

ZRCALNA SIMETRIJA IN LAURENTOVI POLINOMI

MATEJ FILIP¹

¹Fakulteta za elektrotehniko Univerze v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 13D10, 14B05, 14B07, 14M25

Zrcalna simetrija prvotno opisuje povezavo med dvema geometrijskima objektoma, ki se imenujeta Calabi-Yau mnogoterosti. Izkazuje se, da sta dani zrcalno simetrični Calabi-Yau mnogoterosti geometrijsko sicer različni, če nanju pogledamo fizikalno s strani teorije strun, pa vseeno ekvivalentni. Zrcalna simetrija ima veliko matematičnih formulacij in posplošitev, ki gredo zunaj okvirja Calabi-Yau mnogoterosti. V tem članku bomo predstavili en vidik zrcalne simetrije, ki ga lahko formuliramo z elementarno konveksno geometrijo.

MIRROR SYMMETRY AND LAURENT POLYNOMIALS

Mirror symmetry originally describes the connection between two geometric objects called Calabi-Yau manifolds. If two Calabi-Yau manifolds are mirror symmetric they are geometrically distinct yet equivalent when viewed from the physical side of string theory. Mirror symmetry has many mathematical formulations and generalisations that go beyond the Calabi-Yau manifolds. In this paper we will present one aspect of mirror symmetry that can be formulated in terms of elementary convex geometry.

Uvod v zrcalno simetrijo

Prostor in čas sta temeljna koncepta, ki oblikujeta naše razumevanje vesolja. V vsakdanjem življenju se zavedamo treh prostorskih razsežnosti (dolžine, širine in višine), ki nam omogočajo, da razumemo in opisujemo svet okoli sebe. Poleg teh treh prostorskih razsežnosti pa obstaja še četrta, ki jo poznamo kot čas. V fiziki sta prostor in čas pogosto obravnavana kot enoten koncept, znan kot prostor-čas, pri čemer so vsi dogodki opisani znotraj teh štirih razsežnosti.

V poznih šestdesetih letih prejšnjega stoletja se je začela razvijati revolucionarna teorija v fiziki, ki se imenuje teorija strun in ponuja elegantno poenotenje vseh osnovnih sil in delcev. Temelji pa na ideji, da naše vesolje ni omejeno le na štiri razsežnosti (treh prostorskih in ene časovne), ki jih zaznavamo, temveč vključuje še šest dodatnih razsežnosti, ki jih do zdaj nismo uspeli zaznati. Matematična podlaga te (za sedaj še nepotrjene) teorije so Calabi-Yau mnogoterosti.

Opišimo sedaj bolj podrobno Calabi-Yau mnogoterosti s pomočjo metrike, ki se pojavi v Einsteinovi splošni teoriji relativnosti in meri, kako volumen krogle na ukrivljenem prostoru (oziroma mnogoterosti) odstopa od volumna krogle z istim polmerom v ravnem evklidskem prostoru. Da

sta ta volumna na splošnem različna, si lahko predstavljamo na naslednjem primeru. Če stojimo na vrhu stožca in narišemo majhen krog okoli sebe, bo ta krog manjši, kot če bi na isti način ta krog narisali na ravnem površju. Ta metrika se imenuje Ricci metrika in glavna geometrijska lastnost Calabi-Yau mnogoterosti je, da v tej metriki niso ukrivljene, torej so videti kot ravnine v običajni evklidski metriki, s katero merimo razdalje v prostoru.

Poleg zgoraj omenjenih Calabi-Yau mnogoterosti poznamo še Fano mnogoterosti in mnogoterosti splošnega tipa. Za natančne definicije teh mnogoterosti glejte [5], glavna geometrijska lastnost teh mnogoterosti pa je, da imajo Fano mnogoterosti pozitivno ukrivljenost v Ricci metriki, kot na primer sfera v običajni evklidski metriki, mnogoterosti splošnega tipa pa imajo negativno ukrivljenost v Ricci metriki.

Kot namiguje že ime, je zelo malo znanega o klasifikaciji mnogoterosti splošnega tipa in te mnogoterosti se izmed vseh treh tipov najmanj pojavljajo v problemih iz matematične fizike. Po drugi strani pa je klasifikacija Calabi-Yau in Fano mnogoterosti eden izmed najbolj perečih in študiranih problemov v geometriji in matematični fiziki. Največ je znanega o gladkih (oziroma nesingularnih) Fano mnogoterostih, saj je njihova klasifikacija poznana do vključno razsežnosti tri, v višjih pa je znano, da je v vsaki razsežnosti le končno mnogo Fano mnogoterosti, klasifikacija le-teh pa je odprt problem (glejte [6]).

V tem članku bomo obravnavali zanimivo teorijo, ki izvira iz fizike in omogoča matematikom boljše razumeti klasifikacijo Fano in tudi Calabi-Yau mnogoterosti. Ta teorija se imenuje zrcalna simetrija. Zgodnje primere zrcalne simetrije so odkrili fiziki. Izraz zrcalna simetrija se je prvotno nanašal na situacijo, v kateri sta dve Calabi-Yau mnogoterosti geometrijsko različni, vendar sta kljub temu ekvivalentni, ko ju pogledamo fizikalno s strani teorije strun. To pomeni, da strunske vibracije (ki predstavljajo delce) v eni Calabi-Yau mnogoterosti ustrezajo strunskim vibracijam v drugi. Izraz zrcalna simetrija izhaja iz ideje, da ti dve mnogoterosti odsevata določene geometrijske lastnosti druga druge.

Matematiki so se za zrcalno simetrijo začeli zanimati okoli leta 1990, ko so Philip Candelas, Xenia de la Ossa, Paul Green in Linda Parkes [2] pokazali, da jo je mogoče uporabiti kot orodje v enumerativni geometriji, veji matematike, ki se ukvarja s štetjem geometrijskih objektov. Čeprav je prvotni pristop k zrcalni simetriji temeljil na fizikalnih idejah, ki niso bile matematično natančno razumljene, se je pozneje to spremenilo in danes imamo ogromno napovedi iz zrcalne simetrije tudi matematično dokazanih.

Zrcalna simetrija je pomembna raziskovalna tema v teoretični matematiki, matematiki pa si prizadevajo razviti matematično razumevanje tega razmerja na podlagi intuicije fizikov. Zrcalna simetrija je tudi temeljno orodje za izvajanje izračunov v teoriji strun. Pojem zrcalne simetrije je bil pozneje posplošen na nekaj preostalih geometrijskih objektov, poleg zrcalno

simetričnih Calabi-Yau mnogoterosti je najbolj znana domneva o zrcalnosti med Fanovimi mnogoterostmi in Laurentovimi polinomi z določenimi lastnostmi (glejte [3]). Laurentovi polinomi so posplošitev običajnih polinomov in v tem članku jih bomo podrobneje analizirali. Spoznali bomo, da lahko vsakemu Laurentovemu polinomu priredimo politop in definirali operacijo, ki kombinatorično spreminja obliko tega politopa in ji pravimo mutacija Laurentovega polinoma.

V številnih primerih proučevanje obeh zgoraj omenjenih vrst zrcalne simetrije vključuje torično geometrijo. Torična geometrija proučuje posebne vrste geometrijskih objektov, imenovane torične mnogoterosti. Te mnogoterosti imajo strukturo, ki jo lahko opišemo s pomočjo poliedrov ali politopov, kar omogoča, da zapletene geometrijske lastnosti povežemo z enostavnimi, bolj vizualnimi objekti. To zagotavlja skupni jezik za razumevanje obeh vrst zrcalne simetrije. Za bolj podrobno definicijo toričnih mnogoterosti glejte [5].

V [4, Conjecture A] smo navedli domnevo, ki je poseben primer zrcalne simetrije. Na eni strani imamo Laurentove polinome, ki jih lahko mutiramo v točko, kar pomeni, da je končna oblika zgoraj omenjenega politopa, ki pripada Laurentovemu polinomu, zgolj točka. To stran bomo poglobljeje spoznali v tem delu. Izkaže se, da lahko te Laurentove polinome in njihove mutacije razumemo le z elementarno konveksno geometrijo. Na drugi strani imamo zapletene strukture, ki se uporabljajo v torični geometriji in jih v tem članku ne bomo predstavili.

Glavni cilj tega članka je, da z uporabo elementarne konveksne geometrije pokažemo določene lastnosti Laurentovih polinomov in njihovih mutacij (glejte trditev 7). Kot posledico bomo razložili pomen te trditve v torični geometriji in uporabo za konstrukcijo Fano mnogoterosti.

Mutacije Laurentovih polinomov

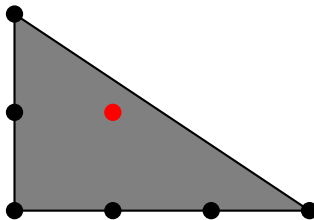
Definicija 1. *Afina hiperravnina* v n -razsežnem vektorskem prostoru $\mathbb{R}^n$ je množica točk oblike

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, z \rangle = a\},$$

za parametra $z \in \mathbb{R}^n$, $z \neq 0$ in $a \in \mathbb{R}$, kjer $\langle \cdot, \cdot \rangle$ označuje evklidski skalarni produkt. Za ista parametra a in z je *polprostor* v $\mathbb{R}^n$ množica točk oblike

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, z \rangle \leq a\}.$$

Podmnožico točk v $\mathbb{R}^n$ imenujemo *polieder*, če je presek končno mnogo polprostorov. *Politop* je omejen polieder in vsak politop je konveksna ovojnica neke končne neprazne množice v $\mathbb{R}^n$.



Slika 1. Newtonov politop od $x^{-1}y^{-1} + 3y^{-1} + 3xy^{-1} + x^2y^{-1} + 2x^{-1} + x^{-1}y + 2$.

Laurentov polinom v eni spremenljivki x je formalni izraz oblike

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} n_k x^k,$$

kjer je samo končno mnogo koeficientov $n_k \in \mathbb{R}$ neničelnih. Torej so Laurentovi polinomi v eni spremenljivki posplošitev običajnih polinomov, s tem da ima lahko pri njih spremenljivka tudi negativen eksponent. Podobno so Laurentovi polinomi v več spremenljivkah posplošitev polinomov v več spremenljivkah. Eksponent vsakega monoma Laurentovega polinoma f določa točko v $\mathbb{Z}^n$, kjer je n število spremenljivk od f . Vsi eksponenti pri monomih z neničelnimi koeficienti torej določajo končno mnogo točk v $\mathbb{Z}^n$ in njihovo konveksno ovojnico imenujemo *Newtonov politop*, ki ga označujemo z $\Delta(f)$.

Primer 2. Primer Laurentovega polinoma v spremenljivkah x in y je

$$f = x^{-1}y^{-1} + 3y^{-1} + 3xy^{-1} + x^2y^{-1} + 2x^{-1} + x^{-1}y + 2.$$

V tem primeru eksponenti določajo naslednje točke v $\mathbb{Z}^2$:

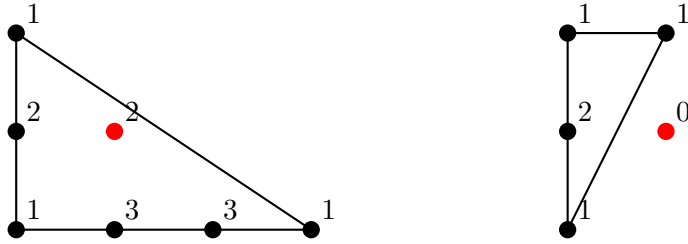
$$(-1, -1), (0, -1), (1, -1), (2, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, 0). \quad (1)$$

Njihova konveksna ovojnica je Newtonov politop $\Delta(f)$, ki je narisana na sliki 1, kjer rdeča točka označuje izhodišče $(0, 0)$, črne pa označujejo preostale točke, navedene v (1).

Vsoto in množenje Laurentovih polinomov definiramo na enak način kot pri običajnih polinomih. Spomnimo, da funkcijam $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ rečemo afine, če so oblike $\varphi(v) = \langle v, w \rangle + a$ za neka $w \in \mathbb{R}^n$ in $a \in \mathbb{R}$.

Definicija 3. Naj bo φ nekonstantna afina funkcija in naj bo g Laurentov polinom, za katerega velja, da ima φ konstantno vrednost na celotnem $\Delta(g)$. Pravimo, da je f mutiran s parom (φ, g) , če lahko zapišemo

$$f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} f_i,$$



Slika 2. Laurentov polinom f ter njegova mutacija $\text{mut}_\varphi^g f$.

kjer so f_i taki Laurentovi polinomi, da $\Delta(f_i)$ leži v afini hiperravnini

$$\{r \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(r) = i\}$$

in velja, da je $\frac{f_i}{g^i}$ Laurentov polinom, za vsak $i \in \mathbb{N}$ (kar pomeni, da je f_i produkt $g^i h$, kjer je h nek Laurentov polinom). Mutacija Laurentovega polinoma f s parom (φ, g) je Laurentov polinom

$$\text{mut}_\varphi^g f := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{f_i}{g^i}.$$

Primer 4. Naj bo

$$f = x^{-1}y^{-1} + 3y^{-1} + 3xy^{-1} + x^2y^{-1} + 2x^{-1} + x^{-1}y + 2$$

kot v primeru 2. Definirajmo še $h = 1 + x$ in afino funkcijo $\varphi(v) = \langle (0, -2), v \rangle + 1$. Ta funkcija doseže vrednost 3 na premici $y = -1$, vrednost 1 na premici $y = 0$ in vrednost -1 na premici $y = 1$. Tako imamo

$$\begin{aligned} \text{mut}_\varphi^g f &= \frac{y^{-1}x^{-1}(1 + 3x + 3x^2 + 1)}{(1 + x)^3} + \frac{x^{-1}(2 + 2x)}{1 + x} + \frac{x^{-1}y}{(1 + x)^{-1}} \\ &= y^{-1}x^{-1} + 2x^{-1} + x^{-1}y + y. \end{aligned}$$

Slika 2 podaja f in $\text{mut}_m^g f$, tako da pred vsako točko v $\mathbb{Z}^2$ od pripadajočih Newtonovih polinomov zapišemo še pripadajoči koeficient. Rdeči točki ponovno označujeta izhodišče.

Pred našo glavno trditvijo potrebujemo še naslednji definiciji.

Definicija 5. Konveksni poliedrski stožec v $N_{\mathbb{R}}$ je množica oblike

$$\sigma = \text{Stož}(S) := \left\{ \sum_{u \in S} \lambda_u u \mid \lambda_u \in [0, \infty) \right\} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

kjer je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ neka končna množica točk.

Definicija 6. Za poliedra A in B v $\mathbb{R}^n$ definiramo njuno vsoto Minkowskega kot

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Za A (oziroma B) pravimo, da je *sumand Minkowskega* poliedra $A + B$.

Vsakemu Laurentovemu polinomu f lahko priredimo poliedrski stožec σ_f na naslednji način. Povečajmo naš vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^{n+1}$ tako, da dodamo še eno komponento (projekcija na prvih n komponent je naš originalni vektorski prostor $\mathbb{R}^n$) in tvorimo stožec

$$\sigma_f = \text{Stož}(\{(x_1, \dots, x_n, 1) \mid (x_1, \dots, x_n) \in \Delta(f)\}),$$

torej Newtonov politop $\Delta(f)$ vložimo na nivo 1 in tvorimo stožec. Označimo z $i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ vložitev $z \mapsto (z, 1)$. Naj bo f mutiran s parom (φ, g) in naj bo $\Delta(f)$ vložen na nivo 1 v $\mathbb{R}^{n+1}$. Afino funkcijo φ na $\Delta(f)$ določa nek vektor $m \in \mathbb{R}^{n+1}$, tako da za vsak $v \in \Delta(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ velja $\varphi(v) = \langle i(v), m \rangle$. Če velja, da je $\Delta(g) \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ vsebovan v afini hiperravnini

$$\{r \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle m, r \rangle = 0\},$$

potem pravimo, da je Laurentov polinom f *mutiran s parom* (m, g) .

Trditve 7. Naj bo f Laurentov polinom v n spremenljivkah, ki je mutiran s parom (m, g) , kjer je $m \in \mathbb{R}^{n+1}$. Potem za pripadajoči stožec σ_f velja, da ima presek

$$\sigma_f \cap \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, m \rangle = 1\}$$

sumand Minkowskega, ki je enak $\Delta(g)$.

Dokaz. Po konstrukciji takoj opazimo, da je $\sigma_f \cap \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, m \rangle = 1\}$ enak

$$\sigma_f \cap \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, m \rangle = 0\} + \text{konv} \left\{ \frac{\Delta\left(\frac{f_i}{g^i}\right)}{i} + \frac{E}{i} \mid i \in \mathbb{Z} \right\} + \Delta(g),$$

kjer je $E = (0, 1) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$ in konv označuje konveksno ovojnico. □

Omenimo uporabo zgornje trditve v algebraični geometriji, veji matematike, ki proučuje geometrijske objekte dobljene kot množico ničel polinomov v več spremenljivkah. Tem geometrijskim objektom pravimo algebraične mnogoterosti. Torične mnogoterosti so algebraične mnogoterosti, pri katerih polinome, ki jih določajo kot množico ničel, dobimo iz objektov konveksne geometrije, kot so na primer konveksni poliedrski stožci. Za več informacij, kako točno dobimo te polinome, glejte [5].

Presek stožca σ_f z afino hiperravnino $\{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, m \rangle = 1\}$ je pomemben geometrijski objekt v torični geometriji. Dejstvo, da smo našli sumand, ki je politop z oglišči v $\mathbb{Z}^n$ (in ne v $\mathbb{Z}^{n+1}$), v torični geometriji pomeni, da se torična mnogoterost dobljena iz stožca σ_f lahko deformira (glejte [1]).

V kontekstu zrcalne simetrije to pomeni, da pričakujemo, da bomo dobili Fano mnogoterost, ki po zrcalni simetriji pripada Laurentovemu polinomu, z deformacijo zgornje torične mnogoterosti.

Za konec omenimo še, kaj pomeni, da se Laurentov polinom mutira v točko, kar smo navedli v uvodu. To pomeni, da obstajajo mutacije, ki f zaporedoma mutirajo v nek Laurentov polinom h , za katerega velja, da je $\Delta(h)$ točka.

Primer 8. Pokažimo, da se naš Laurentov polinom f iz prejšnjih primerov mutira v točko. Pokazali smo že, da velja

$$\text{mut}_{\varphi}^g f = x^{-1}y^{-1} + 2x^{-1} + x^{-1}y + y.$$

Označimo zgornji Laurentov polinom z $f_1 := y^{-1}x^{-1} + 2x^{-1} + x^{-1}y + y$. Vzemimo Laurentov polinom $g_1 := 1 + y^{-1}$ in afino funkcijo $\varphi_1(v) = \langle (-2, 0), v \rangle$, ki ima vrednost 2 na premici $x = -1$ in vrednost 0 na premici $x = 0$. Dobimo

$$\text{mut}_{\varphi_1}^{g_1} f_1 = \frac{x^{-1}y(1 + 2y^{-1} + y^{-2})}{(1 + y^{-1})^2} + y = x^{-1}y + y.$$

Zapišimo zgornji Laurentov polinom z $f_2 := x^{-1}y + y$ in izberimo Laurentov polinom $g_2 := 1 + x^{-1}$ in afino funkcijo $\varphi_2(v) = \langle (1, 0), v \rangle$. Dobimo

$$\text{mut}_{\varphi_2}^{g_2} f_2 = y$$

in $\Delta(\text{mut}_{\varphi_2}^{g_2} f_2)$ je točka $(0, 1)$, kar pa smo želeli pokazati.

LITERATURA

- [1] K. Altmann, *The versal deformation of an isolated, toric Gorenstein singularity*, Invent. Math. **128** (1997), 443–479.
- [2] P. Candelas, X. De La Ossa, P. Green, L. Parkes, *A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory*, Nucl. Phys. B **359** (1991), 21–74.
- [3] T. Coates, A. Corti, S. Galkin, V. Golyshev, A. M. Kasprzyk, *Mirror symmetry and Fano manifolds*, In European congress of mathematics, Eur. Math. Soc. (2013), 285–300.
- [4] A. Corti, M. Filip in A. Petracci, *Smoothing toric Gorenstein affine 3-folds, 0-mutable polynomials and mirror symmetry*, Facets of Algebraic Geometry: A Collection in Honor of William Fulton’s 80th Birthday (2022) 132–163.
- [5] D. Cox, J. Little, H. Schenk, *Toric varieties*, Graduate Studies in Mathematics **124** (2011).
- [6] J. Kollar, Y. Miyaoka, S. Mori, *Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds*, J. Differential Geom. **36** (1992), 765–779.