $\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^m}$.

U př. V podílu $0.314 \dots : 6.34$ můžeme vyvinouti čtyry správná místa desetinná proto, že chyba v podílu bude menší nežli

$$\frac{1}{6.34} \cdot \frac{0.001}{2} = 0.000078.$$

3) Dělíme-li úplný zlomek desetinný zkráceným, chyba bude menší nežli tolik polovic jednotostí posledního místa, kolik udává dělenec dělený čtvercem dělitele.

Má-li $b \dots$ hodnotu jako v §. 114., 1), a je-li a úplný zlomek desetinný, obdržíme

$$\frac{a}{b \dots} = \frac{a}{b} - \frac{a\beta}{b(b+\beta)}.$$

Vypustíme-li ve jmenovateli β jakožto převelmi malé na-
proti b , bude chyba $\frac{a\beta}{b^2}$, tudíž menší nežli $\frac{a}{b^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^m}$.

U př. V podílu $3\cdot9108 : 3\cdot5628 \dots$ jest chyba menší nežli
 $\frac{3\cdot9108}{3\cdot5628^2} \cdot \frac{0\cdot0001}{2} < \frac{3\cdot9108}{3\cdot5^2} \cdot \frac{0\cdot0001}{2} = 0\cdot000016 \dots$;

v podílu lze tedy vyvinouti 4 správná místa desetinná.

§. 117. Chceme-li v podílu dvou čísel vyvinouti jen určitý počet míst správných a vyhnouti se zbytečnému počítání, dělíme zkráceně takto:

1) Napíšeme (§. 70. dodatek a §. 111. dod.) dělitele pod prvního částečného dělece a první číslici podílu pod číslici na místě jednotek v děliteli; pak jest první číslice podílu s číslicí dělece přímo nad ní stojící téhož řádu. Z řádu této číslice a z počtu desetinných míst hledaných v podílu bude také známo, kolik platných číslic v podílu celkem máme určit. V děliteli vezmeme pak tolik nejvyšších číslic, kolik jich má podíl obsahovati, co prvního dělitele a část dělece, nad ním stojící, co prvního dělece.

2) Při každém následujícím dělení nepřipíšeme ku zbytku novou číslici z dělece aneb nullu, nýbrž vynecháme v děliteli v pravo číslici, násobíme však každou novou číslicí v podílu nejprvé číslici vynechanou v děliteli a náhradu z toho připočítáme k součinu zkráceného dělitele a náležité číslice v podílu.

3) Tak pokračujeme, až posléz dělíme první číslicí dělitele, čímž počet se ukončí. Desetinná tečka v podílu se klade pod desetinnou tečku dělece.

Příklad. Má se vypočítati podíl $96\cdot371 \dots : 4\cdot058 \dots$

$$\text{Poněvadž } \frac{96\cdot371 + 4\cdot058}{4\cdot058^2} \cdot \frac{0\cdot001}{2} < \frac{100\cdot429}{4^2} \cdot \frac{0\cdot001}{2} =$$

$0\cdot003 \dots$, obdržíme v podílu jen dvě správná místa desetinná; první číslice bude mít hodnotu desítek, musíme tudíž vyvinouti celkem 4 platné číslice.

a) obyčejné dělení des. zlomků,
které považujeme za úplné:

$$\begin{array}{r} 96371 \\ 4058 \overline{) 23748} \dots \\ 15211 \\ 30370 \\ 19640 \\ 34080 \end{array}$$

b) zkrácené dělení na 2 místa
desetinná:

$$\begin{array}{r} 96371\dots \\ 4058 \overline{) 2375} \dots \\ 1521 \\ 304 \\ 20 \\ 0 \end{array}$$

3. Zlomky řetězové.

§. 118. Zlomek, jehož jmenovatel se skládá z celistvého čísla a zlomku, jenž má jmenovatele téhož tvaru, není-li posledním, slove zlomek řetězový. Všeobecně vyznačujeme řetězové zlomky výrazem

$$\frac{a}{b + \frac{c}{d + \frac{e}{f + \dots}}} \quad \text{aneb zkráceně:} \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} + \dots$$

Zlomky $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, slovou členy zlomku řetězového. Má-li zlomek řetězový určitý počet členů, jmenuje se konečný (ukončený); postupuje-li však do nekonečna, slove nekonečný.

Zvláště důležité jsou řetězové zlomky, jejichžto členy mají vesměs 1 co čitatele a kladné číslo co jmenovatele; všeobecný jich tvar jest

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots$$

Jen o takovýchto zlomcích řetězových bude zde pojednáno.

Proměňování zlomku obyčejného ve zlomek řetězový a naopak.

§. 119. Úloha. Obyčejný zlomek pravý má se proměnit v řetězový.

Dělme jmenovatele čílatelem, předešlého dělitele zbytkem, nového dělitele novým zbytkem a t. d., až při některém dělení zbytek jest nulla; jednotlivé podíly jsou jmenovatele po sobě jdoucích členů zlomku řetězového.

Důkaz. Je-li $\frac{a}{b}$ zlomek pravý, tedy $a < b$, bude

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= \frac{1}{b:a} = \frac{1}{q_1} + \frac{r_1}{a} \\ &= \frac{1}{q_1} + \frac{1}{a:r_1} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{r_2}{r_1} \\ &= \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{r_1:r_2} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \frac{r_3}{r_2}\end{aligned}$$

a t. d., dá-li

$$\begin{array}{llllll} b : a & \text{za podíl } q_1 & \text{se zbytkem } r_1 & & & \\ a : r_1 & " & " & q_2 & " & r_2 \\ r_1 : r_2 & " & " & q_3 & " & r_3 \text{ a t. d.} \end{array}$$

Při tomto dělení musí konečně zbytek některý = 0, poněvadž zbytky jsou čísla celistvá a každý následující zbytek musí býti nejmeně o 1 menší nežli předešlý. Kdyby u př. v případě hořejším vůbec $r_3 = 0$, obdrželi bychom konečný zlomek řetězový

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3}.$$

Obyčejný zlomek $\frac{a}{b}$, jež jsme proměnili v řetězový, nazývá se zlomkem původním (tvořicím).

Máme-li u př. $\frac{69}{151}$ proměnit ve zlomek řetězový, počítáme takto:

$$\begin{array}{lcl} 151 : 69 = 2 & \text{se zbytkem } 13, \text{ čili} & 69 \mid 151 \mid 2 = q_1 \\ 69 : 13 = 5 & " & 4 \mid 13 \mid 5 = q_2 \\ 13 : 4 = 3 & " & 1 \mid 1 \mid 3 = q_3 \\ 4 : 1 = 4 & " & & 4 = q_4 \end{array}$$

protož $\frac{69}{151} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}.$

Dodatek. Máme-li nepravý zlomek proměnit v řetězový, uveďme jej na číslo smíšené, proměňme pak přivěšený

pravý zlomek v řetězový, a k tomu připišme na začátku číslo celistvé prve vyhledané. Řetězový zlomek má v tomto případě podobu

$$\frac{a}{b} = q + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3} \dots}}$$

§. 120. Konečný zlomek řetězový má se proměnití v obyčejný.

Poslední člen řetězového zlomku, spojený se jmenovatelem členu předposledního, proměníme v nepravý zlomek, jímž dělíme čitatele 1 tohoto předposledního členu; zlomek takto vyhledaný spojíme opět se jmenovatelem předešlého členu ve zlomek, jímž dělíme čitatele 1 tohoto členu. Tak pokračujeme až ku členu prvnímu. U př.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{5} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{41}{5}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{41} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{\frac{128}{41}} = \frac{1}{4} + \frac{41}{128} = \frac{1}{\frac{553}{128}} = \frac{128}{553}. \end{aligned}$$

Později (§. 122.) bude udáno, kterak řetězový zlomek se proměňuje v obyčejný jiným způsobem.

Sbližné zlomky a jich vlastnosti.

§. 121. Převédeme-li několik prvních členů řetězového zlomku, pomíjejíce všech ostatních, na zlomek obyčejný, obdržíme zlomek sbližný, a sice první, druhý, třetí a t. d., jestliže jsme použili ku převedení tomu pouze prvního, aneb prvních dvou, tří . . . členů.

Značí-li $\frac{Z_1}{N_1}, \frac{Z_2}{N_2}, \frac{Z_3}{N_3}, \dots$ po sobě jdoucí sbližné zlomky řetězového zlomku

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \frac{1}{q_4} + \dots$$

bude $\frac{Z_1}{N_1} = \frac{1}{q_1}$, $\frac{Z_2}{N_2} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$, $\frac{Z_3}{N_3} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3}$

$$\frac{Z_4}{N_4} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \frac{1}{q_4}, \text{ a t. d.}$$

Poslední sbližný zlomek ukončeného řetězového zlomku představuje zároveň zlomek původní.

§. 122. Čítatel sbližného zlomku (třetím počínaje) rovná se čítateli předešlého sbližného zlomku, násobenému jmenovatelem nově přibraného členu, více čítateli sbližného zlomku ob jeden předcházejícího; taktéž jmenovatel sbližného zlomku rovná se jmenovateli předešlého, násobenému jmenovatelem nově přibraného členu, více jmenovateli sbližného zlomku ob jeden předcházejícího.

Důkaz. První sbližné hodnoty jsou:

$$\frac{Z_1}{N_1} = \frac{1}{q_1}, \text{ tudíž } Z_1 = 1, N_1 = q_1.$$

$$\frac{Z_2}{N_2} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{\frac{q_1 q_2 + 1}{q_2}} = \frac{q_2}{q_1 q_2 + 1}, \text{ protože}$$

$$Z_2 = q_2, N_2 = q_1 q_2 + 1.$$

$$\frac{Z_3}{N_3} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{\frac{q_2 q_3 + 1}{q_3}} = \frac{1}{q_1} + \frac{q_3}{q_2 q_3 + 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{q_1 q_2 q_3 + q_1 + q_3}{q_2 q_3 + 1}} = \frac{q_2 q_3 + 1}{q_1 q_2 q_3 + q_1 + q_3} = \frac{q_2 q_3 + 1}{(q_1 q_2 + 1) q_3 + q_1},$$

čili $\frac{Z_3}{N_3} = \frac{Z_2 q_3 + Z_1}{N_2 q_3 + N_1}$, protože

$$Z_3 = Z_2 q_3 + Z_1, N_3 = N_2 q_3 + N_1,$$

z čehož vysvítá, že hořejší zákon u třetího sbližného zlomku již nabývá platnosti.

Dejme tomu, že by tento zákon měl platnost o n tém zlomku sbližném, tudíž by

$$\frac{Z_n}{N_n} = \frac{Z_{n-1} q_n + Z_{n-2}}{N_{n-1} q_n + N_{n-2}}.$$

Chceme-li z n tého zlomku sbližného obdržeti $(n + 1)$ ní, musíme vzhledem na členy řetězového zlomku, kteréž náležejí k $\frac{Z_n}{N_n}$ a $\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}}$, v onom za q_n dosaditi $q_n + \frac{1}{q_{n+1}}$.

Obdříme tedy

$$\begin{aligned}\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} &= \frac{Z_{n-1}\left(q_n + \frac{1}{q_{n+1}}\right) + Z_{n-2}}{N_{n-1}\left(q_n + \frac{1}{q_{n+1}}\right) + N_{n-2}} = \frac{Z_{n-1}(q_n q_{n+1} + 1) + Z_{n-2} q_{n+1}}{N_{n-1}(q_n q_{n+1} + 1) + N_{n-2} q_{n+1}} \\ &= \frac{(Z_{n-1} q_n + Z_{n-2}) q_{n+1} + Z_{n-1}}{(N_{n-1} q_n + N_{n-2}) q_{n+1} + N_{n-1}} = \frac{Z_n q_{n+1} + Z_{n-1}}{N_n q_{n+1} + N_{n-1}}.\end{aligned}$$

Má-li tedy zákon sestrojení platnost o n tém zlomku sbližném, jest platný též o $(n + 1)$ ním. Ale zákon tento, jakož ukázáno bylo, má platnost o třetím zlomku sbližném, tedy také o čtvrtém, proto též o pátém, a t. d., z čehož jde, že zákon ten nabývá platnosti všeobecné.

Na základě tomto můžeme z prvních dvou zlomků sbližných bez obtíže určití všechny ostatní po sobě jdoucí zlomky sbližné, tedy u konečného zlomku řetězového i zlomek původní.

U př. Je-li dán zlomek řetězový

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6},$$

bude $\frac{Z_1}{N_1} = \frac{1}{2}$, $\frac{Z_2}{N_2} = \frac{3}{7}$; tudíž

$$Z_3 = 3.4 + 1 = 13, N_3 = 7.4 + 2 = 30; \frac{Z_3}{N_3} = \frac{13}{30};$$

$$Z_4 = 13.5 + 3 = 68, N_4 = 30.5 + 7 = 157; \frac{Z_4}{N_4} = \frac{68}{157};$$

$$Z_5 = 68.6 + 13 = 421, N_5 = 157.6 + 30 = 972; \frac{Z_5}{N_5} = \frac{421}{972};$$

aneb

jmenovatelé	2,	3,	4,	5,	6,
sbližné zlomky	$\frac{1}{2}$,	$\frac{3}{7}$,	$\frac{13}{30}$,	$\frac{68}{157}$,	$\frac{421}{972}$.

Poslední zlomek sbližný představuje zároveň pravou hodnotu řetězového zlomku čili zlomek původní.

Dodatek. Ze zákona sestrojení sbližných zlomků plyne, že číselník i jmenovatel každého následujícího zlomku jest větší nežli číselník a jmenovatel sbližného zlomku předešlého.

§. 123. Sbližné zlomky jsou střídavě větší aneb menší nežli úplná hodnota řetězového zlomku, jak totiž obsahují lichý aneb sudý počet členů.

Důkaz. Značí-li $x_1, x_2, x_3, \dots$ členy vynechané po prvním, druhém, třetím, $\dots$ členu, bude

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1 + x_1} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2 + x_2} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3 + x_3} = \dots$$

Jest pak $q_1 < q_1 + x_1$, protož $\frac{1}{q_1} > \frac{1}{q_1 + x_1}$, čili $\frac{Z_1}{N_1} > \frac{a}{b}$.

Taktěž $q_2 < q_2 + x_2$, protož $\frac{1}{q_2} > \frac{1}{q_2 + x_2}$, tudíž také

$$q_1 + \frac{1}{q_2} > q_1 + \frac{1}{q_2 + x_2}, \text{ z čehož } \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}} < \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + x_2}}$$

$$\text{aneb } \frac{Z_2}{N_2} < \frac{a}{b}.$$

Rovněž

$$q_3 < q_3 + x_3, \text{ tedy } \frac{1}{q_3} > \frac{1}{q_3 + x_3}, \quad q_2 + \frac{1}{q_3} > q_2 + \frac{1}{q_3 + x_3};$$

$$\frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}} < \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + x_3}}, \quad q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}} < q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + x_3}};$$

$$\text{proto } \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}}} > \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + x_3}}}, \text{ aneb } \frac{Z_3}{N_3} > \frac{a}{b}.$$

Všeobecně jest tedy

$$\frac{Z_n}{N_n} > \frac{a}{b},$$

jak totiž n jest číslo liché aneb sudé.

Výsledek. Úplná hodnota řetězového zlomku leží vždy mezi hodnotami dvou po sobě jdoucích zlomků sbližných.

§. 124. 1) Jestliže od součinu číselníku sbližného zlomku a jmenovatele následujícího odečteme součin

čitatele tohoto a jmenovatele onoho zlomku, rozdíl se rovná $+1$ aneb -1 , jak totiž první zlomek sbližný obsahuje lichý nebo sudý počet členů.

Jest totiž

$$Z_1 N_2 - Z_2 N_1 = 1 \cdot (q_1 q_2 + 1) - q_2 \cdot q_1 = +1,$$

$$\begin{aligned} Z_2 N_3 - Z_3 N_2 &= Z_2 (N_2 q_3 + N_1) - (Z_2 q_3 + Z_1) N_2 \\ &= Z_2 N_1 - Z_1 N_2 = -1. \end{aligned}$$

$$\text{Je-li tedy všeobecně } Z_{n-1} N_n - Z_n N_{n-1} = \pm 1,$$

plyne z toho, že

$$\begin{aligned} Z_n N_{n+1} - Z_{n+1} N_n &= Z_n (N_n q_{n+1} + N_{n-1}) - (Z_n q_{n+1} + Z_{n-1}) N_n \\ &= Z_n N_{n-1} - Z_{n-1} N_n = \mp 1, \end{aligned}$$

čím jest všeobecná platnost hořejší věty dokázána.

2) Rozdíl dvou po sobě jdoucích zlomků sbližných rovná se $+1$ dělené součinem jmenovatelů.

Všeobecně jest

$$\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}} - \frac{Z_n}{N_n} = \frac{Z_{n-1} N_n - Z_n N_{n-1}}{N_{n-1} N_n} = \frac{\pm 1}{N_{n-1} N_n}.$$

3) Prostý rozdíl zlomku sbližného a původního jest menší nežli 1 dělena čtvercem jmenovatele zlomku sbližného.

Důkaz. Poněvadž úplná hodnota $\frac{a}{b}$ řetězového zlomku vždy leží mezi hodnotami dvou přímo po sobě jdoucích zlomků sbližných, jest absolutný rozdíl $\frac{Z_n}{N_n} - \frac{a}{b}$ menší nežli rozdíl $\frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}}$, tudíž

$$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{a}{b} < \frac{1}{N_n N_{n+1}}.$$

Ale poněvadž $N_{n+1} > N_n$, tedy $N_n N_{n+1} > N_n^2$, a $\frac{1}{N_n N_{n+1}} < \frac{1}{N_n^2}$, tedy zajisté

$$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{a}{b} < \frac{1}{N_n^2}.$$

Dodatek. Jelikož $N_1^2 < N_2^2 < N_3^2 < N_4^2 < \dots$, tedy

$$\frac{1}{N_1^2} > \frac{1}{N_2^2} > \frac{1}{N_3^2} > \frac{1}{N_4^2} > \dots,$$

z čehož plyne, že každý následující zlomek sbližný od úplné hodnoty řetězového zlomku liší se méně nežli předešlý, že tedy

sbližné zlomky po sobě jdoucí k této hodnotě čím dále tím více se blíží, až konečně poslední, je-li vůbec který, jí se vyrovná.

§. 125. Čítatel a jmenovatel každého zlomku sbližného jsou prvočísla vespolek.

U sbližných zlomků $\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}}$ a $\frac{Z_n}{N_n}$ jest (§. 124.) prostý rozdíl

$$Z_{n-1}N_n - Z_nN_{n-1} = 1.$$

Kdyby tedy Z_n a N_n měly společnou míru m , bylo by m také měrou rozdílu $Z_{n-1}N_n - Z_nN_{n-1}$ (§. 74., 1) a 73., 2), tudíž i měrou jedničky, což není možná.

§. 126. Mezi dva po sobě jdoucí zlomky sbližné nelze vložit zlomek, jehož jmenovatel není větší nežli větší jmenovatel obou zlomků sbližných.

Dejme tomu, že by obyčejný zlomek $\frac{p}{q}$ ležel mezi $\frac{Z_n}{N_n}$ a

$\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}}$, tedy by bez ohledu na znaménka

$$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{p}{q} < \frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}}, \text{ aneb } \frac{Z_n q - N_n p}{N_n q} < \frac{1}{N_n N_{n+1}},$$

protož

$$\frac{Z_n q - N_n p}{q} < \frac{1}{N_{n+1}},$$

což jen tehdy možná, je-li jmenovatel $q > N_{n+1}$, poněvadž rozdíl $Z_n q - N_n p$ má býti číslo celistvé, které se liší od nuly, tedy ≥ 1 .

Výsledek. Každý sbližný zlomek udává úplnou hodnotu řetězového zlomku lépe nežli každý jiný zlomek s menším jmenovatelem.

Dodatek. Tato vlastnost zlomků sbližných jest v ohledu praktickém velmi důležitá. Chceme-li totiž podíl (poměr) dvou velkých čísel co možná nejurčitěji vyjádřit číslly menšími, proměníme jej ve zlomek řetězový a vyhledáme sbližné zlomky; každý z nich pak udává hledaný podíl určitěji nežli všechny možné obyčejné zlomky, jejichžto jmenovatelé nejsou větší nežli jmenovatel zlomku sbližného.

Příklady. 1) Zlomek 3.1415926, t. j. číslo udávající poměr obvodu kruhu k průměru, má se co možná nejurčitěji vyjádřit menšími čísly.

$$3.1415926 = \frac{31415926}{10000000} = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{1}{243} + \dots,$$

z čehož sblížené zlomky :

$$\begin{array}{cccccc} 3, & 7, & 15, & 1, & 243, & \dots \\ \frac{3}{1}, & \frac{22}{7}, & \frac{333}{106}, & \frac{355}{113}, & \frac{86598}{27565}, & \dots \end{array}$$

2) Vídeňská stopa = 0.316081 metru ; mají se vyhledati sblížené zlomky.

$$0.316081 = \frac{316081}{1000000} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \dots,$$

tedy sblížené zlomky :

$$\begin{array}{cccccc} 3, & 6, & 9, & 2, & 1, & 9, \dots \\ \frac{1}{3}, & \frac{6}{19}, & \frac{55}{174}, & \frac{116}{367}, & \frac{171}{541}, & \frac{1655}{5236}, \dots \end{array}$$

Přibližně pak

$$\begin{array}{rcl} 3 \text{ víd. st.} & = & 1 \text{ metru,} \\ 19 \text{ " " } & = & 6 \text{ metrům,} \\ 174 \text{ " " } & = & 55 \text{ " } \\ 367 \text{ " " } & = & 116 \text{ " } \\ 541 \text{ " " } & = & 171 \text{ " } \\ 5236 \text{ " " } & = & 1655 \text{ " a t. d.} \end{array}$$

VII. Poměry a srovnalosti.

1. Poměry.

§. 127. Dělení co rozdělování uvádí nás na zlomky ; dělení co měření čísla jakéhosi číslem jiným vede na pojem poměru. Poměrem dvou čísel (veličin) a a b míní se výraz, jenž udává, kolikráte a jest větší nežli b , aneb kolikráte b jest v a obsaženo. Poměr veličin a a b označujeme znaménkem dělení mezi ně kladeným, tedy $a : b$ aneb $\frac{a}{b}$, což se čte: a má se k b , aneb zkrátka: a k b . Dělitel a dělenec slovy členy poměru, a sice dělenec je člen první či přední a dělitel druhý či zadní. Je-li $a : b = q$, nepojmenované číslo q slove podíl aneb udavatel poměru $a : b$.

Poměr se nazývá číselným, jsou-li jeho členy čísla bezjmenná. Směníme-li v poměru $a : b$ první člen za druhý, poměr $b : a$ jmenuje se obrácený čili převrtný.

Velikost poměru závisí na jeho udavateli; čím větší udavatel, tím větší jest poměr. Mají-li poměry téhož udavatele, jsou sobě rovny. A naopak, jsou-li poměry sobě rovny, mají téhož udavatele.

§. 128. Poměr dvou (stejnorodých) veličin, u př. dvou čar, ploch, . . . má tentýž význam jako poměr dvou nepojmenovaných čísel, která vyjadřují, kolikrát společná míra obou veličin jako jednotost v obou číslech jest obsažena.

1) Udavatel poměru dvou veličin směřitelných (§. 87.) jest buď číslo celistvé nebo lomené.

Jsou-li veličiny A a B směřitelné, a jejich společná míra v A obsažena m krát, v B pak n krát, tedy $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$, kde $\frac{m}{n}$ pro případ, že by buď $n = 1$ aneb vůbec m bylo dělitelno n , představuje číslo celistvé, jinak lomené.

2) Udavatel poměru dvou veličin nesměřitelných nemůže a) býti ani číslo celistvé ani lomené; můžeme jej však b) udáním dvou mezí, v nichžto leží, přibližně určit tak správně, jak toho potřeba káže.

a) Jsou-li A a B veličiny nesměřitelné, nemůže ani $\frac{A}{B} = m$, aniž $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$; neboť v prvním případě by bylo B, v druhém pak $\frac{B}{n}$ společnou měrou A a B, což jest proti podmínce.

b) Rozdělíme-li B na n rovných částí, a odejmeme-li jednu takovou část $\frac{B}{n}$ od A m krát, t. j. kolikrát vůbec možno, pozůstane z A zbytek menší nežli $\frac{B}{n}$; tudíž musí $A > m \cdot \frac{B}{n}$, ale $A < (m + 1) \cdot \frac{B}{n}$, protože jest dle §. 57., 2)

$$\frac{m}{n} < \frac{A}{B} < \frac{m + 1}{n}.$$

Udavatel poměru $\frac{A}{B}$ leží tedy v mezích $\frac{m}{n}$ a $\frac{m+1}{n}$, jichž rozdíl jest $\frac{1}{n}$. Položíme-li $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$ aneb $\frac{m+1}{n}$, dopustíme se jednou v kladném, po druhé v záporném smyslu chyby, kteráž bude menší nežli $\frac{1}{n}$. Poněvadž pak můžeme vzítí n jakkoli veliké, čili zlomek $\frac{1}{n}$ jakkoli malý, lze také $\frac{A}{B}$ určití tak správně, jak toho jen potřeba káže.

Dodatek. Máme-li vyjádřiti poměr dvou nesměřitelných veličin, musíme v obor čísel uvéstí číselný tvar, jenž sice nepřichází v dosavadní řadě čísel celistvých a lomených, ale těmito čísly přibližně sebe správněji se může určití. Poněvadž nás však na tento nový tvar číselný, ježž jmenujeme číslo neracionálné, později (§. 178.) povede i pozorování čísel dosavadních, bude o něm tam teprv pojednáno.

V následujících větách zatím předpokládejme, že členy poměru jsou směřitelné.

§. 129. Poučky. 1) První člen každého poměru rovná se druhému členu násobenému udavatelem.

2) Druhý člen každého poměru rovná se prvnímu členu dělenému udavatelem.

Je-li $a : b = q$, musí

$$1) a = bq;$$

$$2) b = a : q.$$

Pravdivost těchto vět plyne přímo z §. 44.

3) Hodnota poměru se nemění, násobíme-li nebo dělíme-li oba jeho členy týmž číslem.

Plyne z §. 51., 2).

Dodatek. Použijeme-li věty této, můžeme a) každý poměr, jehožto členy jsou zlomky, vyjádřiti čísly celistvými, b) každý poměr, jehožto členy mají společnou míru, touto zkrátiti.

4) Jsou-li dva poměry rovny třetímu, jsou i sobě rovny.

Plyne z §. 7., 2).

§. 130. Násobíme-li přední a zadní členy dvou nebo několika poměrů, součiny tvoří nový poměr, ježž naproti daným jednoduchým poměrům nazýváme složitým.

Jsou-li u př.

$a : b$

$c : d$

$e : f$ poměry jednoduché,
bude $ace : bdf$ poměr složitý.

Dodatek. Násobíme-li aneb dělíme-li některý přední a zadní člen v jednoduchých poměrech týmž číslem, bude přední a zadní člen poměru složitého týmž číslem násoben anebo dělen, tudíž hodnota složitého poměru zůstává neporušena.

2. Srovnalosti.

§. 131. Srovnání dvou rovných poměrů slove srovnalost. Je-li $a : b = q$ a $c : d = q$, musí též $a : b = c : d$. Výraz tento jest srovnalost a čte se: a se má k b , jako c se má k d , aneb zkrátka: a k b , jako c k d . Prvnímu členu a , pak čtvrtému d říkáme vnější, druhému b a třetímu c vnitřní členy; a a c slovou také přední, b a d zadní členy srovnalosti. Čtvrtý člen zvláště jmenuje se čtvrtá měřicky srovnalostná.

Srovnalost, v nížto vnitřní členy jsou sobě rovny, slove spojitá (nepřetržitá), u př. $a : b = b : c$. Vnitřní člen b se jmenuje střední měřicky srovnalostná (čili měřický průměr členů a a c), vnější člen c slove třetí spojitě srovnalostná.

Jsou-li veličiny dvou rodů na sobě závislé tak, že *mnásobné* veličině jednoho rodu přináleží *mnásobná* veličina rodu druhého, říkáme, že obě veličiny jsou přímo srovnalé, čili jedna s druhou že jest v poměru přímém; u př. zboží a cena jeho, jistina a úroky a t. d. Přináleží-li však *mnásobné* veličině jednoho rodu jen *mtá* část veličiny rodu druhého, obě veličiny jsou obráceně srovnalé čili jedna jest s druhou v poměru obráceném; u př. počet dělníků a doba pracovní při téže práci, jistina a čas při rovných úrocích a t. d.

Ve srovnalosti mohou členy jednoho poměru býti jiného rodu nežli členy druhého poměru. Jsou-li členy srovnalosti vesměs čísla nepojmenovaná, srovnalost slove číselná, jinak se jmenuje veličinná, čili srovnalost s čísly pojmenovanými.

V následujících větách o srovnalostech prozatím předpokládáme, že členy každého poměru jsou čísla směřitelná.

§. 132. Poučky. 1) Je-li ve srovnalosti první člen větší, roven druhému aneb menší nežli druhý, musí také třetí člen býti vztažně větší, roven čtvrtému aneb menší nežli čtvrtý.

Ve srovnalosti $a : b = c : d$ budiž q udavatelem obou poměrů; tudíž $a = bq$ a $c = dq$. Je-li $a \geq b$, musí $q \geq 1$, proto také $c \geq d$.

2) Je-li ve srovnalosti stejnorodých aneb nepojmenovaných čísel první člen větší, roven třetímu aneb menší nežli třetí, musí také druhý člen vztažně býti větší, roven čtvrtému aneb menší nežli čtvrtý.

Neboť je-li $a \geq c$, bude $bq \geq dq$, tudíž $b \geq d$.

3) Ku třem veličinám a, b, c jest možná *jediná* čtvrtá měřicky srovnalostná.

Kdyby mimo d také d' byla čtvrtá měřicky srovnalostná k veličinám a, b, c , tedy by $a : b = c : d$ a $a : b = c : d'$, pak by však též $c : d = c : d'$, tudíž dle 2) $d = d'$.

4) Střední měřická srovnalostná dvou čísel leží vždy mezi oběma.

Budiž dána srovnalost $a : b = b : c$; je-li $a \geq b$, musí dle 1) vztažně také $b \geq c$.

§. 133. Součin vnějších členů každé číselné srovnalosti rovná se součinu členů vnitřních.

Ve srovnalosti $a : b = c : d$ jest

	$a = bq$	a	$c = dq$	
násobíme-li	$d = d$	a	$b = b$	
bude	$ad = bdq$	a	$bc = bdq$	tudíž $ad = bc$.

Tato věta vztahuje se i ku každé srovnalosti, v níž jen jediný poměr jest číselný.

Výsledky. 1) Čtverec střední měřicky srovnalostné ve spojitě srovnalosti číselné rovná se součinu obou členů ostatních.

Ze srovnalosti $a : b = b : c$ obdržíme $b^2 = ac$.

2) Každý vnější člen číselné srovnalosti rovná se součinu obou členů vnitřních, dělenému druhým členem vnějším, a každý vnitřní člen se rovná součinu obou členů vnějších, dělenému druhým členem vnitřním.

Ve srovnalosti $a : b = c : d$ jest $ad = bc$, z čehož

$$a = \frac{bc}{d}, \quad d = \frac{bc}{a},$$

$$b = \frac{ad}{c}, \quad c = \frac{ad}{b}.$$

§. 134. Ze dvou rovných součinů lze sestaviti srovnalost, rozložíme-li každý součin na dva činitele, a postavíme-li činitele jednoho součinu co členy vnější, činitele součinu druhého pak co členy vnitřní.

Budiž $ad = bc$; dělíme-li oba rovné výrazy součinem bd , obdržíme $ad : bd = bc : bd$, čili

$$a : b = c : d.$$

§. 135. Srovnalost řešiti slove, ze tří daných členů vyhledati čtvrtý neznámý.

a) Srovnalost se řeší, určíme-li udavatele známého poměru a vyhledáme-li jím pak dle §. 129. neznámý člen druhého poměru.

b) Číselná srovnalost se řeší nejlépe dle §. 133., výsled. 2).

Ze srovnalosti $x : 2 = 15 : 3$ obdržíme

a) $15 : 3 = 5$, protož $x = 2 \cdot 5 = 10$; aneb

b) $x = \frac{2 \cdot 15}{3} = 10$, tudíž úplná srovnalost

$$10 : 2 = 15 : 3.$$

§. 136. 1) Každá srovnalost zůstává pravou, směníme-li vnější členy za vnitřní.

Ve srovnalosti $a : b = c : d$ jest $a = bq$, $c = dq$, z čehož $b = a \cdot \frac{1}{q}$, $d = c \cdot \frac{1}{q}$, tudíž také $b : a = d : c$.

2) Srovnalost čísel stejnorodých aneb nepojmenovaných zůstává pravou, směníme-li buď

a) vnitřní, nebo b) vnější členy.

Je-li dána srovnalost $a : b = c : d$, tedy $a = bq$, $c = dq$,
z čehož

a) $a : c = bq : dq$, čili $a : c = b : d$ (§. 129., 3);

b) $d : b = dq : bq$ (§. 129., 3), čili $d : b = c : a$.

3) Srovnalost zůstává pravou, jestliže jeden vnější a jeden vnitřní člen týmž číslem násobíme aneb dělíme.

Ze srovnalosti $a : b = c : d$ jest opět $a = bq$, $c = dq$.

Z §. 129., 3) pak plyne, že

$$am : bm = c : d, \quad a \frac{a}{m} : \frac{b}{m} = c : d.$$

$$a : b = cm : dm \quad a \quad a : b = \frac{c}{m} : \frac{d}{m}.$$

Mimo to

$$am = bq \cdot m = b \cdot qm, \quad \frac{a}{m} = \frac{bq}{m} = b \cdot \frac{q}{m},$$

$$cm = dq \cdot m = d \cdot qm, \quad \frac{c}{m} = \frac{dq}{m} = d \cdot \frac{q}{m};$$

protož

$$am : b = cm : d, \quad \frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d.$$

Rovněž pak

$$a : bm = c : dm, \quad a : \frac{b}{m} = c : \frac{d}{m}.$$

Dodatek. Věty této použijeme, abychom a) srovnalost, v nížto přicházejí zlomky, vyjádřili celistvými čísly; b) srovnalost, v nížto jeden vnější a vnitřní člen má tutéž míru, zkrátíme čili vyjádřili menšími čísly.

§. 137. 1) V každé srovnalosti má se součet aneb rozdíl členu prvního a druhého ku členu prvnímu nebo druhému, jako součet nebo rozdíl členu třetího a čtvrtého ku členu třetímu nebo čtvrtému.

Ve srovnalosti $a : b = c : d$ jest $a = bq$, $c = dq$, tudíž

$$(a \pm b) : a = (bq \pm b) : bq = (q \pm 1) : q,$$

$$(c \pm d) : c = (dq \pm d) : dq = (q \pm 1) : q;$$

protož

$$(a \pm b) : a = (c \pm d) : c.$$

Podobně obdržíme

$$(a \pm b) : b = (c \pm d) : d.$$

2) V každé srovnalosti má se součet členu prvního a druhého k jich rozdílu, jako součet členu třetího a čtvrtého k jich rozdílu.

Jest totiž

$$(a + b) : (a - b) = (bq + b) : (bq - b) = (q + 1) : (q - 1),$$

$$(c + d) : (c - d) = (dq + d) : (dq - d) = (q + 1) : (q - 1);$$

protož $(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d).$

3) V každé srovnalosti stejnorodých aneb nepojmenovaných čísel má se součet nebo rozdíl členu prvního a třetího k součtu nebo rozdílu členu druhého a čtvrtého, jako první člen k druhému, nebo třetí ku čtvrtému.

Je-li dána srovnalost $a : b = c : d$, bude

$$(a + c) : (b + d) = a : b = c : d.$$

Plyne z 1) s použitím §. 136., 2) a).

Dodatek. Při několika rovných poměrech stejnorodých aneb nepojmenovaných čísel má se součet členů předních k součtu členů zadních jako každý přední člen ku svému členu zadnímu.

Má-li se $a : b = c : d = f : g$, tedy

$$(a + c + f) : (b + d + g) = a : b$$

$$= c : d$$

$$= f : g.$$

§. 138. 1) Jsou-li ve dvou srovnalostech přední nebo zadní členy v témž pořádku sobě rovny, jsou vztažně zadní nebo přední členy v přímém poměru:

$$\begin{array}{ll} a : b = c : d & a : b = c : d \\ a : m = c : n & m : b = n : d \\ \hline b : m = d : n & a : m = c : n. \end{array}$$

Pravdivost věty této bude patrna, dokážeme-li rovnost udavatelů v posledních srovnalostech.

2) Jsou-li ve dvou srovnalostech vnější nebo vnitřní členy v témž pořádku sobě rovny, jsou vztažně vnitřní aneb vnější členy v obráceném poměru.

$$\begin{array}{ll} a : b = c : d & a : b = c : d \\ a : m = n : d & m : b = c : n \\ \hline b : m = n : c & a : m = n : d. \end{array}$$

Důkaz spočívá na rovnosti udavatelů.

§. 139. Jsou-li dány srovnalosti

$$a : b = m : n,$$

$$b : c = n : p,$$

$$c : d = p : q, \text{ a t. d.}$$

můžeme je spojití následovně:

$$a : b : c : d . . . = m : n : p : q . . . ,$$

kteréžto srovnalosti říkáme nepřetržitá.

Jsou-li dány srovnalosti

$$a : b = m : n,$$

$$b : c = p : r,$$

$$c : d = s : t,$$

můžeme z nich vždycky sestaviti srovnalost nepřetržitou.

Neboť

$$a : b = m . ps : n . ps,$$

$$b : c = p . ns : r . ns,$$

$$c : d = s . nr : t . nr;$$

protož $a : b : c : d = mps : nps : nrs : nrt.$

§. 140. 1) Násobíme-li ve dvou nebo několika číselných srovnalostech členy na stejných místech součiny tvoří opět srovnalost.

Má-li se $a : b = c : d$, tedy $a = bq$, $c = dq$;

$$f : g = h : k, \text{ „ } f = gq', \text{ „ } h = kq';$$

$$m : n = p : r, \text{ „ } m = nq'', \text{ „ } p = rq'';$$

$$\text{z čehož } afm = bgn . qq'q'', \text{ chp} = dkr . qq'q''$$

protož $afm : bgn = chp : dkr.$

Tato srovnalost se jmenuje složená (složitá).

Hořejší věta jest platná i v tom případě, přicházejí-li v jedné z daných srovnalostí veličiny pojmenované.

Dodatek. Má-li se $a : b = m : n$,

$$b : c = p : r,$$

$$c : d = s : t,$$

obdržíme násobením členů na stejných místech

$$a : c = mp : nr, \text{ „ } b : d = ps : rt, \text{ „ } a : d = mps : nrt.$$

2) Dělíme-li ve dvou číselných srovnalostech členy na stejných místech, podíly dají opět srovnalost.

Má-li se $a : b = c : d$, tedy $a = bq$, $c = dq$;

$$f : g = h : k, \text{ „ } f = gq', \text{ „ } h = kq';$$

$$\text{z čehož } \frac{a}{f} = \frac{b}{g} \cdot \frac{q}{q'}, \frac{c}{h} = \frac{d}{k} \cdot \frac{q}{q'},$$

protož

$$\frac{a}{f} : \frac{b}{g} = \frac{c}{h} : \frac{d}{k}.$$

Srovnalosti harmonické a protiharmonické.

§. 141. Tři veličiny a, b, c tvoří harmonickou srovnalost, má-li se $(a - b) : (b - c) = a : c$; veličina b slove střední harmonická srovnalostná (harmonický průměr veličin a a c).

Úloha. Ku dvěma daným veličinám má se vyhledati třetí harmonicky srovnalostná.

Ze srovnalosti $(a - b) : (b - c) = a : c$ plyne

$$1) \quad a = \frac{bc}{2c - b},$$

$$2) \quad c = \frac{ab}{2a - b},$$

$$3) \quad b = \frac{2ac}{a + c}.$$

Rovnice třetí zní:

Harmonický průměr dvou veličin rovná se dvojnásobnému jich součinu, dělenému jich součtem.

§. 142. Tři veličiny a, b, c tvoří protiharmonickou srovnalost, má-li se $(b - c) : (a - b) = a : c$; veličina b se jmenuje střední protiharmonická srovnalostná (protiharmonický průměr veličin a a c).

Protiharmonický průměr dvou čísel rovná se součtu jich čtverců, dělenému součtem obou čísel.

Ze srovnalosti $(b - c) : (a - b) = a : c$ plyne

$$b = \frac{a^2 + c^2}{a + c}.$$

(Porovnání průměru arithmetického (§. 99., dod. 2), geometrického (§§. 131. a 133., výsl. 1), harmonického a protiharmonického.)

3. Použití srovnalostí.

§. 143. Řešení úloh, jejichžto veličiny jsou spolu v poměrech jednoduchých, použitím srovnalostí, t. j. jednoduché pravidlo tříčlenové, zakládá se na následujících dvou větách:

1) Jsou-li čísla dvou rodů přímo srovnalá, poměr vždy dvou a dvou čísel jednoho rodu se rovná v témž pořádku sestavenému poměru příslušných čísel rodu druhého.

Buďtež A a a dvě čísla rodu jednoho, B a b příslušná čísla rodu druhého a čísla obou rodů přímo srovnalá. Je-li tedy $A = ma$, musí dle pojmu přímého poměru též $B = mb$, protože

$$A : a = m \text{ a } B : b = m; \text{ tudíž}$$

$$A : a = B : b.$$

2) Jsou-li čísla dvou rodů obráceně srovnalá, poměr vždy dvou a dvou čísel jednoho rodu se rovná v obráceném pořádku sestavenému poměru příslušných čísel rodu druhého; proto také čísla k sobě náležející dávají týž součin.

Buďtež A a a dvě čísla rodu jednoho, B a b příslušná čísla rodu druhého a čísla obou rodů obráceně srovnalá. Je-li tedy

$$A = ma, \text{ musí } B = \frac{b}{m}, \text{ čili } b = mB, \text{ tudíž } A : a = m,$$

$$b : B = m, \text{ z čehož}$$

$$A : a = b : B, \text{ a } AB = ab.$$

Příklady. 1) Stojí-li 7 metrů sukna 30 zl., zač bude 42 metrů téhož sukna?

Čísla obou rodů jsou zde přímo srovnalá, pročež

$$7 \text{ metrů } 30 \text{ zl.} \quad x : 30 = 42 : 7, \text{ tedy}$$

$$42 \text{ metry } x \quad x = 180 \text{ zl.}$$

2) 16 dělníků vykoná práci v 6 dnech; kolik dělníků musíme najmouti, aby tato práce byla vykonána ve 4 dnech?

Čísla obou rodů jsou obráceně srovnalá, protože

$$16 \text{ děln. } 6 \text{ dn.} \quad x : 16 = 6 : 4$$

$$x \quad 4 \quad x = 24 \text{ děln.}$$

§. 144. Číslo, vztahující se ku 100, nazývá se procentem.

V počtu procentovém počítáme buď ze sta, aneb na sto, aneb ve stu, jak totiž množství, jehož procenta hledáme, je stejnorodé se základním číslem 100, aneb se 100 zvýšeným aneb zmenšeným o procento.

Znamená-li p procento, b jistou část množství m , obdržíme následující srovnalosti:

$$a) \text{ v počtu ze sta } b : p = m : 100, \quad \text{tedy } b = \frac{mp}{100};$$

$$b) \quad \text{„ na sto } b : p = m : (100 + p), \quad \text{„ } b = \frac{mp}{100 + p};$$

$$c) \quad \text{„ ve stu } b : p = m : (100 - p), \quad \text{„ } b = \frac{mp}{100 - p}.$$

§. 145. Řešení úloh, jejichžto veličiny jsou spolu v poměrech složených, t. j. složené pravidlo tříčlenové, zakládá se na větě následující:

Je-li jeden rod čísel závislý na několika jiných rodech tak, že s nimi jednotlivě jest v poměru jednak přímém jinak obráceném, poměr vždy dvou a dvou čísel prvního rodu serovná poměru složenému z jednoduchých poměrů příslušných čísel každého jiného rodu; čísla tato klademe v témž aneb obráceném pořádku, jak totiž jsou s čísly rodu prvního v poměru přímém aneb obráceném.

Budiž číslo A závislé na číslech B, C tak, jako jest

" a " " " b, c ,

kde čísla, označená stejně znějícími písmeny, náležejí k témuž rodu, a čísla prvního rodu buďtež s čísly druhého rodu v poměru přímém, s čísly třetího rodu však v poměru obráceném. Znamená-li pak α číslo prvního rodu, kteréž náleží k b a C , máme následující řady čísel příslušných:

$A, B, C;$

$\alpha, b, C;$

$a, b, c.$

Přirovnáme-li první dvě řady, shledáme, že číslo α vznikne z A , změní-li se B v b ; poněvadž pak čísla rodu prvního a druhého jsou přímo srovnalá, obdržíme

$$A : \alpha = B : b.$$

Přirovnáme-li taktéž řadu druhou a třetí, shledáme, že α vznikne z α , změní-li se C v c , a poněvadž čísla rodu prvního a třetího jsou v poměru obráceném, má se

$$\alpha : a = c : C.$$

Násobíme-li členy na stejných místech, obdržíme z těchto dvou srovnalostí

$$A\alpha : a\alpha = Bc : bC, \text{ aneb}$$

$$A : a = Bc : bC,$$

v kteréžto srovnalosti hořejší věta jest obsažena.

Pro lepší přehled píšeme tuto srovnalost také následovně:

$$A : a = B : b,$$

$$c : C,$$

při čemž musíme pamatovati na to, že je třeba násobiti čísla pod sebou stojící.

U př. 20 dělníků zhotoví hráz 375 metrů dlouhou za 5 neděl, pracují-li denně 12 hodin; za kolik neděl 12 dělníků zhotoví takou hráz 600 metrů dlouhou, pracují-li denně 10 hodin?

20 děln. 375 m. 5 n. 12 h.

12 " 600 " x " 10 "

$$x : 5 = 20 : 12$$

$$600 : 375$$

$$12 : 10$$

$$x : 1 = 16 : 1$$

$$x = 16 \text{ ned.}$$

§. 146. Značí-li U jednoduché úroky, kteréž jistina J na P procent vynáší za R roků, bude složený počet tříčlenový:

100 zl. jist. za 1 rok P zl. úr.

J " " R roků U " "

$$U : P = J : 100$$

$$R : 1$$

tudíž

$$U : P = JR : 100$$

a

$$100 U = JPR.$$

Dělíme-li poslední dva rovné výrazy nejprv 100, pak PR, potom JR, konečně JP, obdržíme:

$$U = \frac{JPR}{100}, J = \frac{100U}{PR}, P = \frac{100U}{JR}, R = \frac{100U}{JP},$$

kterýchžto vzorců se užívá v jednoduchém počtu úrokovém.

Počet spolkový.

§. 147. Počet, jímžto se dělí dané číslo na několik částí, které s jinými danými čísly jsou srovnalé, slove počet spolkový. Čísla, udávající poměr těchto částí, jmenují se čísla poměrná.

Je-li dána jen jedna řada čísel poměrných, počet spolkový slove jednoduchý; složitý však, je-li dáno několik řad čísel poměrných.

Má-li jednoduchým počtem spolkovým číslo s rozdělit se na části posud neznámé u, x, y a z , kteréž by byly v poměru daných čísel a, b, c a d , musí

$$u : x = a : b, x : y = b : c, y : z = c : d,$$

aneb

$$u : x : y : z = a : b : c : d.$$

Směníme-li v předešlých srovnalostech vnitřní členy, má se

$$u : a = x : b, x : b = y : c, y : c = z : d,$$

tudiž $u : a = x : b = y : c = z : d,$

a dle §. 137. dod.,

$$\begin{aligned} (u + x + y + z) : (a + b + c + d) &= u : a \\ &= x : b \\ &= y : c \\ &= z : d. \end{aligned}$$

Poněvadž pak $u + x + y + z = s$, obdržíme z posledního výrazu

$$u = \frac{s}{a + b + c + d} \cdot a; \quad x = \frac{s}{a + b + c + d} \cdot b;$$

$$y = \frac{s}{a + b + c + d} \cdot c; \quad z = \frac{s}{a + b + c + d} \cdot d.$$

Při jednoduchém počtu spolkovém dělíme tedy číslo, kteréž rozděliti se má, součtem čísel poměrných, a podíl násobíme každým číslem poměrným; součiny rovnají se hledaným částem.

Jsou-li poměrná čísla zlomky, násobíme je nejmenším společným násobkem jmenovatelů, abychom je vyjádřili celistvými čísly. Mají-li všechna poměrná čísla společnou míru, zkrátíme je.

U př. 2155 zl. má se rozděliti třem osobám v poměru čísel 5, 3 a 2.

5	$2155 : 10 = 215\frac{1}{2}$	$215\frac{1}{2} \cdot 5 = 1077\frac{1}{2}$
3		$215\frac{1}{2} \cdot 3 = 646\frac{1}{2}$
2		$215\frac{1}{2} \cdot 2 = 431$
10		2155.

§. 148. Složitý počet spolkový svede se na jednoduchý takto:

Číslo s má se s ohledem na několik okolností rozděliti u př. na tři části, kteréž v jednom ohledu mají se k sobě jako $a : b : c$, v druhém ohledu jako $d : e : f$, a v třetím ohledu jako $g : h : k$. Jsou-li x, y, z hledané části, musí se míti $x : y$ nejen jako $a : b$, nýbrž i jako $d : e$ a jako $g : h$; poměr $x : y$ musí se tedy rovnati poměru složenému z $a : b$, $d : e$, $g : h$, tedy poměru $adg : beh$. Rovněž musí $y : z = beh : cfk$, proto části x, y, z musejí se určití tak, aby se vyhovělo podmínce

$$x : y : z = adg : beh : cfk,$$

což jest úlohou jednoduchého počtu spolkového.

Při složitém počtu spolkovém násobíme tedy poměrná čísla, která k téže části se vztahují, a součiny tyto považujeme co poměrná čísla jednoduchého počtu spolkového, jímž pak dále úlohu řešíme.

U př. K společnému podniku dá osoba A 8000 zl. na 5 měsíců, B 4000 zl. na 6 měsíců, C 2000 zl. na 8 měsíců. V podniku získají 460 zl.; mnoho-li zisku obdrží každá osoba?

A 8000 zl. na 5 měs.	40000	5	46 : 5 = 230 zl.
B 4000 „ „ 6 „	24000	3	46 . 3 = 138 „
C 2000 „ „ 8 „	16000	2	46 . 2 = 92 „
460 : 10 = 46			460 zl.

Počet řetězový.

§. 149. Počtu řetězového užíváme, není-li bezprostředně znám vztah dvou veličin, nýbrž musíme-li jej teprv hledati souvislým postavením známých vztahů prostředkujících.

Kdybychom měli řešiti úlohu:

Mnoho-li (x) jednotostí druhu M činí a jednotostí druhu A, jestliže

a'	„	„	A	„	b	„	„	B,
b'	„	„	B	„	c	„	„	C,
c'	„	„	C	„	m	„	„	M,

tedy můžeme kratším způsobem psáti tuto úlohu takto:

$$\left. \begin{array}{l} xM = aA, \\ \text{jestliže } a'A = bB, \\ b'B = cC, \\ c'C = mM, \end{array} \right\} \dots 1)$$

kde x, a, a', b, b', c, c', m představují čísla bezejmenná, A, B, C, M pak jejich druhy čili pojmenování.

Abychom vyhledali výsledek, proměníme dané jednotosti a rodu A v jednotosti (y) druhu B, vyhledané jednotosti rodu B v jednotosti (z) druhu C, tyto konečně v jednotosti (x) druhu M. Dle daných podmínek obdržíme při tom následující srovnalosti:

$$\begin{array}{l} y : b = a : a', \\ z : y = c : b', \\ x : z = m : c', \text{ z čehož dle §. 140., 1)} \\ x : b = acm : a'b'c', \text{ a} \\ x = \frac{acm}{a'b'c'} \dots 2) \end{array}$$

Z 1) a 2) plyne tudíž následující praktické pravidlo o počtu řetězovém:

1) Na levé straně svislé přímký napíšeme x s příslušným jmenem a v pravo známou veličinu, jejíž hodnotu, rovnou hodnotě x , hledáme. Pod to píšeme všechny známé vztahy prostředkující, počínajíce pokaždé v levo veličinou, kteráž jest s předcházející v pravo rovného druhu; v pravo klademe pak veličinu, která s číslem v levo stojícím má rovnou hodnotu, a tak pokračujeme, až se řetěz uzavře veličinou s x stejnojmennou.

2) Dělíme součin všech v pravo stojících čísel bezejmenných součinem všech čísel stojících v levo pod x ; podíl dává hledanou hodnotu x .

U př. V Anglicku stojí 1 kvarter pšenice 56 šilinků; kolik zlatých r. č. stojí 1 hektolitr? (76 kvarterů = 221 Hl., 20 šilinků = 1 libře šterlinků, 10 liber šterlinků = 108 zl. r. č.)

x zl. r. č.	1 Hl.	
221 Hl.	76 kvart.	
1 kvart.	56 šil.	$x = \frac{76 \cdot 56 \cdot 108}{221 \cdot 20 \cdot 10}$
20 šil.	1 lib. šterl.	$= 10 \cdot 399 \text{ zl. r. č.}$
10 lib. šterl.	108 zl. r. č.	$= 10 \text{ zl. } 40 \text{ kr. r. č.}$

Část třetí.

Mocniny, veličiny kořenové, logarithmy.

I. Mocniny s kladnými celistvými mocniteli.

§. 150. Číslo a povýšiti na n tou mocninu znamená, a položiti n krát co činitele (§. 34.). a se jmenuje mocněnec čili základ, n mocnitel, a hledaný součin p slove n tá mocnina čísla a . Píšeme pak $a^n = p$. Mocnina je tudíž součin rovných činitelů.

Výsledky.

$$1) a^1 = a. \quad 2) 1^n = 1. \quad 3) 0^n = 0.$$

$$4) 0^0 \text{ jest číslo neurčité (§. 45., 7).}$$

$$\text{Neboť } 0^0 = 0^{n-n} = \frac{0^n}{0^n} \text{ (§. 52.)} = \frac{0}{0}.$$

§. 151. 1) n tá mocnina kladného čísla jest kladná, nechť jest n jakékoli číslo celistvé.

$$(+a)^n = (+a).(+a).(+a).(+a) \dots n\text{krát} = +a^n \text{ (§. 58., výsl. 2).}$$

2) Záporné číslo, povýšeno na mocninu s celistvým sudým mocnitelem, dává kladný, s celistvým lichým mocnitelem záporný výsledek.

$$(-a)^{2n} = (-a).(-a).(-a).(-a) \dots 2n\text{krát} = +a^{2n} \text{ (§. 58., výsl. 3).}$$

$$(-a)^{2n+1} = (-a).(-a).(-a).(-a) \dots (2n+1)\text{krát} = -a^{2n+1} \text{ (§. 58., v. 3).}$$

§. 152. Máme-li n tou mocninu jakéhosi čísla povýšiti na n tou mocninu, můžeme směniti mocnitele, aniž výsledek se poruší.

Důkaz. $(a^m)^n = (a^n)^m.$

Sestavíme-li z rovných činitelů mocniny $(a^m)^n$ n řad tak, aby činitel a byl v každé m krát, totiž

$$a . a . a . a . . . (m\text{krát})$$

$$a . a . a . a . . .$$

$$a . a . a . a . . .$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(n\text{krát}),$$

obdržíme a zajisté m krát co činitele, nechť klademe m činitelů vodorovné řady n krát, aneb n činitelů řady svislé m krát co činitele. V prvním případě bude a^m n kráté činitelem, tedy $(a^m)^n$, v druhém případě a^n m kráté činitelem, čili $(a^n)^m$. Tudiž

$$(a^m)^n = (a^n)^m.$$

Tato věta vztahuje se i k tomu případu, je-li dáno i více nežli dvě mocnitelů, což snadno lze dokázati (§. 35.).

§. 153. Mocnina se umocní, povýšíme-li mocněnce na mocninu, kterouž udává součin obou mocnitelů, t. j. $(a^m)^n = a^{mn}$.

Vysvítá z důkazu v §. 152.

Výsledek. Je-li naopak mocnitel součin dvou činitelů, lze mocněnce povýšiti nejprv na mocninu, kterouž udává činitel první, tuto pak umocniti činitelem druhým.

$$a^{mn} = (a^m)^n.$$

§. 154. Součin se umocňuje zmocněním jednotlivých jeho činitelů.

$$\begin{aligned} \text{Důkaz. } (ab)^m &= \overbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab \cdot \dots}^{m\text{krát}} \quad (m\text{krát}) \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots}_{m\text{krát}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot \dots}_{m\text{krát}} \quad (\S. 35.) \\ &= a^m \cdot b^m. \end{aligned}$$

Výsledek. Mocniny rovných mocnitelů se násobí, povýšíme-li součin mocněnců na udanou mocninu.

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m.$$

§. 155. Má-li se podíl (zlomek) povýšiti na některou mocninu, povýšíme na ni dělence i dělitele.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

Tato věta se dokáže jako v §. 154.

Výsledky. 1) Mocnina pravého aneb nepravého zlomku, psaného nejmenšími čísly, nemůže býti nikdy číslo celistvé.

Vysvítá dle §. 74., 6).

2) Mocniny rovných mocnitelů se dělí, povýšíme-li podíl mocněnců na udanou mocninu.

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m.$$

§. 156. Mocniny téhož mocněnce se násobí sečtením jejich mocnitelů při téměř mocněnci.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Důkaz byl proveden v §. 37.

Výsledek. Je-li součet mocnitelem, umocníme mocněnce každým sčítancem a násobíme jednotlivé mocniny.

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$

§. 157. Mocniny rovných mocněnců se dělí, umocníme-li společného mocněnce číslem, které se rovná mocniteli dělence, zmenšenému o mocnitele dělitele.

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Správnost rovnice této při $m > n$ a $m = n$ byla dokázána v §. 52. Význam její při $m < n$ vyšetříme později (v §. 172.).

Výsledek. Je-li rozdíl mocnitelem, umocníme mocněnce menšencem i menšitelem, a mocninu první dělíme druhou.

$$a^{m-n} = a^m : a^n.$$

Dodatek. Mocniny o různých mocněncích a mocnitelích násobíme a dělíme týmž způsobem, jako vůbec čísla obecná.

§. 158. O sečítání a odčítání mocnin, jakož i o počítání mnohočleny, v nichž přicházejí mocniny, platna jsou pravidla, odvozená pro obecná čísla. Výsledek možná jen tehdy snímati, mají-li mocniny nejen rovné mocněnce, nýbrž i rovné mocnitele.

Mocniny dvoj- a mnohočlenu, po sobě jdoucí, obdržíme jednoduše násobením. O vyvinování čtverce a třetí mocniny zvlášť bude pojednáno v §§. 193. a 200., o vyšších mocninách pak v §. 295.

§. 159. 1) Rovná čísla umocněna rovnými čísly dají rovné.

Je-li $a = b$, bude $a^m = b^m$.

Plyne z §. 7., 3).

Výsledek. Povýšíme-li všechny členy srovnalosti na tutéž mocninu, obdržíme opět srovnalost.

Má-li se $a : b = c : d$, bude též $(a : b)^m = (c : d)^m$, tudíž $a^m : b^m = c^m : d^m$ (§. 155.).

2) Nerovná čísla umocněna rovnými čísly kladnými dají nerovné s týmž znaménkem nerovnosti.

Je-li $a > b$, bude též $a^m > b^m$, což plyne z §. 43., 3).

Výsledek. Je-li $a \geq 1$, musí vztažně také $a^m \geq 1$.

3) Rovná čísla umocněna nerovnými čísly dají nerovné s týmž aneb s opačným znaménkem nerovnosti, jak totiž mocněnec jest větší aneb menší nežli 1.

Je-li $m > n$, obdržíme

při $a > 1$, $a^m > a^n$,

„ $a < 1$, $a^m < a^n$, což plyne z §. 101., dod.

4) Nerovná čísla, z nichž aspoň jedno jest větší nežli 1, umocněna nerovnými kladnými čísly přitěmž znaménku nerovnosti, dají nerovné se společným znaménkem nerovnosti.

Je-li $a > b$ a zároveň $a > 1$, mimo to $m > n$, bude $a^m > b^n$. Neboť dle 3) jest $a^m > a^n$, dle 2) $a^n > b^n$, tedy tím spíše $a^m > b^n$.

II. Veličiny kořenové s kladnými celistvými mocniteli.

§. 160. Z čísla a dobývati n tého kořene znamená z mocniny a a z mocnitele n vyhledati mocněnce. Daná mocnina a slove odmocněnec, daný mocnitel n jmenuje se odmocnitel a hledaný mocněnec p slove n tý kořen z a . Píšeme pak $\sqrt[n]{a} = p$.

Kořen je tedy výraz čísla, kteréž povýšeno na mocninu, jakou udává odmocnitel, rovná se odmocněnci, čili

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Aby $\sqrt[n]{a}$ dle dosavadního pojmu čísla měl význam, musí odmocněnec a býti n tou mocninou některého čísla celistvého aneb lomeného. Tuto omezující podmínku, kterou později (§§. 179. a 183., jakož i §. 249., dod. 2) opět zrušíme, předpokládáme zatím u všech vět následujících.

§. 161. Výsledky. 1) Je-li odmocnitel roven mocniteli, dobýváním kořene obdržíme mocněnce.

$$\sqrt[n]{(a^n)} = a.$$

2) Hodnota kteréhokoli čísla se nemění, povýšíme-li je na jakoukoli mocninu, a dobýváme-li z ní kořene téhož stupně.

$$a = \sqrt[n]{(a^n)}; a = (\sqrt[n]{a})^n.$$

Dle toho lze každé číslo psáti jakožto veličinu kořenovou, u př.

$$b = \sqrt[5]{b^5}.$$

Umocňování a dobývání kořene jsou tedy protivné výkony; toto jest obrácení výkonu onoho.

3) Prvý kořen z čísla jakéhosi rovná se číslu samému. Poněvadž $a^1 = a$, jest i $\sqrt[1]{a} = a$.

U prvního kořene nepíšeme tudíž ani odmocnitele 1, ani kořenitko. U druhého kořene píšeme sice kořenitko, ne však odmocnitele 2; tudíž $\sqrt{a}$ znamená $\sqrt[2]{a}$.

$$4) \sqrt[n]{1} = 1.$$

$$5) \sqrt[n]{0} = 0.$$

§. 162. 1) Sudý kořen z odmocnence kladného může býti kladný aneb záporný.

2) Lichý kořen z odmocnence kladného jest vždy kladný.

3) Lichý kořen z odmocnence záporného jest vždy záporný.

Důkaz. Dle §. 151. jest

$(\pm p)^{2n} = +a$, $(\pm q)^{2n+1} = \pm b$, $(-q)^{2n+1} = -b$, kde a a b znamenají prosté hodnoty číselné, jež obdržíme umocněním. Z toho však plyne dle §. 161., 1)

$$\sqrt[2n]{+a} = \pm p, \quad \sqrt[2n+1]{+b} = +q, \quad \sqrt[2n+1]{-b} = -q.$$

Dodatek. Význam $\sqrt[2n]{-a}$ bude v §. 183. zvlášť vyšetřen.

§. 163. Máme-li z mocniny dobývatí kořene, dělme mocnitele odmocnitelem.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \text{ je-li } m \text{ dělitelno } n.$$

Důkaz.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{\frac{m}{n} \cdot n}} \quad (\S. 45., 3) = \sqrt[n]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n} \quad (\S. 153., \text{výsl.}) = a^{\frac{m}{n}} \quad (\S. 161., 1).$$

Dodatek. Tuto poučku omezili jsme na případ, že m jest dělitelno n , t. j. $\frac{m}{n}$ číslo celistvé, poněvadž dosavadní vysvětlení mocniny připouští jen celistvé mocnitele.

§. 164. Veličina kořenová se umocní, povýšíme-li odmocněnce na udanou mocninu.

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{a})^m &= \sqrt[n]{\{(\sqrt[n]{a})^m\}^n} \quad (\S. 161., 2) = \sqrt[n]{\{(\sqrt[n]{a^n})^m\}} \quad (\S. 152.) \\ &= \sqrt[n]{a^m} \quad (\S. 161., 1). \end{aligned}$$

Výsledek. Má-li číslo býti umocněno a odmocněno, nezáleží na tom, v kterém pořádku oba výkony provedeme.

§. 165. Máme-li dobývati kořene z veličiny kořenové, dobýváme z odmocněnce kořene toho stupně, jež udává součin obou odmocnitelů.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[mn]{(\sqrt[n]{a})^{mn}} \quad (\S. 161., 2) = \sqrt[mn]{\sqrt[n]{a^{mn}}} \quad (\S. 164., \text{vysl.}) \\ &= \sqrt[mn]{(\sqrt[n]{a})^n} = \sqrt[mn]{a} \quad (\S. 160.). \end{aligned}$$

Výsledek. Máme-li dobývati kořene z veličiny kořenové, nezáleží na tom, v kterém pořádku odmocňujeme.

Nebot $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a},$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} = \sqrt[mn]{a} \text{ (§. 35.); tudíž}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

§. 166. 1) Je-li odmocnitel součin dvou činitelů, dobýváme kořene činitelem jedním, z vyhledaného kořene pak činitelem druhým. (Obrácení §. 165.)

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

2) Číslo se umocní podílem (zlomkem), umocníme-li je dělencem a odmocníme-li dělitelem. (Obrácení §. 163.)

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ je-li } m \text{ dělitelno } n.$$

3) Číslo se odmocní podílem (zlomkem), umocníme-li je dělitelem a odmocníme-li dělencem.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{a^{\frac{m}{n}}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ je-li } n \text{ dělitelno } m.$$

Důkaz.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{(a^{\frac{n}{m}})^n}} \text{ (§. 161., 2)} = \sqrt[n]{(a^{\frac{n}{m}})^{m \cdot \frac{n}{m}}}$$

$$= \sqrt[n]{(a^{\frac{n}{m}})^n} \text{ (§. 153., výsl.)} = \sqrt[n]{a^n} \text{ (§. 161., 1).}$$

Výsledek. Z mocniny také dobýváme kořene, dělíme-li odmocnitele mocnitelem.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}, \text{ je-li } n \text{ dělitelno } m.$$

§. 167. Hodnota kořene z mocniny se nemění, násobíme-li aneb dělíme-li odmocnitele i mocnitele týmž číslem.

Neboť

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m \cdot p}{n \cdot p}} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}, \quad a$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m : p}{n : p}} = \sqrt[n : p]{a^{m : p}},$$

v kterémžto posledním případě předpokládáme, že p jest měrou m a n .

Dodatek. Použitím této věty můžeme a) každou veličinu kořenovou uvést na jinou s daným odmocnitelem, jenž jest násobek původního odmocnitele, tudíž také několik veličin kořenových uvést na společného odmocnitele; b) má-li odmocnitel i mocnitel veličiny kořenové společného dělitele, můžeme jím krátiti.

Jsou-li dány u př. veličiny kořenové $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt[10]{c^7}$, jest 30 nejmenší společný násobek odmocnitelů, tudíž:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[30]{a^{15}}, \quad \sqrt[3]{b^2} = \sqrt[30]{b^{20}}, \quad \sqrt[10]{c^7} = \sqrt[30]{c^{21}}.$$

§. 168. Kořen n tý ze součinu rovná se součinu n tých kořenů z jednotlivých činitelů.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Důkaz.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{(\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n} \quad (\S. 161., 2)$$

$$= \sqrt[n]{(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n} \quad (\S. 154., \text{výsl.}) = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad (\S. 161., 1).$$

Výsledek. Kořeny téhož stupně se násobí, dobýváme-li společného kořene ze součinu odmocněnců.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$$

Máme-li násobiti veličiny kořenové, kteréž mají nerovné odmocnitele, uvedeme je nejprv na společného odmocnitele (§. 167., dod.)

Dodatky. 1) Kde možná z některého činitele v odmocnění dobývati kořene, učinme tak dle prvé z obou vět předešlých.

U př. $\sqrt[n]{a^n \cdot b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a \sqrt[n]{b}.$

2) Použijeme-li §. 161., 2), můžeme dle druhé věty předešlé naopak každého činitele před kořenítkem přivést pod kořenitko, umocníme-li jej odmocnitelem a násobíme-li tuto mocninu odmocněncem.

U př. $a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}.$

§. 169. Z podílu (zlomku) dobýváme kořene, dělíme-li kořen z dělence kořenem z dělitele.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Použijeme-li §. 155. výsl. 2.), dokážeme tuto větu pak způsobem týž jako v §. 168.

Výsledky. 1) Kořen ze zlomku, psaného nejmenšími čísly, nemůže býti číslo celistvé.

Vysvítá dle §. 74., 6).

2) Veličiny kořenové téhož odmocnitele se dělí, dobýváme-li společného kořene z podílu jejich odmocněnců.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Máme-li dělit veličiny kořenové rozličných odmocnitelů, uvedeme je nejprv na společného odmocnitele.

Dodatek. Přirovnáme-li věty §§. 163.—169. o dobývání kořene k větám §§. 16.—21. o odčítání a k větám §§. 46.—51. a 53. o dělení, objasní se nám podobnost obrácených početných výkonů stupně prvního, druhého a třetího.

§. 170. Sečítání a odčítání veličin kořenových, jakož i počítání mnohočleny, v nichžto přicházejí veličiny kořenové, provádí se dle pravidel, vyslovených vůbec o obecných číslech. Snímati můžeme jen tehdy, mají-li veličiny kořenové rovné odmocněnce i odmocnitele. Mají-li sice téhož odmocnitele, ale rozličné odmocněnce, můžeme tyto někdy rozložit na činitele (§. 168., dod. 1.) a pak veličiny kořenové uvést na společného odmocněnce. U př.

$$\begin{aligned} \sqrt{45a^2c} - \sqrt{80b^2c} + \sqrt{125c^3} &= \sqrt{9a^2 \cdot 5c} - \sqrt{16b^2 \cdot 5c} + \sqrt{25c^2 \cdot 5c} \\ &= 3a\sqrt{5c} - 4b\sqrt{5c} + 5c\sqrt{5c} = (3a - 4b + 5c)\sqrt{5c}. \end{aligned}$$

Později bude pojednáno o dobývání druhého a třetího kořene z algebraických součtů v §§. 194.—198., pak 202.—205., a vůbec při větě dvoučlenové (§§. 295. a 299.).

§. 171. 1) Kořeny téhož stupně z rovných čísel jsou sobě rovny.

Je-li $a = b$, bude $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}$.

Plyne z §. 7., 3).

Výsledky. a) Dobýváme-li ze všech členů srovnalosti kořene téhož stupně, obdržíme opět srovnalost.

Má-li se $a : b = c : d$, jest $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{c : d}$, aneb

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d} \text{ (§. 169.)}$$

b) Střední měřická srovnalostná dvou čísel rovná se druhému kořenu ze součinu obou čísel.

Má-li se $a : b = b : c$, jest $b^2 = ac$ (§. 133., výsl. 1.), protož

$$b = \sqrt{ac} \text{ (§. 171., 1.)}$$

2) Nerovná čísla, z nichž dobýváme kořene téhož stupně, dají nerovné s týmž znaménkem nerovnosti.

Je-li $a > b$, bude $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$.

Důkaz. Kdyby byl $\sqrt[m]{a} \leq \sqrt[m]{b}$, musel by vztažně dle §. 159.

1) aneb 2) $(\sqrt[m]{a})^m \leq (\sqrt[m]{b})^m$, tudíž $a \leq b$, což jest proti pod-
mínce.

Výsledek. Je-li $a > 1$, musí býti vztažně též $\sqrt[m]{a} > 1$.

3) Rovná čísla, z nichž dobýváme kořenů rozličných stupňů, dají nerovné, a sice s opácným aneb týmž znaménkem nerovnosti, jak totiž odmocněnec jest větší neb menší nežli 1.

Je-li $m > n$, bude pro

$$a > 1, \quad \sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a};$$

$$a < 1, \quad \sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{a}.$$

Důkaz. Kdyby pro $a > 1$ byl $\sqrt[m]{a} \geq \sqrt[n]{a}$, byl by vztažně dle §. 159., 1) aneb 2) $(\sqrt[m]{a})^{mn} \geq (\sqrt[n]{a})^{mn}$, aneb $a^n \geq a^m$, což nemožno proto, že pro $m > n$ dle §. 159., 3) musí býti $a^m > a^n$.

Důkaz pro $a < 1$ podobá se tomuto.

4) Nerovná čísla, z nichž aspoň jedno jest větší nežli 1, odmocněna nerovnými čísly při protivných znaménkách nerovnosti, dají nerovné se znaménkem nerovnosti, jaké mají odmocněnci.

Je-li $a > b$, zároveň $a > 1$, a $n < m$, tedy $\sqrt[n]{a} > \sqrt[m]{a}$.

Důkaz. Dle 3) jest $\sqrt[n]{a} > \sqrt[m]{a}$, dle 2) jest $\sqrt[n]{a} > \sqrt[m]{b}$, tudíž také $\sqrt[n]{a} > \sqrt[m]{b}$.

III. Mocniny (a veličiny kořenové) se zápornými a lomenými mocniteli (a odmocniteli).

1. Záporní mocnitelé a odmocnitelé.

§. 172. Poučka o dělení dvou mocnin téhož mocněnce (§. 157.), vyjádřená rovnicí $a^m : a^n = a^{m-n}$, vztahovala se posud na případ ten, kdy $m \geq n$. Je-li tedy $m < n$, a sice $m + p = n$, použití hořejší rovnice vede na mocninu se záporným mocnitelem, totiž

$$a^m : a^n = a^m : a^{m+p} = a^{-p}.$$

Chceme-li tedy zákonu, vyslovenému hořejší rovnicí, zjednatí platnost všeobecnou, musíme také mocninám se zápornými mocniteli dáti význam, jímž se převedou na původní pojem mocnin. Význam ten se ihned objeví, vyvineme-li podíl, jež a^{-p} má představovati, v jiném tvaru. Jest pak

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^p} = \frac{1}{a^p}.$$

Protož
$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

Mocnina se záporným mocnitelem jest převratná hodnota téže mocniny s kladným mocnitelem.

Výsledky. 1) Poněvadž $\frac{1}{a^p} = \left(\frac{1}{a}\right)^p$, jest také $a^{-p} = \left(\frac{1}{a}\right)^p$. Číslo a se povýší na mocninu $-p$ tou, položíme-li jeho převratnou hodnotu p krát co činitele.

$$2) \text{ Z } a^{-p} = \frac{1}{a^p} \text{ plyne } a^p \cdot a^{-p} = 1, \text{ tudíž také } a^p = \frac{1}{a^{-p}}.$$

Každou mocninu, přicházející co činitel v čitateli zlomku, můžeme psát co činitele ve jmenovateli, a naopak, jestliže znaménko mocnitele proměníme v opácné.

§. 173. Všecky poučky, dokázané o mocninách s kladnými mocniteli, vztahují se též k mocninám se zápornými mocniteli.

Chceme-li to dokázati, pišme mocniny se zápornými mocniteli jakožto převratné hodnoty týchž mocnin s kladnými mocniteli, provedme naznačené výkony početné a ve výsledcích, v nichžto přicházejí výrazy v tvaru $\frac{1}{a^p}$, pišme opět mocniny se zápornými mocniteli. U př.

$$(+ a)^{-n} = \frac{1}{(+ a)^n} = \frac{1}{+ a^n} = + a^{-n};$$

$$(- a)^{-2n} = \frac{1}{(- a)^{2n}} = \frac{1}{+ a^{2n}} = + a^{-2n};$$

$$(- a)^{-(2n+1)} = \frac{1}{(- a)^{2n+1}} = \frac{1}{- a^{2n+1}} = - a^{-(2n+1)};$$

$$a^m \cdot a^{-n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$$

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n};$$

$$a^{-m} \cdot b^{-m} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{b^m} = \frac{1}{(ab)^m} = (ab)^{-m};$$

$$a^m : a^{-n} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$a^{-m} : a = \frac{1}{a^m} : a^n = \frac{1}{a^m \cdot a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}, \text{ a t. d.}$$

§. 174. Veličina kořenová se záporným odmocnitelem rovná se své převratné hodnotě s kladným odmocnitelem.

$$\sqrt[n]{a} = \frac{(-n) \cdot (-1)}{\sqrt{a^{1 \cdot (-1)}}} = \sqrt[n]{a^{-1}}, \text{ tudíž}$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}.$$

Dodatek. Záporným odmocnitelům se vyhneme tím způsobem, že zápornost převedeme do mocnitele.

2. Lomení mocnitelů (odmocnitelů).

§. 175. Dobývání kořene z mocnin vede dle rovnic dokázaných v §. 163. a výsl. §. 166., 3),

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \text{ a } \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{m}]{a},$$

na mocniny a kořeny s lomenými mocniteli a odmocniteli pro případ, kdy vztažně m není dělitelno n , a n není dělitelno m . Nemá-li platnost pravidel těch záviseti na zvláštních hodnotách mocnitelů a odmocnitelů m a n , musíme pojem mocniny a veličiny kořenové rozšířiti tak, aby též pro lomené mocnitele a odmocnitele nabyl určitého významu.

Z hořejších rovnic plynou nyní přímo následující věty:

1) Mocnina s lomeným mocnitelem jest kořen z mocněnce; čítec udává mocnitele a jmenovatel odmocnitele.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

2) Veličina kořenová s lomeným odmocnitelem jest mocnina odmocněnce, jakou udává jmenovatel, odmocněna čítcem.

$$\sqrt[\frac{n}{m}]{a} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Dodatek. Poněvadž $\sqrt[\frac{n}{m}]{a} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, možná každou veličinu kořenovou s lomeným odmocnitelem psáti co mocninu s lomeným mocnitelem. Obvykle nepočítáme veličinami kořenovými s lomenými odmocniteli; tudíž zůstaneme zde pouze při mocninách s lomenými mocniteli.

§. 176. Všecky posud dokázané obecné věty o mocninách vztahují se též k mocninám s lomenými mocniteli.

Chceme-li to dokázati o jednotlivých větách, uveďme mocniny s lomenými mocniteli na veličiny kořenové, provedme naznačené počty, a ve výsledcích pišme místo veličin kořenových opět mocniny s lomenými mocniteli.

$$\begin{aligned} \text{U př. } a^{-\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}}; \\ a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} &= \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} \\ &= \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}; \end{aligned}$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}}, \text{ a t. d.}$$

Dodatek. Všecky veličiny kořenové můžeme vyjádřiti jakožto mocniny s lomenými mocniteli; nauka o veličinách kořenových jest tudíž obsažena již ve větách o mocninách.

IV. Pojem čísla rozšířen dobýváním kořene.

1. Čísla neracionalná.

§. 177. Při vysvětlení $\sqrt[n]{a}$ v §. 160. jsme předpokládali, že odmocněnec a jest $ntá$ mocnina jakéhosi čísla celistvého aneb lomeného. Uvážíme nyní případ, kdy podmínka tato se nepříhodí.

1) Není-li celistvé číslo a $ntá$ mocnina celistvého čísla, $\sqrt[n]{a}$ nemůže býti ani číslo celistvé ani lomené.

Důkaz. Není-li a mezi $ntými$ mocninami celistvých čísel po sobě jdoucích, totiž

$$1^n, 2^n, 3^n, 4^n, \dots, p^n, (p+1)^n, \dots$$

musí ležeti mezi dvěma po sobě jdoucími mocninami, jako jsou

$$p^n \text{ a } (p+1)^n, \text{ tedy } p^n < a < (p+1)^n, \text{ čili } p < \sqrt[n]{a} < p+1$$

(§. 171., 2); protož $\sqrt[n]{a}$ není číslo celistvé. Ale $\sqrt[n]{a}$ nelze také

žádným zlomkem zcela určitě vyjádřiti; neboť kdyby $\sqrt[n]{a} = p + \frac{q}{r} = \frac{pr + q}{r}$, kde q a r jsou prvočísla vespolek, musel by

zlomek $\frac{pr+q}{r}$, povýšen na n tou mocninu, t. j. $\left(\frac{pr+q}{r}\right)^n = a =$ celistvému číslu, což dle §. 155., výsl. 1) není možná.

2) Není-li n tý kořen z celistvého čísla a ani číslo celistvé, ani lomené, může se přece přibližně vyjádřiti zlomkem, jenž od pravé hodnoty $\sqrt[n]{a}$ tak málo se liší, jak kdo chce.

Důkaz. Poněvadž $\sqrt[n]{a}$ dle 1) leží mezi p a $p+1$, přidejme k p postupně $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \dots$, kde m značí číslo celistvé, a utvořme

$$p^n, \left(p + \frac{1}{m}\right)^n, \left(p + \frac{2}{m}\right)^n, \dots, \left(p + \frac{c}{m}\right)^n, \left(p + \frac{c+1}{m}\right)^n, \dots$$

Poněvadž pak a se nemůže rovnati žádné této mocnině, musí nutně ležeti mezi dvěma po sobě jdoucími takovými mocninami. Budiž

$$\left(p + \frac{c}{m}\right)^n < a < \left(p + \frac{c+1}{m}\right)^n, \text{ kde } c < m; \text{ pak jest}$$

$$p + \frac{c}{m} < \sqrt[n]{a} < p + \frac{c+1}{m}.$$

$\sqrt[n]{a}$ leží tudíž v mezích $p + \frac{c}{m}$ a $p + \frac{c+1}{m}$, jichžto rozdíl jest $\frac{1}{m}$. Položíme-li za $\sqrt[n]{a}$ číslo $p + \frac{c}{m}$, dopustíme se chyby, kteráž bude menší nežli $\frac{1}{m}$. Poněvadž však m můžeme vzíti jakkoli veliké, čili $\frac{1}{m}$ jakkoli malé, možná $\sqrt[n]{a}$ vyjádřiti tak určitě, jak jen toho potřeba káže.

$p + \frac{c}{m}$ slove dolejší, $p + \frac{c+1}{m}$ hořejší mez n tého kořene z a .

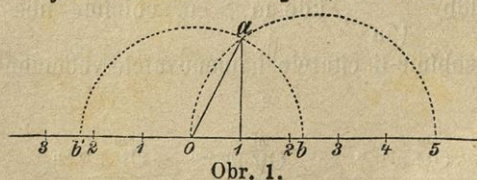
Dodatek. Podobně dokážeme, že též n tý kořen ze zlomku $\frac{a}{b} = \frac{ab^{n-1}}{b^n}$, není-li již sám roven zlomku, může se jím jakkoli určitě vyjádřiti.

§. 178. Číslo, kteráž nelze zcela určitě vyjádřiti ani celistvými ani lomenými čísly, těmito však přibližně tak určitě, jak jen toho potřeba káže, slovou čísla neracionalná (§. 128., dod.). A naopak, všechna čísla celistvá aneb lomená, o nichž bylo posud pojednáno, jmenují se čísla racionalná.

Jako oba první obrácené výkony početné vedly na rozšíření pojmu čísla, odčítání na čísla záporná, dělení na čísla lomená, tak i dobýváním kořene jsme vedeni na nový tvar čísel, totiž čísel neracionalných.

I tato čísla můžeme znázorniti přímkou číselnou. Neomezená přímka představuje body, po obou stranách stejně vzdálenými od bodu začátkového, řadu celistvých čísel kladných a záporných. Vložíme-li vždy mezi dva a dva body této přímky jakékoli množství bodů také stejně od sebe vzdálených, představíme jimi řadu zlomků s jakýmikoli jmenovateli. Čím více těch bodů vložíme, tím více se k sobě přibližují, až při vkládání do nekonečna pokračujícím přecházejí v nepřetržitou přímku číselnou, jak toho neracionalná čísla vyžadují. Pokud jsme přestávali na číslech racionalných, neměli jsme nikdy všech bodů přímky; teprv spojením čísel neracionalných s racionalnými může nám jedenkaždý bod přímky představit jakési číslo. Touto představou přenáší se geometrický pojem nepřetržitosti do arithmetiky.

Dodatek. Jednotlivá čísla neracionalná, a sice neracionalné kořeny druhého stupně lze geometricky zcela určitě sestrojiti. Hledáme-li u př. $\sqrt{5}$, třeba jen sestrojiti střední mě-



řickou srovnalostnou k číslům 1 a 5 proto, že $1 : \sqrt{5} = \sqrt{5} : 5$. K tomu cíli opíšeme nad 05 čáry číselné polokruh, postavíme v 1

kolmou, kteráž seče polokruh v a , odtud pak vedeme tětivu Oa jakožto střední měřickou srovnalostnou k $O1$ a $O5$. Učiníme-li $Ob = Ob' = Oa$, bude bodem b přímky číselné určeno číslo $+\sqrt{5}$, a bodem b' číslo $-\sqrt{5}$.

Počítání čísla neracionalným.

§. 179. Součet, rozdíl, součin aneb podíl dvou neracionalných čísel jest číslo, jehož meze rovnají se vztažně součtům, rozdílům, součinům aneb podílům jejich mezných hodnot hořejších a dolejších.

Mocnina s mocnitelem neracionalným jest číslo, jehož meze jsou mocniny, kteréž obdržíme, umocníme-li mocněnce meznými hodnotami neracionalného mocnitele.

Při počítání neracionalnými čísly výsledky se tedy určují početnými výsledky jejich hodnot mezných; poněvadž pak tyto jsou čísla racionalná, vztahují se všecky obecné věty, dokázané o číslech racionalných, také k číslům neracionalným jimi omezeným.

Dodatek. Tím také se zrušují podmínky, vyslovené o poměrech, srovnalostech a kořenech v závěrečných větách §. 128., dod., §. 131. a §. 160.

§. 180. Výrazy, v nichžto přicházejí čísla neracionalná, lze mnohdy přetvořiti tak, že pak pohodlněji se jimi počítá.

Úloha. Zlomek, jehož jmenovatel jest neracionalný jedno- aneb dvoučlen, má bez porušení hodnoty být upraven tak, aby jmenovatel se stal racionalným. (Jmenovatele racionalným učiniti.)

Daný zlomek může míti podoby následující:

$$\frac{C}{\sqrt[m]{a^n}}, \quad \frac{C}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}, \quad \frac{C}{\sqrt[m]{a^p} \pm \sqrt[n]{b^q}}$$

1) Je-li zlomek podoby $\frac{C}{\sqrt[m]{a}}$, kde $m > n$, učiníme jmenovatele racionalným, násobíme-li čitatele i jmenovatele veličinou kořenovou $\sqrt[m]{a^{m-n}}$.

$$\text{Jest pak } \frac{C}{\sqrt[m]{a^n}} = \frac{C \sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[m]{a^{m-n}}} = \frac{C \sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^m}} = \frac{C \sqrt[m]{a^{m-n}}}{a}.$$

$$\text{U př. } \frac{m}{\sqrt[3]{a}} = \frac{m \sqrt[3]{a^2}}{a}; \quad \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^3}} = \frac{3\sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{a^2}}{a} = \frac{3\sqrt[5]{a^9}}{a}.$$

2) Má-li zlomek podobu $\frac{C}{a \pm \sqrt{b}}$ aneb $\frac{C}{\sqrt{a \pm \sqrt{b}}}$, učiníme jmenovatele racionálním, násobíme-li čitatele i jmenovatele dvoučlenem $a \mp \sqrt{b}$ aneb v druhém případě $\sqrt{a \mp \sqrt{b}}$. Dle toho bude

$$\frac{C}{a \pm \sqrt{b}} = \frac{C(a \mp \sqrt{b})}{(a \pm \sqrt{b})(a \mp \sqrt{b})} = \frac{C(a \mp \sqrt{b})}{a^2 - b};$$

$$\frac{C}{\sqrt{a \pm \sqrt{b}}} = \frac{C(\sqrt{a \mp \sqrt{b}})}{(\sqrt{a \pm \sqrt{b}})(\sqrt{a \mp \sqrt{b}})} = \frac{C(\sqrt{a \mp \sqrt{b}})}{a - b}.$$

U př. $\frac{3}{5 - \sqrt{2}} = \frac{3(5 + \sqrt{2})}{5^2 - 2} = \frac{15 + 3\sqrt{2}}{23}.$

$$\frac{15}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{15(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{5 - 2} = 5(\sqrt{5} - \sqrt{2}).$$

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt[4]{3}} = \frac{(2 + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt[4]{3})}{\sqrt{5} - \sqrt[4]{3}}$$

$$= \frac{(2 + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt[4]{3})(\sqrt{5} + \sqrt[4]{3})}{2} = \dots$$

3) Má-li daný zlomek podobu

$$\frac{C}{\sqrt[m]{a^p} \pm \sqrt[n]{b^q}} = \frac{C}{\sqrt[mn]{a^{np}} \pm \sqrt[mn]{b^{mq}}} = \frac{C}{\sqrt[r]{A} \pm \sqrt[r]{B}},$$

kde pro krátkost položeno $mn = r$, $a^{np} = A$, $b^{mq} = B$, učiníme jmenovatele racionálním, násobíme-li čitatele a jmenovatele posledního zlomku mnohočlenem

$$\sqrt[r]{A^{r-1}} \mp \sqrt[r]{A^{r-2} \cdot B} + \sqrt[r]{A^{r-3} \cdot B^2} \mp \dots (\mp 1)^{r-2} \sqrt[r]{A \cdot B^{r-2}} \\ + (\mp 1)^{r-1} \sqrt[r]{B^{r-1}}.$$

Obdržíme pak racionálního jmenovatele $A \pm B$.

U př.

$$\frac{C}{\sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{b}} = \frac{C(\sqrt[5]{a^4} + \sqrt[5]{a^3b} + \sqrt[5]{a^2b^2} + \sqrt[5]{ab^3} + \sqrt[5]{b^4})}{a - b}.$$

§. 181. Úloha. Součet aneb rozdíl kořenů ze součtu a rozdílu dvou čísel, z nichž jedno jest neracionální, má se přivést pod jediné kořenitko.

Je-li $\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}}$ daný součet aneb rozdíl dvou veličin kořenových, v nichžto a jest číslo kladné a větší nežli $\sqrt{b}$, tedy

$(\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}})^2 = 2a \pm 2\sqrt{a^2 - b}$,
protož dobýváním druhého kořene

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2 - b}}.$$

Tohoto přetvoření užíváme s prospěchem zvláště tehdy, je-li $a^2 - b$ úplná druhá mocnina. U př.

$$\begin{aligned}\sqrt{4 + \sqrt{7}} + \sqrt{4 - \sqrt{7}} &= \sqrt{8 + 2\sqrt{16 - 7}} = \sqrt{8 + 2\sqrt{9}} = \sqrt{14}; \\ \sqrt{6 + \sqrt{11}} - \sqrt{6 - \sqrt{11}} &= \sqrt{12 - 2\sqrt{36 - 11}} = \sqrt{12 - 2\sqrt{25}} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

§. 182. Úloha. Druhý kořen z neracionalného dvoučlenu má se rozvésti na součet aneb rozdíl dvou veličin kořenových téhož odmocnitele.

Je-li dán $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, kde a jest kladné a $a > b$, bude dle §. 181.

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2a + 2\sqrt{a^2 - b}},$$

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} - \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2a - 2\sqrt{a^2 - b}};$$

sečtením a odečtením obou rovnic obdržíme

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}};$$

$$\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} - \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}},$$

aneb

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Přetvoření toto jest jen tehdy výhodné, je-li $a^2 - b$ úplná druhá mocnina. U př.

$$\begin{aligned}\sqrt{3 + \sqrt{8}} &= \sqrt{\frac{3 + \sqrt{1}}{2}} + \sqrt{\frac{3 - \sqrt{1}}{2}} = \pm (\sqrt{2} + 1); \\ \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} &= \sqrt{11 - \sqrt{72}} = \sqrt{\frac{11 + \sqrt{49}}{2}} - \sqrt{\frac{11 - \sqrt{49}}{2}} \\ &= \pm (3 - \sqrt{2}).\end{aligned}$$

Dodatky. 1) Mají-li oba členy dvoučlenu $a \pm \sqrt{b}$ společného činitele neracionalného, vysadíme jej především před kořenitko. U př.

$$\begin{aligned}\sqrt{3\sqrt{2} - \sqrt{10}} &= \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{5}} = \sqrt[4]{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{\sqrt[4]{8}}{2} (\sqrt{5} - 1).\end{aligned}$$

2) Je-li $a < \sqrt{b}$, lze rovněž použití vzorce pro $\sqrt{a + \sqrt{b}}$, klademe-li místo $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ rovný výraz $\sqrt{\sqrt{b} + a}$, a vysadíme-li pak $\sqrt{b}$ co činitele. Neboť takto obdržíme

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt[4]{b} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{\frac{a^2}{b}}},$$

kde $a^2 < b$, tudíž $\frac{a^2}{b} < 1$, a $1 > \sqrt{\frac{a^2}{b}}$.

U př.

$$\sqrt{12 + 8\sqrt{3}} = \sqrt{4\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})} = 2\sqrt[4]{3}\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt[4]{12}(\sqrt{3} + 1).$$

2. Číslo pomyslná.

§. 183. Dobývání kořene vede nás ještě na jiný nový tvar čísla. V §. 162. zbylo nám vyšetřiti výraz $\sqrt[2n]{-a}$. Poněvadž sudá mocnina kladného aneb záporného čísla celistvého, lomeného aneb neracionalného, aneb nully nedá číslo záporné, musí $\sqrt[2n]{-a}$ znamenati číslo, kteréž nepřichází v nepřetržité posloupnosti čísel dosud vyšetřovaných. Tento nový tvar čísla, jehož vysvětlení

spočívá v zákonu $(\sqrt[2n]{-a})^{2n} = -a$, slove číslo pomyslné; naproti tomu jmenují se čísla celistvá, lomená a neracionalná vesměs čísla skutečná čili realná.

Zvláště důležité jsou kořeny druhého stupně z čísel záporných, jimiž výhradně budeme se zde zabývat. Poněvadž zákony o veličinách kořenových, pokud se shodují s hořejším základním zákonem $(\sqrt{-a})^2 = -a$, vztahují se také k pomyslným veličinám kořenovým stupně druhého, jest

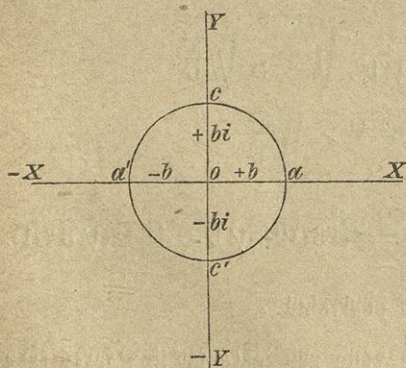
$$\sqrt{-a} = \sqrt{a \cdot (-1)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = b \sqrt{-1},$$

je-li b prostý druhý kořen z a . $\sqrt{-1}$ slove pomyslná jednotka, kterouž dle Gausse označujeme písmenem i . Dle toho bude $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$.

§. 184. Zobrazení pomyslného čísla $b\sqrt{-1} = bi$.

Představuje-li $-X$ záporný, X kladný směr neomezené přímky číselné, stojí bod o na místě nully; všechna vůbec možná kladná čísla celistvá, lomená a neracionalná jsou umístěna na přímce X , taktéž všechna čísla záporná na $-X$, kde je vesměs možná určit. Rozšíření oboru čísel v podélném směru číselné

přímky jest nemožné proto, že tato v onom směru beze vší mezery jest již vyplněna číslly realnými. Chceme-li tedy představit také čísla pomyslná, zbývá jen rozšíření postranné, t. j. musíme z číselné přímky vystoupiti na rovinu a k tomu cíli pojem směru, jenž byl dříve omezen pokračováním v přímce, rozšířiti na točení v rovině.



Obr. 2.

Otočí-li se délka $oa = b$ kolem bodu nullového o směrem v levo o 180° , až padne na přímku $-X$, z $+b$ bude $-b$; dalším otočením o 180° padne opět do směru kladného, $-b$ přejde zase v $+b$. Točení o 180° znamená tedy násobení činitelem -1 , dvojnásobné točení o 180° , t. j. točení o 360°

znamená dvojnásobné násobení — 1nou, tedy násobení činitelem $+1 = (-1) \cdot (-1)$.

Možná-li tedy pomyslné číslo bi v rovině zobraziti, a je-li úhel φ měrou točení, jehož zapotřebí, aby $+b$ přešlo v $+bi$, a které se tedy srovnává s násobením činitelem i , bude dvoj-, troj-, čtyřnásobné . . . točení znamenati násobení činitelem $i^2, i^3, i^4, \dots$. Tudiž musí $+b$ dvojnásobným točením o φ , t. j. točením o 2φ přejíti v $+bi^2 = (+b) \cdot (-1) = -b$. Ku přechodu z $+b$ v $-b$ jest však zapotřebí točení o 180° ; proto musí $2\varphi = 180^\circ$, z čehož $\varphi = 90^\circ$. Postavíme-li tedy v bodu o přímku Y kolmo na X , bude $oc = +bi$. Pomyslné číslo $bi = b\sqrt{-1}$ znamená pak číslo o b jednotech, které čítáme na přímce postavené kolmo na původní přímku číselnou v bodu nullovém, a bod c znamená místo, jež v rovině číselné odpovídá tomuto číslu pomyslnému.

Točí-li se délka oa třikrát aneb oa' jednou o 90° , dopadne na oc' ; proto jest $+bi^3 = -bi = oc'$. Taktéž vytvoří se točením délky oa o 360° , aneb točením oc' o 90° opět kladná délka $+b$; tudíž $+bi^4 = -bi \cdot i = +b$.

Z toho jde, že tak, jako se vztahuje oc' k oa , tak také oa' se vztahuje k oc , oc' k oa' , konečně oa k oc' .

Ve výrazech čísel

$$\begin{aligned} +b &= b \cdot (+1), & +bi &= b \cdot (+i), \\ -b &= b \cdot (-1), & -bi &= b \cdot (-i) \end{aligned}$$

znamená tudíž prostá hodnota b , že každé toto číslo obsahuje b jednotí; znaménka však, aneb v širším smyslu činitelé směru $+1, +i, -1, -i$ znamenají, že těch b jednotí musíme čítati ve směrech $X, Y, -X, -Y$.

Úplné vyšetřování pomyslných čísel nenáleží do oboru nižší matematiky. Zde pojednáme jen o některých jednoduchých způsobech spojování těchto čísel, zároveň pak přitom rozšíříme pojmy početných výkonů až k významu jich nejrozsáhlejšímu.

Počítání čísla pomyslnými.

§. 185. 1) Sečítání dvou čísel záleží vůbec v tom, že od jednoho sčítance ve směru druhého postupujeme o prostou jeho hodnotu.

Podlé toho jest

$$ai + bi = (a + b)i.$$

Součet dvou čísel pomyslných jest tedy také pomyslný.

Z toho jde zároveň, že $ai + bi = bi + ai$.

2) Odčítání dvou čísel záleží vůbec v tom, že od menšence vycházejíce, ve směru menšiteli protivném kráčíme o prostou jeho hodnotu. Proto

$$ai - bi = (a - b)i.$$

Rozdíl dvou různých čísel pomyslných je též pomyslný.

§. 186. 1) Dvě čísla násobiti znamená vůbec, z násobence utvoříti číslo nové tak, jako násobitel vzniknul z kladné jednoty.

$$1) ai \cdot b = abi.$$

Neboť: násobitel vzniknul z kladné jednoty způsobem tím, že jsme ji bkrátě položili co sčítance; musíme tedy také ai klásti bkrátě co sčítance, protož

$$ai \cdot b = ai + ai + ai + ai + \dots \text{bkrát} = abi.$$

$$2) a \cdot bi = abi.$$

Neboť: číslo bi vzniklo z kladné jednoty způsobem tím, že jsme jí přiměřenou jednotu i utvořili a tuto pak položili bkrátě co sčítance; musíme tedy v rovině číselné utvoříti také násobenci a přiměřené pomyslné číslo ai a toto položiti bkrátě co sčítance. Proto bude $a \cdot bi = ai \cdot b = abi$.

$$3) ai \cdot bi = -ab.$$

Neboť $ai \cdot bi = ai^2 \cdot b = -a \cdot b = -ab$.

Součin pomyslného a realného čísla jest pomyslný, součin dvou čísel pomyslných jest realný.

Zároveň následuje, že $ai \cdot b = b \cdot ai$, a $ai \cdot bi = bi \cdot ai$.

2) Položíme-li v posledních třech rovnicích $ab = d$, protož

$$a = \frac{d}{b}, \text{ bude}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{b} i \cdot b &= di, & \frac{d}{b} \cdot bi &= di, \\ \frac{d}{b} i \cdot bi &= -d \text{ aneb } -\frac{d}{b} i \cdot bi &= d. \end{aligned}$$

Z toho plyne dle všeobecného pojmu dělení (§. 44):

$$1) \frac{di}{b} = \frac{d}{b} i, \quad 2) \frac{di}{bi} = \frac{d}{b}, \quad 3) \frac{d}{bi} = -\frac{d}{b} i.$$

Pomyslné a realné číslo dá tedy podíl pomyslný, dvě čísla pomyslná dají podíl realný.

Z druhé rovnice zároveň jest patrné, že hodnota zlomku se nemění, násobíme-li čitatele a jmenovatele i .

§. 187. 1) Z §. 184. plyne přímo:

$$i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = +1;$$

znamená-li n kterékoli kladné číslo celistvé, bude vůbec

$$i^{4n} = +1, i^{4n+1} = +i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i.$$

2) Dále jest

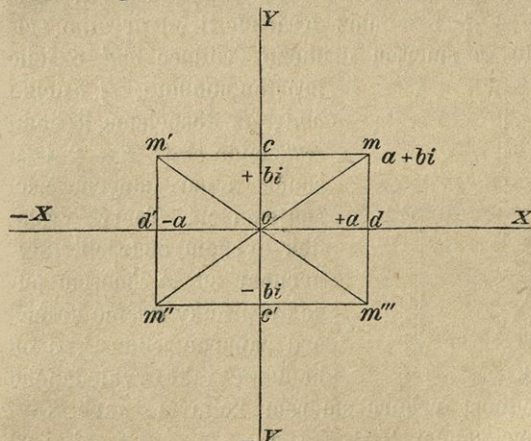
$$(ai)^n = ai \cdot ai \cdot ai \dots \text{nkrát} = a^n i^n.$$

Mocnina pomyslného čísla jest reálná anebo pomyslná, buď že mocnina i jest reálná anebo pomyslná.

Číslo soujemná.

§. 188. Číslo, sestávající z čísla reálného a pomyslného, jako u př. $a + b\sqrt{-1} = a + bi$, slove soujemné, naproti číslu pouze pomyslnému, jež má podobu $b\sqrt{-1} = bi$.

Soujemné číslo $a + bi$ zobrazí se takto: V číselné rovině budiž X původní přímka číselná, přímka Y , postavená na ni kolmo v bodu o pak budiž přímka čísel pomyslných. Odpovídá-li bod d



Obr. 3.

reálnému číslu a , a bod c pomyslnému číslu bi , vedme bodem d přímkou rovnoběžnou s Y , a bodem c rovnoběžnou s X ; bod průsečný m znamená místo, kteréž v rovině číselné odpovídá soujemnému číslu $a + bi$, a délka om představuje prostou hodnotu čísla to-

hoto. Bod m též obdržíme, jestliže na X z bodu o nanese se délku od , představující číslo a , v bodu d postavíme kolmou přímkou, a na tuto nanese se délku dm , představující číslo bi .

Rovněž shledáme, že soujemným číslům $-a + bi$, $-a - bi$, a $-bi$ odpovídají v rovině číselné body m' , m'' , m''' .

Nabývají-li čísla a a b znenáhla všechny realné hodnoty od $-\infty$ do $+\infty$, zaujme bod m , jímž se určuje soujenné číslo $a + bi$, postupem všechna místa v neomezené rovině.

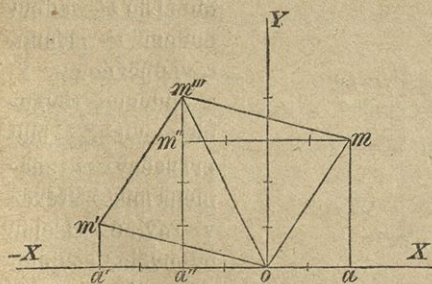
Výraz $a + bi$ je tudíž obecný tvar všech možných čísel; při $a = 0$ a $b = 0$ obsahuje nullu, při $b = 0$ všechna čísla realná, při $a = 0$ všechna čísla pouze pomyslná, a liší-li se a i b od nuly, všechna čísla soujenná.

Počítání čísla soujennými.

§. 189. 1) Máme-li sečítati soujenná čísla $a + bi$ a $c + di$, musíme (dle §. 185., 1) v rovině číselné od prvního sčítance $a + bi$ vycházejíce kráčet směrem druhého sčítance $c + di$ o jeho prostou hodnotu. Číslo, k němuž takto dospějeme, sestává ze součtu realných a ze součtu pomyslných částí obou sčítanců; neboť

$$(a + bi) + (c + di) = [(a + bi) + c] + di = (a + c + bi) + di = (a + c) + (b + d)i.$$

Máme-li u př. určití součet $(2 + 3i) + (-4 + i)$, bude $2 + 3i = om$, a $-4 + i = om'$. Kráčíme-li od prvního sčítance, t. j. od bodu m směrem druhého sčítance om' o jeho



Obr. 4.

prostou hodnotu, t. j. o délku om' , až dospějeme k bodu m'' , bude $om'' = -2 + 4i$ součet obou daných čísel soujenných. Tentýž výsledek bychom obdrželi, kdybychom od m směrem původní přímký číselné kráčeli o 4 záporné jednotky, a od bodu m' takto vyhledaného

ještě o pomyslnou jednotku vzhůru směrem kolmým, aneb kdybychom utvořili nejprv součet $2 + (-4)$, t. j. čítali od a až do a'' , a s tímto součtem spojili součet $3i + i = 4i$, t. j. kdybychom od bodu a'' směrem kolmým kráčeli dále o 4 jednotky pomyslné.

Součet om'' obdržíme bezprostředně, sestrojíme-li z délek om a om' , představujících sčítance, rovnoběžník $mom'm''$, v němž z nulového bodu o vedeme úhlopříčnou om'' .

Součet dvou soujenných čísel jest vůbec opět číslo soujenné. Jedině čísla $a + bi$ a $a - bi$, jimž říkáme čísla spřezitá, dají součet reálný; neboť

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a.$$

2) Máme-li od soujenného čísla $a + bi$ odčítati $c + di$, kráčíme (dle §. 185., 2) v rovině číselné od menšence směrem menšiteli protivným o jeho prostou hodnotu. Dospějeme takto k číslu, sestávajícímu z rozdílu reálných a z rozdílu pomyslných částí daných dvou čísel soujenných. Bude pak

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

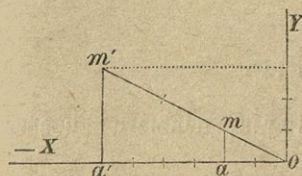
Rozdíl dvou čísel soujenných jest vůbec opět číslo soujenné.

Dodatky. a) Je-li $a + bi = c + di$, musí $a = c$ a $b = d$, jinak by $a - c = (d - b)i$, a $\frac{a - c}{d - b} = i$, t. j. reálné číslo by se rovnalo pomyslnému.

b) Je-li $a + bi = 0$, musí $a = 0$ a $b = 0$, jinak by bylo $-\frac{a}{b} = i$.

§. 190. 1) Máme-li soujenné číslo $a + bi$ násobiti reálným číslem c , musíme číslo $a + bi$ položití ckrát co sčítance, tudíž reálnou a pomyslnou jeho část násobiti c ; neboť $(a + bi) \cdot c = (a + bi) + (a + bi) + (a + bi) + \dots$ ckrát $= ac + bci$.

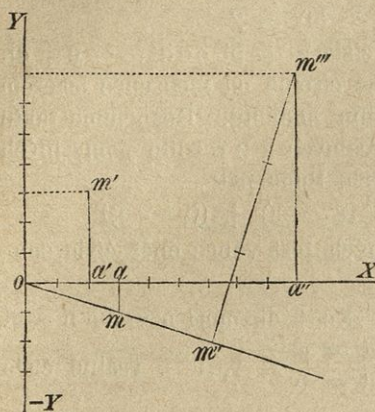
Má-li se u př. $-2 + i$ násobiti třemi, učiníme v rovině číselné $oa = -2 + i$, pak položíme om třikrát co sčítance, čím obdržíme $om' = -6 + 3i$ jakožto hledaný součin $(-2 + i) \cdot 3$.



Obr. 5.

2) Máme-li násobiti dvě čísla soujenná $a + bi$ a $c + di$, třeba jest (dle §. 186., 1) z $a + bi$ utvořiti číslo týmž způsobem, jakým číslo $c + di$ vzniklo z kladné jednotky; musíme tedy nejprv $a + bi$ položití ckrát co sčítance, pak $a + bi$ dkrát také co sčítance způsobem pomyslným a oba výrazy konečně sečítati. Číslo takto vyhledané souhlasí se součinem, jež obdržíme násobením obou činitelů dle pravidel o číslech algebraických; neboť

$$\begin{aligned}
 (a + bi)(c + di) &= (a + bi)c + (ai - b)d \\
 &= ac + bci + adi - bd \\
 &= (ac - bd) + (bc + ad)i.
 \end{aligned}$$



Obr. 6.

Má-li se vyhledati u př. součín $(3 - i)(2 + 3i)$, určíme v rovině číselné $3 - i = om$ a naložíme s touto veličinou dle zákona, podle něhož utvořeno jest číslo $2 + 3i$, t. j. považujeme om za novou jednotku kladnou, učiníme $om'' = 2om$, postavíme v bodu m'' kolmou, na nižto naneseme $3om$, čím dospějeme k m''' ; pak bude $(3 - i)(2 + 3i) = om''' = 9 + 7i$. Tentýž výsledek obdržíme, jestliže vyvineme součín dle pravidel o násobení algebraickém; neboť

$$(3 - i)(2 + 3i) = 6 - 2i + 9i + 3 = 9 + 7i.$$

Součín dvou čísel soujenných jest vůbec též číslo soujenné; součín dvou čísel spřežitých jest však reálný; neboť

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

§. 191. 1) Ze součinu $(a + bi) \cdot m = am + bmi$ plyne dle §. 45., 2)

$$\frac{am + bmi}{m} = a + bi,$$

t. j. soujenné číslo dělí se reálným, dělíme-li jím část reálnou i pomyslnou.

2) Vůbec jest

$$\frac{m(a + bi)}{n(a + bi)} = \frac{m}{n};$$

t. j. hodnota zlomku (podílu) se nemění, násobíme-li čitatele i jmenovatele týmž číslem soujenným.

Máme-li tedy dělití dvě čísla soujenná, násobme dělence i dělitele číslem, kteréž je s tímto spřežitě, čím obdržíme dělitele reálného.

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i.$$

Podíl dvou čísel soujenných je též číslo soujenné.

Způsobem tuto uvedeným možná též soujenného jmenovatele zlomku učiniti reálným. U př.

$$\frac{3 + i}{2 + 5i} = \frac{(3 + i)(2 - 5i)}{(2 + 5i)(2 - 5i)} = \frac{11 - 13i}{29}.$$

§. 192. Mocnina čísla soujenného jest vůbec číslo soujenné.

$$(a + bi)^2 = (a + bi)(a + bi) = (a^2 - b^2) + 2abi;$$

$$(a + bi)^3 = (a + bi)^2(a + bi) = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i;$$

a t. d.

Dodatky. 1) Pravidla o dobývání druhého kořene z dvoučlenů neracionálních, odvozená v §§. 181. a 182., vztahují se i k druhým kořenům z čísel soujenných, jak již patrno z odvození samého, a sice jich použití zde nikterak nezávisí na podmínce tam kladené, že a musí býti kladné a větší nežli $\sqrt{b}$.

2) Z předešlého jest patrno, že čísla pomyslnými a soujennými počítá se dle týchž pravidel, která jsou platna o reálných veličinách kořenových, jen uvedeme-li pomyslná čísla na podobu bi .

V. Druhá a třetí mocnina, dobývání kořene druhého a třetího stupně.

1. Druhá mocnina a kořen stupně druhého.

§. 193. Úloha. Algebraický součet má se povýšiti na druhou mocninu.

Druhá mocnina vyvine se dle následujícího pravidla:

1) První člen daného výrazu dá svůj čtverec.

2) Každý následující člen dá dvě části, totiž dvojnásobný součin tohoto členu, násobený součtem všech předcházejících členů, a svůj čtverec.

3) Součet všech částí takto utvořených jest hledaná druhá mocnina.

Důkaz. Především jest

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2,$$

t. j. druhá mocnina dvoučlenu rovná se součtu čtverce prvního členu, dvojnásobného součinu obou členů a čtverce členu druhého.

Dejme tomu, že pravidlo dokázané tuto o dvoučlenu jest platno též o n -členu $(a + b + c + \dots + q + r)$, totiž

$$\begin{aligned} (a + b + c + \dots + q + r)^2 = & a^2 \\ & + 2ab + b^2 \\ & + 2(a + b)c + c^2 \\ & + \dots \dots \dots \\ & + 2(a + b + c + \dots + q)r + r^2, \end{aligned}$$

tedy lze dokázati, že totéž pravidlo musí se vztahovati také k $(n + 1)$ -členu $(a + b + c + \dots + q + r + s)$, t. j. přidáme-li k původnímu mnohočlenu ještě člen s , že v druhé mocnině k původnímu součtu musíme také připojiti $+ 2(a + b + c + \dots + q + r)s + s^2$. Považujeme-li nový mnohočlen za dvoučlen, t. j. výraz původní za první, a s za druhý člen, bude skutečně

$$\begin{aligned} (a + b + c + \dots + q + r + s)^2 = & \\ = \{ (a + b + c + \dots + q + r) + s \}^2 = & \\ = (a + b + c + \dots + q + r)^2 + & \\ + 2(a + b + c + \dots + q + r)s + s^2. & \end{aligned}$$

Pravidlo o povýšení na druhou mocninu má tedy platnost o dvoučlenu, proto také o trojčlenu, tudíž i čtyř- a vůbec o každém mnohočlenu.

Dodatek. Obě části, jež druhý a každý následující člen mnohočlenu dá v druhé mocnině, lze spojití v jedinou část, jestliže tento člen připočteme k dvojnásobnému součtu členů předcházejících a součet tím členem násobíme.

$$2a \cdot b + b^2 = (2a + b) \cdot b;$$

$$2(a + b) \cdot c + c^2 = \{2(a + b) + c\} \cdot c, \text{ a t. d.}$$

§. 194. Úloha. Dekadické číslo má se povýšiti na druhou mocninu.

To se děje způsobem následujícím:

- 1) Povýšíme první číslici v levo na druhou mocninu.
- 2) Z každé následující číslice utvoříme dvě části, totiž dvojnásobný součin čísla předcházejícího a číslice této, pak její čtverec.
- 3) Tyto části píšme pod sebe tak, že každou následující pomkne o jedno místo dále v pravo; součet veškerých částí dá hledanou druhou mocninu.

Uvedené tuto pravidlo jest správné dle §. 193. proto, že každé číslo dekadické lze rozvésti na mnohočlen, spořádaný dle mocnin čísla 10.

Máme-li u př. 3417 povýšiti na druhou mocninu, bude

$$\begin{aligned} 3417^2 &= (3000 + 400 + 10 + 7)^2 \\ &= 3000^2 + 2 \cdot 3000 \cdot 400 + 400^2 + 2 \cdot 3400 \cdot 10 + 10^2 \\ &\quad + 2 \cdot 3410 \cdot 7 + 7^2, \end{aligned}$$

anebo provedeme-li naznačené výkony a postavíme-li sčítance náležitě pod sebe:

$$\begin{array}{r} 3417^2 = \quad 3000^2 \dots\dots 9000000 \\ + 2 \cdot 3000 \cdot 400 \dots\dots 2400000 \\ \quad + 400^2 \dots\dots 160000 \\ + 2 \cdot 3400 \cdot 10 \dots\dots 68000 \\ \quad + 10^2 \dots\dots 100 \\ + 2 \cdot 3410 \cdot 7 \dots\dots 47740 \\ \quad + 7^2 \dots\dots 49 \\ \hline = 11675889; \end{array}$$

aneb vynecháme-li nully:

$$\begin{array}{r} 3417^2 \\ \hline 3^2 \dots\dots 9. \\ 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots\dots 24. \\ 4^2 \dots\dots 16. \\ 2 \cdot 34 \cdot 1 \dots\dots 68. \\ 1^2 \dots\dots 1. \\ 2 \cdot 341 \cdot 7 \dots\dots 4774. \\ 7^2 \dots\dots 49 \\ \hline 11675889. \end{array}$$

Dodatky. 1) Obě části, jež ve čtverci dává druhá a každá následující číslice daného čísla, spojíme v část jedinou, připíšeme-li k dvojnásobnému předcházejícímu číslu novou číslici, a násobíme-li takto vzniklé číslo touto novou číslicí; při tom však musíme každý následující součin psáti o dvě místa dále v pravo. Vůbec totiž

$$(2A \cdot 10) \cdot p + p^2 = (2A \cdot 10 + p)p.$$

Zkráceně bychom tedy zdvojmocnili hořejší číslo takto:

<u>3417²</u>									
	3 ²	.	.	.	.	9	..		
64	.	4	.	.	.	2	56	..	
681	.	1	.	.	.	.	6	81	..
6827	.	7	.	.	.	.	4	77	89
							11	67	58 89.

2) Čtverec dekadického čísla má buď dvakráte tolik číslic, kolik jich má dané číslo, aneb o jednu číslici méně.

Je-li N číslo n ciferné, tedy $N \geq 10^{n-1}$, ale $< 10^n$; pak bude $N^2 \geq 10^{2n-2}$, ale $< 10^{2n}$, z čehož patrno, že čtverec čísla N má nejméně $2n - 1$ a nejvýš $2n$ cifer (§. 63.).

Rozdělíme-li tedy čtverec daného čísla od pravé k levé na třídy o dvou číslicích tak, že poslední třída v levo může mít i jedinou číslici, obdržíme tolik tříd, kolik číslic má mocněnec.

3) Poněvadž $\left(\frac{a}{10^n}\right)^2 = \frac{a^2}{10^{2n}}$, patrno, že desetinný zlomek zdvojmocníme jako dekadické číslo celistvé; ve čtverci však oddělíme od pravé k levé dvakráte tolik míst desetinných, kolik jich má mocněnec. Z toho plyne zároveň, že čtverec desetinného zlomku má vždy sudý počet míst desetinných.

4) Povýšíme-li zkrácený zlomek desetinný na druhou mocninu, tato bude mít tolik míst nespolehlivých, kolik číslic má daný zlomek desetinný. (Plyne z §. 114., 1.)

U př. $3 \cdot 456 \dots^2$ dá úplným vyvinutím $11 \cdot 943936 \dots$. Z těchto číslic však jsou čtyry nejnižší nespolehlivé, tedy

$$3 \cdot 456 \dots^2 = 11 \cdot 94 \dots$$

§. 195. Úloha. Z algebraického součtu má se dobývati druhého kořene.

Ze zákona (§. 193.), dle něhož jsou části ve čtverci mnohočlenu sestaveny, lze odvoditi následující pravidlo o dobývání druhého kořene z mnohočlenů spořádaných:

1) První člen spořádaného mnohočlenu jest čtverec prvního členu kořene. Protož obdržíme první člen kořene, dobýváme-li druhého kořene z prvního členu odmocněnce. Čtverec takto vyhledaného prvního členu kořene odečte se od odmocněnce.

2) První dva členy zbytku obsahují části, vzniklé z následujícího členu kořene, a sice jest první člen zbytku součin z dvojnásobného již vyhledaného kořene a z následujícího členu kořene. Dělíme-li tedy první člen zbytku dvojnásobným již vyhledaným kořenem, obdržíme následující člen kořene. Utvořme nyní obě části, jež tento nový člen kořene dá ve čtverci, t. j. k dvojnásobnému dřívějšímu kořenu připočtíme nový člen, a součet násobíme tímto členem. Součin odčítáme od zbytku mnohočlenu.

3) V tom výkonu pokračujme. Nezůstane-li konečně zbytek, daný mnohočlen jest úplný čtverec, a vyhledaný kořen jest racionální; zůstane-li zbytek, kořen jest neracionální.

Příklad.

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{x^4 + 6x^3 - x^2 - 30x + 25} = x^2 + 3x - 5. \\
 \underline{- x^4} \qquad \qquad \qquad + 6x^3 - x^2 \qquad \qquad \qquad : (2x^2 + 3) \cdot 3x \\
 \qquad \qquad \qquad + 6x^3 + 9x^2 \qquad \qquad \qquad \\
 \underline{\qquad \qquad \qquad -} \qquad \qquad \qquad - 10x^2 - 30x + 25 : (2x^2 + 6x - 5) \cdot (-5) \\
 \qquad \qquad \qquad - 10x^2 - 30x + 25 \\
 \qquad \qquad \qquad + \qquad \qquad + \qquad \qquad - \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 0
 \end{array}$$

§. 196. Úloha. Z dekadického celistvého čísla, kteréž jest úplná druhá mocnina, má se dobývati kořene druhého stupně.

1) Rozdělme číslo od pravé k levé na třídy o dvou číslicích, nejvyšší třída může mít o jednu číslici méně; hledejme největší číslo, jehožto čtverec jest obsažen v nejvyšší třídě, a napišme je co první číslici kořene. Čtverec této číslice odečtíme od nejvyšší třídy odmocněnce.

2) Ku zbytku připišme následující třídu odmocněnce, dělme číslo toto, zatrhnuvše poslední jeho číslici v pravo, dvojnásobným posud vyhledaným kořenem; podíl napišme co novou číslici v kořenu, zároveň pak co doplněk k děliteli. Takto doplněného dělitele násobme novou číslicí kořene, a součin hned při násobení odčítáme od dělence, k němuž přibereme číslici dříve vynechanou.

3) V tom výkonu pokračujme, až bude do počtu vzata poslední třída odmocněnce.

Správnost počtu toho vysvítá z §. 194.

U př.

$$\begin{array}{r} \sqrt{5\overline{943844}} = 2438 \\ 194 \quad : 4_4 \\ 1838 \quad : 48_3 \\ 38944 \quad : 486_6 \\ 0 \end{array}$$

Dodatky. 1) Poněvadž $\sqrt{\frac{A}{10^{2n}}} = \frac{\sqrt{A}}{10^n}$, patrno, že z desetinného zlomku dobýváme druhého kořene jako z čísla celistvého; musíme však od desetinné tečky v levo a v pravo rozdělití desetinný zlomek na třídy o dvou číslicích a v kořenu udělati tečku, než vezmeme do počtu první třídu míst desetinných.

U př.

$$\begin{array}{r} \sqrt{1\overline{522756}} = 12\cdot34 \\ 52 \quad : 2_2 \\ 827 \quad : 24_3 \\ 9856 \quad : 246_4 \\ 0 \end{array}$$

2) Z obyčejného zlomku dobývá se kořene druhého stupně, jestliže kořen z čitatele lomíme kořenem ze jmenovatele.

U př. $\sqrt{\frac{144}{529}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{529}} = \frac{12}{23}.$

§. 197. Úloha. Z dekadického celistvého čísla, kteréž není úplný čtverec, má se dobývati kořene druhého stupně.

Není-li celistvé číslo a úplná druhá mocnina, bude $\sqrt{a}$ dle §§. 177. a 178. neracionální, možná jej tedy jen přibližně určit. Dobývejme tedy z a druhého kořene způsobem uvedeným v §. 196., až bude poslední třída do počtu vzata; za posledně vyhledanou číslicí v kořenu uděláme desetinnou tečku, a počítáme týmž způsobem dále, připisující pokaždé ku zbytku dvě null místo třídy následující. V počtu pokračujeme, až vyhledáme žádaný počet číslic desetinných.

Důkaz. Násobíme-li celistvé číslo a mocninou 10^{2m} , t. j. připsáme-li k němu v pravo m krátě dvě null, a je-li b největší celistvé číslo, obsažené v $\sqrt{a \cdot 10^{2m}}$, tedy

$$\begin{aligned} b &< \sqrt{a \cdot 10^{2m}} < b + 1, \text{ aneb} \\ b &< 10^m \cdot \sqrt{a} < b + 1, \text{ z čehož} \\ \frac{b}{10^m} &< \sqrt{a} < \frac{b+1}{10^m}. \end{aligned}$$

$\sqrt{a}$ leží tedy mezi $\frac{b}{10^m}$ a $\frac{b+1}{10^m}$, kteréžto meze od sebe se liší o $\frac{1}{10^m}$; chyba, jížto se dopustíme, klademe-li $\sqrt{a} = \frac{b}{10^m}$, bude tudíž menší nežli $\frac{1}{10^m}$, čili menší nežli jedna jednotka posledního vypočítaného místa desetinného.

U př. $\sqrt{3|50} = 18\cdot708 \dots$

2 50	: 2 ₈
2600	: 36 ₇
310000	: 3740 ₈
10736	

Dodatky. 1) Podobným způsobem také při dobývání druhého kořene z desetinného zlomku, jenž není úplný čtverec, pokračujeme v počtu, pokud zapotřebí; obsahuje-li poslední třída v pravo jedinou číslici, připsáme k ní nullu, ku každému zbytku pak přidáváme po dvou nullách.

U př. $\sqrt{0\cdot00|01|5_0} = 0\cdot0122 \dots$

50	: 2 ₂
600	: 24 ₂
11600	: 244 ₄
1824	

Rozumí se, že při zlomcích občíslných připsujeme ku zbytku náležité číslice periody na místo třídy null.

2) Máme-li dobývatí druhého kořene z obyčejného zlomku, jehož číselník a jmenovatel nejsou úplné čtverce, proměňme jej buď ve zlomek, jehož jmenovatel jest druhá mocnina, a dobývejme kořene z číselníku i jmenovatele; anebo proměňme jej ve zlomek desetinný, a dobývejme druhého kořene z tohoto.

U př. $\sqrt{\frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 6}{6^2}} = \frac{\sqrt{30}}{6} = \frac{5\cdot47722 \dots}{6} = 0\cdot91287 \dots$

aneb $\sqrt{\frac{5}{6}} = \sqrt{0\cdot8\bar{3}} = 0\cdot91287 \dots$

§. 198. Zkrácené dobývání druhého kořene.

Vyhledáme-li v druhém kořenu z daného čísla obyčejným způsobem m prvních číslic, a chceme-li

ještě $m - 1$ číslic správně určití, dělíme poslední zbytek dvojnásobným posud vyhledaným kořenem.

Obyčejně používáme zkráceného dělení a v děliteli ihned vynecháme poslední číslici.

Důkaz. Znamená-li a odmocněnce a b vyhledaných již m číslic druhého kořene, můžeme bez újmy všeobecnosti považovati prvních m tříd v a , tedy také mciferné číslo b za místa celistvá proto, že posloupnost číslic v kořenu se nemění, nechť klademe desetinnou tečku za kteroukoli třídu odmocněnce; následující číslice v kořenu pak budou představovati místa desetinná.

Položíme-li pak $\sqrt{a} = b + x$, kde x znamená posud neznámou část kořene, musí

$$(b + x)^2 = a, \text{ aneb } b^2 + 2bx + x^2 = a, \text{ protože}$$

$$2bx = a - b^2 - x^2, \text{ a } x = \frac{a - b^2}{2b} - \frac{x^2}{2b}.$$

Vezmeme-li tedy na místo x podíl $\frac{a - b^2}{2b}$, kde $a - b^2$ znamená poslední zbytek při dobývání kořene a $2b$ dvojnásobný kořen posud vyhledaný, chyba, jíž se dopustíme, bude $\frac{x^2}{2b}$. Ale

$x < 1$ a $b > 10^{m-1}$, proto $\frac{x^2}{2b}$ zajisté menší nežli $\frac{1}{10^{m-1}}$, z čehož plyne, že podíl $\frac{a - b^2}{2b}$ dá $m - 1$ dalších číslic správných v kořenu.

Dodatky. 1) Máme-li v druhém kořenu z celistvého čísla aneb z úplného zlomku desetinného určití $2m - 1$ aneb $2m$ platných číslic, vyhledáme v prvním případě m , v druhém pak $m + 1$ číslic dle obyčejného pravidla o dobývání druhého kořene, ostatní pak zkráceným dělením, jakož svrchu udáno.

Máme-li u př. v $\sqrt{138}$ určití 7 platných číslic, tedy správných 5 míst desetinných, vyhledáme první 4 číslice dobýváním kořene, ostatní 3 však zkráceným dělením takto:

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{138} & = & 11.74734 \dots \\
38 & : & 2_1 \\
1700 & : & 22_7 \\
11100 & : & 234_4 \\
1724 & : & 2,3,4,8 \\
80 & & \\
10 & & \\
1 & &
\end{array}$$

2) Týmž způsobem zkráceným dobýváme zvláště kořene druhého z desetinného zlomku zkráceného. Má-li odmocněnec m platných tříd, z nichžto jedině první v levo může být o jedné číslici, obdržíme v kořenu v nejnepříznivějším případě $2m - 1$ správných číslic platných.

§. 199. Úloha. Neracionalný kořen druhého stupně má se určití přibližnými hodnotami řetězového zlomku.

Máme-li vyhledati $\sqrt{a}$, určíme největší v něm obsažené číslo celistvé q a položíme $\sqrt{a} = q + \frac{1}{x_1}$, kde musí býti $\frac{1}{x_1} = \sqrt{a} - q < 1$, tudíž $x_1 = \frac{1}{\sqrt{a} - q} > 1$. Nato vyhledáme opět největší celistvé číslo q_1 , obsažené v $x_1 = \frac{1}{\sqrt{a} - q}$ a položíme $x_1 = q_1 + \frac{1}{x_2}$, kde musí býti $\frac{1}{x_2} < 1$ a $x_2 = \frac{1}{x_1 - q_1} > 1$.

Pokračujeme-li tím způsobem, a jsou-li $q_2, q_3, \dots$ největší celistvá čísla, obsažená v $x_2, x_3, \dots$, bude

$$\begin{aligned}
\sqrt{a} &= q + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{x_2}} = q + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{x_3}}} \\
&= q + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{x_4}}}} = \dots
\end{aligned}$$

Přibližnými hodnotami vyhledaného zlomku řetězového můžeme $\sqrt{a}$ vyjádřiti tak určitě, jak jen potřeba toho káže.

$$\sqrt{14} = 3 + \frac{1}{x_1},$$

$$\text{kde } x_1 = \frac{1}{\sqrt{14}-3} = \frac{\sqrt{14}+3}{5} = 1 + \frac{\sqrt{14}-2}{5} = 1 + \frac{1}{x_2},$$

$$x_2 = \frac{5}{\sqrt{14}-2} = \frac{\sqrt{14}+2}{2} = 2 + \frac{\sqrt{14}-2}{2} = 2 + \frac{1}{x_3},$$

$$x_3 = \frac{2}{\sqrt{14}-2} = \frac{\sqrt{14}+2}{5} = 1 + \frac{\sqrt{14}-3}{5} = 1 + \frac{1}{x_4},$$

$$x_4 = \frac{5}{\sqrt{14}-3} = \frac{\sqrt{14}+3}{1} = 6 + \frac{\sqrt{14}-3}{1} = 6 + \frac{1}{x_5},$$

$$x_5 = \frac{1}{\sqrt{14}-3}, \text{ kteréž opět } = x_1 = 1 + \frac{1}{x_2},$$

z čehož patrno, že druhou rovnicí počínaje, předcházející rovnice se opakují. Bude tedy

$$\sqrt{14} = 3 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \dots$$

Přibližné hodnoty jsou:

$$3, 4, \frac{11}{3}, \frac{15}{4}, \frac{101}{27}, \frac{116}{31}, \frac{333}{89}, \frac{449}{120}, \frac{3027}{809}, \dots$$

Položíme-li tedy $\sqrt{14} = \frac{3027}{809} = 3.741656 \dots$, chyba

bude menší nežli $\frac{1}{809^2} = \frac{1}{654481} = 0.000001 \dots$; tudíž jest v $\sqrt{14}$ 5 správných míst desetinných.

2. Třetí mocnina a kořen stupně třetího.

§. 200. Úloha. Algebraický součet má se povýšiti na třetí mocninu.

Třetí mocnina vyvine se dle následujícího pravidla:

1) První člen daného výrazu povýší se na třetí mocninu.

2) Každý následující člen dá tři části: trojnásobný čtverec součtu všech členů předcházejících, násobený tímto členem; trojnásobný součet všech členů předcházejících, násobený čtvercem toho členu a konečně svou třetí mocninu.

3) Součet všech částí takto utvořených jest hledaná třetí mocnina.

Důkaz. Především jest

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) \\ = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

t. j. třetí mocnina dvoučlenu rovná se součtu třetí mocniny prvního členu, trojnásobného čtverce prvního členu násobeného druhým členem, trojnásobného prvního členu násobeného čtvercem druhého členu, a třetí mocniny členu druhého.

Ostatní se dovodí způsobem provedeným v §. 193.

§. 201. Úloha. Dekadické číslo má se povýšiti na třetí mocninu.

1) Povýšíme první čili nejvyšší číslici na třetí mocninu.

2) Z každé následující číslice utvoříme tři části: součin trojnásobného čtverce předcházejícího čísla a této číslice, součin trojnásobného čísla předcházejícího a čtverce této číslice, konečně její třetí mocninu.

3) Tyto části píšeme pod sebe tak, že každou následující pomkneme o jedno místo dále v pravo; součet všech částí dá hledanou třetí mocninu.

Pravidlo tuto uvedené jest správné dle §. 200.

Máme-li u př. číslo 4213 povýšiti na třetí mocninu, bude

$$\begin{array}{r} 4213^3 = (4000 + 200 + 10 + 3)^3 \\ = \begin{array}{r} 4000^3 \dots\dots\dots 64000000000 \\ + 3 \cdot 4000^2 \cdot 200 \dots\dots\dots 9600000000 \\ + 3 \cdot 4000 \cdot 200^2 \dots\dots\dots 4800000000 \\ \quad + 200^3 \dots\dots\dots 8000000 \\ + 3 \cdot 4200^2 \cdot 10 \dots\dots\dots 529200000 \\ + 3 \cdot 4200 \cdot 10^2 \dots\dots\dots 1260000 \\ \quad + 10^3 \dots\dots\dots 1000 \\ + 3 \cdot 4210^2 \cdot 3 \dots\dots\dots 159516900 \\ + 3 \cdot 4210 \cdot 3^2 \dots\dots\dots 113670 \\ \quad + 3^3 \dots\dots\dots 27 \\ \hline = 74778091597 \end{array} \end{array}$$

aneb vynecháme-li nully :

4213 ³			
	4 ³	64 .	
3 .	4 ² . 2	96 .	
3 .	4 . 2 ²	48 .	
	2 ³	8 .	
3 .	42 ² . 1	5292 .	
3 .	42 . 1 ²	126 .	
	1 ³	1 .	
3 .	421 ² . 3	1595169 .	
3 .	421 . 3 ²	11367 .	
	3 ³	27	
		74778091597	

Dodatky. 1) Třetí mocnina dekadického čísla má buď třikráte tolik číslic, kolik jich má dané číslo, aneb o dvě aneb o jednu číslici méně.

Je-li N číslo n ciferné, tedy $N \geq 10^{n-1}$, ale $< 10^n$; pak bude $N^3 \geq 10^{3n-3}$, ale $< 10^{3n}$, z čehož patrně, že třetí mocnina čísla N má nejméně $3n - 2$ a nejvýš $3n$ číslic (§. 63.).

2) Poněvadž $\left(\frac{a}{10^n}\right)^3 = \frac{a^3}{10^{3n}}$, patrně, že v čitateli desetinného zlomku, povýšeném na třetí mocninu, musíme oddělití třikráte tolik desetinných míst, kolik jich má mocněnec.

3) Povýšíme-li zkrácený zlomek desetinný na třetí mocninu, tato bude míti tolik míst nespolehlivých, kolik číslic jest v polovici součtu z čítele spolehlivé části čtverce (§. 194., dod. 4) a čítele daného zlomku desetinného (§. 114., 1).

§. 202. Úloha. Z algebraického součtu má se do-
bývati třetího kořene.

1) Dobýváme třetího kořene z prvního členu spořádaného odmocněnce, čímž obdržíme první člen kořene. Třetí mocninu tohoto prvního členu odčítáme od odmocněnce.

2) První člen zbytku dělíme trojnásobným čtvercem kořene již vyhledaného; podíl jest následující člen kořene. Utvoříme pak části, jež tento nový člen kořene dá v třetí mocnině, totiž: trojnásobný čtverec vyhledaného již kořene, násobený novým

členem; trojnásobnou předcházející část kořene, násobenou čtvercem nového členu, a třetí mocninu tohoto členu, načež součet těchto tří částí odčítáme ode dřívějšího zbytku odmocněnce.

3) V tom výkonu pokračujeme; nezůstane-li konečně zbytek, třetí kořen jest racionalný, zůstane-li zbytek nějaký, kořen jest neracionalný.

Toto pravidlo o dobývání třetího kořene odvodíme z §. 200. podobným způsobem, jako bylo v §. 195. z §. 193. odvozeno pravidlo o dobývání druhého kořene z mnohočlenů.

Příklad.

$$\begin{array}{r}
 \sqrt[3]{y^6 - 6y^5 + 21y^4 - 44y^3 + 63y^2 - 54y + 27} = y^2 - 2y + 3 \\
 - y^6 \\
 \hline
 - 6y^5 + 21y^4 - 44y^3 \quad : 3y^4 \\
 - 6y^5 + 12y^4 - 8y^3 \\
 + \quad - \quad + \\
 \hline
 + 9y^4 - 36y^3 + 63y^2 - 54y + 27 : (3y^4 - 12y^3 + 12y^2) \\
 + 9y^4 - 36y^3 + 36y^2 \\
 - \quad + \quad - \\
 \hline
 + 27y^2 - 54y + 27 \\
 - \quad + \quad - \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

§. 203. Úloha. Z dekadického celistvého čísla, kteréž jest úplná třetí mocnina, má se dobývati třetího kořene.

1) Rozdělme číslo od pravé k levé na třídy o třech číslicích, nejvyšší třída může míti jen dvě aneb jen jednu číslici; hledejme největší číslo, jehož třetí mocnina jest obsažena v nejvyšší třídě, a napišme je co první číslici v třetím kořenu. Ztrojmocněnou tuto číslici odečtíme od nejvyšší třídy odmocněnce.

2) Ku zbytku připišme následující třídu odmocněnce, dělme číslo toto, zahrnuvše poslední dvě číslice, trojnásobným čtvercem první vyhledané číslice v kořenu, a podíl napišme v kořenu co novou číslici. Utvořme pak části, jež tato nová číslice kořene dá v třetí mocnině, totiž: trojnásobný čtverec čísla předcházejícího, násobený novou číslicí, trojnásobné číslo předcházející, násobené čtvercem této nové číslice, konečně její třetí mocninu; první část napišme pod dělence, každou následující pak o jedno

místo dále v pravo, a odčítejme součet těchto částí od dělence, k němuž přibereme dvě číslic dříve vynechaných.

3) V tom výkonu pokračujme, až bude do počtu vzata poslední třída odmocněnce.

Správnost počtu toho vysvítá z §. 201.

$$\begin{array}{r}
 \text{U př.} \quad \sqrt[3]{78953589} = 429. \\
 \begin{array}{r}
 64 \\
 \hline
 149,53 \quad : 48 \dots 3 \cdot 4^2 \\
 3 \cdot 4^2 \cdot 2 \dots 96 \dots \\
 3 \cdot 4 \cdot 2^2 \dots 48 \dots \\
 \quad 2^3 \dots 8 \\
 \hline
 48\,655,89 : 5292 \dots 3 \cdot 42^2 \\
 3 \cdot 42^2 \cdot 9 \dots 47\,629 \dots \\
 3 \cdot 42 \cdot 9^2 \dots 1\,020 \dots \\
 \quad 9^3 \dots 629 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Dodatek. Z pravidla o dobývání druhého kořene (§. 196. dod. 1 a 2) vysvítá, kterak dobýváme třetího kořene ze zlomku desetinného aneb obyčejného.

§. 204. Úloha. Z dekadického celistvého čísla, kteréž není úplná třetí mocnina, má se dobývatí kořene třetího stupně.

Není-li odmocněnec úplná třetí mocnina, bude třetí kořen neracionalný, tudíž možná jen přibližně jej určití. Počínáme si zde podobně, jako v §. 197. při dobývání druhého kořene z dekadického celistvého čísla, kteréž není úplný čtverec; jen že tu k jednotlivým zbytkům přispisujeme tři nuly místo třídy následující.

Dodatek. I pravidla o dobývání třetího kořene z desetinných a obyčejných zlomků, kteréž nejsou úplné třetí mocniny, jsou obdobná s poznámkami v dodatcích 1) a 2) k §. 197.

§. 205. Zkrácené dobývání třetího kořene.

Vyhledáme-li v třetím kořenu z daného čísla obyčejným způsobem prvních m číslic, a chceme-li ještě $m - 1$ číslic správně určití, dělíme poslední zbytek trojnásobným čtvercem posud vyhledaného kořene.

Důkaz. Znamená-li a odmocněnce a b vyhledaných již m prvních číslic třetího kořene, můžeme b považovati za číslo celistvé, aniž by se tím změnily scházející číslice v kořenu.

Položíme-li pak $\sqrt[3]{a} = b + x$, kde x značí následující číslice kořene, bude

$$(b + x)^3 = a, \text{ čili } b^3 + 3b^2x + 3bx^2 + x^3 = a, \text{ protože } 3b^2x = a - b^3 - 3bx^2 - x^3, \text{ a } x = \frac{a - b^3}{3b^2} - \frac{x^2}{b} - \frac{x^3}{3b^2},$$

kde $a - b^3$ znamená poslední zbytek při dobývání kořene, a $3b^2$ trojnásobný čtverec kořene posud vyhledaného.

Položíme-li na místo x podíl $\frac{a-b^3}{3b^2}$, chyba bude $\frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{3b^2}$, kde $x < 1$ a $b > 10^{m-1}$, tak sice, že při posouzení chyby člen $\frac{x^3}{3b^2}$ jakožto velmi malý naproti $\frac{x^2}{b}$ může se úplně vypustiti; $\frac{x^2}{b}$ jest však menší nežli $\frac{1}{10^{m-1}}$, tudíž podíl $\frac{a-b^3}{3b^2}$ dá $m - 1$ ostatních číslic správných v kořenu.

Máme-li tedy u př. v $\sqrt[3]{0.083066534}$ určití 5 správných míst desetinných, vyhledáme první tři číslice dle obyčejného pravidla o dobývání třetího kořene, ostatní dvě číslice pak dělením zkráceným.

Počet provede se takto:

$$\sqrt[3]{0.083066534} = 0.43632 \dots$$

64	
19066	: 48
144..	
108.	
27	
3559534	: 5547
33282..	
4644.	
216	
1846.78	: 57,0,288
135	
21.	

Dodatek. Tímto způsobem obdržíme v třetím kořenu zkráceného zlomku desetinného $2m - 1$ spolehlivých číslic, má-li odmocněnec m platných tříd o třech číslicích.

VI. Logarithmy.

1. O logarithmech vůbec.

§. 206. Číslo a logarithmovati znamená, hledati mocnitele, jímž mocněnec b musí být umocněn, aby dal a co mocninu. Číslo b jest základ, daná mocnina a slove pouze číslo (Numerus), a hledaný mocnitel jmenuje se logarithmus. Je-li $b^n = a$, znamená n logarithmus čísla a při základě b , což píšeme:

$$n = \log_b a.$$

Vztahují-li se logarithmy vesměs k témuž základu b , píšeme zkrátka $n = \log a$, v kterémžto výrazu základ b považujeme za známý.

Umocňování odpovídají tedy dva obrácené výkony: dobývání kořene a logarithmování.

Mocnina, jejížto mocnitel jest číslo neznámé, jako u př. b^x , jmenuje se veličina exponencialná.

§. 207. Soujem logarithmů čísel, v přirozeném pořadu po sobě jdoucích, při určitém základu slove soustava logarithmická.

Základem soustavy logarithmické může býti jen realné kladné číslo, které se liší od 1, poněvadž jednak umocněním realného záporného čísla nelze vyvoditi všechna možná čísla kladná, jinak každá mocnina 1 opět se rovná 1.

Nesčíslné množství soustav logarithmických jest možné; ve všech těch soustavách jsou při kladném základu b logarithmy záporných čísel pomyslné proto, že mocnina b^n nikdy nemůže býti záporná, nechť má n hodnotu kteroukoli. Tím však užívání logarithmů se neomezuje; záporná čísla v počtech logarithmických zatím považujeme za prostá, těmito počítejme, a ve výsledku teprv ustanovme náležité znaménko.

Užíváme jen dvou soustav logarithmických, totiž obecné čili Briggovy soustavy, jejímž základem je číslo 10, a sou-

stavy přirozené čili Neperovy s neracionalným základem $e = 2.718281828 \dots$, jež obdržíme sečítáním nekonečné řady

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots$$

Obecné vlastnosti logarithmů.

§. 208. 1) Rovná čísla mají v téže soustavě rovné logarithmy, a naopak: k rovným logarithmům náležejí rovná čísla.

Je-li b základ a $b^m = M$, $b^n = N$, musí při $M = N$ také $m = n$, t. j. $\log M = \log N$. (Plyne nepřímě z §. 159., 3.) Je-li naopak $\log M = \log N$, tedy $m = n$, musí dle §. 159., 1) též $b^m = b^n$, t. j. $M = N$.

2) V soustavě, jejížto základ jest větší nežli 1, náleží k většímu číslu také větší logarithmus, a naopak: k většímu logarithmu náleží větší číslo.

Budiž $b^m = M$, $b^n = N$, a $M > N$, tedy při $b > 1$ musí býti $m > n$, pročez $\log M > \log N$. (Plyne nepřímě z 1) a z §. 159., 3). Je-li naopak $\log M > \log N$, plyne taktéž z §. 159., 3), že $M > N$.

3) Logarithmus základu s ohledem na tento základ rovná se 1.

$$b^1 = b; \text{ je-li tedy } b \text{ základ, musí } \log b = 1.$$

4) Logarithmus jedničky v každé soustavě se rovná nulle.

$$b^0 = 1, \text{ protož } \log 1 = 0.$$

5) Logarithmus nully jest záporně nekonečný.

$$\text{Poněvadž } b^{-\infty} = \frac{1}{b^{\infty}} = 0, \text{ jest } \log 0 = -\infty.$$

§. 209. 1) Logarithmus součinu rovná se součtu logarithmů jednotlivých činitelů.

Při základu b budiž

$$\log M = m, \log N = n, \log P = p, \text{ tedy}$$

$$M = b^m, \quad N = b^n, \quad P = b^p, \text{ protož}$$

$$MNP = b^{m+n+p}, \text{ t. j.}$$

$$\log MNP = m + n + p, \text{ aneb}$$

$$\log MNP = \log M + \log N + \log P.$$

$$\text{U př. } \log 6 = \log 2 + \log 3.$$

$$\log 30 = \log 2 + \log 3 + \log 5.$$

Jsou-li při určitém základu známy logarithmy všech prvočísel, můžeme z nich pouhým sečítáním vyhledati logarithmy všech čísel složitých.

$$\log(a^2 - b^2) = \log(a + b) + \log(a - b).$$

2) Logarithmus zlomku (podílu) rovná se logarithmu čitatele, méně logarithmu jmenovatele.

Při základu b budiž

$$\log M = m, \log N = n, \text{ tedy } M = b^m, N = b^n,$$

$$\text{z čehož } \frac{M}{N} = b^{m-n}, \text{ proto}$$

$$\log \frac{M}{N} = m - n = \log M - \log N.$$

$$\text{U př. } \log \frac{29}{31} = \log 29 - \log 31.$$

$$\log 35 \cdot 29 = \log \frac{3529}{100} = \log 3529 - \log 100.$$

$$\log \frac{a+b}{a-b} = \log(a+b) - \log(a-b).$$

3) Logarithmus mocniny rovná se logarithmu mocněnce, násobenému mocnitelem.

Při základu b budiž $\log M = m$, čili $M = b^m$, tedy $M^p = b^{mp}$, z čehož

$$\log M^p = mp = p \cdot \log M.$$

$$\text{U př. } \log 8^3 = 3 \log 8.$$

$$\log (2a)^3 = 3 \log 2a = 3 (\log 2 + \log a).$$

$$\log \frac{x^2 y}{(mn)^4} = 2 \log x + \log y - 4 (\log m + \log n).$$

4) Logarithmus veličiny kořenové rovná se logarithmu odmocněnce, dělenému odmocnitelem.

Při základu b budiž $\log M = m$, čili $M = b^m$, tedy

$$\sqrt[p]{M} = \sqrt[p]{b^m} = b^{\frac{m}{p}}, \text{ protož}$$

$$\log \sqrt[p]{M} = \frac{m}{p} = \frac{\log M}{p}.$$

U př. $\log \sqrt[3]{75} = \frac{\log 75}{3}.$

$$\log \sqrt[5]{\frac{a}{b}} = \frac{\log \frac{a}{b}}{5} = \frac{\log a - \log b}{5}.$$

$$\log \frac{a \sqrt[3]{x^2}}{y} = \log a + \frac{2}{3} \log x - \log y.$$

§. 210. 1) Při rozličných základech má totéž číslo také rozličné logarithmy.

Je-li p logarithmus čísla N na základě B , a q logarithmus čísla N na základě b , kde B a b považujeme za čísla rozličná, bude $N = B^p$ a $N = b^q$, tedy $B^p = b^q$. Kdyby pak $p = q$, plynulo by nepřímou z §. 159., 2), že také $B = b$, což se neshoduje s podmínkou. Logarithmy p a q jsou tedy rozličné.

2) Logarithmus čísla na jakém si základě rovná se logarithmu téhož čísla při druhém základě, násobenému převratnou hodnotou logarithmu prvního základu s ohledem k druhému.

Budiž $\log_B N = p$, tedy $B^p = N$; logarithmujeme-li druhou rovnici na jiném základě b , obdržíme

$p \log_b B = \log_b N$, aneb $\log_B N \cdot \log_b B = \log_b N$,
z čehož

$$\log_B N = \log_b N \cdot \frac{1}{\log_b B}.$$

Jsou-li známy logarithmy čísel na základě b , vypočítáme z nich logarithmy na kterémkoli jiném základě B , násobíme-li je stálým činitelem $\frac{1}{\log_b B}$, t. j. převratnou hodnotou logarithmu nového základu s ohledem k základu dřívějšímu. Číslo, jímž musíme násobiti logarithmy jedné soustavy, abychom obdrželi logarithmy soustavy jiné, slove modul soustavy nové s ohledem k původní. Modul soustavy Briggovy s ohledem k přirozené soustavě jest $\frac{1}{\log_e 10} = 0.4342945 \dots$

3. Logarithmy obecné.

§. 211. 1) Briggův logarithmus kladného čísla jest kladný aneb záporný, jak totiž číslo jest větší aneb menší nežli 1.

Každé číslo, větší nežli 1, jest buď dekadická jednotka 10^m , kde m značí kladné číslo celistvé, aneb leží mezi dvěma takovými jednotkami 10^m a 10^{m+1} ; proto jeho logarithmus jest buď m , aneb leží mezi m a $m + 1$, v obou případech jest tedy kladný.

Každé číslo, menší nežli 1, jest buď dekadická jednotka $\frac{1}{10^m} = 10^{-m}$, aneb leží mezi dvěma takovými jednotkami 10^{-m} a $10^{-(m+1)}$; proto jeho logarithmus jest buď $-m$, aneb leží mezi $-m$ a $-(m + 1)$, tedy v obou případech jest záporný.

2) Briggův logarithmus celistvého aneb lomeného čísla, kteréž jest dekadická jednotka, rovná se číslu celistvému.

Plyne z předešlého důkazu.

3) Briggův logarithmus celistvého aneb lomeného čísla, kteréž není dekadická jednotka, jest číslo neracionální.

Důkaz. a) Není-li N dekadická jednotka, leží-li tedy mezi dvěma dekadickými jednotkami po sobě jdoucími $10^{\pm m}$ a $10^{\pm(m+1)}$, kde m znamená kladné číslo celistvé, musí logarithmus čísla N ležeti mezi $\pm m$ a $\pm(m + 1)$, nemůže tedy býti číslo celistvé.

Ale logarithmus ten není také zlomek. Neboť kdyby $\log N = \frac{\pm p}{q}$,

kde p a q jsou prvočísla vespolek, muselo by $10^{\frac{\pm p}{q}} = N$, aneb $10^{\pm p} = N^q$. Má-li však rovnice tato býti možná, musí $10^{\pm p}$ a N^q sestávat z týchž prvočinitelů; N by tedy nesmělo se skládati z jiných činitelů mimo z 2 a 5, vztažně $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{5}$, a obou by muselo obsahovati tentýž počet. Ale pak by N bylo dekadická jednotka, což odporuje podmínce. Není-li tedy N dekadická jednotka, $\log N$ nelze určitě vyjádřiti ani číslem celistvým, ani zlomkem.

b) Naznačíme-li však meze, v nichžto leží logarithmus N , můžeme jej přibližně ustanoviti tak určitě, jak jen zapotřebí.

Leží-li totiž N vůbec mezi dvěma čísly u a v , tedy (dle §. 208., 2) $\log N$ mezi $\log u$ a $\log v$, kteréžto dva logarithmy jsou známy, bude dle §. 209. také znám $\log \sqrt{uv}$, t. j. logarithmus střední měřické srovnalostné čísel u a v . Ale poněvadž $\sqrt{uv}$ leží mezi u a v (§. 134., 4), musí N ležeti buď mezi $\sqrt{uv}$ a u , aneb mezi $\sqrt{uv}$ a v , tudíž také $\log N$ buď mezi $\log \sqrt{uv}$ a $\log u$, aneb mezi $\log \sqrt{uv}$ a $\log v$. V každém případě leží tedy N v mezích užších nežli dříve, a opakujeme-li závěrek týmže způsobem, můžeme meze, v nichž leží $\log N$, súziti dle libosti.

§. 212. Úloha. Má se vypočítati Briggův logarithmus daného čísla.

1) Jedno řešení této úlohy spočívá na důkazu, podaném v §. 211., 3) b), podlé něhož možná logarithmus čísla uzavříti v meze vždy užší a užší a tím jej také ustanoviti tak určitě, jak jen zapotřebí.

Máme u př. vypočítati logarithmus čísla 13.

13 leží mezi 10 a 100,

$\log 13$ „ „ $\log 10 = 1$ a $\log 100 = 2$;

rozdíl hodnot mezných: $2 - 1 = 1$.

$\sqrt{10 \cdot 100} = 31.6227766 = a$, $\log a = \frac{1}{2}(\log 10 + \log 100) = 1.5$;

13 leží mezi 10 a a ,

$\log 13$ „ „ $\log 10 = 1$ a $\log a = 1.5$;

rozdíl hodnot mezných: $1.5 - 1 = 0.5$.

$\sqrt{10a} = 17.7827942 = b$, $\log b = \frac{1}{2}(\log 10 + \log a) = 1.25$;

13 leží mezi 10 a b ,

$\log 13$ „ „ $\log 10 = 1$ a $\log b = 1.25$;

rozdíl hodnot mezných: $1.25 - 1 = 0.25$.

Z toho vysvítá, že mezné hodnoty logarithmu čím dále tím více se sbližují. Pokračujeme-li tím způsobem, obdržíme:

$\sqrt{10b} = 13.335\ 2144 = c$, $\log c = \frac{1}{2}(\log 10 + \log b) = 1.125$;

$\sqrt{10c} = 11.547\ 8201 = d$, $\log d = \frac{1}{2}(\log 10 + \log c) = 1.062\ 5$;

$\sqrt{cd} = 12.409\ 3780 = e$, $\log e = \frac{1}{2}(\log c + \log d) = 1.093\ 75$;

$\sqrt{ce} = 12.863\ 9696 = f$, $\log f = \frac{1}{2}(\log c + \log e) = 1.109\ 375$;

$\sqrt{cf} = 13.097\ 4727 = g$, $\log g = \frac{1}{2}(\log c + \log f) = 1.117\ 188$;

$\sqrt{fg} = 12.980\ 1960 = h$, $\log h = \frac{1}{2}(\log f + \log g) = 1.113\ 281$;

$$\begin{aligned}
\sqrt{gh} &= 13.038\,7024 = i, \log i = \frac{1}{2}(\log g + \log h) = 1.115\,234; \\
\sqrt{hi} &= 13.009\,4163 = k, \log k = \frac{1}{2}(\log h + \log i) = 1.114\,258; \\
\sqrt{hk} &= 12.994\,7978 = l, \log l = \frac{1}{2}(\log h + \log k) = 1.113\,769; \\
\sqrt{kl} &= 13.002\,1049 = m, \log m = \frac{1}{2}(\log k + \log l) = 1.114\,014; \\
\sqrt{lm} &= 12.998\,1507 = n, \log n = \frac{1}{2}(\log l + \log m) = 1.113\,892; \\
\sqrt{mn} &= 13.000\,2776 = o, \log o = \frac{1}{2}(\log m + \log n) = 1.113\,953; \\
\sqrt{no} &= 12.999\,3640 = p, \log p = \frac{1}{2}(\log n + \log o) = 1.113\,922; \\
\sqrt{op} &= 12.999\,8207 = q, \log q = \frac{1}{2}(\log o + \log p) = 1.113\,937; \\
\sqrt{oq} &= 13.000\,0491 = r, \log r = \frac{1}{2}(\log o + \log q) = 1.113\,945; \\
\sqrt{qr} &= 12.999\,9348 = s, \log s = \frac{1}{2}(\log q + \log r) = 1.113\,941; \\
&\text{a t. d.}
\end{aligned}$$

Poněvadž pak 13 leží mezi s a r , tedy také $\log 13$ mezi $\log s$ a $\log r$, tyto logarithmy se však shodují v prvních pěti místech desetinných, bude až na 5 míst desetinných určité $\log 13 = 1.11394$.

(Tímto pracným způsobem vypočítal Jindřich Brigg logarithmy prvočísel od 1 až do 20000, a od 90000 až do 100000 na 14 míst desetinných, později pak Andrian Vlacq ostatní logarithmy prvočísel od 20000 až do 90000.)

2) Zkrátka a pohodlně lze určití Briggův logarithmus čísla N přibližnými hodnotami zlomku řetězového. Položme $\log N = x$, tedy $N = 10^x$, a vyhledejme největší celistvé číslo q , obsažené v x ; bude tedy $10^q < N < 10^{q+1}$. Položíme-li $x = q + \frac{1}{x_1}$, kde $x_1 > 1$, bude $N = 10^{q+\frac{1}{x_1}} = 10^q \cdot 10^{\frac{1}{x_1}}$,

pročež $\frac{N}{10^q} = 10^{\frac{1}{x_1}}$, a $\left(\frac{N}{10^q}\right)^{x_1} = 10$, anebo položíme-li $\frac{N}{10^q} = N_1$,

bude $N_1^{x_1} = 10$. Vyhledejme nyní největší celistvé číslo q_1 , obsažené v x_1 , tedy $N_1^{q_1} < 10 < N_1^{q_1+1}$; položíme-li $x_1 = q_1 + \frac{1}{x_2}$,

kde $x_2 > 1$, bude $10 = N_1^{q_1+\frac{1}{x_2}} = N_1^{q_1} \cdot N_1^{\frac{1}{x_2}}$, pročež $\frac{10}{N_1^{q_1}} = N_1^{\frac{1}{x_2}}$

a $\left(\frac{10}{N_1^{q_1}}\right)^{x_2} = N_1$, anebo položíme-li nyní $\frac{10}{N_1^{q_1}} = N_2$, bude

$N_2^{x_2} = N_1$. Je-li dále $N_2^{q_2} < N_1 < N_2^{q_2+1}$, a položíme-li $x_2 = q_2 + \frac{1}{x_3}$, obdržíme podobně

$$\left(\frac{N_1}{N_2^{q_2}}\right)^{x_2} = N_3^{x_2} = N_2,$$

z čehož opět při $x_3 = q_3 + \frac{1}{x_4}$ následuje $\left(\frac{N_2}{N_3^{q_3}}\right)^{x_4} = N_4^{x_4} = N_3$ a t. d.

Protož bude

$$\begin{aligned} \log N &= q + \frac{1}{x_1} = q + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{x_2}} = q + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{x_3}}} \\ &= q + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{x_4}}}} = \dots, \end{aligned}$$

z čehož vypočítati lze přibližné zlomky pro $\log N$.

Máme-li tím způsobem vypočítati $\log 13$, bude počet následující :

$$N = 13, \quad 10^1 < 13 < 10^2, \quad q = 1;$$

$$N_1 = \frac{13}{10^1} = 1.3, \quad 1.3^8 < 10 < 1.3^9, \quad q_1 = 8;$$

$$N_2 = \frac{10}{1.3^8} = 1.22589, \quad 1.22589^1 < 1.3 < 1.22589^2, \quad q_2 = 1;$$

$$N_3 = \frac{1.3}{1.22589^1} = 1.06045, \quad 1.06045^3 < 1.22589 < 1.06045^4, \quad q_3 = 3;$$

$$N_4 = \frac{1.22589}{1.06045} = 1.02823, \quad 1.02823^2 < 1.06045 < 1.02823^3, \quad q_4 = 2;$$

$$N_5 = \frac{1.06045}{1.02823^2} = 1.00303, \quad 1.00303^9 < 1.02823 < 1.00303^{10}, \quad q_5 = 9;$$

$$N_6 = \frac{1.02823}{1.00303^9} = 1.00159, \quad 1.00159^1 < 1.00303 < 1.00159^2, \quad q_6 = 1;$$

a t. d.

$$\text{Jest pak } \log 13 = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{1} + \dots,$$

protož přibližné hodnoty hledaného logarithmu:

$$1, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{39}{35}, \frac{88}{79}, \frac{831}{746}, \frac{919}{825}, \dots$$

Položíme-li $\log 13 = \frac{919}{825} = 1.113939 \dots$, chyba bude menší nežli $\frac{1}{825^2} = \frac{1}{680625} = 0.000001 \dots$, tudíž $\log 13$ na 5 desetinných míst správně $= 1.11394$, jakož jsme již také vypočítali způsobem prvním.

Do datek. Mnohem kratším způsobem vypočítávají se logarithmy ve vyšší mathematice pomocí řad.

§. 213. Briggův logarithmus se skládá z celistvého čísla a z desetinných číslic, poněvadž v Briggově soustavě mimo dekadické jednoty všechna ostatní racionální čísla mají neracionální logarithmy, které přibližně lze vyjádřiti zlomky desetinnými. Celistvé číslo v logarithmu slove charakteristika (význam), desetinná místa pak mantissa (závěska).

Čísla, která jsou menší nežli 1, mají záporný logarithmus, tedy zápornou charakteristiku i mantissu. Záporné mantissy odstraňujeme z počtu; místo nich klademe mantissy kladné se zápornou charakteristikou, odčítajíce záporný logarithmus od čísla, kteréž jest o 1 větší nežli charakteristika, čím obdržíme kladnou mantissu, načež toto číslo o 1 větší napíšeme za mantissu jakožto zápornou charakteristiku.

$$\begin{aligned} \text{U př.} \quad - 2.345679 &= 3 - 2.345679 = 3 \\ &= 0.654321 - 3. \end{aligned}$$

§. 214. Charakteristika Briggova logarithmu dekadického čísla rovná se řadnému exponentu nejvyšší číslice tohoto čísla.

Je-li n řadný exponent nejvyšší číslice v čísle a , bude

$$a > 10^n, \text{ ale } a < 10^{n+1}, \text{ tedy}$$

$$\log a > n, \text{ ale } \log a < n + 1,$$

t. j. $\log a = n +$ kladný zlomek pravý, protož jest n charakteristika logarithmu.

Výsledky. a) Charakteristika logarithmu jest o 1 menší nežli počet míst, jež celé zaujímají.

b) Charakteristika logarithmu pravého zlomku desetinného jest záporná a rovna počtu všech null, stojících před platnými číslicemi desetinnými.

§. 215. Násobíme-li aneb dělíme-li jakési číslo mocninou desítky, změní se tím v Briggově logaritmů toho čísla pouze charakteristika, nikoli však mantissa.

Neboť

$$\log(a \cdot 10^n) = \log a + \log 10^n = \log a + n,$$

$$\log \frac{a}{10^n} = \log a - \log 10^n = \log a - n.$$

V prvním případě logarithmus čísla a se zvětší, v druhém pak zmenší o celistvé číslo n , t. j. obdrží jinou charakteristiku; mantissa však se nezmění.

U př. $\log 7124 = 3.852\ 724$; protož

$$\begin{aligned} \log 712400 &= \log 7124 + \log 100 = 3.852\ 724 + 2 \\ &= 5.852\ 724; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 71.24 &= \log 7124 - \log 100 = 3.852\ 724 - 2 \\ &= 1.852\ 724. \end{aligned}$$

Výsledek. Mantissa logarithmu závisí pouze na pořadu, v němž číslice jdou po sobě, bez ohledu na jich řád.

Tabulky logarithmické.

§. 216. Logarithmy všech čísel od 1 až do 10000, aneb od 1 až do 100000, a sice u prvých s mantissami o pěti aneb šesti, u těchto o sedmi místech sestaveny jsou ve zvláštních tabulkách logarithmických. Tyto pak obsahují jen mantissy logarithmů proto, že charakteristiku v každém případě lze určit dle §. 214.

Jednoduchým způsobem, vysvětleným v úvodu k tabulkám logarithmickým, vyhledáme z nich logarithmus každého čísla, a naopak ku každému logarithmu příslušné číslo.

Zde předpokládáme tabulky, obsahující logarithmy čtyřciferných čísel s mantissami šesticifernými.

Počítání Briggovými logarithmy.

§. 217. Při počítání Briggovými logarithmy musíme šetřití týchž pravidel jako vůbec při číslech dekadických; třeba jest však zřetel míti ještě na následující ustanovení:

1) Obdržíme-li při sečítání logarithmů dvě charakteristiky, jednu kladnou a druhou zápornou, spojíme je v jedinou.

$$\begin{array}{r}
 \text{U př.} \quad 3 \cdot 105 \, 892 \\
 \quad \quad 2 \cdot 568 \, 125 \\
 \quad \quad 0 \cdot 213 \, 407 \quad - \quad 2 \\
 \quad \quad 0 \cdot 081 \, 057 \quad - \quad 4 \\
 \hline
 \quad \quad 5 \cdot 968 \, 481 \quad - \quad 6 = 0 \cdot 968481 \quad - \quad 1.
 \end{array}$$

2) Je-li při odčítání menšenec menší nežli menšitel, musíme se vyhnouti záporné mantisse; proto připočítejme k menšenci tolik jednotostí kladných, aby byl větší nežli menšitel, ku zbytku pak připišme tentýž počet záporných jednotostí jakožto charakteristiku. U př.

$$\begin{array}{r}
 + \quad 3 \qquad \qquad - \quad 3 \\
 \quad 1 \cdot 450 \, 256 \\
 \quad 3 \cdot 578 \, 920 \\
 \hline
 \quad 0 \cdot 871 \, 336 \quad - \quad 3.
 \end{array}$$

3) Násobíme-li logarithmus se zápornou charakteristikou jakýmsi číslem, musíme v součinu novou charakteristiku zápornou snímati s kladnou. U př.

$$\begin{aligned}
 (0 \cdot 531 \, 147 - 2) \times 5 &= 2 \cdot 655 \, 735 - 10 \\
 &= 0 \cdot 655 \, 735 - 8.
 \end{aligned}$$

4) Máme-li logarithmus se zápornou charakteristikou děliti jakýmsi číslem, musíme ji, není-li tímto číslem dělitelna, zvětšiti o tolik jednotostí, kolik vůbec zapotřebí, aby byla dělitelna; tentýž počet jednotostí celistvých připišeme však též před mantissu. Tím způsobem se vyhneme lomené charakteristice. U př.

$$\begin{aligned}
 (0 \cdot 415 \, 091 - 7) : 5 &= (3 \cdot 415 \, 091 - 10) : 5 \\
 &= 0 \cdot 683 \, 018 - 2.
 \end{aligned}$$

Užívání Briggových logarithmů.

§. 218. Všeobecnými větami, odvozenými v §. 208. lze proměnití násobení v sečítání, dělení v odčítání, umocňování v násobení a dobývání kořene v dělení.

Jsou-li některá daná čísla záporná, považujeme je v počtu zatím za kladná, a ve výsledku pak teprv určíme náležité znaménko. K logarithmu záporného čísla může se připsati (*n*), aby se na znaménko — nezapomnělo.

1) Násobení.

Má se vyhledati součin činitelů $1 \cdot 0954$, $0 \cdot 91567$, — $3 \cdot 1571$ a $1 \cdot 00782$.

$$\log 1.0954 = 0.039\,573$$

$$\log 0.91567 = 0.961\,739 - 1$$

$$\log 3.1571 = 0.499\,289 \text{ (n)}$$

$$\log 1.00782 = 0.003\,383$$

$$\log \text{součinu} = 0.503\,984 = \log 3.191419,$$

tedy

$$1.0954 \times 0.91567 \times - 3.1571 \times 1.00782 = - 3.191419.$$

2) Dělení.

a) Má se vypočítati podíl $528 : 737$ čili $\frac{528}{737}$.

$$\begin{array}{r} + 1 \qquad - 1 \\ \log 528 = 2.722\,634 \\ \log 737 = 2.867\,467 \\ \hline \log \frac{528}{737} = 0.855\,167 - 1 = \log 0.716\,418, \end{array}$$

$$\log 737 = 2.867\,467$$

$$\log \frac{528}{737} = 0.855\,167 - 1 = \log 0.716\,418,$$

pročež

$$\frac{528}{737} = 0.716\,418.$$

b) Má se určití hodnota zlomku $x = \frac{3.4156 \times 4.023}{1.2378 \times 5.87091}$.

$$\log x = \log 3.4156 + \log 4.023 - (\log 1.2378 + \log 5.87091)$$

$$\log 3.4156 = 0.533\,467$$

$$\log 4.023 = 0.604\,550$$

$$1.138\,017$$

$$\log 1.2378 = 0.092\,651$$

$$\log 5.87091 = 0.768\,705$$

$$\log x = 0.276\,661 = \log 1.890\,869,$$

pročež

$$x = 1.890\,869.$$

3) Umocňování.

a) Číslo 1.025 má býti povýšeno na 20. mocninu.

$$\log 1.025 = 0.010\,724$$

$$\log (1.025)^{20} = 0.010\,724 \times 20$$

$$= 0.214\,480 = \log 1.63862,$$

$$\text{pročež } (1.025)^{20} = 1.63862.$$

b) Má se vypočítati $\left(\frac{329}{67}\right)^{1.065}$.

$$\begin{array}{r}
 \log 329 = 2.517196 \\
 \log 67 = 1.826075 \\
 \hline
 0.691121 \times 1.065 \\
 5.60.1 \\
 \hline
 691121 \\
 41467 \\
 \hline
 3456
 \end{array}$$

$$\log \left(\frac{329}{67} \right)^{1.065} = 0.736044 = \log 5.445575,$$

$$\text{pročež } \left(\frac{329}{67} \right)^{1.065} = 5.445575.$$

4) Dobývání kořene.

Má se vypočítati $\sqrt[5]{10}$.

$$\log 10 = 1.000000$$

$$\log \sqrt[5]{10} = 1.000000 : 5$$

$$= 0.200000 = \log 1.58489,$$

$$\text{tudiž } \sqrt[5]{10} = 1.58489.$$

Část čtvrtá.

Rovnice.

§. 219. Srovnání dvou výrazů, majících rovnou hodnotu, nazývá se rovnicí. U př.

$$x = x, (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4, x^2 - 8 = 2x.$$

Veličiny takto srovnané slovou díly rovnice; každý díl může se skládati z několika členů. V rovnici $x^2 - 8 = 2x$ jest $x^2 - 8$ první, $2x$ druhý díl; onen sestává ze dvou členů: x^2 a $- 8$.

Rozeznáváme rovnice jednostejné (identické) a určovací.

Rovnice, které jsou správné při každé hodnotě neznámých veličin v nich přicházejících, slovou jednostejné. U př. Rovnice $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ jest správná, nechť za x dosadíme hodnotu jakoukoli. Každý vzorec výkonu arithmetického jest rovnice jednostejná.

Rovnice, které jsou správné jen při určitých hodnotách neznámých veličin v nich přicházejících, slovou určovací rovnice. U př. rovnice $x^2 - 8 = 2x$ jest jen tehdy správná, má-li x hodnotu 4 aneb $- 2$.

Hodnoty neznámé veličiny, jež vyhovují rovnici, t. j. kteréž ji promění v jednostejnou, jmenují se kořeny rovnice. Rovnice $x^2 - 8 = 2x$ má dva kořeny, 4 a $- 2$.

Rovnici řešiti znamená, její kořeny určití.

Pořádání rovnic.

§. 220. Máme-li řešiti rovnici, musíme ji nejprv uvéstí na takovou podobu, aby neznámá nepřicházela v žádném členu co jmenovatel aneb odmocněnec; aby všechny členy, obsahující neznámou, v prvním dílu rovnice nastupovaly po sobě dle sestupných

mocnin této neznámé; aby konečně součinitel nejvyšší mocniny neznámé veličiny byl kladné číslo celistvé. Rovnice takového tvaru slove spořádaná.

$$\left. \begin{array}{l} \text{U př. } ax^3 + bx^2 + cx = d \\ \quad \quad \quad x^2 + px = q \\ x^2 - 3xy + y^2 + 5x = 9 \end{array} \right\} \text{ jsou rovnice spořádané.}$$

Spořádaná rovnice, jejížto druhý díl jest nulla, jmenuje se rovnice uvedená na nullu; u př. $x^2 + ax + b = 0$.

Pořádání rovnic zakládá se na následující zásadě:

Nakládáme-li s rovnými veličinami stejným způsobem, obdržíme rovné výsledky.

Tuto zásadu lze vyjádřiti určitěji následujícími větami:

1) Rovnice se neporuší, jestliže k oběma dílům jakési číslo připočteme aneb od obou dílů nějaké číslo odečteme.

Dle této věty můžeme každý člen jednoho dílu převést s opačným znaménkem do dílu druhého, rovné členy v obou dílech vynechati, zvláště také každou spořádanou rovnici uvést na nullu.

$$\begin{array}{ll} \text{U př. z rovnice } x + a = b & \text{plyne } x = b - a, \\ \text{„ „ } 3x + m = a + m & \text{„ } 3x = a, \\ \text{„ „ } x^2 - 2x = 1 & \text{„ } x^2 - 2x - 1 = 0. \end{array}$$

2) Rovnice se neporuší, násobíme-li oba její díly týmž číslem.

Dle této věty lze z rovnice odstraniti jmenovatele, zvláště také můžeme součinitele nejvyšší mocniny neznámé veličiny, je-li záporný, proměnit v kladného, násobíme-li oba díly rovnice zápornou jedničkou, t. j. změníme-li znaménka všech členů v opačná.

$$\begin{array}{ll} \text{U př. z rovnice } \frac{x}{a} - b = c & \text{plyne } x - ab = ac, \\ \text{„ „ } \frac{x}{a} - b = \frac{c}{x} & \text{„ } x^2 - abx = ac, \\ \text{„ „ } -x^2 + 3x = -5 & \text{„ } x^2 - 3x = 5. \end{array}$$

3) Rovnice se neporuší, dělíme-li oba její díly týmž číslem.

Mají-li tedy oba díly společného činitele, můžeme jím celou rovnici krátiti, zvláště také odstraniti součinitele nejvyšší mocniny neznámé veličiny, je-li větší nežli 1.

U př. z rovnice $2x^2 - 8x = 4$ plyne $x^2 - 4x = 2$,

$$\begin{array}{ccc} \text{"} & \text{"} & 8x = 7 \\ & & \text{"} \quad x = \frac{7}{8}. \end{array}$$

4) Rovnice se neporuší, povýšíme-li oba její díly na tutéž mocninu.

Je-li neznámá pod kořenitkem, můžeme je odstraniti; veličina kořenová, kterou chceme učiniti racionálnou, musí býti samotna v jednom dílu rovnice.

U př. z rovnice $\sqrt{x - b^2} = a$ plyne $x - b^2 = a^2$.

5) Rovnice se neporuší, dobýváme-li z obou dílů kořene téhož stupně.

Dobýváním kořene lze v rovnici odstraniti mocnitele neznámé veličiny. U př.

z rovnice $x^3 = 10$ plyne $x = \sqrt[3]{10}$,

$$\text{"} \quad \text{"} \quad \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + b \quad \text{"} \quad x + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}.$$

6) Rovnice se neporuší, logaritmujeme-li oba její díly s ohledem na tentýž základ.

Tím způsobem odstraníme z rovnice veličiny exponenciální (§. 206.).

U př. z rovnice $a^x = b$ plyne $x \log a = \log b$.

Těchto vět musíme používati poněkud opatrně proto, že v mnohých případech nově utvořená rovnice nemá již všech kořenů dané rovnice, jindy opět obsahuje mimo kořeny původní rovnice také ještě kořeny jiné.

Násobíme-li u př. rovnici $\frac{3x - 2}{x} - \frac{2x}{-4} = 4$ neznámým činitelem $x - 1$, jenž v žádném jmenovateli nepřichází co činitel, nová rovnice bude míti mimo kořeny původní rovnice 2 a $-\frac{4}{3}$ také ještě kořen 1 .

A naopak: dělíme-li rovnici $(x - 2)(x^2 + 3x + 1) = (x - 2)(7x + 6)$ neznámým činitelem $x - 2$, jenž přichází v obou dílech, nedostává se nové rovnici kořene 2 z původní rovnice.

Povýšíme-li rovnici $\sqrt{x + 11} = x - 1$ na druhou mocninu, nová rovnice $x + 11 = x^2 - 2x + 1$ může také vzniknouti z $\sqrt{x + 11}$

$= -(x - 1)$; musíme tedy později ještě zvláště vyšetřiti, vyhovují-li kořeny nové rovnice, 5 a -2 , dané rovnici čili nic. Opravdu také rovnici $\sqrt{x+11} = x - 1$ vyhoví jen kořen 5, druhý pak, -2 , přináleží rovnici $\sqrt{x+11} = -(x - 1)$.

§. 221. Daná rovnice má se spořádati.

Dle předešlých vět spořádáme danou rovnici takto:

1) Jsou-li v rovnici výrazy spojeny závorkami, provedeme naznačené výkony, abychom závorky vypustili.

2) Má-li rovnice zlomky, násobíme oba díly nejmenším společným násobkem všech jmenovatelů, abychom tyto odstranili.

3) Je-li neznámá pod kořenítkem, odstraníme je tím, že povýšíme oba díly rovnice na náležitou mocninu.

4) Všecky členy, obsahující neznámou, převedeme do levého dílu rovnice, snímáme a spořádáme dle sestupných mocnin veličiny neznámé; ostatní členy převedeme do pravého dílu, kde rovněž snímáme.

5) Je-li součinitel nejvyšší mocniny neznámé veličiny záporný, proměníme znaménka všech členů v opačná.

Příklady. 1) $6(x - 2) - 2(3x + 1) = 14 - 4(2x + 3)$

$$6x - 12 - 6x - 2 = 14 - 8x - 12$$

$$6x - 6x + 8x = 14 - 12 + 12 + 2$$

$$8x = 16$$

$$x = 2.$$

$$2) \quad x - \frac{12 - 3x}{x} = 8$$

$$x^2 - 12 + 3x = 8x$$

$$x^2 + 3x - 8x = 12$$

$$x^2 - 5x = 12.$$

$$3) \quad 2x - \sqrt{2x} = 1$$

$$-\sqrt{2x} = 1 - 2x$$

$$2x = 1 - 4x + 4x^2$$

$$2x + 4x - 4x^2 = 1$$

$$-4x^2 + 6x = 1$$

$$4x^2 - 6x = -1.$$

Rozdělení rovnic určovacích.

§. 222. 1) Rovnice jsou buď číselné anebo písmenné (literalné), jsou-li neznámé spojeny buď s čísly zvláštními aneb obecnými.

2) Dále rozeznáváme rovnice algebraické a transcendentné. V rovnicích algebraických přichází neznámá jen co mocněnec, v transcendentných v některém tvaru následujícím:

a^x , $\log(a+x)$, $\sin(a+x)$ a t. d. Transcendentná rovnice, v nížto neznámá přichází co mocnitel, slove zvláště rovnice exponencialná.

3) Dle počtu neznámých v rovnici přicházejících rozeznáváme rovnice o jedné, o dvou aneb o několika neznámých.

4) Dle nejvyššího mocnitele neznámé, aneb je-li v rovnici více neznámých, dle největšího součtu mocnitelů neznámých v jediném členu spořádané rovnice rozdělujeme algebraické rovnice na rovnice prvního, druhého, třetího, . . . stupně. Tak jsou

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 5 = 0 \\ x + 2y = 3z - 8 \end{array} \right\} \text{ rovnice 1. stupně } \left\{ \begin{array}{l} \text{o jedné neznámé,} \\ \text{o třech neznámých.} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x^2 - 5x = 10 \\ xy - x = y + 2 \end{array} \right\} \text{ rovnice 2. stupně } \left\{ \begin{array}{l} \text{o jedné neznámé,} \\ \text{o dvou neznámých.} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} x^3 - 2x^2 + 5x = 1 \\ 2x^2y - 4xy^2 - y = 3x \end{array} \right\} \text{ rovnice 3. stupně } \left\{ \begin{array}{l} \text{o jedné neznámé,} \\ \text{o dvou neznámých.} \end{array} \right.$$

Rovnice druhého stupně slovou také kvadratické, rovnice třetího stupně kubické, čtvrtého stupně bikvadratické a dalších stupňů pak rovnice vyšší vůbec.

5) Rovnice kteréhokoli stupně jmenuje se přesná, obsahuje-li jedinou mocninu neznámé, a smíšená, přichází-li v ní neznámá v rozličných mocninách. U př.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 5 = 0 \\ x^3 = 10 \end{array} \right\} \text{ jsou rovnice přesné,}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 3x = 5 \\ x^3 + 2x^2 - 6 = 0 \end{array} \right\} \text{ jsou rovnice smíšené.}$$

6) Konečně rozeznáváme rovnice určité, mající konečný počet kořenů, jež před řešením již možná zevrubně udati, a neurčité, jimž vyhovuje nekonečný počet kořenů, není-li jinak počet tento omezen zvláštními podmínkami.

U př. rovnice $3x = 5$ má jediný kořen $\frac{5}{3}$, rovnici $3x + 2y = 5$ může však vyhověti nekonečný počet hodnot x a y ; první rovnice je tedy určitá, druhá neurčitá.

I. Určité rovnice prvního stupně.

1. Rovnice prvního stupně o jedné neznámé.

§. 223. Všeobecný tvar spořádané rovnice prvního stupně jest
 $ax = b.$

Dělíme-li oba díly rovnice veličinou a , obdržíme

$$x = \frac{b}{a}.$$

Rovnice prvního stupně o jedné neznámé má jediný kořen, je tedy rovnice určitá.

Příklady.

$$\begin{aligned} 1) \quad ax + b &= a'x + b' \\ ax - a'x &= b' - b \\ (a - a')x &= b' - b \\ x &= \frac{b' - b}{a - a'}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \frac{a}{x} - a + \frac{b}{2} &= \frac{b}{2x} \\ 2a - 2ax + bx &= b \\ bx - 2ax &= b - 2a \\ (b - 2a)x &= b - 2a \\ x &= 1. \end{aligned}$$

2. Určité rovnice prvního stupně o několika neznámých.

§. 224. Jediná rovnice o dvou neznámých jest neurčitá proto, že za obě neznámé můžeme dosaditi nekonečný počet hodnot, které vesměs vyhovují dané rovnici. Je-li však dáno dvě rovnic k sobě náležejících, možná vůbec určitě udati hodnoty neznámých, vyhovující oběma rovnicím, odstraníme-li z obou rovnic vždy jednu neznámou a řešíme-li takto utvořenou rovnici o jedné neznámé.

Ze dvou rovnic k sobě přináležejících odstraniti jednu neznámou slove tuto neznámou vyloučiti.

§. 225. Užívá se zvláště tří způsobů vylučovacích:

1) Způsob srovnávací. Z obou rovnic určíme tutéž neznámou, srovnáme obě hodnoty a řešíme takto utvořenou rovnici, kteráž obsahuje již jen druhou neznámou.

Jsou-li vůbec dány rovnice

$$\begin{aligned} ax + by &= c, \\ a'x + b'y &= c', \end{aligned}$$

obdržíme z nich

$$y = \frac{c - ax}{b} \quad a \quad x = \frac{c - by}{a}$$

$$y = \frac{c' - a'x}{b'} \quad " \quad x = \frac{c' - b'y}{a'};$$

poněvadž pak x a y musí v obou rovnicích míti tutéž hodnotu, bude

$$\frac{c - ax}{b} = \frac{c' - a'x}{b'} \quad a \quad \frac{c - by}{a} = \frac{c' - b'y}{a'};$$

řešíme-li nyní tyto rovnice, bude

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}; \quad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

2) Způsob dosazovací. Z jedné rovnice určíme hodnotu některé neznámé a dosadíme ji do druhé rovnice, čímž obdržíme opět rovnici o jedné neznámé, kterou řešíme.

Jsou-li dány opět rovnice dřívější, vyhledáme z první

$$y = \frac{c - ax}{b}$$

a tuto hodnotu dosadíme do rovnice druhé; bude pak

$$a'x + b' \cdot \frac{c - ax}{b} = c',$$

$$\text{z čehož plyne} \quad x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}.$$

Podobně určíme y .

3) Způsob rovných součinitelův. Zjednáme neznámé veličině, kterou chceme vyloučiti, v obou rovnicích rovné součinitele, násobíme-li všechny členy přiměřeným činitelem; nové rovnice sečítáme aneb odčítáme, jak totiž tyto rovní součinitele mají opáčná aneb rovná znaménka, konečně řešíme utvořenou takto rovnici o jedné neznámé.

Máme-li z hořejších rovnic vyloučiti y , násobme první rovnici součinitelem b' , druhou pak b , čímž obdržíme:

$$ab'x + bb'y = b'c,$$

$$a'bx + bb'y = bc'.$$

Odečteme-li druhou rovnici od první, bude

$$ab'x - a'bx = b'c - bc',$$

$$\text{z čehož} \quad x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}.$$

Vyloučíme-li podobně z obou rovnic x , obdržíme y .

Dodatky. 1) Kterého z těchto tří způsobů vylučovacích bychom měli s prospěchem použiti, o tom rozhodovati třeba dle jakosti součinitelů neznámých veličin. Obyčejně určujeme hodnotu jediné neznámé a dosazujeme ji pak do druhé dané rovnice, z čehož následuje hodnota druhé neznámé.

2) Přicházejí-li v daných rovnicích jen převratné hodnoty neznámých, považujeme vlastně tyto hodnoty za neznámé a určujeme z nich dodatečně původní neznámé.

$$\begin{aligned} \text{U př.} \quad & \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13, \\ & \frac{5}{x} - \frac{2}{y} = 4. \end{aligned}$$

Položíme-li $\frac{1}{x} = x'$ a $\frac{1}{y} = y'$, bude

$$\begin{aligned} 2x' + 3y' &= 13, \\ 5x' - 2y' &= 4, \text{ z čehož} \end{aligned}$$

$$x' = 2, y' = 3, \text{ protože } x = \frac{1}{2} \text{ a } y = \frac{1}{3}.$$

Příklady.

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad 3x + 4y &= 24 \\ 5x - 3y &= 11 \end{aligned} \right\} \text{řešiti způsobem srovnávacím.}$$

$$\text{Z první rovnice } x = \frac{24 - 4y}{3},$$

$$\text{„ druhé „ } x = \frac{11 + 3y}{5},$$

$$\text{protož } \frac{24 - 4y}{3} = \frac{11 + 3y}{5}, \text{ z čehož } y = 3.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu y do výrazu

$$x = \frac{24 - 4y}{3}, \text{ obdržíme } x = \frac{24 - 4 \cdot 3}{3} = 4.$$

Přesvědčíme se pak, vyhovují-li hodnoty $x = 4$ a $y = 3$ daným rovnicím, dosadíme-li je do obou, čímž obdržíme

$$\begin{aligned} 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 &= 24, \\ 5 \cdot 4 - 3 \cdot 3 &= 11. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} 2) \quad 6x - 13y &= 48 \\ 2x + 3y &= 16 \end{aligned} \right\} \text{řešiti způsobem dosazovacím.}$$

Z první rovnice plyne $x = \frac{48 + 13y}{6}$; dosadíme-li tuto hodnotu do rovnice druhé, obdržíme

$$2 \cdot \frac{48 + 13y}{6} + 3y = 16, \text{ z čehož } y = 0.$$

Dosadíme-li hodnotu y do výrazu $x = \frac{48 + 13y}{6}$, bude

$$x = \frac{48 + 13 \cdot 0}{6} = 8.$$

$$3) \begin{cases} 4x + 19y = 11 \\ 6x - 5y = -17 \end{cases} \text{ řešiti způsobem rovných součinitelův.}$$

Chceme-li neznámé x zjednotiti rovné součinitele, násobme první rovnici činitelem 3, druhou pak 2; bude tedy

$$\begin{array}{r} 12x + 57y = 33 \\ 12x - 10y = -34 \\ \hline 67y = 67, \text{ tudíž } y = 1. \end{array} \text{ rozdíl obou rovnic dá}$$

Dosadíme-li tuto hodnotu y do první dané rovnice, obdržíme $4x + 19 = 11$, z čehož $x = -2$.

$$4) \begin{cases} x + y = s \\ x - y = d \end{cases} \text{ součet obou rovnic dá } 2x = s + d, \text{ } 2y = s - d,$$

$$\text{protož } x = \frac{s + d}{2}, \quad y = \frac{s - d}{2}.$$

$$\S. 226. \text{ Z obecných rovnic } \begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

vyhledali jsme hodnoty neznámých

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b},$$

z nichžto vysvítá, že v některých případech dané rovnice se nehodí k určení neznámých v nich přicházejících.

1) Hodnoty x a y jsou neurčité, jestliže $ab' = a'b$ a $b'c = bc'$, tudíž $a : a' = b : b'$ a $b : b' = c : c'$, z čehož také plyne $a : a' = c : c'$ čili $ac' = a'c$, poněvadž pak $x = \frac{0}{0}$.

a $y = \frac{0}{0}$. To bývá pokaždé, je-li rovnice jedna závislá od

druhé. Neboť položíme-li $a : a' = b : b' = c : c' = m$, tedy $a = a'm$, $b = b'm$, $c = c'm$, dané rovnice nabývají podoby:

$$\begin{aligned} a'mx + b'my &= c'm, \\ a'x + b'y &= c', \end{aligned}$$

z čehož patrně, že první rovnice plyne z druhé pouhým přetvořením, totiž násobením číslem m , t. j. první rovnice jest závislá od druhé.

2) Obě rovnice nepřipouštějí konečné řešení, je-li jmenovatel v hořejších hodnotách neznámých veličin $= 0$, a liší-li se čitatelé od nuly, t. j. $ab' = a'b$, čili $a : a' = b : b'$, ale jsou-li $b'c$ a bc' , a taktéž ac' a $a'c$ nerovny; neboť pak $x = \infty$ a $y = \infty$. To bývá pokaždé, je-li rovnice jedna na odpor druhé. Neboť položíme-li $a : a' = b : b' = m$, čili $a = a'm$, $b = b'm$, dané rovnice nabývají podoby:

$$\begin{aligned} a'mx + b'my &= c, \\ a'x + b'y &= c'. \end{aligned}$$

Z toho by plynulo $c = c'm$, což však odporuje podmínce, že $b'c > bc'$, tedy $c > \frac{bc'}{b'}$, aneb $c > c'm$.

Z rovnic o dvou neznámých lze tedy určitě vyhledati hodnoty těchto neznámých jen tehdy, nezávisí-li jedna rovnice na druhé a není-li jedna na odpor druhé.

§. 227. K určení tří aneb několika neznámých musí býti dáno tolik rovnic vzájemně nezávislých a sobě neodporujících, kolik jest v nich neznámých.

Máme-li řešiti soujem několika k sobě náležejících rovnic o témž počtu neznámých, použijeme způsobů, uvedených prvé při řešení rovnic o dvou neznámých. Vyloučíme totiž z daných rovnic některou neznámou, čímž odstraníme zároveň jednu rovnici; z těchto nových rovnic opět vyloučíme jednu neznámou, a tak pokračující obdržíme posléz jedinou rovnici o jedné neznámé, a z té pak vyhledáme hodnotu této neznámé.

Nalezenou hodnotu dosadíme do jedné z obou rovnic nejbližší předcházejících, čímž obdržíme druhou neznámou. Obě hodnoty takto vyhledané dosadíme do některé z předcházejících tří rovnic a t. d., až konečně určíme hodnoty všech neznámých.

Příklad.

$$8x + 5y + 2z = 24$$

$$6x - 3y + z = 3$$

$$4x + 9y - 6z = 4.$$

Dle způsobu srovnávacího obdržíme:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{24 - 5y - 2z}{8} \\ x &= \frac{3 + 3y - z}{6} \\ x &= \frac{4 - 9y + 6z}{4} \end{aligned} \right\}, \text{ protož } \left\{ \begin{aligned} \frac{24 - 5y - 2z}{8} &= \frac{3 + 3y - z}{6} \\ \frac{3 + 3y - z}{6} &= \frac{4 - 9y + 6z}{4} \end{aligned} \right.$$

Řešíme-li poslední dvě rovnice dle y , obdržíme

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{60 - 2z}{27} \\ y &= \frac{6 + 20z}{33} \end{aligned} \right\}, \text{ protož } \frac{60 - 2z}{27} = \frac{6 + 20z}{33},$$

z kteréžto rovnice plyne $z = 3$.

Dosadíme-li tuto hodnotu z do některého výrazu bezprostředně předcházejícího, bude

$$y = \frac{60 - 2 \cdot 3}{27} = 2.$$

Konečně dosadíme obě vyhledané hodnoty y a z do některého výrazu neznámé x , u př. do $x = \frac{3 + 3y - z}{6}$, čímž obdržíme

$$x = \frac{3 + 3 \cdot 2 - 3}{6} = 1.$$

(Kterak byste řešili dané rovnice způsobem dosazovacím aneb způsobem rovných součinitelův?)

3. Použití určitých rovnic prvního stupně.

§. 228. V každé úloze, necht se jedná o jednotlivý případ zvláštní, aneb necht jest všeobecně postavena, udány jsou jakési podmínky, jimž hledaná čísla musejí vyhověti. Algebra pak při řešení úloh koná práci trojí:

1) Sestavuje jednu aneb několik rovnic k sobě náležejících, t. j. převádí podmínky vyslovené v úloze z mluvy obyčejné do algebraické.

2) Řeší rovnice sestavené.

3) Vyšetřuje čili rozebírá vyhledaný výsledek, t. j. převádí jej z mluvy algebraické do obyčejné.

O sestavování rovnic není obecných pravidel; tu jest zapotřebí zvláště důmyslu a mnohonásobného cvičení. Začátečníci mohou se aspoň poněkud řídití následujícím pravidlem: Považuj danou úlohu prozatím za rozřešenou, a jedné s neznámou, jak podmínky v úloze vyslovené toho požadují; tím způsobem obdržíš dva rozličně sestavené výrazy téže veličiny, které srovnány dají rovnici žádanou.

Rovnice řeší se pak některým způsobem již uvedeným.

Výsledek musí se náležitě vyšetřiti, chceme-li odpovéditi mlouvou, kterouž otázka byla podána. Rozbor ten je zvláště tehdy důležitý, je-li výsledek všeobecný aneb záporný.

§. 229. Úlohy.

1) Má se vyhledati číslo, jehož polovice a třetina dohromady dá 25.

Hledané číslo jest x , jeho polovice $\frac{x}{2}$, třetina pak $\frac{x}{3}$, tedy dle podmínky

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 25,$$

z čehož plyne $x = 30$.

Zkouška.
$$\frac{30}{2} + \frac{30}{3} = 25.$$

2) A jest a roků, B však b roků stár; za kolik roků bude A dvakrát starší nežli B ?

Za x roků bude A stár $a + x$, B však $b + x$ roků, protož

$$a + x = 2(b + x), \text{ z čehož}$$

$$x = a - 2b.$$

Je-li $a < 2b$, bude $x = -(2b - a)$, tedy x záporné. Ale záporný počet roků nemá smyslu, tudíž v tomto případě řešení dané úlohy nemožné. Dosadíme-li však v hořejší rovnici $-x$ místo x , obdržíme

$$a - x = 2(b - x),$$

$$x = 2b - a.$$

Tážeme-li se tedy: Před kolika lety byl A dvakrát starší nežli B ? plyne odpověď z poslední rovnice $x = 2b - a$, t. j. před $2b - a$ lety.

Záporný výsledek rovnice prvního stupně, kladně vzat, vyhovuje tedy jiné rovnici, kterouž obdržíme z rovnice první, změníme-li znaménko veličiny neznámé, a může obsahovati rozřešení úlohy, v níž otazné číslo dané úlohy vzato jest ve smyslu opačném.

3) Dvě tělesa K' a K'' , kterážto v přímce týmž směrem se pohybují rychlostí c a c' , procházejí současně body A' a A'' ; leží-li A' o d jednotostí délky za A'' , v kolika jednotkách časových (T) obě tělesa se dohoní?

K' proběhne za T jednotostí časových dráhu $c'T$ jednotostí délky,
 K'' " " T " " " " $c''T$ " " .

Kdy tělesa se dohoní, bude dráha, kterou proběhlo K' , o d jednotostí delší nežli dráha tělesa K'' , čili

$$c'T - c''T = d, \text{ z čehož}$$

$$T = \frac{d}{c' - c''}.$$

Rozbor. α) Pokud $c' > c''$, jest T kladné, t. j. tělesa dohoní se v čase určitém. Je-li $c' = c''$, čili $c' - c'' = 0$, bude $T = \infty$, tělesa dohoní se za nekonečný počet jednotostí časových, t. j. jedno těleso nikdy nedospěje k druhému, což jest patrné proto, že zůstává jedno za druhým vždy v téže vzdálenosti. Výsledek jest nemožný. Je-li v tom případě také $d = 0$, t. j. procházejí-li obě tělesa zároveň týmž bodem, bude

$T = \frac{0}{0}$; výsledek jest neurčitý, t. j. tělesa jsou neustále po-

spolu, čili jedno dospěje k druhému ve všech po sobě jdoucích jednotkách časových až do nekonečna. Je-li konečně $c' < c''$,

bude $T = -\frac{d}{c'' - c'}$, z čehož plyne, že úlohu nelze řešiti tak,

jak byla dána, což jest patrné proto, že přední těleso rychleji se pohybuje nežli zadní, tudíž obě nejen že se nikdy nedohoní, nýbrž vždy více od sebe se vzdalují. Chceme-li ostatně i záporné hodnotě T dáti význam, třeba jest v dané úloze tázati se ve smyslu opačném: před kolika jednotkami časovými obě tělesa byla se dohonila? Záporná hodnota T , kladně vzata, dá pak rozřešení takto změněné úlohy, vyjádřujíc, že obě tělesa před $\frac{d}{c'' - c'}$ jednotkami časovými byla se dohonila.

b) Položíme-li — d místo d , t. j. leží-li bod A' před A'' směrem pohybu, obdržíme $T = \frac{-d}{c' - c''} = \frac{d}{c'' - c'}$; výsledky v a) vyhledané pro K' , A' , c' mají tedy platnost vztažně o K'' , A'' , c'' a naopak.

c) Položíme-li konečně — c'' místo c'' , t. j. pohybuje-li se těleso K'' proti K' , bude $T = \frac{d}{c' + c''}$. Je-li d kladné, znamená T určitě, za kolik jednotek časových obě tělesa se setkají. Při $d = 0$ bude i $T = 0$, t. j. pohybují-li se tělesa současně z téhož bodu, jsou právě na počátku pohybu pospolu. Je-li d záporné, bude $T = -\frac{d}{c' + c''}$, kterážto záporná hodnota znamená, že obě tělesa byla se setkala před $\frac{d}{c' + c''}$ jednotkami časovými.

Určíme-li z hořejší základné rovnice jinou obecnou veličinu, bude tím řešena jiná úloha toho druhu. Algebraické řešení obecné úlohy neodpovídá tedy pouze na otázku bezprostředně podanou; nýbrž podává zároveň rozřešení celé skupiny úloh jistého druhu, ukazujíc také vnitřní jich souvislost. Zvláště hodnoty záporné slouží k tomu, aby se zrušilo omezení v úloze obsažené, načež tuto úplně lze řešiti co úlohu všeobecnou.

4) Číslo 58 má se rozdělit na dvě částí tak, aby jedna část byla o 16 menší nežli druhá.

Znamená-li x větší a y menší část, musí dle podmínky

$$x + y = 58 \quad a$$

$$x = y + 16,$$

z kterýchžto rovnic plyne $x = 37$, $y = 21$.

Z této úlohy lze sestaviti také jedinou rovnici o jedné neznámé.

Je-li totiž x větší, $58 - x$ menší část daného čísla, musí

$$x = 58 - x + 16,$$

z čehož $x = 37$, tedy $58 - x = 21$.

5) Máme dvě látky stejnorodé; hodnota jednotky první látky = a , druhé pak = b . Smícháme-li obě látky tak, aby směs obsahovala m jednotek, a každá tato jednotka aby měla hodnotu c : mnoholi jednotek každé látky musíme smíchati?

Předpokládáme, že hodnota směsi rovná se součtu hodnot látek smíšených.

Znamená-li x ve směsi počet jednotostí první látky, y pak počet jednotostí látky druhé, bude

$$\begin{aligned} x + y &= m, & a \\ ax + by &= cm, & \text{protož} \\ x &= \frac{c - b}{a - b} \cdot m, & y = \frac{a - c}{a - b} \cdot m. \end{aligned}$$

Řešení jest možné jen v tom případě, má-li číselník i jmenovatel v hodnotách x a y stejná znaménka, t. j. jen tehdy, je-li $a > c > b$ nebo $a < c < b$, čili leží-li c mezi a a b .

Z hodnot x a y plyne poměr obou mnohostí

$$x : y = (c - b) : (a - c),$$

na němžto se zakládá počet alligačnů.

II. Neurčité rovnice prvního stupně.

§. 230. Není-li k určení několika neznámých veličin dáno tolik rovnic, kolik jest neznámých, můžeme vyloučením co možná největšího počtu těchto veličin obdržeti posléze jedinou rovnici o dvou aneb několika neznámých. Vyjádříme-li z této rovnice jednu neznámou všemi ostatními, můžeme za tyto neznámé dosaditi nekonečné množství rozličných hodnot, čím také první neznámá nabývá nesčíslného množství hodnot. Taková rovnice o dvou aneb několika neznámých slove tedy neurčitá aneb také diophantická.

Obyčejně se požaduje, aby neznámé, které máme určití, vyhověly zvláštním podmínkám. Tak u př. při neurčitých rovnicích prvního stupně se vyžaduje, aby neznámé byly čísla celistvá, aneb celistvá a zároveň kladná.

Určení neznámých celistvými čísly.

§. 231. Rovnice o dvou neznámých nelze řešiti celistvými čísly, mají-li součinitelé neznámých společného činitele, jímžto známý člen není dělitelný.

Budiž dána rovnice nejjednodušší podoby

$$ax + by = c,$$

kde a, b, c jsou celistvá čísla kladná aneb záporná. Má-li a i b společnou míru m , kterou c není dělitelno, bude

$$\frac{a}{m} \cdot x + \frac{b}{m} \cdot y = \frac{c}{m};$$

poněvadž pak $\frac{a}{m}, \frac{b}{m}$ jsou čísla celistvá, nemohou neznámé

x a y býti také čísla celistvá proto, že by pak $\frac{a}{m} \cdot x + \frac{b}{m} \cdot y$,

tudiž i $\frac{c}{m}$ musela býti čísla celistvá, což jest na odpor podmínice.

Věta právě dokázaná vztahuje se také k rovnicím o několika neznámých, proto příště budeme vždy předpokládati, že součinitelé neznámých jsou prvočísla vespolek.

§. 232. 1) Z rovnice o dvou neznámých, jichžto součinitelé jsou prvočísla vespolek, lze vždy určití neznámé celistvými čísly.

Z rovnice

$$ax + by = c,$$

v nížto a vždy můžeme považovati za kladné, plyne

$$x = \frac{c - by}{a}.$$

Dosadíme-li zde za y pořadem a hodnot $0, 1, 2, 3, \dots$ a $a - 1$, bude mezi příslušnými hodnotami x zajisté jedna, ale také jen jedna, kteráž jest číslo celistvé.

Neboť dělíme-li a hodnot čitatele $c - by$, kteréž obdržíme tím dosazením, číslem a , musejí zbytky při dělení tom přicházející vesměs býti rozličné. Jsou-li totiž m a n kterákoli z čísel $0, 1, 2, 3, \dots, a - 1$, a dá-li $c - bm$ i $c - bn$ děleno a zbytek tentýž, tak sice, že by

$c - bm = aq_1 + r$ a $c - bn = aq_2 + r$,
obdrželi bychom odčítáním první rovnice od druhé

$$b(m - n) = a(q_1 - q_2) \text{ aneb } \frac{b(m-n)}{a} = q_1 - q_2.$$

Součin $b(m - n)$ musel by tedy býti dělitelný číslem a , což dle §. 74., 4) nemožno proto, že b a a jsou prvočísla vespolek, $m - n$ však menší jest nežli a , tudíž rozdíl ten nemůže

býti dělitelný číslem α . Zbytky, kteréž obdržíme, dělíme-li těch α hodnot čitatele c — by číslem α , musejí tedy býti vesměs rozličné; poněvadž pak každý z nich jest menší nežli α , musí některý se rovnati nulle. Odpovídá-li pak β jakožto hodnota neznámé y , zbytku 0, bude

$$x = \frac{c - b\beta}{a} = \alpha,$$

kde α představuje číslo celistvé. Dané rovnici vyhovuje tedy dvě hodnoty

$$x = \alpha, \quad y = \beta.$$

Dodatek. Je-li součinitel jedné neznámé = 1, u př. v rovnici $x + by = c$, budou bezprostředně $y = 0$, $x = c$ hodnoty neznámých, vyjádřené čísly celistvými.

2) Je-li v rovnici o dvou neznámých *jedna hodnota každé neznámé veličiny číslo celistvé, možná určení obě neznámé nesčíslným počtem čísel celistvých.*

V rovnici $ax + by = c$ budiž $x = \alpha$ a $y = \beta$, kde α a β jsou čísla celistvá, tedy

$$a\alpha + b\beta = c.$$

Připočteme-li a odečteme-li v levém dílu abu , kde u značí kterékoli celistvé číslo kladné aneb záporné, bude

$$a\alpha + abu + b\beta - abu = c, \text{ čili}$$

$$a(\alpha + bu) + b(\beta - au) = c,$$

z čehož plyne, že dané rovnici vyhovují vůbec hodnoty

$$x = \alpha + bu, \quad y = \beta - au.$$

Je-li v rovnici $ax - by = c$ opět $x = \alpha$, $y = \pi$, budou taktéž výrazy:

$$x = \alpha + bu, \quad y = \beta + au,$$

kde pomocná neznámá u jest kterékoli číslo celistvé, značiti všecka možná čísla celistvá jakožto hodnoty neznámých.

§. 233. Úloha. Z dané rovnice má se hodnota obou neznámých určení čísly celistvými.

I. Způsob. Určíme z rovnice hodnotu neznámé, jejížto součinitel má menší hodnotu číselnou, a v tom výrazu dosadíme za druhou neznámou pořadem čísla 0, 1, 2, 3 . . . , až při některém tom dosazení obdržíme celistvé číslo jakožto hodnotu první neznámé.

Tento způsob řešení zakládá se na důkazu v §. 232., 1).

Příklad. Budiž dána rovnice $4x - 7y = 75$, tedy

$$x = \frac{75 + 7y}{4}.$$

Dosadíme-li zde za y jednu ze čtyř hodnot 0, 1, 2, 3, některá příslušná hodnota x bude rovna číslu celistvému, z čehož patrně, že tu postačí nejvýš pokusy čtyry. Při $y = 3$, bude

$$x = \frac{75 + 21}{4} = \frac{96}{4} = 24.$$

Dané rovnici vyhovují tedy hodnoty neznámých: $x = 24$, $y = 3$, jakož i všechna celistvá čísla, vyjádřená vzorcem

$$x = 24 + 7u, \quad y = 3 + 4u,$$

kde u značí kterékoli číslo celistvé.

Protož bude při $u = \dots - 2 \mid -1 \mid 0 \mid 1 \mid 2 \mid \dots$

$x = \dots$	10	17	24	31	38	...
$y = \dots$	-5	-1	3	7	11	...

Tento způsob řešení jest velmi rozvláčný, jsou-li součinitelé obou neznámých čísla veliká.

II. Způsob. Řešíme rovnici dle neznámé, která má menšího součinitele, a podíl rozvedeme na celé a zlomek. Tento zlomek pak učiníme rovný nové neznámé, řešíme takto utvořenou rovnici dle druhé neznámé, počínáme sobě s vyhledaným podílem jako s předešlým, a tak pokračujeme, až obdržíme rovnici se součinitelem 1. Tuto rovnici řešíme (dle §. 232., 1. dod.) a vyhledané hodnoty dosazujeme po sobě do všech rovnic předcházejících.

Důkaz. Je-li dána rovnice $ax + by = c$, kde $a < b$, obdržíme nejprv $x = \frac{c - by}{a}$. Dělíme-li číslem a , bude podíl celistvé číslo tvaru $m - ny$, kde m také se může rovnati nulle, zbytek pak bude míti podobu $c_1 - b_1y$, kde c_1 rovněž může býti roven nulle; pročež

$$x = m - ny + \frac{c_1 - b_1y}{a}.$$

Neznámé x a y musejí býti čísla celistvá, tedy také výraz $\frac{c_1 - b_1y}{a}$ číslo celistvé u př. u_1 , tedy $\frac{c_1 - b_1y}{a} = u_1$ a $x = m - ny + u_1$.

Uvedeme-li rovnici $\frac{c_1 - b_1 y}{a} = u_1$ na podobu $au_1 + b_1 y = c_1$, a odvodíme-li z ní, jako prvé z dané rovnice, novou rovnici pomocnou, bude při tom počet následující, jestliže při nové rovnici si počínáme jako prvé:

$$ax + by = c \text{ dá}$$

$$x = \frac{c - by}{a} = m - ny + \frac{c_1 - b_1 y}{a} = m - ny + u_1$$

$$\frac{c_1 - b_1 y}{a} = u_1 \text{ aneb } au_1 + b_1 y = c_1 \text{ dá}$$

$$y = \frac{c_1 - au_1}{b_1} = m_1 - n_1 u_1 + \frac{c_2 - b_2 u_1}{b_1} = m_1 - n_1 u_1 + u_2$$

$$\frac{c_2 - b_2 u_1}{b_1} = u_2 \text{ aneb } b_1 u_2 + b_2 u_1 = c_2 \text{ dá}$$

$$u_1 = \frac{c_2 - b_1 u_2}{b_2} = m_2 - n_2 u_2 + \frac{c_3 - b_3 u_2}{b_2} = m_2 - n_2 u_2 + u_3$$

a t. d.

Ze způsobu, jak se počet koná, plyne, že jest

b_1 zbytek při dělení $b : a$,

b_2 " " " $a : b_1$,

b_3 " " " $b_1 : b_2$, a t. d.

Součinitelé po sobě jdoucích rovnic pomocných rovnají se tedy zbytkům při dělení, kteréž obdržíme při vyhledávání největší společné míry čísel b a a (§. 86., 2). Poněvadž pak a a b jsou pročísla vespolek, musí nutně jeden z těchto zbytků $= 1$; obdržíme tedy zajisté někdy pomocnou rovnici, v nížto součinitel neznámé veličiny $= 1$, která tudíž bezprostředně podává rozřešení v číslech celistvých. Z toho pak po sobě jdoucím dosazováním obdržíme konečně hledané hodnoty neznámých v dané rovnici.

Je-li $b < a$, určíme z původní rovnice $ax + by = c$ nejprv y , načež provedeme počet jako dříve.

Příklad. Z rovnice $105x - 43y = 17$ mají se neznámé určití celistvými čísly.

$$105x - 43y = 17 \text{ dá } y = \frac{105x - 17}{43} = 2x + \frac{19x - 17}{43} \\ = 2x + u_1,$$

$$\begin{aligned}
\frac{19x - 17}{43} = u_1 \text{ dá } x &= \frac{43u_1 + 17}{19} = 2u_1 + \frac{5u_1 + 17}{19} \\
&= 2u_1 + u_2, \\
\frac{5u_1 + 17}{19} = u_2 \text{ dá } u_1 &= \frac{19u_2 - 17}{5} = 3u_2 - 3 + \frac{4u_2 - 2}{5} \\
&= 3u_2 - 3 + u_3, \\
\frac{4u_2 - 2}{5} = u_3 \text{ dá } u_2 &= \frac{5u_3 + 2}{4} = u_3 + \frac{u_3 + 2}{4} \\
&= u_3 + u_4, \\
\frac{u_3 + 2}{4} = u_4 \text{ dá } u_3 &= 4u_4 - 2.
\end{aligned}$$

Této poslední rovnici vyhoví $u_4 = 0$ a $u_3 = -2$; pak bude z předcházejících rovnic posloupně

$$u_2 = -2, \quad u_1 = -11, \quad x = -24, \quad y = -59,$$

a všeobecné rozřešení celistvými čísly bude dáno vzorcí

$$x = -24 + 43u, \quad y = -59 + 105u,$$

kde u může býti kterékoli číslo celistvé.

Tytěž obecné hodnoty neznámých x a y obdržíme také bez řešení rovnice $u_3 = 4u_4 - 2$, dosadíme-li ihned rovnici tuto do rovnic předcházejících.

Při	$u = \dots - 10$	-1	0	1	10	$\dots$
jest	$x = \dots - 454$	-67	-24	19	406	$\dots$
	$y = \dots - 1109$	-164	-59	46	991	$\dots$

III. Způsob. Máme-li z rovnice $ax \pm by = \pm c$, kde a, b, c jsou čísla kladná, určiti neznámé celistvými čísly, proměňme $\frac{a}{b}$ ve zlomek řetězový a vypočítejme jeho předposlední

zlomek přibližný $= \frac{p}{q}$. Poněvadž $\frac{a}{b} - \frac{p}{q} = \frac{\pm 1}{bq}$, čili $aq - bp = \pm 1$ (§. 124.), tudíž i $acq - bcp = \pm c$, mají neznámé veličiny x a y prosté hodnoty cq a cp s těmi znaménky, která s ohledem na znaménka v dané rovnici vyhovují jednorozměrné rovnici $acq - bcp = \pm c$.

Příklad. Z rovnice $9x + 29y = 15$ máme určiti neznámé celistvými čísly.

Proměňme $\frac{9}{29}$ ve zlomek řetězový a vypočítejme předpo-

slední přibližný zlomek $\frac{4}{13}$. Poněvadž $\frac{9}{29} - \frac{4}{13} = \frac{+1}{29 \cdot 13}$, čili $9 \cdot 13 - 29 \cdot 4 = +1$ a $9 \cdot 13 \cdot 15 - 29 \cdot 4 \cdot 15 = 15$, dá $x = 13 \cdot 15 = 195$ a $y = -4 \cdot 15 = -60$ rozřešení rovnice čísly celistvými, a co všeobecné rozřešení pak obdržíme

$$x = 195 + 29u, \quad y = -60 - 9u,$$

kde pomocná neznámá u značí kterékoli číslo celistvé.

Při $u = \dots - 2$	-1	0	1	2	$\dots$
bude $x = \dots 137$	166	195	224	253	$\dots$
$y = \dots - 42$	-51	-60	-69	-78	$\dots$

§. 234. Úloha. Z rovnice o více nežli dvou neznámých mají se neznámé určití čísla celistvými.

Použijeme způsobu odůvodněného v §. 233., II. pro rovnici o dvou neznámých. I zde obdržíme konečně rovnici, v nížto součinitel neznámé $= 1$, náležitým dosazením pak vyhledáme obecné výrazy neznámých veličin v dané rovnici, v nichžto však nepřichází vždy, jako prvé, pouze jedna pomocná neznámá.

Příklad. Z rovnice $4x + 6y + 11z = 106$ mají se neznámé určití celistvými čísly.

Obdržíme

$$x = \frac{106 - 6y - 11z}{4} = 26 - y - 2z + \frac{2 - 2y - 3z}{4} \\ = 26 - y - 2z + u_1.$$

$$\text{Rovnice } \frac{2 - 2y - 3z}{4} = u_1 \text{ dá}$$

$$y = \frac{2 - 3z - 4u_1}{2} = 1 - z - 2u_1 - \frac{z}{2} = 1 - z - 2u_1 - u_2;$$

$$\frac{z}{2} = u_2, \text{ z čehož } z = 2u_2.$$

Protož

$$\begin{aligned} z &= 2u_2, \\ y &= 1 - 2u_1 - 3u_2, \\ x &= 25 + 3u_1 - u_2. \end{aligned}$$

Dosadíme-li za u_1 a u_2 kterákoli čísla celistvá, neznámé x, y, z budou vyjádřeny čísly celistvými.

Při $u_1 =$	1	2	3	...
a $u_2 =$	-1	0	1	...
bude $x =$	29	31	33	...
$y =$	2	-3	-8	...
$z =$	-2	0	2	...

Určení neznámých celistvými čísly kladnými.

§. 235. Úloha. Z rovnice o dvou aneb několika neznámých mají se neznámé určití celistvými čísly kladnými. *)

Ustanovíme nejprv obecné rozřešení čísly celistvými, a omezíme pak libovolné hodnoty pomocné neznámé tak, abychom jich dosazením obdrželi v hodnotě každé hledané neznámé součet záporných členů menší nežli součet členů kladných.

Příklady. 1) Z rovnice $13x + 19y = 356$ mají se neznámé určití celistvými čísly kladnými.

$$13x + 19y = 356 \text{ dá } x = \frac{356 - 19y}{13} = 27 - y + \frac{5 - 6y}{13}$$

$$= 27 - y + u_1,$$

$$\frac{5 - 6y}{13} = u_1 \text{ „ } y = \frac{5 - 13u_1}{6} = -2u_1 + \frac{5 - u_1}{6}$$

$$= -2u_1 + u_2,$$

$$\frac{5 - u_1}{6} = u_2 \text{ „ } u_1 = 5 - 6u_2.$$

Rozřešení čísly celistvými bude:

$$y = -10 + 13u_2, \quad x = 42 - 19u_2.$$

Má-li tedy y býti kladné, musí při kladném u_2 býti

$$10 < 13u_2, \text{ čili } u_2 > \frac{10}{13}; \text{ má-li } x \text{ býti kladné, musí } 19u_2 < 42,$$

tedy $u_2 < \frac{42}{19}$. Těmto dvěma podmínkám vyhovuje jen dvě hodnot:

$u_2 = 1$ a $u_2 = 2$. Při každé záporné hodnotě u_2 bude y také záporné. Rovnice daná připouští tedy jen dvojí rozřešení celistvými čísly kladnými:

$$\text{při } u_2 = 1 \text{ bude } x = 23, y = 3,$$

$$\text{„ } u_2 = 2 \text{ „ } x = 4, y = 16.$$

*) Řešení takové jest vždy možné při rovnicích tvaru $ax - by = c$, kdežto při rovnicích tvaru $ax + by = c$ jen tehdy, když $a + b < c$, jelikož i nejmenší pozitivní číslo 1 v opácném případě vede k nemožné rovnici $a + b = c$.

2) Z rovnice $13x + 17y = 77$ mají se neznámé určití celistvými čísly kladnými.

Rovnice rozřešena celistvými čísly dá

$$x = 2 + 17u_2, y = 3 - 13u_2.$$

Poněvadž x při každé kladné hodnotě u_2 bude kladné, třeba jest omeziti u_2 jen s ohledem na y ; má-li však y býti kladné, musí $13u_2 < 3$, čili $u_2 < \frac{3}{13}$. Při záporných hodnotách u_2 bude sice y vždy, x však jen tehdy kladné, je-li $17u_2 < 2$ čili $u_2 < \frac{2}{17}$. Hodnoty u_2 leží tedy mezi $-\frac{2}{17}$ a $\frac{3}{13}$; ale poněvadž za u_2 smíme dosaditi jen čísla celistvá, obdržíme x a y kladné a celistvé jedině při $u_2 = 0$, t. j. $x = 2$ a $y = 3$.

3) Zlomek $\frac{230}{77}$ má se rozvésti v součet dvou zlomků, z nichžto jeden má jmenovatele 7 a druhý 11.

Jsou-li x a y čístatelé hledaných zlomků, bude

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{11} = \frac{130}{77} \text{ čili } 11x + 7y = 130.$$

Tato rovnice rozřešena celistvými čísly dá

$$x = 5 - 7u_3, y = 25 + 11u_3.$$

Má-li x a y býti kladné, musí při kladných hodnotách u_3 býti $7u_3 < 5$, čili $u_3 < \frac{5}{7}$, při záporných hodnotách u_3 však $11u_3 < 25$, čili $u_3 < \frac{25}{11}$; hodnoty u_3 musejí ležeti mezi $-\frac{25}{11}$ a $\frac{5}{7}$, mohou tedy býti jen $-2, -1, 0$. Protož obdržíme

$$\text{při } u_3 = -2 \dots x = 19, y = 3;$$

$$\text{„ } u_3 = -1 \dots x = 12, y = 14;$$

$$\text{„ } u_3 = 0 \dots x = 5, y = 25;$$

hledané zlomky jsou pak $\frac{19}{7}$ a $\frac{3}{11}$, aneb $\frac{12}{7}$ a $\frac{14}{11}$, aneb $\frac{5}{7}$

a $\frac{25}{11}$.

4) Z rovnice $7x + 22y + 30z = 103$ mají se neznámé určití celistvými čísly kladnými.

Rozřešení celistvými čísly jest:

$$x = -1 + 2z + 22u_1, y = 5 - 2z - 7u_1.$$

Při kladných hodnotách u_1 bude x vždy kladné, poněvadž z má býti kladné; má-li pak y a z býti také kladné, musí dle rovnice $y = 5 - 2z - 7u_1$ čili $y + 2z = 5 - 7u_1$ vyhověti se podmínce $7u_1 < 5$, čili $u_1 < \frac{5}{7}$. Chceme-li obdržeti mez záporných hodnot u_1 , vylučme z hořejších rovnic z , čímž obdržíme $x + y = 4 + 15u_1$. Má-li tedy x a y býti kladné, musí $15u_1 < 4$, čili $u_1 < \frac{4}{15}$. Z toho jde, že u_1 musí ležeti mezi $-\frac{4}{15}$ a $\frac{5}{7}$, tudíž $u_1 = 0$.

Položíme-li nyní v rozřešovacíh rovnicích $u_1 = 0$, bude

$$x = -1 + 2z, y = 5 - 2z,$$

z kterýchžto rovnic plynou pro z meze $2z > 1$ a $2z < 5$, čili $z > \frac{1}{2}$ a $z < \frac{5}{2}$. Za z lze tedy dosaditi jen 1 a 2, čímž neznámé v dané rovnici nabudou dvě hodnot celistvých a kladných, totiž:

$$z = 1, x = 1, y = 3, a$$

$$z = 2, x = 3, y = 1.$$

III. Určité rovnice druhého stupně.

1. Rovnice druhého stupně o jedné neznámé.

§. 236. Obecná podoba spořádané rovnice druhého stupně jest

$$px^2 + qx = r,$$

aneb, dělíme-li oba díly rovnice součinitelem p ,

$$x^2 + \frac{q}{p}x = \frac{r}{p}.$$

Položíme-li $\frac{q}{p} = a$ a $\frac{r}{p} = b$, obdržíme obecnou podobu rovnice druhého stupně, již budoucně vždy použijeme:

$$x^2 + ax = b.$$

Přesné rovnice druhého stupně.

§. 237. Položíme-li v obecné rovnici druhého stupně $x^2 + ax = b$ $a = 0$, obdržíme $x^2 = b$ jakožto obecnou podobu spořádané přesné rovnice druhého stupně.

Dobudeme-li z obou dílů této rovnice druhého kořene, bude

$$x = \pm \sqrt{b}.$$

Přesná rovnice druhého stupně má tedy dva protivné kořeny; je-li b kladné, oba jsou reálné, je-li b záporné, oba jsou pomyslné.

Příklady.

$$\begin{array}{lll} x^2 = 9 & x^2 = 15, & x^2 = -7, \\ x = \pm \sqrt{9} = \pm 3. & x = \pm \sqrt{5}. & x = \pm \sqrt{-7}. \end{array}$$

Smíšené rovnice druhého stupně.

§. 238. Obecná podoba spořádané smíšené rovnice druhého stupně jest

$$x^2 + ax = b.$$

Doplňme první díl do úplné druhé mocniny dvoučlenu tím, že k oběma dílům připočteme čtverec polovičního součinitele neznámé veličiny x , t. j. $\frac{a^2}{4}$, tedy bude

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + b, \text{ čili}$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + b,$$

a dobudeme-li druhého kořene z obou dílů:

$$x + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}, \text{ z čehož}$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}.$$

Ve spořádané smíšené rovnici druhého stupně rovná se pak neznámá polovičnímu součiniteli první mocniny neznámé s opačným jeho znaménkem, $\pm$ kořenu druhému z algebraického součtu čtverce téhož polovičního součinitele a členu známého.

Z toho vysvítá, že i každé smíšené rovnici druhého stupně vyhovuje dvě hodnoty neznámé veličiny. Je-li b kladné, oba kořeny jsou reálné proto, že $\frac{a^2}{4}$ musí býti vždy veličina kladná.

Je-li b záporné, oba kořeny jsou též reálné, pokud $\frac{a^2}{4} > b$;

při $\frac{a^2}{4} = b$ dvoučlen pod kořenitkem rovná se nulle, oba kořeny jsou reálné a sobě rovny; při $\frac{a^2}{4} < b$ jsou konečně oba kořeny pomyslné.

Příklady.

1) $x^2 - 6x = 16$.

$$x = 3 \pm \sqrt{9 + 16} = 3 \pm \sqrt{25} = 3 \pm 5; \text{ protož buď } x = 3 + 5 = 8, \text{ aneb } x = 3 - 5 = -2.$$

Zkouška. $8^2 - 6 \cdot 8 = 16$
 $(-2)^2 - 6 \cdot (-2) = 16.$

2) $x^2 + 7x + 12 = 0$; spořádáme-li rovnici, bude
 $x^2 + 7x = -12$, z čehož

$$x = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 12} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49 - 48}{4}}$$

$$= -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{7}{2} \pm \frac{1}{2};$$

$$x = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{6}{2} = -3, \text{ aneb}$$

$$x = -\frac{7}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{8}{2} = -4.$$

3) $x^2 - 7x = 7$.

$$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 7} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49 + 28}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{77}}{2}.$$

4) $x^2 - 2x + 2 = 0$; spořádáme-li rovnici, obdržíme
 $x^2 - 2x = -2$.

$$x = 1 \pm \sqrt{1 - 2} = 1 \pm \sqrt{-1}.$$

Dodatek. Jsou-li v obecné rovnici druhého stupně $x^2 + ax = b$ známá čísla a a b neracionálná, u př. $a = \sqrt{A}$ a $b = \sqrt{B}$, má-li tedy rovnice podobu

$$x^2 + \sqrt{A} \cdot x = \sqrt{B},$$

bude
$$x = -\frac{\sqrt{A}}{2} \pm \sqrt{\frac{A}{4} + \sqrt{B}}.$$

U př. rovnice $x^2 - 4x\sqrt{2} = 3\sqrt{3}$ dá

$$x = 2\sqrt{2} \pm \sqrt{8 + 3\sqrt{3}}.$$

Ze všech rovnic tohoto druhu obdržíme výraz, jehož podoba jest $\sqrt{p \pm Vq}$. Výraz takový určíme, t. j. dobýváme druhého kořene z neracionálního dvoučlenu dle §. 182.

§. 239. Obecná podoba rovnice druhého stupně na nullu uvedené jest

$$x^2 + Ax + B = 0.$$

První díl $x^2 + Ax + B$ slove v tomto případě tříčlen rovníkový.

Je-li m kořen rovnice $x^2 + Ax + B = 0$, jmenuje se $(x - m)$ činitel kořenový.

1) Tříčlen rovníkový každé rovnice druhého stupně jest dělitelný činitelem kořenovým.

$$(x^2 + Ax + B) : (x - m) = x + (A + m)$$

$$\begin{array}{r} x^2 - mx \\ - \quad + \\ \hline (A + m)x + B \\ (A + m)x - Am - m^2 \\ - \quad + \quad + \\ \hline \text{zbytek} = m^2 + Am + B \end{array}$$

Ale m jest kořen dané rovnice; dosadíme-li jej za x , uvede tříčlen $x^2 + Ax + B$ na nullu, t. j. $m^2 + Am + B = 0$, pročež

$$(x^2 + Ax + B) : (x - m) = x + (A + m).$$

2) Každá rovnice druhého stupně má pouze dvě kořenů.

Položíme-li v hořejším výrazu

$$(x^2 + Ax + B) : (x - m) = x + (A + m)$$

$A + m = -n$, bude

$$(x^2 + Ax + B) : (x - m) = x - n, \text{ pročež}$$

$$x^2 + Ax + B = (x - m)(x - n).$$

Poněvadž výraz $x^2 + Ax + B$ nejen při $x = m$, nýbrž i při $x = n$ přechází v nullu, jest nejen m , nýbrž i n kořen rovnice $x^2 + Ax + B = 0$.

Kdyby rovnice $x^2 + Ax + B = 0$ měla ještě třetí kořen p , jenž by se lišil od m a n , musel by součin $(p - m)(p - n) = 0$, což nemožno proto, že v tom součinu žádný činitel není roven nulle, součin však, jehož činitelé se liší od nullu, nemůže se rovnati nulle.

3) Tříčlen rovnicový každé rovnice druhého stupně rovná se součinu kořenových činitelů.

4) Součinitel druhého členu rovná se součtu, a třetí (známý) člen součinu kořenů vzatých se znaménky opačnými.

Tyto dvě věty plynou z 2), poněvadž

$$x^2 + Ax + B = (x - m)(x - n) = x^2 - (m + n)x + (-m) \cdot (-n),$$

tudiž $A = -m - n$ a $B = (-m) \cdot (-n)$.

Dodatky. 1) Možno-li ve spořádané rovnici druhého stupně známý člen rozvésti na dva činitele, jichžto součet se rovná součiniteli x , obdržíme změnou znamének u obou činitelů ihned oba kořeny rovnice. Tak u př. v rovnici $x^2 - 5x + 6 = 0$ jest $+6$ součin čísel -2 a -3 , jichžto součet dá -5 ; tato čísla s opačnými znaménky, totiž $+2$ a $+3$ jsou pak kořeny dané rovnice.

2) Má-li rovnice druhého stupně podobu $(ax - b)(cx - d) = 0$, můžeme místo ní řešiti dvě rovnice prvního stupně: $ax - b = 0$ a $cx - d = 0$; kořeny těchto dvou rovnic vyhoví zároveň rovnici $(ax - b)(cx - d) = 0$. U př. z rovnice

$$(x-3)(x+5)=0 \text{ plyne } x-3=0, \quad x+5=0, \text{ protože } x=3, \quad x=-5; \text{ z}$$

$$(2x-5)(3x-4)=0 \quad „ \quad 2x-5=0, \quad 3x-4=0, \quad „ \quad x=\frac{5}{2}, \quad x=\frac{4}{3}.$$

§. 240. Úlohy. 1) Má se sestaviti rovnice druhého stupně, jsou-li dány její kořeny.

Budtež u př. 3 a -4 dané kořeny, tedy čísla tato s opačnými znaménky dají

$$\begin{aligned} \text{součet} &= -3 + 4 = +1, \\ \text{a součin} &= (-3) \cdot (+4) = -12; \end{aligned}$$

bude tedy

$$x^2 + x - 12 = 0$$

hledaná rovnice, jejíž kořeny jsou 3 a -4 .

2) Výraz, jehož podoba jest $x^2 + ax + b$, má se rozvésti na činitele.

Položme $x^2 + ax + b = 0$; kořeny této rovnice jsou

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2};$$

pročež dle §. 239., 3)

$$x^2 + ax + b = \left\{ x + \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \right\} \left[x + \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \right].$$

Máme-li u př. $x^2 - 3x - 28$ rozvésti na dva činitele, položíme $x^2 - 3x - 28 = 0$. Kořeny této rovnice jsou $x_1 = 7$, $x_2 = -4$, protož činitelé kořenoví $x - 7$ a $x + 4$, a

$$x^2 - 3x - 28 = (x - 7)(x + 4).$$

Dodatek. Má-li se výraz $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ rozvésti na činitele, dáme mu podobu $\alpha \left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} \right)$ a proměníme pak rovnici $x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$ v součin dvou činitelů, jež násobíme ještě činitelem α . U př.

$$9x^2 - 3x - 2 = 9 \left(x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} \right) = 9 \left(x + \frac{1}{3} \right) \left(x - \frac{2}{3} \right).$$

§. 241. Dle 3. a 4. věty §. 239. poznáme dle znamének kořenů, jaká znaménka mají členy rovnice druhého stupně, a naopak dle znamének členů poznáme, jaká znaménka mají kořeny.

a) Jsou-li oba kořeny m a n kladné, jest

$$x^2 + Ax + B = (x - m)(x - n) = x^2 - (m + n)x + mn;$$

jsou-li oba kořeny záporné, jest

$$x^2 + Ax + B = (x + m)(x + n) = x^2 + (m + n)x + mn.$$

Mají-li tedy oba kořeny stejná znaménka, třetí člen je vždy kladný, druhý člen však záporný aneb kladný, buď že jsou oba kořeny kladné aneb záporné.

Mají-li oba kořeny znaménka protivná, jest

$$x^2 + Ax + B = (x - m)(x + n) = x^2 - (m - n)x - mn.$$

V tom případě je třetí člen vždy záporný, druhý pak záporný, je-li kladný kořen větší nežli záporný, v opačném případě však je druhý člen kladný.

b) Je-li třetí člen kladný, kořeny rovnice mají stejná znaménka; dle znaménka druhého členu soudíme, jsou-li kladné či záporné, kořeny mají totiž opačné znaménko druhého členu. Je-li třetí člen záporný, kořeny mají znaménka různá, a sice kladný kořen jest větší aneb menší, je-li druhý člen záporný aneb kladný.

2. Určité rovnice druhého stupně o několika neznámých.

§. 242. Obsahuje-li rovnice druhého stupně několik neznámých, lze tyto jako z rovnic prvního stupně jen tehdy určit,

je-li dáno tolik rovnic na sobě nezávislých a sobě neodporujících, kolik neznámých má se určit. Řešíme pak takové rovnice některým způsobem vylučovacím (§. 225.), jímž konečně si opatříme jedinou rovnici o jedné neznámé. Tato poslední rovnice však převyšuje druhý stupeň, je-li z daných rovnic více nežli jedna stupně druhého; pak ji také nelze řešiti dle pravidel zde podaných.

Příklady.

$$1) \begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases} \text{ způsobem srovnávacím.}$$

Z těchto dvou rovnic plyne:

$$\begin{cases} x = a - y \\ x = \frac{b}{y} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{protož } a - y = \frac{b}{y}, \text{ aneb spořádáme-li,} \\ y^2 - ay = -b, \text{ z čehož} \end{array} \right.$$

$$y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}, \text{ pročež } x = \frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Majíce zřetel k §. 239., 4) mohli bychom také souditi takto:

Jsou-li o veličinách x a y dány rovnice $x + y = a$ a $xy = b$, musejí x a y býti kořeny rovnice $x^2 - ax + b = 0$.

$$2) \begin{cases} x - y = 7 \\ x^2 + 2y^2 = 118 \end{cases} \text{ způsobem dosazovacím.}$$

Dosadíme-li výraz $x = y + 7$, plynoucí z první rovnice do rovnice druhé, bude

$$(y + 7)^2 + 2y^2 = 118, \text{ aneb spořádáme-li: } y^2 + \frac{14y}{3} = 23, \\ \text{kteréžto rovnici vyhovují kořeny } y = 3 \text{ a } y = -\frac{23}{3}.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty y do výrazu $x = y + 7$, obdržíme $x = 10$ aneb $x = -\frac{2}{3}$.

$$3) \begin{cases} x^2 + y^2 = 89 \\ x^2 - y^2 = 39 \end{cases} \text{ způsobem rovných součinitelů.}$$

Sečteme-li a odečteme-li obě rovnice, obdržíme

$$\begin{cases} 2x^2 = 128 \\ 2y^2 = 50 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{protož } x^2 = 64 \\ y^2 = 25 \end{array} \right\}, \text{ z čehož } \begin{cases} x = \pm 8, \\ y = \pm 5. \end{cases}$$

§. 243. V mnohých případech vedou zvláštní obraty dříve k cíli než obyčejné způsoby vylučovací. Vyhledavše z daných rovnic nejprv součet, rozdíl, součin aneb podíl neznámých, určíme teprv z těchto veličin hodnoty neznámých.

Příklady.

$$1) \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= a \\ xy &= b. \end{aligned}$$

Násobme druhou rovnici dvěma a spojme novou rovnici s první sečítáním a odčítáním; obdržíme takto

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &= a + 2b, \text{ pročež } x + y = \pm \sqrt{a + 2b}, \\ (x - y)^2 &= a - 2b, \quad „ \quad x - y = \pm \sqrt{a - 2b}, \text{ tudíž} \\ x &= \pm \frac{1}{2}(\sqrt{a + 2b} + \sqrt{a - 2b}) \\ y &= \pm \frac{1}{2}(\sqrt{a + 2b} - \sqrt{a - 2b}). \end{aligned}$$

$$2) \quad \begin{aligned} x^2 + xy &= ay \\ y^2 + xy &= bx. \end{aligned}$$

Uvedeme-li obě rovnice na podobu

$$\frac{x}{y}(x + y) = a \quad \text{a} \quad \frac{y}{x}(x + y) = b,$$

obdržíme násobením a dělením těchto rovnic

$$(x + y)^2 = ab \quad \text{a} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{a}{b}, \text{ protož}$$

$$x + y = \pm \sqrt{ab} \quad \text{a} \quad \frac{x}{y} = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}, \text{ z čehož bude}$$

$$x = \frac{-ab \pm a\sqrt{ab}}{a - b} \quad \text{a} \quad y = \frac{ab \mp \sqrt{ab}}{a - b}.$$

$$3) \quad xy = a, \quad xz = b, \quad yz = c.$$

Násobme všechny tři rovnice a součin dělme čtvercem rovnice třetí, tedy

$$x^2 = \frac{ab}{c}, \text{ z čehož } x = \pm \sqrt{\frac{ab}{c}}.$$

Podobně obdržíme

$$y = \pm \sqrt{\frac{ac}{b}}, \quad z = \pm \sqrt{\frac{bc}{a}}.$$

Násobíme-li rovnici první a druhou, pak první a třetí, konečně druhou a třetí, a dělíme-li první součin rovnicí třetí,

druhý rovnici druhou a třetí součin rovnicí první, obdržíme tytéž výsledky.

$$4) \quad xy + xz = a, \quad xy + yz = b, \quad xz + yz = c.$$

Položme $xy = x'$, $xz = y'$, $yz = z'$, tedy

$$x' + y' = a, \quad x' + z' = b, \quad y' + z' = c.$$

Z toho plyne

$$x' = xy = \frac{a + b - c}{2}; \quad y' = xz = \frac{a + c - b}{2};$$

$$z' = yz = \frac{b + c - a}{2},$$

protož dle 3)

$$x = \pm \sqrt{\frac{(a + b - c)(a + c - b)}{2(b + c - a)}},$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{(a + b - c)(b + c - a)}{2(a + c - b)}},$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{(a + c - b)(b + c - a)}{2(a + b - c)}}.$$

IV. Neurčité rovnice druhého stupně.

§. 244. Obecná podoba rovnice druhého stupně o dvou neznámých jest

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Zde rozeznáváme dvě hlavních případů: buď přichází jedna neznámá, u př. y , jen v první mocnině, aneb obě neznámé přicházejí v druhé mocnině. V prvním případě bude výraz neznámé veličiny y závislý na x a racionální, v druhém však neracionální. V obou případech nesčíslné množství hodnot x a y vyhovuje dané rovnici; ale počet výsledků bývá omezen podmínkou, že v rovnicích druhého stupně, v nichžto jedna neznámá přichází jen v první mocnině, x a y mají býti čísla celistvá a kladná, v rovnicích však, v nichžto neznámé přicházejí v druhé mocnině, tyto mají býti aspoň čísla racionální.

Obtíže při řešení diophantických rovnic druhého stupně jsou mnohem větší a rozmanitější nežli při rovnicích stupně prvního. Zde vyšetříme jen důležitější úlohy sem náležející.

§. 245. Úloha. Z rovnice druhého stupně o dvou neznámých, v nížto jedna neznámá přichází jen v první mocnině, mají se obě neznámé určití celistvými čísly kladnými.

Přichází-li y jen v první mocnině, rovnice druhého stupně o neznámých x a y má podobu

$$Ax^2 + Bxy + Cx + Dy + E = 0,$$

kde A, B, C, D a E považujeme za čísla celistvá, součinitele neznámých pak mimo to za prvočísla vespolek (§. 231.). Řešíme-li rovnici dle y , bude

$$y = \frac{-Ax^2 - Cx - E}{Bx + D},$$

aneb dělíme-li skutečně, až zbytek neobsahuje x , obdržíme výraz následující podoby:

$$y = mx + n + \frac{p}{Bx + D}.$$

Jsou-li m, n, p zlomky, a násobíme-li celý výraz nejmenším společným násobkem jejich jmenovatelů, nová rovnice bude mít podobu:

$$ay = bx + c + \frac{d}{Bx + D}.$$

Mají-li pak x a y býti čísla celistvá a kladná, musí nejprv d býti dělitelno dvoučlenem $Bx + D$; rozvedeme tedy d na všechny jeho činitele, vezmeme pro x jen takové celistvé a kladné hodnoty, při nichžto $Bx + D$ jest činitelem čísla d , z těch hodnot pak vybereme jen ty, jimiž také y stane se kladným.

Příklad. Z rovnice $2x^2 + 3xy - 4x - 2y - 20 = 0$ mají se neznámé určití celistvými čísly kladnými.

$$y = \frac{-2x^2 + 4x + 20}{3x - 2} = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{9} + \frac{196}{3x - 2}; \text{ pročež}$$

$$9y = -6x + 8 + \frac{196}{3x - 2}.$$

Vyhledáme-li nyní všechny činitele čísla 196 (§. 84., dod.) a položíme-li

$$3x - 2 = 1, 2, 4, 7, 28, 49, 98, 196, \text{ bude}$$

$$x = 1, \frac{3}{4}, 2, 3, 10, 17, \frac{199}{3}, 66.$$

Ve výrazu $y = \frac{-2x^3 + 4x + 20}{3x - 2}$ jest jmenovatel kladný při každé celistvé a kladné hodnotě x ; má-li pak i číselník být kladný, smíme za x dosaditi jen takové celistvé a kladné hodnoty, které jsou menší nežli 5. Z hořejších hodnot x lze tudíž použiti jen 1, 2, 3, čímž obdržíme trojí rozřešení celistvými čísly kladnými:

$$x = 1, 2, 3;$$

$$y = 22, 5, 2.$$

§. 246. Úloha. Z rovnice druhého stupně o dvou neznámých, z nichžto jedna přichází jen v druhé mocnině, mají se neznámé určiti čísly racionalnými.

Obecná podoba takové rovnice jest

$$y^2 = ax^2 + bx + c.$$

Provedeme řešení této rovnice jen pro některé případy jednoduché.

1) Budiž $a = m^2$ úplná druhá mocnina. Položme

$$y = \sqrt{m^2x^2 + bx + c} = mx + p, \text{ tedy} \\ m^2x^2 + bx + c = m^2x^2 + 2mpx + p^2,$$

$$\text{z čehož} \quad x = \frac{p^2 - c}{b - 2mp},$$

kde p značí kterékoli číslo racionalné. Bude pak

$$y = mx + p = \frac{mp^2 - mc}{b - 2mp} + p = \frac{bp - mp^2 - mc}{b - 2mp},$$

tedy racionalné.

Je-li u př. $y = \sqrt{9x^2 + 5x + 3}$, obdržíme $x = \frac{p^2 - 3}{5 - 6p}$

a $y = \frac{5p - 3p^2 - 9}{5 - 6p}$, kde za p lze dosaditi kterékoli číslo

racionalné mimo $p = \frac{5}{6}$. Při $p = 1$ bude $x = 2$ a $y = 7$.

2) Budiž $c = n^2$ úplná druhá mocnina. Položme

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + n^2} = px + n, \text{ tedy} \\ ax^2 + bx + n^2 = p^2x^2 + 2npx + n^2,$$

z čehož plyne

$$x = \frac{2np - b}{a - p^2}, \text{ a } y = px + n = \frac{np^2 - bp + an}{a - p^2},$$

kde p značí některé číslo racionalné.

3) Dejme tomu, že výraz $ax^2 + bx + c$ lze rozložit na dva racionální činitele, t. j. že rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má dvě kořeny racionálních.

Jsou-li $qx + r$ a $sx + t$ tyto dva racionální kořeny, položíme

$$y = \sqrt{(qx + r)(sx + t)} = p(sx + t), \text{ tedy} \\ (qx + r)(sx + t) = p^2(sx + t)^2, \text{ z čehož plyne}$$

$$x = \frac{p^2t - r}{q - p^2s}, \text{ a } y = p(sx + t) = \frac{p(qt - rs)}{q - p^2s},$$

kde p značí kterékoli číslo racionální.

4) Možno-li $ax^2 + bx + c$ uvést na podobu

$$(mx + n)^2 + (qx + r)(sx + t),$$

položme

$$y = \sqrt{(mx + n)^2 + (qx + r)(sx + t)} = mx + n + p(sx + t), \text{ tedy}$$

$$(mx + n)^2 + (qx + r)(sx + t) = (mx + n)^2 + 2p(mx + n)(sx + t) + p^2(sx + t)^2,$$

z čehož plyne

$$x = \frac{2np + p^2t - r}{q - 2mp - p^2s}, y = \frac{p^2(ns - mt) + p(qt - rs) + nq - mr}{q - 2mp - p^2s}.$$

$$\text{U př. } y = \sqrt{2x^2 + 4x + 3}.$$

$$2x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 4 + x^2 - 1 \\ = (x + 2)^2 + (x + 1)(x - 1).$$

Obdržíme pak

$$x = \frac{4p - p^2 - 1}{1 - 2p - p^2}, \text{ a } y = \frac{3p^2 - 2p + 1}{1 - 2p - p^2}.$$

Při $p = -1$ bude $x = 1$ a $y = 3$.

§. 247. Úloha. Z úplné rovnice druhého stupně o dvou neznámých mají se určití neznámé čísla racionálními.

Vyhledáme-li y z obecné rovnice

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

obdržíme

$$y = -\frac{Bx + E}{2C} \pm \sqrt{\frac{(Bx + E)^2}{4C^2} - \frac{Ax^2 + Dx + F}{C}}, \text{ aneb}$$

$$y = \frac{1}{2C} \{ -(Bx + E) \pm \sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 + (2BE - 4CD)x + (E^2 - 4CF)} \},$$

a položíme-li

$B^2 - 4AC = a$, $2BE - 4CD = b$, $E^2 - 4CF = c$,
bude

$$y = \frac{1}{2C} \{ -(Bx + E) \pm \sqrt{ax^2 + bx + c} \}.$$

Řešení dané úlohy je tím tedy převedeno na předcházející úlohu (§. 246.), že se mají vyhledati všechny racionální hodnoty x , při nichžto výraz $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ se stane racionálním.

V. Některé rovnice vyšší a exponencialné.

1. Přesné rovnice vyšší.

§. 248. Obecná podoba spořádané přesné rovnice vyšší (§. 222., 5) jest

$$x^m - a = 0 \text{ aneb } x^m = a.$$

Rovnice tato, která slove též dvoučlenová, řeší se dobýváním kořene, protože obdržíme

$$x = \sqrt[m]{a}.$$

Je-li m číslo sudé, rovnice má při kladném a dva rovné, protivné kořeny reálné; je-li a záporné, žádný kořen není reálný. Je-li však m liché, obdržíme z rovnice vždy jeden reálný kořen, jenž má totéž znaménko jako a .

Příklady.

$$1) x^4 = 16 \text{ dá } x = \pm \sqrt[4]{16} = \pm 2.$$

$$2) x^4 = -16 \text{ „ } x = \pm \sqrt[4]{-16} = \pm 2\sqrt{-1}.$$

$$3) x^3 = 16 \text{ „ } x = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}.$$

$$4) x^3 = -16 \text{ „ } x = \sqrt[3]{-16} = -2\sqrt[3]{2}.$$

Dodatky. 1) Při řešení rovnice $x^m = a$ uvedli jsme pouze kořeny, jež určití lze některým způsobem, o němž posud bylo pojednáno. Rovnice tato má však vlastně m rozličných kořenů, z nichž jen jeden aneb dva mohou býti reálné, což dokazuje vyšší matematika. Při rovnici $x^3 - 27 = 0$ můžeme se o tom hned přesvědčiti. Jest totiž $x = \sqrt[3]{27}$, tedy nejprv 3 co kořen rovnice. Ale

$$x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9),$$

a $x^3 - 27$ bude se rovnati nulle, položíme-li jednak $x - 3 = 0$, jinak $x^2 + 3x + 9 = 0$. Z $x - 3 = 0$ plyne $x = 3$, z $x^2 + 3x + 9 = 0$ však $x = -\frac{3}{2} \pm \frac{3}{2} \sqrt{-3}$. Rovnice $x^3 - 27 = 0$ má tedy tři kořeny:

$$3, -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \sqrt{-3} \text{ a } -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \sqrt{-3}.$$

2) Poněvadž každá hodnota x , která vyhoví rovnici $x^m = a$, jest zároveň hodnotou veličiny $\sqrt[m]{a}$, bude patrné, že číslo vyjádřené touto kořenovou veličinou může mít také m rozličných hodnot, tudíž jest $\sqrt[m]{a}$ výraz o několika hodnotách. Pokud $\sqrt[m]{a}$, je-li a číslo prosté, v III. části znamenal jen prosté (celistvé, lomené aneb neracionálné) číslo, které povýšeno na m tou mocninu dá a , byl tam $\sqrt[m]{a}$ výraz o jedné hodnotě.

2. Vyšší rovnice, které lze uvést na rovnice druhého stupně.

§. 249. Vyšší rovnice, kteréž obsahují neznámou v takových dvou mocninách, že jeden mocnitel jest dvojnásobek druhého, lze vždycky uvést na rovnice druhého stupně, položíme-li nižší mocninu rovnu nové neznámé.

Úloha. Má se řešiti rovnice $x^{2m} + ax^m = b$.

Položme $x^m = y$, tedy $x^{2m} = y^2$, a obdržíme

$$y^2 + ay = b,$$

z čehož

$$y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}.$$

Nahradíme-li zde y zase hodnotou x^m , bude

$$x^m = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}, \text{ protož}$$

$$x = \sqrt[m]{-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}}.$$

Je-li m liché, dá každá reálná hodnota y čili x^m také reálnou hodnotu x . Je-li však m sudé, dají jen kladné hodnoty y reálné hodnoty x , a sice každá dvě hodnoty rovné a protivné; záporné hodnoty y dají pomyslné kořeny původní rovnice.

U př. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Položíme-li $x^2 = y$, bude $y^2 - 13y + 36 = 0$, z kteréžto rovnice

$$y = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - 36} = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2},$$

tedy $y = 9$ aneb $y = 4$. Plynou tedy

$$z \ x^2 = 9 \text{ hodnoty } x = \pm \sqrt{9} = \pm 3,$$

$$„ \ x^2 = 4 \quad „ \quad x = \pm \sqrt{4} = \pm 2.$$

§. 250. Úloha. Má se řešiti rovnice $\sqrt[m]{x} + a \sqrt[2m]{x} = b$.

Položme $\sqrt[2m]{x} = y$, tedy $\sqrt[m]{x} = y^2$, a obdržíme

$$y^2 + ay = b,$$

z čehož

$$y = \sqrt[2m]{x} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b},$$

a povýšíme-li oba díly na mocninu $2mtou$:

$$x = \left(-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} \right)^{2m}.$$

U př. $\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} = 2$.

Položíme-li $\sqrt[6]{x} = y$, bude $y^2 - y = 2$, protože

$$y = \sqrt[6]{x} = 2 \text{ a } y = \sqrt[6]{x} = -1,$$

z čehož se obdrží $x = 64$ a $x = 1$, kterážto druhá hodnota však rovnici původní nevyhovuje; kde vězí toho příčina?

3. Rovnice exponencialné.

§. 251. Exponencialné rovnice (§. 222., 2) lze ve zvláštních případech logaritmováním uvést na rovnice algebraické, které pak řešíme známým způsobem.

1) Rovnice podoby $a^x = b$.

Poněvadž k rovným veličinám náležejí rovné logaritmy, plyne z rovnice $a^x = b$ také $\log(a^x) = \log b$, čili $x \log a = \log b$, z čehož

$$x = \frac{\log b}{\log a}.$$

Máme-li u př. řešiti rovnici $5^x = 37$, bude $x \log 5 = \log 37$, protož

$$x = \frac{\log 37}{\log 5} = \frac{1.568202}{0.698970} = 2.24359.$$

2) Rovnice podoby $\sqrt[x]{a} = b$.

Logarithmováním této rovnice obdržíme $\frac{1}{x} \cdot \log a = \log b$, pročež $\log a = x \log b$, z čehož

$$x = \frac{\log a}{\log b}.$$

Z rovnice $\sqrt[x]{2} = 10$ plyne hodnota

$$x = \frac{\log 2}{\log 10} = 0.30103.$$

3) Rovnice podoby $a^{2x} + pa^x = q$.

Položíme-li $a^x = y$, obdržíme $y^2 + py = q$, tedy

$$y = a^x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}, \text{ z čehož}$$

$$x = \frac{\log \left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} \right)}{\log a}.$$

U př. Rovnice $4^{2x} + 5 \cdot 4^x = 36$ dá při $4^x = y$ $y^2 + 5y = 36$, z čehož $y = 4^x = 4$ a $y = 4^x = -9$; pročež

$$x = \frac{\log 4}{\log 4} = 1.$$

Druhá hodnota $x = \frac{\log (-9)}{\log 4}$ jest soujemná (komplex) proto, že logarithmus čísla záporného skládá se z části realné a pomyslné (imaginarné).

4) Rovnice podoby $\sqrt[x]{a} + p \sqrt[2x]{a} = q$.

Při $\sqrt[2x]{a} = y$ bude $y^2 + py = q$, z kteréžto rovnice

$$y = \sqrt[2x]{a} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}, \text{ pročež}$$

$$x = \frac{\log a}{2 \log \left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} \right)}.$$

U př.: Z rovnice $5\sqrt{x}{64} - 6\sqrt[2x]{64} = 8$ obdržíme při $\sqrt[2x]{64} = y$

$5y^2 - 6y = 8$, protože $y = 2$ a $y = -\frac{4}{5}$, načez

$$x = \frac{\log 64}{2 \log 2} = \frac{6 \log 2}{2 \log 2} = 3.$$

Druhá hodnota x jest soujemná.

Část pátá.

Posloupnosti.

§. 252. Řada čísel utvořených dle určitého pravidla slove posloupnost. Každé toto číslo jmenuje se člen posloupnosti. Číslo, udávající, na kolikátém místě stojí člen v posloupnosti, nazývá se ukazovatelem toho členu.

Posloupnost jest vzestupná aneb sestupná, jsou-li členy čím dále tím větší aneb menší.

Posloupnost jest konečná aneb nekonečná, je-li počet členů určitý aneb neurčitý.

Posloupnost prokládati znamená, mezi dva a dva po sobě jdoucí členy položití určitý počet členů, které s členy dané posloupnosti tvoří opět posloupnost téhož druhu.

I. Arithmetické posloupnosti.

§. 253. Řada, v nížto rozdíl sousedních dvou členů je tentýž, slove arithmetická posloupnost. Tento stálý rozdíl nazývá se rozdílem posloupnosti. Tak u př.

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, . . .

a 50, 47, 44, 41, 38, 35, 32, 29, . . .

jsou arithmetické posloupnosti; v první jest rozdíl 3, v druhé — 3.

1) V arithmetické posloupnosti každý člen se rovná členu prvnímu, zvětšenému součinem z rozdílu a o 1 zmenšeného ukazovatele onoho členu.

Důkaz. Značí-li vůbec a_n člen n tý a d rozdíl posloupnosti, jest

$$a_1 = a_1,$$

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_1 + 3d, \text{ a t. d.}$$

Z počátečních členů posloupnosti vysvítá tedy pravdivost věty této. Je-li však věta pravdiva při kterémkoli členu a_n , že totiž $a_n = a_1 + (n-1)d$, musí mítí platnost i o následujícím členu a_{n+1} ; neboť

$$a_{n+1} = a_n + d = a_1 + (n-1)d + d = a_1 + nd.$$

Z toho plyne obecná platnost věty hořejší.

Výraz $a_n = a_1 + (n-1)d$ slove obecný člen posloupnosti proto, že z něho lze odvoditi všechny členy posloupnosti, dosadíme-li za n pořadem 1, 2, 3, 4

2) Součet počátečních členů arithmetické posloupnosti rovná se polovičnímu počtu těchto členů, násobenému součtem členu prvního a posledního.

Důkaz. Je-li a_n ntý člen posloupnosti, tedy $a_n - d$ člen předcházející, $a_n - 2d$ opět člen tento předcházející a t. d.

Značí-li s_n součet n prvních členů, jest

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n.$$

Napíšeme-li členy v obráceném pořádku, bude také

$$s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1.$$

Poněvadž pak součet dvou a dvou členů pod sebou stojících rovná se $a_1 + a_n$, obdržíme sečtením obou výrazů:

$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n).$$

Sčítanec $a_1 + a_n$ přichází zde tolikrát, kolik členů sečítáme, t. j. n krát, protož

$$2s_n = n(a_1 + a_n),$$

z čehož

$$s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n).$$

Výraz tento slove součenný vzorec arithmetické posloupnosti.

Příklad. Má se vyhledati obecný člen a součenný vzorec posloupnosti lichých čísel 1, 3, 5, 7, 9, 11,

Poněvadž $a_1 = 1$, $d = 2$, bude

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1,$$

$$s_n = \frac{n}{2} (1 + 2n - 1) = n^2.$$

Tak u př. $a_{15} = 2 \cdot 15 - 1 = 29$, a $s_{15} = 15^2 = 225$.

§. 254. V obou rovnicích na sobě nezávislých

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \text{ a } s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

přichází pět veličin a_1 , d , n , a_n , s_n ; jsou-li z nich tři dány, lze jimi určit dvě ostatních. Takto můžeme řešiti 20 úloh rozličných.

Jsou-li u p. dány d , n a a_n , vyhledáme z rovnice prvé

$$a_1 = a_n - (n - 1)d,$$

pak z druhé

$$s_n = \frac{n}{2} \{a_n - (n - 1)d + a_n\} = \frac{n}{2} \{2a_n - (n - 1)d\}.$$

§. 255. Arithmetická posloupnost má se proložit.

Máme-li mezi dva členy a_k a a_{k+1} arithmetické posloupnosti, jejíž rozdíl jest d , vložit r členů, které s a_k a a_{k+1} tvoří opět arithmetickou posloupnost, bude a_k první, a_{k+1} však $(r + 2)$ hý člen nové posloupnosti; značí-li tedy d_1 její rozdíl, jest $a_{k+1} = a_k + (r + 1)d_1$, ale poněvadž také $a_{k+1} = a_k + d$, bude $(r + 1)d_1 = d$, z čehož

$$d_1 = \frac{d}{r + 1}.$$

Proložená posloupnost jest pak:

$$a_k, a_k + \frac{d}{r + 1}, a_k + \frac{2d}{r + 1}, \dots, a_k + \frac{rd}{r + 1}, a_{k+1}.$$

U př. V přirozené řadě čísel 1, 2, 3, 4, . . . má se mezi 2 a 3 vložit 7 členů na způsob arithmetické posloupnosti.

Zde je $d = 1$, $r = 7$, proto $d_1 = \frac{1}{8}$, a proložená posloupnost jest

$$2, 2\frac{1}{8}, 2\frac{2}{8}, 2\frac{3}{8}, 2\frac{4}{8}, 2\frac{5}{8}, 2\frac{6}{8}, 2\frac{7}{8}, 3.$$

II. Geometrické posloupnosti.

§. 256. Geometrická posloupnost jest řada, v níž podíl sousedních dvou členů jest stále tentýž. Stálý tento podíl slove udavatel posloupnosti.

$$1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, \dots$$

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}, \dots$$

jsou geometrické posloupnosti; v prvé jest udavatel 3, v druhé $\frac{1}{3}$

1) V geometrické posloupnosti každý člen se rovná prvnímu členu násobenému mocninou udavatele, jejíž mocnitel jest o 1 menší nežli ukazovatel členu.

Důkaz. Značí-li a_n člen n tý a q udavatele posloupnosti, jest

$$a_1 = a_1,$$

$$a_2 = a_1 q,$$

$$a_3 = a_1 q^2,$$

$$a_4 = a_1 q^3, \text{ a t. d.}$$

Z počátečních členů posloupnosti vysvítá již pravdivost věty hořejší. Je-li však tato věta pravdiva při některém členu a_n , že totiž $a_n = a_1 q^{n-1}$, musí míti platnost i o následujícím členu a_{n+1} ; neboť

$$a_{n+1} = a_n \cdot q = a_1 q^{n-1} \cdot q = a_1 q^n.$$

Z toho plyne obecná platnost věty hořejší; proto také výraz

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

slove obecný člen geometrické posloupnosti.

2) Součet n prvních členů geometrické posloupnosti rovná se prvnímu členu, násobenému n tou mocninou udavatele o 1 zmenšenou, a dělenému udavatelem o 1 zmenšeným.

Důkaz. Značí-li s_n součet n počátečních členů, jest tedy

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}.$$

Násobíme-li oba díly této rovnice udavatelem q , obdržíme

$$q s_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n.$$

Odečteme-li předcházející rovnici od této, bude

$$q s_n - s_n = a_1 q^n - a_1,$$

$$\text{z čehož obdržíme} \quad s_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

jakožto současný vzorec geometrické posloupnosti.

Příklad. Má se vyhledati obecný člen a současný vzorec posloupnosti 1, 3, 9, 27, 81, 243,

Zde jest $a_1 = 1$, $q = 3$, pročež

$$a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}, \quad s_n = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Tak u př. $a_{10} = 3^9 = 19683$, a $s_{10} = \frac{3^{10} - 1}{2} = 29524$.

Dodatek. Je-li geometrická posloupnost sestupná, t. j. $q < 1$, a přibývá-li n nekonečně, blíží se q^n nekonečně k nulle, součet pak k mezi

$$s = \frac{a_1}{1-q}.$$

Nechť sečteme kterýkoli počet členů sestupné posloupnosti geometrické, součet nemůže sice nikdy dosáhnouti této hodnoty, ale přiblíží se k ní tak, že rozdíl bude menší nežli kterékoli převelmi malé číslo stanovitelné. Výraz $s = \frac{a_1}{1-q}$ slove součet nekonečné sestupné posloupnosti.

U př. pro posloupnost $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$, kde $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$, bude

$$s = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2;$$

t. j. čím více členů posloupnosti sečítáme, tím více součet se blíží k číslu 2, aniž ho však dosáhne v konečnosti.

Každý občíslný zlomek desetinný lze vyjádřiti sestupnou geometrickou posloupností, jejíž součet dá hodnotu zlomku občíslného. U př.

$$0.25 = \frac{25}{10^2} + \frac{25}{10^4} + \frac{25}{10^6} + \frac{25}{10^8} + \dots = \frac{\frac{25}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{25}{99}.$$

§. 257. Rovnice

$$a_n = a_1 q^{n-1} \text{ a } s_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

obsahují pět veličin a_1, q, n, a_n, s_n ; jsou-li z nich tři dány, lze jimi určití dvě ostatních.

Jsou-li u př. dány q, n, s_n , vyhledáme z druhé rovnice

$$a_1 = \frac{s_n(q - 1)}{q^n - 1},$$

z první pak

$$a_n = \frac{q^{n-1}(q - 1)s_n}{q^n - 1}.$$

§. 258. Geometrická posloupnost má se proložití.

Vložíme-li mezi dva členy a_k a a_{k+1} geometrické posloupnosti, jejíž udavatel jest q , r členů, které s a_k a a_{k+1} tvoří opět posloupnost geometrickou, jest zde a_k prvý, a_{k+1} pak $(r+2)$ hý

člen; značí-li tedy q_1 udavatele nové posloupnosti, jest $a_{k+1} = a_k \cdot q_1^{r+1}$, ale poněvadž také $a_{k+1} = a_k \cdot q_1$ bude $q_1^{r+1} = q_1$, z čehož

$$q_1 = \sqrt[r+1]{q}.$$

Proložená posloupnost jest pak:

$$a_k, a_k \cdot \sqrt[r+1]{q}, a_k \sqrt[r+1]{q^2}, \dots, a_k \cdot \sqrt[r+1]{q^r}, a_{k+1}.$$

Máme-li u př. v posloupnosti 1, 16, 256, 4096, . . . mezi dva a dva členy vložit tři členy nové, bude $q = 16$, $r = 3$, tedy

$$q_1 = \sqrt[4]{16} = 2,$$

pročež proložená posloupnost:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, . . .

III. Složitě úrokování a počet o stálém důchodu.

§. 259. Přidáváme-li úroky z jakési jistiny ku konci jednoty časové opět k jistině a zúročíme-li je zároveň s touto, říkáme tomu složitě úrokování.

Při složitém úrokování rozeznáváme jako při jednoduchém počtu úrokovém (§. 146.) jistinu, čas, procenta a úroky. Není-li jinak ustanoveno, považujeme rok za jednotu časovou. Je-li jistina uložena na $p\%$, vzroste 100 jednotí jistiny (zlaté, marky) za jeden rok i s úroky na $100 + p$; jednotu jistiny dá tedy za jeden rok i s úroky $\frac{100 + p}{100} = 1 + \frac{p}{100}$. Hodnotu

$1 + \frac{p}{100}$, kterouž jednotu jistiny i s úroky má za jeden rok, jmenujeme číslo úrokové (míra úroková); v následujících počtech budeme je pro krátkost znamenati písmenem q .

§. 260. První základná úloha. Jistina a zúročuje se číslem úrokovým $q = 1 + \frac{p}{100}$ na úroky z úroků; nač vzroste za n roků?

Poněvadž jednotu jistiny i s úroky za 1 rok má hodnotu q , jistina a vzroste za 1 rok na

$$a_1 = a \cdot q,$$

t. j. hodnota jistiny za rok se rovná začátečné hodnotě násobené číslem úrokovým.

Zúročíme-li novou jistinu a_1 , bude její hodnota opět za rok $a_2 = a_1 \cdot q = aq^2$.

Za 3, 4, roky vzroste jistina na

$$a_3 = a_2 \cdot q = a \cdot q^3, a_4 = a_3 \cdot q = a \cdot q^4 \text{ a t. d.}$$

Ku konci n tého roku bude tedy hodnota jistiny

$$a_n = a \cdot q^n \text{ I.}$$

Řešíme-li tuto rovnici dle a , obdržíme nynější čili hotovou hodnotu jistiny a_n splatné po n letech při úrokovém čísle q

$$a = \frac{a_n}{q^n}.$$

Taktéž plynou z I. hodnoty

$$q = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a}}, \quad n = \frac{\log a_n - \log a}{\log q}.$$

Dodatky. 1) Zde jsme předpokládali, že n jest číslo celistvé. Je-li však n číslo smíšené, u př. $m + \frac{r}{s}$, musíme počítati úroky z úroků jistiny a jen při úplných m letech, za zlomek následujícího roku však jen jednoduché úroky jistiny a_m . V tom případě tedy

$$a_m = aq^m,$$

a s ohledem na §. 146., poněvadž $\frac{p}{100} = q - 1$,

$$\begin{aligned} a_m + \frac{r}{s} &= a_m + \frac{a_m(q-1)r}{s} = a_m \left\{ 1 + (q-1) \cdot \frac{r}{s} \right\} \\ &= aq^m \left\{ 1 + (q-1) \cdot \frac{r}{s} \right\}. \end{aligned}$$

2) Nepřidávají-li se úroky k jistině celoročně, nýbrž t krát za rok (půlletně, měsíčně), musíme v rovnici I. a ve vzorcích z ní odvozených místo q položit $q' = 1 + \frac{p}{100t}$, místo n pak nt .

3) Hořejších rovnic lze použiti i při jiných veličinách, které rostou v stálém poměru, u př. přibývání obyvatelů, dříví v lese a t. d.

Příklady.

1) Nač vzroste jistina 2518 zl. uložená na 5% za 12 roků při složitém úrokování?

$$a_{12} = 2518 \cdot 1.05^{12}.$$

$$\log 1.05 = 0.021189$$

$$12 \log 1.05 = 0.254268$$

$$\log 2518 = 3.401056$$

$$\log a_{12} = 3.655324 = \log 4521.93,$$

$$\text{protož } a_{12} = 4521.93 \text{ zl.}$$

2) Jaká jest nynější hodnota jistiny 1000 zl., splatné za 11 roků, je-li číslo úrokové 1.04?

$$a = \frac{1000}{1.04^{11}}.$$

$$\log 1000 = 3.000000$$

$$\log 1.04 = 0.017033$$

$$11 \log 1.04 = 0.187363$$

$$\log a = 2.812637 = \log 649.58,$$

$$\text{tedy } a = 649.58 \text{ zl.}$$

3) Za kolik roků vzroste jistina 2000 zl. na 4469 zl. 89 kr., byla-li na 4% uložena při složitém úrokování?

$$4469.89 = 2000 \cdot 1.04^n, \text{ z čehož}$$

$$n = \frac{\log 4469.89 - \log 2000}{\log 1.04} = \frac{0.349267}{0.017033} = 20.505 \dots$$

Položme $n = 20$ a vypočítejme

$$a_{20} = 2000 \cdot 1.04^{20} = 4382.24.$$

2000 zl. vzroste tedy za 20 roků při složitém úrokování na 4382.24 zl. Jak dlouho musí jistina 4382.24 zl. býti ještě uložena, aby při 4% vzrostla na 4469.89 zl., t. j. aby vynesla $4469.89 - 4382.24 = 87.65$ zl. úroků? Jednoduchým počtem úrokovým (§. 146.) bude

$$\tau = \frac{100 \cdot 87.65}{4382.24 \cdot 4} = \frac{1}{2} \text{ roku,}$$

protož $n = 20\frac{1}{2}$ roku.

§. 261. Druhá úloha základná. Na počátku aneb koncem každého roku platí se po n roků suma peněžitá r ; jakou hodnotu budou míti tyto platy v době posledního placení, počítáme-li $p\%$ při složitém úrokování?

Od prvního až do posledního placení uplyne doba $n - 1$

roků; položíme-li tedy $1 + \frac{p}{100} = q$, bude (§. 260.) v době posledního placení hodnota

$$\begin{array}{ll} 1. \text{ platu} & = rq^{n-1}, \\ 2. \text{ „} & = rq^{n-2}, \\ \dots & \dots \\ \text{„} (n-2)\text{ho} & = rq^2, \\ \text{„} (n-1)\text{ho} & = rq, \\ \text{„} \text{ntého} & = r; \end{array}$$

proto součet všech těchto hodnot

$s_n = r + rq + rq^2 + \dots + rq^{n-2} + rq^{n-1}$,
aneb s ohledem na §. 256., 2)

$$s_n = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1} \dots \text{II.}$$

Z této rovnice můžeme určit také r aneb n , jsou-li dány veličiny ostatní. Určení q přestupuje meze tohoto návodu proto, že při tom obdržíme rovnici stupně $(n + 1)\text{ho}$.

Příklady.

1) Někdo ukládá na počátku každého roku 230 marků na 5% při složitém úrokování; jakou hodnotu budou mít vklady na počátku 10. roku?

$$s_{10} = \frac{230(1.05^{10} - 1)}{0.05} = \frac{230 \cdot 0.62888}{0.05} = 2892.85 \text{ marků.}$$

2) Někdo ukládá po 15 let koncem každého pololetí jistou sumu do spořitelny; má-li tam v době posledního placení pohledávku 3292.71 zl., a zúročuje-li spořitelna při pololetním složitém úrokování na 5% ročních úroků, mnoho-li musel pokaždé uložit?

Zde jest 30 časových period a číslo úrokové = 1.025; pročez

$$3292.71 = \frac{r(1.025^{30} - 1)}{0.025}, \text{ z čehož}$$

$$r = \frac{3292.71 \cdot 0.025}{1.025^{30} - 1} = 75 \text{ zl.}$$

§. 262. Dle předcházejících dvou hlavních úloh řešiti lze všechny jiné úlohy o složitém počtu úrokovém.

Úlohy.

1) Zúročuje-li se jistina a číslem úrokovým q , a přidává-li se k ní aneb vyplácí-li se z ní koncem každého roku suma r ; jakou hodnotu bude mít tato jistina po n letech?

Koncem n tého roku jest hodnota jistiny a (dle §. 260.) aq^n , hodnota všech n peněžitých částek r , které koncem každého roku byly k jistině přidávány aneb z ní vybírány, jest (dle §. 261.) $\frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$; konečná hodnota jistiny takto zvětšené aneb zmenšené bude tedy

$$A = aq^n \pm \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Je-li v případě vybírání $r > a(q - 1)$, čili $r > aq - a$, t. j. větší nežli roční úrok jistiny a , konečná hodnota této jistiny bude rok do roku menší, až posléz bude rovna nulle.

2) Nezáročitelná jistina a jest po m letech, nezáročitelná jistina b po n letech splatná; je-li $n > m$, v kterém poměru jsou a) nynější hodnoty těchto jistin, a b) jejich hodnoty po n letech při čísle úrokovém q ?

Nynější hodnota jistiny a jest $\frac{a}{q^m}$, jistiny b však $\frac{b}{q^n}$, protož poměr obou těchto hodnot

$$\frac{a}{q^m} : \frac{b}{q^n} = aq^{n-m} : b.$$

Po n letech bude hodnota první jistiny aq^{n-m} , druhé pak b , tedy poměr těchto hodnot jako zprvu:

$$aq^{n-m} : b.$$

Dodatek. Chceme-li přirovnati dvě jistin splatných v rozličných dobách, musíme je nejprve uvéstí na tutéž dobu. Ale poněvadž poměr jejich hodnot pro každou dobu je tentýž, pokud číslo úrokové se nemění, nezáleží na tom, kterou dobu společnou volíme ku přirovnání. Obvykle vypočítáme a přirovnáme buď nynější hodnoty aneb hodnoty po uplynutí dané periody.

3) Půjčka a má se umořiti (amortisovati) ve lhůtách ročních za n roků; jaká částka r musí se ročně spláceti při úrokovém čísle q ?

Nynější hodnota všech ročních lhůt musí se rovnati dlužné jistině. Hodnota těchto n ročních lhůt, z nichžto každá $= r$, v době posledního placení, t. j. koncem n tého roku bude $\frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$; protož jejich nynější hodnota $b = \frac{r(q^n - 1)}{q^n(q - 1)}$.

Poněvadž pak musí $b = a$, bude

$$\frac{r(q^n - 1)}{q^n(q - 1)} = a, \text{ z čehož } r = \frac{aq^n(q - 1)}{q^n - 1}.$$

4) Za kolik roků zbude z jistiny 1060 zl., vypůjčené na 5% složitých úroků, ještě 167·22 zl., splácí-li se koncem každého roku 80 zl.?

Za n roků. Hodnota dluhu 1060 zl. po n letech bude $1060 \cdot 1\cdot05^n$ zl.; hodnota n ročních lhůt à 80 zl. po n letech bude $\frac{80(1\cdot05^n - 1)}{0\cdot05}$ zl.; protož musí

$$1060 \cdot 1\cdot05^n = \frac{80(1\cdot05^n - 1)}{0\cdot05} + 167\cdot22$$

z čehož

$$n = \frac{\log 71\cdot639 - \log 27}{\log 1\cdot05} = 20 \text{ rokům.}$$

§. 263. Stálý důchod a pojištění na život.

Složitého počtu úrokového užívá se zvláště při vypočítávání stálého důchodu a při pojišťování na život.

Stálý důchod (renta) jest suma, která se splácí v určitých stejných dobách (obyčejně koncem každého roku) a k jejímuž vybírání nabyli jsme práva peněžitou sumou dříve zaplacenou. Tato suma, zvaná prémie (pojistné), platí se buď najednou aneb ročně. Důchod jest obyčejně stálý, může však dle jistého zákona býti také měnlivý. Důchod slove dočasný, je-li určité ustanoven počet dob, kdy důchod se vyplácí, doživotný však, trvá-li až do smrti uživatele. Při důchodu doživotném není tedy určité vysloveno, dlouho-li jej uživatel bude přijímati; to lze udati jen s pravděpodobností dle zákonů přírody o trvání života lidského, t. j. z tabulek o smrtelnosti (§. 288.).

Smlouva, kterouž jedna ze dvou stran se zavazuje, že za jistou prémii v určitém případě, závislém na životě anebo smrti jedné aneb několika osob, vyplatí určitou jistinu nebo rentu druhé straně aneb jejím právním nástupcům, slove pojištění na život.

Úlohy.

1) Má-li se po n roků koncem každého roku spláceti důchod r , jaká jest nynější jeho hodnota při úrokovém čísle q ?

Hodnota n ročních důchodů, z nichž každý $= r$, jest koncem n tého roku $\frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$; protož nynější hodnota jejich

$$b = \frac{r(q^n - 1)}{q^n(q - 1)}.$$

2) Jaká premie musí se platiti počátkem každého roku při úrokovém čísle q , aby pojišťovací ústav po n letech vyplatil jistinu s ?

Roční premie musejí až k počátku n tého roku vzrůst na hodnotu s .

Hodnota n premií, z nichžto každá $= r$, bude na počátku n tého roku $\frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$, pročež

$$\frac{r(q^n - 1)}{q - 1} = s, \text{ a z toho } r = \frac{s(q - 1)}{q^n - 1}.$$

3) Někdo chce po m roků počátkem každého roku ukládati u pojišťovacího ústavu určitou sumu a , aby mohl v následujících n letech každého roku požívatí důchodu r ; mnoho-li musí ročně ukládati při úrokovém čísle q ?

Nynější hodnota všech premií musí se rovnati hotové hodnotě všech ročních důchodů.

Hodnota m ročních premií, z nichžto každá $= a$, na počátku m tého roku jest $\frac{a(q^m - 1)}{q - 1}$; nynější jejich hodnota tedy $A = \frac{a(q^m - 1)}{q^{m-1}(q - 1)}$.

Hodnota n ročních rent, kteréž počínají koncem $(m + 1)$ ho roku, a z nichžto každá $= r$, jest koncem $(m + n)$ tého roku $\frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$; jejich nynější hodnota tedy $R = \frac{r(q^n - 1)}{q^{m+n}(q - 1)}$. Poněvadž pak musí $A = R$, bude

$$\frac{a(q^m - 1)}{q^{m-1}(q - 1)} = \frac{r(q^n - 1)}{q^{m+n}(q - 1)}, \text{ pročež } a = \frac{r(q^n - 1)}{q^{n+1}(q - 1)}.$$

Z poslední rovnice lze také určit r , m a n , jsou-li ostatní veličiny dány.

4) Jaká jest nynější hodnota roční renty r , kteráž po n roků při úrokovém čísle q roste ročně dle posloupnosti arithmetické, jejíž rozdíl jest d ?

Renty splatné koncem jednotlivých roků jsou:

$$r, r + d, r + 2d, \dots, r + (n - 2)d, r + (n - 1)d.$$

Součet jejich hodnot koncem n tého roku jest

$$\frac{r(q^n - 1)}{q - 1} + \frac{d}{q - 1} \{ (q^n - 1) - n(q - 1) \},$$

protož jejich nynější hodnota

$$B = \frac{r(q^n - 1)}{q^n (q - 1)} + \frac{d}{q^n (q - 1)} \{ (q^n - 1) - n(q - 1) \}.$$

5) Jaká jest nynější hodnota dodatečně splatné renty r , kteráž ročně roste dle posloupnosti geometrické o udavateli α , je-li úrokové číslo q ?

Jednotlivé renty roční jsou

$$r, r\alpha, r\alpha^2, \dots, r\alpha^{n-2}, r\alpha^{n-1};$$

součet jejich hodnot koncem n tého roku jest

$$\frac{r(a^n - q^n)}{a - q},$$

pročež jejich nynější hodnota

$$B = \frac{r(a^n - q^n)}{q^n (a - q)}.$$

IV. Konvergence a divergence řad nekonečných.

§. 264. Blíží-li se v nekonečné řadě součet počátečních n členů tím více k určité konečné mezi, čím větší jest n , řada slove konvergentná (sbíhavá), a tato mez jmenuje se součet řady. Nepřibližuje-li se však součet počátečních n členů při rostoucím n k určité konečné mezi, řada slove divergentná (rozběžná) a její součet nelze určit, jelikož jest nekonečný. Nekonečná řada rozběžná v matematice nemá ceny.

Příklad. Při geometrické posloupnosti

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$

jest dle §. 256., 2) součet n počátečních členů

$$s_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Je-li $q > 1$, bude při rostoucím n také q^n vždy větší, a součet se neblíží k žádné určité konečné mezi; posloupnost je tedy rozběžná.

Při $q = 1$ jest $s_n = \frac{0}{0}$, kterýžto neurčitý výraz v tomto případě však znamená $s_n = a + a + a + \dots = a \cdot \infty$, tak že posloupnost jest opět rozběžná.

Je-li $q < 1$, tedy q^n při rostoucím n blíží se vždy více k nulle, s_n však nekonečně k určité mezi $\frac{a}{1-q}$; v tom případě posloupnost jest sbíhavá (§. 256., dod.).

Při $q = -1$ jest však $s_n = 0$ aneb $s_n = a$, buď že n jest číslo sudé aneb liché; součet neblíží se tedy při rostoucím n k určité mezi jedné, nýbrž leží neustále mezi 0 a a , pročež posloupnost jest rozběžná aneb, jak v takových to zvláštních případech pravíme, kolísavá nebo oscillující.

§. 265. Značí-li s součet nekonečné řady

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$,
 s_n součet n počátečních členů a e_n součet všech členů následujících, kterýžto poslední součet se také jmenuje doplněk řady, tedy

$$s = s_n + e_n.$$

Řada jest sbíhavá, t. j. součet s_n se blíží k určité mezi, přibližuje-li se doplněk nekonečně k nulle při nekonečném přibývání n ; to však jest jen tehdy možno, blíží-li se členy a_{n+1} , a_{n+2} , . . . nekonečně k nulle při nekonečném přibývání n .

V konvergentné řadě musejí tedy, některým členem počínaje, ostatní po sobě jdoucí členy býti čím dále tím menší. Podlé této jediné podmínky však nelze naopak souditi o konvergenční řady. Tak u př. harmonická řada

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots,$$

jejížto členy neskončeně se zmenšují, jest přece divergentná. Neboť zde

$$e_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \dots,$$

pročež

$$e_n > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n},$$

tím spíše tedy

$$e_n > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Známky konvergence a divergence.

§. 266. 1) Blíží-li se v nekonečné řadě

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$$

podíl $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ k určité mezi m tím více, čím více roste n , řada konverguje, je-li tato mez menší nežli 1.

Důkaz. Položíme-li

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = m + \alpha_n, \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = m + \alpha_{n+1}, \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} = m + \alpha_{n+2}, \dots$$

kde $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots$ dle podmínky blíží se tím více k nulle, čím více roste n , bude

$$a_{n+1} = a_n (m + \alpha_n),$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} (m + \alpha_{n+1}) = a_n (m + \alpha_n) (m + \alpha_{n+1}),$$

$$a_{n+3} = a_{n+2} (m + \alpha_{n+2}) = a_n (m + \alpha_n) (m + \alpha_{n+1}) (m + \alpha_{n+2})$$

a t. d.

Součet pak dá doplněk

$$e_n = a_n \{ (m + \alpha_n) + (m + \alpha_n) (m + \alpha_{n+1}) + \\ + (m + \alpha_n) (m + \alpha_{n+1}) (m + \alpha_{n+2}) + \dots \}$$

a roste-li n nekonečně, čím $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots$ budou nekonečně malé, výraz

$$a_n (m + m^2 + m^3 + \dots),$$

anebo, poněvadž $m < 1$,

$$a_n \cdot \frac{m}{1-m} \quad (\S. 256., \text{dod.})$$

bude mezí, k níž e_n při tom neskonečně se blíží.

Ale $\frac{m}{1-m}$ jest číslo konečné, a a_n blíží se tím více k nulle

čím více n přibývá; při rostoucím n tedy součin $a_n \cdot \frac{m}{1-m}$ a proto též doplněk e_n neskonečně se blíží k nulle, řada jest tudíž konvergentná.

2) Blíží-li se v řadě

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$$

podíl $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ k určité mezi m tím více, čím více roste n , řada diverguje, je-li tato mez ≥ 1 .

Důkaz. Shledáme jako v 1), že mezí doplňku e_n jest výraz

$$a_n (m + m^2 + m^3 + \dots),$$

kterážto mez však při rostoucím n nemůže se blížit k nulle proto, že $m \geq 1$; tudíž jest řada divergentná.

3) Nekonečná řada se střídavě kladnými a zápornými členy jest konvergentná, zmenšují-li se členy do nekonečna.

Je-li dána řada

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_n - a_{n+1} + a_{n+2} - a_{n+3} + \dots$$

doplňk jest

$$e_n = \pm \{a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \dots\}$$

aneb též

$$e_n = \pm \{(a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \dots\}.$$

Poněvadž však členy neustále se zmenšují, uzávorkované rozdíly jsou vesměs kladné; prostá hodnota e_n jest tedy menší nežli a_{n+1} , a větší nežli $a_{n+1} - a_{n+2}$, proto přibýváním n , při němž členů a_{n+1} a a_{n+2} nekonečně ubývá, tato hodnota neskončeně blíží se k nulle — řada je tudíž konvergentná.

Příklady.

$$1) 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} + \\ + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)n} + \dots$$

$$\frac{a_{n+1}}{a^n} = \frac{1}{n}.$$

Podíl $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ při rostoucím n neskončeně se blíží k nulle, řada jest tedy konvergentná.

$$2) 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n-1}{n} x = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x.$$

Podíl $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ při rostoucím n neskončeně se blíží k x ; daná řada tedy konverguje při $x < 1$, a diverguje při $x \geq 1$.

3) Řada $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$ jest sbíhavá proto, že členy střídavě jsou kladné a záporné do nekonečna se zmenšují.

Část šestá.

Nauka o kombinacích.

I. Přestavování, sestavování a obměňování.

§. 267. Kombinovati čili sestavovati v nejširším smyslu slova znamená, dané věci pravidelně seřadovati v skupiny. Jednotlivé věci slovou prvky, skupiny z nich sestavené soujmy (komplexe).

Soujmy písemně představíme nejvhodněji, označíme-li prvky číslky v přirozeném pořádku po sobě jdoucími; číslům těm řekáme ukazovatelé. Tito udávají pořad prvků; jest pak prvek vyšší, jenž má většího ukazovatele. Ze dvou soujmů jest vyšší ten, v němž od levé ku pravé dříve shledáme prvek vyšší; u př. soujem 1342 jest vyšší nežli 1324. Nejnižší soujem jest ten, v němžto žádný prvek vyšší nestojí před nižším, prvky tedy v přirozeném pořádku po sobě následují; nejvyšší jest soujem, v němžto žádný nižší prvek nestojí před vyšším, všechny prvky přicházejí tedy v pořádku obráceném.

Označíme-li prvky písmeny, bude vyšší prvek ten, jenž v abecedě později přichází.

Všecky soujmy co do podstaty tvoříme přesazováním aneb spojováním. Při přesazování máme zřetel k rozličnému spořádání daných prvků, při spojování však výběr určitého počtu prvků. Neohlédáme-li se jenom na počet a výběr prvků, nýbrž zároveň na jejich spořádání, přichází spojování spolu s přesazováním.

Rozeznáváme tedy trojí kombinování: přestavování (permutování), sestavování čili kombinování v užším smyslu slova a obměňování (variování).

Při každém tomto výkonu jest pak úloha dvojí: 1) z daných prvků tvořiti všechny soujmy a 2) určití počet všech soujmů.

1. Přestavování.

§. 268. Přestavovati znamená, dané prvky všemožným způsobem přesazovati tak, aby v každém soujmu všechny prvky přicházely.

Počet všech možných přestav o n prvcích značí se P počet přestav o jmenovaných prvcích, u př. a, b, b, c pak $P(abbc)$.

§. 269. Máme-li z několika daných prvků utvořiti všechny možné přestavy, napišme nejprve nejnižší soujem z daných prvků, odvoďme z něho nejbližší vyšší soujem, z toho opět nejbližší vyšší a t. d., až přijdeme ku přestavě nejvyšší. Z každého již stávajícího soujmu obdržíme však soujem nejbližší vyšší, vyhledáme-li v něm od levé ku pravé prvek, jež vyměníme za následující prvek nejbližší vyšší; všechny prvky v levo předcházející píšeme v nezměněném, ostatní pak v přirozeném pořádku. U př.

123	abbbc	babbc	bbabc	bcabb	cabbb
132	abccb	babcb	bbacb	bcbab	cbabb
213	abcbb	bacbb	bbbac	bcbbba	cbbab
231	acbbb		bbbca		cbbba
312			bbcab		
321			bbcba		

§. 270. Počet přestav určí se takto: 1) Přidáme-li k n prvkům, z nichž utvořeny jsou všechny možné přestavy, ještě prvek jeden, může tento nový prvek do každé dřívější přestavy položen býti na místo první, druhé, . . . aneb $(n + 1)$ ní, tedy na $(n + 1)$ rozličné místo, čím z $(n + 1)$ prvku vznikne $(n + 1)$ krátě tolik přestav, kolik jsme jich utvořili z n prvků. Protož

$$P_{n+1} = P_n \cdot (n + 1).$$

Poněvadž pak jeden prvek dá jedinou přestavu, t. j.

$$P_1 = 1, \text{ bude}$$

$$P_2 = 1 \cdot 2,$$

$$P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\text{vůbec} \quad P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n - 1)n;$$

t. j. počet přestav z několika rozličných prvků rovná se součinu přirozených čísel od 1 až do čísla, vyjadřujícího počet prvků.

Součin $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n-1)n$ slove n tá faktoriela jedničky a píše se $n!$ Protož

$$P_2 = 2!, P_3 = 3!, \dots P_n = n!$$

2) Přichází-li mezi n danými prvky p rovných, považujeme tyto prozatím za různé; počet všech možných přestav jest pak $n!$. Rozdělíme-li tyto přestavy tak, že přestavy jednoho oddělení liší se jen vzájemným postavením oněch p prvků, ostatní prvky však svá místa nemění; v každém takovém oddělení bude tolik přestav, kolik jich z p prvků lze utvořit, tedy $p!$. Považujeme-li nyní prvky, které jsme zprvu měli za různé, opět vesměs za rovné, bude z $p!$ přestav každého oddělení jediná přestava; z $n!$ přestav splyne jich vždy $p!$ v jedinou, tudíž obdržíme jen $\frac{n!}{p!}$ přestav různých.

Je-li mezi danými n prvky mimo p rovných prvků ještě q jiných prvků rovných, soudíme opět podobným způsobem; bude tedy počet všech různých přestav $\frac{n!}{p! q!}$.

3) Přichází-li mezi n danými prvky $(n-k)$ prvků rovných, a je-li ostatních k prvků také vespolek rovných, jako u př. v součinu $a^{n-k} b^k$, bude počet přestav

$$\frac{n!}{(n-k)! k!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-k) (n-k+1) \dots (n-2) (n-1) n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-k) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}$$

Dělíme-li čitatele i jmenovatele tohoto zlomku součinem $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-k)$, a píšeme-li v čitateli zbývající činitele v obráceném pořádku, obdržíme

$$\frac{n!}{(n-k)! k!} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}$$

Tento zlomek, jehož číselník jest součin k činitelů, z nichž první jest n a každý následující o 1 menší, a jehož jmenovatel jest též součin k činitelů, od 1 v přirozené řadě postupujících, jmenuje se k tá dělená a sestupná faktoriela čísla n , kterouž vyjadřujeme význakem $\binom{n}{k}$ a čteme: n nad k . Protož

$$P(a^{n-k} b^k) = \frac{n!}{(n-k)! k!} = \binom{n}{k}.$$

2. Sestavování.

§. 271. Sestavovati v užším smyslu znamená, dané prvky spojovati tak, aby každý soujem obsahoval týž určitý počet daných prvků, při čemž však považujeme jen takové soujmy za rozličné, které neobsahují prvky tytéž. Soujmy slovou sestavy čili kombinace druhé, třetí, čtvrté, . . . třídy, aneb také amba, terna, kvaterna a t. d., přicházejí-li v nich dva, tři, čtyry, . . . prvky. Prvky samy lze považovati za sestavy první třídy čili uniony (extrata).

Mimo to rozeznáváme sestavy bez opakování a s opakováním, jsou-li v nich totiž všechny prvky rozličné, anebo přichází-li v nich ten neb onen prvek několikrát.

Počet všech možných sestav r té třídy o n prvcích bez opakování naznačuje se znakem C_n^r , počet sestav s opakováním pak znakem $C_n^{0,r}$.

§. 272. 1) Chceme-li z daných prvků sestaviti všecka amba bez opakování, spojme každý prvek s každým prvkem vyšším.

Jsou-li pak utvořeny sestavy určité třídy, obdržíme z nich sestavy nejbližší vyšší třídy, postavíme-li každý prvek před každou dřívější sestavu, obsahující pouze prvky vyšší.

Z prvků b, c, d, e obdržíme tedy následující

amba bez opakování:

$bc, bd, be;$

$cd, ce;$

$de;$

terna bez opakování:

$bcd, bce, bde;$

$cde;$

a t. d.

2) Máme-li z několika daných prvků sestaviti všecka amba s opakováním, spojme každý prvek s sebou samým a pak s každým prvkem vyšším.

Jsou-li pak utvořeny sestavy některé třídy, obdržíme z nich všechny sestavy nejbližší vyšší třídy, postavíme-li každý prvek před každou dřívější sestavu, v nížto nepřicházejí prvky nižší.

Prvky a, b, c, d dají tedy následující

amba } $aa, ab, ac, ad;$
s opa- } $bb, bc, bd;$
ková- } $cc, cd;$
ním } $dd;$

terna	aaa, aab, aac, aad, abb, abc, abd, acc, acd, add;
s opa-	bbb, bbc, bbd, bcc, bcd, bdd;
ková-	ccc, ccd, cdd;
ním	ddd;

a t. d.

Dodatek. Sestavy s opakováním se zjednoduší, považujeme-li je za součiny. U př. prvky a, b dají následující takové sestavy s opakováním

v třídě druhé: a^2, ab, b^2 ;

„ „ třetí: a^3, a^2b, ab^2, b^3 ;

„ „ čtvrté: $a^4, a^3b, a^2b^2, ab^3, b^4$;

„ „ „

„ „ nté: $a^n, a^{n-1}b, a^{n-2}b^2, \dots, ab^{n-1}, b^n$.

§. 273. Počet sestav bez opakování. Spojíme-li každý z n daných prvků s každým ostatním $(n-1)$ prvkem, obdržíme každé ambo dvakrát, u př. ambo ab , spojíme-li a s b aneb b s a . Poněvadž tedy nabudeme $n(n-1)$ amb po dvou si rovných, jest počet všech rozličných amb o n prvcích

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}.$$

Máme-li vůbec všechny sestavy r té třídy bez opakování C_n^r , a spojíme-li s každou touto kombinací každý z ostatních $(n-r)$ prvků v ní nepřícházejících, obdržíme $C_n^r (n-r)$ sestav, čili všechny sestavy $(r+1)$ ní třídy, a sice každou $(r+1)$ krát proto, že pokaždé r jiných prvků jejích lze spojit s prvkem $(r+1)$ ním; počet všech rozličných sestav o n prvcích v $(r+1)$ ní třídě jest tedy

$$C_n^{r+1} = C_n^r \cdot \frac{n-r}{r+1}.$$

Ale poněvadž

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2},$$

bude

$$C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \text{ pročež}$$

$$C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \text{ a t. d. vůbec}$$

$$C_n^r = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+2)(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r-1) \cdot r}.$$

Počet sestav r té třídy o n prvcích bez opakování rovná se tedy r té dělené a sestupné faktorielle čísla n (§. 270., 3); pročež

$$C_n^2 = \binom{n}{2}, C_n^3 = \binom{n}{3}, \dots C_n^r = \binom{n}{r}.$$

§. 274. Počet sestav s opakováním. Je-li dáno n prvků, a spojíme-li každý prvek s sebou samým a pak se všemi n prvky, obdržíme $n(n+1)$ sestav, t. j. všechna amba s opakováním, a sice každé ambo dvakrát. Počet všech amb s opakováním jest tedy $\frac{n(n+1)}{2}$.

Jsou-li vůbec utvořeny všechny kombinace r té třídy o n prvcích s opakováním, a spojíme-li s každou z těchto $C_n^{0,r}$ sestav nejprve každý z r prvků, v sestavě přicházejících a pak každý z n prvků: obdržíme $C_n^{0,r} \cdot (n+r)$ sestav, čili všechny kombinace $(r+1)$ ní třídy s opakováním, a sice každou takovou kombinaci $(r+1)$ krát proto, že pokaždé r jiných prvků jejích lze spojití s prvkem $(r+1)$ ním; protož

$$C_n^{0,r+1} = C_n^{0,r} \cdot \frac{n+r}{r+1}.$$

Jest však

$$C_n^{0,2} = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2},$$

protož

$$C_n^{0,3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$C_n^{0,4} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \text{ a t. d., vůbec}$$

$$C_n^{0,r} = \frac{n(n+1)(n+2) \dots (n+r-2)(n+r-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r-1) \cdot r}.$$

Tento zlomek, jehož arithmetický tvar jest zajisté přehledný, slove r tá dělená a vzestupná faktoriela čísla n .

Dodatek. Píšeme-li činitele v čitateli posledního zlomku v obráceném pořádku, tedy

$$C_n^{0,r} = \frac{(n+r-1)(n+r-2) \dots (n+2)(n+1)n}{1 \cdot 2 \dots (r-2) \cdot (r-1) \cdot r}.$$

Počet sestav r té třídy o n prvcích s opakováním rovná se tedy také r té dělené a sestupné faktorielle čísla $(n + r - 1)$; protož

$$C_n^{0,2} = \binom{n+1}{2}, C_n^{0,3} = \binom{n+2}{3}, \dots, C_n^{0,r} = \binom{n+r-1}{r}.$$

3. Obměňování. *variační*

§. 275. Obměňovati znamená, dané prvky spojovati tak, aby každý soujem obsahoval týž určitý počet daných prvků, při čem však považujeme za rozličné i takové soujmy, v nichž tytéž prvky přicházejí v rozličném pořadu. Obměny jsou tedy přestavené sestavy.

Jako sestavy rozeznáváme i obměny první, druhé, třetí . . . třídy, pak obměny bez opakování a s opakováním.

Počet všech možných obměn o n prvcích v r té třídě bez opakování naznačí se V_n^r , počet obměn s opakováním však $V_n^{0,r}$.

§. 276. Obměny určité třídy obdržíme, jestliže z daných prvků utvoříme všechny kombinace téže třídy a každou kombinaci pak přestavujeme. Obměny však také bezprostředně lze utvořiti.

1) Máme-li dané prvky v druhé třídě obměňovati bez opakování, postavíme každý prvek před každý z prvků ostatních.

Jsou-li pak utvořeny obměny vůbec některé třídy bez opakování, obdržíme obměny nejbližší vyšší třídy, postavíme-li každý prvek před každou dřívější obměnu, v níž tento prvek nepřichází.

Tak u př. prvky 1, 2, 3, 4 dají následující obměny bez opakování

v 2. třídě:

12, 13, 14;

21, 23, 24;

31, 32, 34;

41, 42, 43;

v 3. třídě:

123, 124, 132, 134, 142, 143;

213, 214, 231, 234, 241, 243;

312, 314, 321, 324, 341, 342;

412, 413, 421, 423, 431, 432;

a t. d.

2) Chceme-li z několika daných prvků utvořiti obměny druhé třídy s opakováním, spojme každý prvek s ním samým a postavme jej pak před každý prvek ostatní.

Z obměn některé třídy s opakováním obdržíme pak obměny nejbližší vyšší třídy, postavíme-li každý prvek před každou dřívější obměnu.

Prvky a a b dají následující variace s opakováním

v 2. třídě:

aa, ab;

ba, bb;

v 3. třídě:

aaa, aab, aba, abb;

baa, bab, bba, bbb;

ve 4. třídě:

aaaa, aaab, aaba, aabb, abaa, abab, abba, abbb;

baaa, baab, baba, babb, bbaa, bbab, bbba, bbbb;

a t. d.

§. 277. Počet obměn bez opakování. Počet sestav o n prvcích v r té třídě bez opakování jest $\binom{n}{r}$; z každé takovéto kombinace lze přestavováním r prvků utvořiti $r!$ obměn r té třídy bez opakování; pročež

$$V_n^r = \binom{n}{r} \cdot r! = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+2)(n-r+1).$$

§. 278. Počet obměn s opakováním. Je-li dáno n prvků, každý z nich dá n obměn druhé třídy s opakováním; bude tedy počet všech obměn n^2 .

Ze známého počtu všech obměn r té třídy o n prvcích s opakováním obdržíme pak, poněvadž každá tato variace spojením se všemi n prvky dá n obměn $(r+1)$ ní třídy,

$$V_n^{0,r+1} = V_n^{0,r} \cdot n.$$

$$\text{Ale } V_n^{0,2} = n^2, \text{ tedy } V_n^{0,3} = n^3, V_n^{0,4} = n^4, \text{ vůbec pak} \\ V_n^{0,r} = n^r.$$

II. Počet (pravdě-) podobnosti.

§. 279. Prostá podobnost. Je-li z několika rovně možných případů několik příznivých, t. j. takových, které si přejeme, jsou-li tedy ostatní nepříznivé, slove poměr počtu všech případů příznivých k počtu všech případů jedině a rovně možných mathematická (pravdě-) podobnost pro případy příznivé.

Značí-li a počet případů příznivých, b počet případů nepříznivých, tedy $a + b$ počet všech případů jedině a rovně možných, konečně p mathematickou podobnost pro případy příznivé, bude

$$p = \frac{a}{a+b}.$$

Čím větší jest a , t. j. čím více případů příznivých, tím větší bude podobnost pro případy příznivé; jsou-li všechny případy příznivé, tedy $b = 0$, protož bude jisto, že příznivý případ se přihodí, a

$$p = \frac{a}{a} = 1,$$

což jest mathematický význak jistoty.

Čím méně příznivých případů, tím menší jest podobnost; není-li případu příznivého, nemůže se případ přihoditi, bude tedy při $a = 0$ mathematický význak nemožnosti

$$p = \frac{0}{b} = 0.$$

Říkáme vůbec, že případ jest pravdě podobný, je-li $p > \frac{1}{2}$, nejistý při $p = \frac{1}{2}$, a pravdě nepodobný, je-li $p < \frac{1}{2}$.

Podobnost, že případ se nepřihodí, slove protivná. Podobnost protivnou vyjadřujeme zlomkem, jehož číselník jest počet všech případů nepříznivých, jmenovatel pak počet všech případů jedině a rovně možných. Označíme-li protivnou podobnost p' , tedy

$$p' = \frac{b}{a+b}, \text{ pročež } p + p' = \frac{a+b}{a+b} = 1;$$

t. j. součet podobností pro případ příznivý a nepříznivý rovná se jednotě, t. j. jistotě, což se samo sebou rozumí, poněvadž jest jisto, že onen případ buď se přihodí aneb nepřihodí.

$$Z\ p + p' = 1 \text{ plyne } p' = 1 - p.$$

Příklady. Máme-li dvě kostky A a B, na jejichžto stěnách pořadem jsou naznačena čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, budou s ohledem na čísla, oběma kostkami zároveň vržená, následující případy jedině a rovně možné:

A,B	A,B	A,B	A,B	A,B	A,B
1,1	2,1	3,1	4,1	5,1	6,1
1,2	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2
1,3	2,3	3,3	4,3	5,3	6,3
1,4	2,4	3,4	4,4	5,4	6,4
1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6

Případů jediné a rovně možných jest tudíž 36.

a) Do součtu 5 můžeme dvěma kostkami vrhnouti 4krát, totiž: 1, 4; 2, 3; 3, 2; 4, 1. Podobnost, že vrhne do součtu 5, jest tedy $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Tomuto výrazu, znamenajícímu, že v 9ti vrzích jednou vrhne do součtu 5, nesmíme však rozuměti tak, jako bychom v 9ti prvních vrzích právě jednou museli vrhnouti součtem 5; snad ani do součtu toho nevrhne, anebo právě jen jednou, aneb snad vícekrát. Ale vrhne-li mnohokrát, poměr počtu vrhů, jimiž vrhne do součtu 5, k počtu veškerých vrhů bude se tím více blížit k poměru 1 : 9, čím déle ve hře pokračujeme. Skutečný výsledek se tím více přiblíží k podobnosti vyjádřené čísla, čím větší jest počet pokusů, a v tomto smyslu třeba jest vždy ponímati podobnost matematickou.

Podobnost, že nevrhne do součtu 5, jest $1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

b) Podobnost, že vrhne čísla 3 a 5, jest $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$, poněvadž jest jenom dvě případy příznivých: 3, 5; 5, 3.

c) Podobnost, že vrhne dvě rovná čísla (paš), jest $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

§. 280. Vztažitá podobnost. Posud byla vzata v uvážení prostá podobnost, t. j. měli jsme zřetel k jedinému případu; naproti té jest podobnost vztažitá, která se vztahuje na přirovnání dvou určitých případů. Z možných případů při vztažené podobnosti uvažujeme jen ty, které jsou příznivy buď jednomu aneb druhému z obou případů, všech ostatních si však nevšímáme.

Může-li se vůbec přihoditi s rozličných případů, a přirovnáme-li jen případy A a B, jimž jest m a n případů příznivých, bude vztažitá podobnost P pro první případ $\frac{m}{m + n}$, a vztažitá podobnost P' pro druhý případ $\frac{n}{m + n}$.

Vztažitou podobnost lze také odvoditi z podobnosti prosté. Značí-li p a p' prosté podobnosti pro případy A a B, bude

$$P = \frac{m}{m + n} = \frac{\frac{m}{s}}{\frac{m}{s} + \frac{n}{s}} = \frac{p}{p + p'},$$

$$P' = \frac{n}{m + n} = \frac{\frac{n}{s}}{\frac{m}{s} + \frac{n}{s}} = \frac{p'}{p + p'}.$$

Vztažitá podobnost nějakého případu rovná se tedy podílu z podobnosti prosté onoho případu a ze součtu prostých podobností obou případů.

U př. V nádobě jest 18 kuliček, mezi nimiž 4 bílé, 6 modrých a 8 červených. Prostá podobnost,

že vytáhneme kuličku bílou, jest $\frac{4}{18}$,

„ „ „ červenou „ $\frac{8}{18}$,

pročež podobnost vztažitá, že vytáhneme

spíše kuličku bílou nežli červenou, $\frac{\frac{4}{18}}{\frac{4}{18} + \frac{8}{18}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$,

spíše kuličku červenou nežli bílou, $\frac{\frac{8}{18}}{\frac{4}{18} + \frac{8}{18}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Podobnost složitá.

§. 281. Spočívá-li určení podobnosti nějakého případu na vypočítání několika jednoduchých podobností, slove takováto podobnost složitá. Tato jest dvojí: buď z několika případů se může přihoditi jenom jediný, t. j. případy vzájemně se vylučují, aneb dvě či více případů spojených má se přihoditi současně aneb po sobě.

§. 282. Podobnost jednoho z několika případů vzájemně se vylučujících.

Je-li s počet všech jedině a rovně možných případů, z nichž jest m příznivých případů A, n případů B, q případů C, . . . tedy $m + n + q$ příznivých, že se přihodí některý z případů A, B, C, . . . , a naznačíme-li prosté podobnosti těchto případů p' , p'' , p''' , . . . , složitou podobnost, že se přihodí některý z těchto případů, P, bude

$$p' = \frac{m}{s}, p'' = \frac{n}{s}, p''' = \frac{q}{s}, \dots$$

pročež
$$P = \frac{m + n + q + \dots}{s} = \frac{m}{s} + \frac{n}{s} + \frac{q}{s} + \dots$$

aneb
$$P = p' + p'' + p''' + \dots$$

t. j. složitá podobnost, že se přihodí některý z případů vzájemně se vylučujících, rovná se součtu prostých podobností jednotlivých případů.

U př. Prostá podobnost, že z 32 karet vytáhneme

coeur-figuru, jest $\frac{3}{32}$,

coeur-kartu, která není figura, jest . . $\frac{5}{32}$,

carreau-figuru, jest $\frac{3}{32}$,

carreau-kartu, která není figura, jest . $\frac{5}{32}$.

Protož bude podobnost, že vytáhneme

coeur-kartu vůbec $\frac{3}{32} + \frac{5}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$,

červenou figuru vůbec $\frac{3}{32} + \frac{3}{32} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$,

červenou kartu, která není figura, . $\frac{5}{32} + \frac{5}{32} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$,

červenou kartu vůbec $\frac{3}{32} + \frac{5}{32} + \frac{3}{32} + \frac{5}{32} = \frac{1}{2}$.

§. 283. Podobnost, že několik případů se přihodí současně. Budiž P podobnost, že současně se přihodí případy A a B; je-li onomu m' příznivých a n' nepříznivých případů, tomuto však m'' příznivých a n'' nepříznivých, budou prosté podobnosti případů A a B:

$$p' = \frac{m'}{m' + n'}, p'' = \frac{m''}{m'' + n''}.$$

Poněvadž pak každý z m' případů příznivých A může se současně přihoditi s každým z m'' případů příznivých B, jest $m'm''$ případů příznivých pro současné A a B. Počet všech možných případů jest $(m' + n')(m'' + n'')$ proto, že každý z $(m' + n')$ případů při A možných s každým z $(m'' + n'')$

možných případů při B může se přihoditi. Bude tedy podobnost, že případy A a B přihodí se zároveň,

$$P = \frac{m'm''}{(m' + n')(m'' + n'')} = \frac{m'}{(m' + n')} \cdot \frac{m''}{(m'' + n'')} = p' \cdot p''.$$

Jsou-li p' , p'' , p''' , prosté podobnosti jednotlivých případů A, B, C, . . . , bude podobnost, že všechny tyto případy přihodí se současně :

$$P = p'p''p''' \dots$$

t. j. podobnost, že několik případů přihodí se současně, rovná se součinu prostých podobností jednotlivých případů.

U př. 32 karty jsou dle barev rozděleny na 4 hromádky; jaká jest podobnost, že vytáhneme coeur-krále ?

Podobnost, že sáhneme nejprve na hromádku coeurovou, jest $\frac{1}{4}$; podobnost, že z této hromádky vytáhneme krále, jest $\frac{1}{8}$, pročež podobnost, že oba tyto případy se přihodí současně, bude $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$.

§. 284. Podobnost, že týž případ opět se přihodí. Je-li p prostá podobnost nějakého případu, bude podobnost, že tento případ přihodí se dva-, tři-, čtyry-, . . . r krát po sobě,

$$\begin{aligned} p_2 &= p \cdot p = p^2, \\ p_3 &= p \cdot p \cdot p = p^3, \\ p_4 &= p \cdot p \cdot p \cdot p = p^4, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ p_r &= \underbrace{p \cdot p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_{r\text{krát}} = p^r; \end{aligned}$$

t. j. podobnost, že případ se přihodí několikrát po sobě, rovná se tolikáté mocnině jednoduché podobnosti, kolikrát případ má se přihoditi.

U př. Jaká jest podobnost, že dvěma kostkami třikrát po sobě vrhneme do součtu 7?

Podobnost, že vrhneme jednou součtem 7, jest $\frac{1}{6}$, tedy podobnost, že třikrát po sobě vrhneme do součtu 7, bude

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}.$$

Má-li se případ opětně přihoditi, často se stává, že pokaždé, kdy se stal případ, počet možných i příznivých případů o 1 se zmenší. Je-li tedy $\frac{m}{s}$ podobnost, že případ přihodí se jednou, tedy bude podobnost, že případ se přihodí r krát,

$$p_r = \frac{m}{s} \cdot \frac{m-1}{s-1} \cdot \frac{m-2}{s-2} \cdots \frac{m-r+1}{s-r+1}.$$

U př. V nádobě jest 8 bílých a 6 černých kuliček; jaká jest podobnost, že 4krát po sobě vytáhneme bílou kuličku, nedáme-li žádnou vytaženou kuličku opět do nádoby?

$$\frac{8}{14} \cdot \frac{7}{13} \cdot \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{10}{143}.$$

§. 285. Podobnost pro rozličné kombinace několika případů. Je-li s jediné a rovně možných případů, z nichž jest m' příznivých případů A, a m'' příznivých případů B, a značí-li p' a p'' prosté podobnosti případů A a B, tedy

$$p' = \frac{m'}{s}, \quad p'' = \frac{m''}{s}.$$

Jest pak podobnost,

- že A se přihodí p' ,
 „ A se nepřihodí $1 - p'$,
 „ B se přihodí p'' ,
 „ B se nepřihodí $(1 - p'')$,
 „ A se přihodí, nikoli B $p' (1 - p'')$,
 „ A se nepřihodí, nýbrž B $(1 - p') p''$,
 „ A i B se přihodí $p' p''$,
 „ A i B současně se nepřihodí $1 - p' p''$,
 „ ani A ani B se nepřihodí $(1 - p') (1 - p'')$,
 „ se přihodí buď A anebo B $1 - (1 - p') (1 - p'')$.

Známe-li prosté podobnosti p' , p'' , p''' případů A, B, C, lze tímž způsobem určití podobnost každé kombinace, která jest možna s ohledem na to, že tyto tři případy vzájemně se přihodí aneb nepřihodí. Tak u př. vyjádříme podobnost, že z těchto tří případů aspoň jeden se přihodí, výrazem

$$1 - (1 - p') (1 - p'') (1 - p''').$$

U př. Jaká jest podobnost, že dvěma kostkami ne-li po prvé tedy aspoň po druhé vrhneme součtem 9?

Zde $p' = \frac{1}{9}$ a $p'' = \frac{1}{9}$, protože hledaná podobnost

$$1 - (1 - p')(1 - p'') = 1 - \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9} = \frac{17}{81}.$$

Mathematická naděje a řádné sázky.

§. 286. Můžeme-li něco fysického získati aneb vyhrati, přihodí-li se určitý případ, má zisk aneb výhra před tím hodnotu, kterážto závisí na větší aneb menší podobnosti toho případu; tuto hodnotu nazýváme mathematickou nadějí. Stane-li se případ skutečně, můžeme i před tím nadíti se plného zisku aneb výhry. Je-li a příznivých a b nepříznivých příčin, na nichžto závisí, přihodí-li se případ čili nic, tedy se případ nestane jistotně nýbrž jen a krát v $(a + b)$ případech; proto také nelze se nadíti úplné výhry, nýbrž jen tolikáté části její hodnoty, kolik udává podobnost p , že vyhrájeme. Značí-li tedy e mathematickou nadějí a v výhru, jest

$$e = \frac{a}{a + b} \cdot v = pv,$$

t. j. mathematická naděje rovná se součinu výhry a podobnosti její.

U př. Někdo sadí 1 zl. na dvě čísel do loterie, obsahující 90 čísel; kdyby obě čísla byla vytažena, vyhrál by 240 zl., jak velká jest jeho mathematická naděje?

Podobnost, že v pěti číslech vyjdou dvě, jest $\frac{10}{4005} = \frac{2}{801}$,

protož $e = \frac{2}{801} \cdot 240 = \frac{480}{801} = \frac{160}{267}$ zl.

§. 287. Při pojištění, sázce a hře o peníze sadí se určitá suma a v příznivém případě určitá suma se vyhraje. Má-li pak sázka naproti očekávané výhře spočívat na správném základě, musí mathematická naděje hráče míti tutéž hodnotu jako jeho sázka. Zásada, na nížto každé řádné pojištění a každá řádná hra o peníze spočívá, je tudíž:

Sázka musí se rovnati mathematické naději.

Sázku tedy vyjádříme týmž vzorcem, jako mathematickou

nadějí, totiž $e = pv$, z čehož $v = \frac{e}{p}$.

Značí-li e' a e'' sázky dvou hráčů, jejichž podobnosti, že vyhraje v , jsou p' a p'' , tedy

$$e' = p'v \text{ a } e'' = p''v,$$

pročež

$$e' : e'' = p' : p'',$$

t. j. sázky musejí býti srovnalostné s podobnostmi pro výhru.

U př. A se sadí s B, že dvěma kostkami vrhne dvě rovná čísla. Podobnost, že vyhraje A, jest $\frac{1}{6}$, že vyhraje B, $\frac{5}{6}$; sázky musejí tedy býti v poměru $\frac{1}{6} : \frac{5}{6}$ čili 1 : 5, t. j. B musí saditi 5kráté tolik co A.

Podobnost s ohledem na věk lidský.

§. 288. Přirovnáním listin, v nichžto na četných místech po mnohá leta zaznamenávali se lidé zemřelí, sestaveny byly tabulky, kteréž udávají, mnoholi osob současně narozených po určitém počtu roků jest ještě na živu. Uvedeme zde Süssmilch-Baumannovu tabulku smrtelnosti, vztahující se na 1000 osob současně narozených, a naznačíme v ní stáří osob písmenem a , počet osob v tom stáří ještě žijících a_n , a m_n jich střední věk, jenž pak v §. 291. bude vysvětlen.

n	a_n	m_n	n	a_n	m_n	n	a_n	m_n	n	a_n	m_n
0	1000	28.5	25	466	31.8	50	300	17.0	75	69	6.8
1	750	36.7	26	461	31.1	51	291	16.5	76	62	6.5
2	661	40.7	27	456	30.5	52	282	16.0	77	55	6.2
3	618	42.5	28	451	29.8	53	273	15.5	78	49	5.9
4	593	43.3	29	445	29.2	54	264	15.0	79	43	5.7
5	579	43.3	30	439	28.6	55	255	14.5	80	37	5.5
6	567	43.2	31	433	28.0	56	246	14.0	81	32	5.3
7	556	43.1	32	427	27.4	57	237	13.5	82	28	5.0
8	547	42.8	33	421	26.7	58	228	13.0	83	24	4.8
9	539	42.4	34	415	26.1	59	219	12.6	84	20	4.6
10	532	41.9	35	409	25.5	60	210	12.2	85	17	4.3
11	527	41.3	36	402	24.9	61	201	11.6	86	14	4.1
12	523	40.7	37	395	24.4	62	192	11.1	87	12	3.8
13	519	40.0	38	388	23.8	63	182	10.7	88	10	3.4
14	515	39.3	39	381	23.2	64	172	10.3	89	8	3.1
15	511	38.6	40	374	22.6	65	162	9.9	90	6	3.0
16	507	37.9	41	367	22.1	66	152	9.5	91	5	2.5
17	503	37.2	42	360	21.5	67	142	9.1	92	4	2.0
18	499	36.5	43	353	20.9	68	132	8.8	93	3	1.5
19	495	35.8	44	346	20.3	69	122	8.5	94	2	1.0
20	491	35.0	45	339	19.7	70	112	8.2	95	1	0.5
21	486	34.4	46	332	19.1	71	103	7.9	96	0	0.0
22	481	33.7	47	324	18.6	72	94	7.6			
23	476	33.1	48	316	18.0	73	85	7.3			
24	471	32.4	49	308	17.5	74	77	7.0			

§. 289. Kterak se vyjádří podobnost, že nějaká osoba dosáhne určitého stáří.

Značí-li a_n počet osob, které z jistého počtu současně narozených ještě žijí ve stáří n roků, jest podobnost, že osoba n letá dožije $(n + r)$ tého roku,

$$p = \frac{a_{n+r}}{a_n},$$

poněvadž z a_n osob n letých ještě žijících jest jen a_{n+r} v příznivém případě, že dožijí $(n+r)$ roků, tudíž a_{n+r} značí počet příznivých a a_n počet všech možných případů.

U př. Dle hořejší tabulky smrtelnosti žije z 1000 osob současně narozených v stáří 24 roků jen ještě 471, v stáří 50 roků ještě 300; podobnost, že 24letá osoba dosáhne stáří 50ti roků, je tudíž $\frac{300}{471} = 0.637 \dots$

§. 290. Ku pravdě podobný věk osoby znamená počet roků, po jichž uplynutí podobnost, že osoba bude ještě živa, rovná se protivné podobnosti.

Úloha. Má se určiti (ku pravdě) podobný věk osoby n leté.

Značí-li x (ku pravdě) podobný věk osoby n leté, jest $\frac{a_{n+x}}{a_n}$ podobnost, že tato osoba po x letech bude ještě na živu, a protivná podobnost $1 - \frac{a_{n+x}}{a_n}$; protož $\frac{a_{n+x}}{a_n} = 1 - \frac{a_{n+x}}{a_n}$, z čehož plyne

$$a_{n+x} = \frac{a_n}{2}.$$

Chceme-li tedy určiti (ku pravdě) podobný věk osoby n leté, vyhledejme v tabulce smrtelnosti počet osob v n tém roce ještě žijících; tento počet dělme dvěma a vyhledejme rok, v němž počet osob ještě žijících rovná se oné polovici. Tento rok udává (ku pravdě) podobný věk, jehož dosáhne osoba n letá.

U př. Jaký jest (ku pravdě) podobný věk osoby 27tileté?

Dle tabulky smrtelnosti jest $a_{27} = 456$, protož $\frac{a_{27}}{2} = 228$.

Toto číslo jest v téže tabulce u stáří 58 roků. Tudíž jest (ku pravdě) podobno, že osoba 27tiletá dožije $58 - 27 = 31$. roku.

§. 291. Od věku (ku pravdě) podobného liší se průměrný čili střední věk, jenž udává, kolik roků n letá osoba průměrně by ještě žila, kdyby všech a_n osob téhož stáří mělo býti na živu rovný počet roků.

Úloha. Má se určiti průměrný věk osoby n leté.

Je-li z a_n osob n letých za 1 rok na živu ještě a_{n+1} , po 2, 3, . . . letech ještě a_{n+2} , a_{n+3} , . . . , prožila každá z a_{n+1} osob 1 rok, tedy všechny dohromady prožily a_{n+1} roků, pak každá z a_{n+2} osob 1 další rok, pročež všechny dohromady a_{n+2} roků, a t. d. Součet roků, kolik bude všech a_n osob ještě žítí, je tudíž

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots,$$

kterážto řada ovšem tabulkou smrtelnosti přestává; protože

$$\frac{a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots}{a_n}$$

udává, mnoholi těch prožitých roků průměrně přijde na každou z a_n osob.

Zde jsme mlčky předpokládali, že všechny osoby rozličného stáří zemřely právě na začátku toho jistého roku, což není správné proto, že úmrtí nahazuje se v rozličných časech ročních. Nejméně pochybíme, předpokládáme-li, že všechny osoby umírají průměrně u prostřed roku, a připočteme-li k hořejšímu podílu ještě $\frac{1}{2}$ roku. Bude tedy průměrný věk m_n osoby n leté

$$m_n = \frac{1}{2} + \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots}{a_n}.$$

Průměrný věk nalézá se v tabulce smrtelnosti v třetím sloupci.

§. 292. Tato nauka o (pravdě-) podobnosti lidského věku je zvláště důležitá při vypočítávání pojistného na život, důchodu doživotního, a t. d.

Příklady.

1) Jakou sumu e musí otec složit, aby pojišťovací ústav jeho 10tiletému synu za 14 roků vyplatil 2000 zl., počítáme-li 5% úroků s tou podmínkou, že suma e propadne, umře-li syn před rokem 24tým?

Nynější hodnota 2000 zl. splatných za 14 roků jest $\frac{2000}{1.05^{14}} = 1010.14$ zl. (§. 260.). Kdyby bylo jisto, že syn dožije 24tého roku, že tedy pojištěná jistina skutečně bude vyplacena, otec by musel složit 1010.14 zl. Ale poněvadž jest pro ten případ jen podobnost $\frac{a_{24}}{a_{10}} = \frac{471}{532} = 0.88534$, musíme sumu e považovati za sázku do podniku, z něhož, vydaří-li se, připadne nám zisk, jehož nynější hodnota jest 1010.14 zl. Pročež dle §. 287. jest

$$e = 0.88534 \cdot 1010.14 = 894.32 \text{ zl.}$$

K této sumě musíme ještě připočísti správné výlohy.

2) Jaká suma A musela by pojišťovacímu ústavu při $p(5)\%$ úroků hned býti zaplacená, aby osoba $n(55\text{ti})$ letá koncem každého roku dostávala doživotnou rentu $r(600 \text{ zl.})$?

Kdyby bylo jisto, že n letá osoba po 1, 2, 3, . . . letech bude ještě na živu, A by byl součet nynějších hodnot jednotlivých důchodů, čili hodnot

$$\frac{r}{q}, \frac{r}{q^2}, \frac{r}{q^3}, \dots$$

položíme-li $q = 1 + \frac{p}{100}$. Ale poněvadž pro tyto případy jsou podobnosti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}, \frac{a_{n+2}}{a_n}, \frac{a_{n+3}}{a_n}, \dots$$

musí A se rovnati jen součtu mathematických nadějí oněch hodnot, tedy

$$\begin{aligned} A &= \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{r}{q} + \frac{a_{n+2}}{a_n} \cdot \frac{r}{q^2} + \frac{a_{n+3}}{a_n} \cdot \frac{r}{q^3} + \dots \\ &= \frac{r}{a_n} \left\{ \frac{a_{n+1}}{q} + \frac{a_{n+2}}{q^2} + \frac{a_{n+3}}{q^3} + \dots \right\}, \end{aligned}$$

v kterémžto výrazu řada uzavřovaná přestává tabulkou smrtelnosti.

Provedeme-li počet při $r = 600 \text{ zl.}$, $n = 55$ a $q = 1.05$, bude

$$A = 5941.45 \text{ zl.}$$

Vypočítávání součtu uzavřovaného jest vůbec velmi rozvláčné; proto sestaveny jsou tabulky, z nichžto výsledky snadno lze vyčísti.

Způsobem kratším, ač ne tak správným, řešíme tuto úlohu takto:

Střední věk osoby 55tileté jest 14.5 roků, tudíž (ku pravdě) se podobá, že tato osoba bude užívati renty po 14 roků. Dle §. 263., úloha 1) plyne tedy

$$A = \frac{600 \cdot (1.05^{14} - 1)}{1.05^{14} \cdot 0.05} = 5939.19 \text{ zl.,}$$

kterýžto výsledek málo se liší od předešlého.

3) Osoba 40tiletá chce na začátku každého roku, pokud bude živa, platiti pojistné r , aby po její smrti dědici obdrželi

1000 zl.; mnoholi činí roční pojistné, počítá-li pojišťovací ústav 5% úroků?

Střední věk osoby 40leté jest 22·6 roků, protož (ku pravdě) se podobá, že tato osoba 23kráté bude platiti roční pojistné, které se zapravuje napřed. Dle §. 263., úloha 2) bude tedy

$$r = \frac{1000 \cdot 0\cdot05}{1\cdot05^{23} - 1} = 24\cdot14 \text{ zl.}$$

III. Poučka dvoučlenová (binomialná).

§. 293. Poučkou dvoučlenovou nazýváme pravidlo, podlé něhož vyvinujeme mocninu dvoučlenu v řadu, spořádanou dle sestupných mocnin členu prvního a dle vzestupných mocnin členu druhého.

Každou mocninu dvoučlenu s celistvým a kladným mocnitelem můžeme odvoditi ze součinu několika dvoučlenů, kteréž mají první člen společný, učiníme-li rovné i druhé jejich členy. Tak u př. součin $(a + b)(a + c)(a + d)(a + e)(a + f)$, v němž položíme $c = d = e = f = b$, mění se v mocninu $(a + b)^5$.

§. 294. Součin několika dvoučlenů, které mají společný člen.

Máme-li vyvinouti součin $(a + b)(a + c)(a + d)(a + e) \dots$ násobíme první dva dvoučleny, jich součin třetím dvoučlenem, a t. d. Obdržíme takto

$$(a + b)(a + c) = a^2 + (b + c)a + bc,$$

$$(a + b)(a + c)(a + d) = a^3 + (b + c + d)a^2 + (bc + bd + cd)a + bcd,$$

$$(a + b)(a + c)(a + d)(a + e) = a^4 + (b + c + d + e)a^3 + (bc + bd + be + cd + ce + de)a^2 + (bcd + bce + bde + cde)a + bcde$$

a t. d.

Zajisté jest patrné, dle kterého zákona tyto součiny jsou utvořeny. První člen každého součinu jest tolikátá mocnina mocněnce a , kolik jest činitelů dvoučlenových; v následujících členech ubývá mocnitele téhož mocněnce v přirozeném pořádku, až v posledním členu $a^0 = 1$, t. j. nepřichází tu a . Součinitel prvního členu jest 1; druhém, třetím, čtvrtém, členu

součinitel se rovná součtu sestav z druhých členů daných dvoučlenů v druhé, třetí, čtvrté, . . . třídě, považujeme-li každý tento soujem za součin prvků v něm přicházejících.

Vztahuje-li se toto pravidlo na vytvoření součinu n činitelů dvoučlenových $(a + b)$, $(a + c)$, $(a + d)$, . . . $(a + p)$ tak, že $(a + b)(a + c) \dots (a + p) = a^n + S_1(b \dots p)a^{n-1} + S_2(b \dots p)a^{n-2} + \dots + S_{n-1}(b \dots p)a + S_n(b \dots p)$,

kde vůbec $S_k(b \dots p)$ značí součet všech sestav o n prvcích $b, c, \dots p$ v k té třídě a jednotlivé soujmy považují se za součiny, tedy zákon ten má též platnost, připojíme-li nového činitele $(a + q)$. Obdržíme totiž

$$(a + b)(a + c) \dots (a + p)(a + q) \\ = a^{n+1} + \{S_1(b \dots p) + q\}a^n + \{S_2(b \dots p) + S_1(b \dots p) \cdot q\}a^{n-1} + \dots + \{S_n(b \dots p) + S_{n-1}(b \dots p) \cdot q\}a + S_n(b \dots p) \cdot q.$$

Ale $S_1(b \dots p) + q = b + c + \dots + p + q = S_1(b \dots q)$.

$S_2(b \dots p)$ jest součet amb z prvků $b, c, \dots p$, a $S_1(b \dots p) \cdot q$ součet amb, jež obdržíme spojením prvků $b, c, \dots p$ s novým prvkem q ; pročež $S_2(b \dots p) + S_1(b \dots p) \cdot q$ jest součet všech sestav z prvků $b, c, \dots p, q$ v druhé třídě, čili

$$\begin{aligned} S_2(b \dots p) + S_1(b \dots p) \cdot q &= S_2(b \dots q). \\ \text{Taktéž } S_3(b \dots p) + S_2(b \dots p) \cdot q &= S_3(b \dots q), \\ S_4(b \dots p) + S_3(b \dots p) \cdot q &= S_4(b \dots q), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n(b \dots p) + S_{n-1}(b \dots p) \cdot q &= S_n(b \dots q). \\ \text{Konečně } S_n(b \dots p) \cdot q &= S_{n+1}(b \dots q). \end{aligned}$$

Protož bude

$$(a + b)(a + c)(a + d) \dots (a + p)(a + q) \\ = a^{n+1} + S_1(b \dots q)a^n + S_2(b \dots q)a^{n-1} + \dots + S_n(b \dots q)a + S_{n+1}(b \dots q).$$

Pravidlo svrchu uvedené vztahuje se tedy na součin $(n + 1)$ činitelů dvoučlenových, má-li platnost o n takovýchto činitelích. Ale pro 2, 3, 4 činitele toto pravidlo jest správné, tedy také pro 5 činitelů, protože i pro 6, a t. d. vůbec pro kterýkoli počet činitelů.

Dodatek. Jsou-li některé aneb všechny druhé členy dvoučlenů záporné, musíme podlé toho také jich sestavám co součinům dáti náležitá znaménka.

3) Je-li druhý člen b daného dvoučlenu záporný, bude druhý, čtvrtý, . . . vůbec každý sudý člen řady záporný; pročež

$$(a - b)^n = a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}b^n.$$

V binomialné řadě $(a \pm b)^n$ jest tedy vůbec $(k + 1)$ ní člen roven $(-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Příklady.

$$\begin{aligned} 1) (x+a)^6 &= x^6 + \binom{6}{1}x^5a + \binom{6}{2}x^4a^2 + \binom{6}{3}x^3a^3 + \binom{6}{4}x^2a^4 + \\ &\quad + \binom{6}{5}xa^5 + a^6 \\ &= x^6 + 6x^5a + 15x^4a^2 + 20x^3a^3 + 15x^2a^4 + 6xa^5 + a^6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) (3x-2y)^4 &= (3x)^4 - \binom{4}{1}(3x)^3 \cdot 2y + \binom{4}{2}(3x)^2 \cdot (2y)^2 - \\ &\quad - \binom{4}{3} \cdot 3x \cdot (2y)^3 + (2y)^4 \\ &= 81x^4 - 4 \cdot 27x^3 \cdot 2y + 6 \cdot 9x^2 \cdot 4y^2 - 4 \cdot 3x \cdot 8y^3 + 16y^4 \\ &= 81x^4 - 216x^3y + 216x^2y^2 - 96xy^3 + 16y^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \text{ Sedmý člen mocniny } (2x^2-3y)^9 \text{ jest } \binom{9}{6} \cdot (2x^2)^{9-6} \cdot (-3y)^6 \\ = 84 \cdot 8x^6 \cdot 729y^6 = 489888x^6y^6. \end{aligned}$$

§. 296. Dvoučlenovou poučku lze také odvoditi přímo na základě nauky o kombinacích takto:

Násobíme-li $(a + b)$ týmž dvoučlenem $(a + b)$, součin pak opět $(a + b)$, a t. d. a píšeme-li v každém částečném součinu nejprve násobitele, prozatím nenaznačující mocniny při rovných činitelích, tedy bude

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = \begin{matrix} aa + ab \\ + ba + bb \end{matrix}$$

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = \begin{matrix} aaa + aab + aba + abb \\ + baa + bab + bba + bbb \end{matrix}$$

a t. d.

Přirovnáme-li tyto výsledky k obměnám o prvcích a a b s opakováním (§. 276., 2), bude patrné, že částky druhé mocniny dvoučlenu $(a + b)$ utvořeny jsou z jeho členů týmž způsobem, jako obměny 2. třídy s opakováním při prvcích a a b , že tudíž

$(a + b)^2$ se rovná součtu obměn 2. třídy o prvcích a a b s opakováním, považujeme-li každou obměnu za součin; taktéž $(a + b)^3$ se rovná součtu všech obměn 3. třídy o prvcích a a b s opakováním, položíme-li každou obměnu opět za součin. Poněvadž pak každá vyšší mocnina dvoučlenu $(a + b)$, vyvinuta způsobem zde naznačeným, souhlasí s utvořením obměn příslušné třídy z prvků a a b s opakováním, jde na jevo, že vůbec $(a + b)^n$ bude se rovnati součtu všech obměn n té třídy při prvcích a a b s opakováním, považujeme-li každou obměnu za součin.

Obměny však také obdržíme, jestliže utvoříme sestavy téže třídy a tyto pak představujeme. Sestavy n té třídy o prvcích a a b s opakováním, za součiny považovány, jsou dle §. 272., dod.

$$a^n, a^{n-1}b, a^{n-2}b^2, \dots a^{n-k}b^k, \dots ab^{n-1}, b^n.$$

Tyto sestavy museli bychom představovati a obměny takto vzniklé co součiny sečítati. Ale poněvadž všechny obměny, kteréž obdržíme představováním téže sestavy, obsahují tytéž prvky, tudíž za součiny považovány sestavě samé se rovnají, není potřebí skutečně představovati, nýbrž každou kombinaci hned násobíme počtem jejích přestav a po té sečteme všechny tyto součiny, aby-chom obdrželi součet veškerých obměn.

Dle §. 270., 3) jest pak počet přestav při svrchu uvedených sestavách pořadem

$$1, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots \binom{n}{k}, \dots \binom{n}{n-1}, 1.$$

Protož bude jako v §. 295.

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

Dodatek. Týmž způsobem, jako jsme zde vyvinuli poučku dvoučlenovou, lze také odvoditi poučku mnohočlenovou (polynomialnou), t. j. vzorec pro $(a + b + c + d + \dots)^n$, poněvadž tato mocnina se rovná součtu všech obměn n té třídy o prvcích $a, b, c, d, \dots$ s opakováním, považujeme-li každou obměnu za součin. Chceme-li tedy vyvinouti n tou mocninu daného mnohočlenu, utvoříme z jeho členů sestavy n té třídy s opakováním, každou sestavu považovanou za součin násobíme příslušným počtem přestav a jednotlivé součiny sečítáme.

§. 297. Vlastnosti součinitelů dvoučlenových.

1) Kteríkoli dva součinitelé, od začátku a konce stejně vzdálení, jsou si rovni.

Součinitel dvoučlenový $(k+1)$ ní od začátku jest

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+2)(n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots (k-1) \cdot k}.$$

Dvoučlenový součinitel $(k+1)$ ní od konce bude $(n-k+1)$ ní od začátku, tedy

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n(n-1) \dots (k+2)(k+1)}{1 \cdot 2 \dots (n-k-1)(n-k)}.$$

Násobíme-li čitatele i jmenovatele prvního zlomku součinem $(k+1)(k+2) \dots (n-k-1)(n-k)$,

obdržíme

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)(n-k) \dots (k+2)(k+1)}{1 \cdot 2 \dots k(k+1) \dots (n-k-1)(n-k)};$$

protož

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Z toho jde, že při vyvinování řady dvoučlenové třeba určití dvoučlenové součinitele jen až ku střednímu členu, při lichém n jen až ku dvěma středním členům, majícím rovné součinitele, poněvadž součinitelé následujících členů v opačném pořádku se opakuji.

Dodatek. Z $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ plyne při $k=0$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

2) Součet $(k+1)$ ho a k tého součinitele dvoučlenového n té mocniny rovná se $(k+1)$ mu dvoučlenovému součiniteli $(n+1)$ ní mocniny.

$$\binom{n}{k-1} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+3)(n-k+2)}{1 \cdot 2 \dots (k-2)(k-1)},$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+2)(n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots (k-1) \cdot k}; \text{ pročež}$$

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1)k} \{k + (n-k+1)\} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1) \dots (n-k+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} = \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

Dle této věty můžeme z dvoučlenových součinitelů nějaké mocniny pouhým sečítáním určit součinitele mocniny nejbližší vyšší. Tím obdržíme následující součinitele po sobě jdoucích mocnin dvoučlenu:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & 1 & 1 & \\
 & & & 1 & 2 & 1 & \\
 & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
 \end{array}$$

a t. d.

Obrazec tento slove Pascalův trojúhelník.

3) Součet $(k+1)$ ních dvoučlenových součinitelů k té, $(k+1)$ ní, $(k+2)$ hé, až n té mocniny rovná se $(k+2)$ mu součiniteli $(n+1)$ ní mocniny.

Z předešlé věty plyne $\binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}$; protož

$$\begin{aligned}
 \binom{k}{k} &= \binom{k+1}{k+1} - \binom{k}{k+1}, \\
 \binom{k+1}{k} &= \binom{k+2}{k+1} - \binom{k+1}{k+1}, \\
 \binom{k+2}{k} &= \binom{k+3}{k+1} - \binom{k+2}{k+1}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \binom{n-1}{k} &= \binom{n}{k+1} - \binom{n-1}{k+1}, \\
 \binom{n}{k} &= \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}.
 \end{aligned}$$

Sečteme-li tyto rovnice, obdržíme v pravém dílu pouze $\binom{n+1}{k+1}$ proto, že $\binom{k}{k+1} = 0$ a ostatní členy vždy po dvou se ruší; tudíž

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \dots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

U př. při $k = 2$ bude

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \dots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

4) Prostý součet všech součinitelů dvoučlenových při n té mocnině rovná se 2^n .

$$2^n = (1 + 1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}.$$

5) Algebraický součet binomialných součinitelů střídavě kladných a záporných rovná se nulle.

$$0 = (1 - 1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}.$$

§. 298. Poučka dvoučlenová při celistvých záporných mocnidelích.

1) Ve vzorci dvoučlenovém posud značilo n celistvé číslo kladné; poučka tato byla tedy dokázána jen při celistvých a kladných mocnidelích. Lze však dokázati, že jest pravdiva i v tom případě, je-li mocnitel záporný.

Při celistvém a kladném n totiž

$$(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \dots$$

Vyjádříme-li tuto řadu, závislou na n , nechť jest hodnota mocnitele n jakákoli, R_n (řada n), bude

$$R_n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \dots$$

Je-li R_p jiná řada, závislá na p tak, jako dřívější řada na n , a značí-li p číslo jakékoli, tedy

$$R_p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \dots$$

Násobíme-li obě tyto řady, součin bude také spořádán dle vzestupných mocnin x . Tento součin vyvine se dle pravidel o násobení jednostejným způsobem, nechť čísla n a p mají kterékoli hodnoty; tudíž jest třeba věděti, jaký bude součin jen při kladném a celistvém n a p , poněvadž i v ostatních případech musí míti platnost též zákon vyvinování. Jsou-li však n a p čísla celistvá i kladná, tedy

$$R_n = (1 + x)^n$$

$$R_p = (1 + x)^p,$$

protož

$$R_n \cdot R_p = (1 + x)^{n+p}.$$

Poněvadž $n + p$ představuje číslo celistvé, musí

$$(1 + x)^{n+p} = 1 + \binom{n+p}{1} x + \binom{n+p}{2} x^2 + \dots = R_{n+p},$$

tudiž

$$R_n \cdot R_p = R_{n+p}.$$

Tento výraz byl vyvinut při celistvé a kladné hodnotě n a p ; dle předešlého musí býti také správný při kterýchkoli jiných hodnotách n a p , pročež musí míti platnost obecnou.

Položíme-li v tomto výrazu $p = -n$, tedy

$$R_n \cdot R_{-n} = R_{n-n} = R_0.$$

$$\text{Ale } R_0 = 1 + \binom{0}{1} x + \binom{0}{2} x^2 + \dots = 1,$$

protož

$$R_n \cdot R_{-n} = 1, \text{ a } R_{-n} = \frac{1}{R_n}.$$

Značí-li nyní n celistvé číslo kladné, jest

$$R_n = (1 + x)^n, \text{ tudíž } R_{-n} = \frac{1}{(1 + x)^n} = (1 + x)^{-n}.$$

Ale dle hořejšího označení jest

$$R_{-n} = 1 + \binom{-n}{1} x + \binom{-n}{2} x^2 + \binom{-n}{3} x^3 + \dots, \text{ pročež}$$

$$(1 + x)^{-n} = 1 + \binom{-n}{1} x + \binom{-n}{2} x^2 + \binom{-n}{3} x^3 + \dots,$$

kde $-n$ může znamenati kterékoli záporné číslo celistvé.

Z toho plyne, že řada, vyjádřená R_n , i při záporném a celistvém n představuje mocninu $(1 + x)^n$.

Poslední řadu lze psáti také takto:

$$(1 + x)^{-n} = 1 - \frac{n}{1} \cdot x + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \dots$$

2) Je-li mocnitel n celistvé číslo kladné, n tá mocnina dvoučlenu přestává $(n + 1)$ ním členem, kterýž jest $\binom{n}{n} x^n$, poněvadž

součinitel $\binom{n}{n+1}$ členu následujícího, jakož i všech ostatních členů jest nulla. Je-li však n záporné číslo, nebude součinitel žádného členu roven nulle; obdržíme pak nekonečnou řadu, kteréž použití lze jen tehdy, je-li sbíhavá. Vyšetříme-li podmínku její

konvergence dle §. 266., dostaneme podíl dvou po sobě jdoucích členů

$$\frac{A_{r+1}}{A_r} = - \frac{n+r-1}{r} \cdot x = - \left(\frac{n-1}{r} + 1 \right) x.$$

Roste-li n nekonečně, podíl $\frac{A_{r+1}}{A_r}$ blíží se nekonečně k mezi $-x$; řada jest tudíž sbíhavá při $x < 1$.

Dodatek. Poněvadž $(a+b)^{-n} = a^{-n} \left(1 + \frac{b}{a}\right)^{-n}$, bude

$$\begin{aligned} (a+b)^{-n} &= a^{-n} \left\{ 1 + \binom{-n}{1} \cdot \frac{b}{a} + \binom{-n}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \right. \\ &\quad \left. + \binom{-n}{3} \cdot \frac{b^3}{a^3} + \dots \right\} \\ &= a^{-n} + \binom{-n}{1} a^{-n-1} b + \binom{-n}{2} a^{-n-2} b^2 + \\ &\quad + \binom{-n}{3} a^{-n-3} b^3 + \dots, \end{aligned}$$

kterážto řada jest sbíhavá při $\frac{b}{a} < 1$ čili $b < a$.

Příklady.

$$1) (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

$$2) (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

$$3) (a+b)^{-2} = a^{-2} - 2a^{-3}b + 3a^{-4}b^2 - 4a^{-5}b^3 + \dots$$

§. 299. Poučka dvoučlenová při lomených mocnících.

1) Značí-li R_n a R_p totéž co v §. 298., bude

$$R_n \cdot R_p = R_{n+p}.$$

Buďtež pak R_q , R_r , R_s ... řady téže podoby jako R_n a R_p , tedy

$$R_n \cdot R_p \cdot R_q = R_{n+p} \cdot R_q = R_{n+p+q},$$

$$R_n \cdot R_p \cdot R_q \cdot R_r = R_{n+p+q} \cdot R_r = R_{n+p+q+r};$$

vůbec $R_n \cdot R_p \cdot R_q \cdot R_r \cdot R_s \dots = R_{n+p+q+r+s \dots}$

Položíme-li $n = p = q = r = s = \dots$, obdržíme

$$R_n \cdot R_n \cdot R_n \cdot R_n \cdot R_n \dots = R_{n+n+n+n+n \dots},$$

aneb je-li k takovýčto činitelů, kde k představuje ovšem číslo celistvé a kladné, tedy

$$(R_n)^k = R_{kn}.$$

Poněvadž n může znamenati číslo kterékoli, budiž $n = \frac{h}{k}$,
kde h jest číslo celistvé, h a k pak prvočísla vespolek; obdržíme pak

$$\left(R_{\frac{h}{k}}\right)^k = R_h.$$

Znamená-li h číslo celistvé, jest dle §§. 295. a 298. $R_h = (1 + x)^h$, pročež také

$$\left(R_{\frac{h}{k}}\right)^k = (1 + x)^h, \text{ a } R_{\frac{h}{k}} = (1 + x)^{\frac{h}{k}}.$$

Dle dosavadního označení jest však

$$R_{\frac{h}{k}} = 1 + \binom{\frac{h}{k}}{1} x + \binom{\frac{h}{k}}{2} x^2 + \binom{\frac{h}{k}}{3} x^3 + \dots, \text{ pročež také}$$

$$(1 + x)^{\frac{h}{k}} = 1 + \binom{\frac{h}{k}}{1} x + \binom{\frac{h}{k}}{2} x^2 + \binom{\frac{h}{k}}{3} x^3 + \dots,$$

kde $\frac{h}{k}$ znamená kterýkoli zlomek kladný nebo záporný.

Z toho jde, že řada vyjádřená R_n představuje mocninu $(1 + x)^n$ i v tom případě, je-li n zlomek.

Poslední řadu můžeme psáti také takto:

$$(1 + x)^{\frac{h}{k}} = 1 + \frac{h}{k} \cdot x + \frac{h(h-k)}{2 \cdot k^2} \cdot x^2 + \\ + \frac{h(h-k)(h-2k)}{2 \cdot 3 \cdot k^3} \cdot x^3 + \dots$$

2) Řada vyjádřující mocninu $(1 + x)^{\frac{h}{k}}$ jest nekonečná proto, že h a k jsou prvočísla vespolek a žádný součinitel dvoučlenový tudíž nemůže se rovnati nulle; proto lze jí použiti jen tehdy, je-li konvergentná.

Poněvadž podíl dvou po sobě jdoucích členů

$$\frac{A_{r+1}}{A_r} = \frac{h - (r-1)k}{rk} \cdot x = \left(\frac{h+k}{rk} - 1\right)x$$

při nekonečném přibývání r blíží se nekonečně k mezi $-x$, bude řada dle §. 266., 1) sbíhavá, je-li $x < 1$.

Dodatek. $(a + b)^{\frac{h}{k}} = a^{\frac{h}{k}} \left(1 + \frac{b}{a}\right)^{\frac{h}{k}}$, pročež

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{\frac{h}{k}} &= a^{\frac{h}{k}} \left\{ 1 + \binom{\frac{h}{k}}{1} \cdot \frac{b}{a} + \binom{\frac{h}{k}}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \binom{\frac{h}{k}}{3} \cdot \frac{b^3}{a^3} + \dots \right\} \\
 &= a^{\frac{h}{k}} + \binom{\frac{h}{k}}{1} \cdot a^{\frac{h}{k}-1} b + \binom{\frac{h}{k}}{2} \cdot a^{\frac{h}{k}-2} b^2 + \dots,
 \end{aligned}$$

kterážto řada konverguje při $\frac{b}{a} < 1$ čili $b < a$.

Příklady.

$$\begin{aligned}
 1) (1+x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1 \cdot (-1)}{2 \cdot 2^2} \cdot x^2 + \\
 &\quad + \frac{1 \cdot (-1) \cdot (-3)}{2 \cdot 3 \cdot 2^3} \cdot x^3 + \dots \\
 &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) (a \pm b)^{\frac{1}{m}} &= a^{\frac{1}{m}} \left(1 \pm \frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}} \left\{ 1 \pm \binom{\frac{1}{m}}{1} \cdot \frac{b}{a} + \right. \\
 &\quad \left. + \binom{\frac{1}{m}}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2} \pm \binom{\frac{1}{m}}{3} \cdot \frac{b^3}{a^3} + \dots \right\}, \text{ aneb}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{a \pm b} &= a^{\frac{1}{m}} \left\{ 1 \pm \frac{1}{m} \cdot \frac{b}{a} - \frac{m-1}{2 \cdot m^2} \cdot \frac{b^2}{a^2} \pm \right. \\
 &\quad \left. \pm \frac{(m-1)(2m-1)}{2 \cdot 3 \cdot m^3} \cdot \frac{b^3}{a^3} \dots \right\}.
 \end{aligned}$$

Dle tohoto vzorce můžeme přibližně určití neracionální kořen $\sqrt[m]{A}$, položíme-li $A = a^m + x$ aneb $A = a^m - x$ tak, aby mocnina a^m co možná nejvíce se přiblížila k číslu A .

$$\begin{aligned}
 3) \sqrt[7]{79} &= \sqrt[7]{81-2} = \sqrt[7]{81} \cdot \sqrt[7]{1 - \frac{2}{81}} = 9 \cdot \left(1 - \frac{2}{81} \right)^{\frac{1}{7}} \\
 &= 9 \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{81} - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2}{81} \right)^2 - \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{2}{81} \right)^3 - \dots \right\} \\
 &= 9 \cdot (1 - 0.0123456 - 0.0000762 - 0.0000009 - \dots) \\
 &= 8.88819 \dots
 \end{aligned}$$

IV. Arithmetické řady vyšších řádů.

Řady rozdílové.

§. 300. Jestliže v řadě čísel

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots,$$

dle určitého zákona po sobě jdoucích, odčítáme každý člen od nejbližší následujícího, obdržíme řadu rozdílů:

$$a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \dots, a_{n+1} - a_n,$$

která slove prvá řada rozdílová dané čili hlavní řady. Členy prvé řady rozdílové označujeme

$$\Delta a_1, \Delta a_2, \Delta a_3, \dots, \Delta a_n, \dots$$

pročež bude obecně $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$.

Jestliže z členů prvé řady rozdílové taktéž vyhledáme rozdíly $\Delta a_2 - \Delta a_1, \Delta a_3 - \Delta a_2, \Delta a_4 - \Delta a_3, \dots, \Delta a_{n+1} - \Delta a_n, \dots$ a označíme je pořadem

$$\Delta^2 a_1, \Delta^2 a_2, \Delta^2 a_3, \dots, \Delta^2 a_n, \dots$$

obdržíme druhou řadu rozdílovou dané řady hlavní. Týmž způsobem odvodíme třetí, čtvrtou, ... řadu rozdílovou.

Odvození řad rozdílových lze takto zobraziti:

$$\begin{array}{cccccccc}
 a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & & a_6 \dots \\
 \Delta a_1 & & \Delta a_2 & & \Delta a_3 & & \Delta a_4 & & \Delta a_5 & \dots \\
 \Delta^2 a_1 & & \Delta^2 a_2 & & \Delta^2 a_3 & & \Delta^2 a_4 & \dots \\
 \Delta^3 a_1 & & \Delta^3 a_2 & & \Delta^3 a_3 & \dots \\
 & & & & \text{a t. d.}
 \end{array}$$

kde $\Delta^m a^n$ znamená vůbec n tý člen m té řady rozdílové.

§. 301. Úlohy. 1) Obecný člen a_n hlavní řady má se vyjádřiti jejím prvním členem a prvými členy po sobě následujícími řad rozdílových.

Z $a_n - a_{n-1} = \Delta a_{n-1}$ plyne vůbec $a_n = a_{n-1} + \Delta a_{n-1}$, pročež

$$a_2 = a_1 + \Delta a_1.$$

Poněvadž první řadu rozdílovou s ohledem na následující řady rozdílové lze také považovati za řadu hlavní, můžeme zákonů odvozených pro řadu hlavní použiti též při prvé řadě rozdílové. Podlé toho

$$\begin{aligned}
 \Delta a_2 &= \Delta a_1 + \Delta^2 a_1, \text{ pročež} \\
 a_3 &= a_2 + \Delta a_2 = a_1 + 2\Delta a_1 + \Delta^2 a_1.
 \end{aligned}$$

Taktéž bude

$$\Delta a_3 = \Delta a_1 + 2\Delta^2 a_1 + \Delta^3 a_1, \text{ tudíž} \\ a_4 = a_3 + \Delta a_3 = a_1 + 3\Delta a_1 + 3\Delta^2 a_1 + \Delta^3 a_1.$$

Z toho jest patrný zákon, podle něhož utvořeny jsou výrazy členů a_2, a_3, a_4 . Budiž tento zákon platný také o členu a_n , tedy

$$\text{I) } a_n = a_1 + \binom{n-1}{1} \Delta a_1 + \binom{n-1}{2} \Delta^2 a_1 + \dots \\ \dots + \binom{n-1}{m} \Delta^m a_1 + \dots;$$

pak bude též

$$\Delta a_n = \Delta a_1 + \binom{n-1}{1} \Delta^2 a_1 + \dots + \binom{n-1}{m-1} \Delta^m a_1 + \dots$$

Poněvadž $a_n + \Delta a_n = a_{n+1}$, bude s ohledem na §. 297., 2) součet obou výrazů

$$a_{n+1} = a_1 + \binom{n}{1} \Delta a_1 + \binom{n}{2} \Delta^2 a_1 + \dots + \binom{n}{m} \Delta^m a_1 + \dots$$

Zákon ten jest tedy správný pro a_{n+1} , má-li platnost o členu a_n ; ale jeho platnost o a_4 byla dokázána, proto bude také správný pro a_5, a_6 , a t. d. vůbec pro všechny členy.

2) Součtový vzorec s_n , t. j. součet prvních n členů hlavní řady má se vyjádřiti jejím prvním členem a prvými členy řady rozdílových.

$$\text{Poněvadž } s_2 = a_1 + a_2 = a_1 + (a_1 + \Delta a_1) = 2a_1 + \Delta a_1; \\ s_3 = s_2 + a_3 = (2a_1 + \Delta a_1) + (a_1 + 2\Delta a_1 + \Delta^2 a_1) \\ = 3a_1 + 3\Delta a_1 + \Delta^2 a_1; \\ s_4 = s_3 + a_4 = (3a_1 + 3\Delta a_1 + \Delta^2 a_1) \\ + (a_1 + 3\Delta a_1 + 3\Delta^2 a_1 + \Delta^3 a_1) \\ = 4a_1 + 6\Delta a_1 + 4\Delta^2 a_1 + \Delta^3 a_1, \text{ a t. d.}$$

bude obecně

$$\text{II) } s_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} \Delta a_1 + \binom{n}{3} \Delta^2 a_1 + \dots \\ \dots + \binom{n}{m+1} \Delta^m a_1 + \dots$$

Výčet čili indukci lze jako prvé při a_n snadno doplniti.

Dodatek. Výraz I) v nejnepríznivějším případě přestává členem $\binom{n-1}{n-1} \Delta^{n-1} a_1$, neboť následující členy zmizí pro

$\binom{n-1}{n} = \binom{n-1}{n+1} = \dots = 0$; výraz II) také musí přestati členem $\binom{n}{n} \Delta^{n-1} a_1$ proto, že $\binom{n}{n+1} = \binom{n}{n+2} = \dots = 0$. Ale oba výrazy mohou i dříve přestati, jestliže členy některé řady rozdílové rovnají se nulle.

Arithmetické řady vyšších řádů.

§. 302. Arithmetická řada jest *m*tého stupně, jsou-li členy její *m*té řady rozdílové vesměs rovny.

Tak u př. druhé mocniny přirozených čísel tvoří arithmetickou řadu druhého řádu; neboť

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \dots \\ & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \dots \\ & & 2 & 2 & 2 & 2 \dots \end{array}$$

Arithmetické posloupnosti (§. 253.) jsou arithmetické řady prvního řádu.

§. 303. Úloha. Má se ustanoviti obecný člen a_n a součtový vzorec s_n řady arithmetické.

Je-li arithmetická řada

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$$

*m*tého řádu, bude tu $\Delta^m a_n$ číslo stálé, pročež $\Delta^{m+1} a_1 = \Delta^{m+2} a_1 = \dots = 0$. Ze vzorců I) a II) v §. 301. obdržíme tedy

$$1) a_n = a_1 + \binom{n-1}{1} \Delta a_1 + \binom{n-1}{2} \Delta^2 a_1 + \dots + \binom{n-1}{m} \Delta^m a_1,$$

$$2) s_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} \Delta a_1 + \binom{n}{3} \Delta^2 a_1 + \dots + \binom{n}{m+1} \Delta^m a_1.$$

Máme u př. z řady 1, 5, 11, 22, 41, 71, vyhledati a_n a s_n .

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 5 & 11 & 22 & 41 & 71 \\ & 4 & 6 & 11 & 19 & 30 \\ & & 2 & 5 & 8 & 11 \\ & & & 3 & 3 & 3 \end{array}$$

Daná řada jest řádu třetího, a sice $a_1 = 1$, $\Delta a_1 = 4$, $\Delta^2 a_1 = 2$, $\Delta^3 a_1 = 3$; pročež

$$a_n = 1 + 4(n-1) + (n-1)(n-2) + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2} \\ = \frac{n^3 - 4n^2 + 13n - 8}{2},$$

$$s_n = n + 2n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8} \\ = \frac{3n^4 - 10n^3 + 57n^2 - 26n}{24}.$$

Dodatek. V arithmetické řadě lze místo a_1 každý jiný člen, u př. a_k považovati za člen začátečný; pak a_{k+n} značí n tý člen po novém členu začátečním, tudíž $(n+1)$ ní člen řady, jejíž první člen jest a_k . V tomto případě vzorce 1) a 2) mění se v následující:

$$a_{k+n} = a_k + \binom{n}{1} \Delta a_k + \binom{n}{2} \Delta^2 a_k + \dots + \binom{n}{m} \Delta^m a_k,$$

$$s_{k+n} = \binom{n+1}{1} a_k + \binom{n+1}{2} \Delta a_k + \binom{n+1}{3} \Delta^2 a_k + \dots + \binom{n+1}{m+1} \Delta^m a_k.$$

§. 304. 1) Jestliže v obecném členu arithmetické řady m tého řádu

$$a_n = a_1 + \binom{n-1}{1} \Delta a_1 + \binom{n-1}{2} \Delta^2 a_1 + \dots + \binom{n-1}{m} \Delta^m a_1$$

vyvineme dvoučlenové součinitele dle vzestupných mocnin n , obdržíme tento člen v následující podobě:

$$a_n = A + Bn + Cn^2 + \dots + Vn^m,$$

kde $A, B, C, \dots$ V závisí pouze na $a_1, \Delta a_1, \Delta^2 a_1, \dots \Delta^m a_1$.

2) A naopak každý výraz, jehož podoba jest

$$a_n = A + Bn + Cn^2 + \dots + Vn^m,$$

kde $A, B, C, \dots$ V nezávisí na n a aspoň V se liší od nuly, představuje obecný člen arithmetické řady m tého řádu.

Na důkaz toho jest jen třeba, abychom z a_n vyvinuli rozdíly po sobě následující a dovodili, že $\Delta^m a_n$ jest číslo stálé.

Nejprve jest

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = B\{(n+1) - n\} + C\{(n+1)^2 - n^2\} + \dots \\ + V\{(n+1)^m - n^m\},$$

z čehož vysvítá, že v Δa_n není mocniny n^m . Vyvineme-li vyšší rozdíly, nejvyšší mocnina n bude v každém následujícím rozdílu

o jeden stupeň nižší nežli v předcházejícím. Rozdíly po sobě následující budou tudíž míti tuto podobu:

$$\Delta a_n = A_1 + B_1 n + C_1 n^2 + \dots + T_1 n^{m-2} + U_1 n^{m-1},$$

$$\Delta^2 a_n = A_2 + B_2 n + C_2 n^2 + \dots + T_2 n^{m-2},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Delta^{m-1} a_n = A_{m-1} + B_{m-1} n,$$

$$\Delta^m a_n = A_m,$$

kde $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$ a t. d. jsou čísla na n nezávislá; pročež $\Delta^m a_n = A_m$ jest číslo stálé.

Prokládání řad.

§. 305. Jsou-li čísla

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots a_n, \dots 1)$$

členy arithmetické řady m tého řádu, a položíme-li v jejím obecném členu (§. 304., 1)

$$a_n = A + Bn + Cn^2 + \dots + Vn^m$$

místo n číslo $1 + np$, kde p je stálé, n však nabývá pořadem hodnoty $0, 1, 2, 3, 4, \dots$, obdržíme čísla

$$a_1, a_{1+p}, a_{1+2p}, a_{1+3p}, \dots a_{1+np}, \dots 2)$$

kteráž tvoří arithmetickou řadu m tého řádu.

Neboť $a_{1+np} = A + B(1 + np) + C(1 + np)^2 + \dots + V(1 + np)^m$, aneb spořádáme-li tento výraz dle mocnin n ,

$$a_{1+np} = a + bn + cn^2 + \dots + vn^m,$$

kde $a, b, c, \dots$ v nezávisí na n a v se liší od nuly. Tento výraz jest však dle §. 304., 2) obecný člen arithmetické řady m tého řádu.

1. Je-li p číslo celistvé, členy nové řady

$$a_1, a_{1+p}, a_{1+2p}, a_{1+3p}, \dots a_{1+np}, \dots$$

jsou zároveň členy původní řady 1), kteréž obdržíme, jestliže v řadě původní vysadíme každý člen p tý, prvním počínající.

2. Je-li p zlomek podoby $\frac{1}{r+1}$, kde r značí celistvé číslo, nová řada

$$a_1, a_{1+\frac{1}{r+1}}, a_{1+\frac{2}{r+1}}, \dots a_{1+\frac{r}{r+1}}, a_2, a_{2+\frac{1}{r+1}}, \dots$$

představuje čísla, kteráž obdržíme, jestliže mezi dva a dva členy řady 1), počínající členem prvním, vložíme r nových členů, které s členy původními tvoří arithmetickou řadu téhož řádu.

§. 306. Úloha. Mezi dva a dva členy arithmetické řady *mtého* řádu má se vložit *r* členů.

V obecném členu

$$a_n = a_1 + \binom{n-1}{1} \Delta a_1 + \binom{n-1}{2} \Delta^2 a_1 + \dots + \binom{n-1}{m} \Delta^m a_1$$

položme místo *n* číslo $1 + \frac{n}{r+1}$, tedy obdržíme

$$a_{1+\frac{n}{r+1}} = a_1 = \frac{n}{r+1} \Delta a_1 - \frac{n(r+1-n)}{1 \cdot 2 \cdot (r+1)^2} \Delta^2 a_1 + \dots$$

a v tomto výrazu dosadíme za *n* pořadem hodnoty 0, 1, 2, 3, . . . , r,

Řešení jest správné dle §. 305.

Dodatek. Máme-li mezi dva určité, po sobě následující členy a_k a a_{k+1} vložit *r* členů, použijeme vzorce, odvozeného v dodatku k §. 303.

$$a_{k+n} = a_k + \binom{n}{1} \Delta a_k + \binom{n}{2} \Delta^2 a_k + \dots + \binom{n}{m} \Delta^m a_k,$$

v němž místo *n* položíme pořadem hodnoty $\frac{1}{r+1}, \frac{2}{r+1}, \dots, \frac{r}{r+1}$.

Příklady. 1) Mezi dva a dva členy řady třetího řádu 1, 64, 343, 1000, 2197, . . .

máme vložit dva členy, které s danými členy tvoří řadu téhož řádu.

Zde $a_1 = 1$, $\Delta a_1 = 63$, $\Delta^2 a_1 = 216$, $\Delta^3 a_1 = 162$; pročež

$$a_{1+\frac{n}{3}} = 1 + 21n - 12n(3-n) + n(3-n)(6-n)$$

$$= 1 + 3n + 3n^2 + n^3 = (1+n)^3.$$

Položíme-li $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$, obdržíme proloženou řadu 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, 1331, 1728, 2197,

2) Dle tabulky, obsahující Briggovy logaritmy všech čísel od 1 až do 1080 o 8 místech desetinných, má se vypočítati log 107126 o témž počtu míst desetinných.

Postačí, vyhledáme-li mantissu pro log 1071·26, ležící mezi mantissami logaritmu 1071 a log 1072. Jednak z tabulky, jinak opětým odčítáním obdržíme v jednotkách 8. místa desetinného:

čísla k	mantissy a_k	1. rozdíl Δa_k	2. rozdíl $\Delta^2 a_k$
1071	2978947		
1072	3019479	+ 40532	— 39
1073	3059972	+ 40493	— 37
1074	3100428	+ 40456	— 38
1075	3140846	+ 40418	

Druhý rozdíl můžeme již považovati za stálý, mantissy pak za řadu druhého řádu. Vložíme-li tedy mezi první dvě mantissy $r = 99$ členů a vezmeme-li z této proložené řady člen 26tý musíme v obecném členu

$$a_{k+n} = a_k + \binom{n}{1} \Delta a_k + \binom{n}{2} \Delta^2 a_k$$

položiti $k = 1071$, $n = 0.26$, $a_k = 2978947$, $\Delta a_k = 40532$ a $\Delta^2 a_k = -39$, pročež

$$a_k = 2978947$$

$$\binom{n}{1} \Delta a_k = 10538$$

$$\binom{n}{2} \Delta^2 a_k = 4$$

tudíž $a_{1071.26} = \overline{2989489}$ v jednotkách 8. des. místa,
 $\log 107126 = 5.02989489$.

Řady součtové. Čísla obrazcová (figurovaná).

§. 307. Ustanovíme-li z arithmetické řady

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, \dots 1)$$

posloupně součet 1, 2, 3, 4, ... členů, obdržíme řadu

$$a, 2a + d, 3a + 3d, 4a + 6d, 5a + 10d \dots 2)$$

Naložíme-li s touto řadou tak jako s původní a s každou nově utvořenou řadou tímž způsobem, obdržíme řady

$$a, 3a + d, 6a + 4d, 10a + 10d, 15a + 20d, \dots 3)$$

$$a, 4a + d, 10a + 5d, 20a + 15d, 35a + 35d, \dots 4) \text{ a t. d.}$$

Řady 2), 3), 4) ... slovou součtové řady; jsou pak arithmetické řady druhého, třetího, čtvrtého, ... řádu, jak již patrně z jich odvození. Původní řada jest řadu prvního.

Při $a = 1$ slovou čísla všech řad předcházejících čísla obrazcová čili figurovaná a sice vztažně řadu prvního, druhého, třetího, ...

§. 308. Úloha. Má se určiti obecný člen pro řady čísel obrazcových.

Naznačíme-li n tý člen figurovaných čísel m tého řádu a_n , majíce zřetel k tomu, že obecný člen každé řady čísel figurovaných jest součet n členů řady přímo předcházející, tedy

$$^1 a_n = 1 + (n-1)d = 1 + \binom{n-1}{1}d;$$

$$^2 a_n = 1 + \binom{1}{1}d + 1 + \binom{2}{1}d + 1 + \binom{3}{1}d + \dots + 1 + \binom{n-1}{1}d \\ = n + \binom{n}{2}d \text{ (§. 297., 3)} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2}d;$$

$$^3 a_n = \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \binom{4}{1} + \dots + \binom{n}{1} \\ + \binom{2}{2}d + \binom{3}{2}d + \binom{4}{2}d + \dots + \binom{n}{2}d \\ = \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3}d; \text{ a t. d.}$$

$$\text{vůbec} \quad ^m a_n = \binom{n+m-2}{m-1} + \binom{n+m-2}{m}d,$$

kterýžto výčet snadno lze doplniti.

§. 309. Obrazcová čísla druhého řádu

$$1, 2 + d, 3 + 3d, 4 + 6d, 5 + 10d, \dots$$

slovou zvláště čísla polygonální či mnohoúhelníková (mnohorohá). Položíme-li tu posloupně $d = 1, 2, 3, \dots$ obdržíme číselné řady

$$1, 3, 6, 10, 15, \dots$$

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots$$

$$1, 5, 12, 22, 35, \dots \text{ a t. d.,}$$

kteréž slovou řady čísel troj-, čtyř-, pětiúhelníkových, a t. d., poněvadž tolik bodů, kolik tato čísla udávají, sestaviti lze v pravidelné troj-, čtyř-, pětiúhelníky a t. d.

Z obecného členu pro figurovaná čísla druhého řádu $^2 a_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{2}d$ plyne

$$\text{při } d = 1, \text{ t. j. pro čísla trojúhelníková } a_n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\text{" } d = 2, \text{ " " " čtyřúhelníková } a_n = n^2,$$

$$\text{" } d = 3, \text{ " " " pětiúhelníková } a_n = \frac{n(3n-1)}{2} \text{ a t. d.}$$

§. 310. Obrazcová čísla třetího řádu

$$1, 3 + d, 6 + 4d, 10 + 10d, 15 + 20d \dots$$

slovou zvláště čísla pyramidalná čili jehlancová. Položíme-li pořadem $d = 1, 2, 3, \dots$, obdržíme řady pyramidalných čísel troj-, čtyř-, pětibokých, totiž:

$$1, 4, 10, 20, 35, \dots$$

$$1, 5, 14, 30, 55, \dots$$

$$1, 6, 18, 40, 75, \dots \text{ a t. d.}$$

Z obecného členu pro figurovaná čísla třetího řádu $a_n = \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3}d$ plyne při $d = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{pro trojboká čísla pyramidalná } a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$\text{„ čtyřboká „ „ } a_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$\text{„ pětiboká „ „ } a_n = \frac{n^2(n+1)}{1 \cdot 2}, \text{ a t. d.}$$

Dodatek. V zbrojnicích bývají dělové koule složeny na hromadách troj- aneb čtyřbokých tak, že každá koule spočívá na třech nebo čtyřech koulích. Končí-li se hromada jedinou koulí, musí počet koulí v každé vrstvě býti číslo troj- nebo čtyřúhelníkové, a počet koulí v celé hromadě bude troj- aneb čtyřboké číslo pyramidalné. Není-li však hromada úplná, vyhledáme počet všech koulí, jestliže od počtu koulí v úplné hromadě odečteme počet koulí v jehlanu scházejících.

U př. Trojboká, úplně ukončená hromada koulí skládá se z osmi vrstev; a) mnoholi koulí jest v podstavě a b) mnoholi v celém jehlanu?

$$a) \text{ Podstava se skládá z } a_8 = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36 \text{ koulí.}$$

$$b) \text{ V celém jehlanu jest } a_8 = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3} = 120 \text{ koulí.}$$

V. Řešení vyšších rovnic číselných.

§. 311. Obecný tvar číselné rovnice m tého stupně o jedné neznámé jest

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_{m-1} x + A_m = 0,$$

kde součinitelé $A_1, A_2, \dots, A_m$ značí zvláštní kladná nebo záporná čísla, někteří ostatně mohou se i rovnati nulle.

Výraz závislý na měnlivé veličině x slove úkon čili funkce x a značí se $f(x), F(x), \varphi(x), \psi(x), \dots$

Položíme-li tedy mnohočlen

$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_{m-1} x + A_m = f(x)$,
můžeme dle tohoto označení představití hořejší rovnici takto:

$$f(x) = 0.$$

Obecné věty o rovnicích.

§. 312. Máme-li nejkratším způsobem odvoditi pravidla, podlé nichž kořeny rovnice závisí na jejích známých číslech, t. j. na nejvyšším mocniteli neznámé a na součinitelích jednotlivých členů, vezmeme m čísel $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{m-1}, x_m$, kteráž mohou býti celistvá nebo lomená, kladná nebo záporná, neracionálná ano i pomyslná, a součin

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_{m-1})(x - x_m)$$

vyjádříme $f(x)$; bude pak

$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \dots + A_{m-1} x + A_m$,
kde dle zákonu dokázaného v §. 294.

$$A_1 = -(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{m-1} + x_m),$$

$$A_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{m-2} x_m + x_{m-1} x_m,$$

$$A_3 = -(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{m-2} x_{m-1} x_m),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_{m-1} = (-1)^{m-1} (x_1 x_2 \dots x_{m-2} x_{m-1} + \dots + x_2 x_3 \dots x_{m-1} x_m),$$

$$A_m = (-1)^m x_1 x_2 x_3 \dots x_{m-1} x_m.$$

Součin

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_{m-1})(x - x_m) \\ = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_{m-1} x + A_m$$

bude zajisté rovnati se nulle, dosadíme-li v něm za x některou hodnotu $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{m-1}, x_m$. Považujeme-li tedy $f(x)$ za mnohočlen rovnicový tím, že položíme

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_{m-1} x + A_m = 0,$$

budou $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{m-1}, x_m$ kořeny, pročež $x - x_1, x - x_2, x - x_3, \dots, x - x_m$ kořenoví činitelé této rovnice.

Rovnici $f(x) = 0$ vyhovuje tedy všech těch m hodnot, z nichž její součinitelé $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{m-1}, A_m$ se skládají způsobem

svrchu uvedeným, ale vyhovuje jí jen oněch m hodnot. Protož rovnice $f(x) = 0$ nemůže míti více nežli m kořenů.

Poněvadž $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m$ mohou býti čísla libovolná, jak jsme předpokládali, a součinitele každé spořádané rovnice m tého stupně lze považovati za utvořené z m takovýchto čísel způsobem svrchu naznačeným, musí býti platno, co posud o rovnici $f(x) = 0$ dokázáno, také pro každou jinou rovnici uvedenou na tutéž podobu.

§. 313. Z předcházejícího plynou tyto důležité věty:

1. Každá rovnice m tého stupně má m kořenů.

Kořeny mohou býti reálné anebo pomyslné, v prvném případě pak celistvé nebo lomené, kladné aneb záporné, aneb i neracionální; rovnice může míti také dvě nebo několik kořenů rovných.

2. Mnohočlen rovnice na nullu uvedený rovná se součinu všech jejích činitelů kořenových, proto součinitel prvního členu $= 1$, součinitel druhého členu jest roven součtu všech kořenů, jejichžto znaménka změněna jsou v opačná, součinitel třetího, čtvrtého, $\dots$ členu rovná se součtu sestav druhé, třetí, $\dots$ třídy, poslední člen (bez x) jest roven součinu všech kořenů položených s opačnými znaménky.

3. Každý kořen rovnice jest činitelem posledního členu jejího.

4. Mnohočlen $f(x)$ rovnice uvedený na nullu jest dělitelný každým kořenovým činitelem $x - a$, a naopak: Je-li $f(x)$ dělitelný $x - a$, musí a býti kořenem rovnice $f(x) = 0$.

Dělíme-li mnohočlen rovnice uvedený na nullu některým činitelem kořenovým, podíl bude roven součinu všech ostatních činitelů kořenových. Považujeme-li tento podíl za rovnici, budou její kořeny zároveň kořeny rovnice původní.

§. 314. Mechanickým způsobem určíme podíl

$\frac{f(x)}{x - a}$, jakož i veličinu $f(a)$ při libovolné hodnotě a takto:

$$\text{Je-li } f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_{m-1} x + A_m, \\ a \frac{f(x)}{x - a} = x^{m-1} + B_1 x^{m-2} + B_2 x^{m-3} + \dots + B_{m-2} x + B_{m-1} + \\ + \frac{R}{x - a}, \text{ tedy dle obyčejného způsobu při dělení obdržíme}$$

$$B_1 = a + A_1,$$

$$B_2 = a^2 + A_1 a + A_2,$$

$$B_3 = a^3 + A_1 a^2 + A_2 a + A_3,$$

$$\dots \dots \dots B_{m-1} = a^{m-1} + A_1 a^{m-2} + A_2 a^{m-3} + \dots + A_{m-2} a + A_{m-1},$$

$$R = a^m + A_1 a^{m-1} + A_2 a^{m-2} + \dots + A_{m-1} a + A_m.$$

Jak patrně, zbytek R obdržíme, jestliže do daného mnohočlenu $f(x)$ dosadíme $x = a$, tedy $R = f(a)$.

Dosadíme-li hodnotu každého tohoto součinitele do výrazu součinitele nejbližší následujícího, bude

$$B_1 = a + A_1,$$

$$B_2 = (a + A_1) a + A_2 = B_1 a + A_2,$$

$$B_3 = (a^2 + A_1 a + A_2) a + A_3 = B_2 a + A_3,$$

$$\dots \dots \dots B_{m-1} = B_{m-2} a + A_{m-1},$$

$$R = B_{m-1} a + A_m.$$

První součinitel v podílu rovná se tedy prvému součiniteli v dělenci (zde 1); každého následujícího, u př. *ktého* součinitele v podílu obdržíme, jestliže předcházejícího součinitele násobíme a a k součinu připočteme *ktého* součinitele v dělenci.

K ustanovení po sobě následujících součinitelů v podílu $\frac{f(x)}{x - a}$ poslouží schema toto:

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_{m-1} & A_m \\ a) & & a & B_1 a & B_2 a & & B_{m-2} a & B_{m-1} a \\ & 1 & B_1 & B_2 & B_3 & \dots & B_{m-1} & R \end{array}$$

Obdržíme-li $R = f(a) = 0$, bude a kořenem rovnice $f(x) = 0$.

Budiž u př. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$, pročež při $x = 4$

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & + 2 & - 13 & - 14 & + 24 \\ & & + 4 & + 24 & + 44 & + 120 \\ 4) & 1 & + 6 & + 11 & + 30 & + 144; \end{array}$$

$\frac{f(x)}{x-4}$ rovná se tedy podílu $x^3 + 6x^2 + 11x + 30$ a zbytku $R = f(4) = 144$, z čehož jde na jevo, že 4 není kořenem dané rovnice.

Při $x = 3$ bude

$$\begin{array}{r} 1 \quad + \quad 2 \quad - \quad 13 \quad - \quad 14 \quad + \quad 24 \\ 3) \quad \quad + \quad 3 \quad + \quad 15 \quad + \quad 6 \quad - \quad 24 \\ \hline 1 \quad + \quad 5 \quad + \quad 2 \quad - \quad 8 \quad 0; \end{array}$$

pročež $\frac{f(x)}{x-3} = x^3 + 5x^2 + 2x - 8$ a zbytek $R = f(3) = 0$, tudíž jest 3 kořenem rovnice.

§. 315. Má-li číselná hodnota úkonu $f(x)$ za dvě substituce reálných hodnot $x = a$, $x = b$ opáčná znaménka, leží mezi a a b aspoň *jeden* reálný kořen rovnice $f(x) = 0$.

Důkaz. Budiž

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_{m-1} x + A_m = 0.$$

Položíme-li místo x všude $x + h$, kde h jest velmi malé, tedy

$$f(x+h) = (x+h)^m + A_1 (x+h)^{m-1} + \dots + A_{m-1} (x+h) + A_m,$$

aneb vyvineme-li tento výraz a spořádáme-li dle vzestupných mocnin h ,

$$f(x+h) = f(x) + C_1 h + C_2 h^2 + C_3 h^3 + \dots, \text{ aneb}$$

$$f(x+h) - f(x) = C_1 h + C_2 h^2 + C_3 h^3 + \dots,$$

z čehož plyne, že při velmi malých proměnách h také $f(x)$ velmi málo přibývá aneb ubývá, tudíž při nepřetržitém měnění x také $f(x)$ nepřetržitě se mění. Myslíme-li si tedy, že x nepřetržitě přechází od a ku b , bude také $f(x)$ nepřetržitě od $f(a)$ přecházeti k $f(b)$, a přitom, mají-li $f(a)$ a $f(b)$ opáčná znaménka, projde nullou aspoň jednou.

Dodatek. Mají-li $f(a)$ a $f(b)$ opáčná znaménka, může $f(x)$ od $x = a$ ku $x = b$ také tři-, pět-, vůbec $(2n+1)$ krát projíti z kladného k zápornému a naopak, při přechodu pak rovnati se nulle, poněvadž po dvojnásobném přechodu objeví se opět znaménko původní; t. j. mají-li $f(a)$ a $f(b)$ znaménka opáčná, může mezi a a b býti i více reálných kořenů rovnice $f(x) = 0$, ovšem vždy jen v počtu lichém.

§. 316. Jsou-li ve funkci $f(x)$ součinitelé čísla celistvá, všechny racionální kořeny rovnice $f(x) = 0$ jsou také čísla celistvá.

Dejme tomu, že by v rovnici

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

jeden kořen byl číslo lomené $x = \frac{p}{q}$, kde p a q jsou prvočísla

vespolek, tedy by

$$\left(\frac{p}{q}\right)^m + A_1 \left(\frac{p}{q}\right)^{m-1} + A_2 \left(\frac{p}{q}\right)^{m-2} + \dots + A_{m-1} \left(\frac{p}{q}\right) + A_m = 0,$$

což násobeno q^{m-1} dá

$$\frac{p^m}{q} = -(A_1 p^{m-1} + A_2 p^{m-2} q + \dots + A_{m-1} p q^{m-2} + A_m q^{m-1});$$

zlomek $\frac{p^m}{q}$ musel by se tedy rovnati celistvému číslu, což nemožno proto, že p a q jsou prvočísla vespolek (§. 74., 6).

§. 317. Proměníme-li v rovnici znaménka všech členů na sudých místech v opáčná, při čem dlužno míti ohled i ku členům snad scházejícím, veškeré kořeny v nové rovnici mají protivné hodnoty kořenů v dané rovnici.

Dána-li rovnice

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \dots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

a je-li a kořen rovnice

$$F(x) = x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} - A_3 x^{m-3} + \dots + (-1)^{m-1} A_{m-1} x + (-1)^m A_m = 0,$$

tedy při sudém m bude patrně $f(-a) = F(a) = 0$, při lichém m pak $f(-a) = -F(a) = 0$, v každém případě tedy $-a$ kořenem rovnice $f(x) = 0$.

Touto větou převádí se řešení číselné rovnice na určení kořenů kladných. Chceme-li totiž vyhledati kořeny záporné, proměníme znaménka sudých členů v opáčná a vyhledáme kladné kořeny této rovnice přetvořené; dáme-li těmto pak znaménka opáčná, obdržíme záporné kořeny původní rovnice.

Určování racionálních kořenů.

§. 318. Jsou-li v rovnici

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

součinitelé $A_1, A_2, \dots, A_m$ čísla celistvá, musejí kořeny,

jsou-li racionálné, také býti čísla celistvá (§. 316.). V tomto případě lze určití kořeny jednoduchým způsobem dle věty, že každý kořen rovnice jest činitelem posledního členu jejího. Vyhledávše tedy všechny činitele posledního členu A_m , zkoušíme dosazováním, kteří z nich uvádějí rovnici na nullu.

Prospěšně dosazovati lze mechanickým způsobem uvedeným v §. 314. Shledáme-li, že činitel a jest kořenem rovnice $f(x) = 0$, můžeme pak dosazovati týmž způsobem do podílové rovnice

$$\frac{f(x)}{x - a} = 0, \text{ kteráž obsahuje ostatní kořeny dané rovnice } f(x) = 0.$$

U př. Budiž dána rovnice $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$.

Činitelé posledního členu 6 jsou $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Dosazením těchto činitelů obdržíme

$$\begin{array}{r} 1 7 1 6 \\ 1 0 7 6 \\ + 1) \hline 1 1 6 \\ 1 6 \\ - 1) \hline 2 2 \\ 1 4 \\ + 2) \hline \end{array}$$

Patrnó, že $+ 2$ není kořenem dané rovnice, pročež

$$\begin{array}{r} 1 6 \\ 2 6 \\ - 2) \hline 3 \\ 3 \\ + 3) \hline \end{array}$$

Kořeny rovnice dané jsou $+ 1, - 1, - 2$ a $+ 3$, tudíž není potřebí zkoušeti ostatní činitele $- 3$ a ± 6 .

Má-li poslední člen mnoho dělitelů, bylo by takovéto vyhledávání kořenů rozvláčné. Stávají sice rozličná pravidla o kratším provedení toho počtu; ale nemůžeme je zde vzíti v úvážení.

§. 319. Jsou-li v rovnici

$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_{m-1} x + A_m = 0$
součinitelé $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$, aneb někteří z nich čísla lomená, můžeme ji vždycky přetvořiti na jinou rovnici, jejíž součinitelé jsou celistvá čísla, položíme-li totiž místo x všude $\frac{x}{q}$,

kde q jest nejmenší společný násobek všech jmenovatelů lomených součinitelů, a násobíme-li pak q^m .

Všecky racionální kořeny přetvořené rovnice jsou celistvá čísla, která lze vyhledati dle §. 318; dělíme-li každý kořen číslem q , obdržíme kořeny dané rovnice $f(x) = 0$.

Určování kořenů neracionálních.

§. 320. Nejsou-li kořeny rovnice s celistvými součiniteli čísla celistvá, jsou neracionální (§. 316.). Dosadíme-li do rovnice po sobě následující čísla 0, 1, 2, 3, . . . , poznáme dle znamének výsledků (§. 315.), mezi kterými mezními hodnotami leží kladné neracionální kořeny této rovnice; pak bude jen potřebí, abychom z vyhledaných mezních hodnot vypočítali mezi nimi ležící kořen tak správně, jak se právě vyžaduje. Určení záporných kořenů neracionálních lze převést na vypočítání kořenů kladných (§. 316.).

Neracionální kořeny vypočítávají se přibližně způsobem rozličným.

I. Newtonův způsob přibližný.

Budiž x_1 kořen rovnice

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_{m-1} x + A_m = 0,$$

a pak přibližná hodnota toho kořene taková, že $x_1 = a + h$.

Vůbec jest

$$f(x+h) = (x+h)^m + A_1 (x+h)^{m-1} + \dots + A_{m-1} (x+h) + A_m = 0,$$

aneb spořádáme-li výraz dle mocnin h ,

$$f(x+h) = f(x) + hf_1(x) + h^2 f_2(x) + h^3 f_3(x) + \dots,$$

kde $f_1(x) = mx^{m-1} + (m-1) A_1 x^{m-2} + \dots + A_{m-1}$, a taktéž $f_2(x)$, $f_3(x)$, . . . na h jsou závislé.

Při $x = a$ bude tedy

$$f(a+h) = f(a) + h f_1(a) + h^2 f_2(a) + h^3 f_3(a) + \dots$$

Poněvadž $a + h$ jest kořenem rovnice, tudíž má být $f(a+h) = 0$, musíme h určit tak, aby

$$f(a) + h f_1(a) + h^2 f_2(a) + h^3 f_3(a) + \dots = 0.$$

Je-li $h < 1$, bude h^2 , h^3 , . . . ještě menší; vynecháme-li tedy

členy s h^2 , h^3 , . . . , obdržíme přibližně $f(a) + hf_1(a) = 0$,
pročež $h = -\frac{f(a)}{f_1(a)}$, a

$$a + h = a - \frac{f(a)}{f_1(a)} = a_1$$

jakožto přibližnou hodnotu kořene.

Naložíme-li s a_1 tímž způsobem jako prvé s a , obdržíme

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f_1(a_1)}$$

jakožto druhou přibližnou hodnotu ještě určitější; a t. d.

Příklad. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0$.

Při $x = 0$ jest $f(0) = +4$, při $x = 1$ však $f(1) = -6$,
z čehož plyne, že jeden kořen rovnice leží mezi 0 a 1.

Poněvadž $f_1(x) = 3x^2 - 8x - 7$, bude pro první hodnotu
přibližnou

$$a = 0, f(a) = +4, f_1(a) = -7;$$

$$a_1 = 0 + \frac{4}{7} = 0.5.$$

Pro druhé přiblížení jest

$$a_1 = 0.5, f(a_1) = -0.375, f_1(a_1) = -8.25;$$

$$a_2 = 0.5 - \frac{0.375}{8.25} = 0.45.$$

Pro třetí přiblížení bude

$$a_2 = 0.45, f(a_2) = 0.131125, f_1(a_2) = -9.9925;$$

$$a_3 = 0.45 + \frac{0.131125}{9.9925} = 0.463.$$

Pro čtvrté přiblížení jest

$$a_3 = 0.463, f(a_3) = 0.000776847, f_1(a_3) = -10.060893;$$

$$a_4 = 0.463 + \frac{0.000776847}{10.060893} = 0.46307721,$$

kterážto přibližná hodnota jest správná na 8 míst desetinných.

Tímto způsobem mohli bychom vyhledati také ostatní kořeny rovnice. Lépe bude, vyvineme-li podílovou rovnici

$$\frac{f(x)}{x - 0.46307721} = x^2 - 3.53692279x - 8.63878683 = 0$$

a řešíme-li tuto rovnici kvadratickou. Z té totiž vypočítáme
 $x = 5.19852321$ a $x = -1.66160042$ jakožto ostatní dva
kořeny dané rovnice.

Newtonův jednoduchý způsob vede sice velmi rychle k cíli, ale předpokládá, že známe již dosti přiblíženou hodnotu kořene, jinak bychom se ku kořenu nejen neblížili, nýbrž dokonce od něho se mohli vzdalovati. Zároveň nevysvětluje ze způsobu samého, kterak by bylo možno posouditi hned také správnost každé hodnoty přiblížené. Protož zde uvedeme jiný přiblížný způsob, jímž meze kořene, nechť se jakkoli od sebe liší, vždy více se sblíží, a z něhož také posloupně a bezprostředně meze chyby lze poznati.

II. způsob přiblížný.

§. 321. Vyvodí-li substituce $x = a$ a $x = b$, kde $a < b$, z rovnice $f(x) = 0$ výsledky $f(a)$ a $f(b)$ s opačnými znaménky, musí aspoň jeden kořen x_1 dané rovnice ležeti mezi a a b .

a jest kořenem rovnice $f(x) - f(a) = 0$, pročez musí rozdíl $f(x) - f(a)$ býti dělitelný $x - a$; položme pak $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \varphi(x)$. Taktéž jest b kořenem rovnice $f(x) - f(b) = 0$, položme tedy $\frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \psi(x)$. Z toho plyne

$$(x - a)\varphi(x) = f(x) - f(a) \quad \text{a} \quad (x - b)\psi(x) = f(x) - f(b), \text{ pročez}$$

$$x = a + \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x)} \quad \text{a} \quad x = b + \frac{f(x) - f(b)}{\psi(x)}.$$

Při $x = x_1$ bude $f(x) = 0$; proto

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{\varphi(x_1)} \quad \text{a} \quad x_1 = b - \frac{f(b)}{\psi(x_1)}.$$

Budiž výsledek dosazení $f(a)$ záporný a $f(b)$ kladný; poněvadž $x_1 > a$ a $x_1 < b$, a proto $-\frac{f(a)}{\varphi(x_1)}$ představuje číslo

kladné, $-\frac{f(b)}{\psi(x_1)}$ však číslo záporné, musejí oba úkony $\varphi(x_1)$ a $\psi(x_1)$ býti kladné. Položme pak, jelikož neznáme $\varphi(x_1)$ a $\psi(x_1)$, v kladných členech úkonů $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ místo x všude b , v záporných však a , a naznačme výsledky vztažně $\varphi(b, a)$ a $\psi(b, a)$, budou i tyto kladné, a

$$\varphi(b, a) > \varphi(x_1), \quad \psi(b, a) > \psi(x_1), \text{ pročez}$$

$$x_1 > a - \frac{f(a)}{\varphi(b, a)}, \quad x_1 < b - \frac{f(b)}{\psi(b, a)},$$

čímž obdržíme dvě vztahů:

$$a < a - \frac{f(a)}{\varphi(b,a)} < x_1 \quad a \quad x_1 < b - \frac{f(b)}{\psi(b,a)} < b.$$

Tudíž jest $a - \frac{f(a)}{\varphi(b,a)} = a_1$ dolejší, $b - \frac{f(b)}{\psi(b,a)} = b_1$ hořejší přibližnou mezí kořene x_1 .

Je-li však výsledek dosazení $f(a)$ kladný a $f(b)$ záporný, položíme v kladných členech úkonů $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ místo x všude a , v záporných pak b a naznačme výsledky vztažně $\varphi(a,b)$ a $\psi(a,b)$.

Soudíme-li jako prvé, shledáme, že $a - \frac{f(a)}{\varphi(a,b)} = a_1$ jest dolejší a $b - \frac{f(b)}{\psi(a,b)} = b_1$ hořejší přibližnou mezí kořene x_1 .

Vyhledáme-li pak z přibližných mezí a_1 a b_1 týmž způsobem ještě užší meze, a pokračujeme-li v tom počtu, určíme kořen x_1 tak správně, jak vůbec zapotřebí, a z mezních hodnot pokaždé také hned uvidíme stupeň přiblížnosti.

Příklad.

Budiž opět dána rovnice $f(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0$, jejíž kořen, ležící mezi 0 a 1, vypočítali jsme prvé způsobem Newtonovým. Především jest

$$\begin{aligned} f(a) &= a^3 - 4a^2 - 7a + 4, \text{ pročež} \\ f(x) - f(a) &= (x^3 - a^3) - 4(x^2 - a^2) - 7(x - a), \text{ z čehož} \\ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \varphi(x) = x^2 + ax + a^2 - 4(x + a) - 7. \end{aligned}$$

Směníme-li a za b , obdržíme

$$\psi(x) = x^2 + bx + b^2 - 4(x + b) - 7.$$

Při $a = 0$ jest $f(a) = +4$, při $b = 1$ jest $f(b) = -6$; máme-li tedy určiti užší mezní hodnoty, položíme v kladných členech úkonů $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ místo x všude a , v záporných však b , čímž obdržíme

$$\begin{aligned} \varphi(a,b) &= 3a^2 - [4(a + b) + 7], \\ \psi(a,b) &= a^2 + ab + b^2 - (8b + 7). \end{aligned}$$

Nyní použijeme vzorců

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{\varphi(a,b)}, \quad b_1 = b - \frac{f(b)}{\psi(a,b)}$$

při posloupných hodnotách a a b .

Pro první přiblížení, jelikož $a = 0$ a $b = 1$, bude

$$\begin{aligned} f(a) &= +4, & f(b) &= -6, \\ \varphi(a,b) &= -11, & \psi(a,b) &= -14; \text{ pročež} \\ a_1 &= 0 + \frac{4}{11} = 0.36, \\ b_1 &= 1 - \frac{6}{14} = 0.48. \end{aligned}$$

Pro druhé přiblížení jest

$$\begin{aligned} f(a_1) &= +1.0083, & f(b_1) &= -0.1710, \\ \varphi(a_1,b_1) &= -9.9268, & \psi(a_1,b_1) &= -10.3004; \text{ protož} \\ a_2 &= 0.36 + \frac{1.0083}{9.9268} = 0.462, \\ b_2 &= 0.48 - \frac{0.1710}{10.3004} = 0.464. \end{aligned}$$

Pro třetí přiblížení obdržíme

$$\begin{aligned} f(a_2) &= +0.010835, & f(b_2) &= -0.009287, \\ \varphi(a_2,b_2) &= -10.063668, & \psi(a_2,b_2) &= -10.068892; \text{ pročež} \\ a_3 &= 0.462 + \frac{0.010835}{10.063668} = 0.463077, \\ b_3 &= 0.464 - \frac{0.009287}{10.068892} = 0.463078. \end{aligned}$$

Hledaný kořen je tedy na 6 míst desetinných správně $= 0.463077$.

Při čtvrtém přiblížení bychom obdrželi

$$\begin{aligned} a_4 &= 0.46307721\ 29700, \\ b_4 &= 0.46307721\ 29704, \end{aligned}$$

kterýmiž mezními hodnotami kořen jest určen na 12 míst desetinných.

Dodatek. Leží-li mezi a a b tři, pět, vůbec lichý počet reálných kořenů, shledáme to při použití hořejšího způsobu tím, že přibližné hodnoty, ačkoli z dolu se vždy více blíží k nejmenšímu kořenu x_1 , s hůry však k největšímu kořenu X_1 , k sobě jenom nepatrně se přibližují, poněvadž jich rozdíl vázán jest na stálou mez $X_1 - x_1$. Máme-li v tomto případě rozloučiti kořeny, dosadíme do rovnice několik hodnot, ležících mezi a a b , a s ohledem na znaménka výsledků vyhledáme meze, v nichž leží jednotlivé kořeny.

Budiž dána u př. rovnice

$$f(x) = 30x^3 - 140x^2 + 213x - 105 = 0.$$

Jelikož $f(1) = -2$ a $f(2) = +1$, leží mezi 1 a 2 aspoň jeden kořen reálný. Položíme-li $a = 1$, $b = 2$, obdržíme

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{\varphi(b,a)} = 1 + 0.01 = 1.01,$$

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{\psi(b,a)} = 2 - 0.006 = 1.994.$$

Poněvadž a_1 velmi nepatrně se blíží k b_1 , lze se domnívat, že daná rovnice má několik kořenů, ležících mezi a a b .

Dosazením hodnot mezi 1 a 2 obdržíme tedy

$$\begin{array}{rcccccccc} \text{při } x = & 1.1 & 1.2 & 1.3 & 1.4 & 1.5 & 1.6 & 1.7 \\ f(x) = & -0.17 & +0.84 & +1.21 & +1.12 & +0.75 & +0.28 & -0.11 \\ & & & & & & & 1.8 & 1.9 \\ & & & & & & & -0.24 & +0.07 \end{array}$$

Rovnice má tedy skutečně tři kořeny mezi 1 a 2, a sice první leží mezi 1.1 a 1.2, druhý mezi 1.6 a 1.7, třetí konečně mezi 1.8 a 1.9. Z těchto užších hodnot mezních pak můžeme použitím způsobu přibližného vypočítati každý z těchto tří kořenů tak správně, jak jen chceme.

III. způsob přibližný.

§. 322. Mnohdy se výhodně používá k řešení rovnic následujícího způsobu, známého jmenem Regula falsi.

Máme-li vypočítati kořen x_1 rovnice $f(x) = 0$, a obdržíme-li substitucí a a b výsledky $f(a)$ a $f(b)$, budou a a b tím blíže pravé hodnotě x_1 , čím méně $f(a)$ a $f(b)$ se liší od nuly; $x_1 - a = \alpha$ a $x_1 - b = \beta$ značí tudíž chyby v substitucích, a $f(a)$, $f(b)$ chyby ve výsledcích.

S ohledem na §. 320. jest

$$f(a) = f(x_1 - \alpha) = f(x_1) - \alpha f_1(x_1) + \alpha^2 f_2(x_1) - \alpha^3 f_3(x_1) + \dots,$$

$$f(b) = f(x_1 - \beta) = f(x_1) - \beta f_1(x_1) + \beta^2 f_2(x_1) - \beta^3 f_3(x_1) + \dots,$$

kde $f_1(x_1)$, $f_2(x_1)$, $f_3(x_1)$. . . nejsou závislé na α a β .

Jelikož $f(x_1) = 0$, plyne při velmi malém α a β přibližně $f(a) = -\alpha f_1(x_1)$, $f(b) = -\beta f_1(x_1)$, pročež

$$\frac{f(a)}{f(b)} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{x_1 - a}{x_1 - b},$$

t. j. chyby ve výsledcích mají se k sobě jako chyby v substitucích.

Z této věty přibližně pravé plyne pak

$$x_1 = \frac{bf(a) - af(b)}{f(a) - f(b)} = a + \frac{(b - a)f(a)}{f(a) - f(b)}$$

jakožto správnější hodnota hledaného kořene.

Vezmeme-li pak zase tuto novou hodnotu co jednu substituci, a dle výsledku buď jednu dřívější hodnotu přibližnou, aneb i jinou hodnotu, která se zdá výhodnou, co substituci druhou, obdržíme dle posledního vzorce ještě správnější hodnotu x_1 , a t. d.

Budiž dána u př. rovnice $f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 6 = 0$.

Při $a = 1$ bude $f(a) = -1$,

$b = 2$ „ $f(b) = +8$; pročež

$$a_1 = 1 + \frac{1}{9} = 1.1.$$

$a_1 = 1.1$, $f(a_1) = -0.329$, (hodnota příliš malá)

$b_1 = 1.2$, $f(b_1) = +0.288$;

$$a_2 = 1.1 + \frac{0.0329}{0.617} = 1.153.$$

$a_2 = 1.153$, $f(a_2) = -0.031601$, (hodnota příliš malá)

$b_2 = 1.16$, $f(b_2) = +0.015296$;

$$a_3 = 1.153 + \frac{0.000221207}{0.046897} = 1.15772,$$

kterážto hodnota kořene jest správná na 5 míst desetinných.

Pravidla zvaného Regula falsi lze použiti také k řešení rovnic transcendentných.

Je-li dána u př. rovnice $x^x = 10$, obdržíme z ní $x \log x = 1$, pročež $f(x) = x \log x - 1 = 0$. Jelikož patrně musí býti $x > 2$ a $x < 3$, vyšetříme substituci 2.5.

Při $a = 2.5$ bude $f(a) = -0.005150$, z čehož jde na jevo, že hodnota 2.5 jest sice malá, ale velmi se blíží ku kořenu. Vezmeme-li 2.51 co druhou substituci, tedy

$b = 2.51$, $f(b) = +0.003182$;

pročež dle hořejšího pravidla

$$a_1 = 2.5 + \frac{0.0000515}{0.008332} = 2.50618,$$

kterážto hodnota jest již správná na 5 míst desetinných.

Dodatek.

Úlohy ku cvičení.

I. Sečítání a odčítání.

1. Sečítání a odčítání prostých čísel celistvých.

(§§. 11. a 12.)

- | | |
|---|------------------------------------|
| 1. $5a + 2a$. | 2. $7m + 5n$. |
| 3. $23t + 19t$. | 4. $ax + bx$. |
| 5. $(x + 2) + 6$. | 6. $(4a + 7) + 2a$. |
| 7. $(m + 2n) + 3m$. | 8. $(7x + 5y) + 7y$. |
| 9. $3m + 4m + 6m$. | 10. $15a + 3b + 9b$. |
| 11. $(2a + 3b + 4c) + 3a$. | 12. $[(7p + 5q) + 3p] + 5q$. |
| 13. $2p + 3q + 5p + 3q + q$. | 14. $m + 6m + 3n + 7m + 9n$. |
| 15. $8 + (6 + a)$. | 16. $10y + (12x + 5y)$. |
| 17. $7m + [3m + (2m + 8n)]$. | 18. $3a + [7a + (5a + b)]$. |
| 19. $5p + [(7p + 8q) + 6q]$. | 20. $15x + [5x + (7y + x)] + 2y$. |
| 21. $(x + 3) + (x + 1)$. | 22. $(3a + 4m) + (3a + 2m)$. |
| 23. $6x + 5y$ | 24. $a + 2b + 3c$ |
| $x + 7y$ | $2a + 3b + c$ |
| $8x + y$ | $3a + b + 2c$ |
| 25. $8a + 7b + 6c + 5d$ | 26. $3x + 5(3m + 2n)$ |
| $9a + 6b + 7c + 4d$ | $5x + 6(3m + 2n)$ |
| $7a + 5b + 8c + 6d$ | $x + 9(3m + 2n)$ |
| 27. $(7a + 6b) + [(3b + 16a) + (13a + 20b)]$. | |
| 28. $(6x + 7y + 5z) + (4x + 4y) + (10x + z) + (9y + 14z)$. | |
- Vypočítejte hodnoty následujících součtů při $a=4$, $b=5$, $c=6$:
- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 29. $3a + 5(b + c)$; | 30. $3b + 5(a + c)$; |
| 31. $3c + 5(a + b)$; | 32. $3(a + b) + 5c$. |

2. Odčítání prostých čísel celistvých.

(§§. 16.—24.)

- | | |
|-----------------------|----------------------|
| 1. $4a - 2a$. | 2. $4a - 4a$. |
| 3. $(x + 7) - 2$. | 4. $(6p + 5) - 3p$. |
| 5. $(9m + 2n) - 6m$. | 6. $8n + n - 6n$. |

7. $[(3x + 5) + 2x] - 4x$. 8. $3m + 9m + m - 5m$.
 9. $(a - 2) + 5$. 10. $(7m - 3a) + 4m$.
 11. $(8x - 4y) + 7y$. 12. $[(5z - 2) + 3z] + 4$.
 13. $(3a - 4) - 6$. 14. $(16y - 8x) - 8y$.
 15. $[(5x - 2) - 2x] - 3$. 16. $5a + 7b - 2b - 4a$.
 17. $12 - (4 + m)$. 18. $9y - (2x + 7y)$.
 19. $(6x + 4y) - (3x + 2y)$. 20. $5m - [(2m + 3a) + 2m]$.
 21. $6 + (n - 4)$. 22. $x + (8x - 4a)$.
 23. $7a + (3a - 2b)$. 24. $15m + [(4m - 3) - 2]$.
 25. $5y - (8z - 3y)$. 26. $(m + n) - [m - (a - n)]$.
 27. $(2x - 4) + (3x - 1)$. 28. $7a + (8a - 2) + (9a - 4)$.
 29. $[x - (m + n)] + [x - (m + p)] + [x - (n + p)]$.
 30. $(5x - 2y) - (x - 2y)$. 31. $(9m - 4n) - (4m - 3n)$.
 32. $5a - 3b$ 33. $7b - 3c$
 $2a - b$ $2b - 2c$
 $- +$

34. $17x - 15y$ 35. $20m - 27n + 12p$
 $8x - 9y$ $15m - n + 12p$
 36. $(17p + 15q - 13r - 11s) - (5p - 6q - 7r + 8s)$.
 37. $(5a + 2b - 3c) - (2a - 3b + 5c) - (a - 2b - 4c)$.
 38. $(3x - 5y - 7z) + (7x + 4y - 3z) - (6x - 3y + 10z)$.
 39. $7a - (3c - 6b) - (6a - 3c) - 3b + (3a - 8c)$.
 40. $(8m - 5y) + [(2y - 7m) - (y - 3m)]$.
 41. $(x + y) - [x - \{a - (y - x)\}]$.
 42. $(2x - [(3a + 4x) - (4x - 1)] - (x - 2a - 2))$.
 43. $(8m - 5x) - (2m - 3n - 4x) + [(3x - 2n) - (4m + 3n)]$.

Ustanovte hodnoty následujících výrazů při $a = 4$, $b = 3$:

44. $(8a + 7b) - (5a - 4b) - (2a - b)$;
 45. $8a + (7b - 5a) - \{(4b - 2a) - b\}$;
 46. $8a + (7b - 5a) - \{4b - (2a - b)\}$;
 47. $(8a + 7b) - \{5a - (4b - 2a) - b\}$.

3. Sečítání a odčítání algebraických čísel celistvých.

(§§. 28.—31.)

1. $(+ 7a) + (+ 3a)$. 2. $(- 6m) + (+ 3m)$.
 3. $(+ 5n) + (- 5n)$. 4. $(- 8x) + (- 2x)$.
 5. $(+ 2x) - (+ y)$. 6. $(- 6a) - (+ 4a)$.

7. $(+ 6m) - (- 3m)$. 8. $(- 4s) - (- 8s)$.
 9. $(- 4x) + (- 2x) - (- x) + (+ 9x)$.
 10. $8a + 3b - 4c$ 11. $25x + 31y - 17z$
 $- 3a - 5b + 7c$ $x - 29y - 19z$
 $a + 4b - 5c$ $- 22x + 8y + 37z$
 12. Vypočítejte $x - (x - 2) + (x - 4) - (x - 6)$ při $x = 4$.
 13. $(x + y - z) - (x - y + z) + (- x + y + z) - (- x - y + z)$.
 14. $[(a - b) - b] - (b - a)$.
 15. $5m - [3m - (m - n)]$.
 16. $x + [(y - x) - (y - z)]$.
 17. $x - [(x + z) - (y + z)]$.
 18. $3a - [2b - a - \{3a - (3b - 5a) + 5b\}]$.
 19. $3m - 2n - \{- 5n - [6m - \{4n - [- 3m - (5m - 2n)]\}]\}$.
 20. $2a + 3b - \{2a - [2a + 3b - \{(2a + 3b) - (2a - 3b)\}]\}$.
 21. $[6x + 7y - \{- 6x + 7y - [(6x + 7y) - (6x - 7y) - 6x]\}]$
 $- [6x - \{(6x - 7y) - (6x + 7y)\}]$.

II. Násobení a dělení.

1. Násobení prostých čísel celistvých.

(§§. 36. a 37.)

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $a^3 \cdot a^4$. | 2. $m^3 \cdot m^5 \cdot m$. | 3. $x^m \cdot x^n \cdot x^p \cdot x^q$. |
| 4. $xy \cdot z$. | 5. $3a \cdot b$. | 6. $5mn \cdot 2$. |
| 7. $a \cdot bx$. | 8. $m \cdot 6yz$. | 9. $a^3 \cdot 4a^2$. |
| 10. $2a \cdot 4b$. | 11. $8xy \cdot 7x$. | 12. $2y^3 \cdot 4y^2$. |
| 13. $7a^2x \cdot ax^2$. | 14. $4z^3 \cdot 5bz^2$. | 15. $6m^3n^4 \cdot 5m^3n^2$. |
| 16. $a \cdot 2a \cdot 3a$. | 17. $xy \cdot xy \cdot xy$. | 18. $z^2 \cdot 2z^3 \cdot 3z$. |
| 19. $a^3b \cdot 5a^2b^2 \cdot 8ab^3$. | 20. $x^3 \cdot 3x^2y \cdot 3xy^2 \cdot y^3$. | |

(§§. 38.—40.)

- | | | |
|-------------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| 21. $(x + a) \cdot b$. | 22. $(a + 1) \cdot 5$. | 23. $(x - 5) \cdot 4 - 2x$. |
| 24. $(3m + 2n) \cdot 5p$. | 25. $(a^2b + ab^2) \cdot ab$. | 26. $(6m + 5m^2) \cdot 2m$. |
| 27. $am + bm$. | 28. $5x^2 + 9x^2$. | 29. $3y^3 + 5y^3$. |
| 30. $4a + 4b$. | 31. $ax^2 + ay^2$. | 32. $(a+m)x + (a-m)x$. |
| 33. $m(b^2 - x^2) + n(b^2 - x^2)$. | 34. $6m + 6n + 6p$. | |
| 35. $(a - b) \cdot z$. | 36. $(m - 1) \cdot m$. | 37. $8x + (7 - x) \cdot 3$. |
| 38. $(4a - 3b) \cdot 5c$. | 39. $(2x^2 - x) \cdot 3x$. | 40. $(ax^3 - by^3) \cdot mxy$. |

41. $am - bm$. 42. $a \cdot 10^m - b \cdot 10^m$. 43. $15ay^2 - 9ay^2$.
 44. $3x - 3y$. 45. $7x - 7y + 7$. 46. $ax + ay - a$.
 47. $3a^2 - a^2 + 5b^2 - 3b^2$. 48. $5x - 5y + 6a - 6b$.
 49. $a(3x + 2) - 3b(3x + 2) + 3a(3x + 2)$.

Sečtěte

50. $8mx + 5ny$
 $3mx - 7ny$
 $mx - 3ny$
 51. $6a^4 - 9a^3 + 12a^2$
 $4a^3 - 6a^2 + 8a$
 $2a^2 - 3a + 4$

Odečtěte

52. $amx + bny - cpz$
 $3mx - 2ny + pz$
 53. $15x^3 - 26x^2 + 33x - 10$
 $15x^3 - 20x^2 + 25x$
 54. $(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) - (x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3)$.
 55. $7xy - [7yz - (3xz - 2xy) + 3xy] - (6yz - 3xz)$.
 56. $b \cdot (x + y)$. 57. $5 \cdot (a + 1)$. 58. $m \cdot (p + 5)$.
 59. $6 \cdot (m + n) - 5m$. 60. $3x \cdot (a^2 + b^2)$. 61. $12a^2 \cdot (3x^2 + 2y^2)$.
 62. $a \cdot (b - 1)$. 63. $b \cdot (x - y)$. 64. $8 \cdot (3 - m)$.
 65. $5 \cdot (z - 2) + 7$. 66. $5m \cdot (ax^3 - by^3)$. 67. $2a^2b^2 \cdot (a^2b - ab^2)$.
 68. Jakou hodnotu má výraz

$4a(3x^2 - 5xy) - 5b(2x^2 - 6y^2)$ při $a = 5, b = 3, x = 7, y = 4$?

69. A má $(4n^3 - 3n^2 + 2n + 1)$ zlatých, B však o $(2n^3 + 2n^2 - 4n + 4)$ zlaté méně nežli A; dá-li A osobě B $(n^3 - 2n^2 + 4n - 6)$ zlatých, mnoholi má pak každá osoba? Mnoholi měla každá původně a mnoholi posledně, je-li $n = 8$?

70. $(x + a)(x + b)$. 71. $(x + a)(x - b)$.
 72. $(x - a)(x + b)$. 73. $(x - a)(x - b)$.
 74. $(a + 1)(b + 1)$. 75. $(m + 1)(m + 2)$.
 76. $(y + 3)(y - 5)$. 77. $(z - 4)(z - 6)$.
 78. $(5x + 3a)(5x + 4b)$. 79. $(a^m + b^m)(a^n - b^n)$.
 80. $(3x^2 + 2y^2)(4x^2 + 5y^2)$. 81. $(ax^m - by^n)(bx^n + ay^m)$.
 82. $(2a^2 + 3b^2)(5a^2 - 4b^2) - (10a^4 - 12b^4)$.
 83. $(x + y)^2$. 84. $(a + 1)^2$. 85. $(p + 2)^2$.
 86. $(x - y)^2$. 87. $(a - 1)^2$. 88. $(p - 2)^2$.
 89. $(10m + n)^2$. 90. $(2x + y)^2$. 91. $(x - 2y)^2$.
 92. $(10m - n)^2$. 93. $(3a^2 + 4b^2)^2$. 94. $(5p^3 - 3q^3)^2$.
 95. $(x + 3)^2 - 6x$. 96. $(y - 4)^2 + 8y$.
 97. $(x + a)^2 + (x - a)^2$. 98. $(x + a)^2 - (x - a)^2$.
 99. $(ax^2 + by^2)^2 - 2abx^2y^2$. 100. $(a^2x - b^2y)^2 + (a^2x + b^2y)^2$.

101. $(x + y)(x - y)$. 102. $(a + 5)(a - 5)$.
 103. $(x + a)(x - a) + a^2$. 104. $y^2 - (y + 2)(y - 2)$.
 105. $(15a + 9b)(15a - 9b)$. 106. $(a^m + b^n)(a^m - b^n)$.
 107. $(3a^2 - 2b^3)(3a^2 + 2b^3)$. 108. $(5x^3 + 3x^2y)(5x^3 - 3x^2y)$.
 109. $(mx^3 + ny^3)(mx^3 - ny^3) + 2ny^3(mx^3 + ny^3)$.
 110. $(3a^2 + 5b^2)(3a^2 - 5b^2) - (3a^2 + 7b^2)(2a^2 - 4b^2)$.

Násobení mnohočlenů. (§§. 41. a 42.)

111. $(5a - 2b + 1) \cdot 7$. 112. $(2x + 5y - 3z) \cdot 4xyz$.
 113. $(m + 2m^2 - 3m^3) \cdot 5m$. 114. $(a^3 + 5a - 9) \cdot 6a^2$.
 115. $(8xy^3 + 5x^2y^2 - 3x^3y) \cdot 12x^2y^2$.
 116. $(3z^4 + 2z^3 - 5z^2 + 4z) \cdot 6z^2$.
 117. $(4m^3 - 3m^2n + 2mn^2 - n^3) \cdot 3m^2n^2$.
 118. $(3x^2 + 5x + 7) \cdot 5x - (4x^2 - 6x - 8) \cdot 3x$.
 119. $mnp \cdot (10m - 7n + 4p)$. 120. $3ax \cdot (a^2 + ax + x^2)$.
 121. $5a^2 \cdot (3x^2 - 8xy + 2y^2)$. 122. $x^3 \cdot (x^3 - x^2 + x - 1)$.
 123. $4a^2b^4 \cdot (5a^2b^3 + 7a^3b^2 - 5a^4b - 3a^5)$.
 124. $7x^2y \cdot (2x^2y - 2xy^2 - 3xz^2 + 3y^2z) + x^2y^2 \cdot (14xy - 21yz)$

125. $(a + 2b + 3c)(3m + 2n)$. 126. $(2a - b + 3c)(5m - n)$.
 127. $(8x + 6y + 4)(5a - 7)$. 128. $(7x + 5y - 3)(3a + 5)$.
 129. $(x^2 + xy + y^2)(x - y)$. 130. $(x^2 - xy + y^2)(x + y)$.
 131. $(z^2 - 2z + 1)(6z + 3)$. 132. $(5y^2 + 6y - 7)(4y - 5)$.
 133. $(2a^2b - 3ab^2 - 4b^3)(a - 2b)$.
 134. $(16x^4 + 8x^2y^2 + y^4)(4x^2 - y^2)$.
 135. $(4a^4 - 12a^2b^3 + 9b^6)(2a^2 - 3b^3)$.
 136. $(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)(a + b)$.
 137. $(a^2 + 2ab + b^2)(a + b) + (a^2 - 2ab + b^2)(a - b)$.
 138. $(5x^2 + 4x - 3)(4x + 8) - (4x^2 - 3x - 6)(5x + 4)$.
 139. $(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)(a + 1)$.
 140. $(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)(a - 1)$.
 141. $(x^{5m} - x^{4m} + x^{3m} - x^{2m} + x^m - 1)(x^m + 1)$.
 142. $(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)(a - b)$.
 143. $(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)(a + b)$.
 144. $(a + b)^3$. 145. $(a - b)^3$. 146. $(2x + 3y)^3$.
 147. $(ax^2 - by^2)^3$. 148. $(7a^2 + 8b^2)^3$. 149. $(ax^m + bx^n)^3$.
 150. $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$. 151. $(x + 3)(x - 2)(x + 4)$.
 152. $(x + 1)(x - 2)(x + 3)(x - 4)$.

153. $(x + a)(x + b)(x + c)$.
 154. $(x + a)(x - b)(x + c)(x - d)$.
 155. $(a + b + c)^2$.
 156. $(3x - 2y + z)^2$.
 157. $(y^2 - 4y + 4)^2$.
 158. $(ax^2 + by^2 + c)^2$.
 159. $(3a^3 - 4a^2b + 6ab^2 - 2b^3)(4a^2 - 3ab + b^2)$.
 160. $(5x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 2x + 7)(6x^2 + 4x - 7)$.
 161. $(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3)(a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3)$.
 162. $(ax^3 + bx^2 + cx + d)(mx^3 + nx^2 + px + q)$.
 163. $(x^{4m} - 2x^{3m}y^n + 2x^{2m}y^{2n} - 4x^m y^{3n} + 4y^{4n})(x^{2m} + 2x^m y^n + 2y^{2n})$.
 164. $(m^4 + 2m^3 - 3m^2 - 3m + 1)(m^3 - 3m^2 + 3m - 1)$.
 165. $(a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$.
 166. $(a^2 - 2ab + 3b^2)(3a^2 + ab - 2b^2)(2a^3 - 3b^3)$.
 167. $(a^2 + 2ab - 2ac + b^2 - 2bc + c^2)$
 $(a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2)$.
 168. $[x^2 + (a + b)x + (a^2 + b^2)][x^2 - (a - b)x + (a^2 - b^2)]$.

2. Dělení prostých čísel celistvých.

(§§. 46.—52.)

- | | | |
|--------------------------------------|--|---|
| 1. $x^5 : x^3$. | 2. $a^4 : a$. | 3. $a^{m+n} : a^n$. |
| 4. $15a : 5$. | 5. $mx : x$. | 6. $4ab : px : b$. |
| 7. $2a(m - 1) : a$. | 8. $50ab : 2a$. | 9. $8abxy : ax$. |
| 10. $12x^6 : 3x^4$. | 11. $8a^2c : 4a$. | 12. $7a^2y^4 : ay^4$. |
| 13. $9a^2b^2x : 6aby$. | 14. $(x + y)(x - y) : (x - y)(x + z)$. | |
| 15. $28a^5m^2y^4 : 7a^4my^2$. | 15. $20a^m b^n x^p : 5a^{m-1}b^{n-2}x^{p-3}$. | |
| 17. $\frac{2a}{b} : c$. | 18. $\frac{x}{ny} : ny$. | 19. $\frac{a}{b} : bm$. |
| 20. $\frac{2x}{ay} : a$. | 21. $\frac{a}{bc} : abc$. | 22. $\frac{2x}{5y} : 5ax$. |
| 23. $\frac{5a^2}{6bc^3} : 3ab$. | 24. $\frac{3x^2}{4y^4} : 4z^2$. | 25. $\frac{16ax^m}{25by^{2n}} : 5y^n$. |
| 26. $\frac{5ax}{7b} : x$. | 27. $\frac{mxy}{nz} : my$. | 28. $\frac{8ax}{5y} : 3b$. |
| 29. $\frac{15a^3b^2}{4mn} : 5a^2b$. | 30. $\frac{6a^2x^4}{5by} : 3ax^2$. | 31. $\frac{4m^2n^3}{7p^2} : 2p^3$. |
| 32. $(15x^2y^2 : 5x) : 3y$. | 33. $(2m^3x^3 : ny^2) : 3n^2y$. | |
| 34. $mn : \frac{m}{np}$. | 35. $15x : \frac{4y}{3x}$. | 36. $3x^2y : \frac{2z}{3xy}$. |

37. $5my \cdot \frac{8abx^2}{5my}$.

38. $2a^2x \cdot \frac{3x}{4a^2b^2}$.

39. $4a^2bc^2 \cdot \frac{5x}{2a^2b^2c}$.

40. $x : \frac{x}{y}$.

41. $y : \frac{x}{y}$.

42. $xy : \frac{x}{y}$.

43. $axy : \frac{x}{z}$.

44. $mn : \frac{x+z}{x-z}$.

45. $5a^4 : \frac{a^2}{b^2}$.

46. $6a^3m^2x : \frac{2ax}{y^2}$.

47. $2m(m+1) : \frac{2m}{m-1}$.

48. $15m^2n^3 : (6n^2 : 2nx^2)$.

49. $4a^3b^5m^4 : (2m^2 : ab^3)$.

50. $b^2 + \left[(b^2 + c^2) : \frac{b^2 + c^2}{a^2 - b^2} \right]$.

51. $mx^2 - \left[(ax^2 + by^2) : \frac{ax^2 + by^2}{mx^2 - ny^2} \right]$.

52. $\frac{xy}{z} \cdot \frac{xz}{y}$.

53. $\frac{mn}{p} \cdot \frac{mp}{n} \cdot \frac{np}{m}$.

54. $\frac{a+1}{x} \cdot \frac{b-1}{a+1} \cdot cx$.

55. $\frac{a(x-1)}{c(a+1)} \cdot \frac{m-n}{x-1} \cdot \frac{b(a+1)}{a}$.

56. $\frac{5a^2b}{6mn^2} \cdot \frac{3an^2}{8bm^2}$.

57. $\frac{2ay^2}{3bx^2z^2} \cdot \frac{2a^2bx^3}{3y^2z}$.

58. $\frac{5a^2x^2}{6m^2y^2} \cdot \frac{9b^3y^3}{10a^3z^3} \cdot \frac{4mz^3}{5b^3x} \cdot \frac{2amx}{3y^3}$.

59. $\frac{ab}{m} : \frac{an}{b}$.

60. $\frac{3x}{y} : \frac{2y}{x}$.

61. $\frac{6am}{25bn} : \frac{3a}{5b}$.

62. $\frac{8m^3x}{5n^2y} : \frac{4mx}{ny}$.

63. $\frac{12a^6}{7b^4} : \frac{3a^4}{7b^2}$.

64. $\frac{4x^2y^2}{3a^2} : \frac{5a^2}{3x^2y^2}$.

65. $\frac{32a^4x^4}{27b^4y^4} : \frac{4a^3x}{9b^3y}$.

66. $\frac{8x^3y^2z}{15mn^2p^3} : \frac{4m^2n^2p}{5xy^2z^3}$.

67. $[(a+b)x^2 : (a-b)y^2] : [x^2 : (a-b)y]$.

68. $\frac{x^2y^2}{z^2} : \left[\left(\frac{xy}{z^2} : \frac{yz}{x^2} \right) : \left(\frac{yz}{x^2} : \frac{y^2}{xz} \right) \right] : \frac{y}{z}$.

(§. 53.)

69. $(ax + bx) : x$.

70. $(8x + 8) : 8$.

71. $(a^2b + ab^2) : ab$.

72. $(12a^3x^2 + 9ax^4) : 3ax^2$.

73. $\left(8y^2 + \frac{2y^4}{x^2} \right) : 2x^2y^2$.

74. $\left(\frac{3a^2}{8b^2c} + \frac{4b}{d} \right) : \frac{6bc}{ad}$.

75. $\frac{x}{3a} + \frac{y}{3a}$.

76. $\frac{7m}{5} + \frac{3m}{5}$.

77. $\frac{3a}{n} + \frac{5a}{n}$.

78. $\frac{2x+4}{5p} + \frac{x}{5p}$.

79. $\frac{2x}{x+1} + \frac{2}{x+1}$.

$$80. \frac{a+m}{a+b+c} + \frac{b-c}{a+b+c} + \frac{2c-m}{a+b+c}.$$

$$81. \frac{ac+bc-c^2}{abc} + \frac{ab-b^2+bc}{abc} + \frac{ab+ac-a^2}{abc}.$$

$$82. (am-bm):m.$$

$$83. (mp-np):p.$$

$$84. (5a^2x-3ax^2):5ax.$$

$$85. (8x^3y^3-4x^2y^2z):4x^2y^2.$$

$$86. \left(\frac{8a^3b^2}{m^2n^3} - \frac{12a^2b^3}{m^3n^2} \right):4a^2m^2.$$

$$87. \left(\frac{8x^3}{27y^3} - \frac{2x^2}{9y} \right): \frac{2x}{3y}.$$

$$88. \frac{b}{4} - \frac{c}{4}.$$

$$89. \frac{6a}{m} - \frac{5a}{m}.$$

$$90. \frac{9x}{4a} - \frac{5x}{4a}.$$

$$91. \frac{x}{5} - \frac{y-z}{5}.$$

$$92. \frac{5y-1}{2y+1} - \frac{y-3}{2y+1}.$$

$$93. \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = a.$$

$$94. \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = b.$$

Poslední dva vzorce vyjádřete slovy.

$$95. \frac{3x}{mn} + \frac{7x}{mn} - \frac{9x}{mn}.$$

$$96. \frac{2a-b}{m} + \frac{b}{m} - \frac{a}{m}.$$

$$97. \frac{6a}{b} - \frac{4(a-2)}{b} + \frac{4a-2}{b}.$$

$$98. \frac{7x-2y}{x-y} - \frac{2x-3y}{x-y} - \frac{x+5y}{x-y}.$$

$$99. \frac{17x+12y}{x+y} - \frac{3x-7y}{x+y} + \frac{2x-3y}{x+y}.$$

Dělení mnohočlenů. (§. 54.—56.)

$$100. (45am-25bm+35cm):5m.$$

$$101. (2a^3-6a^2b+30ab^2):2a.$$

$$102. (5m^4x-4m^3x^2-3m^2x^3):m^2x.$$

$$103. (10x^4y^2z-25x^3y^2z^2-15x^2y^2z^3+5xy^2z^4):5xy^2z.$$

$$104. \left(\frac{m}{n} + \frac{n}{p} + \frac{p}{m} \right): \frac{mnp}{q^3}.$$

$$105. \left(\frac{a^4}{y^2z^2} - \frac{b^4}{x^2z^2} + \frac{c^4}{x^2y^2} \right): \frac{a^2b^2c^2}{x^2y^2z^2}.$$

$$106. (6am-12bm+5an-10bn):(6m+5n).$$

$$107. (a^2-2ab+b^2):(a+b).$$

$$108. (x^2-2xy+x^2):(x-y).$$

$$109. (4x^2-9y^2):(2x+3y).$$

$$110. (16a^2-b^2):(4a-b).$$

$$111. (x^{2m}-y^{2n}):(x^m-y^n).$$

$$112. (81m^8-16n^6):(9m^4+4n^3).$$

$$113. (x^4-1):(x+1).$$

$$114. (x^{4m}-1):(x^m-1).$$

$$115. (a^5+b^5):(a+b).$$

$$116. (a^6-b^6):(a^2-b^2).$$

$$117. (a^{7m}+1):(a^m+1).$$

$$118. (81x^8-16y^8):(3x^2-2y^2).$$

119. $\left(\frac{x^2}{4a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) : \left(\frac{x}{2a} + \frac{y}{b}\right)$. 120. $\left(\frac{a^4b^4}{m^8} - 1\right) : \left(\frac{ab}{m^2} - 1\right)$.
121. $(14x^2 - 31x + 15) : (2x - 3)$.
122. $(3a^2x^2 - abxy - 2b^2y^2) : (ax - by)$.
123. $(20a^5 - 18a^4b + 4a^3b^2) : (4a^2 - 2ab)$.
124. $(x^3 + x^2 - 2x - 8) : (x - 2)$.
125. $(4a^3 - 16a^2 + 7a + 20) : (2a - 5)$.
126. $(x^{3m} + x^{2m}y^n - x^m y^{3n} - y^{4n}) : (x^{2m} - y^{3n})$.
127. $(x^3y^{3m} - x^{n+1}y^{2m+2} - x^{2n+2}y^{m+1} + x^{3n}y^3) : (x^2y^m - x^ny^2)$.
128. $(6x^4 - 11x^3 - 9x^2 + 19x - 5) : (3x - 1)$.
129. $(m^4 - 2m^2n^2 + n^4) : (m^2 + 2mn + n^2)$.
130. $(12x^4 - x^3y - 32x^2y^2 + xy^3 + 20y^4) : (4x^2 + xy - 5y^2)$.
131. $(15a^4 + 8a^3b - 41a^2b^2 + 10ab^3 + 8b^4) : (5a^2 - 6ab - 8b^2)$.
132. $(63y^8 + 10a^2y^6 - 155a^4y^4 + 10a^6y^2 + 63a^8y) : (9y^4 - 5a^2y^2 - 7a^4)$.
133. $(49a^6 + 6a^4 - 51a^2 - 25) : (7a^3 - 6a^2 + 3a - 5)$.
134. $(4x^6 + 15x^4y^2 + 10x^2y^4 - 9y^6) : (2x^3 + x^2y + 4xy^2 + 3y^3)$.
135. $(32 + 104x + 100x^2 + 26x^3 - 13x^4 + x^5) : (8 + 12x + 6x^2 - x^3)$.
136. $(27a^6 - 33a^5b - 45a^4b^2 + 71a^3b^3 - 36ab^5 + 16b^6) : (9a^3 - 2a^2b - 5ab^2 + 4b^3)$.
137. $\left(\frac{3x^4}{a^4} - \frac{4x^2y^2}{a^2b^2} + \frac{8x^2}{a^2} - \frac{4y^4}{b^4} + \frac{8y^2}{b^2} - 3\right) : \left(\frac{3x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2} - 1\right)$.
138. $[\{x^3 + (a + b - c)x^2 + (ab - ac - bc)x - abc\} : (x + a)] : (x - c)$.

3. Násobení a dělení celistvých čísel algebraických.

Násobení čísel algebraických. (§§. 58. a 59.)

- | | | |
|---|--|-----------------------------|
| 1. $7a \cdot (-4)$. | 2. $(-4x^3) \cdot 2y$. | 3. $(-a^2) \cdot (-3a)$. |
| 4. $(-3x) \cdot (-5xy)$. | 5. $7ab \cdot (-bc)$. | 6. $(-8ay^2) \cdot 2a^2y$. |
| 7. $(-6a^4) \cdot 3a^2x$. | 8. $5a^2z^3 \cdot (-3b^2z)$. | |
| 9. $ab^2c^3 \cdot (-a^2b)$. | 10. $(-12m^3xy^2) \cdot (-4x^2y)$. | |
| 11. $7 \cdot (-3) \cdot (-5)$. | 12. $(-a) \cdot (-b) \cdot (-c)$. | |
| 13. $(-my) \cdot (-my) \cdot (-my)$. | 14. $(-5x) \cdot (-5x) \cdot (-5x)$. | |
| 15. $(-2z)^3$. | 16. $(+3a^2)^3$. | 17. $(-4xy)^3$. |
| 18. $(+5m)^4$. | 19. $(-2ab)^4$. | 20. $(-3z^2)^5$. |
| 21. $(-2a^2) \cdot 3ab^2 \cdot 5a^2bx$. | 22. $4x^2y^3z \cdot (-xy^2z^3) \cdot (-2x^2z)$. | |
| 23. $a^{2m-4}b^{3n+2} \cdot (-a^m b^{n-4})$. | 24. $3bx^{2n} \cdot (-4b^2x^{2n-2}) \cdot 2bx^2$. | |

25. $3ax \cdot (-4ay) \cdot (-2bx) \cdot ab \cdot (-5bx)$.
 26. $a^2xy \cdot (-mx^2) \cdot ny^2 \cdot (-bz^2) \cdot (-bmx) \cdot (-bny)$.
 27. $2ax \cdot (-6by) - (-8bx) \cdot (-ay) + (-3ab) \cdot (-7xy)$.
 28. $8 \cdot (-3) - (-5) \cdot (-6) - 9 \cdot (-2) + (-7) \cdot (-5)$.
 29. Vypočítejte výraz $x^2 - 6x - 16$ při $x = +8$ a při $x = -2$.
 30. Které podoby nabývá výraz $\frac{xyz}{xy + xz + yz}$, proměnil-li se
 1) x v $-x$, 2) x v $-x$ a y v $-y$, 3) x v $-x$, y v $-y$
 a z v $-z$?
 31. $(5x - 4y) \cdot (-3a)$. 32. $(3a - 5b + 7) \cdot (-2m)$.
 33. $(a^2 + b^2 - c^2) \cdot 2abc$. 34. $(m^2 - 2mn + n^2) \cdot (-2mu)$.
 35. $(-3x^2 + 3x - 1) \cdot (-5x^2)$. 36. $(5 + 4a - 3a^2) \cdot (-6a^2y)$.
 37. $8x - 4 \cdot (2x - 3y)$. 38. $(7a^2 - 4b^2) \cdot (-2b^2) + 14a^2b^2$.
 39. $(6x^2 - 5z^2) \cdot (-2xy^2z) + 3xy^2 \cdot [-(3z^3 - 4x^2z)]$.
 40. $(5 - 7x + 6x^2) \cdot (-3x^2) + (9x^3 + 4x^2 - x) \cdot 2x$.
 41. $(a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4) \cdot (-2ab)$.
 42. $(a + b) \cdot (-2a + 3b)$. 43. $(1 - m^2)(1 + m^2)$.
 44. $(1 - a^2b^2)^2$. 45. $(-ax + by)^2$.
 46. $(a + b - c)(-a + b + c)$.
 47. $(-x^2 + 2xy - y^2)(x^2 + 2xy + y^2)$.
 48. $(-3x + 5y - 7z)(-7x - 5y + 3z)$.
 49. $(b^{2m} - 2b^m c^m + c^{2m})(4b^m - 5c^m)$.
 50. $(a + b)(m - n) - (a - b)(m + n)$.
 51. $(9a - 5b)(a + 2b - 3) - (3a - 5b)(3a - b - 3)$.
 52. $(5x + a)(2x - a) - (4x - 3a)(7x + a) + (3x - a)(6x + 2a)$.
 53. $(a + b - c)(a + b) + (a - b + c)(a + c) + (-a + b + c)(b + c)$.
 54. $(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3)(1 - 3x + 5x^2 - 7x^3)$.
 55. $(2a^2b - 3ab^2 - 4b^3 + 5)(2a^2b - 3ab^2 + 4b^3 - 5)$.
 56. $(a^2 - 4a - 6)(a^2 - 4a + 6)(a^2 + 4a - 6)$.
 57. $(4x^2 - 3x + 2)(3x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x - 3)$.
 58. $(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)$.

Dělení čísel algebraických. (§. 60.)

59. $(-4x) : 4$. 60. $8ab^2 : (-2a)$. 61. $(-6bx^2) : (-bx)$.
 62. $18a^7 : (-6a^4)$. 63. $(-12m^4) : (-4m^3)$. 64. $(-14a^4b^2) : 2a^2b$.
 65. $(-15x^2y^5) : 3xy^4$. 66. $9ab^2c^3x : (-3ab^2c)$.
 67. $(-288a^{3n+x-2}) : 9a^{2n-x+1}$. 68. $(-25a^{m+n}b^p) : (-5a^n b^{p-q})$.
 69. $32x^{m-2n+3p}y^{2m-n-p} : (-8x^{m-3n+4p}y^{m-n-2p})$.

70. $\frac{2ab}{3cd} : \left(-\frac{5mn}{7pq}\right)$. 71. $\frac{a(x-1)}{b(x+1)} : \frac{c(1-x)}{b(2+x)}$.
72. Vypočítejte $\frac{x-14}{5-x} - x + \frac{x-10}{7-x} - \frac{5(x-2)}{3(6-x)}$ při $x = 8$.
73. $(24a^3b^3 - 15a^4b^2) : (-3a^3b^2)$.
74. $(18am^2y^3 - 27bmy^3 + 36cy) : (-3y)$.
75. $\left(\frac{xyz}{abc} - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) : \left(-\frac{xy}{ab}\right)$.
-
76. $(1 - x^{2m}) : (1 - x^m)$. 77. $(1 - a^5) : (1 - a)$.
78. $(1 - 2x + x^2 - 6x^4 + 8x^6) : (1 - 2x)$.
79. $(6x^3 - 23x^2 + 24x - 10) : (-2x + 5)$.
80. $(32a^{10}x^5 + 243y^5) : (2a^2x + 3y)$.
81. $(6a^4 - 5a^3 + 4a^2 + 11a - 4) : (2a^2 - 3a + 4)$.
82. $(30x^4 + 2x^3 - 16x^2 + 10x - 2) : (-5x^2 + 3x - 1)$.
83. $(27 - 51x - 125x^2 - 2x^3 + 30x^4) : (-3 + 8x + 6x^2)$.
84. $(1 - m - 14m^2 - 14m^3 - 6m^4 - m^5) : (1 + 3m + m^2)$.
85. $(2 - 7x + 16x^2 - 25x^3 + 24x^4 - 16x^5) : (2 - 3x + 4x^2)$.
86. $(12a^4 + 5a^3b - 16a^2b^2 - 13ab^3 - 6b^4) : (4a^2 - ab - 6b^2)$.
87. $(1 - 15x + 72x^2 - 54x^3 - 405x^4 - 243x^5) : (1 - 6x - 9x^2)$.
88. $(4 + 5a - 16a^2 - 4a^3 + 4a^4 - 5a^5 + 4a^6) : (4 - 3a + 2a^2 - a^3)$.
89. $\{(120 - 326x + 329x^2 - 146x^3 + 24x^4) : (4 - 3x)\} : (6 - 7x + 2x^2)$.
90. $(2 - 7x + 16x^2 - 17x^3 + 12x^4) : \{(2 - 7x + 12x^2 - 9x^3) : (2 - 3x)\}$.
-

4. Dekadická čísla celistvá.

(§§. 64.—70.)

1. $240978 + 97477 + 504336 + 378264 + 615089$.

Sečítejte následující čísla nejprve směrem svislým, pak vodorovným:

- | | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. |
|-----|--|----------|----------|----------|----------|
| 7. | 81312 | + 433664 | + 243936 | + 596288 | + 406560 |
| 8. | 542080 | + 216832 | + 569184 | + 379456 | + 54208 |
| 9. | 189728 | + 677600 | + 352352 | + 27104 | + 514976 |
| 10. | 650496 | + 325248 | + 135520 | + 487872 | + 162624 |
| 11. | 298144 | + 108416 | + 460768 | + 271040 | + 623392 |
| 12. | Vypočítejte součet 6ti čísel, z nichž první jest 235078, každé následující pak o 58505 větší předešlého. | | | | |

13. 8754219 — 1970862. 14. 33557799 — 8866442.
15. Vypočítejte $3874920 + 561083 + 6721859 + 55462873 + 9036198$,
a od součtu odečtete prvního sčítance, od zbytku pak druhého
sčítance a t. d.
16. 719308 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9.
17. 380792 . 11 . 13 . 31 . 25 . 64 . 125.
18. 146637 . 99 . 991 . 299.
19. 734552 . 84399 . 100. 20. 58379 . 25726 . 432789.
21. 291728 . 740634 . 12500 . 7999.
22. 5647830 . 710744 . 918497.
23. Vypočítejte $A = ab$, $B = ac$, $C = ad$, $D = bc$, $E = bd$,
 $F = cd$ při $a = 428792$, $b = 920664$, $c = 371963$, $d = 140846$.
24. 897715 : 91. 25. 134676 : 29.
26. 5791338 : 63. 27. 309644 : 778.
28. 3552264 : 309. 29. 5606912 : 752.
30. 6245425 : 25. 31. 22255125 : 125.
32. Dělte každé následující číslo a) 23900625, b) 119503125,
c) 167304375 každým následujícím číslem m) 607, n) 315, p) 125.
33. 1472692768 : 14734. 34. 36363918357 : 62883.

5. Dělitelnost čísel celistvých.

Dělitelnost čísel dekadických. (§§. 76.—80. a §. 82.)

Kterými následujícími čísly 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 25, 100, 125, 1000 jsou dělitelna čísla:

1. a) 312; b) 6225; c) 17280; d) 71016; e) 948656;
2. f) 720; g) 6472; h) 76450; i) 484572; k) 567000;
3. l) 534; m) 8625; n) 10692; o) 734520; p) 350496;
4. r) 418; s) 3735; t) 70875; u) 100848; v) 9429597?
5. Udejte všechna prvočísla, ležící mezi 1 a 200.

Rozvádění na činitele. (§§. 84. a 85.)

Následující čísla máte rozvésti na prvočinitele :

6. a) 420; b) 504; c) 1260; d) 1694; e) 2025;
7. f) 2268; g) 3075; h) 3828; i) 5376; k) 10528;
8. l) $76a^3$; m) $66ab^2$; n) $26x^2y^2$; o) $72a^3b^2$; p) $60ax^2y^4$;

Vyhledejte všechny prvočinitele i složené činitele následujících čísel :

9. a) 48; b) 180; c) 210; d) 315; e) 810;
 10. f) 18ab; g) $36x^2$; h) $27my^2$; i) $165xyz$; k) $114an^2x^3$.

Rozved'te dle §. 85., 2. a) na dva činitele:

11. $18ab - 15ac$; 12. $9x^2 - 24xy$;
 13. $2a^4 - 4a^3 + 6a^2$; 14. $ax^4y^2 + bx^3y^3 + cx^2y^4$;
 15. $a^3b^2x - a^2b^2x^2 + ab^2x^3$; 16. $5x^3z^2 - 15x^2z^3 + 25xz^4$.

Rozved'te dle §. 85., 2. b) na činitele:

17. $x^2 + 2x + 1$; 18. $m^2 - 2m + 1$; 19. $4a^2 + 12a + 9$;
 20. $9b^2 - 12b + 4$; 21. $y^2 + 10y + 25$; 22. $x^2 - 6xy + 9y^2$;
 23. $4x^2 - 1$; 24. $9a^2 - 16b^2$; 25. $25x^2 - 16y^2$;
 26. $6x^2 - 54a^2$; 27. $a^2 - (b - c)^2$; 28. $(b - c)^2 - a^2$.

Rozved'te dle §. 85., 2. c) na dva činitele:

29. $x^2 + (a + b)x + ab$; 30. $a^2 + 7x + 10$;
 31. $m^2 + 5mn + 6n^2$; 32. $x^2 + 2ax + (a^2 - b^2)$;
 33. $x^2 - (a + b)x + ab$; 34. $a^2 - 4a + 3$;
 35. $10y^2 - 7yz + z^2$; 36. $x^2 - 2ax + (a^2 - b^2)$;
 37. $x^2 + (a - b)x - ab$; 38. $m^2 + m - 12$;
 39. $a^2 + 2ab - 15b^2$; 40. $x^2 + 2bx - (a^2 - b^2)$;
 41. $x^2 - (a - b)x - ab$; 42. $z^2 - 6z - 16$.
 43. $b^2 - 4bc - 5c^2$; 44. $x^2 - 2bx - (a^2 - b^2)$.

Největší společná míra. (§§. 86.—88.)

Rozváděním na činitele vyhledejte nejv. spol. míru následujících čísel:

45. 84 a 308; 46. 360 a 680;
 47. 108, 450 a 540; 48. 560, 620 a 760;
 49. 693, 819 a 945; 50. 504, 756, 1260 a 1764;
 51. $12acx$, $14a^2x$ a $16ax^2$; 52. $10x^2y^4$, $5x^3y^3$ a $20x^4y^2$;
 53. $m^2 + 2mn + n^2$ a $m^2 - n^2$;
 54. $a^2 - 2ab - 8b^2$ a $a^3 + 2ab - 3ab^2 - 6b^3$;
 55. $x^4 - 10x^2y^2 + 16y^4$ a $x^4 + 2x^2y^2 - 80y^4$.

Vyhledejte nejv. sp. míru následujících čísel bez rozvádění na prvočinitele:

56. 637 a 4277; 57. 2091 a 1353;
 58. 1404 a 8658; 59. 3552 a 5143;
 60. 7774 a 3718; 61. 27671 a 21708;
 62. 50149 a 51119; 63. 55660 a 66055;
 64. 39215 a 73997; 65. 24955 a 338625;

66. 1701, 6426, 10521; 67. 120582, 145530, 167706;
 68. $12a^3 + 7a + 1$ a $6a^2 + 11a + 3$;
 69. $x^3 - 49x - 120$ a $x^2 + 10x + 25$;
 70. $4m^3 - 16m^2 + 23m - 20$ a $6m^2 - 7m - 20$;
 71. $a^3 - a^2b + 3ab^2 - 3b^3$ a $a^2 - 5ab + 4b^2$;
 72. $x^6 + 6x^4 + 5x^2 - 12$ a $x^6 + 4x^4 + x^2 - 6$;
 73. $6y^3 + 16y^2 - 22y + 40$ a $9y^3 - 27y^2 + 35y - 25$;
 74. $28a^4 + 10a^3 + 39a^2 + 7a + 15$ a $14a^3 - 37a^2 + 15a - 25$;
 75. $3z^4 - 8z^3 + 11z^2 - 8z + 3$ a $2z^3 - 9z^2 + 9z - 7$;
 76. $15x^4 + 10x^3y + 4x^2y^2 + 6xy^3 - 3y^4$ a
 $12x^3 + 38x^2y + 16xy^2 - 10y^3$;
 77. $6x^5 - 4x^4 - 11x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ a
 $4x^4 + 2x^3 - 18x^2 + 3x - 5$;
 78. $6x^4 - 5x^2 - 1$, $5x^3 - 4x - 1$ a $2x^2 - 2$;
 79. $a^4 - 4a^3 + 8a^2 - 4a + 7$, $a^4 - 2a^3 + 10a + 7$ a
 $a^3 - 5a^2 + 11a - 7$.

Nejmenší společný násobek. (§§. 89. a 90.)

Rozváděním na činitele vyhledejte nejmn. sp. násobek čísel :

80. 300 a 620; 81. 240 a 486;
 82. 120, 168 a 182; 83. 105, 144 a 270;
 84. 3, 4, 6, 10 a 25; 85. 2, 5, 9, 20, 21 a 24;
 86. 4, 5, 6, 12, 18, 25, 70; 87. 10, 12, 14, 15, 16, 18, 21;
 88. 4, 6, 7, 26, 35, 40, 56; 89. 8, 12, 16, 24, 32, 36, 256;
 90. a, $2a^2$, $3ab^2$, $12abm$; 91. $6amn$, $10am^2n$, $5a^2n^2$;
 92. m, $5m^2$, $3n$, $8mn$ a $15m(m - n)$;
 93. $3x$, $x - 2$, $5(x + 2)$, $20(x^2 - 4)$ a $6(x + 2)^2$.
 Bez rozvádění na činitele vyhledejte nejmn. sp. násobek čísel :
 94. 874 a 943; 95. 561 a 1530;
 96. 1716 a 2222; 97. 6987 a 8083;
 98. 816, 765, 697; 99. 259, 3219, 7548;
 100. $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ a $2(x^2 - y^2)$;
 101. $a^3 - 49a - 120$ a $a^2 + 10a + 25$;
 102. $6x^3 - 13x^2 - 45x - 25$ a $x^3 + 2x^2 - 20x - 25$;
 103. $a^4 + 3a^3 + 6a^2 + 5a + 3$ a $a^3 + 2a^2 + 2a + 1$;
 104. $2a^5 - a^4 - 2a^3 - 2a^2 - 4a - 1$ a $2a^6 - a^5 - 5a^3 - 5a^2 - a$;
 105. $21x^3 + 20x^2 - 3x - 2$, $6x^3 - 11x^2 - 12x + 5$ a
 $3x^3 - 10x^2 - 9x + 4$.

6. Číslo lomená.

A. Zlomky obyčejné.

Uvádění zlomků na společného jmenovatele. (§. 94.)

1. Uvedte zlomky $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$ na společného jmenovatele 24.
2. Uvedte zlomky $\frac{1}{a}$, $\frac{2m}{3ab}$, $\frac{5n}{6ax}$, $\frac{3p}{10by}$ na jmenovatele $30abxy$.

Uvedte následující zlomky na nejmenšího společného jmenovatele:

3. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{12}$;
4. $\frac{7}{8}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{11}{18}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{11}{12}$;
5. $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{18}{35}$, $\frac{19}{40}$, $\frac{25}{56}$;
6. $\frac{1}{m}$, $\frac{5a}{3m^2}$, $\frac{3bc}{4m^3}$, $\frac{4def}{5m^4}$;
7. $\frac{a-1}{a+1}$, $\frac{a-2}{a+2}$, $\frac{a-3}{a+3}$;
8. $\frac{y+1}{y-1}$, $\frac{y-1}{y+1}$, $\frac{y^2+1}{y^2-1}$;
9. $\frac{x+1}{x-1}$, $\frac{x^2+2x}{x^2-1}$, $\frac{3x}{x+1}$, $\frac{x^2-1}{x^2+1}$;
10. $\frac{a}{1+a}$, $\frac{a}{1-a}$, $\frac{a^2}{1-a^2}$, $\frac{a^2}{1+2a+a^2}$

Krácení zlomků. (§. 95.)

Zkrajte následující zlomky:

11. a) $\frac{45}{54}$, b) $\frac{114}{250}$; c) $\frac{840}{1020}$; d) $\frac{1824}{7008}$; e) $\frac{4096}{7424}$;
12. f) $\frac{5 \cdot 12 \cdot 18}{4 \cdot 10 \cdot 27}$; g) $\frac{6 \cdot 12 \cdot 20 \cdot 28}{4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 30}$; h) $\frac{6 \cdot 21 \cdot 24 \cdot 36 \cdot 75}{8 \cdot 27 \cdot 50 \cdot 56 \cdot 60}$;
13. i) $\frac{391}{989}$; k) $\frac{637}{819}$; l) $\frac{765}{5304}$; m) $\frac{2079}{7029}$; n) $\frac{9082}{67735}$.
14. Ustanovte hodnotu zlomku $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$

při $n = 6$, pak při $n = 8$, a zkrajte zlomky takto vzniklé.

Zkrajte následující zlomky:

15. a) $\frac{3abx}{12bm}$, b) $\frac{12a^2x}{28ax^2}$, c) $\frac{15amx^3}{40bm}$, d) $\frac{72mx^2y^3}{96nx^3y^2}$;
16. $\frac{a(a+1)}{(a+1)(a+2)}$; 17. $\frac{2m(m-1)}{m^2-1}$; 18. $\frac{15(a+b)(x-y)}{24(a-b)(x-y)}$;
19. $\frac{9a+6b-3c}{12ax+8bx-4cx}$; 20. $\frac{12x^3y^3-6x^2y^4}{8x^4y^2+4x^3y^3}$;
21. $\frac{2a-ab-b+2}{3a+ab+b+3}$; 22. $\frac{a^2-1}{a^2+2a+1}$;

$$23. \frac{1 + m - 2m^2}{1 + 3m + 2m^2};$$

$$25. \frac{m^2 + 6m - 16}{m^2 + 5m - 24};$$

$$27. \frac{a^2 - 8ax + 15x^2}{a^2 - 11ax + 30x^2};$$

$$29. \frac{2a^3 - a^2 + 4a + 7}{2a^4 - 15a^3 + 29a^2 - 48a + 14}.$$

$$24. \frac{8a^2 - 6a + 1}{16a^2 - 10a + 1};$$

$$26. \frac{x^2 + 3xy + 2y^2}{x^2 + 6xy + 5y^2};$$

$$28. \frac{x^4 + 4x^3 - 5x + 2}{x^3 - x^2 - 3x + 2};$$

Vypočítejte:

$$30. \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} \text{ při } x = 2; \quad 31. \frac{x^2 - a^2}{2x^2 - 3ax + a} \text{ při } a = 1;$$

$$32. \frac{x^2 + 6x - 16}{x^2 + 5x - 24} \text{ při } x = -8; \quad 33. \frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}{3x^3 - 22x^2 + 51x - 36} \text{ při } x = 3;$$

$$34. \frac{y^4 + y^3 - y^2 - 4y - 12}{y^4 - 2y^2 - 8} \text{ při } y = 2 \text{ a při } y = -2.$$

Sečítání a odčítání zlomků. (§§. 97.—99.)

$$35. \frac{4x}{3} + \frac{2x}{3}.$$

$$36. \frac{3m}{4} - \frac{m}{4}.$$

$$37. \frac{a+b}{m} + \frac{a-b}{m}.$$

$$38. \frac{a+b}{n} - \frac{a-b}{n}.$$

$$39. \frac{x}{10} - \frac{y+z}{10}.$$

$$40. \frac{x}{8} - \frac{y-z}{8}.$$

$$41. \frac{a+4x}{3} + \frac{2a-x}{3}.$$

$$42. \frac{5m+n}{4} - \frac{m-3n}{4}.$$

$$43. \frac{a+b+c}{3m} + \frac{a-b}{3m} + \frac{a-c}{3m}.$$

$$44. \frac{m-a}{m+n+p} + \frac{n-p}{m+n+p} + \frac{2p+a}{m+n+p}.$$

$$45. a + \frac{b}{a}.$$

$$46. 3x - \frac{5y}{2x}.$$

$$47. x + \frac{x^2-1}{x}.$$

$$48. x - \frac{x^2-1}{x}.$$

$$49. m - \frac{m+n}{2}.$$

$$50. \frac{m+n}{2} - n.$$

$$51. 1 + \frac{a-b}{a+b}.$$

$$52. 1 - \frac{a-b}{a+b}.$$

$$53. \frac{(x+y)^2}{4xy} - 1.$$

$$54. \frac{(x-y)^2}{4xy} + 1.$$

$$55. x + y + \frac{2y^2}{x-y}.$$

$$56. a - 1 + \frac{a^2 + 1}{a + 1}.$$

$$57. m + n - \frac{m^2 + n^2}{m + n}.$$

$$58. a^2 + b^2 - \frac{a^4 - 2b^4}{a^2 - b^2}.$$

$$59. 1 + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}.$$

$$60. 1 - \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}.$$

$$61. x^2 - y^2 - \frac{x^4 - 2x^2y^2 - y^4}{x^2 + y^2}.$$

$$62. x + 1 - \frac{4x^3 + 4x^2 + x}{4x^2 + 4x + 1}.$$

$$63. a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - \frac{a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a}{a + 1}.$$

$$64. \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b}.$$

$$65. \frac{3a - 2}{5} + \frac{2a + 3}{2}.$$

$$66. \frac{m + n}{2} + \frac{m - n}{3}.$$

$$67. \frac{a + b}{7} - \frac{a - b}{8}.$$

$$68. \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2.$$

$$69. 1 - \frac{a}{2b} - \frac{b}{2a}.$$

$$70. \frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p}.$$

$$71. \frac{x^2}{bc} + \frac{y^2}{ac} - \frac{z^2}{ab}.$$

$$72. \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}.$$

$$73. \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3}.$$

$$74. \frac{3a + 4}{3} - \frac{7a + 5}{4} - \frac{8 - 7a}{6} + \frac{5 - 3a}{8} - \frac{3 - 7a}{12}.$$

$$75. \frac{a + x}{a} - \frac{x}{a + x}.$$

$$76. \frac{1}{2(x-y)} - \frac{1}{2(x+y)}.$$

$$77. \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1}.$$

$$78. \frac{x}{x-1} - \frac{y}{y-1}.$$

$$79. \frac{m+n}{m-n} + \frac{m-n}{m+n}.$$

$$80. \frac{m+n}{m-n} - \frac{m-n}{m+n}.$$

81. Čitatele i jmenovatele zlomku $\frac{a}{b}$ máte 1) o m zvětšiti, 2) o m

zmenšiti; jaký jest rozdíl daného a každého takto vzniklého zlomku?

$$82. \frac{6 + 3x^2}{9 - 4x^2} - \frac{2 - 3x^2}{3 + 4x^2}.$$

$$83. \frac{3a^2 - 4a + 5}{6a - 7} + \frac{4a^2 + 5a - 6}{8a - 9}.$$

84. $\frac{2}{2x-1} - \frac{5}{3x-1} + \frac{4}{2x-3}$ 85. $\frac{2x}{x-1} + \frac{3x+1}{x-2} - \frac{4x-3}{x-3}$
86. $\frac{2x+3y}{6x(2x-3y)} - \frac{2x-3y}{6x(2x+3y)}$
87. $\frac{a^2+5ab-b^2}{a^2+4ab+4b^2} - \frac{a-b}{a+2b}$
88. $\frac{2x-5y}{9x+3y} - \frac{6x+5y}{12x+4y} + \frac{3x+4y}{3x+y}$
89. $\frac{2m-4n}{3m-3n} - \frac{1}{2} - \frac{m^2-5mn}{6m^2-6mn}$
90. $\frac{1}{4+2a} - \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a+a^2} - \frac{1}{a-2}$
91. $\frac{1}{x-y} - \frac{x+y}{x^2-xy} + \frac{x-2y}{2xy}$
92. $\frac{1}{x^2-y^2} + \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x-y)^2}$
93. $\frac{a+1}{a-1} + \frac{a+2}{a-2} + \frac{a+3}{a-3}$ 94. $\frac{ab}{a+b} + \frac{ac}{a+c} + \frac{bc}{b+c}$
95. $\frac{a+b-c}{ab} + \frac{a-b+c}{ac} + \frac{b+c-a}{bc}$
96. $\frac{5a+8b}{a+b} + \frac{3a-b}{a-b} + \frac{a-4b}{a+b} + \frac{a-3b}{a-b}$
97. $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} - \frac{2b}{a^2-b^2} + \frac{2a}{a^2+2ab+b^2}$
98. $\frac{y+1}{y-1} + \frac{y-1}{y+1} + \frac{y^2+1}{y^2-1} + \frac{y^2-2y+1}{y^2+2y+1}$
99. $\frac{1}{a-(b+c)} + \frac{1}{b-(a+c)} + \frac{1}{c-(a+b)}$
100. $\frac{ab}{(a-c)(b-c)} - \frac{ac}{(a-b)(b-c)} + \frac{bc}{(a-b)(a-c)}$
101. $1 - \frac{a-1}{a+1} + \frac{a^2-a+1}{a^2+1} - \frac{a+1}{a-1} + \frac{a^2+a+1}{a^2-1} - \frac{2a-4}{a^4-1}$
102. $(\frac{2}{3}a + \frac{3}{4}b + \frac{4}{5}c) + (\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b + \frac{3}{4}c)$
103. $(\frac{3}{4}x + \frac{7}{6}y) + (\frac{5}{3}x + \frac{4}{5}y) + (\frac{3}{2}x + \frac{9}{4}y)$
104. $(\frac{2a}{3} - \frac{3b}{4} - \frac{4c}{5}) - (\frac{a}{2} - \frac{2b}{3} + \frac{3c}{4})$

105. $\left(\frac{3x^2}{4} - \frac{2xy}{3} + \frac{y^2}{9}\right) + \left(\frac{5x^2}{6} - \frac{3xy}{5} + \frac{7y^2}{12}\right).$
106. $\left(\frac{5a^2}{4} - \frac{4ab}{3} + \frac{3b^2}{2}\right) - \left(\frac{4a^2}{5} - \frac{3ab}{4} - \frac{2b^2}{3}\right).$
107. $\frac{5x^2 + 9x + 14}{2x^2 + 3x - 2} - \frac{3x - 5}{x + 2} + \frac{x - 4}{x - 2}.$
108. $\frac{3m + n}{3m^2 - mn} - \frac{2m + 3n}{12mn - 4n^2} + \frac{3m^2 - mn - 6n^2}{18m^2n - 6mn^2}.$
109. $\frac{6x - 9y}{6x^2 - 11x + 3y^2} - \frac{2x - 3y}{2x^2 - 7xy + 6y^2} + \frac{3x + 4y}{3x^2 - 7xy + 2y^2}.$
 $\left[= \frac{1}{x - 2y} \right]$
110. $\frac{x}{2x - y} + \frac{2x^2 + 2xy}{2xy + 3y^2} - \frac{4xy}{4x^2 + 4xy - 3y^2}.$
 $\left[= \frac{x}{y} \right]$
111. $\frac{x^2y^2}{a^3b^2} + \frac{(x^2 - b^2)(b^2 - y^2)}{b^2(a^2 - b^2)} + \frac{(a^2 - x^2)(a^2 - y^2)}{a^2(a^2 - b^2)}.$
 $[= 1]$
112. $\frac{2a^2 - 3ax}{2a - x} - \frac{2a^2 - 3ax}{2a + x} + \frac{10a^2x^2 - 7ax^3}{4a^3 - 4a^2x - ax^2 + x^3}.$
 $\left[= \frac{ax}{a - x} \right]$
113. $\frac{5x^3}{18x^2 - 6y} - \frac{27x^4 + x^2y}{54x^4 - 6y^2} + \frac{x^2 + 6y}{6y} - \frac{x^4 - x^2y}{6x^2y + 2y^2}.$
 $[= 1]$

Násobení a dělení zlomku číslem celistvým. (§. 100.)

114. $\frac{ab}{4m} \cdot 3c.$ 115. $\frac{a}{2m} \cdot 2m.$ 116. $\frac{24x^2}{5y^2} \cdot (-y^2).$
117. $\frac{2a^2x^2}{15b^2y^2} \cdot 5y^2.$ 118. $\frac{a - b}{3ab} \cdot 2b.$ 119. $\frac{a + b}{m} \cdot (a - b).$
120. $\left(a + \frac{b^2 - a^2}{a}\right) \cdot a.$ 121. $\left(1 + \frac{1 - a}{1 + a}\right) \cdot (1 + a).$
122. $\left(\frac{x^2 + 2xy + y^2}{4xy} - 1\right) \cdot 2xy.$ 123. $\left(\frac{3m^3}{4n^3} + \frac{2m^2}{3n^2} + \frac{m}{2n}\right) \cdot 12n.$
124. $\left(\frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m}\right) \cdot m^4.$ 125. $\left(\frac{a^3}{x^3} - \frac{2a^2}{x^2} + \frac{3a}{x} + 4\right) \cdot x^3.$
126. $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n + 1} - \frac{2n}{n^2 - 1}\right) \cdot (n + 1).$
127. $\left(\frac{y^3}{a^3} + \frac{y}{a^2} - \frac{1}{a - 1}\right) \cdot (a - 1).$
128. $\left(1 + \frac{a^2b^2 - 2abc^2 + c^4}{4abc^2}\right) \cdot (a^2b^2 - 2abc^2 + c^4).$

$$129. \left(\frac{2x^3}{5} - \frac{5x^2y}{8} + \frac{3xy^2}{4} - \frac{7y^3}{10} \right) \cdot (4x^2 - 5xy + y^2).$$

$$130. \frac{2ab}{3m} : 2a. \quad 131. \frac{12amx}{5bc} : (-4ax). \quad 132. \frac{2x}{3my} : 3my.$$

$$133. \frac{10m^3n^2}{xy^2} : 5m^2n^2. \quad 134. \frac{24p^2q}{13xy} : 8qy. \quad 135. \frac{3x^3y^3}{4a^2b} : 2ab^2.$$

$$136. \left(1 + \frac{m-n}{m+n} \right) : 2m. \quad 137. \left(1 + \frac{b}{1-b} \right) : (1+b).$$

$$138. \left(a+b - \frac{a^2-b^2}{a+b} \right) : (a+b). \quad 139. \left(\frac{mx^2}{a^2-x^2} - m \right) : (2x^2-2a^2).$$

$$140. \frac{6a^2+5ab-6b^2}{2a+3b} : (3a-2b).$$

$$141. \frac{1-2m-7m^2-4m^3}{1-2m+m^2} : (1+2m+m^2).$$

$$142. \text{Zlomek } \frac{a}{x-1} \text{ vyjádřete řadou. (§. 92., dod.)}$$

$$143. \text{Zlomek } \frac{a}{x+1} \text{ taktéž proměňte v řadu.}$$

Násobení a dělení zlomkem. (§§. 101.—105.)

$$144. ax \cdot \frac{2b}{y}. \quad 145. 4x^2y^2 \cdot \frac{3ab}{2xy}. \quad 146. 2a^3 \cdot \frac{bx^2}{2a^2c^2y^2}.$$

$$147. (a-2b) \cdot \frac{2m}{3n}. \quad 148. (a-x) \cdot \frac{a+x}{ax}. \quad 149. 3ax \cdot \left(a - \frac{b}{3ax} \right).$$

$$150. \frac{2ab}{cd} \cdot \left(-\frac{3ax}{cm} \right). \quad 151. \frac{6a}{7b} \cdot \frac{2b}{3d} \cdot \left(-\frac{14c}{15e} \right) \cdot \left(-\frac{5d}{6a} \right).$$

$$152. \frac{a+b}{m-n} \cdot \frac{a-b}{m+n}. \quad 153. \left(1 + \frac{b}{a} \right) \cdot \frac{a-b}{2b}.$$

$$154. \left(\frac{2a+3x}{2a-3x} \right)^2. \quad 155. \left(\frac{4a^2-9b^2}{12ab} \right)^2.$$

$$156. \frac{2a^2-ax}{ax-x^2} \cdot \frac{a^2x^3-ax^4}{2a-x}. \quad 157. \frac{x^2+2x+9}{x^4-5x^2+12} \cdot \frac{x^3-8x}{x+7}.$$

$$158. \left(\frac{x+m}{x} - \frac{2x}{x-m} \right) \cdot \frac{x-m}{x^2+m^2}. \quad 159. \left(\frac{a^3}{2b} - \frac{a^2}{3b^2} - \frac{a}{4b^3} \right) \cdot \frac{3b^3}{4a^3}.$$

$$160. \left(1 + \frac{a}{b} \right) \left(1 - \frac{a}{b} \right) \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{b-a}.$$

161. $\left(\frac{3m}{m-1} - \frac{2m}{m+1} - \frac{m^2}{m^2-1}\right) \cdot \frac{m^2-1}{m}$.
162. $\left(\frac{5y^2}{12} - yz + \frac{2z^2}{3}\right)\left(\frac{6y}{5} - \frac{3z}{2}\right)\left(\frac{2y}{3} + z\right)$.
163. $\left(\frac{3a}{4} - \frac{2b}{3} + \frac{c}{2}\right)\left(\frac{2a}{3} + \frac{3b}{4} - \frac{4c}{5}\right)$.
164. $\left(\frac{5x^2}{3} + \frac{2x}{5} - 2\right)\left(\frac{7x^2}{10} + \frac{5x}{4} + \frac{2}{3}\right)$.
165. $\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{a-1} - \frac{3}{a+1} - \frac{4}{a+2}\right) \cdot \frac{a^2-1}{a^2+5a-6}$.
166. $\left(\frac{p^2x^2}{2q^2y^2} + \frac{2px^3}{3q^3y} - \frac{3x^4}{4q^4}\right)\left(\frac{4p^2x^2}{3q^2y^2} - \frac{3px^3}{2q^3y} + \frac{2x^4}{q^4}\right)$.

167. $2am : \frac{2m}{b}$.
168. $6a^2x : \left(-\frac{3b^2y}{2x}\right)$.
169. $12a^3b^4 : \frac{4ab^2}{x^2y^2}$.
170. $(x+y) : \frac{x+y}{x-1}$.
171. $3y : \left(1 - \frac{y}{x}\right)$.
172. $(x^2 - y^2) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$.
173. $(a^2 - b^2) : \frac{a+b}{a-b}$.
174. $a - \left[(m-n) : \frac{m-n}{a-b}\right]$.
175. $\frac{a^2 - b^2}{c^2 - d^2} : \frac{a-b}{c+d}$.
176. $\frac{21bx^2y^3}{25a^2cz^3} : \frac{14a^2y^2z}{45b^2c^2x}$.
177. $\left(a + \frac{b}{c}\right) : \left(a - \frac{b}{c}\right)$.
178. $\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}\right) : \frac{xy}{x^2 - y^2}$.
179. $\left(\frac{3x^3}{4y} - \frac{9x^2}{15} + \frac{xy}{10}\right) : \frac{3x}{5y}$.
180. $\left(\frac{x^9}{27} - \frac{8a^6}{125}\right) : \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2a^2}{5}\right)$.
181. $\left(\frac{8x^6}{27y^3} - \frac{27a^3}{8b^6}\right) : \left(\frac{2x^2}{3y} - \frac{3a}{2b^2}\right)$.
182. $\left(\frac{2a^2}{9} - \frac{ax}{12} - \frac{3x^2}{16}\right) : \left(\frac{2a}{3} - \frac{3x}{4}\right)$.
183. $\left(\frac{3x^3}{4a^8} - \frac{19y^2}{3a^2} + \frac{12a^4y^4}{x^2}\right) : \left(\frac{x}{2a^4} + \frac{y}{3a} - \frac{2a^2y^2}{x}\right)$.
184. Ustanovte podíl $\frac{(1+x)(1+y)(1+z)}{(1-x)(1-y)(1-z)}$
 při $x = \frac{m-n}{m+n}$, $y = \frac{n-p}{n+p}$, $z = \frac{p-m}{p+m}$.

$$185. \frac{a^5 + 7a^4y + 25a^3y^2 + 48a^2y^3 + 36ay^4}{a^3y - 27y^4} : (a + 7y + \frac{25y^2}{a - 3y}). \left[= \frac{a}{y} \right]$$

$$186. \left\{ \frac{12a^2 + a - 6}{12a^2 - a - 6} - \frac{6a^2 - a - 2}{6a^2 + a - 2} \right\} : \left\{ \frac{3a + 2}{4a - 3} - \frac{12a + 8}{12a^2 - a - 6} \right\}.$$

$$\left[= \frac{4a}{(3a + 2)(2a - 1)} \right]$$

$$187. \left\{ \frac{a^2 - 2ab}{4a^2b - b^3} - \frac{2ab - b^2}{a^3 - 2a^2b} \right\} : \left\{ \frac{\frac{1}{2}a^2 - \frac{9}{8}ab - \frac{9}{4}b^2}{2a^2 - 3ab - 2b^2} - \frac{\frac{9}{8}ab - \frac{1}{2}b^2}{2a^2 - ab} \right\}.$$

$$\left[= \frac{a + b}{ab} \right]$$

$$188. \frac{1 + \frac{b}{a}}{1 - \frac{b}{a}}$$

$$189. \frac{\frac{a}{m+n}}{\frac{m-n}{b}}$$

$$190. \frac{\frac{x-1}{x+1}}{\frac{x}{x^2-2}}$$

$$191. \frac{\frac{1+x}{1-x} - 1}{\frac{1-x}{1+x} + 1}$$

$$192. \frac{4 - \frac{3x-2}{3}}{3 - \frac{4x+3}{5}}$$

$$193. \frac{x - \frac{x^2-2x+3}{x}}{x - \frac{x^2-3x+2}{x}}$$

$$194. \frac{a + \frac{bx-ay}{x+y}}{a - \frac{bx+ay}{x+y}}$$

$$195. \frac{\frac{3x+3y}{2y} - \frac{5x+6y}{4y}}{\frac{x}{x-y} - \frac{x}{x+y}} \cdot \frac{4x + \frac{4y^2}{x}}{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}$$

B. Zlomky desetinné.

Proměňování obyčejných zlomků v desetinné a naopak.

(§§. 107. a 108.)

Proměňte následující obyčejné zlomky v desetinné:

$$196. a) \frac{89}{16}; \quad b) \frac{7}{40}; \quad c) \frac{63}{25}; \quad d) \frac{103}{32}; \quad e) \frac{1359}{128}; \quad f) \frac{9084}{625};$$

$$197. g) \frac{17}{6}; \quad h) \frac{13}{72}; \quad i) \frac{313}{11}; \quad k) \frac{53}{37}; \quad l) \frac{107}{176}; \quad m) \frac{2345}{792};$$

$$198. n) \frac{26}{41}; \quad o) \frac{92}{205}; \quad p) \frac{131}{14}; \quad q) \frac{129}{130}; \quad r) \frac{85}{222}; \quad s) \frac{3121}{404};$$

$$199. t) \frac{40}{73}; \quad u) \frac{137}{96}; \quad v) \frac{37}{106}; \quad x) \frac{259}{444}; \quad y) \frac{1211}{395}; \quad z) \frac{5432}{615}.$$

Proměňte následující desetinné zlomky v obyčejné:

$$200. a) 0.25; \quad b) 7.75; \quad c) 0.072; \quad d) 17.525; \quad e) 0.9518;$$

$$201. f) 0.6; \quad g) 0.18; \quad h) 4.06; \quad i) 26.752; \quad k) 9.324;$$

202. l) 0·81; m) 0·041; n) 8·567; o) 0·4378; p) 0·90243;
 203. q) 0·73; r) 15·351; s) 0·79324; t) 0·29074; u) 0·234684.

Počítání úplnými zlomky desetinnými. (§§. 109.—111.)

Sečítejte následující desetinné zlomky nejprve směrem
 vvislým, pak vodorovným:

- | 204. | 205. | 206. | 207. | 208. | 209. |
|---|------|--------------------------------|------|------|------|
| 210. 19·78 + 35·096 + 8·71295 + 0·2087 + 4·178063 + 15·892; | | | | | |
| 211. 37·09 + 18·388 + 2·34966 + 0·2897 + 3·047585 + 74·418; | | | | | |
| 212. 5·35 + 56·905 + 7·58506 + 0·5375 + 7·493203 + 9·005; | | | | | |
| 213. 10·93 + 68·227 + 3·08751 + 0·1884 + 0·479728 + 56·793; | | | | | |
| 214. 71·86 + 43·683 + 4·86235 + 0·5679 + 5·637564 + 88·608. | | | | | |
| 215. 173·5879 — 91·3462. | | 216. 42·0073 — 17·658. | | | |
| 217. 54·3128 — 5·573. | | 218. 95·78 — 58·2834. | | | |
| 219. 748·625 — 283. | | 220. 473·5 — 281·937. | | | |
| 221. 500 — 374·9864. | | 222. 1 — 0·172635. | | | |
| 223. 79·24405 — 1·7786 + 88 — 98·30556 + 27 $\frac{5}{8}$. | | | | | |
| 224. Ustanovte $A = a + b + c$, $B = a + b - c$,
$C = a - b + c$, $D = b + c - a$ při
$a = 23·4567$, $b = 39·0703$, $c = 51·809$. | | | | | |
| 225. 1 kilometr = 0·131823 rak. mil; kolik rak. mil jest 10,
100, 1000 kilometrů? | | | | | |
| 226. 48·326·28. | | 227. 9·10993·315. | | | |
| 228. 7·1356 $\frac{2}{5}$. | | 229. 0·33047·3 $\frac{1}{7}$. | | | |
| 230. 6·8912·2·1506. | | 231. 815·279·0·09156. | | | |
| 232. 15·30762·0·00975. | | 233. 91·3425·3·1416. | | | |
| 234. Zlomek 325·67 má býti dělen 10, 100, 1000, 10000. | | | | | |
| 235. 108·931 : 97. | | 236. 0·5226 : 39. | | | |
| 237. 8 : 1·25. | | 238. 0·235 : 0·56. | | | |
| 239. 0·5976 : 0·083. | | 240. 2·0093724 : 0·0054. | | | |
| 241. 30·9644 : 38·9. | | 242. 1·6820736 : 2·256. | | | |

Počítání zkrácenými zlomky desetinnými. (§§. 112.—117.)

243. Zkratke na 3 místa desetinná:

- a) 25·7917, b) 3·14159, c) 0·8398, d) 81·57942.
 244. 0·91654 + 0·17357 + 0·23408 + 0·17999 + 0·879. (3 des. m.)
 245. 17·34255 + 8·509796 + 3·5882 + 12·0591 + 45·77316. (4 d. m.)
 246. 19·3875 .. + 23·473 .. + 38·378 .. + 8·4531 .. + 0·082 ..

247. Proměňte členy řady

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{10.11.12}$$

ve zlomky desetinné a vypočítejte součet na 3 des. místa.

248. Taktéž vypočítejte řadu

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{2.4.6} + \frac{1}{2.4.6.8} + \frac{1}{2.4.6.8.10} + \frac{1}{2.4.6.8.10.12}$$

na 4 des. místa.

249. $88 \cdot 9397 - 51 \cdot 4823$. (3 d. m.) 250. $4 \cdot 37147 - 1 \cdot 6392$. (3 des. m.)

251. $8 \cdot 2345 \dots - 3 \cdot 5678 \dots$ 252. $35 \cdot 79 \dots - 10 \cdot 809 \dots$

253. $3 \cdot 1415 \cdot 9 \cdot 2587$ (3 des. m.) 254. $0 \cdot 9156 \cdot 23 \cdot 851$. (2 des. m.)

255. $12 \cdot 0748 \cdot 1 \cdot 91345$. (4 des. m.) 256. $81 \cdot 2867 \cdot 0 \cdot 1234$. (3 des. m.)

257. $5 \cdot 376079 \cdot 8 \cdot 058876$. (5 des. m.)

258. $8 \cdot 14793 \cdot 7 \cdot 10936 \cdot 2 \cdot 51446$. (4 des. m.)

259. $1 \cdot 045 \cdot 1 \cdot 045 \cdot 1 \cdot 045 \cdot 1 \cdot 045$. (6 des. m.)

260. $23 \cdot 17346 \cdot 8 \cdot 09745 \cdot 0 \cdot 11944 \cdot 3 \cdot 58876$. (4 des. m.)

261. Vypočítejte na 4 des. místa

$$p = (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(b + c - a)$$

při $a = 1 \cdot 30785$, $b = 2 \cdot 09122$, $c = 2 \cdot 80116$.

262. Vypočítejte řadu

$$1 + \frac{1}{m} \cdot x - \frac{m-1}{2 \cdot m^2} \cdot x^2 + \frac{(m-1)(2m-1)}{2 \cdot 3 \cdot m^3} \cdot x^3 - \frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot m^4} \cdot x^4$$

při $m = 3$ a $x = 0 \cdot 015$ na 7 des. m.

263. $834 \times 2 \cdot 1335 \dots$ 264. $0 \cdot 37 \times 15 \cdot 0816 \dots$

265. $2 \cdot 95525 \dots \times 0 \cdot 1563 \dots$ 266. $6 \cdot 04 \dots \times 0 \cdot 0085 \dots$

267. $28 \cdot 135 \dots \times 7 \cdot 089 \dots$ 268. $0 \cdot 1956 \dots \times 0 \cdot 8091 \dots$

269. $45 \cdot 12345 : 3 \cdot 8265$. (3 d. m.) 270. $986 \cdot 256 : 127 \cdot 85$. (2 des. m.)

271. $13 \cdot 794 : 28 \cdot 376$. (4 des. m.) 272. $0 \cdot 7123 : 43 \cdot 566$. (4 des. m.)

273. $754 \cdot 06 : 0 \cdot 649$. (2 des. m.) 274. $3 \cdot 1416 : 7 \cdot 825$. (3 des. m.)

275. $7 \cdot 24257 : 19 \cdot 14$. (3 des. m.) 276. $0 \cdot 436861 : 18 \cdot 547$. (4 des. m.)

277. 1 kilogramm = $1 \cdot 785523$ víd. lib.; kolik kilogrammů = 1 víd. lib.? (5 des. m.)

278. $\frac{5 \cdot 3145 \cdot 2 \cdot 4906}{7 \cdot 2084 \cdot 3 \cdot 7449}$. (3 des. m.) 279. $\frac{3 \cdot 027 \cdot 8 \cdot 2579}{9 \cdot 461 \cdot 6 \cdot 3047}$. (3 des. m.)

280. $\frac{0 \cdot 35791 \cdot 0 \cdot 46802 \cdot 0 \cdot 14235 \cdot 0 \cdot 37281}{0 \cdot 41885 \cdot 0 \cdot 89134 \cdot 0 \cdot 15786 \cdot 0 \cdot 29173}$. (4 des. m.)

281. $3\cdot187 : 5\cdot3185\ldots$ 282. $912\cdot857 : 0\cdot118\ldots$
 283. $53\cdot4428\ldots : 9\cdot157\ldots$ 284. $71\cdot293\ldots : 9\cdot8764\ldots$
 285. $0\cdot3497\ldots : 14\cdot284\ldots$ 286. $9\cdot2737\ldots : 0\cdot0856\ldots$
 287. $0\cdot00369\ldots : 3\cdot846\ldots$ 288. $30\cdot2582\ldots : 0\cdot71356\ldots$

C. Zlomky řetězové.

Proměňování zlomků obyčejných v řetězové a naopak.

(§§. 119. a 120.)

Proměňte ve zlomky řetězové:

289. a) $\frac{92}{381}$; b) $\frac{61}{437}$; c) $\frac{115}{151}$; d) $\frac{67}{551}$; e) $\frac{113}{355}$;
 290. f) $\frac{49}{235}$; g) $\frac{137}{196}$; h) $\frac{188}{487}$; i) $\frac{108}{887}$; k) $\frac{349}{1478}$;
 291. l) $\frac{104}{31}$; m) $\frac{284}{83}$; n) $\frac{519}{53}$; o) $\frac{373}{250}$; p) $\frac{8658}{1405}$;
 292. q) $0\cdot513$; r) $0\cdot0934$; s) $0\cdot7307$; t) $5\cdot13722$;

293. $\frac{\text{rst} + r + t}{\text{prst} + \text{pr} + \text{pt} + \text{st} + 1}$; 294. $\frac{12x^2 + 17x + 7}{24x^3 + 46x^2 + 35x + 10}$.

Proměňte následující řetězové zlomky v obyčejné:

295. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ 296. $\frac{1}{5} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$
 297. $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{7}$ 298. $\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + 1 + \frac{1}{a} + 2 + \frac{1}{a} + 3 + \frac{1}{a} + 4$

Sbližné zlomky. (§§. 122.—126.)

Proměňte následující zlomky v řetězové a ustanovte jich zlomky sbližné:

299. a) $\frac{129}{164}$; b) $\frac{111}{53}$; c) $\frac{135}{328}$; (d) $\frac{100}{137}$; e) $\frac{157}{972}$;
 300. f) $\frac{999}{439}$; g) $\frac{3361}{900}$; (h) $0\cdot357$; i) $0\cdot8282$; k) $2\cdot7041$.

301. Ustanovte prvních pět sbližných hodnot desetinného zlomku $0\cdot65438$, jakož i mez chyby každé této hodnoty.

302. Proměňte $\frac{625}{3178}$ ve zlomek řetězový, a ukažte na sblížených zlomcích vlastnosti dokázané v §§. 123. a 124.
303. Víd. libra = 0·56006 kilogr.; ustanovte prvních pět sblížených hodnot tohoto čísla poměrného.
304. 1 litr = 0·70685 mázu; vyhledejte sblížené hodnoty.
305. Rakousko-uherský osmizlatník obsahuje 5·80645, německý desetimark však 3·58423 grammů ryzého zlata; ustanovte co možná nejsprávněji poměr obou těchto zlatých mincí čísly menšími.
306. Synodický měsíc, t. j. doba od jednoho nového měsíce k druhému, jest 29·53059, tropický rok slunečný však 365·24222 dní; vyhledejte prvních osm sblížených hodnot poměru obou dob.

Na šestém sblíženém zlomku $\frac{19}{135}$ spočívá Metonův cyklus 19ti roků, po kterémžto čase měny měsíce padají opět na tytéž dny v roce, jakož i zlaté číslo, kteréž udává, kolikátý jest určitý rok v tomto cyklu.

7. Poměry a srovnalosti.

A. Poměry.

(§§. 129. a 130.)

- Vyjádřete následující poměry celistvými čísly:
 a) $7\frac{3}{8} : 3\frac{5}{8}$; b) $\frac{9}{16} : \frac{7}{12}$; c) $\frac{11}{25} : 5\frac{13}{20}$; d) $23\frac{3}{16} : 15\frac{5}{9}$;
 e) $8\frac{3}{5} : 2\cdot 01$; f) $0\cdot 215 : 3\cdot 0816$; g) $(a - b) : \frac{ab}{a + b}$.
- Zkraťte následující poměry:
 a) $10 : 24$; b) $72 : 56$; c) $120 : 48$; d) $ax(m^2 - n^2) : ab(m + n)$.
- Vyjádřete následující poměry nejmenšími čísly celistvými:
 a) $4 : 6\frac{2}{3}$; b) $12\frac{6}{7} : 8\frac{4}{7}$; c) $\frac{6}{7} : 1\frac{7}{8}$; d) $15\frac{3}{4} : 6\frac{9}{16}$; e) $0\cdot 75 : 0\cdot 625$;
 f) $3\cdot 208 : 1\cdot 28$; g) $\frac{x + y}{ax} : \frac{x^2 - y^2}{bx}$.
- Těleso A proběhne za každou minutu 80, těleso A' však 96 metrů; ustanovte poměr obou rychlostí.
- Těleso A proběhne za a jednotí časových tutéž dráhu, kterou A' proběhne za a' časových jednotí; ustanovte poměr rychlostí obou těles.
- 1 metr má se k 1 víd. stopě jako 174 : 55; kterak se má
 a) 1 víd. stopa k 1 metru, b) 1 decimetr k 1 víd. palci?

27. 1 kilogramm se má k 1 víd. libře jako 25 : 14, 1 Kg. k 1 něm. libře jako 2 : 1, 1 něm. libra k 1 londýnské libře jako 43 : 39, 1 ruská libra k 1 lond. libře jako 65 : 72; v kterém poměru jsou vždy dvě a dvě tyto váhy?

C. Použití srovnalostí.

Jednoduché pravidlo tříčlenové. (§§. 143. a 144.)

28. 17 kilogrammů zboží stojí 15 zl. 64 kr.; a) mnoholi stojí 43 Kg.; b) mnoholi Kg. obdržíme za 35 zl. 88 kr.?
29. Je-li tlak vzduchu na $1\frac{1}{2}\square^{\text{dm}}$ 154 Kg., jak velký bude tlak na $1\square^{\text{m}}$?
30. Na $m\square$ milích žije r obyvatelů; a) mnoholi obyvatelů při rovné (poměrné) lidnatosti žije na $n\square$ milích; b) na koliku čtv. milích žije s obyvatelů?
31. Obvod předního kola u vozu = a metrům, zadního však b metrům; otočí-li se zadní kolo v jisté době m krát, kolikrát se otočí přední?
 $a = 2\cdot8$; $b = 4\cdot2$; $m = 170$.
32. Vykoná-li těleso rovnoměrně se pohybující za a sekund dráhu b metrů, a) kolik metrů dráhy vykoná za t sekund, b) za kolik sekund vykoná dráhu s metrů?
33. Rychlosti dvou těles rovnoměrně se pohybujících jsou v poměru $c : c'$; za kolik hodin druhé těleso vykoná dráhu, kterou první vykonalo za t hodin?
34. Obsahuje-li plynojem 11·2 krychl. metrů plynu, jenž v jisté době shoří v 82 svítilnách, mnoholi krychl. metrů plynu musí býti v plynojem, aby tutéž dobu mohl hořeti v 148 svítilnách?
35. Rukopis dá v tisku 162 strany po 50 řádkách; kolik dá stran, tiskne-li se na každé straně 45 řádek?
36. Vystačí-li a osob se zásobou potravy b dní; kolik osob vystačí s touto zásobou o c dní déle?
37. Platinový „Mètre prototype“, zachovaný v archivu pařížském, jest dle nejnovějšího astronomického měření při teplotě tajícího ledu roven 10000856té části čtverníku zemského poledníku. Při koliku stupních teploměru setinného by délka tohoto původního metru rovnala se určitě 10000000té části

- čtverníku zemského poledníku, je-li 0·00000856 měrou roztažnosti platiny pro každý stupeň zvýšení teploty?
38. Plzeň má 23650 obyvatelů; mnoholi jest jich 12%?
39. Dle Duvillardovy tabulky smrtelnosti z 502216 osob 20tiletých dojde 297070 roku 50tého; kolik % umře tedy v stáří 20—50 roků?
40. Vypočítejte 3% α) na sto, β) ze sta, γ) ve stu α) z 3758 zl., β) z 2908 $\frac{2}{3}$ marků, γ) z 5230·65 franků.
41. Někdo koupí zboží za a zl.; zač je musí prodati, aby získal p %?
42. Získá-li někdo p % při prodeji zboží za a zl., zač bylo zboží koupeno?
43. Kdosi koupí zboží za 3480 zl.; zaplatí-li hned, povolí se mu skonto (srážka) 2 $\frac{1}{2}$ %. Mnoholi činí skonto, počítá-li se α) ze sta, β) na sto?
44. Někdo obdrží za prodané zboží 6522 marků po srážce 2% provise; jak velká jest tato? (Ve stu.)
45. Kdosi koupí státní los, jehož jmenovitá cena jest 250 zl., dle kursu 96·25 (za 100 jmenovité ceny); mnoholi zaplatí za los?
46. Někdo koupí akcii železné dráhy za 176 zl.; na kolik % uložil peníze, je-li jmenovitá cena akcie 200 zl., kteréž nesou ročně 5% úroků?
47. Jistina vynese za t roků z zl. úroků; α) mnoholi úroků vynese za t' roků při témž %; β) za kolik roků vynese z' zl. úroků?
48. Na kolik % musí býti jistina uložena, aby za t' roků vynesla tolik úroků, mnoholi vynese za t roků při p %?
- $t' = 3, t = 2, p = 6.$

Složitě pravidlo tříčlenové. (§§. 145. a 146.)

49. a Kg. příze dá b metrů plátna c cm. širokého; α) kolik metrů plátna c' cm. širokého dá a' Kg. téže příze; β) jak široké bude plátno, má-li se zhotoviti b' metrů z a' Kg. příze; γ) mnoho-li Kg. příze bude potřebí ku zhotovení b' metrů plátna c' cm. širokého?
50. Z jistého množství vlny může tkadlec zhotoviti 16 kusů sukna, z nichž každý jest 54 metry dlouhý a $\frac{5}{3}$ metru široký.

Z jisté části vlny zhotoví tkadlec 2 kusy po 48 m. délky a $\frac{5}{4}$ m. šířky; kolik kusů po 47 m. délky a $\frac{5}{4}$ m. šířky může zhotoviti ze zbytku?

51. Stroj vyzdvihne za a sekund b Kg. na c metrů; za kolik sekund vyzdvihne b' Kg. na c' metrů?

$$a = 93, b = 4185, c = \frac{3}{5}, b' = 3912, c' = 1\frac{1}{4}.$$

52. Ve mlýně o a složeních při b otočeních (za minutu) semele se v c sekundách d hektolitrů obilí; na koliku složeních při b' otočeních (za minutu) semele se v c' sekundách d' Hl.?

53. Ze dvou kol do sebe zasahujících jedno má a , druhé b zubů; vykoná-li první kolo za s minut m oběhů, kolikrát druhé se otočí za t minut?

54. Veze-li vozka 12 ctů. 10 mil za $20\frac{1}{2}$ marků, a) jak daleko poveze $24\frac{3}{4}$ ctů. za $30\frac{1}{2}$ marků; b) kolik ctů. poveze za $23\frac{1}{3}$ marků na $18\frac{1}{4}$ míle; c) mnoholi dovozného bude požadovati za 37 ctů., jež veze $25\frac{1}{2}$ míle?

55. 6 dělníků vykopá ve 4 dnech příkop 300 metrů dlouhý, $8\frac{1}{3}$ dm. široký a 6 dm. hluboký. Při druhém příkopu vykopá se $2\frac{1}{3}$ krychl. m. v témž čase, v kterém $4\frac{1}{2}$ krychl. m. při prvním příkopu; a) kolik dělníků vykopá v 9ti dnech druhý příkop 245 m. dlouhý, $11\frac{2}{3}$ dm. široký a $3\frac{1}{2}$ dm. hluboký, b) v koliku dnech vykopá 10 dělníků druhý příkop, je-li 250 m. dlouhý, $9\frac{3}{4}$ dm. široký a $4\frac{1}{2}$ dm. hluboký?

56. Mnoholi úroků vynesel 3791 zl. na 4% za 3 roky?

57. Mnoholi úroků vynesel a) 1287 zl., b) $3745\frac{1}{2}$ zl., c) 8391 zl. 34 kr. na $5\frac{1}{2}\%$ za α) 2 roky, β) $3\frac{1}{2}$ r., γ) 2 r. 4 měs. 18 dní?

58. Mnoholi úroků vynesel C zl. na 6% za T dní?

59. Mnoho-li úroků vynesel 3609 marků za 125 dní α) na 6%, b) na 4%, c) na $4\frac{1}{2}\%$, d) na 2%?

60. Někdo koupil dne 17. srpna 500 zl. státních papírů dle kursu $69\frac{1}{2}$; mnoholi za ně zaplatí, musí-li nahraditi $4\frac{1}{5}\%$ proších úroků (jmenovité ceny) od 1. května?

61. Jak dlouho musí býti jistina 4844 zl. na $4\frac{1}{3}\%$ uložena, aby vynesla $886\frac{1}{3}$ zl. úroků?

62. Která jistina vynesel při $5\frac{1}{4}\%$ za $2\frac{7}{12}$ roků $950\frac{3}{4}$ marků úroků?

63. Vynese-li jistina 1424 zl. za $3\frac{1}{2}$ roků 237 $\frac{1}{8}$ zl. úroků, na kolik % byla uložena?
64. Vynese-li jistina c zl. za t roků z zl. úroků, a) mnoholi úroků vynese c' zl. za t' roků, b) která jistina dá za t' roků z' zl. úroků, c) za kolik roků jistina c' zl. vynese z' zl. úroků?
65. Jistina c splatí se za t roků; nač (s) vzrostla při $p\%$ úroků?

$$s = c \cdot \frac{100 + tp}{100}.$$

66. Jistina c , splatná za t roků bez úroků, má býti splacena na začátku toho času; mnoholi (r) musí dlužník zaplatiti při $p\%$ diskonta?

$$\text{Počítáme-li na sto, jest } r = c - \frac{cpt}{100 + pt} = \frac{100c}{100 + pt}.$$

$$\text{Počítáme-li ze sta, jest } r = c - \frac{cpt}{100}.$$

Který počet jest správný, který pohodlnější?

Kupci vypočítávají diskonto u směnek a skonto u peněz za zboží vždy ze sta.

67. Směnka na 2813 zl. 15 kr. diskontuje se 4mi % dva měsíce před časem dospělosti; a) jaké jest diskonto, b) mnoholi musí kupující zaplatiti?
68. Mnoholi musíme dnes půjčiti na 6%, abychom za tři roky i s úroky obdrželi 2950 zl.? (Na sto.)
69. Někdo ukládá po 5 roků na začátku každého roku 2000 marků na 5% jednoduchých úroků; jaká jest nynější hodnota všech uložených jistin?
70. A podává za dům hotových 24000 zl., B hotových 16000 zl., mimo to chce vždy 3000 zl. splatiti bez úroků za 1, 2, 3 roky; C podává hotových 17000 zl., mimo to po 2000 zl. splatných bez úroků za 1 $\frac{1}{2}$, 3, 4 $\frac{1}{2}$ a 6 let. Které nabídnutí jest nejvýhodnější, počítá-li se 6% náhrady jednoduchých úroků?
71. Jistiny c' , c'' , c''' , . . . jsou vztažně za t' , t'' , t''' , . . . jednotí časových (roků, měsíců, . . .) splatné bez úroků. Vypočítejte, kdy by se musel součet $s = c' + c'' + c''' + \dots$ najednou zaplatiti?

Značí-li m střední (průměrnou) lhůtu platebnou, a počítáme-li jednoduché úroky při $p\%$, bude
v počtu na sto

$$m = \frac{\frac{c't'}{100 + pt'} + \frac{c''t''}{100 + pt''} + \frac{c'''t'''}{100 + pt'''} + \dots}{\frac{c'}{100 + pt'} + \frac{c''}{100 + pt''} + \frac{c'''}{100 + pt'''} + \dots};$$

v počtu ze sta

$$m = \frac{c't' + c''t'' + c'''t''' + \dots}{c' + c'' + c''' + \dots}.$$

Počet tento slove lhůtový; obyčejně počítáme ze sta, jakož patrně bez ohledu na procenta.

72. Někdo má zaplatiti bez úroků 2000 zl. za 2 měsíce, 1500 zl. za 5 měsíců, 2400 zl. za 1 rok, 2500 zl. za 1 r. 3 měs.; kdy by musel zaplatiti veškerý dluh najednou?

Počet spolkový. (§§. 147. a 148.)

73. K jakémusi podniku dá A 3100 zl., B 3500 zl., C 4200 zl.; vyzískají-li podnikatelé 324 zl., mnoholi obdrží každý?
74. Rozdělte číslo 3710 na 4 části, srovnalé se zlomky $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$.
75. Stavba školy stojí 924 zl. 30 kr., kteroužto výlohu 4 obce mají zaplatiti v poměru daní. Platí-li obec A 738 zl. 42 kr., B 815 zl., C 513 zl. 65 kr., D 618 zl. 83 kr. daní, jakou částkou musí každá obec na stavbu přispěti?
76. s zl. má se rozdělit na 3 části a, b, c tak, aby $a : b = m : n$ a $b : c = p : q$.
77. Rozdělí-li tři osoby 3960 zl. tak, že B obdrží dvakrát tolik co A, a C třikrát tolik co B: mnoholi dostane každá osoba?
78. 9150 zl. rozdělí se třem osobám tak, že A dostane tolikrát 5 zl., kolikrát B 3 zl., a C tolikrát 3 zl., kolikrát B 4 zl.; mnoholi obdrží každá osoba?
79. s tolarů má se rozdělit na 4 části tak, aby $a : d = m : n$, $b : d = p : q$ a $c : b = r : s$.
80. V rakousko-uherském osmizlatníku jest $\frac{9}{10}$ zlata a $\frac{1}{10}$ mědi; mnoholi zlata a mnoholi mědi potřebuje se k ražení 1000 osmizlatníků, jestliže 155 kusů váží 1 Kg.?
81. 18420 zl. má se rozdělit 4 dědicům tak, aby A obdržel $\frac{1}{3}$, B $\frac{1}{4}$, C $\frac{3}{10}$ a D zbytek. Před rozdělením však umře A, a ostatní dědici rozdělí se pak o jeho podíl v poměru svých původních podílů; mnoholi dostane každý?

82. Při jakési veřejné stavbě pomáhali dělníci ze tří obcí, a sice z obce A 11 dělníků 10 dní po 9ti hodinách, z obce B 9 dělníků 9 dní po 10ti hodinách, z obce C 15 dělníků 5 dní po 6ti hodinách. Za to dostaly obce 750 marků náhrady; mnoholi obdržela každá?
83. A počne na začátku roku obchod se základem 8000 zl.; po dvou měsících přistoupí B s 5000 zl., a ještě o 2 měsíce později se přidruží C s 3000 zl. Koncem roku zbývá 1059 zl. zisku; mnoholi obdrží každý?
84. Ku společnému obchodu dal A a' zl. a po m' měsících ještě b' zl.; B dal a'' zl. a po m'' měsících ještě b'' zl.; C dal a''' zl. a po m''' měsících ještě b''' zl. Kterak tyto 3 osoby po m měsících se rozdělí o z zl. zisku?

Počet řetězový. (§. 149.)

85. Kolik metrů = 2135 ruským stopám, jestliže 55 m. = 175 víd. stp. a 82 r. stp. = 79 víd. stp.?
86. Kolik londýnských liber váží 1 lond. krychl. stopa čisté vody, jestliže 1 krychl. dm. čisté vody váží 1 Kg.? (25 lond. krychl. stop = 708 krychl. dm., 86 lond. lib. = 39 Kg.)
87. Rakousko-uherský zlatý obsahuje 900 tisícín ryzého stříbra; mnoholi grammů váží, jestliže 45 zl. obsahuje 500 grammů čistého stříbra?
88. Kolik zl. r. č. = 1 něm. desetimarku, je-li v $139\frac{1}{2}$ kusech 10timarků $\frac{1}{2}$ Kg. ryzého zlata, v 45 zl. rak. čís. $\frac{1}{2}$ Kg. čistého stříbra, a má-li se zlato ku stříbru (dle hodnoty) jako $15\frac{1}{2} : 1$?
89. Kolik dukátů rovná se osmizlatníku, razí-li se 155 osmizlatníků z 1 Kg. zlata 900tisícinné jakosti, a 67 dukátů z kolínské hřivny $23\frac{2}{3}$ karátového zlata? (1 kol. hřivna = 24 karátům = 233.87 grm.)
90. Vídeňský obchodník platí v Hamburku za 1 hamb. libru kávy 78 penízců; mnoholi % získá, činí-li výlohy 30% a prodává-li se ve Vídni 1 Kg. za 1 zl. 20 kr.? (1 hamb. libra = $\frac{1}{2}$ Kg., 100 penízců = 1 marka a 100 marků = 54 zl.) Řetěz počíná takto: x zl. činí příjem za 100 zl. vydaných, jestliže a t. d.

III. Mocniny, veličiny kořenové, logarithmy.

1. Mocniny s kladnými celistvými mocniteli.

(§§. 151.—153.)

- | | | |
|-------------------------|-----------------------------|---------------------|
| 1. $(a^3)^2$. | 2. $(x^m)^n$. | 3. $[(p^2)^4]^3$. |
| 4. $(-a^2)^3$. | 5. $(-a^3)^2$. | 6. $[(-y)^3]^5$. |
| 7. $(-a^{2m})^{2n-1}$. | 8. $(-a^{2n-1})^{2m}$. | 9. $[(-z^2)^3]^m$. |
| 10. $(x^{a+b})^{a-b}$. | 11. $(y^{3a-2b})^{2a-3b}$. | |

(§§. 154.—157.)

- | | | |
|--|--|--|
| 12. $(2ax)^3$. | 13. $(abcd)^m$. | 14. $(-3a)^4$. |
| 15. $(2a^2)^4$. | 16. $(ax^m)^p$. | 17. $(2a^3x^4)^2$. |
| 18. $(-5x^2y^3z)^3$. | 19. $[a^2(b-c)^3]^4$. | 20. $[(xy^2)^2 \cdot z^2]^2$. |
| 21. $(-4b)^2 \cdot (3x)^3$. | 22. $(5x)^3 \cdot (-2y)^4$. | 23. $(-8a)^2 \cdot (-3b)^5$. |
| 24. $(7x)^3 \cdot (3y)^4 \cdot (2az)^5$. | 25. $(a^{m+n}b^{m-n})^{m+n}$. | |
| 26. $a^3 \cdot x^3$. | 27. $25^4 \cdot 4^4$. | 28. $(5a)^2 \cdot (3b)^2$. |
| 29. $(x+a)^4 \cdot (x-a)^4$. | 30. $(3x)^5 \cdot (-2y)^5 \cdot (4z)^5$. | |
| 31. $x^n \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^n$. | 32. $\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \cdot a^n$. | |
| 33. $\left(\frac{2a}{5x}\right)^3 \cdot \left(\frac{15x}{2a}\right)^3$. | 34. $\left(\frac{3cy}{5ab}\right)^6 \cdot \left(\frac{10ax}{9c}\right)^6 \cdot \left(\frac{6bz}{x}\right)^6$. | |
| 35. $\left(\frac{2x}{3y}\right)^3$. | 36. $\left(-\frac{x}{2y}\right)^5$. | 37. $\left(\frac{8mn}{5pq}\right)^3$. |
| 38. $\left(\frac{a^2b^3}{cd^4}\right)^2$. | 39. $\left(\frac{3ab^2}{2x^2y}\right)^5$. | 40. $\left(-\frac{3a^3x}{4b^2y^2}\right)^4$. |
| 41. $\left(\frac{a^m x^n}{b^ny^m}\right)^p$. | 42. $\left(\frac{a^4b^5c^2}{x^5y^7}\right)^3$. | 43. $\left[\left(-\frac{ab^2x^3}{c^3d^2y}\right)^3\right]^2$. |
| 44. $\left(\frac{2ax - 3by}{3b} + y\right)^4$. | 45. $\left(1 - \frac{3a + 2bx}{2bx}\right)^5$. | |
| 46. $(8ab)^4 : (2b)^4$. | 47. $(x^2 - y^2)^m : (x - y)^m$. | |
| 48. $x^n : \left(\frac{1}{y}\right)^n$. | 49. $\left(\frac{3ax}{4by}\right)^5 : \left(\frac{2x}{3b}\right)^5$. | |
| 50. $\left(\frac{a-b}{a}\right)^m : \left(\frac{a+b}{a}\right)^m$. | 51. $\left(x - \frac{y^2}{x}\right)^n : \left(\frac{x}{y} + 1\right)^n$. | |
| 52. $ax^m \cdot bx^n$. | 53. $7a^3 \cdot (-3a^2)$. | |
| 54. $2m^4n^3 \cdot 5m^4n$. | 55. $3(a+b)^3 \cdot 4(a+b)^2$. | |

56. $(-a)^4 \cdot (-a)^3$. 57. $(-a)^{2m+1} \cdot (-a)^{2n-1}$.
 58. $(3a^2 \cdot 2b^2)^4 \cdot (4ab)^3$. 59. $(ab)^{m-2n} \cdot (ac)^{2m-n} \cdot (bc)^{n-m}$.
 60. $6a^{m+n} : 2a^n$. 61. $(-a)^{2n+1} : (-a)^3$.
 62. $\left(\frac{3x^2}{2y}\right)^3 \cdot \left(\frac{3y^2}{4x}\right)^2$. 63. $\left(\frac{ab}{2cd}\right)^4 \cdot \left(\frac{2c}{3ab}\right)^3 \cdot \left(\frac{3bc}{5a}\right)^2$.
 64. $\frac{5ax^4}{6by^3} \cdot \frac{b^2x^2}{ay} \cdot \frac{3a^2y^4}{2b^3x^3}$. 65. $\frac{8a^6xy^4}{3bc^2z^5} \cdot \frac{4a^5x^3y}{5b^3cz^4}$.
 66. $\left(\frac{a^4b^5c^2}{x^5y^7}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^4y^6}{a^3b^4c}\right)^4$. 67. $\left\{\frac{(2x^3y^2)^3 \cdot (3x^4y^3)^2}{6x^2y^2}\right\}^3$.
 68. $\left(\frac{2a^2x^2}{3by^3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{6ax^2}{5b^2y}\right)^2 \cdot \left(\frac{3b^2}{4a^2}\right)^4$. 69. $\left\{\frac{(2xy^2)^5 \cdot (3x^2z^2)^4 \cdot (5y^3z)^3}{(10x^3y^2)^2 \cdot (6y^2z^4)^3}\right\}^2$.

(§. 158.)

70. $3a^2 + 4a^2 + 6a^2$. 71. $5m^4 - 2m^4$.
 72. $ax^3 + bx^2 + cx - x^3 - 2x^2 + 3x$.
 73. $4x^m - 5x^n + 6x^p - x^n + 2x^m - 3x^p$.
 74. $\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^5} + \frac{c}{x^4} + \frac{d}{x^3} + \frac{e}{x^2} + \frac{f}{x} + g$.
 75. $(2a^3 + 3b^3) \cdot a^2b^2$. 76. $(6x^4y^2 - 10x^3y^3) : 2xy^2$.
 77. $(3a^3x^2 + 4b^2y^3)(3a^3x^2 - 4b^2y^3)$.
 78. $(x^{3a-b} - x^{2a} + x^{a+b} - x^{2b} + x^{3b-a})(x^a + x^b)$.
 79. $(x^{3m-n} - x^{2m} + x^{2n} - x^{3n-m}) : (x^m - x^n)$.
 80. $(a^8 - b^8) : (a^5 + a^4b + ab^4 + b^5)$.
 81. $(x^2 + a)^2$. 82. $(a^2 - x)^2$. 83. $(2a^2 + 3b^2)^2$.
 84. $(x^m - y^n)^2$. 85. $(5x^3 - 6y^3)^2$. 86. $(mx^4 - n)^2$.
 87. $(2a + b)^3$. 88. $(3x - 2y)^3$. 89. $(a^2 - 3b^2)^3$.
 90. $(ax^3 - by^3)^3$. 91. $(2a^x + 3a^y)^3$. 92. $(mx^6 - nx^3)^3$.
 93. $(5a^2 - 4x^2)^2 + (5a^2 + 4x^2)^2$. 94. $(ax^3 + by^3)^2 - (ax^3 - by^3)^2$.
 95. $(a + bx + cx^2)^2$. 96. $(x^2y^2 - 2abxy + a^2b^2)^3$.

2. Veličiny kořenové s kladnými celistvými odmocniteli.

(§§. 162.—167.)

1. $\sqrt[m]{a^{mx}}$. 2. $\sqrt[3]{a^6}$. 3. $\sqrt[5]{-a^{30}}$.
 4. $\sqrt[p]{x^{mnp}}$. 5. $\sqrt[an]{x^{bm}}$. 6. $\sqrt[m+n]{x^{am+an}}$.
 7. $(\sqrt{-a})^5$. 8. $(\sqrt{-a^2})^4$. 9. $(\sqrt{a^3})^2$.

10. $(\sqrt[4]{ab^2c^3})^3.$

11. $4a^2(\sqrt[n]{x^2})^n.$

12. $(\sqrt[p]{a^m})^{pq}.$

13. $(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^m}})^n.$

14. $(\sqrt[m]{\frac{a^nb^p}{c^q}})^r.$

15. $\left(\sqrt[3]{\frac{2a^2\sqrt[5]{ax}}{5b\sqrt[4]{bx}}}\right)^2.$

16. $\sqrt[3]{\sqrt[n]{x}}.$

17. $\sqrt[8]{\sqrt[5]{a}}.$

18. $\sqrt[3]{\sqrt[n]{x^3}}.$

19. $\sqrt[8]{\sqrt[5]{a^{12}}}.$

20. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{64}}.$

21. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}}}.$

22. $(\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^8}})^6.$

23. $\sqrt[q]{\sqrt[n]{(a^m)^p}}.$

24. Jestliže $\sqrt[3]{262144} = 64$, čemu se rovná a) $\sqrt[6]{262144}$,
b) $\sqrt[9]{262144}$, c) $\sqrt[18]{262144}$?

25. Uveďte následující veličiny kořenové na společného odmocnitele:

(a) $\sqrt[mn]{x} \text{ a } \sqrt[np]{x^2};$

(b) $\sqrt[4]{x^3} \text{ a } \sqrt[6]{y^5};$

c) $\sqrt[mn]{a^p} \text{ a } \sqrt[np]{b^m};$

d) $\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{b^2} \text{ a } \sqrt[5]{c^3}.$

26. Zkratke odmocnitele i mocnitele následujících veličin kořenových:

a) $\sqrt[4]{x^2};$

b) $\sqrt[6]{y^{15}};$

c) $\sqrt[18]{a^{12}};$

d) $\sqrt[mnp]{x^{mpq}}.$

(§§. 168. a 169.)

27. $\sqrt[m]{x^a y^b}.$

28. $\sqrt{9.49}.$

29. $\sqrt[3]{27a^3b^6}.$

30. $\frac{a^3}{b}\sqrt[3]{b^3x^3}.$

31. $\sqrt[3]{16^3.81^3}.$

32. $\sqrt[3]{8^m.27^m}.$

33. $\sqrt{(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)^2}.$

34. $\sqrt[m]{a^2b^4c^6}.$

§. 168. dod. 1)

35. $\sqrt[n]{a^n b}.$

36. $\sqrt[2m]{a^{4m}x}.$

37. $\sqrt[x]{a^{2x}b^xc}.$

38. $\sqrt[m]{x^{m+n}}.$

39. $\sqrt{x^3}.$

40. $\sqrt{4a^3b}.$

41. $x\sqrt{y^2z^3}.$

42. $m\sqrt[3]{a^6b^5c^4}.$

43. $\frac{1}{xy}\sqrt[m]{x^{m+1}y^{m+1}}.$

44. $\sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[n]{a^q}$.

45. $\sqrt[n]{n^5} \cdot \sqrt[n]{n}$.

46. $\sqrt[3]{a^7} \cdot \sqrt[3]{a^5}$.

47. $\sqrt{x} \cdot \sqrt{xy}$.

48. $\sqrt[p]{a^m b^n} \cdot \sqrt[p]{ab}$.

49. $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[4]{ax}$.

50. $\sqrt{\frac{a^6}{m}} \cdot \sqrt{-\frac{m}{a}}$.

51. $\sqrt{ab} \cdot \sqrt{\frac{x+y}{a}} \cdot \sqrt{\frac{x+y}{b}}$.

52. $\sqrt[n]{ax^{n+1}} \cdot \sqrt[n]{bx^{n-1}}$.

53. $\sqrt[m]{xy^2 z^3} \cdot \sqrt[m]{x^2 y^{m-2} z^{2m-8}} \cdot \sqrt[m]{x^{m-3} z^{5-m}}$.

54. $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a}$.

55. $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3}$.

56. $\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[9]{a^7}$.

57. $3\sqrt[3]{b^2} \cdot 5\sqrt[4]{b^3} \cdot \sqrt[12]{b}$.

58. $3\sqrt[3]{\frac{y}{x}} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{y^2}}$.

Činitele před kořenítkem uveďte pod kořenítko:

59. $a\sqrt[n]{x}$.

60. $4\sqrt[3]{5a}$.

61. $4x\sqrt[3]{x}$.

62. $x\sqrt{\frac{a}{x}}$.

63. $\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y^2}{x^2}}$.

64. $ab\sqrt[p]{\frac{1}{a^{p+1}b^{p+1}}}$.

65. $(a+b)\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$.

66. $\frac{x^2 y}{a^2 b}\sqrt{\frac{a^3 b}{x^3 y}}$.

67. $\sqrt[5]{a^3} \sqrt[3]{a^8}$.

68. $\sqrt[n]{a^n} \sqrt[p]{a^q}$.

69. $x\sqrt[m]{x\sqrt[m]{x}}$.

70. $a\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{a}$.

71. $\sqrt[m]{\frac{a^{mn}}{b^{mp}}}$.

72. $\sqrt{\frac{49}{64}}$.

73. $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$.

74. $\sqrt{2\frac{7}{9}}$.

75. $\sqrt{\frac{25}{16} + \frac{3}{2}}$.

76. $\sqrt{\frac{49}{16} - \frac{5}{2}}$.

77. $\sqrt[5]{\frac{a^5 x^{10}}{b^5 y^{10}}}$.

78. $\sqrt[3]{\frac{8a^4 b}{27c^4}}$.

79. $15\sqrt{\frac{3x}{25a^2}}$.

80. $\sqrt[n]{\frac{1}{a^{mn}}}$.

81. $\sqrt[3]{\frac{a^p}{a^6}}$.

82. $\sqrt{a^{m-2}}$.

83. $\sqrt[m]{\frac{a^{mn} b^{mp} c^{mq}}{x^{mr} y^{ms}}}$.

84. $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2} + \frac{a^2 + b^2}{b^2}}$.

85. $\sqrt[m]{ax} : \sqrt[m]{a}$.

86. $\sqrt[3]{48x} : \sqrt[3]{6x}$.

87. $\sqrt{ab} : \sqrt{bx}$.

88. $\sqrt{a} : \sqrt{\frac{a}{b}}$.

89. $\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{a^3}}$.

90. $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a - b}}$.

91. $1:\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. 92. $1:\sqrt{0.25}$. 93. $1:\sqrt{\frac{x-2y}{x^3-3xy^2-2y^3}}$.
94. $\sqrt[4]{a^3}:\sqrt[3]{a}$. 95. $\sqrt[5]{a^4}:\sqrt[3]{a^2}$. 96. $m\sqrt[4]{a}:\sqrt[4]{a}$.
97. $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a}}$. 98. $\frac{a}{x}:\sqrt{ax}$. 99. $\frac{a}{\sqrt[n]{a}}$.
100. $\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}$. 101. $\frac{a^2-1}{\sqrt{a-1}}$. 102. $(x+y):\sqrt[m]{\frac{(x+y)^{m-1}}{x-y}}$.

Sečítání a odčítání veličin kořenových. (§. 170.)

103. $\sqrt[3]{a} + 4\sqrt[3]{a} + 5\sqrt[3]{a}$. 104. $a\sqrt[m]{x^n} - b\sqrt[m]{x^n}$.
105. $a + b\sqrt[m]{m} + c - d\sqrt[m]{m}$. 106. $5\sqrt[8]{a^3} - 2\sqrt[8]{a^3} - 3\sqrt[8]{a^3}$.
107. $m\sqrt[3]{a} + n\sqrt[3]{a} + 2\sqrt[3]{a} - 3\sqrt[3]{a}$.
108. $a\sqrt[m]{b} - 2b\sqrt[n]{a} - 2a\sqrt[m]{b} + 8b\sqrt[n]{a} - 5b\sqrt[n]{a} + 6a\sqrt[m]{b}$.

Uveďte na společného odmocněnce a sečítejte aneb odčítejte:

109. $\sqrt{a^5} + \sqrt{a^3} + \sqrt{a}$. 110. $\sqrt{a^2x} + 2\sqrt{b^2x} + 3\sqrt{c^2x}$.
111. $5a\sqrt{12x^3} - 2x\sqrt{27a^2x}$. 112. $4\sqrt[3]{3x} - 2\sqrt[3]{24x} + \sqrt[3]{192x}$.
113. $\sqrt[3]{a^3a^2} + 3\sqrt[3]{a^2a}$. 114. $a\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{a} - 2\sqrt[4]{a^2a^3}$.
115. $\sqrt{4x^3y} - 5y\sqrt{xy} - x\sqrt{4xy} + \sqrt{25xy^3}$.
116. $4\sqrt{1+a^2} - \sqrt{9+9a^2} - 2\sqrt{x^2+a^2x^2} + \sqrt{x^4(1+a^2)}$.
117. $(x-y)\sqrt{\frac{xy}{x^2-2xy+y^2}} - xy\sqrt{\frac{1}{xy}} + x\sqrt{\frac{y}{x}}$.

118. $(\sqrt[3]{a} - 2\sqrt[3]{b}) \cdot \sqrt[3]{x}$. 119. $(3\sqrt{5a} + 4) \cdot \sqrt[3]{4a}$.
120. $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})$.
121. $\sqrt{x+y} + \sqrt{2xy} \cdot \sqrt{x+y} - \sqrt{2xy}$.
122. $(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z})$.
123. $(\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b})(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})$.
124. $\sqrt{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}} \cdot \sqrt{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}$.

125. $\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 + 1}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$.
126. $\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} - \frac{3x + \sqrt{x}}{1 - x}$.
127. $(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{x^2-1})(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1})$.
128. $(\sqrt[3]{ab} + 3\sqrt[3]{xy})(5\sqrt[3]{ab} + 4\sqrt[3]{xy})$.
129. $(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})$.
130. $(\sqrt[3]{a^2b} - \sqrt[3]{ab^2}) : \sqrt[3]{ab}$. 131. $(6\sqrt[3]{x} + 8x) : 2\sqrt[3]{x}$.
132. $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[4]{a^3} + \sqrt[5]{a^4}) : \sqrt[6]{a}$.
133. $(\sqrt[3]{ax} - \sqrt[3]{cx} + \sqrt[3]{az} - \sqrt[3]{cz}) : (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{c})$.
134. Ustanovte hodnotu podílu $\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}$ při $x = a$.
135. $(B - b) : (\sqrt[3]{B} - \sqrt[3]{b})$.
136. $\sqrt{\frac{m+n+2\sqrt{mn}}{m-n}} : \sqrt{\frac{\sqrt{m} + \sqrt{n}}{\sqrt{m} - \sqrt{n}}}$.
137. $(a + \sqrt[3]{b})^2$. 138. $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2$.
139. $(3x\sqrt[3]{y} - 2y\sqrt[3]{x})^2$. 140. $(\sqrt[3]{2x+a} - \sqrt[3]{2x-a})^2$.
141. $(\sqrt[3]{x+y})^2 + (\sqrt[3]{x-y})^2$. 142. $(\sqrt[3]{5+3})^2 - (\sqrt[3]{5-3})^2$.
143. $\left\{ \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} \right\}^2$.
144. $[\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b} \pm \sqrt[3]{a+b} - \sqrt[3]{a-b}]^2$.
145. $(4a\sqrt[3]{b} - 3b\sqrt[3]{a})^3$. 146. $(a - 3\sqrt[3]{a^2} + 4\sqrt[3]{a})^3$.
147. $[\sqrt[3]{a^3 + \sqrt{a^6 - b^6}} - \sqrt[3]{a^3 - \sqrt{a^6 - b^6}}]^3$.

3. Mocniny (a veličiny kořenové) se zápornými a lomenými mocniteli (a odmocniteli).

Záporní mocnitelé. (§§. 172.—174.)

1. Ustanovte hodnotu následujících mocnin:

- a) 2^{-6} , b) 6^{-2} , c) 4^{-3} , d) 0.4^{-1} , e) 0.125^{-3} ;
 f) $\frac{1}{3^{-4}}$, g) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-5}$, h) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-3}$, i) $\left(\frac{15}{16}\right)^{-1}$, k) $\frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{m}{x}\right)^{-2}$.

2. Odstraňte záporné mocnitele :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 2x^2y^{-2}, & \text{b) } 3a^3b^{-3}, & \text{c) } ab^{-1}x^{-1}y; \\ \text{d) } \frac{ax^{-m}}{by^{-m}}, & \text{e) } \frac{3a^2m^{-3}y^{-1}}{4b^2n^{-2}x^{-2}}, & \text{f) } \frac{13a^{-2}b^{-1}c^5}{8x^3y^{-3}z^{-2}}. \end{array}$$

3. Vyjádřete v podobě čísel celistvých :

$$\text{a) } \frac{5x}{y}, \quad \text{b) } \frac{2ax^{-2}}{b^{-1}}, \quad \text{c) } \frac{m^3x^2}{y^3z^{-2}}, \quad \text{d) } \frac{12a^{-4}b}{25x^{-3}y^2}.$$

Vypočítejte a napište výsledky s kladnými mocniteli :

$$\begin{array}{lll} 4. (x^{-2})^4. & 5. (x^{-1})^{-1}. & 6. [(x^{-m})^n]^{-p}. \\ 7. (-a^3)^{-2n}. & 8. (-a^{-2})^{2n-1}. & 9. (-a^{2n-1})^{-2}. \\ 10. (a^{-3}b^4)^{-2}. & 11. (3a^2b^{-1}x^3y^{-1})^3. & 12. (-2x^{-3}y^3z^{-1})^4. \\ 13. \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{-2}. & 14. \left(\frac{2a^2b^3}{3mx^{-2}}\right)^{-1}. & 15. \left(\frac{1}{x}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{-6}. \\ 16. 5^{-2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}. & 17. (5a^{-1})^{-2} \cdot (3b)^{-2}. & 18. (x^{-p})^{-s} \cdot (y^{-q})^{-s}. \\ 19. \left(\frac{x}{x+y}\right)^{-m} : \left(\frac{x}{x-y}\right)^{-m}. & 20. \frac{(a^2b^{-1})^{-4}}{(x^{-3}y^{-2})^{-4}}. \\ 21. a^5 \cdot a^{-3}. & 22. x^{m+2} \cdot x^{-3}. & 23. (-3a^{-5}) \cdot (-2a^{-1}). \\ 24. x^{n-3} : x^{-5}. & 25. a^{-4} : -a^4. & 26. -4a : a^{-4}. \\ 27. 6a^3b^{-2} : 2a^4b^{-3}. & 28. 36a^{-1}b^{-2}c^{-3} : 6a^{-2}b^{-3}c^{-4}. \\ 29. \frac{a^{-1}b^{-2}c^3}{m^{-3}n^{-2}p} \cdot \frac{m^{-2}n^{-5}p^{-4}}{a^{-1}b^{-3}c^{-1}}. & 30. \frac{x^{-m}y^{-m+1}}{a^{-2m}b^{m-n}} : \frac{x^{2n+m}y}{a^{-m+n}b^{2m}}. \\ 31. (ax^{-4} + bx^{-3} + cx^{-2} + dx^{-1} + e) \cdot x^4. \\ 32. (x^{-1}y^{-5} - 2xy^{-3} + 3x^3y^{-1})(3x^{-1}y^{-5} + 2xy^{-3} - x^3y^{-1}). \\ 33. (a^{-5} - b^{-5}) : (a^{-1} + b^{-1}). \\ 34. (x + x^{-1})^2. \\ 35. (3a^{-3}x^2 - 4a^2x^{-3})^2. \\ 36. (x^2 - 2x^{-2})^3. \\ 37. (2a^2b^{-3} + 3a^{-3}b^2)^3. \end{array}$$

38. Ustanovte hodnoty následujících veličin kořenových :

$$\text{a) } \sqrt[n]{x}, \quad \text{b) } \sqrt[3]{27}, \quad \text{c) } \sqrt[4]{16}, \quad \text{d) } \sqrt[2]{0.25}, \quad \text{e) } \sqrt[m]{a^{-mn}}.$$

Vyjádřete následující výrazy v nejjednodušší podobě bez odmocnitelů záporných :

$$\begin{array}{lll} 39. \sqrt[2]{\sqrt[3]{64}}. & 40. \sqrt[3]{\sqrt[2]{a^{-mn}}}. & 41. \sqrt[n]{\sqrt[p]{a^{npq}}}. \\ 42. \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a}. & 43. a \cdot \sqrt[n]{a}. & 44. \sqrt[a^3]{a}. \end{array}$$

45. $\sqrt[3]{a^2} : \sqrt[2]{a}$.

46. $\sqrt[3]{a} : \sqrt[2]{a}$.

47. $\sqrt[3]{a} : \sqrt[2]{a}$.

48. $\sqrt[2]{\frac{a^2}{b^2}}$.

49. $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$.

50. $\sqrt[3]{\frac{a^{-3}b^6c^{-9}}{x^{-6}y^3}}$.

Lomení mocnitelé. (§§. 175. a 176.)

51. Pište v podobě veličin kořenových a vypočítejte:

a) $25^{\frac{1}{2}}$, b) $16^{\frac{1}{4}}$, c) $8^{\frac{3}{4}}$, d) $32^{\frac{3}{4}}$;

e) $49^{0.5}$, f) $81^{0.25}$, g) $64^{1.5}$, h) $16^{1.75}$;

i) $9^{-\frac{1}{2}}$, k) $125^{-\frac{1}{3}}$, l) $(\frac{1}{16})^{-\frac{3}{4}}$, m) $(\frac{27}{64})^{-\frac{2}{3}}$.

52. Odstraňte lomené odmocnitelé a vypočítejte:

a) $\sqrt[3]{3}$, b) $\sqrt[3]{8}$, c) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$, d) $\sqrt[0.4]{9}$;

e) $\sqrt[3]{49}$, f) $\sqrt[2]{36}$, g) $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$, h) $\sqrt[0.2]{2}$.

Vypočítejte a pište výsledky v podobě veličin kořenových (a mocnin) s kladnými odmocniteli (a mocniteli) celistvými:

53. $(x^n)^{\frac{1}{n}}$.

54. $(x^{\frac{m}{n}})^n$.

55. $(x^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}$.

56. $(a^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{3}}$.

57. $(a^{-\frac{3}{4}})^{-\frac{4}{3}}$.

58. $(a^{\frac{m+p}{n}})^{\frac{n}{m-p}}$.

59. $\sqrt[m]{x^{-\frac{2m}{n}}}$.

60. $\sqrt[3]{a^{\frac{3}{4}}}$.

61. $\sqrt[3]{(x^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}}$.

62. $(4.25)^{\frac{1}{4}}$.

63. $(xy^{-2}z^3)^{\frac{3}{4}}$.

64. $(a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{5}{6}})^6$.

65. $(\frac{a^2}{b^2})^{\frac{1}{2}}$.

66. $(\frac{x^{-\frac{3}{4}}}{y^{\frac{1}{3}}})^{\frac{4}{3}}$.

67. $(\frac{81n^5p^4}{16m^3q^6})^{-\frac{3}{4}}$.

68. $a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{4}}$.

69. $x^{-\frac{2}{3}} \cdot (32y)^{-\frac{2}{3}}$.

70. $(\frac{4}{5})^{\frac{1}{2}} \cdot (3\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} \cdot (\frac{3}{2})^{\frac{1}{2}}$.

71. $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{4}}$.

72. $5^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{5}{4}}$.

73. $x^{0.1} \cdot x^{0.02} \cdot x^{0.005}$.

74. $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{n}{m}}$.

75. $a^{\frac{5}{6}} : a^{-\frac{3}{4}}$.

76. $x^{\frac{m}{n}} \cdot x^{\frac{1}{n}} : x^{\frac{m-1}{n}}$.

77. $\frac{3^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{-\frac{1}{3}}}{5^{\frac{3}{4}} \cdot 7^{\frac{3}{4}}} \cdot \frac{3^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{-\frac{4}{3}}}{4^2 \cdot 7^{\frac{1}{4}}}$.

78. $\frac{a^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{1}{4}}}{b^{-\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{1}{4}}} : \frac{a^{-\frac{1}{4}} \cdot y^{\frac{3}{4}}}{b^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{5}{6}}}$.

79. $(x^{\frac{3}{4}} + y^{\frac{3}{4}})(x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{5}{4}})$.

80. $(2a - 3b^{\frac{5}{6}})(5a^{\frac{3}{4}} + 6b^{\frac{1}{4}})$.

81. $(a + a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{5}{6}})(1 + a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}} + a^{\frac{1}{2}})$.

82. $(6x^{\frac{7}{6}} - 8x^{\frac{5}{6}} + 3x^{\frac{1}{6}} - 4x^{\frac{2}{3}}) : (3x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}})$.

83. $(24a^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2}a^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}) : (6a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{2})$.

84. $(2a^{\frac{1}{2}} + 3b^{-\frac{3}{2}})^2$.

85. $(x^{-\frac{1}{2}} - y^{\frac{2}{3}})^3$.

4. Čísla neracionálná a pomyslná.

Čísla neracionálná. (§§. 180.—182.)

Vypočítejte v ohledu na §§. 168.—170 :

1. $\sqrt{4.5}$.
2. $\sqrt{1200}$.
3. $7\sqrt{75}$.
4. $\sqrt[3]{48}$.
5. $2\sqrt[3]{81}$.
6. $\sqrt[4]{80}$.
7. $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$.
8. $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{200}$.
9. $6\sqrt{6} \cdot 5\sqrt[6]{2}$.
10. $\sqrt{75} : \sqrt{3}$.
11. $\sqrt[3]{108} : \sqrt[3]{4}$.
12. $3\sqrt{8} : 2\sqrt{2}$.
13. $\sqrt{2} + \sqrt{8} + 3\sqrt{50}$.
14. $4\sqrt{50} + 2\sqrt{72} - \sqrt{128}$.
15. $6\sqrt{125} - 3\sqrt{80} + 2\sqrt{20}$.
16. $4\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{192}$.
17. $6\sqrt{12} - 4\sqrt{27} + 7\sqrt{48} - 5\sqrt{75} + 2\sqrt{108}$.
18. $(2\sqrt{8} - 7\sqrt{18} - \sqrt{50} + 4\sqrt{72}) \cdot \sqrt{2}$.
19. $(8 - 3\sqrt{5})(7 + 2\sqrt{5})$.
20. $(4 + 3\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})$.
21. $\sqrt{3} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{5}}$.
22. $(3\sqrt{7} + 4\sqrt[4]{3})(2\sqrt{7} - 3\sqrt[4]{3})$.
23. $(3\sqrt{8} - 5\sqrt{20}) : \sqrt{2}$.
24. $(2\sqrt[3]{108} - 3\sqrt{2}) : \sqrt[3]{4}$.
25. $(5 - 2\sqrt{5})^2$.
26. $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2$.
27. $(\sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{15})^2$.
28. $(1 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3})^2$.

Odstraňte neracionálné jmenovatele následujících zlomků :

29. $\frac{2}{\sqrt{2}}$.
30. $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}$.
31. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2}}$.
32. $\frac{m}{\sqrt{x}\sqrt{x}}$.
33. $\frac{a-x}{\sqrt[3]{a+x}}$.
34. $\frac{3a^2}{5\sqrt{2a}}$.
35. $\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{3x}}$.
36. $\frac{3x\sqrt[4]{5a}}{2\sqrt[3]{2a}}$.
37. $\frac{a\sqrt[3]{3}}{2b\sqrt{5}}$.
38. $\frac{\sqrt{2x+3y}}{\sqrt{2x-3y}}$.
39. $a\sqrt{\frac{b^2}{a\sqrt{ab}}}$.
40. $\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1-x^2}}$.
41. $\frac{1}{2+\sqrt{2}}$.
42. $\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$.
43. $\frac{4\sqrt{3}}{1+3\sqrt{3}}$.
44. $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$.
45. $\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}$.
46. $\frac{2a+3\sqrt{b}}{3a-2\sqrt{b}}$.

$$47. \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$49. \frac{m}{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}.$$

$$51. \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{5}}}.$$

$$53. \frac{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}}.$$

$$55. \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3} + \sqrt{5}}.$$

$$57. \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}.$$

$$60. \frac{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 - y^4}}}{\sqrt{x^2 - \sqrt{x^4 - y^4}}}.$$

$$62. \frac{4\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{6}}.$$

$$64. \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - \sqrt{1+y} + \sqrt{1-y}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+y} + \sqrt{1-y}}.$$

$$65. \frac{a}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}}.$$

$$66. \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}.$$

$$67. \frac{5}{\sqrt[8]{5} + \sqrt[8]{3}}.$$

$$68. \frac{2}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}.$$

$$69. \frac{\sqrt[3]{10}}{2 + \sqrt[3]{7}}.$$

$$70. \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}.$$

$$71. \frac{\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{9}}{4\sqrt[3]{9} - 3\sqrt[3]{3}}.$$

$$72. \frac{5\sqrt[3]{6} - 2\sqrt[3]{12}}{4\sqrt[3]{12} + 2\sqrt[3]{6}}.$$

$$73. \frac{2 + 7\sqrt{5}}{\sqrt{3} - \sqrt{6}}.$$

$$48. \frac{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a + b - \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$50. \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}}.$$

$$52. \frac{2\sqrt{5} + \sqrt{3}}{3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}}.$$

$$54. \frac{a\sqrt{1-a^2} + b\sqrt{1-b^2}}{a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}}.$$

$$56. \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}.$$

$$58. \frac{2}{\sqrt{13} - 2\sqrt{3}}.$$

$$59. \sqrt{\frac{3 + \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}}}.$$

$$61. \frac{\sqrt{2x} + 3\sqrt{xy}}{\sqrt{2x} - 3\sqrt{xy}}.$$

$$63. \frac{2\sqrt{5} - 4\sqrt{10}}{3\sqrt{2} + 4\sqrt{5} - 2\sqrt{10}}.$$

Přiveďte každý následující součet aneb rozdíl veličin kořenových pod jediné kořenitko:

$$74. \sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

$$76. \sqrt{12 + \sqrt{23}} - \sqrt{12 - \sqrt{23}}.$$

$$78. \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} \pm \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}.$$

$$80. \sqrt{7 + 2\sqrt{10}} \pm \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}.$$

$$75. \sqrt{10 + 4\sqrt{6}} - \sqrt{10 - 4\sqrt{6}}.$$

$$77. \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}.$$

$$79. \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} \pm \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}.$$

$$81. \sqrt{14 + 6\sqrt{5}} \pm \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}.$$

$$82. \sqrt{1+2a\sqrt{1-a^2}} \pm \sqrt{1-2a\sqrt{1-a^2}}.$$

$$83. \sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}} \pm \sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Každou následující veličinu kořenovou rozvedte na součet aneb rozdíl dvou kořenových veličin druhého stupně:

$$84. \sqrt{6+\sqrt{11}}.$$

$$85. \sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

$$86. \sqrt{7-4\sqrt{3}}.$$

$$87. \sqrt{8+3\sqrt{7}}.$$

$$88. \sqrt{11+2\sqrt{10}}.$$

$$89. \sqrt{11+2\sqrt{30}}.$$

$$90. \sqrt{18+8\sqrt{2}}.$$

$$91. \sqrt{37+20\sqrt{3}}.$$

$$92. \sqrt{99+54\sqrt{2}}.$$

$$93. \sqrt{7\sqrt{2}+4\sqrt{6}}.$$

$$94. \sqrt{3\sqrt{3}+2}.$$

$$95. \sqrt{5\sqrt{2}+1}.$$

$$96. \sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}.$$

$$97. \sqrt{3\sqrt{7}+2\sqrt{14}}.$$

$$98. \sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}.$$

$$99. \sqrt{x^2+yz+2x\sqrt{yz}}.$$

$$100. \sqrt{x^2-2y\sqrt{x^2-y^2}}.$$

$$101. \sqrt{2x^2+y^2+2x\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$102. \sqrt{a+b+ab+2\sqrt{ab(a+b)}}.$$

$$103. \sqrt{10a^4+a^2b^2+6a^3\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Čísla pomyslná a soujemná. (§§. 185.—192.)

104. Vyjádřete následující pomyslná čísla v podobě $b\sqrt{-1} = bi$:

$$a) \sqrt{-16},$$

$$b) \sqrt{-49},$$

$$c) \sqrt{-64},$$

$$d) \sqrt{-100},$$

$$e) \sqrt{-a^2},$$

$$f) \sqrt{-x^4},$$

$$g) \sqrt{-b^{2n}},$$

$$h) \sqrt{-y^{2m+2}},$$

$$i) \sqrt{-2},$$

$$k) \sqrt{-8},$$

$$l) \sqrt{-45},$$

$$m) \sqrt{-72},$$

$$n) \sqrt{-a},$$

$$o) \sqrt{-a^2b},$$

$$p) \sqrt{-x^5},$$

$$q) \sqrt{-x^{2n+1}y}.$$

$$105. i+3i.$$

$$106. ai-(a-b)i.$$

$$107. 5\sqrt{-2}+3\sqrt{-2}.$$

$$108. \sqrt{-12}+\sqrt{-75}.$$

$$109. \sqrt{-4}+\sqrt{-9}-\sqrt{-16}.$$

$$110. \sqrt{-4}-2\sqrt{-36}+\sqrt{-100}.$$

$$111. 2a\sqrt{-x^2}-b\sqrt{-4x^2}.$$

$$112. +i.+i.$$

$$113. +i.(-i).$$

$$114. (-i)(-i).$$

$$115. 5i.3.$$

$$116. \sqrt{-x^2}.\sqrt{-y^2}.$$

$$117. \sqrt{-2}.-\sqrt{-3}.$$

$$118. a\sqrt{-a}.(-b\sqrt{-b}).$$

$$119. \sqrt{-xy}.\sqrt{-xy^2}.\sqrt{-x^2y^3}.$$

$$120. \sqrt{-ab}.\sqrt{-a^3b}.\sqrt{-ab^3}.\sqrt{-a^3b^5}.$$

$$121. (\sqrt{-a}+\sqrt{-b})(\sqrt{-a}-\sqrt{-b}).$$

$$122. (\sqrt{-2}+\sqrt{-3}-\sqrt{-4})(\sqrt{-2}-\sqrt{-3}+\sqrt{-4}).$$

$$123. \sqrt{-ab}:\sqrt{b}.$$

$$124. \sqrt{-ab}:\sqrt{-b}.$$

125. $x : \sqrt{-x}$. 126. $\sqrt{60} : 2\sqrt{-5}$.
 127. $5\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-3}$. 128. $\sqrt{-xy^3} : \sqrt{-x^3y}$.
 129. $(\sqrt{-ab} + \sqrt{-ac}) : \sqrt{-a}$. 130. $(\sqrt{-20} - \sqrt{-15}) : \sqrt{-5}$.
 131. $(4\sqrt{-8} - 8\sqrt{-12} + 12\sqrt{-16}) : 4\sqrt{-4}$.
 132. i^7 . 133. i^9 . 134. i^{12} . 135. i^{2n+1} .
 136. $(\sqrt{-3})^3$. 137. $(-2\sqrt{-3})^4$. 138. $(a\sqrt{-bx})^6$.
-

139. $(3 + 2i) + (6 + 5i)$. 140. $(4a + bi) \pm (2a - 3bi)$.
 141. $(1 - \sqrt{-4}) + (3 - \sqrt{-25}) - (2 - \sqrt{-49})$.
 142. $(3 + 2i)(3 - 2i)$. 143. $(5 + 6i)(3 - 4i)$.
 144. $(\sqrt{a} + \sqrt{-b})(\sqrt{a} - \sqrt{-b})$.
 145. $(2\sqrt{2} + 2\sqrt{-2})(3\sqrt{2} - 2\sqrt{-2})$.
 146. $(x + 1 + \sqrt{-3})(x + 1 - \sqrt{-3})$.
 147. $(x + 1)(x - 1)(x + i)(x - i)$.
 148. $(a + bi)(a - bi)(c + di)(c - di)$.

Násobíme-li zde nejprv činitele prvního a druhého, pak třetího a čtvrtého, na to oba součiny, a taktéž činitele prvního a třetího, druhého a čtvrtého, posléz oba tyto součiny: oba konečné součiny dají pozoruhodnou rovnici

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

149. $(2 - 3i)^2$. 150. $(\sqrt{x} - yi)^2$.
 151. $(3 - \sqrt{-5})^2$. 152. $(\sqrt{2} - \sqrt{-2})^2$.
 153. $\frac{a + \sqrt{-b}}{a - \sqrt{-b}} + \frac{a - \sqrt{-b}}{a + \sqrt{-b}}$. 154. $\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)^3$.
 155. $(-1 + \sqrt{5} + \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}})^2 \cdot (-1 + \sqrt{5} - \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}})^2$.
 156. $(1 + \sqrt{-3})^4 + (1 - \sqrt{-3})^4$.
-

Odstraňte pomyslné a soujemné jmenovatele následujících zlomků:

157. $\frac{5}{2i}$. 158. $\frac{\sqrt{a}}{bi}$. 159. $\frac{2x^2}{3\sqrt{-2x}}$.
 160. $\frac{1}{1 - i}$. 161. $\frac{2}{3 + 4i}$. 162. $\frac{a - b}{a + bi}$.
 163. $\frac{a + \sqrt{-b}}{a - \sqrt{-b}}$. 164. $\frac{1 - 20\sqrt{-5}}{7 - 2\sqrt{-5}}$. 165. $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{-3}}{\sqrt{3} - \sqrt{-2}}$.

$$166. \frac{\sqrt{-a} - \sqrt{-b}}{\sqrt{-a} + \sqrt{-b}}.$$

$$167. \frac{6\sqrt{-6} + 5\sqrt{-5}}{6\sqrt{-5} - 5\sqrt{-6}}.$$

$$168. \frac{a + bi}{a - bi} + \frac{x + yi}{x - yi}.$$

$$169. \frac{a - bi}{a + bi} - \frac{x + yi}{x - yi}.$$

Přiveďte každý následující součet aneb rozdíl veličin kořenových pod jediné kořenitko:

$$170. \sqrt{-3 + 4i} + \sqrt{-3 - 4i}. \quad 171. \sqrt{-3 + 4i} - \sqrt{-3 - 4i}.$$

$$172. \sqrt{2 + \sqrt{-5}} \pm \sqrt{2 - \sqrt{-5}}.$$

$$173. \sqrt{2 + 2\sqrt{-35}} \pm \sqrt{2 - 2\sqrt{-35}}.$$

Každou následující veličinu kořenovou rozveďte na součet aneb rozdíl dvou kořenových veličin druhého stupně:

$$174. \sqrt{-3 + 4i}.$$

$$175. \sqrt{-3 - 4i}.$$

$$176. \sqrt{8 - 6i}.$$

$$177. \sqrt{1 + \frac{3}{4}i}.$$

$$178. \sqrt{7 + 6\sqrt{-2}}.$$

$$179. \sqrt{6 + 8\sqrt{-10}}.$$

$$180. \sqrt{12 - 10\sqrt{-13}}.$$

$$181. \sqrt{20 - 10\sqrt{-5}}.$$

$$182. \sqrt{4 - 60\sqrt{-3}}.$$

$$183. \sqrt{-a + 2a\sqrt{-2}}.$$

$$184. \sqrt{2\sqrt{-3}} = \sqrt{0 + 2i\sqrt{3}} =$$

5. Druhá a třetí mocnina, dobývání kořene druhého a třetího stupně.

Druhá mocnina. (§§. 193. a 194.)

$$1. (3x + 2y)^2. \quad 2. (2a^2 - 4b^2)^2. \quad 3. (2 \cdot 3a - 1 \cdot 5b)^2.$$

$$4. \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)^2. \quad 5. \left(a - \frac{1}{a}\right)^2. \quad 6. \left(\frac{3a^2}{4x} - \frac{2b^2}{9y}\right)^2.$$

$$7. (a + 2b - 3c)^2. \quad 8. (4 + 2y - y^2)^2. \quad 9. (3x - 5y + 8z)^2.$$

$$10. (6x^3 - 5x^2 + 4x - 3)^2. \quad 11. (27x^6 - 54x^4 + 36x^2 - 8)^2.$$

$$12. \left(2 - \frac{a}{2} + \frac{2a^2}{3}\right)^2. \quad 13. \left(\frac{2a}{3b} + \frac{3b}{4c} - \frac{4c}{5d}\right)^2. \quad 14. \left(\frac{3y^2}{4b^2} + \frac{2y}{3b} - \frac{1}{2}\right)^2.$$

$$15. (-a + b + c)^2 + (a - b + c)^2 + (a + b - c)^2.$$

$$16. [(a + x)^2 + (b - y)^2]^2 - [(a + x)^2 - (b - y)^2]^2.$$

$$17. 249^2. \quad 18. 5019^2. \quad 19. 72902^2. \quad 20. 73215^2.$$

$$21. 135709^2. \quad 22. 4612048^2. \quad 23. 5 \cdot 91^2. \quad 24. 0 \cdot 887^2.$$

$$25. 0 \cdot 7384 \dots^2. \quad 26. (78^2)^2. \quad 27. 317^4. \quad 28. 1 \cdot 025^8.$$

Dobývání kořene druhého stupně. (§§. 195.—199.)

29. $\sqrt{4a^2 - 12ab + 9b^2}$. 30. $\sqrt{9m^4 - 12m^2n^2 + 4n^4}$.
 31. $\sqrt{\{x^4 - 6ax^3 + 11a^2x^2 - 6a^3x + a^4\}}$.
 32. $\sqrt{\{16m^6 + 16m^5 + 4m^4 - 16m^3 - 8m^2 + 4\}}$.
 33. $\sqrt{\{16a^6 - 24a^5 + 25a^4 - 20a^3 + 10a^2 - 4a + 1\}}$.
 34. $\sqrt{\{9y^6 - 12y^5 + 10y^4 - 28y^3 + 17y^2 - 8y + 16\}}$.
 35. $\sqrt{\{25 - 70a + 139a^2 - 236a^3 + 235a^4 - 198a^5 + 121a^6\}}$.
 36. $\sqrt{4a^2 - 16a\sqrt{-b} - 16b}$. 37. $\sqrt{1 - 4x}$.
 38. $\sqrt{\{0\cdot16a^4 - 2\cdot4a^3 - 0\cdot16a^2b + 9a^2 + 1\cdot2ab + 0\cdot04b^2\}}$.
 39. $\sqrt{\left[\frac{x^4}{9} - \frac{x^3}{3} + \frac{11x^2}{12} - x + 1\right]}$.
 40. $\sqrt{\left[\frac{9x^6}{16y^6} - \frac{x^5}{2y^5} - \frac{26x^4}{9y^4} + \frac{53x^3}{6y^3} + \frac{2x^2}{3y^2} - \frac{20x}{y} + 25\right]}$.

- | | | |
|---------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|
| 41. $\sqrt{135424}$. | 42. $\sqrt{556516}$. | 43. $\sqrt{226576}$. |
| 44. $\sqrt{1920996}$. | 45. $\sqrt{26956864}$. | 46. $\sqrt{53993104}$. |
| 47. $\sqrt{395850816}$. | 48. $\sqrt{422220304}$. | 49. $\sqrt{54782211136}$. |
| 50. $\sqrt{1406\cdot25}$. | 51. $\sqrt{27\cdot973521}$. | 52. $\sqrt{0\cdot00178929}$. |
| 53. $\sqrt{785\cdot6809}$. | 54. $\sqrt{0\cdot97535376}$. | 55. $\sqrt{44105\cdot040144}$. |
| 56. $\sqrt{\frac{676}{1681}}$. | 57. $\sqrt{\frac{178929}{797449}}$. | 58. $\sqrt{485380\frac{29}{169}}$. |
| 59. $\sqrt{\sqrt{29986576}}$. | 60. $\sqrt[4]{362673936}$. | 61. $\sqrt[8]{1475789056}$. |
| 62. $\sqrt{0\cdot1907\dots}$. | 63. $\sqrt{335\cdot779\dots}$. | 64. $\sqrt{0\cdot8423\dots}$. |

Dobývejte kořene na 5 míst desetinných:

- | | | | |
|--|-------------------------------|--|----------------------------|
| 65. $\sqrt{28}$. | 66. $\sqrt{320}$. | 67. $\sqrt{6584}$. | 68. $\sqrt{552747}$. |
| 69. $\sqrt{3\cdot92}$. | 70. $\sqrt{0\cdot101}$. | 71. $\sqrt{8\cdot376}$. | 72. $\sqrt{0\cdot07854}$. |
| 73. $\sqrt{0\cdot123457}$. | 74. $\sqrt{55\cdot25734}$. | 75. $\sqrt{19\cdot383838}$. | |
| 76. $\sqrt{\frac{57}{3}} = \sqrt{\frac{171}{9}}$. | 77. $\sqrt{\frac{591}{67}}$. | 78. $\sqrt{251\frac{7}{12}}$. | |
| 79. $\sqrt{2}$. | 80. $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$. | 81. $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$. | |

Dobývejte kořene řetězovými zlomky (na 5 míst des.):

- | | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| 82. $\sqrt{11}$. | 83. $\sqrt{23}$. | 84. $\sqrt{47}$. | 85. $\sqrt{129}$. |
|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|

Třetí mocnina. (§§. 200. a 201.)

86. $(2x \cdot 3y)^3$. 87. $(5a^2 - 4bx^3)^3$. 88. $(0.8x^2 + 0.5y^2)^3$.
 89. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3$. 90. $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^3$. 91. $\left(\frac{3a^2}{8x^2} - \frac{2x}{9a}\right)^3$.
 92. $(y^2 + 2y - 3)^3$. 93. $(x^2 - 3xy + 2y^2)^3$.
 94. $(1 - 2x - 3x^2 + 4x^3)^3$. 95. $(1 - 2a^2 + 4a^4 - 8a^6)^3$.
 96. $\left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} - 1\right)^3$. 97. $\left(4a - \frac{2x^2}{3a} + \frac{9x^4}{8a^3}\right)^3$.
 98. 933^3 . 99. 1585^3 . 100. 6045^3 . 101. 21704^3 .
 102. 90216^3 . 103. 357946^3 . 104. 45.09^3 . 105. 5.99203^3 .
 106. $0.858...^3$. 107. $(29^3)^3$. 108. $(0.865)^6$. 109. $(1.05)^{12}$.

Dobývání kořene třetího stupně. (§§. 202.—205.)

110. $\sqrt[3]{a^3x^6 - 3a^2bx^4y^2 + 3ab^2x^2y^4 - b^3y^6}$.
 111. $\sqrt[3]{8x^6 - 36x^5 + 78x^4 - 98x^3 + 78x^2 - 36x + 8}$.
 112. $\sqrt[3]{64x^6 - 144ax^5 + 204a^2x^4 - 171a^3x^3 + 102a^4x^2 - 36a^5x + 8a^6}$.
 113. $\sqrt[3]{8a - 60\sqrt{a^2b} + 150\sqrt{ab^2} - 125b}$.
 114. $\sqrt[3]{a^3 + x^3}$. 115. $\sqrt[3]{x^3 - a}$.
 116. $\sqrt[3]{\frac{a^3}{8b^3} - \frac{a^2c}{b^2d} + \frac{8ac^2}{3bd^2} - \frac{64c^3}{27d^3}}$.
 117. $\sqrt[3]{1 + \frac{6x}{a} + \frac{15x^2}{2a^2} - \frac{10x^3}{a^3} - \frac{45x^4}{4a^4} + \frac{27x^5}{2a^5} - \frac{27x^6}{8a^6}}$.
 118. $\sqrt[3]{262144}$. 119. $\sqrt[3]{1259705}$. 120. $\sqrt[3]{8615125}$.
 121. $\sqrt[3]{746142643}$. 122. $\sqrt[3]{1767172329}$. 123. $\sqrt[3]{627881709547}$.
 124. $\sqrt[3]{0.778688}$. 125. $\sqrt[3]{474.552}$. 126. $\sqrt[3]{78.402752}$.
 127. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{20661046784}}$. 128. $\sqrt[6]{1126162419264}$.
 129. $\sqrt[3]{\frac{704969}{1601613}}$. 130. $\sqrt[3]{32.856...}$. 131. $\sqrt[3]{0.00008427...}$.

Dobývejte kořene třetího stupně na 5 míst desetinných:

132. $\sqrt[3]{100}$. 133. $\sqrt[3]{5213}$. 134. $\sqrt[3]{8135}$. 135. $\sqrt[3]{47838}$.
 136. $\sqrt[3]{0.3}$. 137. $\sqrt[3]{25.643}$. 138. $\sqrt[3]{0.0957}$. 139. $\sqrt[3]{0.12345}$.
 140. $\sqrt[3]{\frac{5}{6}} = \sqrt[3]{\frac{180}{216}} =$ 141. $\sqrt[3]{\frac{37}{70}}$. 142. $\sqrt[3]{8\frac{7}{12}}$.

6. Logarithmy.

(§§. 208.–218.)

1. $\log abc$.
2. $\log 6xyz$.
3. $\log 3a(c + d)$.
4. $\log (a+b)(m+n)$.
5. $\log (a^2 - b^2)$.
6. $\log a(x^2 - 1)$.
7. $\log \frac{2ab}{3x}$.
8. $\log \frac{1}{ab}$.
9. $\log \frac{ab - cd}{mn - pq}$.
10. $\log \frac{5mx}{1 - m^2}$.
11. $\log \frac{x^2 - y^2}{2xy}$.
12. $\log \frac{3(a^2 - b^2)x}{(3a + 2b)y}$.
13. $\log a^x$.
14. $\log ab^2$.
15. $\log (ab)^2$.
16. $\log 2a^3$.
17. $\log 5a^2x^3$.
18. $\log (a + b)^{x+y}$.
19. $\log \frac{ax^my^n}{bz^p}$.
20. $\log \frac{2a^3}{3bx^2}$.
21. $\log \frac{8mn^2x^3}{gpqy^5}$.
22. $\log \frac{1}{(2a^2)^3(5b^3)^2}$.
23. $\log \left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 \cdot \left(\frac{m}{n} \right)^3 \right]$.
24. $\log \sqrt{ab}$.
25. $\log \sqrt{xy^3}$.
26. $\log 8a^2\sqrt[4]{bx^3}$.
27. $\log \sqrt[n]{\frac{a^p}{b^q}}$.
28. $\log \frac{2\sqrt{a}}{3\sqrt[3]{b}}$.
29. $\log \frac{x^2\sqrt{a}}{5by^3}$.
30. $\log (\sqrt[m]{x^n} \sqrt[p]{y^q})$.
31. $\log \sqrt[n]{a^2b^3c^4}$.
32. $\log \sqrt[m]{(\sqrt[n]{a^p})^q}$.
33. $\log \sqrt[x]{a + b} \cdot \sqrt[y]{c}$.
34. $\log \sqrt[x]{a\sqrt{a}}$.
35. $\log x^{\log x}$.
36. $\log \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.
37. $\log \frac{1}{b^2\sqrt[5]{a^3c}}$.
38. $\log \frac{a(a + 1)\sqrt[3]{a^2}}{b(b + 1)\sqrt{b}}$.
39. $\log \sqrt{\frac{\sqrt[3]{28}}{2\sqrt{13}}}$.
40. $\log m \sqrt[4]{\frac{a\sqrt{b}}{c^3}}$.
41. $\log \sqrt{\frac{3^4 \cdot \sqrt[9]{17 \cdot 13}}{7 \cdot 14^2 \cdot \sqrt[9]{69}}}$.

Vyhledejte výraz, jehož logarithmus se rovná:

42. $\log x + \log y - \log z$. 43. $\log a - (\log b + \log c)$.

44. $3 \log a - 2 \log b + 4 \log c.$

45. $\frac{1}{2} \log a + \frac{1}{3} \log b - \frac{1}{4} \log c.$

46. $\log a + \frac{1}{x} \log a - \frac{1}{y} (\log a + \log b).$

47. $\frac{n}{m} \log a - \left(\frac{q}{p} \log b + \frac{s}{r} \log c \right).$

48. $2 \log (x - y) - \frac{1}{2} \log (x + y) - \frac{1}{2} \log (x^2 - xy + y^2).$

49. $x \log (\log a).$ 50. $x \log x - \log (\log x).$

Vyhledejte v logaritmických tabulkách Briggovy logaritmy následujících čísel:

a)	b)	c)	d)	e)
51. 7.	38.	218.	683.	995.
52. 1035.	4719.	5755.	7899.	9011.
53. 39070.	586100.	5913.	9015.	04792.
54. 86127.	78009.	068315.	85201.	00075536.
55. 0091457.	364228.	178193.	448197.	1293567.

Vyhledejte čísla, náležející k následujícím logaritmům

a)	b)	c)	d)
56. 0240549.	1572872.	2985471.	0612784.
57. 3890086.	0660581.	0271609—1.	1028164.
58. 2957431.	1013967.	0463702—3.	2400165.
59. 0730486—2.	2813503.	3910012.	3698810.
60. 0553429—3.	0680119—1.	1856035.	4430655.
61. 4891950.	0051683—2.	0699608—1.	1998288.

Vypočítejte Briggovými logaritmy následující výrazy:

62. $1.2345.13456.$ 63. $9.68453.029758.$
 64. $1.025.10792.105625 - 1.0751.$
 65. $0.35679.10765.192234.033258.$
 66. $2.00415.056.00741.009972.125463.$
 67. $\frac{17.846}{9.157}.$ 68. $\frac{1}{3.14159}.$ 69. $\frac{2483-1926}{521347}.$ 70. $\frac{2.3456.52913}{769.012345}.$
 71. $\frac{413.5124.21358}{425.4998.76143}.$ 72. $\frac{2.1457.91248.1385.31273}{277.107285.22812.125092}.$
 73. $(1.05)^{12}.$ 74. $(1.045)^9.$ 75. $(42.456)^{-2}.$ 76. $2^{1235}.$

77. $\left(-\frac{323}{313}\right)^{17}$. 78. $\left(\frac{54 \cdot 139}{55 \cdot 817}\right)^{11}$. 79. $2 \cdot 45^{5 \cdot 127^{1 \cdot 05}}$.
80. $\frac{2035 \cdot (0 \cdot 00876)^7}{3164 \cdot (0 \cdot 00592)^5}$. 81. $\frac{3 \cdot 14159^2 \cdot 2 \cdot 0489^3 \cdot 1 \cdot 07938^4}{4 \cdot 0932^4 \cdot 0 \cdot 859^2 \cdot 210 \cdot 895^3}$.
82. $\frac{4r^3\pi}{3}$ při $r = 1 \cdot 06234$ a $\pi = 3 \cdot 14159$.
83. $(3 \cdot 905)^{\frac{1}{5}}$. 84. $\left(-\frac{80}{113}\right)^{\frac{2}{3}}$. 85. $(11 \cdot 716)^{-1\frac{1}{2}}$.
86. $\sqrt[3]{29}$. 87. $\sqrt[3]{918}$. 88. $\sqrt[5]{7135}$.
89. $\sqrt[5]{1 \cdot 8354}$. 90. $\sqrt[8]{314 \cdot 2789}$. 91. $\sqrt[4]{130 \cdot 3414}$.
92. $\sqrt[5]{\frac{126}{115}}$. 93. $\sqrt[12]{\left(\frac{395}{129}\right)^7}$. 94. $\sqrt[8]{\frac{9^3}{13} \sqrt[3]{6}}$.
95. $\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}}$ při $a = 2 \cdot 145$, $b = 3 \cdot 087$, $c = 3 \cdot 248$.
96. $\frac{35^4}{57^3} \cdot \sqrt[5]{30 \cdot 9}$. 97. $\frac{\sqrt[3]{37 \cdot 8} \cdot \sqrt[4]{13^2}}{\sqrt[5]{7 \cdot 13945^3}}$. 98. $\sqrt[4]{\frac{87 \cdot \sqrt{8105}}{93 \cdot 24^2}}$.
99. $\frac{8\sqrt[8]{4 \cdot \sqrt{6}}}{11\sqrt[5]{5 \cdot \sqrt{124}}}$. 100. $\sqrt[7]{340} \cdot \sqrt[5]{\frac{24 \cdot 105 \cdot 58 \cdot 937}{1 \cdot 47939^3}}$.
101. $\sqrt{10} + \sqrt{10}$. 102. $\frac{347\sqrt[5]{0 \cdot 35} + \sqrt{55 \cdot 33^2}}{4 \cdot 9275^3}$.
103. $\sqrt{\frac{4 \cdot 31957^3 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot 19338} \cdot \sqrt[5]{17 \cdot 39}}{15^4 \cdot \sqrt[3]{91 \cdot 34} - 9\sqrt[5]{3 \cdot 4071}}}$.

IV. Rovnice.

Pořádání rovnic. (§§. 220. a 221.)

Spořádejte následující rovnice:

1. $3(x - 5) = 4(10 - 2x)$. 2. $(a + b)x = 2a - (a - b)x$.
3. $(9 + x)(7 - x) + (9 - x)(7 + x) = 76$.
4. $(2 - x)(3 - x) = (4 + x)(3 + x)$.
5. $(x + a + b)(x - a + b) + (x + a - b)(x - a - b) = 0$.

6. $\frac{5+x}{2} + \frac{13+7x}{3} = 72.$ 7. $a - b - \frac{ab}{x} = 0.$
 8. $\frac{x+a}{x} + \frac{x}{x+a} = 3.$ 9. $\frac{ax-2a}{ax-2b} = \frac{ax-2b}{ax+2a}.$
 10. $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} + \frac{x-1}{4} = \frac{2x}{5} + \frac{7}{4}.$
 11. $3x = \frac{6x^2 - 3ax + b^2}{2x} + a.$
 12. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{x}{7} + \frac{x}{11} - 9 = x + \frac{23}{66}.$
 13. $\frac{4}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{3x}{x-1}.$ 14. $\frac{a+x}{a-x} + \frac{a-x}{a+x} = \frac{a}{a^2-x^2}.$
 15. $\frac{20}{3x+4} - \frac{3}{5x-3} = 6.$ 16. $\frac{2a+x}{3a+2x} - \frac{3}{2} = \frac{3a-x}{3a+x}.$
 17. $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{x+3}{x-3} + \frac{x+4}{x-4}.$
 18. $\sqrt{4x^2+8x+13} = 4x+1.$ 19. $5\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x+1} = 5\frac{1}{2}.$
 20. $\sqrt{13+x} = \sqrt{x-13}.$
 21. $a\sqrt{x+b} + b\sqrt{x+a} = ab(a+b).$
 22. $a\sqrt{bx+c} + b\sqrt{cx+a} = c\sqrt{ax+b}.$
 23. $\frac{5x}{6y} - \frac{1}{xy} = \frac{x+y}{xy}.$ 24. $\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$
 25. $\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a.$

1. Určité rovnice prvního stupně.

Rovnice prvního stupně o jedné neznámé. (§. 223.)

1. $13 + x = 24.$ 2. $5x + 8 = 43.$
 3. $b = a - x.$ 4. $3x - 2a + b = a - 5b.$
 5. $17 + 8x = 71 - x.$ 6. $14a - 6x + 12 = 20 - 7x - 9a.$
 7. $5 + (2x - 15) = x.$ 8. $8 - (5 - 2x) = 3x + 1.$
 9. $5(x - 2) - 2x = 2(x - 1).$ 10. $a(x - b) = b(a - x) - c.$
 11. $m(x - a) - n(x - b) = (a + b)x.$
 12. $3(2x + 9) - 9(4 + x) = 3(5 + x) - 2(x + 6).$
 13. $\{3(y - 2) - 5\} \cdot 5 - 4(2y - 6) = y - 16.$
 14. $5(x + 10) - 4\{160 - 3(3x - 2) + 2x\} = 2 - x.$
 15. $(z + 1)(z - 1) = z^2 + z + 1.$

$$16. (2+x)(2x+1) + (2-x)(2x-1) = 0.$$

$$17. x(x-2a) - (b-x)^2 = 3b^2 - 4a^2.$$

$$18. (a+x)(b+x)(c+x) - (a-x)(b-x)(c-x) = 2(x^3 + abc).$$

19. Rovnice $2s = n(a_1 + a_n)$ má se řešiti dle všech obecných čísel v ní přicházejících.

$$20. \frac{3-4x}{7} + 3 = 4x.$$

$$21. \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = x + 1.$$

$$22. \frac{x-a}{b} = \frac{x-b}{a}.$$

$$23. \frac{a-bx}{c} = \frac{m-nx}{p}.$$

$$24. \frac{5m}{x} - \frac{2(m-x)}{x} = 3.$$

$$25. \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x^2 + 2x - 1} = x - 3.$$

$$26. \frac{m(a^2 + x^2)}{ax} - \frac{mx}{a} = cm.$$

$$27. \frac{a-b}{b-x} = \frac{a}{x}.$$

$$28. \frac{m}{x+m} - \frac{n}{x+n} = 0.$$

$$29. x - \frac{a-x}{b} + \frac{b-x}{c} = d.$$

$$30. \frac{a-b}{x} + 1 = \frac{a}{b} - \frac{a+x}{x}.$$

$$31. \frac{13}{x-5} + \frac{3}{4} = \frac{65}{2x-10}.$$

$$32. \frac{9x+8}{6x+5} = \frac{3x+2}{2x+1}.$$

$$33. \frac{8x-3}{2x-1} = \frac{3x+4}{x+1} + 1.$$

$$34. \frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}. \quad 35. \frac{a+b}{a-b} \cdot x - 4ab = \frac{b-a}{a+b} \cdot x.$$

$$36. \frac{x}{x+a} - \frac{x}{x-a} = \frac{b}{x+a}. \quad 37. \frac{ax}{mx-a} + \frac{bx}{nx-b} = \frac{a}{m} + \frac{b}{n}.$$

$$38. \left(1 + \frac{m-n}{m+n}\right)x - 1 = \left(1 - \frac{m+n}{m-n}\right)x.$$

$$39. \frac{1}{ac-cx} - \frac{1}{bd-dx} = \frac{1}{ad-dx} - \frac{1}{bc-cx}.$$

$$40. \frac{1}{3}(2x+5) + 3(2x-3) - \frac{3}{4}(5x-7) = 1.$$

$$41. \frac{4}{5}(3x-7) - 22 = \frac{3}{7}\left[\frac{7}{9}(8x-63) - (2x+3)\right].$$

$$42. \frac{1}{4}\left(\frac{8}{9}\left[\frac{7}{6}\left(\frac{3}{2}(x+5) + 3\right) - 3\right] - 12\right) = 1.$$

$$43. \frac{x - \frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} + 4 = \frac{\frac{3}{4}x + 1}{\frac{1}{2}}. \quad 44. \frac{23 \cdot 75x - 25}{6 \cdot 25} = 3 \cdot 6x.$$

$$45. \frac{3 \cdot 07x}{16} + \frac{x - 0 \cdot 08}{5} = \frac{3x}{8} - 0 \cdot 00925.$$

$$46. (x+a):(x-a) = b:c. \quad 47. 4:\frac{2x}{3} = 1:\left(15 - \frac{x}{3}\right).$$

$$48. (8x-1):(4x+2) = (6x-9):(3x-4).$$

$$49. 3\sqrt{x-1} = 4. \quad 50. \sqrt{4x^2 + 12x - 31} = 2x - 7.$$

51. $\frac{\sqrt{6x+7}}{5} = \frac{\sqrt{5x-6}}{5}$. 52. $x(1-a) : \sqrt{x} = \sqrt{x} : x$.
53. $(b - a\sqrt{x}) : (a - b\sqrt{x}) = a(b^2 - 1) : b(a^2 - 1)$.
54. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = p$. 55. $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = \sqrt{4x+5}$.
56. $\frac{a + \sqrt{x}}{b - \sqrt{x}} = \frac{a(1+b)}{b(1-a)}$. 57. $\frac{2\sqrt{x} + \sqrt{3}}{3\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{6 + 2\sqrt{3}}$.
58. $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}} = 2$. 59. $\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x} + \dots = a$.
60. $4 - \sqrt{x} = \sqrt{4+x}$. 61. $a\sqrt{x+b^2} + b\sqrt{x+a^2} = 2ab$.
62. $\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = \frac{a}{\sqrt{a-x}}$.
63. $\sqrt{8x-7} - \frac{2x-2}{\sqrt{2x+3}} = \sqrt{2x+3}$.
64. $x - 2a - \sqrt{x^2 - b^2} = (x-a) \left\{ 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - b^2}} \right\}$.

Určité rovnice prvního stupně o dvou i několika neznámých.
(§§. 224.—227.)

65. $8x - 5y = 25$,
 $3x + 7y = 36$.
67. $16y - 25z = 7$,
 $5z - 24y = 9$.
69. $x + 2y = 30$,
 $\frac{3x}{5} + \frac{y}{2} = 11$.
71. $\frac{x+7}{y} = \frac{4}{5}$,
 $\frac{x}{y+4} = \frac{1}{2}$.
73. $\frac{28}{x} + \frac{6}{y} = 9$,
 $\frac{9}{y} - \frac{4}{x} = 2$.
75. $ax - by = a^2 + b^2$,
 $bx + ay = a^2 + b^2$.
66. $3x + 4y = 4$,
 $12x - 6y = 5$.
68. $x^2 - y^2 = a^2$,
 $x + y = b$.
70. $\frac{3}{4}x - \frac{1}{3}y = 2$,
 $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 4$.
72. $\frac{m}{n+y} = \frac{n}{m+x}$,
 $\frac{n}{m-y} = \frac{m}{n-x}$.
74. $\frac{1.6}{x} - \frac{2.7}{y} = -1$,
 $\frac{0.8}{x} + \frac{3.6}{y} = 5$.
76. $(a+c)x + (a-c)y = 2bc$,
 $(b-c)x + (b+c)y = 2ac$.

$$77. \frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b},$$

$$78. \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 2,$$

$$\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b}.$$

$$\frac{x}{a-b} - \frac{y}{a+b} = \frac{4ab}{a^2-b^2}.$$

$$79. \frac{x-a+2b}{b} + \frac{y}{c} = \frac{b}{c},$$

$$80. \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2b^2},$$

$$\frac{x}{ab} + \frac{y}{bc} = \frac{x+y}{ac}.$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{b^2}.$$

$$81. x - y = (2a + b) + \frac{4ab^2 - 2a(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2},$$

$$ax - by = (a+b)^2 - \frac{a-b}{a+b} + \frac{(a^2 + b^2) - 2ab(a^2 - b^2 + 1)}{a^2 - b^2}.$$

$$82. 5(3x - 2y) = 10 - 3x,$$

$$83. \frac{3x-2y}{5} + \frac{5x-3y}{3} = x + 1,$$

$$\frac{1+2y}{3} - \frac{1-2y}{3} = \frac{7x}{3} - 1.$$

$$\frac{2x-3y}{3} + \frac{4x-3y}{2} = y + 1.$$

$$84. \frac{x + 42\frac{1}{3}}{2} = y - 42\frac{1}{3},$$

$$85. 41x - 32.75y = 10.42,$$

$$x - 23\frac{1}{2} = \frac{y + 23\frac{1}{2}}{3}.$$

$$5.2x - 36y + 2.5 = 0.$$

$$86. (4x + y) : (2x - y) = 16 : 5,$$

$$(2x + 7y) : (x + 8) = 14 : 5.$$

$$87. (3x + 2y - 4) : (2x + 3y - 1) = 3 : 2,$$

$$(x - 2y - 3) : (2x - 3y - 6) = 2 : 3.$$

$$88. x\sqrt{a} + y\sqrt{b} = a + b,$$

$$89. 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 9,$$

$$x + y = 2\sqrt{a}.$$

$$2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 1.$$

Položte v poslední úloze $\sqrt{x} = u$, $\sqrt{y} = v$.

$$90. \sqrt{x} + am = m(\sqrt{y} + b),$$

$$91. 2\sqrt{x+5} - 3\sqrt{y-2} = 3,$$

$$m(\sqrt{x} - a) = \sqrt{y} - bm.$$

$$3\sqrt{x+5} - 4\sqrt{y-2} = 5.$$

$$92. \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{y}} = 6,$$

$$93. \frac{5}{\sqrt{x-2}} + \frac{4}{\sqrt{y+2}} = 2,$$

$$\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{y}} = 1,$$

$$\frac{15}{\sqrt{x-2}} - \frac{8}{\sqrt{y+2}} = 1.$$

$$94. x + 3y = 30,$$

$$95. 3x - 4y = 6,$$

$$3x + 2z = 25,$$

$$2x + 3z = 26,$$

$$4x - 3z = 12.$$

$$5y - 6z = 18.$$

$$\begin{aligned} 96. \quad & 3x + y + 2z = 13, \\ & x + 2y + 3z = 17, \\ & 2x + 3y + z = 12. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 98. \quad & a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ & a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ & a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 99. \quad & x + y + z = s, \\ & x : y = a : b, \\ & y : z = b : c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 101. \quad & \frac{x}{5} + \frac{3y}{4} + \frac{7z}{15} = 18, \\ & \frac{2x}{5} + \frac{5y}{12} + \frac{2z}{3} = 19, \\ & \frac{x}{10} + \frac{5y}{6} + \frac{4z}{5} = 23. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 103. \quad & y + \frac{1}{2}x = 112, \\ & \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}z = 36, \\ & \frac{2y - z}{z - y} = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 105. \quad & 3x - y - z = 10, \\ & \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 13, \\ & \frac{x}{2} + \frac{y}{8} + \frac{z}{5} = 10. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 107. \quad & \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a, \\ & \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = b, \\ & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 109. \quad & x + z = 18, \\ & z - y = 2, \\ & u + y = 12, \\ & u + 2x = 26. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 97. \quad & 6x - 4y + 3z = 28, \\ & 4x - y - 3z = 7, \\ & 2x - 3y + 4z = 13. \end{aligned}$$

Udejte, podle kterého pravidla utvořeny jsou vyhledané výrazy neznámých veličin x , y a z .

$$\begin{aligned} 100. \quad & 0.4x + 0.5y + 0.7z = 51, \\ & 0.3x + 0.4y + 0.5z = 38, \\ & 0.2x + 0.3y + 0.4z = 29. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 102. \quad & x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 612, \\ & \frac{x}{3} + y + \frac{z}{3} = 612, \\ & \frac{x}{4} + \frac{y}{4} + z = 612. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 104. \quad & \frac{x+1}{y+1} = 2, \\ & \frac{y+2}{z+1} = 4, \\ & \frac{z+3}{x+1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 106. \quad & \frac{2}{x} - \frac{3}{y} + \frac{5}{z} = 11, \\ & -\frac{3}{x} + \frac{2}{y} + \frac{8}{z} = 25, \\ & \frac{7}{x} + \frac{4}{y} - \frac{6}{z} = -19. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 108. \quad & -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a, \\ & \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = b, \\ & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 110. \quad & 3u - 2x + y - 5z = 17, \\ & 4u + x - 3y + 2z = -7, \\ & 6u - 5x + 2y - z = 17, \\ & u - x + y - z = 6. \end{aligned}$$

111. $3u - x + y + 2z = 20,$ 112. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{4}z = 6,$
 $2u + 3x - y + z = 17,$ $\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}y + \frac{1}{6}u = 5,$
 $u + 2x + 3y - z = 21,$ $\frac{1}{6}x + \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}u = 4,$
 $-u + x + 2y + 3z = 12.$ $\frac{1}{3}y + \frac{1}{5}z - \frac{1}{4}u = 3.$
113. $2x - 3y + 4z - 5u + 6w = 6,$
 $3x + y - 5z + u - 3w = 3,$
 $-x + 4y + 2z - 5u + w = 8,$
 $x - y + z - u + w = 3,$
 $x + y + z + u + w = 15.$

Použití určitých rovnic prvního stupně. (§§. 228. a 229.)

114. Součet troj- a čtverásobného čísla jakéhosi jest 196; které jest to číslo?
115. Kterého čísla sedmina jest o 8 menší nežli jeho třetina?
116. Jestliže jakési číslo násobíme 15ti, k součinu připočteme 20, součet dělíme čtyřmi a od podílu odečteme 14, obdržíme trojnásobné ono číslo; které jest to číslo?
117. Vyhledejte spojitou měrickou srovnalost, jejížto tři členy jsou o totéž číslo větší nežli 1, 3 a 6.
118. Rozdělte číslo a na dvě části tak, aby n ásobná první část byla o d větší nežli n ásobná část druhá.
119. Rozdělíme-li číslo 60 na dvě části, a dělíme-li větší část menší, podíl bude 2 a zbytek 3; které jsou ty části?
120. Rozdělte číslo a na 2 části, jichž podíl rovná se číslu danému.
121. Které číslo musíme odečísti od čitatele a jmenovatele zlomku $\frac{a}{b}$ (aneb $\frac{7}{13}$), aby se rovnal $\frac{c}{d}$ (aneb $\frac{1}{3}$)?
122. Které číslo musíme odečísti od čitatele a připočísti ku jmenovateli zlomku $\frac{a}{b}$, abychom obdrželi převrtnou hodnotu tohoto zlomku?
123. Připočteme-li 7 k čítateli a jmenovateli jakéhosi zlomku, obdržíme $\frac{4}{5}$; odečteme-li však 2 od čitatele i jmenovatele téhož zlomku, obdržíme $\frac{1}{2}$. Který jest čítatel a který jmenovatel onoho zlomku?
124. Dvě čísla dvouciferná, psaná týmiž číslicemi, mají se k sobě jako 13 : 31; je-li jich součet roven 88, která jsou ta čísla?

125. Zvětším-li jakési dvouciferné číslo o 9násobné jeho jednotky, obdržím 80; zvětším-li je však o 18, budou jeho číslice v součtu následovati po sobě v obráceném pořádku. Které jest to číslo dvouciferné?
126. Za 10 roků bude někomu dvakráté tolik let, kolik mu bylo před 4 roky; jak jest nyní stár?
127. Otcí jest nyní 48, jeho synovi 21 roků; před koliku lety byl otec 10kráté starší syna svého?
128. Otcí jest 36, jeho synovi 10 let; jak dlouho musí otec být ještě živ, aby mu pak bylo dvakráté tolik let, kolik bude jeho synovi?
129. Osobě A jest nyní m kráté a za a roků jí bude n kráté tolik let, kolik osobě B; jak jest osoba A stará?
V jakém vztahu musejí býti čísla m , n a a , aby řešení mělo smysl?
(Přirovnajte §. 229., příklad 2.)
130. Otcí jest nyní třikráté tolik let, kolik synovi; před 12ti roky bylo mu však 9kráté tolik let, kolik synovi. Jak je stár otec a jak syn?
131. Syn praví: „Moje matka jest o 25 roků starší nežli já; můj otec jest o 5 roků starší nežli matka, a nám všem dohromady jest 91 roků.“ Kolik let jest synovi, matce a otcí?
132. Při rozdělení jisté pozůstalosti obdržel A 1000 zl. a $\frac{1}{3}$ zbytku, B $\frac{1}{2}$ nového zbytku a mimo to 500 zl., C konečně zbývajících ještě 2500 zl. Jak velká byla pozůstalost, mnoholi obdržel A a mnoholi B?
133. Při rozdělení jisté pozůstalosti obdržel A o a zl. více nežli $\frac{1}{m}$ té sumy, B o b zl. více nežli $\frac{1}{n}$ zbytku, C však nový zbytek, jenž jest o c zl. menší nežli $\frac{1}{p}$ celé pozůstalosti. Mnoholi obdržel každý dědic?
134. Jistá suma se má rozdělití třem osobám tak, aby osoba B dostala o 20 zl. méně nežli A, a C o 20 zl. méně nežli B; celá suma jest o 25 zl. větší nežli 4násobný podíl osoby C. Mnoholi dostane každá osoba?
135. Otec odkáže v závěti své ženě a třem dětem veškeré jmění takto: žena obdrží třetinu pozůstalosti, první dítě třetinu zbytku a 600 marků, druhé dítě třetinu nového zbytku a

- 2200 marků, a třetí dítě zbytek 4600 marků. Mnoholi jmění zůstavil otec, a mnoholi dostala matka a každé dítě?
136. Otec přislíbí synu svému za každou správnou úlohu odměnu 10 krejcarů; za každou chybnou úlohu však musí syn splatiti otci 5 kr. Při 20ti úlohách zbylo synovi ze všech odměn 80 kr.; mnoholi úloh správných a mnoholi chybných vypracoval?
137. Statkář najal zahradníka na měsíc (30 dní) s tou podmínkou, že mu bude dávatí stravu a $\frac{4}{5}$ zl. mzdy za každý den pracovní, kterého dne by však zahradník nepracoval, že musí statkáři platiti $\frac{1}{5}$ zl. za stravu. Za měsíc obdržel zahradník 18 zl.; kolik dní pracoval?
138. Dva dělníci mají vyčistiti příkop 435 metrů dlouhý; první denně vyčistí příkop zdělí 42, druhý však 45 metrů; v koliku dnech oba dělníci vykonají práci?
139. Dva sudy obsahují 351 litrů; vyteče-li z prvního šestina a z druhého třetina, zbytky v obou sudech jsou si rovny. Kolik litrů obsahuje každý sud?
140. Ve společnosti bylo dvakráté tolik mužů, kolik žen; odešlo-li 8 mužů a tolikéž žen, zbylo ještě čtyřikráté tolik mužů, kolik žen. Mnoholi mužů a žen bylo původně ve společnosti?
141. V továrně pracuje 26 dělníků, jednak mistrů, jednak tovaryšů; každému mistru platí se denně 2 zl., každému tovaryši 1 zl. Kdyby každému mistru na mzdě se utrhl $\frac{1}{5}$ zl., každému tovaryši však tolik se přidalo, denní mzda by byla o $2\frac{4}{5}$ zl. větší. Kolik mistrů a kolik tovaryšů pracuje v továrně?
142. A a B se sadí o 13 marků; vyhraje-li A, bude míti třikráté tolik peněz, kolik má B; prohraje-li, bude míti jen dvakráté tolik, kolik B. Mnoholi peněz má každý?
143. Někdo sadí v každé hře 4 zl. proti 3 zl.; po 28 hrách aniž vyhrál, aniž prohrál. V koliku hrách vyhrál, v koliku prohrál?
144. Tři hráči spolu hrají; v první hře prohraje první a platí každému spoluhráči, mnoholi peněz každý měl; v druhé hře prohraje druhý hráč a zaplatí prvnímu a třetímu tolik, mnoholi každý má; v třetí hře prohraje třetí hráč a platí

prvému a druhému tolik, mnoholi každý má. Ku konci hry má každý 24 zl.; mnoholi měl každý hráč na začátku?

145. Ve sněmu, v němž zasedali 64 poslanci, návrh byl přijat většinou 10ti hlasů, mnoholi poslanců hlasovalo pro, mnoholi proti?
146. Kupec koupil kus sukna, jehož metr stojí $3\frac{3}{4}$ zl.; prodával-li metr po $4\frac{1}{3}$ zl. a získá-li při prodeji celého kusu 21 zl., kolik metrů byl kus dlouhý?
147. Kupec má dva druhy zboží, kilogramm lepšího druhu za 60 kr., Kg. horšího za 36 kr.; smísí-li z obou druhů 80 Kg., aby mohl prodávati Kg. po 45 kr., mnoholi Kg. každého druhu musí smísiti?
148. Hektolitr vína jest za 90 marků, jiného druhu za 48 marků; chce-li vinárník prodati 7 Hl. směsi po 60 mk., mnoholi Hl. každého druhu musí smísiti?
149. Smísíme-li 4 Kg. kávy jednoho, a 12 Kg. jiného druhu, Kg. směsi jest za 1.24 zl.; smísíme-li však 6 Kg. prvního a 10 Kg. druhého druhu, Kg. směsi bude za 1.22 zl. Zač jest Kg. každého druhu?
150. Čisté stříbro a 625 tisícín ryzého stříbra má se slíti ve stříbro 750tisícinného zrna; mnoholi stříbra každého druhu bude potřebí na 24 Kg. směsi této?
151. Mnoholi mědi (jakost = 0) musíme slíti s 26 Kg. stříbra 900tisícinného zrna, abychom obdrželi stříbro 520tisícinného zrna?
152. Smísíme-li 24 Kg. stříbra, jehož jakost jest $\frac{1}{16}$, s 12 Kg. jiného druhu stříbra, jakost směsi bude $\frac{3}{4}$; má se ustanoviti jakost druhého druhu stříbra.
153. Někdo má tři kovové kusy, z nichžto každý obsahuje kovy A, B, C. V prvním kusu jest a_1 dekagrammů kovu A, b_1 Dg. k. B a c_1 Dg. k. C, v druhém jest a_2 Dg. k. A, b_2 Dg. k. B, c_2 Dg. k. C; v třetím konečně a_3 Dg. k. A, b_3 Dg. k. B, c_3 Dg. k. C. Má-li slitina obsahovati a Dg. kovu A, b Dg. k. B, c Dg. k. C, mnoholi Dg. každého kusu kovového musíme slíti?

Položíme-li $a_1 + b_1 + c_1 = s_1$, $a_2 + b_2 + c_2 = s_2$, $a_3 + b_3 + c_3 = s_3$, obdržíme následující rovnice:

$$\frac{a_1 x}{s_1} + \frac{a_2 y}{s_2} + \frac{a_3 z}{s_3} = a,$$

$$\frac{b_1 x}{s_1} + \frac{b_2 y}{s_2} + \frac{b_3 z}{s_3} = b,$$

$$\frac{c_1 x}{s_1} + \frac{c_2 y}{s_2} + \frac{c_3 z}{s_3} = c.$$

154. Ze tří kovových prutů obsahuje

prvý 4 Dg. zlata, 8 Dg. stříbra, 12 Dg. mědi,

druhý 8 " " 10 " " 2 " "

třetí 10 " " 6 " " 14 " "

Chceme-li slíti kovový prut, jenž by obsahoval 10 Dg. zlata, 10 Dg. stříbra a 11 Dg. mědi, kolik Dg. každého kovového prutu bude k tomu potřebí?

155. Do nádoby teče voda dvěma rourama. Přitéká-li jen první rourou, nádoba se naplní za a hodin, pouze druhou rourou však za b hodin. V kterém čase bude nádoba plna, teče-li voda zároveň oběma rourama?

Položme hledaný čas = x a krychlový obsah nádoby = 1. Prvá roura sama naplní za x hodin $\frac{x}{a}$ nádoby, druhá roura sama $\frac{x}{b}$ nádoby, tedy obě roury zároveň za x hodin $\frac{x}{a} + \frac{x}{b}$ nádoby, t. j. celou nádobu = 1. Protož

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1, \text{ z čehož}$$

$$x = \frac{ab}{a + b}.$$

156. Do nádoby teče voda třemi rourami; první roura sama naplní nádobu za 4 hodiny, druhá roura sama za 6 hodin, třetí roura sama za 12 hodin. Za kolik hodin bude nádoba naplněna, přitéká-li voda zároveň všemi rourami?

157. Do nádoby teče voda rourami R_1 , R_2 a R_3 . Roury R_1 a R_2 naplní nádobu za a , roury R_1 a R_3 za b , konečně R_2 a R_3 za c hodin; za kolik hodin by každá roura sama naplnila tuto nádobu?

158. Tři dělníci nabízejí se ku práci; dělníci A a B by ji pospolu vykonali za 18 dní, A a C spolu za 12 dní, B a C však za 9 dní. V koliku dnech by všickni tři dělníci pospolu vykonali tuto práci?

159. Dvě hmoty, jichž měrné váhy jsou s_1 a s_2 , mají se spojit tak, aby vzniklá hmota vážila p kilogrammů a měrná váha její aby byla s ; mnoholi kilogrammů každé hmoty k tomu bude potřeba?

Součet prostých vah obou hmot dá prostou váhu směsi, taktéž součet krychlových obsahů obou hmot rovná se obsahu směsi; skládá-li se tato z x Kg. první a y Kg. druhé hmoty, máme rovnice

$$x + y = p \quad \text{a} \quad \frac{x}{s_1} + \frac{y}{s_2} = \frac{p}{s}, \quad \text{z čehož}$$

$$x = \frac{s_1 p (s - s_2)}{s(s_1 - s_2)} \quad \text{a} \quad y = \frac{s_2 p (s_1 - s)}{s(s_1 - s_2)}.$$

Řešení jest možné, leží-li s mezi s_1 a s_2 .

160. Ustanovte měrné váhy hmot A a B, jestliže a kilogrammů první a b Kg. druhé hmoty dohromady má měrnou váhu s , a_1 Kg. první a b_1 Kg. druhé hmoty dohromady však měrnou váhu s_1 ?
161. Dle Vitruva byla koruna syrakusského krále Hiera ze zlata a stříbra, vážila 20 liber, pod vodou však jen $19\frac{8}{9}$ lib ; jestliže zlato pod vodou zdánlivě tratí $\frac{1}{19}$ a stříbro $\frac{1}{16}$ své váhy, kolik liber zlata a kolik stříbra bylo v koruně?
162. Ve světnici jsou dvojce kyvadelné hodiny; kyvadlo prvních hodin učiní za každou sekundu jeden kyv, kyvadlo druhých za každou minutu 80 kyvů. V kterém čase kyvadlo druhých hodin učiní o 1000 kyvů více nežli kyvadlo hodin prvních?
163. Kyvadlo a millimetrů dlouhé učiní za minutu n kyvů při zrychlení g ; jak dlouhé musí býti jiné kyvadlo, které při zrychlení g_1 má učiniti n_1 kyvů za minutu?

$$x : a = \frac{g_1}{n_1^2} : \frac{g}{n^2}.$$

164. Sekundové kyvadlo v Paříži jest 0.99385 m. dlouhé; o kolik millimetrů museli bychom je prodloužiti, aby v Praze udávalo sekundy, je-li zrychlení v Paříži 9.809, v Praze však 9.808 m.?
165. Parní loď by za hodinu plula proti vodě $1\frac{1}{2}$ míle, po vodě však $2\frac{1}{2}$ míle; jak daleko by doplula za hodinu pouze silou stroje (na stojaté vodě), a jak daleko pouze silou proudu (při stojícím stroji)?
166. Dvě tělesa K' a K'' pohybují se tímž přímým směrem z bodů A' a A'' rovnoměrně rychlostmi c' a c'' . Těleso K' počne se pohybovati z bodu A' , ležícího o d jednotků délky

za bodem A'' , o t časových jednotkách později nežli těleso K'' z bodu A'' . Po koliku (T) jednotkách časových obě tělesa se setkají, počítáme-li čas od okamžiku, kdy K'' opouští bod A'' ? (Přirovnej §. 229., 3.)

Těleso K' vykoná dráhu $c'(T-t)$, těleso K'' však $c''T$; rozdíl obou drah se rovná vzdálenosti d , proto $c'(T-t) - c''T = d$, z čehož

$$T = \frac{c't + d}{c' - c''}.$$

Vyšetřete výsledek tento: a) při kladných hodnotách d , t , c' a c'' a při $c' > c''$; b) při $d < 0$; c) při $t < 0$; d) při $c'' < 0$.

167. Při údajích předcházející úlohy ustanovte vzdálenost (D) bodu, v němž obě tělesa se setkají, od bližšího bodu A'' .

Poněvadž $D = c''T$, bude

$$D = \frac{c''(c't + d)}{c' - c''}.$$

Vyšetřete výsledek tento pro případy uvedené v předcházející úloze.

168. Za poslem, jenž před 3 dny vyšel z jistého města, denně koná 40 kilometrů cesty, odejde z téhož města druhý posel, jenž koná denně 60 Km. Kdy asi tento posel dohoní prvního?
169. Místa A' a A'' , kterými vede železná dráha, jsou 225 Km. od sebe vzdálena. Z A' směrem k A'' vyjede osobní vlak, jenž za každou hodinu urazí 30 Km.; zároveň vyjede z A'' směrem k A' nákladní vlak, jenž za každou hodinu urazí 20 Km. Kdy se oba vlaky setkají?
170. O 5. hodině ranní vyjede z A' lokomotiv, jenž za $4\frac{1}{2}$ hod. urazí 105 Km., o půl 6. hodině odjede za ním z místa A'' , o $52\frac{1}{2}$ Km. za A' ležícího, druhý lokomotiv, jenž za 3 hod. urazí 105 Km. Kdy asi tento lokomotiv dohoní první?
171. Místa A' a A'' jsou spojena železnou drahou 152 Km. dlouhou. Z A' vyjede v 8 hodin 30 minut dopoledne vlak směrem k A'' rychlostí 10 m. za sekundu; v 9 hod. 15 min. vyjede z A'' vlak rychlostí 9 m. za sekundu směrem k A' . Kdy a v které vzdálenosti od A'' oba vlaky se setkají?
172. Z A vyjede jezdec za plukem, jenž před 6 dny odtud od-táhnul, denně vykoná 28 Km. cesty. Kdy ho dohoní, ujede-li denně 84 Km.?

173. Z A' vyjede jezdec, jenž vykoná denně 14 mil cesty, směrem k A'' ; zároveň vyjede z A'' druhý jezdec, jenž za 5 dní s prvním se má setkat, směrem k A' . Kolik mil druhý jezdec pojede denně, je-li místo A' od A'' 150 mil vzdáleno?
174. O 6. hodině ranní odjede z A' do A'' rychlík, jenž urazí za každou hodinu $1\frac{1}{5}$ míle; ve 2 hodiny 20 minut odpoledne vyjede z A'' směrem k A' osobní vlak, jenž po dráze podél silnice urazí každou hodinu 4 míle a přijede do A' téhož času, kdy rychlík do A'' . Kolik mil jest z A' do A'' ?
175. Z A' do A'' jest 315 Km. O polednách odjede z A' rychlík, jenž za hodinu urazí $9\frac{3}{8}$ Km. O kolik hodin dříve musel by odjeti poštovní vůz, jenž urazí za hodinu jen $5\frac{5}{8}$ Km., aby přijel do A'' zároveň s rychlíkem?
176. Pluk vytáhne z A' směrem k A'' a vykoná denně 3 míle cesty; za dva dni táhne za ním pluk druhý. Kolik mil musí denně uraziti, aby dohonil první pluk za 4 dni?
177. Za cestujícím, jenž opustiv místo A denně vykoná 56 Km. cesty, odejde za 3 dni posel, jenž má onoho dohoniti od A zdálí 350 Km. Kdy ho dohoní, a kolik Km. musí denně uraziti?
178. Dvě tělesa pohybují se naproti sobě z bodů A' a A'' , d metrů od sebe vzdálených. Začne-li se těleso první z A' o t' hod. dříve pohybovati, setká se s druhým za T' hodin po východu tohoto tělesa z A'' ; začne-li se však druhé těleso z A'' o t'' hodin dříve pohybovati, obě tělesa setkají se za T'' hodin po východu prvního tělesa z A' . Kolik metrů dráhy vykoná každé těleso za hodinu?
179. Těleso K'' , pohybující se z bodu A , vykoná za jednotu časovou c'' jednotu délky; o t jednotu časových později pohybuje se za ním z téhož bodu těleso K' , kteréž vykoná za jednotu časovou c' jednotu délky. Za kolik (T) jednotu časových, počítaje od východu tělesa K'' , budou obě tělesa d jednotu délky od sebe vzdálena?
180. Dvě tělesa pohybují se v kružnici, jejíž obvod se rovná p jednotem délky, zároveň z téhož bodu a týmž směrem rychlostmi c' a c'' ; za kolik (T) jednotu časových se opět setkají?

Dejme tomu, že první těleso vykoná dráhu rovnou obvodu p za a' , druhé těleso však za a'' jednotí časových, tedy $c' = \frac{p}{a'}$ a $c'' = \frac{p}{a''}$, pročež pro opětne setkání obou těles

$$Tc' - Tc'' = p, \text{ z čehož } T = \frac{p}{c' - c''} = \frac{a'a''}{a'' - a'}.$$

181. Mnoholi času uplyne od jednoho setkání rafik na hodinách k druhému?
182. Kolik minut po 4. hodině kryjí se obě rafiky?
183. Jest 20 minut po 12. hodině; za kolik minut dohoní se obě rafiky?
184. V obvodě kružnice pohybují se dvě tělesa stejnoměrně týmže směrem; první těleso opíše obvod za t sekund a setká se pokaždé za T sekund s druhým tělesem. V kterém čase toto vykoná svůj oběh?

2. Neurčité rovnice prvního stupně.

Určení neznámých celistvými čísly. (§§. 233. a 234.)

- | | |
|--------------------------|-----------------------------|
| 1. $2x - 3y = 1.$ | 2. $2x + 3y = 17.$ |
| 3. $6x + 5y = 128.$ | 4. $7x + 11y = 18.$ |
| 5. $7x - 13y = 152.$ | 6. $8x - 11y = 200.$ |
| 7. $12x + 13y = 319.$ | 8. $5x - 7y = 1.$ |
| 9. $15x + 14y = 225.$ | 10. $13x + 19y = 73.$ |
| 11. $37x - 22y = 307.$ | 12. $23x - 13y = 2.$ |
| 13. $7y + 17y = 408.$ | 14. $24x - 35y = 10.$ |
| 15. $25x - 11y = 20.$ | 16. $36x - 115y = 643.$ |
| 17. $37x - 22y = 307.$ | 18. $115x = 424y - 539.$ |
| 19. $181x + 2y = 570.$ | 20. $520x = 919y - 1000.$ |
| 21. $3x + 4y - 5z = 12.$ | 22. $4x - 18y + 27z = 100.$ |
| 23. $5x + 3y + 7z = 36.$ | 24. $7x + 10y - 15z = 56.$ |

Určení neznámých celistvými čísly kladnými. (§. 235.)

- | | |
|------------------------|--------------------------|
| 25. $5x - 7y = 13.$ | 26. $5x - 7y = 94.$ |
| 27. $7x - 12y = 300.$ | 28. $17x + 14z = 24.$ |
| 29. $23x + 57y = 412.$ | 30. $25x = 36y - 7.$ |
| 31. $29x + 17y = 250.$ | 32. $17x - 1 = 12y - 5.$ |

33. $28x + 12 = 19y + 17.$ 34. $24x - 31y = 196.$
 35. $6x + 17y = 500.$ 36. $18x + 7y = 600.$
 37. $\frac{3x - 2}{5} = y,$ 38. $19x - 10y = 7,$
 $\frac{4x - 3}{6} = z.$ $19x - 8z = 15.$
 39. $5x + 3y + 7z = 36.$ 40. $8x + 11y - 20z = 6.$
 41. $5x + 6y + 20z = 187.$ 42. $9x + 5y + 3z = 105.$
 43. $2x + 3y + 4z = 20.$ 44. $5x + 7y - 3z = 39.$
-

Použití neurčitých rovnic prvního stupně.

45. Osmínásobné číslo jakési, připočtené k 3násobnému číslu jinému, dá součet 91; která jsou ta čísla?
 46. Číslo 50 má se rozvésti na dvě čísel tak, aby jedno bylo dělitelno sedmi, druhé pěti.
 47. Rozvedte 200 na dvě čísel, z nichž jedno je dělitelno 14ti, druhé 23ti.
 48. Rozdíl dvou čísel jest 10; menšenec jest dělitelný 34ti a menšitel 21ti. Která jsou ta čísla?
 49. Rozvedte 300 na dvě čísel tak, aby jedno zmenšeno o 1 bylo dělitelno 9ti, a druhé zvětšeno o 7 bylo dělitelno 11ti.
 50. Vyhledejte číslo, které jest dělitelno 7mi, ale děleno 29ti dá zbytek 13.
 51. Jaký obecný tvar mají celistvá čísla, kteráž dělena 19ti dají zbytek 1, a dělena 28ti dají zbytek 3?
 52. Která čísla dělena 24ti dají zbytek 18, a dělena 13ti dají zbytek 1?
 53. Rozvedte zlomek $\frac{101}{110}$ na dvě zlomků se jmenovateli 5 a 22.
 54. Která čísla, ležící mezi 1000 a 2000, byla by dělitelna 13ti, kdybychom je zvětšili o 5, a dělitelna 17ti, kdybychom je zmenšili o 5?
 55. Někdo koupí dva druhy sukna za 90 zl.; metr prvního druhu stojí 4 zl., druhého však 3 zl. Kolik celých metrů každého druhu obdržel?
 56. Někdo koupí 7 Kg. kávy a 17 Kg. cukru dohromady za 18 zl. 60 kr. Mnoholi celých krejcarů stojí Kg. každého zboží, předpokládáme-li, že káva jest dražší nežli cukr, a Kg. cukru že nestojí méně nežli 50 kr.?

57. Dluh 100 zl. má se splatiti zlatníky a dvouzlatníky; mnoho-li kusů každého druhu bude potřebí?
58. Průměr osmizlatníků rovná se 21, průměr čtyřzlatníků však 19 mm. Kolik osmi- a čtyřzlatníků museli bychom vedle sebe položití směrem přímým, aby součet jich průměrů rovnal se 1 metru?
59. Žák obdržel vždy 10 kr. odměny za úlohu správnou, ale musel platiti 7 kr. za úlohu chybnou. Konečně měl 5 kr.; kolik úloh vypracoval správně a kolik chybně?
60. Jedno kolo má 13, druhé 17 zubů; na začátku pohybu zasahuje první zub prvního kola do prvního mezizubí druhého kola. Kolikráte každé kolo se musí otočiti, aby první zub prvního kola opět zasahoval do prvního mezizubí druhého kola?
61. Která čísla dělena 11ti, 19ti, 29ti dají vztažně zbytky 5, 12, 4?
62. Znamená-li N nějaký rok po narození Páně,
 zbytek při dělení $\frac{N+1}{19}$ slove zlaté číslo,
 „ „ „ $\frac{N+9}{28}$ „ letokruh slunečný, a
 „ „ „ $\frac{N+3}{15}$ „ letokruh indiktový
 (Roemerzinszahl) onoho roku. Který rok má
 a) zlaté číslo 15 a letokruh slunečný 9;
 b) „ „ 14 „ „ indiktový 3;
 c) letokruh slunečný 10 a letokruh indiktový 5;
 d) zlaté číslo 5, letokruh slunečný 27 a letokruh indiktový 9?
63. Rozved'te 50 na tři čísla tak, aby první bylo dělitelno 5ti druhé 6ti a třetí 7mi.
64. Rozved'te $\frac{121201}{4400}$ na tři zlomky se jmenovateli 11, 16, 25.
65. 30 osob (muži, ženy a děti) vydalo společně 30 marků. Jestliže každý muž vydal 5 marků, každá žena 1 mark a každé dítě 25 penězů; kolik bylo mužů, kolik žen a kolik dětí?

3. Určité rovnice druhého stupně.

Rovnice druhého stupně o jedné neznámé. (§§. 237.—241.)

Máte řešiti následující rovnice:

1. $x^2 = 9$.
2. $x^2 + 4 = 0$.
3. $2x^2 - 1 = 2 - 4x^2$.
4. $3x^2 - 4093 = x^2 + 139$.
5. $(x + 7)(x - 7) = 51$.
6. $(2x - 3)(2x + 3) = 7$.
7. $a - x = \frac{2ab}{a + x}$.
8. $\frac{x + a}{x + b} + \frac{x - a}{x - b} = 0$.
9. $\frac{7x}{1050} = \frac{3}{2x}$.
10. $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = \frac{5}{16}$.
11. $\frac{x}{x + 2} + \frac{x}{x - 2} = \frac{8}{3}$.
12. $\frac{x + 1}{x - 1} + \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{5}{2}$.
13. $\frac{a - x}{1 - ax} = \frac{1 - bx}{b - x}$.
14. $\frac{a}{1 + 2x} + \frac{a}{1 - 2x} = 2b$.
15. $\sqrt{33 + 2x - x^2} = x + 1$.
16. $\frac{ax^2 + b^2}{\sqrt{bx^2 + a^2}} = \sqrt{bx^2 + a^2}$.
17. $\frac{2a^2}{x + \sqrt{4a^2 - x^2}} + \frac{2a^2}{x - \sqrt{4a^2 - x^2}} = x$.
18. $\frac{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}} = \frac{a}{b}$.
19. $\sqrt{x^2 + a^2} - 2a\sqrt{x^2 - b^2} + x = \frac{ax}{\sqrt{x^2 - b^2}}$.
20. $\sqrt[3]{\sqrt{5} + x} + \sqrt[3]{\sqrt{5} - x} = \sqrt[3]{5\sqrt{5}}$.
21. $x^2 - 4x = 21$.
22. $x^2 - 12x + 35 = 0$.
23. $x^2 + 15x + 56 = 0$.
24. $x^2 + x - 56 = 0$.
25. $x^2 - 4x + 4 = 0$.
26. $x^2 - 2x = 15$.
27. $x^2 - 6x + 7 = 0$.
28. $x^2 - 13x = 140$.
29. $x^2 + 9x + 5 = 0$.
30. $x^2 + 19x + 10 = 0$.
31. $x^2 - 7x = 7$.
32. $x^2 + 2x + 4 = 0$.
33. $5x^2 + 7x = 24$.
34. $12x^2 = 20x - 3$.
35. $5x^2 + 13x + 17 = 0$.
36. $18x^2 + 3x = 10$.
37. $x^2 - \frac{3x}{2} + \frac{11}{16} = 0$.
38. $x^2 - 12x + 100 = 0$.
39. $x^2 - 0.9x = 0.2$.
40. $2x^2 - 13.6x + 43.68 = 0$.

41. $x^2 - 0.685x + 0.0133 = 0$. 42. $x^2 - 8.71235x = 7.23475$.
 43. $x^2 + 3.162x - 1.4248 = 0$. 44. $x^2 + 7.66441 = 0.80183x$.
 45. $x^2 + 2ax = 2ab + b^2$. 46. $x^2 - 2abx = a^4 + a^2b^2 + b^4$.
 47. $x^2 - (a + b)x + ab = 0$. 48. $x^2 - (a - b)x - ab = 0$.
 49. $(a - b)x^2 - bx = a$. 50. $(2x - 5)(3x + 8) = 0$.
 51. $\frac{5x^2}{6} - \frac{x}{2} = 9$. 52. $x + \frac{1}{x-2} = 3$.
 53. $\frac{10x + 3}{3x + 2} = x$. 54. $\frac{6x + 5}{2x - 3} = 4x - 15$.
 55. $\frac{x + 18}{x + 6} = \frac{6}{x - 3}$. 56. $\frac{(2a - b)x - b^2}{2a + b - x} = \frac{2a(a - b)}{2a - x}$.
 57. $\frac{3x - 4}{x - 4} - 10 = \frac{2 - x}{2} - 1$. 58. $\frac{5}{x} - \frac{5}{x + 1} = \frac{12}{x + 2}$.
 59. $\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(1 - x)^2}$. 60. $\frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2} = \frac{a}{a - x} - \frac{a}{a + x}$.
 61. $ax - bx = \frac{a}{x} \cdot \frac{a - 2bx}{a + b}$. 62. $\frac{ab}{x} + abx = a^2 + b^2$.
 63. $\frac{x}{x - 1} - \frac{x}{x + 1} = \frac{a}{b}$. 64. $\frac{a - x}{b + x} - \frac{b + x}{a - x} = \frac{b}{a} - \frac{a}{b}$.
 65. $\left(\frac{a - x}{x - b}\right)^2 = 8\left(\frac{a - x}{x - b}\right) - 15$. Položte $\frac{a - x}{x - b} = y$.
 66. $\frac{x + 1}{x + 2} - \frac{2x - 3}{3x - 4} = 6$. 67. $\frac{5x + 4}{5x + 1} + \frac{x - 1}{3x - 4} - 3 = 0$.
 68. $\frac{2x - a}{4x + 5a} = \frac{x + 6a}{2x} + 7$. 69. $\frac{3x^2 - 3}{x + 9} + \frac{6x^2 - 4}{2x - 1} = 6x - 6$.
 70. $\frac{3a + 5b}{2(a + b)} - \frac{a - b}{a - x} = \frac{b - x}{a + b}$. 71. $\frac{2a - (1 + a^2)x}{1 + a^2 - 2ax} = \frac{2b + (1 + b^2)x}{1 + b^2 + 2bx}$.
 72. $x^2 + 2x\sqrt{5} = 2\sqrt{6}$. 73. $x(x + 2\sqrt{11}) = 6\sqrt{2}$.
 74. $x : (x + 1) = (2x + 3) : (3x + 4)$.
 75. $x + 7\sqrt{x} = 30$. 76. $ax - b\sqrt{x} = c$.
 77. $2x - 3\sqrt{x - 1} = 4$. 78. $x - 10 = 2\sqrt{x^2 - 3x + 5}$.
 79. $\sqrt{2x + 1} - 2\sqrt{2x + 3} = 1$. 80. $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} = x$.
 81. $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Položte $\sqrt{x} = y$.
 82. $\sqrt{7x + 13} - 12 = \sqrt{5x + 1}$. 83. $\sqrt{8x - 7} + 3 = \sqrt{15x + 4}$.
 84. $\sqrt{\frac{a + x}{a + b}} + \sqrt{\frac{b - x}{a + b}} = 1$. 85. $\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{x - b}{\sqrt{c^2 + (b - x)^2}} = 0$.

Utvořte rovnice, kteréž mají následující kořeny:

- | | |
|---|---------------------------------------|
| 86. $+5a - 5.$ | 87. $+3\sqrt{2}a - 3\sqrt{2}.$ |
| 88. $-3a + 7.$ | 89. $12a - 7.$ |
| 90. $10a - 1.$ | 91. $-9a - 13.$ |
| 92. $\frac{3}{2}a - \frac{11}{2}.$ | 93. $\frac{7}{3}a - \frac{2}{3}.$ |
| 94. $0.7a - 2.4.$ | 95. $1.36a - 0.75.$ |
| 96. $\frac{a+b}{2}a - \frac{a-b}{2}.$ | 97. $1 + \sqrt{2}a - 1 - \sqrt{2}.$ |
| 98. $2a + 3b\sqrt{2}a - 2a - 3b\sqrt{2}.$ | 99. $2 + \sqrt{-1}a - 2 - \sqrt{-1}.$ |
- Rozvedte následující tříčleny na činitele:
- | | |
|----------------------------------|------------------------------------|
| 100. $x^2 - 17x + 70.$ | 101. $x^2 + 3x - 88.$ |
| 102. $x^2 + x + 1.$ | 103. $x^2 - 9x - 10.$ |
| 104. $3x^2 - 14x + 8.$ | 105. $3x^2 - 10x - 153.$ |
| 106. $6x^2 + x - 1.$ | 107. $20x^2 + 17x - 24.$ |
| 108. $x^2 - ax + c(a - c).$ | 109. $x^2 + 4abx - (a^2 - b^2)^2.$ |
| 110. $abx^2 + (a + b)x + 1.$ | 111. $abx^2 + (a^2 - b^2)x - ab.$ |
| 112. $acx^2 - (a^2 + bc)x + ab.$ | 113. $acx^2 - (3ab - bc)x - 3b^2.$ |

Určité rovnice druhého stupně o několika neznámých.

(§§. 242. a 243.)

- | | |
|---|---|
| 114. $x^2 + y^2 = 90,$
$x = 3y.$ | 115. $xy + x = 40,$
$x + y = 12.$ |
| 116. $xy = a,$
$x - y = b.$ | 117. $2x^2 - 3y^2 = 71,$
$3x^2 + 2y^2 = 165.$ |
| 118. $xy + x = 4,$
$xy + y = 3.$ | 119. $xy + x = 18.$
$xy - y = 10.$ |
| 120. $x^2 + y^2 = a^2,$
$\frac{x}{y} = \frac{b}{c}.$ | 121. $x^2 - y^2 = 32,$
$\frac{x}{y} = 3.$ |
| 122. $x + y = 4,$
$\frac{8}{x} - \frac{12}{y} = 4.$ | 123. $\frac{a}{x^2} - \frac{b}{y^2} = c,$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1.$ |
| 124. $y = a_1 + (x - 1)d,$
$s_n = \frac{x}{2}(a_1 + y).$ | 125. $x^2 + y^2 = r^2,$
$y = ax + b.$ |
| 126. $x : y = 4 : 1,$
$x : 6 = 6 : y.$ | 127. $x^2 : y^2 = a^2 : b^2,$
$a - x = b - y.$ |

$$128. \quad xy = 36, \\ \frac{x}{y} = 4.$$

$$130. \quad x^2 + y^2 = a, \\ x - y = b.$$

$$132. \quad \left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 = a, \\ xy = b. \end{array} \right\} \text{ Položte } x^2 = u, y^2 = v.$$

$$133. \quad \begin{array}{l} x(x+y) = 40, \\ y(x+y) = 24. \end{array}$$

$$135. \quad x^2 + y^2 + x + y = 8, \\ xy = 2.$$

$$137. \quad \begin{array}{l} x^2 + xy + y^2 = a, \\ x^2 + y^2 = b. \end{array}$$

$$139. \quad \begin{array}{l} x + y = 74, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 12. \end{array}$$

Položte $\sqrt{x} = u, \sqrt{y} = v$.

$$141. \quad x - y + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{20}{x+y}, \\ x^2 + y^2 = 34.$$

Položte $x^2 + y^2 = u^2, \\ x^2 - y^2 = v^2.$

$$129. \quad \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 2a^2 + 2b^2, \\ x + y = 2a. \end{array}$$

$$131. \quad \begin{array}{l} x^2 - 2y^2 = 17, \\ x - 2y = 1. \end{array}$$

$$134. \quad \begin{array}{l} x^2 + y^2 + x + y = a, \\ x^2 + y^2 - x - y = b. \end{array}$$

$$136. \quad \begin{array}{l} x^2 + y^2 - x - y = 12, \\ xy = 9. \end{array}$$

$$138. \quad \begin{array}{l} x^2 - xy + y^2 = a, \\ x^2 - y^2 = b. \end{array}$$

$$140. \quad \begin{array}{l} x : 11 = 704 : y, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 19. \end{array}$$

$$142. \quad \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}, \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{array}$$

Položte $xy = u, \\ x + y = v.$

$$143. \quad \begin{array}{l} x(x+y+z) = a, \\ y(x+y+z) = b, \\ z(x+y+z) = c. \end{array}$$

$$145. \quad \begin{array}{l} \frac{xy}{z} = m, \\ \frac{xz}{y} = n, \\ \frac{yz}{x} = p. \end{array}$$

$$144. \quad \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 94, \\ x(y+z) = 45, \\ x+y+z = 14. \end{array}$$

$$146. \quad \begin{array}{l} \frac{y+z}{xyz} = -a^2, \\ \frac{x+z}{xyz} = -b^2, \\ \frac{x+y}{xyz} = -(a+b)^2. \end{array}$$

Poslední rovnice dá:

$$x = \pm \frac{1}{a}, y = \pm \frac{1}{b}, z = \pm \frac{1}{a+b}.$$

$$147. \quad \begin{array}{l} x : y = y : z, \\ x + y + z = 26, \\ x^2 + z^2 = y^2 + 292. \end{array}$$

$$148. \quad \begin{array}{l} x : y = z : u, \\ x + u = 13, \\ y + z = 20, \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 425. \end{array}$$



Použití určitých rovnic druhého stupně.

149. Násobíme-li jakési číslo jeho polovicí, obdržíme 162; které jest to číslo?
150. Součin třetiny a čtvrtiny jistého čísla rovná se 108; které jest to číslo?
151. Které číslo musíme o d zvětšiti a zmenšiti, aby součin obou nových čísel rovnal se a ?
152. Připočteme-li k 12násobnému jakémusi číslu 45, obdržíme jeho druhou mocninu; které jest to číslo?
153. Připočteme-li k jakémusi číslu 40, a dělíme-li součet nezměněným číslem neznámým, podíl bude o 2 menší nežli číslo původní; které jest to číslo?
154. Připočteme-li k jakémusi číslu 5 a odečteme-li od něho 5, součet druhých mocnin těchto nových čísel se rovná 178; které jest to číslo?
155. Ku kterému číslu musíme připočísti jeho převratnou hodnotu, abychom obdrželi číslo a ?
156. Vyhledejte dvě čísel, jichžto součet jest 30 a součin 189.
157. Rozvedte 15 na dvě sčítanců tak, aby součet jich druhých mocnin byl 113.
158. Rozvedte 15 na dvě čísel, jichžto druhé mocniny jsou v poměru 4 : 9.
159. Rozvedte 18 na dvě činitelů tak, aby rozdíl jich druhých mocnin byl 27. (Viz úl. 132. na str. předch.)
160. Rozvedte číslo a na dvě čísel tak, aby jedno z nich bylo střední měřicky srovnalostnou daného a druhého hledaného čísla.
161. Součet čtverců dvou čísel jest 45, jich rozdíl však 27; kterak vyjádříme ta čísla?
162. Součin dvou čísel jest o 84 menší nežli součet jich čtverců, a o 44 větší nežli rozdíl čtverců; která jsou ta čísla?
163. Dělíme-li dvouciferné číslo součinem jeho číslic, podíl jest 6; směníme-li však číslice, nové číslo bude o 9 větší nežli hledané; které jest to číslo?
164. Dvě čísla jsou v poměru 3 : 4, součet jich čtverců jest 100; která jsou ta čísla?
165. Součet dvou čísel rovná se jich součinu a rozdílu jich druhých mocnin; která jsou ta čísla?

166. Tři čísla tvoří spojitou měrickou srovnalost; jich součet jest 14, součet jich druhých mocnin 84; která jsou ta čísla?
167. V jakési měrické srovnalosti jest součet členů vnějších 18, součet členů vnitřních 17 a součet čtverců všech 4 členů 325; vyjádřete tu srovnalost.
168. Součet všech 4 členů jakési měrické srovnalosti jest 72, součin členů vnitřních 140, součet čtverců všech 4 členů 2050; vyjádřete tu srovnalost.
169. Někdo koupil pšenici za 117 zl., každý Hl. stál o 4 zl. méně nežli bylo hektolitřů; kolik hektolitřů pšenice koupil?
170. Někdo koupil sukno za 400 marků; kdyby metr stál o 1 mark méně, kupující by obdržel za onu sumu o 20 metrů více. Mnoholi metrů sukna koupil?
171. Obchodníci A a B prodali dohromady 100 metrů zboží a sice jeden více nežli druhý, ale oba utržili přece tutéž sumu. Kdyby A byl měl tolik metrů, kolik B, byl by za ně utržil 63 zl.; kdyby B byl měl tolik metrů, kolik A, byl by za ně utržil jen 28 zl. Mnoholi metrů zboží prodal každý obchodník?
172. Několik osob vydalo na cestách 432 zl.; ale poněvadž dvě osoby byly pozvány, platila každá z ostatních osob o 3 zl. více. Kolik osob cestovalo?
173. 240 marků má se rozdělití několika osobám; ale 4 osoby odřeknou se svého podílu, protože dostane každá ostatní osoba o 3 marky více. Kolik osob původně mělo býti poděleno?
174. Několik dětí mělo se rozdělití o 14400 zl. tak, aby každé dostalo stejný podíl. Než přišlo k dělení, umřely dvě děti, každé z ostatních pak obdrželo o 1200 zl. více nežli mu původně náleželo. Kolik bylo dětí?
175. Společnost, v nížto bylo dvakráte tolik mužů, kolik žen, platila za oběd 176 desetiníků; každý muž platil dvakráte tolik desetiníků, kolik bylo mužů, a každá žena dvakráte tolik desetiníků, kolik bylo žen. Mnoholi mužů a mnoholi žen bylo ve společnosti?
176. Zahrada v podobě obdélníku jest posázena 560 stromky, stejně od sebe vzdálenými; v řadě podélné jest o 8 stromků více nežli v řadě dle šířky. Kolik stromků jest v každé řadě?

177. Pozemek v podobě obdélníku jest a metrů dlouhý a b metrů široký; o kolik metrů museli bychom délku zkrátiti a o kolik metrů šířku prodloužiti, aby ploský obsah pozemku se nezměnil, ale obvod aby se zmenšil o $a - 2b$ metrů?

178. Ve dvou čtvercích jest rozdíl úhlopříčných roven d , součet ploských obsahů a^2 ; ustanovte strany čtverců.

179. Spustíme do studně kámen, jenž za t sekund padne do vody. Jak hluboká jest studně, je-li zrychlení g a rychlost zvuku c ?

Čas t jest součet doby τ , za kterouž kámen spadne až na hladinu vody, a doby τ' , za kteroužto zvuk z hloubky studně dostihne ucha našeho. Poněvadž dráha vykonaná kamenem i zvukem rovná se hloubce (x) studně, musí $x = \frac{g\tau^2}{2}$ a $x = c\tau'$, tedy $\tau = \sqrt{\frac{2x}{g}}$ a $\tau' = \frac{x}{c}$. Protož

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{c} = t, \text{ z čehož plyne}$$

$$x = \frac{c}{g}(c + gt \pm \sqrt{c^2 + 2cgt}).$$

180. Vypočítejte x v předcházející úloze, jestliže $t = 3$ sek., $g = 9.81$ m. a $c = 332.25$ m.

181. Vrhne-li těleso rychlostí c svisle vzhůru, za kolik sekund vystoupí do výšky h ?

Za x sekund by bylo těleso vržené rychlostí c ve výšce cx ; za tutéž dobu jest dráha volného pádu $\frac{gx^2}{2}$, značí-li g zrychlení. Skutečně vykonaná dráha vyjádří se tedy rovnicí

$$h = cx - \frac{gx^2}{2}.$$

182. Vrhne-li těleso rychlostí c svisle vzhůru, a o t sekund později druhé těleso rychlostí c' týmž směrem: za kolik sekund vystoupí druhé těleso tak vysoko jako první?

(Vyšetřete závěrečnou rovnici.)

183. Cestující vykoná 520 Km. cesty o 3 dni později než druhý, poněvadž tento dojde denně o 12 Km. dále nežli první. Za kolik dní každý cestující vykoná tuto cestu?

184. Dvě tělesa K' a K'' pohybují se týmž přímým směrem stejnoměrně a současně z bodů A' a A'' , z nichž onen leží o d jednotůž délky za tímto, a obě procházejí po t jednotech časových bodem B. Vykoná-li těleso K' dráhu jednotůž délky o $\frac{1}{n}$ časové jednotůž dříve než K'' , kolik (D) jednotůž délky jest z bodu A'' do B?

K' vykoná dráhu jednoty délky za $\frac{t}{d + D}$ časových jednotostí,

K'' " " " " " " $\frac{t}{D}$ " "

proto $\frac{t}{D} - \frac{t}{d + D} = \frac{1}{n}$, z čehož $D = -\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + ndt}$.

Co by v tomto výrazu znamenaly záporné hodnoty veličin D , d , t , n ?

185. Ze dvou stanic, 300 Km. od sebe vzdálených, vyjedou současně dva vlaky, z nichž jeden ujede 1 Km. o $\frac{1}{150}$ hodiny dříve než druhý. Setkají-li se oba vlaky za $4\frac{4}{9}$ hodin po svém odjezdu, v které době ujel každý vlak 1 Km.?

186. Pocestný vyjde z A' do A'' , a druhý současně z A'' do A' . Onen přijde do A'' za a' hodin, tento do A' za a'' hodin po společném setkání. V kterém poměru jsou jejich rychlosti c' a c'' ?

Značí-li d vzdálenost míst A' a A'' , pocestní se setkají za $\frac{d}{c' + c''}$ jednotostí časových; do toho času vykonali cesty $\frac{c'd}{c' + c''}$ a $\frac{c''d}{c' + c''}$, tudíž mají ještě vykonati vztažně $\frac{c''d}{c' + c''}$ a $\frac{c'd}{c' + c''}$, k čemuž potřebí $\frac{c''d}{c'(c' + c'')}$ a $\frac{c'd}{c''(c' + c'')}$ jednotostí časových. Protož musí $\frac{c'd}{c'(c' + c'')} = a'$ a $\frac{c'd}{c''(c' + c'')} = a''$. Dělíme-li první rovnici druhou, obdržíme

$$\frac{c'^2}{c''^2} = \frac{a''}{a'}, \text{ z čehož } \frac{c'}{c''} = \frac{\sqrt{a''}}{\sqrt{a'}}.$$

187. Dvě tělesa pohybují se stejnoměrně rychlostmi c' a c'' po ramenou pravého úhlu. Jsou-li vzdálenosti obou těles od vrcholu jistého času d' a d'' , za kolik (t) jednotostí časových bude vzdálenost jednoho tělesa od druhého d ?

Za t časových jednotostí jest

$$\text{vzdálenost tělesa } K' \text{ od vrcholu} = d' - c't;$$

$$\text{" " " " " " } K'' \text{ " " " " " " } = d'' - c''t;$$

tudíž dle poučky Pythagorovy

$$d^2 = (d' - c't)^2 + (d'' - c''t)^2,$$

z čehož plyne

$$t = \frac{c'd' + c''d'' \pm \sqrt{d^2(c'^2 + c''^2) - (c'd'' - c''d')^2}}{c'^2 + c''^2}.$$

Rozbor. a) Má-li t býti reálné, musí $d^2(c'^2 + c''^2) \geq (c'd'' - c''d')^2$,

tudíž $d \geq \frac{c'd'' - c''d'}{\sqrt{c'^2 + c''^2}}$. Nejmenší vzdálenost obou těles může býti

$$d = \frac{c'd'' - c''d'}{\sqrt{c'^2 + c''^2}}.$$

b) Dobu, v kteréž obě tělesa budou nejméně od sebe vzdálena, vyjádříme $t = \frac{c'd' + c''d''}{c'^2 + c''^2}$.

c) Mají-li obě tělesa setkat se na vrcholu, musí nejmenší jich vzdálenost $d = 0$, t. j.

$$c'd'' = c''d' \text{ aneb } \frac{c'}{c''} = \frac{d'}{d''}.$$

Co by zde znamenaly záporné hodnoty veličin t, c', c'', d', d'' ?

188. Dvě tělesa pohybují se rovnoměrně po ramenou pravého úhlu k vrcholu, od něhož jsou d' a d'' metrů vzdálena. Za t časových jednotek obě tělesa jsou od sebe v nejmenší vzdálenosti d metrů. Jakou rychlostí každé těleso se pohybuje?

189. Dvě světla jsou postavena v bodech A a B, jichž vzdálenost jest d ; světlost prvního světla jest a , druhého b . Který bod přímky AB bude od obou stejně osvětlen?

Světlosti ubývá v poměru čtverců vzdálenosti. Je-li tedy x vzdálenost hledaného bodu od A, musí

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(d-x)^2}, \text{ protož } x = d \cdot \frac{a \pm \sqrt{ab}}{a - b}.$$

Vyšetřete tento výsledek.

190. Je-li d vzdálenost dvou nebeských těles, jichžto hmoty jsou v poměru $a : b$, v kterém bodu jich spojovací přímky by muselo býti 3. těleso, na kteréž by ona tělesa působila rovnou silou přitažlivou?

191. V které vzdálenosti od země zůstalo by jakési těleso viseti mezi zemí a měsícem, jsou-li tato tělesa 51800 mil od sebe vzdálena a rovná-li se hmota měsíce $\frac{1}{81}$ hmoty zemské?

4. Neurčité rovnice druhého stupně.

Určení neznámých celistvými čísly kladnými. (§. 245.)

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $5xy - 3y = 168.$ | 2. $xy + x - y = 64.$ |
| 3. $3xy - 5y = 16x.$ | 4. $7xy + 10y = 136x.$ |
| 5. $5xy - 2x - 3y = 18.$ | 6. $x^2 + xy - 2x - 3y = 29.$ |
| 7. $12x^2 - xy - 3y + 87 = 0.$ | 8. $x^2 - 2xy + y = 4.$ |
| 9. $3x^2 - 2xy - y + 1 = 0.$ | 10. $x^2 - 2xy - 3x + 5y + 20 = 0.$ |
| 11. $x^2 + 3xy - 2x + 2y = 8.$ | 12. $2x^2 - 2xy - 4x + 3y = 1.$ |

Určení neznámých čísel racionálními. (§. 246. a 247.)

- | | |
|-----------------------------|-------------------------------|
| 13. $y^2 = 16x^2 + 5x + 7.$ | 14. $y^2 = 25x^2 - 39y + 12.$ |
| 15. $y^2 = 4x^2 - x + 3.$ | 16. $y^2 = x^2 - 4x - 3.$ |
| 17. $y^2 = 4x^2 - 5.$ | 18. $y^2 = x^2 + 1.$ |
| 19. $y^2 = 5x^2 - 7x + 4.$ | 20. $y^2 = 3x^2 - 2x + 1.$ |
| 21. $y^2 = 7x^2 + 9.$ | 22. $y^2 = 2x^2 + 3x + 4.$ |
| 23. $y^2 = 6x^2 - 5x - 6.$ | 24. $y^2 = 3x^2 + 17x + 10.$ |
| 25. $y^2 = 1 - x^2.$ | 26. $y^2 = 5x^2 + 42x + 16.$ |
| 27. $y^2 = 10x^2 + 5x + 6.$ | 28. $y^2 = 3x^2 + 4x + 2.$ |

Udejte hodnoty x , při nichžto následující výrazy budou racionální:

- | | | |
|----------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 29. $\sqrt{x^2 - 4}.$ | 30. $\sqrt{9x^2 - 5x + 7}.$ | 31. $\sqrt{16x^2 + 9x - 8}.$ |
| 32. $\sqrt{2x^2 + x + 4}.$ | 33. $\sqrt{3x^2 + 2x + 9}.$ | 34. $\sqrt{8x^2 - 3x + 1}.$ |
| 35. $\sqrt{x^2 - 1}.$ | 36. $\sqrt{6x^2 + 2x - 20}.$ | 37. $\sqrt{2x^2 - 5x + 6}.$ |

Neznámé mají se určití čísel racionálními:

- | | |
|--|---------------------------------|
| 38. $x^2 - y^2 = 25.$ | 39. $3x^2 - 4xy + y^2 + 1 = 0.$ |
| 40. $3x^2 - 4xy + y^2 + 3y = 7.$ | 41. $4y^2 - 4xy + 6x - 8y = 1.$ |
| 42. $2x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 4y + 5 = 0.$ | |
| 43. $5x^2 - 12xy - 4y^2 - 6x + 4y = 3.$ | |
| 44. $7x^2 - 6xy + y^2 + 8x - 2y + 16 = 0.$ | |
| 45. $4x^2 + 2xy - y^2 + 11x - 4y + 9 = 0.$ | |

46. Součet dvou celistvých čísel kladných připočten k jich součinu dá 47; která jsou ta čísla?
47. Součin dvou celistvých čísel kladných jest o 33 větší nežli jich rozdíl; která jsou ta čísla?
48. Vyhledejte dvě celistvých a kladných čísel, jichžto podíl zvětšen o jich součet dá 35.
49. Podíl dvou celistvých čísel kladných rovná se jich rozdílu; která jsou ta čísla?
50. Rozdíl čtverců dvou celistvých čísel kladných jest 35; která jsou ta čísla?
51. Dělíme-li jakési dvouciferné číslo součinem jeho číslic, podíl jest 5 a zbytek 2; které jest to číslo?
52. Rozdíl čtverců dvou čísel jest opět čtverec; která jsou ta čísla?

53. Zvětšíme-li aneb zmenšíme-li jakési číslo o 1, obdržíme po každé druhou mocninu; ustanovte obecnou podobu toho čísla.

Položíme-li $x + 1 = a^2$, $x - 1 = a^2 - 2 = b^2$, $a b = \sqrt{a^2 - 2} = a - p$,

$$\text{bude } a = \frac{p^2 + 2}{2p}, \quad a x = \frac{p^4 + 4}{4p^2}.$$

(Přirovnejte úlohu 54. na str. 239.)

54. Součet dvou čtverců $a^2 + b^2$ proměňte v součet dvou jiných čtverců.

$$a^2 + b^2 = x^2 + y^2. \quad \text{Položíme-li } y = \sqrt{a^2 + (b+x)(b-x)}$$

$$= a + p(b-x), \quad \text{bude } x = \frac{2ap + bp^2 - b}{1 + p^2}, \quad y = \frac{2bp - ap^2 + a}{1 + p^2}.$$

55. Součet čtverců dvou čísel rovná se čtverci čísla třetího; která jsou ta čísla?

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Položíme-li při kterýchkoli hodnotách $s^2 + m^2 = (s+n)^2$, bude

$$s = \frac{m^2 - n^2}{2n}, \quad s + n = \frac{m^2 + n^2}{2n}, \quad \text{protož}$$

$$\left(\frac{m^2 - n^2}{2n}\right)^2 + m^2 = \left(\frac{m^2 + n^2}{2n}\right)^2,$$

aneb násobíme-li $4n^2$,

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2.$$

Protož budou

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2$$

racionálné hodnoty [neznámých] čísel x, y, z , kteréž vyhovují dané úloze, nechť dosadíme za m a n kterákoli čísla racionálná.

Dosadíme-li za m a n čísla celistvá, budou x, y, z také čísla celistvá.

Této úlohy užíváme v měřictví, abychom obdrželi pravoúhlé trojúhelníky, jichžto strany jsou směřitelné (trojúhelníky Pythagorovy). Jsou-li x a y odvěsné, z jest podpona, tudíž při

$m = 2$	3	4	4	5	5	6	6	...
$n = 1$	2	1	3	2	4	1	5	...
$x = 3$	5	15	7	21	9	35	11	...
$y = 4$	12	8	24	20	40	12	60	...
$z = 5$	13	17	25	29	41	37	61	...

56. Součet čtverců tří čísel rovná se čtverci čísla čtvrtého; která jsou ta čísla?

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2.$$

Položíme-li $s^2 + m^2 + n^2 = (s+p)^2$, obdržíme

$$s = \frac{m^2 + n^2 - p^2}{2p}, \quad s + p = \frac{m^2 + n^2 + p^2}{2p}; \quad \text{protož}$$

$$\left(\frac{m^2 + n^2 - p^2}{2p}\right)^2 + m^2 + n^2 = \left(\frac{m^2 + n^2 + p^2}{2p}\right)^2,$$

aneb násobíme-li $4p^2$,

$$(m^2 + n^2 - p^2)^2 + (2mp)^2 + (2np)^2 = (m^2 + n^2 + p^2)^2.$$

Protož $x = m^2 + n^2 - p^2$, $y = 2mp$, $z = 2np$, $u = m^2 + n^2 + p^2$.

Této úlohy užíváme v tělesoměrovství při pravouhelném rovnoběžnostěnu.

5. Některé rovnice vyšší a exponenciální.

Přesné rovnice vyšší. (§. 248.)

1. $x^5 - a^5 = 0.$

2. $x^4 - a^4 = 17x^4.$

3. $\frac{a^2}{x^3 - b} = x^3 + b.$

4. $\frac{a - x^3}{\sqrt{x^3 - b}} = \sqrt{x^3 - b}.$

5. $\frac{11x^4}{2} - 18x^2 = (3x^2 - 3)^2 - 65.$

6. $\frac{x^3 - 5}{x^3 + 5} + \frac{x^3 + 5}{x^3 - 5} = \frac{122}{11}.$

7. $\frac{3x^2 + 4}{3x^2 - 4} + \frac{3x^2 - 4}{3x^2 + 4} = \frac{290}{143}.$

8. $\begin{cases} x^n + y^n = a, \\ x^n - y^n = b. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 8x^4 - 3y^4 = 40\frac{5}{16}, \\ 5x^4 + 2y^4 = 25\frac{7}{16}. \end{cases}$

Vyšší rovnice, které lze uvést na rovnice druhého stupně.

(§§. 249. a 250.)

10. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$

11. $6x^4 - 11x^2 = 35.$

12. $x^6 + 27 = 28x^3.$

13. $3x^6 - 7x^3 = 6.$

14. $x^2 + \left(\frac{32}{x}\right)^2 = 260.$

15. $x\sqrt{25 - x^2} = 12.$

16. $x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + 4a^2b^2 = 0.$

17. $(x^2 + ax)^2 + b(x^2 + ax) = c.$

18. $(x - 2)^2 + \frac{1}{(x - 2)^2} = \frac{82}{9}.$

19. $\frac{x^3 + 3}{17 - x^3} = \frac{1}{x^3 + 3}.$

20. $\sqrt{x} - 8\sqrt[4]{x} = 9.$

21. $\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt[3]{x^2} = 54.$

22. $\sqrt[3]{x^2} - n^2 = n + \sqrt[3]{x}.$

23. $\sqrt{x^3} + ax^3 = b.$

24. $x^2 - 8x + 5 = 2\sqrt{x^2 - 8x + 40}.$ Položte $x^2 - 8x + 5 = y.$

25. $(2x + \sqrt{2x})^4 - (2x + \sqrt{2x})^2 = 1260.$

26. $\begin{cases} x^4 + y^4 = a, \\ x + y = b. \end{cases}$ Položte $\begin{cases} x - y = z \\ x - y = b. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^4 + y^4 = a, \\ x - y = b. \end{cases}$

$$28. \begin{cases} x^3 + y^3 = a, \\ x + y = b. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x^2 + y^2 = 97, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1. \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} x^3 + y^3 = 1512, \\ x^2y + xy^2 = 1440. \end{cases} \quad \text{Vyhledejte nejprv } x + y, \text{ pak } xy.$$

$$33. \begin{cases} x^2(x + y) = a, \\ y^2(x + y) = b. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} x^3 - y^3 = a, \\ x - y = b. \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} x + y = 72, \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6. \end{cases}$$

$$35. \begin{cases} x^2 + y^2 + x - y = a, \\ (x^2 + y^2)(x - y) = b. \end{cases} \quad \text{Položte } \begin{cases} x^2 + y^2 = u, \\ x - y = v. \end{cases}$$

$$36. \begin{cases} x^2 + y\sqrt{xy} = 9, \\ y^2 + x\sqrt{xy} = 18. \end{cases} \quad \text{Položte } y = xz^2.$$

$$37. \begin{cases} x + (x + y) + (x + 2y) + (x + 3y) = b, \\ x(x + y)(x + 2y)(x + 3y) = c. \end{cases}$$

Obdržíme $x = \frac{1}{4}\{b \mp \sqrt{5b^2 \pm 4m}\}$, $a y = \pm \frac{1}{6}\sqrt{5b^2 \pm 4m}$,
položíme-li $\sqrt{b^4 + 144c} = m$.

$$38. \begin{cases} x(x + y)^2(x + 2y) = p, \\ x^2 + (x + 2y)^2 = s. \end{cases}$$

$$39. \begin{cases} x(x + y)(x + 2y)(x + 3y) = p, \\ (x + 2y)^2 - (x + y)^2 = d. \end{cases}$$

$$40. \begin{cases} x + xy = b, \\ x^2 + x^2y^2 = c. \end{cases}$$

$$41. \begin{cases} x + xy + xy^2 = b, \\ x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = c. \end{cases}$$

V poslední úloze obdržíme nejprv $xy = \frac{b^2 - c}{2b}$, dosazením do obou rovnic a přetvořením pak

$$x = \frac{1}{4b}(b^2 + c \pm m), \quad y = \frac{1}{2(b^2 - c)}(b^2 + c \mp m),$$

položíme-li $\sqrt{(3b^2 - c)(3c - b^2)} = m$.

Rovnice exponenciální. (§. 251.)

$$42. 47^x = 255.$$

$$43. 10^x = 2.718282.$$

$$44. x^x = x.$$

$$45. a^{mx+n} = b.$$

$$46. a^{px+q} \cdot b^{rx+s} = c^t.$$

$$47. 5^{3x-4} \cdot 2^{2+x} = 5^x.$$

$$48. 3^{2x} \cdot 5^{3x-4} = 7^{x-1} 11^{2-x}.$$

$$49. 2^x \cdot 3^{x-1} \cdot 4^{x-2} = 5.$$

$$50. 4096^x \cdot 0.5 = 4^{x+\frac{1}{2}}.$$

$$51. \frac{a^{mx} \cdot b^{nx}}{c^{px} \cdot d^{qx}} = s.$$

$$52. \left(\frac{123}{134}\right)^{\frac{x+1}{x+2}} = \frac{345}{456}.$$

$$53. 2^{3x} = 100.$$

$$54. \begin{aligned} 3^x \cdot 5^y &= 405, \\ 2^x \cdot 7^y &= 112. \end{aligned}$$

$$56. \begin{aligned} a^x \cdot b^y &= m, \\ \frac{a^x}{b^y} &= n. \end{aligned}$$

$$58. \begin{aligned} a^x + b^y &= m, \\ a^x - b^y &= n. \end{aligned}$$

$$60. \sqrt[x]{10} = 2.$$

$$62. \sqrt[x]{2^{5+3x}} = 5.$$

$$64. \sqrt[x]{a} = b^x.$$

$$66. \sqrt[x+2]{2} = 3^{x+3}.$$

$$68. \sqrt[mx+n]{a} = b^{px+q}.$$

$$70. \sqrt[x]{a} = m \sqrt[y]{b},$$

$$\sqrt[x]{c} = n \sqrt[y]{d}.$$

$$72. 3^{x^2-4x+5} = 1200.$$

$$74. \frac{10(3^x + 100)}{3^x} = 15 \cdot 3^x + 2.$$

$$76. 13^{xy} = 2197,$$

$$5^{x+y-4} = 1.$$

$$78. 6 \cdot 7^{2x} + 7^x = 301.$$

$$80. 5\sqrt[2x]{3} + 3\sqrt[x]{3} = 10.$$

$$82. x^y = y^x. \text{ Položte } y = ux.$$

$$83. x^{\log x} = 578.$$

$$85. \sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10. \text{ Obdržíme } x = 100.$$

$$55. \begin{aligned} 2^x \cdot 5^y &= 2000, \\ 3^x \cdot 6^z &= 2916, \\ 4^y \cdot 7^z &= 3136. \end{aligned}$$

$$57. \begin{aligned} a^{7x-9} \cdot a^{2-8y} &= a^7, \\ \frac{b^{3x-5}}{b^{4y-1}} &= \frac{1}{b^2}. \end{aligned}$$

$$59. \begin{aligned} a^x + b^y &= m, \\ a^x b^y &= n. \end{aligned}$$

$$61. \sqrt[10]{10} = \sqrt[2]{2 \cdot 57813}.$$

$$63. \sqrt[x+1]{a} = b \sqrt[x+2]{c}.$$

$$65. \sqrt[x+1]{5} = 2^{x+1}.$$

$$67. 3 \cdot 2^x = 4 \sqrt[x]{9}.$$

$$69. a^2 b^x = \sqrt[x]{a^{2x+2}}.$$

$$71. 3^x \cdot \sqrt[y]{1521} = 1053,$$

$$2^y \cdot \sqrt[x]{1331} = 44.$$

$$73. a^{(x-m)(x-n)} = 1.$$

$$75. 735^{\frac{2x-1}{2x+1}} = 318^{\frac{3x-2}{3x+3}}.$$

$$77. x^y = 16,$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{y}} = 0.5.$$

$$79. 3 \cdot 4^{2x^2-2x+4} - 5 \cdot 4^{x^2-x+2} = 28$$

$$81. 13\sqrt[3x]{10} - 5\sqrt[6x]{10} = 25.$$

$$84. x^{4-\log x} = 35 \cdot 3156.$$

V. Posloupnosti.

1. Arithmetické posloupnosti.

(§§. 253.—255.)

Vyhledejte obecný člen a součet každé následující arithmetické posloupnosti:

1. 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . .
2. 2, 4, 6, 8, 10, 12,
3. — 28, — 25, — 22, — 19, — 16, — 13, . . .
4. 100, 97, 94, 91, 88, . . .
5. 100, $92\frac{1}{2}$, 85, $77\frac{1}{2}$, 70, . . .
6. Vyhledejte rozdíl posloupnosti, jejíž prvý člen jest 109 a 34tý člen 10.
7. Který jest prvý člen posloupnosti, jejíž rozdíl jest 5 a 27tý člen 139?
8. Prvý člen posloupnosti jest 1, rozdíl 5, kolikátý člen jest 116?
9. Prvý člen posloupnosti jest 20, počet členů 10, poslední člen — 16; vyhledejte součet této posloupnosti.
10. Kolik prvních členů posloupnosti musíme sečísti, abychom obdrželi 2808, je-li prvý člen 2 a rozdíl 10?
11. Součet posloupnosti, jejíž rozdíl jest 3, poslední člen 97, rovná se 1612; a) který jest prvý člen, b) kolik členů jsme sečítali?
12. Jsou-li z veličin a_1 , d , n , a_n a s_n (§. 254.) dány kterékoli tři, odvoďte vzorce, jimiž určuje se pokaždé ostatních dvě veličin. Máte řešiti následující úlohy:

	a_1	d	n	a_n	s_n
13.	125	35	13	a_n	s_n
14.	50	— 5	n	15	s_n
15.	1	9	n	a_n	260
16.	250	d	18	1100	s_n
17.	$1\frac{4}{5}$	d	27	a_n	$928\frac{4}{5}$
18.	8	d	n	$-23\frac{1}{2}$	$-77\frac{1}{2}$
19.	a_1	— 2	6	0	s_n
20.	a_1	0·27	16	a_n	52·08
21.	a_1	$8\frac{5}{11}$	n	99	630
22.	a_1	d	12	$7\frac{1}{4}$	54

23. Kolik čísel musíme vložit mezi 16 a 250, abychom obdrželi proloženou arithmetickou posloupnost, jejíž součet jest 1995?
24. V posloupnosti 1, 5, 9, 13, 17, 21, . . . vložte mezi dva a dva členy 8 členů tak, abyste obdrželi opět posloupnost arithmetickou.
25. Mezi p a q vložte r členů; který jest n tý člen této proložené posloupnosti?
-
26. Kolik čísel dělitelných číslem p leží mezi 0 a a ?
 $(n - 1)p \leq a$.
27. Kolik čísel dělitelných 6ti leží mezi 0 a 100? Který jest jich součet?
28. Rozvedte 225 na několik čísel tak, aby každé následující číslo bylo o 2 větší nežli předcházející a poslední aby bylo
29. Kolik jest těch čísel, a které jest první?
29. Jistá suma se má rozdělití několika osobám tak, aby první obdržela 80 zl., každá následující osoba o 4 zl. méně a poslední 28 zl. Kolik osob bylo poděleno, a která byla ona suma?
30. Sluha sloužil 6 roků; každého následujícího roku obdržel o 4 zl. více služného nežli minulého roku, dohromady však 540 zl. Mnoholi služného dostal prvního a mnoholi posledního roku?
31. Má se vykopati studně 12 metrů hluboká; platí-li se za prvý metr 4 zl. 40 kr. a za každý následující metr o 40 kr. více, mnoholi se muselo zaplatiti za poslední metr a mnoholi za všech 12 m.?
32. Těleso vykoná v prvé sekundě dráhu a metrů, v každé následující však o d metrů větší nežli v předcházející; a) kterou dráhu vykoná za n sekund, b) v které době toto těleso vykoná dráhu s metrů?
33. Dráha vykonaná tělesem volně padajícím jest v prvé sekundě 4.9 metrů, v každé následující sekundě však o 9.8 m. delší; kterou dráhu těleso vykoná v páté sekundě, a jak hluboko padne za 5 sekund? (Bez ohledu na odpor vzduchu.)
34. Spadne-li těleso dle zákona právě naznačeného se špičky věže na její podstavu, a vykoná-li v poslední sekundě dráhu 53.9 metrů: jak vysoká jest věž?

35. Vykoná-li koule, vystřelená svisle vzhůru, v první sekundě dráhu 200 metrů, v každé následující však o 9·8 m. kratší: jak vysoko vyletí, a v které době dopadne zase k zemi?
36. Někdo sadí do loterie na jakési číslo 20 kr., a pokud nevyhraje, sází v každé následující hře o 20 kr. více nežli v předcházející. Vyhraje-li při extratě 14násobnou sázku, v které hře by výhra se rovnala součtu všech posavadních sázek?
37. Nezúročitelný dluh má se zaplatiti v 6ti ročních lhůtách. Dlužník splatí prvního roku 600 zl., každého následujícího roku o určitou sumu více, šestého roku pak 850 zl. Mnoholi byl dlužen?
38. Někdo se vypůjčil c zl. na $p\%$; mnoholi musí zaplatiti po n letech, počítají-li se mu jednoduché úroky?
39. Někdo uloží na začátku každého roku c zl. na $p\%$ jednoduchých úroků; jakou hodnotu s budou míti všechny vklady koncem nt ého roku?

$$s = c \left\{ n + \frac{n(n+1)p}{200} \right\}.$$

40. Vyhledejte 10tý člen arithmetické posloupnosti, jejíž druhý člen jest 2 a sedmý — 4?
41. V arithmetické posloupnosti jest součet prvního a pátého členu 52, součet třetího a šestého členu 88; která jest ta posloupnost?
42. V arithmetické posloupnosti jest součet prvních 5ti členů 75, rozdíl pátého a druhého členu 18; vyhledejte a) člen první, b) rozdíl posloupnosti.
43. Čtyry čísla tvoří arithmetickou posloupnost, jejíž rozdíl jest 4; součin obou posledních čísel jest 165; která jsou ta čísla?
44. Dvě arithmetické posloupnosti mají týž počet členů; v první posloupnosti jest první člen 1 a poslední 15, druhá začíná třemi a končí 24ti; vypočítejte součet každé posloupnosti. (Řešení vede na neurčitou rovnici.)
45. Součet tří čísel, tvořících arithmetickou posloupnost, jest 36, součet jejich čtverců 482; která jsou ta čísla?
46. Čtyry čísla tvoří arithmetickou posloupnost; jich součet jest 2 a součin 40; která jsou ta čísla? (Viz úlohu 37. na str. 342.)

47. V arithmetické posloupnosti o 4 členech jest součin všech členů 880 a rozdíl čtverců vnitřních členů 39; která jest ta posloupnost?

2. Geometrické posloupnosti.

(§§. 256.—258.)

Vyhledejte obecný člen a součet každé následující posloupnosti geometrické:

1. 5, 15, 45, 135, . . .
2. $6, 4\frac{1}{2}, 3\frac{3}{8}, 2\frac{1}{2}, \dots$
3. 10·5, 2·625, 0·65625, 0·1640625, . . .
4. 3, — 12, 48, — 192, . . .
5. Vyhledejte první člen posloupnosti, jejíž udavatel jest $1\frac{1}{2}$ a sedmý člen $68\frac{1}{2}$?
6. Kolik prvních členů geometrické posloupnosti 1, 3, 9, 27, . . . musíme sečísti, aby součet se rovnal 3280?
7. Vyhledejte udavatele posloupnosti, jejíž první člen jest 2 a 12tý člen 4096.
8. Vypočítejte součet prvních osmi členů geometrické posloupnosti

$$a, -b, \frac{b^2}{a}, -\frac{b^3}{a^2}, \dots$$

9. Vypočítejte součet posloupnosti

$$\frac{r}{q} + \frac{r}{q^2} + \frac{r}{q^3} + \dots + \frac{r}{q^{n-1}} + \frac{r}{q^n}.$$

$$s_n = \frac{r(q^n - 1)}{q^n(q - 1)}.$$

10. Jsou-li z veličin a_1, q, n, a_n a s_n (§. 263.) dány kterékoli tři, odvoďte vzorce, jimiž určuje se pokaždé ostatních dvě veličin.

Jsou-li dány veličiny a_1, n a s_n , obdržíme pro q a a_n , jsou-li však dány n, a_n a s_n , obdržíme pro a_1 a q rovnice téhož stupně.

Máte řešiti následující úlohy :

	a_1	q	n	a_n	S_n
11.	7	4	9	a_n	S_n
12.	6	$\frac{3}{4}$	n	$1\frac{2}{5}1\frac{7}{2}$	S_n
13.	4	3	n	a_n	118096
14.	4096	q	14	0.5	S_n
15.	31	q	n	$3827\frac{1}{8}1\frac{3}{1}$	$5454\frac{7}{8}1$
16.	a_1	$-\frac{1}{2}$	5	$\frac{3}{4}$	S_n
17.	a_1	2	14	a_n	$2047\frac{7}{8}$
18.	a_1	3	n	117147	265720

19. Mezi 5 a 405 vložte tři čísla tak, abyste obdrželi geometrickou posloupnost.

20. Vložte mezi dva a dva členy posloupnosti 1, 10, 100, 1000, ... pět nových členů.

21. Mezi 1 a $\frac{1}{2}$ vložte 11 členů geometrické posloupnosti. (Použití v nauce o zvuku.)

22. Vložte mezi x^8 a y^8 sedm členů tak, abyste obdrželi geometrickou posloupnost.

Vypočítejte součet posloupností:

23. $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$.

24. $a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6$.

25. $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-2} + x^{n-1}$.

26. Vypočítejte a) součet posloupnosti $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$
b) součet prvních dvou, tří, čtyř, pěti, šesti členů.

Vypočítejte součet následujících sestupných posloupností:

27. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$

28. $1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{64} + \frac{81}{256} - \dots$

29. $1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} - \dots$ při $b < a$.

30. $1 + \frac{1}{1.05} + \frac{1}{1.05^2} + \frac{1}{1.05^3} + \dots$

31. Použitím geometrické posloupnosti proměňte naprosto občíslný desetinný zlomek v obyčejný, znamená-li b občíslí a n počet číslic jejích. (Viz §. 108., 2)

32. Taktéž proměňte ve zlomky obyčejné:

a) 0.6; b) 0.81; c) 0.105; d) 8.7.

33. Znamená-li ve smíšeně občíslném zlomku desetinném b periodu, n počet jejích číslic, a číslo před periodou a m počet jeho číslic: kterak tento desetinný zlomek ω se promění v obyčejný použitím geometrické posloupnosti? (V. §. 108., 3)
34. Taktéž proměňte ve zlomky obyčejné:
a) $0\cdot6\dot{4}$; b) $0\cdot12\dot{5}\dot{4}$; c) $9\cdot3\dot{5}1\dot{3}$.
-
35. 248 zl. má se rozdělit 5ti osobám tak, aby každá následující osoba dostala dvakrát tolik zlatých, kolik předcházející; mnoholi obdrží každá osoba?
36. Někdo sadí 6krát do loterie, po prvé 10 kr., nato vždy dvakrát tolik, kolik v předcházející hře. V šestém tahu vyhraje 4800násobnou sázku. Mnoholi tedy vyhrál, a mnoholi dohromady prosázal?
37. Někdo si uloží v lednu 1 kr. a v každém následujícím měsíci 3krát tolik, kolik v předcházejícím; mnoholi si uložil za rok?
38. Dluh 13000 marků má se splatiti čtyřmi částkami, z nichž každá jest 3krát větší nežli předcházející; jak veliká jest každá částka?
39. Vynálezce hry v šachy vyžádal si za odměnu taký počet zrn pšeničných, aby mohl na první pole šachovnice položit 1 zrn, na druhé 2, na třetí 4, a t. d. na každé následující pole (do 64ti) dvakrát tolik zrn, kolik na předcházející. Mnoholi tuní (à 1000 Kg.) zrn bylo by k tomu potřebí, váží-li 20000 zrn 1 Kg.?
40. V sudu jest 100 litrů vína; z toho vyberu 1 l. a přileju za to 1 l. vody, ze směsi vyberu opět 1 l. a přileju 1 l. vody a t. d. Kolikrát to mohu opakovati, aby ve směsi zbylo konečně jen 50 l. vína?
41. Paprsek, procházející skleněnou deskou, pozbývá $\frac{1}{10}$ své světlosti; jak veliká bude světlost paprsku, prošedšího 10ti deskami za sebou postavenými?
42. Nádržka vývěvy obsahuje 5·2 krychl. dm., bota se spojovací rourou 0·6 krychl. dm.; kolik pohybů pístu jest potřebí, aby vzduch v nádrže zředěn byl až na $\frac{1}{10}$ původní hustoty?
43. Součet tří prvních členů geometrické posloupnosti rovná se 156, první člen jest 16; vyhledejte udavatele.

44. 12 čísel tvoří geometrickou posloupnost; součet šesti prvních členů jest b , součet ostatních c , která jsou ta čísla?
45. V geometrické posloupnosti jest součet členu třetího a čtvrtého b , rozdíl členu třetího a pátého d ; vyhledejte udavatele a první člen.
46. V geometrické posloupnosti o desíti členech jest součet členů lichých 36905, sudých však 110715; vyhledejte udavatele a první člen.
47. Tři čísla tvoří geometrickou posloupnost; jich součet jest 21 a součet jich čtverců 189, která jsou ta čísla? (Viz úl. 41. na str. 261.)
48. Rozvedte každý člen geometrické posloupnosti
 $3, 48, 768, 12288, \dots$
na 4 části tak, aby všechny ty části tvořily opět geometrickou posloupnost.
49. Je-li dána posloupnost arithmetická
 $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$
a geometrická
 $1, q, q^2, q^3, \dots$
násopte členy obou posloupností, stojící na týchž místech a vypočítejte součet s_n takto vzniklé řady.
Nejprve vypočítejte $qs_n - s_n$, z toho pak s_n .
50. Taktéž vypočítejte součet řady
 $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots + nx^n$.

3. Složitě úrokování a počet o stálém důchodu.

(§§. 259.—263.)

1. Nač vzroste jistina 5800 zl. za 15 roků při 5% složitých úroků?
2. Někdo uloží 5042 marků ve spořitelně, která půletně zúročuje vklady na $4\frac{1}{2}\%$; mnoholi jistiny i s úroky z úroků dostane po 20ti letech?
3. Kterou hodnotu bude mít jistina 7324 zl. 20 kr., uložená na $4\frac{1}{2}\%$ složitých úroků, za $23\frac{3}{4}$ roků?
4. Les jak stojí dal by nyní 42350 krychl. m. dříví; mnoholi krychl. m. by dal po 10ti letech, přibývá-li ho ročně o 3%?

5. Jistá země má 548200 obyvatelů; mnoholi jich bude mít po 14ti letech, přibývá-li obyvatelstva ročně $1\frac{1}{2}\%$?
6. Jistina 9000 zl. jest splatná za 10 let bez úroků; která jest nynější její hodnota při 5% složitých úroků?
7. Za jistinu, uloženou na 9 roků při $4\frac{1}{2}\%$ složitých úroků, obdržel někdo 5234 zl.; která byla původní jistina?
8. Les jak stojí dal by nyní 180000 krychl. m. dříví; mnoholi dříví by byl dal před 15ti lety, jestliže ho v tom čase pravidelně přibývalo ročně o 4% ?
9. Jisté město má nyní 36230 obyvatelů; mnoholi jich mělo před 30ti lety, přibývalo-li obyvatelstva ročně 2% ?
10. Jistina 7537 zl. 80 kr. vzrostla za 20 roků při složitém úrokování na 20000 zl.; na kolik $\%$ byla uložena?
11. 3200 marků, před 80ti lety uložených, vzrostlo v tom čase i s úroky z úroků na 34059·83 marků; na kolik $\%$ byla jistina uložena?
12. Před 12ti lety mohlo se v lese káceti 27000 krychl. metrů dříví, nyní ho tam jest 35000 krychl. m.; kolik $\%$ ho přirostlo ročně?
13. Za kolik roků bude konečná jistina rovnati se násobné jistině a , uložené na $p\%$ složitých úroků?
 Položíme-li $aq^n = ma$, bude $n = \frac{\log m}{\log q}$.
14. Za kolik roků se zdvojnásobí jistina při 5% složitých úroků?
15. Za kolik roků ztrojnásobí se jistina na 4% uložená a) při celoročním, b) při půlletním složitém úrokování?
16. Jisté město má 5200 obyvatelů; za kolik roků bude jich mít 9433, přibývá-li obyvatelstva ročně $1\frac{1}{4}\%$?
17. Z 10000 zl. splatí dlužník po 3 letech 2500 zl., po 6ti letech 1000 zl.; mnoholi bude ještě dlužen po 10ti letech, počítá-li se 5% složitých úroků?
18. Jistina a zúročuje se číslem úrokovým q ; koncem každého roku odečte se $v\%$ správních výloh, nač vzroste jistina za n roků?

$$a_n = aq^n \left(1 - \frac{v}{100}\right)^n.$$

19. Někdo ukládá po 20 let počátkem každého roku 200 zl. na 4% složitých úroků; mnoholi bude mít v době posledního vkladu?
 20. Někdo má po 6 let každoročně platiti 285 zl., zůstane však dlužen až na začátek šestého roku; nač vzrostl jeho dluh do tohoto času, počítá-li se 6% složitých úroků?
 21. Jistina r ukládá se každoročně po n roků na $p\%$ složitých úroků; koncem každého roku odečte se $v\%$ správních výloh; nač vzrostly všechny vklady v době posledního vkladu?
 22. Někdo ukládal počátkem každého roku tutéž sumu na $4\frac{1}{2}\%$ složitých úroků, a za 12 roků obdržel za to 1939 zl. 18 kr.; který byl roční vklad?
 23. Dluh 12500 franků jest splatný za 7 roků, má se však uhraditi sedmi rovnými částkami, splatnými počátkem každého roku; mnoholi musí se pokaždé zaplatiti při 5% složitých úroků?
 24. Mnoholi musí dlužník upláceti koncem každého roku, aby uhradil dluh 8000 marků, splatný za 10 let bez úroků, počítají-li se $4\frac{1}{2}\%$ úroků?
 25. Statkář chce proti krupobití pojistiti polní úrodu, jejíž předběžně vypočítaná cena jest 6800 zl.; které roční pojistné vyměří mu pojišťovací společnost při 5% složitých úroků, předpokládá-li se, že krupobití v oné krajině zničí úrodu polní průměrně vždy za 16 roků?
-
26. K jistině 5000 zl., uložené na $4\frac{1}{2}\%$ složitých úroků, přidává se koncem každého roku 500 zl.; mnoholi bude v pokladnici za 8 roků?
 27. Les, jehož roční přírostek jest $2\frac{1}{4}\%$, dal by nyní 145678 krychl. m. dříví; mnoholi dříví dá po 18ti letech, kácí-li se koncem každého roku 1175 krychl. m.?
 28. Někdo chce dluh 10000 marků, zúročených na 5%, uhraditi v 10ti rovných ročních lhůtách; mnoholi musí pokaždé zaplatiti?
 29. Město si vypůjčilo u banky jistou sumu, kterou chce uhraditi v 25ti letech tím způsobem, že koncem každého roku splatí 28000 marků; mnoholi banka půjčila městu na 5% složitých úroků?

30. Mnoholi zbývá z dluhu 26000 zl. při 5% složitých úroků po 10ti letech, platí-li se ročně 2000 zl. na uhrazení úroků a části dluhu?
31. Kterou jistinu musíme uložit na $4\frac{1}{2}\%$ složitých úroků, abychom mohli koncem každého roku vybírat 250 marků, a za 15 roků aby zbylo ještě 1300 marků?
32. Otec pozůstává svým pěti dětem 20000 zl., kteréž se uloží na 5% složitých úroků. Koncem každého roku vybírají děti 1500 zl.; po 6ti letech zbývající jmění rozdělí se dětem na rovné části, mnoholi dostane každé?
33. Někdo koupí dům a splácí kupní sumu tak, že po 20 roků koncem každého roku složí 3600 marků; zač koupil dům, obsahuje-li každoroční splátka také 5% úroků za dluh ještě zbývající?
34. Mnoholi se musí přidati koncem každého roku k jistině 4500 zl., aby tato při $5\frac{1}{2}\%$ složitých úroků za 6 let se zdvojnásobila?
35. Les, jenž by dal nyní 150000 krychl. m. dříví, a jehož ročně přibývají 2%, má se ve 12ti letech vyplaniti; mnoholi se může ročně káceti, chce-li majitel lesa každoročně prodati totéž množství dříví?
36. Někdo vybírá každoročně 1000 marků z jistiny 12532 marků, uložené na $4\frac{1}{2}\%$ složitých úroků; za kolik roků bude jistina vyčerpána?
37. Obec chce 6tiprocentovou půjčku 4000000 zl. uhraditi tím, že každoročními 400000 zl. splácí jistinu i úroky z úroků; za kolik let bude dluh zapraven?
38. Někdo ustanoví v závěti, že jeho věrný sluha až do smrti má dostávat každoročně 100 zl. Dedicové se smluví se sluhou, že mu jednou na vždy zaplatí 1200 zl. Kolik roků musel by sluha ještě žít, aby z této smlouvy neměl ani škody ani prospěchu, počítá-li se 5% úroků?
39. Někdo si vypůjčí ve spořitelně 8000 zl., které chce zapraviti v 15ti letech po rovných částech, splatných koncem každého roku; mnoholi musí pokaždé splatiti, zúročuje-li spořitelna vydané peníze na 6%, přijaté však na $5\frac{1}{2}\%$?
40. Pán chce pojistiti sluhovi svému 1000 zl. splatných po 11ti letech; které pojistné musí jednou na vždy zaplatiti pojišťovacímu ústavu, jenž úročuje na 5%?

41. Která jest nynější hodnota důchodu 420 zl. splatného po 11 let koncem každého roku, počítáme-li 4% úroků?
42. Někdo prodá rentu 620 marků, kterou má ještě po 10 let dostávat koncem každého roku; mnoholi za ni obdrží, počítá-li 4% složitých úroků?
43. Otec ukládá od narození syna svého počátkem každého roku 400 marků do spořitelny; mnoholi ústav tento vyplatí synovi počátkem 24ho roku při 5% složitých úroků?
44. Někdo pojistí synu svému 3000 zl., kteréž pojišťovací ústav má vyplatiti počátkem 15ho roku; mnoholi pojistného musí otec do té doby platiti počátkem každého roku, je-li číslo úrokové 1·055?
45. Někdo chce po své smrti zůstaviti ženě své 4000 zl.; mnoholi musí počátkem každého roku platiti pojišťovací společnosti, podobá-li se ku pravdě, že bude ještě živ 15 roků, a počítají-li se 5tiprocentové úroky z úroků? *188 zl*
46. Jistina 20000 zl. má se při 4% složitých úroků vyčerpati ročním důchodem, jenž počínaje začátkem prvního roku má se vybírat po 30 roků; jak veliký bude důchod?
47. Někdo uloží 12000 zl. na 4% složitých úroků; kterou rentu může za to vybírat po 24 let koncem každého roku?
48. Někdo pojistí 1000 zl. ročním pojistným 27 zl.; za kolik roků bude pojištěná suma při 4³/₄% uhrazena veškerým pojistným?
49. Jistina 8000 zl. má se vyčerpati důchodem 801·12 zl., splatným ku konci každého roku; kolik roků důchod se musí vypláceti při 4% úroků?
50. Kolik let může se koncem každého roku vybírat důchod 600 zl., jehož nynější hodnota jest 10000 zl., počítá-li se 6% úroků?
51. Někdo platí na pojištěných 5000 marků počátkem každého roku pojistné 180 marků; umře-li po 24ti letech, mnoholi má pojišťovací ústav zisku aneb ztráty při 4% složitých úroků?
52. Který roční důchod, jehož někdo užívá po 10 let, má tutéž nynější hodnotu jako roční důchod 500 zl., jenž se má vypláceti po 15 let, počítáme-li 4¹/₂% složitých úroků?

53. Někdo má po 30 let užívati ročního důchodu 1800 marků, chce však dostávati větší sumu po 20 roků; který bude tento nový důchod při $4\frac{1}{2}\%$ úroků?
54. Roční důchod r , jenž při čísle úrokovém e má se vypláceti po n roků, budiž proměněn v jiný důchod r' při čísle úrokovém e' ; kolik roků tento nový důchod se bude vypláceti?
55. Někdo chce po 18 let počátkem každého roku platiti určitou sumu, aby po tomto čase on aneb někdo jiný po 10 let koncem každého roku dostával rentu 800 marků; mnoholi musí ročně platiti při 5% úroků?
56. Mnoholi musí někdo po 20 let počátkem každého roku platiti pojišťovací společnosti, aby po uplynulém tom čase při $4\frac{1}{2}\%$ úroků mohl užívati renty 300 zl. po 12 roků?
57. Někdo platí po 30 let počátkem každého roku 68 marků důchodnému ústavu, jenž úročuje na 4% ; který důchod bude mu ústav v následujících 7 letech vypláceti koncem každého roku?
58. Někdo se domnívá, že bude ještě 20 roků s to, aby pracoval; mnoholi musí v tomto čase ročně ukládati na úroky à $5\frac{1}{2}\%$, aby pak ještě po 25 let mohl užívati ročního důchodu 900 marků?
59. Kterou rentu bude někdo dostávati po 15 let koncem každého roku, jestliže dříve po 35 let počátkem každého roku složil 125 zl. na 5% úroků?
60. Někdo se domnívá, že bude ještě 15 let s to, aby pracoval; v tomto čase uloží každoročně 250 zl. na 5% úroků. Jak dlouho může po uplynulém tom čase užívati roční renty 400 zl.?

4. Konvergence a divergence řad.

(§§. 264.—266.)

Vyšetřete, zdali následující řady konvergují aneb divergují:

1. $\frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \dots$ 2. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$
3. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} + \dots$ 4. $1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{7} + \frac{7}{10} + \dots$
5. $1 + \frac{2}{11} + \frac{3}{21} + \frac{4}{31} + \dots$ 6. $1 + \frac{2}{2.3} + \frac{4}{3.9} + \frac{8}{4.27} + \dots$

Vyšetřete, zdali vůbec a při kterých podmínkách následující řady konvergují:

7. $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$
8. $1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \dots$
9. $\frac{1}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{3x^2}{4} + \frac{4x^3}{5} + \dots$
10. $1 + ax + \frac{a^2x^2}{1.2} + \frac{a^3x^3}{1.2.3} + \dots$
11. $a + \frac{a+d}{d} + \frac{a+2d}{d^2} + \frac{a+3d}{d^3} + \dots$
12. $\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \dots$

Vyšetřete konvergenci nekoneč. řad, jichž obecné členy jsou :

13. $a_n = \frac{n \cdot 2^{n-1}}{3^{n-1}}$
14. $a_n = \frac{n^2 + 2n + 2}{1.2.3 \dots (n-1)}$
15. $a_n = \frac{nx^n}{10n^2 - 1}$
16. $a_n = \frac{4.6 \dots (2n+2)}{3.5 \dots (2n+1)} \cdot x^{n-1}$

VI. Nauka o kombinacích.

1. Přestavování.

(§§. 268.—270.)

1. Kolikrát a kterak lze přestaviti písmena slova ROMA?
2. Utvořte z prvků a, b, c, d, e slovníkářsky přestavy začínající 1) prvkem a , 2) prvkem c .
3. Utvořte přestavy prvků a, a, a, b, b, c .
4. Kolik přestav dají činitelé součinu a^5b^3 ?
5. Kolik čtyřciferných čísel lze vyjádřiti číslicemi 3, 0, 7, 4?
6. Kolik pěticefurných čísel obsahuje číslici 6 dvakrát, číslici 3 dvakrát a číslici 5 jednou?
7. Kolik čísel 9cifurných lze utvořiti z 9ti číslic arabských tak, aby číslice každého čísla byly nerovny?

8. Kolikráte může 5 osob u stolu předsednouti, aby po každé seděly v jiném pořádku?
9. V koliku rozličných polohách přímo vedle sebe mohou býti 3 kuličky bílé, jedna kulička modrá a dvě kuliček červených?

Sestavování.

(§§. 271. — 274.)

10. Sestavte z prvků x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 veškerá amba a terna
a) bez opakování, b) s opakováním.
11. Kolik amb a teren 1) bez opakování, 2) s opakováním lze sestaviti z 6 prvků?
12. Kolik prvků dá v některé třídě též počet sestav s opakováním, mnoholi jich dá 10 prvků v téže třídě bez opakování?
13. Kolik unionů, amb, teren, kvateren a kvinteren dá a) 90 čísel obyčejné loterie, b) 5 čísel jednoho tahu?
14. Kolik vesměs rozličných vrhů lze učiniti dvěma kostkami, a které jsou ty vrhy?
15. Kolik trojúhelníků může vzniknouti, protíná-li se 10 přímek?
16. Kolikráte a kterak lze strany a, b, c a úhly α, β, γ trojúhelníku po třech sestaviti?
17. Vyhledejte počet veškerých činitelů čísla 2310.
18. Kolikerym způsobem můžeme 32 karty rozdati 4 hráčům, aby každý dostal 8 karet?

Obměňování.

(§§. 275. — 278.)

19. Utvořte z prvků a, b, c, d, e obměny druhé a třetí třídy bez opakování.
20. Utvořte z prvků a, b, c, d prvních 20 obměn třetí a čtvrté třídy s opakováním.
21. Kolik obměn druhé, třetí, čtvrté třídy a) bez opakování, b) s opakováním dá deset prvků?
22. Kolik jest 3ciferných čísel, jichžto číslice od sebe se liší?
23. Kolik čtyřciferných čísel lze vyjádřiti číslicemi 3, 4 a 5?

24. Kolik rozličných vrhů lze učiniti dvěma kostkami?
25. Kolik rozličných vrhů lze učiniti třemi kostkami, aby součet byl pokaždé 10?
26. Optický telegraf má 6 ramen, a každému ramenu lze dáti 4 rozličné směry; kolik znamení může se telegrafem tím naznačiti?

2. Počet (pravdě-)podobnosti.

Prostá a vztahitá podobnost. (§§. 279. a 280.)

1. Která jest podobnost, že penízem hodím „hlavu“?
2. Která jest podobnost, že penízem hodím spíše „hlavu“ nežli písmo?
3. V nádobě jest pět kuliček; která jest podobnost, že jediným hmatnutím vyberu a) lichý, b) sudý počet kuliček?
4. V nádobě jest 10 bílých a 6 červených kuliček; která jest podobnost, že vytáhnu kuličku bílou?
5. V nádobě jsou 4 bílé, 3 červené a 2 modré kuličky; která jest podobnost, že mezi 4 kuličkami, které najednou vytáhnu, budou dvě červené, jedna bílá a jedna modrá?
6. V nádobě jest 8 kuliček bílých, 6 červených, 10 modrých a 5 černých; která jest podobnost, že z vytažených dvou kuliček jest spíše jedna bílá a modrá, nežli jedna červená a jedna černá?
7. Která jest podobnost, že z 32 karet vytáhnu a) červenou barvu, b) „coeur“, c) krále, d) figuru, e) určitou kartu.
8. Která jest podobnost, že z 32 karet vytáhnu najednou a) 2 červené karty, b) 5 „piques“?
9. Která jest podobnost, že z 52 karet vytáhnu spíše červenou figuru nežli bleďočervenou kartu?
10. Která jest podobnost, že třemi kostkami vrhnu dvě čísel rovných?
11. Která jest podobnost, že dvěma kostkami vrhnu dvě čísel, jichžto součet jest větší nežli 8?
12. Která jest podobnost, že třemi kostkami vrhnu a) současně 3, 4 a 6, b) součet 6?

13. Která jest vztažitá podobnosť, že dvěma kostkami vrhnu a) spíše 7 nežli 10, b) spíše 7 nežli 5?
14. V obyčejné loterii vytáhne se 5 čísel z 90ti; která jest podobnosť, že vyhraje a) nominato, b) vůbec extrato, c) ambo, d) terno?

Podobnosť složitá. (§§. 281.—285.)

15. Která jest podobnosť, že dvěma kostkami vrhneme po první paš, po druhé 8?
16. Která jest podobnosť, že třemi kostkami vrhneme po první 5, po druhé 4?
17. Která jest podobnosť, že jedinou kostkou vrhneme a) po první 1, po druhé 2; b) v 6ti vrzích po první 1, po druhé 2, . . . po šesté 6?
18. Která jest podobnosť, že dvěma kostkami 3krát po sobě vrhneme paš?
19. Která jest podobnosť, že jedinou kostkou 3krát po sobě nevrhneme 1?
20. Která jest podobnosť, že z 52 karet 3krát po sobě vytáhneme eso?
21. Dvě osoby mají po 32 kartách a obě táhnou současně po jedné kartě; která jest podobnosť, že A vytáhne kartu bleďo-červenou a B černou figuru?
22. Která jest podobnosť, že z 32 karet po první a po druhé vytáhneme krále a dámu téže barvy v kterémkoli pořádku?
23. Která jest podobnosť, že z 52 karet vytáhneme po první „coeur“, po druhé „careau“, po třetí „pique“ a po čtvrté „treffe“?
24. Která jest podobnosť, že ze 3 bílých, 4 červených, 5 žlutých a 6 modrých kuliček, které jsou v jakési nádobě, vytáhneme bílou, červenou a neb žlutou kuličku?
25. V nádobě A jest 6 červených kuliček a 4 bílé, v nádobě B jest 8 červených a 6 bílých kuliček; táhneme-li současně z obou nádob, která jest podobnosť, že vytáhneme z každé bílou kuličku?
26. V nádobě jest 90 čísel; která jest podobnosť, že po první vytáhneme z nich číslo 1, po druhé pak číslo 90, a) vloží-

me-li číslo po prvé vytažené zase do nádoby, b) neučiníme-li tak?

27. V nádobě jest 12 bílých a 9 černých kuliček; táhneme-li 8krát po sobě po jedné kuličce, která jest podobnost, že nejprvé 5krát po sobě vytáhneme kuličku bílou, na to 3krát po sobě kuličku černou, a) vložíme-li kuličku po každém tahu zase do nádoby, b) neučiníme-li tak?
28. Po dráze z A do B jezdí denně 4 vlaky o 8 vozech, z nichžto každý má 3 oddělení. Někdo vyjede jistého dne ze stanice A, věda, že jeho přítel tutéž cestu koná 2krát v témdni. Která jest podobnost, že se s ním shledá v témž voze a v témž oddělení?

Mathematická naděje. (§§. 286. a 287.)

29. Někdo může vyhrati 2 zl., vrhne-li 5 dvěma kostkami; která jest jeho mathematická naděje?
 30. Ve hře v kostky může někdo vyhrati 1 zl., vrhne-li paš dvěma kostkami; mnoholi musí sádit?
 31. Hráči A a B se smluví, že obdrží celou sázku, kdo dříve třikrát vyhraje; ale když A jednou a B dvakrát vyhrál, hráči se rozejdou, v kterém poměru sázka se tedy musí rozdělit?
 32. Někdo nabízí 1 zl. tomu, kdo z nádoby, v níž jest 5 bílých, 6 červených a 7 modrých kuliček, jediným hmatnutím vytáhne 2 bílé, 3 červené a 4 modré kuličky, jestliže dostane pokaždé 8 krejcarů, bude-li vytaženo 9 jiných kuliček; jest mu sázka prospěšna aneb na škodu?
 33. V loterii, čítající 10.000 losů, jest jedna výhra 20.000 zl., jedna 10.000 zl., 10 výher po 1000 zl., 40 po 100 zl. a 1000 po 5 zl.; která jest mathematická naděje majitele jediného losu?
 34. V malé loterii vyplácí se výhra a) amba 240násobnou sázkou, b) terna 4800násobnou sázkou; mnoholi % získá lotto, nehledí-li se na správné výlohy?
-

Podobnost v ohledu na věk lidský. (§§. 288.—292.)

35. Která jest podobnost, že 20letá osoba dožije a) 30ho, b) 56ho, c) 70ho roku?
36. Která jest podobnost, že osoba a) 18letá, b) 35letá, c) 50letá dožije 60ho roku?
37. Který jest ku pravdě podobný věk a) novorozence, b) osoby 12ti-, c) 18ti-, d) 36ti-, e) 55tileté?
38. Který jest rozdíl ku pravdě podobného a středního věku osoby a) 15ti-, b) 36ti-, c) 50ti-, d) 65tileté?
39. Muži jest 50, jeho ženě 40 let. Která jest podobnost, že za 20 roků bude a) muž ještě živ, b) žena ještě živa, c) že oba budou živi; že bude d) muž již mrtev, e) žena již mrtva, f) že budou oba již mrtvi; že g) muž bude déle živ nežli žena, h) žena bude živa déle nežli muž, že bude i) ještě na živě muž aneb žena, k) již mrtev muž aneb žena mrtva?
40. Jisté osobě jest 42 let; mnoho-li musí při 4% složitých úroků složití v pojišťovacím ústavu, aby po její smrti dědicům jejím vyplacena byla jistina 4800 zl.?
41. Které pojistné musí osoba 32letá počátkem každého roku platiti až do své smrti, aby pak dědicům jejím vyplacena byla jistina 2000 marků?
42. Otec platí pojišťovacímu ústavu počátkem každého roku prémii 500 marků, aby pojistil svému novorozenci, až by tomuto bylo 18 let, jakousi jistinu; počítá-li se 5% složitých úroků, která bude ta jistina?
43. Která jest nynější hodnota doživotného důchodu 280 zl., jež 36letá osoba dostává koncem každého roku, počítáme-li 4% složitých úroků?
44. Osoba 45letá koupí si vkladem 6000 zl. důchod, jehož chce užívati až do své smrti, počínajíc koncem nynějšího roku; který jest ten důchod při 4½% složitých úroků?
45. Vypočítejte při 5% úroků nynější hodnotu doživotného důchodu 1500 marků, náležejícího dvěma 50ti- a 62tiletým osobám, má-li se důchod tento vypláceti, pokud bude aspoň jedna z těch osob na živě?
46. Osobě A jest 60, osobě B 48 let; A chce osobě B koupiti doživotní důchod 600 zl., jenž má začíti koncem roku, kdy

A zemře. Kterou jistinu musí A zaplatiti důchodnému ústavu, jenž počítá $4\frac{1}{2}\%$ úroků?

47. Osobě A jest 50, B však 35 let; A platí počátkem každého roku rovnou sumu pojišťovacímu ústavu, aby tento po její smrti vyplácel osobě B koncem každého roku důchod 500 zl. Mnoholi platí A každoročně při 5% úroků?
48. Osoba A, již jest 65 let, platí ročně 300 zl. důchodnému ústavu, aby tento po jeho smrti vyplácel koncem každého roku jistý důchod jeho nyní 12letému synovi až do skončeného roku 30ho. Kterého důchodu bude syn užívati, počítají-li se 4% složitých úroků?
49. Muž 40letý chce ve vdovské pokladnici, počítající 4% úroků pojistiti své 35leté ženě roční důchod 300 zl. Složí-li 800 zl. přístupného, mnoholi musí ještě každoročně platiti?

3. Mocniny dvoučlenů.

(§§. 295.—299.)

1. $(x + a)^4$. 2. $(x - y)^{10}$. 3. $(3a + 4b)^5$.
 4. $(5a - 3b)^6$. 5. $(x^2 + 2y)^4$. 6. $(3m^2 - 2n^3)^5$.
 7. Který jest a) šestý člen vyvinuté mocniny $(5x^2 + 6a^2)^{10}$,
 b) součinitel mocniny a^{12} , vyvineme-li $(3a^2 - 2b^2)^m - (2a^2 - 3b^2)^{2m}$?
 8. $\left(\frac{a}{2} + \frac{b^2}{3}\right)^5$. 9. $\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right)^4$. 10. $\left(\frac{2a}{3b} + \frac{3b}{4a}\right)^5$.
 11. $\left(\frac{4m}{3n} + \frac{9n}{4m}\right)^6$. 12. $\left(\frac{ax^2}{2by^2} + \frac{4b^2y}{a^2x}\right)^5$. 13. $\left(\frac{3ab^2}{4c^3y^2} - \frac{2c^3y}{3a^2b}\right)^4$.
 14. Udejte a) osmý člen mocniny vyvinuté $\left(\frac{5ax^2}{6by^2} + \frac{3bx}{5ay}\right)^{11}$, b)
 součinitele mocniny x^9 v $\left(\frac{3x^2}{5a} - \frac{5a^2}{3x}\right)^{12}$.
 15. Vyviňte $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ v řadu a ustanovte její hodnotu při $x = \infty$.

Obdržíme řadu :

$$1 + \frac{1}{1} + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{1.2} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{2}{x}\right) \cdot \frac{1}{1.2.3} + \dots$$

a při $x = \infty$

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots \text{ (viz §. 207.)}$$

16. $(4 + \sqrt{3})^8$. 17. $(6 - 5\sqrt{2})^6$. 18. $(a\sqrt{b} - b)\sqrt{a}^5$.
 19. $(1 + \sqrt{-1})^3$. 20. $(3 - i)^4$. 21. $(1 + 2i)^5$.
 22. $(x + i)^4$. 23. $(\sqrt{-2} - 2)^6$. 24. $(2\sqrt{a} - bi)^5$.
 25. $(1 + \sqrt{-5})^4 + (1 - \sqrt{-5})^4$.
 26. $\left(\frac{3 + \sqrt{-2}}{2}\right)^5 + \left(\frac{3 - \sqrt{-2}}{2}\right)^5$.
 27. $(a + b)^{-3}$. 28. $(2x - 3y)^{-4}$. 29. $(ax^2 - by^2)^{-2}$.
 30. $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^{-2}$. 31. $\left(\frac{3a}{4} + \frac{5b}{6}\right)^{-3}$. 32. $\left(\frac{2m}{5n} - \frac{10n}{3m}\right)^{-4}$.
 33. $(a^2 + x)^{\frac{1}{2}}$. 34. $(a^2 - x)^{\frac{1}{2}}$. 35. $(x^6 - y^3)^{\frac{1}{2}}$.
 36. $\sqrt[3]{a^3 + x}$. 37. $\sqrt[3]{a^3 - x}$. 38. $\sqrt[5]{1 - x^5}$.
 39. $\sqrt{50} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{49}} = 7 \cdot \left(1 + \frac{1}{49}\right)^{\frac{1}{2}} = \dots$
 40. $\sqrt{63} = \sqrt{64 - 1} = 8 \cdot \left(1 - \frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{2}} = \dots$
 41. $\sqrt[3]{7}$. 42. $\sqrt[3]{218}$. 43. $\sqrt[3]{508}$.
 44. $\sqrt[4]{85}$. 45. $\sqrt[6]{66}$. 46. $\sqrt[5]{3120}$.
 47. $\sqrt[3]{a + bi} + \sqrt[3]{a - bi}$. 48. $\sqrt[3]{a + bi} - \sqrt[3]{a - bi}$.
 49. Kterou hodnotu má zlomek $\frac{\sqrt[3]{a + (x-b)} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a - (x-b)} - \sqrt[3]{a}}$ při $x = b$?
 50. $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x}} = \dots$ 51. $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}}$. 52. $\frac{1}{\sqrt[3]{a^3 + x}}$.
 53. $(x + a)^{-\frac{m}{n}}$. 54. $(x^n - a^n)^{-\frac{m}{n}}$.

4. Arithmetické řady vyšších řádů.

(§§. 300.—304.)

Ustanovte rozdílové řady následujících řad původních:

- 1, 3, 8, 16, 27, 41, ...
- 1, 19, 55, 115, 205, 331, ...
- 7, 1, -3, 1, 19, 57, ...
- 9, 37, 69, 117, 217, 429, 837, ...

5. Kterého řádu jest arithmetická řada 1, 6, 15, 28, 45, 66, ...; který jest její obecný a který jest 12tý člen?

Ustanovte řád, obecný a součtový člen každé následující řady:

6. 1, 4, 11, 22, 37, 56, ...
7. 12, 42, 222, 792, 1992, 4062, ...
8. 2, 2, 3, 8, 20, 42, ...
9. 1, -7, -13, -12, 1, 31, ...
10. Ustanovte a) osmý, b) 11tý, c) 15tý člen řady 1, 15, 53, 127, 249, 431, 685, ...
11. Ustanovte součet a) sedmi, b) 9ti, c) 14ti prvních členů řady 1, 6, 21, 52, 105, 186, ...
12. Který jest součet prvních 10ti čísel kubických?
13. Vypočítejte součet 6ho, 9ho a 12ho členu řady 3, 57, 255, 693, 1467, ...
14. Kolikátý člen řady 1, 6, 14, 25, 39, ... jest číslo 344?
15. Obecný člen jisté řady jest $1 + 2n + n^2$; která jest ta řada, a který jest její člen součtový?
16. Ustanovte řadu, jejíž obecný člen jest $5 - 3n - 4n^2 + n^3$.
17. Ustanovte součtový člen řady, jejíž obecný člen jest an^4 .
18. Ustanovte řadu, jejížto součtový člen jest $3n - 4n^2 + 2n^3$.
19. Jsou-li dány řady:
1, 2, 3, 4, 5, ...
a 1, 8, 27, 64, 125, ...
násobte členy stojící na týchž místech a ustanovte součtový člen nové řady.
20. Vyšetřete, zdali vůbec a při které podmínce konverguje řada
 $\frac{1}{1} + \frac{3}{15}x + \frac{7}{53}x^2 + \frac{14}{127}x^3 + \frac{23}{249}x^4 + \frac{34}{431}x^5 + \dots$;
v nížto čitatelé a jmenovatelé tvoří řady arithmetické (§. 266).

Prokládání řad. (§. 306.)

21. Vložte mezi dva a dva členy řady 1, 22, 79, 172, ... dva nové členy tak, aby vznikla řada téhož řádu jako původní.
22. Taktéž vložte dva nové členy mezi dva a dva členy řady třetího řádu 1, 15, 74, 232, ...
23. Vložte dva nové členy mezi dva a dva členy řady 1, 9, 71, 241, 573, ...

24. Vložte 3 nové členy mezi dva a dva členy řady 1, 112, 637, 1900, 4225, . . .
25. Vložte 4 nové členy mezi dva a dva členy řady 1, 4, 16, 37, 67, . . .
26. Obecný člen arithmetické řady druhého řádu má podobu $a_n = a + bn + cn^2$; dáno jest $a_1 = 5$, $a_3 = 25$, $a_5 = 69$, ustanovte dosazením a řešením vzniklých rovnic 1) součinitele a , b , c , 2) řadu samu.
27. Taktéž ustanovte řadu třetího řádu, jejíž obecný člen má podobu $a_n = a + bn + cn^2 + dn^3$, je-li dáno $a_2 = 15$, $a_5 = 156$, $a_6 = 259$, $a_8 = 585$.
28. Jsou-li dány následující členy arithmetické řady druhého řádu: $a_2 = 15$, $a_4 = 67$, $a_8 = 291$, vložte mezi ně členy ostatní.
29. Jsou-li dány následující členy arithmetické řady třetího řádu: $a_1 = 3$, $a_4 = 57$, $a_6 = 203$, $a_{10} = 975$, ustanovte ostatní členy mezi těmito scházející.
30. Ustanovte součtový člen $s_n = An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4$ řady třetího řádu, je-li dáno: $s_1 = 1$, $s_3 = 159$, $s_5 = 1245$, $s_6 = 2586$. Která jest ta řada?

Čísla obrazcová (figurovaná). (§§. 307.—310.)

31. Který jest osmý, 10tý, 15tý člen v řadě čísel trojúhelníkových?
32. Který jest 12tý člen v řadě čísel a) troj-, b) čtyr-, c) pětiúhelníkových?
33. Ustanovte 6tý, 9tý, 12tý člen v řadě čísel trojbokých.
34. Ustanovte 10tý člen v řadě čísel pyramidálních a) troj-, b) čtyr-, c) pětibokých.
35. Mnoholi koulí jest obsaženo v trojbokém jehlanci, jehož nejnížší vrstva má stranu o 9 koulích?
36. Neúplná trojboká hromada koulí se skládá z 5 úplných vrstev a každá strana nejhořejší vrstvy z 8 koulí; mnoholi koulí jest a) v nejspodnější vrstvě, b) v celé hromadě?
37. Mnoholi koulí obsahuje čtyrboký jehlanec, skládá-li se každá strana nejspodnější vrstvy z 10 koulí?

38. Mnoho-li koulí jest v úplné hromadě o 12 vrstvách, tvoří-li vrstvy a) rovnostranné trojúhelníky, b) čtverce?
39. Neúplná čtyrboká hromada koulí má v nejhořejší vrstvě 16, na každé straně nejspodnější vrstvy 10 koulí; mnoholi koulí jest v této hromadě?
40. Mnoholi koulí obsahuje hromada, mající podobu střechy, je-li v nejspodnější vrstvě 15 koulí po délce a 10 koulí po šířce?
41. Mnoholi koulí obsahuje hromada, mající podobu střechy, je-li v nejhořejší vrstvě pořadem 6 koulí, v nejspodnější vrstvě však 11 koulí po délce?

5. Vyšší rovnice číselné.

Vypočítejte z následujících rovnic podíl $\frac{f(x)}{x-a}$ a výsledek

$f(a)$ dle §. 314.

1. $x^3 - 5x^2 - 18x + 72 = 0$ při $a = 2$.
2. $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ při $a = 3$.
3. $x^4 + 3x^3 - 39x^2 - 47x + 210 = 0$ při $a = 4$ a $a = 5$.
4. $x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 7x - 93 = 0$ při $a = 3$ a $a = -4$.
5. $x^4 - 13x^3 + 46x^2 - 52x + 168 = 0$ při $a = 3$, $a = 6$ a $a = 7$.
6. $x^4 + 2x^3 - 41x^2 - 42x + 360 = 0$ při $a = 3$, $a = 4$ a $a = -6$.
7. $x^5 + 5x^4 - 5x^3 - 25x^2 + 4x + 20 = 0$ při $a = -3$ a $a = 4$.
8. $x^6 - 6x^5 - 28x^4 - 158x^3 - 9x^2 - 536x + 420 = 0$ při $a = 5$ a $a = -5$.

Vyhledejte r a c i o n a l n é kořeny následujících rovnic (§§. 318. a 319.):

9. $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$.
10. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.
11. $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$.
12. $x^3 - 39x - 70 = 0$.
13. $x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 = 0$.
14. $x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 = 0$.
15. $x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24 = 0$.
16. $x^4 - 14x^3 + 59x^2 - 94x + 48 = 0$.
17. $x^4 - 2x^3 - 19x^2 + 68x - 60 = 0$.
18. $x^5 + 2x^4 - 42x^3 - 8x^2 + 257x - 210 = 0$.
19. $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = 0$.
20. $x^3 - \frac{11}{6}x^2 + x - \frac{1}{6} = 0$.

21. $x^3 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{3} = 0$. 22. $x^3 - \frac{25}{12}x^2 + \frac{29}{24}x - \frac{5}{12} = 0$.
 23. $x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{28}{3}x^2 + \frac{3}{2}x + 3 = 0$.
 24. $x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{36}x^2 + \frac{2}{27}x - \frac{1}{108} = 0$.
-

Vypočítejte neracionálné kořeny následujících rovnic (§§. 320. až 322.):

25. $x^3 - 7x + 7 = 0$. 26. $x^3 - 2x - 5 = 0$.
 27. $x^3 + 3x - 5 = 0$. 28. $x^3 - 7x + 1 = 0$.
 29. $x^3 + 5x - 4 = 0$. 30. $x^3 - 5x - 3 = 0$.
 31. $x^3 - 5x^2 + 7 = 0$. 32. $x^3 - 2x^2 - 6x + 8 = 0$.
 33. $x^4 - 15x^2 + 20x - 3 = 0$. 34. $x^4 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$.
 35. $x^4 - 20x^2 + 28x + 15 = 0$. 36. $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 5x + 5 = 0$
-

O m y l y.

Strana:	řádek:	na místě:	má býti:
43.	13. shora	$n = pxi$	$n = px,$
101.	16. shora	mocniteli	o d mocniteli.
270.	Úloha 107.	$a^2 - 2ab + b^2$	$a^2 + 2ab + b^2.$
271.	Úloha 131.	$5a^2 - 6ab - 8b^2$	$5a^2 + 6ab - 8b^2.$



COBISS 0

NARODNA IN UNIVERZITETNA
KNJIŽNICA



00000498163

