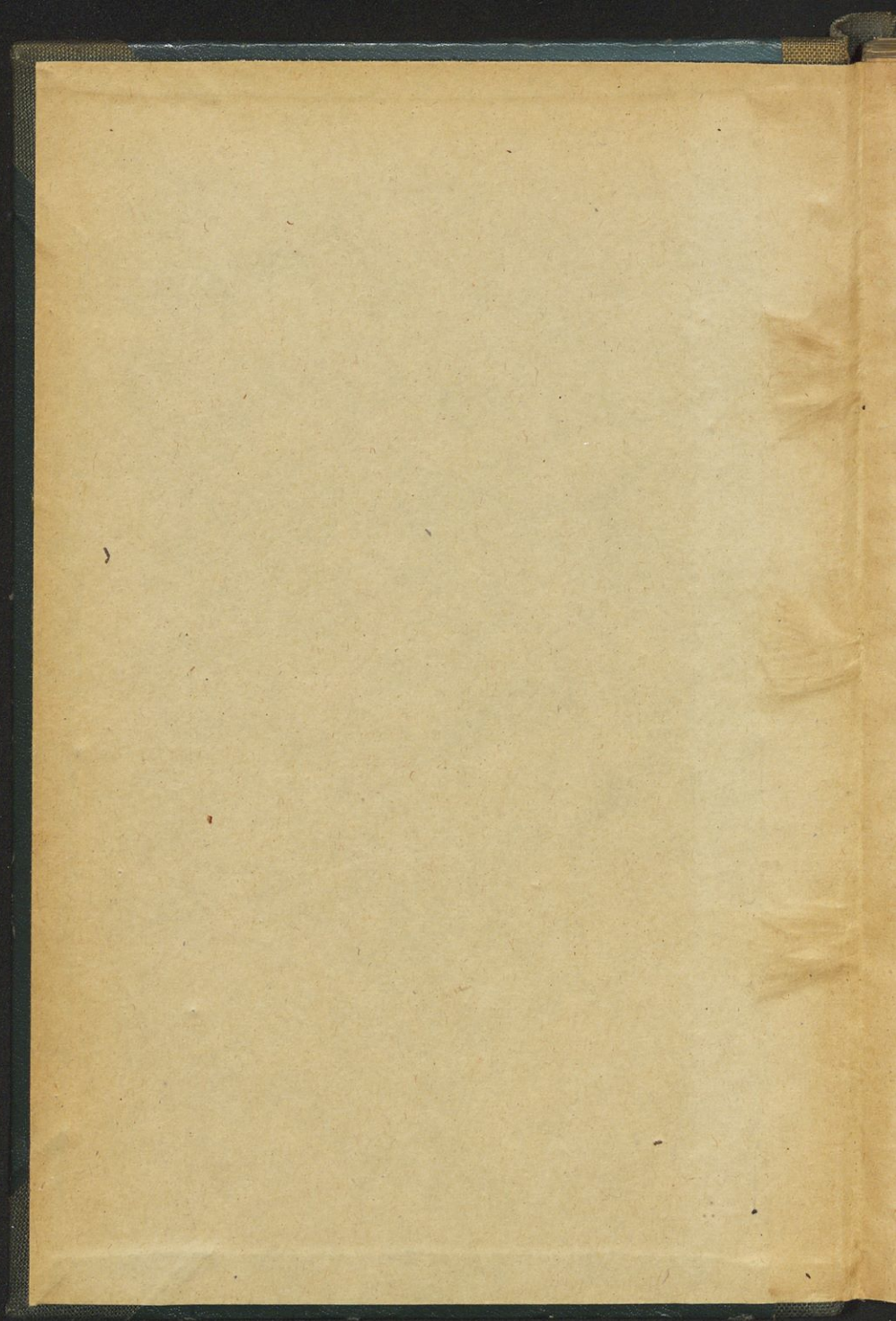


49050



Aritmetika in algebra

za

šesti, sedmi in osmi gimnazijski razred.

Spisal

Blaž Matek, profesor na ~~4~~ kr. gimnaziji v Mariboru.

Izpopolnil

Jakob Zupančič, profesor na ~~4~~ kr. realki v Gorici.

Cena nevezani knjigi K 2.20, v platno vezani K ~~3.10~~ 3.10



1910.

Založila „Katoliška Bukvarna“ v Ljubljani.

Natisnila „Katoliška Tiskarna“.

49050



030046383

Vsebina.

	Stran		Stran
I. Tretji računski način tretje stopnje.		IV. Sestavbe ali kombinacije.	
§ 1. Občna pojasnila o logaritmih	1	§ 15. Permutacije	53
§ 2. Računski zakoni o logaritmih	2	§ 16. Kombinacije	56
§ 3. O Briggovih logaritmih	3	§ 17. Premene	60
§ 4. Uporaba Briggovih logaritmov	8	§ 18. Binomske potence	61
		§ 19. Matematična verjetnost	65
II. Enačbe druge stopnje. Enačbe višjih stopenj, ki se dajo pretvoriti na enačbe druge stopnje. Kvadratne funkcije. Diferencijalni kvocijent in integral.		Vadbe in naloge.	
§ 5. Razreševanje enačb druge stopnje z eno neznanko in njih lastnosti	11	K § 1	I
§ 6. Enačbe višjih stopenj, ki se dajo pretvoriti na kvadratne enačbe	14	„ § 2	II
§ 7. Kvadratne enačbe z dvema in več neznankami	21	„ § 3	III
§ 8. Lastnosti kvadratne funkcije	23	„ § 4	III
§ 9. Načrtavanje kvadratne funkcije in njen diferencijalni kvocijent	26	„ § 5	V
§ 10. Diferencijalni kvocijenti nekaterih najnavadnejših funkcij	30	„ § 6	XII
§ 11. Pojem o integralu	36	„ § 7	XV
III. Postopice.		„ § 8	XX
§ 12. Aritmetične postopice	40	„ § 9	XXI
§ 13. Geometrijske postopice	43	„ § 10	XXI
§ 14. Obrestno obrestni računi	47	„ § 11	XXII
		„ § 12	XXIII
		„ § 13	XXV
		„ § 14	XXVIII
		„ § 15	XXXI
		„ § 16	XXXI
		„ § 17	XXXII
		„ § 18	XXXIII
		„ § 19	XXXIII
		Ponavljalne naloge	XXXV
		Zgodovinski dostavki	LI



I. Tretji računski način tretje stopnje.

Logaritmovanje.

§ 1. Občna pojasnila o logaritmih.

Ako razstavimo določeno število A na enake faktorje a ter določimo, koliko je teh faktorjev, pravimo, da logaritmujemo število A z ozirom na število a , v znakih $A = a^x$. Določeno število A se zove logaritmand ali krajše „število“ sploh, znani faktor a se imenuje osnovno število ali podloga, neznano število x pa logaritem. Da je x logaritem števila A z ozirom na podlogo a , zapišemo tako-le: $x = {}^a\log A$, ali kadar je podloga znana, tudi tako-le $x = \log A$.

Logaritmovati =
logarithmieren.
Logaritmand =
der Logarithmand.

Osnovno število
ali podloga =
die Grundzahl
oder Basis.

Logaritem =
der Logarithmus.

Logaritem določenega števila je torej tisti potenčni eksponent, s katerim se mora znana podloga vzmnožiti, da dobimo dotično število za rezultat, v znakih ${}^a\log A = x$ in $a^x = A$.

Logaritem števila 1 je za vsako podlogo enak 0; zakaj $a^0 = 1$.

Logaritem števila 1 in katerekoli podloge.

Logaritem katerekoli podloge je enak 1; zakaj $a^1 = a$.

Logaritmi enega in istega števila z ozirom na različne podloge so različni; zakaj če bi v enačbi $A = a^x = b^y$ bila eksponenta x in y enaka, bi morali tudi podlogi a in b biti enaki.

Iz

$$2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, \dots$$

$$3^0 = 1, 3^1 = 3, 3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 81, \dots$$

i. t. d.

sledi, da si moremo misliti števila ležeča med 2, 4, 8, 16, ... oziroma med 1, 3, 9, 27, 81, ... tudi kakor potence podloge 2, oziroma kakor potence podloge 3, i. t. d. Števila naravne številne vrste se torej dajo izraziti kakor potence ene in iste podloge. Če to storimo in pregledno sestavimo dotične eksponente, dobimo logaritemski sestav.

Logaritemski
sestav = das
logarithmische
System.

Logaritemski sestav je pregledna razvrstitev tistih potenčnih eksponentov, s katerimi moramo določeno pod-

logo vzmnoževati, da dobimo števila naravne številne vrste za rezultate.

Briggov logaritmski sestav = das Briggs'sche logarithmische System.

Neperjev logaritmski sestav = das Neper'sche logarithmische System.

Ker ne moremo z vzmnoževanjem negativnega števila dobiti vsakega pozitivnega števila in ker je vsaka potenca od 1 zopet 1, smemo za podlogo logaritemskega sestava vzeti le pozitivno število, ki je različno od 1. V rabi sta dva logaritemska sestava. Pri računanju s posebnimi števili rabimo večinoma navadni, dekadični ali Briggov logaritmski sestav, ki ima za podlogo število 10. Za višjo matematiko je posebno važen naravni, hiperbolični ali Neperjev logaritmski sestav, ki mu je podloga iracionalno število $2.71828\dots$, katero znamujemo s črko e in ga dobimo, ako seštejemo brezkončno številno vrsto:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots$$

§ 2. Računski zakoni o logaritmih.

Kako logaritmuješ produkt.

1. Logaritem produkta je enak vsoti logaritmov vseh faktorjev, v znakih

$$\log ABC = \log A + \log B + \log C.$$

Dokaz. Recimo, da je $\log A = m$, $\log B = n$ in $\log C = p$; torej $A = a^m$, $B = a^n$ in $C = a^p$. Potem je $ABC = a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}$ in $\log ABC = m + n + p$; ali če namesto m , n , p postavimo njih vrednosti, najdemo

$$\log ABC = \log A + \log B + \log C.$$

Kako logaritmuješ kvocijent, oziroma ulomek.

2. Logaritem kvocijenta (ulomka) je enak razliki logaritmov dividenda in divizorja (števeca in imenovalca), v znakih

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B.$$

Dokaz. Recimo, da je $\log A = m$ in $\log B = n$, torej $A = a^m$ in $B = a^n$. Potem je $\frac{A}{B} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ in $\log \frac{A}{B} = m - n$; ali če postavimo namesto m in n navedeni vrednosti, najdemo

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B.$$

3. Logaritem potence je enak logaritmu podloge, pomnoženemu s potenčnim eksponentom, v znakih Kako logaritmu-
ješ potenco.

$$\log A^p = p \log A.$$

Dokaz. Recimo, da je $\log A = m$, torej $A = a^m$. Potem je $A^p = (a^m)^p = a^{pm}$ in $\log A^p = pm$; ali če postavimo namesto m njegovo vrednost, najdemo

$$\log A^p = p \log A.$$

4. Logaritem korenskega izraza je enak logaritmu radikanda, deljenemu s korenskim eksponentom, v znakih Kako logaritmu-
ješ korenski izraz.

$$\log \sqrt[p]{A} = \frac{\log A}{p} = \frac{1}{p} \log A.$$

Dokaz. Ker je po računskih zakonih $\sqrt[p]{A} = A^{\frac{1}{p}}$, najdemo po prejšnjem izreku

$$\log \sqrt[p]{A} = \log A^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{p} \log A.$$

§ 3. 0 Briggovih logaritmih.

I. Z ozirom na navadni, dekadični ali Briggov logaritemski sestav si je treba števila naravne številne vrste misliti kakor potence podloge 10.

Briggovi logaritmi dekadičnih enot višjih redov so pozitivna cela števila.

Logaritmi dekadičnih enot višjih redov in dekadičnih števil sploh

Dokaz. Iz $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, i. t. d. sledi, da je $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$, $\log 1000 = 3$, i. t. d.

Briggov logaritem vsakega celega števila, ki ni dekadična enota, je iracionalno število.

Dokaz. Recimo, da je A celo število, ki ni dekadična enota višjih redov. Če bi bil logaritem od A racionalno število $\frac{m}{n}$, bi morala veljati enačba $10^{\frac{m}{n}} = A$ ali $10^m = A^n$. Ta enačba pa je le mogoča, če sta števili 10^m in A^n sestavljeni iz enakih prafaktorjev, t. j. iz prafaktorjev 2 in 5

in sicer iz vsakega teh faktorjev istotolikokrat. Število A bi bilo potem enako dekadični enoti višjih redov, kar pa nasprotuje izrekovemu pogoju. Torej mora log A ležati med dvema zaporednima racijonalnima številoma in je zato iracijonalno število.

Briggovi logaritmi dekadičnih števil,
ležečih med 1 in 10, so večji od 0, pa manjši od 1,
" " 10 " 100, " " " 1, " " " 2,
" " 100 " 1000, " " " 2, " " " 3,
i. t. d.

Značilka = die
Charakteristik.
Pridavek = die
Mantisse.

Logaritmi dekadičnih števil so torej sestavljeni iz celega števila in nepopolnega decimalnega ulomka; celote se imenujejo značilka ali karakteristika, pridejani decimalni ulomek pa se zove pridavek ali mantisa.

Kako določiš ka-
rakteristiko celih
števil.

Iz zgoraj navedenega sledi, da je karakteristika pri enošteviličnih številih enaka 0, pri dvošteviličnih enaka 1, pri trošteviličnih enaka 2, pri četverošteviličnih enaka 3, i. t. d. Vobče smemo reči, da je karakteristika za enoto manjša od števila števil, s katerimi se pišejo celote dotičnega števila.

Kdaj se izpre-
meni karakteri-
stika.

Ako pomnožiš, oziroma deliš določeno dekadično število s kako potenco od 10, se izpremeni le karakteristika dotičnega števila.

Dokaz. Ako je A dekadično število, je po računskih zakonih

$$\log A \cdot 10^n = \log A + n,$$

$$\log \frac{A}{10^n} = \log A - n.$$

V prvem slučaju se logaritem števila A poveča, v drugem zmanjša za n enot, t. j. izpremeni se le karakteristika, mantisa pa ostane ista.

Kdaj imajo šte-
vila isto mantiso.
Logaritmovnik
= die Logarith-
mentafel oder
das Logarith-
menbuch.
Logaritmi deka-
dičnih enot niž-
jih redov in de-
cimalnih števil.

Briggovi logaritmi takih števil, ki se ujemajo v zaporednosti števil, se ujemajo v mantisi, razlikujejo pa v karakteristiki.

Mantise dekadičnih števil so se pregledno sestavile v logaritemske tablice, ki se zovejo logaritmovnik.

II. Briggovi logaritmi dekadičnih enot nižjih redov so negativna cela števila.

Dokaz. Iz $10^{-1} = 0.1$, $10^{-2} = 0.01$, $10^{-3} = 0.001$, i. t. d. sledi, da je $\log 0.1 = -1$, $\log 0.01 = -2$, $\log 0.001 = -3$, i. t. d.

Ako delimo števila naravne številne vrste s poten-
cami od 10, dobimo desetinska ali decimalna števila, ki
imajo po zgoraj navedenem iste mantise kakor cela števila.

Mantise vseh decimalnih števil, torej tudi pravih de-
cimalnih ulomkov, so pozitivne in odvisne le od zapored-
nosti številok.

Kar se tiče karakteristike pri decimalnih številih, si
je treba sledeče zapomniti. Dokler se nahajajo v decimalnih
številih celote, določimo karakteristiko kakor pri celih
številih. Pri pravih decimalnih ulomkih pa je karakteristika
negativna in znaša toliko enot, kolikor ničel stoji pred
prvo veljavno številko dotičnega decimalnega ulomka. Ničla,
ki nadomestuje celote, se pri tem tudi vzame v poštev.
Resničnost navedenega pravila uvidimo iz naslednjih pri-
merov.

Kako določiš
karakteristiko
pravih decimal-
nih ulomkov.

$$\log 0.2 = \log \frac{2}{10} = \log 2 - 1 = 0.30103 - 1,$$

$$\log 0.03 = \log \frac{3}{100} = \log 3 - 2 = 0.47712 - 2,$$

$$\log 0.007 = \log \frac{7}{1000} = \log 7 - 3 = 0.84510 - 3,$$

$$\log 0.000351 = \log \frac{3.51}{10000} = \log 3.51 - 4 = 0.54531 - 4,$$

i. t. d.

Negativna karakteristika se postavlja za pozitivno
mantiso. Če sta v logaritmu dve karakteristiki, se skrečita
v eno. N. pr.

$$1.30103 - 2 = 0.30103 - 1.$$

Vsak negativni logaritem pretvoriš na obliko s pozitivno
mantiso, če mu toliko enot prišteješ in odšteješ, kolikor
jih je ravno treba. N. pr.

$$-2.34467 = 3 - 2.34467 - 3 = 0.65533 - 3.$$

Ako določimo pri kateremkoli celem ali desetinskem
številu red njegove prve (na najvišjem mestu stoječe) šte-
vilke ter ga primerjamo s karakteristiko, vidimo, da se
ujemata te dve števili.

Kako se poišče s pomočjo logaritmovnika določenemu številu pripadajoči logaritem in kako določenemu logaritmu pripadajoče število, uči navodilo v logaritmovniku.

Ako izračunamo številu 10 ponavljajoč kvadratni koren, najdemo logaritme nekaterih decimalnih števil, ležečih med 1 in 10. N. pr.

Logaritmi nekaterih decimalnih števil.

$$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3.16228, \text{ torej je } \log 3.16228 = \frac{1}{2} = 0.5;$$

$$10^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\sqrt{10}} = \sqrt{3.16228} = 1.77828, \text{ torej je } \log 1.77828 = \frac{1}{4} = 0.25;$$

$$10^{\frac{1}{8}} = \sqrt[4]{1.77828} = 1.33352, \text{ torej je } \log 1.33352 = \frac{1}{8} = 0.125; \text{ i. t. d.}$$

Rezultati teh računov so sestavljeni v naslednji tablici:

štev.	log.	štev.	log.
10	1	1.00451	0.00195
3.16228	0.5	1.00225	0.00098
1.77828	0.25	1.00112	0.00049
1.33352	0.125	1.00056	0.00024
1.15478	0.0625	1.00028	0.00012
1.07461	0.03125	1.00014	0.00006
1.03663	0.01562	1.00007	0.00003
1.01815	0.00781	1.00004	0.00002
1.00904	0.00391	1.00002	0.00001

Kako izračunaš logaritem števila, ležečega med 1 in 10.

S pomočjo te tablice izračunaš logaritem števila, ležečega med 1 in 10, n. pr. števila 3.7, tako-le. Število 3.7 razstaviš na take faktorje, ki se nahajajo kakor števila v omenjeni tablici, in potem sešteješ logaritme vseh dotičnih faktorjev. Faktorje števila 3.7 pa najdeš, ako deliš 3.7 s številom 3.16228, ki se nahaja v tablici in je manjše od 3.7; dobljeni kvocijent 1.17004 deliš z naslednjim manjšim številom tablice (t. j. z 1.15478); novi kvocijent deliš zopet z naslednjim manjšim številom tablice, i. t. d. Število 3.7 je potem enako produktu vseh zaporednih divizorjev in zadnjega kvocijenta, ki se bliža enoti in se sme zato izpustiti.

Ce je pa število, kateremu je treba izračunati logaritem, večje od 10, razstaviš dotično število najprej na dva faktorja, izmed katerih je eden manjši od 10, drugi pa neka potenca od 10, in potem postopaš slično kakor v prejšnjem slučaju. N. pr.

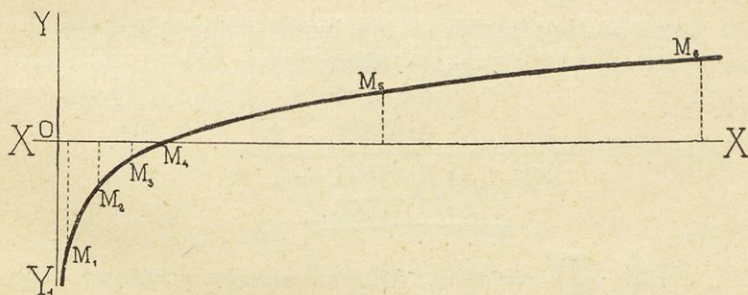
$$157 = 1.57 \cdot 10^2 \text{ in } \log 157 = \log 1.57 + 2.$$

Ker se vrednost 10^{-n} bliža ničli, če postaja n vedno večji, smemo sklepati, da je $10^{-\infty} = 0$ in $\log 0 = -\infty$.

Kako so logaritmi odvisni od logaritmanda in kako se z njim izpreminjajo, spoznamo najbolje, ako načrtamo funkciji $y = \log x$ funkcijsko črto. Po pojasnilih o loga-

Kako najdeš logaritem števila, večjega od 10.

Logaritem ničle.
Logaritemska funkcija in logaritemska črta



ritmih sme premenljivka x imeti le pozitivne vrednosti. Za $x = 0$ je funkcija $y = -\infty$. Za vrednosti od $x = 0$ do $x = 1$ je funkcija y negativna in se večja. Za $x = 1$ je funkcija $y = 0$. Za vrednosti od $x = 1$ do $x = \infty$ so funkcijske vrednosti pozitivne in se večajo. Pridejana slika predločuje črto (logaritmsko črto), ki pripada funkciji $y = \log x$. Posamezne točke $M_1, M_2, M_3 \dots$ te črte najdeš s pomočjo navedenih podatkov.

Logaritemska črta izide od negativne ordinatne osi v neskončni daljavi, se

x	y	Točke
0.1	— 1	M_1
0.4	— 0.40..	M_2
0.7	— 0.15..	M_3
1	0	M_4
3	0.48..	M_5
6	0.78..	M_6
10	1	M_7
20	1.30..	M_8
30	1.48..	M_9

vzdiguje sprva prav hitro, pozneje pa polagoma, preseče pozitivni del abscisne osi in se razteza ob tej osi v pozitivno smer.

§ 4. Uporaba Briggovih logaritmov.

Računanje z
logaritmi.

S pomočjo Briggovih logaritmov se dado računski načini druge in tretje stopnje zelo okrajšati in včasih izvršiti tudi v takih slučajih, kjer nam manjka potrebnih pravil. V ta namen smatramo rezultat računa za neznano število, kateremu se da iz podatka določiti logaritem po računskih zakonih. Primerjaj naslednje naloge!

$$a) \quad 14 \cdot 568 \times 1 \cdot 293 \times 0 \cdot 037429 = x,$$

$$\begin{array}{r} \log x = \log 14 \cdot 568 + \log 1 \cdot 293 + \log 0 \cdot 037429 = \\ \quad \quad \quad = 1 \cdot 16340 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 0 \cdot 11160 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 0 \cdot 57321 - 2 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1 \cdot 16340 \\ 0 \cdot 11160 \\ 0 \cdot 57321 - 2 \end{array}} \right\} \\ \hline \log x = 0 \cdot 84821 - 1 \\ \quad \quad \quad x = 0 \cdot 70503. \end{array}$$

b) $\left(-\frac{43}{65}\right)^3 = -x$. Ako se nahaja v računu negativno število kakor podloga ali radikand, se smatra med računanjem to število za absolutno in po končanem računu se določi rezultatov predznak po računskih zakonih.

$$\log x = 3(\log 43 - \log 65)$$

$$\begin{array}{r} = \begin{array}{l} +1 \\ 1 \cdot 63347 \\ 1 \cdot 81291 \end{array} \begin{array}{l} -1 \\ \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1 \cdot 63347 \\ 1 \cdot 81291 \end{array}} \right\} \times 3 \\ \hline (0 \cdot 82056 - 1) \times 3 \\ \quad \quad \quad 2 \cdot 46168 - 3 \end{array}$$

$$\log x = 0 \cdot 46168 - 1$$

$$x = 0 \cdot 28953 \quad \text{in} \quad \left(-\frac{43}{65}\right)^3 = -0 \cdot 28953.$$

Ako je pri odštevanju logaritmov minuend manjši od subtrahenda, se prvemu toliko enot prišteje in odšteje, da postane razlikna mantisa pozitivna.

$$\begin{aligned}
 c) \quad & \sqrt[5]{\frac{0.23047}{4.9648}} = x, \\
 & \log x = \frac{1}{5}(\log 0.23047 - \log 4.9648) \\
 & \quad = \left. \begin{array}{r} +4 \\ 0.36261 - 1 \end{array} \right\} : 5 \\
 & \quad \quad \quad 0.69590 \\
 & \quad \quad \quad \hline
 & \quad \quad \quad (3.66671 - 5) : 5 \\
 & \log x = 0.73334 - 1 \\
 & x = 0.54117.
 \end{aligned}$$

Pri odštevanju logaritmov se je minuendu toliko enot prištelo in odštelo, da je postala razlikna karakteristika deljiva s 5.

$$d) \quad \sqrt[3]{\sqrt{18.7} - \sqrt[3]{9.2}} = x.$$

Pri navedeni nalogi se mora vrednost vsakega radikandovega dela posebej določiti, da je mogoče nakazano odštevanje izvršiti.

$$\begin{aligned}
 \log \sqrt{18.7} &= \frac{1}{2} \log 18.7 = 1.27184 : 2 = 0.63592, \\
 \sqrt{18.7} &= 4.3243. \\
 \log \sqrt[3]{9.2} &= \frac{1}{3} \log 9.2 = 0.96379 : 3 = 0.32126, \\
 \sqrt[3]{9.2} &= 2.0954. \\
 x &= \sqrt[3]{4.3243 - 2.0954} = \sqrt[3]{2.2289}, \\
 \log x &= \frac{1}{3} \log 2.2289 = 0.34809 : 3 = 0.11603 \\
 x &= 1.30626.
 \end{aligned}$$

e) Dvočlensko eksponentno enačbo $3^{2x} \cdot 4^{x-1} = 5^x$ razrešiš, ako jo logaritmuješ in potem poiščeš po že znanih pravilih vrednost za x .

Razreševanje
eksponentnih
enačb.

$$\begin{aligned}
 2x \log 3 + (x-1) \log 4 &= x \log 5 \\
 x(2 \log 3 + \log 4 - \log 5) &= \log 4 \\
 x &= \frac{\log 4}{2 \log 3 + \log 4 - \log 5} = \frac{\log 4}{\log 36 - \log 5} = \frac{\log 4}{\log 7.2} \\
 x &= \frac{0.60206}{0.85733} = 0.7023.
 \end{aligned}$$

Po računskih zakonih se je skrčilo: $2 \log 3 + \log 4 = \log 9 + \log 4 = \log 36$ in $\log 36 - \log 5 = \log \frac{36}{5} = \log 7.2$.

f) Mnogočlensko eksponentno enačbo $2^x - 11^x = 2^{x+4} - 11^{x+1}$ razrešiš, ako jo najprej pretvoriš v dvočlensko in potem postopaš kakor pri prejšnji nalogi.

$$11^{x+1} - 11^x = 2^{x+4} - 2^x$$

$$11^x (11 - 1) = 2^x (2^4 - 1)$$

$$11^x \cdot 10 = 2^x \cdot 15$$

$$11^x \cdot 2 = 2^x \cdot 3$$

$$x (\log 11 - \log 2) = \log 3 - \log 2$$

$$x = \frac{\log 3 - \log 2}{\log 11 - \log 2} = \frac{\log 1.5}{\log 5.5} = 0.2378.$$

g) Enačba, pri kateri se nahaja neznanka v logaritmandu, se zove logaritemska. Logaritemsko enačbo razrešiš, ako jo najprej s pomočjo računskih zakonov pretvoriš v dvočlensko z obliko $\log A = \log B$, potem izenačiš logaritmanda in nadalje postopaš po že znanih pravilih. N. pr.

Logaritemska
enačba = logarithmische Gleichung.
Razreševanje
logaritamskih
enačb.

$$\log x + \log (x + 1) = 2 \log (x - 1)$$

$$\log [x(x + 1)] = \log (x - 1)^2$$

$$x(x + 1) = (x - 1)^2$$

$$x = \frac{1}{3}.$$

Ali drugi primer:

$$\frac{1}{2} \log (4x + 1) = \log 3 + \frac{1}{2} (\log 50 + \log x) - 1$$

$$\log \sqrt{4x + 1} = \log 3 + \log \sqrt{50x} - \log 10$$

$$\log \sqrt{4x + 1} = \log \frac{3\sqrt{50x}}{10}$$

$$\sqrt{4x + 1} = \frac{3\sqrt{50x}}{10}$$

$$x = 2.$$

II. Enačbe druge stopnje. Enačbe višjih stopenj, ki se dajo pretvoriti na enačbe druge stopnje. Kvadratne funkcije. Diferencijalni kvocijent in integral.

§ 5. Razreševanje enačb druge stopnje z eno neznanko in njih lastnosti.

I. Urejena enačba druge stopnje (kvadratna enačba) ima vobče obliko

$$x^2 + ax + b = 0$$

Kvadratna enačba = quadratische Gleichung.

in utegne biti ali čisto ali nečisto kvadratna. Čisto kvadratna je tista enačba, pri kateri se nahaja neznanka samo v drugi potenci, v znakih $x^2 + b = 0$; nečisto kvadratna pa je enačba, če se nahaja neznanka v drugi in prvi potenci, v znakih $x^2 + ax + b = 0$ ali $x^2 + ax = 0$.

a) Čisto kvadratno enačbo $x^2 + b = 0$ razrešiš, ako prestaviš znani člen v drugi enačbeni del in potem poiščeš vsaki enačbeni strani kvadratni koren, v znakih

Čisto kvadratna enačba = rein quadratische Gleichung.

$$x^2 + b = 0$$

$$x^2 = -b$$

$$x = \pm \sqrt{-b},$$

$$\text{ali } x_1 = +\sqrt{-b} \text{ in } x_2 = -\sqrt{-b}.$$

Čisto kvadratna enačba ima dva nasprotna realna ali imaginarna korena. Zakaj številni izraz $\sqrt{-b}$ predstavlja realno število, če ima b negativno vrednost; če pa ima b pozitivno vrednost, je $\sqrt{-b}$ imaginarno število.

b) Nečisto kvadratno enačbo $x^2 + ax + b = 0$ razrešiš, ako prestaviš znani člen v drugi enačbeni del, prišteješ obema deloma izraz $\frac{a^2}{4}$, potem koreniš novo enačbo z 2 in poiščeš vrednost za x po že znanih pravilih, v znakih

Nečisto kvadratna enačba = gemischt quadratische Gleichung.

$$x^2 + ax + b = 0$$

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - b$$

$$x + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

$$\text{ali } x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \quad \text{in } x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Neznanko urejene kvadratne enačbe $x^2 + ax + b = 0$ najdeš torej po obrazcu

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Izraz $\frac{a^2}{4} - b$ je za kvadratno enačbo zelo važen; zakaj predznak tega izraza določa kakovost enačbenih korenov. Ako je izraz $\frac{a^2}{4} - b$ pozitiven, ima enačba dva različna realna korena; ako je $\frac{a^2}{4} - b$ enak ničli, sta enačbena korena realna in enaka; če je pa $\frac{a^2}{4} - b$ negativen, sta korena spojeno kompleksni števili.

c) Enačbo $x^2 + ax = 0$ razrešiš, ako jo razstaviš na faktorja in potem izenačiš vsakega teh faktorjev z ničlo, v znakih

$$x^2 + ax = 0$$

$$x(x + a) = 0,$$

torej $x = 0$ ali $x + a = 0$; iz tega sledi $x_1 = 0$ in $x_2 = -a$.

Ako je treba razrešiti kvadratno enačbo, ki nima nobene izmed navedenih oblik, moraš dotično enačbo najprej urediti, t. j. pretvoriti jo moraš na eno izmed navedenih oblik, in potem postopaš kakor zgoraj. Urejevanje enačb se izvršuje po že znanih pravilih, katera hočemo tukaj kratko ponoviti in popolniti.

1. Izvrši računske načine, katere nakazujejo oklepaji.

2. Odpravi ulomke, oziroma korene ter skrči in okrajšaj dobljene izraze kolikor mogoče.

3. Prestavi vse enačbene člene v levi enačbeni del ter jih uredi po padajočih potencah z ozirom na neznanko.

4. Deli vse enačbene člene s koeficientom neznanke v najvišji potenci.

Samo po sebi se razume, da red omenjenih pretvarjanj ni v vsakem slučaju isti, ki je tukaj naveden; ampak pretvarjanja se izvršujejo v tistem redu, ki je dotični nalogi najbolj primeren.

Enačbo $\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-5} = 1$ urediš, ako jo ku-
buješ po obrazcu

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b),$$

potem porabiš znano vrednost za $a-b$ in nadalje postopaš po že znanih pravilih.

$$\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-5} = 1$$

$$x+2 - (x-5) - 3\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{x-5} \cdot \underbrace{(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-5})}_{=1} = 1$$

$$- 3\sqrt[3]{x^2 - 3x - 10} = -6$$

$$\sqrt[3]{x^2 - 3x - 10} = 2$$

$$x^2 - 3x - 18 = 0.$$

Enačbo $\sqrt{2x+2} + \sqrt{x-3} - \sqrt{x+2} = \sqrt{2x-5}$ urediš, ako pustiš v vsakem enačbenem delu po dva korenska izraza, potem kvadruješ enačbo in nadalje postopaš po že znanih pravilih.

$$\sqrt{2x+2} + \sqrt{x-3} = \sqrt{x+2} + \sqrt{2x-5}$$

$$3x-1 + 2\sqrt{2x^2-4x-6} = 3x-3 + 2\sqrt{2x^2-x-10}$$

$$\sqrt{2x^2-4x-6} = -1 + \sqrt{2x^2-x-10}$$

$$2x^2-4x-6 = 2x^2-x-9 - 2\sqrt{2x^2-x-10}$$

$$2\sqrt{2x^2-x-10} = 3x-3$$

$$x^2 - 14x + 49 = 0.$$

Pri iracionalnih enačbah je treba vsakokrat poskusiti, ali ustrezajo najdeni koreni dotični enačbi.

Kaj da vsota, kaj
produkt obeh ko-
renov kvadratne
enačbe.

II. Urejeni kvadratni enačbi $x^2 + ax + b = 0$ sta ko-
rena $x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ in $x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$. Iz
teh izrazov sledi, da je

$$x_1 + x_2 = -a \text{ in } x_1 x_2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} - b\right) = b.$$

Vsota obeh korenov urejene kvadratne
enačbe je enaka nasprotnemu koeficientu dru-
gga člena; produkt obeh korenov je enak
tretjemu členu.

S pomočjo tega izreka stvariš prav lahko kvadratno
enačbo, če poznaš oba korena. Ako sta n. pr. $\frac{3}{4}$ in $-\frac{1}{4}$ ko-
rena, je $-a = \frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{16}$
in kvadratna enačba $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{16} = 0$.

Enačbeni trinom
= das Gleich-
ungstrinom.
Korenski faktor
= der Wurzel-
faktor.

Levi del urejene kvadratne enačbe, t. j. izraz $x^2 + ax + b$
se imenuje enačbeni trinom. Razlika med enačbeno
neznanko in onačbenim korenem se zove korenski
faktor. Če sta n. pr. $x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ in $x_2 =$
 $= -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ korena enačbe $x^2 + ax + b = 0$, sta
 $x - x_1$ in $x - x_2$ korenska faktorja te enačbe.

Lastnost enačbe-
nega trinoma.

Enačbeni trinom urejene kvadratne enačbe
je enak produktu obeh korenskih faktorjev.
Zakaj z ozirom na prejšnji izrek najdeš

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = x^2 + ax + b.$$

Iz te lastnosti sledi, da je enačbeni trinom de-
ljiv z vsakim njegovih korenskih faktorjev.

§ 6. Enačbe višjih stopenj, ki se dajo pretvoriti na kvadratne enačbe.

Binomske enačbe
= binomische
Gleichungen.

I. Enačba, v kateri se nahaja samo ena potenca ne-
znanke, se imenuje binomska. Urejena binomska enačba
ima obliko $x^n + a = 0$. Kako se urejene binomske enačbe
tretje in četrte stopnje razrešujejo, kažejo naslednji primeri.

$$x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

a) Enačbo $x^3 + 8 = 0$ razrešiš, ako razstaviš levo stran te enačbe na faktorja po obrazcu $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ in potem izenačiš vsakega teh faktorjev z ničlo. Iz $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0$ sledi $x + 2 = 0$ ali pa $x^2 - 2x + 4 = 0$; torej je $x_1 = -2$, $x_2 = 1 + \sqrt{-3}$ in $x_3 = 1 - \sqrt{-3}$.

Razreševanje binomskih enačb tretje stopnje.

b) Enačbo $x^3 - 27 = 0$ razrešiš, ako jo razstaviš na faktorja po obrazcu $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ in potem postopaš kakor v prejšnjem primeru. Iz $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) = 0$ sledi $x - 3 = 0$ ali pa $x^2 + 3x + 9 = 0$; torej je $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{3}{2}(-1 + \sqrt{-3})$ in $x_3 = \frac{3}{2}(-1 - \sqrt{-3})$.

c) Enačbo $x^4 - 4 = 0$ razrešiš, ako razstaviš levi del te enačbe na faktorja po obrazcu $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ in potem izenačiš vsakega teh faktorjev z ničlo. Iz $(x^2 + 2)(x^2 - 2) = 0$ sledi $x^2 + 2 = 0$ ali pa $x^2 - 2 = 0$; torej je $x_1 = \sqrt{-2}$, $x_2 = -\sqrt{-2}$, $x_3 = \sqrt{2}$ in $x_4 = -\sqrt{2}$.

Razreševanje binomskih enačb četrte stopnje.

d) Enačbo $x^4 + 16 = 0$ razrešiš, ako jo razstaviš na faktorja po obrazcu $a^2 + b^2 = a^2 - b^2 i^2 = (a + bi)(a - bi)$ in potem postopaš kakor v prejšnjem primeru. Iz $(x^2 + 4i)(x^2 - 4i) = 0$ sledi $x^2 + 4i = 0$ ali pa $x^2 - 4i = 0$; torej je $x_1 = 2\sqrt{-i}$, $x_2 = -2\sqrt{-i}$, $x_3 = 2\sqrt{i}$ in $x_4 = -2\sqrt{i}$. Vrednostima $\sqrt{i}$ in $\sqrt{-i}$ najdeš drugo obliko, ako vzmnožiš in koreniš izraza $\sqrt{0+i} + \sqrt{0-i}$ in $\sqrt{0+i} - \sqrt{0-i}$ z 2 ter sešteješ, oziroma odšteješ dobljeni identični enačbi, v znakih

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{0+i} + \sqrt{0-i} &= \sqrt{2\sqrt{0-i}^2} = \sqrt{2} \\ \sqrt{0+i} - \sqrt{0-i} &= \sqrt{-2\sqrt{0-i}^2} = \sqrt{-2} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{sešteto,} \\ \text{ozioroma} \\ \text{odšteto} \end{array}$$

$$\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{-2}}{2} \text{ in } \sqrt{-i} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{-2}}{2}.$$

Iz navedenih primerov izvajamo, da ima vsaka binomska enačba tretje in četrte stopnje

toliko korenov, kolikor znaša potenčni eksponent neznanke. Istotako je tudi pri binomskih enačbah višjih stopenj.

Način razreševanja binomskih enačb tretje in četrte stopnje se uporablja tudi pri drugih enačbah, ki niso binomske. N. pr.

e) Enačbo $(x - 3)^3 - (5 - x)^3 = 0$ razstaviš na faktorja kakor binomsko enačbo pod b). Iz $[(x - 3) - (5 - x)][(x - 3)^2 + (x - 3)(5 - x) + (5 - x)^2] = 0$ najdeš korene $x_1 = 4$, $x_2 = 4 + \sqrt{-3}$ in $x_3 = 4 - \sqrt{-3}$.

f) Enačbo $x^4 - 625 = 26x(25 - x^2)$ razrešiš, ako razstaviš levo stran te enačbe na faktorja kakor binomsko enačbo pod c), potem prestaviš člen desne strani na levo stran in razstaviš dobljena izraza zopet na faktorja. Iz $(x^2 + 25)(x^2 - 25) + 26x(x^2 - 25) = (x^2 - 25)(x^2 + 25 + 26x) = 0$ najdeš korene $x_1 = 5$, $x_2 = -5$, $x_3 = -1$ in $x_4 = -25$.

g) Enačbo $(3 - x)^3 = x - 3$ pretvoriš na enostavnejšo obliko, ako prestaviš člena desne strani na levo stran in potem razstaviš enačbo na faktorja. Iz $(3 - x)^3 + (3 - x) = (3 - x)[(3 - x)^2 + 1] = 0$ najdeš korene $x_1 = 3$, $x_2 = 3 + \sqrt{-1}$ in $x_3 = 3 - \sqrt{-1}$.

h) Pri enačbi $\frac{x+3}{x-3} = \frac{x^2-9}{4}$ postopaš istotako kakor pri prejšnjem primeru. Iz $\frac{x+3}{x-3} - \frac{x^2-9}{4} = (x+3)\left(\frac{1}{x-3} - \frac{x-3}{4}\right) = 0$ najdeš korene $x_1 = -3$, $x_2 = 5$ in $x_3 = 1$.

Trinomske
enačbe = trin-
omische Glei-
chungen.

II. Ako ima urejena enačba obliko $x^m + ax^n + b = 0$, se zove trinomska. V trinomski enačbi se nahaja neznanka v dveh različnih potencah. Trinomske enačbe se dadó na tej učni stopnji razrešiti, če jih je mogoče pretvoriti na kvadratne enačbe. To se da izvršiti, ako je potenčni eksponent m dvakrat tolik kakor potenčni eksponent n . V naslednjem se hočemo torej ozirati le na take trinomske enačbe, ki imajo obliko $x^{2n} + ax^n + b = 0$ ali $x^n + ax^{\frac{1}{2n}} + b = 0$.

Trinomska enačba $x^{2n} + ax^n + b = 0$ je kvadratna z ozirom na neznanko x^n ; zakaj ako postaviš $x^n = y$ (torej $x^{2n} = y^2$), dobi navedena enačba obliko $y^2 + ay + b = 0$. Iz te kvadratne enačbe najdeš

$$y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

in če postaviš namesto y vrednost x^n , dobiš binomsko enačbo

$$x^n = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

katero razrešiš po pravilih za binomske enačbe.

Trinomska enačba $x^{\frac{1}{n}} + ax^{\frac{1}{2n}} + b = 0$ (ali $\sqrt[n]{x} + a\sqrt[2n]{x} + b = 0$) je kvadratna z ozirom na neznanko $x^{\frac{1}{2n}} = \sqrt[2n]{x}$; zakaj ako postaviš $x^{\frac{1}{2n}} = y$ (torej $x^{\frac{1}{n}} = y^2$), dobi navedena enačba obliko $y^2 + ay + b = 0$. Iz te kvadratne enačbe najdeš

$$y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

ali če postaviš namesto y vrednost $x^{\frac{1}{2n}}$, je

$$x^{\frac{1}{2n}} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \text{ in } x = \left(-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)^{2n}.$$

N. pr.:

a) Iz enačbe $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ ali iz $y^2 - 3y - 4 = 0$ (če postaviš $x^2 = y$) najdeš $y = x^2 = 4, -1$; torej je $x = \pm 2, \pm i$.

b) Iz enačbe $\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[6]{x} - 14 = 0$ ali iz $y^2 + 5y - 14 = 0$ (če postaviš $\sqrt[6]{x} = y$) najdeš $y = \sqrt[6]{x} = 2$; torej je $x = 64$. Drugi koren, ki se najde pri razrešitvi, se ne more rabiti.

c) Iz enačbe $(x^2 - 6x + 11)^2 - 4(x^2 - 6x + 11) + 3 = 0$ ali iz $y^2 - 4y + 3 = 0$ (če postaviš $x^2 - 6x + 11 = y$) najdeš $y = x^2 - 6x + 11 = 3, 1$; torej je $x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 3 + i$ in $x_4 = 3 - i$.

d) Iz enačbe $x^2 + 15x - \sqrt{x^2 + 15x} = 90$ ali iz $y^2 - y = 90$ (če postaviš $\sqrt{x^2 + 15x} = y$) najdeš $y = \sqrt{x^2 + 15x} = 10$; torej je $x^2 + 15x = 100$ in $x = -20$.

e) Iz enačbe $2x^2 - 3x + 1 = \sqrt{22x^2 - 33x + 1}$ ali iz $y + 1 = \sqrt{11y + 1}$ (če postaviš $2x^2 - 3x = y$) najdeš $y = 2x^2 - 3x = 0, 9$; torej je $x = 0, \frac{3}{2}, 3, -\frac{3}{2}$.

f) Enačbo $\sqrt[3]{\frac{52+x}{4-x}} - \sqrt[3]{\frac{4-x}{52+x}} = \frac{8}{3}$ razrešiš, ako postaviš $\sqrt[3]{\frac{52+x}{4-x}} = y$. Iz $y - \frac{1}{y} = \frac{8}{3}$ najdeš potem $y = \sqrt[3]{\frac{52+x}{4-x}} = 3, -\frac{1}{3}$; torej je $x_1 = 2$ in $x_2 = -54\frac{2}{13}$.

Obratne enačbe.
= reziproke
Gleichungen.

III. Ako imajo pri urejeni enačbi členi, ki so enako oddaljeni od začetka in konca enačbe, enake ali pa nasprotno koeficiente, se imenuje dotična enačba obratna. Občna oblika obratne enačbe je

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots \pm bx^2 \pm ax \pm 1 = 0.$$

Lastnost obratnih enačb.

Obratna enačba ima lastnost, da je obratna vrednost vsakega korena te enačbe zopet koren dotične enačbe.

Dokaz. Če je število k koren obratne enačbe $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + bx^2 + ax + 1 = 0$, t. j. v znakih $k^n + ak^{n-1} + bk^{n-2} + \dots + bk^2 + ak + 1 = 0$, je tudi število $\frac{1}{k}$ koren iste enačbe; zakaj če postaviš v levi del navedene enačbe namesto x vrednost $\frac{1}{k}$ in pretvoriš vse člene na skupni imenovalc, najdeš izraz

$$\frac{1 + ak + bk^2 + \dots + bk^{n-2} + ak^{n-1} + k^n}{k^n},$$

katerega števec je po izrekovem pogoju $= 0$. Število $\frac{1}{k}$ zadostuje torej navedeni enačbi in je zato koren te enačbe.

Dokaz za drugo obliko obratne enačbe je navedenemu sličen.

Razreševanje
obratnih enačb
tretje stopnje.

a) Obratno enačbo tretje stopnje $x^3 + ax^2 + ax + 1 = 0$ razrešiš, ako razstaviš najprej po dva člena z enakim koeficientom in potem ves levi del enačbe na faktorja ter izenačiš vsakega izmed končnih faktorjev z ničlo. Iz $x^3 + ax^2 + ax + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1) + ax(x+1) = (x+1)(x^2 - x + 1 + ax) = 0$ sledi $x+1 = 0$

ali pa $x^2 + (a - 1)x + 1 = 0$; torej je $x_1 = -1$,
 $x_2 = -\frac{a-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 - 1}$ in $x_3 = -\frac{a-1}{2} -$
 $-\sqrt{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 - 1}$.

Prav tako postopaš tudi pri razreševanju obratne enačbe $x^3 + ax^2 - ax - 1 = 0$.

Po istem načinu kakor obratne enačbe tretje stopnje razrešujejo se tudi enačbe, ki imajo obliko

$$x^3 + ax^2 \pm abx \pm b^3 = 0,$$

$$x^3 - ax^2 + abx - b^3 = 0.$$

b) Ako deliš obratno enačbo četrte stopnje $x^4 + ax^3 +$
 $+ bx^2 + ax + 1 = 0$ s faktorjem x^2 in zbereš po dva
 člena z enakim koeficientom, najdeš

Razreševanje
 obratnih enačb
 četrte stopnje.

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0.$$

Če postaviš $x + \frac{1}{x} = y$, je $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2$, torej
 $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. Navedena enačba dobi potem obliko

$$y^2 + ay + b - 2 = 0.$$

Iz te kvadratne enačbe najdeš

$$y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + 2},$$

in potem dobiš iz enačbe

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + 2}$$

štiri korene za neznanko x .

Na isti način razrešujejo se tudi enačbe, ki imajo obliko

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + amx + m^2 = 0.$$

Če pa ima obratna enačba četrte stopnje obliko
 $x^4 + ax^3 - ax - 1 = 0$, kateri manjka člen z drugo
 potenco neznanke, se da prav lahko razstaviti na fak-
 torja. Iz

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 - ax - 1 &= (x^2 + 1)(x^2 - 1) + ax(x^2 - 1) = \\ &= (x^2 - 1)(x^2 + 1 + ax) = 0 \end{aligned}$$

sledi $x^2 - 1 = 0$ in $x^2 + ax + 1 = 0$; torej je $x_1 = 1$,
 $x_2 = -1$, $x_3 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}$ in $x_4 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}$.

Razreševanje
eksponentnih in
logaritmskih
enačb.

IV. Dvočlensko eksponentno enačbo razrešiš, ako izraziš oba enačbena dela kakor potenci iste podloge in potem izenačiš potenčna eksponenta; ali pa, ako logaritmuješ dotično enačbo in potem poiščeš po že znanih pravilih vrednost za neznanko. Mnogočlensko eksponentno enačbo razrešiš, ako prestaviš člene tako, da se nahajajo v vsakem enačbenem delu le potence iste podloge, potem razstaviš dotične izraze na faktorje in skrčiš kolikor mogoče, nadalje pa postopaš kakor pri dvočlenskih eksponentnih enačbah. Mnogočlenska eksponentna enačba se torej pretvori v dvočlensko s pomočjo računskih zakonov. Izmed ostalih eksponentnih enačb moremo razrešiti nadalje le take, ki imajo obliko kvadratnih enačb ali se dadó pretvoriti na to obliko. N. pr.

a) Tročlensko eksponentno enačbo $a^{2x} + ba^x + c = 0$ razrešiš, ako postaviš $a^x = y$ (torej $a^{2x} = y^2$) in določiš iz kvadratne enačbe $y^2 + by + c = 0$ vrednost za y . Potem najdeš iz dvočlenske eksponentne enačbe

$$a^x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

vrednost za x .

b) Pri tročlenski eksponentni enačbi $\sqrt{a} + b^2\sqrt{a} + c = 0$ postopaš istotako kakor v prejšnjem primeru.

c) Po računskih zakonih o potencah pretvoriš eksponentni enačbi $25^x - 3 \cdot 5^x = 10$ in $3^{1+z} + 3^{2-z} = 28$ na obliko kvadratnih enačb in sicer obliki $5^{2x} - 3 \cdot 5^x = 10$ in $3^{2z} - \frac{28}{3} \cdot 3^z = -3$. Iz teh enačb najdeš potem na isti način kakor pod a) vrednosti $x = 1$ in $z = 2, -1$.

d) Logaritmsko enačbo $\frac{1}{6 - \log x} + \frac{2}{\log x} = 1$ razrešiš, ako postaviš $\log x = y$ in izračunaš najprej vrednost za y . Iz $\log x = 4, 3$ najdeš $x = 10000, 1000$.

e) Enačbo $x^{\log x - 1} = 100$ razrešiš, ako jo logaritmuješ in potem postaviš $\log x = y$. Iz $\log x = 2, -1$ najdeš $x = 100, \frac{1}{10}$.

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \\ 6 - y \quad y \end{array}$$

§ 7. Kvadratne enačbe z dvema in več neznankami.

Ako imajo kvadratne enačbe po več neznank, moreš jim korene natanko določiti le tedaj, kadar imaš toliko neodvisnih in nenasprotnih enačb, kolikor je neznank. Tudi tukaj se razreševanje izvršuje vobče po istih načinih, ki se uporabljajo pri enačbah prve stopnje. To velja posebno o enačbah z obliko $ax^2 + by^2 = c$. Sicer pa primerjaj naslednje podatke!

Občna pojasnila o razreševanju kvadratnih enačb z dvema neznankama.

I. Ako je ena izmed določenih enačb kvadratna, druga pa linearna, se uporablja navadno zamenjalni način, t. j. iz linearne enačbe se določi vrednost ene neznanke in ta vrednost se postavi v kvadratno enačbo, katera se potem razreši po pravilih prejšnjih odstavkov. Zamenjalni način se tudi uporablja, kadar sta določeni enačbi kvadratni z obliko $ax^2 - by^2 = c$ in $xy = d$.

Ena izmed določenih enačb je linearna.

II. Iz določenih enačb se izvede po računskih zakonih najprej linearna enačba, ako je mogoče. Iz te nove enačbe in ene izmed določenih enačb najdeš potem korene kakor v prejšnjem slučaju. N. pr.

Iz določenih enačb se izvede linearna enačba.

a) Iz enačb $xy + x = 4$ in $xy + y = 3$ najdeš linearno enačbo, ako odšteješ eno od druge. $x = 2, -2$ in $y = 1, -3$.

b) Iz enačb $x^2 + xg = 21$ in $xy + y^2 = 28$ najdeš linearno enačbo, ako deliš eno z drugo. $x = \pm 3$ in $y = \pm 4$.

c) Iz enačb $(x - 2)(y + 2) = 18$ in $(7 - x)(y - 3) = 2$ najdeš linearno enačbo, ako izvršiš nakazane računske načine in potem sešteješ enačbi. $x = 8, 5$ in $y = 1, 4$.

III. Iz določenih enačb izračunaš najprej ali vsoto, ali razliko, ali produkt, ali kvocient, ali kako drugo zvezo neznank, in potem postopaš kakor poprej. N. pr.

Iz določenih enačb se določi kaka zveza med neznankama.

a) Iz enačb $x^2 + y^2 = 52$ in $xy = 12(x - y)$ najdeš razliko naznank, ako odšteješ dvakratno drugo enačbo od prve in iz dobljenega zneska izračunaš $x - y$ kakor neznanko iz kvadratne enačbe. $x = 6, -4, -13 \pm \sqrt{-143}$ in $y = 4, -6, 13 \pm \sqrt{-143}$.

b) Iz enačb $x^2 + xy + y^2 = 3a^2 + b^2$ in $x^2 - xy + y^2 = a^2 + 3b^2$ najdeš produkt neznank, ako odšteješ drugo enačbo od prve. Ako potem prišteješ dobljeni produkt

neznank prvi določeni enačbi, oziroma ga odšteješ od druge, dobiš enačbi, iz katerih se da vsota, oziroma razlika neznank izračunati. Iz teh rezultatov najdeš $x = \pm (a + b)$ in $y = \pm (a - b)$.

c) Ako je treba enačbi $\frac{3}{4}(x - y) - \sqrt{x - y} = 1$ in $\sqrt{x + y} + \sqrt{x - y} = 5$ razrešiti, izračunaš iz prve enačbe vrednost korenskega izraza $\sqrt{x - y}$ kakor neznanko iz kvadratne enačbe in potem najdeš iz druge enačbe vrednost korenskega izraza $\sqrt{x + y}$. Iz teh rezultatov dobiš $x = \frac{13}{2}$ in $y = \frac{5}{2}$.

d) Enačbi $\sqrt{\frac{y+1}{x}} + 4\sqrt{\frac{x}{y+1}} = 5$ in $x^2 + y^2 = x + 15y$ razrešiš, ako določiš iz prve enačbe vrednost korenskega izraza $\sqrt{\frac{y+1}{x}}$ in potem najdeš iz tega rezultata in druge enačbe $x = 1, 8, 1$ in $y = 15, 7, 0$.

e) Ako je treba enačbi $2x^2 + xy - 4y^2 = 8$ in $4x^2 - 4xy - 3y^2 = 0$ razrešiti, določiš najprej iz druge enačbe vrednost kvocienta $\frac{x}{y}$; zakaj ako deliš drugo enačbo s številom y^2 , postane kvadratna z ozirom na neznanko $\frac{x}{y}$. Potem najdeš iz dobljenega rezultata in prve enačbe $x = \pm 3, \mp \frac{1}{2}\sqrt{-2}$ in $y = \pm 2, \pm \sqrt{-2}$.

f) Enačbi $x^2 + 2xy - 3y^2 = 5$ in $2x^2 - 3xy + y^2 = 3$ razrešiš, ako postaviš $y = tx$, potem deliš eno enačbo z drugo in iz dobljene nove enačbe poiščeš vrednost neznanke t . Nadalje postopaš kakor v prejšnjih slučajih. $x = \pm 2$ in $y = \pm 1$.

g) Enačbi $x + y - xy = 1$ in $x^2y + xy^2 = 30$ razrešiš, ako postaviš $x + y = u$ in $xy = z$ ter določiš najprej vrednosti za u in z . Potem najdeš $x = 1, 5, -6$ in $y = 5, 1, 1$.

h) Iz enačb $x - y = 2$ in $x^3 - y^3 = 98$ najdeš produkt neznank, ako kubuješ prvo enačbo ter porabiš v dobljenem rezultatu določeni vrednosti za $x - y$ in $x^3 - y^3$. Potem najdeš $x = 5, -3$ in $y = 3, -5$.

i) Iz enačb $x + y = 8$ in $x^4 + y^4 = 706$ najdeš produkt neznank, ako kvadruješ prvo enačbo, v dobljenem

znesku prestaviš člen $2xy$ v drugi enačbeni del, potem kvadrirajš to enačbo ter porabiš določeno vrednost za $x^4 + y^4$. Koreni so $x = 3, 5, 4 \pm \sqrt{-97}$ in $y = 5, 3, 4 \pm \sqrt{-97}$.

$$\begin{aligned} k) \quad x : y &= u : z \\ x + y + u + z &= 21 \\ xz &= 24 \\ x^2 + y^2 + u^2 + z^2 &= 125. \end{aligned}$$

Ako kvadrirajš drugo enačbo ter porabiš $xz = yu = 24$ in $x^2 + y^2 + u^2 + z^2 = 125$, najdeš novo enačbo, iz katere se da s pomočjo druge določene enačbe določiti vrednosti za $x + z$ in $y + u$. Potem je: $x = 3, 8, 6, 4$; $y = 6, 4, 8, 3$; $u = 4, 6, 3, 8$; $z = 8, 3, 4, 6$.

§ 8. Lastnosti kvadratne funkcije.

Cela funkcija druge stopnje ali kvadratna funkcija ima vobče obliko $y = ax^2 + bx + c$ in se uničuje v slučajih, ki sta določena po korenih enačbe $ax^2 + bx + c = 0$.

Oblika kvadratne funkcije.

Kvadratna funkcija $ax^2 + bx + c$ je enaka produktu dveh linearnih funkcij.

Kvadratna funkcija je sestavljena iz linearnih funkcij.

Dokaz. Navedena funkcija se da pretvoriti na obliko

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right),$$

v kateri se sme faktor $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ smatrati za enačbeni trinom, ki je po § 5. enak produktu korenskih faktorjev, t. j. dveh linearnih funkcij, v znakih

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

$$\begin{aligned} \text{N. pr.} \quad 3x^2 + 4x + 1 &= 3\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}\right) = \\ &= 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x + 1) = (3x + 1)(x + 1). \end{aligned}$$

Ako se kvadratna funkcija $ax^2 + bx + c$ uničuje za vrednosti x_1 in x_2 , je po prejšnjem

Predznak kvadratne funkcije.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Iz te identične enačbe sledi, da je funkcija $ax^2 + bx + c$ negativna (pozitivna) za vse med x_1 in x_2 ležeče x -ove vrednosti, če je a pozitiven (negativen), sicer pa se predznak funkcijske vrednosti ujema s predznakom stalnice a .

Največja in najmanjša vrednost kvadratne funkcije.

Kvadratna funkcija $ax^2 + bx + c$ dobi za $x = -\frac{b}{2a}$ najmanjšo vrednost, če je a pozitiven; največjo vrednost pa, če je a negativen.

Dokaz. Navedena funkcija se da tako-le pretvoriti:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right). \end{aligned}$$

V tej algebraski vsoti se izpreminja prvi sumand, če se x izpreminja; drugi sumand pa ima stalno vrednost $= c - \frac{b^2}{4a}$. Za pozitiven a je prvi sumand pozitiven in dobi za $x = -\frac{b}{2a}$ najmanjšo vrednost $= 0$; v tem slučaju ima torej tudi funkcija $ax^2 + bx + c$ najmanjšo vrednost $= c - \frac{b^2}{4a}$. Za negativen a je prvi sumand negativen in dobi za $x = -\frac{b}{2a}$ največjo vrednost $= 0$; v tem slučaju ima tudi funkcija $ax^2 + bx + c$ največjo vrednost $= c - \frac{b^2}{4a}$.

N. pr.

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4x + 2 &= 3\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}\right) = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}, \\ -3x^2 + 6x - 2 &= -3\left(x^2 - 2x + \frac{2}{3}\right) = 1 - 3\left(x - 1\right)^2. \end{aligned}$$

Prva funkcija dobi za $x = -\frac{2}{3}$ najmanjšo vrednost $= \frac{2}{3}$, druga pa za $x = 1$ največjo vrednost $= 1$.

Funkciji $x + \frac{a}{x}$ določiš najmanjšo absolutno vrednost, ako jo pretvoriš na obliko

$$x + \frac{a}{x} = \sqrt{\left(x + \frac{a}{x}\right)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{a}{x}\right)^2 + 4a}.$$

Iz te oblike sledi, da dobi funkcija $x + \frac{a}{x}$ najmanjšo absolutno vrednost, če ima prvi radikandov člen najmanjšo vrednost. Torej je $x = \sqrt{a}$ in $x + \frac{a}{x} = 2\sqrt{a}$.

Da se najde največja, oziroma najmanjša vrednost kvadratnih funkcij tudi še na drug način, spoznali bomo iz naslednjega odstavka.

Uporabne naloge.

1. Osnovnica nekega trikotnika je a in vsota ostalih stranic m ; koliki morata biti stranici b in c , da ima trikotnik največjo ploščino?

Razrešitev. Ako postaviš v obrazec za ploščino $p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ vrednosti $s = \frac{a+m}{2}$ in $c = m-b$, najdeš izraz

$$p = \frac{1}{4} \sqrt{(m^2 - a^2)[a^2 - (2b - m)^2]},$$

kateri dobi največjo vrednost ($p = \frac{a}{4} \sqrt{m^2 - a^2}$), če je $2b - m = 0$; potem je $b = \frac{m}{2}$ in $c = \frac{m}{2}$.

2. Iz neke točke D na hipotenuzi določenega pravokotnega trikotnika se spustita pravokotnici na kateti. Kje mora ležati točka D , da je ploščina nastalega pravokotnika največja?

Razrešitev. Kateti pravokotnega trikotnika sta a in b , hipotenuza je c . Napravi primerno sliko! Če pomeni x hipotenuzni odsek, ki je po točki D določen in kateti a priležen, in če sta y in z pravokotnici iz točke D na kateti, najdeš iz podobnih trikotnikov vrednosti za y in z . Potem je ploščina nastalega pravokotnika

$$p = yz = \frac{ab(cx - x^2)}{c^2} = ab \left(\frac{x}{c} - \frac{x^2}{c^2} \right) = \frac{ab}{4} - ab \left(\frac{x}{c} - \frac{1}{2} \right)^2.$$

Ta izraz dobi največjo vrednost ($p = \frac{ab}{4}$), če je $\frac{x}{c} - \frac{1}{2} = 0$, torej $x = \frac{c}{2}$, t. j. točka D mora ležati v središču hipotenuze.

3. Očrtaj določenemu kvadratu najmanjši enakokraki trikotnik tako, da leži ena kvadratova stranica na trikotnikovi osnovnici!

Razrešitev. Kvadratova stranica je a . Vrh očrtanega enakokrakega trikotnika mora ležati na somernici kvadratove osnovnice. Napravi primerno sliko! Če pomeni x razdaljo trikotnikovega vrha od določenega kvadrata, najdeš iz podobnih trikotnikov vrednost za trikotnikovo osnovnico, namreč $y = \frac{a(a+x)}{x}$. Ploščina enakokrakega trikotnika je potem

$$p = \frac{y(a+x)}{2} = \frac{a(a+x)^2}{2x} = \frac{a}{2} \left(2a + x + \frac{a^2}{x} \right) = \frac{a}{2} \left[2a + \sqrt{\left(x - \frac{a^2}{x} \right)^2 + 4a^2} \right].$$

Ta izraz dobi najmanjšo vrednost ($p = 2a^2$), če je $x - \frac{a^2}{x} = 0$, torej $x = a$.

§ 9. Načrtavanje kvadratne funkcije in njen diferencijalni kvocijent.

Funkcijska črta
kvadratne
funkcije.

Geometrijsko podobo kvadratne funkcije $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 5$ najdemo, ako poiščemo n. pr. razrešitvam:

$x = \dots - 4$	-2	0	2	4	6	8	$10 \dots$
$y = \dots - 7$	0	5	8	9	8	5	$0 \dots$

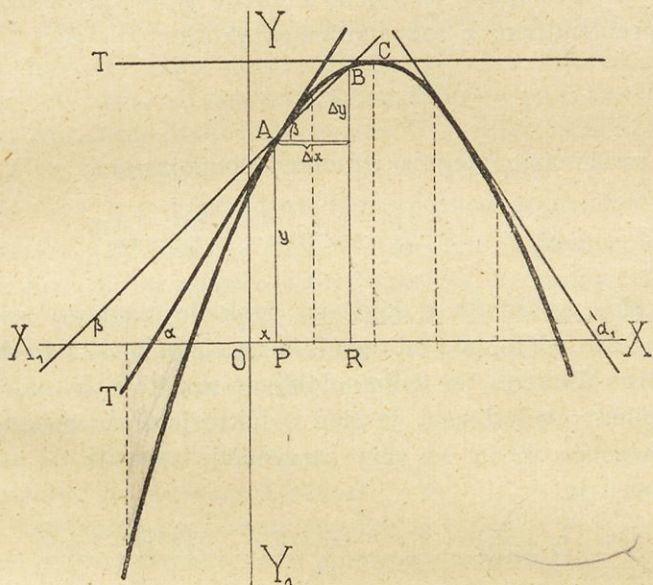
pripadajoče točke ter narišemo skoz te točke funkcijsko črto. Primerjaj sliko! Če pridenemo navedenim razrešitvam še naslednje:

$x = -\infty$	-40	-30	-20	$\dots$	16	20	30	∞
$y = -\infty$	-475	-280	-135	$\dots$	-27	-55	-160	$-\infty$

vidimo, da raste funkcija $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 5$ od $-\infty$ do 9 in potem pojema od 9 do $-\infty$, če raste premenljivka

od $-\infty$ do $+\infty$. Za $x = 4$ dobi funkcija največjo vrednost $= 9$. Ker pripadajo enakim prirastkom premenljivke različni funkcijski prirastki, oziroma zmanjški, mora funkcijska črta biti kriva (krivulja). Iz funkcijske črte spoznamo, kje in kako raste (pojema) funkcija in kje dobi največjo, oziroma najmanjšo vrednost. Da je mogoče iz prirastka premenljivke in iz funkcijskega prirastka (zmanj-

Krivulja = die
Kurve.



ška) izračunati trigonometrijsko tangento tistega kota, katerega tvori sekanta, oziroma tangenta funkcijske črte s pozitivno smerjo abscisne osi, bomo videli iz naslednjega.

Recimo, da pripada določeni vrednosti $x = OP$ funkcijska vrednost $y = PA$. Če se x poveča za Δx , se funkcijska vrednost poveča za Δy , torej je v sliki $OR = x + \Delta x$ in $RB = y + \Delta y$. Sekanta AB , ki gre skozi točki A in B , tvori s pozitivno smerjo abscisne osi kot β , katerega trigonometrijska tangenta je določena po prirastkih Δx in Δy , v znakih $\tan \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Če zavrtimo sekanto AB okoli točke A tako, da se točka B bliža točki A , se manjšata prirastka Δx in Δy . Ko se točka B stika s točko A , preide sekanta AB v tangento AT ; kot β preide v kot α ,

Diferenčni kvocijent = Differenzenquotient.
Diferencijal = das Differential.
Diferencijalni kvocijent = Differentialquotient.

katerega tvori tangenta AT s pozitivno smerjo abscisne osi; izmerljiva prirastka Δx in Δy preideta v neizmerno majhna prirastka dx in dy , ki se zoveta diferencijala; in diferenčni kvocijent $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \beta$ preide v diferencijalni kvocijent $\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$, v znakih $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ (lim = limes = meja ali mejna vrednost).

Kako zaznamujemo in izračunamo diferencijalni kvocijent.

Diferencijalni kvocijent funkcije $y = f(x)$ z ozirom na premenljivko x zaznamujemo tako-le

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$$

ter izračunamo njegovo vrednost po pojasnilu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y + dy) - y}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx},$$

t. j. ako postavimo v določeno funkcijo namesto x izraz $x + dx$ in odštejemo od tega izračunanega zneska vrednost prvotne funkcije ter delimo dobljeno razliko z dx , najdemo kvocijent, v katerem je člen s faktorjem dx neizmerno majhen ($= 0$) in se sme zategadelj izpustiti. V našem primeru je

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{-\frac{1}{4}(x + dx)^2 + 2(x + dx) + 5 - (-\frac{1}{4}x^2 + 2x + 5)}{dx} = \\ &= \frac{-\frac{1}{2}xdx + 2dx - \frac{1}{4}(dx)^2}{dx} = -\frac{1}{2}x + 2 - \frac{1}{4}dx = -\frac{1}{2}x + 2. \end{aligned}$$

Pomen diferencijalnega kvocijenta.

Diferencijalni kvocijent za določeno točko funkcijske črte pomeni torej trigonometrijsko tangento tistega kota α , katerega tvori geometrijska tangenta v dotični točki s pozitivno smerjo abscisne osi, v znakih $\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$. Če se geometrijska tangenta AT pomiče po funkcijski črti tako, da se dotikališče A bliža vrhovni točki C , je kot α oster in se manjša; diferencijalni kvocijent je pozitiven in se manjša. Ko se točka A stika z vrhovno točko C , postane kot $\alpha = 0^\circ$ (tangenta CT je vzporedna z abscisno osjo) in diferencijalni kvocijent dobi vrednost $= 0$, v znakih $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$. Če drži geometrijska tangenta CT po

funkcijski črti dalje na desno, postane kot a top ($= a_1$) in diferencijalni kvocijent negativen.

Dokler se vzdiguje funkcijska črta, raste funkcija in prirastek dy je pozitiven; torej je tudi diferencijalni kvocijent $\frac{dy}{dx}$ pozitiven, ker smatramo namreč prirastek dx vedno za pozitivno količino. Če pa pada funkcijska črta, pojema funkcija in prirastek dy in diferencijalni kvocijent $\frac{dy}{dx}$ sta negativna. Obratno smemo sklepati, da raste določena funkcija tako dolgo, dokler je njen diferencijalni kvocijent pozitiven; če pa postane diferencijalni kvocijent negativen, začne funkcija pojemati. Ko je diferencijalni kvocijent $= 0$, je funkcija največja (najmanjša). Iz enačbe $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$ določiš torej tisto vrednost premenljivke x , za katero dobi funkcija največjo, oziroma najmanjšo vrednost. Prvi slučaj se nahaja pri funkcijah, ki rastejo, drugi pa pri funkcijah, ki pojemajo do dotične premenljivkine vrednosti. V našem primeru je diferencijalni kvocijent $= -\frac{1}{2}x + 2$, ki je pozitiven od $x = -\infty$ do $x = 4$; negativen pa od $x = 4$ do $x = +\infty$. Iz enačbe $-\frac{1}{2}x + 2 = 0$ najdeš vrednost $x = 4$, za katero dobi navedena funkcija največjo vrednost $= 9$.

Kako spoznamo, da kvadratna funkcija raste, oziroma pojemajo. Kdaj dobi kvadratna funkcija največjo, oziroma najmanjšo vrednost.

Geometrijsko podobo kvadratne funkcije $y = 2x^2 - 6x + 9$ najdemo n. pr. s pomočjo razrešitev:

Primer za tolmačenje kvadratne funkcije.

$x = \dots - 2$	-1	0	1	$\frac{3}{2}$	2	3	$\dots$
$y = \dots 29$	17	9	5	$4\frac{1}{2}$	5	9	$\dots$

Napravi primerno sliko! Diferencijalni kvocijent navedene funkcije je $= 4x - 6$. Ker je ta izraz od $x = -\infty$ do $x = \frac{3}{2}$ negativen, od $x = \frac{3}{2}$ do $x = +\infty$ pa pozitiven, pojema torej funkcija $y = 2x^2 - 6x + 9$ od $x = -\infty$ do $x = \frac{3}{2}$, od $x = \frac{3}{2}$ do $x = +\infty$ pa raste. Za $x = \frac{3}{2}$ dobi funkcija najmanjšo vrednost $= 4\frac{1}{2}$.

Če poiščemo kvadratni funkciji $y = ax^2 + bx + c$ geometrijsko mesto ter izmerimo abscise presečišč funkcijske črte in abscisne osi, najdemo razrešitve kvadratne enačbe $ax^2 + bx + c = 0$. Če ima funkcijska črta

Kako se razrešujejo enačbe s pomočjo funkcijskih črt.

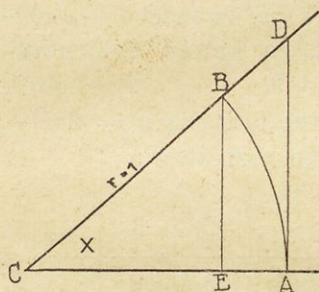
z abscisno osjo dve, oziroma eno skupno točko, ima navedena kvadratna enačba dve, oziroma eno realno razrešitev; če pa nima funkcijska črta z abscisno osjo nobene skupne točke, nima omenjena kvadratna enačba nobene realne razrešitve. Primerjaj § 5!

Ako poiščemo dvema kvadratnima funkcijama (oziroma kvadratni in linearni funkciji) geometrijski mesti ter izmerimo koordinate skupnih točk, najdemo skupne razrešitve dotičnih dveh enačb. Če imata funkcijski črti skupne točke, imata dotični enačbi realne razrešitve; če pa nimata funkcijski črti nobene skupne točke, nimata omenjeni enačbi nobene realne razrešitve.

§ 10. Diferencialni kvocijenti nekaterih najnavadnejših funkcij.

Mejna vrednost
funkcije $\frac{\sin x}{x}$

Mejno vrednost funkcije $\frac{\sin x}{x}$ za $x = 0$ najdemo tako-le. Mera določenega kota $ACB = x$ (primerjaj sliko!) je



pripadajoči lok $AB = x$, katerega polumer je $r = CB = 1$. Če narišemo $BE \perp AC$ in $AD \perp AC$, vidimo iz slike, da je $BE < \widehat{AB} < AD$ ali pa z ozirom na pojasnila o trigonometrijskih funkcijah $\sin x < x < \tan x$. Iz te neenačbe sledi, da je $\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{\cos x}{\sin x}$ ali

$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$. Če se premenljivka x manjša in bliža ničli, se $\cos x$ bliža 1. Ko postane $x = 0$, sta obe meji funkcije $\frac{\sin x}{x}$ enaki; torej je $\frac{\sin x}{x} = 1$ za $x = 0$.

Diferencialni
kvocijent
potence.
Diferenciovati =
differenzieren.

1. Diferencialni kvocijent funkcije $y = x^m$ najdemo tako-le. Ako porabimo deljivost $\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1}$, ki velja za cele pozitivne m , dobimo v našem slučaju izraz $\frac{dy}{dx} = \frac{(x+dx)^m - x^m}{(x+dx) - x} = (x+dx)^{m-1} + (x+dx)^{m-2}x + \dots + (x+dx)x^{m-2} + x^{m-1}$. Ker je $dx = 0$, je vsak izmed m sumandov

navedenega kvocijenta enak x^{m-1} ; torej je $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$ ali $\frac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1}$.

Po tem pravilu se diferencujejo (se išče diferencijalni kvocijent) potence, katerih eksponent je celo pozitivno število. Da smemo po istem pravilu diferencovati tudi take potence, katerih eksponent je ali negativno ali ulomljeno število, bomo pozneje spoznali.

2. Diferencijalni kvocijent funkcije $y = \sin x$ najdemo tako-le. S pomočjo goniometrijskega obrazca, po katerem se sinusi odštevajo, dobimo

Diferencijalni kvocijent sinusa.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\sin(x + dx) - \sin x}{dx} = \frac{2 \cos\left(x + \frac{dx}{2}\right) \sin \frac{dx}{2}}{dx} = \\ &= \cos\left(x + \frac{dx}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{dx}{2}}{\frac{dx}{2}};\end{aligned}$$

torej je z ozirom na zgoraj navedeno mejno vrednost

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \text{ ali } \frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x.$$

3. Na isti način kakor poprej najdemo tudi diferencijalni kvocijent funkcije $y = \cos x$.

Diferencijalni kvocijent kosinusa.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\cos(x + dx) - \cos x}{dx} = -\frac{2 \sin\left(x + \frac{dx}{2}\right) \sin \frac{dx}{2}}{dx} = \\ &= -\sin\left(x + \frac{dx}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{dx}{2}}{\frac{dx}{2}};\end{aligned}$$

torej je

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x \text{ ali } \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x.$$

4. Ako poiščemo diferencijalni kvocijent funkcije $y = f(x) + k$, kjer pomeni k stalnico, najdemo

Diferencijalni kvocijent stalnice.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) + k - [f(x) + k]}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = f'(x).$$

Ker se ta rezultat popolnoma ujema z rezultatom, ki ga dobimo, če diferencujemo funkcijo $y = f(x)$, smemo sklepati, da je diferencijalni kvocijent vsake stalnice $= 0$, v znakih

$$\frac{d(k)}{dx} = 0.$$

Stalni faktor pri
diferencovanju.

Če diferencujemo funkcijo $y = k \cdot f(x)$, kjer pomeni k stalnico, najdemo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k \cdot f(x + dx) - k \cdot f(x)}{dx} = k \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = k \cdot f'(x).$$

Stalni faktor ostane torej pri diferencovanju neizpremenjen, v znakih

$$\frac{d[k \cdot f(x)]}{dx} = k \cdot f'(x).$$

Diferencialni
kvocijent alge-
brajske vsote.

5. Ako poiščemo diferencialni kvocijent funkcije $y = f(x) \pm \varphi(x)$, dobimo

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{f(x + dx) \pm \varphi(x + dx) - [f(x) \pm \varphi(x)]}{dx} = \\ &= \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} \pm \frac{\varphi(x + dx) - \varphi(x)}{dx} = \\ &= f'(x) \pm \varphi'(x). \end{aligned}$$

Diferencialni kvocijent algebrajske vsote dveh ali več funkcij najdemo, ako algebrajsko seštejemo diferencialne kvocijente vseh sumandov.

Kako se diferen-
cuje nerazvita
funkcija.

6. Nerazvito funkcijo $f(x) + \varphi(y) = 0$, n. pr. $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ diferencujemo tako-le. Če raste neodvisna premenljivka x za dx , se odvisna premenljivka y izpremeni za dy ; torej je tudi $f(x + dx) + \varphi(y + dy) = 0$. Iz enačb

$$\left. \begin{aligned} f(x + dx) + \varphi(y + dy) &= 0 \\ f(x) + \varphi(y) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

najdemo

$$\frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} + \frac{\varphi(y + dy) - \varphi(y)}{dx} = 0$$

ali

$$\frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} + \frac{\varphi(y + dy) - \varphi(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

to je

$$f'(x) + \varphi'(y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Iz zadnje enačbe izračunamo diferencialni kvocijent $\frac{dy}{dx}$ in sicer je $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'(x)}{f'(y)}$. V zgoraj navedenem primeru dobimo na ta način

$$2b^2x + 2a^2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \text{ in } \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Da velja zgoraj navedeno pravilo za diferencovanje potenc tudi v slučajih, ko je potenčni eksponent ali negativno ali ulomljeno število, spoznamo tako-le.

Iz enačb $y = \frac{1}{x}$ in $y + dy = \frac{1}{x+dx}$ sledi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+dx} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x+dx)}{(x+dx)x} = -\frac{dx}{(x+dx)x}.$$

Diferencovanje potenc z negativnimi in ulomljenimi eksponenti.

Potem je

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x+dx)x} = -\frac{1}{x^2}.$$

Ako pretvorimo funkcijo $y = x^{-m}$ na obliko $x^m - \frac{1}{y} = 0$, najdemo po prejšnjem

$$mx^{m-1} + \frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \text{ in}$$

$$\frac{dy}{dx} = -mx^{m-1} \cdot y^2 = -mx^{m-1} \cdot x^{-2m} = -mx^{-m-1}.$$

Če damo funkciji $y = x^{\frac{m}{n}}$ obliko $x^m - y^n = 0$, dobimo po prejšnjem

$$mx^{m-1} - ny^{n-1} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \text{ in}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{m-1}}{y^{n-1}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{m-1}}{x^{\frac{m}{n}(n-1)}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}.$$

Naloge.

1. Določi diferencialni kvocijent funkcij:

a) $y = \sqrt{2ax - x^2}$, b) $y = \sin(x^2 - a^2)$.

Razrešitev. a) Po pravilih o diferencovanju potence, algebrajske vsote, stalnega faktorja in zopet potence najdeš

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2} (2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d(2ax - x^2)}{dx} = \frac{2a - 2x}{2\sqrt{2ax - x^2}} = \\ &= \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}}.\end{aligned}$$

Isti rezultat tudi dobiš, ako postaviš $2ax - x^2 = z$. Potem je $y = \sqrt{z}$ in

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sqrt{z})}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot (2a - 2x) = \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

b) Po pravilih o diferencovanju sinusa, algebrajske vsote in potence najdeš

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x^2 - a^2) \cdot \frac{d(x^2 - a^2)}{dx} = 2x \cos(x^2 - a^2).$$

Isti rezultat tudi dobiš, ako postaviš $x^2 - a^2 = z$. Potem je $y = \sin z$ in

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \cos z \cdot 2x = 2x \cos(x^2 - a^2).$$

2. Vértaj določenemu krogu največji enakokraki trikotnik!

Razrešitev. Napravi primerno sliko! Ako je v višina enakokrakega trikotnika, je po lastnostih pravokotnega trikotnika polovica osnovnice enaka geometrični sredini med daljicama v in $2r - v$, v znakih $\frac{v}{2} = \sqrt{v(2r - v)}$. Trikotnikova ploščina je potem $p = v\sqrt{v(2r - v)} = \sqrt{2rv^3 - v^4}$. Če ima p največjo vrednost, velja isto tudi za $p^2 = 2rv^3 - v^4$. Ako diferencujemo to funkcijo z ozirom na premenljivko v in dobljeni diferencijalni kvocijent izenačimo z ničlo, najdemo $6rv^2 - 4v^3 = 0$ in $v = \frac{3}{2}r$. Potem je trikotnikova osnovnica $= r\sqrt{3}$ in krak $= r\sqrt{3}$, t. j. zahtevani trikotnik je enakostraničen.

3. Določi tisti pokončni valj, kateremu je površje P in kateremu se da očrtati najmanjša krogla!

Razrešitev. Obrazec za valjevo površje je $P = 2r\pi(r + s)$. Središče očrtane krogla leži v presečišču diagonal osjega

preseka. Polmer R očrtane krogle je določen po enačbi $R^2 = r^2 + \frac{s^2}{4}$ in prostornina te krogle po obrazcu

$$k = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} \sqrt{\left(r^2 + \frac{s^2}{4}\right)^3} = \frac{\pi}{6} \sqrt{(4r^2 + s^2)^3},$$

ali če postaviš $s = \frac{P}{2r\pi} - r$, najdeš

$$k = \frac{\pi}{6} \left[\sqrt{4r^2 + \left(\frac{P}{2r\pi} - r\right)^2} \right]^3 = \frac{\pi}{6} \left[\sqrt{5r^2 + \frac{P^2}{4r^2\pi^2} - \frac{P}{\pi}} \right]^3.$$

Prostornina k je najmanjša, če dobi funkcija $5r^2 + \frac{P}{4r^2\pi^2} - \frac{P}{\pi}$ najmanjšo vrednost. Potem je

$$10r - \frac{P^2}{2r^3\pi^2} = 0;$$

torej je

$$r = \sqrt[4]{\frac{P^2}{20\pi^2}} = \sqrt{\frac{P}{2\pi\sqrt{5}}}$$

in

$$s = (\sqrt{5} - 1) \sqrt{\frac{P}{2\pi\sqrt{5}}}.$$

4. Včrtaj določeni krogli pokončen valj z najmanjšim plaščem!

Razrešitev. Valjev plašč je določen po obrazcu $p = 2r\pi s$ in stranica po enačbi $s = 2\sqrt{R^2 - r^2}$; torej je $p = 4\pi r\sqrt{R^2 - r^2} = 4\pi\sqrt{R^2r^2 - r^4}$. Plašč p je najmanjši, če dobi funkcija $\sqrt{R^2r^2 - r^4}$ najmanjšo vrednost. Potem je

$$\frac{2R^2r - 4r^3}{2\sqrt{R^2r^2 - r^4}} = 0;$$

torej $r = \frac{R}{2}\sqrt{2}$ in $s = R\sqrt{2}$, t. j. valj je enakostraničen.

Isti rezultat tudi najdemo, ako sklepamo tako-le. Plašč p je najmanjši, ako dobi funkcija $R^2r^2 - r^4$ najmanjšo vrednost i. t. d.

§ 11. Pojem o integralu.

Diferencovati.
 Integrovati =
 integrieren.
 Integral = das
 Integral.
 Integralni znak
 = das Integral-
 zeichen.

I. Če poiščemo določeni funkciji $y = f(x)$ diferencijalni kvocijent $y' = f'(x)$ ali pa diferencijal $y' dx = f'(x) dx$, pravimo, da diferencujemo določeno funkcijo. N. pr. Funkcija x^3 ima diferencijalni kvocijent $3x^2$ in diferencijal $3x^2 dx$. Ako poiščemo obratno določenemu diferencijalnemu kvocijentu $f'(x)$ ali pa določenemu diferencijalu $f'(x) dx$ prvotno funkcijo $f(x)$, pravimo, da integrujemo določeni diferencijalni kvocijent ali določeni diferencijal, v znakih $\int f'(x) dx = f(x)$. Znak $\int$ se imenuje integralni znak in se čita „integral“; prvotna funkcija $f(x)$ se zove integral. Vsak integral ima to lastnost, da je njegov diferencijal enak izrazu, ki stoji pod integralnim znakom; torej je $d \int f'(x) dx = f'(x) dx$. Tako n. pr. pripada diferencijalu $3x^2 dx$ integral x^3 ; kajti diferencijal funkcije x^3 je $3x^2 dx$.

Obči ali nedolo-
 čeni integral =
 allgemeines oder
 unbestimmtes
 Integral.

Funkciji $f(x)$ in $f(x) + k$ se razlikujeta po stalni količini k in imata isti diferencijal $f'(x) dx$. Obratno smemo sklepati, da pripadata diferencijalu $f'(x) dx$ integrala $f(x)$ in $f(x) + k$. Ker je zadnji teh izrazov splošnejši in preide v prvega za $k = 0$, ga smatramo navadno za zahtevani integral ter ga imenujemo obči ali nedoločeni integral. Torej je vobče

$$\int f'(x) dx = f(x) + k.$$

Nekateri nedolo-
 čeni integrali.

Naslednji nedoločeni integrali so posebno važni:

1. $\int dx = x + k;$
2. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + k;$
3. $\int \sin x \cdot dx = -\cos x + k;$
4. $\int \cos x \cdot dx = \sin x + k.$

O resničnosti teh integralov se prepričaj, ako jim poiščeš diferencijale ter primerjaš te diferencijale z izrazi pod integralnim znakom.

Stalni faktor pri
 integrovanju.

Vsak stalni faktor diferencijala se sme postaviti pred integralni znak, v znakih

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx.$$

Integral algebrajske vsote najdeš, ako algebrajsko sešteješ integrale vseh sumandov, v znakih

Integral algebrajske vsote.

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

O resničnosti teh dveh pravil se prepričaš, ako primerjaš diferencial desnega dela navedenih enačb z izrazom pod integralnim znakom v levem enačbenem delu.

Občnega pravila za integriranje nimamo. Integrale enostavnih diferencialov si je treba zapomniti. S pomočjo te podlage integriramo potem, da pretvorimo dotične diferencialne na takšno obliko, da je mogoče njih integrale spoznati. N. pr. Integral $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ določimo, ako zamenimo $\sqrt{a^2 + x^2} = z$; potem je $a^2 + x^2 = z^2$, $x dx = z dz$ in

Kako se integriruje.

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{z dz}{z} = \int dz = z + k = \sqrt{a^2 + x^2} + k.$$

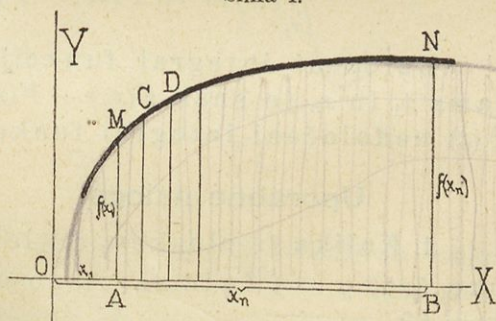
II. Recimo, da nam slika I. predloži funkcijo $y = f(x)$. V funkcijski črti sta točki M in N z abscisama x_1 in x_n ; kolika je ploskev med pripadajočima ordinatama $f(x_1)$ in $f(x_n)$ in med abscisno osjo in funkcijsko črto?

Določeni integral = bestimmtes Integral.

Ako razdelimo

Slika I.

daljico $x_n - x_1$ na neizmerno veliko enakih delov ter narišemo skoz razdelišča $x_2, x_3, x_4 \dots$ vzporednice z ordinato AM , razpade ploskev $ABNM$ na pravokotnike, katerih osnovnice so



neizmerno majhne ($= dx$) in katerih višine so zaporedoma funkcijske vrednosti $f(x_1), f(x_2), f(x_3) \dots f(x_n)$. Ploskev $ABNM$ je torej

$$f(x_1) dx + f(x_2) dx + f(x_3) dx + \dots + f(x_n) dx.$$

Takšna vsota se imenuje določeni integral funkcije $f(x)$ med mejama x_1 in x_n ter se zapiše krajše tako-le

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x) dx.$$

Kako izračunamo določeni integral.

Vrednost navedene vsote določimo tako-le. Če je $F(x)$ nedoločeni integral funkcije ($f(x)$), veljajo po pojmu o diferencialnem kvocijentu za točke $M, C, D \dots$ naslednje enačbe:

$$f(x_1) = \frac{F(x_2) - F(x_1)}{dx},$$

$$f(x_2) = \frac{F(x_3) - F(x_2)}{dx},$$

$$f(x_3) = \frac{F(x_4) - F(x_3)}{dx},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f(x_n) = \frac{F(x_n) - F(x_{n-1})}{dx}.$$

Ako pomnožimo vsako teh enačb z diferencialom dx ter seštejemo zneske, najdemo

$$f(x_1) dx + f(x_2) dx + f(x_3) dx \dots + f(x_n) dx = F(x_n) - F(x_1)$$

ali krajše izraženo

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x) dx = F(x_n) - F(x_1).$$

Določeni integral funkcije $f(x)$ med mejama x_1 in x_n je enak $F(x_n) - F(x_1)$, kjer pomeni $F(x)$ nedoločeni integral funkcije $f(x)$.

Uporabne naloge.

1. Kolika je ploskev, ki leži med funkcijsko črto $y = \sqrt{6x}$ in abscisno osjo od $x = 0$ do $x = 6$?

Razrešitev. Po prejšnjih pojasnilih je zahtevana ploskev

$$p = \int_0^6 y dx = \int_0^6 \sqrt{6x} \cdot dx = \sqrt{6} \int_0^6 x^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \sqrt{6} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \right]_0^6 = \sqrt{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6^{\frac{3}{2}} = 24.$$

2. Kolikaj je ploskev, katero oklepata sinusova črta $y = \sin x$ in abscisna os od $x = 0$ do $x = \pi$?

Razrešitev. Primerjaj sinusovo črto v geometriji!

$$\begin{aligned} p &= \int_0^{\pi} y dx = \int_0^{\pi} \sin x dx = - [\cos x]_0^{\pi} = \\ &= - (\cos \pi - \cos 0) = + 2. \end{aligned}$$

3. Določi prostornino krogle!

Razrešitev. Ako položimo skoz središče določenega polukroga (slika II.) pravokotno soredje, velja med koordinatama (x, y) vsake točke polukrogovega oboda in med stalnico r enačba

$$x^2 + y^2 = r^2. \text{ Če}$$

zavrtimo polu-

krog okoli pre-

mera AB za 360° ,

nastane krogla.

Pri tem vrtenju

nariše vsaka po-

lukrogova ordi-

nata krožnico.

Ako razdelimo

premer $AB = 2r$

na neizmerno

veliko enakih

delov ter napra-

vimo skoz vsako

razdelišče pre-

sek, ki stoji

pravokotno na AB , razpade krogla na neizmerno veliko

valjastih plošč, katerih polumeri so zaporedne polukrogove

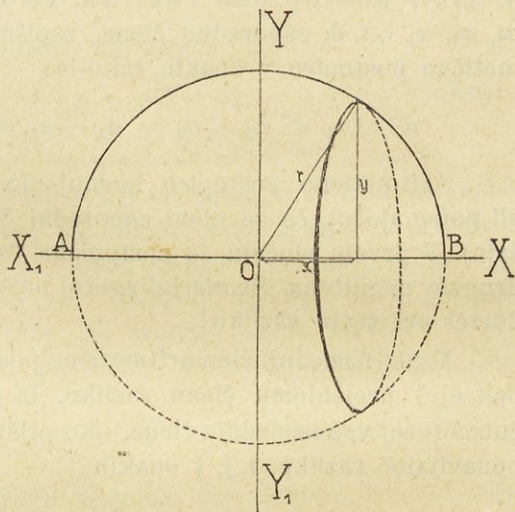
ordinate in katerih višine so neizmerno majhne ($= dx$).

Vsota vseh teh plošč tvori krogolino prostornino, to je v

znakih

$$\begin{aligned} k &= \int_{-r}^{+r} y^2 \pi \cdot dx = \pi \int_{-r}^{+r} y^2 dx = \pi \int_{-r}^{+r} (r^2 - x^2) dx = \\ &= \pi [r^2 x - \frac{1}{3} x^3]_{-r}^{+r} = \pi [r^3 - \frac{1}{3} r^3 + r^3 - \frac{1}{3} r^3] = \frac{4}{3} r^3 \pi. \end{aligned}$$

Slika II.



III. Postopice.

§ 12. Aritmetične postopice.

Aritmetična po-
stopica = arith-
metische Reihe
oder
Progression.
Pojasnila.

Vsaka izmed številnih vrst:

$$a) 2, 5, 8, 11, 14, 17 \text{ i. t. d.},$$

$$b) 36, 33\frac{3}{5}, 31\frac{1}{5}, 28\frac{4}{5} \text{ i. t. d.}$$

ima lastnost, da je razlika po dveh zaporednih števil (prejšnje število vzeto za subtrahend) vedno ista. Vsaka taka številna vrsta se imenuje aritmetična postopica, njena posamezna števila se zovejo členi in sicer prvi, drugi, tretji... člen, in stalni razliki po dveh zaporednih členov se pravi postopična razlika. Če zaznamujemo z a_1, a_2, a_3, a_4 i. t. d. zaporedne člene, zapišemo pogoj za aritmetično postopico v znakih tako-le:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = d.$$

Aritmetično postopico imenujemo rastočo (padajočo ali pojemajočo), če se njeni zaporedni členi večajo (manjšajo). V prvem slučaju je postopična razlika pozitivna, v drugem negativna. Primerjaj zgoraj navedeni postopici ter določi pri vsaki razliko!

Tvorbeni zakon
aritmetične
postopice.

Vsak naslednji člen aritmetične postopice najdeš, ako prišteješ prejšnjemu členu razliko. Iz prvega člena izračunaš torej vse naslednje člene, ako prišteješ prvemu členu ponavljajoč razliko, t. j. v znakih

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Občni člen arit-
metične postopice.

Izraz $a_n = a_1 + (n - 1)d$ se imenuje občni člen aritmetične postopice; on določa, kako izračunaš iz prvega člena in razlike katerikoli člen aritmetične postopice.

Ako odšteješ od zadnjega člena aritmetične postopice ponavljajoč razliko, najdeš zaporedoma vse prejšnje člene, t. j. v znakih

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= a_n - d, \\ a_{n-2} &= a_n - 2d, \\ a_{n-3} &= a_n - 3d, \\ &\vdots \\ a_1 &= a_n - (n-1)d. \end{aligned}$$

Ako izrazimo člene aritmetične postopice po zgoraj navedenih načinih, dobi vsota iz n členov obliko

Vsota aritmetične postopice.

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + [a_1 + (n-1)d],$$

ali pa

$$s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + [a_n - (n-1)d].$$

Če seštejemo te enačbi, najdemo

$$\begin{aligned} 2s_n &= (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots n\text{-krat} \\ \text{in } s_n &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n). \end{aligned}$$

Izraz $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ se imenuje vsota aritmetične postopice; on določa, kako moreš iz prvega in zadnjega člena in iz števila členov izračunati vsoto.

Ako je treba med določeni števili a in b postaviti (vriniti) n števil tako, da tvorijo vsa ta števila z a in b skupaj aritmetično postopico, morajo števila, katera iščeš, imeti obliko

Vriniti = interpolieren.

$$a + d, a + 2d, a + 3d, \dots, a + nd, + b$$

kjer je razlika d še neznana. Za členom $a + nd$ pride število b , za katero velja isti tvorbeni zakon; torej je $b = a + (n+1)d$. Iz te enačbe določiš razliko za aritmetično postopico in sicer je

$$d = \frac{b-a}{n+1}.$$

Naloge.

+ 1. Prvi člen aritmetične postopice je $= 5$, razlika $= 8$ in vsota $= 1463$; koliko členov šteje postopica?

Razrešitev. Ako porabiš obrazca za občni člen in vsoto, dobiš enačbi $a_n = 5 + (n-1)8 = -3 + 8n$ in $1463 = \frac{n}{2}(5 + a_n)$, iz katerih najdeš po zamenjalnem načinu $n = 19$.

2. Pri aritmetični postopici je produkt iz 7. in 15. člena = 630 in vsota med tema členoma ležečih členov znaša $185\frac{1}{2}$; kolik je prvi člen in kolika razlika (kako se glasi postopica)?

Razrešitev. Po pogoju naloge je $a_7 \cdot a_{15} = 630$ in $a_8 + a_9 + a_{10} + \dots + a_{14} = 185\frac{1}{2}$. Iz teh podatkov dobiš s pomočjo obrazca za občni člen dve enačbi z neznankama a_1 in d . Potem najdeš $a_1 = 5\frac{1}{4}$, $47\frac{3}{4}$ in $d = \pm 2\frac{1}{8}$.

3. Vrini med 16 in 250 toliko členov, da dobiš aritmetično postopico z vsoto 1995. Kolika je razlika te postopice?

Razrešitev. Če se vrine n členov, šteje postopica $(n+2)$ člena; prvi člen je 16 in zadnji 250. Iz obrazca za vsoto najdeš $n = 13$. Členi postopice so: 16, $16 + d$, $16 + 2d$, ..., $16 + 13d$, $250 = 16 + 14d$. Iz pogoja $250 = 16 + 14d$ najdeš $d = 16\frac{5}{7}$.

4. Razdeli število 225 na več delov tako, da je vsak naslednji del za 2 večji od prejšnjega in da je zadnji del = 29. Kolik je prvi del in koliko je delov?

Razrešitev. Zahtevani deli tvorijo aritmetično postopico, pri kateri je razlika = 2, zadnji člen = 29 in vsota = 225. Obrazca za občni člen in vsoto dasta enačbi $29 = a_1 + 2(n-1)$ in $225 = \frac{n}{2}(a_1 + 29)$, iz katerih najdeš $n = 15$ in $a_1 = 1$.

5. Štiri števila tvorijo aritmetično postopico; vsota vseh štirih števil je = 58 in vsota njihovih kvadratov = 966. Katera so števila?

Razrešitev. Zahtevana števila so: $x - 3d$, $x - d$, $x + d$, $x + 3d$. Iz pogojev naloge najdeš $x = 14\frac{1}{2}$ in $d = \pm 2\frac{1}{2}$. Števila, katera iščeš so: 7, 12, 17, 22 ali obratno: 22, 17, 12, 7.

+ 6. Koliko troštevilk celih števil je deljivih s 17, in kolika je njihova vsota?

Razrešitev. Troštevilkna števila, ki so deljiva s 17, tvorijo aritmetično postopico, kateri je razlika 17. Oblika teh števil je $17n$, kjer pomeni n neko celo število. Po pogoju naloge mora biti $100 < 17n < 1000$, torej $\frac{100}{17} < n < \frac{1000}{17}$ ali drugače izraženo $5\frac{15}{17} < n < 58\frac{14}{17}$. Iz zadnje neenačbe sledi, da more n vsako izmed vrednosti

$$6, 7, 8 \dots 56, 57, 58$$

imeti. 53 števil torej zadostuje navedeni nalogi; prvo teh števil je $17 \cdot 6 = 102$ in zadnje $17 \cdot 58 = 986$. Vsota vseh zahtevanih števil znaša $s = \frac{53}{2}(102 + 986) = 28832$.

§ 13. Geometrijske postopice.

Vsaka izmed številnih vrst:

a) 3, 9, 27, 81, 243 i. t. d.,

b) 8, $\frac{16}{5}$, $\frac{32}{25}$, $\frac{64}{125}$, $\frac{128}{625}$ i. t. d.

ima lastnost, da je kvocijent po dveh zaporednih števil (prejšnje število vzeto za divizor) vedno isti. Vsaka taka številna vrsta se imenuje geometrijska postopica; njena posamezna števila se zovejo členi in stalnemu kvocijentu po dveh zaporednih členov se pravi postopični kvocijent. Če zaznamujemo z a_1, a_2, a_3 i. t. d. zaporedne člene, izrazimo pogoj za geometrijsko postopico v znakih tako-le:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = k.$$

Geometrijsko postopico imenujemo rastočo (padajočo ali pojemajočo), če se njeni zaporedni členi večajo (manjšajo); v prvem slučaju je postopični kvocijent večji od enote, v drugem pa pravi ulomek. Primerjaj zgoraj navedeni postopici ter določi pri vsaki kvocijent!

Vsak naslednji člen geometrijske postopice najdeš, ako pomnožiš prejšnji člen s kvocijentom. Iz prvega člena

Geometrijska
postopica =
geometrische
Reihe oder Pro-
gression.
Pojasnila.

Tvorbeni zakon
geometrijske
postopice.

izračunaš torej vse naslednje člene, ako pomnožiš prvi člen ponavljajoč s kvocijentom, t. j. v znakih

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 k, \\ a_3 &= a_2 k = a_1 k^2, \\ a_4 &= a_3 k = a_1 k^3, \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 k^{n-1}. \end{aligned}$$

Občni člen
geometrijske
postopice.

Izraz $a_n = a_1 k^{n-1}$ se imenuje občni člen geometrijske postopice; on določa, kako izračunaš iz prvega člena in kvocijenta katerikoli člen geometrijske postopice.

Vsota geometrijske postopice.

Vsota iz n členov geometrijske postopice je po navedenem

$$s_n = a_1 + a_1 k + a_1 k^2 + \dots + a_1 k^{n-1}.$$

Če pomnožiš to enačbo s kvocijentom k , dobiš

$$k s_n = a_1 k + a_1 k^2 + a_1 k^3 + \dots + a_1 k^n.$$

in ako odšteješ od te enačbe prvo, najdeš

$$s_n(k-1) = a_1 k^n - a_1 \text{ in } s_n = \frac{a_1(k^n-1)}{k-1}.$$

Izraz $s_n = \frac{a_1(k^n-1)}{k-1}$ se imenuje vsota geometrijske postopice; on določa, kako moreš iz prvega člena, kvocijenta in števila členov izračunati vsoto.

Vsota padajoče
brezkončne
geometrijske
postopice.

Pri padajočih geometrijskih postopiceh pojemajo (se manjšajo) zaporedni členi. Čim večje je število členov, tem bolj se bliža vrednost zadnjih členov ničli. Na isti način kakor zgoraj najdemo vsoto takih brezkončnih postopic in sicer

$$\left. \begin{aligned} s &= a_1 + a_1 k + a_1 k^2 + \dots \text{ brez konca} \\ k s &= a_1 k + a_1 k^2 + a_1 k^3 + \dots \end{aligned} \right\} \text{ odšteto}$$

$$s(1-k) = a_1, \text{ torej } s = \frac{a_1}{1-k}.$$

Izraz $s = \frac{a_1}{1-k}$ določa vsoto padajočih brezkončnih geometrijskih postopic.

Ako je treba med določeni števili a in b vriniti n takih števil, ki tvorijo z a in b skupaj geometrijsko postopico, morajo števila, katera iščeš, imeti obliko

Kako se med določeni števili vrinejo novi členi.

$$ak, ak^2, ak^3, \dots, ak^n,$$

kjer pomeni k še neznan kvocijent geometrijske postopice. Za ak^n pride število b , za katero velja isti tvorbeni zakon; torej je $b = ak^{n+1}$. Iz te enačbe dobiš kvocijent za geometrijsko postopico in sicer je

$$k = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$$

Naloge.

+ 1. Določi vsoto naslednje postopice:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{2}{3^6} + \dots$$

Razrešitev. Ako urediš navedeno postopico tako-le:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^6} + \dots,$$

dobiš dve brezkončni geometrijski postopici, katerima se dasta vsoti določiti.

$$s = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} + \frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}.$$

+ 2. Vsota iz 1. in 3. člena geometrijske postopice je $9\frac{3}{4}$ in vsota iz 2. in 4. člena $14\frac{5}{8}$; kako se glasi postopica?

Razrešitev. Po pogoju naloge je

$$a_1 + a_3 = 9\frac{3}{4} \text{ in } a_2 + a_4 = 14\frac{5}{8}.$$

Če porabiš pri teh podatkih obrazec za občni člen ponavljajoč in razstaviš dobljena zneska na faktorje, najdeš

$$a_1(1 + k^2) = \frac{39}{4} \text{ in } a_1k(1 + k^2) = \frac{117}{8}.$$

Ako deliš zadnji enačbi eno z drugo, dobiš $k = \frac{3}{2}$. Potem najdeš $a_1 = 3$.

+ 3. Produkt iz 1. in 8. člena geometrijske postopice znaša 4374 in vsota iz 4. in 5. člena 135; kolika je vsota 8 členov?

Razrešitev. Po pogoju naloge je

$$a_1 \cdot a_8 = 4374 \text{ in } a_4 + a_5 = 135.$$

Ako porabiš obrazec za občni člen, dobiš

$$a_1^2 k^7 = 4374 \text{ in } a_1 k^3 (1 + k) = 135.$$

Če deliš kvadrat druge enačbe s prvo, najdeš kvadratno enačbo, iz katere dobiš $k = \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$. Potem je $a_1 = 16, 273\frac{3}{8}$ in $s_8 = 788\frac{1}{8}$.

4. Vsota treh števil, ki tvorijo geometrijsko postopico, znaša 21; vsota njihovih kvadratov je 189. Katera so števila?

Razrešitev. Po pogoju naloge je

$$a_1 + a_2 + a_3 = 21 \text{ in } a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 189$$

ali drugače izraženo

$$a_1(1 + k + k^2) = 21 \text{ in } a_1^2(1 + k^2 + k^4) = 189.$$

Ako deliš kvadrat prve enačbe z drugo, najdeš obratno enačbo četrte stopnje, iz katere dobiš $k = \frac{1}{2}, 2$. Potem je $a_1 = 12, 3$. Zahtevana števila so: 12, 6, 3 ali 3, 6, 12.

Druga razrešitev. Ako odšteješ od kvadrata prve enačbe drugo in dobljeni znesek deliš s prvo enačbo, najdeš vrednost produkta $a_1 k$. Iz te vrednosti dobiš s pomočjo prve enačbe iste rezultate kakor zgoraj.

5. Prvi, drugi, peti in zadnji člen aritmetične postopice tvorijo štiri zaporedne člene geometrijske postopice. Če znaša vsota te četveročlenske postopice 80, kolika je vsota aritmetične postopice?

Razrešitev. Če tvorijo členi $a, a + d, a + 4d$ in $a + (n - 1)d$ aritmetične postopice štiri zaporedne člene geometrijske postopice, je

$$\frac{a + d}{a} = \frac{a + 4d}{a + d} = \frac{a + (n - 1)d}{a + 4d}.$$

V tem izrazu se nahajata dve enačbi. Nadalje je po pogoju naloge $4a + (n + 4)d = 80$. Iz navedenih enačb najdeš: $n = 14, a = 2, d = 4$. Vsota aritmetične postopice je 392.

6. Kvadratu s stranico a se vērta drugi kvadrat tako, da njegova oglišča razpolavljajo stranice prvega kvadrata; drugemu kvadratu se vērta na isti način tretji kvadrat i. t. d. Koliko znašajo a) obsegi, b) ploščine vseh teh kvadratov?

Razrešitev. Stranica prvega kvadrata je $= a$. Stranico drugega kvadrata najdeš po Pitagorovem izreku in sicer je $a_2 = a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Stranica tretjega kvadrata je $a_3 = a_2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$, stranica četrtega kvadrata je $a_4 = a_3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$, i. t. d. Ako primerjamo navedene rezultate, vidimo, da tvorijo stranice zaporednih kvadratov geometrijsko postopico, katere prvi člen je $= a$ in kvocijent $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Obsegi vseh kvadratov znašajo

$$\begin{aligned} s &= 4a + 4a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + 4a \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \dots = \\ &= \frac{4a}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}} = 4a(2 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Ploščine vseh kvadratov znašajo

$$\begin{aligned} S &= a^2 + a^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + a^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^4 + \dots = \\ &= \frac{a^2}{1 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} = 2a^2. \end{aligned}$$

§ 14. Obrestno obrestni računi.

Dostikrat se nalože glavnice ali kapitali tako na obresti, da se pridenejo obresti koncem vsake dobe (navadno koncem vsakega leta ali poluletja) h kapitalu ter se s tem vred zopet nalože na obresti. V takem slučaju pravimo: kapital je naložen na obrestne obresti.

Pri obrestno obrestnih računih pride v poštev: 1. glavnica ali kapital, 2. čas, 3. odstotek ali procent (obrestna mera), 4. obresti.

Če naložiš kapital po $p\%$, naraste 100 K kapitala z obrestmi vred v 1 letu na $(100 + p)$ kron, 1 K kapitala torej na $\frac{100+p}{100}$ kron $= \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ kron. Vrednost $1 + \frac{p}{100} = k$, na katero naraste kapitalova enota z obrestmi vred v 1 letu, imenujemo obrestovalni faktor.

Obrestno
obrestni račun =
Zinseszinsrech-
nung.

Obrestovalni
faktor = Ver-
zinsungsfaktor.

Kako izračunaš
vrednost kapitala po dolo-
čenem času.

Ker je vrednost kapitalove enote čez eno leto enaka k , ima kapital a čez 1 leto vrednost $a_1 = ak$, t. j. kapitalovo vrednost čez 1 leto najdeš, ako pomnožiš prvotni kapital z obrestovalnim faktorjem. Prvotni kapital za drugo leto je a_1 in naraste z obrestmi vred koncem tega leta na vrednost $a_2 = a_1 k = ak^2$. Kapital tretjega leta je a_2 in dobi koncem tega leta vrednost $a_3 = a_2 k = ak^3$ i. t. d. Čez n let ima torej kapital a vrednost $a_n = ak^n$.

Enačba $a_n = ak^n$ določuje vrednost kapitala, naloženega na obrestne obresti, čez n let. Iz te enačbe se da določiti tudi vsaka izmed količin a , k , n ; iz pogoja za obrestovalni faktor $k = 1 + \frac{p}{100}$ najdeš procente. Kadar se obresti kapitalizujejo (pridenejo h kapitalu) poluletno, je obrestovalni faktor $k = 1 + \frac{p}{200}$ in namesto n se postavi $2n$.

Enačba $a_n = ak^n$ ne velja samo za kapitala, naložene na obrestne obresti, temveč tudi za količine sploh, ki se večajo po stalnem razmerju kakor n. pr. prebivalci kake dežele, množina lesa v gozdu i. t. d.

Kako izračunaš
vrednost letnih
zneskov po dolo-
čenem času.

Ako naložiš v začetku ali koncem vsakega leta isti znesek r na obrestne obresti, najdeš vrednost vseh teh zneskov v začetku, oziroma koncem n -tega leta tako-le. Prvi znesek je naložen $(n-1)$ leto na obrestne obresti; vsak naslednji znesek pa 1 leto manj ko prejšnji. Torej je

vrednost 1. zneska ob času zadnjega vplačila	=	$\frac{rk^{n-1}}{k-1}$
" 2. " " " " "	=	$\frac{rk^{n-2}}{k-1}$
" 3. " " " " "	=	$\frac{rk^{n-3}}{k-1}$
.....		
" $(n-1)$. " " " " "	=	$\frac{rk}{k-1}$
" n . " " " " "	=	$\frac{r}{k-1}$

in vsota vrednosti vseh n zneskov je

$$s_n = r(1 + k + k^2 + \dots + k^{n-2} + k^{n-1})$$

ali skraćeno po pravilu prejšnjega paragrafa

$$s_n = r \frac{k^n - 1}{k - 1}.$$

Enačba $s_n = r \frac{k^n - 1}{k - 1}$ določuje vrednost vseh skoz n let vplačanih zneskov r in sicer ob času zadnjega vplačila. Iz te enačbe se dasta določiti tudi količini r in n ; z ozirom na količino k se ne da enačba razrešiti na tej stopnji.

Na obrestne obresti naloženi kapital a , ki se koncem vsakega leta poveča, oziroma zmanjša za znesek r , ima po zgoraj navedenem na koncu n -tega leta vrednost

$$b = ak^n \pm r \frac{k^n - 1}{k - 1}.$$

Iz te enačbe moreš določiti tudi količine a , r in n .

Znesek, ki se komu skoz nekatera leta izplačuje, se imenuje renta. Renta je ali vsako leto enako velika (stalna) ali včasih tudi po določenem zakonu izpremenljiva; izplačuje se navadno koncem (redkokdaj v začetku) vsakega leta, oziroma poluletja. Renta se mora kupiti, t. j. za rento se mora poprej neka vsota (vloga) ali enkrat ali ob določenih obrokih plačati.

Renta = die
Rente.

Pri vsaki renti je važna njena gotova vrednost, t. j. tisti znesek, ki bi se moral v začetku onega leta, v katerem se prvokrat izplača renta, zanjo plačati. Ako naložiš gotovo vrednost (a) rente na obrestne obresti, dobiš za časa zadnje rente isti znesek, kakor če bi naložil vsako rento r takoj, ko jo dobiš, na obrestne obresti, t. j. v znakih

Enačbi za rente.

$$ak^n = r \frac{k^n - 1}{k - 1}.$$

Iz te enačbe se da izračunati vsaka izmed količin a , r in n .

Če bi se renta dobivala skoz n let in sicer v začetku vsakega leta, bi zanjo veljala ta-le enačba

$$ak^{n-1} = r \frac{k^n - 1}{k - 1}.$$

Vrednosti določenih kapitalov, ki jih je treba izplačati ob različnih obrokih, se dajo med seboj primerjati le po njih gotovih vrednostih ali po tistih končnih vrednostih, katere dobijo posamezni kapitali za časa zadnjega obroka, ki se jemlje v poštev v dotičnem slučaju.

Naloge.

+ 1. Sedanji vrednosti dveh kapitalov se razlikujeta za 1000 K. Večji kapital je naložen po 4%, manjši po $4\frac{1}{2}\%$; čez 20 let bo prvi kapital dvakrat toliko drugi. Kolik je vsak kapital?

Razrešitev. Večji kapital je x , manjši $x - 1000$. Vrednosti teh kapitalov čez 20 let sta $x \cdot 1.04^{20}$ in $(x - 1000) \cdot 1.045^{20}$. Po pogoju naloge je

$$x \cdot 1.04^{20} = 2(x - 1000) \cdot 1.045^{20}.$$

Iz te enačbe najdeš $x = \frac{2000 \cdot 1.045^{20}}{2 \cdot 1.045^{20} - 1.04^{20}} = 1831.92$ K.

+ 2. Kapital 3000 K je 15 let in sicer v začetku po 5%, pozneje po 4% naložen na obrestne obresti in naraste v tem času na 58327 K; koliko časa je bil naložen po 5%?

Razrešitev. Kapital je n let po 5% in $(15 - n)$ let po 4% naložen. Iz enačbe

$$58327 = 30000 \cdot 1.05^n \cdot 1.04^{15-n}$$

$$\text{najdeš } n = \frac{\log 58327 - \log 30000 - 15 \log 1.04}{\log 1.05 - \log 1.04} = 8 \text{ let.}$$

+ 3. Nekdo si izposodi 2400 K po $3\frac{1}{2}\%$ in posodi ta denar drugemu po 5%; koliko ima dobička v 9 letih?

Razrešitev. Dobiček znaša vsako leto $1\frac{1}{2}\%$ od kapitala 2400 K, t. j. 36 K. Ti zneski se obrestujejo po 5% in narastejo v 9 letih na

$$s_9 = 36 \cdot \frac{1.05^9 - 1}{0.05} = 396.98 \text{ K.}$$

+ 4. Od nekega dolga se plača koncem vsakega leta 250 K. Če znaša dolg čez 15 let še 1300 K in se obresti računajo po $4\frac{1}{2}\%$, a) kolik je bil prvotni dolg, b) čez koliko let bi bil dolg popolnoma poravnani?

Razrešitev. a) Iz enačbe

$$a \cdot 1.045^{15} - 250 \cdot \frac{1.045^{15} - 1}{0.045} = 1300$$

najdeš prvotni dolg $a = 3356.85$ K.

a.g. 1.045¹⁵ = 75100. 4.045¹⁵ = 25300.9

b) Iz enačbe

$$3356 \cdot 85 \cdot 1 \cdot 045^n = 250 \cdot \frac{1 \cdot 045^n - 1}{0 \cdot 045}$$

$$\text{najdeš } n = \frac{\log 10000 - \log 3957 \cdot 67}{\log 1 \cdot 045} = 21 \cdot 05 \text{ let,}$$

t. j. dolg bo poravnán čez 21 let, če bo zadnji obrok nekoliko večji od prejšnjih.

+ 5. Parni stroj velja 17.000 K, popravljalni stroški znašajo poprečno na leto 1160 K in vsakih 25 let je treba kupiti nov stroj. S katerim kapitalom se dajo vsi ti stroški enkrat za vselej poravnati, če se je stroj ravno kupil in se obresti računajo po 4%?

Razrešitev. Obrestne obresti dotičnega kapitala čez 25 let morajo biti enake kupni ceni parnega stroja, povečani za oni znesek, na katerega narastejo popravljalni stroški v 25 letih, t. j. v znakih

$$a \cdot 1 \cdot 045^{25} - a = 17000 + 1160 \cdot \frac{1 \cdot 045^{25} - 1}{0 \cdot 04}.$$

Iz te enačbe najdeš $a = 39208 \cdot 4$ K.

+ 6. Kdaj se plača 24000 K za rento 1000 K, ki se dobiva skoz 24 let, če se obresti računajo po $3\frac{3}{4}\%$?

Razrešitev. Gotovi vrednosti rente in kapitala, ki se plača za rento, sta enaki. Torej veljata enačbi

$$a \cdot 1 \cdot 0375^{24} = 1000 \cdot \frac{1 \cdot 0375^{24} - 1}{0 \cdot 0375},$$

$$a \cdot 1 \cdot 0375^n = 24000,$$

iz katerih je treba gotovo vrednost a iztrebiti. Potem najdeš

$$1 \cdot 0375^n = \frac{0 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 0375^{24}}{1 \cdot 0375^{24} - 1} \quad \text{in } n = 11 \cdot 62 \text{ let.}$$

+ 7. Koliko moraš skoz 20 let in sicer v začetku vsakega leta vložiti pri zavarovalnem društvu, da dobivaš potem skoz 12 naslednjih let rento 600 K, če se računajo obresti po 4%?

Razrešitev. Gotova vrednost vseh vlog je enaka gotovi vrednosti 12letne rente. Torej veljata enačbi

$$a \cdot 1 \cdot 04^{19} = x \cdot \frac{1 \cdot 04^{20} - 1}{0 \cdot 04},$$

$$a \cdot 1 \cdot 04^{32} = 600 \cdot \frac{1 \cdot 04^{12} - 1}{0 \cdot 04}.$$

Ako iztrebiš iz teh enačb gotovo vrednost a , najdeš

$$x = \frac{600}{1 \cdot 04^{13}} \cdot \frac{1 \cdot 04^{12} - 1}{1 \cdot 04^{20} - 1} = 181 \cdot 85 \text{ K.}$$

IV. Sestavbe ali kombinacije.

Sestavljati =
kombinieren.
Sestavba = die
Kombination.
Prvek = das
Element.
Skupina = die
Komplexion.
Kazalo = der
Zeiger oder
Index.
Pojasnila.

Določene stvari ali določena znamenja sestavljamo ali kombinujemo (v širšem pomenu besede), ako jih pravilno uredimo, oziroma razporedimo, ali ako napravimo iz njih oddelke, ki ustrezajo določenim pogojem. Stvari ali znamenja, ki se kombinujejo, se zovejo prveki ali elementi, vsak spoj več elementov pa se imenuje skupina ali kompleksija. Posamezne elemente zaznamujemo ali s črkami ali s števili naravne številne vrste (s kazali) ali pa tudi tako, da si izberemo neko črko, kateri pridenemo kazala, n. pr. $a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$. Izmed dveh elementov je tisti višji (nižji), ki stoji pozneje (poprej) v abecedi, ali ki ima večje (manjše) kazalo. Tako je n. pr. element 5 višji od elementa 3 in element c nižji od elementa d . Izmed dveh skupin je tista višja, v kateri najdeš od leve proti desni poprej višji element, n. pr. skupina $adbc$ je višja od skupine $acbd$. Najnižja skupina je tista, v kateri ni višjega elementa pred nižjim, najvišja pa tista, v kateri ni nižjega elementa pred višjim. V najnižji skupini so elementi naravno urejeni od najnižjega do najvišjega, v najvišji skupini pa sledijo elementi drug drugemu v obratnem redu. Tako je n. pr. $abcde$ najnižja in $edcba$ najvišja skupina.

Naloge.

1. Kolika je verjetnost, da z dvema kockama prej vržeš dve enaki števili ko pa dve neenaki?

Razrešitev. Za dve enaki števili je 6, za dve neenaki pa 30 ugodnih slučajev. $v = \frac{6}{6+30} = \frac{1}{6}$.

2. V neki žari je 10 belih, 7 črnih in 8 zelenih krogel. Kolika je verjetnost, da potegneš prej belo nego zeleno kroglo?

Razrešitev. Absolutna verjetnost za belo kroglo je $v_1 = \frac{10}{25}$, za zeleno pa $v_2 = \frac{8}{25}$; torej je relativna verjetnost za belo kroglo $v = \frac{v_1}{v_1+v_2} = \frac{5}{9}$.

III. Ako se verjetnost kakega dogodka določi s pomočjo verjetnosti dveh ali več drugih dogodkov, govorimo navadno o sestavljeni verjetnosti. Važni sta dve obliki te verjetnosti.

Sestavljena verjetnost = zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

a) Verjetnost dveh ali več dogodkov, ki se izključujejo. Recimo, dogodka A_1 in A_2 imata m možnih slučajev, izmed katerih je u_1 ugodnih za A_1 in u_2 ugodnih za A_2 . Za A_1 in A_2 je torej $u_1 + u_2$ ugodnih slučajev in verjetnost, da se zgodi ali A_1 ali A_2 , je

$$v = \frac{u_1 + u_2}{m} = \frac{u_1}{m} + \frac{u_2}{m} = v_1 + v_2,$$

kjer pomenita v_1 in v_2 absolutni verjetnosti dogodkov A_1 in A_2 .

Ako pride več dogodkov v poštev, najdemo na isti način, da je verjetnost za enega teh dogodkov, ki se izključujejo, enaka vsoti absolutnih verjetnosti vseh posameznih dogodkov, v znakih

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

Naloge.

V neki žari je 7 belih, 8 rumenih, 9 rdečih in 10 modrih krogel. Kolika je verjetnost, da potegneš belo ali rdečo kroglo?

Razrešitev. Absolutna verjetnost za belo kroglo je $v_1 = \frac{7}{34}$, za rdečo kroglo $v_2 = \frac{9}{34}$, torej verjetnost za belo ali rdečo kroglo $v = v_1 + v_2 = \frac{8}{17}$.

2. Kolika je verjetnost, da vržeš z dvema kockama več nego pet pik?

Razrešitev. Vsote, ki znašajo več ko 5, so 6 do 12 in treba je izračunati verjetnost za vsako teh vsot posebej. Potem je $v = \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{13}{18}$. — Isti rezultat najdeš tudi tako-le: Verjetnost, da vržeš eno izmed vsot 2, 3, 4, 5, je $v_1 = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} = \frac{5}{18}$ in verjetnost, da ne vržeš nobene izmed teh vsot, je potem $v = 1 - v_1 = \frac{13}{18}$.

b) Verjetnost zaporednih dogodkov, t. j. verjetnost, da se določeni, med seboj neodvisni dogodki zaporedno vrše. Recimo, dogodka A_1 in A_2 imata oziroma u_1 in u_2 ugodnih, m_1 in m_2 pa mogočih slučajev. Število ugodnih slučajev, da nastopita oba dogodka zaporedno, je $= u_1 \cdot u_2$, ker se lahko vsak ugoden slučaj prvega dogodka združi z vsakim ugodnim slučajem drugega dogodka. Isto velja tudi o mogočih slučajih obeh dogodkov. Verjetnost, da nastopita oba dogodka zaporedno, je torej

$$v = \frac{u_1 u_2}{m_1 m_2} = \frac{u_1}{m_1} \cdot \frac{u_2}{m_2} = v_1 \cdot v_2,$$

kjer pomenita v_1 in v_2 absolutni verjetnosti dogodkov A_1 in A_2 .

Ako pride več dogodkov v poštev, najdemo na isti način, da je verjetnost, da se dogodki zaporedno vrše, enaka produktu iz absolutnih verjetnosti vseh posameznih dogodkov, v znakih

$$v = v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 \dots$$

Ce je $v_1 = v_2 = v_3 = \dots$, se ponavlja isti dogodek; potem je $v = v_1^p$, kjer p naznanja, kolikokrat se ponovi dotični dogodek.

Naloge.

1. Nekdo zapiše trikrat zapored vselej drugo dvoštevilo število. Kolika je verjetnost, da zapiše trikrat zapored liho število?

Razrešitev. Dvoštevilkah števil je 90 (od 10 do 99); od teh je 45 sodih in 45 lihih števil. Verjetnost za liho število je prvič $v_1 = \frac{45}{90}$, drugič $v_2 = \frac{45}{89}$ in tretjič $v_3 = \frac{44}{88}$. Verjetnost, da se zapiše trikrat zapored liho število, je torej $v = v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 = \frac{4}{356}$.

2. V žari je 9 belih in 6 črnih krogel. Kolika je verjetnost, da potegneš najprej dve beli in potem dve črni krogli, a) ako vržeš beli krogli nazaj, b) ako obdržiš beli krogli?

Razrešitev. a) 15 krogel se da sestaviti v ambe $\binom{15}{2}$ krat, 9 belih $\binom{9}{2}$ krat in 6 črnih $\binom{6}{2}$ krat. Verjetnost za dve beli krogli je $v_1 = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{15}{2}}$ in verjetnost za dve črni $v_2 = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{13}{2}}$. Verjetnost, da potegneš najprej dve beli in potem dve črni krogli, je torej $v = v_1 \cdot v_2 = \frac{12}{245}$. — b) Verjetnost za dve beli krogli ostane ista, verjetnost za dve črni krogli je sedaj drugačna. V žari je namreč samo še 13 krogel, 7 belih in 6 črnih. Verjetnost za dve črni krogli je $v_2 = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{13}{2}}$. Verjetnost, da potegneš najprej dve beli in potem dve črni krogli, je torej $v = v_1 \cdot v_2 = \frac{6}{91}$.

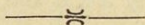
3. Deset oseb srečka za neko nagrado. V to svrho vzame vsaka oseba iz žare, v kateri je 9 belih krogel in 1 rdeča, po eno kroglo ter jo obdrži. Kolika je verjetnost, da potegne tretja oseba rdečo kroglo?

Razrešitev. Ko pride tretja oseba na vrsto, je v žari še 8 krogel in med njimi mora biti tudi rdeča krogla. Verjetnost, da je rdeča krogla še v posodi, t. j. verjetnost, da sta prvi dve osebi dobili beli krogli, je $v_1 = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{8}{10}$. Verjetnost, da potegne tretja oseba rdečo kroglo, je

$v_2 = \frac{1}{8}$. Verjetnost obeh zaporednih dogodkov je zato $v = v_1 \cdot v_2 = \frac{1}{10}$. Isti rezultat dobimo tudi za vsako drugo osebo; torej je vseeno, v kateri vrsti iščejo osebe rdečo kroglo.

4. Kolika je verjetnost, da vržeš z eno kocko v treh metih vsaj enkrat 6 pik?

Razrešitev. Verjetnost, da ne vržeš 6 pik je $v_1 = \frac{5}{6}$. Verjetnost, da trikrat zapored ne vržeš 6 pik, je $v_2 = (\frac{5}{6})^3$. Verjetnost, da v treh metih vsaj enkrat vržeš 6 pik, je nasprotna verjetnosti v_2 ; torej je $v = 1 - v_2 = \frac{91}{216}$.



449:9 = 89

Vadbe in naloge.

K § 1.

1. Zapiši naslednje enačbe tako, da je x potenčni eksponent, ter določi potem vrednost za x :

a) ${}^5\log 625 = x$, b) ${}^2\log \frac{1}{64} = x$, c) ${}^3\log \sqrt[3]{9} = x$.

2. Določi številom 2, 4, 8, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, 1 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ logaritem z ozirom na podlogo 2.

3. Kolik je logaritem števil:

a) 2, 4, 8, 16, 32, 64 z ozirom na podlogo 64;

~~b)~~ 9, 729, 1 , $\frac{1}{3}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$ " " " " 3;

c) 2, 4, 8, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ " " " " 8;

d) 1 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, 2, 4, 8 " " " " $\frac{1}{2}$;

e) 10, 100, 1000, 1 , $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ " " " " 10.

4. Določi naslednjim enačbam logaritmand:

a) ${}^4\log x = 0$, b) ${}^4\log x = -1$, c) ${}^4\log x = -\frac{1}{2}$,

~~d)~~ ${}^3\log x = 4$, ~~e)~~ ${}^5\log x = 1$, ~~f)~~ ${}^6\log x = \frac{2}{3}$,

g) ${}^{10}\log x = -1$, h) ${}^{10}\log x = \frac{1}{2}$, i) ${}^{10}\log x = -\frac{2}{3}$.

5. Določi naslednjim enačbam podlogo:

a) ${}^x\log 10 = 2$, b) ${}^x\log 10 = -1$, c) ${}^x\log 10 = \frac{1}{3}$,

d) ${}^x\log 8 = -\frac{3}{4}$, e) ${}^x\log 2 = 3$, f) ${}^x\log 2 = -2$,

g) ${}^x\log 343 = 3$, h) ${}^x\log 0.1 = -1$, i) ${}^x\log 0.01 = 2$.

K § 2.

1. $\log(7ab)$.
2. $\log[5(a-3b)]$.
3. $\log(a+b)(m+n)$.
4. $\log(a^2 - b^2)$.
5. $\log(4x^2 - 9y^2)$.
6. $\log a(x^2 - 1)$.
7. $\log \frac{2ax}{3b}$.
8. $\log \frac{5x}{3(a-b)}$.
9. $\log \frac{5mx}{1-a^2}$.
10. $\log \frac{x^2 - y^2}{2xy}$.
11. $\log \frac{4a^2 - 9b^2}{25x^4 - 36y^4}$.
12. $\log \frac{63a^4 - 28b^4}{18a^2 - 8b^2}$.
13. $\log ab^2c^3$.
14. $\log(abx)^2$.
15. $\log \frac{5a^2x^3}{4by^4}$.
16. $\log \frac{36a^2x^4}{125b^3y}$.
17. $\log \left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 \cdot \left(\frac{m}{n} \right)^3 \right]$.
18. $\log \left(\frac{1}{ab^2x^3} \right)^2$.
19. $\log \left(\frac{2}{3 \cdot 7} \right)^5$.
20. $\log \left[\left(\frac{3}{11} \right)^3 : \left(\frac{2}{7} \right)^4 \right]$.
21. $\log \sqrt{ab}$.
22. $\log \sqrt{xy^2z^3}$.
23. $\log 8a^2 \sqrt{b^3x}$.
24. $\log \frac{2\sqrt{x}}{a\sqrt[3]{y}}$.
25. $\log \frac{x^2\sqrt{a}}{5by^3}$.
26. $\log \sqrt{a^2 - b^2}$.
27. $\log \sqrt{\frac{a^2\sqrt[3]{b}}{c}}$.
28. $\log \left(3 \sqrt[4]{\frac{a+1}{a-1}} \right)$.
29. $\log \left(a \sqrt{a} \sqrt{a} \sqrt{a} \right)$.
30. $\log \frac{\sqrt{2a} \cdot \sqrt[3]{3b^2}}{\sqrt{x^3}}$.
31. $\log \sqrt{\frac{2ab\sqrt{ab}}{3\sqrt{ax}}}$.
32. $\log \left[\sqrt{\frac{2a\sqrt[3]{b}}{3b^2\sqrt{a}}} : \sqrt[3]{\frac{3a^2\sqrt{ab}}{2b\sqrt[3]{a^2}}} \right]$.

33. Izrazi naslednje logaritme s pomočjo računskih zakonov z logaritmi praštevil:

- a) $\log 96$, b) $\log 75$, c) $\log \frac{1}{27}$, d) $\log 0.75$,
e) $\log \sqrt{72}$, f) $\log \sqrt[3]{\frac{35}{36}}$.

34. Pretvori naslednje mnogočlenike v enočlenske izraze, t. j. poišči izraz, katerega logaritem so naslednji podatki:

- a) $\log x + \log y - \log z$; b) $\log a - (\log b + \log c)$;
c) $3 \log a + 2 \log b - 4 \log c$; d) $\log x - 2 \log y - 3 \log z$;
e) $\frac{1}{3} \log a - \frac{1}{3} \log b - \frac{1}{4} \log c$; f) $\log x + \frac{1}{2} \log y - \frac{2}{3} \log z$;
g) $\frac{1}{4}(2 \log a + 3 \log b) - \frac{1}{2}[\log(a+b) + \log(a-b)]$;

- h) $\log 3 + \log 5 + \log 7 - \frac{2}{3}\log 3 + 3\log a - \frac{3}{4}\log b$;
 i) $\log(a + b) + 2\log a - \frac{1}{2}[\log(a - b) + 3\log b]$;
 k) $2\log 3 - \frac{1}{3}(2\log 5 + \frac{1}{2}\log 7) + \frac{2}{3}\log 11$;
 l) $2\log(x - y) - \frac{1}{2}\log(x + y) - \frac{1}{2}\log(x^2 - xy + y^2)$;
 m) $\frac{1}{4}[\log 3 + 5\log a + \frac{2}{5}\log(a - b) - \frac{3}{7}(\log x + \log y)]$.

K § 3.

1. Izračunaj po računskih zakonih Briggove logaritme števil:

a) 6, 14, 20, 25; b) $\frac{2}{3}, \frac{7}{5}, \frac{16}{27}, \frac{81}{64}$;

c) $\sqrt{10}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{4\frac{1}{2}}, \sqrt[5]{2\frac{6}{7}}$

če je $\log 2 = 0.30103$, $\log 3 = 0.47712$, $\log 5 = 0.69897$
in $\log 7 = 0.84510$.

2. Poišči naslednjim številom Briggove logaritme:

- a) 83, b) 113, c) 837, d) 1008,
 e) 3807, f) 6025, g) 8.476, h) 83.95,
 i) 7648.3, k) 4509.8, l) 37.4968, m) 2.53694,
 n) 1.04736, o) 46358, p) 179265, r) 310486,
 s) 114257, t) 0.69583, u) 0.036728, v) 0.00416953.

3. Poišči naslednjim logaritmom pripadajoča števila:

- a) 0.24055, b) 1.57287, c) 2.61278, d) 3.02816,
 e) 0.66058 — 1, f) 0.27161 — 2, g) 0.89009 — 3,
 h) 2.01396, i) 1.46370, k) 0.40016,
 l) 0.55342 — 2, m) 0.25893 — 1, n) 0.68102 — 3.

K § 4.

Izračunaj s pomočjo logaritmov naslednje izraze:

1. $13 \cdot 794 \cdot 7 \cdot 2495$. 2. $0.27306 \cdot 15 \cdot 796$.
 3. $3 \cdot 1593 \cdot 0.0237 \cdot 6 \cdot 8345 \cdot 0.45792$.
 4. $0.36 : 2 \cdot 7453$. 5. $1 : 0.94276$. 6. $35 : \frac{0.47236}{5.9731}$.
 7. $17 \cdot 963 : \frac{38 \cdot 402}{4 \cdot 2756}$. 8. $\frac{-13 \cdot 179}{4 \cdot 256 \cdot 0.27965}$. 9. $\frac{2488 \cdot (-1926)}{521347}$.

10. 1.035^{25} . 11. 7.1414^3 . 12. 0.61734^3 .
 13. $\frac{4\pi \cdot 0.29674^3}{3}$. 14. $\left(-\frac{2}{7}\right)^5$. 15. $\left(-\frac{3}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$. 16. $\sqrt{15}$.
 17. $\sqrt[3]{0.97315}$. 18. $\sqrt[7]{78 \cdot 125 \cdot 0.34963}$. 19. $\sqrt[3]{-10}$.
 20. $\sqrt[5]{2.7961^2}$. 21. $\sqrt[3]{\frac{2.1734^2}{0.9641^5}}$. 22. $\sqrt[3]{\frac{38 \cdot 922}{13\pi}}$.
 23. $\sqrt[8]{\frac{9^3}{13}\sqrt{6}}$. 24. $\sqrt[4]{\frac{87\sqrt{8105}}{93 \cdot 24^2}}$. 25. $\frac{3\sqrt[3]{5\sqrt{6}}}{11\sqrt[4]{4\sqrt{124}}}$.
 26. $\sqrt{340} \cdot \sqrt[3]{\frac{24 \cdot 105 \cdot 58 \cdot 937}{1 \cdot 4793^4}}$. 27. $\frac{\log 2.0255}{\log 1.04}$. 28. $\frac{25 \cdot 348}{\log 33 \cdot 607}$.
 29. $\frac{\log 0.98765}{\log 0.03893}$. 30. $\frac{\log 0.071289}{\log 0.267}$. 31. $\frac{\sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{5}}$.
 32. $\sqrt[5]{\frac{52 - 3\sqrt[4]{10}}{\sqrt{8 \cdot 7}}}$. 33. $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$. 34. $\sqrt{10 + \sqrt{10}}$.
 35. $\sqrt[3]{\sqrt{18 \cdot 7} - \sqrt[3]{9 \cdot 2}}$. 36. $(1.04 - \sqrt[5]{0.3})^3$.
 37. $\sqrt{8 \cdot 16^2 + 10 \cdot 12^2}$. 38. $\sqrt{58 \cdot 81^2 - 53 \cdot 69^2}$.

Razreši naslednje eksponentne enačbe:

39. $3^x = 0.5$. 40. $10^x = 2.71828$. 41. $25^{-x} = 11$.
 42. $2^{3x+4} \cdot 2^{2+x} = 5$. 43. $2^{2x} \cdot 3^{3x} = 2 \cdot 0477$.
 44. $3^{2x} \cdot 5^{3x-4} = 7^{x-1} \cdot 11^{2-x}$. 45. $2^x \cdot 3^{x-1} \cdot 4^{x-2} = 5$.
 46. $6^{3-4x} = 0.006^{7-4x}$. 47. $\left(\frac{3}{4}\right)^{5x-2} = 5 \cdot 301^{x+1}$.
 48. $\left(\frac{123}{234}\right)^{\frac{x+1}{x+2}} = \frac{345}{456}$. 49. $\sqrt{x} = 2$.
 50. $\sqrt{2^{5+3x}} = 5$. 51. $\sqrt{2^{x-1}} = \sqrt[3]{5^{x-4}}$.
 52. $\sqrt{20^{2x-5}} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+8}} = \sqrt[5]{\left(\frac{13}{8}\right)^{x-6}}$.
 53. $3^{x+1} - 3^{x-1} = 3 \cdot 2^3$. 54. $3^x + 3^{x+1} = 2^{x+2}$.
 55. $3^{1+4x} - 2^{3x-5} = 2^{3x-1} - 3^{4x}$.
 56. $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2}$.
 57. $7^{2x-1} - 3^{3x-2} = 7^{2x+1} - 3^{3x+2}$.
 58. $2^{x-1} \cdot 2^{y+1} = 1$ 59. $3^x \cdot 5^y = 405$
 $3^{2x} : 3^{y+3} = 1$ $2^x \cdot 7^y = 112$.

$$60. \sqrt[4]{x+7y} = 3$$

$$(x+7y) \cdot 2^x = 1296.$$

$$62. \sqrt{2^x} \cdot \sqrt[3]{3^y} = 12$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^x} : \sqrt[3]{4^y} = \frac{1}{64}.$$

$$64. 5^y \cdot \sqrt{x} = 400$$

$$2^{y+1} \cdot \sqrt{x} = 72.$$

$$61. \sqrt[3]{2^x} \cdot \sqrt[4]{3^y} = 12$$

$$\sqrt{2^{-x}} : \sqrt[4]{3^{-3y}} = 3 \cdot 375.$$

$$63. \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[5]{8} = 1$$

$$\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[7]{2} = 1.41421.$$

$$65. \sqrt[6]{x^{5y}} = 1024$$

$$3\sqrt{x} = 2\sqrt[7]{729}.$$

Razreši naslednje logaritemske enačbe:

$$66. 2 \log x = 3 \log 4.$$

$$67. \frac{1}{3} \log x = 2 \log 3.$$

$$68. \frac{1}{2} \log(x-1) = 1 - \log 5.$$

$$69. \log x + \log(x+1) = 2 \log(1-x).$$

$$70. \log(x+5) - \log(x-5) = 2.$$

$$71. \log(x+2) - \log(x-2) = 0.43512.$$

$$72. \log(x+2) - \log(x+1) = 0.02345.$$

$$73. \log(2x-1) - \log(x+9) = -1.$$

$$74. \log(x-1) - \log(2x-4) = \log(x+2) - \log(2x+11).$$

$$75. \log(5x) + \log(2x+3) = 1 + 2 \log(3-x).$$

$$76. \log(16x) - \log(2x) + \log(3x) = \log 9 + \log 4 - \log 6.$$

$$77. \log 5 + \frac{1}{2} \log(3x+4) = \log 7 + \log \sqrt{2x-5}.$$

$$78. \log(\sqrt{x}-5) - \log(\sqrt{x}-3) = \log(\sqrt{x}-2) - \log(\sqrt{x}-4).$$

$$79. \log 3 + \frac{1}{2} \log(4x-2) - \log \sqrt{3x+2} = 2 \log 2.$$

$$80. \log(4-x) - \frac{1}{2} \log(x-2) = \log \sqrt{x+2}.$$

$$81. 2^{\log x} = 8.$$

$$82. 5^{\log(2x)} = 625.$$

$$83. 3^{\log x} = 10.$$

$$84. 2^{\log x} = 3.$$

K 5.

Uredi naslednje enačbe:

$$1. (9+x)(7-x) + (9-x)(7+x) = 76.$$

$$2. (5x^2-1)^2 - (2+3x^2)^2 = (3-4x^2)^2.$$

$$3. \frac{x+2}{10x^2-5x} = \frac{3}{x} + \frac{16x}{4x^2-1}.$$

$$4. \frac{5x+4}{2x+1} + \frac{x-1}{3x-4} - 3 = 0.$$

$$5. \frac{2}{x-3} - \frac{x+2}{x^2+2x+4} = \frac{33}{x^3-8}.$$

$$6. \frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-x} = \frac{2}{15x} - \frac{1}{x^2+x}.$$

$$7. \frac{2x^4+3x^2}{2x^2-1} - 1 = \frac{10x^4-4}{6x^2-3} - \frac{2x^2-1}{3}.$$

$$8. \frac{a+x}{a-x} + \frac{a-x}{a+x} = \frac{2ax}{a^2-x^2}.$$

$$9. \frac{a-x}{b+x} - \frac{b+x}{a-x} = \frac{b}{a} - \frac{a}{b}.$$

$$10. \frac{3a+5b}{2(a+b)} - \frac{a-b}{a-x} = \frac{b-x}{a+b}.$$

$$11. \frac{x-a}{2b} - \frac{x-2b}{x-b} = \frac{b}{a+b}.$$

$$12. \sqrt{3x-2} - \sqrt{4x-7} = 1.$$

$$13. \sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{a}.$$

$$14. \sqrt[3]{x+a} - \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{2x}.$$

$$15. \sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = \frac{x+a-b}{\sqrt{x+a}}.$$

$$16. \sqrt{x+\sqrt{10}} + \sqrt{x-\sqrt{10}} - \sqrt{6x-11} = 0.$$

$$17. \sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} - \sqrt{3x-6} + \sqrt{2x-6} = 0.$$

$$18. \sqrt{x-a} + \sqrt{x-2a} - \sqrt{x-3a} = 0.$$

$$19. \sqrt{a(x-b)} - \sqrt{b(x-a)} - \sqrt{(a-b)(x-2b)} = 0.$$

$$20. \sqrt{3(x-2)} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = \sqrt{3(x+1)}.$$

$$21. \sqrt{x+a} - \sqrt{5x-3a-4b} = \frac{2b}{\sqrt{x+a}}.$$

$$22. \frac{1}{1+\sqrt{1-x}} + \frac{1}{1-\sqrt{1-x}} = \frac{2x}{9}.$$

$$23. \frac{2a^2}{x+\sqrt{4a^2-x^2}} + \frac{2a^2}{x-\sqrt{4a^2-x^2}} = x.$$

$$24. \sqrt{x^2+a^2-2a\sqrt{x^2-b^2}} + x = \frac{ax}{\sqrt{x^2-b^2}}.$$

Razreši naslednje enačbe:

$$25. x^2 + 15x + 56 = 0.$$

$$26. x^2 - 13x - 140 = 0.$$

$$27. 5x^2 + 7x = 24.$$

$$28. 12x^2 = 20x - 3.$$

$$29. 16x^2 - 24x + 11 = 0.$$

$$30. 24x^2 - 14x = 3.$$

$$31. (12+x)(x-3) = (12-x)(x+3).$$

$$32. (x+3)^2 - 4x^2 = (x+1)(4x-5).$$

$$33. (5+x)^2 - 11(5+x)(4-x) + 24(4-x)^2 = 0.$$

$$34. (x+1):(x+3) = (x+11):(3x-3).$$

$$35. (x+\frac{3}{4})(x+\frac{1}{2}) - (4x+\frac{1}{2})(4x-\frac{1}{2}) + 1 = 0.$$

$$36. \frac{3x-4}{x-4} - 9 = \frac{2-x}{2}.$$

$$37. \frac{x}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{3}.$$

$$38. \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{5}{2}.$$

$$39. \frac{5}{x} - \frac{5}{x+1} = \frac{12}{x+2}.$$

$$40. \frac{x+1}{x+2} - \frac{2x-3}{3x-4} = \frac{1}{5}.$$

$$41. \frac{6}{x-1} + \frac{10}{x-2} = \frac{7}{x-3}.$$

$$42. \frac{3x^2-3}{x+9} + \frac{6x^2-4}{2x-1} = 6x-6.$$

$$43. \frac{8x+5}{x^3-1} = \frac{3x-2}{x^2-2x+1} - \frac{3x+1}{x^2+x+1}.$$

$$44. \frac{4x+2}{x^2-2x+4} - \frac{11x+7}{x^2+4x+4} = \frac{77-7x^2}{x^3+8}.$$

$$45. \left(\frac{8+x}{4-x}\right)^2 = 8\left(\frac{8+x}{4-x}\right) - 15.$$

$$46. \left(\frac{3+4x}{5x}\right)^2 + \frac{6(3+4x)}{5x} = 7.$$

$$47. \left(\frac{3x-4}{x-2}\right)^2 - \frac{9(4-3x)}{2-x} + 20 = 0.$$

$$48. \left(\frac{6x}{4-x}\right)^2 + \frac{15x}{x-4} + 1 = 0.$$

$$49. x^2 + 2x\sqrt{5} = 2\sqrt{6}.$$

$$50. x(x+2\sqrt{11}) = 6\sqrt{2}.$$

$$51. x + 7\sqrt{x} = 30.$$

$$52. 2x - 3\sqrt{x-1} = 4.$$

$$53. x - 10 - 2\sqrt{x^2 - 3x + 5} = 0.$$

$$54. \sqrt{x+2} + \sqrt{2x+7} = 4.$$

$$55. 2 + \sqrt{2x+8} = 2\sqrt{x+5}.$$

$$56. \sqrt{2x^2-1} - \sqrt{2x^2-25} = 2.$$

$$57. 2\sqrt{3x+1} - 3\sqrt{2x-1} = 1.$$

$$58. \sqrt{7x-13} - \sqrt{5x+1} = 12.$$

$$59. \sqrt{2x+2} + \sqrt{x+2} = x.$$

$$60. \sqrt{10-x} + \sqrt{x-5} = \sqrt{x}.$$

$$61. \sqrt{x+\sqrt{10}} + \sqrt{x-\sqrt{10}} = \sqrt{6x-11}.$$

$$62. 3\sqrt{x+8} - \sqrt{x-8} = 2\sqrt{2x+2}.$$

$$63. \sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} = 0.$$

$$64. \sqrt{5+\sqrt{x}} + \sqrt{7+\sqrt{x}} = \sqrt{2(6+\sqrt{x})}.$$

$$65. \sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-3)(x-4)} = \sqrt{2}.$$

$$66. \sqrt{3x+6} - \sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = 0.$$

$$67. \sqrt[3]{72-x} - \sqrt[3]{16-x} = 2.$$

$$68. \sqrt[3]{x+\sqrt{2}} - \sqrt[3]{x-\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

$$69. \sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-5} = 1.$$

$$70. \sqrt[4]{(1+x)^2} - \sqrt[4]{(1-x)^2} = \sqrt[4]{1-x^2}.$$

$$71. x^2 + 2ax - 2ab - b^2 = 0.$$

$$72. x^2 - 2abx = a^4 + a^2b^2 + b^4.$$

$$73. x^2 - (a + b)x + ab = 0. \quad 74. x^2 - (a - b)x - ab = 0.$$

$$75. x^2 - (a^2 + b^2)x + a^3b - ab^3 = 0.$$

$$76. (a - x)^2 + (b - x)^2 = (a - b)^2.$$

$$77. abx^2 - (a^2 + b^2)x + 2a^2 - 3ab - 2b^2 = 0.$$

$$78. 10abx^2 - (25a^2 + 4b^2)x + 25a^2 - 4b^2 = 0.$$

$$79. (ax + b)^2 + (a - bx)(ax - b) = x(a + b)^2.$$

$$80. 2(x^2 + 1)(a^2 - b^2) - 5x(a^2 - b^2) + 3ab(x^2 - 1) = 0.$$

$$81. \frac{x+a}{x+b} + \frac{x-a}{x-b} = 0.$$

$$82. \frac{a-x}{1-ax} = \frac{1-bx}{b-x}.$$

$$83. \frac{a^2 - b^2}{2x} = \frac{a^2 + b^2}{x^2 + 1}.$$

$$84. \frac{a}{1+2x} + \frac{a}{1-2x} = 2b.$$

$$85. \frac{x}{x-1} - \frac{x}{x+1} = \frac{a}{b}.$$

$$86. \frac{2x-a}{4x+5a} = \frac{x+6a}{2x} + 7.$$

$$87. \frac{a+b}{x-a+b} + (a-b)(a-b-x) = 0.$$

$$88. \frac{x+a}{x-a} - \frac{x-a}{x+a} = \frac{4a(a+b)}{b(2a+b)}.$$

$$89. a\sqrt{x+b^2} + b\sqrt{x+a^2} = 2ab.$$

$$90. \sqrt{a^2 + x}\sqrt{2x^2 - a^2} = a + x.$$

$$91. \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt{a-x}} + \frac{x}{\sqrt{x} - \sqrt{a-x}} = \frac{8a}{3\sqrt{x}}.$$

$$92. \sqrt{\frac{b+x}{b}} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a} - \sqrt{\frac{a-x}{a}}. \quad 93. \sqrt{\frac{a+x}{a+b}} + \sqrt{\frac{b-x}{a+b}} = 1.$$

$$94. \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{x-b}{\sqrt{c^2 + (b-x)^2}} = 0.$$

$$95. \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \frac{a}{b}.$$

$$96. \frac{\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a} - \sqrt{x-b}} = \sqrt{\frac{x-a}{x-b}}.$$

$$97. \sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{x-a} = \sqrt[3]{2x}.$$

$$98. \sqrt[3]{a+x} - \sqrt[3]{x-b} = \sqrt[3]{3(a+b)}.$$

Uporabne naloge.

99. Produkt iz tretjega in četrtega dela nekega števila znaša 108; koliko je število?

100. Katero število je treba za 5 povečati in za 5 zmanjšati, da znašata kvadrata dobljenih zneskov 178?

101. Poišči tri števila, ki so si kakor $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4}$ in katerih kvadrati znašajo skupaj 4525!

102. Poišči število, katerega dvanajsterokratnik je za 45 manjši od kvadrata dotičnega števila!

103. Pri dvošteviličnem številu je številka na desni za 3 manjša od številke na levi; če pomnožiš to število s številko na levi, dobiš 42 kratno številčno vsoto dotičnega števila. Katero je to število?

104. Ako zameniš pri dvošteviličnem številu, katerega številčna vsota znaša 5, številki med seboj ter pomnožiš obe števili, najdeš produkt 574. Katero je število?

105. Številčna vsota dvošteviličnega števila znaša 13; ako deliš to število s produktom obeh števil, dobiš kvocijent 2 in ostanek 5. Katero je to število?

106. Vrednost nekega ulomka znaša $\frac{1}{3}$. Če povečaš števec in imenovalec za 12, dobiš ulomek, ki je 5 krat večji od onega ulomka, ki ga najdeš, če zmanjšaš števec in imenovalec za 6. Kako se glasi ulomek?

107. Dve pozitivni celi števili sta si kakor 3 : 2; če zmanjšaš prvo število za 1 in povečaš drugo za 2, znaša vsota njunih kvadratov 2581. Kateri sta dotični števili?

108. Več oseb napravi skupno potovanje, za katero je treba 432 K plačati. Ker sta bili 2 osebi prosti vseh stroškov, je morala vsaka izmed ostalih oseb za 3 K več plačati. Koliko je bilo oseb?

109. Oče zapusti svojim otrokom 14400 K, katere je treba razdeliti na enake deleže. Kmalu po očetovi smrti umrjeta 2 otroka in vsak izmed ostalih otrok dobi potem za 1200 K več, nego bi bil dobil sprva. Koliko otrok je bilo?

110. A proda blago za 96 K in ima toliko odstotkov dobička, kolikor kron je plačal za blago. Za koliko je kupil blago?

111. Nekdo ima 5600 K kapitala; od obresti prvega leta porabi 152 K in ostanek priklopi h kapitalu. V drugem letu dobi 256·5 K obresti. Po koliko procentov je naložen kapital?

112. Zidarja A in B sezidata zid v 18 dneh. V koliko dneh bi dovršil A sam delo, če B potrebuje za isto delo 15 dni več nego A ?

113. Cevi A in B napolnita neko posodo v $2\frac{2}{3}$ ure; cev A sama napolni posodo 4 ure poprej ko cev B . V katerem času napolni vsaka cev sama dotično posodo?

114. Dve telesi se pomikata enako hitro po krakih pravega kota od vrha proč. Prvo telo se je začelo pomikati 7 sekund poprej ko drugo telo in je po 12 sekundah 65 m oddaljeno od drugega telesa. Kako hitro se pomikata telesi?

115. Dve telesi se začneta istodobno pomikati po krakih pravega kota od vrha proč in pretečeta oziroma po 4·8 m in 1·4 m vsako sekundo. Po koliko sekundah sta telesi 100 m narazen?

116. Po krakih pravega kota se pomikata dve telesi proti vrhu in pretečeta oziroma po 5 m in 3·6 m vsako sekundo. Po koliko sekundah sta telesi 26 m narazen, če sta bili v začetku po 60 m oddaljeni od kotovega vrha?

117. Od krajev A in B , ki sta 152 km narazen, se peljata istodobno voza drug proti drugemu in se srečata po 12 urah. V koliko minutah preteče prvi voz 1 km , če rabi drugi voz za 1 km eno minuto manj ko prvi?

118. Dva kolesarja se peljata istodobno od krajev A in B drug proti drugemu. Ko se po 78 minutah srečata, je prvi kolesar 1560 m več prevozil ko drugi in pride $12\frac{1}{2}$ minute poprej v kraj B ko drugi kolesar v kraj A . Kako daleč sta kraja A in B narazen?

119. Na 3000 m dolgi cesti se zavrti zadnje kolo nekega voza 200 krat manj ko sprednje kolo, katerega obseg je za $\frac{1}{2} m$ manjši od obsega zadnjega kolesa; kolik je obseg zadnjega kolesa?

120. Ako podaljšaš eno stranico nekega kvadrata za $a = 11\frac{1}{2} cm$ in zmanjšaš stikajočo se stranico za istotoliko, dobiš pravokotnik s ploščino $p = 860 cm^2$; kolika je kvadrata stranica?

121. Pri pravokotniku meri osnovnica 118 cm in višina 59 cm . Ako zmanjšaš višino za nekoliko centimetrov in podaljšaš osnovnico za dvakrat toliko centimetrov, se zmanjša ploščina za 3698 cm^2 . Kolike so stranice novega pravokotnika?

122. V pravokotniku se osnovnica in višina razlikujeta za 23 m in diagonala meri 65 m ; kolike so stranice?

123. V pravokotnem trikotniku meri ena kateta $4\frac{4}{3}$ krat toliko ko druga kateta, hipotenuza pa 82 m ; kolika je vsaka kateta?

124. V pravokotnem trikotniku meri hipotenuza 25 m in njej pripadajoča višina 6.72 m ; kolika sta hipotenuzna odseka in koliki kateti?

125. Ploščina poševnokotnega trikotnika znaša $p = 360\text{ cm}^2$ in dve stranici merita 29 cm in 25 cm ; kolika je tretja stranica?

126. Kolik je polmer kroga, če je neka tetiva za 2 cm manjša od premera in njena središčna razdalja $= \frac{5}{3}$ polmera?

127. Za koliko je treba krogov polmer $r = 7\text{ cm}$ podaljšati, da bode tangenta, katero narišeš iz krajišča tega podaljška na krog, enaka $t = 24\text{ cm}$?

128. Površje pokončnega valja znaša $P = 706.86\text{ cm}^2$ in višina $v = 8\text{ cm}$; kolik je polmer osnovne ploskve?

129. Prostornina 7 cm visokega valja se poveča za 2552 cm^3 , če povečaš polmer osnovne ploskve za 2 cm in višino za 3.5 cm ; kolik je polmer osnovne ploskve? ($\pi = \frac{22}{7}$.)

130. Površje pokončnega stožca znaša $P = 1385.44\text{ cm}^2$ in stranica $s = 40\text{ cm}$; kolik je polmer osnovne ploskve?

131. Prostornina stožca postane $2\frac{1}{2}$ krat večja, če povečaš polmer osnovne ploskve za 8 cm ; kolik je prvotni polmer?

132. Ako povečaš polmer krogle za $10\frac{1}{2}\text{ cm}$, se prostornina poveča za 92169 cm^3 ; kolik je prvotni kroglin polmer? ($\pi = \frac{22}{7}$).

133. Določi enačbe, ki imajo naslednje korene:

a) $+\sqrt{-1}$ in $-\sqrt{-1}$; b) $+3\sqrt{2}$ in $-3\sqrt{2}$;

c) 10 in -1 ;

d) -9 in -13 ;

e) $2\frac{1}{3}$ in $-\frac{2}{3}$;

f) 0.7 in -2.4 ;

g) $1+\sqrt{2}$ in $1-\sqrt{2}$;

h) $\sqrt{2}+\sqrt{-3}$ in $\sqrt{2}-\sqrt{-3}$;

$$i) 2a + 3b\sqrt{2} \text{ in } 2a - 3b\sqrt{2}; \quad k) \frac{a+b}{2} \text{ in } \frac{a-b}{2};$$

$$l) \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a}} \text{ in } \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{b}};$$

$$m) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{a-b}} \text{ in } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{a-b}}.$$

K § 6.

1. $x^3 = 1.$

2. $x^3 = -1.$

3. $x^3 + a^3 = 0.$

4. $x^3 - a^3 = 0.$

5. $8x^3 + 27 = 0.$

6. $64x^3 - 125 = 0$

7. $x^6 - 1 = 0.$

8. $3x^6 - 2187 = 0.$

9. $64x^6 = 15625.$

10. $(7-x)^3 - (7+x)^3 = 0.$

11. $(2x-5)^3 + (5x-2)^3 = 0$

12. $(2x-3)^3 + (x+9)^3 = 0.$

13. $(x-a)^3 - (b-x)^3 = 0.$

14. $x(x^2-8) = 8(1-x).$

15. $x^3 - 3x^2 = 10x.$

16. $x^3 + 3x^2 - (x+3)(2x+15) = 0.$

17. $x^3 - 8x^2 + (x-8)^2 + 6x(x-8) = 0.$

18. $x^3 - a^3 = a^2(a-x).$

19. $(x^2-4)(x^2+4) = 240.$

20. $x^4 - 81 = 0.$

21. $x^4 + 64 = 0.$

22. $\frac{11x^4}{2} - 18x^2 = 9(x^2-1)^2 - 65.$

23. $\frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} = \frac{x^2 - x}{36}.$

24. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$

25. $6x^4 - 11x^2 = 35.$

26. $\frac{4x^4}{3} - \frac{2x^2}{3} = \frac{3}{64}.$

27. $(9x^2)^2 - 41(3x)^2 + 400 = 0.$

28. $x^6 + 23x^3 - 108 = 0.$

29. $x^6 + 27 = 28x^3.$

30. $3x^6 - 7x^3 = 6.$

31. $2x^3 - 5x\sqrt{x} = 1323.$

32. $3x^3 - 4x\sqrt{x} = 160.$

33. $6x^{-4} - 5x^{-2} + 1 = 0.$

34. $(x-2)^2 + \left(\frac{1}{x-2}\right)^2 = \frac{82}{9}.$

35. $(3+x)^2 + \left(\frac{1}{3+x}\right)^2 = 100.01.$

36. $\frac{x^2+1}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{x^2+1} = 4.$

37. $\frac{3x^2+4}{3x^2-4} + \frac{3x^2-4}{3x^2+4} = \frac{26}{5}.$

38. $\frac{x^2+3}{17-x^2} = \frac{1}{x^2+3}.$

39. $x^2 + \left(\frac{32}{x}\right)^2 = 260.$

40. $(x^2 - 3)^2 - 7(x^2 - 3) + 6 = 0.$ 41. $x\sqrt{25 - x^2} = 12.$

42. $(x + \sqrt{x})^4 + (x + \sqrt{x})^2 = 1332.$ 43. $\sqrt{x} - 8\sqrt[4]{x} = 9.$

44. $\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt[3]{x^2} = 54.$ 45. $2\sqrt[3]{2x} - \sqrt[3]{4x^2} = 2.$

46. $4x + 5\sqrt[5]{x} = 21\sqrt[5]{x^3}.$ 47. $\sqrt{x^2 + 17} - \sqrt[4]{x^2 + 17} = 6.$

48. $x^2 - 8x + 5 = 2\sqrt{x^2 - 8x + 40}.$

49. $2x^2 + 3\sqrt{x^2 - x + 1} = 2x + 3.$

50. $(x^2 + 3x + 1)^2 - 12(x^2 + 3x) = 1.$

51. $(x^2 + 6x + 8)^2 - 3x^2 - 18x = 24.$

52. $(3x^2 + x - 2)^2 - 30x^2 - 10x + 36 = 0.$

53. $\sqrt{x^2 + 3x + 8} + \sqrt{x^2 + 3x - 3} = 11.$

54. $4x^2 + 6x + \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 60.$

55. $(x - 5)^2 + \sqrt{x^2 - 10x + 32} = 13.$

56. $(x - 4)^2 + \sqrt{x^2 - 8x + 31} = 5.$

57. $\sqrt{x^2 + 24} = \sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{x^2 - 16}.$

58. $\sqrt[3]{72 - x} - \sqrt[3]{16 - x} = 2.$ 59. $9\sqrt[3]{x^2} - 2x\sqrt[3]{x} = 10.$

60. $x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$ 61. $x^3 - x^2 + x - 1 = 0.$

62. $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0.$ 63. $x^3 - 3\frac{1}{2}x^2 + 3\frac{1}{2}x - 1 = 0.$

64. $7x^3 - 43x^2 - 43x + 7 = 0.$

65. $20x^3 + 31x^2 - 31x - 20 = 0.$

66. $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0.$ 67. $x^3 + 3x^2 + 15x + 125 = 0.$

68. $27x^3 + 12x^2 - 8x - 8 = 0.$

69. $8x^3 + 10x^2 + 15x + 27 = 0.$

70. $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0.$

71. $x^4 - 12x^3 + 29x^2 - 12x + 1 = 0.$

72. $3x^4 - x^3 - 24x^2 - x + 3 = 0.$

73. $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0.$

74. $24x^4 - 50x^3 - 173x^2 - 50x + 24 = 0.$

75. $10x^4 + 27x^3 - 110x^2 + 27x + 10 = 0.$

76. $6x^4 - 13x^3 + 13x - 6 = 0.$

77. $x^4 - 16x^3 + 16x - 1 = 0.$

$$\begin{array}{r} 65.65 \\ 390 \\ \hline 25.15 \\ 42.25 \\ \hline 26.25 \end{array}$$

78. $2x^4 + 5x^3 - 5x - 2 = 0$. 79. $x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0$.
 80. $x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 15x + 9 = 0$.
 81. $x^4 - 3x^3 - 8x^2 - 15x + 25 = 0$.
 82. $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0$.
 83. $x^4 - 7x^3 + 28x - 16 = 0$.

84. $3^{x-1} = \sqrt[3]{9}$. 85. $8^{2x+2} = \sqrt[3]{32^{2-x}}$.
 86. $(3^{1-x})^{1-x} = 1$. 87. $10^{x(x-1)} = 100^{2(3-x)}$.
 88. $10^{x^2-5x+6} = 100$. 89. $\sqrt[4]{2} = 4^{x+3}$.
 90. $2^{x+1} = \sqrt[4]{5}$. 91. $3 \cdot 2^x = 4\sqrt[4]{9}$.
 92. $3 \cdot 4^{x+2} = 4\sqrt[3]{3^{2x+1}}$. 93. $\frac{x-1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{10}} = 1$.
 94. $3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$. 95. $\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - \frac{15}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^x + \frac{25}{2} = 0$.
 96. $2^x + 2^{-x} = \frac{26}{5}$. 97. $6^{1+x} + 6^{1-x} = 13$.
 98. $3^{x+2} + 3^{2-x} = 82$. 99. $8^{x+1} - 8^{2x-1} = 30$.
 100. $3^{2x} = 100(3^{x-1} - 1)$. 101. $3\sqrt[3]{12} = 360 + 6\sqrt[3]{12}$.
 102. $\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{128} = 20$. 103. $\sqrt[3]{16^8} + \sqrt[3]{16^4} = 272$.
 104. $5\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = 10$. 105. $12\sqrt[3]{10} - 5\sqrt[3]{10} = 25$.
 106. $\sqrt{2 \cdot 3^{3x} + 10} = 3 + \sqrt{3^{3x} - 2}$.
 107. $\frac{1}{2} \log(x+1) + \log \sqrt{x-1} = 2 - \log 2$.
 108. $\log(x-1) + \log(x + \frac{1}{2}) = 2 \log 5$.
 109. $\log(x^2 + x\sqrt{2} + 1) + \log(x^2 - x\sqrt{2} + 1) = \log 3 + \log 5$.
 110. $\log \sqrt{x-1} + \log \sqrt{x + \frac{2}{3}} = 1.5 - \log 2$.
 111. $x^{\log x} = 578$. 112. $\sqrt{x^{\log Vx}} = 10$.
 113. $x^{\log x} = \frac{x^4}{1000}$. 114. $x^{2 \log x - 5} = 0.01$.
 115. $2 \log x + \frac{1}{\log x} = 3$. 116. $\frac{5}{\log x} + \frac{2}{1 + \log x} = 1$.
 117. $3x^{\log x} + 100x^{-\log x} = 40$. 118. $x^{\log x} - 4x^{-\log x} = 3$.
 119. $x^{2 \log x - 6} + 12 = 7x^{\log x - 3}$.
 120. $x^{\log x} - 96x^{\log Vx} = 400$.

K § 7.

$$1. 2x^2 - 3y^2 = 71$$

$$3x^2 + 2y^2 = 165.$$

$$3. 4x^2 + y^2 = 5$$

$$3y^2 - 20x^2 = 7.$$

$$5. x^2 - y^2 = 32$$

$$x - 3y = 0.$$

$$7. x^2 + xy + y^2 = 63$$

$$x - y + 3 = 0.$$

$$9. 2x^2 - 5xy + 3y^2 = 48$$

$$3x - y = 11.$$

$$11. (x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 100$$

$$x + y = 14.$$

$$13. (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 32$$

$$(x + 2) - (y + 3) = 0.$$

$$15. 7x^2 - 5y^2 = 163$$

$$\frac{2}{3}xy = 28.$$

$$17. x : y = 3 : 2$$

$$\sqrt{x - 2} - \sqrt{y - 3} = 1.$$

$$2. 12x^2 + 5y^2 = 233$$

$$3x^2 + 7y^2 = 202.$$

$$4. \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

$$6. 2y - 3x = xy$$

$$x + y = 4.$$

$$8. 4x^2 + 6y^2 = 4x - y$$

$$6y - 2x = 1.$$

$$10. (3x - 2y)^2 - (2x - 3y)^2 = 80$$

$$4x - 5y = 5.$$

$$12. (x - 4) + (y - 3) = 6$$

$$(x - 4)(y - 3) = 8.$$

$$14. x^2 - y^2 = 11$$

$$xy = 30.$$

$$16. \sqrt{x} + \sqrt{y} = 12$$

$$x + y = 74.$$

$$18. \sqrt{x + 4} - \sqrt{y + 1} = 1$$

$$5x - 3y = 16.$$

$$19. xy + x = 18$$

$$xy - y = 10.$$

$$21. (x + 1)(y - 2) = 30$$

$$(x - 2)(y + 1) = 24.$$

$$23. x + \sqrt{xy} + y = 14$$

$$xy = 16.$$

$$25. x^2 + y^2 + xy = 52.75$$

$$2xy = 7.$$

$$27. x^2 + y^2 + x + y = 510$$

$$x^2 + y^2 - x - y = 490.$$

$$29. x^2 - xy = 76$$

$$xy - y^2 = 60.$$

$$20. 2xy - y = 21$$

$$xy - 2x = 4.$$

$$22. (x - 2)^2 - (y - 3)^2 = 44$$

$$(x - 1)^2 - (y - 5)^2 = 17.$$

$$24. x^2 - 3xy + y^2 = 17\frac{3}{4}$$

$$2xy = 5.$$

$$26. x^2 + xy + y^2 = 49$$

$$x^2 - xy + y^2 = 19.$$

$$28. x^2 + xy = 170$$

$$y^2 + xy = 119.$$

$$30. \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10$$

$$\sqrt{xy} = 16.$$



~~31.~~ $\sqrt{2x} - \sqrt{3y} = 4$
 $2x - 3y = 88.$

$33. (x-5)^2 + (y-3)^2 = 20$
 $(x-5)(y-3) = 8.$

$35. x^2 + y^2 + x + y = 8$
 $xy = 2.$

~~37.~~ $x^2 + y^2 - x - y = 12$
 $xy = 9.$

$39. 2x + 3y - \frac{76}{2x+3y} = 15$
 $2x - 3y + \frac{3}{2x-3y} = 4.$

$41. \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$
 $x^2y + xy^2 = 30.$

$43. \frac{4}{25}\sqrt{x+y} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x+y}}$
 $\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 6.$

$45. \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{10}{3}$
 $x^2 - y^2 = 81.$

$47. 3x^2 - 7xy + 4y^2 = 0$
 $5x^2 - 3xy - y^2 = 35.$

$49. 2x^2 - 2xy - y^2 = 39$
 $x^2 + 2xy + 4y^2 = 39.$

$51. x^2 - y^2 = 9$
 $(2x+y)(x+2y) = 182.$

$52. 3(x^2 + xy + y^2) = 7(x^2 - xy + y^2)$
 $x^2 + 2y^2 = 9.$

$32. (x+2y)^2 + (2x-y)^2 = 26$
 $(x+2y)(2x-y) = 5.$

$34. (x+y)^2 - 3(x+y) = 270$
 $xy = 80.$

$36. x^2 + y^2 + x - y = 182$
 $xy + x - y = 85.$

$38. x - y - \frac{2}{x-y} = 1$
 $xy - \frac{3}{xy} = 2.$

$40. x - y + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{20}{x+y}$
 $y^2 + y^2 = 34.$

$42. x^2y^2 - 52xy + 576 = 0$
 $(x-y)^2 + 100\sqrt{xy} = 625.$

$44. xy - \sqrt{xy} = 132$
 $(x-y)^2 - 3x + 3y = 70.$

$46. \sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} + \sqrt{\frac{2x}{3x-2y}} = 2$
 $x^2 - 8 = 2x(2y-3).$

~~48.~~ $x^2 + xy + y^2 = 3$
 $2x^2 + 3xy + 4y^2 = 12.$

$50. 2x^2 - 3xy + 4y^2 = 144$
 $5x^2 + 6xy - 7y^2 = 477.$

} } }

$$53. \begin{aligned} x + y &= 14 \\ x^3 + y^3 &= 854. \end{aligned}$$

$$55. \begin{aligned} 3x - 2y &= 4 \\ 27x^3 - 8y^3 &= 104xy. \end{aligned}$$

$$57. \begin{aligned} x^3 + y^3 &= 1512 \\ x^2y + xy^2 &= 1440. \end{aligned}$$

$$59. \begin{aligned} x - y &= 1 \\ x^4 + y^4 &= 1921. \end{aligned}$$

$$61. \begin{aligned} x + y + z &= 12 \\ xy + xz + yz &= 47 \\ x^2 + y^2 &= z^2. \end{aligned}$$

$$63. \begin{aligned} x + y + z &= 14 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 94 \\ x(y + z) &= 45. \end{aligned}$$

$$65. \begin{aligned} x : y &= z : u \\ x + u &= 13 \\ y + z &= 20 \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 &= 425. \end{aligned}$$

$$67. \begin{aligned} x : y &= z : u \\ x + u &= 9 \\ y + z &= 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 + u^3 &= 585. \end{aligned}$$

$$54. \begin{aligned} x - y &= 3 \\ x^3 - y^3 &= 819. \end{aligned}$$

$$56. \begin{aligned} x + y + \sqrt{x + y} &= 2 \\ x^3 + y^3 &= 19. \end{aligned}$$

$$58. \begin{aligned} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} &= 12 \\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} &= 104. \end{aligned}$$

$$60. \begin{aligned} \sqrt{x} - \sqrt{y} &= 1 \\ x^2 + y^2 &= 97. \end{aligned}$$

$$62. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 49 \\ xy + xz + yz &= 36 \\ x + y &= 9. \end{aligned}$$

$$64. \begin{aligned} x : y &= y : z \\ x + y + z &= 26 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 364. \end{aligned}$$

$$66. \begin{aligned} x : y &= z : u \\ x - u &= 6 \\ y - z &= 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 &= 164. \end{aligned}$$

$$68. \begin{aligned} xy &= 0.2 \\ x^{\log y} &= 0.5. \end{aligned}$$

$$69. \begin{aligned} y^x &= 10^4 \\ \sqrt[x]{y} &= 10. \end{aligned}$$

$$70. \begin{aligned} 2^y \sqrt[3]{9} &= 24. \\ 3^y \sqrt[3]{25} &= 135. \end{aligned}$$

$$71. \begin{aligned} 2^{y+2} &= \sqrt{4^{x+4}} \\ 3^{y-2} &= \frac{x+1}{\sqrt{9^{2x-1}}}. \end{aligned}$$

$$72. \begin{aligned} 2^{x+3} + 2^{y+3} &= 40 \\ 2^{x+y} &= 4. \end{aligned}$$

$$73. \begin{aligned} y^{2x} &= 9y^x + 10 \\ y &= 10^{2x-1}. \end{aligned}$$

$$74. \begin{aligned} 3^{2x} - 4 \cdot 2^{-2y} &= 80 \\ 3^x + 2^{-y} &= 9.5. \end{aligned}$$

$$75. \begin{aligned} 3^{x+1} + 2 \cdot 3^{2-x} &= 29 \\ y^x &= 9. \end{aligned}$$

$$76. \begin{aligned} 12\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{y^2} &= 20 \\ y^x &= 10^4. \end{aligned}$$

$$77. y^x + 4y^{-x} = 16\frac{1}{4}$$

$$3\sqrt{x}{y} + 5\sqrt{x}{y^{-1}} = 8\frac{1}{2}.$$

$$78. \sqrt[y]{x^2} = 11\sqrt[y]{x} - 10$$

$$y = 1 - \log x.$$

$$79. y^{\frac{1}{x}} = 7y^{\frac{1}{2x}} + 12$$

$$\log y = x - 1.$$

80. Določi dve števili, katerih produkt znaša 200 in kvocijent 8.

81. Razstavi 360 na dva faktorja, katerih kvadrata znašata skupaj 801.

82. Poišči dve števili, katerih vsota, produkt in razlika njunih kvadratov so si enaki.

83. Ako povečaš števec nekega ulomka za 1 in zmanjšaš imenovalca za 1, dobiš obratni ulomek. Če pa zmanjšaš števec za 1 in povečaš imenovalca za 1, je novi ulomek za $1\frac{1}{4}$ manjši od zgoraj omenjenega obratnega ulomka. Kateri je ulomek?

84. Razlika dveh dvošteviličnih števil z istima številskama znaša 54 in produkt teh števil je 3627. Kateri sta števili?

85. Določi tri števila tako, da tvorijo stalno sorazmerje in da znaša njih vsota 19 in produkt 216.

86. V katerem sorazmerju znaša vsota zunanjih členov 18, vsota notranjih 17 in vsota kvadratov vseh členov 325?

87. Neki kapital nese na leto 64 K obresti. Drugi kapital, ki je za 200 K manjši in po 1% višje naložen, nese na leto 70 K obresti. Kolik je vsak teh kapitalov?

88. Delavci neke tovarne so enako plačani in zaslužijo 108 K na dan. Če bi tovarna najela še 4 delavce in vsakemu delavcu zvišala zaslužek za 1 K, bi morala delavcem 160 K izplačati na dan. Koliko delavcev je v tovarni?

89. Vodnjak polnita dve cevi. Druga cev ga napolni sama za $3\frac{1}{3}$ ure poprej ko prva in za $2\frac{2}{3}$ ure pozneje ko obe cevi skupaj. V katerem času napolni vsaka cev sama vodnjak in v katerem času obe cevi skupaj?

90. A in B prodasta skupaj 100 m blaga in sicer eden več ko drugi, skupita pa enako veliko denarja. Ako bi bil imel A

toliko blaga kakor B , bi bil zanj skupil 63 K; če bi bil pa imel B toliko blaga kakor A , bi bil zanj skupil le 28 K. Koliko metrov blaga je imel vsak?

91. Potovalec A rabi za pot 520 km 3 dni več ko potovalec B , ki prehodi na dan 12 km več nego A . Koliko časa potrebuje vsak potovalec za omenjeno pot?

92. Dve točki se pomičeta po krakih pravega kota od vrha proč in sta v začetku svojega premikanja oziroma 4 m in $3\frac{2}{3}$ m oddaljeni od vrha. Po 1 sekundi sta točki 13 m in po $2\frac{1}{2}$ sekundah 25 m narazen. Kako hitro se pomika vsaka točka?

93. Kolike so stranice pravokotnika, katerega ploščina znaša 60 m^2 in katerega obseg in diagonala sta si kakor 34:13?

94. Krogu s polumerom 39 cm je včrtan pravokotnik, katerega stranice so v razmerju 12:5. Kolike so stranice?

95. Kolike so stranice enakokrakega trikotnika, katerega višina je za 2 cm manjša od kraka in katerega obseg znaša 50 cm?

96. Kolika je ploščina pravokotnega trikotnika, če znaša vsota obeh katet 7 m in hipotenuzi pripadajoča višina 2,4 m?

97. Koliki sta diagonali romba, katerega stranica meri 65 cm in ploščina 3696 cm²?

98. Kolik je rob kocke, katere prostornina se poveča za 1951 cm³, če postane vsak rob za 1 cm daljši?

99. Določi robe pravokotnega paralelepipeda, če meri osnovna ploskev 48 cm², površje 768 cm² in diagonala 26 cm?

100. Prostornina pravilne čtetverostranične piramide znaša 1280 cm³ in površje 800 cm². Kolik je osnovni rob in kolika višina?

101. Pravilna čtetverostranična prikrajšana piramida je 15 m visoka in ima 855 m³ prostornine. Koliki so osnovni robi, ki so v razmerju 3:2?

102. Kolik je polumer pokončnega valja, ki je 5 cm visok in ima $48\pi\text{ cm}^2$ površja?

103. Prostornina pokončnega prikrajšanega stožca znaša $6695\pi\text{ cm}^3$, stranica 17 cm in višina 15 cm. Kolika sta polumera osnovnih ploskev?

K § 8.

1. Razstavi naslednje trinome na faktorje:

- a) $x^2 - 17x + 70$; b) $x^2 + 3x - 88$; c) $3x^2 - 14x + 8$;
 d) $3x^2 + 10x - 153$; e) $6x^2 + x - 1$; f) $20x^2 + 17x - 24$;
 g) $acx^2 - (a^2 + bc)x + ab$; h) $acx^2 - (3ab - bc)x - 3b^2$;
 i) $abx^2 + (a + b)x + 1$; k) $abx^2 + (a^2 - b^2)x - ab$.

2. Za katere vrednosti premenljivke x so naslednji izrazi pozitivni in za katere negativni:

- a) $x^2 - 14x + 45$; b) $x^2 - 3x - 4$; c) $x^2 + 8x + 15$;
 d) $2x^2 - x - 2$; e) $8x^2 + 4x - 1$; f) $-2x^2 - x + 10$.

3. Določi naslednjim izrazom največjo, oziroma najmanjšo vrednost ter povej obeh vrednost premenljivke za ta slučaj:

- a) $x^2 + x + 1$; b) $x^2 - x + 1$; c) $3x^2 - 8x + 6$;
 d) $ax^2 - bx - c$; e) $ax + \frac{b}{x}$; f) $\frac{x^2 + x + 1}{x^2}$;
 g) $x - a + \frac{1}{x - a}$; h) $\frac{x^4 + 2x^2 + 2}{x^2 + 1}$; i) $x\sqrt{9 - x^2}$;
 k) $x^2 + (a + b)x + a^2 - ab + b^2$;
 l) $x^2 + (a - b)x - a^2 - ab - b^2$.

4. Razstavi število a na dva sumanda tako, da dobi njun produkt največjo vrednost.

5. Razstavi število a na dva faktorja tako, da dobi njuna vsota največjo vrednost.

6. Razdeli daljico a na dva dela tako, da dobi vsota kvadratov nastavljenih iz teh delov najmanjšo vrednost.

7. Vértaj določenemu trikotniku največji pravokotnik tako, da leži dvoje pravokotnikovih oglišč v eni trikotnikovi stranici, tretje in četrto oglišče pa v ostalih trikotnikovih stranicah.

8. Vértaj določenemu kvadratu (krogu) največji pravokotnik.

9. Vértaj določenemu pokončnemu stožcu pokončni valj z največjim plaščem.

10. Vértaj določeni krogli pravilno četrerostranično prizmo z največjim plaščem (póvršjem).

11. Kateri pokončni valj (stožec) ima največji plašč, če je obseg osjega preseka določene velikosti.

12. Vrtaj določeni krogli pokončni val z največjim plaščem. ✕

K § 9.

Načrtaj funkcije:

~~a) $y = 1 + 6x + 8x^2$,~~

~~b) $y = 12 - x - 6x^2$,~~

~~c) $y = x^2 - 2x - 15$,~~

~~d) $y = x^2 + 2x - 3$~~

ter določi presečišča funkcijskih črt z abscisno osjo!

$$2x - 2x + 4 = 0$$

K § 10.

Določi diferencijalne kvocijente naslednjim funkcijam:

~~1. $y = ax + b$.~~

~~2. $y = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$.~~

~~3. $y = ax^2 + bx + c$.~~

~~4. $y = (a + bx)(c - dx)$.~~

~~5. $y = ax + \frac{b}{x}$.~~

~~6. $y = a \sin x + b \cos x + c$.~~

~~7. $ax + by = c$.~~

~~8. $x^2 + y^2 = r^2$.~~

~~9. $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.~~

~~10. $y^2 = 2px$.~~

~~11. $y = 2px + \frac{p^2}{a}x^2$.~~

~~12. $y^2 = \sin x$.~~

~~13. $y = ax^2 + \frac{b}{x^2}$.~~

~~14. $y = (a + bx)^2$.~~

~~15. $y = \frac{m}{(a + bx)^2}$.~~

~~16. $y = \frac{m}{(a + bx)^2}$.~~

~~17. $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$.~~

~~18. $y = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}$.~~

~~19. $y = \sqrt{a + bx}$.~~

~~20. $y = \sqrt{a + bx + cx^2}$.~~

~~21. $y = a \sin ax$.~~

~~22. $y = a \sin(\beta - ax)$.~~

~~23. $y = \cos(x^2 - a^2)$.~~

~~24. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.~~

25. Določi, za katere vrednosti premenljivke rastejo, oziroma pojemajo naslednje funkcije:

~~a) $y = x^2 + 7x + 12$,~~

~~b) $y = 2x^2 - 3x - 9$,~~

~~c) $y = x^2 - 6x + 13$,~~

~~d) $y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{x}{6} - 1$.~~

26. Določi, za katere vrednosti premenljivke so naslednje funkcije pozitivne, oziroma negativne.

a) $y = x^2 - x - 2,$

b) $y = -x^2 - 2x + 3,$

c) $y = 4x^2 + 8x + 3,$

d) $y = -\frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{10}x + 2.$

27. Načrtaj funkcijo $y = 2 + 3x + 4x^2$ ter določi kot, katerega tvori geometrijska tangenta v točki $x = 3$ funkcijske črte s pozitivno abscisno osjo.

28. V kateri točki funkcijske črte $y = 2 + 2x + x^2$ tvori geometrijska tangenta s pozitivno abscisno osjo kot 45° (60°)?

29. Določi funkcijam pod 26. največjo, oziroma najmanjšo vrednost!

30. Načrtaj iz točke M , ki ima od središča O nekega kroga razdaljo a , tangenti na krog ter spoji dotikališči A in B med seboj in s točko O . Kolik mora biti krogov polumer, da je trikotnik AOB največji?

31. Kateri pokončni stožec s stranico a ima največjo prostornino?

32. Določi izmed pokončnih stožcev s prostornino k tistega, ki ima najmanjši plašč.

33. Določi najmanjši pokončni valj, če je diagonala osjega preseka $= d$.

34. Včrtaj (očrtaj) določeni krogli pokončen stožec z največjo (najmanjšo) prostornino.

K § II.

Določi naslednje integrale:

1. $\int x dx.$

2. $\int x^2 dx.$

3. $\int x^{-3} dx.$

4. $\int \frac{dx}{x^2}.$

5. $\int x^{\frac{1}{4}} dx.$

6. $\int \sqrt{x} \cdot dx.$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$

9. $\int (ax^2 - bx - c) dx.$

10. $\int (ax + b)^2 dx.$

11. $\int (x + a)(x - a) dx.$

12. $\int \left(3x^3 + 4x^{-3} + 2\sqrt[3]{x^4} - \frac{2}{3\sqrt{x^2}} \right) dx.$

13. $\int (a \sin x + b \cos x) dx.$

14. $\int \frac{dx}{a - bx}.$

15. $\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + b^2}.$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax + b}}.$

17. $\int x \sqrt{a^2 + x^2} \cdot dx.$

18. $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{1+x}}.$

19. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$

20. $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$

21. $\int \sin(ax + \beta) dx.$

22. $\int \cos(ax + \beta) dx.$

23. $\int_0^5 3x dx.$

24. $\int_0^1 (a + bx) dx.$

25. $\int_a^b \frac{dx}{x^2}.$

26. $\int_1^3 \sqrt{x} \cdot dx.$

27. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$

28. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin ax dx.$

29. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x dx.$

30. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x dx.$

31. Zavrti funkcijsko črto $y = \sqrt{8x}$ okoli abscisne osi do njene prvotne lege ter izračunaj prostornino nastalega telesa od $x = 0$ do $x = 6$.

K § 12.

1. Določi pri naslednjih aritmetičnih postopcih občni člen in vsoto iz n členov:

+ a) $\frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \frac{n-3}{n}, \dots,$

+ b) $\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{n}, \dots,$

+ c) $\frac{3n-1}{2}, 2n-1, \dots,$

+ d) $\frac{1}{n}, \frac{n^2+1}{n}, \frac{2n^2+1}{n}, \dots$

2. Pri aritmetični postopici 12 členov znaša zadnji člen $7\frac{1}{2}$ in vsota 54; kolik je prvi člen in kolika razlika?

3. Aritmetična postopica šteje 6 členov; kolik je prvi člen in kolika vsota, če je zadnji člen = 0 in razlika = -2?

4. Kolik je prvi in kolik zadnji člen aritmetične postopice, ki šteje 16 členov, če je razlika = 0.27 in vsota = 52.08?

5. Koliko členov aritmetične postopice da vsoto 2808, če znaša prvi člen 2 in razlika 10?

6. Koliko členov postopice 9, 13, 17... je treba sešteti, da dobiš vsoto 8640?

7. Vrini med člene postopice 1, 5, 9... po 8 novih členov tako, da dobiš zopet aritmetično postopico!
8. Koliko členov moraš med $8\frac{3}{4}$ in $10\frac{1}{2}$ vrniti, da dobiš aritmetično postopico z vsoto $211\frac{3}{4}$?
9. Določi pri postopici 50, 48, 46... tisti člen, ki je enak 27. delu vsote vseh prejšnjih členov!
10. Pri aritmetični postopici znaša vsota iz 9. in 20. člena 21, vsota iz 10., 16. in 28. člena pa 28; kako se glasi postopica?
11. Peti in drugi člen aritmetične postopice se razlikujeta za 18 in vsota prvih 5 členov znaša 75; kolik je prvi člen in kolika razlika?
12. Peti člen aritmetične postopice znaša 15, vsota prvih treh členov je $= 22\frac{1}{2}$ in vsota zadnjih treh členov $= 75$; koliko členov šteje postopica in kolika je njena vsota?
13. Vsota iz drugega in 16. člena aritmetične postopice znaša $6\frac{1}{2}$ in produkt istih dveh členov je $= 7\frac{1}{2}$; kolika je vsota prvih 16 členov?
14. Razdeli število 400 na 25 delov tako, da tvorijo ti deli aritmetično postopico in da je deveti del $= 11$!
15. Kolika je vsota sodih števil naravne številne vrste od 37 do 73?
16. Koliko znaša vsota četrtoštevilčnih števil, ki so deljiva z 29?
17. Dolg 4350 K, ki ne nosi nobenih obresti, se poravna tako, da se plača prvo leto 600 K in vsako naslednje leto za 50 K manj; v koliko letih je dolg poravnán?
18. Okoli točke v ravnini leži 6 kotov tako, da se dotikajo zaporedoma drug drugega in da je vsak naslednji za $9^{\circ} 12'$ večji od prejšnjega. Koliki so posamezni koti?
19. A izkoplje vodnjak, ki je 12 m globok, in dobi za prvi meter 9 K 60 h in za vsak naslednji meter po 2 K 40 h več. Koliko znaša ves zaslužek?
20. Ploščina pravokotnega trikotnika, katerega stranice tvorijo aritmetično postopico, znaša 294 dm^2 ; kolike so stranice?
21. Večja kateta pravokotnega trikotnika, katerega stranice tvorijo aritmetično postopico, meri 24 dm; koliki sta ostali stranici?

22. Številke troštevničnega števila tvorijo aritmetično postopico. Ako deliš to število z njegovo številčno vsoto, dobiš 26 za kvocient; če pa prišteješ dotičnemu številu 198, dobiš število, v katerem se nahajajo iste številke v obratnem redu. Katero je to število?

23. Dve telesi se začneta pomikati istodobno v isto smer od ene in iste točke. Prvo telo preteče vsako sekundo po 20 m, drugo telo pa v prvi sekundi 12 m in v vsaki naslednji sekundi po 2 m več. Kdaj dohiti drugo telo prvo?

24. Po obodu nekega kroga se pomikata dve telesi istodobno od ene in iste točke v nasprotno smer. Prvo telo preteče v prvi sekundi 3^0 in v vsaki naslednji sekundi po 1^0 več; drugo telo preteče v prvi sekundi $1\frac{1}{2}^0$ in v vsaki naslednji sekundi po 6^0 več. Kdaj se srečata telesi prvokrat in kdaj drugokrat?

25. Popotnik gre od kraja A in prehodi prvi dan 40 km in vsak naslednji dan po 2 km manj. Od kraja B, ki leži 40 km za krajem A, gre en dan pozneje kurir, ki prehodi prvi dan 40 km in vsak naslednji dan po 5 km več. V koliko dneh dohiti kurir popotnika?

K § 13.

1. Določi vsote naslednjih geometrijskih postopic:

a) $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-2} + x^{n-1}$,

b) $x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5$,

c) $a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6$.

2. Določi vsote naslednjih brezkončnih geometrijskih postopic:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

b) $1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{64} + \dots$

c) $\frac{5}{6} - \frac{1}{2} + \frac{3}{10} - \frac{9}{50} + \dots$

d) $a - b + \frac{b^2}{a} - \frac{b^3}{a^2} + \frac{b^4}{a^3} - \frac{b^5}{a^4} + \dots$ ($a > b$)

e) $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{3^{11}} + \dots$

f) $\frac{2}{8} + \frac{5}{8^2} + \frac{2}{8^3} + \frac{5}{8^4} + \frac{2}{8^5} + \frac{5}{8^6} + \dots$

+ 3. Kolik je prvi člen geometrijske postopice, katere količnik je $= 1\frac{1}{2}$ in sedmi člen $= 68\frac{1}{2}$?

+ 4. Kolik je realni količnik geometrijske postopice, pri kateri je a) prvi člen $= 2$ in dvanajsti člen $= 4096$; b) peti člen $= 648$ in sedmi člen $= 1458$?

+ 5. Koliko členov postopice 1, 3, 9, 27... moraš seštetati, da dobiš vsoto 3280?

+ 6. Prvi člen geometrijske postopice je 6, količnik $\frac{3}{4}$ in zadnji člen $1\frac{2}{5}1\frac{7}{2}$; koliko členov šteje postopica in kolika je njena vsota?

+ 7. Koliko členov ima geometrijska postopica in kolik je njen zadnji člen, če je prvi člen $= 4$, količnik $= 3$ in vsota $= 118096$?

+ 8. Prvi člen geometrijske postopice je 7 (3200), zadnji člen 15309 (25) in vsota 22960 (6375); kolik je količnik in koliko členov šteje postopica?

+ 9. Kolik je količnik brezkončne geometrijske postopice, katere prvi člen je $= 1$ in vsota $= 3$?

+ 10. Določi peti člen brezkončne geometrijske postopice, katere količnik je $\frac{3}{4}$ in vsota 20.

- 11. Vrini med števili 5 (16) in 405 (4096) tri člene tako, da tvori vseh pet členov geometrijsko postopico!

- 12. Vrini med števili x^8 in y^8 sedem členov tako, da dobiš geometrijsko postopico!

- 13. Vrini med 16 in $\frac{1}{4}$ toliko členov, da dobiš geometrijsko postopico z vsoto $31\frac{3}{4}$!

- 14. Med členoma 17496 in 1024 geometrijske postopice se nahaja šest členov; kolik je količnik?

- 15. Razlika med 4. in 6. členom geometrijske postopice je 756, razlika med 4. in 5. členom pa 432; kako se glasi postopica?

+ 16. Vsota iz 6. in 10. člena geometrijske postopice znaša $27\frac{1}{3}$, razlika med 12. in 4. členom je $242\frac{2}{3}$; kolik je prvi člen in kolik količnik?

+ 17. Osem števil tvori geometrijsko postopico; vsota prvih štirih števil je 15 (85) in vsota ostalih števil 240 (21760); katera so števila?

$$\sqrt[4]{17496} = 108798 = 4309$$

$$\sqrt[4]{1024} = 512$$

$$356$$

$$1403$$

18. Razdeli vsak člen postopice 3, 48, 768... na 4 dele tako, da tvorijo vsi ti deli geometrijsko postopico!

19. Tri števila, katerih vsota znaša 117, tvorijo geometrijsko postopico; če pomnožiš srednje teh števil z vsoto ostalih števil, dobiš 2430. Katera so števila?

20. Štiri števila tvorijo geometrijsko postopico; prvo število je za 36 večje od drugega, tretje za 4 večje od četrtega. Katera so števila?

21. Šest števil tvori geometrijsko postopico; vsota prvih 5 števil je 484, vsota zadnjih 5 števil pa 1452. Kako se glasi postopica?

22. Ako prišteješ 4 členom aritmetične postopice zaporedoma števila 1, 4, 11, 24, dobiš geometrijsko postopico; kako se glasi aritmetična postopica?

23. Ako odšteješ prvim 4 členom geometrijske postopice zaporedoma števila 3, 4, $5\frac{1}{2}$, 8, dobiš aritmetično postopico; kako se glasi geometrijska postopica?

24. Aritmetična in geometrijska postopica se ujemata v prvem členu; druga člena teh postopic sta si kakor 3:2 in tretja člena kakor 5:4. Vsota iz prvega in četrtega člena geometrijske postopice znaša 81. Kako se glasita postopici?

25. Razdeli 248 K med 5 oseb tako, da dobi vsaka naslednja oseba dvakrat toliko ko prejšnja!

26. Nekdo si prihrani meseca januarja 1 h in vsak naslednji mesec trikrat toliko ko prejšnji mesec. Koliko si prihrani v 1 letu?

27. Številke troštevillčnega števila tvorijo geometrijsko postopico; število in njegova številčna vsota sta si kakor 124:7, če prišteješ dotičnemu številu 594, dobiš novo število, v katerem se nahajajo iste številke v obratnem redu. Katero je število?

28. Iz soda, v katerem je 100 l vina, se vzame 1 l vina in vlije 1 l vode vanj; ko se vino in voda zmešata, se vzame iz soda 1 l te zmesi in vlije 1 l vode vanj i. t. d. Kolikokrat je treba navedeno mešanje ponoviti, da ostane v sodu še 40 l vina?

29. Recimo, da imamo neizrečeno veliko takih enakostraničnih trikotnikov, pri katerih je stranica vsakega naslednjega trikotnika enaka višini prejšnjega. Kolika je vsota vseh teh trikotnikov, če je stranica prvega trikotnika = a ?

30. Vrtaj določenemu kvadratu (enakostraničnemu trikotniku) krog; temu krogu vrtaj kvadrat (enakostranični trikotnik), temu kvadratu (enakostraničnemu trikotniku) zopet krog i. t. d. Koliko znašajo a) obsegi, b) ploščine vseh kvadratov (enakostraničnih trikotnikov, krogov)?

K § 14.

1. Kolika je vrednost kapitala 4567 K, naloženega po $4\frac{1}{2}\%$, čez 15 let?

2. Kapital 4050 K se po 5% obrestuje; kolika je njegova vrednost čez 20 let, če se obresti kapitalizujejo a) celoletno, b) poluletno?

3. Neko mesto ima 105842 prebivalcev; koliko prebivalcev bode imelo čez 11 let, če se prebivalstvo množi po 2% ?

4. Kapital 2710 K je 10 let po 4% , potem 5 let po $3\frac{3}{4}\%$ in 7 let po $3\frac{1}{2}\%$ naložen na obrestne obresti; kolika je njegova končna vrednost?

5. Dva kapitala znašata skupaj 5500 K in narasteta v 8 letih na 7977.57 K. Eden teh kapitalov je naložen po $4\frac{1}{2}\%$ in njegove obresti se kapitalizujejo celoletno, drugi kapital pa je naložen po 5% in njegove obresti se kapitalizujejo poluletno. Kolik je vsak kapital?

6. Gozd ima 75000 m^3 lesa; koliko lesa je bilo v gozdu pred 24 leti, če se računa letni prirastek po $1\frac{1}{2}\%$?

7. Nekdo ima čez 10 let dolg 4000 K plačati; kolika je gotova vrednost tega dolga, če se računajo obresti po $4\frac{1}{2}\%$ in kapitalizujejo poluletno?

8. Kateri kapital naložen po 4% naraste v 14 letih na isto vrednost, katero dobi kapital 1980 K po $4\frac{1}{2}\%$ v 18 letih?

9. A ponudi za hišo 32000 K takoj, B 35000 K po dveh letih in C 38400 K po 4 letih; katera ponudba je za prodajalca najugodnejša, če se računajo obresti po $4\frac{3}{4}\%$?

10. Izmed dveh kapitalov je eden trikrat tolik ko drugi. Manjši kapital je naložen po 5% , večji za $4\frac{1}{2}\%$. Če se vrednosti teh kapitalov čez 12 let razlikujeta za 6000 K, kolik je vsak kapital?

11. V katerem času naraste kapital 7500 K na 16000 K, če se obresti računajo po $4\frac{1}{2}\%$ in kapitalizujejo a) celoletno, b) poluletno?

12. V katerem času se podvoji določen kapital naložen na obrestne obresti po 4% (5%)?

13. Koliko časa mora kapital 15324 K po 5% naložen biti, da se poveča za 8431 K?

14. Po koliko odstotkov je kapital 5450 K naložen, če naraste v 23 letih na 12023.3 K?

15. Prebivalstvo nekega okraja je naraslo v 11 letih od 19332 oseb na 29761 oseb; za koliko odstotkov se poveča prebivalstvo v 1 letu?

16. Po koliko odstotkov je kapital 3000 K naložen, če znašajo obresti v $2\frac{1}{2}$ leta 1408 K in se kapitalizujejo poluletno?

17. Kapital 3500 K, ki je po 4% naložen, se poveča koncem vsakega leta za 410 K; kolik je kapital čez 10 let?

18. Koliko moraš skoz 20 let in sicer v začetku vsakega leta po 5% naložiti na obrestne obresti, da dobiš po 20 letih 20000 K?

19. Koliko moraš skoz 15 let in sicer koncem vsakega leta plačati v hranilnico, ki računa obresti po 5% in jih kapitalizuje poluletno, da imaš čez 15 let 3292.71 K premoženja?

20. Pri prodaji nekega posestva ponudi kupec A 20000 K takoj in skoz osem let po 400 K koncem vsakega leta, kupec B ponudi skoz 20 let po 1400 K v začetku vsakega leta. Katera ponudba je ugodnejša?

21. Kapital 1000 K je po $3\frac{3}{4}\%$ naložen na obrestne obresti. Koliko moraš temu kapitalu koncem vsakega leta pridejati, da se kapital podvoji čez 10 let?

22. Nekdo naloži določen kapital in skoz 30 let koncem vsakega leta 450 K po $4\frac{3}{4}\%$ na obrestne obresti. Če ima čez 30 let 45000 K premoženja, kolik je bil prvotni kapital?

23. Čez koliko let naraste kapital 5760 K, ki se koncem vsakega leta poveča za 575 K, na vrednost 24.825 K, če se računajo obresti po 4% ?

24. Nekdo je v 22 letih vse svoje premoženje, ki se je obrestovalo po 5% , izdal in sicer tako, da je vsako leto porabil 6000 K. Koliko je bilo premoženje?

+ 25. Gozd ima sedaj 30810 m^3 lesa; koliko lesa bo v gozdu čez 13 let, ako se koncem vsakega leta izseka po 1280 m^3 in se prirastek računa po 2% ?

+ 26. Nekdo ima plačati 2000 K čez 5 let, 3000 K čez 7 let in 5000 K čez 10 let. S katerim kapitalom se da ves dolg takoj poravnati, če se računajo obresti po 4% ?

+ 27. Neka občina mora za popraviljanje mosta plačati vsako leto po 200 K. S katerim kapitalom se da ta služnost odkupiti?

+ 28. S kolikim kapitalom si kupiš rento 1240 K, ki jo boš dobival skoz 25 let, če se računajo obresti po 3% ?

+ 29. Koliko moraš plačati za rento 1000 K, ki jo boš dobival poluletno skoz 12 let, če se obresti računajo po $3\frac{1}{2}\%$.

+ 30. Nekdo naloži 27000 K po 5% na obrestne obresti s tem pogojem, da bi od petega leta naprej skoz 14 let in sicer koncem vsakega leta dobival rento. Kolika je renta?

+ 31. Kapital 20000 K je 20 let po 5% naložen na obrestne obresti. Kolika renta se dobi od tega kapitala skoz 10 naslednjih let?

+ 32. Koliko let se dobiva letna renta 200 K od kapitala 3074.5 K, ki je po 5% naložen na obrestne obresti?

+ 33. Nekdo si kupi poluletno rento 800 K s kapitalom 30000 K; koliko časa bo dobival rento, ako se obresti računajo po 4% ?

+ 34. A ima skoz 14 let koncem vsakega leta 3675 K plačati, koliko mora a) za vsakega teh obrokov, b) za vse obroke skupaj plačati 10 let pozneje, če se računajo obresti po 4% ?

+ 35. B ima rento 1600 K dobivati skoz 15 let; ako prvih 4 rent ne vzdigne, koliko znaša potem vsaka izmed naslednjih 11 rent, če se obresti računajo po $4\frac{1}{2}\%$?

+ 36. Nekdo plača skoz 12 let in sicer v začetku vsakega leta po 1500 K zavarovalnemu društvu, da bi potem od 18. leta naprej skoz 15 let dobival rento koncem vsakega leta. Kolika je renta, če se računajo obresti po $4\frac{1}{2}\%$?

+ 37. Renta 2400 K, ki se dobiva skoz 20 let, se zamenja za rento, ki bi se dobivala skoz 30 let; kolika je zadnja renta, če se računajo obresti po 5% ?

+ 38. Koliko poluletno rento dobiš skozi 20 let za celoletno rento 18000 K, ki traja skozi 12 let, če se računajo obresti po 5%?

K § 15.

1. Koliko in katere premeščaje dobiš a) od besede „miza“, b) od besede „roma“, c) od besede „leten“?

2. Koliko premeščajev napraviš iz elementov 1, 2, 3, 4, 5, 6 in sicer takih, ki se začnejo a) s 5, b) s 54, c) s 546?

3. Koliko peterošteviličnih števil napraviš iz elementov a) 1, 3, 5, 7, 9, b) 2, 4, 6, 8, 0?

4. Koliko in katera peteroštevilična števila napraviš iz števil 3, 3, 5, 6, 6?

5. Kolikokrat moreš premestiti faktorje produktov: $abcdef$, $a^2bc = abc$, a^3b^2cd , $x^2y^2z^4$, $a^m - n b^n$?

6. Kako se glasi a) 14. premeščaj iz elementov „aimt“, b) 32. premeščaj iz elementov „ablot“, c) 114. premeščaj iz elementov „adkoš“?

7. Koliko različnih razporedov dado ena bela, dve črni in tri rdeče kroglice?

8. Kolikokrat more 7 gostov svoja mesta pri mizi zamenjati, dokler niso sedeli v vsakem mogočem redu?

9. Koliko različnih elementov moraš imeti, da se število premeščajev 42krat zmanjša, če se število elementov za 2 zmanjša?

K § 16.

+ 1. Napravi vse kombinacije drugega, tretjega in četrtega razreda a) brez ponavljanja, b) s ponavljanjem iz elementov 1, 2, 3, 4!

2. Na koliko načinov se da: a) produkt $abcde$ razstaviti na dva dela, izmed katerih ima eden po 2 in drugi po 3 faktorje; b) produkt $abcdef$ razstaviti na dva dela, izmed katerih ima vsak po 3 faktorje?

+ 3. Koliko amb, tern, kvatern in kvintern dobiš a) od vseh 90 števil naše loterije, b) od 5 števil, ki se enkrat izžrebajo?

4. Na koliko načinov se da: a) 12 kart med dve osebi tako razdeliti, da dobi ena po 3 in druga po 9 kart; b) 12 kart med tri osebe tako razdeliti, da dobi prva po 3, druga po 4 in

tretja po 5 kart; c) 32 kart med 4 osebe tako razdeliti, da dobi vsaka oseba po 8 kart?

5. Koliko premic in koliko trikotnikov določuje n točk, izmed katerih ne leže po 3 v eni in isti premici?

6. Koliko presečišč tvori: a) n premic v obče; b) 7 premic, izmed katerih so 3 vzporedne; c) 9 premic, izmed katerih se 4 sečejo v eni in isti točki?

(Vzporedne premice imajo presečišča v neskončni daljavi.)

7. Iz koliko elementov se da napraviti 435 amb brez ponavljanja?

8. Pri koliko elementih je število kvatern brez ponavljanja 6 krat toliko ko število amb brez ponavljanja?

9. Koliko elementov mora biti, da sta si števili tern s ponavljanjem in brez ponavljanja kakor 15:7?

K § 17.

1. Napravi vse premene drugega, tretjega in četrtega razreda a) brez ponavljanja, b) s ponavljanjem iz elementov 1, 2, 3, 4!

2. Koliko premen drugega, tretjega in četrtega razreda da 10 elementov in sicer a) brez ponavljanja, b) s ponavljanjem?

3. Koliko dvo-, tro- in četveroštevilčnih števil je mogoče napisati s številkami 3, 4, 5?

4. Koliko peterošteviličnih števil se da napisati s številkami 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 in sicer tako, da se v enem in istem številu ne ponavlja nobena številka?

5. Kako se spremeni rezultat prejšnje naloge, če se tudi ničla jemlje v poštev?

6. Koliko premen prvega, drugega, tretjega in četrtega razreda s ponavljanjem napraviš iz elementov „·“, —“ (pika, črta)?

7. Koliko različnih metov je mogočih a) z dvema kockama, b) s tremi kockami?

8. Kateri različni meti dveh (treh) kock dajo vsoto 8 (12)?

9. Iz koliko elementov napraviš 380 premen drugega razreda brez ponavljanja?

10. Pri koliko elementih sta si števili premen tretjega razreda brez ponavljanja in s ponavljanjem kakor 5:9?

11. Pri koliko elementih je število premen drugega razreda brez ponavljanja 20 krat manjše od števila premen tretjega razreda?

6.5.4.1.1
11.12.5

K § 18.

Izračunaj naslednje potence:

1. $(1 + a)^6$.
2. $(1 - a)^7$.
3. $(x + a)^5$.
4. $(x - a)^8$.
5. $(a - 3)^4$.
6. $(a + 5)^5$.
7. $(2a - 3b)^6$.
8. $(3a + 4b)^5$.
9. $(3x^2 - 4y^3)^4$.
10. $\left(\frac{a}{3} + 1\right)^5$.
11. $\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{3}\right)^6$.
12. $\left(\frac{4}{x} + \frac{x}{2}\right)^7$.
13. $\left(\frac{2a}{3b} + \frac{3b}{4a}\right)^5$.
14. $\left(\frac{4x}{3y} - \frac{9y}{4x}\right)^6$.

15. Določi:

- a) osmi člen od $(3a - 2)^{12}$,
- b) šesti člen od $(5x^2 + 4a^3)^{10}$,
- c) sedmi člen od $\left(\frac{a}{2} - \frac{2}{3}\right)^9$,
- d) peti člen od $\left(\frac{ax^2}{4by^2} + \frac{4b^2y}{a^2x}\right)^7$.

16. Določi:

- a) v rezultatu od $\left(\frac{4a}{5b} - \frac{2b}{4c}\right)^6$ tisti člen, v katerem se nahaja a^4 ;
- b) v rezultatu od $\left(\frac{5ax^2}{6by^2} + \frac{3by}{5ax}\right)^{10}$ tisti člen, v katerem se nahaja x^2 .

17. $(x^2 + 3)^5 - (x^2 - 3)^5$.
18. $(\sqrt{3} + 1)^8 + (\sqrt{3} - 1)^8$.
19. $(2 + \sqrt{2})^7 - (2 - \sqrt{2})^7$.
20. $(\sqrt{-4} + \sqrt{-2})^6$.
21. $\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^6$.
22. $\left(\frac{3 + i\sqrt{2}}{2}\right)^5 + \left(\frac{3 - i\sqrt{2}}{2}\right)^5$.

K § 19.

1. Nekdo ima v vrečici 10 avstrijskih in 10 ogrskih kron. Kolika je verjetnost, da vzame iz vrečice avstrijsko krono?

2. V neki žari je 6 belih in 8 rdečih krogel. Kolika je verjetnost, da potegneš a) eno belo in eno rdečo kroglo, b) dve rdeči krogli, c) dve beli krogli?

3. Kolika je verjetnost, da vržeš s tremi kockami a) tri enaka, b) tri različna števila?

4. Med 32 igralnimi kartami je polovica črnih in polovica rdečih. Kolika je verjetnost, da potegneš 4 rdeče karte?

5. Katera verjetnost je večja, da vržeš z dvema kockama vsoto 5 ali pa s tremi kockami vsoto 7?

6. Iz neke žare, v kateri je 5 belih, 6 modrih in 9 rdečih krogel, potegneš 4 krogle. Kolika je verjetnost, da so med temi a) dve beli, ena modra in ena rdeča krogla, b) dve rdeči in dve modri krogli, c) štiri rdeče krogle?

7. Nekdo kupi v gledališču vstopnico za sedež v pritličju, v katerem je 10 vrst po 20 sedežev. Kolika je verjetnost, da dobi sedež na kraju, ako so dohodi na obeh straneh in tudi po sredi?

8. V tako zvani mali loteriji se dvigne pri vsakem srečkanju izmed števil 1 do 90 pet števil. Kolika je verjetnost, da se zadene a) eno število, b) ambo, c) terno?

9. V posodi je 10 belih, 7 črnih in 8 zelenih krogel. Kolika je verjetnost, a) da potegneš prej belo nego zeleno kroglo, b) prej eno belo in eno zeleno nego dve črni krogli?

10. Kolika je verjetnost, da vržeš z dvema kockama vsoto 4 ali 6?

11. Kolika je verjetnost, da vržeš z eno kocko v treh metih vsaj enkrat število 5?

12. V žari je 5 belih in 7 rdečih krogel. Kolika je verjetnost, da potegneš trikrat zapored rdečo kroglo, a) ako deneš vsakokrat kroglo nazaj, b) ako jo obdržiš?

13. Kolika je verjetnost, da dobiš izmed 54 tarok-kart v treh dvigih vsaj enkrat tarok, ki je višji od 17 (tarokov je 22)?

14. Nekdo ima v žepu 20 novcev po 10 vinarjev in sicer 10 iz leta 1906 in 10 iz leta 1907. Kolika je verjetnost, da vzame trikrat zapored novce iz leta 1906 in potem novce iz leta 1907?

15. Kolika je verjetnost, z eno kocko trikrat zapored vreči število 5 in potem dvakrat kako drugo število?

Ponavljalne naloge.

1. Razstavi naslednje izraze na faktorje:

- a) $x^2 - y^2 - (x + y)^2$; b) $a^3 - 1 - (a - 1)^3$;
 c) $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$; d) $8a^3 + 27b^3 - 2a - 3b$;
 e) $x^4 - 625 - 26x(x^2 - 25)$;
 f) $16x^2 + 48xy + 36y^2 - 25z^2$;
 g) $2x^2 + 7x - 5$; h) $4x^2 + 4ax + a^2 - b^2$.

2. Poišči naslednjim izrazom največjo skupno mero:

- a) $2x^3 - 2xy^2 + x^2 + xy$, $4x^4 + 4xy^3$;
 b) $4x^3y^2 - 8x^2y^3$, $2x^3y - 8x^2y^2 + 8xy^3$, $2x^4y - 16xy^4$;
 c) $4a^3 + 17a^2 + 23a + 10$, $8a^3 - 2a^2 - 23a - 10$;
 d) $6x^3 + 4x^2y - 6xy^2 - 4y^3$, $9x^2 + 18xy + 8y^2$;
 e) $2a^3 + 7a^2 + 7a + 2$, $3a^3 + 4a^2 - 5a - 2$,
 $4a^3 + 7a^2 - 3a - 2$.

3. Poišči naslednjim izrazom najmanjši skupni mnogokratnik:

- a) $2x^3y - 4x^2y^2 + 2xy^3$, $3x^4y + 6x^3y^2 + 3x^2y^3$,
 $5x^3y^2 - 5xy^4$;
 b) $2x^3 + 2y^3$, $3x^3 - 3x^2y + 3xy^2$, $4x^3 + 4x^2y$;
 c) $a^3 + 4a^2 + 5a + 2$, $a^3 + 5a^2 + 8a + 4$;
 d) $9a^4 + 9a^3 + 14a^2 - 9a + 7$, $3a^4 + 5a^3 + a^2 - 10a - 14$.

4. Določi ulomkoma $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 7x + 10}$ in $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2}$ vrednost za $x = 2$.

5. Okrajšaj naslednja ulomka:

- a) $\frac{a^{n+2} - 2a^n + a^{n-2}}{a^{n+2} + a^{n+1} + a^n + a^{n-1}}$, b) $\frac{a^4 - a^2b^2 + b^4}{a^6 - b^6}$.

Določi naslednjim računom rezultate:

6. $\left(-\frac{3}{8}\right)^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{5}{8}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^{-4}$.
 7. $(2a^2b^{x+1} - 3a^nb^3 + 4a^{2n-2}b^{5-x}) \cdot (5ab^x + 6a^{n-1}b^2)$.
 8. $\left(\frac{2a^{3x-4}}{3b^{2m-3}} - \frac{4a^{2x-3}}{b^{m-1}} - \frac{3a^{x-2}}{2b}\right) \cdot \left(\frac{a^{2x-3}}{2b^m} - \frac{3a^{x-2}}{b^2}\right)$.
 9. $\left[\frac{a^2 - b^2}{(x - y)^n}\right]^m \cdot \left[\frac{a - b}{(x + y)^n}\right]^m \cdot \frac{(x^2 - y^2)^{mn}}{(a + b)^m}$.

10. $(x^{-1}y^{-5} - 2xy^{-3} + 3x^3y^{-1}) \cdot (x^{-1}y^{-5} + 2xy^{-3} - 3x^3y^{-1})$.
11. $(4a^{2x+6}b^{6y} + 16a^6b^{3y}c^{3y} + 16a^{6-2x}c^{6y}) : (2a^{x+3}b^{3y} + 4a^{3-x}c^{3y})$.
12. $(6a^{12} - \frac{85a^9}{21} + \frac{251a^6}{84} - \frac{75}{8}) : (\frac{12a^6}{7} - \frac{2a^3}{3} + \frac{5}{2})$.
13. $(\frac{2x^2 + 3xy + y^2}{3x + y})^3 : (\frac{2x + y}{3x - y})^3 : (\frac{x + y}{3x + y})^3$.
14. $(-4x^{-2} + 15x^{-1} - 24 + 9x + 4x^2) : (-4x^{-4} + 3x^{-3} + x^{-2})$.
15. $(\frac{a^3 + b^3}{a - b})^2 \cdot (\frac{a - b}{a^2 - ab + b^2})^2 - (\frac{a - b}{a - c})^3 \cdot (\frac{b - c}{b - a})^3 \cdot (\frac{c - a}{c - b})^3$.
16. $[(8\frac{3}{4})^3 \cdot (1\frac{5}{7})^3 : (12\frac{1}{2})^3] - [(9\frac{3}{5})^4 : (1\frac{11}{25})^4 : (6\frac{2}{3})^4]$.
17. $(-\frac{2}{3})^5 \cdot (\frac{3}{8})^2 \cdot (-\frac{4}{5})^2 + [(-\frac{1}{5})^2 : (-\frac{1}{8})^2 : \frac{1}{25}] - [(-\frac{1}{2})^2 : (-\frac{1}{4})^3]$.
18. $(16a^2 + 40ab + 25b^2)^2 \cdot (4a - 5b)^4 : (16a^2 - 25b^2)^3$.
19. $5^{-2} \cdot (\frac{2}{5})^{-2} \cdot (-a^2)^{-5} + (1\frac{1}{2})^2 \cdot (-a^5)^{-2}$.
20. $(\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2})^2 \cdot (\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}) + (\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2})^2 \cdot (\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2})$.
21. $(\frac{2a}{3b} + \frac{3b}{2a})^3 - (\frac{2a}{3b} - \frac{3b}{2a})^3$.
22. $(n^2 - \frac{n}{2} + \frac{1}{3})^2 - (n^2 + \frac{n}{2} - \frac{1}{3})^2$.
23. $(a^2 + \frac{a}{2} - \frac{1}{3})^3 - (a^2 - \frac{a}{2} + \frac{1}{3})^3$.

24. Pretvori naslednje izraze na enostavnejšo obliko ter jih skreži kolikor mogoče:

- a) $2\sqrt{275} - 3\sqrt{99} - 7\sqrt{88} + 3\sqrt{198} - \sqrt{704}$;
- b) $2\sqrt[3]{0.875} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{2\frac{2}{27}} + \frac{3}{7}\sqrt[3]{189} - \frac{5}{21}\sqrt[3]{3\frac{73}{125}}$;
- c) $\frac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{a - \sqrt{a^2 - 1}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}} + 2(1 - 2a\sqrt{a^2 - 1})$;
- d) $2\sqrt{xy^2 + y^3} - \sqrt{(x + y)^3} + \sqrt{(x^2 - y^2)(x - y)}$;
- e) $3\sqrt[3]{24} + 4\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[3]{192} + 3\sqrt[3]{375} - 2\sqrt[3]{1029}$;
- f) $4\sqrt[4]{2\frac{13}{16}} - 2\sqrt{20} - \frac{3}{7}\sqrt[3]{1\frac{31}{49}} + \frac{3}{8}\sqrt[3]{35\frac{5}{9}}$;

- g) $\frac{1-\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} + \frac{3\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \frac{3a+\sqrt{a}}{1-a}$;
 h) $10\sqrt{288} + 3\sqrt[3]{81} - 5\sqrt{242} - \sqrt{128} + 2\sqrt[3]{648} - 4\sqrt[3]{375}$;
 i) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\frac{9^6}{16^3}}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{8^4}{27^2}}} + \sqrt[4]{\sqrt[3]{\frac{27^4}{64^4}}}$;
 k) $\sqrt{6\sqrt{28}} - \sqrt{12\sqrt{7}} + 2\sqrt{3\sqrt{7}} - 2\sqrt[4]{63}$.

25. Izvrši naslednje množitve:

- a) $(2\sqrt{30} - 3\sqrt{5} + 5\sqrt{3})(\sqrt{8} + \sqrt{3} - \sqrt{5})$;
 b) $(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^2 \cdot (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}) - (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) \cdot (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})^2$;
 c) $(\sqrt[6]{a^5} + 2\sqrt[3]{a^2} - 4\sqrt{a})(\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{a} + 4\sqrt{a})$;
 d) $(\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b})(\sqrt[3]{a} - \sqrt[6]{ab} + \sqrt[3]{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$;
 e) $(\sqrt{5} - 2)\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$; f) $(\sqrt{10} + \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$;
 g) $\sqrt{2\sqrt{3} - 3\sqrt{5}} \cdot \sqrt[4]{4 + 2\sqrt{15}}$;
 h) $(3 - \sqrt{5})\sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}}$;
 i) $(a + a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{5}{6}})(1 + a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}})$;
 k) $(4a^{\frac{1}{2}} - 3a^{\frac{2}{3}} - 2a^{\frac{5}{6}})(a^{\frac{1}{4}} - 2a^{\frac{1}{3}} + 3a^{\frac{5}{12}})$;

26. Izvrši naslednje delitve:

- a) $(x\sqrt{\frac{x}{y}} - y\sqrt{\frac{y}{x}}) : (\sqrt{x} - \sqrt{y})$;
 b) $(a + \sqrt{ab} + b) : (\sqrt{a} - \sqrt[4]{ab} + \sqrt{b})$;
 c) $(12 - 6\sqrt{6} + 6\sqrt{15} - 9\sqrt{10}) : (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})$;
 d) $(24a^{\frac{4}{3}} + \frac{34}{3}a^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}) : (6a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{2})$;
 e) $(6x^{\frac{7}{6}} - 8x^{\frac{5}{4}} + 3x^{\frac{29}{30}} - 4x^{\frac{21}{10}}) : (3x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{3}{4}})$.

27. Določi rezultate naslednjih računov:

- a) $\sqrt[6]{(x^2 - 2xy + y^2)^3}$; b) $\sqrt[4]{a^3\sqrt[4]{a^{-1}\sqrt[3]{a^{-7}}}}$;
 c) $\sqrt{x^2\sqrt[3]{xy^2}} : \sqrt{y\sqrt{xy}}$; d) $(\sqrt[m]{x^2\sqrt[n]{x^3}} : \sqrt[n]{x^2\sqrt[m]{x^3}}) \cdot \sqrt[n]{x^2}$;
 e) $(\sqrt[3]{\frac{b^2}{c}\sqrt{\frac{c}{b}}})^2$; f) $(\sqrt[4]{\frac{2x^3\sqrt[3]{ax^2}}{5a^2\sqrt[4]{a^3x}}})^3$.

28. Določi vrednosti naslednjih izrazov:

$$\begin{array}{llll} a) 32^{\frac{3}{5}}; & b) 16^{1.75}; & c) 81^{0.25}; & d) 0.027^{-\frac{2}{3}}; \\ e) (-0.008)^{-\frac{1}{3}}; & f) \sqrt[2]{49}; & g) \sqrt[5]{\frac{16}{81}}; & h) \sqrt[0.8]{5\frac{1}{16}}. \end{array}$$

29. Izrazi naslednje ulomke z racijonalnim imenovalcem:

$$\begin{array}{ll} a) \frac{\sqrt{2x^2 + 3x\sqrt{y}}}{\sqrt{2x^2 - 3x\sqrt{y}}}; & b) \frac{12(1 + \sqrt{2})}{3 + \sqrt{2} - \sqrt{7}}; \\ c) \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}; & d) \frac{2}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}; \\ e) \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt[4]{5}}; & f) \frac{9}{1 + \sqrt{2} - 2\sqrt{5} - \sqrt{10}}; \\ g) \frac{2 + \sqrt{-9}}{3 - \sqrt{-4}}; & h) \frac{(1+i)^{-2}}{(1-i)^{-3}}; \quad i) \frac{1+i^3}{1-i^3}; \\ k) \frac{2 + \sqrt{-3}}{2 - \sqrt{-3}} - \frac{2 - \sqrt{-3}}{2 + \sqrt{-3}}; & \\ l) \frac{\sqrt{a} + \sqrt{-b}}{\sqrt{a} - \sqrt{-b}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{-b}}{\sqrt{a} + \sqrt{-b}}. & \end{array}$$

30. Pretvori naslednje binome v monome:

$$\begin{array}{ll} a) \sqrt{9 + 2\sqrt{8}} - \sqrt{9 - 2\sqrt{8}}; & \\ b) \sqrt{6 + \sqrt{20}} + \sqrt{6 - \sqrt{20}}; & \\ c) \sqrt{7 + \sqrt{-15}} + \sqrt{7 - \sqrt{-15}}; & \\ d) \sqrt{\frac{6}{7} + \frac{5}{2}i} - \sqrt{\frac{6}{7} - \frac{5}{2}i}; & \\ e) \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} + \sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}}; & \\ f) \sqrt{x + \sqrt{x - \frac{1}{4}}} + \sqrt{x - \sqrt{x - \frac{1}{4}}}. & \end{array}$$

31. Pretvori naslednje korenske izraze v binome:

$$\begin{array}{llll} a) \sqrt{10 - 2\sqrt{21}}; & b) \sqrt{43 - 15\sqrt{8}}; & c) \sqrt{11 - 60i}; & \\ d) \sqrt{-3 - 4i}; & e) \sqrt{-3 + 2i\sqrt{10}}; & f) \sqrt{-2 + 4\sqrt{-6}}. & \end{array}$$

$$32. \sqrt{(16a^6 - 24a^5 + 25a^4 - 20a^3 + 10a^2 - 4a + 1)}.$$

$$33. \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{3}a^3 - \frac{5}{36}a^4 + \frac{1}{6}a^5 + \frac{1}{16}a^6}.$$

$$34. \sqrt[3]{a^6 - 6a^5b + 21a^4b^2 - 44a^3b^3 + 63a^2b^4 - 54ab^5 + 27b^6}.$$

$$35. \sqrt[3]{\left(\frac{8}{x^3} - \frac{12}{x^2} + \frac{10}{x} - 5 + \frac{5x}{3} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{27}\right)}.$$

36. Izračunaj s pomočjo logaritmov naslednje izraze:

$$a) \sqrt[3]{2\sqrt[3]{4\sqrt[3]{8}}};$$

$$b) \sqrt[3]{\frac{49 \cdot 18^2 \sqrt{0.0485}}{\sqrt[3]{0.8465}}};$$

$$c) (\sqrt{181.4} - \sqrt[3]{0.973})^3;$$

$$d) \sqrt[3]{\sqrt{81.43} - \sqrt{21.72}}.$$

$$37. \text{Izračunaj } \left(\frac{1}{2} + \sqrt{-4}\right)^8.$$

$$38. \text{Določi sedmi člen od } \left(\frac{2}{3}\sqrt{-a} + \frac{3}{4}\sqrt{b}\right)^{12}.$$

$$39. \text{Določi v rezultatu od } \left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^{10} \text{ tisti člen, v katerem se nahaja } \frac{y}{x}.$$

Razreši naslednje racionalne enačbe z eno neznanko:

$$40. \frac{(2x+3)(3x+2)}{5} - \frac{7(x+3)(x-1)}{10} - \frac{(3x+1)(x+1)}{6} = 3\frac{2}{3}.$$

$$41. \left(\frac{3}{2}x - 2\right)^2 + \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}x + 1\right)^2 - \frac{33}{8}x.$$

$$42. \frac{3}{14 + 2x} + \frac{22}{49 - x^2} = \frac{1}{14 - 2x}.$$

$$43. \frac{7}{x^2 - 11x + 30} + \frac{2}{x^2 - 9x + 18} = \frac{9}{x^2 - 5x}.$$

$$44. \frac{2x+3}{x^2-x} - \frac{3x-2}{x^2-1} = \frac{2x+1}{x^2+x} + \frac{1}{8x}.$$

$$45. \frac{x}{4x^2+4x+1} + \frac{x+1}{4x^2-4x+1} = \frac{2x+3}{4x^2-1}.$$

$$46. \left(\frac{3x+4}{2x-5}\right)^2 + 7 \cdot \frac{3x+4}{2x-5} + 12 = 0.$$

$$47. \frac{2x+3}{3x-4} + \frac{3x-4}{2x+3} = 5 \cdot 2.$$

$$48. \frac{x^4 - 8x^3 + 16x^2}{9} - \frac{29}{9}(x^2 - 4x) = \frac{44}{3}.$$

$$49. (x^2 - 5x)^2 + 55x = 11x^2 - 30.$$

$$50. x^2(x^2 - 4x + 4) = 8x(x - 2) - 15.$$

$$51. x^3 - 27 + 37(3 - x) = 0.$$

$$52. (2x + 1)^3 - (3x + \frac{7}{8}) = 0.$$

$$53. x^4 - 256 + 41(16 - x^2) = 0.$$

$$54. 3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0.$$

$$55. 3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0.$$

$$56. 3x^4 - 10x^3 + 6x^2 - 10x + 3 = 0.$$

$$57. x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0.$$

$$58. x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 12x + 16 = 0.$$

Razreši naslednje iracionalne enačbe z eno neznanko:

$$59. \frac{\sqrt{3} + \sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3} - \sqrt{3}} = 2.$$

$$60. \frac{\sqrt[3]{x+6n} + \sqrt[3]{x-13n}}{\sqrt[3]{x+6n} - \sqrt[3]{x-13n}} = 5.$$

$$61. \sqrt{3x+5} + \sqrt{3x} = \sqrt{12x+9}.$$

$$62. \sqrt{8x+25} - \sqrt{\frac{x-1}{2}} = \sqrt{\frac{9x}{2}} + 19.$$

$$63. \sqrt{\frac{x-1}{2}} + \sqrt{\frac{x+1}{2}} = \frac{4}{\sqrt{2(x+1)}}.$$

$$64. \sqrt{\frac{a^2+x}{a-b}} + \sqrt{\frac{x-b^2}{a-b}} = \sqrt{a+b}.$$

$$65. \sqrt{4x-7} + \sqrt{5x-4} = \sqrt{15x-11}.$$

$$66. \sqrt{2x+4} + \sqrt{x+3} = \sqrt{8x+1}.$$

$$67. \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} + \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} = \sqrt{\frac{4x+3}{x-1}}.$$

$$68. \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{17}{4}.$$

$$69. \frac{x+a}{x-a} - 4\sqrt{\frac{a(x+a)}{x-a}} + 3a = 0.$$

$$70. (x-4)^2 + \sqrt{x^2-8x+40} = 6.$$

$$71. x+4 - 2\sqrt{\frac{x+4}{x-4}} = \frac{3}{x-4}.$$

$$72. \sqrt{x+2a} + \frac{a}{\sqrt{x+2a}} = \sqrt{a(a+4)}.$$

$$73. \sqrt{x+4} + \sqrt{x+11} = \sqrt{x+31} + \sqrt{x-4}.$$

$$74. \sqrt{4x-1} + 2\sqrt{x+16} - \sqrt{4x+71} = 2\sqrt{x-2}.$$

$$75. \sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} + \sqrt{2x-6} = \sqrt{3x-6}.$$

$$76. \sqrt{x^2 + 17} - \sqrt[4]{x^2 + 17} = 6.$$

$$77. \sqrt[3]{x^2 - 1} + \frac{2}{3}\sqrt[6]{x^2 - 1} = \frac{1}{3}. \quad 78. \sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}} - \sqrt[3]{\frac{a-x}{a+x}} = \frac{15}{4}.$$

$$79. \sqrt[3]{72 - x} - \sqrt[3]{16 - x} = 2.$$

$$80. \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+6} + \sqrt[3]{x-29} = 0.$$

Razreši naslednje enačbe z dvema in več neznankami:

$$81. \frac{x + 4\frac{1}{2}}{3\frac{1}{3}} + \frac{y - 2\frac{2}{3}}{3\frac{1}{2}} = \frac{35}{12} \quad \text{in} \quad \frac{2x - 1\frac{1}{4}}{2\frac{1}{2}} + \frac{3y + 4\frac{1}{2}}{1\frac{1}{4}} = 17\frac{1}{2}.$$

$$82. \frac{2x + 3\frac{1}{2}}{4} = \frac{3y - 4\frac{1}{2}}{3} + \frac{3}{8} \quad \text{in} \quad \frac{2\frac{1}{2}x - 3}{4} = \frac{2\frac{1}{3}y + 5}{6} - 1\frac{1}{2}.$$

$$83. \sqrt{\frac{x+y}{x}} = 3 - \sqrt{\frac{y}{x}} \quad \text{in} \quad 2x + 3y = 66. \quad x = 9, y = 10$$

$$84. \sqrt{2x} - \sqrt{3y} = 3 \quad \text{in} \quad 3\sqrt{x} + \sqrt{6y} = 7\sqrt{2}. \quad x = 1, y = 1$$

$$85. x - 1 = \sqrt{x^2 + 2x - 7y + 7} \quad \text{in} \quad y + 4 = \sqrt{y^2 + 2y + 3x + 25}. \quad x = 1, y = 0$$

$$86. 10\sqrt{\frac{x}{2} + \frac{61}{16}} = 13 + \sqrt{\frac{3}{5}y + \frac{19}{25}} \quad \text{in} \quad 7\sqrt{\frac{x}{2} + \frac{61}{16}} + 6\sqrt{\frac{3}{5}y + \frac{19}{25}} = 20. \quad x = 16.11, y = 20$$

$$87. \frac{11}{3\sqrt{x+5}} = 1 - \frac{1}{4\sqrt{y+4}} \quad \text{in} \quad \frac{5}{\sqrt{x+5}} + \frac{7}{36} = \frac{13}{3\sqrt{y+4}}. \quad x = 11, y = 1$$

$$88. \sqrt{x+6} + \sqrt{y-1} = 6 \quad \text{in} \quad 4x + 3y = 42.$$

$$89. xy^2 + y + 1 = 0 \quad \text{in} \quad x^2y^2 + x + y = 3. \quad x = -2, y = 1$$

$$90. x^2 - 9xy + 7y^2 = 13 \quad \text{in} \quad 7xy - 6y^2 + 12 = 0.$$

$$91. 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \quad \text{in} \quad 5y^2 + 6x + 7y = 18.$$

$$92. 2x^2 + 3xy + 4y^2 = 24 \quad \text{in} \quad 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 15 = 0.$$

$$93. x^2 - y^2 + x - y = 2\sqrt{a} \quad \text{in} \quad (x^2 - y^2)(x - y) = a.$$

$$94. 2xy - \sqrt{xy} = 66 \quad \text{in} \quad 2(x - y)^2 - 3(x - y) = 35.$$

$$95. x^2 + xy = 78 \quad \text{in} \quad y^2 + xy = 91.$$

$$96. x^2 + y\sqrt{xy} = 9 \quad \text{in} \quad y^2 + x\sqrt{xy} = 18.$$

$$97. \sqrt{x-y} - 5 = \frac{6}{\sqrt{x-y}} \quad \text{in} \quad \sqrt{x+y} + \frac{1}{\sqrt{x-y}} = 3.$$

98. $\sqrt{\frac{5x-2y}{2x}} + \sqrt{\frac{2x}{5x-2y}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ in $x^2 + y^2 = 5$.
99. $x + y - 4\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{5}{x-y}$ in $x^2 + y^2 = 25$.
100. $x - y = 61$ in $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 1$.
101. $x^3 - y^3 = \frac{218}{35}xy$ in $x - y = 2$.
102. $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 133$ in $x + y = 5$.
103. $x + y = \sqrt{x} + \sqrt{y} - 2\sqrt{xy} + 42$ in $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1$.
104. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 12$ in $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 104$.
105. $\sqrt{\frac{x+y}{3x}} + \sqrt{\frac{3x}{x+y}} = 2$ in $xy - x - y = 54$.
106. $x + y - z = 6$
 $x^2 + y^2 + z^2 = 50$
 $xy + xz + yz = 47$.
107. $x + y + z = 42$
 $x : y = y : z$
 $y(x + z) = 272$.
108. $x : y = z : u$
 $x - u = 3$
 $y - z = 1$
 $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 41$.
109. $(x + z)^2 + (y + u)^2 = 208$
 $zy + u(x + z) = 48$
 $x + y + z + u = 20$
 $x + y = 14$.

Razreši naslednje eksponentne in logaritemske enačbe:

110. $2^{x(x-2)} \cdot 4^{x-2} \cdot 0 \cdot 5^{x+2} = 1$. 111. $\frac{x-1}{\sqrt{4^x}} \cdot 3^{x-1} = 72$.
112. $2 \cdot 9^{x+1} - 3 \cdot 4^x = 6 \cdot 4^{x+1} + 6 \cdot 9^x$.
113. $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 7^{x-2} + 7^{x-1}$.
114. $5^{2x-\frac{2}{3}} - 3^{x-\frac{1}{3}} = 3^{x+\frac{5}{3}} - 5^{2x-\frac{5}{3}}$.
115. $7^{2x+1} - 3 \cdot 2^{3x-1} = 9 \cdot 2^{3x-2} + 5 \cdot 7^{2x-1}$.
116. $3\sqrt[3]{4^{3x+1}} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{9^{3x+4}} = 6\sqrt[3]{4^{3x+4}} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{9^{3x+7}}$.
117. $3\sqrt{9^{x+3}} - 9\sqrt{2^x} = 6 \cdot 2^{x+3} + 8\sqrt{9^{x+1}}$.
118. $\sqrt{3^{4x}+1} + \sqrt{2 \cdot 3^{4x}+3} = 5$.
119. $\sqrt{3^{2x}+4} + \sqrt{6-3^{2x}} = 4$. 120. $4^{2x} + 5 \cdot 4^x = 36$.

$$121. \left(\frac{3}{4}\right)^{2x} - 3\left(\frac{3}{4}\right)^x + 2 = 0. \quad 122. \frac{10(3x+100)}{3x} = 15 \cdot 3^x + 2.$$

$$123. 2^{x+3} + 2^{3-x} = \frac{208}{5}. \quad 124. 4^{2x+\frac{1}{2}} - 4^{x+\frac{1}{2}} = 144.$$

$$125. 5^x \sqrt[5]{64} - 6^{2x} \sqrt[6]{64} = 8. \quad 126. \sqrt[x]{9} - 12 \sqrt[3]{3} + 27 = 0.$$

$$127. \sqrt[3x]{4} - \frac{3}{4} \sqrt[3x]{2} + \frac{1}{8} = 0.$$

$$128. 3^{y+2} = \frac{x+1}{\sqrt{9^{8-x}}} \text{ in } 2^{y+2} = \frac{3x-3}{\sqrt{8^{10-3x}}}.$$

$$129. 3^{y+1} \cdot \frac{x^2-3}{\sqrt{2x^2-2}} = 36 \text{ in } 7^{y-1} \cdot \sqrt[5]{5^{x^2+1}} = 5,$$

$$130. 3^x + 4^y = 265 \text{ in } 3^x \cdot 4^y = 2304.$$

$$131. 2^x + 3^y = 13 \text{ in } 4^x + 9^y = 97.$$

$$132. 2y^x + 3y^{-x} = \frac{515}{16} \text{ in } 4\sqrt[x]{y} + 5\sqrt[x]{\frac{1}{y}} = \frac{21}{2}.$$

$$133. \log(x-3) = 0.90309 + \log x - \log(x+3).$$

$$134. 2 \log(4x-3) = \log(x+3) + \log(2x+1).$$

$$135. \frac{1}{2} \log(x-1) + \log(3x+2) - \log 3 = \frac{3}{2} - \log 2.$$

$$136. \frac{1}{3 - \log x} + \frac{2}{1 + \log x} = \frac{5}{3}. \quad 137. x^{3+\log x} = 10000.$$

$$138. 3x^{\log x} + 100x^{-\log x} = 35.$$

$$139. x^{\log y} = 4 \text{ in } xy = 200.$$

$$140. 2^{\log x} + 3^{\log y} = 11 \text{ in } 2^{\log x} \cdot 3^{\log y} = 18.$$

$$141. 5^{3 \log x} + 3^{3 \log y} = 854 \text{ in } 5^{\log x} \cdot 3^{\log y} = 45.$$

$$142. y^x + 16y^{-x} = 17 \text{ in } \sqrt[x]{y} + \sqrt[x]{y^{-1}} = 2.5.$$

$$143. \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{y}} + \frac{1}{100} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{y}} = \frac{2}{10^4} \text{ in } y = 3 - \log x.$$

Uporabne naloge o enačbah.

144. Razstavi ulomek $\frac{27 + 34x}{(3 + 4x)(6 + 7x)}$ na vsoto dveh ulomkov!

145. Razstavi ulomek $\frac{18a^2 + 106a + 150}{(a+2)(a+3)(a+4)}$ na vsoto treh ulomkov!

146. Razstavi trinom $15x^2 + 11x - 12$ na faktorje!

147. V katerem številnem sestavu se je množitež $26 \cdot 35 = 888$ izvršila?

148. Neko dekadično število se piše v dveh številnih sestavih s številkami 532 in 365; ako je podloga drugega številnega sestava za 2 večja od prvega, kolika je podloga prvega številnega sestava in koliko je dekadično število?

149. V katerem številnem sestavu se piše dekadično število 39698 s številkami 60408?

150. Razstavi število m na dva faktorja tako, da dobi vsota njunih kvadratov največjo vrednost!

151. Vrednost nekega ulomka je $\frac{1}{2}$. Če povečaš števec za 8 in zmanjšaš imenovalca za 8, dobiš ulomek, ki je za $1\frac{1}{8}$ večji od onega ulomka, ki nastane, če zmanjšaš števec za 8 in povečaš imenovalca za 8. Kako se glasi ulomek?

152. Če pomnožiš dvoštevilčno število s številom, ki ima isti številki v obratnem redu, dobiš produkt 1729. Če pa deliš prvo število z drugim, dobiš kvocijent 4 in ostanek 15. Katero je to število?

153. Očrtaj določeni krogli pokončen stožec *a)* z najmanjšo prostornino, *b)* z najmanjšim površjem!

154. Včrtaj določeni polukrogli pokončen valj z največjim plaščem!

155. *A* kupi za 400 K sukna; če bi plačal za vsak meter sukna 1 K manj, bi dobil za isti denar 20 metrov več. Koliko metrov sukna je kupil?

156. *A* in *B* imata pri skupni kupčiji 340 K dobička. *B* je 400 K več vložil ko *A*. Če dobi *A* na kapitalu in dobičku 3360 K nazaj, koliko je vložil?

157. Dve točki sta določeni po $M_1(x_1, y_1)$ in $M_2(x_2, y_2)$. Poišči v abscisni osi tisto točko M , za katero je izraz $MM_1^2 + MM_2^2$ najmanjši.

158. V trapezu so tri stranice enake in sicer je vsaka $= a$. Kolika mora biti četrta stranica, da je trapezova ploščina največja?

159. Tri števila, katerih vsota znaša 28, tvorijo stalno sorazmerje. Ako pomnožiš notranji člen tega sorazmerja z vsoto zunanjih členov, dobiš produkt 160. Katera so števila?

160. V katerem sorazmerju je vsota vseh štirih členov 72, produkt notranjih členov 140 in vsota kvadratov vseh členov 2050?

161. B proda njivo za 513 K; za koliko je kupil njivo, če je imel pri prodaji tretjino toliko odstotkov dobička, kakor je zanj plačal?

162. A ima 24000 K kapitala in porabi od obresti vsako leto 800 K, ostanek pa priklopi h kapitalu. V začetku tretjega leta ima 24820 K kapitala. Po koliko odstotkov je bil naložen kapital?

163. Koliko časa in po koliko odstotkov moraš 2400 K kapitala naložiti, da dobiš 288 K obresti in to tudi tedaj, če naložiš isti kapital za 1 leto manj in po 2% višje?

164. Cev A napolni neko prazno posodo v 2 urah poprej, ko izprazni cev B isto polno posodo. Ako odpreš obe cevi 20 ur, je posoda le do polovice napolnjena. V katerem času napolni prva cev prazno posodo in v katerem času izprazni druga cev polno posodo?

165. A potrebuje za neko delo 2 dni več in B $4\frac{1}{2}$ dneva več nego A in B skupaj. V katerem času izvršita A in B skupaj dotično delo?

166. Delavci neke tovarne so enako plačani in zaslužijo 65 K na dan. Če bi tovarna 7 delavcev odpustila in vsakemu izmed ostalih delavcev dnevni zaslužek za 40 h znižala, bi znašal dnevni zaslužek 39 K 60 h. Koliko delavcev je bilo sprva in koliko je vsak zaslužil?

167. Načrtaj skoz točko C določenega kroga tangento in s to tangento vzporedno tetivo AB . Kolika mora biti razdalja med točko C in tetivo AB , da je trikotnik ACB največji?

168. Določi izmed vseh prisekanih stožcev, ki imajo enake višine in pri katerih znaša vsota polumerov v osnovnih ploskvah $2a$, tistega, ki ima najmanjšo prostornino.

169. Sprednje kolo nekega voza se zavrti na 1260 m dolgi cesti 105krat več nego zadnje kolo. Če bi bil obod vsakega kolesa za $\frac{1}{2}$ m manjši, bi se sprednje kolo na isti poti le 80krat več zavrtelo ko zadnje kolo. Kolik je obseg vsakega kolesa?

170. Dve telesi se pomikata po krakih pravega kota proti vrhu in pretečeta po 6 m in 8 m vsako sekundo. V začetku sta telesi oziroma 103 m in 76 m oddaljeni od kotovega vrha. Po koliko sekundah sta telesi 109 m narazen?

171. Dve telesi se pomičeta po premicah, ki stojita pravokotno druga na drugi, proti njiju presečišču in pretečeta vsako sekundo oziroma po 3 m in 4 m . V začetku svojega premikanja sta telesi 20 m in po 2 sekundah 10 m narazen. Kako daleč je bilo sprva vsako telo od presečišča premic?

172. Sela A in B gresta istodobno od istega kraja M proti 60 km oddaljenemu kraju N . Sel B prehodi vsako uro $\frac{1}{3}\text{ km}$ več ko A in pride za $\frac{3}{4}$ ure poprej v kraj N . Koliko km prehodi A in koliko B v eni uri?

173. Dva popotnika gresta od krajev A in B , ki sta 45 km narazen, istodobno drug proti drugemu in se srečata po 5 urah. Prvi popotnik pride $2\frac{1}{4}$ ure poprej v kraj B ko drugi v kraj A . Kje sta se srečala?

174. Kolesar se pelje ob osmih zjutraj od kraja A proti 9 km oddaljenemu kraju B in odtod proti kraju C . Istodobno odide od kraja B proti kraju C pešec, ki potrebuje za vsak kilometer $4\frac{1}{4}$ minute več kot kolesar. Če kolesar dohiti pešca ob 11. uri 20. minuti predpoldne, koliko pot napravi vsak v 1 minuti?

175. Pri katerem mnogokotniku je število diagonal za 18 večje od števila stranic?

176. Ena kateta pravokotnega trikotnika je za 17 m večja od druge. Če podaljšaš manjšo kateto za 20 m in večjo za 10 m , postane hipotenuza za 20 m večja. Kolika je krajša kateta?

177. Hipotenuza pravokotnega trikotnika meri 35 m in vsota iz ene katete in njenega vzmeta na hipotenuzo znaša $33\cdot6\text{ m}$; koliki sta kateti?

178. Določi stranice pravokotnega trikotnika, če znaša vsota iz ene katete in hipotenuze 50 m , vsota iz druge katete in hipotenuze pa 81 m .

179. Določi izmed pravokotnikov z obsegom $2s$ tistega, ki ima a) največjo ploskev, b) najmanjšo diagonalo.

180. Očrtaj kvadratu s stranico a najmanjši enakokraki trikotnik tako, da leži kvadratova osnovnica na trikotnikovi osnovnici.

181. Vrtaj določenemu kvadratu enakokrak trikotnik tako, da je njegov obseg najmanjši in da leži vrh v kvadratovem oglišču.

182. Ako načrtaš skoz točki $x_1 = -\frac{b}{2a} + m$ in $x_2 = -\frac{b}{2a} - m$ funkcijske črte $y = ax^2 + bx + c$ tangenti, sta kota teh tangent s pozitivno abscisno osjo suplementarna. Dokaži to!

183. Pri katerem pokončnem valju je obseg osjega preseka najmanjši, če ima plašč (površje) določeno velikost?

184. Pokončnemu stožcu s stranico a naj se očrta pokončni valj z največjim plaščem. Kolik je polmer skupne osnovne ploskve?

185. Včrtaj določeni krogli pravilno tristranično (šesterostranično) prizmo z največjim plaščem.

186. Očrtaj določeni krogli pokončni prisekani stožec z najmanjšim plaščem (najmanjšo prostornino).

187. Pri koliko elementih je razlika med številom kombinacij četrtega razreda s ponavljanjem in številom kombinacij četrtega razreda brez ponavljanja $32\frac{1}{2}$ krat toliko ko število elementov?

188. Pri koliko elementih se števili premen in kombinacij tretjega razreda brez ponavljanja razlikujeta za 5 kratno število elementov?

189. Pri koliko elementih je število premen tretjega razreda s ponavljanjem za 225 večje nego število premen tretjega razreda brez ponavljanja?

Uporabne naloge o postopicah.

+ ✓ 190. Razdeli 756 K med več oseb tako, da dobi prva oseba 80 K in vsaka naslednja za 4 K manj ko prejšnja. Koliko je oseb?

✓ 191. Pri kateri aritmetični postopici je osmi člen enak kvadratu četrtega člena in šesti člen enak srednji geometrijski sorazmernici med 4. in 11. členom?

— 192. Kako se glasi aritmetična postopica, ki šteje 21 členov, če znaša vsota prvih 20 členov 650 in vsota zadnjih 20 členov 710?

Handwritten notes and scribbles at the bottom right of the page.

193. Vrini med prvi in drugi člen postopice 2, 5, 8 ... toliko novih členov, da je vsota vrinjenih členov, ki tvorijo aritmetično postopico, le za 1 manjša ko vsota prvih 20 členov prvotne postopice.

194. Katero liho število je za 1 manjše ko peti del vsote vseh prejšnjih lihih števil?

195. Vsota iz 5. in 8. člena aritmetične postopice znaša 21 in vsota iz kubov istih dveh členov 2457; kolika je vsota prvih 33 členov?

196. Pri aritmetični postopici z razliko $\frac{1}{2}$ znaša vsota prvih n členov $236\frac{1}{2}$; ako prišteješ k tej vsoti naslednjih 7 členov, dobiš $418\frac{1}{2}$. Določi n in prvi člen!

197. Štiri števila tvorijo aritmetično postopico; produkt vseh 4 števil je 880 in razlika med kvadratom srednjih števil znaša 39. Katera so števila?

198. Stranice pravokotnega trikotnika tvorijo aritmetično postopico in hipotenuzi pripadajoča višina meri 21.6 m ; kolike so stranice?

199. Določen kapital je naložen po 5% in se poveča vsako leto za 250 K; ako znašajo po 10 letih letne obresti vsega kapitala 1812.5 K , kolik je prvotni kapital?

200. Kako se glasi geometrijska postopica, pri kateri je 11. člen za $7\frac{3}{2}$ večji od tretjega in 9. člen za $1\frac{7}{8}$ večji od petega?

201. Pri geometrijski postopici 4 členov znaša vsota prvega in zadnjega člena 172 in vsota srednjih členov 28; kolik je prvi člen in kolik kvocijent?

202. Ako prišteješ prvim 4 členom aritmetične postopice zaporedoma števila 5, 6, 9, 15, dobiš geometrijsko postopico; kako se glasi aritmetična postopica?

203. Ako odšteješ zaporedoma od prvih 4 členov geometrijske postopice prve 4 člene aritmetične postopice, dobiš razlike 1, 2, 8, 24. Kako se glasi geometrijska in kako aritmetična postopica?

204. Vsota geometrijske postopice, ki šteje osem členov, znaša 250; vsota sodih členov je za 150 večja od vsote lihih členov. Kako se glasi postopica?

205. Kolika je vsota brezkončne geometrijske postopice, pri kateri je produkt prvih treh členov 1728 in vsota iz kubov teh členov 15768?

206. Kolika je vsota brezkončne geometrijske postopice, pri kateri znašajo prvi trije členi 351 in naslednji trije členi 13?

207. Koliko členov moraš med 3 in 46875 vrniti, da dobiš geometrijsko postopico z vsoto 58593?

208. Razdeli določeno vsoto denarja med 5 oseb tako, da tvorijo deleži geometrijsko postopico in da znašata 2. in 3. delež 8400 K, prvi in tretji pa 10000 K. Koliko denarja se je razdelilo?

209. Določi 5 števil tako, da tvorijo prva 4 števila aritmetično postopico z vsoto 30 in zadnja tri števila geometrijsko postopico in da je produkt iz 3. in 5. števila 24krat večji od drugega števila!

210. Krogli s polumerom r se vērta pravilni tetraeder, tetraedru se vērta krogla, tej krogli se vērta zopet tetraeder i. t. d. Kolika je prostornina a) vseh krogel, b) vseh tetraedrov?

211. Določeni kocki se vērta krogla, tej krogli se vērta kocka, tej kocki se zopet vērta krogla i. t. d. Kolika je vsota prostornin a) vseh kock, b) vseh krogel?

212. Kapital 25110 K je po $3\frac{3}{4}\%$ naložen na obrestne obresti. Za koliko se mora ta kapital zmanjšati koncem vsakega leta, da bo njegova vrednost čez 10 let znašala 25604 K?

213. Neki kapital, ki je po $4\frac{1}{2}\%$ naložen, se je v 18 letih podvojil, akoravno se je koncem vsakega leta zmanjšal za 420 K. Kolik je bil kapital?

214. Kapital 1300 K se koncem vsakega leta poveča za 200 K; drugi kapital znaša 5960 K in se koncem vsakega leta zmanjša za 200 K. Čez koliko let bosta kapitala enaka, če se računajo obresti po 4% ?

215. Nekdo ima vsaka tri leta po 4000 K plačati in sicer povsem 10krat. S katerim kapitalom se da ta dolg takoj poravnati, če se računajo obresti po $3\frac{1}{2}\%$?

216. Nekdo si izposodi pri hranilnici kapital 8000 K. T. dolg hoče tako poravnati, da plača skoz 15 let koncem vsakega leta enako vsoto; kolika je ta vsota, če hranilnica z sojeni denar računa obresti po 5% , za prejeti denar pa po

217. Kapital 10000 K se naloži 10 let po 4% na obrestne obresti; skoz koliko naslednjih let dobiš od tega kapitala rento 1825 K?

+ 218. Kolik kapital moraš 18 let po 5% naložiti na obrestne obresti, da dobiš potem skoz 13 naslednjih let rento 1200 K?

+ 219. A hoče od 20. leta naprej skoz 16 let in sicer koncem vsakega leta dobivati rento 1000 K. Koliko mora sedaj za rento plačati, če se obresti računajo po $4\frac{1}{2}\%$?

+ 220. Nekdo ima skoz 15 let dobivati rento 1250 K; koliko časa se mora tej renti odpovedati, da dobiva potem skoz 12 let rento 1785·5 K, če se računajo obresti po $3\frac{1}{2}\%$?

221. Letna renta 1000 K, ki se ima še 10 krat izplačati, se zamenja za poluletno rento 597·7 K; koliko časa se dobiva zadnja renta, če se računajo obresti po 4%?

0 222. Pri igri „domino“ so kameni zaznamovani z vsemi kombinacijami dveh števil 0 do 8. Kolika je verjetnost, da obrneš kamen, ki ima število 5?

♥ 223. Kolika je verjetnost, da vržeš z dvema kockama števili 2 in 6?

0 224. Kolika je verjetnost, da potegneš iz 32 kart igre „piké“, kjer so 4 kralji, dvakrat zapored kralja?

0 225. Nekdo zapiše štiri različna troštevilska števila. Kolika je verjetnost, da so prva tri števila liha, četrto pa sodo?

0 226. Pri neki dobrodelni ustanovi so določili s srečkanjem vsakoletne nagrade za pet revnih nevest. V nekem letu se oglasi 40 deklet in med njimi tri sestre. Kolika je verjetnost, da a) nobena teh sester ne dobi nagrade, b) da jo dobi samo ena, c) da jo dobi najstarejša, d) da jo dobita dve, e) da jo dobe vse tri, f) da jo dobita najmlajši dve, g) da jo dobi vsaj ena.

Zgodovinski dostavki.

Matematična veda se je razvijala le polagoma, kakor je potreba zahtevala. Tako nam zgodovina priča o starih Feničanih, da so bili izvrstni trgovci, torej gotovo dobri računarji. Egipčane so vsakoletne poplave reke Nila kmalu prisilile, da so zgradili nasipe, prekope in vodotoke, in tako so se izurili v zemljemerstvu in v praktični geometriji. Stari Kaldejci so častili zvezde kakor božanstva in postali na ta način prvi zvezdogledi. Pa tudi Indijci in Kitajci niso zaostali za njimi; opazovali so solnčne in lunine mrke in zvezde repatice ter nam ohranili najstarejšo astronomsko kroniko.

Prvi korak do znanstvene matematike sploh so bili številni sestavi. Od Asircev in Babiloncev smo prejeli seksagezimalni številni sestav, ki se kaže še sedaj v razdelitvi kroga na stopinje, minute in sekunde in istotako v razdelitvi časa.

Izvrstni računarji so bili stari Indijci. Od njih imamò takozvani pozicijski številni sestav, ki sloni na dvojni vrednosti vsake številke. S pomočjo tega sestava je omogočeno z malim številom znamenj kratko in hitro računanje z velikimi števili. Zlasti uvedba ničle pomeni velik napredek v pismenem številjenju. Indijski številni sestav je tako duhovit in vendar tako preprost, da se je le čuditi, kako da se je seznanila Evropa z njim šele v srednjem veku (v 13. stoletju) po Arabcih iz Španske. Indijci so tudi že razreševali enačbe prve in druge stopnje. (Glej staroindijsko nalogo št. 133 na strani XLVII vadb in nalog za četrti in peti gimnazijski razred.) Drugi koren in negativna števila so jim bila tudi že znana. V razreševanju nedoločnih enačb pa so jih prekosili Kitajci.

O napredku starih Egipčanov v aritmetiki nas poučuje pisar Ahmes (Amasis med 2000 in 1700 pr. Kr.) v svoji zbirki računskih vaj. Poleg celih števil obdeluje tudi navadne ulomke

s števcem ena. V tej zbirki so razrešene tudi nekatere enačbe z eno in dvema neznankama.

Stari Grki so gojili v prvi vrsti znanstveno geometrijo, pa tudi v aritmetiki in algebri so dosegli lepe uspehe. Najvažnejši zastopnik aritmetike je bil filozof Pitagora (rojen na otoku Samu okrog 570 pr. Kr.), ustanovitelj italske šole v Krotonu v južni Italiji. Njegova šola se je bavila zlasti z lastnostmi celih števil, s proporcijami in progresijami. On je prvi razvil matematično teorijo tonov in je sklepal iz razdalje plasti, v katerih se sučejo svetovi, na „harmonijo sfer“. Na geometrijski način je prišla ta šola do pojma iracionalnosti. Sčasoma pa se je izgubljalo njeno delovanje bolj in bolj v računske igrace in v brezplodne mistične spekulacije s celimi števili.

S Platonom (ki je bil rojen okrog 430 pr. Kr. v Atenah) je zopet oživel zanimanje za pravo aritmetiko. Platonova šola na akademiji v Atenah je uvedla v matematično znanost nove indirektne dokaze. Vendar pa so Platonovci gojili aritmetiko bolj kot pomožno vedo, isto velja tudi za največjega učenjaka starega veka, za Aristotela.

Ko je uničil macedonski kralj Aleksander docela samostojnost grških držav, je začela matematična veda na Grškem propadati in Atene niso bile več središče znanstvenikov, njih mesto je prevzela nova Aleksandrija v Egiptu. Nasledniki Aleksandra Velikega v Egiptu so bili Ptolemejci, ki so si mnogo prizadeli, da se je razvila v Aleksandriji grška (helenska) matematična veda do one stopnje, da je več ko tisoč let noben narod v Evropi ni prekosil. Najznamenitejši matematik prve aleksandrijske dobe je Evklid (okoli 300 pr. Kr.) V svoji knjigi „Elementa“ (στοιχεῖα) je zbral vse matematično znanje tedanjega sveta. Ta knjiga je bila pozneje stoletja in stoletja vzor pregledne razvrstitve in metodičnega dokazovanja. Aritmetiko obdeluje pisatelj v 7., 8. in 9. knjigi. V isto dobo spada tudi Eratosten (rojen okrog 276 pr. Kr.), ki je znan po svojem načinu, kako se dobijo vsa praštevila do poljubne meje (Eratostenovo sito). Nekako ločen od teh dveh in od središča v Aleksandriji je živel na Siciliji Arhimed (rojen 287 pr. Kr. v Sirakusah). Njemu pa je služila aritmetika le v toliko, kolikor jo je rabil za svoje geometrijske in mehanične študije.

V aleksandrijski dobi dobi so se uvedli pismeni računi. Poprej in tudi še dolgo pozneje so imeli nekako pripravo „abacus“, kjer so na deski ali na palčicah sestavljali kroglice in vozle in ž njimi računali. Še celo v srednjem veku so na ta način računali „abacisti“, sčasoma pa so jih čisto izpodrinili „algoritmiki“ so računali po indijskem, oziroma po aleksandrijskem načinu.

Ko so si osvojili Rimljani Egipet, je začela helenska matematična veda nazadovati. Šele za rimskih cesarjev Hadrijanov in Antoninov je zopet nekoliko oživela. V tej drugi aleksandrijski dobi je poleg slavnega astronoma Klavdija Ptolomeja (okrog 125 do 160 po Kr.) za aritmetiko in algebro posebno važen Diofant iz Aleksandrije (sredi 4. stoletja po Kr.). V svoji knjigi „13 aritmetičnih problemov“ je položil temelj sedanji algebri. Bil je zelo izurjen in iznajdljiv v razreševanju določilnih in nedoločilnih (diofantičnih) enačb. Poskušal je že tudi uporabljati algebro v geometriji, kar je šele v novejši dobi slavni Descartes takorekoč iznova začel v analitični geometriji.

Med Rimljani, ki so bili toliko časa gospodarji sveta, se ni pokazal noben odličen zastopnik matematične vede. Učili so se pač pri Grkih in prevajali njihova dela, toda dosegli niso nikdar svojih učiteljev. Kot izvežbani juristi so prvi spoznali obrestne obresti. Od Rimljanov imamo več matematičnih izrazov, ki so še sedaj splošno v rabi. Ti izrazi pa so nastali v poznejši latinski dobi, ko so prevajali grške pisatelje. V tem oziru je posebno znan Avrelij Kasiodorij (475—570 po Kr.).

Po razpadu velikorimske države je jela tisočletna grško-rimska kultura hirati in matematična veda se ni mogla dalje razvijati. Leta 640. so pridrli mohamedanski Arabci v Egipet in kalif Omar je dal zažgati v Aleksandriji slavno veliko knjižnico. In zdelo se je, da je to smrtni udarec helenski in staroveški kulturi sploh. Toda ravno isti zmagonosni Arabci, ki so si z mečem v roki podvrgli severno Afriko in pridrli tudi na Špansko, ravno ti so postali nekaki posredovalci staroklasične kulture. Arabske visoke šole v Bagdadu in Damasku in pozneje v Kordovi so se ponašale s pravimi učenjaki matematične vede.

Arabci so bili v prvi vrsti učenci Grkov, pa tudi od vzhodnih Indijcev so prejeli marsikaj (n. pr. številni sestav). Posebno sta se odlikovala arabska matematika Mohamed ibn Músâ (okrog 800 po Kr.) tudi Alchvarismi imenovan in

pa Thâbit ibn Kurrah. Arabci so že poznali pri drugem korenu dvojno vrednost in razreševali so že enačbe tretje stopnje, pa tudi algebro so uporabljali v geometriji. Beseda algebra sama je arabskega izvora. Na visoki šoli v Kordovi se je seznanil z arabskimi matematiki francoski menih Gerbert (poznejši papež Silvester II., 940—1003), ki je pač prevzel arabske številke, pa je vendar ostal še abacist.

Doba od 10. do 16. stoletja je za aritmetiko in algebro doba posnemanja grških in arabskih učenjakov. Nekaka izjema je 13. stoletje, ko je živel duhoviti računar Leonardo Pisano (literarno delovanje okrog 1202—1228). Njegovo delo „Liber Abaci“ (dovršeno 1202) obsega vso tedanjo aritmetiko in algebro. Za poskušnje pri računih je rabil in tudi dokazal staro-indijsko poskušnjo z devetinskimi ostanki. Njegov sodobnik dominikanec Jordanus Nemorarius (umrl 1236) je rabil za števila že črke. Ali za tisto dobo sta bila Leonardo in Jordanus preučena, sodobniki ju niso umeli in prešlo je zopet nekaj stoletij, da je zopet oživel zanimanje za to vedo.

Za križarskih vojsk so upoznali laški kupci arabske in bizantiske računarje in na laških visokih šolah so se učili pozneje Nemci algebre. Na to spominjajo stare računice „Die welsche Praktik“ in pa „Die Koß“ od laške besede cosa = reč, ki je pomenila neznanko. Iz arabskih virov sta črpala angleški menih Roger Bacon in Nemec Albertus Magnus.

Iz 16. stoletja so na glasu laški matematiki Hieronimo Cardano iz Milana (1501—1576), Niccolo Tartaglia iz Brescie (1501—1557) in Lodovico Ferrari (1522—1565). Cardano je dal splošni obrazec za razreševanje enačb tretje stopnje, pri njem se nahaja tudi že drugi koren negativnih števil. Sedanjo pisavo korenov je začel Girard (1600), izraz za realna in imaginarna števila pa je rabil šele Descartes. Imaginarno enoto je uvedel največji nemški matematik Karl Friederik Gauß (1777—1855), ki je dokazal potem s pomočjo kompleksnih števil, da ima vsaka algebrajska enačba toliko korenov, kolikršna je stopnja enačbe (Dissertation 1799). R. Descartes je uvedel sedanjo pisavo potenc in rabil za neznanke črke $x, y, z \dots$. Leonhard Euler (1707—1783) pa je prvi jel rabiti za funkcijo pisavo $f(x)$. Tatarglia se je pečal z iracijonalnimi imenovalci ulomkov in je prvi pravilno izračunal

obrestne obresti. Kako se enačbe 4. stopnje s pomočjo Cardanovega obrazca razrešujejo, je prvi dokazal Ferrari. Šele v novejšem času je Gauß dokazal, da se algebrajske enačbe pete stopnje in višjih stopenj splošno ne dajo razrešiti. Iz 16. stoletja se tudi pogosto omenja Francesco Maurolico (1494—1575), ki je prvi uvedel induktivni sklep od n na $n + 1$.

Največji francoski matematik v tej dobi je brezdvomno François Viète (Vieta, 1540—1603). Obdelal je zlasti proporcije in „regeldetrijó“. Uvedel je v računih vseskozi pozitivna in negativna števila. Računska znamenja $+$ in $-$ pa je prvi rabil slavní slikar in filozof Leonardo da Vinci (1452—1519). Namesto posebnih števil je uvedel Viète občna števila in je postal tako ustvaritelj občne aritmetike.

Izmed nizozemskih matematikov sta posebno znana Ludolf von Ceulen (1540—1610), ki je preračunal število π na 35 decimalk, in pa Simon Stevin po svoji algebri (1585), kjer je praktično začel z računi decimalnih števil. Prvi se je pač že poskušal z njimi Nemec Regiomontanus (Joh. Müller 1436—1476).

Z uvedbo decimalnih ulomkov, še bolj pa z iznajdbo logaritmov se je razvijala matematika odslej jako hitro. Za prvenstvo iznajdbe logaritmov sta se kosala Švicar Jos. Bürgi in pa Škot John Neper (Napier), ki je prvi dal natisniti (1614) razpravo o logaritmih, in sicer z osnovnim številom $e = 2.71828...$ (naravni ali hiperbolski logaritmi). Deset let pozneje je izdal Anglež Henry Briggs prve tablice logaritmov števil 1 — 20.000 in 90.000 — 100.000, in sicer z osnovnim številom 10 (Briggovi ali navadni logaritmi). Za njim je Nizozemec Adrian Vlacq dopolnil še logaritme števil 20.000 — 90.000. Kmalu nato so se prikazale tudi tablice logaritmov goniometrijskih funkcij. Naš rojak baron Jurij Vega je Vlacq-ove tablice popravil in pomnožil ter jih izdal pod naslovom „Thesaurus logarithmorum“ (1794) na 10 decimalk.

V 17. stoletju se je pečal posebno z aritmetiko Francoz Pierre de Fermat (1608—1665), ki je začetnik znanstvene teorije števil. Obdelal je zlasti kombinacije in pa račune o verjetnosti. Na istem polju so delovali še: Francoza Blaise Pascal (1623—1662) in Pierre Simon Laplace, potem oba švicarska brata Jakob in Janez Bernoulli (1654—1705,

1667—1748) in Anglež Isaak Newton (binomski stavek 1676), pozneje tudi še Leibniz, Euler, Lagrange i. t. d.

Jako je napredovala matematična veda z iznajdbo infinitezimalnih računov (z diferencijali in integrali) po Newtonu in Leibnizu. Ta račun se je razvil, kakor povestnica uči, iz geometrijskih problemov. Že Arhimed je bil napravil nekak začetek s svojo metodo izčrpanja (ekshaucijsko metodo), ko je primerjal ploščino kroga s ploščino vrtanega in očrtanega mnogokotnika. Isti način je uporabljal pozneje z dobrim uspehom Lah Bonaventura Cavalieri (okrog 1591—1647), pozneje tudi Angleža Barrow in Wallis in Francoza Roberval in Fermat. Ko je nato še René Descartes (1596—1650) v svoji znameniti knjigi „*Geométrie*“ (1637) dal podlago za analitično geometrijo, bili so se izpolnili vsi pogoji in dovršile vse predpriprave za infinitezimalni račun. Odločilen korak sta napravila Anglež Isaak Newton (1642—1727) in pa Nemec Gottfried Wil. von Leibniz (1646—1716). Newton je poslal svojo razpravo l. 1669. akademiji v London, v tisk pa je prišla šele l. 1736. Leibniz pa je izdelal svoj rokopis l. 1675. in ga dal tiskati l. 1684. Vsled tega je nastal med njima dolgotrajen znanstveni prepir za prvenstvo. Vsekako pa je Leibnizova zasluga, da je uvedel v matematiko znake za nove račune diferencijalov in integralov in s tem določil enotno pisavo in enotni matematični jezik. (M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathem.*, 4 deli 1880—1907.)

Infinitezimalni račun je odslej obvladal vso matematično vedo in odkril znanosti sploh čisto nova pota. Matematična veda se je razvijala odslej z neznansko hitrico. Uporabljali so novi račun v geometriji, v fiziki in astronomiji, v moderni tehniki i. t. d. Cela vrsta učenjakov raznih narodov je tekmovala odslej v spopolnitvi teh računov in je dovedla na ta način matematično vedo na tako visoko stopnjo, da se lahko ponaša s pridevkom najeksaktnейše vede sploh.

Izmed domačih pisateljev matematikov se večkrat omenjajo:

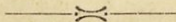
1. Andrej Kobal (Kobavius, rojen v Cirknici 1594, umrl v Trstu 1654). Bil je profesor matematike na jezuitskih šolah v Ljubljani in je spisal knjigo o astronomiji.

2. Joahim Košutnik (rojen v Beljaku 1714, umrl v Mariboru 1789) iz reda jezuitov. Bil je profesor na akademični

gimnaziji na Dunaju, pozneje pa v Gradcu vodja zvezdarne. Spisal je l. 1754. knjigo „Prima elementa Arithmeticae, Algebrae, Geometriae, Trigonometriae planae et sphaericae, Architecturae civilis et militaris“. (Posneto iz razprave Fridol. Kaučiča „Znameniti Slovenci“.)

3. Baron Jurij Vega (rojen Veha v Zagorici pri Moravčah 1754, utonil v Donavi 1802), profesor matematike na vojaški šoli na Dunaju. Vega je bil tudi slaven junak, ki se je odlikoval v vojskah s Turki in s Francozi in je postal nazadnje baron in podpolkovnik. L. 1783. je izdal logaritemske in trigonometrijske tablice na 7 decimalk, ki so doživele 60 izdaj. L. 1794. pa je izšel njegov veliki logaritmovnik „Thesaurus logarithmorum“ na 10 decimalk. Za šolsko rabo je izdal svoja predavanja o višji matematiki „Vorlesungen über Mathematik“ (1786—1802).

4. Dr. Franc vitez Močnik (rojen v Cerknem na Goriškem 1814, umrl 1892), profesor matematike v Lvovu in Olomucu. Služboval je pozneje v Ljubljani kot deželni šolski svetnik in v Gradcu kot nadzornik. Pisal je zlasti učne knjige za ljudske in srednje šole. Njegove knjige so doživele mnogo izdaj ter se še rabijo. Preložili so jih v slovanske in razne druge jezike ter so bile v rabi na Avstrijskem, Ogrskem, Laškem in Nemškem.



NARODNA IN UNIVERZITETNA
KNJIŽNICA



00000517868



