

HUYGENSOVA NALOGA

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta

Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 26E60

V prispevku bomo elementarno, brez uporabe diferencialnega računa, rešili Huygensovo nalogo.

THE HUYGENS PROBLEM

The Huygens problem is solved in an elementary way, without using the differential calculus.

Holandski matematik, fizik in astronom Christiaan Huygens (1629–1695) je pri študiju centralnih trkov idealno prožnih kroglic najprej obravnaval centralni trk dveh kroglic. Kroglica z maso M s hitrostjo v_0 trči v mirujočo kroglico z maso m , pri čemer je $m < M$. Po trku naj ima kroglica z maso M hitrost u , druga kroglica pa hitrost v . Huygens je poznal zakon o ohranitvi gibalne količine in zakon o ohranitvi kinetične energije, kar bi danes zapisali v obliki:

$$Mv_0 = Mu + mv, \quad \frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}Mu^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

Iz prve enačbe izrazimo hitrost u in jo vstavimo v drugo enačbo. Za hitrosti kroglic dobimo izraza:

$$v = \frac{2M}{M+m}v_0, \quad u = \frac{M-m}{M+m}v_0.$$

Zaradi pogoja $0 < m < M$ dobimo relacijo $v_0 < v < 2v_0$.

Med kroglici postavimo n drugih idealno prožnih kroglic, ki imajo po vrsti mase $m_1, m_2, \dots, m_n$, pri čemer je $m < m_1 < m_2 < \dots < m_n < M$. Kroglica z maso M naj s hitrostjo v_0 trči v mirujočo kroglico z maso m_n . Po trku le-ta s hitrostjo $v_n = 2Mv_0/(m_n + M)$ trči v kroglico z maso m_{n-1} , ki ima po trku hitrost $v_{n-1} = 2m_nv_n/(m_{n-1} + m_n)$. Ta potem trči v mirujočo kroglico z maso m_{n-2} . Tako gredo trki naprej, dokler nazadnje kroglica z maso m_1 ne trči v mirujočo kroglico z maso m , ki se odbije s hitrostjo v . Očitno je hitrost slednje dana s formulo:

$$v = \frac{m_1 m_2 \cdots m_n M}{(m + m_1)(m_1 + m_2) \cdots (m_{n-1} + m_n)(m_n + M)} \cdot 2^{n+1} v_0.$$

Huygens se je vprašal, kakšne morajo biti mase $m_1 < m_2 < \dots < m_n$, da bo hitrost v zadnje odbite kroglice največja. Videli bomo, da se to zgodi takrat, ko so mase $m < m_1 < m_2 < \dots < m_n < M$ v geometričnem zaporedju s kvocientom $q = \sqrt[n+1]{M/m}$.

V matematični analizi pa bi Huygensovo nalogo zastavili v naslednji obliki.

1. Bodita a in b poljubni pozitivni števili, pri čemer je $a < b$. Poišči pozitivna števila $x_1, x_2, \dots, x_n$, pri katerih funkcija $u: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, podana s predpisom

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2) \cdots (x_{n-1} + x_n)(x_n + b)}, \quad (1)$$

doseže maksimum. Problem najdemo v zbirki [2] v skupini nalog na temo ekstremov funkcij več spremenljivk in naj bi se reševal z uporabo parcialnih odvodov.

V primeru $n = 1$ seveda vzamemo

$$u(x_1) = \frac{x_1}{(a + x_1)(x_1 + b)}.$$

V Huygensovih časih verjetno takih nalog še niso reševali z odvodi. Znani pa so že bili binomski koeficienti, le da jih še niso pisali v današnji obliki. Blaise Pascal (1623–1662) jih je razvrstil v svoj trikotnik, ki pa so ga poznali nekateri matematiki že veliko prej. Pierre de Fermat (1601–1665) je poznal potrební pogoj za ekstrem odvedljive funkcije v jeziku tangent na njen graf in Isaac Newton (1643–1727) je razvil svoj infinitezimalni račun fluent in fluksij. Zato se nekoliko vživimo v tiste čase, ko je bil diferencialni račun še v povojih, in rešimo Huygensov problem povsem elementarno, brez uporabe parcialnih odvodov.

V ta namen bomo najprej dokazali neenakost, ki nam bo hitro dala želeni rezultat. Pri tem si bomo pomagali z dobro znano neenakostjo med aritmetično in geometrično sredino pozitivnih števil. Naj bo n naravno število in $a_1, a_2, \dots, a_n$ poljubna pozitivna števila. Izraz

$$A(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$$

imenujemo aritmetična, izraz

$$G(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

pa geometrična sredina števil $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Huygensova naloga

Vselej velja neenakost

$$G(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq A(a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (2)$$

v kateri enačaj nastopi, če in samo če je $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

2. Lotimo se sedaj neenačbe, s katero bomo rešili Huygensovo nalogo.

Naj bo n naravno število in $u_1, u_2, \dots, u_n$ poljubna pozitivna števila. Dokazali bomo, da velja neenakost

$$(1 + u_1)(1 + u_2) \cdots (1 + u_n) \geq (1 + G(u_1, u_2, \dots, u_n))^n, \quad (3)$$

v kateri nastopi enačaj, če in samo če je $u_1 = u_2 = \dots = u_n$.

Najprej razvijemo izraz na levi strani (3) in dobimo:

$$(1 + u_1)(1 + u_2) \cdots (1 + u_n) = 1 + \sum_{k=1}^n s_k(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Pri tem so s_k , $k = 1, 2, \dots, n$, osnovni simetrični polinomi spremenljivk $u_1, u_2, \dots, u_n$:

$$\begin{aligned} s_1(u_1, u_2, \dots, u_n) &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \\ s_2(u_1, u_2, \dots, u_n) &= u_1 u_2 + u_1 u_3 + \cdots + u_{n-1} u_n, \\ &\vdots \\ s_n(u_1, u_2, \dots, u_n) &= u_1 u_2 \cdots u_n. \end{aligned}$$

Kot vemo iz osnov kombinatorike, ima s_1 natanko $n = \binom{n}{1}$ členov, s_2 natanko $\binom{n}{2}$ členov, v splošnem je vsak člen v s_k produkt k faktorjev, torej je s_k vsota natanko $c(n, k) = \binom{n}{k}$ monomov $a_i = a_i(s_k)$. Za njihovo aritmetično sredino dobimo enakost

$$s_k = c(n, k) A(a_1, a_2, \dots, a_{c(n, k)}).$$

Hitro lahko ugotovimo, da katerakoli izbrana spremenljivka u_r nastopa v s_k natanko $c(n-1, k-1)$ -krat. To je tolikokrat, na kolikor načinov lahko izmed preostalih $n-1$ spremenljivk $u_1, u_2, \dots, u_n$ brez u_r izberemo $k-1$ spremenljivk. Zato lahko izrazimo geometrično sredino monomov $a_i = a_i(s_k)$, ki sestavljajo s_k :

$$G(a_1, a_2, \dots, a_{c(n, k)}) = (a_1 a_2 \cdots a_{c(n, k)})^{\frac{1}{c(n, k)}} = (u_1 u_2 \cdots u_n)^{\frac{c(n-1, k-1)}{c(n, k)}}.$$

Sedaj uporabimo neenakost (2) za vsak s_k posebej. Dobimo neenakost

$$s_k(u_1, u_2, \dots, u_n) \geq c(n, k)(u_1 u_2 \cdots u_n)^{m(n, k)}$$

za $k = 1, 2, \dots, n$. Pri tem je $m(n, k) = c(n-1, k-1)/c(n, k)$.

Ker pri pogojih $n \geq 1$ in $k \geq 1$ velja

$$m(n, k) = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{k}{n},$$

pri čemer vzamemo $0! = 1$ in zato $c(0, 0) = 1$, dobimo v splošnem neenakost

$$s_k(u_1, u_2, \dots, u_n) \geq c(n, k)(u_1 u_2 \cdots u_n)^{k/n} = \binom{n}{k} (G(u_1, u_2, \dots, u_n))^k.$$

Kdaj v pravkar dokazani relaciji velja enačaj? Natanko tedaj, ko je $a_1 = a_2 = \dots = a_{c(n, k)}$ za vsak s_k , $k \geq 1$. Za s_1 se to zgodi, če in samo če je $u_1 = u_2 = \dots = u_n$. Prav tako za preostale s_k .

Tako smo našli

$$(1 + u_1)(1 + u_2) \cdots (1 + u_n) \geq 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (G(u_1, u_2, \dots, u_n))^k$$

in z upoštevanjem binomske formule nazadnje iskano neenakost

$$(1 + u_1)(1 + u_2) \cdots (1 + u_n) \geq (1 + G(u_1, u_2, \dots, u_n))^n.$$

Damo ji lahko tudi naslednjo obliko:

$$G(1 + u_1, 1 + u_2, \dots, 1 + u_n) \geq 1 + G(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Enačaj pa v njej velja samo v primeru $u_1 = u_2 = \dots = u_n$.

Enakost z binomskimi koeficienti

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1},$$

ki smo jo izpeljali z izračunom števil $m(n, k)$, lahko interpretiramo popolnoma kombinatorično, kot je to narejeno v [1]. Recimo, da izmed n oseb izberemo k oseb za neki odbor, nekdo od teh pa bo njegov predsednik. Na koliko načinov je to možno narediti? Odbor je možno sestaviti na $\binom{n}{k}$ načinov, predsednika v njem pa na k načinov, torej lahko odbor s predsednikom naredimo na $k \binom{n}{k}$ načinov. Lahko pa ravnamo tudi takole: najprej izberemo predsednika, kar lahko naredimo na n načinov. Druge člane odbora, teh je $k-1$, pa izbiramo med preostalimi $n-1$ osebami. To lahko naredimo na $\binom{n-1}{k-1}$ načinov, torej odbor s predsednikom lahko izberemo na $n \binom{n-1}{k-1}$ načinov. Ker po obeh postopkih dobimo isto število, res velja zgornja enakost.

3. Neenakost (3) bomo sedaj še nekoliko posplošili. Vzemimo pozitivna števila $a_1, a_2, \dots, a_n$ in $b_1, b_2, \dots, b_n$ ter postavimo $u_1 = a_1/b_1, u_2 = a_2/b_2, \dots, u_n = a_n/b_n$. Neenakost (3) nam da:

$$\left(1 + \frac{a_1}{b_1}\right) \left(1 + \frac{a_2}{b_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{a_n}{b_n}\right) \geq \left(1 + G\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}\right)\right)^n,$$

iz česar dobimo po preureditvi neenakost:

$$G(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \geq G(a_1, a_2, \dots, a_n) + G(b_1, b_2, \dots, b_n). \quad (4)$$

V njej pa enačaj nastopa natanko tedaj, ko sta vrstici $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ in $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ proporcionalni.

Neenačba (3) je brez dokaza navedena v [5], splošnejšo neenačbo (4) pa razvije Krečmar v [4] popolnoma drugače.

Neenakost (4) lahko korak za korakom posplošimo. Naj bodo namreč $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ in $c_1, c_2, \dots, c_n$ sama pozitivna števila. Tedaj velja neenakost

$$\begin{aligned} G(a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2, \dots, a_n + b_n + c_n) &\geq \\ &\geq G(a_1, a_2, \dots, a_n) + G(b_1, b_2, \dots, b_n) + G(c_1, c_2, \dots, c_n). \end{aligned} \quad (5)$$

Enačaj v njej pa velja natanko tedaj, ko so vrstice $[a_1, a_2, \dots, a_n]$, $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ in $[c_1, c_2, \dots, c_n]$ proporcionalne.

4. Postrezimo s preprostim primerom. V Krečmarjevi zbirki problemov [4] je tudi tale naloga:

Dokaži, da za poljubna pozitivna števila x, y in z velja neenakost:

$$(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz.$$

Kdaj v njej velja enačaj?

V zbirki je ta naloga rešena drugače. Uporabimo lahko neenakost (4) za $n = 3$ in

$$a_1 = x, a_2 = y, a_3 = z, b_1 = y, b_2 = z, b_3 = x.$$

Dobimo

$$\begin{aligned} (x + y)(y + z)(z + x) &= (G(x + y, y + z, z + x))^3 \geq \\ &\geq (G(x, y, z) + G(y, z, x))^3 = (2\sqrt[3]{xyz})^3 = 8xyz, \end{aligned}$$

kar je bilo treba dokazati.

Enakost velja samo v primeru $x/y = y/z = z/x = \lambda$. To pomeni: $x = \lambda y, y = \lambda z, z = \lambda x$. Če vse te tri enačbe med seboj zmnožimo, dobimo $xyz = \lambda^3 xyz$, kar pomeni $\lambda = 1$ in s tem $x = y = z$.

5. Da bi laže poiskali maksimum funkcije (1), si oglejmo funkcijo

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{(a + x_1)(x_1 + x_2) \cdots (x_{n-1} + x_n)(x_n + b)}{x_1 x_2 \cdots x_n b}, \quad (6)$$

ki je obratna vrednost funkcije u , deljena z b zaradi lažjega računanja. Poiskali bomo minimum funkcije v in s tem maksimum funkcije u . Da bi lahko uporabili neenakost (3), zapišemo:

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(1 + \frac{a}{x_1}\right) \left(1 + \frac{x_1}{x_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) \left(1 + \frac{x_n}{b}\right).$$

V zgornjem izrazu je $n + 1$ faktorjev. Sedaj lahko uporabimo neenakost (3) za spremenljivke

$$u_1 = \frac{a}{x_1}, \quad u_2 = \frac{x_1}{x_2}, \quad \dots, \quad u_n = \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad u_{n+1} = \frac{x_n}{b}.$$

Takoj vidimo, da je njihova geometrična sredina enaka

$$G(u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}) = \sqrt[n+1]{\frac{a}{b}},$$

zato iz (3) sledi

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \left(1 + \sqrt[n+1]{\frac{a}{b}}\right)^{n+1} = \frac{\left(\sqrt[n+1]{a} + \sqrt[n+1]{b}\right)^{n+1}}{b}.$$

Iz zveze $bu(x_1, x_2, \dots, x_n)v(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ končno dobimo

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \frac{1}{\left(\sqrt[n+1]{a} + \sqrt[n+1]{b}\right)^{n+1}}.$$

Sedaj bomo pokazali, pri katerem izboru spremenljivk $x_1, x_2, \dots, x_n$ je v zgornji neenakosti enačaj. Takrat namreč funkcija u doseže svoj maksimum. Od prej vemo, da enačaj nastopi samo v primeru $u_1 = u_2 = \dots = u_n = u_{n+1}$, oziroma natanko tedaj, ko sta proporcionalni vrstici

$$[x_1, x_2, \dots, x_n, b], \quad [a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n],$$

kar pomeni, da obstaja tako pozitivno število q , za katero je

$$\frac{x_1}{a} = \frac{x_2}{x_1} = \dots = \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{b}{x_n} = q.$$

Huygensova naloga

Iz teh relacij dobimo:

$$x_1 = aq, x_2 = x_1q = aq^2, \dots, x_n = x_{n-1}q = aq^n, b = aq^{n+1}.$$

Ker je $0 < a < b$, je $q > 1$ in

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b.$$

Nazadnje lahko ugotovimo, da števila $a, x_1, x_2, \dots, x_n, b$ sestavljajo naraščajoče geometrično zaporedje s kvocientom $q = \sqrt[n+1]{b/a}$. Torej doseže funkcija u svoj maksimum v točki $(aq, aq^2, \dots, aq^n)$ prostora $\mathbb{R}_+^n$, in ta maksimum je enak $1 / \left(\sqrt[n+1]{a} + \sqrt[n+1]{b} \right)^{n+1}$. S tem smo rešili Huygensovo nalogo v celoti.

Zahvaljujem se profesorju Ivanu Puclju, ki me je opozoril na Huygensovo nalogo.

LITERATURA

- [1] A. T. Benjamin in J. J. Quinn, *Proofs that really count, The art of combinatorial proof*, MAA, 2003.
- [2] B. P. Demidovič, *Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskemu analizu*, Nauka, Moskva 1972.
- [3] G. H. Hardy, J. E. Littlewood in G. Pólya: *Inequalities*, Academic Press, Cambridge 1952.
- [4] V. A. Krečmar, *Zadačnik po algebre*, Fizmatgiz, Moskva 1961.
- [5] D. S. Mitrinović in D. Mihailović, *Linearna algebra, analitička geometrija, polinomi*, Građevinska knjiga, Beograd 1962.

VESTI

OB 80. OBLETNICI ROJSTVA FRANCETA KRIŽANIČA

Slovenski mislec, naravoslovec in matematik, profesor France Križanič se je rodil 3. marca 1928 v Mariboru, umrl pa je 17. januarja 2002 v Ljubljani. Šolal se je v Mariboru, Apačah ter v Ljubljani. Čeprav je večino svojega življenja preživel v našem glavnem mestu, je vselej rad poudarjal, da se počuti Štajerca. Matematiko je študiral na tedanji Prirodoslovno-matematični fakulteti Univerze v Ljubljani, kjer je leta 1951 diplomiral, leta 1955 pa doktoriral. V letih 1959 in 1960 se je izpopolnjeval v Moskvi pri znamenitem profesorju Gelfandu. Za rednega profesorja je bil izvoljen na Univerzi v Ljubljani leta 1975.