PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **24** (1996/1997)
Številka 6
Strani 334–337

Martin Juvan in Katarina Kokalovič:

ŠE ENKRAT O FIBONACCIJEVIH ZAPOREDJIH

Ključne besede: računalništvo.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/24/1320-Juvan-Kokalovic.pdf

ŠE ENKRAT O FIBONACCIJEVIH ZAPOREDJIH

Presek je o Fibonaccijevih zaporedjih v tem letniku že pisal (glej Posplošena Fibonaccijeva zaporedja, Presek 24 (96/97), št. 3, str. 150–152). V prispevku smo obravnavali posplošena Fibonaccijeva zaporedja, to je zaporedja, določena z začetnima členoma $a_1 = a$ in $a_2 = b$ ter rekurzivno zvezo $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$, $k \geq 2$. Pri tem smo se omejili na zaporedja s pozitivnima celoštevilskima začetnima členoma a in b. Med takimi zaporedji smo iskali tisto, ki vsebuje število 1000000, hkrati pa je zanj vsota $a + b$ najmanjša. Nalogo smo rešili z "metodo grobe sile". Z rekurzivno zvezo lahko iz dveh zaporednih členov zaporedja izračunamo naslednje, pa tudi prejšnje člene. Ker je bilo število 1000000 v zaporedju, smo kar preizkusili vse kandidate za prejšnji člen, to so bila števila od 1 do 999999, in z računanjem nazaj izračunali začetna člena. Tako smo v nekaj sekundah dobili odgovor $a = 154$ in $b = 144$.

Opisana rešitev je bila primerna za zastavljeno nalogo, saj jo je mogoče hitro domisliti in sprogramirati, pa tudi možnosti, da bi se zmotili, ni prav veliko. V nadaljevanju prispevka pa bomo pokazali, kako z nekaj razmišljanja poiščemo še bistveno boljšo rešitev, tako, ki jo bo mogoče uporabiti tudi za računanje s svinčnikom in papirjem (no, tudi žepnega računala se ne bomo branili).

Označimo z $f_1 = f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, \ldots$ običajna Fibonaccijeva števila. V že omenjenem prispevku smo ugotovili, da za člene posplošenega Fibonaccijevega zaporedja velja

$$a_k = f_{k-2} \cdot a + f_{k-1} \cdot b \,,$$

pri čemer vzamemo $f_{-1} = 1$ in $f_0 = 0$. Podobno lahko zapišemo tudi formulo za predhodne člene. Recimo, da poznamo člena a_n in a_{n-1}. Potem za $i \geq 0$ velja

$$a_{n-i} = (-1)^i f_{i-1} \cdot a_n - (-1)^i f_i \cdot a_{n-1} \,. \tag{1}$$

Da gornja formula res velja, se prepričamo z matematično indukcijo, seveda pa nama lahko verjamete tudi na besedo. Poglejmo primer računanja predhodnih členov. Recimo, da je v zaporedju število 100, člen pred njim pa je enak 62. Potem z računanjem nazaj, pri tem uporabljamo rekurzivno zvezo $a_{n-i} = a_{n-i+2} - a_{n-i+1}$, dobimo

$$100,\ 62,\ 38,\ 24,\ 14,\ 10,\ 4,\ 6,\ -2,\ 8,\ -10,\ \ldots \tag{2}$$

Seveda nas zaporedje predhodnih členov zanima le toliko časa, dokler so vsi njegovi členi pozitivni. In koliko začetnih členov je pozitivnih? V zgornjem primeru jih je 8. V splošnem pa razmišljajmo takole. Pri računanju predhodnih členov so ti pozitivni toliko časa, dokler je novi predhodni člen strogo manjši od predhodnega člena, izračunanega na prejšnjem koraku. Če je novi predhodni člen večji ali enak prejšnjemu, bo naslednji izračunani predhodni člen enak 0 ali manjši od 0. To pomeni, da se ustavimo pri prvem indeksu i, za katerega velja

$$a_{n-i} \geq a_{n-i+1} \,. \tag{3}$$

Tedaj ima zaporedje predhodnih členov na začetku natanko $i+1$ pozitivnih členov. Če v (3) upoštevamo zvezo (1), dobimo

$$(-1)^i f_{i-1} \cdot a_n - (-1)^i f_i \cdot a_{n-1} \geq (-1)^{i-1} f_{i-2} \cdot a_n - (-1)^{i-1} f_{i-1} \cdot a_{n-1} \,,$$

kar nam po preoblikovanju da

$$(-1)^i f_i \cdot a_n \geq (-1)^i f_{i+1} \cdot a_{n-1} \,.$$

Pogoj, ki nas pri računanju predhodnih členov zaustavi, je tako

$$(-1)^i \frac{f_i}{f_{i+1}} \geq (-1)^i \frac{a_{n-1}}{a_n} \,. \tag{4}$$

Pomembni so torej količniki zaporednih Fibonaccijevih števil. Zapišimo jih prvih nekaj:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}, \ldots$$

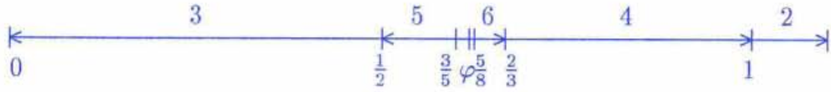
Pokažemo lahko, da se količniki bližajo razmerju zlatega reza, to je vrednosti

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \doteq 0.6180339\ldots$$

Natančneje, količniki $\frac{f_{2i}}{f_{2i+1}}$, $i = 0, 1, \ldots$, so strogo manjši od φ in rastejo proti φ, količniki $\frac{f_{2i+1}}{f_{2i+2}}$, $i = 0, 1, \ldots$, pa so večji od φ in padajo proti φ. O tem se lahko prepričamo, na primer s pomočjo Cassinijeve identitete

$$f_{i+1} f_{i-1} - f_i^2 = (-1)^i, \qquad i \geq 0 \,.$$

Prikažimo prvih nekaj količnikov in pripadajoče intervale še na številski premici:



Številke nad intervali povedo, s koliko pozitivnimi členi se začne zaporedje predhodnih členov, če je količnik med a_{n-1} in a_n na izbranem intervalu. Na primer, če $\frac{a_{n-1}}{a_n} \in [\frac{5}{8}, \frac{2}{3})$, potem dobimo z računanjem nazaj poleg a_n in a_{n-1} še štiri pozitivne člene, preden naletimo na prvi nepozitivni člen. Poglejmo še primer (2). Tu je $\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{62}{100}$. Količnik tako leži med $\frac{f_7}{f_8} = \frac{13}{21} \doteq 0.619$ in $\frac{f_5}{f_6} = \frac{5}{8} = 0.625$. Pogoj (4) ni izpolnjen za noben sod indeks i, pri lihih pa ne velja za $i = 1, 3$ in 5. Najmanjši i, za katerega je izpolnjen, je tako 7, zaporedje pa ima na začetku 8 pozitivnih členov. Napoved iz pogoja (4) se torej ujema s številom izračunanih pozitivnih členov v (2).

Pričakujemo lahko, da bo vsota zadnjih dveh pozitivnih členov (torej vsota začetnih členov posplošenega Fibonaccijevega zaporedja iz naše naloge) tem manjša, čim več pozitivnih členov bomo naračunali iz a_n in a_{n-1}. To predvidevanje potrdi tudi račun. Če je $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ na intervalu med $\frac{f_{i-3}}{f_{i-2}}$ in $\frac{f_{i-1}}{f_i}$, pri čemer je interval pri $\frac{f_{i-3}}{f_{i-2}}$ odprt, pri $\frac{f_{i-1}}{f_i}$ pa zaprt, z računanjem nazaj dobimo (vključno z a_n in a_{n-1}) i pozitivnih členov. Če je količnik $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ enak $\frac{f_{i-1}}{f_i}$, sta zadnja pozitivna člena enaka, njuna vsota pa je $\frac{2a_n}{f_i}$. Ko pa se s količnikom $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ bližamo drugi meji intervala, številu $\frac{f_{i-3}}{f_{i-2}}$, se predzadnji pozitivni člen bliža 0, zadnji pa gre proti $\frac{a_n}{f_{i-2}}$. Vsota obeh se tako od spodaj približuje $\frac{a_n}{f_{i-2}}$. Za majhne vrednosti indeksa i so gornje ugotovitve prikazane tudi v spodnji tabeli (pri tem se vrednostim v zadnjem stolpcu lahko le poljubno približamo, ne moremo pa jih doseči):

število pozitivnih členov i	f_i	interval za količnik $\frac{a_{n-1}}{a_n}$	vrednost $a+b$	
			najmanjša $\frac{2a_n}{f_i}$	največja $\frac{a_n}{f_{i-2}}$
2	1	$[1, \infty)$	$2a_n$	∞
3	2	$(0, \frac{1}{2}]$	a_n	a_n
4	3	$[\frac{2}{3}, 1)$	$\frac{2a_n}{3}$	a_n
5	5	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}]$	$\frac{2a_n}{5}$	$\frac{a_n}{2}$
6	8	$[\frac{5}{8}, \frac{2}{3})$	$\frac{a_n}{4}$	$\frac{a_n}{3}$
7	13	$(\frac{3}{5}, \frac{8}{13}]$	$\frac{2a_n}{13}$	$\frac{a_n}{5}$

Še posebej zanimiva je izbira $\frac{a_{n-1}}{a_n} = \varphi$. Tedaj je zaporedje predhodnih členov sestavljeno iz samih pozitivnih števil, ki padajo proti 0, a te vrednosti nikoli ne dosežejo. Seveda v tem primeru vsaj eden od a_n ali a_{n-1} ni celo število, saj φ ni racionalno število.

Tako, teoretično smo razjasnili vse podrobnosti. Poglejmo še, kako teorijo koristno uporabimo pri reševanju naloge, ki smo jo opisali na začetku prispevka. Če naloga ne bi zahtevala, da sta a in b celi števili, bi bila prava izbira seveda $a_{n-1} = \varphi a_n$. Ker pa φa_n ni celo število, sta kandidata za a_{n-1} dva. To sta zaporedni celi števili, med katerima leži φa_n: $\lfloor \varphi a_n \rfloor$ in $\lceil \varphi a_n \rceil$. Da bo rešitev popolna, dopišimo še program:

```
program posploseni_Fibonacci;
{ Učinkovito poišče začetna člena posplošenega Fibonaccijevega }
{ zaporedja. }
var
  fi: extended;                               { razmerje zlatega reza }
  an,a1,a2: longint;              { največji in tekoča člena zaporedja }
  i: integer;                              { števec pozitivnih členov }
begin
  fi := (sqrt(5)-1)/2;
  repeat
    write('Vpisi pozitivni clen, ki ga poznas: '); readln(an);
  until an>0;
  a2 := an; a1 := trunc(fi*an); i := 2;              { prvi kandidat }
  write('an = ',a2,'  an-1 = ',a1);
  while a1<a2 do
    begin a1 := a2-a1; a2 := a2-a1; i := i+1; end;
  writeln('  a = ',a1,'  b = ',a2,' (',i,' clenov)');
  a2 := an; a1 := trunc(fi*an)+1; i := 2;           { drugi kandidat }
  write('an = ',a2,'  an-1 = ',a1);
  while a1<a2 do
    begin a1 := a2-a1; a2 := a2-a1; i := i+1; end;
  writeln('  a = ',a1,'  b = ',a2,' (',i,' clenov)');
  readln;
end.
```

Pri $a_n = 1996$ je $\varphi a_n = 1233.5958...$, torej sta kandidata za a_{n-1} števili 1233 in 1234. Daljše zaporedje določa število 1233, kjer dobimo $a = 49$ in $b = 6$, medtem ko pri $a_{n-1} = 1234$ dobimo $a = 40$ in $b = 34$. Pri $a_n = 19961996$ sta kandidata za a_{n-1} števili 12337192 in 12337193. Tudi tokrat je boljši prvi kandidat, za katerega dobimo $a = 704$ in $b = 692$. Omenimo še, da ima zaporedje, ki ga določa prvi kandidat, 23 pozitivnih členov, zaporedje, ki ga določa drugi, pa le 20, torej kar 3 manj.

Martin Juvan, Katarina Kokalovič