375

75°

Mandrani.

75

75

$$\text{Log tag } \frac{1000}{750} = \text{log cot } 75$$

$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 \ldots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$

$q S_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 \ldots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$

$S_n - q S_n = a_1 q^n - a_1$

$S_n (q-1) = a_1 q^n - a_1$

$S_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q-1}$

$a_1 \cdot q^{n-1} = a_n$

$a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = a_n \cdot q$

$a_1 q^n = a_n q$

$a_n + a_n q_1 \quad 2.2 \sim 36$ Pyr. $\quad s = 40$ cm da pepl. κ 26

$a_n + a_n + d_1 + a_n + 2d_1 \ldots a_n + k d_1 = a_n (k+1) d_1$

$a_n (2+1) d_1 = a_{n+1}$

$S_n (2+1) d_1 = S_n + d$

$b = 23$ cm

$c = 12$ cm i e 2 m npo

$= 74^\circ 52' 42'' . 11'$

e Ckk. f Pyr. f Kbn.

$2\pi r^2 . h$

$402'123$

$2\pi r^2 . h$

e Ckk. d $\sim$ 26 Cyl. ist $402'123$ Ckm

r ? p $\sim$ a_{n+1} Pyr. $\sim$ 26 66

Cyl. ?

$r^2 = \frac{402,123}{}$

$tg \frac{\alpha + \beta}{2}$;

$h =$

Lehrbuch

der

Geometrie

für die

oberen Classen der Mittelschulen.

Von

Dr. **Franz Ritter von Močnik.**

Dreizehnte, vollständig umgearbeitete Auflage.

Mit 314 in den Text gedruckten Holzschnitten.

Das Recht der Uebersetzung behält sich der Verfasser vor.

Wien.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1876.

ai 737129

Univerzitetna knjižnica
Ljubljana
2016 MM 180

Vorwort zur achten Auflage.

Um den berechtigten Wünschen von Fachmännern Rechnung zu tragen, sind in der neuen Auflage des vorliegenden Lehrbuches mehrere Abschnitte einer gänzlichen Umarbeitung unterzogen worden. Indem in der Darstellung für größere Kürze und Bündigkeit gesorgt wurde, mußte insbesondere auch auf bessere Gliederung des Lehrstoffes, auf bestimmtere Fassung der Lehrsätze und Aufgaben, auf strengere Beweisführung, und hie und da auf angemessene Erweiterung des Inhaltes Bedacht genommen werden.

Bezüglich der Ausführung der Beweise suchte ich zwischen jenen mathematischen Lehrbüchern, welche dieselben den Schülern bis in die kleinsten Einzelnheiten in vollständig ausgearbeiteter Form vorführen, und denjenigen, welche nur ein heuristisches Gerippe dieser Beweise bringen, die Mitte zu halten. Die Beweise werden, je nachdem es zum Verständnisse erforderlich erscheint, bald ausführlicher gegeben, bald nur angedeutet; in jedem Falle aber wird auch minder befähigten Schülern die Vorbereitung und Wiederholung möglich gemacht. Daß in der Behandlung nicht durchaus dieselbe Gleichförmigkeit vorherrscht, rührt auch von dem Umstande her, daß das Lehrbuch für mehrere Classen der Mittelschulen bestimmt ist und daher Schülern auf verschiedenen Altersstufen und bei verschiedenem Fortschritte mathematischer Erkenntniß genügen soll.

Die Aufnahme einiger Grundlehren der neueren Geometrie und deren Anwendung bei der Lösung der Berührungsprobleme dürfte bei der immer mehr anerkannten Wichtigkeit dieses Gegenstandes von Vielen als eine willkommene Bereicherung des Inhaltes angesehen werden.

Da die theoretische Erkenntniß mit praktischer Uebung Hand in Hand gehen soll, habe ich namentlich auch auf die Auswahl und Anordnung der Aufgaben alle Sorgfalt verwendet. Den Aufgaben, welche häufig als Bestandtheile des Systems angesehen werden, ist meistens auch die Lösung beigefügt; bei den eigentlichen Uebungsaufgaben habe ich die Ausführung entweder vollständig der Selbstthätigkeit des Schülers überlassen, oder, wo es nöthig erschien, auf die Sätze hingewiesen, in denen die Mittel zur Auflösung enthalten sind.

Ob die vorgenommenen Veränderungen auch Verbesserungen sind, überlasse ich dem billigen Urtheile von Fachmännern, die mindestens mein aufrichtiges Streben, die Mängel der früheren Auflagen dieses Lehrbuches möglichst zu beseitigen, nicht verkennen werden.

Graz, im November 1865.

Der Verfasser.

Vorwort zur zwölften Auflage.

Das vorliegende Lehrbuch ist in allen seinen Theilen vollständig umgearbeitet worden.

Das Prinzip der Vorzeichen wurde schon am Anfange begründet und später an den betreffenden Stellen consequent angewendet. Die Lehre von den Parallelen habe ich neu bearbeitet; indem die Parallelen als Linien von gleicher Richtung erklärt wurden, entfiel die Nothwendigkeit, für diese Theorie ein besonderes Axiom zu Hilfe zu nehmen. Der Aehnlichkeitsbegriff für ebene Figuren erhielt eine allgemeinere Fassung, in welcher derselbe in der Stereometrie auch auf körperliche Raumgebilde ausgedehnt werden konnte.

Wenn es mir aus didaktischen Rücksichten geboten erschien, die bisherige Scheidung des Lehrstoffes in Planimetrie und Stereometrie beizubehalten, so war ich dagegen bemüht, die innigen Wechselbeziehungen zwischen den Lehren beider Theile um so mehr durch gleichförmige Anordnung und analoge Darstellung möglichst klar hervortreten zu lassen. So gestalten sich z. B. die meisten Sätze über die Kugel als eine bloße Erweiterung der analogen Sätze über den Kreis.

Auch bei der Entwicklung der sphärischen Trigonometrie habe ich auf die möglichste Uebereinstimmung mit der ebenen Bedacht genommen. Die Neper'schen Gleichungen wurden ohne Hilfe der Gauß'schen Formeln, die ohnehin für die Berechnung sphärischer Dreiecke von geringem praktischen Werthe sind, unmittelbar aus dem Sinus- und den beiden Cosinus-Sätzen hergeleitet.

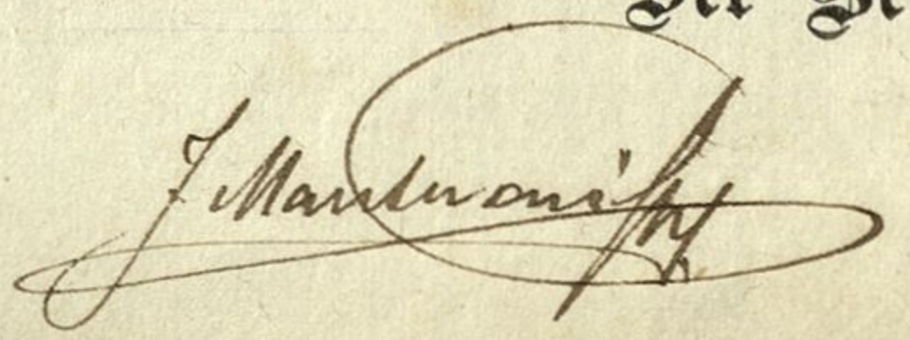
Die analytische Geometrie erhielt mehrseitige Bereicherungen; insbesondere glaubte ich, damit der innige Zusammenhang zwischen den Linien zweiter Ordnung besser erfaßt werde, auch die allgemeine Untersuchung über die geometrische Bedeutung einer quadratischen Gleichung mit zwei Unbekannten aufnehmen zu sollen.

Indem ferner die Zahl der am Schlusse jedes Abschnittes vorkommenden Uebungsaufgaben bedeutend vermehrt wurde, sind für die Anregung der selbstständigen Thätigkeit der Schüler überall auch leichtere Uebungs-Lehrsätze zur Selbstauffindung der Beweise beigegeben worden. Einige Rechnungsaufgaben über die Flächenbestimmung und über den Kreis setzen Vorkenntnisse aus der Arithmetik voraus, welche den Schülern zur Zeit, als jene Abschnitte an die Reihe kommen, vielleicht noch nicht zu Gebote stehen; in diesem Falle werden die betreffenden Aufgaben vorläufig zu übergehen und erst später, namentlich bei der Wiederholung des gesammten Lehr- und Uebungsstoffes, vorzunehmen sein.

Daß ich bei der Umarbeitung dieser Schrift die neuesten Hilfsmittel sorgfältig benützt habe, bedarf kaum einer besonderen Bemerkung. Ich führe in dieser Beziehung außer J. H. T. Müller's Lehrbuch der Geometrie, in gänzlich umgearbeiteter Auflage herausgegeben von Bauer, vorzugsweise die einschlagenden neueren Werke von Frischauf, Helmes, Reidt, Brockmann, Stoll, Brennecke an.

Graz, im Jänner 1874.

Der Verfasser.



Inhalt.

Seite

Grundbegriffe der Geometrie 1

Erster Theil.

Die Planimetrie.

Erster Abschnitt.

Gerade Linien und Winkel.

I. Länge der Geraden 5
II. Winkel zweier Geraden 6
III. Messen der Winkel 9
IV. Winkel beim Durchschnitte zweier Geraden durch eine dritte 11
V. Parallele Linien 13
VI. Aufgaben 16
VII. Uebungssätze und Uebungsaufgaben 17

Zweiter Abschnitt.

Das Dreieck.

I. Erklärungen und allgemeine Eigenschaften der Dreiecke 18
II. Congruenz der Dreiecke 23
III. Aufgaben 27
IV. Uebungssätze und Uebungsaufgaben 30

Dritter Abschnitt.

Das Viereck.

I. Erklärungen und Lehrsätze 32
II. Aufgaben 37
III. Uebungssätze und Uebungsaufgaben 38

Vierter Abschnitt.

Das Vieleck.

I. Erklärungen und Lehrsätze 39
II. Uebungsaufgaben 41

Fünfter Abschnitt.

Proportionalität der Strecken und Aehnlichkeit der ebenen Figuren.

I. Geometrische Verhältnisse 42
II. Geometrische Proportionen 45
III. Proportionale Theilung der Strahlen durch parallele Transversalen 46
IV. Aehnlichkeit der ebenen Figuren 50
V. Harmonische Theilung der Strecken 55
VI. Aufgaben 57
VII. Uebungssätze und Uebungsaufgaben 60

Sechster Abschnitt.

Flächeninhalt der geradlinigen Figuren.

Seite

I. Vergleichung der Flächen 61
II. Bestimmung des Flächeninhaltes 65
III. Aufgaben 67
IV. Uebungssätze und Uebungsaufgaben 71

Siebenter Abschnitt.

Der Kreis.

I. Allgemeines über den Kreis 75
II. Die Geraden und Winkel am Kreise ..... —
III. Lage zweier Kreise gegen einander 82
IV. Dem Kreise eingeschriebene und umschriebene Vielecke 84
V. Kreismessung 88
VI. Pol und Polare, Potenz und Potenzlinie, Aehnlichkeitspuncte und Aehnlichkeitsaxen 92
VII. Aufgaben 102
VIII. Uebungssätze und Uebungsaufgaben 115

Zweiter Theil.

Die Stereometrie.

Erster Abschnitt.

Gerade Linien und Ebenen im Raume.

I. Lage der Geraden zu einer Ebene 118
II. Lage der Ebenen gegen einander 122
III. Körperliche Ecken 126
IV. Aufgaben 131
V. Uebungssätze und Uebungsaufgaben ..... —

Zweiter Abschnitt.

Von den Körpern im Allgemeinen.

I. Ebenflächige Körper oder Polyeder 133
1. Die Pyramide 134
2. Das Prisma und das Prismatoid 135
3. Regelmäßige Polyeder 138
II. Krummflächige Körper 139
1. Der Kegel ..... —
2. Der Cylinder 141
3. Die Kugel 142
III. Aufgaben 149
IV. Uebungssätze und Uebungsaufgaben 151

Dritter Abschnitt.

Congruenz, Symmetrie und Aehnlichkeit der Körper.

I. Congruenz und symmetrische Gleichheit der Körper 152
II. Aehnlichkeit und symmetrische Aehnlichkeit der Körper 154
III. Pole und Polarebenen, Potenzen und Potenzebenen, Aehnlichkeitspuncte und Aehnlichkeitsebenen der Kugeln 158
IV. Aufgaben 16

Vierter Abschnitt.

Messen der Körper.

Seite

I. Das Prisma 162
II. Die Pyramide und das Prismatoid 166
III. Regelmäßige Polyeder 170
IV. Der Kegel ..... —
V. Der Cylinder 174
VI. Rotationsflächen und Rotationskörper 175
VII. Die Kugel 178
VIII. Uebungsaufgaben 181

Dritter Theil.

Die Trigonometrie.

Erster Abschnitt.

Die Goniometrie.

1. Darstellung der Winkelfunctionen am rechtwinkligen Dreiecke 185
2. Darstellung der Winkelfunctionen durch Linien am Kreise und Begriffserweiterung derselben 186
3. Relationen zwischen den Winkelfunctionen desselben Winkels 190
4. Relationen zwischen den Winkelfunctionen verschiedener Winkel ..... —
5. Functionen zusammengesetzter Winkel 191
6. Trigonometrische Tafeln 194
7. Uebungsaufgaben 197

Zweiter Abschnitt.

Die ebene Trigonometrie.

I. Auflösung der ebenen Dreiecke 197
1. Rechtwinklige Dreiecke ..... —
2. Schiefwinklige Dreiecke 199
3. Uebungsaufgaben 204
II. Anwendung der ebenen Trigonometrie 205
1. Aufgaben aus der Planimetrie ..... —
2. Aufgaben aus der Stereometrie 208
3. Aufgaben aus der praktischen Geometrie und Astronomie 209
4. Uebungsaufgaben 212

Dritter Abschnitt.

Die sphärische Trigonometrie.

I. Auflösung der sphärischen Dreiecke 213
1. Rechtwinklige sphärische Dreiecke ..... —
2. Schiefwinklige sphärische Dreiecke 216
3. Uebungsaufgaben 224
II. Anwendungen der sphärischen Trigonometrie 225
1. Aufgaben aus der mathematischen Geographie und sphärischen Astronomie .. —
2. Aufgaben aus der Stereometrie 228
3. Uebungsaufgaben 229

Vierter Theil.

Anwendung der Algebra auf die Geometrie.

Erster Abschnitt.

Algebraische Lösung geometrischer Aufgaben.

Seite

I. Geometrische Construction algebraischer Ausdrücke 230
II. Algebraische Auflösung geometrischer Aufgaben 232
III. Uebungsaufgaben 237

Zweiter Abschnitt.

Analytische Geometrie.

I. Analytische Bestimmung eines Punctes in der Ebene 239
1. Rechtwinklige Coordinaten ..... —
2. Schiefwinklige Coordinaten 241
3. Polar-Coordinaten ..... —
4. Transformation der Coordinaten ..... —
5. Uebungsaufgaben 243
II. Die gerade Linie ..... —
1. Analytische Darstellung einer Geraden ..... —
2. Zwei Gerade 249
3. Drei Gerade 251
4. Uebungsaufgaben 253
III. Die Kreislinie 254
1. Analytische Darstellung der Kreislinie ..... —
2. Zwei Kreise 259
3. Die Gerade und der Kreis 261
4. Uebungsaufgaben 264
IV. Die Ellipse 266
1. Analytische Darstellung der Ellipse ..... —
2. Die Gerade und die Ellipse 270
3. Uebungsaufgaben 275
V. Die Hyperbel 277
1. Analytische Darstellung der Hyperbel ..... —
2. Die Gerade und die Hyperbel 280
3. Uebungsaufgaben 282
VI. Die Parabel 283
1. Analytische Darstellung der Parabel ..... —
2. Die Gerade und die Parabel 285
3. Uebungsaufgaben 288
VII. Allgemeine Untersuchung der Linien zweiten Grades 290

Anhang.

Analytische Bestimmung eines Punctes im Raume.

1. Rechtwinklige Coordinaten 299
2. Polar-Coordinaten 300

Grundbegriffe der Geometrie.

§. 1. Ein von allen Seiten begrenzter Raum wird ein Körper genannt.

Die Grenze eines Körpers nennt man dessen Oberfläche, und jeden Theil derselben eine Fläche.

Die Grenze einer Fläche nennt man deren Umfang, und jeden Theil desselben eine Linie.

Die Grenzen einer Linie nennt man Puncte.

Puncte, Linien, Flächen und Körper heißen Raumgebilde.

Die Raumgebilde werden durch Bewegung erzeugt.

Bewegt sich ein Punct, so ist der von ihm zurückgelegte Weg eine Linie. Wenn ein Punct seine Stelle ändern soll, so stehen ihm unzählig viele Bewegungen nach verschiedenen Puncten hin offen. Das unterscheidende Merkmal einer solchen Bewegung nach einem bestimmten Puncte hin heißt die Richtung derselben. Ein Punct kann während seiner ganzen Bewegung die Richtung nach einem anderen Puncte hin unverändert beibehalten; er kann aber auch an einer jeden Stelle die Richtung seiner Bewegung ändern.

Die Fläche wird durch die Bewegung einer Linie, der Körper durch die Bewegung einer Fläche erzeugt.

Die Bewegung, durch welche ein Gebilde erzeugt wird, haftet an ihm als eine Eigenschaft, die man Ausdehnung nennt. Hiernach hat der Punct selbst keine Ausdehnung, die Linie eine, die Fläche zwei, der Körper drei Ausdehnungen.

Durch die Begrenzung der Ausdehnungen erhalten die Raumgebilde die Eigenschaft der Größe. Die Linien, Flächen und Körper werden daher als begrenzte Gebilde auch Raumgrößen genannt.

§. 2. Eine Linie, welche durch zwei Puncte bestimmt ist, heißt eine gerade Linie, auch bloß Gerade. Sie wird erzeugt, wenn sich der eine Punct in unveränderter Richtung nach dem andern Puncte hin fortbewegt. Die beständige Richtung, in welcher sich der Punct bewegt, heißt auch die Richtung der durch die Bewegung erzeugten Geraden.

Die Richtung einer Geraden wird geändert, wenn man die Gerade um einen in ihr liegenden Punct dreht. Zwei Richtungen, welche durch gleiche Aenderungen derselben Richtung entstehen, heißen gleich.

Aus der Erklärung der geraden Linie folgt:

1. Zwischen zwei Puncten ist nur eine Gerade möglich. Zwei gerade Linien, welche zwei Puncte gemeinschaftlich haben, fallen zusammen und bilden eine einzige Gerade.
2. Zwei von einander verschiedene Gerade können nur einen gemeinschaftlichen Punct haben. Man sagt: sie schneiden sich in diesem Puncte, und nennt den gemeinschaftlichen Punct ihren Durchschnittspunct.

Eine Linie, welche aus geraden Linien zusammengesetzt, aber selbst nicht gerade ist, wird eine gebrochene Linie genannt.

Eine Linie, von der kein Theil gerade ist, heißt krumm. Sie wird erzeugt, wenn ein sich bewegender Punct fortwährend die Richtung seiner Bewegung ändert.

§. 3. Eine Fläche, welche durch drei Puncte, die nicht in einer Geraden liegen, bestimmt ist, heißt eine ebene Fläche oder eine Ebene. Eine Ebene wird erzeugt, wenn sich eine Gerade, welche durch zwei der gegebenen Puncte geht, um einen derselben so dreht, daß sie sich dabei stets auch längs der durch die beiden anderen Puncte bestimmten Geraden bewegt. Sie hat demnach die Eigenschaft, daß jede Gerade, welche zwei Puncte der Ebene verbindet, ganz in die Ebene hineinfällt.

Eine Fläche, von der kein Theil eben ist, heißt krumm.

Jede begrenzte Fläche wird eine Figur genannt. Eine ebene Figur ist entweder geradlinig oder krummlinig, je nachdem sie von geraden oder krummen Linien begrenzt wird.

Ein Körper, welcher von lauter Ebenen begrenzt wird, heißt ebenflächig (eckig); ein Körper, welcher nicht von lauter ebenen Flächen begrenzt wird, heißt krummflächig (rund).

§. 4. Eine Größe messen heißt untersuchen, wie oft eine andere als bekannt angenommene Größe derselben Art in ihr enthalten ist.

Jede Raumgröße kann nur durch eine gleichartige Raumgröße gemessen werden, also eine Linie nur durch eine Linie, eine Fläche nur durch eine Fläche, ein Körper nur durch einen Körper.

Die als bekannt angenommene Größe heißt die Einheit, und die Zahl, welche ausdrückt, wie oft die Einheit in der zu messenden Größe enthalten ist, die Maßzahl; die benannte Maßzahl gibt bei Linien die Länge, bei Flächen den Flächeninhalt, bei Körpern den Körperinhalt an.

§. 5. An den Raumgebilden zieht man nicht nur die Größe, sondern auch die Form oder Gestalt, d. i. die Art der Vereinigung der einzelnen Theile zu einem Ganzen, in Betrachtung.

Zwei Raumgebilde können gleiche Größe haben, aber in der Gestalt verschieden sein; ebenso können zwei Raumgebilde gleiche Gestalt und verschiedene Größe haben. Raumgebilde, welche dieselbe Größe haben, heißen gleich; Raumgebilde, welche dieselbe Gestalt haben, heißen ähnlich; Raumgebilde, welche gleiche Größe und gleiche Gestalt haben, nennt man congruent.

Um anzuzeigen, daß zwei Größen gleich sind, wird zwischen dieselben das Zeichen $=$ (gleich) gesetzt; die Aehnlichkeit wird durch das Zeichen $\sim$ (ähnlich), die Congruenz durch die Verbindung beider Zeichen, nämlich durch $\cong$ (congruent) ausgedrückt.

Congruente Raumgebilde unterscheiden sich nur durch den Ort, an dem sie sich befinden, und können so über einander gelegt werden, daß sie sich decken. Umgekehrt: Können zwei Raumgebilde zur Deckung gebracht werden, so sind sie congruent.

§. 6. Die Wissenschaft von den Raumgebilden, insofern an ihnen die Eigenschaften des Raumes betrachtet werden, heißt Geometrie. Sie zerfällt in zwei Haupttheile: die Planimetrie und Stereometrie.

Die Planimetrie oder ebene Geometrie handelt von jenen Raumgebilden, welche in einer und derselben Ebene liegen; die Stereometrie

beschäftigt sich dagegen mit jenen Raumgebilden, die nicht in einer einzigen Ebene liegen, sondern sich auch noch außerhalb derselben ausdehnen.

Als besondere Zweige der Geometrie treten noch auf: Die Trigonometrie und analytische Geometrie. Jene hat die Aufgabe, die Raumgrößen aus gegebenen Bestandtheilen mittelst der Rechnung zu bestimmen; diese, die Lage der verschiedenen Raumgebilde algebraisch darzustellen.

Die Geometrie behandelt ihre Lehren nach der mathematischen Methode auf dem Grunde von Erklärungen, Grundsätzen und Forderungssätzen in Lehrsätzen, die bewiesen, in Aufgaben, die gelöst, und in Zu- und Folgesätzen, die jenen angeschlossen werden.

§. 7. Eine Erklärung ist die Angabe der wesentlichen Merkmale eines Begriffes. Im weiteren Sinne versteht man darunter die Angabe alles dessen, was bei einer folgenden Entwicklung zu Grunde gelegt wird.

Ein Grundsatz (Axiom) ist ein Satz, dessen Wahrheit als von selbst einleuchtend vorausgesetzt wird. Die allgemeinen mathematischen Grundsätze, die in der Arithmetik (§. 7) angeführt wurden, kommen auch in der Geometrie zur Anwendung.

Ein Satz, welcher eine geometrische Wahrheit ausspricht, deren Richtigkeit nicht an und für sich selbst einleuchtet, sondern erst begründet werden muß, heißt ein geometrischer Lehrsatz. Durch jeden solchen Satz wird ausgesagt, daß, wenn einem oder mehreren Raumgebilden eine bestimmte Eigenschaft zugesprochen wird, denselben nothwendig auch andere bestimmte Eigenschaften zukommen. Ein geometrischer Lehrsatz besteht demnach im Allgemeinen aus zwei Theilen, aus der Voraussetzung oder Bedingung, und aus der Behauptung oder Folgerung. Jeder Lehrsatz bedarf, um von uns für wahr erkannt zu werden, eines Beweises, durch welchen die Wahrheit desselben als nothwendige Folge eines Grundsatzes oder anderer bereits als wahr anerkannter Sätze dargethan wird. Der Beweis ist entweder direct oder indirect. Bei einem directen Beweise werden die Gründe, aus denen die Wahrheit des Satzes hervorgeht, unmittelbar angegeben; bei dem indirecten Beweise aber wird auf die Wahrheit einer Behauptung geschlossen, indem man nachweiset, daß die Annahme der entgegengesetzten Behauptung zu Folgerungen führen würde, welche mit schon als wahr erkannten Sätzen in offenbarem Widerspruche stehen.

Unter der Umkehrung eines Lehrsatzes versteht man einen Satz, welcher die Voraussetzung des ersten als Behauptung, und die Behauptung des ersten als Voraussetzung enthält. Wenn ein Lehrsatz wahr ist, so ist nicht immer auch dessen Umkehrung wahr; sie muß besonders bewiesen werden.

Folgesätze oder Zusätze sind Sätze, welche unmittelbar oder durch einfache Schlüsse aus den vorhergehenden Sätzen abgeleitet werden können.

§. 8. Eine geometrische Aufgabe spricht die Forderung aus, ein geometrisches Gebilde zu verzeichnen, welches gegebenen Bedingungen entspricht. Jede Aufgabe erfordert eine Auflösung, d. i. die Angabe des Verfahrens, wodurch die in der Aufgabe verlangte Construction (Zeichnung) ausgeführt wird. Die Construction erscheint manchmal als unmittelbare Folge eines bereits erwiesenen Lehrsatzes, meistens aber steht sie mit demselben nur in einem mehr versteckten mittelbaren Zusammenhange oder beruhet gar auf der Combination mehrerer Lehrsätze.

In jedem Falle muß der Construction eine verständige Beurtheilung der in der Aufgabe enthaltenen Bedingungen vorausgehen, welche durch die geometrische Analysis wesentlich erleichtert wird. Die Analysis nimmt die in der Aufgabe verlangte Zeichnung als ausgeführt an, und untersucht dann an derselben den Zusammenhang zwischen den gegebenen und den gesuchten Stücken, um daraus durch Anwendung von geometrischen Lehrsätzen zu folgern, wie die gesuchten Stücke aus den gegebenen gefunden werden können.

Bei der Auflösung von Aufgaben kommt es immer auf die Bestimmung gewisser Puncte an; diese ergeben sich als der Durchschnitt zweier Linien oder dreier Flächen, deren Puncte bestimmte Bedingungen erfüllen. Linien oder Flächen von solcher Beschaffenheit, daß alle darin liegenden Puncte, aber auch nur diese, einer gewissen gegebenen Bedingung Genüge leisten, heißen geometrische Oerter; sie liefern ein sehr wichtiges Hilfsmittel für die geometrische Analysis.

Ist die Analysis einer Aufgabe durchgeführt worden, so unterliegt die Construction keiner weiteren Schwierigkeit; man braucht dabei nur der Analysis Schritt für Schritt zu folgen, und die Puncte, welche zur Bestimmung der durch die Aufgabe verlangten Figur nöthig sind, genau in der Ordnung aus einander abzuleiten, in welcher sie in der Analysis als gegeben oder aus einander folgend nachgewiesen wurden.

Dann bedarf es noch des Beweises, daß durch die ausgeführte Construction wirklich allen in der Aufgabe gestellten Bedingungen entsprochen werde. Dieser ergibt sich meistens aus der Construction selbst, oder auch aus der Analysis, indem man in dem analytischen Entwicklungsgange zurückschreitend, die Schlüsse, wie sie in der Analysis aus einander hervorgehen, im Beweise in umgekehrter Ordnung auf einander folgen läßt.

Zu dem Beweise tritt häufig noch die Determination dazu, d. i. die Erörterung der Frage, unter welchen Bedingungen die Lösung möglich ist, und ob der Aufgabe nur eine oder mehrere Lösungen genügen.

Zur vollständigen Durchführung einer Aufgabe gehören demnach im allgemeinen fünf Stücke: die Aufgabe selbst, die Analysis, die Construction, der Beweis und die Determination, von denen jedoch die Analysis und die Determination nicht immer nothwendig sind.

Eine Constructionsaufgabe, welche nur eine einzige Auflösung oder eine genau bestimmbare Anzahl von Auflösungen zuläßt, heißt bestimmt; eine Aufgabe, welche unendlich viele Auflösungen zuläßt, heißt unbestimmt.

Eine Aufgabe, deren Auflösung ohne weitere Anweisung für sich einleuchtend ist, heißt Forderungssatz (Postulat).

Außer den geometrischen Constructionsaufgaben gibt es auch geometrische Rechnungsaufgaben, d. i. Aufgaben, welche sich auf die Berechnung der Raumgrößen mit Hilfe der Zahlen beziehen.

Erster Theil.

Die Planimetrie.

Erster Abschnitt.

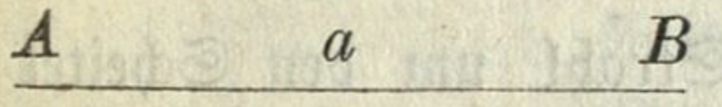
Gerade Linien und Winkel.

I. Länge der Geraden.

§. 9. Die unbegrenzte Gerade wird durch jeden ihrer Puncte in zwei halbbegrenzte Gerade getheilt, welche auf beiden Seiten des gemeinschaftlichen Grenzpunctes liegen und von diesem aus entgegengesetzte Richtungen haben. Jede durch einen Punct halbbegrenzte Gerade wird ein Strahl genannt. Eine durch zwei Puncte begrenzte Gerade heißt eine Strecke; die beiden Grenzpuncte heißen ihre Endpuncte. Die Strecke bestimmt die Entfernung oder den Abstand zweier Puncte.

Ein Strahl wird durch den Grenzpunct und einen zweiten in ihm liegenden Punct, eine Strecke durch ihre Endpuncte bezeichnet. Beide kann man auch durch einen einzigen Buchstaben ausdrücken. So heißt die Gerade, deren Endpuncte A und B (Fig. 1) sind, die Strecke AB oder die Strecke a.

Fig. 1.



Eine Strecke AB kann von einem sich bewegenden Puncte auf zwei Arten beschrieben werden, entweder in der Richtung von A nach B, oder in der entgegengesetzten Richtung von B nach A. Mit Rücksicht auf diesen Gegensatz der Richtungen heißt AB die Strecke, welche der Punct in seiner Bewegung von A nach B, und BA die Strecke, welche er in seiner Bewegung von B nach A zurücklegt. Vollbringt er nach einander beide Bewegungen, so ist es so viel, als ob er sich gar nicht bewegt hätte; man kann daher in Bezug auf den Endzustand die Summe seiner beiden Bewegungen $AB + BA = 0$ setzen, woraus $BA = -AB$ folgt.

Nimmt man daher eine Strecke in der einen Richtung als positiv an, so muß sie in der entgegengesetzten Richtung als negativ angesehen werden.

Gewöhnlich wird auf diesen Gegensatz der Richtungen nicht Rücksicht genommen und nur die absolute Länge der Strecken in Betracht gezogen.

§. 10. Um zwei Strecken bezüglich ihrer absoluten Länge mit einander zu vergleichen, lege man dieselben so auf einander, daß der eine Endpunct und die Richtungen derselben zusammenfallen. Wenn dann auch die anderen zwei Endpuncte zusammenfallen, die Strecken sich also decken, so sind diese einander gleich; fallen aber die anderen zwei Endpuncte nicht zusammen, so sind die Strecken ungleich, und zwar ist diejenige die kleinere, deren zweiter Endpunct zwischen den Endpuncten der anderen Strecke liegt.

Wenn zwei Strecken gleich sind, muß man sich dieselben auch so vorstellen können, daß sie auf einander gelegt sich decken.

Summe und Differenz zweier Strecken.

§. **11.** Um eine gegebene Strecke zu messen, untersucht man, wie oft eine andere als Längeneinheit angenommene Strecke in derselben enthalten ist.

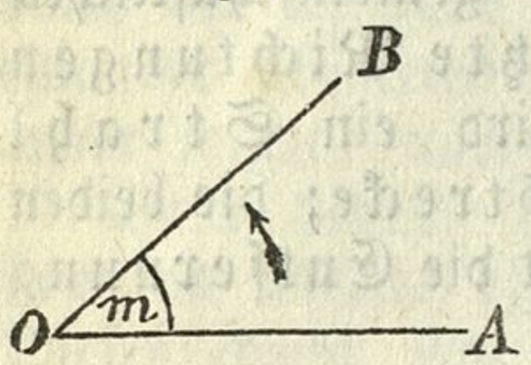
Die Einheit des Längenmaßes ist in den meisten europäischen Staaten das Meter. Ein Meter (m) wird in 10 Decimeter (dm) à 10 Centimeter (cm) à 10 Millimeter (mm) eingetheilt. 1000 Meter sind ein Kilometer (Km), 10000 Meter sind ein Myriameter (Mm).

II. Winkel zweier Geraden.

§. **12.** Von einem Puncte aus können in einer Ebene unzählig viele Strahlen gezogen werden; dieselben haben verschiedene Richtungen.

Der Unterschied der Richtungen zweier von einem Puncte ausgehender Strahlen wird ein Winkel genannt. Die beiden Strahlen, welche den Winkel bilden, heißen seine Schenkel; der gemeinschaftliche Punct, von dem sie ausgehen, heißt der Scheitel oder die Spitze des Winkels.

Fig. 2.



Einen Winkel bezeichnet man entweder mit einem einzigen Buchstaben, den man zwischen die Schenkel setzt, oder mit dem Buchstaben am Scheitel, oder mit drei Buchstaben, von denen einer am Scheitel und zwei an den Schenkeln stehen und der am Scheitel stehende immer in die Mitte gesetzt wird. In Fig. 2 sind OA und OB die Schenkel, O der Scheitel des Winkels, und dieser selbst heißt entweder der Winkel m, oder der Winkel O, oder der Winkel AOB oder BOA. Drückt man die Strahlen OA und OB durch a und b aus, so kann deren Winkel auch mit (a, b) bezeichnet werden.

Ein Winkel wird erzeugt, wenn sich der eine Strahl um den Scheitel aus seiner ursprünglichen Lage in einer Ebene dreht, bis er in die Lage des anderen Strahles gelangt. Je größer die Drehung, desto größer ist der Winkel, und umgekehrt. Die Größe des Winkels hängt also nur von der Größe der Drehung, aber nicht von der Länge der Schenkel ab. Die zwischen den Schenkeln enthaltene ebene Fläche, worin die Drehung als vollbracht betrachtet wird, heißt die Winkelfläche.

Ein Winkel AOB kann von einem Strahle, welcher sich um O dreht, auf zwei Arten beschrieben werden, entweder durch die Drehung aus der Lage OA in die Lage OB, oder durch die entgegengesetzte Drehung aus der Lage OB in die Lage OA. Mit Rücksicht auf diesen Gegensatz der Drehungen heißt AOB der Winkel, welchen der Strahl in seiner Drehung von OA nach OB, und BOA der Winkel, welchen er seiner Drehung von OB nach OA beschreibt. Vollbringt er nach einander diese beiden Drehungen, so ist es so viel, als ob er sich gar nicht gedreht hätte; man kann deshalb in Bezug auf den Endzustand die Summe seiner beiden Drehungen $AOB + BOA = 0$ setzen, woraus $BOA = -AOB$ folgt.

Nimmt man daher einen Winkel für die Drehung nach der einen Seite als positiv an, so muß er für die Drehung nach der entgegengesetzten Seite als negativ angesehen werden.

Meistens nimmt man auf diesen Gegensatz der Drehungen keine Rücksicht und betrachtet den Winkel einfach als den absoluten Unterschied der Richtungen der beiden Schenkel.

§. **13.** Um zwei Winkel in Bezug auf ihre Größe zu vergleichen, lege man ihre Winkelflächen so auf einander, daß der Scheitel und ein Schenkel

des einen Winkels auf den Scheitel und einen Schenkel des anderen zu liegen kommen. Fallen dann auch die zweiten Schenkel der Richtung nach zusammen, so sind die beiden Winkel gleich; fallen aber die zweiten Schenkel nicht zusammen, so sind die zwei Winkel ungleich, und zwar ist derjenige kleiner, dessen zweiter Schenkel zwischen die Schenkel des anderen Winkels fällt.

Wenn zwei Winkel gleich sind, so können sie mit ihren Winkelflächen so auf einander gelegt werden, daß, wenn die Scheitel und ein Paar Schenkel derselben zusammenfallen, auch die andern zwei Schenkel zusammenfallen.

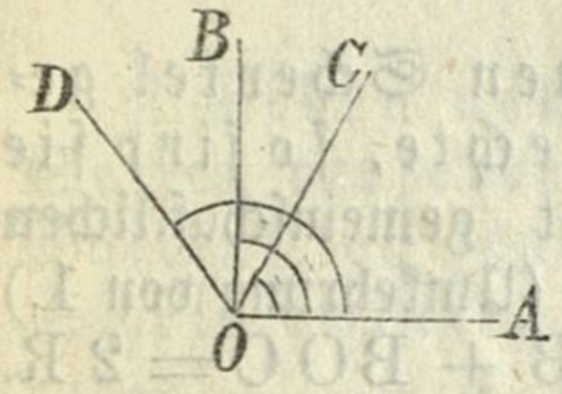
Summe und Differenz zweier Winkel.

§. **14.** Dreht sich ein Strahl um seinen Grenzpunct in einer Ebene herum, so nimmt er nach und nach alle Richtungen an, welche in der Ebene von diesem Puncte aus möglich sind, und bildet daher mit seiner anfänglichen Richtung alle um jenen Punct möglichen Winkel.

Am kleinsten ist der Winkel, wenn der bewegliche Strahl noch gar keine Drehung gemacht hat, uud somit mit seiner anfänglichen Richtung zusammenliegt; man nennt diesen Winkel den Nullwinkel.

Legt der bewegliche Strahl den vierten Theil einer vollständigen Umdrehung zurück, so heißt der dadurch erzeugte Winkel ein rechter Winkel. Alle rechten Winkel sind einander gleich. Der rechte Winkel wird gewöhnlich mit dem Buchstaben R bezeichnet.

Fig. 3.



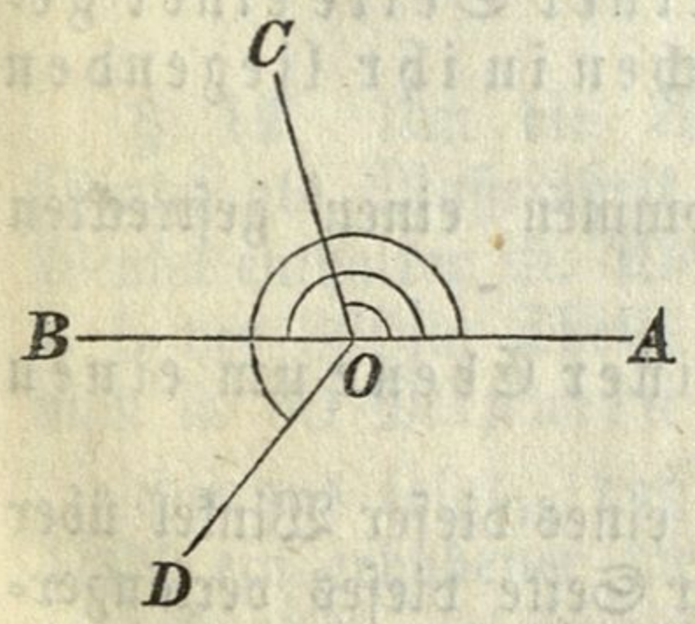
Ein Winkel, zu dessen Entstehung weniger als eine Vierteldrehung erforderlich ist, heißt ein spitzer, und ein Winkel, zu dessen Erzeugung mehr als eine Viertel-, aber weniger als die halbe Umdrehung erfordert wird, ein stumpfer Winkel. Ein spitzer Winkel ist demnach kleiner, ein stumpfer größer als ein rechter; beide werden auch schiefe Winkel genannt.

Hat (Fig. 3) der Strahl OA, wenn er in die Lage OB gelangt ist, den vierten Theil einer vollen Umdrehung zurückgelegt, so ist AOB ein rechter, AOC ein spitzer, und AOD ein stumpfer Winkel.

Zwei Winkel, welche sich zu einem Rechten ergänzen, heißen Complementwinkel, wie z. B. AOC und COB.

§. **15.** Wenn der bewegliche Strahl eine halbe Umdrehung gemacht hat, so kommt er in eine Richtung, welche seiner anfänglichen Richtung entgegengesetzt ist. Der Winkel, welcher durch diese Drehung erzeugt wird, dessen Schenkel daher entgegengesetzt in einer geraden Linie liegen, heißt ein gestreckter Winkel. Ein gestreckter Winkel ist gleich zwei Rechten. Alle gestreckten Winkel sind einander gleich.

Fig. 4.

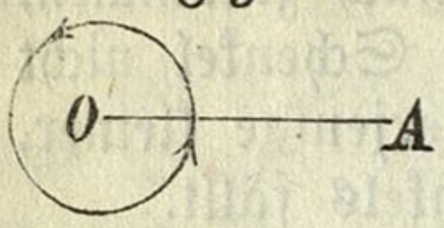


Ein Winkel, der kleiner als ein gestreckter ist, heißt ein hohler, und ein Winkel, der größer als ein gestreckter ist, ein erhabener Winkel. In Fig. 4 ist AOB ein gestreckter, AOC ein hohler, AOD ein erhabener Winkel. Jedem hohlen Winkel zweier Strahlen entspricht immer auch ein erhabener Winkel derselben; wenn jedoch nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, ist unter dem Winkel zweier Strahlen stets nur der hohle Winkel zu verstehen.

Zwei Winkel, welche sich zu zwei Rechten oder zu einem gestreckten Winkel ergänzen, heißen Supplementwinkel, wie z. B. AOC und COB.

Nach einer vollständigen Umdrehung gelangt der bewegliche Strahl wieder in seine anfängliche Lage. Der Winkel, der durch diese Drehung entsteht, heißt ein voller Winkel (Fig. 5); seine beiden Schenkel fallen zusammen, wie bei dem Nullwinkel. Ein voller Winkel ist gleich zwei gestreckten Winkeln oder vier Rechten.

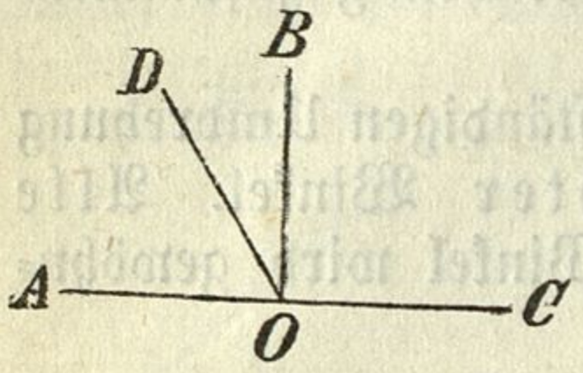
Fig. 5.



Wird der bewegliche Strahl, nachdem er eine volle Umdrehung gemacht hat, noch weiter gedreht, so kommt er nach und nach wiederholt in die Richtungen, die er schon während der ersten Umdrehung einnahm. Die Winkel, die dadurch erzeugt werden, sind gleich so vielmal vier Rechten, als volle Umdrehungen stattfanden, vermehrt um die Winkel, welche der Strahl mit seiner anfänglichen Lage bei der ersten Umdrehung gebildet hat.

§. **16.** Zwei Winkel, welche denselben Scheitel und einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, und deren andere Schenkel auf entgegengesetzten Seiten des gemeinschaftlichen Scheitels in einer geraden Linie liegen, heißen Nebenwinkel; z. B. (Fig. 6) AOB und BOC, ebenso AOD und DOC.

Fig. 6.

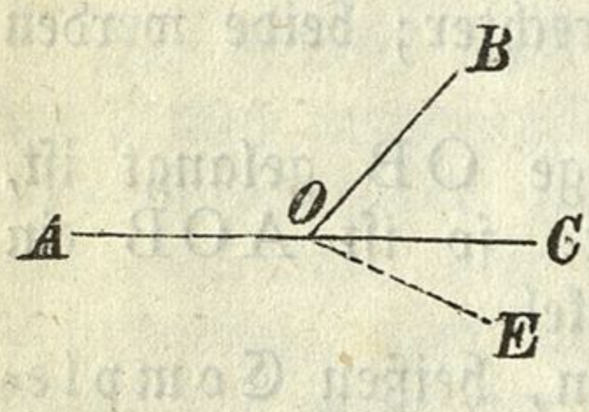


Lehrsätze. 1. Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich zwei Rechten.

Denn sie bilden zusammen einen gestreckten Winkel.

2. Haben zwei Winkel den Scheitel und einen Schenkel gemeinschaftlich, und beträgt ihre Summe zwei Rechte, so sind sie Nebenwinkel, d. i. ihre nicht gemeinschaftlichen Schenkel bilden eine gerade Linie. (Umkehrung von 1.)

Fig. 7.



Voraussf. Es sei (Fig. 7) AOB + BOC = 2 R.

Behaupt. AOC ist eine gerade Linie.

Indirecter Beweis. Wäre nicht OC, sondern irgend eine andere Gerade, z. B. OE, die Verlängerung von AO, so müßte

AOB + BOE = 2 R (als Nebenwinkel), und wegen
AOB + BOC = 2 R (nach der Voraussetzung) auch
AOB + BOE = AOB + BOC, oder, wenn man AOB wegnimmt,
BOE = BOC

sein, was unmöglich ist, weil das Ganze größer als ein Theil ist. Es muß demnach OC selbst die Verlängerung von AO, folglich AOC eine gerade Linie sein.

3. Die Summe aller Winkel, welche auf einer Seite einer geraden Linie liegen und einen gemeinschaftlichen in ihr liegenden Scheitel haben, ist gleich zwei Rechten.

Denn alle diese Winkel betragen zusammengenommen einen gestreckten Winkel.

4. Die Summe aller Winkel, welche in einer Ebene um einen Punct herum liegen, ist gleich vier Rechten.

Denn verlängert man einen beliebigen Schenkel eines dieser Winkel über den Scheitel hinaus, so betragen die Winkel auf jeder Seite dieses verlängerten Schenkels zwei Rechte, folglich alle Winkel zu beiden Seiten desselben vier Rechte.

§. **17.** Bildet eine Gerade mit einer andern gleiche Nebenwinkel, so heißen die beiden Geraden *senkrecht*, sonst *schief* auf einander. So ist (Fig. 6) BO senkrecht auf AC, DO schief auf AC. Daß BO auf AC senkrecht steht, wird angezeigt: BO $\perp$ AC. Die Senkrechte wird auch *Loth* genannt.

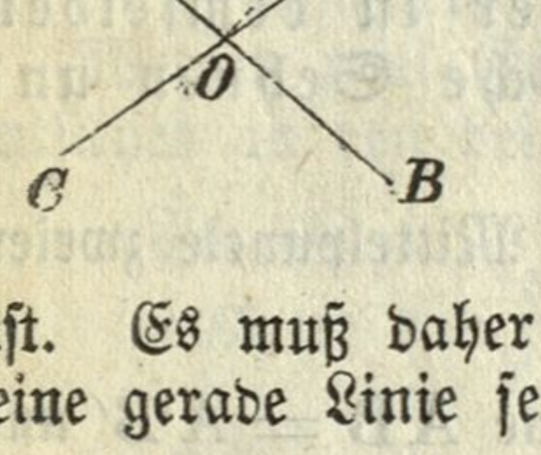
Zwei Gerade, welche auf einander senkrecht stehen, bilden rechte, zwei schiefe Gerade bilden mit einander schiefe Winkel.

Wird von einem Puncte außerhalb einer Geraden zu dieser eine senkrechte oder eine schiefe Gerade gezogen, so heißt ihr Durchschnitt mit der gegebenen Geraden der *Fußpunct* der andern Geraden.

§. **18.** Zwei Winkel, bei denen die Schenkel des einen die Verlängerungen der Schenkel des andern über den Scheitel sind, heißen *Scheitelwinkel*, wie a und c, oder b und d (Fig. 8).

Lehrsätze. 1. *Je zwei Scheitelwinkel sind einander gleich.*

Fig. 8.



Voraussetzung. a und c sind Scheitelwinkel.

Behauptung. a = c.

Beweis. a + b = 2R als Nebenwinkel,

b + c = 2R " "

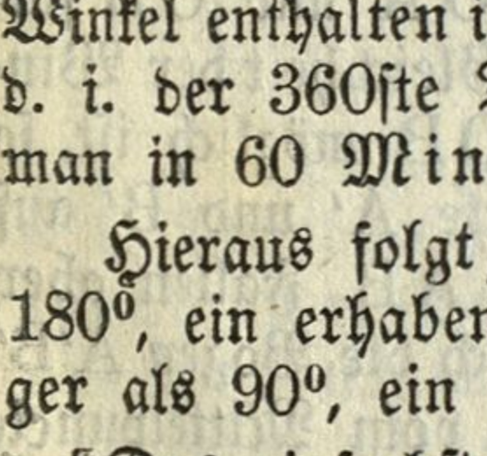
also a + b = b + c, und wenn man beiderseits b wegnimmt, a = c.

Eben so kann man beweisen, daß b = d ist.

2. *Gehen von einem Puncte einer Geraden auf verschiedenen Seiten derselben zwei Strahlen aus, welche einzeln mit den Abschnitten jener Geraden gleiche Winkel bilden, so sind diese Scheitelwinkel.* (Umkehrung von 1.)

Voraussetzung. Es sei (Fig. 9) AOB eine gerade Linie und W. AOC = BOD.

Fig. 9.



Behauptung. COD ist eine gerade Linie.

Indirecter Beweis. Würde nicht OD, sondern irgend eine andere Gerade, z. B. OE, die Verlängerung von CO sein, so wäre

AOC = BOE (als Scheitelwinkel), und wegen

AOC = BOD (nach der Voraussetzung) auch

BOE = BOD,

was nicht sein kann, weil das Ganze größer als ein Theil ist. Es muß daher OD selbst die Verlängerung von CO, folglich COD eine gerade Linie sein.

III. Messung der Winkel.

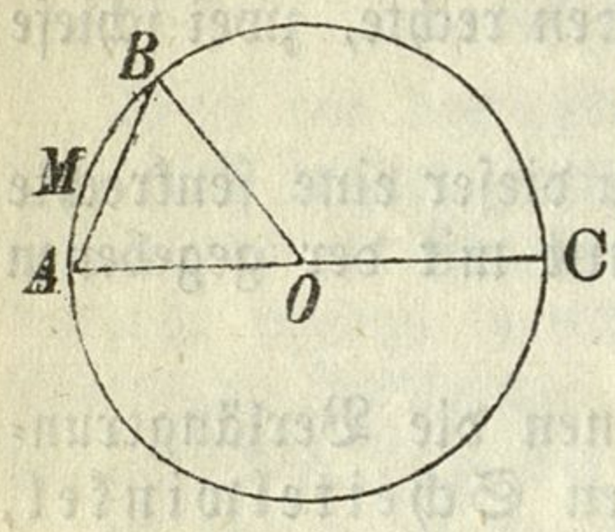
§. **19.** Um die Winkel zu messen, nimmt man irgend einen bekannten Winkel als Maßeinheit an und untersucht, wie oft diese in dem gegebenen Winkel enthalten ist. Als *Einheit des Winkelmaßes* wird der *Grad* (°), d. i. der 360ste Theil eines vollen Winkels angenommen. Einen Grad theilt man in 60 *Minuten* (′), eine Minute in 60 *Secunden* (″).

Hieraus folgt, daß ein gestreckter Winkel 180°, ein hohler weniger als 180°, ein erhabener mehr als 180°, ferner ein rechter 90°, ein spitzer weniger als 90°, ein stumpfer mehr als 90°, aber weniger als 180° enthält.

Das einfachste Mittel der Winkelmessung bietet die *Kreislinie*.

§. **20.** Dreht sich in einer Ebene eine Strecke O A (Fig. 10) um den einen Endpunkt O herum, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage kommt, so beschreibt der Punct A während dieser Umdrehung eine krumme Linie, welche Kreislinie oder Kreis genannt wird. Die Kreislinie hat daher die Eigenschaft, daß alle Puncte derselben von einem innerhalb liegenden Puncte gleich weit abstehen. Dieser Punct heißt der Mittelpunct oder das Centrum, und jede Lage der bewegten Strecke, wie O A, O B, ein Halbmesser (radius) des Kreises.

Fig. 10.



Jeder Theil der Kreislinie, wie A M B, wird ein Bogen (arcus) genannt; insbesondere heißt der vierte Theil der Kreislinie Quadrant, die Hälfte der Kreislinie Halbkreis, und die ganze Kreislinie der Umfang oder die Peripherie des Kreises.

Eine Gerade A B, welche zwei Puncte des Umfanges verbindet, heißt Sehne (chorda). Geht die Sehne durch den Mittelpunct, wie A C, so heißt sie ein Durchmesser (diameter) des Kreises.

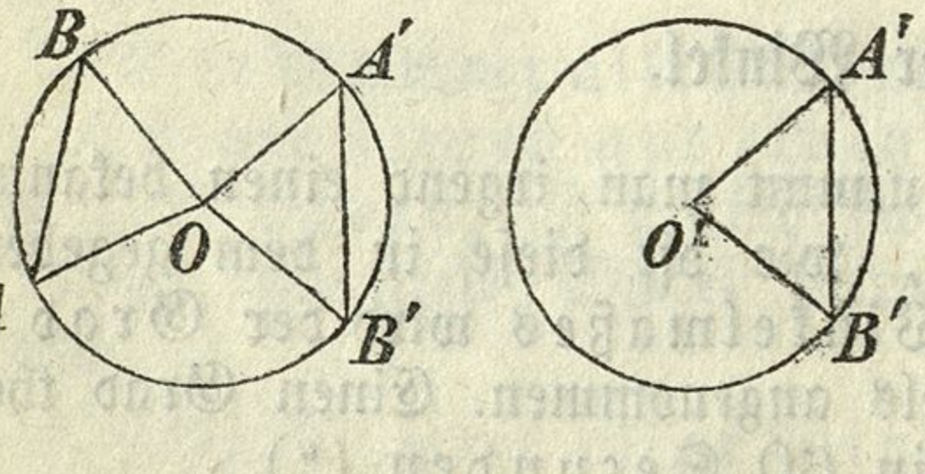
Ein Winkel A O B, dessen Scheitel im Mittelpuncte liegt und dessen Schenkel Halbmesser des Kreises sind, heißt ein Centriwinkel, und der zwischen den Halbmessern eingeschlossene Theil O A M B des Kreises ein Kreisausschnitt (sector).

Folgesätze. 1. Alle Halbmesser eines Kreises sind einander gleich.
2. Jeder Durchmesser eines Kreises ist doppelt so groß als ein Halbmesser.
3. Alle Durchmesser eines Kreises sind einander gleich.
4. Kreise von gleichen Halbmessern sind congruent.
5. Der geometrische Ort (§. 8) aller Puncte, welche von einem gegebenen Puncte einen gegebenen Abstand haben, ist die Kreislinie, deren Mittelpunct jener Punct, und deren Halbmesser jener Abstand ist. Dieser Satz enthält die Lösung der unbestimmten Aufgabe: Einen Punct zu finden, welcher von einem gegebenen Puncte einen gegebenen Abstand hat.

§. **21.** Lehrsätze. 1. In gleichen Kreisen oder in demselben Kreise gehören zu gleichen Centriwinkeln gleiche Sehnen und gleiche Bogen.

Voraussetzung. Es seien O und O' (Fig. 11) die Mittelpuncte zweier gleicher Kreise und W. A O B = A'O'B'.

Fig. 11.



Behauptung. Sehne A B = A'B' und Bogen A B = A'B'.

Beweis. Legt man den Kreisausschnitt A'O'B' so auf den Ausschnitt A O B daß die Halbmesser O'A' und O'B' auf die Halbmesser O A und O B fallen, was wegen der Gleichheit der Winkel A'O'B' und A O B möglich ist, so müssen wegen der Gleichheit der Halbmesser auch die Puncte A' und B' auf die Puncte A und B fallen; folglich ist die Sehne A'B' = A B. Fallen aber die Sehnen A'B' und A B auf einander, so müssen sich auch die Bogen A'B' und A B decken, weil sonst nicht alle Puncte derselben vom Mittelpuncte gleiche Entfernung haben würden; mithin Bogen A'B' = A B.

2. Zu gleichen Bogen gehören in gleichen Kreisen oder in demselben Kreise gleiche Centriwinkel und gleiche Sehnen.

3. Zu gleichen Sehnen gehören in gleichen Kreisen oder in demselben Kreise gleiche Centriwinkel und gleiche Bogen, wenn vorausgesetzt wird, daß die Centriwinkel hohle Winkel und die Bogen kleiner als der Halbkreis sind.

Die Beweise für diese zwei Sätze, welche Umkehrungen des ersten Lehrsatzes sind, werden ebenfalls durch Deckung der Kreisausschnitte geführt.

§. **22.** Die Größe eines Kreisbogens kann im Längenmaße oder im Bogenmaße ausgedrückt werden. Wie man die Länge eines Bogens bestimmt, wird später (§. 170) gezeigt werden. Hier wollen wir uns auf das Bogenmaß beschränken, wobei man angibt, wie oft ein als Einheit angenommener Bogen desselben Kreises in dem zu bestimmenden Bogen enthalten ist.

Als Einheit des Bogenmaßes nimmt man den Bogengrad (°), d. i. den 360sten Theil des ganzen Kreisumfanges, an; ein Bogengrad wird in 60 Bogenminuten (′), eine Bogenminute in 60 Bogensecunden (″) eingetheilt.

Denkt man sich den Umfang eines Kreises in 360 Bogengrade getheilt, und vom Mittelpuncte zu jedem Theilungspuncte einen Halbmesser gezogen, so entstehen (§. 21, 2) 360 gleiche Centriwinkel, welche zusammen 360 Winkelgrade betragen; es ist also ein Centriwinkel, welcher einem Bogengrade entspricht, gleich einem Winkelgrade. Ebenso entspricht einer Bogenminute eine Winkelminute, einer Bogensecunde eine Winkelsecunde. Hiernach drückt die Zahl der Grade, Minuten und Secunden eines Kreisbogens zugleich die Zahl der Grade, Minuten und Secunden des zugehörigen Centriwinkels aus. In diesem Sinne sagt man: Der Kreisbogen ist das Maß des zugehörigen Centriwinkels.

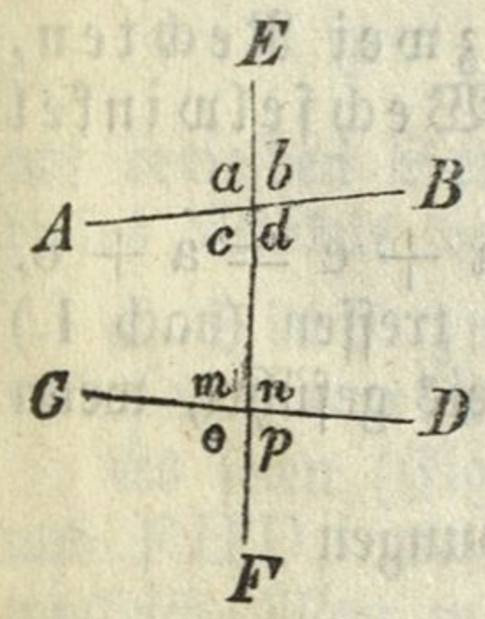
Gebrauch des Transporteurs.

IV. Winkel beim Durchschnitte zweier Geraden durch eine dritte.

+§. **23.** Eine Gerade EF (Fig. 12), welche zwei oder mehrere gerade Linien durchschneidet, wird eine Transversale dieser Geraden genannt.

Werden zwei Gerade AB und CD von einer dritten EF geschnitten, so entstehen an den beiden Durchschnittspuncten acht Winkel.

Fig. 12.



Die Winkel c, d, m, n, welche zwischen den geschnittenen Geraden liegen, heißen innere; die Winkel a, b, o, p dagegen äußere Winkel.

Ein äußerer und ein innerer Winkel auf derselben Seite der Transversale und an verschiedenen Scheiteln heißen Gegenwinkel; wie a und m, b und n, c und o, d und p.

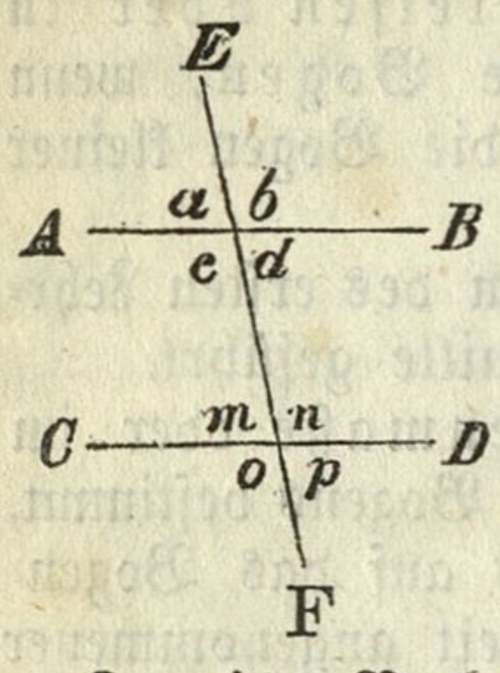
Zwei äußere Winkel oder auch zwei innere Winkel auf den entgegengesetzten Seiten der Transversale und an verschiedenen Scheiteln werden Wechselwinkel genannt; wie a und p, b und o, c und n, d und m.

+§. **24.** Lehrsätze.

✕ 1. Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daß irgend zwei Gegenwinkel gleich sind, so sind auch a) je zwei andere Gegenwinkel gleich, b) je zwei Wechselwinkel gleich und c) je zwei äußere oder innere Winkel auf derselben Seite der Transversale zusammen gleich zwei Rechten. (Fig. 13.)

Voraussetzung. a = m. Erste Behaupt. b = n, c = o, d = p.

Fig. 13.



Beweis. a + b = 2 R als Nebenwinkel,
m + n = 2 R als Nebenwinkel,

a + b = m + n,
a = m nach der Voraussetzung,

folglich b = n.

Eben so wird bewiesen, daß c = o ist.

Endlich ist a = d als Scheitelwinkel,
m = p als Scheitelwinkel,
a = m nach der Voraussetzung,

also auch d = p.

Zweite Behaupt. a = p, b = o, c = n, d = m.

Beweis. a = m nach der Voraussetzung,
m = p als Scheitelwinkel,

a = p.

Eben so zeigt man, daß b = o, c = n, d = m ist.

Dritte Behaupt. a + o = 2 R, b + p = 2 R,
c + m = 2 R, d + n = 2 R.

Beweis. a + c = 2 R als Nebenwinkel,
c = o als Gegenwinkel,

a + o = 2 R.

Eben so zeigt man, daß b + p = 2 R, c + m = 2 R, und d + n = 2 R ist.

× 2. Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daß irgend zwei Wechselwinkel gleich sind, so sind a) auch je zwei andere Wechselwinkel gleich, b) je zwei Gegenwinkel gleich, und c) je zwei äußere oder innere Winkel auf derselben Seite der Transversale zusammen gleich zwei Rechten. (Fig. 13.)

Es sei c = n. Da c = b als Scheitelwinkel, so ist auch b = n. Sind aber zwei Gegenwinkel gleich, so müssen (nach 1.) auch alle übrigen Behauptungen als bewiesen angesehen werden.

× 3. Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daß irgend zwei äußere oder irgend zwei innere Winkel auf derselben Seite der Transversale zusammen gleich sind zwei Rechten, so sind auch a) je zwei äußere oder innere Winkel auf derselben Seite der Transversale zusammen gleich zwei Rechten, b) je zwei Gegenwinkel gleich, und c) je zwei Wechselwinkel gleich. (Fig. 13.)

Es sei a + o = 2 R. Da auch a + c = 2 R, so muß a + c = a + o, daher c = o sein. Sind aber zwei Gegenwinkel gleich, so treffen (nach 1.) auch alle übrigen Behauptungen zu. — Ebenso wird der Beweis geführt, wenn man c + m = 2 R annimmt.

Folgesätze. 1. Findet irgend eine von den zwölf Gleichungen

a = m,	a = p,	a + o = 2 R,
b = n,	b = o,	b + p = 2 R,
c = o,	c = n,	c + m = 2 R,
d = p;	d = m;	d + n = 2 R

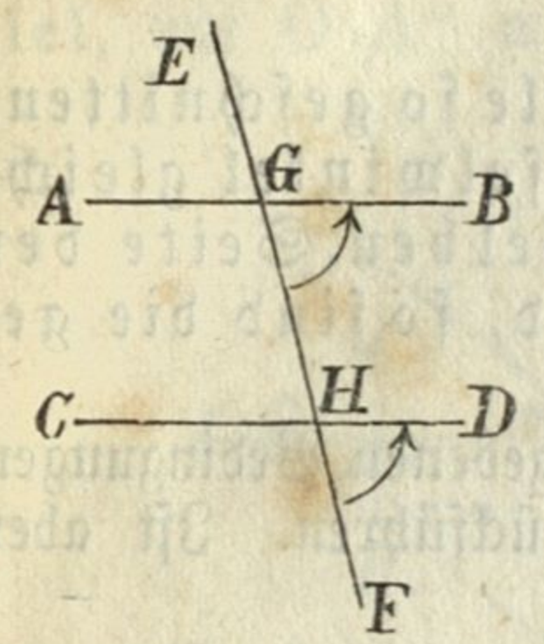
statt, so müssen auch die übrigen eilf stattfinden.

2. Findet von diesen zwölf Gleichungen irgend eine nicht statt, so kann auch keine der übrigen eilf stattfinden. (Folgt indirect aus 1.)

V. Parallele Linien.

§. 25. Eine Gerade hat nach derselben Seite hin dieselbe Richtung, welchen Ausgangspunct immer man in ihr annehmen mag. Wird daher eine Gerade EF (Fig. 14) einmal um den Punct G, dann um den Punct H, in derselben Ebene und nach derselben Seite um gleiche Winkel FGB und FHD gedreht, so müssen die Richtungen der Geraden AB und CD, da sie durch gleiche Aenderungen derselben Richtung EF entstanden sind, gleich sein (§. 2).

Fig. 14.



Umgekehrt: Haben die Geraden AB und CD gleiche Richtungen, so müssen die Winkel FGB und FHD, um welche sich die beiden Geraden von derselben Geraden EF in derselben Ebene und nach derselben Seite gedreht haben, gleich sein.

Zwei Gerade, welche gleiche Richtungen haben, heißen parallel. Um zu bezeichnen, daß die Geraden AB und CD parallel sind, schreibt man AB ‖ CD.

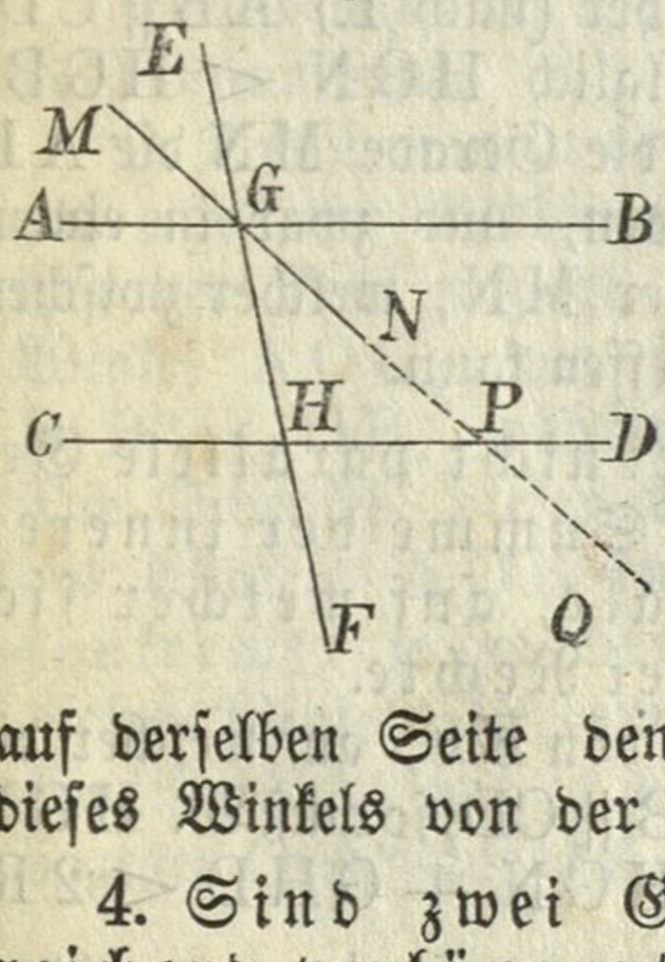
Folgesätze.

1. Zwei parallele Gerade können, so weit man sie auch verlängern mag, in keinem Puncte zusammentreffen.

Denn würden sie sich in einem Puncte treffen, so hätten sie, da sie mit einer durch diesen Punct gehenden dritten Geraden nach derselben Seite ungleiche Winkel bilden würden, nicht gleiche Richtungen, und wären daher nicht parallel.

2. Durch einen Punct außerhalb einer Geraden kann zu dieser nur eine Parallele gezogen werden.

Fig. 15.



Es sei (Fig. 15) AB ‖ CD, also Winkel FGB = FHD. Wäre durch G noch eine zweite Parallele MN zu CD möglich, so müßte auch Winkel FGN = FHD, daher Winkel FGN = FGB sein, was einen Widerspruch enthält.

3. Eine Gerade, welche eine von zwei Parallelen schneidet, muß auch die andere schneiden.

Es sei (Fig. 15) AB ‖ CD, und es werde die AB von der Geraden MN unter dem Winkel NGB geschnitten, dann muß auch CD mit der MN auf derselben Seite den gleichen Winkel QPD bilden, somit im Scheitel dieses Winkels von der MN geschnitten werden.

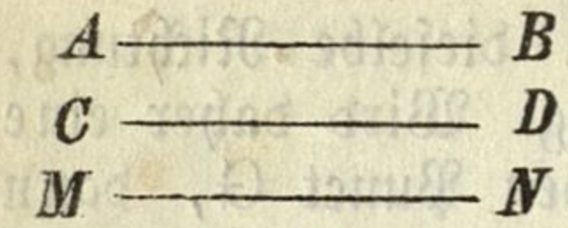
4. Sind zwei Gerade nicht parallel, so müssen sie, hinreichend verlängert, sich in einem Puncte treffen.

Es seien (Fig. 15) MN und CD nicht parallel; dann sind die W. FGN und FHD, welche sie mit der Geraden EF auf derselben Seite bilden, ungleich. Man mache W. FGB = FHD, so ist AB ‖ CD. Die Gerade MN schneidet nun die AB, also muß sie (nach 3.) auch die CD schneiden.

Zwei Gerade in derselben Ebene sind daher entweder parallel, oder schneiden sich in einem Puncte.

5. Sind zwei Gerade zu einer und derselben dritten parallel, so sind sie auch unter einander parallel.

Fig. 16.



Ist (Fig. 16) AB || MN und CD || MN, so ist auch AB || CD. Denn wäre AB nicht parallel mit CD, so müßte sie verlängert dieselbe in einem Puncte schneiden; dann aber wären durch diesen Punct zwei Gerade zu MN parallel, was (nach 2.) nicht möglich ist.

§. **26.** Lehrsätze.

1. Werden zwei Gerade von einer Transversale so geschnitten, daß entweder zwei Gegenwinkel oder zwei Wechselwinkel gleich, oder zwei äußere oder innere Winkel auf derselben Seite der Transversale zusammen gleich zwei Rechten sind, so sind die geschnittenen Geraden parallel. (Fig. 14.)

Nach §. 24 läßt sich jede der in diesem Lehrsatze angegebenen Bedingungen auf die Gleichheit der Gegenwinkel FGB und FHD zurückführen. Ist aber Winkel FGB = FHD, so ist AB || CD (§. 25.)

2. (Umkehrung des Lehrsatzes 1.) Werden zwei parallele Gerade von einer Transversale geschnitten, so sind a) je zwei Gegenwinkel gleich, b) je zwei Wechselwinkel gleich, und c) je zwei äußere oder innere Winkel auf derselben Seite der Transversale zusammen gleich zwei Rechten. (Fig. 14.)

Es sei AB || CD. Daß die Gegenwinkel FGB und FHB gleich sind, folgt aus §. 25. Dann aber treffen nach §. 24 auch die übrigen Behauptungen zu.

3. Werden zwei gerade Linien von einer dritten so geschnitten, daß die Summe der inneren Winkel auf einer Seite der Transversale kleiner ist als zwei Rechte, so müssen sich die beiden Geraden bei hinreichender Verlängerung auf dieser Seite der Transversale schneiden. (Fig. 15.)

Es sei HGN + GHD < 2R. Macht man HGB = CHG, so wird HGB + GHD = CHG + GHD = 2R, und daher (nach 1.) AB || CD. Dann ist HGN + GHD < HGB + GHD, folglich HGN < HGB; die GN liegt also zwischen GB und GH. Da nun die Gerade MN die AB schneidet, so muß sie (§. 25, 3) auch die CD schneiden, und zwar in einem Puncte der Winkelfläche BGH, da nur jener Theil der MN, welcher zwischen AB und CD liegt, d. i. GN, mit der CD zusammentreffen kann.

4. (Umkehrung des Lehrsatzes 3.) Werden zwei nicht parallele Gerade von einer dritten geschnitten, so ist die Summe der inneren Winkel auf derjenigen Seite der Transversale, auf welcher sich die beiden Geraden schneiden, kleiner als zwei Rechte.

Es schneide MN (Fig. 15) die CD auf jener Seite von EF, auf welcher die W. HGN und GHD liegen. Zieht man durch G die AB || CD, so muß W. HGN < HGB sein; aber HGB + GHD = 2R, daher HGN + GHD < 2R.

§. **27.** Folgesätze. 1. Wenn zwei gerade Linien auf einer dritten senkrecht stehen, so sind sie parallel. (Folgt aus §. 26, 1.)

2. Steht von zwei Parallelen die eine auf einer Geraden senkrecht, so steht auch die andere auf ihr senkrecht. (Folgt aus §. 26, 2.)

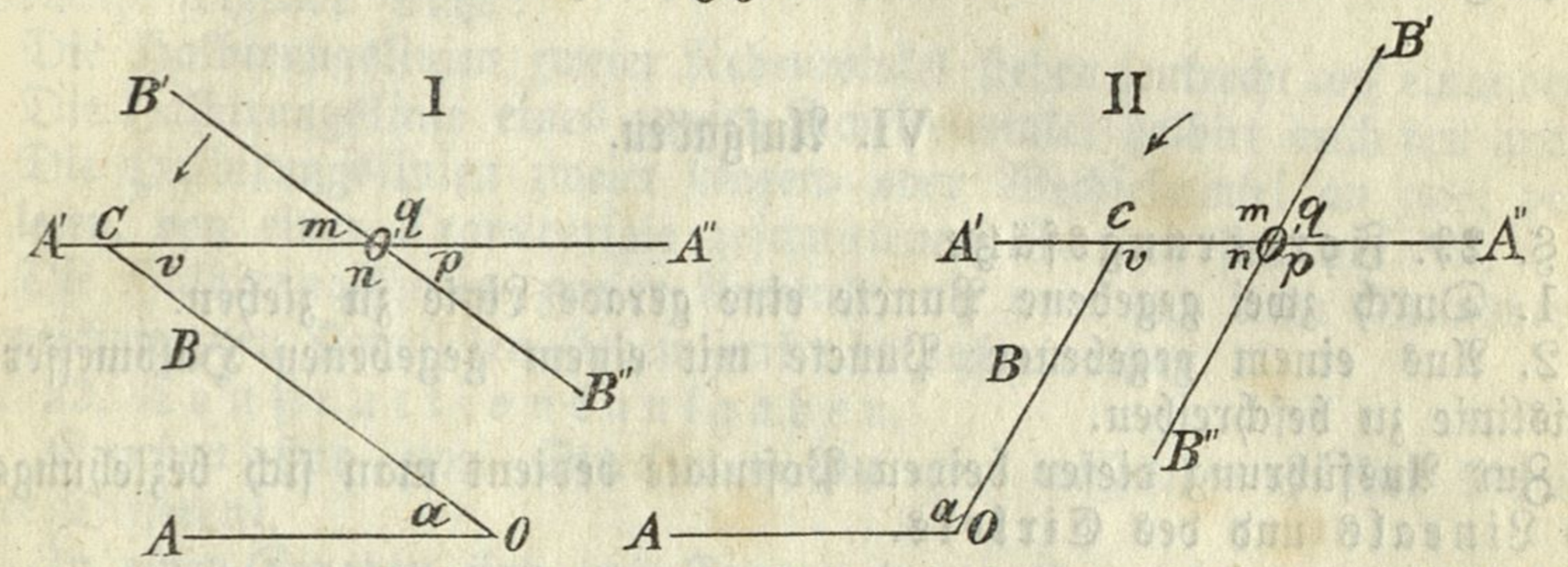
3. Jede auf den einen Schenkel eines spitzen Winkels errichtete Senkrechte trifft den andern Schenkel dieses Winkels.

4. Errichtet man auf jeden Schenkel eines hohlen Winkels eine Senkrechte, so müssen sich diese in einem Puncte schneiden.

Die Sätze 3 und 4 folgen aus §. 26, 3.

§. 28. 1. Es sei der Winkel AOB (Fig. 17) und der Punct O' gegeben. Zieht man durch O' die Gerade A' A" || AO und die Gerade B'B" || BO, so sind die Schenkel der um O' entstehenden vier Winkel mit den Schenkeln des gegebenen Winkels theils in demselben Sinne parallel, wie O' A' mit OA, oder O'B' mit OB, theils im entgegengesetzten Sinne parallel, wie O'A" mit OA, oder O'B" mit OB.

Fig. 17.



Lehrsatz. Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise parallel sind, sind a) einander gleich, wenn beide Paare der Schenkel in demselben, oder beide im entgegengesetzten Sinne parallel sind; dagegen b) Supplementwinkel, wenn zwei Schenkel in demselben, die beiden anderen aber im entgegengesetzten Sinne parallel sind.

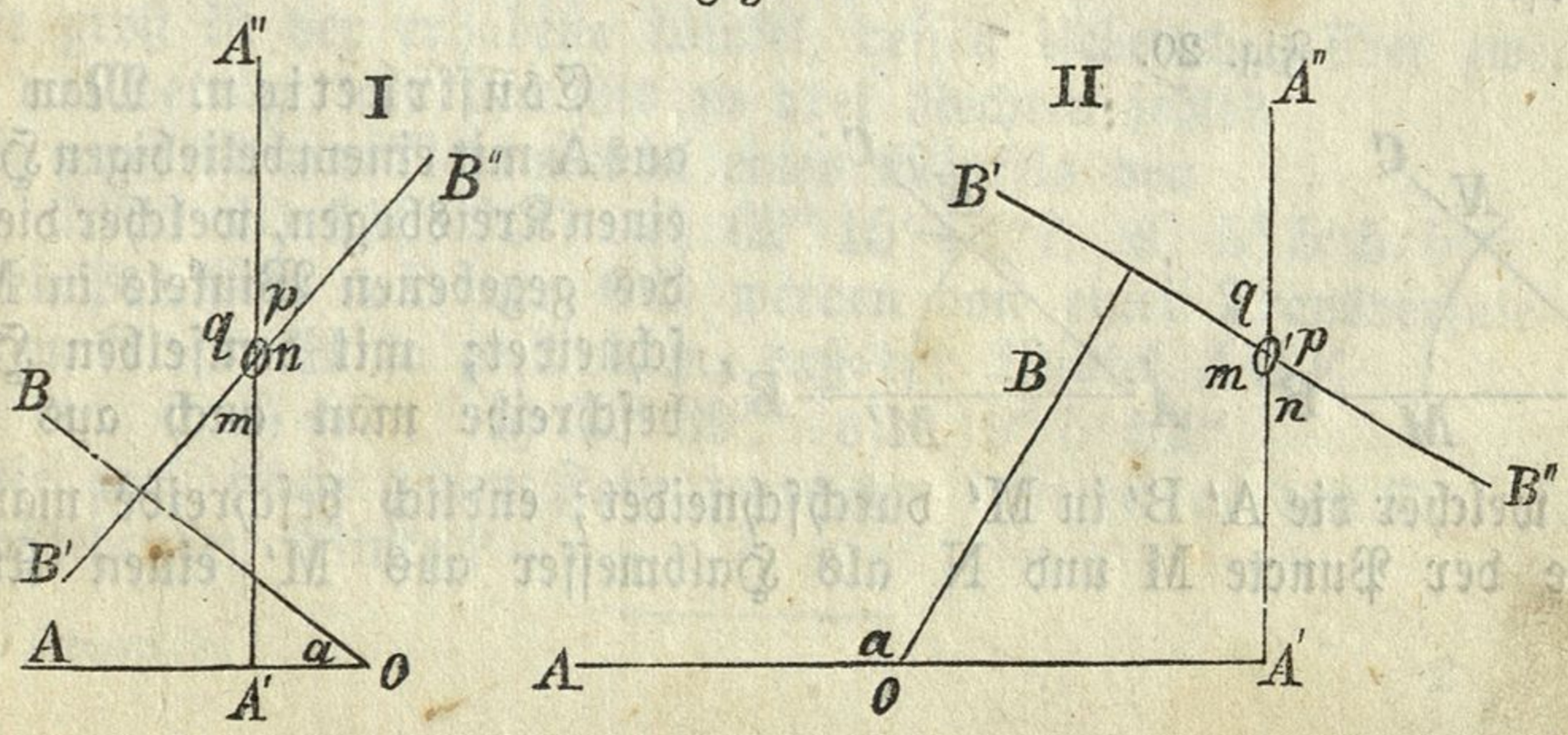
Beweis. a) Verlängert man OB, bis sie A' A" in C schneidet, so ist (nach §. 26) m = v und a = v, folglich auch m = a. — Aus m = a und m = p (§. 18, 1) folgt auch p = a.

b) Nach a) ist m = a, aber n + m = 2R; mithin auch n + a = 2R. Da n = q, so ist auch q + a = 2R.

Ebenso wird der Beweis geführt, wenn man den Punct O' in der Winkelfläche AOB annimmt.

2. Dreht man in der vorhergehenden Fig. 17 die Geraden A' A" und B' B" als eine feste Verbindung um den Punct O' in einer bestimmten Richtung, die hier der Pfeil anzeigt, um 90°, so kommen dieselben in eine Lage gegen den Winkel AOC, wie sie Fig. 18 darstellt; es wird A' A" ⊥ OA und B'B" ⊥ OB, während dabei die Winkel m, n, p, q ungeändert bleiben. Die Schenkel dieser Winkel heißen in der neuen Lage auf die Schenkel des Winkels AOB in demselben oder im entgegengesetzten Sinne senkrecht, je nachdem sie vor ihrer Drehung um 90° mit den Schenkeln dieses Winkels in demselben oder im entgegengesetzten Sinne parallel waren. So ist O'A' auf OA, oder O'B' auf OB in demselben Sinne senkrecht, dagegen O'A" auf OA, oder O'B" auf OB im entgegengesetzten Sinne senkrecht.

Fig. 18.



Lehrsatz. Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen, sind a) einander gleich, wenn beide Paare der Schenkel in demselben, oder beide im entgegengesetzten Sinne aufeinander senkrecht sind; dagegen b) Supplementwinkel, wenn zwei Schenkel in demselben, die beiden anderen aber im entgegengesetzten Sinne auf einander senkrecht sind.

Folgt aus dem unter 1. bewiesenen Lehrsatze.

VI. Aufgaben.

§. **29.** Forderungssätze.

1. Durch zwei gegebene Puncte eine gerade Linie zu ziehen.

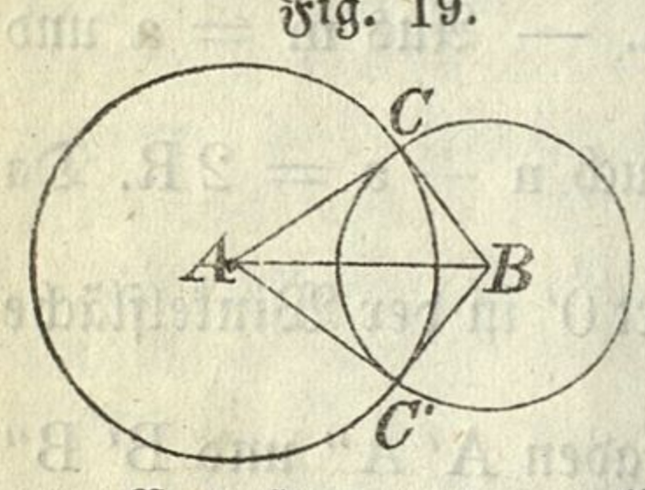
2. Aus einem gegebenen Puncte mit einem gegebenen Halbmesser eine Kreislinie zu beschreiben.

Zur Ausführung dieser beiden Postulate bedient man sich beziehungsweise des Lineals und des Cirkels.

§. **30.** Constructionsaufgaben.

1. Einen Punct zu construiren, welcher von einem gegebenen Puncte A (Fig. 19) den Abstand a, und von einem zweiten gegebenen Puncte B den Abstand b hat.

Fig. 19.



Analysis. Es sei C der gesuchte Punct. Da C von A den Abstand a haben soll, so ist der aus A mit dem Halbmesser a beschriebene Kreis ein geometrischer Ort für den Punct C (§. 20, Folges. 5); da ferner C von B den Abstand b haben soll, so ist der aus B mit dem Halbmesser b beschriebene Kreis ein zweiter geometrischer Ort für C; der Punct C liegt also im Durchschnitte dieser Oerter.

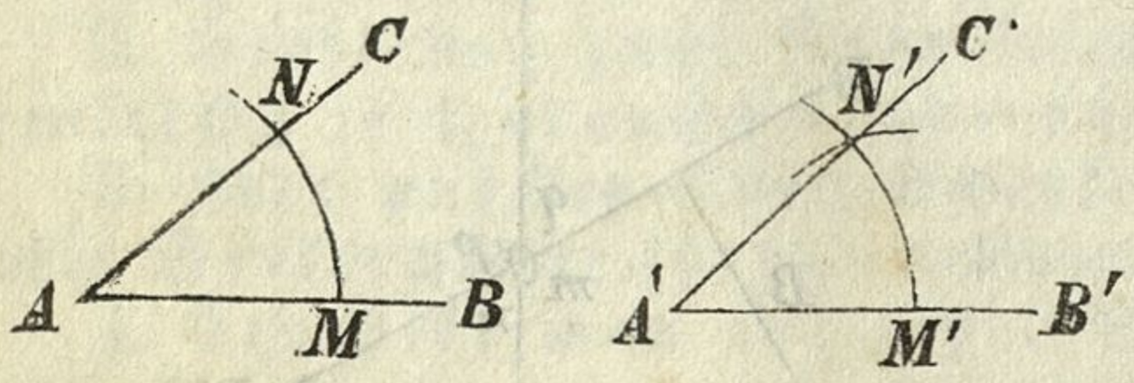
Construction. Man beschreibe aus A einen Kreis mit dem Halbmesser a, und aus B einen Kreis mit dem Halbmesser b; ihr Durchschnitt C ist der gesuchte Punct.

Beweis. Nach der Construction ist $AC = a$, $BC = b$.

Determination. Ist $a + b < AB$, so treffen die Kreise in keinem Puncte zusammen; in diesem Falle hat die Aufgabe keine Lösung. Ist $a + b = AB$, so liegt der gesuchte Punct in der Geraden AB; ist $a + b > AB$, so gibt es zwei Puncte C und C', welche der Aufgabe genügen.

2. In einem Puncte A' (Fig. 20) an eine Gerade A' B' einen Winkel zu verzeichnen, welcher einem gegebenen Winkel BAC gleich ist.

Fig. 20.



Construction. Man beschreibe aus A mit einem beliebigen Halbmesser einen Kreisbogen, welcher die Schenkel des gegebenen Winkels in M und N schneidet; mit demselben Halbmesser beschreibe man auch aus A' einen Bogen, welcher die A' B' in M' durchschneidet; endlich beschreibe man mit dem Abstande der Puncte M und N als Halbmesser aus M' einen Kreisbogen,

welcher den von A' aus beschriebenen Bogen in N' schneidet; zieht man nun durch A' und N' die Gerade A' C', so ist B' A' C' der verlangte Winkel.

Der Beweis folgt aus §. 21, 2.

VII. Uebungssätze und Uebungsaufgaben.

§. 31. Uebungssätze.

Beweise folgende Sätze:

1. Die Halbirungslinien zweier Nebenwinkel stehen senkrecht auf einander.
2. Die Halbirungslinie eines zweier Scheitelwinkel halbirt auch den andern.
3. Die Halbirungslinien zweier Gegen- oder Wechselwinkel an zwei parallelen, von einer Transversale geschnittenen Geraden sind parallel.
4. Die Halbirungslinien zweier Anwinkel an zwei von einer Transversale geschnittenen Parallelen stehen senkrecht auf einander.

§. 32. Constructionsaufgaben.

1. Gegeben sind zwei Strecken m und n; construire a) ihre Summe, b) ihre Differenz.

2. In einer Geraden sind zwei Puncte A und B gegeben; stelle darin den Punct C so, daß

a) $AB = AC + CB$, b) $AB = AC - CB$ wird.

3. Ziehe drei Strecken m, n, p so, daß $m > n + p$ ist, und construire eine vierte Strecke, welche gleich ist

a) $m + n + p$, b) $m + n - p$, c) $m - n + p$, d) $m - n - p$.

4. Construire eine Strecke, welche 2-, 3-, 4-, 5mal so lang ist, als eine gegebene Strecke.

5. Construire einen Punct, welcher von dem Puncte A die Entfernung a, und von dem Puncte B die Entfernung b hat.

6. Gegeben ist der Winkel AOB; construire a) seinen Nebenwinkel, b) seinen Scheitelwinkel.

7. Gegeben sind zwei Winkel m und n; verzeichne einen Winkel, welcher a) der Summe, b) der Differenz derselben gleich ist.

8. Gegeben ist ein Winkel AOB; ziehe durch den Scheitel O eine Gerade OC so, daß

a) $AOB = AOC + COB$, b) $AOB = AOC - COB$ wird.

9. Verzeichne drei Winkel m, n, p so, daß $m > n + p$ und $m + n + p < 360^0$ ist, und construire einen vierten Winkel, welcher

a) $m + n + p$, b) $m + n - p$, c) $m - n + p$, d) $m - n - p$ gleich ist.

10. Construire einen Winkel, welcher 2-, 3-, 4-, 5mal so groß ist, als ein gegebener Winkel.

§. 33. Rechnungsaufgaben.

1. Wie groß ist der erhabene Winkel, dessen Ueberschuß über zwei Rechte gerade so viel beträgt, als ihm bis zu drei Rechten fehlt?

2. Wie groß ist der Nebenwinkel eines Winkels von

a) 73^0? b) $108^0\,31'$? c) $62^0\,15'\,48''$? d) $5^0\,5'\,5{\cdot}5''$?

3. Zwei Parallele AB und CD werden von einer Transversale EF in den Puncten G und H so geschnitten, daß der Winkel AGE

a) 37^0, b) $78^0\,39'$, c) $119^0\,5'\,52''$

beträgt; wie groß ist in jedem Falle jeder der übrigen an den Durchschnittspuncten entstehenden Winkel?

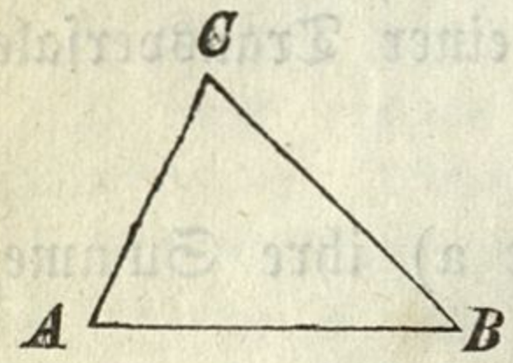
Zweiter Abschnitt.

Das Dreieck.

I. Erklärungen und allgemeine Eigenschaften der Dreiecke.

§. **34.** Eine von drei geraden Linien begrenzte Figur wird ein Dreieck genannt. Die drei Geraden heißen Seiten des Dreieckes.

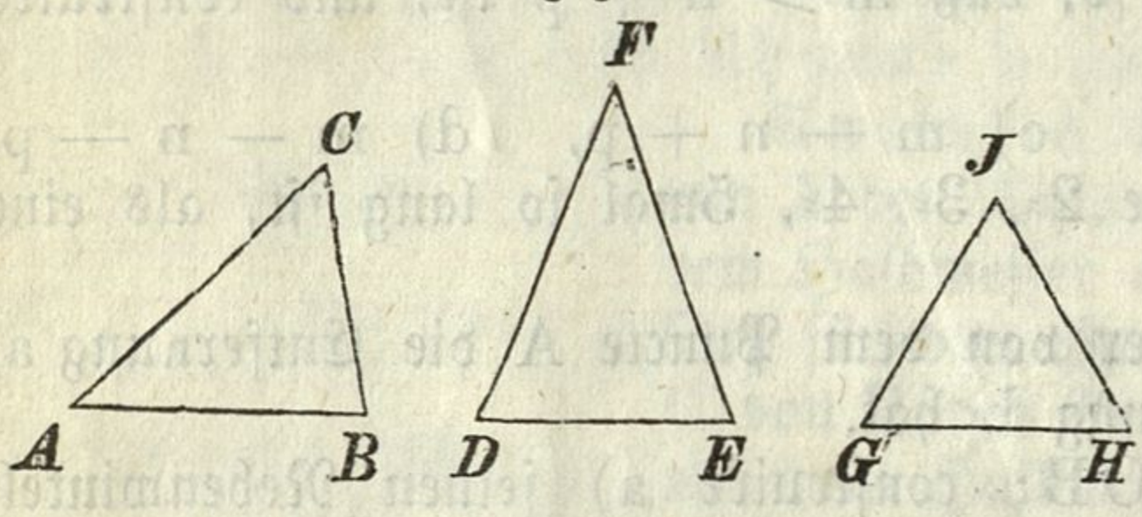
Fig. 21.



Bei jedem Dreiecke hat man auf sechs Bestandtheile Rücksicht zu nehmen, auf drei Seiten und auf drei Winkel. Jede Seite, z. B. AB (Fig. 21) hat zwei anliegende Winkel A und B, und einen gegenüberliegenden C; jeder Winkel, z. B. A, wird von zwei Seiten AB und AC eingeschlossen, die dritte BC liegt ihm gegenüber.

§. **35.** In Hinsicht der Seiten werden die Dreiecke in ungleichseitige, gleichschenklige und gleichseitige eingetheilt (Fig. 22).

Fig. 22.

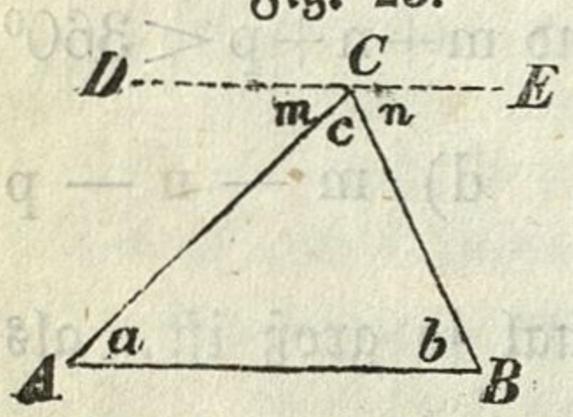


Ein Dreieck, in welchem jede Seite von jeder anderen verschieden ist, heißt ungleichseitig, wie ABC; ein Dreieck, in welchem zwei Seiten gleich sind, heißt gleichschenklig, wie DEF; ein Dreieck, in welchem alle drei Seiten gleich sind, heißt gleichseitig, wie GHI.

Im gleichschenkligen Dreiecke nennt man die beiden gleichen Seiten DF und EF die Schenkel, die dritte Seite DE die Grundlinie, und den dieser gegenüberliegenden Eckpunct F die Spitze oder den Scheitel.

§. **36.** In Hinsicht der Winkel eines Dreieckes gilt folgender Lehrsatz: Die Summe aller Winkel eines Dreieckes ist gleich zwei Rechten.

Fig. 23.



Beweis. Zieht man durch C (Fig. 23) DE ∥ AB,

$$\left.\begin{array}{r} \text{so ist } a = m, \\ b = n, \end{array}\right\} \text{ nach §. 26, 2;}$$

daher $a + b + c = m + n + c$;

nun ist $m + n + c = 2R$ (§. 16, 3),

folglich muß auch $a + b + c = 2R$ sein.

Ließen sich die drei Winkel a, b, c nicht auch um den Scheitel B an der verlängerten Dreiecksseite AB darstellen, und wie wäre dann der Beweis zu führen?

Folgesätze:

a) Sind in einem Dreiecke zwei Winkel bekannt, so findet man den dritten, indem man die Summe der beiden gegebenen Winkel von 180° subtrahirt.

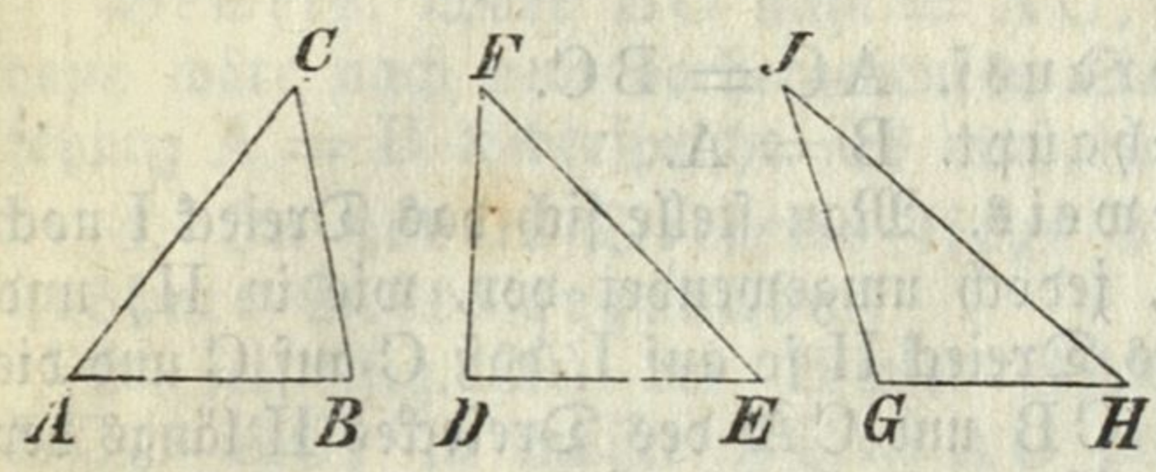
b) Sind zwei Winkel eines Dreieckes zwei Winkeln eines andern Dreieckes gleich, so müssen auch die dritten Winkel in beiden Dreiecken gleich sein.

c) Ist ein Winkel eines Dreieckes so groß als die beiden andern zusammengenommen, so ist er ein Rechter.

d) Die Summe zweier Winkel eines Dreieckes ist immer kleiner als zwei Rechte; in einem Dreiecke kann daher nur ein rechter, so wie auch nur ein stumpfer Winkel sein.

§. 37. Mit Rücksicht auf die Winkel werden die Dreiecke in spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige eingetheilt (Fig. 24).

Fig. 24.



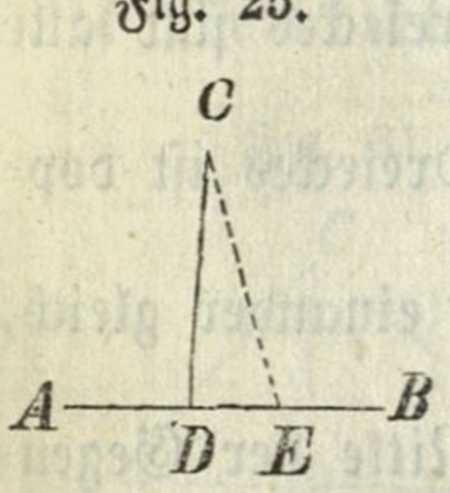
Ein Dreieck heißt spitzwinklig, wenn alle drei Winkel spitz sind; rechtwinklig, wenn darin ein rechter; stumpfwinklig, wenn darin ein stumpfer Winkel vorkommt. ABC ist ein spitzwinkliges, DEF ein rechtwinkliges und GHJ ein stumpfwinkliges Dreieck.

In einem rechtwinkligen Dreiecke heißt die Seite EF, welche dem rechten Winkel gegenüber liegt, die Hypotenuse; die beiden Seiten DE und DF, welche den rechten Winkel bilden, werden die Katheten genannt. Das spitz- und stumpfwinklige Dreieck bezeichnet man mit dem gemeinschaftlichen Namen schiefwinklige Dreiecke.

§. 38. Lehrsätze:

1. Von einem Puncte außerhalb einer geraden Linie kann zu dieser nur eine einzige Senkrechte gezogen werden.

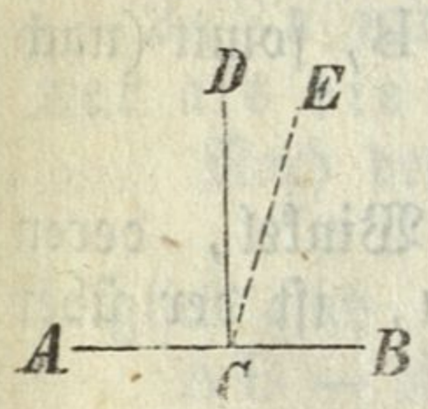
Fig. 25.



Es sei CD ⊥ AB (Fig. 25); dann kann aus C auf die AB keine zweite Linie, z. B. CE, senkrecht geführt werden. Denn im Dreiecke CDE ist der Winkel CDE nach der Voraussetzung ein rechter, somit CED ein spitzer; die CE steht also auf AB nicht senkrecht, sondern schief.

2. In einem Puncte einer Geraden kann auf diese nur eine einzige Senkrechte errichtet werden.

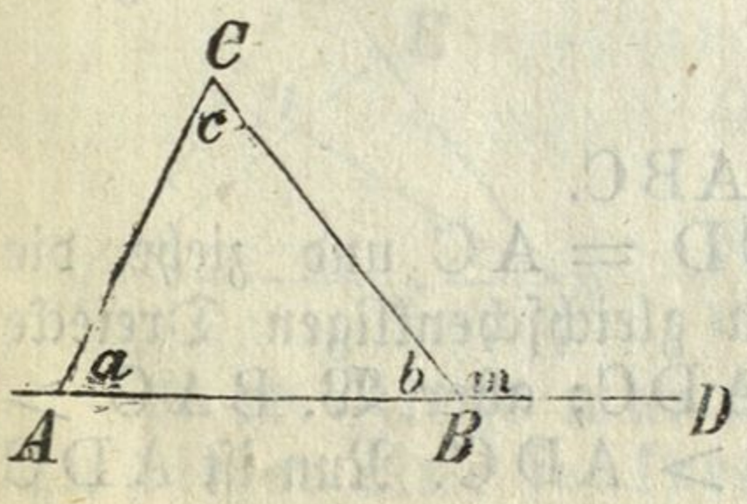
Fig. 26.



Es sei CD ⊥ AB (Fig. 26); dann kann in C auf die AB nicht noch eine zweite Linie, z. B. CE, senkrecht errichtet werden. Denn der Winkel BCD ist nach der Annahme ein rechter, folglich muß ECB ein spitzer Winkel sein. CE steht also nicht senkrecht auf AB.

§. 39. Verlängert man in einem Dreiecke eine Seite, so heißt der Winkel, welcher von dieser Verlängerung mit der anstoßenden Seite gebildet wird, ein Außenwinkel des Dreieckes; z. B. CBD (Fig. 27) ist ein Außenwinkel des Dreieckes ABC.

Fig. 27.



Jeder Außenwinkel eines Dreieckes ist gleich der Summe der beiden inneren ihm nicht anliegenden Winkel.

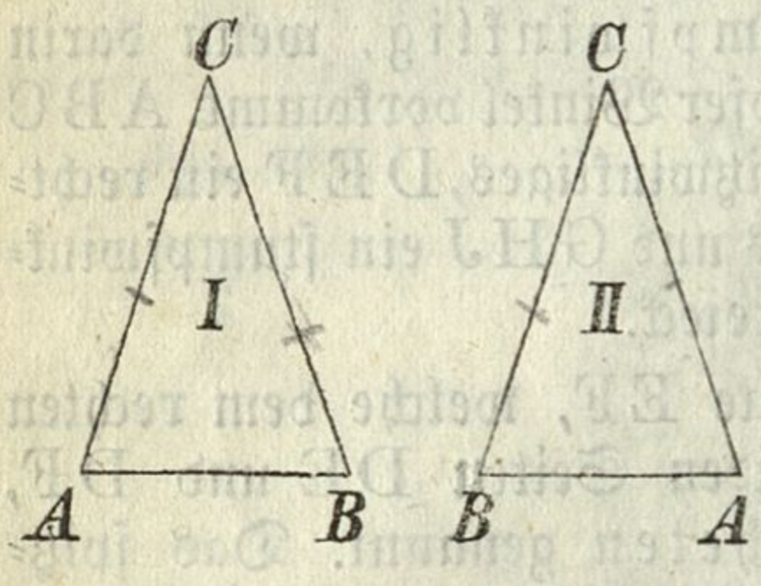
Denn es ist $m + b = 2R$, ferner $a + b + c = 2R$; daher auch $m + b = a + b + c$, oder wenn man beiderseits den Winkel b wegnimmt, $m = a + c$.

Folgesatz. Jeder Außenwinkel eines Dreieckes ist größer als ein innerer ihm nicht anliegender Winkel.

§. 40. Beziehungen zwischen den Seiten eines Dreieckes und den ihnen gegenüberliegenden Winkeln.

1. In jedem Dreiecke liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber (Fig. 28).

Fig. 28.



Voraussf. AC = BC.
Behaupt. B = A.
Beweis. Man stelle sich das Dreieck I noch einmal, jedoch umgewendet vor, wie in II, und lege das Dreieck II so auf I, daß C auf C und die Seiten CB und CA des Dreieckes II längs der Seiten CA und CB des Dreieckes I zu liegen kommen, was möglich ist, weil die Winkel C in beiden Dreiecken gleich sind. Dann müssen wegen BC = AC auch die Puncte B und A des Dreieckes II in die Puncte A und B des Dreieckes I, und somit die Seite BA des ersteren auf die Seite AB des letzteren fallen; es deckt also der W. B des Dreieckes II den Winkel A des Dreieckes I; folglich A = B.

Folgesätze.

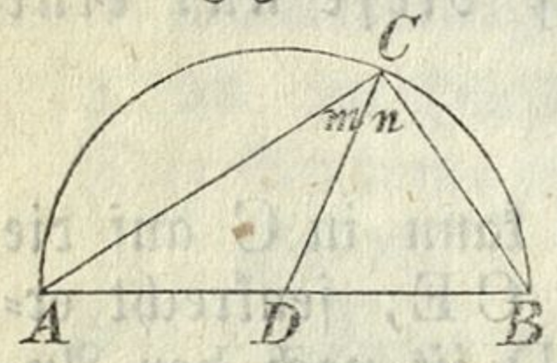
a) In einem gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich. Durch einen Winkel eines gleichschenkligen Dreieckes sind alle bestimmt (§. 36, a).

b) Der Außenwinkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes ist doppelt so groß als jeder Winkel an der Grundlinie (§. 39).

c) In einem gleichseitigen Dreiecke sind alle drei Winkel einander gleich, und daher jeder 60^0.

d) Ist in einem Dreiecke die von einem Eckpuncte zur Mitte der Gegenseite gezogene Gerade gleich der halben Gegenseite, so ist das gegebene Dreieck an jenem Eckpuncte rechtwinklig.

Fig. 29.



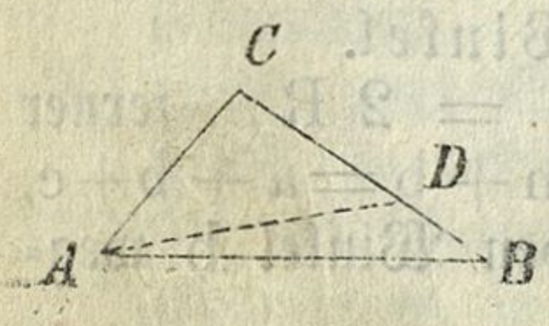
Ist (Fig. 29) CD = AD = BD, so ist m = A, n = B, daher m + n = ACB = A + B, somit (nach §. 36, c) der Winkel ACB = R.

e) Der geometrische Ort der Scheitel aller rechten Winkel, deren Schenkel durch die Endpuncte einer gegebenen Strecke gehen, ist der über dieser Strecke als Durchmesser beschriebene Halbkreis.

Dieser Satz, welcher aus d) folgt, ist gleichbedeutend mit der unbestimmten Aufgabe: Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn die Hypotenuse gegeben ist.

2. In jedem Dreiecke liegt der größeren Seite auch der größere Winkel gegenüber (Fig. 30).

Fig. 30.



Voraussf. BC > AC.
Behaupt. W. BAC > ABC.
Beweis. Man mache CD = AC und ziehe die Gerade AD. Dann ist in dem gleichschenkligen Dreiecke CAD der Winkel DAC = ADC; aber W. BAC > DAC, folglich auch W. BAC > ADC. Nun ist ADC

ein Außenwinkel des Dreieckes ABD und daher größer als der innere entgegengesetzte Winkel ABC; somit muß um so mehr W. BAC > ABC sein.

3. In jedem Dreiecke liegen gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber (Fig. 28).

Voraussf. A = B.

Behaupt. BC = AC.

Beweis. Wäre BC nicht = AC, so müßte BC ≷ AC sein. Allein dann wäre nach dem vorhergehenden Satze auch A ≷ B, was der Voraussetzung A = B widerspricht. Es muß daher BC = AC sein.

4. In jedem Dreiecke liegt dem größeren Winkel auch die größere Seite gegenüber.

Es sei (Fig. 30) der Winkel BAC > ABC. Gesetzt, es sei nicht BC > AC, so müßte BC = AC oder BC < AC sein. Aus der ersten Annahme würde folgen, daß BAC = ABC ist; aus der zweiten, daß BAC < ABC ist; beides widerstreitet der Voraussetzung BAC > ABC. Es muß daher BC > AC sein.

Folgesätze:

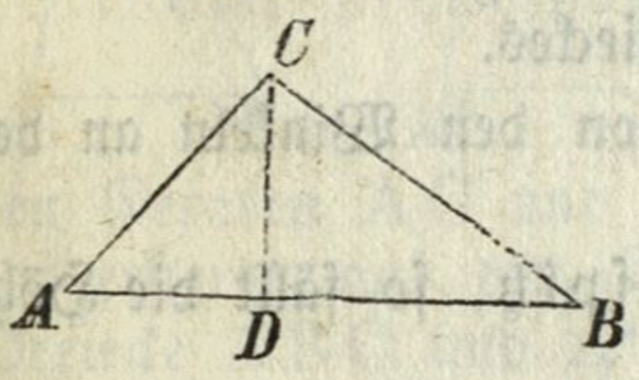
a) Im rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse größer als die Kathete.

b) Im stumpfwinkligen Dreiecke ist die dem stumpfen Winkel gegenüberstehende Seite die größte.

§. **41.** Beziehungen zwischen den Seiten eines Dreieckes.

1. In jedem Dreiecke ist die Summe je zweier Seiten größer als die dritte Seite.

Fig. 31.



Es sei ABC (Fig. 31) ein Dreieck, dessen größte Seite AB ist. Denkt man sich CD ⊥ AB, so ist (nach §. 40, 4. Folgesf. a)

AC > AD, und
BC > BD, daher

AC + BC > AD + BD, oder
AC + BC > AB.

Daß AB + BC > AC und AB + AC > BC ist, folgt unmittelbar aus der Voraussetzung.

2. In jedem Dreiecke ist die Differenz je zweier Seiten kleiner als die dritte Seite (Fig. 31).

Nach dem vorhergehenden Satze ist

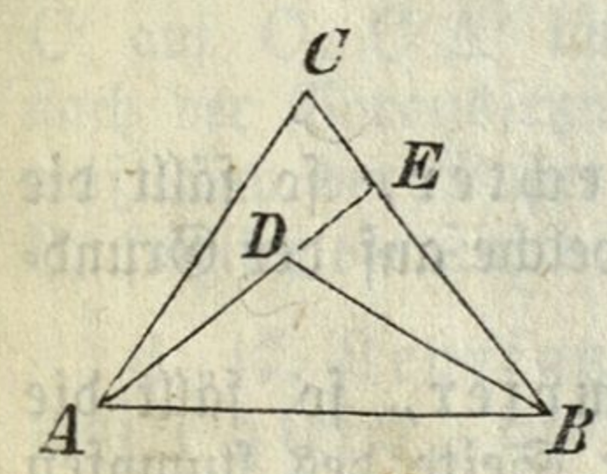
AB < AC + BC und BC < AB + AC,

folglich auch

AB − AC < BC, AB − BC < AC und BC − AC < AB.

3. In jedem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten größer als die Summe zweier Geraden, die einen inneren Punct desselben mit den Endpuncten der dritten Seite verbinden (Fig. 32).

Fig. 32.



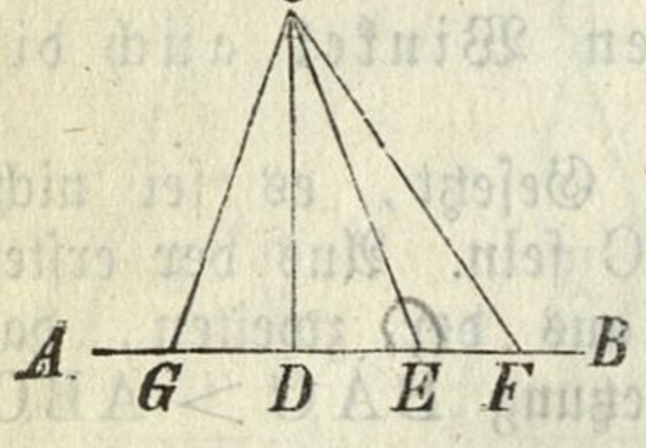
Hier ist zu beweisen, daß, wenn D innerhalb des △ ABC liegt, AC + BC > AD + BD sein müsse.

Man verlängere AD bis E, und vergleiche zuerst die Summe AC + BC mit der Summe AE + BE, und dann letztere mit AD + BD.

§. **42.** Zieht man von einem Puncte außerhalb einer Geraden zu dieser eine senkrechte und mehrere schiefe Gerade, so ist

1. die Senkrechte die kürzeste unter diesen Geraden;
2. zwei Schiefe, deren Fußpuncte auf der gegebenen Geraden von dem Fußpuncte der Senkrechten gleichweit abstehen, sind einander gleich; und
3. von zwei Schiefen, deren Fußpuncte auf der Geraden von dem Fußpuncte der Senkrechten ungleiche Entfernungen haben, ist die entferntere die größere.

Fig. 33.



1. Ist (Fig. 33) $CD \perp AB$, so ist in den rechtwinkligen Dreiecken CDE, CDF, CDG die Kathete CD kürzer als jede der Hypotenusen CE, CF, CG.

2. Ist $CD \perp AB$ und $DE = DG$, so wird, wenn man das $\triangle$ CDG so auf das $\triangle$ CDE legt, daß CD auf CD und DG längs der DE zu liegen kommt, wegen $DG = DE$ der Punct G auf E, also auch CG auf CE fallen; folglich ist $CE = CG$.

3. Ist $CD \perp AB$, so ist in dem rechtwinkligen $\triangle$ CDE der Winkel CED spitz, daher sein Nebenwinkel CEF stumpf, und somit im stumpfwinkligen $\triangle$ CEF die Seite $CF > CE$.

Zusätze: a) Von allen drei Sätzen gelten auch die Umkehrungen.

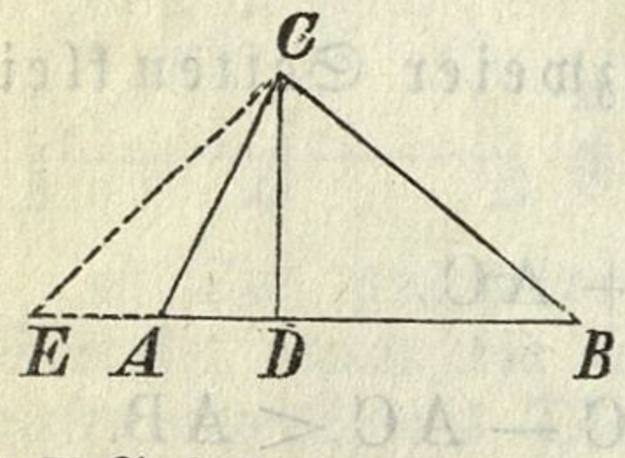
b) Unter der Entfernung eines Punctes von einer Geraden versteht man die kürzeste Linie zwischen beiden, also die von dem Puncte zu der Geraden gezogene Senkrechte.

§. 43. Nimmt man irgend eine Seite eines Dreieckes als Grundlinie an, so heißt die Senkrechte, welche von dem gegenüberliegenden Scheitel auf die Grundlinie gefällt wird, die Höhe des Dreieckes.

Die Lage der Höhe eines Dreieckes hängt von den Winkeln an der Grundlinie ab.

1. Sind beide Winkel an der Grundlinie spitz, so fällt die Höhe innerhalb des Dreieckes.

Fig. 34.



Sind im Dreiecke ABC (Fig. 34) die Winkel A und B spitz, so stehen AC und BC auf AB schief auf, und es kann also die Höhe erstlich nicht in eine der Seiten CA oder CB fallen; die Höhe kann ferner auch nicht außerhalb des Dreieckes, z. B. nach CE hin fallen, weil der Winkel CAB nach der Voraussetzung spitz, daher sein Nebenwinkel CAE stumpf, und folglich im Dreiecke ACE der Winkel AEC spitz ist, während er ein rechter sein müßte, wenn CE die Höhe des Dreieckes ABC sein sollte. Die Höhe muß also innerhalb des Dreieckes zu liegen kommen.

Auf ähnliche Art läßt sich nachweisen:

2. Ist ein Winkel an der Grundlinie ein rechter, so fällt die Höhe des Dreieckes mit jener Kathete zusammen, welche auf der Grundlinie senkrecht steht.
3. Ist ein Winkel an der Grundlinie ein stumpfer, so fällt die Höhe außerhalb des Dreieckes, und zwar auf der Seite des stumpfen Winkels.

II. Congruenz der Dreiecke.

§. 44. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie gleiche Form und gleiche Größe haben; congruente Dreiecke müssen daher über einander gelegt sich vollkommen decken. Damit dieses möglich sei, müssen in den Dreiecken alle sechs Stücke, nämlich alle drei Seiten und alle drei Winkel paarweise gleich sein. In congruenten Dreiecken sind die Seiten, welche den gleichen Winkeln gegenüberliegen, einander gleich, und ebenso sind die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüber liegen, gleich.

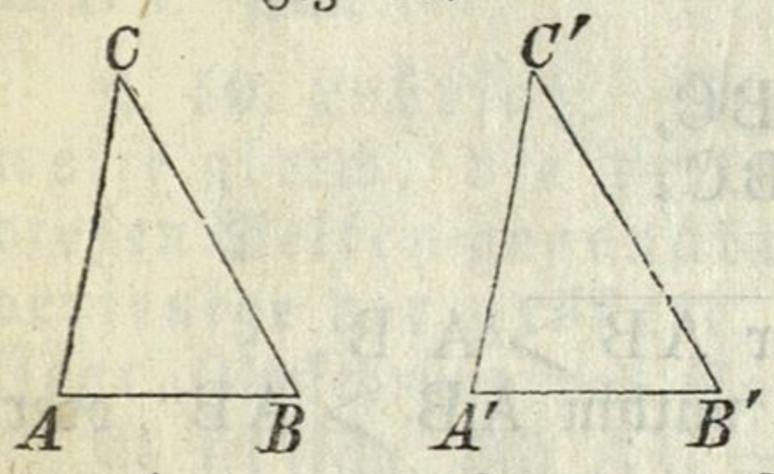
Wegen des innigen Zusammenhanges zwischen den Seiten und den Winkeln eines Dreieckes ist es oft erlaubt, schon aus der wechselseitigen Gleichheit dreier Stücke in zwei Dreiecken auf deren Congruenz zu schließen. Die Fälle, in denen dieß geschehen kann, sind in den folgenden Lehrsätzen enthalten.

§. 45. I. Congruenzsatz. Sind in zwei Dreiecken eine Seite und die beiden anliegenden Winkel paarweise gleich, so sind die Dreiecke congruent. (Fig. 35.)

Voraussetzung. Seite $AB = A'B'$, Winkel $A = A'$ und $B = B'$.

Behauptung. $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Fig. 35.



Beweis. Man lege das $\triangle A'B'C'$ so auf ABC, daß die Puncte A' und B' auf die Puncte A und B fallen, was möglich ist, weil $AB = A'B'$ ist. Weil der Winkel $A = A'$ ist, so muß $A'C'$ längs AC fallen; ebenso muß wegen $B = B'$ die Seite $B'C'$ längs BC zu liegen kommen. Wenn aber die Geraden $A'C'$ und $B'C'$ längs den Geraden AC und BC fallen, so muß auch der Durchschnittspunct C' der ersteren auf den Durchschnittspunct C der letzteren fallen. Die beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$ decken sich also, über einander gelegt, vollkommen, folglich sind sie congruent.

Folgesatz. Zwei Dreiecke, welche eine Seite und irgend zwei gleichliegende Winkel paarweise gleich haben, sind congruent. (§. 36, b.)

§. 46. II. Congruenzsatz. Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel paarweise gleich, so sind die beiden Dreiecke congruent. (Fig. 35.)

Voraussetzung. Es sei $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ und $C = C'$.

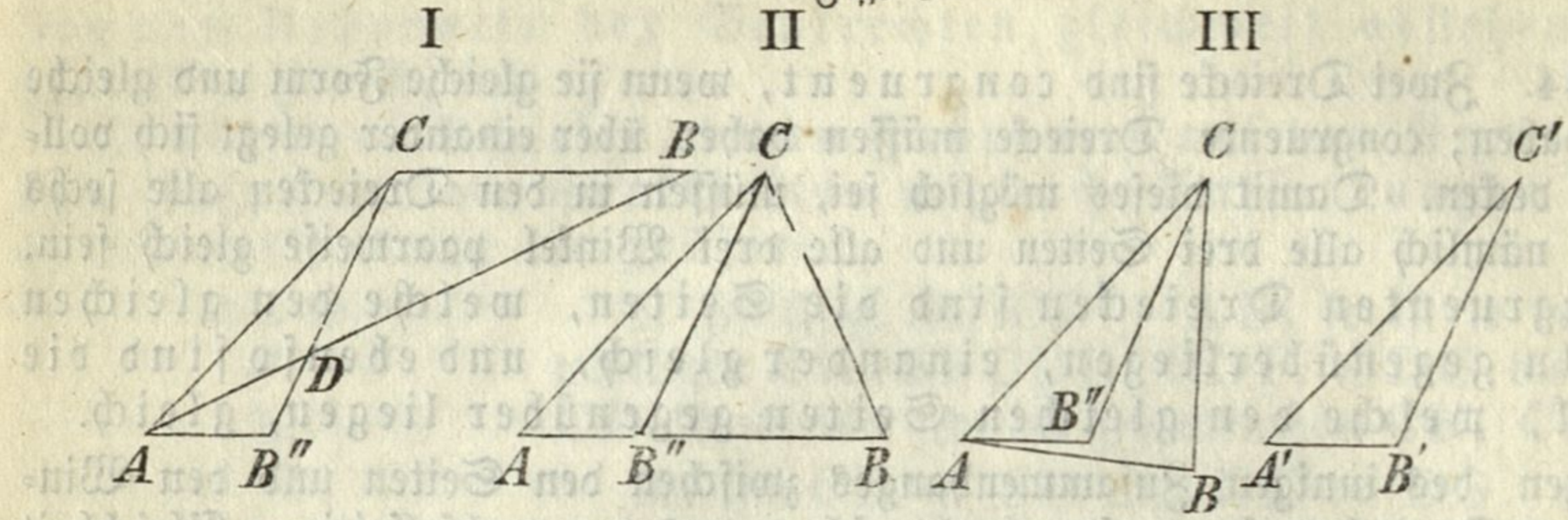
Behauptung. $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Beweis. Man lege das Dreieck $A'B'C'$ so auf das Dreieck ABC, daß C' auf C, $C'A'$ längs CA und $C'B'$ längs CB falle, was möglich ist, da nach der Voraussetzung die Winkel C' und C gleich sind; wegen $AC = A'C'$ muß auch der Punct A' auf A, und wegen $BC = B'C'$ der Punct B' auf B, folglich die Seite $A'B'$ auf AB fallen; folglich ist $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

§. 47. Lehrsatz. Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten paarweise gleich, die von ihnen eingeschlossenen Winkel aber ungleich, so sind auch die dritten Seiten ungleich, und zwar ist

diejenige die größere, welche dem größeren Winkel gegenüberliegt. (Fig. 36.)

Fig. 36.



Voraussetzung. $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ und Winkel $ACB > A'C'B'$.

Behauptung. $AB > A'B'$.

Beweis. Man nehme den Winkel $ACB'' = A'C'B'$ an und mache $CB'' = C'B'$, so ist $\triangle ACB'' \cong A'C'B'$, also $AB'' = A'B'$. Der Punct B'' kann hiebei entweder außerhalb des Dreieckes ABC (wie in I), oder auf der Dreiecksseite AB (wie in II), oder innerhalb des Dreieckes ABC (wie in III) liegen.

Im ersten Falle ist

$$AD + B''D > AB'',$$
$$BD + C\,D > BC;$$

also $AD + BD + B''D + C\,D > AB'' + BC$,

oder $AB + B''C > AB'' + BC$;

aber $B''C = BC$,

folglich $AB > AB''$, oder $AB > A'B'$.

Im zweiten Falle ist AB'' ein Theil der AB; mithin $AB > AB''$, oder $AB > A'B'$.

Im dritten Falle ist (nach §. 41, 3)

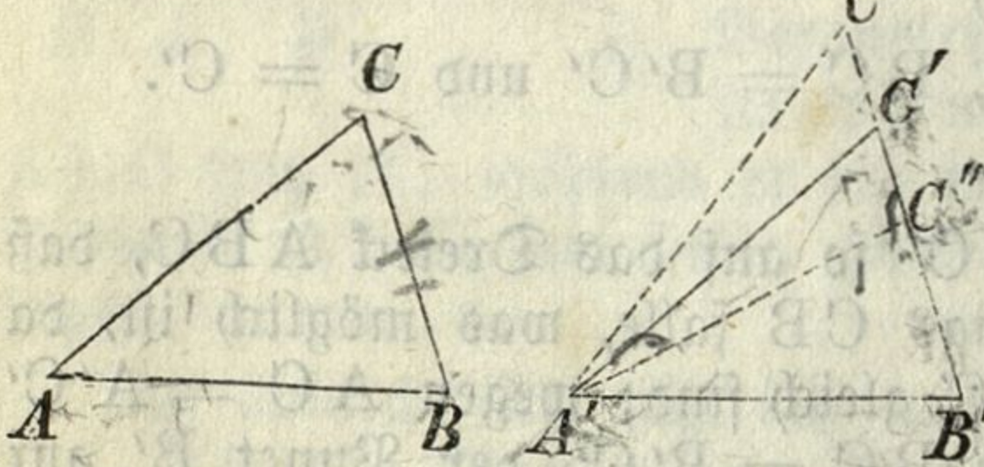
$$AB + BC > AB'' + B''C,$$

aber $BC = B''C$;

folglich $AB > AB''$, oder $AB > A'B'$.

§. 48. III. Congruenzsatz. Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten mit dem der größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel paarweise gleich, so sind die Dreiecke congruent.

Fig. 37.



Voraussetzung. Es sei (Fig. 37) $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, ferner $AC > AB$, somit auch $A'C' > A'B'$, endlich der Winkel $ABC = A'B'C'$.

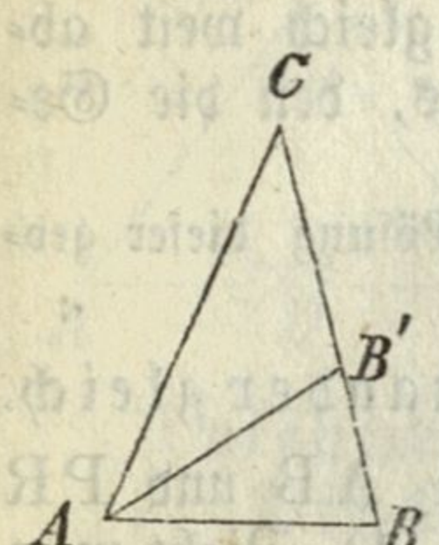
Behaupt. $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Beweis. Es ist zunächst $BC = B'C'$. Denn wäre $BC < B'C'$, etwa $BC = B'C''$, so würde, wenn man $A'C''$ zieht, (nach §. 46) $\triangle ABC \cong A'B'C''$, und daher $AC = A'C''$ sein. Allein nach der Voraussetzung ist $AC = A'C'$; es müßte also auch $A'C'' = A'C'$, somit der Winkel $A'C'C'' = A'C''C'$ sein. $A'C''C'$ ist aber (nach §. 39) größer als $A'B'C'$, also müßte auch $A'C'B' > A'B'C'$ und daher (nach §. 40, 4) die Seite $A'B' > A'C'$ sein, was der Voraussetzung widerspricht. — Ebenso würde sich ein Widerspruch ergeben, wenn $BC > B'C'$, etwa $BC = B'C'''$ wäre.

Ist aber $BC = B'C'$, so ist (nach §. 46) $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Zusatz. Die Schlußfolgerungen des obigen Beweises stützen sich auf die vorausgesetzte Bedingung, daß der Winkel, in welchem beide Dreiecke übereinstimmen, der größeren der zwei übereinstimmenden Seiten gegenüber liegt.

Fig. 38.



Ist diese Bedingung nicht vorhanden, so können auch nicht jene Schlüsse gemacht werden.

Wenn daher in zwei Dreiecken zwei Seiten mit dem der kleineren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel wechselseitig gleich sind, so ist es nicht gestattet, auf die Congruenz der Dreiecke zu schließen. Wirklich haben die Dreiecke ABC und AB'C (Fig. 38) die Seite $AB = AB'$, $AC = AC$, wo $AB = AB' < AC$ ist, und den Winkel $C = C$, und doch sind sie nicht congruent, da das $\triangle AB'C$ nur ein Theil des $\triangle ABC$ ist.

§. 49. IV. Congruenzsatz. Sind in zwei Dreiecken alle drei Seiten paarweise gleich, so sind die Dreiecke congruent. (Fig. 35.)

Voraussetzung. $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$.

Behauptung. $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Beweis. Man braucht nur zu zeigen, daß $A = A'$ ist. Wäre $A \gtrless A'$, so müßte (nach §. 47) bezüglich $BC \gtrless B'C'$ sein, was der Voraussetzung widerspricht. Es muß also $A = A'$, folglich (nach §. 46) $\triangle ABC \cong A'B'C'$ sein.

§. 50. Lehrsatz. Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten paarweise gleich, die dritten Seiten aber ungleich, so sind auch die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel ungleich, und zwar ist derjenige der größere, welcher der größeren Seite gegenüberliegt. (Umkehrung des Satzes in §. 47.)

Es sei (Fig. 36) $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ und $AB > A'B'$; zu beweisen ist, daß $ACB > A'C'B'$ sein muß.

Wäre $ACB = A'C'B'$, so müßte (nach §. 46) auch $AB = A'B'$ sein; wäre $ACB < A'C'B'$, so müßte (nach §. 47) auch $AB < A'B'$ sein. Beides widerspricht der Voraussetzung; folglich muß $ACB > A'C'B'$ sein.

§. 51. Da congruente Dreiecke in Form und Größe übereinstimmen, so folgt, daß die Bestandtheile, aus deren Gleichheit in zwei Dreiecken man auf die Congruenz dieser letzteren schließen kann, die Form und die Größe eines Dreieckes vollkommen beistimmen. Die ein Dreieck vollkommen bestimmenden Bestandtheile sind also:

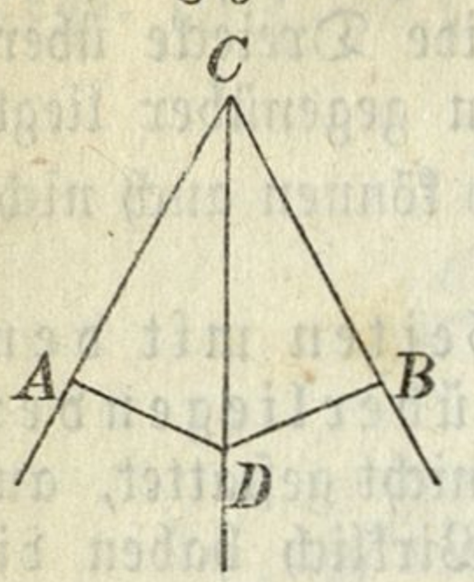
1. eine Seite mit zwei Winkeln;
2. zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel;
3. zwei Seiten mit dem der größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel;
4. alle drei Seiten.

Unter den bestimmenden Bestandtheilen eines Dreieckes muß sich immer wenigstens eine Seite befinden.

Anwendung der Congruenzsätze.

§. 52. Zieht man von einem Puncte der Halbirungslinie eines Winkels auf die Schenkel desselben Senkrechte, so sind diese einander gleich.

Fig. 39.



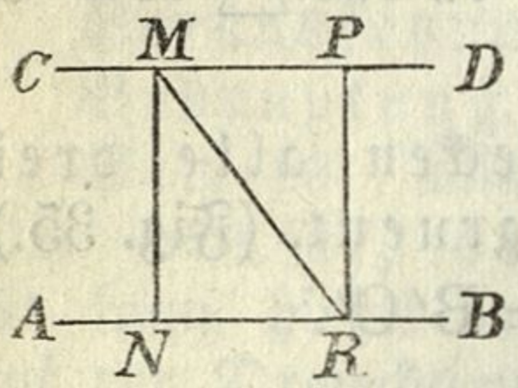
Es sei (Fig. 39) der Winkel ACD = BCD, ferner DA ⊥ CA und DB ⊥ CB, so ist △ CAD ≅ CBD (§. 45, Folges.), daher DA = DB.

Folgesatz. Der geometrische Ort aller Puncte, welche von zwei nichtparallelen Geraden gleich weit abstehen, ist die Halbirungslinie des Winkels, den die Geraden bilden.

Wie lautet die unbestimmte Aufgabe, deren Lösung dieser geometrische Ort enthält?

§. 53. 1. Senkrechte zwischen Parallelen sind einander gleich.

Fig. 40.



Es sei (Fig. 40) CD ∥ AB, MN ⊥ AB und PR ⊥ AB; folglich auch MN ∥ PR (§. 27, 1). Zieht man MR, so ist △ MNR ≅ RPM (§. 26, 2. a und §. 45), daher MN = PR.

Zusatz. Die Senkrechte zwischen zwei Parallelen dient als Maß für ihren Abstand. Man kann daher den obigen Satz auch so ausdrücken:

Zwei parallele Gerade haben überall denselben Abstand von einander.

2. Umgekehrt. Sind die Senkrechten, die man von zwei beliebigen Puncten einer Geraden auf eine andere zieht, einander gleich, so ist die erste Gerade der zweiten parallel.

Es sei (Fig. 40) MN ⊥ AB, PR ⊥ AB und MN = PR. Zieht man MR, so ist △ MPR ≅ RNM (§. 26, 2. a und §. 46), daher Winkel PMR = NRM, und somit CD ∥ AB (§. 26, 1.).

Folgesätze. a) Der geometrische Ort aller Puncte, welche von einer gegebenen Geraden einen gegebenen Abstand haben, ist die mit der Geraden in dem gegebenen Abstande gezogene Parallele.

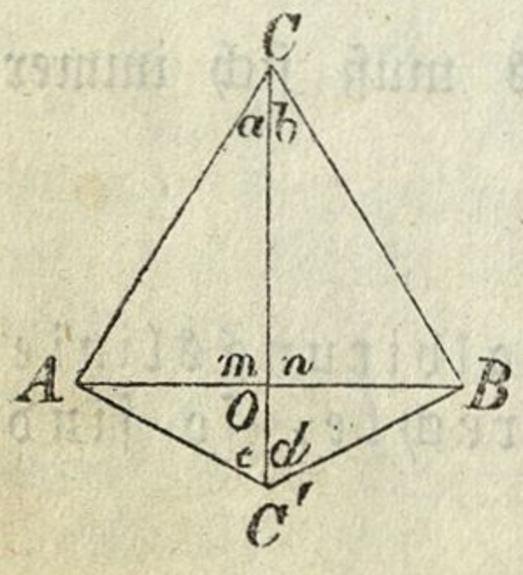
Ein anderer Ausdruck für diesen geometrischen Ort:

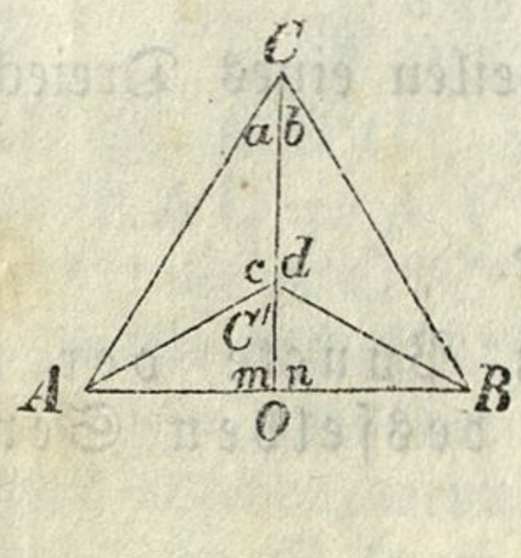
Der geometrische Ort der Scheitel aller Dreiecke, welche über derselben Grundlinie eine gleiche Höhe haben, ist die mit der Grundlinie parallele Gerade, deren Abstand von der Grundlinie gleich der Höhe ist.

b) Der geometrische Ort aller Puncte, welche von zwei Parallelen gleich weit entfernt sind, ist die Gerade, welche durch den Halbirungspunct des Abstandes dieser Parallelen mit ihnen parallel gezogen wird.

§. 54. Haben zwei gleichschenklige Dreiecke dieselbe Grundlinie, und verbindet man ihre Scheitel durch eine Gerade, so halbirt diese 1) die Winkel an den Scheiteln, 2) die gemeinschaftliche Grundlinie, und 3) sie steht auf der Grundlinie senkrecht. (Fig. 41.)

Fig. 41.





Voraus. AC = BC, AC' = BC'.

1. Behaupt. a = b, c = d.

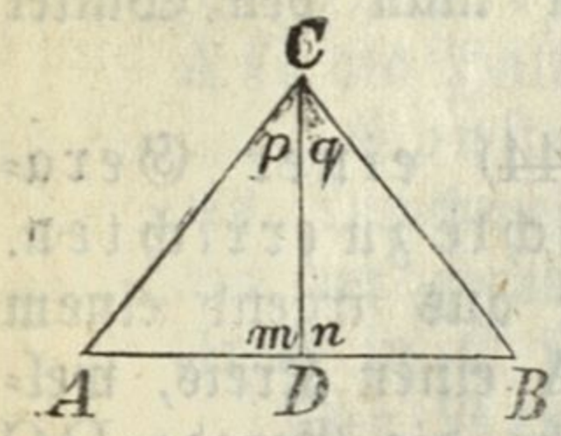
Beweis. △ ACC' ≅ BCC' (§. 49), daher a = b, c = d.

2. und 3. Behaupt. AO = BO, CO ⊥ AB.

Beweis. △ AOC ≅ BOC (§. 46); folglich AO = BO, und m = n oder CO ⊥ AB.

§. 55. 1. Verbindet man in einem gleichschenkligen Dreiecke die Mitte der Grundlinie mit dem Scheitel durch eine Gerade, so steht diese auf der Grundlinie senkrecht und halbirt den Winkel am Scheitel. (Fig. 42.)

Fig. 42.



Voraussetzung. AC = BC, AD = BD.

Behauptung. CD ⊥ AB und p = q.

Beweis. △ ACD ≅ BCD (§. 49), daher m = n oder CD ⊥ AB, und p = q.

Umkehrungen des vorhergehenden Satzes:

2. Die Senkrechte, welche von der Spitze eines gleichschenkligen Dreieckes auf die Grundlinie gezogen wird, halbirt die Grundlinie und den Winkel am Scheitel (Fig. 42).

Der Beweis folgt aus §. 48.

3. Wird der Winkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes durch eine Gerade halbirt, so halbirt diese auch die Grundlinie und steht auf der Grundlinie senkrecht (Fig. 42).

Der Beweis folgt aus §. 46.

4. Wenn die Senkrechte, welche von der Spitze eines Dreieckes zu der gegenüberstehenden Seite gezogen wird, diese halbirt, so ist das Dreieck gleichschenklig und der Winkel am Scheitel wird durch die Senkrechte halbirt (Fig. 42).

Der Beweis gründet sich auf §. 46.

5. Die Senkrechte, welche man in der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes auf diese errichtet, geht durch den Scheitel (Fig. 42).

Folgt aus 1., da die Verbindungslinie zwischen dem Scheitel und der Mitte der Grundlinie auf dieser senkrecht steht, durch die Mitte der Grundlinie aber auf diese nur eine einzige Senkrechte gezogen werden kann.

Folgesatz. Der geometrische Ort der Scheitel aller gleichschenkligen Dreiecke, welche dieselbe Grundlinie haben, ist die in der Mitte der Grundlinie auf diese errichtete Senkrechte.

Dieser Satz läßt sich auch so ausdrücken:

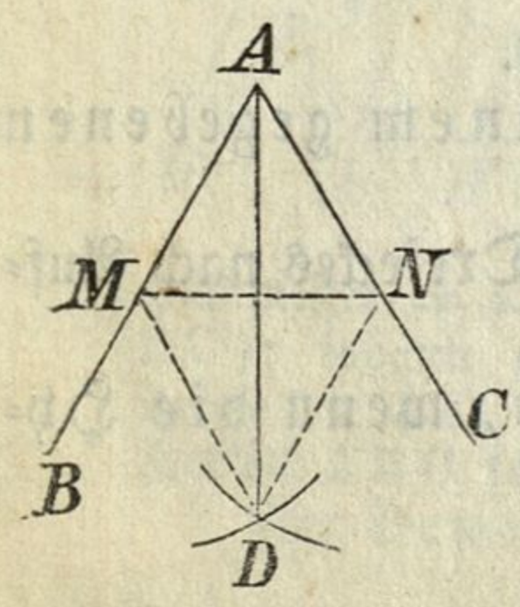
Der geometrische Ort aller Puncte, welche von zwei gegebenen Puncten gleich weit abstehen, ist die in der Mitte der Verbindungslinie beider Puncte auf dieselbe errichtete Senkrechte.

III. Aufgaben.

§. 56. Constructionsaufgaben.

1. Einen gegebenen Winkel BAC (Fig. 43) zu halbiren.

Fig. 43.



Analysis. Es sei AD die Halbirungslinie. Ist AM = AN, und zieht man von M und N zu einem beliebigen Puncte D der Halbirungslinie die Geraden MD und ND, so ist △ AMD ≅ AND, folglich MD = ND.

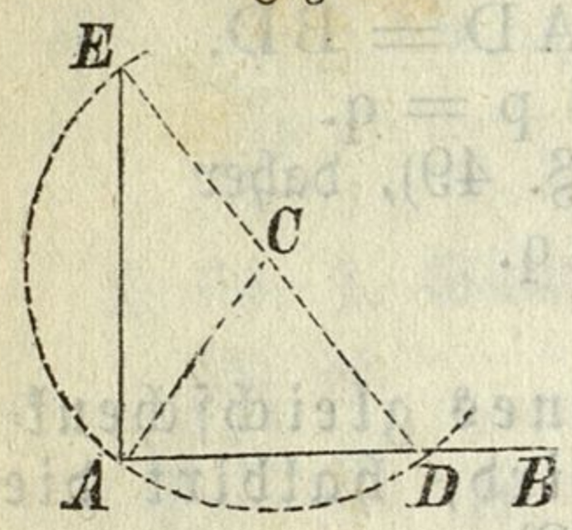
Construction. Man mache AM = AN, beschreibe aus M und N mit demselben Halbmesser Kreisbogen, welche sich in D schneiden, und ziehe AD.

Beweis. △ AMD ≅ AND, also Winkel MAD = NAD.

2. In einem gegebenen Puncte einer Geraden auf diese eine Senkrechte zu errichten.

Die Auflösung folgt aus jener der 1. Aufgabe, wenn man den Winkel $BAC = 180^0$ annimmt.

Fig. 44.



3. Im Endpuncte A (Fig. 44) einer Geraden AB auf diese eine Senkrechte zu errichten.

Auflösung. Man beschreibe aus irgend einem Puncte C mit dem Halbmesser CA einen Kreis, welcher die AB in D schneidet; ziehe die Gerade DC und verlängere sie bis an die Kreislinie in E; zieht man AE, so ist diese Gerade die gesuchte Senkrechte.

Der Beweis beruht auf §. 40, 1. d.

4. Eine gegebene Strecke MN (Fig. 43) zu halbiren.

5. Von einem Puncte A (Fig. 43) außerhalb einer Geraden MN auf diese eine Senkrechte zu ziehen.

Die Auflösungen dieser beiden Aufgaben ergeben sich aus §. 54.

6. Durch einen Punct M (Fig. 40) außerhalb einer Geraden AB mit dieser eine Parallele zu ziehen.

Auflösung. 1. Man ziehe von M die $MN \perp AB$, errichte in einem beliebigen Puncte R der Geraden AB die $RP \perp AB$, mache $RP = NM$ und ziehe durch M und P die Gerade CD. (§. 53.)

Auflösung. 2. Man ziehe durch M eine beliebige die AB schneidende Gerade MR und lege einen der entstehenden Winkel in M an die MR so an, daß Wechsel- oder Gegenwinkel entstehen; der zweite Schenkel des angelegten Winkels ist die gesuchte Parallele (§. 26, 1).

7. Ein Dreieck zu construiren, wenn seine drei Seiten gegeben sind.

Analysis. Es sei ABC (Fig. 21) das gesuchte Dreieck und AB die eine Seite. Da C von A den Abstand AC haben soll, so ist der aus A mit dem Halbmesser AC beschriebene Kreis ein geometrischer Ort für C; da ferner C von B den Abstand BC haben soll, so ist der aus B mit dem Halbmesser BC beschriebene Kreis ein zweiter geometrischer Ort für C; der Punct C liegt also im Durchschnitte beider Kreise.

Construction. Man construire die Strecke AB, welche der einen Seite gleich ist, beschreibe aus A mit der zweiten Seite, aus B mit der dritten Seite als Halbmesser Kreise, und verbinde den Durchschnitt C mit A und B.

Der Beweis liegt in der Construction.

Determination. Ist $AC + BC > AB$, so erhält man zwei Dreiecke, welche jedoch congruent sind; ist $AC + BC \leqq AB$, so gibt es kein Dreieck.

8. Ein gleichseitiges Dreieck zu construiren, wenn seine Seite gegeben ist.

Die Auflösung stimmt mit jener der Aufgabe 7 überein.

9. Ein Dreieck zu verzeichnen, welches mit einem gegebenen Dreiecke congruent ist.

Construction mit Hilfe der drei Seiten des gegebenen Dreieckes nach Aufgabe 7.

10. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn die Hypotenuse und eine Kathete gegeben sind.

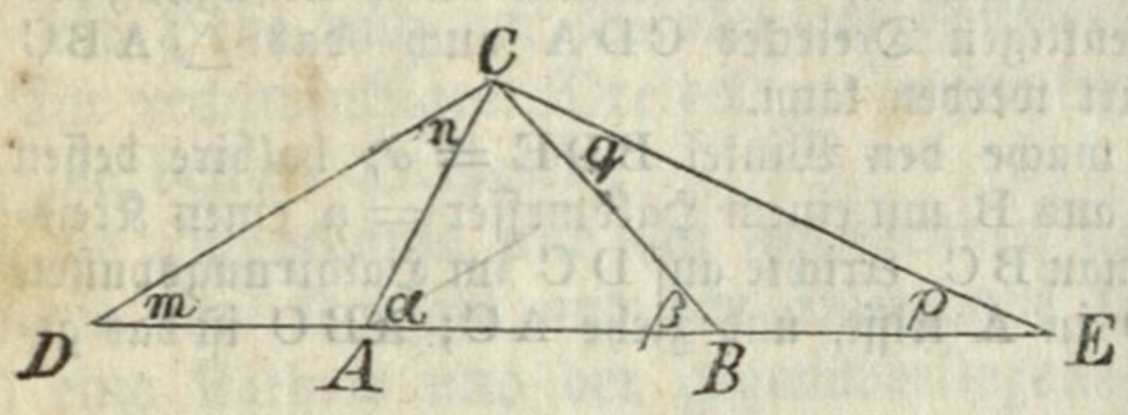
Analysis. Der Scheitel C (Fig. 29) des rechten Winkels liegt in der Kreislinie, welche über der Hypotenuse AB als Durchmesser beschrieben wird (§. 40, 1, e); er liegt ferner in der Kreislinie, welche aus A mit der Kathete AC als Halbmesser beschrieben wird; C ist also der Durchschnitt dieser Kreise.

Construction. Man beschreibe über der gegebenen Hypotenuse AB als Durchmesser einen Kreis, sodann aus dem Endpuncte A der Hypotenuse mit der gegebenen Kathete AC als Halbmesser einen Kreisbogen, welcher jenen Kreis in C schneidet; ACB ist das verlangte rechtwinklige Dreieck.

Der Beweis folgt aus der Analysis.

11. Ein Dreieck zu construiren, von welchem zwei Winkel und die Summe der drei Seiten gegeben sind (Fig. 45).

Fig. 45.



Analysis. Es sei ABC das verlangte Dreieck, welches die gegebenen Winkel BAC $= \alpha$, ABC $= \beta$, und die gegebene Summe der drei Seiten AB + AC + BC = s hat. Stellt man s dar, indem man die Seite AB nach beiden Seiten verlängert, so daß AD = AC und BE = BC wird, und zieht DC und EC, so läßt sich das △ DEC construiren, da DE = s, $m = \frac{\alpha}{2}$ und $p = \frac{\beta}{2}$ (nach §. 40, 1. b) ist. Vom Dreieck DEC aber gelangt man durch Abschneidung der gleichschenkligen Dreiecke DCA und ECB zum Dreieck ABC.

Construction. Man mache DE = s, trage in D und E die Winkel $m = \frac{\alpha}{2}$ und $p = \frac{\beta}{2}$ auf, deren Schenkel sich in C schneiden; in diesem Puncte construire man wieder die Winkel $n = \frac{\alpha}{2}$ und $q = \frac{\beta}{2}$, deren Schenkel die Gerade DE in A und B durchschneiden; ABC ist dann das verlangte Dreieck.

Beweis. Nach der Construction ist m = n und p = q, daher sind CAD und CBE gleichschenklige Dreiecke, und somit AC = AD und BC = BE; folglich

$$AB + AC + BC = AB + AD + BE = DE = s;$$

das Dreieck ABC hat also die gegebene Seitensumme s. Ferner ist

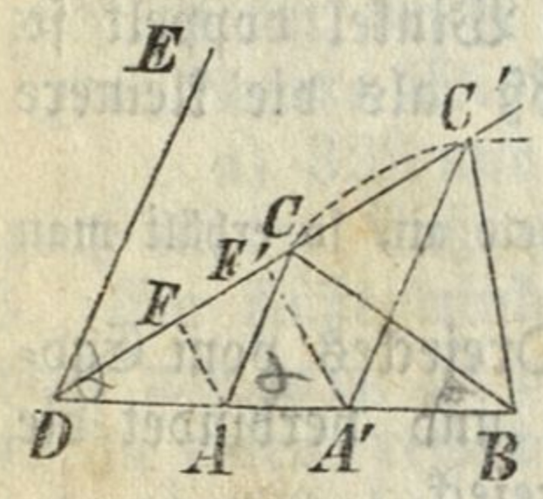
$$BAC = m + n = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha,$$

$$ABC = p + q = \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = \beta;$$

das Dreieck ABC hat also auch die beiden gegebenen Winkel α und β.

12. Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite, die Summe der beiden anderen Seiten und der von diesen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Fig. 46.



Analysis. Es sei ABC (Fig. 46) das gesuchte Dreieck, von welchem BC = a, AB + AC = s und W. BAC $= \alpha$ gegeben ist. Verlängert man BA so, daß AD = AC, also DB = s wird, und zieht DC, so läßt sich das Dreieck BDC, weil darin BD = s, BC = a und W. $BDC = \frac{\alpha}{2}$ (§. 40, 1. b) bekannt ist, construiren, mithin durch Abschneidung des gleichschenkligen Dreieckes CAD auch das Dreieck ABC.

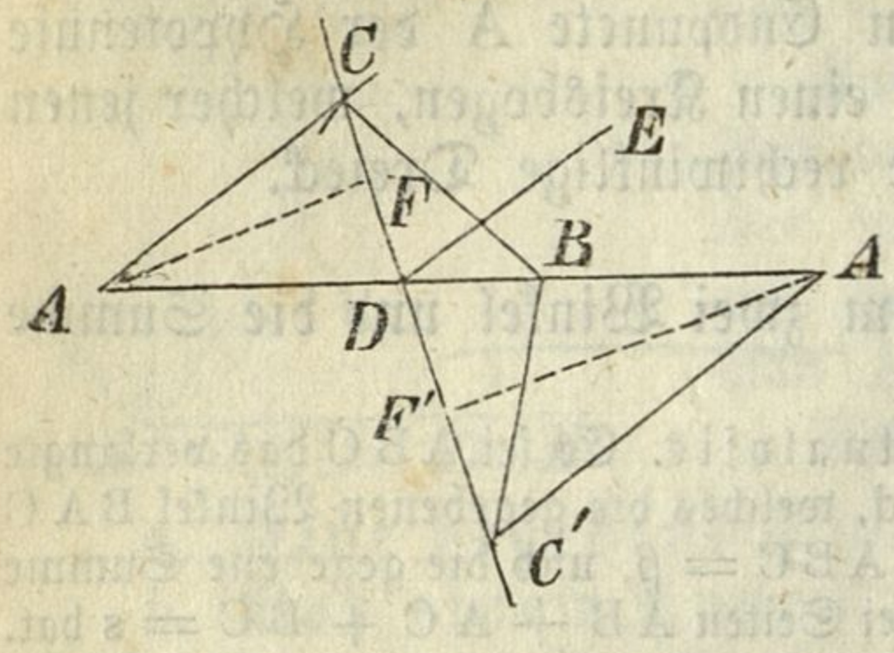
Construction. Man ziehe BD = s, mache den Winkel BDE $= \alpha$ und halbire denselben durch DC, beschreibe aus B mit einem Halbmesser = a einen Kreisbogen, der DC in C (oder C') schneidet und ziehe BC (oder BC'); sodann errichte man auf DC (DC') im Halbirungspuncte F (F') eine Senkrechte, welche die BD in A (A') trifft. Zieht man CA (oder C'A'), so erhält man das gesuchte Dreieck ABC (oder A'BC').

Der Beweis liegt in der Analysis.

Determination. Man erhält zwei Dreiecke ABC und A'BC', die jedoch congruent sind.

13. Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite, die Differenz der beiden andern Seiten und der von diesen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Fig. 47



Analysis. Es sei ABC (Fig. 47) das verlangte Dreieck, worin BC = a, AB − AC = d und W. BAC = α gegeben ist. Schneidet man von der AB ein Stück AD = AC ab und zieht CD, so ist W. ADC = $90^0 - \frac{\alpha}{2}$, d. i. die Hälfte eines Nebenwinkels von α; das Dreieck BDC, wovon die Seiten BC = a, BD = d und der der größeren dieser Seiten gegenüberliegende Winkel BDC = $90^0 + \frac{\alpha}{2}$ bekannt sind, läßt sich also construiren, woraus dann durch Anfügung des gleichschenkligen Dreieckes CDA auch das △ ABC construirt werden kann.

Construction. Man ziehe BD = d, mache den Winkel BDE = α, halbire dessen Nebenwinkel ADE durch DC und beschreibe aus B mit einem Halbmesser = a einen Kreisbogen, der DC in C schneidet; sodann ziehe man BC, errichte auf DC im Halbirungspuncte F eine Senkrechte, welche die verlängerte BD in A trifft, und ziehe AC; ABC ist das gesuchte Dreieck.

Der Beweis ergibt sich aus der Analysis.

Determination. Durch die voranstehende Construction erhält man noch ein zweites Dreieck A'BC', das jedoch mit dem früheren ABC congruent ist.

14. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn gegeben sind:

a) die Hypotenuse und die Summe der beiden Katheten;

b) die Hypotenuse und die Differenz der beiden Katheten.

Die Auflösungen dieser Aufgaben ergeben sich aus 12 und 13, wenn dort der Winkel $\alpha = 90^0$ gesetzt wird.

IV. Uebungssätze und Uebungsaufgaben.

§. 57. Uebungssätze.

1. Die Summe aller Außenwinkel eines Dreieckes ist gleich acht Rechten.

2. Halbirt man den Außenwinkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes, so ist die Halbirungslinie der Grundlinie parallel.

3. Die Senkrechte vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes theilt dieses in zwei Dreiecke, welche mit dem ganzen rechtwinkligen Dreiecke in den Winkeln übereinstimmen.

4. Verbindet man zwei beliebige Puncte zweier paralleler Geraden mit einander und halbirt die Verbindungslinie, so wird jede durch den Halbirungspunct zwischen den Parallelen gezogene Gerade in demselben halbirt.

5. Ist in einem rechtwinkligen Dreiecke einer der spitzen Winkel doppelt so groß als der andere, so ist die Hypotenuse doppelt so groß als die kleinere Kathete.

Legt man an das Dreieck ein congruentes mit der größeren Kathete an, so erhält man ein gleichseitiges Dreieck.

6. Schneidet man auf jeder Seite eines gleichseitigen Dreieckes vom Endpuncte aus eine gleiche Strecke in derselben Ordnung ab und verbindet die Durchschnittspuncte, so entsteht ein zweites gleichseitiges Dreieck.

§. 58. Constructionsaufgaben.

1. Einen Winkel a) von 90^0, b) von 45^0 zu construiren.

2. Einen Winkel a) von 60^0, b) von 30^0, c) von 15^0 zu construiren (Fig. 44).

3. Einen rechten Winkel in drei gleiche Theile zu theilen.
4. Gegeben sind zwei Winkel eines Dreieckes; construire den dritten.
5. In einer gegebenen Geraden einen Punct zu bestimmen, dessen Verbindungslinien mit zwei gegebenen Puncten außerhalb der Geraden mit derselben gleiche Winkel bilden.
6. Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren, wenn seine Höhe gegeben ist.
7. Ein gleichschenkliges Dreieck zu verzeichnen, wenn gegeben sind:
a) die Grundlinie und ein anliegender Winkel;
b) die Grundlinie und der Winkel am Scheitel;
c) ein Schenkel und ein Winkel an der Grundlinie;
d) ein Schenkel und ein Winkel am Scheitel;
e) die Grundlinie und die Höhe;
f) ein Schenkel und die Höhe;
g) die Höhe und der Winkel am Scheitel.
8. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn gegeben sind:
a) die beiden Katheten;
b) die Hypotenuse und ein anliegender Winkel;
c) die eine Kathete und der anliegende spitze Winkel;
d) eine Kathete und der gegenüberliegende Winkel;
e) die Hypotenuse und die Höhe auf dieselbe;
f) eine Kathete und die Höhe auf die Hypotenuse;
g) die Summe (oder Differenz) der Katheten und ein spitzer Winkel;
h) die Summe (oder Differenz) der Hypotenuse und einer Kathete und die andere Kathete.
i) die Summe (oder Differenz) der Hypotenuse und einer Kathete und ein spitzer Winkel.
9. Ein Dreieck zu construiren, wenn gegeben sind:
a) eine Seite und die beiden anliegenden Winkel;
b) eine Seite, ein anliegender und ein gegenüberliegender Winkel;
c) zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel;
d) zwei Seiten mit dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel;
e) zwei Seiten und die zu einer derselben gehörige Höhe;
f) eine Seite und die zu den beiden andern Seiten gehörigen Höhen;
g) die Summe (oder Differenz) zweier Seiten und zwei Winkel.

§. 59. Rechnungsaufgaben.

1. In einem Dreiecke sind zwei Winkel:
a) $\alpha = 57^0$, $\beta = 62^0$; b) $\alpha = 46^0\ 29'$, $\beta = 104^0\ 41'$; c) $\alpha = 78^0\ 19'\ 43''$, $\beta = 60^0\ 33'\ 18''$;
wie groß ist der dritte Winkel γ?
2. Zwei innere Winkel eines Dreieckes sind
a) 32^0 und 70^0, b) $44^0\ 8'\ 42''$ und $119^0\ 45'\ 53''$;
wie groß ist der Außenwinkel an der gegenüberliegenden Ecke?
3. Ein Außenwinkel m und ein innerer nicht anliegender Winkel α sind gegeben; wie groß ist der andere innere nicht anliegende Winkel β?
4. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist der eine Außenwinkel an der Hypotenuse a) 63^0, b) $112^0\ 18'$, c) $37^0\ 53'\ 40''$; wie groß ist der zweite Außenwinkel an der Hypotenuse?
5. Der Winkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes ist α; wie groß ist jeder Winkel an der Grundlinie?

6. In einem gleichschenkligen Dreiecke ist ein Winkel an der Grundlinie β; wie groß ist der Winkel am Scheitel?

7. Wie groß ist der Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks?

8. Wie groß sind die Winkel in einem gleichschenkligen Dreiecke, wenn der Winkel am Scheitel a) eben so groß, b) doppelt so groß, c) halb so groß als einer der Winkel an der Grundlinie ist?

Dritter Abschnitt.

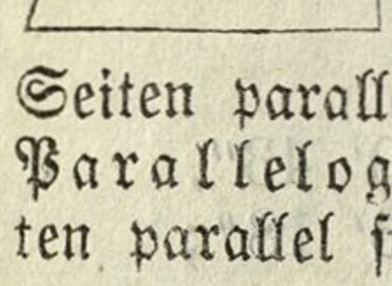
Das Viereck.

I. Erklärungen und Lehrsätze.

§. **60.** Eine von vier Geraden begrenzte Figur heißt ein Viereck.

Die Gerade AC (Fig. 48), welche zwei gegenüberstehende Eckpuncte des Viereckes verbindet, heißt eine Diagonale.

Fig. 48.



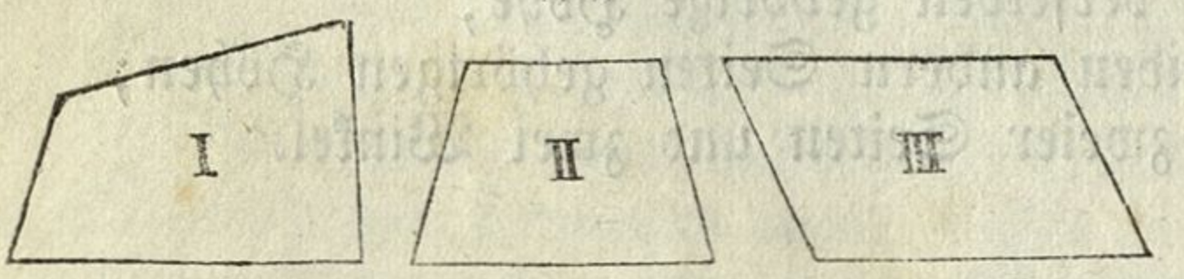
Ein Viereck hat vier Seiten, vier Winkel und zwei Diagonalen.

§. **61.** Lehrsatz. Die Summe aller Winkel eines Viereckes ist gleich vier Rechten.

Theilt man (Fig. 48) das Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke, so beträgt die Winkelsumme in jedem derselben zwei Rechte, also in beiden zusammen vier Rechte.

§. **62.** In Hinsicht der gegenseitigen Lage der Seiten werden die Vierecke in Trapezoide, Trapeze und Parallelogramme eingetheilt (Fig. 49).

Fig. 49.



Ein Trapezoid ist ein Viereck, in welchem keine Seite mit einer andern parallel ist, wie I. Ein Trapez ist ein Viereck, in welchem nur zwei gegenüberstehende Seiten parallel, die anderen zwei Seiten aber nicht parallel sind, wie II. Ein Parallelogramm ist ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberstehende Seiten parallel sind, wie III.

§. **63.** Lehrsatz. In einem Parallelogramm sind je zwei gegenüberliegende Winkel gleich.

Je zwei an einer Seite liegende Winkel sind nach §. 26, 2 gleich zwei Rechten, daher je zwei gegenüberliegende Winkel einander gleich.

Folgesätze:

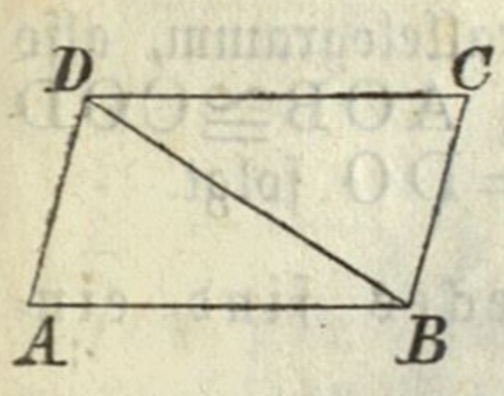
a) Ist in einem Parallelogramme ein Winkel ein rechter, so sind es auch die anderen.

b) Ist ein Winkel des Parallelogramms ein schiefer, so sind es auch die anderen.

Man unterscheidet daher rechtwinklige und schiefwinklige Parallelogramme.

§. **64.** Lehrsatz. In einem Parallelogramme sind je zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich.

Fig. 50.



Voraussetzung. Es sei ABCD (Fig. 50) ein Parallelogramm, also AB || CD, AD || BC.

Behaupt. AB = CD, AD = BC.

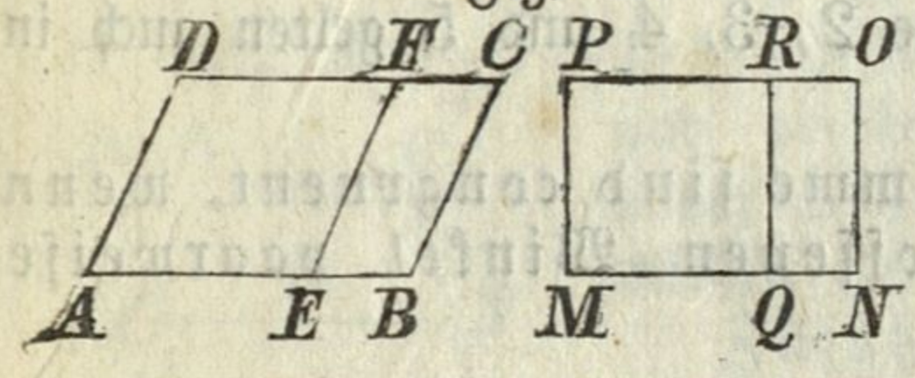
Beweis. Zieht man eine Diagonale BD, so ist △ ABD ≅ DCB (§. 26, 2. u. §. 45), daher AB = CD, AD = BC.

Folgesatz. Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich.

§. **65.** Sind in einem Parallelogramme zwei zusammentreffende Seiten gleich, so sind es auch die anderen; das Parallelogramm heißt in diesem Falle gleichseitig. Sind dagegen zwei zusammentreffende Seiten ungleich, so heißt das Parallelogramm ungleichseitig.

Nimmt man sowohl auf die Größe der Winkel (§. 63) als auf die Länge der Seiten Rücksicht, so ergeben sich (Fig. 51) vier Arten von Parallelogrammen:

Fig. 51.



1. das schiefwinklige und ungleichseitige oder das Rhomboid, wie ABCD;
2. das schiefwinklige und gleichseitige oder der Rhombus, wie AEFD;
3. das rechtwinklige und ungleichseitige oder das Rechteck, wie MNOP;
4. das rechtwinklige und gleichseitige oder das Quadrat, wie MQRP.

Nimmt man in einem Parallelogramme irgend eine Seite als Grundlinie an, so heißt die Senkrechte, welche von einem Punkte der gegenüberstehenden Seite auf diese Grundlinie gefällt wird, die Höhe des Parallelogrammes. In einem Rechtecke betrachtet man von zwei zusammentreffenden Seiten die eine als Grundlinie und die andere als Höhe. Im Quadrate sind die Grundlinie und die Höhe einander gleich, und zwar wird jede durch eine Seite des Quadrates vorgestellt. Unter der Höhe eines Trapezes versteht man die Senkrechte, welche von einem Puncte der einen parallelen Seite auf die andere parallele Seite gezogen wird.

§. **66.** Umkehrungen des Lehrsatzes in §. 64.

1. Sind in einem Vierecke die gegenüberstehenden Seiten gleich, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

Es sei in dem Vierecke ABCD (Fig. 50) AB = CD und AD = BC. Dann ist △ ABD ≅ BCD (§. 49), also sind die Wechselwinkel ABD und BDC, ebenso ADB und CBD gleich, woraus AB || CD und AD || BC folgt.

2. Sind in einem Vierecke zwei gegenüberstehende Seiten gleich und parallel, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

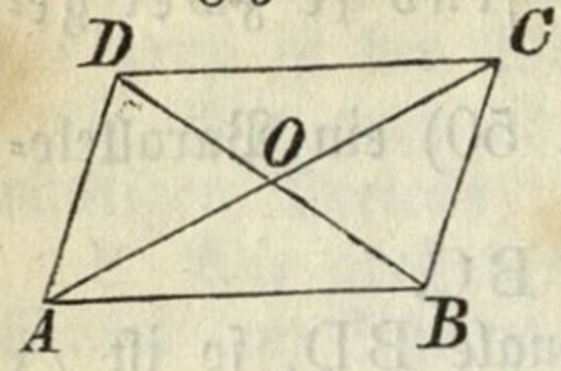
In dem Vierecke ABCD (Fig. 50) sei AB = CD und AB || CD. Dann ist △ ABD ≅ BCD (§. 46), also sind die Wechselwinkel ADB und CBD gleich, woraus AD || BC folgt.

§. **67.** Lehrsätze von den Diagonalen der Parallelogramme.

1. Jede Diagonale theilt das Parallelogramm in zwei congruente Dreiecke.

Der Beweis ist in §. 64 enthalten.

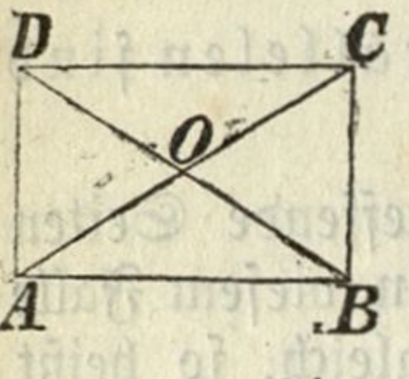
Fig. 52.



2. Die Diagonalen eines jeden Parallelogramms halbiren einander.

Es sei ABCD (Fig. 52) ein Parallelogramm, also AB || CD und AD || BC. Dann ist △ AOB ≅ COD (§. 45), woraus AO = CO und BO = DO folgt.

Fig. 53.

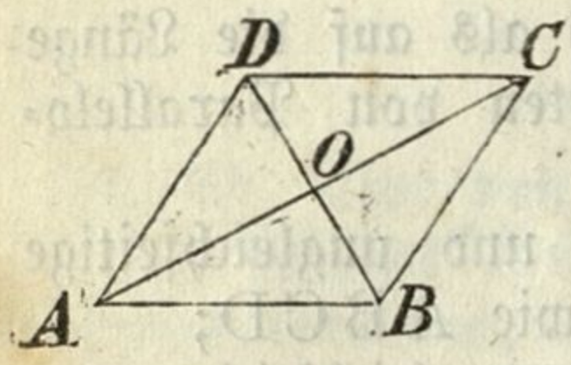


3. Die Diagonalen eines Rechteckes sind einander gleich.

Die rechtwinkligen Dreiecke ABC und BAD (Fig. 53) sind congruent, daher AC = BD.

4. Die Diagonalen eines Rhombus stehen senkrecht auf einander (Fig. 54).

Fig. 54.



Denn BDA und BDC sind gleichschenklige Dreiecke und daher AC ⊥ BD (§. 54).

5. Die Diagonalen eines Quadrates sind einander gleich und stehen senkrecht auf einander.

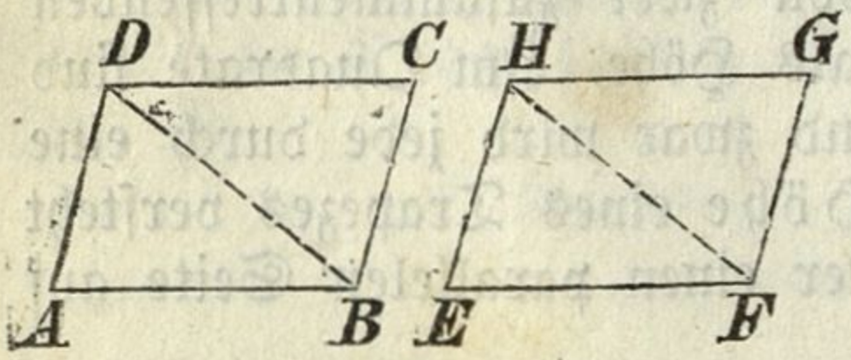
Folgt aus 3 und 4.

Zusatz. Die Sätze 2, 3, 4 und 5 gelten auch in ihren Umkehrungen.

§. 68. Lehrsatz. Zwei Parallelogramme sind congruent, wenn sie zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel paarweise gleich haben.

Es sei (Fig. 55) in den Parallelogrammen ABCD und EFGH die Seite AB = EF, AD = EH, und der Winkel A = E, so muß ABCD ≅ EFGH sein.

Fig. 55.



Zieht man die Diagonalen BD und FH, so ist △ ABD ≅ BCD und △ EFH ≅ FGH. Allein △ ABD ≅ EFH (§. 46), daher auch △ BCD ≅ FGH. Denkt man sich nun das Parallelogramm EFGH so auf ABCD gelegt, daß sich die congruenten Dreiecke ABD und EFH decken, so müssen auch die Dreiecke BCD und FGH zusammenfallen. Die beiden Parallelogramme sind demnach congruent.

Folgesätze.

a) Zwei Rechtecke sind congruent, wenn sie zwei zusammentreffende Seiten paarweise gleich haben.

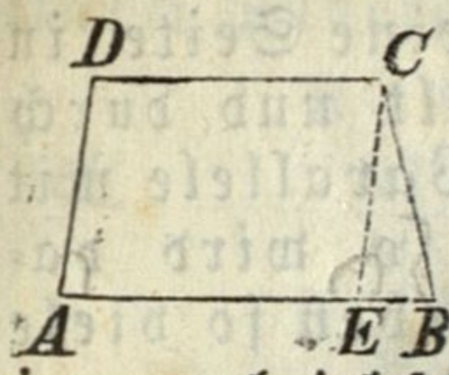
b) Zwei Quadrate sind congruent, wenn sie eine gleiche Seite haben.

c) Ein Parallelogramm ist durch zwei Seiten mit dem von ihnen eingeschlossenen Winkel, ein Rechteck durch zwei zusammentreffende Seiten, ein Quadrat durch eine Seite vollkommen bestimmt.

§. 69. Lehrsätze von den Trapezen.

1. Sind in einem Trapeze die Winkel an einer der beiden parallelen Seiten gleich, so sind die nicht parallelen Seiten des Trapezes einander gleich.

Fig. 56



Es sei (Fig. 56) AB||CD und A=B. Zieht man CE||AD, so ist EC=AD und W. CEB=A=B, also im △ BEC, EC=BC (40, 3), mithin auch AD=BC.

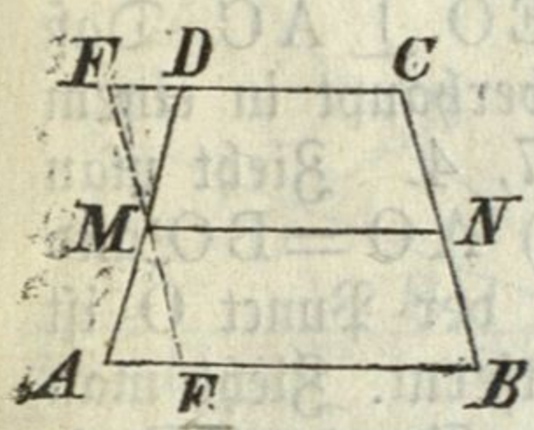
Ein Trapez, worin die nichtparallelen Seiten gleich sind, heißt ein gleichschenkliges Trapez.

2. Umkehrung des vorhergehenden Satzes: In einem gleichschenkligen Trapeze sind die Winkel an jeder der parallelen Seiten einander gleich.

Es sei (Fig. 56) AB||CD und AD = BC. Zieht man CE||AD, so ist EC=AD=BC, also im △ BEC der Winkel CEB=B, aber CEB=A; folglich auch A=B. Weil A + D = B + C = 2 R, so ist auch D=C.

3. Zieht man in einem Trapeze durch die Mitte einer der nicht parallelen Seiten eine Parallele mit den zwei Parallelseiten, so wird dadurch auch die andere der nicht parallelen Seiten halbirt.

Fig. 57.



Es sei (Fig. 57) AB||CD, ferner AM=DM und MN||AB||CD. Zieht man durch M die EF||BC und verlängert CD bis F, so ist △ AEM≅DFM, daher EM=FM; aber EM=BN und FM=CN, mithin auch BN=CN.

Zusatz. Dieser Satz läßt sich umkehren. Der Beweis wird indirect geführt.

Eine Gerade, welche die Mitten der nicht parallelen Seiten eines Trapezes verbindet und daher mit den Parallelseiten desselben parallel ist, heißt die Mittellinie des Trapezes.

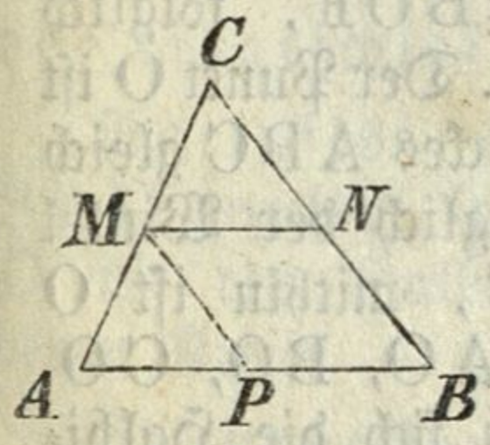
4. Die Mittellinie des Trapezes ist gleich der halben Summe der beiden parallelen Seiten desselben.

Es sei (Fig. 57) AB||CD, ferner AM=DM und MN||AB. Zieht man durch M die EF||BC und verlängert CD bis F, so ist △ AEM ≅DFM, daher AE=DF. Ferner ist MN=BE=AB—AE und MN=CF = DC + DF, folglich 2 MN = AB + DC, und $MN = \frac{AB+CD}{2}$.

§. 70. Lehrsätze von den Parallelen im Dreiecke.

1. Zieht man in einem Dreiecke durch die Mitte einer Seite eine Parallele mit einer zweiten Seite, so wird dadurch die dritte Seite halbirt (Fig. 58).

Fig. 58.



Voraus. AM=CM, MN||AB.

Behaupt. BN=CN.

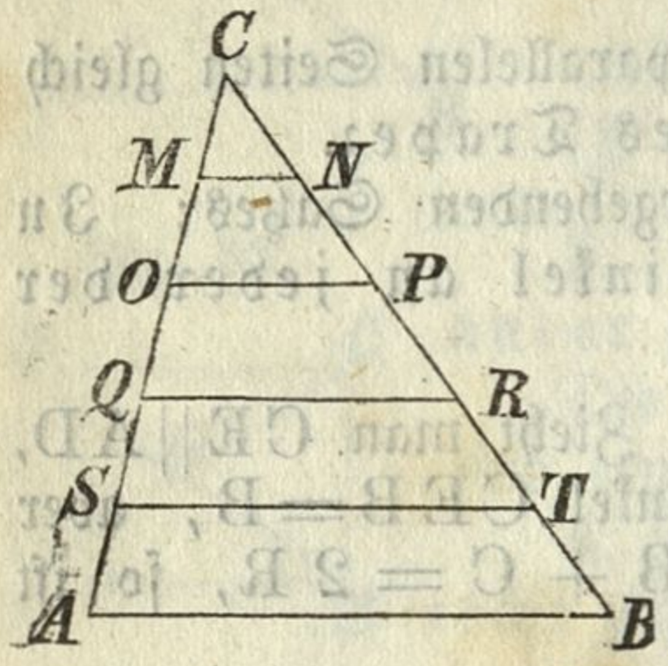
Beweis. Zieht man MP || CB, so ist △ AMP ≅MCN (§. 45), daher MP=CN; allein MP=BN, folglich BN=CN.

2. Zieht man durch die Mitten zweier Seiten eines Dreieckes eine Gerade, so ist diese mit der dritten Seite parallel. (Umkehrung des Satzes 1.)

Es seien M und N (Fig. 58) die Mitten der Seiten AC und BC. Schneidet die durch M mit AB parallel gezogene Gerade die Seite BC in

irgend einem Puncte N', so muß (nach 1.) BN' = CN', also der Punct N' mit N identisch, d. i. MN || AB sein.

Fig. 59.



3. Wird in einem Dreiecke eine Seite in mehrere gleiche Theile getheilt und durch jeden Theilungspunct eine Parallele mit einer zweiten Seite gezogen, so wird dadurch auch die dritte Seite in eben so viele gleiche Theile getheilt (Fig. 59).

Voraussetzung.

CM = MO = OQ = QS = SA

und MN || OP || QR || ST || AB.

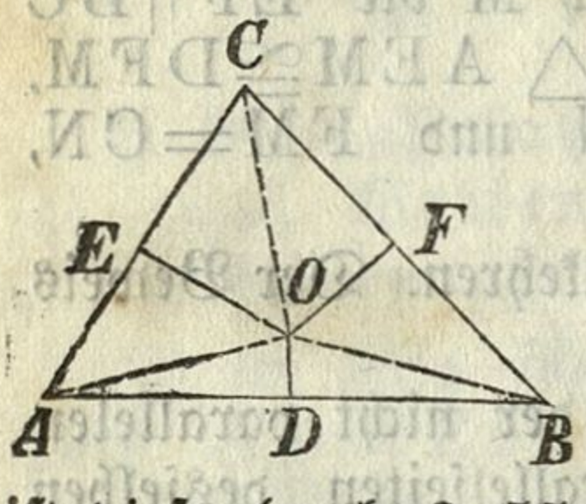
Behaupt. CN = NP = PR = RT = TB.

Beweis. CN = NP (nach 1.), und NP = PR = RT = TB (nach §. 69, 3).

§. 71. Die vier merkwürdigen Puncte des Dreieckes.

1. Die Mittellothe eines Dreieckes, d. i. die in den Mitten der Seiten errichteten Senkrechten, schneiden sich in einem Puncte, welcher von den drei Eckpuncten gleichen Abstand hat.

Fig. 60.

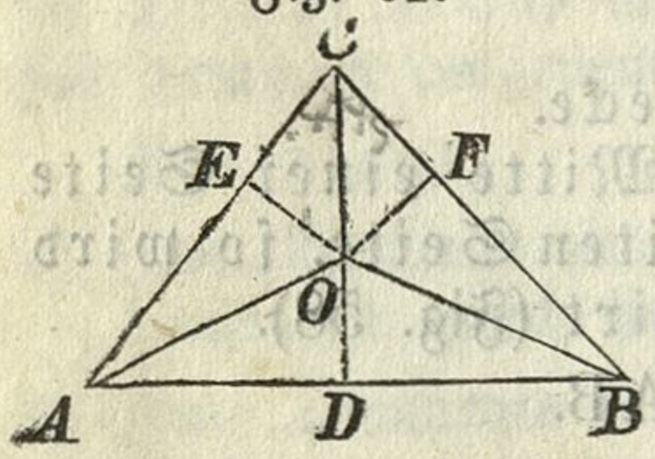


Es sei (Fig. 60) AD = BD, AE = CE und BF = CF, ferner DO ⊥ AB und EO ⊥ AC. Daß sich die Senkrechten aus D und E überhaupt in einem Puncte O schneiden, folgt aus §. 27, 4. Zieht man AO, BO, CO, so ist (nach §. 55, 4) AO = BO und AO = CO, daher auch BO = CO; der Punct O ist also von den drei Ecken gleich weit entfernt. Zieht man nun im gleichschenkligen △ BOC die Gerade OF, so ist diese (nach §. 55, 1) senkrecht auf BC. O ist mithin der gemeinschaftliche Durchschnitt der Senkrechten DO, EO und FO.

Zusatz. Der Punct O liegt innerhalb, auf dem Umfange oder außerhalb des Dreieckes ABC, je nachdem dieses spitz-, recht- oder stumpfwinklig ist. Der obige Beweis gilt jedoch unverändert für alle drei Lagen.

2. Die drei Winkelhalbirungslinien eines Dreieckes schneiden sich in einem Puncte, welcher von den drei Seiten gleichen Abstand hat.

Fig. 61.

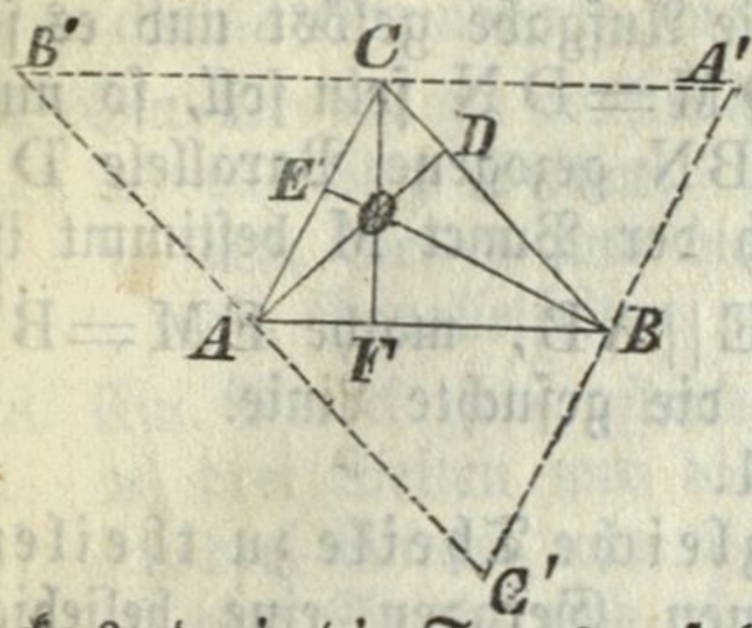


Es seien (Fig. 61) AO und BO die Halbirungslinien der Winkel A und B, und O ihr Durchschnitt (§. 26, 3). Zieht man OD ⊥ AB, OE ⊥ AC und OF ⊥ BC, so ist △ AOD ≅ AOE, folglich OD = OE; ferner ist △ BOD ≅ BOF, folglich OD = OF; mithin auch OE = OF. Der Punct O ist daher von den drei Seiten des Dreieckes ABC gleich weit entfernt. Zieht man CO, so ist △ COE ≅ COF, folglich der Winkel ECO = FCO; die Gerade CO halbirt also den Winkel C, mithin ist O der gemeinschaftliche Durchschnitt der Winkelhalbirungslinien AO, BO, CO.

Zusatz. In ganz gleicher Weise wird auch bewiesen, daß sich die Halbirungslinien des einen innern Dreieckswinkels und der Nebenwinkel der beiden anderen in einem Puncte schneiden, welcher von der jenem innern Winkel gegenüberliegenden Seite und den Verlängerungen der beiden andern gleich weit entfernt ist.

3. Die drei Ecklothe (Höhen) eines Dreieckes, d. i. die von den Eckpuncten auf die Gegenseiten gezogenen Senkrechten, schneiden sich in einem Puncte.

Fig 62.

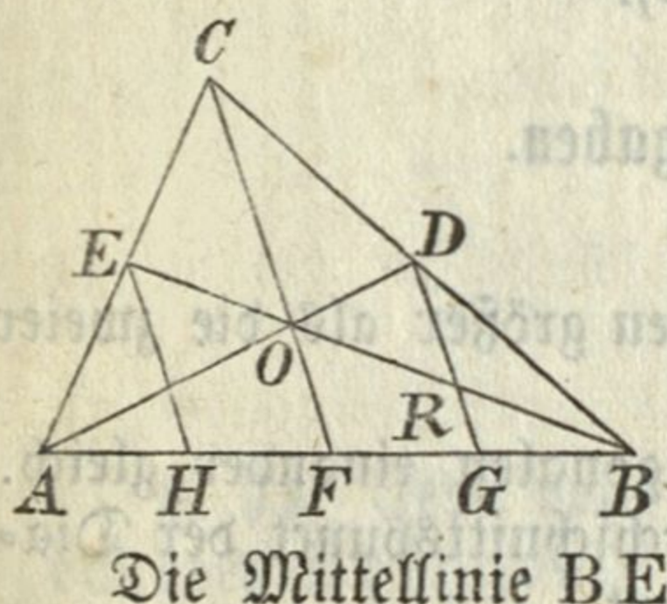


Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 62) AD $\perp$ BC, BE $\perp$ AC, CF $\perp$ AB.

Zieht man durch A, B, C Parallele mit BC, AC, AB, wodurch man das Dreieck A'B'C' erhält, so erscheinen die Senkrechten AD, BE, CF als Mittellothe des Dreieckes A'B'C', und schneiden sich also nach 1. in einem Puncte O.

4. Die drei Mittellinien eines Dreieckes, d. i. die Transversalen, welche von den drei Eckpuncten zu den Mitten der Gegenseiten gezogen werden, schneiden sich in einem Puncte, welcher jede Mittellinie so theilt, daß der an einer Ecke liegende Abschnitt doppelt so groß ist als der andere.

Fig. 63.



Es seien (Fig. 63) D, E und F die Mitten der Seiten BC, AC und AB; O sei der Durchschnittspunct der Transversalen BE und CF. Zieht man die Geraden DG und EH parallel mit CF, so werden durch dieselben (nach §. 70, 1) BF und AF halbirt. Es ist demnach BG = GF = FH, daher (nach §. 70, 3) auch BR = RO = OE, somit BO = 2OE.

Die Mittellinie BE wird also von einer zweiten Mittellinie CF in O so getheilt, daß der an der Ecke B liegende Abschnitt derselben doppelt so groß ist als der andere. Zieht man noch die dritte Mittellinie AD, so muß auch sie die BE in dieselben zwei Abschnitte theilen, und daher durch den Punct O gehen.

Zusatz. Der Durchschnittspunct O der drei Mittellinien eines Dreieckes heißt der Schwerpunct desselben.

II. Aufgaben.

§. 72. Constructionsaufgaben.

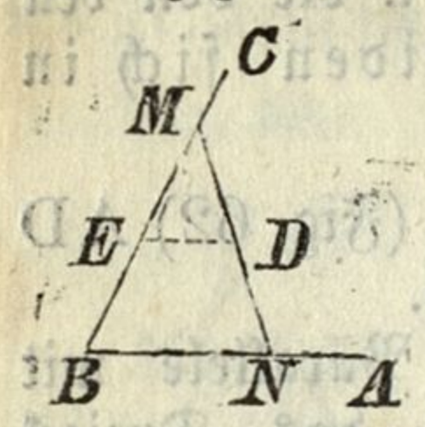
1. Ein Parallelogramm zu construiren, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Analysis. Sind (Fig. 50) die Seiten AB und AD und der Winkel BAD gegeben, so ist der gesuchte Punct C der Durchschnitt der beiden aus D mit dem Halbmesser AB und aus B mit dem Halbmesser AD beschriebenen Kreise.

Construction. Man construire den Winkel BAD, trage von A aus auf den Schenkeln die gegebenen Strecken AB und AD auf, und beschreibe aus D mit AB, aus B mit AD als Halbmesser Kreisbogen; der Durchschnitt C ist der vierte Eckpunct des Parallelogramms.

Der Beweis folgt aus der Construction und §. 66, 1.

Fig. 64.



2. Durch einen Punct D (Fig. 64) zwischen den Schenkeln eines Winkels ABC eine von ihnen begrenzte Gerade so zu ziehen, daß sie in jenem Puncte halbirt wird.

Analysis. Man denke sich die Aufgabe gelöst und es sei MN die verlangte Gerade. Da DM=DN sein soll, so muß nach §. 70, 1 die durch D mit BN gezogene Parallele DE die BM halbiren, also ME=BE sein, wodurch der Punct M bestimmt ist.

Construction. Man ziehe durch D die DE||AB, mache EM=BE und ziehe von M die Gerade MDN, so ist diese die gesuchte Linie.

Der Beweis folgt unmittelbar aus §. 70, 1.

3. Eine gegebene Gerade in mehrere gleiche Theile zu theilen.

Man ziehe durch einen Endpunct der gegebenen Geraden eine beliebige zweite Gerade, trage darauf so viele unter einander gleiche Theile auf, als Theile verlangt werden, verbinde den letzten Theilungspunct mit dem zweiten Endpuncte der gegebenen Geraden durch eine Gerade und ziehe mit dieser auch durch die übrigen Puncte Parallele, so wird dadurch die gegebene Gerade in die verlangte Anzahl gleicher Theile getheilt (§. 70, 3).

III. Uebungssätze und Uebungsaufgaben.

§. 73. Uebungssätze.

1. In jedem Vierecke ist die Summe der Diagonalen größer als die zweier Gegenseiten.

2. In einem gleichschenkligen Trapeze sind die Diagonalen einander gleich.

3. Jede in einem Parallelogramme durch den Durchschnittspunct der Diagonalen gezogene Gerade wird in diesem Puncte halbirt.

4. Verbindet man in einem Vierecke die Halbirungspuncte der Seiten durch Gerade, so schließen diese ein Parallelogramm ein (§. 70, 2).

5. die Halbirungslinien der vier Winkel eines Parallelogramms (oder der Außenwinkel) schließen ein Rechteck ein.

6. Die Verbindungslinien der Mitten eines gleichschenkligen Trapezes schließen einen Rhombus ein.

§. 74. Constructionsaufgaben.

1 Ein Quadrat zu beschreiben, wenn gegeben ist:
   a) die Seite;
   b) die Diagonale;
   c) die Summe (oder Differenz) der Diagonale und der Seite.

2. Ein Rechteck zu construiren, wenn gegeben sind:
   a) die Grundlinie und die Höhe;
   b) eine Seite und eine Diagonale;
   c) eine Seite und der ihr gegenüberliegende Winkel der beiden Diagonalen.

3. Durch vier gegebene Puncte ein Rechteck von gegebener Grundlinie zu beschreiben.

4. Einen Rhombus zu construiren, wenn gegeben sind:
   a) eine Seite und ein Winkel;
   b) eine Seite und eine Höhe;
   c) eine Seite und eine Diagonale;
   d) die zwei Diagonalen.

5. In ein gegebenes Viereck einen Rhombus einzuschreiben, dessen Seiten den Diagonalen des Vierecks parallel sind.

6. Ein Parallelogramm zu verzeichnen, wenn gegeben sind:
   a) zwei Seiten und eine Diagonale;
   b) eine Seite und die beiden Diagonalen;
   c) die Diagonalen und der von ihnen eingeschlossene Winkel;
   d) die Grundlinie, die zweite Seite und die Höhe.
7. Ein Trapez zu construiren, wenn gegeben sind:
   a) alle vier Seiten;
   b) drei Seiten und die Höhe;
   c) die Parallelseiten und die Diagonalen;
8. Ein Viereck zu construiren, wenn gegeben sind:
   a) drei Seiten und die beiden von ihnen eingeschlossenen Winkel;
   b) drei Winkel und die beiden dazwischen liegenden Seiten;
   c) vier Seiten und ein Winkel;
   d) vier Seiten und eine Diagonale.

Vierter Abschnitt.

Das Vieleck.

I. Erklärungen und Lehrsätze.

§. 75. Jede von mehreren geraden Linien begrenzte Figur heißt ein Vieleck oder Polygon.

Ein Vieleck hat so viele Seiten als Winkel, und eben so viele Eckpuncte. Die Winkel können hohl oder erhaben sein.

Mit Rücksicht auf die Anzahl der Seiten unterscheidet man dreiseitige Vielecke oder Dreiecke, vierseitige oder Vierecke, fünfseitige oder Fünfecke, ... nseitige oder necke.

Hinsichtlich der Größe der Seiten und Winkel werden die Vielecke in gleichseitige und ungleichseitige, in gleichwinklige und ungleichwinklige Vielecke eingetheilt.

Ein gleichseitiges und gleichwinkliges Vieleck heißt regelmäßig, jedes andere Vieleck unregelmäßig. Unter den Dreiecken ist das gleichseitige Dreieck, unter den Vierecken das Quadrat regelmäßig.

§. 76. Eine Gerade, welche zwei nicht unmittelbar auf einander folgende Eckpuncte des Vieleckes verbindet, heißt eine Diagonale.

Durch ganz einfache Schlüsse wird man auf folgende Sätze geleitet:

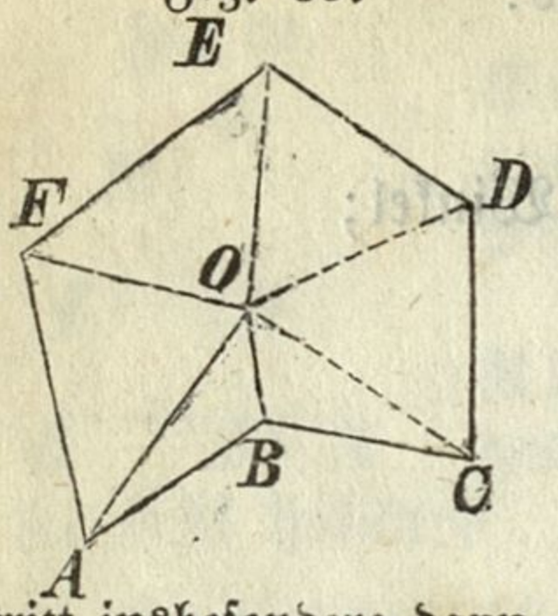
1. Von jedem Eckpuncte eines nseitigen Vieleckes lassen sich n—3 Diagonalen ziehen.

2. Die Anzahl aller möglichen Diagonalen eines neckes ist gleich $\frac{n\,(n-3)}{2}$.

3. Jedes neck läßt sich durch Diagonalen in n—2 Dreiecke, deren Eckpuncte mit den Eckpuncten des Vieleckes zusammenfallen, zerlegen.

§. 77. Lehrsatz. Die Summe aller Winkel eines Vieleckes ist gleich sovielmal 2 Rechten, als die um 2 verminderte Zahl der Seiten anzeigt.

Fig. 65.



Es sei das Vieleck ABCD... (Fig. 65) ein n eck. Nimmt man innerhalb desselben einen Punct O so an, daß die Geraden, welche man von demselben zu allen Eckpuncten zieht, in das Vieleck fallen, so entstehen n Dreiecke; die Summe ihrer Winkel ist 2 n R, die Summe der Winkel um O herum 4 R, somit die Summe aller Winkel des Vieleckes $2\,n\,R - 4\,R = (n-2).\ 2\,R$.

Der Beweis könnte auch mittelst Zerlegung des Vieleckes in Dreiecke geführt werden (wie in §. 61); diese Beweisführung tritt insbesondere dann ein, wenn innerhalb des Vieleckes kein Punkt so gelegen ist, daß alle Geraden zwischen demselben und den Eckpuncten in das Vieleck fallen würden.

Folgesätze:

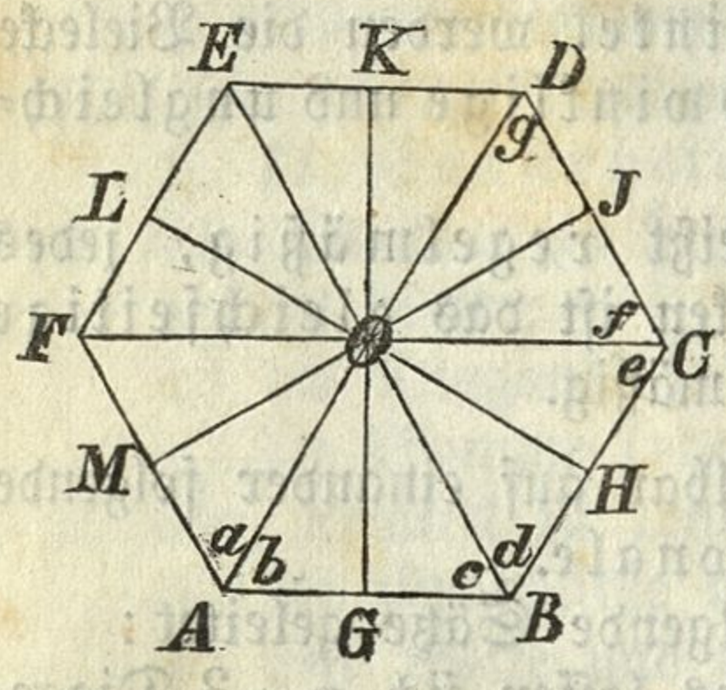
1. In einem n ecke können höchstens n — 3 erhabene Winkel vorkommen.
2. Die Summe der Winkel
   eines Dreieckes ist $2\,R = 180^0$,
   „ Viereckes „ $4\,R = 360^0$,
   „ Fünfeckes „ $6\,R = 540^0$,
   „ Sechseckes „ $8\,R = 720^0$ u. s. w.
3. Jeder Winkel eines regelmäßigen Vieleckes beträgt $2\,R - \frac{4\,R}{n}$; daher

der Winkel eines regelmäßigen Dreieckes $180^0 - \frac{360^0}{3} = 60^0$,
„ „ „ „ Viereckes $180^0 - \frac{360^0}{4} = 90^0$,
„ „ „ „ Fünfeckes $180^0 - \frac{360^0}{5} = 108^0$,
„ „ „ „ Sechseckes $180^0 - \frac{360^0}{6} = 120^0$, u. s. w.

§. 78. Halbirt man in einem regelmäßigen Vielecke zwei aufeinander folgende Winkel, so ist der Durchschnittspunct der Halbirungslinien a) von allen Eckpuncten des Vieleckes, b) von allen Seiten des Vieleckes gleichweit entfernt (Fig. 66).

Voraus. AB = BC = CD = DE = ..., und
W. A = B = C = D = ...

Fig. 66.



Halbirt man die Winkel A und B, so daß a = b, c = d wird, verbindet den Durchschnittspunkt O der Halbirungslinien (§. 26, 3) mit allen übrigen Eckpuncten und fällt aus ihm Senkrechte auf alle Vielecksseiten, so ist

Behaupt.

a) AO = BO = CO = DO = ..., und
b) Senkrechte OG = OH = OJ = OK = ...

Beweis.

a) $\triangle$ AOB $\cong$ BOC (§. 46), daher AO = OC und b = e. Wegen A = C und $b = \frac{A}{2}$ ist daher auch $e = \frac{C}{2} = f$, folglich $\triangle$ BOC $\cong$ COD, somit BO = DO und d = g. Eben so kann man beweisen, daß $\triangle$ COD $\cong$ DOE, also CO = EO u. s. w. ist. Da nun im $\triangle$ AOB wegen b = c die Seite BO = AO ist, so hat man

AO = BO = CO = DO = EO = ...

b) Da die Dreiecke AOB und BOC gleichschenklig sind, so ist (nach §. 55, 2) $BG = \frac{AB}{2}$ und $BH = \frac{BC}{2}$, daher BG = BH und $\triangle$ BGO $\cong$ BHO

(§. 46), folglich $OG = OH$. Auf dieselbe Art kann man beweisen, daß $OH = OJ$, $OJ = OK$, ... ist.

Zusatz. Der Punct O, welcher von allen Eckpuncten und ebenso von allen Seiten des regelmäßigen Vieleckes gleichweit absteht, wird der Mittelpunct desselben genannt.

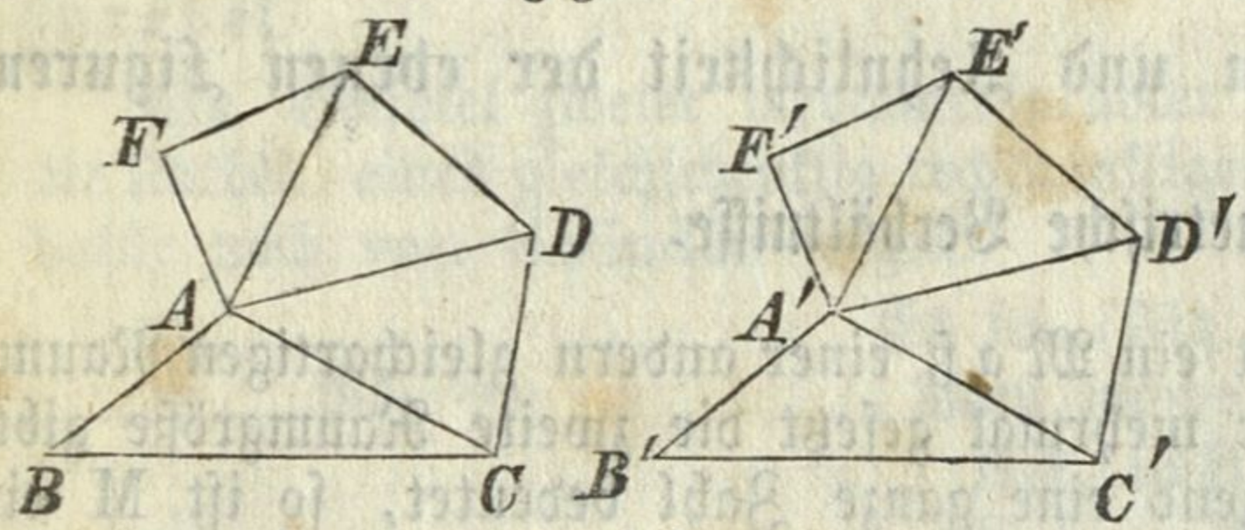
Folgesatz. Verbindet man den Mittelpunct eines regelmäßigen Vieleckes mit allen Eckpunkten durch Gerade, so werden dadurch alle Vieleckswinkel halbirt, und das regelmäßige Vieleck selbst zerfällt in so viele congruente gleichschenklige Dreiecke, als es Seiten hat.

Ein solches Dreieck oder auch mehrere aneinander liegende solche Dreiecke nennt man einen Ausschnitt des regelmäßigen Vieleckes; der dazu gehörige Theil des Vielecksumfanges ist die Grundlinie des Ausschnittes.

§. 79. Zwei Vielecke sind congruent, wenn in denselben alle Seiten und alle Winkel in derselben Ordnung paarweise gleich sind.

Lehrsätze. 1. Zwei congruente Vielecke werden durch übereinstimmend gezogene Diagonalen in congruente Dreiecke zerlegt.

Fig. 67.



Es seien die Vielecke ABCDEF und A'B'C'D'E'F' (Fig. 67) congruent, so müssen sie übereinander gelegt, sich vollkommen decken. Dann fallen auch die gleichliegenden Eckpuncte der beiden Vielecke, folglich auch die übereinstimmend gezogenen Diagonalen zusammen; mithin decken sich die dadurch gebildeten Dreiecke.

2. Umgekehrt. Zwei Vielecke sind congruent, wenn sie auf übereinstimmende Weise aus gleich vielen congruenten Dreiecken zusammengesetzt sind.

Es sei (Fig. 67) $\triangle ABC \cong A'B'C'$, $\triangle ACD \cong A'C'D'$,
$\triangle ADE \cong A'D'E'$, $\triangle AEF \cong A'E'F'$;
so muß $ABCDEF \cong A'B'C'D'E'F'$ sein.

Legt man das Vieleck A'B'C'D'E'F' so auf das Vieleck ABCDEF, daß die congruenten Dreiecke A'B'C' und ABC zusammenfallen, so werden sich auch die Dreiecke A'C'D' und ACD decken, folglich auch die Dreiecke A'D'E' und ADE, also auch A'E'F' und AEF. Es fallen also die beiden Vielecke selbst vollkommen zusammen.

II. Uebungsaufgaben.

§. 80. Constructionsaufgaben.

1. Ein Vieleck zu construiren, das mit einem gegebenen Vielecke congruent ist.
2. Ein neck zu construiren, wenn gegeben sind:

a) n—2 auf einander folgende Seiten und n—1 an diesen Seiten liegende Winkel;
b) n—1 auf einander folgende Seiten und n—2 von diesen eingeschlossene Winkel;
c) n Seiten und n—3 auf einander folgende Winkel;
d) n Seiten und die von einem Eckpuncte ausgehenden n—3 Diagonalen.

3. Den Mittelpunct eines regelmäßigen Vielecks zu bestimmen.

§. 81. Rechnungsaufgaben.

1. Ziehe vom Mittelpuncte eines regelmäßigen neckes zu allen Eckpuncten gerade Linien; wie groß ist a) der Winkel am Scheitel, b) der Winkel an der Grundlinie in jedem der dadurch gebildeten gleichschenkligen Dreiecke?

2. Berechne diese Winkel insbesondere

a) für das gleichseitige Dreieck; b) für das Quadrat;
b) „ „ regelmäßige Fünfeck; d) „ „ regelmäßige Sechseck;
e) „ „ „ Zehneck; f) „ „ „ Zwölfeck.

3. In welchem regelmäßigen Vielecke ist der Winkel am Scheitel der gleichschenkligen Dreiecke, in welche es vom Mittelpuncte aus getheilt werden kann, a) eben so groß, b) doppelt so groß, c) halb so groß als jeder Winkel an der Grundlinie?

Fünfter Abschnitt.

Proportionalität der Strecken und Aehnlichkeit der ebenen Figuren.

I. Geometrische Verhältnisse.

§. 82. Eine Raumgröße heißt ein Maß einer andern gleichartigen Raumgröße, wenn dieselbe ein- oder mehrmal gesetzt die zweite Raumgröße gibt. Ist z. B. $A = aM$, wo a irgend eine ganze Zahl bedeutet, so ist M ein Maß von A.

Ist M sowohl ein Maß von A, als von B, so heißt es ein gemeinschaftliches Maß von A und B. Zwei Größen können mehrere gemeinschaftliche Maße haben.

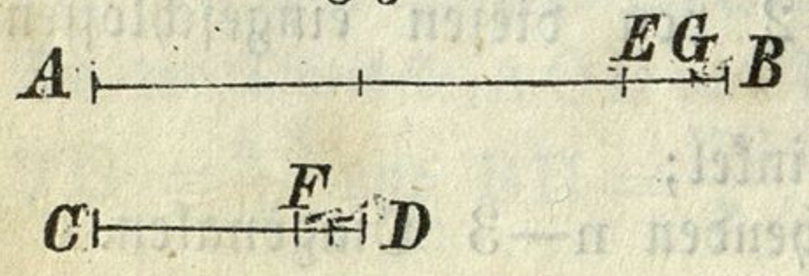
§. 83. Das Verfahren, das größte gemeinschaftliche Maß zweier Größen zu finden, ist analog der Methode der Arithmetik, das größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen zu finden.

Man nehme von der größeren A der beiden gegebenen Größen die kleinere B so oft weg, als es möglich ist; hierauf in gleicher Weise den Rest C von der kleineren Größe B so oft, als es angeht; dann den neuen Rest D von dem vorigen Reste C, u. s. f. jeden neuen Rest von dem vorhergehenden. Kommt man bei diesem Verfahren einmal auf einen Rest R, welcher ein Maß des nächst vorhergehenden ist, so daß kein Rest übrig bleibt, so ist R das größte gemeinschaftliche Maß von A und B. (Der Beweis wurde in der Arithmetik §. 86, 2 geführt.)

Wir wollen dieses Verfahren an zwei geraden Linien AB und CD (Fig. 68) versinnlichen.

Man trage die kleinere Gerade CD auf die größere AB so oft auf, als es angeht, hier 2mal, worauf noch ein Rest EB übrig bleibt. Den Rest EB trägt man auf die kleinere Gerade CD so oft auf, als es möglich ist, hier 2mal, worauf noch FD als Rest übrig bleibt. Dieser Rest FD wird wieder auf den vorigen Rest EB aufgetragen, worin er 1mal enthalten ist und GB

Fig. 68.



als Rest zurückläßt. Der Rest GB wird ferner auf den früheren Rest FD aufgetragen, und er sei darin genau 2mal enthalten. Man hat nun

$$FD = 2GB,$$
$$EB = FD + GB = 3GB,$$
$$CD = 2EB + FD = 8GB,$$
$$AB = 2CD + EB = 19GB.$$

Es haben demnach AB und CD das größte gemeinschaftliche Maß GB, und zwar ist dieses in der AB 19mal, in der CD 8mal enthalten.

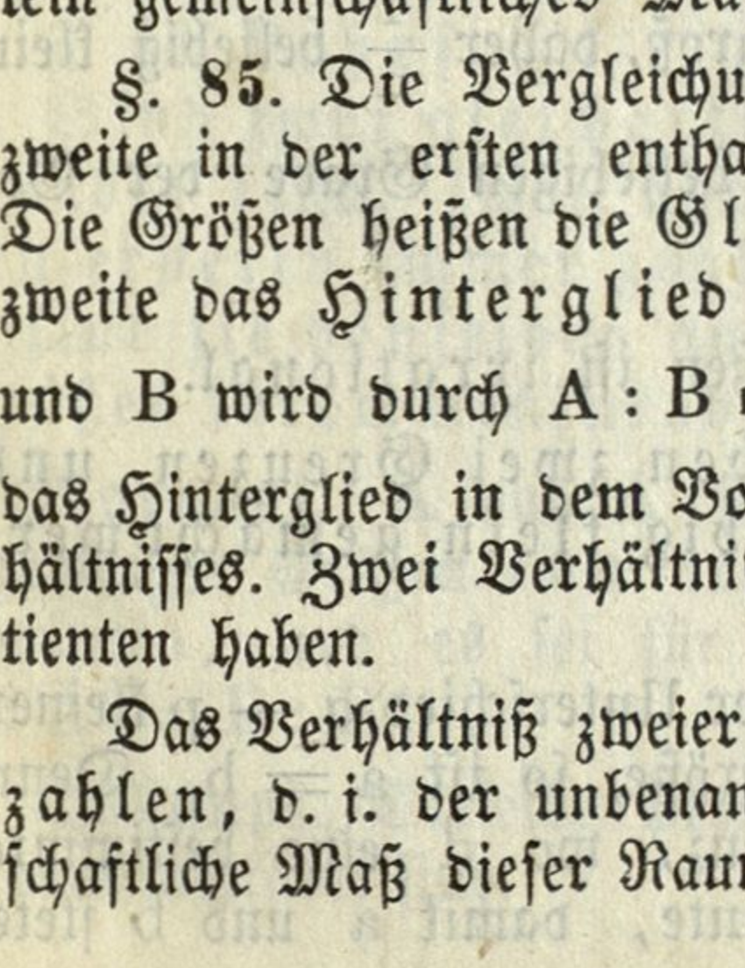
§. 84. Da bei dem im §. 83 angeführten Verfahren der jedesmal gebliebene Rest zwar kleiner als der vorhergehende sein muß, demselben jedoch bei Raumgrößen keine Grenze, unter die er nicht kommen könnte, vorgezeichnet ist, so ist es möglich, daß hier das wiederholte Wegnehmen der Reste ohne Ende fortgesetzt wird, ohne daß man je auf einen Rest kommt, welcher ein Maß des vorhergehenden wäre. In diesem Falle haben die beiden gegebenen Größen kein gemeinschaftliches Maß.

Zwei Größen, welche ein gemeinschaftliches Maß haben, heißen commensurabel; zwei Größen, die kein gemeinschaftliches Maß haben, incommensurabel.

Ein Beispiel zweier incommensurabler Größen bieten die Hypotenuse und die Kathete eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreieckes. Wir lassen den Beweis dafür nach van Swinden folgen.

Es sei (Fig. 69) $AB = AC$ und $AC \perp AB$.

Fig. 69.



Man mache

$BA_1 = BA$ und $A_1B_1 \perp BC$,
$B_1A_2 = B_1A_1$ und $A_2B_2 \perp AC$,
$B_2A_3 = B_2A_2$ und $A_3B_3 \perp BC$, u. s. w.

Dann ist

$AB_1 = CA_1 = A_1B_1$,
$A_1B_2 = CA_2 = A_2B_2$,
$A_2B_3 = CA_3 = A_3B_3$, u. s. w.

Hieraus folgt

$CB = 1.CA + CA_1$,
$CA = 2.CA_1 + CA_2$,
$CA_1 = 2.CA_2 + CA_3$, u. s. w.,

wo bei jeder neuen Messung ein Rest bleibt, und es also für CB und CA kein gemeinschaftliches Maß gibt.

§. 85. Die Vergleichung zweier Größen, um zu bestimmen, wie oft die zweite in der ersten enthalten ist, heißt ein (geometrisches) Verhältniß. Die Größen heißen die Glieder, und zwar die erste das Vorderglied, die zweite das Hinterglied des Verhältnisses. Das Verhältniß der Größen A und B wird durch $A : B$ oder $\frac{A}{B}$ angezeigt. Die Zahl, welche angibt, wie oft das Hinterglied in dem Vordergliede enthalten ist, ist der Quotient des Verhältnisses. Zwei Verhältnisse sind einander gleich, wenn sie denselben Quotienten haben.

Das Verhältniß zweier Raumgrößen ist gleich dem Verhältnisse ihrer Maßzahlen, d. i. der unbenannten Zahlen, welche angeben, wie oft das gemeinschaftliche Maß dieser Raumgrößen als Einheit in jeder derselben enthalten ist.

Ist M ein gemeinschaftliches Maß der Raumgrößen A und B, und zwar $A = aM$ und $B = bM$, so ist $a : b$ oder $\frac{a}{b}$ das Verhältniß der Größen A und B.

§. 86. Lehrsätze.

1. Der Quotient eines Verhältnisses, dessen Glieder commensurabel sind, ist entweder eine ganze Zahl oder ein Bruch.

Haben A und B ein gemeinschaftliches Maß, so ist entweder $A = mB$ oder $A = \frac{B}{n}$ oder $A = \frac{mB}{n}$, daher $A : B$ bezüglich $= m$, $\frac{1}{n}$ oder $\frac{m}{n}$, wo m und n ganze Zahlen bedeuten.

Das Verhältniß zweier commensurabler Größen ist daher rational.

2. Der Quotient eines Verhältnisses, dessen Glieder incommensurabel sind, kann a) weder eine ganze noch eine gebrochene Zahl sein; er läßt sich jedoch b) durch Angabe zweier Grenzen, innerhalb deren er liegt, mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit annäherungsweise bestimmen.

a) Sind A und B zwei incommensurable Größen, so kann weder $A : B = m$, noch $A : B = \frac{m}{n}$ sein; denn im ersten Falle wäre dann B selbst, im zweiten $\frac{B}{n}$ ein gemeinschaftliches Maß von A und B, was gegen die Voraussetzung ist.

b) Theilt man B in n gleiche Theile und nimmt einen solchen Theil $\frac{B}{n}$ von A mmal, d. i. so oft hinweg, als es angeht, so bleibt von A ein Rest übrig, welcher kleiner als $\frac{B}{n}$ ist; es muß also $A > m \cdot \frac{B}{n}$, dagegen $A < (m + 1) \cdot \frac{B}{n}$ sein; somit

$$\frac{mB}{n} < A < \frac{(m+1)B}{n}, \text{ oder } \frac{m}{n} < \frac{A}{B} < \frac{m+1}{n}.$$

Der Quotient des Verhältnisses $A : B$ liegt also zwischen zwei Grenzen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$, deren Unterschied $\frac{1}{n}$ ist. Setzt man $\frac{A}{B}$ gleich $\frac{m}{n}$ oder $\frac{m+1}{n}$, so begeht man einmal im positiven, das andere Mal im negativen Sinne einen Fehler, der kleiner als $\frac{1}{n}$ ist. Da aber n beliebig groß, daher $\frac{1}{n}$ beliebig klein gemacht werden kann, so läßt sich $\frac{A}{B}$ mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit bestimmen.

Das Verhältniß zweier incommensurabler Größen ist irrational.

3. Liegen zwei Größen zwischen denselben zwei Grenzen, und kann der Unterschied dieser Grenzen beliebig klein gemacht werden, so sind die beiden Größen gleich.

Ist $p < a < q$ und $p < b < q$, und kann der Unterschied $q - p$ kleiner gemacht werden als jede noch so kleine gegebene Größe, so ist $a = b$. Denn wären a und b ungleich und wäre d ihre Differenz, wo d eine bestimmte unveränderliche Größe bezeichnen müßte, so könnte, damit a und b stets

zwischen den Grenzen p und q eingeschlossen bleiben, der Unterschied q — p nicht kleiner werden als d, was jedoch der Voraussetzung widerspricht.

Zwei irrationale Verhältnisse sind demnach gleich, wenn sie zwischen denselben Grenzen liegen und wenn diese einander beliebig genähert werden können.

II. Geometrische Proportionen.

§. 87. Ist das Verhältniß zweier Größen gleich dem Verhältnisse zweier anderer Größen, so bilden die beiden Verhältnisse eine (geometrische) Proportion. Sind die Verhältnisse A : B und C : D einander gleich, so ist A : B = C : D eine Proportion. A und D sind die äußeren, B und C die inneren Glieder; insbesondere heißt A das erste, B das zweite, C das dritte und D das vierte Glied der Proportion.

Eine Proportion, in welcher die beiden inneren Glieder gleich sind, heißt eine stetige Proportion; z. B. A : B = B : C; das mittlere Glied wird die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden äußeren Gliedern, und das vierte Glied die dritte stetige Proportionale zu dem ersten und mittleren Gliede genannt.

Ist eine Strecke AC in einem Puncte B so getheilt, daß die Proportion AC : AB = AB : BC stattfindet, so heißt die Strecke im Puncte B nach stetiger Proportion, oder im mittlern und äußern Verhältnisse getheilt.

Wenn zwei Arten von Größen so von einander abhängen, daß das Verhältniß zwischen je zwei Größen der einen Art gleich ist dem Verhältnisse der beiden zugehörigen Größen der anderen Art, in derselben Ordnung genommen, so sagt man: die beiden Arten von Größen stehen in geradem Verhältnisse, oder sie sind gerade proportionirt, auch bloß proportionirt. Hängen dagegen zwei Arten von Größen so von einander ab, daß das Verhältniß zwischen je zwei Größen der einen Art gleich ist dem Verhältnisse der zwei zugehörigen Größen der anderen Art, aber in umgekehrter Ordnung genommen, so sagt man: die beiden Arten von Größen stehen in verkehrtem Verhältnisse, oder sie sind verkehrt proportionirt.

Da die in der Arithmetik aufgestellten Sätze über die Proportionen unter den dort bezeichneten Einschränkungen auch für Raumgrößen Giltigkeit haben, so werden wir hier nur den folgenden wichtigen Satz nachtragen:

§. 88. Lehrsatz.

Sind zwei gleichartige Größen für den Fall, daß sie commensurabel sind, zwei anderen gleichartigen Größen, welche mit den ersteren immer zugleich zu- oder abnehmen, proportionirt, so sind sie denselben auch dann proportionirt, wenn jene ersteren Größen incommensurabel sind.

Voraus s. A und A′ seien zwei Größen der einen Art, B und B′ die zugehörigen Größen einer anderen Art, welche mit jenen zugleich zu- oder abnehmen, und es sei für den Fall, daß A und A′ commensurabel sind, A : A′ = B : B′.

Behaupt. Dieselbe Proportion muß auch stattfinden, wenn A und A′ incommensurabel sind.

Beweis. Theilt man A' in n gleiche Theile, wo n beliebig groß angenommen werden kann, so wird, wenn A und A' incommensurabel sind (nach §. 86, 2).

$$\frac{mA'}{n} < A < \frac{(m+1)A'}{n}, \text{ also } \frac{m}{n} < \frac{A}{A'} < \frac{m+1}{n}$$

sein, wo $\frac{mA'}{n}$ das größte Vielfache von $\frac{A'}{n}$, das in A enthalten ist, bedeutet.

Setzt man nun $\frac{mA'}{n} = A''$ und $\frac{(m+1)A'}{n} = A'''$, und bezeichnet die zu A'' und A''' gehörigen Größen der zweiten Art durch B'' und B''', so hat man, da sowohl A'' als A''' mit A' commensurabel ist, nach der Voraussetzung

$$\frac{B''}{B'} = \frac{A''}{A'} \text{ und } \frac{B'''}{B'} = \frac{A'''}{A'} \text{ oder}$$
$$\frac{B''}{B'} = \frac{m}{n} \text{ und } \frac{B'''}{B'} = \frac{m+1}{n}.$$

Allein wegen $A > A''$ ist auch $B > B''$, und
wegen $A < A'''$ ist auch $B < B'''$, daher

$$\frac{B}{B'} > \frac{B''}{B'} \text{ und } \frac{B}{B'} < \frac{B'''}{B'}, \text{ oder}$$
$$\frac{B}{B'} > \frac{m}{n} \text{ und } \frac{B}{B'} < \frac{m+1}{n}.$$
$$\text{mithin } \frac{m}{n} < \frac{B}{B'} < \frac{m+1}{n}.$$

Da nun die Verhältnisse $\frac{A}{A'}$ und $\frac{B}{B'}$ zwischen denselben Grenzen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$, deren Unterschied $\frac{1}{n}$ durch Vergrößerung von n beliebig klein gemacht werden kann, liegen, so sind sie (nach §. 86, 3.) einander gleich; folglich findet auch für den Fall, wenn A und A' incommensurabel sind, die Proportion $A : A' = B : B'$ statt.

III. Proportionale Theilung der Strahlen durch parallele Transversalen.

§. 89. Mehrere von einem Puncte ausgehende Strahlen bilden ein Strahlenbüschel, der gemeinschaftliche Punct heißt der Strahlenpunct. Jedem Strahlenbüschel entspricht ein zweites, welches von den Rückwärtsverlängerungen der gegebenen Strahlen über den Strahlenpunct hinaus gebildet wird.

Jede gerade Linie, welche die Strahlen eines Strahlenbüschels durchschneidet, heißt eine Transversale des Strahlenbüschels (§. 23).

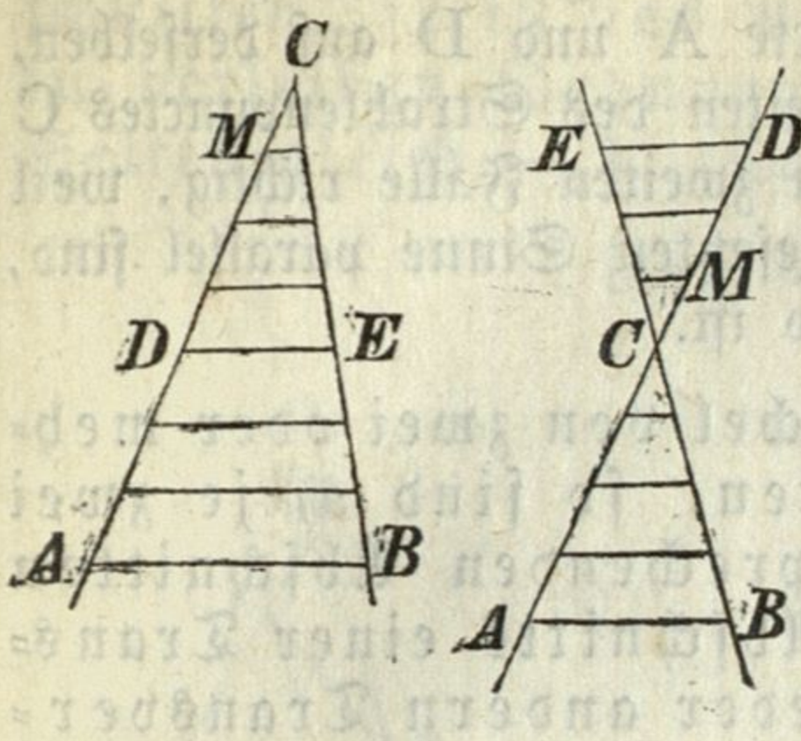
§. 90. Lehrsatz. Zwei Strahlen werden von je zwei parallelen Transversalen proportionirt geschnitten.

Voraus s. Es sei $DE \parallel AB$ (Fig. 70).

Behaupt. $CD : DA = CE : EB$.
$CA : DA = CB : EB$,
$CA : CD = CB : CE$.

Beweis. Zunächst ist zu zeigen, daß die Proportion $CD : DA = CE : EB$ stattfindet.

Fig. 70.



Es seien die Geraden CD und DA commensurabel, CM ein gemeinschaftliches Maß derselben, und zwar $CD = m \cdot CM$, $DA = n \cdot CM$, so ist $CD : DA = m : n$. Denkt man sich nun die CD in m und die DA in n gleiche Theile getheilt und durch jeden Theilungspunct eine Parallele mit AB gezogen, so wird dadurch (§. 70, 3) auch CB in gleiche Theile getheilt, von denen m auf CE und n auf EB kommen; es ist also $CE : EB = m : n$. Aus dieser und der früheren Proportion folgt $CD : DA = CE : EB$.

Aus der Proportion $CD : DA = CE : EB$ ergibt sich auch die Richtigkeit der zweiten und dritten der oben aufgestellten Proportionen. Man hat $(CD + DA) : DA = (CE + EB) : EB$ oder $CA : DA = CB : EB$ und $(CD + DA) : CD = (CE + EB) : CE$ oder $CA : CD = CB : CE$

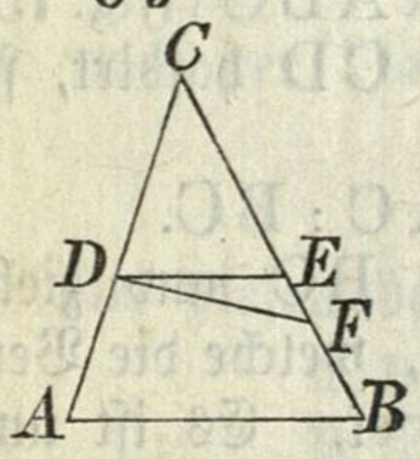
Sind die Geraden CD und DA incommensurabel, so folgt die Giltigkeit der für den Fall der Commensurabilität dieser Seiten bewiesenen Proportionen auch für den Fall der Incommensurabilität aus §. 88.

Folgesatz. Zieht man in einem Dreiecke mit einer Seite eine Parallele, so werden durch dieselbe die beiden anderen Seiten proportionirt geschnitten.

§. **91.** Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.

Werden zwei Strahlen von zwei Transversalen proportionirt geschnitten, so sind die beiden Transversalen parallel.

Fig. 71.

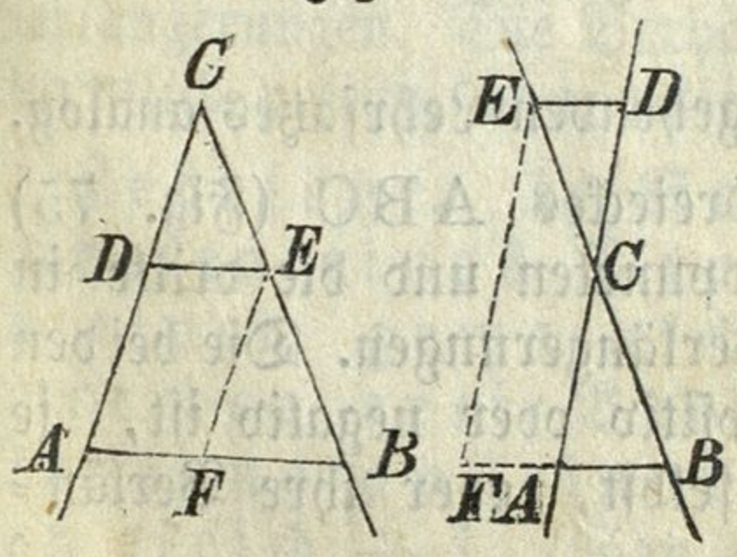


Es sei (Fig. 71) $CA : CD = CB : CE$. Würde die durch D parallel mit AB gezogene Gerade nicht durch E gehen, sondern die CB in einem andern Puncte F schneiden, so wäre (nach §. 90) $CA : CD = CB : CF$. Dann aber muß mit Rücksicht auf die Voraussetzung $CF = CE$, d. h. der Punct F mit E identisch sein. Folglich ist $DE \parallel AB$.

Folgesatz. Werden zwei Seiten eines Dreieckes von einer Transversale proportionirt geschnitten, so ist dieselbe mit der dritten Seite des Dreieckes parallel.

§. **92.** Lehrsatz. Werden zwei Strahlen von zwei parallelen Transversalen geschnitten, so sind die Abschnitte der beiden Transversalen den Abschnitten eines jeden Strahls proportionirt. (Fig. 72.)

Fig. 72.



Ist $DE \parallel AB$, so ist $CA : CD = CB : CE$ (§. 90). Zieht man $EF \parallel CA$, und betrachtet B als Strahlenpunct, mithin EF und CA als Transversalen, so ist auch $AB : AF = CB : CE$, oder weil $AF = DE$ ist, $AB : DE = CB : CE$.

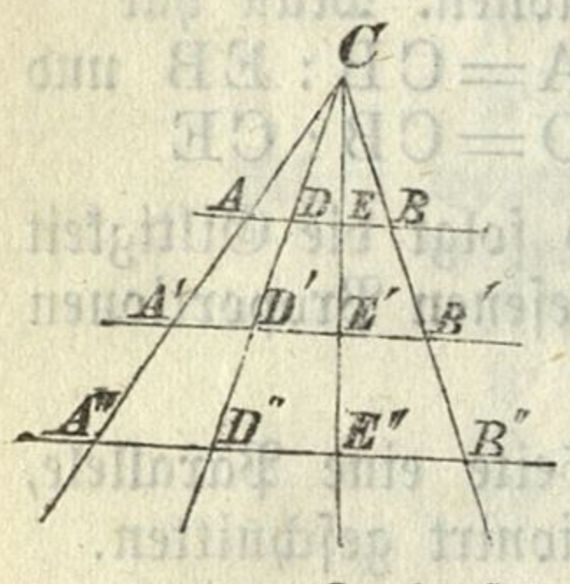
Man hat daher

$$AB : DE = CA : CD = CB : CE.$$

Zusatz. Nimmt man auf den Gegensatz der Richtungen Rücksicht, so ist das Verhältniß CA : CD positiv, wenn die Puncte A und D auf derselben, dagegen negativ, wenn sie auf entgegengesetzten Seiten des Strahlenpunctes C liegen. Der obige Lehrsatz bleibt übrigens auch im zweiten Falle richtig, weil dann die Transversalen AB und DE im entgegengesetzten Sinne parallel sind, und daher auch das Verhältniß AB : DE negativ ist.

§. **93.** Lehrsatz. Wird ein Strahlenbüschel von zwei oder mehreren parallelen Transversalen geschnitten, so sind a) je zwei Abschnitte des einen Strahles den entsprechenden Abschnitten jedes andern Strahles, und b) je zwei Abschnitte einer Transversale den entsprechenden Abschnitten jeder andern Transversale proportionirt. (Fig. 73.)

Fig. 73.

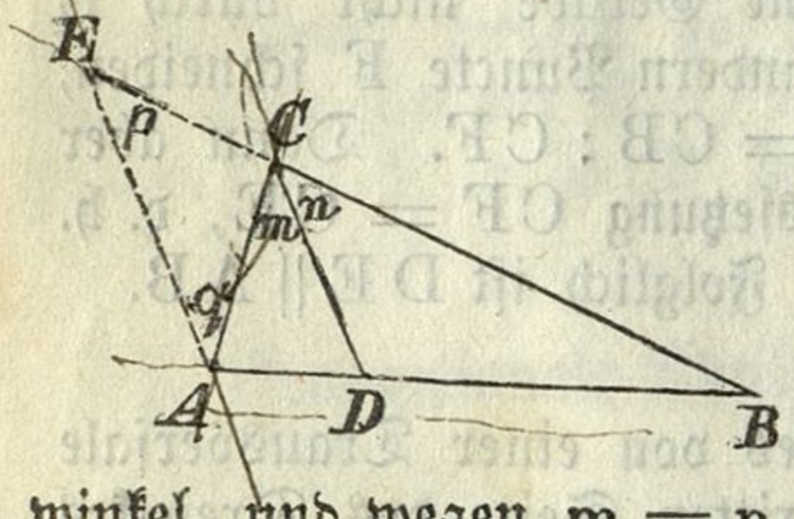


Voraussf. AB ‖ A'B' ‖ A"B" ...
Behaupt. a) CA : CA' : CA" ...
= CD : CD' : CD" ...
= CE : CE' : CE" ...
= CB : CB' : CB" ...
b) AD : A'D' : A"D" ...
= DE : D'E' : D"E" ...
= EB : E'B' : E"B" ...

Der Beweis folgt unmittelbar aus den §§. 90 u. 92.

§. **94.** Lehrsätze. 1. Halbirt man einen Winkel eines Dreieckes, so wird durch die Halbirungslinie die gegenüberstehende Seite in zwei Abschnitte getheilt, welche den ihnen anliegenden Seiten des Dreieckes proportionirt sind.

Fig. 74.



Voraussf. Es sei im Dreiecke ABC (Fig. 75) der Winkel C durch die Gerade CD halbirt, so daß m = n wird.

Behaupt. AD : DB = AC : BC.

Beweis. Man verlängere BC und ziehe durch A mit DC eine Parallele, welche die Verlängerung der BC in E schneidet. Es ist nun m = q als Wechselwinkel, n = p als Gegenwinkel, und wegen m = n auch p = q, folglich EC = AC. In dem Dreiecke ABE ist CD ‖ EA, daher findet die Proportion AD : DB = EC : BC statt, woraus, wenn AC statt EC gesetzt wird, die Proportion AD : DB = AC : BC folgt.

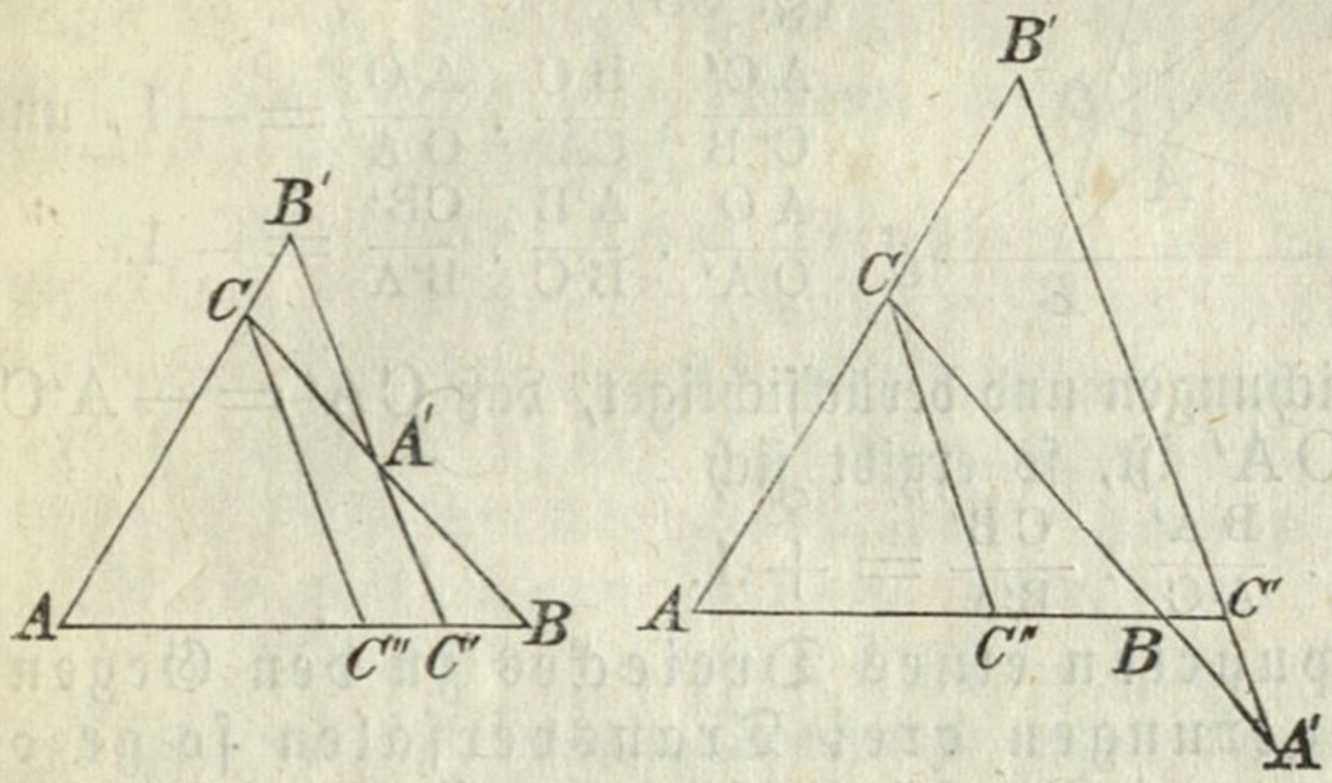
2. Halbirt man einen Außenwinkel eines Dreieckes, so schneidet die Halbirungslinie die verlängerte Gegenseite des Dreieckes in einem Puncte, dessen Abstände von den Endpuncten jener Seite den beiden anderen durch diese Puncte gehenden Dreiecksseiten proportionirt sind.

Der Beweis dieses Satzes ist jenem des vorhergehenden Lehrsatzes analog.

§. **95.** Eine Transversale der Seiten eines Dreieckes ABC (Fig. 75) schneidet entweder zwei Seiten zwischen ihren Endpuncten und die dritte in ihrer Verlängerung, oder alle drei Seiten in ihren Verlängerungen. Die beiden Abschnitte jeder Seite geben ein Verhältniß, das positiv oder negativ ist, je nachdem von der Transversale die bezügliche Seite selbst, oder ihre Verlängerung geschnitten wird.

Lehrsätze. 1. Wird ein Dreieck von einer Transversale geschnitten, so ist das Product der drei Verhältnisse von je zwei in derselben Ordnung auf einander folgenden Abschnitten der Seiten gleich — 1. (Satz des Menelaus.)

Fig. 75.



Beweis. Es ist $\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC'}{C'B}$.

Zieht man $CC'' \parallel B'C'$, so ist auch

$\frac{BA'}{A'C} = \frac{BC'}{C'C''}$ und $\frac{CB'}{B'A} = \frac{C''C'}{C'A}$

Multiplicirt man diese drei Verhältnißgleichungen und berücksichtigt, daß $AC' = -C'A$, $BC' = -C'B$, $C''C' = -C'C''$ ist, so ergibt sich

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = -1.$$

2. Liegt auf jeder Seite eines Dreieckes ein Punct so, daß das Product der drei Verhältnisse von je zwei in derselben Ordnung auf einander folgenden Abschnitten der Seiten gleich — 1 ist, so liegen die drei Puncte in einer geraden Linie.

Beweis. Lägen die Puncte C', A', B' nicht in gerader Linie, sondern schnitte die Verbindungslinie von C' und A' die Seite AC in B'', so hätte man nach dem Lehrsatze 1.

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB''}{B''A} = -1$$

und nach der Voraussetzung

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = -1.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{CB''}{B''A} = \frac{CB'}{B'A}, \text{ daher auch } \frac{B''A - CB''}{B'A - CB'} = \frac{B''A}{B'A},$$

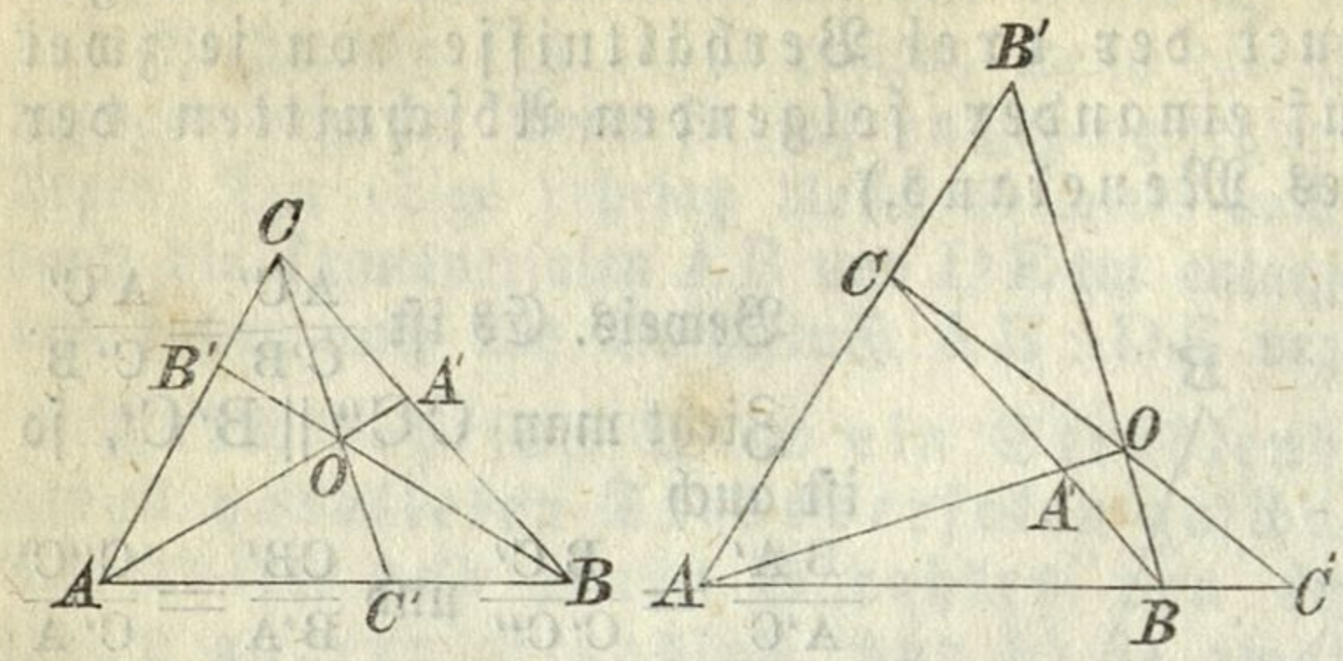
$$\text{oder } \frac{AC}{AC} = \frac{B''A}{B'A}, \text{ mithin } B''A = B'A.$$

Der Punct B'' ist also mit B' identisch, somit liegen die Puncte C' A' und B' in einer geraden Linie.

§. **96.** Zieht man durch einen innerhalb oder außerhalb eines Dreieckes ABC (Fig. 76) liegenden Punct O und durch die drei Eckpuncte des Dreieckes Transversalen, so schneiden diese im ersten Falle alle drei Seiten zwischen ihren Endpuncten, im zweiten nur eine Seite, die beiden anderen aber in ihren Verlängerungen. Die Verhältnisse der Abschnitte jeder Seite sind daher entweder sämmtlich positiv, oder es ist eines positiv und zwei sind negativ.

Lehrsätze. 1. Schneiden sich die von den drei Eckpuncten eines Dreieckes ausgehenden Transversalen in einem gemeinschaftlichen Puncte, so ist das Product der drei Verhältnisse von je zwei in derselben Ordnung auf einander folgenden Abschnitten der Seiten gleich + 1. (Satz des Ceva.)

Fig. 76.



Beweis. Die Dreiecke ABA' und ACA' werden bezüglich von den Transversalen CC' und BB' geschnitten; es ist daher nach dem Satze des Menelaus (§. 95)

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BC}{CA'}\cdot\frac{A'O}{OA}=-1, \text{ und}$$
$$\frac{AO}{OA'}\cdot\frac{A'B}{BC}\cdot\frac{CB'}{B'A}=-1.$$

Multiplicirt man beide Gleichungen und berücksichtiget, daß $CA'=-A'C$, $AO=-OA$, $A'O=-OA'$ ist, so ergibt sich

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=+1.$$

2. Werden von den Eckpuncten eines Dreieckes zu den Gegenseiten oder ihren Verlängerungen drei Transversalen so gezogen, daß das Product der drei Verhältnisse von je zwei in derselben Ordnung auf einander folgenden Abschnitten der Seiten gleich $+1$ ist, so schneiden sich die Transversalen in einem gemeinschaftlichen Puncte.

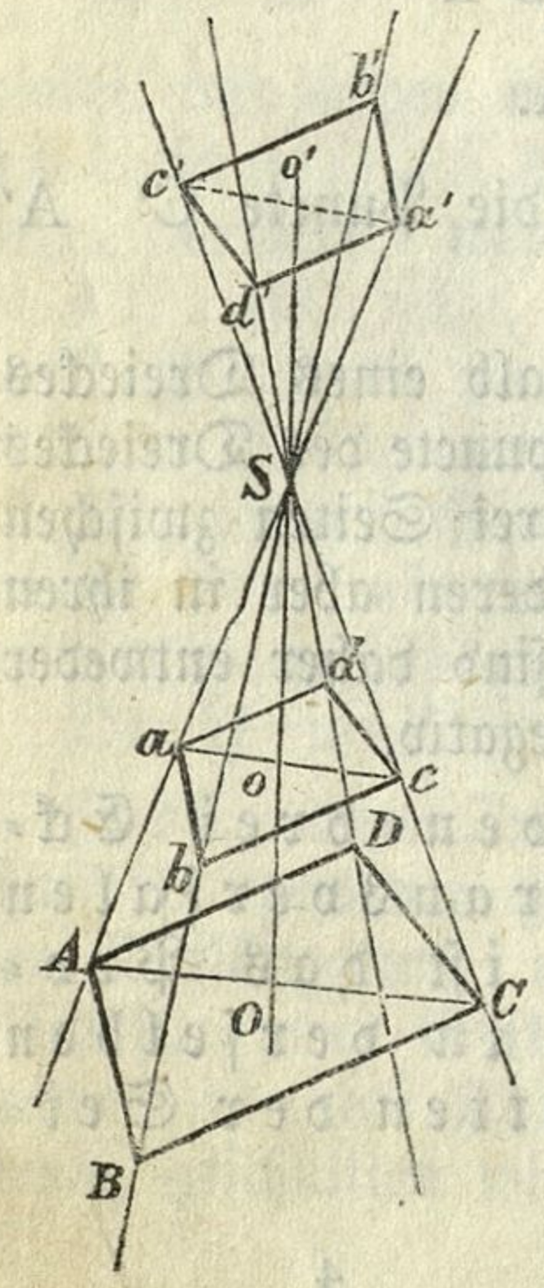
Der Beweis wird indirect, wie zu §. 95, 2, geführt.

IV. Aehnlichkeit der ebenen Figuren.

Allgemeiner Begriff der Aehnlichkeit.

§. 97. 1. Werden die Strahlen eines ebenen Strahlenbüschels (Fig. 77) vom Strahlenpunct S aus in den Puncten A und a, B und b, C und c,.. proportionirt geschnitten, so sind in den Figuren ABCD .. und abcd .. die entsprechenden Strecken zwischen je zwei Durchschnittspuncten proportionirt und die von diesen Strecken gebildeten Winkel paarweise gleich.

Fig. 77.



Es sei $SA:Sa=SB:Sb=SC:Sc=..=q$.

Aus dieser Voraussetzung folgt (§. 91) unmittelbar, daß $AB\parallel ab$, $AC\parallel ac$, $BC\parallel bc$,.. ist.

Somit ist (§. 92) $AB:ab=SB:Sb=q$ und $BC:bc=SB:Sb=q$, daher auch

$$AB:ab=BC:bc=q;\ \text{u. s. w.}$$

Daß ferner W. $ABC=abc$, W. $BAC=bac$, W. $BCD=bcd$, .. ist, folgt aus §. 28, 1.

Dieselben Beziehungen finden auch statt, wenn die Puncte a', b', c', .. auf den Rückwärtsverlängerungen der Strahlen so liegen, daß $SA:Sa'=SB:Sb'=SC:Sc'=..=-q$ ist. Das constante Verhältniß der entsprechenden Abschnitte eines jeden Strahles ist hier negativ, da dieselben auf entgegengesetzten Seiten des Strahlenpunctes liegen; zugleich ist aber auch in den Figuren ABC .. und abc .. das Verhältniß je zweier entsprechender Strecken negativ, da diese im entgegengesetzten Sinne parallel sind.

Zusatz. Sind A, B, C, D, .. Umfangspuncte eines Kreises, so sind auch a, b, c, d, .. Umfangspuncte eines Kreises. Denn, ist O der Mittelpunct des durch A, B, C, .. gehenden Kreises, und o der Punct, welcher auf dem Strahl SO dem Puncte O entspricht, so hat man $AO : ao = BO : bo = ..$; allein $AO = BO = ..$, somit auch $ao = bo = ..$, d. h. die Puncte a, b, c,.. liegen in dem Umfange eines Kreises, dessen Mittelpunct o ist. Die entsprechenden Halbmesser und Sehnen dieser Kreise sind proportionirt und bilden paarweise gleiche Winkel.

2. Umgekehrt: Zwei Figuren, in denen die entsprechenden Strecken nach der Ordnung proportionirt und die von ihnen gebildeten Winkel paarweise gleich sind, lassen sich immer in eine solche Lage bringen, daß von ihren Umfängen die Strahlen eines Strahlenbüschels proportionirt geschnitten werden. (Fig. 77.)

Es sei $AB : ab = AC : ac = BC : bc = ..$, und

W. $ABC = abc$, $BAC = bac$, $BCD = bcd = ..$

Legt man die beiden Figuren so gegen einander, daß zwei in einem Puncte sich schneidende Strecken der einen Figur den entsprechenden Strecken der andern Figur in demselben Sinne parallel sind, so müssen, da die Strecken nach der Ordnung proportionirt und die Winkel paarweise gleich sind, auch je zwei andere entsprechende Strecken in demselben Sinne parallel sein.

Liegen aber zwei Figuren so gegen einander, daß je zwei entsprechende Strecken derselben parallel sind, so müssen sich die durch je zwei entsprechende Endpuncte derselben gezogenen Geraden in einem gemeinschaftlichen Puncte schneiden, was wir indirect beweisen wollen.

Es sei S der Punct, in welchem sich Aa und Bb schneiden. Würde Cc nicht durch S gehen, sondern die Bb in S' schneiden, so wäre (§. 92) $AB : ab = SB : Sb$ und $BC : bc = S'B : S'b'$, daher wegen $AB : ab = BC : bc$ auch $SB : Sb = S'B : S'b$, woraus $(SB - Sb) : (S'B - S'b) = SB : S'B$, oder $Bb : Bb = SB : S'B$, mithin $S'B = SB$ folgt. Der Punct S' muß also mit S identisch sein, d. h. die Cc muß durch den Punct S gehen.

Ebenso folgt, daß auch die Gerade Dd, .. durch S gehen muß, daß somit SA, SB, SC, SD, .. die Strahlen eines Strahlenbüschels sind.

Dann ergibt sich aus §. 90

$$SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc = \ldots$$

Der Beweis bleibt sich gleich, wenn die beiden Figuren so gelegt werden, daß die entsprechenden Strecken im entgegengesetzten Sinne parallel sind.

Zusatz. Der obige Lehrsatz gilt auch von zwei Kreisen, da bei jeder Lage derselben jedem Halbmesser des einen Kreises ein paralleler Halbmesser des andern entspricht, und die entsprechenden Halbmesser und Sehnen sowohl proportionirt sind als auch paarweise gleiche Winkel bilden.

§. 98. Zwei Figuren, welche sich in eine solche Lage bringen lassen, daß von ihren Umfängen die Strahlen eines Strahlenbüschels proportionirt geschnitten werden, heißen ähnlich. In dieser Lage sind die ähnlichen Figuren auch ähnlich liegend.

Je zwei entsprechende Puncte, welche auf demselben Strahl liegen, heißen homologe Puncte, ebenso auch zwei Strecken (Seiten, Diagonalen, Halbmesser), welche homologe Puncte verbinden, homologe Strecken.

Der Strahlenpunct S, in welchem sich in zwei ähnlich liegenden Figuren die durch je zwei homologe Puncte gezogenen Geraden schneiden, heißt der Aehnlichkeitspunct dieser Figuren, und zwar ein äußerer oder ein innerer,

je nachdem die homologen Punctpaare auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten des Strahlenpunctes liegen.

Ist das constante Verhältniß zweier homologer Abschnitte eines Strahles $q = 1$, so sind die ähnlichen Figuren zugleich congruent.

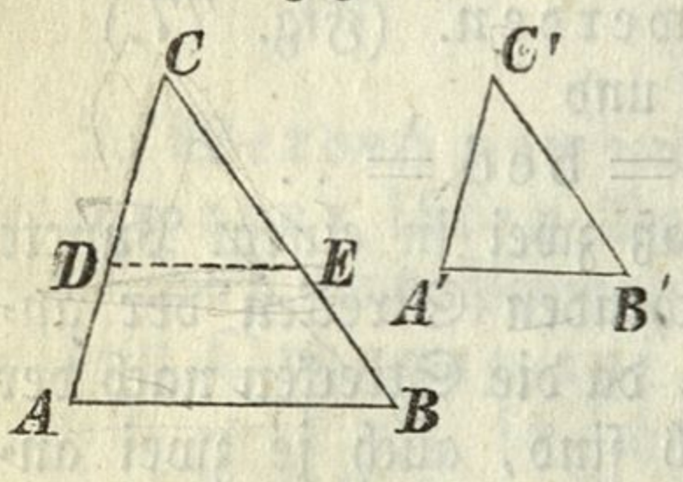
Folgesätze. 1. In zwei ähnlichen Vielecken sind die homologen Seiten proportionirt und die von ihnen gebildeten Winkel paarweise gleich.

2. Je zwei Kreise sind ähnlich und in jeder Lage auch ähnlich liegend.

Aehnlichkeit der Dreiecke.

§. **99.** Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in denselben die homologen Seiten proportionirt und die von ihnen gebildeten Winkel paarweise gleich sind.

Fig. 78.



Ist (Fig. 78) $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$, und
$AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$,
so ist $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

Zieht man in einem Dreiecke mit einer Seite eine Parallele, so ist das gegebene Dreieck dem durch die Parallele abgeschnittenen Dreiecke ähnlich.

Folgt aus §. 92.

Zusatz. Aus der obigen Erklärung ergibt sich, daß zur Aehnlichkeit zweier Dreiecke sechs Bedingungen erforderlich sind: die Gleichheit dreier Paare von Winkeln, und die Gleichheit der Verhältnisse zwischen je zwei Paaren der Seiten. Da jedoch diese Bedingungen nicht unabhängig von einander sind, so kann man häufig schon aus dem Zutreffen nur zweier Bedingungen auf die Aehnlichkeit der beiden Dreiecke schließen. Die Fälle, in denen dieses geschehen darf, enthalten die folgenden Lehrsätze.

§. **100.** I. Aehnlichkeitssatz. Sind in zwei Dreiecken zwei Winkel paarweise gleich, so sind die Dreiecke ähnlich.

Voraussetzung. Es sei (Fig. 78) $A = A'$ und $C = C'$.

Behaupt. $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

Beweis. Man mache $CD = C'A'$ und ziehe $DE \parallel AB$, so ist W. $CDE = A = A'$, daher $\triangle DEC \cong A'B'C'$ (§. 45). Nun ist $\triangle ABC \sim DEC$ (§. 99), mithin auch $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

Folgesatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn alle drei Seiten paarweise parallel sind oder auf einander senkrecht stehen (§. 28).

§. **101.** II. Aehnlichkeitssatz. Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten des einen zweien Seiten des anderen proportionirt, und die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel gleich, so sind die Dreiecke ähnlich (Fig. 78).

Voraussetzung. $AC : A'C' = BC : B'C'$, und $C = C'$.

Behaupt. $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

Beweis. Man mache $CD = C'A'$ und ziehe $DE \parallel AB$, so ist $AC : CD = BC : CE$, oder $AC : A'C' = BC : CE$. Allein nach der Voraussetzung ist $AC : A'C' = BC : B'C'$; folglich $CE = B'C'$ und daher $\triangle DEC \cong A'B'C'$ (§. 46); nun ist $\triangle ABC \sim DEC$, also auch $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

§. **102.** III. Aehnlichkeitssatz. Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten des einen zweien Seiten des anderen proportionirt, und die den größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich, so sind die Dreiecke ähnlich (Fig. 78).

Der Beweis ist unter Beziehung auf §. 48 demjenigen in §. 101 analog.

§. **103.** IV. Aehnlichkeitssatz. Sind in zwei Dreiecken die drei Seiten des einen den drei Seiten des anderen proportionirt, so sind die Dreiecke ähnlich. (Fig. 78.)

Voraus. $AC : A'C' = AB : A'B'$ und
$AC : A'C' = BC : B'C'$.

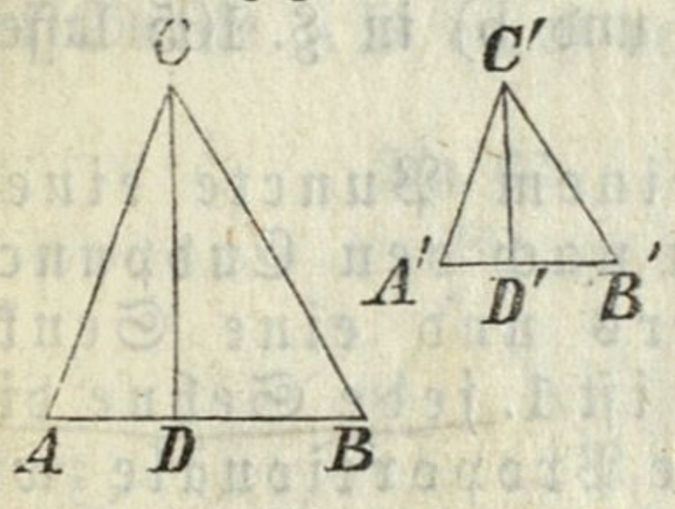
Behaupt. $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

Beweis. Man mache $CD = C'A'$ und ziehe $DE \parallel AB$, so ist
$AC : CD = AB : DE$ und $AC : CD = BC : CE$, oder
$AC : A'C' = AB : DE$ und $AC : A'C' = BC : CE$.

Vergleicht man diese zwei Proportionen mit den in der Voraussetzung enthaltenen, so folgt $DE = A'B'$ und $CE = B'C'$, mithin $\triangle CDE \cong A'B'C'$ (§. 49); nun ist $\triangle ABC \sim CDE$, also auch $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

§. **104.** Lehrsatz. In ähnlichen Dreiecken sind die Höhen den Grundlinien proportionirt, wenn man zu den letzteren zwei homologe Seiten annimmt.

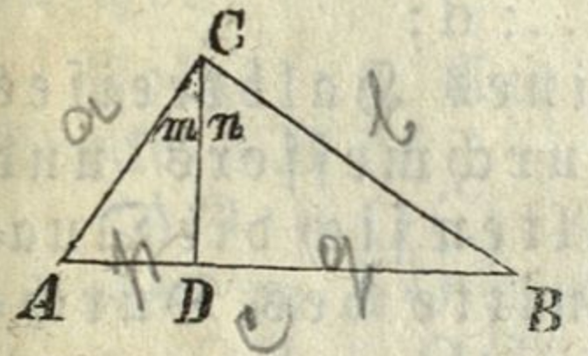
Fig. 79.



Es sei (Fig. 79) das $\triangle ABC \sim A'B'C'$, und man nehme die homologen Seiten AB und $A'B'$ als die Grundlinien, CD und $C'D'$ als die Höhen der beiden Dreiecke an; zu beweisen hat man, daß $CD : C'D' = AB : A'B'$ ist. — Die Dreiecke ACD und $A'C'D'$ haben zwei Winkel wechselseitig gleich, sind daher ähnlich; mithin findet die Proportion $CD : C'D' = AC : A'C'$ statt. Weil nach der Annahme $\triangle ABC \sim A'B'C'$, so ist auch $AB : A'B' = AC : A'C'$. Aus den beiden Proportionen folgt dann $CD : C'D' = AB : A'B'$.

§. **105.** Lehrsatz. Zieht man in einem rechtwinkligen Dreiecke vom Scheitel des rechten Winkels eine Senkrechte auf die Hypotenuse, so ist a) jede Kathete die mittlere geometrische Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und dem jener Kathete anliegenden Abschnitte der Hypotenuse; b) die Senkrechte ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

Fig. 80.



Es sei (Fig. 80) der Winkel ACB ein rechter und
$CD \perp AB$.

In den Dreiecken ABC und ACD ist der Winkel $A = A$, $ACB = ADC = R$, es ist daher auch der dritte Winkel $B = m$ und das $\triangle ABC \sim ACD$. Ebenso ist $\triangle ABC \sim BCD$; und folglich auch $\triangle ACD \sim BCD$.

a) Da $\triangle ABC \sim ACD$ ist, so folgt $AB : AC = AC : AD$; da $\triangle ABC \sim BCD$, so ist auch $AB : BC = BC : BD$.

b) Da $\triangle ACD \sim BCD$ ist, so folgt $AD : CD = CD : BD$.

§. **106.** Nimmt man irgend eine Längeneinheit an und findet, nachdem (Fig. 80) die Katheten des rechtwinkligen Dreieckes, die Hypotenuse und deren Abschnitte damit gemessen wurden, $AC = a$, $BC = b$, $AB = c$, $AD = p$, $BD = q$, wo a, b, c, p und q die Maßzahlen der bezüglichen Linien be-

deuten, so ergibt sich aus den in §. 105 unter a) aufgestellten Proportionen

$$c : a = a : p,\ c : b = b : q,$$

$$\text{daher } cp = a^2,\quad cq = b^2.$$

Addirt man diese letzten Gleichungen, so erhält man

$$cp + cq = a^2 + b^2.$$

Allein es ist $cp + cq = c\,(p + q) = c \cdot c = c^2$; daher

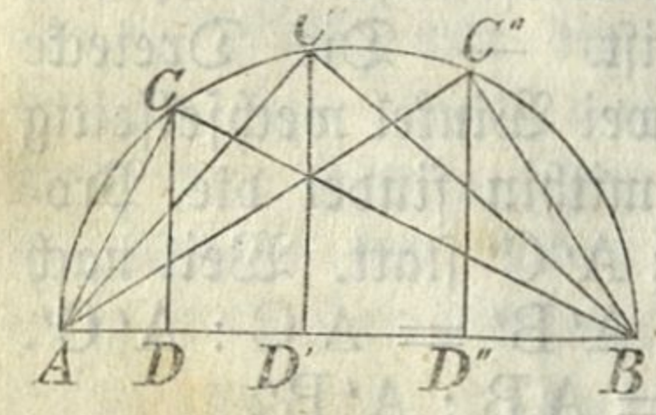
$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Erhebt man also die Zahlen, welche das Verhältniß der Hypotenuse und der Katheten zur Längeneinheit ausdrücken, zum Quadrat, so ist das Quadrat der Maßzahl der Hypotenuse gleich der Summe aus den Quadraten der Maßzahlen der Katheten. Man kann diesen Satz kürzer so ausdrücken:

In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist das (arithmetische) Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe aus den (arithmetischen) Quadraten der beiden Katheten.

§. **107.** Beschreibt man über der Hypotenuse AB (Fig. 81) ein rechtwinkliges Dreieck ABC, so liegt (§. 40, 1. e) der Scheitel C in dem Halbkreise, welcher über AB als Durchmesser beschrieben wird; die Katheten AC und BC sind Sehnen dieses Kreises. Die Sätze a) und b) in §. 105 lassen sich daher auch so ausdrücken:

Fig. 81.



Zieht man von einem Puncte eines Halbkreises Sehnen nach den Endpuncten des Durchmessers und eine Senkrechte auf diesen, so ist 1. jede Sehne die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem ganzen Durchmesser und dem jener Sehne anliegenden Abschnitte des Durchmessers; 2. die Senkrechte ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten des Durchmessers.

§. **108.** Beschreibt man über der Hypotenuse AB (Fig. 81) als Durchmesser eines Halbkreises mehrere rechtwinklige Dreiecke ACB, AC'B, AC''B,.. zieht von den Scheiteln der rechten Winkel Senkrechte CD, C'D', C''D'',.. auf den Durchmesser und setzt $AC = s$, $AC' = s'$, $AC'' = s''$,.., $AD = p$, $AD' = p'$, $AD'' = p''$.., $AB = d$, so folgt aus §. 107, 1.

$$s^2 = dp,\ s'^2 = dp',\ s''^2 = dp''..,\ d^2 = d.d,$$

$$\text{daher } s^2 : s'^2 : s''^2 .. : d^2 = p : p' : p''..: d;$$

d. h. zieht man von verschiedenen Puncten eines Halbkreises Sehnen nach dem einen Endpuncte des Durchmessers und Senkrechte auf diesen Durchmesser, so verhalten sich die Quadrate der Sehnen wie die anliegenden Abschnitte des Durchmessers.

Aehnlichkeit der Vielecke.

§. **109.** Zwei Vielecke sind ähnlich, wenn in denselben die homologen Seiten proportionirt und die von ihnen gebildeten Winkel paarweise gleich sind.

Aus §. 97 ergeben sich für ähnliche Vielecke folgende Sätze:

1. Zwei regelmäßige Vielecke von gleicher Seitenzahl sind ähnlich.

2. In ähnlichen Vielecken verhalten sich die Umfänge wie zwei homologe Seiten.

Denn ist $AB:ab = BC:bc = CD:cd = .. = q$, so ist auch $(AB + BC + CD + ..):(ab + bc + cd + ..) = AB:ab = q$.

3. In ähnlichen Vielecken sind je zwei homologe Diagonalen zwei homologen Seiten proportionirt.

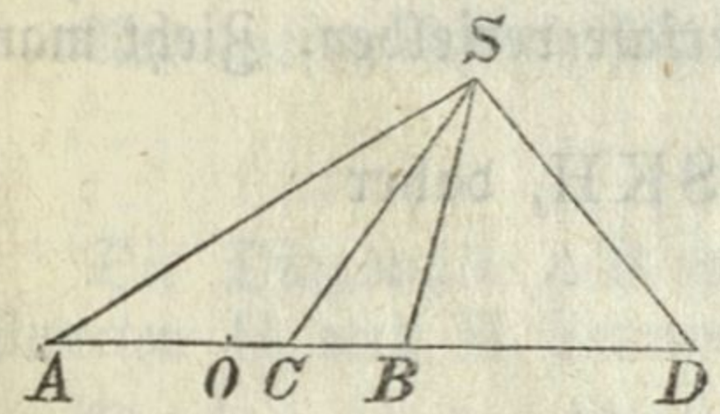
4. Zwei ähnliche Vielecke werden durch homologe Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerlegt.

5. Umgekehrt: Zwei Vielecke, welche sich auf übereinstimmende Weise in gleich viele ähnliche Dreiecke zerlegen lassen, sind ähnlich.

V. Harmonische Theilung der Strecken.

§. **110**. Liegt von zwei Puncten C und D (Fig. 82) der eine auf der Strecke AB, der andere auf deren Verlängerung, so ist das Verhältniß der Abschnitte AC und CB, in welche die Strecke AB durch den Punct C getheilt wird, positiv, dagegen das Verhältniß der Abschnitte AD und DB, in welche die Strecke AB durch den Punct D getheilt wird, negativ.

Fig. 82.



Sind nun die absoluten Werthe dieser beiden Verhältnisse gleich, ist nämlich $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$, so sagt man: die Strecke AB ist durch die Puncte C und D harmonisch getheilt.

Aus $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$ folgt auch $\frac{CB}{BD} = -\frac{CA}{AD}$. Ist daher die Strecke AB durch die Puncte C und D harmonisch getheilt, so ist auch die Strecke CD durch die Puncte B und A harmonisch getheilt.

Die Puncte A, C, B, D heißen vier harmonische Puncte. Die Puncte C und D nennt man in Bezug auf die Strecke AB einander conjugirt; ebenso sind B und A in Bezug auf die Strecke CD einander conjugirt.

Vier Strahlen, welche von einem Puncte S aus durch vier harmonisch liegende Puncte gehen, heißen harmonische Strahlen, und zwar nennt man je zwei Strahlen, welche durch zwei conjugirte Puncte gehen, einander conjugirt. Alle vier Strahlen zusammen bilden ein harmonisches Strahlenbüschel.

Folgesatz. Aus $AC:CB = AD:-DB$ folgt, wenn O die Mitte der Strecke AB ist,

$$(AO + OC):(OB - OC) = (AO + OD):-(OB - OD),$$

oder, da $AO = OB$ ist,

$$(OB + OC):(OB - OC) = (OD + OB):(OD - OB),$$

welche Proportion gleichbedeutend ist mit

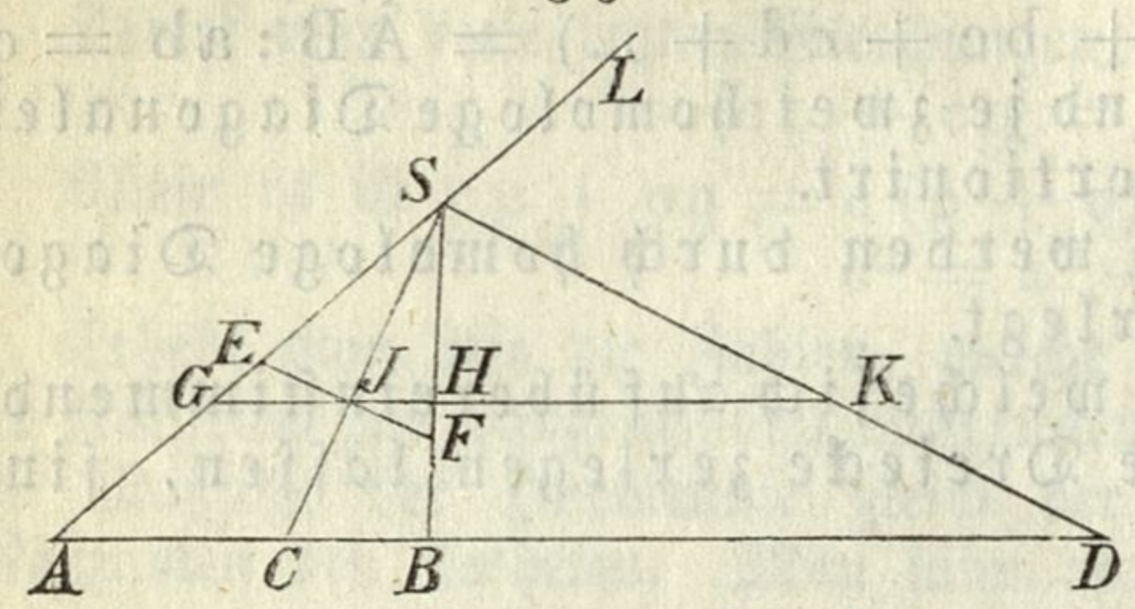
$$OB:OC = OD:OB, \text{ oder } OC:OB = OB:OD;$$

d. h. die Hälfte der harmonisch getheilten Strecke ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Abständen der Theilungspuncte von der Mitte der Strecke.

§. **111**. Lehrsätze. 1. Ist eine Transversale mit einem Strahl eines harmonischen Büschels parallel, so halbirt der conjugirte

Strahl den Abstand zwischen den Durchschnittspuncten der beiden anderen Strahlen.

Fig. 83.



Beweis. Es seien (Fig. 83) SA, SC, SB, SD die Strahlen eines harmonischen Büschels, und $EF \parallel SD$. Zieht man durch J die $GK \parallel AD$, so ist $\triangle EGJ \sim SGK$ und $\triangle FJH \sim SKH$ daher

$$\frac{JE}{KS} = \frac{GJ}{GK} \text{ und } \frac{JF}{KS} = \frac{JH}{KH}.$$

Nun ist, da GK und AD (nach §. 93) von den vier Strahlen proportionirt geschnitten werden, und also auch G, J, H, K vier harmonische Puncte sind,

$$\frac{GJ}{JH} = -\frac{GK}{KH}, \text{ oder } \frac{GJ}{GK} = -\frac{JH}{KH}; \text{ folglich ist auch}$$

$$\frac{JE}{KS} = -\frac{JF}{KS}, \text{ und somit } JE = -JF.$$

2. Ein harmonisches Strahlenbüschel wird von jeder Transversale in vier harmonischen Puncten geschnitten.

Beweis. Es seien (Fig. 83) SA, SC, SB, SD die Strahlen eines harmonischen Büschels und GK eine beliebige Transversale derselben. Zieht man durch J die $EF \parallel SK$, so ist

$\triangle EGJ \sim SGK$ und $\triangle FJH \sim SKH$, daher

$$\frac{GJ}{GK} = \frac{JE}{KS} \text{ und } \frac{JH}{KH} = \frac{JF}{KS}.$$

Nun ist (nach 1.) $JE = -JF$, folglich auch

$$\frac{GJ}{GK} = -\frac{JH}{KH}, \text{ oder } \frac{GJ}{JH} = -\frac{GK}{KH};$$

d. h. G, J, H, K sind vier harmonische Puncte.

§. 112. Lehrsätze. 1. Halbirt man in einem Dreiecke einen Winkel und dessen Nebenwinkel, so wird die gegenüberliegende Dreiecksseite durch die beiden Halbirungslinien harmonisch getheilt.

Es sei in dem Dreiecke ABS (Fig. 83) W. $ASC = BSC$ und W. $BSD = LSD$.

Man hat

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AS}{SB} \text{ (§. 94, 1) und } -\frac{AD}{DB} = \frac{AS}{SB} \text{ (§. 94, 2); folglich}$$

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}.$$

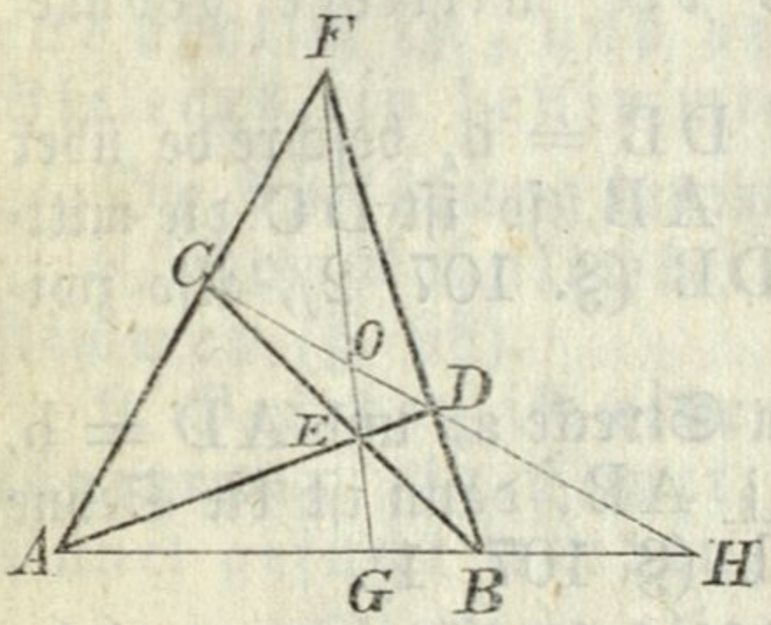
2. Stehen in einem harmonischen Strahlenbüschel zwei conjugirte Strahlen senkrecht auf einander, so halbiren sie den Winkel und den Nebenwinkel der beiden anderen Strahlen.

Beweis. Es seien (Fig. 83) SA, SC, SB, SD harmonische Strahlen, und zwar $SC \perp SD$. Man ziehe $EF \perp SC$, so ist auch $EF \parallel SD$, und daher wegen der Gleichheit der Seiten EJ und JF (§. 111, 1) das rechtwinklige Dreieck $SJE \cong SJF$, also W. $ESJ = FSJ$. Daraus folgt aber, da $JSK = R$ ist, auch W. $FSK = LSK$.

§. **113.** Verlängert man in irgend einem Vierecke CEDF (Fig. 84) die gegenüberliegenden Seiten bis zu ihren Durchschnittspuncten A und B, so erhält man ein System von vier Geraden, das ein vollständiges Vierseit heißt. AD, AF, BC und BF heißen die vier Seiten, die Durchschnittspuncte derselben A und B, C und D, E und F die sechs Ecken, und AB, CD, und EF die drei Diagonalen des vollständigen Vierseits.

Lehrsatz. Jede der drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits wird durch die beiden anderen Diagonalen harmonisch getheilt.

Fig. 84.



Beweis. Das Dreieck ABC wird von der Transversale FG geschnitten; es ist daher nach dem Satze des Menelaus (§. 95)

$$\frac{AG}{GB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = -1.$$

In demselben Dreiecke ABC gehen von den Eckpuncten aus drei Transversalen, welche sich in einem gemeinschaftlichen Puncte D schneiden; es ist daher nach dem Satze des Ceva (§. 96) auch

$$\frac{AH}{HB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = +1.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\frac{AG}{GB} = -\frac{AH}{HB}.$$

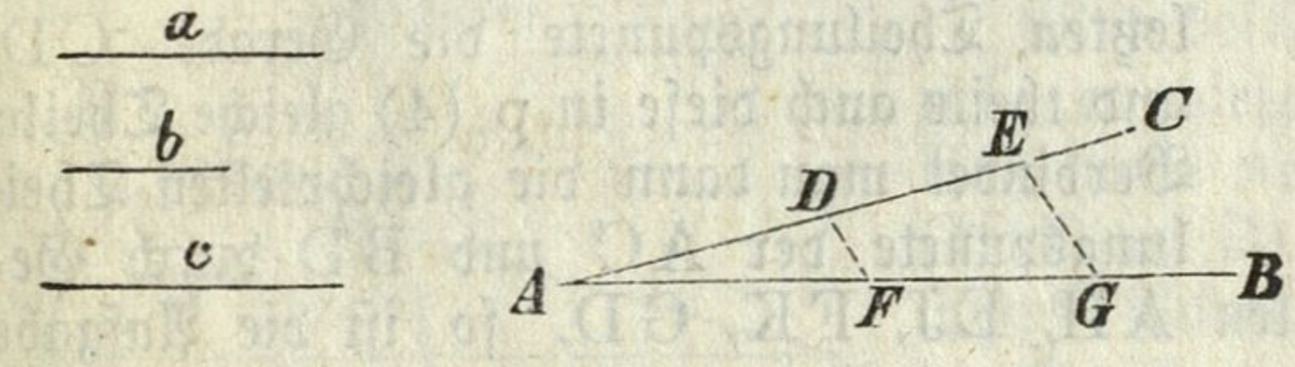
Die Diagonale AB wird also durch die beiden anderen Diagonalen in den Puncten G und H harmonisch getheilt.

Ebenso wird der Beweis für die Diagonalen CD und EF geführt, indem man die Sätze des Menelaus und des Ceva bezüglich auf die Dreiecke CDE und BEF anwendet.

VI. Aufgaben.

§. **114.** 1. Zu drei gegebenen Strecken die vierte Proportionale zu finden.

Fig. 85.

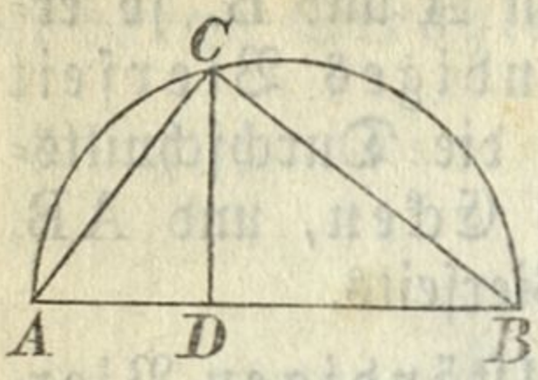


Man construire einen willkürlichen Winkel BAC (Fig. 85), mache AD = a, DE = b, AF = c, ziehe DF und damit parallel die EG, so ist FG die vierte Proportionale zu a, b, c.

Wären hier statt der Linien a und b die Zahlen m und n gegeben, so müßte man auf AD m, auf DE n gleiche Theile auftragen und weiter wie vorhin verfahren.

2. Zu zwei gegebenen Strecken c und b die dritte stetige Proportionale zu construiren.

Fig. 86.



Auflös. 1. Nach Aufgabe 1, indem man a = b setzt.

Auflös. 2. Man ziehe CD ⊥ AB, mache AD = c, CD = b, ziehe ferner AC und senkrecht darauf CB bis zur Verlängerung der AD; dann ist AD : CD = CD : DB (§. 105, b), oder c : b = b : DB, folglich DB die dritte stetige Proportionale zu c und b.

Auflös. 3. Ist c > b, so kann man folgende einfachere Construction anwenden: Man mache AB = c, beschreibe über AB als Durchmesser einen Halbkreis und aus A mit dem Halbmesser b einen Bogen, welcher jenen Kreis in C schneidet; dann ist AB : AC = AC : AD (§. 107, 1), oder c : b = b : AD.

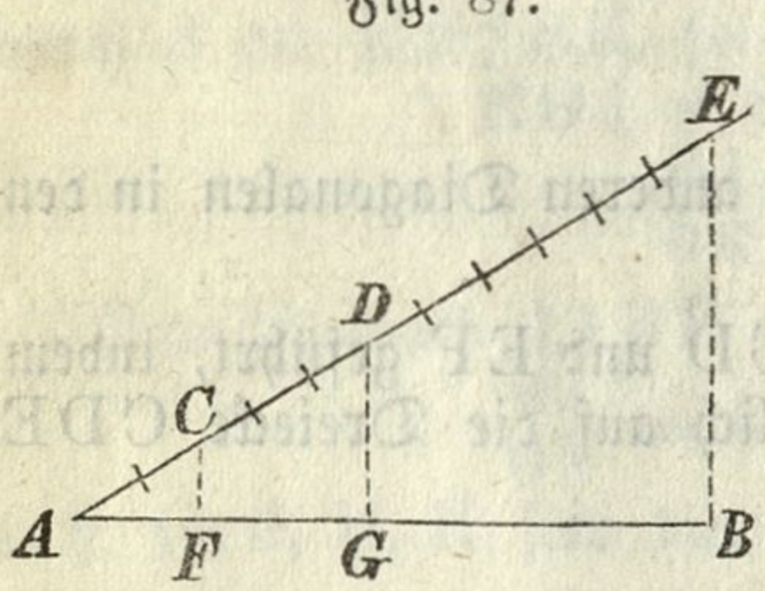
3. Zu zwei gegebenen Strecken a und b die mittlere geometrische Proportionale zu construiren.

Auflös. 1. Man mache (Fig. 86) AD = a, DB = b, beschreibe über AB einen Halbkreis und errichte in D die DC ⊥ AB, so ist DC die mittlere geometrische Proportionale zwischen AD und DB (§. 107, 2), also zwischen a und b.

Auflös. 2. Man mache AB gleich der größeren Strecke a, und AD = b, beschreibe über AB einen Halbkreis und ziehe DC ⊥ AB; dann ist die Sehne AC die gesuchte mittlere Proportionale zu a und b (§. 107, 1).

4. Eine gegebene Strecke in mehrere Theile zu theilen, welche in gegebenen Verhältnissen zu einander stehen.

Fig. 87.

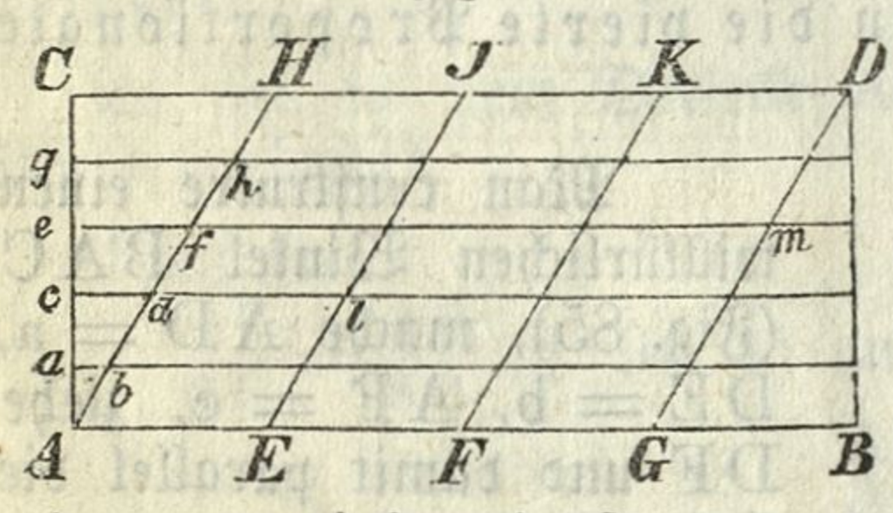


Es sei z. B. die Strecke AB (Fig. 87) in Theile zu theilen, welche sich zu einander verhalten wie m : n : p (2 : 3 : 6).

Man ziehe durch A eine willkürliche Gerade AX, trage darauf von A bis C m, von C bis D n, von D bis E p unter einander gleiche Theile auf, und ziehe EB. Zieht man nun CF || DG || EB, so ist AF : FG : GB = m : n : p.

5. Eine Strecke mittelst Transversalen in n = p . r (20 = 4.5) gleiche Theile zu theilen.

Fig. 88



Man theile die Strecke AB (Fig. 88) in p (4) gleiche Theile; in A und B errichte man auf AB Senkrechte, trage darauf r (5) gleiche Theile auf, ziehe durch die letzten Theilungspuncte die Gerade CD, und theile auch diese in p (4) gleiche Theile. Verbindet man dann die gleichvielten Theilungspuncte der AC und BD durch Gerade und zieht die Transversalen AH, EJ, FK, GD, so ist die Aufgabe gelöst.

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke Aab und ACH hat man nämlich ab : CH = Aa : AC, aber $Aa = \frac{1}{r} AC$, also auch $ab = \frac{1}{r} CH$; nun ist $CH = \frac{1}{p} AB$, somit $ab = \frac{1}{pr} AB$. Eben so folgt, daß $cd = \frac{2}{pr} AB$, $ef = \frac{3}{pr} AB, \ldots, cl = \frac{r+2}{pr} AB$, $em = \frac{3r+3}{pr} AB, \ldots$ ist.

Ein Maßstab, auf welchem die in der Wirklichkeit üblichen Maße sammt ihren Unterabtheilungen nach einem bestimmten Verhältnisse verkleinert aufgetragen sind, heißt ein verjüngter Maßstab.

6. Ein Dreieck zu construiren, welches mit dem Dreiecke ABC (Fig. 78) ähnlich ist, und dessen Seiten zu den Seiten des gegebenen Dreieckes ein bestimmtes Verhältniß m : n haben.

Man suche zu n, m, AB die vierte Proportionale A'B', und construire in den Endpuncten derselben zwei Winkel, welche den Winkeln A und B gleich sind; ihre Schenkel schneiden sich in C', und es ist A'B'C' das verlangte Dreieck.

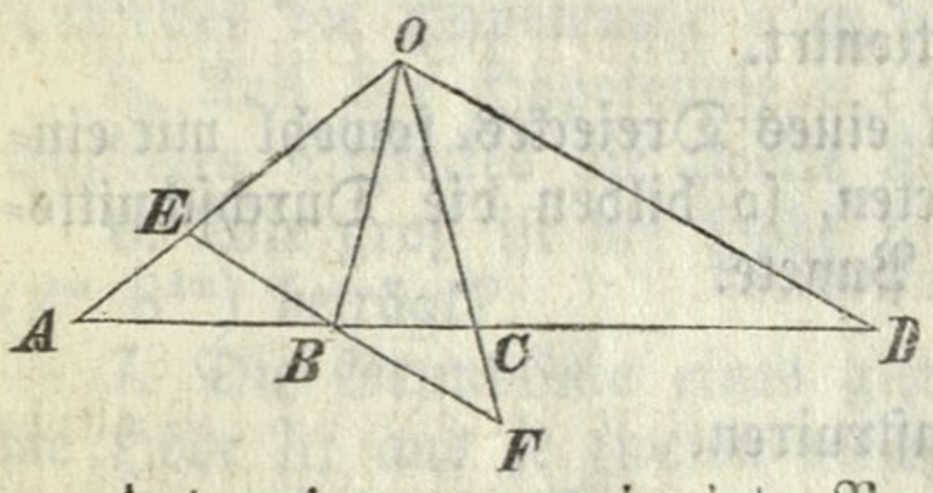
7. Ein Vieleck zu construiren, das mit einem gegebenen Vielecke ähnlich ist, und dessen Seiten zu den Seiten des gegebenen Vieleckes ein bestimmtes Verhältnis m : n haben.

Die Auflösung beruht auf der vorhergehenden Aufg. und §. 109, 4 und 5.

8. Den Aehnlichkeitspunct zweier ähnlicher Vielecke zu bestimmen (§. 98).

9. Gegeben ist eine Strecke und auf derselben oder ihrer Verlängerung ein Punct; es soll der dazu harmonisch conjugirte Punct gesucht werden.

Fig. 89.



Auflösung. 1. (Fig. 89).

a) Ist zu der Strecke AC und dem Puncte B der äußere conjugirte Punct D zu suchen, so ziehe man durch B eine Gerade so, daß BE = BF wird (§. 72, 2), und durch O die OD || EF; D ist dann der gesuchte Punct.

b) Ist zu der Strecke BD und dem Puncte A der innere conjugirte Punct C zu suchen, so ziehe man durch B die EF || OD, mache BF = BE, und verbinde F und O durch eine Gerade, welche die AD in C schneidet; C ist der gesuchte Punct.

Beweis für die Richtigkeit beider Constructionen. Es ist

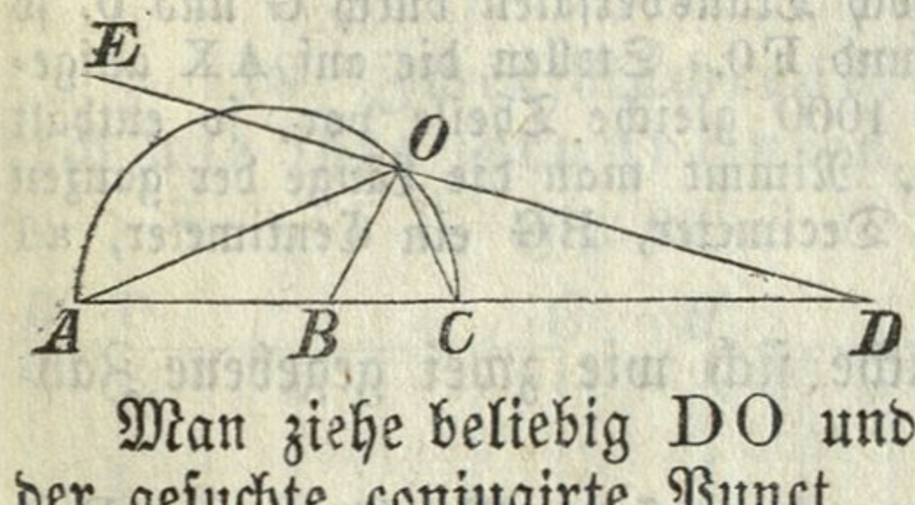
$\triangle ABE \sim ADO$, also $AB : AD = BE : DO$,

$\triangle BCF \sim DCO$, also $BC : DC = BF : DO$,

und folglich wegen $BE = -BF$ auch $AB : BC = -(AD : DC)$.

Auflösung 2. (Fig. 90).

Fig. 90.



a) Gegeben AC und B; zu suchen D.
Man beschreibe über AC einen Halbkreis, ziehe an diesen von B eine beliebige Gerade BO, ziehe noch CO und mache den Winkel COD = BOC; dann ist D der gesuchte conjugirte Punct.

b) Gegeben AC und D; zu suchen B.
Man ziehe beliebig DO und mache den Winkel COB = COD, so ist B der gesuchte conjugirte Punct.

Der Beweis gründet sich in beiden Fällen auf §. 40, 1. e und §. 112, 1.

Auflösung 3. Bloß mit Hilfe des Lineals. (Fig. 84.)

a) Es sei die Strecke AB und der Punct G gegeben, und der äußere conjugirte Punct H zu suchen.

Man ziehe durch G irgend eine Gerade, nehme darin zwei willkührliche Puncte E und F an, ziehe durch dieselben die Geraden AE, AF, BE und BF, welche sich in C und D schneiden. Zieht man durch C und D eine Gerade, so gibt ihr Durchschnitt mit der AB den gesuchten Punct H.

b) Auf ganz gleiche Weise erfolgt die Auflösung, wenn zu der Strecke AB und dem Puncte H der innere conjugirte Punct G gefunden werden soll. Die Richtigkeit geht aus §. 113 hervor.

VII. Uebungssätze und Uebungsaufgaben.

§. 115. Lehrsätze.

1. Die drei Höhen eines Dreieckes sind den Seiten, auf denen sie senkrecht stehen, verkehrt proportionirt.

2. Werden zwei über derselben Grundlinie stehende Dreiecke, welche gleiche Höhe haben, durch eine der Grundlinie parallele Transversale geschnitten, so sind die innerhalb der Dreiecke liegenden Abschnitte dieser Transversale einander gleich.

3. Die beiden Diagonalen eines Trapezes schneiden sich gegenseitig proportionirt.

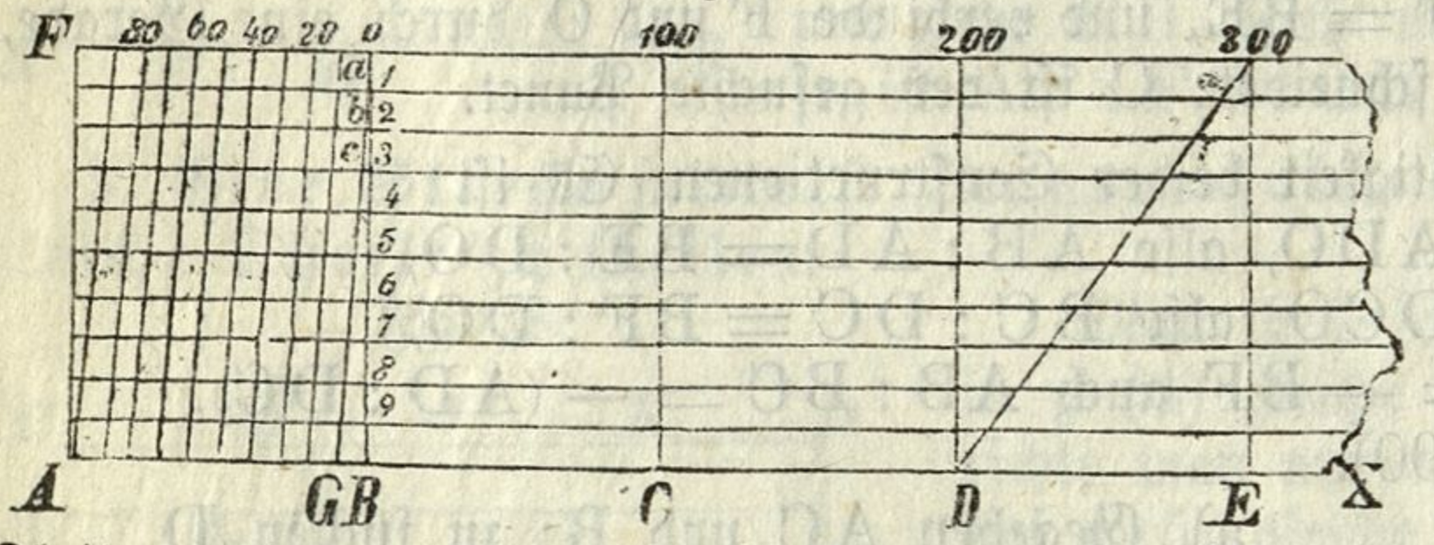
4. Jede mit den Parallelseiten eines Trapezes parallele Transversale schneidet die beiden nicht parallelen Seiten proportionirt.

5. Verbindet man die Mitten der Seiten eines Dreieckes sowohl mit einander als mit den gegenüberliegenden Eckpuncten, so bilden die Durchschnittspuncte auf jeder Mittellinie vier harmonische Puncte.

§. 116. Constructionsaufgaben.

1. Einen tausendtheiligen Maßstab zu construiren.

Fig. 91.



Man trage (Fig. 91) auf eine Gerade AX 10 gleiche Theile auf, errichte in A, B und den folgenden Theilungspuncten Senkrechte auf AX und ziehe mit AX 10 Parallele in beliebigen, jedoch unter sich gleichen Abständen. Nun theile man sowohl die AB als die ihr gegenüberstehende Gerade Fo in 10 gleiche Theile, zu deren leichteren Bestimmung man nur in irgend einer Abtheilung eine Diagonale D 300 zu ziehen braucht. Endlich ziehe man noch Transversalen durch G und 0, so wie durch je zwei folgende Theilungspuncte der AB und FO. Stellen die auf AX aufgetragenen zehn Strecken dieses Transversal-Maßstabes 1000 gleiche Theile vor, so enthält AB 100, BG 10, a1 1, b2 2 u. s. w. solche Theile. Nimmt man die Länge der ganzen Linie AX z. B. für ein Meter an, so stellt AB ein Decimeter, BG ein Centimeter, a1 ein Millimeter vor.

2. Zwei gerade Linien zu construiren, welche sich wie zwei gegebene Zahlen verhalten.

3. Eine gegebene Gerade AB so zu verlängern, daß die Verlängerung BC zu der verlängerten Linie AC ein gegebenes Verhältniß m : n hat.

4. Von einer gegebenen Geraden AB von B aus ein Stück BC abzuschneiden, so daß BC a) zu der gegebenen Linie AB, b) zu dem andern Theile AC derselben ein gegebenes Verhältniß m : n hat.

5. Durch einen Punct zwischen den Schenkeln eines Winkels eine von diesen begrenzte Gerade so zu ziehen, daß sie in jenem Puncte nach einem gegebenen Verhältnisse m : n getheilt wird.

Die in §. 72, 2 gelöste Aufgabe ist ein specieller Fall der vorliegenden Aufgabe.

6. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn die Hypotenuse und das Verhältniß der beiden Katheten gegeben ist.

7. Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite und ihre Verhältnisse zu den beiden andern Seiten gegeben sind.

§. **117.** Rechnungsaufgaben.

1. Auf einem Katastralplane beträgt eine Strecke $6{\cdot}25^{dm}$; wie groß ist die natürliche Länge derselben, a) wenn 1^{cm} der Zeichnung zu 30^{m} angenommen wird, b) wenn sich die Maße des Planes zu den natürlichen Längenmaßen wie 1 : 2500 verhalten?

2. Wie lang wird man eine Strecke, welche in der Wirklichkeit 745^{m} mißt, auf dem Papier auftragen, a) wenn 1^{dm} des gewählten Maßstabes 500^{m} vorstellen soll, b) wenn die Längenmaße im Verhältnisse 1 : 7500 der natürlichen Größe verzeichnet werden sollen?

3. Der Schatten eines Thurmes ist 58^{m} lang, während gleichzeitig die Schattenlänge eines 1^{m} langen senkrechten Stabes 2^{m} beträgt; wie hoch ist der Thurm?

4. Aus beiden Katheten a ($5{\cdot}342^{m}$) und b ($3{\cdot}405^{m}$) eines rechtwinkligen Dreieckes die Hypotenuse c zu finden.

5. Aus der Hypotenuse c (78^{m}) und einer Kathete a (30^{m}) eines rechtwinkligen Dreieckes die zweite Kathete b zu finden.

6. Wie groß ist die Höhe h eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Seite s ($2^{m}\ 8^{dm}$) beträgt?

7. Die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes ist g, der Schenkel s, die Höhe h; aus je zweien dieser Größen die dritte zu finden.

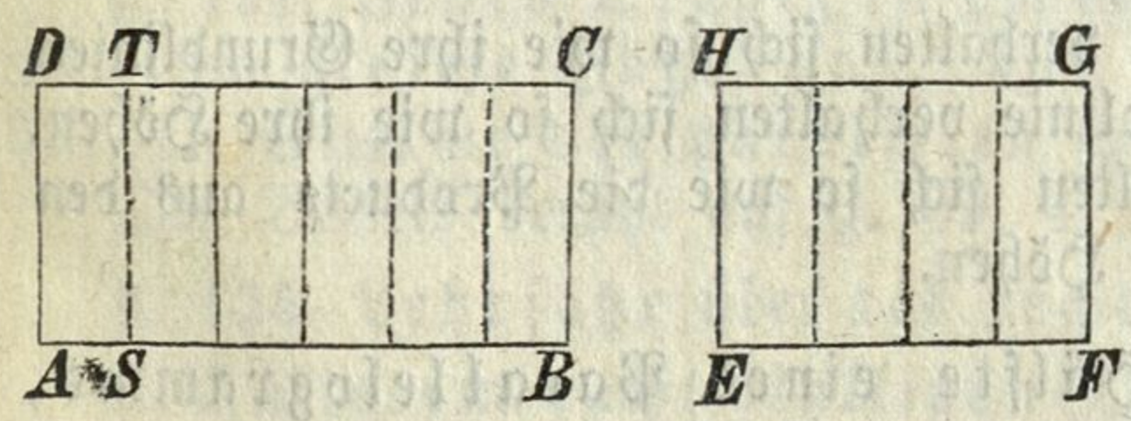
Sechster Abschnitt.

Flächeninhalt der geradlinigen Figuren.

I. Vergleichung der Flächen.

§. **118.** Zwei Rechtecke, welche gleiche Höhe haben, verhalten sich wie ihre Grundlinien.

Fig. 92.



Es seien in den Rechtecken ABCD und EFGH (Fig. 92) die Höhen AD und EH gleich und die Grundlinien AB und EF commensurabel.

Ist in diesem Falle AS ein gemeinschaftliches Maß der beiden Grundlinien, und zwar $AB = m.AS$ und $EF = n.AS$, so hat man $AB : EF = m : n$. Theilt man wirklich die AB in m und die EF in n Theile, deren jeder gleich AS ist, und errichtet

in jedem Theilungspuncte auf die Grundlinien senkrechte Gerade, so zerfällt dadurch das Rechteck ABCD in m und das Rechteck EFGH in n Rechtecke, deren jedes mit ASTD congruent ist; es ist daher

$$ABCD = m.ASTD \text{ und } EFGH = n.ASTD,$$

somit $ABCD : EFGH = m : n$. Aus dieser und der obigen Proportion folgt nun

$$ABCD : EFGH = AB : EF.$$

Sind die Grundlinien AB und EF incommensurabel, so folgt aus §. 88, daß die letzte Proportion auch für diesen Fall Giltigkeit hat.

Folgesatz. Da man in den Rechtecken ABCD und EFGH auch AD und EH als die Grundlinien, AB und EF als die Höhen betrachten kann, so hat man ebenso den Satz:

Zwei Rechtecke, welche gleiche Grundlinien haben, verhalten sich wie ihre Höhen.

§. **119.** Je zwei Rechtecke verhalten sich wie die Producte der Maßzahlen ihrer Grundlinien und Höhen.

Beweis. Sind G und g die Maßzahlen der Grundlinien, H und h die Maßzahlen der Höhen zweier Rechtecke R und r, so sei R' ein Rechteck, dessen Grundlinie g und dessen Höhe H zur Maßzahl hat. Dann ist (nach §. 118)

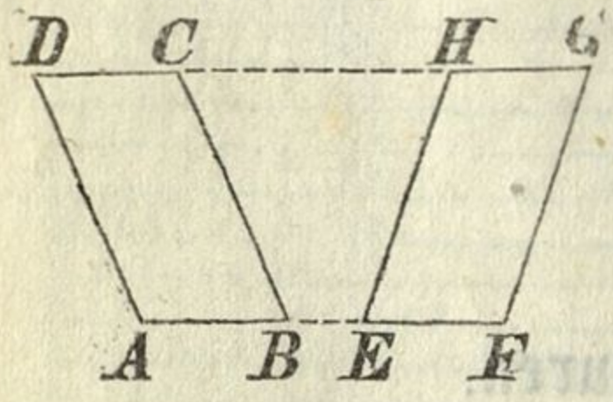
$$R : R' = G : g,$$
$$R' : r = H : h.$$

Durch Multiplication dieser Proportionen erhält man

$$R : r = G . H : g . h.$$

§. **120.** Zwei Parallelogramme, welche gleiche Grundlinien und gleiche Höhe haben, sind flächengleich.

Fig. 93.



Es seien (Fig. 93) ABCD und EFGH zwei Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe. Man lege dieselben zwischen die Parallelen AF und DG, was möglich ist, weil beide die gleiche Höhe haben.

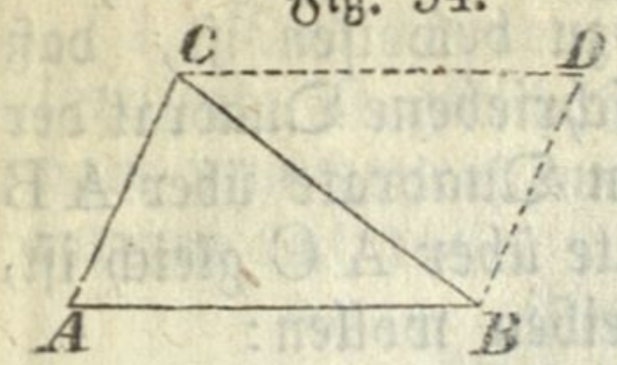
Da nach der Voraussetzung AB = EF und DC = HG ist, so ist auch AE = BF und DH = CG. Das Trapez AEHD ist daher mit BFGC congruent, weil in denselben die Seiten und Winkelpaarweise gleich sind. Nimmt man von beiden das Trapez BEHC weg, so bleibt ABCD = EFGH.

Folgesätze.

a) Jedes Parallelogramm ist einem Rechtecke gleich, welches mit demselben gleiche Grundlinien und gleiche Höhe hat.
b) Parallelogramme von gleicher Höhe verhalten sich so wie ihre Grundlinien.
c) Parallelogramme von gleicher Grundlinie verhalten sich so wie ihre Höhen.
d) Parallelogramme überhaupt verhalten sich so wie die Producte aus den Maßzahlen ihrer Grundlinien und Höhen.

§. **121.** Ein Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

Fig. 94.



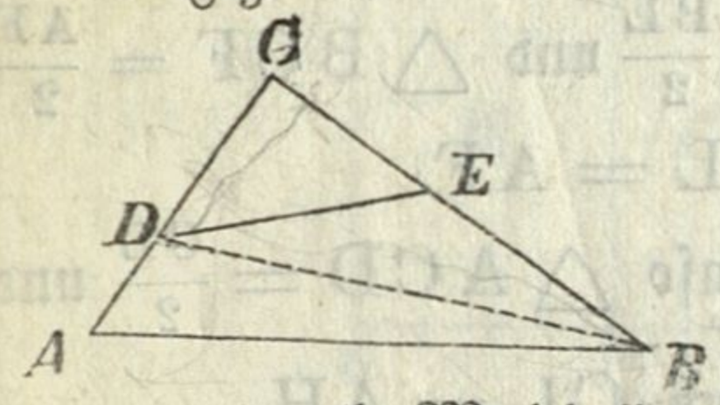
Zieht man durch die Puncte B und C (Fig. 94) des Dreieckes ABC mit den gegenüberstehenden Seiten Parallele, welche sich in D schneiden, so entsteht ein Parallelogramm ABDC, das mit dem Dreiecke ABC gleiche Grundlinie und Höhe hat und von welchem dieses Dreieck die Hälfte ist.

Folgesätze.

a) Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind flächengleich.
b) Dreiecke von gleicher Höhe verhalten sich so wie ihre Grundlinien.
c) Dreiecke von gleicher Grundlinie verhalten sich so wie ihre Höhen.
d) Dreiecke überhaupt verhalten sich so wie die Producte aus den Maßzahlen ihrer Grundlinien und Höhen.

§. **122.** Zwei Dreiecke, welche einen gleichen Winkel haben, verhalten sich so wie die Producte aus den Maßzahlen der Seiten, die den gleichen Winkel einschließen.

Fig. 95.



Es seien in den Dreiecken ABC und DEC (Fig. 95) die Maßzahlen der Seiten AC und BC, CD und CE, welche den Winkel C einschließen, M und N, m und n. Zieht man BD, so ist

$\triangle ABC : DBC = AC : CD = M : m$ und
$\triangle DBC : DEC = BC : CE = N : n$,

woraus durch Multiplication

$\triangle ABC : DEC = M.N : m.n$ folgt.

§. **123.** Zwei ähnliche Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate der Maßzahlen ihrer homologen Seiten.

Es seien in den ähnlichen Dreiecken ABC und A'B'C' (Fig. 79) a, b, c die Maßzahlen der Seiten BC, AC, AB, und a', b', c' die Maßzahlen der Seiten B'C', A'C', A'B', so ist

$a : a' = b : b' = c : c'$, daher auch $a^2 : a'^2 = b^2 : b'^2 = c^2 : c'^2$, und man darf daher nur beweisen, daß $\triangle ABC : A'B'C' = a^2 : a'^2$ ist.

Da der Winkel $C = C'$ ist, so hat man (nach §. 122)

$\triangle ABC : A'B'C' = a.b : a'.b'$; nun ist

$a : a' = a : a'$,
$b : b' = a : a'$, } folglich $ab : a'b' = a^2 : a'^2$, also

$\triangle ABC : A'B'C' := a^2 : a'^2$.

Folgesatz. Zwei ähnliche Vielecke verhalten sich wie die Quadrate der Maßzahlen ihrer homologen Seiten.

Folgt mit Zuziehung des §. 109, 4.

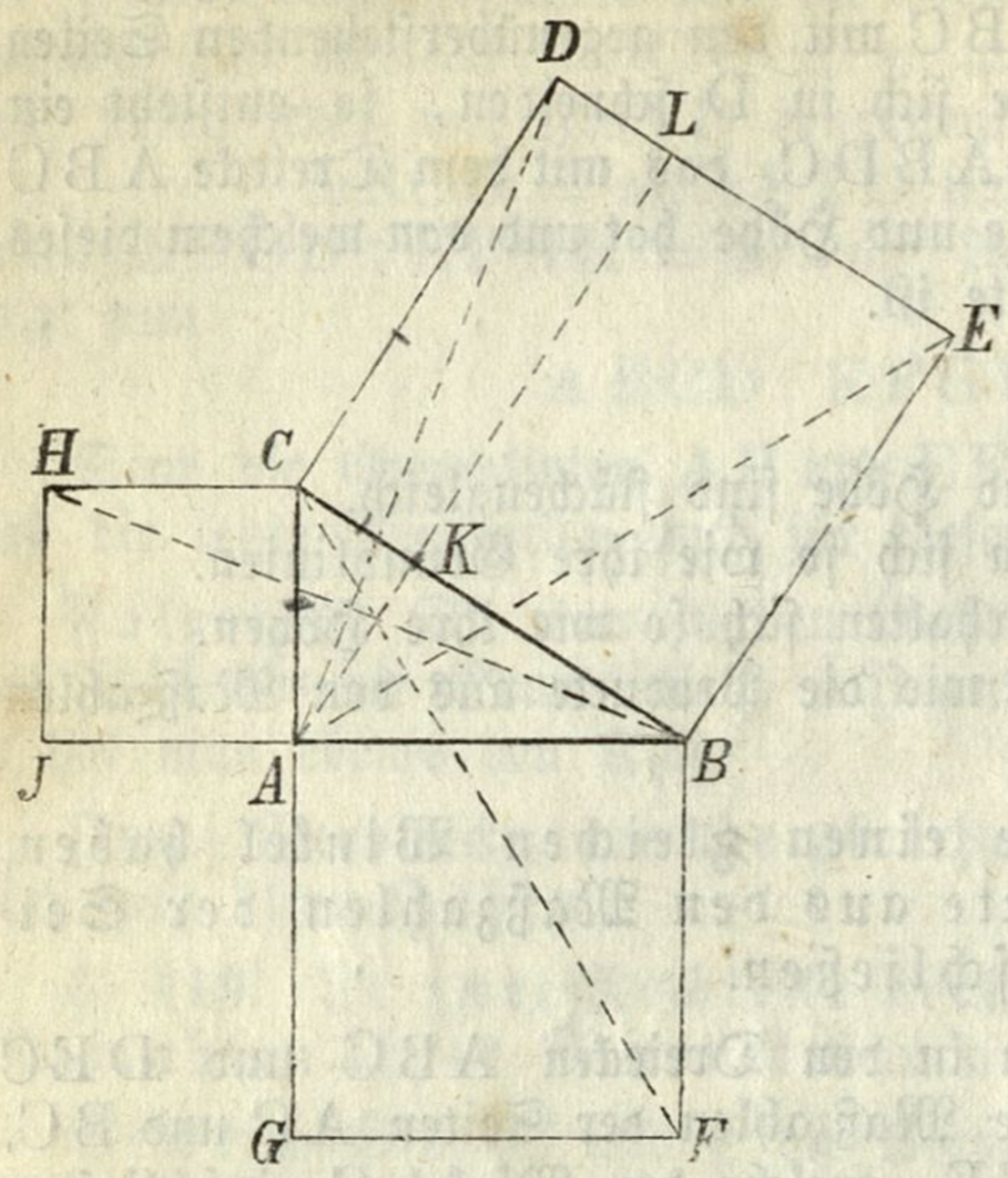
§. **124.** Jedes Trapez ist einem Parallelogramme gleich, das mit ihm gleiche Höhe hat, und dessen Grundlinie gleich ist der halben Summe der parallelen Seiten des Trapezes.

Der Beweis beruht auf §. 69, 4.

§. **125.** Lehrsätze über das rechtwinklige Dreieck.

1. In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten.

Fig. 96.



Es sei das $\triangle$ BAC (Fig. 96) in A rechtwinklig; zu beweisen ist, daß das über BC beschriebene Quadrat der Summe aus dem Quadrate über AB und dem Quadrate über AC gleich ist, was wir so schreiben wollen:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Beschreibt man über der Hypotenuse BC das Quadrat BCDE, und über den Katheten AB und AC die Quadrate ABFG und ACHJ, und fällt von A auf BC die Senkrechte AK, welche bis L verlängert auch auf DE senkrecht steht, so ist nur nachzuweisen, daß die Rechtecke BL und CL den Quadraten AF und AH gleich sind.

Zieht man AE und CF, so ist $\triangle ABE = \frac{BL}{2}$ und $\triangle BCF = \frac{AF}{2}$ (§. 121); nun ist $\triangle ABE \cong BCF$, also auch $BL = AF$.

Zieht man ferner AD und BH, so ist ebenso $\triangle ACD = \frac{CL}{2}$ und $\triangle BCH = \frac{AH}{2}$, und wegen $\triangle ACD \cong BCH$ auch $CL = AH$.

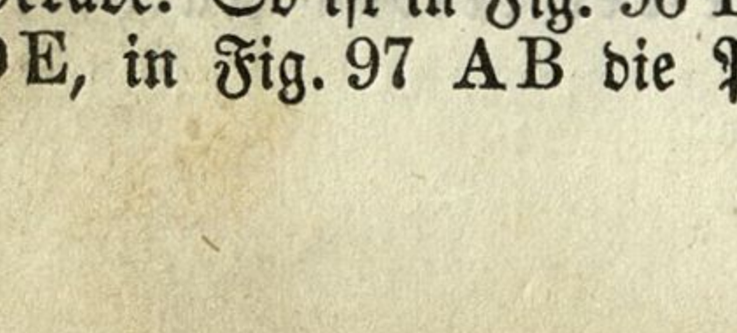
Es ist somit $BL + CL = AF + AH$, oder

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Dieser Satz heißt nach seinem Erfinder Pythagoras der Pythagoräische Lehrsatz. Seine Richtigkeit im arithmetischen Sinne ist schon im §. 106 nachgewiesen worden.

2. Ist das Quadrat einer Seite eines Dreieckes so groß als die Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, so ist der Winkel, welcher der ersteren Seite gegenüberliegt, ein rechter. (Umkehrung des vorhergehenden Satzes.)

Fig. 97.



Ist (Fig 97) $BC^2 = AB^2 + AC^2$, so muß der Winkel $BAC = R$ sein. — Construirt man in A den rechten Winkel CAD, macht $AD = AB$ und zieht CD, so ist in dem Dreiecke CAD

$$CD^2 = AD^2 + AC^2,$$

oder $CD^2 = AB^2 + AC^2$;

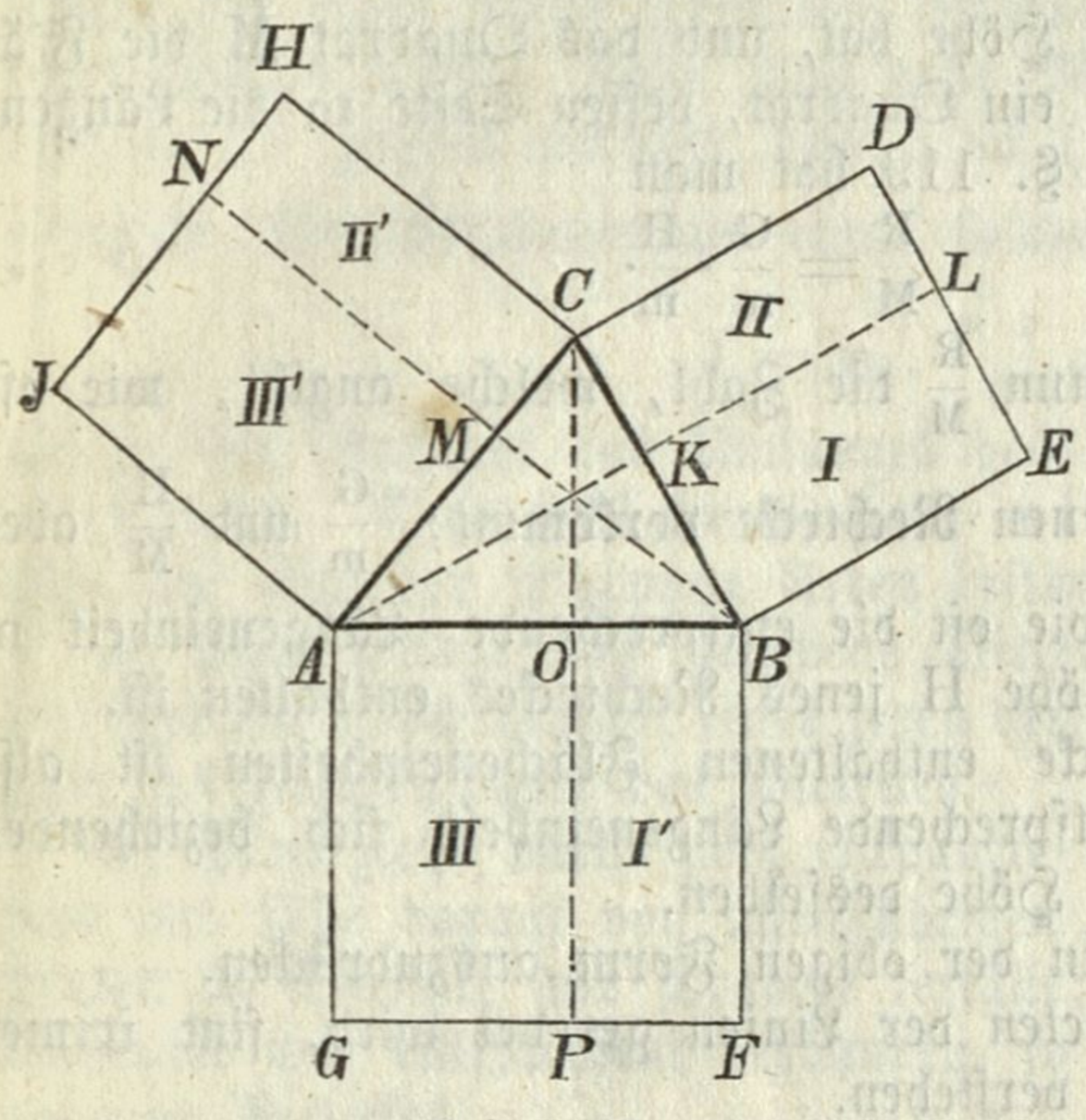
aber nach der Voraussetzung ist auch $BC^2 = AB^2 + AC^2$; es ist demnach $CD^2 = CB^2$ und somit auch $CD = CB$. Da somit $\triangle BAC \cong CAD$ ist, so müssen auch die Winkel BAC und DAC gleich sein; aber DAC ist nach der Construction ein rechter Winkel, folglich muß auch $BAC = R$ sein.

Zusatz. Fällt man von einem Puncte auf eine Gerade eine Senkrechte, so heißt der Fußpunct der Senkrechten die Projection des Punctes auf die Gerade. Unter der Projection einer Strecke auf eine Gerade versteht man die Strecke zwischen den Projectionen ihrer Endpuncte auf diese Gerade. So ist in Fig. 96 DL die Projection der Strecke AC auf die Gerade DE, in Fig. 97 AB die Projection der CB auf die DB.

§. **126.** Lehrsätze über das schiefwinklige Dreieck.

1. Das Quadrat einer Dreiecksseite, welche einem spitzen Winkel gegenüberliegt, ist gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, weniger dem doppelten Rechtecke aus einer dieser Seiten und der Projection der anderen auf diese.

Fig. 98.



Es seien (Fig. 98) BCDE, ABFG, ACHJ die bezüglich über den Seiten BC, AB, AC des Dreieckes ABC, worin A ein spitzer Winkel ist, construirten Quadrate.

Man fälle von den Eckpuncten A, B, C die Senkrechten AK, BM, CO auf die gegenüberliegenden Dreiecksseiten und verlängere sie bis zu den gegenüberliegenden Seiten der Quadrate, von denen jedes hierdurch in zwei Rechtecke getheilt wird, die wir durch I, II, III, I', II', III', bezeichnen wollen.

Durch ähnliche mittelst Hilfslinien geführte Beweise, wie in §. 125, 1, findet man, daß I = I', II = II', III = III' ist, woraus sofort folgt:

$$BCDE = ABFG + ACHJ - 2AOPG$$

2. Das Quadrat einer Dreiecksseite, welche einem stumpfen Winkel gegenüberliegt, ist gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, mehr dem dopelten Rechtecke aus einer dieser Seiten und der Projection der andern auf diese.

Der Beweis ist dem vorigen ähnlich.

3. In jedem Dreiecke ist die Summe der Quadrate zweier Seiten doppelt so groß als die Summe aus dem Quadrate der halben dritten Seite und dem Quadrate der dieser dritten Seite zugehörigen Mittellinie.

Folgt aus 1 und 2.

Folgesatz. In jedem Parallelogramme ist die Summe der Quadrate der vier Seiten gleich der Summe der Quadrate der beiden Diagonalen.

II. Bestimmung des Flächeninhaltes.

§. **127.** Um den Flächeninhalt einer Figur zu bestimmen, nimmt man irgend eine bekannte Fläche als Einheit an und untersucht, wie oft diese in der gegebenen Figur enthalten ist.

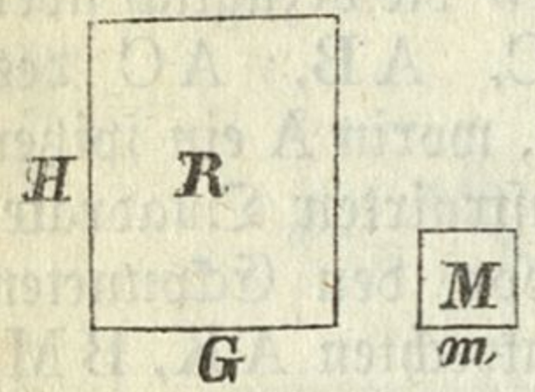
Als Flächeneinheit wird ein Quadrat angenommen, dessen Seite der Längeneinheit gleich ist. Nimmt man das Meter als Längeneinheit an, so ist das Quadratmeter ($\square^{m}$) die Flächeneinheit. Ein Quadratmeter hat 100 Quadratdecimeter ($\square^{dm}$) à 100 Quadratcentimeter ($\square^{cm}$) à 100 Quadratmillimeter ($\square^{mm}$). $100\square^{m}$ als Bodenflächenmaß nennt man ein Ar, 100 Ar sind ein Hectar.

Die Ausmessung einer Fläche kann mittelst des wirklichen Auftragens der Flächeneinheiten nur in wenigen Fällen ausgeführt werden; daher werden

wir hier die Sätze ableiten, nach denen man, wenn die Maßzahlen der Linien, von denen die Größe der Figur abhängt, bekannt sind, daraus durch bloße Rechnung den Flächeninhalt bestimmen kann.

§. 128. Lehrsatz. Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Producte aus der Grundlinie und der Höhe.

Fig. 99.



Es sei (Fig. 99) R ein Rechteck, das G zur Grundlinie und H zur Höhe hat, und das Quadrat M die Flächeneinheit, d. i. ein Quadrat, dessen Seite m die Längeneinheit ist. Nach §. 119 hat man

$$\frac{R}{M} = \frac{G}{m} \cdot \frac{H}{m}.$$

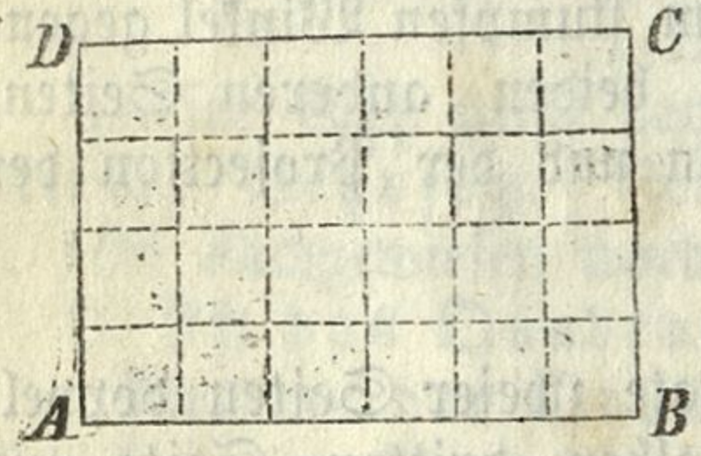
Es bedeutet nun $\frac{R}{M}$ die Zahl, welche angibt, wie oft die Flächeneinheit M in dem gegebenen Rechtecke vorkommt; $\frac{G}{m}$ und $\frac{H}{M}$ aber sind die Zahlen, welche angeben, wie oft die entsprechende Längeneinheit m in der Grundlinie G und in der Höhe H jenes Rechteckes enthalten ist.

Die Zahl der in einem Rechtecke enthaltenen Flächeneinheiten ist also gleich dem Producte der auf die entsprechende Längeneinheit sich beziehenden Maßzahlen der Grundlinie und der Höhe desselben.

Diesen Satz pflegt man kürzer in der obigen Form auszudrücken.

Wenn im Folgenden von Producten der Linien geredet wird, sind immer nur die Maßzahlen der letzteren zu verstehen.

Fig. 100.



Um die Richtigkeit des vorhergehenden Satzes an einem besonderen Falle anschaulich darzustellen, sei ABCD (Fig. 100) ein Rechteck, dessen Grundlinie $AB = 6^m$ und die Höhe $AD = 4^m$ ist. Man erhält darin 4 Reihen von Quadraten, deren jede $6\square^m$ enthält; es sind also zusammen $6\square^m \times 4 = 24\,\square^m$.

Folgesatz. Der Flächeninhalt eines Quadrates ist gleich der zweiten Potenz seiner Seite.

Daher kommt es, daß man auch in der Arithmetik die zweite Potenz einer Zahl das Quadrat derselben nennt.

§. 129. Lehrsätze.

1. Der Flächeninhalt eines schiefwinkligen Parallelogramms ist gleich dem Producte aus der Grundlinie und der Höhe.

Folgt aus §§. 120 und 128.

2. Der Flächeninhalt eines Dreieckes ist gleich dem halben Producte aus der Grundlinie und der Höhe.

Folgt aus §§. 121 und 128.

Folgesatz. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes ist gleich dem halben Producte aus den beiden Katheten.

3. Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem Producte aus der halben Summe der Parallelseiten und der Höhe.

Folgt aus §. 124.

Zusatz. Mit Rücksicht auf §. 69, 4, kann dieser Satz auch so ausgedrückt werden:

Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem Producte aus der Mittellinie und der Höhe.

4. Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes ist gleich dem Producte aus dem Umfange desselben und dem halben Abstande des Mittelpunctes von einer Seite.

Es seien s, r und f bezüglich die Maßzahlen einer Seite, der vom Mittelpuncte auf einer Seite gefällten Senkrechten und des Flächeninhaltes eines regelmäßigen n eckes. Zieht man vom Mittelpuncte zu allen Eckpuncten gerade Linien, so zerfällt dadurch das n eck (nach §. 78, Folgef.) in n congruente Dreiecke. Der Flächeninhalt eines solchen Dreieckes ist $\frac{s.r}{2}$, daher

$$f = n \,.\, \frac{s.r}{2} = ns.\, \frac{r}{2},$$

wo ns die Maßzahl des Umfanges des Vieleckes ist.

Zusatz. Der Flächeninhalt eines unregelmäßigen Vieleckes wird auf eine der folgenden Arten bestimmt:

a) Man zerlege das gegebene Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke und berechne den Flächeninhalt eines jeden derselben; die Summe der Dreiecksflächen gibt den Flächeninhalt des Vieleckes.

b) Man ziehe durch zwei Eckpuncte des gegebenen Vieleckes eine Diagonale und fälle darauf von allen übrigen Eckpuncten Senkrechte, wodurch das Vieleck in Dreiecke und Trapeze zerfällt; werden die Flächen derselben einzeln berechnet und entsprechend verbunden, so erhält man den Flächeninhalt des gegebenen Vieleckes.

III. Aufgaben.

§. 130. Verwandlung geradliniger Figuren.

Eine Figur in eine andere verwandeln heißt eine Figur construiren, welche mit der gegebenen flächengleich ist.

1. Ein ungleichseitiges Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln, welches mit ihm gleiche Grundlinie (folglich auch dieselbe Höhe) hat.

Der Scheitel des gleichschenkligen Dreieckes, welches mit dem gegebenen Dreieck dieselbe Grundlinie hat, liegt (nach §. 55, 5) in der auf dieser Grundlinie in ihrer Mitte errichteten Senkrechten; der Scheitel des gleichschenkligen Dreieckes, welches mit dem gegebenen Dreiecke dieselbe Höhe hat, liegt in einer mit der Grundlinie durch den gegenüberliegenden Eckpunct parallel gezogenen Geraden (§. 53, Folgef. 1); der gesuchte Scheitel ist also der Durchschnittspunct dieser zwei Geraden. Daraus ergibt sich die Construction und der Beweis.

2. Ein gegebenes Dreieck in ein anderes zu verwandeln, das einen gegebenen Winkel α enthält.

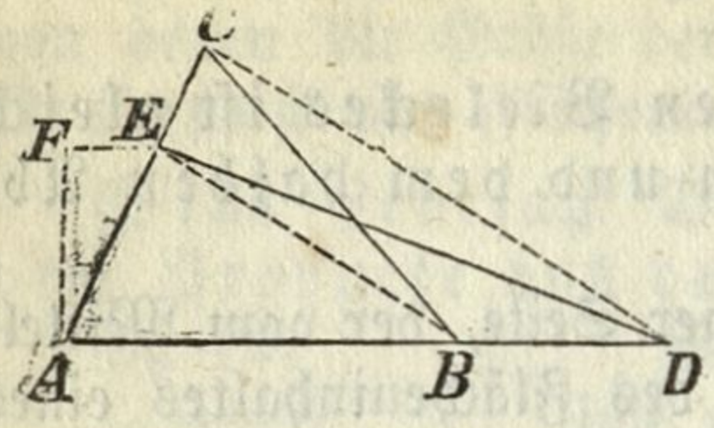
Zieht man durch einen Eckpunct eine Gerade, welche mit einer Seite den Winkel α bildet, und dann mit dieser Seite durch den gegenüberliegenden Eckpunct eine parallele Gerade, so ist der Scheitel des verlangten Dreieckes der Durchschnitt dieser Geraden.

3. Ein schiefwinkliges Dreieck in ein rechtwinkliges zu verwandeln.

Ist, da $\alpha = 90^0$ ist, ein besonderer Fall der vorhergehenden Aufgabe.

4. Ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 101) in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Grundlinie a hat.

Fig. 101.



gegebene Höhe h hat.

Man trage a auf AB bis D auf, ziehe CD, und damit parallel BE; verbindet man D und E durch eine Gerade, so ist ADE das verlangte Dreieck. Denn △ ADE = ABC, da beide das △ ABE gemeinschaftlich haben und △ BED = BEC ist.

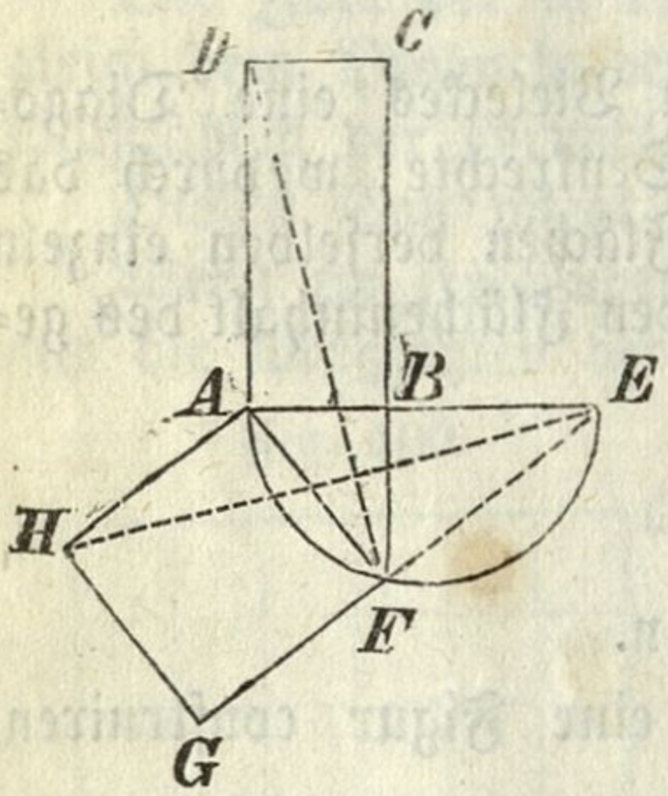
5. Ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 101) in ein anderes zu verwandeln, das eine

Man errichte AF = h senkrecht auf AB, ziehe FE || AB, CD || EB und verbinde E und den Durchschnittspunct D der CD mit der Verlängerung der AB durch eine Gerade, so ist △ AED = ABC. Der Beweis wie für die vorhergehende Auflösung.

6. Ein Rechteck ABCD (Fig. 102) in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. Man verlängere die kleinere Seite AB des gegebenen Rechteckes bis E, so daß AE = AD wird, beschreibe über AE als Durchmesser einen Halbkreis, welcher die verlängerte Seite CB in F trifft. Zieht man AF, und beschreibt darüber das Quadrat AFGH, so ist dieses dem gegebenen Rechtecke gleich.

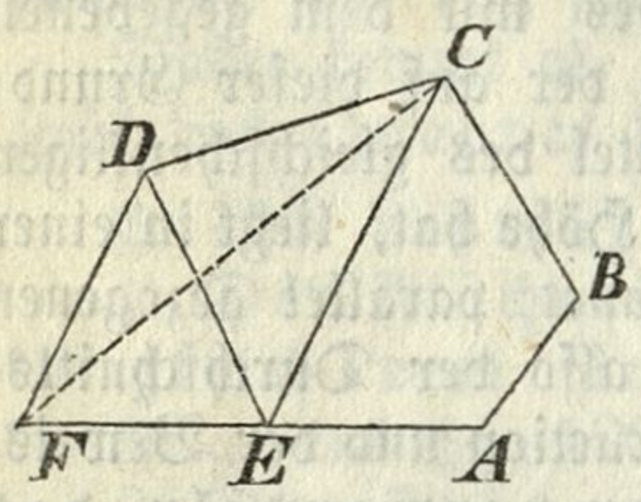
Fig. 102.



Beweis. Man ziehe FE, so ist W. AFE = R (§. 40, Folges. e), daher EFG eine gerade Linie. Zieht man noch HE und DF, so ist △ HAE = ½ AFGH und △ FAD = ½ ABCD; aber △ HAE ≅ FAD; folglich AFGH = ABCD.

7. Ein Vieleck ABCDE (Fig. 103) in ein anderes zu verwandeln, welches eine Seite weniger hat.

Fig. 103.



Man schneide durch eine Diagonale CE von dem gegebenen Vielecke ein Dreieck CDE ab, lege durch D mit CE eine Parallele DF, welche die verlängerte Seite AE in F schneidet, und ziehe CF, so ist das Vieleck ABCDE = Vieleck ABCF, weil beide aus gleichen Theilen bestehen.

8. Ein gegebenes Vieleck in ein Dreieck zu verwandeln.

9. Ein Quadrat zu construiren, das gleich ist als a) der Summe, b) der Differenz zweier gegebenen Quadrate.

a) Man zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten gleich sind den Seiten der beiden Quadrate; die Hypotenuse ist die Seite des verlangten Quadrates (§. 125, 1).

b) Die Auflösung beruht ebenfalls auf §. 125, 1.

10. Ein Quadrat zu construiren, welches der Summe dreier oder mehrerer Quadrate gleich ist.

Man vereinige nach der Aufgabe 9. a) zuerst zwei Quadrate mit einander, das gefundene mit dem dritten u. s. w.

§. **131.** Theilung geradliniger Figuren.

1. Ein gegebenes Dreieck durch gerade Linien, welche durch einen Eckpunct gehen,

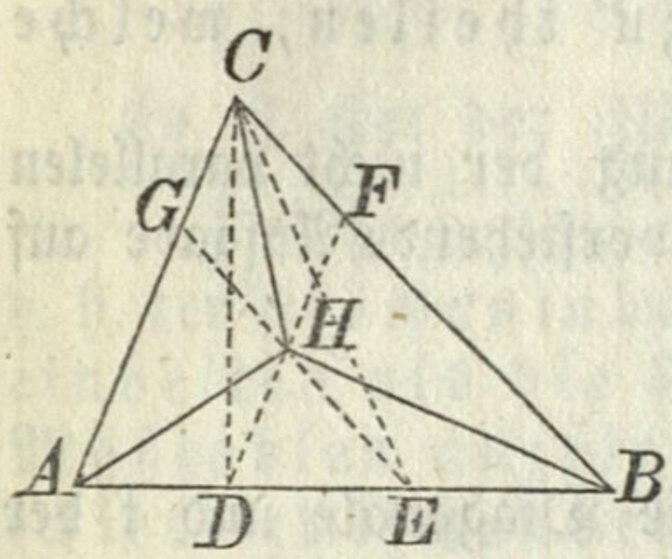
a) in gleiche Theile zu theilen,

b) in Theile zu theilen, welche in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

Die Auflösung beruht auf §. 121, Folgef. a und b.

2. Ein Dreieck in 3 gleiche Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien von den Eckpuncten ausgehen und in einem gemeinschaftlichen Puncte innerhalb des Dreieckes zusammentreffen.

Fig. 104.



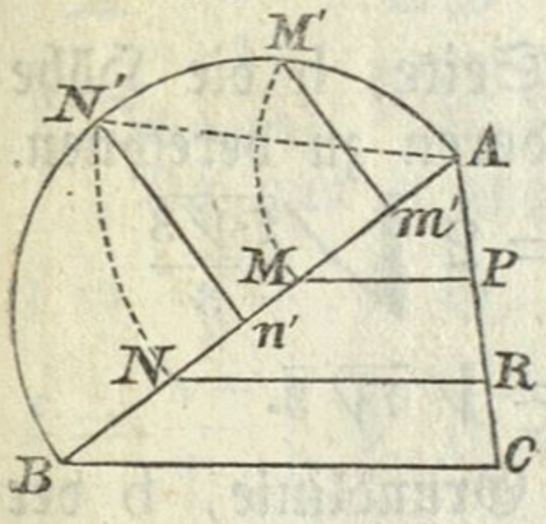
Man theile (Fig. 104) eine Seite AB in den Puncten D und E in 3 gleiche Theile, ziehe DF || AC und EG || BC; die vom Durchschnittspuncte H aus gezogenen Geraden AH, BH und CH sind die verlangten Theilungslinien.

Zieht man die Hilfslinien CD und CE, so ist △ ACH = ACD und △ BCH = BCE; daher muß auch △ ABH = DCE sein. Nun sind die Dreiecke ACD, DCE, BCE unter einander gleich, folglich müssen auch die Dreiecke ACH, ABH, BCH gleich sein.

Hätte man AB nicht in drei gleiche, sondern in drei durch gegebene Verhältnisse bestimmte Theile getheilt, so wäre dadurch auch das △ ABC in drei Theile getheilt worden, welche in jenen Verhältnissen zu einander stehen.

3. Ein Dreieck durch gerade Linien, welche mit einer Seite parallel sind, in Theile zu theilen, welche in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

Fig. 105.



Analysis. Es seien (Fig. 105) die mit BC parallelen Geraden MP und NR die gesuchten Theilungslinien, so daß △ AMP : MR : NC = m : n : p ist; dann muß △ AMP : ANR : ABC = m : (m+n) : (m+n+p) sein. Allein △ AMP : ANR : ABC = AM^2 : AN^2 : AB^2 (§. 123); daher auch AM^2 : AN^2 : AB^2 = m : (m + n) : (m + n + p). Es handelt sich nun darum, die Verhältnisse der Quadrate in Verhältnisse von Linien zu verwandeln. Nach §. 108 ist, wenn man über AB einen Halbkreis beschreibt, darin die Sehne AM' = AM, AN' = AN macht und M'm' und N'n' senkrecht auf AB zieht, AM^2 : AN^2 : AB^2 = Am' : An' : AB. Es ist daher auch Am' : An' : AB = m : (m + n) : (m + n + p), folglich Am' : m'n' : n'B = m : n : p. Die Puncte m' und n' können dann nach §. 114, 1 bestimmt werden.

Construction. Man beschreibe über AB einen Halbkreis, theile AB in den Puncten m' und n' nach dem Verhältnisse m : n : p, errichte die Senkrechten m'M' und n'N', mache AM = AM' und AN = AN', und ziehe MP und NR parallel mit BC, so wird das Dreieck ABC in dem gegebenen Verhältnisse getheilt.

Zusatz. Ist m = n = p, daher auch Am' = m'n' = n'B, so wird das gegebene Dreieck in gleiche Theile getheilt.

4. Ein Parallelogramm durch gerade Linien, welche mit einer Seite parallel sind,

a) in gleiche Theile zu theilen,

b) in Theile zu theilen, welche in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

Die Auflösung ergibt sich aus §. 120.

5. Ein Trapez durch gerade Linien, welche die beiden Parallelseiten durchschneiden,

a) in gleiche Theile zu theilen,

b) nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen.

Die Auflösung ist derjenigen der vorhergehenden Aufgabe analog.

6. Ein Trapez durch gerade Linien, welche mit den Parallelseiten parallel sind, in gleiche Theile zu theilen, welche in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

Ergänzt man das Trapez durch die Verlängerung der nicht parallelen Seiten bis zu deren Durchschnittspuncte, so wird die vorstehende Aufgabe auf die Aufg. 3 zurückgeführt.

132. Rechnungsaufgaben.

1. In einem Quadrate ist s die Seite, d die Diagonale und f der Flächeninhalt; aus einer dieser Größen die beiden anderen zu berechnen.

$$1)\ d = s\sqrt{2}, \qquad 2)\ s = \frac{d}{2}\sqrt{2}, \qquad 3)\ s = \sqrt{f},$$

$$f = s^2; \qquad f = \frac{d^2}{2}; \qquad d = \sqrt{2f}.$$

2. In einem Rechtecke sind a und b zwei zusamentreffende Seiten, d die Diagonale und f der Flächeninhalt; aus zweien dieser Größen die beiden anderen zu bestimmen.

Die beiden Fundamentalgleichungen sind:

$$1)\ d^2 = a^2 + b^2; \qquad 2)\ f = ab.$$

3. In einem gleichseitigen Dreiecke ist s die Seite, h die Höhe und f der Flächeninhalt; aus einer dieser Größen die zwei anderen zu berechnen.

$$1)\ h = \frac{s}{2}\sqrt{3}, \qquad 2)\ s = \frac{2h}{3}\sqrt{3}, \qquad 3)\ s = 2\sqrt{\frac{f\sqrt{3}}{3}}$$

$$f = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}; \qquad f = \frac{h^2}{3}\sqrt{3}; \qquad h = \sqrt{f\sqrt{3}}.$$

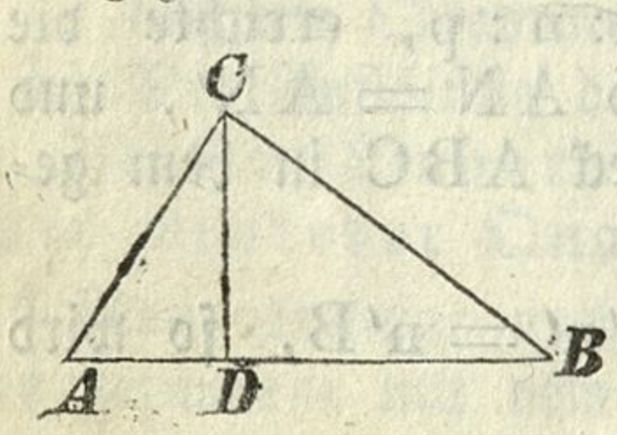
4. In einem gleichschenkligen Dreiecke ist g die Grundlinie, b der Schenkel, h die Höhe und f der Flächeninhalt; aus zweien dieser Größen die beiden anderen zu berechnen.

Fundamentalgleichungen:

$$1)\ b^2 = \frac{g^2}{4} + h^2; \qquad 2)\ f = \frac{gh}{2}.$$

5. In einem Dreiecke sind die drei Seiten gegeben; man berechne die zu einer Seite gehörige Höhe und den Flächeninhalt.

Fig. 106.



Es seien (Fig. 106) a, b, c bezüglich die Maßzahlen der Seiten BC, AC, AB des Dreieckes ABC, ferner h und x die Maßzahlen der zu AB gehörigen Höhe CD und der Strecke AD. Nach §. 126, 1 und §. 128 ist dann

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx, \text{ daher } x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Nun ist $h^2 = b^2 - x^2$ oder $h^2 = (b + x)\,(b - x)$, oder

$$h^2 = \left(b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)\left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)$$

$$= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{a^2 - (b-c)^2}{2c},$$

daher $h = \frac{1}{2c}\sqrt{(b + c + a)\,(b + c - a)\,(a + b - c)\,(a - b + c)}$.

Setzt man den Umfang $a + b + c = 2s$, so erhält man, wenn von dieser Gleichung folgeweise $2a$, $2b$, $2c$ subtrahirt wird,

$$b + c - a = 2\,(s - a),$$
$$a - b + c = 2\,(s - b),$$
$$a + b - c = 2\,(s - c);$$ folglich ist
$$h = \frac{2}{c} \cdot \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}.$$

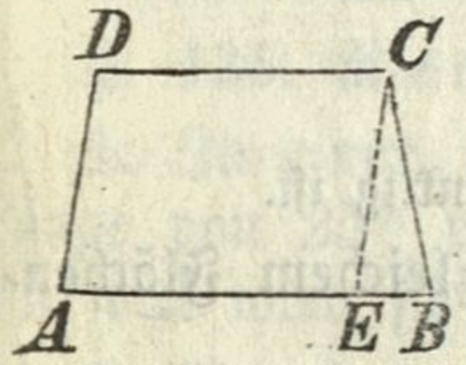
Es ist aber der Flächeninhalt des Dreieckes ABC $f = \frac{c \cdot h}{2}$; mithin

$$f = \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)};$$

d. h. der Flächeninhalt eines Dreieckes ist gleich so viel Flächeneinheiten als die Quadratwurzel aus dem Producte der vier Maßzahlen anzeigt, welche den halben Umfang und die Unterschiede zwischen dem halben Umfange und jeder der drei Seiten in Beziehung auf die entsprechende Längeneinheit bestimmen.

6. In einem Trapeze sind die vier Seiten gegeben; man berechne die Höhe und den Flächeninhalt.

Fig. 107.



Es sei (Fig. 107) $AB = a$, $CD = b$, $AD = c$ und $BC = d$, die Höhe h und der Flächeninhalt f. Zieht man $CE \parallel DA$, so sind die Seiten des Dreieckes BEC, $BE = a - b$, $BC = d$ und $CE = c$, daher in demselben (nach Aufg. 5) die zu BE gehörige Höhe

$$h = \frac{1}{2(a-b)} \cdot \sqrt{(c + d + a - b)\,(c + d - a + b)\,(a - b + c - d)\,(a - b - c + d)}.$$

Da nun h zugleich die Höhe des Trapezes, und der Flächeninhalt desselben $f = \frac{a+b}{2} \cdot h$ ist, so folgt

$$f = \frac{a+b}{a-b} \cdot \sqrt{(b + c + d - a)\,(a + c + d - b)\,(a + d - b - c)\,(a + c - b - d)}.$$

IV. Uebungssätze und Uebungsaufgaben.

§. 133. Uebungssätze.

1. Zieht man durch die vier Eckpuncte eines Viereckes Parallele mit den Diagonalen, so ist das von ihnen gebildete Parallelogramm doppelt so groß als das Viereck.

2. Zieht man in einem Parallelogramme durch irgend einen Punct einer Diagonale Parallele mit den Seiten, so sind die beiden hierdurch entstehenden Parallelogramme, durch welche die Diagonalen nicht gehen, flächengleich. (§. 67.)

3. Beweise mit Hilfe entsprechender Constructionen, daß die arithmetischen Formeln

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$$

auch im geometrischen Sinne richtig sind

4. Die vierfache Summe der Quadrate der Mittellinien eines Dreieckes ist gleich der dreifachen Summe der Quadrate der Seiten. (§. 126, 3.)

5. Construirt man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes als homologen Seiten ähnliche Vielecke, so ist das Vieleck über der Hypotenuse gleich der Summe der Vielecke über den Katheten. (§. 123, Folges. und §. 125, 1).

6. Unter allen rechtwinkligen Parallelogrammen von gleichem Umfange ist das Quadrat das größtmögliche (ein Maximum).

Ist u der Umfang und sind die Seiten ungleich, so sei $\frac{u}{4} + x$ die eine, und $\frac{u}{4} - x$ die anstoßende Seite; dann ist der Flächeninhalt

$$f = \frac{u^2}{16} - x^2.$$

Je kleiner x ist, desto größer ist f, und am größten, wenn $x = o$, d. h. wenn das rechtwinklige Parallelogramm gleichseitig, also ein Quadrat wird.

7. Unter allen rechtwinkligen Parallelogrammen von gleichem Flächeninhalte ist der Umfang des Quadrates der kleinstmögliche (ein Minimum).

$$\text{Aus } f = \frac{u^2}{16} - x^2 \text{ folgt } u = 4\sqrt{f + x^2}.$$

u ist also um so kleiner, je kleiner x ist, und am kleinsten, wenn $x = o$, d. h. wenn das rechtwinklige Parallelogramm ein Quadrat ist.

8. Unter allen Dreiecken von gleicher Grundlinie und gleichem Umfange hat das gleichschenklige den größten Flächeninhalt.

Ist g die Grundlinie, s die Summe der beiden anderen Seiten, und nehmen wir diese als ungleich an, so sei $\frac{s}{2} + x$ die größere, $\frac{s}{2} - x$ die kleinere; dann ist

$$f = \tfrac{1}{4}\sqrt{(g+s)(s-g)(g-2x)(g+2x)}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(s^2-g^2)(g^2-4x^2)}.$$

f ist also am größten für $x = o$, d. h. wenn das Dreieck gleichschenklig ist.

9. Unter allen Dreiecken von gleicher Grundlinie und gleichem Flächeninhalte hat das gleichschenklige den kleinsten Umfang.

$$\text{Aus } f = \tfrac{1}{4}\sqrt{(s^2-g^2)(g^2-4x^2)} \text{ folgt } s = \sqrt{\frac{16f}{g^2-4x^2} + g^2}.$$

s und daher auch der Umfang $u = g + s$ erhält also den kleinsten Werth, wenn $x = o$ wird, d. i. für das gleichschenklige Dreieck.

10. Unter allen Dreiecken von gleichem Umfange hat das gleichseitige den größten Flächeninhalt.

Hätte das Dreieck des größten Flächeninhaltes irgend zwei ungleiche Seiten, so gäbe es nach 8. über der dritten ein gleichschenkliges Dreieck von gleichem Umfange, das noch größer wäre als jenes Maximum.

11. Unter allen Dreiecken von gleichem Flächeninhalte hat das gleichseitige den kleinsten Umfang.

Läßt sich auf gleiche Weise indirect aus dem 9. Satze folgern.

§. 134. Constructionsaufgaben.

1. Ein gegebenes Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln, von welchem gegeben ist a) die Grundlinie, b) ein Schenkel.

2. Ein gegebenes Dreieck in ein rechtwinkliges zu verwandeln, von welchem gegeben ist a) eine Kathete, b) die Hypotenuse.

3. Ein gegebenes Dreieck mit Beibehaltung eines Winkels in ein anderes zu verwandeln, so daß die dem beibehaltenen Winkel gegenüberliegende Seite einer gegebenen Geraden parallel ist.

Mit Hilfe einer Parallelen und §. 122.

4. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, das einem gegebenen ähnlich ist. (§. 130, 2 und §. 134, 3.)

5. Ein Dreieck in ein Parallelogramm zu verwandeln.

6. Ein gegebenes Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, welches a) einen gegebenen Winkel, b) eine gegebene Seite, c) einen gegebenen Winkel und eine gegebene Seite hat.

7. Ein schiefwinkliges Parallelogramm in ein Rechteck zu verwandeln.
Ist ein besonderer Fall der Aufgabe 6, a.

8. Ein Parallelogramm in ein Dreieck zu verwandeln.

9. Ein gegebenes Trapez zu verwandeln: a) in ein Parallelogramm von gleicher Höhe, b) in ein Dreieck von gleicher Höhe.

10. Ein gegebenes Dreieck in ein Trapez von gleicher Höhe zu verwandeln.

11. Gegeben sind zwei Dreiecke von gleicher Höhe; construire ein drittes, welches gleich ist a) ihrer Summe, b) ihrer Differenz.

12. Ein Dreieck zu construiren, welches gleich ist a) der Summe, b) der Differenz zweier gegebener Dreiecke von gleichen Grundlinien.

13. Ein Dreieck zu construiren, welches gleich ist a) der Summe, b) der Differenz zweier beliebiger Dreiecke.

14. Ein Rechteck zu construiren, welches gleich ist, a) der Summe, b) der Differenz zweier gegebener Dreiecke.

15. Ein Dreieck in vier congruente Dreiecke zu theilen.

16. Ein Dreieck durch Gerade, welche von einem auf einer Seite liegenden Puncte ausgehen, in mehrere gleiche Theile zu theilen.
Man zerlege das Dreieck von dem gegenüberstehenden Eckpuncte aus in gleiche Theile und verfahre dann nach Aufg. 4 in §. 130.

§. 135. Rechnungsaufgaben.

1. In einer Zeichnung stellt 1^{cm} eine Länge von 20^{m}, in einer andern eine Länge von 25^{m} vor; in der ersten Zeichnung beträgt eine Fläche 112 $\square^{cm}$; wie viel wird sie in der zweiten Zeichnung betragen?

2. Eine Figur, welche im Maßstabe $1^{dm} = 40^{m}$ zu Papier gebracht wurde, nimmt einen Raum von $34\square^{dm}$ ein; wie groß ist ihre wirkliche Fläche?

3. In einem Quadrate (§. 132, 1.) ist
a) gegeben $s = 1 \cdot 25^{m}$; zu suchen g und f.
b) „ $d = 4^{dm}\,7^{cm}$; „ „ s „ f.
c) „ $f = 44\square^{m}\,89\square^{dm}$; „ „ s „ d.

4. In einem Rechtecke (§. 132, 2.) ist
a) gegeben $a = 23^{m}$, $b = 12 \cdot 4^{m}$; zu suchen d und f.
b) „ $a = 14^{dm}$, $d = 21\frac{2}{5}^{dm}$; „ „ b „ f.
c) „ $b = 25^{m}$, $f = 722\square^{m}$; „ „ a „ d.
d) „ $d = 1^{dm}\,8^{cm}$, $f = 1 \cdot 245\square^{dm}$; „ „ a „ b.

5. Aus dem Umfange u und dem Flächeninhalte eines Rechteckes dessen Seiten a und b zu berechnen.

6. Aus den Diagonalen d und e eines Rhombus den Flächeninhalt zu berechnen. (§. 67, 4.)

7. In einem gleichseitigen Dreiecke (§. 132, 3.) ist.
a) gegeben $s = 2^{m}\,5^{dm}\,9^{cm}$; zu suchen h und f.
b) „ $h = 1\,35^{m}$; „ „ s „ f.
c) „ $f = 36\frac{3}{4}\square^{dm}$; „ „ s „ h.

8. In einem gleichschenkligen Dreiecke (§. 132, 4.) ist

a) gegeben $g = 124^{cm}$, $b = 165^{cm}$; zu suchen h und f.
b) „ $g = 3 \cdot 5^{dm}$, $h = 5 \cdot 8^{dm}$; „ „ b „ f.
c) „ $g = 2 \cdot 34^{m}$, $f = 3 \cdot 76 \square^{m}$; „ „ b „ h.
d) „ $b = 57\frac{3}{4}^{cm}$, $h = 42\frac{2}{5}^{m}$; „ „ g „ f.
e) „ $b = 8 \cdot 72^{dm}$, $f = 7 \cdot 32 \square^{dm}$; „ „ g „ h.
f) „ $h = 61 \cdot 2^{m}_{\equiv}$, $f = 12 \square^{cm}$; „ „ g „ b.

9. Es sei in einem Dreiecke g die Grundlinie, h die Höhe und f der Flächeninhalt;

a) gegeben ist $g = 3^{m}\,5^{dm}$, $h = 2^{m}\,4^{dm}$; zu suchen f.
b) „ „ $g = 1 \cdot 3^{m}$, $f = 1 \cdot 885 \square^{m}$; „ „ h.
c) „ „ $h = 7^{m}\,4^{dm}$, $f = 30 \square^{m}\,96 \square^{dm}$; „ „ g.

10. In einem Dreiecke (§. 132, 5.) ist $a = 35^{m}$, $b = 27^{m}$, $c = 30^{m}$; wie groß ist f?

11. In einem Dreiecke sind zwei Seiten a, b und die zur dritten Seite gehörige Höhe h gegeben; berechne den Flächeninhalt f.

$$f = \frac{h}{2}\left(\sqrt{a^2 - h^2} + \sqrt{b^2 - h^2}\right).$$

12. In einem Dreiecke sind zwei Seiten a, b und die Mittellinie m der dritten gegeben; berechne f.

$$f = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+2m)(b+2m-a)(a+2m-b)(a+b-2m)}.$$

13. In einem Dreiecke sind die drei Mittellinien m, m′, m″ gegeben; berechne f.

$$f = \tfrac{1}{3}\sqrt{(m+m'+m'')(m'+m''-m)(m+m''-m')(m+m'-m'')}.$$

14. In einem Dreiecke sind die drei Höhen h, h′, h″ gegeben; bestimme f.

$$f = \frac{1}{\sqrt{(p+p'+p'')(p'+p''-p)(p+p''-p')(p+p'-p'')}},$$

wenn $\frac{1}{h} = p$, $\frac{1}{h'} = p'$, $\frac{1}{h''} = p''$ gesetzt wird.

15. Es seien in einem rechtwinkligen Dreiecke die Hypotenuse c und der Flächeninhalt f gegeben; suche die Katheten a und b.

16. In einem Trapeze sind die Parallelseiten $13 \cdot 815^{m}$ und $5 \cdot 108^{m}$, die Höhe $4 \cdot 095^{m}$; wie groß ist der Flächeninhalt?

17. In einem Trapeze (§. 132, 6.) ist $a = 39^{dm}$, $b = 27^{dm}$, $c = 42^{dm}$, $d = 22^{dm}$; berechne f.

18. In einem Vierecke beträgt eine Diagonale $2 \cdot 34^{m}$, die von den gegenüberliegenden Eckpuncten darauf gefällten Senkrechten sind $1 \cdot 25^{m}$ und $0 \cdot 48^{m}$ lang; wie groß ist die Fläche des Vierecks?

19. Ist s die Seite eines regelmäßigen Fünfeckes, so ist der Abstand des Mittelpunctes von einer Seite $= \frac{s}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$; wie groß ist der Flächeninhalt f, wenn $s = 1^{m}\,3^{dm}\,8^{cm}$ ist?

20. Construire zwei congruente Siebenecke, miß ihre Seiten mit Hilfe eines verjüngten Maßstabes, und berechne den Flächeninhalt des ersten Siebenecks mittelst Zerlegung in Dreiecke (§. 129, Zus. a), den Inhalt des zweiten mittelst Zerlegung im Dreiecke und Trapeze (§. 129, Zus. b).

Siebenter Abschnitt.

Der Kreis.

I. Allgemeines über den Kreis.

§. **136.** Die Größe eines Kreises hängt von der Größe seines Halbmessers ab. Läßt man den Halbmesser stetig abnehmen, so wird auch der Kreis immer kleiner, und reducirt sich zuletzt, wenn der Halbmesser Null wird, auf den Mittelpunct. Nimmt dagegen der Halbmesser stetig zu, so vergrößert sich auch der Kreis, und nähert sich beim unendlichen Wachsen des Halbmessers einer Geraden als Grenze. Man kann in diesem Sinne einen Punct als einen Kreis, dessen Halbmesser Null ist, und eine Gerade als einen Kreis, dessen Halbmesser unendlich groß ist, ansehen.

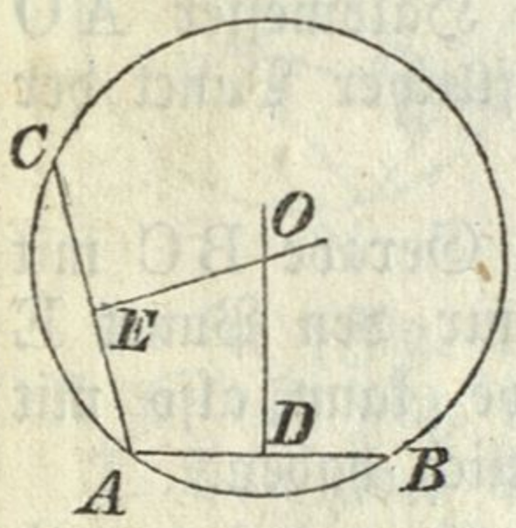
§. **137.** Die Lage eines Punctes in Bezug auf einen gegebenen Kreis hängt von dem Abstande des Punctes vom Mittelpuncte des Kreises ab. Bezeichnet man diesen Abstand durch d, und den Halbmesser des Kreises durch r, so liegt der Punct

a) innerhalb der Kreislinie, wenn $d < r$,
b) auf der Kreislinie, wenn $d = r$, und
c) außerhalb der Kreislinie, wenn $d > r$ ist.

Diese Beziehungen, welche unmittelbar aus §. 20 folgen, gelten auch in ihren Umkehrungen.

§. **138.** Durch drei Puncte A, B, C (Fig. 108), die nicht in einer geraden Linie liegen, ist ein Kreis vollkommen bestimmt.

Fig. 108.



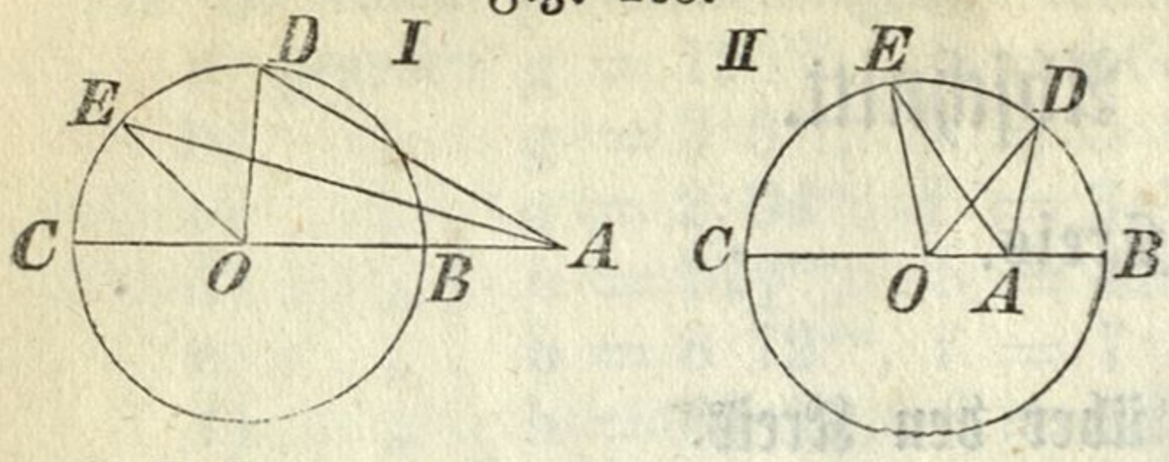
Der geometrische Ort eines Punctes, der von A und B gleich weit absteht, ist eine Senkrechte auf AB aus ihrer Mitte D (§. 55, 5, Folgef.). Eben so ist der geom. Ort eines Punctes, der von A und C gleich weit absteht, eine Senkrechte auf AC aus ihrer Mitte E. Der Punct, der von A, B, C gleich weit absteht, d. i. der Mittelpunct des Kreises, welcher durch diese drei Puncte geht, ist also der Durchschnittspunct O jener beiden Senkrechten.

Die Senkrechten DO und EO schneiden sich nothwendig in einem Puncte (§. 27, 4), sie schneiden sich aber auch in einem einzigen Puncte (§. 2, 3); demnach gibt es nur einen Kreis, welcher durch A, B, C geht.

II. Die Geraden und Winkel am Kreise.

§. **139.** Von allen geraden Linien, die sich von einem Puncte, der nicht Mittelpunct des Kreises ist, an die Peripherie dieses Kreises ziehen lassen, ist a) diejenige die größte, welche durch den Mittelpunct geht, b) diejenige die kleinste, deren Verlängerung durch den Mittelpunct geht, und c) jede andere Gerade um so größer, je größer der Bogenabstand des Endpunctes derselben vom Endpuncte der kleinsten ist.

Fig. 109.

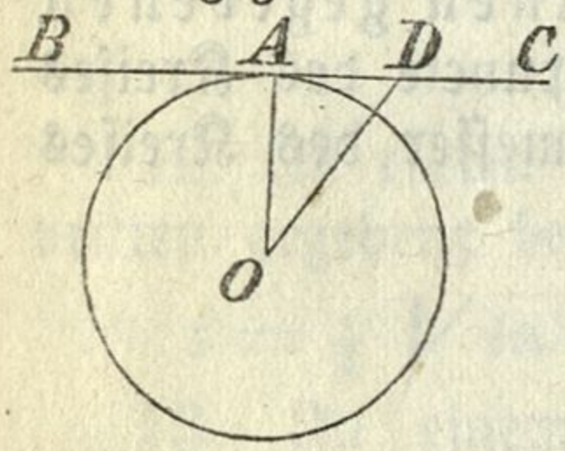


Ist A (Fig. 109) der gegebene Punct, und zieht man von demselben durch den Mittelpunct O des Kreises eine Gerade, welche die Peripherie dieses Kreises in B und C schneidet, ferner die Geraden AD und AE, so ist

a) $DO + AO > AD$, d. i. $AC > AD$;
b) $AO - DO < AD$ (in I), oder $DO - AO < AD$ (in II), d. i. $AB < AD$;
c) $EO = DO$, $AO = AO$ und W. $AOE > AOD$, mithin $AE > AD$ (§. 47).

§. **140**. 1. Eine Gerade, welche auf dem Halbmesser eines Kreises im Endpuncte desselben senkrecht steht, hat nur diesen einen Punct mit der Kreislinie gemeinschaftlich.

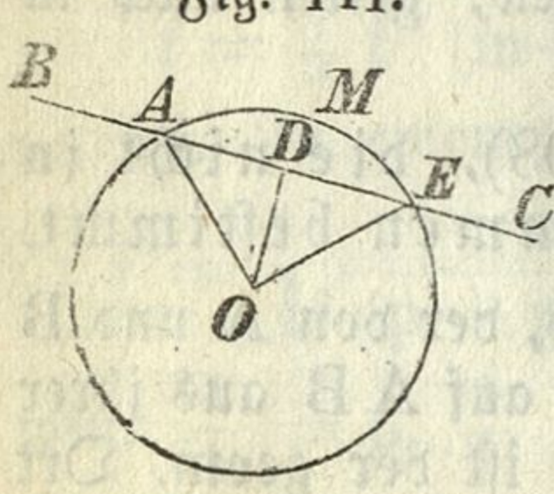
Fig. 110.



Es sei $BC \perp AO$ (Fig. 110), so hat die Gerade BC den Punct A mit der Kreislinie gemeinschaftlich. Jeder andere Punct dieser Geraden, z. B. D, liegt (nach §. 137) außerhalb des Kreises, weil in dem rechtwinkligen Dreiecke DAO $DO > AO$ ist.

2. Eine Gerade, welche mit dem Halbmesser eines Kreises im Endpuncte desselben schiefe Winkel bildet, hat mit der Kreislinie noch einen zweiten Punct gemeinschaftlich.

Fig. 111.



Es seien BAO und CAO (Fig. 111) zwei schiefe Nebenwinkel. Zieht man $OD \perp BC$, und macht $ED = AD$, so ist $DO < AO$ (§. 40, 4, Folges. a) und $EO = AO$ (§. 42, 2), mithin liegt D innerhalb und E auf der Peripherie des Kreises, dessen Halbmesser AO ist. E ist also ein zweiter gemeinschaftlicher Punct der Geraden BC und der Kreislinie.

Zusatz. Einen dritten gemeinschaftlichen Punct kann die Gerade BC mit der Kreislinie nicht haben, weil es auf der Geraden BC nur den Punct E gibt, welcher von D ebensoweit als A absteht. Eine Gerade kann also mit einer Kreislinie nicht mehr als zwei Puncte gemeinschaftlich haben.

§. **141**. Die Lage einer Geraden in Bezug auf einen gegebenen Kreis hängt von deren Entfernung vom Mittelpuncte des Kreises ab. Bezeichnet man diese letztere durch d, und den Halbmesser des Kreises durch r, so hat die Gerade mit der Kreislinie

a) zwei Puncte gemeinschaftlich, wenn $d < r$,
b) einen Punct gemeinschaftlich, wenn $d = r$, und
c) keinen Punct gemeinschaftlich, wenn $d > r$ ist.

Die Richtigkeit dieser Sätze ergibt sich aus den §§. 137 und 140.

Eine Gerade BC (Fig. 111), welche mit einer krummen Linie zwei Puncte gemeinschaftlich hat, heißt eine Secante derselben. Das zwischen diesen beiden Puncten liegende Stück der Secante ist die Sehne (§. 20). Der Theil der Kreisfläche, der von einer Sehne und dem dazu gehörigen Bogen begrenzt wird, wie AEMA, heißt ein Kreisabschnitt oder Segment.

Eine Gerade BC (Fig. 110), welche mit einer krummen Linie nur einen Punct A gemeinschaftlich hat, so daß alle andern Puncte derselben außerhalb dieser krummen Linie liegen, heißt eine Berührungslinie oder Tangente derselben; der Punct, den die Tangente mit der krummen Linie gemeinschaftlich hat, wird der Berührungspunct genannt.

§. 142. Lehrsätze von den Sehnen des Kreises.

Aus den Sätzen in §. 55, 1. 2. und 5. und §. 21 folgen unmittelbar die nachstehenden drei Lehrsätze:

1. Die Gerade aus dem Mittelpuncte des Kreises nach der Mitte einer Sehne steht senkrecht auf der Sehne und halbirt den zugehörigen Bogen.

2. Die Senkrechte aus dem Mittelpuncte eines Kreises auf die Sehne halbirt diese und den zugehörigen Bogen.

3. Die Gerade, welche in der Mitte einer Sehne auf diese senkrecht errichtet wird, geht durch den Mittelpunct des Kreises.

Fig. 112.

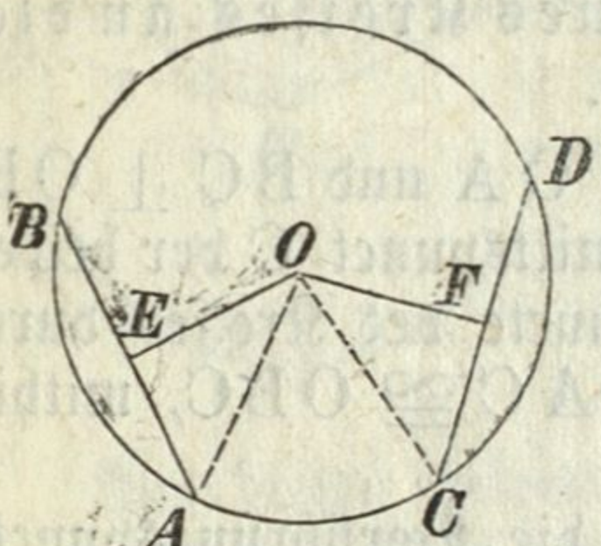
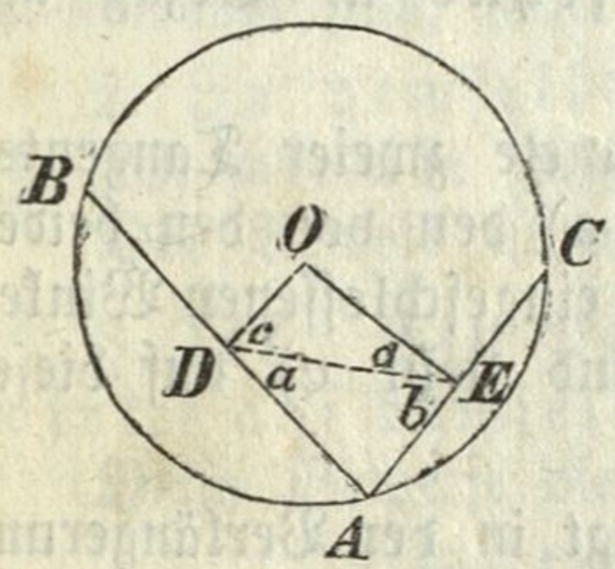


Fig. 113.



4. Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleichen Abstand vom Mittelpuncte.

Ist (Fig. 112) $AB = CD$ und $OE \perp AB$, $OF \perp CD$, so ist, wenn man OA und OC zieht, $\triangle AEO \cong CFO$; mithin ist $OE = OF$.

5. Von zwei ungleichen Sehnen eines Kreises hat die größere einen kleineren Abstand vom Mittelpuncte.

Es seien (Fig. 113) die Sehnen AB und AC von einem Puncte der Peripherie so gezogen, daß der Mittelpunct O zwischen ihnen liegt. Ist nun $AB > AC$, ferner $OD \perp AB$, $OE \perp AC$, so ist, wenn man DE zieht, im Dreiecke ADE W. $b > a$ (§. 40, 2), daher $d < c$, mithin $OD < OE$.

Was von AC erwiesen wurde, gilt auch von jeder anderen der AC gleichen und demnach vom Mittelpuncte gleich weit entfernten Sehne.

6. Zwei Sehnen einen Kreises, welche gleichen Abstand vom Mittelpunct haben, sind einander gleich. (Umkehrung von 4.)

Es sei (Fig. 112) $OE = OF$. Wäre $AB \gtrless CD$, so müßte nach 5. $OE \lessgtr OF$ sein, was der Voraussetzung widerspricht.

7. Von zwei Sehnen eines Kreises, welche ungleiche Abstände vom Mittelpunct haben, ist diejenige größer, welche vom Mittelpuncte den kleineren Abstand hat (Umkehrung von 5.).

Es sei (Fig. 113) $OD < OE$. Wäre $AB \leqq AC$, so müßte bezüglich nach 4. oder 5. $OD \geqq OE$ sein, was gegen die Voraussetzung ist.

Folgesatz. Der Durchmesser ist die größte Sehne des Kreises. Er theilt die Peripherie des Kreises in zwei gleiche Theile.

§. 143. Sätze von den Tangenten des Kreises.

1. Die Gerade, welche im Endpuncte eines Halbmessers auf diesen senkrecht steht, ist eine Tangente des Kreises.

Folgt unmittelbar aus §. 140.

Umkehrungen. 2. Der Halbmesser eines Kreises nach dem Berührungspuncte steht senkrecht auf der Tangente.

3. Die Senkrechte aus dem Mittelpuncte eines Kreises auf die Tangente geht durch den Berührungspunct.

4. Die auf der Tangente eines Kreises im Berührungspuncte errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunct des Kreises.

Die Beweise für diese drei Umkehrungen werden indirect geführt.

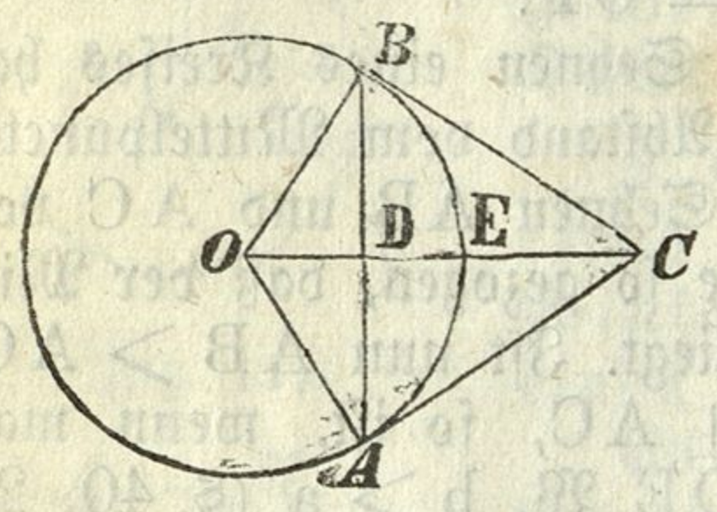
5. Der geometrische Ort der Mittelpunct aller Kreise, welche eine gegebene Gerade in einem gegebenen Puncte derselben berühren, ist die in diesem Puncte auf der Geraden errichtete Senkrechte.

6. Der geometrische Ort der Mittelpuncte aller Kreise, welche r zum Halbmesser haben und eine gegebene Gerade berühren, ist die mit dieser Geraden in dem Abstande r parallele Gerade. (Ein anderer Ausdruck für den geometrischen Ort in §. 53, 2, Folges. 1.)

Folgesatz. Durch einen Punct der Kreislinie kann an dieselbe nur eine Tangente gezogen werden.

§. **144.** Die von einem Puncte außerhalb eines Kreises an diesen gezogenen Tangenten sind einander gleich.

Fig. 114.



Es sei (Fig. 114) $AC \perp OA$ und $BC \perp OB$. Verbindet man den Durchschnittspunct C der beiden Tangenten mit dem Mittelpuncte des Kreises durch die Gerade CO, so ist $\triangle OAC \cong OBC$, mithin $AC = BC$.

Die Sehne AB, welche die Berührungspuncte des Kreises und der Tangenten AC und BC verbindet, heißt Berührungssehne in Bezug auf den Punct C.

Folgesätze. 1. Die Gerade vom Durchschnittspuncte zweier Tangenten eines Kreises nach dem Mittelpuncte desselben halbirt a) den von den beiden Tangenten gebildeten und den von den beiden Halbmessern eingeschlossenen Winkel, b) sie halbirt den Bogen und die Berührungssehne und steht c) auf dieser Sehne senkrecht.

2. Der Durchschnittspunct der beiden Tangenten liegt in der Verlängerung des auf die Berührungssehne senkrechten Halbmessers.

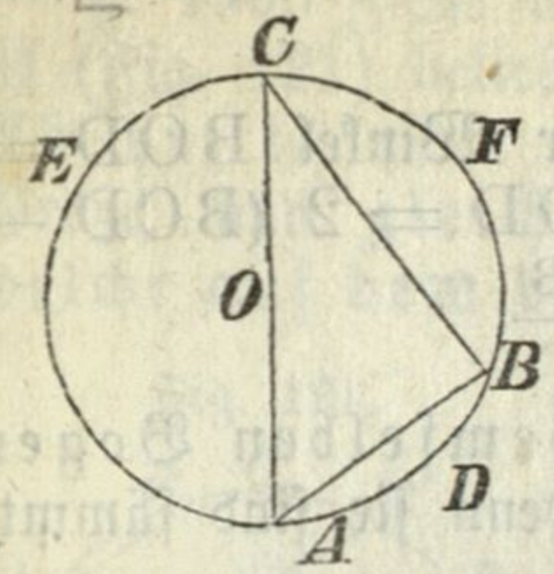
3. Der geometrische Ort der Mittelpuncte aller Kreise, welche zwei nicht parallele Gerade berühren, ist die Halbirungslinie des von den Geraden gebildeten Winkels.

§. **145.** Ein Winkel, dessen Schenkel einen Kreis treffen, dessen Scheitel aber nicht im Mittelpuncte desselben liegt, heißt ein excentrischer Winkel, im Gegensatze zu einem Centriwinkel (§. 20), dessen Scheitel im Mittelpuncte des Kreises liegt. Der Scheitel eines excentrischen Winkels kann auf der Peripherie, innerhalb oder außerhalb des Kreises liegen.

Ein Winkel, dessen Scheitel auf der Peripherie des Kreises liegt, und dessen Schenkel Sehnen dieses Kreises sind, heißt ein Peripheriewinkel, z. B. ACB (Fig. 115).

Verbindet man in dem Peripheriewinkel ACB die Endpuncte der Schenkel durch die Gerade AB, die den Kreis in zwei Abschnitte theilt, so sagt man: der Peri-

Fig. 115.

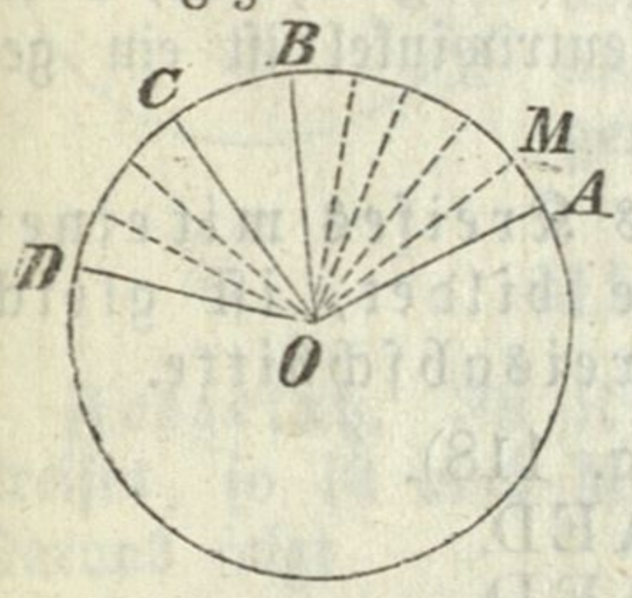


pheriewinkel ACB liegt in dem Abschnitte AECFB, in welchem der Scheitel und die Schenkel liegen. Der Bogen des entgegengesetzten Abschnittes ADB liegt zwischen den Endpuncten der Schenkel des Peripheriewinkels; man sagt: der Peripheriewinkel ACB steht auf dem Bogen AB, welcher die Endpuncte seiner Schenkel verbindet.

Ein Peripheriewinkel, dessen Schenkel durch die Endpuncte eines Durchmessers gehen, wird ein Winkel im Halbkreise genannt, wie ABC.

§. 146. 1. In demselben Kreise verhalten sich die Kreisbogen wie die zugehörigen Centriwinkel.

Fig. 116.



Es seien die Bogen AB und CD (Fig. 116) commensurabel; AM sei ihr gemeinschaftliches Maß, und zwar Bogen AB = m.AM, Bogen CD = n.AM; somit Bogen AB : Bogen CD = m : n. Denkt man sich zu jedem Theilungspuncte der beiden Kreisbogen Halbmesser gezogen, so wird dadurch der Centriwinkel AOB in m und COD in n Theile getheilt, deren jeder dem Winkel AOM gleich ist; man hat daher W. AOB = m.AOM, W. COD = n.AOM, folglich W. AOB : W. COD = m : n.

Aus diesen beiden Proportionen folgt

Bog. AB : Bog. CD = W. AOB : W. COD.

Daß diese Proportion auch dann statt findet, wenn AB und CD incommensurabel sind, folgt aus §. 88.

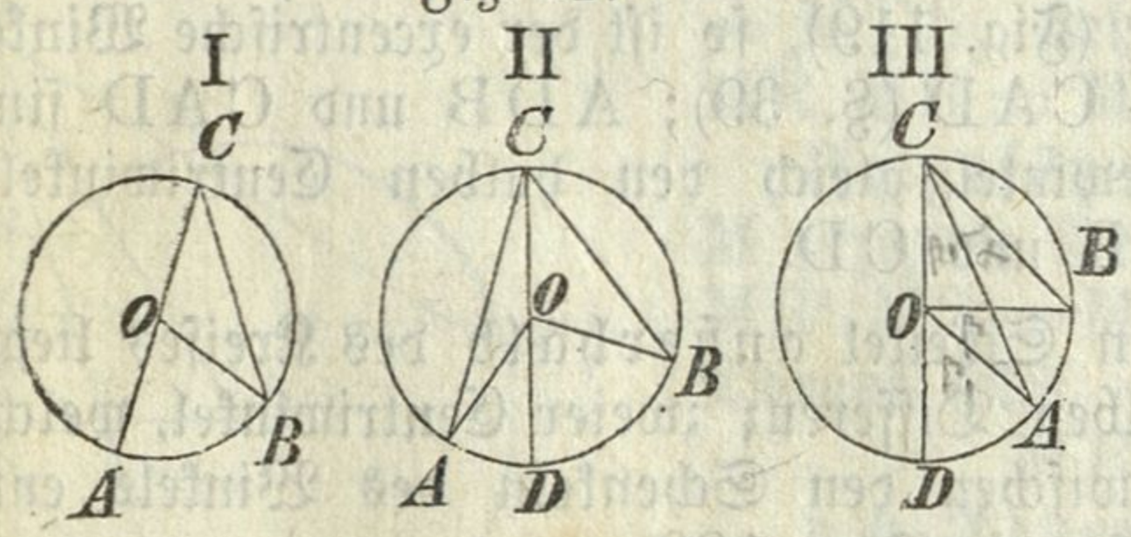
2. In demselben Kreise verhalten sich die Kreisausschnitte (§. 20) wie die zugehörigen Centriwinkel.

Der Beweis ist dem vorigen ähnlich.

§. 147. Ein Peripheriewinkel ist gleich dem halben Centriwinkel auf demselben Bogen (Fig. 117).

Beim Beweise dieses Satzes sind drei Fälle zu unterscheiden.

Fig. 117.



I. Wenn ein Schenkel des Peripheriewinkels durch den Mittelpunct des Kreises geht.

AOB ist ein äußerer Winkel des Dreieckes BOC, daher AOB = OCB + OBC; aber der Winkel OBC = OCB, weil das △ BOC gleichschenklig ist, somit ist der Mittelpunctswinkel AOB = OCB + OCB = 2 ACB; daher $ACB = \frac{AOB}{2}$.

II. Wenn die beiden Schenkel des Peripheriewinkels auf den entgegengesetzten Seiten des Mittelpunctes liegen.

Man ziehe den Durchmesser CD, so ist nach I. der Winkel AOD = 2 ACD, und BOD = 2 BCD, daher auch AOD + BOD = 2 (ACD + BCD), oder AOB = 2 ACB; mithin $ACB = \frac{AOB}{2}$.

III. Wenn die beiden Schenkel des Peripheriewinkels auf derselben Seite des Mittelpunctes liegen.

Zieht man den Durchmesser CD, so ist nach I. der Winkel BOD = 2 BCD, und AOD = 2 ACD; somit BOD — AOD = 2 (BCD — ACD), oder AOB = 2 ACB; mithin $ACB = \frac{AOB}{2}$.

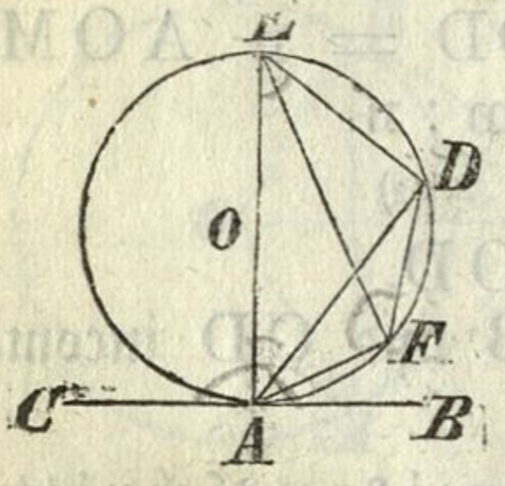
Folgesätze. 1. Peripheriewinkel, welche auf demselben Bogen eines Kreises aufstehen, sind einander gleich. Denn sie sind sämmtlich gleich dem halben Centriwinkel auf demselben Bogen.

2. Zu gleichen Peripheriewinkeln gehören in demselben Kreise auch gleiche Bogen (Umkehrung von 1).

3. Der Winkel im Halbkreise ist ein rechter. (Vergleiche 40, 1. e.) Denn der mit ihm auf demselben Bogen stehende Centriwinkel ist ein gestreckter.

§. 148. Der Winkel, den eine Tangente des Kreises mit einer durch den Berührungspunct gehenden Sehne bildet, ist gleich dem Peripheriewinkel im entgegengesetzten Kreisabschnitte.

Fig. 118.



Voraussf. BC ⊥ AOE (Fig. 118).

Behaupt. a) W. BAD = AED,

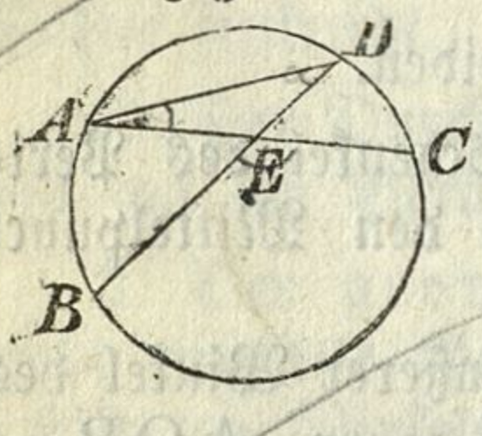
b) W. CAD = AFD.

Beweis. a) Es ist BAD + DAE = R, und im rechtwinkligen △ ADE, AED + DAE = R, daher BAD + DAE = AED + DAE, mithin BAD = AED.

b) Es ist CAD — DAE = R, ferner AFD — DFE = AFE = R, oder weil DFE = DAE (§. 147, Folgef. 1) ist, AFD — DAE = R; daher CAD — DAE = AFD — DAE, mithin CAD = AFD.

§. **149.** 1. Ein excentrischer Winkel, dessen Scheitel innerhalb des Kreises liegt, ist gleich der halben Summe zweier Centriwinkel, welche auf den beiden zwischen den Schenkeln des Winkels enthaltenen Bogen stehen.

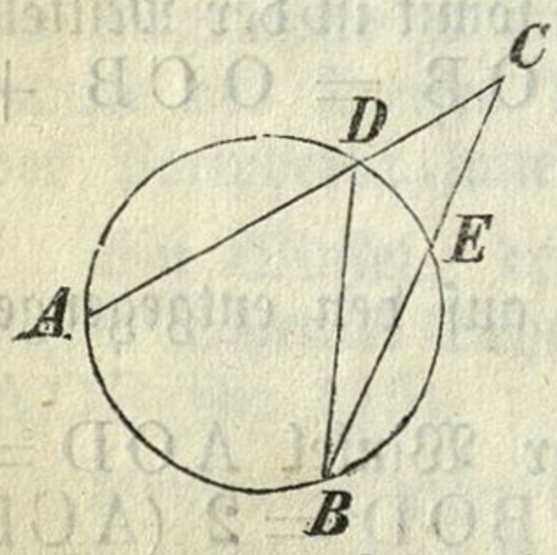
Fig. 119.



Zieht man AD (Fig. 119), so ist der excentrische Winkel AEB = ADB + CAD (§. 39); ADB und CAD sind aber als Peripheriewinkel gleich den halben Centriwinkeln über den Bogen AB und CD.

2. Ein excentrischer Winkel, dessen Scheitel außerhalb des Kreises liegt, ist gleich der halben Differenz zweier Centriwinkel, welche auf den beiden zwischen den Schenkeln des Winkels enthaltenen Bogen stehen (Fig. 120).

Fig. 120.

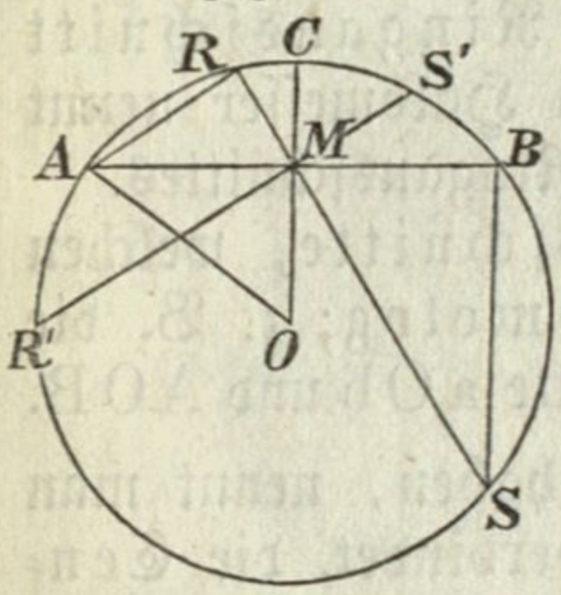


Zieht man BD, so ist ADB = ACB + DBE (§. 39), daher ACB = ADB — DBE. ADB und DBE sind aber als Peripheriewinkel gleich den halben Centriwinkeln, welche auf den Bogen AB und DE stehen.

Zusatz. Dieser Satz gilt auch, wenn ein Schenkel oder beide Schenkel des excentrischen Winkels Tangenten des Kreises sind. Der Beweis ist dem vorigen ähnlich.

§. **150.** Zieht man durch einen innerhalb eines Kreises liegenden Punct M (Fig. 121) beliebige Sehnen dieses Kreises, so ist das Product der Abschnitte einer jeden zwischen M und der Peripherie eine constante Größe, und gleich dem negativen Quadrate der halben Sehne, welche auf dem durch M gezogenen Halbmesser senkrecht steht.

Fig. 121.



Es sei RS eine beliebige durch M gezogene Sehne, und AB eine Sehne, welche in M auf dem Halbmesser OC senkrecht steht.

Zieht man AR und BS, so ist $\triangle MAR \sim MSB$, daher $MR : MA = MB : MS$, oder $MR . MS = MA . MB$. Die Producte MR.MS und MA.MB sind negativ, weil die Abschnitte MR und MS, und ebenso MA und MB von dem gegebenen Puncte M aus nach entgegengesetzten Seiten gezählt werden. Es ist also

$$MB = -MA, \text{ und daher}$$
$$MR.MS = MA.-MA = -MA^2.$$

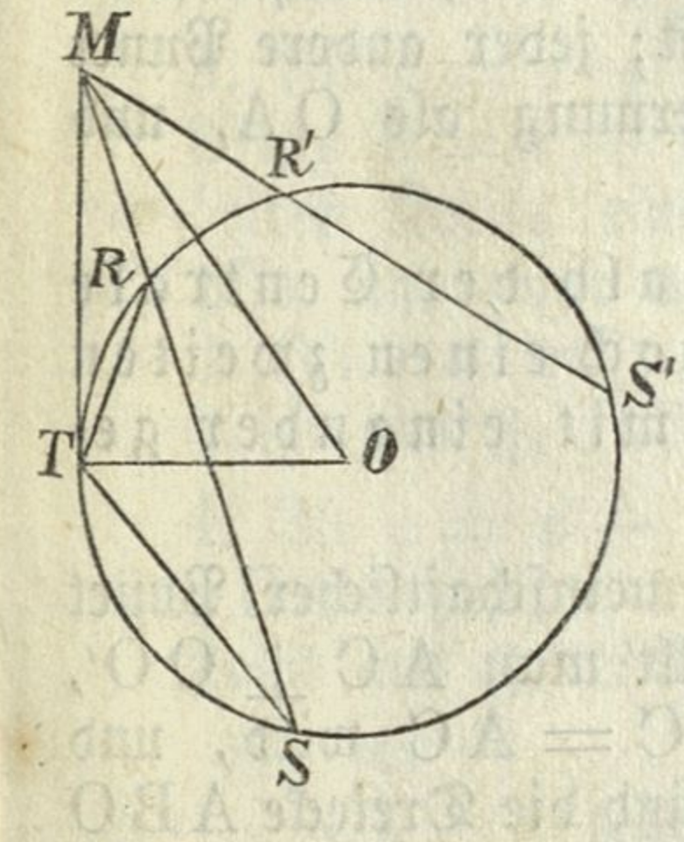
Folgesatz. Ist R'S' eine zweite durch M willkürlich gezogene Sehne des Kreises, so ist auch $MR'.MS' = -MA^2$, daher $MR.MS = MR'.MS'$. Daraus folgt

$$MR : MR' = MS' : MS,$$

d. h. Schneiden sich zwei Sehnen eines Kreises innerhalb desselben, so stehen ihre Abschnitte in verkehrtem Verhältnisse.

§. **151.** Zieht man durch einen außerhalb eines Kreises liegenden Punct M (Fig. 122) beliebige Secanten dieses Kreises, so ist das Product der Abschnitte einer jeden zwischen M und ihren Schnittpuncten mit der Peripherie eine constante Größe und gleich dem Quadrate der von M an den Kreis gezogenen Tangente.

Fig. 122.



Ist MRS eine beliebige durch M gezogene Secante, und MT eine Tangente des gegebenen Kreises, so ist, wenn man RT und ST zieht, $\triangle MRT \sim MTS$, daher $MR : MT = MT : MS$, oder $MR.MS = MT^2$.

Folgesätze. a) Ist MR'S' eine zweite durch M gezogene Secante des Kreises, so ist auch $MR'.MS' = MT^2$, daher $MR.MS = MR'.MS'$. Daraus folgt

$$MR : MR' = MS' : MS,$$

d. h. Gehen von einem Puncte außerhalb eines Kreises zu diesem zwei Secanten, so stehen sie mit ihren äußeren Abschnitten in verkehrtem Verhältnisse.

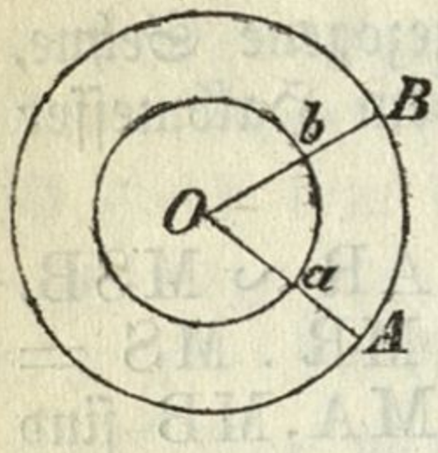
b) Die Proportion $MR : MT = MT : MS$ enthält den Satz:

Gehen von einem Puncte aus eine Secante und eine Tangente an einen Kreis, so ist die Tangente die mittlere geometrische Proportionale zwischen der ganzen Secante und dem äußeren Abschnitte derselben.

III. Lage zweier Kreise gegen einander.

§. **152.** Zwei Kreise, welche denselben Mittelpunct haben, heißen concentrisch, wie die Kreise in Fig. 123.

Fig. 123.



Die Fläche, welche zwischen den Peripherien zweier concentrischer Kreise enthalten ist, wird ein Kreisring, und ein Theil desselben, wie aABb, ein Ringausschnitt genannt. Den Unterschied aA der beiden Halbmesser nennt man die Breite des Ringes oder des Ringausschnittes.

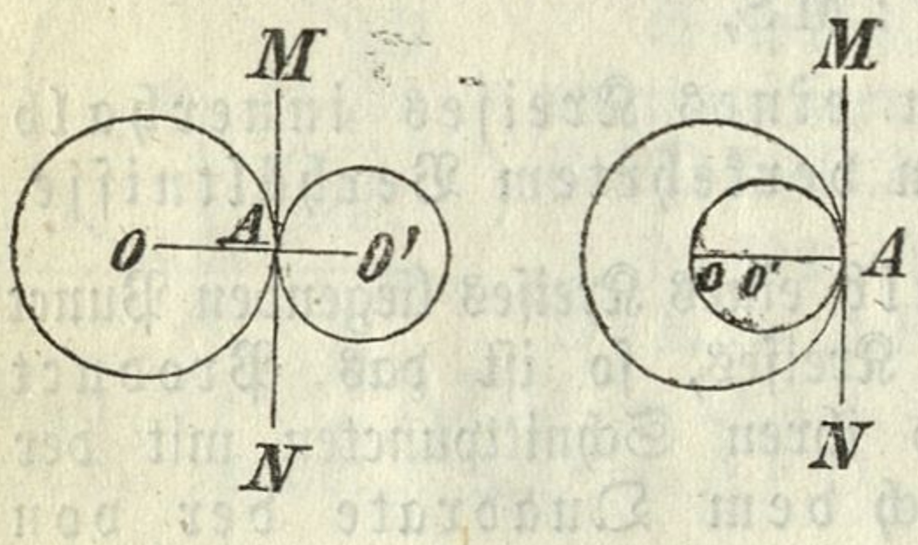
Zwei Kreisbogen oder Kreisausschnitte, welchen gleiche Centriwinkel entsprechen, heißen homolog; z. B. die Bogen ab und AB, oder die Kreisausschnitte aOb und AOB.

§. **153.** Zwei Kreise, welche verschiedene Mittelpuncte haben, nennt man excentrisch, und die Gerade, welche diese Mittelpuncte verbindet, die Centrale derselben.

Lehrsätze.

1. Haben zwei Kreise einen Punct der Centrale oder ihrer Verlängerung gemeinschaftlich, so haben sie nur diesen einen Punct mit einander gemeinschaftlich (Fig. 124).

I. Fig. 124. II.



I. Wenn der gemeinschaftliche Punct A in der Centrale OO' liegt.

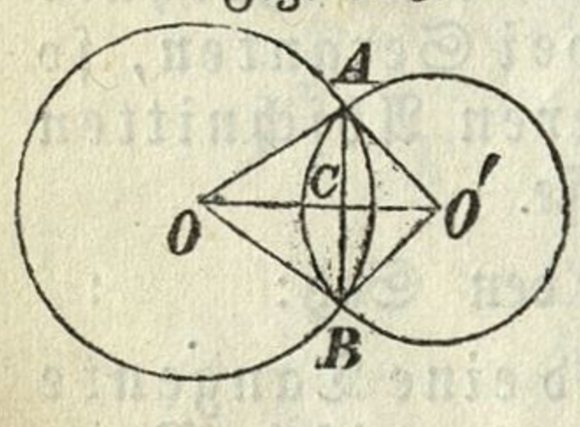
Nach §. 139 ist A derjenige Punct der zweiten Kreislinie, welcher dem Mittelpuncte O der ersten am nächsten liegt, jeder andere Punct der zweiten Kreislinie hat von O eine größere Entfernung als OA, und liegt außerhalb des ersten Kreises.

II. Wenn der gemeinschaftliche Punct A beider Kreise in der Verlängerung der Centrale OO' liegt.

Nach §. 139 ist A derjenige Punct der kleineren Kreislinie, welcher von dem Mittelpuncte O der größeren am weitesten entfernt ist; jeder andere Punct der kleineren Kreislinie hat von O eine kleinere Entfernung als OA, und liegt daher innerhalb des größeren Kreises.

2. Haben zwei Kreise einen Punct außerhalb der Centrale mit einander gemeinschaftlich, so haben sie noch einen zweiten Punct auf der anderen Seite der Centrale mit einander gemeinschaftlich.

Fig. 125.



Es sei A (Fig. 125) ein gemeinschaftlicher Punct der beiden Kreise O und O'. Fällt man AC ⊥ OO', verlängert die AC so, daß BC = AC wird, und zieht OA, OB, O'A, O'B, so sind die Dreiecke ABO und ABO' gleichschenklig, also OB = OA und O'B = O'A; mithin ist B ein gemeinschaftlicher Punct der beiden Kreise.

Zusatz. Drei Puncte können zwei Kreise nicht mit einander gemeinschaftlich haben, weil sie sonst nach §. 138 ganz zusammenfielen.

§. **154.** Haben zwei Kreise nur einen Punct gemeinschaftlich, so sagt man: die Kreise berühren sich, und zwar von außen, wenn sie sonst ganz außerhalb einander liegen, wie in Fig. 124, I; von innen, wenn sonst der eine Kreis ganz innerhalb des andern liegt, wie in Fig. 124, II.

Haben zwei Kreise zwei Puncte gemeinschaftlich, so sagt man, daß sie sich in diesen Puncten schneiden, wie in Fig. 125. Die gemeinschaftliche Fläche zweier sich schneidender Kreise heißt eine Linse, jedes der nicht gemeinschaftlichen Stücke ein Mond.

Folgesätze.

1. Die Centrale zweier sich berührender Kreise geht durch den Berührungspunct. Denn läge der Berührungspunct nicht in der Centrale, so müßten die Kreislinien nach §. 153, 2 noch einen zweiten Punct gemeinschaftlich haben, und würden sich also nicht berühren.

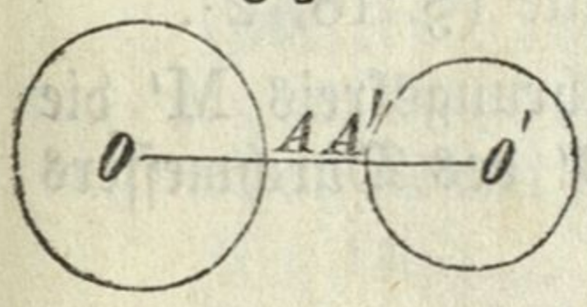
2. Der geometrische Ort der Mittelpuncte aller Kreise, welche einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Puncte desselben berühren, ist die durch diesen Punct und den Mittelpunct des gegebenen Kreises gehende Gerade.

3. Die durch den Berührungspunct zweier Kreise an den einen gezogene Tangente ist zugleich eine Tangente des andern. Denn die Gerade MN (Fig. 124), welche auf OA senkrecht steht, ist auch auf O'A senkrecht.

4. Die Centrale zweier sich schneidender Kreise steht auf der gemeinschaftlichen Sehne senkrecht, und halbirt diese Sehne sowie die zugehörigen Centriwinkel beider Kreise (Fig. 125).

§. **155.** Die Lage eines Kreises in Bezug auf einen andern Kreis hängt von der Größe der Centrale und der beiden Halbmesser ab.

Fig. 126.



Bezeichnet man die Centrale zweier Kreise, deren Halbmesser r und r' sind, durch c, so hat man folgende Sätze:

1. Ist $c > r + r$, so liegt der eine Kreis außerhalb des andern.

Wenn $c > r + r'$, oder $c - r' > r$ ist, so ist (Fig. 126) $OA' > OA$, also liegt der Punct A', und daher (nach §. 139, a) auch jeder andere Punct des Kreises O' außerhalb des Kreises O.

2. Ist $c = r + r'$, so berühren sich die beiden Kreise von außen.

Wenn $c = r + r'$, oder $OO' = OA + O'A$ (Fig. 124, I) ist, so haben die beiden Kreise einen Punct A der Centrale gemeinschaftlich; sie berühren sich also, und zwar von außen (§. 153, 1, I.)

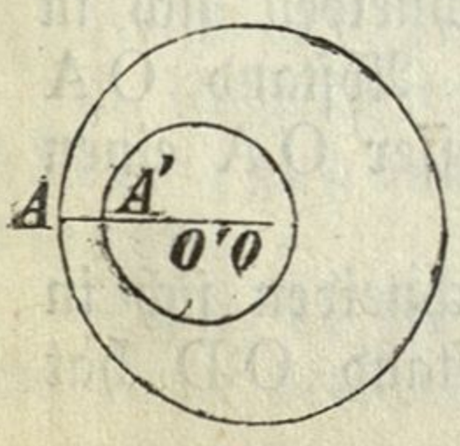
3. Ist $r + r' > c > r - r'$, so schneiden sich die beiden Kreise.

Folgt aus §. 153, 2.

4. Ist $c = r - r'$, so berühren sich die beiden Kreise von innen (Fig. 124, II.).

Folgt aus §. 153, 1, II.

Fig. 127.



5. Ist $c < r - r'$, so liegt der kleinere Kreis ganz innerhalb des größeren.

Wenn $c < r - r'$, oder $c + r' < r$ ist, so ist (Fig. 127) $OA' < OA$, also liegt der Punct A', und daher (§. 139, b) auch jeder andere Punct des kleineren Kreises innerhalb des größeren.

6. Ist $c = o$, so sind die beiden Kreise concentrisch.

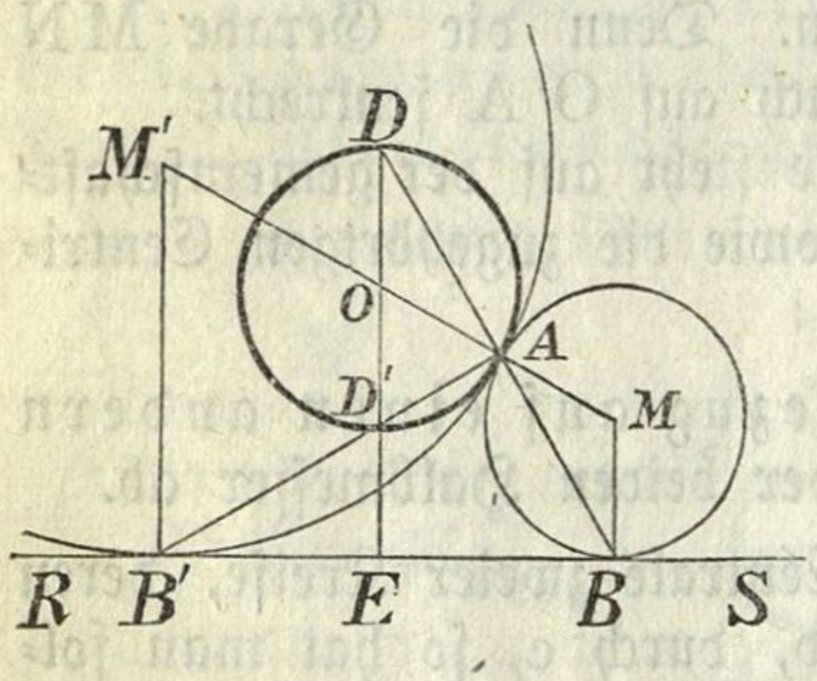
Folgesatz.

Der geometrische Ort der Mittelpuncte aller Kreise, welche einen gegebenen Kreis berühren, ist ein mit diesem concentrischer Kreis, dessen Halbmesser gleich ist der Summe oder der Differenz der beiden gegebenen Halbmesser, je nachdem die Berührung von außen oder von innen stattfindet.

Zusatz. Da in den vorhergehenden sechs Sätzen alle möglichen sich gegenseitig ausschließenden Fälle, welche bezüglich der Centrale im Vergleiche zur Summe und Differenz der Halbmesser der beiden Kreise stattfinden können, berücksichtiget sind, so läßt sich indirect leicht beweisen, daß von diesen Sätzen auch die Umkehrungen richtig sind.

§. 156. Berührt ein Kreis einen andern Kreis und eine Gerade, so liegen die beiden Berührungspuncte, je nachdem der Kreis von außen oder von innen berührt wird, mit dem von der Geraden entfernteren oder mit dem näheren Endpuncte des auf diese Gerade senkrechten Durchmessers in einer geraden Linie.

Fig. 128.



Es berühre (Fig. 128) der Kreis M den Kreis O in A, und die Gerade RS in B. Zieht man durch O auf RS die Senkrechte DD'E, ferner die Geraden MB, MA und OA, BA und DA, so müssen in den gleichschenkligen Dreiecken ABM und ADO, da MAO eine gerade Linie ist (§. 154, Folgesatz 1), und daher W. AMB = AOD ist, auch die Winkel an den Grundlinien, also BAM und DAO gleich sein; mithin ist BAD eine gerade Linie (§. 18, 2).

Auf gleiche Art wird bewiesen, daß auch für den Berührungskreis M' die Berührungspuncte A und B' mit dem andern Endpuncte D' des Durchmessers DD' in einer Geraden liegen.

IV. Dem Kreise eingeschriebene und umschriebene Vielecke.

§. 157. Ein Vieleck, dessen Eckpuncte in dem Umfange eines Kreises liegen, dessen Seiten also Sehnen des Kreises sind, heißt dem Kreise eingeschrieben; der Kreis ist dann dem Vielecke umschrieben.

Ein Vieleck, dessen Seiten Tangenten des Kreises sind, heißt dem Kreise umschrieben; der Kreis ist dann dem Vielecke eingeschrieben.

Ein dem Kreise eingeschriebenes Vieleck nennt man auch ein Sehnenvieleck, ein dem Kreise umschriebenes Vieleck ein Tangentenvieleck.

§. 158. Jedem Dreiecke läßt sich a) ein Kreis umschreiben, b) ein Kreis einschreiben.

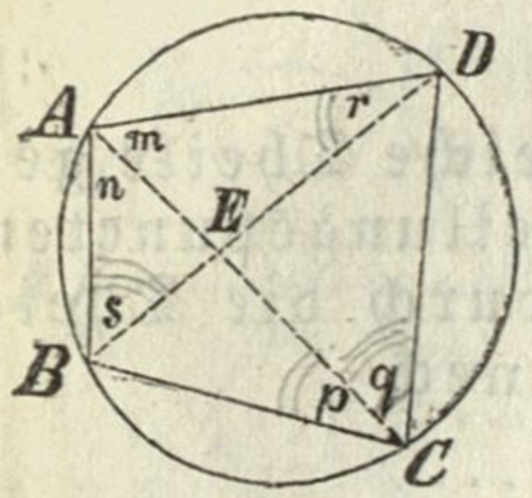
Beweis. a) Die Mittellothe eines Dreieckes (Fig. 60) schneiden sich in einem Puncte O, welcher von den drei Eckpuncten denselben Abstand OA hat (§. 71, 1). Beschreibt man daher aus O mit dem Halbmesser OA einen Kreis, so geht er durch alle Eckpuncte des Dreieckes.

b) Die Winkelhalbirungslinien eines Dreieckes (Fig. 61) schneiden sich in einem Puncte O, welcher von den drei Seiten denselben Abstand OD hat

(§. 71, 2). Beschreibt man daher aus O mit dem Halbmesser O D einen Kreis, so berührt er alle drei Seiten des Dreieckes.

§. 159. 1. In jedem Sehnenvierecke sind die Summen der gegenüberliegenden Winkel einander gleich, und zwar ist jede Summe gleich zwei Rechten.

Fig. 129.



Man ziehe (Fig. 129) die Diagonalen A C und B D; dann ist der Winkel p = r, q = s (§. 147, Folgesatz 1). In dem Dreiecke A B D ist nun m + n + r + s = 2 R, daher ist auch m + n + p + q = 2 R, oder A + C = 2 R.

Da die Summe aller Winkel eines Viereckes gleich ist 4 R, so muß auch B + D = 2 R, also A + C = B + D sein.

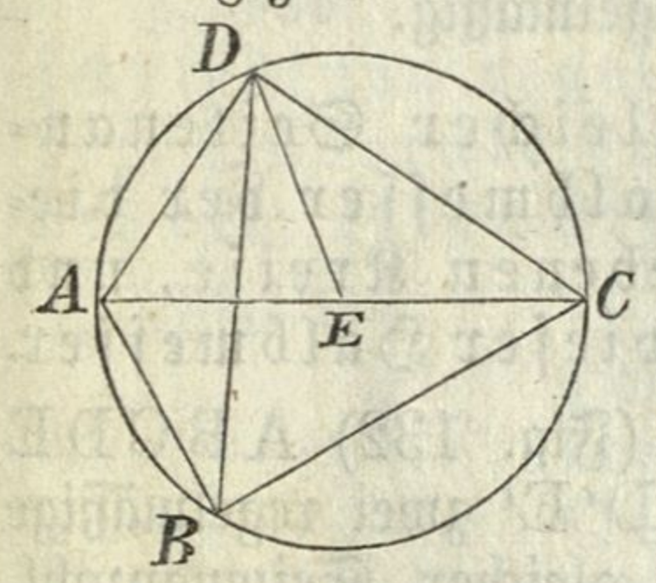
2. Umgekehrt: Sind in einem Vierecke die Summen der gegenüberliegenden Winkel gleich, so ist dasselbe ein Sehnenviereck.

Der Beweis wird indirect geführt. Würde der durch drei Eckpuncte A, B, C beschriebene Kreis nicht auch durch den vierten D gehen, so müßte er die Seite C D selbst oder ihre Verlängerung in einem Puncte schneiden, durch dessen Verbindung mit A man ein Sehnenviereck erhielte. Dann aber würde sich ergeben, daß ein Außenwinkel eines Dreieckes einem inneren gegenüberliegenden gleich wäre.

Folgesatz. Jedem Vierecke, in welchem die Summe von zwei gegenüberliegenden Winkeln gleich zwei Rechten ist, läßt sich ein Kreis umschreiben.

§. 160. In jedem Sehnenvierecke ist das Product der Diagonalen gleich der Summe der Producte aus je zwei gegenüberliegenden Seiten. (Ptolemäischer Lehrsatz.)

Fig. 130.



Beweis. Man mache den Winkel C D E = A D B. Dann ist, da auch der W. A C D = A B D (§. 147, Folgesatz 1) ist, das △ E C D ∼ A B D, daher

E C : C D = A B : B D, und

E C . B D = A B . C D

Ebenso ist △ A E D ∼ B C D, daher

A E : A D = B C : B D, und

A E . B D = A D . B D.

Mithin hat man

E C . B D + A E . B D = A B . C D + A D . B D,

oder, weil E C . B D + A E . B D = (E C + A E) . B D = A C . B D ist,

A C . B D = A B . C D + A D . B D.

§. 161. 1. In jedem Tangentenvierecke sind die Summen der gegenüberliegenden Seiten gleich.

Folgt aus §. 144.

2. Umgekehrt: Sind in einem Vierecke die Summen der gegenüberliegenden Seiten gleich, so ist dasselbe ein Tangentenviereck.

Beweis indirect. Würde der drei Seiten berührende Kreis nicht auch die vierte berühren, so könnte man von einem Endpuncte derselben eine Tan-

gente an den Kreis ziehen, wodurch man ein Tangentenviereck erhielte. Dann aber würde sich ergeben, daß eine Seite eines Dreieckes der Differenz der beiden anderen gleich wäre.

Folgesatz. Jedem Vierecke, in welchem die Summen der gegenüberliegenden Seiten gleich sind, läßt sich ein Kreis einschreiben.

§. 162. 1. Jedem regelmäßigen Vielecke läßt sich ein Kreis um- und einschreiben.

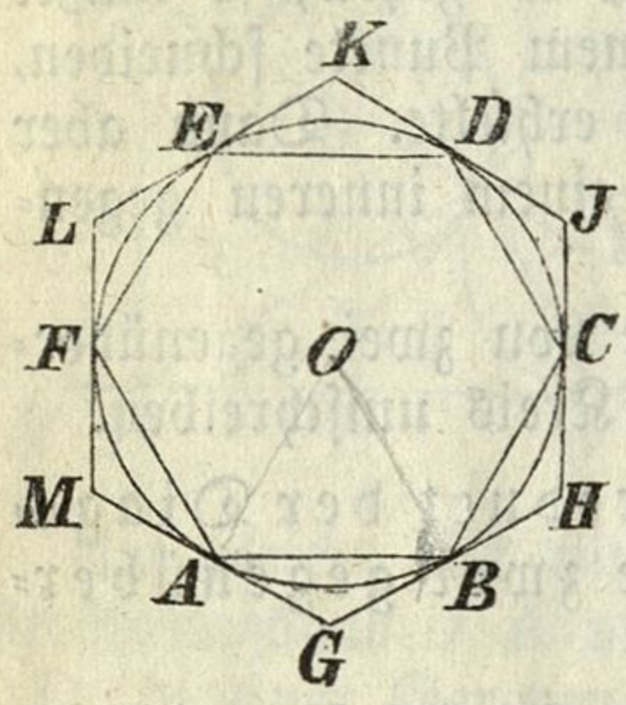
Der Beweis ist in §. 78 enthalten.

2. Ist die Peripherie eines Kreises in n gleiche Theile getheilt, so bilden a) die Sehnen zwischen den Theilungspuncten ein eingeschriebenes, und b) die Tangenten durch die Theilungspuncte ein umschriebenes regelmäßiges neck.

Es sei (Fig. 131) der Bogen $AB = BC = CD = \ldots$.

a) Zieht man die Sehnen AB, BC, CD,..., so sind in dem Vielecke ABCD... die Seiten AB, BC, CD, ... gleich (§. 21, 2), ferner die Winkel A, B, C, D, ... gleich (§. 147, Folges. 1); folglich ist das Vieleck ABCD ... regelmäßig.

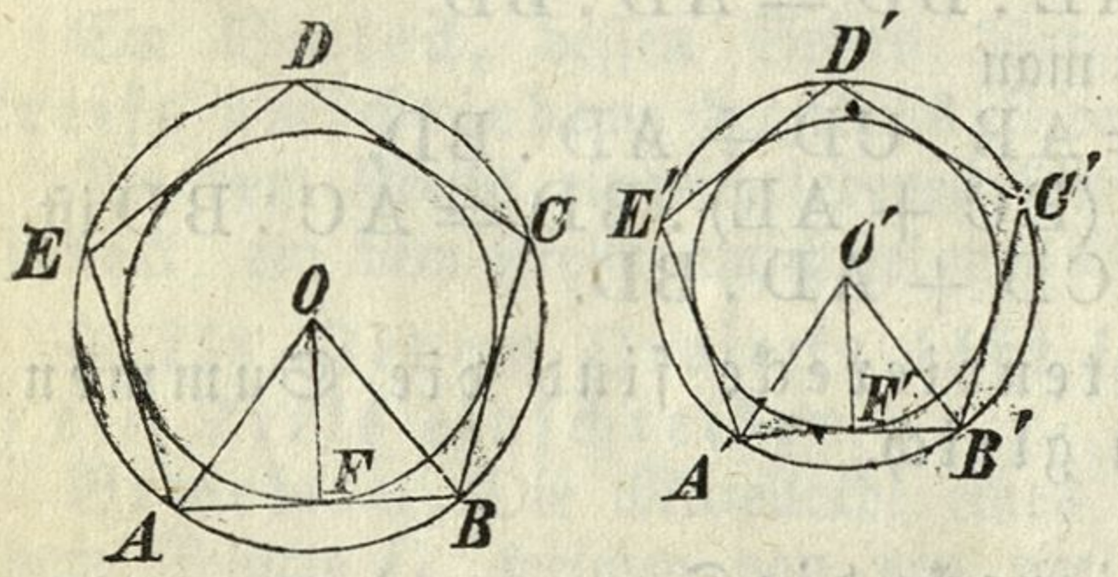
Fig. 131.



b) Zieht man durch A, B, C, D... Tangenten an den Kreis, welche sich in den Puncten G, H, I, K,... schneiden, so sind wegen der gleichen Seiten AB, BC, CD,... und wegen der gleichen ihnen anliegenden Winkel (§. 148) die Dreiecke AGB, BHC, CJD,... congruent; auch sind diese Dreiecke wegen der angeführten Gleichheit der Winkel gleichschenklig; mithin sind die Summen je zweier Schenkel gleich, also $GH = HJ = JK = \ldots$. Aus der Congruenz der obigen Dreiecke folgt auch die Gleichheit der Winkel G, H, J,...; folglich ist das Vieleck GHJK... regelmäßig.

§. **163.** In regelmäßigen Vielecken von gleicher Seitenanzahl verhalten sich a) die **Umfänge** wie die Halbmesser der diesen Vielecken eingeschriebenen oder umschriebenen Kreise, und b) die **Flächeninhalte** wie die zweiten Potenzen dieser Halbmesser.

Fig. 132.



Es seien (Fig. 132) ABCDE und A'B'C'D'E' zwei regelmäßige Vielecke von gleicher Seitenanzahl, ferner u und u' ihre Umfänge, f und f' ihre Flächeninhalte, r und r' die Halbmesser der ihnen eingeschriebenen, R und R' die Halbmesser der ihnen umschriebenen Kreise. Da die beiden regelmäßigen Vielecke gleich viele Seiten haben, so sind sie ähnlich.

a) Nach §. 109, 2 und §. 104 ist

$$\frac{u}{u'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{OF}{O'F'} = \frac{AO}{A'O'}, \text{ oder } \frac{u}{u'} = \frac{r}{r'} = \frac{R}{R'}.$$

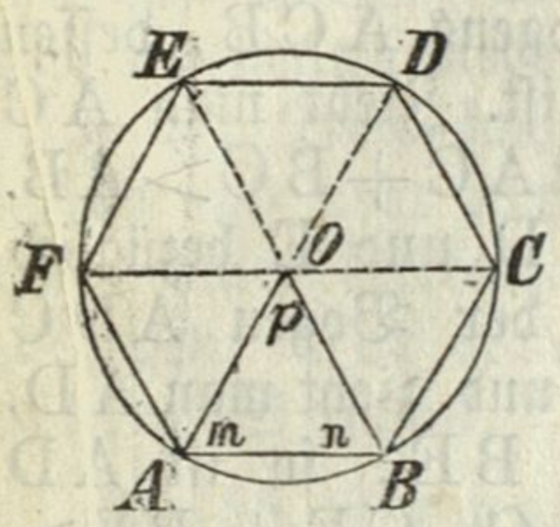
b) Nach §. 129, 4 ist

$$f = u \cdot \frac{r}{2} \text{ und } f' = u' \cdot \frac{r'}{2}; \text{ daher } \frac{f}{f'} = \frac{u}{u'} \cdot \frac{r}{r'} = \frac{r^2}{r'^2}.$$

Aber $\frac{r}{r'} = \frac{R}{R'}$; daher $\frac{r^2}{r'^2} = \frac{R^2}{R'^2}$; mithin auch $\frac{f}{f'} = \frac{R^2}{R'^2}$.

§. **164.** Die Seite des einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Sechseckes ist gleich dem Halbmesser des Kreises. (Fig. 133.)

Fig. 133.

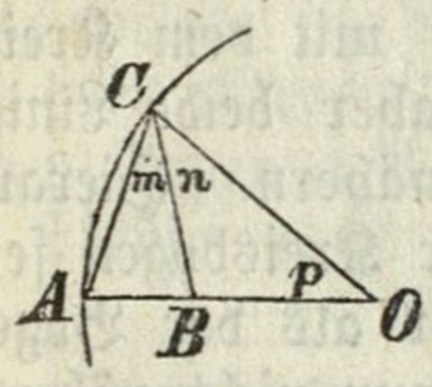


Es sei das Sechseck ABCDEF regelmäßig.

Der Winkel eines regelmäßigen Sechseckes ist gleich $\frac{720^0}{6} = 120^0$, also ist $A = B = 120^0$ und $m = n = 60^0$, daher muß auch $p = 60^0$, und daher das Dreieck ABO gleichseitig sein; folglich ist $AB = OA$.

§. **165.** Die Seite des einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Zehneckes ist gleich dem größeren Abschnitte des nach stetiger Proportion getheilten Halbmessers.

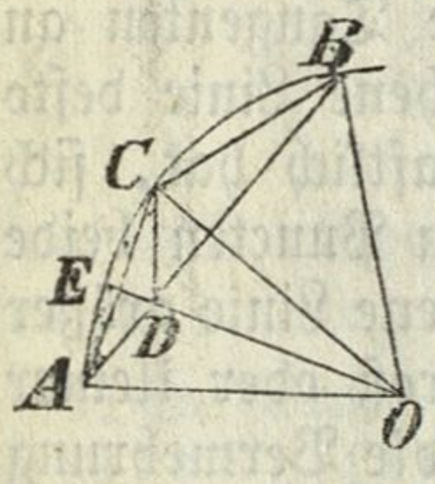
Fig. 134.



Es sei der Bogen AC (Fig. 134) der zehnte Theil der Peripherie, also die Sehne AC die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Zehneckes. Zieht man AO und CO, so ist $AOC = 36^0$, und daher in dem gleichschenkligen Dreiecke ACO jeder von den beiden Winkeln ACO und CAO gleich 72^0, also ist der Winkel $ACO = 2AOC$. Halbirt man nun den Winkel ACO, so daß $m = n = p$ wird, so ist das $\triangle ACO \sim ABC$, daher $AO : AC = AC : AB$, oder weil $AC = BC = BO$ ist, auch $AO : BO = BO : AB$; folglich ist die Zehnecksseite AC gleich dem größeren Abschnitte BO des nach stetiger Proportion getheilten Halbmessers AO (§. 87).

§. **166.** Das Quadrat der Seite des einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Fünfeckes ist gleich der Summe aus dem Quadrate des Halbmessers und dem Quadrate der Seite des demselben Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Zehneckes.

Fig. 135.



Es seien (Fig. 135) r, a, b bezüglich die Maßzahlen des Halbmessers AO, der Seiten AB und AC des eingeschriebenen regelmäßigen Fünfeckes und Zehneckes. Zieht man die OC, welche den Centriwinkel AOB des Fünfeckes halbirt, und halbirt man auch den Centriwinkel AOC des Zehneckes durch OD, deren Verlängerung OE senkrecht auf der Mitte von AC steht, so ist, wie man sich leicht überzeugt, W. $BAO = BOD = 54^0$, daher $\triangle BAO \sim BOD$; folglich $AB : BO = BO : BD$, oder wenn m und n die Maßzahlen der Abschnitte AD und BD bezeichnen, $a : r = r : n$, und $an = r^2$.

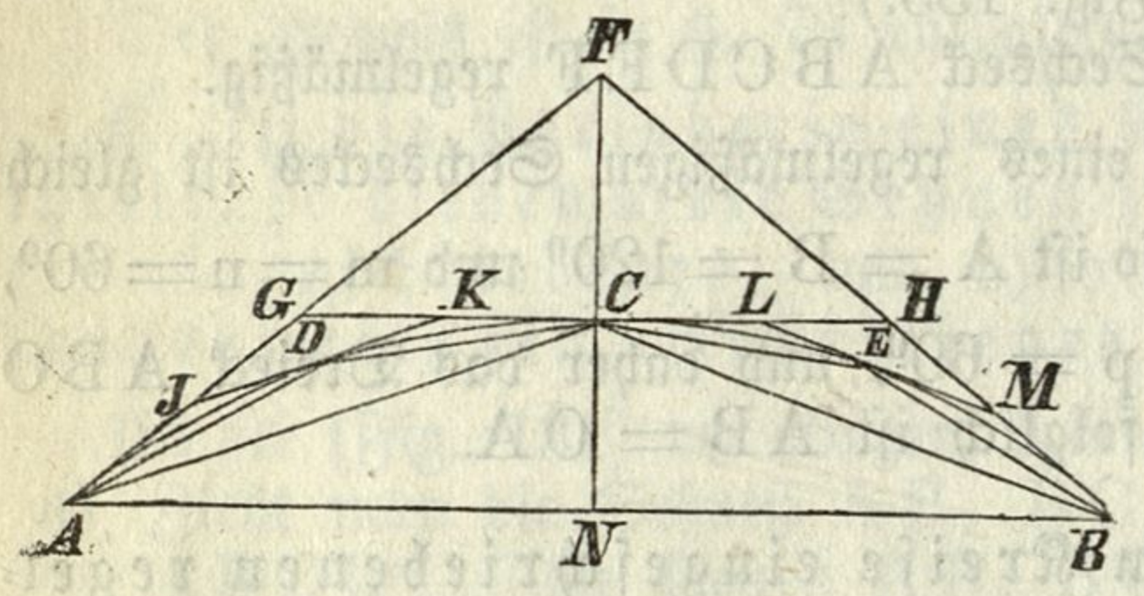
Zieht man noch CD, so ist das $\triangle ACD$ gleichschenklig (§. 55, 4), daher W. $ACD = CAD = ABC$, und $\triangle ABC \sim ACD$, folglich $AB : AC = AC : AD$, oder $a : b = b : m$, und $am = b^2$; mithin

$$an + am = r^2 + b^2, \text{ oder } a(n + m) = a^2 = r^2 + b^2.$$

V. Kreismessung.

§. 167. Die Sehne eines Kreisbogens ist kleiner, die Summe der zwei durch seine Endpuncte bis zu ihrem Durchschnitte gezogenen Tangenten größer als der Kreisbogen.

Fig. 136.



a) Es sei C (Fig. 136) die Mitte eines Kreisbogens ACB, dessen Sehne AB ist. Zieht man AC und BC, so ist AC + BC > AB. Sind ferner D und E bezüglich die Mitten der Bogen ADC und BEC, und zieht man AD, CD, CE, BE, so ist AD + CD > AC, CE + BE > BC, daher die gebrochene Linie ADCEB > AC + BC und um so mehr > AB. Fährt man auf diese Weise mit dem Halbiren der Bogen fort und zieht immer durch je zwei auf einander folgende Puncte Sehnen, so wird die dadurch entstehende gebrochene Linie um so größer, je mehrere Puncte sie mit dem Kreisbogen gemeinschaftlich hat; in je mehreren Puncten aber beide Linien zusammenfallen, um so mehr müssen sie sich einander nähern. Hieraus folgt, daß jede solche gebrochene Linie kleiner als der Kreisbogen sein müsse, da dieselbe, wenn sie eben so groß oder größer als der Bogen wäre, bei fortwährender Zunahme sich diesem nicht nur nicht nähern, sondern von ihm um so mehr entfernen würde, in je mehreren Puncten beide Linien zusammenfallen. Es ist demnach um so mehr die Sehne AB kleiner als der Bogen ACB.

b) Es seien AF und BF die durch die Endpuncte des Bogens ACB gezogenen Tangenten. Zieht man auch durch C eine Tangente GH an den Bogen, so ist wegen GH < GF + FH die gebrochene Linie AGHB < AF + BF. Zieht man ferner durch D und E Tangenten an den Bogen, so wird die gebrochene Linie AJKLMB < AGHB, und um so mehr < AF + BF. Wenn man auf diese Art die Halbirung der Bogen fortsetzt und durch die Halbirungspuncte Tangenten an den Bogen zieht, so wird die von diesen gebildete gebrochene Linie desto kleiner, je mehrere Puncte sie mit dem Bogen gemeinschaftlich hat, sich aber auch dem Bogen um so mehr nähern, in je mehreren Puncten beide Linien zusammenfallen. Es muß daher jede solche gebrochene Linie größer als der Kreisbogen sein, da dieselbe, wenn sie eben so groß oder kleiner als der Bogen wäre, bei fortwährendem Abnehmen durch die Vermehrung der Berührungspuncte sich diesem nicht nähern, sondern von ihm entfernen würde. Es ist somit AF + BF > Bogen ACB.

Folgesätze.

1. Die halbe Sehne AN ist kleiner, die Tangente AF größer als der Bogen AC.

2. Die Peripherie eines Kreises ist größer als der Umfang eines eingeschriebenen, und kleiner als der Umfang eines umschriebenen Vieleckes.

3. Die Kreisfläche ist größer als die Fläche eines eingeschriebenen, und kleiner als die Fläche eines umschriebenen Vieleckes.

Denn die Fläche des eingeschriebenen Vieleckes ist ein Theil der Kreisfläche, und diese wieder ein Theil des umschriebenen Vieleckes.

4. Die Umfänge der eingeschriebenen und umschriebenen regelmäßigen Vielecke können durch fortgesetzte Verdopplung ihrer Seitenzahl der Peripherie des Kreises, und eben so die Flächen der eingeschriebenen und umschriebenen regelmäßigen Vielecke der Fläche des Kreises beliebig nahe gebracht werden, so daß die Unterschiede kleiner werden, als jede noch so kleine angebbare Größe; d. h. der Kreis kann als die Grenze angesehen werden, welcher sich ein demselben ein- oder umschriebenes regelmäßiges Vieleck bei fortgesetzter Vermehrung seiner Seitenzahl ohne Ende nähert. In diesem Sinne pflegt man auch zu sagen: Der Kreis ist ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten.

§. **168.** Homologe Kreisbogen verhalten sich wie die Peripherien, und homologe Kreisausschnitte wie die Flächeninhalte der zugehörigen ganzen Kreise.

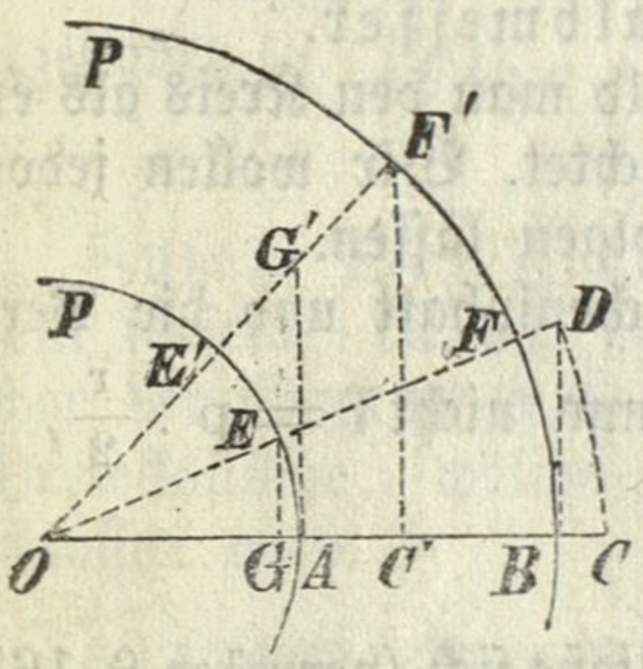
Heißen P und p die Peripherien, F und f die Flächeninhalte zweier Kreise, deren Halbmesser OB und Ob sind, und sind AB und ab zwei Bogen, welche in diesen Kreisen zu dem Centriwinkel α gehören, so hat man (§. 146) Bogen $AB : P = m^0 : 360^0$, und Bogen $ab : p = m^0 : 360^0$; daher Bogen $AB : P =$ Bogen $ab : p$, oder Bogen $AB :$ Bogen $ab = P : p$.

Ebenso erhält man auch die Proportion:

Ausschnitt $AOB :$ Ausschnitt $aOb = F : f$.

§. **169.** Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich wie ihre Halbmesser.

Fig. 137.



Es seien (Fig. 137) P und p die Peripherien der mit den Halbmessern OA und OB beschriebenen Kreise. Wäre nun nicht $p : P = OA : OB$, so müßte die vierte Proportionale zu p, P und OA größer oder kleiner als OB sein.

Wäre $p : P = OA : OC$, wo $OC > OB$ ist, so müßte, wenn man aus O den Bogen CD beschreibt, $BD \perp OC$ errichtet, dann den Halbmesser DO, und die $EG \perp OC$ zieht, (nach §. 168) Bogen AE : Bogen $BF = p : P = OA : OC$ sein. Nun ist $EG : BD = OE : OD = OA : OC$; mithin wäre Bog. AE : Bog. $BF = EG : BD$, was nicht sein kann, da (nach §. 167, Folgef. 1) Bog. $AE > EG$, dagegen Bogen $BF < BD$ ist.

Wäre ferner $p : P = OA : OC'$, wo $OC' < OB$ ist, so müßte, wenn man $C'F' \perp OB$ errichtet, den Halbmesser OF', und die $AG' \perp OB$ zieht, (nach §. 168) Bogen $AE' :$ Bogen $BF' = OA : OC'$ sein. Nun ist $AG' : C'F' = OA : OC'$; mithin wäre Bogen AE': Bogen $BF' = AG' : C'F'$, was nicht sein kann, da (nach §. 167, Folgef. 1) Bogen $AE' < AG'$, dagegen Bogen $BF' > C'F'$ ist.

Es ist daher $p : P = OA : OB$.

Folgesätze. 1. Drückt man die zu den Peripherien p und P gehörigen Halbmesser durch r und R, die entsprechenden Durchmesser durch d und D aus, so

ist $p : P = r : R = d : D$. Daraus erhält man $p : d = P : D$, d. h. das Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser ist in allen Kreisen ein constantes. Die Mathematiker bezeichnen dieses constante Verhältniß durch die Zahl π, so daß $\frac{p}{d} = \frac{p}{2r} = \pi$ ist. Die Zahl π wird weiter unten (§. 193) berechnet werden.

2. Es ist demnach $p = d\pi$ oder $p = 2r\pi$, d. h. die Peripherie eines Kreises ist gleich dem Producte aus dem Durchmesser und der Zahl π.

§. **170.** Zwei homologe Bogen verhalten sich so wie ihre Halbmesser.

Bezeichnen B und b die Längen zweier Kreisbogen, welche zu demselben Centriwinkel α gehören, R und r ihre Halbmesser, so hat man

$$B : 2R\pi = \alpha : 360 \text{ und } b : 2r\pi = \alpha : 360; \text{ daher}$$

$$B = R \,.\, \frac{\alpha\pi}{180} \text{ und } b = r \,.\, \frac{\alpha\pi}{180}; \text{ somit}$$

$$B : b = R : r.$$

Zusätze. 1. Mittelst des Ausdruckes $b = r \,.\, \frac{\alpha\pi}{180}$ kann man, wenn von den drei Größen b, α, r zwei gegeben sind, aus denselben die dritte finden.

2. Für $r = 1$ ist $b = \frac{\alpha\pi}{180}$. Der Ausdruck $\frac{\alpha\pi}{180}$ gibt also die Länge des Bogens von α Grad für den Halbmesser 1 an; wir wollen diesen Ausdruck kürzer durch arc α bezeichnen.

3. Aus $B = R$. arc α folgt: die Länge eines Kreisbogens ist gleich der Länge des homologen Bogens für den Halbmesser 1 multiplicirt mit dem Halbmesser des ersteren.

§. **171.** Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem Producte aus der Peripherie und dem halben Halbmesser.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus §. 129, 4, sobald man den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachtet. Wir wollen jedoch für denselben hier einen strengen indirecten Beweis folgen lassen.

Man bezeichne durch f und p bezüglich den Flächeninhalt und die Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser r ist. Wäre nun nicht $f = p \,.\, \frac{r}{2}$, so müßte $f \gtrless p \,.\, \frac{r}{2}$ sein.

Wäre $f > p \,.\, \frac{r}{2}$, und zwar $f - p \,.\, \frac{r}{2} = w$, so ließe sich (vermöge §. 167, Folges. 4) dem Kreise immer ein regelmäßiges Vieleck einschreiben, dessen Flächeninhalt sich von dem Flächeninhalte des Kreises um weniger als jede noch so kleine gegebene Größe w unterscheidet. Heißt u der Umfang eines solchen Vieleckes und a der Abstand seines Mittelpunctes von der Seite, so wäre $f - u \,.\, \frac{a}{2} < w$, und demnach $f - u \,.\, \frac{a}{2} < f - p \,.\, \frac{r}{2}$, somit $u \,.\, \frac{a}{2} > p \,.\, \frac{r}{2}$, was nicht sein kann, da $u < p$ und $a < r$ ist.

Wäre ferner $f < p \,.\, \frac{r}{2}$, und zwar $p \,.\, \frac{r}{2} - f = w'$, so ließe sich dem Kreise immer ein regelmäßiges Vieleck umschreiben, dessen Flächeninhalt sich von dem Flächeninhalte des Kreises um weniger als jede noch so kleine gegebene Größe w' unterscheidet. Heißt u' der Umfang eines solchen Vieleckes,

so wäre $u' \cdot \frac{r}{2} - f < w'$ und demnach $u' \cdot \frac{r}{2} - f < p \cdot \frac{r}{2} - f$, daher $u' \cdot \frac{r}{2} < p \cdot \frac{r}{2}$, was nicht sein kann, da $u' > p$ ist.

Es ist daher $f = p \cdot \frac{r}{2}$.

Folgesatz. Setzt man in der Gleichung $f = p \cdot \frac{r}{2}$ für p den Werth $2r\pi$, so erhält man $f = r^2\pi$,

d. h. der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem Producte aus dem Quadrate des Halbmessers und der Zahl π.

§. **172.** Die Flächeninhalte zweier Kreise verhalten sich wie Quadrate ihrer Halbmesser.

Bezeichnen F und f die Flächeninhalte zweier Kreise, deren Halbmesser R und r sind, so hat man $F = R^2\pi$ und $f = r^2\pi$, daher

$$F : f = R^2 : r^2.$$

Folgesatz. Zwei homologe Kreisausschnitte verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser (§. 168).

§. **173.** Der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes ist gleich dem Producte aus dem im Längenmaße ausgedrückten Bogen und dem halben Halbmesser.

Bezeichnet s den Flächeninhalt eines Kreisausschnittes, der für den Halbmesser r dem Centriwinkel α entspricht, so hat man

$$s : r^2\pi = \alpha : 360 \text{ (§. 146, 2), daher}$$

$$s = \frac{r^2\alpha\pi}{360} = \frac{r\alpha\pi}{180} \cdot \frac{r}{2},$$

oder, da $\frac{r\alpha\pi}{180} = b$ die Länge des zu dem Centriwinkel α gehörigen Bogens bezeichnet (§. 170),

$$s = b \cdot \frac{r}{2}.$$

Zusatz. Der Flächeninhalt eines Kreisabschnittes ist, je nachdem derselbe kleiner oder größer als der Halbkreis ist, gleich der Differenz oder der Summe aus der Fläche des zugehörigen Kreisausschnittes und der Dreiecksfläche, welche von der Sehne und den beiden Halbmessern eingeschlossen wird.

§. **174.** 1. Der Flächeninhalt eines Kreisringes ist gleich dem Producte aus der halben Summe der beiden Kreisumfänge und der Breite des Ringes.

Bezeichnet man durch a den Flächeninhalt des Kreisringes, durch R und P den Halbmesser und die Peripherie des größeren, durch r und p den Halbmesser und die Peripherie des kleineren der zwei concentrischen Kreise, so ist

$$a = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\,\pi = (R + r)\,(R - r)\,\pi$$
$$= \frac{2R\pi + 2r\pi}{2} \cdot (R - r) = \frac{P + p}{2} \cdot (R - r).$$

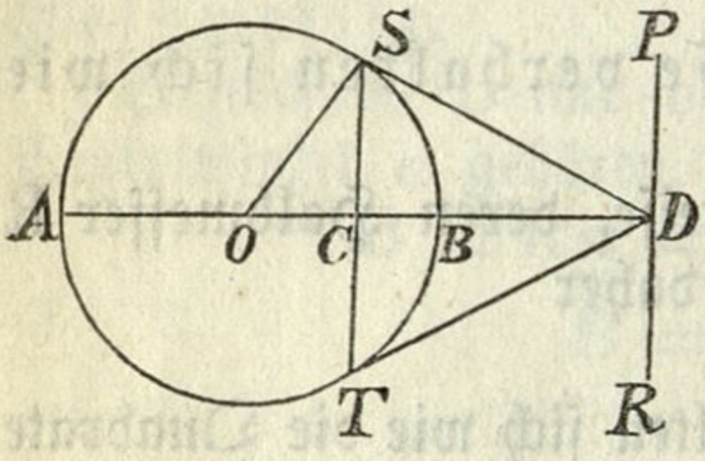
2. Der Flächeninhalt eines Ringausschnittes ist gleich dem Producte aus der halben Summe der beiden im Längenmaße ausgedrückten Bogen und der Breite des Ringausschnittes.

Der Beweis ist dem vorigen analog.

VI. Pol und Polare, Potenz und Potenzlinie, Aehnlichkeitspuncte und Aehnlichkeitsaxen.

§. **175.** Ist der Durchmesser AB (Fig. 138) eines Kreises durch die Puncte C und D harmonisch getheilt (§. 110), so heißen diese Puncte zwei conjugirte Pole des Kreises; der eine liegt auf dem Durchmesser selbst, der andere auf seiner Verlängerung.

Fig. 138.



Eine Gerade heißt in Bezug auf einen gegebenen Kreis die Polare eines Punctes, und dieser Punct ein Pol der Geraden, wenn die Gerade durch den dem Puncte conjugirten Pol geht und auf der Verbindungslinie dieser beiden Puncte senkrecht steht. Sind ST und PR senkrecht auf CD, so sind sie bezüglich Polaren der Puncte D und C, und umgekehrt sind D und C Pole der Geraden ST und PR in Beziehung auf den gegebenen Kreis.

Lehrsätze. 1. Das Product der Abstände zweier conjugirter Pole von dem Mittelpuncte des Kreises ist constant, und gleich dem Quadrate des Halbmessers.

Folgt aus §. 110, Folgesatz.

2. Umgekehrt: Ist $OC.OD = OB^2$, so sind C und D conjugirte Pole des Kreises.

Denn läge der zu dem Puncte C conjugirte Pol nicht in D, sondern in einem anderen Puncte D' der verlängerten AB, so müßte (nach 1.) $OC.OD' = OB^2$ sein; dann ist aber mit Rücksicht auf die Voraussetzung $OD' = OD$, d. h. der Punct D' ist mit D identisch.

3. Zieht man von einem gegebenen Puncte außerhalb eines Kreises an diesen zwei Tangenten, so ist die Berührungssehne die Polare des gegebenen Punctes.

Beweis. Zieht man von D (Fig. 138) die Tangenten DS und DT, ferner die Berührungssehne ST und den Halbmesser OS, so ist $OC : OS = OS : OD$ (§. 105, a), daher wegen $OS = OB$ auch $OC : OB = OB : OD$, also $OC : OD = OB^2$; C und D sind also (nach 2.) zwei conjugirte Pole des Kreises, und die Berührungssehne ST, da sie auf CD senkrecht steht (§. 144, Folges. 1, c), die Polare des Punctes D.

Folgesätze. a) Die Polare eines außerhalb des Kreises liegenden Punctes schneidet den Kreis und entfernt sich um so mehr von dem Mittelpuncte desselben, je mehr sich der Punct dem Kreise nähert. Liegt der Punct in der Peripherie des Kreises, so ist die durch den Punct selbst gehende Tangente seine Polare.

b) Der Pol jeder Sehne eines Kreises ist der Durchschnittspunct der durch ihre Endpuncte gezogenen Tangenten.

c) Der Pol einer Geraden in Bezug auf einen Punct, als einen Kreis mit dem Halbmesser Null (§. 136) ist dieser Punct selbst. Der Pol einer Geraden in Bezug auf eine Gerade, als einen Kreis mit einem unendlich großen Halbmesser, liegt im Unendlichen.

4. Zieht man durch einen gegebenen Punct innerhalb eines Kreises eine Sehne, welche auf dem zu diesem Puncte gezogenen Durchmesser senkrecht steht, und durch die Endpuncte derselben zwei Tangenten, so ist die Gerade, welche durch den Durchschnittspunct dieser Tangenten mit der Sehne parallel gezogen wird, die Polare des gegebenen Punctes.

Beweis. Ist C (Fig. 138) der gegebene Punct und $ST \perp AB$, so liegt der Durchschnitt D der Tangenten SD und TD in der Verlängerung des Durchmessers AB (§. 144, Folges. 2); C und D sind also (nach 3) conjugirte Pole. Wird daher die Gerade PR parallel mit ST, somit senkrecht auf CD gezogen, so ist sie die Polare des Punctes C.

Folgesätze. a) Die Polare eines innerhalb des Kreises liegenden Punctes liegt außerhalb des Kreises und entfernt sich um so mehr von dem Kreise, je mehr sich der gegebene Punct dem Mittelpuncte des Kreises nähert. Fällt der Punct mit dem Mittelpuncte zusammen, so liegt seine Polare in unendlicher Entfernung vom Kreise.

b) Der Pol einer außerhalb des Kreises liegenden Geraden ist die Mitte der Berührungssehne der Tangenten, welche von dem Durchschnittspuncte der Geraden mit dem auf sie senkrechten Durchmesser an den Kreis gezogen werden.

§. **176.** Lehrsätze. 1. Der Pol einer durch einen gegebenen Punct gehenden Geraden liegt in der Polare dieses Punctes.

Fig. 139.

Es sei ST (Fig. 139) die Polare des Punctes D in Bezug auf den Kreis O, und MN eine beliebige durch C gehende Gerade. Zieht man $OF \perp MN$, so ist $\triangle OCE \sim OFD$ daher $OE : OC = OD : OF$ oder $OE.OF = OC.OD$. Allein $OC.OD = OB^2$ (§. 175, 1), daher auch $OE.OF = OB^2$. Die Puncte E und F sind also conjugirte Pole, d. h. der Pol E der durch D gehenden Geraden MN liegt in der Polare ST des Punctes D.

Ebenso wird der Beweis geführt, wenn die gegebene Gerade durch den Punct C geht.

2. Umgekehrt: Die Polare eines jeden in einer gegebenen Geraden liegenden Punctes geht durch den Pol dieser Geraden.

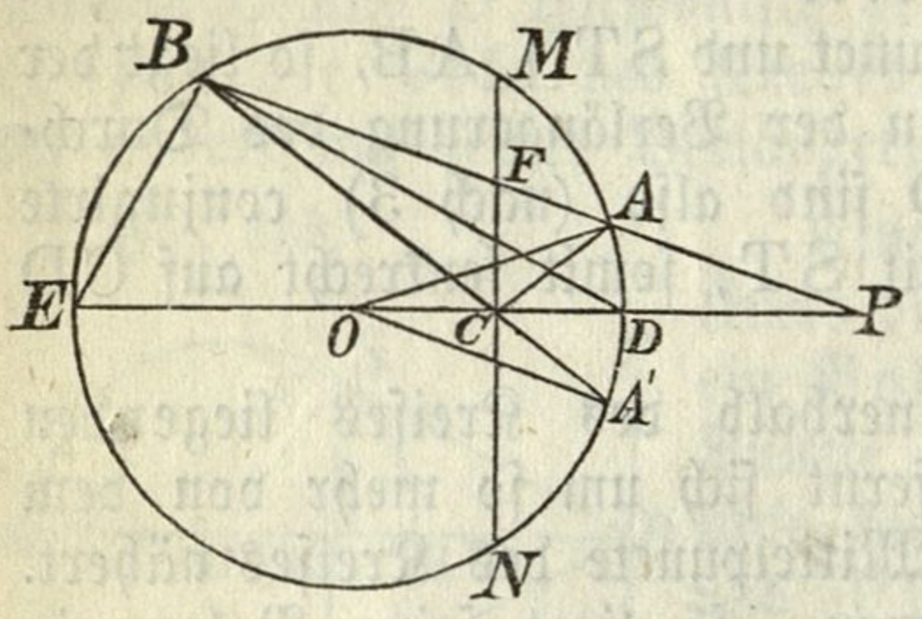
Ist E (Fig. 139) ein Punct der Geraden ST, deren Pol in D liegt, und $FN \perp OE$ die Polare des Punctes E, so ist sowohl $OC.OD = OB^2$, als auch $OE.OF = OB^2$, daher $OC.OD = OE.OF$. Würde nun die FN nicht durch D gehen, sondern die OD oder ihre Verlängerung in D' schneiden, so wäre das rechtwinklige Dreieck $OCE \sim OFD'$, daher müßte $OE : OC = OD' : OF$ oder $OC.OD' = OE.OF$, folglich, mit Rücksicht auf die frühere Gleichung, $OC.OD' = OC.OD$ sein. Dann ist aber $OD' = OD$, d. h. der Punct D' ist mit D identisch.

Folgesätze. a) Der Durchschnittspunct der Polaren zweier Puncte einer Geraden ist der Pol dieser Geraden.

b) Die Verbindungslinie der Pole zweier Geraden ist die Polare des Durchschnittspunctes dieser Geraden.

§. 177. Lehrsätze. 1. Auf jeder durch einen Punct gezogenen Secante wird die Strecke zwischen den Durchschnittspuncten mit dem Kreise durch den gegebenen Punct und den Durchschnittspunct mit seiner Polare harmonisch getheilt.

Fig. 140.

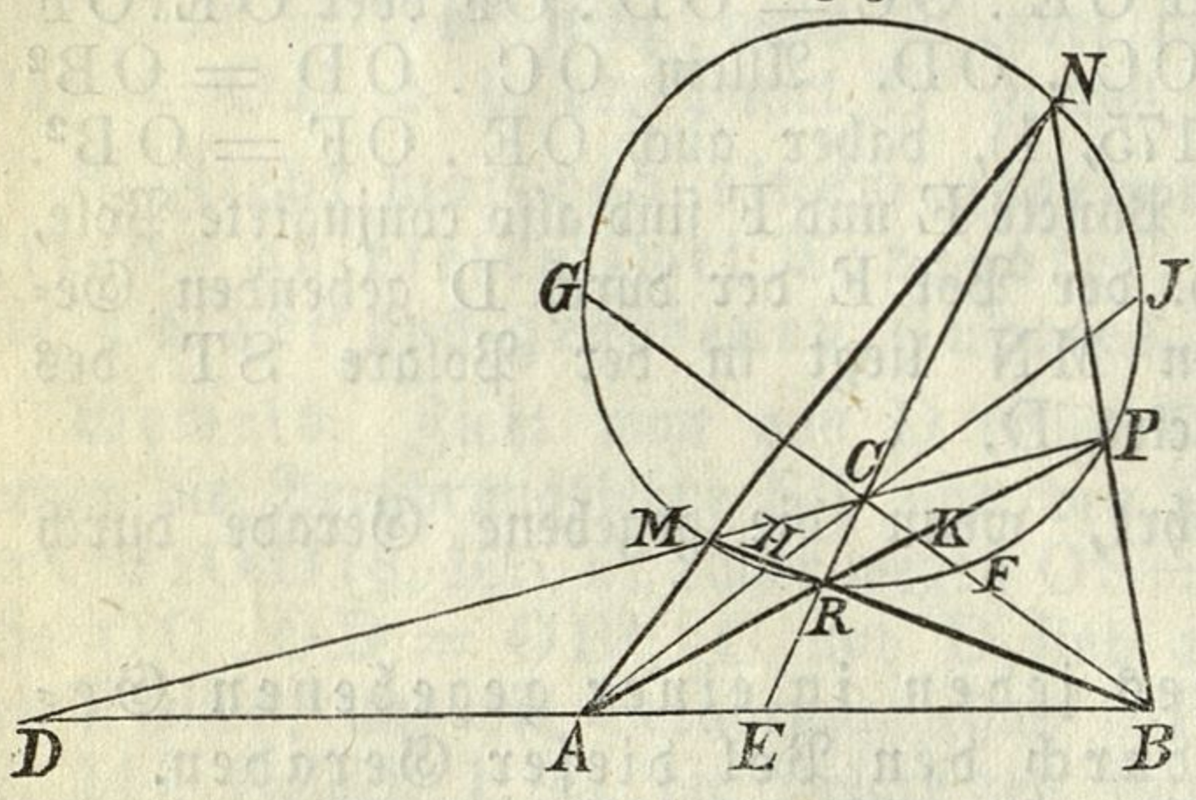


Beweis. Es sei MN (Fig. 140) die Polare des Punctes P und PB eine Secante des Kreises; dann sind E, C, D, P vier harmonische Puncte, und BE, BC, BD, BP vier harmonische Strahlen. Da BE ⊥ BD ist, so ist W. DBA = DBA' (§. 112, 2), daher auch Bogen DA = DA', und Centriwinkel DOA = DOA'. Es ist daher $\triangle$ AOC ≅ A'OC, folglich auch W. DCA = DCA'. Aus der Gleichheit dieser Winkel folgt aber, da DCF = R, auch die Gleichheit der Winkel FCA und FCB. In dem $\triangle$ ACB wird also der Winkel ACB und sein Nebenwinkel ACA' durch CF und CD halbirt; folglich wird die AB durch die Puncte F und P harmonisch getheilt. (§. 112, 1.)

Auf ganz gleiche Weise wird der Beweis geführt, wenn der gegebene Punct innerhalb, und seine Polare außerhalb des Kreises liegt.

2. Ergänzt man ein Sehnenviereck zu einem vollständigen Vierseit und zieht von dem Durchschnittspuncte der zwei inneren Diagonalen zu den Endpuncten der äußeren Gerade, so bilden diese mit der äußeren Diagonale ein Dreieck, in welchem jeder Eckpunct der Pol der gegenüberliegenden Seite ist. (Fig. 141.)

Fig. 141.



Beweis. Nach §. 113 sind N, C, R, E harmonische Puncte, also geht die Polare von C durch den Punct E (nach 1.); da ebenso P, C, M, D harmonische Puncte sind, so geht die Polare von C auch durch den Punct D. Die Polare von C geht daher durch E und D, fällt also mit der Seite AB des Dreieckes CAB zusammen; umgekehrt ist C der Pol der Geraden AB.

Eben so wird bewiesen, daß AC die Polare von B, und BC die Polare von A, daß also B der Pol der Geraden AC, und A der Pol der Geraden BC ist.

§. 178. Das Product der beiden Abschnitte MR und MS (Fig. 121 und 122), welche jede durch einen gegebenen Punct M gezogene und einen gegebenen Kreis schneidende Gerade zwischen jenem Puncte und ihren Durchschnittspuncten mit dem Kreise bildet, ist, wie in §§. 150 und 151 nachgewiesen wurde, eine constante Größe. Dieses constante Product MR . MS heißt die Potenz des Punctes M in Beziehung auf den gegebenen Kreis.

Liegt der Punct M außerhalb des Kreises, so ist die Potenz positiv; liegt M innerhalb des Kreises, so ist die Potenz negativ. Liegt M in der

Peripherie des Kreises, so ist der eine Abschnitt, mithin auch die Potenz gleich Null.

Die Potenz eines Punctes für einen Kreis ist gleich dem Quadrate der Entfernung dieses Punctes vom Mittelpuncte des Kreises vermindert um das Quadrat des Halbmessers.

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke AMO in Fig. 121 folgt

$$MA^2 = OA^2 - MO^2; \text{ daher ist}$$

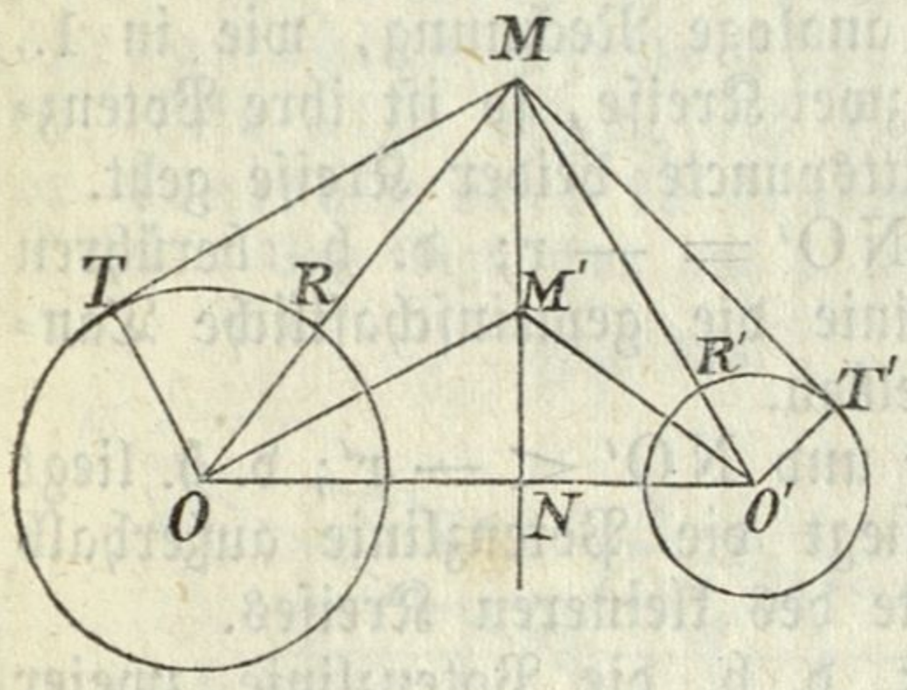
$$MR \,.\, MS = -MA^2 = MO^2 - OA^2.$$

In dem rechtwinkligen Dreiecke MTO in Fig. 122 ist $MT^2 = MO^2 - OT^2$; folglich ist

$$MR \,.\, MS = MT^2 = MO^2 - OT^2.$$

§. **179.** Ein Punct hat in Beziehung auf zwei Kreise dieselbe Potenz, wenn die Differenz der Quadrate seiner Entfernungen von den Mittelpuncten beider Kreise der Differenz der Quadrate der Halbmesser gleich ist.

Fig. 142.



Denn der Ausdruck für die Potenz des Punctes M (Fig. 142) in Bezug auf den Kreis O ist $MO^2 - RO^2$, der Ausdruck für die Potenz desselben Punctes in Bezug auf den Kreis O' ist $MO'^2 - R'O'^2$. Ist nun $MO^2 - MO'^2 = RO^2 - R'O'^2$, so ist auch $MO^2 - RO^2 = MO'^2 - R'O'^2$, d. h. der Punct M hat für beide Kreise gleiche Potenzen.

Lehrsatz. Hat ein Punct M für zwei Kreise O und O' dieselbe Potenz, und zieht man durch denselben eine Senkrechte auf die Centrale OO', so hat auch jeder Punct dieser Senkrechten für beide Kreise dieselbe Potenz.

Es sei $MO^2 - MO'^2 = RO^2 - R'O'^2$, und $MN \perp OO'$. Man hat $MO^2 = ON^2 + MN^2$ und $MO'^2 = O'N^2 + MN^2$, daher $MO^2 - MO'^2 = ON^2 - O'N^2$. Ebenso erhält man für irgend einen Punct M' in der Senkrechten MN, $M'O^2 - M'O'^2 = ON^2 - O'N^2$; mithin ist $M'O^2 - M'O'^2 = MO^2 - MO'^2 = RO^2 - R'O'^2$.

Der geometrische Ort aller Puncte, die für zwei gegebene Kreise gleiche Potenzen haben, heißt die Potenzlinie der beiden Kreise. Die Gerade MN ist daher die Potenzlinie der Kreise O und O'.

Folgesätze. 1. Die Potenzlinie zweier Kreise steht senkrecht auf ihrer Centrale.

2. Die aus einem außerhalb der beiden Kreise liegenden Puncte der Potenzlinie an dieselben gezogenen Tangenten sind einander gleich. — Denn $MT^2 = MO^2 - TO^2$ und $MT'^2 = MO'^2 - T'O'^2$; daher $MT = MT'$.

3. Sind die von einem Puncte außerhalb zweier Kreise an diese gezogenen Tangenten gleich, so liegt der Punct in der Potenzlinie dieser Kreise. — Ist $MT = MT'$, also $MT^2 = MT'^2$, so muß auch $MO^2 - TO^2 = MO'^2 - TO'^2$ sein.

§. **180.** Die Lage der Potenzlinie gegen die beiden Kreise wird durch ihren Fußpunct N (Fig. 142) in der Centrale bestimmt. Bezeichnet man die

Halbmesser der Kreise O und O′ mit r und r′, und die Centrale mit c, so ist für den Punct N

$ON^2 - NO'^2 = r^2 - r'^2$, oder $(ON + NO')(ON - NO') = r^2 - r'^2$.

Da nun $ON + NO' = c$, daher $ON - NO' = \frac{r^2 - r'^2}{c}$ ist, so hat man

$$ON = \frac{c^2 + r^2 - r'^2}{2c}, \qquad NO' = \frac{c^2 - r^2 + r'^2}{2c}.$$

Diese beiden Ausdrücke führen für die verschiedenen Lagen zweier Kreise (§. 155) und für die verschiedene Größe der Halbmesser auf folgende Sätze:

1. Ist $c > r + r'$, daher sowohl $(c - r)^2 > r'^2$ als $(c - r')^2 > r^2$, so ergibt sich $c^2 + r^2 - r'^2 > 2cr$ und auch $c^2 - r^2 + r'^2 > 2cr'$, mithin $ON > r$ und $NO' > r'$; d. h. liegen zwei Kreise ganz außerhalb einander, so liegt ihre Potenzlinie zwischen beiden Kreisen und schneidet keinen derselben.

2. Aus $c = r + r'$ ergibt sich durch eine ähnliche Rechnung, wie in 1., $ON = r$ und $NO' = r'$; d. h. berühren sich zwei Kreise von außen, so ist ihre Potenzlinie die gemeinschaftliche Tangente beider Kreise im Berührungspuncte derselben.

3. Ist $c < r + r'$, so erhält man durch analoge Rechnung, wie in 1., $ON < r$ und $NO' < r'$; d. h. schneiden sich zwei Kreise, so ist ihre Potenzlinie die Secante, welche durch die Durchschnittspuncte beider Kreise geht.

4. Aus $c = r - r'$ folgt $ON = r$ und $NO' = -r$; d. h. berühren sich zwei Kreise von innen, so ist ihre Potenzlinie die gemeinschaftliche Tangente beider Kreise im Berührungspuncte derselben.

5. Ist $c < r - r'$, so ergibt sich $ON > r$ und $NO' < -r'$; d. h. liegt ein Kreis ganz innerhalb eines anderen, so liegt die Potenzlinie außerhalb beider Kreise und zwar näher dem Mittelpuncte des kleineren Kreises.

6. Ist $c = o$, so ist $ON = NO' = \infty$; d. h. die Potenzlinie zweier concentrischer Kreise liegt in unendlicher Entfernung von ihnen.

7. Ist $r = r'$, so wird $ON = NO' = \frac{c}{2}$; d. h. die Potenzlinie zweier gleicher Kreise steht in der Mitte der Centrale auf derselben senkrecht.

8. Ist $r' = o$, d. h. geht der zweite Kreis in einen Punct über, so ergibt sich $ON = \frac{c^2 + r^2}{2c}$ und $NO' = \frac{c^2 - r^2}{2c}$, daher $ON - \frac{r^2}{c} = NO'$. Nun ist $\frac{r^2}{c}$ (wie aus §. 175, 1 und Fig. 138 hervorgeht) der Abstand zwischen O und der Polare jenes Punctes, daher $ON - \frac{r^2}{c}$ der Abstand der Potenzlinie von der Polare jenes Punctes. Die Potenzlinie eines Kreises und eines Punctes hat daher von diesem Puncte und dessen Polare gleichen Abstand.

9. Ist $r' = \infty$, d. h. geht der zweite Kreis in eine Gerade über, so ist auch $c = \infty$, dann wird $NO' = r'$ und $ON = c - r'$. Als die Potenzlinie eines Kreises und einer Geraden kann demnach diese Gerade selbst angenommen werden.

10. Die Potenzlinie eines Punctes und einer Geraden ist die Gerade selbst.

11. Gehen beide Kreise in Puncte über, so wird $ON = NO' = \frac{c}{2}$; d. h. die Potenzlinie zweier Puncte steht in der Mitte der Verbindungslinie auf derselben senkrecht.

12. Für zwei Gerade kann man die Halbirungslinie des von ihnen gebildeten Winkels als Potenzlinie ansehen.

§. **181.** Drei gegebene Kreise lassen sich zu drei Kreispaaren zusammenstellen, deren jedes eine Potenzlinie hat.

Die drei Potenzlinien dreier Kreise schneiden sich in einem gemeinschaftlichen Puncte.

Denn die Potenzlinie des ersten und zweiten Kreises schneidet die Potenzlinie des ersten und dritten Kreises in einem Puncte C, welcher sowohl in Bezug auf den ersten und zweiten, als in Bezug auf den ersten und dritten Kreis, folglich auch in Bezug auf den zweiten und dritten Kreis dieselbe Potenz hat. Die Potenzlinie des zweiten und dritten Kreises muß also auch durch C gehen.

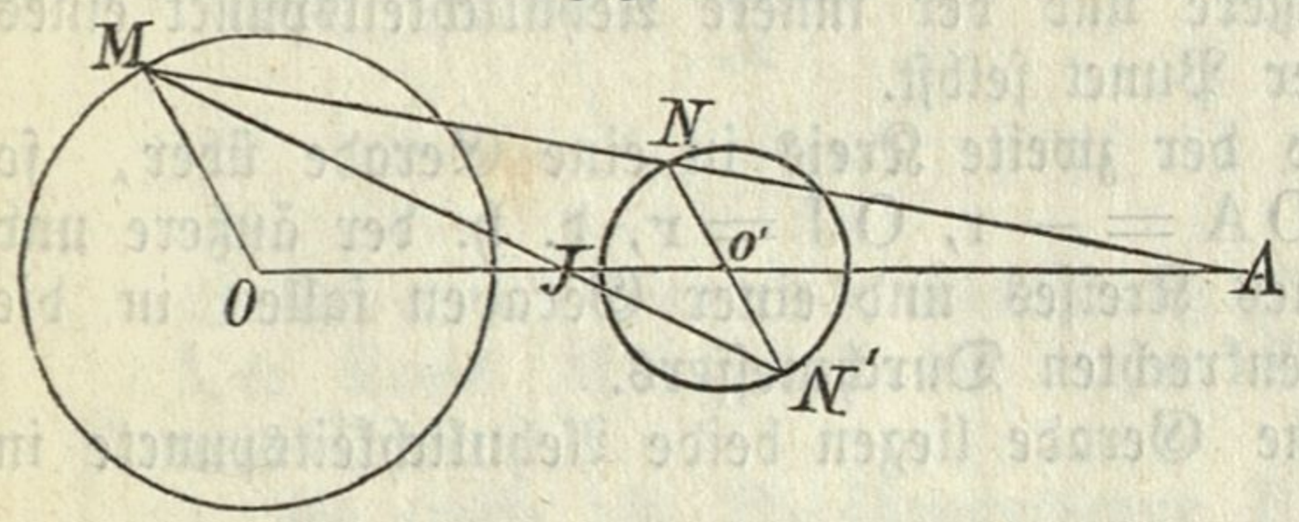
Der gemeinschaftliche Durchschnittspunct der drei Potenzlinien dreier Kreise heißt das Potenzcentrum dieser Kreise.

Liegen die Mittelpuncte der drei Kreise in einer Geraden, so sind die drei Potenzlinien parallel; das Potenzcentrum liegt daher in unendlicher Entfernung von den Kreisen.

§. **182.** Zieht man in zwei Kreisen durch die Endpuncte je zweier Halbmesser, welche entweder in demselben oder im entgegengesetzten Sinne parallel sind, gerade Linien, so schneiden sich diese alle bezüglich in einem Puncte auf der Verlängerung der Centrale oder in einem Puncte der Centrale selbst.

Dieser Satz folgt schon aus §. 98; er soll jedoch hier noch besonders bewiesen werden.

Fig. 143.



Es sei OM (Fig. 143) mit O'N in demselben Sinne, mit O'N' im entgegengesetzten Sinne parallel, so ist, wenn man OM=r, O'N=O'N'=r' und OO'=c setzt, (nach §. 92)

$$\frac{OA}{O'A} = \frac{r}{r'} \text{ und } \frac{OJ}{JO'} = \frac{r}{r'},$$

daher auch

$$\frac{OA}{OA - O'A} = \frac{r}{r - r'} \text{ und } \frac{OJ}{OJ + JO'} = \frac{r}{r + r'}, \text{ oder}$$

$$\frac{OA}{c} = \frac{r}{r - r'} \text{ und } \frac{OJ}{c} = \frac{r}{r + r'}, \text{ also}$$

$$OA = \frac{cr}{r - r'} \text{ und } OJ = \frac{cr}{r + r'},$$

somit, da $O'A = OA - c$ und $JO' = c - OJ$ ist,

$$O'A = \frac{cr'}{r - r'} \text{ und } JO' = \frac{cr'}{r + r'}.$$

Da diese Ausdrücke für alle Lagen der parallelen Halbmesser constant sind, so werden sich in A alle Geraden, welche die Endpuncte je zweier in demselben Sinne paralleler Halbmesser verbinden, und in J alle Geraden, welche durch die Endpuncte je zweier im entgegengesetzten Sinne paralleler Halbmesser gehen, durchschneiden.

Die Puncte A und J sind die Aehnlichkeitspuncte der beiden Kreise, und zwar A der äußere, J der innere Aehnlichkeitspunct. Jede durch einen Aehnlichkeitspunct gezogene Gerade heißt ein Aehnlichkeitsstrahl, und zwar ein äußerer oder ein innerer, je nachdem sie durch den äußeren oder inneren Aehnlichkeitspunct geht.

Folgesatz. Aus den obigen Ausdrücken folgt $\frac{OJ}{JO'} = \frac{OA}{O'A} = -\frac{OA}{AO'}$,

d. h. die Centrale zweier Kreise wird durch den inneren und äußeren Aehnlichkeitspunct harmonisch getheilt.

§. **183.** Die Lage der Aehnlichkeitspuncte hängt von der Lage der beiden Kreise gegen einander (§. 155) und von der Größe ihrer Halbmesser ab. Aus den obigen Werthen von OA, $O'A$, OJ und JO' ergibt sich:

1. Liegen die Kreise ganz außerhalb einander, so liegen die Aehnlichkeitspuncte außerhalb der beiden Kreise, und zwar näher dem kleineren Kreise.

2. Für $c = r + r'$ ist $OJ = r$; d. h. berühren sich die Kreise von außen, so liegt der innere Aehnlichkeitspunct im Berührungspuncte derselben.

3. Schneiden sich die Kreise, so liegt der innere Aehnlichkeitspunct innerhalb, der äußere außerhalb der beiden Kreise.

4. Für $c = r - r'$ ist $OA = r$; d. h. berühren sich zwei Kreise von innen, so ist der Berührungspunct der äußere Aehnlichkeitspunct.

5. Liegt ein Kreis ganz innerhalb eines andern, so liegen die Aehnlichkeitspuncte innerhalb des kleineren Kreises.

6. Für $c = o$ ist $OA = o$ und $OJ = o$; d. h. sind die Kreise concentrisch, so fällt der innere und der äußere Aehnlichkeitspunct in den Mittelpunct.

7. Für $r = r'$ ist $OA = \infty$ und $OJ = \frac{c}{2}$; d. h. sind die Halbmesser der beiden Kreise einander gleich, so liegt der äußere Aehnlichkeitspunct im Unendlichen, der innere in der Mitte der Centrale.

8. Ist $r' = o$, geht also der zweite Kreis in einen Punct über, so wird $OA = OJ = c$; d. i. der äußere und der innere Aehnlichkeitspunct eines Kreises und eines Punctes ist der Punct selbst.

9. Ist $r' = \infty$, geht also der zweite Kreis in eine Gerade über, so wird auch $c = \infty$, und daher $OA = -r$, $OJ = r$, d. h. der äußere und der innere Aehnlichkeitspunct eines Kreises und einer Geraden fallen in die Endpuncte des auf die Gerade senkrechten Durchmessers.

10. Für einen Punct und eine Gerade liegen beide Aehnlichkeitspuncte in dem Puncte selbst.

11. Der innere Aehnlichkeitspunct zweier Puncte liegt in der Mitte ihrer Verbindungslinie, der äußere im Unendlichen.

12. Für zwei Gerade fallen die Aehnlichkeitspuncte ins Unendliche.

§. **184.** Hat ein Aehnlichkeitsstrahl zweier Kreise mit der Peripherie des einen Kreises einen Punct gemeinschaftlich, so hat er auch mit der Peripherie des anderen Kreises einen Punct gemeinschaftlich.

Es habe (Fig. 143) der äußere Aehnlichkeitsstrahl AM mit der Kreislinie O den Punct M gemeinschaftlich. Man ziehe OM und damit $O'N$ in demselben Sinne parallel. Die Gerade MN geht dann (nach §. 182) durch den Punct A; die Puncte M, N, A liegen also in einer geraden Linie, d. h. die AM hat auch mit der Kreislinie O' einen Punct N gemeinschaftlich.

Ebenso wird der Beweis für einen inneren Aehnlichkeitsstrahl JM geführt.

Folgesätze. 1. Hat ein Aehnlichkeitsstrahl mit der einen Kreislinie zwei Puncte gemeinschaftlich, so hat er auch mit der andern zwei Puncte gemeinschaftlich, d. i. er ist eine gemeinschaftliche Secante der beiden Kreise.

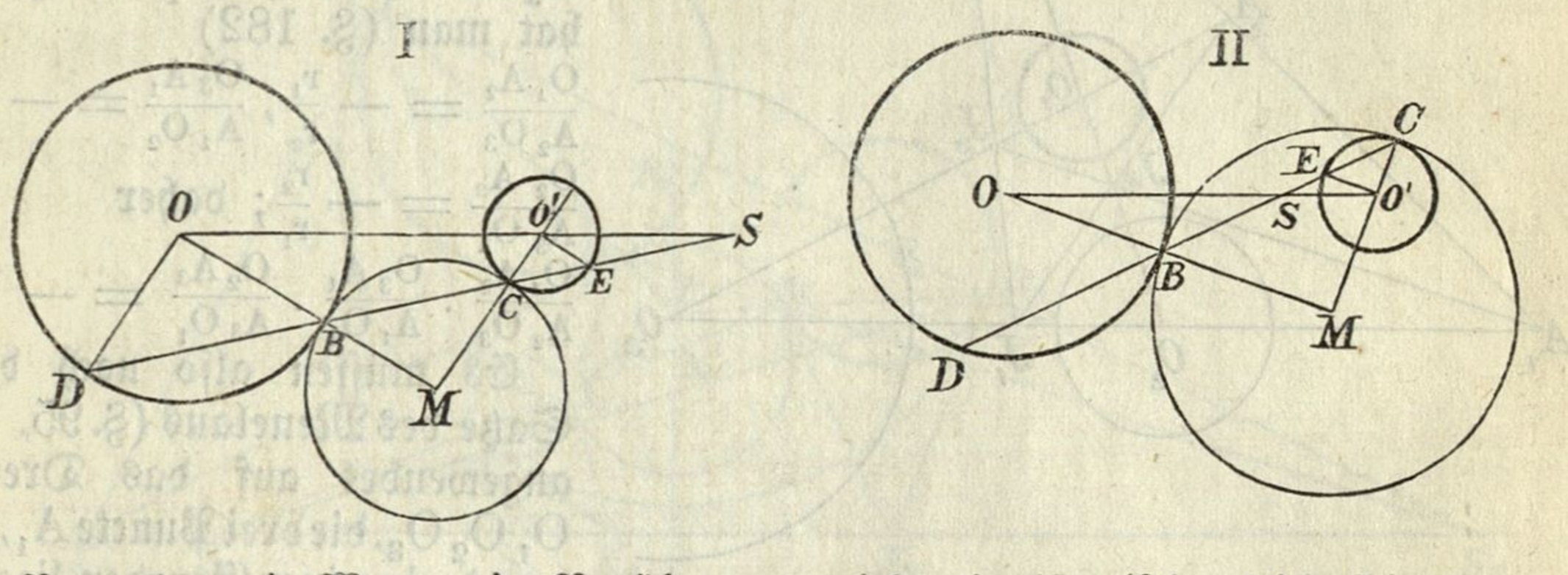
2. Hat ein Aehnlichkeitsstrahl mit der einen Kreislinie nur einen Punct gemeinschaftlich, so hat er auch mit der andern nur einen Punct gemeinschaftlich, d. i. er ist eine gemeinschaftliche Tangente beider Kreise, und zwar eine äußere oder innere, je nachdem der Aehnlichkeitsstrahl ein äußerer oder innerer ist.

3. Hat ein Aehnlichkeitsstrahl mit der einen Kreislinie keinen Punct gemeinschaftlich, so hat er auch mit der zweiten keinen Punct gemeinschaftlich, d. i. er liegt ganz *außerhalb* der beiden Kreise.

§. 185. Berührt ein Kreis zwei andere Kreise, so heißt die Berührung *gleichartig*, wenn er beide Kreise von außen oder beide von innen berührt, und *ungleichartig*, wenn er den einen Kreis von außen, den andern von innen berührt.

Lehrsatz. *Berührt ein Kreis zwei gegebene Kreise, so geht* 1. *die Berührungssehne, je nachdem die Berührung gleichartig oder ungleichartig ist, durch den äußeren oder inneren Aehnlichkeitspunct der zwei gegebenen Kreise, und ist* 2. *die Potenz dieses Aehnlichkeitspunctes in Beziehung auf den Berührungskreis gleich der mittleren geometrischen Proportionale zwischen den Potenzen desselben Punctes für die beiden gegebenen Kreise.*

Fig. 144.



Beweis. a) Wenn die Berührung gleichartig ist. (Fig. 144, I.)

Der Kreis M berühre die beiden Kreise O und O' von außen in den Puncten B und C.

1. Es treffe die Berührungssehne BC die Centrale OO' in S, so ist S der äußere Aehnlichkeitspunct von O und O'. — Denn zieht man OM und O'M, so gehen diese durch B und C (§. 154, Folges. 1). Die Berührungssehne treffe den Kreis O noch in D, den Kreis O' noch in E, und man ziehe OD und O'E. Da W. $ODB = BCM = O'CE$ ist, so muß $OD \parallel O'C$ sein; woraus (nach §. 182) folgt, daß S ein Aehnlichkeitspunct der Kreise O und O' ist, und zwar ein äußerer, da OD und O'C in demselben Sinne parallel sind.

2. Setzt man $OD = OB = r$ und $O'C = O'E = r'$, so hat man

$$SC : SD = r' : r \text{ und } SE : SB = r' : r, \text{ daher}$$
$$SC : SD = SE : SB \text{ und } SC \,.\, SB = SD \,.\, SE.$$

Nun ist, wenn man die Potenz des Punctes S für den Kreis O durch p^2, und für den Kreis O' durch p'^2 bezeichnet,

$$SB \,.\, SD = p^2 \text{ und } SE \,.\, SC = p'^2, \text{ daher}$$
$$SB \,.\, SD \,.\, SE \,.\, SC = p^2 \,.\, p'^2,$$

oder wegen $SD \,.\, SE = SC \,.\, SB$,

$$SC^2 \,.\, SB^2 = p^2 \,.\, p'^2, \text{ folglich } SC \,.\, SB = pp'.$$

Ebenso wird die Richtigkeit des Satzes bewiesen, wenn der Kreis M die beiden Kreise O und O' von innen berührt.

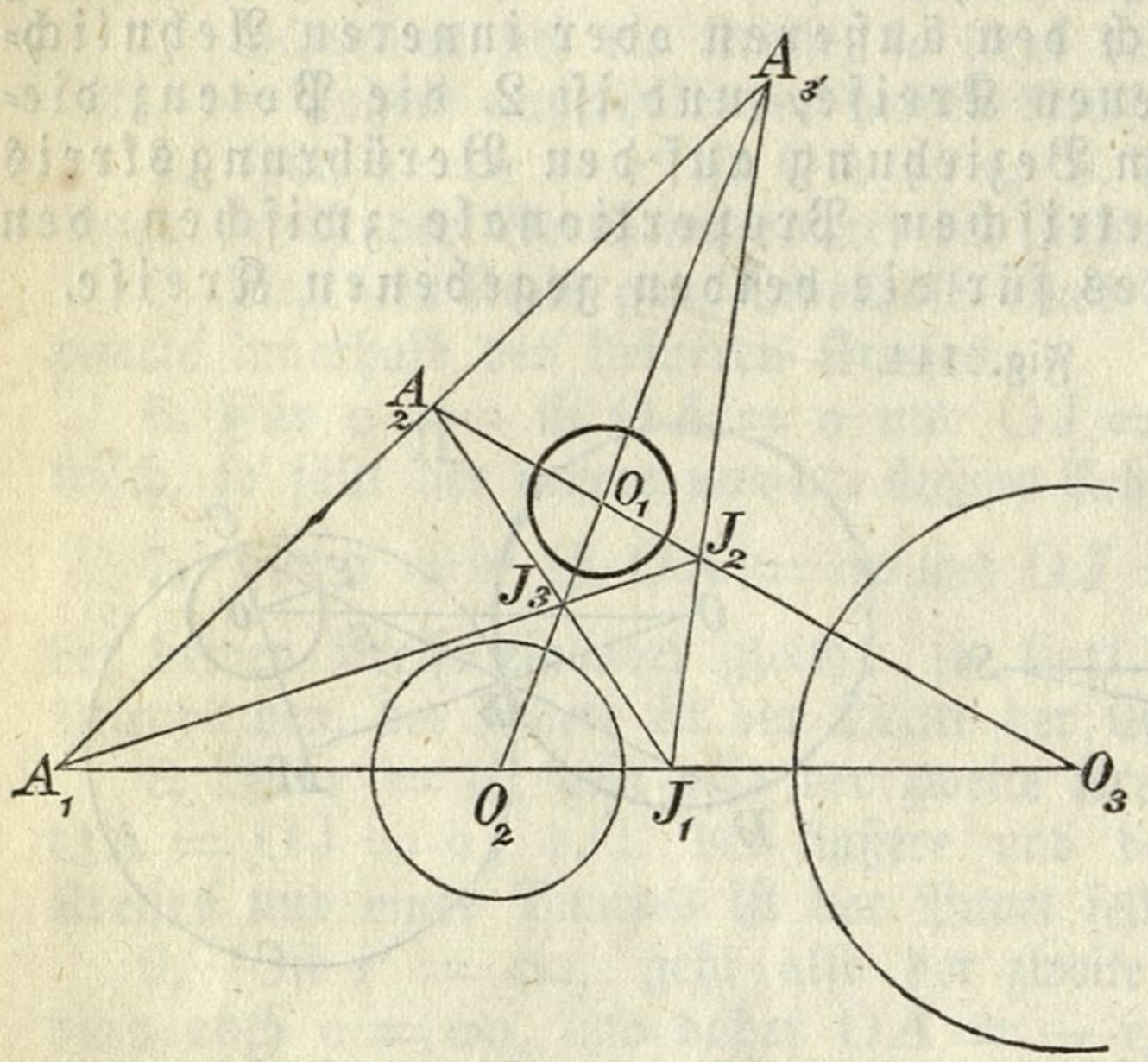
b) Wenn die Berührung ungleichartig ist. (Fig. 144, II.)

Der Beweis wird fast wörtlich, wie für den ersten Fall, geführt.

§. **186.** Zu drei Kreisen gehören drei äußere und drei innere Aehnlichkeitspuncte.

Lehrsatz. Die Aehnlichkeitspuncte dreier Kreise liegen zu je drei auf vier geraden Linien, und zwar liegen auf der einen die drei äußeren Aehnlichkeitspuncte, auf jeder der drei übrigen ein äußerer Aehlichkeitspunct und diejenigen zwei inneren, welche nicht zu demselben Kreispaare wie der äußere gehören.

Fig. 145.



Beweis. Sind (Fig. 145) r_1, r_2 und r_3 die Halbmesser der Kreise O_1, O_2 und O_3, ferner A_1 der äußere und J_1 der innere Aehnlichkeitspunct der Kreise O_2 und O_3, A_2 und J_2 die Aehnlichkeitspuncte von O_1 und O_3, A_3 und J_3 die von O_1 und O_2, so hat man (§. 182)

$$\frac{O_1 A_2}{A_2 O_3} = -\frac{r_1}{r_3}, \quad \frac{O_3 A_1}{A_1 O_2} = -\frac{r_3}{r_2},$$

$$\frac{O_2 A_3}{A_3 O_1} = -\frac{r_2}{r_1}; \text{ daher}$$

$$\frac{O_1 A_2}{A_2 O_3} \cdot \frac{O_3 A_1}{A_1 O_2} \cdot \frac{O_2 A_3}{A_3 O_1} = -1.$$

Es müssen also nach dem Satze des Menelaus (§. 95, 2), angewendet auf das Dreieck $O_1 O_2 O_3$, die drei Puncte A_1, A_2 und A_3 in einer Geraden liegen.

Ebenso folgt, daß die Puncte A_1, J_2, J_3, ferner A_2, J_1, J_3, endlich A_3, J_1, J_2 je drei in einer geraden Linie liegen.

Die Gerade $A_1 A_2 A_3$, welche die drei äußeren Aehnlichkeitspuncte enthält, nennt man die äußere Aehnlichkeitsaxe, die Geraden $A_1 J_2 J_3$, $A_2 J_1 J_3$ und $A_3 J_1 J_2$, welche je einen äußeren und zwei innere Aehnlichkeitspuncte enthalten, innere Aehnlichkeitsaxen.

Zusatz. Die vier Aehnlichkeitsaxen dreier Kreise bilden die Seiten eines vollständigen Vierseits (§. 113), dessen Ecken die sechs Aehnlichkeitspuncte der Kreise sind. Es sind demnach A_1, O_2, J_1, O_3 harmonische Puncte, ebenso A_2, O_1, J_2, O_3, desgleichen A_3, O_1, J_3, O_2.

§. **187.** Berührt ein Kreis drei gegebene Kreise O_1, O_2 und O_3, so sind in Bezug auf die Art der Berührung acht Fälle möglich; er kann

a) alle drei Kreise von außen, oder alle drei Kreise von innen;
b) O_1 von außen, O_2 und O_3 von innen, oder O_1 von innen, O_2 und O_3 von außen;
c) O_2 von außen, O_1 und O_3 von innen, oder O_2 von innen, O_1 und O_3 von außen;
d) O_3 von außen, O_1 und O_2 von innen, oder O_3 von innen, O_1 und O_2 von außen berühren.

Es gibt also vier Kreispaare, welche drei gegebene Kreise berühren, und so zusammengehören, daß der eine Berührungskreis irgend einen der gegebenen Kreise von außen berührt, während der andere ihn von innen berührt. Zwei auf diese Weise zusammengehörige Berührungskreise heißen conjugirt.

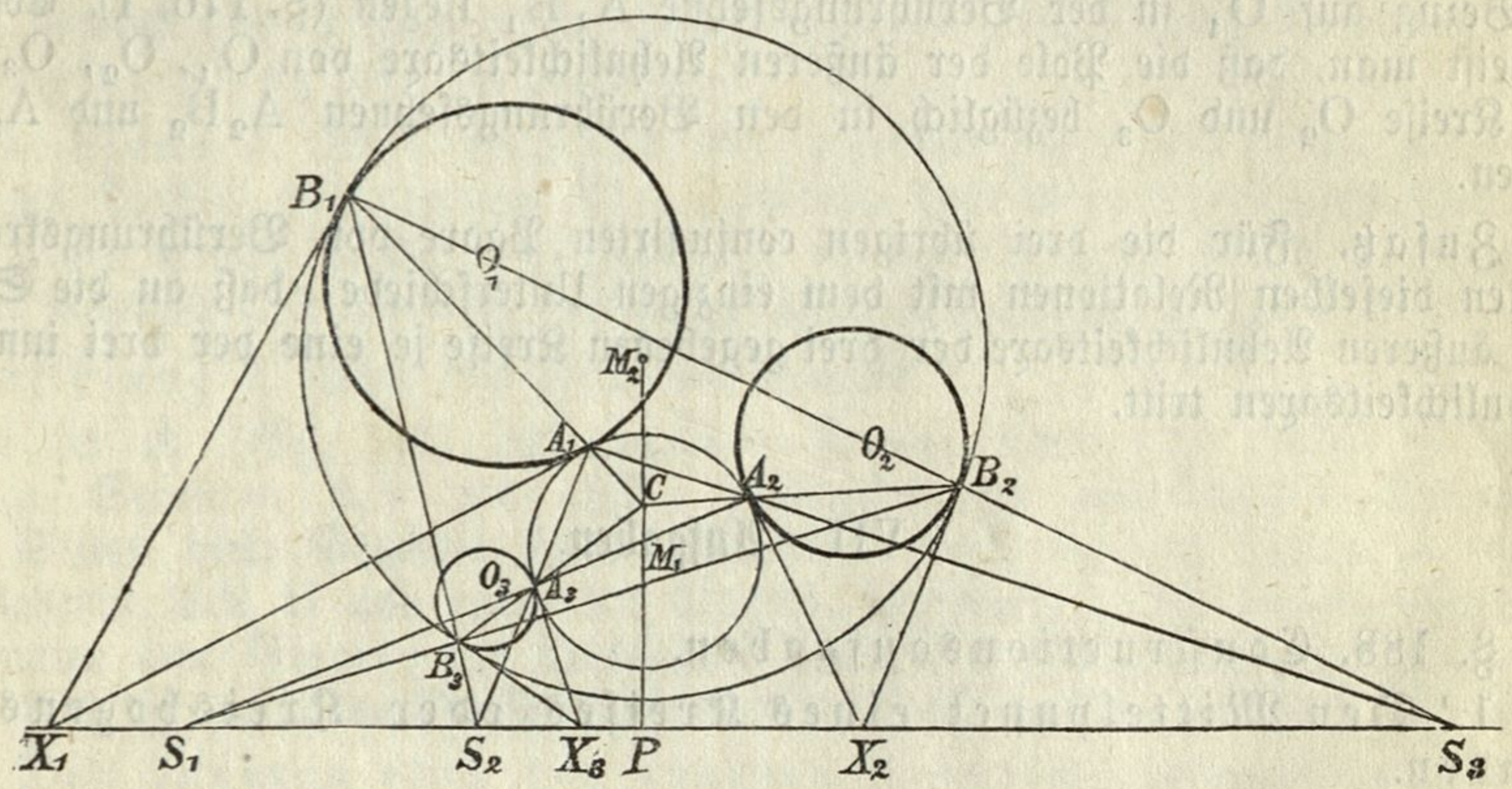
Lehrsatz. Werden drei gegebene Kreise von zwei anderen, und zwar von dem einen alle von außen, von dem zweiten alle von innen berührt, so finden folgende Relationen statt:

1. Die drei Berührungssehnen in den gegebenen Kreisen gehen durch das Potenzcentrum derselben.

2. Die äußere Aehnlichkeitsaxe der gegebenen Kreise ist die Potenzlinie der beiden anderen Kreise.

3. Die Pole der äußeren Aehnlichkeitsaxe der gegebenen Kreise in Bezug auf dieselben liegen auf den entsprechenden Berührungssehnen.

Fig. 146.



Beweis. Es seien (Fig. 146) O_1, O_2 und O_3 die drei gegebenen Kreise, welche von dem Kreise M_1 von außen und von dem Kreise M_2 von innen berührt werden.

1. Der Kreis O_1 berührt M_1 von außen und M_2 von innen, die Berührungssehne $A_1 B_1$ geht daher durch den inneren Aehnlichkeitspunct C von M_1 und M_2 (§. 185). Ebenso folgt, daß die Berührungssehnen $A_2 B_2$ und $A_3 B_3$ durch den inneren Aehnlichkeitspunct C von M_1 und M_2 gehen. Nun ist, wenn man die Potenz des Punctes C für den Kreis M_1 durch p_1^2, für den Kreis M_2 durch p_2^2 bezeichnet, $CA_1 . CB_1 = CA_2 . CB_2 = CA_3 . CB_3 = p_1 p_2$, (§. 185), d. h. der Punct C hat für die Kreise O_1, O_2 und O_3 dieselbe Potenz, er ist daher das Potenzcentrum dieser drei Kreise. Die Berührungssehnen $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ gehen also durch das Potenzcentrum C der drei gegebenen Kreise.

2. M_1 berührt O_1 und O_2 von außen, also muß $A_1 A_2$ durch den äußeren Aehnlichkeitspunct S_3 von O_1 und O_2 gehen (§. 185); M_2 berührt O_1 und O_2 von innen, also geht auch $B_1 B_2$ durch den äußeren Aehnlichkeitspunct S_3 von O_1 und O_2. Ebenso folgt, daß sich $A_1 A_3$ und $B_1 B_3$ im äußeren Aehnlichkeitspuncte S_2 von O_1 und O_3, $A_2 A_3$ und $B_2 B_3$ im äußeren Aehnlichkeitspuncte S_1 von O_2 und O_3 treffen. Diese drei Aehnlichkeitspuncte liegen aber auf derselben Geraden, der äußeren Aehnlichkeitsaxe von O_1, O_2, O_3 (§. 186). Nun ist, da M_1 die Kreise O_1 und O_2 von außen, M_2 dieselben Kreise von innen berührt, wenn die Potenz des Punctes S_3 für O_1 und O_2 bezüglich durch a_1^2 und a_2^2 bezeichnet wird, $S_3 A_1 . S_3 A_2 = S_3 B_1 . S_3 B_2 = a_1 a_2$;

d. h. der Punct S_3 hat für die Kreise M_1 und M_2 dieselbe Potenz, er liegt also auf der Potenzlinie von M_1 und M_2. Ebenso folgt, daß die Puncte S_2 und S_1 auf der Potenzlinie von M_1 und M_2 liegen. Die äußere Aehnlichkeitsaxe der drei gegebenen Kreise ist also die Potenzlinie der beiden anderen Kreise.

3. Die Tangenten in A_1 und B_1 an den Kreis O_1 sind zugleich Tangenten von M_1 und M_2; ihr Durchschnitt X_1 muß daher auf der Potenzlinie von M_1 und M_2 (§. 179, Folges. 3), mithin nach 2. auf der äußeren Aehnlichkeitsaxe von O_1, O_2, O_3 liegen. Die Polare des Punctes X_1 für den Kreis O_1 ist die Berührungssehne A_1B_1 (§. 175, 3); daher muß umgekehrt der Pol der durch X_1 gehenden äußeren Aehnlichkeitsaxe von O_1, O_2, O_3 in Bezug auf O_1 in der Berührungssehne A_1B_1 liegen (§. 176, 1). Ebenso beweist man, daß die Pole der äußeren Aehnlichkeitsaxe von O_1, O_2, O_3 für die Kreise O_2 und O_3 bezüglich in den Berührungssehnen A_2B_2 und A_3B_3 liegen.

Zusatz. Für die drei übrigen conjugirten Paare von Berührungskreisen gelten dieselben Relationen mit dem einzigen Unterschiede, daß an die Stelle der äußeren Aehnlichkeitsaxe der drei gegebenen Kreise je eine der drei inneren Aehnlichkeitsaxen tritt.

VII. Aufgaben.

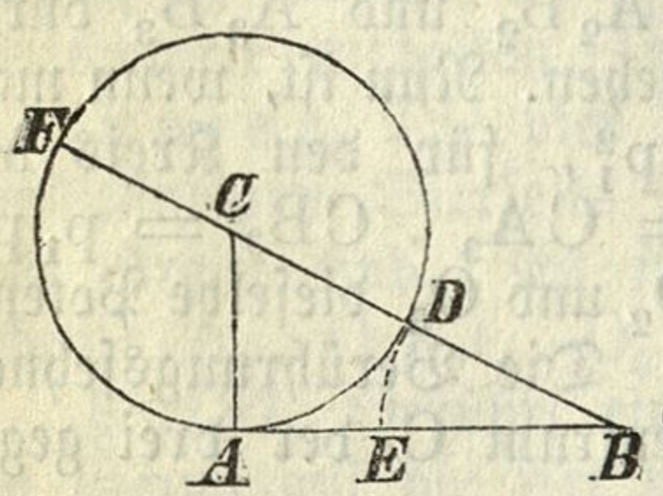
§. 188. Constructionsaufgaben.

1. Den Mittelpunct eines Kreises oder Kreisbogens zu finden.

Mittelst zweier nicht paralleler Sehnen nach §. 138.

2. Eine gegebene Strecke nach stetiger Proportion (im mittleren und äußeren Verhältnisse) zu theilen.

Fig. 147.



Man ziehe (Fig. 147) $AC \perp AB$, mache $AC = \frac{1}{2}AB$, beschreibe aus C mit dem Halbmesser CA einen Kreis, und ziehe durch B und C eine Secante, welche den Kreis in zwei Puncten D und F schneidet; macht man nun $BE = BD$, so ist AB im Puncte E nach stetiger Proportion getheilt.

Denn $BF : AB = AB : BD$ (§. 151, Folges. b), daher auch $AB : (BF - AB) = BD : (AB - BD)$.

Nun ist

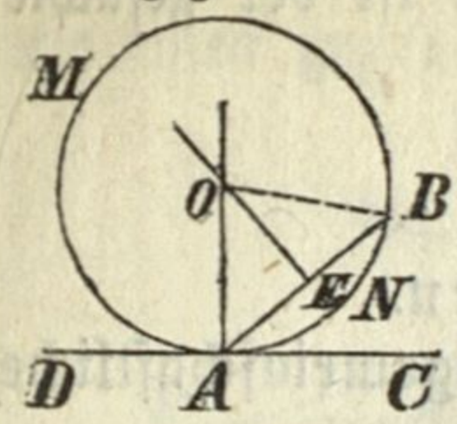
$$BF - AB = BF - DF = BD = BE,$$
$$AB - BD = AB - BE = AE; \text{ mithin}$$
$$AB : BE = BE : AE.$$

3. Einen Kreisbogen zu halbiren.

Man beschreibe aus den Endpuncten mit demselben Halbmesser zwei Kreisbogen und ziehe von ihrem Durchschnittspuncte zu dem gegebenen Kreismittelpuncte eine Gerade, so halbirt diese den Kreisbogen.

4. Ueber einer Strecke als Sehne einen Kreisabschnitt zu beschreiben, in welchem alle Peripheriewinkel einem gegebenen Winkel oder dessen Nebenwinkel gleich sind.

Fig 148.



Es sei BAC (Fig. 148) der gegebene Winkel und AB die gegebene Strecke. Man errichte auf AB in der Mitte E die Senkrechte EO, ziehe auch AO ⊥ AC, und beschreibe aus dem Durchschnittspuncte O der Linien EO und AO als Mittelpunct mit dem Halbmesser AO = OB einen Kreis. Dann ist (§. 148) AMBA der Kreisabschnitt, welcher den gegebenen Winkel BAC, und ANBA der Kreisabschnitt, welcher den Nebenwinkel BAD des gegebenen Winkels als Peripheriewinkel faßt.

5. Durch einen gegebenen Punct auf der Peripherie eines Kreises an diesen eine Tangente zu ziehen. (§. 143, 1.)

6. Durch einen gegebenen Punct außerhalb eines Kreises an diesen eine Tangente zu ziehen.

Auflösung 1. Ist C (Fig. 114) der gegebene Punct und O der Mittelpunct des Kreises, so ziehe man CO, beschreibe über dieser Strecke als Durchmesser einen Kreis, welcher den gegebenen in den Puncten A und B schneidet; die Geraden CA und CB sind die gesuchten Tangenten (§. 144.)

Auflösung 2. Bloß mit Hilfe des Lineals.

Es sei A (Fig. 141) der gegebene Punct. Man ziehe durch A zwei beliebige Secanten AN und AP, construire ein vollständiges Vierseit, dessen Seiten diese Secanten sind, und ziehe durch die dem Puncte A entgegenstehende Ecke B und durch den Durchschnittspunct C der beiden inneren Diagonalen eine Gerade; die Durchschnittspuncte derselben F und G mit dem Kreise sind die gesuchten Berührungspuncte (§. 143, §. 175, 3 und §. 177, 2).

7. Den äußeren oder den inneren Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise zu finden. (§§. 182 und 183.)

8. An zwei gegebene Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen.

Man bestimme den äußeren und den inneren Aehnlichkeitspunct der Kreise, ziehe aus denselben Tangenten an den einen Kreis (Aufgabe 6), so sind diese zugleich Tangenten des zweiten Kreises (§. 184, Folges. 2).

9. Zu einem gegebenen Puncte die Polare zu construiren.

Auflösung 1. Nach §. 175, 3. oder 4., je nachdem der gegebene Punct außerhalb oder innerhalb des Kreises liegt.

Auflösung 2. Bloß mit Hilfe des Lineals.

Liegt der gegebene Punct außerhalb des Kreises, so stimmt die Construction überein mit der 2. Auflösung der Aufg. 6, von einem Puncte außerhalb des Kreises an dieses ein Tangentenpaar zu ziehen (§. 177, 2).

Liegt der gegebene Punct C (Fig. 141) innerhalb des Kreises, so ziehe man durch denselben zwei beliebige Sehnen MP und NR, und vollende ein vollständiges Vierseit, dessen innere Diagonalen diese Sehnen sind; die äußere Diagonale AB ist dann die gesuchte Polare von C (§. 177, 2).

10. Zu einer gegebenen Geraden den Pol zu finden.

Auflösung 1. Nach §. 175, 3, Folges. b) oder nach §. 175, 4, Folges. b), je nachdem die gegebene Gerade den Kreis schneidet oder außerhalb desselben liegt.

Auflösung 2. Bloß mit Hilfe des Lineals.

Man construire die Polaren zu zwei beliebigen Puncten der gegebenen

Geraden (Aufg. 9, Aufl. 2); der Durchschnittspunct derselben ist der gesuchte Pol (§. 176, Folges. a).

Auflösung 3. Ebenfalls bloß mit Hilfe des Lineals.

Nach §. 113, 9. Aufg., Auflösung 3.

11. Die Potenzlinie zweier Kreise zu construiren.

a) Wenn sich die beiden Kreise schneiden, so ziehe man ihre gemeinschaftliche Sehne (§. 180, 3).

b) Wenn sich die beiden Kreise berühren, so construire man im Berührungspuncte ihre gemeinschaftliche Tangente (§. 180, 2 und 4).

c) Wenn sich die beiden Kreise O und O′ weder durchschneiden noch berühren, so beschreibe man einen Hilfskreis M, welcher die zwei gegebenen schneidet. Die gemeinschaftliche Sehne von O und M ist ihre Potenzlinie, ebenso ist die gemeinschaftliche Sehne von O′ und M die Potenzlinie derselben, daher der Durchschnittspunct beider Sehnen das Potenzcentrum von O, M, O′, folglich ein Punct der gesuchten Potenzlinie von O und O′. Durch Construction eines zweiten Hilfskreises erhält man auf die gleiche Weise einen zweiten Punct der gesuchten Potenzlinie. Durch die beiden Puncte ist dann die Potenzlinie selbst bestimmt. Man könnte auch, ohne den zweiten Hilfskreis zu beschreiben, sogleich von dem gefundenen ersten Puncte der Potenzlinie eine Senkrechte auf die Centrale der zwei gegebenen Kreise ziehen; diese Senkrechte ist die gesuchte Potenzlinie.

12. Das Potenzcentrum dreier Kreise zu bestimmen.

Es seien drei Kreise O, O′, O″ gegeben. Man construire (nach Aufg. 11) die Potenzlinie von O und O′, dann die Potenzlinie von O und O″; der Durchschnittspunct beider ist das gesuchte Potenzcentrum (§. 181).

§. 189. Das Berührungsproblem des Apollonius.

Wenn einzelne Puncte, gerade Linien oder Kreise, zusammen drei Elemente, gegeben sind, einen Kreis zu construiren, welcher durch die gegebenen Puncte geht und die gegebenen Geraden oder Kreise berührt.

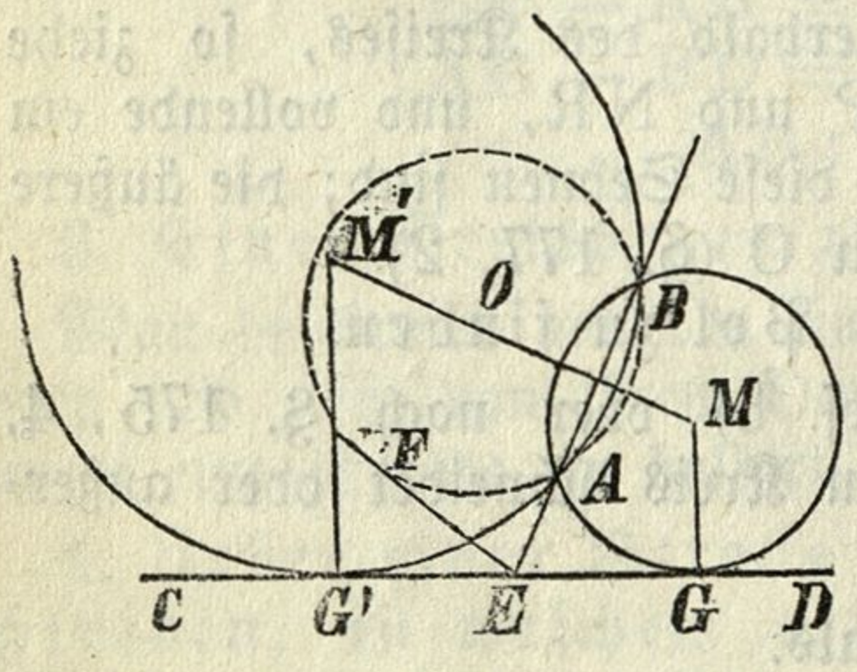
Das Apollonische Problem umfaßt zehn Aufgaben. Wir wollen hier zunächst für die einzelnen dieser Aufgaben besondere Auflösungen anführen, und sodann die allgemeine Lösung dieses Problems folgen lassen.

1. Einen Kreis zu construiren, welcher durch drei gegebene Puncte geht.

Die Lösung dieser Aufgabe ist in §. 138 enthalten. Sie führt auf einen einzigen Kreis. Liegen aber die gegebenen drei Puncte in einer Geraden, so gibt es keinen Kreis.

2. Einen Kreis zu construiren, welcher durch zwei gegebene Puncte geht und eine gegebene Gerade berührt.

Fig. 149.

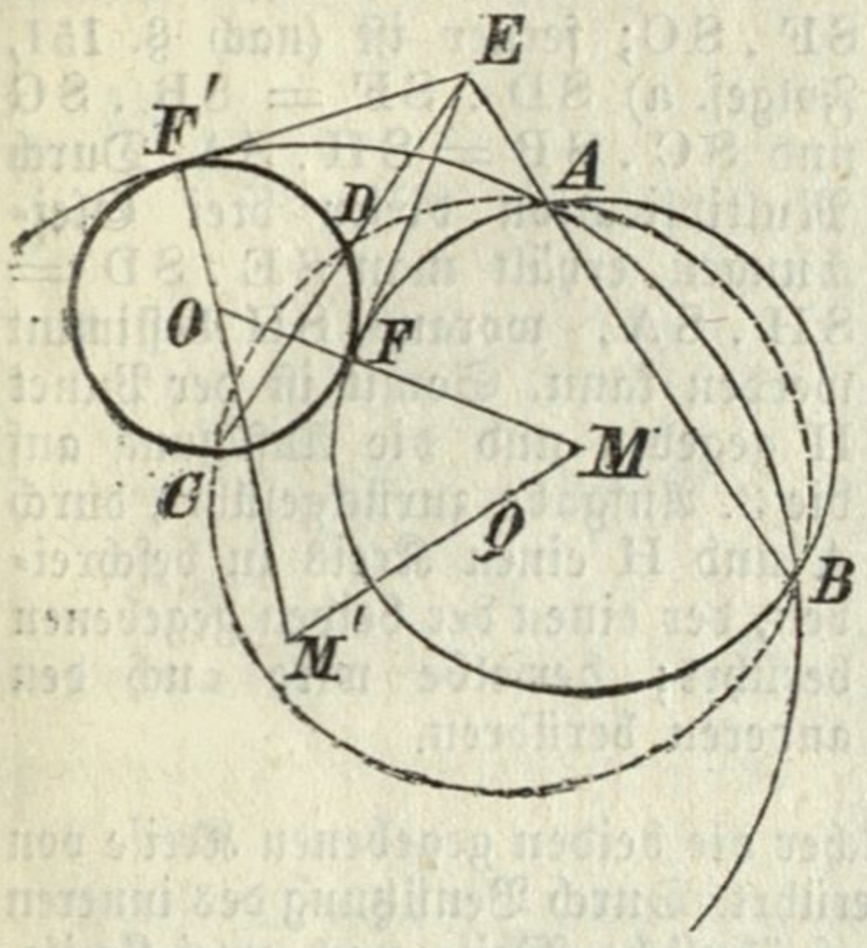


Es seien (Fig. 149) die beiden Puncte A und B und die Gerade CD gegeben. Beschreibt man durch A und B einen beliebigen Kreis O, so ist AB die Potenzlinie dieses und des gesuchten Kreises, und es müssen die von einem Puncte E ihrer Verlängerung an die beiden Kreise gezogenen Tangenten gleich sein. Zieht man daher an den Hilfskreis O die Tangente EF und macht $EG = EG' = EF$, so sind G und G′ die Berührungspuncte der gesuchten Kreise mit der Geraden CD. Durch die Puncte B, A, G und B, A, G′ können nun die Kreise nach Aufg. 1 beschrieben werden.

Man erhält dadurch zwei Kreise, welche der Aufgabe genügen.

3. Einen Kreis zu construiren, welcher durch zwei gegebene Puncte geht und einen gegebenen Kreis berührt.

Fig. 150.



Es seien (Fig. 150) A und B die gegebenen Puncte, O der gegebene und M der gesuchte Kreis. Man beschreibe durch A und B einen beliebigen Hilfskreis Q, welcher den gegebenen in C und D schneidet, ziehe BA und CD und verlängere sie bis zu ihrem Durchschnittspuncte E. Dann ist BE die Potenzlinie des gesuchten und des Hilfskreises, CE die Potenzlinie des gegebenen und des Hilfskreises, also der Durchschnittspunct E das Potenzcentrum aller drei Kreise; folglich muß auch die Potenzlinie des gegebenen und des gesuchten Kreises, d. i. ihre gemeinschaftliche Tangente durch E gehen. Zieht man daher aus E an den Kreis O die Tangenten EF und EF', so sind F und F' die gesuchten Berührungspuncte, und man kann nun durch jeden derselben und durch A und B einen Kreis legen, welcher die verlangte Eigenschaft hat.

Die Auflösung ist auf die Aufg. 1 zurückgeführt; sie gibt zwei Kreise, von denen der eine den gegebenen von außen, der andere von innen berührt.

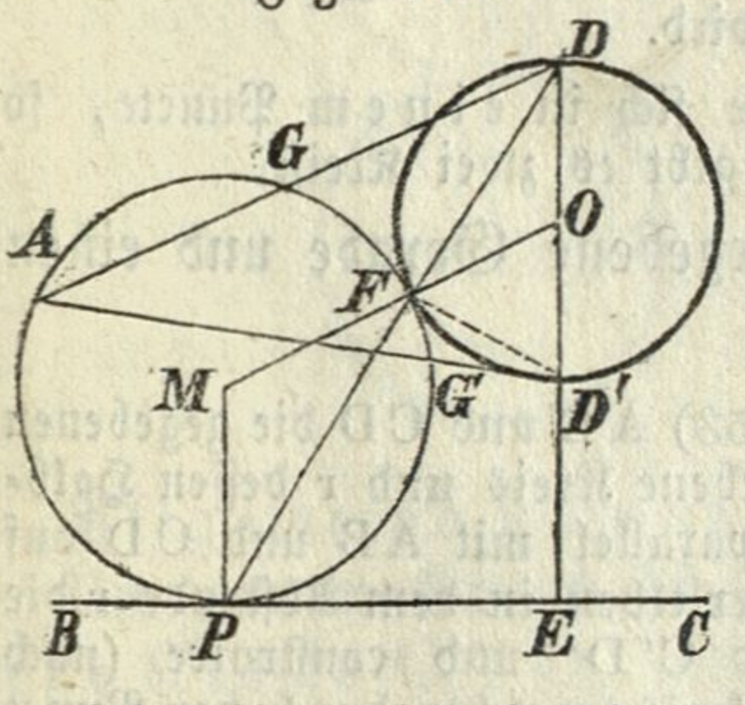
4. Einen Kreis zu construiren, welcher durch einen gegebenen Punct geht und zwei gegebene Gerade berührt.

Der Mittelpunct eines Kreises, welcher zwei gegebene Gerade berührt, liegt in der Halbirungslinie des von diesen Geraden gebildeten Winkels (§. 144, Folges. 3). Fällt man auf diese Halbirungslinie von dem gegebenen Puncte eine Senkrechte, und verlängert dieselbe so, daß die Verlängerung der Senkrechten dieser selbst gleich ist, so ist der Endpunct derselben ein zweiter Punct, durch welchen der gesuchte Kreis gehen muß. Die Aufgabe ist somit auf die Aufgabe 2 zurückgeführt und gibt, wie diese, zwei Auflösungen.

Wie gestaltet sich die Auflösung, wenn die zwei gegebenen Geraden parallel sind? (Geom. Ort §. 53, 2, Folges. b.)

5. Einen Kreis zu construiren, welcher durch einen gegebenen Punct geht und eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt.

Fig. 151.



Es seien (Fig. 151) der Punct A, die Gerade BC und der Kreis O gegeben. Man denke sich die Aufgabe gelöst und sei M der gesuchte Kreis, welcher die gegebene Gerade in P und den gegebenen Kreis in F berührt. Zieht man den Durchmesser DD'E ⊥ BC, ferner die Geraden MP, OF, MF, DF und PF, so sind OFM und DFP gerade Linien (§. 154, Folges. 1 und §. 156). Zieht man nun D'F und AD, welche letztere den Kreis M in G schneidet, so ist $\triangle$ DEP $\sim$ DFD', daher DE : DP = DF : DD', oder DE . DD' = DP . DF; ferner ist DA . DG = DP . DF (§. 151, Folges. a), mithin auch DA . DG = DE . DD', woraus DG bestimmt werden kann. Somit ist der Punct G gegeben und die Aufgabe reducirt sich auf die 2. oder 3. Aufgabe, einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei Puncte A und G geht und entweder die Gerade BC oder den Kreis O berührt.

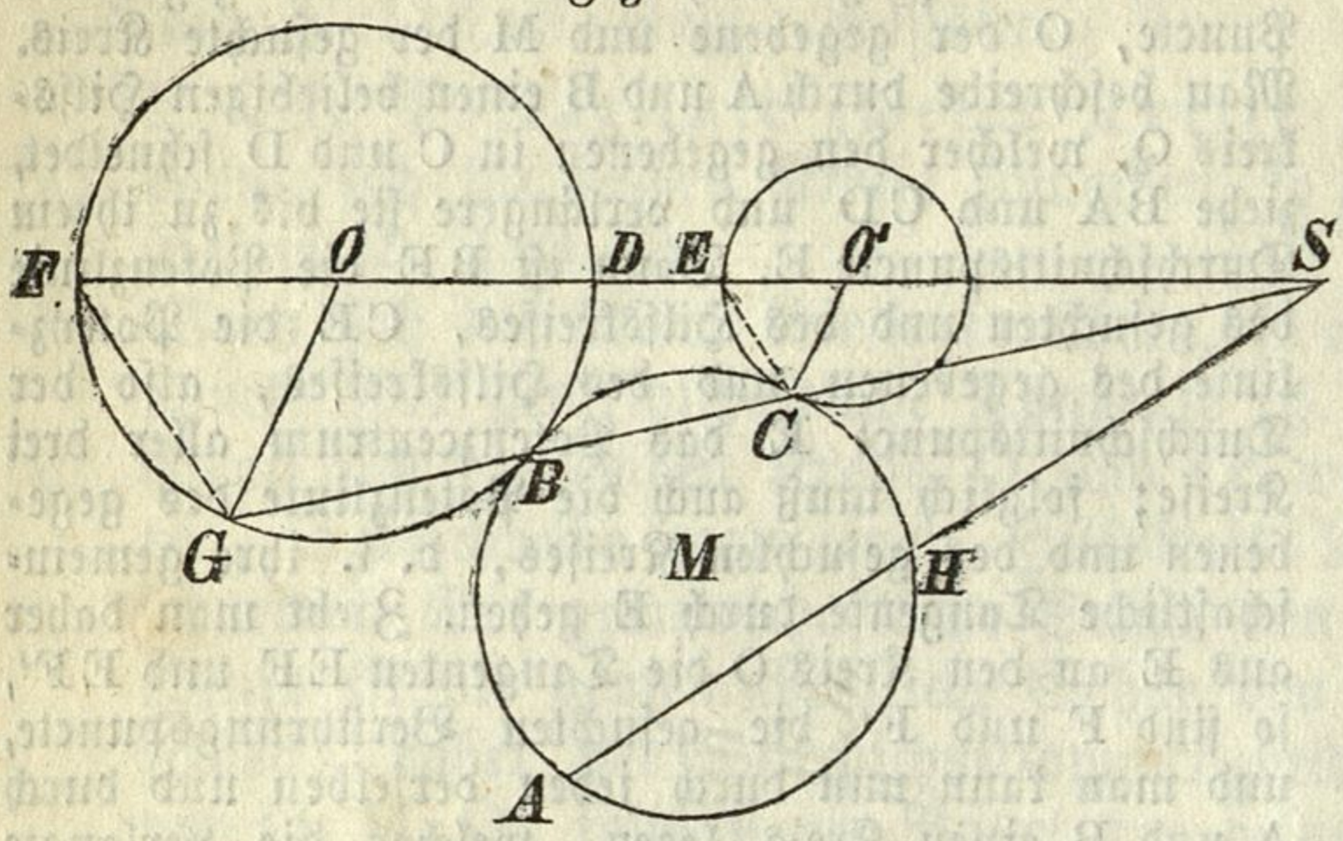
Die Auflösung gibt vier Kreise, von denen zwei den gegebenen Kreis von außen, zwei von innen berühren.

6. Einen Kreis zu construiren, welcher durch einen gegebenen Punct geht und zwei gegebene Kreise berührt.

Es seien (Fig. 152) A der gegebene Punct, O und O' die gegebenen Kreise. Ist nun M ein Kreis, welcher durch A geht und die Kreise O und O' in den Puncten B, C von

außen berührt, so muß die verlängerte BC durch den äußeren Aehnlichkeitspunct S der Kreise O und O' gehen (§. 185). Zieht man durch O und O' die Gerade FDES, verlängert SB bis G und zieht OG, O'C, FG und EC, so ist, da OG || O'C, in den gleichschenkligen

Fig. 152.



Dreiecken FGO und ECO' auch FG || EC. Daraus folgt SE : SF = SC : SG, oder SE . SG = SF . SC; ferner ist (nach §. 151, Folges. a) SD . SF = SB . SG und SC . SB = SH . SA. Durch Multiplication dieser drei Gleichungen erhält man SE . SD = SH . SA, woraus SH bestimmt werden kann. Somit ist der Punct H gegeben und die Auflösung auf die 3. Aufgabe zurückgeführt, durch A und H einen Kreis zu beschreiben, der einen der beiden gegebenen berührt; derselbe wird auch den anderen berühren.

Man erhält durch diese Construction den Kreis M, welcher die beiden gegebenen Kreise von außen, und einen Kreis M', welcher beide Kreise von innen berührt. Durch Benützung des inneren Aehnlichkeitspunctes der Kreise O und O' erhält man auf ähnliche Weise noch zwei Kreise, welche einen der gegebenen Kreise von außen, den andern von innen berühren.

Die Aufgabe kann auch weniger als vier Auflösungen geben, und selbst auch unmöglich werden.

7. Einen Kreis zu construiren, welcher drei gegebene Kreise berührt.

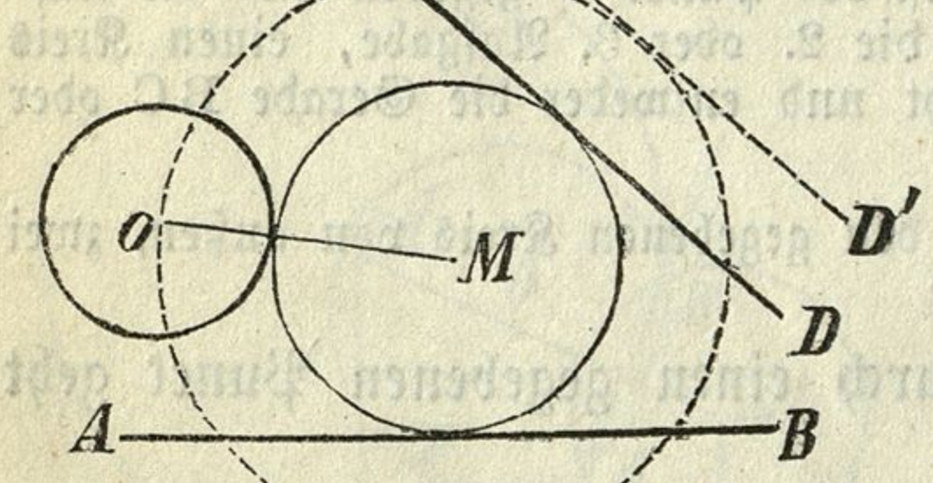
Es seien G, G', G" die drei gegebenen Geraden. Nach §. 144, Folges. 3 ist der geom. Ort der Mittelpunct aller Kreise, welche die Geraden G und G' berühren, die Halbirungslinie des von G und G' gebildeten Winkels, ebenso der geom. Ort der Mittelpuncte aller Kreise, welche die Geraden G' und G" berühren, die Halbirungslinie des von G und G" gebildeten Winkels; der Durchschnittspunct dieser beiden Linien, durch welchen auch die Halbirungslinie des von G' und G" gebildeten Winkels gehen muß (§. 71, 2), ist daher der Mittelpunct des gesuchten Kreises.

Construirt man zu den von den drei Geraden gebildeten Winkeln die Nebenwinkel, so geben die Halbirungslinien derselben noch die Mittelpuncte von drei anderen Kreisen, welche gleichfalls alle drei Gerade berühren und die äußeren Berührungskreise heißen, während der frühere der innere Berührungskreis genannt wird.

Sind die gegebenen Geraden parallel, oder schneiden sie sich in einem Puncte, so erhält man keinen Kreis; sind nur zwei Gerade parallel, so gibt es zwei Kreise.

8. Einen Kreis zu construiren, welcher zwei gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt.

Fig. 153.



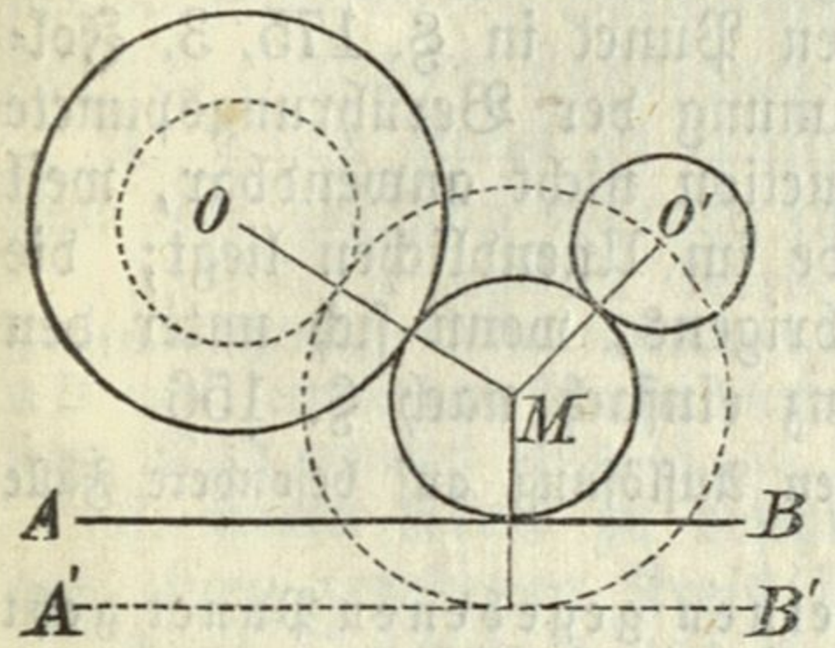
Es seien (Fig. 153) AB und CD die gegebenen Geraden, O der gegebene Kreis und r dessen Halbmesser. Man ziehe parallel mit AB und CD auf der äußeren Seite derselben in dem Abstande r die Hilfslinien A'B' und C'D' und construire (nach Aufg. 4) einen Hilfskreis, welcher durch den Punct O geht und die beiden Hilfslinien A'B' und C'D' berührt. Beschreibt man nun einen mit diesem Hilfskreise concentrischen Kreis M mit einem um r kleineren Halbmesser, so berührt derselbe sowohl die Geraden AB und CD als den gegebenen Kreis O, ist also der gesuchte Kreis. Da die Aufgabe 4 zwei Hilfskreise liefert, so erhält man auch hier zwei mit ihnen concentrische Kreise, welche den gegebenen von außen berühren.

Zieht man die zwei Hilfslinien auf der inneren Seite der gegebenen Geraden, so erhält man, wenn man den mit dem Hilfskreise concentrischen Kreis mit einem um r größeren Halbmesser beschreibt, noch zwei Kreise, welche den gegebenen von innen berühren.

Wie gestaltet sich die Auflösung, wenn die gegebenen Geraden parallel sind?

9. Einen Kreis zu construiren, welcher eine gegebene Gerade und zwei gegebene Kreise berührt.

Fig. 154.



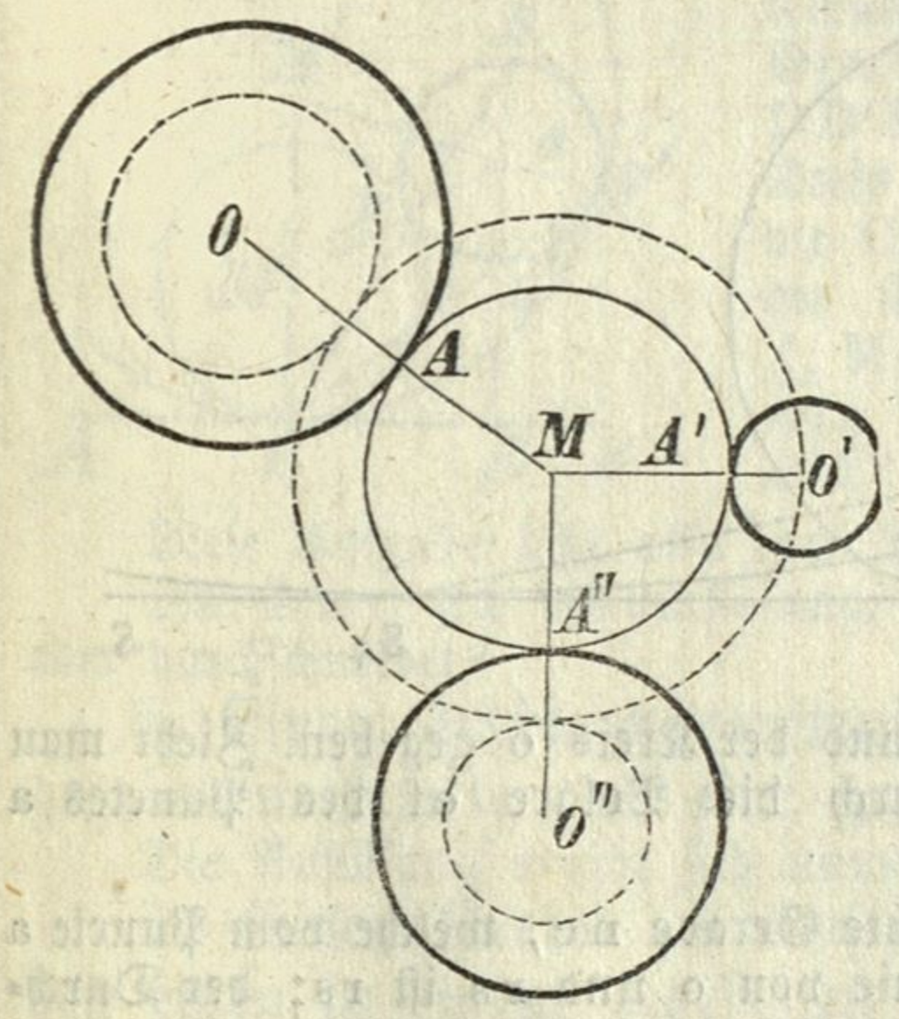
Es seien (Fig. 154) AB die gegebene Gerade, und O und O' mit den Halbmessern r und r' die gegebenen Kreise. Man ziehe parallel mit AB in dem Abstande r' die Hilfslinie A'B', beschreibe einen mit O concentrischen Hilfskreis mit dem Halbmesser r—r', und construire dann einen zweiten Hilfskreis, welcher durch O' geht, die Gerade A'B' und den mit O concentrischen Hilfskreis berührt. Man erhält nach Aufg. 6 vier solche Hilfskreise, deren einer hier punctirt gezeichnet ist. Beschreibt man nun zu jedem dieser Hilfskreise mit einem um r' kleineren Halbmesser einen concentrischen Kreis, so berührt derselbe sowohl die Gerade AB als die gegebenen Kreise O und O'; man erhält dadurch vier Berührungskreise.

Beschreibt man den mit O concentrischen Hilfskreis anstatt mit dem Halbmesser r—r', mit dem Halbmesser r+r', so erhält man auf ähnliche Weise vier weitere Kreise, welche der Aufgabe genügen.

Von den acht gefundenen Kreisen berühren vier die gegebenen zwei Kreise gleichartig, vier ungleichartig.

10. Einen Kreis zu construiren, welcher drei gegebene Kreise berührt.

Fig. 155.



Es seien (Fig. 155) O, O', O'' die gegebenen Kreise und ihre Halbmesser bezüglich r, r', r''. Man beschreibe einen mit O concentrischen Hilfskreis mit dem Halbmesser r — r', dann einen mit O'' concentrischen Hilfskreis mit dem Halbmesser r'' — r', und construire (nach Aufgabe 6) einen weiteren Hilfskreis, welcher durch O' geht, und die beiden früheren Hilfskreise berührt. Man erhält vier solche Kreise, deren einer hier punctirt gezeichnet ist. Beschreibt man nun zu jedem dieser vier Hilfskreise, mit einem um r' kleineren Halbmesser einen concentrischen Kreis, so berührt jeder derselben die drei gegebenen Kreise.

Beschreibt man den mit O concentrischen Hilfskreis mit dem Halbmesser r + r', und den mit O'' concentrischen Hilfskreis mit dem Halbmesser r'' + r', so erhält man auf ähnliche Weise noch vier andere Berührungskreise.

Die Art der Berührung dieser acht Kreise mit den gegebenen ist in §. 187 angeführt.

Allgemeine Lösung des Apollonischen Problems.

Um einen Kreis M (Fig. 146) zu construiren, welcher drei gegebene Kreise O_1, O_2 und O_3 berührt, bestimme man 1. das Potenzcentrum C der gegebenen drei Kreise, 2. die äußere Aehnlichkeitsaxe $S_1 S_2 S_3$ derselben, 3. die Pole dieser Aehnlichkeitsaxe in Bezug auf jeden der gegebenen Kreise, und verbinde 4. jeden dieser Pole mit dem Potenzcentrum. Dadurch erhält man die Berührungspuncte A_1, A_2, A_3 für den Kreis M_1, welcher O_1, O_2, O_3 von außen, und zugleich die Berührungspuncte B_1, B_2, B_3 für einen zweiten Kreis M_2, welcher die drei gegebenen Kreise von innen berührt.

Indem man statt der äußeren Aehnlichkeitsaxe je eine der drei inneren nimmt, erhält man die drei übrigen noch möglichen Paare von Berührungskreisen.

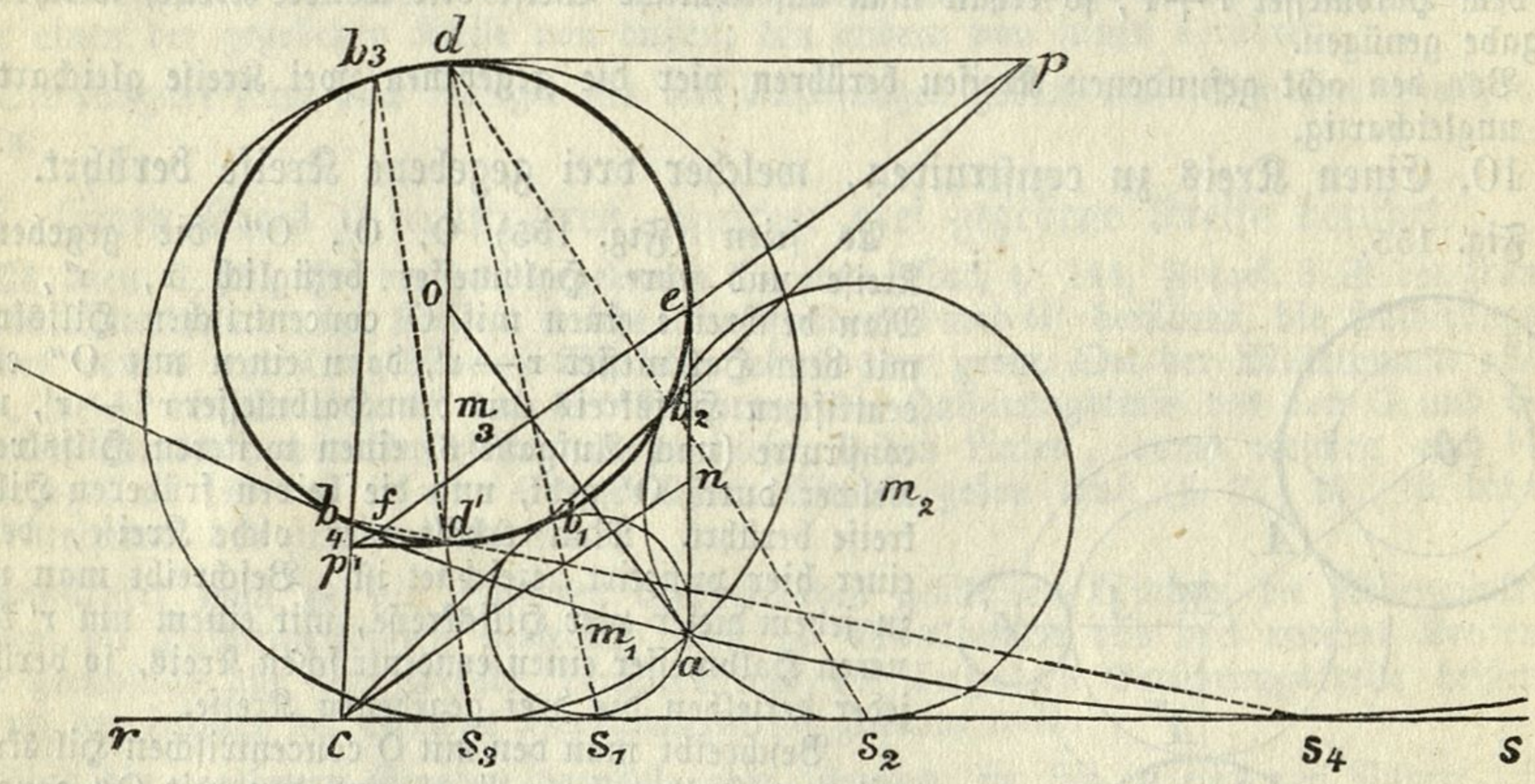
Die Richtigkeit der Lösung ergibt sich aus §. 187.

Die hier angeführte Construction enthält zunächst eine zweite Auflösung der 10. Aufgabe; sie liefert aber, da sie für jede Lage und Größe der drei Kreise giltig ist, zugleich die allgemeine Lösung für die übrigen Berührungsaufgaben, wenn man den Punct als einen Kreis mit dem Halbmesser Null, und die Gerade als einen Kreis mit einem unendlich großen Halbmesser (§. 136) ansieht. Die Bedeutung der Potenzlinie und der Aehnlichkeitspunct für diese besonderen Fälle ist in §. 180, 8.—12. und in §. 183, 8.—12., die Bedeutung des Poles einer Geraden in Bezug auf einen Punct in §. 175, 3, Folgesatz c) angegeben worden. Nur für die Bestimmung der Berührungspuncte auf einer Geraden ist die obige allgemeine Construction nicht anwendbar, weil der Pol einer Geraden in Bezug auf eine Gerade im Unendlichen liegt; die Bestimmung dieser Berührungspuncte geschieht übrigens, wenn sich unter den gegebenen drei Elementen ein Kreis befindet, ganz einfach nach §. 156.

Als Beispiel der Anwendung der obigen allgemeinen Auflösung auf besondere Fälle wählen wir die 5. Aufgabe:

Einen Kreis zu construiren, welcher durch einen gegebenen Punct geht und eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt.

Fig. 156.



Es seien (Fig. 156) der Punct a, die Gerade rs und der Kreis o gegeben. Zieht man von a an den Kreis o die Tangente ae, so ist dadurch die Polare ef des Punctes a bestimmt.

Die Potenzlinie von o und a ist die auf ao senkrechte Gerade nc, welche vom Puncte a und seiner Polare ef gleich weit absteht; die Potenzlinie von o und rs ist rs; der Durchschnittspunct c von nc und rs ist daher das Potenzcentrum von o, a und rs.

Von o und a ist a der innere und äußere Aehnlichkeitspunct, ebenso von rs und a; von o und rs ist der Endpunct d' des auf rs senkrechten Durchmessers dd' der innere, der andere Endpunct d der äußere Aehnlichkeitspunct. Die Geraden ad' und ad sind daher die beiden einzigen Aehnlichkeitsaxen des Systems.

Die Polare von a in Bezug auf o ist ef, die Polare von d die durch diesen Punct gezogene Tangente dp; ihr Durchschnitt p ist daher der Pol der Aehnlichkeitsaxe ad; ebenso ist p' der Pol der anderen Aehnlichkeitsaxe ad'.

Zieht man nun von c durch p und p' Gerade, so sind die Durchschnittspuncte b_1, b_2, b_3, b_4 derselben mit dem Kreise die Berührungspuncte zwischen dem gegebenen und den gesuchten Kreisen. Die Berührungspuncte s_1, s_2, s_3, s_4 dieser letzteren Kreise mit der Geraden rs erhält man nach §. 156, indem man durch die Berührungspuncte des Kreises und durch d oder d' gerade Linien zieht.

Hiernach sind für jeden der vier Berührungskreise drei Puncte gegeben, aus denen sodann die zugehörigen Mittelpuncte m_1, m_2, ... leicht gefunden werden können.

§. **190.** Das Berührungsproblem des Pappus.

Wenn einzelne Puncte, gerade Linien oder Kreise, zusammen drei Elemente, gegeben sind, einen Kreis zu construiren, welcher durch die gegebenen Puncte geht, und die gegebenen Geraden oder Kreise, und zwar eine Gerade oder einen Kreis in einem gegebenen Puncte berührt.

Dieses Problem umfaßt sechs Aufgaben, welche eigentlich nur besondere Fälle der vorhergehenden Berührungsaufgabe des Apollonius sind, die jedoch, weil sie für sich viel einfachere Auflösungen zulassen, hier abgesondert angeführt werden sollen.

1. Einen Kreis zu construiren, welcher durch einen gegebenen Punct geht, und eine gegebene Gerade in einem gegebenen Puncte berührt.

Ist AB die gegebene Gerade, C der gegebene Punct in derselben und D der gegebene Punct außerhalb dieser Geraden, so liegt der Mittelpunct des gesuchten Kreises in der auf AB in C errichteten Senkrechten (§. 143, 5) und in der Senkrechten, welche auf CD in ihrer Mitte errichtet wird (§. 55, 5, Folges.).

2. Einen Kreis zu beschreiben, welcher durch einen gegebenen Punct geht und einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Puncte berührt.

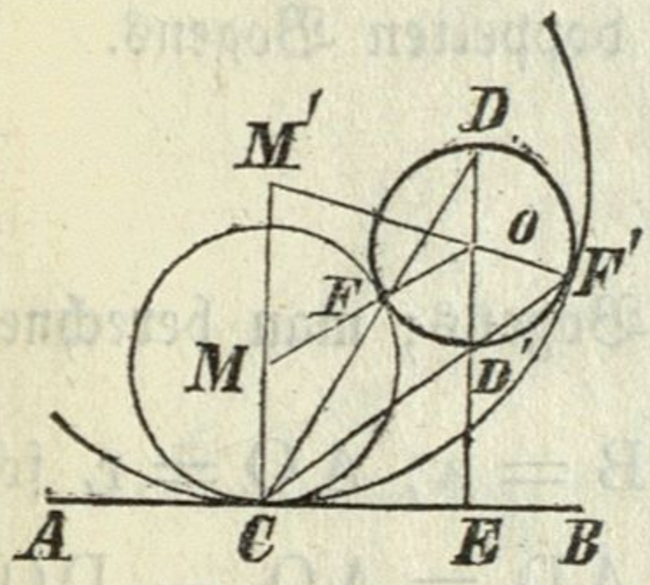
Geom. Oerter in §. 154, 2 und §. 55, 5.

3. Einen Kreis zu construiren, welcher zwei gegebene Gerade, und zwar die eine in einem gegebenen Puncte berührt.

Geom. Oerter in §. 143, 5 und §. 144, Folges. 3.

4. Einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene Gerade in einem gegebenen Puncte und einen gegebenen Kreis berührt.

Fig. 157.



Es sei (Fig. 157) AB die gegebene Gerade, C der gegebene Punct derselben und O der gegebene Kreis. Der Mittelpunct des gesuchten Kreises liegt in der auf AB senkrechten Geraden CM (§. 143, 5). Zieht man nun durch O die DD'E ⊥ AB, dann die Geraden CD und CD', welche den Kreis O in F und F' schneiden, ferner OF und F'O, welche die CM in den Puncten M und M' treffen, so sind diese die Mittelpuncte der gesuchten Berührungskreise. Denn: △ MCF ∽ ODF, daher wegen OF = OD auch MF = MC; eben so △ M'CF' ∽ OD'F', daher wegen OF' = OD' auch M'F' = M'C.

Diese Aufgabe läßt also zwei Auflösungen zu.

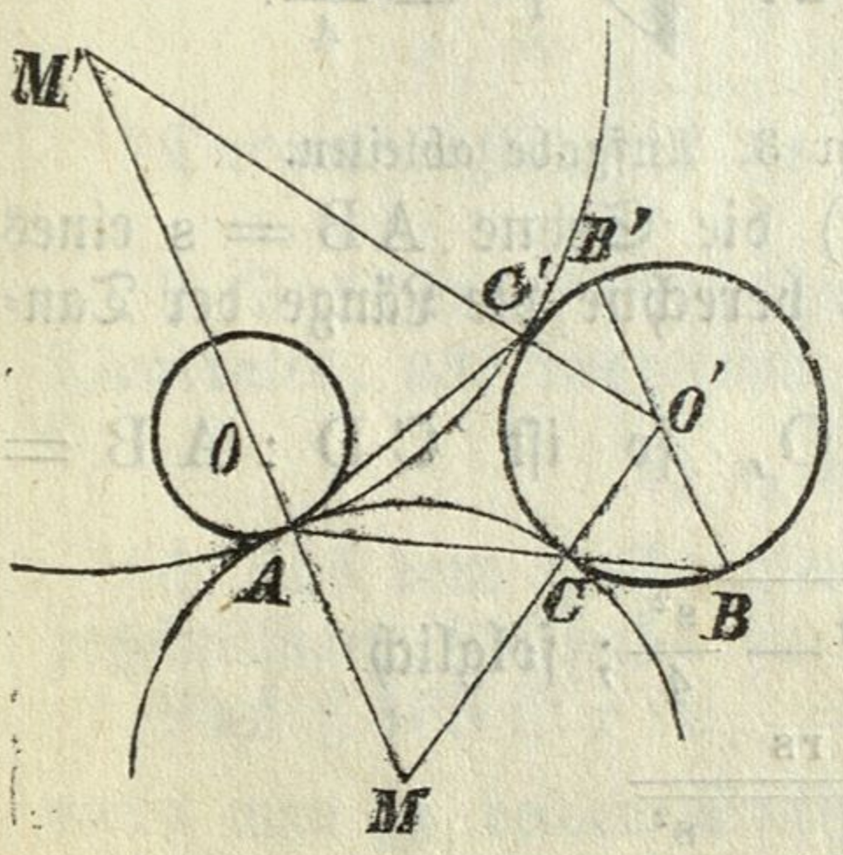
Wie ändert sich die Auflösung, wenn die gegebene Gerade den gegebenen Kreis berührt oder durchschneidet?

5. Einen Kreis zu construiren, welcher einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Puncte und eine gegebene Gerade berührt.

Die Auflösung ergibt sich unmittelbar aus §. 156.

6. Einen Kreis zu construiren, welcher zwei gegebene Kreise, und zwar den einen in einem gegebenen Puncte berührt.

Fig. 158.



Es sei (Fig. 158) der Kreis O mit dem Puncte A seines Umfanges und der Kreis O' gegeben. Man ziehe durch O' die BB' ∥ AO, dann die AB und AB', welche den Kreis O' bezüglich in C und C' schneiden. Zieht man ferner O'C und O'C', welche verlängert die gleichfalls verlängerte AO bezüglich in den Puncten M und M' treffen, so sind diese (§. 154, 3.) die Mittelpuncte der gesuchten Berührungskreise. Denn: △ MAC ∽ O'BC, daher wegen O'B = O'C auch MA = MC; ebenso △ M'AC' ∽ O'B'C', daher wegen O'B' = O'C' auch M'A = M'C'.

Welche andere Lagen gegen einander können die Kreise O und O' noch haben, und wie ändert sich die Auflösung für jede dieser Lagen?

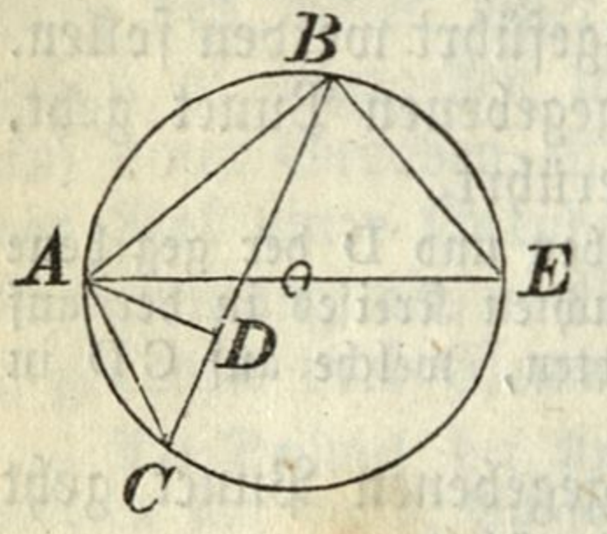
§. **191**. Rechnungsaufgaben über Sehnen und Tangenten.

1. Wenn r den Halbmesser, b eine Sehne des Kreises und d den Abstand dieser Sehne vom Mittelpuncte bezeichnet, aus zweien dieser drei Größen die dritte zu bestimmen.

Fundamentalgleichung: $r^2 = \frac{b^2}{4} + d^2$.

2. Gegeben sind die Sehnen a und b zweier Bogen, deren keiner größer als der Halbkreis ist; man berechne die Sehne c, welche zu der Summe jener zwei Bogen gehört.

Fig. 159.



Es sei (Fig. 159) $AB = a$, $AC = b$ und $BC = c$. Man ziehe $AD \perp BC$, ferner den Durchmesser AE und die Gerade BE, und setze $BD = m$, $CD = n$ und $AE = 2r$.

Da $\triangle ABE \sim ADC$, so ist

$AE : AC = AB : AD$, oder $2r : b = a : AD$, also $AD = \frac{ab}{2r}$.

Dann ist $m = \sqrt{a^2 - \frac{a^2 b^2}{4r^2}}$ und $n = \sqrt{b^2 - \frac{a^2 b^2}{4r^2}}$, mithin

$$c = m + n = a\sqrt{1 - \frac{b^2}{4r^2}} + b\sqrt{1 - \frac{a^2}{4r^2}}.$$

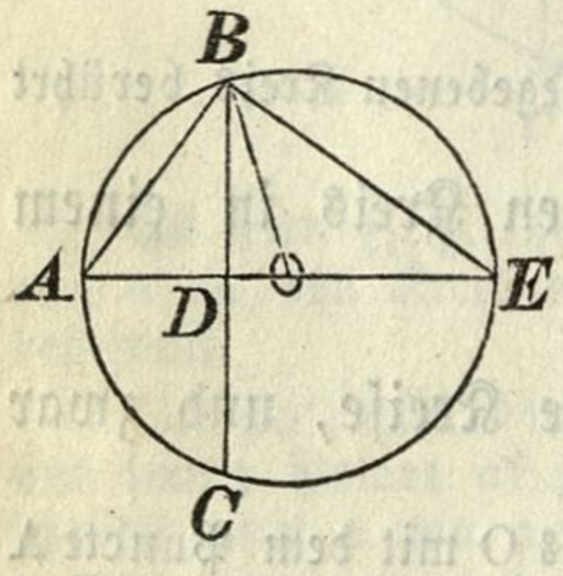
3. Gegeben ist in einem Kreise die Sehne a eines Bogens, der kleiner als der Halbkreis ist; man berechne die Sehne c des doppelten Bogens.

Setzt man in der 2. Aufgabe $a = b$, so hat man

$$c = 2a\sqrt{1 - \frac{a^2}{4r^2}}.$$

4. Gegeben ist in einem Kreise die Sehne c eines Bogens; man berechne die Sehne a des halben Bogens.

Fig. 160.



Ist (Fig. 160) $BC = c$, $AB = a$, $AO = r$, so ist $DO = \sqrt{r^2 - \frac{c^2}{4}}$ und $AD = AO - DO = r - \sqrt{r^2 - \frac{c^2}{4}}$.

Aus dem bei B rechtwinkligen Dreiecke ABE hat man $AE : AB = AB : AD$ (§. 107), oder

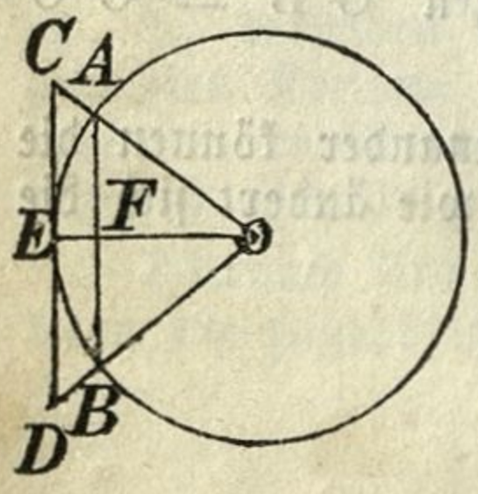
$$2r : a = a : r - \sqrt{r^2 - \frac{c^2}{4}};$$ daher

$$a = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{c^2}{4}}}.$$

Dieser Ausdruck läßt sich auch aus dem Resultate der 3. Aufgabe ableiten.

5. Gegeben ist in einem Kreise (Fig. 161) die Sehne $AB = s$ eines Bogens, der kleiner als der Halbkreis ist; man berechne die Länge der Tangente $CD = t$.

Fig. 161.



Da $\triangle CDO \sim ABO$, so ist $CD : AB = EO : FO$, oder

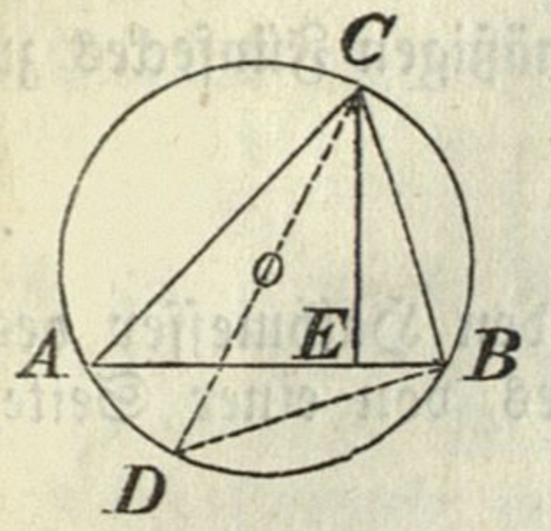
$$t : s = r : \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}};$$ folglich

$$t = \frac{rs}{\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}}$$

§. **192.** Rechnungsaufgaben über Sehnen- und Tangentenvielecke.

1. Aus den Seiten eines Dreieckes den Halbmesser des umschriebenen Kreises zu bestimmen.

Fig. 162.



Es sei O (Fig. 162) der Mittelpunct und CD ein Durchmesser des dem Dreiecke ABC umschriebenen Kreises, ferner $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $CE = h$ und $OC = R$. Zieht man $CE \perp AB$, so ist $\triangle CBD \sim CEA$, daher

$CD : AC = CB : CE$, oder $2R : b = a : h$; mithin

$$2R = \frac{ab}{h}, \text{ und auch } 2R = \frac{abc}{ch}, \text{ daher } R = \frac{abc}{2ch},$$

oder mit Rücksicht auf den Werth von h in §. 132, 5

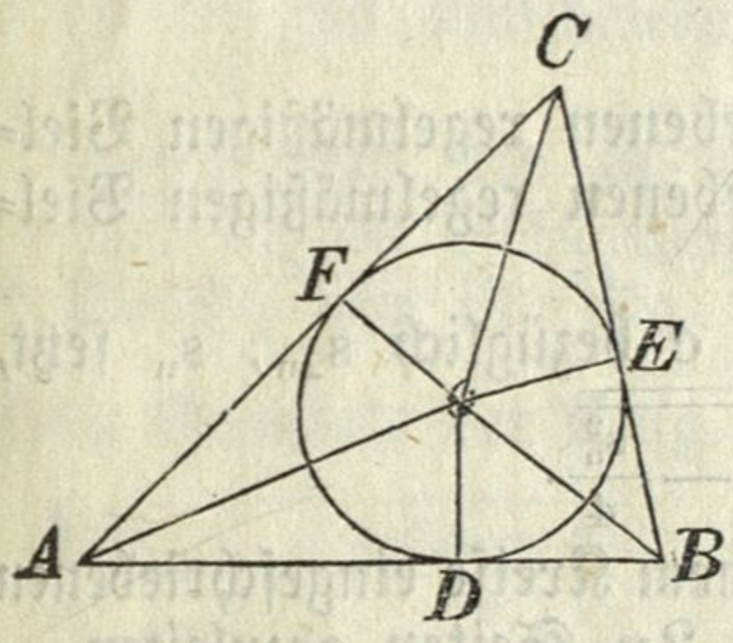
$$R = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)\,(b+c-a)\,(a+c-b)\,(a+b-c)}}.$$

Heißt f der Flächeninhalt des Dreieckes, so hat man wegen $ch = 2f$ auch

$$R = \frac{abc}{4f}.$$

Ist das Dreieck gleichseitig, also $a = b = c$, so ist $abc = a^3$ und $f = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$; also $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Fig. 163.



2. Aus den Seiten eines Dreieckes den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises zu berechnen.

Es sei O (Fig. 163) der Mittelpunct, $OD = OF = OE = r$ der Halbmesser des dem Dreiecke ABC eingeschriebenen Kreises, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, und f der Flächeninhalt dieses Dreieckes. Man hat

$\triangle BOC + AOC + AOB = f$, oder

$\frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = f$; also $r = \frac{2f}{a+b+c}$, oder

$$r = \tfrac{1}{2}\,\frac{\sqrt{(a+b+c)\,(b+c-a)\,(a+c-b)\,(a+b-c)}}{a+b+c}.$$

Für das gleichseitige Dreieck, dessen Seite a ist, hat man $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Zusatz. Heißen r_1, r_2, r_3 die Halbmesser der Kreise, welche je eine der Seiten a, b, c und die Verlängerungen der beiden anderen berühren, deren Mittelpuncte daher in den Halbirungslinien der Außenwinkel des Dreieckes liegen (§. 71, 2, Zusatz), so erhält man auf gleiche Weise

$$r_1 = \frac{2f}{b+c-a},\quad r_2 = \frac{2f}{a+c-b},\quad r_3 = \frac{2f}{a+b-c}.$$

Daraus ergibt sich die merkwürdige Relation

$$r\,r_1\,r_2\,r_3 = f^2.$$

3. Aus dem Halbmesser eines Kreises die Seite des ihm eingeschriebenen Quadrates, und umgekehrt zu berechnen.

a) $s_4 = r\sqrt{2}$; b) $r = \frac{s_4\sqrt{2}}{2}$.

4. Aus dem Halbmesser eines Kreises die Seite des ihm eingeschriebenen regelmäßigen Zehneckes zu berechnen.

Nach §. 165 ist $r : s_{10} = s_{10} : (r - s_{10})$, woraus $s_{10}^2 = r^2 - r\,s_{10}$, und wenn man zu beiden Seiten $\frac{s_{10}^2}{4}$ addiert, $s_{10}^2 + \frac{s_{10}^2}{4} = r^2 - r\,s_{10} + \frac{s_{10}^2}{4}$

oder $\frac{5 s_{10}^2}{4} = \left(r - \frac{s_{10}}{2}\right)^2$ folgt. Es ist daher $\frac{s_{10}}{2}\sqrt{5} = r - \frac{s_{10}}{2}$, und $\frac{s_{10}}{2}(\sqrt{5}+1) = r$, folglich $\frac{s_{10}}{2} = \frac{r}{\sqrt{5}+1} = \frac{r(\sqrt{5}-1)}{4}$; also

$$s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1).$$

5. Die Seite eines dem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Fünfeckes zu berechnen. Nach §. 166 ist $s_5^2 = s_{10}^2 + r^2$, daher

$$s_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

6. Aus der Seite eines regelmäßigen Fünfeckes a) den Halbmesser des umschriebenen Kreises, b) den Abstand des Mittelpunctes von einer Seite, c) die Länge einer Diagonale zu berechnen.

$$\text{a) } r = \frac{s_5}{10}\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}, \qquad \text{b) } a = \frac{s_5}{10}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}},$$

$$\text{c) } d = \frac{s_5}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

7. Aus der Seite s_n eines dem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Vieleckes die Seite S_n eines demselben Kreise umschriebenen regelmäßigen Vieleckes von gleicher Seitenzahl zu bestimmen.

Setzt man in §. 191, Aufg. 5 statt t und s bezüglich S_n und s_n, so hat man

$$S_n = \frac{r s_n}{\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}}.$$

8. Aus der Seite s_n eines dem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Vieleckes die Seite s_{2n} eines demselben Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Vieleckes von doppelter Seitenzahl zu berechnen.

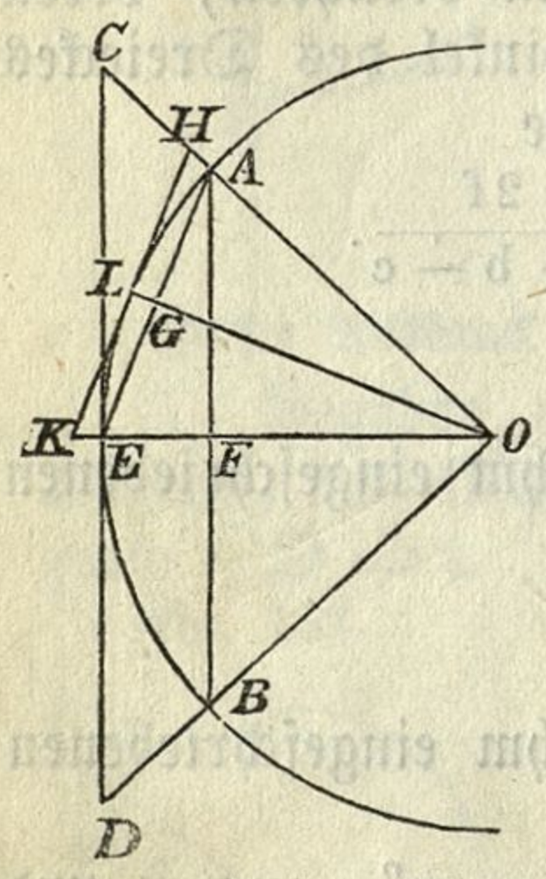
Aus §. 191, Aufg. 4 folgt, wenn man statt a, c bezüglich s_{2n}, s_n setzt,

$$s_{2n} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}}.$$

9. Die Beziehungen zwischen den Umfängen der einem Kreise eingeschriebenen und umschriebenen regelmäßigen Vielecke von n und 2n Seiten abzuleiten.

Es sei (Fig. 164) $AO = r$ der Halbmesser des Kreises, $AB = s_n$ die Seite des eingeschriebenen, $CD = S_n$ die Seite des umschriebenen regelmäßigen neckes, $AE = s_{2n}$ die Seite des eingeschriebenen, $HK = S_{2n}$ die Seite des umschriebenen 2neckes, wo dann $OK \perp AB$ ist.

Fig. 164.



Setzt man $FO = \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}} = a$, also $s_n = 2\sqrt{r^2 - a^2}$, so erhält man für die Seiten dieser Vielecke mit Rücksicht auf die Aufgaben 7 und 8 folgende Ausdrücke:

$$s_n = 2\sqrt{r^2 - a^2},$$

$$S_n = \frac{r s_n}{\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}} = \frac{2r\sqrt{r^2 - a^2}}{a},$$

$$s_{2n} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}} = \sqrt{2r(r-a)},$$

$$S_{2n} = \frac{r\sqrt{2r(r-a)}}{\sqrt{r^2 - \frac{2r(r-a)}{4}}} = 2r\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}.$$

Heißen nun u_n, U_n, u_{2n}, U_{2n} die Umfänge der eingeschriebenen und umschriebenen n ecke und 2n ecke, so hat man

$$u_n = 2n\sqrt{r^2-a^2}, \qquad u_{2n} = 2n\sqrt{2r(r-a)},$$

$$U_n = \frac{2nr}{a}\sqrt{r^2-a^2}; \qquad U_{2n} = 4nr\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}.$$

Daraus ergibt sich für die reciproken Werthe der Umfänge

$$\frac{1}{U_{2n}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{U_n}+\frac{1}{u_n}\right\}\ldots 1) \qquad \frac{1}{u_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{U_{2n}}\cdot\frac{1}{u_n}}\ldots 2)$$

d. h. der reciproke Werth von U_{2n} ist das arithmetische Mittel zwischen den reciproken Werthen von U_n und u_n; und: der reciproke Werth von u_{2n} ist das geometrische Mittel zwischen den reciproken Werthen von U_{2n} und u_n.

Diese Formeln erscheinen besonders zur successiven Berechnung der Umfänge regelmäßiger Vielecke geeignet. Z. B. die Seite s_6 des eingeschriebenen Sechseckes ist gleich dem Halbmesser und ist daher mit diesem gegeben. Aus s_6 berechnet man S_6, und aus beiden u_6 und U_6; aus $\frac{1}{U_6}$ und $\frac{1}{u_6}$ erhält man nach der Formel 1) $\frac{1}{U_{12}}$, aus $\frac{1}{U_{12}}$ und $\frac{1}{u_6}$ nach der Formel 2) $\frac{1}{u_{12}}$; aus $\frac{1}{U_{12}}$ und $\frac{1}{u_{12}}$ berechnet man weiter $\frac{1}{U_{24}}$ und $\frac{1}{u_{24}}$, aus diesen $\frac{1}{U_{48}}$ und $\frac{1}{u_{48}}$, u. s. f.

10. Die Beziehungen zwischen den Flächeninhalten der einem Kreise eingeschriebenen und umschriebenen regelmäßigen Vielecke von n und 2n Seiten abzuleiten.

Behält man die in der Aufg. 9 eingeführten Bezeichnungen, nennt f_n, F_n, f_{2n}, F_{2n} die Flächeninhalte der eingeschriebenen und umschriebenen n ecke und 2n ecke, und ist (Fig. 164) $OG \perp AE$, so erhält man mit Rücksicht auf die Resultate der Aufg. 8 und auf §. 129, 4, da $OG = \sqrt{r^2-\frac{S_{2n}^2}{4}} = \sqrt{r^2-\frac{2r(r-a)}{4}} = \frac{\sqrt{2r(r+a)}}{2}$, ist

$$f_n = 2n\sqrt{r^2-a^2}\cdot\frac{a}{2} = na\sqrt{r^2-a^2},$$

$$F_n = \frac{2nr}{a}\sqrt{r^2-a^2}\cdot\frac{r}{2} = \frac{nr^2}{a}\sqrt{r^2-a^2},$$

$$f_{2n} = 2n\sqrt{2r(r-a)}\cdot\frac{\sqrt{2r(r+a)}}{4} = nr\sqrt{r^2-a^2},$$

$$F_{2n} = 4nr\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}\cdot\frac{r}{2} = 2nr^2\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}.$$

Nimmt man die reciproken Werthe der Flächeninhalte, so ergeben sich analog mit den Ausdrücken 1) und 2) in Aufg. 9 die Formeln:

$$\frac{1}{F_{2n}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{F_n}+\frac{1}{f_n}\right\}\ldots 1) \qquad \frac{1}{f_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{F_{2n}}\cdot\frac{1}{f_n}}\ldots 2).$$

§. **193.** Rechnungsaufgaben über die Peripherie und den Flächeninhalt des Kreises und seiner Theile.

1. Die Zahl π, d. i. das Verhältniß der Peripherie eines Kreises zu dem Durchmesser zu berechnen.

Nimmt man den Durchmesser eines Kreises $r = 1$, also den Durchmesser $d = 2$ an, so ist, wenn p die Peripherie bezeichnet, $\pi = \frac{p}{2}$. Die Größe π

kann hiernach als der halbe Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser = 1 ist, betrachtet werden.

Um daher 2π zu bestimmen, berechnet man für $r = 1$ die Umfänge u_n und U_n eines eingeschriebenen und umschriebenen regelmäßigen n eckes; man erhält dadurch, da (nach §. 167, Folgesatz 2) $u_n < 2\pi < U_n$ ist, für 2π zwei Grenzen, welche durch fortgesetzte Verdopplung der Seitenzahl der Vielecke beliebig nahe an einander gerückt werden können, und durch welche daher π so genau als man will bestimmt werden kann.

Geht man von dem eingeschriebenen Sechsecke aus, dessen Seite $s_6 = 1$ ist, berechnet s_6, dann u_6 und U_6, und aus diesen Werthen entweder nach den Aufgaben 7 und 8 in §. 192, oder einfacher nach den Formeln 1) und 2) der Aufgabe 9 in §. 192 die Umfänge der eingeschriebenen und umschriebenen 12-, 24-, 48-, .. Ecke, so erhält man nach fortgesetzter Rechnung

$$U_{3072} = 6 \cdot 283187\ldots \text{ und } u_{3072} = 6 \cdot 283183\ldots$$

Die Umfänge des umschriebenen und eingeschriebenen regelmäßigen Vieleckes von 3072 Seiten unterscheiden sich demnach erst in der sechsten Decimale; da nun die Peripherie des Kreises zwischen jenen beiden Umfängen liegt, so muß nothwendig der gemeinschaftliche Theil obiger Zahlen die Peripherie selbst ausdrücken, somit ist $2\pi = 6 \cdot 28318\ldots$, und daher

$$\pi = 3 \cdot 14159\ldots$$

Nach dem eben angegebenen Verfahren kann die Zahl π mit jeder beliebigen Genauigkeit entwickelt werden. Auf 20 Decimalstellen hat man

$$\pi = 3 \cdot 14159\ 26535\ 89792\ 23846.$$

Die Anzahl der Decimalen, die man für π beibehält, hängt von dem Grade der Genauigkeit ab, welche man verlangt.

Die Zahl π ist zuerst von Archimedes bestimmt worden, welcher $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$ fand. Die erste Zahl wird häufig gebraucht, wo es nicht auf große Genauigkeit ankommt; sie ist genauer als der ebenfalls oft gebrauchte Näherungswerth 3·14.

Adrian Metius fand $\pi = \frac{355}{113}$, eine Zahl, welche sich in der Form 11 3 | 3 55 leicht dem Gedächtnisse einprägt; sie ist auch zu groß, aber der Fehler ist kleiner als $\frac{3}{10^7}$.

Ludolf van Ceulen berechnete π auf 35 Decimalstellen; nach ihm wird π auch die Ludolfische Zahl genannt.

2. In einem Kreise ist r der Halbmesser, d der Durchmesser, p die Peripherie, f der Flächeninhalt; aus einer dieser Größen die drei anderen zu berechnen.

Fundamentalgleichungen:

$$1)\ d = 2r; \qquad 2)\ p = 2r\pi; \qquad 3)\ f = r^2\pi.$$

3. Die Länge eines Bogens vom m Graden für den Halbmesser r ist b, der Flächeninhalt des zugehörigen Kreisausschnittes s; aus zweien dieser Größen die beiden anderen zu berechnen.

Fundamentalgleichungen:

$$1)\ \frac{b}{2r\pi} = \frac{m}{360}; \qquad 2)\ s = \frac{br}{2}.$$

4. Die Halbmesser zweier concentrischer Kreise sind R und r, ihre Peripherien P und p, die Breite des von ihnen gebildeten Ringes c, der Flächeninhalt desselben f; aus zweien dieser Größen die übrigen zu berechnen.

Fundamentalgleichungen:

$$1)\ c = R - r; \quad 2)\ f = (R^2 - r^2)\pi; \quad 3)\ f = (P + p) \cdot \frac{c}{2}.$$

VIII. Uebungssätze und Uebungsaufgaben.

§. **194.** Uebungssätze.

1. Unter allen Sehnen, welche durch einen Punct innerhalb eines Kreises gezogen werden können, ist diejenige die kleinste, welche auf dem durch diesen Punct gezogenen Halbmesser senkrecht steht. (§. 142, 7.)

2. Kreisbogen zwischen parallelen Sehnen sind einander gleich. (Beweis aus der Gleichheit der Wechselwinkel und §. 147, Folges. 2.)

3. Zieht man durch die Eckpuncte eines in einen Kreis beschriebenen Rechteckes Tangenten an denselben, so schließen diese einen Rhombus ein. (§. 144.)

4. Die Diagonalen eines Sehnenviereckes verhalten sich wie die Summen der Producte aus je zwei die Diagonale einschließenden Seiten.

Man bestimmt die Flächeninhalte der zwei Dreiecke, in welche das Viereck durch die eine Diagonale zerlegt wird, mit Rücksicht auf §. 192, 1. aus den drei Seiten und dem Halbmesser des umschriebenen Kreises, dann ebenso die Flächeninhalte der beiden Dreiecke, in welche das Viereck durch die zweite Diagonale zerlegt wird, und setzt die Summe der ersteren gleich der Summe der letzteren.

5. In jedem einem Kreise eingeschriebenen Vielecke von gerader Seitenzahl ist

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots = \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \ldots,$$

wo α_n den nten Vieleckswinkel bezeichnet.

Man zieht zu den Eckpuncten Halbmesser und wendet §. 40, 1, Folges. a an.

6. In jedem einem Kreise umschriebenen Vielecke von gerader Seitenzahl ist

$$s_1 + s_3 + s_5 \ldots = s_2 + s_4 + s_6 + \ldots,$$

wo s_n die nte Vielecksseite bezeichnet. (§. 144.)

7. Beschreibt man über den Katheten eines in einen Halbkreis eingeschriebenen rechtwinkligen Dreieckes Halbkreise, so ist die Summe der dadurch gebildeten Monde (§. 154) gleich der Fläche des rechtwinkligen Dreieckes. (Lehrsatz des Hippokrates.)

Aus $a^2 + b^2 = c^2$ erhält man für die über den drei Seiten beschriebenen Halbkreise $\frac{a^2\pi}{8} + \frac{b^2\pi}{8} = \frac{c^2\pi}{8}$, worauf man dann nur von beiden Theilen der Gleichung die Summe $s_1 + s_2$ der zu den Katheten gehörigen Kreisabschnitte zu subtrahiren braucht.

§. **195.** Constructionsaufgaben.

1. Den Kreisumfang in 2, 4, 8, 16, .. gleiche Theile zu theilen.
2. Den Kreisumfang in 3, 6, 12, 24, .. gleiche Theile zu theilen (§. 164).
3. Den Kreisumfang in 5, 10, 20, 40, .. gleiche Theile zu theilen (§. 165).
4. Die Peripherie eines Kreises in 15, 30, 60, .. gleiche Theile zu theilen. $\left(\frac{p}{15} = \frac{p}{6} - \frac{p}{10}\right)$.
5. Um ein gegebenes Dreieck einen Kreis zu beschreiben (§. 158, a.).
6. In ein gegebenes Dreieck einen Kreis zu beschreiben (§. 158, b.).
7. Einem gegebenen Kreise
   a) ein gleichseitiges Dreieck, ein regelmäßiges Sechseck, Zwölfeck,..
   b) ein Quadrat, ein regelmäßiges Achteck, Sechszehneck,..
   c) ein regelmäßiges Fünfeck, Zehneck,..
   d) ein regelmäßiges Fünfzehneck um- und einzuschreiben (§. 162, 2).
8. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Peripherie der Summe oder Differenz der Peripherien zweier gegebener Kreise gleich ist.
9. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Flächeninhalt der Summe oder Differenz der Flächeninhalte zweier gegebener Kreise gleich ist.
10. Aus einem gegebenen Mittelpuncte einen Kreis zu beschreiben, welcher
    a) eine gegebene Gerade berührt (§. 143, 2);
    b) einen gegebenen Kreis berührt (§. 154, Folges. 1).

11. Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, welcher
a) durch zwei gegebene Puncte geht (§. 20, Folges. 5);
b) durch einen gegebenen Punct geht und eine gegebene Gerade berührt (§. 20, Folges. 5 und §. 143, 6);
c) durch einen gegebenen Punct geht und einen gegebenen Kreis berührt (§. 20, Folges. 5 und §. 155, Folges.);
d) zwei gegebene Gerade berührt (§. 143, 6);
e) eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt (§. 143, 6 und §. 155, Folges.);
f) zwei gegebene Kreise berührt (§. 155, Folges.).

§. **196**. Rechnungsaufgaben.

1. In einen Kreis mit dem Halbmesser r ist ein Rechteck beschrieben, dessen eine Seite a ist; wie groß ist sein Flächeninhalt?

2. Das Auge eines Beobachters auf der Erdoberfläche sieht auf derselben so weit, als die Tangente angibt, welche vom Auge nach der Erde gezogen wird; wie groß ist die Gesichtsweite w, wenn h die Höhe des Auges über der Erdoberfläche und r den Halbmesser der Erde bezeichnet?

Mit Rücksicht auf §. 151, Folges. b findet man $w = \sqrt{h\,(h + 2r)}$.

3. Die Halbmesser zweier Kreise mit der Centrale $5 \cdot 4^m$ sind $1 \cdot 2^m$ und $0 \cdot 5^m$; wie groß ist der Abstand a) des äußeren, b) des inneren Aehnlichkeitspunctes von dem Mittelpuncte m) des kleineren, n) des größeren Kreises?

4. In einem Kreise ist (§. 193, 2)
a) gegeben $r = 5^m\ 2^{dc}\ 8^{cm}$; zu suchen p und f.
b) „ $p = 12 \cdot 56636^m$; „ „ r „ f.
c) „ $f = 349\square^{dm}$; „ „ d „ p.

5. In einem Kreise ist (§. 193, 3)
a) gegeben $m = 35^0\ 40'$, $r = 256^m$; zu suchen b und f.
b) „ $m = 50^0\ 8'\ 14''$, $f = 3 \cdot 567\square^{dm}$; „ „ r „ b.
c) „ $b = 0 \cdot 15708^m$, $r = 4^{dm}$; „ „ m „ f.
d) „ $b = 2 \cdot 4434^m$, $f = 2 \cdot 5762\square^m$; „ „ r „ m.

6. Wie lang ist arc 1^0, arc $1'$, arc $1''$? (§. 170.)

7. Eine Eisenbahn soll im Bogen eines Kreises vom Halbmesser $= 1000^m$ aus einer Richtung in eine andere, die mit der ersteren einen Winkel von 45^0 macht, übergeführt werden; wie lang ist der Kreisbogen zwischen den Puncten, für welche jene Richtungen zwei Tangenten bilden?

8. Berechne die Fläche eines Kreisabschnittes, dessen Halbmesser $= r$ und dessen Sehne dem Halbmesser gleich ist.

9. Bei einem Kreisringe ist (§. 193, 4)
a) gegeben $R = 6^{dm}\ 8^{cm}$, $r = 4^{dm}\ 5^{cm}$; zu suchen P, p, c, f.
b) „ $R = 3 \cdot 12^m$, $p = 11 \cdot 56^m$; „ „ r, P, c, f.
c) „ $r = 0 \cdot 75^m$, $f = 1 \cdot 836\square^m$; „ „ R, P, p, c.
d) „ $P = 5^m\ 2^{dm}$, $c = 0 \cdot 24^m$; „ „ R, r, p, f.
e) „ $p = 7 \cdot 134^{dm}$, $f = 5 \cdot 793\square^{dm}$; „ „ R, r, P, c.
f) „ $c = 2 \cdot 37^{dm}$, $f = 8 \cdot 038\square^{dm}$; „ „ R, r, P, p.

10. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Ringausschnittes, dessen Bogen $0 \cdot 5^m$ und $0 \cdot 4^m$ zu Halbmessern haben und zu einem Centriwinkel von 48^0 gehören?

Zweiter Theil.

Die Stereometrie.

Erster Abschnitt.

Gerade Linien und Ebenen im Raume.

§. **197.** Durch zwei Puncte kann nur eine Gerade gezogen werden (§. 2, 1). Die Lage einer Geraden im Raume ist demnach durch zwei Puncte bestimmt.

§. **198.** Durch drei nicht in gerader Linie liegende Puncte im Raume kann nur eine Ebene gelegt werden.

Beweis. Man verbinde zwei dieser Puncte durch eine Gerade und stelle sich eine Ebene vor, welche diese Gerade in sich enthält. Geht die Ebene nicht schon durch den dritten Punct, so läßt sie sich um jene Gerade (wie um eine feste Axe) so lange drehen, bis sie den dritten Punct erreicht. Dann kann sie sich aber nicht weiter drehen, ohne diesen Punct zu verlassen. Durch drei Puncte, die nicht in einer geraden Linie liegen, ist also nur eine Ebene möglich.

Folgesatz. Die Lage einer Ebene im Raume ist bestimmt:
a) durch drei Puncte, die nicht in gerader Linie liegen;
b) durch eine Gerade und einen außerhalb derselben liegenden Punct;
c) durch zwei einander schneidende gerade Linien.

§. **199.** Zwei Gerade im Raume können eine dreifache Lage gegen einander haben. Liegen sie in derselben Ebene, so sind sie (§. 25) entweder parallel, oder schneiden sie sich hinreichend verlängert in einem Puncte. Liegen sie nicht in derselben Ebene, so können sie sich weder schneiden noch parallel sein; die eine geht über oder neben der andern vorbei. Solche Gerade nennt man sich kreuzende oder windschiefe Gerade.

Folgesätze. 1. Durch einen Punct im Raume kann mit einer gegebenen Geraden nur eine Parallele gezogen werden (§. 25, Grundsatz).

2. Wenn mehrere parallele Gerade dieselbe Gerade schneiden, so liegen sie unter einander und mit dieser in einer Ebene.

§. **200.** 1. Eine Gerade, welche nicht in einer Ebene enthalten ist, kann die Ebene nur in einem Puncte treffen.

Denn träfe die Gerade die Ebene in noch einem zweiten Puncte, so müßte sie nach der Grundeigenschaft der Ebene (§. 3) ganz in die Ebene fallen.

Der Punct, in welchem eine Gerade eine Ebene trifft, heißt der Fußpunct dieser Geraden in der Ebene.

2. Der Durchschnitt zweier Ebenen ist eine gerade Linie.

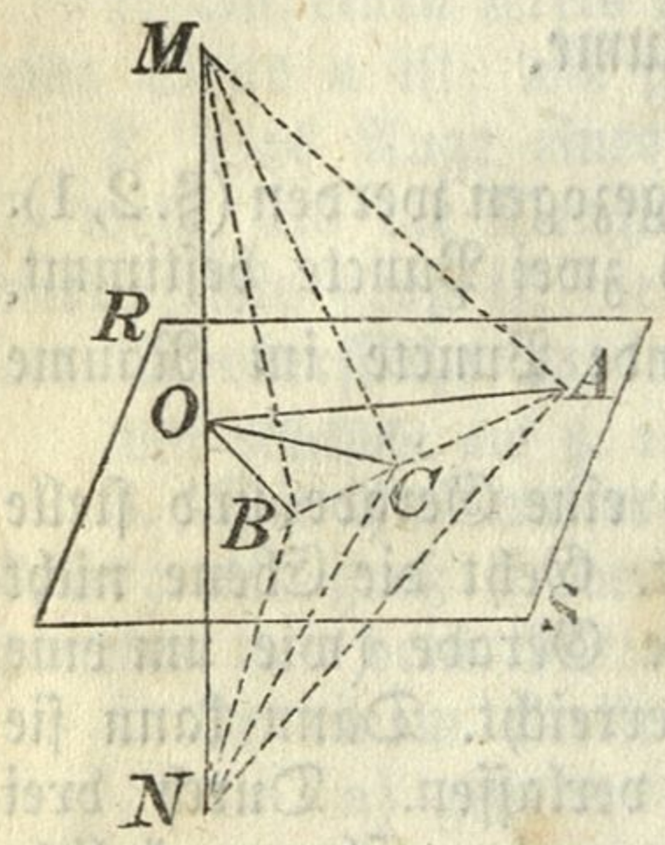
Wäre die Durchschnittslinie nicht gerade, so müßte es in derselben drei Puncte geben, die nicht in gerader Linie liegen. Dann müßten die drei Puncte in beiden Ebenen liegen, und daher diese gegen die Voraussetzung eine einzige Ebene bilden.

I. Lage der Geraden zu einer Ebene.

§. **201.** In Beziehung auf die Lage einer Geraden im Raume zu einer Ebene sind zwei Fälle möglich; entweder trifft die hinreichend verlängerte Gerade die Ebene in einem Puncte, sie ist gegen die Ebene *geneigt*; oder es trifft die unbegrenzt verlängerte Gerade mit der beliebig erweiterten Ebene nie zusammen, die Gerade ist mit der Ebene *parallel*.

§. **202.** *Steht eine Gerade auf zwei Geraden, welche durch ihren Fußpunct in einer Ebene gezogen werden, senkrecht, so steht sie auch auf jeder anderen durch ihren Fußpunct in dieser Ebene gezogenen Geraden senkrecht.*

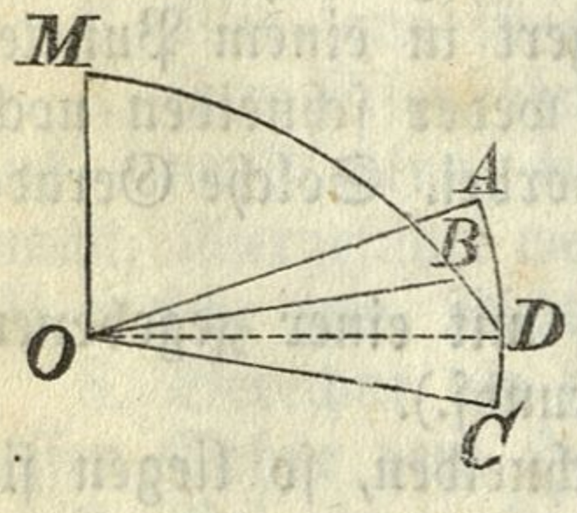
Fig. 165.



Beweis. Es seien (Fig. 165) OA und OB zwei Gerade in der Ebene RS, und $MO \perp OA$, $MO \perp OB$; ferner sei OC eine dritte in dieser Ebene durch O willkürlich gezogene Gerade. Um zu beweisen, daß $MO \perp OC$ sei, ziehe man AB, welche die OC in C schneidet, verlängere die Gerade MO unter die Ebene RS bis N, so daß $ON = OM$ ist, und ziehe MA und NA; dann ist $\triangle MOA \cong NOA$, folglich $MA = NA$. Zieht man MB und NB, so ist eben so $\triangle MOB \cong NOB$, daher $MB = NB$. Dann aber sind die Dreiecke MAB und NAB congruent, daher W. $MAB = NAB$. Zieht man endlich noch MC und NC, so ist auch $\triangle MAC \cong NAC$, daher $MC = NC$. Das $\triangle CMN$ ist also gleichschenklig, folglich $CO \perp MN$ (§. 55, 1), oder $MO \perp CO$.

§. **203.** *Steht eine Gerade auf drei anderen, die sich in einem Puncte schneiden, senkrecht, so liegen diese drei Geraden in einer Ebene.*

Fig. 166.



Beweis. Es sei (Fig. 166) OM senkrecht auf die Geraden OA, OB und OC. Man lege durch OA und OC die Ebene AOC, so muß auch OB in dieser Ebene liegen. Würde OB *über* der Ebene AOC liegen, so müßte, wenn man durch den Winkel MOB eine Ebene legt, welche die Ebene AOC in der Geraden OD durchschneidet, der Winkel $MOB < MOD$ sein; allein da OD in der Ebene AOC liegt, so ist nach §. 202 $MOD = R$, somit müßte $MOB < R$ sein, was der Voraussetzung $MOB = R$ widerspricht. Eben so kann gezeigt werden, daß OB nicht *unter* der Ebene AOC liegen könne.

§. **204.** *Steht eine Gerade auf jeder durch ihren Fußpunct in einer Ebene gezogenen Geraden senkrecht, so sagt man, die Gerade und die Ebene stehen auf einander senkrecht; im entgegengesetzten Falle sagt man, die Gerade und die Ebene stehen auf einander schief.*

Folgesatz. Steht eine Gerade auf zwei sich schneidenden Geraden senkrecht, so steht sie auch auf der durch dieselben bestimmten Ebene senkrecht (§. 202).

§. **205.** 1. *In einem Puncte einer Ebene kann auf diese nur eine Senkrechte errichtet werden.*

Ließen sich zwei Senkrechte errichten, so wären, wenn man durch beide eine

Ebene legt, aus demselben Puncte auf einer Geraden in einer Ebene zwei Gerade senkrecht, was nicht möglich ist (§. 38, 2).

2. Von einem Puncte außerhalb einer Ebene kann auf diese nur eine Senkrechte gezogen werden.

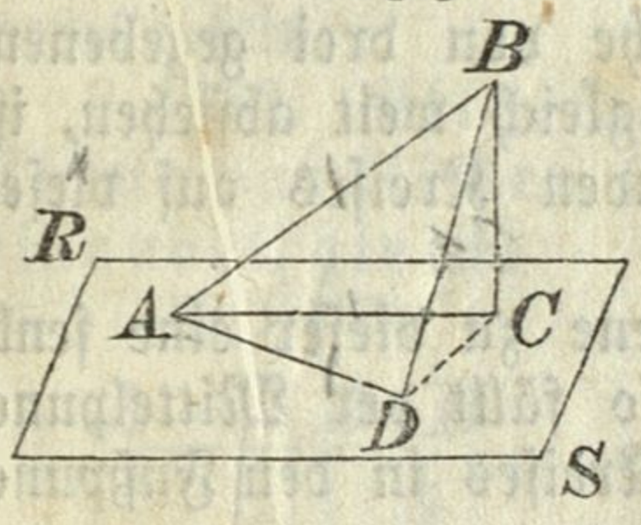
Ließen sich zwei Senkrechte ziehen, so müßten diese mit der Verbindungslinie ihrer Fußpuncte ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln bilden.

§. **206.** Zieht man von einem Puncte im Raume eine Senkrechte auf eine Ebene, so heißt der Fußpunct dieser Senkrechten die (orthogonale) Projection des Punctes auf die Ebene, und die Ebene heißt die Projectionsebene.

Unter der Projection einer Strecke auf eine Ebene versteht man die Gerade zwischen den Projectionen der Endpuncte der Strecke auf diese Ebene.

Liegt ein Endpunct A der Strecke AB (Fig. 167) in der Projectionsebene RS, so fällt dieser Punct mit seiner Projection zusammen; man darf daher nur von dem andern Eckpuncte B die BC senkrecht auf die Ebene RS ziehen und die Fußpuncte A und C durch die Gerade AC verbinden; diese ist dann die Projection der Strecke AB auf die Ebene RS.

Fig. 167.



Der Winkel BAC, den eine schiefe Gerade AB mit ihrer Projection AC auf eine Ebene RS bildet, heißt der Neigungswinkel dieser Geraden mit der Ebene.

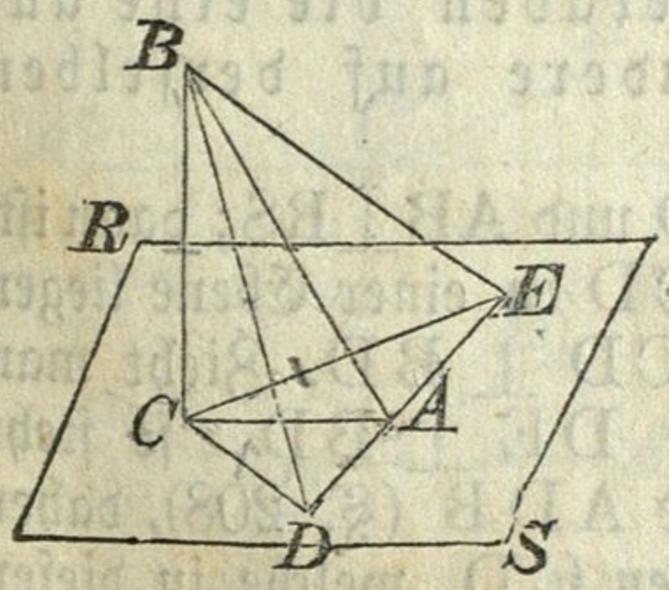
§. **207.** Der Neigungswinkel einer schiefen Geraden mit einer Ebene ist der kleinste aller Winkel, welche diese Gerade mit den durch ihren Fußpunct in der Ebene gezogenen Geraden bildet.

Ist $BC \perp RS$ (Fig. 167), so ist BAC der Neigungswinkel der Geraden AB mit der Ebene RS. Zieht man durch A in der Ebene BS außer der AC eine willkürliche Gerade $AD = AC$, ferner noch die CD und BD, so ist das Dreieck BCD bei C rechtwinklig, daher $BC < BD$. In den Dreiecken BAC und BAD ist nun $AB = AB$, $AC = AD$ und $BC < BD$, daher Winkel $BAC <$ Winkel BAD (§. 50).

Zusatz. Da die Senkrechte auf einer Ebene mit allen in derselben durch ihren Fußpunct gehenden Geraden rechte Winkel bildet, so kann der rechte Winkel als der Neigungswinkel einer Senkrechten mit einer Ebene angesehen werden.

§. **208.** Steht eine Gerade auf einer durch ihren Fußpunct in einer Ebene gezogenen Geraden senkrecht, so steht auch ihre Projection in dieser Ebene auf derselben Geraden senkrecht.

Fig. 168.



Es sei (Fig. 168) $AB \perp DE$, ferner $BC \perp$ Ebene RS, daher AC die Projection der AB auf RS.

Macht man $AD = AE$ und zieht BD und BE, so ist $\triangle BAD \cong BAE$, daher $BD = BE$. Zieht man noch CD und CE, so ist auch $\triangle BCD \cong BCE$, folglich $CD = CE$. Das $\triangle CDE$ ist also gleichschenklig, mithin $AC \perp DE$ (§. 55, 1).

Auf gleiche Weise kann auch die Umkehrung dieses Satzes bewiesen werden.

§. **209.** Zieht man von einem Puncte außerhalb einer Ebene zu dieser eine senkrechte und mehrere schiefe Gerade, so ist

1. die Senkrechte die kürzeste unter diesen Geraden;

2. zwei Schiefe, welche gleiche Projectionen auf die Ebene haben, sind einander gleich; und
3. von zwei Schiefen, welche ungleiche Projectionen auf die Ebene haben, ist diejenige die größere, welche die größere Projection hat.

Der Beweis wird, wenn man durch die geraden Linien Ebenen legt, ähnlich wie in §. 42 geführt.

Zusätze. 1. Von diesen drei Sätzen gelten auch die Umkehrungen.

2. Die Senkrechte von einem Puncte auf eine Ebene gibt die Entfernung dieses Punctes von der Ebene an.

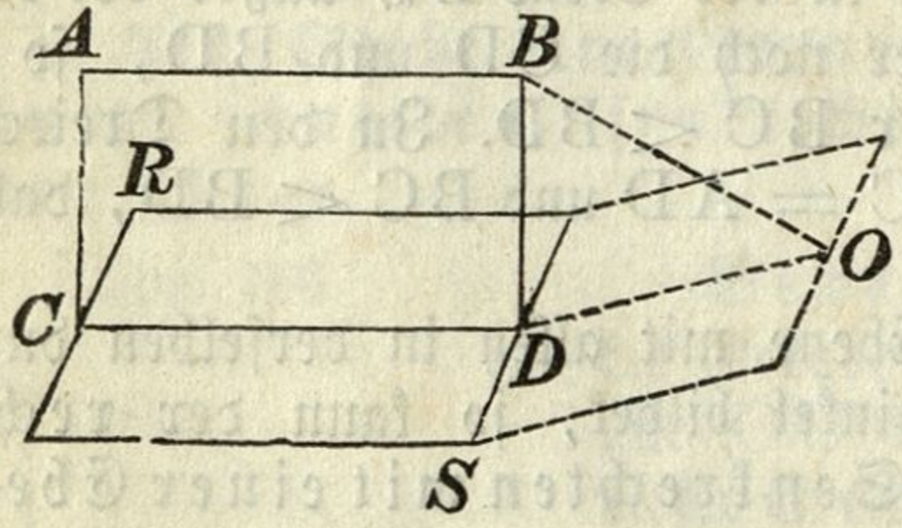
Folgesätze. 1. Der geometrische Ort aller Puncte, welche von den Endpuncten einer gegebenen Geraden im Raume gleich weit entfernt sind, ist die Ebene, welche durch die Mitte dieser Geraden auf dieselbe senkrecht gelegt wird.

2. Der geometrische Ort aller Puncte, welche von drei gegebenen, nicht in gerader Linie liegenden Puncten des Raumes gleich weit abstehen, ist die im Mittelpuncte des durch jene drei Puncte gehenden Kreises auf diesen errichtete Senkrechte.

3. Werden von einem Puncte außerhalb einer Ebene zu dieser eine senkrechte und drei gleich lange schiefe Gerade gezogen, so fällt der Mittelpunct des durch die drei Fußpuncte der Schiefen gehenden Kreises in den Fußpunct der Senkrechten.

§. **210.** 1. Ist eine gerade Linie mit einer in einer Ebene liegenden Geraden parallel, so ist sie mit der Ebene selbst parallel.

Fig. 169.



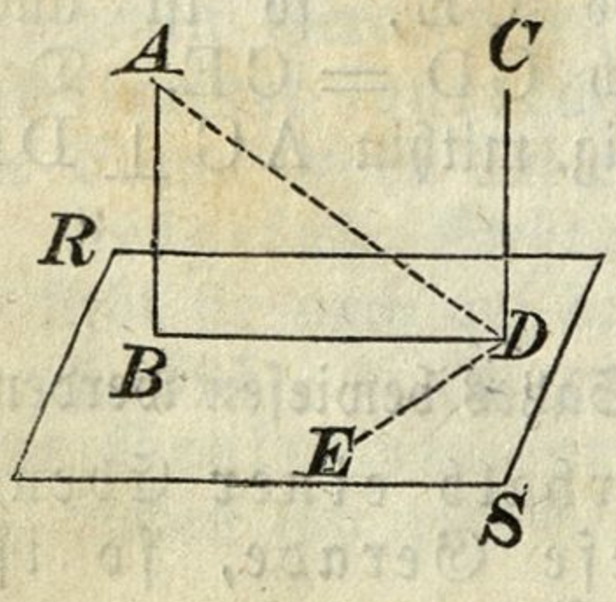
Es sei (Fig. 169) AB ∥ CD. Hätte AB mit der Ebene RS einen Punct O gemeinschaftlich, so müßte O, wenn man durch AB und CD eine Ebene ABCD legt, zugleich in dieser Ebene liegen; O wäre also beiden Ebenen gemeinschaftlich, d. h. er wäre ein Punct ihrer Durchschnittslinie CD, was der Voraussetzung widerspricht.

2. Ist eine Gerade mit einer Ebene parallel, so ist auch die Durchschnittslinie, die eine durch die Gerade gelegte Ebene mit der andern Ebene bildet, mit jener Geraden parallel.

Der Beweis wird ebenfalls indirect geführt.

§. **211.** 1. Steht von zwei parallelen Geraden die eine auf einer Ebene senkrecht, so steht auch die andere auf derselben senkrecht.

Fig. 170.



Es sei (Fig. 170) AB ∥ CD und AB ⊥ RS; dann ist, da die Parallelen AB und CD in einer Ebene liegen und AB ⊥ BD ist, auch CD ⊥ BD. Zieht man noch in der Ebene RS die DE ⊥ BD, so steht DE senkrecht auf der Ebene ADB (§. 208), daher auch senkrecht auf der Geraden CD, welche in dieser Ebene liegt. Somit ist CD ⊥ BD und CD ⊥ DE, folglich CD ⊥ Ebene RS.

2. Stehen zwei Gerade auf einer Ebene senkrecht, so sind sie parallel.

Wäre nicht die eine Senkrechte mit der andern parallel, so müßte sich durch ihren Fußpunct eine andere mit der zweiten parallele Gerade ziehen lassen; diese aber wäre nach 1. auf der Ebene senkrecht, was nicht möglich ist, weil in einem Puncte auf eine Ebene nur eine Senkrechte errichtet werden kann.

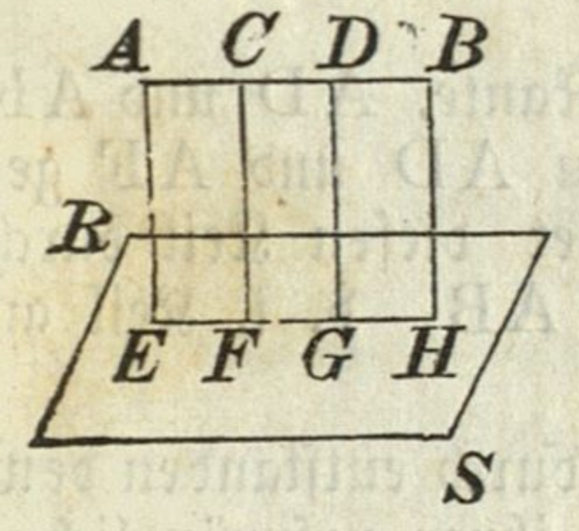
Folgesätze. a) Zwei gerade Linien, welche auf einer Ebene senkrecht stehen, liegen in einer Ebene (§. 199).

b) Zwei Gerade, deren jede einer dritten Geraden im Raume parallel ist, sind unter einander parallel.

Denkt man sich nämlich eine Ebene construirt, auf welcher die dritte Gerade senkrecht steht, so müssen nach Lehrsatz 1. auch die beiden ersten Geraden auf dieser Ebene senkrecht stehen, folglich nach Lehrsatz 2. unter einander parallel sein.

§. **212.** Alle Senkrechten, welche sich von einer mit einer Ebene parallelen Geraden auf diese Ebene ziehen lassen, sind einander gleich.

Fig. 171.



Es sei (Fig. 171) AB || RS. Fällt man von beliebig vielen Puncten der Geraden AB auf die Ebene RS die Senkrechten AE, CF, DG, BH, so sind diese parallel und liegen daher, da sie alle durch die Gerade AB gehen, in einer Ebene, welche durch AB und AE gelegt ist und die Ebene RS in der Geraden EH schneidet; es fallen daher die Fußpuncte E, F, G, H in die Gerade EH. Nun ist AB || EH, also ist AE = CF = DG = BH (§. 53, 1).

Die constante Länge einer solchen Senkrechten gibt die Entfernung der Geraden AB von der Ebene RS an.

§. **213.** Zwei Winkel im Raume, deren Schenkel paarweise parallel sind, sind a) gleich, wenn beide Paare der Schenkel in demselben, oder beide im entgegengesetzten Sinne parallel sind; dagegen b) Supplementwinkel, wenn zwei Schenkel in demselben, die beiden anderen aber im entgegengesetzten Sinne parallel sind.

Beweis. a) Es sei (Fig. 172) AC || A'A" und BC || B'B".

Macht man AC = A'C' und BC = B'C', und zieht die Geraden AA', BB', CC', AB und A'B', so ist dann AA' gleich und parallel mit CC', ferner BB' gleich und parallel mit CC' (§. 66, 2), mithin auch AA' gleich und parallel mit BB' (§. 211, Folges. b); folglich ist auch AB = A'B' (§. 66, 2). Dann aber ist △ACB ≅ A'C'B', daher Winkel ACB = A'C'B'.

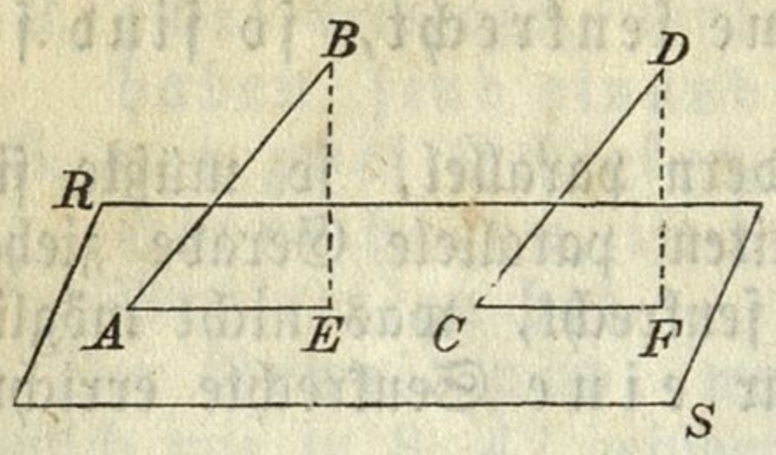
Fig. 172.

Wegen W. A'C'B' = A"C'B" ist auch W. ACB = A"C'B".

b) Nach a) ist ACB = A'C'B', aber A'C'B' + A"C'B' = 2R, folglich auch ACB + A"C'B' = 2R.

§. **214.** Zwei Parallele bilden mit einer Ebene gleiche Neigungswinkel.

Fig. 173.



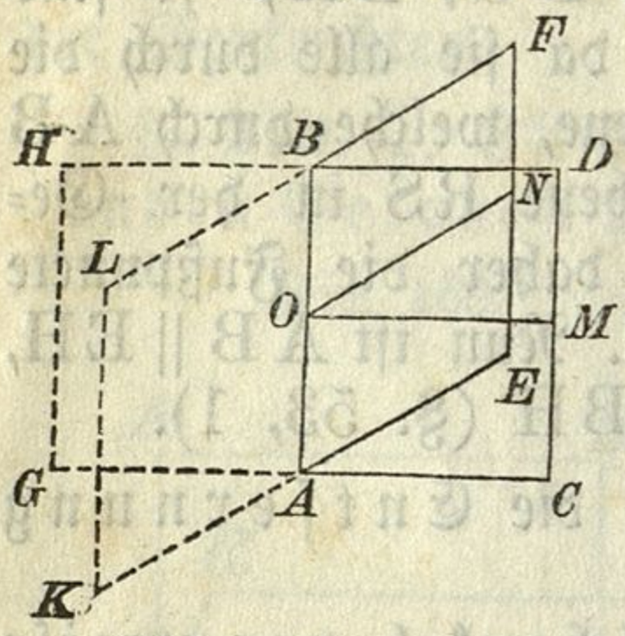
Beweis. Es sei AB || CD (Fig. 173), ferner BE ⊥ Ebene RS und DE ⊥ Eb. RS. In den Dreiecken ABE und CDF ist nun Winkel E = F = R, ferner B = D (§. 213), folglich auch A = C.

II. Lage der Ebenen gegen einander.

§. **215.** In Beziehung auf die gegenseitige Lage zweier Ebenen sind zwei Fälle möglich; entweder schneiden sich die hinreichend erweiterten Ebenen in einer geraden Linie, sie sind gegen einander geneigt; oder es treffen die beiden Ebenen, so weit man sie auch erweitern mag, nie zusammen, sie sind parallel.

§. **216.** Der Unterschied der Lagen zweier gegen einander geneigter Ebenen heißt ein Flächenwinkel oder Keil; die gemeinschaftliche Durchschnittslinie der Ebenen nennt man die Scheitellinie oder Kante und die beiden Ebenen selbst Schenkelfächen oder Seiten des Keiles.

Fig. 174.



In Fig. 174 sind AB die Kante, AD und AF die Seiten des von den Ebenen AD und AF gebildeten Keiles. Man bezeichnet diesen Keil durch D(AB)F oder auch bloß durch AB, d. i. Keil an der Kante AB.

Jeden Keil kann man sich dadurch entstanden denken, daß sich die eine Ebene aus ihrer ursprünglichen Lage um die Kante so lange gedreht hat, bis sie in die Lage der zweiten Schenkelfläche gelangt ist.

Wird die Ebene AF von der AD weg um die Kante AB weiter gedreht, bis sie in der Lage AH mit AD in eine und dieselbe Ebene fällt, so heißt F(AB)H der Nebenkeil von D(AB)F. Eben so wird analog, wie bei den Linienwinkeln, H(AB)L der Scheitelkeil von D(AB)F genannt.

§. **217.** Errichtet man in irgend einem Puncte O (Fig. 174) der Kante eines Keiles in den beiden Seitenebenen Senkrechte OM und ON auf die Kante, so hat der Winkel MON dieselbe Größe, in welchem Puncte der Kante man auch die Senkrechten errichten mag, da je zwei solche Winkel parallele Schenkel haben. Dieser constante Winkel heißt der Neigungswinkel der beiden Ebenen, welche den Keil bilden.

Je nachdem der Neigungswinkel zweier Ebenen ein rechter oder ein schiefer ist, heißen dieselben senkrecht oder schief auf einander stehend.

Zu gleichen Keilen gehören gleiche Neigungswinkel, und umgekehrt.

Beweis durch Deckung.

Man nimmt daher die Größe des Neigungswinkels der Seiten eines Keiles als Maß für die Größe des Keiles an.

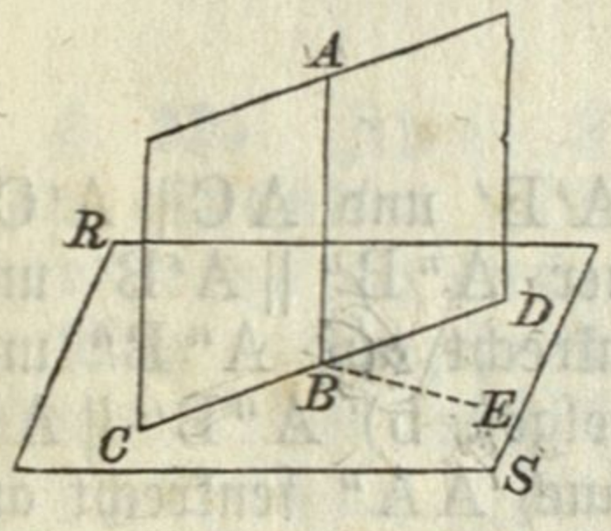
Folgesätze. 1. Der geometrische Ort aller Puncte, die von zwei gegebenen Ebenen gleich weit entfernt sind, ist die Ebene, welche den Neigungswinkel der beiden Ebenen halbirt.

2. Der geometrische Ort aller Puncte, die von drei gegebenen Ebenen gleich weit entfernt sind, ist die Durchschnittslinie der Ebenen, welche die Neigungswinkel der gegebenen Ebenen halbiren.

Zusatz. Zieht man von den Umfangspuncten einer gegebenen Figur ABCD.. im Raume Senkrechte Aa, Bb, Cc, Dd, .. auf eine Ebene RS, so heißt die durch die Fußpuncte dieser Senkrechten gelegte Figur abcd .. die Projection der gegebenen Figur ABCD auf diese Ebene.

§. 218. 1. Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so steht auch jede durch die Gerade gelegte Ebene auf der ersteren Ebene senkrecht.

Fig. 175.



Es sei (Fig. 175) AB ⊥ RS, so muß auch die Ebene ACD ⊥ RS sein. Zieht man in der Ebene RS die BE ⊥ CD, so ist ABE der Neigungswinkel der Ebenen ACD und RS; allein ABE = R, weil AB ⊥ RS; folglich ACD ⊥ RS.

Umkehrungen:

2. Stehen zwei Ebenen auf einander senkrecht, und zieht man in der einen eine Senkrechte auf die Durchschnittslinie, so steht diese Senkrechte auf der zweiten Ebene senkrecht (Fig. 175).

Es sei ACD ⊥ RS und AB ⊥ CD. Zieht man BE ⊥ CD, so ist ABE = R, weil ACD ⊥ RS; folglich steht AB auf CD und BE, und daher auch auf der Ebene RS senkrecht.

3. Stehen zwei Ebenen auf einander senkrecht, und errichtet man in einem Puncte der Durchschnittslinie auf die eine Ebene eine Senkrechte, so muß diese ganz in der anderen Ebene liegen.

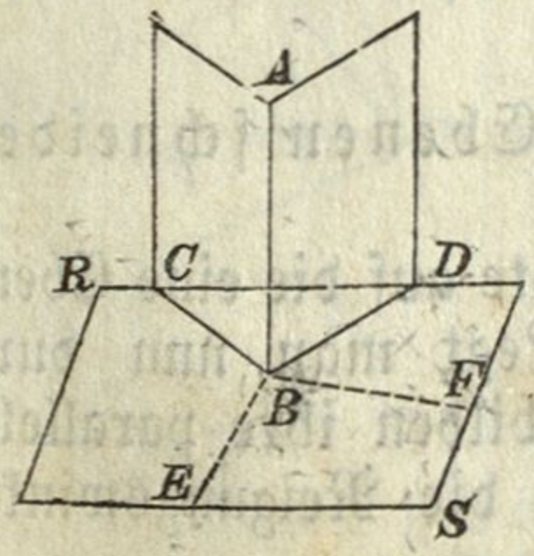
Denn fiele die in B (Fig. 175) auf RS errichtete Senkrechte nicht mit der in der Ebene ACD auf CD gezogenen Senkrechten BA zusammen, welche nach 2. auf RS senkrecht ist, so wären gegen §. 206, 1 aus B auf RS zwei Senkrechte möglich.

Folgesatz. Stehen von drei sich in einem Puncte schneidenden Geraden je zwei auf einander senkrecht, so stehen auch je zwei der durch sie gelegten Ebenen auf einander senkrecht.

Folgt aus 1. mit Zuziehung des Folgesatzes in §. 204.

§. 219. Stehen zwei sich schneidende Ebenen auf einer dritten senkrecht, so steht auch ihre Durchschnittslinie auf der dritten Ebene senkrecht.

Fig. 176.



Es sei (Fig. 176) AC ⊥ RS und AD ⊥ RS, so muß AB ⊥ RS sein. Zum Beweise ziehe man BE ⊥ BC und BF ⊥ BD; dann ist (§. 218, 2) BE ⊥ AC, daher auch BE ⊥ AB; ferner ist BF ⊥ AD, daher auch BF ⊥ AB; folglich AB ⊥ RS.

Folgesatz. Stehen von drei sich schneidenden Ebenen je zwei auf einander senkrecht, so stehen auch je zwei ihrer Durchschnittslinien auf einander senkrecht.

§. 220. 1. Werden zwei Ebenen von einer Geraden senkrecht geschnitten, so sind sie einander parallel.

Würden sich die beiden Ebenen schneiden, so müßten die Senkrechte und die Verbindungslinien ihrer Fußpuncte mit irgend einem Puncte des Durchschnittes beider Ebenen ein Dreieck bilden, worin zwei rechte Winkel vorkämen, was nicht möglich ist.

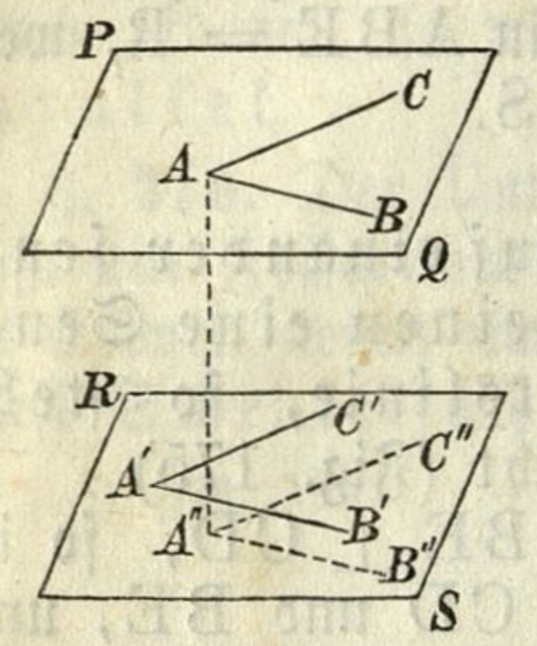
2. Wird eine von zwei parallelen Ebenen von einer Geraden senkrecht durchschnitten, so steht diese auch auf der anderen Ebene senkrecht.

Wird ebenfalls indirect bewiesen.

Folgesatz. Wenn zwei Ebenen sich schneiden, so kann keine gerade Linie auf beiden senkrecht stehen. (Folgt aus 1.)

§. **221.** Die Ebenen zweier Winkel im Raume, deren Schenkel parallel sind, sind einander parallel.

Fig. 177.



Es sei (Fig. 177) $AB \parallel A'B'$ und $AC \parallel A'C'$. Zieht man $AA'' \perp RS$, ferner $A''B'' \parallel A'B'$ und $A''C'' \parallel A'C'$, so ist AA'' senkrecht auf $A''B''$ und $A''C''$. Nun ist (§. 111, Folgef. b) $A''B'' \parallel AB$ und $A''C'' \parallel AC$; folglich ist auch AA'' senkrecht auf AB und AC, mithin auch auf PQ; folglich ist (§. 220) $PQ \parallel RS$.

§. **222.** 1. Sind zwei Ebenen einer dritten parallel, so sind sie auch unter einander parallel.

Denn errichtet man auf die dritte Ebene eine Senkrechte, so muß diese (§. 220, 2) auch auf den beiden ersteren Ebenen senkrecht stehen, folglich sind diese (§. 220, 1) einander parallel.

2. Durch einen Punct außerhalb einer Ebene kann nur eine mit dieser parallele Ebene gelegt werden.

Folgt indirect aus 1.

§. **223.** 1. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so sind die Durchschnittslinien parallel.

Beweis indirect.

2. Parallele Linien zwischen parallelen Ebenen sind einander gleich.

Der Beweis folgt aus §. 222 und §. 64, Folgef.

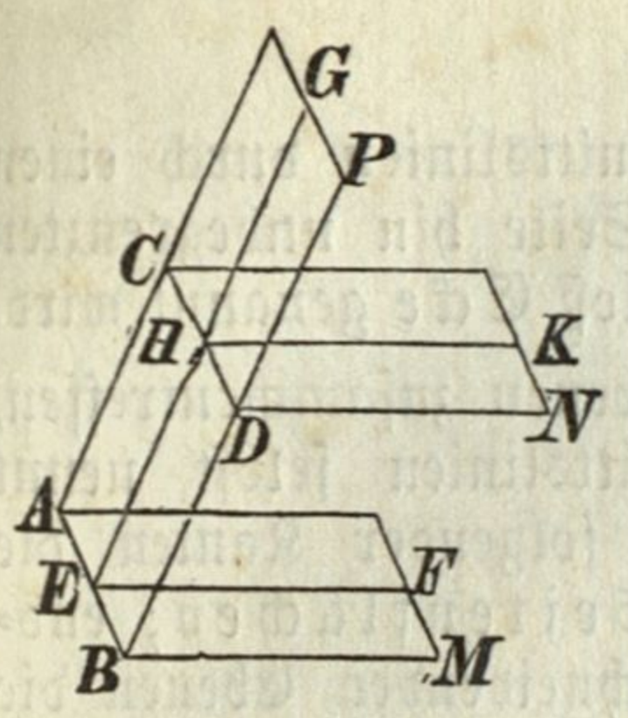
Folgesatz. Alle Senkrechten zwischen zwei parallelen Ebenen sind gleich. Die Länge einer solchen Senkrechten gibt den Abstand der beiden Ebenen an.

§. **224.** 1. Eine Gerade, welche zwei parallele Ebenen schneidet, bildet mit diesen gleiche Neigungswinkel.

Zieht man von einem Puncte der Geraden eine Senkrechte auf die eine Ebene, so steht dieselbe auch auf der andern Ebene senkrecht. Legt man nun durch die Senkrechte und die gegebene Gerade eine Ebene, so bilden ihre parallelen Durchschnitte in der Ebene mit der gegebenen Geraden die Neigungswinkel, welche als Gegenwinkel gleich sind.

2. Eine Ebene, welche zwei parallele Ebenen schneidet, bildet mit diesen gleiche Neigungswinkel.

Fig. 178.



Es sei (Fig. 178) die Ebene AM || CN. Man ziehe EF ⊥ AB und EG ⊥ AB, und lege durch FEG eine Ebene, welche die Ebene CN in der Geraden HK schneidet, dann sind, weil CD || AB und HK || EF, FEG und KHG die Neigungswinkel der Ebene AP gegen die Ebenen AM und CN, und zwar ist FEG = KHG.

3. Umgekehrt: Werden zwei Ebenen von einer dritten in parallelen Geraden und unter gleichen, nach derselben Seite gerichteten Neigungswinkeln geschnitten, so sind die Ebenen parallel.

Der Beweis ist auf §. 221 zurückzuführen.

§. **225**. Zwei Keile, deren Seiten paarweise parallel sind, sind einander gleich, wenn beide Seitenpaare in demselben, oder beide im entgegengesetzten Sinne parallel sind.

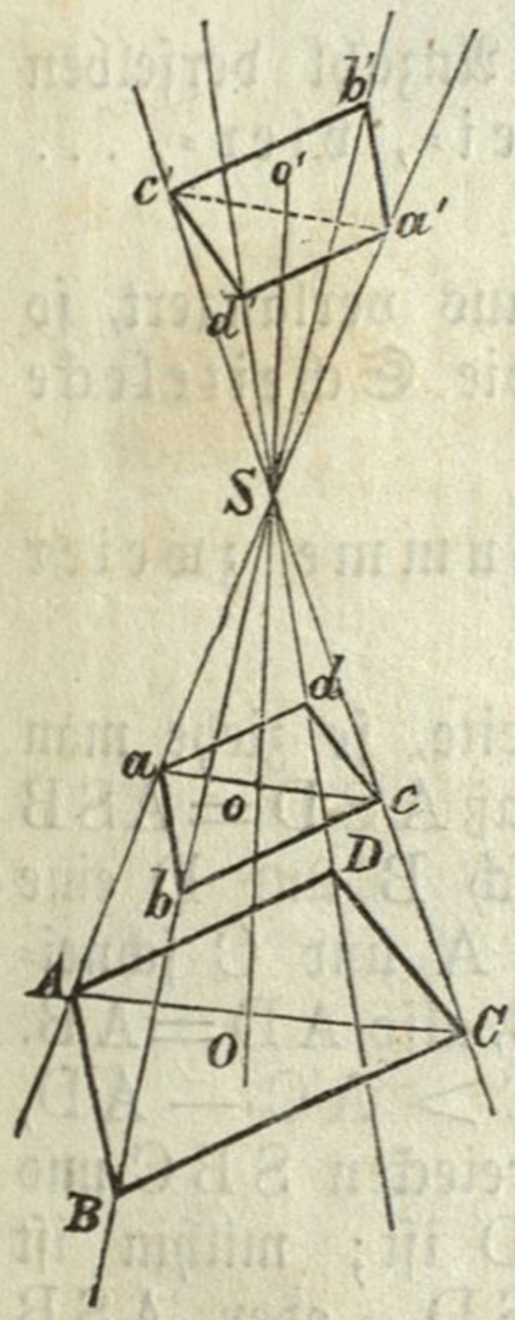
Man verlängere eine Seite des einen Keiles, so daß sie eine Seite des anderen Keiles durchschneidet, und wende dann §. 224, 2 an.

Folgesatz. Zwei gleiche Keile lassen sich, wenn man ihre Kanten parallel stellt, immer in eine solche Lage bringen, daß beide Paare ihrer Seiten in demselben, oder beide im entgegengesetzten Sinne parallel sind.

§. **226**. Proportionale Theilung der Strahlen durch parallele Ebenen.

1. Die Strahlen eines Strahlenbüschels im Raume werden durch je zwei parallele Ebenen proportionirt geschnitten.

Fig. 179.



Es sei Ebene ABCD || abcd (Fig. 179). Da SA und SB in derselben Ebene liegen, so ist (§. 90) SA : Sa = SB : Sb; ebenso ist SB : Sb = SC : Sc; folglich SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc = . .

2. Umgekehrt: Werden die Strahlen eines Strahlenbüschels von zwei Ebenen proportionirt geschnitten, so sind die beiden Ebenen parallel.

Ist SA : Sa = SB : Sb = SC : Sb = . ., so sind die Winkel ABC und abc, BCA und bca, . . gleich, und folglich (§ 91) AB || ab, BC || bc, CD || cd, . .; daher sind die durch diese Winkel gelegten Ebenen ABCD und abcd parallel (§. 221).

3. Werden die Strahlen eines Strahlenbüschels von zwei parallelen Ebenen geschnitten, so sind die entsprechenden von den Verbindungslinien der Durchschnittspuncte begrenzten Figuren ähnlich.

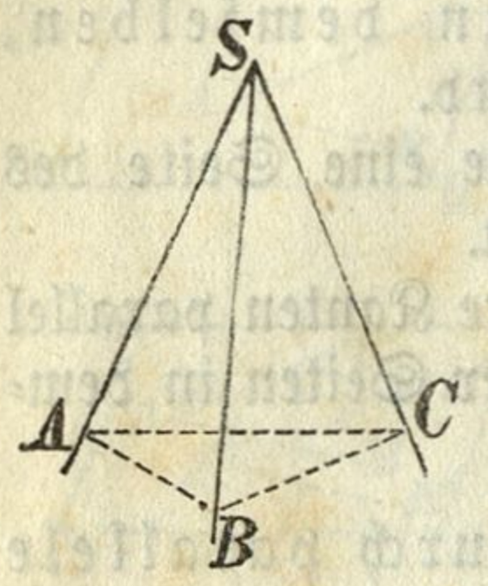
Ist Ebene ABCD || abcd, so ist (nach 1.) SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc = . ., daher (§. 91) AB || ab, BC || bc und CD || cd . . Daraus folgt (§. 92) AB : Ab = SA : Sa und BC : bc = SA : Sa, daher auch AB : ab = BC : bc. Ebenso folgt BC : bc = CD : cd, u. s. w. Ferner ist W. A = a, W. B = b, W. C = c u. s. w.; somit Figur ABCD ∾ abcd.

III. Körperliche Ecken.

§. **227.** Drei oder mehrere Ebenen, deren Durchschnittslinien durch einen und denselben Punct gehen, schließen einen nach einer Seite hin unbegrenzten Raum ein, welcher eine körperliche Ecke, oder auch bloß Ecke genannt wird.

Der Punct, in welchem die Durchschnittslinien der Ebenen zusammentreffen, heißt der Scheitel oder die Spitze; die Durchschnittslinien selbst nennt man die Kanten; die Winkel je zweier auf einander folgender Kanten die Kantenwinkel oder Seiten und ihre Ebenen die Seitenflächen; endlich die Neigungswinkel je zweier in einer Kante sich schneidenden Ebenen die Flächenwinkel, auch bloß Winkel der Ecke.

Fig. 180.



Ist (Fig. 180) S der Scheitel der Ecke und sind SA, SB, SC deren Kanten, so bezeichnet man die Ecke durch SABC; die Seiten bezeichnet man entweder, wie die ebenen Winkel, durch ASB, ASC, BSC, oder auch durch (AB), (AC), (BC).

Jede Ecke wird einerseits durch den Scheitel und die Seitenflächen begrenzt, andererseits aber ist sie völlig unbegrenzt. Eine Ecke theilt also den Raum in zwei theilbegrenzte Räume und es gehört daher zu jeder Ecke immer noch eine zweite, deren Flächenwinkel nach dem andern theilbegrenzten Raume hin liegen. Man nennt die eine die Außenecke der andern.

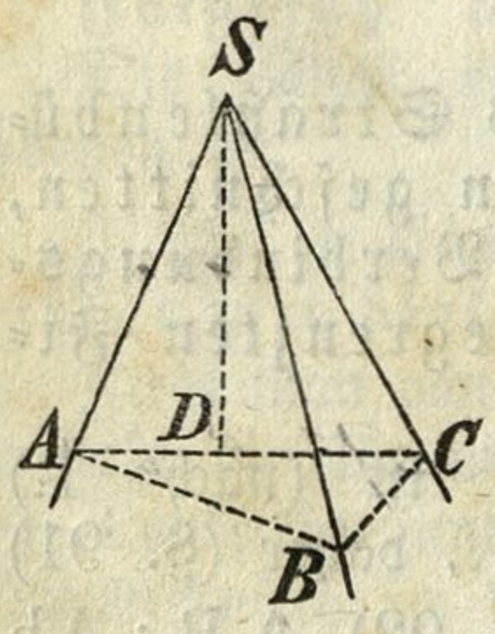
Hier sollen nur solche Ecken betrachtet werden, deren Kanten- und Flächenwinkel hohl sind.

Eine Ecke hat so viele Kanten als Seiten. Nach der Anzahl derselben unterscheidet man drei-; vier- ... nkantige, oder drei-, vier-, ... nseitige Ecken.

Wenn man alle Kanten einer Ecke über den Scheitel hinaus verlängert, so heißt die Ecke, welche die Verlängerungen zu Kanten hat, die Scheitelecke der ersteren.

§. **228.** In jeder dreiseitigen Ecke ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte (Fig. 181).

Fig. 181.



Beweis. Ist (AC) die größte Seite, so ziehe man in der Ebene ASC die Gerade SD so, daß $ASD = ASB$ wird, mache $SD = SB$ und lege durch B und D eine beliebige, die Kanten SA und SC in A und C schneidende Ebene. Dann ist $\triangle ASD \cong ASB$, also $AD = AB$. Da nun $BC > AC - AB$ oder $BC > AC - AD$, d. i. $BC > CD$ ist, so ist in den Dreiecken SBC und SCD (§. 50) Winkel $BSC > CSD$ ist; mithin ist auch $ASB + BSC > ASD + CSD$, oder $ASB + BSC > ASC$, d. i.

$$(AB) + (BC) > (AC).$$

§. **229.** In jeder Ecke ist die Summe aller Seiten kleiner als vier Rechte.

Beweis. Schneidet man die Kanten einer n seitigen Ecke durch eine Ebene, so erhält man n Seitendreiecke, deren Winkel zusammen $2nR$, und als Durchschnittsfigur ein neck, dessen Winkel $2nR - 4R$ betragen. Jeder Eckpunct des neckes ist der Scheitel einer dreiseitigen Ecke. Bezeichnet man nun die Summe aller Kantenwinkel am Scheitel der gegebenen Ecke durch S und die Summe der Winkel an den Grundlinien der Dreiecke durch S', so ist

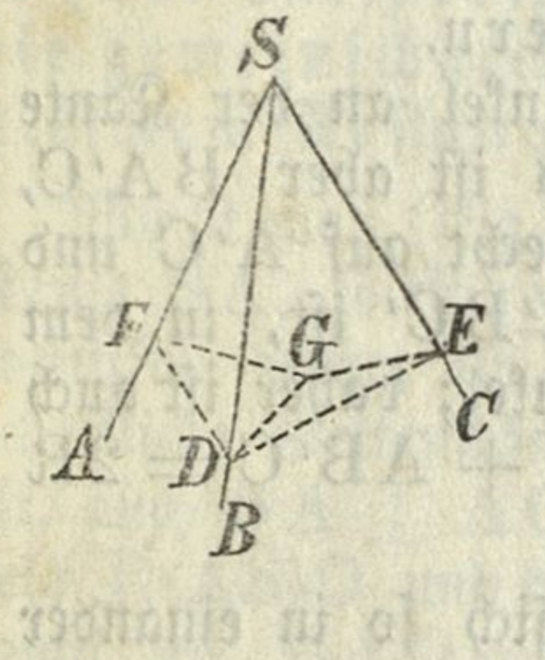
$$S + S' = 2nR,$$
$$S' > 2nR - 4R \quad (§.\ 228),$$

daher, wenn man die zweite Ungleichung von der ersten Gleichung subtrahirt,

$$S < 4R.$$

§. **230.** 1. In jeder dreiseitigen Ecke liegen gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

Fig. 182.

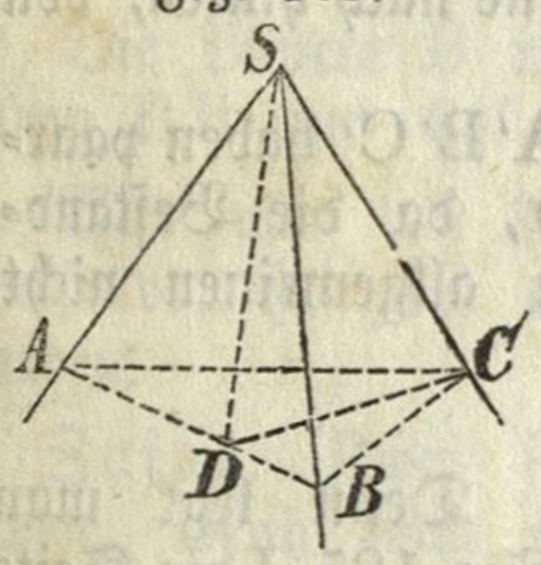


Es sei (Fig. 182) $A(SC)B = B(SA)C$. Man ziehe von einem Puncte D in der Kante SB die $DG \perp ASC$, $DE \perp SC$ und $DF \perp SA$ und ziehe ferner GE und GF; dann ist (§. 208) $GE \perp SC$ und $GF \perp SA$, also sind DEG und DFG die Winkel, welche nach der Voraussetzung gleich sind. Die rechtwinkligen Dreiecke DGE und DGF sind demnach congruent, daher $DE = DF$; somit ist auch $\triangle SED \cong SFD$, also Winkel $DSE = DSF$, d. i.

$$(DE) = (DF).$$

2. In jeder dreiseitige Ecke liegt dem größeren Winkel auch eine größer Seite gegenüber.

Fig. 183.



Es sei (Fig. 183) $A(SC)B > B(SA)C$. Man lege durch SC eine Ebene CSD so, daß sie mit ASC einen Flächenwinkel bilde, welcher $B(SA)C$ gleich ist; dann hat die dreiseitige Ecke SACD zwei gleiche Flächenwinkel, also sind nach 1. auch die ihnen gegenüberliegenden Seiten (AD) und (CD) gleich. Nun ist in der dreiseitigen Ecke SBCD, $(BD) + (CD) > (BC)$; folglich ist auch $(BD) + (AD) > (BC)$, oder

$$(AB) > (BC).$$

Umkehrungen.

3. In jeder dreiseitigen Ecke liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber.

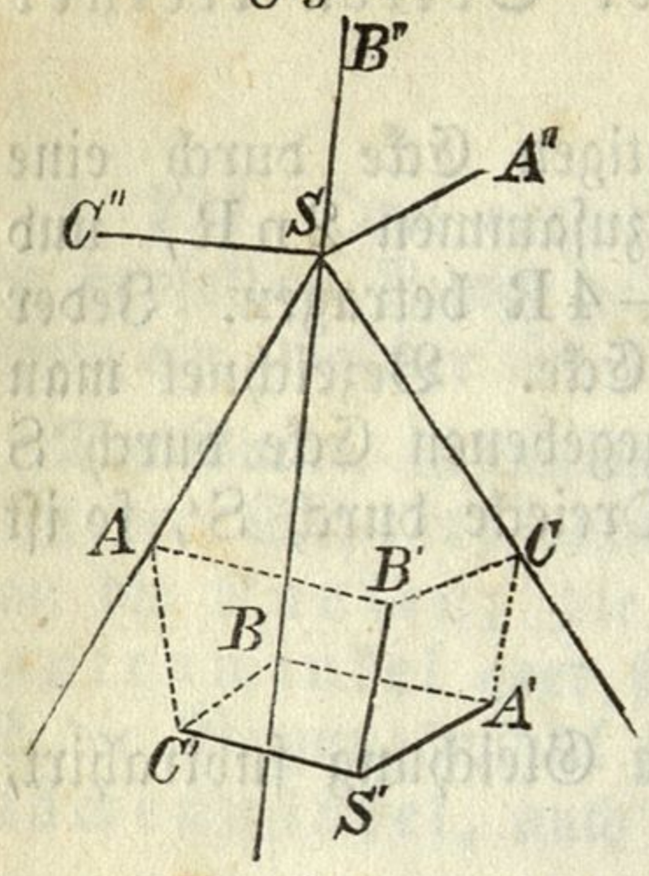
Der Beweis wird indirect mit Zuziehung von 2. geführt.

4. In jeder dreiseitigen Ecke liegt der größeren Seite auch ein größerer Winkel gegenüber.

Der Beweis wird indirect mit Zuziehung von 1. und 2. geführt.

§. **231.** Zieht man von einem beliebigen Puncte in einer Ecke auf jede Seitenfläche derselben eine senkrechte Gerade, so bilden diese Senkrechten die Kanten einer neuen Ecke, welche die Polarecke der gegebenen heißt.

Fig. 184.



Ist (Fig. 184) S' ein Punct im Innern der Ecke SABC, und S'A' ⊥ SBC, S'B' ⊥ SAC, S'C' ⊥ SAB, so ist S'A'B'C' die Polarecke der Ecke SABC.

Am bequemsten wird die Polarecke construirt, indem man im Scheitel der gegebenen Ecke auf deren Seitenflächen senkrechte Gerade nach den entgegengesetzten Seiten der den Seitenflächen gegenüberliegenden Kanten errichtet; wie SA"B"C".

1. Jede Ecke ist Polarecke zu ihrer Polarecke.

Da S'A' ⊥ SBC, so ist auch die Ebene S'A'CB' ⊥ SBC; da S'B' ⊥ SAC, so ist auch die Ebene S'A'CB' ⊥ SAC; somit ist auch die Durchschnittslinie SC der Ebenen SBC und SAC senkrecht auf der Ebene S'A'CB' (§. 219). Ebenso folgt, daß die Kante SB ⊥ S'A'BC' und SA ⊥ S'B'AC' ist.

2. Sind zwei Ecken Polarecken zu einander, so sind die Seiten der einen Supplemente der Winkel der andern.

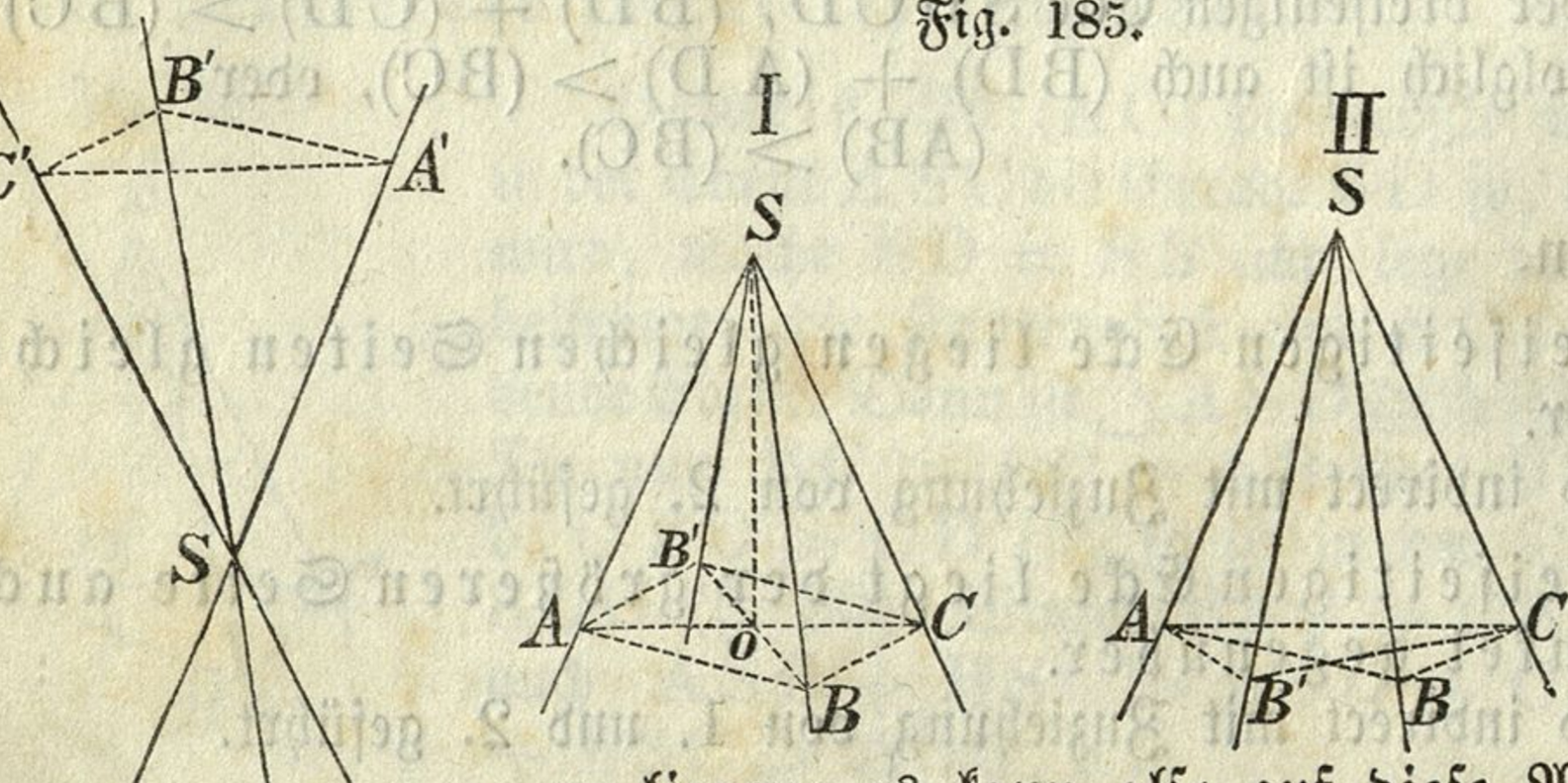
Der Seite BSC der Ecke SABC entspricht der Winkel an der Kante S'A' der Polarecke S'A'B'C'. Das Maß dieses Winkels ist aber BA'C, da S'A' senkrecht auf der Ebene SBC, daher auch senkrecht auf A'C und A'B ist. Nun sind, da SC ⊥ S'A'CB' und SB ⊥ S'A'BC' ist, in dem Vierecke SBA'C die Winkel SCA' und SBA' rechte Winkel; daher ist auch BSC + BA'C = 2R. Ebenso wird bewiesen, daß ASC + AB'C = 2R und ASB + AC'B = 2R ist.

§. **232.** Zwei Ecken heißen congruent, wenn sie sich so in einander legen lassen, daß sich alle ihre Kanten und Seitenflächen decken.

Sollen zwei Ecken zur Deckung gebracht werden können, so müssen in denselben nicht nur alle Seiten und Winkel paarweise gleich sein, sondern diese auch in demselben Sinne (von rechts nach links, von vorne nach hinten, von unten nach oben) aufeinander folgen.

Die Ecke SABC (Fig. 185) und ihre Scheitelecke SA'B'C' haben paarweise gleiche Seiten und gleiche Winkel; sie können jedoch, da die Bestandtheile im entgegengesetzten Sinne auf einander folgen, im allgemeinen nicht zur Deckung gebracht werden.

Fig. 185.



Denn legt man Fig. 185, I die Seite (A'C') so auf die ihr gleiche Seite (AC), daß SA' auf SA, SC' auf SC fällt, so kommen die Kanten SB' und SB auf entgegengesetzten Seiten der Ebene SAC zu liegen; es kann also auf diese Art eine Deckung nicht stattfinden.

Legt man aber (Fig. 185, II) die gleichen Seiten (A'C') und (AC) so auf einander, daß SA' auf SC und SC' auf SA fällt, so kommen die Kanten SB' und SB zwar

auf derselben Seite der Ebene SAC, jedoch neben einander zu liegen; es können daher die Ecken auch in dieser Lage nicht zur Deckung gebracht werden, wenn nicht zufällig die Flächenwinkel B(AS)C und A(CS)B, folglich auch B'(A'S)C' und A'(C'S)B' einander gleich sind.

Zwei Ecken, in denen alle Seiten und Winkel gleich sind, jedoch im entgegengesetzten Sinne auf einander folgen, heißen symmetrisch-gleich.

Folgesätze. 1. Jede Ecke ist ihrer Scheitelecke symmetrisch-gleich.

2. Zwei Ecken, welche mit einer dritten symmetrisch-gleich sind, sind unter einander congruent.

3. Ist von zwei congruenten Ecken die eine mit einer dritten symmetrisch-gleich, so ist es auch die andere.

§. **233.** Legt man zwei symmetrisch-gleiche Ecken so an einander, daß sie eine Seitenfläche gemeinschaftlich haben und sie selbst auf entgegengesetzten Seiten derselben liegen, so liegen je zwei entsprechende Puncte der beiden Ecken in derselben auf die gemeinschaftliche Seitenfläche senkrechten Geraden und in gleichem Abstande von dieser Fläche.

Macht man (Fig. 185, I) SB = SB' und zieht BA und B'A' senkrecht auf die Kante SA, so ist $\triangle SAB \cong SA'B'$, daher SA = SA', d. i. A' ist mit A identisch; ferner ist auch AB = AB'. Zieht man BB', welche die gemeinschaftliche Seitenfläche SAC in O schneidet, so ist, da SA $\perp$ Ebene BAB' ist, auch SA $\perp$ AO. Der Winkel BAO ist also das Maß des Flächenwinkels B(AS)O und der Winkel B'AO das Maß des Flächenwinkels B'(AS)O, somit W. BAO = B'AO; man hat dann $\triangle BAO \cong B'AO$, folglich BO = B'O, und W. AOB = AOB', d. i. BB' $\perp$ AO. Es ist aber in dem gleichschenkligen Dreiecke SBB', dessen Grundlinie in O halbirt wird, auch BB' $\perp$ SO, somit BB' $\perp$ Ebene SAC.

Die Puncte B und B' liegen also in derselben auf SAC senkrechten Geraden BB' und haben von SAC gleichen Abstand BO = B'O.

Was von den Puncten B und B' bewiesen wurde, kann auf gleiche Weise von je zwei anderen entsprechenden Puncten der beiden Ecken gezeigt werden.

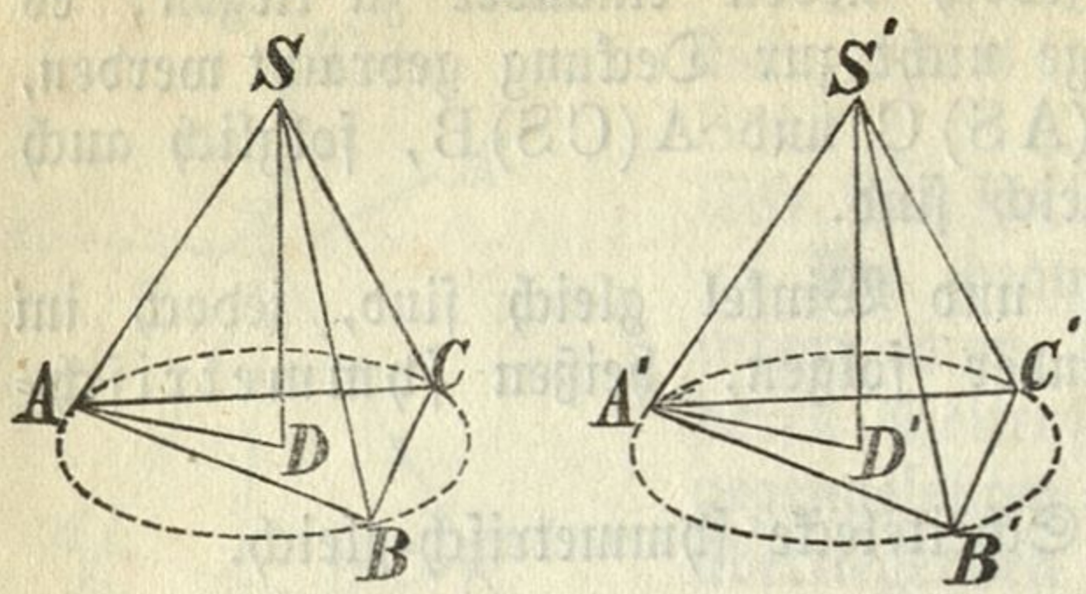
Zusatz. Zwei symmetrisch-gleiche Ecken in der hier angegebenen Lage stehen, wenn man ihre gemeinschaftliche Seitenfläche als eine Spiegelfläche annimmt, in derselben Beziehung zu einander, wie ein Gegenstand und sein Spiegelbild.

234. Zwei dreiseitige Ecken, in denen

1. zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel,
2. zwei Winkel und die zwischen ihnen liegende Seite,
3. alle drei Seiten,
4. alle drei Winkel

paarweise gleich sind, sind congruent oder symmetrisch-gleich, je nachdem die gleichen Bestandtheile in demselben oder im entgegengesetzten Sinne auf einander folgen.

Fig. 186.



Beweis zu 1. Es sei (Fig. 186) $(AB) = (A'B')$, $(BC) = (B'C')$ und $A(BS)C = A'(B'S')C'$. Man lege die beiden Ecken so in einander, daß die Scheitel S' und S, die Kanten S'B' und SB, und die Seiten (A'B') und (AB) auf einander fallen; dann muß wegen der Gleichheit der Flächenwinkel auch die Seitenfläche B'S'C' auf BSC, und weil die Seiten (B'C') und (BC) gleich sind, S'C' auf SC, und endlich auch A'S'C' auf ASC fallen, da durch zwei sich schneidende Gerade nur eine Ebene möglich ist. Folglich decken sich die beiden Ecken.

Folgen die gleichen Bestandtheile im entgegengesetzten Sinne auf einander, so ist die eine Ecke mit der Scheitelecke der andern congruent und daher (§. 232, Folges. 1 und 3) mit der andern selbst symmetrisch-gleich.

Beweis zu 2. Denkt man sich zu beiden Ecken die Polarecken construirt, so müssen in diesen (§. 242) zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel bezüglich gleich, folglich nach 1. sie selbst congruent sein. Dann sind aber in denselben alle entsprechenden Bestandtheile folgeweise gleich und es muß daher (§. 242) auch in den gegebenen Ecken dasselbe der Fall sein; mithin sind diese nach 1. congruent.

Der Beweis für die symmetrische Gleichheit, wie bei 1.

Beweis zu 3. Es sei (Fig. 186) $(AB) = (A'B')$, $(AC) = (A'C')$ und $(BC) = (B'C')$. Macht man $SA = SB = SC = S'A' = S'B' = S'C'$ und legt durch die Puncte A, B, C und A', B', C' die Ebenen ABC und A'B'C'; zieht ferner $SD \perp ABC$, $S'D' \perp A'B'C'$ und beschreibt um die Dreiecke ABC und A'B'C' Kreise, so fallen deren Mittelpuncte in die Fußpuncte D und D' der Senkrechten SD und S'D' (§. 209, Folges. 3). Da nun $\triangle ASB \cong A'S'B'$, so ist $AB = A'B'$; eben so folgt $AC = A'C'$ und $BC = B'C'$, und somit sind die Dreiecke ABC und A'B'C' congruent; daher müssen auch die um dieselben beschriebenen Kreise gleich sein, folglich der Halbmesser $AD = A'D'$. Aus der Congruenz der rechtwinkligen Dreiecke ADS und A'D'S' folgt endlich $DS = D'S'$.

Legt man nun die Ecke S'A'B'C' so in die Ecke SABC, daß sich die congruenten Dreiecke A'B'C' und ABC decken, so werden auch die um sie beschriebenen Kreise, folglich auch ihre Mittelpuncte D' und D auf einander fallen; da ferner in D auf ABC nur eine Senkrechte möglich ist, so fällt D'S' in die Richtung DS und wegen $D'S' = DS$ auch der Punct S' in S. Folglich fallen auch die Kanten und Seitenflächen der Ecken auf einander.

Der Beweis für die symmetrische Gleichheit, wie bei 1.

Beweis zu 4. Mittelst der Polarecken, wie bei 2., mit Zuziehung von 3.

Zusatz. Die Congruenz und Symmetrie mehrseitiger Ecken wird auf die der dreiseitigen zurückgeführt, indem man durch entsprechende Kanten Durchschnittsebenen legt und so dreiseitige Ecken erhält.

IV. Aufgaben.

§. 235. Constructionsaufgaben.

1. Von einem gegebenen Puncte im Raume auf eine gegebene Gerade eine Senkrechte zu fällen.

Man lege durch den Punct und die Gerade eine Ebene und fälle darin von dem gegebenen Puncte eine Senkrechte auf die gegebene Gerade.

2. Durch einen gegebenen Punct im Raume mit einer gegebenen Geraden eine Parallele zu ziehen.

Die Auflösung ist der früheren analog.

3. Durch einen gegebenen Punct in einer Geraden auf diese eine senkrechte Ebene zu legen (§. 204, Folgef.).

4. Von einem Puncte außerhalb einer Ebene auf diese eine Senkrechte zu fällen (Fig 168).

Man ziehe in der Ebene RS eine beliebige Gerade DE, fälle in der durch B und DE gelegten Ebene von B auf DE die Senkrechte BA; in A errichte man in der Ebene RS auf DE die Senkrechte AC und ziehe darauf in der durch den Winkel BAC gelegten Ebene von B aus die Senkrechte BC; so steht BC senkrecht auf der Ebene RS.

Denn DE steht nach der Construction senkrecht auf der Ebene BAC, daher ist Ebene RS $\perp$ BAC (§. 218, 1), mithin ist auch BC $\perp$ Ebene RS (§. 218, 2).

5. Auf eine Ebene RS (Fig. 170) in einem Puncte D derselben eine Senkrechte zu errichten.

Man fälle von einem beliebigen Puncte A außerhalb der Ebene RS auf diese eine Senkrechte AB, lege durch AB und D eine Ebene und ziehe in dieser durch D die DC $\parallel$ AB, so ist DC die gesuchte Senkrechte (§. 211, 1).

6. Den Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene zu bestimmen. (§. 206.)

7. Durch einen Punct außerhalb einer Ebene mit dieser eine parallele Gerade zu ziehen (§. 210, 1).

8. Durch eine gegebene Gerade in einer Ebene eine auf diese senkrechte Ebene zu legen (§. 235, 5 und §. 218, 1).

9. Durch einen Punct außerhalb einer Ebene mit dieser eine parallele Ebene zu legen (§. 220, 1 oder §. 221).

V. Uebungssätze und Uebungsaufgaben.

§. 236. Uebungssätze.

1. Die Projection einer schiefen Geraden auf eine Ebene ist um so kleiner, je größer ihr Neigungswinkel ist.

2. Alle Puncte einer Ebene, welche von einem außerhalb dieser Ebene liegenden Puncte gleich weit abstehen, liegen auf der Peripherie eines Kreises (§. 209, Folgef. 3).

3. Jeder Punct einer Ebene, welche einen Keil halbirt, steht von den Seiten des letzteren gleich weit ab.

4. Jeder Punct einer Ebene, welche durch die Halbirungslinie des Winkels zweier Geraden senkrecht auf die Ebene dieses Winkels gelegt ist, steht von den beiden Geraden gleich weit ab.

5. Sind zwei sich schneidende Gerade einer Ebene parallel, so ist auch die durch diese Geraden gelegte Ebene mit der ersteren Ebene parallel (§. 221).

6. Verbindet man die Durchschnittspuncte, in denen zwei parallele Ebenen von parallelen Geraden geschnitten werden, durch Gerade, so erhält man zwei congruente Vielecke.

§. **237.** Constructionsaufgaben.

1. Durch eine von zwei sich kreuzenden Geraden eine Ebene zu legen, welche der anderen parallel ist (§. 210, 1).

2. Durch einen Punct im Raume eine Ebene zu legen, welche zwei sich kreuzenden Geraden parallel ist (§. 210, 1).

3. Eine Gerade zu construiren, welche auf jeder von zwei sich kreuzenden Geraden AB und CD senkrecht steht.

Man lege durch AB eine Ebene RS, welche mit CD parallel ist, und durch CD eine Ebene, welche auf RS senkrecht steht.

Die Gerade, welche auf zwei sich kreuzenden Geraden senkrecht steht, gibt den Abstand dieser Geraden an.

4. Von einem gegebenen Puncte einer Ebene zu dieser eine Gerade unter einem gegebenen Neigungswinkel zu ziehen.

Man errichte in einem beliebigen andern Puncte der Ebene darauf eine Senkrechte, lege durch diese und den gegebenen Punct eine Ebene und construire in derselben an den gegebenen Punct den gegebenen Neigungswinkel so, daß der eine Schenkel in der gegebenen Ebene liegt; der zweite Schenkel ist die verlangte schiefe Gerade.

5. Eine Ebene unter einem gegebenen Neigungswinkel gegen eine gegebene Ebene zu construiren.

Man errichte auf eine Gerade AB der Ebene in einem beliebigen Puncte C eine Senkrechte in dieser Ebene und dann eine zweite Senkrechte auf die Ebene, und construire in derselben an C den gegebenen Neigungswinkel so, daß der eine Schenkel in die gegebene Ebene fällt; die durch den zweiten Schenkel und die Gerade AB gelegte Ebene ist die verlangte Ebene.

6. Den Flächenwinkel zweier Ebenen zu halbiren.

7. Durch einen Punct außerhalb zweier sich schneidender Ebenen eine dritte Ebene zu legen, welche auf den beiden ersteren senkrecht steht (§. 218, 1).

8. In einer Ebene eine Gerade so zu bestimmen, daß sie von zwei außerhalb der Ebene liegenden Puncten gleich weit absteht.

9. Durch einen gegebenen Punct eine Ebene zu legen, welche von drei andern Puncten gleich weit absteht.

Man ziehe von dem ersten Puncte auf die durch die drei letzten Puncte bestimmte Ebene eine Senkrechte und lege durch denselben Punct eine Ebene, welche mit der früheren Ebene parallel ist. (§. 223, Folges.)

10. Aus den drei Seiten einer dreiseitigen Ecke einen Winkel derselben durch Construction in einer Ebene zu finden.

Vergl. Construction zu §. 230, 1.

11. Aus den drei Winkeln einer dreiseitigen Ecke eine Seite derselben zu construiren.

Die Construction mit Hilfe der Polarecke nach §. 231 auf die Aufg. 10 zurückzuführen.

Zweiter Abschnitt.

Von den Körpern im Allgemeinen.

I. Ebenflächige Körper oder Polyeder.

§. **238.** Ein Körper, welcher von lauter Ebenen begrenzt wird, heißt ein ebenflächiger Körper oder ein Polyeder. Zur Begrenzung eines Polyeders sind wenigstens vier Ebenen erforderlich. Die einzelnen Grenzebenen heißen die Flächen des Polyeders und bilden dessen Oberfläche; die Durchschnittslinien der Flächen heißen die Kanten und die an den Endpuncten der Kanten liegenden, von den zugehörigen Flächen gebildeten Ecken die Ecken des Polyeders.

§. **239.** 1. In jedem Polyeder ist die Anzahl W aller Kantenwinkel doppelt so groß als die Anzahl K aller Kanten.

Denn jedes Polyeder hat so viele Winkel, als die Anzahl der Seiten aller Flächen beträgt; diese Anzahl ist aber doppelt so groß als die Anzahl der Kanten, da jede Kante in zwei anliegenden Flächen als Seite vorkommt; folglich

$$W = 2K.$$

Folgesatz. In jedem Polyeder ist die Anzahl der Flächen von ungerader Seitenzahl eine gerade.

2. In jedem Polyeder ist die dreifache Anzahl F der Flächen, ebenso die dreifache Anzahl E der Ecken höchstens gleich der doppelten Anzahl K der Kanten.

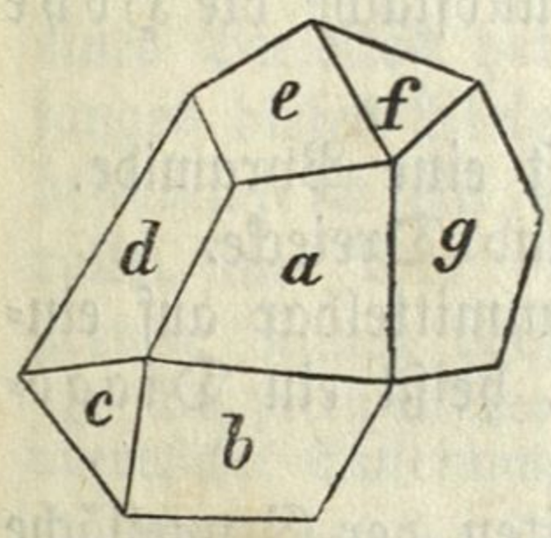
Denn in jeder Fläche, ebenso an jeder Ecke kommen mindestens drei Winkel vor; somit ist $3F$, und ebenso $3E$ entweder gleich oder kleiner als die Anzahl aller Winkel; diese beträgt aber $2K$ (nach 1.); folglich ist

$$3F \leqq 2K \quad \text{und} \quad 3E \leqq 2K.$$

§. **240.** In jedem Polyeder ist die Summe der Anzahl F der Flächen und der Anzahl E der Ecken um 2 größer als die Anzahl K der Kanten.

$$F + E = K + 2.$$

Fig. 187.



Beweis. Man denke sich (Fig. 187) ein Netz an einander hängender ebener Vielecke a, b, c, d, e, f, welche in einer oder in verschiedenen Ebenen liegen, und bezeichne die Zahl aller dieser Vielecke durch f, die Zahl aller Eckpuncte durch e und die Zahl aller Seiten durch k. Kommt zu diesem Netze irgend ein neues Vieleck g hinzu, welches mit ihm n Seiten nicht gemeinschaftlich hat, und bedeuten f', e', k' für das neue Netz dasselbe, was f, e, k für das frühere waren, so hat man

$$f' = f + 1,$$
$$e' = e + (n - 1),$$
$$k' = k + n,$$

woraus $f' + e' - k' = f + e - k$

folgt. Die Zahl $f + e - k$ bleibt demnach für alle Netze der bezeichneten Art constant. Für ein aus einem einzigen Vielecke bestehendes Netz ist aber $f = 1$ und $e = k$; also ist für dieses, und daher für alle Netze $f + e - k = 1$.

Hat man nun ein Polyeder mit F Flächen, E Ecken und K Kanten, so bleibt, wenn man sich davon irgend eine Fläche wegdenkt, ein Netz mit F—1 Vielecken, E Ecken und K Kanten übrig; dann hat man nach dem Vorigen da $f = F - 1$, $e = E$, $k = K$ ist, $(F - 1) + E - K = 1$; hieraus folgt aber

$$F + E = K + 2.$$

§. **241.** In jedem Polyeder ist die Summe aller Winkel an der Oberfläche gleich sovielmal 4 Rechten, als die um 2 vermin=derte Zahl der Ecken anzeigt.

Beweis. Ist die Zahl der Seiten der einzelnen Grenzflächen des Polyeders n_1, n_2, n_3, .., so sind die Summen der Winkel in diesen Vielecken $(n_1 - 2) \cdot 2R$, $(n_2 - 2) \cdot 2R$, $(n_3 - 2) \cdot 2R$, .. (§. 77), daher die Summe dieser Winkel auf der ganzen Oberfläche des Polyeders $S = (n_1 + n_2 + n_3 + ..) \cdot 2R - F \cdot 4R$, wenn man, wie oben, die Zahl der Flächen des Polyeders, das E Ecken und K Kanten hat, mit F be=zeichnet. Es ist aber $n_1 + n_2 + n_3 + .. = 2K$, da jede Kante zwei Seiten bildet; also $S = K \cdot 4R - F \cdot 4R = (K - F) \cdot 4R$, und somit wegen $K - F = E - 2$ (§. 240)

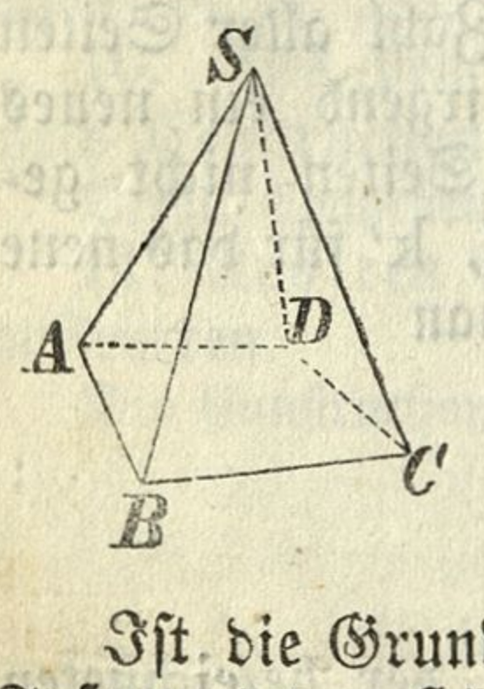
$$S = (E - 2) \cdot 4R.$$

1. Die Pyramide.

§. **242.** Bewegt sich eine Gerade, indem sie stets durch einen festen Punct außerhalb der Ebene eines Vieleckes geht, längs des Umfanges dieses Vieleckes fort, bis sie wieder in ihre anfängliche Lage kommt, so beschreibt sie ein Sy=stem von Ebenen, deren Durchschnittslinien in dem gegebenen festen Puncte zusammentreffen. Der von diesen Ebenen umschlossene, nach einer Seite hin unbegrenzte Raum heißt ein pyramidaler Raum.

Wird ein pyramidaler Raum durch eine alle Kanten desselben treffende Ebene geschnitten, so heißt das dadurch abgegrenzte Polyeder eine Pyramide. Die Schnittfläche heißt die Grundfläche, die anderen Grenzflächen heißen die Seitenflächen, ihre Durchschnitte mit einander die Seitenkanten, und mit der Grundlinie die Grundkanten der Pyramide. Den gemein=schaftlichen Durchschnittspunct der Seitenkanten nennt man den Scheitel oder die Spitze, und den Abstand der Spitze von der Grundfläche die Höhe der Pyramide.

Fig. 188.



Der Körper SABCD (Fig. 188) ist eine Pyramide.

Die Seitenflächen einer Pyramide sind Dreiecke.

Eine Ebene, welche durch zwei nicht unmittelbar auf ein=ander folgende Seitenkanten gelegt wird, heißt ein Diago=nalschnitt der Pyramide.

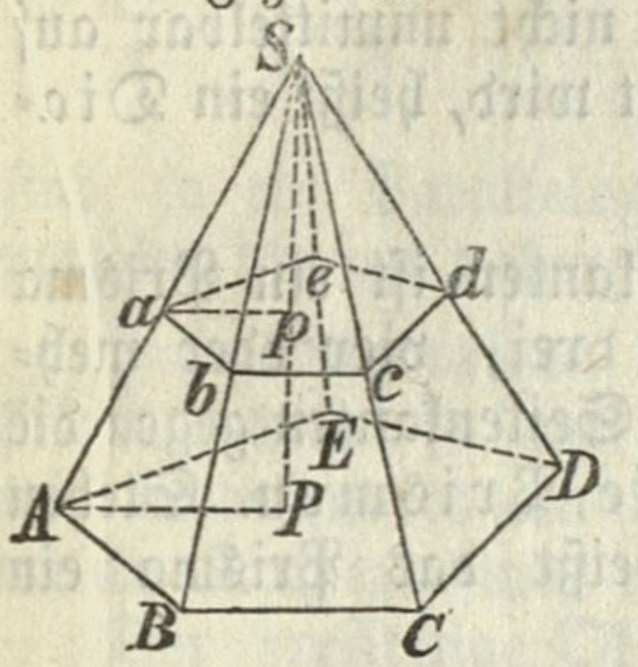
Mit Rücksicht auf die Anzahl der Seiten der Grundfläche theilt man die Pyramiden in drei=, vier= und mehr=seitige ein. Das einfachste Polyeder ist die dreiseitige Py=ramide; sie wird von vier Dreiecken begrenzt und heißt daher auch das Tetraeder.

Ist die Grundfläche einer Pyramide ein regelmäßiges Vieleck und fällt der Fußpunct der Höhe in den Mittelpunct der Grundfläche, so heißt die Pyra=mide eine senkrechte. Die Seitenflächen einer senkrechten Pyramide sind

gleichschenklige congruente Dreiecke. Der Abstand der Spitze von der Grundkante eines solchen Dreieckes heißt die Seitenhöhe der senkrechten Pyramide.

§. **243.** 1. Wird eine Pyramide durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist a) die Schnittfläche der Grundfläche ähnlich, und b) die Flächeninhalte beider verhalten sich wie die zweiten Potenzen ihrer Abstände von der Spitze der Pyramide.

Fig. 189.



Beweis. Es sei (Fig. 189) abcde ‖ ABCDE.

a) Folgt unmittelbar aus §. 226, 3.

b) Ist SP ⊥ ABCDE, also auch Sp ⊥ abcde und legt man durch ASP eine Ebene, welche die beiden Vielecke in den Geraden ap und AP schneidet, so ist ap ‖ AP, daher $ab : AB = Sa : SA = Sp : SP$. Nun ist $abcde : ABCDE = ab^2 : AB^2$ (§. 123, Folges.), folglich auch $abcde : ABCDE = Sp^2 : SP^2$.

Wird eine Pyramide durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so heißt der zwischen den beiden parallelen Flächen liegende Theil der Pyramide ein Pyramidenstumpf, der zwischen der Schnittfläche und der Spitze liegende Theil aber die Ergänzungspyramide des Stumpfes. Der Pyramidenstumpf wird von zwei parallelen und ähnlichen Vielecken als Grundflächen und so vielen Trapezen als Seitenflächen, als jedes der Vielecke Seiten hat, begrenzt; er ist, wie die Pyramide selbst, senkrecht oder schief. Der Abstand der beiden Grundflächen heißt die Höhe des Pyramidenstumpfes.

2. Jeder durch die Spitze und die Grundfläche einer Pyramide geführte ebene Schnitt ist ein Dreieck.

Die Richtigkeit dieses Satzes ist von selbst einleuchtend.

Folgesatz. Jede vielseitige Pyramide läßt sich durch Diagonalschnitte in dreiseitige Pyramiden von der Höhe der ganzen Pyramide zerlegen.

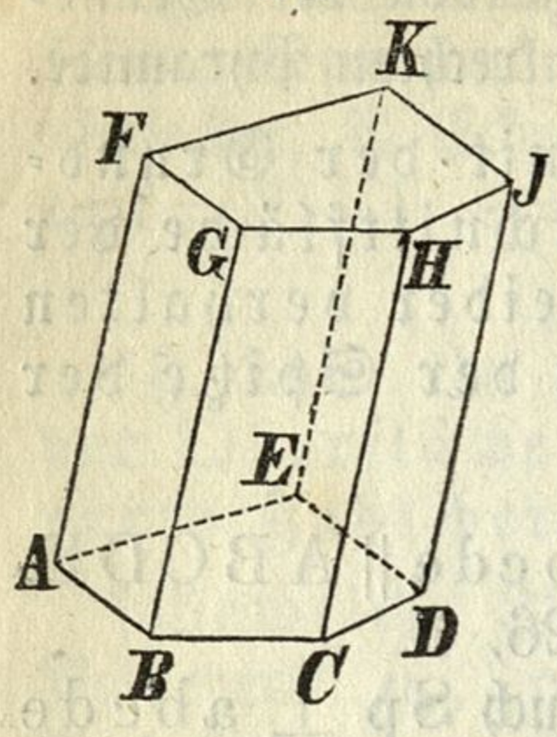
2. Das Prisma und das Prismatoid.

§. **244.** Bewegt sich eine Gerade, indem sie stets einer aus der Ebene eines Vieleckes heraustretenden festen Geraden parallel bleibt, längs des Umfanges dieses Vieleckes fort, bis sie wieder in ihre anfängliche Lage kommt, so beschreibt sie ein System von Ebenen, deren Durchschnittslinien einander parallel sind. Der von diesen Ebenen umschlossene, nach zwei Seiten hin unbegrenzte Raum heißt ein prismatischer Raum.

Ein prismatischer Raum kann als ein pyramidaler Raum, in welchem der Scheitel in unendlicher Entfernung liegt, angesehen werden.

Wird ein prismatischer Raum durch zwei parallele, alle Kanten desselben treffende Ebenen geschnitten, so heißt das dadurch abgegrenzte Polyeder ein Prisma. Die zwei parallelen Schnittflächen nennt man die Grundflächen, die übrigen Grenzflächen die Seitenflächen, die Durchschnitte der letzteren mit einander die Seitenkanten, und die mit den Grundflächen die Grundkanten des Prisma. Der Abstand der beiden Grundflächen heißt die Höhe des Prisma.

Fig. 190.



Der Körper ABCDEFGHJK (Fig. 190) ist ein Prisma, wenn die Ebene ABCDE || FGHJK, und wenn AF || BG || CH || DJ || EK ist.

Folgesätze. 1. Die beiden Grundflächen eines Prisma sind congruente Vielecke (§. 223, §. 64, Folges. und §. 213).

2. Alle Seitenflächen des Prisma sind Parallelogramme.

3. Alle Seitenkanten des Prisma sind einander gleich.

Eine Ebene, welche durch zwei nicht unmittelbar auf einander folgende Seitenkanten gelegt wird, heißt ein Diagonalschnitt des Prisma.

§. **245.** Mit Rücksicht auf die Anzahl der Seitenkanten ist ein Prisma ein drei-, vier- oder mehrseitiges, je nachdem es drei, vier oder mehrere Seitenkanten hat. Mit Rücksicht auf die Lage der Seitenkanten gegen die Grundflächen unterscheidet man senkrechte und schiefe Prismen. Stehen die Seitenkanten auf den Grundflächen senkrecht, so heißt das Prisma ein senkrechtes, sonst ein schiefes.

Ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind, wird ein Parallelepiped genannt. Ein Parallelepiped kann, so wie jedes Prisma, senkrecht oder schief sein. Ein senkrechtes Parallelepiped, dessen Grundflächen Rechtecke sind, heißt ein rechtwinkliges Parallelepiped. Ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen alle Kanten gleich sind, wird ein Cubus oder Würfel genannt; jede Kante heißt auch eine Seite des Würfels.

Jedes Parallelepiped wird von sechs Parallelogrammen, ein rechtwinkliges Parallelepiped von sechs Rechtecken, ein Würfel von sechs Quadraten begrenzt.

Folgesatz. In jedem Parallelepiped sind die gegenüberliegenden Seitenflächen congruent, und die gegenüberliegenden Ecken symmetrisch-gleich.

§. **246.** 1. Wird ein Prisma durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist die Schnittfläche mit der Grundfläche congruent.

Die gleichliegenden Seiten der Grundfläche und des Schnittes sind als Parallele zwischen Parallelen gleich; die gleichliegenden Winkel haben parallele Schenkel, sind also auch gleich; folglich ist der Schnitt mit der Grundfläche congruent.

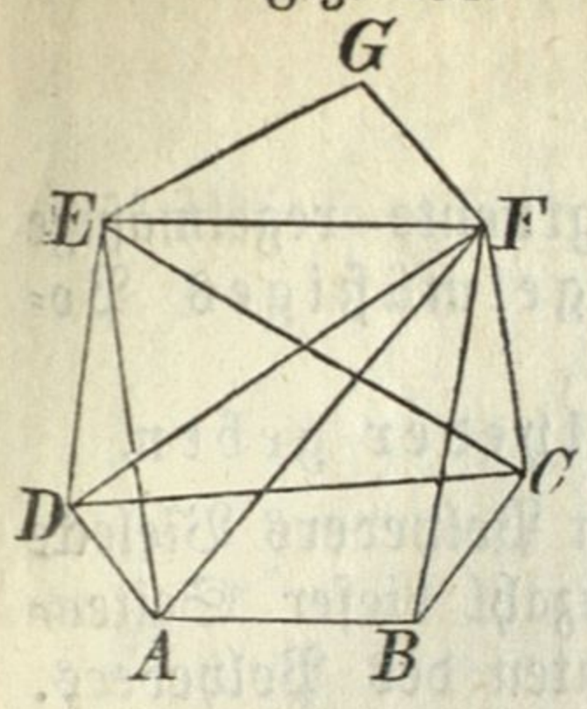
2. Jeder Diagonalschnitt eines vielseitigen Prisma ist ein Parallelogramm.

Der Beweis beruht auf §. 66, 2.

Folgesatz. Jedes vielseitige Prisma läßt sich durch Diagonalschnitte in dreiseitige Prismen von der Höhe des ganzen Prisma zerlegen.

§. **247.** Ein Körper, welcher von zwei parallelen, übrigens ganz beliebigen Vielecken als Grundflächen, und im allgemeinen von Dreiecken, welche mit je einer Grundfläche eine Seite, und mit der anderen einen Eckpunct gemeinschaftlich haben, als Seitenflächen begrenzt wird, heißt ein Prismatoid. (Fig. 191.)

Fig. 191.



Der Abstand der beiden parallelen Grundflächen ABCD und EFG heißt die Höhe des Prismatoids; die Durchschnitte der Seitenflächen mit einander und mit den Grundflächen heißen bezüglich die Seitenkanten oder die Grundkanten.

Die Zahl der Seitendreiecke ist gleich der Summe aus den Seitenzahlen beider Grundflächen.

Sind zwei gegenüberliegende Seiten der beiden Grundflächen (wie AB und EF) parallel, so fallen zwei Seitendreiecke (ABF und AEF) in ein Trapez (ABEF), und, wenn die parallelen Seiten auch gleich sind, in ein Parallelogramm zusammen. Unter den Seitenflächen eines Prismatoids können daher auch Trapeze oder Parallelogramme vorkommen.

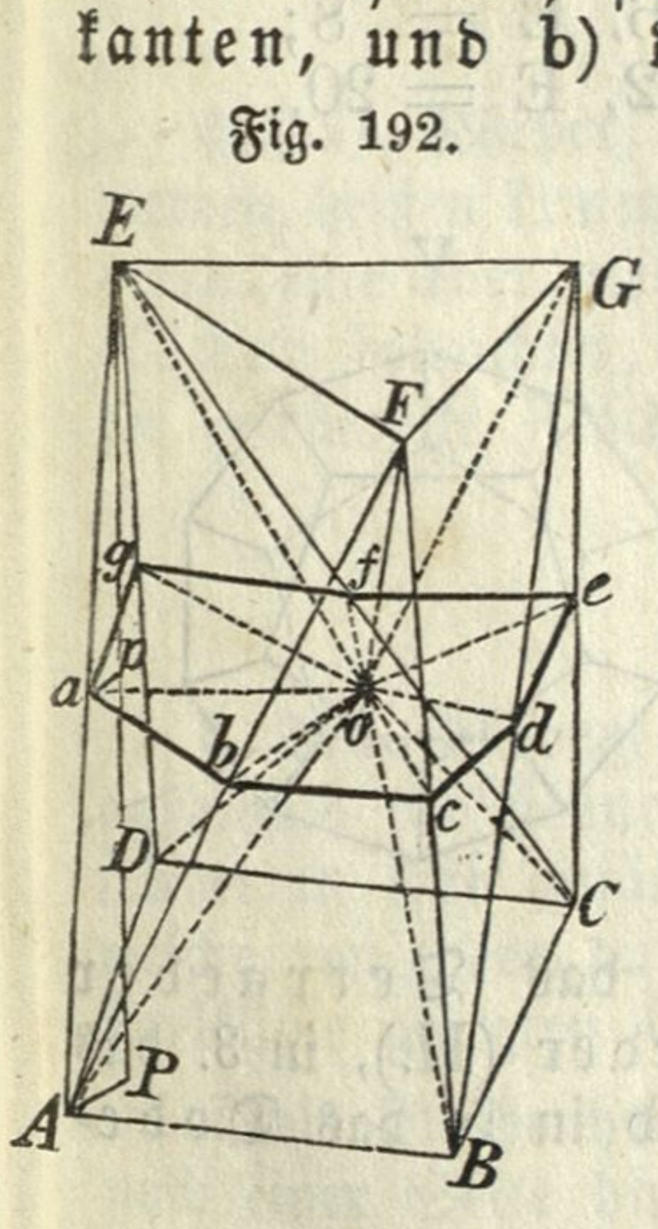
Haben die beiden Grundflächen eines Prismatoids gleich viele Seiten und sind außerdem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel, so heißt das Prismatoid insbesondere ein Obelisk, und zwar nach der Zahl der Seitenflächen, welche Trapeze sind, ein drei-, vier- oder mehrseitiger.

Der dreiseitige Obelisk ist immer zugleich ein dreiseitiger Pyramidenstumpf.

Zusatz. Das Prismatoid faßt in der Form des Obelisken für besondere Annahmen seiner Grundflächen alle bisher betrachteten Körperformen in sich. Sind die gegenüberliegenden Seiten der Grundflächen eines Obelisken nicht nur parallel, sondern auch gleich, so wird der Obelisk zu einem Prisma; sind die parallelen Seiten proportionirt, so stellt er einen Pyramidenstutz vor; läßt man endlich die kleinere Grundfläche immer mehr abnehmen, bis sie in einen Punct verschwindet, so geht der Obelisk in die Pyramide über.

§. 248. Legt man durch die Mitte a einer Seitenkante AE des Prismatoids (Fig. 192) einen mit den Grundflächen parallelen Schnitt, so halbirt derselbe a) auch alle übrigen Seitenkanten, und b) die Höhe.

Fig. 192.



Es sei abcdefg || ABCD.

a) Da die Durchschnittslinien ab, bc, .. der Ebene abcdefg mit den Seitenflächen den Grundkanten EF, AB,..parallel sind, so folgt aus Ea = Aa auch Fb = Ab, Fc = Bc,...

b) Wird die Höhe EP des Prismatoids von der Ebene abcdefg in p geschnitten, so ist ap || AP, daher Ep : Pp = Ea : Aa; aber Ea = Aa, daher auch Ep = Pp.

Der Schnitt abcdefg heißt der Mittelschnitt des Prismatoids.

Zusatz. Legt man durch einen beliebigen Punct O des Mittelschnittes, und durch die Grund- und Seitenkanten Ebenen, so wird dadurch das Prismatoid in Pyramiden zerlegt, die alle ihre Spitze in O haben, und von denen zwei die beiden Grundflächen, die anderen die Seitenflächen des Prismatoids zu Grundflächen haben.

3. Regelmäßige Polyeder.

§. **249.** Ein Polyeder, dessen alle Grenzflächen congruente regelmäßige Vielecke sind und congruente Ecken bilden, heißt ein regelmäßiges Polyeder (ein platonischer Körper).

Es kann nicht mehr als fünf regelmäßige Polyeder geben.

Beweis. Es seien die Seitenflächen eines regelmäßigen Polyeders Vielecke von n Seiten, deren je m eine Ecke bilden, F sei die Anzahl dieser Seitenflächen, E die Zahl der Ecken und K die Zahl der Kanten des Polyeders. Nach §. 240 ist $F + E = K + 2$. Nun ist die Gesammtzahl der Seiten aller Seitenflächen $2K$, da jede Kante als Seite zweier zusammentreffender Seitenflächen vorkommt; sie ist aber, da jede Seitenfläche n Seiten hat, auch nF, und, da in jeder Ecke m Seiten zusammentreffen, auch mE; es ist mithin $nF = 2K$ und $mE = 2K$, oder

$$F = \frac{2K}{n} \text{ und } E = \frac{2K}{m}.$$

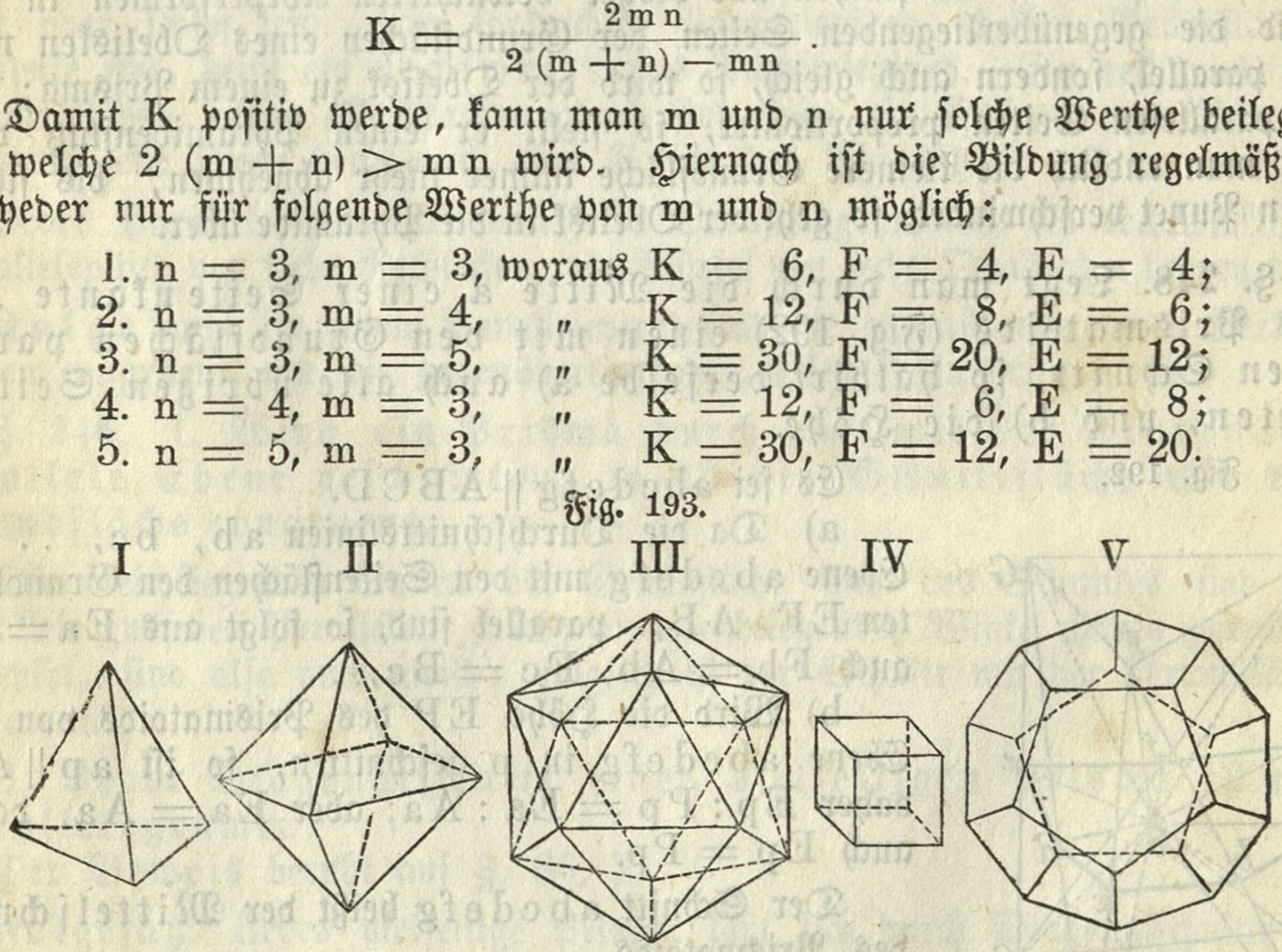
Mit Rücksicht auf die obige Gleichung erhält man daher $\frac{2K}{n} + \frac{2K}{m} = K + 2$, folglich

$$K = \frac{2mn}{2(m+n) - mn}.$$

Damit K positiv werde, kann man m und n nur solche Werthe beilegen, für welche $2(m+n) > mn$ wird. Hiernach ist die Bildung regelmäßiger Polyeder nur für folgende Werthe von m und n möglich:

1. $n = 3$, $m = 3$, woraus $K = 6$, $F = 4$, $E = 4$;
2. $n = 3$, $m = 4$, " $K = 12$, $F = 8$, $E = 6$;
3. $n = 3$, $m = 5$, " $K = 30$, $F = 20$, $E = 12$;
4. $n = 4$, $m = 3$, " $K = 12$, $F = 6$, $E = 8$;
5. $n = 5$, $m = 3$, " $K = 30$, $F = 12$, $E = 20$.

Fig. 193.

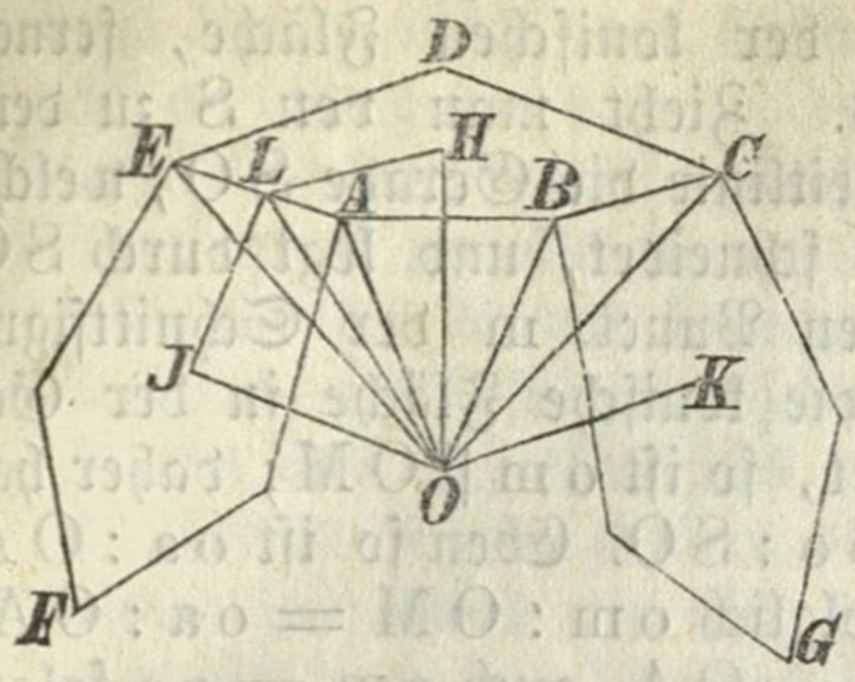


Der durch 1. bestimmte regelmäßige Körper heißt das Tetraeder (Fig. 193, I), der regelmäßige Körper in 2. das Oktaeder (II.), in 3. das Ikosaeder (III.), in 4. das Hexaeder (IV.) und in 5. das Dodekaeder (V.).

Außer diesen kann es kein anderes regelmäßiges Polyeder geben.

§. **250.** Jedes regelmäßige Polyeder hat einen Punct, der a) von allen Seitenflächen, und b) von allen Eckpuncten gleich weit absteht.

Fig. 194



a) Es seien (Fig. 194) ABD, AEF, BCG, drei Seitenflächen eines regelmäßigen Polyeders und H, J, K ihre Mittelpuncte. Zieht man aus H und J zu der Mitte L der Seite AE die Geraden HL und JL, so stehen diese auf AE senkrecht, daher ist HLJ der Neigungswinkel der Ebenen ABD und AEF, und die durch den Winkel HLJ gelegte Ebene senkrecht auf jenen Ebenen (§. 218, 1). Werden daher auf ABD und AEF in H und J Senkrechte errichtet, so müssen sie in der Ebene HLJ liegen (§. 218, 3) und verlängert sich in einem Puncte O schneiden. Zieht man nun OL, so ist $\triangle OHL \cong OJL$, daher $OH = OJ$; d. h. der Punct O ist von den beiden Seitenflächen gleich weit entfernt. Was aber von der an ABD anstoßenden Seitenfläche AEF gilt, gilt ebenso von den übrigen Seitenflächen, welche an ABD anstoßen; eben dasselbe gilt auch wieder von den die anstoßenden Seitenflächen umgebenden Ebenen. Der Punct O ist also von allen Seitenflächen des regelmäßigen Polyeders gleich weit entfernt.

b) Da ferner OH, OJ, OK, ... auf den Seitenflächen ABD, AEF, BCG, ... senkrecht sind und durch die Mittelpuncte H, J, K, ... derselben gehen, so müssen (nach §. 209, 2) alle schiefen Geraden aus O nach den Eckpuncten der Seitenflächen gleich lang sein. Der Punct O ist also auch von allen Eckpuncten des Polyeders gleich weit entfernt.

Der Punct O heißt der Mittelpunct des regelmäßigen Polyeders.

II. Krummflächige Körper.

§. **251**. Körper, welche ganz oder theilweise von gekrümmten Flächen begrenzt werden, heißen krummflächige Körper. Bei denjenigen krummflächigen Körpern, deren eine oder mehrere Grenzflächen Ebenen sind, werden diese als Grundflächen betrachtet, da man sich die Körper darüber aufgerichtet vorstellen kann; die gekrümmte Fläche heißt dann der Mantel.

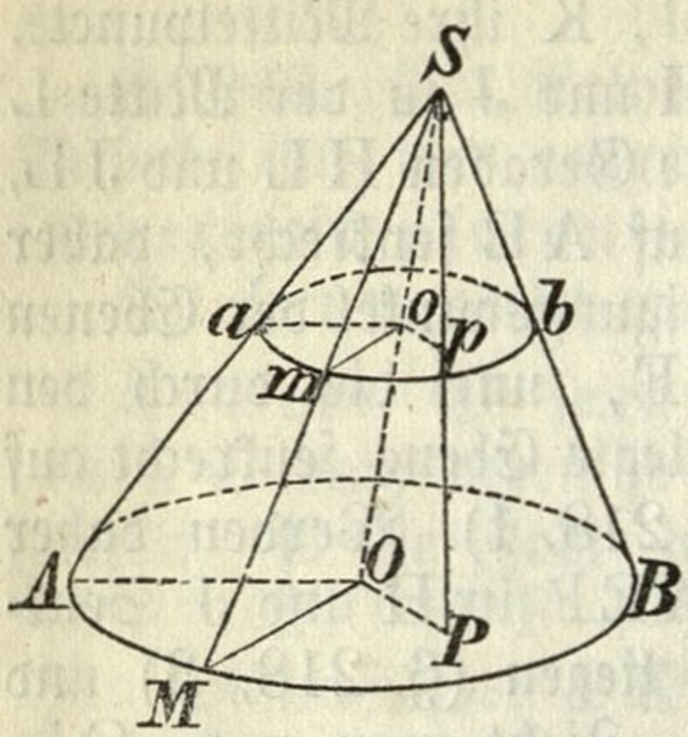
1. Der Kegel.

§. **252**. Bewegt sich eine Gerade, indem sie stets durch einen festen Punct außerhalb der Ebene einer Kreislinie geht, längs dieser Kreislinie fort, bis sie wieder in ihre anfängliche Lage kommt, so beschreibt sie eine gekrümmte Fläche, welche von jeder durch den gegebenen festen Punct und den Mittelpunct der Kreislinie gelegten Ebene in einer Geraden geschnitten wird.

Diese Fläche heißt eine konische Fläche, und der von ihr umschlossene, nach einer Seite hin unbegrenzte Raum ein konischer Raum. Die gegebene Kreislinie heißt die Leitlinie, und der gegebene feste Punct der Scheitel oder die Spitze der konischen Fläche.

Jeder mit der Ebene der Leitlinie parallel gelegte Schnitt einer konischen Fläche ist eine Kreislinie.

Fig. 195.



Es sei S (Fig. 195) die Spitze, und der Kreis AMB die Leitlinie der konischen Fläche, ferner Ebene amb || AOB. Zieht man von S zu dem Mittelpuncte O der Leitlinie die Gerade SO, welche die Schnittfläche in o schneidet, und legt durch SO und einen willkürlichen Punct m der Schnittfigur eine Ebene, welche die konische Fläche in der Geraden SmM schneidet, so ist om || OM; daher hat man om : OM = So : SO. Eben so ist oa : OA = So : SO, und folglich om : OM = oa : OA, woraus, wegen OM = OA, auch om = oa folgt. Es sind also alle Puncte im Umfange des Schnittes von o gleich weit entfernt, mithin ist die Schnittfigur eine Kreislinie.

§. **253.** Wird eine konische Fläche durch eine mit der Ebene der Leitlinie parallele Ebene geschnitten, so heißt der dadurch abgegrenzte Körper ein Kegel. Die ebene Schnittfläche ist ein Kreis (§ 252) und heißt die Grundfläche, die sie begrenzende konische Fläche wird der Mantel des Kegels genannt. Die Gerade, welche die Spitze und den Mittelpunct der Grundfläche verbindet, heißt die Axe, und jede Gerade, in welcher der Mantel von einer durch die Axe gelegten Ebene geschnitten wird, eine Seitenlinie oder Seite des Kegels. Den Abstand der Spitze von der Grundfläche des Kegels nennt man die Höhe desselben.

Steht die Axe auf der Grundfläche senkrecht, so heißt der Kegel ein senkrechter, sonst ein schiefer. Einen senkrechten Kegel kann man sich durch Drehung eines rechtwinkligen Dreieckes um eine seiner Katheten als Axe entstanden denken. Im senkrechten Kegel sind alle Seiten einander gleich und die Axe stellt zugleich die Höhe vor. Ein senkrechter Kegel, dessen Seite dem Durchmesser der Grundfläche gleich ist, heißt gleichseitig.

Geht durch einen Umfangspunct der Grundfläche eine Tangente zu dieser und eine Seitenlinie, so hat die durch beide Linien gelegte Ebene nur die Seitenlinie mit der Kegelfläche gemeinschaftlich, sie heißt eine Berührungsebene des Kegels.

Folgesätze. 1. In einem senkrechten Kegel sind alle Seiten gleich, und die Axe stellt zugleich die Höhe vor.

2. In einem schiefen Kegel gibt es eine kürzeste und eine längste Seite; dieselben liegen in einem durch die Axe und ihre Projection auf die Grundfläche gehenden Ebene.

§. **254.** Wird ein Kegel durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist a) die Schnittfläche ein Kreis, und es verhalten sich b) die Schnittfläche und die Grundfläche wie die zweiten Potenzen ihrer Abstände von der Spitze des Kegels.

Beweis. Es sei (Fig. 195) die Ebene amb || AMB.

a) Folgt aus §. 252.

b) Ist SP ⊥ AMB, also auch Sp ⊥ amb, und legt man durch SOP eine Ebene, welche die beiden Kreise in OP und op schneidet, so ist op || OP, daher ao : AO = So : SO = Sp : SP. Nun ist amb : AMB = $ao^2 : AO^2$ (§. 172), folglich auch amb : AMB = $Sp^2 : SP^2$.

Wird ein Kegel durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so heißt der zwischen der Grundfläche und der Schnittfläche liegende Theil des Kegels ein Kegelstumpf, der zwischen der Schnittfläche und der Spitze liegende Theil aber der Ergänzungskegel des Stumpfes. Der Kegelstumpf wird von zwei parallelen ungleichen Kreisen als Grundflächen und der zwischen ihnen enthaltenen konischen Mantelfläche begrenzt, und ist, wie der Kegel selbst, senkrecht oder schief. Der Abstand der beiden Grundflächen heißt die Höhe des Kegelstumpfes.

2. Jeder Axenschnitt des Kegels ist ein Dreieck.

Denn jede durch die Axe gelegte Ebene schneidet die Grundfläche in einem Durchmesser und die Mantelfläche in zwei geraden Linien.

Zusätze. a) Im senkrechten Kegel sind alle Axenschnitte gleichschenklige, congruente und auf der Grundfläche senkrechte Dreiecke.

b) Im schiefen Kegel ist nur eines der Dreiecke gleichschenklig und nur eines, und zwar dasjenige, welches durch die Projection der Axe auf die Grundfläche geht, auf dieser letzteren senkrecht; diese beiden Dreiecke stehen senkrecht auf einander. Der auf der Grundfläche senkrechte Axenschnitt heißt das charakteristische Dreieck des schiefen Kegels.

c) Der Axenschnitt eines Kegelstumpfes ist ein Trapez.

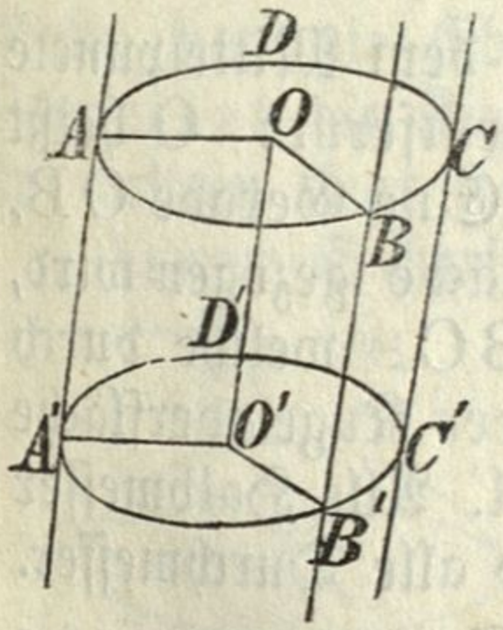
2. Der Cylinder.

§. **255.** Bewegt sich eine Gerade, indem sie stets einer festen, die Ebene einer Kreislinie im Mittelpuncte derselben treffenden Geraden parallel bleibt, längs dieser Kreislinie fort, bis sie wieder in ihre anfängliche Lage kommt, so beschreibt sie eine gekrümmte Fläche, welche von jeder durch jene feste Gerade gelegten Ebene in einer Geraden geschnitten wird.

Diese Fläche heißt eine cylindrische Fläche, und der von ihr umschlossene, nach zwei Seiten hin unbegrenzte Raum ein cylindrischer Raum. Die gegebene Kreislinie heißt die Leitlinie, und die durch ihren Mittelpunct gehende feste Gerade die Axe der cylindrischen Fläche.

Jeder mit der Ebene der Leitlinie parallel gelegte Schnitt einer cylindrischen Fläche ist eine Kreislinie, welche mit der Leitlinie gleichen Halbmesser hat.

Fig. 196.



Es sei der Kreis A'B'C' (Fig. 196) die Leitlinie der cylindrischen Fläche, und eine mit diesem Kreise parallele Ebene ABC schneide die Axe O'O in O. Ist B ein willkürlicher Punct der Durchschnittsfigur, so ist $OO' \parallel BB'$ und $OB \parallel O'B'$; daher ist OO'B'B ein Parallelogramm, und folglich $OB = O'B'$. Es ist also die Entfernung eines jeden Punctes der Schnittfigur von O dem Halbmesser der Leitlinie gleich, d. h. der Schnitt ist eine mit der Leitlinie congruente Kreislinie.

§. **256.** Wird eine cylindrische Fläche durch zwei mit der Ebene der Leitlinie parallele Ebenen geschnitten, so heißt der von diesen und der cylindrischen Fläche begrenzte Körper ein Cylinder. Die zwei ebenen Schnittflächen sind congruente Kreise (§. 267) und heißen die Grundflächen; die sie begren-

zende cylindrische Fläche nennt man den Mantel des Cylinders. Die Verbindungslinie der Mittelpuncte beider Kreise heißt die Axe, und jede Durchschnittslinie des Mantels mit einer durch die Axe gelegten Ebene eine Seitenlinie oder Seite des Cylinders. Der Abstand der beiden Grundflächen wird die Höhe des Cylinders genannt.

Steht die Axe auf den Grundflächen senkrecht, so heißt der Cylinder ein senkrechter, sonst ein schiefer. Einen senkrechten Cylinder kann man sich auch durch Drehung eines Rechteckes um eine Seite als Axe entstanden denken. Ein senkrechter Cylinder, dessen Seite dem Durchmesser der Grundfläche gleich ist, wird gleichseitig genannt.

Geht durch einen Umfangspunct der Grundfläche eine Tangente zu dieser und eine Seitenlinie, so hat die durch beide Linien gelegte Ebene nur die Seitenlinie mit der Mantelfläche gemeinschaftlich; eine solche Ebene heißt eine Berührungsebene des Cylinders.

Folgesätze. 1. Alle Seiten des Cylinders sind parallel und einander gleich.

2. In einem senkrechten Cylinder stellt die Axe zugleich die Höhe vor.

§. 257. 1. Wird ein Cylinder durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist die Schnittfläche ein mit der Grundfläche congruenter Kreis.

Folgt aus §. 255.

2. Jeder Axenschnitt eines Cylinders ist ein Parallelogramm.

Denn in dem erhaltenen Vierecke sind die Durchschnittslinien der Ebene mit der Mantelfläche als Seiten des Cylinders parallel und gleich.

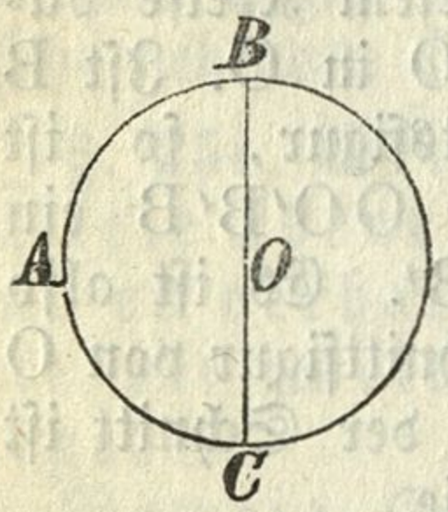
Zusätze. a) Im senkrechten Cylinder sind alle Axenschnitte congruente Rechtecke und stehen auf der Grundfläche senkrecht.

b) Im schiefen Cylinder sind die Axenschnitte ungleiche Parallelogramme und steht nur einer, und zwar derjenige, welcher durch die Projection der Axe auf die Grundfläche geht, auf der Grundfläche senkrecht. Dieser auf die Grundfläche senkrechte Axenschnitt heißt das charakteristische Parallelogramm des schiefen Cylinders.

3. Die Kugel.

§. 258. Dreht sich ein Halbkreis ABC (Fig. 197) um seinen Durchmesser BC so weit herum, bis er wieder in seine ursprüngliche Lage kommt, so beschreibt derselbe eine gekrümmte Fläche, welche Kugelfläche genannt wird. Der von der Kugelfläche begrenzte Körper heißt die Kugel.

Fig. 197.



Jeder Punct der Kugelfläche ist von dem Mittelpuncte O des erzeugenden Kreises gleich weit entfernt; O heißt darum der Mittelpunct der Kugel. Eine Gerade OB, welche vom Mittelpuncte bis zur Kugelfläche gezogen wird, heißt ein Halbmesser; eine Gerade BC, welche durch den Mittelpunct geht und zwei Puncte der Kugeloberfläche verbindet, ein Durchmesser der Kugel. Alle Halbmesser einer Kugel sind einander gleich; eben so alle Durchmesser.

Die Endpuncte B und C eines Durchmessers werden Gegenpuncte der Kugelfläche genannt.

Folgesätze. 1. Der geometrische Ort aller Puncte im Raume, welche von einem gegebenen Puncte den Abstand a haben, ist die aus diesem Puncte mit dem Halbmesser a beschriebene Kugelfläche.

2. Ist der Abstand eines Punctes vom Kugelmittelpuncte kleiner oder größer als der Halbmesser, so liegt der Punct bezüglich innerhalb oder außerhalb der Kugelfläche.

§. **259.** Durch vier Puncte A, B, C und D, welche nicht in einer Ebene liegen, ist eine Kugel vollkommen bestimmt.

Der geom. Ort eines Punctes, der von den Puncten A, B, C gleich weit absteht, ist die im Mittelpuncte M des durch die drei Puncte gehenden Kreises auf dieser errichtete Senkrechte MN (§. 209, Folges. 2). Jeder Punct dieser Senkrechten ist dann von allen Puncten der Peripherie jenes Kreises gleich weit entfernt. Legt man daher durch MN und den vierten außerhalb der Kreisebene liegenden Punct D eine Ebene, welche die Peripherie des Kreises in P schneidet, und errichtet in dieser letzteren Ebene auf die Verbindungslinie DP in ihrer Mitte R eine Senkrechte, welche die MN in O trifft, so ist O nicht nur von D und P gleich weit entfernt (§. 55, 5, Folges.); sondern steht auch von D und den drei Puncten A, B, C, welche mit P auf demselben Kreisumfange liegen, gleich weit ab; O ist somit der Mittelpunct der durch A, B, C, D gehenden Kugelfläche.

Da es nur *einen* Punct O gibt, welcher den obigen Bedingungen entspricht, so kann es auch nur eine einzige Kugelfläche geben, welche durch die vier Puncte A, B, C, D geht.

Die Gerade und die Kugel.

§. **260.** Je nachdem der Abstand einer Geraden vom Mittelpuncte einer Kugel kleiner, eben so groß oder größer ist als deren Halbmesser, trifft die Gerade die Kugel in zwei Puncten, oder *berührt* sie dieselbe in einem Puncte, oder liegt sie ganz außerhalb der Kugel.

1. Jede gerade Berührungslinie einer Kugel steht senkrecht auf dem zum Berührungspuncte gezogenen Halbmesser (§. 143).

2. Alle von einem Puncte außerhalb einer Kugel an diese gezogenen geraden Berührungslinien sind einander gleich.

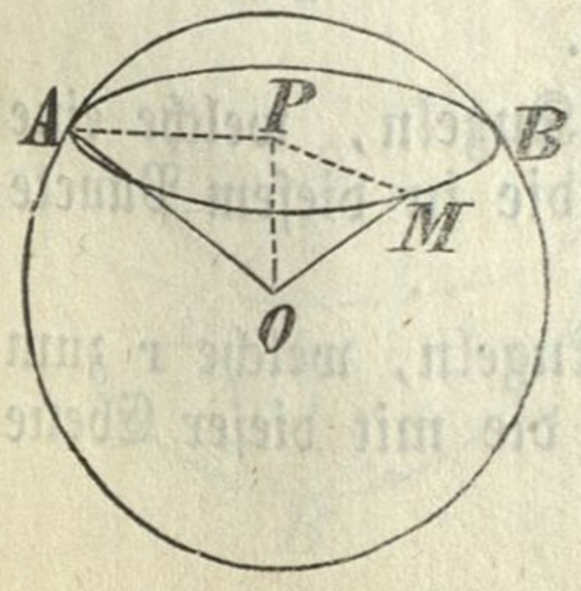
3. Der *geometrische Ort* der Berührungspuncte aller aus einem Puncte A an eine Kugel gezogenen geraden Berührungslinien ist eine Kreislinie, deren Ebene auf der Verbindungslinie des Punctes A mit dem Kugelmittelpuncte senkrecht steht.

Die Ebene und die Kugel.

§. **261.** Der Abstand einer Ebene vom Mittelpuncte einer Kugel ist entweder kleiner, oder eben so groß oder größer als deren Halbmesser. Im ersten Falle hat die Ebene mit der Kugel mehrere Puncte gemeinschaftlich, sie *schneidet* die Kugel; im zweiten Falle *berührt* sie dieselbe in einem Puncte; im dritten liegt sie ganz außerhalb der Kugel.

Jeder Schnitt einer Kugel durch eine Ebene ist ein Kreis.

Fig. 198.



Es sei AMB (Fig. 198) ein ebener Kugelschnitt. Fällt man vom Kugelmittelpuncte O eine Senkrechte OP auf den Schnitt, zieht von P nach dem Umfange des Schnittes die beliebigen Geraden PA und PM, ferner noch die Halbmesser OA und OM, so sind die rechtwinkligen Dreiecke OPA und OPM congruent, daher PA = PM. Daraus folgt, daß alle Umfangspuncte des Schnittes von P gleichen Abstand haben, daß also der Schnitt ein Kreis ist.

Der Kreis AMB wird ein *Kugelkreis* genannt.

§. **262.** Sätze von den Kugelkreisen.

1. Die Gerade aus dem Mittelpuncte der Kugel nach dem Mittelpuncte eines Kugelkreises steht senkrecht auf der Ebene des letzteren.

2. Die Senkrechte aus dem Mittelpuncte der Kugel auf die Ebene eines Kugelkreises geht durch den Mittelpunct des letzteren.

3. Die Gerade, welche im Mittelpuncte eines Kugelkreises auf dessen Ebene senkrecht errichtet wird, geht durch den Mittelpunct der Kugel.

4. Gleiche Kugelkreise haben gleichen Abstand vom Kugelmittelpuncte.

5. Von zwei ungleichen Kugelkreisen hat der größere einen kleineren Abstand vom Kugelmittelpuncte.

6. Zwei Kugelkreise, welche gleichen Abstand vom Kugelmittelpuncte haben, sind einander gleich.

7. Von zwei Kugelkreisen, welche ungleiche Abstände vom Mittelpuncte der Kugel haben, ist derjenige der größere, welcher vom Mittelpuncte den kleineren Abstand hat.

Die Beweise dieser Sätze stimmen mit jenen für die analogen Sätze von den Sehnen des Kreises in §. 142 überein.

Folgesätze. a) Unter allen Kugelkreisen ist der durch den Mittelpunct der Kugel gehende der größte. Er heißt darum auch geradezu der größte Kugelkreis. Der Halbmesser eines größten Kugelkreises ist dem Kugelhalbmesser gleich.

b) Zwei größte Kreise einer Kugel schneiden sich immer in einem Durchmesser derselben, und halbiren gegenseitig sowohl ihre Peripherien als ihre Flächen.

c) Durch je zwei Puncte der Kugelfläche, welche mit dem Kugelmittelpuncte nicht in gerader Linie liegen, ist die Lage eines größten Kugelkreises vollkommen bestimmt. Der von zwei Puncten begrenzte Bogen eines größten Kreises gibt den sphärischen Abstand dieser Puncte an.

d) Die Endpuncte des Kugeldurchmessers, welcher auf der Ebene eines größten Kugelkreises senkrecht steht, heißen die Pole desselben. Der sphärische Abstand der Pole eines größten Kugelkreises von der Peripherie desselben ist gleich dem vierten Theile dieser Peripherie, oder gleich 90^0 im Bogenmaße.

§. **263.** Sätze von den Berührungsebenen der Kugel.

1. Die Ebene, welche im Endpuncte eines Kugelhalbmessers auf diesem senkrecht steht, ist eine Berührungsebene der Kugel.

2. Der Halbmesser einer Kugel nach dem Berührungspuncte steht senkrecht auf der Berührungsebene.

3. Die Senkrechte aus dem Mittelpuncte einer Kugel auf die Berührungsebene geht durch den Berührungspunct.

4. Die auf der Berührungsebene einer Kugel im Berührungspuncte errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunct der Kugel.

5. Der geometrische Ort der Mittelpuncte aller Kugeln, welche eine gegebene Ebene in einem gegebenen Puncte berühren, ist die in diesem Puncte auf der Ebene errichtete Senkrechte.

6. Der geometrische Ort der Mittelpuncte aller Kugeln, welche r zum Halbmesser haben und eine gegebene Ebene berühren, ist die mit dieser Ebene in dem Abstande r parallele Ebene.

Die Beweise sind übereinstimmend mit jenen für die analogen Sätze von den Tangenten des Kreises in §. 143.

Folgesätze. a) Durch einen Punct der Kugelfläche läßt sich nur eine Berührungsebene legen.

b) Durch einen Punct außerhalb einer Kugel lassen sich an diese unzählig viele Berührungsebenen legen, deren Berührungspuncte in der Peripherie eines Kugelkreises liegen.

c) Durch eine Gerade außerhalb einer Kugel lassen sich an diese nur zwei Berührungsebenen legen.

§. **264.** Die beiden Theile, in welche die Kugel durch einen Kugelkreis getheilt wird, heißen Kugelabschnitte oder Kugelsegmente, und die dazu gehörigen Theile der Kugelflächen Kugelmützen oder Calotten. Der Kreis ist die Grundfläche der beiden Kugelsegmente und der Kugelmützen. Der von der Mütze und ihrer Grundfläche begrenzte Theil des senkrechten Durchmessers der Kugel ist die Höhe des Kugelsegments und der Kugelmütze. Für einen größten Kugelkreis sind die beiden Segmente congruent.

Der zwischen zwei parallelen Kugelkreisen liegende Theil der Kugel heißt eine Kugelschicht, und der dazu gehörige Theil der Kugelfläche eine Kugelzone. Der Abstand der beiden Kreise ist die Höhe der Kugelschicht und der Zone.

Dreht sich der Ausschnitt eines größten Kugelkreises um einen seiner Halbmesser, so heißt der dadurch beschriebene Körper ein Kugelausschnitt oder Kugelsector. Derselbe besteht aus einem Kugelsegment und einem Kegel, dessen Spitze der Kugelmittelpunct und dessen Grundfläche die Grundfläche des Kugelsegments ist.

Eine Kugel heißt einem Polyeder eingeschrieben, wenn alle Grenzflächen desselben Berührungsebenen der Kugel sind.

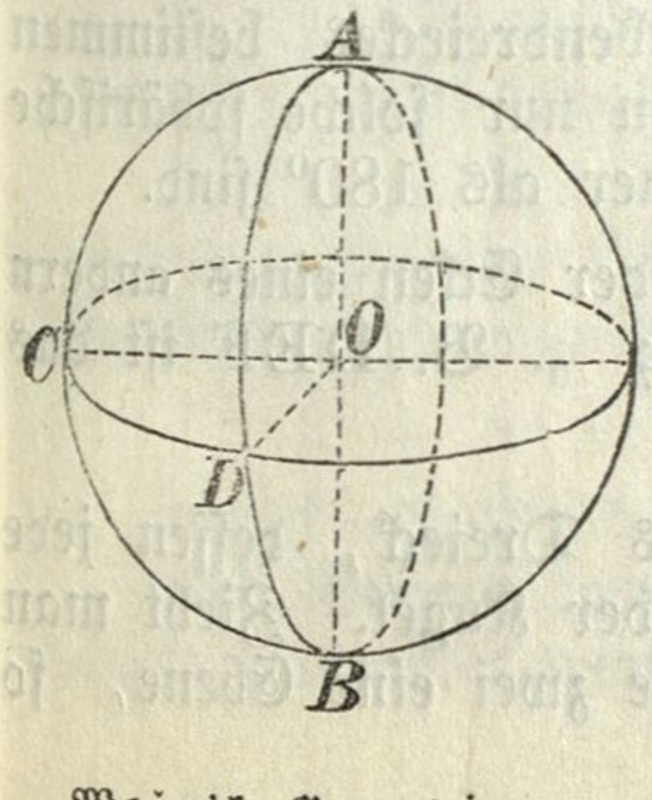
Eine Kugel heißt einem Polyeder umschrieben, wenn alle Eckpuncte desselben in der Kugelfläche liegen.

Jedem regelmäßigen Polyeder kann eine Kugel eingeschrieben und umschrieben werden. (Folgt aus §. 250.)

Sphärische Winkel und sphärische Vielecke.

§. **265.** Wenn sich zwei größte Kugelkreise durchschneiden, so heißt der von ihren Ebenen gebildete Neigungswinkel der sphärische Winkel der beiden Kreise. Die Schenkel eines sphärischen Winkels sind die Bogen der zwei größten Kreise, und der Scheitel ihr Durchschnittspunct.

Fig. 199.



Das Maß eines sphärischen Winkels ist der Bogen eines größten Kugelkreises, welcher jene zwei Puncte der Schenkel verbindet, die vom Scheitel um 90^0 abstehen. Ist nämlich (Fig. 199) $AC = 90^0$ und $AD = 90^0$, so ist $CO \perp AO$ und $DO \perp AO$, und somit COD der Neigungswinkel der beiden größten Kreise ACB und ADB, oder ihr sphärischer Winkel. Legt man nun durch die beiden Puncte C und D einen größten Kreis, so ist der Bogen CD das Maß für den Winkel COD, und folglich auch für den sphärischen Winkel CAD.

§. **266.** Ein Theil der Kugelfläche, welcher zwischen zwei halben größten Kugelkreisen liegt, wie z. B. ACBDA, heißt ein Kugelstreifen oder ein sphärisches Zweieck.

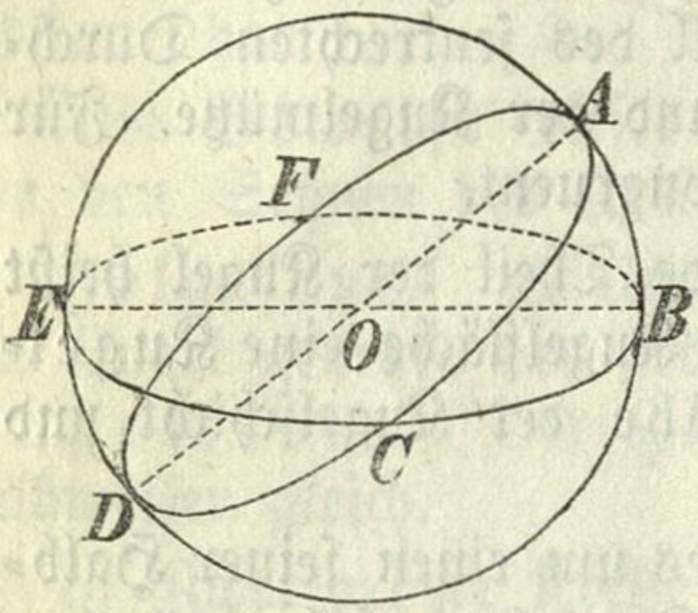
1. Zu gleichen sphärischen Winkeln derselben Kugel gehören gleiche Kugelstreifen.

2. Zwei Streifen derselben Kugel verhalten sich wie ihre sphärischen Winkel.

Die Beweise dieser beiden Lehrsätze sind analog mit jenen für die in §§. 21 und 146 aufgestellten Sätze.

§. **267.** Wenn sich drei größte Kugelkreise ABD, ACD und BCE (Fig. 200) durchschneiden, so heißt der von drei Bogen AB, AC und BC jener größten Kreise begrenzte Theil ABC der Kugelfläche ein sphärisches Dreieck. Die Kreisbogen AB, AC und BC werden die Seiten, und die sphärischen Winkel ACB, ABC und BAC die Winkel des sphärischen Dreiecks genannt. Die Größe der Seiten wird stets im Bogenmaße angegeben. Ein sphärisches Dreieck heißt gleichseitig, gleichschenklig oder ungleichseitig, je nachdem es drei oder zwei gleiche, oder lauter verschiedene Seiten hat.

Fig. 200.

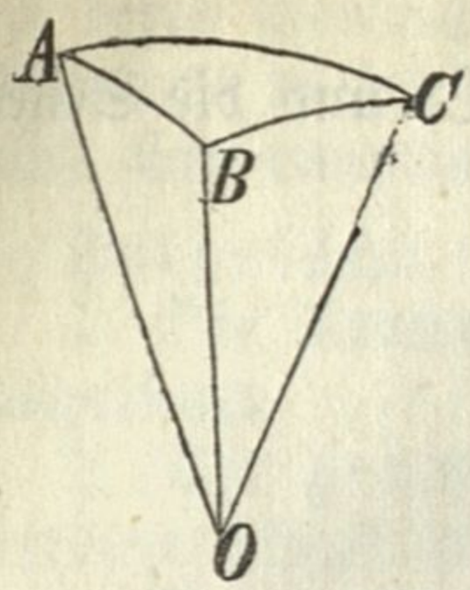


Die Seiten eines sphärischen Dreieckes bilden zugleich die Seiten eines zweiten sphärischen Dreieckes, welches den ganzen übrigen Theil der Kugelfläche einnimmt. Wenn übrigens nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, so ist immer dasjenige sphärische Dreieck zu verstehen, welches kleiner ist als die halbe Kugelfläche. Zu jedem sphärischen Dreiecke, das kleiner ist als die halbe Kugelfläche und dessen eine Seite größer ist als 180^0, gehört ein zweites, welches mit jenem die beiden anderen Seiten gemeinschaftlich hat und dessen dritte Seite die dritte Seite des ersteren zu 360^0 ergänzt, somit kleiner als 180^0 ist. Die beiden Dreiecke ergänzen sich gegenseitig zu der halben Kugelfläche; man nennt ein jedes das sphärische Nebendreieck des andern. Betrachtet man z. B. AB, AC und BEC als Seiten eines sphärischen Dreieckes, so hat sein Nebendreieck die Seite AB, AC und BC; beide Dreiecke zusammen genommen bilden die halbe Kugelfläche. Aus dem bloßen Anblicke der Figur ergibt sich, daß die Winkel, welche in zwei Nebendreiecken einer der gemeinschaftlichen Seiten gegenüberliegen, sich zu 180^0, die Winkel aber, welche den nicht gemeinschaftlichen Seiten gegenüberliegen, zu 360^0 ergänzen. Da sich demnach aus den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreieckes sogleich auch die Seiten und Winkel seines Nebendreieckes bestimmen lassen, so wollen wir bei den folgenden Untersuchungen nur solche sphärische Dreiecke voraussetzen, in denen die Seiten einzeln kleiner als 180^0 sind.

Ein sphärisches Dreieck, dessen Ecken Gegenpuncte der Ecken eines andern Dreieckes sind, heißt das Gegendreieck des zweiten; z. B. DEF ist das Gegendreieck zu ABC.

§. **268.** Es sei ABC (Fig. 201) ein sphärisches Dreieck, dessen jede Seite kleiner ist als 180^0, und O der Mittelpunct der Kugel. Zieht man die Halbmesser AO, BO und CO, und legt durch je zwei eine Ebene, so

Fig. 201.

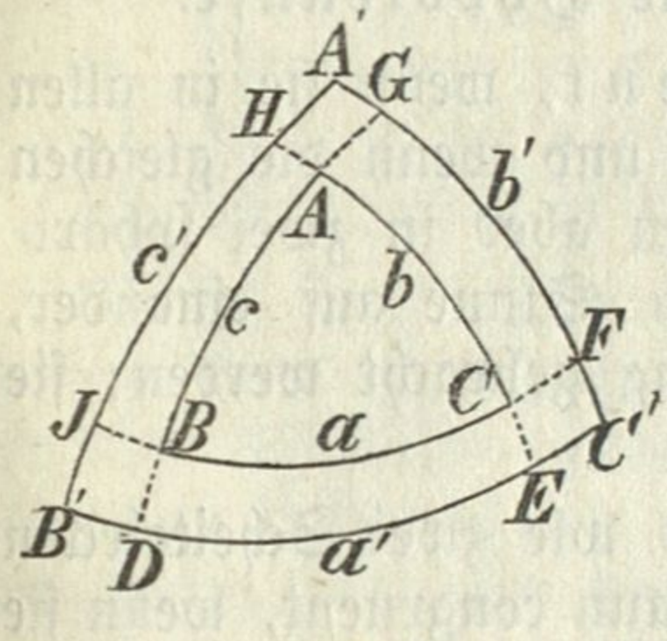


entsteht am Mittelpuncte O die dreiseitige Ecke OABC, deren Seiten AOB, AOC und BOC die Seiten AB, AC und BC des sphärischen Dreieckes ABC zum Maße haben, und deren Flächenwinkel den Winkeln des sphärischen Dreieckes gleich sind. Es finden daher zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreieckes dieselben Beziehungen statt, wie zwischen den Seiten und den Winkeln einer dreiseitigen Ecke. Mit Rücksicht auf §§. 228, 229 und 230 gelten demnach auch für die sphärischen Dreiecke folgende Sätze:

1. Die Summe zweier Seiten ist größer als die dritte Seite.
2. Die Summe aller drei Seiten ist kleiner als 360^0.
3. Gleichen Winkeln liegen gleiche Seiten gegenüber.
4. Dem größeren Winkel liegt auch eine größere Seite gegenüber.
5. Gleichen Seiten liegen gleiche Winkel gegenüber.
6. Der größeren Seite liegt auch ein größerer Winkel gegenüber.

§. **269**. Wenn man aus den Eckpuncten eines sphärischen Dreieckes, als Polen, größte Kreisbogen beschreibt, so heißt das dadurch entstehende sphärische Dreieck ein **Polardreieck** des ersteren.

Fig. 202.



Ist ABC (Fig. 202) ein sphärisches Dreieck und macht man $AD = AE = BF = BG = CH = CJ = 90^0$, so ist, wenn durch die Puncte D und E, F und G, H und J die größten Kreisbogen B'C', A'C' und A'B' beschrieben werden, A'B'C' das Polardreieck des gegebenen sphärischen Dreieckes ABC, und dieses wieder, wie man leicht sieht, das Polardreieck von A'B'C'.

1. Zwei sphärische Dreiecke, welche Polardreiecke zu einander sind, gehören zu zwei dreiseitigen Ecken, welche zu einander Polarecken sind.

Denn zieht man zu den Eckpuncten der zwei sphärischen Dreiecke Kugelhalbmesser, so sind diese die Kanten der beiden Ecken, welche zu den zwei Dreiecken gehören. Nun steht jeder Halbmesser des einen Dreieckes senkrecht auf zwei Halbmessern des andern, weil die Seiten des einen um 90^0 von den Eckpuncten des andern abstehen, somit steht er auch senkrecht auf der durch diese Halbmesser gelegten Ebene; es steht sonach jede Kante der einen Ecke senkrecht auf einer Seitenfläche der andern, d. i. die beiden Ecken sind Polarecken zu einander (§. 231).

2. In zwei sphärischen Polardreiecken sind die Seiten des einen Supplemente der Winkel des andern.

Heißen A, B, C die Winkel und a, b, c die gegenüber liegenden Seiten in dem sphärischen Dreiecke ABC, ferner A', B', C' die Winkel und a', b', c' die Seiten in dem Polardreiecke A'B'C', so ist

$$a + A' = 180^0,\ b + B' = 180^0,\ c + C' = 180^0;\ \text{und}$$
$$a' + A = 180^0,\ b' + B = 180^0,\ c' + C = 180^0.$$

Der Beweis beruht auf §. 231, 2, kann aber auch unmittelbar aus der Figur hergeleitet werden.

§. **270.** Die Summe aller Winkel eines sphärischen Dreieckes ist größer als 180° und kleiner als 540°.

Es seien die Winkel eines sphärischen Dreieckes A, B, C, und die Seiten seines Polardreieckes a', b', c', so ist

$$a' + A = 180^0$$
$$b' + B = 180^0$$
$$c' + C = 180^0, \text{ daher}$$
$$a' + b' + c' + A + B + C = 540^0, \text{ aber}$$
$$a' + b' + c' < 360^0, \text{ folglich}$$
$$A + B + C > 180^0.$$

Auch folgt aus $a' + b' + c' + A + B + C = 540^0$, daß $A + B + C < 540^0$ sein müsse.

Ein sphärisches Dreieck kann also zwei oder auch drei rechte, ja sogar drei stumpfe Winkel haben.

Ein sphärisches Dreieck, welches keinen rechten Winkel enthält, heißt *schiefwinklig*; kommt darin ein rechter Winkel vor, so wird es ein *rechtwinkliges* genannt. Auch hier heißen die den rechten Winkel einschließenden Seiten die *Katheten* und die ihm gegenüberliegende Seite die *Hypotenuse*.

§. **271.** Zwei sphärische Dreiecke heißen *congruent*, wenn sie in allen Seiten und Winkeln nach der Ordnung übereinstimmen und wenn die gleichen Stücke in demselben Sinne auf einander folgen. Folgen aber in zwei sphärischen Dreiecken die gleichen Stücke im entgegengesetzten Sinne auf einander, so können die Dreiecke im allgemeinen nicht zur Deckung gebracht werden; sie heißen dann *symmetrisch-gleich*.

Zusätze. 1. Zwei sphärische Gegendreiecke sind, so wie zwei Scheitelecken (§. 232), im allgemeinen symmetrisch-gleich, und nur dann congruent, wenn sie gleichschenklig sind.

2. Den Sätzen, welche in §. 234 bezüglich der Congruenz und der Symmetrie der dreiseitigen Ecken bewiesen wurden, entsprechen analoge Sätze bezüglich der Congruenz und Symmetrie der sphärischen Dreiecke.

§. **272.** Ein Theil der Kugelfläche, welcher von mehr als drei Bogen größter Kugelkreise begrenzt wird, heißt ein *sphärisches Vieleck*.

Das sphärische Vieleck steht zu einer mehrseitigen Ecke in derselben Beziehung, wie das sphärische Dreieck zu einer dreiseitigen Ecke (§. 268).

Lage zweier Kugeln gegen einander.

§. **273.** Zwei Kugeln, welche denselben Mittelpunct haben, heißen *concentrisch*. Zwei Kugeln, welche verschiedene Mittelpuncte haben, nennt man *excentrisch*, und die gerade Verbindungslinie ihrer Mittelpuncte die *Centrale* der beiden Kugeln.

1. Haben zwei Kugelflächen einen Punct der Centrale oder ihrer Verlängerung gemeinschaftlich, so *berühren sie sich* in diesem Puncte, und zwar bezüglich *von außen* oder *von innen*.

2. Haben zwei Kugelflächen mehrere Puncte gemeinschaftlich, so *schneiden sie sich* in diesen Puncten.

Der Durchschnitt zweier Kugelflächen ist ein Kreis.

Denn zieht man von zwei beliebigen Durchschnittspuncten der Kugelflächen auf deren Centrale Senkrechte, so fallen, wie sich leicht beweisen läßt, die Fußpuncte dieser Senkrechten in einen Punct zusammen, und die Senkrechten selbst sind einander gleich.

Folgesätze.

1. Die Centrale zweier sich berührender Kugeln geht durch den Berührungspunct.

2. Der geometrische Ort der Mittelpuncte aller Kugeln, welche eine gegebene Kugel in einem gegebenen Puncte derselben berühren, ist die durch diesen Punct und den Mittelpunct der gegebenen Kugel gehende Gerade.

3. Die durch den Berührungspunct zweier Kugeln an die eine gelegte Berührungsebene ist zugleich eine Berührungsebene der andern.

4. Die Centrale zweier sich schneidender Kugeln steht auf der Ebene des gemeinschaftlichen Durchschnittskreises im Mittelpuncte desselben senkrecht.

§. **274.** Die gegenseitige Lage zweier Kugeln hängt von der Größe ihrer Centrale c und ihrer Halbmesser r und r' ab.

1. Ist $c > r + r'$, so liegt die eine Kugel ganz außerhalb der andern.
2. Ist $c = r + r'$, so berühren sich die beiden Kugeln von außen.
3. Ist $r + r' > c > r - r'$, so schneiden sich die beiden Kugeln.
4. Ist $c = r - r'$, so berühren sich die beiden Kugeln von innen.
5. Ist $c < r - r'$, so liegt die kleinere Kugel ganz innerhalb der größeren.
6. Ist $c = o$, so sind die beiden Kugeln concentrisch.

Folgesatz. Der geometrische Ort der Mittelpuncte aller Kugeln, welche einen gegebenen Halbmesser haben und eine gegebene Kugel berühren, ist eine mit dieser concentrische Kugel, deren Halbmesser gleich ist der Summe oder der Differenz der beiden gegebenen Halbmesser, je nachdem die Berührung von außen oder von innen stattfindet.

III. Aufgaben.

§. **275.** Constructionsaufgaben.

1. (Forderungsatz.) Aus einem gegebenen Puncte mit einem gegebenen Halbmesser eine Kugel zu beschreiben.

2. Den Mittelpunct einer Kugel zu finden, welche durch vier gegebene Puncte geht. (§. 259.)

3. Durch einen gegebenen Punct a) eine Tangente, b) eine Berührungsebene an die Kugel zu legen. (§§. 260 und 263.)

4. Durch eine gegebene Gerade eine Berührungsebene an die Kugel zu legen.

§. **276.** Rechnungsaufgaben.

1. Es sei R der Halbmesser einer Kugel, r der Halbmesser eines Kugelkreises und d der Abstand dieses Kreises vom Kugelmittelpuncte; man bestimme jede dieser Größen, wenn die beiden andern gegeben sind.

2. Die Winkel eines sphärischen Dreieckes sind $A = 75^0\,37'$, $B = 118^0\,51'$, $C = 85^0\,8'$, wie groß sind die Seiten seines Polardreieckes?

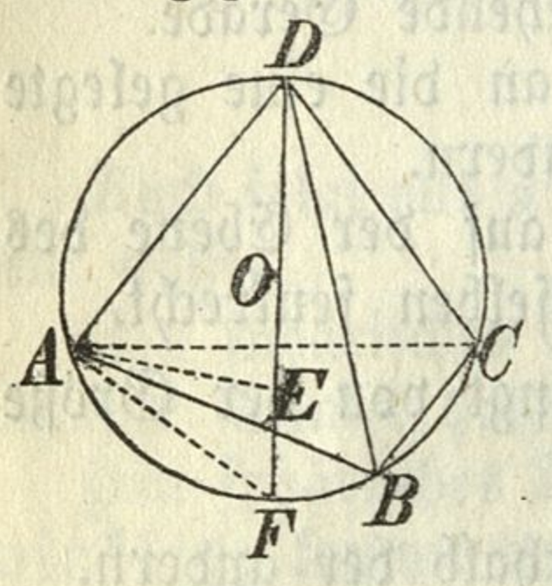
3. Die Seiten eines sphärischen Dreieckes sind $a = 105^0\,12'\,38''$, $b = 39^0\,5'\,50''$, $c = 93^0\,44'\,26''$; wie groß sind die Winkel seines Polardreieckes?

4. Aus der Kante a eines regelmäßigen Polyeders den Halbmesser r der ihm eingeschriebenen, und den Halbmesser R der ihm umschriebenen Kugel zu bestimmen.

Heißt ϱ der Halbmesser des einer Seitenfläche des Polyeders umschriebenen Kreises, so ist, wie man aus Fig. 194 unmittelbar ersieht, für jedes regelmäßige Polyeder $r^2 = R^2 - \varrho^2$.

a) Es sei um das Tetraeder ABCD (Fig. 203) eine Kugel beschrieben und $DE \perp ABC$, so ist E der Mittelpunct des um ABC beschriebenen Kreises; wird DE bis F auf der Kugelfläche verlängert, so ist DF ein Kugeldurchmesser und die Mitte O der Mittelpunct der Kugel und daher auch des Tetraeders. Im rechtwinkligen $\triangle$ DAF ist nun $DF : AD = AD : DE$ (§. 107, 1), oder $2R : a = a : \sqrt{a^2 - \varrho^2}$. Aus dieser Proportion erhält man, da $\varrho^2 = \frac{a^2}{3}$ (§. 192, 1) ist, $R = \frac{a}{4}\sqrt{6}$.

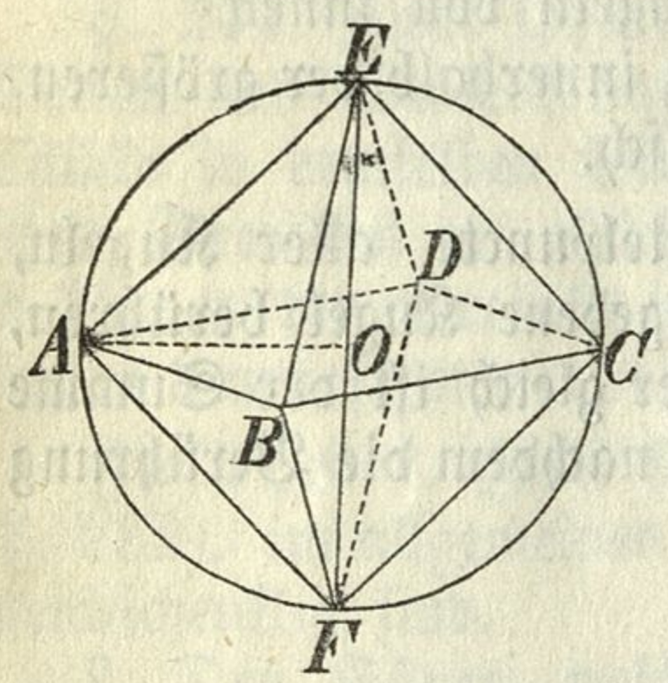
Fig. 203.



Aus $r^2 = R^2 - \varrho^2$ folgt dann $r = \frac{a}{12}\sqrt{6}$.

b) Zieht man beim Oktaeder (Fig. 204) die Diagonale EF, so ist diese ein Durchmesser der umschriebenen Kugel, sie steht senkrecht auf ABCD und der Fußpunct O ist der Mittelpunct sowohl der umschriebenen Kugel, als des um das Quadrat ABCD beschriebenen Kreises. Es ist daher (nach §. 192, 3) $AO = R = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

Fig. 204.



Aus $r^2 = R^2 - \varrho^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3}$ folgt ferner $r = \frac{a}{6}\sqrt{6}$.

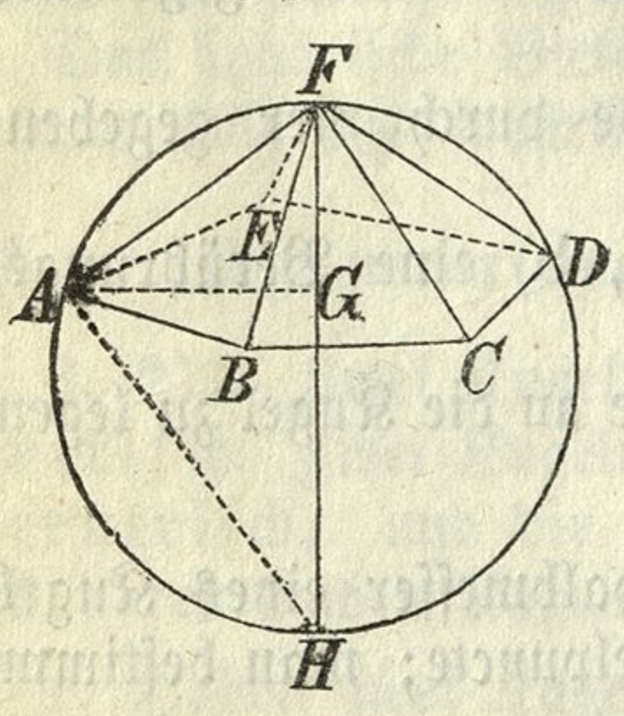
c) Zieht man in Fig. 205, wo um ein Ikosaeder eine Kugel beschrieben ist, FG senkrecht auf das regelmäßige Fünfeck ABCDE, so ist G der Mittelpunct des um dasselbe beschriebenen Kreises und FH ein Kugeldurchmesser. Im rechtwinkligen Dreiecke FAH ist nun $FH : AF = AF : FG$ (§. 107, 1) oder

$$2R : a = a : \sqrt{\left\{a^2 - \frac{a^2}{10}(5 + \sqrt{5})\right\}},$$

weil $AG = \frac{a}{10}\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}$ (§. 192, 6) ist.

Daraus folgt $R = \frac{a}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

Fig. 205.



Aus $r^2 = R^2 - \varrho^2 = \frac{a^2}{16}(10 + 2\sqrt{5}) - \frac{a^2}{3}$

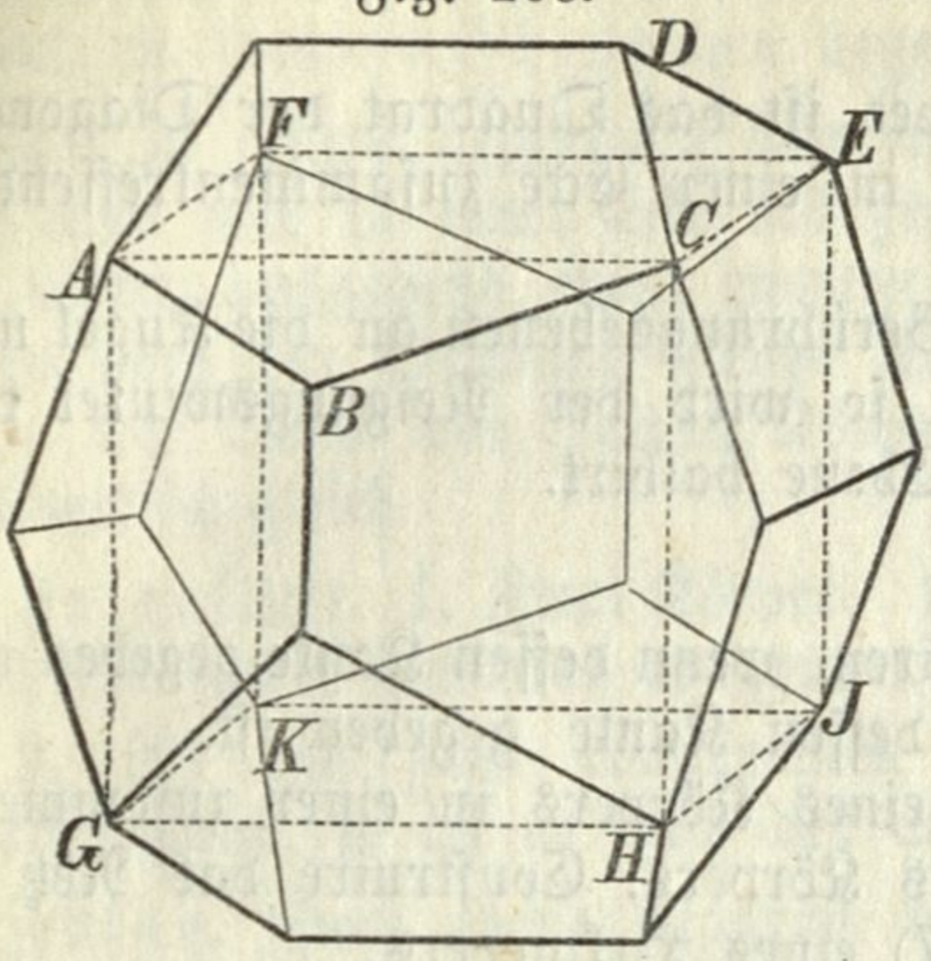
folgt dann $r = \frac{a}{12}\sqrt{42 + 18\sqrt{5}}$.

d) Für das Hexaeder oder den Würfel ist:

$$R = \frac{a}{2}\sqrt{3} \text{ und } r = \frac{a}{2}.$$

e) Das Dodekaeder läßt sich, wie man aus Fig. 206 sieht, in einen Würfel GHJKACEF und sechs seinen Seitenflächen aufsitzende, abgestumpfte dreiseitige Prismen zerlegen, und zwar ist der Halbmesser der dem Würfel umschriebenen Kugel zugleich der Halbmesser der dem Dodekaeder umschriebenen Kugel. Der erstere Halbmesser aber ist, da die Kante des Würfels als Diagonale eines regelmäßigen Fünfeckes $= \frac{a}{2}(1+\sqrt{5})$ (§. 192, 6) ist, nach d) gleich $\frac{a}{4}(1+\sqrt{5})$. $\sqrt{3} = \frac{a}{4}\sqrt{18+6\sqrt{5}}$. Folglich ist auch für das Dodekaeder $R = \frac{a}{4}\sqrt{18+6\sqrt{5}}$.

Fig. 206.



Aus $r^2 = R^2 - \varrho^2 = \frac{a^2}{16}(18+6\sqrt{5}) - \frac{a^2}{10}(5+\sqrt{5})$
(§. 192, 6) folgt dann $r = \frac{a}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}}$.

5. Die Kante eines regelmäßigen Polyeders aus dem Halbmesser a) der eingeschriebenen, b) der umschriebenen Kugel zu berechnen. (Umkehrung der Aufg. 4.)

IV. Uebungssätze und Uebungsaufgaben.

§. **277**. Uebungssätze.

1. Die sechs Ebenen, welche auf den Kanten eines Tetraeders in deren Mitten senkrecht stehen, schneiden sich in einem Puncte, welcher von den vier Eckpuncten des Tetraeders gleich weit absteht.

2. In demselben Puncte schneiden sich die vier Geraden, welche auf den Flächen des Tetraeders in den Mittelpuncten der ihnen umschriebenen Kreise senkrecht stehen.

3. Die sechs Ebenen, welche die Keile eines Tetraeders halbiren, schneiden sich in einem Puncte, welcher von den vier Flächen des Tetraeders gleich weit absteht.

4. Die sechs Ebenen, welche durch die Kanten eines Tetraeders und die Mittellinien der gegenüberliegenden Flächen gehen, schneiden sich in einem Puncte, welcher der Schwerpunct des Tetraeders heißt.

5. In demselben Puncte schneiden sich die drei Geraden, welche die Mitten je zweier gegenüberliegender Kanten des Tetraeders mit einander verbinden.

6. In demselben Puncte, dem Schwerpuncte des Tetraeders, schneiden sich die vier Geraden, welche die Eckpuncte des Tetraeders mit den Schwerpuncten der gegenüberliegenden Flächen (§. 71, 4) verbinden.

Jede dieser Verbindungslinien wird im Schwerpuncte des Tetraeders so getheilt, daß der an der Ecke liegende Abschnitt derselben 3mal so groß ist als der andere.

7. Die Ebenen, welche durch die Kanten einer beliebigen Pyramide senkrecht auf die Grundfläche gelegt werden, schneiden sich in einer einzigen Geraden.

8. Die vier Diagonalen eines Parallelepipeds schneiden sich in einem Puncte.

9. In demselben Puncte schneiden sich die sechs Diagonalebenen eines Parallelepipeds.

10. In jedem rechtwinkligen Parallelepiped ist das Quadrat der Diagonale gleich der Summe der Quadrate der drei in einer Ecke zusammentreffenden Kanten.

11. Legt man durch eine Gerade zwei Berührungsebenen an die Kugel und eine dritte Ebene durch den Mittelpunct, so wird der Neigungswinkel der beiden Berührungsebenen durch die dritte Ebene halbirt.

§. **278.** Constructionsaufgaben.

1. Ein gleichseitiges Tetraeder zu construiren, wenn dessen Kante gegeben ist.

2. Einen Würfel zu construiren, wenn dessen Kante gegeben ist.

3. Die Darstellung aller Grenzflächen eines Körpers in einer zusammenhängenden ebenen Figur heißt das Netz des Körpers. Construire das Netz

1) eines Prisma,
2) einer Pyramide,
3) eines Pyramidenstumpfes,
4) eines Tetraeders,
5) eines Oktaeders,
6) eines Ikosaeders,
7) eines Hektaeders,
8) eines Dodekaeders,
9) eines senkrechten Cylinders,
10) eines senkrechten Kegels,
11) eines senkrechten Kegelstumpfes.

4. Um ein Tetraeder eine Kugel zu beschreiben. (§. 259.)

5. In ein Tetraeder eine Kugel zu beschreiben. (§. 262, 3.)

6. Durch einen gegebenen Punct eine Berührungsebene a) an einen Kegel, b) an einen Cylinder zu legen.

7. Aus einem gegebenen Mittelpuncte eine Kugel zu beschreiben, welche a) eine Ebene, b) eine Kugel berührt.

8. Mit einem gegebenen Halbmesser eine Kugel zu beschreiben, welche a) eine Ebene, b) eine Kugel in einem gegebenen Puncte derselben berührt.

Dritter Abschnitt.

Congruenz, Symmetrie und Aehnlichkeit der Körper.

I. Congruenz und symmetrische Gleichheit der Körper.

§. **279.** Zwei Körper heißen congruent, wenn sie sich so in einander legen lassen, daß sich alle ihre Grenzflächen decken.

Sollen zwei Körper zur Deckung gebracht werden können, so müssen sämmtliche Bestandtheile (Kanten, Flächen, Keile und Ecken) in beiden paarweise gleich sein und in demselben Sinne auf einander folgen.

Folgen die paarweise gleichen Bestandtheile in zwei Körpern im entgegengesetzten Sinne auf einander, so können diese im allgemeinen nicht zur Deckung gebracht werden; die Körper heißen dann symmetrisch-gleich. (§. 232.)

Sowohl in congruenten als in symmetrisch-gleichen Körpern sind je zwei Kanten gleich, je zwei Flächen congruent und je zwei Keile gleich; ein Unterschied besteht nur bezüglich der Ecken, welche in congruenten Körpern congruent, in symmetrisch-gleichen dagegen symmetrisch-gleich sind.

Um zu einem gegebenen Körper einen symmetrisch-gleichen zu erhalten, darf man nur zu einer Ecke des gegebenen Körpers die Scheitelecke bilden und von dieser ausgehend einen zweiten Körper construiren, welcher mit dem gegebenen nach der Ordnung gleiche Kanten, congruente Flächen und gleiche Keile hat. Die Ecken der beiden Körper und ebenso die Körper selbst sind dann symmetrisch gleich.

Folgesätze. 1. Zwei Körper, welche mit einem dritten symmetrisch-gleich sind, sind unter einander congruent.

2. Ist von zwei congruenten Körpern der eine mit einem dritten symmetrisch-gleich, so ist es auch der andere.

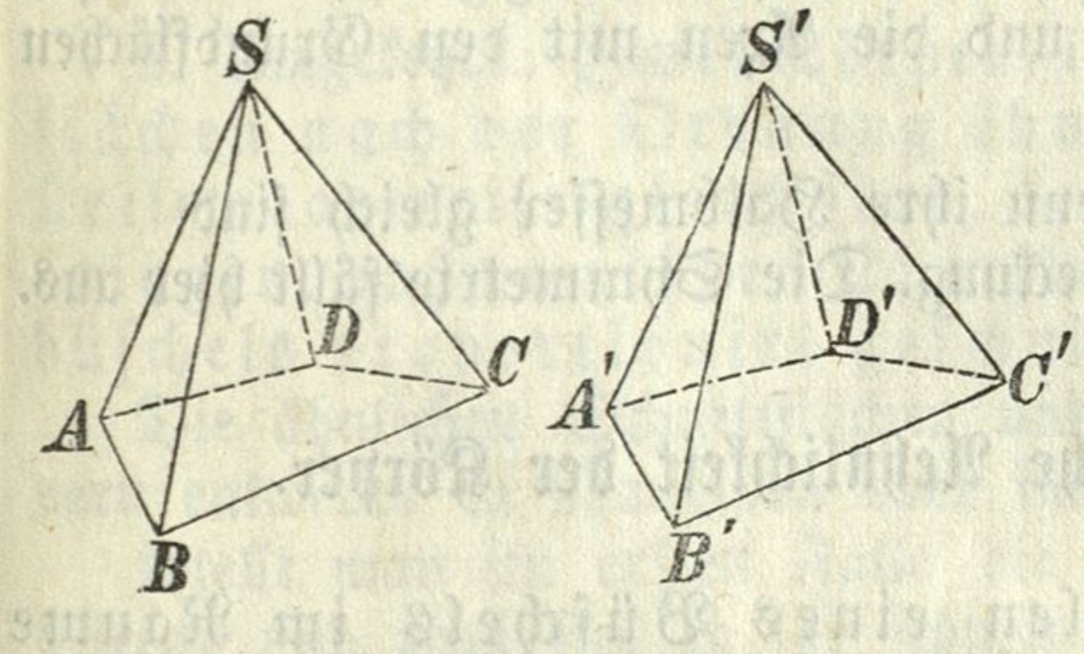
Zusatz. Zwei ebene Figuren, welche paarweise gleiche Seiten und gleiche Winkel haben, können durch entsprechende Drehung auch dann, wenn die gleichen Bestandtheile im entgegengesetzten Sinne auf einander folgen, zur Deckung gebracht werden. Bei ebenen Figuren fällt also die Symmetrie mit der Congruenz zusammen.

§. **280.** Legt man zwei symmetrisch-gleiche Körper so an einander, daß sie eine gemeinschaftliche Grundfläche haben und sie selbst auf entgegengesetzten Seiten derselben liegen, so liegen je zwei entsprechende Puncte der beiden Körper in derselben auf die Grundfläche senkrechten Geraden und in gleichem Abstande von dieser Fläche.

Beruht auf §. 233.

§. **281.** Zwei Pyramiden, in denen die Grundfläche und eine Seitenfläche paarweise congruent und die von ihnen gebildeten Keile gleich sind, sind congruent oder symmetrisch-gleich, je nachdem die gleichen Seiten der congruenten Vielecke in demselben oder im entgegengesetzten Sinne auf einander folgen.

Fig. 207.



a) Es sei (Fig. 207) der Keil $S(AB)D = S'(A'B')D'$, ferner $ABCD \cong A'B'C'D'$ und $SAB \cong S'A'B'$ und zwar $AB = A'B'$, $AD = A'D'$, und $SA = S'A'$.

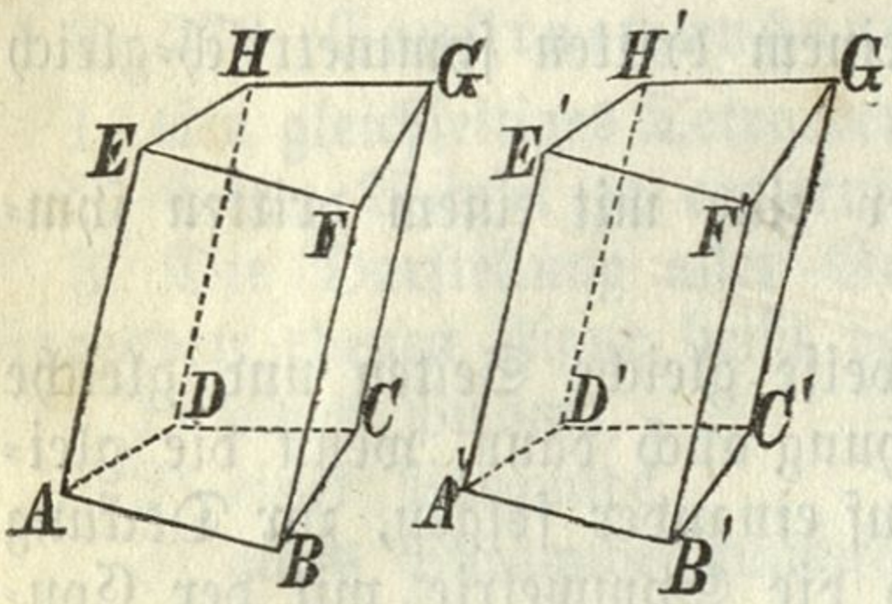
Legt man die Pyramide $S'A'B'C'D'$ so in die Pyramide $SABCD$, daß die gleichen Keile zusammenfallen und die congruenten Grundflächen $A'B'C'D'$ und $ABCD$ einander decken, so wird auch die Seitenfläche $S'A'B'$ die Seitenfläche SAB decken und der Punct S' in den Punct S fallen. Dann aber müssen sich auch die Seitenflächen $S'B'C'$ und SBC, ferner $S'C'D'$ und SCD, endlich $S'A'D'$ und SAD decken; folglich sind die zwei Pyramiden congruent.

b) Folgen in den zwei Pyramiden die gleichen Seiten der congruenten Vielecke im entgegengesetzten Sinne auf einander, so lege man in die Scheitel-

ecke von A eine Pyramide, welche mit der Pyramide SABCD symmetrisch-gleich ist. Dieselbe ist dann (nach a) mit der Pyramide S'A'B'C'D' congruent; folglich ist auch S'A'B'C'D' mit SABCD symmetrisch-gleich.

§. 282. Zwei Prismen, in denen die Grundfläche und zwei mit ihr eine Ecke bildende Seitenflächen paarweise congruent sind, sind congruent oder symmetrisch-gleich, je nachdem die gleichen Seiten der congruenten Flächen in demselben oder im entgegengesetzten Sinne auf einander folgen.

Fig. 208.



Beweis. a) Ist (Fig. 208) das Vieleck $AC \cong A'C'$, $AF = A'F'$, $AH = A'H'$, und folgen die Seiten dieser Vielecke in demselben Sinne auf einander, so ist Ecke $A \cong A'$. Legt man nun das Prisma A'G' so in das Prisma AG, daß die congruenten Ecken A' und A zusammenfallen, so müssen sich die congruenten Vielecke A'C' und AC, A'F' und AF, A'H' und AH decken, daher die Puncte A', B', C', D', E', F', H' folgeweise auf die Puncte A, B, C, D, E, F, H fallen. Wenn aber die oberen Grundflächen, welche mit den unteren, und daher auch unter einander congruent sind, in drei Puncten E' und E, F' und F, H' und H, zusammenfallen, so müssen sie sich ganz decken, daher fällt auch der Punct G' auf G. Die beiden Prismen sind also congruent.

b) Folgen die gleichen Seiten der congruenten Vielecke AC, AF, AH und A'C', A'F', A'H' im entgegengesetzten Sinne auf einander, sind also die Ecken A und A' symmetrisch-gleich, so lege man in die Scheitelecke von A ein Prisma, welches mit dem Prisma AG symmetrisch-gleich ist. Dasselbe ist dann (nach a) mit dem Prisma A'G' congruent; somit ist auch A'G' mit AG symmetrisch-gleich.

Folgesatz. Ein senkrechtes Parallelepiped wird durch jeden Diagonalschnitt in zwei congruente, ein schiefes Parallelepiped in zwei symmetrisch-gleiche dreiseitige Prismen getheilt.

§. 283. 1. Zwei Kegel oder zwei Cylinder sind congruent, wenn ihre Grundflächen und ihre Axen gleich sind und die Axen mit den Grundflächen gleiche Neigungswinkel bilden.

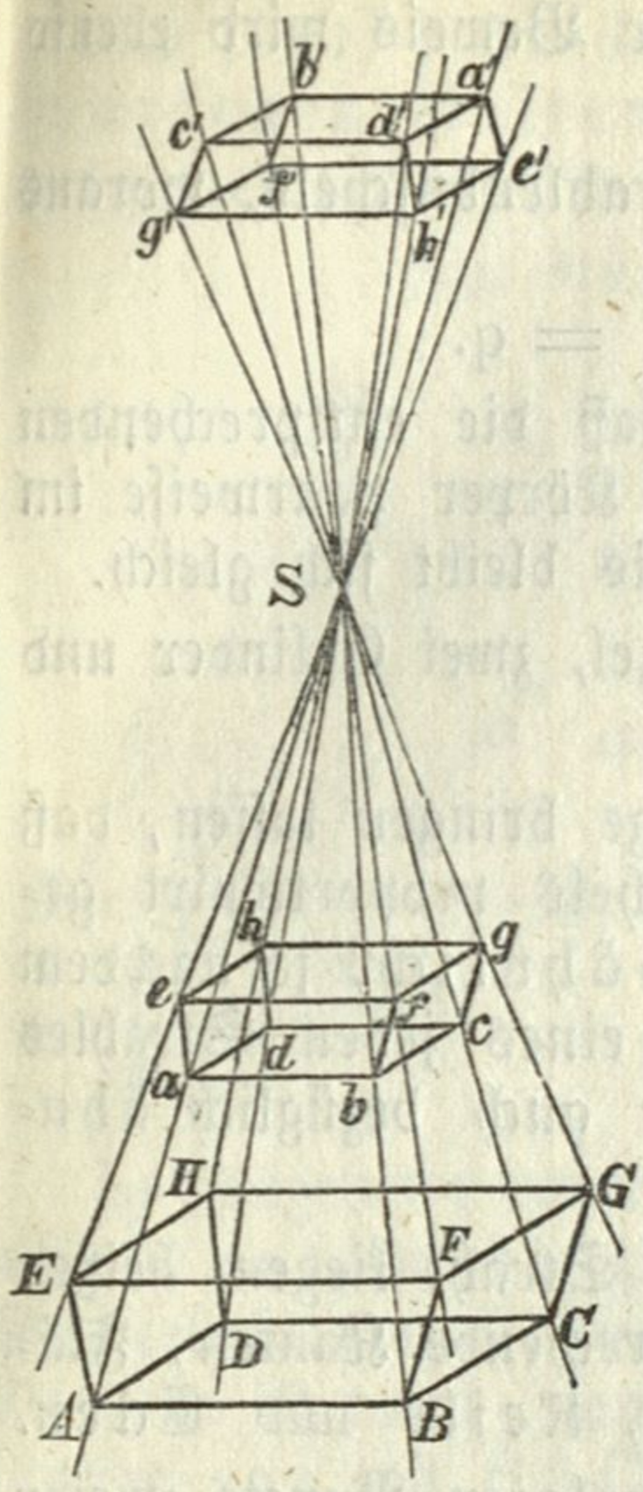
2. Zwei Kugeln sind congruent, wenn ihre Halbmesser gleich sind.

Die Beweise dieser zwei Sätze durch Deckung. Die Symmetrie fällt hier aus.

II. Aehnlichkeit und symmetrische Aehnlichkeit der Körper.

§. 284. 1. Werden die Strahlen eines Büschels im Raume (Fig. 209) vom Strahlenpuncte S aus in den Puncten A und a, B und b, C und c,.. proportionirt geschnitten, so sind in den Körpern ABCDE .. und abcde .. die entsprechenden durch je drei Durchschnittspuncte gehenden Schnittflächen einander ähnlich und die von ihnen gebildeten Keile paarweise gleich.

Fig. 209.



Es sei $SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc = .. = q$.

Aus dieser Voraussetzung folgt unmittelbar $AB \parallel ab$, $AC \parallel ac$, $BC \parallel bc$.. und $ABC \parallel abc$, $ACD \parallel acd$.. (§. 91 und §. 226, 2). Dann ist aber auch (nach §. 226, 3) $ABC \sim abc$, $ACD \sim acd$, ...

Liegen vier Puncte A, B, C, D in einer Ebene, so liegen auch die entsprechenden Puncte a, b, c, d in einer Ebene; denn $abc \parallel ABCD$ und $acd \parallel ABCD$, daher müssen abc und acd in einer und derselben Ebene liegen.

Folglich ist auch $ABCD \sim abcd$, $ABFE \sim abfe$,..

Daß ferner die entsprechenden Keile gleichsind, ergibt sich aus §. 225.

Dieselben Beziehungen finden auch statt, wenn die Puncte a', b', c', d',.. auf den Rückwärtsverlängerungen der Strahlen so liegen, daß $SA : Sa' = SB : Sb' = SC : Sc' = .. = -q$ ist; nur sind dann in den Körpern ABCD.. und a'b'c'd'.. die entsprechenden Strecken zwischen je zwei Durchschnittspuncten im entgegengesetzten Sinne parallel, so daß auch die entsprechenden ähnlichen Schnittflächen und die entsprechenden gleichen Keile im entgegengesetzten Sinne auf einander folgen.

Zusätze. a) Sind A, B, C, D Umfangspuncte eines Kreises, so sind auch a, b, c, d Umfangspuncte eines Kreises. Der Beweis wird wie in dem Zusatze zu §. 97, 1 geführt. Der obige Lehrsatz gilt also auch für zwei Kegel oder zwei Cylinder. In denselben sind die durch die Axen und die entsprechenden Halbmesser der Grundflächen gehenden Schnittflächen ähnlich und bilden gleiche Keile.

b) Liegen die Puncte A, B, C, D, E, .. auf der Oberfläche einer Kugel, so liegen auch a, b, c, d, e, .. auf der Oberfläche einer Kugel. Der Beweis ist analog demjenigen im Zusatz zu §. 97, 1. Die durch entsprechende Halbmesser dieser Kugeln gehenden Schnittflächen sind ähnlich und bilden paarweise gleiche Keile.

2. Umgekehrt: Zwei Körper, in denen die entsprechenden Schnittflächen nach der Ordnung ähnlich und die von ihnen gebildeten Keile paarweise gleich sind, lassen sich immer in eine solche Lage bringen, daß von ihren Oberflächen die Strahlen eines Strahlenbüschels proportionirt geschnitten werden. (Fig. 209.)

Die ähnlichen Schnittflächen und die gleichen Keile folgen in beiden Körpern entweder in demselben oder im entgegengesetzten Sinne auf einander.

Stellt man im ersten Falle die zwei Körper so gegen einander, daß eine Strecke und zwei sich in ihr schneidende Schnittflächen des einen Körpers der entsprechenden Strecke und den entsprechenden zwei Schnittflächen des andern Körpers paarweise in demselben Sinne parallel sind, so müssen wegen der Aehnlichkeit der Schnittflächen und wegen der Gleichheit der von ihnen gebildeten Keile auch je zwei andere entsprechende Strecken, sowie je zwei andere entsprechende Schnittflächen paarweise in demselben Sinne parallel sein.

Haben aber zwei Körper die hier angegebene parallele Lage gegen einander, so müssen sich die durch je zwei entsprechende Puncte derselben gezogenen Geraden in einem und demselben Puncte S schneiden. Der Beweis wird ebenso wie in §. 97, 2. geführt.

SA, SB, SC,.. sind demnach Strahlen eines Strahlenbüschels, woraus (§. 226, 1) folgt:

$$SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc = \ldots = q.$$

Im zweiten Falle werden die Körper so gelegt, daß die entsprechenden Strecken und die entsprechenden Schnittflächen beider Körper paarweise im entgegengesetzten Sinne parallel sind. Der weitere Beweis bleibt sich gleich.

Zusatz. Der obige Lehrsatz gilt auch für zwei Kegel, zwei Cylinder und zwei Kugeln.

§. 285. Zwei Körper, welche sich in eine solche Lage bringen lassen, daß von ihren Oberflächen die Strahlen eines Strahlenbüschels proportionirt geschnitten werden, heißen ähnlich oder symmetrisch-ähnlich, je nachdem das constante Verhältniß der entsprechenden Abschnitte eines jeden Strahles positiv oder negativ ist. In dieser Lage sind die Körper auch bezüglich ähnlich liegend oder symmetrisch-ähnlich liegend.

Je zwei entsprechende Puncte, welche auf demselben Strahl liegen, heißen auch hier homologe Puncte, ebenso auch zwei entsprechende Kanten, Flächen, Keile und Ecken, homologe Kanten, Flächen, Keile und Ecken.

Der Punct S, in welchem sich die durch die homologen Puncte zweier ähnlich oder symmetrisch-ähnlich liegender Körper gezogenen Geraden schneiden, heißt der Aehnlichkeitspunct der beiden Körper, und zwar ein äußerer oder ein innerer, je nachdem die homologen Punctpaare auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten des Strahlenpunctes liegen.

Folgesätze. 1. Sowohl in ähnlichen als in symmetrisch-ähnlichen Körpern sind die homologen Kanten proportionirt, die homologen Flächen ähnlich und die homologen Keile gleich; die homologen Ecken dagegen sind in ähnlichen Körpern congruent, in symmetrisch-ähnlichen symmetrisch-gleich.

2. Zwei Körper, welche mit einem dritten symmetrisch-ähnlich sind, sind unter einander ähnlich.

3. Ist von zwei ähnlichen Körpern der eine mit einem dritten symmetrisch-gleich, so ist der andere mit diesem dritten symmetrisch-ähnlich.

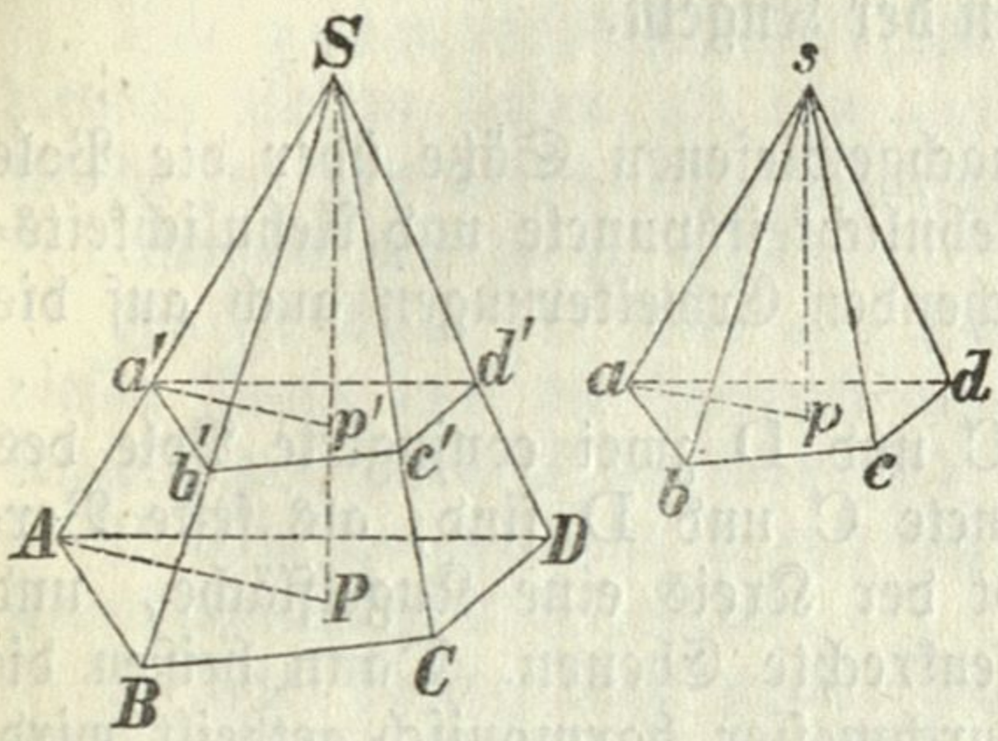
Zusatz. Ist für zwei Körper das constante Verhältniß der Abschnitte eines jeden von ihren Oberflächen geschnittenen Strahls $= +1$, so sind die ähnlichen Körper zugleich congruent; ist dieses Verhältniß $= -1$, so sind die symmetrisch-ähnlichen Körper zugleich symmetrisch-gleich. Die Congruenz und die symmetrische Gleichheit sind demnach nur ein besonderer Fall der Aehnlichkeit und der symmetrischen Aehnlichkeit.

§. 286. 1. Wird eine Pyramide durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist die abgeschnittene Pyramide der gegebenen ähnlich oder symmetrisch-ähnlich, je nachdem die Ebene die Kanten der Pyramide selbst oder ihre Rückwärtsverlängerungen über den Scheitel hinaus schneidet.

Folgt aus §§. 243 und 285, indem man den Scheitel der Pyramiden als Strahlenpunct annimmt.

2. Zwei Pyramiden, in denen die Grundfläche und eine Seitenfläche paarweise ähnlich und die von ihnen gebildeten Keile gleich sind, sind ähnlich oder symmetrisch-ähnlich, je nachdem die homologen Seiten der ähnlichen Vielecke in demselben oder im entgegengesetzten Sinne auf einander folgen.

Fig. 210.



a) Es sei (Fig. 210) $S(AB)D = s(ab)d$, ferner $ABCD \sim abcd$ und $SAB \sim sab$ und zwar $AB : ab = AD : ad = SA : sa$.

Schneidet man auf der Kante SA das Stück $Sa' = sa$ ab, und legt durch den Punct a' die Ebene $a'b'c'd' \parallel ABCD$, so sind die Pyramiden SAC und Sa'c' ähnlich (nach 1.). Die Pyramide Sa'c' aber ist (§. 281) mit Sac congruent, daher sind auch die Pyramiden SAC und sac ähnlich.

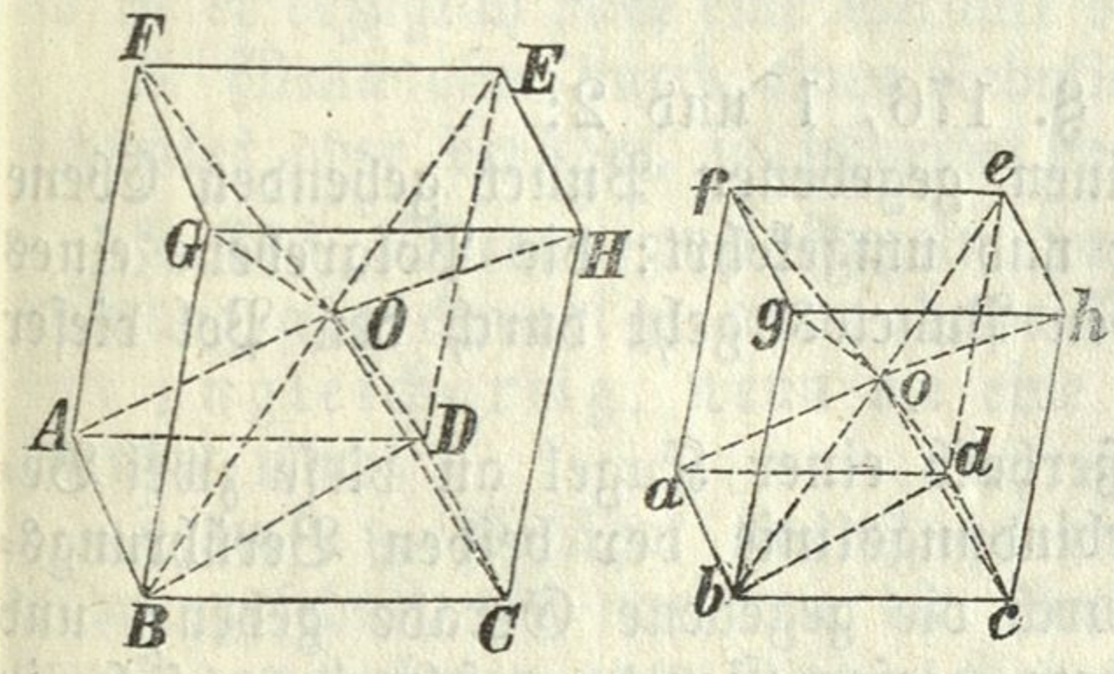
b) Folgen die homologen Seiten der ähnlichen Vielecke ABCD, SAB und abcd, sab im entgegengesetzten Sinne auf einander, so construire man in der Scheitelecke von S eine Pyramide, welche mit SAC symmetrisch-gleich ist. Dieselbe ist dann (nach a) mit der Pyramide sac ähnlich; somit ist die Pyramide sac mit SAC symmetrisch-ähnlich.

3. Die Höhen ähnlicher oder symmetrisch-ähnlicher Pyramiden verhalten sich wie ihre homologen Kanten.

Ist (Fig. 210) $SP \perp ABCD$ und $sp \perp abcd$ und zieht man die Geraden AP, ap und a'p', so ist das Dreieck $SAP \sim Sa'p'$, daher $SP : Sp' = SA : Sa'$; allein wegen $Sa' = sa$ ist $\triangle Sa'p' \cong sap$, folglich $Sp' = sp$, und somit $SP : sp = SA : sa$.

§. 287. Je zwei ähnliche Polyeder lassen sich in eine gleiche Anzahl ähnlicher Pyramiden zerlegen.

Fig. 211.



Es seien (Fig. 211) die Polyeder ABE und abe ähnlich und zugleich auch ähnlich liegend. Denkt man sich durch ein Paar homologer Puncte die Geraden Aa und Bb, und von ihrem Durchschnittspuncte S, welcher der Aehnlichkeitspunct der beiden Polyeder ist, zu einem Puncte O im Innern des Polyeders ABE einen Strahl SO gezogen, so ist, wenn $SO : So = SA : Sa$ ist, o der homologe Punct im Innern des Polyeders abe.

Legt man nun durch O und o und die Kanten beider Polyeder Ebenen, so werden dadurch die Polyeder in so viele Pyramiden zerlegt, als sie Grenzflächen haben. Diese Pyramiden aber sind paarweise ähnlich, wie unmittelbar aus §. 284, 1 folgt.

Der Satz gilt auch in seiner Umkehrung.

§. 288. 1. Zwei Kegel oder zwei Cylinder sind ähnlich, wenn ihre Axen den Durchmessern ihrer Grundflächen proportionirt sind und mit den letzteren gleiche Neigungswinkel bilden.

2. Je zwei Kugeln sind ähnlich.

III. Pole und Polarebenen, Potenzen und Potenzebenen, Aehnlichkeitspuncte und Aehnlichkeitsebenen der Kugeln.

§. 289. Die in den §§. 175 — 187 nachgewiesenen Sätze über die Pole und Polaren, Potenzen und Potenzlinien, Aehnlichkeitspuncte und Aehnlichkeitsaxen der Kreise lassen sich mit den entsprechenden Erweiterungen auch auf die Kugel übertragen.

Dreht sich die Figur 138, in welcher C und D zwei conjugirte Pole des Kreises, PR und ST die Polaren der Puncte C und D sind, als feste Verbindung um die Gerade AD, so beschreibt der Kreis eine Kugelfläche, und die Polaren PR und ST zwei auf AD senkrechte Ebenen. Dann heißen die Puncte C und D, da durch sie der Kugeldurchmesser harmonisch getheilt wird, conjugirte Pole der Kugel, und die von den Polaren PR und ST beschriebenen Ebenen die Polarebenen der Puncte C und D, und umgekehrt C und D die Pole dieser Ebenen in Bezug auf die Kugel.

Hieraus folgt mit Rücksicht auf §. 175, 3 und 4:

1. Zieht man von einem gegebenen Puncte außerhalb einer Kugel an diese eine Tangente und legt durch diese eine auf der Verbindungslinie zwischen jenem Puncte und dem Kugelmittelpuncte senkrechte Ebene, so ist diese die Polarebene des gegebenen Punctes, und umgekehrt: der gegebene Punct ist der Pol dieser Ebene.

2. Legt man durch einen gegebenen Punct innerhalb einer Kugel einen Kugelkreis, welcher auf dem zu diesem Puncte gezogenen Durchmesser senkrecht steht, schneidet den Kugelkreis durch eine beliebige durch den Durchmesser gehende Ebene, und zieht in dieser durch deren Durchschnittspuncte mit dem Kugelkreise an die Kugel zwei Tangenten, so ist die Ebene, welche durch den Durchschnittspunct dieser Tangenten mit dem Kugelkreise parallel gelegt wird, die Polarebene des gegebenen Punctes; und umgekehrt: der gegebene Punct ist der Pol dieser Ebene.

Ferner ergibt sich mit Rücksicht auf §. 176, 1 und 2:

3. Der Pol einer jeden durch einen gegebenen Punct gehenden Ebene liegt in der Polarebene dieses Punctes; und umgekehrt: die Polarebene eines jeden in einer gegebenen Ebene liegenden Punctes geht durch den Pol dieser Ebene.

4. Legt man durch eine Gerade außerhalb einer Kugel an diese zwei Berührungsebenen, so liegen in der Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte die Pole aller Ebenen, welche durch die gegebene Gerade gehen; und umgekehrt: die Polarebenen aller Puncte dieser Geraden schneiden sich in jener Verbindungslinie.

5. Legt man durch die zwei Puncte, in denen eine Gerade innerhalb einer Kugel diese durchschneidet, Berührungsebenen an die Kugel, so liegen in der Durchschnittslinie derselben die Pole aller Ebenen, welche durch die gegebene Gerade gehen; und umgekehrt: die Polarebenen aller Puncte dieser Geraden schneiden sich in jener Durchschnittslinie.

§. **290**. Das Product der beiden Abschnitte, welche jede durch einen gegebenen Punct M gezogene und eine gegebene Kugel schneidende Gerade zwischen jenem Puncte und ihren Durchschnittspuncten mit der Kugelfläche bildet, ist eine constante Größe. (Folgt aus §. 178, wenn man durch die Abschnitte und den Kugeldurchmesser eine Ebene legt.)

Dieses constante Product heißt die Potenz des Punctes M in Bezug auf die gegebene Kugel.

Der geometrische Ort aller Puncte, welche für zwei gegebene Kugeln dieselbe Potenz haben, ist eine auf der Centrale dieser Kugeln senkrechte Ebene, welche die Potenzebene der beiden Kugeln heißt.

Beweis wie zu §. 179.

Folgesätze. 1. Die aus einem Puncte der Potenzebene in einer durch diesen Punct und die Centrale der zwei Kugeln gehenden Ebene an die beiden Kugeln gezogenen Tangenten sind einander gleich, und umgekehrt.

2. Die Potenzebene zweier sich schneidender Kugeln ist der gemeinschaftliche Durchschnittskreis derselben.

3. Die Potenzebene zweier sich berührender Kugeln ist die durch den Berührungspunct derselben gelegte gemeinschaftliche Berührungsebene.

§. **291**. Drei Kugeln haben drei, vier Kugeln haben sechs Potenzebenen.

1. Die drei Potenzebenen dreier Kugeln schneiden sich in einer gemeinschaftlichen Geraden, welche auf der durch die Mittelpuncte der drei Kugeln gelegten Ebene senkrecht steht.

2. Die Potenzebenen von vier Kugeln schneiden sich in einem gemeinschaftlichen Puncte, welcher das Potenzcentrum der vier Kugeln heißt.

Die Beweise für diese zwei Sätze sind analog dem Beweise zu §. 181.

§. **292**. Für je zwei Kugeln gibt es einen äußeren und einen inneren Aehnlichkeitspunct; ebenso äußere und innere Aehnlichkeitsstrahlen.

Lehrsätze. 1. Zieht man in zwei Kugeln durch die Endpuncte je zweier Halbmesser, welche entweder in demselben oder im entgegengesetzten Sinne parallel sind, gerade Linien, so schneiden sich diese alle bezüglich in dem äußeren oder inneren Aehnlichkeitspuncte der beiden Kugeln.

Folgt aus §. 284, 2.

2. Ist ein Aehnlichkeitsstrahl eine Secante oder Tangente der einen Kugel, so ist er bezüglich auch eine Secante oder Tangente der anderen Kugel (§. 184).

3. Wenn eine durch einen Aehnlichkeitspunct gehende Ebene die eine Kugel schneidet oder berührt, so schneidet oder berührt sie auch die andere Kugel.

§. **293**. Werden zwei Kugeln von einer dritten berührt, so heißt die Berührung gleichartig, wenn beide Kugeln von außen oder beide von innen, und ungleichartig, wenn die eine Kugel von außen, die andere von innen berührt wird.

Lehrsatz. Berührt eine Kugel zwei gegebene Kugeln, so geht 1. die Berührungssehne, je nachdem die Berührung gleichartig oder ungleichartig ist, durch den äußeren oder inneren Aehnlichkeitspunct der zwei gegebenen Kugeln, und ist 2. die Potenz dieses Aehnlichkeitspunctes in Bezug auf die Berührungskugel gleich der mittleren geometrischen Proportionale zwischen den Potenzen desselben Punctes für die beiden gegebenen Kugeln.

Der Beweis ist analog demjenigen zu §. 185, wenn man durch die Mittelpuncte der drei Kugeln eine Ebene legt.

§. **294.** Zu drei Kugeln gehören drei äußere und drei innere Aehnlichkeitspuncte. Die drei äußeren liegen, wie bei drei Kreisen (§. 186), auf der äußeren Aehnlichkeitsaxe, je ein äußerer und zwei innere auf einer inneren Aehnlichkeitsaxe.

Sind vier Kugeln O_1, O_2, O_3, O_4 gegeben, so erhält man für dieselben sechs äußere Aehnlichkeitspuncte $A_{1,2}$ $A_{1,3}$ $A_{1,4}$ $A_{2,3}$ $A_{2,4}$ $A_{3,4}$ und sechs innere Aehnlichkeitspuncte $J_{1,2}$ $J_{1,3}$ $J_{1,4}$ $J_{2,3}$ $J_{2,4}$ $J_{3,4}$, wobei z. B. $A_{1,4}$ den äußeren, und $J_{1,4}$ den inneren Aehnlichkeitspunct der Kugeln O_1 und O_4 bezeichnet.

Die zwölf Aehnlichkeitspuncte von vier Kugeln liegen in acht verschiedenen Ebenen, und zwar zu je sechs in einer und derselben Ebene.

Beweis. Von den drei äußeren Aehnlichkeitsaxen

$A_{1,2}$ $A_{1,3}$ $A_{2,3}$, $A_{1,2}$ $A_{1,4}$ $A_{2,4}$ und $A_{1,3}$ $A_{1,4}$ $A_{3,4}$

haben je zwei einen anderen Aehnlichkeitspunct gemeinschaftlich, also schneiden sich je zwei dieser Axen in verschiedenen Puncten, woraus folgt, daß alle drei Aehnlichkeitsaxen, somit auch die in ihnen enthaltenen sechs äußeren Aehnlichkeitspuncte

$A_{1,2}$ $A_{1,3}$ $A_{1,4}$ $A_{2,3}$ $A_{2,4}$ $A_{3,4}$

in einer und derselben Ebene liegen.

Indem man statt der äußeren je drei innere Aehnlichkeitsaxen mit einander vergleicht, überzeugt man sich auf gleiche Weise, daß auch folgende Combinationen von je sechs Aehnlichkeitspuncten

$A_{1,2}$	$A_{1,3}$	$A_{2,3}$	$J_{1,4}$	$J_{2,4}$	$J_{3,4}$
$A_{1,2}$	$A_{1,4}$	$A_{2,4}$	$J_{1,3}$	$J_{2,3}$	$J_{3,4}$
$A_{1,3}$	$A_{2,4}$	$A_{3,4}$	$J_{1,2}$	$J_{1,3}$	$J_{1,4}$
$A_{2,3}$	$A_{2,4}$	$A_{3,4}$	$J_{1,2}$	$J_{1,3}$	$J_{1,4}$

dann ebenso

$A_{1,2}$	$A_{3,4}$	$J_{1,3}$	$J_{1,4}$	$J_{2,3}$	$J_{2,4}$
$A_{1,3}$	$A_{2,4}$	$J_{1,2}$	$J_{1,4}$	$J_{2,3}$	$J_{3,4}$
$A_{1,4}$	$A_{2,3}$	$J_{1,2}$	$J_{1,3}$	$J_{2,4}$	$J_{3,4}$

in einer Ebene liegen.

Diese acht Ebenen heißen Aehnlichkeitsebenen, und zwar die erste, welche die sechs äußeren Aehnlichkeitspuncte enthält, die äußere; die folgenden vier, welche je drei äußere und drei innere Aehnlichkeitspuncte enthalten, mittlere; und die letzten drei, welche je zwei äußere und vier innere Aehnlichkeitspuncte enthalten, innere Aehnlichkeitsebenen.

§. **295.** Berührt eine Kugel vier gegebene Kugeln, so kann die Berührung auf sechzehn verschiedene Arten stattfinden.

Es gibt zwei Kugeln, welche alle vier Kugeln gleichartig berühren; acht Kugeln, welche je drei Kugeln gleichartig und die vierte mit den andern ungleichartig; endlich sechs Kugeln, welche je zwei Kugeln gleichartig und zwei mit den andern ungleichartig berühren.

Diese acht Paare von Berührungskugeln gehören so zusammen, daß die eine Berührungskugel irgend eine der gegebenen Kugeln von außen berührt, während die andere dieselbe von innen berührt. Zwei auf diese Art zusammengehörige Berührungskugeln heißen conjugirt.

Lehrsatz. Werden vier gegebene Kugeln von zwei anderen Kugeln, und zwar von der einen alle von außen, von der zweiten alle von innen berührt, so finden folgende Relationen statt:

1. Die vier Berührungssehnen in den gegebenen Kugeln gehen durch das Potenzcentrum derselben.

2. Die äußere Aehnlichkeitsebene der gegebenen Kugeln ist die Potenzebene der beiden anderen Kugeln.

3. Die Pole der äußeren Aehnlichkeitsebene der gegebenen Kugeln in Bezug auf dieselben liegen auf den entsprechenden Berührungssehnen.

Der Beweis kann jenem in §. 187 nachgebildet werden.

Zusatz. Für die sieben übrigen conjugirten Paare von Berührungskugeln gelten dieselben Beziehungen; nur tritt an die Stelle der äußeren Aehnlichkeitsebene der vier gegebenen Kugeln je eine der vier mittleren, oder der drei inneren Aehnlichkeitsebenen.

IV. Aufgaben.

§. **296**. Constructionsaufgaben.

1. Zu einem gegebenen Puncte die Polarebene zu construiren. (§. 289, 1 oder 2.)

2. Zu einer gegebenen Ebene den Pol zu finden. (§. 289, 1 oder 2.)

3. Zu einer gegebenen Geraden die Durchschnittslinie der Polarebenen aller Puncte jener Geraden zu finden. (§. 289, 4 oder 5.)

4. Die Potenzebene zweier Kugeln zu bestimmen. (§. 290.)

5. Die Durchschnittslinie der Potenzebenen dreier Kugeln zu bestimmen. (§. 291, 1.)

6. Das Potenzcentrum von vier Kugeln zu finden. (§. 291, 2.)

7. Den äußeren und den inneren Aehnlichkeitspunct zweier Kugeln zu finden. (§. 292, 1.)

8. An zwei Kugeln eine gemeinschaftliche a) Tangente, b) Berührungsebene zu legen. (§. 292, 2 und 3.)

9. Zu vier gegebenen Kugeln die acht Aehnlichkeitsebenen zu bestimmen. (§. 294.)

10. Eine Kugel zu beschreiben, welche vier gegebene Kugeln berührt.

Man suche 1. das Potenzcentrum der gegebenen vier Kugeln, 2. die äußere Aehnlichkeitsebene derselben, 3. die Pole dieser Aehnlichkeitsebene in Bezug auf jede der gegebenen Kugeln, und verbinde 4. jeden dieser Pole mit dem Potenzcentrum. Dadurch erhält man die Berührungspuncte für zwei Kugeln, von denen die eine die vier gegebenen Kugeln von außen, die andere von innen berührt.

Indem man statt der äußeren Aehnlichkeitsebene je eine der vier mittleren, oder der drei inneren nimmt, erhält man die sieben übrigen, noch möglichen Paare von Berührungskugeln.

Die Richtigkeit der Lösung beruht auf §. 295.

Zusatz. Die eben angegebene Construction enthält zugleich die Lösung des allgemeinen Berührungsproblems im Raume:

Wenn einzelne Puncte, Ebenen oder Kugeln, zusammen vier Elemente, gegeben sind, eine Kugel zu construiren, welche durch die gegebenen Puncte geht und die gegebenen Ebenen oder Kugeln berührt.

Dieses Problem umfaßt 15 verschiedene Aufgaben, deren eine die obige Aufgabe 10 ist. Die Lösung der übrigen Aufgaben ergibt sich aus der Lösung der Aufg. 10, wenn man den Punct als eine Kugel mit dem Halbmesser Null, und die Ebene als eine Kugel mit einem unendlich großen Halbmesser annimmt. Die Bedeutung der Potenzebenen und der Aehnlichkeitspuncte für diese besonderen Fälle ist analog mit der Bedeutung, welche für die ähnlichen Fälle die Potenzlinien und Aehnlichkeitspuncte der Kreise (§§. 180 und 183) haben.

Vierter Abschnitt.

Messen der Körper.

§. **297.** Bei der Ausmessung der Körper kommt die Bestimmung der Oberfläche und des Cubikinhaltes derselben in Betracht.

Um die Oberfläche eines Körpers zu bestimmen, darf man nur alle Grenzflächen berechnen und die erhaltenen Flächeninhalte derselben addiren.

Um den Cubikinhalt eines Körpers, d. i. die Größe des von seinen Grenzflächen eingeschlossenen Raumes zu bestimmen, nimmt man irgend einen bekannten Körper als Einheit des Körpermaßes an und untersucht, wie oft derselbe in dem gegebenen Körper enthalten ist. Als Einheit des Körpermaßes wird ein Cubus angenommen, dessen Kante der Längeneinheit gleich ist und der für das Metermaß bezüglich ein Cubikmeter, ein Cubikdecimeter, .. heißt.

Als Hohlmaß heißt das Cubikdecimeter Liter; 100 Liter = 1 Hektoliter.

Wenn in dem Folgenden von Producten aus Flächen und Linien geredet wird, so sind immer nur die Maßzahlen derselben zu verstehen.

I. Das Prisma.

1. Oberfläche des Prisma.

§. **298.** 1. Die Oberfläche o eines Prisma wird erhalten, wenn man die Seitenflächen als Parallelogramme bestimmt und zu der dadurch erhaltenen Seitenoberfläche s den doppelten Flächeninhalt b der Grundfläche addirt; also $o = s + 2b$.

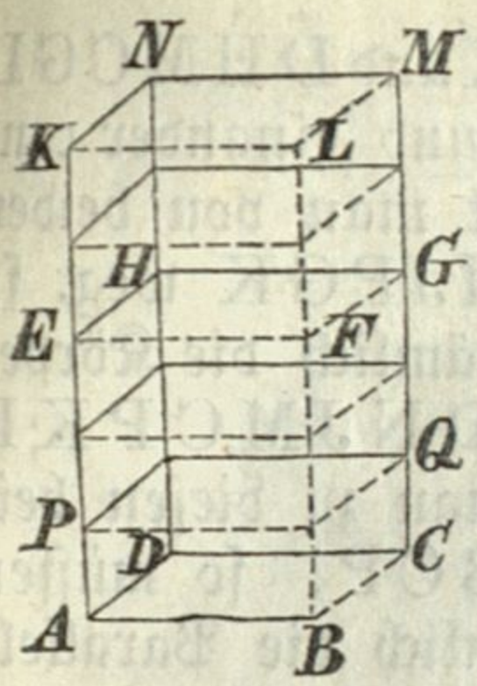
2. Die Seitenoberfläche eines senkrechten Prisma ist gleich dem Producte aus dem Umfange der Grundfläche und der Höhe.

Denn die Seitenflächen sind Rechtecke, deren gemeinschaftliche Höhe die Höhe des Prisma ist.

2. Vergleichung der Cubikinhalte der Prismen.

§. **299.** Zwei rechtwinklige Parallelepipede über derselben Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen.

Fig. 212.



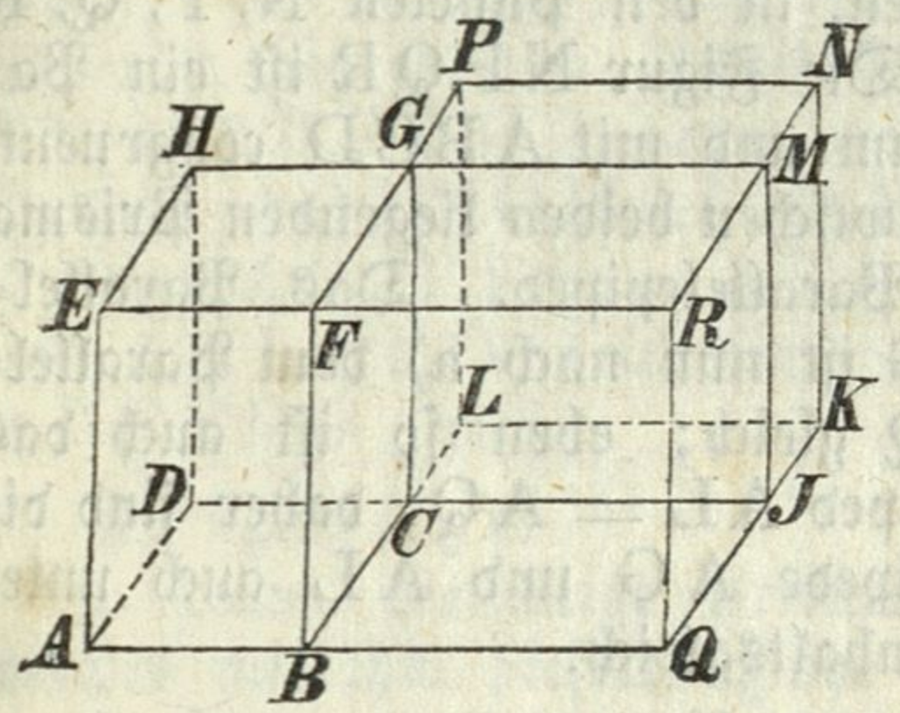
Es seien die Höhen AE und AK (Fig. 212) commensurabel, AP das gemeinschaftliche Maß derselben und AE = m . AP, AK = n . AP, folglich AE : AK = m : n. Theilt man AK in n gleiche Theile, von denen AE m enthält, und legt durch jeden Theilungspunct eine mit der Grundfläche parallele Ebene, so sind alle diese Durchschnitte mit der Grundfläche congruent. Es wird also das Parallelepiped AG in m, und jenes AM in n Parallelepipede getheilt, deren jedes (§. 282) dem Parallelepiped AQ gleich ist, so daß AG = m . AQ, AM = n . AQ, und folglich AG : AM = m : n ist. Da nun auch AE : AK = m : n, so hat man

$$AG : AM = AE : AK.$$

Sind die Höhen AE und AK incommensurabel, so folgt aus §. 88, daß die obige Proportion auch für diesen Fall Giltigkeit hat.

§. 300. Zwei rechtwinklige Parallelepipede von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen.

Fig. 213.



Es seien (Fig. 213) die rechtwinkligen Parallelepipede CE und CN, deren gemeinschaftliche Höhe CG ist. Man lege die beiden Parallelepipede auf derselben Ebene ABK so an einander, daß die rechten Winkel BCD und JCL die Lage von Scheitelwinkeln erhalten. Da CG auf der Ebene ABK senkrecht steht und die beiden Flächen GE und GN mit ABK parallel sind, so müssen diese zwei Flächen in derselben Ebene liegen; auch müssen die Flächen CH und CM in derselben Ebene DCM, so wie die Flächen CF und CP in derselben Ebene BCP liegen. Werden nun die Ebenen BE, JN und EN erweitert, bis sie sich in den Geraden QR, FR und MR schneiden, so entsteht ein neues rechtwinkliges Parallelepiped CR. Da nun die Parallelepipede CE und CR über derselben Grundfläche BG, und eben so die Parallelepipede CR und CN über derselben Grundfläche CM liegen, so hat man nach §. 299

$\frac{CE}{CR} = \frac{CD}{CJ}$ und $\frac{CR}{CN} = \frac{BC}{CL}$, daher $\frac{CE}{CR} \cdot \frac{CR}{CN} = \frac{CD}{CJ} \cdot \frac{BC}{CL}$ oder $\frac{CE}{CN} = \frac{CD}{CJ} \cdot \frac{BC}{CL}$;

aber $\frac{CD}{CJ} \cdot \frac{BC}{CL} = \frac{ABCD}{CJKL}$ (§. 119); folglich $\frac{CE}{CN} = \frac{ABCD}{CJKL}$.

§. 301. Je zwei rechtwinklige Parallelepipede verhalten sich wie die Producte aus den Maßzahlen ihrer Grundflächen und Höhen.

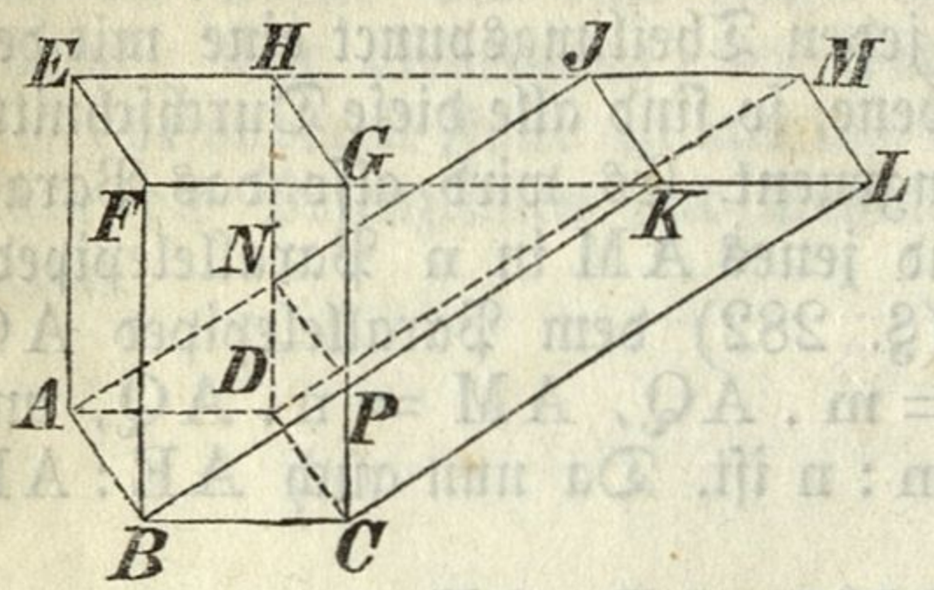
Der Beweis ist demjenigen in §. 119 ähnlich.

§. 302. Zwei Parallelepipede sind inhaltsgleich, wenn sie dieselbe Grundfläche und gleiche Höhe haben.

Wenn zwei Parallelepipede auf derselben Grundfläche aufstehen und gleiche Höhe haben, so müssen die oberen Grundflächen in einer und derselben Ebene liegen. Im Beweise selbst sind dann zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Wenn die oberen Grundflächen zwischen denselben Parallelen EM und FL liegen. (Fig. 214.)

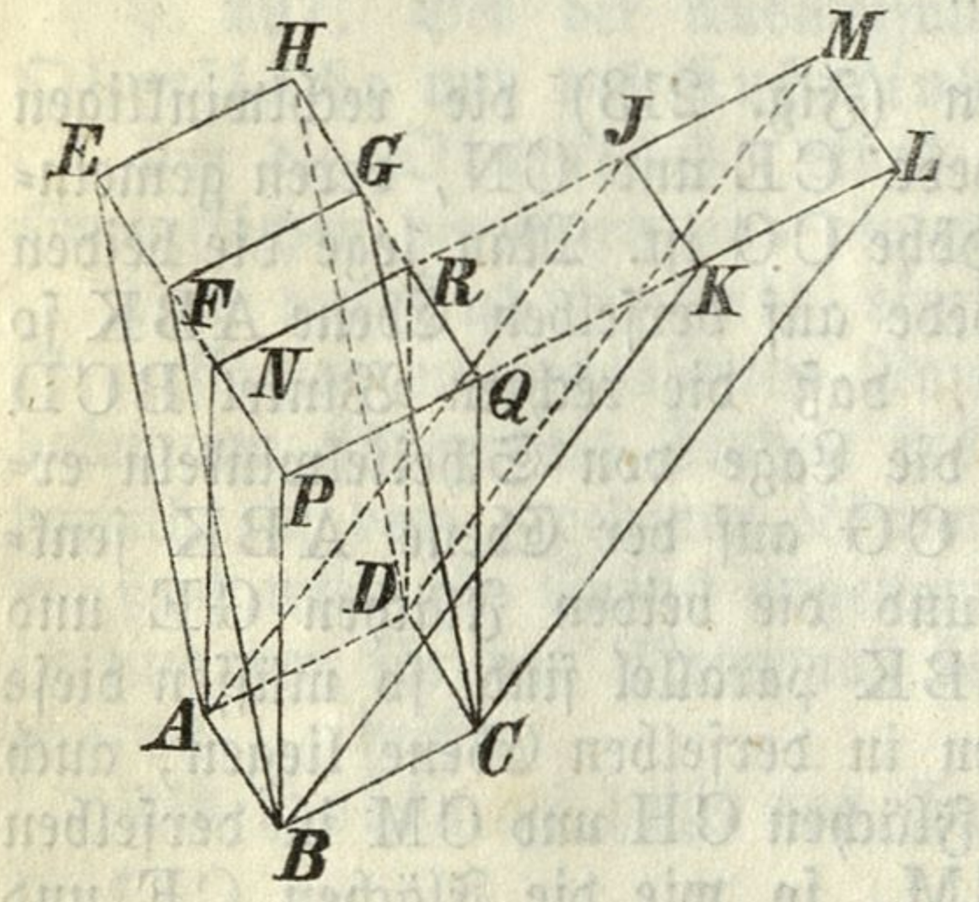
Fig. 214.



Die Körper AEJBFK und DHMCGL sind dreiseitige Prismen und einander congruent (§. 282). Nimmt man von beiden Prismen den Körper NHJPGK weg, so müssen auch die Reste, nämlich die Körper AEHNBFGP und DNJMCPKL gleich sein, und addirt man zu diesen beiden den Körper ADNBCP, so müssen auch die Summen, nämlich die Parallelepipede AG und AL, gleich sein.

b) Wenn die oberen Grundflächen nicht zwischen denselben Parallelen liegen, wie in den Parallelepipeden AG und AL (Fig. 215).

Fig. 215.

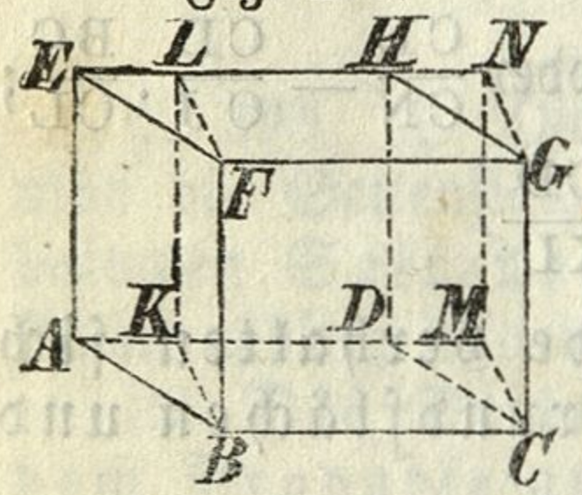


Verlängert man die Kanten EF und HG und eben so die Kanten MJ und LK, so müssen sich dieselben, da sie in derselben Ebene liegen, in den Puncten N, P, Q, R schneiden. Die Figur NPQR ist ein Parallelogramm und mit ABCD congruent, daher das zwischen beiden liegenden Prisma AQ ein Parallelepiped. Das Parallelepiped AG ist nun nach a) dem Parallelepiped AQ gleich; eben so ist auch das Parallelepiped AL = AQ; daher sind die Parallelepipede AG und AL auch unter einander inhaltsgleich.

Folgesatz. Jedes schiefe Parallelepiped ist gleich einem senkrechten, das mit ihm dieselbe Grundfläche und gleiche Höhe hat.

§. **303.** Jedes senkrechte nicht rechtwinklige Parallelepiped ist gleich einem rechtwinkligen, welches mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Fig. 216.



Es sei BH (Fig. 216) ein senkrechtes Parallelepiped, dessen Grundfläche ABCD ein schiefwinkliges Parallelogramm ist. Man lege durch die Kanten BF und CG Ebenen, welche auf der Ebene ADHE senkrecht stehen, so ist BN ein rechtwinkliges Parallelepiped, welches mit dem gegebenen senkrechten Parallelepiped BH gleiche Höhe und Grundfläche hat. Betrachtet man nun in den beiden Parallelepipeden BH und BN das Rechteck BCGF als die gemeinschaftliche Grundfläche, so erscheinen die oberen Grundflächen ADHE und KMNL zwischen denselben Parallelen AM und EN, somit sind die beiden Parallelepipede inhaltsgleich (§. 302, a).

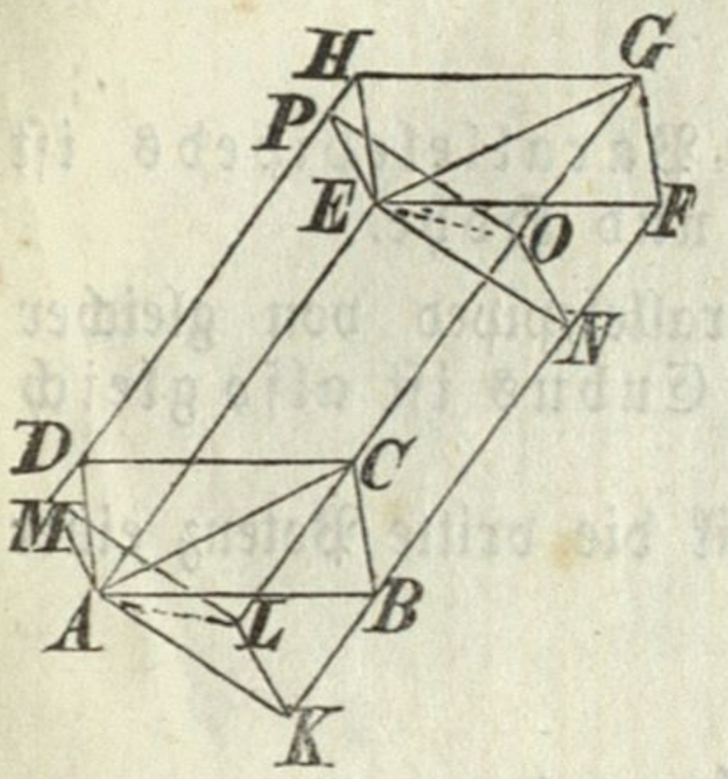
Folgesatz. Jedes Parallelepiped ist einem rechtwinkligen gleich, das mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

§. **304.** Jedes Parallelepiped wird durch den Diagonalschnitt in zwei inhaltsgleiche dreiseitige Prismen getheilt.

a) Ist das Parallelepiped ein senkrechtes, so folgt die Richtigkeit des Satzes aus §. 282, Folges.

b) Es sei das Parallelepiped AG (Fig. 217) ein schiefes.

Fig. 217.



Legt man durch die Puncte A und E zwei Ebenen, welche auf den Kanten des Parallelepipedes AG senkrecht stehen, so ist der Körper AKLMENOP ein senkrechtes Parallelepiped, das durch den Diagonalschnitt AEOL in zwei gleiche Prismen ALMEOP und AKLENO getheilt wird.

Da DH = MP = AE ist, so muß auch DH — DP = MP — DP oder PH = MD sein; eben so folgt OG = LC. Denkt man sich nun den Körper EOPHG so auf den Körper ALMDC gelegt, daß die congruenten Dreiecke EOP und ALM zusammenfallen, so muß auch PH in die Richtung MD, und wegen PH = MD der Punct H auf D fallen; eben so folgt, daß der Punct G auf C zu liegen kommen müsse; es ist daher der Körper EOPHG ≅ ALMDC. Setzt man zu beiden den Körper ACDEOP dazu, so müssen auch die Summen gleich sein, also Prisma ACDEGH = ALMEOP. Eben so kann man beweisen, daß das Prisma ABCEFG = AKLENO ist. Da nun die Prismen ALMEOP und AKLENO gleich sind, so sind auch die Prismen ACDEGH und ABCEFG gleich.

Folgesätze.

1. Jedes dreiseitige Prisma ist gleich einem rechtwinkligen Parallelepiped, welches mit ihm dieselbe Höhe und gleiche Grundfläche hat.

2. Jedes vielseitige Prisma ist gleich einem rechtwinkligen Parallelepiped, welches mit ihm dieselbe Höhe und gleiche Grundfläche hat. (§. 246, Folgesatz.)

3. Zwei Prismen von gleicher Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen.

4. Zwei Prismen von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen.

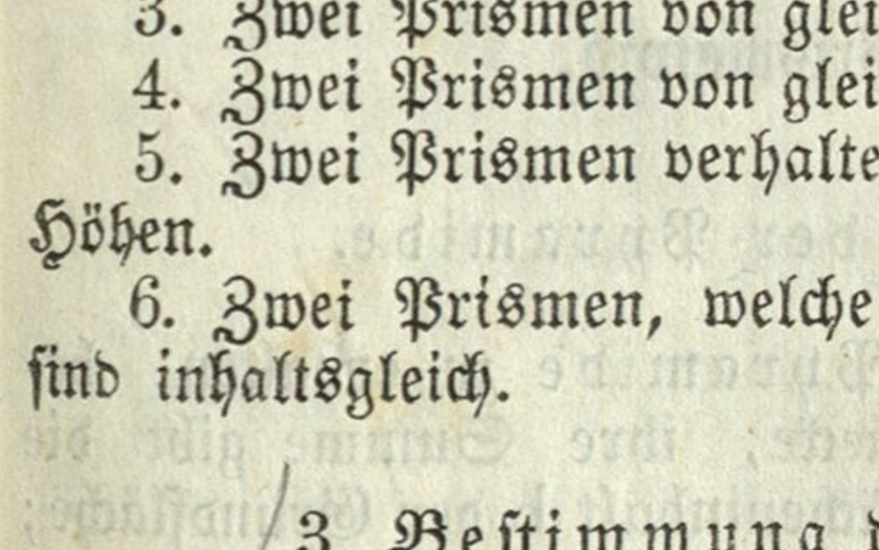
5. Zwei Prismen verhalten sich wie die Producte aus den Grundflächen und Höhen.

6. Zwei Prismen, welche gleiche Grundflächen und dieselbe Höhe haben, sind inhaltsgleich.

3. Bestimmung des Cubikinhaltes der Prismen.

§. **305.** Der Cubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe.

Fig. 218.



Es sei (Fig. 218) P ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Grundfläche G die Seiten a und b hat und dessen Höhe c ist; ferner sei der Würfel W die Einheit des Körpermaßes, daher das Quadrat g die Einheit des Flächenmaßes und die Seite m die Einheit des Längenmaßes. Nach §. 301 hat man nun $\frac{P}{W} = \frac{G}{g} \times \frac{c}{m}$, wo $\frac{P}{W}$ die Maßzahl für

den Inhalt des Parallelepipeds, $\frac{G}{g}$ die auf die entsprechende Flächeneinheit bezogene Maßzahl der Grundfläche G, und $\frac{c}{m}$ die auf die entsprechende Längeneinheit bezogene Maßzahl der Höhe c bedeutet.

Da (nach §. 119) $\frac{G}{g} = \frac{a}{m} \times \frac{b}{m}$ ist, so ist auch

$$\frac{P}{W} = \frac{a}{m} \times \frac{b}{m} \times \frac{c}{m};$$

d. i. der Cubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds ist gleich dem Producte aus der Länge, Breite und Höhe.

§. **306.** Ein Cubus ist ein rechtwinkliges Parallelepiped von gleicher Länge, Breite und Höhe; der Cubikinhalt eines Cubus ist also gleich der dritten Potenz einer Seite.

Daher kommt es, daß man auch in der Arithmetik die dritte Potenz einer Zahl den Cubus derselben nennt.

Aus diesem Satze folgt für das Metermaß:

$$1 \text{ Cub.}^{m} = 10^3 = 1000 \text{ Cub.}^{dm},$$
$$1 \text{ Cub.}^{dm} = 10^3 = 1000 \text{ Cub.}^{cm},$$
$$1 \text{ Cub.}^{cm} = 10^3 = 1000 \text{ Cub.}^{mm}.$$

Sind K und k die Cubikinhalte zweier Würfel, deren Seiten S und s heißen, so hat man $K = S^3$ und $k = s^3$, daher

$$K : k = R^3 : s^3;$$

d. h. die Cubikinhalte zweier Würfel verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Seiten.

§. **307.** Der Cubikinhalt eines jeden Prisma ist gleich dem Producte der Grundfläche und der Höhe.

Folgt aus §. 305 mit Zuziehung des §. 303, Folgef., ferner §. 304, Folgef. 1 und 2.

II. Die Pyramide und das Prismatoid.

1. Oberfläche und Cubikinhalt der Pyramide.

§. **308.** 1. Um die Oberfläche o einer Pyramide zu erhalten, berechnet man zuerst die Seitenflächen als Dreiecke, ihre Summe gibt die Seitenoberfläche s; dazu addirt man noch den Flächeninhalt b der Grundfläche; also $o = s + b$.

2. Die Seitenoberfläche einer senkrechten Pyramide ist gleich dem Producte aus dem Umfange der Grundfläche und der halben Seitenhöhe.

Denn die Seitenflächen sind gleichseitige Dreiecke, deren gemeinschaftliche Höhe die Seitenhöhe der Pyramide ist.

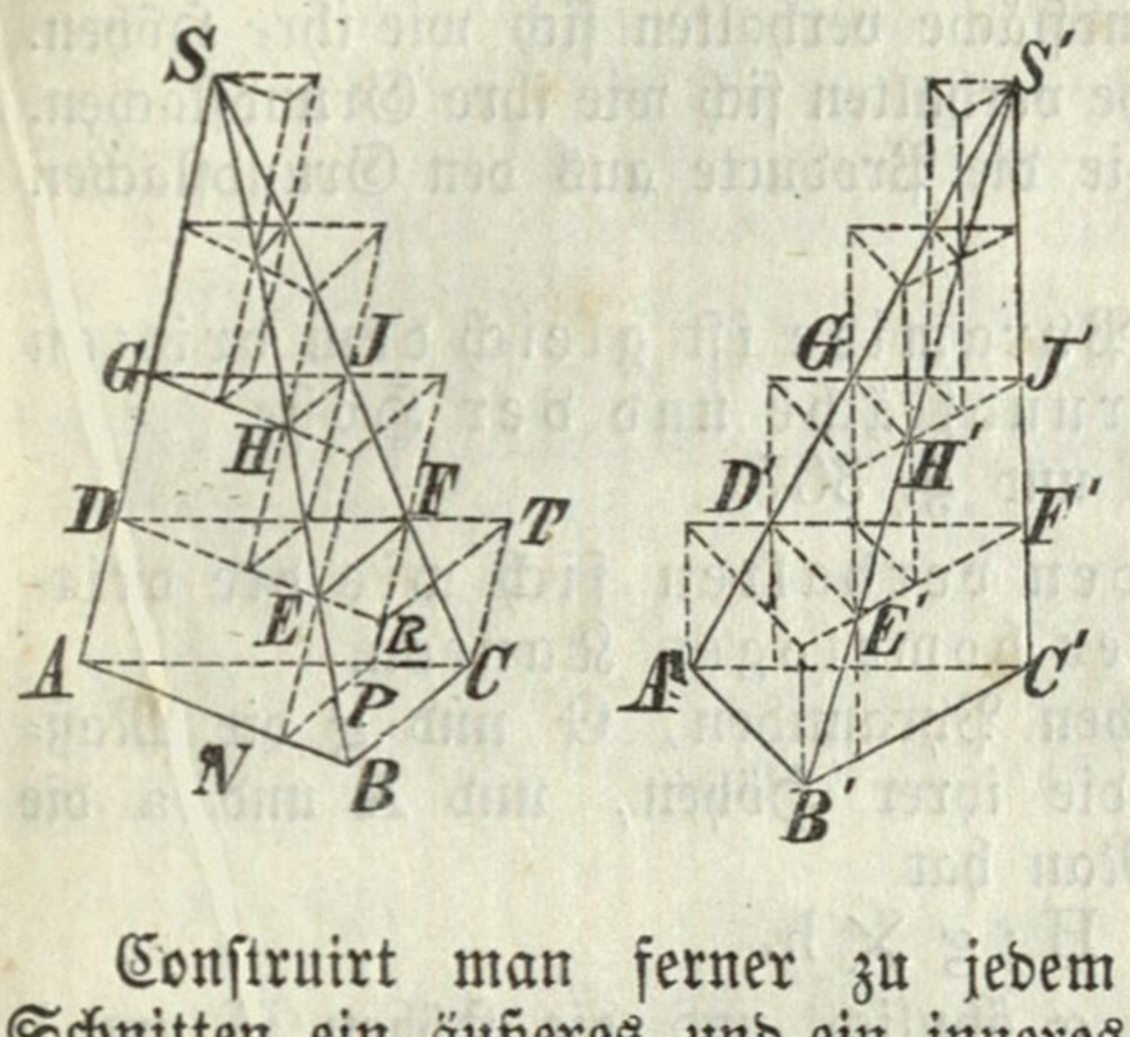
3. Die Oberflächen zweier ähnlicher Pyramiden verhalten sich wie die Quadrate der Maßzahlen ihrer homologen Kanten.

Denn je zwei homologe Grenzflächen verhalten sich wie die Quadrate ihrer homologen Seiten; dasselbe Verhältniß müssen daher auch die Summen aller Grenzflächen in beiden Pyramiden haben.

Zusatz. Die Oberflächen irgend zweier ähnlicher Polyeder verhalten sich wie die Quadrate der Maßzahlen ihrer homologen Kanten (§. 287).

§. **309.** Zwei Pyramiden, welche gleiche Grundflächen und gleiche Höhe haben, sind inhaltsgleich.

Fig. 219.



Es seien (Fig. 219) die Grundflächen ABC und A'B'C' der beiden Pyramiden SABC und S'A'B'C' gleich und in derselben Ebene, und die Scheitel S und S' in einer mit dieser parallelen Ebene gelegen. Theilt man in beiden Pyramiden die Höhen in gleich viele unter einander gleiche Theile und legt durch die Theilungspuncte mit den Grundflächen parallele Ebenen, so sind je zwei in gleicher Höhe geführte Schnitte inhaltsgleich; also DEF = D'E'F', GHJ = G'H'J' u. s. w.

Construirt man ferner zu jedem Pyramidalstücke zwischen zwei solchen Schnitten ein äußeres und ein inneres Prisma, deren erstes die untere, deren zweites die obere Grundfläche des Pyramidalstückes zur Grundfläche hat, wie zu ABCDEF die Prismen ABCDRT und ANPDEF, so sind (§. 304, Folges. 6) je zwei gleichliegende äußere Prismen, und eben so je zwei gleichliegende innere Prismen gleich. Es wird daher auch die Summe aller äußeren und eben so die Summe aller inneren Prismen in beiden Pyramiden gleich sein. Heißt nun A die erstere und J die letztere Summe, P der Inhalt der Pyramide SABC und P' der Inhalt der Pyramide S'A'B'C', so ist immer

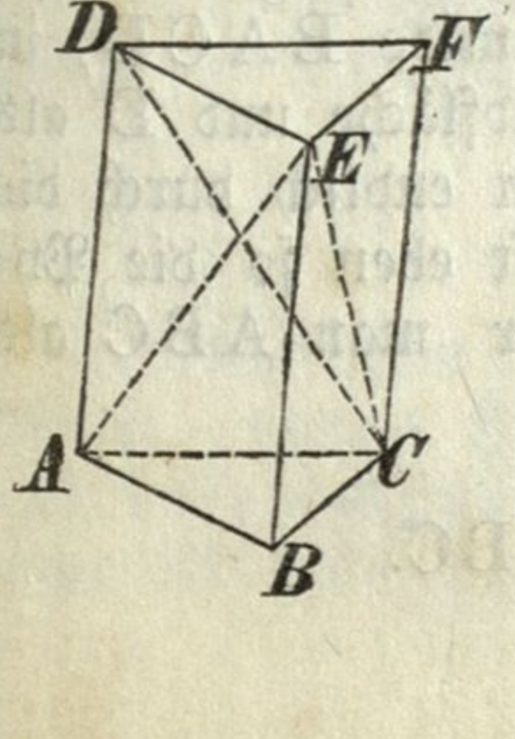
$$A > P > J \text{ und } A > P' > J.$$

Die Differenz A — J der beiden Summen ist offenbar gleich dem untersten äußern Prisma ABCDRT, welches, da sich die Höhen in beliebig viele gleiche Theile theilen lassen, kleiner gemacht werden kann, als jede noch so kleine angebbare Größe.

P und P' sind also zwei Größen, welche zwischen denselben Grenzen A und J, die einander beliebig genähert werden können, liegen; folglich ist P = P' (§. 86, 3).

§. **310.** Jedes dreiseitige Prisma kann in drei inhaltsgleiche Pyramiden zerlegt werden.

Fig. 220.



Legt man (Fig. 220) durch die Puncte A, E und C des dreiseitigen Prisma ABCDEF eine Ebene, so zerfällt dadurch das Prisma in zwei Pyramiden, eine dreiseitige EABC und eine vierseitige EACFD. Wird ferner in dieser vierseitigen Pyramide durch die Puncte C, E und D eine Ebene gelegt, so theilt sie jene Pyramide in die zwei dreiseitigen Pyramiden EACD und ECDF.

Die beiden Pyramiden EACD und ECDF sind nach §. 309 einander gleich. Betrachtet man in der Pyramide ECDF den Punct C als Scheitel und DEF als Grundfläche, so folgt aus §. 309, daß auch diese Pyramide der Pyramide EABC gleich ist.

Die drei Pyramiden EABC, EACD und ECDF, in welche das dreiseitige Prisma ABCDEF zerlegt wird, sind also inhaltsgleich.

Folgesätze. 1. Jede dreiseitige Pyramide ist der dritte Theil eines dreiseitigen Prisma von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

2. Jede vielseitige Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

3. Zwei Pyramiden von gleicher Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen.

4. Zwei Pyramiden von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen.

5. Zwei Pyramiden verhalten sich wie die Producte aus den Grundflächen und Höhen.

§. **311.** Der Cubikinhalt einer Pyramide ist gleich dem dritten Theile des Productes aus der Grundfläche und der Höhe.

Folgt aus §. 310, Folgef. 1 und 2 und §. 307.

§. **312.** Zwei ähnliche Pyramiden verhalten sich wie die dritten Potenzen der Maßzahlen ihrer homologen Kanten.

Es seien P und p die beiden ähnlichen Pyramiden, G und g die Maßzahlen ihrer Grundflächen, H und h die ihrer Höhen, und A und a die Maßzahlen zweier homologer Kanten. Man hat

$$P : p = G \times H : g \times h.$$

Nun sind die Grundflächen G und g ähnlich und die Höhen H und h zwei homologen Kanten A und a proportionirt, daher

$$G : g = A^2 : a^2, \text{ und } H : h = A : a.$$

Multiplicirt man diese beiden Proportionen, so ergibt sich

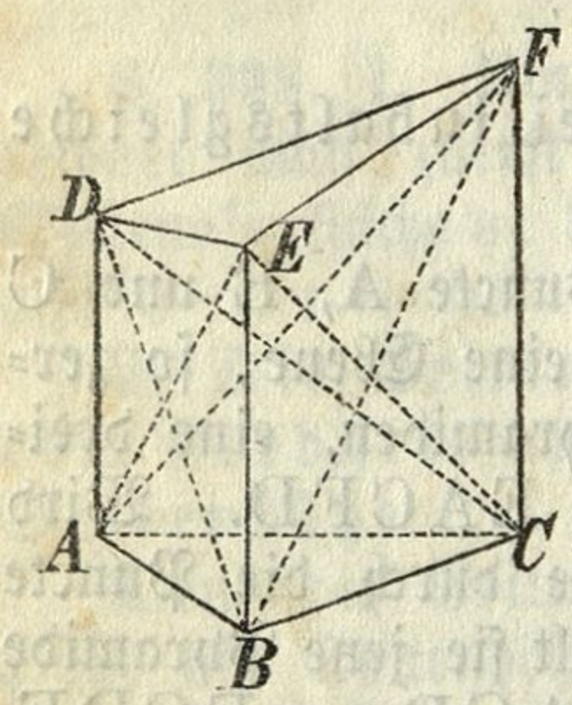
$$G \times H : g \times h = A^3 : a^3, \text{ und folglich auch}$$

$$P : p = A^3 : a^3.$$

Zusatz. Je zwei ähnliche Polyeder verhalten sich wie die dritten Potenzen der Maßzahlen ihrer homologen Kanten. (§. 287.)

§. **313.** Ein schief abgeschnittenes dreiseitiges Prisma ist gleich der Summe dreier Pyramiden, deren gemeinschaftliche Grundfläche die Grundfläche des Prisma ist und deren Scheitel die Eckpuncte des schiefen Durchschnittes sind.

Fig. 221.



Es sei ABCDEF (Fig. 221) ein schief abgeschnittenes Prisma. Legt man durch die Puncte A, E, C eine Ebene, ferner durch C, E, D eine zweite Ebene, so zerfällt das schief abgeschnittene Prisma in drei Pyramiden EABC, EACD und ECDF; es ist also

$$ABCDEF = EABC + EACD + ECDF.$$

Die Pyramide EABC hat ABC zur Grundfläche und ihren Scheitel in E. Legt man ferner durch die Puncte B, C, D eine Ebene, so ist nach §. 309 die Pyramide EACD gleich der Pyramide BACD, in welcher man auch ABC als Grundfläche und D als Scheitel betrachten kann. Legt man endlich durch die Puncte A, B, F eine Ebene, so ist eben so die Pyramide ECDF gleich der Pyramide BACF, in welcher man ABC als Grundfläche und F als Scheitel ansehen kann.

Es ist somit

$$ABCDEF = EABC + DABC + FABC.$$

2. Oberfläche und Cubikinhalt des Pyramidenstumpfes.

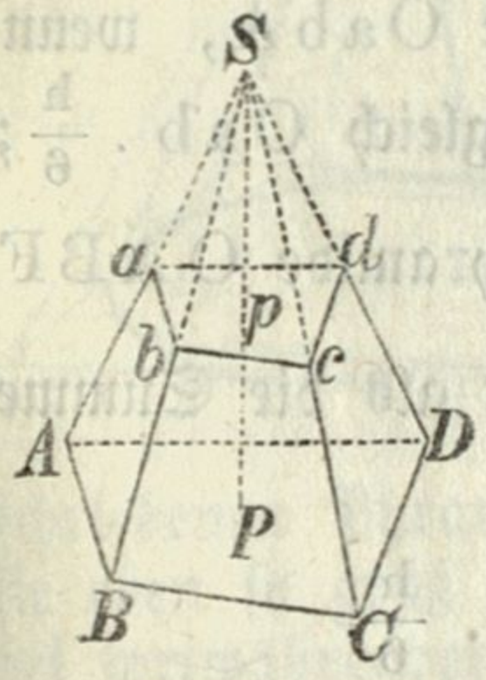
§. **314.** 1. Die Oberfläche o eines Pyramidenstumpfes wird erhalten, wenn man die Summe s aller Seitenflächen, welche Trapeze sind, bestimmt und die beiden Grundflächen B und b dazu addirt; also $o = s + B + b$.

2. Die Seitenoberfläche eines senkrechten Pyramidenstumpfes ist gleich dem Producte aus dem Umfange des mittleren Durchschnittes und der Seitenhöhe.

Halbirt man eine Seitenkante und legt durch den Halbirungspunct eine mit der Grundfläche parallele Ebene, so halbirt dieselbe auch die übrigen Seitenkanten und man erhält als den mittleren Durchschnitt ein regelmäßiges Vieleck. Durch Zuziehung des Zusatzes zu §. 129, 3 ergibt sich dann sogleich die Richtigkeit des obigen Lehrsatzes.

§. **315.** Der Cubikinhalt eines Pyramidenstumpfes ist gleich dem Producte der Summe der beiden Grundflächen und ihrer mittleren geometrischen Proportionale mit dem dritten Theile der Höhe.

Fig. 222.



Ergänzt man den Pyramidenstumpf ABCDabcd (Fig. 222) zur ganzen Pyramide, so ist der Cubikinhalt desselben

$$K = \text{Pyr. } SABCD - \text{Pyr. } Sabcd.$$

Bezeichnen nun B und b die Grundflächen ABCD und abcd, h die Höhe pP und x die noch unbekannte Höhe Sp, so hat man

$$\text{Pyr. } SABCD = \frac{B(h+x)}{3}, \quad \text{Pyr. } Sabcd = \frac{bx}{3}; \text{ daher}$$

$$K = \frac{B(h+x)}{3} - \frac{bx}{3} = \frac{Bh}{3} + \frac{x}{3}(B - b).$$

Zur Bestimmung von x hat man die Proportion:

$B : b = (h + x)^2 : x^2$ (§. 243, 1) oder $\sqrt{B} : \sqrt{b} = (h + x) : x$.

Daraus folgt $(\sqrt{B} - \sqrt{b}) : \sqrt{b} = h : x$, und $x = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$.

Durch Substitution dieses Werthes erhält man

$$K = \frac{Bh}{3} + \frac{h\sqrt{b}}{3(B\sqrt{} - \sqrt{b})}(B - b) = \frac{Bh}{3} + \frac{h\sqrt{b}}{3}(\sqrt{B} + \sqrt{b})$$

$$= (B + \sqrt{Bb} + b) \cdot \frac{h}{3}.$$

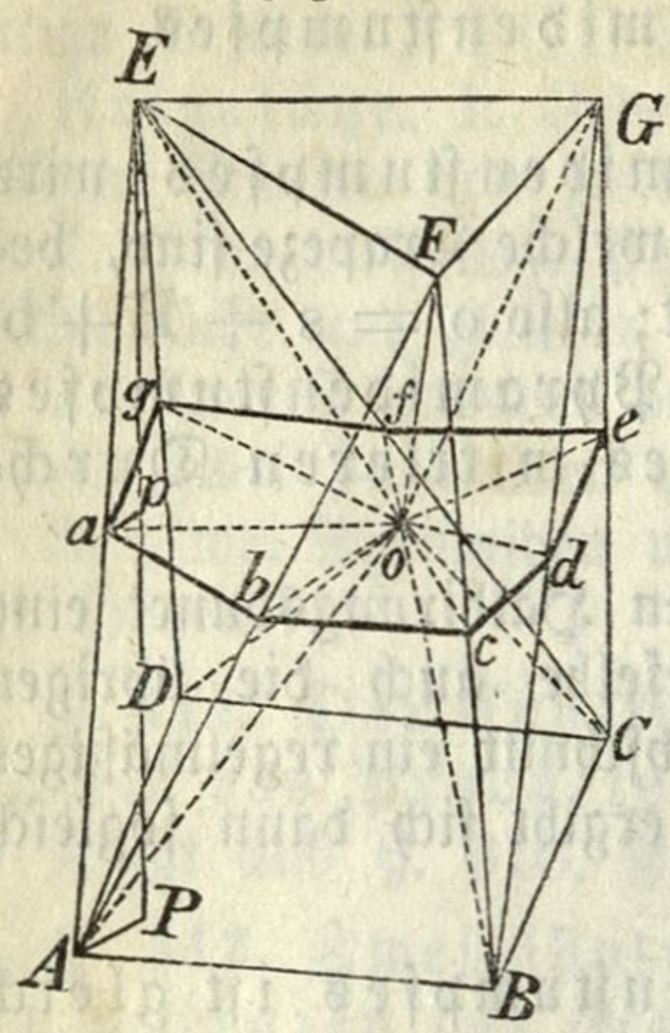
Zusatz. Der Ausdruck $K = B \cdot \frac{h}{3} + \sqrt{Bb} \cdot \frac{h}{3} + b \cdot \frac{h}{3}$ gibt den Satz:

Ein Pyramidenstumpf ist gleich der Summe dreier Pyramiden, die mit dem Stumpfe gleiche Höhe haben, und deren Grundflächen die beiden Grundflächen des Pyramidenstumpfes und ihre mittlere geometrische Proportionale sind.

3. Cubikinhalt des Prismatoids.

§. **316.** Ein Prismatoid ist gleich der Summe dreier Pyramiden, deren Höhe gleich ist der halben Höhe des Prismatoids, und deren Grundflächen die beiden Grundflächen und der vierfache Mittelschnitt des Prismatoids sind (Fig. 223).

Fig. 223.



Es seien B und b die Grundflächen, h die Höhe, M der Mittelschnitt a b c d e f g (§. 260) und K der Cubikinhalt des Prismatoids.

Legt man durch irgend einen Punct O des Mittelschnittes und durch die Kanten des Prismatoids Ebenen, so zerfällt dieses in Pyramiden, von denen zwei die Grundflächen des Prismatoids zu Grundflächen, und dessen halbe Höhe zur Höhe haben. Die Summe dieser zwei Pyramiden ist

$$B \cdot \frac{h}{6} + b \cdot \frac{h}{6} = (B + b) \cdot \frac{h}{6}.$$

Die übrigen Pyramiden haben ihre Spitze in O und zu Grundflächen die Seitenflächen des Prismatoids, in denen je zwei Seitenkanten durch den Mittelschnitt halbirt werden. Von jeder dieser Pyramiden, z. B. von O A E F, wird durch den Mittelschnitt eine kleinere Pyramide O a b A abgeschnitten, die mit ihr die Spitze O und daher auch die Höhe gemeinschaftlich hat, deren Grundfläche a b A aber wegen $Aa = \frac{1}{2} AE$ nur der 4te Theil von A E F ist; es ist demnach die Pyr. O A E F das 4fache der Pyr. O a b A (§. 310, Folges. 4); nun ist die Pyramide O a b A, wenn man O a b als Grundfläche, und A als die Spitze annimmt, gleich $Oab \cdot \frac{h}{6}$; folglich Pyr. $OAEF = 4 \cdot Oab \cdot \frac{h}{6}$. Ebenso erhält man Pyramide O A B F $= 4 \cdot Obc \cdot \frac{h}{6}$, Pyr. $OBCF = 4\,Ocd \cdot \frac{h}{6}$, ...; somit als die Summe aller dieser Pyramiden

$$4 \cdot (Oab + Obc + Ocd + ..) \cdot \frac{h}{6} = 4M \cdot \frac{h}{6}.$$

Mithin ist

$$K = (B + b + 4M) \cdot \frac{h}{6}.$$

Zusatz. Die Anwendung dieser Formel auf das Prisma, die Pyramide und der Pyramidenstumpf führt auf die bekannten Sätze über den Inhalt dieser Körper.

III. Regelmäßige Polyeder.

§. **317.** 1. Die Oberfläche eines regelmäßigen Polyeders wird erhalten, wenn man eine Seitenfläche als ein regelmäßiges Vieleck berechnet und den Flächeninhalt mit der Zahl der Seitenflächen multiplicirt.

2. Der Cubikinhalt eines regelmäßigen Polyeders ist gleich dem Producte aus der Oberfläche desselben und dem dritten Theile des Halbmessers der dem Polyeder eingeschriebenen Kugel.

Der Beweis ergibt sich aus §. 250 und §. 311.

IV. Der Kegel.

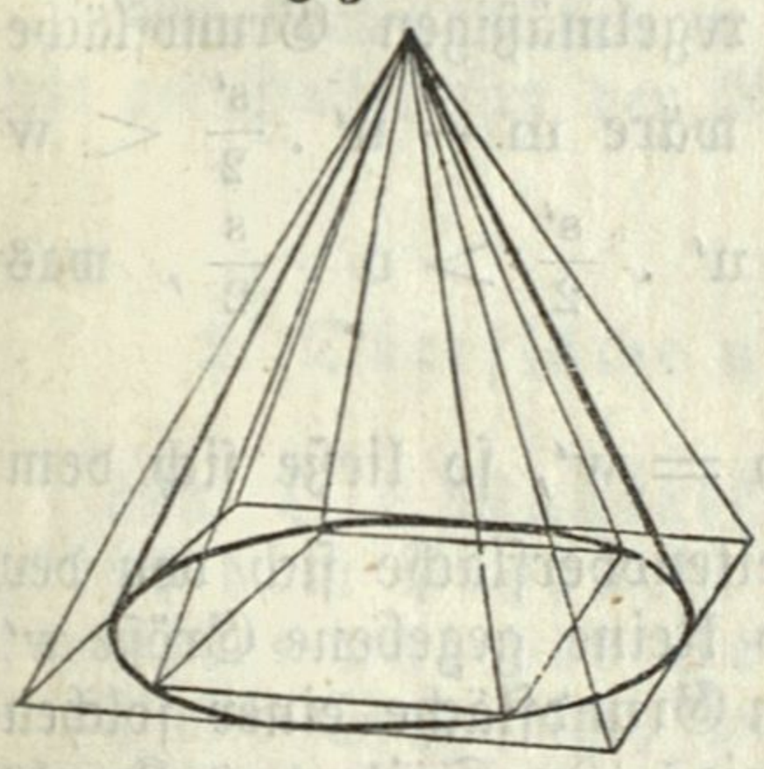
1. Oberfläche und Cubikinhalt des Kegels.

§. **318.** Wird der Grundfläche eines Kegels ein regelmäßiges Vieleck eingeschrieben oder umschrieben, und dasselbe als Grundfläche einer Pyramide angenommen, deren Spitze zugleich die Spitze des Kegels ist, so heißt diese Pyramide dem Kegel bezüglich *eingeschrieben* oder *umschrieben*.

Die Seitenkanten der eingeschriebenen Pyramide sind Seiten, die Seitenflächen der umschriebenen Pyramide sind Berührungsebenen des Kegels.

§. **319.** 1. *Die Seitenoberfläche einer dem senkrechten Kegel eingeschriebenen Pyramide ist kleiner, die Seitenoberfläche einer umschriebenen Pyramide größer als die Mantelfläche des Kegels* (Fig. 224.)

Fig. 224.



Geht man von einer gegebenen, dem Kegel eingeschriebenen Pyramide aus und verdoppelt durch Einschreibung neuer Pyramiden die Seitenzahl derselben, so wird (§. 167) der Umfang der Grundfläche und daher (§. 308, 2) auch die Seitenoberfläche der Pyramide desto größer, in je mehreren Puncten deren Grundfläche mit der Grundfläche des Kegels zusammenfällt. Je mehrere Puncte aber die beiden Grundflächen gemeinschaftlich haben, desto mehr nähert sich auch die Seitenoberfläche der Pyramide der Mantelfläche des Kegels. Daraus folgt, daß die Seitenoberfläche jeder eingeschriebenen Pyramide kleiner ist als die Mantelfläche des Kegels; denn wäre sie eben so groß oder größer als die Mantelfläche des Kegels, so würde sie bei fortwährender Zunahme sich dieser nicht nur nicht nähern, sondern von ihr um so mehr entfernen, je größer ihre Seitenzahl ist.

Geht man dagegen von einer gegebenen, dem Kegel umschriebenen Pyramide aus und verdoppelt durch Umschreibung neuer Pyramiden die Seitenzahl derselben, so überzeugt man sich auf gleiche Weise, daß die Seitenoberfläche der dadurch entstandenen Pyramiden um so kleiner wird, je mehr Seiten sie haben, und daß sie sich zugleich in demselben Grade der Mantelfläche des Kegels nähern müsse; woraus dann folgt, daß die Seitenoberfläche einer solchen umschriebenen Pyramide größer ist als die Mantelfläche des Kegels.

2. *Der Cubikinhalt einer irgend einem Kegel eingeschriebenen Pyramide ist kleiner, der Cubikinhalt der umschriebenen Pyramide größer als der Cubikinhalt des Kegels.*

Denn die eingeschriebene Pyramide ist ein Theil des Kegels und dieser wieder ein Theil der umschriebenen Pyramide.

Folgesatz. Die Seitenoberflächen der einem senkrechten Kegel eingeschriebenen und umschriebenen Pyramiden können durch fortgesetzte Verdopplung der Seitenzahl der Mantelfläche dieses Kegels und eben so die Cubikinhalte der irgend einem Kegel eingeschriebenen und umschriebenen Pyramiden dem Cubikinhalte des Kegels beliebig nahe gebracht werden, so daß die Unterschiede kleiner werden, als jede noch so kleine angebbare Größe. In diesem Sinne pflegt man auch zu sagen: *Ein Kegel ist eine Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten ist.*

§. **320**: Die Mantelfläche eines senkrechten Kegels ist gleich dem Producte aus dem Umfange der Grundfläche und der halben Seite.

Bezeichnen m, u und s bezüglich die Maßzahlen für die Mantelfläche, den Umfang der Grundfläche und die Seite des Cylinders, so ist

$$m = u \cdot \frac{s}{2}.$$

Dieser Satz folgt unmittelbar aus §. 308, 2, sobald man den Kegel als eine Pyramide betrachtet, deren Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten ist. Wir wollen jedoch für die Richtigkeit dieses Satzes hier einen strengeren Beweis folgen lassen.

Wäre $m > u \cdot \frac{s}{2}$ und zwar $m - u \cdot \frac{s}{2} = w$, so ließe sich (§. 319, Folges.) dem Kegel immer eine Pyramide einschreiben, deren Seitenoberfläche sich von der Mantelfläche des Kegels um weniger als jede noch so kleine gegebene Größe w unterscheidet. Heißt u' der Umfang der regelmäßigen Grundfläche und s' die Seitenhöhe einer solchen Pyramide, so wäre $m - u' \cdot \frac{s'}{2} < w$ und demnach $m - u' \cdot \frac{s'}{2} < m - u \cdot \frac{s}{2}$, daher $u' \cdot \frac{s'}{2} > u \cdot \frac{s}{2}$, was nicht sein kann, weil $u' < u$ und $s' < s$ ist.

Wäre ferner $m < u \cdot \frac{s}{2}$ und zwar $u \cdot \frac{s}{2} - m = w'$, so ließe sich dem Kegel immer eine Pyramide umschreiben, deren Seitenoberfläche sich von der Mantelfläche des Kegels um weniger als jede noch so kleine gegebene Größe w' unterscheidet. Heißt u'' der Umfang der regelmäßigen Grundfläche einer solchen Pyramide, so wäre, da die Seitenhöhe der Pyramide der Seite des Kegels gleich ist, $u'' \cdot \frac{s}{2} - m < w'$ und demnach $u'' \cdot \frac{s}{2} - m < u \cdot \frac{s}{2} - m$, folglich $u'' \cdot \frac{s}{2} < u \cdot \frac{s}{2}$, was nicht sein kann, weil $u'' > u$ ist.

Es ist daher $m = u \cdot \frac{s}{2}$.

Zusatz. Die Gesammtoberfläche eines senkrechten Kegels wird erhalten, indem man zu der Mantelfläche den Flächeninhalt der Grundfläche addirt.

Ist r der Halbmesser der Grundfläche eines senkrechten Kegels, so ist die Mantelfläche $= 2 r \pi \cdot \frac{s}{2} = r s \pi$, die Grundfläche $= r^2 \pi$, daher die ganze Oberfläche

$$o = r s \pi + r^2 \pi = r \pi (s + r).$$

Für den gleichseitigen Kegel hat man $s = 2r$, daher

$$o = 3 r^2 \pi.$$

§. **321**. Der Cubikinhalt eines Kegels ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und dem dritten Theile der Höhe.

Bezeichnen k, b und h bezüglich den Cubikinhalt, die Grundfläche und die Höhe eines Kegels, so ist

$$k = b \cdot \frac{h}{3}.$$

Der strenge Beweis für diesen Satz, der unmittelbar aus §. 311 gefolgert werden kann, wird ganz in derselben Weise wie der Beweis in §. 320 geführt, nur muß man dort statt der Umfänge der Grundflächen die Flächeninhalte derselben, und statt der Seitenoberflächen die Cubikinhalte setzen.

Zusätze. 1. Ist r die Maßzahl des Halbmessers der Grundfläche, so hat man

$$k = \frac{r^2 h \pi}{3}.$$

Ist der Kegel ein senkrechter und s die Maßzahl einer Seite, so ist $h = \sqrt{s^2 - r^2}$, daher $k = \frac{r^2 \pi}{3}\sqrt{s^2 - r^2}$.

Für den gleichseitigen Kegel hat man $s = 2r$, folglich $k = \frac{r^3 \pi}{3}\sqrt{3}$.

2. Die Cubikinhalte ähnlicher Kegel verhalten sich wie die dritten Potenzen der Halbmesser ihrer Grundflächen.

Heißen K und k die Cubikinhalte zweier ähnlicher Kegel, R und r die Halbmesser ihrer Grundflächen, H und h ihre Höhen, so hat man

$$K : k = \frac{R^2 H \pi}{3} : \frac{r^2 h \pi}{3} = R^2 H : r^2 h.$$

Nun verhalten sich in ähnlichen Kegeln die Höhen wie die Axen und diese wie die Halbmesser der Grundflächen; daher ist $H : h = R : r$, und somit

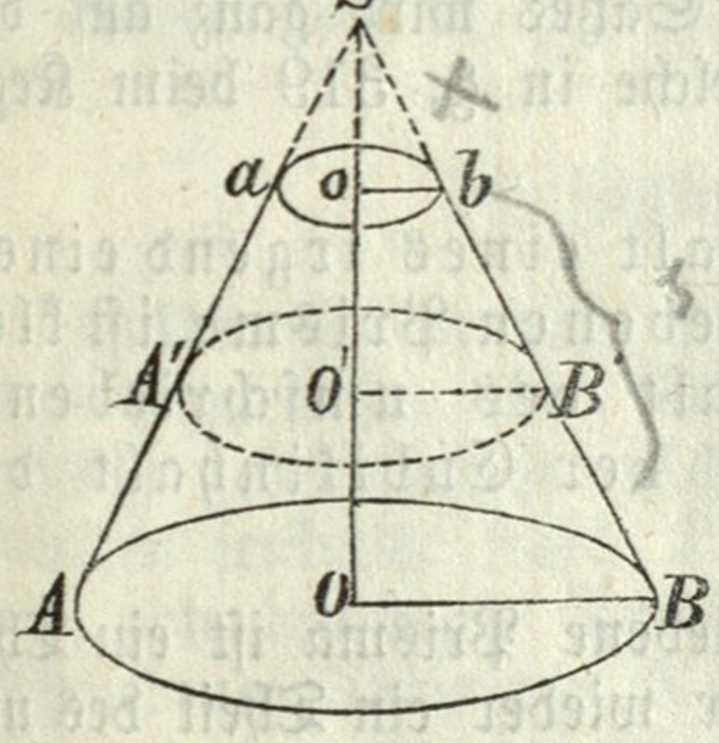
$$K : k = R^3 : r^3.$$

2. Oberfläche und Cubikinhalt eines Kegelstumpfes.

322. Die Mantelfläche eines senkrechten Kegelstumpfes ist gleich dem Producte aus dem Umfange des mittleren Durchschnittes und der Seite.

Dieser Satz folgt, wenn man die Grundflächen des Kegelstumpfes als regelmäßige Vielecke von unendlich vielen Seiten ansieht, unmittelbar aus §. 315; er kann aber auch davon unabhängig bewiesen werden.

Fig. 225.



Ergänzt man den senkrechten Kegelstumpf ABab (Fig. 225) zum ganzen Kegel, so ist die Mantelfläche m des Stumpfes gleich dem Unterschiede zwischen der Mantelfläche M des ganzen Kegels SAB und der Mantelfläche M′ des Ergänzungskegels Sab; also $m = M - M'$.

Bezeichnen nun R und r die Halbmesser OB und ob, s die Seite Bb und x die noch unbekannte Seite Sb, so hat man, da $\triangle SOB \sim Sob$ ist, $(s + x) : x = R : r$, daher

$$x = \frac{rs}{R - r} \text{ und } s + x = \frac{Rs}{R - r}.$$

Es ist also nach §. 320

$$M = R\pi \,.\, (s + x) = \frac{R^2 \pi}{R - r} \,.\, s, \text{ und } M' = r\pi \,.\, x = \frac{r^2 \pi}{R - r} \,.\, s; \text{ mithin}$$

$$m = \frac{(R^2 - r^2)\pi}{R - r} s \,. = (R + r)\,\pi \,.\, s,$$

und, wenn R′ der Halbmesser O′B′ des mittleren Durchschnittes des Kegelstumpfes ist, wegen $R' = \frac{R + r}{2}$

$$m = 2R'\pi \,.\, s.$$

Zusatz. Die Gesammtoberfläche eines senkrechten Kegelstumpfes wird erhalten, wenn man zu der Mittelfläche die Flächeninhalte der beiden Grundflächen addirt; es ist also die Gesammtoberfläche

$$o = (R + r)\, s\, \pi + R^2 \pi + r^2 \pi.$$

§. **323.** Der Cubikinhalt eines Kegelstumpfes ist gleich dem Producte der Summe der beiden Grundflächen und ihrer mittleren geometrischen Proportionale mit dem dritten Theile der Höhe.

Bezeichnen R und r bezüglich die Halbmesser der beiden Grundflächen und h die Höhe des Kegelstumpfes, so ist der Cubikinhalt

$$k = (R^2 \pi + R\, r\, \pi + r^2 \pi) \cdot \frac{h}{3}.$$

Dieser Satz kann schon aus §. 315 gefolgert werden. Der strenge Beweis für die Richtigkeit desselben wird mit Zuziehung des §. 321 in ähnlicher Weise wie der Beweis in §. 322 geführt.

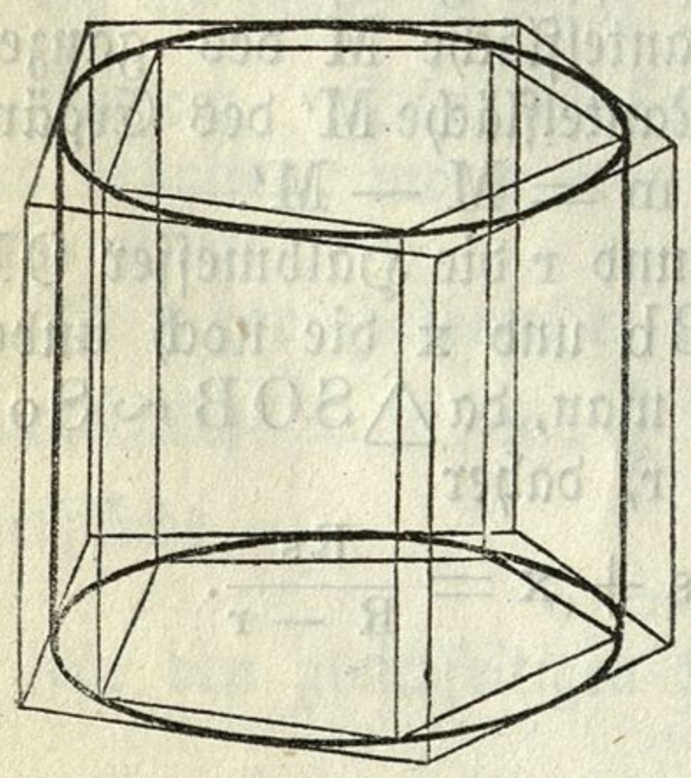
V. Der Cylinder.

§. **324.** Werden den Grundflächen eines Cylinders zwei congruente und parallel gestellte regelmäßige Vielecke eingeschrieben oder umschrieben, und dieselben als Grundflächen eines Prisma angenommen, so heißt dieses Prisma dem Cylinder bezüglich eingeschrieben oder umschrieben.

Die Seitenkanten des eingeschriebenen Prisma sind Seiten, die Seitenflächen des umschriebenen Prisma sind Berührungsebenen des Cylinders.

§. **325.** 1. Die Seitenoberfläche eines dem senkrechten Cylinder eingeschriebenen Prisma ist kleiner, die Seitenoberfläche eines umschriebenen Prisma größer als die Mantelfläche des Cylinders (Fig. 226).

Fig. 226.



Der Beweis dieses Satzes wird ganz auf dieselbe Weise geführt, welche in §. 319 beim Kegel beobachtet wurde.

2. Der Cubikinhalt eines irgend einem Cylinder eingeschriebenen Prisma ist kleiner, der Cubikinhalt des umschriebenen Prisma größer als der Cubikinhalt des Cylinders.

Denn das eingeschriebene Prisma ist ein Theil des Cylinders und dieser wieder ein Theil des umschriebenen Prisma.

Folgesatz. Die Seitenoberflächen der einem senkrechten Cylinder eingeschriebenen und umschriebenen Prismen können durch fortgesetzte Verdopplung der Seitenzahl der Mantelfläche dieses Cylinders, und eben so die Cubikinhalte der irgend einem Cylinder eingeschriebenen und umschriebenen Prismen dem Cubikinhalte des Cylinders beliebig nahe gebracht werden, so daß die Unterschiede kleiner werden, als jede noch so kleine angebbare Größe. In diesem Sinne pflegt man auch zu sagen: Ein Cylinder ist ein Prisma, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten ist.

§. **326.** Die Mantelfläche eines senkrechten Cylinders ist gleich dem Producte aus dem Umfange der Grundfläche und der Höhe.

Bezeichnen m, u und h bezüglich die Maßzahlen für die Mantelfläche, den Umfang der Grundfläche und die Höhe des Cylinders, so ist

$$m = u \cdot h.$$

Der strenge Beweis dieses Satzes, auf den man schon durch §. 298, 2 geleitet wird, ist analog dem Beweise in §. 320.

Zusatz. Die ganze Oberfläche eines senkrechten Cylinders wird erhalten, wenn man zu der Mantelfläche den doppelten Flächeninhalt der Grundfläche addirt.

Bezeichnet r den Halbmesser der Grundfläche eines senkrechten Cylinders, so ist die Mantelfläche $= 2rh\pi$, die Grundfläche $= r^2\pi$, daher die Gesammtoberfläche

$$o = 2rh\pi + 2r^2\pi = 2r\pi(h + r).$$

Im gleichseitigen Cylinder ist $h = 2r$, daher $o = 6r^2\pi$.

§. **327.** Der Cubikinhalt eines Cylinders ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe.

Bezeichnen k, b und h bezüglich die Maßzahlen für den Cubikinhalt, die Grundfläche und die Höhe eines Cylinders, so ist

$$k = b \cdot h.$$

Der Beweis dieses Satzes, welcher schon aus §. 307 gefolgert werden kann, ist ähnlich dem in §. 321.

Zusätze. 1. Ist r der Halbmesser der Grundfläche eines Cylinders, so ist

$$k = r^2h\pi.$$

Für den gleichseitigen Cylinder hat man $h = 2r$, daher $k = 2r^3\pi$.

2. Die Cubikinhalte ähnlicher Cylinder verhalten sich wie die dritten Potenzen der Maßzahlen der Halbmesser ihrer Grundflächen.

Beweis wie in §. 321, Zusatz 2.

VI. Rotationsflächen und Rotationskörper.

§. **328.** Dreht sich eine gerade, gebrochene oder krumme Linie, oder eine ebene Figur um eine feste Gerade, so beschreibt während einer vollen Umdrehung jeder Punct derselben eine Kreislinie, deren Ebene auf der festen Geraden senkrecht steht. Die feste Gerade heißt die Rotationsaxe oder bloß Axe, die durch die Drehung der geraden, gebrochenen oder krummen Linie beschriebene Fläche die Rotationsfläche dieser Linie, und der durch die Drehung der ebenen Figur erzeugte Körper der Rotationskörper dieser Figur.

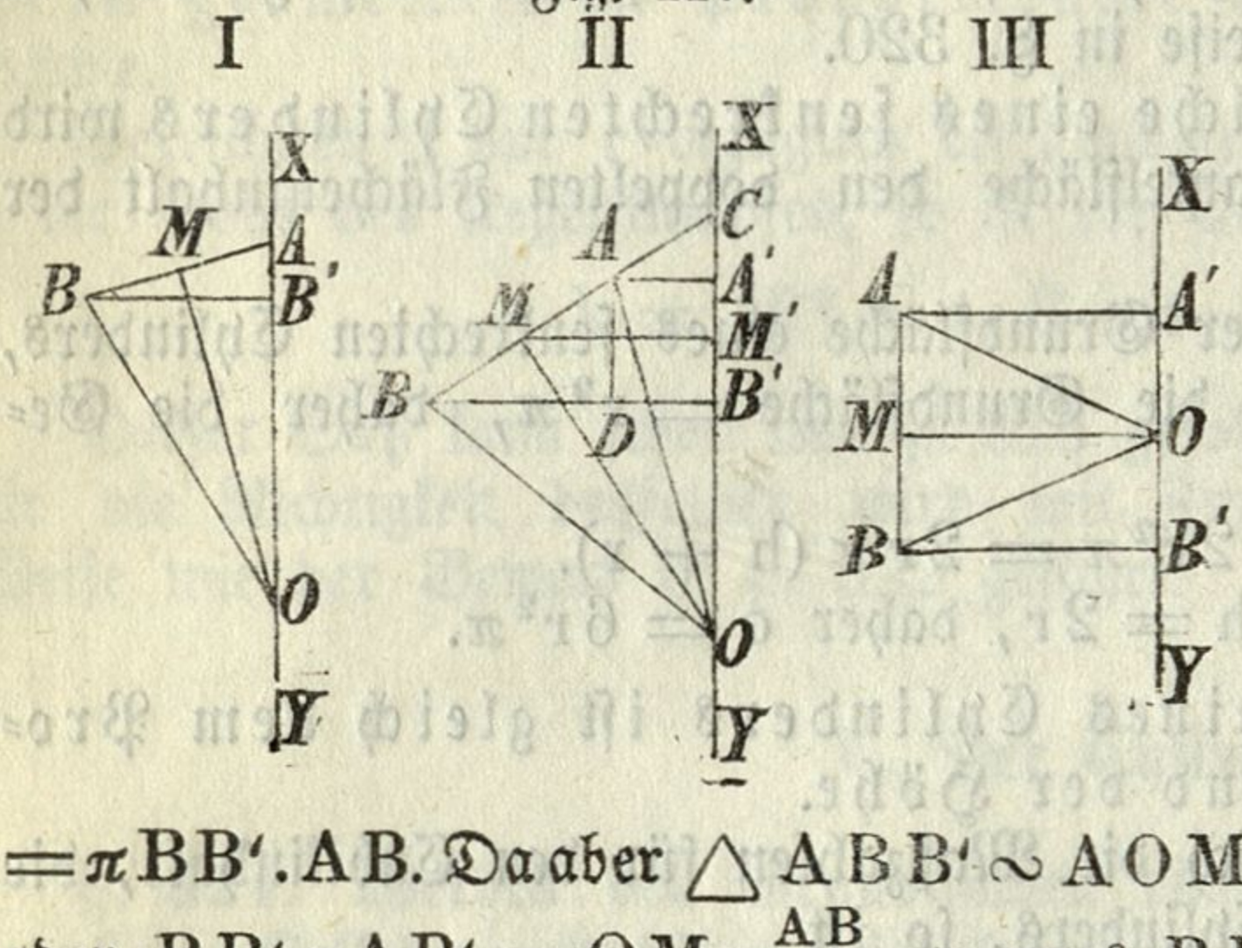
§. **329.** 1. Die Rotationsfläche einer Strecke um eine außer ihr in derselben Ebene liegende Axe ist je nach der Lage dieser Strecke gegen die Axe die Mantelfläche eines senkrechten Kegels, eines senkrechten Kegelstumpfes oder eines senkrechten Cylinders, oder endlich, wenn die Strecke auf der Axe senkrecht steht, die Fläche eines Kreises oder Kreisringes.

Dreht sich eine gebrochene Linie um eine außer ihr in derselben Ebene liegende Axe, so ist ihre Rotationsfläche gleich der Summe der Rotationsflächen aller Strecken, aus denen die gebrochene Linie besteht.

In besonderen Fällen kann die Rotationsfläche einfacher bestimmt werden.

2. Die Rotationsfläche der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes um eine in seiner Ebene durch den Scheitel gehende Axe ist gleich dem Producte aus dem Umfange eines Kreises, dessen Halbmesser die Dreieckshöhe ist, und der Projection der Grundlinie auf die Axe (Fig. 227).

Fig. 227.



Die durch den Scheitel O des gleichschenkligen Dreieckes gehende Axe XY kann gegen das Dreieck eine dreifache Lage haben.

I. Es falle XY mit einem Schenkel AO des Dreieckes zusammen. Man ziehe $BB' \perp XY$ und $OM \perp AB$; dann ist die Rotationsfläche der Grundlinie AB, die wir durch F(AB) bezeichnen wollen, die Mantelfläche eines senkrechten Kegels, daher $F(AB) = \pi BB' . AB$. Da aber $\triangle ABB' \sim AOM$, so ist $BB' : AB' = OM : AM$ oder $BB' : AB' = OM : \frac{AB}{2}$, woraus $BB' . AB = 2OM . AB'$ folgt; somit hat man

$$F(AB) = 2\pi OM . AB'.$$

II. Es liege die Axe XY außerhalb des Dreieckes AOB, ohne jedoch der Grundlinie AB parallel zu sein; dann ist die Rotationsfläche der letzteren die Mantelfläche eines senkrechten Kegelstumpfes. Zieht man daher $OM \perp AB$, ferner AA', MM' und BB' senkrecht auf XY, so ist $F(AB) = 2\pi MM' . AB$. Zieht man noch $AD \perp BB'$, so ist $\triangle MOM' \sim ABD$, daher $MM' : OM = AD : AB$, und $MM' . AB = OM . AD = OM . A'B'$; folglich

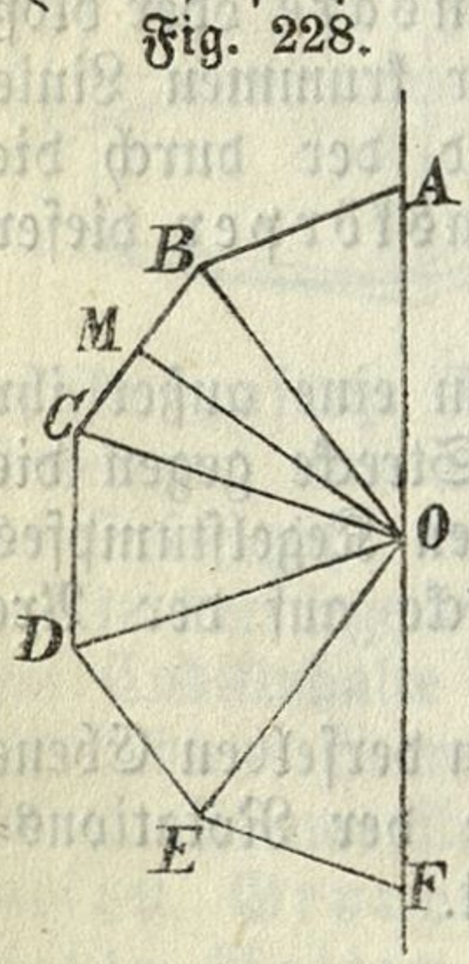
$$F(AB) = 2\pi OM . A'B'.$$

III. Ist die Axe XY der Grundlinie AB parallel, so beschreibt diese während der Rotation die Mantelfläche eines senkrechten Cylinders. Zieht man daher $OM \perp AB$, ferner AA' und BB' senkrecht auf XY, so ist

$$F(AB) = 2\pi OM . A'B'.$$

§. **330**. Nimmt man in einem regelmäßigen Vielecke (Fig. 228) eine durch einen Eckpunct und durch den Mittelpunct gehende Gerade AF als Rotationsaxe an, so sind die rotirenden Seiten Grundlinien von gleichschenkligen Dreiecken, deren gemeinschaftliche Höhe OM der Halbmesser des dem Vielecke eingeschriebenen Kreises ist. Eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn die Seitenzahl des Vieleckes eine ungerade ist; in diesem Falle steht eine rotirende halbe Seite auf der Axe senkrecht und beschreibt daher eine Kreisfläche.

Fig. 228.



Aus §. 329, 2 ergeben sich demnach folgende Sätze:

1. Die Rotationsfläche der Grundlinie eines Ausschnittes eines regelmäßigen Vieleckes (§. 78) (um eine durch den Mittelpunct des Vieleckes gehende Axe) ist gleich dem Producte aus dem Umfange des eingeschriebenen Kreises und der Projection der Grundlinie auf die Axe.

2. Die Rotationsfläche des halben Umfanges eines regelmäßigen Vieleckes von gerader Seitenanzahl (um eine durch einen Eckpunct und durch den Mittelpunct gehende Axe) ist gleich dem Producte aus dem Umfange des eingeschriebenen Kreises und der Axe.

Zusatz. Hat das rotirende Vieleck eine ungerade Zahl von Seiten, so wird die krumme Rotationsfläche, wie früher in 2., bestimmt, und dazu noch die von der auf die Axe senkrechten halben Seite beschriebene Kreisfläche addirt.

§. **331.** 1. Der Rotationskörper einer geradlinigen ebenen Figur um eine außer ihr in derselben Ebene liegende Axe ist aus senkrechten Kegeln, Kegelstumpfen oder Cylindern zusammengesetzt, welche einzeln berechnet und durch die Addition, beziehungsweise Subtraction, mit einander verbunden werden.

In besonderen Fällen tritt eine einfachere Bestimmungsweise des Rotationskörpers ein.

2. Der Rotationskörper eines gleichschenkligen Dreieckes um eine in seiner Ebene durch den Scheitel gehende Axe ist gleich dem Producte aus der Rotationsfläche der Grundlinie und dem dritten Theile der Dreieckshöhe (Fig. 227).

Auch hier sind wieder dieselben drei Fälle wie in §. 329 zu unterscheiden.

I. Fällt die Axe XY mit einer Dreiecksseite zusammen, so ist der von dem Dreiecke AOB erzeugte Rotationskörper, den wir durch K(AOB) bezeichnen wollen, die Summe zweier Kegel, daher $K(AOB) = \frac{1}{3}\pi BB'^2 . AB' + \frac{1}{3}\pi BB'^2 . B'O = \frac{1}{3}\pi BB'^2 . OA$; aber $BB' . OA = AB . OM$, weil jedes dieser Producte den doppelten Flächeninhalt des Dreieckes AOB ausdrückt; daher auch $K(AOB) = \pi BB' . AB . \frac{1}{3} OM$, oder, da $\pi BB' . AB$ die von der Grundlinie AB beschriebene Kegelfläche ist,

$$K(AOB) = F(AB) . \tfrac{1}{3} OM.$$

II. Liegt die Axe außerhalb des Dreieckes gegen AB convergirend, so verlängere man AB bis zur Begegnung mit der Axe in C; dann ist

$$\begin{aligned} K(AOB) &= K(BOC) - K(AOC) \\ &= F(BC) . \tfrac{1}{3} OM - F(AC) . \tfrac{1}{3} OM \text{ (nach I)} \\ &= F(AB) . \tfrac{1}{3} OM. \end{aligned}$$

III. Ist $XY \parallel AB$, so ist der von dem $\triangle AA'O$ beschriebene Kegel $\frac{1}{3}$ des von dem Rechtecke AA'OM beschriebenen Cylinders, daher der von dem $\triangle AOM$ beschriebene Körper $\frac{2}{3}$ desselben Cylinders. Ebenso folgt, daß der von dem $\triangle BOM$ beschriebene Körper $\frac{2}{3}$ des von dem Rechtecke BB'OM beschriebenen Cylinders ist. Somit hat man

$$K(AOB) = \tfrac{2}{3} K(AA'B'B) = \tfrac{2}{3}\pi OM^2 . A'B'.$$

Allein $2'\pi OM . A'B'$ ist die von der Seite AB beschriebene Rotationsfläche; daher

$$K(AOB) = F(AB) . \tfrac{1}{3} OM.$$

§. **332.** Aus dem §. 331, 2 ergeben sich mit Beziehung auf §. 330 folgende Sätze:

1. Der Rotationskörper eines Ausschnittes eines regelmäßigen Vieleckes um eine durch den Mittelpunct des Vieleckes gehende Axe ist gleich dem Producte aus der Rotationsfläche der Grundlinie des Ausschnittes und dem dritten Theile des Halbmessers des dem Vielecke eingeschriebenen Kreises.

2. Der Rotationskörper eines regelmäßigen Vieleckes um eine durch einen Eckpunct und durch den Mittelpunct gehende Axe ist gleich dem Producte aus der Rotationsfläche des halben Umfanges und dem dritten Theile des Halbmessers des eingeschriebenen Kreises.

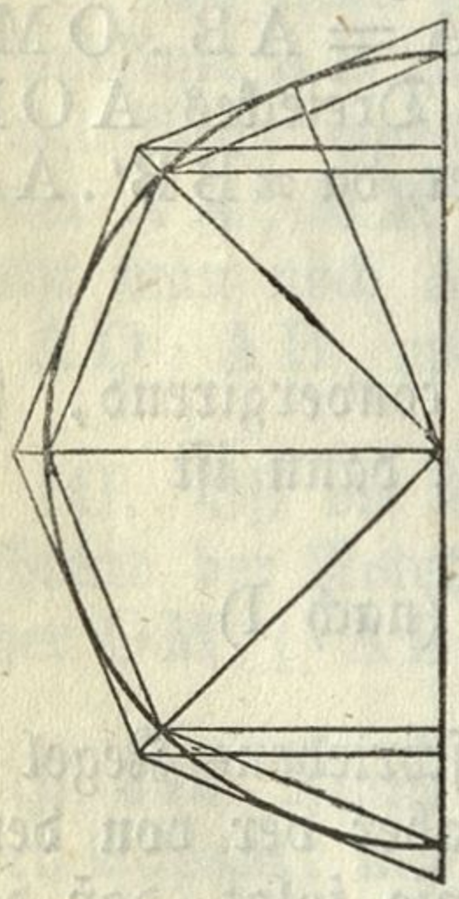
VII. Die Kugel.

§. **333.** Wird einem Kreise ein regelmäßiges Vieleck eingeschrieben oder umschrieben, und dasselbe sammt dem Kreise um eine durch den Mittelpunct und durch einen Eckpunct des Vieleckes gehende Axe gedreht, so beschreibt der Kreis eine Kugel und das Vieleck einen Rotationskörper, welcher der Kugel bezüglich eingeschrieben oder umschrieben heißt.

Die Oberfläche eines jeden solchen Rotationskörpers hat mit der Kugelfläche mehrere Parallelkreise gemeinschaftlich; alle übrigen Puncte der Oberfläche des eingeschriebenen Rotationskörpers liegen innerhalb, alle übrigen Puncte der Oberfläche des umschriebenen Rotationskörpers außerhalb der Kugel.

§. **334.** 1. Die Oberfläche eines der Kugel eingeschriebenen Rotationskörpers ist kleiner, die Oberfläche eines der Kugel umschriebenen Rotationskörpers größer als die Kugeloberfläche (Fig. 229).

Fig. 229.



Geht man von einem gegebenen, der Kugel eingeschriebenen Rotationskörper aus und verdoppelt durch Einschreibung neuer Körper die Seitenzahl des erzeugenden Vieleckes und dadurch die Zahl der mit der Kugel gemeinschaftlichen Parallelkreise, so wird (nach §. 330, 2) die Oberfläche des Rotationskörpers desto größer, je mehrere Parallelkreise sie mit der Kugel gemeinschaftlich hat, weil dann der Halbmesser des dem Vielecke eingeschriebenen Kreises immer größer wird, die Axe aber unverändert bleibt. In je mehreren Parallelkreisen aber die Oberflächen des Rotationskörpers und der Kugel zusammenfallen, desto näher kommen sie einander. Daraus folgt, daß die Oberfläche des Rotationskörpers kleiner sein müsse als die Kugeloberfläche, weil sie, wenn sie eben so groß oder größer als diese wäre, bei fortwährender Zunahme sich der Kugelfläche nicht nur nicht nähern, sondern von ihr immer mehr entfernen würde.

Geht man dagegen von einem gegebenen, der Kugel umschriebenen Rotationskörper aus und verdoppelt durch Umschreibung neuer Körper die Zahl der mit der Kugel gemeinschaftlichen Parallelkreise, so wird (nach §. 330, 2) die Oberfläche des Rotationskörpers um so kleiner, je mehrere Parallelkreise sie mit der Kugel gemeinschaftlich hat, da die Axe immer kleiner wird, der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises aber ungeändert bleibt. Mit der Zunahme der gemeinschaftlichen Parallelkreise werden sich aber auch die Oberflächen des Rotationskörpers und der Kugel immer mehr nähern, woraus dann folgt, daß der umschriebene Rotationskörper größer ist als die Kugeloberfläche.

Zusatz. Aehnliche Schlüsse können mit Rücksicht auf §. 330, 1 auch bezüglich einer Kugelmütze und einer Kugelzone gemacht werden.

2. Der Cubikinhalt eines der Kugel eingeschriebenen Rotationskörpers ist kleiner, der Cubikinhalt des umschriebenen Rotationskörpers ist größer als der Cubikinhalt der Kugel.

Denn der eingeschriebene Rotationskörper ist ein Theil der Kugel, und diese wieder ein Theil des umschriebenen Rotationskörpers.

Zusatz. Dieselbe Beziehung gilt auch zwischen einem Kugelsector und den Theilen eines eingeschriebenen und umschriebenen Rotationskörpers.

Folgesatz. Die Oberflächen der einer Kugel eingeschriebenen und umschriebenen Rotationskörper können durch fortgesetzte Verdopplung der Seitenzahl der erzeugenden Vielecke der Oberfläche der Kugel und eben so die Cubikinhalte der eingeschriebenen und umschriebenen Rotationskörper dem Cubikinhalte der Kugel beliebig nahe gebracht werden, so daß die Unterschiede kleiner werden als jede noch so kleine angebbare Größe. In diesem Sinne kann man auch sagen: Die Kugel ist ein Körper, welcher erzeugt wird, wenn sich ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten um eine dasselbe halbirende Diagonale herumdreht.

§. 335. Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem Producte aus dem Umfange eines größten Kugelkreises und dem Durchmesser.

Heißt d der Durchmesser der Kugel und p die Peripherie eines größten Kreises, so ist die Oberfläche der Kugel

$$o = p \,.\, d.$$

Diesen Satz kann man schon aus §. 330, 2 mit Rücksicht auf §. 334, Folges. ableiten. Wir wollen jedoch für denselben hier einen strengen indirecten Beweis folgen lassen.

Wäre $o > p.d$, und zwar $o - p.d = w$, so ließe sich (§. 334, Folges.) der Kugel immer ein Rotationskörper einschreiben, dessen Oberfläche sich von der Oberfläche der Kugel um weniger als jede noch so kleine gegebene Größe w unterscheidet. Heißt für einen solchen Rotationskörper p' der Umfang des Kreises, welcher dem erzeugenden regelmäßigen Vielecke eingeschrieben ist, so wäre, weil d zugleich die Axe dieses Körpers vorstellt, (mit Rücksicht auf §. 330, 2) $o - p' \,.\, d < w$, und demnach $o - p' \,.\, d < o - p \,.\, d$, somit $p' \,.\, d > p.d$, was nicht sein kann, weil $p' < p$ ist.

Wäre ferner $o < p.d$, und zwar $p.d - o = w'$, so ließe sich der Kugel immer ein Rotationskörper umschreiben, dessen Oberfläche sich von der Oberfläche der Kugel um weniger als jede noch so kleine gegebene Größe w' unterscheidet. Heißt d' die Axe eines solchen Rotationskörpers, so wäre $p.d' - o < w'$, und demnach $p.d' - o < p.d - o$, daher $p.d' < p.d$, was nicht sein kann, da $d' > d$ ist.

Es ist daher $o = p.d$.

Zusätze. 1. Ist r die Maßzahl des Kugelhalbmessers, so ist

$$o = 2r\pi \,.\, 2r = 4r^2\pi;$$

d. h. die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem vierfachen Flächeninhalte eines größten Kugelkreises.

2. Heißen O und o die Oberflächen zweier Kugeln, deren Halbmesser R und r sind, so hat man $O = 4R^2\pi$ und $o = 4r^2\pi$, daher

$$O : o = R^2 : r^2;$$

d. h. die Oberflächen zweier Kugeln verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

3. Es sei f die Oberfläche eines sphärischen Zweieckes; dessen sphärischer Winkel m^0 beträgt, so hat man $f : 4r^2\pi = m^0 : 360^0$, daher

$$f = r^2\pi \cdot \frac{m^0}{90^0};$$

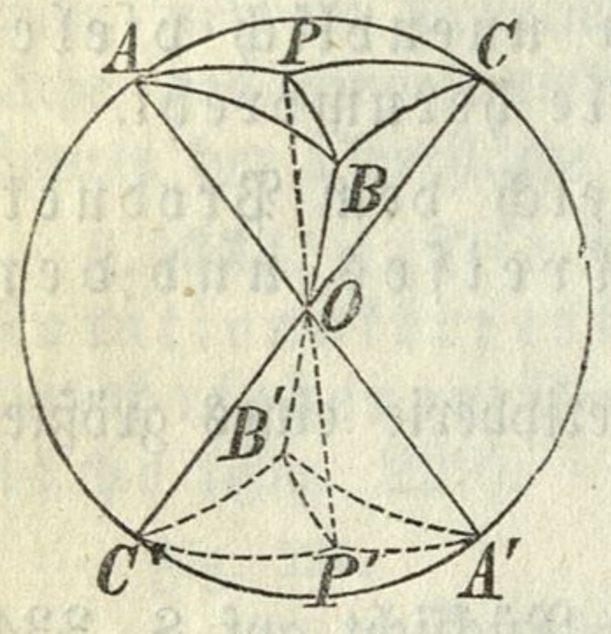
d. h. die Oberfläche eines sphärischen Zweieckes ist gleich dem Producte aus dem Flächeninhalte eines größten Kreises und der Verhältnißzahl zwischen dem sphärischen Winkel und 90^0.

4. Eine Kugelmütze ist gleich dem Producte aus dem Umfange eines größten Kugelkreises und der Höhe der Mütze (§. 230, 1).

5. Eine Kugelzone (Differenz zweier Kugelmützen) ist gleich dem Producte aus dem Umfange eines größten Kugelkreises und der Höhe der Zone.

§. 336. Zwei sphärische Gegendreiecke sind flächengleich.

Fig. 230.



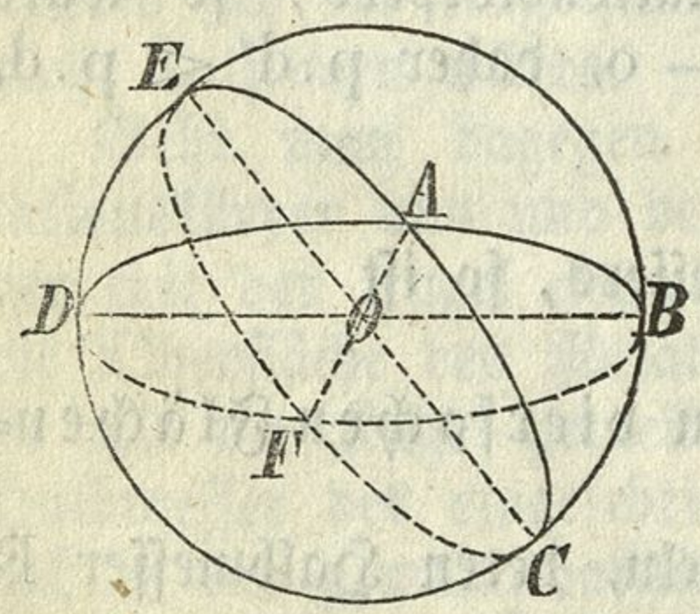
Es seien (Fig. 230) ABC und A'B'C' zwei Gegendreiecke und P der sphärische Mittelpunct des ersteren. Verbindet man P durch Bogen größter Kreise mit A, B, C, so wird das Dreieck ABC in drei gleichschenklige Dreiecke PAB, PAC, PBC zerlegt, da P von den Puncten A, B, C dieselbe sphärische Entfernung hat.

Zieht man ferner den Durchmesser POP' und verbindet P' mit den Puncten A', B', C' durch Bogen größter Kreise, so wird auch das Dreieck A'B'C' in drei Dreiecke P'A'B', P'A'C', P'B'C' zerlegt, welche als Gegendreiecke der Dreiecke PAB, PAC, PBC bezüglich gleiche Seiten haben, somit auch gleichschenklig und daher (§. 271, Zusatz 1) folgeweise mit den letzteren Dreiecken nicht nur symmetrisch, sondern auch congruent, also flächengleich sind. Somit sind auch die Summen dieser Dreiecke d. i. die Dreiecke ABC und A'B'C' flächengleich.

Auf ähnliche Art wird der Beweis geführt, wenn der sphärische Mittelpunct P in einer Seite des Dreiecks oder außerhalb desselben liegt.

§. 337. Der Flächeninhalt eines sphärischen Dreieckes ist gleich dem Producte aus dem Flächeninhalte eines größten Kugelkreises und der Verhältnißzahl zwischen dem Ueberschusse der drei sphärischen Winkel über 180^0 und zwischen 180^0 (Fig. 231).

Fig. 231.



Da (§. 336) das Dreieck ADE = BCF, so ist Dreieck ABC + ADE = ABC + BCF, oder

$$ABC + ADE = ABFCA.$$

Eben so ist

$$ABC + ACD = BADCB,$$
$$ABC + ABE = CAEBC.$$

Durch Addition der letzten drei Gleichungen erhält man:

$$2\,ABC + (ADE + ACD + ABC + ABE) = ABFCA + BADCB + CAEBC.$$

Bezeichnet man nun den Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks ABC durch f, den Kugelhalbmesser durch r, wo dann $ADE + ACD + ABC + ABE = 2r^2\pi$ wird, und die Winkel des sphärischen Dreieckes ABC durch A^0, B^0, C^0; so ist mit Rücksicht auf §. 335, 3.

$$2f + 2r^2\pi = r^2\pi \cdot \frac{A^0}{90^0} + r^2\pi \cdot \frac{B^0}{90^0} + r^2\pi \cdot \frac{C^0}{90^0},$$

daher $$f = r^2\pi \cdot \frac{A^0 + B^0 + C^0 - 180^0}{180^0}.$$

§. **338**. Der Cubikinhalt einer Kugel ist gleich dem Producte aus der Oberfläche und dem dritten Theile des Halbmessers.

Bezeichnet r den Halbmesser und o die Oberfläche der Kugel, so ist der Cubikinhalt derselben

$$K = o \cdot \frac{r}{3}.$$

Der strenge Beweis dieses Satzes, welcher unmittelbar aus §. 332, 2 mit Rücksicht auf §. 334, Folges. gefolgert werden kann, wird in ähnlicher Weise, wie der Beweis in §. 335, geführt.

Zusätze. 1. Da $o = 4r^2\pi$ ist, so folgt $k = 4r^2\pi \cdot \frac{r}{3} = \frac{4}{3} r^3\pi$.

2. Heißen K und k die Inhalte zweier Kugeln, deren Halbmesser R und r sind, so hat man $K = \frac{4R^3\pi}{3}$ und $k = \frac{4r^3\pi}{3}$, daher

$$K : k = R^3 : r^3,$$

d. h. die Cubikinhalte zweier Kugeln verhalten sich so wie die dritten Potenzen ihrer Halbmesser.

3. Der Cubikinhalt eines Kugelsectors ist gleich dem Producte aus seiner Kugelmütze und dem dritten Theile des Halbmessers der Kugel (332, 1).

4. Der Cubikinhalt eines Kugelsegmentes ist, je nachdem dieses kleiner oder größer als die Halbkugel ist, gleich der Differenz oder der Summe der Inhalte des entsprechenden Kugelsectors und eines Kegels, dessen Grundfläche die Grundfläche des Segmentes, und dessen Höhe der Abstand dieser Grundfläche von dem Kugelmittelpuncte ist.

5. Der Cubikinhalt einer Kugelschicht wird als die Differenz der Inhalte zweier Kugelsegmente berechnet.

VIII. Uebungsaufgaben.

§. **339**. Aufgaben über die Ausmessung ebenflächiger Körper.

1. In einem Würfel ist a die Seite, d die Diagonale, f die Diagonalfläche, o die Oberfläche, k der Cubikinhalt; aus einer dieser Größen die übrigen zu berechnen.

Gegeben: 1) $a = 1^m\ 3^{dm}\ 3^{cm}$; 2) $d = 0{\cdot}752^m$;
3) $o = 10\,\square^{cm}$; 4) $k = 12{\cdot}326391$ Cub.^{m};

2. In einem rechtwinkligen Parallelepiped sind a, b, c, die Kanten, d die Diagonale, f die Diagonalfläche, o die Oberfläche, k der Cubikinhalt; aus dreien dieser Größen die übrigen zu bestimmen.

Gegeben: 1) $a = 2{\cdot}49^m$. $b) = 2{\cdot}18^m$, $c) = 1{\cdot}85^m$;
2) $a = 1^{dm}\ 5^{cm}$, $b) = 1^{dm}\ 3^{cm}$, $o) = 7\,\square^{dm}\ 36\,\square^{cm}$;
3) $b = 3{\cdot}5^{dm}$, $c) = 2{\cdot}8^{dm}$, $k) = 41$ Cub.^{dm}.

3. Die Höhe eines senkrechten Prisma ist h, die Basis desselben ein regelmäßiges Sechseck, dessen Seite a ist; bestimme a) die Oberfläche, b) den Cubikinhalt des Prisma.

4. In einem sechsseitigen und einem vierseitigen senkrechten Prisma mit regelmäßigen Grundflächen ist die Höhe $4 \cdot 1^{dm}$ und eine Seite der Grundfläche $2 \cdot 1^{dm}$; wie verhalten sich a) die Oberflächen, b) die Inhalte?

5. In einer senkrechten Pyramide, deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist, ist a eine Grundkante, b eine Seitenkante, h die Höhe, s die Seitenhöhe, o die Oberfläche, k der Cubikinhalt; aus zweien dieser Größen die übrigen zu berechnen.

6. Die Oberfläche und den Inhalt einer senkrechten Pyramide zu finden, worin die Höhe h, und die Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck mit der Seite a ist.

7. In einem senkrechten Pyramidenstumpf ist die Höhe 5^{dm}, die Grundflächen sind gleichseitige Dreiecke, deren Seiten bezüglich $1 \cdot 6^{dm}$ und $1 \cdot 2^{dm}$ betragen; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Cubikinhalt?

8. Eine Pyramide, deren Grundfläche b, und deren Höhe h ist, wird in dem Abstande a von der Spitze durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten; berechne die beiden Theile der Pyramide.

9. In welchem Abstande von der Spitze einer senkrechten Pyramide muß man eine mit der Grundfläche parallele Ebene legen, damit sie a) die Mantelfläche, b) die Pyramide selbst in dem Verhältnisse $m : n$ theile?

10. Die Oberfläche und der Cubikinhalt eines regelmäßigen Polyeders aus dem Halbmesser a) der eingeschriebenen, b) der umschriebenen Kugel zu bestimmen.

11. Aus der Kante a eines regelmäßigen Polyeders a) die Oberfläche o, b) den Cubikinhalt k desselben zu bestimmen.

a) Der Inhalt eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Seite a ist, ist $= \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$; daher für das Tetr. $o = a^2 \sqrt{3}$, Okt. $o = 2a^2 \sqrt{3}$, Ikos. $o = 5a^2 \sqrt{3}$.

In dem Hexaeder ist $o = 6a^2$.

Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Fünfeckes von der Seitenlänge a ist $\frac{a^2}{4} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$; folglich ist für das Dodekaeder $o = 3a^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$.

b) Aus §. 317, 2 und §. 276, 4 ergibt sich für das

$$\text{Tetr. } k = \frac{a^3}{12}\sqrt{2},\ \text{Okt. } k = \frac{a^3}{3}\sqrt{2},\ \text{Hexaed. } k = a^3,$$

$$\text{Ikos. } k = \frac{5a^3}{12}(3 + \sqrt{5}),\ \text{Dodek. } k = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5}).$$

§. 340. Aufgaben über die Ausmessung krummflächiger Körper.

1. In einem senkrechten Kegel ist r der Halbmesser der Grundfläche, h die Höhe, s die Seite, m die Mantelfläche, k der Cubikinhalt; aus je zweien dieser Größen die übrigen zu berechnen.

Gegeben: 1) $r = 3 \cdot 5^{dm}$, $h = 8 \cdot 4^{dm}$; 2) $h = 1 \cdot 23^{m}$, $m = 7 \cdot 95 \square^{m}$; 3) $s = 2^{m}\, 8^{dm}\, 1^{cm}$, $k = 10$ Cub.^{m}.

2. Wie gestalten sich die Auflösungen in 1. für $s = 2r$, d. i. für den gleichseitigen Kegel?

3. In einem senkrechten Kegel haben r, h und s die in 1. angegebene Bedeutung, r' ist der Halbmesser eines Schnittkreises desselben, h' die Höhe, s' die Seite, m' die Mantelfläche und k' der Cubikinhalt des durch diesen entstehenden Kegelstumpfes; berechne aus je dreien dieser Größen die übrigen.

4. In welchem Abstande von der kleineren Grundfläche eines senkrechten Kegelstumpfes muß eine mit ihr parallele Ebene geführt werden, damit a) die

Schnittfläche $\frac{m}{n}$ der größeren Grundfläche sei, b) damit der Schnitt den Kegelstumpf halbire?

5. In einem senkrechten Cylinder ist r der Halbmesser der Grundfläche, h die Höhe, m die Mantelfläche, k der Cubikinhalt; berechne aus je zweien dieser Größen die beiden anderen.

Gegeben: 1) $r = 1{\cdot}064^{m}$, $h = 2{\cdot}725^{m}$; 2) $r = 6{\cdot}42^{dm}$, $m = 15{\cdot}18\square^{dm}$; 3) $m = 20\square^{dm}$, $k = 20$ Cub.^{dm}.

6. Wie gestalten sich die Auflösungen in 5. für $h = 2r$, d. i. für den gleichseitigen Cylinder?

7. Den Cubikinhalt einer Cylinderröhre aus den beiden Halbmessern R und r und der Höhe h zu berechnen.

8. Aus dem Cubikinhalte k einer Cylinderröhre, der Höhe h und dem größeren Halbmesser R die Dicke d zu finden.

9. Das Ciment für 1 Liter = 1 Cub.^{dm} des Flüssigkeitsmaßes hat die Form eines Cylinders, dessen Höhe das Doppelte des Durchmessers beträgt; wie groß sind die Dimensionen dieses Cimentes in Millimeter?

10. Das Ciment für 1 Deciliter des Hohlmaßes für trockene Gegenstände hat die Form eines Kegelstumpfes, dessen oberer Durchmesser gleich ist dem Durchmesser eines inhaltsgleichen gleichseitigen Cylinders, und dessen unterer Durchmesser $^{5}/_{4}$ des oberen beträgt; welche Dimensionen ergeben sich hieraus?

11. Ein gleichschenkliges Trapez, dessen Höhe h und dessen Parallelseiten a und a + m sind, rotirt um die Seite a als Axe; bestimme a) die Rotationsfläche, b) den Rotationskörper.

12. Bestimme a) die Oberfläche, b) den Cubikinhalt eines Körpers, welcher durch Rotation eines regelmäßigen Sechseckes von 8^{cm} Seitenlänge um eine dasselbe halbirende Diagonale erzeugt wird.

13. Die Seite eines regelmäßigen Fünfeckes ist a; wie groß ist a) die Rotationsfläche, b) der Rotationskörper desselben um eine durch einen Eckpunct und durch den Mittelpunct gehende Axe?

14. In einer Kugel ist r der Halbmesser, o die Oberfläche, k der Inhalt; suche aus jeder dieser Größen die beiden anderen.

Gegeben: 1) $r = 0{\cdot}3589^{m}$; 2) $r = 1^{m}\,2^{dm}\,5{\cdot}8^{cm}$; 3) $o = 22{\cdot}16708\square^{dm}$; 4) $k = 100$ Cub.^{dm}.

15. Den Halbmesser einer Kugel zu finden, welche mit einem gegebenen senkrechten a) Cylinder, b) Kegel, c) Kegelstumpf 1. gleiche Oberfläche, 2. gleichen Inhalt hat.

16. In einen gleichseitigen Cylinder werden eine Kugel und ein senkrechter Kegel eingeschrieben; wie verhalten sich die Cubikinhalte dieser drei Körper?

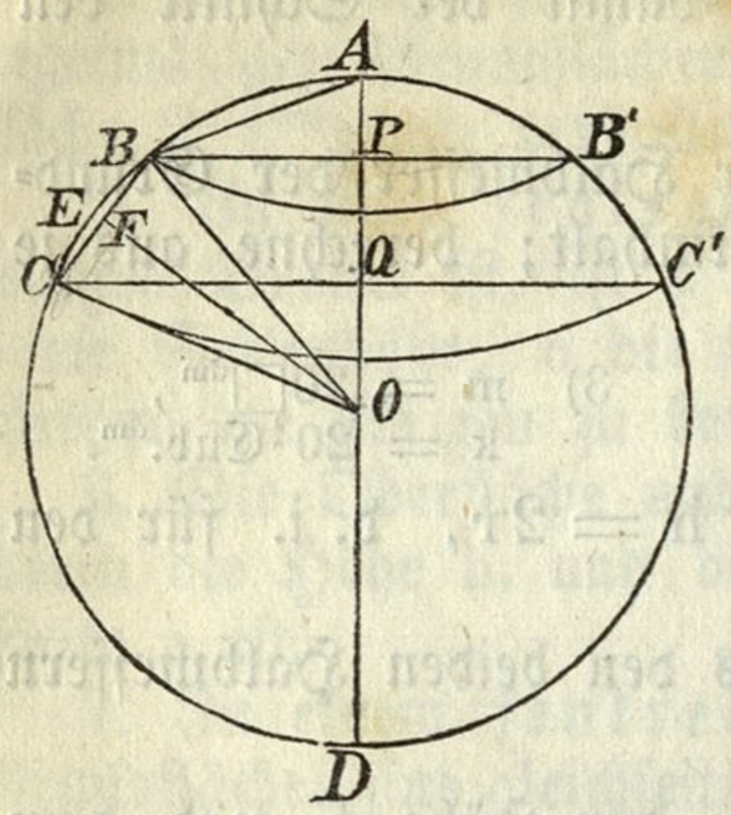
17. Um eine Kugel werden ein gleichseitiger Cylinder und ein gleichseitiger Kegel beschrieben; wie verhalten sich a) die Oberflächen, b) die Cubikinhalte dieser drei Körper?

18. Aus einer metallenen Hohlkugel, deren äußerer Durchmesser 2r, und deren Wanddicke d ist, soll eine massive Kugel gegossen werden; wie groß wird der Durchmesser derselben?

19. Der größere Halbmesser einer Hohlkugel sei r und der Cubikinhalt ihrer Schale k; wie dick ist die Schale?

20. Wie groß ist die Fläche eines sphärischen Dreieckes, dessen Winkel 125°, 87°, 82° sind, wenn der Halbmesser der Kugel 1^{m} beträgt?

Fig. 232.



21. Setzen wir (Fig. 232) in dieser und in den folgenden Aufgaben $AO = r$, $BP = \varrho$, $CQ = \varrho'$, $AP = h$, $AQ = h'$, $PO = d$, $QO = d'$, $PQ = a$, ferner die Sehne $AB = s$, die Sehne $BC = \sigma$.

Es sei die zu dem Bogen AB gehörige Kugelmütze M zu bestimmen, wenn gegeben sind:

1) r, h; 2) r, ϱ; 3) h, ϱ; 4) s.

Man erhält

1) $M = 2r\pi.h$; 2) $M = 2r\pi\,(r - \sqrt{r^2 - \varrho^2})$;
3) $M = (h^2 + \varrho^2)\,\pi$; 4) $M = s^2\pi$.

22. Die zu dem Bogen BC gehörige Kugelzone Z zu bestimmen, wenn gegeben sind: 1) r, a; 2) r, ϱ, ϱ'.

Man findet

1) $Z = 2r\pi.a$; 2) $Z = 2r\pi\,(\sqrt{r^2 - \varrho^2} - \sqrt{r^2 - \varrho'^2})$.

23. Den durch die Rotation des Kreisausschnittes BOC erzeugten Kugelsector zu bestimmen, wenn r und a gegeben sind.

Der Kugelsector ist $= 2r\pi.a.\frac{r}{3} = \frac{2}{3}\,ar^2\pi$.

24. Das zu dem Bogen AB gehörige Kugelsegment S zu bestimmen, wenn gegeben sind: 1) r, h; 2) ϱ, h; 3) r, ϱ.

Man erhält

1) $S = \frac{h^2\pi}{3}\,(3r - h)$; 2) $S = \frac{h^2\pi}{2}\left(\varrho^2 + \frac{h^2}{3}\right)$;

3) $S = \frac{\pi}{3}\left\{2r^3 \mp (2r^2 + \varrho^2)\,\sqrt{r^2 - \varrho^2}\right\}$.

25. Die zu dem Bogen BC gehörige Kugelschicht zu bestimmen, wenn gegeben sind: 1) r, h, h'; 2) r, d', a; 3) ϱ, ϱ', a.

Man erhält für die Kugelschicht die Ausdrücke:

1) $\frac{\pi}{3}\left\{(h'^2\,(3r - h') - h^2\,(3r - h)\right\}$; 2) $\frac{a\pi}{3}\,(3r^2 - 3d'^2 - 3ad' - a^2)$;

3) $\frac{a\pi}{2}\left(\varrho^2 + \varrho'^2 + \frac{a^2}{3}\right)$.

26. Das durch die Rotation des Kreisabschnittes BCE erzeugte ringförmige Kugelsegment R zu bestimmen, wenn σ und a gegeben sind.

$$R = \frac{a\sigma^2\pi}{6}.$$

27. Das Auge eines Beobachters auf der Erdoberfläche übersieht von derselben eine Calotte, welche begrenzt wird durch die Kreislinie, welche die Berührungspuncte der vom Auge nach der Erde gezogenen Tangenten verbindet. Wie groß ist diese Calotte, wenn h die Höhe des Auges über der Erdoberfläche und r den Halbmesser der Erde bezeichnet? $\left(f = \frac{2r^2\,h\,\pi}{r + h}\right)$.

28. Die Oberfläche einer Kugel ist gleich einer Zone, welche zu einer Kugel vom Radius r gehört und deren Höhe a ist; man bestimme die Oberfläche und den Cubikinhalt eines Octaeders, welchem die erstere Kugel eingeschrieben ist.

29. Ein Tetraeder ist inhaltsgleich mit einer Kugelschicht, die zu einer Kugel vom Halbmesser r gehört und deren Grundflächen von dem Kugelmittelpuncte die Abstände d und d' haben; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Inhalt einer Kugel, welche dem Tetraeder umschrieben ist?

Dritter Theil.

Die Trigonometrie.

§. **341.** Die Seiten und die Winkel eines Dreieckes stehen in einem so innigen Zusammenhange, daß man im Allgemeinen aus drei gegebenen Bestandtheilen, worunter bei ebenen Dreiecken wenigstens eine Seite sein muß, durch einfache Constructionen auch die übrigen drei Bestandtheile bestimmen kann. Die geometrische Construction hat jedoch den Uebelstand, daß sie wegen der Unvollkommenheit der dabei benöthigten Instrumente und wegen der Ungenauigkeit beim Gebrauche derselben mehr oder weniger mangelhafte Resultate liefert. Man sah sich daher veranlaßt, bei diesen Bestimmungen anstatt der Construction die Rechnung anzuwenden, welche jeden Grad von Genauigkeit zuläßt. Da sich aber zwischen den Maßzahlen der Seiten und den Zahlen, welche die Winkel in Graden ausdrücken, die Art der gegenseitigen Abhängigkeit nicht unmittelbar darstellen läßt, hat man statt der Winkel die Verhältnißzahlen gewisser gerader Linien, welche durch die Winkel unzweideutig bestimmt sind, in die Rechnung eingeführt. Diese Verhältnißzahlen nennt man Functionen der Winkel oder goniometrische Functionen, und die Lehre von den Eigenschaften und gegenseitigen Relationen derselben die Goniometrie.

Die Anwendung der Winkelfunctionen auf die Berechnung der Dreiecke bildet den Gegenstand der Trigonometrie, und zwar der ebenen oder sphärischen Trigonometrie, je nachdem sie sich auf die ebenen oder sphärischen Dreiecke bezieht.

Erster Abschnitt.

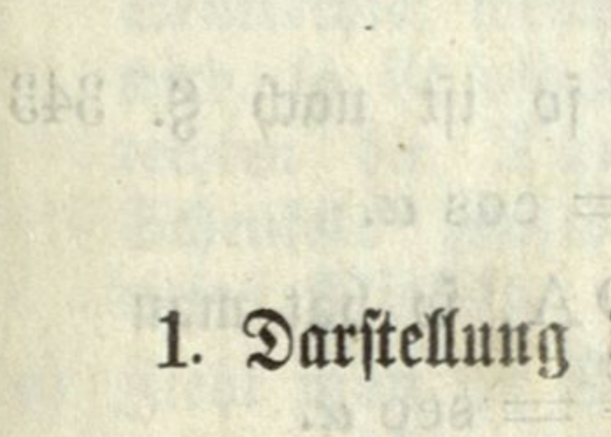
Die Goniometrie.

1. Darstellung der Winkelfunctionen am rechtwinkligen Dreiecke.

§. **342.** Zieht man aus beliebigen Puncten M, M′, M″ (Fig. 233) des einen Schenkels eines Winkels $AOB = \alpha$ Senkrechte auf den andern Schenkel, so entstehen rechtwinklige Dreiecke, welche den Winkel α gemeinschaftlich haben, und unter einander ähnlich sind. Es ist daher

$$\frac{MP}{OM} = \frac{M'P'}{OM'} = \frac{M''P''}{OM''}.$$

Fig. 233.



Ebenso ist

$$\frac{OP}{OM} = \frac{OP'}{OM'} = \frac{OP''}{OM''}, \text{ und}$$

$$\frac{MP}{OP} = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{M''P''}{OP''}.$$

Diese Verhältnisse, welche beziehungsweise für denselben Winkel stets gleich sind, dagegen bei einer Aenderung des Winkels sich gleichfalls ändern, folglich einzig von der Größe des Winkels abhängen, bieten ein einfaches Mittel dar, die Größe des entsprechenden Winkels darzustellen.

§. **343.** In einem rechtwinkligen Dreiecke MPO (Fig. 233) heißt:

1. das Verhältniß der dem Winkel α gegenüberstehenden Kathete zu der Hypotenuse der Sinus des Winkels α, $\frac{MP}{OM} = \sin \alpha$;

2. das Verhältniß der dem Winkel α anliegenden Kathete zu der Hypotenuse der Cosinus dieses Winkels, $\frac{OP}{OM} = \cos \alpha$;

3. das Verhältniß der dem Winkel α gegenüberliegenden Kathete zu der andern Kathete die Tangente des Winkels α, $\frac{MP}{OP} = \text{tang } \alpha$;

4. das Verhältniß der dem Winkel α anliegenden Kathete zu der andern Kathete die Cotangente dieses Winkels, $\frac{OP}{MP} = \cot \alpha$;

5. das Verhältniß der Hypotenuse zu der dem Winkel α anliegenden Kathete die Secante des Winkels α, $\frac{OM}{OP} = \sec \alpha$;

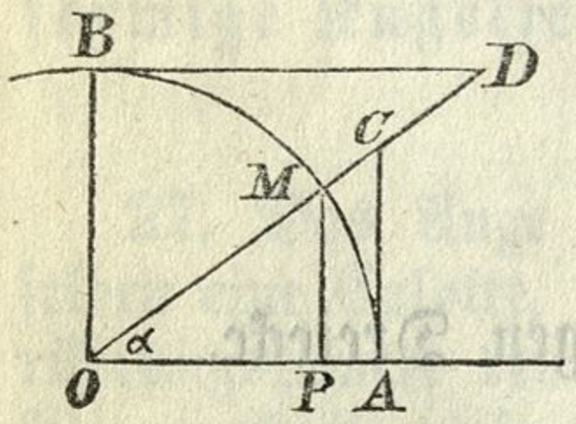
6. das Verhältniß der Hypotenuse zu der dem Winkel α gegenüberliegenden Kathete die Cosecante dieses Winkels, $\frac{OM}{MP} = \text{cosec } \alpha$.

Sinus, Cosinus, Tangente, Cotangente, Secante und Cosecante sind daher, da sie von der Größe des Winkels α abhängen und durch denselben bestimmt sind, Winkelfunctionen. Sie sind sämmtlich unbenannte Zahlen.

2. Darstellung der Winkelfunctionen durch Linien am Kreise und Begriffserweiterung derselben.

§. **344.** Beschreibt man aus O (Fig. 234) einen Kreis, betrachtet den Halbmesser OA als unbeweglich und läßt von demselben einen zweiten Halbmesser OM sich allmählig wegdrehen, so wird dieser nach und nach mit OA verschiedene Winkel bilden, von denen einer $AOM = \alpha$ ist.

Fig. 234.



a) Zieht man nun $MP \perp OA$, so ist nach §. 343 $\frac{MP}{OM} = \sin \alpha$ und $\frac{OP}{OM} = \cos \alpha$.

b) Errichtet man ferner $AC \perp OA$, so hat man $\frac{AC}{OA} = \text{tang } \alpha$ und $\frac{OC}{OA} = \sec \alpha$.

c) Wird endlich $OB \perp OA$ und $BD \perp OB$ errichtet, so ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke OBD und OPM

$$\frac{BD}{OB} = \frac{OP}{MP} = \cot \alpha \text{ und } \frac{OD}{OB} = \frac{OM}{MP} = \text{cosec } \alpha.$$

Die Strecken MP, OP, AC, OC, BD und OD, deren Verhältnisse zum Halbmesser des Kreises die Winkelfunctionen ausdrücken, heißen goniometrische Linien.

Da diese Verhältnisse nur von der Größe des Winkels α abhängen und für jeden beliebigen Halbmesser ungeändert bleiben, so kann man, ohne die Größe der Winkelfunctionen zu ändern, die Längeneinheit selbst als Halbmesser

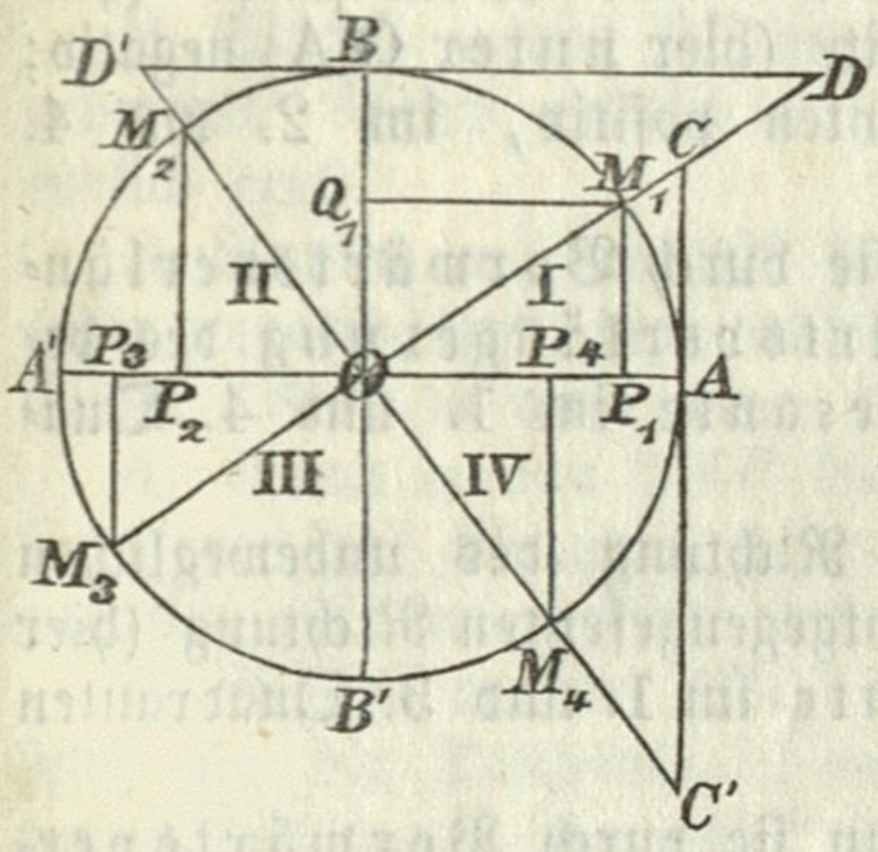
des Kreises annehmen und somit $OA = OM = OB = 1$ setzen. Dann gehen die obigen Ausdrücke in die folgenden über:

$MP = \sin \alpha$, $AC = \text{tang } \alpha$, $BD = \cot \alpha$,
$OP = \cos \alpha$; $OC = \sec \alpha$; $OD = \text{cosec } \alpha$.

Daraus sieht man, daß die Winkelfunctionen gleich den Maßzahlen der entsprechenden goniometrischen Linien für den Halbmesser 1 sind, daß daher diese Maßzahlen für die Winkelfunctionen selbst gesetzt werden können.

§. 345. Die in §. 343 aufgestellten Erklärungen der Winkelfunctionen gelten bloß für spitze Winkel, da an der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes nur spitze Winkel liegen können. Die Darstellung der Winkelfunctionen am Kreise macht es nun möglich, die Begriffe derselben auf Winkel von jeder Größe auszudehnen.

Fig. 235.



Zieht man in einem Kreise (Fig. 235) zwei auf einander senkrechte Durchmesser AA' und BB', so wird ein Halbmesser OM, welcher sich von dem festen Halbmesser OA aus um O in der Richtung nach links wegdreht, nach und nach alle Quadranten des Kreises, welche wir nach jener Richtung der Reihe nach den ersten, zweiten, dritten, vierten nennen wollen, durchlaufen und während dieser Bewegung mit dem festen Halbmesser OA alle Winkel α von 0^0 bis 360^0 bilden.

Nimmt man nun den Halbmesser des Kreises, d. i. die Länge der Schenkel der einzelnen Winkel gleich 1 an, so ergeben sich für die Winkelfunctionen mit Rücksicht auf §. 343 folgende Erklärungen, welche für jede Größe des Winkels giltig sind:

a) Fällt man von dem Endpuncte des einen Schenkels eines Winkels eine Senkrechte auf den anderen Schenkel, so ist die Maßzahl dieser Senkrechten der Sinus, und die Maßzahl, welche den Abstand der Senkrechten vom Scheitel des Winkels angibt, der Cosinus dieses Winkels.

b) Errichtet man auf den einen Schenkel eines Winkels im Endpuncte eine Senkrechte, welche von der Verlängerung des zweiten Schenkels geschnitten wird, so ist die Maßzahl der zwischen beiden Schenkeln enthaltenen Senkrechten die Tangente, und die Maßzahl des zweiten verlängerten Schenkels zwischen dem Scheitel und der Senkrechten die Secante dieses Winkels.

c) Zieht man im Scheitel eines Winkels auf den einen Schenkel eine Senkrechte $= 1$, errichtet auf diese im Endpuncte wieder eine Senkrechte, welche von dem verlängerten zweiten Schenkel geschnitten wird, so ist die Maßzahl des dadurch abgeschnittenen Stückes der letzteren Senkrechten die Cotangente, und die Maßzahl des zweiten verlängerten Schenkels zwischen dem Scheitel und jener Senkrechten die Cosecante des gegebenen Winkels.

Damit jedoch diese Erklärungen der Winkelfunctionen für alle möglichen Winkel ihre bestimmte Bedeutung erhalten, muß bei den goniometrischen Linien außer der absoluten Größe auch die Richtung in Betracht gezogen und letztere durch die Vorzeichen des Positiven oder Negativen ausgedrückt werden.

§. **346.** Vorzeichen der Winkelfunctionen.

Man nimmt allgemein die goniometrischen Linien in ihrer Richtung für den spitzen Winkel als positiv an; die Linien in einer Richtung, welche jener entgegengesetzt ist, müssen dann als negativ angesehen werden.

1. Die Sinuslinie ist positiv, wenn sie von dem unbeweglichen Schenkel OA (Fig. 235) nach der Seite der Winkelfläche (hier über OA), und negativ, wenn sie nach der entgegengesetzten Seite (hier unter OA) liegt; der Sinus ist daher im 1. und 2. Quadranten positiv, im 3. und 4. Quadranten negativ.

2. Die Cosinuslinie ist in der Richtung OA (hier rechts vom Scheitel O) positiv, in der entgegengesetzten Richtung OA' (hier links von O) negativ; der Cosinus ist daher im 1. und 4. Quadranten positiv, im 2. und 3. negativ.

3. Die Tangentenlinie ist nach der Seite der Winkelfläche (hier über OA) positiv, nach der entgegengesetzten Seite (hier unter OA) negativ; folglich die Tangente im 1. und 3. Quadranten positiv, im 2. und 4. negativ.

4. Die Secantenlinie ist positiv, wenn sie durch Vorwärtsverlängerung, und negativ, wenn sie durch Rückwärtsverlängerung des beweglichen Schenkels erhalten wird; somit die Secante im 1. und 4. Quadranten positiv, im 2. und 3. negativ.

5. Die Cotangentenlinie ist nach der Richtung des unbeweglichen Schenkels (hier rechts von B) positiv, in der entgegengesetzten Richtung (hier links von B) negativ; daher ist die Cotangente im 1. und 3. Quadranten positiv, im 2. und 4. negativ.

6. Die Cosecantenlinie ist positiv, wenn sie durch Vorwärtsverlängerung, und negativ, wenn sie durch Rückwärtsverlängerung des beweglichen Schenkels erhalten wird, folglich die Cosecante im 1. und 2. Quadranten positiv, im 3. und 4. negativ.

§. **347.** Zu- und Abnahme der Functionen bei dem Wachsen des Winkels.

Aendert sich der Winkel α, so ändern sich auch die zugehörigen goniometrischen Linien, daher auch ihre Maßzahlen, d. i. die Winkelfunctionen.

a) Absoluter Werth und Vorzeichen des Sinus und des Cosinus (Fig. 235).

1. Je kleiner der Winkel α, desto kleiner ist auch der Sinus, während sich der Cosinus ohne Ende der Einheit nähert; fallen beide Schenkel zusammen, so wird $\sin 0^0 = 0$, $\cos 0^0 = +1$. Für sehr kleine Winkel ist der Unterschied zwischen dem Bogen und dem Sinus des Winkels um so kleiner, je mehr sich der Winkel der Null nähert, wobei jedoch (nach §. 167, Folges. 1) der Sinus stets kleiner bleibt als der Bogen.

2. Wächst α von 0^0 bis 90^0, so nimmt $\sin \alpha$ zu, anfangs rascher, dann langsamer; $\cos \alpha$ dagegen nimmt ab, anfangs langsamer, dann rascher; beide sind positiv. Für $\alpha = 90^0$ fällt die Sinuslinie mit dem beweglichen Schenkel zusammen, und es ist daher $\sin 90^0 = +1$, $\cos 90^0 = 0$.

3. Wächst α von 90^0 bis 180^0, so ist der Sinus positiv und abnehmend, der Cosinus dagegen negativ und dem absoluten Werthe nach wachsend. Wird $\alpha = 180^0$, so hat man $\sin 180^0 = 0$, $\cos 180^0 = -1$.

4. Während α von 180^0 bis 270^0 zunimmt, ist $\sin \alpha$ negativ und absolut zunehmend, $\cos \alpha$ auch negativ, aber absolut abnehmend; und es wird endlich $\sin 270^0 = -1$, $\cos 270^0 = 0$.

5. Wird $\alpha > 270^0$ aber $< 360^0$, so ist der Sinus negativ und sein absoluter Werth abnehmend, der Cosinus positiv und wachsend. Für $\alpha = 360^0$ werden Sinus und Cosinus wieder so groß wie für $\alpha = 0^0$, nämlich $\sin 360^0 = 0$, $\cos 360^0 = +1$.

Sinus und Cosinus liegen demnach immer zwischen den Grenzen $+1$ und -1.

b) Absoluter Werth und Vorzeichen der Tangente und der Secante (Fig. 235).

1. Je kleiner der Winkel, desto kleiner wird auch die Tangente, während sich die Secante der Einheit nähert; fallen die beiden Schenkel zusammen, so hat man $\operatorname{tang} 0^0 = 0$ und $\sec 0^0 = +1$. Ferner: je kleiner der Winkel, desto kleiner wird auch der Unterschied zwischen dem Bogen und der Tangente des Winkels, wobei jedoch die Tangente (nach §. 167, Folges. 1) stets größer bleibt als der Bogen.

2. Wächst α von 0^0 bis 90^0, so sind $\operatorname{tang} \alpha$ und $\sec \alpha$ positiv und zunehmend. Wird endlich $\alpha = 90^0$, so werden Tangente und Secante unendlich groß.

3. Nimmt α über 90^0 hinaus bis 180^0 zu, so werden Tangente und Secante negativ und dem absoluten Werthe nach abnehmend. Erreicht α die Größe 180^0, so wird $\operatorname{tang} 180^0 = 0$, $\sec 180^0 = -1$.

4. Wenn α von 180^0 bis 270^0 wächst, nehmen die absoluten Werthe der Tangente und Secante zu, und zwar ist die Tangente positiv, die Secante negativ. Für $\alpha = 270^0$ sind Tangente und Secante unendlich groß.

5. Wächst α über 270^0 bis 360^0, so nehmen Tangente und Secante absolut ab, die Tangente ist negativ, die Secante positiv, und es wird endlich $\operatorname{tang} 360^0 = 0$, $\sec 360^0 = +1$.

Die Tangente kann demnach alle möglichen reellen Werthe zwischen $-\infty$ und $+\infty$, die Secante alle Werthe zwischen $+1$ und $+\infty$ und zwischen -1 und $-\infty$ erhalten.

c) Absoluter Werth und Vorzeichen der Cotangente und der Cosecante (Fig. 235).

1. Für sehr kleine Winkel nehmen Cotangente und Cosecante ohne Ende zu und werden beide für $\alpha = 0^0$ unendlich groß.

2. Im 1. Quadranten nehmen Cotangente und Cosecante mit dem wachsenden Winkel ab, beide sind positiv; $\operatorname{cot} 90^0 = 0$, $\operatorname{cosec} 90^0 = +1$.

3. Im 2. Quadranten wachsen die absoluten Werthe der Cotangente und Cosecante mit dem wachsenden Winkel, bis sie bei 180^0 unendlich groß werden; die Cotangente ist negativ, die Cosecante positiv.

4. Im 3. Quadranten nehmen Cotangente und Cosecante mit dem wachsenden Winkel absolut ab, die Cotangente ist positiv, die Cosecante negativ; $\operatorname{cot} 270^0 = 0$, $\operatorname{cosec} 270^0 = -1$.

5. Im 4. Quadranten sind Cotangente und Cosecante negativ und dem absoluten Werthe nach wachsend; für $\alpha = 360^0$ werden beide unendlich groß.

Die Cotangente liegt also zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$, die Cosecante zwischen $+1$ und $+\infty$ oder zwischen -1 und $-\infty$.

Zusatz. Die in §. 347 abgeleiteten Ergebnisse lassen sich auch auf Winkel ausdehnen, welche mehr als eine volle Umdrehung betragen; die allgemeine Form solcher Winkel ist $n \cdot 360^0 + \alpha$. Es ist offenbar, daß die Winkelfunctionen von $n \cdot 360^0 + \alpha$ gleich denselben Functionen von α sind.

3. Relationen zwischen den Winkelfunctionen desselben Winkels.

§. **348.** In den rechtwinkligen Dreiecken M_1P_1O, CAO, DBO (Fig 235) ist

$$M_1P_1^2 + OP_1^2 = OM_1^2,$$
$$AC^2 + OA^2 = OC^2,$$
$$BD^2 + OB^2 = OD^2;$$

daher, wenn $OA = OB = OM_1 = 1$ und $AOM_1 = \alpha$ ist,

$$\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1 \ldots\ldots\ldots 1)$$
$$\text{tang}\,\alpha^2 + 1 = \sec\alpha^2 \ldots\ldots 2)$$
$$\cot\alpha^2 + 1 = \text{cosec}\,\alpha^2 \ldots 3)$$

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke CAO und M_1P_1O ist

$$CA : M_1P_1 = OA : OP_1 \quad \text{und} \quad OC : OM_1 = OA : OP_1$$

oder $\text{tang}\,\alpha : \sin\alpha = 1 : \cos\alpha$ und $\sec\alpha : 1 = 1 : \cos\alpha$; folglich

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \ldots 4) \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \ldots 5)$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke DBO und M_1P_1O folgt ebenso

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \ldots 6) \qquad \text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \ldots 7)$$

Aus den Ausdrücken 4) und 6) ergibt sich noch überdies

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} \ldots 8).$$

Um die Richtigkeit dieser Gleichungen, welche hier für den spitzen Winkel abgeleitet wurden, für Winkel jeder andern Größe nachzuweisen, hat man nur nöthig, in Fig. 235 den Winkel α im 2., 3. und 4. Quadranten anzunehmen und dann die obigen Entwicklungen zu wiederholen.

Zusatz. Ist von einem Winkel auch nur eine trigonometrische Function bekannt, so lassen sich aus derselben mittelst der vorhergehenden Gleichungen auch die übrigen Functionen leicht bestimmen.

4. Relationen zwischen den Functionen verschiedener Winkel.

§. **349.** Complementwinkel.

Zwei Complementwinkel (§. 15) können allgemein durch α und $90^0 - \alpha$ ausgedrückt werden.

Es sei (Fig. 235) $OA = 1$, $AOM_1 = \alpha$, daher $BOM_1 = 90^0 - \alpha$. Aus der bloßen Anschauung der Figur ergeben sich folgende Relationen:

$$\left.\begin{array}{ll} \sin(90^0-\alpha) = \cos\alpha, & \cos(90^0-\alpha) = \sin\alpha; \\ \text{tang}(90^0-\alpha) = \cot\alpha, & \cot(90^0-\alpha) = \text{tang}\,\alpha; \\ \sec(90^0-\alpha) = \text{cosec}\,\alpha, & \text{cosec}(90^0-\alpha) = \sec\alpha. \end{array}\right\} \ldots 9)$$

Da die Secante und Cosecante in den logarithmisch-trigonometrischen Berechnungen nicht angewendet werden, so wollen wir uns in den nachfolgenden Entwicklungen auch nur auf den Sinus, Cosinus, die Tangente und Cotangente beschränken.

§. **350.** Supplementwinkel.

Zwei Supplementwinkel (§. 15) werden allgemein durch α und $180^0 - \alpha$ bezeichnet.

Es sei (Fig. 235) $OA = 1$, $AOM_1 = \alpha$, daher $A'OM_1 = 180^0 - \alpha$. Da

$$\sin(180^0-\alpha) = M_1P_1, \qquad \cos(180^0-\alpha) = -OP_1,$$
$$\sin\alpha = M_1P_1, \qquad \cos\alpha = OP_1; \text{ ferner}$$
$$\text{tang}(180^0-\alpha) = \frac{\sin(180^0-\alpha)}{\cos(180^0-\alpha)}, \qquad \cot(180^0-\alpha) = \frac{\cos(180^0-\alpha)}{\sin(180^0-\alpha)}$$

ist, so hat man

$$\left.\begin{array}{ll} \sin(180^0-\alpha) = \sin\alpha, & \cos(180^0-\alpha) = -\cos\alpha; \\ \text{tang}(180^0-\alpha) = -\text{tang}\,\alpha, & \cot(180^0-\alpha) = -\cot\alpha. \end{array}\right\} \ldots 10)$$

Zusatz. Kommen in einer Rechnung nur hohle Winkel in Betrachtung, so ist durch den Sinus ein Winkel nicht unzweideutig bestimmt, da zu demselben Sinus stets zwei Supplementwinkel, ein spitzer und ein stumpfer, gehören; dagegen gehört zu jeder der übrigen Functionen nur ein einziger, bestimmter Winkel, da das Vorzeichen jede Zweideutigkeit ausschließt.

§. **351.** Zwei Winkel, deren Unterschied 90^0 beträgt.

Die allgemeine Form zweier solcher Winkel ist α und $90^0 + \alpha$.

Es sei (Fig. 235) $OA = 1$, $AOM_1 = \alpha$ und $M_2M_4 \perp M_1M_3$, so ist $AOM_2 = 90^0 + \alpha$. Man hat dann, da $\triangle M_2P_2O \cong M_1P_1O$ ist,

$$\sin(90^0 + \alpha) = M_2P_2 = OP_1 = \cos\alpha,$$
$$\cos(90^0 + \alpha) = -OP_2 = -M_1P_1 = -\sin\alpha.$$

Nimmt man α gleich dem stumpfen Winkel AOM_2 an, so ist $AOM_3 = 90^0 + \alpha$, und wegen $\triangle M_3P_3O \cong M_2P_2O$

$$\sin(90^0 + \alpha) = -M_3P_3 = -OP_2 = \cos\alpha,$$
$$\cos(90^0 + \alpha) = -OP_3 = -M_2P_2 = -\sin\alpha.$$

Setzt man endlich $AOM_3 = \alpha$, daher $AOM_4 = 90^0 + \alpha$, so hat man, da $\triangle M_4P_4O \cong M_3P_3O$ ist,

$$\sin(90^0 + \alpha) = -M_4P_4 = -OP_3 = \cos\alpha,$$
$$\cos(90^0 + \alpha) = \quad OP_4 = -M_3P_3 = -\sin\alpha.$$

Es ist daher allgemein für jeden Winkel α

$$\left.\begin{aligned}\sin(90^0 + \alpha) &= \cos\alpha\\ \cos(90^0 + \alpha) &= -\sin\alpha\end{aligned}\right\} \ldots 11)$$

Daraus folgt auch

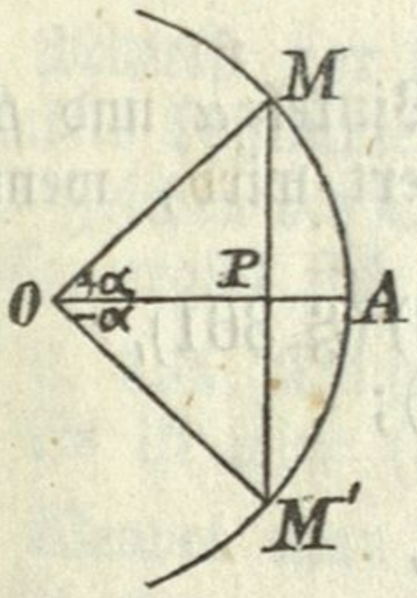
$$\operatorname{tang}(90^0 + \alpha) = -\cot\alpha \text{ und } \cot(90^0 + \alpha) = -\operatorname{tang}\alpha.$$

§. **352.** Negative Winkel.

Werden die Winkel, welche entstehen, wenn sich (Fig. 236) der bewegliche Schenkel von dem unbeweglichen OA aus in der Richtung von A gegen M (nach links) dreht, als positiv betrachtet, so müssen die Winkel, welche durch die Drehung des beweglichen Schenkels nach der entgegengesetzten Richtung von A nach M' entstehen, als negativ angesehen werden (§. 12).

Ist daher der Winkel $AOM' = AOM$ und setzt man $AOM = +\alpha$, so ist $AOM' = -\alpha$. Macht man $OM = OM' = 1$ und zieht von M und M' auf OA Senkrechte, so müssen die dadurch entstehenden Dreiecke congruent sein, und daher jene beiden Senkrechten in demselben Puncte P zusammentreffen. Da nun

Fig. 236.



$$MP = \sin\alpha,\ MP = -\sin(-\alpha), \text{ und}$$
$$OP = \cos\alpha = \cos(-\alpha) \text{ ist, so folgt}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha\\ &\text{daher}\\ &\operatorname{tang}(-\alpha) = -\operatorname{tang}\alpha,\ \cot(-\alpha) = -\cot\alpha\end{aligned}\right\} \ldots 12)$$

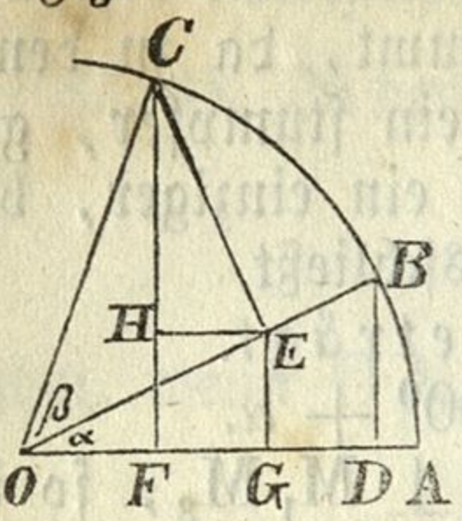
Zusatz. Die Richtigkeit dieser Gleichungen kann auf ähnliche Weise auch für jene Fälle erwiesen werden, wo der Winkel α zwischen 90^0 und 180^0, zwischen 180^0 und 270^0, oder zwischen 270^0 und 360^0 liegt.

5. Functionen zusammengesetzter Winkel.

§. **353.** Summe zweier Winkel.

Ist (Fig. 237) W. $AOB = \alpha$, $BOC = \beta$, so ist $AOC = \alpha + \beta$. Macht man nun $OB = OC = 1$, und zieht $BD \perp OA$, $CE \perp OB$, $CF \perp OA$, so ist

Fig. 237.



$BD = \sin\alpha$, $CE = \sin\beta$, $CF = \sin(\alpha+\beta)$,
$OD = \cos\alpha$, $OE = \cos\beta$, $OF = \cos(\alpha+\beta)$.

Es soll nun $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$ durch den Sinus und Cosinus von α und β ausgedrückt werden Zieht man $EG \perp OA$ und $EH \perp CF$, so ist

$$\sin(\alpha+\beta) = CF = HF + CH = EG + CH.$$
$$\cos(\alpha+\beta) = OF = OG - GF = OG - EH.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke EGO und BDO folgt

$EG : BD = OE : OB$, $OG : OD = OE : OB$, oder
$EG : \sin\alpha = \cos\beta : 1$, $OG : \cos\alpha = \cos\beta : 1$,
daher $EG = \sin\alpha\cos\beta$, $OG = \cos\alpha\cos\beta$.

Da der Winkel $ECH = BOD$ ist (§. 28, 2), und somit die Dreiecke EHC und BDO ähnlich sind, so hat man auch

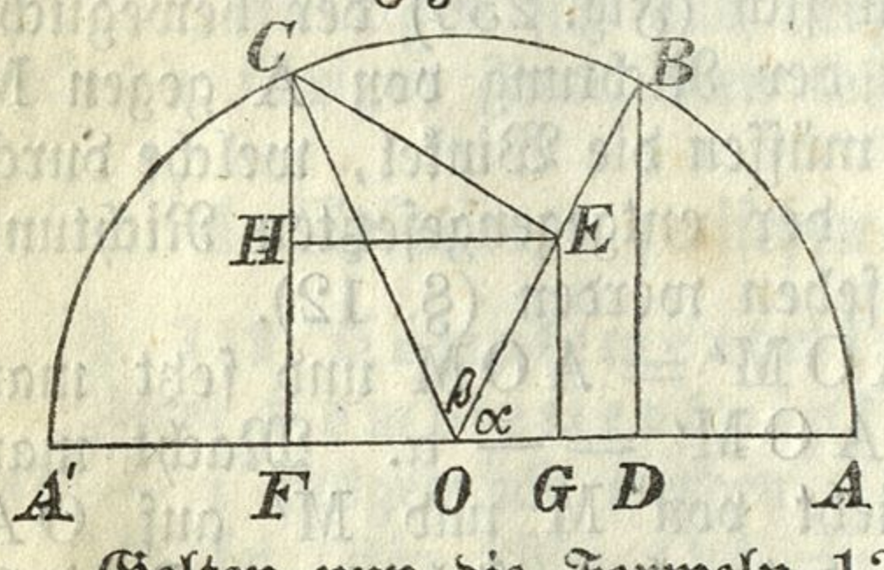
$CH : OD = CE : OB$, $EH : BD = CE : OB$, oder
$CH : \cos\alpha = \sin\beta : 1$, $EH : \sin\alpha = \sin\beta : 1$;
daher $CH = \cos\alpha\sin\beta$, $EH = \sin\alpha\sin\beta$.

Substituirt man nun die für EG, OG, CH, EH gefundenen Werthe in den obigen Ausdrücken für $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$, so erhält man die Gleichungen

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad \ldots 13)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad \ldots 14)$$

Hier wurden α und β, und selbst die Summe $\alpha+\beta$ als spitze Winkel vorausgesetzt. Ist die Summe $\alpha+\beta$ der spitzen Winkel α und β größer als 90^0, wie in Fig. 238, so bleibt die Beweisführung wortgetreu dieselbe wie oben, mit alleiniger Ausnahme der Vorzeichen, in welchen während der Entwicklung eine Verschiedenheit eintritt, die sich aber in den Endresultaten wieder behebt. Die obigen Formeln gelten also für alle spitzen Winkel α und β.

Fig. 238.



Gelten nun die Formeln 13) und 14) für irgend zwei Winkel α und β, so gelten sie auch noch, wenn einer derselben um 90^0 vergrößert wird, wenn z. B. α in $\alpha' = 90^0 + \alpha$ übergeht. Denn

$\sin(\alpha'+\beta) = \sin(90^0+\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\beta)$ (§. 361),
$\cos(\alpha'+\beta) = \cos(90^0+\alpha+\beta) = -\sin(\alpha+\beta)$;
somit
$\sin(\alpha'+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$,
$\cos(\alpha'+\beta) = -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

Nun ist $\cos\alpha = \sin(90^0+\alpha)$ (§. 361) $= \sin\alpha'$,
$\sin\alpha = -\cos(90^0+\alpha) = -\cos\alpha'$; daher
$\sin(\alpha'+\beta) = \sin\alpha'\cos\beta + \cos\alpha'\sin\beta$,
$\cos(\alpha'+\beta) = \cos\alpha'\cos\beta - \sin\alpha'\sin\beta$.

Hieraus folgt aber, daß die Formeln 13) und 14) allgemein giltig sind. Denn da sie für die Summe je zweier spitzer Winkel gelten, so gelten sie auch, wenn einer dieser Winkel um 90^0 wächst, also gelten sie auch für jede wiederholte Vergrößerung des einen oder des andern Winkels um 90^0; folglich sind sie allgemein für die Summe zweier beliebiger Winkel giltig.

Da $\text{tang}\,(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$ ist, so erhält man, wenn man Zähler und Nenner des letzteren Bruches durch $\cos\alpha\cos\beta$ dividirt,

$$\text{tang}\,(\alpha+\beta)=\frac{\text{tang}\,\alpha+\text{tang}\,\beta}{1-\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta}\quad\ldots\ 15)$$

Ebenso findet man

$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}\quad\ldots\ 16)$$

§. 354. Doppelte und halbe Winkel.

1. Setzt man in den Formeln 13) bis 16) $\beta=\alpha$, so erhält man

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\ \ldots\ 17)\qquad \cos 2\alpha=\cos\alpha^2-\sin\alpha^2\ \ldots\ 18)$$

$$\text{tang}\,2\alpha=\frac{2\,\text{tang}\,\alpha}{1-\text{tang}\,\alpha^2}\quad\ldots\ 19)\qquad \cot 2\alpha=\frac{\cot\alpha^2-1}{2\cot\alpha}\quad\ldots\ 20)$$

aus welchen Gleichungen sich die Functionen des doppelten Winkels finden lassen, wenn jene des einfachen Winkels bekannt sind.

2. Setzt man in den Formeln 17) und 18) überall α statt 2α, daher $\frac{\alpha}{2}$ statt α, so verwandeln sich dieselben in folgende:

$$\sin\alpha=2\sin\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\alpha}{2}\ \ldots\ 21)\qquad \cos\alpha=\left(\cos\tfrac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\sin\tfrac{\alpha}{2}\right)^2\ldots 22)$$

Da $$1=\left(\cos\tfrac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\sin\tfrac{\alpha}{2}\right)^2 \text{ nach 1),}$$

$$\cos\alpha=\left(\cos\tfrac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\sin\tfrac{\alpha}{2}\right)^2 \text{ ist,}$$

so findet man, wenn diese beiden Gleichungen addirt und subtrahirt werden,

$$1+\cos\alpha=2\left(\cos\tfrac{\alpha}{2}\right)^2\ldots\ 23)\qquad 1-\cos\alpha=2\left(\sin\tfrac{\alpha}{2}\right)^2\ldots\ 24)$$

daher $$\cos\tfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\ldots\ 25)\qquad \sin\tfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\ldots\ 26)$$

Aus diesen beiden Ausdrücken folgt ferner durch die Division:

$$\text{tang}\,\tfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\ldots\ 27)\qquad \cot\tfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\ldots 28)$$

Mittelst der Formeln 25) — 28) kann man die Functionen des halben Winkels bestimmen, wenn der Cosinus des ganzen Winkels bekannt ist. Welches Zeichen die Quadratwurzel bei vorgeschriebener Größe des Winkels erhalten müsse, ergibt sich aus §. 346.

§. 355. Differenz zweier Winkel.

Es ist $\alpha=(\alpha-\beta)+\beta$.

Wendet man auf diese Summe die Gleichungen 13) und 14) an, so erhält man

$$\sin\alpha=\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta,$$
$$\cos\alpha=\cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)\sin\beta.$$

Löst man diese zwei Gleichungen auf, indem man in denselben $\sin(\alpha-\beta)$ und $\cos(\alpha-\beta)$ als die beiden Unbekannten betrachtet, so ergibt sich, da $\cos\beta^2+\sin\beta^2=1$ ist,

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\ \ldots\ 29)$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\ \ldots\ 30)$$

welche Formeln, so wie jene in 13) und 14), aus denen sie abgeleitet wurden, allgemein giltig sind.

Aus den Formeln 29) und 30) erhält man auf demselben Wege, welcher in §. 353 eingeschlagen wurde,

$$\text{tang}\,(\alpha - \beta) = \frac{\text{tang}\,\alpha - \text{tang}\,\beta}{1 + \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta} \quad \ldots\ 31)$$

$$\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha} \quad \ldots\ 32)$$

§. 356. Verwandlung von Summen und Differenzen der Functionen in Producte und Quotienten.

Da die trigonometrischen Rechnungen sämmtlich logarithmisch durchgeführt werden, so sind in denselben die Summen und Differenzen von Functionen möglichst zu vermeiden. Es ist daher nöthig zu zeigen, wie die Summen und Differenzen der trigonometrischen Functionen in Producte und Quotienten umgewandelt werden können.

Aus den Formeln 13), 14), 29) und 30) erhält man durch Addition und Subtraction

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta \quad \ldots\ 33)$$
$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta \quad \ldots\ 34)$$
$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta \quad \ldots\ 35)$$
$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta \quad \ldots\ 36)$$

oder wenn man

$$\alpha + \beta = \varphi, \qquad \alpha - \beta = \psi,$$

daher $\alpha = \frac{1}{2}(\varphi + \psi)$, $\beta = \frac{1}{2}(\varphi - \psi)$ setzt,

$$\sin\varphi + \sin\psi = 2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) \quad \ldots\ 37)$$
$$\sin\varphi - \sin\psi = 2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) \quad \ldots\ 38)$$
$$\cos\varphi + \cos\psi = 2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) \quad \ldots\ 39)$$
$$\cos\varphi - \cos\psi = -2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) \quad \ldots\ 40)$$

Aus 37) und 38) folgt durch die Division

$$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\varphi - \sin\psi} = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\cot\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi), \text{ oder}$$

$$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\varphi - \sin\psi} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(\varphi+\psi)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(\varphi-\psi)} \quad \ldots\ 41)$$

6. Trigonometrische Tafeln.

§. 357. Die bisher entwickelten Formeln können zunächst dazu verwendet werden, um die goniometrischen Functionen der verschiedenen Winkel zu berechnen. Da die Functionen aller Winkel auf jene der spitzen zurückgeführt werden können, so handelt es sich bloß um die Bestimmung der Functionen für die spitzen Winkel; ja es reicht sogar hin, wenn nur die Functionen der Winkel bis 45^0 berechnet werden, da $45^0 + \varphi$ und $45^0 - \varphi$ Complementwinkel sind, und daher

$$\sin(45^0+\varphi) = \cos(45^0-\varphi),$$
$$\cos(45^0+\varphi) = \sin(45^0-\varphi),$$
$$\text{tang}\,(45^0+\varphi) = \cot(45^0-\varphi),$$
$$\cot(45^0+\varphi) = \text{tang}\,(45^0-\varphi)$$

ist. Wir wollen nun in dem Folgenden die Rechnung andeuten, durch welche die Functionen der Winkel von 0^0 bis 45^0 gefunden werden können.

Da für jeden solchen Winkel die Länge des Bogens, der für den Halbmesser $= 1$ diesem Winkel entspricht, stets zwischen dem Sinus und der Tangente desselben liegen muß, so ist

$$\text{arc } \alpha < \text{tang } \alpha \quad \text{und} \quad \text{arc } \alpha > \sin \alpha.$$

Aus der ersten Relation folgt $\text{arc } \alpha \cos \alpha < \sin \alpha$, oder $\text{arc } \alpha \sqrt{1 - \sin \alpha^2} < \sin \alpha$, und, wenn man mit Rücksicht auf $\text{arc } \alpha > \sin \alpha$ statt $\sin \alpha^2$ die größere Zahl $\text{arc } \alpha^2$ setzt, um so mehr $\text{arc } \alpha \sqrt{1 - \text{arc } \alpha^2} < \sin \alpha$.

Da ferner für $\alpha < 45^0$ der Ausdruck $1 - \text{arc } \alpha^2$ kleiner als 1 ist, so ist $1 - \text{arc } \alpha^2 < \sqrt{1 - \text{arc } \alpha^2}$; um so mehr ist also $\text{arc } \alpha (1 - \text{arc } \alpha^2) < \sin \alpha$, woraus

$$\text{arc } \alpha - \sin \alpha < \text{arc } \alpha^3$$

folgt. Die Differenz zwischen dem Bogen und dem Sinus des Winkels ist also für alle Winkel unter 45^0 kleiner als die dritte Potenz des Bogens selbst.

Für $\alpha = 1'$ ist $\text{arc } 1' = 0{\cdot}000\,290\,8882$, daher

$$\text{arc } 1' - \sin 1' < 0{\cdot}000\,290\,8882^3;$$

aber $0{\cdot}000\,290\,8882^3 < \frac{1}{10^{10}}$, daher um so mehr $\text{arc } 1' - \sin 1' < \frac{1}{10^{10}}$; also ist auf 10 Decimalen genau

$$\sin 1' = 0{\cdot}000\,290\,8882.$$

Wird daraus $\cos 1' = \sqrt{1 - (\sin 1')^2}$ bestimmt, so geben dann die Formeln 17), 18), 13) und 14) den Sinus und Cosinus für $2'$, $4'$, $8'$, ... den Sinus und Cosinus für $1' + 2' = 3'$, für $2' + 3' = 5'$, für $2' + 5' = 7'$, ... und aus diesen wieder für $6'$, $10'$, $14'$, $9'$, $15'$, 21, u. s. w. bis $60'$ oder 1^0. Aus $\sin 1^0$ und $\cos 1^0$ findet man auf gleiche Weise die Sinus und Cosinus aller Winkel bis 45^0.

Zur Bestimmung der Sinus und Cosinus solcher Bogen, welche bloß Secunden enthalten, kann man um so mehr für den Sinus den Bogen selbst setzen; da $\text{arc } 1'' = \frac{\text{arc } 1'}{60}$ ist, so ergibt sich

$$\sin 1'' = 0{\cdot}000\,004\,8481 \ldots$$

Ferner ist

$\sin 2'' = 2 \sin 1''$, $\sin 3'' = 3 \sin 1''$, $\sin 4'' = 4 \sin 1''$ u. s. w.

Daraus lassen sich sofort auch die Cosinus für die einzelnen Secunden bestimmen.

Hat man nun die Sinus und Cosinus der Winkel von 0^0 bis 45^0 gefunden, so können daraus mittelst den Formeln 4) und 6) auch die Tangenten und Cotangenten derselben berechnet werden.

§. 358. Indem außer

$$\sin 90^0 = \cos 0^0 = 1$$
$$\sin 30^0 = \cos 60^0 = \tfrac{1}{2} \text{ und}$$
$$\text{tang } 45^0 = \cot 45^0 = 1$$

alle übrigen Functionen irrationale Werthe haben, so werden dieselben um so genauer bestimmt sein, durch je mehrere Decimalstellen man sie ausdrückt; aber in demselben Grade wird dann auch das Multipliciren und Dividiren durch diese Functionen erschwert. Um diesem Uebelstande zu begegnen, bedient man sich in allen trigonometrischen Rechnungen der Logarithmen, zu welchem Ende die briggischen Logarithmen der Functionen für die einzelnen Winkel bestimmt und in den Logarithmentafeln gehörig zusammengestellt wurden.

Mit Hilfe solcher Tafeln findet man durch ein ganz einfaches Verfahren, welches aus den denselben vorangeschickten Einleitungen zu ersehen ist, zu je-

dem Winkel den Logarithmus der zugehörigen Functionen, und umgekehrt zu dem Logarithmus einer Function den zugehörigen Winkel *).

7. Uebungsaufgaben.

§. **359.** 1. Wenn von einem Winkel α eine der sechs Functionen sin α, cos α, tang α, cot α, sec α, cosec α gegeben ist, durch dieselbe die übrigen fünf Functionen auszudrücken (§. 348).

2. Bestimme aus Fig. 237 oder mit Hilfe von 13), 14), 29) und 30):

a) $\sin(180^0 + \alpha)$, $\cos(180^0 + \alpha)$; b) $\sin(270^0 \pm \alpha)$, $\cos(270^0 \pm \alpha)$; c) $\sin(360^0 \pm \alpha)$, $\cos(360^0 \pm \alpha)$.

Beweise die Richtigkeit folgender Formeln:

3. $\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tang} \alpha}{1 + \operatorname{tang} \alpha^2}$.

4. $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tang} \alpha^2}{1 + \operatorname{tang} \alpha^2}$.

5. $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}$.

6. $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \cot \frac{\alpha}{2}$.

7. $\frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \left(\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}\right)^2}{2}$.

8. $\frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{\left(\cot \frac{\alpha}{2}\right)^2 - 1}{2}$.

9. $\operatorname{tang} \alpha \pm \operatorname{tang} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$.

10. $\cot \alpha \pm \cot \beta = \frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin \alpha \cos \beta}$.

11. $\operatorname{tang}(45^0 \pm \alpha) = \frac{1 \pm \operatorname{tang} \alpha}{1 \mp \operatorname{tang} \alpha}$.

12. $\operatorname{tang}(45^0 \pm \alpha) = \frac{\cos 2\alpha}{1 \mp \sin 2\alpha}$.

13. $\sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\alpha + \gamma - \beta) + \sin(\alpha + \beta - \gamma) - \sin(\alpha + \beta + \gamma) = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$.

14. $\cos(\alpha + \beta + \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\alpha + \gamma - \beta) + \cos(\alpha + \beta - \gamma) = 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$.

15. $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n\alpha}{2} \sin \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$.

16. $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \frac{\cos \frac{n\alpha}{2} \sin \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$.

Die Formeln 15. und 16. ergeben sich aus den Formeln 36) und 34) in §. 356, indem man statt α und β bezüglich $(m+1)\alpha$ und $\frac{\alpha}{2}$ setzt, dann für m nach und nach 0, 1, 2, ... $n-1$ substituirt und die erhaltenen Gleichungen addirt.

Beweise ferner für $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$:

17. $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$.

18. $\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} = 4 \cos \frac{\alpha + \beta}{4} \cos \frac{\alpha + \gamma}{4} \cos \frac{\beta + \gamma}{4}$.

19. $\operatorname{tang} \alpha + \operatorname{tang} \beta + \operatorname{tang} \gamma = \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta \operatorname{tang} \gamma$.

20. $\cot \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\beta}{2} + \cot \frac{\gamma}{2} = \cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2} \cot \frac{\gamma}{2}$.

Wie ergeben sich die Ausdrücke 18. und 20. aus 17. und 19. durch Substitution?

Suche aus den Tafeln folgende Logarithmen:

21. log sin 38° 17′
22. log sin 17° 8′ 20″
23. log sin 51° 58′ 33″
24. log sin 0° 48′ 37″

---

*) Eine ausführlichere Belehrung über die Einrichtung und den Gebrauch solcher Tafeln findet man in der Einleitung zu den von mir herausgegebenen sechsstelligen: Logarithmisch-trigonometrischen Tafeln. Zweite Auflage. Wien, bei Gerold.

25. log tang 1° 25′ 40″ 26. log tang 69° 27′ 39″
27. log tang 23° 23′ 23″ 28. log tang 89° 19′ 31″
29. log cos 57° 48′ 30. log cos 39° 0′ 47″
31. log cos 50° 9′ 9″ 32. log cos 1° 2′ 12″
33. log cot 77° 31′ 34. log cot 8° 8′ 54″
35. log cot 0° 40′ 29″ 36. log cot 53° 29′ 8″

Suche zu folgenden Logarithmen die entsprechenden Winkel:

37. log sin x = 9·496537 38. log sin y = 9·793578
39. log sin z = 8·741090 40. log sin A = 9·998357
41. log tang α = 10·132642 42. log tang β = 10·645700
43. log tang γ = 8·956289 44. log tang B = 8·473804
45. log cos C = 8·490326 46. log cos x = 9·179726
47. log cos y = 9·977064 48. log cos z = 8·125444
49. log cot α = 11·442662 50. log cot β = 10·216711
51. log cot γ = 8·908276 52. log cot A = 12·440329

Zweiter Abschnitt.

Die ebene Trigonometrie.

I. Auflösung der ebenen Dreiecke.

§. **360.** Ein Dreieck auflösen heißt, aus denjenigen Bestandtheilen, welche ein Dreieck vollkommen bestimmen, die übrigen durch Rechnung finden.

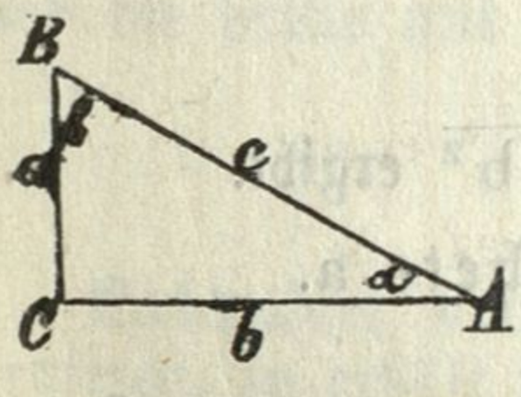
Dabei kommt es vor Allem darauf an, aus den Eigenschaften des Dreieckes Gleichungen abzuleiten, welche die Relationen zwischen den Seiten und den Functionen der Winkel enthalten; durch Auflösung dieser Gleichungen, welche sowohl die bestimmenden als die zu suchenden Bestandtheile des Dreieckes enthalten, findet man dann die gesuchten Größen.

1. Rechtwinklige Dreiecke.

Trigonometrische Lehrsätze über das rechtwinklige Dreieck.

§. **361.** Zur Auflösung eines rechtwinkligen Dreieckes müssen zwei Bestimmungsstücke gegeben sein.

Fig. 239.



Es sei das Dreieck ACB (Fig. 239) bei C rechtwinklig. Wir wollen hier und im Folgenden die Katheten BC und AC durch a und b, die ihnen gegenüberliegenden Winkel durch α und β, und die Hypotenuse AB durch c bezeichnen.

Aus den Erklärungen in §. 343 folgt unmittelbar:

1. $a = c \sin \alpha$, $b = c \sin \beta$;

d. h. jede Kathete ist gleich dem Producte aus der Hypotenuse und dem Sinus des dieser Kathete gegenüberliegenden Winkels.

2. $a = c \cos \beta$, $b = c \cos \alpha$;

d. h. jede Kathete ist gleich dem Producte aus der Hypotenuse und dem Cosinus des dieser Kathete anliegenden Winkels.

3. $a = b \operatorname{tang} \alpha$, $b = a \operatorname{tang} \beta$;

d. h. jede Kathete ist gleich dem Producte aus der anderen Kathete und der Tangente des der ersteren Kathete gegenüberliegenden Winkels.

4. $a = b \cot \beta$, $b = a \cot \alpha$;

d. h. jede Kathete ist gleich dem Producte aus der anderen Kathete und der Cotangente des der ersteren Kathete anliegenden Winkels.

Zu diesen trigonometrischen Lehrsätzen tritt bei der Auflösung rechtwinkliger Dreiecke noch der Pythagoräische Lehrsatz $c^2 = a^2 + b^2$, welcher den Zusammenhang zwischen allen drei Seiten ausdrückt.

Zusatz. Zur Bestimmung des Flächeninhaltes hat man

$$f = \frac{a\,b}{2} = \frac{b}{2}\sqrt{(c+b)\,(c-b)} = \frac{a^2}{2 \operatorname{tang} \alpha} = \frac{b^2}{2 \operatorname{tang} \beta}$$

$$= \frac{c^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{c^2}{4} \sin 2\alpha.$$

Auflösungsfälle.

§. 362. I. Gegeben die beiden Katheten a und b.

Aus $a = b \operatorname{tang} \alpha = b \cot \beta$ folgt

$$\operatorname{tang} \alpha = \cot \beta = \frac{a}{b},$$

woraus sich die beiden Winkel α und β berechnen lassen.

Zur Bestimmung der Hypotenuse hat man dann

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ oder } c = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Es sei z. B. $a = 325$, $b = 418$.

Aus $\operatorname{tang} \alpha = \frac{a}{b}$ folgt $\log \operatorname{tang} \alpha = \log a - \log b$. Man hat also

$$\log a = 2{\cdot}511\ 883$$
$$\log b = 2{\cdot}621\ 176$$
$$\log \operatorname{tang} \alpha = 9{\cdot}890\ 707 - 10 = \log \operatorname{tang} 37^\circ\ 51'\ 56''$$
$$\alpha = 37^\circ\ 51'\ 56''$$
$$\text{daher } \beta = 52^\circ\ 8'\ 4''.$$

Aus $c = \frac{a}{\sin \alpha}$ erhält man dann

$$\log a = 2{\cdot}511\ 883$$
$$\log \sin \alpha = 9{\cdot}788\ 034 - 10$$
$$\log c = 2{\cdot}723\ 849 = \log 529{\cdot}48$$
$$c = 529{\cdot}48,$$

welcher Werth sich auch aus der Formel $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ergibt.

II. Gegeben die Hypotenuse c und eine Kathete a.

Zur Bestimmung der gesuchten Stücke hat man

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{a}{c}, \text{ und } b = \sqrt{(c+a)\,(c-a)} \text{ oder } b = \frac{a}{\operatorname{tang} \alpha}.$$

III. Gegeben eine Kathete a und ein Winkel, z. B. α.

Zur Auflösung dienen die Formeln

$$\beta = 90^\circ - \alpha,\ c = \frac{a}{\sin \alpha},\ b = \frac{a}{\operatorname{tang} \alpha}.$$

IV. Gegeben die Hypotenuse c und ein Winkel, z. B. α.
Auflösungsgleichungen:

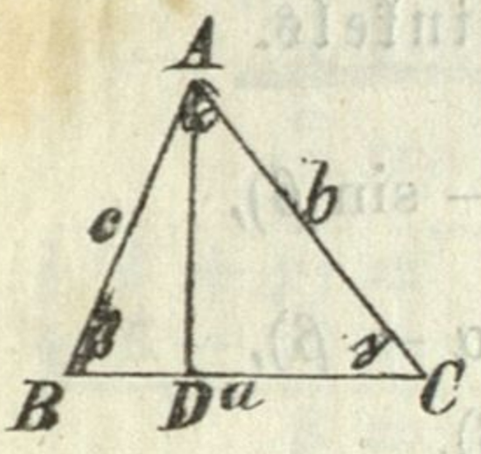
$$\beta = 90^0 - \alpha,\ a = c \sin \alpha,\ b = c \cos \alpha.$$

2. Schiefwinklige Dreiecke.

Trigonometrische Lehrsätze über das schiefwinklige Dreieck.

§. **363.** In jedem Dreiecke verhalten sich die Seiten so zu einander, wie die Sinus der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel.

Fig. 240.



Zieht man AD ⊥ BC (Fig. 240), so ist in den rechtwinkligen Dreiecken ADC und ADB

$$AD = AC \cdot \sin C \text{ und } AD = AB \sin B;$$

daher $AC \cdot \sin C = AB \cdot \sin B,$

oder wenn man hier und in dem Folgenden $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ setzt und die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel durch α, β, γ ausdrückt,

$$b \sin \gamma = c \sin \beta, \text{ folglich}$$

$$\left.\begin{aligned} b : c &= \sin \beta : \sin \gamma. \\ \text{Ebenso erhält man} & \\ a : b &= \sin \alpha : \sin \beta, \\ a : c &= \sin \alpha : \sin \gamma. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{ I)}$$

Zusatz. In dieser Gleichung ändert sich nichts, wenn einer der Winkel, z. B. β ein stumpfer ist, so daß die Senkrechte AD die Verlängerung von CB trifft; man erhält dann $b : c = \sin (180^0 - \beta) : \sin \gamma = \sin \beta : \sin \gamma$.

§. **364.** In jedem Dreiecke ist das Quadrat der einen Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten vermindert um das doppelte Product aus diesen beiden Seiten und dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels. (Carnot'scher Lehrsatz.)

Zieht man (Fig. 240) AD ⊥ BC, so ist

$$BD = c \cdot \cos \beta \text{ und } CD = b \cdot \cos \gamma, \text{ daher}$$

$$BD + CD = c \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \gamma, \text{ oder}$$

$$a = b \cdot \cos \gamma + c \cdot \cos \beta.$$

Ebenso erhält man

$$b = a \cdot \cos \gamma + c \cdot \cos \alpha,$$

$$c = a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha.$$

Multiplicirt man die erste dieser drei Gleichungen mit a, die zweite mit b und die dritte mit c, so findet man

$$a^2 = ab \cdot \cos \gamma + ac \cdot \cos \beta,$$

$$b^2 = ab \cdot \cos \gamma + bc \cdot \cos \alpha,$$

$$c^2 = ac \cdot \cos \beta + bc \cdot \cos \alpha.$$

Subtrahirt man nun von der ersten Gleichung die Summe der beiden letzteren, so erhält man $a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cdot \cos \alpha$, oder

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha. \\ \text{Ebenso folgt} & \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{ II)}$$

Zusätze. 1. Fällt die Senkrechte AD außerhalb des Dreieckes, so ist dann entweder $a = BD - CD$, oder $a = CD - BD$. In beiden Fällen erhält man mit Berücksichtigung der Vorzeichen des Cosinus, wie oben, $a = c \cos \beta + b \cos \gamma$. Die daraus abgeleiteten Gleichungen gelten demnach allgemein.

2. Der Pythagoräische Lehrsatz ist nur ein besonderer Fall des Carnot'schen; denn setzt man $\gamma = 90^0$, wo sodann c die Hypotenuse, a und b die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes bedeuten, so hat man wegen $\cos 90^0 = 0$ die Gleichung $c^2 = a^2 + b^2$.

§. 365. In jedem Dreiecke ist die Tangente der halben Differenz zweier Winkel gleich dem Quotienten aus der Differenz und der Summe der beiden gegenüberliegenden Seiten, multiplicirt mit der Cotangente des halben dritten Winkels.

Nach §. 363 ist $a : b = \sin \alpha : \sin \beta$, daher auch

$$(a + b) : (a - b) = (\sin \alpha + \sin \beta) : (\sin \alpha - \sin \beta),$$

oder mit Rücksicht auf §. 356, Formel 41)

$$(a + b) : (a - b) = \text{tang } \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) : \text{tang } \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta),$$

$$\text{und } \text{tang } \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta) = \frac{a - b}{a + b} \cdot \text{tang } \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta).$$

Aber $\alpha + \beta = 180^0 - \gamma$, und $\frac{1}{2} (\alpha + \beta) = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$; somit

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta) = \frac{a - b}{a + b} \cdot \cot \frac{\gamma}{2} \quad \ldots \text{ III)}$$

Auflösungsfälle.

§. 366. I. Gegeben eine Seite a und die beiden anliegenden Winkel β und γ.

Man hat erstlich $\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$.

Ferner folgen aus $b : a = \sin \beta : \sin \alpha$ und $c : a = \sin \gamma : \sin \alpha$ die Gleichungen

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} \text{ und } c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

Es sei z. B. $a = 788$, $\beta = 55^0\, 43'\, 18''$, $\gamma = 72^0\, 12'\, 35''$.

Man erhält $\alpha = 52^0\, 4'\, 7''$.

$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$		$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$	
$\log a =$	2·896 526	$\log a =$	2·896 526
$\log \sin \beta =$	9·917 144	$\log \sin \gamma =$	9·978 720
	2·813 670		2·875 246
$\log \sin \alpha =$	9·896 938	$\log \sin \alpha =$	9·896 938
$\log b =$	2·916 732	$\log c =$	2·978 308
$b =$	825·53	$c =$	951·28.

Wäre außer der Seite a ein anliegender Winkel β und der gegenüberliegende α gegeben, so würde man zuerst γ berechnen und dann wie vorhin verfahren.

§. 367. II. Gegeben zwei Seiten b und c, und der von ihnen eingeschlossene Winkel α.

Zur Bestimmung der Winkel β und γ wendet man die aus §. 365 sich ergebende Gleichung

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} (\beta - \gamma) = \frac{b - c}{b + c} \cdot \cot \frac{\alpha}{2}$$

an, aus welcher sich, da $\frac{\alpha}{2} = 90^0 - \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$ bekannt ist, $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ bestimmen läßt. Dann hat man

$$\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) + \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = \beta \text{ und } \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) - \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = \gamma.$$

Die dritte Seite a findet man aus der Gleichung

$$a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Es sei z. B. $b = 748$, $c = 375$, $\alpha = 63^0\ 35'\ 30''$.

Man hat folgende Rechnung:

$b + c = 1123$
$b - c = 373$
$\beta + \gamma = 116^0\ 24'\ 30''$
$\alpha = 63^0\ 35'\ 30''$
$\frac{\alpha}{2} = 31^0\ 47'\ 45''$

$\frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 58^0\ 12'\ 15''$
$\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = 28^0\ 10'\ 54''$

$\beta = 86^0\ 23'\ 9''$
$\gamma = 30^0\ 1'\ 21''$

$\tang \frac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{b - c}{b + c} \cdot \cot \frac{\alpha}{2}$
$\log (b - c) = 2{\cdot}571\ 709$
$\log \cot \frac{\alpha}{2} = 10{\cdot}207\ 660$
$12{\cdot}779\ 369$
$\log (b + c) = 3{\cdot}050\ 389$
$\log \tang \frac{1}{2}(\beta - \gamma) = 9{\cdot}728\ 980$
$\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = 28^0\ 10'\ 54''$

Aus $a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta}$ findet man ferner $a = 671{\cdot}28$.

Zusätze. 1. Jeder der Winkel β und γ läßt sich auch einzeln durch b, c und α unmittelbar darstellen.

Aus der Gleichung $c = a \cos \beta + b \cos \alpha$ in §. 364 folgt

$$c - b \cos \alpha = a \cos \beta, \text{ daher}$$

$$\tang \beta\ (c - b \cos \alpha) = a \sin \beta = b \sin \alpha \text{ (§. 363), und}$$

$$\tang \beta = \frac{b \sin \alpha}{c - b \cos \alpha},$$

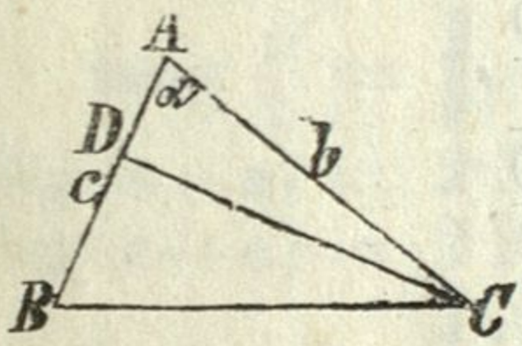
welche Formel jedoch für logarithmische Berechnungen nicht brauchbar ist.

2. Aus b, c und α kann man unmittelbar auch den Flächeninhalt f des Dreieckes bestimmen. Ist nämlich $CD \perp AB$ (Fig. 241), so hat man

$$f = \frac{c \cdot CD}{2}; \text{ aber } CD = b \sin \alpha, \text{ daher}$$

$$f = \frac{b\,c}{2} \sin \alpha,$$

Fig. 241.



d. h. der Flächeninhalt eines Dreieckes ist gleich dem halben Producte aus zwei Seiten und dem Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

§. 368. III. Gegeben zwei Seiten b und c, wo $b > c$, und der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel β.

Aus $b : c = \sin \beta : \sin \gamma$ erhält man

$$\sin \gamma = \frac{c \sin \beta}{b}.$$

Diese Formel gibt den Sinus von γ. Zu jedem Sinus gehören zwar zwei Winkel, ein spitzer und ein stumpfer; diese Unbestimmtheit fällt jedoch hier weg, da man weiß, daß $b > c$, also auch $\beta > \gamma$ ist, und somit γ spitz sein muß, welchen Werth auch β haben mag.

Aus β und γ erhält man dann $\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$.

Die Seite a findet man aus der Gleichung

$$a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Wenn z. B. $b = 1238$, $c = 519$, $\beta = 78^0\ 17'\ 20''$ ist, so ergibt sich durch Anwendung der obigen Formeln:

$\gamma = 24^0\ 14'\ 10''$, daher $\alpha = 77^0\ 28'\ 30''$, ferner $a = 1234{\cdot}23$.

Ist hier nebst $b = 1238$ und $c = 519$ der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel $\gamma = 24^0\ 14'\ 10''$ gegeben, so erhält man aus der Gleichung $\sin \beta = \frac{b \sin \gamma}{c}$, da β spitz oder stumpf sein kann,

entweder $\beta = 78^0\ 17'\ 20''$ oder $\beta = 101^0\ 42'\ 40''$, folglich
$\alpha = 77^0\ 28'\ 30''$ „ $\alpha = 54^0\ 3'\ 10''$.

Aus der Gleichung $a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta}$ ergibt sich dann entweder $a = 1234{\cdot}23$ oder $a = 1023{\cdot}54$. — Die Aufgabe läßt also zwei Auflösungen zu.

§. **369**. IV. Gegeben alle drei Seiten a, b und c.

Zur Bestimmung der Winkel könnte unmittelbar der Carnot'sche Lehrsatz angewendet werden; aus der Gleichung

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

folgt nämlich

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

woraus sich der Winkel α finden läßt. Diese Gleichung soll jedoch auf eine andere, für die logarithmische Berechnung geeignete Form gebracht werden.

Subtrahirt und addirt man die Gleichungen

$$1 = 1,$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

so erhält man

$$1 - \cos \alpha = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc},$$

$$1 + \cos \alpha = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc};$$

somit, da nach §. 254, Formel 24) und 23)

$1 - \cos \alpha = 2 \left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^2$ und $1 + \cos \alpha = 2 \left(\cos \frac{\alpha}{2}\right)^2$ ist,

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$a + b + c = 2s, \text{ folglich}$$
$$b + c - a = 2(s - a),$$
$$a - b + c = 2(s - b),$$
$$a + b - c = 2(s - c),$$

so folgt

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

und daher

$$\tang \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

Durch bloße Vertauschung der Buchstaben findet man ebenso

$$\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}},\qquad \sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}},$$

$$\cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}},\qquad \cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}},$$

$$\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}};\qquad \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

In Bezug auf die Bedeutung der Winkel $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$ kann keine Unbestimmtheit eintreten, da sie als halbe Dreieckswinkel nothwendig spitz sein müssen. Ist der gesuchte halbe Winkel sehr nahe an 0^0, so läßt sich derselbe mittelst der Formel für den Cosinus nicht mit gehöriger Schärfe bestimmen, da sich die Cosinus nahe an 0^0 liegender Winkel nur sehr wenig ändern. Dasselbe gilt bezüglich der Formel für den Sinus, wenn der halbe Winkel sehr nahe an 90^0 liegt. Es ist daher im ersten Falle die Formel für den Sinus, im zweiten jene für den Cosinus des halben Winkels vorzuziehen.

Am vortheilhaftesten ist es, in allen Fällen die Formel für die Tangente anzuwenden.

Es sei z. B. $a = 328{\cdot}5$, $b = 412{\cdot}3$, $c = 371{\cdot}4$.

Wendet man zur Bestimmung der Winkel die Formeln für die Tangente der halben Winkel an, so hat man

$$a = 328{\cdot}5$$
$$b = 412{\cdot}3$$
$$c = 371{\cdot}4$$
$$a+b+c = 1112{\cdot}2$$
$$s = 556{\cdot}1$$
$$s-a = 227{\cdot}6$$
$$s-b = 143{\cdot}8$$
$$s-c = 184{\cdot}7$$

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\log(s-b) = 2{\cdot}157\ 759$$
$$\log(s-c) = 2{\cdot}266\ 467$$
$$4{\cdot}424\ 226$$
$$\log s = 2{\cdot}745\ 153$$
$$\log(s-a) = 2{\cdot}357\ 172$$
$$19{\cdot}321\ 901 - 20$$
$$\log\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = 9{\cdot}660\ 9505 - 10$$
$$\frac{\alpha}{2} = 24^0\ 36'\ 43{\cdot}3''$$
$$\alpha = 49^0\ 13'\ 25{\cdot}6''$$

$$\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$$

$$\log(s-a) = 2{\cdot}357\ 172$$
$$\log(s-c) = 2{\cdot}266\ 467$$
$$4{\cdot}623\ 639$$
$$\log s = 2{\cdot}745\ 153$$
$$\log(s-b) = 2{\cdot}157\ 759$$
$$19{\cdot}720\ 727 - 20$$
$$\log\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = 9{\cdot}860\ 3635 - 10$$
$$\frac{\beta}{2} = 35^0\ 56'\ 37{\cdot}4''$$
$$\beta = 71^0\ 53'\ 14{\cdot}8''$$

$$\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

$$\log(s-a) = 2{\cdot}357\ 172$$
$$\log(s-b) = 2{\cdot}157\ 759$$
$$4{\cdot}514\ 931$$
$$\log s = 2{\cdot}745\ 153$$
$$\log(s-c) = 2{\cdot}266\ 467$$
$$19{\cdot}503\ 311 - 20$$
$$\log\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} = 9{\cdot}751\ 6555 - 10$$
$$\frac{\gamma}{2} = 29^0\ 26'\ 39{\cdot}3''$$
$$\gamma = 58^0\ 53'\ 18{\cdot}6''$$

Um sich von der Richtigkeit der Auflösung zu überzeugen, darf man nur die für α, β, γ gefundenen Werthe addiren; ihre Summe beträgt genau 180^0.

Aus den gegebenen Seiten eines Dreieckes läßt sich unmittelbar auch der Flächeninhalt berechnen.

Es ist $f = \frac{a\,b}{2} \cdot \sin\gamma = \frac{a\,b}{2} \cdot 2 \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, woraus

$$f = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

folgt, welchen Ausdruck wir schon in §. 132, 5 auf einem anderen Wege abgeleitet haben.

3. Uebungsaufgaben.

§. 370. Ein rechtwinkliges Dreieck aufzulösen, wenn (§. 361) gegeben ist:

1. $a = 88$,	$b = 105$.	2. $a = 440$,	$b = 279$.
3. $a = 828$,	$b = 205$.	4. $a = 836$,	$b = 123$.
5. $c = 457$,	$a = 168$.	6. $c = 349$,	$a = 180$.
7. $c = 281$,	$b = 201$.	8. $c = 1109$,	$b = 141$.
9. $a = 456$,	$\alpha = 64^0\,33'\,4{\cdot}6''$.	10. $a = 272$,	$\beta = 39^0\,35'\,52''$.
11. $a = 171$,	$\beta = 50^0\,41'\,32{\cdot}5''$.	12. $b = 133$,	$\alpha = 49^0\,33'\,1''$.
13. $b = 403$,	$\alpha = 44^0\,29'\,53''$.	14. $b = 231$,	$\beta = 23^0\,57'\,8''$.
15. $c = 949$,	$\alpha = 71^0\,30'\,28''$.	16. $c = 641$,	$\beta = 71^0\,49'\,10''$.

Ein rechtwinkliges Dreieck aufzulösen, wenn gegeben sind:

17. der Flächeninhalt und ein spitzer Winkel;
18. die Summe aus der Hypotenuse und einer Kathete und ein spitzer Winkel;
19. der Unterschied zwischen der Hypotenuse und einer Kathete und ein spitzer Winkel.

20. In einem gleichschenkligen Dreiecke ist g die Grundlinie, b der Schenkel, α der Winkel an der Grundlinie, β der Winkel am Scheitel, h die Höhe, f der Flächeninhalt; aus zweien dieser Größen die übrigen zu berechnen.

Fundamentalgleichungen:

$$\cos\alpha = \sin\frac{\beta}{2} = \frac{g}{2\,b}; \qquad f = \frac{g\,h}{2} = \frac{b^2 \sin\beta}{2}$$

Beweise, daß für jedes Dreieck folgende Gleichungen stattfinden:

21. $a^2 + b^2 + c^2 = 2\,a\,b\cos\gamma + 2\,a\,c\cos\beta + 2\,b\,c\cos\alpha$ (§. 364).
22. $\sin\alpha^2 = \sin\beta^2 + \sin\gamma^2 - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha$ (§. 363 und 364).
23. $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$; 24. $\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$.

Die letzten zwei Formeln, welche die Mollweide'schen Gleichungen heißen, werden aus §. 363, §. 356, Form. 37 und §. 354, Form. 21 abgeleitet.

Ein schiefwinkliges Dreieck aufzulösen, wenn (§. 363) gegeben ist:

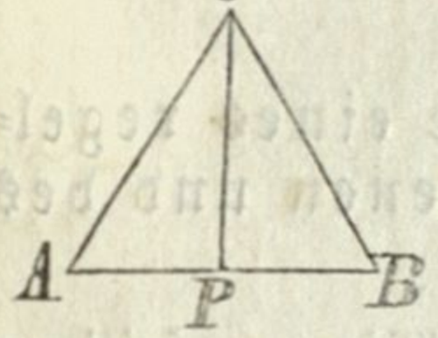
25. $c = 314{\cdot}7$,	$\alpha = 58^0\,12'\,38''$,	$\beta = 63^0\,15'\,15''$.
26. $b = 565$,	$\alpha = 72^0\,38'\,34_{''}$,	$\gamma = 44^0\,29'\,53''$.
27. $a = 758{\cdot}43$,	$\beta = 102^0\,51'\,12{\cdot}4''$,	$\gamma = 27^0\,40'\,42''$.
28. $b = 97{\cdot}45$,	$\beta = 48^0\,8'\,43''$,	$\gamma = 45^0\,45'\,45''$.
29. $a = 89{\cdot}7$,	$b = 104{\cdot}2$,	$\gamma = 53^0\,5'\,56''$.
30. $a = 123{\cdot}4$,	$c = 1272$,	$\beta = 110^0\,15'\,10''$.
31. $b = 11{\cdot}3$,	$c = 12$,	$\alpha = 7^0\,37'\,41''$.
32. $a = 187{\cdot}4$,	$c = 179{\cdot}8$,	$\alpha = 72^0\,17'\,23''$.
33. $b = 509$,	$c = 221$,	$\beta = 84^0\,32'\,50{\cdot}5''$.
34. $a = 419$,	$c = 328$,	$\gamma = 43^0\,51'\,7''$.
35. $a = 328$,	$b = 169$,	$c = 241$.
36. $a = 2134$,	$b = 3124$,	$c = 1432$.
37. $a = 1487{\cdot}2$,	$b = 1907{\cdot}7$,	$c = 2156{\cdot}5$.
38. $a = 28{\cdot}332$,	$b = 10{\cdot}774$,	$c = 14{\cdot}029$.

II. Anwendung der ebenen Trigonometrie.

1. Aufgaben aus der Planimetrie.

§. 371. Aus der Seite eines regelmäßigen Vieleckes den Flächeninhalt desselben, und umgekehrt aus dem Flächeninhalte die Seite zu bestimmen.

Fig. 242.



Es sei (Fig. 242) $AB = s$ die Seite eines nseitigen regelmäßigen Vieleckes, dessen Mittelpunct O ist, und $OP \perp AB$. Offenbar ist dann der Winkel $AOB = \frac{360^0}{n}$, daher $AOP = \frac{180^0}{n}$, folglich

$$OP = AP \,.\, \cot AOP = \frac{s}{2} \cot \frac{180^0}{n}, \text{ und}$$

$$\triangle ABO = AB \,.\, \frac{OP}{2} = s \,.\, \frac{s}{4} \cot \frac{180^0}{n} = \frac{s^2}{4} \cot \frac{180^0}{n}.$$

Heißt nun f der Flächeninhalt des nseitigen Vieleckes, so hat man

$$f = \frac{n s^2}{4} \cot \frac{180^0}{n}, \text{ und } s = \sqrt{\frac{4f}{n} \,.\, \operatorname{tang} \frac{180^0}{n}}.$$

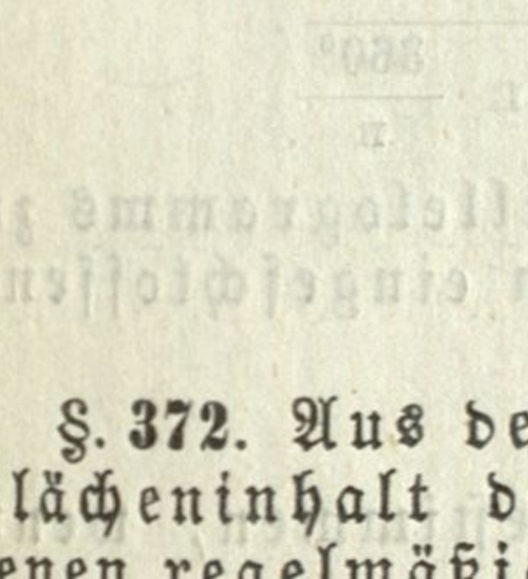
Es sei z. B. die Seite eines regelmäßigen Zehneckes 15^{cm}, wie groß ist der Flächeninhalt?

Hier ist $n = 10$, $\frac{180^0}{n} = 18^0$, $s = 15$; daher hat man

$$\begin{aligned} \log s &= 1{\cdot}176\ 091 \\ \log s^2 &= 2{\cdot}352\ 182 \\ \log n &= 1{\cdot}000\ 000 \\ \log \cot \tfrac{180^0}{n} &= 0{\cdot}488\ 224 \\ \hline & 3{\cdot}840\ 406 \\ \log 4 &= 0{\cdot}602\ 060 \\ \hline \log f &= 3{\cdot}238\ 346 \\ f &= 1731{\cdot}2\,\square^{cm}. \end{aligned}$$

§. 372. Aus dem Halbmesser eines Kreises die Seite und den Flächeninhalt des dem Kreise eingeschriebenen oder umschriebenen regelmäßigen Vieleckes zu bestimmen.

Fig. 243.



Es sei (Fig. 243) $AB = s$ die Seite des einem Kreise eingeschriebenen, und $CD = S$ die Seite des demselben Kreise umschriebenen regelmäßigen nseitigen Vieleckes.

Aus den Dreiecken APO und CQO erhält man $AP = AO \,.\, \sin AOP$ und $CQ = QO \,.\, \operatorname{tang} COQ$, daher

$AB = 2\,AO \,.\, \sin AOP$ und $CD = 2\,QO \,.\, \operatorname{tang} COQ$, oder, wenn $AO = QO = r$ gesetzt wird,

$$s = 2r \sin \frac{180^0}{n} \text{ und } S = 2r \operatorname{tang} \frac{180^0}{n}.$$

Für die Umfänge u und U der beiden Vielecke hat man dann

$$u = 2nr \sin \frac{180^0}{n} \text{ und } U = 2nr \operatorname{tang} \frac{180^0}{n}.$$

Zur Bestimmung der Flächeninhalte f und F findet man zunächst

$$\triangle AOB = AB \cdot \frac{OP}{2} \text{ und } \triangle COD = CD \cdot \frac{OQ}{2}, \text{ oder}$$

$$\triangle AOB = 2r \sin \frac{180^\circ}{n} \cdot \frac{r}{2} \cos \frac{180^\circ}{n} \text{ und } \triangle COD = 2r \operatorname{tang} \frac{180^\circ}{n} \cdot \frac{r}{2},$$

daher

$$\triangle AOB = \frac{r^2}{2} \sin \frac{360^\circ}{n} \text{ und } \triangle COD = r^2 \operatorname{tang} \frac{180^\circ}{n}.$$

Daraus folgt dann

$$f = \frac{nr^2}{2} \cdot \sin \frac{360^\circ}{n} \text{ und } F = nr^2 \operatorname{tang} \frac{180^\circ}{n}.$$

§. 373. Aus der Seite oder dem Flächeninhalte eines regelmäßigen Vieleckes den Halbmesser des eingeschriebenen und des umschriebenen Kreises zu finden.

Es sei s die Seite und f der Flächeninhalt eines regelmäßigen nseitigen Vieleckes; r heiße der Halbmesser des eingeschriebenen und R jener des umschriebenen Kreises.

Das gegebene Vieleck ist dem eingeschriebenen Kreise umschrieben, daher

$$s = 2r \operatorname{tang} \frac{180^\circ}{n}, \qquad f = nr^2 \operatorname{tang} \frac{180^\circ}{n}.$$

Dem umschriebenen Kreise dagegen erscheint das gegebene Vieleck eingeschrieben, folglich ist

$$s = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}, \qquad f = \frac{nR^2}{2} \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

Aus diesen vier Gleichungen ergibt sich

$$r = \frac{s}{2} \cot \frac{180^\circ}{n}, \qquad r = \sqrt{\frac{f}{n} \cot \frac{180^\circ}{n}};$$

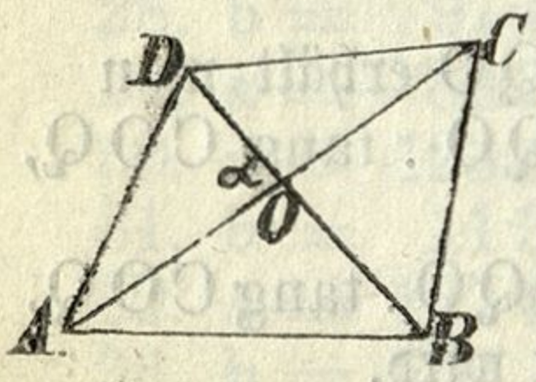
$$R = \frac{s}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}, \qquad R = \sqrt{\frac{2f}{n \sin \frac{360^\circ}{n}}}.$$

§. 374. 1. Den Flächeninhalt f eines Parallelogramms zu finden, wenn zwei Seiten a, b und der von ihnen eingeschlossene Winkel γ gegeben sind.

Man erhält $f = ab \sin \gamma$.

2. Den Flächeninhalt eines Viereckes zu bestimmen, wenn dessen Diagonalen und ihr Winkel gegeben sind.

Fig. 244.



$$AC = a,\ BD = b,\ AOD = \alpha$$

$$\left.\begin{aligned} \triangle AOD &= \frac{AO \cdot DO}{2} \cdot \sin \alpha \\ \triangle AOB &= \frac{AO \cdot BO}{2} \cdot \sin \alpha \end{aligned}\right\} \text{ addirt}$$

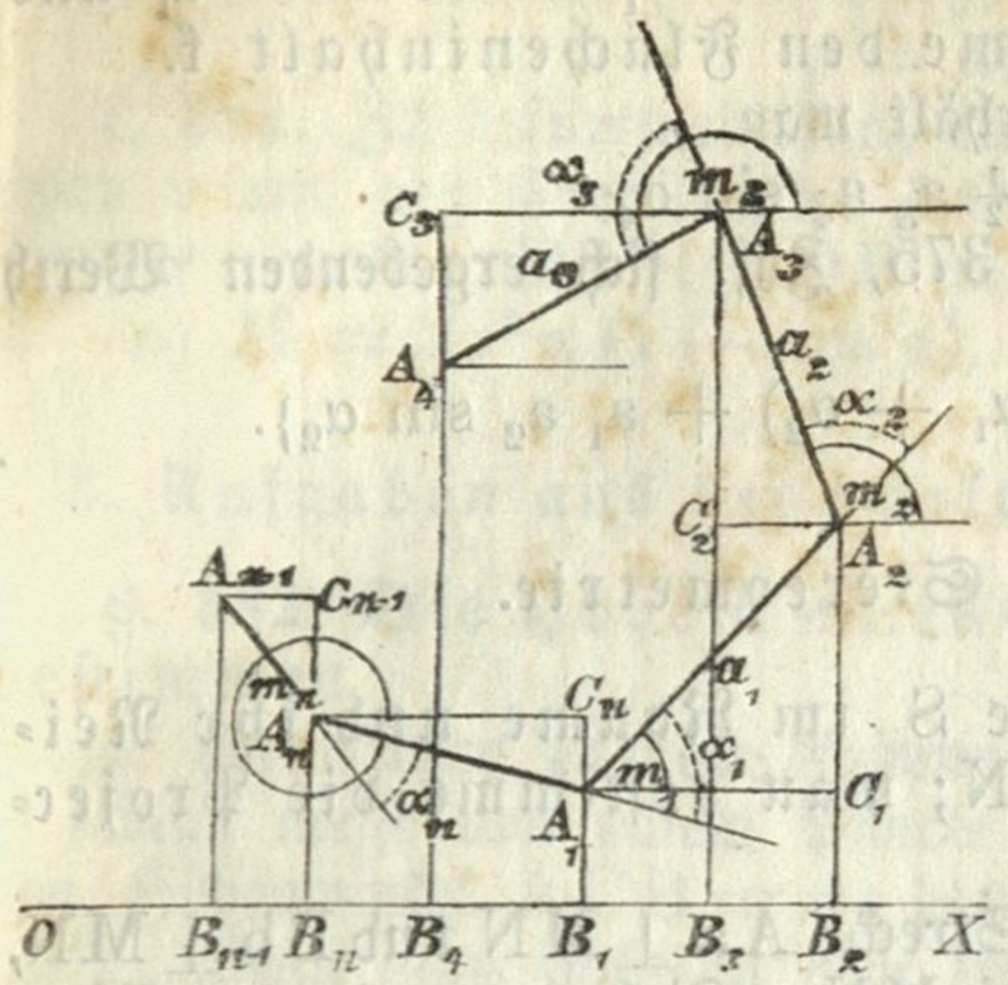
$$\triangle ABD = \frac{AO \cdot BD}{2} \cdot \sin \alpha;$$

$$\text{eben so } \triangle BCD = \frac{CO \cdot BD}{2} \cdot \sin \alpha;$$

$$\text{daher } ABCD = \frac{AC \cdot BD}{2} \cdot \sin \alpha = \frac{ab}{2} \sin \alpha.$$

§. 375. Die Beziehungen zwischen den Bestimmungsstücken eines Vieleckes trigonometrisch darzustellen.

Fig. 245.



Es sei in dem Vielecke $A_1 A_2 A_3 .. A_n$ (Fig. 245) die Seite $A_1 A_2 = a_1$, $A_2 A_3 = a_2$, $.. A_n A_1 = a_n$.

Man nehme eine beliebige Gerade OX an und ziehe zu derselben durch jeden Eckpunct des Vieleckes eine Parallele und eine Senkrechte. Zählt man die Strecken an den Parallelen in der Richtung von O nach X, und die Strecken an den Senkrechten von OX nach aufwärts als positiv, in den entgegengesetzten Richtungen als negativ, und bezeichnet die Winkel, welche die Seiten $a_1, a_2, a_3, .. a_n$ in der Richtung ihres Fortschreitens mit der positiven Richtung der zu OX Parallelen bilden, mit $m_1, m_2, m_3, .. m_n$, so hat man:

$OB_2 - OB_1 = B_1 B_2 = A_1 C_1 = a_1 \cos m_1$	$B_2 A_2 - B_1 A_1 = C_1 A_2 = a_1 \sin m_1$
$OB_3 - OB_2 = B_2 B_3 = A_2 C_2 = a_2 \cos m_2$	$B_3 A_3 - B_2 A_2 = C_2 A_3 = a_2 \sin m_2$
$OB_4 - OB_3 = B_3 B_4 = A_3 C_3 = a_3 \cos m_3$	$B_4 A_4 - B_3 A_3 = C_3 A_4 = a_3 \sin m_3$
. . . . .	. . . . .
$OB_1 - OB_n = B_n B_1 = A_n C_n = a_n \cos m_n$	$B_1 A_1 - B_n A_n = C_n A_1 = a_n \sin m_n$

Addirt man diese Gleichungen, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} a_1 \cos m_1 + a_2 \cos m_2 + a_3 \cos m_3 + .. + a_n \cos m_n = 0 \\ a_1 \sin m_1 + a_2 \sin m_2 + a_3 \sin m_3 + .. + a_n \sin m_n = 0 \end{aligned}\right\} .. 1)$$

Man verlängere nun, von A_1 ausgehend, jede der Seiten $a_1, a_2, a_3, .. a_n$ in der Richtung ihres Fortschreitens und bezeichne die Winkel, welche jede Verlängerung mit der nächstfolgenden Seite bildet, und welche daher Nebenwinkel der inneren Vielecks-winkel sind, durch $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, .. \alpha_n$; dann ist

$$m_2 = m_1 + \alpha_2, \quad m_3 = m_2 + \alpha_3, \quad \ldots, \quad m_n = m_{n-1} + \alpha_n.$$

Wählt man die willkürliche Lage der Geraden OX so, daß sie in die Richtung der Seite $A_n A_1 = a_n$ fällt, daß also $m_n = 0$ wird, so folgt

$$\begin{aligned} m_1 &= \alpha_1 \\ m_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ m_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ m_n &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + .. + \alpha_n = 360^0, \end{aligned}$$

und wenn man diese Werthe in die Gleichungen 1) setzt,

$$\left.\begin{aligned} a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos (\alpha_1 + \alpha_2) + .. + a_{n-1} \cos (\alpha_1 + \alpha_2 + .. + \alpha_{n-1}) + a_n = 0 \\ a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin (\alpha_1 + \alpha_2) + .. + a_{n-1} \sin (\alpha_1 + \alpha_2 + .. + \alpha_{n-1}) = 0 \end{aligned}\right\} .. 2)$$

Diese zwei Gleichungen, welche die Grundlage aller polygonometrischen Rechnungen bilden, umfassen ein ganzes System von Gleichungen. Denn läßt man die OX in die Richtung der Seite $a_1, a_2, ..$ fallen, so ergibt sich ebenso

$$a_2 \cos \alpha_2 + a_3 \cos (\alpha_2 + \alpha_3) + .. + a_n \cos (\alpha_2 + \alpha_3 + .. + \alpha_n) + a_1 = 0,$$
$$a_2 \sin \alpha_2 + a_3 \sin (\alpha_2 + \alpha_3) + .. + a_n \sin (\alpha_2 + \alpha_3 + .. + \alpha_n) = 0;$$

dann

$$a_3 \cos \alpha_3 + a_4 \cos (\alpha_3 + \alpha_4) + .. + a_1 \cos (\alpha_3 + \alpha_4 + .. + \alpha_1) + a_2 = 0,$$
$$a_3 \sin \alpha_3 + a_4 \sin (\alpha_3 + \alpha_4) + .. + a_1 \sin (\alpha_3 + \alpha_4 + .. + \alpha_1) = 0;$$

u. s. w.

Zusatz. Für das Viereck erhält man aus 2) wegen $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 360^0$

$$a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos (\alpha_1 + \alpha_2) + a_3 \cos \alpha_4 + a_4 = 0,$$
$$a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin (\alpha_1 + \alpha_2) - a_3 \sin \alpha_4 = 0.$$

§. **376.** In einem Vierecke $A_1\,A_2\,A_3\,A_4$ sind drei Seiten a_4, a_1, a_2 und die von ihnen eingeschlossenen Winkel $A_1 = 180^0 - \alpha_1$ und $A_2 = 180^0 - \alpha_2$ gegeben; man bestimme den Flächeninhalt f.

Zieht man die Diagonale $A_1\,A_3$, so erhält man

$$f = \tfrac{1}{2}\,a_1\,a_2 \sin\alpha_2 + \tfrac{1}{2}\,a_3\,a_4 \sin\alpha_4,$$

oder, wenn man für $a_3 \sin\alpha_4$ den aus §. 375, Zus. sich ergebenden Werth substituirt,

$$f = \tfrac{1}{2}\{a_4\,a_1 \sin\alpha_1 + a_4\,a_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) + a_1\,a_2 \sin\alpha_2\}.$$

2. Aufgaben aus der Stereometrie.

§. **377.** Gegeben ist eine Strecke S im Raume und ihr Neigungswinkel α gegen eine Ebene MN; man bestimme die Projection s der Strecke auf die Ebene.

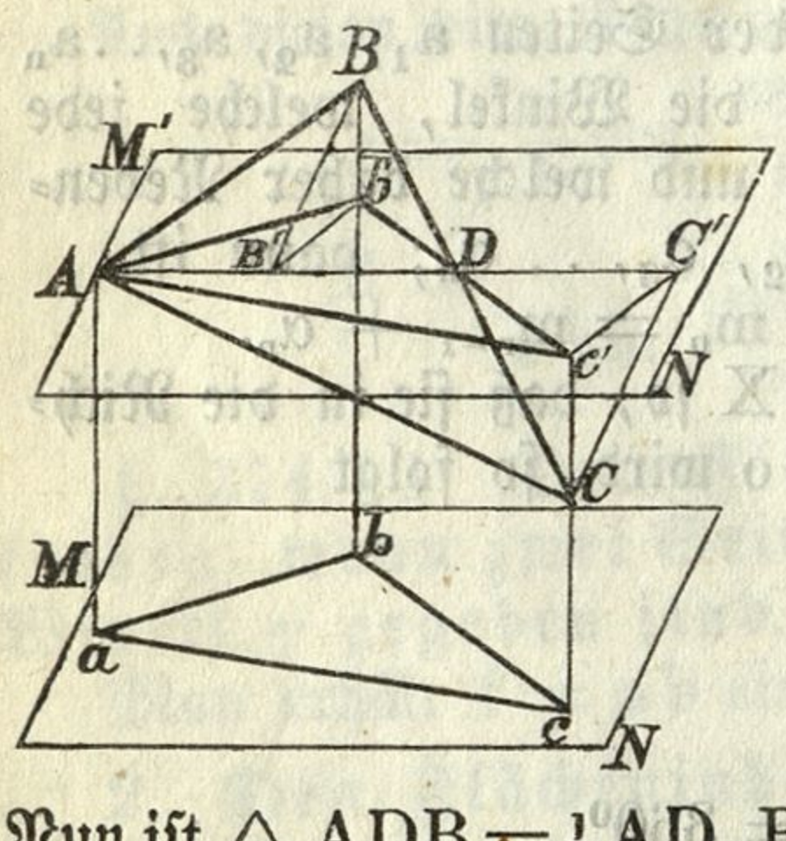
Es sei AB = S (Fig. 246) die gegebene Strecke, Aa $\perp$ MN und Bb $\perp$ MN, also ab = s die Projection der Strecke auf MN. Zieht man in der Ebene ABab die Ab' $\parallel$ ab, so ist Ab' = ab und BAb' = α; aber Ab' = AB cos α; daher

$$s = S \cos\alpha.$$

§. **378.** Gegeben ist ein Dreieck D und sein Neigungswinkel α gegen eine Ebene MN; man bestimme die Projection d des Dreieckes auf die Ebene.

$$d = D \cos\alpha.$$

Fig. 246.



Beweis. Das Dreieck D sei ABC (Fig. 246). Man kann immer durch einen Eckpunct A desselben eine mit MN parallele Ebene M'N' legen, welche das Dreieck ABC in AD schneidet. Dann ist die Projection Ab'c' des Dreieckes ABC auf die Ebene M'N' offenbar congruent mit der Projection abc desselben auf die Ebene MN. Die AD theilt sowohl das Dreieck ABC in die Dreiecke ADB und ADC, als auch dessen Projection Ab'c' in die Dreiecke ADb' und ADc'.

Zieht man BB' $\perp$ AD, und verbindet B' mit b', so ist BB'b' = α, daher B'b' = BB' cos α. Nun ist $\triangle$ ADB = $\frac{1}{2}$AD . BB' und $\triangle$ ADb' = $\frac{1}{2}$AD . B'b' = $\frac{1}{2}$AD . BB' cos α = $\triangle$ ADB . cos α. Ebenso erhält man $\triangle$ ADc' = $\triangle$ ADC . cos α; somit ist d = $\triangle$ ADb' + $\triangle$ ADc' = ($\triangle$ ADB + $\triangle$ ADC) . cos α = D cos α.

§. **379.** Gegeben ist ein Vieleck P und sein Neigungswinkel α gegen eine Ebene MN; man bestimme die Projection p des Vieleckes auf die Ebene.

$$p = P \cos\alpha.$$

Folgt aus §. 378, wenn das Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt wird.

§. **380.** Den Inhalt p eines Parallelepipeds zu berechnen, dessen Grundfläche bestimmt ist und dessen Seitenkante c mit der Grundfläche den Neigungswinkel α bildet.

Ist die Grundfläche ein Rechteck, worin a und b die Seitenlängen vorstellen, so findet man p = abc sin α.

Ist dagegen die Grundfläche ein schiefes Parallelogramm, dessen Seiten a und b den Winkel γ einschließen, so hat man

$$p = abc \sin\alpha \sin\gamma.$$

§. 381. Zu bestimmen ist a) eine Kugelmütze M (§. 340, 20 und Fig. 232), wenn r und der Centriwinkel $AOB = \alpha$ gegeben sind; b) eine Kugelzone Z, wenn r und die Winkel $AOB = \alpha$ und $AOC = \alpha'$ gegeben sind.

a) $M = 2r^2\pi(1 - \cos\alpha)$, b) $Z = 2r^2\pi(\cos\alpha - \cos\alpha')$.

3. Aufgaben aus der praktischen Geometrie und Astronomie.

§. 382. **Die Höhe h eines Gegenstandes AB (eines Thurmes) zu bestimmen.**

1. Wenn man zu dem Fußpuncte A messen kann.

Man messe von einem Puncte C aus die Strecke $CA = a$, und in C den Höhenwinkel $ACB = \alpha$; dann ist $h = a \operatorname{tang}\alpha$.

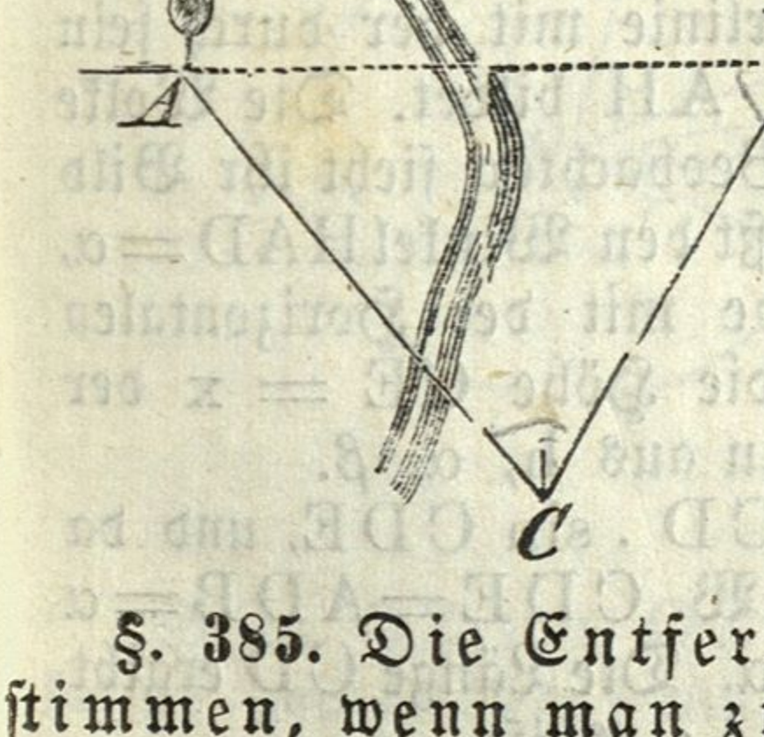
2. Wenn man nicht zu dem Fußpuncte A messen kann.

Man messe in einer durch B gehenden Verticalebene die Strecke $CD = a$ als Standlinie, und in ihren Endpuncten die Höhenwinkel $ACB = \alpha$ und $ADB = \beta$; dann ist

$$h = \frac{a \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

§. 383. **Die Entfernung zweier Puncte auf dem Felde zu bestimmen, wenn sich dieselbe wegen eines dazwischen befindlichen Hindernisses nicht unmittelbar messen läßt.**

Fig. 247.



Es seien A und B (Fig. 247) die beiden Puncte, zwischen welchen z. B. ein Wald, Teich, ... liegt, so daß eine unmittelbare Messung ihres Abstandes nicht stattfinden kann. Man messe von einem dritten Puncte C aus die Strecken $CB = a$ und $CA = b$, so wie den Winkel $ACB = \alpha$. Im Dreiecke ABC sind dann zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel bekannt, und kann aus denselben auch die dritte Seite AB berechnet werden.

§. 384. **Die Entfernung zweier Puncte auf dem Felde zu bestimmen, wenn man nur zu einem derselben kommen kann.**

Fig 248.

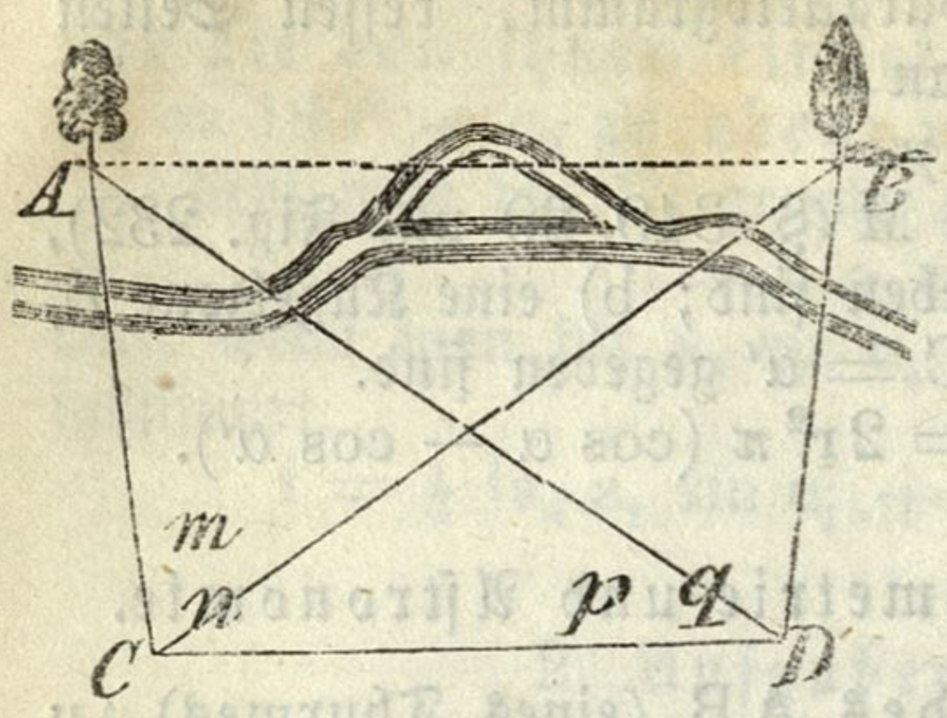
Man wähle einen dritten Standpunct C (Fig. 248), von dem man zu einem der beiden Puncte A und B hin messen kann, und messe die Gerade $BC = a$, so wie die Winkel C und B. Dann ergibt sich aus dem $\triangle ABC$

$$AB = \frac{a \sin C}{\sin(B+C)}.$$

§. 385. **Die Entfernung zweier Puncte auf dem Felde zu bestimmen, wenn man zu keinem derselben kommen kann.**

Es sei z. B. die Entfernung der beiden Bäume A und B (Fig. 249), welche sich jenseits eines Flusses befinden, zu bestimmen.

Fig. 249.



Man wähle zwei Standpuncte C und D, messe die Standlinie CD = a und an ihren Endpuncten die Winkel ACB = m, ACD = n, CDA = p und CDB = q. Dann kann man im △ ACD aus der Seite CD und den Winkeln n und p die Seite AD, ebenso im △ BCD aus der Seite CD und den Winkeln n — m und q die Seite BD berechnen. Endlich wird im △ ABD aus den Seiten AD und BD und dem Winkel q — p die gesuchte Strecke AB bestimmt.

§. **386.** 1. Den Halbmesser r' eines Parallelkreises der Erde in der geographischen Breite φ zu bestimmen, wenn der Halbmesser der als Kugel gedachten Erde r ist.

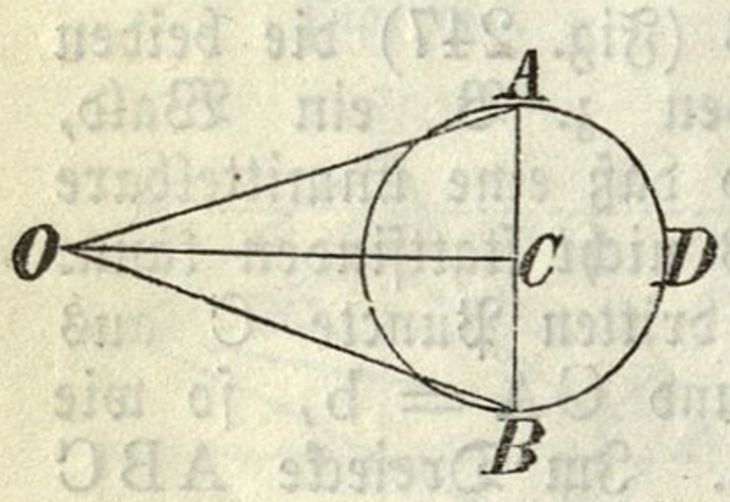
$$r' = r \cos \varphi.$$

2. Die Bogenlänge b eines größten Kugelkreises der Erde, die man von einer Höhe h übersehen kann, zu bestimmen.

Für das Bogenmaß α erhält man $\cos \alpha = \frac{r}{r + h}$; aus α wird dann (nach §. 170) b bestimmt.

§. **387.** Den wahren Durchmesser D eines Himmelskörpers aus dessen scheinbarem Durchmesser d und dessen Entfernung a von der Erde zu finden.

Fig. 250.



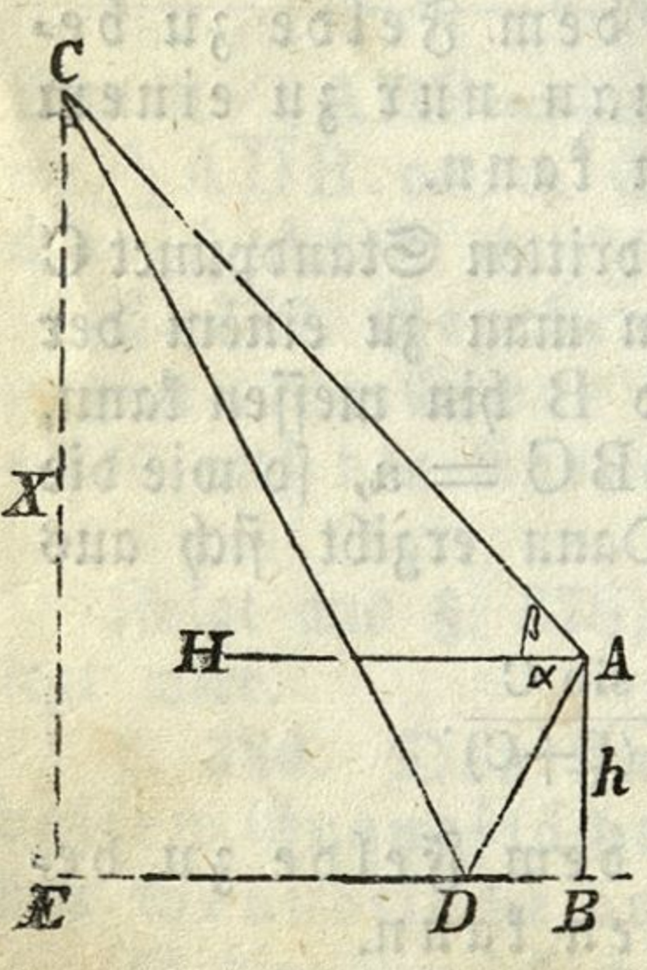
Befindet sich das Auge in O (Fig. 250), so gibt der Sehwinkel AOB den scheinbaren Durchmesser d des Gestirnes ADB; AB ist der wahre Durchmesser D, und OC die Entfernung a von der Erde. Man hat nun

$$AC = CO \,.\, \text{tang}\, AOC, \text{ oder } \frac{D}{2} = a \,.\, \text{tang}\, \frac{d}{2},$$

$$\text{daher } D = 2a \,.\, \text{tang}\, \frac{d}{2}.$$

§. **388.** Die Höhe einer Wolke aus deren Bilde in dem Spiegel eines Teiches zu bestimmen.

Fig. 251.



Ein Beobachter A (Fig. 251) befindet sich in der Höhe AB = h über dem Spiegel eines benachbarten Teiches D; er visirt nach einem markirten Puncte C einer Wolke und mißt den Winkel CAH = β, den diese Visirlinie mit der durch sein Auge gehenden Horizontalen AH bildet. Die Wolke spiegelt sich im Teiche, der Beobachter sieht ihr Bild in der Richtung AD und mißt den Winkel HAD = α, den die Richtung zum Bilde mit der Horizontalen einschließt. Zu suchen ist die Höhe CE = x der Wolke über dem Teichniveau aus h, α, β.

Aus △ CED ist x = CD . sin CDE, und da nach dem Spiegelungsgesetze W. CDE = ADB = α ist, hat man x = CD . sin α. Die Länge CD ergibt sich aus dem Dreiecke CDA; es ist

$$CD : AD = \sin CAD : \sin ACD = \sin(\alpha + \beta) : \sin(\alpha - \beta);$$

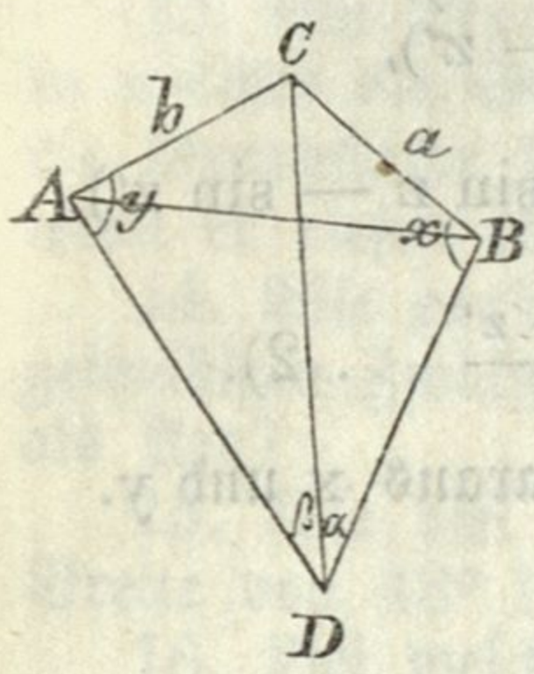
$$\text{daher } CD = AD \,.\, \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Endlich ist aus $\triangle$ ADB die Länge $AD = \frac{h}{\sin \alpha}$. Folglich ist

$$x = h \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

§. **389.** Aus drei ihrer Lage nach auf dem Felde gegebenen Puncten A, B, C die Lage eines vierten Punctes D zu bestimmen, wenn man nur die Winkel messen kann, welche die von D an die drei Puncte gezogenen Visirlinien bilden. (Pothenot'sche Aufgabe oder Problem des Rückwärtseinschneidens beim Meßtisch.)

Fig. 252.



Es sei das Dreieck ABC (Fig. 252) gegeben, und zwar $BC = a$, $AC = b$, W. $ACB = C$. Man messe in dem der Lage nach zu bestimmenden Puncte D die Winkel $BDC = \alpha$ und $ADC = \beta$.

Setzt man $CBD = x$, $CAD = y$ und $x + y = s$, so ist in dem Vierecke ACBD

$s = x + y = 360^0 - (\alpha + \beta + C)$, somit bekannt.

Im $\triangle$ BCD ist $a : CD = \sin \alpha : \sin x$.

„ $\triangle$ ACD „ $b : CD = \sin \beta : \sin y$;

woraus $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}$ folgt.

Nun ist $\sin x = \sin(s - y) = \sin s \cos y - \cos s \sin y$, daher

$\frac{\sin x}{\sin y} = \sin s \cot y - \cos s = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}$, und $\cot y = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta \sin s} + \cot s$.

Hiedurch ist y, und somit auch $x = s - y$ bekannt. Dann hat man

$$DB = \frac{a \sin(\alpha + x)}{\sin \alpha}, \quad DA = \frac{b \sin(\beta + y)}{\sin \beta}, \quad DC = \frac{a \sin x}{\sin \alpha} = \frac{b \sin y}{\sin \beta}.$$

Wie gestaltet sich die Auflösung, wenn D innerhalb des Dreieckes ABC oder in der Geraden zwischen A und B liegt?

§. **390.** Die Entfernung $OM = d$ (Fig. 253) des Mondes M von dem Erdmittelpuncte O (die geocentrische Entfernung des Mondes) zu bestimmen. (Parallaxen-Aufgabe.)

Fig. 253.

Seien OZ und OZ' die Verticallinien zweier Beobachtungsorte S (Stockholm) und C (Cap) unter demselben Meridian; ist A ein Punct des Aequators, so ist $AS = b$ die geographische Breite von S, ebenso $AC = b'$ jene von C. Zwei Beobachter, der eine in S, der andere in C, beobachten in

demselben Augenblicke die Zenithdistanz des Mondes, d. i. die Winkel ZSM $=$ z und Z'CM $=$ z'. Aus z, z', b, b' und dem Halbmesser r der Erde ist die Entfernung d zu bestimmen.

Aus dem Vierecke MSOC ist die Summe der Winkel x und y gegeben; denn

$$(x + y) + (180^0 - z) + (b + b') + (180^0 - z') = 360^0,$$

$$\text{daher } x + y = (z + z') - (b + b') \ . \ . \ . \ 1).$$

Um jeden der Winkel x und y einzeln zu bestimmen, hat man

$$\text{aus } \triangle MOS \ . \ . \ . \ r : d = \sin x : \sin (180^0 - z),$$

$$\text{aus } \triangle MOC \ . \ . \ . \ r : d = \sin y : \sin (180^0 - z'),$$

mithin $\sin x : \sin y = \sin z : \sin z'$, und hieraus

$$(\sin x + \sin y) : (\sin x - \sin y) = (\sin z + \sin z') : (\sin z - \sin z'),$$

oder mit Rücksicht auf §. 356, Form. 41,

$$\text{tang } \frac{x + y}{2} : \text{tang } \frac{x - y}{2} = \text{tang } \frac{z + z'}{2} : \text{tang } \frac{z - z'}{2} \ \ldots \ 2).$$

Aus 1) und 2) erhält man $x + y$ und $x - y$, und daraus x und y.

Dann folgt aus $\triangle MOS$ oder $\triangle MOC$

$$d = \frac{r \sin z}{\sin x}, \text{ oder } d = \frac{r \sin z'}{\sin y}.$$

Für $r = 1$, $b + b' = 93^0\ 15'\ 27''$, $z = 33^0\ 20'\ 24''$, $z' = 61^0\ 13'\ 33''$ erhält man $d = 62{\cdot}456$.

4. Uebungsaufgaben.

§. **391.** 1. In einem Kreise ist r der Halbmesser, α der Centriwinkel, b die Bogenlänge und s die Sehne; aus je zweien dieser Größen die beiden anderen zu berechnen.

2. Aus dem Halbmesser r eines Kreises und dem Centriwinkel α den Flächeninhalt f des Kreissegmentes zu bestimmen.

3. Den Flächeninhalt eines zwischen zwei parallelen Sehnen eines Kreises liegenden Stückes zu bestimmen, wenn die Abstände d, d' der Sehnen vom Kreismittelpuncte und der Halbmesser r gegeben sind.

4. Wie groß ist der wahre Durchmesser des Mondes, wenn sein scheinbarer mittlerer Halbmesser $15'\ 31{\cdot}69''$ und seine mittlere Entfernung von der Erde 51760 geogr. Meilen beträgt?

5. Wie weit ist ein Gegenstand entfernt, der bei der Größe a unter einem Sehwinkel φ erscheint?

6. Unter welchem Winkel φ sieht ein Mann, dessen Auge $1{\cdot}6^m$ über dem Boden erhaben ist, einen Thurm von 65^m Höhe in der Entfernung von 45^m?

7. Wie weit erstreckt sich die Fernsicht eines 2^m über dem Meeresspiegel erhabenen Auges, die Erde als vollkommene Kugel vom Halbmesser $r = 858{\cdot}474$ geogr. Meilen angenommen?

8. Gegeben ist der Inhalt k einer senkrechten Pyramide mit quadratischer Grundfläche und der Neigungswinkel α der Seitenkante gegen die Grundfläche; bestimme a) die Grundfläche, b) die Seitenkante.

9. In einer senkrechten Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges nseitiges Vieleck ist, ist g die Grundkante, s die Seitenkante; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Cubikinhalt?

10. In einem senkrechten 8seitigen Pyramidenstumpf ist gegeben die Seite a der unteren Grundfläche, die Seitenhöhe h, die Projection p einer Seitenkante auf die untere Grundfläche und der zugehörige Neigungswinkel α; man berechne a) die Oberfläche, b) den Cubikinhalt des Stumpfes.

11. Wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Inhalt eines senkrechten Kegels, dessen Seite s mit der Grundfläche den Neigungswinkel α bildet?

12. In einem schiefen Kegel ist α der kleinste Neigungswinkel einer Seite mit der Grundfläche, h die Höhe und p die Projection der Axe auf die Grundfläche; zu berechnen ist der Cubikinhalt.

13. Ein Kegel ist inhaltsgleich mit einer 5seitigen senkrechten Pyramide, in welcher die Grundkante a und die Höhe gleich dem Durchmesser des um die Grundfläche beschriebenen Kreises ist; wie groß ist die Höhe des Kegels, wenn er diesen Kreis zur Grundfläche hat?

14. Wie groß ist a) die Rotationsfläche, b) der Rotationskörper eines regelmäßigen Zwölfeckes mit der Seite s um eine dasselbe halbirende Diagonale als Axe?

15. Wie viel geogr. Meilen hat der Parallelkreis von Wien in der geogr. Breite von $48^\circ\ 12'\ 35''$? (Halbmesser der Erde $= 858{\cdot}474$ geogr. Meilen).

16. Bei welcher geogr. Breite beträgt ein Grad des Parallelkreises $8{\cdot}623$ geogr. Meilen?

17. Bestimme die Höhe a) der kalten heißen Zone, b) der gemäßigten Zone, c) der kalten Zone der Erde, wenn man den Erdhalbmesser $r = 858{\cdot}474$ g. Meilen und $\varphi = 23^\circ\ 28'$ als den Abstand des Polarkreises vom Pole, wie auch als den Abstand des Wendekreises vom Aequator annimmt.

18. Berechne unter den Voraussetzungen der Aufg. 17. die Fläche jeder der fünf Zonen der Erde.

19. Die Oberfläche einer Kugel ist o, eine Calotte derselben m; bestimme den Centriwinkel α des Bogens, durch dessen Umdrehung die Calotte erzeugt wird.

20. Gegeben sind die Halbmesser R und r der größeren und der kleineren Grundfläche eines senkrechten Kegelstumpfes und der Neigungswinkel α der Seite mit der größeren Grundfläche des Stumpfes; bestimme die Höhe einer Kugelmütze, welche der Mantelfläche des Kegelstumpfes gleich ist und zu einer Kugel gehört, welche die Höhe des Stumpfes zum Halbmesser hat.

Dritter Abschnitt.

Die sphärische Trigonometrie.

I. Auflösung der sphärischen Dreiecke.

1. Rechtwinklige sphärische Dreiecke.

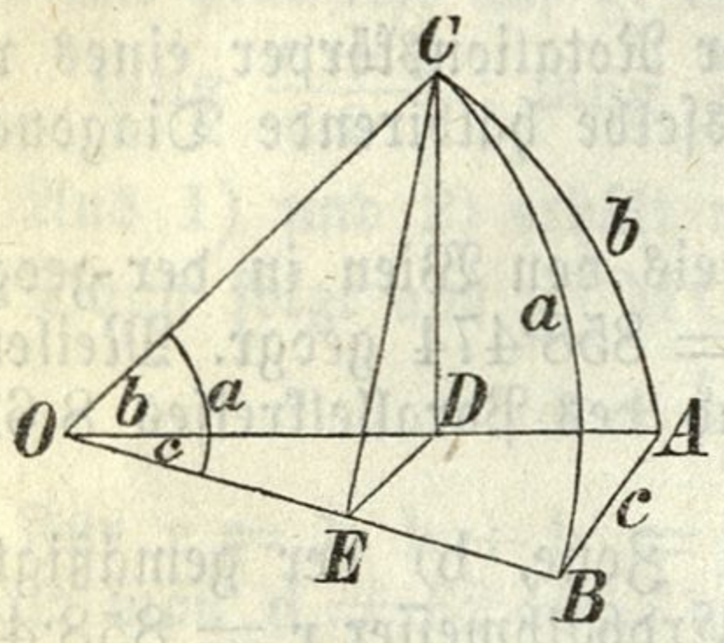
§. **392.** Ein sphärisches Dreieck kann einen, zwei oder auch drei rechte Winkel erhalten. Sind alle drei Winkel eines sphärischen Dreieckes rechte, so sind die drei Seiten Quadranten; kommen zwei rechte Winkel vor, so stehen denselben ebenfalls Quadranten gegenüber, und die dritte Seite muß eben so viele Grade enthalten, wie der dritte Winkel. Diese beiden Fälle geben also zu keiner Aufgabe Anlaß, und es brauchen hier nur solche sphärische Dreiecke betrachtet zu werden, welche bloß einen rechten Winkel enthalten.

Trigonometrische Lehrsätze über das rechtwinklige sphärische Dreieck.

§. 393. Es sei ABC (Fig. 254) ein bei A rechtwinkliges sphärisches Dreieck und O der Mittelpunct der zugehörigen Kugel; ferner seien b und c die beiden Katheten, B und C die ihnen gegenüberliegenden Winkel und a die Hypotenuse.

Setzt man zunächst alle drei Seiten und die Winkel B und C einzeln kleiner als 90^0 voraus, zieht $CD \perp OA$, $CE \perp OB$, und verbindet D mit E, so ist (§. 218, 2) $CD \perp$ Ebene AOB; DE ist also die Projection der CE auf AOB, und daher $\perp OB$ (§. 208); mithin ist der Winkel $CED = B$.

Fig 254.



1. Man hat nun

$$OE = OC \cdot \cos a,$$
$$OE = OD \cdot \cos c = OC \cdot \cos b \cos c;$$

daher $OC \cdot \cos a = OC \cdot \cos b \cos c$, mithin

$$\cos a = \cos b \cos c \quad \ldots 1)$$

d. h. Der Cosinus der Hypotenuse ist gleich dem Producte aus den Cosinus der beiden Katheten.

2. Ferner ist

$$CD = OC \cdot \sin b,$$
$$CD = CE \cdot \sin B = OC \cdot \sin a \sin B;$$

mithin $OC \cdot \sin b = OC \cdot \sin a \sin B$, und folglich

ebenso erhält man
$$\left.\begin{aligned} \sin b &= \sin a \sin B; \\ \sin c &= \sin a \sin C, \end{aligned}\right\} \quad \ldots 2)$$

d. h. Der Sinus einer Kathete ist gleich dem Producte aus dem Sinus der Hypotenuse und dem Sinus des dieser Kathete gegenüberliegenden Winkels.

3. Es ist auch

$$DE = CE \cdot \cos B = OC \cdot \sin a \cos B,$$
$$DE = OD \cdot \sin c = OC \cdot \cos b \sin c = OC \cdot \cos b \sin a \sin C \text{ (nach 2)};$$

mithin $OC \cdot \sin a \cos B = OC \cdot \cos b \sin a \sin C$, folglich

und analog
$$\left.\begin{aligned} \cos B &= \cos b \sin C, \\ \cos C &= \cos c \sin B; \end{aligned}\right\} \quad \ldots 3)$$

d. h. In jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke ist der Cosinus eines schiefen Winkels gleich dem Producte aus dem Cosinus der gegenüberliegenden Seite und dem Sinus des andern schiefen Winkels.

4. Man hat ferner

$$CD = OD \cdot \operatorname{tang} b,$$
$$CD = CE \cdot \sin B = OE \cdot \operatorname{tang} a \sin B = OD \cdot \cos c \operatorname{tang} a \sin B$$
$$= OD \cdot \operatorname{tang} a \cos C \text{ (nach 3)};$$

daher $OD \cdot \operatorname{tang} b = OD \cdot \operatorname{tang} a \cos C$, oder

und analog
$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} b &= \operatorname{tang} a \cos C, \\ \operatorname{tang} c &= \operatorname{tang} a \cos B, \end{aligned}\right\} \quad \ldots 4)$$

d. h. Die Tangente einer Kathete ist gleich dem Producte aus der Tangente der Hypotenuse und dem Cosinus des dieser Kathete anliegenden schiefen Winkels.

5. Auch ist

$$CD = OD \cdot \text{tang } b,$$
$$CD = DE \cdot \text{tang } B = OD \cdot \sin c \text{ tang } B;$$

folglich $OD \cdot \text{tang } b = OD \cdot \sin c \text{ tang } B$, oder

$$\left.\begin{aligned} \text{tang } b &= \sin c \text{ tang } B, \\ \text{und analog} \quad \text{tang } c &= \sin b \text{ tang } C \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

d. h. Die Tangente einer Kathete ist gleich dem Producte aus dem Sinus der andern Kathete und der Tangente des der ersteren Kathete gegenüberliegenden Winkels.

6. Aus 1) und 3) erhält man endlich

$$\cos a = \cos b \cos c = \frac{\cos B}{\sin C} \cdot \frac{\cos C}{\sin B}, \text{ oder}$$

$$\cos a = \cot B \cot C \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

d. h. Der Cosinus der Hypotenuse ist gleich dem Producte aus den Cotangenten der beiden schiefen Winkel.

Zusätze. 1. Die Entwicklung der vorhergehenden Gleichungen beruht auf der Voraussetzung, daß a, b, c, sowie B, C einzeln kleiner als 90^0 sind. Trifft diese Voraussetzung nicht ein, so darf man nur die Figur in entsprechender Weise ändern und dann das gleiche Verfahren, wie vorhin, anwenden; man erhält mit Berücksichtigung der Vorzeichen in jedem Falle dieselben Gleichungen, wie früher. Diese haben demnach allgemeine Giltigkeit.

2. Ist in einem sphärischen Dreiecke eine Seite $= 90^0$, so ist das Polardreieck ein rechtwinkliges; folglich können auch hier die vorhergehenden Gleichungen nach gehöriger Umänderung angewendet werden.

Folgesatz. In der Gleichung $\cos B = \cos b \sin C$ (in 3) ist $\sin C$ immer positiv, daher müssen $\cos B$ und $\cos b$ stets gleiche Vorzeichen haben. Ist daher $b \gtreqless 90^0$, und folglich $\cos b \gtreqless 0$, so muß auch $\cos B \gtreqless 0$, somit $B \gtreqless 90$ sein. Umgekehrt: Wenn $B \gtreqless 90^0$ ist, so muß auch $b \gtreqless 90^0$ sein.

Auflösungsfälle.

§. **394.** I. Gegeben die beiden Katheten b und c.

Aus den Gleichungen 1) und 5) erhält man

$$\cos a = \cos b \cos c, \quad \text{tang } B = \frac{\text{tang } b}{\sin c}, \quad \text{tang } C = \frac{\text{tang } c}{\sin b}.$$

Es sei z. B. $b = 27^0\,28'\,36''$ und $c = 51^0\,12'\,8''$. Man hat

$\log \cos b = 9{\cdot}948\ 021$	$\log \text{tang } c = 10{\cdot}094\ 767$
$\log \cos c = 9{\cdot}796\ 972$	$\log \sin b = 9{\cdot}664\ 066$
$\log \cos a = 9{\cdot}744\ 993$	$\log \text{tang } C = 10{\cdot}430\ 701$
$a = 56^0\,13'\,39''$	$C = 69^0\,38'\,54''.$
$\log \text{tang } b = 9{\cdot}716\ 044$	
$\log \sin c = 9{\cdot}891\ 739$	
$\log \text{tang } B = 9{\cdot}824\ 305$	
$B = 33^0\,42'\,51''$	

II. Gegeben die Hypotenuse a und eine Kathete b.

Durch Anwendung der Formeln 1), 2) und 4) erhält man

$$\cos c = \frac{\text{oos a}}{\cos b}, \quad \sin B = \frac{\sin b}{\sin a}, \quad \cos C = \frac{\text{tang } b}{\text{tang } a}.$$

Obwohl zu sin B im Allgemeinen zwei Winkel gehören, ein spitzer und ein stumpfer, so fällt doch hier jede Unbestimmtheit hinweg, da $B \leqq 90^0$ angenommen werden muß, je nachdem $b \leqq 90^0$ gegeben ist.

III. Gegeben eine Kathete b und ihr gegenüberliegender Winkel B.

Aus den Formeln 2), 5) und 3) erhält man

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}, \quad \sin c = \frac{\tang b}{\tang B}, \quad \sin C = \frac{\cos B}{\cos b},$$

oder aus 1) und 4)

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}, \quad \cos C = \frac{\tang b}{\tang a}.$$

Wenn a gefunden wurde, so können daraus mittelst der Gleichungen für cos c und cos C die Werthe für c und C unzweideutig bestimmt werden; allein zur Bestimmung von a kennt man nur den Sinus von a, darum läßt diese Aufgabe zwei Lösungen zu.

IV. Gegeben eine Kathete b und ihr anliegender Winkel C.

Die Formeln 4), 5) und 3) geben

$$\tang a = \frac{\tang b}{\cos C}, \quad \tang c = \sin b \tang C, \quad \cos B = \cos b \sin C.$$

V. Gegeben die Hypotenuse a und ein anliegender Winkel B.

Aus den Formeln 2), 4) und 6) folgt

$$\sin b = \sin a \sin B, \quad \tang c = \tang a \cos B, \quad \cot C = \frac{\cos a}{\cot B}.$$

Hier ist b durch sin b vollkommen bestimmt, da man $b \leqq 90^0$ annehmen muß, je nachdem $B \leqq 90^0$ ist.

VI. Gegeben die beiden schiefen Winkel B und C.

Mittelst der Relationen 6) und 3) erhält man

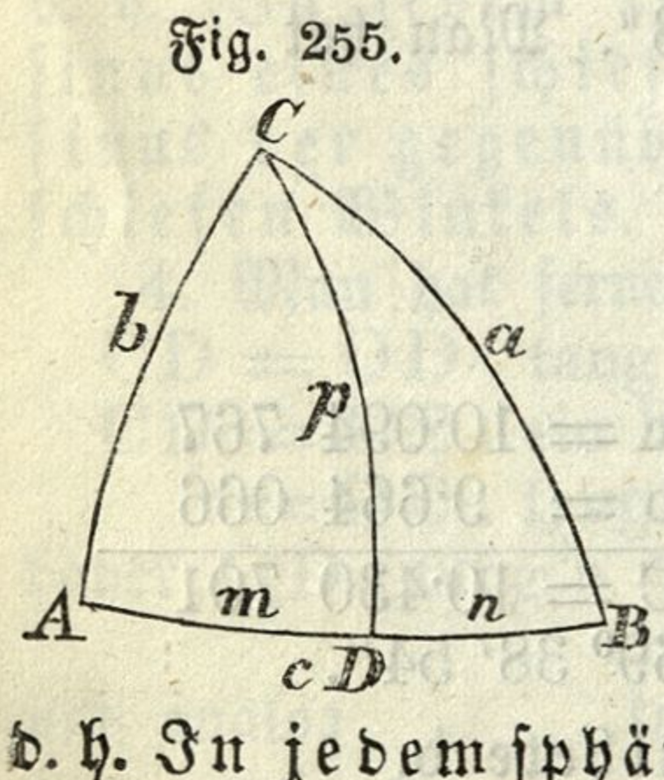
$$\cos a = \cot B \cot C, \quad \cos b = \frac{\cos B}{\sin C}, \quad \cos c = \frac{\cos C}{\sin B}.$$

2. Schiefwinklige sphärische Dreiecke.

Trigonometrische Lehrsätze über das schiefwinklige sphärische Dreieck.

§. **395.** Es sei ABC (Fig. 255) ein schiefwinkliges sphärisches Dreieck, a, b, c seien seine drei Seiten, A, B, C die ihnen gegenüberliegenden Winkel.

Fig. 255.



Zieht man durch C einen größten Kreisbogen CD ⊥ AB, und bezeichnet die Bogen AD, BD und CD bezüglich durch m, n und p, so ist (§. 393, 2) in den rechtwinkligen Dreiecken BDC und ADC

$$\sin p = \sin a \sin B;$$
$$\text{und } \sin p = \sin b \sin A;$$
$$\text{daher } \sin a \sin B = \sin b \sin A,$$
$$\text{oder } \sin a : \sin b = \sin A : \sin B;$$

d. h. In jedem sphärischen Dreiecke verhalten sich die Sinus zweier Seiten wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

Die angeführte Proportion gibt die Auflösungsgleichung

$$\left.\begin{aligned} &\sin a \sin B = \sin b \sin A. \\ \text{Analog erhält man}\quad &\\ &\sin a \sin C = \sin c \sin A, \\ &\sin b \sin C = \sin c \sin B. \end{aligned}\right\} \ldots \text{I)}$$

Zusatz. Die Gleichungen I) sind auch dann giltig, wenn der senkrecht gelegte Bogen CD außerhalb des Dreieckes ABC fällt; man erhält dann nach dem obigen Vorgange $\sin (180^0 - A)$ und $\sin (180^0 - B)$, welche jedoch mit $\sin A$ und $\sin B$ gleich sind.

§. **396.** 1. Im rechtwinkligen Dreiecke BDC (Fig. 255) ist nach §. 393, 1

$$\cos a = \cos p \cos n = \cos p \cos (c - m), \text{ oder}$$
$$\cos a = \cos p \cos c \cos m + \cos p \sin c \sin m.$$

Nun ist $\cos p \cos m = \cos b$ (§. 393, 1) und daher

$$\cos p \sin m = \frac{\cos b}{\cos m} \cdot \sin m = \cos b \operatorname{tang} m = \cos b \operatorname{tang} b \cos A \text{ (§. 393, 4)}$$
$$= \sin b \cos A.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in $\cos a$, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} &\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \\ \text{Analog erhält man}\quad &\\ &\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B, \\ &\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C; \end{aligned}\right\} \ldots \text{II)}$$

d. h. In jedem sphärischen Dreiecke ist der Cosinus einer Seite gleich dem Producte aus den Cosinus der beiden andern Seiten, vermehrt um das Product aus den Sinus dieser Seiten und dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Zusatz. Fällt der senkrecht gelegte Bogen CD außerhalb des Dreieckes ABC, so ist entweder $n = m - c$ oder $n = c + m$. In beiden Fällen erhält man jedoch nach dem obigen Vorgange dieselbe Endgleichung, wie vorhin. Die Gleichungen II) sind demnach allgemein giltig.

2. Heißen a', b', c' die Seiten und A', B', C' die ihnen gegenüberliegenden Winkel des zu ABC gehörigen Polardreiecks, so ist, da auch für dieses die eben entwickelten Gleichungen gelten,

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A'.$$

Nun ist aber $a' = 180^0 - A$, $b' = 180^0 - B$, $c' = 180^0 - C$ und $A' = 180^0 - a$; daher

$$\cos a' = -\cos A, \cos b' = -\cos B, \cos c' = -\cos C,$$
$$\sin b' = \sin B, \sin c' = \sin C, \cos A' = -\cos a.$$

Substituirt man diese Werthe in die obige Gleichung, so hat man

$$-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a, \text{ oder}$$
$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

Auf dieselbe Art findet man

$$\left.\begin{aligned} &\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b, \\ &\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c; \end{aligned}\right\} \ldots \text{II')}$$

d. h. In jedem sphärischen Dreiecke ist der Cosinus eines Winkels gleich dem negativen Producte aus den Cosinus der beiden andern Winkel, vermehrt um das Product aus den Sinus dieser Winkel und dem Cosinus der von ihnen eingeschlossenen Seite.

§. **397**. Wenn man die zweite und dritte Gleichung in I) addirt und subtrahirt, so erhält man

$$(\sin a + \sin b)\sin C = (\sin A + \sin B)\sin c,$$
$$(\sin a - \sin b)\sin C = (\sin A - \sin B)\sin c;$$

oder mit Rücksicht auf §§. 356 und 354, Form. 37), 38) und 21)

$$\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = \sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}\ldots\alpha)$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}(a-b)\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = \cos\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}\ldots\beta)$$

Addirt man ferner die ersten zwei Gleichungen in II), so folgt

$$\cos a + \cos b = (\cos a + \cos b)\cos c + (\sin b\cos A + \sin a\cos B)\sin c,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen I)

$$(\cos a + \cos b)(1-\cos c) = \left(\frac{\sin B\sin c}{\sin C}\cos A + \frac{\sin A\sin c}{\sin C}\cos B\right)\sin c,$$
$$= (\sin B\cos A + \sin A\cos B)\cdot\frac{\sin c^2}{\sin C},$$

daher

$$(\cos a + \cos b)(1-\cos c)\sin C = \sin(A+B)(1-\cos c^2),$$

und mit Rücksicht auf §§. 356 und 354, Form. 39), 21) und 23)

$$\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = \sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)\left(\cos\frac{c}{2}\right)^2\ldots\gamma).$$

Subtrahirt man endlich in dem System II') die zweite Gleichung von der ersten, so ergibt sich

$$\cos A - \cos B = (\cos A - \cos B)\cos C + (\sin B\cos a - \sin A\cos b)\sin C,$$

und nach analogen Umformungen, wie bei der Ableitung von γ),

$$\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\left(\cos\frac{C}{c}\right)^2 = \sin\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}\ldots\delta).$$

1. Indem man nun die Gleichungen α) und β) durch γ) dividirt, erhält man

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b) &= \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\operatorname{tang}\frac{c}{2}\\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a-b) &= \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\operatorname{tang}\frac{c}{2}\end{aligned}\right\}\ldots\text{III)}$$

d. h. In jedem sphärischen Dreiecke ist die Tangente der halben $\left(\begin{smallmatrix}\text{Summe}\\ \text{Differenz}\end{smallmatrix}\right)$ zweier Seiten gleich dem Quotienten aus den $\left(\begin{smallmatrix}\text{Cosinus}\\ \text{Sinus}\end{smallmatrix}\right)$ der halben Differenz und der halben Summe der beiden gegenüberliegenden Winkel, multiplicirt mit der Tangente der halben dritten Seite.

2. Dividirt man die Gleichung δ) durch β) und α), so folgt

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B) &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\frac{C}{2}\\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-B) &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\frac{C}{2}\end{aligned}\right\}\ldots\text{III')}$$

d. h. In jedem sphärischen Dreiecke ist die Tangente der halben $\left(\begin{smallmatrix}\text{Summe}\\ \text{Differenz}\end{smallmatrix}\right)$ zweier Winkel gleich dem Quotienten aus den $\left(\begin{smallmatrix}\text{Cosinus}\\ \text{Sinus}\end{smallmatrix}\right)$ der halben Differenz und der halben Summe der beiden gegenüberliegenden Seiten, multiplicirt mit der Cotangente des halben dritten Winkels.

Die vier Gleichungen in III) und III') sind unter dem Namen der Neper'schen Analogien bekannt.

Folgesätze. a) In der Gleichung

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \cdot \cot \frac{C}{2}$$

sind die beiden Factoren $\cos \frac{1}{2}(a-b)$ und $\cot \frac{C}{2}$ immer positiv; es müssen daher $\text{tang } \frac{1}{2}(A+B)$ und $\cos \frac{1}{2}(a+b)$ stets dasselbe Vorzeichen haben.

Ist nun $a+b \leqslant 180^0$, also $\cos \frac{1}{2}(a+b) \gtrless 0$, so muß auch $\text{tang } \frac{1}{2}(A+B) \gtrless 0$, und somit $A+B \leqslant 180^0$ sein. Ist ferner $a+b=180^0$, also $\cos \frac{1}{2}(a+b)=0$, so ist $\text{tang } \frac{1}{2}(A+B)=\infty$, also $\frac{1}{2}(A+B)=90^0$ und $A+B=180^0$.

Ist also $a+b \gtreqless 180^0$, so ist bezüglich auch $A+B \gtreqless 180^0$.

b) Umgekehrt läßt sich zeigen:

Ist $A+B \gtreqless 180^0$, so ist bezüglich auch $a+b \gtreqless 180$.

Auflösungsfälle.

§. **398.** I. Gegeben zwei Seiten a und b und der von ihnen eingeschlossene Winkel C.

Die Winkel A und B ergeben sich aus den Gleichungen des Systems III')

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \cdot \cot \frac{C}{2},$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \cdot \cot \frac{C}{2}.$$

Für die Seite c erhält man aus dem Systeme II)

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

welcher Gleichung wir eine für die logarithmische Berechnung geeignete Form geben wollen. Es ist

$$\cos c = \cos a (\cos b + \sin b \text{ tang } a \cos C).$$

Wird nun ein Hilfswinkel w so bestimmt, daß $\text{tang } w = \text{tang } a \cos C$ ist, so hat man dann

$$\cos c = \cos a (\cos b + \sin b \text{ tang } w)$$

$$= \frac{\cos a}{\cos w} (\cos b \cos w + \sin b \sin w),$$

oder

$$\cos c = \frac{\cos a \cos (b-w)}{\cos w}.$$

Ist z. B. $a = 97^0\ 30'\ 20''$, $b = 55^0\ 12'\ 10''$, $C = 39^0\ 58'$, so hat man

$\frac{1}{2}(a+b) = 76^0\ 21'\ 15''$, $\quad \frac{1}{2}(a-b) = 21^0\ 9'\ 5''$,

$\log \cos \frac{1}{2}(a-b) = 9{\cdot}969\ 709$ $\quad \log \sin \frac{1}{2}(a-b) = 9{\cdot}557\ 307$

$\log \cot \frac{C}{2} = 10{\cdot}439\ 327$ $\quad \log \cot \frac{C}{2} = 10{\cdot}439\ 327$

$20{\cdot}409\ 036$ $\quad 19{\cdot}996\ 634$

$\log \cos \frac{1}{2}(a+b) = 9{\cdot}372\ 764$ $\quad \log \sin \frac{1}{2}(a+b) = 9{\cdot}987\ 565$

$\log \text{tang } \frac{1}{2}(A+B) = 11{\cdot}036\ 272$ $\quad \log \text{tang } \frac{1}{2}(A-B) = 10{\cdot}009\ 069$

$\frac{1}{2}(A+B) = 84^0\ 44'\ 39''$ $\quad \frac{1}{2}(A-B) = 45^0\ 35'\ 54''$

daher $A = 130^0\ 20'\ 33''$, $\quad B = 39^0\ 8'\ 45''$.

log tang a =	10·880 246 (n)	log cos a =	9·116 017 (n)
log cos C =	9·884 466	log cos (b — w) =	9·852 859
log tang w =	10·764 712 (n)		18·968 876 (n)
w =	99° 45′ 15″	log cos w =	9·228 967 (n)
b — w =	— 44° 33′ 5″	log cos c =	9·739 909
		c =	56° 40′ 20″.

Das Zeichen (n) nach den Logarithmen bedeutet, daß die zugehörigen trigonometrischen Functionen negativ sind.

§. **399**. II. Gegeben zwei Winkel A und B und die von ihnen eingeschlossene Seite c.

Die Seiten a und b ergeben sich aus den Gleichungen des Systems III)

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} \cdot \text{tang } \frac{c}{2},$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\text{sin } \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)} \cdot \text{tang } \frac{c}{2}.$$

Zur Bestimmung des Winkels C erhält man aus II′)

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c,$$
$$= \cos A\,(-\cos B + \sin B \text{ tang } A \cos c).$$

Wird nun ein Hilfswinkel w so bestimmt, daß tang A cos c = cot w wird, so ist

$$\cos C = \cos A\,(-\cos B + \sin B \cot w),$$
$$= \frac{\cos A}{\sin w}(-\cos B \sin w + \sin B \cos w),$$

daher

$$\cos C = \frac{\cos A \sin (B-w)}{\sin w}.$$

Nimmt man z. B.

$A = 158^0\,14'\,16''$, $B = 21^0\,17'\,22''$, $c = 73^0\,15'\,20''$ an,

so findet man durch ähnliche Rechnungen, wie in §. 398,

$a = 123^0\,48'$, $b = 54^0\,28'$, $C = 25^0\,17'\,34''$.

§. **400**. III. Gegeben zwei Seiten a und b und ein gegenüberliegender Winkel A.

Für den Winkel B findet man aus dem System I)

$$\sin B = \frac{\sin A \sin b}{\sin a}.$$

Hier kann B im Allgemeinen spitz oder stumpf sein und die Aufgabe läßt zwei Auflösungen zu; nur unter besonderen Voraussetzungen kann das Dreieck ein vollkommen bestimmtes sein.

Es sei erstlich $A = 90^0$. Für $a + b = 180^0$ ist auch $A + B = 180^0$, also $B = 90^0$ und das Dreieck bestimmt. Für $a + b < 180^0$ ist auch $A + B < 180^0$, daher $B < 90^0$, und das Dreieck ebenfalls bestimmt. Für $a + b > 180^0$ endlich, wo auch $A + B > 180^0$, und somit $B > 90^0$ sein muß, ist die Aufgabe gleichfalls bestimmt.

Es sei ferner $A < 90^0$. Für $a + b \gtreqless 180^0$ muß auch $A + B \gtreqless 180^0$, somit $B \gtrless 90^0$ sein, so daß die Aufgabe nur eine Auflösung zuläßt. Für $a + b < 180^0$ aber, und somit $A + B < 180^0$, kann $B \gtrless 90^0$ sein, und das Dreieck ist unbestimmt, wenn nicht der stumpfe Winkel B so groß ist, daß $A + B \gtrless 180^0$ wäre, was immer eintritt, wenn $b \lesseqgtr a$ ist; in diesem Falle darf B nur spitz genommen werden.

Ist endlich $A > 90^0$, so hat man für $a + b \gtreqless 180^0$ auch $A + B \gtreqless 180^0$, und somit $B < 90^0$; das Dreieck ist also bestimmt. Wenn dagegen $a + b > 180^0$ und daher auch $A + B > 180^0$ ist, so kann $B \gtrless 90^0$ sein und das Dreieck ist unbestimmt, ausgenommen, wenn der spitze Winkel B so klein ist, daß $A + B \leqq 180^0$ wäre, was für $b \geqq a$ eintritt, in welchem Falle dann B nur stumpf sein kann.

Das Dreieck hat also in diesem Falle zwei Auflösungen, wenn

$$A < 90^0,\ a + b < 180^0 \text{ und } a < b,$$

oder

$$A > 90^0,\ a + b > 180^0 \text{ und } a > b \text{ ist.}$$

Ist einmal B bestimmt, so erhält man für die Berechnung von c und C aus den Systemen III) und III') die Ausdrücke

$$\text{tang } \frac{c}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A + B)}{\sin \frac{1}{2}(A - B)} \cdot \text{tang } \frac{1}{2}(a - b),$$

$$\cot \frac{C}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a + b)}{\sin \frac{1}{2}(a - b)} \cdot \text{tang } \frac{1}{2}(A - B).$$

Es sei z. B. $a = 57^0\,38'$, $b = 31^0\,12'$, $A = 104^0\,25'\,30''$.

Man hat zuerst

$$\log \sin b = 9{\cdot}714\ 352$$
$$\log \sin A = 9{\cdot}986\ 088$$
$$19{\cdot}700\ 440$$
$$\log \sin a = 9\,926\ 671$$
$$\log \sin B = 9{\cdot}773\ 769$$
$$B = 36^0\,26'\,23''.$$

Da hier $A > 90^0$, $a + b < 180^0$, somit auch $A + B < 180^0$ ist, so muß $B < 90^0$ sein. Ferner hat man

$$a + b = 88^0\,50' \qquad \tfrac{1}{2}(a + b) = 44^0\,25'$$
$$a - b = 26^0\,26' \qquad \tfrac{1}{2}(a - b) = 13^0\,13'$$
$$A + B = 140^0\,51'\,53'' \qquad \tfrac{1}{2}(A + B) = 70^0\,25'\,56{\cdot}5''$$
$$A - B = 67^0\,59'\,7'' \qquad \tfrac{1}{2}(A - B) = 33^0\,59'\,33{\cdot}5''$$

$$\log \sin \tfrac{1}{2}(A + B) = 9\,974\ 165 \qquad \log \sin \tfrac{1}{2}(a + b) = 9{\cdot}845\ 018$$
$$\log \text{tang } \tfrac{1}{2}(a - b) = 9{\cdot}370\ 799 \qquad \log \text{tang } \tfrac{1}{2}(A - B) = 9{\cdot}828\ 867$$
$$19{\cdot}344\ 964 \qquad 19{\cdot}673\ 885$$
$$\log \sin \tfrac{1}{2}(A - B) = 9{\cdot}747\ 479 \qquad \log \sin \tfrac{1}{2}(a - b) = 9{\cdot}359\ 141$$
$$\log \text{tang } \frac{c}{2} = 9{\cdot}597\ 485 \qquad \log \cot \frac{C}{2} = 10{\cdot}314\ 744$$
$$\frac{c}{2} = 21^0\,35'\,38'' \qquad \frac{C}{2} = 25^0\,50'\,54''$$
$$c = 43^0\,11'\,16'' \qquad C = 51^0\,41'\,48''$$

§. **401.** IV. Gegeben zwei Winkel A und B und eine gegenüberliegende Seite a.

Für die Seite b gibt das System I) den Ausdruck

$$\sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A}.$$

Die Werthe von c und C geben dann die Gleichungen der Systeme III und III')

$$\text{tang } \frac{c}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A + B)}{\sin \frac{1}{2}(A - B)} \cdot \text{tang } \frac{1}{2}(a - b),$$

$$\cot \frac{C}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a + b)}{\sin \frac{1}{2}(a - b)} \cdot \text{tang } \frac{1}{2}(A - B).$$

Diese Aufgabe bietet, da b aus sin b zu bestimmen ist, nur in besonderen Fällen eine bestimmte Auflösung. Zweideutige Fälle treten, wie man sich durch ähnliche Folgerungen, wie in §. 400, überzeugen kann, ein, wenn

$$a < 90^0,\ A + B < 180^0 \text{ und } A < B \text{ oder}$$
$$a > 90^0,\ A + B > 180^0 \text{ und } A > B \text{ ist.}$$

Nimmt man z. B. $a = 45^0$, $b = 25^0$, $A = 92^0\ 1'\ 9{\cdot}8''$ an, so findet man durch ähnliche Rechnungen, wie in §. 400,

$$B = 36^0\ 40'\ 37'',\ c = 37^0\ 47'\ 19{\cdot}4'',\ C = 60^0.$$

§. **402.** V. Gegeben alle drei Seiten a, b und c.

Man wird sich hier der Formeln des Systems II) bedienen, welche jedoch vor ihrem Gebrauche noch eine bequemere Einrichtung erhalten müssen.

Um aus der Gleichung

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

für den Winkel A eine logarithmisch brauchbare Formel abzuleiten, hat man

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},\ \text{daher}$$

$$1 - \cos A = \frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\sin b \sin c},$$

$$1 + \cos A = \frac{\sin b \sin c - \cos b \cos c + \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a - \cos (b + c)}{\sin b \sin c},$$

oder mit Rücksicht auf §. 354, Formeln 24) und 23)

$$\left(\sin \frac{A}{2}\right)^2 = \frac{\sin \frac{1}{2} (a + b - c) \sin \frac{1}{2} (a - b + c)}{\sin b \sin c},$$

$$\left(\cos \frac{A}{2}\right)^2 = \frac{\sin \frac{1}{2} (a + b + c) \sin \frac{1}{2} (b + c - a)}{\sin b \sin c}.$$

Setzt man nun $\frac{1}{2} (a + b + c) = s$, daher

$$\frac{1}{2} (b + c - a) = s - a,$$
$$\frac{1}{2} (a - b + c) = s - b,$$
$$\frac{1}{2} (a + b - c) = s - c,\ \text{so erhält man}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin b \sin c}},$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - a)}{\sin b \sin c}}.$$

Daraus folgt

$$\text{tang} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin s \sin (s - a)}}.$$

Auf gleiche Weise findet man

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s - a) (\sin s - c)}{\sin a \sin c}},\quad \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s - a) \sin (s - b)}{\sin a \sin b}},$$

$$\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - b)}{\sin a \sin c}},\quad \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - c)}{\sin a \sin b}},$$

$$\text{tang} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s - a) \sin (s - c)}{\sin s \sin (s - b)}};\quad \text{tang} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s - a) (\sin (s - b)}{\sin s \sin (s - c)}},$$

In Beziehung auf die größere oder geringere Brauchbarkeit der voranstehenden Formeln für die Rechnung gilt alles das, was wir über die Anwendbarkeit der in §. 369 entwickelten Formeln bemerkt haben.

Ist z. B. $a = 50^0\ 54'\ 32''$, $b = 37^0\ 47'\ 18''$, $c = 74^0\ 51'\ 50''$ so hat man

$a =$	$50^0\ 54'\ 32''$	$\log \sin (s - b) =$	9·841 710
$b =$	$37^0\ 47'\ 18''$	$\log \sin (s - c) =$	9 080 719
$c =$	$74^0\ 51'\ 50''$		18·922 429
$a + b + c =$	$163^0\ 33'\ 40''$	$\log \sin s =$	9·995 516
$s =$	$81^0\ 46'\ 50''$	$\log \sin (s - a) =$	9·710 216
$s - a =$	$30^0\ 52'\ 18''$		19·216 697
$s - b =$	$43^0\ 59'\ 32''$	$\log \tan g \frac{A}{2} =$	9·608 3485
$s - c =$	$6^0\ 55'$	$\frac{A}{2} =$	$22^0\ 5'\ 20{\cdot}4''$
		$A =$	$44^0\ 10'\ 40{\cdot}8''$

$\log \sin (s - a) =$	9·710 216	$\log \sin (s - a) =$	9·710 216
$\log \sin (s - c) =$	9·080 719	$\log \sin (s - b) =$	9·841 710
	18·790 935		19·551 926
$\log \sin s =$	9·995 516	$\log \sin s =$	9·995 516
$\log \sin (s - b) =$	9·841 710	$\log \sin (s - c) =$	9·080 719
	18 953 709		20·475 691
$\log \tan g \frac{B}{2} =$	9·476 8545	$\log \tan g \frac{C}{2} =$	10·237 8455
$\frac{B}{2} =$	$16^0\ 41'\ 22{\cdot}4''$	$\frac{C}{2} =$	$59^0\ 57'\ 32{\cdot}8''$
$B =$	$33^0\ 22'\ 44{\cdot}8''$	$C =$	$119^0\ 55'\ 5{\cdot}6''$

§. **403.** VI. Gegeben alle drei Winkel A, B und C.

Die gesuchten Stücke ergeben sich aus den Formeln in III), welche aber vorerst eine für die logarithmische Berechnung geeignete Form erhalten müssen.

Um aus der Gleichung

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

für a eine logarithmisch brauchbare Formel abzuleiten, hat man

$$\cos a = \frac{\cos B \cos C + \cos A}{\sin B \sin C}, \text{ daher}$$

$$1 - \cos a = \frac{\sin B \sin C - \cos B \cos C - \cos A}{\sin B \sin C},$$

$$1 + \cos a = \frac{\sin B \sin C + \cos B \cos C + \cos A}{\sin B \sin C},$$

woraus man, wenn $\frac{1}{2}(A + B + C) = S$ gesetzt wird, auf analoge Art, wie in §. 402, folgende Gleichungen erhält:

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S - A)}{\sin B \sin C}},$$

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos (S - B) \cos (S - C)}{\sin B \sin C}},$$

$$\tan g \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S - A)}{\cos (S - B) \cos (S - C)}};$$

$$\sin \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S - B)}{\sin A \sin C}}, \quad \sin \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S - C)}{\sin A \sin B}},$$

$$\cos \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\cos (S - A) \cos (S - C)}{\sin A \sin C}}, \quad \cos \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\cos (S - A) \cos (S - B)}{\sin A \sin B}},$$

$$\tan g \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S - B)}{\cos (S - A) \cos (S - C)}}; \quad \tan g \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S - C)}{\cos (S - A) \cos (S - A)}}.$$

Nimmt man z. B. $A = 107^0\,48'$, $B = 52^0\,30'$, $C = 38^0\,58'\,30''$, so findet man durch ähnliche Rechnung, wie in §. 402,

$a = 70^0\,22'\,43''$, $b = 51^0\,42'\,26''$, $c = 38^0\,28'\,49''$.

3. Uebungsaufgaben.

§. 404. Ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck, worin A den rechten Winkel vorstellt, aufzulösen, wenn gegeben sind:

1. $b = 127^0\,56'\,32''$, $c = 63^0\,15'\,48''$.
2. $b = 55^0\,18'\,41''$, $c = 5^0\,42'\,30''$.
3. $a = 154^0\,8'\,15''$, $c = 82^0\,18'\,27''$.
4. $b = 52^0\,60'\,2''$, $B = 78^0\,41'\,19''$.
5. $c = 65^0\,1'\,30''$, $C = 76^0\,35'\,5''$.
6. $c = 83^0\,12'\,38''$, $B = 65^0\,55'\,55''$.
7. $a = 95^0\,6'\,42''$, $C = 70^0\,40'\,25''$.
8. $a = 94^0\,23'\,10''$, $B = 50^0\,12'\,4''$.
9. $B = 88^0\,12'\,9''$, $C = 58^0\,58'\,22''$.
10. $B = 63^0\,15'\,12''$, $C = 135^0\,33'\,39''$.

Beweise, daß für jedes sphärische Dreieck folgende Gleichungen stattfinden:

11. $\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$;
12. $\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a$.

Aus den Gleichungen II) und II') in §. 396.

13. $\cot a \sin b = \cot A \sin C + \cos b \cos C$;
14. $\cot A \sin B = \cot a \sin c - \cos B \cos c$.

Aus den Systemen II) und II') mit Zuziehung von I).

15. $\dfrac{\text{tang } \frac{1}{2}(a+b)}{\text{tang } \frac{1}{2}(a-b)} = \dfrac{\text{tang } \frac{1}{2}(A+B)}{\text{tang } \frac{1}{2}(A-B)}$.

Aus den Neper'schen Gleichungen in III).

16. $\sin \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{1}{2}(A-B) \sin \frac{c}{2}$;
17. $\cos \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{c}{2}$;
18. $\sin \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{C}{2} = \sin \frac{1}{2}(A-B) \sin \frac{c}{2}$;
19. $\cos \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{C}{2} = \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{c}{2}$.

Die Gleichungen 16. — 19., welche die Gauß'schen Formeln heißen, ergeben sich aus den Gleichungen für $\sin\left(\frac{a}{2} \pm \frac{b}{2}\right)$ und $\cos\left(\frac{a}{2} \pm \frac{b}{2}\right)$ in den §§. 353 und 355, indem man in denselben die in §. 403 gefundenen Werthe von $\sin \frac{a}{2}$, $\cos \frac{a}{2}$, $\sin \frac{b}{2}$, $\cos \frac{b}{2}$ einsetzt.

Die Division der Gauß'schen Gleichungen führt auf die Neper'schen, die wir oben auf einem andern Wege abgeleitet haben.

Ein schiefwinkliges sphärisches Dreieck aufzulösen, wenn gegeben sind:

20. $a = 102^0\,13'\,24''$, $c = 75^0\,51'\,21''$, $B = 65^0\,31'\,54''$.
21. $b = 93^0\,48'\,40''$, $c = 71^0\,43'\,23''$, $A = 108^0\,5'\,28''$.
22. $A = 120^0\,55'\,35''$, $B = 69^0\,25'\,11''$, $c = 107^0\,52'\,24''$.
23. $B = 64^0\,35'\,32''$, $C = 71^0\,17'\,53''$, $a = 85^0\,13'\,58''$.
24. $a = 50^0\,48'\,29''$, $b = 63^0\,15'\,22''$, $A = 120^0\,55'\,35''$.
25. $b = 126^0\,8'\,29''$, $c = 83^0\,33'\,7''$, $B = 95^0\,52'\,41''$.
26. $A = 88^0\,13'\,23''$, $B = 151^0\,11'\,12''$, $b = 57^0\,35'\,35''$.

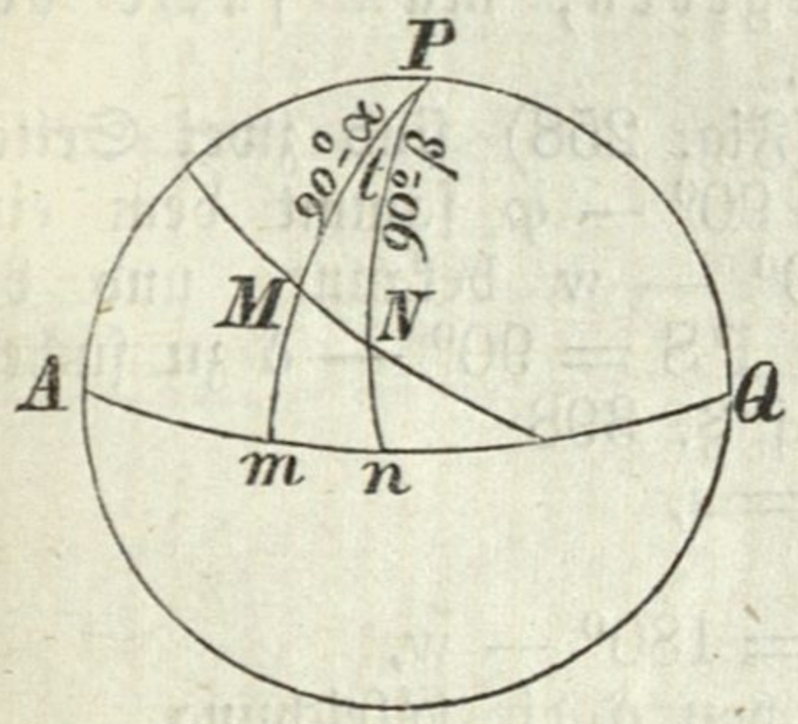
27. $A = 101^0\ 44'\ 20''$, $C = 78^0\ 43'\ 30''$, $a = 93^0\ 44'\ 45''$.
28. $a = 137^0\ 28'\ 37''$, $b = 55^0\ 57'\ 8''$, $c = 38^0\ 17'\ 35''$.
29. $a = 48^0\ 23'\ 57''$, $b = 59^0\ 27'\ 44''$, $c = 75^9\ 15'\ 42''$.
30. $A = 90^0\ 2'\ 9''$, $B = 88^0\ 58'\ 56''$, $C = 87^0\ 57'\ 56''$.
31. $A = 70^0\ 28'\ 37''$, $B = 48^0\ 17'\ 10''$, $C = 94^0\ 40'\ 27''$.

II. Anwendungen der sphärischen Trigonometrie.

1. Aufgaben aus der mathematischen Geographie und sphärischen Astronomie.

§. **405**. Aus den geographischen Breiten zweier Orte der Erdoberfläche und deren Längenunterschiede die Entfernung derselben, d. i. die Länge des zwischen ihnen liegenden Bogens eines größten Kreises zu bestimmen. (Die Erde wird als Kugel angenommen.)

Fig. 256.



Es seien M und N (Fig. 256) die beiden Orte, so ist ihre Entfernung MN ein Bogen eines größten Kugelkreises. Es sei ferner P der Pol und AQ der Aequator; dann sind Mm und Nn die Breiten dieser Orte, und mn deren Längenunterschied, welcher dem Winkel MPN gleich ist.

Setzt man $Mm = \alpha$, $Nn = \beta$, $mn = l$, so sind in dem sphärischen Dreiecke MNP zwei Seiten $MP = 90^0 - \alpha$ und $NP = 90^0 - \beta$ sammt dem eingeschlossenen Winkel $MPN = l$ gegeben, und man hat (nach §. 398) zur Bestimmung der dritten Seite MN

$$\cos MN = \frac{\sin\alpha \sin(\beta + w)}{\cos w},$$

wozu der Hilfswinkel w aus der Gleichung

$$\operatorname{tang} w = \cot\alpha \cos l$$

berechnet wird.

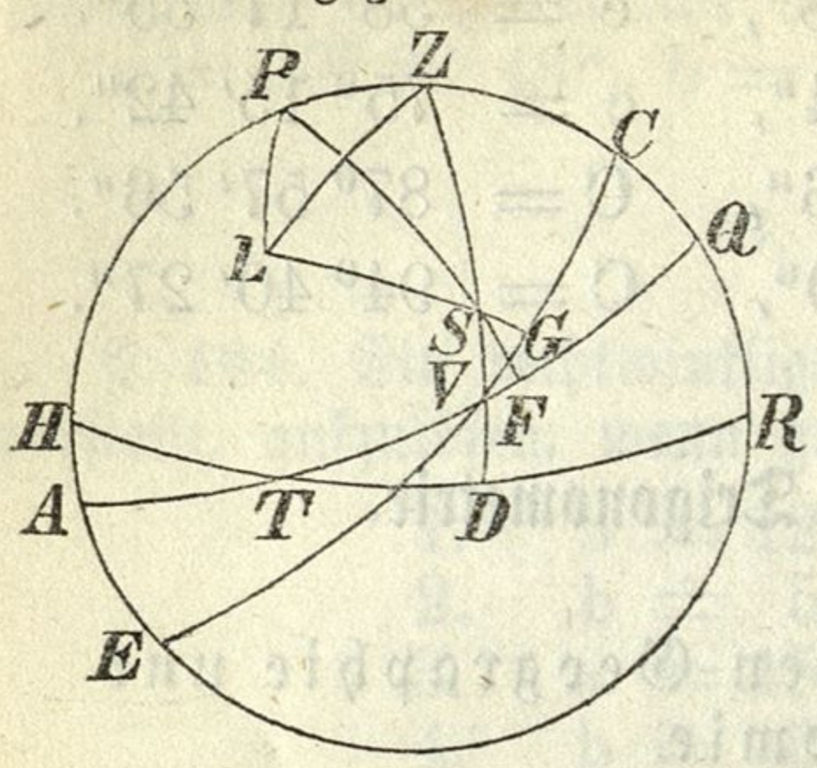
Man sucht daher zuerst w, daraus den Bogen MN, und verwandelt diesen in geographische Meilen, deren 15 auf einen Grad gehen.

§. **406**. Die geographische Breite und Länge dreier Orte der Erde nebst dem Halbmesser der letzteren ist gegeben; man suche die Seiten, die Winkel und den Flächeninhalt des durch jene Orte gelegten sphärischen Dreieckes.

Nach §. 405 erhält man zuerst die Seiten, nach §. 402 sodann die Winkel, und daraus nach §. 337 den Flächeninhalt des sphärischen Dreieckes.

§. **407**. Es sei S (Fig. 257) irgend ein Gestirn, Z der Pol des Horizontes HTR oder das Zenith, P der Pol des Aequators AVQ oder der nördliche Weltpol, L der Pol der Ekliptik EVC; ferner HZR der Meridian des

Fig. 257.



Ortes der Erde, dessen Zenith in Z ist. Zieht man durch S und durch die Pole Z, P, L die größten Kreise ZSD, PSF, LSG, welche somit folgeweise auf HR, AQ, EC senkrecht sind, so ist

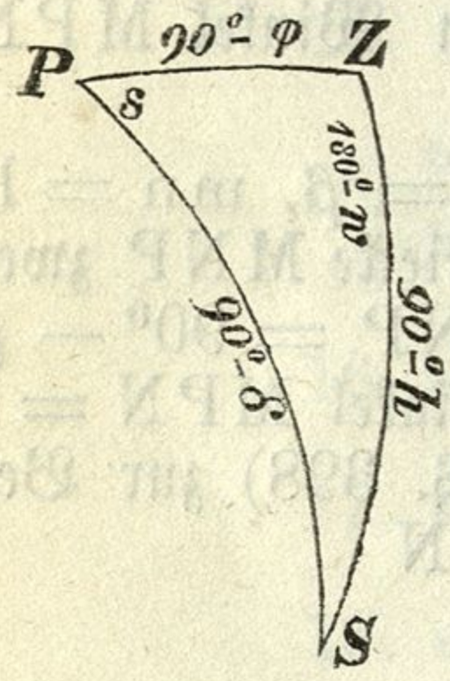
SD = h die Höhe des Gestirns,
RD = DZR = w das Azimuth,
SZ = 90° — h = z die Zenithdistanz;
SF = δ die Declination,
VF = α die Rectascension,
QF = QPF = s der Stundenwinkel,
SP = 90° — δ = p die Poldistanz in Bezug auf den Aequator;

SG = β die Breite, VG = λ die Länge,
SL = 90° — β die Poldistanz des Gestirns in Beziehung auf die Ekliptik.

Ferner ist V der Frühlingsnachtgleichepunct, HP = φ die Polhöhe des Ortes der Erde, dessen Zenith Z ist, und der Winkel QVC oder der Bogen LP = ε die Schiefe der Ekliptik.

§. **408.** 1. Die Höhe h und das Azimuth w eines Gestirns sind nebst der Polhöhe φ des Ortes gegeben; man suche den Stundenwinkel s und die Declination δ.

Fig. 258.



In dem Dreiecke ZPS (Fig. 258) sind zwei Seiten ZS = 90° — h und ZP = 90° — φ sammt dem eingeschlossenen Winkel Z = 180° — w bekannt, und der Winkel P = s nebst der Seite PS = 90° — δ zu suchen.

Setzt man mit Rücksicht auf §. 398

a = 90° — h, A = s,
b = 90° — φ,
c = 90° — δ, C = 180° — w,

so erhält man zur Berechnung von δ die Gleichung

$$\sin \delta = \frac{\sin h \sin (\varphi - m)}{\cos m},$$

wo tang m = cot h cos w ist.

Der Stundenwinkel ergibt sich dann aus

$$\sin s = \frac{\sin w \cos h}{\cos \delta}.$$

2. Wenn die Poldistanz 90° — δ = p eines Gestirns, dessen Zenithdistanz 90° — h = z und die Aequatorhöhe 90° — φ = ψ des Ortes gegeben sind, den Stundenwinkel s zu bestimmen.

Aus §. 402 ergibt sich

$$\text{tang} \frac{s}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(z + p - \psi) \sin \frac{1}{2}(z - p + \psi)}{\sin \frac{1}{2}(z + p + \psi) \sin \frac{1}{2}(p + \psi - z)}}.$$

§. **409.** 1. Wenn die Declination δ, der Stundenwinkel s und die Polhöhe φ bekannt sind, die Höhe h und das Azimuth w zu berechnen.

Die Auflösung ist derjenigen in §. 408, 1 ähnlich.

2. Wenn h, δ und φ gegeben sind, s zu finden.

Nach §. 402 ist

$$\text{tang} \frac{s}{2} = \sqrt{\frac{\sin \{45^0 - \frac{1}{2}(h + \delta - \varphi)\} \sin \{45^0 - \frac{1}{2}(h + \varphi - \delta)\}}{\sin \{45^0 + \frac{1}{2}(h + \delta + \varphi)\} \sin \{45^0 - \frac{1}{2}(\delta + \varphi - h)\}}}.$$

§. **410.** Die Zeit des Auf- und Unterganges eines Gestirns zu bestimmen.

Das sphärische Dreieck ZPS (Fig. 258) gibt mit Rücksicht auf die Formeln II) in §. 396 den Ausdruck:

$$\sin h = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos s.$$

Für den Auf- und Untergang des Gestirns ist nun $h = 0$, daher

$$0 = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos s,$$

woraus $$\cos s = - \operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} \varphi, \text{ oder}$$

$$\cos (180^0 - s) = \operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} \varphi$$

folgt, worin s den Stundenwinkel des auf- und untergehenden Sternes oder die Zeit ausdrückt, welche zwischen der Culmination und dem Auf- oder Untergange desselben enthalten ist, und der halbe Tagbogen des Gestirns heißt.

Z. B. Wie groß ist für Wien der halbe Tagbogen der Sonne am 13. Mai, wo ihre Declination $\delta = 18^0\,20'$ beträgt?

Für Wien ist die Polhöhe $\varphi = 48^0\,12'\,35''$. Man hat daher

$$\log \operatorname{tang} \delta = 9{\cdot}520\,305$$
$$\log \operatorname{tang} \varphi = 10{\cdot}048\,761$$
$$\log \cos (180^0 - s) = 9{\cdot}569\,066$$
$$180^0 - s = 68^0\,14'\,21''$$
$$\text{und } s = 111^0\,45'\,39''.$$

Zur Verwandlung dieses Bogens in Zeit hat man die Proportion

$$360^0 : 111^0\,45'\,39'' = 24 \text{ Stunden} : x \text{ Stunden},$$

woraus $x = 7^h\,27'\,2{\cdot}6''$ folgt.

Für die Sonne ist s, in Zeit ausgedrückt, zugleich die Sonnenzeit ihres Unterganges und $24^h - s$ jene des Aufganges. Am 13. Mai geht also in Wien die Sonne um $7^h\,27'\,2{\cdot}6''$ Abends unter und um $16^h\,32'\,57{\cdot}4''$, d. i. um $4^h\,32'\,57{\cdot}4''$ Morgens auf.

Für andere Gestirne muß man, wenn die Sonnenzeit der Culmination bekannt ist, von ihr s in Zeit subtrahiren, um die Sonnenzeit des Aufganges, und zu ihr s in Zeit addiren, um die Sonnenzeit des Unterganges zu berechnen.

Zusatz. Der halbe Tagbogen der Sonne doppelt genommen gibt die Tageslänge.

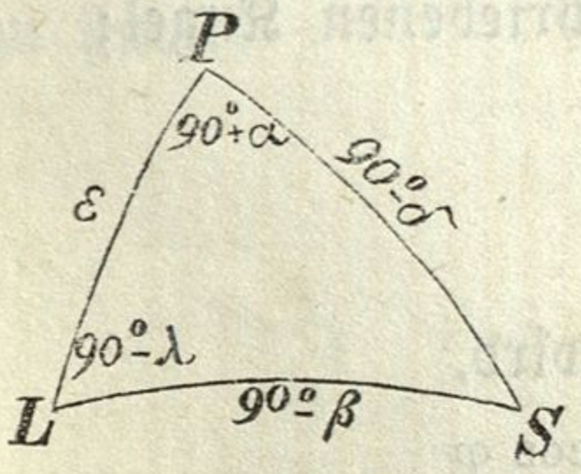
Da in den Sonnenwenden die Declination $\pm \delta$ der Sonne gleich der Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^0\,28'$ ist, so wird durch

$$\cos (180^0 - s) = \pm \operatorname{tang} \varepsilon \operatorname{tang} \varphi$$

die Dauer des längsten und des kürzesten Tages bestimmt.

§. **411.** Es seien die Rectascension α und die Declination δ eines Gestirns nebst der Schiefe der Ekliptik ε gegeben; man suche die Länge λ und die Breite β.

Fig. 259.



In dem Dreiecke LPS (Fig. 259) sind zwei Seiten $LP = \varepsilon$ (§. 407) und $PS = 90^0 - \delta$ nebst dem eingeschlossenen Winkel $P = 90^0 + \alpha$ gegeben und der Winkel $L = 90^0 - \lambda$ nebst der Seite $LS = 90^0 - \beta$ zu suchen. Aus den in §. 398 aufgestellten Auflösungsformeln folgt nun, wenn man darin $a = 90^0 - \delta$, $b = \varepsilon$, $c = 90^0 - \beta$, $A = 90^0 - \lambda$ und $C = 90^0 + \alpha$ setzt,

$$\sin \beta = \frac{\sin \delta \cos (\varepsilon + n)}{\cos n},$$

wo $\operatorname{tang} n = \cot \delta \sin \alpha$ ist.

Zur Bestimmung von λ hat man dann

$$\cos\lambda = \frac{\cos\alpha\,\cos\delta}{\cos\beta}.$$

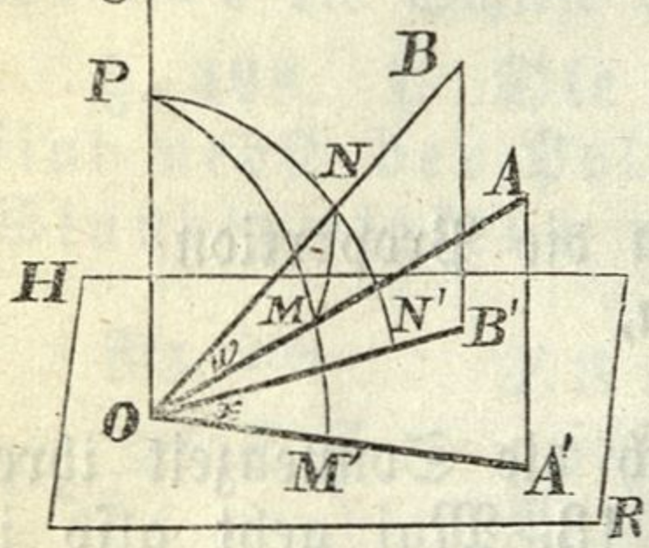
Zusatz. Ebenso geschieht auch die Auflösung der umgekehrten Aufgabe: Die Größen α und δ zu bestimmen, wenn λ, β und ε gegeben sind.

2. Aufgaben aus der Stereometrie.

§. **412.** Die in §§. 393, dann 395—397 entwickelten Relationen zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreieckes enthalten (§. 268) zugleich auch die Relationen zwischen den Seiten (Kantenwinkeln) und den Winkeln (Flächenwinkeln) einer dreiseitigen Ecke.

1. Einen im Raume gemessenen Winkel auf den Horizont zu reduciren.

Fig. 260.



Es sei $AOB = w$ (Fig. 260) ein im Raume gemessener Winkel, OA' und OB' seien die Projectionen seiner Schenkel auf die Horizontalebene HR, $AOA' = \alpha$ und $BOB' = \beta$ die Neigungswinkel derselben gegen den Horizont; zu suchen ist der Winkel $A'OB' = x$, den die beiden Projectionen in der Horizontalebene bilden.

Die Ebenen der Neigungswinkel AOA' und AOB' schneiden sich erweitert in der Geraden OC, welche auf der Horizontalebene senkrecht steht (§. 219). Beschreibt man nun in der dreiseitigen Ecke $OABC$ aus O eine Kugel, deren Oberfläche die Kanten der Ecke in den Puncten M, N und P schneidet, so erhält man das sphärische Dreieck MNP, in welchem die drei Seiten $MN = w$, $MP = 90^0 - \alpha$, $NP = 90^0 - \beta$ bekannt sind, und der Winkel P den gesuchten Winkel x darstellt.

Nach §. 402 erhält man demnach

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cos s\,\cos(s-w)}{\cos\alpha\,\cos\beta}},$$

wenn $\alpha + \beta + w = 2s$ gesetzt wird.

2. Ein regelmäßiges Polyeder wird von p nseitigen Vielecken, von denen je m in einer Ecke zusammenstoßen und deren Seite a ist, eingeschlossen; man suche (§. 250 und Fig. 194)

a) den halben Neigungswinkel $JLO = \frac{N}{2}$ zweier in einer Kante zusammenstoßender Seitenflächen;
b) den Halbmesser $OJ = r$ der dem Polyeder eingeschriebenen Kugel;
c) den Halbmesser $OA = R$ der dem Polyeder umschriebenen Kugel;
d) die Oberfläche O; und
e) den Cubikinhalt K des Polyeders.

Aus der dreiseitigen Ecke $OJLA$ erhält man,

wenn $\frac{180^0}{m} = \varphi$ und $\frac{180^0}{n} = \psi$ gesetzt wird,

$$\cos AOL = \frac{\cos\psi}{\sin\varphi} \text{ und } \cos JOL = \frac{\cos\varphi}{\sin\psi};$$

daher ist a) $\sin \frac{N}{2} = \cos JOL = \frac{\cos \varphi}{\sin \psi}$,

b) $r = \frac{a}{2} \cot \psi \operatorname{tang} \frac{N}{2}$, c) $R = \frac{a}{2} \operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \frac{N}{2}$,

d) $O = \frac{n p a^2}{4} \cot \psi$, e) $K = \frac{n p a^3}{24} \cot \psi^2 \operatorname{tang} \frac{N}{2}$.

3. Aus den drei zusammenstoßenden Kanten a, b, c eines schiefwinkligen Parallelepipedes und den Winkeln γ, β, α, welche jene Seiten mit einander bilden, den Inhalt P des Parallelepipeds zu bestimmen.

Nimmt man a und b als zwei Grundkanten an und bezeichnet den Neigungswinkel der Seitenkante c gegen die Grundfläche durch w, so erhält man zunächst

$$P = a b c \sin \gamma \sin w.$$

Denkt man sich nun zu der Ecke, in welcher die Kanten a, b, c zusammentreffen, ein sphärisches Dreieck gebildet, so sind α, β, γ dessen Seiten; der Neigungswinkel w erscheint in diesem Dreiecke als der auf die Seite γ durch den gegenüberliegenden Scheitel senkrecht gelegte Bogen. Unter Berücksichtigung der §§. 395 und 402 findet man daher

$$\sin w = \frac{2}{\sin \gamma} \sqrt{\sin s \sin (s - \alpha) \sin (s - \beta) \sin (s - \gamma)},$$

wenn $\alpha + \beta + \gamma = 2s$ gesetzt wird; somit ist

$$P = 2 a b c \sqrt{\sin s \sin (s - \alpha) \sin (s - \beta) \sin (s - \gamma)}.$$

3. Uebungsaufgaben.

§. **413.** 1. Berechne die Entfernung je zweier der folgenden Städte (§. 405)

Wien	48°	12′	35″	Breite,	34°	2′	49″ Länge.
Prag	50°	5′	18″	"	32°	5′	— "
Graz	47°	4′	20″	"	33°	6′	26″ "
Triest	45°	38′	37″	"	31°	26′	12″ "
Berlin	52°	30′	16″	"	31°	3′	34″ "
Paris	48°	50′	13″	"	20°	—	— "
Rom	41°	53′	54″	"	40°	9′	30″ "
Petersburg	59°	56′	30″	"	47°	58′	13″ "
Constantinopel	41°	1′	27″	"	45°	35′	15″ "

2. Bestimme für jede der vorgenannten Städte die Dauer des längsten und des kürzesten Tages (§. 410, Zusatz).

3. Bestimme den Neigungswinkel zweier Flächen eines a) Tetraeders, b) Oktaeders, c) Dodekaeders, d) Ikosaeders (§. 412, 2).

4. Aus drei in einer Ecke zusammentreffenden Kanten einer dreiseitigen Pyramide und den von ihnen gebildeten Winkeln den Cubikinhalt der Pyramide zu finden.

Vierter Theil.

Anwendung der Algebra auf die Geometrie.

Erster Abschnitt.

Algebraische Lösung geometrischer Aufgaben.

§. **414.** Drückt man gegebene Linien, indem man ihr Verhältniß zur Längeneinheit bestimmt, durch Zahlen aus, so erhält man auch für andere Raumgrößen (Linien, Flächen oder Körper), welche von jenen Linien auf eine vorgeschriebene Art abhängen, bestimmte Zahlausdrücke. Sind z. B. a und b die Maßzahlen der Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes, so ist $\sqrt{a^2 + b^2}$ der Zahlausdruck für die Hypotenuse. Umgekehrt kann ein Zahlausdruck von der Form $\sqrt{a^2 + b^2}$ wieder in seiner geometrischen Bedeutung hergestellt werden, indem man ihn als die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes construirt, dessen Katheten a und b Längeneinheiten enthalten.

Hieraus ergibt sich die Möglichkeit, die Algebra auch auf die Lösung geometrischer Aufgaben anzuwenden, indem man die Maßzahlen der gegebenen und der gesuchten Größen nach entsprechenden geometrischen Lehrsätzen zu Gleichungen verbindet, diese auflöst und die erhaltenen algebraischen Resultate wieder auf ihre geometrische Bedeutung zurückführt.

I. Geometrische Construction algebraischer Ausdrücke.

§. **415.** Einen algebraischen Ausdruck geometrisch construiren heißt, eine geometrische Zeichnung entwerfen, durch welche ein Raumgebilde erhalten wird, dessen Maßzahl der gegebene Zahlausdruck darstellt.

Wir beschränken uns hier auf Zahlausdrücke, welche sich aus der Auflösung der Gleichungen des ersten und zweiten Grades ergeben.

Jeder algebraische Ausdruck, der sich durch gerade Linien und Kreise construiren läßt, kann auf eine der folgenden Grundformen zurückgeführt werden:

1. $x = a + b$. Um diesen Ausdruck zu construiren, trägt man auf einer Geraden $AB = a$ und $BC = b$ auf, wodurch die Summe $a + b$ als eine einzige Strecke AC erscheint.

2. $x = a - b$. Die Construction besteht darin, daß man auf einer Geraden von A aus in einer bestimmten Richtung $AB = a$, und dann von B aus in der entgegengesetzten Richtung $BC = b$ aufträgt; die Strecke AC stellt dann die Differenz $a - b$ dar.

Ist $b > a$, also x negativ, so erscheint AC von A aus in einer Richtung, welche der ursprünglich angenommenen entgegengesetzt ist.

3. $x = \frac{a\,b}{c}$. Man construirt zu den Strecken c, a, b die vierte geometrische Proportionale (§. 114, 1).

4. $x = \frac{b^2}{c}$. Hier ist x die dritte stetige Proportionale zu c und b. Die Construction erfolgt nach 3., indem man $a = b$ annimmt; man kann sich aber auch der in §. 114, Aufg. 2 unter 2. und 3. angeführten besonderen Constructionen bedienen.

5. $x = \sqrt{a\,b}$. Man construirt zu den Strecken a und b die mittlere geometrische Proportionale (§. 114, 3).

6. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ wird als die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes mit den gegebenen Katheten a und b construirt.

7. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ ist als eine Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes, in welchem a die Hypotenuse und b die andere Kathete ist, zu construiren.

Zu diesen Grundformen gehören noch die trigonometrischen Ausdrücke:

8. $x = c \sin \alpha = c \cos \beta$,

9. $x = b \operatorname{tang} \alpha = b \cot \beta$,

10. $x = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a}{\cos \beta}$,

11. $x = \frac{a}{\operatorname{tang} \alpha} = \frac{a}{\cot \beta}$,

deren Construction als Katheten oder Hypotenusen von rechtwinkligen Dreiecken sich aus §. 361 ergibt.

§. **416.** Die Construction zusammengesetzter algebraischer Ausdrücke läßt sich immer auf die Construction der vorhergehenden Grundformen zurückführen. Dabei ist darauf zu sehen, daß die Darstellung nicht in verschiedene Einzelconstructionen zerrissen, sondern möglichst an einer und derselben Figur als ein in einander greifendes Ganzes ausgeführt werde.

Beispiele.

1. $x = a + b - c + d - e$.

Man hat $x = a + b + d - (c + e)$. Construirt man daher $a + b + d = m$, dann $c + e = n$, und endlich $m - n = x$, so ist die Aufgabe gelöst.

2. Man soll $x = \frac{a\,b\,c}{d\,f}$ construiren.

Es ist $x = \frac{a\,b}{d} \cdot \frac{c}{f}$. Man construire daher zuerst $\frac{a\,b}{d} = m$, und dann $\frac{m\,c}{f} = x$.

3. Es sei $x = \frac{a\,b + c\,d}{e}$ zu construiren.

Man construire $\frac{a\,b}{e} = m$, $\frac{c\,d}{e} = n$, und endlich $m + n = x$.

4. $x = \sqrt{2\,a^2}$. Man construire entweder $x = \sqrt{a^2 + a^2}$ oder $x = \sqrt{2\,a \,.\, a}$.

5. $x = \sqrt{3\,a^2}$. Man construirt entweder $\sqrt{(2\,a)^2 - a^2}$ oder $\sqrt{3\,a \,.\, a}$.

6. $x = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$ wird unter der Form $x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ oder

$x = \sqrt{\frac{a}{2} \,.\, a}$ construirt.

Diese Aufgabe bietet, da b aus sin b zu bestimmen ist, nur in besonderen Fällen eine bestimmte Auflösung. Zweideutige Fälle treten, wie man sich durch ähnliche Folgerungen, wie in §. 400, überzeugen kann, ein, wenn

$$a < 90^0,\ A + B < 180^0 \text{ und } A < B \text{ oder}$$
$$a > 90^0,\ A + B > 180^0 \text{ und } A > B \text{ ist.}$$

Nimmt man z. B. $a = 45^0$, $b = 25^0$, $A = 92^0\ 1'\ 9{\cdot}8''$ an, so findet man durch ähnliche Rechnungen, wie in §. 400,

$$B = 36^0\ 40'\ 37'',\ c = 37^0\ 47'\ 19{\cdot}4'',\ C = 60^0.$$

§. **402.** V. Gegeben alle drei Seiten a, b und c.

Man wird sich hier der Formeln des Systems II) bedienen, welche jedoch vor ihrem Gebrauche noch eine bequemere Einrichtung erhalten müssen.

Um aus der Gleichung

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

für den Winkel A eine logarithmisch brauchbare Formel abzuleiten, hat man

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},\ \text{daher}$$

$$1 - \cos A = \frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\sin b \sin c},$$

$$1 + \cos A = \frac{\sin b \sin c - \cos b \cos c + \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a - \cos (b + c)}{\sin b \sin c},$$

oder mit Rücksicht auf §. 354, Formeln 24) und 23)

$$\left(\sin \frac{A}{2}\right)^2 = \frac{\sin \frac{1}{2} (a + b - c) \sin \frac{1}{2} (a - b + c)}{\sin b \sin c},$$

$$\left(\cos \frac{A}{2}\right)^2 = \frac{\sin \frac{1}{2} (a + b + c) \sin \frac{1}{2} (b + c - a)}{\sin b \sin c}.$$

Setzt man nun $\frac{1}{2} (a + b + c) = s$, daher

$$\frac{1}{2} (b + c - a) = s - a,$$
$$\frac{1}{2} (a - b + c) = s - b,$$
$$\frac{1}{2} (a + b - c) = s - c,\ \text{so erhält man}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin b \sin c}},$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - a)}{\sin b \sin c}}.$$

Daraus folgt

$$\text{tang} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin s \sin (s - a)}}.$$

Auf gleiche Weise findet man

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s - a) (\sin s - c)}{\sin a \sin c}}, \qquad \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s - a) \sin (s - b)}{\sin a \sin b}},$$

$$\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - b)}{\sin a \sin c}}, \qquad \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - c)}{\sin a \sin b}},$$

$$\text{tang} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s - a) \sin (s - c)}{\sin s \sin (s - b)}}; \qquad \text{tang} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s - a) (\sin (s - b)}{\sin s \sin (s - c)}},$$

In Beziehung auf die größere oder geringere Brauchbarkeit der voranstehenden Formeln für die Rechnung gilt alles das, was wir über die Anwendbarkeit der in §. 369 entwickelten Formeln bemerkt haben.

Ist z. B. $a = 50^0\ 54'\ 32''$, $b = 37^0\ 47'\ 18''$, $c = 74^0\ 51'\ 50''$ so hat man

$a = 50^0\ 54'\ 32''$
$b = 37^0\ 47'\ 18''$
$c = 74^0\ 51'\ 50''$
$a+b+c = 163^0\ 33'\ 40''$
$s = 81^0\ 46'\ 50''$
$s-a = 30^0\ 52'\ 18''$
$s-b = 43^0\ 59'\ 32''$
$s-c = 6^0\ 55'$

$\log \sin (s-b) = 9{\cdot}841\ 710$
$\log \sin (s-c) = 9\,080\ 719$
$18{\cdot}922\ 429$
$\log \sin s = 9{\cdot}995\ 516$
$\log \sin (s-a) = 9{\cdot}710\ 216$
$19{\cdot}216\ 697$

$\log \operatorname{tang} \frac{A}{2} = 9{\cdot}608\ 3485$
$\frac{A}{2} = 22^0\ 5'\ 20{\cdot}4''$
$A = 44^0\ 10'\ 40{\cdot}8''$

$\log \sin (s-a) = 9{\cdot}710\ 216$
$\log \sin (s-c) = 9{\cdot}080\ 719$
$18{\cdot}790\ 935$
$\log \sin s = 9{\cdot}995\ 516$
$\log \sin (s-b) = 9{\cdot}841\ 710$
$18\,953\ 709$

$\log \operatorname{tang} \frac{B}{2} = 9{\cdot}476\ 8545$
$\frac{B}{2} = 16^0\ 41'\ 22{\cdot}4''$
$B = 33^0\ 22'\ 44{\cdot}8''$

$\log \sin (s-a) = 9{\cdot}710\ 216$
$\log \sin (s-b) = 9{\cdot}841\ 710$
$19{\cdot}551\ 926$
$\log \sin s = 9{\cdot}995\ 516$
$\log \sin (s-c) = 9{\cdot}080\ 719$
$20{\cdot}475\ 691$

$\log \operatorname{tang} \frac{C}{2} = 10{\cdot}237\ 8455$
$\frac{C}{2} = 59^0\ 57'\ 32{\cdot}8''$
$C = 119^0\ 55'\ 5{\cdot}6''$

§. **403.** VI. Gegeben alle drei Winkel A, B und C.

Die gesuchten Stücke ergeben sich aus den Formeln in III), welche aber vorerst eine für die logarithmische Berechnung geeignete Form erhalten müssen.

Um aus der Gleichung

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

für a eine logarithmisch brauchbare Formel abzuleiten, hat man

$$\cos a = \frac{\cos B \cos C + \cos A}{\sin B \sin C}, \text{ daher}$$

$$1 - \cos a = \frac{\sin B \sin C - \cos B \cos C - \cos A}{\sin B \sin C},$$

$$1 + \cos a = \frac{\sin B \sin C + \cos B \cos C + \cos A}{\sin B \sin C},$$

woraus man, wenn $\frac{1}{2}(A + B + C) = S$ gesetzt wird, auf analoge Art, wie in §. 402, folgende Gleichungen erhält:

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-A)}{\sin B \sin C}},$$

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos (S-B) \cos (S-C)}{\sin B \sin C}},$$

$$\operatorname{tang} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-A)}{\cos (S-B) \cos (S-C)}};$$

$$\sin \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-B)}{\sin A \sin C}}, \quad \sin \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-C)}{\sin A \sin B}},$$

$$\cos \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\cos (S-A) \cos (S-C)}{\sin A \sin C}}, \quad \cos \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\cos (S-A) \cos (S-B)}{\sin A \sin B}},$$

$$\operatorname{tang} \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-B)}{\cos (S-A) \cos (S-C)}}; \quad \operatorname{tang} \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-C)}{\cos (S-A) \cos (S-A)}}.$$

Nimmt man z. B. $A = 107^0\,48'$, $B = 52^0\,30'$, $C = 38^0\,58'\,30''$, so findet man durch ähnliche Rechnung, wie in §. 402,

$a = 70^0\,22'\,43''$, $b = 51^0\,42'\,26''$, $c = 38^0\,28'\,49''$.

3. Uebungsaufgaben.

§. 404. Ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck, worin A den rechten Winkel vorstellt, aufzulösen, wenn gegeben sind:

1. $b = 127^0\,56'\,32''$, $c = 63^0\,15'\,48''$.
2. $b = 55^0\,18'\,41''$, $c = 5^0\,42'\,30''$.
3. $a = 154^0\,8'\,15''$, $c = 82^0\,18'\,27''$.
4. $b = 52^0\,60'\,2''$, $B = 78^0\,41'\,19''$.
5. $c = 65^0\,1'\,30''$, $C = 76^0\,35'\,5''$.
6. $c = 83^0\,12'\,38''$, $B = 65^0\,55'\,55''$.
7. $a = 95^0\,6'\,42''$, $C = 70^0\,40'\,25''$.
8. $a = 94^0\,23'\,10''$, $B = 50^0\,12'\,4''$.
9. $B = 88^0\,12'\,9''$, $C = 58^0\,58'\,22''$.
10. $B = 63^0\,15'\,12''$, $C = 135^0\,33'\,39''$.

Beweise, daß für jedes sphärische Dreieck folgende Gleichungen stattfinden:

11. $\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$;
12. $\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a$.

Aus den Gleichungen II) und II') in §. 396.

13. $\cot a \sin b = \cot A \sin C + \cos b \cos C$;
14. $\cot A \sin B = \cot a \sin c - \cos B \cos c$.

Aus den Systemen II) und II') mit Zuziehung von I).

15. $\dfrac{\text{tang } \frac{1}{2}(a+b)}{\text{tang } \frac{1}{2}(a-b)} = \dfrac{\text{tang } \frac{1}{2}(A+B)}{\text{tang } \frac{1}{2}(A-B)}$.

Aus den Neper'schen Gleichungen in III).

16. $\sin \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{1}{2}(A-B) \sin \frac{c}{2}$;
17. $\cos \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{c}{2}$;
18. $\sin \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{C}{2} = \sin \frac{1}{2}(A-B) \sin \frac{c}{2}$;
19. $\cos \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{C}{2} = \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{c}{2}$.

Die Gleichungen 16. — 19., welche die Gauß'schen Formeln heißen, ergeben sich aus den Gleichungen für $\sin\left(\frac{a}{2} \pm \frac{b}{2}\right)$ und $\cos\left(\frac{a}{2} \pm \frac{b}{2}\right)$ in den §§. 353 und 355, indem man in denselben die in §. 403 gefundenen Werthe von $\sin \frac{a}{2}$, $\cos \frac{a}{2}$, $\sin \frac{b}{2}$, $\cos \frac{b}{2}$ einsetzt.

Die Division der Gauß'schen Gleichungen führt auf die Neper'schen, die wir oben auf einem andern Wege abgeleitet haben.

Ein schiefwinkliges sphärisches Dreieck aufzulösen, wenn gegeben sind:

20. $a = 102^0\,13'\,24''$, $c = 75^0\,51'\,21''$, $B = 65^0\,31'\,54''$.
21. $b = 93^0\,48'\,40''$, $c = 71^0\,43'\,23''$, $A = 108^0\,5'\,28''$.
22. $A = 120^0\,55'\,35''$, $B = 69^0\,25'\,11''$, $c = 107^0\,52'\,24''$.
23. $B = 64^0\,35'\,32''$, $C = 71^0\,17'\,53''$, $a = 85^0\,13'\,58''$.
24. $a = 50^0\,48'\,29''$, $b = 63^0\,15'\,22''$, $A = 120^0\,55'\,35''$.
25. $b = 126^0\,8'\,29''$, $c = 83^0\,33'\,7''$, $B = 95^0\,52'\,41''$.
26. $A = 88^0\,13'\,23''$, $B = 151^0\,11'\,12''$, $b = 57^0\,35'\,35''$.

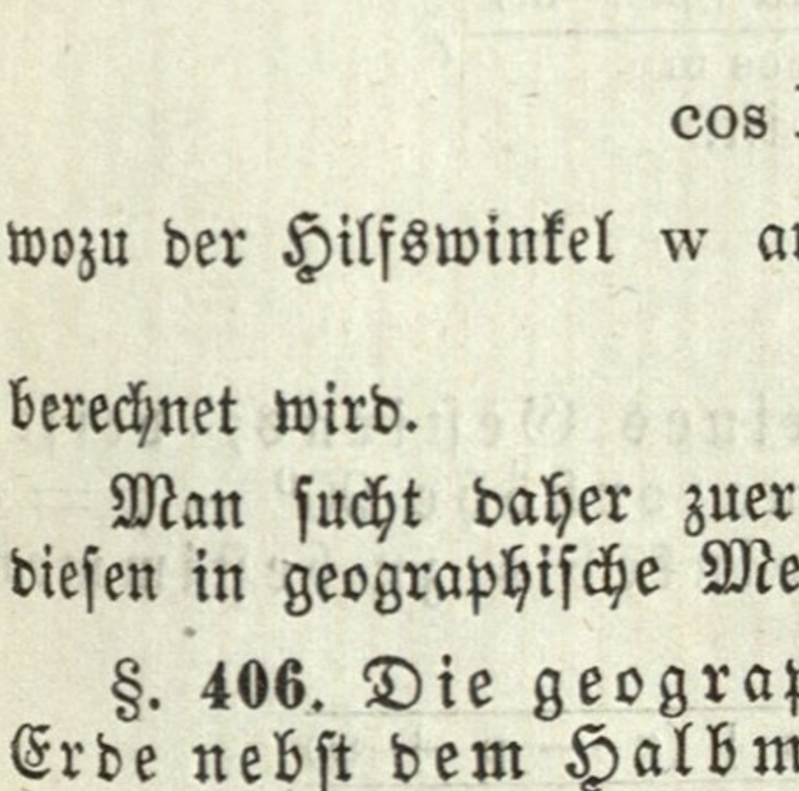
27. $A = 101^0\ 44'\ 20''$, $C = 78^0\ 43'\ 30''$, $a = 93^0\ 44'\ 45''$.
28. $a = 137^0\ 28'\ 37''$, $b = 55^0\ 57'\ 8''$, $c = 38^0\ 17'\ 35''$.
29. $a = 48^0\ 23'\ 57''$, $b = 59^0\ 27'\ 44''$, $c = 75^0\ 15'\ 42''$.
30. $A = 90^0\ 2'\ 9''$, $B = 88^0\ 58'\ 56''$, $C = 87^0\ 57'\ 56''$.
31. $A = 70^0\ 28'\ 37''$, $B = 48^0\ 17'\ 10''$, $C = 94^0\ 40'\ 27''$.

II. Anwendungen der sphärischen Trigonometrie.

1. Aufgaben aus der mathematischen Geographie und sphärischen Astronomie.

§. **405.** Aus den geographischen Breiten zweier Orte der Erdoberfläche und deren Längenunterschiede die Entfernung derselben, d. i. die Länge des zwischen ihnen liegenden Bogens eines größten Kreises zu bestimmen. (Die Erde wird als Kugel angenommen.)

Fig. 256.



Es seien M und N (Fig. 256) die beiden Orte, so ist ihre Entfernung MN ein Bogen eines größten Kugelkreises. Es sei ferner P der Pol und AQ der Aequator; dann sind Mm und Nn die Breiten dieser Orte, und mn deren Längenunterschied, welcher dem Winkel MPN gleich ist.

Setzt man $Mm = \alpha$, $Nn = \beta$, $mn = l$, so sind in dem sphärischen Dreiecke MNP zwei Seiten $MP = 90^0 - \alpha$ und $NP = 90^0 - \beta$ sammt dem eingeschlossenen Winkel $MPN = l$ gegeben, und man hat (nach §. 398) zur Bestimmung der dritten Seite MN

$$\cos MN = \frac{\sin\alpha\ \sin(\beta + w)}{\cos w},$$

wozu der Hilfswinkel w aus der Gleichung

$$\operatorname{tang} w = \cot\alpha \cos l$$

berechnet wird.

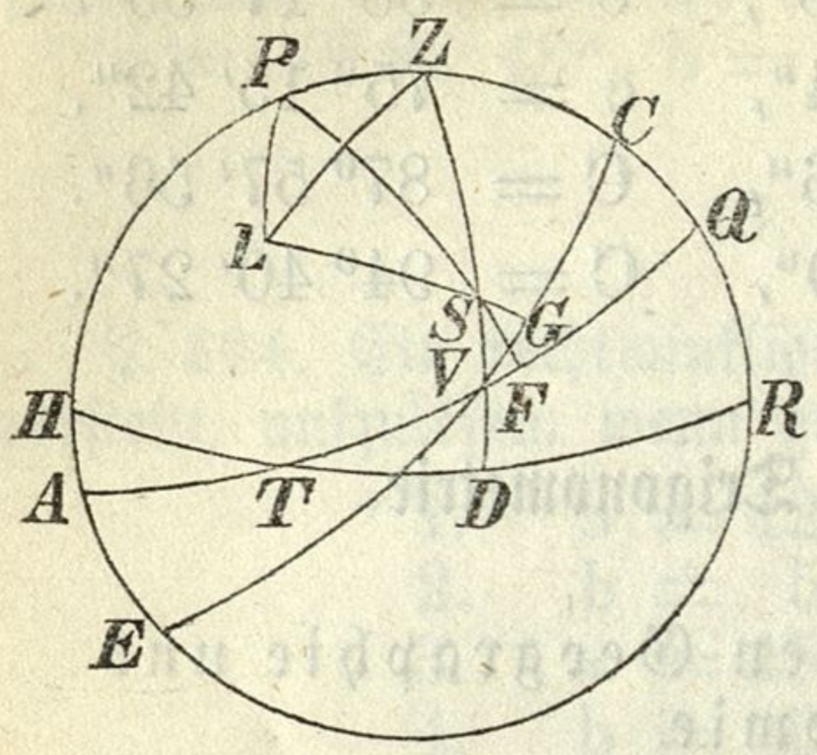
Man sucht daher zuerst w, daraus den Bogen MN, und verwandelt diesen in geographische Meilen, deren 15 auf einen Grad gehen.

§. **406.** Die geographische Breite und Länge dreier Orte der Erde nebst dem Halbmesser der letzteren ist gegeben; man suche die Seiten, die Winkel und den Flächeninhalt des durch jene Orte gelegten sphärischen Dreieckes.

Nach §. 405 erhält man zuerst die Seiten, nach §. 402 sodann die Winkel, und daraus nach §. 337 den Flächeninhalt des sphärischen Dreieckes.

§. **407.** Es sei S (Fig. 257) irgend ein Gestirn, Z der Pol des Horizontes HTR oder das Zenith, P der Pol des Aequators AVQ oder der nördliche Weltpol, L der Pol der Ekliptik EVC; ferner HZR der Meridian des

Fig. 257.



Ortes der Erde, dessen Zenith in Z ist. Zieht man durch S und durch die Pole Z, P, L die größten Kreise ZSD, PSF, LSG, welche somit folgeweise auf HR, AQ, EC senkrecht sind, so ist

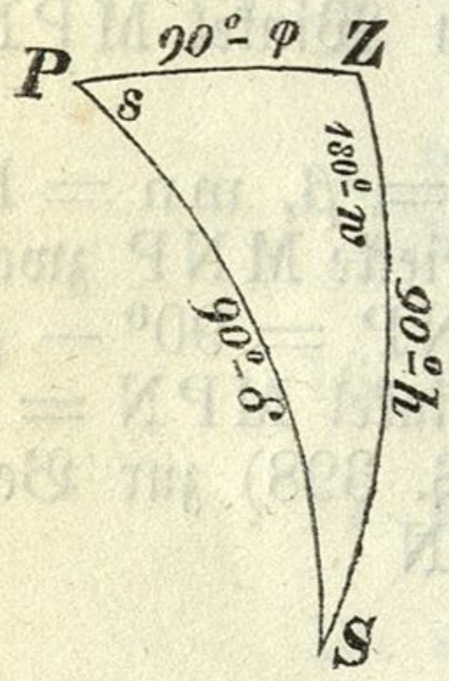
SD = h die Höhe des Gestirns,
RD = DZR = w das Azimuth,
SZ = 90° — h = z die Zenithdistanz;
SF = δ die Declination,
VF = α die Rectascension,
QF = QPF = s der Stundenwinkel,
SP = 90° — δ = p die Poldistanz in Bezug auf den Aequator;

SG = β die Breite, VG = λ die Länge,
SL = 90° — β die Poldistanz des Gestirns in Beziehung auf die Ekliptik.

Ferner ist V der Frühlingsnachtgleichepunct, HP = φ die Polhöhe des Ortes der Erde, dessen Zenith Z ist, und der Winkel QVC oder der Bogen LP = ε die Schiefe der Ekliptik.

§. **408.** 1. Die Höhe h und das Azimuth w eines Gestirns sind nebst der Polhöhe φ des Ortes gegeben; man suche den Stundenwinkel s und die Declination δ.

Fig. 258.



In dem Dreiecke ZPS (Fig. 258) sind zwei Seiten ZS = 90° — h und ZP = 90° — φ sammt dem eingeschlossenen Winkel Z = 180° — w bekannt, und der Winkel P = s nebst der Seite PS = 90° — δ zu suchen.

Setzt man mit Rücksicht auf §. 398

$$a = 90^0 - h,\ A = s,$$
$$b = 90^0 - \varphi,$$
$$c = 90^0 - \delta,\ C = 180^0 - w,$$

so erhält man zur Berechnung von δ die Gleichung

$$\sin \delta = \frac{\sin h \sin (\varphi - m)}{\cos m},$$

wo tang m = cot h cos w ist.

Der Stundenwinkel ergibt sich dann aus

$$\sin s = \frac{\sin w \cos h}{\cos \delta}.$$

2. Wenn die Poldistanz 90° — δ = p eines Gestirns, dessen Zenithdistanz 90° — h = z und die Aequatorhöhe 90° — φ = ψ des Ortes gegeben sind, den Stundenwinkel s zu bestimmen.

Aus §. 402 ergibt sich

$$\tan \frac{s}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(z + p - \psi) \sin \frac{1}{2}(z - p + \psi)}{\sin \frac{1}{2}(z + p + \psi) \sin \frac{1}{2}(p + \psi - z)}}.$$

§. **409.** 1. Wenn die Declination δ, der Stundenwinkel s und die Polhöhe φ bekannt sind, die Höhe h und das Azimuth w zu berechnen.

Die Auflösung ist derjenigen in §. 408, 1 ähnlich.

2. Wenn h, δ und φ gegeben sind, s zu finden.

Nach §. 402 ist

$$\tan \frac{s}{2} = \sqrt{\frac{\sin \{45^0 - \frac{1}{2}(h + \delta - \varphi)\} \sin \{45^0 - \frac{1}{2}(h + \varphi - \delta)\}}{\sin \{45^0 + \frac{1}{2}(h + \delta + \varphi)\} \sin \{45^0 - \frac{1}{2}(\delta + \varphi - h)\}}}.$$

§. **410.** Die Zeit des Auf- und Unterganges eines Gestirns zu bestimmen.

Das sphärische Dreieck ZPS (Fig. 258) gibt mit Rücksicht auf die Formeln II) in §. 396 den Ausdruck:

$$\sin h = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos s.$$

Für den Auf- und Untergang des Gestirns ist nun $h = 0$, daher

$$0 = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos s,$$

woraus $\cos s = -\operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} \varphi$, oder

$$\cos (180^0 - s) = \operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} \varphi$$

folgt, worin s den Stundenwinkel des auf- und untergehenden Sternes oder die Zeit ausdrückt, welche zwischen der Culmination und dem Auf- oder Untergange desselben enthalten ist, und der halbe Tagbogen des Gestirns heißt.

Z. B. Wie groß ist für Wien der halbe Tagbogen der Sonne am 13. Mai, wo ihre Declination $\delta = 18^0\,20'$ beträgt?

Für Wien ist die Polhöhe $\varphi = 48^0\,12'\,35''$. Man hat daher

$$\log \operatorname{tang} \delta = 9{\cdot}520\,305$$
$$\log \operatorname{tang} \varphi = 10{\cdot}048\,761$$
$$\log \cos (180^0 - s) = 9{\cdot}569\,066$$
$$180^0 - s = 68^0\,14'\,21''$$
$$\text{und } s = 111^0\,45'\,39''.$$

Zur Verwandlung dieses Bogens in Zeit hat man die Proportion

$$360^0 : 111^0\,45'\,39'' = 24 \text{ Stunden} : x \text{ Stunden},$$

woraus $x = 7^h\,27'\,2{\cdot}6''$ folgt.

Für die Sonne ist s, in Zeit ausgedrückt, zugleich die Sonnenzeit ihres Unterganges und $24^h - s$ jene des Aufganges. Am 13. Mai geht also in Wien die Sonne um $7^h\,27'\,2{\cdot}6''$ Abends unter und um $16^h\,32'\,57{\cdot}4''$, d. i. um $4^h\,32'\,57{\cdot}4''$ Morgens auf.

Für andere Gestirne muß man, wenn die Sonnenzeit der Culmination bekannt ist, von ihr s in Zeit subtrahiren, um die Sonnenzeit des Aufganges, und zu ihr s in Zeit addiren, um die Sonnenzeit des Unterganges zu berechnen.

Zusatz. Der halbe Tagbogen der Sonne doppelt genommen gibt die Tageslänge.

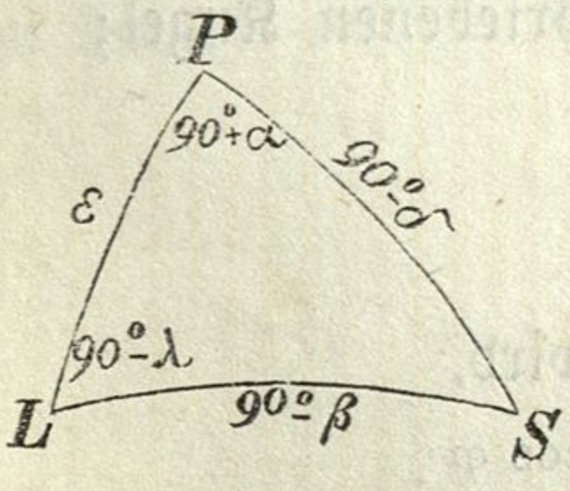
Da in den Sonnenwenden die Declination $\pm \delta$ der Sonne gleich der Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^0\,28'$ ist, so wird durch

$$\cos (180^0 - s) = \pm \operatorname{tang} \varepsilon \operatorname{tang} \varphi$$

die Dauer des längsten und des kürzesten Tages bestimmt.

§. **411.** Es seien die Rectascension α und die Declination δ eines Gestirns nebst der Schiefe der Ekliptik ε gegeben; man suche die Länge λ und die Breite β.

Fig. 259.



In dem Dreiecke LPS (Fig. 259) sind zwei Seiten $LP = \varepsilon$ (§. 407) und $PS = 90^0 - \delta$ nebst dem eingeschlossenen Winkel $P = 90^0 + \alpha$ gegeben und der Winkel $L = 90^0 - \lambda$ nebst der Seite $LS = 90^0 - \beta$ zu suchen. Aus den in §. 398 aufgestellten Auflösungsformeln folgt nun, wenn man darin $a = 90^0 - \delta$, $b = \varepsilon$, $c = 90^0 - \beta$, $A = 90^0 - \lambda$ und $C = 90^0 + \alpha$ setzt,

$$\sin \beta = \frac{\sin \delta \cos (\varepsilon + n)}{\cos n},$$

wo $\operatorname{tang} n = \cot \delta \sin \alpha$ ist.

Zur Bestimmung von λ hat man dann

$$\cos \lambda = \frac{\cos \alpha \cos \delta}{\cos \beta}.$$

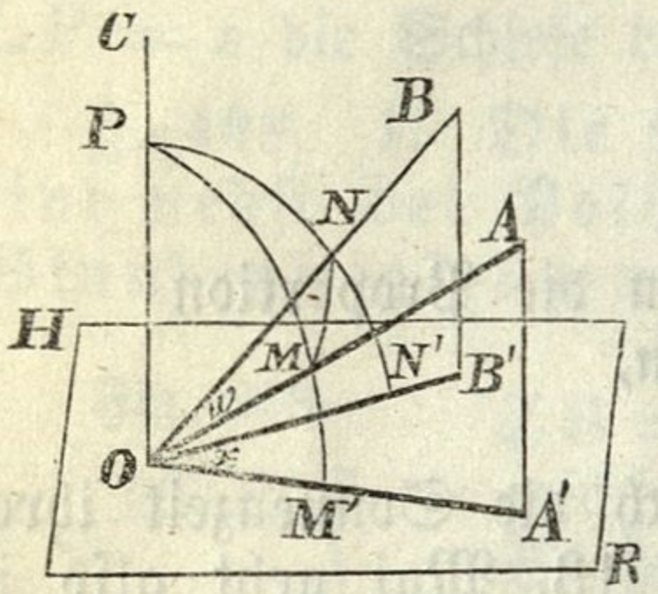
Zusatz. Ebenso geschieht auch die Auflösung der umgekehrten Aufgabe: Die Größen α und δ zu bestimmen, wenn λ, β und ε gegeben sind.

2. Aufgaben aus der Stereometrie.

§. **412.** Die in §§. 393, dann 395—397 entwickelten Relationen zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreieckes enthalten (§. 268) zugleich auch die Relationen zwischen den Seiten (Kantenwinkeln) und den Winkeln (Flächenwinkeln) einer dreiseitigen Ecke.

1. Einen im Raume gemessenen Winkel auf den Horizont zu reduciren.

Fig. 260.



Es sei $AOB = w$ (Fig. 260) ein im Raume gemessener Winkel, OA' und OB' seien die Projectionen seiner Schenkel auf die Horizontalebene HR, $AOA' = \alpha$ und $BOB' = \beta$ die Neigungswinkel derselben gegen den Horizont; zu suchen ist der Winkel $A'OB' = x$, den die beiden Projectionen in der Horizontalebene bilden.

Die Ebenen der Neigungswinkel AOA' und AOB' schneiden sich erweitert in der Geraden OC, welche auf der Horizontalebene senkrecht steht (§. 219). Beschreibt man nun in der dreiseitigen Ecke $OABC$ aus O eine Kugel, deren Oberfläche die Kanten der Ecke in den Puncten M, N und P schneidet, so erhält man das sphärische Dreieck MNP, in welchem die drei Seiten $MN = w$, $MP = 90^0 - \alpha$, $NP = 90^0 - \beta$ bekannt sind, und der Winkel P den gesuchten Winkel x darstellt.

Nach §. 402 erhält man demnach

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cos s \cos (s - w)}{\cos \alpha \cos \beta}},$$

wenn $\alpha + \beta + w = 2s$ gesetzt wird.

2. Ein regelmäßiges Polyeder wird von p nseitigen Vielecken, von denen je m in einer Ecke zusammenstoßen und deren Seite a ist, eingeschlossen; man suche (§. 250 und Fig. 194)

a) den halben Neigungswinkel $JLO = \frac{N}{2}$ zweier in einer Kante zusammenstoßender Seitenflächen;
b) den Halbmesser $OJ = r$ der dem Polyeder eingeschriebenen Kugel;
c) den Halbmesser $OA = R$ der dem Polyeder umschriebenen Kugel;
d) die Oberfläche O; und
e) den Cubikinhalt K des Polyeders.

Aus der dreiseitigen Ecke $OJLA$ erhält man,

wenn $\frac{180^0}{m} = \varphi$ und $\frac{180^0}{n} = \psi$ gesetzt wird,

$$\cos AOL = \frac{\cos \psi}{\sin \varphi} \text{ und } \cos JOL = \frac{\cos \varphi}{\sin \psi};$$

daher ist a) $\sin \frac{N}{2} = \cos JOL = \frac{\cos \varphi}{\sin \psi}$,

b) $r = \frac{a}{2} \cot \psi \operatorname{tang} \frac{N}{2}$, c) $R = \frac{a}{2} \operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \frac{N}{2}$,

d) $O = \frac{n p a^2}{4} \cot \psi$, e) $K = \frac{npa^3}{24} \cot \psi^2 \operatorname{tang} \frac{N}{2}$.

3. Aus den drei zusammenstoßenden Kanten a, b, c eines schiefwinkligen Parallelepipedes und den Winkeln γ, β, α, welche jene Seiten mit einander bilden, den Inhalt P des Parallelepipeds zu bestimmen.

Nimmt man a und b als zwei Grundkanten an und bezeichnet den Neigungswinkel der Seitenkante c gegen die Grundfläche durch w, so erhält man zunächst

$$P = abc \sin \gamma \sin w.$$

Denkt man sich nun zu der Ecke, in welcher die Kanten a, b, c zusammentreffen, ein sphärisches Dreieck gebildet, so sind α, β, γ dessen Seiten; der Neigungswinkel w erscheint in diesem Dreiecke als der auf die Seite γ durch den gegenüberliegenden Scheitel senkrecht gelegte Bogen. Unter Berücksichtigung der §§. 395 und 402 findet man daher

$$\sin w = \frac{2}{\sin \gamma} \sqrt{\sin s \sin (s - \alpha) \sin (s - \beta) \sin (s - \gamma)},$$

wenn $\alpha + \beta + \gamma = 2s$ gesetzt wird; somit ist

$$P = 2 abc \sqrt{\sin s \sin (s - \alpha) \sin (s - \beta) \sin (s - \gamma)}.$$

3. Uebungsaufgaben.

§. **413.** 1. Berechne die Entfernung je zweier der folgenden Städte (§. 405)

Wien	48°	12′	35″	Breite,	34°	2′	49″ Länge.
Prag	50°	5′	18″	„	32°	5′	— „
Graz	47°	4′	20″	„	33°	6′	26″ „
Triest	45°	38′	37″	„	31°	26′	12″ „
Berlin	52°	30′	16″	„	31°	3′	34″ „
Paris	48°	50′	13″	„	20°	—	— „
Rom	41°	53′	54″	„	40°	9′	30″ „
Petersburg	59°	56′	30″	„	47°	58′	13″ „
Constantinopel	41°	1′	27″	„	45°	35′	15″ „

2. Bestimme für jede der vorgenannten Städte die Dauer des längsten und des kürzesten Tages (§. 410, Zusatz).

3. Bestimme den Neigungswinkel zweier Flächen eines a) Tetraeders, b) Oktaeders, c) Dodekaeders, d) Ikosaeders (§. 412, 2).

4. Aus drei in einer Ecke zusammentreffenden Kanten einer dreiseitigen Pyramide und den von ihnen gebildeten Winkeln den Cubikinhalt der Pyramide zu finden.

Vierter Theil.

Anwendung der Algebra auf die Geometrie.

Erster Abschnitt.

Algebraische Lösung geometrischer Aufgaben.

§. **414.** Drückt man gegebene Linien, indem man ihr Verhältniß zur Längeneinheit bestimmt, durch Zahlen aus, so erhält man auch für andere Raumgrößen (Linien, Flächen oder Körper), welche von jenen Linien auf eine vorgeschriebene Art abhängen, bestimmte Zahlausdrücke. Sind z. B. a und b die Maßzahlen der Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes, so ist $\sqrt{a^2 + b^2}$ der Zahlausdruck für die Hypotenuse. Umgekehrt kann ein Zahlausdruck von der Form $\sqrt{a^2 + b^2}$ wieder in seiner geometrischen Bedeutung hergestellt werden, indem man ihn als die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes construirt, dessen Katheten a und b Längeneinheiten enthalten.

Hieraus ergibt sich die Möglichkeit, die Algebra auch auf die Lösung geometrischer Aufgaben anzuwenden, indem man die Maßzahlen der gegebenen und der gesuchten Größen nach entsprechenden geometrischen Lehrsätzen zu Gleichungen verbindet, diese auflöst und die erhaltenen algebraischen Resultate wieder auf ihre geometrische Bedeutung zurückführt.

I. Geometrische Construction algebraischer Ausdrücke.

§. **415.** Einen algebraischen Ausdruck geometrisch construiren heißt, eine geometrische Zeichnung entwerfen, durch welche ein Raumgebilde erhalten wird, dessen Maßzahl der gegebene Zahlausdruck darstellt.

Wir beschränken uns hier auf Zahlausdrücke, welche sich aus der Auflösung der Gleichungen des ersten und zweiten Grades ergeben.

Jeder algebraische Ausdruck, der sich durch gerade Linien und Kreise construiren läßt, kann auf eine der folgenden Grundformen zurückgeführt werden:

1. $x = a + b$. Um diesen Ausdruck zu construiren, trägt man auf einer Geraden $AB = a$ und $BC = b$ auf, wodurch die Summe $a + b$ als eine einzige Strecke AC erscheint.

2. $x = a - b$. Die Construction besteht darin, daß man auf einer Geraden von A aus in einer bestimmten Richtung $AB = a$, und dann von B aus in der entgegengesetzten Richtung $BC = b$ aufträgt; die Strecke AC stellt dann die Differenz $a - b$ dar.

Ist $b > a$, also x negativ, so erscheint AC von A aus in einer Richtung, welche der ursprünglich angenommenen entgegengesetzt ist.

3. $x = \frac{a\,b}{c}$. Man construirt zu den Strecken c, a, b die vierte geometrische Proportionale (§. 114, 1).

4. $x = \frac{b^2}{c}$. Hier ist x die dritte stetige Proportionale zu c und b. Die Construction erfolgt nach 3., indem man $a = b$ annimmt; man kann sich aber auch der in §. 114, Aufg. 2 unter 2. und 3. angeführten besonderen Constructionen bedienen.

5. $x = \sqrt{a\,b}$. Man construirt zu den Strecken a und b die mittlere geometrische Proportionale (§. 114, 3).

6. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ wird als die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes mit den gegebenen Katheten a und b construirt.

7. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ ist als eine Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes, in welchem a die Hypotenuse und b die andere Kathete ist, zu construiren.

Zu diesen Grundformen gehören noch die trigonometrischen Ausdrücke:

8. $x = c \sin \alpha = c \cos \beta$,

9. $x = b \operatorname{tang} \alpha = b \cot \beta$,

10. $x = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a}{\cos \beta}$,

11. $x = \frac{a}{\operatorname{tang} \alpha} = \frac{a}{\cot \beta}$,

deren Construction als Katheten oder Hypotenusen von rechtwinkligen Dreiecken sich aus §. 361 ergibt.

§. **416.** Die Construction zusammengesetzter algebraischer Ausdrücke läßt sich immer auf die Construction der vorhergehenden Grundformen zurückführen. Dabei ist darauf zu sehen, daß die Darstellung nicht in verschiedene Einzelconstructionen zerrissen, sondern möglichst an einer und derselben Figur als ein in einander greifendes Ganzes ausgeführt werde.

Beispiele.

1. $x = a + b - c + d - e$.

Man hat $x = a + b + d - (c + e)$. Construirt man daher $a + b + d = m$, dann $c + e = n$, und endlich $m - n = x$, so ist die Aufgabe gelöst.

2. Man soll $x = \frac{a\,b\,c}{d\,f}$ construiren.

Es ist $x = \frac{a\,b}{d} \cdot \frac{c}{f}$. Man construire daher zuerst $\frac{a\,b}{d} = m$, und dann $\frac{m\,c}{f} = x$.

3. Es sei $x = \frac{a\,b + c\,d}{e}$ zu construiren.

Man construire $\frac{a\,b}{e} = m$, $\frac{c\,d}{e} = n$, und endlich $m + n = x$.

4. $x = \sqrt{2\,a^2}$. Man construire entweder $x = \sqrt{a^2 + a^2}$ oder $x = \sqrt{2\,a \,.\, a}$.

5. $x = \sqrt{3\,a^2}$. Man construirt entweder $\sqrt{(2\,a)^2 - a^2}$ oder $\sqrt{3\,a \,.\, a}$.

6. $x = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$ wird unter der Form $x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ oder $x = \sqrt{\frac{a}{2} \,.\, a}$ construirt.

7. $x = \sqrt{\frac{a^2 b}{c}}$. Man construire zuerst $\frac{a^2}{c} = m$, und dann $\sqrt{m.b} = x$.

8. $x = \sqrt{a^2 + bc}$. Man setze $bc = m^2$ und construire $\sqrt{bc} = m$, so ist dann $\sqrt{a^2 + m^2} = x$.

9. $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + e^2}$. Setzt man $a^2 + b^2 = m^2$, $m^2 + e^2 = n^2$, $n^2 - c^2 = p^2$, und construirt $m = \sqrt{a^2 + b^2}$, $n = \sqrt{m^2 + e^2}$, $p = \sqrt{n^2 - c^2}$, so braucht man zuletzt nur noch $x = \sqrt{p^2 - d^2}$ zu construiren.

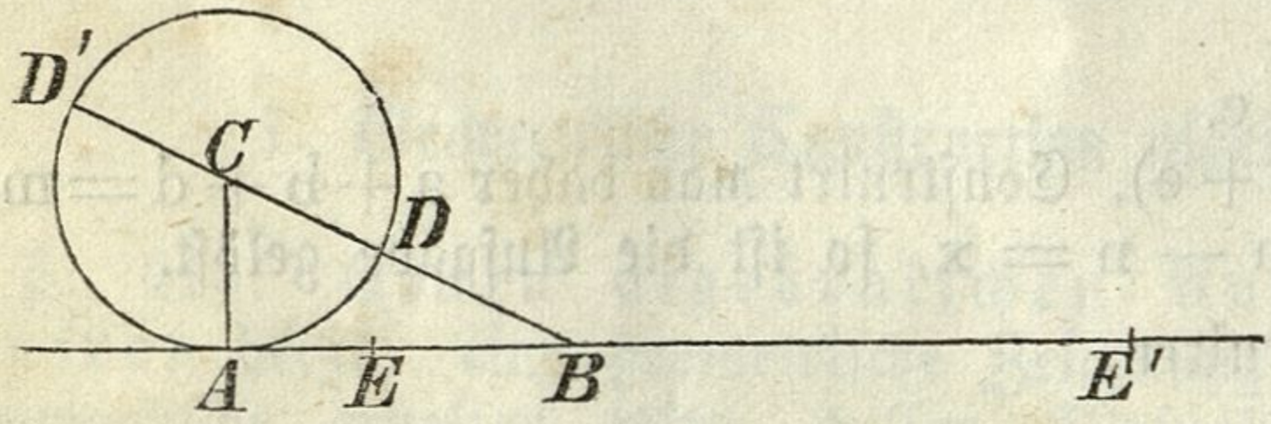
II. Algebraische Auflösung geometrischer Aufgaben.

§. 417. Die Grundlage der algebraischen Lösung einer geometrischen Aufgabe bildet die Analysis, welche darin besteht, daß man die Bedingungen der Aufgabe nach entsprechenden geometrischen Lehrsätzen in die algebraische Zeichensprache übersetzt, d. i. durch Gleichungen ausdrückt. Diese Gleichungen werden sodann aufgelöst, worauf man wieder die geometrische Bedeutung der gefundenen algebraischen Resultate herstellt, d. i. die für die Unbekannten erhaltenen Zahlausdrücke geometrisch construirt.

Der Beweis für die Richtigkeit der Auflösung ist häufig schon in der Construction selbst enthalten; ist dieses nicht der Fall, so wird er am einfachsten dadurch geführt, daß man die Schlüsse der algebraischen Analysis in umgekehrter Folge macht. Auch die Determination lehnt sich am besten an die Discussion der gefundenen Zahlausdrücke an.

§. 418. Aufgabe. Eine gegebene Strecke AB (Fig. 261) im mittlern und äußern Verhältnisse zu theilen.

Fig. 261.



Um diese Aufgabe algebraisch aufzulösen, müssen zuerst die Strecken durch Zahlen ausgedrückt werden. Es sei a die Maßzahl der Strecke AB, x die Maßzahl des größeren Theiles derselben, daher $a - x$ die Maßzahl des kleineren Theiles. Dann ist der Bedingung der Aufgabe gemäß

$$a : x = x : (a - x), \text{ daher}$$
$$x^2 = a^2 - ax.$$

Wird diese Gleichung aufgelöst, so erhält man

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Der erste dieser zwei Werthe $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$ ist positiv und kleiner als a; er bestimmt also einen zwischen A und B liegenden Theilungspunct E, wie ihn die Aufgabe verlangt.

Um diesen Punct zu erhalten, darf man nur den obigen Ausdruck geometrisch construiren. $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$ bedeutet die Hypotenuse eines rechtwink-

ligen Dreieckes, dessen Katheten a und $\frac{a}{2}$ sind. Errichtet man daher in A eine Senkrechte, trägt darauf $AC = \frac{a}{2}$ auf und zieht BC, so ist

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Von dieser Größe muß man, um x zu erhalten, noch $\frac{a}{2}$ subtrahiren. Beschreibt man also aus C mit dem Halbmesser $CA = \frac{a}{2}$ einen Kreis, welcher die BC in D schneidet, so ist $CD = \frac{a}{2}$, daher

$$BD = BC - CD = \sqrt{a + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2} = x.$$

Wird nun auf der Strecke AB der Theil $BE = BD$ abgeschnitten, so ist E der gesuchte Punct.

Die algebraische Lösung dieser Aufgabe führt demnach genau auf dieselbe Construction, die wir in der Planimetrie (§. 188, 2) aus den Eigenschaften des Kreises abgeleitet haben.

Der zweite Werth $x = -\left(\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}\right)$ ist negativ, und gibt daher für die vorgelegte Aufgabe keine Auflösung.

Würde man die Aufgabe so gestellt haben: Es soll in der Verlängerung der AB über B hinaus ein Punct E' so bestimmt werden, daß BE' die mittlere Proportionale zwischen AE' und der gegebenen Strecke AB sei; so hätte man, wenn $BE' = x$, daher $AE' = a + x$ gesetzt wird, die Gleichung

$$x^2 = a(a + x),$$

woraus $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$ folgt.

Der zweite dieser Werthe ist negativ und eignet sich nicht für diese Aufgabe.

Der erste Werth

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$$

dagegen ist positiv und stellt die Linie $BE' = BD'$ dar, welche letztere man erhält, indem die in der frühern Aufgabe construirte Linie BD bis zum zweiten Durchschnitte mit dem Umfange des aus C mit dem Halbmesser $CA = \frac{a}{2}$ beschriebenen Kreises verlängert wird; denn es ist

$$BE' = BD' = CD' + BC = \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Hieraus ergibt sich, daß die beiden hier betrachteten Aufgaben durch eine und dieselbe geometrische Construction gelöst werden; daß sich ferner der Werth von x in der zweiten Aufgabe unmittelbar aus dem negativen Werthe von x in der ersten Aufgabe, für deren Lösung er nicht brauchbar war, herleiten läßt, wenn man nur das Vorzeichen ändert. Es enthält somit die algebraische Auflösung der ersten Aufgabe auch schon jene der zweiten in sich, sobald man den negativen Werth von x auf der AB von B aus in der Richtung gegen E' aufträgt, während der positive auf AB von B aus gegen E aufgetragen wird; sie liefert also alle Auflösungen der in folgender Weise allgemein gestellten Aufgabe:

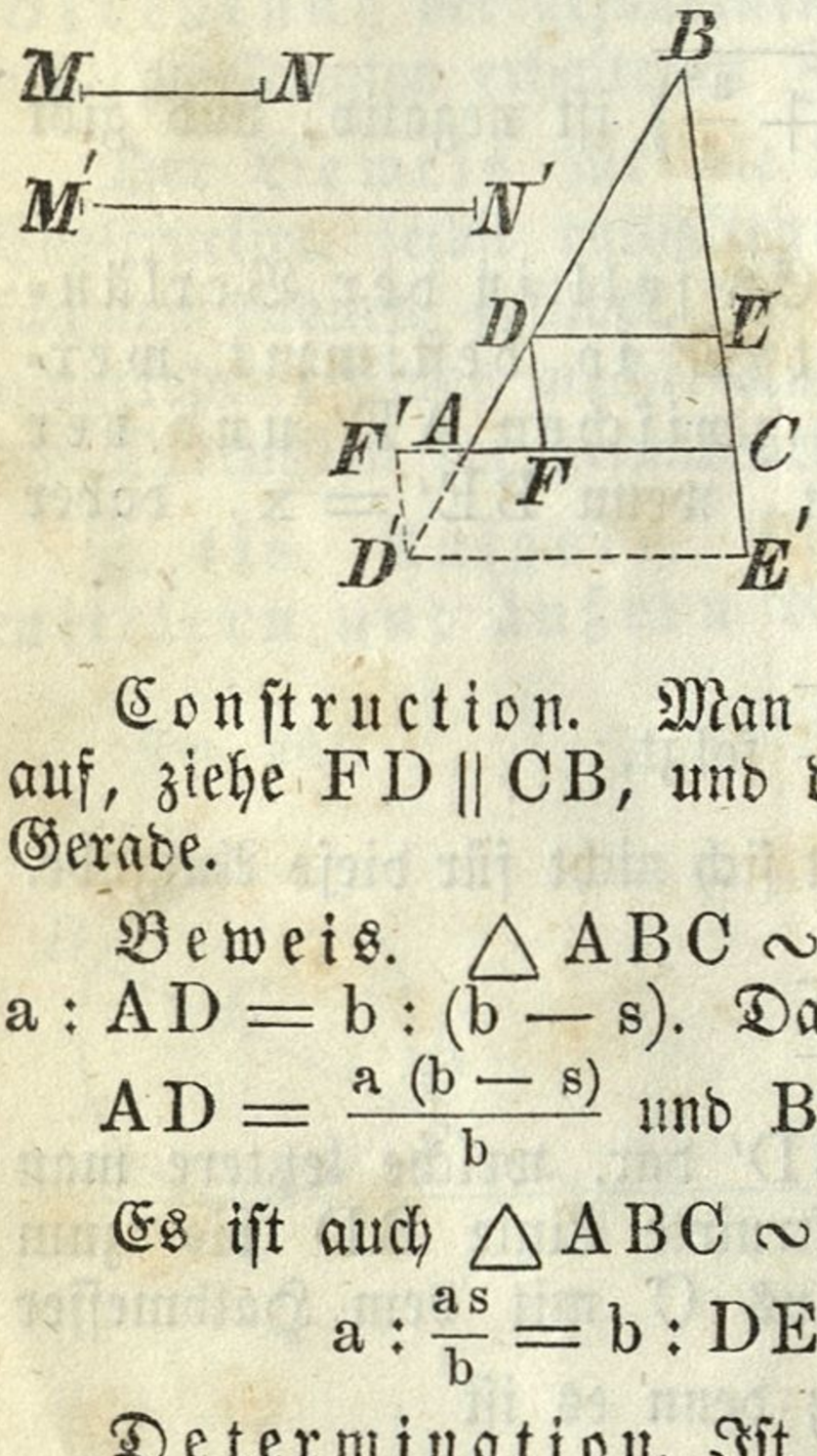
Auf einer unbegrenzten Geraden, welche durch zwei gegebene Puncte A und B geht, soll ein Punct bestimmt werden, dessen Abstand von B die mittlere Proportionale zwischen seinem Abstande von A und der gegebenen Strecke AB sei.

Wird überhaupt die Algebra zur Auflösung einer geometrischen Aufgabe angewendet, und man nimmt als Unbekannte auf einer gegebenen Linie eine Strecke an, die von einem festen Puncte aus nach einer bestimmten Richtung gezählt wird, so müssen die negativen Werthe der Unbekannten nach einer der frühern entgegengesetzten Richtung gezählt werden.

Aus der Durchführung dieser Aufgabe ist auch ersichtlich, daß die negativen Werthe dazu dienen, die Beschränkung aufzuheben, die in eine Aufgabe gelegt wurde, und dadurch diese in ihrer Allgemeinheit vollständig zu lösen.

§. **419.** Aufgabe. In einem Dreiecke ABC (Fig. 262) zu einer Seite AC eine Parallele DE zu ziehen, welche der gegebenen Strecke MN gleich sei.

Fig. 262.



Algebraische Analysis. Setzt man AB = a, AC = b, MN = s, und nimmt den Abstand AD = x, also BD = a — x an, so erhält man aus den ähnlichen Dreiecken ABC und DBE

AB:BD = AC:DE oder a : (a—x) = b : s,

folglich

$$x = \frac{a\,(b - s)}{b};$$

x ist demnach die vierte geometrische Proportionale zu a, b und b — s.

Construction. Man trage von C auf der CA die Strecke CF = s auf, ziehe FD ∥ CB, und durch D die DE ∥ AC; so ist DE die verlangte Gerade.

Beweis. $\triangle$ ABC ∼ ADF, daher AB : AD = AC : AF, oder a : AD = b : (b — s). Daraus folgt

$$AD = \frac{a\,(b - s)}{b} \text{ und } BD = a - \frac{a\,(b - s)}{b} = \frac{as}{b}.$$

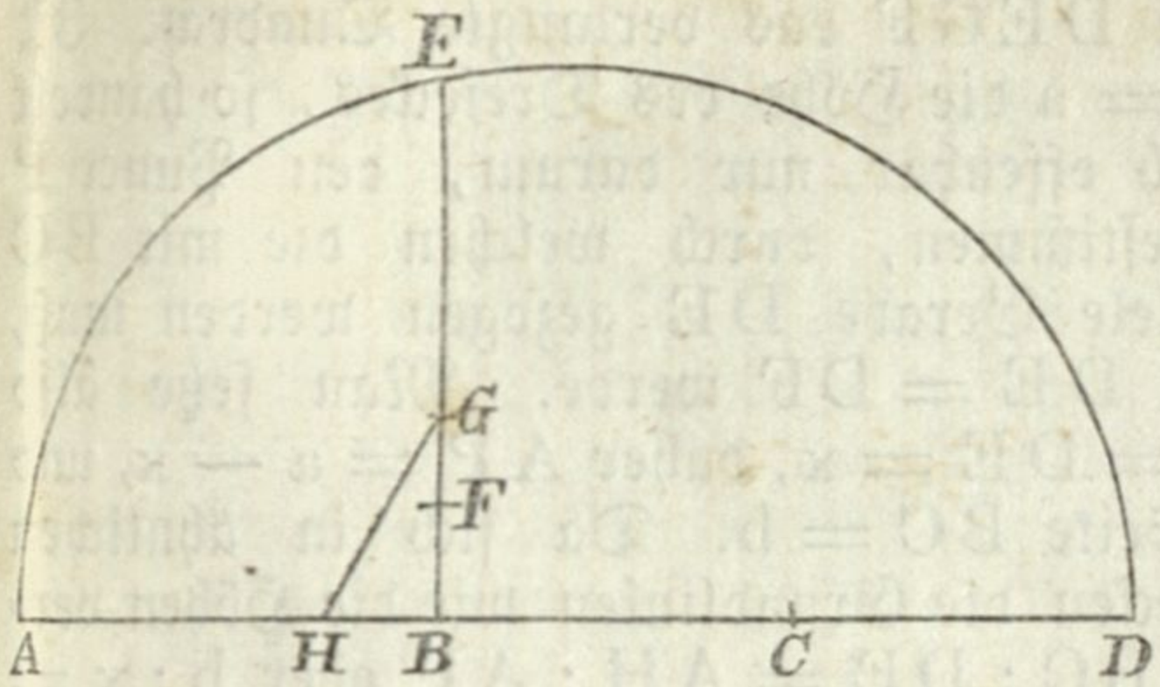
Es ist auch $\triangle$ ABC ∼ DBE, daher AB : BD = AC : DE, oder

$$a : \frac{as}{b} = b : DE, \text{ woraus } DE = s = MN \text{ folgt.}$$

Determination. Ist s < b, also x positiv, so fällt der Punct D in die Seite AB, also DE in das Dreieck selbst. Ist dagegen s > b, z. B. s = M'N', so wird b — s, daher auch x negativ; man muß dann den Werth von x von A aus in einer Richtung, welche der ursprünglich angenommenen entgegengesetzt ist, also bis D' auftragen, und dann D'E' ∥ AC ziehen. Damit stimmt auch die geometrische Construction des für x erhaltenen Ausdruckes überein. Wenn man nämlich von CA = b die größere Gerade CF' = M'N' = s subtrahirt, so wird die negative Differenz AF' nicht in die Seite CA, sondern in ihre Verlängerung fallen, und daher die durch F' mit CB parallel geführte Gerade F'D' nicht die Seite AB selbst, sondern ihre Verlängerung in D' treffen; darum wird auch die gesuchte Gerade D'E' außerhalb des Dreieckes ABC liegen.

§. **420.** Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn die Summen der Hypotenuse und jeder Kathete gegeben sind.

Fig. 263.



Analysis. Es sei a die Summe der Hypotenuse und der einen, b die Summe der Hypotenuse und der andern Kathete. Bezeichnet man die Katheten mit x und y, die Hypotenuse mit z, so ist $x = a - z$, $y = b - z$, daher nach dem Pythagoräischen Lehrsatze

$$z^2 = (a - z)^2 + (b - z)^2,$$

woraus man

$$z = a + b - \sqrt{2ab}, \text{ daher}$$

$$x = \sqrt{2ab} - b, \quad y = \sqrt{2ab} - a$$

erhält, wo $\sqrt{2ab}$ offenbar nur positiv genommen werden kann.

Construction. Man mache (Fig. 263) $AB = a$, $BC = CD = b$, beschreibe über AD einen Halbkreis, und errichte in B die $BE \perp AD$. Schneidet man dann von der EB die Strecken $EF = a$ und $EG = b$ ab, macht $BH = BF$ und zieht GH, so ist GBH das verlangte Dreieck.

Beweis. Nach der Construction ist $EB = \sqrt{2ab}$ (§. 107, 2); daher $BG = EB - EG = \sqrt{2ab} - b$, $BH = BF = EB - EF = \sqrt{2ab} - a$, und

$$GH = \sqrt{(\sqrt{2ab} - b)^2 + (\sqrt{2ab} - a)^2} = a + b - \sqrt{2ab};$$ mithin

$$GH + BG = a, \qquad GH + BH = b.$$

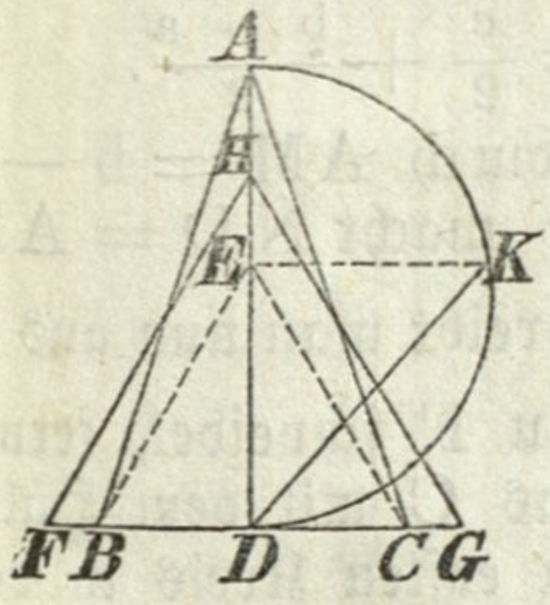
Determination. Da die Differenz der zwei Katheten kleiner sein muß als die Hypotenuse (§. 41, 2), so ergibt sich als Bedingung für die Lösbarkeit der Aufgabe:

$$a - b < a + b - \sqrt{2ab}, \qquad \text{oder} \quad a < 2b;$$

d. h. die Aufgabe kann immer gelöst werden, wenn die eine der gegebenen Summen kleiner als das Doppelte der anderen ist.

§. **421.** Ein gleichschenkliges Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln.

Fig. 264.



Es sei ABC (Fig. 264) ein gleichschenkliges Dreieck über der Grundlinie BC; ferner sei BEC ein gleichseitiges Dreieck über der Seite BC und FGH das gesuchte gleichseitige Dreieck. Zur Bestimmung dieses Dreieckes kommt es nur darauf an, den Punct H zu finden. Setzen wir $AD = m$, $DE = n$ und $DH = x$, so ist

$$\triangle BDE : FHD = n^2 : x^2, \text{ oder}$$
$$\triangle BDE : ABD = n^2 : x^2;$$

aber es ist auch

$$\triangle BDE : ABD = n : m,$$

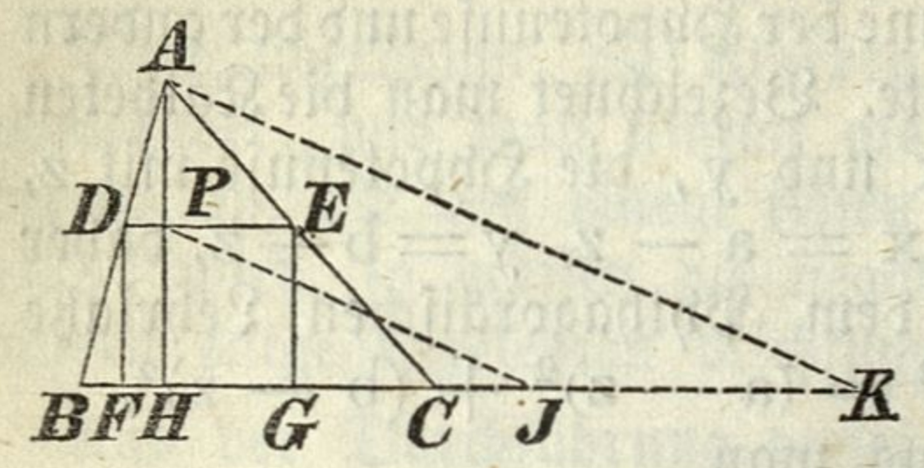
daher $n^2 : x^2 = n : m$, und folglich

$$x = \sqrt{mn}.$$

Beschreibt man über AD einen Halbkreis und errichtet $EK \perp AD$, so ist (§. 107, 1) $DK = \sqrt{AD \cdot DE} = \sqrt{mn} = x$. Man mache daher $DH = DK$ und ziehe $HF \parallel EB$ und $HG \parallel EC$, so ist FGH das verlangte gleichseitige Dreieck.

§. **422.** In ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 265) soll ein Quadrat eingeschrieben werden.

Fig. 265.



Man denke sich die Aufgabe gelöst, und es sei DEGF das verlangte Quadrat. Ist AH = a die Höhe des Dreieckes, so handelt es sich offenbar nur darum, den Punct P zu bestimmen, durch welchen die mit BC parallele Gerade DE gezogen werden muß, damit DE = DF werde. Man setze also PH = DE = x, daher AP = a — x, und die Seite BC = b. Da sich in ähnlichen Dreiecken die Grundlinien wie die Höhen verhalten, so hat man die Proportion BC : DE = AH : AP oder b : x = a : (a — x), woraus

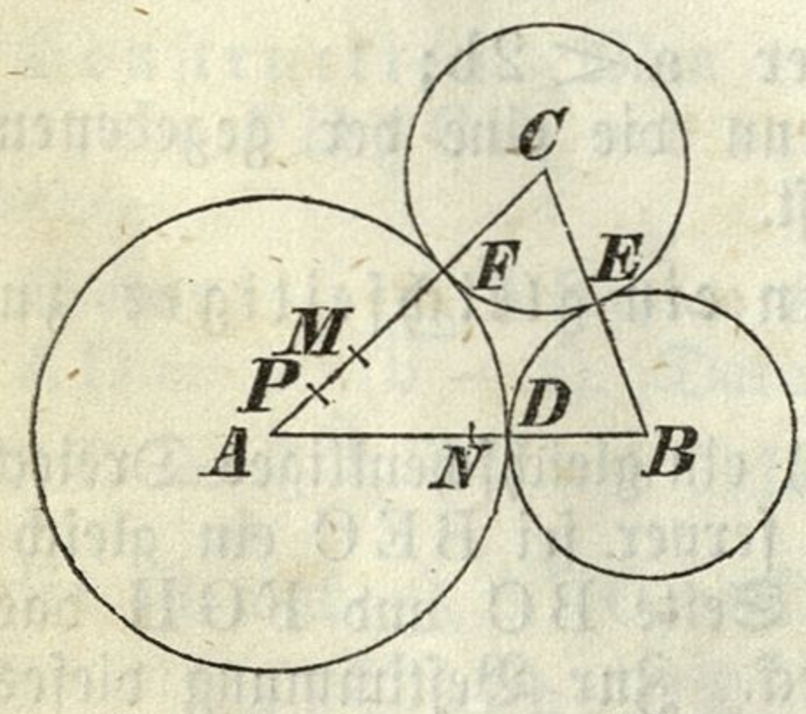
$$x = \frac{ab}{a + b}.$$

folgt; x ist demnach die vierte Proportionale zu a + b, a und b. Um die Construction an der Figur selbst vorzunehmen, verlängere man BC über C hinaus, mache HJ = b, JK = a, daher HK = a + b, ziehe AK und durch den Punct J die JP ∥ AK, so ist P der gesuchte Punct; denn man hat HK : AH = HJ : PH, oder (a + b) : a = b : PH, daher

$$PH = \frac{ab}{a + b} = x.$$

§. **423.** Es sind drei Puncte der Lage nach gegeben; man beschreibe um sie als Mittelpuncte drei Kreise so, daß sich je zwei von außen berühren.

Fig. 266.



Es seien A, B, C (Fig. 266) die drei gegebenen Puncte und ihre Abstände BC = a, AC = b, AB = c. Setzt man den Halbmesser des um A beschriebenen Kreises = x, so ist der Halbmesser des um B beschriebenen = c — x, und der Halbmesser des um C beschriebenen = b — x. Man hat also folgende Gleichung:

$$b - x = a - (c - x), \text{ daher}$$

$$x = \frac{c + b - a}{2} = \frac{c}{2} + \frac{b - a}{2}.$$

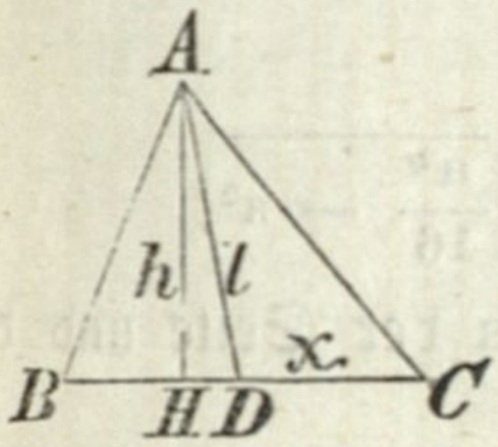
Construction. Man mache CM = BC = a, wodurch AM = b — a wird; halbirt man sodann AB und AM in N und P und macht ND = AP, so ist $AD = AN + AP = \frac{c}{2} + \frac{b - a}{2} = x$. Beschreibt man nun aus A mit dem Halbmesser AD einen Kreis, welchen die AC in F schneidet, ferner aus B mit dem Halbmesser BD einen zweiten, und aus C mit dem Halbmesser CF einen dritten Kreis, so berühren diese den ersten Kreis in den Puncten D und F, einander selbst aber in dem Puncte E, da

$$BE + CE = BD + CF = c - \frac{c + b - a}{2} + b - \frac{c + b - a}{2} = a = BC \text{ ist.}$$

§. **224.** In einem Dreiecke ist ein Winkel, die Mittellinie zu der gegenüberstehenden Grundlinie und die Höhe gegeben; man soll das Dreieck construiren.

Es sei A der gegebene Winkel, l die gegebene Mittellinie und h die Höhe des Dreieckes. Construirt man das rechtwinklige Dreieck AHD (Fig. 267) so, daß $AH = h$ und $AD = l$ ist, und nimmt man A als den Scheitel des gesuchten Dreieckes ABC an, so wird die Grundlinie desselben in der Verlängerung der Kathete HD liegen und man braucht zur Construction dieses Dreieckes nur den Abstand $BD = DC = x$, d. i. die halbe Grundlinie auszumitteln.

Fig. 267.



Nennt man die den Winkel a einschließenden Seiten m und n, so hat man für den Inhalt des Dreieckes die zwei gleichgeltenden Ausdrücke

$\frac{mn \sin A}{2}$ und hx, daher $mn \sin A = 2hx$, und

$$mn = \frac{2hx}{\sin A}.$$

Ferner ist

$m^2 + n^2 = 2l^2 + 2x^2$ (§. 126, 3), und

$4x^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos A$ (§. 364).

Substituirt man in die letzte Gleichung die Werthe von $m^2 + n^2$ und mn aus den früheren Gleichungen, so hat man

$$x^2 = -\frac{2hx}{\text{tang } A} + l^2,$$

daher $$x = -\frac{h}{\text{tang } A} \pm \sqrt{\frac{h^2}{\text{tang } A^2} + l^2}.$$

Da $\frac{h}{\text{tang } A}$ die Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes ist, worin h als zweite Kathete und A als der ihr anliegende Winkel vorkommt, $\sqrt{\frac{h^2}{\text{tang } A^2} + l^2}$ aber die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes vorstellt, dessen Katheten $\frac{h}{\text{tang } A}$ und l sind, so hat die Construction des für x erhaltenen Werthes, worin die Wurzelgröße nur positiv genommen werden kann, keine Schwierigkeit.

III. Uebungsaufgaben.

§. **425.** Construire folgende Ausdrücke:

1. $x = \frac{am}{a+b}$.
2. $x = \frac{abc^2}{def}$.
3. $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$.
4. $x = \frac{b^2 + bc}{a}$
5. $x = \frac{a^2 b}{a^2 - c^2}$.
6. $x = \frac{ab + bc}{a + b}$.
7. $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$.
8. $x = \frac{a^3 - 2a^2b + 3ab^2 - c^3}{2a^2 + ab - c^2}$.
9. $x = \sqrt{ab + cd - ef}$.
10. $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab}$.
11. $x = \sqrt{\frac{a^2 b + c^2 d}{f - g}}$.
12. $x = \sqrt{\left\{a^2 + \frac{b^2}{4} - a\sqrt{a^2 - b^2}\right\}}$.

§. **426.** Löse mit Hilfe der algebraischen Analysis folgende Aufgaben:

1. In einem gegebenen Dreiecke ABC zu der Seite BC eine Parallele MN so zu ziehen, daß der eine obere Abschnitt AM dem andern unteren NC gleich sei.

Setzt man $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, und den Abstand $AM = x$, so erhält man

$$x = \frac{bc}{b + c}.$$

2. Eine Strecke $AB = a$ in zwei Theile so zu theilen, daß die Differenz der Quadrate beider Theile einem gegebenen Quadrate m^2 gleich sei.

Heißt x der eine, daher $a - x$ der andere Theil, so folgt

$$x = \frac{m^2 + a^2}{2a}.$$

3. Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Sind a und b die Seiten des gegebenen Rechteckes und x die Seite des gesuchten Quadrates, so ist

$$x = \sqrt{ab}.$$

4. Ein Rechteck zu construiren, wenn der Umfang u und der Flächeninhalt a^2 gegeben ist.

Sind x und y die Seiten des Rechteckes, so erhält man

$$x = \frac{u}{4} \pm \sqrt{\frac{u^2}{16} - a^2} \quad \text{und} \quad y = \frac{u}{4} \mp \sqrt{\frac{u^2}{16} - a^2}.$$

5. Ein Quadrat zu construiren, wenn die Summe s der Seite und der Diagonale gegeben ist.

Heißt x die Seite des Quadrates, so ergibt sich

$$x = -s + \sqrt{2s^2}.$$

6. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn die eine Kathete a, und die Summe s der Hypotenuse und der anderen Kathete gegeben ist.

Man findet $x = \frac{a^2 + s^2}{2s}$, wo x die Hypotenuse bezeichnet.

7. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn die Summe s der beiden Katheten und die Höhe h auf die Hypotenuse gegeben ist.

Heißt x die Hypotenuse, so ergibt sich die Gleichung

$$x = -h + \sqrt{s^2 + h^2}.$$

8. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn die Differenzen a und b der Hypotenuse und jeder Kathete gegeben sind.

Vergleiche §. 420.

9. Ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn der Umfang u gegeben ist.

Drückt man die Kathete des rechtwinkligen Dreieckes durch x aus, so ist

$$x = u - \sqrt{\frac{u^2}{2}}.$$

10. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn dessen Flächeninhalt a^2 und ein spitzer Winkel α gegeben sind.

Bezeichnet x die dem Winkel α anliegende Kathete, so ist $\frac{2a^2}{x}$ die andere Kathete, und es ergibt sich

$$x = \sqrt{2a^2 \cot \alpha}.$$

11. In einen gegebenen Kreis ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben.

Ist $AB = x$ die Seite des eingeschriebenen Dreieckes und $OC = r$ der sie senkrecht schneidende Halbmesser, so erhält man

$$x = \sqrt{3r^2}.$$

12. In einen gegebenen Quadranten AOB eines Kreises einen zweiten Kreis zu beschreiben, welcher die Schenkel und den Bogen des Quadranten berührt.

Der Mittelpunct C des gesuchten Kreises wird offenbar in der Halbirungslinie des rechten Winkels O liegen. Ist r der Halbmesser des Quadranten und setzt man $OC = x$, so ist $r - x$ der Halbmesser des gesuchten Kreises, und man findet

$$x = 2r \mp \sqrt{2r^2}.$$

Zweiter Abschnitt.

Analytische Geometrie.

§. **427.** Die wichtigste Anwendung der Algebra auf die Geometrie bildet die analytische Geometrie. Ihr Gegenstand ist die Bestimmung der Lage der Raumgebilde mit Hilfe der Rechnung (Analysis).

In dieser Abhandlung beschränken wir uns auf die analytische Geometrie in der Ebene; nur bezüglich des Punctes werden wir im Anhange auch die Art seiner Bestimmung im Raume folgen lassen.

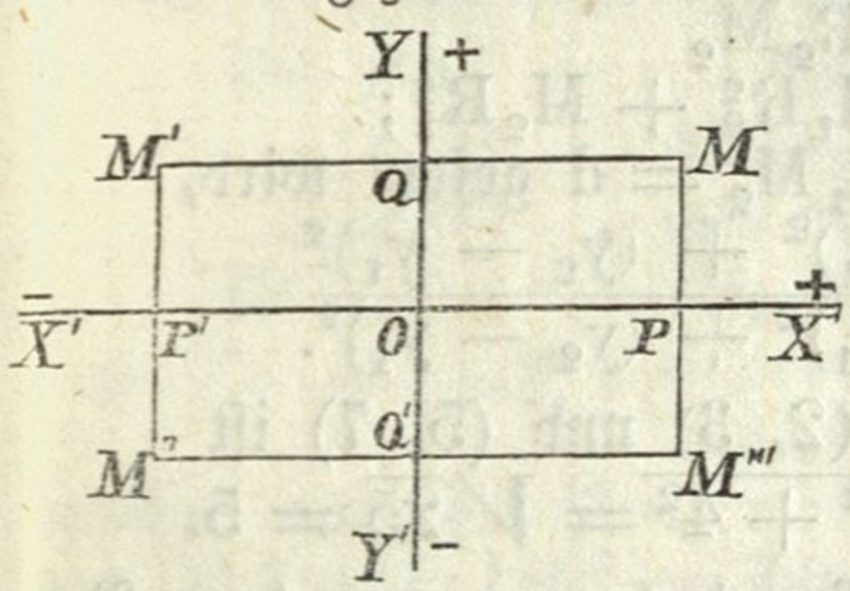
Da eine Linie in der Ebene vollkommen bestimmt ist, wenn man die Lage jedes einzelnen ihrer Puncte kennt, so handelt es sich zunächst darum, die Lage eines Punctes analytisch darzustellen.

I. Analytische Bestimmung eines Punctes in der Ebene.

1. Rechtwinklige Coordinaten.

§. **428.** Um die Lage eines Punctes M (Fig. 268) in einer Ebene zu bestimmen, zieht man in derselben durch einen Punct O zwei auf einander

Fig. 268.



senkrechte Gerade XX' und YY', und fällt auf dieselben von M die Senkrechten MP und MQ. Kennt man nun die Strecken MQ = OP und MP = OQ, so sind auch die Puncte P und Q gegeben; dadurch aber ist die Lage des Punctes M bestimmt, da man nur in P eine Senkrechte auf XX' und in Q eine Senkrechte auf YY' errichten darf, um durch deren Durchschnitt den Punct M zu erhalten.

Die Maßzahl der Strecke OP = MQ heißt die Abscisse, die Maßzahl der Strecke MP = OQ die Ordinate des Punctes M; beide zusammen heißen Coordinaten, und zwar rechtwinklige, weil sich die Geraden XX' und YY' unter einem rechten Winkel schneiden. Die Abscisse drückt man allgemein durch x, die Ordinate durch y aus; für den Punct M ist also x = OP, y = MP. Die Gerade XX' wird die Abscissenaxe, die Gerade YY' die Ordinatenaxe, und ihr Durchschnittspunct O der Anfangspunct oder Ursprung der Coordinaten genannt.

§. **429.** Die beiden Coordinatenaxen theilen die Ebene in vier Theile oder Quadranten. Um nun anzuzeigen, in welchem Quadranten der zu bestimmende Punct liegt, werden die Coordinaten auf den entgegengesetzten Seiten jeder Axe durch die Vorzeichen + oder − unterschieden. Man betrachtet gewöhnlich die Abscissen in der Richtung nach rechts von der Ordinatenaxe als positiv, die Abscissen in der Richtung nach links als negativ; eben so die Ordinaten in der Richtung nach oben von der Abscissenaxe als positiv, die Ordinaten in der Richtung nach unten als negativ.

Unter dieser Voraussetzung hat man, wenn OP = OP' = a und OQ = OQ' = b gesetzt wird,

für den Punct M ... $x = +a$, $y = +b$;
" " " M' ... $x = -a$, $y = +b$;
" " " M'' ... $x = -a$, $y = -b$;
" " " M''' ... $x = +a$, $y = -b$.

Für die Puncte, welche in der Abscissenaxe liegen, ist die Ordinate Null; daher

für den Punct P ... $x = +a$, $y = 0$;
" " " P' ... $x = -a$, $y = 0$.

Für die Puncte, welche in der Ordinatenaxe liegen, ist die Abscisse Null; man hat somit

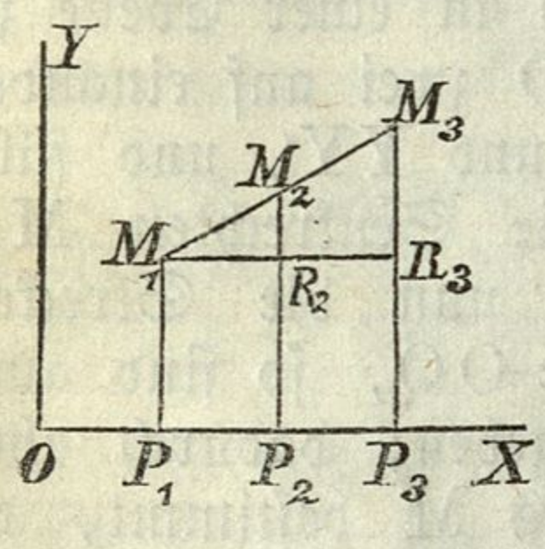
für den Punct Q ... $x = 0$, $y = +b$;
" " " Q' ... $x = 0$, $y = -b$.

Für den Anfangspunct O endlich, welcher sowohl in der Ordinaten- als in der Abscissenaxe liegt, ist $x = 0$ und $y = 0$.

Einen Punct M, dessen Coordinaten a und b sind, pflegt man auch kurzweg durch (a, b) zu bezeichnen.

§. **430.** Aufgabe. Aus den Coordinaten zweier Puncte die Entfernung derselben zu bestimmen.

Fig. 269.



Bezeichnet man die Coordinaten des Punctes M_1 (Fig. 269) durch x_1, y_1, und jene des Punctes M_2 durch x_2, y_2, so ist $x_1 = OP_1$, $y_1 = M_1P_1$, $x_2 = OP_2$, $y_2 = M_2P_2$. Zieht man $M_1R_3 \parallel OX$, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke $M_1R_2M_2$

$$M_1M_2^2 = M_1R_2^2 + M_2R_2^2;$$

oder, wenn der Abstand $M_1M_2 = d$ gesetzt wird,

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

und

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Z. B. Die Entfernung der beiden Puncte (2, 3) und (5, 7) ist

$$d = \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Umgekehrt wird die Forderung, daß ein Punct (x, y) von dem Puncte (a, b) die Entfernung d habe, durch die Gleichung ausgedrückt:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = d^2.$$

§. **431.** Bedingung, unter welcher drei Puncte in einer Geraden liegen.

1. Es seien (Fig. 269) die Puncte $M_1 = (x_1, y_1)$, $M_2 = (x_2, y_2)$ und $M_3 = (x_3, y_3)$ gegeben. Liegen diese drei Puncte in einer Geraden, so müssen, wenn $M_1R_3 \parallel OX$ ist, die Dreiecke $M_1R_2M_2$ und $M_1R_3M_3$ ähnlich sein; man hat daher

$$\frac{M_2R_2}{M_3R_3} = \frac{M_1R_2}{M_1R_3}, \text{ oder } \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1};$$

d. h. die Ordinatendifferenzen je zweier Puncte müssen den entsprechenden Abscissendifferenzen proportionirt sein.

2. Umgekehrt: Findet für drei Puncte $M_1 = (x_1, y_1)$, $M_2 = (x_2, y_2)$ und $M_3 = (x_3, y_3)$ die Bedingungsgleichung

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \quad \ldots 1)$$

statt, so müssen dieselben in einer Geraden liegen.

Es schneide die durch M_1 und M_2 gezogene Gerade die auf der Abscissenaxe Senkrechte, welche x_3 zur Abscisse hat, in irgend einem Puncte M, dessen Ordinate y sei, so daß M_1, M_2 und M in einer Geraden liegen; dann ist nach 1.

$$\frac{y_2 - y_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \quad \ldots \quad 2)$$

Aus 1) und 2) folgt aber $y = y_3$, d. h. (x_3, y) und (x_3, y_3) müssen zusammenfallen, oder M muß mit M_3 identisch sein.

2. Schiefwinklige Coordinaten.

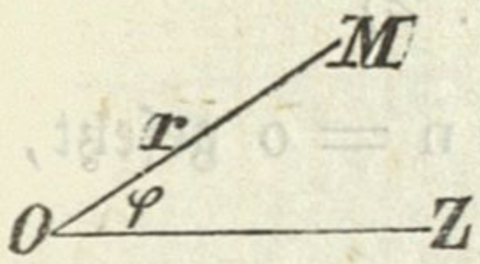
§. **432.** Stehen die beiden Axen XX' und YY' nicht senkrecht, sondern schief auf einander, so heißt das Coordinatensystem ein *schiefwinkliges*. Die *schiefwinkligen Coordinaten* eines Punctes M sind dann die Maßzahlen der Strecken, welche von M zu den beiden Axen mit denselben parallel gezogen werden.

Wir wollen in dem Folgenden stets rechtwinklige Coordinaten voraussetzen, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird.

3. Polar-Coordinaten.

§. **433.** Außer dem Parallel-Coordinatensysteme ist auch noch das *Polar-Coordinatensystem* vorzüglich im Gebrauche. Bei diesem nimmt man einen festen Punct O (Fig. 270) an, welcher der *Pol* genannt wird, und von demselben aus eine feste Gerade OZ, welche die *Polaraxe* heißt.

Fig. 270.



Die Lage eines Punctes M ist nun vollkommen bestimmt, wenn der Abstand MO dieses Punctes vom Pole, und der Winkel MOZ, den MO mit der Polaraxe bildet, bekannt sind. Der Abstand MO heißt der *Radiusvector*; er wird immer im absoluten Sinne genommen und allgemein durch r bezeichnet. Der *Winkel* $MOZ = \varphi$, welchen man den *Polarwinkel* nennt, wird entweder von 0^0 bis 360^0, oder von 0^0 bis $\pm 180^0$ gezählt. Die Größen r und φ heißen die *Polar-Coordinaten* des Punctes M.

4. Transformation der Coordinaten.

§. **434.** Oft ist es zur Vereinfachung der Rechnung vortheilhaft, die Coordinaten eines Punctes in dem einen Systeme in die Coordinaten eines andern Systems, dessen Lage gegen das frühere gegeben ist, zu verwandeln.

Aufgabe. Die Coordinaten eines Parallelsystems in die Coordinaten eines anderen Parallelsystems zu verwandeln.

Fig. 271.

1. Es seien (Fig. 271) OX und OY die ursprünglichen, O'X' und O'Y' die neuen Axen, $OP = x$ und $MP = y$ die alten, $OP' = x'$ und $MP' = y'$ die neuen Coordinaten des Punctes M; ferner seien die Coordinaten des neuen Ursprunges O' in Bezug auf das alte System $OD = m$, $O'D = n$, der Winkel $XOY = \beta$, $X'O'Y' = \gamma$ und $XAX' = \alpha$. Es sollen nun die ursprünglichen Coor-

dinaten x und y durch die neuen x' und y' und durch die Größen m, n, α, β, γ ausgedrückt werden.

Zieht man $P'R \parallel OX$, $P'Q \parallel OY$ und $O'R' \parallel OX$, so ist

$$OP = OD + O'Q' + P'R,$$
$$MP = O'D + P'Q' + MR.$$

Da in dem $\triangle O'P'Q'$ der Winkel $P'O'Q' = \alpha$, $P'Q'O' = 180^0 - \beta$ und $O'P'Q' = \beta - \alpha$, ferner in dem $\triangle P'MR$ der Winkel $MP'R = \gamma + \alpha$, $MRP' = 180^0 - \beta$ und $P'MR = \beta - (\gamma - \alpha)$ ist, so hat man

$$\frac{O'Q'}{O'P'} = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\beta}, \text{ daher } O'Q' = x' \cdot \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\beta};$$

$$\frac{P'Q'}{O'P'} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \text{ daher } P'Q' = x' \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta};$$

$$\frac{P'R}{MP'} = \frac{\sin(\beta-\gamma-\alpha)}{\sin\beta}, \text{ daher } P'R = y' \cdot \frac{\sin(\beta-\gamma-\alpha)}{\sin\beta};$$

$$\frac{MR}{MP'} = \frac{\sin(\gamma+\alpha)}{\sin\beta}, \text{ daher } MR = y' \cdot \frac{\sin(\gamma+\alpha)}{\sin\beta}.$$

Man erhält daher nach verrichteter Substitution in den obigen Ausdrücken für OP und MP

$$\left.\begin{aligned} x &= m + x' \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta} + y' \cdot \frac{\sin(\beta-\gamma-\alpha)}{\sin\beta}, \\ y &= n + x' \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + y' \cdot \frac{\sin(\gamma+\alpha)}{\sin\beta}. \end{aligned}\right\} \ldots 1)$$

2. Ist das anfängliche System rechtwinklig, also $\beta = 90^0$, so ist

$$\left.\begin{aligned} x &= m + x' \cos\alpha + y' \cos(\gamma+\alpha), \\ y &= n + x' \sin\alpha + y' \sin(\gamma+\alpha). \end{aligned}\right\} \ldots 2)$$

3. Wird überdieß der Ursprung beibehalten, also $m = n = o$ gesetzt, so hat man

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha + y' \cos(\gamma+\alpha), \\ y &= x' \sin\alpha + y' \sin(\gamma+\alpha). \end{aligned}\right\} \ldots 3)$$

4. Für den Uebergang aus einem rechtwinkligen System in ein schiefwinkliges, dessen Abscissenaxe der früheren parallel ist, erhält man, da $\alpha = o$ ist, aus 2)

$$\left.\begin{aligned} x &= m + x' + y' \cos\gamma, \\ y &= n + y' \sin\gamma. \end{aligned}\right\} \ldots 4)$$

5. Sind beide Systeme rechtwinklig, also $\beta = \gamma = 90^0$, so ergibt sich aus 2)

$$\left.\begin{aligned} x &= m + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y &= n + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \ldots 5)$$

6. Haben beide Systeme auch denselben Ursprung, so ist

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \ldots 6)$$

7. Sind endlich die neuen Axen den alten parallel, so hat man

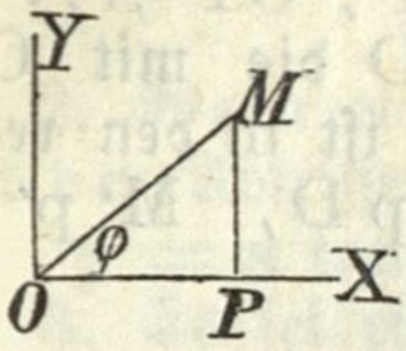
$$\left.\begin{aligned} x &= m + x', \\ y &= n + y'. \end{aligned}\right\} \ldots 7)$$

§. 435. Aufgabe. Rechtwinklige Coordinaten in Polar-Coordinaten zu verwandeln.

Wir beschränken uns hier auf den einfachsten Fall, wenn der Pol O (Fig. 272) mit dem Ursprunge, und die Polaraxe OX mit der Abscissenaxe des rechtwinkligen Systems zusammenfällt.

Es seien $x = OP$, $y = MP$ die rechtwinkligen Coordinaten, ferner $r = OM$ der Radiusvector und $\varphi = MOX$ der Polarwinkel des Punctes M.

Fig. 272.



Aus dem rechtwinkligen Dreiecke MPO ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \ldots 1)$$

Daraus folgt

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2), \text{ oder}$$
$$x^2 + y^2 = r^2 \ldots 2)$$

Bezeichnen α und β die Winkel des Radiusvectors OM mit den positiven Axen der x und der y, so ist

$$x = r\cos\alpha \quad \text{und} \quad y = r\cos\beta.$$

Substituirt man diese Werthe in der Gleichung 2), so ergibt sich

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 = 1 \ldots 3)$$

§. **436.** Aufgabe. Polar-Coordinaten in rechtwinklige Coordinaten zu verwandeln.

Um von den Polar-Coordinaten auf die rechtwinkligen überzugehen, muß man aus den Gleichungen in §. 435 r und φ durch x und y ausdrücken. Aus der Gleichung 2) folgt

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \ldots 4)$$

Aus den Gleichungen 1) erhält man dann

$$\sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ldots 5)$$

5. Uebungsaufgaben.

§. **437.** 1. Welche Coordinaten hat der Punct, welcher durch die Gleichungen $3x + 3y = 5$ und $3x + 4y = 2$ bestimmt wird?

2. Welche Puncte werden durch die Gleichungen $x^2 - 5x + y + 4 = 0$ und $x^2 + y^2 - 5x - y + 10 = 0$ bestimmt?

3. Wie groß ist die Entfernung der Puncte (7, 10) und (— 5, 5)?

4. Drücke durch eine Gleichung aus, daß der Punct (x, y) von den Puncten (5, 4) und (3, 2) gleich weit entfernt ist.

5. Bestimme den Punct, welcher von den Puncten (5, — 3), (6, 2) (— 1, 5) gleich weit entfernt ist, und gib diese Entfernung an.

II. Die gerade Linie.

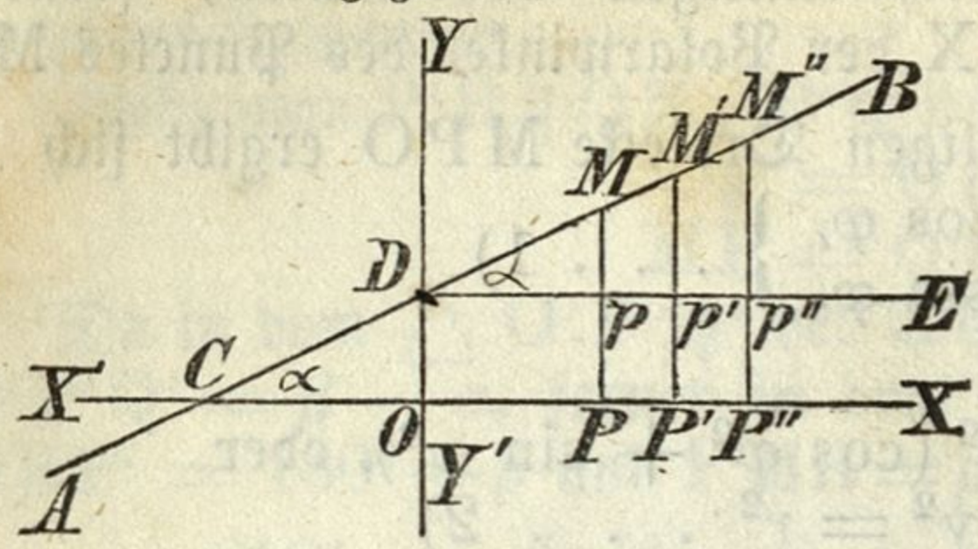
§. **438.** Wenn man das Gesetz kennt, welchem die Lage aller Puncte einer Linie unterliegt, so ist dadurch die Linie selbst bestimmt. Da nun die Lage eines Punctes in der Ebene durch dessen Coordinaten ausgedrückt wird, so ist eine Linie als vollkommen bestimmt zu betrachten, wenn die Relation bekannt ist, welche zwischen den Coordinaten aller Puncte der Linie, aber auch nur der Puncte dieser Linie stattfindet. Diese Relation heißt die Gleichung der Linie.

1. Analytische Darstellung einer Geraden.

§. **439.** Allgemeine Gleichung einer Geraden für rechtwinklige Coordinaten.

1. Es sei AB (Fig. 273) eine Gerade, welche mit der Abscissenaxe den spitzen Winkel α bildet, und die Ordinatenaxe im Puncte D schneidet, so daß $OD = b$ ist.

Fig. 273.



Nimmt man in der AB willkürlich die Puncte M, M', M'',... an, zu denen folgeweise die Ordinaten MP, M'P', M''P'',... und die Abscissen OP, OP', OP'',... gehören, und zieht durch D die mit OX parallele Gerade DE, so ist in den rechtwinkligen Dreiecken MpD, M'p'D, M''p''D, ...

$$\frac{Mp}{Dp} = \frac{M'p'}{Dp'} = \frac{M''p''}{Dp''} = \ldots = \text{tang } \alpha, \text{ oder}$$

$$\frac{MP-b}{OP} = \frac{M'P'-b}{OP'} = \frac{M''P''-b}{OP''} = \ldots = \text{tang } \alpha.$$

Es ist also das Verhältniß der um b verminderten Ordinate eines jeden Punctes der Geraden AB und der zugehörigen Abscisse constant, und zwar gleich tang α. Bezeichnet man daher die Coordinaten irgend eines Punctes dieser Geraden durch x und y und setzt tang α = a, so ist

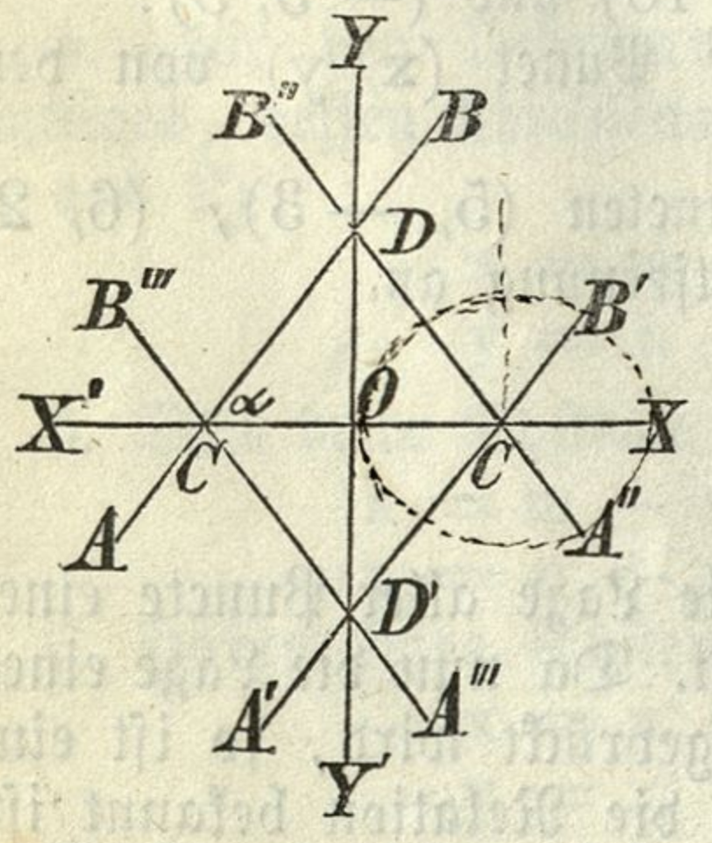
$$\frac{y-b}{x} = a \quad \text{oder} \quad y = ax + b$$

die Gleichung der Geraden AB.

Der Winkel α, dessen trigonometrische Tangente a ist, wird immer von der positiven Abscissen-Halbaxe OX aus im Sinne der Drehung von rechts nach links gezählt.

2. Auf gleiche Weise kann man auch die Gleichungen für solche Gerade ableiten, welche mit der Abscissenaxe einen stumpfen Winkel bilden, oder welche die Ordinatenaxe unterhalb des Anfangspunctes durchschneiden. Die Gleichungen werden mit der früheren dieselbe Form haben und sich von ihr nur durch die Vorzeichen von a und b unterscheiden. Es wird nämlich a

Fig. 274.



positiv, wenn der Winkel α spitz, und negativ, wenn der Winkel α stumpf ist. Ebenso wird b positiv oder negativ, je nachdem die Ordinatenaxe von der Geraden oberhalb oder unterhalb der Abscissenaxe geschnitten wird. Man hat daher, wenn (Fig. 274) D'O = DO ist, wenn ferner die Geraden AB und A'B' mit der Abscissenaxe den spitzen Winkel α, A''B'' und A'''B''' dagegen den stumpfen Winkel 180° — α bilden,

für AB die Gleichung $y = ax + b$,
„ A'B' „ „ $y = ax - b$,
„ A''B'' „ „ $y = -ax + b$,
„ A'''B''' „ „ $y = -ax - b$.

Der Ausdruck $y = ax + b$ ist demnach die allgemeine Gleichung einer geraden Linie, da man daraus durch Specialisirung der Werthe von a und b alle möglichen Geraden darstellen kann. Für eine bestimmte Gerade haben auch a und b ganz bestimmte, constante Werthe, während x und y veränderlich sind, d. i. für jeden andern Punct dieser Geraden andere Werthe annehmen. a = tang α heißt die Richtungsconstante, weil sie einzig von der Richtung der Geraden gegen die Abscissenaxe abhängt.

Beispiele.

1. Eine Gerade schneide von der Ordinatenaxe das Stück $b = 2$ ab, und bilde mit der Abscissenaxe einen Winkel von 45^0; dann ist ihre Gleichung

$$y = x \text{ tang } 45^0 + 2, \quad \text{oder} \quad y = x + 2.$$

2. Wenn eine Gerade die Ordinatenaxe im Abstande -3 schneidet, und mit der Abscissenaxe den Winkel $128^0\ 28'\ 28''$ bildet, so ist ihre Gleichung

$$y = x \text{ tang } 128^0\ 28'\ 28'' - 3, \quad \text{oder} \quad y = -1{\cdot}2583\,x - 3.$$

3. Es sei eine Gerade, welche durch den Ursprung geht und mit der Abscissenaxe den Winkel 65^0 bildet, so ist, da $b = 0$ ist, ihre Gleichung

$$y = x \,.\, \text{tang } 65^0 \quad \text{oder} \quad y = 2{\cdot}1445\,x.$$

§. **440.** Discussion der Gleichung $y = ax + b$.

1. Da die Gleichung $y = ax + b$ zwei Constanten a und b hat, die so lange unbestimmt bleiben, als nicht von einer bestimmten Geraden die Rede ist, so folgt, daß zur vollkommenen Bestimmung einer Geraden zwei Bedingungen erforderlich sind.

2. Für $x = 0$ erhält man aus der obigen Gleichung $y = b$ als die Ordinate OD (Fig. 273) des Durchschnittspunctes der Geraden mit der Ordinatenaxe. Für $y = 0$ folgt aus der obigen Gleichung $x = -\frac{b}{a}$ als die Abscisse OC des Durchschnittspunctes der Geraden mit der Abscissenaxe. Die Gerade schneidet also die Axen der x und der y in den Abständen $-\frac{b}{a}$ und b.

Setzt man $-\frac{b}{a} = c$, also $a = -\frac{b}{c}$, so nimmt die Gleichung $y = ax + b$ folgende Form an:

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1,$$

in welcher die Nenner von x und y die Abschnitte bedeuten, welche die Gerade auf der Abscissen- und auf der Ordinatenaxe vom Ursprunge an bestimmt.

3. Nimmt man $b = 0$ an, so erhält man $y = ax$ als Gleichung einer durch den Ursprung gehenden Geraden. Diese Gleichung enthält nur noch eine Constante, da die eine Bedingung der Geraden schon dadurch angegeben ist, daß sie durch den Ursprung geht.

4. Soll die Gerade, welche durch den Ursprung geht, und deren Gleichung $y = ax$ ist, mit der Abscissenaxe zusammenfallen, so muß man den Winkel α, und somit auch a gleich Null setzen, wodurch jene Gleichung in $y = 0$ übergeht; man erhält also $y = 0$ als Gleichung für die Abscissenaxe.

5. Soll jene Gerade mit der Ordinatenaxe zusammenfallen, so muß $\alpha = 90^0$, daher tang $\alpha = a = \infty$ gesetzt werden; aus $y = ax$ ergibt sich dann $x = \frac{y}{a} = \frac{y}{\infty}$ oder $x = 0$ als Gleichung der Ordinatenaxe.

6. Soll die Gerade zu der Axe der x und zwar in dem Abstande b parallel sein, so muß man in der allgemeinen Gleichung $y = ax + b$ den Winkel α, also auch a gleich Null setzen, wodurch man $y = b$ als Gleichung einer zu der Abscissenaxe parallelen, oder was einerlei ist, einer auf die Ordinatenaxe senkrechten Geraden erhält.

7. Bringt man die Gleichung der Geraden auf die Form $x = \frac{y}{a} + c$, so folgt für $x = 90^0$, da $a = \infty$ wird, $x = c$ als Gleichung einer zu der Ordinatenaxe parallelen, oder auf der Abscissenaxe senkrechten Geraden.

§. 441. Der geometrische Ort aller Puncte, deren Coordinaten einer Gleichung des ersten Grades genügen, ist eine gerade Linie.

Beweis. Jede Gleichung des ersten Grades zwischen zwei Veränderlichen läßt sich auf die Form

$$y = ax + b$$

zurückführen. Betrachtet man diese Gleichung als den Ausdruck für eine Linie, indem man x und y als die Coordinaten ihrer Puncte, a und b aber als constante Größen ansieht, so hat man für irgend drei Puncte dieser Linie, deren Coordinaten x_1, y_1, x_2, y_2 und x_3, y_3 sind,

$$y_1 = ax_1 + b, \quad y_2 = ax_2 + b, \quad y_3 = ax_3 + b.$$

Subtrahirt man die erste Gleichung von jeder der letzteren, so erhält man

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \text{ und } y_3 - y_1 = a(x_3 - x_1), \text{ daher}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}.$$

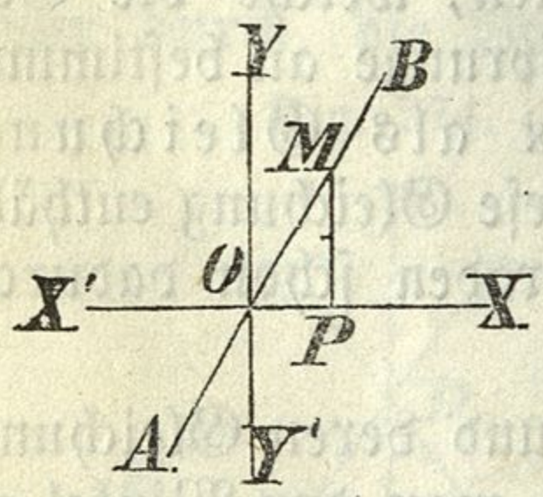
Die Puncte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) liegen demnach (§. 431, 2) in einer geraden Linie. Da dasselbe von je drei Puncten der zu $y = ax + b$ gehörigen Linie bewiesen werden kann, so folgt, daß der geometrische Ort der Gleichung $y = ax + b$ eine gerade Linie ist.

§. 442. Construction einer Geraden, deren Gleichung gegeben ist.

Um die zu einer Gleichung gehörige Gerade zu construiren, genügt es, zwei Puncte derselben zu bestimmen.

1. Hat die Gleichung die Form $y = ax$, so geht die ihr entsprechende Gerade durch den Ursprung; es handelt sich nur darum, noch einen zweiten in der Geraden liegenden Punct zu bestimmen. Man kann sich dazu den Punct wählen, dessen Abscisse $x = 1$, und dessen Ordinate sonach $y = a$ ist.

Fig. 275.

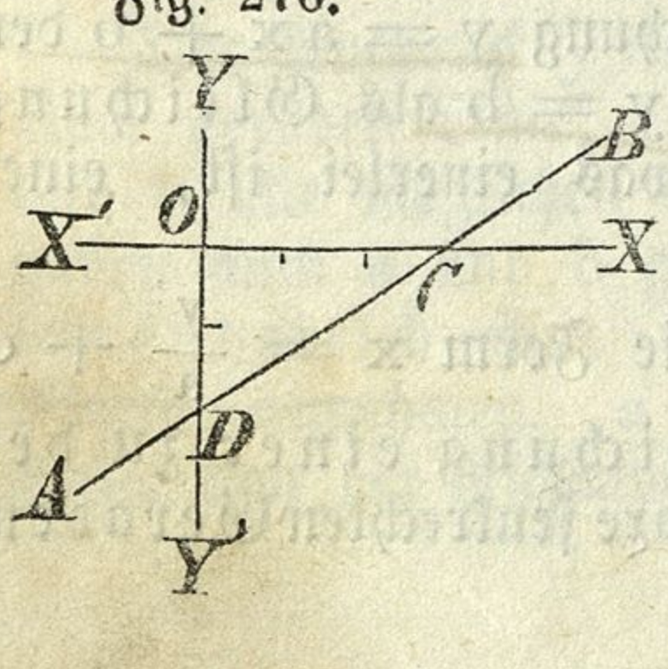


Um z. B. die Gleichung $y = 2x$ zu construiren, hat man für $x = 1$, $y = 2$; man schneidet also (Fig. 275) $OP = 1$ ab, macht die Senkrechte $PM = 2$ und zieht durch O und M die Gerade AB, welche somit der Gleichung $y = 2x$ entspricht. Will man ihren Winkel α mit der Abscissenaxe wissen, so hat man

$$a = \text{tang } \alpha = 2, \text{ daher } \alpha = 63^\circ\, 26'\, 6''.$$

2. Hat die gegebene Gleichung die Form $y = ax + b$, so ist ihr geometrischer Ort eine Gerade, welche nicht durch den Ursprung geht. Die Construction dieser Geraden geschieht am bequemsten, indem man ihre Durchschnittspuncte mit den beiden Axen bestimmt und zu diesem Ende in der Gleichung einmal $y = 0$, und dann $x = 0$ substituirt. Die Verbindungslinie dieser Durchschnittspuncte ist die verlangte Gerade.

Fig. 276.



Es sei z. B. die Gleichung $2x - 3y = 6$ zu construiren.

$$\text{Für } y = 0 \text{ ist } x = 3,$$
$$\text{„ } x = 0 \text{ „ } y = -2.$$

Macht man daher (Fig. 276) $OC = 3$, $OD = -2$, und zieht durch C und D die Gerade AB, so ist diese der gesuchte geometrische Ort.

§. **443.** Gleichung einer Geraden, welche durch einen gegebenen Punct geht.

Es sei der Punct (x_1, y_1) gegeben; man suche die Gleichung einer Geraden, welche durch diesen Punct geht.

Die verlangte Gleichung wird die Form

$$y = ax + b \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

haben, wobei a und b der Bedingung der Aufgabe gemäß zu bestimmen sind.

Damit die Gerade durch den Punct (x_1, y_1) gehe, müssen dessen Coordinaten x_1 und y_1 statt x und y in der Gleichung 1) substituirt dieser Genüge leisten; es muß also

$$y_1 = ax_1 + b \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

sein. Subtrahirt man diese Gleichung von der obigen, so ist

$$y - y_1 = a(x - x_1) \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

die gesuchte Gleichung einer durch den Punct (x_1, y_1) gehenden Geraden.

Diese Gleichung enthält noch eine unbestimmte Constante a, wie es sein muß, da durch einen Punct unzählig viele gerade Linien gezogen werden können.

§. **444.** Gleichung einer Geraden, welche durch zwei gegebene Puncte geht.

Es seien die Puncte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) gegeben; man suche die Gleichung einer Geraden, welche durch diese beiden Puncte geht.

Die verlangte Gleichung wird die Form

$$y = ax + b \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

haben, und es kommt nur darauf an, die noch unbekannten Größen a und b den Bedingungen der Aufgabe gemäß zu bestimmen.

Damit die Gerade durch den Punct (x_1, y_1) gehe, muß ihrer Gleichung Genüge geschehen, wenn man darin x_1 und y_1 anstatt x und y setzt, es muß demnach die Bedingungsgleichung

$$y_1 = ax_1 + b \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

erfüllt werden. Soll die Gerade durch den Punct (x_2, y_2) gehen, so muß ihrer Gleichung auch Genüge geleistet werden, wenn man x_2 und y_2 statt x und y setzt, es muß also auch die Bedingungsgleichung

$$y_2 = ax_2 + b \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

stattfinden. Aus den beiden Bedingungsgleichungen 2) und 3) lassen sich nun durch Elimination die noch unbekannten Größen a und b bestimmen; man erhält

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad b = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1.$$

Durch Substitution dieser Werthe von a und b in 1) ergibt sich

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

als die gesuchte Gleichung einer durch die Puncte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) gehenden Geraden.

Diese Gleichung wird kürzer gewöhnlich auf folgende Art abgeleitet:

Subtrahirt man die Gleichung 2) von 1) und dann von 3), so erhält man

$$y - y_1 = a(x - x_1) \quad . \quad . \quad . \quad 5),$$
$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \quad . \quad . \quad . \quad 6),$$

und durch Elimination von a als die verlangte Gleichung

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad . \quad . \quad 7)$$

Diese letzte Form, welche sich leicht auf jene 4) zurückführen läßt, ist einfacher und in der Anwendung bequemer.

Beispiele. 1. Man suche die Gleichung einer Geraden, welche durch die Puncte (2, 3) und (3, 4) geht.

Es ist $y_2 - y_1 = 1$, $x_2 - x_1 = 1$, daher

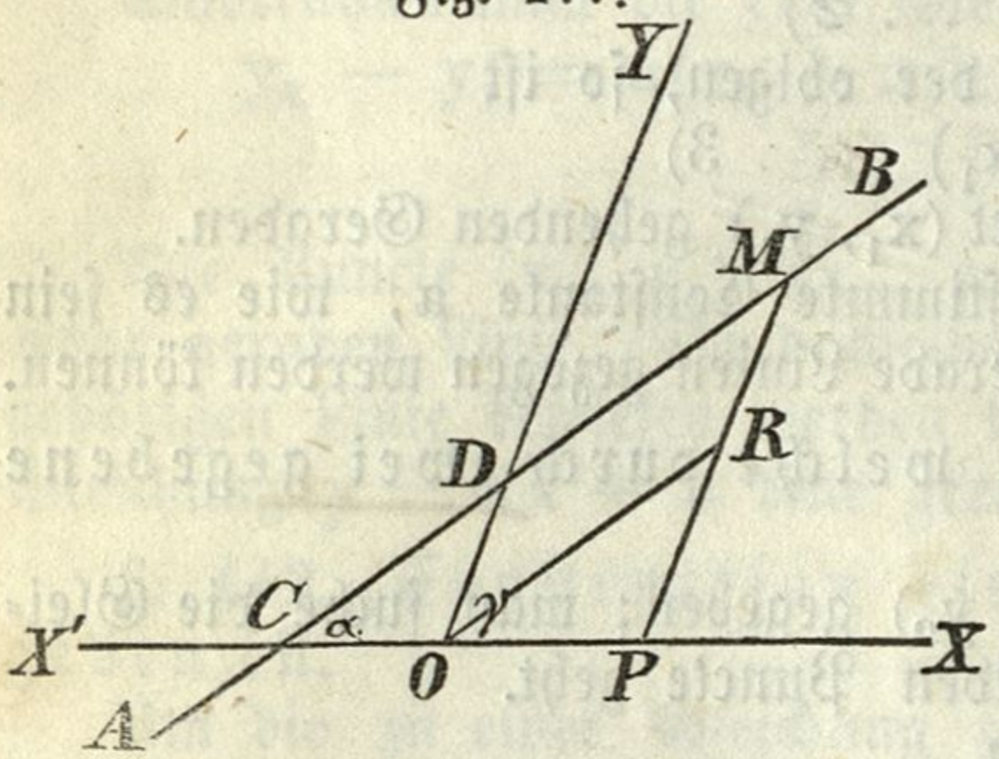
$$y - 3 = x - 2 \text{ oder } y = x + 1$$

die gesuchte Gleichung.

2. Die Gerade, welche durch die Puncte $(-2, 1)$ und $(0, 5)$ geht, hat die Gleichung $y - 1 = \frac{4}{2}(x + 2)$ oder $y = 2x + 5$.

§. 445. Gleichung einer Geraden für schiefwinklige Coordinaten.

Fig. 277.



Es sei (Fig. 277) XOY ein Coordinatensystem, dessen Coordinatenwinkel γ ein schiefer ist, M ein beliebiger Punct in der Geraden AB, welche die Abscissenaxe unter dem Winkel α, die Ordinatenaxe in D schneidet, und $OP = x$, $MP = y$. Setzt man $OD = b$ und zieht $OR \parallel AB$, so ist

$$y = MP = PR + MR = PR + b.$$

In dem $\triangle OPR$ ist nun

$$PR : OP = \sin POR : \sin PRO,$$

oder, da $POR = \alpha$ und $PRO = DOR = \gamma - \alpha$ ist,

$$PR : x = \sin\alpha : \sin(\gamma - \alpha), \text{ daher } PR = \frac{\sin\alpha}{\sin(\gamma - \alpha)} . x.$$

Substituirt man diesen Werth in dem obigen Ausdrucke für y, so hat man

$$y = \frac{\sin\alpha}{\sin(\gamma - \alpha)} . x + b, \text{ oder, wenn } \frac{\sin\alpha}{\sin(\gamma - \alpha)} = a' \text{ gesetzt wird,}$$

$$y = a'x + b.$$

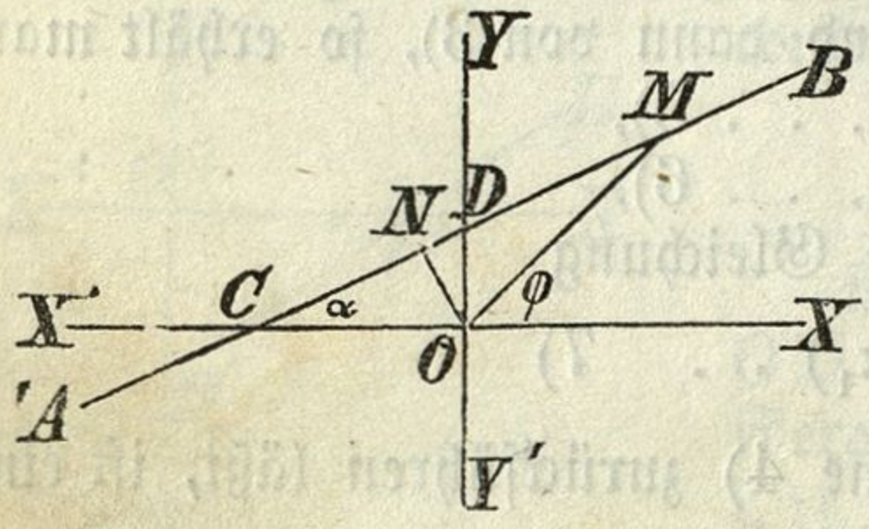
Geht die Gerade AB durch den Ursprung, so hat man, da $b = 0$ ist, $y = a'x$.

Die Gleichung $y = a'x + b$ einer Geraden für schiefwinklige Coordinaten hat also dieselbe Form wie für rechtwinklige, und geht auch für $\gamma = 90^0$ sofort über in $y = \text{tang}\,\alpha . x + b$ oder $y = ax + b$.

Die Gleichung $y = \frac{\sin\alpha}{\sin(\gamma - \alpha)} . x + b$ kann auch unmittelbar aus der Gleichung $y = ax + b$ hergeleitet werden, indem man mit Rücksicht auf §. 434, 4, da $m = n = 0$ ist, für x, y, b bezüglich $x + y\cos\gamma$, $y\sin\gamma$, $\frac{b\sin(\gamma - \alpha)}{\cos\alpha}$ setzt.

§. 446. Polargleichung einer Geraden.

Fig. 278.



Um die Gleichung der Geraden AB (Fig. 278) für die Polar-Coordinaten zu erhalten, nehmen wir der Einfachheit halber den Ursprung O der rechtwinkligen Coordinaten als Pol und die Abscissenaxe OX als Polare an; für den Punct M ist dann $r = OM$, $\varphi = MOX$, und man darf nur in der für rechtwinklige Coordinaten entwickelten Gleichung $y = ax + b$ die Substitution

$y = r \sin \varphi$ und $x = r \cos \varphi$ vollführen (§. 435). Man erhält

$r \sin \varphi = ar \cos \varphi + b$, oder $r (\sin \varphi - a \cos \varphi) = b$, daher

$r (\sin \varphi - \text{tang } \alpha \cos \varphi) = b$, oder $r \cdot \frac{\sin \varphi \cos \alpha - \cos \varphi \sin \alpha}{\cos \alpha} = b$, und

$$r \cdot \sin (\varphi - \alpha) = b \cos \alpha, \text{ folglich } r = \frac{b \cos \alpha}{\sin (\varphi - \alpha)}.$$

Setzt man $CO = c$, so ist $b = c \text{ tang } \alpha$ oder $b \cos \alpha = c \sin \alpha$, daher

$$r = \frac{c \sin \alpha}{\sin (\varphi - a)}$$

die Polargleichung der Geraden AB.

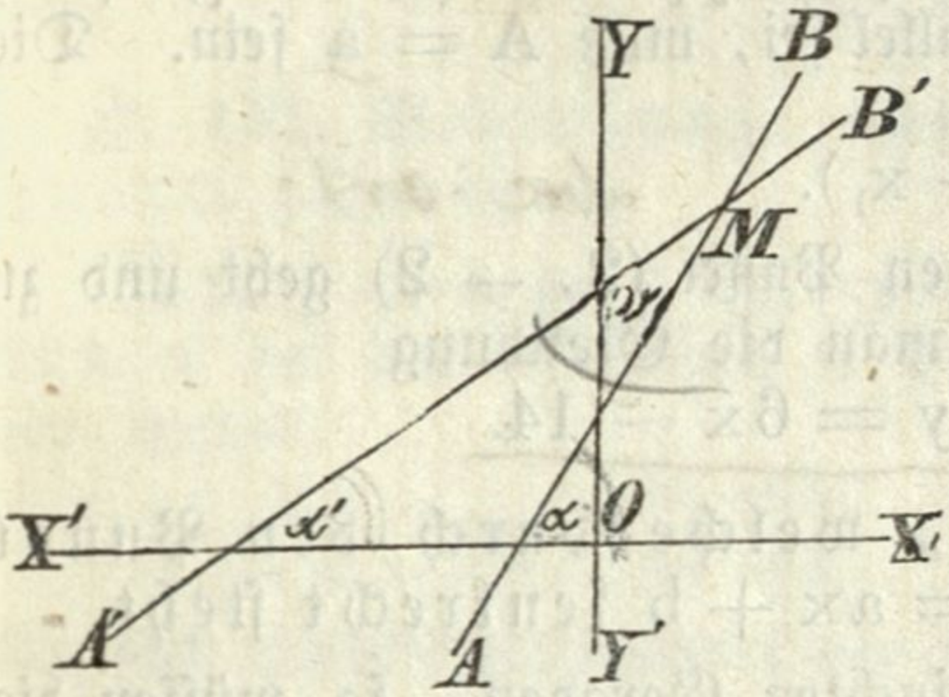
Diese Gleichung kann man kürzer finden, wenn man von O auf AB die Senkrechte ON zieht; es ist dann

$ON = OC \sin \alpha = c \sin \alpha$ und $OM = \frac{ON}{\sin NMO}$, oder $r = \frac{c \sin \alpha}{\sin (\varphi - \alpha)}$.

2. Zwei Gerade.

§. 447. Durchschnittspunct zweier Geraden.

Fig. 279.



Es seien

$$y = ax + b \ldots 1),$$
$$y = a'x + b' \ldots 2)$$

die Gleichungen der beiden Geraden AB und A'B' (Fig. 279); man suche die Coordinaten ihres Durchschnittspunctes.

Für alle Puncte der Geraden AB ist $y = ax + b$; für alle Puncte der Geraden A'B' ist $y = a'x + b'$; für den Punct, der in den beiden Geraden liegt, nämlich für den Durchschnittspunct M, muß daher $y = ax + b$ und zugleich auch $y = a'x + b'$ sein. Dem Puncte M werden also jene Coordinaten x und y zukommen, durch welche beiden Gleichungen zugleich Genüge geleistet wird; diese Werthe ergeben sich aber durch Auflösung jener zwei Gleichungen; man erhält

$$x = \frac{b - b'}{a' - a}, \quad y = \frac{a'b - ab'}{a' - a}.$$

Kennt man daher die Gleichungen zweier Geraden, so kann man aus diesen, auch ohne Construction der Linien, die Coordinaten ihres Durchschnittspunctes finden.

§. 448. Winkel zweier Geraden.

Es seien (Fig. 279) die Gleichungen der Geraden AB und A'B', welche mit der Abscissenaxe die Winkel α und α' bilden,

$$y = ax + b \text{ und } y = a'x + b',$$

wo also $a = \text{tang } \alpha$, $a' = \text{tang } \alpha'$ ist; man soll den Winkel bestimmen, den diese beiden Geraden einschließen. Bezeichnet man diesen Winkel AMA' durch v, so hat man

$$\text{tang } v = \text{tang } (\alpha - \alpha') = \frac{\text{tang } \alpha - \text{tang } \alpha'}{1 + \text{tang } \alpha \text{ tang } \alpha'}, \text{ oder tang } v = \frac{a - a'}{1 + a a'}.$$

Man suche z. B. den Winkel, welchen die den Gleichungen

$$y = 2x - 3, \quad \text{und} \quad y = -3x + 2$$

entsprechenden Geraden bilden. Es ist $a = 2$, $a' = -3$, daher

$$\text{tang } v = \frac{5}{-5} = -1, \quad \text{und} \quad v = 135^0.$$

§. 449. Die Gleichung $\text{tang } v = \frac{a - a'}{1 + aa'}$ gibt ein einfaches Kennzeichen an die Hand, nach welchem man unmittelbar aus den Gleichungen zweier Geraden beurtheilen kann, ob diese zu einander parallel oder auf einander senkrecht sind. Sollen die beiden Geraden AB und A'B' zu einander parallel sein, so muß der Winkel $v = o$, daher auch $\text{tang } v = o$, folglich

$$a' = a \text{ sein.}$$

Sollen dagegen die Geraden AB und A'B' auf einander senkrecht stehen, so muß $v = 90^0$, daher $\text{tang } v = \infty$, und somit $1 + aa' = o$, oder

$$a' = -\frac{1}{a} \text{ sein.}$$

§. 450. Gleichung einer Geraden, welche durch den Punct (x_1, y_1) geht und zu der Geraden $y = ax + b$ parallel ist.

Es sei $y = Ax + B$ die Gleichung der gesuchten Geraden. Damit die Gerade durch den Punct (x_1, y_1) gehe, muß $y - y_1 = A(x - x_1)$ sein; damit sie zu der Geraden $y = ax + b$ parallel sei, muß $A = a$ sein. Die verlangte Gleichung ist also

$$y - y_1 = a(x - x_1).$$

Z. B. Für eine Gerade, welche durch den Punct $(2, -2)$ geht und zu der Geraden $y = 6x - 4$ parallel ist, hat man die Gleichung

$$y + 2 = 6(x - 2) \text{ oder } y = 6x - 14.$$

§. 451. Gleichung einer Geraden, welche durch den Punct (x_1, y_1) geht und auf der Geraden $y = ax + b$ senkrecht steht.

Ist $y = Ax + B$ die Gleichung der gesuchten Geraden, so müssen die Bedingungsgleichungen $y - y_1 = A(x - x_1)$ und $A = -\frac{1}{a}$ stattfinden. Die gesuchte Gleichung ist somit

$$y - y_1 = -\frac{1}{a}(x - x_1).$$

Z. B. Zu einer Geraden, welche durch den Punct $(1, 2)$ geht und auf der Geraden $y = -\frac{x}{2} + 1$ senkrecht steht, gehört die Gleichung

$$y - 2 = 2(x - 1) \text{ oder } y = 2x.$$

§. 452. Entfernung eines gegebenen Punctes von einer gegebenen Geraden.

Sind x_1, y_1 die Coordinaten des gegebenen Punctes und

$$y = ax + b$$

die Gleichung der gegebenen Geraden, so ist

$$y - y_1 = -\frac{1}{a}(x - x_1)$$

die Gleichung einer auf dieser Geraden senkrechten und durch den Punct (x_1, y_1) gehenden geraden Linie.

Es handelt sich nun darum, den Abstand zwischen dem Puncte (x_1, y_1) und dem Fußpuncte dieser Senkrechten zu finden. Zur Bestimmung des Fußpunctes darf man nur die obigen Gleichungen als zusammengehörig betrachten und daraus x und y bestimmen; man erhält

$$x = \frac{x_1 + a y_1 - a b}{1 + a^2}, \qquad y = \frac{a (x_1 + a y_1) + b}{1 + a^2},$$

welche Coordinaten wir der Unterscheidung halber durch x_2, y_2 bezeichnen wollen. Kennt man aber die Coordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 zweier Puncte, so hat man für die Berechnung ihres Abstandes d den Ausdruck

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Nun ist

$$x_2 - x_1 = \frac{a (y_1 - a x_1 - b)}{1 + a^2}, \qquad y_2 - y_1 = \frac{y_1 - a x_1 - b}{1 + a^2},$$

daher

$$d = \frac{y_1 - a x_1 - b}{\sqrt{1 + a^2}},$$

wo das Wurzelzeichen so zu nehmen ist, daß d positiv wird.

Z. B. Die Entfernung des Punctes (3, 1) von der Geraden $y = x + 3$ ist

$$d = \frac{1 - 3 - 3}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{-5}{-\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

3. Drei Gerade.

§. **453.** Bedingung, unter welcher sich drei Gerade in einem Puncte schneiden.

Sind $y = a_1 x + b_1$, $y = a_2 x + b_2$ und $y = a_3 x + b_3$ die Gleichungen der drei Geraden, so hat man für den Durchschnittspunct der ersten und zweiten

$$x_1 = \frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1}, \qquad y_1 = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2 - a_1};$$

für den Durchschnittspunct der ersten und dritten

$$x_2 = \frac{b_1 - b_3}{a_3 - a_1}, \qquad y_2 = \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{a_3 - a_1}.$$

Sollen nun diese beiden Puncte identisch sein, so muß $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$, also

$$\frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1} = \frac{b_1 - b_3}{a_3 - a_1} \text{ und } \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2 - a_1} = \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{a_3 - a_1}$$

sein. Die zweite Bedingungsgleichung ist jedoch von der ersten abhängig und nur ein anderer Ausdruck für dieselbe Beziehung. Denn, befreit man die erste Gleichung von Brüchen, wodurch man

$$a_3 b_1 - a_3 b_2 - a_1 b_1 + a_1 b_2 = a_2 b_1 - a_2 b_3 - a_1 b_1 + a_1 b_3$$

erhält, läßt dann in beiden Theilen $- a_1 b_1$ weg, multiplicirt die übrigen Glieder mit a_1 und addirt noch zu beiden Theilen $a_2 a_3 b_1$, so erhält man

$$(a_3 - a_1)(a_2 b_1 - a_1 b_2) = (a_2 - a_1)(a_3 b_1 - a_1 b_3), \text{ oder}$$

$$\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_3 b_1 - a_1 b_3} = \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1}.$$

Die Bedingung, unter welcher sich drei Gerade in einem Puncte schneiden, reducirt sich also auf das Stattfinden der Gleichung $\frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1} = \frac{b_1 - b_3}{a_3 - a_1}$,

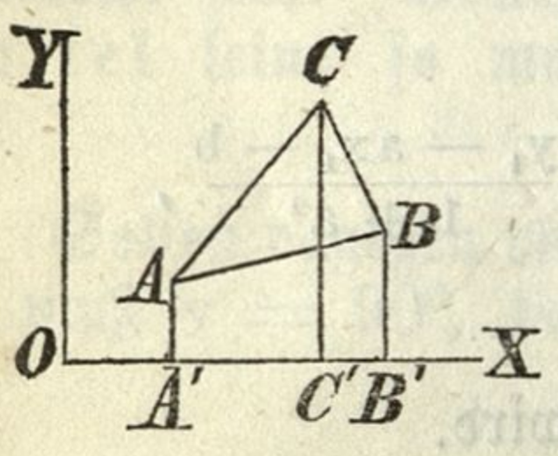
welche sich auch so darstellen läßt:

$$\frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1} = \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1};$$

d. h. die Differenzen der Abschnitte, welche je zwei Gerade auf der Ordinatenaxe bestimmen, müssen den Differenzen der entsprechenden Richtungsconstanten proportionirt sein.

§. 454. Lage und Länge der Seiten, und Fläche des geradlinigen Dreieckes.

Fig. 280.



Beziehen wir das Dreieck ABC (Fig. 280) auf das rechtwinklige Coordinatensystem XOY, und es seien die Coordinaten

des Punctes A... x_1, y_1,
" " B... x_2, y_2,
" " C... x_3, y_3.

Hinsichtlich der Lage der Seiten ist dann

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ die Gleichung der Seite AB,

$y - y_1 = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}(x - x_1)$ " " " " AC,

$y - y_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}(x - x_2)$ " " " " BC.

Drückt man die Längen der Seiten BC, AC, AB folgeweise durch s_1, s_2, s_3 aus, so ist

$$s_1 = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2},$$
$$s_2 = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2},$$
$$s_3 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Heißt endlich f die Fläche des Dreieckes ABC, so ist offenbar

$$f = AA'C'C + CC'B'B - AA'B'B;$$

nun ist

$$AA'C'C = \frac{(y_1 + y_3)(x_3 - x_1)}{2},$$
$$CC'B'B = \frac{(y_2 + y_3)(x_2 - x_3)}{2},$$
$$AA'B'B = \frac{(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)}{2},$$

und daher

$$f = \frac{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)}{2}.$$

Zusätze. 1. Auf gleiche Weise kann auch der Flächeninhalt jedes beliebigen Vieleckes durch die Coordinaten seiner Eckpuncte bestimmt werden.

2. Liegen die Puncte A, B und C in einer Geraden, so ist $f = 0$, daher

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0,$$

woraus man dieselbe Bedingungsgleichung

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$$

erhält, die wir in §. 431 auf einem andern Wege gefunden haben.

4. Uebungsaufgaben.

§. 455. 1. Construire die Gleichungen:

a) $y = -\frac{x}{3}$, b) $5y = 2x$, c) $y = 3x + 5$;

d) $y = x - \frac{3}{4}$, e) $y = -2x + 3$, f) $3y = -x + 9$.

2. Gegeben sind die Puncte

a) $(1, -1)$ und $(-2, 2)$, b) $(-\frac{1}{2}, 3)$ und $(3, 0)$;

suche die Gleichung der Geraden, welche durch diese Puncte geht.

3. Suche die Coordinaten des Durchschnittspunctes, sowie den Winkel der beiden Geraden

a) $y = -3x + 5$ und $y = 2x - 4$;

b) $y = \frac{2x}{3} + 3$ und $4y = -2x + 3$.

4. Suche die Gleichung einer Geraden, welche

a) durch den Ursprung geht und zu der Geraden $y = ax + b$ parallel ist;

b) durch den Punct (x_1, y_1) geht und zu der Abscissenaxe parallel ist;

c) durch den Punct (x_1, y_1) geht und zu der Ordinatenaxe parallel ist.

5. Suche die Gleichung einer Geraden, welche

a) durch den Ursprung geht und auf der Geraden $y = ax + b$ senkrecht ist;

b) durch den Punct (x_1, y_1) geht und auf der Abscissenaxe senkrecht ist;

c) durch den Punct (x_1, y_1) geht und auf der Ordinatenaxe senkrecht ist.

6. Gegeben sind

a) der Punct $(2, -1)$ und die Gerade $y = 5x + 1$;

b) „ „ $(-3, 0)$ „ „ „ $y = -3x + 4$.

Suche

α) die Gleichung der Geraden, welche durch den gegebenen Punct geht und zu der gegebenen Geraden parallel ist;

β) die Gleichung der Geraden, welche durch den gegebenen Punct geht und auf die gegebene Gerade senkrecht ist;

γ) die Entfernung des gegebenen Punctes von der gegebenen Geraden.

7. Zwei Eckpuncte eines Dreieckes sind $(3, 2)$ und $(2, -1)$, der dritte liegt im Ursprunge; bestimme den Flächeninhalt des Dreieckes.

8. Die Eckpuncte eines Viereckes sind $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ und $D = (x_4, y_4)$; bestimme a) die Länge jeder Seite, b) den Flächeninhalt.

9. Gegeben sind zwei Gerade $y = 2x + 1$ und $y = x - 1$; bestimme in der Gleichung $y = ax + 3$ den Werth von a so, daß die dadurch ausgedrückte Gerade durch den Durchschnittspunct der beiden ersteren geht.

10. Die Gleichungen der Schenkel eines Winkels sind

$$y = ax + b \quad \text{und} \quad y = a'x + b';$$

suche die Gleichung einer Geraden, welche diesen Winkel halbirt.

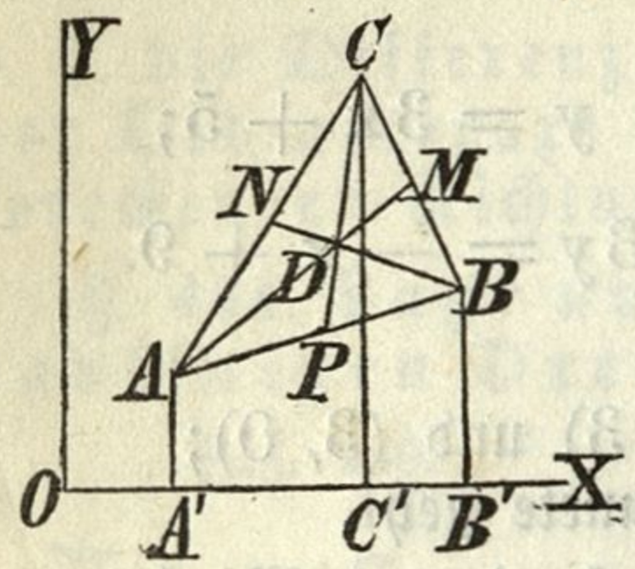
Unter Anwendung von §§. 52 und 452 erhält man

$$\frac{y - ax - b}{\sqrt{1 + a^2}} = \pm \frac{y - a'x - b'}{\sqrt{1 + a'^2}}.$$

Es gibt also zwei Gerade; die eine halbirt den Winkel selbst, die andere seinen Nebenwinkel; beide stehen senkrecht auf einander.

11. Bestimme analytisch die Durchschnittspuncte der Mittellinien (§. 71, 4) eines Dreieckes, dessen Eckpuncte gegeben sind.

Fig. 281.



Sind $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ und $C = (x_3, y_3)$ die Eckpuncte des Dreieckes ABC (Fig. 281) und M, N, P die Halbirungspuncte der Seiten BC, AC, AB, so hat man für dieselben folgende Coordinaten:

für den Punct M . . $\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}$;

" " " N . . $\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}$;

" " " P . . $\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Die Gerade AM geht durch die Puncte (x_1, y_1) und $\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$; daher ist

Gleichung der AM ... $y - y_1 = \frac{2y_1 - y_2 - y_3}{2x_1 - x_2 - x_3}(x - x_1)$;

ebenso ist " " BN .. $y - y_2 = \frac{2y_2 - y_3 - y_1}{2x_2 - x_3 - x_2}(x - x_2)$;

" " CP ... $y - y_3 = \frac{2y_3 - y_1 - y_2}{2x_3 - x_1 - x_2}(x - x_3)$.

Sucht man nun die Durchschnittspuncte je zweier der Geraden, so erhält man für alle drei Puncte dieselben Coordinaten, nämlich:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Daraus folgt, daß sich die Mittellinien eines Dreieckes in einem gemeinschaftlichen Puncte schneiden.

12. Bestimme ebenso die Durchschnittspuncte
a) der Mittellothe (§. 71, 1),
b) der Winkelhalbirungslinien (§. 71, 2), und
c) der Ecklothe (§. 71, 3) des obigen Dreieckes.

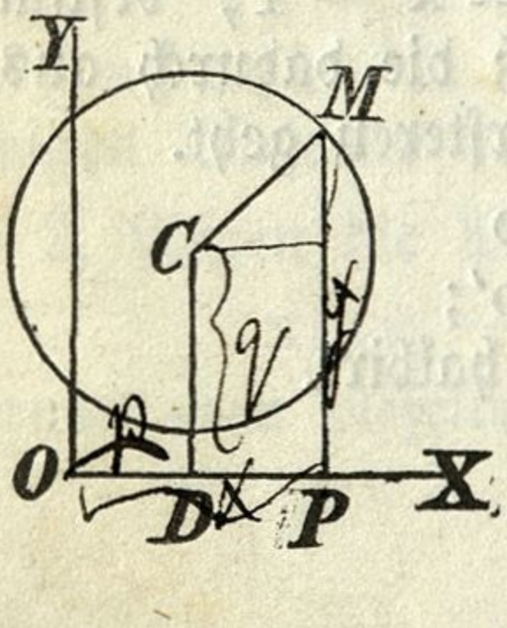
III. Die Kreislinie.

1. Analytische Darstellung der Kreislinie.

§. 456. Allgemeine Gleichung des Kreises für rechtwinklige Coordinaten.

In der Kreislinie sind alle Puncte von dem Mittelpuncte gleich weit entfernt. Um die Gleichung des Kreises zu erhalten, darf man daher nur diese Haupteigenschaft desselben in die analytische Zeichensprache übertragen.

Fig. 282.



Es seien (Fig. 282) $OD = p$, $CD = q$ die Coordinaten des Mittelpunctes C in Bezug auf das rechtwinklige System XOY, M ein beliebiger Punct der Kreislinie, seine Coordinaten $x = OP$, $y = MP$ und $CM = a$ der Halbmesser; so hat man für den Abstand der Puncte M und C (nach §. 430) den Ausdruck $\sqrt{(x - p)^2 + (y - q)^2}$. Da nun dieser Abstand für alle Puncte der Kreislinie constant und $= a$ sein muß, so ist

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = a^2 \ldots 1)$$

die allgemeine Gleichung des Kreises.

Die Gleichung 1) enthält drei constante Größen, was anzeigt, daß zur vollkommenen Bestimmung der Lage und Größe eines Kreises drei Bedingungen

erforderlich sind. Man kann diese drei Constanten p, q, a beliebig ändern, so bedeutet die Gleichung immer wieder einen Kreis, wenn auch dessen Lage und Größe eine andere wird; der Charakter der krummen Linie wird durch die Aenderung der Constanten durchaus nicht geändert.

Sind z. B. $p = 1$, $q = 2$ die Coordinaten des Mittelpunctes und $a = 3$ der Halbmesser des Kreises, so ist

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9,$$

oder

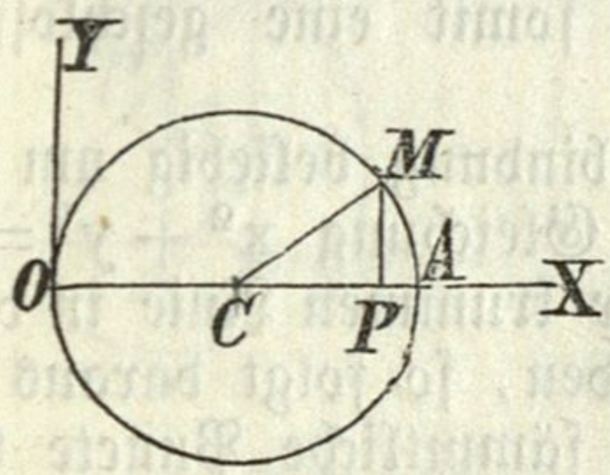
$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 4$$

die Gleichung desselben.

§. **457.** Für besondere Lagen der Coordinatenaxen nimmt die Gleichung des Kreises eine noch einfachere Gestalt an.

1. Liegt der Ursprung O (Fig. 283) in der Peripherie des Kreises, und geht die positive Abscissen-Halbaxe durch den Mittelpunct desselben, so ist $p = a$, $q = 0$, und die Gleichung 1) geht über in

Fig. 283.

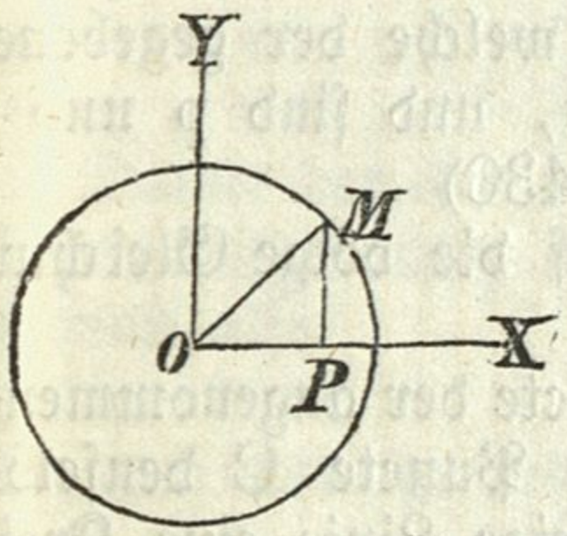


$$x^2 + y^2 = 2ax \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Diese Gleichung heißt die Scheitelgleichung des Kreises; sie kann aus der nebenstehenden Figur auch unmittelbar hergeleitet werden.

2. Liegt der Ursprung O der Coordinaten (Fig. 284) im Mittelpuncte des Kreises, so ist $p = 0$, $q = 0$, und man erhält aus 1) die Gleichung

Fig. 284.



$$x^2 + y^2 = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Diese Gleichung, welche die Mittelpunctsgleichung des Kreises heißt, ergibt sich auch für sich aus der nebenstehenden Figur.

Die Gleichungen 2) und 3) enthalten nur eine einzige Constante, was ganz natürlich ist, da von den drei im Allgemeinen nöthigen Bedingungen zwei bereits durch die Voraussetzungen, unter welchen jene Gleichungen stattfinden, ausgesprochen sind.

§. **458.** Discussion der Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$.

Die Gleichung einer Linie charakterisirt dieselbe dergestalt, daß man die Gleichung nur unter verschiedenen Gesichtspuncten zu betrachten und die Ergebnisse in die gewöhnliche Wortsprache zu übertragen braucht, um die Gestalt und alle anderen Eigenschaften der Linie herauszulesen, und von ihr ohne alle geometrische Hilfsmittel ein klares Bild zu erhalten. Zur räumlichen Deutung der Gleichung des Kreises wählen wir die Mittelpunctsgleichung 3) als die einfachste.

1. Aus

$$y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

folgt, daß jedem Werthe von x, für welchen überhaupt y einen reellen Werth hat, zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werthe von y entsprechen; die Kreislinie wird also von der Abscissenaxe in zwei congruente Theile getheilt.

2. Aus

$$x = \pm \sqrt{a^2 - y^2}$$

folgt, daß auch zu jedem Werthe von y, für welchen überhaupt x reell ausfällt, zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werthe von x gehören; die Kreislinie erstreckt sich demnach auch zu beiden Seiten der Ordinatenaxe in zwei congruenten Aesten.

Die Kreislinie wird daher durch die beiden Coordinatenaxen in vier congruente Theile getheilt.

3. Setzt man in der Gleichung $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$ die Abscisse $x = o$, so erhält man für die Durchschnittspuncte des Kreises mit der Ordinatenaxe $y = \pm a$; die Kreislinie schneidet also die Ordinatenaxe in zwei Puncten, welche von dem Ursprunge auf entgegengesetzten Seiten den Abstand a haben. Aus $x = \pm\sqrt{a^2 - y^2}$ folgt für $y = o$ ebenso $x = \pm a$, d. h. die Kreislinie schneidet auch die Abscissenaxe in zwei Puncten, welche ebenfalls auf entgegengesetzten Seiten vom Ursprunge den Abstand a haben.

4. Für $x > a$ wird y imaginär, für $y > a$ wird x imaginär; der größte Werth, den man für x oder y setzen kann, ist also der Halbmesser a. Errichtet man daher durch die vier Durchschnittspuncte der Kreislinie mit den beiden Axen ein Quadrat, dessen Seiten zu diesen Axen parallel sind, so schließt dasselbe den Kreis vollkommen ein. Der Kreis ist somit eine geschlossene krumme Linie.

5. Da die beiden Coordinatenaxen als feste Verbindung beliebig um den Mittelpunct gedreht werden können, ohne daß sich die Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$ ändert, und da in jeder Lage die beiden Axen von der krummen Linie in demselben Abstande $\pm$ a vom Mittelpuncte geschnitten werden, so folgt daraus die charakteristische Eigenschaft der Kreislinie, daß deren sämmtliche Puncte vom Mittelpuncte gleich weit abstehen.

§. **459.** Der geometrische Ort aller Puncte, deren Coordinaten der Gleichung $(x - p)^2 + (y - q)^2 = a^2$ genügen, ist eine Kreislinie.

Es sei M (Fig. 282) ein beliebiger Punct der Linie, welche der gegebenen Gleichung angehört. Setzt man $OP = x$ und $MP = y$, und sind p und q die Coordinaten des Punctes C, so hat man (nach §. 430)
$CM^2 = (x - p)^2 + (y - q)^2$, daher mit Rücksicht auf die obige Gleichung
$CM^2 = a^2$ und folglich $CM = a$.

Da das von M Bewiesene auch von jedem anderen Puncte der angenommenen Linie gilt, so folgt, daß jeder Punct derselben von dem Puncte C denselben Abstand a hat, daß somit die zu obiger Gleichung gehörige Linie eine Kreislinie ist.

§. **460.** Construction eines Kreises, dessen Gleichung gegeben ist.

Um einen Kreis, dessen Gleichung gegeben ist, zu construiren, bringe man diese zuerst auf die Form

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = a^2,$$

woraus sich die zur Verzeichnung erforderlichen Coordinaten des Mittelpunctes und der Halbmesser unmittelbar ergeben.

Soll z. B. der Kreis, dessen Gleichung

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y = 3$$

ist, construirt werden, so addire man zu $x^2 + 4x$ das Quadrat des halben Coefficienten von x, nämlich 4, und zu $y^2 - 6y$ das Quadrat des halben Coefficienten von y, nämlich 9; addire aber die Zahlen 4 und 9, damit die Gleichheit nicht gestört wird, auch auf der zweiten Seite dazu; man erhält

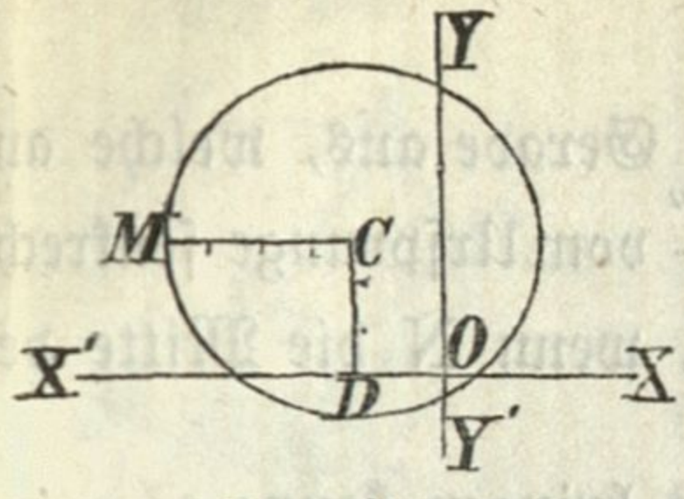
$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 3 + 4 + 9,$$

oder

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16.$$

Es ist somit $p = -2$, $q = 3$, $a = \sqrt{16} = 4$.

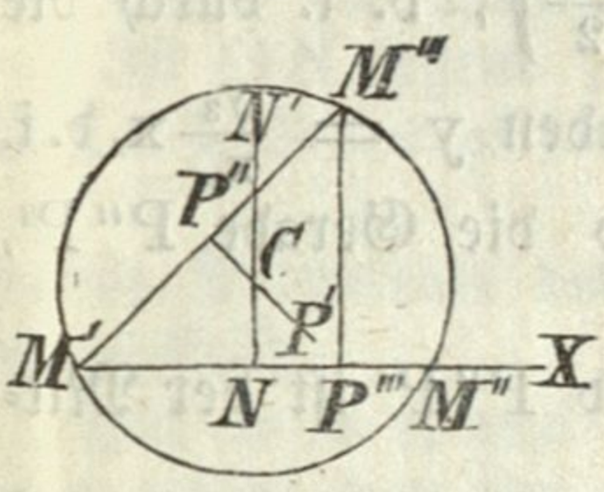
Fig. 285.



Um nun den Kreis zu verzeichnen, suche man zuerst einen Punct C (Fig. 285), dessen Coordinaten — 2 und 3 sind, und beschreibe aus demselben als Mittelpunct einen Kreis, dessen Halbmesser CM = 4 ist.

§. 461. Gleichung eines Kreises, welcher durch drei gegebene Puncte geht.

Fig. 286.



Es seien (Fig. 286) die Puncte $M' = (x_1, y_1)$, $M'' = (x_2, y_2)$ und $M''' = (x_3, y_3)$ gegeben; man suche die Gleichung des Kreises, welcher durch diese Puncte geht.

Die gesuchte Gleichung wird die Form

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = a^2 \ldots 1)$$

haben, wo p, q, a entsprechend zu bestimmen sind.

Da wir die Lage der rechtwinkligen Coordinaten beliebig wählen können, so wollen wir, um die Auflösung der Aufgabe zu vereinfachen, den Punct M' selbst als Ursprung und die durch M' und M'' gezogene Gerade M' X als Abscissenaxe annehmen; es sind dann

die Coordinaten des Punctes M' . . . . $x_1 = 0$, $y_1 = 0$;
" " " " M'' . . . . x_2, $y_2 = 0$;
" " " " M''' . . . . x_3, y_3.

Damit der Kreis durch den Punct M' gehe, müssen die Coordinaten dieses Punctes statt x, y in die Gleichung 1) substituirt derselben Genüge leisten, es muß also

$$p^2 + q^2 = a^2 \ldots 2)$$

sein, und vermöge dieser Relation nimmt die Gleichung 1) die einfachere Form an

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy = 0 \ldots 3).$$

Damit ferner der Kreis durch die Puncte M'', M''' gehe, müssen auch die Bedingungsgleichungen

$$x_2^2 - 2px_2 = 0 \ldots 4)$$

$$x_3^2 + y_3^2 - 2px_3 - 2qy_3 = 0 \ldots 5)$$

erfüllt werden.

Aus 3), 4) und 5) ergibt sich dann

$$x^2 + y^2 - x_2 x - \frac{x_3^2 + y_3^2 - x_2 x_3}{y_3} \cdot y = 0 \ldots 6)$$

als die Gleichung des gesuchten Kreises.

Zusatz. Um diesen Kreis zu construiren, würde man aus 4) und 5) p und q berechnen und mit diesen Größen den Mittelpunct bestimmen; der Halbmesser ergibt sich dann aus $a^2 = p^2 + q^2$. Einfacher ist es jedoch, in den Gleichungen 4) und 5) p und q als veränderliche Coordinaten zu betrachten und die durch diese Gleichungen dargestellten Linien zu construiren. Der Durchschnitt dieser Linien ist dann der gesuchte Mittelpunct, indem die Coordinaten des Durchschnittspunctes die einzigen sind, die den Gleichungen 4) und 5) gleichzeitig Genüge leisten.

Die Gleichung 4), welche sich auch so darstellen läßt:

$$p = \frac{x_2}{2},$$

drückt, wenn p die veränderliche Abscisse vorstellt, eine Gerade aus, welche auf der Abscissenaxe M'X in dem Abstande $\frac{x_2}{2} = \frac{M'M''}{2}$ vom Ursprunge senkrecht steht; ihr geometrischer Ort ist also die Gerade NN', wenn N die Mitte der M'M'', und NN' $\perp$ M'M'' ist.

Die Gleichung 5), welche man auf folgende Form bringen kann:

$$q - \frac{y_3}{2} = -\frac{x_3}{y_3}\left(p - \frac{x_3}{2}\right),$$

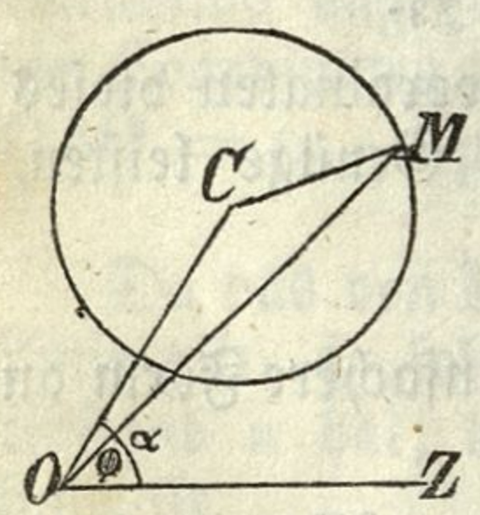
drückt eine Gerade aus, welche durch den Punct $\left(\frac{x_3}{2}, \frac{y_3}{2}\right)$, d. i. durch die Mitte P'' der Geraden M'M''' geht, und auf der Geraden $y = \frac{y_3}{x_3}x$, d. i. auf M'M''' senkrecht ist; ihr geometrischer Ort ist also die Gerade P''P', wenn P''P' $\perp$ M'M''' ist.

Der Durchschnitt C der beiden Senkrechten NN' und P''P' ist der Mittelpunct des zu beschreibenden Kreises.

Durch diese analytische Untersuchung gelangen wir zu dem aus der Planimetrie (§. 138) bekannten Satze, daß der Mittelpunct des durch drei Puncte gehenden Kreises in dem Durchschnitte der Senkrechten liegt, welche in den Mitten der die drei Puncte verbindenden Sehnen auf diese errichtet werden.

§. 462. Polargleichung des Kreises.

Fig. 287.



1. Ist der Mittelpunct des Kreises zugleich der Pol des Polar-Coordinatensystems, so ist $r = a$ die Polargleichung des Kreises, wo a den Halbmesser des Kreises und r den in seiner Richtung veränderlichen Radiusvector bedeutet.

2. Liegt der Pol O (Fig. 287) nicht im Mittelpuncte C des Kreises, so sei $OC = \varrho$ der Radiusvector des Mittelpunctes und $COZ = \alpha$ der Winkel, den OC mit der Polaraxe OZ bildet. Ist nun M irgend ein Punct der Kreislinie, also $r = OM$ sein Radiusvector und $\varphi = MOZ$ der Winkel desselben mit der Polaraxe, so erhält man, wenn der Halbmesser $CM = a$ gesetzt wird, aus dem Dreiecke CMO

$$CM^2 = OM^2 + OC^2 - 2OM \cdot OC \cdot \cos COM,$$

oder
$$a^2 = r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho\cos(\alpha - \varphi),$$

woraus
$$r = \varrho\cos(\alpha - \varphi) \pm \sqrt{a^2 - \varrho^2\sin(\alpha - \varphi)^2}$$

als allgemeine Polargleichung des Kreises folgt.

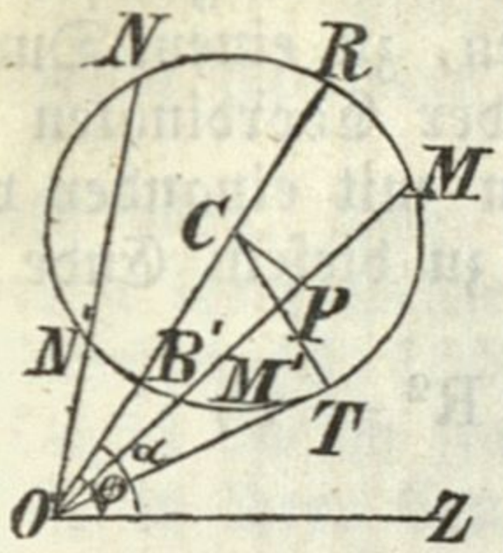
Diese Gleichung kann auch unmittelbar aus der allgemeinen Gleichung des Kreises $(x - p)^2 + (y - q)^2 = a^2$ abgeleitet werden, wenn man (§. 446) in derselben $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $p = \varrho\cos\alpha$ und $q = \varrho\sin\alpha$ setzt.

§. 463. Discussion der Polargleichung des Kreises.

$$r = \varrho\cos(\alpha - \varphi) \pm \sqrt{a^2 - \varrho^2\sin(\alpha - \varphi)^2}.$$

1. Das doppelte Zeichen, welches hier vor der Wurzelgröße steht, deutet an, daß man für r jedesmal zwei reelle Werthe erhält, sobald $\varrho\sin(\alpha - \varphi) < a$ ist.

Fig. 288.



Nun ist, wenn (Fig. 288) $CP \perp OM$ gezogen wird, $\varrho \sin(\alpha - \varphi) = CO \cdot \sin COP = CP$. Sobald also der Abstand CP des Radiusvectors vom Mittelpuncte kleiner als der Halbmesser a ist, so nimmt r zwei reelle Werthe

$$OM = \varrho \cos(\alpha - \varphi) + \sqrt{a^2 - \varrho^2 \sin(\alpha - \varphi)^2},$$
$$OM' = \varrho \cos(\alpha - \varphi) - \sqrt{a^2 - \varrho^2 \sin(\alpha - \varphi)^2}$$

an und bestimmt daher zwei Puncte M und M' des Kreises, welche mit dem Pole O in einer geraden Linie liegen.

Durch die Multiplication jener Werthe erhält man $OM \cdot OM' = \varrho^2 - a^2$.

Ist ON irgend ein anderer Radiusvector, so findet man eben so $ON \cdot ON' = \varrho^2 - a^2$; daher ist $OM \cdot OM' = ON \cdot ON'$, oder

$$OM : ON = ON' : OM',$$

welche Proportion den in §. 150 auf einem andern Wege entwickelten Lehrsatz enthält.

Für $\varphi = \alpha$ geht der Radiusvector durch den Mittelpunct des Kreises, und man erhält aus der obigen Gleichung für r die Werthe

$$OR = \varrho + a \text{ und } OR' = \varrho - a,$$

deren Richtigkeit auch unmittelbar aus der Figur zu ersehen ist.

2. Ist $\varrho \sin(\alpha - \varphi) = a$, d. h. der Abstand CT des Radiusvectors vom Mittelpuncte gleich dem Halbmesser, so erhält man für r nur einen einzigen Werth

$$OT = r = \varrho \cos(\alpha - \varphi),$$

oder, da $\sin(\alpha - \varphi) = \frac{a}{\varrho}$ und somit $\cos(\alpha - \varphi) = \frac{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}{\varrho}$ ist, auch

$$OT = r = \sqrt{\varrho^2 - a^2},$$

woraus hervorgeht, daß in diesem Falle der Radiusvector OT eine Tangente des Kreises ist, indem r, ϱ und a ein rechtwinkliges Dreieck bilden, worin $\varrho = OC$ die Hypotenuse und daher CTO der rechte Winkel ist.

Da $OT^2 = \varrho^2 - a^2$ ist, so hat man auch $OM \cdot OM' = OT^2$,

oder $$OM : OT = OT : OM',$$

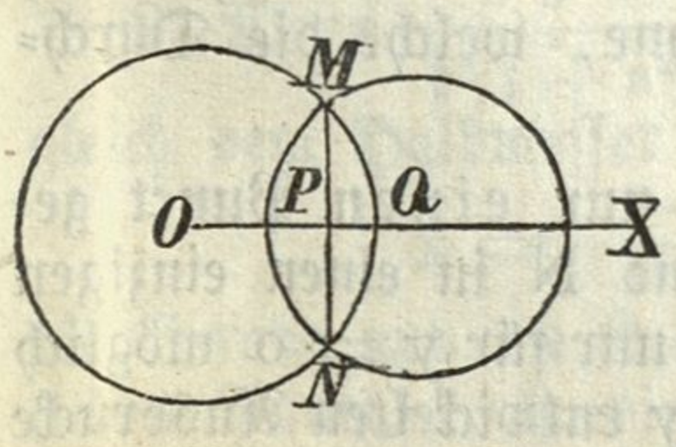
eine Proportion, deren Richtigkeit wir auch schon im §. 151 bewiesen haben.

Wenn endlich $\varrho \sin(\alpha - \varphi) > a$, d. h. der Abstand des Radiusvectors vom Mittelpuncte größer als der Halbmesser ist, so fallen die beiden Werthe von r imaginär aus, und es bestimmt daher ein solcher Radiusvector keinen Punct des Kreises.

2. Zwei Kreise.

§. 464. Bedingungen für den Durchschnitt und die Berührung zweier Kreise.

Fig. 289.



Es seien O und Q (Fig. 289) die Mittelpuncte zweier Kreise, $OQ = c$ ihre Centrale und R und r die Halbmesser. Man kann unbeschadet der Allgemeinheit der Aufgabe O als Ursprung der Coordinaten und die durch O und Q gehende Gerade OX als Abscissenaxe annehmen; dann sind die Gleichungen der beiden Kreise

$$x^2 + y^2 = R^2 \text{ und } (x - c)^2 + y^2 = r^2.$$

Die Coordinaten eines jeden, den beiden Kreislinien gemeinschaftlichen Punctes müssen diesen beiden Gleichungen Genüge leisten, und umgekehrt gehören zwei Coordinaten, welche diesen Gleichungen genügen, zu einem Durchschnittspuncte der beiden Kreislinien. Zur Bestimmung der Coordinaten der Durchschnittspuncte wird man also die beiden Gleichungen mit einander verbinden und daraus x und y bestimmen. Subtrahirt man zu diesem Ende die zweite Gleichung von der ersten, so erhält man

$$x^2 - (x-c)^2 = R^2 - r^2 \text{ oder } 2cx - c^2 = R^2 - r^2,$$

woraus

$$x = \frac{c^2 + R^2 - r^2}{2c}$$

folgt. Substituirt man diesen Werth in die erste Gleichung, so findet man

$$y = \pm \frac{1}{2c}\sqrt{4c^2 R^2 - (c^2 + R^2 - r^2)^2}.$$

Die beiden Kreise haben also, wenn die Wurzelgröße in y reell und von o verschieden ausfällt, zwei gemeinschaftliche Puncte, welche dieselbe Abscisse und zwei gleiche, aber entgegengesetzt liegende Ordinaten haben. Ist $4c^2 R^2 = (c^2 + R^2 - r^2)^2$, so wird $y = o$; dann haben die beiden Kreise nur einen einzigen gemeinschaftlichen Punct. Ist endlich die Größe unter dem Wurzelzeichen negativ, so wird y imaginär; die zwei Kreise haben keinen Punct mit einander gemeinschaftlich.

Zwei Kreise haben also zwei, einen oder gar keinen Punct gemeinschaftlich.

1. Damit ein Durchschnitt statt finde, muß y reell, folglich die Größe unter dem Wurzelzeichen positiv sein. Nun ist

$$\begin{aligned} 4c^2R^2 - (c^2 + R^2 - r^2)^2 &= (2cR + c^2 + R^2 - r^2)\,(2cR - c^2 - R^2 + r^2) \\ &= \{(c+R)^2 - r^2\} \,.\, \{r^2 - (c-R)^2\} \\ &= (c+R+r)\,(c+R-r)\,(r+c-R)\,(r-c+R). \end{aligned}$$

Man kann immer $R \geqq r$ annehmen. Dann sind die Factoren $c + R + r$ und $c + R - r$ wesentlich positiv, und, damit y reell sei, müssen die beiden andern Factoren entweder beide positiv oder beide negativ sein; es muß also entweder

$$r + c > R \text{ und } r + R > c, \text{ oder}$$
$$r + c < R \text{ und } r + R < c$$

sein. Letzteres ist nicht möglich, da sonst $c < R$ und zugleich $c > R$ sein müßte, was einen Widerspruch enthält. Die Bedingungen für den Durchschnitt zweier Kreise sind also

$$r + c > R \text{ und } r + R > c,$$

und da immer auch $c + R > r$ ist, so folgt, daß sich zwei Kreise nur dann schneiden, wenn von den drei Größen c, R, r je zwei zusammen größer sind als die dritte, also nur dann, wenn sich aus den drei Strecken c, R, r ein Dreieck construiren läßt.

Da in diesem Falle die beiden Durchschnittspuncte M und N dieselbe Abscisse OP, und zwei gleiche einander entgegengesetzte Ordinaten MP und NP haben, so ergibt sich daraus der Satz: Wenn sich zwei Kreislinien schneiden, so steht ihre Centrale senkrecht auf der Mitte der Sehne, welche die Durchschnittspuncte verbindet (§. 154, 4).

2. Sollen sich die beiden Kreise berühren, also nur einen Punct gemeinschaftlich haben, so müssen die zwei Puncte M und N in einen einzigen zusammenfallen, somit gleiche Coordinaten haben, was nur für $y = o$ möglich ist. Da wir nun die ersten zwei Factoren in dem für y entwickelten Ausdrucke

nach den früheren Bemerkungen stets als positiv ansehen dürfen, so kann y nur dann $= o$ sein, wenn

$$\text{entweder } r + c - R = o \text{ oder } r + R - c = o$$

ist, wenn also eine der zwei Bedingungsgleichungen

$$c = R - r, \quad c = R + r$$

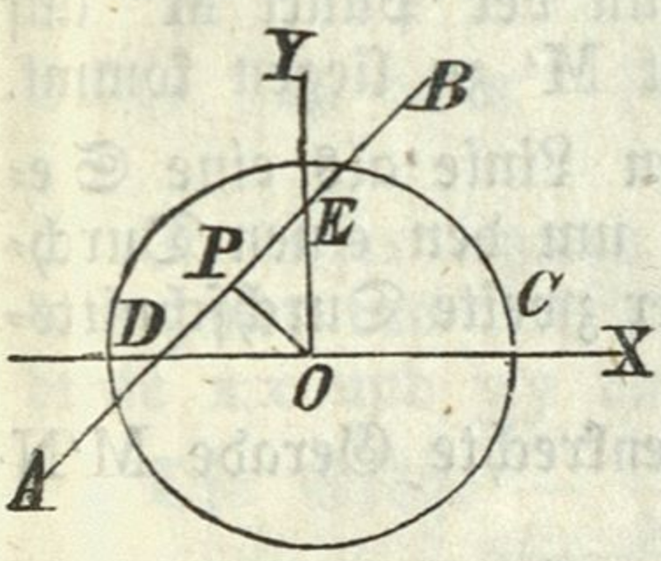
erfüllt wird. Zwei Kreise können sich also nur dann berühren, wenn die Entfernung ihrer Mittelpuncte gleich ist der Differenz oder der Summe ihrer Halbmesser (§. 155, 2 und 4).

Da in diesem Falle $y = o$ ist, so folgt, daß der Berührungspunct zweier Kreise in ihrer Centrale liegt.

3. Die Gerade und der Kreis.

§. 465. Bedingungen für den Durchschnitt und die Berührung einer geraden Linie mit dem Kreise.

Fig. 290.



Ist (Fig. 290) $OC = r$ der Halbmesser eines Kreises, O der Ursprung der Coordinaten, OX die Abscissenaxe und AB eine Gerade, welche die Abscissenaxe unter dem Winkel $BDX = \alpha$ und die Ordinatenaxe in dem Abstande $OE = b$ schneidet, so ist

$$x^2 + y^2 = r^2$$

die Gleichung des Kreises, und

$$y = ax + b,$$

wo $a = \text{tang } \alpha$, die Gleichung der Geraden AB.

Trifft die Gerade den Kreis, so sind für den Durchschnittspunct die Coordinaten beider Linien gleich und man darf, um dieselben zu erhalten, nur die beiden Gleichungen als coexistirend betrachten und auflösen. Man erhält, wenn man in der ersten Gleichung den Werth von y aus der zweiten substituirt,

$$x^2 + (ax + b)^2 = r^2,$$

und daraus

$$x = \frac{-ab \pm \sqrt{r^2(1 + a^2) - b^2}}{1 + a^2}.$$

1. Ist hier $b^2 < r^2(1 + a^2)$ oder $\frac{b}{\sqrt{1 + a^2}} < r$, so hat x zwei reelle Werthe; man erhält also zwei Abscissen, deren zugehörige Ordinaten dann aus der Gleichung $y = ax + b$ gefunden werden. Nun ist, wenn man $OP \perp AB$ zieht,

$$\frac{b}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{b}{\sqrt{1 + \text{tang}^2\,\alpha}} = b \cos \alpha = EO \,.\, \sin PEO = OP;$$

die Größe $\frac{b}{\sqrt{1 + a^2}}$ stellt also die Entfernung OP der Geraden AB von dem Mittelpuncte O vor.

Ist diese Entfernung kleiner als der Halbmesser des Kreises, so schneidet die Gerade den Kreis in zwei Puncten.

2. Wenn $\frac{b}{\sqrt{1 + a^2}} = r$, d. h. der Abstand der Geraden vom Mittelpuncte gleich dem Halbmesser ist, so hat man

$$x = \frac{-ab}{1 + a^2}, \text{ und } y = ax + b = \frac{b}{1 + a^2};$$

die Gerade und die Kreislinie haben in diesem Falle nur einen gemeinschaftlichen Punct, d. h. die Gerade ist eine Tangente des Kreises.

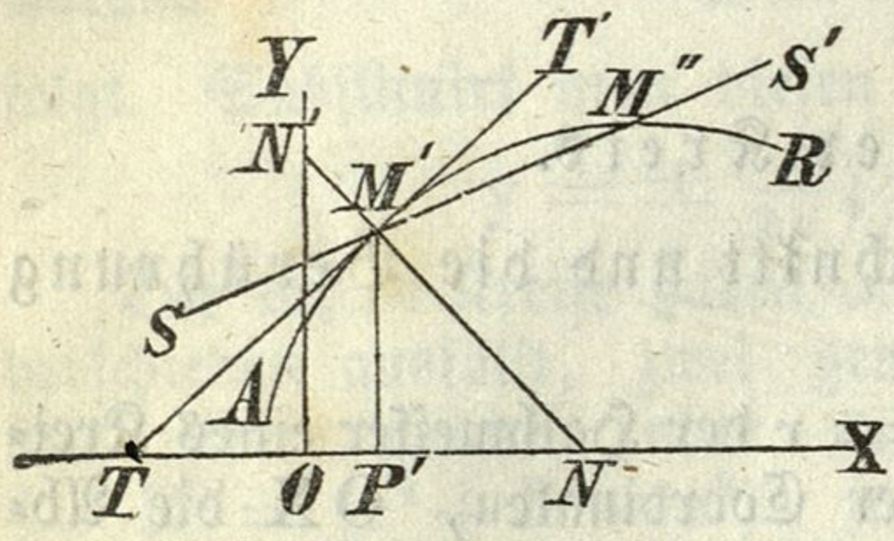
3. Ist endlich $\frac{b}{\sqrt{1+a^2}} > r$, so sind die Werthe von x imaginär; die Gerade hat dann mit der Kreislinie keinen Punct gemeinschaftlich.

Zu denselben Ergebnissen führten auch die in §. 141 angestellten Betrachtungen.

§. 466. Allgemeiner Begriff der Tangente.

Es sei AR (Fig. 291) irgend eine krumme Linie und M' der Punct, in welchem sie von der Geraden TT' berührt werden soll. Man denke sich durch diesen Berührungspunct M' und durch einen benachbarten Punct M" zuerst eine Secante SS' gezogen und diese dann um den Punct M' so gedreht, daß der Punct M" jenem M' immer näher rückt; dann wird sich auch die Secante SS' der Tangente TT' immer mehr nähern und endlich mit ihr zusammenfallen, wenn der Punct M" auf den Berührungspunct M' zu liegen kommt.

Fig. 291.



Man kann daher die Tangente einer krummen Linie als eine Secante derselben betrachten, welche durch die Drehung um den einen Durchschnittspunct in eine solche Lage gebracht wurde, daß der zweite Durchschnittspunct mit dem ersten zusammenfällt.

Eine im Berührungspuncte M' auf der Tangente senkrechte Gerade M'N heißt eine Normale der krummen Linie.

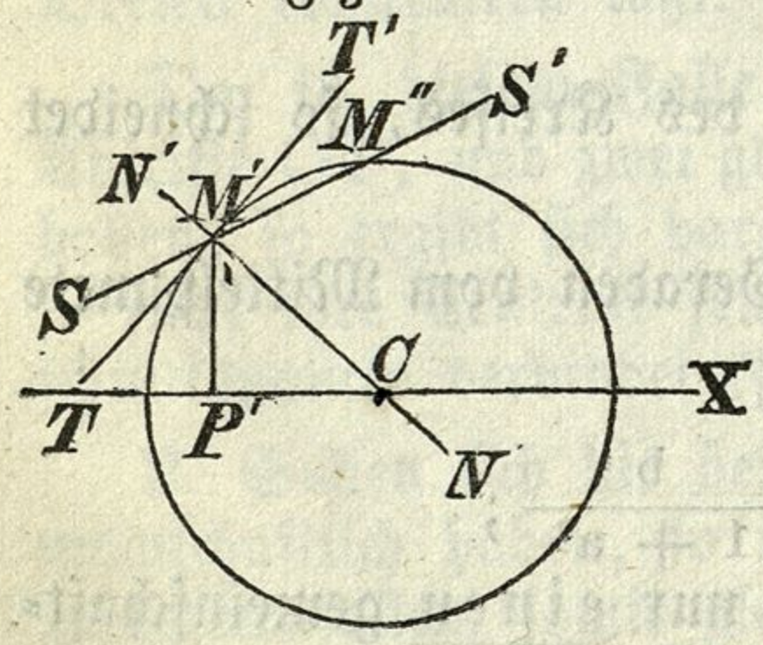
Bei der Berührung einer krummen Linie mit einer Geraden sind nachstehende vier Größen von Wichtigkeit:

1. Die Tangente M'T, d. i. die Länge der Berührungslinie vom Berührungspuncte bis zum Durchschnittspuncte mit der Abscissenaxe;
2. die Subtangente P'T, d. i. die Projection der Tangente auf die Abscissenaxe;
3. die Normale M'N, d. i. die Länge der Normallinie zwischen dem Berührungspuncte und der Abscissenaxe; und
4. die Subnormale P'N, d. i. die Projection der Normale auf die Abscissenaxe.

Von diesen vier Berührungsgrößen sind die Tangente und die Normale wesentlich positiv; die Subtangente und die Subnormale dagegen positiv oder negativ, je nachdem sie von der Ordinate aus nach der positiven oder negativen Abscissenrichtung liegen.

§. 467. Gleichungen der Tangente und der Normale am Kreise.

Fig. 292.



Es sei (Fig. 292) $M' = (x', y')$ der Berührungspunct und $M'' = (x'', y'')$ ein benachbarter Punct der Kreislinie $x^2 + y^2 = a^2$.

Für die Secante SS', welche durch die Puncte (x', y') und (x'', y'') geht, hat man die Gleichung

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x') \ldots 1).$$

Da (x′, y′) und (x″, y″) Puncte des Kreises sind, so müssen die Bedingungsgleichungen

$$x'^2 + y'^2 = a^2,\ x''^2 + y''^2 = a^2$$

stattfinden, durch deren Subtraction sich

$$(x''^2 - x'^2) + (y''^2 - y'^2) = 0,$$

oder $(x'' + x')(x'' - x') + (y'' + y')(y'' - y') = 0,$

und daher $$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = -\frac{x'' + x'}{y'' + y'} \quad . \ . \ . \ 2)$$

ergibt. Wird dieser Werth in 1) substituirt, so erhält man für die Gleichung der Secante SS′

$$y - y' = -\frac{x'' + x'}{y'' + y'}(x - x') \quad . \ . \ . \ 3).$$

1. Dreht sich nun die Secante SS′ um den Punct M′, bis M″ mit M′ zusammenfällt, so wird sie in die Lage der Tangente TT′ kommen, und man erhält für diese, wenn in 3) $x'' = x'$, $y'' = y'$ gesetzt wird, die Gleichung

$$y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x') \quad . \ . \ . \ 4),$$

welche sich, da $x'^2 + y'^2 = a^2$ ist, auch so darstellen läßt:

$$xx' + yy' = a^2 \quad . \ . \ . \ 5).$$

In dieser letztern Form läßt sich die Gleichung der Tangente unmittelbar aus jener des Kreises $xx + yy = a^2$ leicht ableiten, indem man die Quadrate xx und yy durch die Producte xx′ und yy′ ersetzt.

Die Größe $-\frac{x'}{y'}$ in 4) ist die Richtungsconstante der Tangente.

2. Für die Normale NN′, als eine durch den Punct (x′, y′) gehende Gerade, hat die Gleichung die Form

$$y - y' = a'(x - x') \quad . \ . \ . \ 6).$$

Da die Normale auf der Tangente senkrecht steht, so muß $a' = \frac{y'}{x'}$ (§. 449) sein, und die gesuchte Gleichung der Normallinie ist

$$y - y' = \frac{y'}{x'}(x - x')$$

oder $$y = \frac{y'}{x'}x \quad . \ . \ . \ 7),$$

woraus hervorgeht, daß die Normale durch den Mittelpunct des Kreises geht.

§. 468. Bestimmung der vier Berührungsgrößen.

1. Um die Subtangente P′T (Fig. 292) zu erhalten, suche man zuerst die Abscisse x des Punctes T, indem man in der Gleichung 5) der Tangente $y = 0$ setzt; man erhält $x = \frac{a^2}{x'}$, daher ist

$$\text{Subtangente } P'T = x - x' = \frac{a^2 - x'^2}{x'} = \frac{y'^2}{x'}.$$

2. Zur Bestimmung der Tangente M′T hat man aus dem rechtwinkligen Dreiecke M′P′T

$$M'T^2 = M'P'^2 + P'T^2 = y'^2 + \frac{y'^4}{x'^2} = \frac{y'^2}{x'^2}(x'^2 + y'^2) = \frac{a^2 y'^2}{x'^2},$$

daher $$\text{Tangente } M'T = \frac{a y'}{x'}.$$

3. Ferner erhält man: Subnormale $P'C = -x'$.

4. Endlich ist noch: Normale $M'C = a$.

§. **469.** Von einem Puncte (m, n) außerhalb eines Kreises soll an diesen eine Tangente gezogen werden; man bestimme den Berührungspunct (x', y').

Ist $x^2 + y^2 = a^2$ die Gleichung des gegebenen Kreises, so ist $xx' + yy' = a^2$ die Gleichung der Tangente für den Berührungspunct (x', y'). Da (x', y') ein Punct des gegebenen Kreises ist, so hat man

$$x'^2 + y'^2 = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad 1).$$

Da ferner die Tangente durch den Punct (m, n) gehen soll, so muß ihrer Gleichung Genüge geschehen, wenn man darin m, n statt x, y setzt; es ist daher auch

$$mx' + ny' = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad 2).$$

Aus 1) und 2) folgt nun durch Elimination

$$x' = \frac{a^2 m \pm an\sqrt{d^2 - a^2}}{d^2}, \quad y' = \frac{a^2 n \mp am\sqrt{d^2 - a^2}}{d^2},$$

wenn $m^2 + n^2 = d^2$ gesetzt wird, wo also d die Entfernung des Punctes (m, n) vom Kreismittelpuncte bedeutet.

Aus diesen Ausdrücken, welche übrigens für die Construction etwas verwickelt sind, sieht man, daß es zwei Berührungspuncte gibt. Um dieselben zu erhalten, wird es am einfachsten sein, die geometrischen Oerter der Gleichungen 1) und 2) selbst zu suchen, indem man in denselben x', y' als veränderliche Coordinaten betrachtet. Subtrahirt man 2) von 1), so erhält man

$$x'^2 + y'^2 - mx' - ny' = 0, \text{ oder}$$

$$\left(x' - \frac{m}{2}\right)^2 + \left(y' - \frac{n}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(m^2 + n^2) \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

und es kann dann für die Construction statt 2) die Gleichung 3) benutzt werden. Der geom. Ort der Gleichung 1) ist der gegebene Kreis; der geom. Ort der Gleichung 3) ist ebenfalls ein Kreis, dessen Mittelpunctscoordinaten $\frac{m}{2}, \frac{n}{2}$ sind, und dessen Halbmesser $\frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2} = \frac{d}{2}$ ist. Beschreibt man daher aus der Mitte der Verbindungslinie zwischen dem gegebenen Puncte und dem Kreismittelpuncte über derselben einen Kreis, so schneidet dieser den gegebenen Kreis in den gesuchten Berührungspuncten.

Man wird dadurch auf dieselbe Construction geführt, welche für diese Aufgabe in §. 188, 6, Auflös. 1 aufgestellt wurde.

4. Uebungsaufgaben.

§. **470.** 1. Die Gleichung eines Kreises ist

a) $36x^2 + 36y^2 - 36x + 144y + 89 = 0$,
b) $x^2 + y^2 = 6x + 8y + 24$,
c) $16x^2 + 16y^2 = 16x - 24y + 3$;

bestimme die Coordinaten des Mittelpunctes und den Halbmesser.

2. Die Gleichung eines Kreises ist $x^2 + y^2 = 100$; wie viel Puncte hat die Gerade

a) $y = 6x - 12$, b) $4x + 3y = 50$, c) $4y = x + 40$

mit diesem Kreise gemeinschaftlich?

3. Welches ist die Länge einer vom Puncte (x', y') an den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ gezogenen Tangente?

4. Die Gleichung der Polare eines gegebenen Punctes in Beziehung auf einen gegebenen Kreis zu finden.

5. Bestimme den Pol der Geraden $3x + 4y = 7$ für den Kreis $x^2 + y^2 = 14$.

6. Die Gleichung der Potenzlinie für zwei gegebene Kreise zu finden.

Die Gleichung der Potenzlinie ist die Differenz der Gleichungen der beiden Kreise.

7. Bestimme das Potenzcentrum für drei gegebene Kreise.

Beispiel: $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 9$, $(x-3)^2 + y^2 = 5$ und $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 7$.

8. Die gemeinschaftliche Tangente zweier gegebener Kreise zu bestimmen.

Für den Durchschnitt der Geraden $y = ax + b$ mit den Kreisen $x^2 + y^2 = R^2$ und $(x-d)^2 + y^2 = r^2$ erhält man

$$x = \frac{-ab}{1+a^2} \pm \frac{\sqrt{R^2(1+a^2) - b^2}}{1+a^2};$$

$$x = \frac{-ab+d}{1+a^2} \pm \frac{\sqrt{r^2(1+a^2) - (ad+b)^2}}{1+a^2};$$

daher für die Berührungspuncte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) mit dem ersten und zweiten Kreise

$$x_1 = \frac{-ab}{1+a^2} \quad \ldots 1) \qquad x_2 = \frac{-ab+d}{1+a^2} \quad \ldots 2)$$

und als Bedingungsgleichungen für die Berührung

$$R^2(1+a^2) = b^2 \quad \ldots 3) \qquad r^2(1+a^2) = (ad+b)^2 \quad \ldots 4),$$

woraus sich

$$\frac{R^2}{r^2} = \frac{b^2}{(ad+b)^2}, \quad \text{oder} \quad R(ad+b) = \pm br \quad \ldots 5)$$

ergibt. Aus 5) und 3) folgt

$$b = \frac{-adR}{R \mp r} \quad \text{und} \quad b = R\sqrt{a^2+1},$$

und aus diesen beiden Gleichungen

$$a = \frac{R \mp r}{\sqrt{d^2 - (R \mp r^2)}}, \qquad b = \frac{-dR}{\sqrt{d^2 - (R \mp r)^2}} \quad \ldots 6).$$

Die Gleichung der gesuchten Tangente ist also

$$y = \frac{R \mp r}{\sqrt{d^2 - (R \mp r)^2}} \cdot x - \frac{dR}{\sqrt{d^2 - (R \mp r)^2}} \quad \ldots 7).$$

Für die Berührungspuncte hat man

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{(R \mp r)R}{d}, & y_1 &= \frac{R\sqrt{d^2 - (R \mp r)^2}}{d} \\ x_2 &= \frac{\pm(R \mp r)r + d^2}{d}, & y_2 &= \frac{\pm r\sqrt{d^2 - (R \mp r)^2}}{d} \end{aligned}\right\} \quad \ldots 8).$$

Sind α_1 und α_2 die Winkel, welche die zu den Berührungspuncten derselben Tangente in den zwei Kreisen gezogenen Halbmesser mit der Abscissenaxe bilden, so ist

$$\text{tang}\,\alpha_1 = \frac{y_1}{x_1} = \frac{\sqrt{d^2 - (R \mp r)^2}}{R \mp r}, \text{ und tang } \alpha_2 = \frac{y_2}{x_2 - d} = \frac{\sqrt{d^2 - (R \mp r)^2}}{R \mp r},$$

daher tang α_1 = tang α_2.

Discussion der voranstehenden Ausdrücke.

9. Den äußeren und den inneren Aehnlichkeitspunct für zwei gegebene Kreise zu bestimmen.

$$A = \left(\frac{dR}{R-r}, 0\right), \qquad J = \left(\frac{dR}{R+r}, 0\right).$$

10. Bestimme analytisch die äußeren und die inneren Aehnlichkeitspuncte für drei gegebene Kreise und beweise, daß a) die drei äußeren Aehnlichkeitspuncte, b) je zwei innere und ein äußerer Aehnlichkeitspunct in einer Geraden liegen (§. 431).

11. Die Gleichung eines Kreises zu finden, welcher

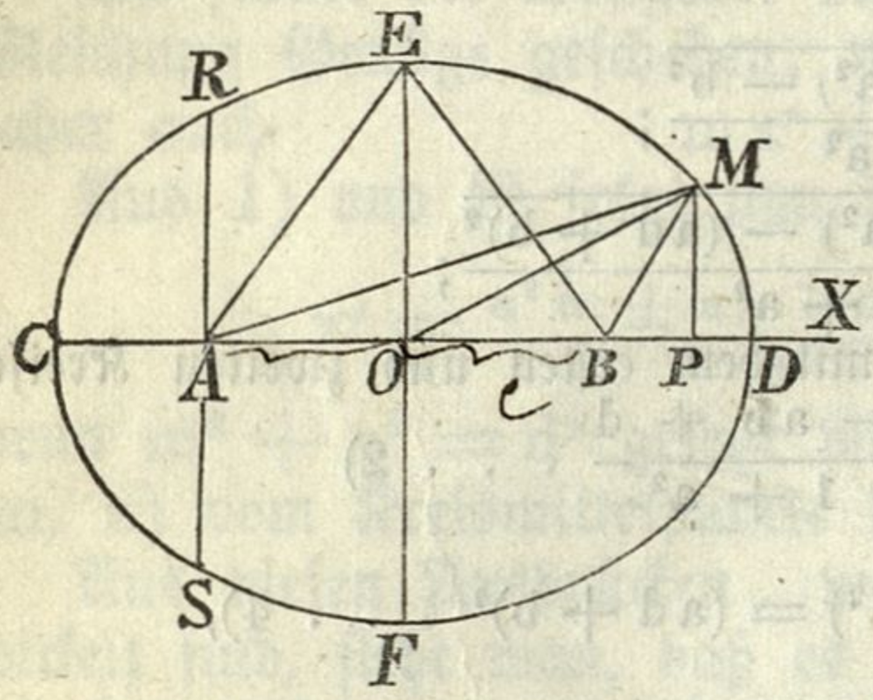
a) durch zwei gegebene Puncte geht und eine gegebene Gerade berührt;
b) durch zwei gegebene Puncte geht und einen gegebenen Kreis berührt;
c) durch einen gegebenen Punct geht und zwei gegebene Kreise berührt
d) drei gegebene Kreise berührt.

IV. Die Ellipse.

1. Analytische Darstellung der Ellipse.

§. 471. Die Ellipse ist eine Linie von solcher Beschaffenheit, daß die Summe der Abstände jedes ihrer Puncte von zwei festen Puncten constant ist.

Fig. 293.



Sind A und B (Fig. 293) die zwei gegebenen Puncte, und ist 2a die constante Summe der Abstände eines jeden Punctes der Ellipse von jenen zwei Puncten, so ist M ein Punct der Ellipse, wenn $AM + BM = 2a$ ist.

Die zwei festen Puncte A und B heißen die Brennpuncte der Ellipse, die von ihnen zu irgend einem Puncte M der Ellipse gezogenen Geraden AM und BM die Leitstrahlen dieses Punctes.

§. 472. Mittelpunctsgleichung der Ellipse für rechtwinklige Coordinaten.

Halbirt man (Fig. 293) den Abstand AB der beiden Brennpuncte im Puncte O, und nimmt O als Ursprung der Coordinaten und OBX als Abscissenaxe an, so ist für irgend einen Punct M, $x = OP$ und $y = MP$. Aus den rechtwinkligen Dreiecken APM und BPM folgt

$$AM = \sqrt{AP^2 + MP^2}, \qquad BM = \sqrt{BP^2 + MP^2},$$

oder, wenn $OA = OB = e$ gesetzt wird,

$$AM = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}, \qquad BM = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}.$$

Ist nun M ein Punct der Ellipse, so muß

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a$$

sein. Wird diese Gleichung rational gemacht, so erhält man

$$(a^2 - e^2)\, x^2 + a^2 y^2 = a^2 (a^2 - e^2).$$

Da im Dreiecke ABM $AM + BM > AB$, also $2a > 2e$, oder $a > e$ ist, so ist auch $a^2 > e^2$, und somit die Differenz $a^2 - e^2$ positiv. Drückt man nun $a^2 - e^2$ durch die positive Größe b^2 aus, so hat man

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

als die Relation, welche zwischen den Coordinaten des in der Ellipse willkürlich angenommenen Punctes M stattfindet, folglich als die Gleichung der Ellipse.

Diese Gleichung läßt sich auch so darstellen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

§. 473. Discussion der Gleichung $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$.

1. Löst man diese Gleichung nach y und dann nach x auf, so erhält man

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \text{ und } x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2},$$

woraus hervorgeht, daß zu jedem Werthe von x, für welchen y reell ausfällt, zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werthe von y, und ebenso zu jedem Werthe von y, für welchen x reell wird, zwei solche Werthe von x gehören.

Die Ellipse wird also durch die beiden Coordinatenaxen in vier congruente Aeste getheilt. Der Punct O heißt darum der Mittelpunct der Ellipse.

2. Aus $x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$ folgt für $y = o$, $x = \pm a$; und aus $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ für $x = o$, $y = \pm b$. Die Ellipse schneidet also die Abscissenaxe in den Abständen $+ a$ und $- a$, und die Ordinatenaxe in den Abständen $+ b$ und $- b$ vom Anfangspuncte.

3. Der größte Werth, den x annehmen kann, ist a, und der größte Werth von y ist b; für $x > a$ wird y, für $y > b$ wird x imaginär. Zieht man daher mit der Ordinatenaxe in den Abständen $+ a$ und $- a$, mit der Abscissenaxe aber in den Abständen $+ b$ und $- b$ parallele Gerade, welche ein Rechteck bilden, so wird die ganze Ellipse innerhalb dieses Rechteckes enthalten sein. Daraus folgt, daß die Ellipse eine geschlossene krumme Linie ist.

4. Bezeichnet man den Abstand OM eines beliebigen Punctes M der Ellipse vom Mittelpuncte O mit d, so ist

$$d = \sqrt{y^2 + x^2} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) + x^2} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot x^2}.$$

Für $x = \pm a$ erhält man den größten Werth $d = \sqrt{a^2} = \pm a = OD = OC$; für $x = o$ erhält man den kleinsten Werth $d = \sqrt{b^2} = \pm b = OE = OF$. Unter allen durch den Mittelpunct gezogenen Sehnen ist daher CD die größte, EF die kleinste. Man nennt darum $CD = 2a$ die große, $EF = 2b$ die kleine Axe der Ellipse; die Puncte C und D heißen die Scheitel derselben.

Auch folgt daraus: Die Summe der Leitstrahlen eines jeden Punctes der Ellipse ist gleich der großen Axe.

5. Zur Bestimmung der Lage der Brennpuncte A und B gegen den Mittelpunct folgt aus $a^2 - e^2 = b^2$

$$OA = OB = e = \sqrt{a^2 - b^2},$$

welche Größe die lineare Excentricität der Ellipse heißt. Das Verhältniß $\frac{e}{a} = \varepsilon$ nennt man die numerische Excentricität; hiernach ist

$$e = a\varepsilon \text{ und } \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Die Relation zwischen a, b und e ergibt sich auch unmittelbar aus dem rechtwinkligen Dreiecke AOE, in welchem $AE = a$ (wegen $AE + BE = 2a$), $OE = b$ und $OA = e$ ist.

6. Je kleiner die Excentricität ist, desto weniger ist a von b unterschieden, desto mehr nähert sich die Ellipse dem Kreise; für $e = o$ wird $a = b$ und die Gleichung der Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ geht über in die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 = a^2$. Der Kreis kann demnach als eine Ellipse betrachtet werden, deren Excentricität Null ist, deren beide Axen daher gleich sind.

7. Um die durch einen Brennpunct, z. B. A, gehende Ordinate zu bestimmen, setzt man in der Gleichung

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$x = -e = -\sqrt{a^2 - b^2}$, wodurch man $y = \pm \frac{b^2}{a} = AR = AS$ erhält.

Die durch einen Brennpunct senkrecht auf die große Axe gezogene Sehne RS heißt der Parameter der Ellipse und wird durch $2p$ bezeichnet. Es ist daher der halbe Parameter $p = \frac{b^2}{a}$, woraus $a : b = b : p$ folgt, d. h. der halbe Parameter der Ellipse ist die dritte stetige Proportionale zu der halben großen und der halben kleinen Axe.

§. 474. Der geometrische Ort aller Puncte, deren Coordinaten der Gleichung $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ genügen, ist eine Ellipse.

Man mache (Fig. 293) $OC = OD = a$, $OA = OB = \sqrt{a^2 - b^2}$. Ist nun M ein beliebiger Punct der krummen Linie CEM, und $OP = x$, $MP = y$, so hat man

$$AM^2 = (\sqrt{a^2 - b^2} + x)^2 + y^2$$
$$= a^2 - b^2 + 2x\sqrt{a^2 - b^2} + x^2 + b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$$
$$= a^2 + 2x\sqrt{a^2 - b^2} + \frac{x^2}{a^2}(a^2 - b^2) = [a + \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - b^2}]^2,$$

daher $$AM = a + \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Eben so findet man

$$BM = a - \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - b^2},$$

folglich ist $AM + BM = 2a$, und daher CEM eine Ellipse.

§. 475. Bestimmung der Leitstrahlen.

Bezeichnet man die Leitstrahlen AM und BM des Punctes M (Fig. 293) durch r und r', so folgt aus §. 474

$$r = AM = a + \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - b^2} = a + \frac{ex}{a},$$
$$r' = BM = a - \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - b^2} = a - \frac{ex}{a}.$$

Die Gleichungen der beiden Leitstrahlen werden wir nach §. 444 bestimmen. Für den Leitstrahl AM, welcher durch die Puncte $A = (-e, o)$ und $M = (x', y')$ geht, erhält man die Gleichung

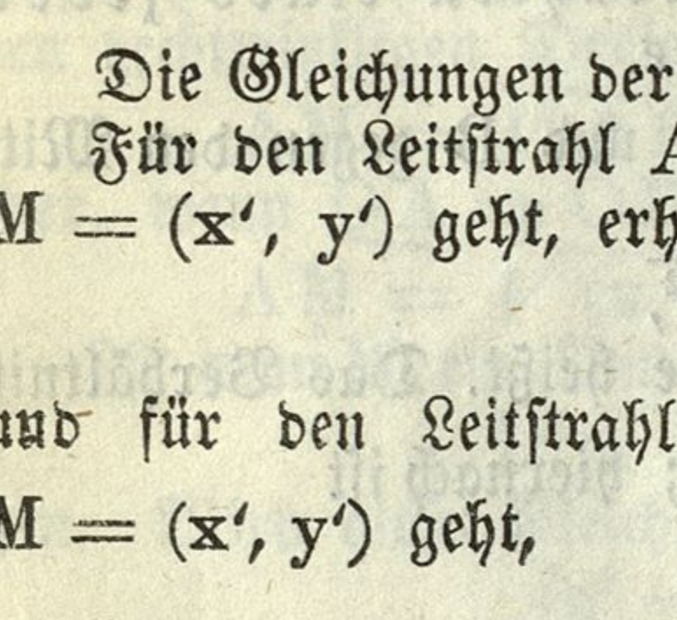
$$y = \frac{y'}{x' + e}(x + e),$$

und für den Leitstrahl BM, welcher durch die Puncte $B = (e, o)$ und $M = (x', y')$ geht,

$$y = \frac{y'}{x' - e}(x - e).$$

§. 476. Beschreibt man über der großen Axe einer Ellipse als Durchmesser einen Kreis, so verhalten sich die derselben Abscisse entsprechenden Ordinaten des Kreises und der Ellipse wie die halbe große zur halben kleinen Axe.

Fig. 294.



Setzt man (Fig. 294) $OP = x$, $MP = y$ und $NP = v$, so ist

$$v^2 = a^2 - x^2,\ y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2);\ \text{daher}$$

$$\frac{v^2}{y^2} = \frac{a^2}{b^2},\ \text{und}\ v : y = a : b.$$

§. 477. Der Flächeninhalt einer Ellipse ist gleich dem Producte aus den beiden Halbaxen und der Zahl π.

Sind (Fig. 294) MP und M'P' die Ordinaten der Ellipse, NP und N'P' die Ordinaten des über CD beschriebenen Kreises, welche zu den Abscissen OP und OP' gehören, und zieht man M'Q und N'R parallel mit der Axe CD, so ist $M'P'PQ : N'P'PR = M'P' : N'P' = b : a$ (§. 118, Folges.) Denkt

man sich nun die Ordinaten NP und N'P' unendlich nahe an einander, so können die Dreiecke MM'G und NN'R als unendlich klein vernachläßigt und folglich die Rechtecke M'P'PQ und N'P'PR als Elemente der Ellipse und des Kreises betrachtet werden. Stellt man sich die Ellipse und den Kreis aus lauter solchen Elementen bestehend vor, so verhält sich jedes Element der Ellipse zu dem entsprechenden Elemente des Kreises und somit auch die Summe aller Elemente der Ellipse zur Summe aller Kreiselemente, wie b : a. Letztere Summe ist die Kreisfläche, folglich $= a^2 \pi$, erstere Summe die Fläche der Ellipse; heißt diese f, so hat man $f : a^2\pi = b : a$, woraus $f = ab\pi$ folgt.

§. **478.** Scheitelgleichung der Ellipse.

Nimmt man statt des Mittelpunctes O (Fig. 293) den Scheitel C als Anfangspunct der Coordinaten an und behält die große Axe CD als Abscissenaxe, so werden für dieses neue Coordinatensystem die Ordinaten dieselben bleiben, wie früher, die neuen Abscissen dagegen sämmtlich um die halbe Axe a größer werden als die früheren. Man darf demnach in der oben entwickelten Gleichung $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ bloß $x - a$ statt x setzen und y ungeändert lassen, um die Gleichung der Ellipse für das neue System zu erhalten. Diese nimmt daher folgende Gestalt an:

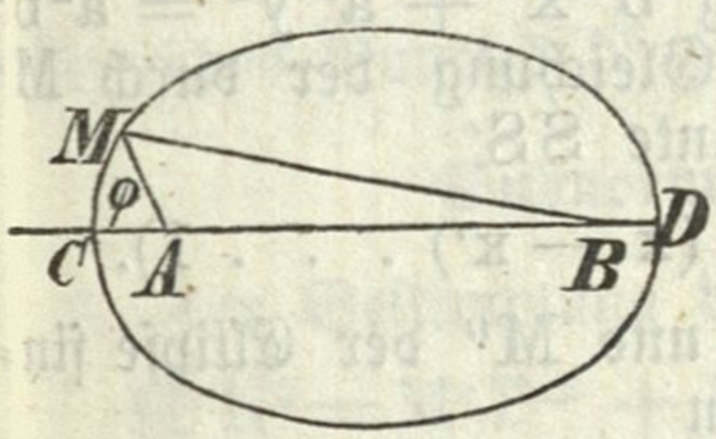
$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}, \quad \text{oder} \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

und wenn $\frac{b^2}{a} = p$ gesetzt wird, $y^2 = \frac{p}{a}(2ax - x^2)$, oder

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}.$$

§. **479.** Polargleichung der Ellipse.

Fig. 295.



Es sei A (Fig. 295) der Pol und AC die Polaraxe; so ist für den Punct M der Radiusvector $r = AM$ und der Polarwinkel $\varphi = MAC$. Aus dem Dreiecke ABM folgt nun

$$BM^2 = AM^2 + AB^2 - 2AM.AB.\cos BAM,$$

oder $$BM^2 = r^2 + 4e^2 + 4er\cos\varphi.$$

Wegen $AM + BM = 2a$ ist auch

$$BM^2 = (2a - r)^2 = 4a^2 - 4ar + r^2,$$

daher $$r^2 + 4e^2 + 4er\cos\varphi = 4a^2 - 4ar + r^2;$$

woraus $$r = \frac{a^2 - e^2}{a + e\cos\varphi} \quad \ldots 1)$$

als die Polargleichung für die Ellipse folgt.

Für $\frac{e}{a} = \varepsilon$, also $e = a\varepsilon$, nimmt die Gleichung die Form an:

$$r = \frac{a^2 - a^2\varepsilon^2}{a + a\varepsilon\cos\varphi}, \quad \text{oder} \quad r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos\varphi} \quad \ldots 2).$$

Will man in dieser Gleichung statt a den halben Parameter $p = \frac{b^2}{a}$ einführen, so erhält man aus $a^2 - b^2 = a^2\varepsilon^2$, $a(1 - \varepsilon^2) = \frac{b^2}{a} = p$. Die Gleichung 2) geht also in die folgende über:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi} \quad \ldots 3).$$

Zusatz. Nimmt man (Fig. 293) den Mittelpunct O der Ellipse als Pol und die OX als Polaraxe an, so erhält man aus der Gleichung

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

wenn $x = r\cos\varphi'$ und $y = r\sin\varphi'$ gesetzt wird,

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin\varphi'^2 + b^2\cos\varphi'^2} \quad \ldots 4)$$

als die Polargleichung der Ellipse.

2. Die Gerade und die Ellipse.

§. 480. Lage einer Geraden gegen die Ellipse.

Verbindet man die Gleichung der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ mit der Gleichung einer Geraden $y = Ax + B$, so läßt sich leicht bestimmen, in wie vielen Puncten die beiden Linien zusammentreffen. Für die gemeinschaftlichen Puncte beider Linien sind die Coordinaten gleich; man erhält daher

$$b^2x^2 + a^2(Ax + B)^2 = a^2b^2,$$

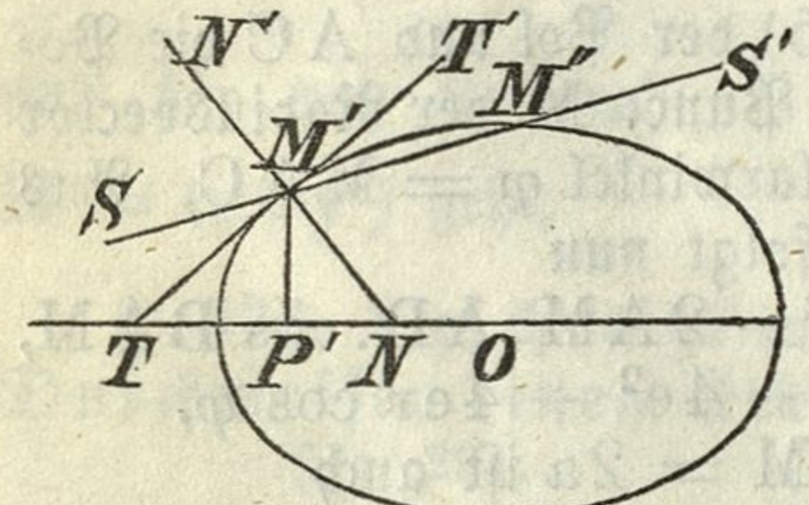
und durch Auflösung dieser Gleichung

$$x = \frac{-ABa^2 \pm ab\sqrt{A^2a^2 + b^2 - B^2}}{A^2a^2 + b^2}.$$

Aus diesem Ausdrucke für die Abscisse des Punctes, welcher der Ellipse und der Geraden gemeinschaftlich ist, folgt, daß die Gerade mit der Ellipse entweder zwei Puncte oder einen einzigen oder gar keinen Punct gemeinschaftlich hat, je nachdem $A^2a^2 + b^2 \gtreqless B^2$ ist.

§. 481. Gleichungen der Tangente und der Normale.

Fig. 296.



Sind x', y' und x'', y'' die Coordinaten zweier benachbarter Puncte M' und M'' (Fig. 296) einer Ellipse, deren Gleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ist, so hat man als Gleichung der durch M' und M'' gehenden Secante SS'

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x') \quad \ldots 1).$$

Für die Puncte M' und M'' der Ellipse finden nun die Gleichungen

$$b^2x'^2 + a^2y'^2 = a^2b^2,\ b^2x''^2 + a^2y''^2 = a^2b^2$$

statt, durch deren Subtraction man

$$b^2(x''^2 - x'^2) + a^2(y''^2 - y'^2) = 0,$$

oder $$b^2(x'' + x')(x'' - x') + a^2(y'' + y')(y'' - y') = 0,$$

und daher $$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = -\frac{b^2(x'' + x')}{a^2(y'' + y')} \quad \ldots 2)$$

erhält. Substituirt man diesen Werth in 1), so nimmt die Gleichung der Secante SS' die Form an:

$$y - y' = -\frac{b^2(x'' + x')}{a^2(y'' + y')}(x - x') \quad \ldots 3).$$

1. Fällt nun der Punct M'' mit M' zusammen, so kommt die Secante SS' in die Lage der Tangente TT'; setzt man also in 3) $x'' = x'$, $y'' = y'$, so erhält man als die gesuchte Gleichung der Tangente TT'

$$y - y' = -\frac{b^2x'}{a^2y'}(x - x') \quad \ldots 4),$$

worin $-\frac{b^2x'}{a^2y'}$ die Richtungsconstante der Tangente ist.

Die Gleichung 4) läßt sich auch so darstellen:

$$b^2xx' + a^2yy' = a^2b^2 \ldots 5),$$

in welcher Form sie sich aus der Gleichung der Ellipse $b^2xx + a^2yy = a^2b^2$ unmittelbar leicht herstellen läßt.

2. Für die durch den Punct M' gezogene Normale NN', als eine auf der Tangente, zu welcher die Gleichung 4) gehört, senkrechte Gerade, ergibt sich die Gleichung

$$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x') \ldots 6).$$

§. 482. Bestimmung der vier Berührungsgrößen.

1. Setzt man in der Gleichung 5) $y = o$, so erhält man $x = \frac{a^2}{x'}$ als die Abscisse des Punctes T; folglich ist

$$\text{Subtangente } P'T = x - x' = \frac{a^2 - x'^2}{x'}.$$

Zusatz. Dieser Ausdruck zeigt, daß die Subtangente von der kleinen Axe 2b unabhängig ist, daß somit alle Ellipsen, welche über derselben großen Axe beschrieben werden, für Puncte von derselben Abscisse auch eine und dieselbe Subtangente haben. Dieselbe Subtangente muß für eine gleiche Abscisse auch ein über der großen Axe beschriebener Kreis haben, als eine Ellipse, deren beide Axen gleich sind; was auch unmittelbar aus §. 468, 1 folgt.

2. Für die Tangente M'T erhält man

$$M'T^2 = M'P'^2 + P'T^2 = y'^2 + \frac{(a^2 - x'^2)^2}{x'^2} = \frac{y'^2}{x'^2}\left(x'^2 + \frac{a^4 y'^2}{b^4}\right),$$

daher $$\text{Tangente } M'T = \frac{y'}{b^2 x'}\sqrt{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}.$$

3. Sucht man aus der Gleichung 6), indem man $y = o$ setzt, die Abscisse x des Punctes N, so ergibt sich $x = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot x'$; daraus folgt

$$\text{Subnormale } P'N = x - x' = -\frac{b^2 x'}{a^2}.$$

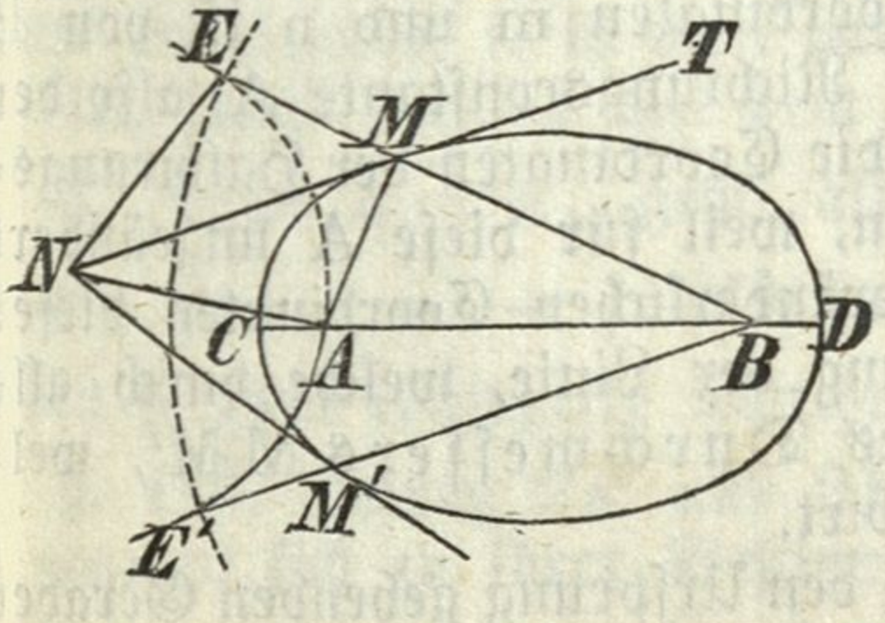
4. Zur Bestimmung der Normale M'N hat man

$$M'N^2 = M'P'^2 + P'N^2 = y'^2 + \frac{b^4 x'^2}{a^4} = \frac{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}{a^4}, \text{ daher}$$

$$\text{Normale } M'N = \frac{\sqrt{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}}{a^2}.$$

§. 483. Jede Tangente der Ellipse bildet mit den zum Berührungspuncte gezogenen Leitstrahlen gleiche Winkel.

Fig. 297.



Die Gleichung der durch $M = (x', y')$ gezogenen Tangente NM (Fig. 297) ist

$$y = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'} \cdot x + \frac{b^2}{y'};$$

die Gleichungen der Leitstrahlen AM und BM sind

$$y = \frac{y'}{x' + e} \cdot x + \frac{e y'}{x' + e}, \text{ und}$$

$$y = \frac{y'}{x' - e} \cdot x - \frac{e y'}{x' - e}.$$

Man erhält daher nach §. 448

$$\text{tang AMN} = \frac{\frac{y'}{x'+e} + \frac{b^2 x'}{a^2 y'}}{1 - \frac{y}{x'+e} \cdot \frac{b^2 x'}{a^2 y'}} = \frac{b^2}{e y'},$$

und

$$\text{tang BMN} = \frac{\frac{y'}{x'-e} + \frac{b^2 x'}{a^2 y'}}{1 - \frac{y'}{x'-e} \cdot \frac{b^2 x'}{a^2 y'}} = -\frac{b^2}{e y'};$$

daher ist tang AMN $=$ — tang BMN und folglich

$$\text{AMN} = 180^0 - \text{BMN} = \text{BMT}.$$

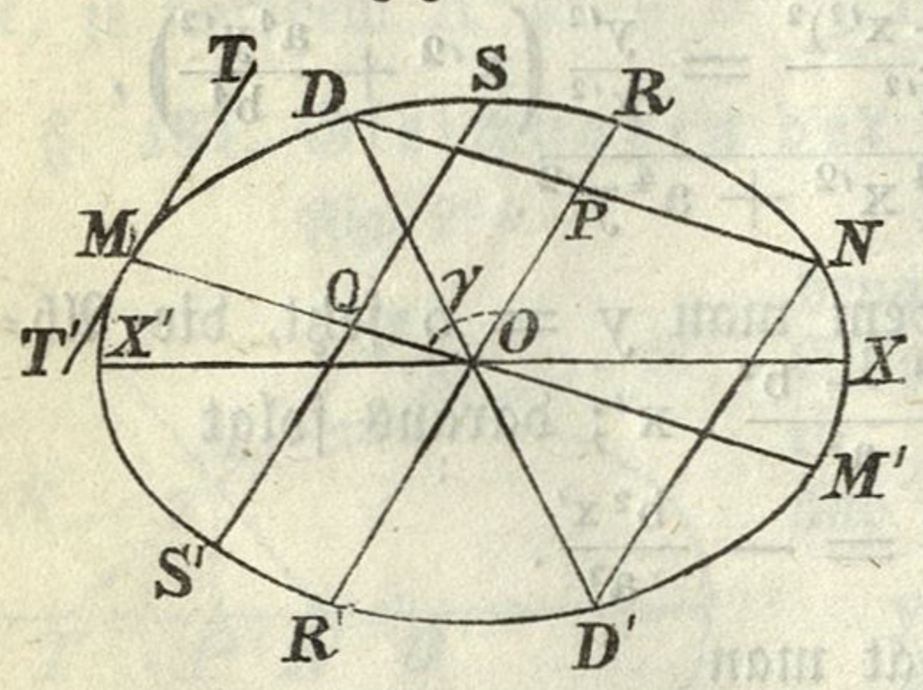
Dieser Satz erklärt folgende Erscheinungen, welche auf dem Reflexionsgesetze beruhen. Von einer elliptischen Spiegelfläche werden die von einem Brennpuncte auffallenden Licht-, Wärme- oder Schallstrahlen so reflectirt, daß sie sich im anderen Brennpuncte vereinigen. Erregt man in einem elliptisch geformten Gefäße, worin sich eine Flüssigkeit befindet, in dem einen Brennpuncte eine Wellenbewegung, so treffen die reflectirten Wellen im anderen Brennpuncte zusammen.

§. 484. Durchmesser der Ellipse.

Unter einem Durchmesser einer krummen Linie versteht man allgemein eine Linie, welche ein System paralleler Sehnen halbirt.

Es sei $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ die Gleichung einer Ellipse und $y = Ax + B$ die Gleichung der Sehne SS′ (Fig. 298), welche mit der positiven Halbaxe der Abscissen den Winkel α bildet, so daß $A = \text{tang } \alpha$ ist.

Fig. 298.



Dann sind (§. 480) die Wurzeln der Gleichung

$$bx^2 + a^2 (Ax + B)^2 = a^2 b^2, \text{ oder}$$

$$x^2 + \frac{2AB a^2}{A^2 a^2 + b^2} \cdot x + \frac{a^2 (B^2 - b^2)}{A^2 a^2 + b^2} = 0$$

die Abscissen x_1 und x_2 der Endpuncte S und S′ der Sehne. Ihre Summe $x_1 + x_2$ ist nach einem bekannten Satze aus der Lehre von den Gleichungen gleich dem mit entgegengesetztem Vorzeichen genommenen Coefficienten von x, also

$$x_1 + x_2 = -\frac{2AB a^2}{A^2 a^2 + b^2}.$$

Bezeichnet man die Coordinaten des Halbirungspunctes Q der Sehne SS′ durch m und n, so ist

$$m = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{AB a^2}{A^2 a^2 + b^2}, \text{ und } n = Am + B = \frac{B b^2}{A^2 a^2 + b^2}; \text{ folglich}$$

$$n = -\frac{b^2}{Aa^2} \cdot m = A' m,$$

wenn $-\frac{b^2}{Aa^2} = A'$, also $AA' = -\frac{b^2}{a^2}$ gesetzt wird.

Die Relation $n = A'm$ zwischen den Coordinaten m und n ist von B unabhängig und bleibt sich gleich, so lange die Richtungsconstante A, also der Winkel α sich nicht ändert; sie gilt also auch für die Coordinaten der Halbirungspuncte aller übrigen mit SS′ parallelen Sehnen, weil für diese A ungeändert bleibt. Bezeichnen daher allgemein x, y die veränderlichen Coordinaten dieser Halbirungspuncte, so ist $y = A'x$ die Gleichung der Linie, welche durch alle Halbirungspuncte geht, somit die Gleichung des Durchmessers MM′, welcher das System jener parallelen Sehnen halbirt.

Die Gleichung $y = A'x$ gehört einer durch den Ursprung gehenden Geraden an; da dieselbe für jedes System paralleler Sehnen gilt, so folgt, daß alle

Durchmesser einer Ellipse durch den Mittelpunct derselben gehen. A' ist die trigonometrische Tangente des Winkels α', welchen der Durchmesser MM' mit der Abscissenaxe bildet.

§. 485. Zieht man umgekehrt zu dem Durchmesser MM' (Fig. 298), dessen Gleichung $y = A'x$ ist, parallele Sehnen, und sucht den zu diesem System zugehörigen Durchmesser RR', so erhält man, wie in §. 484, als Gleichung desselben

$$y = -\frac{b^2}{A' a^2} \cdot x = Ax,$$

woraus folgt, daß der Durchmesser des zweiten Sehnensystems mit den Sehnen des ersten Systems parallel ist.

Zwei Durchmesser einer krummen Linie, welche so zusammenhängen, daß jeder das mit dem andern parallele Sehnensystem halbirt, heißen conjugirte Durchmesser, und der Winkel, den sie mit einander bilden, der Conjugationswinkel. MM' und RR' sind demnach zwei conjugirte Durchmesser der Ellipse.

Das Product der Richtungsconstanten zweier conjugirter Durchmesser ist für jede Ellipse eine constante Größe, nämlich

$$AA' = \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\alpha' = -\frac{b^2}{a^2} \quad \ldots \quad 1)$$

Für $\alpha = o$ wird $\text{tang}\,\alpha' = \infty$, daher $\alpha' = 90^o$; d. h. die beiden Axen der Ellipse sind zwei conjugirte Durchmesser; sie sind die einzigen, die auf einander senkrecht stehen, da für jeden andern Werth von α bei rechtwinkliger Lage der Durchmesser $\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\alpha' = \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,(90^o + \alpha) = -1$ werden müßte, was wegen $a > b$ nicht möglich ist.

Für jeden von o verschiedenen Werth von α muß, da das Product $\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\alpha'$ negativ ist, von den beiden conjugirten Durchmessern der eine mit der Abscissenaxe einen spitzen, der andere einen stumpfen Winkel bilden.

Folgesätze. 1. Jeder Durchmesser der Ellipse wird durch den Mittelpunct derselben halbirt.

2. Sind x', y' die Coordinaten des Punctes M, und ist β der Winkel, welchen die durch diesen Punct an die Ellipse gezogene Tangente MT mit der Abscissenaxe bildet, so ist (nach §. 481, Gleich. 4) $\text{tang}\,\beta = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}$. Da aber (x', y') ein Punct des Durchmessers MM' ist, so ist

$$y' = A'x' = -\frac{b^2}{A a^2} \cdot x', \text{ und } \frac{x'}{y'} = -\frac{a^2}{b^2} \cdot A = -\frac{a^2}{b^2} \cdot \text{tang}\,\alpha; \text{ daher}$$

$$\text{tang}\,\beta = -\frac{b^2}{a^2} \cdot -\frac{a^2}{b^2} \cdot \text{tang}\,\alpha = \text{tang}\,\alpha, \text{ also } \beta = \alpha.$$

Daraus folgt:

Zieht man durch den Endpunct eines Durchmessers der Ellipse eine Tangente an dieselbe, so ist diese parallel mit den Sehnen, welche der Durchmesser halbirt, somit parallel mit dem conjugirten Durchmesser.

3. Wird $b = a$, geht also die Ellipse in einen Kreis über, so ist $\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\alpha' = -1$, also $\text{tang}\,\alpha' = -\frac{1}{\text{tang}\,\alpha}$; d. h. in einem Kreise stehen je zwei conjugirte Durchmesser auf einander senkrecht.

§. 486. Heißen $2a'$ und $2b'$ die Längen zweier conjugirter Durchmesser, so ergeben sich zu ihrer Bestimmung (aus §. 479,, Zusatz) die Gleichungen

$$a'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin \alpha^2 + b^2 \cos \alpha^2} \quad \ldots 2),$$

$$b'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin \alpha'^2 + b^2 \cos \alpha'^2} \quad \ldots 3).$$

Diese beiden Ausdrücke wollen wir durch Einführung eines Hilfswinkels auf eine für die Rechnung bequemere Form bringen.

Setzen wir $a \operatorname{tang} \alpha = b \operatorname{tang} \varphi$, so muß, da $\operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \alpha' = -\frac{b^2}{a^2}$ ist, $a \operatorname{tang} \alpha' = -b \cot \varphi$ gesetzt werden. Aus 2) erhalten wir dann

$$a'^2 \cos \alpha^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \operatorname{tang} \alpha^2 + b^2} = \frac{a^2 b^2}{b^2 \operatorname{tang} \varphi^2 + b^2} = a^2 \cos \varphi^2,$$

daher $a' \cos \alpha = a \cos \varphi \quad \ldots 4)$

Auf gleiche Weise folgt $a' \sin \alpha = b \sin \varphi \quad \ldots 5)$

Aus 3) ergibt sich ebenso

$$b' \cos \alpha' = -a \sin \varphi \quad \ldots 6)$$

$$b' \sin \alpha' = b \cos \varphi \quad \ldots 7)$$

Man hat daher

$$a'^2 \cos \alpha^2 + a'^2 \sin \alpha^2 = a^2 \cos \varphi^2 + b^2 \sin \varphi^2,$$

oder $a'^2 = a^2 \cos \varphi^2 + b^2 \sin \varphi^2 \quad \ldots 8)$

Ebenso erhält man $b'^2 = a^2 \sin \varphi^2 + b^2 \cos \varphi^2 \quad \ldots 9)$

§. 487. 1. Aus 8) und 9) ergibt sich unmittelbar

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2.$$

Da hiernach auch $4a'^2 + 4b'^2 = 4a^2 + 4b^2$ ist, so folgt:

Die Summe der Quadrate zweier conjugirter Durchmesser ist constant und gleich der Summe der Quadrate der beiden Axen.

2. Aus 4) und 7) folgt $a'b' \cos \alpha \sin \alpha' = ab \cos \varphi^2$,

„ 5) und 6) „ $a'b' \sin \alpha \cos \alpha' = -ab \sin \varphi^2$;

daher $a'b' (\cos \alpha \sin \alpha' - \sin \alpha \cos \alpha') = ab (\cos \varphi^2 + \sin \varphi^2)$,

oder $a'b' \sin (\alpha' - \alpha) = ab$,

wo $\alpha' - \alpha = \gamma$ der Conjugationswinkel ist.

Da hiernach auch $4a'b' \sin \gamma = 4ab$ ist, so folgt:

Das Parallelogramm, welches entsteht, wenn man durch die Endpuncte zweier conjugirter Durchmesser einer Ellipse an diese Tangenten zieht, ist von constanter Größe und gleich dem Rechtecke aus den beiden Axen.

3. Bezeichnet man die Coordinaten der Puncte, in welchen die halben Durchmesser a' und b' die Ellipse treffen, durch x, y und x', y', so ist

$$x = a' \cos \alpha = a \cos \varphi, \qquad x' = -b' \cos \alpha' = a \sin \varphi,$$

$$y = a' \sin \alpha = b \sin \varphi; \qquad y' = b' \sin \alpha' = b \cos \varphi;$$

daher $xy = ab \sin \varphi \cos \varphi; \qquad x'y' = ab \sin \varphi \cos \varphi,$

und folglich $xy = x'y';$

d. h. die Rechtecke aus den Coordinaten der Endpuncte zweier conjugirter Durchmesser der Ellipse sind flächengleich.

488. Gleichung der Ellipse mit Beziehung auf conjugirte Durchmesser.

Nimmt man zwei conjugirte Durchmesser $2a'$ und $2b'$, welche mit der Abscissenaxe des rechtwinkligen Systems die Winkel α und α' bilden, als neue Coordinatenaxen an, so muß man zur Transformirung der Gleichung $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ nach §. 434, 3 für x und y bezüglich $x \cos \alpha + y \cos \alpha'$ und $x \sin \alpha + y \sin \alpha'$ setzen. Man erhält dadurch

$$(b^2 \cos\alpha^2 + a^2 \sin\alpha^2)\, x^2 + (b^2 \cos\alpha'^2 + a^2 \sin\alpha'^2)\, y^2 + 2\,(b^2 \cos\alpha \cos\alpha' + a^2 \sin\alpha \sin\alpha') = a^2 b^2.$$

Aus $\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}$ folgt aber $b^2 \cos\alpha \cos\alpha' + a^2 \sin\alpha \sin\alpha' = 0$.

Die neue Gleichung nimmt daher folgende Form an:

$$\frac{a^2 \sin\alpha^2 + b^2 \cos\alpha^2}{a^2 b^2} \cdot x^2 + \frac{a^2 \sin\alpha'^2 + b^2 \cos\alpha'^2}{a^2 b^2} \cdot y^2 = 1,$$

woraus sich mit Rücksicht auf die Ausdrücke 2) und 3) in §. 486

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1, \qquad \text{oder} \qquad b'^2 x^2 + a'^2 y^2 = a'^2 b'^2$$

als Gleichung der Ellipse für die conjugirten Durchmesser ergibt.

§. 489. Zwei Sehnen, welche von den Endpuncten eines Durchmessers einer krummen Linie zu einem Puncte derselben gezogen werden, heißen Supplementarsehnen.

Es sei DD′ (Fig. 298) ein Durchmesser und N ein beliebiger Punct der Ellipse; dann sind DN und D′N zwei Supplementarsehnen.

Heißen m und n die Cordinaten des Punctes N, x′ und y′ die Coordinaten des Punctes D, daher — x′ und — y′ jene des Punctes D′, so hat man als Gleichungen der Sehnen DN und D′N

$$y - n = \frac{n - y'}{m - x'}(x - m), \qquad \text{und} \quad y - n = \frac{n + y'}{m + x'}(x - m).$$

Sind nun β und β' die Winkel dieser Sehnen mit der positiven Abscissenaxe, so ist

$$\text{tang}\,\beta = \frac{n - y'}{m - x'},\ \text{tang}\,\beta' = \frac{n + y'}{m + x'},\ \text{daher tang}\,\beta\,\text{tang}\,\beta' = \frac{n^2 - y'^2}{m^2 - x'^2}.$$

Da aber N, D und D′ Puncte der Ellipse sind, so hat man

$$b^2 m^2 + a^2 n^2 = a^2 b^2, \qquad b^2 x'^2 + a^2 y'^2 = a^2 b^2,$$

folglich $b^2 (m^2 - x'^2) + a^2 (n^2 - y'^2) = 0$, und

$$\frac{n^2 - y'^2}{m^2 - x'^2} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Somit ist

$$\text{tang}\,\beta\,\text{tang}\,\beta' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Aus der Uebereinstimmung dieser Gleichung mit der Gleichung 1) in §. 485 folgt:

Zwei Durchmesser der Ellipse, welche mit zwei Supplementarsehnen parallel gezogen werden, sind einander conjugirt.

3. Uebungsaufgaben.

§. 490. 1. Den Mittelpunct einer Ellipse zu finden.

Man ziehe zwei parallele Sehnen und durch ihre Mitten einen Durchmesser; der Halbirungspunct dieses Durchmessers ist der Mittelpunct der Ellipse.

2. Beliebig viele Puncte einer Ellipse zu bestimmen, wenn die große Axe und die Brennpuncte gegeben sind.

Man nehme in der großen Axe zwischen den Brennpuncten beliebig viele Puncte an, deren jeder die große Axe in zwei Abschnitte theilt, und beschreibe mit dem einen Abschnitte als Halbmesser aus dem einen, mit dem zweiten Abschnitte aus dem andern Brennpuncte Kreisbogen; die Durchschnittspuncte derselben sind Puncte der Ellipse.

3. Beliebig viele Puncte einer Ellipse zu bestimmen, wenn beide Axen gegeben sind.

Mit Hilfe eines Kreises nach §. 476.

4. Die Gleichung einer Ellipse ist $9x^2 + 16y^2 = 144$, die Gleichung einer Geraden

a) $y = 3x + 5$, b) $y = x + 5$, c) $y = 2x - 9$;

man bestimme, wie viele Puncte die Ellipse mit jeder dieser Geraden gemeinschaftlich hat. (§. 480.)

5. Zu einem Durchmesser MM' (Fig. 298) der Ellipse den conjugirten Durchmesser zu construiren.

Auflösung 1. Nach §§. 484 und 485. Man ziehe zu dem Durchmesser MM' eine parallele Sehne DN, und sodann durch die Mitte O dieses Durchmessers und die Mitte P der Sehne DN die Gerade RR'.

Auflösung 2. Nach §. 489. Man ziehe durch den Endpunct eines beliebigen Durchmessers DD' die DN ∥ MM', dann die Sehne ND', endlich durch O die RR' ∥ ND'.

6. Aus zwei conjugirten Durchmessern, deren Länge und Lage gegeben ist, den Flächeninhalt der Ellipse zu bestimmen.

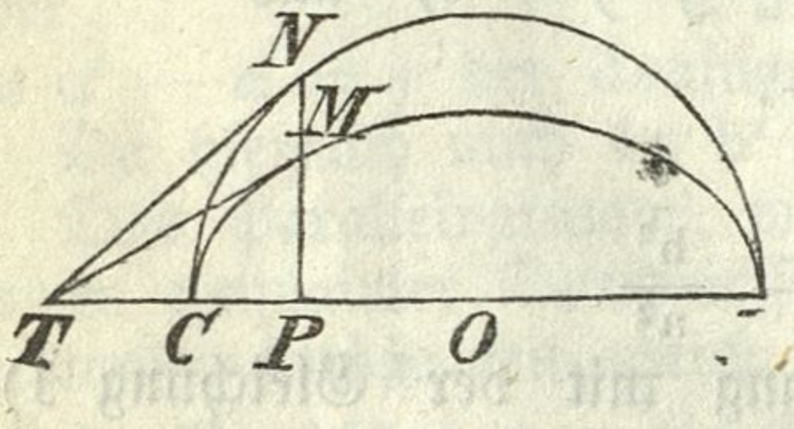
$$f = a'b'\pi \cdot \sin\gamma.$$

7. Die Gleichung einer Ellipse ist $x^2 + 25y^2 = 25$; man suche die Gleichung der Tangente für den Berührungspunct $(3, -\frac{4}{5})$.

8. Durch einen Punct M der Ellipse an diese eine Tangente zu ziehen.

Auflösung 1. Verlängert man (Fig. 297) den Leitstrahl BM über M hinaus, so darf man, um die Lage der Tangente MN zu erhalten, (nach §. 483) nur den Winkel AME halbiren. Man macht daher ME = MA und beschreibt aus E und A mit demselben Halbmesser Kreisbogen, welche sich in N schneiden; die durch N und M gezogene Gerade NMT ist die verlangte Tangente.

Fig. 299.



Auflösung 2. Nach §. 482, 1. Zusatz, indem man (Fig. 299) über der großen Axe CD einen Kreis beschreibt, die Ordinate MP bis N verlängert, durch N eine Tangente NT an den Kreis construirt und TM zieht.

Auflösung 3. Man ziehe durch M einen Durchmesser der Ellipse, construire zu demselben den conjugirten Durchmesser, und ziehe mit diesem eine Parallele durch M (§. 485, Folges. 2).

Auflösung 4. Man ziehe MO (Fig. 298), ferner durch den Endpunct eines beliebigen Durchmessers DD' die DN ∥ MO, dann ND', und endlich MT ∥ ND' (§. 489).

9. Aus einem Puncte N (Fig. 297) außerhalb der Ellipse an diese eine Tangente zu ziehen.

Hier kommt es mit Rücksicht auf die 1. Auflösung der Aufgabe 8 offenbar nur darauf an, einen Punct E zu finden, der von N eben so weit absteht als der eine Brennpunct A, und dessen Entfernung von dem andern Brennpuncte B der großen Axe gleich ist. Diesen Punct findet man aber in dem Durchschnitte der aus N mit dem Halbmesser NA, und aus B mit dem Halbmesser CD beschriebenen Kreisbogen. Zieht man dann die Gerade EB, welche die Ellipse in M schneidet, so ist M der Berührungspunct und NM die gesuchte Tangente.

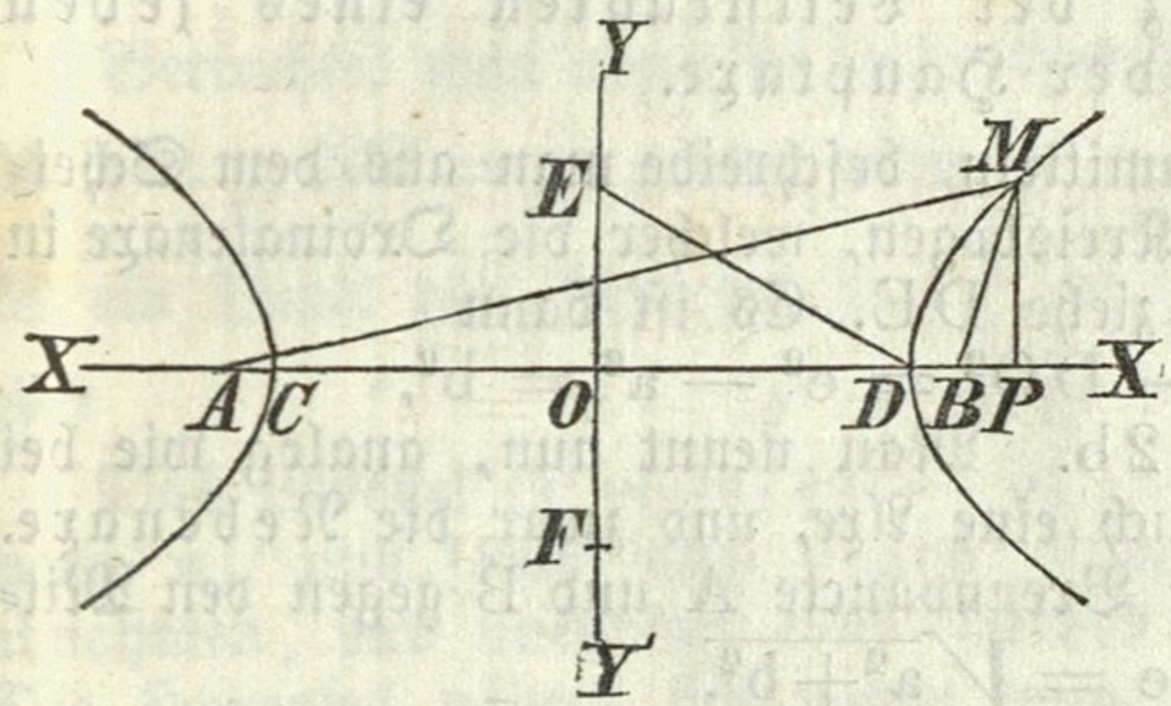
Da jene zwei Bogen auch noch einen zweiten Berührungspunct E' geben, so wird durch die Gerade E'B noch ein zweiter Durchschnittspunct M' bestimmt, woraus folgt, daß von dem Puncte N zwei Tangenten NM und NM' an die Ellipse gezogen werden können.

V. Die Hyperbel.

1. Analytische Darstellung der Hyperbel.

§. 491. Die Hyperbel ist eine Linie von solcher Beschaffenheit, daß die Differenz der Abstände jedes ihrer Puncte von zwei festen Puncten constant ist.

Fig. 300.



Sind A und B (Fig. 300) die festen Puncte, und ist 2a die constante Differenz der Abstände eines jeden Punctes der Hyperbel von jenen zwei Puncten, so ist M ein Punct der Hyperbel, wenn $AM - BM = 2a$ ist.

Die beiden festen Puncte A und B heißen die Brennpuncte der Hyperbel, die Geraden AM und BM die Leitstrahlen des Punctes M.

§. 492. Mittelpunctsgleichung der Hyperbel für rechtwinklige Coordinaten.

Halbirt man AB (Fig. 300) in O und nimmt diesen Punct als Anfangspunct der Coordinaten und OBX als die Abscissenaxe an, so ist für den Punct M, $x = OP$, $y = MP$. Damit der Punct M in der Hyperbel liege, muß $AM - BM = 2a$ sein.

Man hat nun, wenn $OA = OB = e$ gesetzt wird,

$$AM = \sqrt{(x + e)^2 + y^2},\ BM = \sqrt{(x - e)^2 + y^2};$$

daher muß

$$\sqrt{(x + e)^2 + y^2} - \sqrt{(x - e)^2 + y^2} = 2a$$

sein, oder, wenn die Gleichung rational gemacht wird,

$$(a^2 - e^2)\, x^2 + a^2 y^2 = a^2 (a^2 - e^2).$$

Im Dreiecke ABM ist $AM - BM < AB$; es muß daher $2a < 2e$, oder $a < e$, folglich auch $a^2 < e^2$, und somit $a^2 - e^2$ negativ sein. Setzt man $a^2 - e^2$ der negativen Größe $- b^2$ gleich, so erhält man

$$-b^2 x^2 + a^2 y^2 = -a^2 b^2,$$

oder

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$$

als die gesuchte Gleichung der Hyperbel, welche sich auch so darstellen läßt:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

§. 493. Discussion der Gleichung $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$.

1. Diese Gleichung gibt

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad \text{und} \quad x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}.$$

So lange $x < a$ ist, fällt y imaginär aus; für solche Abscissen gibt es also keinen Punct der Hyperbel. Zu jeder Abscisse $x > a$ gehören zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von y; ebenso erhält man für jeden Werth von y zwei gleiche und entgegengesetzte Abscissen.

Die Hyperbel erstreckt sich also zu beiden Seiten der Abscissen- und der Ordinatenaxe in vier congruenten Aesten. Der Ursprung O heißt darum der Mittelpunct der Hyperbel.

2. Da x und y jeden noch so großen Werth annehmen können, so folgt, daß sich die Aeste der Hyperbel ins Unendliche ausdehnen.

3. Für $y = 0$ wird $x = \pm a$; die Hyperbel schneidet also die Abscissenaxe in zwei Puncten D und C, deren Abstand 2a beträgt. Die Gerade $CD = 2a$ heißt die erste oder Hauptaxe der Hyperbel; C und D nennt man die Scheitel derselben.

Daraus folgt: Die Differenz der Leitstrahlen eines jeden Punctes der Hyperbel ist gleich der Hauptaxe.

4. Um die Bedeutung von b auszumitteln, beschreibe man aus dem Scheitel D mit OB als Halbmesser einen Kreisbogen, welcher die Ordinatenaxe in den Puncten E und F schneidet, und ziehe DE. Es ist dann

$$EO^2 = FO^2 = DE^2 - DO^2 = e^2 - a^2 = b^2,$$

daher $EO = FO = b$, und $EF = 2b$. Man nennt nun, analog wie bei der Ellipse, die Gerade $EF = 2b$ auch eine Axe, und zwar die Nebenaxe.

5. Zur Bestimmung der Lage der Brennpuncte A und B gegen den Mittelpunct O hat man $OA = OB = e = \sqrt{a^2 + b^2}$.

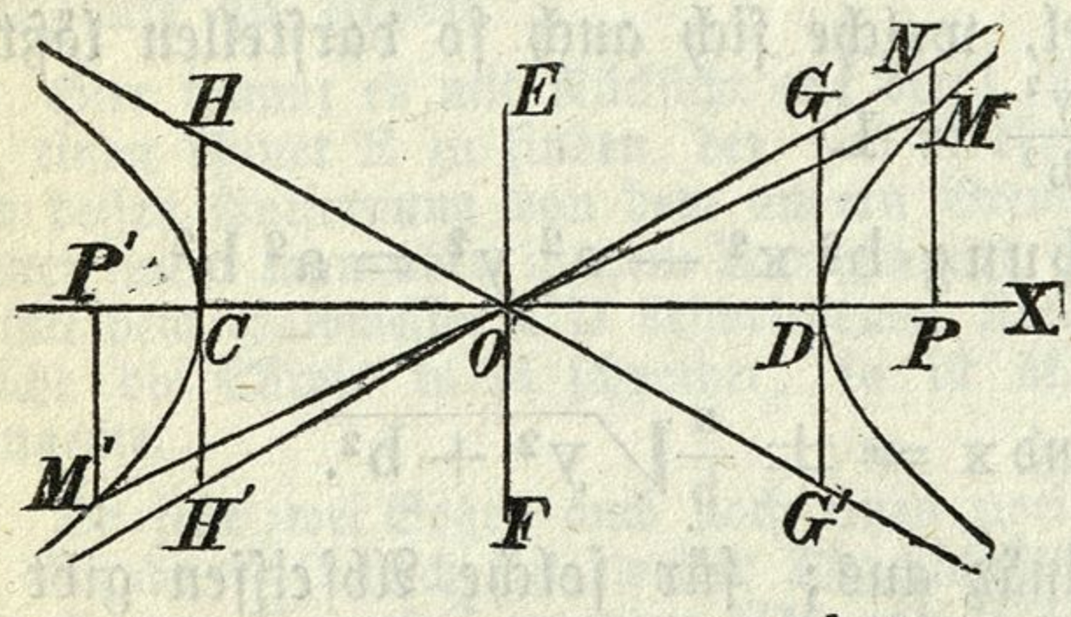
Die Größe e heißt die lineare, die Größe $\frac{e}{a} = \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ die numerische Excentricität.

6. Auch in der Hyperbel wird die durch den Brennpunct senkrecht auf die erste Axe gezogene Sehne der Parameter genannt und durch 2p bezeichnet. Da der halbe Parameter p der im Brennpuncte errichteten Ordinate gleich ist, so braucht man zur Bestimmung desselben nur in $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ $x^2 = e^2 = a^2 + b^2$ zu setzen; man erhält dadurch $y = \pm \frac{b^2}{a}$. Es ist somit $p = \frac{b^2}{a}$, oder $a : b = b : p$, d. h. der halbe Parameter ist die dritte stetige Proportionale zwischen der halben Haupt- und der halben Nebenaxe.

7. Für $a = b$ wird die Hyperbel eine gleichseitige genannt; ihre Gleichung ist $y = \pm\sqrt{x^2 - a^2}$.

8. Verbindet man mit der Gleichung der Hyperbel die Gleichung $y = a'x$ einer durch O (Fig. 301) gezogenen Geraden M'M, so erhält man für die Durchschnittspuncte der beiden Linien:

Fig. 301.



$$x = \frac{\pm ab}{\sqrt{b^2 - a^2 a'^2}}, \quad y = \frac{\pm aa'b}{\sqrt{b^2 - a^2 a'^2}},$$

wobei das obere Zeichen dem Puncte M, das unter dem Puncte M' entspricht. Aus diesen Werthen folgt, daß ein Durchschnitt einer Geraden mit der Hyperbel nur möglich ist, wenn $b^2 > a^2 a'^2$, oder $a' < \frac{b}{a}$ ist; wird $a' > \frac{b}{a}$, so fallen die Werthe von x und y imaginär aus.

9. Besonders merkwürdig sind jene Geraden, für welche $a' = \pm \frac{b}{a}$, also $b^2 = a^2 a'^2$ ist; für diese werden die Werthe von x und y unendlich groß, was anzeigt, daß die beiden Geraden mit der Hyperbel zu beiden Seiten erst in unendlicher Entfernung, also nie zusammentreffen.

Um diese zwei Geraden zu construiren, errichte man in D auf OX eine Senkrechte, trage darauf $DG = DG' = b$ auf und ziehe die Geraden GOH' und G'OH; man hat für diese in der That

$$\text{tang } GOD = \frac{b}{a}, \text{ und tang } HOD = -\frac{b}{a}.$$

Betrachtet man nun eine dieser Geraden, z. B. GH', so ist, wenn $OP = x$, $MP = y$, $NP = y'$ gesetzt wird, $y' = \frac{b}{a} x$ und $y'^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2$; ferner, da M ein Punct der Hyperbel ist, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$; daher $y'^2 - y^2 = b^2$, oder

$$(y' + y)(y' - y) = b^2.$$

Das Product $(y' + y)(y' - y)$ ist demnach constant, woraus folgt, daß, wenn x, und somit auch y und y' wachsen, die Differenz $y' - y = MN$ abnehmen, und unendlich klein werden muß, wenn x unendlich groß wird. Die Hyperbel nähert sich daher immer mehr und mehr der Geraden GH', ohne sie je zu erreichen. Dasselbe gilt von der Geraden G'H.

Eine Gerade, welcher sich eine krumme Linie immer mehr und mehr nähert, ohne jedoch mit ihr je zusammenzutreffen, nennt man eine Asymptote der krummen Linie. Die Hyperbel hat demnach zwei Asymptoten, deren Gleichungen

$$y = + \frac{b}{a} . x \quad \text{und} \quad y = - \frac{b}{a} . x$$

sind.

§. 494. Der geometrische Ort aller Puncte, deren Coordinaten der Gleichung $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ genügen, ist eine Hyperbel.

Der Beweis wird auf ähnliche Art geführt wie in §. 474.

§. 495. Bestimmung der Leitstrahlen.

Für die Leitstrahlen AM und BM des Punctes M (Fig. 300) erhält man auf analoge Weise, wie bei der Ellipse (§. 475),

$$AM = \frac{ex}{a} + a, \quad \text{und} \quad BM = \frac{ex}{a} - a;$$

und als die Gleichungen der beiden Leitstrahlen AM und BM

$$y = \frac{y'}{x' + e}(x + e), \text{ und } y = \frac{y'}{x' - e}(x - e).$$

§. 496. Scheitelgleichung der Hyperbel.

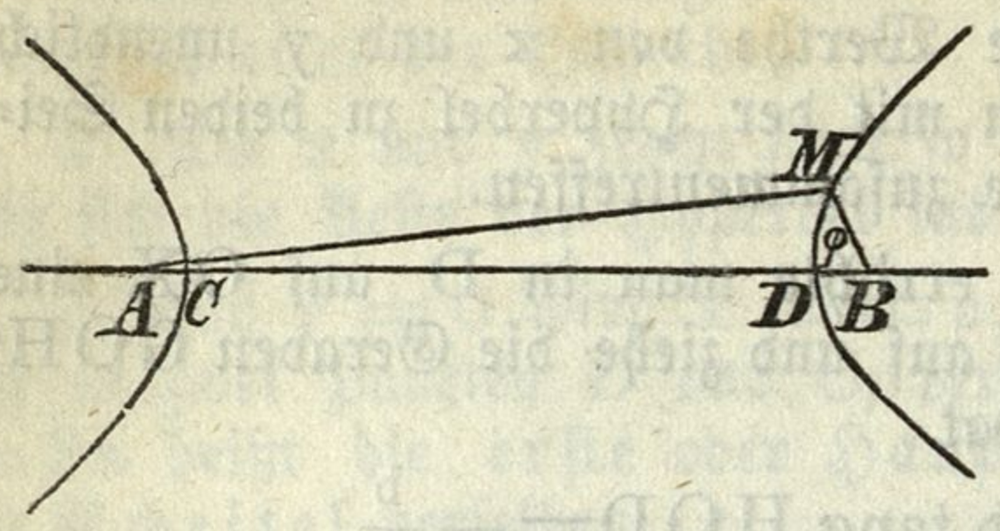
Man erhält, wie für die Ellipse (§. 478),

$$y^2 = 2px + \frac{px^2}{a}.$$

§. 497. Polargleichung der Hyperbel.

Ist B (Fig. 302) der Pol und BD die Polaraxe, so hat man für

Fig. 302.



den Punct M

$$r = BM,\ \varphi = MBD.$$

Man erhält dann, wie für die Ellipse (§. 479),

$$r = \frac{e^2 - a^2}{a + e\cos\varphi} \ldots 1)$$

als die gesuchte Polargleichung.

Für $e = a\varepsilon$ ist

$$r = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{1 + \varepsilon\cos\varphi} \ldots 2),$$

oder, wenn die Größe $p = \frac{b^2}{a} = a(\varepsilon^2 - 1)$ eingeführt wird,

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi} \ldots 3).$$

Zusatz. Nimmt man O (Fig. 301) als Pol und OX als Polaraxe an, so erhält man, wie in §. 479, Zusatz

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2\cos\varphi'^2 - a^2\sin\varphi'^2} \ldots 4).$$

Damit r einen reellen Werth erhalte, muß $a\sin\varphi' < b\cos\varphi'$, also $\operatorname{tang}\varphi' < \frac{b}{a}$ sein.

2. Die Gerade und die Hyperbel.

§. **498.** Läßt man die Gleichung der Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ mit der Gleichung einer Geraden $y = Ax + B$ coexistiren, so erhält man für den gemeinschaftlichen Durchschnittspunct der beiden Linien

$$x = \frac{-ABa^2 \pm ab\sqrt{B^2 - (A^2a^2 - b^2)}}{A^2a^2 - b^2}.$$

Eine Gerade hat daher mit der Hyperbel entweder zwei Puncte, oder nur einen, oder keinen Punct gemeinschaftlich, je nachdem $B^2 \gtreqless A^2a^2 - b^2$ ist.

§. **499.** Tangenten und Normalen der Hyperbel.

Die Gleichungen der Tangente und der Normale, sowie die Längen der Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale lassen sich hier in analoger Weise wie bei der Ellipse (§§. 481 und 482) entwickeln; sie können aber auch aus den dort gewonnenen Resultaten sofort erhalten werden, wenn man in denselben b^2 mit $-b^2$ vertauscht.

§. **500.** Die Tangente der Hyperbel bildet mit den nach dem Berührungspuncte gezogenen Leitstrahlen gleiche Winkel.

Heißen v und v' die Winkel, welche die Tangente mit den nach dem Berührungspuncte gezogenen Leitstrahlen bildet, so erhält man durch analoges Verfahren, wie bei der Ellipse (§. 483),

$$\operatorname{tang} v = \frac{b^2}{ey'},\ \operatorname{tang} v' = \frac{b^2}{ey'};$$

folglich $\operatorname{tang} v = \operatorname{tang} v'$, und somit auch $v = v'$.

Auf diesen Satz gründet sich die optische Erscheinung, daß von einem hyperbolisch geschliffenen Hohlspiegel Lichtstrahlen, die von einem Brennpuncte ausgehen, so reflectirt werden, als ob sie vom anderen Brennpuncte herkämen.

§. **501.** Durchmesser der Hyperbel.

Durch analoge Schlüsse, wie bei der Ellipse (§. 484), läßt sich nachweisen, daß bei der Hyperbel für den Durchmesser eines parallelen Sehnensystems,

dessen Richtungsconstante $A = \text{tang } \alpha$ ist, die Gleichung $y = \frac{b^2}{A a^2} . x = A' x$ besteht, wenn $\frac{b^2}{A a^2} = A' = \text{tang } \alpha'$, also $A A' = \frac{b^2}{a^2}$ gesetzt wird.

Für den conjugirten Durchmesser ergibt sich dann ebenso die Gleichung $y = \frac{b^2}{A' a^2} . x = A x$.

Auch bei der Hyperbel ist das Product der Richtungsconstanten je zweier conjugirter Durchmesser constant, nämlich

$$A A' = \text{tang } \alpha \text{ tang } \alpha' = \frac{b^2}{a^2} \quad . \quad . \quad . \quad 1).$$

Für $\alpha = o$ wird $\alpha' = 90^0$; d. h. die beiden Axen der Hyperbel sind zwei conjugirte Durchmesser; sie sind die einzigen, die aufeinander senkrecht stehen, da das Product tang α tang α' nie gleich -1 sein kann.

Für jeden von o verschiedenen Werth von α müssen, da das Product tang α tang α' positiv ist, die Winkel α und α' beide spitz oder beide stumpf sein. Da hiernach die Asymptoten der Hyperbel (493, 9) nicht conjugirte Durchmesser sein können, und daher der Fall $\text{tang } \alpha = \frac{b}{a}, \text{tang } \alpha' = -\frac{b}{a}$ ausgeschlossen ist, so muß der absolute Werth einer dieser beiden Tangenten kleiner, der andere größer als $\frac{b}{a}$ sein, d. h. der eine Durchmesser liegt zwischen der Asymptote und der Hauptaxe, der andere zwischen der Asymptote und der Nebenaxe. Nur der erstere schneidet (nach §. 497, Zusatz) die Hyperbel wirklich in zwei Puncten, er heißt der Hauptdurchmesser und hat eine bestimmte Länge. Der zweite, welcher der Nebendurchmesser des früheren genannt wird, schneidet die Hyperbel nicht und ist unbegrenzt.

Folgesatz. Wie bei der Ellipse (§. 485, Folges. 2) läßt sich auch hier folgern, daß die Tangente durch den Endpunct eines Durchmessers (des Hauptdurchmessers) der Hyperbel mit dem conjugirten Durchmesser parallel ist.

§. **502.** Ist der Durchmesser, dessen Richtungsconstante $A = \text{tang } \alpha$ ist, der Hauptdurchmesser und $2a'$ seine Länge, so ergibt sich zur Bestimmung von a' aus der Gleichung in §. 497, Zusatz

$$a'^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos \alpha^2 - a^2 \sin \alpha^2} \quad . \quad . \quad . \quad 2).$$

Analog wird auch für den Nebendurchmesser eine bestimmte Länge angenommen. Die im Zusatze zu §. 497 aufgestellte Gleichung liefert für diesen halben Durchmesser, da $\text{tang } \alpha' > \frac{b}{a}$, also $a^2 \sin a'^2 > b^2 \cos \alpha'^2$ ist, einen imaginären Werth, den wir mit $b' \sqrt{-1}$ bezeichnen wollen. Die reelle Größe $2b'$ nimmt man nun als die Länge des Nebendurchmessers an, indem man auf ihn vom Mittelpuncte der Hyperbel aus nach jeder Seite die Strecke b' aufträgt. Der Werth von b' ergibt sich hiernach aus dem Ausdrucke

$$b'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin \alpha'^2 - b^2 \cos \alpha'^2} \quad . \quad . \quad . \quad 3).$$

Die voranstehenden Ausdrücke 2) und 3) wollen wir auch hier durch Einführung eines Hilfswinkels auf eine bequemere Form bringen.

Wird $a \text{ tang } \alpha = b \cos \varphi$ gesetzt, so muß man, da $\text{tang } \alpha \text{ tang } \alpha' = \frac{a^2}{b^2}$ ist, $a \text{ tang } \alpha' = \frac{b}{\cos \varphi}$ setzen. Man erhält dann aus 2) und 3) durch ähnliche Rechnungen, wie bei der Ellipse (§. 486),

$a' \cos \alpha = \pm \frac{a}{\sin \varphi}$ . . . 4), $a' \sin \alpha = \pm b \cot \varphi$ . . . 5),

$b' \cos \alpha' = a \cot \varphi$ . . . 6), $b' \sin \alpha' = \frac{b}{\sin \varphi}$ . . . 7);

wobei in den ersten zwei Gleichungen das obere oder das untere Zeichen genommen wird, je nachdem α spitz oder stumpf ist.

Hieraus folgt

$$a'^2 \cos \alpha^2 + a'^2 \sin \alpha^2 = \frac{a^2}{\sin \varphi^2} + b^2 \cot \varphi^2 = a^2 (1 + \cot \varphi^2) + b^2 \cot \varphi^2,$$

oder $a'^2 = a^2 + (a^2 + b^2) \cot \varphi^2$ . . . 8).

Ebenso ergibt sich $b'^2 = b^2 + (a^2 + b^2) \cot \varphi^2$ . . . 9).

§. **503.** 1. Aus 8) und 9) erhält man unmittelbar

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2.$$

2. Aus 4) und 7) folgt $a'b' \cos \alpha \sin \alpha' = \pm \frac{ab}{\sin \varphi^2}$,

„ 5) und 6) „ $a'b' \sin \alpha \cos \alpha' = \pm ab \cot \varphi^2$;

daher $a'b' (\cos \alpha \sin \alpha' - \sin \alpha \cos \alpha') = \pm ab \left(\frac{1}{\sin \varphi^2} - \cot \varphi^2\right)$

und folglich für das obere Zeichen $a'b' \sin (\alpha' - \alpha) = ab$,

„ „ untere „ $a' b' \sin (\alpha - \alpha') = ab$.

Das obere Zeichen gilt, wenn α und α' beide spitz sind, wo dann der Conjugationswinkel $\gamma = \alpha' - \alpha$ ist; das untere Zeichen gilt, wenn α und α' beide stumpf sind, wo dann $\gamma = \alpha - \alpha'$ ist. In beiden Fällen ist daher

$$a' b' \sin \gamma = ab.$$

3. Bezeichnen endlich x, y und x', y' die Coordinaten der Endpuncte der zwei conjugirten halben Durchmesser a' und b', so ergibt sich, wie bei der Ellipse (§. 487, 3), die Relation $xy = x'y'$.

§. **504.** Gleichung der Hyperbel, bezogen auf conjugirte Durchmesser.

Transformirt man die Gleichung $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ in analoger Weise, wie in §. 488 die Mittelpunctsgleichung der Ellipse umgeformt wurde, so erhält man als Gleichung der Hyperbel mit Beziehung auf ein System conjugirter Durchmesser

$$b'^2x^2 - a'^2 y^2 = a'^2 b'^2,$$

wo a', b' die in §. 502, 2) und 3) angeführte Bedeutung haben.

§. **505.** Verbindet man die Endpuncte eines Hauptdurchmessers einer Hyperbel mit einem beliebigen Puncte derselben durch Gerade, so sind die beiden Geraden zwei Supplementarsehnen. Man findet für dieselben, analog wie bei der Ellipse (§. 489), die Relation $\operatorname{tang} \beta \operatorname{tang} \beta' = \frac{b^2}{a^2}$, wenn β und β' die von den Sehnen mit der Hauptaxe gebildeten Winkel bedeuten.

Hieraus folgt mit Rücksicht auf die Gleichung 1) in §. 501, daß auch in der Hyperbel zwei Durchmesser, welche zu zwei Supplementarsehnen parallel gezogen werden, einander conjugirt sind.

3. Uebungsaufgaben.

§. **506.** 1. Beliebig viele Puncte einer Hyperbel zu bestimmen, wenn die Hauptaxe und die beiden Brennpuncte gegeben sind.

Man nehme in der Verlängerung der Hauptaxe über die Brennpuncte hinaus beliebig viele Puncte an, beschreibe mit dem Abstande eines jeden von dem einen Scheitel aus dem einen Brennpuncte, und mit dem Abstande desselben Punctes von dem zweiten Scheitel aus

dem andern Brennpuncte Kreisbogen, welche sich schneiden; die Durchschnittspuncte sind Puncte der Hyperbel.

2. Die Gleichung einer Hyperbel ist $9y^2 - 4x^2 = 36$; wie viele Puncte hat die Gerade

a) $y = \frac{2x}{3} + 2$, b) $y = 2x - 8$, c) $y = x - 3$

mit der Hyperbel gemeinschaftlich? (§. 498.)

3. Die Gleichung der Hyperbel für die Asymptoten als Axen abzuleiten.

Transformirt man die Mittelpunctsgleichung nach §. 434, 3, wobei

$$\cos \alpha^2 = \cos (\gamma + \alpha)^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2}, \sin \alpha^2 = \sin (\gamma + \alpha)^2 = \frac{b^2}{a^2+b^2}$$

zu setzen ist, so erhält man als Asymptotengleichung $xy = \frac{a^2+b^2}{4}$.

Für die gleichseitige Hyperbel ist $xy = \frac{a^2}{2}$.

4. Zu beweisen, daß für die auf die Asymptoten bezogenen Coordinaten x, y eines Punctes der Hyperbel $xy \sin \gamma = \frac{ab}{2}$ ist, wenn γ den Winkel zwischen den beiden Asymptoten bezeichnet.

5. Zu einem Durchmesser der Hyperbel den conjugirten Durchmesser zu finden.

Mit Rücksicht auf §. 501 oder §. 505 zu lösen.

6. Durch einen Punct der Hyperbel an diese eine Tangente zu ziehen.

Die Auflösung ist analog den Auflösungen 1, 3 und 4 zu §. 490, Aufg. 8.

7. Von einem außerhalb der Hyperbel liegenden Puncte an dieselbe eine Tangente zu ziehen.

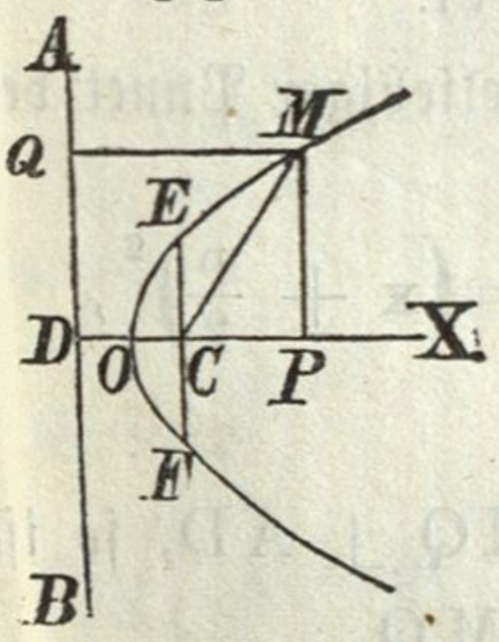
Wird analog wie Aufg. 9 in §. 490 aufgelöst.

VI. Die Parabel.

1. Analytische Darstellung der Parabel.

§. **507.** Die Parabel ist eine Linie, deren jeder Punct von einem festen Puncte und einer festen Geraden denselben Abstand hat.

Fig. 303.



Ist C (Fig. 303) der gegebene feste Punct und AB die feste Gerade, ferner $MQ \perp AB$, so ist M ein Punct der Parabel, wenn $MC = MQ$ ist.

Der feste Punct C heißt der Brennpunct, die feste Gerade AB die Leitlinie der Parabel und CM der Leitstrahl des Punctes M.

§. **508.** Scheitelgleichung der Parabel.

Zieht man (Fig. 303) $CD \perp AB$, halbirt die CD im Puncte O und nimmt O als Ursprung der Coordinaten und OCX als die Abscissenaxe an, so ist für den Punct M, $x = OP$, $y = MP$. Zieht man dann $MQ \perp AB$, so muß, wenn M in der Parabel liegen soll, $CM = MQ$ sein. Nun ist, wenn $CO = \frac{p}{2}$ gesetzt wird,

$$CM = \sqrt{\left(x - \tfrac{p}{2}\right)^2 + y^2},\quad MQ = DP = x + \tfrac{p}{2},$$

daher $$\sqrt{\left(x - \tfrac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \tfrac{p}{2},$$

woraus $$y^2 = 2px$$

als die gesuchte Gleichung der Parabel folgt.

§. **509.** Discussion der Gleichung $y^2 = 2px$.

1. Aus dieser Gleichung ergibt sich $y = \pm\sqrt{2px}$. Zu jedem positiven Werthe von x gehören zwei gleiche, aber entgegengesetzte Ordinaten; die Parabel dehnt sich also zu beiden Seiten der Abscissenaxe in zwei congruenten Aesten aus, und zwar ins Unendliche, da x und y jede beliebige Größe erreichen können. Die Gerade OX heißt darum die Axe der Parabel.

2. Für $x = 0$ wird auch $y = 0$; der Ursprung der Coordinaten ist also ein Punct der Parabel; er heißt der Scheitel.

3. Für ein negatives x wird y imaginär; negativen Abscissen entsprechen daher keine Puncte der Parabel.

4. Setzt man $x = \frac{p}{2} = OC$, so wird $y = CE = CF = \pm p$; daher ist $EF = 2p$. Die Größe $2p$ stellt also die durch den Brennpunct senkrecht auf die Axe gezogene Sehne EF vor und heißt der Parameter der Parabel.

5. Aus $y^2 = 2px$ folgt $2p : y = y : x$, d. h. die Ordinate eines jeden Punctes der Parabel ist die mittlere Proportionale zwischen dem Parameter und der Abscisse des Punctes.

6. Sind x' und x'' die Abscissen, y' und y'' die zugehörigen Ordinaten zweier Puncte einer Parabel, deren Parameter $2p$ ist, so hat man

$$y'^2 = 2px' \text{ und } y''^2 = 2px'', \text{ daher}$$

$$y'^2 : y''^2 = x' : x'',$$

d. h. in der Parabel verhalten sich die Quadrate der Ordinaten wie die zugehörigen Abscissen.

§. **510.** Der geometrische Ort aller Puncte, deren Coordinaten der Gleichung $y^2 = 2px$ genügen, ist eine Parabel.

Man mache (Fig. 303) $OC = \frac{p}{2}$. Ist nun M ein beliebiger Punct der krummen Linie OEM und $OP = x$, $MP = y$; so ist

$$CM^2 = \left(x - \tfrac{p}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 - px + \tfrac{p^2}{4} + 2px = \left(x + \tfrac{p}{2}\right)^2,$$

daher $$CM = x + \tfrac{p}{2}.$$

Macht man also $OD = OC$, zieht $DA \perp DX$ und $MQ \perp AD$, so ist

$$CM = x + \tfrac{p}{2} = OP + OD = DP = MQ,$$

und folglich die krumme Linie OEM eine Parabel.

§. **511.** Bestimmung des Leitstrahles der Parabel.

Sind x', y' die Coordinaten des Punctes M (Fig. 303), so hat man

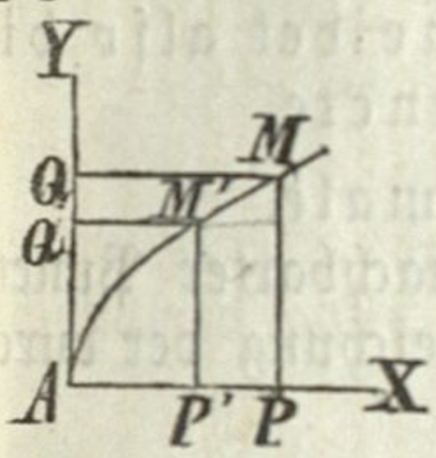
$$CM = x' + \tfrac{p}{2}.$$

Als Gleichung des Leitstrahles erhält man, da derselbe durch die Puncte $C = \left(\frac{p}{2},\ o\right)$ und $M = (x', y')$ geht,

$$y = \frac{y'}{x' - \frac{p}{2}}\left(x - \frac{p}{2}\right), \text{ oder } y = \frac{2y'}{2x' - p}\left(x - \frac{p}{2}\right).$$

§. 512. Der Flächeninhalt des zwischen zwei zusammengehörigen Coordinaten eingeschlossenen Parabelstückes ist gleich $\frac{2}{3}$ des Productes aus diesen Coordinaten.

Fig. 304.



Es sei AM (Fig. 304) ein parabolischer Bogen und AX die Axe der Parabel. Man ziehe $AY \perp AX$, und fälle von den Puncten M, M' auf AX die Senkrechten MP, M'P' und auf AY die Senkrechten MQ, M'Q'.

Heißen x, y die Coordinaten des Punctes M und x', y' jene des Punctes M', so ist, wenn man die Sehne MM' zieht,

$$\text{Trapez } MM'P'P = (y + y').\frac{x - x'}{2} = (y + y').\frac{y^2 - y'^2}{4p} = \frac{(y + y')^2}{2p}.\frac{y - y'}{2}$$

$$\text{Trapez } MM'Q'Q = (x + x').\frac{y - y'}{2},$$

daher

$$\frac{\text{Trap. } MM'P'P}{\text{Trap. } MM'Q'Q} = \frac{(y + y')^2}{2p(x + x')}.$$

Läßt man nun die Puncte M und M' unendlich nahe aneinander liegen, unter welcher Annahme $y + y'$ in $2y$ und $x + x'$ in $2x$ übergeht, so kann man das Trapez MM'P'P als ein Element des gesuchten Parabelstückes AMP, und das Trapez MM'Q'Q als ein Element der außerhalb der Parabel liegenden Fläche AMQ betrachten, und es wird

$$\frac{MM'P'P}{MM'Q'Q} = \frac{4y^2}{4px} = \frac{y^2}{px} = 2, \quad \text{also } MM'P'P = 2MM'Q'Q.$$

Stellt man sich nun die Flächen AMP und AMQ aus lauter solchen Elementen bestehend vor, so ist auch

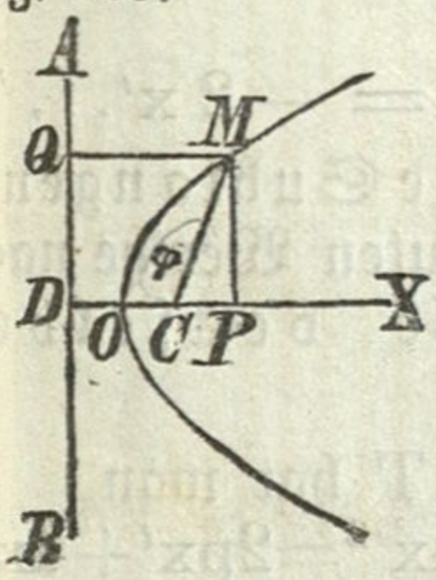
$AMP = 2AMQ$; daher $3AMQ = AMP + AMQ = xy$, folglich

$$AMQ = \frac{1}{3}xy, \quad \text{und} \quad AMP = \frac{2}{3}xy.$$

§. 513. Polargleichung der Parabel.

Es sei C (Fig. 305) der Pol und CD die Polaraxe, so ist für den Punct M, $r = CM$, $\varphi = MCD$. Soll M ein Punct der Parabel sein, so muß die Gleichung $CM = MQ$ stattfinden. Nun ist

Fig. 305.



$$CM = r,\ MQ = DP = DC + CP = p - r\cos\varphi,$$

daher $r = p - r\cos\varphi$, und somit

$$r = \frac{p}{1 + \cos\varphi}$$

die Polargleichung der Parabel.

2. Die Gerade und die Parabel.

§. 514. Da $y^2 = 2px$ die Gleichung der Parabel, und $y = Ax + B$ die Gleichung einer Geraden ist, so erhält man für den gemeinschaftlichen Durchschnittspunct, welchem in beiden Linien gleiche Coordinaten zukommen,

$$y^2 = 2p \cdot \frac{y - B}{A} = \frac{2py}{A} - \frac{2Bp}{A}$$

und daraus $$y = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 2ABp}}{A}.$$

Eine Gerade hat also im Allgemeinen mit der Parabel zwei Puncte, oder einen, oder keinen Punct gemeinschaftlich, je nachdem $p \gtreqless 2AB$ ist.

Ist eine Gerade mit der Axe der Parabel $y^2 = 2px$ parallel, in welchem Falle $y = B$ ihre Gleichung ist, so erhält man für den Durchschnittspunct

$$x = \frac{B^2}{2p},\ y = B.$$

Jede mit der Axe parallel gezogene Gerade schneidet also die Parabel in einem, aber nur in einem einzigen Puncte.

§. 515. Gleichungen der Tangente und der Normale.

Heißen x', y' und x'', y'' die Coordinaten zweier benachbarter Puncte einer Parabel, deren Gleichung $y^2 = 2px$ ist, so ist die Gleichung der durch diese Puncte gehenden Secante

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x') \ldots 1)$$

Da (x', y') und (x'', y'') Puncte der Parabel sind, so ist

$$y'^2 = 2px',\ y''^2 = 2px'', \text{ folglich}$$

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{2p}{y'' + y'} \ldots 2)$$

Durch Substitution in 1) ergibt sich als Gleichung der Secante

$$y - y' = \frac{2p}{y'' + y'}(x - x') \ldots 3)$$

Läßt man nun den Punct (x'', y'') mit (x', y') zusammenfallen, wodurch $y'' = y'$ wird, so erhält man aus 3) die Gleichung der Tangente

$$y - y' = \frac{p}{y'}(x - x') \ldots 4),$$

oder $$yy' = p(x + x') \ldots 5).$$

Für die zu dieser Tangente gehörige Normale folgt aus 4)

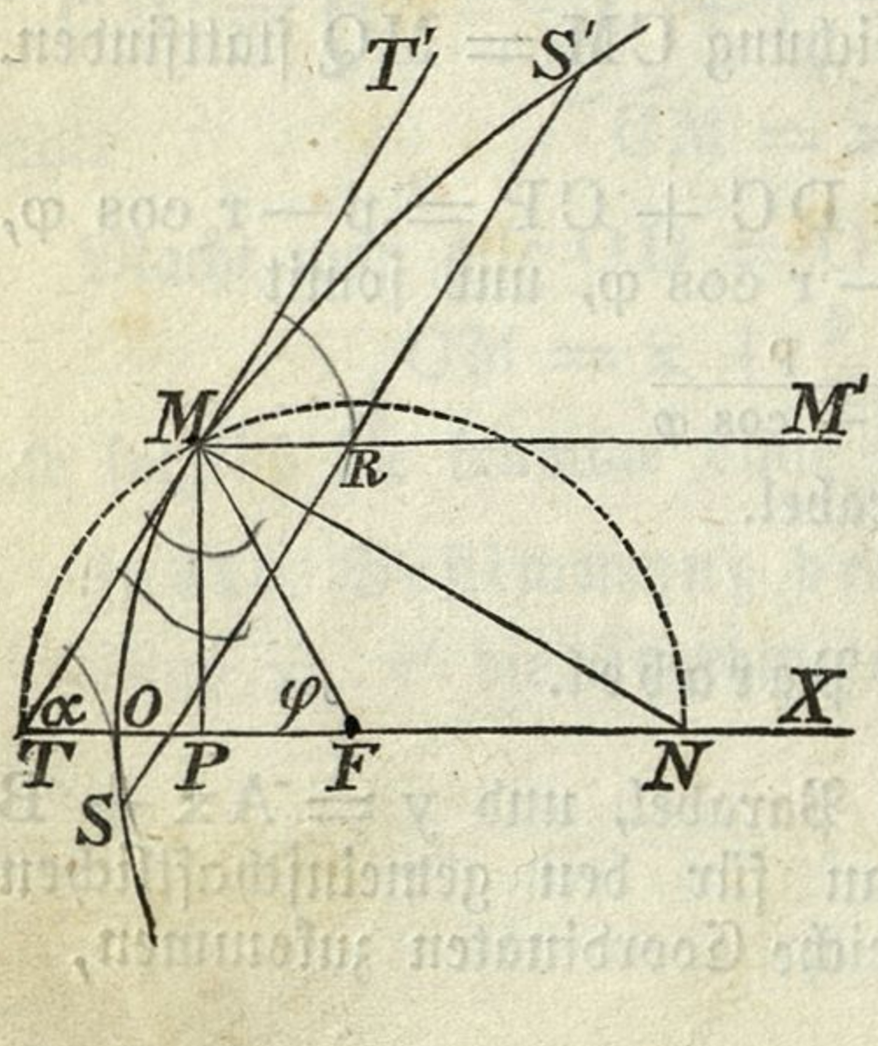
$$y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x') \ldots 6).$$

§. 516. Bestimmung der vier Berührungsgrößen.

1. Sucht man aus 5) die Abscisse des Punctes T (Fig. 306), indem man $y = o$ setzt, so erhält man $x = -x'$; daher ist

Subtangente $PT = x - x' = -2x' \ldots 7)$.

Fig. 306.



In der Parabel ist die Subtangente eines Punctes (dem absoluten Werthe nach) der doppelten Abscisse desselben gleich.

2. Für die Tangente MT hat man

$MT^2 = MP^2 + TP^2 = y'^2 + 4x'^2 = 2px' + 4x'^2$,

somit Tangente $MT = \sqrt{2x'(p + 2x')} \ldots 8)$.

3. Setzt man in 6) $y = o$, so erhält man für die Abscisse des Punctes N, $x = x' + p$, daher ist

Subnormale $PN = x - x' = p \ldots 9)$.

In der Parabel ist die Subnormale constant und gleich dem halben Parameter.

4. Für die Normale MN erhält man

$$MN^2 = MP^2 + PN^2 = y'^2 + p^2 = 2px' + p^2, \text{ also}$$

$$\text{Normale } MN = \sqrt{p(p + 2x')} \quad \ldots 10).$$

Zusatz. Der Berührungspunct und die Fußpuncte der Tangente und der Normale in der Axe sind von dem Brennpuncte der Parabel gleich weit entfernt.

Denn $$MF = TF = NF = x' + \frac{p}{2}.$$

§. 517. Die Tangente einer Parabel bildet mit dem Leitstrahle des Berührungspunctes und mit einer zur Axe parallelen Geraden gleiche Winkel.

Die Gleichungen der Tangente und des Leitstrahles zu dem Puncte (x', y') sind

$$y = \frac{p}{y'}(x + x'), \text{ und } y = \frac{2y'}{2x' - p}\left(x - \frac{p}{2}\right);$$

man erhält daher für den von ihnen gebildeten Winkel v nach §. 448 $\text{tang } v = \frac{p}{y'}$.

Allein es ist auch (§. 515, 4) für den Winkel v', den die Tangente mit der Axe oder einer mit ihr parallelen Geraden bildet, $\text{tang } v' = \frac{p}{y'}$.

Folglich ist $\text{tang } v = \text{tang } v'$, und somit auch $v = v'$.

Einfacher ergibt sich dieser Satz aus §. 516, Zusatz. Da das $\triangle FMT$ (Fig. 306) gleichschenklig ist, so ist der W. $FMT = FTM$; nun ist auch W. $M'MT' = FTM$; daher $FMT = M'MT'$.

Auf diesem Satze beruht die Anwendung paraboliſcher Hohlspiegel. Fallen nämlich Licht-, Wärme- oder Schallstrahlen parallel mit der Axe auf den Spiegel auf, so vereinigen sie sich nach der Reflexion im Brennpuncte. Umgekehrt: Die vom Brennpuncte ausgehenden Strahlen werden von dem Spiegel parallel mit der Axe reflectirt.

§. 518. Durchmesser der Parabel.

Ist $y^2 = 2px$ die Gleichung einer Parabel, und $y = Ax + B$ die Gleichung der Sehne SS' (Fig. 306), welche mit der Abscissenaxe den Winkel α bildet, so sind (§. 514) die Ordinaten y_1 und y_2 ihrer Endpuncte die Wurzeln der Gleichung

$$y^2 - \frac{2py}{A} + \frac{2Bp}{A} = 0,$$

daher $$y_1 + y_2 = \frac{2p}{A}.$$

Für die Ordinate n des Halbirungspunctes R der Sehne SS' hat man daher

$$n = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{A}.$$

Da diese Gleichung die Ordinate der Mitte der Sehne nur von A, also von dem Winkel α abhängig macht, so gilt sie auch für die Ordinaten der Halbirungspuncte aller mit SS' parallelen Sehnen. Wird daher die Ordinate dieser Halbirungspuncte allgemein mit y bezeichnet, so ist $y = \frac{p}{A}$ die Gleichung des Durchmessers MM', welcher jene Sehnen halbirt.

Die Gleichung $y = \frac{p}{A}$ drückt eine mit der Abscissenaxe in dem Abstande $\frac{p}{A}$ parallele Gerade aus, woraus folgt, daß alle Durchmesser der Parabel mit der Axe parallel sind.

Ist y' die Ordinate des Durchschnittspunctes des Durchmessers mit der Parabel, so ist $y' = \frac{p}{A}$, daher $A = \text{tang } \alpha = \frac{p}{y'}$. Dieß ist aber (§. 515, Gleichung 4) auch die Richtungsconstante der in jenem Puncte an die Parabel gezogenen Tangente. Daraus folgt:

Die Tangente einer Parabel ist parallel mit den Sehnen, welche von dem durch den Berührungspunct gezogenen Durchmesser halbirt werden.

Wegen dieser Eigenschaft nennt man in der Parabel, welche einen conjugirten Durchmesser im eigentlichen Sinne nicht haben kann, die Tangente selbst conjugirt zu dem Durchmesser, welcher durch den Berührungspunct geht.

Damit $\alpha = 90^0$, also $\text{tang } \alpha = A = \infty$ werde, muß $y = o$ sein. Unter allen Systemen conjugirter Durchmesser einer Parabel gibt es daher ein einziges rechtwinkliges, nämlich dasjenige, für welches die Axe und die Scheiteltangente die Durchmesser darstellen.

§. **519.** Die Lage zweier conjugirter Durchmesser einer Parabel hängt von der Länge des zum Berührungspuncte M (Fig. 306) gezogenen Leitstrahls FM ab. Diese Länge, die wir durch $\frac{p'}{2}$ bezeichnen wollen, läßt sich auf zweifache Art ausdrücken.

Mit Rücksicht auf §. 516, Zusatz und 3 und 1 ist

$$\frac{p'}{2} = FM = \frac{NT}{2} = \frac{PN + PT}{2} = \frac{p + 2x}{2}, \text{ daher}$$

$$p' = p + 2x \quad . \quad . \quad . \quad 1).$$

Aus der Polargleichung in §. 513 erhält man aber auch $\frac{p'}{2} = \frac{p}{1 + \cos \varphi}$, oder, da in dem gleichschenkligen $\triangle$ FMT, $\varphi = 180^0 - 2\alpha$ ist,

$$\frac{p'}{2} = \frac{p}{1 - \cos 2\alpha} = \frac{p}{2 \sin \alpha^2}, \text{ daher}$$

$$p' = \frac{p}{\sin \alpha^2} \quad . \quad . \quad . \quad 2).$$

§. **520.** Gleichung der Parabel in Beziehung auf ein System conjugirter Durchmesser.

Sind x', y' die Coordinaten des neuen Ursprunges, d. i. des Berührungspunctes M, so setze man in der Scheitelgleichung $y^2 = 2px$ mit Rücksicht auf §. 434, 4 für x und y bezüglich $x' + x + y \cos \alpha$ und $y' + y \sin \alpha$, wodurch man erhält

$$y^2 \sin \alpha^2 + 2y (y' \sin \alpha - p \cos \alpha) + y'^2 - 2px' = 2px.$$

Allein aus $y' = \frac{p}{\text{tang } \alpha}$ folgt $y' \sin \alpha = p \cos \alpha$, ferner ist $y'^2 = 2px'$; die neue Gleichung nimmt daher folgende Gestalt an:

$$y^2 \sin \alpha^2 = 2px, \text{ daher } y^2 = \frac{2px}{\sin \alpha^2}, \text{ oder wegen } \frac{p}{\sin \alpha^2} = p' \text{ (§. 519)}$$

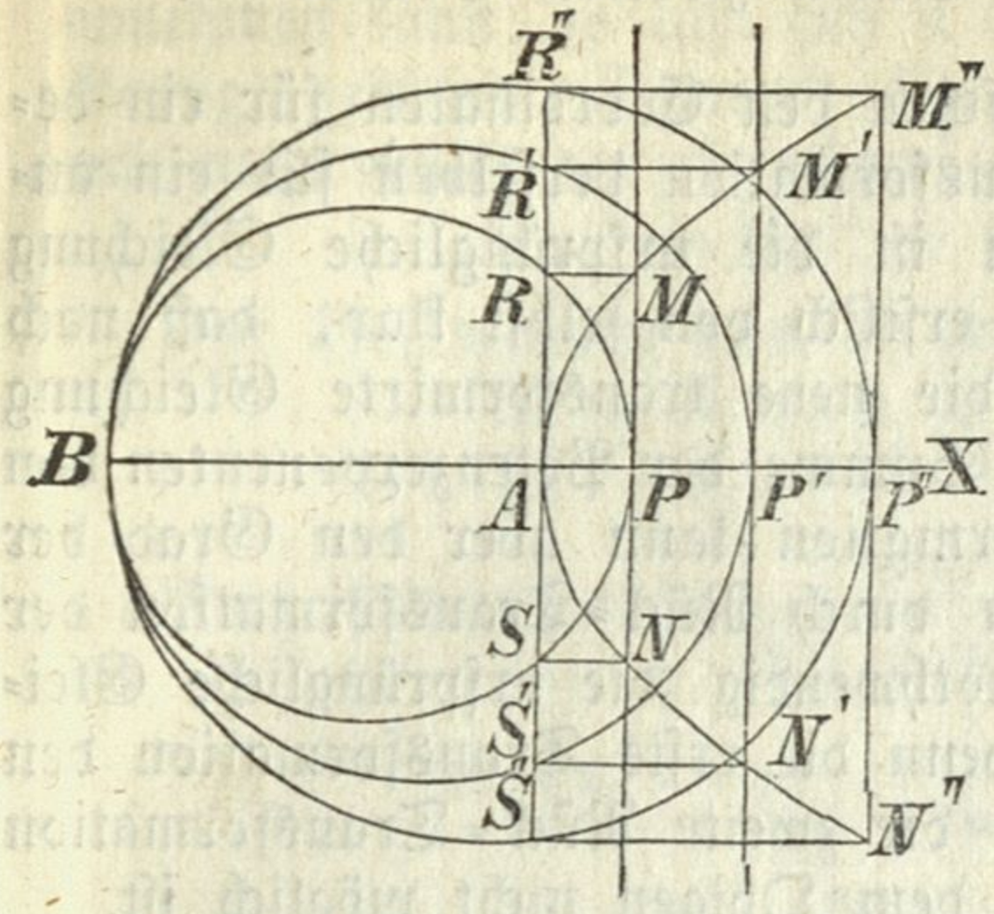
$$y^2 = 2p'x.$$

3. Uebungsaufgaben.

§. **521.** 1. Beliebig viele Puncte einer Parabel zu bestimmen, wenn der Brennpunct und die Leitlinie gegeben sind.

Man bestimme zuerst den Scheitel und die Axe; dann nehme man in der Axe beliebig viele Puncte an, ziehe durch dieselben Senkrechte auf die Axe und beschreibe mit dem Abstande jedes Punctes von der Leitlinie als Halbmesser aus dem Brennpuncte Kreisbogen, welche die entsprechende Senkrechte schneiden, so sind die Durchschnittspuncte Puncte der Parabel.

Fig. 307.



2. Wenn der Parameter gegeben ist, beliebig viele Puncte der Parabel zu bestimmen.

Die Auflösung beruht auf §. 509, 5.

Es sei AB (Fig. 307) der Parameter, A der Scheitel und AX die Axe der Parabel. Man nehme beliebige Abscissen AP, AP', . . . an und beschreibe über BP, BP', . . . als Durchmesser Kreise, welche die in A auf AB errichtete Senkrechte in den Puncten R und S, R' und S', . . . schneiden. Zieht man nun durch diese Puncte Parallele zur Axe, so werden diese die in P, P', . . . auf die Axe errichteten Senkrechten in den Puncten M und N, M' und N', . . . schneiden; diese sind dann Puncte der Parabel.

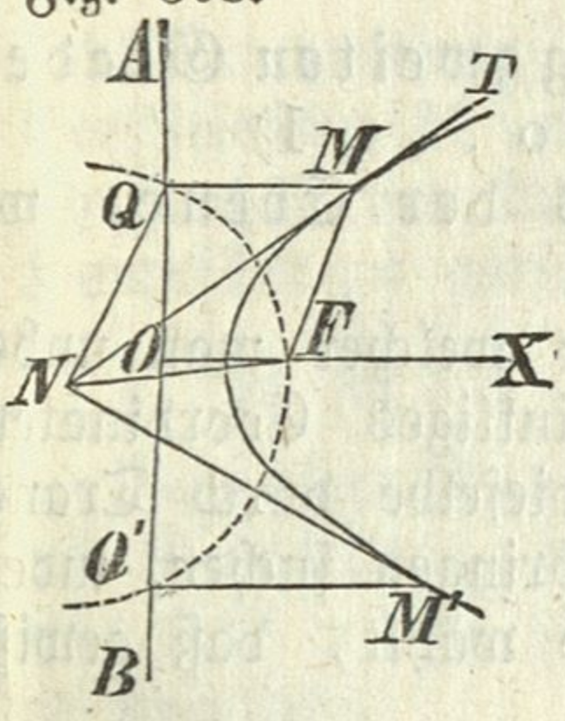
3. Die Gleichung einer Parabel ist $y^2 = 5x$, und die Gleichung einer Geraden

a) $6y = 18x + 5$, o) $y = 2x - 1$, c) $y = 3x + 2$;

wie viele Puncte hat jede dieser Geraden mit der Parabel gemeinschaftlich? (§. 514.)

4. Durch einen Punct M der Parabel an diese eine Tangente zu ziehen.

Fig. 308.



Auflösung 1. Durch Halbirung des Winkels FMQ (Fig. 308) nach §. 517, indem man aus F und Q mit demselben Halbmesser Kreisbogen beschreibt, welche sich in N schneiden, und dann die NM zieht.

Auflösung 2. Mit Rücksicht auf §. 516, 1. Man mache (Fig. 306) OT = OP und ziehe TM.

Auflösung 3. Nach §. 516, Zusatz. Man beschreibe (Fig. 306) aus dem Brennpuncte F mit dem Leitstrahl FM als Halbmesser einen Kreisbogen, welcher die verlängerte Axe in T schneidet, und ziehe TM.

5. Aus einem Puncte N (Fig. 308) außerhalb der Parabel an diese eine Tangente zu ziehen.

Mit Beziehung auf die 1. Auflösung der Aufgabe 4 handelt es sich hier nur darum, den Punct Q zu bestimmen, durch welchen die mit der Axe parallele Gerade QM gezogen werden muß, damit sie den Berührungspunct M abschneide. Der Punct Q liegt nun in der Leitlinie und ist von N eben so weit entfernt, als der Punct F; er ist daher der Durchschnitt der Leitlinie mit einem Kreise, welcher aus N mit dem Halbmesser NF beschrieben wird. Um daher von N eine Tangente an die Parabel zu ziehen, beschreibt man aus N mit dem Halbmesser NF einen Kreis, welcher die Leitlinie in Q schneidet, zieht QM || OX und sodann die Gerade NM.

Da jener Kreis die Leitlinie auch noch in einem zweiten Puncte Q' schneidet, so erhält man, wenn Q'M' || OX gezogen wird, den zweiten Berührungspunct M', und es ist auch NM' eine Tangente der Parabel.

6. Ein Körper, welcher die Höhe h über dem Horizonte hat, erhält durch eine Kraft eine gleichförmige Bewegung in horizontaler Richtung mit der Geschwindigkeit c (in 1 Zeitsecunde) und vermöge der Schwerkraft eine verticale Bewegung mit der Beschleunigung g. a) Welche Linie durchläuft er? b) Nach welcher Zeit, und c) in welcher horizontalen Entfernung vom Ausgangspuncte langt er in der Horizontalebene an? (Der Widerstand der Luft bleibt unbeachtet.)

Beispiel: $h = 50^m$, $c = 250^m$, $g = 9{\cdot}81^m$.

VII. Allgemeine Untersuchung der Linien zweiten Grades.

§. **522.** Der Grad einer Gleichung zwischen den Coordinaten für ein bestimmtes Parallelsystem wird durch die Transformation derselben für ein anderes Parallelsystem nicht geändert. Denn ist die ursprüngliche Gleichung zwischen x und y vom mten Grade, so ist erstlich von selbst klar, daß nach den in §. 434 angegebenen Substitutionen die neue transformirte Gleichung kein Glied enthalten könne, in welchem die Summe der Potenzexponenten von x und y größer als m wäre. Die Transformation kann aber den Grad der Gleichung auch nicht erniedrigen, weil man durch Rück-Transformation der neuen Gleichung für das frühere System nothwendig die ursprüngliche Gleichung wieder erhalten muß, und daher, wenn die erste Transformation den Grad der Gleichung herabgemindert hätte, die zweite Rück-Transformation ihn wieder erhöhen müßte, was jedoch nach dem Obigen nicht möglich ist.

Da hiernach der Grad der Gleichung einer Linie von der Lage des Parallel-Coordinatensystems unabhängig ist, und einzig durch den Charakter der Linie bestimmt wird, so pflegt man die Linien nach dem Grade ihrer entsprechenden Gleichungen einzutheilen. Die gerade Linie ist eine Linie des *ersten Grades* und zwar die einzige Linie dieses Grades; der Kreis, die Ellipse, Hyperbel und Parabel gehören zu den Linien des *zweiten Grades*. Diese letzteren sollen nun hier ganz allgemein untersucht werden.

§. **523.** *Discussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = o \quad \ldots 1)$$

zwischen den Coordinaten x, y eines Punctes der Ebene, wo A, B, C, . . F reelle Coefficienten bedeuten.

Um die geometrische Bedeutung dieser Gleichung, in welcher man unbeschadet der Allgemeinheit der Untersuchung ein rechtwinkliges Coordinatensystem voraussetzen kann, kennen zu lernen, wird man dieselbe durch Transformirung der Coordinaten auf eine einfachere Form zu bringen suchen, indem man Ursprung und Axenrichtung des neuen Systems so wählt, daß gewisse Glieder der transformirten Gleichung verschwinden.

Transformirt man zunächst die Coordinaten so, daß der Ursprung unverändert bleibt und die neue Abscissenaxe mit der früheren den Winkel α bildet, so muß man (§. 434, 6) statt x und y bezüglich

$$x \cos \alpha - y \sin \alpha \quad \text{und} \quad x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

setzen. Man erhält dadurch eine neue Gleichung

$$Mx^2 + Oxy + Ny^2 + Qx + Ry + F = o, \quad \ldots 2)$$

worin

$$M = A \cos \alpha^2 + B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin \alpha^2,$$
$$O = -2 (A - C) \sin \alpha \cos \alpha + B (\cos \alpha^2 - \sin \alpha^2),$$
$$N = A \sin \alpha^2 - B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos \alpha^2,$$
$$Q = D \cos \alpha + E \sin \alpha, \; R = -D \sin \alpha + E \cos \alpha$$

ist und F den früheren Werth beibehält.

Um nun aus dieser transformirten Gleichung xy wegzuschaffen, muß man dem noch unbestimmten Winkel α einen solchen Werth beilegen, daß $-2 (A - C) \sin \alpha \cos \alpha + B (\cos \alpha^2 - \sin \alpha^2) = o$, oder, was dasselbe ist, daß $-(A - C) \sin 2\alpha + B \cos 2\alpha = o$ werde; man muß also

$$\text{tang } 2\alpha = \frac{B}{A - C} \quad \ldots 3)$$

setzen. Da die Tangente eines Winkels jeden reellen Werth von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen kann, so läßt sich α immer so bestimmen, daß der Gleichung 3) Genüge geschieht. Dadurch fällt aus der Gleichung 2) das Glied Oxy weg und man erhält die einfachere Gleichung

$$Mx^2 + Ny^2 + Qx + Ry + F = o \quad \ldots \; 4).$$

Zur Bestimmung von M und N ergibt sich aus den obigen Ausdrücken

$$M + N = A + C,$$
$$M - N = (A - C)\cos 2\alpha + B \sin 2\alpha.$$

Nun ist $\sin 2\alpha = \frac{\text{tang } 2\alpha}{\sqrt{1 + \text{tang } 2\alpha^2}} = \frac{B}{\sqrt{(A-C)^2 + B^2}}$,

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tang } 2\alpha^2}} = \frac{A - C}{\sqrt{(A-C)^2 + B^2}}; \quad \text{daher}$$

$$M - N = \pm \sqrt{(A-C)^2 + B^2}.$$

Daraus folgt

$$M = \frac{(A+C) \pm \sqrt{(A-C)^2 + B^2}}{2}, \quad N = \frac{(A+C) \mp \sqrt{(A-C)^2 + B^2}}{2} \quad \ldots \; 5)$$

und

$$MN = \frac{4AC - B^2}{4} = -\frac{B^2 - 4AC}{4} \quad \ldots \; 6).$$

Die weiteren Transformationen hängen von der Beschaffenheit der Coefficienten M und N, oder mit Rücksicht auf die Gleichung 6) von der Beschaffenheit des Ausdruckes $B^2 - 4AC$ ab. In dieser Beziehung sind drei Hauptfälle zu unterscheiden.

I. Es sei $B^2 - 4AC$ negativ.

Transformirt man die Gleichung 4), um die Glieder x und y wegzuschaffen, mit Beibehaltung der Axenrichtung für einen neuen Ursprung (m, n), indem man statt x und y die Werthe $x + m$ und $y + n$ substituirt, so ergibt sich die Gleichung

$$Mx^2 + Ny^2 + (2Mm + Q)x + (2Nn + R)y + (Mm^2 + Nn^2 + Qm + Rn + F) = o.$$

Damit die Coefficienten von x und y verschwinden, wählt man die willkürlich angenommenen Größen m und n so, daß

$$2Mm + Q = o \quad \text{und} \quad 2Nn + R = o$$

werde. Hieraus erhält man

$$m = -\frac{Q}{2M} \quad \text{und} \quad n = -\frac{R}{2N},$$

und daher als transformirte Gleichung

$$Mx^2 + Ny^2 = S \quad \ldots \; 7),$$

wo $S = -(Mm^2 + Nn^2 + Qm + Rn + F)$ ist.

Diese Transformation ist hier immer möglich, da M und N unter der obigen Voraussetzung $B^2 - 4AC < o$ in Hinblick auf die Gleichung 6) beide von Null verschieden sein müssen.

In der Gleichung 7) kann das erste Glied M stets als positiv angenommen werden; dann muß wegen $MN = \frac{4AC - B^2}{4}$ auch N positiv sein. Es kommt noch die Beschaffenheit von S in Betrachtung.

1. Ist S positiv, so erhält man aus der Gleichung $Mx^2 + Ny^2 = S$

für $y = o \ldots x = \pm \sqrt{\frac{S}{M}}$, und

für $x = o \ldots y = \pm \sqrt{\frac{S}{N}}$.

Setzt man daher $\sqrt{\frac{S}{M}} = a$ und $\sqrt{\frac{S}{N}} = b$, so geht die Gleichung über in

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \ldots 8),$$

welche Gleichung einer Ellipse mit den Halbaxen a und b entspricht (§ 472).

Wenn in diesem Falle $M = N$ ist, so wird auch $a = b$, und man erhält $x^2 + y^2 = a^2$, nämlich die Gleichung des Kreises. Für den Kreis muß daher nach den Gleichungen 5)

$\sqrt{(A - C)^2 + B^2} = o$, d. i. $A = C$ und $B = o$ sein.

2. Ist $S = o$, so ergibt sich $Mx^2 + Ny^2 = o$, welche Gleichung nur für $x = o$ und $y = o$ befriedigt werden kann; sie gehört also dem Anfangspuncte der neuen Coordinaten selbst an.

3. Ist S negativ, so kann der Gleichung $Mx^2 + Ny^2 = S$ deren erster Theil nur positive Glieder enthält, durch keine reellen Werthe von x und y Genüge geleistet werden; die Gleichung hat daher für ein negatives S keine geometrische Bedeutung.

Wenn also $B^2 - 4AC$ negativ ist, so entspricht die Gleichung 1) einer Ellipse, welche noch für specielle Fälle den Kreis oder einen Punct als Varietäten darbietet.

II. Es sei $B^2 - 4AC$ positiv.

Da auch hier M und N von o verschieden sein müssen, so ist die in I. angegebene Transformation der Coordinaten ausführbar und kann daher die Gleichung 1) auch in diesem Falle auf die Form

$$Mx^2 + Ny^2 = S$$

gebracht werden. Nur haben hier, da $MN = -\frac{B^2 - 4AC}{4}$ negativ ist, M und N entgegengesetzte Vorzeichen. Nimmt man daher M als positiv an, so ist N negativ; wir setzen dafür $-N'$.

1. Ist S positiv, so folgt aus der Gleichung $Mx^2 - N'y^2 = S$

für $y = o \ldots x = \pm \sqrt{\frac{S}{M}}$, und

für $x = o \ldots y = \pm \sqrt{-\frac{S}{N'}}$.

Setzt man $\sqrt{\frac{S}{M}} = a$ und $\sqrt{-\frac{S}{N'}} = b\sqrt{-1}$, so erhält man die Gleichung

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2 \ldots 9),$$

deren geometrischer Ort eine Hyperbel mit der halben Hauptaxe a und der halben Nebenaxe b ist (§. 492).

2. Ist $S = o$, so folgt aus der Gleichung $Mx^2 - N'y^2 = o$

$$y = \pm x \sqrt{\frac{M}{N'}},$$

welche Gleichung ein System zweier im Ursprunge sich schneidender Geraden (als Varietät der Hyperbel) darstellt.

3. Ist endlich S negativ, nämlich gleich $-S'$, so ist dann

$$N'y^2 - Mx^2 = S'.$$

Diese Gleichung läßt sich, indem man die Axen vertauscht, auf die erste Form zurückführen und stellt daher eine Hyperbel dar, in welcher die Abscissenaxe mit der Nebenaxe zusammenfällt.

III. Es sei $B^2 - 4AC$ gleich Null.

In diesem Falle ist vermöge der Gleichung 6) entweder $M = o$ oder $N = o$; beide Coefficienten M und N können mit Rücksicht auf §. 522 nicht zugleich Null sein. Es sei z. B. $M = o$; dann kann die in I. angegebene Transformation, weil $m = -\frac{Q}{2M}$ entweder unendlich groß wird, oder einen unbestimmten Werth $\frac{o}{o}$ annimmt, nicht ausgeführt werden; dagegen aber erscheint die erste transformirte Gleichung 4) unter der einfacheren Form

$$Ny^2 + Qx + Ry + F = o \ldots . 10).$$

Um diese Gleichung noch einfacher darzustellen, nimmt man einen neuen Ursprung (r, s) an und setzt statt x und y bezüglich $x + r$ und $y + s$, wodurch man erhält:

$$Ny^2 + Qx + (2Ns + R)y + (Ns^2 + Qr + Rs + F) = o.$$

Man wählt dann r und s so, daß der Coefficient von y und das von x und y freie Glied verschwinden, daß also

$$2Ns + R = o \quad \text{und} \quad Ns^2 + Qr + Rs + F = o$$

wird, was für die Werthe

$$s = -\frac{R}{2N} \quad \text{und} \quad r = \frac{R^2 - 4NF}{4NQ}$$

stattfindet. Diese Transformation kann jedoch nur dann vorgenommen werden, wenn Q nicht gleich Null ist. Wir unterscheiden daher zwei Fälle.

1. Wenn Q von Null verschieden ist. Dann läßt sich die Gleichung 10) auf die einfachere $Ny^2 + Qx = o$ transformiren, woraus

$$y^2 = Px \ldots 11)$$

folgt, wenn $-\frac{Q}{N} = P$ gesetzt wird. Der geometrische Ort dieser Gleichung ist eine Parabel (§. 508), welche sich nach der positiven oder negativen Abscissenrichtung erstreckt, je nachdem der Parameter P positiv oder negativ ist.

2. Ist $Q = o$, so läßt sich die früher angegebene Transformation nicht anwenden; allein unter dieser Voraussetzung nimmt die Gleichung 10) die Form an:

$$Ny^2 + Ry + F = o \ldots 12),$$

woraus $y = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4NF}}{2N}$ folgt, welche Gleichung ein System zweier mit der Abscissenaxe parallelen Geraden ausdrückt.

Zu denselben Ergebnissen gelangt man auch, wenn man $N = o$ annimmt; nur muß dann die Abscissenaxe mit der Ordinatenaxe vertauscht werden.

Aus allen diesen Untersuchungen geht hervor, daß die Gleichung 1) mit Ausnahme des zuletzt angeführten Falles, wo sie zwei parallelen Geraden angehört, durch eine zweimalige Transformation immer auf eine der beiden Gleichungen

$$Mx^2 + Ny^2 = S \quad \text{und} \quad y^2 = Px$$

gebracht werden kann, und eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel mit Einschluß ihrer Varietäten darstellt, je nachdem $B^2 - 4AC$ negativ, positiv oder gleich Null ist.

Der Charakter der dargestellten Linie hängt demnach einzig von der Beschaffenheit des Ausdruckes $B^2 - 4AC$ ab, welcher darum das charakteristische Binom der Gleichung 1) genannt wird.

§. **524.** Aufgaben.

Suche durch entsprechende Transformation der Coordinaten die geometrische Bedeutung folgender Gleichungen:

1. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 4 = 0$.
2. $9x^2 + 16y^2 - 6x + 16y + 1 = 0$.
3. $x^2 - y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$.
4. $8x^2 - y^2 + 48x = 0$.
5. $2x^2 + 4xy - y^2 = 0$.
6. $xy + x + y = 1$.
7. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 132x - 72y + 144 = 0$.
8. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8x\sqrt{2} - 8y\sqrt{2} = 0$.
9. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 90x + 5y + 25 = 0$.
10. $3x^2 + 26xy\sqrt{3} - 23y^2 + 48x\sqrt{3} - 48y = 0$.

Bestimme den geometrischen Ort der Mittelpuncte aller Kreise, welche

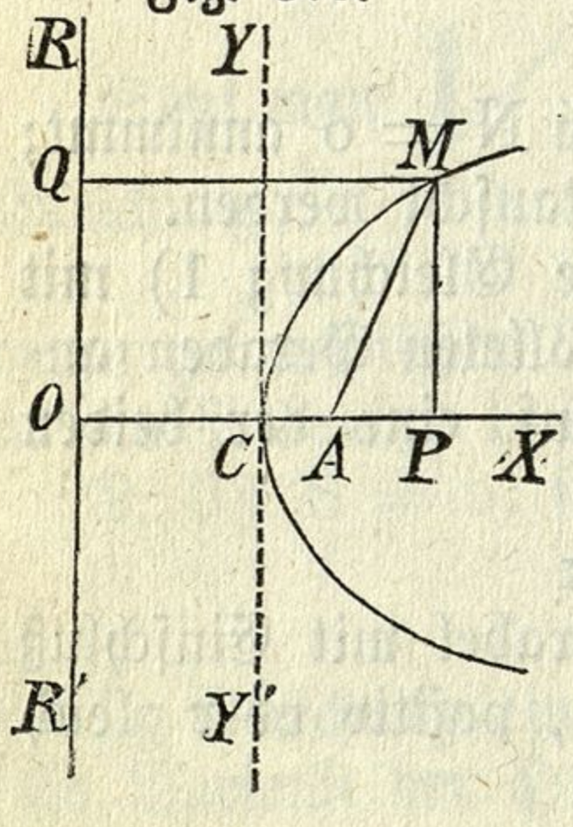
11. einen gegebenen Kreis berühren und durch den Mittelpunct desselben gehen;
12. einen gegebenen Kreis berühren und durch einen Punct außerhalb desselben gehen;
13. einen gegebenen Kreis und einen Durchmesser desselben berühren;
14. zwei sich schneidende Kreise ungleichartig berühren;
15. zwei sich schneidende Kreise gleichartig berühren;
16. durch einen gegebenen Punct gehen und eine gegebene Gerade berühren.

Bei der Lösung der Aufgaben 11. bis 16. werden in der Gleichung der verlangten Kreise $(x - p)^2 + (y - q)^2 = a^2$ die Mittelpunctscoordinaten p und q als veränderlich betrachtet.

17. Eine Kugel wird unter dem Elevationswinkel α mit der Geschwindigkeit c abgeschossen; bestimme die Linie, welche dieselbe durchläuft, wenn die auf die Kugel wirkende Schwerkraft die Beschleunigung g hervorruft und man von dem Widerstande der Luft absieht. (Wurfhöhe, Wurfweite und Flugzeit.)

§. **525.** Aufgabe. Den geometrischen Ort aller Puncte, deren Abstände von einem gegebenen Puncte und von einer gegebenen Geraden in einem constanten Verhältnisse c zu einander stehen, zu finden.

Fig. 309.



Man nehme (Fig. 309) die feste Gerade RR', die Leitlinie, vorläufig als Ordinatenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems an, dessen Abscissenaxe OX den gegebenen festen Punct A, den Brennpunct, in sich enthält.

Sind $OP = MQ = x$ und $MP = y$ die Coordinaten eines der verlangten Puncte M, so hat man, wenn $OA = d$ gesetzt wird,

$AM : MQ = c$, oder $AM = cx$, und auch

$$AM = \sqrt{AP^2 + MP^2} = \sqrt{(x-d)^2 + y^2};$$ daher

$$cx = \sqrt{(x - d)^2 + y^2}.$$

Daraus folgt

$$(1 - c^2)\,x^2 + y^2 - 2dx + d^2 = 0 \quad \ldots \quad 1).$$

Der gesuchte geometrische Ort ist demnach eine Linie des zweiten Grades, und zwar, wie schon aus §. 523 hervorgeht, eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem das charakteristische Binom $B^2 - 4AC = 4(c^2 - 1)$ negativ, positiv oder Null ist, d. i. je nachdem die Verhältnißzahl c kleiner als 1, größer als 1 oder gleich 1 ist.

Um die Bedeutung der Gleichung 1) auch unabhängig von den Untersuchungen des §. 523 nachzuweisen, darf man dieselbe nur dergestalt transformiren, daß man den Ursprung in der Abscissenaxe um die Strecke m verschiebt; man setzt also $x + m$ statt x, wo m noch unbestimmt ist. Dadurch erhält man

$$(1 - c^2)x^2 + y^2 + 2\{m(1 - c^2) - d\}x + \{m^2(1 - c^2) - 2dm + d^2\} = o \ldots 2).$$

Man wähle dann m so, daß $m^2(1 - c^2) - 2dm + d^2 = o$ werde, was für $m = \frac{d}{1 \mp c}$ stattfindet. Da aber der eine Werth $m = \frac{d}{1 - c}$ für $c = 1$ nicht brauchbar ist, so nehme man $m = \frac{d}{1 + c}$ an, für welchen Werth die Gleichung 2) in die folgende übergeht:

$$(1 - c^2)x^2 + y^2 - 2cdx = o \ldots 3).$$

Aus $m = \frac{d}{1 + c}$ folgt $m < d$, d. i. der neue Ursprung liegt zwischen der Leitlinie und dem Brennpuncte.

1. Ist $c < 1$, so setze man $1 - c^2 = \frac{p}{a}$ und $cd = p$; dann hat man

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a} \ldots 4),$$

d. i. die Scheitelgleichung einer Ellipse (§. 478).

Aus den obigen Substitutionen ergibt sich:

$$c^2 = 1 - \frac{p}{a} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \varepsilon^2, \quad \text{daher } c = \varepsilon;$$

d. h. das constante Verhältniß c ist die numerische Excentricität ε selbst.

Ferner ist

$$d = \frac{p}{\varepsilon} = \frac{b^2}{a\varepsilon} \quad \text{und} \quad m = \frac{d}{1 + \varepsilon}.$$

Die Leitlinie RR' bezieht sich auf den Brennpunct A; in derselben Beziehung steht zu dem zweiten Brennpuncte B der Ellipse eine zweite Leitlinie SS', welche mit der ersten parallel ist und von dem zugeordneten Brennpuncte B auf der entgegengesetzten Seite denselben Abstand $d = \frac{b^2}{a\varepsilon}$ hat.

Wenn $c = o$, also $1 = \frac{p}{a}$, folglich $p = a$ wird, so geht die Gleichung 4) über in $y^2 = 2ax - x^2$, d. i. in die Scheitelgleichung des Kreises (§. 457, 1). Für diese ist $d = \frac{p}{c} = \infty$, d. i. die Leitlinie des Kreises liegt im Unendlichen.

2. Ist $c > 1$, so setze man $1 - c^2 = -\frac{p}{a}$ und $cd = p$; man erhält dadurch aus der Gleichung 3)

$$y^2 = 2px + \frac{px^2}{a} \ldots 5),$$

d. i. die Scheitelgleichung einer Hyperbel (§. 496).

Wie bei der Ellipse, ist auch hier

$$c = \varepsilon, \qquad d = \frac{b^2}{a\varepsilon}, \qquad m = \frac{d}{1+\varepsilon}.$$

Auch die Hyperbel hat zwei Brennpuncte und zwei Leitlinien.

3. Ist endlich $c = 1$, so setze man in 3) $d = p$, wodurch man erhält

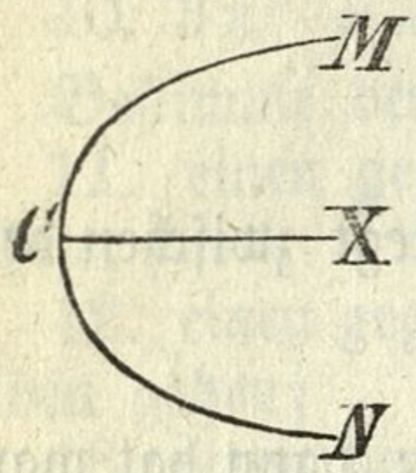
$$y^2 = 2px \ldots . 6),$$

d. i. die Scheitelgleichung einer Parabel (§. 508).

In diesem Falle ist $m = \frac{p}{2}$, d. h. der neue Ursprung, welcher der Scheitel der Parabel ist, fällt in die Mitte des Abstandes des Brennpunctes von der Leitlinie.

§. **526.** Zusammenhang zwischen den Scheitelgleichungen der Linien zweiten Grades.

Fig. 310.



Ist CX (Fig. 310) die Abscissenaxe, und nimmt man den Ursprung C als Endpunct eines Kreisdurchmessers oder als Scheitel einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel an, so ist

die Gleichung des Kreises . . . $y^2 = 2ax - x^2$,

" " der Ellipse . . . $y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$,

" " " Hyperbel $y^2 = 2px + \frac{px^2}{a}$,

" " " Parabel . . $y^2 = 2px$,

wo a für den Kreis den Halbmesser, für die Ellipse und Hyperbel die halbe erste Axe und p den halben Parameter vorstellt.

Zunächst sieht man, daß die Gleichung der Ellipse in jene des Kreises übergeht, wenn $p = a$ gesetzt wird. In der That ist der Kreis eine Ellipse, deren Brennpuncte in den Mittelpunct fallen; der Parameter wird unter dieser Voraussetzung zu einem Durchmesser.

Die Gleichung der Ellipse sowohl als jene der Hyperbel kann auch in die Gleichung der Parabel übergehen. Läßt man nämlich in der Gleichung $y^2 = 2px \mp \frac{px^2}{a}$ a ohne Ende zunehmen, während p ungeändert bleibt, was bei gehöriger Annahme von b vermöge der Gleichung $\frac{b^2}{a} = p$ immer möglich ist, so wird endlich für $a = \infty$ der Quotient $\frac{px^2}{a} = o$, und die Gleichung der Ellipse oder der Hyperbel verwandelt sich in jene der Parabel $y^2 = 2px$. Die Parabel kann demnach als eine Ellipse oder als eine Hyperbel angesehen werden, deren erste Axe unendlich groß ist.

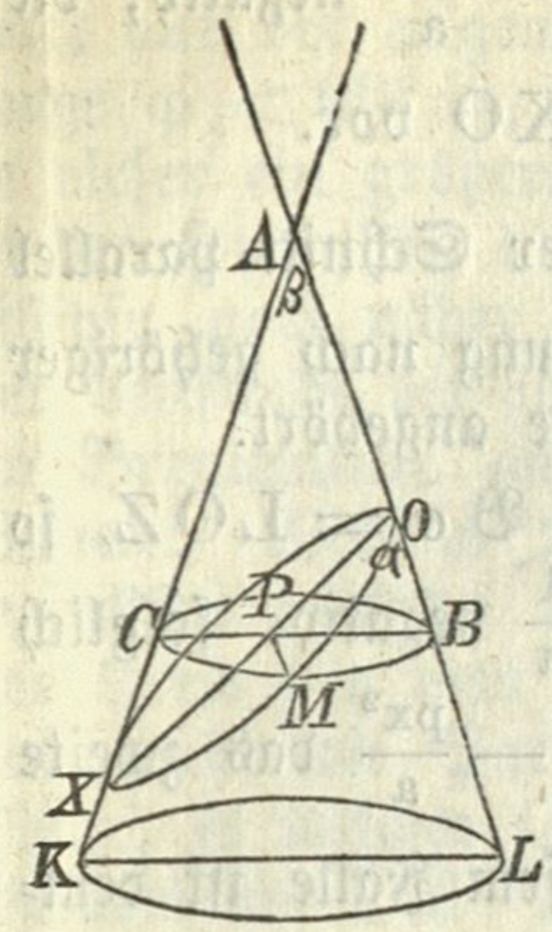
Alle Linien des zweiten Grades lassen sich daher durch die Gleichung

$$y^2 = Px + Qx^2$$

darstellen, worin P den Parameter und für den Kreis den Durchmesser bedeutet, und Q für den Kreis $= -1$, für die Ellipse negativ und absolut < 1, für die Hyperbel positiv, und für die Parabel $= o$ ist.

§. **527.** Entstehung der Linien zweiten Grades aus dem Schnitte eines Kegels durch eine Ebene.

Fig. 311.



Es sei AKLM (Fig. 311) ein senkrechter Kegel, AKL eine durch die Axe gelegte Ebene, und OMX eine zweite Ebene, welche durch den Punct O senkrecht auf AKL gelegt wird und den Kegel in der krummen Linie OMX, die Ebene AKL aber in der Geraden OX schneidet; man soll die Gleichung der Durchschnittslinie OMX entwickeln. — Legt man durch einen beliebigen Punct M der krummen Linie OMX die Ebene MBC parallel mit der Grundfläche des Kegels, so wird dieselbe auch senkrecht auf AKL und der Durchschnitt ein Kreis sein. Die Durchschnittslinie MP der Ebenen OMX und BMC muß daher ebenfalls auf die Ebene AKL und daher auch auf OX und BC senkrecht sein. Da BMC ein Halbkreis ist, so ist

$$MP^2 = BP \,.\, CP.$$

Man nehme nun OX als die Abscissenaxe an, setze $OP = x$, $MP = y$, ferner $AO = c$, den Winkel $BOX = \alpha$, $BAX = \beta$; so hat man

$$\text{im } \triangle BPO \ldots \frac{BP}{PO} = \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\beta}{2}}, \quad \text{also } BP = \frac{x \sin \alpha}{\cos \frac{\beta}{2}};$$

$$\text{im } \triangle AOX \ldots \frac{OX}{AO} = \frac{\sin \beta}{(\sin \alpha - \beta)}, \text{ also } OX = \frac{c \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)},$$

$$\text{daher } PX = OX - OP = \frac{c \sin \beta - x \sin (\alpha - \beta)}{\sin (\alpha - \beta)}; \text{ endlich}$$

$$\text{im } \triangle CPX \ldots \frac{CP}{PX} = \frac{\sin (\alpha - \beta)}{\cos \frac{\beta}{2}}, \quad \text{also } CP = \frac{c \sin \beta - x \sin (\alpha - \beta)}{\cos \frac{\beta}{2}}.$$

Substituirt man die Werthe von MP, BP und CP in der Gleichung $MP^2 = BP \,.\, CP$, so erhält man

$$y^2 = \frac{c\,x \sin \alpha \sin \beta}{\cos \frac{\beta^2}{2}} - \frac{x^2 \sin \alpha \sin (\alpha - \beta)}{\cos \frac{\beta^2}{2}}$$

$$= 2c \sin \alpha \operatorname{tang} \frac{\beta}{2} \,.\, x - c \sin \alpha \operatorname{tang} \frac{\beta}{2} \cdot \frac{2 \sin (\alpha - \beta)}{c \sin \beta} \cdot x^2,$$

oder, wenn man $c \sin \alpha \operatorname{tang} \frac{\beta}{2} = p$ und $\frac{2 \sin (\alpha - \beta)}{c \sin \beta} = \frac{1}{a}$ setzt,

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$$

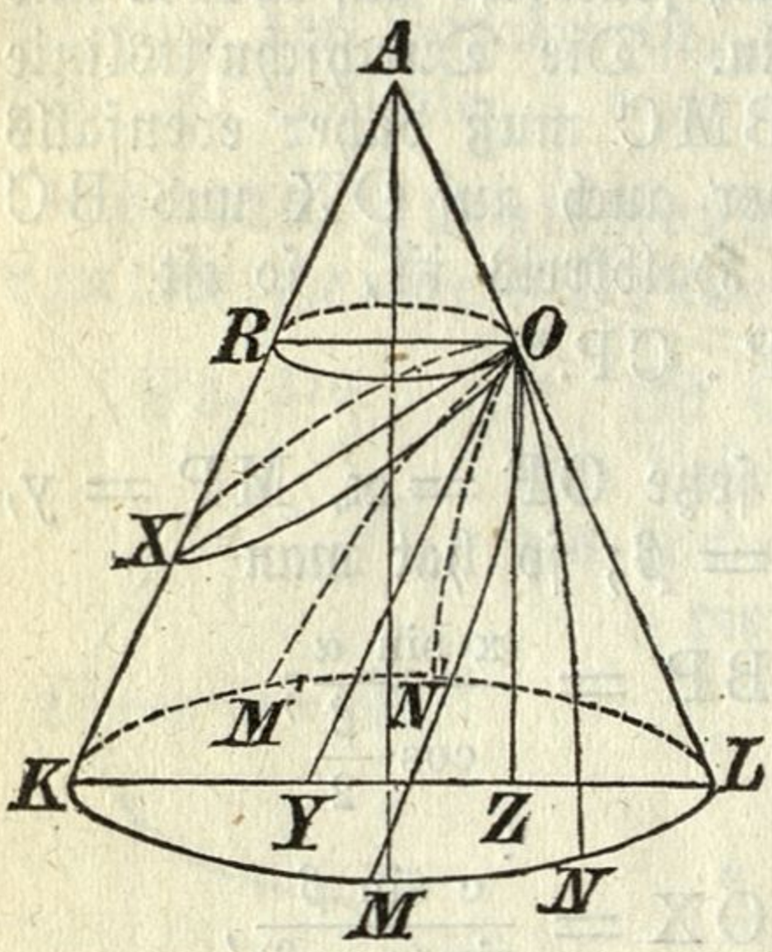
als die Gleichung der krummen Linie OMX.

Die Bedeutung dieser Gleichung hängt offenbar von den Größen p und a, somit von c, α und β ab; die Größen c und β bestimmen die Lage und Größe der Durchschnittslinie, ihr Charakter hängt, wie wir sogleich sehen werden, blos von dem Winkel α ab.

1. Ist $\alpha > \beta$, z. B. $\alpha = LOX$ (Fig. 312), so ist $\sin(\alpha - \beta)$, daher auch $\frac{1}{a}$ positiv, und somit, da p wesentlich positiv ist, $-\frac{px^2}{a}$ negativ; die Gleichung $y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$ stellt also eine Ellipse OXO vor.

Ist in diesem Falle $\alpha = LOR = 90^0 + \frac{\beta}{2}$, d. i. der Schnitt parallel mit der Grundfläche des Kegels, so geht die obige Gleichung nach gehöriger Reduction über in $y^2 = 2px - x^2$, welche einem Kreise angehört.

Fig. 312.



2. Wenn ferner $\alpha < \beta$, z. B $\alpha = LOZ$, so ist $\sin(\alpha - \beta)$, daher auch $\frac{1}{a}$ negativ, folglich in der Gleichung $y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$ das zweite Glied $-\frac{px^2}{a}$ positiv; in diesem Falle ist demnach die krumme Linie NON' eine Hyperbel.

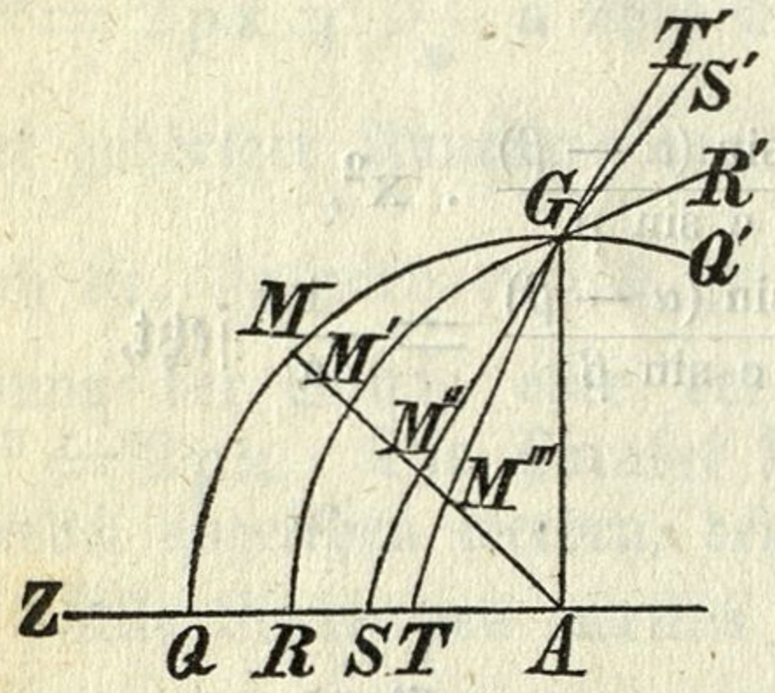
3. Ist endlich $\alpha = \beta$, z. B. $\alpha = LOY$, so ist $\sin(\alpha - \beta) = 0$, also auch $\frac{1}{a} = 0$, und die allgemeine Gleichung verwandelt sich in $y^2 = 2px$; die Durchschnittslinie MOM' ist ist also eine Parabel.

Die Kegelschnittslinie ist daher eine Ellipse (Kreis), eine Hyperbel oder eine Parabel, je nachdem der Winkel α größer, kleiner oder eben so groß ist als der Winkel β.

§. 528. Zusammenhang zwischen den Polargleichungen der Kegelschnittslinien.

Stellt A (Fig. 313) den Pol, AZ die Polaraxe vor, so hat man, wenn p beim Kreise den Halbmesser, bei den übrigen Linien den halben Parameter bedeutet, folgende Polargleichungen:

Fig. 313.



für den Kreis . . . $r = p$,

" die Ellipse . . . $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$,

" " Hyperbel . . $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$,

" " Parabel . . $r = \frac{p}{1 + \cos \varphi}$;

wobei für die Ellipse $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, also $\varepsilon < 1$, für die Hyperbel dagegen $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$, also $\varepsilon > 1$ ist.

Man kann demnach alle vier Linien durch folgende allgemeine Polargleichung

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad \ldots 1)$$

darstellen, worin ε für den Kreis $= 0$, für die Ellipse < 1, für die Hyperbel > 1 und für die Parabel $= 1$ ist. (Vergl. §. 525.)

Denkt man sich aus demselben Brennpuncte A den Kreis, die Ellipse, die Parabel und die Hyperbel mit demselben Parameter $AG = p$ beschrieben, so folgt aus der allgemeinen Gleichung 1), daß zu demselben Polarwinkel φ, so lange $\varphi < 90^0$ ist, im Kreise ein größerer Leitstrahl gehört als in der Ellipse, in dieser ein größerer als in der Parabel, in dieser wieder ein größerer als in der Hyperbel; d. h. der Kreis steht von A am weitesten ab, näher ist die Ellipse, noch näher die Parabel, am nächsten die Hyperbel. Für $\varphi = 90^0$ ist der Leitstrahl bei allen vier Linien gleich p; es schneiden also dieselben die im Brennpuncte auf die Axe senkrechte Gerade in einem gemeinschaftlichen Puncte. Wird $\varphi > 90^0$, so ist dann cos φ negativ, daher r desto größer, je größer ε wird; nach dem eben erwähnten Durchschnittspuncte wird also der Kreis von dem Puncte A am wenigsten entfernt sein, mehr die Ellipse, noch mehr die Parabel, und am meisten die Hyperbel. Die vorliegende Figur, in welcher QMQ' die Kreislinie, RM'R' die Ellipse, SM"S' die Parabel und TM'"T' die Hyperbel vorstellt, macht diese Beziehungen der vier krummen Linien anschaulich.

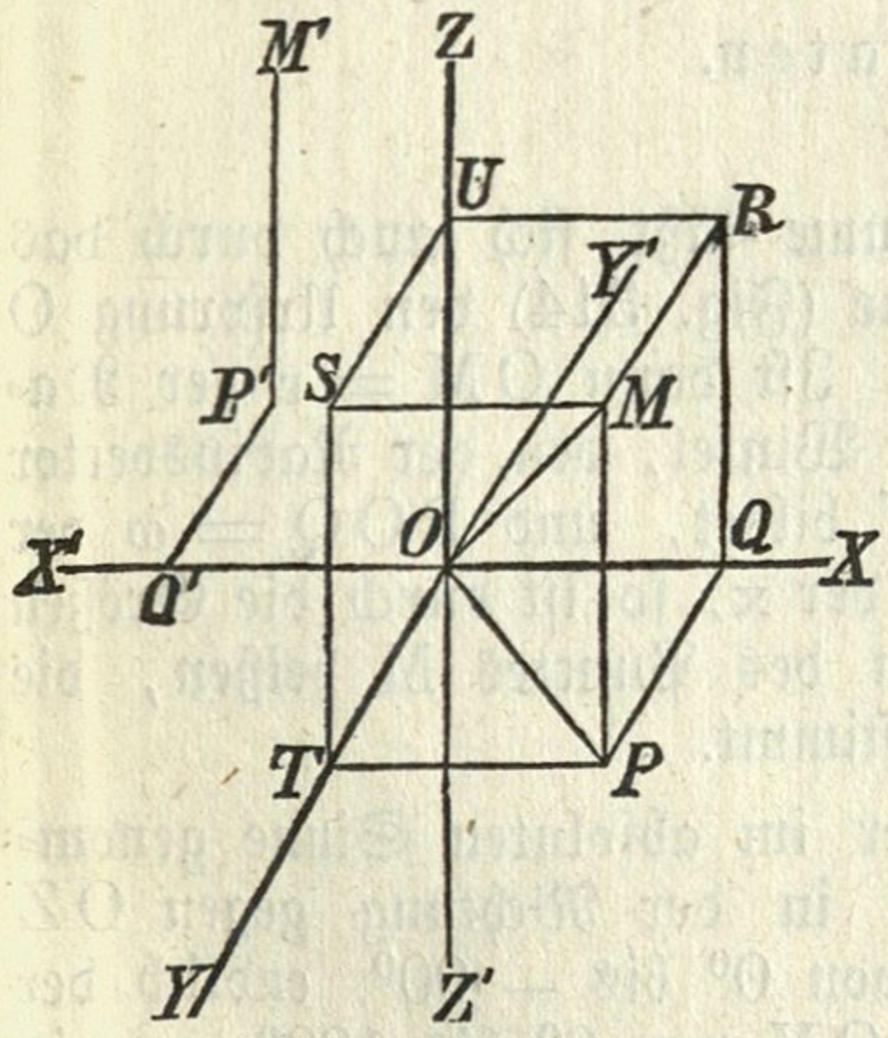
Anhang.

Analytische Bestimmung eines Punctes im Raume.

1. Rechtwinklige Coordinaten.

§. 529. Um die Lage eines Punctes M (Fig. 314) im Raume analytisch darzustellen, denkt man sich durch einen Punct O drei wechselseitig auf einander senkrechte Ebenen XY, XZ und YZ gelegt, welche die Coordinatenebenen heißen.

Fig. 314.



Die Durchschnittslinien OX, OY und OZ je zweier dieser Ebenen stehen auch wechselseitig auf einander senkrecht (§. 219, Folges.); ihren gemeinschaftlichen Durchschnittspunct O nennt man den Anfangspunct oder Ursprung der Coordinaten. Die Lage des Punctes M im Raume ist nun bestimmt, wenn man dessen Abstände MS, MR und MP von den drei Coordinatenebenen YZ, XZ und XY kennt; denn legt man in diesen Abständen parallel mit den bezüglichen Coordinatenebenen drei Ebenen, so muß M in dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte dieser letzteren Ebenen liegen.

Da die Coordinatenebenen und die mit ihnen parallel gelegten drei Ebenen ein rechtwinkliges Parallelepiped begrenzen, und in diesem je zwei gegenüberliegende Kanten gleich sind, so können die Abstände MS, MR und MP auch unmittelbar an den Axen OX, OY und OZ durch die Abschnitte OQ, OT

und OU gemessen werden. Die Abstände $MS = OQ$, $MR = OT = PQ$ und $MP = OU$ heißen die rechtwinkligen Coordinaten des Punctes M und werden folgeweise mit x, y und z bezeichnet. Zur Bestimmung der Coordinaten des Punctes M zieht man gewöhnlich von M die Gerade $MP \perp$ Ebene XY, und von P die Gerade $PQ \perp$ Axe OX; dann ist

$$x = OQ, \qquad y = PQ, \qquad z = MP.$$

Die drei Coordinatenebenen theilen den unbegrenzten Raum in acht gleiche Theile, welche acht dreiseitige Ecken bilden. Um nun unzweideutig anzuzeigen, in welcher dieser Ecken der zu bestimmende Punct liegt, müssen die absoluten Werthe seiner Coordinaten durch entsprechende Vorzeichen unterschieden werden. Gewöhnlich werden die Coordinaten in den Richtungen OX, OY, OZ positiv, in den entgegengesetzten Richtungen OX', OY', OZ' negativ gezählt. Hiernach ist z. B. für den Punct M', $x = -OQ'$, $y = -P'Q'$, $z = +M'P'$.

§. **530.** Aufgabe. Aus den Coordinaten zweier Puncte $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ und $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ die Entfernung $M_1M_2 = d$ derselben zu bestimmen.

Legt man durch jeden der Puncte M_1 und M_2 drei mit den Coordinatenebenen parallele Ebenen, so begrenzen diese ein rechtwinkliges Parallelepiped, in welchem der gesuchte Abstand M_1M_2 eine Diagonale bildet, und drei in einer Ecke zusammentreffende Kanten gleich $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ und $z_2 - z_1$ sind. Es ist daher

$$M_1M_2 = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Zusatz. Um die Entfernung eines Punctes M_2 vom Anfangspuncte zu erhalten, darf man nur in der obigen Aufgabe den andern Punct M_1 als Ursprung annehmen, also $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ setzen; dadurch erhält man

$$d = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}.$$

2. Polar-Coordinaten.

§. **531.** Die Lage eines Punctes im Raume läßt sich auch durch das Polar-Coordinatensystem darstellen. Man nehme (Fig. 314) den Ursprung O als Pol und die Axe OX als Polaraxe an. Ist dann $OM = r$ der Radiusvector des Punctes M, $MOP = \varphi$ der Winkel, den der Radiusvector mit seiner Projection OP auf die Ebene XY bildet, und $POQ = \omega$ der Winkel dieser Projection mit der positiven Axe der x, so ist durch die Größen r, φ und ω, welche die Polar-Coordinaten des Punctes M heißen, die Lage dieses Punctes im Raume vollkommen bestimmt.

Der Radiusvector r wird gewöhnlich immer im absoluten Sinne genommen, der Winkel φ von der Ebene XY aus in der Richtung gegen OZ von 0^0 bis 90^0, in der Richtung gegen OZ' von 0^0 bis -90^0, endlich der Winkel ω von dem Axentheile OX aus gegen OY von 0^0 bis 180^0, und in der entgegengesetzten Richtung von 0^0 bis -180^0 gezählt.

§. **532.** Beziehungen zwischen den rechtwinkligen und den Polar-Coordinaten eines Punctes im Raume.

Sind (Fig. 314) $x = OQ$, $y = PQ$, $z = MP$ die rechtwinkligen, $r = OM$, $\varphi = MOP$, $\omega = POQ$ die Polar-Coordinaten des Punctes M, so ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreiecke MPO

$$OP = r \cos \varphi, \quad MP = z = r \sin \varphi,$$

und aus dem rechtwinkligen Dreiecke PQO

$$x = OP \cos \omega, \qquad y = OP \sin \omega;$$

daher hat man

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \omega \\ y &= r \cos \varphi \sin \omega \\ z &= r \sin \varphi \end{aligned}\right\} \ldots 1).$$

Aus diesen Gleichungen erhält man

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \{\cos \varphi^2 (\cos \omega^2 + \sin \omega^2) + \sin \varphi^2\}$$
$$= r^2 (\cos \varphi^2 + \sin \varphi^2)$$

oder

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \ldots 2),$$

welche Gleichung übrigens auch aus §. 530, Zus. folgt.

Bezeichnen α, β und γ die Winkel, welche der Radiusvector r mit den positiven Axentheilen der x, y und z bildet, so ist

$$x = r \cos \alpha, \qquad y = r \cos \beta, \qquad z = r \cos \gamma.$$

Substituirt man diese Werthe in der Gleichung 2), so ergibt sich die Relation

$$\cos \alpha^2 + \cos \beta^2 + \cos \gamma^2 = 1 \ldots 3).$$

Berichtigungen.

Seite 17, §. 32 soll die 5. Aufgabe lauten:
5. Construire einen Punct, welcher von zwei gegebenen Puncten A und B denselben Abstand a hat.
„ 51, Zeile 24 von unten, statt: S'b' lies: S'b.
„ 52, „ 18 von oben, „ §. 92 „ §. 90, Folges.
„ 69. In der Fig. 105 ist die Sehne AM' punctirt darzustellen.
„ 99. In der Fig. 144 II ist der Halbmesser OD zu ziehen.
„ 106, Zeile 26, v. o., statt: Kreise lies: Gerade.
„ 114, „ 10, v. o., „ s_6 „ S_6.
„ 190, „ 20, v. u., „ §. 15 „ §. 14.
„ 196, Aufgabe 10 soll heißen: $\cot\alpha \pm \cot\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \sin\beta}$.
„ 199, Zeile 20 v. o., statt: dieser Gleichung lies: diesen Ausdrücken.
„ 218, in der Gleichung γ), statt: $\cos\frac{1}{2}(A - B)$ lies: $\cos\frac{1}{2}(A + B)$.
„ — „ „ „ δ), „ $\sin\frac{1}{2}(a + b)$ „ $\sin\frac{1}{2}(a - b)$.
„ 223, Zeile 1 v. u., statt: $\cos(S - A)\cos(S - A)$ lies: $\cos(S - A)\cos(S - B)$.

Lehrbuch

der

Arithmetik und Algebra

für die

oberen Classen der Mittelschulen.

Von

Dr. Franz Ritter von Močnik.

Fünfzehnte verbesserte Auflage.

Das Recht der Uebersetzung behält sich der Verfasser vor.

Wien.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1876.

Vorwort zur neunten Auflage.

Die vorliegende Auflage der Arithmetik und Algebra unterscheidet sich sowohl bezüglich der Anordnung des Lehrstoffes als der Behandlung desselben wesentlich von den früheren Ausgaben dieses Lehrbuches.

Eine durchgreifende Aenderung in der Gliederung des Inhaltes erschien schon durch das Streben geboten, in dieser umgearbeiteten Ausgabe die organische Entwicklung des Zahlenbegriffes und die dadurch bedingte fortschreitende Erweiterung der Operationsbegriffe dem Schüler zu möglichst klarem Bewußtsein zu bringen. Indem naturgemäß zuerst die niederen Rechnungsarten mit absoluten ganzen Zahlen behandelt werden, wird, damit die inversen Operationen, die Subtraction und die Division, unter allen Umständen ausgeführt werden können, auf die Nothwendigkeit hingewiesen, die algebraischen und die gebrochenen Zahlen in die Rechnung einzuführen. Eben so eröffnet bei den höheren Rechnungsarten die Radicirung, indem sie in der Reihe der ganzen und gebrochenen algebraischen Zahlen nicht immer ausführbar erscheint, die neuen Gebiete der irrationalen und der imaginären Zahlen. Jede neue Zahlform tritt dabei als eine höhere Stufe in der Erweiterung des Zahlengebietes auf, so zwar, daß der auf ihr gewonnene Begriff alle vorhergehenden in sich umfaßt.

Mit der fortschreitenden Entwicklung des Zahlenbegriffes müssen auch die Begriffe der Operationen allmählich erweitert werden, so daß sie auch auf die neue Zahlform anwendbar werden und daß stets in der neuen Definition die früheren als besondere Fälle enthalten sind. Zugleich muß jedesmal nachgewiesen werden, daß die Lehrsätze, welche für die früheren Zahlen abgeleitet wurden, auch für die neue Zahlform giltig sind, wodurch denselben eine immer ausgedehntere Anwendbarkeit gesichert wird.

Sowie im Ganzen, ist auch im Einzelnen auf eine organische Gliederung des Stoffes Bedacht genommen worden. Bei jeder neuen Operation wurden zuerst die Verbindungen der neuen Rechnungsform mit sich selbst und mit der entgegengesetzten Operation derselben Stufe, wenn diese schon vorgekommen ist, sodann die Verbindungen der neuen Operation mit den Operationen der niedrigeren Stufen in Untersuchung gezogen. Die einzelnen Lehrsätze wurden dabei so geordnet, daß Zusammengehöriges in natürlicher Aufeinanderfolge zusammengestellt erscheint, und daß die Analogie der gleichartigen Sätze auf den verschiedenen Rechnungsstufen leicht überblickt werden kann.

Die Brüche erhielten, wiewohl das Rechnen mit denselben schon in dem Rechnen mit den Quotienten enthalten ist, ihre eigene Stelle, nicht nur, weil die besondere Auffassung der Quotienten als Brüche im Leben allgemein so geläufig geworden ist, daß von dieser Vorstellungsweise auch die Wissenschaft füglich nicht leicht Umgang nehmen kann, sondern auch darum, weil mehrere Sätze über Quotienten nur in dieser Form der Auffassung einen besonderen Werth erhalten.

Die Theorie der irrationalen und der imaginären Zahlen wurde gänzlich umgearbeitet. Auch werden die vielseitigen Verbesserungen, welche in den Abschnitten über die Gleichungen, Reihen und Combinationen vorgenommen wurden, dem aufmerksamen Leser nicht entgehen.

Graz, im September 1866.

Der Verfasser.

Vorwort zur dreizehnten Auflage.

Die vorliegende Auflage weiset gegen die früheren wesentliche Aenderungen auf, die sich über sämmtliche Abtheilungen des Buches erstrecken; überall waren es wissenschaftliche und didactische Rücksichten, von denen ich bei der Umarbeitung geleitet wurde.

Die im Anhange enthaltenen Uebungsaufgaben wurden bedeutend vermehrt und nach den fortschreitenden Stufen des Unterrichtes systematisch geordnet. Wir besitzen zwar sehr werthvolle Beispielsammlungen von Rogner, Heis, Bardey u. a.; wenn ich gleichwohl meinem Lehrbuche auch Uebungsaufgaben beifüge, so geschieht es in der Ueberzeugung, daß eine Sammlung von Aufgaben, die sich genau an den Stufengang des Lehrbuches anschließt, ganz besonders geeignet erscheint, den Unterricht zu fördern, indem sie dem Schüler die Möglichkeit und die beste Gelegenheit bietet, die erkannten theoretischen Lehren Schritt für Schritt sofort an passenden Beispielen zur Uebung und Anwendung zu bringen.

Graz, im October 1873.

Der Verfasser.

Vorwort zur fünfzehnten Auflage.

Um den Inhalt dieses Buches auf diejenigen Lehrstoffe einzuschränken, welche nach den bestehenden Lehrplänen für die oberen Classen der Gymnasien und Realschulen vorgeschrieben sind, habe ich die früher am Schlusse des letzten Abschnittes enthaltene Lehre von der Auflösung der höheren numerischen Gleichungen in dieser Auflage gänzlich weggelassen; auch wurden aus anderen Theilen einzelne minder wichtige und zum systematischen Gefüge des Ganzen nicht wesentlich nothwendige Sätze ausgeschieden. Die übrigen Aenderungen betreffen theils die Berichtigung und Verbesserung einzelner Textstellen, theils die präcisere Fassung einiger Beweise. Die Aufgabensammlung ist bis auf wenige Aufgaben, welche durch instructivere ersetzt wurden, unverändert geblieben.

Graz, im Mai 1876.

Der Verfasser.

Einleitung.

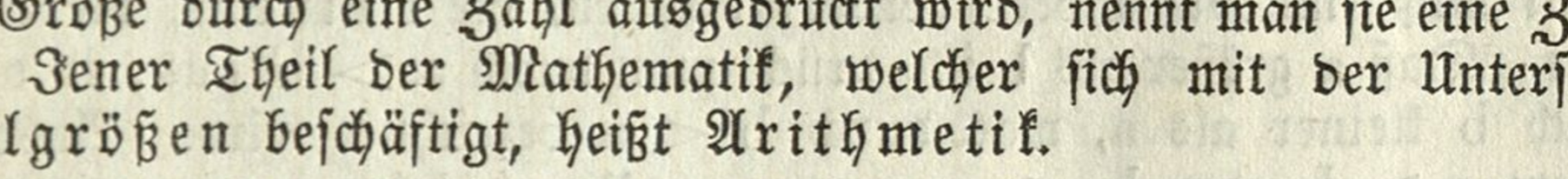
§. 1. Alles, was aus Theilen derselben Art besteht oder aus solchen bestehend gedacht werden kann, wird Größe genannt. Jede Größe ist einer Vermehrung oder Verminderung fähig. Die Wissenschaft von den Größen heißt Mathematik.

Die Menge der in einer Größe enthaltenen gleichartigen Theile nennt man die Quantität der Größe. Um eine Größe in Beziehung auf ihre Quantität zu bestimmen, nimmt man eine bekannte Größe derselben Art als Einheit an und untersucht, wie oft dieselbe in der zu bestimmenden Größe enthalten ist. Der Ausdruck, welcher dieses angibt, heißt Zahl. Insoferne eine Größe durch eine Zahl ausgedrückt wird, nennt man sie eine Zahlgröße.

Jener Theil der Mathematik, welcher sich mit der Untersuchung der Zahlgrößen beschäftigt, heißt Arithmetik.

§. 2. Jede Zahlenbildung beginnt mit dem Setzen der Einheit. Indem man zu der Einheit noch eine Einheit, zu der dadurch gebildeten Zahl wieder eine Einheit und so fort hinzusetzt, erhält man die Reihe der natürlichen Zahlen.

Man kann die natürliche Zahlenreihe bildlich darstellen, indem man auf eine gerade Linie von dem Punkte 0 aus nach einer bestimmten Richtung gleiche Strecken (Längeneinheiten) aufträgt; die Endpunkte dieser Strecken versinnlichen die aufeinander folgenden natürlichen Zahlen.



Eine solche Linie soll Zahlenlinie heißen.

Wir werden später, so wie in dem Gebiete der Zahlen neue Zahlformen auftreten werden, auch an der Zahlenlinie das angefangene Bild entsprechend vervollständigen.

Die Einheit selbst, sowie jede durch das wiederholte Setzen derselben gebildete Zahl wird eine ganze Zahl genannt. Um anzugeben, daß keine Einheit gesetzt sei, bedient man sich des Ausdruckes Null (0). Die Null ist daher als der Ausgangspunkt jeder Zahlenbildung zu betrachten.

In der natürlichen Zahlenreihe entsteht jede Zahl aus der vorhergehenden durch Hinzufügen einer Einheit, und aus der folgenden durch Wegnehmen einer Einheit. Durch das Hinzufügen, bezüglich Wegnehmen einer Einheit von einer Zahl zur andern fortschreiten, heißt zählen; das erstere vorwärtszählen, das letztere rückwärtszählen. Jenes kann an der natürlichen Zahlenreihe

ohne Ende fortgesetzt werden, dieses nur, bis auch die erste Einheit weggenommen und man zur Null gelangt ist.

§. 3. Zahlen, welche eine bestimmte Menge von Einheiten ausdrücken, heißen besondere Zahlen; sie werden durch Ziffern bezeichnet. Zahlen, welche irgend eine Menge von Einheiten vorstellen, heißen allgemeine Zahlen; sie werden durch Buchstaben ausgedrückt. Zahlen, welche erst bestimmt werden sollen und daher noch unbekannt sind, bezeichnet man gewöhnlich mit den letzten Buchstaben des Alphabetes.

Je nachdem die Arithmetik nur besondere oder auch allgemeine Zahlen in Betrachtung zieht, heißt sie die besondere oder die allgemeine Arithmetik.

§. 4. Wird beim Zählen die Art der Einheit ganz unberücksichtigt gelassen, so heißen die dadurch gebildeten Zahlen reine oder unbenannte Zahlen; wird aber beim Zählen auch die Art der Einheit ausgedrückt, so entstehen benannte Zahlen. Man erhält demnach durch amaliges Setzen der unbenannten Einheit die unbenannte Zahl a, durch amaliges Setzen einer benannten Einheit E die benannte Zahl aE, in welcher E die Benennung heißt.

§. 5. Zwei Zahlen (überhaupt zwei Größen), welche denselben Werth haben, so daß die eine für die andere gesetzt werden kann, heißen einander gleich. Um anzuzeigen, daß a und b gleich sind, schreibt man $a = b$; in diesem Falle ist immer auch $b = a$. Ein Ausdruck von der Form $a = b$ heißt eine Gleichung; $b = a$ ist die Umkehrung der Gleichung $a = b$.

Zwei Zahlen (überhaupt zwei Größen), welche nicht denselben Werth haben, heißen ungleich, und zwar heißt diejenige, zu der noch etwas hinzugesetzt werden muß, um die andere hervorzubringen, die kleinere, die andere die größere. Daß a größer als b ist, drückt man durch $a > b$ aus; in diesem Falle ist auch b kleiner als a, was durch $b < a$ bezeichnet wird. Ausdrücke von der Form $a > b$ oder $b < a$ nennt man Ungleichungen.

Bezeichnen a und b zwei beliebige Zahlen (oder Größen), so muß entweder $a > b$, oder $a = b$, oder $a < b$ sein, wofür man auch schreibt $a \gtreqless b$.

§. 6. Von gegebenen Zahlen durch vorgeschriebene Verbindung derselben zu einer andern gesuchten Zahl übergehen und letztere dadurch bestimmen, heißt rechnen. Die Zahl, zu welcher man durch das Rechnen gelangt, heißt das Resultat der Rechnung.

In eine Zahlenverbindung an die Stelle der allgemeinen Zahlen (Buchstaben) besondere Zahlwerthe setzen, und mit diesen die vorgeschriebenen Rechnungen ausführen, heißt substituiren.

Das Zählen ist die einfachste Art des Rechnens; alle anderen Rechnungsoperationen können daraus abgeleitet werden.

Das Fortschreiten in der natürlichen Zahlenreihe von einer gegebenen Zahl aus um eine gegebene Zahl von Einheiten heißt die Addition; die Umkehrung dieser Operation die Subtraction. Die Addition gleicher Zahlen heißt Multiplication, und die Umkehrung derselben Division. Die Multiplication gleicher Zahlen führt auf Zahlen höheren Ranges; die Rechnung, durch welche diese gefunden werden, heißt die Potenzirung, aus deren Umkehrung sich die Radicirung (das Wurzelausziehen) und die Logarithmirung ergeben.

Die Gesetze der hier angedeuteten Operationen zu untersuchen, bildet die Hauptaufgabe der Arithmetik. Die Lehre über die Anwendung dieser Ge-

setze auf die Lösung von Aufgaben, indem man die Beziehungen zwischen den unbekannten und bekannten Zahlen durch Gleichungen ausdrückt und aus diesen die Werthe für die unbekannten Zahlen sucht, heißt Algebra.

Häufig werden diese beiden Theile der Mathematik als Ganzes mit dem gemeinschaftlichen Namen allgemeine Arithmetik bezeichnet.

§. 7. Die Mathematik stützt ihre Lehren auf gewisse Grundwahrheiten, welche an sich klar sind und deshalb nicht weiter begründet zu werden brauchen. Solche Grundwahrheiten werden Grundsätze (Axiome) genannt.

Sätze, die nicht an und für sich einleuchtend sind, deren Richtigkeit erst aus anderen, bereits als wahr anerkannten Sätzen hergeleitet werden muß, heißen Lehrsätze; diese müssen bewiesen werden.

Ein Satz, dessen Wahrheit sich aus der Erklärung eines Begriffes oder aus einem erwiesenen Satze unmittelbar ergibt, heißt ein Folgesatz.

§. 8. Allgemeine mathematische Grundsätze.

1. Jede Größe ist sich selbst gleich.

$$a = a.$$

2. Sind zwei Größen einer dritten gleich, so sind sie auch unter einander gleich.

Ist $a = c$ und $b = c$, so ist auch $a = b$.

3. Werden mit gleichen Größen gleiche Veränderungen vorgenommen, so erhält man gleiche Größen.

4. Das Ganze ist gleich allen seinen Theilen zusammengenommen.

5. Das Ganze ist größer als ein Theil desselben.

6. Ist eine Größe einer zweiten gleich, diese aber einer dritten ungleich, so ist auch die erste der dritten ungleich, und zwar mit demselben Ungleichheitszeichen.

Ist $a = b$,
$b > c$,
so ist auch $a > c$.

Ist $a = b$,
$b < c$,
so ist auch $a < c$.

7. Ist eine Größe größer (oder kleiner) als eine zweite und diese wieder größer (oder kleiner) als eine dritte, so ist um so mehr auch die erste Größe größer (oder kleiner) als die dritte.

Ist $a > b$,
$b > c$,
so ist auch $a > c$.

Ist $a < b$,
$b < c$,
so ist auch $a < c$.

Erster Abschnitt.

Addition und Subtraction.

I. Addition mit absoluten ganzen Zahlen.

§. 9. 1. Zu einer Zahl a eine Zahl b addiren heißt, eine Zahl c suchen, welche so viele Einheiten enthält, als a und b zusammen. Man schreibt $a + b = c$ und nennt a und b die Summanden und $a + b$ die Summe; c heißt der Werth der Summe und wird auch durch den eingeklammerten Ausdruck $(a + b)$ dargestellt.

Um die Addition zweier Zahlen a und b auszuführen, schreitet man in der Zahlenreihe von a ausgehend um so viele Einheiten vorwärts, als ihrer b enthält; die Zahl, zu der man dadurch gelangt, ist die gesuchte Summe. Z. B. $5 + 3 = 5 + 1 + 1 + 1 = 8$.

Folgesatz. Ist ein Summand o, so ist die Summe dem anderen Summanden gleich.

$$o + a = a,\ a + o = a,\ o + o = o.$$

2. Unter der Summe mehrerer Zahlen versteht man die Summe, welche erhalten wird, indem man zu der Summe der beiden ersten Zahlen die dritte, zu der neuen Summe die vierte Zahl u. s. w. addirt. Es ist demnach

$$a + b + c = (a + b) + c,$$
$$a + b + c + d = [(a + b) + c] + d, \text{ u. s. f.}$$

§. 10. Eine Summe, welche entsteht, indem man dieselbe allgemeine Zahl öfters als Summand setzt, wird abgekürzt dadurch bezeichnet, daß man die allgemeine Zahl nur einmal anschreibt und ihr die Zahl vorsetzt, welche anzeigt, wie oft die allgemeine Zahl als Summand vorkommt; z. B.

$$a + a + a + a + a = 5a.$$

In dem Ausdrucke 5a heißt dann a die Hauptgröße und 5 der Coefficient.

Der Coefficient kann auch eine allgemeine Zahl sein; z. B.

$$ma = a + a + a + a + \ldots \text{ (m mal)}.$$

Ausdrücke, welche dieselbe Hauptgröße haben, heißen gleichnamig, z. B. 5a und 6a, 3x und x. Ausdrücke, welche verschiedene Hauptgrößen haben, heißen ungleichnamig, z. B. 3a und 7b, 5x und 5y.

§. 11. Eine Summe bleibt unverändert, wenn man die Summanden unter einander vertauscht. (Das Commutationsgesetz der Addition.)

$$a + b = b + a.$$
$$a + b + c = a + c + b = b + a + c = b + c + a = \ldots$$

† Beweis. Die Anzahl der in den Summanden enthaltenen Einheiten bleibt dieselbe, in welcher Reihenfolge sie auch vorkommen mögen; es muß daher auch der Werth der Summe derselbe bleiben.

Verbindung der Addition mit sich selbst.

§. 12. 1. Zu einer Summe wird eine Zahl addirt, indem man sie zu einem der Summanden addirt.

$$(a + b) + c = (a + c) + b = a + (b + c).$$

2. Zu einer Zahl wird eine Summe addirt, indem man die Summanden einzeln dazu addirt.

$$a + (b + c) = (a + b) + c = (a + c) + b.$$

Die Richtigkeit dieser zwei Sätze, welche die Associationsgesetze der Addition bilden, folgt unmittelbar aus dem Commutationsgesetze in §. 11.

§. 13. Gleichnamige Ausdrücke werden addirt, indem man ihre Coefficienten addirt und die erhaltene Summe der gemeinschaftlichen Hauptgröße vorsetzt.

$$ma + na = (m + n)\,a.$$

Beweis. $ma = a + a + a + \ldots$ (m mal),
$na = a + a + a + \ldots$ (n mal),

daher $ma + na = a + a + a + \ldots (m + n)\text{mal} = (m + n)\,a.$

Z. B. $3a + 4a = (3 + 4)\,a = 7a.$

Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch die Addition.

§. 14. 1. Gleiches zu Gleichem addirt gibt Gleiches.

Ist $a = b$, und $c = d$, so ist $a + c = b + d$.

Folgt unmittelbar aus §. 8, 3.

2. Gleiches zu Ungleichem addirt gibt Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

Ist $a > b$, und $c = d$, so ist $a + c > b + d$.

Beweis. Es sei w die Zahl, welche zu b addirt werden muß, um a zu erhalten, also $a = b + w$, so ist nach 1. $a + c = b + w + d$. Nun ist $b + w + d > b + d$ (§. 8, 5), folglich auch $a + c > b + d$.

3. Ungleiches zu Ungleichem mit demselben Ungleichheitszeichen addirt gibt Ungleiches mit eben so gestelltem Ungleichheitszeichen.

Ist $a > b$, und $c > d$, so ist $a + c > b + d$.

Beweis. Es sei $c = d + w$, so hat man nach 2. $a + c > b + d + w$. Nun ist $b + d + w > b + d$ (§. 8, 5), folglich um so mehr $a + c > b + d$ (§. 8, 7).

II. Subtraction mit absoluten ganzen Zahlen.

§. 15. Von einer Zahl a eine Zahl b subtrahiren heißt, aus a als der Summe zweier Zahlen und b als dem einen Summanden den andern Summanden c suchen. Man schreibt $a - b = c$ und nennt a den Minuend, b den Subtrahend und $a - b$ die Differenz; c oder auch der eingeklammerte Ausdruck $(a - b)$ heißt der Werth der Differenz.

Eine Differenz ist also ein Ausdruck für diejenige Zahl, zu welcher der Subtrahend addirt den Minuend gibt; oder es ist

$$(a - b) + b = a.$$

Um die Subtraction zweier Zahlen a und b auszuführen, schreitet man in der Zahlenreihe vom Minuend a aus um so viele Einheiten zurück, wie der Subtrahend b anzeigt; die Zahl, zu welcher man dadurch gelangt, ist die gesuchte Differenz. Z. B. $7 - 3 = 7 - 1 - 1 - 1 = 4$.

Die Subtraction kann an der natürlichen Zahlenreihe nur dann ausgeführt werden, wenn der Subtrahend nicht größer als der Minuend ist, indem man sonst, weil die natürliche Zahlenreihe rückwärts mit 0 abbricht, vom Minuend nicht um so viele Einheiten zurückschreiten könnte, wie der Subtrahend anzeigt.

Bei den folgenden Sätzen werden wir daher vorläufig voraussetzen, daß die Subtrahenden der vorkommenden Differenzen nicht größer als ihre Minuenden sind.

§. **16.** Aus dem Begriffe der Subtraction ergeben sich nachstehende

Folgesätze. 1. Addirt man zu der Differenz zweier Zahlen den Subtrahend, so erhält man den Minuend.

$$(a - b) + b = a.$$

2. Subtrahirt man von der Summe zweier Zahlen den einen Summanden, so erhält man den zweiten Summanden.

$$(a + b) - a = b, \qquad (a + b) - b = a.$$

3. Eine Zahl bleibt unverändert, wenn man dieselbe Zahl zu ihr addirt und von ihr subtrahirt.

$$a = (a + b) - b, \qquad a = (a - b) + b.$$

Die Addition und die Subtraction sind demnach einander entgegengesetzt; letztere ist eine inverse Operation der ersteren. In der commutativen Eigenschaft der Addition liegt der Grund, daß es zu derselben nur eine inverse Operation gibt; es ist gleichviel, ob der erste oder der zweite Summand gesucht wird, da man beide unter sich vertauschen kann.

4. Ist der Subtrahend dem Minuend gleich, so ist die Differenz gleich Null.

$$a - a = 0.$$

5. Ist der Subtrahend 0, so ist die Differenz dem Minuend gleich.

$$a - 0 = a, \quad 0 - 0 = 0.$$

Verbindung der Subtraction mit sich selbst und mit der Addition.

§. **17.** 1. Von einer Summe wird eine Zahl subtrahirt, indem man sie von einem der Summanden subtrahirt.

$$(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c).$$

Beweis. a) Soll $(a - c) + b$ die richtige Differenz der Zahlen $a + b$ und c sein, so muß man, wenn man zu ihr den Subtrahend c addirt, den Minuend $a + b$ erhalten. Nun ist wirklich

$\{(a - c) + b\} + c = \{(a - c) + c\} + b$ (§. 12, 1) $= a + b$ (§. 16, 1),

also $(a - c) + b$ eine richtige Lösung der Aufgabe.

b) Ebenso ist

$\{a + (b - c)\} + c = a + \{(b - c) + c\}$ (§. 12, 1) $= a + b$ (§. 16, 1),

also ist auch die zweite Form $a + (b - c)$ der Differenz richtig.

Folgesatz. Soll zu einer Zahl eine zweite addirt, und eine dritte davon subtrahirt werden, so ist es für das Resultat gleichgiltig, in welcher Reihenfolge man addirt oder subtrahirt.

2. Durch Umkehrung des Satzes in 1. erhält man

$$a + (b - c) = (a + b) - c = (a - c) + b,$$

d. h. Zu einer Zahl wird eine Differenz addirt, indem man den Minuend addirt und den Subtrahend subtrahirt.

§. 18. Von einer Zahl wird eine Summe subtrahirt, indem man die Summanden einzeln subtrahirt.

$$a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b.$$

Beweis. Sowohl $(a - b) - c$ als $(a - c) - b$ entspricht der in §. 16, 1 gestellten Bedingung. Denn es ist

$$\{(a - b) - c\} + (b + c) = (b + c) + \{(a - b) - c\} \text{ (§. 11)}$$
$$= \{(b + c) - c\} + (a - b) \text{ (§. 17, 2)}$$
$$= b + (a - b) \text{ (§. 16, 2)} = a \text{ (§. 16, 1).}$$

Auf gleiche Weise erhält man auch

$$\{(a - c) - b\} + (b + c) = a.$$

§. 19. Von einer Differenz wird eine Zahl subtrahirt, indem man sie von dem Minuend subtrahirt, oder zu dem Subtrahend addirt.

$$(a - b) - c = (a - c) - b = a - (b + c).$$

Ergibt sich durch Umkehrung aus §. 18.

Folgesatz. Sollen von einer Zahl zwei Zahlen subtrahirt werden, so darf man entweder dieselben einzeln in beliebiger Reihenfolge, oder auch sogleich ihre Summe subtrahiren.

§. 20. 1. Von einer Zahl wird eine Differenz subtrahirt, indem man den Minuend subtrahirt und den Subtrahend addirt.

$$a - (b - c) = (a - b) + c = (a + c) - b.$$

Beweis. Es ist sowohl

$$\{(a - b) + c\} + (b - c) = (a - b) + \{c + (b - c)\} \text{ (§. 12, 1)}$$
$$= (a - b) + b \text{ (§. 16, 1)} = a,$$

als auch

$$\{(a + c) - b\} + (b - c) = [\{(a + c) - b\} + b] - c \text{ (§. 17, 2)}$$
$$= (a + c) - c \text{ (§. 16, 1)} = a \text{ (§. 16, 2).}$$

2. Durch Umkehrung erhält man

$$(a - b) + c = (a + c) - b = a - (b - c),$$

d. h. Zu einer Differenz wird eine Zahl addirt, indem man sie zu dem Minuend addirt, oder von dem Subtrahend subtrahirt.

§. 21. 1. Eine Summe bleibt unverändert, wenn man zu dem einen Summanden eine Zahl addirt und von dem andern Summanden dieselbe Zahl subtrahirt.

Es ist

$$a + b = a + \{(b - c) + c\} \text{ (§. 16, 3)} = (a + c) + (b - c) \text{ (§. 12, 2);}$$
$$a + b = a + \{(b + c) - c\} \text{ (§. 16, 3)} = (a - c) + (b + c) \text{ (§. 17, 2).}$$

2. Eine Differenz bleibt unverändert, wenn man zu dem Minuend und dem Subtrahend dieselbe Zahl addirt, oder von beiden dieselbe Zahl subtrahirt.

Es ist

$$a - b = a - \{(b + c) - c\} \text{ (§. 16, 3)} = (a + c) - (b + c) \text{ (§. 20, 1);}$$
$$a - b = a - \{(b - c) + c\} \text{ (§. 16, 3)} = (a - c) - (b - c) \text{ (§. 18).}$$

§. 22. Gleichnamige Ausdrücke werden subtrahirt, indem man die Coefficienten subtrahirt und die erhaltene Differenz der gemeinschaftlichen Hauptgröße vorsetzt.

$$ma - na = (m - n)\,a.$$

Beweis. $ma = a + a + a + \ldots$ (m mal)
$na = a + a + a + \ldots$ (n mal)

daher $ma - na = a + a + a + \ldots$ $(m - n)$ mal $= (m - n)\,a.$

Z. B. $5a - 2a = (5 - 2)\,a = 3a.$

§. 23. Sollen in einer durch die Zeichen + und — vorgeschriebenen Verbindung von Zahlen die dadurch angezeigten Operationen in der Reihenfolge, wie diese Zahlen mit ihren Zeichen von links nach rechts vorkommen, vollzogen werden, so kann man, ohne der Bestimmtheit dadurch Abbruch zu thun, die Klammern weglassen. Hiernach kann man

$$[(a + b) + c] + d = a + b + c + d,$$
$$[(a - b) + c] - d = a - b + c - d,$$
$$[(a - b) - c] - d = a - b - c - d \text{ setzen.}$$

Ein Ausdruck, welcher auf einander folgende Additionen und Subtractionen von Zahlen enthält, heißt ein mehrgliedriger Ausdruck oder ein Polynom. Die zu addirenden Zahlen sind die additiven, die zu subtrahirenden Zahlen die subtractiven Glieder des Ausdruckes. Ein Glied, das kein Zeichen vor sich hat, gilt als additiv.

Ein zweigliedriger Ausdruck wird insbesondere ein Binom, ein dreigliedriger ein Trinom genannt. Ein Ausdruck, welcher nur ein Glied enthält, heißt ein eingliedriger Ausdruck oder ein Monom.

Folgesätze. 1. In einem mehrgliedrigen Ausdrucke ist die Reihenfolge der additiven und subtractiven Glieder ganz willkürlich.

Folgt aus §. 11, §. 17, 1. Folges. und §. 19, Folges.

2. Jeder mehrgliedrige Ausdruck läßt sich in eine Differenz verwandeln, deren Minuend die Summe aller additiven, und deren Subtrahend die Summe aller subtractiven Glieder ist.

$$a + b - c + d - e = a + b + d - c - e$$
$$= (a + b + d) - (c + e) \text{ (§. 19, Folges.).}$$

§. 24. 1. Zu einer Zahl wird ein mehrgliedriger Ausdruck addirt, indem man die Glieder desselben einzeln zu der Zahl nach und nach addirt oder von ihr subtrahirt, je nachdem sie in dem Ausdrucke additiv oder subtractiv vorkommen.

$$a + (b - c - d + e - f) = a + b - c - d + e - f.$$

Beweis. $a + (b - c - d + e - f)$
$= a + [(b + e) - (c + d + f)]$ (§. 23, Folges. 2)
$= [a + (b + e)] - (c + d + f)$ (§. 17, 2)
$= a + b + e - c - d - f$ (§. 12, 2 und §. 18)
$= a + b - c - d + e - f$ (§. 23, Folges. 1).

2. Von einer Zahl wird ein mehrgliedriger Ausdruck subtrahirt, indem man die Glieder desselben einzeln nach und nach von der Zahl subtrahirt oder zu ihr addirt, je nachdem sie in dem Ausdrucke additiv oder subtractiv vorkommen.

$$a - (b - c - d + e - f) = a - b + c + d - e + f.$$

Der Beweis wird ähnlich, wie bei dem vorhergehenden Satze, geführt.

§. **25.** 1. Jeder mit Klammern eingeschlossene Ausdruck kann ohne Klammern dargestellt werden, indem man, wenn vor der Klammer das Zeichen + steht, die Klammern ohne alle weitere Veränderung wegläßt, dagegen, wenn vor der Klammer das Zeichen — steht, allen Gliedern, die umschlossen waren, die entgegengesetzten Zeichen gibt.

Man nennt diese Umformung das Auflösen der Klammern.

Z. B. $a - [5b - \{(3a + 2c) - 2b\} + (2a - 4c)]$
$= a - 5b + \{(3a + 2c) - 2b\} - (2a - 4c)$
$= a - 5b + (3a + 2c) - 2b - 2a + 4c$
$= a - 5b + 3a + 2c - 2b - 2a + 4c.$

2. Umgekehrt können in jedem mehrgliedrigen Ausdruck mehrere Glieder in eine Klammer gesetzt werden, indem man, wenn die Klammer nach dem Zeichen + beginnt, alle Glieder mit unveränderten Zeichen innerhalb derselben folgen läßt, dagegen, wenn die Klammer nach dem Zeichen — beginnt, jedem der umschlossenen Glieder das entgegengesetzte Zeichen gibt.

3. Ein mehrgliedriger Ausdruck, worin gleichnamige Zahlen vorkommen, wird auf einen einfacheren Ausdruck reducirt, indem man zuerst die additiven, dann die subtractiven gleichnamigen Zahlen addirt, und die zweite Summe von der ersten subtrahirt. Z. B.

$$6a - 5a - 3a + 8a - 2a = (6a + 8a) - (5a + 3a + 2a)$$
$$= 14a - 10a = 4a.$$

Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch die Subtraction.

§. **26.** 1. Gleiches von Gleichem subtrahirt gibt Gleiches.

Ist $a = b$ und $c = d$, so ist $a - c = b - d$.

Folgt unmittelbar aus §. 8, 3.

2. Gleiches von Ungleichem subtrahirt gibt Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

Ist $a > b$ und $c = d$, so ist $a - c > b - d$.

Beweis. Wäre nicht $a - c > b - d$, so müßte $a - c \leqq b - d$ sein; dann wäre bezüglich auch $(a - c) + c \leqq (b - d) + d$ (§. 14, 1 und 2), daher $a \leqq b$ (§. 16, 1), was gegen die Voraussetzung ist.

3. Ungleiches von Gleichem subtrahirt gibt Ungleiches mit entgegengesetztem Ungleichheitszeichen.

Ist $a = b$ und $c > d$, so ist $a - c < b - d$.

Beweis. Wäre $a - c \geqq b - d$, so müßte in beiden Fällen $(a - c) + c > (b - d) + d$ (§. 14, 2 und 3), daher $a > b$ (§. 16, 1) sein, was gegen die Voraussetzung ist.

4. Ungleiches von Ungleichem bei entgegengesetzten Ungleichheitszeichen subtrahirt gibt Ungleiches mit dem Ungleichheitszeichen des Minuends.

Ist $a > b$ und $c < d$, so ist $a - c > b - d$.

Beweis. Wäre $a - c \leqq b - d$, so müßte in beiden Fällen $(a - c) + c < (b - d) + d$ (§. 14, 2 und 3), daher $a < b$ (§. 16, 1) sein, was gegen die Voraussetzung ist.

III. Erweiterung des Zahlengebietes durch die Subtraction.

1. Negative Zahlen.

§. 27. Bisher wurde (§. 15) bei den Differenzen $a - b$ immer die Voraussetzung gemacht, daß der Subtrahend b nicht größer als der Minuend a ist. Ist $b > a$, so ist die gesuchte Differenz $a - b$ in der Reihe der natürlichen Zahlen nicht zu finden; die Subtraction ist in diesem Zahlengebiete unmöglich. Soll die Subtraction für ganz beliebige Werthe des Minuends und des Subtrahends möglich gemacht werden, so sind wir genöthiget, unser Zahlengebiet zu erweitern und in dasselbe $a - b$ für den Fall, daß $b > a$ ist, als eine neue Zahlform aufzunehmen. Dieser neuen Zahlform muß dann eine solche Bedeutung gegeben werden, daß die für die bisherigen Zahlen aufgestellten Sätze auch für die Rechnung mit den neu eingeführten Zahlen ihre Giltigkeit behalten. (Princip der Erhaltung der Operationsgesetze.)

Wendet man auf die Differenz $a - b$, wo $b = a + n$ sei, den Satz in §. 18 an, so erhält man

$$a - b = a - (a + n) = (a - a) - n = o - n,$$

oder, wenn man statt $o - n$ einfach $-n$ schreibt,

$$a - b = -n.$$

Man nennt $-n$ eine negative Zahl. Ihre Definition ergibt sich aus dem durch die Gleichung $(a - b) + b = a$ gegebenen Begriffe einer Differenz, wenn man $a = o$ und $b = n$ setzt; man erhält $(o - n) + n = o$ oder

$$(-n) + n = o.$$

Eine negative Zahl $-n$ bedeutet also eine Zahl, zu welcher die natürliche Zahl n addirt die Null gibt.

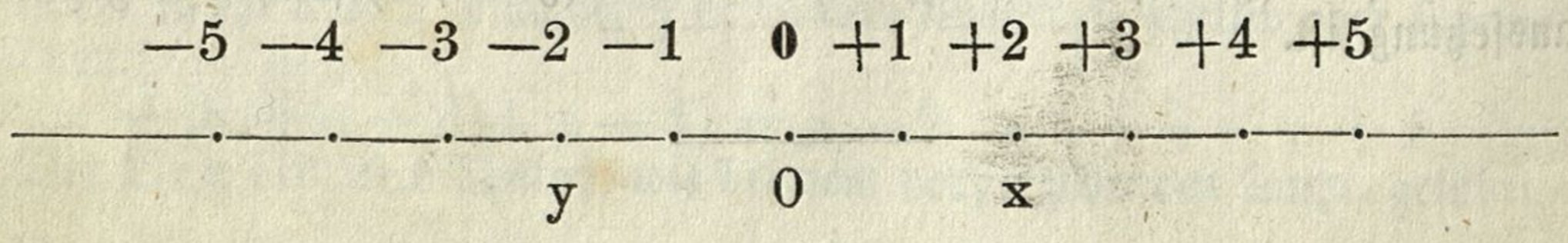
Im Gegensatze zu den negativen Zahlen werden die bisherigen Zahlen der natürlichen Zahlenreihe positive Zahlen genannt und mit dem Vorzeichen + versehen.

Die positive Zahl $+n$ und die negative Zahl $-n$ enthalten verschiedene Einheiten, aber in derselben Anzahl; $+n$ wird durch die positive Einheit $+1$, $-n$ durch die negative Einheit -1 gemessen. Sie sind einander entgegengesetzt. Um daher die positiven und negativen Zahlen an einer einzigen Zahlenreihe darzustellen, braucht man nur die ursprüngliche Reihe der Zahlen, welche von 0 aus nach vorwärts fortschreitet, nach dem gleichen Gesetze auch nach rückwärts zu erweitern, und den rückwärts von 0 gebildeten Zahlen das Vorzeichen — zu geben, wogegen dann die ursprünglichen Zahlen das Vorzeichen + erhalten. Durch diese Erweiterung entsteht die zweiseitige Zahlenreihe

$$\ldots -3, -2, -1, \mathbf{0}, +1, +2, +3, \ldots,$$

in welcher sich die negativen Zahlen nach dem gleichen Bildungsgesetze den positiven Zahlen anreihen. $+n$ bedeutet n von o aus nach vorwärts gezählte Einheiten, $-n$ bedeutet n von o aus nach rückwärts gezählte Einheiten.

Die hier begründete Erweiterung des Zahlengebietes läßt sich ganz einfach an der Zahlenlinie versinnlichen.



Um von der Zahl 5 die Zahl 3 zu subtrahiren, schreitet man rechts in der Zahlenreihe von der Stelle 5 um 3 Einheiten zurück; man gelangt zu der Stelle x, und es ist $x = 5 - 3 = 2$.

Ist umgekehrt von der Zahl 3 die größere Zahl 5 zu subtrahiren, so müßten, damit die Subtraction ausgeführt werden könne, links von 0 noch Punkte liegen, zu welchen man dann durch das Fortschreiten nach rückwärts gelangen würde. Verlängert man daher die ursprüngliche Zahlenlinie über den Anfangspunkt 0 hinaus in der entgegengesetzten Richtung, trägt auch hier eben so große, gleiche Strecken auf und schreitet sodann von 3 aus um 5 Einheiten zurück, so gelangt man zu der Stelle y, und es ist $y = 3 - 5$; zu derselben Stelle kommt man auch, indem man von 3 aus zuerst um 3, und dann noch um 2 Einheiten zurückschreitet; mithin ist auch $y = 3 - 3 - 2 = 0 - 2$, wofür man -2 schreibt; folglich $3 - 5 = -2$.

Durch dieselbe Schlußweise überzeugt man sich, daß je zwei gleichweit vom Nullpunkte entfernte Stellen der Zahlenlinie durch dieselbe Zahl bezeichnet werden, daß jedoch die Zahlen, welche auf derjenigen Seite, die der ursprünglichen Richtung entgegengesetzt ist, liegen, das beständige Vorzeichen — haben. Dann muß man aber den Zahlen in der ursprünglichen Richtung der Zahlenlinie das Vorzeichen + geben; denn schreitet man von 0 in der ursprünglichen Richtung um 2 Einheiten vorwärts, so gelangt man zu der Stelle $0 + 2 = +2$.

§. **28.** Die mit Vorzeichen versehenen Zahlen werden relative oder algebraische Zahlen genannt, im Gegensatze zu den Zahlen ohne Vorzeichen, welche absolute Zahlen heißen.

Jede algebraische Zahl besteht aus einem Vorzeichen und einem absoluten Werthe.

Das Vorzeichen + pflegt man als selbstverständlich dort wegzulassen, wo es ohne Störung des Sinnes und des Zusammenhanges einer Rechnung geschehen kann.

§. **29.** Größen, wie Bewegung nach Norden und nach Süden, das Steigen und Sinken, Vermögen und Schulden, Höhe über und unter dem Meeresspiegel, Zeiten vor und nach Christi Geburt, u. dgl., welche in dem einen und in dem entgegengesetzten Sinne gezählt werden können, so daß gleichviel von beiden Zählungen 0 gibt, heißen entgegengesetzte Größen. In der Mathematik bezeichnet man die eine von zwei entgegengesetzten Größen, gleichviel welche, aber consequent, mit +, die andere mit —. Hätte man z. B. die Zeit, wann ein Ereigniß C stattfand, aus folgender Angabe zu rechnen: a Jahre nach Christo fand ein Ereigniß A statt, b Jahre später ein Ereigniß B und c Jahre früher als B das Ereigniß C; so wäre der gesuchte Zeitpunct $x = a + b - c$. Käme nach Einsetzung der Werthe für a, b, c ein Resultat $-n$ zum Vorschein, so hieße dies: das Ereigniß C fand n Jahre vor Christo statt.

Allgemein: Ein negativer Werth $-n$ für eine gesuchte Größe x bedeutet stets, daß die Größe gemessen wird durch n Einheiten, aber in einem Sinne, welcher dem ursprünglich in die Rechnung eingeführten entgegengesetzt ist.

2. Addition und Subtraction mit algebraischen ganzen Zahlen.

§. **30.** Der durch die Aufnahme der negativen Zahlen erweiterte Zahlbegriff hat zur Folge, daß auch die Begriffe der Operationen angemessen erweitert werden müssen, damit sie auch auf algebraische Zahlen anwendbar werden.

Zwei algebraische Zahlen addiren heißt diejenige Zahl suchen, welche so viel positive und so viel negative Einheiten enthält, als die beiden Summanden zusammen. Um dieser Erklärung gemäß die Addition zweier algebraischer Zahlen an der Zahlenreihe auszuführen, ist das Weiterschreiten in der Zahlenreihe vom ersten Summanden aus um die Einheiten des zweiten (§. 9, 1) in dem Sinne zu nehmen, wie dieß der zweite Summand durch sein Vorzeichen angibt, somit als ein Vorwärtsschreiten, wenn der zweite Summand positiv, und als ein Rückwärtsschreiten, wenn der zweite Summand negativ ist.

Folgesätze. 1. Addition einer positiven Zahl ist Addition des absoluten Werthes derselben; Addition einer negativen Zahl ist Subtraction des absoluten Werthes derselben.

Bedeutet b eine absolute Zahl, so ist

$$a + (+b) = a + b, \qquad a + (-b) = a - b.$$

2. Zwei gleichbezeichnete Zahlen werden addirt, indem man ihre absoluten Werthe addirt und dieser Summe das gemeinschaftliche Vorzeichen gibt.

$$(+a) + (+b) = +(a + b), \qquad (-a) + (-b) = -(a + b).$$

3. Zwei ungleich bezeichnete Zahlen werden addirt, indem man den kleineren absoluten Werth von dem größeren subtrahirt und dieser Differenz das Vorzeichen des größeren absoluten Werthes gibt.

$$(+a) + (-b) = +(a - b), \text{ oder } = -(b - a),$$
$$(-a) + (+b) = -(a - b), \text{ oder } = +(b - a).$$

4. Zwei entgegengesetzte Zahlen geben zur Summe Null (heben sich gegenseitig auf).

$$(+a) + (-a) = 0, \qquad (-a) + (+a) = 0.$$

§. **31.** Für das Subtrahiren algebraischer Zahlen bleibt die in §. 15 aufgestellte allgemeine Erklärung unverändert giltig. Um hier die Subtraction an der Zahlenreihe auszuführen, muß das in §. 15 vorgeschriebene Zurückschreiten in der Zahlenreihe vom Minuend aus um die Einheiten des Subtrahends in dem Sinne genommen werden, wie dies der Subtrahend durch sein Vorzeichen anzeigt, somit als Rückwärtsschreiten, wenn der Subtrahend positiv, dagegen als Vorwärtsschreiten, wenn der Subtrahend negativ ist.

Folgesätze. 1. Subtraction einer positiven Zahl ist Subtraction des absoluten Werthes derselben; Subtraction einer negativen Zahl ist Addition des absoluten Werthes derselben.

Bedeutet b eine absolute Zahl, so ist

$$a - (+b) = a - b, \qquad a - (-b) = a + b.$$

2. Zwei algebraische Zahlen werden subtrahirt, indem man zum unveränderten Minuend den Subtrahend mit entgegengesetztem Vorzeichen addirt.

$$(+a) - (+b) = (+a) - b = (+a) + (-b) \text{ (§. 30, Folges. 1)},$$
$$(+a) - (-b) = (+a) + b = (+a) + (+b),$$
$$(-a) - (+b) = (-a) - b = (-a) + (-b),$$
$$(-a) - (-b) = (-a) + b = (-a) + (+b).$$

§. **32.** Eine Summe, deren Summanden algebraische Zahlen sind, heißt eine algebraische Summe; z. B.

$$(+a) + (-b) + (-c) + (+d) + (-f).$$

Die Differenz je zweier algebraischer Zahlen kann als eine algebraische Summe dargestellt werden (§. 31, Folges. 2).

1. Jeder mehrgliedrige Ausdruck kann in eine algebraische Summe verwandelt werden, indem man die Rechnungszeichen als Vorzeichen betrachtet und dann die Zahlen als Summanden annimmt.

$$a - b - c + d = (+ a) + (- b) + (- c) + (+ d).$$

Folgt aus §. 30, Folges. 1.

2. Jede algebraische Summe kann in einen mehrgliedrigen Ausdruck verwandelt werden, indem man die Additionszeichen und die Klammern wegläßt und dann die Vorzeichen als Rechnungszeichen ansieht.

$$(+ a) + (- b) + (- c) + (+ d) = a - b - c + d.$$

Folgt aus 1.

3. Eine algebraische Summe bleibt unverändert, wenn man die Summanden unter einander vertauscht.

Folgt aus 1 und 2 mit Zuziehung des §. 23, Folges. 1.

§. **33.** Man ist übereingekommen, bei algebraischen Summen die Additionszeichen und die Klammern für die einzelnen Summanden wegzulassen. In dieser Form unterscheidet sich eine algebraische Summe von einem mehrgliedrigen Ausdrucke nur dadurch, daß die Rechnungszeichen + und — des letzteren in der ersteren als Vorzeichen, d. i. die additiven und subtractiven Glieder des letzteren in der ersteren bezüglich als positive und negative Summanden zu betrachten sind. Auf den Werth beider hat diese verschiedene Bedeutung der Zeichen, wie aus §. 30, Folgesatz 1 erhellet, keinen Einfluß.

Daraus folgt mit Rücksicht auf §. 24, 1 und 2:

1. Zu einer Zahl wird eine algebraische Summe addirt, indem man ihre einzelnen Summanden in beliebiger Reihenfolge und mit unveränderten Vorzeichen zu der Zahl hinzufügt.

2. Von einer Zahl wird eine algebraische Summe subtrahirt, indem man ihre einzelnen Summanden in beliebiger Reihenfolge und mit entgegengesetzten Vorzeichen zu der Zahl hinzufügt.

§. **34.** Alle für die absoluten Zahlen abgeleiteten Sätze über die Summen und Differenzen lassen sich schließlich auf das Commutationsgesetz der Addition (§. 11) zurückführen. Dieses Gesetz gilt aber (nach §. 32, 3) auch für algebraische Zahlen; folglich gelten alle bisher für die absoluten ganzen Zahlen erwiesenen Sätze auch für die algebraischen ganzen Zahlen.

Zusätze. 1. Hiernach ist zugleich der im Schlußabsatze des §. 15 bezüglich der Differenzen ausgesprochene Vorbehalt aufgehoben.

2. Die Ungleichheit zweier Zahlen (§. 5) muß nun dahin erklärt werden, daß von zwei Zahlen diejenige die kleinere ist, zu welcher man eine positive Zahl addiren muß, um die andere zu erhalten.

Ist $m > n$, so ist $-m < -n$. Ferner ist allgemein $+m > o$, $-m < o$ und $-m < +n$.

3. Die vorstehende Erklärung muß man festhalten, wenn die Sätze über die Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch die Addition und Subtraction (§§. 14 und 26) auf algebraische Zahlen ausgedehnt werden sollen.

Zweiter Abschnitt.

Multiplication und Division.

I. Multiplication mit absoluten ganzen Zahlen.

§. **35.** 1. Eine Zahl a mit einer Zahl b multipliciren heißt, a so oft als Summand setzen, als b Einheiten enthält. Man nennt a den Multiplicand, b den Multiplicator und beide Factoren; die Zahl aber, welche man durch das Multipliciren erhält, das Product. Das Product ist demnach eine Summe gleicher Summanden; der Multiplicand ist einer dieser gleichen Summanden; der Multiplicator zeigt an, wie viele solche Summanden gesetzt werden sollen. Der Multiplicand kann eine benannte Zahl sein; der Multiplicator ist immer eine unbenannte Zahl. Das Product aus dem Multiplicand a und dem Multiplicator b bezeichnet man durch $a \times b$, oder $a.b$ (d. i. a b mal), oder, wenn beide Factoren allgemeine Zahlen sind, auch blos durch a b.

Das Product zweier ganzer Zahlen wird auch ein Vielfaches des Multiplicands genannt. Z. B. $12 = 4.3$; 12 ist das 3fache von 4.

Folgesätze. a) Ist der Multiplicand 1, so ist das Product dem Multiplicator gleich.

b) Ist der Multiplicand 0, so ist auch das Product 0.

a) $1.a = a.$ b) $0.a = 0.$

2. Unter dem Producte mehrerer Zahlen versteht man das Product, welches erhalten wird, indem man das Product der beiden ersten Zahlen mit der dritten, das neue Product mit der vierten Zahl u. s. w. multiplicirt. Hiernach ist

$$a.b.c = (a\ b).c,$$
$$a.b.c.d. = [(a\ b).c].d, \text{ u. s. w.}$$

§. **36.** Ein Product, dessen Factoren einander gleich sind, wird abgekürzt dadurch bezeichnet, daß man nur einen Factor anschreibt und ihm rechts oben die Zahl beisetzt, welche anzeigt, wie oft derselbe vorkommt; z. B.:

$$a.a.a.a.a = a^5.$$

Ein Product gleicher Factoren heißt eine Potenz; die Anzahl der gleichen Factoren heißt der Potenzexponent, auch blos Exponent, und der Factor, der so oft vorkommt, als der Exponent anzeigt, die Basis oder Grundzahl. In der Potenz a^m, welche gelesen wird: „a zur mten" (Potenz erhoben) oder „a mit m potenzirt", ist a die Basis, m der Exponent. Die zweite Potenz a^2 nennt man insbesondere auch das Quadrat, die dritte a^3 den Cubus von a.

Wenn in einem mehrgliedrigen Ausdruck mehrere Potenzen derselben Basis vorkommen, so pflegt man wegen der leichteren Uebersicht die einzelnen Glieder nach den Potenzexponenten zu ordnen, indem man entweder mit der höchsten Potenz anfängt und dann immer niedrigere Potenzen folgen läßt, oder indem man

von der niedrigsten Potenz der gemeinschaftlichen Basis zu immer höheren Potenzen übergeht. Im ersten Falle heißt der Ausdruck fallend, im zweiten steigend geordnet. So erhält z. B. der Ausdruck

$$3x^2 + 4 + 5x - 6x^3 + x^4$$

fallend geordnet die Form:

$$x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 5x + 4,$$

und steigend geordnet die Form:

$$4 + 5x + 3x^2 - 6x^3 + x^4.$$

§. 37. Ein Product bleibt unverändert, wenn man die Factoren unter einander vertauscht. (Das Commutationsgesetz der Multiplication.)

Es sei a mit b zu multipliciren. Bildet man b Reihen, deren jede a Einheiten enthält, nämlich

$$\begin{array}{l} 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \text{ (amal)} \\ + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \\ + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{(b mal)}, \end{array}$$

so erhält man offenbar gleich viele Einheiten, ob man die Einheiten aller Horizontalreihen, oder die Einheiten aller Verticalreihen zählt. Im ersten Falle erhält man a b mal, also a.b; im zweiten b amal, also b.a. Es ist daher

$$a.b = b.a.$$

Der Satz gilt auch für jede beliebige Zahl von Factoren. Da nämlich in dem Producte mehrerer Factoren je zwei auf einander folgende Factoren bei ungeänderter Stellung der übrigen vertauscht werden dürfen, so kann durch wiederholtes Vertauschen zweier solcher Factoren jeder Factor an jede vorgeschriebene Stelle gebracht werden. So ist z. B. für drei Factoren

$$a.b.c = a.c.b = c.a.b = c.b.a = b.c.a = b.a.c.$$

Es ist demnach auch bei mehreren Factoren für das Product gleichgiltig, in welcher Ordnung dieselben multiplicirt werden.

Hier wurde vorausgesetzt, daß die Factoren unbenannt sind. Ist der Multiplicand eine benannte Zahl aE, wo E die Benennung bezeichnet, so hat man $aE.b = (ab)E = (ba)E$; allein es ist auch $bE.a = (ba)E$, folglich $aE.b = bE.a$ (§. 8, 2). Man darf also auch in diesem Falle die Factoren verwechseln, sobald dabei die Benennung des Multiplicands auf den früheren Multiplicator, der nun als Multiplicand auftritt, übertragen wird. Z. B.: 8 fl. $\times$ 5 = 5 fl. $\times$ 8 = 40 fl.

Folgesatz. Der Coefficient kann als Factor der Hauptgröße, vor welcher er steht, betrachtet werden.

$$3a = a + a + a = a.3 = 3.a.$$

Zusatz. Wendet man das Commutationsgesetz der Multiplication auf die Producte 1.a und 0.a an, so hat man

$$1.a = a.1 \quad \text{und} \quad 0.a = a.0.$$

Die Ausdrücke a.1 und a.0 haben nach der Erklärung der Multiplication keinen Sinn; man muß sie jedoch, damit die Giltigkeit des Commutationsgesetzes auch für die obigen Producte gewahrt werde, beibehalten und ihnen eine solche Bedeutung geben, daß man dadurch nichts Widersprechendes

erhält. Dieses geschieht, indem wir jene Ausdrücke, da $1.a = a$ und $0.a = 0$ (§. 35, 1. Folgef.) ist, durch die Gleichungen

$$a.1 = a \quad \text{und} \quad a.0 = 0$$

erklären. Daraus folgt:

a) Eine Zahl mit 1 multiplicirt gibt sich selbst zum Producte.
b) Eine Zahl mit 0 multiplicirt gibt 0 zum Producte.

Verbindung der Multiplication mit sich selbst.

§. **38.** 1. Ein Product wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man einen Factor damit multiplicirt.

$$(ab).c = (ac).b = a.(bc).$$

2. Eine Zahl wird mit einem Producte multiplicirt, indem man sie mit dem einen Factor und das erhaltene Product mit dem andern Factor multiplicirt.

$$a.(bc) = (ab).c = (ac).b.$$

Diese zwei Sätze, welche die Associationsgesetze der Multiplication heißen, folgen unmittelbar aus dem Commutationsgesetze in §. 37.

§. **39.** Potenzen derselben Basis werden multiplicirt, indem man die gemeinschaftliche Basis mit der Summe der Exponenten potenzirt.

$$a^m . a^n = a^{m+n}.$$

Beweis. $a^m . a^n = a.a.a.\ldots.(m\,\text{mal}).a.a.a.\ldots.(n\,\text{mal})$
$= a.a.a.\ldots.(m+n)\,\text{mal}$
$= a^{m+n}.$

Z. B.: $a^5.a^2 = a^7$; $a^4.a^5 = a^9$.

Verbindung der Multiplication mit der Addition und Subtraction.

§. **40.** 1. Eine Summe wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man jeden Summanden damit multiplicirt und die Theilproducte addirt.

$$(a + b).c = ac + bc.$$

Beweis. $(a + b).c = (a + b) + (a + b) + (a + b) + \ldots\ (c\,\text{mal})$
$= a + a + a + \ldots.(c\,\text{mal}) + b + b + b + \ldots.(c\,\text{mal})$ (§. 11)
$= ac + bc.$

Folgesatz. Zwei Producte, welche einen gemeinschaftlichen Factor haben, werden addirt, indem man die Summe der nicht gemeinschaftlichen Factoren mit dem gemeinschaftlichen Factor multiplicirt.

$$ac + bc = (a + b).c.$$

2. Eine Differenz wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man den Minuend und den Subtrahend damit multiplicirt und das zweite Product vom ersten subtrahirt.

$$(a - b).c = ac - bc.$$

Der Beweis wird ähnlich wie zu 1. geführt.

Folgesatz. Zwei Producte, welche einen gemeinschaftlichen Factor haben, werden subtrahirt, indem man die Differenz der nicht gemeinschaftlichen Factoren mit dem gemeinschaftlichen Factor multiplicirt.

$$ac - bc = (a - b).c.$$

Die durch die beiden Folgesätze ausgedrückten Operationen nennt man das Herausheben des gemeinschaftlichen Factors.

§. 41. 1. Eine Zahl wird mit einer Summe multiplicirt, indem man sie mit jedem Summanden multiplicirt und die Theilproducte addirt.

$$a.(b + c) = ab + ac.$$

Beweis. $a.(b + c) = (b + c).a$ (§. 37) $= ba + ca$ (§. 40, 1)
$= ab + ac$ (§. 37).

2. Eine Zahl wird mit einer Differenz multiplicirt, indem man sie mit dem Minuend und dem Subtrahend multiplicirt und von dem ersten Producte das zweite subtrahirt.

$$a.(b - c) = ab - ac.$$

Der Beweis ist dem vorigen analog.

Die in den §§. 40 und 41 angeführten Sätze heißen die Distributionsgesetze der Multiplication.

§. 42. Ein mehrgliedriger Ausdruck wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man jedes Glied desselben mit dieser Zahl multiplicirt und den einzelnen Producten die Zeichen der Glieder des Multiplicands gibt.

$$(a - b - c + d - e)\,f = af - bf - cf + df - ef.$$

Folgt aus §. 40.

2. Eine Zahl wird mit einem mehrgliedrigen Ausdrucke multiplicirt, indem man sie mit jedem Gliede desselben multiplicirt und die einzelnen Producte additiv oder subtractiv zusammenstellt, je nachdem sie aus der Multiplication mit additiven oder subtractiven Gliedern hervorgehen.

$$a\,(b - c - d + e - f) = ab - ac - ad + ae - af.$$

Folgt aus §. 41.

3. Ein mehrgliedriger Ausdruck wird mit einem mehrgliedrigen Ausdrucke multiplicirt, indem man den ganzen Multiplicand, d. i. jedes Glied desselben, mit jedem Gliede des Multiplicators multiplicirt und die einzelnen Producte additiv oder subtractiv zusammenstellt, je nachdem die bezüglichen Factoren gleiche oder verschiedene Rechnungszeichen haben.

$$(a - b + c)\,(d - e - f) = ad - bd + cd - ae + be - ce - af + bf - cf.$$

Folgt aus 1. und 2.

§. 43. Bei mehrgliedrigen Ausdrücken, welche nach den Potenzen derselben Basis fortschreiten, erhält man, wenn dieselben gleichartig geordnet sind, durch die Multiplication des Multiplicands mit den einzelnen Gliedern des Multiplicators Theilproducte, welche eben so geordnet sind. Man schreibt diese Theilproducte, um sie leichter zu reduciren, so an, daß ihre gleichnamigen Glieder unter einander zu stehen kommen. Z. B.:

$$\begin{array}{rl} 4a^2 - 3a - 4 & \text{Multiplicand} \\ 3a^2 - 7a + 5 & \text{Multiplicator} \\ \hline 12a^4 - 9a^3 - 12a^2 & \\ \quad - 28a^3 + 21a^2 + 28a & \\ \quad\quad + 20a^2 - 15a - 20 & \\ \hline 12a^4 - 37a^3 + 29a^2 + 13a - 20 & \text{Product.} \end{array}$$

Zusatz. Insbesondere erhält man:

1. $(a + b)^2 = (a + b)\ (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$, und
$(a - b)^2 = (a - b)\ (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$;

d. h. das Quadrat der Summe oder Differenz zweier Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate dieser Zahlen, bezüglich vermehrt oder vermindert um das doppelte Product derselben.

2. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$,

d. h. das Product aus der Summe und Differenz zweier Zahlen ist gleich der Differenz ihrer Quadrate.

§. 44. Aus den Sätzen der vorhergehenden §§. lassen sich für die Bestimmung des Productes von irgend zwei Gliedern beliebiger Ausdrücke folgende Regeln zusammenfassen:

1. Rücksichtlich des Zeichens ist das Product zweier Glieder additiv oder subtractiv zu setzen, je nachdem diese Glieder gleiche oder verschiedene Rechnungszeichen haben.

2. Der Coefficient des Productes zweier Glieder ist das Product aus den Coefficienten dieser Glieder; denn

$$3a.4b = 3.a.4.b = 3.4.a.b = 12ab.$$

3. Die Hauptgröße des Productes zweier Glieder erhält man, indem man die Factoren, welche in den Hauptgrößen dieser Glieder vorkommen, (in alphabetischer Ordnung) neben einander stellt, und bei Potenzen derselben Basis die gemeinschaftliche Basis mit der Summe der Exponenten potenzirt.

Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch die Multiplication.

§. 45. 1. Gleiches mit Gleichem multiplicirt gibt Gleiches.

Ist $a = b$ und $c = d$, so ist $ac = bd$.

Folgt unmittelbar aus §. 8, 3.

2. Gleiches mit Ungleichem multiplicirt gibt Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

Ist $a = b$ und $c > d$, so ist $ac > bd$.

Beweis. Es sei $c = d + w$, so ist nach 1. $ac = b(d + w)$, oder $ac = bd + bw$ (§. 41, 1). Nun ist $bd + bw > bd$ (§. 8, 5), somit auch $ac > bd$.

3. Ungleiches mit Ungleichem bei demselben Ungleichheitszeichen multiplicirt gibt Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

Ist $a > b$ und $c > d$, so ist $ac > bd$.

Der Beweis ist unter Zuziehung von 2. und §. 41, 1 dem vorigen ähnlich.

II. Division mit absoluten ganzen Zahlen.

§. 46. Eine Zahl a durch eine Zahl b dividiren heißt, aus a als dem Producte zweier Zahlen und b als dem einen der Factoren den andern Factor suchen. Man nennt das gegebene Product a den Dividend, den gegebenen Factor b den Divisor, den gesuchten Factor den Quotienten, und bezeichnet den letzteren mit $a : b$ oder $\frac{a}{b}$.

Ein Quotient ist also ein Ausdruck für diejenige Zahl, welche mit dem Divisor multiplicirt den Dividend gibt; oder es ist

$$\frac{a}{b} . b = a.$$

Die Division ist, wenn der Multiplicator als Divisor gegeben ist, im Begriffe wesentlich verschieden von der Division, in welcher der Multiplicand als Divisor gegeben ist. Im ersten Falle ist die Division ein Theilen, wobei der Theil gesucht wird, welcher so oft genommen, wie der Divisor anzeigt, den Dividend hervorbringt; der Divisor ist in diesem Falle eine unbenannte Zahl, der Dividend kann auch eine Benennung haben, welche dann auch der Quotient erhält. Z. B. 15 fl. : 3 = 5 fl. Im zweiten Falle ist die Division ein Vergleichen oder Messen, wobei untersucht wird, wie oft der Divisor in dem Dividend enthalten ist; ist hier der Dividend benannt, so muß auch der Divisor benannt und zwar mit dem Dividend gleichnamig sein; der Quotient ist eine unbenannte Zahl. Z. B. 15 fl. : 3 fl. = 5.

Der Quotient, als reine Zahl betrachtet, ist jedoch bei gleichem Dividend und gleichem Divisor in beiden Fällen derselbe (§. 37), so daß man bei der Entwicklung der Divisionsgesetze diese beiden Arten der Division nicht weiter zu unterscheiden braucht.

Um die Division auszuführen, sucht man entweder in der Zahlenreihe diejenige Zahl auf, welche so oft gesetzt, wie der Divisor anzeigt, den Dividend gibt; oder man subtrahirt wiederholt den Divisor zuerst vom Dividend, dann von dem jedesmal erhaltenen Reste so oft als möglich; die Zahl, welche anzeigt, wie oft die Subtraction verrichtet werden kann, ist der Quotient. Die Division zweier Zahlen kann an der natürlichen Zahlenreihe nur dann ausgeführt werden, wenn der Dividend ein Vielfaches des Divisors (§. 35, 1) ist.

Wir werden daher bei den folgenden Sätzen vorläufig voraussetzen, daß die Dividenden der vorkommenden Quotienten Vielfache ihrer Divisoren sind.

§. 47. Folgesätze. 1. Multiplicirt man den Quotienten zweier Zahlen mit dem Divisor, so erhält man den Dividend.

$$(a : b) . b = a.$$

2. Dividirt man das Product zweier Zahlen durch den einen Factor, so erhält man den andern Factor.

$$ab : a = b; \qquad ab : b = a.$$

3. Eine Zahl bleibt unverändert, wenn man sie mit einer Zahl multiplicirt und durch dieselbe Zahl dividirt.

$$a = (ab) : b; \qquad a = (a : b) . b.$$

Die Multiplication und die Division sind demnach einander entgegengesetzt; letztere ist eine inverse Operation der ersteren, und zwar die einzige, da es wegen der Vertauschbarkeit zweier Factoren gleichgiltig ist, ob der erste Factor oder der zweite gesucht wird.

4. Jede Zahl durch sich selbst dividirt gibt 1 zum Quotienten.

$$a : a = 1; \text{ denn } 1 . a = a.$$

5. Jede Zahl durch 1 dividirt gibt sich selbst zum Quotienten.

$$a : 1 = a; \qquad 1 : 1 = 1.$$

6. Null durch eine von Null verschiedene Zahl dividirt gibt Null zum Quotienten.

$$0 : a = 0; \text{ denn } 0 . a = 0.$$

7. Null durch Null dividirt kann jede beliebige Zahl zum Quotienten geben.

$0 : 0 = a$, wo a eine beliebige Zahl bedeutet; denn $a . 0 = 0$.

Der Ausdruck $\frac{0}{0}$ ist daher ein Symbol der Unbestimmtheit.

Verbindung der Division mit sich selbst und mit der Multiplication.

§. 48. 1. Ein Product wird durch eine Zahl dividirt, indem man einen der Factoren dadurch dividirt.

$$\frac{ab}{c} = \frac{a}{c}.b = a.\frac{b}{c}.$$

Beweis. a) Ist $\frac{a}{c}.b$ der richtige Quotient der Zahlen ab und c, so muß er mit dem Divisor c multiplicirt, den Dividend ab geben (§. 47, 1). Nun ist wirklich

$$\left\{\frac{a}{c}.b\right\}.c = \left\{\frac{a}{c}.c\right\}.b \text{ (§. 38, 1)} = a.b \text{ (§. 47, 1).}$$

b) Ebenso ist auch $a.\frac{b}{c}$ ein richtiger Ausdruck für den Quotienten $\frac{ab}{c}$; denn

$$\left\{a.\frac{b}{c}\right\}.c = a.\left\{\frac{b}{c}.c\right\} \text{ (§. 38, 1)} = a.b \text{ (§. 47, 1).}$$

Folgesatz. Soll eine Zahl mit einer zweiten multiplicirt und durch eine dritte dividirt werden, so ist es gleichgiltig, in welcher Reihenfolge man multiplicirt und dividirt.

2. Die Umkehrung des Satzes 1. gibt

$$a.\frac{b}{c} = \frac{ab}{c} = \frac{a}{c}.b,$$

d. h. Eine Zahl wird mit einem Quotienten multiplicirt, indem man sie mit dem Dividend multiplicirt und durch den Divisor dividirt.

§. 49. Eine Zahl wird durch ein Product dividirt, indem man sie durch den einen Factor und den erhaltenen Quotienten durch den andern Factor dividirt.

$$\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b.$$

Beweis. Sowohl $\frac{a}{b} : c$ als $\frac{a}{c} : b$ entspricht der in §. 47, 1 gestellten Bedingung. Denn es ist

$$\left\{\frac{a}{b} : c\right\}.bc = bc.\left\{\frac{a}{b} : c\right\} \text{ (§. 37)} = \frac{bc}{c}.\frac{a}{b} \text{ (§. 48, 2)}$$
$$= b.\frac{a}{b} \text{ (§. 47, 2)} = a \text{ (§. 47, 1).}$$

Ebenso erhält man

$$\left\{\frac{a}{c} : b\right\}.bc = a.$$

§. 50. Ein Quotient wird durch eine Zahl dividirt, indem man den Dividend dadurch dividirt, oder den Divisor damit multiplicirt.

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b = \frac{a}{bc}.$$

Ergibt sich durch Umkehrung aus §. 49.

Folgesatz. Soll eine Zahl durch zwei Zahlen dividirt werden, so darf man entweder durch dieselben einzeln in beliebiger Reihenfolge, oder auch sogleich durch ihr Product dividiren.

§. 51. 1. Eine Zahl wird durch einen Quotienten dividirt, indem man sie durch den Dividend dividirt und mit dem Divisor multiplicirt.

$$a : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}.c = \frac{ac}{b}.$$

Beweis. Es ist sowohl

$$\left\{\frac{a}{b}.c\right\}.\frac{b}{c} = \frac{a}{b}.\left\{c.\frac{b}{c}\right\} \text{ (§. 38, 1)} = \frac{a}{b}.b = a \text{ (§. 47, 1),}$$

als auch

$$\frac{ac}{b}.\frac{b}{c} = \left(\frac{ac}{b}.b\right) : c \text{ (§. 48, 2)} = ac : c \text{ (§. 47, 1)} = a \text{ (§. 47, 2).}$$

2. Durch Umkehrung erhält man

$$\frac{a}{b}.c = \frac{ac}{b} = a : \frac{b}{c},$$

d. h. Ein Quotient wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man den Dividend damit multiplicirt, oder den Divisor dadurch dividirt.

§. 52. 1. Ein Product bleibt unverändert, wenn man den einen Factor mit einer Zahl multiplicirt und den andern durch dieselbe Zahl dividirt.

$$ab = ac.(b : c) = (a : c).bc.$$

Es ist

$$ab = a.\{(b : c).c\} \text{ (§. 47, 3)} = ac.(b : c) \text{ (§. 38, 2);}$$
$$ab = a.\{(b.c) : c\} \text{ (§. 47, 3)} = (a : c).bc \text{ (§. 48, 2).}$$

2. Ein Quotient bleibt unverändert, wenn man den Dividend und den Divisor mit derselben Zahl multiplicirt oder beide durch dieselbe Zahl dividirt.

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} = \frac{a : c}{b : c}.$$

Es ist

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{bc : c} \text{ (§. 47, 3)} = \frac{ac}{bc} \text{ (§. 51, 1);}$$
$$\frac{a}{b} = \frac{a}{(b : c).c} \text{ (§. 47, 3)} = \frac{a : c}{b : c} \text{ (§. 49).}$$

Die voranstehenden Sätze über die Division §§. 48—52 sind ganz analog den Sätzen über die Subtraction §§. 17—21.

§. 53. Potenzen derselben Basis werden dividirt, indem man von dem Exponenten des Dividends den Exponenten des Divisors subtrahirt und die gemeinschaftliche Basis mit der Differenz der Exponenten potenzirt.

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Beweis. Damit hier die Division nach §. 46 ausführbar sei, muß vorausgesetzt werden, daß n nicht größer als m sei. Man setze $m = n + w$, oder $m - n = w$, wo auch $w = 0$ sein kann; dann ist

$$a^m : a^n = a^{n+w} : a^n = a^n . a^w : a^n \text{ (§. 38)}$$
$$= a^w \text{ (§. 47, 2)} = a^{m-n}.$$

Z. B. $a^8 : a^3 = a^5$; $a^7 : a^4 = a^3$.

Zusatz. Nach diesem Satze ist

$$a^{n+1} : a^n = a^1 \quad \text{und} \quad a^n : a^n = a^0.$$

Da aber die Ausdrücke a^1 und a^0 nach der in §. 36 gegebenen Erklärung einer Potenz keinen Sinn haben, so muß für dieselben, damit der obige Satz auch für die angeführten zwei Fälle Geltung behalte, erst die Bedeutung festgestellt werden. Nach den bisher entwickelten Divisionsgesetzen ist nun $a^{n+1} : a^n\, a =$ und $a^n : a^n = 1$; folglich ist a^1 gleichbedeutend mit a, und a^0 gleichbedeutend mit 1.

a) Die erste Potenz einer Zahl ist dieser Zahl selbst gleich.

b) Die nullte Potenz einer Zahl ist gleich 1.

Verbindung der Division mit der Addition und Subtraction.

§. 54. 1. Eine Summe wird durch eine Zahl dividirt, indem man jeden Summanden dadurch dividirt und die so erhaltenen Theilquotienten addirt.

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Beweis. $\left\{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right\} . c = \frac{a}{c} . c + \frac{b}{c} . c$ (§. 40, 1) $= (a + b)$ (§. 47, 1).

Folgesatz. Zwei Quotienten mit gleichem Divisor werden addirt, indem man die Summe ihrer Dividenden durch den gemeinschaftlichen Divisor dividirt.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

2. Eine Differenz wird durch eine Zahl dividirt, indem man den Minuend und den Subtrahend dadurch dividirt und von dem ersten Quotienten den zweiten subtrahirt.

$$\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}.$$

Beweis. $\left\{\frac{a}{c} - \frac{b}{c}\right\} . c = \frac{a}{c} . c - \frac{b}{c} . c$ (§. 40, 2) $= a - b$ (§. 47, 1).

Folgesatz. Zwei Quotienten mit gleichem Divisor werden subtrahirt, indem man die Differenz ihrer Dividenden durch den gemeinschaftlichen Divisor dividirt.

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Wie man Quotienten von ungleichen Divisoren addirt oder subtrahirt, wird später (§. 100 und §. 102) gezeigt werden.

§. 55. Ein mehrgliedriger Ausdruck wird durch eine Zahl dividirt, indem man jedes Glied desselben durch diese Zahl dividirt und den einzelnen Quotienten die Rechnungszeichen der Glieder des Dividends gibt.

$$\frac{a-b-c+d-e}{f} = \frac{a}{f} - \frac{b}{f} - \frac{c}{f} + \frac{d}{f} - \frac{e}{f}.$$

Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich aus §. 54, 1 und 2.

§. 56. Es sei der Quotient $\frac{A}{B}$, wo A und B mehrgliedrige, und zwar gleichartig geordnete Ausdrücke bedeuten, zu entwickeln. Da der Dividend A das Product aus dem Divisor B und dem Quotienten ist, so ist nach §. 42, 3 das erste Glied in A das Product aus dem ersten Gliede in B und dem ersten Gliede im Quotienten. Man findet daher das erste Glied q des Quotienten, indem man das erste Glied des Dividends durch das erste Glied des Divisors dividirt, und es ist

$$\frac{A}{B} = q + x,$$

wo x den noch fehlenden Theil des Quotienten vorstellt. Zur Bestimmung von x hat man

$$x = \frac{A}{B} - q = \frac{A}{B} - \frac{Bq}{B} = \frac{A - Bq}{B}$$ (Folges. zu §. 54, 2);

daher ist

$$\frac{A}{B} = q + \frac{A - Bq}{B}.$$

Man erhält also den noch fehlenden Theil des Quotienten, indem man mit dem ersten Gliede des Quotienten den Divisor multiplicirt, das erhaltene Product von dem Dividend subtrahirt und den Rest durch den Divisor dividirt.

Auf der wiederholten Anwendung der Formel $\frac{A}{B} = q + \frac{A - Bq}{B}$ beruhet nun folgendes Verfahren für das Dividiren zweier mehrgliedriger Ausdrücke:

Man dividire, nachdem die Glieder des Dividends und des Divisors gleichartig geordnet wurden, das erste Glied des Dividends durch das erste Glied des Divisors; dadurch erhält man das erste Glied des Quotienten; mit diesem Theilquotienten multiplicire man den ganzen Divisor und subtrahire das Product vom ganzen Dividend. Mit dem Reste verfahre man dann eben so, wie mit dem ursprünglichen Dividend, um das zweite Glied des Quotienten zu erhalten, u. s. f.

Z. B.: $(3a^2 - 4ab - 4b^2) : (3a + 2b) = a - 2b$

$$\begin{array}{r} 3a^2 + 2ab \\ - \quad - \\ \hline - 6ab - 4b^2 \\ - 6ab - 4b^2 \\ + \quad + \\ \hline 0 \end{array}$$

Zusatz. Insbesondere ist:

1) $(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b$,

$$\begin{array}{r} a^2 + ab \\ - \quad - \\ \hline - ab - b^2 \\ - ab - b^2 \\ + \quad + \\ \hline 0 \end{array}$$

2) $(a^2 - b^2) : (a - b) = a + b$;

$$\begin{array}{r} a^2 - ab \\ - \quad + \\ \hline + ab - b^2 \\ + ab - b^2 \\ - \quad + \\ \hline 0 \end{array}$$

d. h. die Differenz der Quadrate zweier Zahlen dividirt durch die Summe oder die Differenz dieser Zahlen gibt bezüglich die Differenz oder die Summe derselben Zahlen.

§. 57. Mit Rücksicht auf die vorhergehenden Sätze lassen sich zur Bestimmung des Quotienten zweier Glieder beliebiger Ausdrücke folgende Regeln zusammenstellen:

1. Bezüglich des Zeichens ist der Quotient zweier Glieder additiv oder subtractiv zu setzen, je nachdem die beiden Glieder gleiche oder verschiedene Rechnungszeichen haben. (Folgt aus §. 42 und §. 47, 2.)

2. Der Coefficient des Quotienten zweier Glieder ist der Quotient der Coefficienten dieser Glieder.

3. Die Hauptgröße des Quotienten zweier Glieder erhält man, indem man von den Factoren, welche in den Hauptgrößen dieser Glieder vorkommen, diejenigen, welche beiden gemeinschaftlich sind, in gleicher Anzahl wegläßt, folglich bei Potenzen derselben Basis den Exponenten des Divisors von jenem des Dividends subtrahirt und die gemeinschaftliche Basis mit dieser Differenz potenzirt.

Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch die Division.

§. 58. 1. Gleiches durch Gleiches dividirt gibt Gleiches.

Ist $a = b$ und $c = d$, so ist $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Folgt unmittelbar aus §. 8, 3.

2. Ungleiches durch Gleiches dividirt gibt Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

Ist $a > b$ und $c = d$, so ist $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

Beweis. Wäre nicht $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$, so müßte $\frac{a}{c} \leqq \frac{b}{d}$ sein; dann wäre bezüglich auch $\frac{a}{c}.c \leqq \frac{b}{d}.d$ (§. 45, 1 und 2), daher $a \leqq b$ (47, 1), was gegen die Voraussetzung ist.

3. Gleiches durch Ungleiches dividirt gibt Ungleiches mit entgegengesetztem Ungleichheitszeichen.

Ist $a = b$ und $c > d$, so ist $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$.

Beweis. Wäre $\frac{a}{c} \geqq \frac{b}{d}$, so müßte in beiden Fällen $\frac{a}{c}.c > \frac{b}{d}.d$ (§. 45, 2 und 3), daher $a > b$ (§. 47, 1) sein, was gegen die Voraussetzung ist.

4. Ungleiches durch Ungleiches mit entgegengesetztem Ungleichheitszeichen dividirt gibt Ungleiches mit dem ersten Ungleichheitszeichen.

Ist $a > b$ und $c < d$, so ist $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

Beweis. Wäre $\frac{a}{c} \leqq \frac{b}{d}$, so müßte in beiden Fällen $\frac{a}{c}.c < \frac{b}{d}.d$ (§. 45, 2 und 4), daher $a < b$ (§. 47, 1) sein, was gegen die Voraussetzung ist.

III. Multiplication und Division mit algebraischen ganzen Zahlen.

§. 59. Der für absolute Zahlen aufgestellte Begriff der Multiplication (§. 35) muß für positive und negative Zahlen mit Rücksicht auf deren Gegensatz dahin erweitert werden, daß man hier, je nachdem der Multiplicator positiv oder negativ ist, den Multiplicand in demselben oder in dem entgegengesetzten Sinne, d. i. mit unverändertem oder mit entgegengesetztem Vorzeichen, so oft als Summand zu setzen hat, als der Multiplicator Einheiten enthält.

Zwei gleich bezeichnete Factoren geben ein positives, zwei ungleich bezeichnete Factoren geben ein negatives Product.

$$(+a).(+b) = +ab,$$
$$(-a).(-b) = +ab,$$
$$(+a).(-b) = -ab,$$
$$(-a).(+b) = -ab.$$

Beweis. $(+a).(+b)$ zeigt an, daß man den Multiplicand $+a$ mit unverändertem Vorzeichen b mal als Summand zu setzen hat, wodurch man nach §. 30, Folges. 2 ein positives Resultat erhält.

$(-a).(-b)$ zeigt an, daß man den Multiplicand $-a$ mit entgegengesetztem Vorzeichen, also $+a$, b mal als Summand zu setzen hat, wodurch man gleichfalls ein positives Resultat erhält.

Aehnlich sind die Beweise für den dritten und vierten Fall.

Folgesätze. 1. Das Product zweier algebraischer Zahlen bleibt ungeändert, wenn man dieselben unter einander vertauscht.

Es ist $\pm a.+b = \pm ab$, und $+b.\pm a = \pm ba = \pm ab$ (§. 37); daher $\pm a.+b = +b.\pm a$. Eben so folgt

$$\pm a.-b = -b.\pm a.$$

2. Das Product von beliebig vielen positiven Zahlen ist positiv.

3. Das Product von lauter negativen Zahlen ist positiv oder negativ, je nachdem die Anzahl der Factoren eine gerade oder ungerade (§. 78, Zusatz 2) ist.

§. **60.** Der in §. 46 für absolute Zahlen gegebene Begriff der Division gilt unverändert auch für algebraische Zahlen.

Der Quotient zweier algebraischer Zahlen ist positiv oder negativ, je nachdem dieselben gleiche oder verschiedene Vorzeichen haben.

$$(+a):(+b) = +q,$$
$$(-a):(-b) = +q,$$
$$(+a):(-b) = -q,$$
$$(-a):(+b) = -q,$$

wo q den absoluten Werth des Quotienten vorstellt.

Beweis. Ist der Dividend (das Product) positiv, so müssen, wie aus §. 59 folgt, der Divisor und der Quotient (die beiden Factoren) gleichbezeichnet sein; also ist $(+a):(+b) = +q$ und $(+a):(-b) = -q$.

Ist der Dividend negativ, so müssen Divisor und Quotient verschiedene Vorzeichen haben; also ist $(-a):(+b) = -q$ und $(-a):(-b) = +q$.

§. **61.** Alle für die Producte und Quotienten absoluter Zahlen erwiesenen Gesetze lassen sich aus den Commutationsgesetzen

$$a + b = b + a \text{ (§. 11) und}$$
$$a.b = b.a \text{ (§. 37),}$$

wo a und b absolute ganze Zahlen bedeuten, durch bloße Umformungen herleiten. Da nun diese zwei Gesetze auch für algebraische Zahlen richtig sind (§. 32, 3 und §. 59, Folgesatz 1), so gelten alle für absolute ganze Zahlen bewiesenen Sätze über die Producte und Quotienten auch für algebraische ganze Zahlen.

Insbesondere gelten die Sätze über die Multiplication und Division mehrgliedriger Ausdrücke (§§. 42—44, 56—58) auch für algebraische Summen; nur müssen die additiven und subtractiven Glieder (mit Rücksicht auf §. 33) hier als positive und negative Summanden betrachtet werden.

In Beziehung auf die Sätze über die Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen (§. 45 und 58) gilt die in §. 34, Zusatz 2 gemachte Bemerkung.

IV. Dekadische ganze Zahlen.

1. Zahlensysteme.

Zahlensysteme überhaupt.

§. **62.** Eine übersichtliche Anordnung aller besonderen Zahlen, welche den Zweck hat, mit einigen Zahlenausdrücken jede beliebig große Zahl darzustellen, nennt man ein Zahlensystem.

Um ein Zahlensystem zu bilden, zählt man in der natürlichen Zahlenreihe nur bis zu einer bestimmten, jedoch 1 überschreitenden Zahl b hinauf, welche man noch unmittelbar auffassen will, und welche die Grundzahl oder Basis des Zahlensystems heißt. Betrachtet man diese als eine neue Einheit und kommt dann beim weitern Zählen auf eine Zahl, welche diese neue Einheit so vielmal enthält, wie die Basis anzeigt, also auf die Zahl $b.b = b^2$, so sieht man diese wieder als eine neue Einheit oder als Einheit der nächst höheren Ordnung an. Gelangt man bei fortgesetztem Zählen zu einer Zahl, welche die höhere Einheit b^2 so oft enthält, wie b anzeigt, also zu der Zahl $b^2.b = b^3$, so wird diese als Einheit einer noch höheren Ordnung angesehen. Durch Fortsetzung dieses Vorganges kann man neue Einheiten immer höherer Ordnungen bilden.

Die auf einander folgenden Einheiten $b, b^2, b^3, \ldots$ erscheinen als Potenzen der Basis b und heißen, den Exponenten derselben gemäß, Einheiten der ersten, zweiten, dritten, ... Ordnung, oder auch des ersten, zweiten, dritten, ... Ranges, zum Unterschiede von der ursprünglichen Einheit, die man, weil $1 = b^0$ (§. 53, Zus.) ist, auch Einheit der nullten Ordnung nennen kann.

§. **63.** Jede Zahl kann als eine Summe von Theilen dargestellt werden, deren jeder die Einheit einer bestimmten Ordnung, versehen mit einem Coefficienten, welcher kleiner als die Basis ist, enthält.

Beweis. Ist b^n die höchste Einheit, welche in der ganzen Zahl N vorkommt, so kann man

$$N = a_n b^n + N_1$$

setzen, wo $a_n < b$ und $N_1 < b^n$ sein muß. Eben so kann man weiter setzen:

$$N_1 = a_{n-1} b^{n-1} + N_2, \text{ wo } a_{n-1} < b,\ N_2 < b^{n-1};$$
$$N_2 = a_{n-2} b^{n-2} + N_3, \text{ wo } a_{n-2} < b,\ N_3 < b^{n-2};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$N_{n-2} = a_2 b^2 + N_{n-1}, \text{ wo } a_2 < b,\ N_{n-1} < b^2;$$
$$N_{n-1} = a_1 b + a_0, \text{ wo } a_1 < b,\ a_0 < b.$$

Substituirt man nach und nach die Werthe von $N_1, N_2, \ldots N_{n-2}, N_{n-1}$ in N, so erhält man

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + a_{n-2} b^{n-2} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0,$$

wobei übrigens von den Coefficienten $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_1, a_0$ einige oder auch alle 0 sein können.

Dieser Ausdruck ist daher die allgemeine Form für jede beliebige ganze Zahl in dem Zahlensysteme, dessen Basis b ist.

Um nun in diesem Systeme alle beliebigen ganzen Zahlen zu benennen, genügt es, blos denjenigen Zahlen, welche kleiner als b sind, so wie den auf einander folgenden Potenzen von b besondere Namen zu geben. Um in diesem Systeme alle beliebigen Zahlen schriftlich darzustellen, bedarf es nur besonderer Zeichen (Ziffern) für die Zahlen, welche kleiner als b sind, und des Zeichens 0 für das Nichtvorhandensein einer bestimmten Potenz von b, somit zusammen so vieler Ziffern, wie die Basis b anzeigt.

Da man jede ganze Zahl, die größer als 1 ist, als Basis eines Zahlensystems wählen kann, so lassen sich unzählig viele verschiedene Zahlensysteme herstellen. Die wenigsten Zeichen verlangt das dyadische Zahlensystem mit der Basis zwei, indem man darin jede Zahl durch die zwei Zeichen 0 und 1 darstellen kann; dasselbe führt jedoch die Unbequemlichkeit mit sich, daß auch kleine Zahlen schon mit vielen Ziffern geschrieben werden müssen.

Dekadisches Zahlensystem.

§. 64. Das gegenwärtig allgemein gebräuchliche Zahlensystem ist das dekadische, dessen Basis zehn ist.

In diesem drückt man die ersten neun Zahlen, Einer, mit den bekannten Zahlwörtern eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun aus und nennt die Einheit der ersten, zweiten, dritten, vierten, ... Ordnung bezüglich einen Zehner, ein Hundert, ein Tausend, ein Zehntausend, ... Verbindet man mit jenen Zahlwörtern die Benennungen der auf einander folgenden Ordnungen von Einheiten, so kann dadurch jede beliebig große Zahl benannt werden.

Um die dekadischen Zahlen schriftlich darzustellen, genügen die Ziffern für die ersten neun Zahlen: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, zu denen noch die 0 kommt.

Bezeichnet man mit a, b, c, ... p, q, r irgend eine der Zahlen 0, 1, 2, ... 8, 9, so ist der Ausdruck

$$r.10^n + q.10^{n-1} + p.\ 10^{n-2} + \ldots + c.10^2 + b.10 + a$$

die allgemeine Form einer dekadischen ganzen Zahl. Man kürzt aber diese Form dahin ab, daß man die Potenzen von 10 wegläßt und nur die Coefficienten (Ziffern) anschreibt, und jeder Ziffer einen zehnfachen Werth anweist, wenn man sie in die nächste Rangstelle nach links versetzt. In diesem Sinne ist z. B.

$$35684 = 3.10^4 + 5.10^3 + 6.10^2 + 8.10 + 4, \text{ oder}$$
$$= 30000 + 5000 + 600 + 80 + 4.$$

Der Rang jeder einzelnen Ziffer wird durch den Exponenten derjenigen Potenz von 10 bestimmt, als deren Coefficienten man sich die Ziffer vorstellen muß; man kann daher diesen Exponenten von 10 den Rangexponenten der Ziffer nennen. Z. B. in 35684 hat die Ziffer 6 den Rangexponenten 2, die höchste Ziffer 3 den Rangexponenten 4.

Folgesätze. 1. In jeder dekadischen Zahl ist der Rangexponent der höchsten Stelle um 1 kleiner als die Anzahl der Ziffern.

2. Der Werth jeder dekadischen Zahl ist kleiner als eine Einheit der ihrer höchsten Ziffer unmittelbar vorausgehenden höheren Stelle. Denn hätte jede Ziffer dieser Zahl auch den höchsten möglichen Werth 9, so müßte man noch einen Einer dazu addiren, um eine Einheit jener höheren Stelle zu erhalten.

3. Jede m zifferige Zahl ist $\geqq 10^{m-1}$, aber $< 10^m$. (Folgt aus 1. und 2.)

2. Das Rechnen mit dekadischen Zahlen.

Addition dekadischer Zahlen.

§. **65.** Das Rechnen mit dekadischen ganzen Zahlen beruht auf den Vorschriften, welche in diesem Abschnitte für das Rechnen mit mehrgliedrigen Ausdrücken, die nach den Potenzen derselben Basis geordnet sind, entwickelt wurden; nur muß dabei wegen der einfacheren Darstellung der dekadischen Zahlen durch neben einander geschriebene Ziffern auf den Rang dieser einzelnen Ziffern Rücksicht genommen werden.

Ist M =	d.10^3 +	c.10^2 +	b.10 +	a, und
N =		r.10^2 +	q.10 +	p, so ist
M + N =	d.10^3 +	(c + r).10^2 +	(b + q).10 +	(a + p).

Man schreibt also beim Addiren dekadischer Zahlen die Ziffern von gleicher Rangstelle unter einander, und darunter nach der Ordnung die Summe der unter einander stehenden Ziffern.

Ist die Summe der unter einander stehenden Ziffern zweiziffrig, z. B. b + q = 1.10 + m, so behalte man an dieser Stelle nur die niedrigere Ziffer m, und addire die höhere zu den Ziffern dieser höheren Rangstelle. Die obige Summe nimmt in diesem Falle die Gestalt an:

$$M + N = d.10^3 + (c + r + 1).10^2 + m.10 + (a + p).$$

§. **66.** Die Summe zweier Zahlen hat entweder eben so viele Ziffern als der größere Summand, oder um eine Ziffer mehr.

Hat M m und N n Ziffern, wobei $M > N$ vorausgesetzt wird, so ist $M \geqq 10^{m-1}$, aber $< 10^m$, ferner $N \geqq 10^{n-1}$, aber $< 10^n$, folglich $M + N \geqq 10^{m-1} + 10^{n-1}$, aber $< 10^m + 10^n$, daher $M + N > 10^{m-1}$, aber $< 2.10^m$; die Summe M + N hat also mindestens m und höchstens m + 1 Ziffern.

Subtraction dekadischer Zahlen.

§. **67.** Ist

M =	d.10^3 +	c.10^2 +	b.10 +	a, und
N =		r.10^2 +	q.10 +	p, so ist
M − N =	d.10^3 +	(c − r).10^2 +	(b − q).10 +	(a − p).

Beim Subtrahiren dekadischer Zahlen schreibt man daher die Ziffern von gleicher Rangstelle unter einander und darunter die Differenzen der unter einander stehenden Ziffern.

Ist in einer Rangstelle die Ziffer des Subtrahends größer als die des Minuends, so vermehrt man die letztere, um subtrahiren zu können, um 10, und vermehrt, damit die Differenz unverändert bleibe (§. 21, 2), auch den Subtrahend um 10 Einheiten desselben Ranges oder um 1 Einheit in der nächst höheren Rangstelle. Ist oben z. B. q > b, so nimmt die Differenz folgende Gestalt an:

$$M - N = d.10^3 + [c - (r + 1)].10^2 + [(b + 10) - q].10 + (a - p).$$

§. **68.** Die Differenz zweier dekadischer Zahlen hat höchstens so viele Ziffern als der Minuend, kann ihrer aber auch unbestimmt weniger haben.

Ist M m ziffrig und N n ziffrig, M − N = D, daher M = N + D, so hat (nach §. 67) M so viele Ziffern als der größere der beiden Summanden N und D, oder um eine mehr. Folglich kann D nicht mehr Ziffern haben, als M, wohl aber unbestimmt weniger, sofern N > D ist.

Multiplication dekadischer Zahlen.

§. **69**. Wenn $M = e.10^4 + d.10^3 + c.10^2 + b.10 + a$, so ist

$$M.p = ep.10^4 + dp.10^3 + cp.10^2 + bp.10 + ap.$$

Eine mehrziffrige Zahl wird daher mit einer einziffrigen multiplicirt, indem man die Einer, Zehner, Hunderte,... des Multiplicands mit dem Multiplicator multiplicirt und die einzelnen Producte unter die multiplicirten Ziffern setzt.

Ist eines dieser Producte zweiziffrig, z. B. $cp = r.10 + s$, so behalte man an dieser Stelle nur die niedrigere Ziffer s, und zähle die höhere r zu dem Producte in dieser höheren Rangstelle.

§. **70**. Ist M irgend eine mehrziffrige Zahl und

$N = p.10^3 + q.10^2 + r.10 + s$, so ist

$$M.N = Mp.10^3 + Mq.10^2 + Mr.10 + Ms.$$

Um daher zwei mehrziffrige Zahlen mit einander zu multiplicíren, multiplicirt man den Multiplicand mit jeder Ziffer des Multiplicators, von der höchsten angefangen, multiplicirt dann die erhaltenen Theilproducte der Ordnung nach mit den fallenden Potenzen von 10, was dadurch geschieht, daß man jedes folgende Product um eine Stelle weiter gegen die Rechte rückt, und addirt die unter einander stehenden Ziffern der Theilproducte.

z. B.	7318	oder	7318	
	473		473	
	2927200		29272	0
	512260		51226	0
	21954		21954	
	3461414		3461414	

Zusatz. Setzt man den Multiplicator so unter den Multiplicand, daß seine höchste Ziffer unter die Einer des letzteren kommt, und schreibt die niedrigste Ziffer des ersten Theilproductes unter die niedrigste Ziffer des Multiplicands, so haben die einzelnen Ziffern des Productes gleichen Rang mit den gerade darüber stehenden Stellen des Multiplicators.

§. **71**. Das Product zweier dekadischer Zahlen hat entweder so viele Ziffern als beide Factoren zusammengenommen, oder um eine Ziffer weniger.

Sei M m ziffrig und N n ziffrig, so ist $M \geqq 10^{m-1}$, aber $< 10^m$, ferner $N \geqq 10^{n-1}$, aber $< 10^n$, folglich $MN \geqq 10^{m+n-2}$, aber $< 10^{m+n}$; das Product MN hat also mindestens $m + n - 1$ Ziffern und höchstens $m + n$ Ziffern.

Division dekadischer Zahlen.

§. **72**. Es sei als Dividend das Product

$M = cr.10^4 + (br + cq).10^3 + (ar + bq + cp).10^2 + (aq + bp).10 + ap$,

welches wir der leichteren Uebersicht wegen so schreiben wollen:

$$M = cr.10^4 + \left|\begin{matrix} br \\ + cq \end{matrix}\right|.10^3 + \left|\begin{matrix} ar \\ + bq \\ + cp \end{matrix}\right|.10^2 + \left|\begin{matrix} aq \\ + bq \end{matrix}\right|.10 + ap,$$

und als Divisor die Zahl

$$N = c.10^2 + b.10 + a$$

gegeben, so erhält man nach §. 56

$$M : N = (cr.10^4 + br|.10^3 + ar|.10^2 + aq|.10 + ap) : (c.10^2 + b.10 + a) = r.10^2 + q.10 + p$$
$$+cq| \quad +bq| \quad +bp| \quad +cp|$$

$$\begin{array}{l} cr.10^4 + br.10^3 + ar.10^2 \\ \hline +cq.10^3 + bq|.10^2 + aq|.10 \\ \quad +cp| \quad +bp| \\ +cq.10^3 + bq.10^2 + aq.10 \\ \hline \quad +cp.10^2 + bp.10 + ap \\ \quad +cp.10^2 + bp.10 + ap \\ \hline \quad 0 \end{array}$$

Man nimmt daher, da hier cr auch zweiziffrig sein kann, so viele höchste Ziffern des Dividends, als der Divisor hat, oder wenn diese kleiner wären als der Divisor, um eine mehr als ersten Theildividend an, multiplicirt mit der dadurch gefundenen höchsten Ziffer des Quotienten den Divisor und subtrahirt das Product von dem ersten Theildividend. Zu dem Reste setzt man die nächstfolgende Ziffer des Dividends, bestimmt aus diesem neuen Theildividend die zweite Ziffer des Quotienten und setzt dieses Verfahren fort, bis alle Ziffern des Dividends in Rechnung gezogen wurden. Dabei ist zu berücksichtigen, daß der Rest, der aus der Subtraction der Theilproducte entsteht, immer kleiner sein muß als der Divisor, weil man sonst im Quotienten eine zweite Ziffer von derselben Rangstelle erhalten würde.

Z. B. 43741 : 83 = 527,

415	83	83
224	527	527
166	415	224
581	224	581
581	166	= = =
0	581	
	581	
	0	

oder 43741, oder 43741

Bei der dritten Form wurden die Theilproducte sogleich während der Multiplication subtrahirt und nur die Reste angeschrieben.

Zusatz. Schreibt man den Divisor unter den ersten Theildividend, und die erste Ziffer des Quotienten unter die Einerstelle des Divisors, so hat jede Ziffer des Quotienten gleichen Rang mit der gerade darüber stehenden Stelle des Dividends.

§. 73. **Der Quotient hat entweder eben so viele Ziffern, als der Unterschied zwischen der Anzahl der Ziffern des Dividends und der des Divisors beträgt, oder um eine Ziffer mehr.**

Ist M m ziffrig und N n ziffrig, wo $M > N$ ist, und $M : N = Q$, daher $M = N.Q$, so hat (nach §. 71) M so viele Ziffern, als die Factoren N und Q zusammengenommen, oder um eine Ziffer weniger. Demnach muß Q entweder so viele Ziffern haben, als ihrer M mehr hat als N, oder noch um eine mehr.

V. Theilbarkeit der Zahlen.

§. 74. Eine Zahl a heißt durch eine andere Zahl b *theilbar*, wenn sie durch dieselbe dividirt eine ganze Zahl zum Quotienten gibt. Der Dividend a heißt in diesem Falle ein *Vielfaches* (§. 35, 1) von b, und b ein *Maß* von a.

Eine Zahl, welche nur durch die Einheit und durch sich selbst theilbar ist, wird eine *absolute Primzahl*, auch blos *Primzahl* genannt; jede andere Zahl heißt eine *zusammengesetzte* Zahl.

Eine Zahl, durch welche zwei oder mehrere andere Zahlen theilbar sind, wird ein *gemeinschaftliches Maß* dieser Zahlen genannt. Zahlen, welche außer der Einheit kein gemeinschaftliches Maß haben, heißen *Primzahlen gegen einander* oder *relative Primzahlen*.

Eine Zahl, welche durch zwei oder mehrere andere Zahlen theilbar ist, heißt ein *gemeinschaftliches Vielfaches* dieser Zahlen.

Ist eine Zahl a durch eine andere b nicht theilbar, so heißt die Zahl r, welche erhalten wird, wenn man von dem Dividende a das größte Vielfache von b, welches darin vorkommt, z. B. bq, subtrahirt, der *Rest der Division*. Es ist also $r = a - bq$, und daher $a = bq + r$.

1. Allgemeine Sätze.

§. 75. 1. *Sind zwei oder mehrere Zahlen durch eine gemeinschaftliche Zahl theilbar, so ist auch ihre Summe dadurch theilbar.*

Beweis. Es seien a, b, c durch m theilbar. Setzt man $a : m = \alpha$, $b : m = \beta$, $c : m = \gamma$, wo α, β, γ ganze Zahlen bedeuten, so ist $a = m\alpha$, $b = m\beta$, $c = m\gamma$, und $a + b + c = m\alpha + m\beta + m\gamma$; folglich $(a + b + c) : m = \alpha + \beta + \gamma =$ einer ganzen Zahl.

2. *Sind zwei Zahlen durch eine dritte theilbar, so ist auch ihre Differenz dadurch theilbar.*

Beweis. Es sei $a : m = \alpha$ und $b : m = \beta$, so ist $a = m\alpha$, $b = m\beta$, und $a - b = m\alpha - m\beta$, folglich $(a - b) : m = \alpha - \beta =$ einer ganzen Zahl.

§. 76. 1. *Ist eine Zahl durch eine andere Zahl theilbar, so ist auch jedes Vielfache derselben dadurch theilbar.*

Beweis. Es sei $a : m = \alpha$, so ist $a = m\alpha$ und $ap = mp\alpha$, folglich $ap : m = p\alpha =$ einer ganzen Zahl.

2. *Ist eine Zahl durch irgend eine zusammengesetzte Zahl theilbar, so ist sie auch durch alle Factoren der letzteren theilbar.*

Beweis. Es sei a durch m theilbar, und $m = pqr$. Setzt man $a : m = \alpha$, so ist $a = m\alpha$, oder $a = pqr\alpha$, folglich $a : p = qr\alpha$, $a : q = pr\alpha$, $a : r = pq\alpha$.

3. *Ist eine Zahl durch zwei relative Primzahlen theilbar, so ist sie auch durch das Product derselben theilbar.*

Beweis. Es sei a durch die relativen Primzahlen m und n theilbar. Da diese keine gemeinschaftlichen Factoren haben und doch a sämmtliche Factoren von m und von n enthalten muß, so muß a alle Factoren des Productes mn enthalten, also a durch mn theilbar sein.

4. Ist ein Product zweier Factoren durch eine Zahl theilbar, welche gegen den einen Factor eine relative Primzahl ist, so muß der zweite Factor durch diese Zahl theilbar sein.

Beweis. Es sei ab durch m theilbar und m gegen a eine relative Primzahl. Da a mit m keinen gemeinschaftlichen Factor hat, so müssen, damit ab durch m theilbar sei, mit Rücksicht auf §. 48 alle Factoren von m in der Zahl b enthalten, d. i. es muß b durch m theilbar sein.

5. Ist eine Zahl gegen zwei oder mehrere andere Zahlen eine relative Primzahl, so ist sie es auch gegen das Product derselben.

Beweis. Ist m eine relative Primzahl gegen a, b und c, d. i. hat keine der Zahlen a, b, c einen Factor, welcher auch in m enthalten wäre, so kann auch in dem Producte abc, welches nach §. 38 nur die Factoren von a, b und c enthält, kein Factor von m vorkommen.

6. Die Potenzen zweier relativer Primzahlen sind selbst relative Primzahlen.

Beweis. Sind a und b relative Primzahlen, so muß nach dem vorhergehenden Satze a auch gegen bb, ferner aa gegen bb u. s. w., allgemein a^m gegen b^n eine relative Primzahl sein.

§. 77. 1. Haben der Dividend und der Divisor ein gemeinschaftliches Maß, so muß auch der Divisionsrest dadurch theilbar sein.

Beweis. Es seien a und b durch m theilbar und es gebe a durch b dividirt den Quotienten q mit dem Reste r; so ist $r = a - bq$ (§. 74). Da a durch m theilbar ist, ferner b, somit auch das Vielfache bq durch m theilbar ist, so muß auch die Differenz $a - bq$, welche gleich r ist, durch m theilbar sein.

Folgesatz. Jedes gemeinschaftliche Maß zwischen Dividend und Divisor ist auch ein gemeinschaftliches Maß zwischen Divisor und Rest.

2. Haben der Divisor und der Divisionsrest ein gemeinschaftliches Maß, so muß auch der Dividend dadurch theilbar sein.

Beweis. Es gebe a durch b dividirt den Quotienten q mit dem Reste r, wo dann $a = bq + r$ (§. 74) ist, und es sei m ein gemeinschaftliches Maß von b und r. Wenn b, somit auch das Vielfache bq, und ferner r durch m theilbar sind, so muß auch die Summe $bq + r$, welche gleich a ist, durch m theilbar sein.

Folgesatz. Jedes gemeinschaftliche Maß zwischen Divisor und Divisionsrest ist auch ein gemeinschaftliches Maß zwischen Dividend und Divisor.

2. Kennzeichen der Theilbarkeit dekadischer Zahlen.

§. 78. Eine dekadische Zahl ist durch 2 oder durch 5 theilbar, wenn ihre niedrigste Ziffer bezüglich durch 2 oder 5 theilbar ist.

Beweis. Ist N eine dekadische Zahl, in welcher a, b, c, d, e ... folgeweise die Ziffern an der Stelle der Einer, Zehner, Hunderte, Tausende, Zehntausende, ... bedeuten, so ist

$$N = \ldots 10000\,e + 1000\,d + 100\,c + 10\,b + a, \text{ daher}$$

$$N:2 = \ldots\ 5000\,e + 500\,d + 50\,c + 5\,b + \frac{a}{2}, \text{ und}$$

$$N:5 = \ldots\ 2000\,e + 200\,d + 20\,c + 2\,b + \frac{a}{5}.$$

Ist nun a durch 2 oder 5 theilbar, so ist es auch N.

Zusätze. 1. Eine dekadische Zahl ist durch 10 theilbar, wenn ihre niedrigste Ziffer 0 ist.

2. Jene Zahlen, welche an der Stelle der Einer 0, 2, 4, 6 oder 8 haben, welche also durch 2 theilbar sind, werden gerade Zahlen genannt. Eine gerade Zahl wird, da sie ein Vielfaches von 2 ist, allgemein durch $2m$ ausgedrückt, wo m jede beliebige ganze Zahl vorstellen kann.

3. Jene Zahlen, welche an der Stelle der Einer 1, 3, 5, 7 oder 9 haben, und daher nicht durch 2 theilbar sind, heißen ungerade Zahlen. Da eine ungerade Zahl um 1 größer oder kleiner ist als eine gerade, so ist $2m + 1$ oder $2m - 1$ die allgemeine Form für die ungeraden Zahlen.

Folgesätze. 1. Die Summe und die Differenz zweier gerader oder zweier ungerader Zahlen ist eine gerade Zahl.

2. Die Summe und die Differenz einer geraden und einer ungeraden Zahl ist eine ungerade Zahl.

3. Das Product zweier gerader Zahlen ist gerade, das Product zweier ungerader Zahlen ist ungerade.

4. Das Product aus einer geraden und einer ungeraden Zahl ist gerade.

§. 79. Eine dekadische Zahl ist durch 4 oder 25 theilbar, wenn ihre niedrigsten zwei Ziffern als Zahl betrachtet bezüglich durch 4 oder 25 theilbar sind.

Beweis. $N = \ldots\ 1000\,d + 100\,c + 10\,b + a$, daher

$$N : 4 = \ldots\ 250\,d + 25\,c + \frac{10\,b + a}{4},$$

$$N : 25 = \ldots\ 40\,d + 4\,c + \frac{10\,b + a}{25}.$$

Zusatz. Eine dekadische Zahl ist durch 100 theilbar, wenn ihre niedrigsten zwei Ziffern Nullen sind.

§. 80. Eine dekadische Zahl ist durch 8 oder durch 125 theilbar, wenn ihre niedrigsten drei Ziffern als Zahl betrachtet bezüglich durch 8 oder 125 theilbar sind.

Beweis. $N = \ldots\ 10000\,e + 1000\,d + 100\,c + 10\,b + a$, daher

$$N : 8 = \ldots\ 1250\,e + 125\,d + \frac{100\,c + 10\,b + a}{8},$$

$$N : 125 = \ldots\ 80\,e + 8\,d + \frac{100\,c + 10\,b + a}{125}.$$

§. 81. Eine dekadische Zahl ist durch 3 oder durch 9 theilbar, wenn ihre Ziffernsumme bezüglich durch 3 oder durch 9 theilbar ist.

Beweis. $N = \ldots\ 1000\,d + 100\,c + 10\,b + a,$

$= \ldots\ 999\,d + d + 999\,c + c + 9\,b + b + a,$

$= \ldots\ 999\,d + 99\,c + 9\,b + \ldots + d + c + b + a,$

daher $N : 3 = \ldots\ 333\,d + 33\,c + 3\,b + \frac{\ldots d + c + b + a}{3},$

$$N : 9 = \ldots\ 111\,d + 11\,c + b + \frac{\ldots d + c + b + a}{9}.$$

Zusatz. Ist eine Zahl durch 2 und durch 3 theilbar, so ist sie auch durch 6 theilbar (§. 76, 3).

§. 82. Eine dekadische Zahl ist durch 11 theilbar, wenn die Differenz zwischen den Ziffernsummen in den ungeraden und in den geraden Stellen durch 11 theilbar ist.

Beweis. $N = \ldots 100000f + 10000c + 1000d + 100c + 10b + a,$

$= \ldots 100001f - f + 9999e + e + 1001d - d$

$+ 99c + c + 11b - b + a,$

$= \ldots 100001f + 9999e + 1001d + 99c + 11b$

$+ (\ldots e + c + a) - (\ldots f + d + b),$

daher $N : 11 = \ldots 9091f + 909e + 91d + 9c + b$

$$+ \frac{(\ldots e + c + a) - (\ldots f + d + b)}{11}.$$

3. Von den Primzahlen insbesondere.

§. 83. Ist eine Zahl n kleiner als das Quadrat einer anderen Zahl a und ist n mit Ausschluß der Einheit durch keine Zahl unter a theilbar, so ist n eine Primzahl.

Beweis. Gesetzt, n sei durch irgend eine Zahl p theilbar, so könnte nur $p \leqq a$ sein. Es sei nun $n : p = x$, also $n = px$, wo x eine ganze Zahl bezeichnet; dann wäre auch $n : x = p$, also n durch x theilbar. Aus $n < a^2$ und $p \leqq a$ folgt aber $n : p < a$, oder $x < a$. Es müßte daher unter der obigen Annahme n durch eine Zahl $x < a$ theilbar sein, was gegen die Voraussetzung ist. n muß also eine Primzahl sein.

§. 84. Aufgabe. Alle Primzahlen bis zu einer gegebenen Grenze zu bestimmen.

Man bilde die Quadrate der natürlichen Zahlen, bis das letzte Quadrat die gegebene Grenze überschreitet:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ...

Es sind dann Primzahlen diejenigen Zahlen zwischen 1 und 4, welche mit Ausschluß der 1 durch keine Zahl unter 2 theilbar sind, also 1, 2 und 3; ferner alle die Zahlen zwischen 4 und 9, die mit Ausschluß der 1 durch keine Zahl unter 3 theilbar sind, also 5 und 7; u. s. w.

Die Richtigkeit folgt aus §. 83.

§. 85. Jede endliche zusammengesetzte Zahl läßt sich in lauter Primfactoren zerlegen.

Beweis. Jede zusammengesetzte Zahl muß wenigstens in zwei Factoren zerlegt werden können; diese lassen sich, wenn sie zusammengesetzte Zahlen sind, wieder in Factoren zerlegen, die entweder schon Primzahlen oder selbst wieder zusammengesetzte Zahlen sind; wird im letzteren Falle das Zerlegen fortgesetzt, so muß man endlich auf lauter Primfactoren kommen. Wäre dieses nicht der Fall, so müßte die gegebene Zahl aus unendlich vielen Factoren, die alle größer als 1 sind, zusammengesetzt, und also selbst unendlich groß sein, was der Voraussetzung zuwider ist.

§. 86. Aufgabe. Eine zusammengesetzte Zahl in ihre Primfactoren zu zerlegen.

Man dividire die gegebene Zahl durch die kleinste Primzahl, durch die sie theilbar ist, 1 nicht mitgerechnet; den Quotienten dividire man wieder durch die kleinste Primzahl, durch die er theilbar ist, die frühere Primzahl nicht ausgenommen, und verfahre so mit jedem folgenden Quotienten, bis man endlich auf einen Quotienten kommt, der selbst eine Primzahl ist. Die nach und nach angewendeten

Divisoren und der letzte Quotient sind die Primfactoren, aus denen die vorgelegte Zahl besteht.

Ist z. B. 630 in Primfactoren zu zerlegen, so hat man:

$$\begin{array}{rl|l} 630 : 2 = 315 & \text{oder } 630 & 2 \\ 315 : 3 = 105 & 315 & 3 \\ 105 : 3 = 35 & 105 & 3 \\ 35 : 5 = 7 & 35 & 5 \\ & 7 & 7 \end{array}$$

also $630 = 2.315 = 2.3.105 = 2.3.3.35 = 2.3.3.5.7.$

Zusatz. Um alle Factoren einer Zahl zu finden, zerlege man dieselbe in ihre Primfactoren, multiplicire mit dem zweiten Primfactor den ersten, dann mit dem dritten Primfactor die vorhergehenden zwei Primfactoren und den erhaltenen zusammengesetzten Factor, und so fort mit jedem folgenden Primfactor alle vorhergehenden Prim- und zusammengesetzten Factoren. Z. B.

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3,\ 6 \\ 35 & 5,\ 10,\ 15,\ 30 \\ 7 & 7,\ 14,\ 21,\ 42,\ 35,\ 70,\ 105,\ 210. \end{array}$$

§. 87. Aufgabe. Einen allgemeinen Zahlenausdruck in Factoren zu zerlegen.

1. Bei eingliedrigen Ausdrücken stellen die einzelnen Buchstaben selbst die Primfactoren vor; sind darin Potenzgrößen enthalten, so wird die Wurzel so oft als Factor gesetzt, als der Exponent anzeigt. Z. B.

$$abc = a.b.c;\quad ab^2m^3 = a.b.b.m.m.m;$$
$$21\,a^2mx^2 = 3.7.a.a.m.x.x.$$

2. Für die Zerlegung der Polynome in Factoren lassen sich keine allgemeinen Regeln geben; es sollen daher hier nur häufiger vorkommende specielle Fälle betrachtet werden.

a) Ein Polynom, dessen alle Glieder ein gemeinschaftliches Maß haben, wird nach §. 40 in zwei Factoren zerlegt, indem man das gemeinschaftliche Maß als den einen Factor heraushebt und als den andern Factor den Quotienten setzt, welcher aus der Division des gegebenen Ausdruckes durch jenes gemeinschaftliche Maß hervorgeht. Z. B.:

1. $3ax - 4bx = x(3a - 4b)$,
2. $20x^4 - 16x^3 + 12x^2 = 4x^2(5x^2 - 4x + 3)$.

b) Insbesondere folgt aus §. 43, Zusatz:

1. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b)$,
2. $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)(a - b)$,
3. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

c) Ein Trinom von der Form $x^2 \pm mxy \pm ny^2$ kann in zwei Factoren häufig dadurch zerlegt werden, daß man den Coefficienten m des zweiten Gliedes, je nachdem n positiv oder negativ ist, als die Summe oder als die Differenz zweier Zahlen darstellt, die als Product n geben, und hierauf die gemeinschaftlichen Factoren heraushebt. Z. B.:

1. $x^2 - 5xy + 6y^2 = x^2 - (3 + 2)xy + 6y^2 = x^2 - 3xy - 2xy + 6y^2$
$= x(x - 3y) - 2y(x - 3y) = (x - 3y)(x - 2y).$
2. $a^2 + 3a - 10 = a^2 + (5 - 2)a - 10 = a^2 + 5a - 2a - 10$
$= a(a + 5) - 2(a + 5) = (a + 5)(a - 2).$

4. Vom größten gemeinschaftlichen Maße.

§. 88. Unter dem größten gemeinschaftlichen Maße mehrerer Zahlen versteht man die größte Zahl, durch welche diese Zahlen theilbar sind.

Aufgabe. Das größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen zu finden.

1. Auflösung. Man zerlege jede der gegebenen Zahlen in ihre Primfactoren und hebe unter diesen diejenigen heraus, welche in beiden Zahlen gemeinschaftlich vorkommen; das Product derselben ist das gesuchte größte gemeinschaftliche Maß.

Beweis. Das so gebildete Product ist, da alle Factoren desselben in beiden Zahlen enthalten sind, gewiß ein gemeinschaftliches Maß derselben; es ist aber auch das größte, weil, sobald man noch einen Factor hinzufügen würde, durch dieses Product nicht mehr beide Zahlen theilbar wären.

Beispiel. Suche das gr. g. Maß von 300 und 420.

$300 = 2.2.3.5.5,$
$420 = 2.2.3.5.7;$ gr. g. Maß $= 2.2.3.5 = 60.$

2. Auflösung. (Ohne Zerlegung in Primfactoren.) Man dividire die größere der beiden Zahlen durch die kleinere, sodann den Divisor durch den Divisionsrest, den neuen Divisor durch den neuen Rest, u. s. f., bis endlich eine Division ohne Rest aufgeht; der letzte Divisor ist das größte gemeinschaftliche Maß der zwei gegebenen Zahlen.

Beweis. Sind a und b, wo $a > b$, die zwei gegebenen Zahlen und r_1, r_2, r_3, r_4, ... die aufeinander folgenden Divisionsreste, so läßt sich der Rechnungsgang so darstellen:

Dividend a, Divisor b, Rest r_1,
" b, " r_1, " r_2,
" r_1, " r_2, " r_3,
" r_2, " r_3, " r_4, u. s. w.

Zunächst ist klar, daß man bei fortgesetztem Dividiren endlich auf einen Rest $= 0$ kommen müsse, weil der jedesmalige Rest eine ganze Zahl und wenigstens um 1 kleiner als der Divisor, welcher der vorhergehende Rest war, sein muß. Es sei z. B. $r_4 = 0$.

Dann ist r_3 gewiß ein gemeinschaftliches Maß von a und b. Aus der letzten Division folgt, daß r_3 ein g. Maß zwischen r_2 und r_3 ist; r_2 und r_3 kommen in der vorhergehenden Division als Divisor und Rest vor, also ist (§. 77, 2. Folges.) r_3 auch ein g. Maß zwischen dem Dividend r_1 und dem Divisor r_2, folglich vermöge der nächstvorhergehenden Division, wo r_1 und r_2 Divisor und Rest vorstellen, r_3 ein g. Maß zwischen b und r_1, und endlich vermöge der ersten Division r_3 auch ein g. Maß zwischen a und b.

r_3 ist aber auch das größte gemeinschaftliche Maß von a und b. Gesetzt, diese hätten noch ein größeres gemeinschaftliches Maß $m > r_3$, so müßten (nach §. 77, 1. Folges.) vermöge der ersten Division, in welcher a und b als Dividend und Divisor vorkommen, auch der Divisor b und der Rest r_1, daher vermöge der zweiten Division auch r_1 und r_2, und endlich vermöge der dritten Division auch r_2 und r_3 durch m theilbar sein, was der Annahme $m > r_3$ widerspricht. Folglich ist r_3 das gr. g. Maß von a und b.

Beispiele 1. Um das gr. g. Maß von 1134 und 3654 zu finden, hat man

$3654 : 1134 = 3$ mit dem Reste 252 oder

1134	3654	3
126	252	4
0		2

$1134 : 252 = 4$ „ „ „ 126

$252 : \mathbf{126} = 2$ „ „ „ 0

gr. g. Maß = 126.

2. Man suche das gr. g. Maß von 377 und 848.

377	848	2
1	94	4
	0	94

gr. g. M. = 1;
377 und 848 sind also relative Primzahlen.

3. Es soll das gr. g. Maß zwischen $3a^3 - 2a^2 - 3ab^2 + a + 2b^2 + b$ und $a^2 - b^2$ gesucht werden.

$(3a^3 - 2a^2 - 3ab^2 + a + 2b^2 + b) : (a^2 - b^2) = 3a - 2$

$3a^3 \quad - 3ab^2$

$- \quad +$

$- 2a^2 + a + 2b^2 + b$

$- 2a^2 \quad + 2b^2$

$+ \quad -$

$+ a + b$ Rest.

$(a^2 - b^2) : (a + b) = (a - b)$.

Das gesuchte gr. g. Maß ist also der letzte Divisor $a + b$.

Bei allgemeinen Zahlenausdrücken muß man oft, um die Division verrichten zu können, den Dividend mit einem Nichtfactor des Divisors multipliciren, oder den Divisor durch einen Nichtfactor des Dividends dividiren. Daß dadurch das gr. g. Maß der beiden Ausdrücke nicht geändert wird, folgt unmittelbar aus dem Begriffe des gr. g. Maßes zweier Zahlen.

Beispiel. Man suche das gr. g. Maß zwischen

$10x^2 + 14x - 12$ und $7x^2 + 22x + 16$.

Damit die Division der beiden Ausdrücke in ganzen Zahlen verrichtet werden könne, multiplicire man den ersten mit 7, welche Zahl kein Maß des zweiten Ausdruckes ist; man hat dann

$(70x^2 + 98x - 84) : (7x^2 + 22x + 16) = 10$

$70x^2 + 220x + 160$

$- \quad - \quad -$

$- 122x - 244$ Rest; durch $- 122$ dividirt, $x + 2$.

$(7x^2 + 22x + 16) : (x + 2) = 7x + 8$

$7x^2 + 14x$

$- \quad -$

$+ 8x + 16$ Das gr. g. Maß ist also $x + 2$.

$+ 8x + 16$

$- \quad -$

0

§. 89. Mit dem eben angegebenen Verfahren, das gr. g. Maß zweier Zahlen ohne Zerlegung derselben in Factoren zu finden, stimmt auch der Vorgang überein, das gr. g. Maß zwischen irgend zwei gleichartigen Größen (z. B. zwischen zwei geraden Linien) zu bestimmen. Man nimmt nämlich von der größeren der beiden Größen die kleinere so oft weg, als man kann; sodann von der kleineren den etwa gebliebenen Rest, von diesem Reste wieder den neuen Rest u. s. w. Wenn

nun bei einer dieser Messungen kein Rest übrig bleibt, so ist der letzte nicht verschwindende Rest das gr. g. Maß der beiden gegebenen Größen.

Hier wird man jedoch nicht, wie bei ganzen Zahlen, immer auf einen Rest $= 0$ kommen, indem zwar die Reste immer kleiner werden müssen, es jedoch keine noch so kleine Grenze gibt, welche diese Reste nicht erreichen könnten. Wenn man bei dem obigen Verfahren niemals auf einen Rest $= 0$ kommt, so weit man die Messungen auch fortsetzen würde, so haben die beiden Größen kein gemeinschaftliches Maß.

Zwei Größen, welche ein gemeinschaftliches Maß haben, heißen commensurabel; zwei Größen, die kein gemeinschaftliches Maß haben, incommensurabel.

§. **90.** Aufgabe. Das größte gemeinschaftliche Maß mehrerer Zahlen zu finden.

1. Auflösung. Man zerlege alle Zahlen in ihre Primfactoren; das Product derjenigen Primfactoren, welche in allen gegebenen Zahlen gemeinschaftlich vorkommen, ist das gesuchte gr. g. Maß (§. 88, 1. Aufl.) Z. B.:

Man suche das gr. g. Maß von 320, 400 und 680.

$320 = 2.2.2.2.2.2.5,$
$400 = 2.2.2.2.5.5,$
$680 = 2.2.2.5.17;$
gr. g. Maß. $2.2.2.5. = 40.$

2. Auflösung. (Ohne Zerlegung in Primfactoren.) Ist das gr. g. Maß zwischen den Zahlen a, b, c und d zu finden, so suche man zuerst das gr. g. Maß zwischen a und b, dieses sei m; dann suche man das gr. g. Maß zwischen m und c, dieses sei n; endlich suche man das gr. g. Maß zwischen n und d, dieses sei p; p ist dann das gr. g. Maß zwischen a, b, c, d.

Man kann dieses durch folgende Zusammenstellung anschaulich machen:

a b c d

m

n

p

Nach der Voraussetzung enthält m alle gemeinschaftlichen Factoren von a und b; n enthält alle gemeinschaftlichen Factoren von m und c, also auch von a, b und c; p endlich enthält alle gemeinschaftlichen Factoren von n und d, folglich auch von a, b, c und d; p ist also das gr. g. Maß zwischen a, b, c und d.

Beispiele. 1. Man suche das gr. g. Maß zwischen 1554, 3552 und 5143.

1554	3552	2	Zwischen 1554 und 3552 ist also 222 das gr. g. Maß.
222	444	3	
	0	2	
222	5143	23	37 ist also das gr. g. Maß zwischen 222 und 5143, folglich auch zwischen 1554, 3552 und 5143.
0	703		
	37	6	

2. Man suche das gr. g. Maß zwischen

$3x^2 - 2xy - 5y^2$, $2x^2 + 9xy + 7y^2$ und $2x^2 - 2y^2$.

Als das gr. g. Maß zwischen $3x^2 - 2xy - 5y^2$ und $2x^2 + 9xy + 7y^2$ erhält man $x + y$.

Zwischen $x + y$ und $2x^2 - 2y^2$ ist ferner $x + y$ das gr. g. Maß, welches daher zugleich das gr. g. Maß zwischen den gegebenen drei Ausdrücken ist.

5. Vom kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen.

§. **91**. Unter dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen mehrerer Zahlen versteht man die kleinste Zahl, welche durch alle jene Zahlen theilbar ist.

Aufgabe. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Zahlen zu finden.

1. Auflösung. Man zerlege alle gegebenen Zahlen in ihre Primfactoren und nehme aus diesen alle verschiedenen Factoren, und zwar jeden so oft, als er in irgend einer gegebenen Zahl am häufigsten vorkommt; das Product dieser Factoren ist das gesuchte kl. g. Vielfache.

Beweis. Das so gebildete Product ist, da es alle Factoren einer jeden der gegebenen Zahlen enthält, gewiß ein gemeinschaftliches Vielfaches derselben; es ist aber auch das kleinste g. Vielfache, weil man keinen jener Factoren weglassen darf, ohne daß das Product aufhören würde, durch alle gegebenen Zahlen theilbar zu sein.

Beispiel. Man suche das kl. g. Vielfache zwischen 60, 108 und 1050.

$$60 = 2.2.3.5,$$
$$108 = 2.2.3.3.3,$$
$$1050 = 2.3.5.5.7,$$
$$\text{kl. g. Vielfaches} = 2.2.3.3.3.5.5.7 = 18900.$$

2. Auflösung. (Ohne Zerlegung in Factoren.) a) Ist das kl. g. Vielfache von zwei Zahlen zu bestimmen, so suche man ihr gr. g. Maß, dividire durch dieses eine der beiden Zahlen und multiplicire mit dem Quotienten die andere.

Beweis. Es seien a und b die gegebenen Zahlen. Haben diese kein gemeinschaftliches Maß, so ist ihr Product ab selbst zugleich ihr kl. g. Vielfaches. Sind aber a und b nicht relative Primzahlen, so sei m ihr gr. g. Maß und zwar $a : m = \alpha$, $b : m = \beta$, wo α und β keinen gemeinschaftlichen Factor mehr enthalten können; man hat dann $a = m\alpha$, $b = m\beta$. Jedes Vielfache von a muß also die Factoren m und α, jedes Vielfache von b muß die Factoren m und β, und daher jedes gemeinschaftliche Vielfache von a und b die Factoren m, α und β enthalten; jenes Product nun, welches nur diese drei Factoren enthält, wird gewiß das kl. g. Vielfache zwischen a und b sein. Dieses kl. g. Vielfache $m\alpha\beta$ läßt sich auch so darstellen:

$$m\alpha\beta = m\alpha.\beta = a\,(b : m)$$
$$= m\beta.\alpha = b\,(a : m).$$

Beispiele. 1. Man suche das kl. g. Vielfache zwischen 648 und 972.

648	972	1	324 ist das gr. g. Maß.
0	**324**	2	

$648 : 324 = 2$; $972.2 = 1944$, oder
$972 : 324 = 3$; $648.3 = 1944$;
kl. g. Vielfaches $= 1944$.

2. Es soll das kl. g. Vielfache zwischen $9a^4x^2 - 4b^2y^4$ und $9a^4x^2 - 12a^2bxy^2 + 4b^2y^4$ gefunden werden.

Das gr. g. Maß dieser Ausdrücke ist $3a^2x - 2by^2$. Man hat dann $(9a^4x^2 - 12a^2bxy^2 + 4b^2y^4) : (3a^2x - 2by^2) = 3a^2x - 2by^2$, und
$(9a^4x^2 - 4b^2y^4)\,(3a^2x - 2by^2) = 27a^6x^3 - 18a^4bx^2y^2$
$- 12a^2b^2xy^4 + 8b^3y^6$ das kl. g. Vielfache.

b) Sind mehr als zwei Zahlen gegeben, so suche man zuerst das kl. g. Vielfache zweier Zahlen, dann das kl. g. Vielfache des eben gefundenen Vielfachen und der dritten Zahl, und fahre auf diese Art bis zur letzten gegebenen Zahl fort. Das zuletzt gefundene kl. g. Vielfache ist zugleich das kl. g. Vielfache aller gegebenen Zahlen. (Beweis wie in §. 90, 2. Auflösung.)

§. **92.** Haben zwei oder mehrere unter den gegebenen Zahlen ein gemeinschaftliches Maß, so kann man, ohne das kl. g. Vielfache zu ändern, anstatt dieser Zahlen ihr gemeinschaftliches Maß nur einmal, und zugleich die Quotienten setzen, welche aus der Division jener Zahlen durch das gemeinschaftliche Maß hervorgehen (Beweis zu a der 2. Auflösung in §. 91). Ist ferner eine der gegebenen Zahlen ein Maß von einer andern größeren, so kann die kleinere Zahl, ohne das kl. g. Vielfache zu ändern, ganz unberücksichtigt gelassen werden.

Für die Auffindung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen mehrerer Zahlen kann demnach folgendes praktische Verfahren angewendet werden:

1. Man schreibe die gegebenen Zahlen in eine Reihe neben einander, und lasse die kleineren Zahlen, welche in den größeren ohne Rest enthalten sind, weg.

2. Man untersuche, ob nicht zwei oder mehrere der übrig gebliebenen Zahlen eine Primzahl als gemeinschaftliches Maß haben. Ist dieses der Fall, so hebt man dieses Maß rechts heraus und dividirt dadurch alle Zahlen, deren Maß es ist; die Quotienten, so wie die nicht theilbaren Zahlen setze man in eine darunter befindliche Reihe neben einander.

3. Mit dieser neuen Reihe verfahre man eben so wie mit der ursprünglich aufgestellten, und wiederhole dieses Verfahren so lange, bis man zuletzt eine Reihe erhält, in welcher lauter relative Primzahlen vorkommen.

4. Multiplicirt man dann die in der letzten Reihe befindlichen relativen Primzahlen und die rechts herausgehobenen Maße mit einander, so ist das Product das gesuchte kl. g. Vielfache der gegebenen Zahlen.

Beispiel. Man suche das kl. g. Vielfache von 2, 3, 4, 18, 24, 32, 45, 50.

2,	3,	4,	18,	24,	32,	45,	50 |
		9,	12,	16,	45,	25	2
			6,	8,	45,	25	2
			3,	4,	45,	25	2
				4,	9,	5	5

kl. g. Vielfaches $= 4.9.5.2.2.2.5 = 7200$.

VI. Erweiterung des Zahlengebietes durch die Division.

Gebrochene Zahlen.

§. **93.** Bisher wurde (§. 46) bei jedem Quotienten $\frac{a}{b}$ vorausgesetzt, daß der Dividend a ein Vielfaches des Divisors b, daß also a eine der Zahlen b, 2b, 3b, 4b,... ist, weil nur in diesem Falle die Division an der Reihe der ganzen Zahlen ausgeführt werden konnte. Soll die Division für ganz beliebige Werthe des Dividends und des Divisors möglich gemacht werden, so ist man genöthiget, $\frac{a}{b}$ für den Fall, wo a kein Vielfaches von b ist, als eine neue Zahlform in die Arithmetik einzuführen.

Man nennt in diesem allgemeinen Sinne, wo a kein Vielfaches von b ist, den Quotienten $\frac{a}{b}$ im Gegensatze zu den bisher betrachteten ganzen Zahlen eine gebrochene Zahl oder einen Bruch; a heißt der Zähler, b der Nenner des Bruches.

Die neue Zahlform muß nun so definirt werden, daß den für ganze Zahlen abgeleiteten Gesetzen auch für die Rechnung mit Brüchen die Giltigkeit gewahrt bleibe.

Wendet man auf den Quotienten $\frac{a}{b}$, dem man auch die Form $\frac{1.a}{b}$ geben kann, den Satz in §. 48, 1 an, so erhält man

$$\frac{a}{b} = \frac{1.a}{b} = \frac{1}{b}.a.$$

Die Bedeutung des Bruches ergibt sich dann aus dem durch die Gleichung $\frac{a}{b}.b = a$ ausgedrückten Begriffe eines Quotienten. Setzt man $a = 1$, so ist $\frac{1}{b}.b = 1$, d. i. $\frac{1}{b}$ bedeutet eine Zahl, welche b mal als Summand gesetzt 1 gibt. Theilt man daher eine Einheit in b gleiche Theile, so stellt ein solcher Theil, da er b mal als Summand gesetzt wieder die Einheit gibt, die Zahl $\frac{1}{b}$ vor. $\frac{a}{b} = \frac{1}{b}.a$ bedeutet dann eine Zahl, welche entsteht, indem man die Einheit in b gleiche Theile theilt, und einen solchen Theil a mal als Summand setzt.

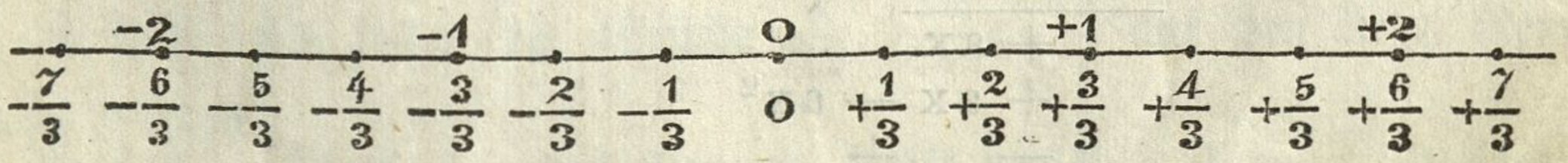
Brüche sind daher Zahlen, deren Einheit ausdrücklich als ein Theil der ursprünglichen Einheit angegeben ist. Der Nenner zeigt an, in wie viele gleiche Theile die ursprüngliche Einheit getheilt werden soll, damit ein solcher Theil die neue Einheit des Bruches gebe; der Zähler zeigt an, wie vielmal der Bruch die durch den Nenner gegebene Einheit enthält.

Um den gebrochenen Zahlen auch in der Zahlenreihe ihre entsprechende Stellung anzuweisen, muß man für einen bestimmten Nenner b die Reihe der ganzen Zahlen in sich dadurch erweitern, daß man den Abstand je zweier auf einander folgender Zahlen dieser Reihe, d. i. jede ursprüngliche Einheit, durch Einschaltung neuer Zahlen in so viele gleiche Theile theilt, wie der Nenner b anzeigt, und einen solchen Theil als eine neue Einheit annimmt, um mit ihr zu zählen; man erhält dadurch die Zahlenreihe

$$\ldots -\frac{5}{b'} -\frac{4}{b'} -\frac{3}{b'} -\frac{2}{b'} -\frac{1}{b'} \; 0, \; +\frac{1}{b'} +\frac{2}{b'} +\frac{3}{b'} +\frac{4}{b'} +\frac{5}{b'} \ldots$$

welche die Zahlenreihe der b tel genannt wird. Der Bruch $+\frac{a}{b}$ bedeutet in dieser Reihe die a te Zahl in der Richtung der positiven Zahlen, $-\frac{a}{b}$ die a te Zahl in der Richtung der negativen Zahlen.

Die durch Einschaltung von Brüchen ausgefüllte Zahlenreihe heißt die Bruchzahlenreihe für den bezüglichen Nenner. Solche Reihen können durch Zahlenlinien versinnlicht werden. So hat man für die Reihe der Drittel:



Ein Bruch, welcher kleiner als 1, dessen Zähler also kleiner als der Nenner ist, heißt ein echter Bruch, jeder andere Bruch ein unechter Bruch.

Ein Bruch, dessen Zähler eine dekadische ganze Zahl, und dessen Nenner eine Potenz von 10 ist, wird ein Decimalbruch genannt; jeder andere Bruch heißt ein gemeiner Bruch.

Eine eigene Art der gemeinen Brüche bilden die Kettenbrüche, von denen weiter unten besonders die Rede sein wird.

1. Gemeine Brüche.

Allgemeine Sätze.

§. 94. Aus dem Begriffe eines Bruches folgt:

1. Jeder Bruch gibt mit seinem Nenner multiplicirt den Zähler zum Producte.

$$\frac{1}{b} \cdot b = 1, \quad \frac{a}{b} \cdot b = a.$$

2. Von zwei Brüchen, die gleiche Nenner haben, ist jener der größere, welcher den größeren Zähler hat.

3. Von zwei Brüchen, die gleiche Zähler haben, ist jener der größere, welcher den kleineren Nenner hat.

§. 95. 1. Läßt man in dem Bruche $\frac{a}{b}$ bei ungeändertem Zähler den Nenner b nach und nach kleiner werden als jede noch so kleine angebbare Zahl, sich also ohne Ende der Null nähern, so wird der Bruch nach und nach größer als jede noch so große angebbare Zahl, d. i. unendlich groß (∞). In diesem Sinne sagt man:

Ein Bruch, dessen Zähler eine endliche Zahl und dessen Nenner Null ist, ist unendlich groß.

$$\frac{a}{0} = \infty.$$

2. Ebenso folgt: Ein Bruch, dessen Zähler eine endliche Zahl und dessen Nenner unendlich groß ist, ist gleich Null.

$$\frac{a}{\infty} = 0.$$

Zusatz. Jeder allgemeine Bruch, dessen Zähler eingliedrig und dessen Nenner mehrgliedrig ist, kann, wenn man den Zähler durch den Nenner nach den für die Division mehrgliedriger Ausdrücke aufgestellten Regeln (§. 56) dividirt, als eine ohne Ende fortschreitende Reihe von Gliedern, in deren Bildung sich häufig eine gewisse Gesetzmäßigkeit kundgibt, dargestellt werden.

Z. B. $\frac{a}{1-x} = a : (1 - x) = a + ax + ax^2 \ldots$ ohne Ende

$$\begin{array}{r|l} a - ax & \\ -\ + & \\ \hline + ax & \\ + ax - ax^2 & \\ -\quad + & \\ \hline + ax^2 & \end{array}$$

Setzt man hier $x = 1$, so wird

$$\frac{a}{1-1} = a + a + a + a + \ldots \text{ ohne Ende}$$

oder

$$\frac{a}{0} = \infty,$$

wodurch der unter 1. nachgewiesene Satz auf einem anderen Wege seine Begründung findet.

§. **96.** 1. Jeder unechte Bruch kann in eine Summe aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruche verwandelt werden.

Ist $a > b$, so ist $\frac{a}{b} = a : b = q + \frac{r}{b}$, wo q die größte ganze Zahl, welche in dem Quotienten $a : b$ vorkommt, und r den Divisionsrest, daher $\frac{r}{b}$, weil $r < b$ sein muß, einen echten Bruch vorstellt.

Ein Ausdruck von der Form $q + \frac{r}{b}$ heißt eine gemischte Zahl.

2. Jede ganze Zahl kann in der Form eines Bruches mit gegebenem Nenner dargestellt werden, indem man das Product aus der ganzen Zahl und dem gegebenen Nenner als den Zähler des Bruches annimmt.

Es ist $a = \frac{an}{n}$ (§. 47, 3).

Ein Bruch, dessen Zähler ein Vielfaches des Nenners, der also einer ganzen Zahl gleich ist, heißt ein uneigentlicher Bruch.

3. Ein Bruch bleibt (seinem Werthe nach) unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplicirt, oder beide durch dieselbe Zahl dividirt.

$$\frac{a}{b} = \frac{an}{bn} = \frac{a : n}{b : n} \text{ (§. 52, 2).}$$

§. **97.** Aufgaben. 1. Einen gegebenen Bruch auf einen gegebenen neuen Nenner zu bringen, welcher ein Vielfaches des früheren Nenners ist.

Man dividire den neuen Nenner durch den früheren Nenner, und multiplicire mit dem Quotienten den früheren Zähler; das Product ist der gesuchte neue Zähler.

Die Richtigkeit der Auflösung folgt aus §. 96, 3.

Um z. B. $\frac{a}{b}$ auf den Nenner bm zu bringen, hat man

$$bm : b = m; \quad a.m = am; \quad \text{also } \frac{a}{b} = \frac{am}{bm}.$$

2. Zwei oder mehrere Brüche auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner zu bringen.

Man suche das kl. g. Vielfache der Nenner der gegebenen Brüche, welches zugleich der neue kl. g. Nenner ist, und bringe (nach Aufg. 1) die gegebenen Brüche auf diesen neuen Nenner.

Beispiel. Es sollen die Brüche $\frac{a}{2b}$, $\frac{3m}{4bc}$, $\frac{4n}{c^2d}$ auf den kl. g. Nenner gebracht werden.

Das kl. g. Vielfache aller Nenner, somit der kl. g. Nenner, ist $4bc^2d$. Man hat dann

$4bc^2d : 2b = 2c^2d$, $2c^2d.a = 2ac^2d$; also $\frac{a}{2b} = \frac{2ac^2d}{4bc^2d}$

$4bc^2d : 4bc = cd$, $cd.3m = 3cdm$; „ $\frac{3m}{4bc} = \frac{3cdm}{4bc^2d}$

$4bc^2d : c^2d = 4b$, $4b.4n = 16bn$; „ $\frac{4n}{c^2d} = \frac{16bn}{4bc^2d}$.

§. **98.** Aufgabe. Einen Bruch, dessen Zähler und Nenner ein gemeinschaftliches Maß haben, abzukürzen, d. i. ohne Aenderung des Werthes durch kleinere Zahlen auszudrücken.

Man dividire Zähler und Nenner durch ihr gemeinschaftliches Maß.

Z. B. $\frac{4am}{6bn} = \frac{2am}{3bn}$; $\frac{12a^2bx^2}{15acx^3} = \frac{4ab}{5cx}$.

Ein Bruch, dessen Zähler und Nenner relative Primzahlen sind, heißt auf die einfachste Form gebracht.

Zusatz. Durch das Abkürzen allgemeiner Brüche kann häufig die für besondere Substitutionen in denselben auftretende Unbestimmtheit behoben werden. So gibt der Bruch $\frac{x^2 - a^2}{2x - 2a}$ für $x = a$ den unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$. Durch das Abkürzen aber erhält man

$$\frac{x^2 - a^2}{2x - 2a} = \frac{(x + a)(x - a)}{2(x - a)} = \frac{x + a}{2},$$

welcher Bruch für $x = a$ den bestimmten Werth $\frac{2a}{2} = a$ annimmt.

Wenn allgemein ein Bruch, dessen Zähler und Nenner nach x geordnete Polynome sind, für einen bestimmten Werth von x, z. B. für $x = a$, die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, so liegt darin die Andeutung, daß Zähler und Nenner den gemeinschaftlichen Factor $x - a$ enthalten, welcher für $x = a$ Null wird, und durch welchen daher der Bruch abzukürzen ist. Nimmt der dadurch vereinfachte Bruch für $x = a$ noch immer die Form $\frac{0}{0}$ an, so wiederholt man das Abkürzen durch $x - a$.

Rechnungsoperationen mit gemeinen Brüchen.

§. **99.** Nachdem durch die Einführung der gebrochenen Zahlen das frühere Zahlengebiet erweitert wurde, muß man auch die bisherigen Begriffe der Rechnungsoperationen dahin erweitern, daß sie sich auch auf die neue Zahlform anwenden lassen.

Bezüglich der Addition und Subtraction wird es, weil man nach §. 96, 2, jede ganze Zahl als einen Bruch mit beliebigem Nenner darstellen, und nach §. 97, 2 je zwei Brüche auf einen gemeinschaftlichen Nenner bringen kann, genügen, bei der Erweiterung des Begriffes auf Brüche derselben Bruchzahlenreihe Bedacht zu nehmen.

§. **100.** Zu einem Bruche $\frac{a}{m}$ den Bruch $\frac{b}{m}$ addiren (§§. 9 und 30) heißt, in der Bruchzahlenreihe der m tel vom ersten Summand $\frac{a}{m}$ aus, je nachdem der zweite Summand positiv oder negativ ist, in positiver oder negativer Richtung um so viele m tel fortschreiten, als deren der zweite Summand $\frac{b}{m}$ enthält; der Bruch, zu dem man auf diese Weise gelangt, ist die gesuchte Summe.

Folgesatz. Brüche von gleichen Nennern werden addirt, indem man ihre Zähler addirt und dieser Summe den gemeinschaftlichen Nenner gibt.

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}.$$

Zusatz. Sind Brüche mit ungleichen Nennern, oder eine ganze Zahl und ein Bruch zu addiren, so stellt man die Summanden mit einem gemeinschaftlichen Nenner dar und verfährt dann nach dem vorigen Satze.

Z. B. $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{19}{12} = 1\frac{7}{12}$.

$$a + \frac{m}{n} = \frac{an}{n} + \frac{m}{n} = \frac{an+m}{n}.$$

§. **101.** Die Summe zweier Brüche bleibt unverändert, wenn man die Summanden mit einander vertauscht.

Es ist $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{an}{mn} + \frac{bm}{mn} = \frac{an+bm}{mn}$ (§. 100)

$= \frac{bm+an}{mn}$ (§. 11) $= \frac{bm}{mn} + \frac{an}{mn}$ (§. 100)

$= \frac{b}{n} + \frac{a}{m}$ (§. 96, 3).

§. **102.** Von dem Bruche $\frac{a}{m}$ den Bruch $\frac{b}{m}$ subtrahiren (§§. 15 und 31) heißt, in der Zahlenreihe der m tel vom Minuend $\frac{a}{m}$ aus, je nachdem der Subtrahend positiv oder negativ ist, in negativer oder positiver Richtung um so viele m tel fortschreiten, als deren der Subtrahend $\frac{b}{m}$ enthält; der Bruch, zu dem man auf diese Weise gelangt, ist die gesuchte Differenz.

Folgesätze. 1. Subtraction eines Bruches ist Addition des entgegengesetzten Bruches (§. 100).

2. Zwei Brüche von gleichen Nennern werden subtrahirt, indem man die Zähler subtrahirt und der Differenz den gemeinschaftlichen Nenner gibt.

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}.$$

Zusatz. 1. Sind Brüche mit ungleichen Nennern, oder eine ganze Zahl und ein Bruch zu subtrahiren, so stellt man die beiden Zahlen mit einem gemeinschaftlichen Nenner dar und verfährt dann nach dem vorhergehenden Satze.

Z. B. $\frac{7}{8} - \frac{3}{4} = \frac{7}{8} - \frac{6}{8} = \frac{1}{8}$.

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{n} = \frac{an}{mn} - \frac{bm}{mn} = \frac{an-bm}{mn}.$$

$$a - \frac{m}{n} = \frac{an}{n} - \frac{m}{n} = \frac{an-m}{n}.$$

Zusatz. 2. Insbesondere erhält man

$a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}$ und auch $\frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$.

$\frac{a+b}{2}$ liegt also mitten zwischen den Zahlen a und b, von beiden um dieselbe Differenz verschieden, und heißt darum das arithmetische Mittel zwischen a und b.

§. **103.** 1. Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, indem man den Zähler damit multiplicirt oder den Nenner dadurch dividirt.

$$\frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b} = \frac{a}{b:m} \text{ (§. 51, 2).}$$

Zusatz. Die zweite Art, einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren, kann nur angewendet werden, wenn der Nenner des Bruches durch die ganze Zahl theilbar ist.

2. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, indem man den Zähler dadurch dividirt oder den Nenner damit multiplicirt.

$$\frac{a}{b} : m = \frac{a:m}{b} = \frac{a}{bm} \text{ (§. 50).}$$

Zusatz. Die erste Art des Dividirens ist nur dann anwendbar, wenn der Zähler des Bruches durch die ganze Zahl theilbar ist.

§. **104.** Eine Zahl a mit einem Bruch $\frac{m}{n}$ multipliciren (§§. 35 und 59) heißt, den Multiplicand a, je nachdem der Multiplicator positiv oder negativ ist, mit unverändertem oder mit entgegengesetztem Vorzeichen in so viele gleiche Theile theilen, wie der Nenner n des Bruches anzeigt, und einen solchen Theil so oft als Summand setzen, wie der Zähler m des Bruches anzeigt (§. 48, 2).

Folgesätze. 1. Eine Zahl wird mit einem Bruche multiplicirt, indem man sie durch den Nenner dividirt und den Quotienten mit dem Zähler multiplicirt.

$$a \cdot \frac{m}{n} = \frac{a}{n} \cdot m = \frac{am}{n} \text{ (§. 103, 1).}$$

2. Ein Bruch wird mit einem Bruche multiplicirt, indem man dem Producte der Zähler das Product der Nenner als Nenner gibt.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \left(\frac{a}{b} : n\right) \cdot m = \frac{a}{bn} \cdot m \text{ (§. 103, 2)} = \frac{am}{bn} \text{ (§. 103, 1).}$$

Zusatz. Multiplicirt man eine Zahl mit einem echten oder unechten Bruche, so ist das Product bezüglich kleiner oder größer als der Multiplicand.

Wenn $m < n$, also $\frac{m}{n} < 1$, so wird $a \cdot \frac{m}{n} < a \cdot 1$, folglich $a \cdot \frac{m}{n} < a$;

wenn aber $m > n$, also $\frac{m}{n} > 1$, so wird $a \cdot \frac{m}{n} > a \cdot 1$, folglich $a \cdot \frac{m}{n} > a$.

3. Das Product zweier Brüche bleibt unverändert, wenn man die Factoren unter einander vertauscht.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{am}{bn} = \frac{ma}{nb} \text{ (§. 37)} = \frac{m}{n} \cdot \frac{a}{b} \text{ (nach 2).}$$

§. **105.** Wenn zwei Zahlen zum Producte 1 geben, so heißt jede der umgekehrte oder reciproke Werth der anderen.

So ist $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, $\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = 1$, daher $\frac{1}{a}$ der umgekehrte Werth von a, $\frac{n}{m}$ der umgekehrte Werth von $\frac{m}{n}$.

§. **106.** Für die Division durch einen Bruch ergeben sich aus dem in §. 46 aufgestellten allgemeinen Begriffe der Division folgende Sätze:

1. Eine Zahl wird durch einen Bruch dividirt, indem man sie durch den Zähler dividirt und den Quotienten mit dem Nenner multiplicirt, oder indem man sie mit dem umgekehrten Bruche multiplicirt.

Beweis. $a : \frac{m}{n} = \frac{a}{m} . n$ (§. 51, 1)

$= \frac{a\,n}{m} = a . \frac{n}{m}$ (§. 104, 1).

Zusatz. Da $1 : \frac{m}{n} = 1 . \frac{n}{m} = \frac{n}{m}$ ist, so kann man allgemein den reciproken Werth einer Zahl a durch $1 : a$ oder $\frac{1}{a}$ bezeichnen.

2. Ein Bruch wird durch einen Bruch dividirt, indem man ihn mit dem umgekehrten Bruche multiplicirt, ~~oder indem man dem Quotienten der Zähler den Quotienten der Nenner als Nenner gibt.~~

Es ist $\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} . \frac{n}{m}$ (nach 1); oder

$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \left(\frac{a}{b} : m\right) . n$ (nach 1) $= \frac{a : m}{b} . n$ (§. 103, 2)

$= \frac{a : m}{b : n}$ (§. 103, 1).

Das zweite Verfahren findet vorzüglich Anwendung bei der Division zweier Brüche mit gleichen Nennern; z. B.

$$\frac{27}{100} : \frac{9}{100} = 3, \quad \frac{a}{m} : \frac{b}{m} = a : b.$$

Zusatz. Dividirt man eine Zahl durch einen echten oder unechten Bruch, so ist der Quotient bezüglich größer oder kleiner als der Dividend.

Wenn $m < n$, also $\frac{m}{n} < 1$, so wird $a : \frac{m}{n} > a : 1$, folglich $a : \frac{m}{n} > a$;

wenn aber $m > n$, also $\frac{m}{n} > 1$, so wird $a : \frac{m}{n} < a : 1$, folglich $a : \frac{m}{n} < a$.

§. **107**. Ein Bruch, dessen Zähler oder Nenner, oder beide zugleich wieder Brüche sind, heißt ein gebrochener Bruch. Er ist nichts anderes, als eine angezeigte Division von Brüchen, und kann daher in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt werden, indem man diese Division wirklich ausführt. Z. B.:

$$\frac{\frac{a}{m}}{b} = \frac{a}{m} : b = \frac{a}{b\,m}; \quad \frac{a}{\frac{m}{n}} = a : \frac{m}{n} = \frac{a\,n}{m};$$

$$\frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{n}} = \frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{a\,n}{b\,m}.$$

§. **108**. Alle bisher für die ganzen Zahlen erwiesenen Lehrsätze gelten auch für die gebrochenen Zahlen.

Denn alle jene Lehrsätze beruhen auf den Commutationsgesetzen

$$a + b = b + a \text{ und}$$
$$a . b = b . a;$$

diese zwei Gesetze aber gelten, wie in §. 101 und §. 104, 3 bewiesen wurde, auch für Brüche.

Zusatz. Hiernach ist auch der im Schlußsatze des §. 46 bezüglich der Quotienten ausgesprochenen Vorbehalt aufgehoben.

2. Decimalbrüche.

§. **109.** Die allgemeine Form eines Decimalbruches (§. 93) ist $\frac{A}{10^m}$, wo A und m beliebige dekadische ganze Zahlen bezeichnen. Die Decimalbrüche nennt man auch Decimalzahlen.

Die Decimalbrüche werden ohne Nenner angeschrieben; man braucht nur im Zähler von der Rechten gegen die Linke so viele Ziffern durch einen Punkt, den Decimalpunkt, abzuschneiden, als der Potenzexponent von 10 im Nenner Einheiten enthält, oder was gleichviel ist, als im Nenner Nullen vorkommen; sollten nicht genug Ziffern vorhanden sein, um sie abschneiden zu können, so werden die fehlenden links durch Nullen ersetzt. Z. B.

$$\frac{78317}{10^3} = \frac{78317}{1000} = 78{\cdot}317, \quad \frac{5483}{10^4} = \frac{5483}{10000} = 0{\cdot}5483,$$

$$\frac{37}{10^5} = \frac{37}{100000} = 0{\cdot}00037.$$

Die Ziffern rechts nach dem Decimalpunkte werden Decimalen genannt. $\frac{A}{10^m}$ stellt demnach einen Decimalbruch mit m Decimalen vor.

Um die Bedeutung der Ziffern eines Decimalbruches kennen zu lernen, sei der Decimalbruch $\frac{A}{10^4}$, welcher 4 Decimalen enthält; die Zahl vor dem Decimalpunkte heiße m, und die Decimalziffern in der Ordnung gegen die Rechte seien a, b, c, d; dann ist

$$A = m \cdot 10^4 + a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d,$$

daher

$$\frac{A}{10^4} = \frac{m.10^4 + a.10^3 + b.10^2 + c.10 + d}{10^4}$$

$$= m + \frac{a}{10} + \frac{b}{10^2} + \frac{c}{10^3} + \frac{d}{10^4}.$$

Es bedeutet also die Zahl, welche links vor dem Decimalpunkte steht, eine ganze Zahl; die erste Decimale bedeutet Zehntel, die zweite Hundertel, die dritte Tausendtel, die vierte Zehntausendtel u. s. w.

$$\text{Z. B. } 34{\cdot}781 = \frac{34781}{1000} = \frac{34000 + 700 + 80 + 1}{1000}$$

$$= 34 + \frac{7}{10} + \frac{8}{100} + \frac{1}{1000}.$$

Um einen Decimalbruch zu lesen, spricht man zuerst die Ganzen vor dem Decimalpunkte aus, und dann jede Decimalstelle einzeln mit Hinzufügung ihres Nenners. Man kann den Nenner der einzelnen Decimalen beim Aussprechen auch weglassen und nur alle Decimalzahlen, 0 nicht ausgenommen, in der Ordnung nennen.

Die Decimalzahlen sind eine Erweiterung des dekadischen Zahlensystems (§. 64) in der Art, daß die Reihe der Zahlenordnungen ... Tausende, Hunderte, Zehner, Einer nicht mehr mit den Einern abbricht, sondern sich nach demselben Gesetze, indem jede niedrige Einheit als der zehnte Theil einer Einheit der nächst höheren Ordnung angenommen wird, noch unter den Einern hinab in Zehnteln, Hunderteln, Tausendteln, ... fortsetzt. Der Decimalpunkt scheidet die ursprüngliche Reihe der Zahlenordnungen von dieser Fortsetzung.

Hiernach ist

$$\ldots c.10^3 + b.10^2 + a.10 + E + \frac{\alpha}{10} + \frac{\beta}{10^2} + \frac{\gamma}{10^3} + \ldots$$

die allgemeine Form einer Zahl des dekadischen Systems, wo E, a, b, c, ... die Ziffern der Einer, Zehner, Hunderte, Tausende, ..., und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, die Ziffern der Zehntel, Hundertel, Tausendtel, ... bezeichnen.

Folgesätze. 1. Der Werth eines Decimalbruches wird nicht geändert, wenn man ihm rechts hinter den geltenden Ziffern beliebig viele Nullen anhängt.

$$0{\cdot}23 = 0{\cdot}230 = 0{\cdot}2300 = 0{\cdot}23000.$$

2. Der Werth jeder Decimalzahl ist kleiner als eine Einheit der ihrer höchsten geltenden Ziffer unmittelbar vorausgehenden höheren Stelle; z. B. $0{\cdot}00783 < \frac{1}{10^2}$. Denn hätte jede Ziffer der Decimalzahl auch den höchsten möglichen Werth 9, so müßte man noch eine Einheit der niedrigsten Stelle dazu addiren, um eine Einheit jener höheren Stelle zu erhalten.

Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Decimalbruch und umgekehrt.

§. 110. Aufgabe. Einen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Man dividire den Zähler durch den Nenner und bringe im Quotienten nach den Ganzen, an deren Stelle bei einem echten Bruche eine Null gesetzt wird, den Decimalpunkt an. Dem Reste hänge man hierauf eine Null an, dividire wieder und schreibe die erhaltene Quotientenziffer nach dem Decimalpunkte hin; hänge dann eben so jedem etwa weiter folgenden Reste eine Null an und setze die Division fort, bis diese endlich ohne Rest aufgeht, oder, wenn dieses nicht eintritt, bis man die gewünschte Anzahl Decimalen erhalten hat.

Beweis. $\frac{a}{b} = \frac{a.10^m}{b.10^m}$ (§. 96, 3) $= \frac{a.10^m : b}{10^m}$ (§. 49).

z. B. $\frac{3}{4} = 3{\cdot}0 : 4 = 0{\cdot}75$ $\quad$ $\frac{329}{125} = 329 : 125 = 2{\cdot}632$

20 $\quad$ 790

= = $\quad$ 400

250

= = =

Zusätze. 1. Damit sich ein gemeiner Bruch $\frac{a}{b}$ in einen Decimalbruch genau verwandeln lasse, muß dieser ein endlicher Decimalbruch werden, folglich $a.10^m$ durch b theilbar sein. Dieses ist aber, wenn a und b relative Primzahlen sind, nach §. 76, 4 nur dann möglich, wenn 10^m durch b theilbar ist, d. h. wenn b keinen von 2 und 5 verschiedenen Factor enthält.

In allen Fällen, wo der Nenner b außer 2 und 5 noch andere davon verschiedene Factoren enthält, kann der auf die einfachste Form gebrachte gemeine Bruch $\frac{a}{b}$ durch keinen Decimalbruch vollkommen dargestellt werden. Es läßt sich jedoch immer näherungsweise ein Decimalbruch entwickeln, welcher von dem gegebenen gemeinen um weniger verschieden ist, als jede noch so kleine gegebene Zahl. Denn ist $a.10^m$ durch b nicht theilbar, so kann der Quotient als eine gemischte Zahl angesehen werden.

Setzt man also

$$\frac{a \cdot 10^m}{b} = p + \frac{r}{b},$$

wo $r < b$ ist, so ist

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{10^m} + \frac{r}{b \cdot 10^m}, \text{ also } \frac{a}{b} - \frac{p}{10^m} = \frac{r}{b \cdot 10^m}.$$

Da nun $r < b$, also $\frac{r}{b} < 1$, so muß $\frac{r}{b \cdot 10^m} < \frac{1}{10^m}$ sein. Der Unterschied zwischen dem gemeinen Bruche $\frac{a}{b}$ und dem Decimalbruche $\frac{p}{10^m}$ ist also kleiner als $\frac{1}{10^m}$, d. i. kleiner als eine Einheit der letzten noch entwickelten Decimalstelle; er läßt sich daher, da m beliebig groß, daher $\frac{1}{10^m}$ beliebig klein gemacht werden kann, kleiner machen, als jede noch so kleine angebbare Zahl.

Z. B. $\frac{23}{78} = 23{\cdot}0 : 78 = 0{\cdot}29487\ldots$

Bleibt man hier bei der 5ten Decimale stehen, so ist der begangene Fehler kleiner als $\frac{1}{10^5}$.

2. Wenn ein Bruch, der sich nicht genau durch einen Decimalbruch darstellen läßt, näherungsweise in einen Decimalbruch verwandelt wird, so müssen bei der Entwicklung einige Decimalziffern in derselben Ordnung immer wiederkehren. Denn bei der Division ist der Rest immer kleiner als der Divisor; man kann daher nur so viele verschiedene Reste erhalten, als es ganze Zahlen gibt, welche kleiner sind als der Divisor, so daß im ungünstigsten Falle wenigstens unter so vielen Resten, als der Divisor Einheiten enthält, wieder einer der vorigen Reste zum Vorschein kommt, von welchem an sich dann weiter die nämlichen Ziffern im Quotienten und dieselben Reste wie vorher ergeben müssen. Z. B.

$\frac{7}{15} = 7{\cdot}0 : 15 = 0{\cdot}46666\ldots$

1 00
100
100
10

$\frac{18}{37} = 18{\cdot}0 : 37 = 0{\cdot}486\,486\ldots$

3 20
240
180
320
240
18

Decimalbrüche, in denen sich eine bestimmte Anzahl von Ziffern in derselben Ordnung wiederholt, nennt man *periodische*, und die immer wiederkehrende Ziffernreihe die *Periode*. Man pflegt die Periode nur einmal anzuschreiben, jedoch die erste und letzte Ziffer derselben mit darüber gesetzten Punkten zu bezeichnen; es ist also

$$\frac{7}{15} = 0{\cdot}4\dot{6}; \frac{18}{37} = 0{\cdot}\dot{4}8\dot{6}.$$

§. 111. Aufgabe. *Einen Decimalbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln.*

1. *Ein endlicher Decimalbruch wird in einen gemeinen Bruch verwandelt*, indem man denselben in der Form eines gemeinen anschreibt, und diesen, wenn es angeht, abkürzt.

Z. B. $0{\cdot}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$, $31{\cdot}325 = 31\frac{325}{1000} = 31\frac{13}{40}$.

2. Ein rein periodischer Decimalbruch, d. i. ein solcher, worin der Periode keine Decimale vorangeht, wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, indem man als Zähler die Ziffern der Periode und als Nenner eine Zahl setzt, welche mit so vielen 9 geschrieben wird, als die Periode Ziffern hat.

Beweis. Drückt man die Ziffern der Periode durch b und ihre Anzahl durch n aus, so ist der gesuchte periodische Decimalbruch

$$x = \frac{b}{10^n} + \frac{b}{10^{2n}} + \frac{b}{10^{3n}} + \frac{b}{10^{4n}} + \ldots$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit 10^n, so erhält man

$$x.10^n = b + \frac{b}{10^n} + \frac{b}{10^{2n}} + \frac{b}{10^{3n}} + \ldots$$

Subtrahirt man nun den früheren Ausdruck von dem letzten, so folgt

$$x.10^n - x = b, \text{ oder } (10^n - 1).x = b$$

und daraus

$$x = \frac{b}{10^n - 1}.$$

Z. B. $0\cdot\dot{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$; $0\cdot\dot{4}\dot{5} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$;

$2\cdot\dot{3}0\dot{1} = 2\frac{30}{99}\frac{1}{9}$; $15\cdot\dot{3}5\dot{1} = 15\frac{35}{99}\frac{1}{9} = 15\frac{1}{3}\frac{3}{7}$.

3. Ein gemischt periodischer Decimalbruch, d. i. ein solcher, worin der Periode noch andere Decimalen vorangehen, wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, indem man die der Periode vorangehenden Decimalen sammt der Periode als ganze Zahl zusammenstellt, davon die der Periode vorangehenden Decimalen, ebenfalls als ganze Zahl betrachtet, subtrahirt und diese Differenz als Zähler, als Nenner aber eine Zahl annimmt, die mit so vielen 9, als die Periode Ziffern enthält, und so vielen rechtsfolgenden Nullen, als Decimalen der Periode vorangehen, geschrieben ist.

Beweis. Es seien b die Ziffern der Periode, n die Anzahl derselben, ferner a die der Periode vorangehenden Decimalen und m ihre Anzahl; so hat man für den Decimalbruch den Ausdruck:

$$x = \frac{a}{10^m} + \frac{b}{10^{m+n}} + \frac{b}{10^{m+2n}} + \frac{b}{10^{m+3n}} + \ldots$$

welcher zuerst mit 10^{m+n}, dann mit 10^m multiplicirt, die zwei Ausdrücke

$$x.10^{m+n} = a.10^n + b + \frac{b}{10^n} + \frac{b}{10^{2n}} + \ldots$$

$$x.10^m = a + \frac{b}{10^n} + \frac{b}{10^{2n}} + \frac{b}{10^{3n}} + \ldots$$

gibt. Durch die Subtraction des zweiten Ausdruckes von dem ersten erhält man

$$x.10^{m+n} - x.10^m = a.10^n + b - a, \text{ oder}$$
$$x.10^m\,(10^n - 1) = (a.10^n + b) - a,$$

und daraus

$$x = \frac{(a.10^n + b) - a}{(10^n - 1).10^m}.$$

Z. B. $0\cdot2\dot{1}\dot{5} = \frac{215 - 2}{990} = \frac{213}{990} = \frac{71}{330}$,

$$3\cdot31\dot{7}0\dot{8} = 3\,\frac{31708 - 31}{99900} = 3\frac{31}{99}\frac{67}{00} = 3\frac{10}{33}\frac{55}{00}\frac{9}{0}.$$

Rechnungsoperationen mit vollständigen Decimalbrüchen.

§. **112.** Das Rechnen mit Decimalbrüchen beruhet auf denselben Gründen, wie das mit ganzen Zahlen, und fordert nur die genaue Rücksicht auf den Rang der einzelnen Ziffern, d. i. auf die Stellung des Decimalpunktes.

Um Decimalbrüche zu addiren oder zu subtrahiren, schreibt man sie so unter einander, daß die gleichnamigen Stellen, mithin auch die Decimalpunkte, genau unter einander zu stehen kommen, und addirt oder subtrahirt sie sodann von der Rechten gegen die Linke, wie ganze Zahlen. Die fehlenden Decimalstellen kann man sich durch Nullen ersetzt denken.

35·312	215·3456
0·5678	91·45923
39·2	Differenz 123·88637
Summe 75·0798	

§. **113.** 1. Ein Decimalbruch wird mit einer Potenz von 10 multiplicirt, indem man den Decimalpunkt um so viele Stellen weiter gegen die Rechte rückt, als der Multiplicator Nullen hat.

$$\frac{a}{10^m} \cdot 10^n = \frac{a}{10^m : 10^n} = \frac{a}{10^{m-n}}.$$

2. Decimalbrüche werden multiplicirt, indem man sie ohne Rücksicht auf die Decimalpunkte wie ganze Zahlen multiplicirt (§. 70) und im Producte von der Rechten angefangen so viele Ziffern als Decimalen abschneidet, als deren in beiden Factoren zusammen enthalten sind.

$$\frac{a}{10^m} \cdot \frac{b}{10^n} = \frac{a\,b}{10^{m+n}}.$$

Dieselbe Regel gilt auch, wenn ein Factor eine ganze Zahl ist.

Hat das Product nicht so viele Ziffern, als abgeschnitten werden sollen, so ersetze man die fehlenden Stellen links durch Nullen.

Zusatz. Schreibt man den Multiplicand, den Multiplicator und die einzelnen Theilproducte nach der im Zusatze zu §. 70 enthaltenen Vorschrift unter einander, so ergibt sich der Rang jeder Ziffer im Producte unmittelbar aus deren localer Stellung, indem dabei der Decimalpunkt im Producte unter den Decimalpunkt des Multiplicators zu stehen kommt.

Z. B. 8·056 × 53·1	13·7934 × 0·00156
53·1	0·00156
40280	137934
24168	689670
8056	827604
427·7736	0·021517704

§. **114.** 1. Ein Decimalbruch wird durch eine Potenz von 10 dividirt, indem man den Decimalpunkt um so viele Stellen weiter gegen die Linke rückt, als der Divisor Nullen enthält.

$$\frac{a}{10^m} : 10^n = \frac{a}{10^{m+n}}.$$

2. Decimalbrüche werden dividirt, indem man Dividend und Divisor durch Anhängung von Nullen mit gleich vielen Decimalen darstellt

und dann mit Weglassung der Decimalpunkte die Division wie bei ganzen Zahlen verrichtet.

$$\frac{a}{10^m} : \frac{b}{10^m} = \frac{a : b}{10^m : 10^m} = a : b.$$

Dieselbe Regel gilt auch, wenn der Dividend oder der Divisor eine ganze Zahl ist.

Praktisch verfährt man einfacher nach folgenden Regeln, deren Richtigkeit von selbst einleuchtet:

a) Ein Decimalbruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, indem man ihn wie eine ganze Zahl dividirt und im Quotienten den Decimalpunkt setzt, bevor man die erste Decimalziffer des Dividends in Rechnung zieht.

Z. B. 487·75 : 25 = 19·51
237
12 7
25

b) Eine Zahl wird durch einen Decimalbruch dividirt, indem man im Dividend und im Divisor durch Multiplication mit der entsprechenden Potenz von 10 den Decimalpunkt so verschiebt, daß der Divisor eine ganze Zahl wird, und dann die Division nach der Regel a) ausführt.

Z. B. 0·05476 : 36·84 = 5·476 : 3684 = ...
34461 : 0·63 = 3446100 : 63 = ...

Zusatz. Schreibt man den Dividend, den Divisor und den Quotienten nach Vorschrift des Zusatzes in §. 72 unter einander, so ergibt sich der Rang jeder einzelnen Ziffer des Quotienten unmittelbar aus deren localer Stellung, indem dabei der Decimalpunkt im Quotienten unter den Decimalpunkt des Dividends zu stehen kommt.

Z. B.

0·5 25632 : 3·056	87 6·5 : 18·95
3·056	18·9 5
0·1 72	4 6·25
2 2003	11 8 50
6112	4 800
====	1 1100
	1625

Rechnungsoperationen mit abgekürzten Decimalbrüchen.

§. **115.** Stellt ein Decimalbruch irgend einen Zahlwerth, der entweder aus der Rechnung selbst oder aus einer angestellten Messung hervorgegangen ist, nicht völlig genau, sondern blos näherungsweise dar, so heißt er ein unvollständiger Decimalbruch, im Gegensatze zu einem geschlossenen oder vollständigen, der in seinen Zahlen vollkommen genau ausgedrückt ist.

Daß ein Decimalbruch unvollständig ist, wird durch angehängte Punkte, z. B. 3·14.., angedeutet.

Auch ein geschlossener Decimalbruch kann, wenn für einen bestimmten Zweck eine geringere Genauigkeit genügt, zu einem unvollständigen abgekürzt werden, wenn man eine oder mehrere seiner letzten Decimalziffern wegläßt.

Die Differenz zwischen einem unvollständigen Decimalbruche und dem genauen Zahlwerthe, den er angenähert darstellt, heißt der Fehler des Decimalbruches; derselbe ist positiv oder negativ, je nachdem der darzustellende Zahlwerth größer oder kleiner als der Decimalbruch ist.

Bezeichnet man die m ersten Decimalziffern eines Decimalbruches a.. durch p, und die weiter folgenden durch q, r,... so ist

$$a.. = \frac{p}{10^m} + \frac{q}{10^{m+1}} + \frac{r}{10^{m+2}} + ..$$

Da nach §. 109, Folges. 2 die Decimalzahl $\frac{q}{10^{m+1}} + \frac{r}{10^{m+2}} + .. < \frac{1}{10^m}$ ist, so hat man

$$\frac{p}{10^m} < a.. < \frac{p+1}{10^m}.$$

a.. liegt also zwischen den Grenzen $\frac{p}{10^m}$ und $\frac{p+1}{10^m}$, deren Unterschied $\frac{1}{10^m}$ ist. Daraus folgt:

1. Setzt man für a.. den Decimalbruch $\frac{p}{10^m}$, so ist der Fehler, den man begeht, kleiner als $\frac{1}{10^m}$. Werden daher in einer Decimalzahl alle auf die mte Stelle folgenden Decimalen weggelassen, so ist der Fehler kleiner als eine Einheit an der mten Decimalstelle.

2. Ist $q < 5$, so liegt a.. näher an $\frac{p}{10^m}$ als an $\frac{p+1}{10^m}$; es ist daher $a.. - \frac{p}{10^m} < \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{10^m}$. Wenn also die erste weggelassene Ziffer kleiner als 5 ist, so beträgt der Fehler sogar weniger als eine halbe Einheit der letzten noch beibehaltenen Stelle.

3. Ist $q \geqq 5$, so liegt a.. näher an $\frac{p+1}{10^m}$ als an $\frac{p}{10^m}$; es ist daher $-\left(a.. - \frac{p+1}{10^m}\right) < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^m}$. Ist demnach die erste weggelassene Ziffer 5 oder größer als 5, so kann man auch in diesem Falle den Fehler kleiner als eine halbe Einheit der letzten beizubehaltenden Stelle machen, indem man diese um 1 erhöhet (corrigirt).

Ein unvollständiger Decimalbruch a.. kann daher immer durch einen geschlossenen mstelligen Decimalbruch a so genau dargestellt werden, daß der Fehler kleiner ist als eine halbe Einheit an der mten Stelle; man kann also setzen:

$$a.. = a + \alpha,$$

wo $\alpha < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^m}$ ist, übrigens positiv oder negativ sein kann.

Beim Rechnen mit abgekürzten Decimalbrüchen ist es von Wichtigkeit, zu wissen, mit welchem Grade der Zuverlässigkeit in jedem Falle das Rechnungsresultat bestimmt werden könne, woraus sich dann auch umgekehrt folgern läßt, welche Genauigkeit die gegebenen Zahlen haben müssen, damit das Resultat bis zu einer bestimmten Decimalstelle verläßlich gefunden werde. Bei den hierüber aufzustellenden Sätzen werden wir die abgekürzten Decimalbrüche immer als so genau voraussetzen, daß der Fehler weniger als eine halbe Einheit ihrer letzten Stelle beträgt.

§. **116.** 1. Der Fehler der Summe mehrerer auf gleichviele Stellen abgekürzter Decimalbrüche ist kleiner als so viele halbe Einheiten der letzten Stelle, als Summanden vorhanden sind.

2. Der Fehler der Differenz zweier auf gleichviele Stellen abgekürzter Decimalbrüche ist kleiner als eine Einheit der letzten Stelle.

Die Richtigkeit dieser Sätze ist von selbst einleuchtend.

Folgesätze. 1. In der Summe mehrerer abgekürzter Decimalbrüche sind im ungünstigsten Falle so viele der niedrigeren Stellen unsicher, als die halbe Zahl der Summanden Ziffern hat; z. B. eine Stelle, wenn weniger als 20 Summanden vorhanden sind.

2. In der Differenz zweier abgekürzter Decimalbrüche ist im ungünstigsten Falle eine Stelle unzuverlässig.

§. **117.** 1. Der Fehler des Productes zweier auf gleichviele Stellen abgekürzter Decimalbrüche ist kleiner als so viele halbe Einheiten der letzten Stelle, wie die Summe der beiden Factoren anzeigt.

Sind a.. und b.. auf m Decimalstellen abgekürzt, so ist

$$a.. = a + \alpha \text{ und } b.. = b + \beta,$$

wo α und β kleiner als $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^m}$ sind; daher

$$a.. \times b.. = ab + a\beta + b\alpha + \alpha\beta,$$

oder, wenn das Glied $\alpha\beta$ als gegen die übrigen verschwindend klein weggelassen wird,

$$a.. \times b.. = ab + a\beta + b\alpha.$$

Der Fehler des als vollständig entwickelten Productes ab ist also $a\beta + b\alpha$, somit kleiner als $(a + b) . \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^m}$.

Sind z. B. 7·846.. und 3·142.. abgekürzte Decimalbrüche, so ist $7{\cdot}846 \times 3{\cdot}142 = 24{\cdot}652132$; der Fehler ist kleiner als $(7{\cdot}846 + 3{\cdot}142) . \frac{0{\cdot}001}{2}$, d. i. kleiner als 0·005494; das Product ist also auf 2 Stellen genau 24·65.

2. Der Fehler des Productes eines abgekürzten Decimalbruches mit einem geschlossenen ist kleiner als so viele halbe Einheiten der letzten Stelle, wie der geschlossene Factor anzeigt.

Behält nämlich a.. den früheren Werth und ist b ein geschlossener Decimalbruch, so ist

$$a.. \times b = ab + b\alpha,$$

folglich der Fehler $b\alpha < b . \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^m}$.

Z. B. Das Product $8{\cdot}0256.. \times 17{\cdot}8$ läßt sich, da der Fehler kleiner als $17{\cdot}8 . \frac{0{\cdot}0001}{2}$, d. i. kleiner als 0·00089 wird, mit 3 zuverlässigen Decimalstellen entwickeln.

§. **118.** Um in dem Producte zweier Zahlen mit Vermeidung jeder überflüssigen Rechnung nur die zuverlässigen Stellen, überhaupt nur eine verlangte Zahl von Decimalen zu erhalten, bedient man sich der abgekürzten Multiplication. Darunter versteht man folgendes Verfahren:

1. Man setze (§. 70, Zusatz und §. 113, Zusatz) den Multiplicator so unter den Multiplicand, daß die höchste geltende Ziffer des ersten unter die Einerstelle des zweiten zu stehen kommt, behalte vom Multiplicator so viele Decimalen, als man ihrer im Producte erhalten will, und eben so vom Multiplicand nur die über dem abgekürzten Multiplicator stehenden Decimalstellen.

2. Man multiplicire mit der höchsten Ziffer des Multiplicators den so abgekürzten Multiplicand und schreibe die erste Ziffer des Theilproductes unter die niederste Stelle des abgekürzten Multiplicands. Um jedoch diese erste Ziffer mög-

lichst sicher zu erhalten, multiplicire man früher noch die erste im Multiplicand weggelassene Ziffer und addire die erhaltenen Zehner als Correctur zu der ersten Ziffer des Theilproductes.

3. Auf gleiche Weise multiplicire man mit der zweiten, dritten, ... Ziffer des Multiplicators, wobei man jedoch jedesmal die niedrigste Ziffer des früheren Multiplicands wegläßt, und in Folge dessen auch die Theilproducte nicht nach rechts hinausrückt, sondern mit ihren ersten Ziffern unter einander schreibt. Schließlich multiplicire man auch mit der ersten im Multiplicator weggelassenen Ziffer und schreibe die erhaltenen Zehner als letztes Theilproduct an.

4. Man addire alle Theilproducte und setze in der Summe den Decimalpunkt unter den Decimalpunkt des Multiplicators.

Beispiel. Es sei das Product $7\cdot4281\,..\times0\cdot9822\,..$ zu berechnen.

Da der Fehler des vollständig entwickelten Productes kleiner als $(7\cdot4281+0\cdot9822).\frac{0\cdot0001}{2}$, d. i. kleiner als 0·00042 sein muß, so kann das Product nur auf 3 Stellen genau berechnet werden, und man hat folgende Multiplicationen:

a) vollständig		b) abgekürzt mit 3 Decim.	
7·42	81	7·4 2	81
0·9 82	2	0·9 8 2	2
6 6 85	29	6 6 85	
5 94	248	5 9 4	
14	8562	1 5	
1	48562	1	
7·2 95	87982	7·2 9 5	

Da bei der abgekürzten Multiplication wegen der nicht ganz zuverlässigen Correcturen die letzte Ziffer gewöhnlich unsicher wird, so verrichte man, um im Producte eine bestimmte Anzahl zuverlässiger Decimalziffern zu erhalten, die abgekürzte Multiplication mit einer Decimale mehr, als ihrer genau sein sollen, und kürze dann das Resultat um eine Ziffer ab.

§. **119.** 1. Der Fehler des Quotienten zweier auf gleichviele Stellen abgekürzter Decimalbrüche ist kleiner als so viele halbe Einheiten der letzten Stelle, wie der Quotient der Summe aus dem Dividend und Divisor durch das Quadrat des Divisors anzeigt.

Haben a.. und b.. die in §. 117, 1 angeführte Bedeutung, so ist

$$\frac{a..}{b..}=\frac{a}{b}+\frac{-a\beta+b\alpha}{b\,(b+\beta)}.$$

Im ungünstigsten Falle sind α und β entgegengesetzt bezeichnet; dann ist der Fehler $\frac{a\beta+b\alpha}{b\,(b+\beta)}$, oder, wenn man β als gegen b verschwindend klein vernachläßigt, $\frac{a\beta+b\alpha}{b^2}$, somit kleiner als $\frac{a+b}{b^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^m}$.

Es sei z. B. der Quotient $5\cdot134..:3\cdot862..$ zu berechnen. Zur Bestimmung des Fehlers hat man

$$\frac{5\cdot134+3\cdot862}{3\cdot862^2}\cdot\frac{0\cdot001}{2}<\frac{8\cdot996}{3\cdot8^2}\cdot\frac{0\cdot001}{2}=0\cdot00062..$$

Der Quotient der gegebenen zwei Decimalbrüche läßt sich also mit 3 zuverlässigen Decimalen entwickeln; es ist nämlich

$$5\cdot134..:3\cdot862..=1\cdot329..$$

2. Der Fehler des Quotienten eines abgekürzten Decimalbruches durch einen geschlossenen ist kleiner als so viele halbe Einheiten der letzten Stelle, wie der reciproke Werth des Divisors anzeigt.

Behält a . . den früheren Werth und ist b ein geschlossener Decimalbruch, so hat man

$$\frac{a..}{b} = \frac{a}{b} + \frac{\alpha}{b}.$$

Der Fehler ist also $\frac{\alpha}{b}$, somit kleiner als $\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^m}$.

Z. B. Die Division $0{\cdot}314 . . : 6{\cdot}34$ läßt sich, da der Fehler des Quotienten kleiner als $\frac{1}{6{\cdot}34} \cdot \frac{0{\cdot}001}{2} = 0{\cdot}000078$ ist, in 4 verläßlichen Decimalstellen ausführen.

3. Der Fehler des Quotienten eines vollständigen Decimalbruches durch einen abgekürzten ist kleiner als so viele halbe Einheiten der letzten Stelle, wie der Quotient des Dividends durch das Quadrat des Divisors anzeigt.

Hat b . . den in §. 117, 1. angenommenen Werth und ist a ein geschlossener Decimalbruch, so erhält man

$$\frac{a}{b..} = \frac{a}{b} - \frac{a\beta}{b(b+\beta)}.$$

Der Fehler ist also, wenn im Nenner β als gegen b sehr klein vernachlässigt wird, gleich $\frac{a\beta}{b^2}$, somit kleiner als $\frac{a}{b^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^m}$.

Z. B. Für die Division $3{\cdot}9108 : 3{\cdot}5628 . .$ ist der Fehler kleiner als

$$\frac{3{\cdot}9108}{3{\cdot}5628^2} \cdot \frac{0{\cdot}0001}{2} < \frac{3{\cdot}9108}{3{\cdot}5^2} \cdot \frac{0{\cdot}0001}{2} = 0{\cdot}000016 . . ;$$

die Division kann daher auf 4 Decimalen genau ausgeführt werden.

§. **120.** Um in dem Quotienten zweier Zahlen mit Vermeidung jeder überflüssigen Rechnung nur so viele Ziffern zu bestimmen, als ihrer zuverlässig sein sollen, bedient man sich der abgekürzten Division. Diese besteht in folgendem Verfahren:

1. Man schreibe (§. 72, Zusatz und §. 114, Zusatz) den Divisor unter den ersten Theildividend und die erste Ziffer des Quotienten unter die Einerziffer des Divisors; dann hat die erste Ziffer des Quotienten mit der gerade darüber stehenden Ziffer des Dividends gleichen Rang. Aus dem Range dieser Ziffer und aus der Anzahl der im Quotienten verlangten Decimalen ist auch bekannt, wie viele geltende Ziffern des Quotienten man im Ganzen zu bestimmen hat. Man nehme dann so viele höchste Ziffern des Divisors, als ihrer der Quotient enthalten soll, als ersten Divisor und den darüber stehenden Theil des Dividends als ersten Dividend an.

2. Man lasse bei jeder folgenden Division, anstatt zu dem Reste eine neue Ziffer oder eine Null dazu zu setzen, im Divisor rechts eine Ziffer weg, multiplicire jedoch mit jeder neuen Ziffer des Quotienten zunächst die erste im Divisor weggelassene Ziffer und nehme daraus die Correctur für das Product aus dem abgekürzten Divisor und der entsprechenden Ziffer des Quotienten.

3. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis mit der Division durch die erste Ziffer des Divisors die Rechnung abschließt. Der Decimalpunkt im Quotienten kommt unter jenen des Dividends zu stehen.

Beispiel. Es sei der Quotient $96{\cdot}371 . . . : 4{\cdot}058 . .$ zu berechnen.

Da $\frac{96{\cdot}371 + 4{\cdot}058}{4{\cdot}058^2} \cdot \frac{0{\cdot}001}{2} < \frac{100{\cdot}429}{4^2} \cdot \frac{0{\cdot}001}{2} = 0{\cdot}003 . .$ ist, so wird

man im Quotienten nur zwei zuverlässige Decimalen erhalten, daher, weil die erste Ziffer Zehner bedeutet, im Ganzen 4 geltende Ziffern entwickeln.

a) Gewöhnliche Division der als vollständig betrachteten Decimalbrüche

```
9 6·37 | 1
4·0 58 |
-------
2 3·74 | 8..
-------
1 5 21 | 1
3 03   | 70
  19   | 650
   3   | 4080
```

b) Abgekürzte Division mit 2 Decimalen

```
9 6·37 | 1..
4·0 58 | ..
-------
2 3·75
-------
1 5 21
3 04
  20
   0
```

3. Kettenbrüche.

§. **121.** Ein Bruch, dessen Nenner aus einer ganzen Zahl und einem Bruche besteht, von welchem der Nenner, wenn er nicht der letzte ist, wieder dieselbe Eigenschaft hat, heißt ein Kettenbruch. Die allgemeine Form eines Kettenbruches ist

$$\cfrac{a}{b+\cfrac{c}{d+\cfrac{e}{f+..}}}$$ oder kürzer geschrieben: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}+..$

Die Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, ... heißen Glieder des Kettenbruches. Je nachdem der Kettenbruch eine bestimmte Anzahl von Gliedern hat, oder in's Unendliche fortschreitet, heißt er ein endlicher oder unendlicher Kettenbruch.

Besonders wichtig sind solche Kettenbrüche, deren Glieder sämmtlich 1 zum Zähler, und eine positive Zahl zum Nenner haben; ihre allgemeine Form ist

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\ldots$$

Nur von solchen Kettenbrüchen soll hier die Rede sein.

Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Kettenbruch und umgekehrt.

§. **122.** Aufgabe. Einen gemeinen echten Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Man dividire den Nenner durch den Zähler, dann den früheren Divisor durch den Rest, den neuen Divisor durch den neuen Rest, u. s. w., bis eine dieser Divisionen ohne Rest aufgeht; die einzelnen Quotienten sind die Nenner der auf einander folgenden Glieder des Kettenbruches.

Beweis. Ist $\frac{a}{b}$ ein echter Bruch, also $a < b$, so hat man

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b:a} = \frac{1}{q_1}+\frac{r_1}{a}$$

$$= \frac{1}{q_1}+\frac{1}{a:r_1} = \frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{r_2}{r_1}$$

$$= \frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{r_1:r_2} = \frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}+\frac{r_3}{r_2}$$ u. s. w.,

wenn

$b : a$ den Quotienten q_1 mit dem Reste r_1,
$a : r_1$ " " q_2 " " " r_2,
$r_1 : r_2$ " " q_3 " " " r_3,

u. s. w. gibt.

Daß bei diesem Verfahren endlich ein Rest $= 0$ kommen müsse, folgt aus dem Umstande, daß die Reste ganze Zahlen sind und daß jeder folgende Rest mindestens um 1 kleiner sein müsse, als der vorhergehende. Wäre in der obigen allgemeinen Entwicklung z. B. $r_3 = 0$, so hätte man den endlichen Kettenbruch

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3}.$$

Der gemeine Bruch $\frac{a}{b}$ wird in Bezug auf den erhaltenen Kettenbruch der Erzeugungsbruch genannt.

Ist z. B. $\frac{69}{151}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, so hat man folgende Rechnung:

$151 : 69 = 2$	mit dem Reste	13 oder 69	$151 \mid 2 = q_1$
$69 : 13 = 5$	" " "	4	$4 \mid 13 \mid 5 = q_2$
$13 : 4 = 3$	" " "	1	$1 \mid 3 = q_3$
$4 : 1 = 4$			$4 = q_4$

daher $\frac{69}{151} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

Zusatz. Um einen unechten Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln, stelle man denselben als eine gemischte Zahl dar, verwandle dann den angehängten echten Bruch in einen Kettenbruch und setze diesem noch die erhaltene ganze Zahl voraus. Der Kettenbruch hat in diesem Falle die Form

$$\frac{a}{b} = q + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} \ldots$$

§. 123. Aufgabe. Einen endlichen Kettenbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln.

Man vereinige das letzte Glied des Kettenbruches mit dem Nenner des vorletzten zu einem unechten Bruche und dividire dadurch den Zähler 1 dieses vorletzten Gliedes; den erhaltenen Bruch vereinige man wieder mit dem Nenner des vorhergehenden Gliedes und dividire dadurch den Zähler 1 desselben, und setze dieses Verfahren bis zum ersten Gliede fort.

$$\text{Z. B. } \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{5} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{41}{5}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{41}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{\frac{128}{41}} = \frac{1}{4} + \frac{41}{128} = \frac{1}{\frac{553}{128}} = \frac{128}{553}.$$

Ein anderes Verfahren, einen Kettenbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, wird weiter unten (§. 125) angegeben werden.

Näherungsbrüche und ihre Eigenschaften.

§. 124. Bricht man einen Kettenbruch bei irgend einem Gliede ab, und verwandelt den bis dahin reichenden Kettenbruch mit Vernachlässigung der folgenden Glieder in einen gemeinen Bruch, so heißt dieser ein Näherungsbruch des ganzen Kettenbruches, und zwar der erste, zweite, dritte,...., je nachdem man nur das erste, oder die ersten zwei, drei, ... Glieder in Anspruch nimmt. Bezeichnet man für den Kettenbruch

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \frac{1}{q_4} + \ldots$$

die auf einander folgenden Näherungsbrüche durch $\frac{Z_1}{N_1}, \frac{Z_2}{N_2}, \frac{Z_3}{N_3}, \ldots$, so ist

$$\frac{Z_1}{N_1} = \frac{1}{q_1}, \quad \frac{Z_2}{N_2} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}, \quad \frac{Z_3}{N_3} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3},$$

$$\frac{Z_4}{N_4} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \frac{1}{q_4}, \text{ u. s. w.}$$

Bei einem endlichen Kettenbruche stellt der letzte Näherungsbruch zugleich den Erzeugungsbruch selbst dar.

§. 125. Der Zähler eines Näherungsbruches (vom dritten an) ist gleich dem Zähler des vorhergehenden Näherungsbruches multiplicirt mit dem Nenner des neu hinzukommenden Gliedes, mehr dem Zähler des zweitvorhergehenden Näherungsbruches; eben so ist der Nenner eines Näherungsbruches gleich dem Nenner des vorhergehenden multiplicirt mit dem Nenner des neu zugezogenen Gliedes, mehr dem Nenner des zweitvorhergehenden Näherungsbruches.

Beweis. Für die ersten Näherungsbrüche erhält man:

$$\frac{Z_1}{N_1} = \frac{1}{q_1}, \text{ daher } Z_1 = 1, \; N_1 = q_1.$$

$$\frac{Z_2}{N_2} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{\frac{q_1 q_2 + 1}{q_2}} = \frac{q_2}{q_1 q_2 + 1}, \text{ daher}$$

$$Z_2 = q_2, \qquad N_2 = q_1 q_2 + 1.$$

$$\frac{Z_3}{N_3} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{\frac{q_2 q_3 + 1}{q_3}} = \frac{1}{q_1} + \frac{q_3}{q_2 q_3 + 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{q_1 q_2 q_3 + q_1 + q_3}{q_2 q_3 + 1}} = \frac{q_2 q_3 + 1}{q_1 q_2 q_3 + q_1 + q_3} = \frac{q_2 q_3 + 1}{(q_1 q_2 + 1) q_3 + q_1},$$

oder $\frac{Z_3}{N_3} = \frac{Z_2 q_3 + Z_1}{N_2 q_3 + N_1}$, daher

$$Z_3 = Z_2 q_3 + Z_1, \qquad N_3 = N_2 q_3 + N_1;$$

woraus hervorgeht, daß das obige Gesetz für den dritten Näherungsbruch richtig ist.

Gesetzt nun, dasselbe Gesetz gelte für den nten Näherungsbruch, so daß

$$\frac{Z_n}{N_n} = \frac{Z_{n-1} q_n + Z_{n-2}}{N_{n-1} q_n + N_{n-2}}$$

sei. Um aus dem nten Näherungsbruche den $(n+1)$ten zu erhalten, darf man mit Rücksicht auf die Glieder des Kettenbruches, welche zu $\frac{Z_n}{N_n}$ und $\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}}$ gehören,

nur in dem ersteren $q_n + \frac{1}{q_{n+1}}$ statt q_n setzen. Man erhält dann

$$\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} = \frac{Z_{n-1}\left(q_n + \frac{1}{q_{n+1}}\right) + Z_{n-2}}{N_{n-1}\left(q_n + \frac{1}{q_{n+1}}\right) + N_{n+2}} = \frac{Z_{n-1}\,(q_n\,q_{n+1} + 1) + Z_{n-2}\,q_{n+1}}{N_{n-1}\,(q_n\,q_{n+1} + 1) + N_{n-2}\,q_{n+1}}$$

$$= \frac{(Z_{n-1}\,q_n + Z_{n-2})\,q_{n+1} + Z_{n-1}}{(N_{n-1}\,q_n + N_{n-2})\,q_{n+1} + N_{n-1}} = \frac{Z_n\,q_{n+1} + Z_{n-1}}{N_n\,q_{n+1} + N_{n-1}}.$$

Gilt daher das obige Bildungsgesetz für den nten Näherungsbruch, so ist es auch für den $(n + 1)$ten richtig. Nun gilt dieses Gesetz, wie gezeigt wurde, für den dritten Näherungsbruch, also gilt es auch für den vierten, folglich auch für den fünften, u. s. w.; folglich gilt dasselbe allgemein.

Mit Rücksicht auf die hier nachgewiesene Eigenschaft lassen sich aus den zwei ersten Näherungsbrüchen ohne Schwierigkeit alle nach einander folgenden Näherungsbrüche, und daher bei einem endlichen Kettenbruche auch der Erzeugungsbruch bestimmen.

Z. B. Für den Kettenbruch $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$

hat man $\frac{Z_1}{N_1} = \frac{1}{2}$, $\frac{Z_2}{N_2} = \frac{3}{7}$;

daher

$Z_3 = 3.4 + 1 = 13$, $N_3 = 7.4 + 2 = 30$; $\frac{Z_3}{N_3} = \frac{13}{30}$;

$Z_4 = 13.5 + 3 = 68$, $N_4 = 30.5 + 7 = 157$; $\frac{Z_4}{N_4} = \frac{68}{157}$;

$Z_5 = 68.6 + 13 = 421$, $N_5 = 157.6 + 30 = 972$; $\frac{Z_5}{N_5} = \frac{421}{972}$;

oder

Nenner	2,	3,	4,	5,	6,
Näherungsbrüche	$\frac{1}{2}$,	$\frac{3}{7}$,	$\frac{13}{30}$,	$\frac{68}{157}$,	$\frac{421}{972}$.

Der letzte Näherungsbruch stellt zugleich den Erzeugungsbruch des gegebenen Kettenbruches dar.

Zusatz. Aus dem Bildungsgesetze der Näherungsbrüche folgt, daß sowohl die Zähler als die Nenner derselben immer größer werden müssen.

§. **126.** Die Näherungsbrüche sind abwechselnd größer oder kleiner als der vollständige Werth des Kettenbruches, je nachdem sie eine ungerade oder eine gerade Anzahl von Gliedern enthalten.

Beweis. Drückt man die nach dem ersten, zweiten, dritten, ... Gliede weggelassenen Glieder durch x_1, x_2, x_3, ... aus, so ist

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1 + x_1} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2 + x_2} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3 + x_3} = \cdots$$

Nun ist $q_1 < q_1 + x_1$, daher $\frac{1}{q_1} > \frac{1}{q_1 + x_1}$, oder $\frac{Z_1}{N_1} > \frac{a}{b}$.

Ferner ist $q_2 < q_2 + x_2$, daher $\frac{1}{q_2} > \frac{1}{q_2 + x_2}$, somit auch $q_1 + \frac{1}{q_2} > q_1 + \frac{1}{q_2 + x_2}$; folglich $\frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}} < \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + x_2}}$, oder $\frac{Z_2}{N_2} < \frac{a}{b}$.

Eben so folgt:

$$q_3 < q_3 + x_3;\ \frac{1}{q_3} > \frac{1}{q_3 + x_3},\qquad q_2 + \frac{1}{q_3} > q_2 + \frac{1}{q_3 + x_3};$$

$$\frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}} < \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + x_3}},\qquad q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}} < q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + x_3}};$$

folglich $$\frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3}} > \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3 + x_3}},\quad \text{oder}\quad \frac{Z_3}{N_3} > \frac{a}{b}.$$

Diese Schlußweise läßt sich ohne Ende fortsetzen. Es ist also allgemein

$$\frac{Z_n}{N_n} \gtrless \frac{a}{b},$$

je nachdem n eine ungerade oder eine gerade Zahl ist.

Folgesatz. Der vollständige Werth eines Kettenbruches liegt immer zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden Näherungsbrüchen.

§. **127.** 1. Subtrahirt man von dem Producte aus dem Zähler eines Näherungsbruches und dem Nenner des folgenden das Product aus dem Zähler des letztern und dem Nenner des erstern, so ist die Differenz $+1$ oder -1, je nachdem der erstere Näherungsbruch eine ungerade oder eine gerade Anzahl von Gliedern enthält.

Es ist

$$Z_1 N_2 - Z_2 N_1 = 1 \cdot (q_1 q_2 + 1) - q_2 \cdot q_1 = +1,$$
$$Z_2 N_3 - Z_3 N_2 = Z_2 (N_2 q_3 + N_1) - (Z_2 q_3 + Z_1) N_2$$
$$= Z_2 N_1 - Z_1 N_2 = -1.$$

Ist nun allgemein $Z_{n-1} N_n - Z_n N_{n-1} = \pm 1$,

so folgt daraus

$$Z_n N_{n+1} - Z_{n+1} N_n = Z_n (N_n q_{n+1} + N_{n-1}) - (Z_n q_{n+1} + Z_{n-1}) N_n$$
$$= Z_n N_{n-1} - Z_{n-1} N_n = \mp 1,$$

wodurch die Giltigkeit des obigen Satzes allgemein bewiesen ist.

2. Die Differenz zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden Näherungsbrüchen ist gleich ± 1 dividirt durch das Product der Nenner.

Es ist allgemein

$$\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}} - \frac{Z_n}{N_n} = \frac{Z_{n-1} N_n - Z_n N_{n-1}}{N_{n-1} N_n} = \frac{\pm 1}{N_{n-1} N_n}.$$

§. **128.** Die Differenz zwischen einem Näherungsbruche und dem vollständigen Werthe eines Kettenbruches ist absolut genommen kleiner als 1 dividirt durch das Quadrat des Nenners des Näherungsbruches.

Beweis. Da der vollständige Werth $\frac{a}{b}$ des Kettenbruches immer zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden Näherungsbrüchen liegt, so ist der Unterschied $\frac{Z_n}{N_n} - \frac{a}{b}$ absolut genommen kleiner als der Unterschied $\frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}}$, somit

$$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{a}{b} < \frac{1}{N_n N_{n+1}}.$$

Aber wegen $N_{n+1} > N_n$ ist $N_n N_{n+1} > N_n^2$, und $\frac{1}{N_n N_{n+1}} < \frac{1}{N_n^2}$, daher um so mehr

$$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{a}{b} < \frac{1}{N_n^2}.$$

Zusatz. Da $N_1^2 < N_2^2 < N_3^2 < N_4^2 < \ldots$, daher

$$\frac{1}{N_1^2} > \frac{1}{N_2^2} > \frac{1}{N_3^2} > \frac{1}{N_4^2} > \ldots$$

ist, so folgt, daß jeder folgende Näherungsbruch von dem vollständigen Werthe des Kettenbruches um weniger verschieden ist, als der vorhergehende, daß sich also die auf einander folgenden Näherungsbrüche diesem Werthe immer mehr nähern, bis der letzte, wenn es einen gibt, mit ihm zusammenfällt.

§. **129.** Zähler und Nenner eines jeden Näherungsbruches sind relative Primzahlen.

Für die Näherungsbrüche $\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}}$ und $\frac{Z_n}{N}$ ist (§. 127) absolut genommen

$$Z_{n-1} N_n - Z_n N_{n-1} = 1.$$

Wären nun Z_n und N_n nicht relative Primzahlen, sondern sie hätten ein gemeinschaftliches Maß m, so wäre m auch ein Maß von $Z_{n-1} N_n - Z_n N_{n-1}$ (§. 76, 1 und 75, 2) und folglich ein Maß von 1, was nicht möglich ist.

§. **130.** Zwischen zwei unmittelbar auf einander folgende Näherungsbrüche läßt sich kein Bruch einschalten, dessen Nenner nicht größer ist, als der größere Nenner der beiden Näherungsbrüche.

Gesetzt, es würde der gemeine Bruch $\frac{p}{q}$ zwischen den Näherungsbrüchen $\frac{Z_n}{N_n}$ und $\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}}$ liegen, so müßte absolut genommen

$$\frac{Z_n}{N_n} - \frac{p}{q} < \frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} \text{ oder } \frac{Z_n q - N_n p}{N_n q} < \frac{1}{N_n N_{n+1}}, \text{ daher}$$

$$\frac{Z_n q - N_n p}{q} < \frac{1}{N_{n+1}}$$

sein, was nur möglich ist, wenn der Nenner $q > N_{n+1}$ ist, weil $Z_n q - N_n p$ eine von 0 verschiedene ganze Zahl, also $\geqq 1$ sein soll.

Folgesatz. Jeder Näherungsbruch drückt den vollständigen Werth des Kettenbruches genauer aus, als jeder andere Bruch, der einen kleineren Nenner hat.

Zusatz. Diese Eigenschaft der Näherungsbrüche ist von großer praktischer Wichtigkeit. Will man nämlich den Quotienten (das Verhältniß) zweier großer Zahlen durch kleinere möglichst genau darstellen, so verwandelt man denselben in einen Kettenbruch und sucht die Näherungsbrüche; jeder derselben drückt den gesuchten Quotienten genauer aus, als alle möglichen gemeinen Brüche, deren Nenner nicht größer sind als der des Näherungsbruches.

Beispiele. 1. Man soll den Bruch 3·1415926, d. i. die Verhältnißzahl zwischen dem Umfange eines Kreises und dem Durchmesser, durch kleinere Zahlen möglichst genau ausdrücken.

Man hat

$$3 \cdot 1415926 = \frac{31415926}{10000000} = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{1}{243} + \ldots$$

Näherungsbrüche:

$$3,\quad 7,\quad 15,\quad 1\quad 243,\quad \ldots$$

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{86598}{27565},\ \ldots$$

2. Der frühere Wiener Fuß ist $= 0{\cdot}316081$ Meter; man soll die Näherungswerthe bestimmen.

Es ist

$$0{\cdot}316081 = \frac{316081}{1000000} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \ldots$$

Näherungsbrüche:

$$3,\quad 6,\quad 9,\quad 2,\quad 1,\quad 9,\quad \ldots$$

$$\frac{1}{3},\ \frac{6}{19},\ \frac{55}{174},\ \frac{116}{367},\ \frac{171}{541},\ \frac{1655}{5236},\ \ldots$$

Man hat also annäherungsweise:

3 Wiener Fuß = 1 Meter
19 " " = 6 "
174 " " = 55 "
367 " " = 116 "
541 " " = 171 "
5236 " " = 1655 " u. s. w.

VII. Verhältnisse und Proportionen.

1. Verhältnisse.

§. **131**. Die Division als Theilung führt auf die Brüche; die Division als Messung einer Zahl durch eine zweite führt auf den Begriff eines Verhältnisses. Unter dem Verhältniß zweier Zahlen (Größen) a und b versteht man einen Ausdruck, welcher anzeigt, wie viel mal so groß a ist als b, oder wie oft b in a enthalten ist. Das Verhältniß der Größen a und b bezeichnet man daher durch das zwischen beide gesetzte Divisionszeichen, also durch $a : b$ oder $\frac{a}{b}$, welches gelesen wird: a verhält sich zu b, oder kürzer: a zu b. Dividend und Divisor heißen Glieder des Verhältnisses, und zwar der Dividend das Vorderglied, der Divisor das Hinterglied. Ist $a : b = q$, so heißt die unbenannte Zahl q der Quotient des Verhältnisses $a : b$.

Sind die Glieder eines Verhältnisses unbenannte Zahlen, so nennt man dasselbe ein Zahlenverhältniß. Das durch Vertauschung der Glieder eines Verhältnisses $a : b$ entstehende Verhältniß $b : a$ heißt das umgekehrte oder reciproke Verhältniß des ersteren.

Die Größe eines Verhältnisses hängt von seinem Quotienten ab; je größer dieser ist, desto größer ist auch das Verhältniß. Zwei Verhältnisse sind einander gleich, wenn sie denselben Quotienten haben. Umgekehrt: wenn zwei Verhältnisse gleich sind, so haben sie gleiche Quotienten.

§. **132**. Das Verhältniß zweier (gleichartiger) Größen, z. B. zweier Linien, Flächen,... ist gleichbedeutend mit dem Verhältniß zweier unbenannter Zahlen, welche ausdrücken, wie oft eine gemeinschaftliche gleichartige Einheit in jeder der beiden Größen enthalten ist.

1. Der Quotient des Verhältnisses zweier commensurabler Größen (§. 89) ist entweder eine ganze oder gebrochene Zahl.

Sind die Größen A und B commensurabel, und ihr gemeinschaftliches Maß in A m mal, in B n mal enthalten, so ist $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$, wo $\frac{m}{n}$ für den Fall, daß $n = 1$ oder überhaupt m durch n theilbar ist, eine ganze Zahl, sonst einen Bruch vorstellt.

2. Der Quotient des Verhältnisses zweier incommensurabler Größen kann a) weder eine ganze noch eine gebrochene Zahl sein; er läßt sich jedoch b) durch Angabe zweier Brüche, zwischen denen er liegt, mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit annäherungsweise bestimmen.

a) Sind A und B zwei incommensurable Größen, so kann weder $\frac{A}{B} = m$, noch $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$ sein; denn im ersten Falle wäre dann B selbst, im zweiten $\frac{B}{n}$ ein gemeinschaftliches Maß von A und B, was gegen die Voraussetzung ist.

b) Theilt man B in n gleiche Theile und nimmt einen solchen Theil $\frac{B}{n}$ von A m mal, d. i. so oft weg, als es angeht, so bleibt von A ein Rest übrig, welcher kleiner als $\frac{B}{n}$ ist; es muß also $A > m.\frac{B}{n}$, dagegen $A < (m+1).\frac{B}{n}$ sein; folglich ist nach §. 58, 2

$$\frac{m}{n} < \frac{A}{B} < \frac{m+1}{n}.$$

Der Quotient des Verhältnisses $\frac{A}{B}$ liegt also zwischen zwei Brüchen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$, deren Unterschied $\frac{1}{n}$ ist. Setzt man $\frac{A}{B}$ gleich $\frac{m}{n}$ oder $\frac{m+1}{n}$, so begeht man einmal im positiven, das andere Mal im negativen Sinne einen Fehler, der kleiner als $\frac{1}{n}$ ist. Da aber n beliebig groß, daher $\frac{1}{n}$ beliebig klein gemacht werden kann, so läßt sich $\frac{A}{B}$ mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit bestimmen.

Zusatz. Um das Verhältniß zweier incommensurabler Größen darstellen zu können, ist man genöthigt, in das Zahlengebiet eine Zahlform einzuführen, die in der bisherigen Reihe der ganzen und gebrochenen Zahlen nicht vorkommt, sich aber durch die letzteren annäherungsweise mit jeder beliebigen Genauigkeit bestimmen läßt. Da uns jedoch auf diese Zahlform, welche man eine irrationale Zahl nennt, weiter unten (§. 178) auch die Betrachtung der reinen Zahlen leiten wird, so soll dieselbe erst dort einer näheren Untersuchung unterzogen werden.

In den hier folgenden Sätzen wird vorläufig vorausgesetzt, daß die Verhältnißglieder commensurabel sind.

§. **133.** Lehrsätze. 1. In jedem Verhältnisse ist das Vorderglied gleich dem Hintergliede multiplicirt mit dem Quotienten.

2. In jedem Verhältnisse ist das Hinterglied gleich dem Vordergliede dividirt durch den Quotienten.

Wenn $a : b = q$ ist, so ist

1. $a = bq$; 2. $b = a : q$.

Die Richtigkeit dieser Sätze folgt unmittelbar aus §. 46.

3. Ein Verhältniß bleibt (seinem Werthe nach) unverändert, wenn man Vorder- und Hinterglied mit derselben Zahl multiplicirt, oder beide durch dieselbe Zahl dividirt.

Folgt aus §. 52, 2.

Zusatz. Durch Anwendung dieses Satzes kann man a) jedes Verhältniß, dessen Glieder Brüche enthalten, mit ganzen Zahlen darstellen; b) jedes Verhältniß, dessen Glieder ein gemeinschaftliches Maß haben, dadurch abkürzen.

§. **134.** Multiplicirt man in zwei oder mehreren Verhältnissen alle Vorderglieder, und ebenso alle Hinterglieder mit einander, so bilden die Producte ein neues Verhältniß, welches im Gegensatze zu den gegebenen einfachen Verhältnissen ein zusammengesetztes Verhältniß genannt wird.

Sind z. B. a : b
c : d
e : f einfache Verhältnisse,

so ist ace : bdf ein zusammengesetztes Verhältniß.

2. Proportionen.

§. **135.** Die Gleichstellung zweier gleicher Verhältnisse heißt eine Proportion. Ist a : b = q und c : d = q, so ist auch a : b = c : d; dieser Ausdruck ist eine Proportion und wird gelesen: a verhält sich zu b, wie sich c zu d verhält, oder kürzer: a zu b, wie c zu d. Das erste Glied a und das vierte d nennt man die äußeren, das zweite b und das dritte c die inneren Glieder; auch heißen a und c die Vorderglieder, b und d die Hinterglieder der Proportion. Das vierte Glied insbesondere wird die vierte Proportionale zu den drei ersten Gliedern genannt.

Sind in einer Proportion die inneren Glieder gleich, so heißt dieselbe eine stetige Proportion, z. B. a : b = b : c. Das innere Glied b wird die mittlere (geometrische) Proportionale oder das geometrische Mittel zu a und c, und c die dritte stetige Proportionale zu a und b genannt.

Wenn zwei Arten von Größen so von einander abhängen, daß zu einer mfachen Größe der einen Art auch eine mfache Größe der andern Art gehört, so heißen die beiden Arten von Größen gerade proportionirt (proportional); z. B. Waare und Preis, Capital und Zins u. s. w. Wenn dagegen zu der mfachen Größe der einen Art nur der mte Theil von der Größe der anderen Art gehört, so heißen die beiden Arten von Größen verkehrt proportionirt; z. B. die Zahl der Arbeiter und die Arbeitszeit bei gleicher Leistung, Capital und Zeit bei gleichen Zinsen u. s. w.

Sind die Glieder einer Proportion lauter unbenannte Zahlen, so heißt dieselbe eine Zahlenproportion, sonst heißt sie eine Größenproportion. In der letztern können die Glieder des einen Verhältnisses von anderer Art sein, als die des anderen.

In den hier folgenden Sätzen über Proportionen wird vorläufig vorausgesetzt, daß die Glieder eines jeden Verhältnisses commensurabel sind.

Beziehungen unter den Gliedern einer Proportion.

§. **136.** In jeder Zahlenproportion ist das Product der äußeren Glieder gleich dem Producte der inneren Glieder.

Es sei $a : b = c : d$, $a = bq$, $c = dq$; dann ist, wenn man $a = bq$ mit $d = d$, und $c = dq$ mit $b = b$ multiplicirt, $ad = bdq$ und $bc = bdq$; folglich $ad = bc$.

Dieser Satz gilt auch von jeder Proportion, worin nur ein Verhältniß ein Zahlenverhältniß ist.

Folgesätze. 1. In einer stetigen Zahlenproportion ist das Quadrat der mittleren Proportionale gleich dem Producte der beiden anderen Glieder.

Ist $a : b = b : c$, so ist $b^2 = ac$.

2. Jedes äußere Glied einer Zahlenproportion ist gleich dem Producte der beiden inneren Glieder dividirt durch das andere äußere Glied; und jedes innere Glied ist gleich dem Producte der beiden äußeren Glieder dividirt durch das andere innere Glied.

Ist $a : b = c : d$, daher $ad = bc$, so ist

$$a = \frac{bc}{d},\ d = \frac{bc}{a},\ \text{und}$$

$$b = \frac{ad}{c},\ c = \frac{ad}{b}.$$

§. 137. Aus zwei gleichen Producten läßt sich eine Proportion bilden, wenn man jedes der beiden Producte in zwei Factoren zerlegt und die Factoren des einen Productes als die äußeren, die Factoren des anderen Productes als die inneren Glieder annimmt.

Es sei $ad = bc$. Dividirt man jeden dieser gleichen Ausdrücke durch bd, so erhält man $ad : bd = bc : bd$, oder

$$a : b = c : d.$$

§. 138. Eine Proportion auflösen heißt, aus drei gegebenen Gliedern einer Proportion das noch unbekannte Glied finden.

a) Eine Proportion wird aufgelöst, indem man den Quotienten des bekannten Verhältnisses sucht und daraus nach §. 133 das unbekannte Glied des anderen Verhältnisses bestimmt.

b) Eine Zahlenproportion wird am einfachsten nach §. 136, Folges. 2 aufgelöst.

Aus $x : 2 = 15 : 3$ findet man

a) $15 : 3 = 5$, $x = 2.5 = 10$; oder

b) $x = \frac{2 \,.\, 15}{3} = 10$; daher

$10 : 2 = 15 : 3$ die vollständige Proportion.

Umformung von Proportionen.

§. 139. 1. Jede Proportion bleibt richtig, wenn man die äußeren Glieder mit den inneren vertauscht.

Ist $a : b = c : d$, und $a = bq$, $c = dq$, so ist $b = a.\frac{1}{q}$, $d = c.\frac{1}{q}$, folglich auch $b : a = d : c$.

2. Eine Proportion gleichartiger oder unbenannter Zahlen bleibt richtig, wenn man a) die inneren, b) die äußeren Glieder unter sich vertauscht.

Aus $a : b = c : d$, $a = bq$, $c = dq$ folgt

a) $a : c = bq : dq$, oder $a : c = b : d$;

b) $d : b = dq : bq$ (§. 133, 3), oder $d : b = c : a$.

3. Eine Proportion bleibt richtig, wenn man ein äußeres und ein inneres Glied mit derselben Zahl multiplicirt oder durch dieselbe Zahl dividirt.

Folgt aus §. 133 und §. 139, 2.

Zusatz. Durch Anwendung dieses Satzes kann man a) jede Proportion, in welcher Brüche vorkommen, mit ganzen Zahlen darstellen; b) jede Proportion, in welcher ein äußeres und ein inneres Glied ein gemeinschaftliches Maß haben, dadurch abkürzen.

§. **140.** 1. In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der ersten zwei Glieder zum ersten oder zweiten, wie die Summe oder Differenz der letzten zwei Glieder zum dritten oder vierten.

Ist $a : b = c : d$, $a = bq$, $c = dq$, so hat man

$$(a \pm b) : a = (bq \pm b) : bq = (q \pm 1) : q,$$
$$(c \pm d) : c = (dq \pm d) : dq = (q \pm 1) : q;$$

daher

$$(a \pm b) : a = (c \pm d) : c.$$

Auf ähnliche Weise erhält man

$$(a \pm b) : b = (c \pm d) : d.$$

2. In jeder Proportion verhält sich die Summe der ersten zwei Glieder zu deren Differenz, wie die Summe der letzten zwei Glieder zu deren Differenz.

Es ist

$$(a + b) : (a - b) = (bq + b) : (bq - b) = (q + 1) : (q - 1),$$
$$(c + d) : (c - d) = (dq + d) : (dq - d) = (q + 1) : (q - 1);$$

daher

$$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d).$$

3. In jeder Proportion gleichartiger oder unbenannter Zahlen verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied.

Ist $a : b = c : d$, so ist auch $(a \pm c) : (b \pm d) = a : b$.

Folgt aus 1. mit Zuziehung von §. 139, 2. a.

Zusatz. Sind mehrere Verhältnisse gleichartiger oder unbenannter Zahlen einander gleich, so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Ist $a : b = c : d = f : g$, so ist auch

$$(a + c + f) : (b + d + g) = a : b.$$

Verbindung mehrerer Proportionen.

§. **141.** Hat man Proportionen von der Form:

$$a : b = m : n,$$
$$b : c = n : p,$$
$$c : d = p : q, \text{ u. s. w.},$$

so faßt man dieselben durch folgende Schreibart zusammen:

$$a : b : c : d \ldots = m : n : p : q \ldots$$

und nennt eine solche Proportion eine fortlaufende Proportion.

Sind die Proportionen

$$a : b = m : n,$$
$$b : c = p : r,$$
$$c : d = s : t$$

gegeben, so läßt sich aus denselben immer eine fortlaufende Proportion bilden.

Es ist

$$a : b = m.ps : n.ps,$$
$$b : c = p.ns : r.ns,$$
$$c : d = s.nr : t.nr;$$

daher $a : b : c : d = mps : nps : nrs : nrt.$

§. **142.** 1. Wenn man in zwei oder mehreren Zahlenproportionen die gleichstelligen Glieder mit einander multiplicirt, so bilden die Producte wieder eine Proportion.

Ist

$a : b = c : d,$ $a = bq,$ $c = dq;$
$f : g = h : k,$ $f = gq',$ $h = kq';$
$m : n = p : r,$ $m = nq'',$ $p = rq'';$

so hat man $afm = bgn.qq'q'',$ $chp = dkr.qq'q'',$

folglich

$$afm : bgn = chp : dkr.$$

Man sagt, die letzte Proportion sei aus den gegebenen zusammengesetzt.

Der vorstehende Satz bleibt auch noch richtig, wenn eine der gegebenen Proportionen eine Größenproportion ist.

Zusatz. Ist

$$a : b = m : n,$$
$$b : c = p : r,$$
$$c : d = s : t;$$

so erhält man durch Multiplication der gleichstelligen Glieder

$a : c = mp : nr,$ $b : d = ps : qt$ und $a : d = mps : nrt.$

2. Wenn man die gleichstelligen Glieder zweier Zahlenproportionen durch einander dividirt, so bilden die Quotienten wieder eine Proportion.

Ist

$a : b = c : d,$ $a = bq,$ $c = dq;$
$f : g = h : k,$ $f = gq',$ $h = kq';$

so hat man $\frac{a}{f} = \frac{b}{g} \cdot \frac{q}{q''},$ $\frac{c}{h} = \frac{d}{k} \cdot \frac{q}{q''}.$

folglich

$$\frac{a}{f} : \frac{b}{g} = \frac{c}{h} : \frac{d}{k}.$$

3. Anwendung der Proportionen.

Angewandte Aufgaben mit einfachen Verhältnissen.

§. **143.** Die Lösung von Proportionsaufgaben, deren Größen in einfachen Verhältnissen stehen, — die sogenannte einfache Regeldetri —, beruht auf folgenden zwei Sätzen:

1. Wenn zwei Arten von Zahlen gerade proportionirt sind, so ist das Verhältniß zwischen je zwei Zahlen der einen Art gleich dem Verhältnisse zwischen den zwei zugehörigen Zahlen der andern Art, in derselben Ordnung genommen.

Es seien A und a zwei Zahlen der einen Art, B und b die zugehörigen Zahlen einer zweiten Art, und diese beide Arten von Zahlen gerade proportionirt. Ist nun $A = ma$, so muß nach dem Begriffe der geraden Proportionalität auch $B = mb$ sein. Man hat daher $A : a = m$ und $B : b = m$, und somit

$$A : a = B : b.$$

2. Wenn zwei Arten von Zahlen verkehrt proportionirt sind, so ist das Verhältniß zwischen je zwei Zahlen der einen Art gleich dem Verhältnisse zwischen den zwei zugehörigen Zahlen der andern Art, in umgekehrter Ordnung genommen, daher das Product der zusammengehörigen Zahlen der beiden Arten dasselbe.

Es seien A und a zwei Zahlen der einen Art, B und b die beiden zugehörigen Zahlen der andern Art, und diese zwei Arten von Zahlen verkehrt proportionirt. Ist nun $A = ma$, so muß $B = \frac{b}{m}$ oder $b = mB$ sein. Man hat daher $A : a = m$ und $b : B = m$; folglich

$$A : a = b : B \text{ und } AB = ab.$$

Beispiele. 1. 7 Meter Tuch kosten 30 fl., wie viel kosten 42 Meter von demselben Tuche?

Da hier die beiden Arten von Zahlen gerade proportionirt sind, so hat man

7 Meter 30 fl. $\quad x : 30 = 42 : 7$
42 „ x „ $\quad$ also $x = 180$ fl.

2. 16 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 6 Tagen; wie viele Arbeiter wird man aufnehmen müssen, damit sie dieselbe Arbeit in 4 Tagen zu Stande bringen?

Die beiden Arten von Zahlen sind hier verkehrt proportionirt, und man hat

16 Arb. 6 Tage $\quad x : 16 = 6 : 4$
x „ 4 „ $\quad x = 24$ Arbeiter.

§. 144. Ein Betrag, der sich auf die Zahl 100 bezieht, wird Procent genannt.

Bei der Procentrechnung rechnet man entweder von, oder auf, oder in Hundert, je nachdem die Menge, von welcher die Procente bestimmt werden, mit der Grundzahl 100 selbst, oder mit 100 vermehrt um das Procent, oder mit 100 vermindert um das Procent gleichartig ist.

Bezeichnet p das Procent und b den Ertrag von der Menge m, so hat man folgende Proportionen:

a) bei der Rechnung von Hundert $b : p = m : 100$, $\quad$ also $b = \frac{mp}{100}$;

b) „ „ „ auf Hundert $b : p = m : (100 + p)$, „ $b = \frac{mp}{100+p}$;

c) „ „ „ in Hundert $b : p = m : (100 - p)$, „ $b = \frac{mp}{100-p}$.

Angewandte Aufgaben mit zusammengesetzten Verhältnissen.

§. 145. Die Lösung von Aufgaben, deren Größen in zusammengesetzten Verhältnissen stehen, — die sogenannte zusammengesetzte Regeldetri, — beruht auf folgendem Satze:

Wenn eine Art von Zahlen von mehreren andern Arten so abhängt, daß sie mit denselben einzeln genommen theils gerade,

theils verkehrt proportionirt ist, so ist das Verhältniß zwischen je zwei Zahlen der ersten Art gleich dem zusammengesetzten Verhältnisse aus den einfachen Verhältnissen zwischen den zugehörigen Zahlen jeder andern Art, in derselben oder in umgekehrter Ordnung genommen, je nachdem die Zahlen dieser Art mit den Zahlen der andern Art gerade oder verkehrt proportionirt sind.

Es sei die Zahl A von den Zahlen B, C so abhängig, wie

" " a " " " b, c,

wo die mit gleichlautenden Buchstaben bezeichneten Zahlen zu derselben Art gehören, und es seien die Zahlen der ersten Art mit den Zahlen der zweiten Art gerade, mit den Zahlen der dritten Art verkehrt proportionirt. Heißt α eine Zahl der ersten Art, welche zu den Zahlen b, C gehört, so hat man folgende Reihen zusammengehöriger Zahlen:

A, B, C;
α, b, C;
a, b, c.

Vergleicht man die zwei ersten Reihen, so sieht man, daß die Zahl α aus A entsteht, indem sich B in b ändert; da nun die Zahlen der ersten und zweiten Art gerade proportionirt sind, so hat man

$$A : \alpha = B : b.$$

Vergleicht man eben so die zweite und dritte Reihe, so sieht man, daß a aus α hervorgeht, wenn sich C in c verändert; da nun die Zahlen der ersten und der dritten Art verkehrt proportionirt sind, so hat man

$$\alpha : a = c : C.$$

Durch Multiplication dieser beiden Proportionen ergibt sich

$$A\alpha : a\alpha = Bc : bC,$$
oder $$A : a = Bc : bC,$$

in welcher Proportion der oben aufgestellte Satz enthalten ist.

Man pflegt diese letztere Proportion wegen der leichteren Uebersicht auch so zu schreiben:

$$A : a = B : b,$$
$$c : C,$$

wobei man sich denken muß, daß die unter einander stehenden Zahlen zu multipliciren sind.

Z. B. Wenn 20 Arbeiter, welche täglich 12 Stunden arbeiten, in 5 Wochen einen Damm von 375 Meter Länge zu Stande bringen; in wie viel Wochen werden 12 Arbeiter, welche täglich 10 Stunden arbeiten, einen eben solchen Damm von 600 Meter Länge vollenden?

20 Arb. 12 Std. tägl. 5 Woch. 375 Meter Länge,
12 " 10 " " x " 600 " "

$$x : 5 = 20 : 12$$
$$12 : 10$$
$$600 : 375$$

$$x : 1 = 16 : 1$$
$$x = 16 \text{ Wochen.}$$

§. **146.** Bezeichnet Z die einfachen Zinsen, welche ein Capital C in J Jahren zu P Procent bringt, so hat man folgende zusammengesetzte Regeldetri:

100 fl. Cap. in 1 Jahre P fl. Zins
C " " J " Z " "

$$Z : P = C : 100$$
$$J : 1$$

also $Z : P = CJ : 100$, und

$$100\,Z = CPJ.$$

Werden diese letzten zwei gleichen Ausdrücke zuerst durch 100, dann durch PJ, ferner durch CJ, endlich durch CP dividirt, so erhält man beziehungsweise

$$Z = \frac{CPJ}{100},\quad C = \frac{100\,Z}{PJ},\quad P = \frac{100\,Z}{CJ},\quad J = \frac{100\,Z}{CP},$$

welche Formeln, in die gewöhnliche Wortsprache übertragen, die Sätze für die Lösung der Aufgaben über die einfache Zinsrechnung enthalten.

Die Theilregel.

§. **147.** Wenn eine gegebene Zahl in mehrere Theile, welche sich wie andere gegebene Zahlen verhalten, getheilt werden soll, so geschieht dieses durch die Theilregel oder Gesellschaftsrechnung. Die Zahlen, durch welche das Verhältniß der Theile ausgedrückt wird, heißen Verhältnißzahlen.

Ist nur eine Reihe von Verhältnißzahlen gegeben, so wird die einfache, sind mehrere Reihen von Verhältnißzahlen gegeben, so wird die zusammengesetzte Theilregel angewendet.

Es seien bei der einfachen Theilregel s die zu vertheilende Zahl, a, b, c und d die Verhältnißzahlen. Nennt man die noch unbekannten Theile u, x, y und z, so muß $u : x = a : b$, $x : y = b : c$, $y : z = c : d$, oder $u : x : y : z = a : b : c : d$ sein. Verwechselt man in den vorangehenden Proportionen die inneren Glieder, so hat man

$$u : a = x : b,\ x : b = y : c,\ y : c = z : d$$

also

$$u : a = x : b = y : c = z : d,$$

und nach §. 140, Zusatz,

$$(u + x + y + z) : (a + b + c + d) = u : a = x : b = y : c = z : d.$$

Da nun $u + x + y + z = s$ sein muß, so erhält man aus dem letzten Ausdrucke

$$u = \frac{s}{a+b+c+d}\cdot a;\quad x = \frac{s}{a+b+c+d}\cdot b;$$
$$y = \frac{s}{a+b+c+d}\cdot c;\quad z = \frac{s}{a+b+c+d}\cdot d.$$

Bei der einfachen Theilregel dividirt man daher die zu vertheilende Zahl durch die Summe aller Verhältnißzahlen und multiplicirt den Quotienten mit jeder Verhältnißzahl; die Producte sind die gesuchten Theile.

Wenn die Verhältnißzahlen Brüche enthalten, so werden sie zuerst in ganzen Zahlen dargestellt, indem man sie mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen aller Nenner multiplicirt. Haben alle Verhältnißzahlen ein gemeinschaftliches Maß, so werden sie dadurch abgekürzt.

Z. B. Es sollen 2155 fl. unter drei Personen nach dem Verhältnisse der Zahlen 5, 3, 2 vertheilt werden.

5	$215\frac{1}{2}.5 = 1077\frac{1}{2}$
3	$215\frac{1}{2}.3 = 646\frac{1}{2}$
2	$215\frac{1}{2}.2 = 431$
$2155 : 10 = 215\frac{1}{2}$	2155

§. **148.** Die zusammengesetzte Theilregel läßt sich auf die einfache zurückführen.

Es sei eine Zahl s mit Bezugnahme auf mehrere Umstände in drei Theile zu theilen, die sich in einer Beziehung wie a : b : c, in einer zweiten Beziehung wie d : e : f, und in einer dritten Beziehung wie g : h : k verhalten. Heißen x, y, z die noch unbekannten Theile, so muß sich x : y nicht nur wie a : b, sondern auch wie d : e und wie g : h verhalten; es muß also das Verhältniß x : y gleich sein dem zusammengesetzten Verhältnisse aus a : b, d : e, g : h, also dem Verhältnisse adg : beh. Eben so muß y : z = beh : cfk sein. Es besteht also die Forderung, die Theile x, y, z so zu bestimmen, daß der Bedingung

$$x : y : z = adg : beh : cfk$$

Genüge geleistet werde, was eine Aufgabe der einfachen Theilregel ist.

Bei der zusammengesetzten Theilregel multiplicirt man daher die auf denselben Theil Bezug habenden Verhältnißzahlen mit einander und betrachtet die Producte als Verhältnißzahlen einer einfachen Theilregel, nach welcher dann die weitere Auflösung erfolgt.

Z. B. Zu einer Unternehmung vereinigen sich drei Personen; A gibt 8000 fl. auf 5 Monate, B 4000 auf 6 Monate, C 2000 fl. auf 8 Monate her. Die Unternehmung wirft einen reinen Gewinn von 460 fl. ab; wie viel davon wird jede der drei Personen bekommen?

A 8000 fl. durch 5 Mon.	40000	5	46.5 = 230 fl.
B 4000 „ „ 6 „	24000	3	46.3 = 138 „
C 2000 „ „ 8 „	16000	2	46.2 = 92 „
	$460 : 10 = 46$		460 fl.

Die Kettenregel.

§. **149.** Wenn die Beziehung zwischen zwei Größen nicht unmittelbar bekannt ist, sondern erst durch eine zusammenhängende Aufstellung bekannter Zwischenbestimmungen gesucht werden muß, so wendet man die Kettenregel an.

Es sei folgende Aufgabe zu lösen:

Wie viel (x) Einheiten von der Art M betragen a Einheiten von der Art A,

wenn a' Einheiten von der Art A b Einheiten von der Art B,
b' „ „ „ „ B c „ „ „ „ C,
c' „ „ „ „ C m „ „ „ „ M

betragen?

Diese Aufgabe kann kürzer so angeschrieben werden:

$$\left.\begin{array}{rl} x\,M = & a\,A, \\ \text{wenn } a'A = & b\,B, \\ b'B = & c\,C, \\ c'C = & m\,M, \end{array}\right\} \ldots 1)$$

wo x, a, a', b, b', c, c', m unbenannte Zahlen, und A, B, C, M die Arten oder Benennungen derselben vorstellen.

Um das gesuchte Resultat zu erhalten, verwandelt man die gegebenen a Einheiten der Art A zunächst in (y) Einheiten der Art B, dann die gefundenen Einheiten der Art B in (z) Einheiten der Art C, und diese endlich in (x) Einheiten der Art M. Dabei ergeben sich nach den angegebenen Bedingungen folgende Proportionen:

$$\begin{array}{l} y : b = a : a', \\ z : c = y : b', \\ x : m = z : c', \text{ woraus nach §. 142, 1} \\ \hline x : b\,c\,m = a : a'\,b'\,c', \text{ und} \end{array}$$

$$x = \frac{a\,b\,c\,m}{a'\,b'\,c'} \ldots 2)$$

folgt. Aus dem in 1) angegebenen Ansatze der Aufgabe und dem in 2) für x erhaltenen Ausdrucke ergibt sich daher für die Kettenrechnung folgendes praktisches Verfahren:

1. Man ziehe einen verticalen Strich, schreibe links neben denselben x mit der Benennung an und rechts die gegebene Größe, deren Betrag gesucht wird und die daher mit x gleichen Werth hat. Darunter setze man alle Mittelbeziehungen, und zwar fange man jedesmal links mit einer Größe an, welche mit der nächstvorhergehenden rechts von gleicher Art ist; rechts neben jeder Größe kommt diejenige Größe, welche mit ihr gleichwerthig ist. So wird fortgefahren, bis man rechts eine Größe erhält, die mit x gleichnamig ist.

2. Man dividire das Product aller rechts stehenden unbenannten Zahlen durch das Product aller links unter x stehenden; der Quotient gibt den gesuchten Werth von x.

Z. B. Wenn in England 1 Quarter Weizen 52 Shilling kostet, welches ist der entsprechende Preis für 1 Hektoliter in fl. ö. W.? (11 Quarter = 32 Hektoliter, 20 Shilling = 1 Pfd. Sterling, 10 Pfd. Sterl. = 112 fl. ö. W.)

Ansatz:

x fl. ö W.	1 Hektoliter	$x = \frac{11 \cdot 52 \cdot 112}{32 \cdot 20 \cdot 10}$	
32 Hektol.	11 Quarter		
1 Quarter	52 Shilling	=	10·01 fl. ö. W.
20 Shilling	1 Pfd. Sterl.		
10 Pfd. Sterl.	112 fl. ö. W.		

Dritter Abschnitt.

Potenziren, Radiciren und Logarithmiren.

I. Potenzen mit positiven ganzen Exponenten.

§. **150.** Eine Zahl a zur nten Potenz erheben oder mit n potenziren, heißt a nmal als Factor setzen (§. 36). a ist die Grundzahl oder Basis, n der Potenzexponent und das erhaltene Product p die nte Potenz von a. Man schreibt $a^n = p$. Eine Potenz ist demnach ein Product gleicher Factoren.

Folgesätze.

1) $1^n = 1$. 2) $0^n = 0$.

Zusatz. Die vorstehende Erklärung hat zunächst nur dann einen Sinn, wenn der Exponent eine ganze positive Zahl und > 1 ist. Das Princip der Erhaltung der Operationsgesetze führt jedoch die Nothwendigkeit herbei, den ursprünglichen Potenzbegriff zu erweitern. Eine solche Erweiterung enthalten schon die im Zusatz zu §. 53 abgeleiteten Sätze

$$a^1 = a \quad \text{und} \quad a^0 = 1.$$

Später wird der Potenzbegriff auch auf negative und gebrochene Exponenten erweitert werden.

Vorzeichen der Potenzen.

§. **151.** 1. Eine positive Basis gibt mit einer ganzen Zahl potenzirt immer eine positive Potenz.

$(+a)^n = +a.+a.+a.+a...$ nmal $= +a^n$ (§. 59, Folgef. 2.)

2. Eine negative Basis gibt mit einer geraden ganzen Zahl potenzirt eine positive, mit einer ungeraden ganzen Zahl potenzirt dagegen eine negative Potenz.

$(-a)^{2n} = -a.-a.-a.-a...$ 2nmal $= +a^{2n}$ (§. 59, Folgef. 3.)

$(-a)^{2n+1} = -a.-a.-a.-a...$ $(2n+1)$mal $= -a^{2n+1}$ (§. 59, Folgef. 3.)

Verbindung des Potenzirens mit sich selbst.

§. **152.** Die Potenz einer Potenz bleibt unverändert, wenn man die Exponenten unter einander vertauscht.

$$(a^m)^n = (a^n)^m.$$

Beweis. Ordnet man die gleichen Factoren der Potenz $(a^m)^n$ in n Reihen, deren jede den Factor a m mal enthält, nämlich

a . a . a . a . . . . (m mal)
a . a . a . a . . . .
a . a . a . a . . . .
. . . .
(n mal),

so erhält man offenbar a mnmal als Factor, mag man die m Factoren einer Horizontalreihe n mal, oder die n Factoren einer Verticalreihe m mal als Factor

setzen. Im ersten Falle erhält man a^m n mal als Factor, also $(a^m)^n$, im zweiten a^n m mal als Factor, also $(a^n)^m$. Es ist daher $(a^m)^n = (a^n)^m$.

Dieser Satz behält, wie leicht zu zeigen ist (§. 37), seine volle Giltigkeit auch dann, wenn mehr als zwei Potenzexponenten gegeben sind.

§. **153.** Eine Potenz wird mit einer Zahl potenzirt, indem man die Basis mit dem Producte beider Exponenten potenzirt.

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Folgt aus dem Beweise in §. 152.

Folgesatz. Eine Zahl wird mit einem Producte potenzirt, indem man sie mit dem einen Factor und die erhaltene Potenz mit dem andern Factor potenzirt.

$$a^{mn} = (a^m)^n.$$

Verbindung des Potenzirens mit der Multiplication und Division.

§. **154.** Ein Product wird mit einer Zahl potenzirt, indem man jeden Factor damit potenzirt.

$$(ab)^m = a^m . b^m.$$

Beweis. $(ab)^m = ab.ab.ab.ab....$ (m mal)

$= a.a.a.a..$ (m mal) $.b.b.b.b...$ (m mal) (§. 37)

$= a^m . b^m.$

Folgesatz. Potenzen desselben Exponenten werden multiplicirt, indem man das Product der Grundzahlen mit dem gemeinschaftlichen Exponenten potenzirt.

$$a^m . b^m = (ab)^m.$$

§. **155.** Ein Quotient (Bruch) wird mit einer Zahl potenzirt, indem man Dividend und Divisor damit potenzirt.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

Der Beweis ist demjenigen zu §. 154 analog.

Folgesätze. 1. Die Potenz eines auf die einfachste Form gebrachten echten oder unechten Bruches kann nie eine ganze Zahl sein.

Folgt unter Beiziehung von §. 76, 6.

2. Potenzen desselben Exponenten werden dividirt, indem man den Quotienten der Grundzahlen mit dem gemeinschaftlichen Exponenten potenzirt.

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m.$$

§. **156.** Potenzen derselben Basis werden multiplicirt, indem man die gemeinschaftliche Basis mit der Summe der Exponenten potenzirt.

$$a^m . a^n = a^{m+n}.$$

Der Beweis wurde in §. 39 geführt.

Folgesatz. Eine Zahl wird mit einer Summe potenzirt, indem man sie mit jedem Summanden potenzirt und die erhaltenen Potenzen multiplicirt.

$$a^{m+n} = a^m . a^n.$$

§. **157.** Potenzen derselben Basis werden dividirt, indem man die gemeinschaftliche Basis mit einer Zahl potenzirt, welche gleich ist dem Exponenten des Dividends weniger dem Exponenten des Divisors.

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung für $m > n$ und $m = n$ wurde in §. 53 bewiesen; die Bedeutung derselben für $m < n$ wird weiter unten (§. 172) besonders untersucht werden.

Folgesatz. Eine Zahl wird mit einer Differenz potenzirt, indem man sie mit dem Minuend und mit dem Subtrahend potenzirt und die erste Potenz durch die zweite dividirt.

$$a^{m-n} = a^m : a^n.$$

Zusatz. Mit Potenzen, welche ungleiche Exponenten und ungleiche Grundzahlen haben, wird die Multiplication und Division auf dieselbe Art wie mit allgemeinen Zahlen überhaupt vorgenommen.

Die in den §§. 154—157 angeführten Sätze bilden die Distributionsgesetze des Potenzirens. Das commutative Princip findet bei den Potenzen nicht statt, da a^m von m^a im Allgemeinen verschieden ist; auch das Associationsgesetz nicht, denn $(a^m)^n$ ist von $a^{(m^n)}$ verschieden.

Verbindung des Potenzirens mit der Addition und Subtraction.

§. **158.** Für das Addiren und Subtrahiren von Potenzen, sowie für das Rechnen mit mehrgliedrigen Ausdrücken, in denen Potenzen vorkommen, gelten die bezüglichen, für allgemeine Zahlen überhaupt abgeleiteten Sätze. Eine Zusammenziehung des Resultates kann nur dann stattfinden, wenn die Potenzen sowohl gleiche Grundzahlen als gleiche Exponenten haben.

Die auf einander folgenden Potenzen eines Binoms oder Polynoms kann man einfach durch die Multiplication erhalten. Die Entwicklung des Quadrates und des Cubus insbesondere wird in den §§. 193 und 200 gezeigt, das allgemeine Gesetz der höheren Potenzen in §. 295 näher untersucht werden.

Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch die Potenzirung.

§. **159.** 1. Gleiche Zahlen mit gleichen Zahlen potenzirt geben Gleiches.

Ist $a = b$, so ist auch $a^m = b^m$.

Folgt aus §. 8, 3.

Folgesatz. Wenn man alle Glieder einer Proportion mit derselben Zahl potenzirt, so erhält man wieder eine Proportion.

Ist $a : b = c : d$, so muß auch $(a : b)^m = (c : d)^m$, folglich $a^m : b^m = c^m : d^m$ (§. 155) sein.

2. Ungleiche Zahlen mit gleichen positiven Zahlen potenzirt geben Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

Ist $a > b$, so ist $a^m > b^m$.

Folgt aus §. 45, 3.

Folgesatz. Wenn $a \gtrless 1$, so ist bezüglich $a^m \gtrless 1$.

3. Gleiche Zahlen mit ungleichen Zahlen potenzirt geben Ungleiches mit demselben oder mit dem entgegengesetzten Ungleichheitszeichen, je nachdem die Basis größer oder kleiner als 1 ist.

Ist $m > n$, so hat man

für $a > 1$, $a^m > a^n$;
für $a < 1$, $a^m < a^n$.

Folgt aus §. 104, Zusatz.

4. Ungleiche Zahlen, von denen wenigstens die eine größer als 1 ist, mit ungleichen positiven Zahlen bei demselben Ungleichheitszeichen potenzirt, geben Ungleiches mit dem gemeinschaftlichen Ungleichheitszeichen.

Ist $a > b$ und zugleich $a > 1$, ferner $m > n$, so ist $a^m > b^n$.

Denn nach 3. ist $a^m > a^n$, nach 2. $a^n > b^n$; daher um so mehr $a^m > b^n$.

II. Wurzeln mit positiven ganzen Exponenten.

§. **160.** Aus einer Zahl a die nte Wurzel ausziehen, oder die Zahl a durch n radiciren, heißt aus der Potenz a und dem Exponenten n die Basis suchen. Die gegebene Potenz a heißt der Radicand, oder geradehin die Zahl, der gegebene Exponent n der Wurzelexponent, und die gesuchte Basis p die nte Wurzel aus a. Man schreibt $\sqrt[n]{a} = p$.

Eine Wurzel ist also ein Ausdruck für diejenige Zahl, welche mit dem Wurzelexponenten potenzirt den Radicand gibt; oder es ist

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Die zweite und dritte Wurzel einer Zahl nennt man bezüglich Quadratwurzel und Cubikwurzel.

Damit $\sqrt[n]{a}$ nach dem bisherigen Zahlbegriffe Sinn und Bedeutung habe, muß der Radicand a die nte Potenz irgend einer ganzen oder gebrochenen Zahl sein. Diese einschränkende Bedingung, welche wir später (§§. 179 und 183, sowie §. 248, Zusatz 2) wieder aufheben werden, wird daher vorläufig bei allen folgenden Sätzen vorausgesetzt werden.

§. **161.** Folgesätze. 1. Potenzirt man eine Wurzel mit dem Wurzelexponenten, so erhält man den Radicand.

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

2. Eine Zahl bleibt unverändert, wenn man sie mit einer Zahl potenzirt und durch dieselbe Zahl radicirt.

$$a = \sqrt[n]{(a)^n}; \quad a = (\sqrt[n]{a})^n.$$

Hiernach kann jede Zahl in Form einer Wurzel dargestellt werden; z. B. $b = \sqrt[5]{b^5}$.

Das Potenziren und das Radiciren sind demnach einander entgegengesetzt; letzteres ist eine inverse Operation des ersteren.

3. Die erste Wurzel aus einer Zahl ist die Zahl selbst.

$$\text{Da } a^1 = a, \text{ so ist } \sqrt[1]{a} = a.$$

Für die erste Wurzel wird daher weder der Exponent 1, noch das Wurzelzeichen angeschrieben. Bei der zweiten oder Quadratwurzel wird das Wurzelzeichen, aber nicht der Exponent 2 angeschrieben, so daß $\sqrt{a}$ so viel als $\sqrt[2]{a}$ bedeutet.

4. $\sqrt[n]{1} = 1.$ 5. $\sqrt[n]{0} = 0.$

Vorzeichen der Wurzeln.

§. **162.** 1. Eine gerade Wurzel aus einem positiven Radicand kann positiv oder negativ sein.

2. Eine ungerade Wurzel aus einem positiven Radicand ist immer positiv.

3. Eine ungerade Wurzel aus einem negativen Radicand ist immer negativ.

Beweis. Nach §. 151 ist

$$(\pm p)^{2n} = +a,\ (+q)^{2n+1} = +b,\ (-q)^{2n+1} = -b,$$

wo a und b die durch Potenzirung sich ergebenden absoluten Zahlwerthe bedeuten. Daraus aber folgt nach §. 161, 1.

$$\sqrt[2n]{+a} = \pm p, \qquad \sqrt[2n+1]{+b} = +q, \qquad \sqrt[2n+1]{-b} = -q.$$

Zusatz. Die Bedeutung von $\sqrt[2n]{-a}$ wird weiter unten (§. 183) besonders untersucht werden.

Verbindung des Radicirens mit sich selbst und mit dem Potenziren.

§. **163.** 1. Eine Potenz wird durch eine Zahl radicirt, indem man die Basis dadurch radicirt, oder den Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten dividirt.

$$\sqrt[n]{(a^m)} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}.$$

Beweis. a) Soll $(\sqrt[n]{a})^m$ die richtige Wurzel sein, so muß sie mit dem Wurzelexponenten n potenzirt den Radicand a^m geben. Wirklich ist

$$\{(\sqrt[n]{a})^m\}^n = \{(\sqrt[n]{a})^n\}^m \text{ (§. 152)} = a^m \text{ (§. 161, 1)}.$$

b) Ebenso ist auch

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} \text{ (§. 153)} = a^m.$$

Folgesatz. Soll eine Zahl potenzirt und radicirt werden, so ist es gleichgiltig, in welcher Reihenfolge man diese Rechnungsoperationen vornimmt.

2. Durch Umkehrung des Satzes in 1. ergibt sich

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a^m)} = (\sqrt[n]{a})^m,$$

d. h. Eine Zahl wird mit einem Quotienten (Bruche) potenzirt, indem man sie mit dem Dividend potenzirt und durch den Divisor radicirt.

§. **164.** Eine Zahl wird durch ein Product radicirt, indem man sie durch den einen Factor, und die erhaltene Wurzel durch den andern Factor radicirt.

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{(\sqrt[m]{a})} = \sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})}.$$

Beweis. Beide Formen der Wurzel erfüllen die in §. 161, 1 gestellte Bedingung. Es ist

$$\{\sqrt[n]{(\sqrt[m]{a})}\}^{mn} = [\{\sqrt[n]{(\sqrt[m]{a})}\}^n]^m \text{ (§. 153, Folgef.)}$$

$$= (\sqrt[m]{a})^m \text{ (§. 161, 1)} = a,$$

und ebenso

$$\{\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})}\}^{mn} = [\{\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a}\}^m]^n \text{ (§. 153, Folgef.)}$$

$$= (\sqrt[n]{a})^n \text{ (§. 161, 1)} = a.$$

§. **165.** Eine Wurzel wird durch eine Zahl radicirt, indem man den Radicand dadurch radicirt, oder die Wurzelexponenten multiplicirt.

$$\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})} = \sqrt[n]{(\sqrt[m]{a})} = \sqrt[mn]{a}.$$

Folgt durch Umkehrung aus §. 164.

Folgesatz. Soll eine Zahl durch zwei Zahlen radicirt werden, so darf man entweder durch dieselben einzeln in beliebiger Reihenfolge, oder auch sogleich durch ihr Product radiciren.

§. **166**. 1. Eine Zahl wird durch einen Quotienten (Bruch) radicirt, indem man sie durch den Dividend radicirt und mit dem Divisor potenzirt.

$$\sqrt[\frac{n}{m}]{a} = (\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n]{a^m}).$$

Beweis. Es ist sowohl

$$\left\{(\sqrt[n]{a})^m\right\}^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[n]{a})^n \text{ (§. 153)} = a,$$

als auch

$$\left\{(\sqrt[n]{a^m})\right\}^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{\left\{\sqrt[n]{(a^m)}\right\}^n} \text{ (§. 163, 2)} = \sqrt[m]{(a)^m} = a.$$

2. Durch Umkehrung ergibt sich

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{(a^m)} = \sqrt[\frac{n}{m}]{a},$$

d. h. Eine Wurzel wird mit einer Zahl potenzirt, indem man den Radicand damit potenzirt, oder den Wurzelexponenten durch den Potenzexponenten dividirt.

§. **167**. Die Wurzel aus einer Potenz bleibt unverändert, wenn man den Wurzel- und den Potenzexponenten mit derselben Zahl multiplicirt, oder beide durch dieselbe Zahl dividirt.

Es ist

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}} = \sqrt[np]{(a^{mp})};$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m:p}{n:p}} = \sqrt[n:p]{(a^{m:p})}.$$

Zusatz. Durch Anwendung dieses Satzes kann man a) jede Wurzel in eine andere umformen, deren Wurzelexponent ein Vielfaches des gegebenen Wurzelexponenten ist, folglich auch zwei oder mehrere Wurzeln mit einem gemeinschaftlichen Wurzelexponenten darstellen; b) jede Wurzel, in welcher der Wurzel- und der Potenzexponent ein gemeinschaftliches Maß haben, dadurch abkürzen.

Sind z. B. die Wurzeln $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt[10]{c^7}$ gegeben, so ist 30 ihr kleinster gemeinschaftlicher Wurzelexponent und man hat

$$\sqrt{a} = \sqrt[30]{a^{15}},\ \sqrt[3]{b^2} = \sqrt[30]{b^{20}},\ \sqrt[10]{c^7} = \sqrt[30]{c^{21}}.$$

Verbindung des Radicirens mit der Multiplication und Division.

§. **168**. Ein Product wird durch eine Zahl radicirt, indem man jeden Factor durch dieselbe radicirt und die erhaltenen Wurzeln multiplicirt.

$$\sqrt[n]{(a\,b)} = \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b}.$$

Beweis.

$$(\sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \,.\, (\sqrt[n]{b})^n \text{ (§. 154)} = a \,.\, b \text{ (§. 161, 1)}.$$

Folgesatz. Wurzeln desselben Wurzelexponenten werden multiplicirt, indem man die gemeinschaftliche Wurzel aus dem Producte der Radicanden auszieht.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(ab)}.$$

Sind Wurzeln, welche ungleiche Exponenten haben, zu multipliciren, so müssen sie zunächst mit einem gemeinschaftlichen Wurzelexponenten dargestellt werden. (§. 167, Zusatz.)

Zusätze. 1. Mit Hilfe des ersten Satzes kann man, wenn der Radicand einen Factor enthält, aus dem sich die verlangte Wurzel ausziehen läßt, diesen Factor vom Wurzelzeichen befreien.

Z. B. $$\sqrt[n]{(a^n \cdot b)} = \sqrt[n]{(a^n)} \cdot \sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b}.$$

2. Nach dem zweiten Satze kann man mit Beiziehung von §. 161, 2 umgekehrt jeden Factor einer Wurzel unter das Wurzelzeichen bringen, indem man ihn mit dem Wurzelexponenten potenzirt und diese Potenz mit dem Radicand multiplicirt.

Z. B. $$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(a^n)} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(a^n b)}.$$

§. **169.** Ein Quotient (Bruch) wird durch eine Zahl radicirt, indem man Dividend und Divisor dadurch radicirt und die erste Wurzel durch die zweite dividirt.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Beweis. $$\left\{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right\}^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} \text{ (§. 155)} = \frac{a}{b} \text{ (§. 161, 1).}$$

Folgesätze. 1. Die Wurzel aus einem auf die einfachste Form gebrachten Bruche kann keine ganze Zahl sein.

Folgt unter Beiziehung von §. 76, 6.

2. Wurzeln desselben Wurzelexponenten werden dividirt, indem man die gemeinschaftliche Wurzel aus dem Quotienten der Radicanden auszieht.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Sind Wurzeln, welche ungleiche Exponenten haben, zu dividiren, so werden sie früher auf einen gemeinschaftlichen Wurzelexponenten gebracht.

Die Vergleichung der Sätze §§. 163—169 über das Radiciren mit den §§. 17—21 über die Subtraction und mit den §§. 48—52 und 54 über die Division läßt die Analogie zwischen den inversen Rechnungsarten der ersten, zweiten und dritten Stufe recht deutlich erkennen.

Verbindung des Radicirens mit der Addition und Subtraction.

§. **170.** Die Addition und Subtraction der Wurzeln sowie das Rechnen mit mehrgliedrigen Ausdrücken, in denen Wurzeln vorkommen, wird nach den für allgemeine Zahlen überhaupt aufgestellten Regeln vollzogen. Eine Zusammenziehung findet statt, wenn die Wurzeln sowohl gleiche Radicanden als gleiche Wurzelexponenten haben. Manchmal können auch Wurzeln mit ungleichen Radicanden, wenn sie denselben Exponenten haben, durch Zerlegen der Radicanden in Factoren (§. 168, Zusatz 1) mit einem gemeinschaftlichen Radicand dargestellt werden. Z. B.

$$\sqrt{45a^2c} - \sqrt{80b^2c} + \sqrt{125c^3} = \sqrt{9a^2.5c} - \sqrt{16b^2.5c} + \sqrt{25c^2.5c}$$
$$= 3a\sqrt{5c} - 4b\sqrt{5c} + 5c\sqrt{5c} = (3a - 4b + 5c)\sqrt{5c}.$$

Wie algebraische Summen radicirt werden, wird bezüglich der Quadrat- und Cubikwurzel in den §§. 194—198, dann 202—205, und allgemein bei dem binomischen Lehrsatze (§§. 295 und 299) gezeigt werden.

Verbindung von Gleichungen und Ungleichungen durch die Radicirung.

§. 171. 1. Gleiche Zahlen durch gleiche Zahlen radicirt, geben Gleiches.

Ist $a = b$, so ist $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}$.

Folgt aus §. 8, 3.

Folgesätze. a) Wenn man alle Glieder einer Proportion durch dieselbe Zahl radicirt, so erhält man wieder eine Proportion.

Ist $a : b = c : d$, so ist auch $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{c : d}$, oder

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d} \text{ (§. 169).}$$

b) Die mittlere geometrische Proportionale zwischen zwei Zahlen ist gleich der Quadratwurzel aus dem Producte dieser Zahlen.

Ist $a : b = b : c$, so ist $b^2 = ac$ (§. 136, Folges. 1), daher

$$b = \sqrt{ac} \text{ (§. 171, 1).}$$

2. Ungleiche Zahlen durch gleiche radicirt, geben Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

Ist $a > b$, so ist $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$.

Beweis. Wäre $\sqrt[m]{a} \lessgtr \sqrt[m]{b}$, so müßte bezüglich nach §. 159, 1. oder 2. $(\sqrt[m]{a})^m \lessgtr (\sqrt[m]{b})^m$, also $a \lessgtr b$ sein, was gegen die Voraussetzung ist.

Folgesatz. Ist $a \gtrless 1$, so ist bezüglich auch $\sqrt[m]{a} \gtrless 1$.

3. Gleiche Zahlen durch ungleiche Zahlen radicirt, geben Ungleiches und zwar mit dem entgegengesetzten oder mit demselben Ungleichheitszeichen, je nachdem der Radicand größer oder kleiner als 1 ist.

Ist $m > n$, so ist

$$\text{für } a > 1, \quad \sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a};$$
$$\text{für } a < 1, \quad \sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{a}.$$

Beweis. Wäre für $a > 1$, $\sqrt[m]{a} \gtrless \sqrt[n]{a}$, so wäre bezüglich nach §. 159, 1. oder 2. $(\sqrt[m]{a})^{mn} \gtrless (\sqrt[n]{a})^{mn}$, oder $a^n \gtrless a^m$, während wegen $m > n$ nach §. 159, 3. $a^m > a^n$ sein muß.

Eben so wird der Beweis für $a < 1$ geführt.

4. Ungleiche Zahlen, von denen wenigstens die eine größer als 1 ist, durch ungleiche Zahlen bei entgegengesetztem Ungleichheitszeichen radicirt, geben Ungleiches mit dem Ungleichheitszeichen der Radicanden.

Ist $a > b$ und zugleich $a > 1$, ferner $n < m$, so ist $\sqrt[n]{a} > \sqrt[m]{b}$.

Beweis. Nach 3. ist $\sqrt[n]{a} > \sqrt[m]{a}$, nach 2. ist $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$; folglich um so mehr $\sqrt[n]{a} > \sqrt[m]{b}$.

III. Potenzen und Wurzeln mit negativen und gebrochenen Exponenten.

1. Negative Exponenten.

§. **172.** Der durch die Gleichung $a^m : a^n = a^{m-n}$ ausgedrückte Lehrsatz für die Division zweier Potenzen derselben Basis (§. 157) wurde bisher auf den Fall, wo $m \geqq n$ ist, beschränkt. Ist nun $m < n$ und zwar $m + p = n$, so führt die Anwendung der obigen Gleichung auf eine Potenz mit negativem Exponenten; es ist

$$a^m : a^n = a^m : a^{m+p} = a^{-p}.$$

Damit daher das durch die obige Gleichung ausgesprochene Gesetz allgemeine Geltung habe, ist man genöthigt, auch den Potenzen mit negativen Exponenten eine Bedeutung beizulegen, durch welche auch sie auf den ursprünglichen Potenzbegriff zurückgeführt werden. Diese Bedeutung ergibt sich sogleich, wenn man den Quotienten, welchen a^{-p} vorstellen soll, in einer andern Form entwickelt. Man hat

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^p} = \frac{1}{a^p}.$$

Mithin ist $$a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

Eine Potenz mit negativem Exponenten ist demnach der reciproke Werth derselben Potenz mit positivem Exponenten.

Folgesätze. 1. Da $\frac{1}{a^p} = \left(\frac{1}{a}\right)^p$ ist, so ist auch $a^{-p} = \left(\frac{1}{a}\right)^p$. Eine Zahl a zur (—p)ten Potenz erheben heißt daher, den reciproken Werth von a pmal als Factor setzen.

2. Aus $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ folgt $a^p \cdot a^{-p} = 1$, folglich ist auch $a^p = \frac{1}{a^{-p}}$. Man kann daher jede Potenz, die im Zähler eines Bruches als Factor vorkommt, als Factor in den Nenner, und umgekehrt, übertragen, wenn man das Vorzeichen des Exponenten in das entgegengesetzte verwandelt.

§. **173.** Alle bisher erwiesenen Lehrsätze von den Potenzen mit positiven Exponenten gelten auch für Potenzen mit negativen Exponenten.

Um dies an den einzelnen Sätzen zu beweisen, darf man nur die Potenzen mit negativen Exponenten durch die reciproken Werthe derselben Potenzen mit positiven Exponenten ausdrücken, dann die angedeuteten Rechnungen durchführen und in den Resultaten, wenn darin Ausdrücke von der Form $\frac{1}{a^p}$ vorkommen, wieder zu Potenzen mit negativen Exponenten zurückkehren. Z. B.

$$(+a)^{-n} = \frac{1}{(+a)^n} = \frac{1}{+a^n} = +a^{-n};$$

$$(-a)^{-2n} = \frac{1}{(-a)^{2n}} = \frac{1}{+a^{2n}} = +a^{-2n};$$

$$a^m \cdot a^{-n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$$

$$a^{-m} \cdot b^{-m} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{b^m} = \frac{1}{(ab)^m} = (ab)^{-m};$$

$$a^{-m} : a^n = \frac{1}{a^m} : a^n = \frac{1}{a^m \cdot a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}$$

u. s. w.

§. **174.** Eine Wurzel mit negativem Wurzelexponenten ist gleich dem reciproken Werthe derselben Wurzel mit positivem Wurzelexponenten.

Es ist $\sqrt[-n]{a} = \sqrt[-n.-1]{a^{1.-1}} = \sqrt[n]{a^{-1}}$, also

$$\sqrt[-n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}.$$

Zusatz. Negative Wurzelexponenten pflegt man zu vermeiden, indem man das Negative in den Potenzexponenten verlegt.

2. Gebrochene Exponenten.

§. **175.** Das Radiciren von Potenzen führt nach den in §§. 163 und 166 erwiesenen Gleichungen

$$\sqrt[n]{(a^m)} = a^{\frac{m}{n}} \text{ und } \sqrt[n]{(a^m)} = \sqrt[\frac{n}{m}]{a}$$

für den Fall, daß bezüglich m durch n oder n durch m nicht theilbar ist, auf Potenzen und Wurzeln mit gebrochenen Exponenten. Um die Giltigkeit dieser Regeln von den besonderen Werthen der Exponenten m und n unabhängig zu machen, müssen die Begriffe der Potenz und Wurzel so erweitert werden, daß sie auch für gebrochene Exponenten ihre bestimmte Bedeutung erhalten. Aus den obigen Gleichungen ergeben sich nun unmittelbar folgende Erklärungen:

1. Eine Potenz mit gebrochenem Exponenten ist die sovielte Wurzel aus der Grundzahl, als der Nenner anzeigt, potenzirt mit dem Zähler.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a^m)} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

2. Eine Wurzel mit gebrochenem Exponenten ist die sovielte Potenz des Radicands, als der Nenner anzeigt, radicirt durch den Zähler.

$$\sqrt[\frac{n}{m}]{a} = \sqrt[n]{(a^m)}.$$

Zusatz. Aus $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{(a^m)} = a^{\frac{m}{n}}$ folgt, daß sich jede Wurzel mit gebrochenem Exponenten als eine Potenz mit gebrochenem Exponenten darstellen läßt. Da man darum Wurzeln mit Bruchexponenten in die Rechnung gar nicht einzuführen pflegt, so beschränken wir uns hier auf Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

§. **176.** Alle bisher erwiesenen allgemeinen Sätze von den Potenzen gelten auch für Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

Um dieses an den einzelnen Sätzen nachzuweisen, braucht man nur die Potenzen mit gebrochenen Exponenten in Wurzeln zu verwandeln, dann die angedeuteten Rechnungen auszuführen, und in den Resultaten die Wurzeln wieder in Potenzen mit Bruchexponenten umzuformen.

Z. B. $$a^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}};$$

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}}$$

$$= \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}};$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}};$$

u. s. w.

Zusatz. Da sich alle Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Exponenten darstellen lassen, so ist die Lehre von den Wurzeln schon in den Sätzen von den Potenzen enthalten.

IV. Erweiterung des Zahlengebietes durch das Radiciren.

1. Irrationale Zahlen.

§. **177.** Bei der Erklärung von $\sqrt[n]{a}$ in §. 160 wurde vorausgesetzt, daß der Radicand a die nte Potenz irgend einer ganzen oder gebrochenen Zahl sei. Wir wollen nun auch den Fall betrachten, wo diese Voraussetzung nicht eintrifft.

1. Ist die ganze Zahl a nicht die nte Potenz einer ganzen Zahl, so kann $\sqrt[n]{a}$ weder eine ganze noch eine gebrochene Zahl sein.

Beweis. Ist a unter den nten Potenzen der auf einander folgenden ganzen Zahlen, nämlich

$$1^n,\ 2^n,\ 3^n,\ 4^n,\ \ldots.\ p^n,\ (p+1)^n,\ \ldots$$

nicht enthalten, so muß es zwischen zwei aufeinander folgende solche Potenzen, wie p^n und $(p+1)^n$, fallen, also $p^n < a < (p+1)^n$, daher $p < \sqrt[n]{a} < p+1$ (§. 171, 2) sein; somit ist $\sqrt[n]{a}$ keine ganze Zahl. Es läßt sich aber $\sqrt[n]{a}$ auch durch keinen Bruch vollkommen genau darstellen; denn wäre $\sqrt[n]{a} = p + \frac{q}{r} = \frac{pr+q}{r}$, wo q und r relative Primzahlen sind, so müßte $\left(\frac{pr+q}{r}\right)^n = a =$ einer ganzen Zahl sein, was nach §. 155, Folges. 1 unmöglich ist.

2. Ist die nte Wurzel aus einer ganzen Zahl a keine ganze oder gebrochene Zahl, so läßt sie sich dennoch annäherungsweise durch einen Bruch mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit darstellen.

Beweis. Da $\sqrt[n]{a}$ nach 1. zwischen p und $p + 1$ liegt, so vermehre man p nach und nach um $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \ldots$, wo m eine ganze Zahl bezeichnet und bilde

$$p^n, \left(p + \frac{1}{m}\right)^n, \left(p + \frac{2}{m}\right)^n, \ldots \left(p + \frac{c}{m}\right)^n, \left(p + \frac{c+1}{m}\right)^n, \ldots$$

Weil nun a keiner dieser Potenzen gleich sein kann, so muß es nothwendig zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden solchen Potenzen liegen. Es sei

$$\left(p + \frac{c}{m}\right)^n < a < \left(p + \frac{c+1}{m}\right)^n, \text{ wo } c < m \text{ ist; dann hat man}$$

$$p + \frac{c}{m} < \sqrt[n]{a} < p + \frac{c+1}{m}.$$

$\sqrt[n]{a}$ liegt also zwischen zwei Brüchen $p + \frac{c}{m}$ und $p + \frac{c+1}{m}$, deren Differenz $\frac{1}{m}$ ist. Setzt man für $\sqrt[n]{a}$ die Zahl $p + \frac{c}{m}$, so begeht man einen Fehler, der kleiner als $\frac{1}{m}$ ist. Da aber m beliebig groß, daher $\frac{1}{m}$ beliebig klein gemacht werden kann, so läßt sich $\sqrt[n]{a}$ mit jeder beliebigen Genauigkeit bestimmen.

$p + \frac{c}{m}$ heißt der untere, $p + \frac{c+1}{m}$ der obere Näherungswerth von $\sqrt[n]{a}$.

Zusatz. Auf gleiche Weise läßt sich zeigen, daß auch die nte Wurzel aus einem Bruche $\frac{a}{b} = \frac{a b^{n-1}}{b^n}$, wenn sie nicht selbst eine gebrochene Zahl ist, durch eine solche mit jedem beliebigen Grade der Annäherung dargestellt werden kann.

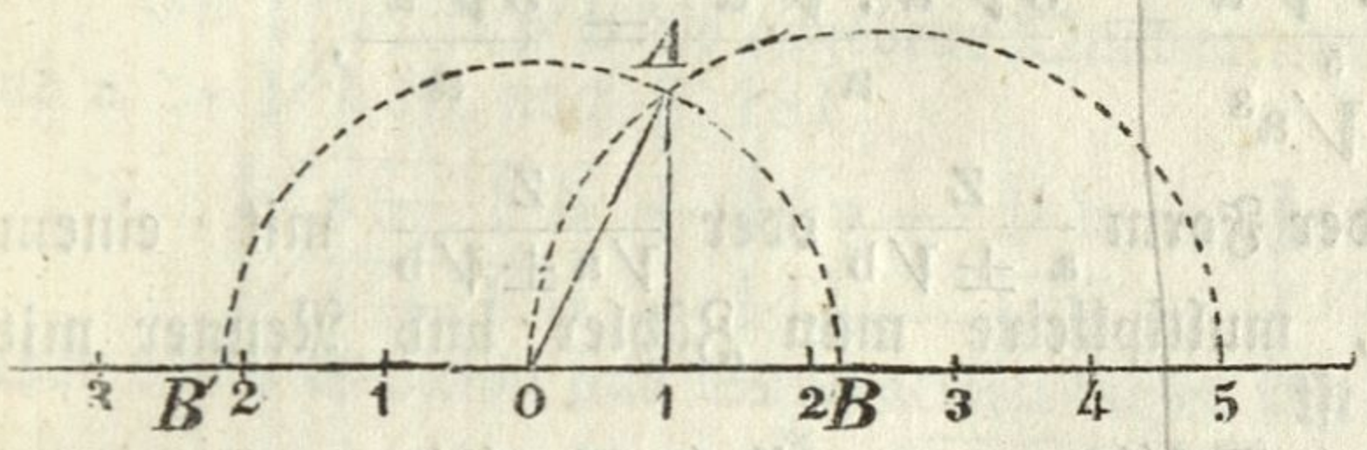
§. 178. Zahlen, welche sich weder durch ganze noch durch gebrochene Zahlen vollkommen genau, dagegen durch letztere annäherungsweise mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit darstellen lassen, heißen irrationale Zahlen (132, Zus.). Im Gegensatze zu ihnen werden alle bisher betrachteten Zahlen, die ganzen und gebrochenen, rationale Zahlen genannt.

So wie die beiden ersten inversen Rechnungsoperationen zu einer Erweiterung des Zahlbegriffes führten, die Subtraction zu den negativen, die Division zu den gebrochenen Zahlen, so nöthigt auch das Radiciren, eine neue Zahlform, die irrationalen Zahlen, in das Zahlengebiet aufzunehmen.

Auch die irrationalen Zahlen können durch eine Zahlenlinie versinnlicht werden. Eine unbegrenzte gerade Linie stellt durch die von einem ihrer Punkte, dem Anfangspunkte, zu beiden Seiten gleich weit abstehenden Punkte, die Reihe der positiven und negativen ganzen Zahlen dar. Werden zwischen je zwei Punkte dieser Linie beliebig viele ebenfalls gleich weit von einander entfernte Punkte eingeschaltet, so wird durch diese die Reihe der Brüche mit beliebigen Nennern dargestellt. Je mehrere solche Punkte man einschaltet, desto näher rücken sie an einander, bis sie bei einer ins Unendliche fortschreitenden Einschaltung, wie die irrationalen Zahlen es fordern, in eine stetige Zahlenlinie übergehen. So lange man sich auf die rationalen Zahlen beschränkte, hatte man immer noch nicht alle Punkte der

Linie; erst die irrationalen Zahlen in Verbindung mit den rationalen lassen jeden Punkt der Linie als die Versinnlichung einer Zahl erscheinen.

Zusatz. Einzelne Irrationalzahlen, und zwar die irrationalen Quadratwurzeln, lassen sich geometrisch mit voller Genauigkeit construiren. Wird z. B. $\sqrt{5}$ gesucht, so darf man, da $1 : \sqrt{5} = \sqrt{5} : 5$ ist, nur die mittlere geometrische Proportionale zwischen 1 und 5 construiren. Zu diesem Ende beschreibt man über 05 der Zahlenlinie einen Halbkreis, errichtet in 1 eine Senkrechte, welche den Halbkreis in A trifft, und zieht die Sehne 0A, welche nach den Lehren der Planimetrie die mittlere geometrische Proportionale zwischen 01 und 05 ist.



Macht man nun $0B = 0B' = 0A$, so ist durch den Punkt B der Zahlenlinie die Zahl $+\sqrt{5}$ und durch den Punkt B' die Zahl $-\sqrt{5}$ genau bestimmt.

Rechnungsoperationen mit irrationalen Zahlen.

§. **179.** Unter der Summe, Differenz, dem Producte oder Quotienten zweier irrationaler Zahlen versteht man diejenige irrationale Zahl, welche bezüglich zwischen den Summen, Differenzen, Producten oder Quotienten der unteren und der oberen Näherungswerthe derselben liegt.

Unter einer Potenz mit einem irrationalen Exponenten versteht man diejenige irrationale Zahl, welche zwischen den Potenzen liegt, die erhalten werden, indem man die Basis mit den Näherungswerthen des irrationalen Exponenten potenzirt.

Da nach diesen Erklärungen die Resultate der Rechnungen mit irrationalen Zahlen durch die bezüglichen Rechnungsresultate ihrer Näherungswerthe bestimmt werden, diese aber rationale Zahlen sind, so gelten alle für die rationalen Zahlen erwiesenen allgemeinen Sätze auch für die zwischen ihnen eingeschlossenen irrationaleu Zahlen.

In der Praxis rechnet man, anstatt mit Irrationalzahlen, gewöhnlich mit ihren unteren oder oberen Näherungswerthen, die gemeine oder Decimalbrüche sind.

Zusatz. Hiernach sind auch die in den Schlußsätzen des §. 132, Zusatz, §. 135 und §. 160 bezüglich der Verhältnisse, Proportionen und Wurzeln gemachten Vorbehalte aufgehoben.

§. **180.** Ausdrücke, in denen irrationale Zahlen vorkommen, lassen sich manchmal durch entsprechende Umstaltung auf eine Form bringen, die für die Rechnung mehr Bequemlichkeit bietet.

Aufgabe. Einen Bruch, dessen Nenner ein irrationales Monom oder Binom ist, ohne Aenderung seines Werthes mit einem rationalen Nenner darzustellen. (Rationalmachen des Nenners.)

Der vorgelegte Bruch kann eine der folgenden Formen haben:

$$\frac{Z}{\sqrt[m]{a^n}}, \quad \frac{Z}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}, \quad \frac{Z}{\sqrt[m]{a^p} \pm \sqrt[n]{b^q}}.$$

1. Um einen Bruch von der Form $\frac{Z}{\sqrt[m]{a^n}}$, wobei $m > n$ ist, mit einem rationalen Nenner darzustellen, multiplicire man Zähler und Nenner mit $\sqrt[m]{a^{m-n}}$.

Es ist

$$\frac{Z}{\sqrt[m]{a^n}} = \frac{Z\sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^n}\,.\,\sqrt[m]{a^{m-n}}} = \frac{Z\sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^m}} = \frac{Z\sqrt[m]{a^{m-n}}}{a}.$$

Z. B.

$$\frac{m}{\sqrt[3]{a}} = \frac{m\sqrt[3]{a^2}}{a};\quad \frac{3\sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{a^3}} = \frac{3\sqrt[5]{a}\,.\,\sqrt[5]{a^2}}{a} = \frac{3\sqrt[10]{a^9}}{a}.$$

2. Um einen Bruch von der Form $\frac{Z}{a \pm \sqrt{b}}$ oder $\frac{Z}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ mit einem rationalen Nenner darzustellen, multiplicire man Zähler und Nenner mit $a \mp \sqrt{b}$ oder $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$. Es ist

$$\frac{Z}{a \pm \sqrt{b}} = \frac{Z\,(a \mp \sqrt{b})}{(a \pm \sqrt{b})\,(a \mp \sqrt{b})} = \frac{Z\,(a \mp \sqrt{b})}{a^2 - b};$$

$$\frac{Z}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{Z\,(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})\,(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})} = \frac{Z\,(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b}.$$

Z. B.

$$\frac{3}{5 - \sqrt{2}} = \frac{3\,(5 + \sqrt{2})}{5^2 - 2} = \frac{15 + 3\sqrt{2}}{23}.$$

$$\frac{15}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{15\,(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{5 - 2} = 5\,(\sqrt{5} - \sqrt{2}).$$

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{3}} = \frac{(2 + \sqrt{3})\,(\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{3})}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{(2 + \sqrt{3})\,(\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{3})\,(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2} = \ldots$$

3. Um einen Bruch von der Form

$$\frac{Z}{\sqrt[m]{a^p} \pm \sqrt[n]{b^q}} = \frac{Z}{\sqrt[mn]{a^{np}} \pm \sqrt[mn]{b^{mq}}} = \frac{Z}{\sqrt[r]{A} \pm \sqrt[r]{B}},$$

wo der Kürze halber $m\,n = r$, $a^{np} = A$ und $b^{mq} = B$ gesetzt wird, mit einem rationalen Nenner darzustellen, multiplicire man Zähler und Nenner des letzten Bruches mit dem Polynom

$$\sqrt[r]{A^{r-1}} \mp \sqrt[r]{A^{r-2}\,.\,B} + \sqrt[r]{A^{r-3}\,.\,B^2} \mp \ldots (\mp 1)^{r-2}\sqrt[r]{A\,.\,B^{r-2}} + (\mp 1)^{r-1}\sqrt[r]{B^{r-1}}.$$

Man erhält dadurch $A \pm B$ als den neuen Nenner. Z. B.

$$\frac{Z}{\sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{b}} = \frac{Z\,(\sqrt[5]{a^4} + \sqrt[5]{a^3 b} + \sqrt[5]{a^2 b^2} + \sqrt[5]{a b^3} + \sqrt[5]{b^4})}{a - b}.$$

§. 181. Aufgabe. Die Summe oder die Differenz der Quadratwurzeln aus der Summe und der Differenz zweier Zahlen, von welchen die eine irrational ist, in eine einzige Quadratwurzel zu verwandeln.

Ist $\sqrt{a} + \sqrt{b} \pm \sqrt{a} - \sqrt{b}$ die gegebene Summe oder Differenz zweier Quadratwurzeln, wobei a als positiv und größer als $\sqrt{b}$ vorausgesetzt wird, so hat man

$$(\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}})^2 = 2a \pm 2\sqrt{a^2 - b},$$

daher, wenn man beiderseits die Quadratwurzel auszieht,

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2 - b}}.$$

Diese Umformung läßt sich besonders dann mit Vortheil anwenden, wenn $a^2 - b$ eine vollständige Quadratzahl ist. Z. B.

$$\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}=\sqrt{8+2\sqrt{16-7}}=\sqrt{8+2\sqrt{9}}=\sqrt{14};$$
$$\sqrt{6+\sqrt{11}}-\sqrt{6-\sqrt{11}}=\sqrt{12-2\sqrt{36-11}}=\sqrt{12-2\sqrt{25}}=\sqrt{2}.$$

§. 182. Aufgabe. Die Quadratwurzel aus einem irrationalen Binom in die Summe oder die Differenz zweier Quadratwurzeln zu verwandeln.

Ist $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ die gegebene Quadratwurzel, so hat man, wenn a positiv und $a>\sqrt{b}$ ist, nach §. 181

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}},$$
$$\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}};$$

daher durch Addition und Subtraction dieser Gleichungen

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}};$$
$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}};$$

oder

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Die Umformung ist nur dann vortheilhaft, wenn a^2-b eine vollständige Quadratzahl ist. Z. B.

$$\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{1}}{2}}+\sqrt{\frac{3-\sqrt{1}}{2}}=\pm(\sqrt{2}+1);$$

$$\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{11-\sqrt{72}}=\sqrt{\frac{11+\sqrt{49}}{2}}-\sqrt{\frac{11-\sqrt{49}}{2}}=\pm(3-\sqrt{2}).$$

Zusätze. 1. Wenn die beiden Glieder des Binoms $a\pm\sqrt{b}$ einen gemeinschaftlichen irrationalen Factor haben, so wird derselbe vor der Transformation herausgehoben. Z. B.

$$\sqrt{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}=\sqrt[4]{2}.\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt[4]{2}.\left(\sqrt{\tfrac{5}{2}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)=\frac{\sqrt[4]{8}}{2}(\sqrt{5}-1).$$

2. Ist $a<\sqrt{b}$, so kann auch da die Formel für $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ angewendet werden, wenn man für $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ den gleichen Ausdruck $\sqrt{\sqrt{b}+a}$ setzt und dann $\sqrt{b}$ als Factor heraushebt. Denn dadurch erhält man

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt[4]{b}\,.\sqrt{1+\sqrt{\frac{a^2}{b}}},$$

wo $a^2<b$, also $\frac{a^2}{b}<1$, somit $1>\sqrt{\frac{a^2}{b}}$ ist.

Z. B.

$$\sqrt{12+8\sqrt{3}}=\sqrt{4\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}=2\sqrt[4]{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt[4]{12}(\sqrt{3}+1).$$

2. Imaginäre und complexe Zahlen.

§. 183. Das Radiciren führt auch noch zu einer zweiten neuen Zahlform. In §. 162 blieb noch der Ausdruck $\sqrt[2n]{-a}$ zu untersuchen übrig. Da weder eine positive, noch eine negative ganze, gebrochene oder irrationale Zahl, noch auch Null, mit einer geraden Zahl potenzirt, eine negative Zahl hervorbringen kann,

so ist $\sqrt[2n]{-a}$ in der stetigen Folge der bisher betrachteten Zahlen nicht zu finden. Man muß $\sqrt[2n]{-a}$ als ein neue Zahlform ansehen und nennt sie eine imaginäre Zahl; im Gegensatze zu ihr bezeichnet man die ganzen, gebrochenen und irrationalen Zahlen mit dem gemeinschaftlichen Namen reelle Zahlen. Die Erklärung der neuen Zahlform liegt in der Gleichung $(\sqrt[2n]{-a})^{2n} = -a$.

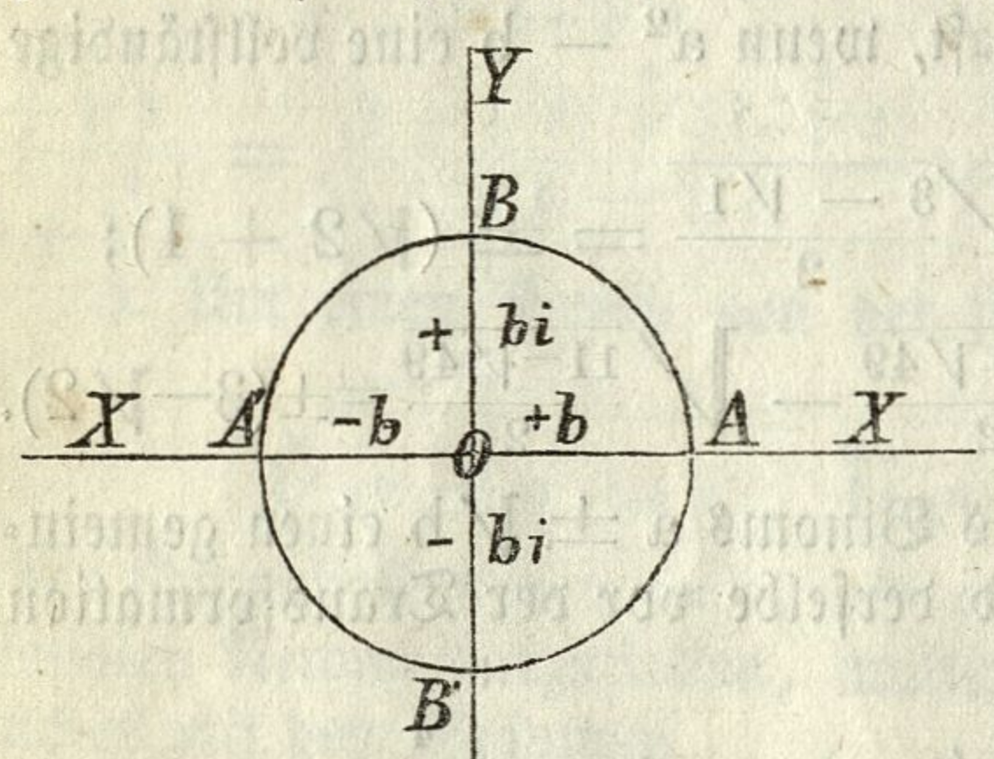
Von besonderer Wichtigkeit sind die Quadratwurzeln aus negativen Zahlen, auf welche wir uns daher hier beschränken wollen. Da die Gesetze über die Wurzeln, so weit sie mit der obigen Gleichung $(\sqrt{-a})^2 = -a$ in Uebereinstimmung sind, auch für imaginäre Quadratwurzeln gelten, so ist

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a.-1} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = b\sqrt{-1},$$

wenn b die absolute Quadratwurzel aus a ist. $\sqrt{-1}$ heißt die imaginäre Einheit und wird nach Gauß mit dem Buchstaben i bezeichnet. Ihre Definition ist durch die Gleichung $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$ gegeben.

§. 184. Räumliche Darstellung der imaginären Zahl $b\sqrt{-1} = bi$.

Stellt XX' die unbegrenzte Zahlenlinie, OX die positive und OX' die negative Richtung vor, so nimmt der Punkt O die Stelle der Null ein; alle denkbaren positiven ganzen, gebrochenen und irrationalen Zahlen haben auf OX, eben so alle negativen Zahlen auf OX' ihre Stelle und sind dort bestimmbar. Eine Erweiterung des Zahlengebietes in der Längenrichtung der Zahlenlinie ist nicht möglich, weil dieselbe in dieser Richtung lückenlos bereits durch die reellen Zahlen ausgefüllt wird. Es bleibt daher, um auch die imaginären Zahlen darzustellen, blos die seitliche Erweiterung übrig, d. i., man muß aus der Zahlenlinie in die Ebene hinaustreten und zu diesem Ende den Begriff der Richtung, welcher früher auf das Fortschreiten in der geraden Linie beschränkt war, auf die Drehung in der Ebene ausdehnen.



Dreht sich die Strecke OA = b um den Nullpunkt O in der Richtung nach links um 180°, so kommt sie in die negative Lage OA', aus + b wird — b; nach einer weiteren Drehung um 180° über die negative Lage fällt sie wieder mit der positiven Richtung zusammen, aus — b wird wieder + b. Die Drehung um 180° bedeutet also eine Multiplication mit dem Factor — 1, die doppelte Drehung um 180°, d. i. die Drehung um 360° bedeutet die zweimalige Multiplication mit — 1, also die Multiplication mit $-1 . -1 = +1$.

Ist nun die imaginäre Zahl bi in der Ebene darstellbar und der Winkel φ das Maß der Drehung, welche erforderlich ist, damit + b in + bi übergehe, welche also der Multiplication mit dem Factor i entspricht, so bedeutet das 2fache, 3fache, 4fache ... dieser Drehung die Multiplication mit i^2, i^3, i^4, ... Es muß daher + b durch die zweimalige Drehung um φ, d. i. durch die Drehung um 2φ in $+bi^2 = +b.-1 = -b$ übergehen. Zu dem Uebergange von + b in — b bedarf es aber einer Drehung von 180°; somit muß $2\varphi = 180°$, also $\varphi = 90°$ sein. Zieht man daher durch O die YY' senkrecht auf XX', so ist OB = + bi. Die imaginäre Zahl $bi = b\sqrt{-1}$ bedeutet also eine Zahl von b Einheiten, welche auf einer im Nullpunkte auf der ursprünglichen

Zahlenlinie senkrechten Geraden gezählt werden, und der Punkt B bezeichnet die Stelle, welche in der Zahlenebene dieser imaginären Zahl entspricht.

Sowohl durch dreimalige Drehung der OA, als durch einmalige Drehung der OA' um 90° gelangt man zu der Strecke OB'; folglich ist $+bi^3 = -bi = OB'$. Ebenso erzeugt die Drehung der OA um 360°, oder die Drehung der OB' um 90° wieder die positive Strecke $+b$; also ist $+bi^4 = -bi.i = +b$.

Hieraus geht hervor, daß dieselbe Beziehung, in welcher OB' zu OA steht, auch zwischen OA' und OB, zwischen OB' und OA', endlich zwischen OA und OB' stattfindet, daß z. B. $OA' = +bi$ ist, wenn $OB = +b$ angenommen wurde.

In den Zahlenausdrücken

$$+b = b.+1, \qquad +bi = b.+i,$$
$$-b = b.-1, \qquad -bi = b.-i$$

drückt demnach der absolute Werth b aus, daß jede dieser Zahlen b Einheiten enthält; die Zeichen aber, oder im erweiterten Sinne die Richtungsfactoren $+1, +i, -1, -i$ zeigen an, daß die b Einheiten bezüglich in den Richtungen OX, OY, OX', OY' zu zählen sind.

Der positiven reellen Zahl $+b$ ist die negative reelle Zahl $-b$, der positiven imaginären Zahl $+bi$ die negative imaginäre Zahl $-bi$ entgegengesetzt.

Die vollständige Untersuchung der imaginären Zahlen gehört nicht in das Gebiet der Elementar-Mathematik; hier sollen nur einige der einfacheren Verbindungen dieser Zahlen betrachtet, und dabei zugleich die Begriffe der Rechnungsoperationen nunmehr in ihrer ausgedehntesten Bedeutung aufgestellt werden.

Rechnungsoperationen mit imaginären Zahlen.

§. **185.** 1. Die Addition zweier Zahlen besteht allgemein darin, daß man von dem einen Summand aus im Sinne (in der Richtung) des anderen Summanden um den absoluten Werth desselben fortschreitet. Hiernach ist

$$ai + bi = (a + b)\,i.$$

Die Summe zweier imaginärer Zahlen ist demnach auch imaginär.

Hieraus folgt auch, daß $ai + bi = bi + ai$ ist.

2. Die Subtraction zweier Zahlen besteht allgemein darin, daß man von dem Minuend aus im entgegengesetzten Sinne des Subtrahends um den absoluten Werth desselben fortschreitet. Hiernach ist

$$ai - bi = (a - b)\,i.$$

Die Differenz zweier ungleicher imaginärer Zahlen ist demnach auch imaginär.

§. **186.** 1. Zwei Zahlen multipliciren heißt allgemein, aus dem Multiplicand eine neue Zahl so bilden, wie der Multiplicator aus der positiven reellen Einheit gebildet wurde.

$$1)\quad ai \,.\, b = abi.$$

Denn: b ist aus der positiven reellen Einheit entstanden, indem man dieselbe b mal als Summand setzte; man muß daher auch ai b mal als Summand setzen; folglich ist $ai \,.\, b = ai + ai + ai + \ldots$ b mal $= abi$.

$$2)\quad a \,.\, bi = abi.$$

Denn: bi ist aus der positiven reellen Einheit entstanden, indem man die ihr entsprechende imaginäre Einheit i bildete und diese b mal als Summand setzte; man muß daher auch zu dem Multiplicand a die entsprechende imaginäre Zahl ai bilden und diese b mal als Summand setzen; folglich ist $a.bi = ai.b = abi$.

$$3)\quad ai \,.\, bi = -ab.$$

Denn: $ai \,.\, bi = ai^2 \,.\, b = -a \,.\, b = -ab$.

Das Product aus einer imaginären und einer reellen Zahl ist imaginär, das Product zweier imaginärer Zahlen reell.

Auch folgt, daß $ai \cdot b = b \cdot ai$ und $ai \cdot bi = bi \cdot ai$ ist.

2. Setzt man in den letzten drei Gleichungen $ab = d$, daher $a = \frac{d}{b}$, so hat man folgeweise

$$\frac{d}{b} i \cdot b = di, \qquad \frac{d}{b} \cdot bi = di,$$
$$\frac{d}{b} i \cdot bi = -d \text{ oder } -\frac{d}{b} i \cdot bi = d.$$

Daraus folgt nun nach dem allgemeinen Begriffe der Division (§. 46):

1) $\frac{di}{b} = \frac{d}{b} i$, 2) $\frac{di}{bi} = \frac{d}{b}$, 3) $\frac{d}{bi} = -\frac{d}{b} i$.

Eine imaginäre und eine reelle Zahl geben daher einen imaginären, zwei imaginäre Zahlen einen reellen Quotienten.

Aus der zweiten Gleichung ist auch ersichtlich, daß ein Bruch unverändert bleibt, wenn man den Zähler und den Nenner mit i multiplicirt.

§. 187. 1. Aus §. 184 folgt unmittelbar:

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = +1;$$

allgemein, wenn n eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet,

$$i^{4n} = +1, \quad i^{4n+1} = +i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

2. Es ist

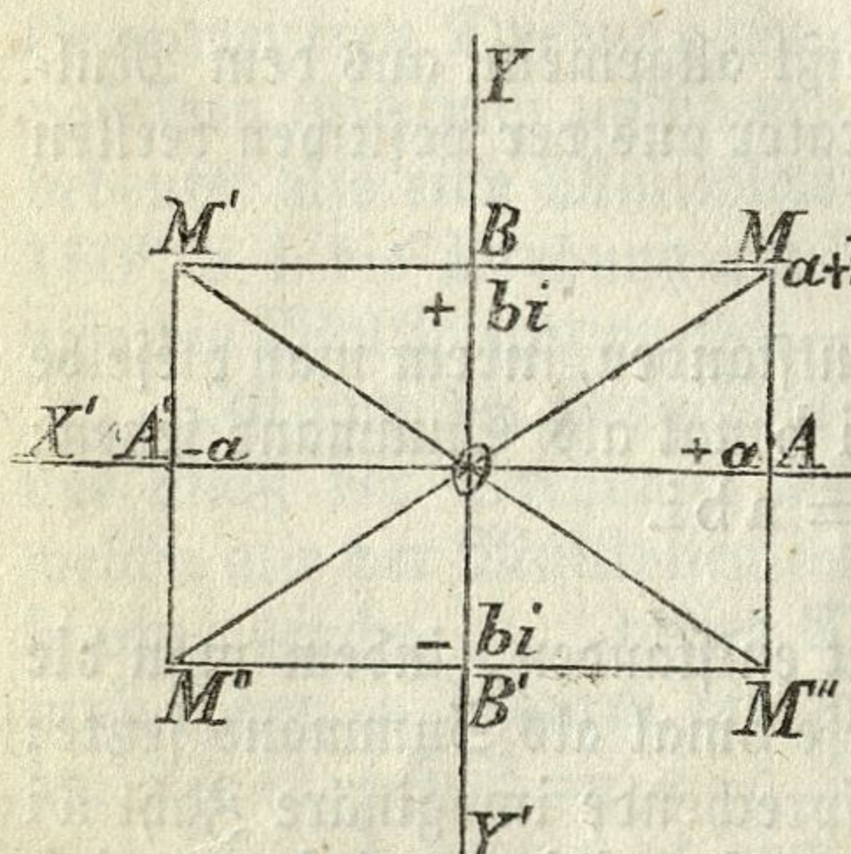
$$(ai)^n = ai \cdot ai \cdot ai \ldots \text{ n mal} = a^n i^n.$$

Die Potenz einer imaginären Zahl ist demnach reell oder imaginär, je nachdem die bezügliche Potenz von i reell oder imaginär ist.

Complexe Zahlen.

§. 188. Die Vereinigung einer reellen und einer imaginären Zahl zu einem Ganzen, wie $a + b\sqrt{-1} = a + bi$, heißt eine complexe Zahl, im Gegensatze zu einer rein imaginären Zahl, welche die Form $b\sqrt{-1} = bi$ hat. Zwei complexe Zahlen von der Form $a + bi$ und $a - bi$ heißen conjugirt.

Um die complexe Zahl $a + bi$ räumlich darzustellen, sei in der Zahlenebene die Gerade XX' die ursprüngliche Zahlenlinie und die in O darauf senkrechte YY' die Linie der imaginären Zahlen. Entspricht der Punkt A der reellen Zahl a und der Punkt B der imaginären Zahl bi, so ziehe man durch A eine Parallele mit YY' und durch B eine Parallele mit XX'; der Durchschnittspunkt M bezeichnet dann die Stelle, welche in der Zahlenebene der complexen Zahl $a + bi$ entspricht, und OM ist die Strecke, welche diese complexe Zahl ihrem absoluten Werthe nach versinnlichet. Den Punkt M kann man auch dadurch erhalten, daß man auf XX' von O aus die Länge OA als Darstellung der Zahl a aufträgt, in A eine Senkrechte errichtet und darauf nach oben die Länge AM als Darstellung der Zahl bi aufträgt.



Eben so findet man, daß den complexen Zahlen $-a+bi$, $-a-bi$, $a-bi$ in der Zahlenebene bezüglich die Punkte M', M'', M''' entsprechen.

Wenn a und b alle reellen Zahlenwerthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so durchläuft der Punkt M, durch welchen die complexe Zahl $a+bi$ bestimmt wird, die ganze unbegrenzte Ebene.

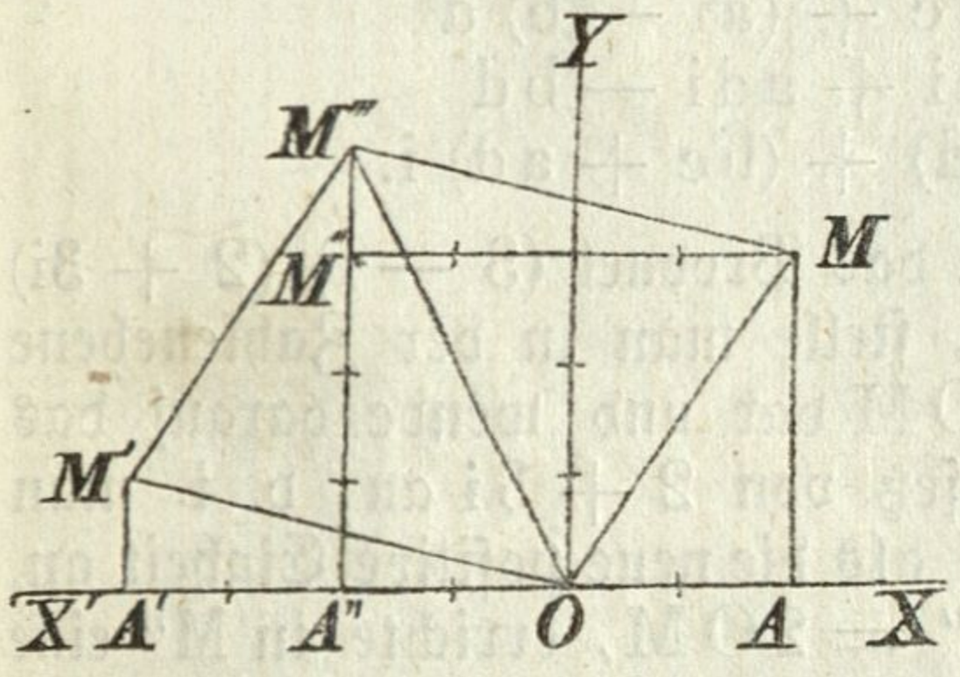
Der Ausdruck $a+bi$ ist demnach die allgemeine Form für alle uns bisher bekannt gewordenen Zahlen; er enthält für $a=o$ und $b=o$ die Null, für $b=o$ alle reellen Zahlen, für $a=o$ alle rein imaginären Zahlen, und, wenn a und b von Null verschieden sind, alle complexen Zahlen.

Rechnungsoperationen mit complexen Zahlen.

§. **189.** 1. Um die complexen Zahlen $a+bi$ und $c+di$ zu addiren, muß man (nach §. 185, 1) vom ersten Summand $a+bi$ aus im Sinne des zweiten Summanden $c+di$ um den absoluten Werth desselben fortschreiten. Die Zahl, zu der man dadurch gelangt, besteht aus der Summe der reellen und der Summe der imaginären Bestandtheile der beiden Summanden; denn

$$(a+bi)+(c+di)=[(a+bi)+c]+di=(a+c+bi)+di$$
$$=(a+c)+(b+d)\,i.$$

Man soll z. B. die Summe $(2+3i)+(-4+i)$ bestimmen. Es ist $2+3i=OM$ und $-4+i=OM'$. Schreitet man nun von dem ersten Summand OM, d. i. von seinem Endpunkte M aus in der Richtung des zweiten Summanden OM' um den absoluten Werth desselben, d. i. um die Strecke OM' fort, wodurch man zu dem Punkte M''' gelangt, so ist $OM'''=-2+4i$ die Summe der beiden gegebenen complexen Zahlen. Zu demselben Resultate gelangt man auch, indem man zuerst die Summe $2+(-4)$ bildet, d. i. von A bis A'' zählt, und mit dieser Summe die Summe $3i+i=4i$ vereinigt, d. i. von A'' in senkrechter Richtung um 4 imaginäre Einheiten fortschreitet.



Die Summe zweier complexer Zahlen ist im Allgemeinen auch eine complexe Zahl. Reell ist immer die Summe zweier conjugirter Zahlen;

$$(a+bi)+(a-bi)=2a.$$

2. Ist von einer complexen Zahl $a+bi$ eine zweite $c+di$ zu subtrahiren, so schreitet man (nach §. 185, 2) vom Minuend aus im entgegengesetzten Sinne des Subtrahends um den absoluten Werth desselben fort. Man gelangt dadurch zu einer Zahl, welche aus der Differenz der reellen und der Differenz der imaginären Bestandtheile der zwei gegebenen complexen Zahlen besteht. Hiernach ist

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)\,i.$$

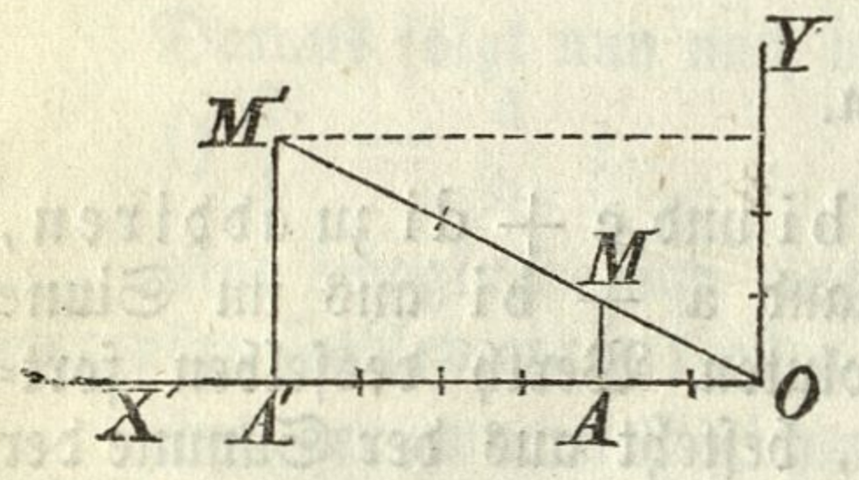
Zwei complexe Zahlen geben im Allgemeinen eine complexe Zahl zur Differenz.

Zusätze. a) Ist $a + bi = c + di$, so muß $a = c$ und $b = d$ sein; denn sonst wäre $a - c = (d - b)\,i$, und $\frac{a-c}{d-b} = i$, also eine reelle Zahl gleich einer imaginären.

b) Ist $a+bi=o$, so muß $a=o$ und $b=o$ sein; denn sonst wäre $-\frac{a}{b} = i$.

§. **190.** 1. Um eine complexe Zahl $a + bi$ mit einer reellen c zu multipliciren, muß man die Zahl $a+bi$ cmal als Summand setzen, somit sowohl den reellen als den imaginären Bestandtheil mit c multipliciren; denn

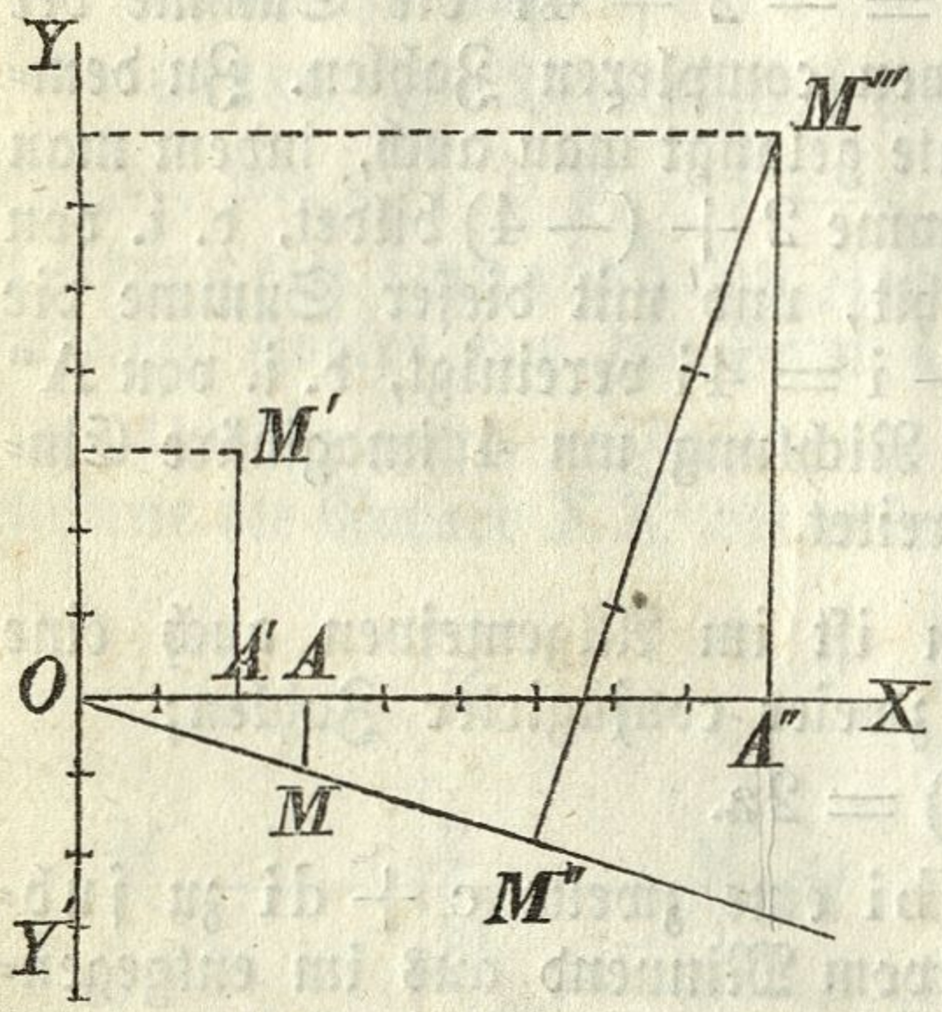
$$(a + bi) \,.\, c = (a + bi) + (a + bi) + \ldots \text{ cmal} = ac + bci.$$



Ist z. B. $-2 + i$ mit 3 zu multipliciren, so mache man in der Zahlenebene $OA = -2$ $AM = 1$, so daß $OM = -2 + i$ wird, und setze OM 3mal als Summand, wodurch man $OM' = -6 + 3i$ als das verlangte Product $(-2 + i) \,.\, 3$ erhält.

2. Sind zwei complexe Zahlen $a + bi$ und $c + di$ zu multipliciren, so hat man (nach §. 186, 1) aus $a + bi$ nach demselben Gesetze eine Zahl zu bilden, wie $c + di$ aus der positiven reellen Einheit entstanden ist; man muß also zuerst $a + bi$ selbst cmal als Summand, dann $a + bi$ im imaginären Sinne dmal als Summand setzen und beide Ausdrücke in eine Summe vereinigen. Die Zahl, zu der man dadurch gelangt, ist übereinstimmend mit dem Producte, welches erhalten wird, indem man die beiden Factoren nach den Gesetzen der algebraischen Zahlen multiplicirt; denn

$$\begin{aligned}(a + bi)\,(c + di) &= (a + bi)\,c + (ai - b)\,d \\ &= ac + bci + adi - bd \\ &= (ac - bd) + (bc + ad)\,i.\end{aligned}$$



Um z. B. das Product $(3 - i)\,(2 + 3i)$ zu erhalten, stelle man in der Zahlenebene $3 - i = OM$ dar und wende darauf das Bildungsgesetz von $2 + 3i$ an; d. i. man nehme OM als die neue positive Einheit an, mache $OM'' = 2OM$, errichte in M'' eine Senkrechte und trage darauf $3OM$ auf, wodurch man zu dem Punkte M''' gelangt; dann ist $(3 - i)\,(1 + 3i) = OM''' = 9 + 7i$. Dasselbe Resultat erhält man auch, wenn man das Product nach den Regeln der algebraischen Multiplication entwickelt; denn

$$(3 - i)\,(2 + 3i) = 6 - 2i + 9i + 3 = 9 + 7i.$$

Das Product zweier complexer Zahlen ist im Allgemeinen auch eine complexe Zahl. Reell ist immer das Product zweier conjugirter Zahlen;

$$(a + bi)\,(a - bi) = a^2 + b^2.$$

§. **191.** 1. Aus $(a + bi) \,.\, m = am + bmi$ folgt nach §. 47, 2

$$\frac{am + bmi}{m} = a + bi;$$

d. i. eine complexe Zahl wird durch eine reelle Zahl dividirt, indem man sowohl den reellen als den imaginären Bestandtheil durch dieselbe dividirt.

2. Es ist ferner allgemein

$$\frac{m\,(a+bi)}{n\,(a+bi)} = \frac{m}{n};$$

d. i. ein Bruch (Quotient) bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben complexen Zahl multiplicirt.

Um daher zwei complexe Zahlen durch einander zu dividiren, darf man nur Dividend und Divisor mit der zu dem Divisor conjugirten Zahl multipliciren, wodurch man auf eine Division durch einen reellen Divisor geführt wird.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)\,(c-di)}{(c+di)\,(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)\,i}{c^2+d^2}$$
$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i.$$

Der Quotient zweier complexer Zahlen ist auch eine complexe Zahl.

Durch das eben angeführte Verfahren kann auch jeder Bruch, dessen Nenner eine complexe Zahl ist, mit einem reellen Nenner dargestellt werden. Z. B.

$$\frac{3+i}{2+5i} = \frac{(3+i)\,(2-5i)}{(2+5i)\,(2-5i)} = \frac{11-13i}{29}.$$

§. **192.** Die Potenz einer complexen Zahl ist im Allgemeinen wieder eine complexe Zahl.

$$(a+bi)^2 = (a+bi)\,(a+bi) = (a^2-b^2)+2abi;$$
$$(a+bi)^3 = (a+bi)^2\,(a+bi) = (a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)\,i;$$

u. s. w.

Zusätze. 1. Die in §§. 181 und 182 für die Quadratwurzeln aus irrationalen Binomen abgeleiteten Formeln gelten, wie aus der Ableitung selbst hervorgeht, auch für die Quadratwurzeln aus complexen Zahlen, und zwar ist hier ihre Anwendung von der dort aufgestellten Bedingung, daß a positiv und größer als $\sqrt{b}$ sein muß, ganz unabhängig.

2. Man sieht aus dem Vorhergehenden, daß die Rechnungen mit imaginären und complexen Zahlen nach denselben Gesetzen vorgenommen werden, welche für reelle Wurzeln gelten, wenn nur dabei die imaginären Zahlen auf die Form bi gebracht worden sind.

V. Quadriren und Cubiren, Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzel.

1. Quadrat und Quadratwurzel.

§. **193.** Aufgabe. Eine algebraische Summe zum Quadrat zu erheben.

Man entwickle das Quadrat nach folgendem Bildungsgesetze:

1. Das erste Glied des gegebenen Ausdruckes gibt sein eigenes Quadrat.

2. Jedes folgende Glied gibt zwei Bestandtheile, das doppelte Product aus der Summe aller vorangehenden Glieder mit diesem Gliede, und das eigene Quadrat.

3. Die Summe aller so gebildeten Bestandtheile ist das gesuchte Quadrat.

Beweis. Man hat zunächst

$$(a+b)^2 = (a+b)\,(a+b) = a^2+2ab+b^2,$$

d. i. das Quadrat eines Binoms ist gleich der Summe aus dem Quadrate des ersten Gliedes, dem doppelten Producte beider Glieder, und dem Quadrate des zweiten Gliedes.

Gesetzt nun, das hier für zwei Glieder nachgewiesene Gesetz gelte für einen n gliedrigen Ausdruck $a + b + c.. + q + r$, so daß

$$(a + b + c + .. + q + r)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2(a + b + c.. + q)r + r^2$$

sei, so läßt sich zeigen, daß dann dasselbe Gesetz auch für einen $(n + 1)$ gliedrigen Ausdruck $a + b + c... + q + r + s$ richtig sein, daß nämlich, wenn zu dem früheren Ausdrucke noch das Glied s dazu kommt, im Quadrate zu der früheren Summe noch $+ 2(a + b + c + .. + q + r)s + s^2$ hinzukommen müsse. In der That ist, wenn man den neuen Ausdruck als ein Binom, den ganzen früheren Ausdruck als das erste und s als das zweite Glied dieses Binoms ansieht,

$$(a + b + c + .. q + r + s)^2 = [(a + b + c + .. + q + r) + s]^2$$
$$= (a + b + c + .. + q + r)^2 + 2(a + b + c + .. + q + r)s + s^2.$$

Das angeführte Bildungsgesetz gilt nun für zwei Glieder, folglich muß es auch für drei, folglich auch für vier, u. s. w., mithin allgemein für jede Anzahl von Gliedern gelten.

Zusatz. Die zwei Bestandtheile, welche ein Glied der gegebenen Zahl im Quadrate gibt, können auch in einen einzigen zusammengefaßt werden, wenn man dieses Glied zu der doppelten Summe der vorhergehenden Glieder addirt, und die erhaltene Summe mit diesem Gliede multiplicirt; denn

$$2a.b + b^2 = (2a + b).b;$$
$$2(a + b).c + c^2 = [2(a + b) + c].c;$$

u. s. w.

§. 194. Aufgabe. Eine dekadische Zahl zum Quadrate zu erheben.

Dabei wird folgendes Verfahren angewendet:

1. Man erhebt die erste Ziffer links zum Quadrate.

2. Aus jeder folgenden Ziffer bildet man zwei Bestandtheile, das doppelte Product aus der ihr vorangehenden Zahl und dieser Ziffer, und ihr eigenes Quadrat.

3. Diese Bestandtheile werden so unter einander gesetzt, daß jeder folgende um eine Stelle weiter rechts erscheint, und dann, so wie sie stehen, addirt.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens folgt, da sich jede dekadische Zahl als ein nach den Potenzen von 10 geordnetes Polynom darstellen läßt, aus §. 193.

Um z. B. 3417 zum Quadrate zu erheben, hat man

$$3417^2 = (3000 + 400 + 10 + 7)^2$$
$$= 3000^2 + 2.3000.400 + 400^2 + 2.3400.10 + 10^2 + 2.3410.7 + 7^2;$$

oder, wenn man die Bestandtheile unter einander setzt und entwickelt:

$3417^2 =$	3000^2	.....	9000000
$+ 2.3000.$	400	.....	2400000
$+ 400^2$		.....	160000
$+ 2.3400.$	10	.....	68000
$+ 10^2$		.....	100
$+ 2.3410.$	7	.....	47740
$+ 7^2$		.....	49
			11675889;

oder mit Hinweglassung der Nullen:

$$3417^2$$

3^2	.....	9.
2. 3.4	.....	24.
4^2	.....	16.
2. 34.1	.....	68.
1^2	.....	1.
2.341.7	.....	4774.
7^2	.....	49.
		11675889.

Zusätze. 1. Die zwei Bestandtheile, welche die zweite und jede folgende Ziffer der gegebenen Zahl im Quadrate liefert, kann man in einen einzigen zusammenfassen, wenn man zu der doppelten vorangehenden Zahl die neue Ziffer hinzuschreibt, und die dadurch entstehende Zahl mit dieser neuen Ziffer multiplicirt; nur muß bei diesem Vorgange jedes folgende Product um zwei Stellen weiter rechts hinausgerückt werden; es ist nämlich allgemein

$$(2\,A.10).p + p^2 = (2\,A.10 + p)\,p.$$

Das frühere Beispiel würde sich bei diesem verkürzten Verfahren so stellen:

$$3417^2$$

3^2	...	9	..		
64.4	...	2	56	..	
681.1	...		6	81	..
6827.7	...		4	77	89
		11	67	58	89

2. Das Quadrat einer dekadischen Zahl hat entweder doppelt so viele Ziffern als diese Zahl oder um eine Ziffer weniger.

Sei N eine nziffrige Zahl, also $N \geqq 10^{n-1}$, aber $< 10^n$, so ist $N^2 \geqq 10^{2n-2}$, aber $< 10^{2n}$; das Quadrat N^2 hat also mindestens $2n - 1$ Ziffern und höchstens $2n$ Ziffern (§. 64).

Theilt man daher das Quadrat von der Rechten gegen die Linke in Abtheilungen zu zwei Ziffern, wobei die erste Abtheilung links auch nur eine Ziffer enthalten kann, so hat man im Quadrate so viele Abtheilungen, als die Quadratwurzel Ziffern hat.

3. Da $\left(\frac{a}{10^n}\right)^2 = \frac{a^2}{10^{2n}}$ ist, so erhellet, daß bei einem Decimalbruche das Quadrat auf gleiche Weise wie bei einer dekadischen ganzen Zahl gebildet wird; nur muß man im Quadrate des Zählers doppelt so viele Decimalen abschneiden, als deren der gegebene Decimalbruch enthält. Daraus folgt auch, daß das Quadrat eines Decimalbruches immer eine gerade Anzahl von Decimalstellen hat.

4. Erhebt man einen abgekürzten Decimalbruch zum Quadrat, so erhält dieses eben so viele unzuverlässige Stellen, als der gegebene Decimalbruch Ziffern hat. (Folgt aus §. 117, 1.)

Z. B. $3{\cdot}456..^2$ gibt als vollständig entwickelt $11{\cdot}943936...$ Von diesen Ziffern sind jedoch die 4 niedrigsten unzuverlässig; daher

$$3{\cdot}456..^2 = 11{\cdot}94..$$

§. **195.** Aufgabe. Aus einer algebraischen Summe die Quadratwurzel auszuziehen.

Aus dem Gesetze (§. 193) nach welchem die Bestandtheile einer mehrgliedrigen Zahl in ihrem Quadrate zusammengestellt erscheinen, läßt sich für das Ausziehen der Quadratwurzel aus einem geordneten Polynom folgendes Verfahren ableiten:

1. Das erste Glied des geordneten Polynoms ist das Quadrat des ersten Wurzelgliedes. Man findet daher das erste Glied der Wurzel, wenn man aus dem ersten Gliede des Radicands die Quadratwurzel auszieht. Das Quadrat des gefundenen ersten Wurzelgliedes wird von dem Radicand subtrahirt.

2. Die ersten zwei Glieder des Restes enthalten die Bestandtheile, welche aus dem folgenden Gliede der Wurzel hervorgehen, und zwar ist das erste Glied des Restes das Product aus der doppelten bereits gefundenen Wurzel und aus dem weiteren Gliede der Wurzel. Dividirt man daher das erste Glied des Restes durch das Doppelte der bereits gefundenen Wurzel, so erhält man das folgende Glied der Wurzel. Man bilde nun die Bestandtheile, welche dieses neue Glied der Wurzel im Quadrate gibt, indem man zu dem Doppelten der früheren Wurzel das neue Glied addirt und die Summe mit diesem Gliede multiplicirt, und subtrahire das Product von dem Reste des Polynoms.

3. Dieses Verfahren wird fortgesetzt. Bleibt zuletzt kein Rest, so ist das gegebene Polynom ein vollständiges Quadrat und die erhaltene Quadratwurzel rational; bleibt aber ein Rest übrig, so ist die Wurzel irrational.

Beispiel.

$$\sqrt{x^4 + 6x^3 - x^2 - 30x + 25} = x^2 + 3x - 5$$

$$\begin{array}{rl}
x^4 & \\
- & \\
\hline
+ 6x^3 - x^2 & : (2x^2 + 3x).3x \\
+ 6x^3 + 9x^2 & \\
- \quad - & \\
\hline
- 10x^2 - 30x + 25 & : (2x^2 + 6x - 5) . - 5 \\
- 10x^2 - 30x + 25 & \\
+ \quad + \quad - & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

§. **196.** Aufgabe. Aus einer dekadischen ganzen Zahl, welche ein vollständiges Quadrat ist, die Quadratwurzel auszuziehen.

1. Man theile die Zahl von den Einern angefangen in Abtheilungen von je zwei Ziffern, wobei die höchste Abtheilung auch nur eine Ziffer enthalten kann, suche die größte Zahl, deren Quadrat in der höchsten Abtheilung enthalten ist, und schreibe sie als erste Ziffer der Wurzel an. Das Quadrat der ersten Wurzelziffer wird von der höchsten Abtheilung des Radicands subtrahirt.

2. Zu dem Reste setze man die folgende Abtheilung des Radicands herab, dividire die dadurch gebildete Zahl nach Weglassung ihrer letzten Ziffer durch das Doppelte der bereits gefundenen Wurzel und schreibe den Quotienten als neue Ziffer in die Wurzel und zugleich als Ergänzung zu dem Divisor. Den so ergänzten Divisor multiplicire man mit der neuen Wurzelziffer und subtrahire das Product sogleich während des Multiplicirens von dem Dividende mit Zuziehung der früher weggelassenen Ziffer.

3. Dieses Verfahren setze man fort, bis alle Abtheilungen des gegebenen Radicands in Rechnung gezogen worden sind.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens ergibt sich aus §. 194.

Z. B. $\sqrt{5|94|38|44} = 2438$

1	94	: 4_4
18	38	: 48_3
3	89 44	: 486_8

= = = =

Zusätze. 1. Da $\sqrt{\frac{A}{10^{2n}}} = \frac{\sqrt{A}}{10^n}$ ist, so folgt, daß man aus einem Decimalbruche die Quadratwurzel nach demselben Verfahren auszieht, wie aus einer ganzen Zahl; nur muß man den Decimalbruch vom Decimalpunkte aus nach rechts und links in Abtheilungen von je zwei Stellen theilen, und in der Wurzel den Decimalpunkt setzen, bevor die erste Abtheilung von Decimalen in Rechnung gezogen wird.

Z. B. $\sqrt{1|52{\cdot}27|56} = 12{\cdot}34$

52		: 2_2
8	27	: 24_3
	98 56	: 246_4

= = = =

2. Um aus einem gemeinen Bruche die Quadratwurzel zu ziehen, zieht man dieselbe aus Zähler und Nenner.

Z. B. $\sqrt{\frac{144}{529}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{529}} = \frac{12}{23}$.

§. **197.** Aufgabe. Aus einer dekadischen ganzen Zahl, welche kein vollständiges Quadrat ist, die Quadratwurzel zu ziehen.

Ist die ganze Zahl a kein vollständiges Quadrat, so ist $\sqrt{a}$ nach §. 177 irrational und läßt sich nur näherungsweise bestimmen. Man ziehe dabei aus a auf die in §. 196 angegebene Weise die Quadratwurzel, bis die letzte Abtheilung in Rechnung gezogen ist, setze dann nach der zuletzt erhaltenen Wurzelziffer den Decimalpunkt und rechne auf dieselbe Art weiter, indem man jedem Reste für die folgende Abtheilung zwei Nullen anhängt. Die Rechnung wird so lange fortgesetzt, bis man die gewünschte Anzahl von Decimalstellen erhalten hat.

Beweis. Multiplicirt man die ganze Zahl a mit 10^{2m}, d. h. hängt man derselben mmal zwei Nullen an, und ist b die größte ganze Zahl, welche in $\sqrt{a.10^{2m}}$ enthalten ist, also

$b < \sqrt{a.10^{2m}} < b + 1$, oder $b < 10^m.\sqrt{a} < b + 1$, so ist

$$\frac{b}{10^m} < \sqrt{a} < \frac{b+1}{10^m}.$$

$\sqrt{a}$ liegt hiernach zwischen den Brüchen $\frac{b}{10^m}$ und $\frac{b+1}{10^m}$, deren Differenz $\frac{1}{10^m}$ ist; folglich ist der Fehler, den man begeht, wenn $\sqrt{a} = \frac{b}{10^m}$ gesetzt wird, kleiner als $\frac{1}{10^m}$, somit kleiner als eine Einheit der letzten berechneten Decimalstelle.

Z. B. $\sqrt{3|50} = 18{\cdot}708..$

2	50	: 2_8
	2600	: 36_7
	310000	: 3740_8
	10736	

Zusätze. 1. Auf gleiche Weise wird auch beim Quadratwurzel-Ausziehen aus einem Decimalbruche, welcher kein vollständiges Quadrat ist, die Rechnung beliebig weit fortgesetzt, indem man zunächst in der letzten Abtheilung rechts, wenn sie nur eine Ziffer enthalten sollte, die fehlende durch eine Null ergänzt, und dann dem übriggebliebenen sowie jedem folgenden Reste zwei Nullen anhängt.

Z. B. $\sqrt{0{\cdot}00|01|5_0} = 0{\cdot}01224..$

$50 : 2_2$

$600 : 24_2$

$11600 : 244_4$

1824

Bei periodischen Decimalbrüchen treten selbstverständlich die entsprechenden Ziffern der Periode an die Stelle der anzuhängenden Nullen-Paare.

2. Um aus einem gemeinen Bruche, dessen Zähler und Nenner nicht Quadratzahlen sind, die Quadratwurzel auszuziehen, verwandelt man ihn entweder in einen solchen Bruch, dessen Nenner eine Quadratzahl ist, und zieht dann die Wurzel aus Zähler und Nenner; oder man verwandelt den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch, und zieht dann aus diesem die Quadratwurzel.

Z. B. $\sqrt{\frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{5.6}{6^2}} = \frac{\sqrt{30}}{6} = \frac{5{\cdot}47722..}{6} = 0{\cdot}91287..$

oder $\sqrt{\frac{5}{6}} = \sqrt{0{\cdot}8\dot{3}} = 0{\cdot}91287..$

§. 198. Abgekürztes Verfahren beim Ausziehen der Quadratwurzel.

Hat man von der Quadratwurzel einer Zahl nach dem gewöhnlichen Verfahren die ersten m Ziffern gefunden, so darf man, um noch m—1 weitere richtige Wurzelziffern zu erhalten, nur den letzten Rest durch die doppelte bereits gefundene Wurzel dividiren.

In der Ausführung wird dabei die abgekürzte Division angewendet und im Divisor sogleich die letzte Ziffer weggelassen.

Beweis. Bezeichnet a den Radicand und b die bereits gefundenen ersten m Ziffern der Quadratwurzel, so kann man unbeschadet der Allgemeinheit die ersten m Abtheilungen in a, und daher auch die mziffrige Zahl b als Ganze annehmen; weil es für die Ziffernfolge der Wurzel gleichgiltig ist, nach welcher Abtheilung des Radicands man den Decimalpunkt setzt; dann werden die weiter folgenden Wurzelziffern Decimalen vorstellen.

Setzt man nun $\sqrt{a} = b + x$, wo x den noch fehlenden Theil der Wurzel ausdrückt, so muß

$$(b + x)^2 = a, \text{ oder } b^2 + 2bx + x^2 = a, \text{ daher}$$

$$2bx = a - b^2 - x^2 \text{ und } x = \frac{a - b^2}{2b} - \frac{x^2}{2b}$$

sein. Wenn nun für x der Quotient $\frac{a - b^2}{2b}$, wo $a - b^2$ den letzten bei der Wurzelausziehung gebliebenen Rest und $2b$ die doppelte bereits gefundene Wurzel bedeutet, gesetzt wird, so ist der Fehler, den man begeht, gleich $\frac{x^2}{2b}$. Aber $x < 1$ und $b > 10^{m-1}$, daher $\frac{x^2}{2b}$ jedenfalls kleiner als $\frac{1}{10^{m-1}}$; woraus folgt, daß der Quotient $\frac{a - b^2}{2b}$ mindestens $m - 1$ weitere richtige Wurzelziffern gibt.

Zusätze. 1. Wenn aus einer ganzen Zahl oder einem vollständigen Decimalbruche die Quadratwurzel mit $2m - 1$ oder $2m$ geltenden Ziffern

zu bestimmen ist, so sucht man bezüglich nur die ersten m oder m + 1 Ziffern nach dem gewöhnlichen Verfahren der Quadratwurzel-Ausziehung, die folgenden aber nach der obigen Vorschrift durch die abgekürzte Division.

Hat man z. B. $\sqrt{138}$ auf 5 Decimalstellen genau, also im ganzen mit 7 geltenden Ziffern zu bestimmen, so sucht man die ersten 4 Ziffern durch das Radiciren, die letzten drei durch die abgekürzte Division. Die Rechnung steht:

$\sqrt{1|38} = 11{\cdot}74734\ldots$

38	:	$2\frac{1}{2}$
1700	:	22_{7}
11100	:	234_{4}
1724	:	$2,3,4,8$
80		
10		
1		

2. Dasselbe abgekürzte Verfahren findet insbesondere auch beim Ausziehen der Quadratwurzel aus einem abgekürzten Decimalbruche statt. Man findet durch dieses Verfahren, wenn der Radicand m geltende Abtheilungen hat, deren jede mit Ausnahme etwa der ersten links zwei Ziffern enthält, in der Wurzel im ungünstigsten Falle $2m - 1$ verläßliche geltende Ziffern.

§. **199.** Aufgabe. Eine irrationale Quadratwurzel durch die Näherungswerthe eines Kettenbruches zu bestimmen.

Es sei $\sqrt{a}$ zu bestimmen. Man suche die größte darin enthaltene ganze Zahl q und setze $\sqrt{a} = q + \frac{1}{x_1}$, wo $\frac{1}{x_1} = \sqrt{a} - q < 1$, daher $x_1 = \frac{1}{\sqrt{a} - q} > 1$ sein muß. Nun suche man wieder die größte in $x_1 = \frac{1}{\sqrt{a} - q}$ enthaltene ganze Zahl q_1 und setze $x_1 = q_1 + \frac{1}{x_2}$, wo $\frac{1}{x_2} < 1$ und $x_2 = \frac{1}{x_1 - q_1} > 1$ sein muß.

Setzt man dieses Verfahren fort, und sind die größten in $x_2, x_3, \ldots$ enthaltenen ganzen Zahlen $q_2, q_3, \ldots$, so hat man

$$\sqrt{a} = q + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{x_2} = q + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{x_3}$$

$$= q + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \frac{1}{x_4} = \ldots$$

Durch die aus dem erhaltenen Kettenbruche hervorgehenden Näherungswerthe kann dann $\sqrt{a}$ mit jeder beliebigen Schärfe berechnet werden.

Ist z. B. $\sqrt{14}$ zu bestimmen, so hat man folgende Rechnung:

$$\sqrt{14} = 3 + \frac{1}{x_1},$$

$$\text{wo } x_1 = \frac{1}{\sqrt{14} - 3} = \frac{\sqrt{14} + 3}{5} = 1 + \frac{\sqrt{14} - 2}{5} = 1 + \frac{1}{x_2},$$

$$\text{„ } x_2 = \frac{5}{\sqrt{14} - 2} = \frac{\sqrt{14} + 2}{2} = 2 + \frac{\sqrt{14} - 2}{2} = 2 + \frac{1}{x_3},$$

$$\text{„ } x_3 = \frac{2}{\sqrt{14} - 2} = \frac{\sqrt{14} + 2}{5} = 1 + \frac{\sqrt{14} - 3}{5} = 1 + \frac{1}{x_4},$$

$$\text{„ } x_4 = \frac{5}{\sqrt{14} - 3} = \frac{\sqrt{14} + 3}{1} = 6 + \frac{\sqrt{14} - 3}{1} = 6 + \frac{1}{x_5},$$

$$\text{„ } x_5 = \frac{1}{\sqrt{14} - 3}, \text{ welches wieder } = x_1 = 1 + \frac{1}{x_2},$$

so daß von der zweiten Gleichung an dieselben Gleichungen immer wiederkehren. Man hat also

$$\sqrt{14} = 3 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \ldots$$

Die Näherungswerthe sind:

$$3,\ 4,\ \frac{11}{3},\ \frac{15}{4},\ \frac{101}{27},\ \frac{116}{31},\ \frac{333}{89},\ \frac{449}{120},\ \frac{3027}{809},\ \ldots$$

Setzt man $\sqrt{14} = \frac{3027}{809} = 3{\cdot}741656\ldots$, so ist der Fehler kleiner als $\frac{1}{809^2} = \frac{1}{654481} = 0{\cdot}0000015\ldots$; es ist also $\sqrt{14}$ auf 5 Decimalen genau bestimmt.

2. Cubus und Cubikwurzel.

§. **200.** Aufgabe. Eine algebraische Summe zum Cubus zu erheben.

Man entwickle den Cubus nach folgendem Gesetze:

1. Das erste Glied des gegebenen Ausdruckes gibt seinen eigenen Cubus.

2. Jedes folgende Glied liefert drei Bestandtheile, das dreifache Quadrat der Summe aller vorangehenden Glieder multiplicirt mit diesem Gliede, die dreifache Summe aller vorangehenden Glieder multiplicirt mit seinem Quadrate, und seinen eigenen Cubus.

3. Die Summe aller so gebildeten Bestandtheile ist der verlangte Cubus.

Beweis. Zunächst ist

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2\,(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)\,(a+b)\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;\end{aligned}$$

d. h. der Cubus eines Binoms ist gleich der Summe aus dem Cubus des ersten Gliedes, dem dreifachen Quadrate des ersten Gliedes multiplicirt mit dem zweiten Gliede, dem dreifachen ersten Gliede multiplicirt mit dem Quadrate des zweiten Gliedes, und dem Cubus des zweiten Gliedes.

Der weitere Gang des Beweises ist ähnlich wie in §. 193.

§. **201.** Aufgabe. Eine dekadische Zahl zum Cubus zu erheben.

1. Man erhebe die erste oder höchste Wurzelziffer zum Cubus.

2. Aus jeder folgenden Ziffer bilde man drei Bestandtheile, das Product aus dem dreifachen Quadrate der ihr vorangehenden Zahl mit dieser Ziffer, das Product aus der dreifachen vorangehenden Zahl und dem Quadrate dieser Ziffer, und ihren Cubus.

3. Diese Bestandtheile werden so unter einander geschrieben, daß jeder folgende um eine Stelle weiter rechts erscheint, und dann, so wie sie stehen, addirt.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens folgt aus §. 200.

Um z. B. den Cubus von 4213 zu bestimmen, hat man

$$\begin{aligned}
4213^3 &= (4000 + 200 + 10 + 3)^3 \\
&= 4000^3 \ldots\ldots 64000000000 \\
&\quad + 3.4000^2.200 \ldots\ldots 9600000000 \\
&\quad + 3.4000\ .200^2 \ldots\ldots 480000000 \\
&\quad + 200^3 \ldots\ldots 8000000 \\
&\quad + 3.4200^2.\ 10 \ldots\ldots 529200000 \\
&\quad + 3.4200\ .\ 10^2 \ldots\ldots 1260000 \\
&\quad + 10^3 \ldots\ldots 1000 \\
&\quad + 3.4210^2.\ 3 \ldots\ldots 159516900 \\
&\quad + 3.4210\ .\ 3^2 \ldots\ldots 113670 \\
&\quad + 3^3 \ldots\ldots 27 \\
&= 74778091597
\end{aligned}$$

oder mit Weglassung der Nullen:

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & 4213^3 & & \\
\hline
 & & 4^3 \ldots\ldots & 64. & \\
3. & 4^2.2 \ldots\ldots & & 96. & \\
3. & 4\ .2^2 \ldots\ldots & & 48. & \\
 & & 2^3 \ldots\ldots & 8. & \\
3. & 42^2.1 \ldots\ldots & & 529 & 2. \\
3. & 42\ .1^2 \ldots\ldots & & 126. & \\
 & & 1^3 \ldots\ldots & 1. & \\
3. & 421^2.3 \ldots\ldots & & 159516 & 9. \\
3. & 421\ .3^2 \ldots\ldots & & 113 & 67. \\
 & & 3^3 \ldots\ldots & & 27 \\
\hline
 & & & 74\,778\,091\,597 &
\end{array}$$

Zusätze. 1. Der Cubus einer dekadischen Zahl hat entweder dreimal so viele Ziffern als diese Zahl, oder um zwei Ziffern oder um eine weniger.

Ist N eine nziffrige Zahl, also $N \geqq 10^{n-1}$, aber $< 10^n$, so ist $N^3 \geqq 10^{3n-3}$, aber $< 10^{3n}$; der Cubus N^3 hat also mindestens $3n - 2$ und höchstens $3n$ Ziffern (§. 64).

2. Da $\left(\frac{a}{10^n}\right)^3 = \frac{a^3}{10^{3n}}$ ist, so folgt, daß man bei Decimalbrüchen vom Cubus des Zählers 3mal so viele Decimalen abschneiden müsse, als deren der gegebene Decimalbruch hat.

3. Erhebt man einen abgekürzten Decimalbruch zum Cubus, so erhält dieser so viele unzuverlässige Stellen, als die halbe Summe aus dem Zähler des zuverlässigen Theiles des Quadrates (§. 194, Zusatz 4) und dem Zähler des gegebenen Decimalbruches Ziffern hat (§. 117, 1).

§. **202.** Aufgabe. Aus einer algebraischen Summe die Cubikwurzel zu ziehen.

1. Man ziehe die Cubikwurzel aus dem ersten Gliede des geordneten Radicands; diese ist das erste Glied der Wurzel. Der Cubus des ersten Wurzelgliedes wird von dem Radicand subtrahirt.

2. Man dividire das erste Glied des Restes durch das dreifache Quadrat der bereits gefundenen Wurzel; der Quotient ist das folgende Glied der Wurzel. Man bilde dann die Bestandtheile, welche dieses neue Glied der Wurzel im Cubus hervorbringt, nämlich das dreifache Quadrat des bereits gefundenen Wurzeltheiles multiplicirt mit dem neuen Gliede, das Dreifache des vorhergehenden

Wurzeltheiles multiplicirt mit dem Quadrate des neuen Gliedes, und den Cubus dieses Gliedes, und subtrahire die Summe dieser drei Bestandtheile von dem früheren Reste des Radicands.

3. Dieses Verfahren wird fortgesetzt. Bleibt zuletzt kein Rest übrig, so ist die Cubikwurzel rational; bleibt ein Rest, so ist sie irrational.

Die Ableitung dieses Verfahrens aus §. 200 geschieht auf ähnliche Weise, wie im §. 195 das Verfahren der Quadratwurzel-Ausziehung aus Polynomen aus §. 193 hergeleitet wurde.

Beispiel.

$$\sqrt[3]{[y^6 - 6y^5 + 21y^4 - 44y^3 + 63y^2 - 54y + 27]} = y^2 - 2y + 3$$

$$\begin{array}{r|l}
y^6 & \\
\hline
-6y^5 + 21y^4 - 44y^3 & : \quad 3y^4 \\
-6y^5 + 12y^4 - \ 8y^3 & \\
\hline
+\ 9y^4 - 36y^3 + 63y^2 - 54y + 27 & : 3y^4 - 12y^3 + 12y^2 \\
+\ 9y^4 - 36y^3 + 36y^2 & \\
\hline
+\ 27y^2 - 54y + 27 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

§. **203**. Aufgabe. Aus einer dekadischen ganzen Zahl, welche ein vollständiger Cubus ist, die Cubikwurzel auszuziehen.

1. Man theile die Zahl von den Einern angefangen gegen die Linke in Abtheilungen von je drei Ziffern, wobei die höchste Abtheilung auch nur zwei oder eine Ziffer haben kann, suche die größte Zahl, deren Cubus in der höchsten Abtheilung vorkommt, und schreibe sie als erste Ziffer in die Cubikwurzel. Den Cubus der ersten Wurzelziffer subtrahire man von der ersten Abtheilung des Radicands.

2. Zu dem Reste setze man die folgende Abtheilung herab, dividire dann die dadurch entstehende Zahl mit Weglassung der letzten zwei Ziffern durch das dreifache Quadrat der bereits gefundenen Wurzel, und schreibe den Quotienten als neue Ziffer in die Wurzel. Dann bilde man die Bestandtheile, welche diese neue Wurzelziffer im Cubus hervorbringt, nämlich das dreifache Quadrat der ihr vorangehenden Zahl multiplicirt mit der neuen Ziffer, die dreifache vorangehende Zahl multiplicirt mit dem Quadrate dieser neuen Ziffer, und ihren Cubus; schreibe den ersten Bestandtheil unter den Dividend, jeden folgenden aber um eine Stelle weiter gegen die Rechte und subtrahire die Summe der so angesetzten Bestandtheile von dem Dividende mit Zuziehung der früher weggelassenen zwei Ziffern.

3. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis man alle Abtheilungen des Radicands in Rechnung gezogen hat.

Die Richtigkeit des Verfahrens beruht auf §. 201.

Z. B. $\sqrt[3]{78|953|589} = 429$

$$\begin{array}{rl}
64 & \\
\hline
14\,953 & : \quad 48\ldots 3.\ 4^2 \\
3.\ 4^2.2\ \ldots \quad 96\ldots & \\
3.\ 4\ .2^2\ldots \quad 48. & \\
\quad 2^3\ldots \quad 8 & \\
\hline
4\,865\,589 & : 5292\ldots 3.42^2 \\
3.42^2.9\ \ldots \quad 47629\ldots & \\
3.42\ .9^2\ldots \quad 10206. & \\
\quad 9^3\ldots \quad 629 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Zusatz. Wie man beim Ausziehen der Cubikwurzel aus einem Decimal- und einem gemeinen Bruche zu verfahren habe, ersieht man leicht aus dem für das Quadratwurzel-Ausziehen in §. 196, Zusatz 1 und 2 angegebenen Verfahren.

§. **204.** Aufgabe. Aus einer dekadischen ganzen Zahl, welche kein vollständiger Cubus ist, die Cubikwurzel zu ziehen.

Ist der Radicand keine dritte Potenz einer ganzen Zahl, so ist die Cubikwurzel irrational und kann nur näherungsweise berechnet werden. Das dabei anzuwendende Verfahren entspricht demjenigen, das wir in §. 197 für die Quadratwurzel-Ausziehung aus einer dekadischen ganzen Zahl, welche kein Quadrat ist, angegeben haben; nur müssen hier den einzelnen Resten für jede Abtheilung drei Nullen angehängt werden.

Zusatz. Auch bezüglich der Vorschrift für das Ausziehen der Cubikwurzel aus Decimal- oder gemeinen Brüchen, welche nicht vollständige Cubikzahlen sind, verweisen wir auf die analogen Bemerkungen in Zus. 1 und 2 zu §. 197.

§. **205.** Abgekürztes Verfahren beim Ausziehen der Cubikwurzel.

Wenn man von der Cubikwurzel einer Zahl nach dem gewöhnlichen Verfahren die ersten m Ziffern berechnet hat, so erhält man noch $m-1$ weitere verläßliche Ziffern, indem man den letzten Rest durch das dreifache Quadrat der bereits gefundenen Wurzel dividirt.

Beweis. Es sei a der Radicand und b bezeichne die bereits berechneten ersten m Ziffern der Cubikwurzel, wobei b ohne Aenderung der noch fehlenden Wurzelziffern als eine ganze Zahl vorausgesetzt werden darf.

Setzt man $\sqrt[3]{a} = b + x$, wo x die weiter folgenden Ziffern der Wurzel bedeutet, so ist

$$(b+x)^3 = a, \text{ oder } b^3 + 3b^2x + 3bx^2 + x^3 = a, \text{ daher}$$

$$3b^2x = a - b^3 - 3bx^2 - x^3 \text{ und } x = \frac{a-b^3}{3b^2} - \frac{x^2}{b} - \frac{x^3}{3b^2},$$

worin $a - b^3$ der letzte bei der Wurzelausziehung gebliebene Rest, und $3b^2$ das dreifache Quadrat der bisher gefundenen Wurzel ist.

Der Fehler, welcher begangen wird, wenn man für x den Quotienten $\frac{a-b^3}{3b^2}$ setzt, ist demnach $\frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{3b^2}$, wo $x < 1$ und $b > 10^{m-1}$ ist, so daß bei der Beurtheilung des Fehlers das Glied $\frac{x^3}{3b^2}$ als gegen $\frac{x^2}{b}$ verschwindend gar nicht in Betracht kommt; $\frac{x^2}{b}$ ist aber kleiner als $\frac{1}{10^{m-1}}$, also wird x durch den Quotienten $\frac{a-b^3}{3b^2}$ auf $m-1$ Ziffern genau bestimmt.

Ist z. B. $\sqrt[3]{0{\cdot}083066534}$ auf 5 Decimalen genau zu bestimmen, so sucht man die ersten 3 Ziffern nach dem gewöhnlichen Verfahren der Cubikwurzel-Ausziehung, die zwei folgenden durch die abgekürzte Division.

Die Rechnung steht:

$$\sqrt[3]{0{\cdot}083|066|534} = 0{\cdot}43632..$$

64	
19066	: 48
144..	
108.	
27	
3559534	: 5547
33282..	
4644.	
216	
1846,78	: 57,0,288
135	
21	

Zusatz. Durch das voranstehende Verfahren erhält man in der Cubikwurzel eines abgekürzten Decimalbruches $2m - 1$ verläßliche Ziffern, wenn der Radicand m geltende Abtheilungen zu drei Ziffern hat.

VI. Logarithmen.

1. Von den Logarithmen überhaupt.

§. **206.** Eine Zahl a durch eine andere Zahl b logarithmiren, heißt den Potenzexponenten suchen, mit welchem b als Basis potenzirt werden muß, um a als Potenz zu geben. Die Zahl b ist die Grundzahl oder Basis, die als Potenz gegebene Zahl a heißt der Logarithmand, oder geradezu die Zahl (Numerus), und der gesuchte Potenzexponent der Logarithmus. Ist $b^n = a$, so ist n der Logarithmus der Zahl a für die Basis b; man hat dafür die Bezeichnung:

$$n = \log_b a.$$

Werden die Logarithmen durchgängig auf eine bestimmte Basis b bezogen, so schreibt man statt des letzten Ausdruckes kürzer $n = \log a$, wobei die Basis b als bekannt vorausgesetzt wird.

Dem Potenziren entsprechen zwei inverse Operationen, das Radiciren und das Logarithmiren, je nachdem die Basis oder der Exponent gesucht wird, da diese beiden nicht commutirt werden können.

Eine Potenzgröße von der Form b^x, worin der Exponent eine unbekannte Zahl ist, heißt eine Exponentialgröße.

§. **207.** Folgesätze. 1. Potenzirt man die Basis mit dem Logarithmus, so erhält man den Logarithmand.

Ist n der Logarithmus von a für die Basis b, so ist $b^n = a$.

2. Der Logarithmus der Basis in Bezug auf diese Basis selbst ist gleich 1.

Es ist $b^1 = b$, daher, wenn b die Basis ist, $\log b = 1$.

3. Der Logarithmus von 1 ist für jede Basis gleich 0.

Es ist $b^0 = 1$, daher $\log 1 = 0$.

4. Der Logarithmus von 0 ist negativ unendlich.

Da $b^{-\infty} = \frac{1}{b^{\infty}} = 0$, so ist $\log 0 = -\infty$.

5. Für eine positive Basis ist der Logarithmus einer negativen Zahl imaginär.

Es gibt keinen reellen Werth von n, für welchen b^n eine negative Zahl geben würde.

§. **208.** Der Inbegriff der Logarithmen der in natürlicher Ordnung auf einander folgenden Zahlen für eine bestimmte Basis bildet ein logarithmisches System.

Da durch das Potenziren einer reellen negativen Zahl nicht alle möglichen positiven Zahlen erzeugt werden können, jede Potenz von 1 aber wieder 1 ist, so kann nur eine reelle positive und von 1 verschiedene Zahl als Basis eines Logarithmensystems angenommen werden.

Im Gebrauche sind nur zwei logarithmische Systeme, nämlich das gemeine oder Brigg'sche für die Basis 10, und das natürliche oder Neper'sche für die irrationale Basis 2·718281828.., welche man aus der Summirung der unendlichen Reihe

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots$$

erhält und gewöhnlich mit dem Buchstaben e bezeichnet.

Allgemeine Sätze über die Logarithmen.

§. **209.** 1. Der Logarithmus eines Productes ist gleich der Summe aus den Logarithmen der Factoren.

Es sei für die Basis b

$\log M = m$, $\log N = n$, $\log P = p$, also

$M = b^m$, $N = b^n$, $P = b^p$; so ist

$MNP = b^{m+n+p}$; d. i.

$\log MNP = m + n + p$, oder

$\log MNP = \log M + \log N + \log P$.

Z. B. $\log 6 = \log 2 + \log 3$.

$\log 30 = \log 2 + \log 3 + \log 5$.

Wenn für eine Basis die Logarithmen aller Primzahlen bekannt sind, so lassen sich daraus durch bloße Addition auch die Logarithmen aller zusammengesetzten Zahlen ableiten.

2. Der Logarithmus eines Bruches (Quotienten) ist gleich dem Logarithmus des Zählers weniger dem Logarithmus des Nenners.

Es sei für die Basis b

$\log M = m$, $\log N = n$; also $M = b^m$, $N = b^n$,

so ist $\frac{M}{N} = b^{m-n}$, folglich

$$\log \frac{M}{N} = m - n = \log M - \log N.$$

Z. B. $\log \frac{29}{31} = \log 29 - \log 31$.

$$\log 35 \cdot 29 = \log \frac{3529}{100} = \log 3529 - \log 100.$$

$$\log \frac{a+b}{a-b} = \log (a+b) - \log (a-b).$$

3. Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Logarithmus der Basis multiplicirt mit dem Potenzexponenten.

Es sei für die Basis b, $\log M = m$, also $M = b^m$; so ist $M^p = b^{mp}$, woraus

$$\log M^p = mp = p \log M$$

folgt.

Z. B. $\log 8^3 = 3 \log 8$.

$$\log (2a)^3 = 3 \log 2a = 3 (\log 2 + \log a).$$

$$\log \frac{x^2 y}{(mn)^4} = 2 \log x + \log y - 4 (\log m + \log n).$$

4. Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Logarithmus des Radicands dividirt durch den Wurzelexponenten.

Es sei für die Basis b, $\log M = m$, also $M = b^m$, so ist $\sqrt[p]{M} = \sqrt[p]{b^m} = b^{\frac{m}{p}}$, daher

$$\log \sqrt[p]{M} = \frac{m}{p} = \frac{\log M}{p}.$$

Z. B. $\log \sqrt[3]{75} = \frac{\log 75}{3}$.

$$\log \sqrt[5]{\frac{a}{b}} = \frac{\log \frac{a}{b}}{5} = \frac{\log a - \log b}{5}.$$

$$\log \frac{a \sqrt[2]{x^2}}{y} = \log a + \tfrac{2}{3} \log x - \log y.$$

§. **210.** 1. Für dieselbe Basis gehören zu gleichen Zahlen auch gleiche Logarithmen; und umgekehrt: zu gleichen Logarithmen gehören auch gleiche Zahlen.

Ist b die Basis und $b^m = M$, $b^n = N$, so muß, wenn $M = N$ ist, auch $m = n$, d. i. $\log M = \log N$ sein. (Folgt indirect aus §. 159, 3.) Ist umgekehrt $\log M = \log N$, also $m = n$, so muß nach §. 159, 1 auch $b^m = b^n$, d. i. $M = N$ sein.

2. Für eine Basis, welche größer als 1 ist, gehört zu der größeren Zahl auch ein größerer Logarithmus; und umgekehrt: zu dem größeren Logarithmus gehört auch eine größere Zahl.

Ist $b^m = M$, $b^n = N$ und $M > N$, so muß für $b > 1$ auch $m > n$, also $\log M > \log N$ sein. (Folgt indirect aus 1. und aus §. 159, 3.) Ist umgekehrt $\log M > \log N$, so folgt eben so aus §. 159, 3. $M > N$.

3. Dieselbe Zahl hat für verschiedene Grundzahlen auch verschiedene Logarithmen.

Ist p der Logarithmus von N in Bezug auf die Basis B, und q der Logarithmus von N in Bezug auf die Basis b, wo B und b als verschiedene Zahlen vorausgesetzt werden, so ist $N = B^p$ und $N = b^q$, daher $B^p = b^q$. Wäre nun $p = q$, so würde aus §. 159, 2 indirect folgen, daß auch $B = b$ sei, was jedoch der Voraussetzung widerspricht; die Logarithmen p und q müssen daher von einander verschieden sein.

4. Der Logarithmus einer Zahl für irgend eine Basis ist gleich dem Logarithmus derselben Zahl für eine zweite Basis,

multiplicirt mit dem reciproken Werthe des Logarithmus der ersteren Basis in Bezug auf die zweite.

Ist $\log_B N = p$, also $B^p = N$, so erhält man, wenn man in der zweiten Gleichung beiderseits die Logarithmen in Bezug auf eine andere Basis b nimmt, $p \log_b B = \log_b N$, oder $\log_B N \,.\, \log_b B = \log_b N$; folglich

$$\log_B N = \log_b N \,.\, \frac{1}{\log_b B}.$$

Sind die Logarithmen der Zahlen für die Basis b bekannt, so kann man daraus auch die Logarithmen für jede andere Basis B bestimmen, wenn man die ersteren mit dem beständigen Factor $\frac{1}{\log_b B}$, d. i. mit dem reciproken Werthe des Logarithmus der neuen Basis in Bezug auf die frühere Basis multiplicirt. Die Zahl, mit welcher die Logarithmen eines Systems multiplicirt werden müssen, um die Logarithmen eines andern Systems zu erhalten, heißt der Modulus des neuen Systems in Bezug auf das ursprüngliche. Der Modulus des Brigg'schen Systems in Bezug auf das natürliche ist $\frac{1}{\log_e 10} = 0{\cdot}4342945\ldots$

2. Von den Brigg'schen Logarithmen.

§. **211.** Unter dem Brigg'schen Logarithmus einer Zahl versteht man den Potenzexponenten, mit dem die Basis 10 potenzirt werden muß, um jene Zahl als Potenz zu geben.

1. Der Brigg'sche Logarithmus einer positiven Zahl ist positiv oder negativ, je nachdem die Zahl größer oder kleiner als 1 ist.

Jede Zahl, welche größer als 1 ist, ist entweder eine dekadische Einheit 10^m, wo m eine positive ganze Zahl bezeichnet, oder liegt sie zwischen zwei solchen Einheiten 10^m und 10^{m+1}; ihr Logarithmus ist daher bezüglich m oder zwischen m und $m + 1$ eingeschlossen, also in jedem Falle positiv.

Jede Zahl, welche kleiner als 1 ist, ist entweder eine dekadische Einheit $\frac{1}{10^m} = 10^{-m}$, oder liegt sie zwischen zwei solchen Einheiten 10^{-m} und $10^{-(m+1)}$; ihr Logarithmus ist daher bezüglich $-m$ oder zwischen $-m$ und $-(m + 1)$ eingeschlossen, also in jedem Falle negativ.

2. Der Brigg'sche Logarithmus einer ganzen oder gebrochenen Zahl, welche eine dekadische Einheit ist, ist eine ganze Zahl.

Folgt aus dem Beweise zu 1.

3. Der Brigg'sche Logarithmus einer ganzen oder gebrochenen Zahl, welche keine dekadische Einheit ist, ist eine irrationale Zahl.

Beweis. a) Ist N keine dekadische Einheit, sondern zwischen zwei auf einander folgenden dekadischen Einheiten $10^{\pm m}$ und $10^{\pm(m+1)}$ enthalten, wo m eine positive ganze Zahl bedeutet, so liegt der Logarithmus von N zwischen $\pm m$ und $\pm (m + 1)$, und ist somit keine ganze Zahl. Er kann aber auch kein Bruch sein. Denn wäre $\log N = \frac{\pm p}{q}$, wo p und q relative Primzahlen seien, so

müßte $10^{\frac{\pm p}{q}} = N$, oder $10^{\pm p} = N^q$ sein. Damit jedoch diese Gleichung möglich sei, müßten $10^{\pm p}$ und N^q aus denselben Primfactoren bestehen; es dürfte also N keine anderen Factoren als 2 und 5, bezüglich $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{5}$, und müßte auch beide in gleicher Anzahl enthalten; dann aber wäre N selbst eine dekadische Einheit, was der Voraussetzung widerspricht. Es kann demnach log N, wenn N keine dekadische Einheit ist, weder durch eine ganze Zahl, noch durch einen Bruch genau dargestellt werden.

b) Der Logarithmus von N läßt sich jedoch durch Angabe von Näherungswerthen, zwischen denen er liegt, mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit annäherungsweise bestimmen. Da N zwischen 10^m und 10^{m+1} enthalten ist, so liegt log N zunächst zwischen den Näherungswerthen m und $m + 1$; aus diesen aber lassen sich andere immer genauere Näherungswerthe ableiten.

Liegt nämlich N allgemein zwischen zwei Zahlen u und v, daher (nach §. 210, 2) log N zwischen log u und log v, welche letztere bekannt seien, so ist nach §. 209 auch der Logarithmus von $\sqrt{u\,v}$, d. i. von der mittleren geometrischen Proportionale zwischen u und v bekannt. Weil nun $\sqrt{u\,v}$ zwischen u und v liegt, so muß N entweder zwischen $\sqrt{u\,v}$ und u, oder zwischen $\sqrt{u\,v}$ und v fallen, daher auch log N entweder zwischen $\log\sqrt{u\,v}$ und log u, oder zwischen $\log\sqrt{u\,v}$ und log v liegen. In jedem Falle ist also log N zwischen zwei engere Näherungswerthe eingeschlossen als früher und durch eine wiederholte Anwendung dieser Schlußweise können die Werthe, zwischen welchen log N liegt, so nahe an einander gerückt werden als man will.

§. **212.** Aufgabe. Von einer gegebenen Zahl den Brigg'schen Logarithmus zu berechnen.

1. Eine Auflösung dieser Aufgabe beruht auf dem in §. 211, 3 unter b) gegebenen Beweise, nach welchem der Logarithmus einer Zahl zwischen immer engere Näherungswerthe eingeschlossen und dadurch so genau, als man will, berechnet werden kann.

Es sei z. B. der Logarithmus von 13 zu berechnen.

13 liegt zwischen 10 und 100,
log 13 „ „ log 10 = 1 und log 100 = 2;
Differenz der Näherungswerthe: $2 - 1 = 1$.

$\sqrt{10.100} = 31{\cdot}6227766 = a$, $\log a = \frac{1}{2}(\log 10 + \log 100) = 1{\cdot}5$;

13 liegt zwischen 10 und a,
log 13 „ „ log 10 = 1 und log a = 1·5;
Differenz der Näherungswerthe: $1{\cdot}5 - 1 = 0{\cdot}5$.

$\sqrt{10\,a} = 17{\cdot}7827942 = b$, $\log b = \frac{1}{2}(\log 10 + \log a) = 1{\cdot}25$;

13 liegt zwischen 10 und b,
log 13 „ „ log 10 = 1 und log b = 1·25;
Differenz der Näherungswerthe: $1{\cdot}25 - 1 = 0{\cdot}25$.

Man sieht, daß die Näherungswerthe des Logarithmus von 13 immer näher an einander rücken. Durch fortgesetztes Verfahren findet man:

$\sqrt{10\,b} = 13{\cdot}3352144 = c$, $\log c = \frac{1}{2}(\log 10 + \log b) = 1{\cdot}125$;
$\sqrt{10\,c} = 11{\cdot}5478201 = d$, $\log d = \frac{1}{2}(\log 10 + \log c) = 1{\cdot}0625$;
$\sqrt{c\,d} = 12{\cdot}4093780 = e$, $\log e = \frac{1}{2}(\log c + \log d) = 1{\cdot}09375$;
$\sqrt{c\,e} = 12{\cdot}8639696 = f$, $\log f = \frac{1}{2}(\log c + \log e) = 1{\cdot}109375$;
$\sqrt{c\,f} = 13{\cdot}0974727 = g$, $\log g = \frac{1}{2}(\log c + \log f) = 1{\cdot}117188$;
$\sqrt{f\,g} = 12{\cdot}9801960 = h$, $\log h = \frac{1}{2}(\log f + \log g) = 1{\cdot}113281$;
$\sqrt{g\,h} = 13{\cdot}0387024 = i$, $\log i = \frac{1}{2}(\log g + \log h) = 1{\cdot}115234$;
$\sqrt{h\,i} = 13{\cdot}0094163 = k$, $\log k = \frac{1}{2}(\log h + \log i) = 1{\cdot}114258$;
$\sqrt{h\,k} = 12{\cdot}9947978 = l$, $\log l = \frac{1}{2}(\log h + \log k) = 1{\cdot}113769$;
$\sqrt{k\,l} = 13{\cdot}0021049 = m$, $\log m = \frac{1}{2}(\log k + \log l) = 1{\cdot}114014$;
$\sqrt{l\,m} = 12{\cdot}9981507 = n$, $\log n = \frac{1}{2}(\log l + \log m) = 1{\cdot}113892$;
$\sqrt{m\,n} = 13{\cdot}0002776 = o$, $\log o = \frac{1}{2}(\log m + \log n) = 1{\cdot}113953$;
$\sqrt{n\,o} = 12{\cdot}9993640 = p$, $\log p = \frac{1}{2}(\log n + \log o) = 1{\cdot}113922$;
$\sqrt{o\,p} = 12{\cdot}9998207 = q$, $\log q = \frac{1}{2}(\log o + \log p) = 1{\cdot}113937$;
$\sqrt{o\,q} = 13{\cdot}0000491 = r$, $\log r = \frac{1}{2}(\log o + \log q) = 1{\cdot}113945$;
$\sqrt{q\,r} = 12{\cdot}9999348 = s$, $\log s = \frac{1}{2}(\log q + \log r) = 1{\cdot}113941$;
u. ſ. w.

Da nun 13 zwiſchen s und r, und folglich auch log 13 zwiſchen log s und log r liegt, dieſe beiden Logarithmen aber in den 5 erſten Decimalſtellen übereinſtimmen, ſo iſt auf 5 Decimalen genau $\log 13 = 1{\cdot}11394$.

Auf dieſem mühſamen Wege berechnete Heinrich Brigg die Logarithmen der Primzahlen von 1 bis 20000, und von 90000 bis 100000 mit 14 Decimalſtellen, und ſpäter Andrian Vlacq die noch fehlenden der Primzahlen von 20000 bis 90000.

2. Bequemer und kürzer kann man den Brigg'ſchen Logarithmus einer Zahl N mittelſt der Näherungswerthe eines Kettenbruches beſtimmen. Man ſetze $\log N = x$, alſo $N = 10^x$, und ſuche die größte ganze Zahl, welche in x enthalten iſt; dieſe ſei q, alſo $10^q < N < 10^{q+1}$; ſetzt man $x = q + \frac{1}{x_1}$, wo $x_1 > 1$, ſo wird $N = 10^{q+\frac{1}{x_1}} = 10^q . 10^{\frac{1}{x_1}}$, folglich $\frac{N}{10^q} = 10^{\frac{1}{x_1}}$ und $\left(\frac{N}{10^q}\right)^{x_1} = 10$, oder wenn $\frac{N}{10^q} = N_1$ geſetzt wird, $N_1^{x_1} = 10$. Man ſuche nun die größte in x_1 enthaltene ganze Zahl; dieſe ſei q_1, alſo $N_1^{q_1} < 10 < N_1^{q_1+1}$; ſetzt man $x_1 = q_1 + \frac{1}{x_2}$, wo $x_2 > 1$, ſo wird $10 = N_1^{q_1+\frac{1}{x_2}} = N_1^{q_1} . N_1^{\frac{1}{x_2}}$, ſomit $\frac{10}{N_1^{q_1}} = N_1^{\frac{1}{x_2}}$ und $\left(\frac{10}{N_1^{q_1}}\right)^{x_2} = N_1$, oder wenn $\frac{10}{N_1^{q_1}} = N_2$ geſetzt wird, $N_2^{x_2} = N_1$.

Iſt ferner $N_2^{q_2} < N_1 < N_2^{q_2+1}$ und ſetzt man $x_2 = q_2 + \frac{1}{x_3}$, ſo wird auf gleiche Weiſe

$$\left(\frac{N_1}{N_2^{q_2}}\right)^{x_3} = N_3^{x_3} = N_2$$

erhalten, woraus wieder für $x_3 = q_3 + \frac{1}{x_4}$, $\left(\frac{N_2}{N_3^{q_3}}\right)^{x_4} = N_4^{x_4} = N_3$ u. ſ. w. folgt.

Hiernach ist

$$\log N = q + \frac{1}{x_1} = q + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{x_2} = q + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{x_3}$$

$$= q + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \frac{1}{x_4} = \ldots$$

woraus sich die Näherungsbrüche für log N herleiten lassen.

Ist nach dieser Methode z. B. der Logarithmus von 13 zu bestimmen, so hat man folgende Rechnung:

$N = 13$, $10^1 < 13 < 10^2$, $q = 1$;

$N_1 = \frac{13}{10^1} = 1 \cdot 3$, $1 \cdot 3^8 < 10 < 1 \cdot 3^9$, $q_1 = 8$;

$N_2 = \frac{10}{1 \cdot 3^8} = 1 \cdot 22589$, $1 \cdot 22589^1 < 1 \cdot 3 < 1 \cdot 22589^2$, $q_2 = 1$;

$N_3 = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 22589^1} = 1 \cdot 06045$, $1 \cdot 06045^3 < 1 \cdot 22589 < 1 \cdot 06045^4$, $q_3 = 3$;

$N_4 = \frac{1 \cdot 22589}{1 \cdot 06045^3} = 1 \cdot 02823$, $1 \cdot 02823^2 < 1 \cdot 06045 < 1 \cdot 02823^3$, $q_4 = 2$;

$N_5 = \frac{1 \cdot 06045}{1 \cdot 02823^2} = 1 \cdot 00303$, $1 \cdot 00303^9 < 1 \cdot 02823 < 1 \cdot 00303^{10}$, $q_5 = 9$;

$N_6 = \frac{1 \cdot 02823}{1 \cdot 00303^9} = 1 \cdot 00159$, $1 \cdot 00159^1 < 1 \cdot 00303 < 1 \cdot 00159^2$, $q_6 = 1$;

u. s. w.

Man hat also $\log 13 = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{1} + \ldots$

und daher für den gesuchten Logarithmus die Näherungswerthe

$$1, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{39}{35}, \frac{88}{79}, \frac{831}{746}, \frac{919}{825} \ldots$$

Setzt man $\log 13 = \frac{919}{825} = 1 \cdot 113939..$, so ist der Fehler kleiner als $\frac{1}{825^2} = \frac{1}{680625} = 0 \cdot 000001..$, somit ist der Logarithmus von 13 auf 5 Decimalstellen genau $1 \cdot 11394$, wie wir denselben auch oben nach der ersten Methode gefunden haben.

Zusatz. Noch kürzere Methoden zur Berechnung der Logarithmen lehrt die höhere Analysis.

§. **213.** Da im Brigg'schen Systeme mit Ausnahme der dekadischen Einheiten alle übrigen rationalen Zahlen irrationale Logarithmen haben, welche annäherungsweise durch Decimalbrüche dargestellt werden, so besteht ein Brigg'scher Logarithmus im Allgemeinen aus Ganzen mit angehängten Decimalziffern. Man nennt die im Logarithmus enthaltenen Ganzen die Charakteristik (Kennziffer) des Logarithmus, die angehängten Decimalen die Mantisse desselben.

Für Zahlen, welche kleiner als 1 sind, ist der Logarithmus, also dessen Charakteristik und Mantisse negativ. Negative Mantissen pflegt man übrigens in der Rechnung zu beseitigen; man führt statt derselben positive Mantissen mit einer negativen Charakteristik ein, indem man den negativen Logarithmus von einer Zahl subtrahirt, die um 1 größer ist als die Charakteristik, wodurch eine

positive Mantisse zum Vorschein kommt, und dann diese um 1 größere Zahl als negative Charakteristik hinter die Mantisse setzt. Z. B.

$$-2{\cdot}34\,567 = 3 - 2{\cdot}34\,567 - 3$$
$$= 0{\cdot}65\,433 - 3.$$

§. **214.** Die Charakteristik des Brigg'schen Logarithmus einer dekadischen Zahl ist gleich dem Rangexponenten der höchsten Ziffer dieser Zahl.

Es sei n der Rangexponent der höchsten Ziffer in der Zahl a, so ist

$$a > 10^n \text{ und } a < 10^{n+1}, \text{ daher}$$
$$\log a > n \text{ und } \log a < n + 1.$$

Es ist also $\log a = n + \alpha$, wo α positiv und < 1 ist; folglich ist n die Charakteristik des Logarithmus.

Folgesätze. a) Die Charakteristik des Logarithmus einer Zahl, welche Ganze enthält, ist positiv und um 1 kleiner als die Anzahl der Stellen, welche die Ganzen einnehmen.

b) Die Charakteristik des Logarithmus eines echten Decimalbruches ist negativ und gleich der Anzahl aller Nullen, welche den geltenden Decimalziffern vorangehen.

§. **215.** Wenn man irgend eine Zahl mit einer Potenz von 10 multiplicirt oder durch eine Potenz von 10 dividirt, so wird dadurch in ihrem Brigg'schen Logarithmus nur die Charakteristik geändert, während die Mantisse dieselbe bleibt.

Es ist

$$\log (a.10^n) = \log a + \log 10^n = \log a + n,$$
$$\log \frac{a}{10^n} = \log a - \log 10^n = \log a - n.$$

Es wird also der Logarithmus von a um die ganze Zahl n im ersten Falle vermehrt, im zweiten vermindert, d. h. er erhält eine andere Charakteristik, während die Mantisse ungeändert bleibt.

Es ist z. B. $\log 7124 = 3{\cdot}85\,272$; daher ist

$$\log 712400 = \log 7124 + \log 100 = 3{\cdot}85\,272 + 2$$
$$= 5{\cdot}85\,272;$$

$$\log 71{\cdot}24 = \log 7124 - \log 100 = 3{\cdot}85\,272 - 2$$
$$= 1{\cdot}85\,272.$$

Folgesatz. Die Mantisse eines Logarithmus hängt blos von der Ziffernfolge der Zahl ohne Rücksicht auf deren Rang ab.

Logarithmentafeln.

§. **216.** Die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 10000 oder von 1 bis 100000, und zwar erstere auf 5 oder 6, letztere auf 7 Decimalen berechnet, hat man in besonderen Tafeln, welche Logarithmentafeln heißen, zusammengestellt. Diese enthalten nur die Mantissen der Logarithmen, weil die Charakteristik in jedem Falle nach §. 214 bestimmt werden kann.

Mit Hilfe solcher Tafeln findet man durch ein ganz einfaches Verfahren, das in den denselben vorausgeschickten Anleitungen näher angegeben ist, zu jeder Zahl den entsprechenden Logarithmus, und umgekehrt zu jedem gegebenen Logarithmus die zugehörige Zahl*).

---

*) Eine ausführliche Belehrung über die Einrichtung und den Gebrauch solcher Tafeln findet man in der Einleitung zu den von mir herausgegebenen fünfstelligen Logarithmentafeln zum Schulgebrauche. Wien, bei Gerold.

§. 217. Rechnungsoperationen mit den Brigg'schen Logarithmen.

In Beziehung auf die Rechnungsoperationen mit Logarithmen sind im allgemeinen dieselben Regeln zu beobachten, wie für dekadische Zahlen überhaupt; nur hat man dabei noch Folgendes zu berücksichtigen:

1. Erhält man beim Addiren der Logarithmen zwei Charakteristiken, eine positive und eine negative, so werden diese in eine einzige zusammengezogen. Z. B.

$$\begin{array}{r} 3\cdot 10589 \\ 2\cdot 56814 \\ 0\cdot 21340 - 2 \\ 0\cdot 08105 - 4 \\ \hline 5\cdot 96848 - 6 = 0\cdot 96848 - 1. \end{array}$$

2. Ist beim Subtrahiren der Minuend kleiner als der Subtrahend, so addire man, um im Reste eine negative Mantisse zu vermeiden, zu dem Minuend so viele positive Einheiten, daß er größer wird als der Subtrahend und setze dann auch als Charakteristik des Restes so viele negative Einheiten. Z. B.

$$\begin{array}{rr} +3 & -3 \\ 1\cdot 45025 & \\ 3\cdot 57892 & \\ \hline 0\cdot 87133 - 3. & \end{array}$$

3. Wird ein Logarithmus mit negativer Charakteristik mit einer Zahl multiplicirt, so muß im Producte die neue negative Charakteristik mit der etwa erhaltenen positiven zusammengezogen werden. Z. B.

$$\begin{array}{rl} (0\cdot 53115 - 2) \times 5 = & 2\cdot 65575 - 10 \\ = & 0\cdot 65575 - 8. \end{array}$$

4. Ist ein Logarithmus mit negativer Charakteristik durch eine Zahl zu dividiren, so muß die negative Charakteristik, wenn sie durch diese Zahl nicht theilbar ist, um so viele Einheiten vergrößert werden, daß sie dadurch theilbar wird; eben so viele Einheiten müssen aber dann auch als Ganze zu der positiven Mantisse gesetzt werden. Dadurch wird eine gebrochene Charakteristik vermieden. Z. B.

$$\begin{array}{rl} (0\cdot 41509 - 7) : 5 = & (3\cdot 41509 - 10) : 5 \\ = & 0\cdot 68302 - 2. \end{array}$$

§. 218. Anwendung der Brigg'schen Logarithmen.

Durch die allgemeinen Sätze, die in §. 209 entwickelt wurden, ist man im Stande, die Multiplication in eine Addition, die Division in eine Subtraction, das Potenziren in eine Multiplication und das Radiciren in eine Division zu verwandeln.

Kommen unter den gegebenen Zahlen negative vor, so betrachtet man sie einstweilen als absolute Zahlen, führt damit die Rechnung durch und bestimmt das Vorzeichen nachträglich in dem gefundenen Resultate.

1. Multiplication der Zahlen mit Hilfe der Logarithmen.

Bestimme das Product aus 1·0954, 0·91567, — 3·1571 und 1·00782.

Es ist

$$\begin{array}{rl} \log 1\cdot 0954 & = 0\cdot 03957 \\ \log 0\cdot 91567 & = 0\cdot 96174 - 1 \\ \log 3\cdot 1571 & = 0\cdot 49928\ (n) \\ \log 1\cdot 00782 & = 0\cdot 00338 \\ \hline \log \text{des Productes} & = 0\cdot 50397 = \log 3\cdot 1914, \end{array}$$

also

$$1\cdot 0954 \times 0\cdot 91567 \times -3\cdot 1571 \times 1\cdot 00782 = -3\cdot 1914.$$

2. Division der Zahlen mit Hilfe der Logarithmen.

1) Es soll der Quotient $528 : 737$ oder $\frac{5}{7}\frac{2}{3}\frac{8}{7}$ bestimmt werden.

$$\begin{array}{rr} & +1 \quad -1 \\ \log 528 = & 2{\cdot}72\,263 \\ \log 737 = & 2{\cdot}86\,747 \\ \hline \log \frac{5}{7}\frac{2}{3}\frac{8}{7} = & 0{\cdot}85\,516 - 1 = \log 0{\cdot}7164, \end{array}$$

folglich $\frac{5}{7}\frac{2}{3}\frac{8}{7} = 0{\cdot}7164.$

2) Bestimme den Werth des Bruches $x = \frac{3{\cdot}4156 \times 4{\cdot}023}{1{\cdot}2378 \times 5{\cdot}87091}$.

Es ist

$$\log x = \log 3{\cdot}4156 + \log 4{\cdot}023 - (\log 1{\cdot}2378 + \log 5{\cdot}87091)$$

$$\begin{array}{rr} \log 3{\cdot}4156 = & 0{\cdot}53\,347 \\ \log 4{\cdot}023 = & 0{\cdot}60\,455 \\ \hline & 1{\cdot}13\,802 \\ \log 1{\cdot}2378 = & 0{\cdot}09\,265 \\ \log 5{\cdot}87091 = & 0{\cdot}76\,871 \\ \hline \log x = & 0{\cdot}27\,666 = \log 1{\cdot}8909, \end{array}$$

also $x = 1{\cdot}8909.$

3. Potenzirung einer Zahl mit Hilfe der Logarithmen.

1) Es soll die 20ste Potenz von $1{\cdot}025$ gesucht werden.

Man hat

$$\begin{array}{rr} \log 1{\cdot}025 = & 0{\cdot}010724 \quad \times 20 \\ \hline \log (1{\cdot}025)^{20} = & 0{\cdot}214480 = \log 1{\cdot}6386, \end{array}$$

also $(1{\cdot}025)^{20} = 1{\cdot}6386.$

2) Bestimme $\left(\frac{329}{67}\right)^{1{\cdot}065}$

$$\begin{array}{rr} \log 329 = & 2{\cdot}51\,720 \\ \log \ 67 = & 1{\cdot}82\,607 \\ \hline & 0{\cdot}69\,113 \quad \times 1{\cdot}065 \\ & 5{,}6{,}0{,}1 \\ & 69\,113 \\ & 4\,147 \\ & 345 \\ \hline \log \left(\frac{329}{67}\right)^{1{\cdot}065} = & 0{\cdot}73\,605 = \log 5{\cdot}4456, \end{array}$$

somit $\left(\frac{329}{67}\right)^{1{\cdot}065} = 5{\cdot}4456.$

4. Radicirung einer Zahl mit Hilfe der Logarithmen.

Man verlangt die 5. Wurzel aus 10.

$$\begin{array}{rr} \log 10 = & 1{\cdot}00000 \\ \hline \log \sqrt[5]{10} = & 0{\cdot}20000 = \log 1{\cdot}5849, \end{array} \quad :5$$

also $\sqrt[5]{10} = 1{\cdot}5849.$

Vierter Abschnitt.

Gleichungen.

---

§. 219. Die Gleichstellung zweier Zahlenausdrücke, welche gleichen Werth haben, wird eine Gleichung genannt. Z. B.

$$x = x,\quad (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4,\quad x^2 - 8 = 2x.$$

Die Größen, welche einander gleichgestellt werden, heißen Theile der Gleichung und können einzeln wieder aus mehreren Gliedern bestehen. In der Gleichung $x^2 - 8 = 2x$ ist $x^2 - 8$ der erste, $2x$ der zweite Theil; der erste Theil besteht aus zwei Gliedern x^2 und -8.

Man unterscheidet identische und Bestimmungsgleichungen.

Gleichungen, welche für jeden Werth der darin vorkommenden noch unbestimmten Größen richtig sind, heißen identische Gleichungen. Z. B. Die Gleichung $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$ hat ihre Richtigkeit, man mag für x was immer für einen Werth setzen. Jede Formel für eine arithmetische Operation bildet eine identische Gleichung.

Gleichungen, welche nicht für alle, sondern nur für bestimmte Werthe der darin vorkommenden Unbekannten richtig sind, heißen Bestimmungsgleichungen. Z. B. die Gleichung $x^2 - 8 = 2x$ ist nur richtig, wenn x einen der zwei Werthe 4 oder -2 hat.

Die Werthe der Unbekannten, welche einer Gleichung genügen, d. i. dieselbe zu einer identischen machen, nennt man Wurzeln dieser Gleichung. Die Gleichung $x^2 - 8 = 2x$ hat zwei Wurzeln, 4 und -2.

Die Wurzeln einer Gleichung bestimmen, heißt die Gleichung auflösen.

Ordnen der Gleichungen.

§. 220. Um eine Gleichung auflösen zu können, muß sie zuerst auf eine solche Form gebracht werden, daß die Unbekannte in keinem Gliede als Nenner oder als Radicand erscheint, daß alle Glieder, welche die Unbekannte enthalten, in dem ersten Theile der Gleichung nach den fallenden Potenzen derselben auf einander folgen, daß endlich der Coefficient der höchsten Potenz der Unbekannten eine ganze positive Zahl ist. Eine so geformte Gleichung heißt geordnet.

Z. B. $\left.\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx &= d \\ x^2 + px &= q \\ x^2 - 3xy + y^2 + 5x &= 9 \end{aligned}\right\}$ sind geordnete Gleichungen.

Wird eine geordnete Gleichung so dargestellt, daß der zweite Theil derselben Null ist, so heißt die Gleichung auf Null reducirt; z. B. $x^2 + ax + b = 0$.

Das Ordnen der Gleichungen beruht auf dem Grundsatze:

Wenn man mit gleichen Größen gleiche Veränderungen vornimmt, so erhält man wieder gleiche Größen.

Dieser Grundsatz läßt sich durch folgende Sätze näher ausdrücken:

1. Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man zu beiden Theilen derselben eine und dieselbe Zahl addirt, oder von beiden Theilen dieselbe Zahl subtrahirt.

Nach diesem Satze kann man jedes Glied des einen Theiles mit dem entgegengesetzten Vorzeichen in den andern Theil bringen (transponiren), gleiche Glieder in beiden Theilen weglassen, und insbesondere auch jede geordnete Gleichung auf Null reduciren.

Z. B. aus $x + a = b$ folgt $x = b - a$,
„ $3x + m = a + m$ „ $3x = a$,
„ $x^2 - 2x = 1$ „ $x^2 - 2x - 1 = 0$.

2. Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man beide Theile derselben mit derselben Zahl multiplicirt.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man jede Gleichung von den Nennern befreien, insbesondere auch den Coefficienten der höchsten Potenz der Unbekannten, wenn er negativ ist, durch die Multiplication beider Theile mit -1, d. i. durch Veränderung aller Vorzeichen, positiv darstellen.

Z. B. aus $\frac{x}{a} - b = c$ folgt $x - ab = ac$,
„ $\frac{x}{a} - b = \frac{c}{x}$ „ $x^2 - abx = ac$,
„ $-x^2 + 3x = -5$ folgt $x^2 - 3x = 5$.

3. Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man beide Theile derselben durch dieselbe Zahl dividirt.

Hiernach kann man eine Gleichung, deren beide Theile einen gemeinschaftlichen Factor haben, durch diesen abkürzen, insbesondere auch den Coefficienten der höchsten Potenz der Unbekannten, wenn er von 1 verschieden ist, wegschaffen.

Z. B. aus $2x^2 - 8x = 4$ folgt $x^2 - 4x = 2$,
„ $8x = 7$ „ $x = \frac{7}{8}$.

4. Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man beide Theile derselben mit derselben Zahl potenzirt.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man eine Gleichung, in welcher die Unbekannte unter dem Wurzelzeichen steht, von dem Wurzelexponenten befreien (rational machen); dabei muß die Wurzel, welche man wegschaffen will, allein in den einen Theil gebracht werden.

Z. B. aus $\sqrt{x - b^2} = a$ folgt $x - b^2 = a^2$.

5. Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man beide Theile derselben durch dieselbe Zahl radicirt.

Durch das Radiciren kann man aus der Gleichung den Potenzexponenten wegschaffen.

Z. B. aus $x^3 = 10$ folgt $x = \sqrt[3]{10}$,
„ $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + b$ „ $x + \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$.

6. Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man von beiden Theilen den Logarithmus in Bezug auf dieselbe Basis nimmt.

Dadurch kann man eine Gleichung von Exponentialgrößen (§. 206) befreien.

Z. B. aus $a^x = b$ folgt $x \log a = \log b$.

Bei Anwendung der hier angeführten Umformungen ist einige Vorsicht nöthig, da in gewissen Fällen die neu gebildete Gleichung nicht mehr alle Wurzeln der gegebenen, in anderen Fällen aber nebst den Wurzeln der gegebenen Gleichung auch noch andere Wurzeln enthält.

Multiplicirt man z. B. beide Theile der Gleichung $\frac{3x-2}{x} - \frac{2x}{x-4} = 4$ mit einem unbekannten Factor $x-1$, welcher in keinem Nenner als Factor vorkommt, so wird die neue Gleichung außer den Wurzeln 2 und $-\frac{4}{3}$ der früheren auch noch die Wurzel 1 haben.

Umgekehrt: wird eine Gleichung $(x-2)(x^2+3x+1) = (x-2)(7x+6)$ durch den unbekannten Factor $x-2$, welcher beiden Theilen gemeinschaftlich ist, dividirt, so fehlt der neuen Gleichung die Wurzel 2 der gegebenen.

Wird die Gleichung $\sqrt{x+11} = x-1$ zum Quadrat erhoben, so kann die neue Gleichung $x+11 = x^2-2x+1$ eben so gut aus $\sqrt{x+11} = -(x-1)$ entstanden sein; man muß daher nachträglich noch besonders untersuchen, ob die Wurzeln der neuen Gleichung, 5 und -2, die gegebene Gleichung befriedigen oder nicht.

§. 221. Aufgabe. Eine gegebene Gleichung zu ordnen.

Aus den vorhergehenden Sätzen ergibt sich für das Ordnen einer Gleichung folgendes Verfahren:

1. Kommen in der Gleichung durch Klammern verbundene Ausdrücke vor, so werden die Klammern durch wirkliche Ausführung der angezeigten Operationen aufgelöst.

2. Wenn die Gleichung Brüche enthält, so werden die Nenner weggeschafft, indem man beide Theile der Gleichung mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen aller Nenner multiplicirt.

3. Kommt die Unbekannte unter dem Wurzelzeichen vor, so wird die Gleichung durch entsprechende Potenzirung beider Theile von dem Wurzelexponenten befreit.

4. Alle Glieder, welche die Unbekannte enthalten, werden in den ersten Theil gebracht, reducirt und nach fallenden Potenzen geordnet; alle übrigen Glieder dagegen werden in den zweiten Theil übertragen und ebenfalls reducirt.

5. Wenn der Coefficient der höchsten Potenz der Unbekannten negativ ist, werden die Vorzeichen aller Glieder geändert.

Beispiele. 1)
$$\begin{aligned} 6(x-2) - 2(3x+1) &= 14 - 4(2x+3) \\ 6x - 12 - 6x - 2 &= 14 - 8x - 12 \\ 6x - 6x + 8x &= 14 - 12 + 12 + 2 \\ 8x &= 16 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} x - \frac{12-3x}{x} &= 8. \\ x^2 - 12 + 3x &= 8x \\ x^2 + 3x - 8x &= 12 \\ x^2 - 5x &= 12. \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} 2x - \sqrt{2x} &= 1 \\ -\sqrt{2x} &= 1 - 2x \\ 2x &= 1 - 4x + 4x^2 \\ 2x + 4x - 4x^2 &= 1 \\ -4x^2 + 6x &= 1 \\ 4x^2 + 6x &= -1. \end{aligned}$$

Eintheilung der Bestimmungsgleichungen.

§. **222.** 1. Eine Gleichung, in welcher die Unbekannten nur mit besonderen Zahlen verbunden sind, heißt eine *numerische* Gleichung; eine Gleichung, welche außer den Unbekannten auch allgemeine Zahlen (Buchstaben) enthält, heißt eine *Buchstabengleichung*.

2. Die Gleichungen theilt man ferner in *algebraische* und *transcendente* ein; in den ersteren kommt die Unbekannte nur als Basis einer Potenz, in den letzteren unter einer der Formen a^x, $\log(a+x)$, $\sin(a+x)$ u. dgl. vor. Eine transcendente Gleichung, in welcher die Unbekannte als Exponent vorkommt, heißt insbesondere eine *Exponentialgleichung*.

3. Nach der *Zahl der* in einer Gleichung vorkommenden *Unbekannten* unterscheidet man Gleichungen *mit einer, zwei oder mehreren Unbekannten*.

4. Nach dem *höchsten Potenzexponenten* der Unbekannten, und wenn mehrere unbekannte Zahlen vorkommen, nach der *höchsten Summe der Potenzexponenten* der Unbekannten eines Gliedes in der geordneten Gleichung theilt man die algebraischen Gleichungen in Gleichungen des *ersten, zweiten, dritten, ... Grades* ein. So sind

$5x + 5 = 0$ $x + 2y = 3z - 8$	Gleichungen des 1. Grades	mit 1 Unbekannten. „ 3 „
$2x^2 - 5x = 10$ $xy - x = y + 2$	Gleichungen des 2. Grades	mit 1 Unbekannten. „ 2 „
$x^3 - 2x^2 + 5x = 1$ $2x^2y - 4xy^2 - y = 3x$	Gleichungen des 3. Grades	mit 1 Unbekannten. „ 2 „

Die Gleichungen des zweiten Grades heißen auch *quadratische*, die des dritten Grades *cubische*, jene des vierten Grades *biquadratische*, die Gleichungen vom fünften Grade aufwärts allgemein *höhere* Gleichungen.

5. Gleichungen des zweiten oder eines höheren Grades heißen *rein*, wenn sie nur *eine* Potenz der Unbekannten enthalten, und *gemischt*, wenn in denselben verschiedene Potenzen der Unbekannten vorkommen.

Z. B. $x^2 - 5 = 0$, $x^3 = 10$ } sind reine, $x^2 - 3x = 5$, $x^3 + 2x^2 - 6 = 0$ } gemischte Gleichungen.

6. Die Gleichungen unterscheidet man endlich in *bestimmte*, welche eine beschränkte, schon vor der Auflösung genau bestimmbare Anzahl von Wurzeln haben, und in *unbestimmte*, denen unendlich viele Wurzeln genügen, wenn nicht die Anzahl derselben durch besondere Bedingungen beschränkt wird.

Z. B. die Gleichung $3x = 5$ hat die einzige Wurzel $\frac{5}{3}$; der Gleichung $3x + 2y = 5$ dagegen können unendlich viele Werthe von x und y genügen; die erstere Gleichung ist daher bestimmt, die letztere unbestimmt.

I. Bestimmte Gleichungen des ersten Grades.

1. Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten.

§. **223.** Die allgemeine Form einer geordneten Gleichung des ersten Grades ist

$$ax = b.$$

Dividirt man beide Theile durch a, so erhält man

$$x = \frac{b}{a}.$$

Eine Gleichung des ersten Grades mit einer Unbekannten hat nur eine Wurzel und ist daher eine bestimmte Gleichung.

Beispiele.

1) $ax + b = a'x + b'$
$ax - a'x = b' - b$
$(a - a')x = b' - b$
$x = \frac{b' - b}{a - a'}$.

2) $\frac{a}{x} - a + \frac{b}{2} = \frac{b}{2x}$
$2a - 2ax + bx = b$
$bx - 2ax = b - 2a$
$(b - 2a)x = b - 2a$
$x = 1$.

2. Bestimmte Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

§. **224.** Eine Gleichung mit zwei Unbekannten ist unbestimmt; es gibt nämlich unendlich viele Werthe, welche, für die beiden Unbekannten substituirt, der Gleichung Genüge leisten. Sind dagegen zwei zusammengehörige Gleichungen mit zwei Unbekannten gegeben, so lassen sich im Allgemeinen die Werthe der Unbekannten, welche beiden Gleichungen Genüge leisten, bestimmt angeben, indem man aus beiden Gleichungen durch Wegschaffung je einer Unbekannten eine Gleichung mit nur einer Unbekannten bildet und diese auflöst.

Aus zwei zusammengehörigen Gleichungen eine Unbekannte wegschaffen, heißt diese Unbekannte eliminiren.

§. **225.** Es sind vorzüglich drei Eliminations-Methoden im Gebrauche.

1. Die Comparations-Methode. Man bestimmt den Werth derselben Unbekannten aus beiden Gleichungen, setzt diese Werthe einander gleich und löst die dadurch erhaltene Gleichung, welche nur die andere Unbekannte enthält, auf.

Sind allgemein die Gleichungen

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c'$$

gegeben, so erhält man aus denselben

$$y = \frac{c - ax}{b} \qquad x = \frac{c - by}{a},$$
$$y = \frac{c' - a'x}{b'} \qquad x = \frac{c' - b'y}{a'};$$

daher, weil y und x in beiden Gleichungen dieselben Werthe haben sollen,

$$\frac{c - ax}{b} = \frac{c' - a'x}{b'}, \qquad \frac{c - by}{a} = \frac{c' - b'y}{a'};$$

aus diesen Gleichungen ergibt sich dann

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}; \qquad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

2. Die Substitutions-Methode. Man sucht den Werth einer Unbekannten aus einer Gleichung und substituirt denselben in die andere Gleichung; dadurch erhält man eine Gleichung mit nur einer Unbekannten, welche dann aufgelöst wird.

Es seien wieder die früheren zwei Gleichungen gegeben. Aus der ersten folgt

$$y = \frac{c - ax}{b}.$$

Substituirt man diesen Werth in die zweite Gleichung, so hat man

$$a'x + b'.\frac{c - ax}{b} = c', \text{ woraus}$$

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b} \text{ folgt.}$$

Auf ähnliche Weise findet man den Werth von y.

3. Die Methode der gleichen Coefficienten. Man verschafft in beiden Gleichungen der zu eliminirenden Unbekannten durch Multiplication aller Glieder mit einem geeigneten Factor gleiche Coefficienten, und addirt oder subtrahirt die neuen Gleichungen, je nachdem diese Coefficienten ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben; die dadurch erhaltene Gleichung mit einer Unbekannten wird dann aufgelöst.

Es seien wieder die obigen Gleichungen gegeben. Um aus denselben y zu eliminiren, multiplicirt man die erste Gleichung mit b', die zweite mit b, wodurch man erhält:

$$ab'x + bb'y = b'c,$$
$$a'bx + bb'y = bc'.$$

Subtrahirt man diese beiden Gleichungen, so ist

$$ab'x - a'bx = b'c - bc', \text{ und daher}$$
$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}.$$

Wird ebenso aus den gegebenen Gleichungen x eliminirt, so erhält man y.

Zusätze. 1. Welche von den drei Eliminations-Methoden in jedem besondern Falle am vortheilhaftesten anzuwenden sei, muß aus der Beschaffenheit der Coefficienten der Unbekannten beurtheilt werden. Gewöhnlich bestimmt man nur den Werth der einen Unbekannten nach einer der angeführten drei Methoden und substituirt dann den gefundenen Werth in eine der gegebenen Gleichungen, woraus sich der Werth für die zweite Unbekannte ergibt.

2. Kommen in den gegebenen Gleichungen nur die reciproken Werthe der Unbekannten vor, so ist es am einfachsten, diese reciproken Werthe selbst als die eigentlichen Unbekannten anzusehen und aus ihnen nachträglich die ursprünglichen Unbekannten zu berechnen. Z. B.

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13 \text{ und } \frac{5}{x} - \frac{2}{y} = 4.$$

Setzt man $\frac{1}{x} = x'$ und $\frac{1}{y} = y'$, so hat man

$$2x' + 3y' = 13 \text{ und } 5x' - 2y' = 4,$$

und findet daraus $x' = 2$, $y' = 3$, woraus dann $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$ folgt.

Beispiele.

1) $\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 24 \\ 5x - 3y &= 11 \end{aligned}\right\}$ nach der Comparations-Methode aufzulösen.

Die erste Gleichung gibt $x = \frac{24 - 4y}{3}$,

" zweite " " " $x = \frac{11 + 3y}{5}$,

daher $\frac{24 - 4y}{3} = \frac{11 + 3y}{5}$, woraus $y = 3$ folgt.

Substituirt man diesen Werth von y in den Ausdruck

$x = \frac{24 - 4y}{3}$, so erhält man $x = \frac{24 - 4.3}{3} = 4$.

Probe. $3.4 + 4.3 = 24$,
$5.4 - 3.3 = 11$.

2) $\left.\begin{matrix} 6x - 13y = 48 \\ 2x + 3y = 16 \end{matrix}\right\}$ nach der Subſtitutions-Methode aufzulöſen.

Aus der erſten Gleichung folgt $x = \frac{48 + 13y}{6}$; wird dieſer Werth in die zweite Gleichung ſubſtituirt, ſo hat man

$$2.\frac{48+13y}{6} + 3y = 16, \text{ woraus } y = 0 \text{ folgt.}$$

Subſtituirt man dieſen Werth von y in den Ausdruck

$$x = \frac{48+13y}{6}, \text{ ſo findet man } x = \frac{48+13.0}{6} = 8.$$

3) $\left.\begin{matrix} 4x + 19y = 11 \\ 6x - 5y = -17 \end{matrix}\right\}$ nach der Methode der gleichen Coefficienten aufzulöſen.

Um bei x gleiche Coefficienten herbeizuführen, multiplicirt man die erſte Gleichung mit 3, die zweite mit 2; man erhält

$$\left.\begin{matrix} 12x + 57y = 33 \\ 12x - 10y = -34 \end{matrix}\right\} \text{ ſubtrahirt,}$$

$$67y = 67, \text{ alſo } y = 1.$$

Wird dieſer Werth von y in die erſte Gleichung ſubſtituirt, ſo erhält man $4x + 19.1 = 11$, woraus $x = -2$ folgt.

4) $$x + y = s,\ x - y = d.$$

Durch Addition und Subtraction dieſer Gleichungen erhält man

$$2x = s + d,\ 2y = s - d, \text{ daher}$$

$$x = \frac{s+d}{2},\ y = \frac{s-d}{2}.$$

Wie findet man aus der Summe zweier Zahlen und deren Differenz die beiden Zahlen ſelbſt?

§. **226.** Die in §. 225 aus den allgemeinen Gleichungen

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c'$$

erhaltenen Werthe

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b'},\ y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

laſſen erſehen, daß es Fälle gibt, in denen die gegebenen zwei Gleichungen zur Beſtimmung der in denſelben vorkommenden zwei Unbekannten nicht geeignet ſind.

1. Die Werthe von x und y ſind völlig unbeſtimmt, wenn $ab' = a'b$ und $b'c = bc'$, alſo $a : a' = b : b'$ und $b : b' = c : c'$ iſt, woraus auch $a : a' = c : c'$ oder $ac' = a'c$ folgt, weil dann ſowohl $x = \frac{0}{0}$, als auch $y = \frac{0}{0}$ wird. Dieſer Fall tritt immer ein, wenn die eine Gleichung von der andern abhängig iſt. Denn ſetzt man $a : a' = b : b' = c : c' = m$, alſo $a = a'm$, $b = b'm$, $c = c'm$, ſo nehmen die gegebenen Gleichungen folgende Form an:

$$a'mx + b'my = c'm,$$
$$a'x + b'y = c',$$

woraus hervorgeht, daß die erſte Gleichung durch bloße Umformung, nämlich durch Multiplication mit m, aus der zweiten hervorgegangen, folglich von dieſer abhängig iſt.

2. Die zwei Gleichungen laſſen ferner keine endliche Auflöſung zu, wenn in den obigen Ausdrücken für x und y der Nenner $= 0$, die Zähler aber von 0 verſchieden ſind, wenn alſo $ab' = a'b$, oder $a : a' = b : b'$, dagegen $b'c$ und

bc', und ebenso ac' und $a'c$ ungleich sind, weil dann $x = \infty$ und $y = \infty$ wird. Dieser Fall tritt immer ein, wenn die zwei gegebenen Gleichungen einander widerstreiten. Denn setzt man $a : a' = b : b' = m$, also $a = a'm$, $b = b'm$, so nehmen die gegebenen Gleichungen folgende Form an:

$$a'mx + b'my = c,$$
$$a'x + b'y = c',$$

woraus $c = c'm$ folgen würde, was jedoch einen Widerspruch enthält, weil nach der Voraussetzung $b'c \gtrless bc'$, also $c \gtrless \frac{bc'}{b'}$, oder $c \lessgtr c'm$ sein muß.

Aus zwei zusammengehörigen Gleichungen mit zwei Unbekannten können demnach die Werthe dieser Unbekannten nur dann bestimmt gefunden werden, wenn die beiden Gleichungen von einander unabhängig sind und einander nicht widerstreiten.

§. **227.** Zur Bestimmung von drei oder mehreren Unbekannten müssen eben so viele von einander unabhängige und sich nicht widerstreitende Gleichungen gegeben sein.

Um ein System von mehreren zusammengehörigen Gleichungen mit eben so vielen Unbekannten aufzulösen, wendet man dieselben Methoden an, welche in §. 225 für die Auflösung von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten angegeben wurden. Man eliminirt nämlich aus den gegebenen Gleichungen eine der Unbekannten, wodurch man eine Unbekannte und zugleich eine Gleichung weniger erhält; aus diesen neuen Gleichungen eliminirt man eine zweite Unbekannte und setzt dieses Verfahren fort, bis man zuletzt nur eine Gleichung mit einer Unbekannten erhält, aus welcher sich der Werth dieser Unbekannten ergibt. Der gefundene Werth wird in eine der zunächst vorhergehenden zwei Gleichungen substituirt und dadurch eine zweite Unbekannte bestimmt. Die beiden gefundenen Werthe substituirt man dann in eine der vorhergehenden drei Gleichungen u. s. w., und bestimmt auf diese Art nach und nach die Werthe aller Unbekannten.

Beispiel.

$$8x + 5y + 2z = 24$$
$$6x - 3y + z = 3$$
$$4x + 9y - 6z = 4$$

Nach der Comparations-Methode hat man:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{24 - 5y - 2z}{8} \\ x &= \frac{3 + 3y - z}{6} \\ x &= \frac{4 - 9y + 6z}{4} \end{aligned}\right\}, \text{ folglich } \begin{cases} \frac{24 - 5y - 2z}{8} = \frac{3 + 3y - z}{6}, \\ \frac{3 + 3y - z}{6} = \frac{4 - 9y + 6z}{4}. \end{cases}$$

Aus den letzten zwei Gleichungen ergibt sich, wenn man sie nach y auflöst,

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{60 - 2z}{27} \\ y &= \frac{6 + 20z}{33} \end{aligned}\right\}, \text{ daher } \frac{60 - 2z}{27} = \frac{6 + 20z}{33},$$

aus welcher letzteren Gleichung $z = 3$ folgt.

Substituirt man den Werth von z in einen der für y gefundenen Ausdrücke, z. B. in $y = \frac{60 - 2z}{27}$, so hat man

$$y = \frac{60 - 2.3}{27} = 2.$$

Werden endlich die gefundenen Werthe von y und z in einen der für x aufgestellten Ausdrücke, z. B. in $x = \frac{3 + 3y - z}{6}$ substituirt, so erhält man

$$x = \frac{3 + 3.2 - 3}{6} = 1.$$

Löse dieselben drei Gleichungen auch nach der Substitutions-Methode und nach der Methode der gleichen Coefficienten auf.

3. Anwendung der bestimmten Gleichungen des ersten Grades.

§. **228.** In jeder Aufgabe, mag sie nur einen einzelnen besonderen Fall betreffen oder ganz allgemein gestellt sein, werden gewisse Bedingungen angegeben, denen die zu suchenden Zahlen genügen sollen. Das Geschäft der Algebra bei der Auflösung von Aufgaben ist ein dreifaches:

1. Der Ansatz einer oder mehrerer zusammengehöriger Gleichungen, d. i. die Uebertragung der Bedingungen der Aufgabe aus der gewöhnlichen Wortsprache in die algebraische Zeichensprache;

2. die Auflösung der gebildeten Gleichungen;

3. die Discussion oder Deutung des erhaltenen Resultates, d. i. die Uebertragung desselben aus der Zeichensprache in die Wortsprache.

Für das Ansetzen der Gleichungen können keine allgemeinen Regeln gegeben werden; es ist das Werk des Scharfsinnes und kann nur durch vielfältige Uebung geläufig gemacht werden. Anfängern kann folgende Regel als einigermaßen leitende Vorschrift dienen: Man betrachte die gegebene Aufgabe vorläufig als aufgelöst und behandle die Unbekannte so, wie es die Bedingungen der Aufgabe erfordern; dadurch erhält man für eine und dieselbe Größe zwei verschieden geformte Ausdrücke, welche einander gleichgestellt die verlangte Gleichung geben.

Die Auflösung der Gleichungen geschieht nach den dafür geltenden allgemeinen Regeln.

Das erhaltene Resultat muß endlich gehörig gedeutet werden, um die Antwort in derjenigen Sprache zu geben, in welcher die Frage gestellt wurde. Die Discussion ist besonders dann von Wichtigkeit, wenn das Resultat ein allgemeines ist oder eine negative Auflösung enthält.

§. **229. Beispiele.**

1) Man suche eine Zahl, deren Hälfte und dritter Theil zusammen 25 betragen.

Bezeichnet x die gesuchte Zahl, so ist ihre Hälfte $\frac{x}{2}$ und der dritte Theil $\frac{x}{3}$, daher nach der Bedingung der Aufgabe

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 25,$$

woraus $x = 30$ folgt.

Probe. $\frac{30}{2} + \frac{30}{3} = 15 + 10 = 25.$

2) A ist a Jahre, B b Jahre alt; nach wie viel Jahren wird A doppelt so alt sein als B?

Nach x Jahren wird A $a + x$, B $b + x$ Jahre alt; man hat daher

$$a + x = 2(b + x), \text{ und}$$
$$x = a - 2b.$$

Ist hier $a < 2b$, so ist $x = -(2b - a)$, also negativ. Da eine negative Zahl Jahre keinen Sinn hat, so ist in diesem Falle die Auflösung der vorge-

legten Aufgabe unmöglich. Würde man aber in der obigen Gleichung — x statt x setzen, so erhielte man

$$a - x = 2\ (b - x),$$
$$x = 2b - a.$$

Wenn man daher fragen würde: Vor wie viel Jahren war A doppelt so alt als B? so gibt die letztere Gleichung dafür die Lösung $x = 2b - a$, d. h. vor $2b - a$ Jahren.

Die negative Auflösung einer Gleichung des ersten Grades genügt also, wenn man sie positiv nimmt, einer andern Gleichung, welche aus der ersten durch Aenderung der Vorzeichen der Unbekannten gebildet wird, und kann die Auflösung einer Aufgabe enthalten, in welcher die Fragezahl der vorgelegten Aufgabe im entgegengesetzten Sinne genommen wird.

3) Zwei Körper K' und K" sind auf einer geraden Linie in derselben Richtung mit den Geschwindigkeiten c' und c" in gleichförmiger Bewegung und gehen gleichzeitig bezüglich durch die Punkte A' und A", von denen A' um d Längeneinheiten rückwärts von A" liegt. Nach wie viel (T) Zeiteinheiten werden beide Körper zusammentreffen?

K' legt in T Zeiteinheiten c' T Längeneinheiten zurück,
K" " " T " c" T " " .

Da zur Zeit des Zusammentreffens der von K' zurückgelegte Weg um d größer ist als der von K" zurückgelegte, so ist $c'T - c''T = d$, daher

$$T = \frac{d}{c' - c''}.$$

Discussion. a) So lange $c' > c''$, ist T positiv und es gibt eine bestimmte Zeit, nach welcher die Körper zusammentreffen. Wenn $c' = c''$, also $c' - c'' = 0$, so wird $T = \infty$; die beiden Körper werden nach unendlich vielen Zeiteinheiten, d. i. niemals zusammentreffen, was natürlich ist, weil sie stets in gleicher Entfernung von einander bleiben; die Auflösung ist unmöglich. Ist für diesen Fall auch $d = 0$, d. h. gehen die Körper gleichzeitig durch denselben Punkt, so wird $T = \frac{0}{0}$; die Auflösung ist unbestimmt, d. i. die Körper haben, da sie in jedem Augenblicke zusammen sind, nicht einen, sondern unendlich viele Zeitpunkte des Zusammentreffens. Ist endlich $c' < c''$, so wird $T = -\frac{d}{c'' - c'}$, woraus folgt, daß in diesem Falle die Auflösung der Aufgabe, so wie sie gestellt wurde, unmöglich ist, was auch schon an sich einleuchtet, indem sich der hintere Körper K' langsamer als der vordere K" bewegt, beide also nicht nur nie zusammentreffen, sondern sich von einander immer mehr entfernen. Um übrigens auch dem negativen Werthe von T eine Deutung zu geben, darf man nur in der gegebenen Aufgabe die Frage im entgegengesetzten Sinne stellen, nämlich: Vor wie viel Zeiteinheiten waren die beiden Körper zusammengetroffen? Dann gibt der negative Werth von T positiv genommen eine Auflösung der so geänderten Aufgabe und drückt aus, daß die zwei Körper vor $\frac{d}{c'' - c'}$ Zeiteinheiten zusammengetroffen waren.

b) Setzt man — d für d, d. i. nimmt man an, daß der Punkt A' vorwärts von A" liege, so erhält man $T = \frac{-d}{c' - c''} = \frac{d}{c'' - c'}$; es gelten daher hier die unter a) für K', A', c' gewonnenen Resultate bezüglich von K", A", c", und umgekehrt.

c) Setzt man endlich $-c''$ für c'', d. i. nimmt man an, daß sich der Körper K'' gegen K' in entgegengesetzter Richtung bewege, so wird $T = \frac{d}{c' + c''}$. Wenn d positiv ist, bedeutet T eine bestimmte Zeit, nach welcher die Körper zusammentreffen. Für $d = 0$ wird auch $T = 0$, d. i. wenn die zwei Körper gleichzeitig von demselben Punkte abgehen, so sind sie eben zur Zeit des Abganges zusammen. Ist d negativ, dann wird $T = -\frac{d}{c' + c''}$, welcher negative Werth bedeutet, daß die beiden Körper vor $\frac{d}{c' + c''}$ Zeiteinheiten zusammengetroffen waren.

Wird aus der obigen Grundgleichung nicht T, sondern eine andere allgemeine Größe bestimmt, so erhält man dadurch die Lösung für eine andere verwandte Aufgabe. Die algebraische Auflösung einer allgemeinen Aufgabe beantwortet daher nicht blos die unmittelbar gestellte Aufgabe; sie liefert zugleich die Auflösung für eine ganze Gruppe von verwandten Aufgaben und zeigt den inneren Zusammenhang, in welchem dieselben unter einander stehen. Insbesondere dienen die negativen Werthe dazu, um die Beschränkungen aufzuheben, welche in eine Aufgabe gelegt wurden, und um dadurch diese in ihrer Allgemeinheit vollständig zu lösen.

4) Man theile die Zahl 58 in zwei Theile, so daß der eine Theil um 16 kleiner sei als der andere.

Bezeichnet man den größeren Theil durch x und den kleineren durch y, so muß nach den Bedingungen der Aufgabe

$$x + y = 58 \text{ und } x = y + 16$$

sein, aus welchen Gleichungen $x = 37$, $y = 21$ folgt.

Diese Aufgabe kann auch mittelst einer einzigen Gleichung mit einer Unbekannten aufgelöst werden.

Ist nämlich x der größere Theil, so ist $58 - x$ der kleinere, und es muß

$$x = 58 - x + 16$$

sein, woraus $x = 37$, daher $58 - x = 21$ folgt.

5) Man hat zwei gleichartige Stoffe; von dem ersten ist der Werth einer Einheit $= a$, von dem zweiten $= b$. Man soll aus beiden eine Mischung machen, die m Einheiten enthält und von welcher jede Einheit den Werth c hat. Wie viele Einheiten muß man von jedem Stoffe zu dieser Mischung nehmen?

Es wird vorausgesetzt, daß der Werth der Mischung gleich ist den Werthen der dazu verwendeten Stoffe.

Bezeichnet x die Anzahl der Einheiten, welche man von dem ersten Stoffe nehmen muß, und y die Anzahl der Einheiten, welche man von dem zweiten Stoffe nehmen muß, so ist

$$x + y = m \text{ und } ax + by = cm, \text{ daher}$$

$$x = \frac{c - b}{a - b} \cdot m, \quad y = \frac{a - c}{a - b} \cdot m.$$

Die Auflösung ist nur dann möglich, wenn in den Werthen von x und y Zähler und Nenner gleiche Vorzeichen haben, was nur eintreten kann, wenn $a > c > b$ oder $a < c < b$ ist, wenn also c zwischen a und b liegt.

Das Verhältniß der beiden Quantitäten ist $x : y = (c - b) : (a - c)$, worauf die sogenannte Alligations- oder Mischungsrechnung beruht.

II. Unbestimmte Gleichungen des ersten Grades.

§. **230**. Wenn man zur Bestimmung von mehreren unbekannten Größen weniger Gleichungen hat, als Unbekannte zu bestimmen sind, so kann man durch allmäliges Elimininen der Unbekannten immer zuletzt eine einzige Gleichung mit zwei oder mehreren Unbekannten erhalten. Wird aus dieser Gleichung die eine Unbekannte durch die übrigen ausgedrückt, so kann man für diese letzteren unendlich viele verschiedene Werthe setzen, und erhält dann auch für die erste Unbekannte unendlich viele Werthe. Eine solche Gleichung mit zwei oder mehreren Unbekannten wird daher eine unbestimmte, auch eine diophantische Gleichung genannt.

Meistens wird bei solchen Gleichungen verlangt, daß die Unbekannten, welche man bestimmen will, gewissen besondern Bedingungen unterworfen seien. So verlangt man bei den unbestimmten Gleichungen des ersten Grades, daß die Unbekannten ganze, oder ganze und zugleich positive Zahlen sein sollen.

Auflösung in ganzen Zahlen.

§. **231**. Eine Gleichung mit zwei Unbekannten läßt keine Auflösung in ganzen Zahlen zu, wenn die Coefficienten der Unbekannten einen gemeinschaftlichen Factor haben, durch welchen das bekannte Glied nicht theilbar ist.

Es sei die auf die einfachste Form gebrachte Gleichung

$$ax + by = c,$$

wo a, b, c ganze positive oder negative Zahlen vorstellen. Haben a und b das gemeinschaftliche Maß m, durch welches c nicht theilbar ist, so hat man

$$\frac{a}{m} . x + \frac{b}{m} . x = \frac{c}{m};$$

da nun $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$ ganze Zahlen sind, so können nicht zugleich x, y ganze Zahlen sein, weil sonst auch $\frac{a}{m} . x + \frac{b}{m} . y$, folglich auch $\frac{c}{m}$ eine ganze Zahl wäre, was gegen die Voraussetzung ist.

Da der hier erwiesene Satz ebenso auch für Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten gilt, so wird in dem Folgenden immer vorausgesetzt, daß die Coefficienten der Unbekannten relative Primzahlen sind.

§. **232**. 1. Eine Gleichung mit zwei Unbekannten, deren Coefficienten relative Primzahlen sind, läßt immer eine Auflösung in ganzen Zahlen zu.

Aus der Gleichung

$$ax + by = c,$$

in welcher a immer als positiv vorausgesetzt werden kann, folgt

$$x = \frac{c - by}{a}.$$

Wenn man hier für y nach und nach die a Werthe 0, 1, 2, 3, ... a — 1 substituirt, so wird es unter den zugehörigen Werthen von x gewiß einen geben, welcher eine ganze Zahl ist, aber auch nur einen einzigen.

Denn dividirt man die a Werthe von c — by, welche man durch jene Substitutionen erhält, durch a, so müssen die dabei erscheinenden Divisions-

reste sämmtlich verschieden ausfallen. Sind nämlich m und n zwei von den Zahlen 0, 1, 2...a — 1, und würden c — bm und c — bn durch a dividirt denselben Rest r geben, so daß

$$c - bm = aq + r \text{ und } c - bn = aq_1 + r$$

wäre, so erhielte man, wenn man beide Gleichungen subtrahirt

$b(m - n) = a(q_1 - q)$, oder $\frac{b(m-n)}{a} = q_1 - q$. Es müßte also $b(m-n)$ durch a theilbar sein, was nach §. 76, 4 nicht möglich ist, da b und a relative Primzahlen sind, m — n aber kleiner als a ist, und also nicht durch a theilbar sein kann. Die Reste, welche übrig bleiben, wenn man jene a Werthe von c — by durch a dividirt, müssen also alle verschieden sein; es muß daher, da sie zugleich sämmtlich kleiner als a sind, einer unter ihnen gleich Null sein. Es sei nun β der Werth von y, welcher dem Reste 0 entspricht, so wird

$$x = \frac{c - b\beta}{a} = \alpha,$$

wo α eine ganze Zahl vorstellt. Der vorgelegten Gleichung genügen also die Werthe

$$x = \alpha,\ y = \beta.$$

Zusatz. Ist einer der Coefficienten der Unbekannten = 1, z. B. $x + by = c$, so gibt unmittelbar $y = 0$, $x = c$ eine Auflösung in ganzen Zahlen.

2. Hat eine Gleichung mit zwei Unbekannten eine Auflösung in ganzen Zahlen, so läßt sie deren unendlich viele zu.

Ist $x = \alpha$, $y = \beta$ eine Auflösung in ganzen Zahlen für die Gleichung $ax + by = c$, so hat man

$$a\alpha + b\beta = c.$$

Addirt und subtrahirt man abu, wo u eine willkürliche positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, so ist

$$a\alpha + abu + b\beta - abu = c, \text{ oder}$$
$$a(\alpha + bu) + b(\beta - au) = c,$$

woraus folgt, daß der gegebenen Gleichung allgemein die Werthe

$$x = \alpha + bu,\ y = \beta - au$$

genügen.

Ebenso ergibt sich, daß für die Gleichung $ax - by = c$, wenn $x = \alpha$ und $y = \beta$ eine Auflösung derselben in ganzen Zahlen bildet, durch die Werthe

$$x = \alpha + bu,\ y = \beta + au,$$

wo die Hilfs-Unbekannte u eine beliebige ganze Zahl bedeutet, die allgemeine Lösung in ganzen Zahlen gegeben ist.

§. **233.** Aufgabe. Eine Gleichung mit zwei Unbekannten in ganzen Zahlen aufzulösen.

I. Methode. Man bestimmt aus der Gleichung den Werth derjenigen Unbekannten, deren Coefficient den kleineren Zahlenwerth hat, und substituirt darin für die andere Unbekannte nach und nach die Zahlen 0, 1, 2, 3..., bis für eine dieser Substitutionen auch der Werth der ersten Unbekannten eine ganze Zahl wird.

Diese Auflösung beruhet auf dem zu §. 232, 1 gegebenen Beweise.

Beispiel. Es sei die Gleichung $4x - 7y = 75$.

Man erhält daraus

$$x = \frac{75 + 7y}{4},$$

und ist versichert, daß, wenn man darin für y einen der vier Werthe 0, 1, 2, 3

setzt, einer der zugehörigen Werthe von x eine ganze Zahl sein wird, so daß man also höchstens vier Versuche zu machen braucht. Man findet für $y = 3$

$$x = \frac{75 + 21}{4} = \frac{96}{4} = 24.$$

Die vorgelegte Gleichung läßt also die Auflösung $x = 24$, $y = 3$ zu, und alle übrigen Auflösungen in ganzen Zahlen sind gegeben durch die Formeln

$$x = 24 + 7u, \quad y = 3 + 4u,$$

wo u eine willkürliche ganze Zahl bedeutet.

Man findet daher folgende Auflösungen:

für $u =$	$\ldots$	-2	-1	0	1	2	$\ldots$
ist $x =$	$\ldots$	10	17	24	31	38	$\ldots$
$y =$	$\ldots$	-5	-1	3	7	11	$\ldots$

Das hier angegebene Verfahren wird sehr weitläufig, wenn die Coefficenten beider Unbekannten große Zahlen sind.

II. Methode. Man löst die Gleichung in Bezug auf die mit dem kleineren Coefficenten verbundene Unbekannte auf, sondert den erhaltenen Quotienten in Ganze und einen Bruch. Den Bruch setzt man dann einer neuen Unbekannten gleich, löst die so gebildete Gleichung in Bezug auf die zweite Unbekannte auf, behandelt den gefundenen Quotienten wie den früheren und setzt dieses Verfahren fort, bis man auf eine Gleichung mit dem Coefficienten 1 kommt. Diese löst man (nach §. 232, 1. Zus.) auf und substituirt die gefundenen Werthe nach und nach in alle vorhergehenden Gleichungen.

Beweis. Es sei $ax + by = c$ die vorgelegte Gleichung, und $a < b$, so erhält man zunächst $x = \frac{c - by}{a}$. Mittelst der Division durch a bekommt man eine ganze Zahl von der Form $m - ny$, wo m auch Null sein kann, und einen Rest von der Form $c_1 - b_1 y$, wo c_1 ebenfalls Null sein kann; es ist somit

$$x = m - ny + \frac{c_1 - b_1 y}{a}.$$

Da nun x und y ganze Zahlen sein sollen, so muß auch der in Bruchform erscheinende Ausdruck $\frac{c_1 - b_1 y}{a}$ eine ganze Zahl sein; man nenne sie u_1, so daß $\frac{c_1 - b_1 y}{a} = u_1$ eine ganze Zahl und $x = m - ny + u_1$ ist.

Bringt man die Gleichung $\frac{c_1 - b_1 y}{a} = u_1$ auf die Form $au_1 + b_1 y = c_1$, und leitet aus derselben, wie früher aus der gegebenen Gleichung, eine neue Hilfsgleichung ab, so wird sich, wenn man dasselbe Verfahren weiter fortsetzt, die dabei geführte Rechnung im Ganzen so stellen:

$ax + by = c$ gibt

$$x = \frac{c - by}{a} = m - ny + \frac{c_1 - b_1 y}{a} = m - ny + u_1$$

$\frac{c_1 - b_1 y}{a} = u_1$ oder $au_1 + b_1 y = c_1$ gibt

$$y = \frac{c_1 - au_1}{b_1} = m_1 - n_1 u_1 + \frac{c_2 - b_2 u_1}{b_1} = m_1 - n_1 u_1 + u_2$$

$\frac{c_2 - b_2 u_1}{b_1} = u_2$ oder $b_1 u_2 + b_2 u_1 = c_2$ gibt

$$u_1 = \frac{c_2 - b_1 u_2}{b_2} = m_2 - n_2 u_2 + \frac{c_3 - b_3 u_2}{b_2} = m_2 - n_2 u_2 + u_3$$

u. s. w.

Aus dem Gange dieser Rechnung folgt, daß

b_1 der Rest der Division b : a,
b_2 " " " " a : b_1,
b_3 " " " " b_1 : b_2,
u. s. w.

ist; die Coefficienten der aufeinander folgenden Hilfsgleichungen sind also gleich den Divisionsresten, welche man bei der Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Maßes zwischen b und a erhält (§. 88, 2). Da nun a und b relative Primzahlen sind, so muß unter jenen Resten nothwendig einer gleich 1 werden; folglich wird man gewiß einmal auf eine Hilfsgleichung kommen, in welcher die eine Unbekannte den Coefficienten 1 hat, welche daher unmittelbar eine Auflösung in ganzen Zahlen liefert, woraus dann durch allmälige Substitution auch die gesuchte Auflösung der vorgelegten Gleichung abgeleitet werden kann.

Wäre $b < a$, so brauchte man nur aus der gegebenen Gleichung $ax + by = c$ zuerst y zu bestimmen und weiter, wie vorhin, zu verfahren.

Beispiel. Es sei die Gleichung $105x - 43y = 17$ in ganzen Zahlen aufzulösen.

$105x - 43y = 17$ gibt $y = \frac{105x-17}{43} = 2x + \frac{19x-17}{43}$

$= 2x + u_1$,

$\frac{19x-17}{43} = u_1$ " $x = \frac{43u_1+17}{19} = 2u_1 + \frac{5u_1+17}{19}$

$= 2u_1 + u_2$,

$\frac{5u_1+17}{19} = u_2$ " $u_1 = \frac{19u_2-17}{5} = 3u_2 - 3 + \frac{4u_2-2}{5}$

$= 3u_2 - 3 + u_3$,

$\frac{4u_2-2}{5} = u_3$ " $u_2 = \frac{5u_3+2}{4} = u_3 + \frac{u_3+2}{4}$

$= u_3 + u_4$,

$\frac{u_3+2}{4} = u_4$ " $u_3 = 4u_4 - 2$.

Dieser letzten Gleichung genügt $u_4 = 0$ und $u_3 = -2$; dann geben die vorhergehenden Gleichungen nach und nach

$u_2 = -2$, $u_1 = -11$, $x = -24$, $y = -59$,

und die allgemeine Auflösung in ganzen Zahlen ist gegeben durch die Formeln

$x = -24 + 43u$, $y = -59 + 105u$,

wo u eine beliebige ganze Zahl sein kann.

Dieselben allgemeinen Werthe für x und y erhält man auch, wenn man nicht erst die Auflösung für die Gleichung $u_3 = 4u_4 - 2$ sucht, sondern sogleich diese Gleichung selbst in die vorhergehenden Gleichungen substituirt.

Für u =	...	— 10	— 1	0	1	10	...
ist x =	...	— 454	— 67	— 24	19	406	...
y =	...	—1109	— 164	— 59	46	991	...

III. Methode. Um für die Gleichung $ax \pm by = \pm c$, wo a, b und c positive Zahlen sind, eine Auflösung in ganzen Zahlen zu erhalten, verwandelt man $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch und berechnet den vorletzten Näherungswerth desselben $= \frac{p}{q}$. Da $\frac{a}{b} - \frac{p}{q} = \frac{\pm 1}{bq}$, also $aq - bp = \pm 1$ (§. 127), daher auch

$acq - bcp = \pm c$ ist, so haben x und y die absoluten Werthe cq und cp, und zwar mit denjenigen Vorzeichen, welche mit Rücksicht auf die Vorzeichen der vorgelegten Gleichung der identischen Gleichung $acq - bcp = \pm c$ genügen.

Beispiel. Es soll $9x + 29y = 15$ in ganzen Zahlen aufgelöst werden.

Man verwandle $\frac{9}{29}$ in einen Kettenbruch, und bestimme den vorletzten Näherungsbruch $\frac{4}{13}$. Da $\frac{9}{29} - \frac{4}{13} = \frac{+1}{29.13}$, also $9.13 - 29.4 = +1$ und $9.13.15 - 29.4.15 = 15$ ist, so bilden $x = 13.15 = 195$, $y = -4.15 = -60$ eine Auflösung der Gleichung in ganzen Zahlen, und man erhält dann als allgemeine Lösung

$$x = 195 + 29u,\ y = -60 - 9u,$$

wo die Hilfs-Unbekannte u eine willkürliche ganze Zahl bezeichnet.

Für u =	...	−2	−1	0	1	2	...
erhält man x =	...	137	166	195	224	253	...
y =	...	−42	−51	−60	−69	−78	...

§. **234.** Aufgabe. Eine unbestimmte Gleichung mit mehr als zwei Unbekannten in ganzen Zahlen aufzulösen.

Man wendet die in §. 233 unter II. für zwei Unbekannte begründete Reductions-Methode an. Man kommt auch hier zuletzt immer auf eine Gleichung, in welcher die Unbekannte 1 zum Coefficienten hat, und erhält dann durch gehörige Substitution die allgemeinen Ausdrücke für die Unbekannten der gegebenen Gleichung, in denen jedoch nicht immer, wie vorhin, nur eine einzige Hilfs-Unbekannte erscheint.

Beispiel. Es sei die Gleichung $4x + 6y + 11z = 106$ in ganzen Zahlen aufzulösen.

Man erhält

$$x = \frac{106 - 6y - 11z}{4} = 26 - y - 2z + \frac{2 - 2y - 3z}{4}$$
$$= 26 - y - 2z + u_1.$$

Die Gleichung $\frac{2 - 2y - 3z}{4} = u_1$ gibt

$$y = \frac{2 - 3z - 4u_1}{2} = 1 - z - 2u_1 - \frac{z}{2} = 1 - z - 2u_1 - u_2;$$

$$\frac{z}{2} = u_2 \text{ gibt } z = 2u_2.$$

Man hat daher

$$z = 2u_2$$
$$y = 1 - 2u_1 - 3u_2$$
$$x = 25 + 3u_1 - u_2.$$

Setzt man für u_1 und u_2 beliebige ganze Zahlen, so erhält man für x, y, z ganze Zahlen.

Für u_1 =	1	2	3	...
und u_2 =	−1	0	1	...
wird x =	29	31	33	...
y =	2	−3	−8	...
z =	−2	0	2	...

Auflösung in ganzen positiven Zahlen.

§. 235. Aufgabe. Eine Gleichung mit zwei oder mehreren Unbekannten in ganzen positiven Zahlen aufzulösen.

Man stellt zuerst die allgemeine Lösung in ganzen Zahlen auf, und beschränkt dann die noch willkürlichen Werthe für die Hilfs-Unbekannte so, daß für dieselben in dem Werthe jeder gesuchten Unbekannten die Summe der negativen Glieder kleiner werde als die Summe der positiven.

Zusatz. Bei Gleichungen von der Form $ax + by + cz + .. = p$, wo a, b, c, .., p absolute Zahlen bedeuten, ist die Auflösung in ganzen positiven Zahlen nur dann möglich, wenn $a + b + c + .. < p$ ist.

Beispiele. 1) Es soll die Gleichung $13x + 19y = 356$ in ganzen positiven Zahlen aufgelöst werden.

$$13x + 19y = 356 \text{ gibt } x = \frac{356 - 19y}{13} = 27 - y + \frac{5 - 6y}{13}$$
$$= 27 - y + u_1,$$
$$\frac{5 - 6y}{13} = u_1 \quad " \quad y = \frac{5 - 13u_1}{6} = -2u_1 + \frac{5 - u_1}{6}$$
$$= -2u_1 + u_2,$$
$$\frac{5 - u_1}{6} = u_2 \quad " \quad u_1 = 5 - 6u_2.$$

Die Gleichung in ganzen Zahlen aufgelöst gibt also

$$y = -10 + 13u_2,\ x = 42 - 19u_2.$$

Damit nun y positiv werde, muß, wenn u_2 positiv angenommen wird, $10 < 13u_2$, also $u_2 > \frac{10}{13}$ sein; damit x positiv werde, muß $19u_2 < 42$, mithin $u_2 < \frac{42}{19}$ sein; diesen beiden Bedingungen entsprechen nur zwei Werthe $u_2 = 1$ und $u_2 = 2$. Für jeden negativen Werth von u_2 wird auch y negativ. Die Gleichung läßt also nur zwei Auflösungen in ganzen und positiven Zahlen zu:

für $u_2 = 1$ wird $x = 23,\ y = 3,$
" $u_2 = 2$ " $x = 4,\ y = 16.$

2) Man löse die Gleichung $13x + 17y = 77$ in ganzen und positiven Zahlen auf.

Die Gleichung in ganzen Zahlen aufgelöst gibt

$$x = 2 + 17u_2,\ y = 3 - 13u_2.$$

Da x für jeden positiven Werth von u_2 positiv ausfällt, so braucht man u_2 nur mit Rücksicht auf y zu beschränken; damit aber y positiv werde, muß $13u_2 < 3$, also $u_2 < \frac{3}{13}$ sein. Für negative Werthe von u_2 wird y stets, x aber nur dann positiv, wenn $17u_2 < 2$ oder $u_2 < \frac{2}{17}$ ist. u_2 kann also nur zwischen $-\frac{2}{17}$ und $\frac{3}{13}$ gewählt werden; und da man für u_2 nur ganze Zahlen setzen darf, so kann die einzige Substitution $u_2 = 0$ für x und y ganze und positive Werthe geben; man erhält dafür $x = 2$ und $y = 3$.

3) Der Bruch $\frac{230}{77}$ soll als Summe zweier Brüche dargestellt werden, deren Nenner 7 und 11 sind.

Heißen x und y die Zähler der gesuchten Brüche, so hat man

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{11} = \frac{230}{77} \text{ oder } 11x + 7y = 230.$$

Diese Gleichung in ganzen Zahlen aufgelöst gibt

$$x = 5 - 7u_3,\ y = 25 + 11u_3.$$

Damit x und y positiv seien, muß für positive Werthe von u_3, $7u_3 < 5$ oder $u_3 < \frac{5}{7}$, für negative Werthe von u_3 aber $11u_3 < 25$ oder $u_3 < \frac{25}{11}$ sein; die Werthe von u_3 müssen also zwischen $-\frac{25}{11}$ und $\frac{5}{7}$ liegen und können nur sein $-2, -1, 0$. Man hat daher

für $u_3 = -2 \ldots x = 19, y = 3;$
„ $u_3 = -1 \ldots x = 12, y = 14;$
„ $u_3 = 0 \ldots x = 5, y = 25;$

und die gesuchten Brüche sind $\frac{19}{7}$ und $\frac{3}{11}$, oder $\frac{12}{7}$ und $\frac{14}{11}$, oder $\frac{5}{7}$ und $\frac{25}{11}$.

4) Man soll die Gleichung $7x + 22y + 30z = 103$ in ganzen und positiven Zahlen auflösen.

Die Auflösung in ganzen Zahlen ist:

$$x = -1 + 2z + 22u_1, \; y = 5 - 2z - 7u_1.$$

Für positive Werthe von u_1 wird x, da z positiv sein soll, immer positiv ausfallen; damit auch y und z positiv werden, muß vermöge der Gleichung $y = 5 - 2z - 7u_1$ oder $y + 2z = 5 - 7u_1$ die Bedingung $7u_1 < 5$, also $u_1 < \frac{5}{7}$ erfüllt werden. Um die Grenze für negative Werthe von u_1 zu erhalten, eliminirt man aus den obigen Gleichungen z, wodurch man $x + y = 4 + 15u_1$ erhält; damit nun x und y positiv sein können, muß $15u_1 < 4$, also $u_1 < \frac{4}{15}$ sein. u_1 muß demnach zwischen $-\frac{4}{15}$ und $\frac{5}{7}$ liegen, und somit $= 0$ sein.

Setzt man nun in den Auflösungsgleichungen $u_1 = 0$, so wird

$$x = -1 + 2z \text{ und } y = 5 - 2z,$$

aus welchen Gleichungen sich für z die Grenzen $2z > 1$ und $2z < 5$, oder $z > \frac{1}{2}$ und $z < \frac{5}{2}$ ergeben; man kann also nur $z = 1$ und $z = 2$ setzen, und erhält sonach für die vorgelegte Gleichung zwei Auflösungen in ganzen positiven Zahlen:

$z = 1, x = 1, y = 3,$ und
$z = 2, x = 3, y = 1.$

III. Bestimmte Gleichungen des zweiten Grades.

1. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

§. **236.** Die allgemeine Form einer geordneten Gleichung des zweiten Grades ist

$$px^2 + qx = r,$$

oder, wenn man beide Theile der Gleichung durch p dividirt,

$$x^2 + \frac{q}{p}x = \frac{r}{p}.$$

Setzt man $\frac{q}{p} = a$ und $\frac{r}{p} = b$, so erhält man als diejenige allgemeine Form, von der in der Folge immer auszugehen sein wird:

$$x^2 + ax = b.$$

Reine quadratische Gleichungen.

§. **237.** Setzt man in der allgemeinen quadratischen Gleichung $x^2 + ax = b$ $a = 0$, so erhält man $x^2 = b$ als die allgemeine Form einer geordneten reinen quadratischen Gleichung.

Zieht man aus beiden Theilen die Quadratwurzel, so ergibt sich

$$x = \pm \sqrt{b}.$$

Eine reine quadratische Gleichung hat also zwei entgegengesetzte Wurzeln; ist b positiv, so sind dieselben reell; ist b negativ, so sind sie imaginär.

Beispiele.

$x^2 = 9,$	$x^2 = 15,$	$x^2 = -7,$
$x = \pm \sqrt{9} = \pm 3.$	$x = \pm \sqrt{15}.$	$x = \pm \sqrt{-7}.$

Gemischte quadratische Gleichungen.

§. 238. Die allgemeine Form einer geordneten gemischten quadratischen Gleichung ist

$$x^2 + ax = b.$$

Ergänzt man den ersten Theil zu dem vollständigen Quadrate eines Binoms, indem man zu beiden Theilen das Quadrat des halben Coefficienten von x, nämlich $\frac{a^2}{4}$, addirt, so erhält man

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + b,$$

$$\text{oder } \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + b;$$

und, wenn man aus beiden Theilen die Quadratwurzel auszieht,

$$x + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b},$$

folglich

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}.$$

In einer geordneten gemischten quadratischen Gleichung ist demnach die Unbekannte gleich dem halben Coefficienten der ersten Potenz der Unbekannten mit entgegengesetztem Vorzeichen, mehr oder weniger der Quadratwurzel aus der algebraischen Summe des Quadrates dieses halben Coefficienten und des von der Unbekannten freien Gliedes.

Man sieht, daß auch jeder gemischten quadratischen Gleichung durch zwei Werthe der Unbekannten Genüge geleistet wird. Ist b positiv, so sind, da $\frac{a^2}{4}$ stets positiv sein muß, die beiden Wurzeln reell. Ist b negativ, so sind die zwei Wurzeln auch reell, so lange $\frac{a^2}{4} > b$ ist; für $\frac{a^2}{4} = b$ ist die Größe unter dem Wurzelzeichen gleich Null und die beiden Wurzeln sind einander gleich und reell; für $\frac{a^2}{4} < b$ endlich sind beide Wurzeln imaginär.

Beispiele.

1) $x^2 - 6x = 16.$

$$x = 3 \pm \sqrt{9 + 16} = 3 \pm \sqrt{25} = 3 \pm 5;$$

daher entweder $x = 3 + 5 = 8$, oder $x = 3 - 5 = -2.$

Probe. $8^2 - 6.8 = 16.$

$(-2)^2 - 6.-2 = 16.$

2) $x^2 + 7x + 12 = 0$; geordnet $x^2 + 7x = -12.$

$$x = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 12} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49-48}{4}}$$

$$= -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{7}{2} \pm \frac{1}{2};$$

$x = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{6}{2} = -3$, oder

$x = -\frac{7}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{8}{2} = -4.$

3) $x^2 - 7x = 7.$

$$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 7} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49 + 28}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{77}}{2}.$$

4) $x^2 - 2x + 2 = 0$; geordnet $x^2 - 2x = -2.$

$$x = 1 \pm \sqrt{1 - 2} = 1 \pm \sqrt{-1}.$$

Zusatz. Sind in der allgemeinen quadratischen Gleichung $x^2 + ax = b$ die bekannten Zahlen a und b irrational, z. B. $a = \sqrt{A}$ und $b = \sqrt{B}$, so daß die Gleichung die Form

$$x^2 + \sqrt{A}.x = \sqrt{B}$$

annimmt, so bekommt man

$$x = -\frac{\sqrt{A}}{2} \pm \sqrt{\frac{A}{4} + \sqrt{B}}.$$

Z. B. die Gleichung $x^2 - 4x\sqrt{2} = 3\sqrt{3}$ gibt

$$x = 2\sqrt{2} \pm \sqrt{8 + 3\sqrt{3}}.$$

Bei allen Gleichungen dieser Art kommt man auf einen Ausdruck von der Form $\sqrt{p \pm \sqrt{q}}$. Wie ein solcher Ausdruck bestimmt, d. i. wie aus einem irrationalen Binom die Quadratwurzel ausgezogen wird, ist in §. 182 gezeigt worden.

Beziehungen zwischen den bekannten Zahlen einer quadratischen Gleichung und ihren Wurzeln.

§. 239. Die allgemeine Form einer auf Null reducirten quadratischen Gleichung ist

$$x^2 + Ax + B = 0.$$

Man nennt in diesem Falle den ersten Theil $x^2 + Ax + B$ das Gleichungstrinom.

Ist m eine Wurzel der Gleichung $x^2 + Ax + B = 0$, so heißt $x - m$ ein Wurzelfactor derselben.

1. Das Gleichungstrinom einer jeden quadratischen Gleichung ist durch ihren Wurzelfactor theilbar.

Es ist

$$(x^2 + Ax + B) : (x - m) = x + (A + m)$$

$$\begin{array}{l} x^2 - mx \\ \hline (A + m)x + B \\ (A + m)x - Am - m^2 \\ \hline \text{Rest} = m^2 + Am + B. \end{array}$$

Da m eine Wurzel der vorgelegten Gleichung ist, also für x in das Trinom $x^2 + Ax + B$ substituirt, dieses auf Null reducirt, so ist $m^2 + Am + B = 0$, und daher

$$(x^2 + Ax + B) : (x - m) = x + (A + m).$$

2. Jede quadratische Gleichung hat zwei, aber auch nur zwei Wurzeln.

Setzt man in dem obigen Ausdrucke

$$(x^2 + Ax + B) : (x - m) = x + (A + m)$$

$A + m = -n$, so wird

$$(x^2 + Ax + B) : (x - m) = x - n,$$

folglich

$$x^2 + Ax + B = (x - m)(x - n).$$

Da nun der Ausdruck $x^2 + Ax + B$ nicht nur für $x = m$, sondern auch für $x = n$ in Null übergeht, so ist nicht nur m, sondern auch n eine Wurzel der Gleichung $x^2 + Ax + B = 0$.

Hätte $x^2 + Ax + B = 0$ noch eine dritte von m und n verschiedene Wurzel p, so müßte $(p - m)(p - n) = 0$ sein, was nicht möglich ist, da in diesem Producte kein Factor Null ist, ein Product aber, dessen Factoren von Null verschieden sind, nicht gleich Null sein kann.

3. Das Gleichungstrinom einer jeden quadratischen Gleichung ist gleich dem Producte ihrer Wurzelfactoren.

4. Der Coefficient des zweiten Gliedes ist gleich der Summe, und das dritte, von der Unbekannten freie Glied dem Producte aus den entgegengesetzt genommenen Wurzeln.

Diese zwei Sätze folgen aus 2, da

$$x^2 + Ax + B = (x - m)(x - n) = x^2 - (m + n)x + (-m.-n),$$

also $A = -m - n$ und $B = -m. - n$ ist.

Zusätze. 1. Wenn man in einer auf Null reducirten quadratischen Gleichung das von x freie Glied in zwei Factoren zerlegen kann, welche den Coefficienten von x zur Summe geben, so erhält man durch die Zeichenänderung derselben sofort die beiden Wurzeln der Gleichung. So sieht man z. B. an der Gleichung $x^2 - 5x + 6 = 0$ auf den ersten Blick, daß $+6$ das Product der Zahlen -2 und -3 ist, welche -5 zur Summe geben; die beiden Zahlen entgegengesetzt genommen, nämlich $+2$ und $+3$, sind also Wurzeln der vorgelegten Gleichung.

2. Hat man eine quadratische Gleichung von der Form $(ax-b)(cx-d)=0$, so kann man statt derselben zwei Gleichungen des ersten Grades $ax - b = 0$ und $cx - d = 0$ auflösen; die Wurzeln dieser zwei Gleichungen genügen zugleich der Gleichung $(ax - b)(cx - d) = 0$. Z. B.:

Aus $(x-3)(x+5) = 0$ folgt $x - 3 = 0$, $x + 5 = 0$, daher $x = 3$, $x = -5$.

Aus $(2x-5)(3x-4) = 0$ folgt $2x-5 = 0$, $3x-4 = 0$, somit $x = \frac{5}{2}$, $x = \frac{4}{3}$.

§. 240. Aufgaben. 1. Eine quadratische Gleichung zu bilden, welche zwei gegebene Zahlen zu Wurzeln hat.

Seien z. B. 3 und -4 die gegebenen Zahlen, so nehme man diese mit entgegengesetzten Vorzeichen, nämlich -3 und 4, und bilde davon

die Summe $= -3 + 4 = +1$, und
das Product $= -3. + 4 = -12$;

dann ist

$$x^2 + x - 12 = 0$$

die Gleichung, welche 3 und -4 zu Wnrzeln hat.

2. Einen Ausdruck von der Form $x^2 + ax + b$ in Factoren zu zerlegen.

Man setze $x^2 + ax + b = 0$, welche Gleichung

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \text{ und } x_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

zu Wurzeln hat; dann ist nach §. 239, 3

$$x^2 + ax + b = \left[x + \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right]\left[x + \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right].$$

Ist z. B. $x^2 - 3x - 28$ in zwei Factoren zu zerlegen, so setze man $x^2 - 3x - 28 = 0$. Die Wurzeln dieser Gleichung sind $x_1 = 7$, $x_2 = -4$, daher die Wurzelfactoren $x - 7$ und $x + 4$; somit

$$x^2 - 3x - 28 = (x - 7)(x + 4).$$

Zusatz. Soll der Ausdruck $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ in Factoren zerlegt werden, so bringt man ihn auf die Form $\alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}\right)$, verwandelt den Ausdruck

in den Klammern mittelst der Wurzeln der Gleichung $x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$ in ein Product zweier Factoren und multiplicirt dieses noch mit α. Z. B.:

$$9x^2 - 3x - 2 = 9\,(x^2 - \tfrac{1}{3}\,x - \tfrac{2}{9}) = 9\,(x + \tfrac{1}{3})\,(x - \tfrac{2}{3}).$$

§. **241.** Nach §. 239, 3 und 4, läßt sich aus den Vorzeichen der Wurzeln einer quadratischen Gleichung auch auf die Vorzeichen ihrer Glieder und umgekehrt aus den Vorzeichen der letzteren auf jene der ersteren schließen.

a) Sind beide Wurzeln m und n positiv, so hat man

$$x^2 + Ax + B = (x - m)\,(x - n) = x^2 - (m + n)\,x + mn;$$

sind beide Wurzeln negativ, so ist

$$x^2 + Ax + B = (x + m)\,(x + n) = x^2 + (m + n)\,x + mn.$$

Sind also beide Wurzeln gleich bezeichnet, so ist das dritte Glied immer positiv, das zweite Glied aber negativ oder positiv, je nachdem die Wurzeln beide positiv oder negativ sind.

Haben die Wurzeln entgegengesetzte Vorzeichen, so ist

$$x^2 + Ax + B = (x - m)\,(x + n) = x^2 - (m - n)\,x - mn.$$

In diesem Falle ist also das dritte Glied immer negativ, das zweite dagegen negativ, wenn die positive Wurzel größer ist als die negative, im entgegengesetzten Falle positiv.

b) Ist das dritte Glied positiv, so hat die Gleichung zwei gleichbezeichnete Wurzeln; das Vorzeichen des zweiten Gliedes gibt zu erkennen, ob sie positiv oder negativ sind, die Wurzeln haben nämlich mit dem zweiten Gliede das entgegengesetzte Vorzeichen. Ist das dritte Glied negativ, so haben die Wurzeln verschiedene Vorzeichen, und zwar ist die positive die größere oder die kleinere, je nachdem das zweite Glied negativ oder positiv ist.

2. Bestimmte quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

§. **242.** Enthält eine quadratische Gleichung mehrere Unbekannte, so lassen sich diese, wie bei den Gleichungen des ersten Grades, nur dann bestimmt angeben, wenn so viele von einander unabhängige und einander nicht widersprechende Gleichungen vorhanden sind, als Unbekannte bestimmt werden sollen. Die Auflösung geschieht auch hier nach den in §. 225 angegebenen Eliminations-Methoden, durch welche man schließlich auf eine einzige Gleichung mit einer Unbekannten kommt. Die Endgleichung übersteigt jedoch im Allgemeinen den zweiten Grad, sobald von den gegebenen Gleichungen mehr als eine vom zweiten Grade ist, und kann dann nach den hier vorgetragenen Lehren nicht gelöst werden.

Beispiele.

1) $\left.\begin{aligned} x + y &= a \\ xy &= b \end{aligned}\right\}$ nach der Comparationsmethode.

Aus diesen zwei Gleichungen folgt:

$$\left.\begin{aligned} x &= a - y \\ x &= \frac{b}{y} \end{aligned}\right\} \text{daher } a - y = \frac{b}{y}, \text{ oder geordnet}$$

$$y^2 - ay = -b, \text{ woraus sich}$$

$$y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}, \text{ und somit } x = \frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \text{ ergibt.}$$

Man könnte hier mit Rücksicht auf §. 239, 4. auch so schließen:
Wenn zwischen zwei Größen x und y die beiden Gleichungen $x + y = a$ und $xy = b$ gegeben sind, so sind x und y die Wurzeln der Gleichung $x^2 - ax + b = 0$.

2) $\left.\begin{matrix} x - y = 7 \\ x^2 + 2y^2 = 118 \end{matrix}\right\}$ nach der Subſtitutionsmethode.

Wird der Ausdruck $x = y + 7$, welcher aus der erſten Gleichung folgt, in die zweite ſubſtituirt, ſo hat man

$(y + 7)^2 + 2y^2 = 118$, oder geordnet $y^2 + \frac{14y}{3} = 23$,

welcher Gleichung die Wurzeln $y = 3$ und $y = -\frac{23}{3}$ entſprechen.

Werden dieſe Werthe von y in den Ausdruck $x = y + 7$ ſubſtituirt, ſo erhält man $x = 10$ oder $x = -\frac{2}{3}$.

3) $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 = 89 \\ x^2 - y^2 = 39 \end{matrix}\right\}$ nach der Methode der gleichen Coefficienten.

Durch Addition und Subtraction dieſer Gleichungen erhält man

$\left.\begin{matrix} 2x^2 = 128 \\ 2y^2 = 50 \end{matrix}\right\}$, daher $\left.\begin{matrix} x^2 = 64 \\ y^2 = 25 \end{matrix}\right\}$ und $\begin{matrix} x = \pm 8, \\ y = \pm 5. \end{matrix}$

§. **243.** In vielen Fällen führen beſondere Kunſtgriffe einfacher zum Ziel, als die gewöhnlichen Eliminations-Methoden. Dabei ſucht man aus den gegebenen Gleichungen zunächſt die Summe, Differenz, das Product oder den Quotienten der Unbekannten, und entwickelt dann erſt aus dieſen Größen die Werthe der Unbekannten ſelbſt.

Beiſpiele.

1) $x^2 + y^2 = a.$
$xy = b.$

Multiplicirt man die zweite Gleichung mit 2, und verbindet die neue Gleichung mit der erſteren durch Addition und durch Subtraction, ſo erhält man

$(x + y)^2 = a + 2b$, daher $x + y = \pm\sqrt{a + 2b}$,
$(x - y)^2 = a - 2b$; $x - y = \pm\sqrt{a - 2b}$:

folglich $x = \pm\frac{1}{2}(\sqrt{a + 2b} + \sqrt{a - 2b})$,
$y = \pm\frac{1}{2}(\sqrt{a + 2b} - \sqrt{a - 2b})$.

2) $x^2 + xy = ay,$
$y^2 + xy = bx.$

Bringt man die Gleichungen auf die Form

$\frac{x}{y}(x + y) = a$ und $\frac{y}{x}(x + y) = b$,

ſo erhält man durch Multiplication und Diviſion

$(x + y)^2 = ab$ und $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{a}{b}$, daher

$x + y = \pm\sqrt{ab}$ und $\frac{x}{y} = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}$, woraus ſich

$x = \frac{-ab \pm a\sqrt{ab}}{a - b}$ und $y = \frac{ab \mp b\sqrt{ab}}{a - b}$ ergibt.

3) $xy = a,\ xz = b,\ yz = c.$

Multiplicirt man alle drei Gleichungen mit einander und dividirt das Product durch das Quadrat der dritten, ſo erhält man

$x^2 = \frac{ab}{c}$, daher $x = \pm\sqrt{\frac{ab}{c}}$.

Auf ähnliche Art findet man

$y = \pm\sqrt{\frac{ac}{b}}$, $z = \pm\sqrt{\frac{bc}{a}}$.

4) $xy + xz = a$, $xy + yz = b$, $xz + yz = c$.

Setzt man $xy = x'$, $xz = y'$, $yz = z'$ so hat man

$$x' + y' = a,\ x' + z' = b,\ y' + z' = c.$$

Daraus folgt

$$x' = xy = \frac{a+b-c}{2};\ y' = xz = \frac{a+c-b}{2};\ z' = yz = \frac{b+c-a}{2};$$

daher erhält man nach 3)

$$x = \pm\sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{2(b+c-a)}},$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)}{2(a+c-b)}},$$

$$z = \pm\sqrt{\frac{(a+c-b)(b+c-a)}{2(a+b-c)}}.$$

IV. Unbestimmte Gleichungen des zweiten Grades.

§. **244.** Die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung mit zwei Unbekannten ist

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Dabei sind zwei Hauptfälle zu unterscheiden: entweder kommt die eine Unbekannte, z. B. y, nur in der ersten Potenz, oder es kommen beide Unbekannte in der zweiten Potenz vor. Im ersten Falle erhält man für y einen von x abhängigen Ausdruck in rationaler, im zweiten in irrationaler Form. In beiden Fällen genügen der Gleichung unendlich viele Werthe von x und y; die Zahl der Auflösungen wird jedoch gewöhnlich durch die Bedingung beschränkt, daß für quadratische Gleichungen, in denen die eine Unbekannte nur in der ersten Potenz vorkommt, x und y ganze positive, für Gleichungen dagegen, in denen x und y in der zweiten Potenz vorkommen, dieselben mindestens rationale Zahlen sein sollen.

Die Schwierigkeiten bei der Lösung der diophantischen Gleichungen des zweiten Grades sind ungleich größer und mannigfaltiger, als bei den Gleichungen des ersten Grades. Hier sollen nur die wichtigeren hieher gehörigen Aufgaben untersucht werden.

§. **245.** Aufgabe. *Eine quadratische Gleichung mit zwei Unbekannten, worin die eine Unbekannte nur in der ersten Potenz vorkommt, in ganzen positiven Zahlen aufzulösen.*

Kommt y nur in der ersten Potenz vor, so hat die quadratische Gleichung zwischen x und y die Form

$$Ax^2 + Bxy + Cx + Dy + E = 0,$$

wo A, B, C, D und E als ganze Zahlen, und überdies die Coefficienten der Unbekannten als relative Primzahlen (§. 231) anzunehmen seien. Löst man die Gleichung nach y auf, so folgt

$$y = \frac{-Ax^2 - Cx - E}{Bx + D},$$

oder, wenn man wirklich dividirt, bis der Rest kein x mehr enthält, ein Ausdruck von der Form:

$$y = mx + n + \frac{p}{Bx + D}.$$

Sind m, n, p Brüche, so erhält man durch Multiplication mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Nenner eine Gleichung von der Form:

$$ay = bx + c + \frac{d}{Bx + D}.$$

Damit nun x und y ganze positive Zahlen seien, muß zunächst d durch $Bx + D$ theilbar sein; man zerlegt daher d in alle seine Factoren, nimmt für x nur solche ganze positive Werthe, für welche $Bx + D$ ein Factor von d ist, und wählt dann von diesen Werthen selbst nur diejenigen, für welche auch y positiv wird.

Beispiel. Es sei $2x^2 + 3xy - 4x - 2y - 20 = 0$ in ganzen positiven Zahlen aufzulösen. Man erhält

$$y = \frac{-2x^2+4x+20}{3x-2} = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{9} + \frac{\frac{196}{9}}{3x-2};$$

daher

$$9y = -6x + 8 + \frac{196}{3x-2}.$$

Nun sucht man alle Factoren von 196 (§. 86, Zusatz), und setzt

$$3x - 2 = 1, 2, 4, 7, 28, 49, 98, 196, \text{ daher}$$
$$x = 1, \tfrac{3}{4}, 2, 3, 10, 17, 1\tfrac{0}{3}0, 66.$$

In $y = \frac{-2x^2+4x+20}{3x-2}$ ist der Nenner für jeden ganzen positiven Werth von x positiv; damit auch der Zähler positiv werde, darf man für x nur solche ganze positive Werthe setzen, welche kleiner als 5 sind. Von den obigen Werthen von x sind demnach nur 1, 2, 3 brauchbar, und man findet drei Auflösungen in ganzen positiven Zahlen:

$$x = 1, 2, 3;$$
$$y = 22, 5, 2.$$

§. **246.** Aufgabe. Eine quadratische Gleichung mit zwei Unbekannten, von denen eine nur in der zweiten Potenz vorkommt, in rationalen Zahlen aufzulösen.

Die allgemeine Form einer solchen Gleichung ist

$$y^2 = ax^2 + bx + c.$$

Die Auflösung soll hier nur für einige einfachere Fälle gezeigt werden.

1. Sei $a = m^2$ ein vollständiges Quadrat. Man setze

$$y = \sqrt{m^2x^2 + bx + c} = mx + p, \text{ also}$$
$$m^2x^2 + bx + c = m^2x^2 + 2mpx + p^2,$$

woraus

$$x = \frac{p^2 - c}{b - 2mp}$$

folgt, wo p eine beliebige rationale Zahl bedeutet. Hiernach wird

$$y = mx + p = \frac{mp^2 - mc}{b - 2mp} + p = \frac{bp - mp^2 - mc}{b - 2mp}, \text{ also rational.}$$

Ist z. B. $y = \sqrt{9x^2 + 5x + 3}$, so erhält man $x = \frac{p^2 - 3}{5 - 6p}$ und $y = \frac{5p - 3p^2 - 9}{5 - 6p}$, wo man für p jede beliebige rationale Zahl, $p = \frac{5}{6}$ ausgenommen, setzen kann. Für $p = 1$ wird $x = 2$ und $y = 7$.

2. Sei $c = n^2$ ein vollständiges Quadrat. Man setze

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + n^2} = px + n, \text{ also}$$
$$ax^2 + bx + n^2 = p^2x^2 + 2npx + n^2,$$

woraus $x = \frac{2np - b}{a - p^2}$, und $y = px + n = \frac{np^2 - bp + an}{a - p^2}$
folgt, wo p irgend eine rationale Zahl bedeutet.

3. Es lasse sich der Ausdruck $ax^2 + bx + c$ in zwei rationale Factoren zerlegen, was nach §. 240, 2 erfüllt wird, wenn die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ rationale Wurzeln hat.

Sind $qx + r$ und $sx + t$ die beiden rationalen Factoren, so setze man

$$y = \sqrt{(qx + r)(sx + t)} = p(sx + t), \text{ also}$$
$$(qx + r)(sx + t) = p^2(sx + t)^2,$$

woraus $x = \frac{p^2 t - r}{q - p^2 s}$, und $y = p(sx + t) = \frac{p(qt - rs)}{q - p^2 s}$
folgt, wo p eine beliebige rationale Zahl bedeutet.

4. Wenn sich $ax^2 + bx + c$ auf die Form $(mx + n)^2 + (qx + r)(sx + t)$ bringen läßt, so setze man

$$y = \sqrt{(mx + n)^2 + (qx + r)(sx + t)} = mx + n + p(sx + t), \text{ also}$$
$$(mx + n)^2 + (qx + r)(sx + t) = (mx + n)^2 + 2p(mx + n)(sx + t) + p^2(sx + t)^2,$$

woraus

$$x = \frac{2np + p^2 t - r}{q - 2mp - p^2 s}, \quad y = \frac{p^2(ns - mt) + p(qt - rs) + nq - mr}{q - 2mp - p^2 s}$$

folgt.

Z. B. $y = \sqrt{2x^2 + 4x + 3}$.

$$2x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 4 + x^2 - 1$$
$$= (x + 2)^2 + (x + 1)(x - 1).$$

Man erhält

$$x = \frac{4p - p^2 - 1}{1 - 2p - p^2} \text{ und } y = \frac{3p^2 - 2p + 1}{1 - 2p - p^2}.$$

Für $p = -1$ wird $x = 1$ und $y = 3$.

§. 247. Aufgabe. Eine vollständige quadratische Gleichung mit zwei Unbekannten in rationalen Zahlen aufzulösen.

Wird aus der allgemeinen Gleichung

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

y entwickelt, so erhält man

$$y = -\frac{Bx + E}{2C} \pm \sqrt{\frac{(Bx + E)^2}{4C^2} - \frac{Ax^2 + Dx + F}{C}},$$

oder

$$y = \frac{1}{2C}\left\{-(Bx + E) \pm \sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 + (2BE - 4CD)x + (E^2 - 4CF)}\right\},$$

und, wenn

$$B^2 - 4AC = a,\ 2BE - 4CD = b,\ E^2 - 4CF = c$$

gesetzt wird,

$$y = \frac{1}{2C}\left\{-(Bx + E) \pm \sqrt{ax^2 + bx + c}\right\}.$$

Die Lösung der vorgelegten Gleichung reducirt sich also auf die vorhergehende Aufgabe (§. 246), alle rationalen Werthe von x zu finden, für welche der Ausdruck $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ rational wird.

V. Einige höhere und Exponentialgleichungen.

1. Reine höhere Gleichungen.

§. 248. Die allgemeine Form einer geordneten reinen höheren Gleichung (§. 222, 5) ist

$$x^m - a = o \text{ oder } x^m = a.$$

Die Auflösung einer solchen Gleichung, welche auch eine binomische genannt wird, fällt mit der Aufgabe des Radicirens zusammen und gibt

$$x = \sqrt[m]{a}.$$

Ist m eine gerade Zahl, so hat die Gleichung, wenn a positiv ist, zwei gleiche entgegengesetzte reelle Wurzeln; ist a negativ, so erhält man keine reelle Wurzel. Wenn dagegen m eine ungerade Zahl ist, so wird die Gleichung immer eine reelle Wurzel haben, welche mit a dasselbe Vorzeichen besitzt.

Beispiele.

1) $x^4 = 16$ gibt $x = \pm \sqrt[4]{16} = \pm 2.$

2) $x^4 = -16$ „ $x = \pm \sqrt[4]{-16} = \pm 2\sqrt{-1}.$

3) $x^3 = 16$ „ $x = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}.$

4) $x^3 = -16$ „ $x = \sqrt[3]{-16} = -2\sqrt[3]{2}.$

Zusätze. 1. Wir beschränkten uns hier bei der Auflösung der Gleichung $x^m = a$ auf diejenigen Wurzeln, die sich mit den uns bisher bekannt gewordenen Hilfsmitteln bestimmen lassen. Diese Wurzeln sind jedoch nicht die einzigen, welche der Gleichung genügen; diese hat vielmehr, wie in der höheren Mathematik nachgewiesen wird, m verschiedene Wurzeln, von denen aber nur eine oder zwei reell sein können. An der Gleichung $x^3 - 27 = o$ kann man sich davon sogleich überzeugen. Es folgt daraus $x = \sqrt[3]{27}$, und man erhält zunächst 3 als eine Wurzel der Gleichung. Nun ist

$$x^3 - 27 = (x - 3)\ (x^2 + 3x + 9),$$

und es wird $x^3 - 27 = o$, sowohl wenn $x - 3 = o$, als wenn $x^2 + 3x + 9 = o$ gesetzt wird. Aus $x - 3 = o$ folgt $x = 3$, aus $x^2 + 3x + 9 = o$ aber $x = -\frac{3}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{-3}$. Die Gleichung $x^3 - 27 = o$ hat also drei Wurzeln:

$$3, \quad -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{-3} \text{ und } -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{-3}.$$

2. Da jeder Werth von x, welcher der Gleichung $x^m = a$ genügt, zugleich ein Werth von $\sqrt[m]{a}$ ist, so folgt, daß die durch $\sqrt[m]{a}$ dargestellte Zahl ebenfalls m verschiedene Werthe zuläßt und demnach mehrdeutig ist. Insofern wir in dem vorhergehenden Abschnitte unter $\sqrt[m]{a}$, wenn a eine absolute Zahl bedeutet, nur jene absolute (ganze, gebrochene oder irrationale) Zahl verstanden, welche mit m potenzirt a gibt, war dort der Ausdruck $\sqrt[m]{a}$ ein eindeutiger.

2. Höhere Gleichungen, welche sich auf quadratische zurückführen lassen.

§. 249. Höhere Gleichungen, welche nur zwei Potenzen der Unbekannten von solcher Beschaffenheit enthalten, daß der eine Potenzexponent das Doppelte des andern ist, lassen sich immer auf quadratische zurückführen; man darf nur die niedrigere Potenz durch eine neue Unbekannte ausdrücken.

1. Gleichungen von der Form $x^{2m} + ax^m = b$.

Setzt man hier $x^m = y$, folglich $x^{2m} = y^2$, so hat man

$$y^2 + ay = b,$$

und daher

$$y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}.$$

Wird nun statt y wieder der Werth x^m restituirt, so ist

$$x^m = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b},$$

somit

$$x = \sqrt[m]{\left(-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)}.$$

Ist m ungerade, so gibt jeder reelle Werth von y oder x^m auch einen reellen Werth von x. Ist dagegen m gerade, so geben nur die positiven Werthe von y reelle Werthe von x, und zwar jeder derselben zwei gleiche und entgegengesetzte; die negativen Werthe von y geben imaginäre Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Z. B. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Setzt man $x^2 = y$, so hat man $y^2 - 13y + 36 = 0$, welche Gleichung

$$y = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - 36} = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2},$$

also $y = 9$ oder $y = 4$ gibt. Man hat daher

aus $x^2 = 9$ die Werthe $x = \pm \sqrt{9} = \pm 3$,

„ $x^2 = 4$ „ $x = \pm \sqrt[2m]{4} = \pm 2$.

2. Gleichungen von der Form $\sqrt[m]{x} + a\sqrt[2m]{x} = b$.

Setzt man $\sqrt[2m]{x} = y$, daher $\sqrt[m]{x} = y^2$, so hat man

$$y^2 + ay = b,$$

und daraus

$$y = \sqrt[2m]{x} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b},$$

daher, wenn man beide Theile zur 2mten Potenz erhebt,

$$x = \left(-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{2m}.$$

Z. B. $\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} = 2$.

Setzt man $\sqrt[6]{x} = y$, so hat man $y^2 - y = 2$, daher

$$y = \sqrt[6]{x} = 2 \text{ oder } y = \sqrt[6]{x} = -1,$$

und somit

$$x = 64 \text{ oder } x = 1.$$

3. Reciproke Gleichungen.

§. 250. Eine auf Null reducirte Gleichung heißt reciprok, wenn die Coefficienten ihrer vom Anfange und vom Ende gleich weit abstehenden Glieder

entweder alle sowohl dem absoluten Werthe als auch dem Vorzeichen nach gleich sind, oder alle bei gleichem absoluten Werthe entgegengesetzte Vorzeichen haben. Im letzteren Falle muß, wenn die Gleichung von geradem Grade ist, das mittlere Glied fehlen.

Die allgemeine Form der reciproken Gleichungen ist

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots \pm a_2 x^2 \pm a_1 x \pm 1 = 0.$$

Eine reciproke Gleichung hat die Eigenschaft, daß der reciproke Werth jeder ihrer Wurzeln ebenfalls Wurzel der Gleichung ist.

Hat z. B. die reciproke Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

die Wurzel w, ist also

$$w^4 + aw^3 + bw^2 + aw + 1 = 0,$$

so ist auch $\frac{1}{w}$ eine Wurzel der Gleichung. Denn durch die Substitution $x = \frac{1}{w}$ erhält der erste Theil der gegebenen Gleichung den Werth

$$\frac{1}{w^4} + a \cdot \frac{1}{w^3} + b \cdot \frac{1}{w^2} + a \cdot \frac{1}{w} + 1,$$

oder, wenn man mit w^4 multiplicirt und dividirt,

$$\frac{1}{w^4}(1 + aw + bw^2 + aw^3 + w^4),$$

welcher Werth ebenfalls $= 0$ ist.

Jede reciproke Gleichung, welche nicht den fünften Grad übersteigt, läßt sich auf quadratische Gleichungen zurückführen.

a) Das Polynom einer reciproken Gleichung des dritten Grades

$$x^3 + ax^2 \pm ax \pm 1 = 0$$

läßt sich in zwei Factoren zerlegen, von denen der eine bezüglich $x \pm 1$, und der andere das Trinom einer quadratischen Gleichung ist.

Vereinigt man z. B. in der Gleichung

$$x^3 + ax^2 + ax + 1 = 0$$

die Glieder, welche dieselben Coefficienten haben, so erhält man

$$(x^3 + 1) + ax(x + 1) = 0,$$

oder, da $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ ist,

$$(x + 1)(x^2 - x + 1 + ax) = 0.$$

Dieser Gleichung wird Genüge geleistet, wenn man entweder $x + 1 = 0$ oder $x^2 + (a - 1)x + 1 = 0$ setzt, wodurch man drei Wurzelwerthe erhält.

Auf gleiche Weise geschieht die Auflösung der Gleichung

$$x^3 + ax^2 - ax - 1 = 0.$$

b) Es sei die reciproke Gleichung des vierten Grades

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0,$$

in welcher dieselben Coefficienten gleiche Vorzeichen haben.

Dividirt man durch x^2, so erhält man

$$x^2 + ax + b + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} = 0,$$

oder nach Vereinigung der Glieder mit denselben Coefficienten

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0.$$

Setzt man nun $x + \frac{1}{x} = y$, so ist

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2, \text{ also } x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2,$$

folglich durch Substitution in der obigen Gleichung

$$y^2 - 2 + ay + b = 0,$$

und

$$y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b + 2}.$$

Wird jeder dieser Werthe in die Gleichung $x + \frac{1}{x} = y$ eingesetzt, so erhält man, da diese Gleichung in Beziehung auf x vom zweiten Grade ist, für jeden Werth von y zwei Werthe für x, also im Ganzen vier Wurzeln für die vorgelegte Gleichung.

c) Das Polynom der reciproken Gleichung des vierten Grades

$$x^4 + ax^3 - ax - 1 = 0,$$

in welchem dieselben Coefficienten entgegengesetzte Vorzeichen haben, läßt sich in zwei Factoren zerlegen, von denen der eine $x^2 - 1$, der andere das Trinom einer quadratischen Gleichung ist.

Die obige Gleichung läßt sich zunächst so darstellen:

$$(x^4 - 1) + ax(x^2 - 1) = 0.$$

Nun ist $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$; man hat also

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1 + ax) = 0.$$

Setzt man $x^2 - 1 = 0$, so erhält man $x = \pm 1$; setzt man $x^2 + 1 + ax = 0$, so ergibt sich $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$.

Die Gleichung hat also vier Wurzeln.

d) Jede reciproke Gleichung des fünften Grades

$$x^5 + ax^4 + bx^3 \pm bx^2 \pm ax \pm 1 = 0$$

kann auf zwei Gleichungen zurückgeführt werden, von denen die eine $x \pm 1 = 0$, und die andere eine reciproke Gleichung des vierten Grades ist, in welcher dieselben Coefficienten gleiche Vorzeichen haben. Die erste gibt bezüglich $x = -1$ oder $x = +1$, die zweite wird nach b) aufgelöst und gibt vier Wurzeln.

3. Exponentialgleichungen.

§. **251**. Die Exponentialgleichungen (§. 222, 2) lassen sich in besonderen Fällen mit Hilfe der Logarithmen auf algebraische zurückführen, und dann wie diese auflösen.

1. Gleichungen von der Form $a^x = b$.

Da gleichen Größen auch gleiche Logarithmen entsprechen, so folgt aus $a^x = b$ auch $\log(a^x) = \log b$, oder $x \log a = \log b$, daher ist

$$x = \frac{\log b}{\log a}.$$

Um z. B. die Gleichung $5^x = 37$ aufzulösen, hat man $x \log 5 = \log 37$, und somit

$$x = \frac{\log 37}{\log 5} = \frac{1{\cdot}56820}{0{\cdot}69897} = 2{\cdot}24359.$$

2. Gleichungen von der Form $\sqrt[x]{a} = b$.

Nimmt man hier beiderseits die Logarithmen, so erhält man $\frac{1}{x} . \log a = \log b$, daher $\log a = x \log b$, und

$$x = \frac{\log a}{\log b}.$$

So gibt die Gleichung $\sqrt[x]{2} = 10$ den Werth $x = \frac{\log 2}{\log 10} = 0{\cdot}30103$.

3. Gleichungen von der Form $a^{2x} + p a^x = q$.

Setzt man $a^x = y$, so erhält man $y^2 + py = q$, also

$$y = a^x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q},$$

und daher

$$x = \frac{\log\left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}\right)}{\log a}.$$

Z. B. $4^{2x} + 5.4^x = 36$ gibt für $4^x = y$, $y^2 + 5y = 36$, woraus $y = 4^x = 4$ und $y = 4^x = -9$ folgt; somit

$$x = \frac{\log 4}{\log 4} = 1.$$

Der andere Werth $x = \frac{\log(-9)}{\log 4}$ ist nicht reell.

4. Gleichungen von der Form $\sqrt[x]{a} + p \sqrt[2x]{a} = q$.

Für $\sqrt[2x]{a} = y$ wird $y^2 + py = q$, folglich

$$y = \sqrt[2x]{a} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q},$$

und daher

$$x = \frac{\log a}{2 \log\left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}\right)}.$$

Z. B. aus $5 \sqrt[x]{64} - 6 \sqrt[2x]{64} = 8$ erhält man für $\sqrt[2x]{64} = y$, $5y^2 - 6y = 8$, daher $y = 2$ oder $y = -\frac{4}{5}$, und

$$x = \frac{\log 64}{2 \log 2} = \frac{6 \log 2}{2 \log 2} = 3.$$

Der zweite Werth von x ist nicht reell.

Fünfter Abschnitt.

Progressionen.

§. **252.** Eine Folge von Zahlen, welche nach einem bestimmten Gesetze fortschreiten, heißt eine Reihe, auch Progression. Jede dieser Zahlen wird ein Glied der Reihe genannt. Die Zahl, welche anzeigt, die wievielte Stelle in der Reihe ein Glied einnimmt, heißt der Zeiger dieses Gliedes.

Eine Reihe heißt steigend oder fallend, je nachdem die auf einander folgenden Glieder immer größer oder kleiner werden.

Eine Reihe heißt ferner eine endliche oder unendliche, je nachdem die Anzahl der Glieder begrenzt oder unbegrenzt ist.

Eine Reihe interpoliren heißt, zwischen je zwei auf einander folgende Glieder eine bestimmte Anzahl von Gliedern einschalten, welche mit den Gliedern der gegebenen Reihe wieder eine Reihe derselben Art bilden.

I. Arithmetische Progressionen.

§. **253.** Eine arithmetische Progression ist eine Reihe, bei welcher die Differenz aus jedem folgenden und dem ihm vorhergehenden Gliede dieselbe Zahl ist. Diese constante Differenz heißt die Differenz der Progression. So sind

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22,...

und 50, 47, 44, 41, 38, 35, 32, 29,...

arithmetische Progressionen; in der ersten ist 3, in der zweiten — 3 die Differenz.

1. In einer arithmetischen Progression ist jedes Glied gleich der Summe aus dem ersten Gliede und dem Producte der Differenz mit dem um 1 verminderten Zeiger des Gliedes.

Beweis. Bezeichnet allgemein a_n das nte Glied und d die Differenz der Progression, so ist

$$a_1 = a_1,$$
$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_1 + 3d, \text{ u. s. w.}$$

Der Satz ist also für die Anfangsglieder richtig. Gilt aber derselbe für irgend ein Glied a_n, so daß $a_n = a_1 + (n - 1)\,d$ ist, so muß er auch für das nächstfolgende Glied a_{n+1} giltig sein; denn

$$a_{n+1} = a_n + d = a_1 + (n - 1)\,d + d = a_1 + nd.$$

Hieraus folgt, daß der obige Satz allgemein giltig ist.

Die Formel $a_n = a_1 + (n - 1)\,d$ heißt das allgemeine Glied der Progression, weil daraus, wenn man für n nach und nach 1, 2, 3, 4,... setzt, alle Glieder der Progression abgeleitet werden können.

2. In einer arithmetischen Progression ist die Summe irgend einer Anzahl von Anfangsgliedern gleich dem Producte aus der halben Anzahl dieser Glieder und der Summe des ersten und letzten Gliedes.

Beweis. Ist a_n das nte Glied der Reihe, so ist $a_n - d$ das nächstvorangehende, $a_n - 2d$ das diesem vorangehende Glied, u. s. f.

Drückt man nun die Summe der ersten n Glieder durch s_n aus, so ist

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n.$$

Schreibt man die Glieder in umgekehrter Ordnung, so ist auch

$$s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1.$$

Durch Addition dieser beiden Ausdrücke erhält man, da je zwei unter einander stehende Glieder $a_1 + a_n$ zur Summe geben,

$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n).$$

Hier kommt $a_1 + a_n$ so oft als Summand vor, als Glieder angenommen werden, also n mal; daher

$$2s_n = n(a_1 + a_n)$$

und

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Diese Formel heißt das Summenglied der arithmetischen Progression.

Beispiel. Man suche das allgemeine und das Summenglied der Reihe der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11 ...

Da $a_1 = 1$, $d = 2$ ist, so hat man

$$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 1,$$

$$s_n = \frac{n}{2}(1 + 2n - 1) = n^2.$$

So ist z. B. $a_{15} = 2.15 - 1 = 29$, und $s_{15} = 15^2 = 225$.

§. **254.** Die beiden von einander unabhängigen Gleichungen

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \text{ und } s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

enthalten fünf Größen a_1, d, n, a_n, s_n; es kann also aus je dreien derselben jede der beiden anderen berechnet werden. Dadurch erhält man 20 verschiedene Aufgaben.

Sind z. B. d, n und a_n gegeben und a_1 oder s_n zu suchen, so findet man aus der ersten Gleichung

$$a_1 = a_n - (n - 1)d,$$

und dann aus der zweiten

$$s_n = \frac{n}{2}\{a_n - (n - 1)d + a_n\} = \frac{n}{2}\{2a_n - (n - 1)d\}.$$

§. **255.** Eine arithmetische Progression zu interpoliren.

Sind zwischen die Glieder a_k und a_{k+1} einer arithmetischen Progression, deren Differenz d ist, r Glieder einzuschalten, die mit a_k und a_{k+1} wieder eine arithmetische Progression bilden, so ist a_k das erste und a_{k+1} das $(r + 2)$te Glied der neuen Progression, daher, wenn die Differenz derselben mit d_1 bezeichnet wird, $a_{k+1} = a_k + (r + 1)d_1$; es ist aber auch $a_{k+1} = a_k + d$, folglich $(r + 1)d_1 = d$, und

$$d_1 = \frac{d}{r + 1}.$$

Die interpolirte Reihe ist also:

$$a_k,\ a_k + \frac{d}{r+1},\ a_k + \frac{2d}{r+1},\ \ldots\ a_k + \frac{rd}{r+1},\ a_{k+1}.$$

Z. B. Man schalte in der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, ... zwischen die Glieder 2 und 3 nach dem Gesetze der arithmetischen Progressionen 7 Glieder ein.

Hier ist $d = 1$, $r = 7$, daher $d_1 = \frac{1}{8}$; die interpolirte Progression ist also

$$2,\ 2\tfrac{1}{8},\ 2\tfrac{2}{8},\ 2\tfrac{3}{8},\ 2\tfrac{4}{8},\ 2\tfrac{5}{8},\ 2\tfrac{6}{8},\ 2\tfrac{7}{8},\ 3.$$

II. Geometrische Progressionen.

§. **256.** Eine geometrische Progression ist eine Reihe, bei welcher der Quotient aus jedem folgenden und dem ihm vorhergehenden Gliede dieselbe Zahl ist. Dieser constante Quotient heißt der Quotient der Progression. So sind

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ 729,\ \ldots$$

$$1,\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{9},\ \tfrac{1}{27},\ \tfrac{1}{81},\ \tfrac{1}{243},\ \tfrac{1}{729},\ \ldots$$

geometrische Progressionen; in der ersten ist 3, in der zweiten $\frac{1}{3}$ der Quotient.

1. In einer geometrischen Progression ist jedes Glied gleich dem Producte aus dem ersten Gliede und der sovielten Potenz des Quotienten, als der um 1 verminderte Zeiger des Gliedes anzeigt.

Beweis. Bezeichnet a_n das nte Glied und q den Quotienten der Progression, so ist

$$a_1 = a_1,$$
$$a_2 = a_1\, q,$$
$$a_3 = a_1\, q^2,$$
$$a_4 = a_1\, q^3, \text{ u. s. w.}$$

Der Satz ist also für die Anfangsglieder richtig. Gilt er aber für irgend ein Glied a_n, so daß $a_n = a_1\, q^{n-1}$ ist, so muß er auch für das nächstfolgende Glied a_{n+1} gelten; denn

$$a_{n+1} = a_n . q = a_1\, q^{n-1} . q = a_1\, q^n.$$

Hieraus folgt, daß der obige Satz allgemein giltig und daß daher

$$a_n = a_1\, q^{n-1}$$

das allgemeine Glied einer geometrischen Progression ist.

2. In einer geometrischen Progression ist die Summe von n Anfangsgliedern gleich dem Producte aus dem ersten Gliede und der um 1 verminderten nten Potenz des Quotienten, dividirt durch den um 1 verminderten Quotienten.

Beweis. Bezeichnet s_n die Summe von n Anfangsgliedern, so hat man

$$s_n = a_1 + a_1\, q + a_1\, q^2 + \ldots + a_1\, q^{n-2} + a_1\, q^{n-1}.$$

Multiplicirt man beide Theile dieser Gleichung mit q, so erhält man

$$q\, s_n = a_1\, q + a_1\, q^2 + a_1\, q^3 + \ldots + a_1\, q^{n-1} + a_1\, q^n.$$

Wird nun von dieser Gleichung die frühere subtrahirt, so folgt

$$q\, s_n - s_n = a_1\, q^n - a_1,$$

daher

$$s_n = \frac{a_1\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

als das Summenglied für die geometrische Progression.

.... Beispiel. Man bestimme das allgemeine und das Summenglied der Progression

$$1, 3, 9, 27, 81, 243, \ldots$$

Hier ist $a_1 = 1$ und $q = 3$, daher

$$a_n = 1.3^{n-1} = 3^{n-1},\ s_n = \frac{3^n - 1}{2}.$$

So ist z. B. $a_{10} = 3^9 = 19683$ und $s_{10} = \frac{3^{10} - 1}{2} = 29524$.

Zusatz. Ist die geometrische Progression eine fallende, also $q < 1$, so nähert sich, wenn n in's Unendliche zunimmt, q^n ohne Ende der Null, die Summe selbst also der Grenze

$$s = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Die Summe der Glieder einer fallenden geometrischen Progression kann zwar, so viele Glieder man auch nehmen mag, diesen Werth nie erreichen, wohl aber ihm so nahe kommen, daß die Differenz kleiner wird, als jede noch so kleine angebbare Zahl. Man nennt den Ausdruck $s = \frac{a_1}{1 - q}$ die Summe der unendlich fallenden Progression.

Z. B. für die Reihe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$, in welcher $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$ ist, hat man

$$s = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2;$$

d. h. je mehrere Glieder der Reihe man addirt, desto mehr nähert sich die Summe der Zahl 2, ohne jedoch je dieselbe zu erreichen.

Jeder periodische Decimalbruch kann als eine fallende geometrische Progression dargestellt und als solche summirt, d. i. in einen gemeinen Bruch verwandelt werden. Z. B.:

$$0{\cdot}\dot{2}\dot{5} = \frac{25}{10^2} + \frac{25}{10^4} + \frac{25}{10^6} + \frac{25}{10^8} + \ldots = \frac{\frac{25}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{25}{99}.$$

§. 257. Mittelst der beiden Gleichungen

$$a_n = a_1\, q^{n-1} \text{ und } s_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1},$$

welche fünf Größen a_1, q, n, a_n, s_n enthalten, können aus je dreien dieser Größen die beiden anderen bestimmt werden.

Sind z. B. q, n, s_n gegeben und a_1 oder a_n zu suchen, so erhält man aus der zweiten Gleichung

$$a_1 = \frac{(q - 1)\, s_n}{q^n - 1},$$

und dann aus der ersten Gleichung

$$a_n = \frac{q^{n-1} (q - 1)\, s_n}{q^n - 1}.$$

§. 258. Aufgabe. Eine geometrische Progression zu interpoliren.

Schaltet man zwischen die Glieder a_k und a_{k+1} einer geometrischen Progression, deren Quotient q ist, r Glieder ein, die mit a_k und a_{k+1} wieder eine geometrische Progression bilden, so ist in dieser a_k das erste und a_{k+1} das $(r + 2)$te Glied; man hat daher, wenn der Quotient der neuen Progression mit q_1 bezeichnet wird, $a_{k+1} = a_k . q_1^{r+1}$; es ist aber auch $a_{k+1} = a_k . q$, daher $q_1^{r+1} = q$, und

$$q_1 = \sqrt[r+1]{q}.$$

Die interpolirte Progression ist also:

$$a_k,\ a_k.\sqrt[r+1]{q},\ a_k.\sqrt[r+1]{q^2},\ \ldots\ a_k.\sqrt[r+1]{q^r},\ a_{k+1}.$$

Um z. B. in der Reihe 1, 16, 256, 4096, ... zwischen je zwei Glieder 3 neue Glieder zu interpoliren, setze man, da $q = 16$ und $r = 3$ ist,

$q_1 = \sqrt[4]{16} = 2$, wodurch man erhält:

1, 2, 4, 8, **16**, 32, 64, 128, **256**, 512, 1024, 2048, **4096**, ...

III. Zinseszins- und Rentenrechnung.

§. **259.** Wenn die am Ende einer Zeiteinheit fälligen Zinsen eines Capitals nicht behoben, sondern zum Capital hinzugefügt und mit diesem wieder verzinst werden, so sagt man: das Capital ist auf Zinseszinsen angelegt.

Bei den Zinseszinsrechnungen kommt, wie bei der einfachen Zinsrechnung (§. 146), das Capital, die Zeit, das Procent und der Zins in Betracht. Als Zeiteinheit ist, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, ein Jahr zu verstehen. Ist ein Capital zu p % angelegt, so wachsen 100 Einheiten des Capitals (Gulden, Mark) in einem Jahre sammt den Zinsen auf $100 + p$ an; somit hat 1 Capitalseinheit nach 1 Jahre mit Hinzufügung der Zinsen den Werth $\frac{100+p}{100}$ $= 1 + \frac{p}{100}$. Den Werth $1 + \frac{p}{100}$, zu welchem die Einheit des Capitals mit Zinsen in 1 Jahre anwächst, nennt man gewöhnlich den Zinsfuß; wir wollen denselben in den nachfolgenden Rechnungen der Kürze halber mit e bezeichnen.

§. **260.** Erste Fundamental-Aufgabe. Ein Capital a ist zu dem Zinsfuß $e = 1 + \frac{p}{100}$ auf Zinseszinsen angelegt; zu welchem Werthe wächst es nach n Jahren an?

Da die Capitalseinheit mit den Zinsen nach 1 Jahre den Werth e erhält, so hat das Capital a nach 1 Jahre den Werth

$$a_1 = a.e,$$

d. h. man findet den Werth eines Capitals nach 1 Jahre, indem man den Anfangswerth mit dem Zinsfuße multiplicirt.

Wird das neue Capital a_1 wieder ein Jahr verzinst, so ist sein Werth am Ende desselben $a_2 = a_1 . e = a.e^2$.

Nach 3, 4 ... Jahren wird das Capital angewachsen sein auf

$$a_3 = a_2.e = a.e^3,\ a_4 = a_3.e = a.e^4,\ \text{u. s. w.}$$

Hiernach ist der Werth des Capitals am Ende des nten Jahres

$$a_n = a.e^n \ \ldots\ \text{I)}$$

Löst man diese Gleichung nach a auf, so ergibt sich als der gegenwärtige oder Barwerth eines nach n Jahren zahlbaren Capitals a_n zum Zinsfuße e

$$a = \frac{a_n}{e^n}.$$

Eben so erhält man aus I) für e und n die Werthe

$$e = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a}},\qquad n = \frac{\log a_n - \log a}{\log e}.$$

Zusätze. 1. Hier wurde n als eine ganze Zahl von Jahren vorausgesetzt. Ist nun n eine gemischte Zahl, etwa $m + \frac{r}{s}$, so sind nur für die vollen m Jahre die Zinseszinsen von a, dagegen für den Bruchtheil des noch folgenden Jahres die einfachen Zinsen von a_m zu berechnen. Man erhält also in diesem Falle

$$a_m = a\,e^m,$$

und mit Rücksicht auf §. 146, da $\frac{p}{100} = e - 1$ ist,

$$a_m + \frac{r}{s} = a_m + \frac{a_m\,(e-1)\,r}{s} = a_m\left\{1 + (e-1)\,.\,\frac{r}{s}\right\}$$
$$= a\,e^m\left\{1 + (e-1)\,.\,\frac{r}{s}\right\}.$$

2. Wenn die Zinsen nicht jährlich, sondern nach dem qten Theile eines Jahres (halbjährig, monatlich) capitalisirt werden, so ist in der Gleichung I) und in den daraus abgeleiteten Formeln $e = 1 + \frac{p}{100\,q}$ und für n die Zahl nq zu setzen.

3. Die obigen Gleichungen können auch auf andere Größen, wenn dieselben in einem constanten Verhältnisse wachsen, z. B. auf die Zunahme der Bevölkerung eines Landes, des Holzstandes eines Waldes u. dgl. angewendet werden.

Beispiele.

1) Wie hoch wächst ein Capital von 2518 fl. in 12 Jahren zu 5% Zinseszinsen an?

$$a_{12} = 2518\,.\,1\cdot05^{12}$$
$$\log\ 1\cdot05 = 0\cdot021\ 189$$
$$12\log 1\cdot05 = 0\cdot25\ 427$$
$$\log 2518 = 3\cdot40\ 106$$
$$\log a_{12} = 3\cdot65\ 533 = \log 4522,$$
$$\text{also } a_{12} = 4522 \text{ fl.}$$

2) Welchen Barwerth hat ein nach 11 Jahren zahlbares Capital von 1000 fl. zum Zinsfuße 1·04?

$$a = \frac{1000}{1\cdot04^{11}}.$$
$$\log 1000 = 3\cdot00\ 000$$
$$\log 1\cdot04 = 0\cdot017\ 033$$
$$11\log 1\cdot04 = 0\cdot18\ 736$$
$$\log a = 2\cdot81\ 264 = \log 649\cdot59,$$
$$\text{also Barwerth } a = 649\cdot59 \text{ fl.}$$

3) Ein Capital von 2000 fl. ist bei 4% Zinseszinsen auf 4469 fl. 84 kr. angewachsen; wie lange war dasselbe angelegt?

$$4469\cdot84 = 2000\,.\,1\cdot04^n, \text{ also}$$
$$n = \frac{\log 4469\cdot84 - \log 2000}{\log\ 1\cdot04} = \frac{0\cdot349\ 27}{0\cdot017\ 03} = 20\cdot505\ ..$$

Man setze $n = 20$ und berechne

$$a_{20} = 2000\,.\,1\cdot04^{20} = 4382\cdot2.$$

2000 fl. sind also in 20 Jahren mit Zinseszinsen auf 4382·2 fl. angewachsen. Es ist die Frage: wie viel (t) Zeit muß noch das Capital 4382·2 fl. anliegen,

um bei 4% Zins zu dem Werthe 4469·84 fl. anzuwachsen, d. i. um 4469·84 — 4382·2 = 87·64 fl. Zins zu bringen. Nach der einfachen Zinsrechnung (§. 146) hat man

$$t = \frac{100.87\cdot64}{4382\cdot2.4} = \frac{1}{2} \text{ Jahr.}$$

Es ist daher $n = 20\frac{1}{2}$ Jahre.

§. **261.** Zweite Fundamental-Aufgabe. Durch n Jahre wird am Anfange oder am Ende eines jeden Jahres ein Betrag r gezahlt; zu welchem Werthe wachsen alle diese Beträge zur Zeit der letzten Zahlung an, wenn man p% Zinseszinsen rechnet?

Die Zeit von der ersten bis zu der letzten Zahlung beträgt n — 1 Jahre; setzt man daher $1 + \frac{p}{100} = e$, so ist (§. 260) zur Zeit der letzten Zahlung

der Werth der 1. Zahlung $= re^{n-1}$,
" " " 2. " $= re^{n-2}$,
. . . . . .
" " "(n-2)ten " $= re^2$,
" " "(n-1)ten " $= re$,
" " "nten " $= r$;

daher die Summe aller dieser Werthe

$$s_n = r + re + re^2 + \ldots + re^{n-2} + re^{n-1},$$

oder mit Rücksicht auf §. 256, 2

$$s_n = \frac{r\,(e^n - 1)}{e - 1} \quad \ldots \text{II)}$$

Aus dieser Gleichung können auch r und n bestimmt werden, wenn die übrigen Größen gegeben sind. Die Bestimmung von e übersteigt, da man dabei auf eine Gleichung des (n + 1)ten Grades kommt, die Grenzen dieser Anleitung.

Beispiele.

1) Jemand legt durch 10 Jahre zu Anfang eines jeden Jahres 230 Mark zu 5% Zinseszins an; welchen Werth haben diese Anlagen am Anfange des 10ten Jahres?

$$s_{10} = \frac{230\,(1\cdot05^{10} - 1)}{0\cdot05} = \frac{230.0\cdot62889}{0\cdot05} = 2892\cdot89 \text{ Mark.}$$

2) Jemand legt durch 15 Jahre am Ende eines jeden halben Jahres eine sich gleichbleibende Summe in eine Sparcasse, welche bei dem jährlichen Zinse à 5% halbjährig capitalisirt, und erwirbt sich dadurch zur Zeit der letzten Zahlung ein Guthaben von 3292·71 fl.; wie groß ist die jedesmalige Einlage?

Hier muß man 30 Zeitperioden rechnen und als Zinsfuß 1·025 annehmen; man hat daher $3292\cdot71 = \frac{r\,(1\cdot025^{30} - 1)}{0\cdot025}$; mithin

$$r = \frac{3292\cdot71.0\cdot025}{1\cdot025^{30} - 1} = 75 \text{ fl.}$$

§. **262.** Auf die voranstehenden zwei Hauptaufgaben lassen sich alle mehr oder weniger zusammengesetzten Aufgaben über die Zinseszinsrechnung zurückführen.

Aufgaben.

1) Ein zum Zinsfuße e angelegtes Capital a wird durch n Jahre am Ende eines jeden Jahres um den Betrag r vermehrt oder vermindert; welchen Werth hat es am Ende dieser Zeit?

Am Ende des nten Jahres ist der Werth des Capitals a (nach §. 260) ae^n, und der Werth aller n Beträge r, um welche das Capital am Ende eines jeden

Jahres vermehrt oder vermindert wird, (nach §. 261) $\frac{r(e^n-1)}{e-1}$; der Endwerth des so vermehrten oder verminderten Capitals ist also

$$A = a e^n \pm \frac{r(e^n-1)}{e-1}.$$

Ist im Falle der Verminderung $r > a(e-1)$, oder $r > ae - a$, d. i. größer als der jährliche Zins des Capitals a, so wird der Endwerth dieses Capitals von Jahr zu Jahr kleiner und endlich gleich Null werden.

2) Ein unverzinsliches Capital a ist nach m Jahren, ein unverzinsliches Capital b nach n Jahren, wo $n > m$ ist, fällig; in welchem Verhältnisse stehen a) ihre Barwerthe, b) ihre Werthe nach n Jahren bei dem Zinsfuße e?

Der Barwerth des Capitals a ist $\frac{a}{e^m}$, der Barwerth des Capitals b ist $\frac{b}{e^n}$, daher das Verhältniß der Barwerthe

$$\frac{a}{e^m} : \frac{b}{e^n} = a e^{n-m} : b.$$

Nach n Jahren ist der Werth des ersten Capitals $a e^{n-m}$, des zweiten b, daher das Verhältniß dieser Werthe, wie früher,

$$a e^{n-m} : b.$$

Zusatz. Sollen zu verschiedenen Zeiten fällige Capitalsbeträge mit einander verglichen werden, so muß man sie immer auf denselben Zeitpunkt reduciren. Da aber das Verhältniß ihrer Werthe für jeden Zeitpunkt dasselbe ist, so lange ihr Zinsfuß ungeändert bleibt, so ist es an sich ganz gleichgiltig, welcher gemeinschaftliche Zeitpunkt für die Vergleichung gewählt wird. Gewöhnlich werden entweder die Barwerthe oder die Werthe nach Ablauf des gegebenen Zeitraumes berechnet und mit einander in Vergleichung gesetzt.

3) Ein Anlehen A soll durch eine am Ende eines jeden Jahres zu zahlende Rate r in n Jahren getilgt (amortisirt) werden; wie viel muß die Jahresrate r bei dem Zinsfuße e betragen?

Der Barwerth aller Jahresraten muß dem Schuldcapital gleich sein.

n Jahresraten, jede $= r$, haben zur Zeit der letzten Zahlung, d. i. am Ende des nten Jahres den Werth $\frac{r(e^n-1)}{e-1}$; ihr Barwerth ist also $b = \frac{r(e^n-1)}{e^n(e-1)}$.

Da $b = a$ sein muß, so hat man

$$\frac{r(e^n-1)}{e^n(e-1)} = a, \text{ daher } r = \frac{a e^n (e-1)}{e^n - 1}.$$

4) Nach wie viel Jahren sind von einem auf Zinseszinsen zu 5% ausgeliehenen Capital von 1060 fl. noch 167·22 fl. übrig, wenn am Ende eines jeden Jahres 80 fl. zurückgezahlt werden?

Nach n Jahren. Das Schuldcapital 1060 fl. hat nach n Jahren den Werth $1060.1\cdot05^n$ fl.; die n jährlichen Rückzahlungen à 80 fl. haben nach n Jahren den Werth $\frac{80(1\cdot05^n-1)}{0\cdot05}$ fl.; es muß daher

$$1060.1\cdot05^n = \frac{80(1\cdot05^n-1)}{0\cdot05} + 167\cdot22$$

sein. Daraus erhält man

$$n = \frac{\log 71\cdot639 - \log 27}{\log 1\cdot05} = 20 \text{ Jahre}$$

§. 263. Renten und Lebensversicherungen.

Die Berechnung von Zinseszinsen kommt insbesondere bei der Rentenrechnung und bei Lebensversicherungen vor.

Unter einer Rente versteht man einen in festgesetzten gleichen Zeitterminen (meistens am Ende jedes Jahres) zahlbaren Geldbetrag, dessen Bezugsrecht durch eine vorher gezahlte Geldsumme, die Prämie, erworben wird. Die Prämie wird entweder auf einmal oder jährlich entrichtet. Die Rente ist gewöhnlich constant; sie kann aber auch nach einem bestimmten Gesetze veränderlich sein. Eine Rente heißt Zeitrente, wenn die Zahl der Termine, in denen sie gezahlt wird, genau bestimmt ist, Leibrente dagegen, wenn sie bis zum Tode des Empfängers fortdauert. Bei der Leibrente ist daher die Dauer des Bezuges nicht angegeben; sie kann nur mit Wahrscheinlichkeit aus den Naturgesetzen der menschlichen Lebensdauer, d. i. aus den sogenannten Sterblichkeitstafeln (§. 288) entnommen werden.

Ein Vertrag zwischen zwei Parteien, durch welchen sich die eine verpflichtet, der anderen oder deren Rechtsnachfolgern gegen eine Prämie in einem bestimmten, von dem Leben oder Tode einer oder mehrerer Personen abhängenden Falle einen gewissen Capitalsbetrag oder eine bestimmte Rente zu zahlen, heißt eine Lebensversicherung.

Aufgaben.

1) Welchen Barwerth hat zum Zinsfuße e eine Rente, welche durch n Jahre am Ende eines jeden Jahres in dem gleichen Betrage r fällig ist?

n Jahresrenten, jede $= r$, haben zur Zeit des letzten Bezuges, d. i. am Ende des nten Jahres den Werth $\frac{r(e^n - 1)}{e - 1}$; ihr Barwerth ist also

$$b = \frac{r(e^n - 1)}{e^n(e - 1)}.$$

2) Welche Prämie muß durch n Jahre am Anfange eines jeden Jahres zum Zinsfuße e an eine Versicherungsanstalt geleistet werden, damit diese sodann das Capital s auszahle?

Die Jahresprämien müssen bis zum Anfange des nten Jahres zu dem Werthe s anwachsen.

n Prämien, jede $= r$, sind zur Zeit der letzten Zahlung, d. i. am Anfange des nten Jahres $\frac{r(e^n - 1)}{e - 1}$ werth; man hat daher

$$\frac{r(e^n - 1)}{e - 1} = s, \text{ und somit } r = \frac{s(e - 1)}{e^n - 1}.$$

3) Jemand will an eine Versicherungsbank durch m Jahre am Anfange eines jeden Jahres einen bestimmten Betrag a einzahlen, um sich durch die nachfolgenden n Jahre den Bezug einer am Ende eines jeden Jahres zahlbaren Rente r zu sichern; wie viel wird die jährliche Einzahlung bei dem Zinsfuße e betragen müssen?

Der Barwerth aller Prämien muß dem Barwerthe aller Rentenbezüge gleich sein.

m jährliche Prämien, jede $= a$, haben zur Zeit der letzten Zahlung, d. i. am Anfange des mten Jahres, den Werth $\frac{a(e^m - 1)}{e - 1}$; ihr Barwerth ist also

$$A = \frac{a(e^m - 1)}{e^{m-1}(e - 1)}.$$

n Jahresrenten, die am Ende des (m + 1)ten Jahres beginnen, und deren jede = r ist, haben zur Zeit des letzten Bezuges, d. i. am Ende des (m + n)ten Jahres, den Werth $\frac{r\,(e^n - 1)}{e - 1}$; ihr Barwerth ist also $R = \frac{r\,(e^n - 1)}{e^{m+n}\,(e - 1)}$.

Da nun A = R sein muß, so hat man

$$\frac{a\,(e^m - 1)}{e^{m-1}\,(e - 1)} = \frac{r\,(e^n - 1)}{e^{m+n}\,(e - 1)}, \text{ daher } a = \frac{r\,(e^n - 1)}{e^{n+1}\,(e^m - 1)}.$$

Aus der letzten Gleichung kann auch r, m oder n bestimmt werden, wenn die übrigen Größen gegeben sind.

4) Eine Jahresrente r steige jährlich und zwar n Jahre hindurch in einer arithmetischen Progression mit der Differenz d; wie groß ist deren Barwerth zum Zinsfuße e?

Die am Ende der einzelnen Jahre zu beziehenden Renten sind

$$r,\ r + d,\ r + 2d,\ \ldots\ r + (n - 2)\,d,\ r + (n - 1)\,d.$$

Die Summe ihrer Werthe am Ende des nten Jahres ist

$$\frac{r\,(e^n - 1)}{e - 1} + \frac{d}{e - 1}\left[(e^n - 1) - n\,(e - 1)\right],$$

daher ihr Barwerth

$$b = \frac{r\,(e^n - 1)}{e^n\,(e - 1)} + \frac{d}{e^n\,(e - 1)}\left[(e^n - 1) - n\,(e - 1)\right].$$

5) Welchen Barwerth hat eine durch n Jahre nachschußweise zahlbare Rente r, welche jährlich in einer geometrischen Progression mit dem Quotienten q steigt, bei dem Zinsfuße e?

Die einzelnen Jahresrenten sind

$$r,\ rq,\ rq^2\ \ldots\ rq^{n-2},\ rq^{n-1};$$

die Summe ihrer Werthe am Ende des nten Jahres ist

$$\frac{r\,(q^n - e^n)}{q - e},$$

daher ihr Barwerth

$$b = \frac{r\,(q^n - e^n)}{e^n\,(q - e)}.$$

IV. Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen.

§. **264.** Wenn sich in einer unendlichen Reihe die Summe der ersten n Glieder um so mehr einer bestimmten endlichen Grenze nähert, je größer n wird, so heißt die Reihe convergent, und diese Grenze die Summe der Reihe. Wenn dagegen die Summe der ersten n Glieder mit dem wachsenden n sich nicht einer endlichen Grenze nähert, so heißt die Reihe divergent, und ihre Summe ist nicht bestimmbar. Eine unendliche divergente Reihe hat für die Mathematik keinen Werth.

Beispiel. Für die geometrische Progression

$$a + aq + aq^2 + aq^3 \ldots$$

ist nach §. 256, 2

$$s_n = \frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Ist nun $q > 1$, so wird mit dem wachsenden n auch q^n immer größer, und die Summe nähert sich keiner endlichen Grenze; die Progression ist also divergent.

Für $q = 1$ ist $s_n = \frac{0}{0}$, also die Progression ebenfalls divergent.

Für $q = -1$ wird $s_n = 0$ oder $s_n = a$, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist; die Summe nähert sich also bei wachsendem n nicht einer bestimmten Grenze, sondern schwankt zwischen 0 und a; die Reihe ist daher divergent.

Ist endlich $q < 1$, so nähert sich für wachsende n, q^n immer mehr der Null, und s_n ohne Ende der endlichen Grenze $\frac{a}{1-q}$; die Progression ist in diesem Falle convergent (§. 256, Zusatz).

§. **265**. Bezeichnet s die Summe der unendlichen Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots,$$

s_n die Summe der ersten n Glieder, und e_n die Summe aller folgenden Glieder, welche letztere Summe man auch die Ergänzung der Reihe nennt, so ist

$$s = s_n + e_n.$$

Die Reihe convergirt, d. i. die Summe s_n nähert sich einer bestimmten Grenze, sobald sich die Ergänzung bei dem unendlichen Wachsen von n ohne Ende der Null nähert; dieses ist aber nur möglich, wenn sich beim unendlichen Wachsen von n die Glieder $a_{n+1}, a_{n+2} \ldots$ selbst ohne Ende der Null nähern.

In einer convergenten Reihe müssen also von einer gewissen Stelle angefangen die auf einander folgenden Glieder immer kleiner werden. Jedoch genügt diese Bedingung allein noch nicht, um auf die Convergenz einer Reihe schließen zu können. Einen Beweis dafür liefert die harmonische Reihe.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots$$

deren Glieder ohne Ende abnehmen, die aber dessenungeachtet divergent ist. Denn es ist für dieselbe

$$e_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \ldots$$

daher

$$e_n > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n},$$

und um so mehr

$$e_n > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Die einfachsten Kennzeichen der Convergenz und Divergenz.

§. **266**. Nähert sich in der unendlichen Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots$$

der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ einer bestimmten Grenze g um so mehr, je größer n wird, so ist die Reihe convergent oder divergent, je nachdem diese Grenze kleiner oder größer als 1 ist.

Beweis. a) Es sei $g < 1$ und k ein zwischen g und 1 liegender echter Bruch. Dann hat man von einer bestimmten Stelle n an

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < k, \quad \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} < k, \quad \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} < k, \ldots$$

daher

$$a_{n+1} < k a_n, \quad a_{n+2} < k a_{n+1} < k^2 a_n, \quad a_{n+3} < k a_{n+2} < k^3 a_n, \ldots$$

Durch Summirung erhält man

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots < a_n (k + k^2 + k^3 + \ldots),$$

oder, weil $k < 1$ ist, nach §. 256, Zusatz

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots < a_n \cdot \frac{k}{1-k}.$$

Da nun $a_n \cdot \frac{k}{1-k}$ einen endlichen Werth hat, so muß auch die Summe der unendlichen Reihe $a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots$ eine endliche Größe sein. Addirt man dazu die endliche Summe $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n$, so erhält man wieder eine endliche Größe, d. i. die Reihe $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ ist convergent.

b) Ist die Grenze g, welcher sich $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ bei wachsendem n ohne Ende nähert, größer als 1, so müssen von einer gewissen Stelle an die Glieder der Reihe immer größer werden, d. i. die Reihe ist divergent.

Zusatz. Für $g = 1$ gibt das obige Kennzeichen keinen Aufschluß über die Convergenz oder Divergenz der Reihe; dieser Fall bedarf einer besonderen Untersuchung, die jedoch den Zweck des vorliegenden Buches überschreitet.

2. Eine unendliche Reihe mit abwechselnden Vorzeichen der Glieder ist convergent, sobald die Glieder ohne Ende abnehmen.

Hat man die Reihe

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots \mp a_n \mp a_{n+1} \pm a_{n+2} \mp a_{n+3} \pm \ldots$$

so ist die Ergänzung

$$e_n = \pm [a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \ldots]$$

oder auch

$$e_n = \pm [a_{n+1} - a_{n+2} + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \ldots].$$

Da die Glieder fortwährend abnehmen, so sind in diesen Gleichungen alle durch Klammern eingeschlossenen Differenzen positiv; es ist also der absolute Werth von e_n kleiner als a_{n+1} und größer als $a_{n+1} - a_{n+2}$, er nähert sich daher mit dem Wachsen von n, weil dabei a_{n+1} und a_{n+2} unendlich abnehmen, ohne Ende der Null; folglich ist die Reihe convergent.

Beispiele.

1) $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots \frac{1}{1.2.3..(n-1)} + \frac{1}{1.2.3..(n-1)\,n} + \ldots$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n}.$$

Der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ nähert sich mit dem Wachsen von n ohne Ende der Grenze 0, also ist die Reihe convergent.

2) $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{x^n}{n} + \ldots$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n-1)\,x}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x.$$

Der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ nähert sich, wenn n unendlich wächst, ohne Ende der Grenze x; die vorgelegte Reihe convergirt also für $x < 1$, und divergirt für $x > 1$.

3) Die Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$ ist convergent, weil darin ein regelmäßiger Zeichenwechsel vorkommt und die Glieder ohne Ende abnehmen.

Sechster Abschnitt.

Combinationslehre.

I. Permutationen, Combinationen und Variationen.

§. **267.** Gegebene Dinge nach einem bestimmten Gesetze in Gruppen zusammenzustellen, heißt combiniren im weiteren Sinne des Wortes. Die einzelnen Dinge werden Elemente, und die aus ihnen gebildeten Gruppen Complexionen genannt.

Zur schriftlichen Darstellung der Combinationen ist es am zweckmäßigsten, die Elemente durch die in natürlicher Ordnung auf einander folgenden Zahlen, welche Zeiger oder Indices heißen, zu bezeichnen. Diese Zeiger bestimmen die Rangordnung der Elemente, so daß jenes Element das höhere ist, welches einen größeren Zeiger hat. Von zwei Complexionen heißt jene die höhere, worin von der Linken aus zuerst ein höheres Element vorkommt; z. B. die Complexion 1342 ist höher als jene 1324. Die niedrigste Complexion ist diejenige, in welcher kein höheres Element vor einem niedrigeren steht, in welcher also die Elemente in natürlicher Ordnung auf einander folgen; und jene die höchste, in welcher kein niedrigeres Element vor einem höheren steht, somit alle Elemente in umgekehrter Ordnung vorkommen.

Werden die Elemente, anstatt durch Zeiger, durch Buchstaben bezeichnet, so ist dasjenige Element als ein höheres zu betrachten, welches im Alphabete später vorkommt.

Alle Combinationen scheiden sich ihrer Natur nach in Versetzungen und Verbindungen. Bei den Versetzungen faßt man die verschiedene Anordnung der gegebenen Elemente, bei den Verbindungen ihre Auswahl in bestimmter Anzahl ins Auge. Wird nicht nur auf die Anzahl und Auswahl der Elemente, sondern gleichzeitig auch auf die Anordnung derselben Rücksicht genommen, so kommen Verbindungen und Versetzungen vereint vor.

Hiernach unterscheidet man drei Arten des Combinirens: das Permutiren, das Combiniren im engeren Sinne, und das Variiren.

Bei jeder dieser drei Combinationsarten kommt die wirkliche Bildung der Complexionen und die Zahl derselben in Betracht.

1. Permutiren.

§. **268.** Permutiren heißt, gegebene Elemente auf jede mögliche Weise versetzen, so jedoch, daß in jeder Complexion alle Elemente vorkommen.

Die Anzahl aller möglichen Permutationen von n Elementen bezeichnet man durch P_n (Permutationszahl von n), die Anzahl der Permutationen von genannten Elementen, z. B. von a, b, b, c durch P (a b b c).

Bildung der Permutationen.

§. **269.** Um von mehreren gegebenen Elementen alle möglichen Permutationen zu bilden, schreibe man zuerst die niedrigste Complexion der gegebenen Elemente an, leite aus dieser die nächst höhere, aus dieser wieder die nächst höhere, u. s. w. ab, bis man zur höchsten kommt. Man erhält aber aus jeder schon aufgestellten Complexion die nächst höhere, indem man, in dieser Complexion von rechts nach links fortschreitend, das erste Element aufsucht, an dessen Stelle aus den rechts folgenden ein höheres gesetzt werden kann, sodann dieses höhere Element an jene Stelle schreibt und die links vorangehenden Elemente ungeändert stehen, die übrigen aber ihm in natürlicher Ordnung folgen läßt. Z. B.

123	abbbc	babbc	bbabc	bcabb	cabbb
132	abbcb	babcb	bbacb	bcbab	cbabb
213	abcbb	bacbb	bbbac	bcbba	cbbab
231	acbbb		bbbca		cbbba
312			bbcab		
321			bbcba		

Anzahl der Permutationen.

§. **270.** 1. Sind alle möglichen Permutationen von n verschiedenen Elementen gebildet und tritt zu diesen Elementen noch ein neues dazu, so kann dasselbe in jeder der früheren Permutationen den ersten oder zweiten, ... oder $(n + 1)$ten Platz, also $n + 1$ verschiedene Stellungen einnehmen, so daß aus $n + 1$ Elementen $(n + 1)$mal so viel Permutationen entstehen, als aus n Elementen. Es ist also

$$P_{n+1} = P_n . (n + 1).$$

Da nun ein Element nur eine einzige Stellung zuläßt, also

$P_1 = 1$ ist, so ist
$P_2 = 1.2$, daher
$P_3 = 1.2.3$,
. . . . . .
allgemein $P_n = 1.2.3....(n - 1)\ n$;

d. h. die Permutationszahl von mehreren verschiedenen Elementen ist gleich dem Producte der natürlichen Zahlen von 1 bis zu der Zahl, welche die Anzahl der Elemente ausdrückt.

Das Product $1.2.3.4....(n - 1).n$ wird die nte Factorielle von 1 genannt und durch das Symbol n! bezeichnet. Es ist daher

$$P_2 = 2!,\ P_3 = 3!,\ \ldots\ P_n = n!$$

2. Wenn unter den gegebenen Elementen p gleiche vorkommen, so betrachte man diese einstweilen als verschieden; dann ist die Anzahl aller möglichen Permutationen n!. Denkt man sich diese Permutationen so in Abtheilungen gebracht, daß sich die Permutationen einer Abtheilung blos durch die gegenseitige Stellung der als verschieden betrachteten p Elemente von einander unterscheiden, während die übrigen Elemente dieselbe Stelle einnehmen; so enthält jede dieser Abtheilungen so viele Permutationen, als man ihrer aus p Elementen bilden kann, also p! Permutationen. Wenn man nun die als verschieden betrachteten Elemente wieder als einander gleich annimmt, so gelten alle p! Complexionen einer Abtheilung nur für eine Permutation; je p! von den n! Permutationen gehen in eine einzige über, und man hat somit nur $\frac{n!}{p!}$ verschiedene Permutationen.

Wenn sich unter den gegebenen n Elementen außer den p gleichen Elementen noch q andere gleiche Elemente befinden, so wiederholen sich die Schlüsse in gleicher Weise, so daß man als die Anzahl aller verschiedenen Permutationen $\frac{n!}{p!q!}$ erhält.

3. Sind unter den gegebenen n Elementen $n-k$ einander gleich, und die übrigen k Elemente ebenfalls einander gleich, wie z. B. in dem Producte $a^{n-k}b^k$, so ist die Permutationszahl derselben

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{1.2.3\ldots(n-k)\,(n-k+1)\ldots(n-2)\,(n-1)\,n}{1.2.3\ldots(n-k).1.2.3\ldots k}.$$

Dividirt man Zähler und Nenner dieses Bruches durch $1.2.3\ldots(n-k)$, und schreibt die dann übrig bleibenden Factoren des Zählers in umgekehrter Ordnung, so hat man

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots k}.$$

Der letzte Bruch, dessen Zähler ein Product von k Factoren, die von n in natürlicher Reihe abwärtsschreiten, und dessen Nenner das Product von k Factoren ist, die von 1 in natürlicher Reihe aufsteigen, wird die kte getheilte fallende Factorielle von n genannt und durch das Symbol $\binom{n}{k}$, zu lesen: „n über k", ausgedrückt. Es ist also

$$P\,(a^{n-k}b^k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}.$$

2. Combiniren.

§. **271.** Combiniren im engeren Sinne heißt, gegebene Elemente so mit einander verbinden, daß jede Complexion dieselbe bestimmte Anzahl aus den gegebenen Elementen enthält, wobei jedoch nur solche Complexionen, in welchen nicht dieselben Elemente vorkommen, als verschieden gelten. Je nachdem die Verbindungen je zwei, drei, vier,... Elemente enthalten, nennt man sie Combinationen der zweiten, dritten, vierten,... Classe, oder auch Amben, Ternen, Quaternen u. s. w. Die Elemente selbst können als Combinationen der ersten Classe angesehen werden und heißen als solche Unionen.

Man unterscheidet ferner Combinationen ohne und mit Wiederholungen; bei jenen darf in einer Complexion ein Element nur einmal, bei diesen beliebig oft vorkommen.

Die Anzahl aller möglichen Combinationen der rten Classe aus n Elementen ohne Wiederholungen wird durch C_n^r, die Anzahl derselben mit Wiederholungen durch $C_n^{w,r}$ bezeichnet.

Bildung der Combinationen.

§. **272.** 1. Um aus mehreren gegebenen Elementen alle Amben ohne Wiederholungen zu bilden, stelle man jedes Element vor jedes höhere Element.

Sind einmal die Combinationen einer bestimmten Classe gebildet, so erhält man daraus die Combinationen der nächst höheren Classe, indem man jedes Element vor jede frühere Complexion, in der lauter höhere Elemente vorkommen, setzt.

So erhält man aus den vier Elementen b, c, d, e nachfolgende

Amben ohne Wiederh.	Ternen ohne Wiederh.
bc, bd, be;	bcd, bce, bde;
cd, ce;	cde;
de;	

u. s. w.

2. Um aus mehreren gegebenen Elementen alle Amben mit Wiederholungen zu bilden, setze man jedes Element vor sich selbst und vor jedes höhere Element.

Hat man einmal die Combinationen irgend einer Classe mit Wiederholungen gebildet, so erhält man daraus alle Combinationen der nächst höheren Classe, indem man jedes Element vor jede frühere Complexion, in der keine niedrigeren Elemente vorkommen, setzt.

So geben die vier Elemente a, b, c, d folgende

Amben mit Wiederhol.:
aa, ab, ac, ad;
bb, bc, bd;
cc, cd;
dd;

Ternen mit Wiederh.:
aaa, aab, aac, aad, abb, abc, abd, acc, acd, add;
bbb, bbc, bbd, bcc, bcd, bdd;
ccc, ccd, cdd;
ddd;

u. s. w.

Zusatz. Einfacher gestalten sich die Combinationen mit Wiederholungen, wenn man jede Combination als Product auffaßt. So geben die Elemente a und b folgende als Producte betrachtete Combinationen mit Wiederholungen

der 2ten Classe: a^2, ab, b^2;
„ 3ten „ a^3, a^2b, ab^2, b^3;
„ 4ten „ a^4, a^3b, a^2b^2, ab^3, b^4;
. . . . . .
„ nten „ a^n, $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b^2$, ... ab^{n-1}, b^n.

Zahl der Combinationen ohne Wiederholungen.

§. 273. Verbindet man jedes von n gegebenen Elementen mit jedem der übrigen n—1 Elemente, so erhält man alle Amben 2mal; z. B. die Ambe a b, indem man a mit b, und indem man b mit a verbindet. Da sich sonach n (n—1) paarweise gleiche Amben ergeben, so ist die Anzahl aller verschiedenen Amben von n Elementen

$$C_n^2 = \frac{n\,(n-1)}{2}.$$

Hat man überhaupt alle Combinationen der rten Classe ohne Wiederholungen und verbindet mit jeder dieser C_n^r Combinationen jedes der darin nicht vorkommenden n—r Elemente, so enthalten die sich ergebenden $C_n^r.(n-r)$ Verbindungen alle Combinationen der (r+1) ten Classe, und zwar jede (r+1) mal, weil man immer je r andere Elemente derselben mit dem (r + 1) ten verbinden kann; die Zahl aller verschiedenen Combinationen der (r + 1) ten Classe von n Elementen ist also

$$C_n^{r+1} = C_n^r \cdot \frac{n-r}{r+1}.$$

Da nun

$$C_n^2 = \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}$$

ist, so hat man

$$C_n^3 = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}, \text{ folglich}$$

$$C_n^4 = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}, \text{ u. s. w.,}$$

allgemein

$$C_n^r = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-r+2)\,(n-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(r-1)\,.\,r}.$$

Die Anzahl der Combinationen der rten Classe ohne Wiederholungen aus n Elementen ist also gleich der rten getheilten fallenden Factoriellen von n (§. 270, 3); es ist daher

$$C_n^2 = \binom{n}{2},\ C_n^3 = \binom{n}{3},\ \ldots C_n^r = \binom{n}{r}.$$

Zahl der Combinationen mit Wiederholungen.

§. **274.** Sind n Elemente gegeben, und verbindet man jedes Element mit sich selbst und noch mit allen n Elementen, auch sich selbst nicht ausgenommen, so geben die erhaltenen n (n + 1) Verbindungen alle Amben mit Wiederholungen, und zwar jede 2mal. Die Anzahl aller verschiedenen Amben mit Wiederholungen ist also $\frac{n\,(n+1)}{2}$.

Sind überhaupt alle Combinationen der rten Classe mit Wiederholungen von n Elementen gebildet und verbindet man mit jeder dieser $C_n^{w,\,r}$ Combinationen zuerst jedes der r Elemente, welche darin vorkommen, und dann noch n Elemente; so enthalten die sich ergebenden $C_n^{w,\,r}.(n + r)$ Verbindungen alle Combinationen der (r + 1) Classe mit Wiederholungen, und zwar kommt jede solche Combination (r + 1)mal vor, weil man immer je r andere Elemente derselben mit dem (r + 1)ten verbinden kann; es ist daher

$$C_n^{w,\,r+1} = C_n^{w,\,r} \cdot \frac{n + r}{r + 1}.$$

Da nun

$$C_n^{w,\,2} = \frac{n\,(n+1)}{1\ .\ 2}$$

ist, so hat man

$$C_n^{w,\,3} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}, \text{ folglich}$$

$$C_n^{w,\,4} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4}, \text{ u. s. w.,}$$

allgemein

$$C_n^{w,\,r} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\ldots(n+r-2)\,(n+r-1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ (r-1)\ .\ r}.$$

Diesen Bruch, dessen arithmetischer Bau leicht zu überblicken ist, nennt man die rte getheilte steigende Factorielle von n.

Zusatz. Wenn man in dem letzten Bruche die Factoren des Zählers in umgekehrter Ordnung schreibt, so hat man

$$C_n^{w,\,r} = \frac{(n+r-1)\,(n+r-2)\ldots(n+2)\,(n+1).n}{1\ .\ 2\ \ldots(r-2)\,(r-1).r}.$$

Es ist daher die Anzahl der Combinationen der rten Classe mit Wiederholungen von n Elementen auch gleich der rten getheilten fallenden Factoriellen von n + r — 1; folglich

$$C_n^{w,\,2} = \binom{n+1}{2},\ C_n^{w,\,3} = \binom{n+2}{3},\ldots C_n^{w,\,r} = \binom{n+r-1}{r}.$$

3. Variiren.

§. **275.** Variiren heißt, gegebene Elemente so mit einander verbinden, daß jede Complexion dieselbe bestimmte Anzahl aus den gegebenen Elementen enthält, wobei jedoch auch solche Complexionen, in welchen dieselben Elemente in verschiedener Anordnung vorkommen, als verschieden gelten. Variationen sind demnach permutirte Combinationen.

Wie die Combinationen, unterscheidet man auch die Variationen in die der ersten, zweiten, dritten, ... Classe, ferner in Variationen ohne und mit Wiederholungen.

Die Anzahl aller möglichen Variationen der rten Classe aus n Elementen ohne Wiederholungen wird durch V_n^r, und die Zahl derselben mit Wiederholungen durch $V_n^{w,\,r}$ bezeichnet.

Bildung der Variationen.

§. **276.** Die Variationen einer bestimmten Classe erhält man, indem man aus den gegebenen Elementen alle Combinationen derselben Classe bildet und dann von jeder Combination die Permutationen aufstellt. Die Variationen können aber auch unmittelbar gebildet werden.

1. Um aus mehreren gegebenen Elementen die Variationen der zweiten Classe ohne Wiederholungen zu bilden, setzt man jedes Element vor jedes der übrigen Elemente.

Sind überhaupt die Variationen irgend einer Classe ohne Wiederholungen gebildet, so erhält man die Variationen der nächst höheren Classe, indem man jedes Element vor jede frühere Variation, in welcher dieses Element nicht vorkommt, setzt.

So geben die Elemente 1, 2, 3, 4 folgende Variationen ohne Wiederholungen

der 2. Classe:	der 3. Classe:
12, 13, 14;	123, 124, 132, 134, 142, 143;
21, 23, 24;	213, 214, 231, 234, 241, 243;
31, 32, 34;	312, 314, 321, 324, 341, 342;
41, 42, 43;	412, 413, 421, 423, 431, 432;

u. s. w.

2. Um aus mehreren gegebenen Elementen die Variationen der zweiten Classe mit Wiederholungen zu erhalten, setzt man jedes Element vor jedes Element, auch sich selbst nicht ausgenommen.

Hat man bereits die Variationen irgend einer Classe mit Wiederholungen dargestellt, so bildet man daraus die Variationen der nächst höheren Classe, indem man jedes Element vor jede frühere Variation setzt.

Aus den beiden Elementen a und b erhält man folgende Variationen mit Wiederholungen

der 2. Classe:	der 3. Classe:
aa, ab;	aaa, aab, aba, abb;
ba, bb;	baa, bab, bba, bbb;

der 4. Classe:

aaaa, aaab, aaba, aabb, abaa, abab, abba, abbb;
baaa, baab, baba, babb, bbaa, bbab, bbba, bbbb;

u. s. w.

Zahl der Variationen ohne Wiederholungen.

§. **277.** Die Anzahl der Combinationen der rten Classe aus n Elementen ohne Wiederholungen ist $\binom{n}{r}$; aus jeder solchen Combination lassen sich durch Permutation der r Elemente r! Variationen der rten Classe ohne Wiederholungen bilden; folglich ist

$$V_n^r = \binom{n}{r} . r! = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+2)\,(n-r+1).$$

Zahl der Variationen mit Wiederholungen.

§. **278.** Sind n Elemente gegeben, so gibt jedes derselben n Variationen der zweiten Classe mit Wiederholungen, somit ist n^2 die Anzahl aller solcher Variationen.

Ist überhaupt die Anzahl aller Variationen der rten Classe mit Wiederholungen von n Elementen bekannt, so ist, da jede solche Variation durch Verbindung mit allen n Elementen n Variationen der (r + 1)ten Classe gibt,

$$V_n^{w,\,r+1} = V_n^{w,\,r} . n.$$

Da nun $V_n^{w,2} = n^2$ ist, so hat man $V_n^{w,3} = n^3$, folglich $V_n^{w,4} = n^4$, allgemein

$$V_n^{w,\,r} = n^r.$$

II. Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Die absolute und einfache Wahrscheinlichkeit.

§. **279.** Sind unter mehreren gleich möglichen Fällen einige dem Eintreffen eines bestimmten Ereignisses günstig, die übrigen dagegen ungünstig, so heißt das Verhältniß der Anzahl jener Fälle, welche dem Eintreffen des Ereignisses günstig sind, zu der Anzahl aller gleich möglichen Fälle die mathematische Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen dieses Ereignisses.

Bezeichnet a die Zahl der einem Ereignisse günstigen und b die Zahl der ihm ungünstigen Fälle, so ist, wenn die mathematische Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen jenes Ereignisses durch w ausgedrückt wird.

$$w = \frac{a}{a + b}.$$

Je mehr Fälle dem Eintreffen des Ereignisses günstig sind oder je größer a ist, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit für das Stattfinden des Ereignisses; sind alle Fälle günstig, so ist das Stattfinden gewiß und man hat, da $b = 0$ ist, als das mathematische Symbol der Gewißheit

$$w = \frac{a}{a} = 1.$$

Je weniger günstige Fälle vorkommen, desto geringer wird auch die Wahrscheinlichkeit; ist gar kein Fall günstig, so ist das Eintreffen des Ereignisses unmöglich, und man hat, da $a = 0$ ist, für das mathematische Symbol der Unmöglichkeit

$$w = \frac{0}{b} = 0.$$

Im gewöhnlichen Leben heißt ein Ereigniß wahrscheinlich, wenn $w > \frac{1}{2}$, zweifelhaft, wenn $w = \frac{1}{2}$, und unwahrscheinlich, wenn $w < \frac{1}{2}$ ist.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereigniß nicht eintreffen werde, heißt die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit. Sie wird durch einen Bruch dargestellt, dessen Zähler die Anzahl aller ungünstigen und der Nenner die Anzahl aller gleich möglichen Fälle ist. Bezeichnet man die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit durch w', so ist

$$w' = \frac{b}{a + b}, \text{ daher } w + w' = \frac{a + b}{a + b} = 1,$$

d. h. die Summe der Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses und jener für das Nichteintreffen gibt die Einheit, somit die Gewißheit; was auch ganz natürlich erscheint, da es gewiß ist, daß jenes Ereigniß entweder eintreffen oder nicht eintreffen muß.

Aus $w + w' = 1$ folgt $w' = 1 - w$.

Beispiele.

Wirft man zwei Spielwürfel A und B, deren sechs Seiten nach der Reihe mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 Puncten oder Augen bezeichnet sind, so sind in Bezug auf die Zahlen, welche auf den oberen Seiten der beiden Würfel zu stehen kommen, folgende 36 Fälle gleich möglich:

AB	AB	AB	AB	AB	AB
11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

a) Um die Summe 5 zu werfen, sind vier Fälle günstig, nämlich 14, 23, 32, 41. Die Wahrscheinlichkeit, mit beiden Würfeln 5 Augen zu werfen, ist also $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Dieser Ausdruck, welcher anzeigt, daß in 9 Würfen die Summe 5 einmal geworfen werde, ist jedoch nicht so zu verstehen, als wenn man in den ersten neun Würfen die Summe 5 gerade einmal werfen müßte; man kann diese Summe vielleicht gar nicht, oder gerade einmal, oder auch mehr als einmal werfen; aber wenn man sehr viele Würfe macht, so wird sich das Verhältniß der Anzahl der Würfe, worin man 5 wirft, zu der gesammten Anzahl der Würfe um so mehr dem Verhältnisse 1 : 9 nähern, je länger das Spiel fortgesetzt wird. Der wirkliche Erfolg wird der durch Zahlen ausgedrückten Wahrscheinlichkeit um so näher kommen, je größer die Anzahl der Versuche ist; und in diesem Sinne ist die mathematische Wahrscheinlichkeit stets aufzufassen.

b) Die Wahrscheinlichkeit, die Summe 5 nicht zu werfen, ist $1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

c) Die Wahrscheinlichkeit, die Zahlen 3 und 5 zu werfen, ist, da nur zwei Fälle 35 und 53 günstig sind, $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

d) Die Wahrscheinlichkeit, einen Pasch, d. i. zwei gleiche Zahlen zu werfen, ist $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Die relative Wahrscheinlichkeit.

§. 280. Die bisher betrachtete Wahrscheinlichkeit, wobei nur ein Ereigniß an und für sich betrachtet wird, heißt die absolute Wahrscheinlichkeit, im Gegensatze zu der relativen, welche sich auf die Vergleichung zweier Ereignisse bezieht. Bei der relativen Wahrscheinlichkeit zieht man unter den möglichen Fällen nur diejenigen in Rechnung, welche entweder dem einen oder dem andern der beiden Ereignisse günstig sind, während alle übrigen Fälle unbeachtet bleiben.

Sind für verschiedene Ereignisse s Fälle gleich möglich, und vergleicht man nur die Ereignisse A und B, deren einem m und dem andern n Fälle günstig sind, so ist die relative Wahrscheinlichkeit W für das erste Ereigniß $\frac{m}{m+n}$, und die relative Wahrscheinlichkeit W' für das zweite Ereigniß $\frac{n}{m+n}$.

Man kann die relativen Wahrscheinlichkeiten auch aus den absoluten herleiten. Es ist nämlich, wenn man die absoluten Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse A und B beziehungsweise durch w und w' bezeichnet,

$$W = \frac{m}{m+n} = \frac{\frac{m}{s}}{\frac{m}{s}+\frac{n}{s}} = \frac{w}{w+w'}, \qquad W' = \frac{n}{m+n} = \frac{\frac{n}{s}}{\frac{m}{s}+\frac{n}{s}} = \frac{w'}{w+w'}.$$

Die relative Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist also gleich dem Quotienten aus der absoluten Wahrscheinlichkeit jenes Ereignisses und der Summe der absoluten Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse.

Z. B. In einer Urne sind 4 weiße, 6 blaue und 8 rothe Kugeln. Die absolute Wahrscheinlichkeit,

eine weiße Kugel zu ziehen, ist $\frac{4}{18}$,
„ rothe „ „ „ „ $\frac{8}{18}$;

daher die relative Wahrscheinlichkeit,

eher eine weiße als eine rothe Kugel zu ziehen, $\frac{\frac{4}{18}}{\frac{4}{18}+\frac{8}{18}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$,

eher eine rothe als eine weiße Kugel zu ziehen, $\frac{\frac{8}{18}}{\frac{4}{18}+\frac{8}{18}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.

§. **281.** Wenn die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses auf der Berechnung mehrerer einfacher Wahrscheinlichkeiten beruht, so heißt eine solche Wahrscheinlichkeit eine zusammengesetzte. Sie ist zweifacher Art; entweder schließt sich das Eintreffen der einzelnen Ereignisse gegenseitig aus und es kann unter mehreren fraglichen Ereignissen nur eines stattfinden, oder es sollen zwei oder mehrere Ereignisse in Verbindung mit einander gleichzeitig oder nach einander eintreffen.

§. **282.** Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines von mehreren Ereignissen, die sich gegenseitig ausschließen.

Ist s die Anzahl aller gleich möglichen Fälle, von denen m dem Ereignisse A, n dem Ereignisse B, p dem Ereignisse C, ... also $m + n + p$... für das Eintreffen irgend eines unter den Ereignissen A, B, C, ... günstig sind, so ist, wenn man die absoluten Wahrscheinlichkeiten für diese Ereignisse durch w', w'', w''', ..., und die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen irgend eines dieser Ereignisse durch W bezeichnet,

$$w' = \frac{m}{s},\ w'' = \frac{n}{s},\ w''' = \frac{p}{s}, \ldots$$

und
$$W = \frac{m + n + p + \ldots}{s} = \frac{m}{s} + \frac{n}{s} + \frac{p}{s} + \ldots,$$

oder
$$W = w' + w'' + w''' + \ldots$$

d. i. die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen irgend eines von mehreren sich gegenseitig ausschließenden Ereignissen ist gleich der Summe der absoluten Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse.

Z. B. Die absolute Wahrscheinlichkeit, aus einem Spiele von 32 Karten

eine Coeur-Figur zu ziehen, ist ..... $\frac{3}{32}$,
eine Coeur, die keine Figur ist, zu ziehen ..... $\frac{5}{32}$,
eine Carreau-Figur zu ziehen ..... $\frac{3}{32}$,
eine Carreau, die keine Figur ist, zu ziehen ..... $\frac{5}{32}$.

Daher ist die Wahrscheinlichkeit,

eine Coeur überhaupt zu ziehen $\frac{3}{32} + \frac{5}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$,
eine rothe Figur zu ziehen .... $\frac{3}{32} + \frac{3}{32} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$,

u. s. w.

§. 283. Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen mehrerer Ereignisse.

Es sei W die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen zweier Ereignisse A und B, deren ersterem m' Fälle günstig und n' Fälle ungünstig, dem letzteren m" Fälle günstig und n" Fälle ungünstig sind. Die absoluten Wahrscheinlichkeiten dieser beiden Ereignisse sind

$$w' = \frac{m'}{m'+n'}, \qquad w'' = \frac{m''}{m''+n''}.$$

Da nun jeder der m' dem Ereignisse A günstigen Fälle mit jedem der m" dem Ereignisse B günstigen Fälle zusammen eintreffen kann, so gibt es für das Zusammentreffen beider Ereignisse m'm" günstige Fälle. Die Anzahl aller möglichen Fälle ist (m' + n') (m" + n"), weil jeder der m' + n' bei A möglichen Fälle mit jedem der m" + n" bei B möglichen Fälle zusammentreffen kann. Es ist daher die Wahrscheinlichkeit, daß die beiden Ereignisse A und B zusammen eintreffen,

$$W = \frac{m'\,m''}{(m'+n')\,(m''+n'')} = \frac{m'}{m'+n'} \cdot \frac{m''}{m''+n''} = w'\,w''.$$

Sind ebenso w', w", w"',... die absoluten Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der einzelnen Ereignisse A, B, C,..., so erhält man die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen aller dieser Ereignisse

$$W = w'\,w''\,w''',\ldots,$$

d. h. die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen mehrerer Ereignisse ist gleich dem Producte aus den absoluten Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der einzelnen Ereignisse.

Z. B. Es seien die 32 Karten nach den Farben in vier Packete eingetheilt, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den Coeur-König zu ziehen?

Die Wahrscheinlichkeit, die Hand auf das Packet der Coeurs zu legen, ist $\frac{1}{4}$; die Wahrscheinlichkeit, aus diesem Packet den König zu ziehen, $\frac{1}{8}$; daher die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen dieser beiden Ereignisse $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$.

§. 284. Wahrscheinlichkeit für das wiederholte Eintreffen desselben Ereignisses.

Ist w die absolute Wahrscheinlichkeit, daß irgend ein Ereigniß eintreffe, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß jenes Ereigniß 2-, 3-, 4-,...rmal nach einander eintreffe,

$$w_2 = w.w = w^2,$$
$$w_3 = w.w.w = w^3,$$
$$w_4 = w.w.w.w = w^4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$w_r = w.w.w....\text{rmal} = w^r;$$

d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereigniß mehrere Male nach einander stattfinde, ist gleich der sovielten Potenz der Wahrscheinlichkeit für das einmalige Eintreffen, als Wiederholungen stattfinden sollen.

Z. B. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln 3mal nach einander die Summe 7 zu werfen? — Die Wahrscheinlichkeit, die Summe 7 einmal zu werfen, ist $\frac{1}{6}$, also die Wahrscheinlichkeit, diese Summe 3mal nach einander zu werfen, $(\frac{1}{6})^3 = \frac{1}{216}$.

Wenn ein Ereigniß wiederholt stattfinden soll, so tritt zuweilen der Fall ein, daß nach jedem Eintreffen desselben sowohl die Anzahl der möglichen als der günstigen Fälle um 1 kleiner wird. In diesem Falle ist, wenn $\frac{m}{s}$ die Wahrscheinlichkeit für das erste Eintreffen eines solchen Ereignisses ausdrückt, die Wahrscheinlichkeit für das rmalige Wiederholen desselben

$$w_r = \frac{m}{s} \cdot \frac{m-1}{s-1} \cdot \frac{m-2}{s-2} \cdots \frac{m-r+1}{s-r+1}.$$

Z. B. die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne, welche 8 weiße und 6 schwarze Kugeln enthält, 4mal nach einander eine weiße Kugel zu ziehen, wenn jede gezogene Kugel nicht wieder in die Urne zurückgelegt wird, ist

$$\frac{8}{14} \cdot \frac{7}{13} \cdot \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{10}{143}.$$

§. **285.** Wahrscheinlichkeit für die verschiedenen Combinationen mehrerer Ereignisse.

Es seien s gleich mögliche Fälle, von denen m' dem Ereignisse A, und m" dem Ereignisse B günstig sind; so ist, wenn die absolute Wahrscheinlichkeit für das Stattfinden von A durch w', und jene für das Stattfinden von B durch w" bezeichnet wird,

$$w' = \frac{m'}{s}, \quad w'' = \frac{m''}{s}.$$

Es ist nun die Wahrscheinlichkeit,

daß A eintrifft ..... w'
" A nicht eintrifft ..... 1 — w'
" B eintrifft ..... w"
" B nicht eintrifft ..... 1 — w"
" A eintrifft, B nicht ..... w' (1 — w")
" A nicht eintrifft, aber B..... (1 — w') w"
" A und B eintreffen ..... w' w"
" A und B nicht beide eintreffen 1 — w' w"
" weder A noch B eintrifft ..... (1 — w') (1 — w")
" entweder A oder B eintrifft... 1 — (1 — w') (1 — w").

Auf gleiche Weise läßt sich, wenn die absoluten Wahrscheinlichkeiten w', w", w"' für das Stattfinden dreier Ereignisse A, B, C bekannt sind, daraus die Wahrscheinlichkeit für jede Combination finden, die in Bezug auf das wechselseitige Eintreffen und Nichteintreffen jener drei Ereignisse möglich ist. So erhält man z. B. für die Wahrscheinlichkeit, daß unter diesen drei Ereignissen wenigstens eines eintreffe, den Ausdruck

$$1 - (1 - w')(1 - w'')(1 - w''').$$

Z. B. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln, wenn nicht im ersten, so doch im zweiten Wurf 9 Augen zu werfen?

Hier ist $w' = \frac{1}{9}$ und $w'' = \frac{1}{9}$, daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$1 - (1 - w')(1 - w'') = 1 - \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9} = \frac{17}{81}.$$

Mathematische Erwartung und rechtmäßiger Einsatz bei Wetten und Glücksspielen.

§. **286.** Wenn mit dem Eintreffen eines Ereignisses der Besitz eines physischen Gutes oder ein Gewinn erworben werden kann, so hat derselbe vor dem Eintreffen jenes Ereignisses einen Werth, welcher von dem Grade der Wahrscheinlichkeit abhängt, die für das Stattfinden des Ereignisses vorhanden ist; man nennt diesen Werth die mathematische Erwartung. Trifft das Ereigniß gewiß

ein, so darf man auch vor dem Eintreffen desselben den vollen Gewinn erwarten. Sind aber unter den Ursachen, von denen das Stattfinden des Ereignisses abhängt, a günstige und b ungünstige, so wird das Ereigniß nicht mit Gewißheit, sondern unter $a + b$ Fällen nur in a Fällen eintreffen, und es wird daher auch der Gewinn nicht mit dem vollen Werthe, sondern nur mit dem so vielten Theile desselben, als die Wahrscheinlichkeit w, ihn zu erhalten, anzeigt, erwartet werden können. Heißt daher e die mathematische Erwartung und g der zu erwartende Gewinn, so ist

$$e = \frac{a}{a + b} \cdot g = wg,$$

d. h. die mathematische Erwartung eines Gewinnes ist gleich dem Producte aus dem Gewinne und der Wahrscheinlichkeit desselben.

Z. B. Jemand setzt auf zwei Nummern einer Zahlenlotterie, welche 90 Nummern enthält, 1 fl. und gewinnt, wenn seine beiden Nummern gezogen werden, 240 fl.; welches ist seine mathematische Erwartung?

Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Nummern einen Ambo zu machen, ist $\frac{10}{4005} = \frac{2}{801}$, daher $e = \frac{2}{801}.240 = \frac{480}{801} = \frac{160}{267}$ fl.

§. 287. Bei Versicherungen, Wetten und Glücksspielen wird eine bestimmte Summe eingesetzt und dafür im glücklichen Falle eine bestimmte Summe gewonnen. Soll nun der Einsatz dem zu erwartenden Gewinne gegenüber auf richtiger Grundlage beruhen, so muß die mathematische Erwartung des Einsetzers denselben Werth haben, wie sein Einsatz. Der Grundsatz, auf welchem jede rechtmäßige Versicherung und jedes rechtmäßige Glücksspiel beruht, ist also:

Der Einsatz muß der mathematischen Erwartung gleich sein.

Man hat daher für den Einsatz e dieselbe Formel, wie für die mathematische Erwartung, nämlich $e = wg$, woraus $g = \frac{e}{w}$ folgt.

Heißen e' und e" die Einsätze zweier Spieler, welche beziehungsweise die Wahrscheinlichkeit w' und w" haben, einen Gewinn g zu erhalten, so ist

$$e' = w'g \text{ und } e'' = w''g,$$

daher

$$e' : e'' = w' : w'',$$

d. h. die Einsätze müssen den Wahrscheinlichkeiten, zu gewinnen, proportionirt sein.

Z. B. A wettet gegen B, daß er mit zwei Würfeln einen Pasch wirft.

Die Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen, ist für A $\frac{1}{6}$, für B $\frac{5}{6}$; es müssen sich also auch die Einsätze der beiden Spieler, wenn die Wette rechtmäßig sein soll, wie $\frac{1}{6} : \frac{5}{6}$ oder wie 1 : 5 verhalten, d. h. B muß 5mal so viel einsetzen, als A.

Wahrscheinlichkeit in Beziehung auf die Lebensdauer des Menschen.

§. 288. Durch Vergleichung von Sterblisten, die für zahlreiche Orte und durch viele Jahre hindurch geführt wurden, ist man zu Tabellen gelangt, welche angeben, wie viele von einer gewissen Anzahl gleichzeitig geborner Personen nach einer bestimmten Anzahl von Jahren noch am Leben sind. Wir lassen hier die vielseitig angewendete Süßmilch-Baumann'sche Sterblichkeitstafel, die sich auf 1000 gleichzeitig geborne Personen bezieht, folgen und bezeichnen darin durch n die zurückgelegten Lebensjahre, d. i. das Alter der Personen, durch a_n die Zahl der in diesem Alter noch Lebenden und durch m_n die mittlere Lebensdauer derselben, die weiter unten in §. 291 erklärt werden soll.

n	a_n	m_n	n	a_n	m_n	n	a_n	m_n	n	a_n	m_n
0	1000	28·5	**25**	466	31·8	**50**	300	17·0	**75**	69	6·8
1	750	36·8	**26**	461	31·1	**51**	291	16·5	**76**	62	6·5
2	661	40·7	**27**	456	30·5	**52**	282	16·0	**77**	55	6·2
3	618	42·5	**28**	451	29·8	**53**	273	15·5	**78**	49	5·9
4	593	43·3	**29**	445	29·2	**54**	264	15·0	**79**	43	5·7
5	579	43·3	**30**	439	28·6	**55**	255	14·5	**80**	37	5·5
6	567	43·2	**31**	433	28·0	**56**	246	14·0	**81**	32	5·3
7	556	43·1	**32**	427	27·4	**57**	237	13·5	**82**	28	5·0
8	547	42·8	**33**	421	26·7	**58**	228	13·0	**83**	24	4·8
9	539	42·4	**34**	415	26·1	**59**	219	12·6	**84**	20	4·6
10	532	41·9	**35**	409	25·5	**60**	210	12·1	**85**	17	4·3
11	527	41·3	**36**	402	24·9	**61**	201	11·6	**86**	14	4·1
12	523	40·7	**37**	395	24·4	**62**	192	11·1	**87**	12	3·8
13	519	40·0	**38**	388	23·8	**63**	182	10·7	**88**	10	3·4
14	515	39·3	**39**	381	23·2	**64**	172	10·3	**89**	8	3·1
15	511	38·6	**40**	374	22·6	**65**	162	9·9	**90**	6	3·0
16	507	37·9	**41**	367	22·1	**66**	152	9·5	**91**	5	2·5
17	503	37·2	**42**	360	21·5	**67**	142	9·1	**92**	4	2·0
18	499	36·5	**43**	353	20·9	**68**	132	8·8	**93**	3	1·5
19	495	35·8	**44**	346	20·3	**69**	122	8·5	**94**	2	1·0
20	491	35·0	**45**	339	19·7	**70**	112	8·2	**95**	1	0·5
21	486	34·4	**46**	332	19·1	**71**	103	7·9	**96**	0	0·0
22	481	33·7	**47**	324	18·6	**72**	94	7·6			
23	476	33·1	**48**	316	18·0	**73**	85	7·3			
24	471	32·4	**49**	308	17·5	**74**	77	7·0			

§. **289.** Aufgabe. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Person ein bestimmtes Alter erreichen werde, darzustellen.

Bezeichnet a_n die Anzahl der Personen, die von einer gewissen Anzahl gleichzeitig Geborner in einem Alter von n Jahren noch leben, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Person von n Jahren das $(n+r)$te Jahr erreichen werde,

$$w = \frac{a_{n+r}}{a_n},$$

weil von a_n im Alter von n Jahren noch lebenden Personen nur a_{n+r} in der günstigen Lage sind, ein Alter von $n + r$ Jahren zu erreichen, somit a_{n+r} die Anzahl der günstigen, und a_n die Anzahl aller möglichen Fälle ist.

Z. B. Nach der obigen Sterblichkeitstabelle leben von 1000 gleichzeitig Gebornen im Alter von 24 Jahren noch 471, im Alter von 50 Jahren noch 300 Personen; die Wahrscheinlichkeit, daß eine 24jährige Person das 50ste Jahr erreichen werde, ist demnach $\frac{300}{471} = 0{\cdot}637..$

§. **290.** Unter der wahrscheinlichen Lebensdauer einer Person versteht man diejenige Anzahl von Jahren, nach deren Verlauf die Wahrscheinlichkeit noch zu leben der entgegengesetzten Wahrscheinlichkeit gleich ist.

Aufgabe. Die wahrscheinliche Lebensdauer einer njährigen Person zu bestimmen.

Bezeichnet man die wahrscheinliche Lebensdauer für eine Person von n Jahren mit x, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese Person nach x Jahren noch leben werde, $\frac{a_{n+x}}{a_n}$, und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{a_{n+x}}{a_n}$; daher $\frac{a_{n+x}}{a_n} = 1 - \frac{a_{n+x}}{a_n}$, und somit

$$a_{n+x} = \frac{a_n}{2}.$$

Um daher die wahrscheinliche Lebensdauer einer Person von n Jahren mittelst der Sterblichkeitstafeln zu finden, suche man darin die Anzahl der im nten Jahre noch Lebenden, nehme davon die Hälfte und suche das Lebensjahr auf, in welchem die Anzahl der noch Lebenden jener Hälfte gleich ist; dieses Jahr zeigt das wahrscheinliche Alter an, welches die Person erreichen wird. Z. B.

Welches ist die wahrscheinliche Lebensdauer einer 27jährigen Person?

Nach der obigen Tabelle ist $a_{27} = 456$, daher $\frac{a_{27}}{2} = 228$. Sucht man nun darin die Zahl 228 auf, so findet man sie bei dem Alter von 58 Jahren. Die wahrscheinliche Lebensdauer einer 27jährigen Person beträgt also $58 - 27 = 31$ Jahre.

§. **291.** Von der wahrscheinlichen Lebensdauer ist die mittlere Lebensdauer zu unterscheiden, welche letztere angibt, wie viele Jahre im Durchschnitt eine njährige Person noch leben würde, wenn alle a_n Personen dieses Alters gleich viele Jahre leben sollten.

Aufgabe. Die mittlere Lebensdauer einer njährigen Person zu bestimmen.

Wenn von a_n njährigen Personen nach 1 Jahre noch a_{n+1}, nach 2, 3, ... Jahren noch a_{n+2}, a_{n+3}, ... am Leben sind, so haben von diesen Personen a_{n+1} jede 1 Jahr, also alle zusammen a_{n+1} Jahre, ferner a_{n+2} Personen jede 1 weiteres Jahr, mithin alle zusammen a_{n+2} Jahre durchlebt, u. s. w. Die Summe von Jahren, welche alle a_n Personen noch zu erleben haben, ist also

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots,$$

welche Reihe natürlich mit der Sterblichkeitstafel abbricht; folglich zeigt

$$\frac{a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots}{a_n}$$

an, wie viele von jenen durchlebten Jahren durchschnittlich auf eine der a_n Personen kommen.

Hier wurde stillschweigend vorausgesetzt, daß die Personen der verschiedenen Altersclassen alle gerade zu Anfange des bezüglichen Jahres gestorben sind, was jedoch nicht richtig ist, weil die Sterbefälle zu verschiedenen Zeiten des Jahres stattfinden. Am wenigsten wird man fehlen, wenn man annimmt, daß durchschnittlich alle mit Tod abgehenden Personen in der Mitte des Jahres sterben, und wenn man daher zu dem obigen Quotienten noch $\frac{1}{2}$ Jahr als weitere Lebensdauer hinzufügt. Hiernach erhält man für die mittlere Lebensdauer m_n einer njährigen Person den Ausdruck

$$m_n = \tfrac{1}{2} + \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots}{a_n}$$

Die mittlere Lebensdauer ist in der obigen Sterblichkeitstafel in der dritten Spalte angegeben.

§. **292.** Die voranstehenden Lehren über die Wahrscheinlichkeit bezüglich der menschlichen Lebensdauer sind von besonderer Wichtigkeit bei der Berechnung von Lebensversicherungen, Leibrenten u. dgl. Zur Erläuterung nachfolgende

Beispiele.

1) Wie groß ist der Betrag A, den ein Vater an eine Versicherungsanstalt einzahlen muß, damit diese seinem 10jährigen Sohne, wenn er das 24ste Jahr erreicht, ein Capital von 2000 fl. auszahlt, wobei 5% Zins zu rechnen und anzunehmen ist, daß die Einzahlung verfällt, falls der Sohn vor dem 24sten Jahre sterben sollte?

2000 fl. nach 14 Jahren zahlbar sind gegenwärtig $\frac{2000}{1\cdot05^{14}} = 1010\cdot14$ fl. werth (§. 260). Wäre gewiß, daß der Sohn das 24ste Jahr erreichen, und daß also die Auszahlung des versicherten Capitals wirklich erfolgen werde, so hätte der Vater 1010·14 fl. einzuzahlen. Da aber dafür nur die Wahrscheinlichkeit $\frac{a_{24}}{a_{10}} = \frac{471}{532} = 0\cdot88534$ vorhanden ist, so hat man die Einzahlung als Einsatz zu einem Unternehmen zu betrachten, das im Falle des Gelingens einen Gewinn im gegenwärtigen Werthe von 1010·14 fl. bringt. Es ist daher nach §. 287

$$A = 0\cdot88534.1010\cdot14 = 894\cdot32 \text{ fl.}$$

2) Wie groß ist der Betrag A, den man an eine Versicherungsanstalt bei p (5) % Zinsen sogleich einzahlen muß, damit eine Person von n (55) Jahren zu Ende jedes Jahres eine Lebensrente r (600 fl.) beziehe?

Würde die Gewißheit bestehen, daß die njährige Person nach 1, 2, 3,... Jahren noch leben werde, so wäre A die Summe der gegenwärtigen Werthe der einzelnen Renten, also, wenn $1 + \frac{p}{100}$ durch e ausgedrückt wird, der Werthe

$$\frac{r}{e'}, \frac{r}{e^{2'}}, \frac{r}{e^{3'}} \cdots$$

Da aber dafür bezüglich nur die Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}, \frac{a_{n+2}}{a_n}, \frac{a_{n+3}}{a_n}, \cdots$$

vorhanden sind, so ist A nur die Summe der mathematischen Erwartungen jener Werthe, also

$$A = \frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{r}{e} + \frac{a_{n+2}}{a_n}\cdot\frac{r}{e^2} + \frac{a_{n+3}}{a_n}\cdot\frac{r}{e^3} + \cdots$$

$$= \frac{r}{a_n}\left\{\frac{a_{n+1}}{e} + \frac{a_{n+2}}{e^2} + \frac{a_{n+3}}{e^3} + \cdots\right\},$$

in welchem Ausdrucke die Reihe innerhalb der Klammern mit der Sterblichkeitstafel abbricht.

Führt man die hier angezeigten Rechnungen für $r = 600$ fl., $n = 55$ und $e = 1\cdot05$ wirklich aus, so ergibt sich $A = 5941\cdot45$ fl.

Da sich die in den Klammern angedeuteten Berechnungen im Allgemeinen sehr weitläufig gestalten, hat man Tabellen entworfen, aus denen die Resultate sehr einfach entnommen werden können.

Kürzer, wenn auch nicht so genau, läßt sich diese Aufgabe auf folgende Art lösen: Da die mittlere Lebensdauer einer 55jährigen Person 14·5 Jahre beträgt, so besteht die Wahrscheinlichkeit, daß der Bezug der Rente durch 14 Jahre stattfinden werde, man hat daher nach §. 263, Aufg. 1

$$A = \frac{600.(1\cdot05^{14} - 1)}{1\cdot05^{14}.0\cdot05} = 5944\cdot9 \text{ fl.},$$

welches Resultat von dem früher erhaltenen nur wenig differirt.

3) Ein 40jähriger Mann will, so lange er lebt, zu Anfange jedes Jahres eine gewisse Prämie r zahlen, um nach seinem Tode den Erben ein Capital von 1000 fl. zu sichern; wie viel beträgt die jährliche Prämie bei 5% Zinsen?

Die mittlere Lebensdauer eines 40jährigen Mannes ist 22·6 Jahre; es ist also die Wahrscheinlichkeit vorhanden, daß er die jährliche Prämie, die vorhinein zu entrichten ist, 23mal einzahlen werde. Man hat daher nach §. 263, Aufg. 2

$$r = \frac{1000.0\cdot05}{1\cdot05^{23} - 1} = 24\cdot14 \text{ fl.}$$

III. Binomischer Lehrsatz.

§. **293.** Unter dem binomischen Lehrsatze versteht man die Entwicklung der Potenz eines Binoms in eine Reihe, welche nach den fallenden Potenzen des ersten und den steigenden Potenzen des zweiten Gliedes des Binoms geordnet ist.

Jede Potenz eines Binoms mit einem ganzen positiven Exponenten kann aus dem Producte mehrerer Binome, welche das erste Glied gemeinschaftlich haben, hergeleitet werden, indem man in denselben auch die zweiten Glieder gleichsetzt. So geht das Product $(a + b)(a + c)(a + d)(a + e)(a + f)$, wenn man $c = d = e = f = b$ setzt, in die Potenz $(a + b)^5$ über.

§. **294.** Das Product mehrerer Binome, welche ein Glied gemeinschaftlich haben.

Um das Product $(a + b)(a + c)(a + d)(a + e) \ldots$ zu entwickeln, multiplicire man zuerst die ersten zwei Binome mit einander, ihr Product mit dem dritten Binom, u. s. w. Man erhält

$$(a + b)(a + c) = a^2 + (b + c)a + bc,$$

$$(a + b)(a + c)(a + d) = a^3 + (b + c + d)a^2 + (bc + bd + cd)a + bcd,$$

$$(a + b)(a + c)(a + d)(a + e) = a^4 + (b + c + d + e)a^3 + (bc + bd + be + cd + ce + de)a^2 + (bcd + bce + bde + cde)a + bcde$$

u. s. w.

Das in diesen Producten herrschende Gesetz ist leicht zu ersehen. Das erste Glied eines jeden Productes ist die sovielte Potenz von a, als Binomialfactoren gegeben sind; in den folgenden Gliedern nehmen die Exponenten von a in natürlicher Ordnung ab, bis im letzten Gliede $a^0 = 1$, d. i. gar kein a erscheint. Der Coefficient des ersten Gliedes ist 1, der Coefficient des zweiten, dritten, vierten, ... Gliedes ist bezüglich die Summe der Combinationen der ersten, zweiten, dritten, ... Classe aus den zweiten Gliedern der Binome, jede dieser Complexionen als ein Product der darin vorkommenden Elemente aufgefaßt.

Gilt nun dieses Bildungsgesetz für ein Product von n Binomialfactoren $a + b$, $a + c$, ... $a + p$, so daß

$$(a + b)(a + c) \ldots (a + p) = a^n + S_1(b..p)a^{n-1} + S_2(b..p)a^{n-2} + .. + S_{n-1}(b..p)a + S_n(b..p)$$

ist, wo allgemein $S_k(b..p)$ die Summe aller Combinationen der kten Classe aus den n Elementen b, c, .. p, die einzelnen Complexionen als Producte aufgefaßt, bezeichnet, so gilt dasselbe Gesetz auch, wenn noch ein neuer Factor $a + q$ dazu tritt. Man erhält nämlich

$$(a + b)(a + c) \ldots (a + p)(a + q) = a^{n+1} + \left\{\begin{matrix} S_1(b..p) \\ +q \end{matrix}\right\}a^n + \left\{\begin{matrix} S_2(b..p) + \\ S_1(b..p).q \end{matrix}\right\}a^{n-1} + .. + \left\{\begin{matrix} S_n(b..p) + \\ S_{n-1}(b..p).q \end{matrix}\right\}a + S_n(b..p).q.$$

Nun ist

$$S_1(b..q) + q = b + c + \ldots + p + q = S_1(b..q).$$

Ferner ist $S_2(b..p)$ die Summe der Amben von b, c, .. p, und $S_1(b..p).q$ die Summe der Amben, welche man erhält, indem man die Elemente b, c, .. p noch mit dem neuen Elemente q verbindet; folglich ist $S_2(b..p) + S_1(b..p).q$

die Summe aller Combinationen der zweiten Classe aus den Elementen b, c, ... p, q; also

$$S_2(b..p) + S_1(b..p).q = S_2(b..q).$$

Ebenso folgt
$$S_3(b..p) + S_2(b..p).q = S_3(b..q),$$
$$S_4(b..p) + S_3(b..p).q = S_4(b..q),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n(b..p) + S_{n-1}(b..p).q = S_n(b..q).$$

Endlich ist $S_n(b..p).q = bc..pq = S_{n+1}(b..q).$

Man hat daher

$$(a+b)(a+c)\ldots(a+p)(a+q)$$
$$= a^{n+1} + S_1(b..q)\,a^n + S_2(b..q)\,a^{n-1} + ..$$
$$+ S_n(b..q)\,a + S_{n+1}(b..q).$$

Das angeführte Bildungsgesetz gilt also für ein Product von $n+1$ Binomialfactoren, wenn es für ein Product von n solchen Factoren richtig ist. Nun gilt es nach dem Obigen für 2, 3, 4 Factoren, folglich gilt es auch für 5, folglich auch für 6 Factoren .., mithin allgemein für jede Zahl von Factoren.

§. 295. Die Potenz eines Binoms.

Setzt man in dem Producte von n Binomialfactoren

$$(a+b)(a+c)(a+d)\ldots(a+p)$$
$$= a^n + S_1(b..p)\,a^{n-1} + S_2(b..p)\,a^{n-2} + S_3(b..p)\,a^{n-3} + \ldots$$
$$+ S_{n-1}(b..p)\,a + S_n(b..p)$$

die zweiten Glieder $c = d = \ldots = p = b$, so wird

$$(a+b)(a+c)(a+d)\ldots(a+p) = (a+b)^n,$$

ferner

$$S_1(b..p) = b + c + .. + p = b + b .. + b = \binom{n}{1} b,$$

$$S_2(b..p) = bc + bd + .. + op = b^2 + b^2 + .. + b^2 = \binom{n}{2} b^2,$$

$$S_3(b..p) = bcd + bce + .. + mop = b^3 + b^3 + .. + b^3 = \binom{n}{3} b^3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_{n-1}(b..p) = bcd..mo + .. = b^{n-1} + b^{n-1} + .. + b^{n-1} = \binom{n}{n-1} b^{n-1},$$

$$S_n(b..p) = bcd\,..\,mop = b^n = \binom{n}{n} b^n.$$

Durch Substitution in den obigen Ausdruck erhält man daher für den binomischen Lehrsatz die Formel

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \ldots$$
$$+ \binom{n}{n-1} a\, b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n.$$

In dieser Formel herrscht folgendes Bildungsgesetz:

1. Die Potenzen des ersten Gliedes a des Binoms erscheinen fallend, jene des zweiten Gliedes b steigend geordnet. Der Exponent von a ist im ersten Gliede gleich dem Potenzexponenten n des Binoms, in jedem folgenden Gliede um 1 kleiner und wird im letzten Gliede = 0, woraus zugleich folgt, daß die ganze Reihe ein Glied mehr hat, als der Potenzexponent n des Binoms Einheiten enthält. Die Exponenten von b nehmen umgekehrt von 0 bis n zu. Die Summe der Exponenten von a und b ist in jedem Gliede gleich n.

2. Der Binomialcoefficient des ersten Gliedes ist 1; der Coefficient des zweiten, dritten, vierten, ... (k+1)ten Gliedes ist bezüglich die erste, zweite, dritte, ... kte getheilte fallende Factorielle von n.

3. Ist das zweite Glied b des Binoms negativ, so wird das zweite, vierte, .. überhaupt jedes geradstellige Glied der Reihe negativ; man hat daher

$$(a - b)^n = a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} b^n.$$

Hiernach ist in der Binomialreihe $(a \pm b)^n$ allgemein das $(k+1)$te Glied gleich $(-1)^k \binom{n}{k} a^{n+k} b^k$.

Beispiele.

1) $(x + a)^6 =$

$$= x^6 + \binom{6}{1} a x^5 + \binom{6}{2} a^2 x^4 + \binom{6}{3} a^3 x^3 + \binom{6}{4} a^4 x^2 + \binom{6}{5} a^5 x + a^6$$
$$= x^6 + 6ax^5 + 15a^2x^4 + 20a^3x^3 + 15a^4x^2 + 6a^5x + a^6.$$

2) $(3x - 2y)^4 =$

$$= (3x)^4 - \binom{4}{1}.(3x)^3.2y + \binom{4}{2}(3x)^2.(2y)^2 - \binom{4}{3}.3x.(2y)^3 + (2y)^4$$
$$= 81x^4 - 4.27x^3.2y + 6.9x^2.4y^2 - 4.3x.8y^3 + 16y^4$$
$$= 81x^4 - 216x^3y + 216x^2y^2 - 96xy^3 + 16y^4.$$

3) Das 7te Glied von $(2x^2 - 3y)^9$ ist $\binom{9}{6}.(2x^2)^{9-6}.(-3y)^6$

$$= 84.8x^6.729y^6 = 489888x^6y^6.$$

§. **296.** Wir lassen nun auch noch eine zweite Entwicklung des binomischen Lehrsatzes folgen, die unmittelbar auf der Combinationslehre beruht.

Multipliciren wir a+b mit a+b, das Product wieder mit a+b, u. s. w., schreiben aber dabei, damit das Bildungsgesetz leichter erkannt werde, in jedem Theilproducte zuerst den Multiplicator an und machen in den Resultaten vorläufig auch von der Potenzbezeichnung für die gleichen Factoren keinen Gebrauch. Es ist

$$(a+b)^1 = a + b$$
$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa + ab \left.\right\} + ba + bb$$
$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = aaa + aab + aba + abb \left.\right\} + baa + bab + bba + bbb$$

u. s. w.

Vergleicht man diese Resultate mit den Variationen mit Wiederholungen aus a und b in §. 276, 2, so sieht man sogleich, daß die Bestandtheile der 2ten Potenz des Binoms a + b aus den Gliedern desselben auf gleiche Weise gebildet werden, wie dort aus den Elementen a und b die Variationen der 2ten Classe mit Wiederholungen zusammengestellt wurden, daß daher $(a+b)^2$ gleich der Summe aller Variationen der 2ten Classe mit Wiederholungen aus den Elementen a und b ist, wenn man jede Variation als Product betrachtet; daß ebenso $(a+b)^3$ die Summe aller Variationen der 3ten Classe mit Wiederholungen von a und b ist, jede Variation als Product aufgefaßt. Da auch die Entwicklung jeder höheren Potenz von a + b, wenn sie auf die angedeutete Weise geschieht, mit dem Bildungsgesetze der Variationen der entsprechenden Classe mit Wiederholungen aus a und b in Uebereinstimmung bleibt, so folgt, daß allgemein $(a+b)^n$ die Summe aller Variationen der nten Classe mit Wiederholungen aus den Elementen a und b ist, wenn man jede Variation als Product auffaßt.

Die Variationen erhält man aber auch, wenn man die Combinationen derselben Classe bildet und diese permutirt. Die Combinationen der nten Classe mit Wiederholungen aus den Elementen a und b, als Producte betrachtet, sind nach §. 272, Zusatz

$$a^n,\ a^{n-1}b,\ a^{n-2}b^2,\ ..\ a^{n-k}b^k,\ ..\ ab^{n-1},\ b^n.$$

Diese Combinationen müßten permutirt und die dadurch entstehenden Variationen als Producte addirt werden. Da aber alle Variationen, die aus der Permutirung derselben Combination hervorgehen, dieselben Elemente enthalten und somit als Producte betrachtet der Combination selbst gleich sind, so braucht man die Permutationen nicht wirklich zu bilden, sondern wird, um die Summe aller Variationen zu erhalten, jede Combination sogleich mit ihrer Permutationszahl multipliciren und dann alle diese Producte addiren.

Die Permutationszahlen für die oben aufgestellten Combinationen sind nun nach §. 270, 3 folgeweise

$$1,\ \binom{n}{1},\ \binom{n}{2},\ ..\ \binom{n}{k},\ ..\ \binom{n}{n-1},\ 1.$$

Es ergibt sich sonach wie in §. 295,

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ..\ + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

Zusatz. Genau auf dieselbe Art, wie hier die Binomialformel entwickelt wurde, kann auch der polynomische Lehrsatz, d. i. eine Formel für $(a+b+c+d+..)^n$ abgeleitet werden, da diese Potenz der Summe aller Variationen der nten Classe mit Wiederholungen aus den Elementen a, b, c, d, .. gleich ist, wenn man jede Variation als Product auffaßt. Um daher die nte Potenz eines gegebenen Polynoms zu erhalten, darf man nur aus den Gliedern desselben die Combinationen der nten Classe mit Wiederholungen bilden, jede derselben als Product betrachtet mit der zugehörigen Permutationszahl multipliciren und die erhaltenen Producte addiren.

§. 297. Beziehungen zwischen den Binomialcoefficienten.

1. Je zwei vom Anfange und vom Ende gleich weit abstehende Binomialcoefficienten sind einander gleich.

Der $(k+1)$te Binomialcoefficient vom Anfange ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n\,(n-1)\ldots(n-k+2)\,(n-k+1)}{1.2\ldots\ldots(k-1).k}.$$

Der $(k+1)$te Binomialcoefficient vom Ende ist der $(n-k+1)$te vom Anfange, also

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n\,(n-1)\ldots(k+2)\,(k+1)}{1.2\ldots(n-k-1)\,(n-k)}.$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner des ersten Bruches mit

$$(k+1)\,(k+2)\ \ldots\ (n-k-1)\,(n-k),$$

so erhält man

$$\binom{n}{k} = \frac{n\,(n-1)\,..\,(n-k+1)\,(n-k)\ldots(k+2)\,(k+1)}{1.2\ldots k\,(k+1)\ldots(n-k-1)\,(n-k)};$$

folglich ist

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Zusatz. Aus $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ergibt sich für $k = 0$

$$\binom{n}{o} = \binom{n}{n} = 1.$$

2. Die Summe aus dem kten und $(k+1)$ten Binomialcoefficienten einer Potenz ist gleich dem $(k+1)$ten Binomialcoefficienten der um 1 höheren Potenz.

Es ist $\binom{n}{k-1} = \frac{n\,(n-1).....(n-k+3)\,(n-k+2)}{1.2.....(k-2)\,(k-1)}$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n\,(n-1)\,....\,(n-k+2)\,(n-k+1)}{1.2.....(k-1).k};$$ daher

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n\,(n-1)\,....\,(n-k+2)}{1.2.....(k-1)\,k}\{k + (n-k+1)\}$$

$$= \frac{(n+1)\,n\,(n-1)...(n-k+2)}{1.2.3.....k} = \binom{n+1}{k}.$$

Mittelst dieses Satzes kann man aus den Binomialcoefficienten irgend einer Potenz jene der nächst höheren Potenz durch bloße Addition ableiten. Man erhält dadurch für die auf einander folgenden Potenzen eines Binoms folgende Coefficienten (Pascal'sches Dreieck):

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
u. s. w.

3. Die Summe aus den $(k+1)$ten Binomialcoefficienten der kten, $(k+1)$ten, $(k+2)$ten, ...bis nten Potenz ist gleich dem $(k+2)$ten Coefficienten der $(n+1)$ten Potenz.

Aus dem vorhergehenden Satze folgt $\binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}$; daher ist

$$\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1} - \binom{k}{k+1},$$

$$\binom{k+1}{k} = \binom{k+2}{k+1} - \binom{k+1}{k+1},$$

$$\binom{k+2}{k} = \binom{k+3}{k+1} - \binom{k+2}{k+1},$$

. . . . . .

$$\binom{n-1}{k} = \binom{n}{k+1} - \binom{n-1}{k+1},$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}.$$

Addirt man diese Gleichungen, so ergibt sich, da sich die Glieder auf der zweiten Seite paarweise aufheben und $\binom{k}{k+1} = 0$ ist, die Gleichung

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + .. + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Z. B. für $k = 2$ ist

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + .. + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

4. Die absolute Summe aller Binomialcoefficienten für die nte Potenz ist gleich 2^n.

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}.$$

5. Die algebraische Summe der abwechselnd positiven und negativen Binomialcoefficienten ist gleich Null.

$$0 = (1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}.$$

§. **298.** Die Binomialreihe für ganze negative Exponenten.

1. Die Binomialformel ist, da n als eine ganze positive Zahl vorausgesetzt wurde, bisher nur für ganze positive Exponenten erwiesen worden.

Es läßt sich nun zeigen, daß sie auch für negative Exponenten giltig ist.

Wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet, so ist

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \ldots$$

Drückt man diese von n abhängige Reihe, welchen Werth auch immer n haben möge, durch R_n (Reihe n) aus, so ist

$$R_n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \ldots$$

Ist R_p eine zweite Reihe, welche auf dieselbe Art von p abhängt, wie die frühere von n, wo p was immer für eine Zahl bedeutet, so hat man

$$R_p = 1 + \binom{p}{1} x + \binom{p}{2} x^2 + \binom{p}{3} x^3 + \ldots$$

Multiplicirt man die beiden Reihen R_n und R_p mit einander, so wird das Product nach den Gesetzen der Multiplication auf einerlei Art gebildet, was auch immer für Werthe n und p haben mögen; man braucht also nur die Beschaffenheit des Productes für den Fall zu kennen, wenn n und p ganze positive Zahlen bedeuten, weil dasselbe Bildungsgesetz auch in den übrigen Fällen stattfinden muß. Sind aber n und p ganze positive Zahlen, so ist

$$R_n = (1+x)^n$$
$$R_p = (1+x)^p$$

daher $R_n \cdot R_p = (1+x)^{n+p}$.

Da nun $n+p$ eine ganze Zahl vorstellt, so ist

$$(1+x)^{n+p} = 1 + \binom{n+p}{1} x + \binom{n+p}{2} x^2 + \ldots = R_{n+p},$$

somit

$$R_n \cdot R_p = R_{n+p},$$

welcher Ausdruck nach dem oben Gesagten für beliebige Werthe von n und p giltig sein muß.

Setzt man in diesem Ausdrucke $p = -n$, so ist

$$R_n \cdot R_{-n} = R_{n-n} = R_0.$$

Aber $$R_0 = 1 + \binom{0}{1} x + \binom{0}{2} x^2 + \ldots = 1,$$

daher $$R_n \cdot R_{-n} = 1, \text{ und } R_{-n} = \frac{1}{R_n}.$$

Bedeutet nun n eine positive ganze Zahl, so ist

$$R_n = (1+x)^n, \text{ daher } R_{-n} = \frac{1}{(1+x)^n} = (1+x)^{-n}.$$

Aber nach der obigen Bezeichnung ist

$$R_{-n} = 1 + \binom{-n}{1} x + \binom{-n}{2} x^2 + \binom{-n}{3} x^3 + \ldots, \text{ daher}$$

$$(1+x)^{-n} = 1 + \binom{-n}{1} x + \binom{-n}{2} x^2 + \binom{-n}{3} x^3 + \ldots,$$

wo $-n$ jede beliebige negative ganze Zahl bedeuten kann.

Daraus folgt, daß die durch R_n ausgedrückte Reihe auch dann, wenn n eine negative ganze Zahl ist, die Potenz $(1+x)^n$ vorstellt.

Die letzte Reihe kann man auch so darstellen:

$$(1+x)^{-n} = 1 - \frac{n}{1}.x + \frac{n\,(n+1)}{1.2}.x^2 - \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1.2.3}.x^3 + \ldots$$

2. Ist der Exponent n eine ganze positive Zahl, so muß die Entwicklungsreihe mit dem $(n+1)$ten Gliede, welches $\binom{n}{n} x^n$ ist, abbrechen, da der Coefficient $\binom{n}{n+1}$ des nächstfolgenden Gliedes und die aller folgenden Glieder gleich Null werden. Ist dagegen n eine negative Zahl, so wird kein Glied kommen, dessen Coefficient gleich Null wäre; man erhält daher eine unendliche Reihe, und diese ist nur dann brauchbar, wenn sie convergirt. Untersucht man die Bedingung ihrer Convergenz nach §. 266, so findet man als Quotienten zweier auf einander folgender Glieder

$$\frac{A_{r+1}}{A_r} = -\frac{n+r-1}{r}.x = -\left(\frac{n-1}{r}+1\right)x.$$

Der Quotient $\frac{A_{r+1}}{A_r}$ nähert sich nun, wenn r unendlich wächst, ohne Ende der Grenze $-x$; die Reihe convergirt also, sobald $x < 1$ ist.

Zusatz. Da $(a+b)^{-n} = a^{-n}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-n}$ ist, so hat man

$$(a+b)^{-n} = a^{-n}\left\{1 + \binom{-n}{1}\cdot\frac{b}{a} + \binom{-n}{2}\cdot\frac{b^2}{a^2} + \binom{-n}{3}\cdot\frac{b^3}{a^3} + \ldots\right\}$$
$$= a^{-n} + \binom{-n}{1} a^{-n-1} b + \binom{-n}{2} a^{-n-2} b^2 + \binom{-n}{3} a^{-n-3} b^3 + \ldots,$$

welche Reihe für $\frac{b}{a} < 1$ oder $b < a$ convergirt.

Beispiele.

1) $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$
2) $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$
3) $(a+b)^{-2} = a^{-2} - 2a^{-3} b + 3a^{-4} b^2 - 4a^{-5} b^3 + \ldots$

§. 299. Die Binomialreihe für gebrochene Exponenten.

1. Haben R_n und R_p die dafür in §. 298 eingeführte Bedeutung, so ist

$$R_n \,.\, R_p = R_{n+p}.$$

Es seien nun R_q, R_r, R_s, ... ähnliche Reihen wie R_n und R_p, so hat man

$$R_n \,.\, R_p \,.\, R_q = R_{n+p} \,.\, R_q = R_{n+p+q},$$
$$R_n \,.\, R_p \,.\, R_q \,.\, R_r = R_{n+p+q} \,.\, R_r = R_{n+p+q+r};$$

allgemein

$$R_n \,.\, R_p \,.\, R_q \,.\, R_r \,.\, R_s \ldots = R_{n+p+q+r+s+\ldots}$$

Setzt man $n = p = q = r = s = \ldots$, so ist

$$R_n \,.\, R_n \,.\, R_n \,.\, R_n \,.\, R_n \ldots = R_{n+n+n+n+n+\ldots},$$

oder wenn die Anzahl solcher Factoren k ist, wo dann k offenbar eine ganze positive Zahl vorstellt,

$$(R_n)^k = R_{kn}.$$

Da n was immer für eine Zahl bedeuten kann, so sei $n = \frac{h}{k}$, wo h eine ganze Zahl und zu k eine relative Primzahl ist; man erhält

$$\left(R_{\frac{h}{k}}\right)^k = R_h.$$

Nun ist für den Fall, wo h eine ganze Zahl bedeutet, nach §§. 295 und 298 $R_h = (1+x)^h$, daher ist auch

$$\left(R_{\frac{h}{k}}\right)^k = (1+x)^h, \text{ und } R_{\frac{h}{k}} = (1+x)^{\frac{h}{k}}.$$

Vermöge der eingeführten Bezeichnung ist aber

$$R_{\frac{h}{k}} = 1 + \binom{\frac{h}{k}}{1} x + \binom{\frac{h}{k}}{2} x^2 + \binom{\frac{h}{k}}{3} x^3 + \ldots, \text{ also auch}$$

$$(1+x)^{\frac{h}{k}} = 1 + \binom{\frac{h}{k}}{1} x + \binom{\frac{h}{k}}{2} x^2 + \binom{\frac{h}{k}}{3} x^3 + \ldots,$$

wo $\frac{h}{k}$ jeden positiven oder negativen Bruch bedeuten kann.

Daraus folgt, daß die durch R_n ausgedrückte Reihe auch dann, wenn n einen Bruch $\frac{h}{k}$ bedeutet, die Potenz $(1+x)^n$ vorstellt.

Die letzte Reihe kann man auch so darstellen:

$$(1+x)^{\frac{h}{k}} = 1 + \frac{h}{k} \cdot x + \frac{h\,(h-k)}{2.k^2} \cdot x^2 + \frac{h\,(h-k)\,(h-2k)}{2.3.k^3} \cdot x^3 + \ldots$$

2. Die Entwicklungsreihe für $(1+x)^{\frac{h}{k}}$ ist unendlich, weil h und k relative Primzahlen sind und folglich keiner der Binomialcoefficienten Null werden kann; sie ist daher nur brauchbar, wenn sie convergirt.

Da sich der Quotient zweier auf einander folgender Glieder

$$\frac{A_{r+1}}{A_r} = \frac{h-(r-1)\,k}{rk} \cdot x = \left(\frac{h+k}{rk} - 1\right) x$$

bei dem unendlichen Wachsen von r ohne Ende der Grenze $-x$ nähert, so ist nach §. 266, 1 die Reihe convergent, wenn $x < 1$ ist.

Zusatz. Da $(a+b)^{\frac{h}{k}} = a^{\frac{h}{k}} \left(1 + \frac{b}{a}\right)^{\frac{h}{k}}$ ist, so hat man

$$(a+b)^{\frac{h}{k}} = a^{\frac{h}{k}} \left\{1 + \binom{\frac{h}{k}}{1} \cdot \frac{b}{a} + \binom{\frac{h}{k}}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \binom{\frac{h}{k}}{3} \cdot \frac{b^3}{a^3} + \ldots\right\}$$

$$= a^{\frac{h}{k}} + \binom{\frac{h}{k}}{1} \cdot a^{\frac{h}{k}-1} b + \binom{\frac{h}{k}}{2} \cdot a^{\frac{h}{k}-2} b^2 + \ldots,$$

welche Reihe für $\frac{b}{a} < 1$ oder $b < a$ convergirt.

Beispiele.

1) $$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1 \cdot -1}{2.2^2} \cdot x^2 + \frac{1 \cdot -1 \cdot -3}{2.3.2^3} \cdot x^3 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \ldots$$

2) $$(a \pm b)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}} \left(1 \pm \frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}} \left\{1 \pm \binom{\frac{1}{m}}{1} \cdot \frac{b}{a} + \binom{\frac{1}{m}}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2} \pm \binom{\frac{1}{m}}{3} \cdot \frac{b^3}{a^3} + \ldots\right\};$$

oder

$$\sqrt[m]{a \pm b} = a^{\frac{1}{m}} \left\{1 \pm \frac{1}{m} \cdot \frac{b}{a} - \frac{m-1}{2.m^2} \cdot \frac{b^2}{a^2} \pm \frac{(m-1)\,(2m-1)}{2.3.m^3} \cdot \frac{b^3}{a^3} \ldots\right\}.$$

Mittelst dieser Formel kann man eine irrationale Wurzel $\sqrt[m]{A}$ annäherungsweise bestimmen, wenn man $A = a^m + x$ oder $A = a^m - x$ setzt, wobei a^m so zu wählen ist, daß es der Zahl A möglichst nahe kommt.

3) $\sqrt{79} = \sqrt{81 - 2} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{81}} = 9\left(1 - \frac{2}{81}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= 9 \cdot \left\{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{81} - \frac{1}{8}\left(\frac{2}{81}\right)^2 - \frac{1}{16}\left(\frac{2}{81}\right)^3 - \ldots\right\}$

$= 9 \cdot (1 - 0{\cdot}0123456 - 0{\cdot}0000762 - 0{\cdot}0000009 - \ldots)$

$= 8{\cdot}88819\ldots$

IV. Arithmetische Reihen höherer Ordnung.

Differenzreihen.

§. 300. Wenn man in einer Reihe von Zahlen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n, a_{n+1}, \ldots,$$

welche nach einem bestimmten Gesetze auf einander folgen, jedes Glied von dem nächstfolgenden subtrahirt, so erhält man eine Reihe von Differenzen:

$$a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots a_{n+1} - a_n,$$

welche die erste Differenzreihe der gegebenen Reihe heißt, während diese selbst die Hauptreihe genannt wird. Die Glieder der ersten Differenzreihe bezeichnet man durch

$$\triangle a_1, \triangle a_2, \triangle a_3, \ldots \triangle a_n, \ldots$$

so daß allgemein $\triangle a_n = a_{n+1} - a_n$ ist.

Bildet man ebenso aus den Gliedern der ersten Differenzreihe die Differenzen

$$\triangle a_2 - \triangle a_1, \triangle a_3 - \triangle a_2, \triangle a_4 - \triangle a_3, \ldots \triangle a_{n+1} - \triangle a_n, \ldots$$

und bezeichnet diese folgeweise durch

$$\triangle^2 a_1, \quad \triangle^2 a_2, \quad \triangle^2 a_3, \quad \ldots \quad \triangle^2 a_n, \quad \ldots$$

so heißt diese Reihe die zweite Differenzreihe der gegebenen Hauptreihe. Auf dieselbe Art erhält man die dritte, vierte,... Differenzreihe.

Die Ableitung der Differenzreihen ist aus folgendem Schema ersichtlich:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 \quad a_5 \quad a_6 \ldots \\ & \triangle a_1 & & \triangle a_2 & & \triangle a_3 & \triangle a_4 \quad \triangle a_5 \ldots \\ & & \triangle^2 a_1 & & \triangle^2 a_2 & & \triangle^2 a_3 \quad \triangle^2 a_4 \ldots \\ & & & \triangle^3 a_1 & & \triangle^3 a_2 & \triangle^3 a_3 \ldots \end{array}$$

u. s. w.

wo allgemein $\triangle^m a_n$ das nte Glied der mten Differenzreihe bedeutet.

§. 301. Aufgaben. 1. Das allgemeine Glied a_n der Hauptreihe durch das erste Glied derselben und durch die ersten Glieder der aufeinander folgenden Differenzreihen auszudrücken.

Aus $a_n - a_{n-1} = \triangle a_{n-1}$ folgt allgemein $a_n = a_{n-1} + \triangle a_{n-1}$. Es ist daher

$$a_2 = a_1 + \triangle a_1.$$

Da die erste Differenzreihe in Beziehung auf die folgenden Differenzreihen auch als eine Hauptreihe zu betrachten ist, so können die für die Hauptreihe gefundenen Gesetze auch auf die erste Differenzreihe angewendet werden. Es ist demnach $\triangle a_2 = \triangle a_1 + \triangle^2 a_1$, folglich

$$a_3 = a_2 + \triangle a_2 = a_1 + 2\triangle a_1 + \triangle^2 a_1.$$

Ebenso ist

$$\triangle a_3 = \triangle a_1 + 2\triangle^2 a_1 + \triangle^3 a_1;$$ folglich

$$a_4 = a_3 + \triangle a_3 = a_1 + 3\triangle a_1 + 3\triangle^2 a_1 + \triangle^3 a_1.$$

Aus den für a_2, a_3, a_4 erhaltenen Ausdrücken erhellet sogleich das Bildungsgesetz derselben. Es sei nun dasselbe Gesetz für a_n giltig, so hat man

I) $\ldots a_n = a_1 + \binom{n-1}{1}\triangle a_1 + \binom{n-1}{2}\triangle^2 a_1 + \ldots + \binom{n-1}{m}\triangle^m a_1 + \ldots;$

dann ist auch

$$\triangle a_n = \triangle a_1 + \binom{n-1}{1}\triangle^2 a_1 + \ldots + \binom{n-1}{m-1}\triangle^m a_1 + \ldots$$

Durch Addition dieser Ausdrücke erhält man, da $a_n + \triangle a_n = a_{n+1}$ ist, mit Rücksicht auf §. 297, 2

$$a_{n+1} = a_1 + \binom{n}{1}\triangle a_1 + \binom{n}{2}\triangle^2 a_1 + \ldots + \binom{n}{m}\triangle^m a_1 + \ldots$$

Das Gesetz ist also für a_{n+1} wahr, wenn es für a_n gilt; nun ist seine Giltigkeit für a_4 bewiesen worden, also gilt es auch für a_5, a_6 u. s. f. für alle Glieder.

2. Das Summenglied s_n, d. i. die Summe der ersten n Glieder der Hauptreihe, durch das erste Glied derselben und durch die ersten Glieder der Differenzreihen auszudrücken.

Es ist $s_2 = a_1 + a_2 = a_1 + (a_1 + \triangle a_1) = 2a_1 + \triangle a_1;$

$$s_3 = s_2 + a_3 = (2a_1 + \triangle a_1) + (a_1 + 2\triangle a_1 + \triangle^2 a_1)$$
$$= 3a_1 + 3\triangle a_1 + \triangle^2 a_1;$$

$$s_4 = s_3 + a_4 = 3a_1 + 3\triangle a_1 + \triangle^2 a_1$$
$$+ a_1 + 3\triangle a_1 + 3\triangle^2 a_1 + \triangle^3 a_1$$
$$= 4a_1 + 6\triangle a_1 + 4\triangle^2 a_1 + \triangle^3 a_1, \text{ u. s. w.}$$

allgemein

II) $\ldots s_n = \binom{n}{1}a_1 + \binom{n}{2}\triangle a_1 + \binom{n}{3}\triangle^2 a_1 + \ldots + \binom{n}{m+1}\triangle^m a_1 + \ldots$

Die Induction kann, wie oben für a_n, leicht vervollständiget werden.

Zusatz. Der Ausdruck I) für a_n bricht im ungünstigsten Falle mit dem Gliede $\binom{n-1}{n-1}\triangle^{n-1} a_1$ ab, weil die späteren Glieder wegen $\binom{n-1}{n} = \binom{n-1}{n+1} = \ldots = 0$ verschwinden; der Ausdruck II) für s^n muß ebenfalls mit dem Gliede $\binom{n}{n}\triangle^{n-1} a_1$ abbrechen, da $\binom{n}{n+1} = \binom{n}{n+2} = \ldots = 0$ ist. Beide Ausdrücke können aber auch früher abbrechen, wenn die Glieder einer Differenzreihe gleich Null sind.

Arithmetische Reihen höherer Ordnung.

§. **302.** Besitzt eine Reihe die Eigenschaft, daß die Glieder ihrer mten Differenzreihe einander gleich sind, so heißt sie eine arithmetische Reihe der mten Ordnung.

So bilden die Quadrate der natürlichen Zahlen eine arithmetische Reihe der zweiten Ordnung; es ist nämlich

1 4 9 16 25 36 . . .
3 5 7 9 11 . . .
2 2 2 2 . . .

Die arithmetischen Progressionen (§. 253) sind arithmetische Reihen der ersten Ordnung.

§. **303. Aufgabe.** Das allgemeine Glied a_n und das Summenglied s_n einer arithmetischen Reihe zu finden.

Ist die arithmetische Reihe $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n, \ldots$ von der mten Ordnung, so ist für dieselbe $\triangle^m a_n$ constant, folglich $\triangle^{m+1} a_1 = \triangle^{m+2} a_1 = \ldots = 0$. Man erhält daher aus den Formeln I) und II) in §. 301

1) .. $a_n = a_1 + \binom{n-1}{1} \triangle a_1 + \binom{n-1}{2} \triangle^2 a_1 + \ldots + \binom{n-1}{m} \triangle^m a_1$,

2) .. $s_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} \triangle a_1 + \binom{n}{3} \triangle^2 a_1 + \ldots + \binom{n}{m+1} \triangle^m a_1$.

Es sei z. B. a_n und s_n für die Reihe 1, 5, 11, 22, 41, 71, ... zu suchen. Man hat

1	5	11	22	41	71	
	4	6	11	19	30	
		2	5	8	11	
			3	3	3	

Die Reihe ist also von der dritten Ordnung, und zwar ist $a_1 = 1$, $\triangle a_1 = 4$, $\triangle^2 a_1 = 2$, $\triangle^3 a_1 = 3$; daher

$$a_n = 1 + 4\,(n-1) + (n-1)\,(n-2) + \frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{2}$$
$$= \frac{n^3 - 4n^2 + 13n - 8}{2},$$

und

$$s_n = n + 2n\,(n-1) + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3} + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{8}$$
$$= \frac{3n^4 - 10n^3 + 57n^2 - 26n}{24}.$$

Zusatz. Als Anfangsglied einer arithmetischen Reihe kann statt a_1 auch jedes andere Glied der Reihe, z. B. a_k, betrachtet werden; dann bedeutet a_{k+n} das nte Glied nach dem neuen Anfangsgliede a_k, somit das $(n+1)$te Glied der Reihe, deren erstes Glied a_k ist. In diesem Falle gehen die Formeln 1) und 2) in die folgenden über:

$$a_{k+n} = a_k + \binom{n}{1} \triangle a_k + \binom{n}{2} \triangle^2 a_k + \ldots + \binom{n}{m} \triangle^m a_k, \text{ und}$$

$$s_{k+n} = \binom{n+1}{1} a_k + \binom{n+1}{2} \triangle a_k + \binom{n+1}{3} \triangle^2 a_k + \ldots + \binom{n+1}{m+1} \triangle^m a_k.$$

§. **304.** 1. Entwickelt man in dem allgemeinen Gliede einer arithmetischen Reihe der mten Ordnung

$$a_n = a_1 + \binom{n-1}{1} \triangle a_1 + \binom{n-1}{2} \triangle^2 a_1 + .. + \binom{n-1}{m} \triangle^m a_1$$

die Binomialcoefficienten nach den steigenden Potenzen von n, so nimmt dasselbe folgende Form an:

$$a_n = A + Bn + Cn^2 + \ldots + Vn^m,$$

wo A, B, C, .. V bloß von $a_1, \triangle a_1, .. \triangle^m a_1$ abhängen.

2. Umgekehrt ist jeder Ausdruck von der Form

$$a_n = A + Bn + Cn^2 + \ldots + Vn^m,$$

wo A, B, C, .. V von n unabhängig sind und mindestens V von Null verschieden ist, das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe der mten Ordnung.

Man darf, um dieses zu beweisen, nur aus a_n die auf einander folgenden Differenzen entwickeln und zeigen, daß $\triangle^m a_n$ eine constante Zahl ist.

Man hat zunächst

$$\triangle a_n = a_{n+1} - a_n = B\,\{(n+1) - n\} + C\,\{(n+1)^2 - n^2\}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots + V\,\{(n+1)^m - n^m\},$$

woraus ersichtlich ist, daß in $\triangle a_n$ die Potenz n^m wegfällt. Ebenso wird auch bei der Entwicklung der höheren Differenzen die höchste Potenz von n in jeder folgenden Differenz um einen Grad niedriger ausfallen als in der vorhergehenden. Die auf einander folgenden Differenzen erhalten demnach folgende Form:

$$\triangle a_n = A_1 + B_1 n + C_1 n^2 + .. + T_1 n^{m-2} + U_1 n^{m-1},$$
$$\triangle^2 a_n = A_2 + B_2 n + C_2 n^2 + .. + T_2 n^{m-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\triangle^{m-1} a_n = A_{m-1} + B_{m-1} n,$$
$$\triangle^m a_n = A_m,$$

wo $A_1, A_2, .., B_1, B_2, ..$ u. s. w. von n unabhängig sind, und es ist daher $\triangle^m a_n = A_m$ eine constante Zahl.

Interpoliren der Reihen.

§. **305.** Sind die Zahlen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n, \ldots \quad 1)$$

Glieder einer arithmetischen Reihe mter Ordnung und substituirt man in dem allgemeinen Gliede (§. 304, 1) derselben

$$a_n = A + Bn + Cn^2 + \ldots + Vn^m$$

statt n die Zahl $1 + np$, wo p constant bleibt, n aber nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3, ... annimmt, so bilden auch die dadurch erhaltenen Zahlen

$$a_1, a_{1+p}, a_{1+2p}, a_{1+3p}, \ldots a_{1+np}, \ldots \quad 2)$$

eine arithmetische Reihe der mten Ordnung.

Denn $a_{1+np} = A + B(1+np) + C(1+np)^2 + .. + V(1+np)^m$, oder, wenn man den Ausdruck nach den Potenzen von n ordnet,

$$a_{1+np} = a + bn + cn^2 + \ldots + vn^m,$$

wo a, b, c, .. v von n unabhängig sind und v von Null verschieden ist. Dieser Ausdruck aber ist nach §. 304, 2 das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe er mten Ordnung.

1. Ist p eine ganze Zahl, so sind die Glieder der neuen Reihe

$$a_1, a_{1+p}, a_{1+2p}, a_{1+3p}, \ldots a_{1+\nu p}, \ldots$$

zugleich Glieder der ursprünglichen Reihe 1), die sich ergeben, indem man in der letzteren, vom ersten Gliede angefangen, jedes pte Glied heraushebt.

2. Ist p ein Bruch von der Form $\frac{1}{r+1}$, wo r eine ganze Zahl bedeutet, so stellt die neue Reihe

$$a_1, a_{1+\frac{1}{r+1}}, a_{1+\frac{2}{r+1}}, \ldots a_{1+\frac{r}{r+1}}, a_2, a_{2+\frac{1}{r+1}}, \ldots$$

Zahlen vor, die man erhält, indem man zwischen je zwei Glieder der Reihe 1) vom ersten Gliede angefangen, r neue Glieder einschaltet, welche sich an die vorigen zu einer arithmetischen Reihe derselben Ordnung anschließen.

§. **306.** Aufgabe. Zwischen je zwei Glieder einer arithmetischen Reihe der mten Ordnung r Glieder zu interpoliren.

Man substituire in dem allgemeinen Gliede

$$a_n = a_1 + \binom{n-1}{1} \triangle a_1 + \binom{n-1}{2} \triangle^2 a_1 + \ldots + \binom{n-1}{m} \triangle^m a_1$$

statt n die Zahl $1 + \frac{n}{r+1}$, wodurch man erhält:

$$a_{1+\frac{n}{r+1}} = a_1 + \frac{n}{r+1} \triangle a_1 - \frac{n(r+1-n)}{2.(r+1)^2} \triangle^2 a_1 + \ldots$$

und setze in dem letzten Ausdrucke für n nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3 ... r, ...

Die Richtigkeit der Auflösung ist in §. 305 begründet.

Zusatz. Sind zwischen zwei bestimmte auf einander folgende Glieder a_k und a_{k+1} r Glieder einzuschalten, so bedient man sich der in dem Zusatze zu §. 303 abgeleiteten Formel

$$a_{k+n} = a_k + \binom{n}{1} \triangle a_k + \binom{n}{2} \triangle^2 a_k + \ldots + \binom{n}{m} \triangle^m a_k,$$

in welcher man für n nach und nach die Werthe $\frac{1}{r+1}$, $\frac{2}{r+1}$, ... $\frac{r}{r+1}$ setzt.

Beispiele. 1) Es seien zwischen je zwei Glieder der Reihe der dritten Ordnung 1, 64, 343, 1000, 2197, ... 2 Glieder einzuschalten, welche sich an die gegebenen zu einer Reihe derselben Ordnung anschließen.

Man hat $a_1 = 1$, $\triangle a_1 = 63$, $\triangle^2 a_1 = 216$, $\triangle^3 a_1 = 162$; daher

$$a_{1+\frac{n}{3}} = 1 + 21n - 12n(3-n) + n(3-n)(6-n)$$
$$= 1 + 3n + 3n^2 + n^3 = (1+n)^3.$$

Setzt man $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, so erhält man die interpolirte Reihe

1, 8, 27, **64**, 125, 216, **343**, 512, 729, **1000**, 1331, 1728, **2197**, ...

2) Es sei mit Hilfe einer Tafel, welche die Brigg'schen Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 1080 auf 8 Decimalstellen enthält, log 107126 auf eben so viele Stellen zu berechnen.

Es genügt, die Mantisse für log 1071·26 zu finden, welche zwischen den Mantissen von log 1071 und log 1072 liegt. Theils aus der Tafel theils durch wiederholte Subtraction erhält man in Einheiten der 8. Decimalstelle:

Zahlen k	Mantissen a_k	1. Differ. $\triangle a_k$	2. Diff. $\triangle^2 a_k$
1071 ...	2978947		
		+ 40532	
1072 ...	3019479		— 39
		+ 40493	
1073 ...	3059972		— 37
		+ 40456	
1074 ...	3100428		— 38
		+ 40418	
1075 ...	3140846		

Man kann füglich die zweite Differenz als constant ansehen und die Mantissen als eine Reihe der zweiten Ordnung behandeln. Schaltet man nun zwischen die beiden ersten Mantissen $r = 99$ Glieder ein und nimmt von diesen das 26ste, so wird man in dem allgemeinen Gliede

$$a_{k+n} = a_k + \binom{n}{1} \triangle a_k + \binom{n}{2} \triangle^2 a_k,$$

$k = 1071$, $n = 0 \cdot 26$, $a_k = 2978947$, $\triangle a_k = 40532$ und $\triangle^2 a_k = -39$ setzen, wodurch man erhält

$$a_k = 2978947$$
$$\binom{n}{1} \triangle a_k = 10538$$
$$\binom{n}{2} \triangle^2 a_k = 4$$

also $a_{1071 \cdot 26} = 2989489$ in Einheiten der 8. Decimalstelle,

somit $\log 107126 = 5 \cdot 02989489$.

Summenreihen. Figurirte Zahlen.

§. **307.** Wird in der arithmetischen Reihe

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,\ \ldots\ 1)$$

nach und nach die Summe von 1, 2, 3, 4, ... Gliedern gebildet, so erhält man die Reihe

$$a,\ 2a+d,\ 3a+3d,\ 4a+6d,\ 5a+10d,\ \ldots\ 2)$$

Verfährt man mit der neu entstehenden Reihe auf dieselbe Weise, dann ebenso mit der dadurch gebildeten Reihe, u. s. w., so ergeben sich die Reihen

$$a,\ 3a+d,\ 6a+4d,\ 10a+10d,\ 15a+20d,\ \ldots\ 3)$$
$$a,\ 4a+d,\ 10a+5d,\ 20a+15d,\ 35a+35d,\ \ldots\ 4)$$

u. s. w.

Die Reihen 2), 3), 4), .. heißen Summenreihen und bilden, wie aus ihrer Ableitung von selbst hervorgeht, folgeweise arithmetische Reihen der zweiten, dritten, vierten, ... Ordnung, während die ursprüngliche Reihe von der ersten Ordnung ist.

Für $a = 1$ werden die Zahlen aller vorhergehenden Reihen figurirte Zahlen, und zwar beziehungsweise der ersten, zweiten, dritten, ... Ordnung genannt.

§. **308.** Aufgabe. Das allgemeine Glied für die Reihen der figurirten Zahlen zu bestimmen.

Drückt man das nte Glied der figurirten Zahlen mter Ordnung durch a_n^m aus, und beachtet, daß das allgemeine Glied jeder Reihe der figurirten Zahlen das Summenglied der nächstvorhergehenden Reihe ist, so folgt:

$$a_n^1 = 1 + (n-1)\,d = 1 + \binom{n-1}{1} d;$$

$$a_n^2 = 1 + \binom{1}{1} d + 1 + \binom{2}{1} d + 1 + \binom{3}{1} d + .. + 1 + \binom{n-1}{1} d$$
$$= n + \binom{n}{2} d \text{ (§. 297, 3)} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} d;$$

$$a_n^3 = \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \binom{4}{1} + \ldots + \binom{n}{1}$$
$$+ \binom{2}{2} d + \binom{3}{2} d + \binom{4}{2} d + \ldots + \binom{n}{2}$$
$$= \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} d, \text{ u. s. f.}$$

allgemein $$a_n^m = \binom{n+m-2}{m-1} + \binom{n+m-2}{m} d,$$

welche Induction leicht vervollständigt werden kann.

§. **309.** Die figurirten Zahlen der zweiten Ordnung

$$1,\ 2+d,\ 3+3d,\ 4+6d,\ 5+10d,\ \ldots$$

werden insbesondere Polygonalzahlen genannt. Setzt man in denselben nach und nach $d = 1, 2, 3, \ldots$, so erhält man die Zahlenreihen

1, 3, 6, 10, 15, ...
1, 4, 9, 16, 25, ...
1, 5, 12, 22, 35, ... u. s. w.

welche folgeweise Dreiecks-, Vierecks-, Fünfecks zahlen, u. s. w. heißen, weil sich eben so viele Puncte, als diese Zahlen anzeigen, beziehungsweise in regelmäßige Dreiecke, Vierecke, Fünfecke u. s. w. anordnen lassen.

Aus dem allgemeinen Gliede für die figurirten Zahlen zweiter Ordnung $\overset{2}{a}_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} d$ ergibt sich

für $d = 1$, d. i. für die Dreieckszahlen $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$,

„ $d = 2$, „ „ „ Viereckszahlen $a_n = n^2$,

„ $d = 3$, „ „ „ Fünfeckszahlen $a_n = \frac{n(3n-1)}{2}$, u. s. w.

§. **310.** Die figurirten Zahlen der dritten Ordnung

$$1,\ 3 + d,\ 6 + 4d,\ 10 + 10d,\ 15 + 20d,\ \ldots$$

heißen insbesondere Pyramidalzahlen, und zwar, je nachdem $d = 1, 2, 3, \ldots$ ist, 3seitige, 4seitige, 5seitige, ... Pyramidalzahlen. Diese sind also:

1, 4, 10, 20, 35, ...
1, 5, 14, 30, 55, ...
1, 6, 18, 40, 75, ... u. s. w.

Aus dem allgemeinen Gliede für die figurirten Zahlen dritter Ordnung $\overset{3}{a}_n = \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} d$ ergibt sich, wenn man $d = 1, 2, 3, \ldots$ setzt,

für die 3seitigen Pyramidalzahlen $a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$

„ „ 4seitigen „ $a_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$

„ „ 5seitigen „ $a_n = \frac{n^2(n+1)}{1.2}$, u. s. w.

Zusatz. In Zeughäusern werden die Kanonenkugeln in drei- und vierseitige Kugelhaufen geschichtet, so daß jede Kugel entweder auf drei oder vier Kugeln ruht. Schließt sich der Haufen mit einer Kugel, so ist die Anzahl der Kugeln in jeder Schichte eine Dreiecks- oder Viereckszahl, und die Anzahl der Kugeln des ganzen Haufens bezüglich eine 3seitige oder 4seitige Pyramidalzahl. Ist aber der Haufen nicht vollständig, so wird die Gesammtzahl der Kugeln gefunden, indem man von der Anzahl der Kugeln eines vollständigen Haufens die Anzahl der Kugeln der oben fehlenden Kugelpyramide subtrahirt.

Z. B. Ein dreiseitiger, vollständig geschlossener Kugelhaufen hat 8 Schichten; a) wie viele Kugeln ruhen auf dem Boden, b) wie viele Kugeln enthält der ganze Haufen?

a) Auf dem Boden ruhen $\overset{2}{a}_8 = \frac{8.9}{2} = 36$ Kugeln.

b) Der ganze Haufen enthält $\overset{3}{a}_8 = \frac{8.9.10}{2.3} = 120$ Kugeln.

Anhang.

Uebungsaufgaben.

I. Addition und Subtraction.

1. Addition mit absoluten ganzen Zahlen.

Verbindung der Addition mit sich selbst. (§§. 12 und 13.)

1. $5a + 2a$.
2. $7m + 5n$.
3. $23t + 19t$.
4. $ax + bx$.
5. $(x + 2) + 6$.
6. $(4a + 7) + 2a$.
7. $(m + 2n) + 3m$.
8. $(7x + 5y) + 7y$.
9. $3m + 4m + 6m$.
10. $15a + 3b + 9b$.
11. $(2a + 3b + 4c) + 3a$.
12. $[(7p + 5q) + 3p] + 5q$.
13. $2p + 3q + 5p + 3q + q$.
14. $m + 6m + 3n + 7m + 9n$.
15. $8 + (6 + a)$.
16. $10y + (12x + 5y)$.
17. $7m + [3m + (2m + 8n)]$.
18. $3a + [7a + (5a + b)]$.
19. $5p + [(7p + 8q) + 6q]$.
20. $15x + [5x + (7y + x)] + 2y$.
21. $(x + 3) + (x - 1)$.
22. $(3a + 4m) + (3a + 2m)$.

23.
$6x + 5y$
$x + 7y$
$8x + y$

24.
$a + 2b + 3c$
$2a + 3b + c$
$3a + b + 2c$

25.
$8a + 7b + 6c + 5d$
$9a + 6b + 7c + 4d$
$7a + 5b + 8c + 6d$

26.
$3x + 5(3m + 2n)$
$5x + 6(3m + 2n)$
$x + 9(3m + 2n)$

27. $(7a + 6b) + [(3b + 16a) + (13a + 20b)]$.
28. $(6x + 7y + 5z) + (4x + 4y) + (10x + z) + (9y + 14z)$.

Berechne die Werthe folgender Summen für $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$:

29. $3a + 5(b + c)$;
30. $3b + 5(a + c)$;
31. $3c + 5(a + b)$;
32. $3(a + b) + 5c$.

2. Subtraction mit absoluten ganzen Zahlen.

Verbindung der Subtraction mit sich selbst und mit der Addition.

(§§. 17 — 25.)

1. $4a - 2a$.
2. $4a - 4a$.
3. $(x + 7) - 2$.
4. $(6p + 5) - 3p$.
5. $(9m + 2n) - 6m$.
6. $8n + n - 6n$.
7. $[(3x + 5) + 2x] - 4x$.
8. $3m + 9m + m - 5m$.
9. $(a - 2) + 5a$.
10. $(7m - 3a) + 2a$.
11. $(8x - 4y) + 7x$.
12. $[(5z - 7) + 3z] + 4$.
13. $(3a - 4) - 6$.
14. $(16y - 8x) - 8y$.
15. $[(5x - 2) - 2x] - 3$.
16. $5a + 7b - 2b - 4a$.

17. $12 - (4 + m)$.
18. $9y - (2x + 7y)$.
19. $(6x + 4y) - (3x + 2y)$.
20. $5m - [(2m + 3a) + 2m]$.
21. $6 + (n - 4)$.
22. $x + (8x - 4a)$.
23. $7a + (3a - 2b)$.
24. $15m + [(4m - 3) - 2]$.
25. $5y - (8z - 3y)$.
26. $(m + n) - [m - (a - n)]$.
27. $(2x - 4) + (3x - 1)$.
28. $7a + (8a - 2) + (9a - 4)$.
29. $[x - (m + n)] + [x - (m + p)] + [x - (n + p)]$.
30. $(5x - 2y) - (x - 2y)$.
31. $(9m - 4n) - (4m - 3n)$.
32.
$5a - 3b$
$2a - b$
$- +$
33.
$7b - 3c$
$2b - 2c$
34.
$17x - 15y$
$8x - 9y$
35.
$20m - 27n + 12p$
$15m - n + 12p$
36. $(17p + 15q - 13r - 11s) - (5p - 6q - 7r + 8s)$.
37. $(5a + 2b - 3c) - (2a - 3b + 5c) - (a - 2b - 4c)$.
38. $(3x - 5y - 7z) + (7x + 4y - 3z) - (6x - 3y + 10z)$.
39. $7a - (3c - 6b) - (6a - 3c) - 3b + (3a - 8c)$.
40. $(8m - 5y) + [(2y - 7m) - (y - 3m)]$.
41. $(x + y) - [x - \{a - (y - x)\}]$.
42. $2x - [(3a + 4x) - (4x - 1)] - (x - 2a - 2)$.
43. $(8m - 5x) - (2m - 3n - 4x) + [(3x - 2n) - (4m + 3n)]$.

Bestimme die Werthe folgender Ausdrücke für $a = 4$, $b = 3$:

44. $(8a + 7b) - (5a - 4b) - (2a - b)$;
45. $8a + (7b - 5a) - \{(4b - 2a) - b\}$;
46. $8a + (7b - 5a) - \{4b - (2a - b)\}$;
47. $(8a + 7b) - \{5a - (4b - 2a) - b\}$.

3. Addition und Subtraction mit algebraischen ganzen Zahlen.

(§§. 30 – 33.)

1. $(+ 7a) + (+ 3a)$.
2. $(- 6m) + (+ 3m)$.
3. $(+ 5n) + (- 5n)$.
4. $(- 8x) + (- 2x)$.
5. $(+ 2x) - (+ x)$.
6. $(- 6a) - (+ 4a)$.
7. $(+ 6m) - (- 3m)$.
8. $(- 4s) - (- 8s)$.
9. $(- 4x) + (- 2x) - (- x) + (+ 9x)$.
10.
$8a + 3b - 4c$
$- 3a - 5b + 7c$
$a + 4b - 5c$
11.
$25x + 31y - 17z$
$x - 29y - 19z$
$- 22x + 8y + 37z$
12. Berechne $x - (x - 2) + (x - 4) - (x - 6)$ für $x = 4$.
13. $(x + y - z) - (x - y + z) + (- x + y + z) - (- x - y + z)$.
14. $[(a - b) - b] - (b - a)$.
15. $5m - [3m - (m - n)]$.
16. $x + [(y - x) - (y - z)]$.
17. $x - [(x + z) - (y + z)]$.
18. $3a - [2b - a - \{3a - (3b - 5a) + 5b\}]$.
19. $3m - 2n - \{- 5n - [6m - \{4n - [- 3m - (5m - 2n)]\}]\}$.
20. $2a + 3b - \{2a - [2a + 3b - \{(2a + 3b) - (2a - 3b)\}]\}$.
21. $[6x + 7y - \{- 6x + 7y - [(6x + 7y) - (6x - 7y) - 6x]\}] - [6x - \{(6x - 7y) - (6x + 7y)\}]$.

II. Multiplication und Division.

1. Multiplication mit absoluten ganzen Zahlen.

Verbindung der Multiplication mit sich selbst. (§§. 38 und 39.)

1. $a^3.a^4.$ **2.** $m^3.m^5.m.$ **3.** $x^m.x^n.x^p.x^q.$
4. $xy.z.$ **5.** $3a.b.$ **6.** $5mn.2.$
7. $a.bx.$ **8.** $m.6yz.$ **9.** $a^3.4a^2.$
10. $2a.4b.$ **11.** $8xy.7x.$ **12.** $2y^3.4y^2.$
13. $7a^2x.ax^2.$ **14.** $4z^3.5bz^2.$ **15.** $6m^3n^4.5m^3n^2.$
16. $a.2a.3a.$ **17.** $xy.xy.xy.$ **18.** $z^2.2z^3.3z.$
19. $a^3b.5a^2b^2.8ab^3.$ **20.** $x^3.3x^2y.3xy^2.y^3.$

Verbindung der Multiplication mit der Addition und Subtraction.

(§§. 40 — 44.)

21. $(x + a).b.$ **22.** $(a + 1).5.$ **23.** $(x + 5).4 - 2x.$
24. $(3m + 2n).5p.$ **25.** $(a^2b + ab^2).ab.$ **26.** $(6m + 5m^2).2m.$
27. $am + bm.$ **28.** $5x^2 + 9x^2.$ **29.** $3y^3 + 5y^3.$
30. $4a + 4b.$ **31.** $ax^2 + ay^2.$ **32.** $(a + m)x + (a - m)x.$
33. $m(b^2 - x^2) + n(b^2 - x^2).$ **34.** $6m + 6n + 6p.$
35. $(a - b).z.$ **36.** $(m - 1).m.$ **37.** $8x + (7 - x).3.$
38. $(4a - 3b).5c.$ **39.** $(2x^2 - x).3x.$ **40.** $(ax^3 - by^3).mxy.$
41. $am - bm.$ **42.** $a.10^m - b.10^m.$ **43.** $15ay^2 - 9ay^2.$
44. $3x - 3y.$ **45.** $7x - 7y + 7.$ **46.** $ax + ay - a.$
47. $3a^2 - a^2 + 5b^2 - 3b^2.$ **48.** $5x - 5y + 6a - 6b.$
49. $a(3x + 2) - 3b(3x + 2) + 3a(3x + 2).$

50. Addire
$8mx + 5ny$
$3mx - 7ny$
$mx - 3ny$
Subtrahire
$amx + bny - cpz$
$3mx - 2ny + pz$

51. Addire
$6a^4 - 9a^3 + 12a^2$
$4a^3 - 6a^2 + 8a$
$2a^2 - 3a + 4$
Subtrahire
$15x^3 - 26x^2 + 33x - 10$
$15x^3 - 20x^2 + 25x$

52. $(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) - (x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3).$
53. $7xy - [7yz - (3xz - 2xy) + 3xy] - (6yz - 3xz).$
54. $b.(x + y).$ **55.** $5.(a + 1).$ **56.** $m.(p + 5).$
57. $6.(m + n) - 5m.$ **58.** $3x.(a^2 + b^2).$ **59.** $12a^2.(3x^2 + 2y^2).$
60. $a.(b - 1).$ **61.** $b.(x - y).$ **62.** $8.(3 - m).$
63. $5.(z - 2) + 7.$ **64.** $5m.(ax^3 - by^3).$ **65.** $2a^2b^2.(a^2b - ab^2).$

66. Welchen Werth hat der Ausdruck
$4a(3x^2 - 5xy) - 5b(2x^2 - 6y^2)$
für $a = 5$, $b = 3$, $x = 7$, $y = 4$?

67. A hat $(4n^3 - 3n^2 + 2n - 1)$ Gulden, B hat $(2n^3 + 2n^2 - 4n + 4)$ Gulden weniger als A; wenn nun A von seinem Gelde $(n^3 - 2n^2 + 4n - 6)$ Gulden an B abtritt, wie viele Gulden hat darnach ein jeder? Wie viele Gulden hatte jeder anfänglich, wie viele zuletzt, wenn $n = 8$ ist?

70. $(x + a)(x + b)$.
71. $(x + a)(x - b)$.
72. $(x - a)(x + b)$.
73. $(x - a)(x - b)$.
74. $(a + 1)(b + 1)$.
75. $(m + 1)(m + 2)$.
76. $(y + 3)(y - 5)$.
77. $(z - 4)(z - 6)$.
78. $(5x + 3a)(5x + 4b)$.
79. $(a^m + b^m)(a^n - b^n)$.
80. $(3x^2 + 2y^2)(4x^2 + 5y^2)$.
81. $(ax^m - by^n)(bx^n + ay^m)$.
82. $(2a^2 + 3b^2)(5a^2 - 4b^2) - (10a^4 - 12b^4)$.
83. $(x + y)^2$.
84. $(a + 1)^2$.
85. $(p + 2)^2$.
86. $(x - y)^2$.
87. $(a - 1)^2$.
88. $(p - 2)^2$.
89. $(10m + n)^2$.
90. $(2x + y)^2$.
91. $(x - 2y)^2$.
92. $(10m - n)^2$.
93. $(3a^2 + 4b^2)^2$.
94. $(5p^3 - 3q^3)^2$.
95. $(x + 3)^2 - 6x$.
96. $(y - 4)^2 + 8y$.
97. $(x + a)^2 + (x - a)^2$.
98. $(x + a)^2 - (x - a)^2$.
99. $(ax^2 + by^2)^2 - 2abx^2y^2$.
100. $(a^2x - b^2y)^2 + (a^2x + b^2y)^2$.
101. $(x + y)(x - y)$.
102. $(a + 5)(a - 5)$.
103. $(x + a)(x - a) + a^2$.
104. $y^2 - (y + 2)(y - 2)$.
105. $(15a + 9b)(15a - 9b)$.
106. $(a^m + b^n)(a^m - b^n)$.
107. $(3a^2 - 2b^3)(3a^2 + 2b^3)$.
108. $(5x^3 + 3x^2y)(5x^3 - 3x^2y)$.
109. $(mx^3 + ny^3)(mx^3 - ny^3) + 2ny^3(mx^3 + ny^3)$.
110. $(3a^2 + 5b^2)(3a^2 - 5b^2) - (3a^2 + 7b^2)(2a^2 - 4b^2)$.

---

111. $(5a - 2b + 1).7$.
112. $(2x + 5y - 3z).4xyz$.
113. $(m + 2m^2 - 3m^3).5m$.
114. $(a^2 + 5a - 9).6a^2$.
115. $(8xy^3 + 5x^2y^2 - 3x^3y).12x^2y^2$.
116. $(3z^4 + 2z^3 - 5z^2 + 4z).6z^2$.
117. $(4m^3 - 3m^2n + 2mn^2 - n^3).3m^2n^2$.
118. $(3x^2 + 5x + 7).5x - (4x^2 - 6x - 8).3x$.
119. $mnp.(10m - 7n + 4p)$.
120. $3ax.(a^2 + ax + x^2)$.
121. $5a^2.(3x^2 - 8xy + 2y^2)$.
122. $x^3.(x^3 - x^2 + x - 1)$.
123. $4a^2b^4.(5a^2b^3 + 7a^3b^2 - 5a^4b - 3a^5)$.
124. $7x^2y.(2x^2y - 2xy^2 - 3xz^2 + 3y^2z) + x^2y^2.(14xy - 21yz)$.

---

125. $(a + 2b + 3c)(3m + 2n)$.
126. $(2a - b + 3c)(5m - n)$.
127. $(8x + 6y + 4)(5a - 7)$.
128. $(7x + 5y - 3)(3a + 5)$.
129. $(x^2 + xy + y^2)(x - y)$.
130. $(x^2 - xy + y^2)(x + y)$.
131. $(z^2 - 2z + 1)(6z + 3)$.
132. $(5y^2 + 6y - 7)(4y - 5)$.
133. $(2a^2b - 3ab^2 - 4b^3)(a - 2b)$.
134. $(16x^4 + 8x^2y^2 + y^4)(4x^2 - y^2)$.
135. $(4a^4 - 12a^2b^3 + 9b^6)(2a^2 - 3b^3)$.
136. $(2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 2)(x - 1)$.
137. $(a^2 + 2ab + b^2)(a + b) + (a^2 - 2ab + b^2)(a - b)$.
138. $(5x^2 + 4x - 3)(4x + 8) - (4x^2 - 3x - 6)(5x + 4)$.
139. $(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)(a + 1)$.
140. $(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)(a - 1)$.
141. $(x^{5m} - x^{4m} + x^{3m} - x^{2m} + x^m - 1)(x^m + 1)$.
142. $(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)(a - b)$.
143. $(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)(a + b)$.
144. $(a + b)^3$.
145. $(a - b)^3$.
146. $(2x + 3y)^3$.
147. $(ax^2 - by^2)^3$.
148. $(7a^2 + 8b^2)^3$.
149. $(ax^m + bx^n)^3$.

150. $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$. **151.** $(x + 3)(x - 2)(x + 4)$.
152. $(x + 1)(x - 2)(x + 3)(x - 4)$.
153. $(x + a)(x + b)(x + c)$.
154. $(x + a)(x - b)(x + c)(x - d)$.
155. $(a + b + c)^2$. **156.** $(3x - 2y + z)^2$.
157. $(y^2 - 4y + 4)^2$. **158.** $(ax^2 + by^2 + c)^2$.
159. $(3a^3 - 4a^2b + 6ab^2 - 2b^3)(4a^2 - 3ab + b^2)$.
160. $(5x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 2x + 7)(6x^2 + 4x - 7)$.
161. $(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3)(a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3)$.
162. $(ax^3 + bx^2 + cx + d)(mx^3 + nx^2 + px + q)$.
163. $(x^{4m} - 2x^{3m}y^n + 2x^{2m}y^{2n} - 4x^m y^{3n} + 4y^{4n})(x^{2m} + 2x^m y^n + 2y^{2n})$.
164. $(m^4 + 2m^3 - 3m^3 - 3m + 1)(m^3 - 3m^2 + 3m - 1)$.
165. $(a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$.
166. $(a^2 - 2ab + 3b^2)(3a^2 + ab - 2b^2)(2a^3 - 3b^3)$.
167. $(a^2 + 2ab - 2ac + b^2 - 2bc + c^2)$
$(a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2)$.
168. $[x^2 + (a + b)x + (a^2 + b^2)][x^2 - (a - b)x + (a^2 - b^2)]$.

2. Division mit abſoluten ganzen Zahlen.

Verbindung der Diviſion mit ſich ſelbſt und mit der Multiplication.

(§§. 48—53.)

1. $x^5 : x^3$. **2.** $a^4 : a$. **3.** $a^{m+n} : a^n$.
4. $15a : 5$. **5.** $mx : x$. **6.** $4ab.px : b$.
7. $2a(m - 1) : a$. **8.** $50ab : 2a$. **9.** $8abxy : ax$.
10. $12x^6 : 3x^4$. **11.** $8a^2c : 4a$. **12.** $7a^2y^4 : ay^4$.
13. $9a^2b^2x : 6aby$. **14.** $(x + y)(x - y) : (x - y)(x + z)$.
15. $28a^5m^2y^4 : 7a^4my^2$. **16.** $20a^m b^n x^p : 5a^{m-1}b^{n-2}x^{p-3}$.
17. $\frac{2a}{b}.c$. **18.** $\frac{x}{ny}.ny$. **19.** $\frac{a}{b}.bm$.
20. $\frac{2x}{ay}.a$. **21.** $\frac{a}{bc}.abc$. **22.** $\frac{2x}{5y}.5ax$.
23. $\frac{5a^2}{6bc^3}.3ab$. **24.** $\frac{3x^2}{4y^4}.4z^2$. **25.** $\frac{16ax^m}{25by^{2n}}.5y^n$.
26. $\frac{5ax}{7b} : x$. **27.** $\frac{mxy}{nz} : my$. **28.** $\frac{8ax}{5y} : 3b$.
29. $\frac{15a^3b^2}{4mn} : 5a^2b$. **30.** $\frac{6a^2x^4}{5by} : 3ax^2$. **31.** $\frac{4m^2n^3}{7p^2} : 2p^3$.
32. $(15x^2y^2 : 5x) : 3y$. **33.** $(2m^3x^3 : ny^2) : 3n^2y$.
34. $mn.\frac{m}{np}$. **35.** $15x.\frac{4y}{3x}$. **36.** $3x^2y.\frac{2z}{3xy}$.
37. $5my.\frac{8abx^2}{5my}$. **38.** $2a^2x.\frac{3x}{4a^2b^2}$. **39.** $4a^2bc^2.\frac{5x}{2a^2b^2c}$.
40. $x : \frac{x}{y}$. **41.** $y : \frac{x}{y}$. **42.** $xy : \frac{x}{y}$.
43. $axy : \frac{x}{z}$. **44.** $mn : \frac{x+z}{x-z}$. **45.** $5a^4 : \frac{a^2}{b^2}$.
46. $6a^3m^2x : \frac{2ax}{y^2}$. **47.** $2m(m + 1) : \frac{2m}{m-1}$.
48. $15m^2n^3 : (6n^2 : 2nx^2)$. **49.** $4a^3b^5m^4 : (2m^2 : ab^3)$.
50. $b^2 + \left[(b^2 + c^2) : \frac{b^2+c^2}{a^2-b^2}\right]$. **51.** $mx^2 - \left(\left[(ax^2 + by^2) : \frac{ax^2+by^2}{mx^2-ny^2}\right].\right)$

52. $\frac{xy}{z} \cdot \frac{xz}{y}$.

53. $\frac{mn}{p} \cdot \frac{mp}{n} \cdot \frac{np}{m}$.

54. $\frac{a+1}{x} \cdot \frac{b-1}{a+1} \cdot cx$.

55. $\frac{a(x-1)}{c(a+1)} \cdot \frac{m-n}{x-1} \cdot \frac{b(a+1)}{a}$.

56. $\frac{5a^2b}{6mn^2} \cdot \frac{3an^2}{8bm^2}$.

57. $\frac{2ay^2}{3bx^2z^2} \cdot \frac{2a^2bx^3}{3y^2z}$.

58. $\frac{5a^2x^2}{6m^2y^2} \cdot \frac{9b^3y^3}{10a^3z^3} \cdot \frac{4mz^3}{5b^3x} \cdot \frac{2amx}{3y^3}$.

59. $\frac{ab}{m} : \frac{an}{b}$.

60. $\frac{3x}{y} : \frac{2y}{x}$.

61. $\frac{6am}{25bn} : \frac{3a}{5b}$.

62. $\frac{8m^3x}{5n^3y} : \frac{4mx}{ny}$.

63. $\frac{12a^6}{7b^4} : \frac{3a^4}{7b^2}$.

64. $\frac{4x^2y^2}{3a^2} : \frac{5a^2}{3x^2y^2}$.

65. $\frac{32a^4x^4}{27b^4y^4} : \frac{4a^3x}{9b^3y}$.

66. $\frac{8x^3y^2z}{15mn^2p^3} : \frac{4m^2n^2p}{5xy^2z^3}$.

67. $[(a+b)x^2 : (a-b)y^2] : [x^2 : (a-b)y]$.

68. $\frac{x^2y^2}{z^2} : \left[\left\{\left(\frac{xy}{z^2} : \frac{yz}{x^2}\right) : \left(\frac{yz}{x^2} : \frac{y^2}{xz}\right)\right\} : \frac{y}{z}\right]$.

Verbindung der Diviſion mit der Addition und Subtraction. (§§. 54—57).

69. $(ax + bx) : x$.

70. $(8x + 8) : 8$.

71. $(a^2b + ab^2) : ab$.

72. $(12a^3x^2 + 9ax^4) : 3ax^2$.

73. $\left(8y^2 + \frac{2y^4}{x^2}\right) : 2x^2y^2$.

74. $\left(\frac{3a^2}{8b^2c} + \frac{4b}{d}\right) : \frac{6bc}{ad}$.

75. $\frac{x}{3a} + \frac{y}{3a}$.

76. $\frac{7m}{5} + \frac{3m}{5}$.

77. $\frac{3a}{n} + \frac{5a}{n}$.

78. $\frac{2x+4}{5p} + \frac{x}{5p}$.

79. $\frac{2x}{x+1} + \frac{2}{x+1}$.

80. $\frac{a+m}{a+b+c} + \frac{b-c}{a+b+c} + \frac{2c-m}{a+b+c}$.

81. $\frac{ac+bc-c^2}{abc} + \frac{ab-b^2+bc}{abc} + \frac{ab+ac-a^2}{abc}$.

82. $(am - bm) : m$.

83. $(mp - np) : p$.

84. $(5a^2x - 3ax^2) : 5ax$.

85. $(8x^3y^3 - 4x^2y^2z^2) : 4x^2y^2$.

86. $\left(\frac{8a^3b^2}{m^2n^3} - \frac{12a^2b^3}{m^3n^2}\right) : 4a^2m^2$.

87. $\left(\frac{8x^3}{27y^3} - \frac{2x^2}{9y}\right) : \frac{2x}{3y}$.

88. $\frac{b}{4} - \frac{c}{4}$.

89. $\frac{6a}{m} - \frac{5a}{m}$.

90. $\frac{9x}{4a} - \frac{5x}{4a}$.

91. $\frac{x}{5} - \frac{y-z}{5}$.

92. $\frac{5y-1}{2y+1} - \frac{y-3}{2y+1}$.

93. $\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = a$.

94. $\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = b$.

Drücke die letzten zwei Formeln mit Worten aus.

95. $\frac{3x}{mn} + \frac{7x}{mn} - \frac{9x}{mn}$.

96. $\frac{2a-b}{m} + \frac{b}{m} - \frac{a}{m}$.

97. $\frac{6a}{b} - \frac{4(a-2)}{b} + \frac{4a-2}{b}$.

98. $\frac{7x-2y}{x-y} - \frac{2x-3y}{x-y} - \frac{x+5y}{x-y}$.

99. $\frac{17x+12y}{x+y} - \frac{3x-7y}{x+y} + \frac{2x-3y}{x+y}$.

100. $(45am - 25bm + 35cm) : 5m.$
101. $(2a^3 - 6a^2b + 30ab^2) : 2a.$
102. $(5m^4x - 4m^3x^2 - 3m^2x^3) : m^2x.$
103. $(10x^4y^2z - 25x^3y^2z^2 - 15x^2y^2z^3 + 5xy^2z^4) : 5xy^2z.$
104. $\left(\frac{m}{n} + \frac{n}{p} + \frac{p}{m}\right) : \frac{mnp}{q^3}.$ **105.** $\left(\frac{a^4}{y^2z^2} - \frac{b^4}{x^2z^2} + \frac{c^4}{x^2y^2}\right) \frac{a^2b^2c^2}{x^2y^2z^2}.$
106. $(6am - 12bm + 5an - 10bn) : (6m + 5n).$
107. $(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b).$ **108.** $(x^2 - 2xy + x^2) : (x - y).$
109. $(4x^2 - 9y^2) : (2x + 3y).$ **110.** $(16a^2 - b^2) : (4a - b).$
111. $(x^{2m} - y^{2n}) : (x^m - y^n).$ **112.** $(81m^8 - 16n^6) : (9m^4 + 4n^3).$
113. $(x^4 - 1) : (x + 1).$ **114.** $(x^{4m} - 1) : (x^m - 1).$
115. $(a^5 + b^5) : (a + b).$ **116.** $(a^6 - b^6) : (a^2 - b^2).$
117. $(a^{7m} + 1) : (a^m + 1).$ **118.** $(81x^8 - 16y^8) : (3x^2 - 2y^2).$
119. $\left(\frac{x^2}{4a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) : \left(\frac{x}{2a} + \frac{y}{b}\right).$ **120.** $\left(\frac{a^4b^4}{m^8} - 1\right) : \left(\frac{ab}{m^2} - 1\right).$
121. $(14x^2 - 31x + 15) : (2x - 3).$
122. $(3a^2x^2 - abxy - 2b^2y^2) : (ax - by).$
123. $(20a^5 - 18a^4b + 4a^3b^2) : (4a^2 - 2ab).$
124. $(x^3 + x^2 - 2x - 8) : (x - 2).$
125. $(4a^3 - 16a^2 + 7a + 20) : (2a - 5).$
126. $(x^{3m} + x^{2m}y^n - x^my^{3n} - y^{4n}) : (x^{2m} - y^{3n}).$
127. $(x^3y^{3m} - x^{n+1}y^{2m+2} - x^{2n+2}y^{m+1} + x^{3n}y^3) : (x^2y^m - x^ny^2).$
128. $(6x^4 - 11x^3 - 9x^2 + 19x - 5) : (3x - 1).$
129. $(m^4 - 2m^2n^2 + n^4) : (m^2 + 2mn + n^2).$
130. $(12x^4 - x^3y - 32x^2y^2 + xy^3 + 20y^4) : (4x^2 + xy - 5y^2).$
131. $(15a^4 + 8a^3b - 41a^2b^2 + 10ab^3 + 8b^4) : (5a^2 + 6ab - 8b^2).$
132. $(63y^8 + 10a^2y^6 - 155a^4y^4 + 10a^6y^2 + 63a^8) : (9y^4 - 5a^2y^2 - 7a^4).$
133. $(49a^6 + 6a^4 - 51a^2 - 25) : (7a^3 - 6a^2 + 3a - 5).$
134. $(4x^6 + 15x^4y^2 + 10x^2y^4 - 9y^6) : (2x^3 + x^2y + 4xy^2 + 3y^3).$
135. $(32 + 104x + 100x^2 + 26x^3 - 13x^4 + x^5) : (8 + 12x + 6x^2 - x^3).$
136. $(27a^6 - 33a^5b - 45a^4b^2 + 71a^3b^3 - 36ab^5 + 16b^6) : (9a^3 - 2a^2b - 5ab^2 + 4b^3).$
137. $\left(\frac{3x^4}{a^4} - \frac{4x^2y^2}{a^2b^2} + \frac{8x^2}{a^2} - \frac{4y^4}{b^4} + \frac{8y^2}{b^2} - 3\right) : \left(\frac{3x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2} - 1\right).$
138. $[\{x^3 + (a + b - c)x^2 + (ab - ac - bc)x - abc\} : (x + a)] : (x - c).$

3. Multiplication und Diviſion mit algebraiſchen ganzen Zahlen.

Multiplication algebraiſcher Zahlen. (§. 59.)

1. $7a.(-4).$ **2.** $(-4x^3).2y.$ **3.** $(-a^2).(-3a).$
4. $(-3x).(-5xy).$ **5.** $7ab.(-bc).$ **6.** $(-8ay^2).2a^2y.$
7. $(-6a^4).3a^2x.$ **8.** $5a^2z^3.(-3b^2z).$
9. $ab^2c^3.(-a^2b).$ **10.** $(-12m^3xy^2).(-4x^2y).$
11. $7.(-3).(-5).$ **12.** $(-a).(-b).(-c).$
13. $(-my).(-my).(-my).$ **14.** $(-5x).(-5x).(-5x).$

15. $(-2z)^3$. **16.** $(+3a^2)^3$. **17.** $(-4xy)^3$.
18. $(+5m)^4$. **19.** $(-2ab)^4$. **20.** $(-3z^2)^5$.
21. $(-2a^2).3ab^2.5a^2bx$. **22.** $4x^2y^3z.(-xy^2z^3).(-2x^2z)$.
23. $a^{2m-4}b^{3n+2}.-a^mb^{n-4}$. **24.** $3bx^{2n}.(-4b^2x^{2n-2}).2bx^2$.
25. $3ax.(-4ay).(-2bx).ab.(-5bx)$.
26. $a^2xy.(-mx^2).ny^2.(-bz^2).(-bmx).(-bny)$.
27. $2ax.(-6by)-(-8bx).(-ay)+(-3ab).(-7xy)$.
28. $8.(-3)-(-5).(-6)-9.(-2)+(-7).(-5)$.
29. Berechne den Ausdruck $x^2-6x-16$ für $x=+8$ und für $x=-2$
30. Welche Form nimmt der Ausdruck $\frac{xyz}{xy+xz+yz}$ an, wenn sich 1) x in $-x$, 2) x in $-x$ und y in $-y$, 3) x in $-x$, y in $-y$ und z in $-z$ verwandelt?
31. $(5x-4y).(-3a)$. **32.** $(3a-5b+7).(-2m)$.
33. $(a^2+b^2-c^2).2abc$. **34.** $(m^2-2mn+n^2).(-2mn)$.
35. $(-3x^2+3x-1).(-5x^2)$. **36.** $(5+4a-3a^2).(-6a^2y)$.
37. $8x-4.(2x-3y)$. **38.** $(7a^2-4b^2).(-2b^2)+14a^2b^2$.
39. $(6x^2-5z^2).(-2xy^2z)+3xy^2.[-(3z^3-4x^2z)]$.
40. $(5-7x+6x^2).(-3x^2)+(9x^3+4x^2-x).2x$.
41. $(a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4).(-2ab)$.
42. $(a+b).(-2a+3b)$. **43.** $(1-m^2)(1+m^2)$.
44. $(1-a^2b^2)^2$. **45.** $(-ax+by)^2$.
46. $(a+b-c)(-a+b+c)$. **47.** $(-x^2+2xy-y^2)(x^2+2xy+y^2)$.
48. $(-3x+5y-7z)(-7x-5y+3z)$.
49. $(b^{2m}-2b^mc^m+c^{2m})(4b^m-5c^m)$.
50. $(a+b)(m-n)-(a-b)(m+n)$.
51. $(9a-5b)(a+2b-3)-(3a-5b)(3a-b-3)$.
52. $(5x+a)(2x-a)-(4x-3a)(7x+a)+(3x-a)(6x+2a)$.
53. $(a+b-c)(a+b)+(a-b+c)(a+c)+(-a+b+c)(b+c)$.
54. $(1-2x+3x^2-4x^3)(1-3x+5x^2-7x^3)$.
55. $(2a^2b-3ab^2-4b^3+5)(2a^2b-3ab^2+4b^3-5)$.
56. $(a^2-4a-6)(a^2-4a+6)(a^2+4a-6)$.
57. $(4x^2-3x+2)(3x^2+2x-1)(x^2-2x-3)$.
58. $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$.

Division algebraischer Zahlen. (§. 60.)

59. $(-4x):4$. **60.** $8ab:(-2a)$. **61.** $(-6bx^2):(-bx)$.
62. $18a^7:(-6a^4)$. **63.** $(-12m^4):(-4m^3)$. **64.** $(-14a^4b^2):2a^2b$.
65. $(-15x^2y^5):3xy^4$. **66.** $9ab^2c^3x:(-3ab^2c)$.
67. $(-288a^{3n+x-2}):9a^{2n-x+1}$. **68.** $(-25a^{m+n}b^p):(-5a^nb^{p-q})$.
69. $32x^{m-2n+3p}y^{2m-n-p}:(-8x^{m-3n+4p}y^{m-n-2p})$.
70. $\frac{2ab}{3cd}:\left(-\frac{5mn}{7pq}\right)$. **71.** $\frac{a(x-1)}{b(x+1)}:\frac{c(1-x)}{b(2+x)}$.
72. Berechne $\frac{x-14}{5-x}-x+\frac{x-10}{7-x}-\frac{5(x-2)}{3(6-x)}$ für $x=8$.
73. $(24a^3b^3-15a^4b^2):(-3a^3b^2)$.
74. $(18am^2y^3-27bmy^3+36cy):(-3y)$.
75. $\left(\frac{xyz}{abc}-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right):\left(-\frac{xy}{ab}\right)$.

---

76. $(1 - x^{2m}) : (1 - x^m)$. **77.** $(1 - a^5) : (1 - a)$.
78. $(1 - 2x + x^2 - 6x^4 + 8x^6) : (1 - 2x)$.
79. $(6x^3 - 23x^2 + 24x - 10) : (-2x + 5)$.
80. $(32a^{10}x^5 + 243y^5) : (2a^2x + 3y)$.
81. $(6a^4 - 5a^3 + 4a^2 + 11a - 4) : (2a^2 - 3a + 4)$.
82. $(30x^4 + 2x^3 - 16x^2 + 10x - 2) : (-5x^2 + 3x - 1)$.
83. $(27 - 51x - 125x^2 - 2x^3 + 30x^4) : (-3 + 8x + 6x^2)$.
84. $(1 - m - 14m^2 - 14m^3 - 6m^4 - m^5) : (1 + 3m + m^2)$.
85. $(2 - 7x + 16x^2 - 25x^3 + 24x^4 - 16x^5) : (2 - 3x + 4x^2)$.
86. $(12a^4 + 5a^3b - 16a^2b^2 - 13ab^3 - 6b^4) : (4a^2 - ab - 6b^2)$.
87. $(1 - 15x + 72x^2 - 54x^3 - 405x^4 - 243x^5) : (1 - 6x - 9x^2)$.
88. $(4 + 5a - 16a^2 - 4a^3 + 4a^4 - 5a^5 + 4a^6) : (4 - 3a + 2a^2 - a^3)$.
89. $\{(120 - 326x + 329x^2 - 146x^3 + 24x^4) : (4 - 3x)\} : (6 - 7x + 2x^2)$.
90. $(2 - 7x + 16x^2 - 17x^3 + 12x^4) : \{(2 - 7x + 12x^2 - 9x^3) : (2 - 3x)\}$.

---

4. Dekadiſche ganze Zahlen.

(§§. 65 — 72.)

1. 240978 + 97477 + 504336 + 378264 + 615089.

Addire die nachfolgenden Zahlen zuerſt in verticaler, dann in horizontaler Richtung:

	2.	3.	4.	5.	6.
7.	81312 +	433664 +	243936 +	596288 +	406560
8.	542080 +	216832 +	569184 +	379456 +	54208
9.	189728 +	677600 +	352352 +	27104 +	514976
10.	650496 +	325248 +	135520 +	487872 +	162624
11.	298144 +	108416 +	460768 +	271040 +	623392

12. Suche die Summe von 6 Zahlen, deren erſte 235078, und jede folgende um 58505 größer als die vorhergehende iſt.

13. 8754219 — 1970862. **14.** 33557799 — 8866442.

15. Berechne 3874920 + 561083 + 6721859 + 55462873 + 9036198, und ſubtrahire dann von der erhaltenen Summe den erſten Summand, von dem Reſte den zweiten Summand u. ſ. f.

16. 719308.2.3.4.5.6.7.8.9.
17. 380792.11.13.31.25.64.125.
18. 146637.99.991.299.
19. 734552.84399.100. **20.** 58379.25726.432789.
21. 291728.740634.12500.7999.
22. 5647830.710744.918497.

23. Berechne $A = ab$, $B = ac$, $C = ad$, $D = bc$, $E = bd$, $F = cd$ für $a = 428792$, $b = 920664$, $c = 371963$, $d = 140846$.

24. 897715 : 91. **25.** 134676 : 29.
26. 5791338 : 63. **27.** 309644 : 778.
28. 3552264 : 309. **29.** 5606912 : 752.
30. 6245425 : 25. **31.** 22255125 : 125.

32. Dividire jede der Zahlen a) 23900625, b) 119503125, c) 1673[illegible]4375 durch jede der Zahlen m) 607, n) 315, p) 125.

33. 1472692768 : 14734. **34.** 36363918357 : 62883.

---

5. Theilbarkeit ganzer Zahlen.

Theilbarkeit dekadischer Zahlen. (§§. 78 — 82 und §. 84.)

Durch welche von den Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 25, 100, 125, 1000 sind folgende Zahlen theilbar:

1. a) 312; b) 6225; c) 17280; d) 71016; e) 948656;
2. f) 720; g) 6472; h) 76450; i) 484572; k) 567000;
3. l) 534; m) 8625; n) 10692; o) 734520; p) 350496;
4. r) 418; s) 3735; t) 70875; u) 100848; v) 9429597?
5. Gib alle zwischen 1 und 200 liegenden Primzahlen an.

Zerlegung in Factoren. (§§. 86 und 87.)

Zerlege folgende Zahlen in ihre Primfactoren:

6. a) 420; b) 504; c) 1260; d) 1694; e) 2025;
7. f) 2268; g) 3075; h) 3828; i) 5376; k) 10528;
8. l) $76a^3$; m) $66ab^2$; n) $26x^2y^2$; o) $72a^3b^2$; p) $60ax^2y^4$.

Suche alle Prim- und zusammengesetzten Factoren folgender Zahlen:

9. a) 48; b) 180; c) 210; d) 315; e) 810;
10. f) $18ab$; g) $36x^2$; h) $27my^2$; i) $165xyz$; k) $114an^2x^3$.

Zerlege nach §. 87, 2. a) in zwei Factoren:

11. $18ab - 15ac$;
12. $9x^2 - 24xy$;
13. $2a^4 - 4a^3 + 6a^2$;
14. $ax^4y^2 + bx^3y^3 + cx^2y^4$;
15. $a^3b^2x - a^2b^2x^2 + ab^2x^3$;
16. $5x^3z^2 - 15x^2z^3 + 25xz^4$.

Zerlege nach §. 87, 2. b) in Factoren:

17. $x^2 + 2x + 1$;
18. $m^2 - 2m + 1$;
19. $4a^2 + 12a + 9$;
20. $9b^2 - 12b + 4$;
21. $y^2 + 10y + 25$;
22. $x^2 - 6xy + 9y^2$;
23. $4x^2 - 1$;
24. $9a^2 - 16b^2$;
25. $25x^2 - 16y^2$;
26. $6x^2 - 54a^2$;
27. $a^2 - (b - c)^2$;
28. $(b + c)^2 - a^2$.

Zerlege nach §. 87, 2. c) in zwei Factoren:

29. $x^2 + (a + b)x + ab$;
30. $a^2 + 7x + 10$;
31. $m^2 + 5mn + 6n^2$;
32. $x^2 + 2ax + (a^2 - b^2)$;
33. $x^2 - (a + b)x + ab$;
34. $a^2 - 4a + 3$;
35. $10y^2 - 7yz + z^2$;
36. $x^2 - 2ax + (a^2 - b^2)$;
37. $x^2 + (a - b)x - ab$;
38. $m^2 + m - 12$;
39. $a^2 + 2ab - 15b^2$;
40. $x^2 + 2bx - (a^2 - b^2)$;
41. $x^2 - (a - b)x - ab$;
42. $z^2 - 6z - 16$;
43. $b^2 - 4bc - 5c^2$;
44. $x^2 - 2bx - (a^2 - b^2)$.

Größtes gemeinschaftliches Maß. (§§. 88 — 90.)

Suche mittelst Zerlegung in Factoren das gr. g. Maß folgender Zahlen:

45. 84 und 308;
46. 360 und 680;
47. 108, 450 und 540;
48. 560, 620 und 760;
49. 693, 819 und 945;
50. 504, 756, 1260 und 1764;
51. $12acx$, $14a^2x$ und $16ax^2$;
52. $10x^2y^4$, $5x^3y^3$ und $20x^4y^2$;
53. $m^2 + 2mn + n^2$ und $m^2 - n^2$;
54. $a^2 - 2ab - 8b^2$ und $a^2 + 2ab - 3ab^2 - 6b^3$;
55. $x^4 - 10x^2y^2 + 16y^4$ und $x^4 + 2x^2y^2 - 80y^4$.

Suche ohne Zerlegung in Factoren das gr. g. Maß folgender Zahlen:

56. 637 und 4277; **57.** 2091 und 1353;
58. 1404 und 8658; **59.** 3552 und 5143;
60. 7774 und 3718; **61.** 27671 und 21708;
62. 50149 und 51119; **63.** 55660 und 66055;
64. 39215 und 73997; **65.** 24955 und 338625;
66. 1701, 6426, 10521; **67.** 120582, 145530, 167706;
68. $12a^2 + 7a + 1$ und $6a^2 + 11a + 3$;
69. $x^3 - 49x - 120$ und $x^2 + 10x + 25$;
70. $4m^3 - 16m^2 + 23m - 20$ und $6m^2 - 7m - 20$;
71. $a^3 - a^2b + 3ab^2 - 3b^3$ und $a^2 - 5ab + 4b^2$;
72. $x^6 + 6x^4 + 5x^2 - 12$ und $x^6 + 4x^4 + x^2 - 6$;
73. $6y^3 + 16y^2 - 22y + 40$ und $9y^3 - 27y^2 + 35y - 25$;
74. $28a^4 + 10a^3 + 39a^2 + 7a + 15$ und $14a^3 - 37a^2 + 15a - 25$;
75. $3z^4 - 8z^3 + 11z^2 - 8z + 3$ und $2z^3 - 9z^2 + 9z - 7$;
76. $15x^4 + 10x^3y + 4x^2y^2 + 6xy^3 - 3y^4$ und
$12x^3 + 38x^2y + 16xy^2 - 10y^3$;
77. $6x^5 - 4x^4 - 11x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ und
$4x^4 + 2x^3 - 18x^2 + 3x - 5$;
78. $6x^4 - 5x^2 - 1$, $5x^3 - 4x - 1$ und $2x^2 - 2$;
79. $a^4 - 4a^3 + 8a^2 - 4a + 7$, $a^4 - 2a^3 + 10a + 7$ und
$a^3 - 5a^2 + 11a - 7$.

Kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches. (§§. 91 und 92.)

Suche mittelst Zerlegung in Factoren das kl. g. Vielfache der Zahlen:

80. 300 und 620; **81.** 240 und 486;
82. 120, 168 und 182; **83.** 105, 144 und 270;
84. 3, 4, 6, 10 und 25; **85.** 2, 5, 9, 20, 21 und 24;
86. 4, 5, 6, 12, 18, 25, 70; **87.** 10, 12, 14, 15, 16, 18, 21;
88. 4, 6, 7, 26, 35, 40, 56; **89.** 8, 12, 16, 24, 32, 36, 256;
90. a, $2a^2$, $3ab^2$, $12abm$; **91.** $6amn$, $10am^2n$, $5a^2n^2$;
92. m, $5m^2$, $3n$, $8mn$ und $15m(m - n)$;
93. $3x$, $x - 2$, $5(x + 2)$, $20(x^2 - 4)$ und $6(x + 2)^2$.

Suche ohne Zerlegung in Factoren das kl. g. Vielfache der Zahlen:

94. 874 und 943; **95.** 561 und 1530;
96. 1716 und 2222; **97.** 6987 und 8083;
98. 816, 765, 697; **99.** 259, 3219, 7548;
100. $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ und $2(x^2 - y^2)$;
101. $a^3 - 49a - 120$ und $a^2 + 10a + 25$;
102. $6x^3 - 13x^2 - 45x - 25$ und $x^3 + 2x^2 - 20x - 25$;
103. $a^4 + 3a^3 + 6a^2 + 5a + 3$ und $a^3 + 2a^2 + 2a + 1$;
104. $2a^5 - a^4 - 2a^3 - 2a^2 - 4a - 1$ und $2a^6 - a^5 - 5a^3 - 5a^2 - a$;
105. $21x^3 + 20x^2 - 3x - 2$, $6x^3 - 11x^2 - 12x + 5$ und
$3x^3 - 10x^2 - 9x + 4$.

---

6. Gebrochene Zahlen.

A. Gemeine Brüche.

Darstellen der Brüche mit einem gemeinschaftlichen Nenner. (§. 97.)

1. Stelle die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$ mit dem gemeinschaftlichen Nenner 24 dar.

2. Bringe die Brüche $\frac{1}{a}$, $\frac{2m}{3ab}$, $\frac{5n}{6ax}$, $\frac{3p}{10by}$ auf den Nenner $30abxy$.

Bringe folgende Brüche auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner:

3. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{12}$;

4. $\frac{7}{8}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{11}{18}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{11}{12}$;

5. $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{18}{35}$, $\frac{19}{40}$, $\frac{25}{56}$;

6. $\frac{1}{m}$, $\frac{5a}{3m^2}$, $\frac{3bc}{4m^3}$, $\frac{4def}{5m^4}$;

7. $\frac{a-1}{a+1}$, $\frac{a-2}{a+2}$, $\frac{a-3}{a+3}$;

8. $\frac{y+1}{y-1}$, $\frac{y-1}{y+1}$, $\frac{y^2+1}{y^2-1}$;

9. $\frac{x+1}{x-1}$, $\frac{x^2+2x}{x^2-1}$, $\frac{3x}{x+1}$, $\frac{x^2-1}{x^2+1}$;

10. $\frac{a}{1+a}$, $\frac{a}{1-a}$, $\frac{a^2}{1-a^2}$, $\frac{a^2}{1+2a+a^2}$.

Abkürzen der Brüche. (§. 98.)

Kürze folgende Brüche ab:

11. a) $\frac{45}{54}$; b) $\frac{114}{250}$; c) $\frac{840}{1020}$; d) $\frac{1824}{7008}$; e) $\frac{4096}{7424}$;

12. f) $\frac{5.12.18}{4.10.27}$; g) $\frac{6.12.20.28}{4.8.16.30}$; h) $\frac{6.21.24.36.75}{8.27.50.56.60}$;

13 i) $\frac{391}{989}$; k) $\frac{637}{819}$; l) $\frac{765}{5304}$; m) $\frac{2079}{7029}$; n) $\frac{9082}{67735}$.

14. Bestimme den Werth von $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}$ für $n = 6$, dann für $n = 8$, und kürze die erhaltenen Brüche ab.

Kürze folgende Brüche ab:

15. a) $\frac{3abx}{12bmx}$, b) $\frac{12a^2x}{28ax^2}$, c) $\frac{15amx^3}{40bmx}$, d) $\frac{72mx^2y^3}{96nx^3y^2}$;

16. $\frac{a(a+1)}{(a+1)(a+2)}$;

17. $\frac{2m(m-1)}{m^2-1}$;

18. $\frac{15(a+b)(x-y)}{24(a-b)(x-y)}$;

19. $\frac{9a+6b-3c}{12ax+8bx-4cx}$;

20. $\frac{12x^3y^3-6x^2y^4}{8x^4y^2+4x^3y^3}$;

21. $\frac{2a-ab-b+2}{3a+ab+b+3}$;

22. $\frac{a^2-1}{a^2+2a+1}$;

23. $\frac{1+m-2m^2}{1+3m+2m^2}$;

24. $\frac{8a^2-6a+1}{16a^2-10a+1}$;

25. $\frac{m^2+6m-16}{m^2+5m-24}$;

26. $\frac{x^2+3xy+2y^2}{x^2+6xy+5y^2}$;

27. $\frac{a^2-8ax+15x^2}{a^2-11ax-30x^2}$;

28. $\frac{x^4+4x^3-5x+2}{x^3-x^2-3x+2}$;

29. $\frac{2a^3-a^2+4a+7}{2a^4-15a^3+29a^2-48a+14}$.

Berechne:

30. $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ für $x = 2$;

31. $\frac{x^2-a^2}{2x^2-3ax+a}$ für $a = 1$;

32. $\frac{x^2+6x-16}{x^2+5x-24}$ für $x = -8$;

33. $\frac{x^3-4x^2-3x+18}{3x^3-22x^2+51x-36}$ für $x = 3$;

34. $\frac{y^4+y^3-y^2-4y-12}{y^4-2y^2-8}$ für $y = 2$ und für $y = -2$.

Addition und Subtraction der Brüche. (§§. 100 — 102.)

35. $\frac{4x}{3} + \frac{2x}{3}$

36. $\frac{3m}{4} - \frac{m}{4}$.

37. $\frac{a+b}{m} + \frac{a-b}{m}$.

38. $\frac{a+b}{n} - \frac{a-b}{n}$.

39. $\frac{x}{10} - \frac{y+z}{10}$.

40. $\frac{x}{8} - \frac{y-z}{8}$.

41. $\frac{a+4x}{3} + \frac{2a-x}{3}$.

42. $\frac{5m+n}{4} - \frac{m-3n}{4}$.

43. $\frac{a+b+c}{3m} + \frac{a-b}{3m} + \frac{a-c}{3m}$.

44. $\frac{m-a}{m+n+p} + \frac{n-p}{m+n+p} + \frac{2p+a}{m+n+p}$.

45. $a + \frac{b}{a}$.

46. $3x - \frac{5y}{2x}$.

47. $a + \frac{x^2-1}{x}$.

48. $x - \frac{x^2-1}{x}$.

49. $m - \frac{m+n}{2}$.

50. $\frac{m+n}{2} - n$.

51. $1 + \frac{a-b}{a+b}$.

52. $1 - \frac{a-b}{a+b}$.

53. $\frac{(x+y)^2}{4xy} - 1$.

54. $\frac{(x-y)^2}{4xy} + 1$.

55. $x + y + \frac{2y^2}{x-y}$.

56. $a - 1 + \frac{a^2+1}{a+1}$.

57. $m + n - \frac{m^2+n^2}{m+n}$.

58. $a^2 + b^2 - \frac{a^4-2b^4}{a^2-b^2}$.

59. $1 + \frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}$.

60. $1 - \frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}$.

61. $x^2 - y^2 - \frac{x^4-2x^2y^2-y^4}{x^2+x^3}$.

62. $x + 1 - \frac{4x^3+4x^2+x}{4x^2+4x+1}$.

63. $a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - \frac{a^4+4a^3+6a^2+4a}{a+1}$.

---

64. $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b}$.

65. $\frac{3a-2}{5} + \frac{2a+3}{2}$.

66. $\frac{m+n}{2} + \frac{m-n}{3}$.

67. $\frac{a+b}{7} - \frac{a-b}{8}$.

68. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2$.

69. $1 - \frac{a}{2b} - \frac{b}{2a}$.

70. $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p}$.

71. $\frac{x^2}{bc} + \frac{y^2}{ac} - \frac{z^2}{ab}$.

72. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$.

73. $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3}$.

74. $\frac{3a+4}{3} - \frac{7a+5}{4} - \frac{8-7a}{6} + \frac{5-3a}{8} - \frac{3-7a}{12}$.

75. $\frac{a+x}{a} - \frac{x}{a+x}$.

76. $\frac{1}{2(x-y)} - \frac{1}{2(x+y)}$.

77. $\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1}$.

78. $\frac{x}{x-1} - \frac{y}{y-1}$.

79. $\frac{m+n}{m-n} + \frac{m-n}{m+n}$.

80. $\frac{m+n}{m-n} - \frac{m-n}{m+n}$.

81. Zähler und Nenner des Bruches $\frac{a}{b}$ sollen 1. um m vermehrt, 2. um m vermindert werden; wie groß ist die Differenz zwischen dem gegebenen und dem jedesmal entstehenden neuen Bruche?

82. $\frac{6+3x^2}{9-4x^2}-\frac{2-3x^2}{3+4x^2}$.

83. $\frac{3a^2-4a+5}{6a-7}+\frac{4a^2+5a-6}{8a-9}$.

84. $\frac{2}{2x-1}-\frac{5}{3x-1}+\frac{4}{2x-3}$.

85. $\frac{2x}{x-1}+\frac{3x+1}{x-2}-\frac{4x-3}{x-3}$.

86. $\frac{2x+3y}{6x(2x-3y)}-\frac{2x-3y}{6x(2x+3y)}$.

87. $\frac{a^2+5ab-b^2}{a^2+4ab+4b^2}-\frac{a-b}{a+2b}$.

88. $\frac{2x-5y}{9x+3y}-\frac{6x+5y}{12x+4y}+\frac{3x+4y}{3x+y}$.

89. $\frac{2m-4n}{3m-3n}-\frac{1}{2}-\frac{m^2-5mn}{6m^2-6mn}$.

90. $\frac{1}{4+2a}-\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a+a^2}-\frac{1}{a-2}$.

91. $\frac{1}{x-y}-\frac{x+y}{x^2-xy}+\frac{x-2y}{2xy}$.

92. $\frac{1}{x^2-y^2}+\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(x-y)^2}$.

93. $\frac{a+1}{a-1}+\frac{a+2}{a-2}+\frac{a+3}{a-3}$.

94. $\frac{ab}{a+b}+\frac{ac}{a+c}+\frac{bc}{b+c}$.

95. $\frac{a+b-c}{ab}+\frac{a-b+c}{ac}+\frac{b+c-a}{bc}$.

96. $\frac{5a-8b}{a+b}+\frac{3a-b}{a-b}-\frac{a-4b}{a+b}+\frac{a+5b}{a-b}$.

97. $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}-\frac{2b}{a^2-b^2}+\frac{2a}{a^2+2ab+b^2}$.

98. $\frac{y+1}{y-1}+\frac{y-1}{y+1}+\frac{y^2+1}{y^2-1}+\frac{y^2-2y+1}{y^2+2y+1}$.

99. $\frac{1}{a-(b+c)}+\frac{1}{b-(a+c)}+\frac{1}{c-(a+b)}$.

100. $\frac{ab}{(a-c)(b-c)}-\frac{ac}{(a-b)(b-c)}+\frac{bc}{(a-b)(a-c)}$.

101. $1-\frac{a-1}{a+1}+\frac{a^2-a+1}{a^2+1}-\frac{a+1}{a-1}+\frac{a^2+a+1}{a^2-1}-\frac{2a-4}{a^4-1}$.

102. $\left(\frac{2}{3}a+\frac{3}{4}b+\frac{4}{5}c\right)+\left(\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}b+\frac{3}{4}c\right)$.

103. $\left(\frac{3}{4}x+\frac{7}{6}y\right)+\left(\frac{5}{3}x+\frac{4}{5}y\right)+\left(\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}y\right)$.

104. $\left(\frac{2a}{3}-\frac{3b}{4}-\frac{4c}{5}\right)-\left(\frac{a}{2}-\frac{2b}{3}+\frac{3c}{4}\right)$.

105. $\left(\frac{3x^2}{4}-\frac{2xy}{3}+\frac{y^2}{9}\right)+\left(\frac{5x^2}{6}-\frac{3xy}{5}+\frac{7y^2}{12}\right)$.

106. $\left(\frac{5a^2}{4}-\frac{4ab}{3}+\frac{3b^2}{2}\right)-\left(\frac{4a^2}{5}-\frac{3ab}{4}-\frac{2b^2}{3}\right)$.

107. $\frac{5x^2+9x+14}{2x^2+3x-2}-\frac{3x-5}{x+2}+\frac{x-4}{x-2}$.

108. $\frac{3m+n}{3m^2-mn}-\frac{2m+3n}{12mn-4n^2}+\frac{3m^2-mn-6n^2}{18m^2n-6mn^2}$.

109. $\frac{6x-9y}{6x^2-11x+3y^2}-\frac{2x-3y}{2x^2-7xy+6y^2}+\frac{3x+4y}{3x^2-7xy+2y^2}$. $\left[=\frac{1}{x-2y}\right]$

110. $\frac{x}{2x-y}+\frac{2x^2+2xy}{2xy+3y^2}-\frac{4xy}{4x^2+4xy-3y^2}$. $\left[=\frac{x}{y}\right]$

111. $\frac{x^2y^2}{a^2b^2}+\frac{(x^2-b^2)(b^2-y^2)}{b^2(a^2-b^2)}+\frac{(a^2-x^2)(a^2-y^2)}{a^2(a^2-b^2)}$. $[=1]$

112. $\frac{2a^2-3ax}{2a-x}-\frac{2a^2-3ax}{2a+x}+\frac{10a^2x^2-7ax^3}{4a^3-4a^2x-ax^2+x^3}$. $\left[=\frac{ax}{a-x}\right]$

113. $\frac{5x^2}{18x^2-6y}-\frac{27x^4+x^2y}{54x^4-6y^2}+\frac{x^2+6y}{6y}-\frac{x^4-x^2y}{6x^2y+2y^2}$. $[=1]$

Multiplication und Division eines Bruches durch eine ganze Zahl. (§. 103.)

114. $\frac{a\,b}{4\,m}.3\,c.$ **115.** $\frac{a}{2\,m}.2\,m.$ **116.** $\frac{24\,x^2}{5\,y^2}.(-y^2).$

117. $\frac{2\,a^2x^2}{15\,b^2y^2}.5\,y^2.$ **118.** $\frac{a-b}{2\,a\,b}.2\,b.$ **119.** $\frac{a+b}{m}.(a-b).$

120. $\left(a+\frac{b^2-a^2}{a}\right).a.$ **121.** $\left(1+\frac{1-a}{1+a}\right).(1+a).$

122. $\left(\frac{x^2+2\,x\,y+y^2}{4\,x\,y}-1\right).2\,x\,y.$ **123.** $\left(\frac{3\,m^3}{4\,n^3}+\frac{2\,m^2}{3\,n^2}+\frac{m}{2\,n}\right).12\,n$

124. $\left(\frac{1}{m^3}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m}\right).m^4.$ **125.** $\left(\frac{a^3}{x^3}-\frac{2\,a^2}{x^2}+\frac{3\,a}{x}+4\right).x^3.$

126. $\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{2n}{n^2-1}\right).(n+1).$ **127.** $\left(\frac{y^2}{a^3}+\frac{y}{a^2}-\frac{1}{a-1}\right).(a-1).$

128. $\left(1+\frac{a^2b^2-2\,a\,b\,c^2+c^4}{4\,a\,b\,c^2}\right).(a^2b^2-2\,a\,b\,c^2+c^4).$

129. $\left(\frac{2\,x^3}{5}-\frac{5\,x^2y}{8}+\frac{3\,x\,y^2}{4}-\frac{7\,y^3}{10}\right).(4\,x^2-5\,x\,y+y^2).$

---

130. $\frac{2\,a\,b}{3\,m}:2\,a.$ **131.** $\frac{12\,a\,m\,x}{5\,b\,c}:-4\,a\,x.$ **132.** $\frac{2\,x}{3\,m\,y}:3\,m\,y.$

133. $\frac{10\,m^3n^2}{x\,y^2}:5\,m^2n^2.$ **134.** $\frac{24\,p^2q}{13\,x\,y}:8\,q\,y.$ **135.** $\frac{3\,x^3y^3}{4\,a^2b}:2\,a\,b^2.$

136. $\left(1+\frac{m-n}{m+n}\right):2\,m.$ **137.** $\left(1+\frac{b}{1-b}\right):(1+b).$

138. $\left(a+b-\frac{a^2+b^2}{a+b}\right):(a+b).$ **139.** $\left(\frac{m\,x^2}{a^2-x^2}-m\right):(2\,x^2-2\,a^2).$

140. $\frac{6\,a^2+5\,a\,b-6\,b^2}{2\,a+3\,b}:(3\,a-2\,b).$

141. $\frac{1-2\,m-7\,m^2-4\,m^3}{1-2\,m+m^2}:(1+2\,m+m^2).$

142. Entwickle den Bruch $\frac{a}{x-1}$ in eine Reihe. (§. 95, Zusatz.)

143. Entwickle ebenso den Bruch $\frac{a}{x+1}$ in eine Reihe.

Multiplication und Division durch einen Bruch. (§§. 104 — 107.)

144. $a\,x.\frac{2\,b}{y}.$ **145.** $4\,x^2y^2.\frac{3\,a\,b}{2\,x\,y}.$ **146.** $2\,a^3.\frac{b\,x^2}{2\,a^2c^2y^2}.$

147. $(a-2\,b).\frac{2\,m}{3\,n}.$ **148.** $(a-x).\frac{a+x}{a\,x}.$ **149.** $3\,a\,x.\left(a-\frac{b}{3\,a\,x}\right).$

150. $\frac{2\,a\,b}{c\,d}.\left(-\frac{3\,a\,x}{c\,m}\right).$ **151.** $\frac{6\,a}{7\,b}.\frac{2\,b}{3\,d}.\left(-\frac{14\,c}{15\,e}\right).\left(-\frac{5\,d}{6\,a}\right).$

152. $\frac{a+b}{m-n}.\frac{a-b}{m+n}.$ **153.** $\left(1+\frac{b}{a}\right).\frac{a-b}{2\,b}.$

154. $\left(\frac{2\,a+3\,x}{2\,a-3\,x}\right)^2.$ **155.** $\left(\frac{4\,a^2-9\,b^2}{12\,a\,b}\right)^2.$

156. $\frac{2\,a^2-a\,x}{a\,x-x^2}.\frac{a^2x^3-a\,x^4}{2\,a-x}.$ **157.** $\frac{x^2+2\,x+9}{x^4-5\,x^2+12}.\frac{x^3-8\,x}{x+7}.$

158. $\left(\frac{x+m}{x}-\frac{2\,x}{x-m}\right).\frac{x-m}{x^2+m^2}.$ **159.** $\left(\frac{a^3}{2\,b}-\frac{a^2}{3\,b^2}-\frac{a}{4\,b^3}\right).\frac{3\,b^3}{4\,a^3}.$

160. $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1-\frac{a}{b}\right).\frac{a}{a+b}.\frac{b}{b-a}.$

161. $\left(\frac{3\,m}{m-1}-\frac{2\,m}{m+1}-\frac{m^2}{m^2-1}\right).\frac{m^2-1}{m}.$

162. $\left(\frac{5\,y^2}{12}-y\,z+\frac{2\,z^2}{3}\right)\left(\frac{6\,y}{5}-\frac{3\,z}{2}\right)\left(\frac{2\,y}{3}+z\right).$

163. $\left(\frac{3a}{4} - \frac{2b}{3} + \frac{c}{2}\right)\left(\frac{2a}{3} + \frac{3b}{4} - \frac{4c}{5}\right)$.

164. $\left(\frac{5x^2}{3} + \frac{2x}{5} - 2\right)\left(\frac{7x^2}{10} + \frac{5x}{4} + \frac{2}{3}\right)$.

165. $\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{a-1} - \frac{3}{a+1} + \frac{4}{a+2}\right) \cdot \frac{a^2-1}{a^2+5a-6}$.

166. $\left(\frac{p^2x^2}{2q^2y^2} + \frac{2px^3}{3q^3y} - \frac{3x^4}{4q^4}\right)\left(\frac{4p^2x^2}{3q^2y^2} - \frac{3px^3}{2q^3y} + \frac{2x^4}{q^4}\right)$.

---

167. $2am : \frac{2m}{b}$.

168. $6a^2x : -\frac{3b^2y}{2x}$.

169. $12a^3b^4 : \frac{4ab^2}{x^2y^2}$.

170. $(x+y) : \frac{x+y}{x-y}$.

171. $3y : \left(1 - \frac{y}{x}\right)$.

172. $(x^2 - y^2) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$.

173. $(a^2 - b^2) : \frac{a+b}{a-b}$.

174. $a - \left[(m-n) : \frac{m-n}{a-b}\right]$.

175. $\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2} : \frac{a-b}{c+d}$.

176. $\frac{21bx^2y^3}{25a^2cz^3} : \frac{14a^2y^2z}{45b^2c^2x}$.

177. $\left(a + \frac{b}{c}\right) : \left(a - \frac{b}{c}\right)$.

178. $\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}\right) : \frac{xy}{x^2-y^2}$.

179. $\left(\frac{3x^3}{4y} - \frac{9x^2}{15} + \frac{xy}{10}\right) : \frac{3x}{5y}$.

180. $\left(\frac{x^9}{27} - \frac{8a^6}{125}\right) : \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2a^2}{5}\right)$.

181. $\left(\frac{8x^6}{27y^3} - \frac{27a^3}{8b^6}\right) : \left(\frac{2x^2}{3y} - \frac{3a}{2b^2}\right)$.

182. $\left(\frac{2a^2}{9} - \frac{ax}{12} - \frac{3x^2}{16}\right) : \left(\frac{2a}{3} - \frac{3x}{4}\right)$.

183. $\left(\frac{3x^2}{4a^8} - \frac{19y^2}{3a^2} + \frac{12a^4y^4}{x^2}\right) : \left(\frac{x}{2a^4} + \frac{y}{3a} - \frac{2a^2y^2}{x}\right)$.

184. Bestimme den Quotienten $\frac{(1+x)(1+y)(1+z)}{(1-x)(1-y)(1-z)}$

für $x = \frac{m-n}{m+n}$, $y = \frac{n-p}{n+p}$, $z = \frac{p-m}{p+m}$.

185. $\frac{a^5 + 7a^4y + 25a^3y^2 + 48a^2y^3 + 36ay^4}{a^3y - 27y^4} : \left(a + 7y + \frac{25y^2}{a-3y}\right)$. $\left[= \frac{a}{y}\right]$

186. $\left\{\frac{12a^2+a-6}{12a^2-a-6} - \frac{6a^2-a-2}{6a^2+a-2}\right\} : \left\{\frac{3a+2}{4a-3} - \frac{12a+8}{12a^2-a-6}\right\}$.

$\left[= \frac{4a}{(3a+2)(2a-1)}\right]$

187. $\left\{\frac{a^2-2ab}{4a^2b-b^3} - \frac{2ab-b^2}{a^3-2a^2b}\right\} : \left\{\frac{\frac{1}{2}a^2 - \frac{9}{8}ab - \frac{9}{4}b^2}{2a^2-3ab-2b^2} - \frac{\frac{9}{8}ab - \frac{1}{2}b^2}{2a^2-ab}\right\}$. $\left[= \frac{a+b}{ab}\right]$

188. $\dfrac{1 + \frac{b}{a}}{1 - \frac{b}{a}}$.

189. $\dfrac{\frac{a}{m+n}}{\frac{b}{m-n}}$.

190. $\dfrac{\frac{x-1}{x+1}}{\frac{x}{x^2-1}}$.

191. $\dfrac{\frac{1+x}{1-x} - 1}{\frac{1-x}{1+x} + 1}$.

192. $\dfrac{4 - \frac{3x-2}{3}}{3 - \frac{4x+3}{5}}$.

193. $\dfrac{x - \frac{x^2-2x+3}{x}}{x - \frac{x^2-3x+2}{x}}$.

194. $\dfrac{a + \frac{bx-ay}{x+y}}{a - \frac{bx+ay}{x+y}}$.

195. $\dfrac{\frac{3x+3y}{2y} - \frac{5x+6y}{4y}}{\frac{x}{x-y} - \frac{x}{x+y}} \cdot \dfrac{4x + \frac{4y^2}{x}}{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}$.

B. Decimalbrüche.

Verwandeln gemeiner Brüche in Decimalbrüche und umgekehrt.

(§§. 110 und 111.)

Verwandle folgende gemeine Brüche in Decimalbrüche:

196. a) $\frac{89}{16}$; b) $\frac{7}{40}$; c) $\frac{63}{25}$; d) $\frac{103}{32}$; e) $\frac{1359}{128}$; f) $\frac{9084}{625}$;

197. g) $\frac{17}{6}$; h) $\frac{13}{72}$; i) $\frac{313}{11}$; k) $\frac{53}{37}$; l) $\frac{107}{176}$; m) $\frac{2345}{792}$;

198. n) $\frac{26}{41}$; o) $\frac{92}{205}$; p) $\frac{131}{14}$; q) $\frac{129}{130}$; r) $\frac{85}{222}$; s) $\frac{3121}{404}$;

199. t) $\frac{40}{73}$; u) $\frac{137}{96}$; v) $\frac{37}{106}$; x) $\frac{259}{444}$; y) $\frac{1211}{395}$; z) $\frac{5432}{615}$.

Verwandle folgende Decimalbrüche in gemeine Brüche:

200. a) $0{\cdot}25$; b) $7{\cdot}75$; c) $0{\cdot}072$; d) $17{\cdot}525$; e) $0{\cdot}9518$;

201. f) $0{\cdot}\dot{6}$; g) $0{\cdot}\dot{1}\dot{8}$; h) $4{\cdot}0\dot{6}$; i) $26{\cdot}7\dot{5}2$; k) $9{\cdot}3\dot{2}\dot{4}$;

202. l) $0{\cdot}8\dot{1}$; m) $0{\cdot}0\dot{4}\dot{1}$; n) $8{\cdot}5\dot{6}7$; o) $0{\cdot}\dot{4}37\dot{8}$; p) $0{\cdot}\dot{9}0243$;

203. q) $0{\cdot}7\dot{3}$; r) $15{\cdot}3\dot{5}1$ s) $0{\cdot}79\dot{3}2\dot{4}$; t) $0{\cdot}290\dot{7}\dot{4}$; u) $0{\cdot}23468\dot{4}$.

Rechnen mit vollständigen Decimalbrüchen. (§§. 112—114.)

Addire folgende Decimalbrüche zuerst in verticaler, dann in horizontaler Richtung:

204.	**205.**	**206.**	**207.**	**208.**	**209**
210. $19{\cdot}78$	$+\ 35{\cdot}096$	$+\ 8{\cdot}71295$	$+\ 0{\cdot}2087$	$+\ 4{\cdot}178063$	$+\ 15{\cdot}892$;
211. $37{\cdot}09$	$+\ 18{\cdot}388$	$+\ 2{\cdot}34966$	$+\ 0{\cdot}2897$	$+\ 3{\cdot}047585$	$+\ 74{\cdot}418$;
212. $5{\cdot}35$	$+\ 56{\cdot}905$	$+\ 7{\cdot}58506$	$+\ 0{\cdot}5375$	$+\ 7{\cdot}493203$	$+\ 9{\cdot}005$;
213. $10{\cdot}93$	$+\ 68{\cdot}227$	$+\ 3{\cdot}08751$	$+\ 0{\cdot}1884$	$+\ 0{\cdot}479728$	$+\ 56{\cdot}793$;
214. $71{\cdot}86$	$+\ 43{\cdot}683$	$+\ 4{\cdot}86235$	$+\ 0{\cdot}5679$	$+\ 5{\cdot}637564$	$+\ 88{\cdot}608$.

215. $173{\cdot}5879 - 91{\cdot}3462$.

216. $42{\cdot}0073 - 17{\cdot}658$.

217. $54{\cdot}3128 - 5{\cdot}573$.

218. $95{\cdot}78 - 58{\cdot}2834$.

219. $748{\cdot}625 - 283$.

220. $473{\cdot}5 - 281{\cdot}937$.

221. $500 - 374{\cdot}9864$.

222. $1 - 0{\cdot}172635$.

223. $79{\cdot}24405 - 1{\cdot}7786 + 88 - 98{\cdot}30556 + 27\frac{5}{8}$.

224. Bestimme $A = a + b + c$, $B = a + b - c$,
$C = a - b + c$, $D = b + c - a$
für $a = 23{\cdot}4567$, $b = 39{\cdot}0703$, $c = 51{\cdot}809$.

225. 1 Kilometer $= 0{\cdot}131823$ österr. Meilen; wie viel österr. Meilen sind 10, 100, 1000 Kilometer?

226. $48{\cdot}326.28$.

227. $9{\cdot}10993.315$.

228. $7{\cdot}1356.\frac{2}{5}$.

229. $0{\cdot}33047.3\frac{1}{7}$.

230. $6.8912.\dot{2}{\cdot}1506$.

231. $815{\cdot}279.0{\cdot}09156$.

232. $15{\cdot}30762.0{\cdot}00975$.

233. $91{\cdot}3425.3{\cdot}1416$.

234. Dividire $325{\cdot}67$ durch 10, 100, 1000, 10000.

235. $108{\cdot}931 : 97$.

236. $0{\cdot}5226 : 39$.

237. $8 : 1{\cdot}25$.

238. $0{\cdot}235 : 0{\cdot}56$.

239. $0{\cdot}5976 : 0{\cdot}083$.

240. $2{\cdot}0093724 : 0{\cdot}0054$.

241. $30{\cdot}9644 : 38{\cdot}9$.

242. $1{\cdot}6820736 : 2{\cdot}256$.

Rechnen mit abgekürzten Decimalbrüchen. (§§. 115—120.)

243. Kürze auf 3 Decimalstellen ab:
a) 25·7917, b) 3·14159, c) 0·8398, d) 81·57942.

244. 0·91654 + 0·17357 + 0·23408 + 0·17999 + 0·879. (3 Decim.)

245. 17·34255 + 8·509796 + 3·5882 + 12·0591 + 45·77316. (4 Decim.)

246. 19·3875.. + 23·473.. + 38·378.. + 8·4531.. + 0·082..

247. Verwandle die Glieder der Reihe

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots + \frac{1}{10.11.12}$$

in Decimalbrüche und berechne die Summe auf 3 Decimalen.

248. Berechne eben so auf 4 Decimalen die Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{2.4.6} + \frac{1}{2.4.6.8} + \frac{1}{2.4.6.8.10} + \frac{1}{2.4.6.8.10.12}.$$

249. 88·9397 — 51·4823. (2 Dec.)

250. 4·37147 — 1·6392. (3 Dec.)

251. 8·2345.. — 3·5678..

252. 35·79.. — 10·809..

---

253. 3·1415.9·2587. (3 Dec.)

254. 0·9156.23·851. (2 Dec.)

255. 12·0748.1·91345. (4 Dec.)

256. 81·2867.0·1234. (3 Dec.)

257. 5·376079.8·058876. (5 Dec.)

258. 8·14793.7·10936.2·51446. (4 Dec.)

259. 1·045.1·045.1·045.1·045. (6 Dec.)

260. 23·17346.8·09745.0·11944.3·58876. (4 Dec.)

261. Bestimme auf 4 Decimalen

$$p = (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(b + c - a)$$

für $a = 1{\cdot}30785$, $b = 2{\cdot}09122$, $c = 2{\cdot}80116$.

262. Berechne die Reihe

$$1 + \frac{1}{m}.x - \frac{m-1}{2.m^2}.x^2 + \frac{(m-1)(2m-1)}{2.3.m^3}.x^3 - \frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)}{2.3.4.m^4}.x^4$$

für $m = 3$ und $x = 0{\cdot}015$ auf 7 Decimalen.

263. 834 × 2·1335..

264. 0·37 × 15·0816..

265. 2·95525.. × 0·1563..

266. 6·04.. × 0·0085..

267. 28·135.. × 7·089..

268. 0·1956.. × 0·8091..

---

269. 45·12345 : 3·8265. (3 Dec.)

270. 986·256 : 127·85. (2 Dec.)

271. 13·794 : 28·376. (4. Dec.)

272. 0·7123 : 43·566. (4 Dec.)

273. 754·06 : 0·649. (2 Dec.)

274. 3·1416 : 7·825. (3 Dec.)

275. 7·24257 : 19·14. (3 Dec.)

276. 0·436861 : 18·547. (4 Dec.)

277. 1 Kilogramm = 1·785523 Wiener Pfund; wie viel Kilogramm beträgt 1 Wiener Pfund? (5 Dec.)

278. $\frac{5{\cdot}3145.2{\cdot}4906}{7{\cdot}2084.3{\cdot}7449}$. (3 Dec.)

279. $\frac{3{\cdot}027\ 8{\cdot}2579}{9{\cdot}461.6{\cdot}3047}$. (3 Dec.)

280. $\frac{0{\cdot}35791.0{\cdot}46802.0{\cdot}14235.0{\cdot}37281}{0{\cdot}41885.0{\cdot}89134.0{\cdot}15786.0{\cdot}29173}$. (4 Dec.)

281. 3·187 : 5·3185..

282. 912·857 : 0·118..

283. 53·4428.. : 9·157.

284. 71·293.. : 9·8764.

285. 0·3497.. : 14.284..

286. 9·2737.. : 0·0856..

287. 0·00369.. : 3·846..

288. 30·2582.. : 0·71356..

C. Kettenbrüche.

Verwandlung gemeiner Brüche in Kettenbrüche und umgekehrt.

(§§. 122 und 123.)

Verwandle folgende Brüche in Kettenbrüche:

289. a) $\frac{92}{381}$; b) $\frac{61}{437}$; c) $\frac{115}{151}$; d) $\frac{67}{551}$; e) $\frac{113}{355}$;

290. f) $\frac{49}{235}$; g) $\frac{137}{196}$; h) $\frac{188}{487}$; i) $\frac{108}{887}$; k) $\frac{349}{1478}$;

291. l) $\frac{104}{31}$; m) $\frac{284}{83}$; n) $\frac{519}{53}$; o) $\frac{373}{250}$; p) $\frac{8658}{1405}$;

292. q) $0{\cdot}513$; r) $0{\cdot}0934$; s) $0{\cdot}7307$; t) $5{\cdot}13722$;

293. $\frac{rst + r + t}{prst + pr + pt + st + 1}$; **294.** $\frac{12x^2 + 17x + 7}{24x^3 + 46x^2 + 35x + 10}$.

Verwandle folgende Kettenbrüche in gemeine Brüche:

295. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ **296.** $\frac{1}{5} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

297. $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{7}$ **298.** $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + \frac{1}{a+3} + \frac{1}{a+4}$.

Näherungsbrüche. (§§. 125–129.)

Verwandle folgende Brüche in Kettenbrüche und bestimme deren Näherungsbrüche:

299. a) $\frac{129}{164}$; b) $\frac{111}{53}$; c) $\frac{135}{328}$; d) $\frac{100}{137}$; e) $\frac{157}{972}$;

300. f) $\frac{999}{439}$; g) $\frac{3361}{900}$; h) $0{\cdot}357$; i) $0{\cdot}8282$; k) $2{\cdot}7041$.

301. Gib die ersten fünf Näherungswerthe des Decimalbruches $0{\cdot}65438$ und die Fehlergrenze eines jeden derselben an.

302. Verwandle $\frac{625}{3178}$ in einen Kettenbruch und weise an den Näherungsbrüchen die in den §§. 126 und 127 begründeten Eigenschaften nach.

303. Ein Wiener Pfund hat $0{\cdot}56006$ Kilogramm; welches sind die ersten fünf Näherungswerthe dieser Verhältnißzahl?

304. Ein Liter ist $= 0{\cdot}70685$ Wiener Maß; suche die Näherungswerthe.

305. Ein österr. Achtguldenstück enthält $5{\cdot}80645$, ein deutsches Zehnmarkstück $3{\cdot}58423$ Gramm feines Gold; drücke das Verhältniß zwischen diesen beiden Goldmünzen in kleineren Zahlen möglichst genau aus.

306. Der synodische Monat, d. i. die Zeit von einem Neumonde zum andern, hat $29{\cdot}53059$, das tropische Sonnenjahr $365{\cdot}24222$ Tage; bestimme die ersten acht Näherungswerthe des Verhältnisses beider Zeiträume.

Auf dem sechsten Näherungsbruche $\frac{19}{235}$ beruht der Meton'sche Cyclus von 19 Jahren, nach deren Verlauf die Mondesphasen wieder auf die nämlichen Tage des Jahres fallen, sowie die goldene Zahl, welche anzeigt, das wievielte Jahr in diesem Cyclus ein bestimmtes Jahr ist.

---

7. Verhältnisse und Proportionen.

A. Verhältnisse.

(§§. 132 und 133.)

1. Drücke folgende Verhältnisse in ganzen Zahlen aus:

a) $7\frac{3}{8} : 3\frac{5}{8}$; b) $\frac{9}{16} : \frac{7}{12}$; c) $\frac{11}{25} : 5\frac{13}{20}$; d) $23\frac{3}{16} : 15\frac{5}{9}$;

e) $8\frac{3}{5} : 2{\cdot}01$; f) $0{\cdot}215 : 3{\cdot}0816$; g) $(a - b) : \frac{ab}{a+b}$.

2. Kürze folgende Verhältnisse ab:

a) $10 : 24$; b) $72 : 56$; c) $120 : 48$; d) $ax\,(m^2 - n^2) : ab\,(m + n)$.

3. Drücke folgende Verhältnisse in den kleinsten ganzen Zahlen aus:

a) $4 : 6\frac{2}{3}$; b) $12\frac{6}{7} : 8\frac{4}{7}$; c) $\frac{6}{7} : 1\frac{7}{8}$; d) $15\frac{3}{4} : 6\frac{9}{16}$;

e) $0{\cdot}75 : 0{\cdot}625$; f) $3{\cdot}208 : 1{\cdot}28$; g) $\frac{x+y}{ax} : \frac{x^2 - y^2}{bx^2}$.

4. Von zwei Körpern legt A in jeder Minute 80 Meter, A' 96 Meter zurück; wie verhalten sich ihre Geschwindigkeiten?

5. Der Körper A legt in a Zeiteinheiten dieselbe Strecke zurück, wie A' in a' Zeiteinheiten; in welchem Verhältnisse stehen ihre Geschwindigkeiten?

6. Ein Meter verhält sich zu einem Wiener Fuß, wie 174 : 55; wie verhält sich a) ein Wiener Fuß zu einem Meter, b) ein Decimeter zu einem Wiener Zoll?

7. Welches Werthverhältniß besteht in Deutschland zwischen Gold und Silber, da aus 1 Pfund feinen Goldes $139\frac{1}{2}$ Zehnmarkstücke, aus 1 Pfund feinen Silbers 30 Thaler geprägt werden, und 1 Zehnmarkstück $3\frac{1}{3}$ Thaler gilt?

8. Wie verhalten sich die Flächen zweier Rechtecke, von denen das eine 28 Meter lang und 15 Meter breit, das andere 25 Meter lang und 16 Meter breit ist?

9. Von zwei Dampfmaschinen kann die eine in a Secunden b Kilogramm c Meter hoch, die andere in a' Secunden b' Kilogramm c' Meter hoch heben; wie verhalten sich die Kräfte dieser beiden Maschinen?

B. Proportionen.

(§§. 135—142.)

Löse folgende Proportionen auf:

10. $x : 5 = \frac{2}{3} : \frac{3}{8}$.

11. $3\frac{1}{8} : x = 15\frac{5}{8} : 5$.

12. $4\frac{1}{2} : 4\frac{4}{5} = x : 8\frac{8}{15}$.

13. $3\frac{1}{2} : 5\frac{1}{4} = 7\frac{3}{5} : x$.

14. $x : 0{\cdot}35 = 2{\cdot}38 : 1{\cdot}25$.

15. $14{\cdot}35 : 218{\cdot}275 = 9{\cdot}18 : x$.

16. $\frac{a}{m} : \frac{b}{p} = x : \frac{c}{q}$.

17. $x : 3\frac{3}{4} = m^3 : \frac{3m^2}{2}$.

18. $x : (m - 2n) = (6m + 8n) : (2m - 4n)$.

19. $(6a - 5b) : x = (12a^2 - 4ab - 5b^2) : (8a^2 - 2ab - 3b^2)$.

20. $\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} : \frac{m+n}{m-n} = \frac{m^2 - 2mn + n^2}{m+n} : x$.

21. $\left(b + \frac{b^3}{a^2 - b^2}\right) : x = \left(b + \frac{b^2}{a-b}\right) : \frac{a+b}{b}$.

22. $(x + a) : x = b : c$.

23. $x : (a - x) = \frac{a}{a+b} : \frac{b}{a-b}$

} mit Rücksicht auf §. 140, 1.

24. Führe an den Proportionen
a) $9 : 6 = 15 : 10$,
b) $20a\,(a + b) : 12a = 25\,(a^2 - b^2) : 15\,(a - b)$
die in den §§. 139 und 140 bezeichneten Formveränderungen durch.

25. Wenn $a : b = 2 : 3$, $b : c = 4 : 9$, $c : d = 3 : 5$ und $d : e = 3 : 8$ ist, wie verhält sich $a : b : c : d : e$? (§. 141.)

26. Gegeben ist $a : d = 4 : 3$, $c : d = 5 : 6$, $b : e = 20 : 9$, $b : f = 5 : 9$; $e : c = 3 : 5$; wie verhält sich $a : b : c : d : e : f$?

27. Ein Kilogramm verhält sich zu einem Wiener Pfund wie 25 : 14, ein Kilogramm zu einem deutschen Pfund wie 2 : 1, ein deutsches Pfund zu einem Londoner Pfund wie 43 : 39, ein russisches Pfund zu einem Londoner Pfund wie 65 : 72; wie verhalten sich je zwei dieser Gewichte zu einander?

C. Anwendung der Proportionen.

Angewandte Aufgaben mit einfachen Verhältnissen. (§§. 143 und 144.)

28. 17 Kilogr. einer Waare kosten 15 fl. 64 kr.; a) wie viel kosten 43 Kilogr.; b) wie viel Kilogr. erhält man für 35 fl. 88 kr.?

29. Wenn die Luft auf eine Fläche von $1\frac{1}{2}$ □^{dm} einen Druck von 154 Kilogr. ausübt, welcher Luftdruck lastet auf einer Fläche von 1 □^{m}?

30. Ein Land von m Quadratmeilen zählt r Einwohner; a) wie viele Einwohner kommen bei gleicher relativer Bevölkerung auf n Quadratmeilen; b) auf wie viele Quadratmeilen kommen s Einwohner?

31. Das Vorderrad eines Wagens hat a Meter, das Hinterrad b Meter im Umfange; wie oft hat sich ersteres umgedreht, wenn letzteres m Umläufe gemacht hat?

$$a = 2{\cdot}8; \quad b = 4{\cdot}2; \quad m = 170.$$

32. Ein sich bewegender Körper legt in a Secunden b Meter zurück; a) wie viel Meter legt er in t Secunden zurück; b) in wie viel Secunden legt er s Meter zurück?

33. Die Geschwindigkeiten zweier sich bewegender Körper verhalten sich wie $c : c'$; wie viel Zeit braucht der zweite zu einem Wege, zu welchem der erste t Stunden braucht?

34. Von einem Gasometer, welches 11·2 Cub.^{m} faßt, werden für eine gewisse Zeit 92 Laternen mit Gas versorgt; wie viel Cub.^{m} muß ein Gasometer halten, um 148 Laternen auf eben so lange Zeit mit Gas zu versehen?

35. Ein Manuscript gibt 162 Seiten, jede zu 50 Zeilen; wie viele Seiten wird es geben, wenn auf jede Seite 45 Zeilen kommen?

36. Ein Vorrath von Lebensmitteln reicht für a Personen auf b Tage; für wie viele Personen reicht der nämliche Vorrath c Tage länger?

$$a = 72, \quad b = 52, \quad c = 65.$$

37. Das aus Platin angefertigte, im Archive zu Paris aufbewahrte Mètre prototype ist bei der Temperatur des schmelzenden Eises nach den neuesten astronomischen Messungen der 10000856ste Theil eines Meridianquadranten unserer Erde. Bei wie viel Grad der 100theiligen Scala würde dieser Meterstab, wie ursprünglich angenommen wurde, genau eine dem 10000000sten Theile des Erdquadranten gleiche Länge haben, wenn der Ausdehnungscoefficient bei Platin für jeden Grad der Temperaturerhöhung 0·00000856 ist?

38. Eine Stadt hat 13750 Einwohner; wie viel sind 12% dieser Bevölkerung?

39. Nach der Duvillard'schen Sterblichkeitstafel erreichen von 502216 20jährigen Menschen 297070 das 50ste Jahr; wie viel % sterben hiernach in dem Alter von 20 bis 50 Jahren?

40. Wie viel betragen 3% α) auf Hundert, β) von Hundert, γ) in Hundert a) von 3758 fl.? b) von $2908\frac{2}{3}$ Mark? c) von 5230·65 Francs?

41. Jemand kauft eine Waare für a fl.; wie theuer muß er dieselbe verkaufen, um p % zu gewinnen?

42. Eine Waare wird mit p % Gewinn für a fl. verkauft; wie viel kostete dieselbe im Einkaufe?

43. Jemand kauft für 3480 fl. Waare, erhält aber bei contanter Bezahlung $2\frac{1}{2}$ % Sconto (Nachlaß); wie viel beträgt der Sconto, wenn er a) von Hundert, b) auf Hundert gerechnet wird?

44. Jemand erhält für eine verkaufte Waare nach Abzug von 2 % Provision 2174 Thlr.; wie viel beträgt die Provision? (Rechnung in Hundert.)

45. Ein Staatsloos im Nominalwerthe von 250 fl. wird zum Curse 96·25 (für 100 des Nominalwerthes) gekauft; wie viel muß man dafür bezahlen?

46. Jemand kauft eine Eisenbahn-Actie von 200 fl., welche jährlich 5 % Zinsen trägt, für 176 fl.; zu wie viel % legt er sein Geld an?

47. Ein Capital bringt in t Jahren z fl. Zins; a) wie viel Zins bringt es bei gleichem Procent in t' Jahren; b) in wie viel Jahren bringt es z' fl. Zins?

48. Zu wie viel Procent muß ein Capital angelegt werden, damit es in t' Jahren eben so viel Zins bringe, als es in t Jahren zu p % Zins bringt?

$$t' = 3,\ t = 2,\ p = 6.$$

Angewandte Aufgaben mit zusammengesetzten Verhältnissen.

(§§. 145 und 146.)

49. a Kilogr. Garn geben b Meter Leinwand von c Centimeter Breite; α) wie viel Meter Leinwand von c' Centimeter Breite geben a' Kilogr. desselben Garns; β) wie breit kann die Leinwand werden, wenn aus a' Kilogr. Garn b' Meter gefertigt werden sollen; γ) wie viel Kilogr. Garn sind erforderlich, um b' Meter Leinwand von c' Centimeter Breite zu erhalten?

50. Aus einer gewissen Quantität Wolle können 16 Stück $\frac{5}{3}$ Meter breites Tuch verfertigt werden, wenn das Stück 54 Meter hält. Aus einem Theil der Wolle werden 2 Stück $1\frac{1}{4}$ Meter breites Tuch verfertigt, jedes Stück zu 48 Meter; wie viele Stück $1\frac{1}{4}$ Meter breites Tuch, das Stück zu 47 Meter, können aus dem Reste verfertigt werden?

51. Eine Maschine hebt in a Secunden b Kilogr. auf eine Höhe von c Meter; in welcher Zeit kann sie b' Kilogr. c' Meter hoch heben?

$$a = 93,\ b = 4185,\ c = \tfrac{3}{5},\ b' = 3912,\ c' = 1\tfrac{1}{4}.$$

52. Eine Mühle mahlt auf a Gängen bei b Umdrehungen pr. Minute in c Stunden d Hektoliter Getreide; auf wie viel Gängen können bei b' Umdrehungen pr. Minute in c' Stunden d' Hektoliter geliefert werden?

53. Von zwei Rädern, welche in einander greifen, hat das eine a, das andere b Zähne; wenn nun das erste Rad in s Minuten m Umläufe macht, wie vielmal dreht sich das zweite Rad in t Minuten um?
54. 12 Centner werden 10 Meilen weit für $20\frac{1}{2}$ Mark geführt; a) wie weit werden $24\frac{3}{4}$ Centner für $30\frac{1}{2}$ Mark geführt; b) wie viel Centner wird der Fuhrmann für $23\frac{2}{5}$ Mark $18\frac{1}{4}$ Meilen weit führen; c) wie viel Frachtlohn wird man zahlen müssen, damit 37 Ctr. $25\frac{1}{2}$ Meilen weit geführt werden?
55. 6 Arbeiter vollendeten in 4 Tagen einen Graben, welcher 300^{m} lang, $8\frac{1}{3}^{dm}$ breit und 6^{dm} tief ist. Bei einem zweiten Graben erfordert die Förderung von $2\frac{1}{3}$ Cub.^{m} eben so viel Zeit als beim ersten die Förderung von $4\frac{1}{2}$ Cub.^{m}. a) Wie viele Arbeiter vollenden den zweiten Graben in 9 Tagen, wenn er 245^{m} lang, $11\frac{2}{3}^{dm}$ breit und $3\frac{1}{2}^{dm}$ tief ist; b) in wie viel Tagen vollenden den zweiten Graben 10 Arbeiter, wenn derselbe 250^{m} lang, $9\frac{3}{4}^{dm}$ breit und $4\frac{1}{2}^{dm}$ tief ist?
56. Wie viel Zins bringen 3791 fl. zu 4 % in 3 Jahren?
57. Wie viel Zins geben a) 1287 fl., b) $3745\frac{1}{2}$ fl., c) 8391 fl. 34 kr. zu $5\frac{1}{2}$ % in α) 2 Jahren, β) $3\frac{1}{2}$ Jahren, γ) 2 Jahren 4 Monaten 18 Tagen?
58. Wie viel Zins tragen C fl. Capital in T Tagen zu 6 %?
59. Wie viel Zins bringen 3609 Mark Capital in 125 Tagen a) zu 6 %, b) zu 4 %, c) zu $4\frac{1}{2}$ %, d) zu 2 %?
60. Eine Staatsschuldverschreibung von 500 fl. wird am 17. August zum Curse von $69\frac{1}{2}$ eingekauft; wie viel muß man dafür bezahlen, wenn die rückständigen Zinsen (des Nominalwerthes) à $4\frac{1}{5}$ % seit 1. Mai zu vergüten sind?
61. In welcher Zeit geben 4844 fl. Capital, zu $4\frac{1}{3}$ % angelegt, $886\frac{1}{3}$ fl. Zins?
62. Wie groß muß das Capital sein, welches zu $5\frac{1}{4}$ % in $2\frac{7}{12}$ Jahren $950\frac{3}{4}$ Mark Zins bringt?
63. Zu wie viel % müssen 1424 fl. angelegt werden, damit sie in $3\frac{1}{2}$ Jahren $237\frac{1}{8}$ fl. Interessen geben?
64. Wenn c fl. Capital in t Jahren z fl. Zins tragen, a) welchen Zins bringen c' fl. Capital in t' Jahren; b) welches Capital bringt in t' Jahren z' fl. Zins; c) in wie viel Jahren bringen c' fl. Capital z' fl. Zins?
65. Ein Capital c wird nach t Jahren zurückgezahlt; zu welcher Summe (s) ist es bei p % einfachen Zinsen angewachsen?

$$s = c.\frac{100 + tp}{100}.$$

66. Ein Capital c, welches nach t Jahren ohne Zinsen fällig ist, soll zu Anfang dieser Zeit ausgezahlt werden; wie viel (r) hat der Schuldner zu entrichten, wenn er wegen der früheren Zahlung p % einfache Zinsenvergütung anspricht?

Bei der Rechnung auf Hundert ist $r = c - \frac{cpt}{100 + pt} = \frac{100c}{100 + pt}$

„ „ „ von Hundert „ $r = c - \frac{cpt}{100}$.

Welche Rechnung ist die richtige, welche die bequemere?
Kaufleute berechnen den Discont bei Wechseln und den Sconto bei Waarenbeträgen immer von Hundert.

67. Eine Wechselsumme von 2813 fl. 15 kr. wird 2 Monate vor der Verfallszeit mit 4 % discontirt; a) wie viel beträgt der Discont; b) wie viel hat der Käufer zu bezahlen?
68. Wie viel muß man heute gegen 6 % ausleihen, damit man nach 3 Jahren sammt Zinsen 2950 fl. zurückerhalte? (Auf Hundert.)

69. Jemand legt zu Anfang eines jeden Jahres ein Capital von 2000 Mark an und setzt dies durch 5 Jahre fort; wie groß ist der gegenwärtige Werth aller Capital-Anlagen bei 5 % einfacher Verzinsung?

70. Auf ein bestimmtes Kaufobject bietet A 24000 fl. sogleich zahlbar; B 16000 fl. contant und ferner je 3000 fl. nach 1, 2, 3 Jahren unverzinslich zahlbar; C 17000 fl. contant und ferner je 2000 fl. nach $1\frac{1}{2}$, 3, $4\frac{1}{2}$ und 6 Jahren unverzinslich zahlbar. Welches ist das vortheilhafteste Anbot, wenn 6 % einfache Zinsenvergütung angenommen wird?

71. Die Capitalien c', c'', c''' ... sind bezüglich nach t', t'', t''', ... Zeiteinheiten (Jahren, Monaten, ...) unverzinslich zu zahlen. Alle Zahlungen sollen auf einmal geleistet werden. Wann muß die Gesammtsumme $s = c' + c'' + c''' + ..$ gezahlt werden?

Heißt m der mittlere Zahlungstermin und nimmt man einfache Zinsen zu p% an, so ist

bei der Rechnung auf Hundert

$$m = \frac{\frac{c't'}{100 + pt'} + \frac{c''t''}{100 + pt''} + \frac{c'''t'''}{100 + pt'''} + \ldots}{\frac{c'}{100 + pt'} + \frac{c''}{100 + pt''} + \frac{c'''}{100 + pt'''} + \ldots};$$

bei der Rechnung von Hundert

$$m = \frac{c't' + c''t'' + c'''t''' + \ldots}{c' + c'' + c''' + \ldots}.$$

Diese Rechnung heißt die Terminrechnung; man wendet dabei gewöhnlich die vom Procent unabhängige Berechnung von Hundert an.

72. Jemand hat 2000 fl. nach 2 Monaten, 1500 fl. nach 5 Monaten, 2400 fl. nach 1 Jahre, 2500 fl. nach 1 Jahre 3 Monaten unverzinslich zu zahlen; wann muß die Zahlung geschehen, wenn die Summe aller jener Terminzahlungen auf einmal erlegt werden soll?

Theilregel. (§§. 147 und 148.)

73. Zu einem Unternehmen gibt A 3100 fl., B 3500 fl., C 4200 fl. her; wenn nun dabei 324 fl. gewonnen werden, wie viel kommt auf jeden?

74. Es soll die Zahl 3710 in 4 Theile getheilt werden, welche sich zu einander verhalten, wie die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$.

75. Vier Gemeinden, von denen A 738 fl. 42 kr., B 815 fl., C 513 fl. 65 kr., D 618 fl. 83 kr. Steuern zahlt, sollen nach Verhältniß der Steuern zu einer Schulbaulichkeit, deren Kosten sich auf 924 fl. 30 kr. belaufen, beitragen; welcher Beitrag entfällt auf jede Gemeinde?

76. Eine Summe von s fl. ist in drei Theile a, b, c so zu theilen, daß sich $a : b = m : n$ und $b : c = p : q$ verhalte.

77. Unter 3 Personen sind 3960 fl. so zu vertheilen, daß B doppelt so viel als A, und C dreimal so viel als B bekomme; wie viel bekommt jeder?

78. Drei Personen sollen 9150 fl. so unter einander theilen, daß A so oft 5 fl. als B 3 fl., und C so oft 3 fl. als B 4 fl. erhalte; wie viel bekommt jede Person?

79. s Gulden sind in 4 Theile a, b, c, d so zu theilen, daß a : d = m : n, b : d = p : q und c : b = r : s sei.

80. Ein österr. Achtguldenstück enthält $\frac{9}{10}$ Gold und $\frac{1}{10}$ Kupfer; wie viel Gold und wie viel Kupfer braucht man, um 1000 Achtguldenstücke zu prägen, da 155 Stücke 1 Kilogramm wiegen?

81. Eine Erbschaft von 18420 fl. soll unter 4 Personen so getheilt werden, daß A $\frac{1}{3}$, B $\frac{1}{4}$, C $\frac{3}{10}$ und D den Rest erhalte. Vor der Theilung stirbt jedoch A, und die übrigen drei theilen nun auch den Antheil des A im Verhältnisse ihrer ursprünglichen Antheile unter sich. Wie viel bekommt jeder?

82. Drei Gemeinden erhalten für geleistete Erdarbeiten 750 Mark. Aus der Gemeinde A arbeiteten 11 Mann durch 10 Tage zu 9 Stunden, aus der Gemeinde B 9 Mann durch 9 Tage zu 10 Stunden, aus der Gemeinde C 15 Mann durch 5 Tage zu 6 Stunden täglich. Welchen Antheil an jener Entlohnung wird jede der drei Gemeinden haben?

83. A beginnt am Anfange des Jahres ein Unternehmen mit einem Fonde von 8000 fl.; nach zwei Monaten tritt B mit 5000 fl. bei, und noch zwei Monate später gesellt sich auch C mit 3000 fl. dazu. Beim Jahresabschlusse zeigt sich ein Gewinn von 1059 fl.; wie viel bekommt jeder davon?

84. Zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte gibt A a' fl. und nach m' Monaten noch b' fl.; B a'' fl. und nach m'' Monaten noch b'' fl.; C a''' fl. und nach m''' Monaten noch b''' fl.; wie ist nach m Monaten der Gewinn von g fl. zu vertheilen?

Kettenregel. (§. 149.)

85. Wie viel Meter sind 2135 russische Fuß, wenn 55 Meter = 175 Wiener Fuß und 82 russische Fuß = 79 Wiener Fuß sind?

86. Wie viel Londoner Pfund wiegt 1 Londoner Cubikfuß reines Wasser, da 1 Cubik-Decimeter davon 1 Kilogramm wiegt? (25 Londoner Cubikfuß = 708 Cubik-Decimeter, 86 Londoner Pfund = 39 Kilogramm.)

87. Ein österr. Guldenstück enthält 900 Tausendtheile feinen Silbers; wie viel Gramm wiegt es, wenn 45 Guldenstücke 500 Gramm feinen Silbers enthalten?

88. Wie viel fl. ö. W. ist 1 deutsches Zehnmarkstück werth, da $139\frac{1}{2}$ Zehnmarkstücke $\frac{1}{2}$ Kilogramm feinen Goldes, 45 fl. ö. W. $\frac{1}{2}$ Kilogramm feinen Silbers enthalten, und sich dem Werthe nach Gold zu Silber wie $15\frac{1}{2}$: 1 verhält?

89. Welchen Werth in Dukaten hat 1 Achtguldenstück, da 155 Achtguldenstücke 1 Kilogramm $\frac{9}{10}$ feinen Goldes und 67 Dukaten 1 cölnische Mark $23\frac{1}{3}$ Karat feinen Goldes enthalten? (1 cöln. Mark à 24 Karat = 233·87 Gramm.)

90. Ein Wiener Kaufmann bezieht von Hamburg Caffee zu 78 Pfennig das Hamburger Pfund; wie viel % gewinnt er, wenn die Spesen 40 % betragen und in Wien das Kilogramm zu 1 fl. 40 kr. verkauft wird? (1 Hamb. Pfund = $\frac{1}{2}$ Kilogr., 100 Pfenn. = 1 Mark und 100 Mark = 54 fl.)

Man beginnt den Ansatz: x fl. Einnahme geben 100 fl. Ausgabe, wenn u. s. w.

III. Potenziren, Radiciren und Logarithmiren.

1. Potenzen mit positiven ganzen Exponenten.

Verbindung des Potenzirens mit sich selbst. (§§. 151—153.)

1. $(a^3)^3$ **2.** $(x^m)^n$. **3.** $[(p^2)^4]^3$.
4. $(-a^2)^3$. **5.** $(-a^3)^2$. **6.** $[(-y)^3]^5$.
7. $(-a^{2m})^{2n-1}$. **8.** $(-a^{2n-1})^{2m}$. **9.** $[(-z^2)^3]^m$.
10. $(x^{a+b})^{a-b}$. **11.** $(y^{3a-2b})^{2a-3b}$.

Verbindung des Potenzirens mit der Multiplication und Division.

(§§. 154—157.)

12. $(2ax)^3$. **13.** $(abcd)^m$. **14.** $(-3a)^4$.
15. $(2a^2)^4$. **16.** $(ax^m)^p$. **17.** $(2a^3x^4)^2$.
18. $(-5x^2y^3z)^3$. **19.** $[a^2(b-c)^3]^4$. **20.** $[(xy^2)^2.z^2]^2$.
21. $(-4b)^2.(3x)^3$. **22.** $(5x)^3.(-2y)^4$. **23.** $(-8a)^2.(-3b)^5$.
24. $(7x)^3.(3y)^4.(2az)^5$. **25.** $(a^{m+n}b^{m-n})^{m+n}$.
26. $a^3.x^3$. **27.** $25^4.4^4$. **28.** $(5a)^2.(3b)^2$.
29. $(x+a)^4.(x-a)^4$. **30.** $(3x)^5.(-2y)^5.(4z)^5$.
31. $x^n.\left(\frac{1}{x}\right)^n$. **32.** $\left(1+\frac{b}{a}\right)^n.a^n$.
33. $\left(\frac{2a}{5x}\right)^3.\left(\frac{15x}{2a}\right)^3$. **34.** $\left(\frac{3cy}{5ab}\right)^6.\left(\frac{10ax}{9c}\right)^6.\left(\frac{6bz}{x}\right)^6$.
35. $\left(\frac{2x}{3y}\right)^3$. **36.** $\left(-\frac{x}{2y}\right)^5$. **37.** $\left(\frac{8mn}{5pq}\right)^3$.
38. $\left(\frac{a^2b^3}{cd^4}\right)^2$. **39.** $\left(\frac{3ab^2}{2x^2y}\right)^5$. **40.** $\left(-\frac{3a^3x}{4b^2y^2}\right)^4$.
41. $\left(\frac{a^mx^n}{b^ny^m}\right)^p$. **42.** $\left(\frac{a^4b^5c^2}{x^5y^7}\right)^3$. **43.** $\left[\left(-\frac{ab^2x^3}{c^3d^2y}\right)^3\right]^2$.
44. $\left(\frac{2ax-3by}{3b}+y\right)^4$. **45.** $\left(1-\frac{3a+2bx}{2bx}\right)^5$.
46. $(8ab)^4:(2b)^4$. **47.** $(x^2-y^2)^m:(x-y)^m$.
48. $x^n:\left(\frac{1}{y}\right)^n$. **49.** $\left(\frac{3ax}{4by}\right)^5:\left(\frac{2x}{3b}\right)^5$.
50. $\left(\frac{a-b}{a}\right)^m:\left(\frac{a+b}{a}\right)^m$. **51.** $\left(x-\frac{y^2}{x}\right)^n:\left(\frac{x}{y}+1\right)^n$.

---

52. $ax^m.bx^n$. **53.** $7a^3.(-3a^2)$.
54. $2m^4n^3.5m^4n$. **55.** $3(a+b)^3.4(a+b)^2$.
56. $(-a)^4.(-a)^3$. **57.** $(-a)^{2m+1}.(-a)^{2n-1}$.
58. $(3a^2.2b^2)^4.(4ab)^3$. **59.** $(ab)^{m-2n}.(ac)^{2m-n}.(bc)^{n-m}$.
60. $6a^{m+n}:2a^n$. **61.** $(-a)^{2n+1}:(-a)^3$.
62. $\left(\frac{3x^2}{2y}\right)^3.\left(\frac{3y^2}{4x}\right)^2$. **63.** $\left(\frac{ab}{2cd}\right)^4.\left(\frac{2c}{3ab}\right)^3.\left(\frac{3bc}{5a}\right)^2$.
64. $\frac{5ax^4}{6by^3}.\frac{b^2x^2}{ay}.\frac{3a^2y^4}{2b^3x^3}$. **65.** $\frac{8a^6xy^4}{3bc^2z^5}:\frac{4a^5x^3y}{5b^3cz^4}$.
66. $\left(\frac{a^4b^5c^2}{x^5y^7}\right)^3.\left(\frac{x^4y^6}{a^3b^4c}\right)^4$. **67.** $\left\{\frac{(2x^3y^2)^3\ (3x^4y^3)^2}{6x^2y^2}\right\}^3$.
68. $\left(\frac{2a^2x^2}{3by^3}\right)^3.\left(-\frac{6ax^2}{5b^2y}\right)^2.\left(\frac{3b^2}{4a^2}\right)^4$. **69.** $\left\{\frac{(2xy^2)^5.(3x^2z^2)^4.(5y^3z)^3}{(10x^3y^2)^2.(6y^2z^4)^3}\right\}^2$.

Verbindung des Potenzirens mit der Addition und Subtraction. (§. 158.)

70. $3a^2 + 4a^2 + 6a^2$. **71.** $5m^4 - 2m^4$.

72. $ax^3 + bx^2 + cx - x^3 - 2x^2 + 3x$.

73. $4x^m - 5x^n + 6x^p - x^n + 2x^m - 3x^p$.

74. $\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^5} + \frac{c}{x^4} + \frac{d}{x^3} + \frac{e}{x^2} + \frac{f}{x} + g$.

75. $(2a^3 + 3b^3) . a^2b^2$. **76.** $(6x^4y^2 - 10x^3y^3) : 2xy^2$.

77. $(3a^3x^2 + 4b^2y^3)\,(3a^3x^2 - 4b^2y^3)$.

78. $(x^{3a-b} - x^{2a} + x^{a+b} - x^{2b} + x^{3b-a})\,(x^a + x^b)$.

79. $(x^{3m-n} - x^{2m} + x^{2n} - x^{3n-m}) : (x^m - x^n)$.

80. $(a^8 - b^8) : (a^5 + a^4b + ab^4 + b^5)$.

81. $(x^2 + a)^2$. **82.** $(a^2 - x)^2$. **83.** $(2a^2 + 3b^2)^2$.

84. $(x^m - y^n)^2$. **85.** $(5x^3 - 6y^3)^2$. **86.** $(mx^4 - n)^2$.

87. $(2a + b)^3$. **88.** $(3x - 2y)^3$. **89.** $(a^2 - 3b^2)^3$.

90. $(ax^3 - by^3)^3$. **91.** $(2a^x + 3a^y)^3$. **92.** $(mx^6 - nx^3)^3$.

93. $(5a^2 - 4x^2)^2 + (5a^2 + 4x^2)^2$. **94.** $(ax^3 + by^3)^2 - (ax^3 - by^3)^2$.

95. $(a + bx + cx^2)^2$. **96.** $(x^2y^2 - 2abxy + a^2b^2)^3$.

---

2. Wurzeln mit positiven ganzen Exponenten.

Verbindung des Radicirens mit sich selbst und mit dem Potenziren.

(§§. 162—167.)

1. $\sqrt[m]{a^{mx}}$. **2.** $\sqrt[3]{a^6}$. **3.** $\sqrt[5]{-a^{30}}$.

4. $\sqrt[p]{x^{mnp}}$. **5.** $\sqrt[an]{x^{bm}}$. **6.** $\sqrt[m+n]{x^{am+an}}$.

7. $(\sqrt[3]{-a})^5$. **8.** $(\sqrt[3]{-a^2})^4$ **9.** $(\sqrt{a^3})^2$.

10. $(\sqrt[4]{ab^2c^3})^3$. **11.** $4a^2\,(\sqrt[n]{x^2})^n$. **12.** $(\sqrt[p]{a^m})^{pq}$.

13. $(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^m}})^n$. **14.** $\left(\sqrt[m]{\frac{a^n\,b^p}{c^q}}\right)^r$. **15.** $\left(\sqrt[3]{\frac{2a^2\sqrt[5]{ax}}{5b\sqrt[4]{bx}}}\right)^2$.

16. $\sqrt[3]{\sqrt[n]{x}}$. **17.** $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$. **18.** $\sqrt[3]{\sqrt{x^3}}$.

19. $\sqrt[8]{\sqrt[5]{a^{12}}}$. **20.** $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$. **21.** $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}}}$.

22. $(\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^8}})^6$. **23.** $\sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p}$.

24. Wenn $\sqrt[18]{262144} = 64$ ist, wie groß ist a) $\sqrt[6]{262144}$, b) $\sqrt[9]{262144}$, c) $\sqrt{262144}$?

25. Stelle folgende Wurzeln mit einem gemeinschaftlichen Wurzelexponenten dar:

a) $\sqrt{x}$ und $\sqrt[3]{x^2}$; b) $\sqrt[4]{x^3}$ und $\sqrt[6]{y^5}$;

c) $\sqrt[mn]{a^p}$ und $\sqrt[np]{b^m}$; d) $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b^2}$ und $\sqrt[5]{c^3}$.

26. Kürze folgende Wurzeln ab:

a) $\sqrt[4]{x^2}$; b) $\sqrt[6]{y^{15}}$; c) $\sqrt[18]{a^{12}}$; d) $\sqrt[mnp]{x^{mpq}}$.

Verbindung des Radicirens mit der Multiplication und Division.

(§§. 168 und 169.)

27. $\sqrt[m]{x^a y^b}$. 28. $\sqrt{9.49}$. 29. $\sqrt[3]{27\,a^3 b^6}$.

30. $\frac{a}{b}\sqrt[3]{b^3 x^3}$. 31. $\sqrt{\sqrt[3]{16^3.81^3}}$. 32. $\sqrt[3]{\sqrt[m]{8^m.27^m}}$.

33. $\sqrt{(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)^2}$. 34. $\sqrt{\sqrt[m]{a^2 b^4 c^6}}$.

Befreie in den folgenden Wurzeln jene Factoren des Radicands, aus denen sich die Wurzel ziehen läßt, von dem Wurzelzeichen:

35. $\sqrt[n]{a^n b}$. 36. $\sqrt[2m]{a^{4m} x}$. 37. $\sqrt[x]{a^{2x} b^x c}$.

38. $\sqrt[m]{x^{m+n}}$. 39. $\sqrt{x^3}$. 40. $\sqrt{4a^3 b}$.

41. $x\sqrt{y^3 z^3}$. 42. $m\sqrt[3]{a^6 b^5 c^4}$. 43. $\frac{1}{xy}\sqrt[m]{x^{m+1} y^{m+1}}$.

---

44. $\sqrt[n]{a^p}.\sqrt[n]{a^q}$. 45. $\sqrt{n^5}.\sqrt{n}$. 46. $\sqrt[3]{a^7}.\sqrt[3]{a^5}$.

47. $\sqrt{x}.\sqrt{xy}$. 48. $\sqrt[p]{a^m b^n}.\sqrt[p]{ab}$. 49. $\sqrt[4]{a}.\sqrt[4]{a^3}.\sqrt[4]{ax}$.

50. $\sqrt{\frac{a^6}{m}}.\sqrt{-\frac{m}{a}}$. 51. $\sqrt{ab}.\sqrt{\frac{x+y}{a}}.\sqrt{\frac{x+y}{b}}$.

52. $\sqrt[n]{ax^{n+1}}.\sqrt[n]{bx^{n-1}}$. 53. $\sqrt[m]{xy^2z^3}.\sqrt[m]{x^2y^{m-2}z^{2m-8}}.\sqrt[m]{x^{m-3}z^{5-m}}$.

54. $\sqrt[3]{a}.\sqrt[4]{a}$. 55. $\sqrt[3]{x^2}.\sqrt[4]{x^3}$. 56. $\sqrt[6]{a^5}.\sqrt[9]{a^7}$.

57. $3\sqrt[3]{b^2}.5\sqrt[4]{b^3}.\sqrt[12]{b}$. 58. $3\sqrt[3]{\frac{y}{x}}.\sqrt{\frac{x^2}{y^2}}$.

Bringe in den folgenden Wurzeln den Factor unter das Wurzelzeichen:

59. $a\sqrt[n]{x}$. 60. $4\sqrt{5a}$. 61. $4x\sqrt[3]{x}$.

62. $x\sqrt{\frac{a}{x}}$. 63. $\frac{x}{y}\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}$. 64. $ab\sqrt[p]{\frac{1}{a^{p+1}b^{p+1}}}$.

65. $(a+b)\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$. 66. $\frac{x^2y}{a^2b}\sqrt{\frac{a^3b}{x^3y}}$. 67. $\sqrt[5]{a^2\sqrt[3]{a^8}}$.

68. $\sqrt[m]{a^n\sqrt[p]{a^q}}$. 69. $x\sqrt[m]{x\sqrt[m]{x}}$. 70. $a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$.

---

71. $\sqrt[m]{\frac{a^{mn}}{b^{mp}}}$. 72. $\sqrt{\frac{49}{64}}$. 73. $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$. 74. $\sqrt{2\frac{7}{9}}$.

75. $\sqrt{\frac{25}{16}+\frac{3}{2}}$. 76. $\sqrt{\frac{49}{16}-\frac{5}{2}}$. 77. $\sqrt[5]{\frac{a^5x^{10}}{b^5y^{10}}}$. 78. $\sqrt[3]{\frac{8a^4b}{27c^4}}$.

79. $15\sqrt{\frac{3x}{25a^2}}$. 80. $\sqrt[n]{\frac{1}{a^{mn}}}$. 81. $\sqrt[3]{\frac{a^p}{a^6}}$. 82. $\sqrt{a^{m-2}}$.

83. $\sqrt[m]{\frac{a^{mn}b^{mp}c^{mq}}{x^{mr}y^{ms}}}$. 84. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^3}+\frac{a^2+b^2}{b^2}}$.

---

85. $\sqrt[m]{ax} : \sqrt[m]{a}$.

86. $\sqrt[3]{48x} : \sqrt[3]{6x}$.

87. $\sqrt{ab} : \sqrt{bx}$.

88. $\sqrt{a} : \sqrt{\frac{a}{b}}$.

89. $\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{a^3}}$.

90. $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a-b}}$.

91. $1 : \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

92. $1 : \sqrt{0{\cdot}25}$.

93. $1 : \sqrt{\frac{x-2y}{x^3-3xy^2-2y^3}}$.

94. $\sqrt[4]{a^3} : \sqrt[3]{a}$.

95. $\sqrt[5]{a^4} : \sqrt[3]{a^2}$.

96. $m\sqrt{a} : \sqrt[4]{a}$.

97. $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a}}$.

98. $\frac{a}{x} : \sqrt{ax}$.

99. $\frac{a}{\sqrt[n]{a}}$.

100. $\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

101. $\frac{a^2-1}{\sqrt{a-1}}$.

102. $(x+y) : \sqrt[m]{\frac{(x+y)^{m-1}}{x-y}}$.

Verbindung des Radicirens mit der Addition und Subtraction. (§. 170.)

103. $\sqrt[3]{a} + 4\sqrt[3]{a} + 5\sqrt[3]{a}$.

104. $a\sqrt[m]{x^n} - b\sqrt[m]{x^n}$.

105. $a + b\sqrt{m} + c - d\sqrt{m}$.

106. $5\sqrt[8]{a^3} - 2\sqrt[8]{a^3} - 3\sqrt[8]{a^3}$.

107. $m\sqrt{a} + n\sqrt[3]{a} + 2\sqrt{a} - 3\sqrt[3]{a}$.

108. $a\sqrt[m]{b} - 2b\sqrt[n]{a} - 2a\sqrt[m]{b} + 8b\sqrt[n]{a} - 5b\sqrt[n]{a} + 6a\sqrt[m]{b}$.

Stelle mit gleichen Radicanden dar und addire oder subtrahire:

109. $\sqrt{a^5} + \sqrt{a^3} + \sqrt{a}$.

110. $\sqrt{a^2x} + 2\sqrt{b^2x} + 3\sqrt{c^2x}$.

111. $5a\sqrt{12x^3} - 2x\sqrt{27a^2x}$.

112. $4\sqrt[3]{3x} - 2\sqrt[3]{24x} + \sqrt[3]{192x}$.

113. $\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}} + 3\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}$.

114. $a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} - 2\sqrt{a^2\sqrt{a^3}}$.

115. $\sqrt{4x^3y} - 5y\sqrt{xy} - x\sqrt{4xy} + \sqrt{25xy^3}$.

116. $4\sqrt{1+a^2} - \sqrt{9+9a^2} - 2\sqrt{x^2+a^2x^2} + \sqrt{x^4(1+a^2)}$.

117. $(x-y)\sqrt{\frac{xy}{x^2-2xy+y^2}} - xy\sqrt{\frac{1}{xy}} + x\sqrt{\frac{y}{x}}$.

---

118. $(\sqrt[3]{a} - 2\sqrt[3]{b}).\sqrt[3]{x}$.

119. $(3\sqrt{5a} + 4).\sqrt[3]{4a}$.

120. $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})$.

121. $\sqrt{x+y+\sqrt{2xy}}.\sqrt{x+y-\sqrt{2xy}}$.

122. $(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z})$.

123. $(\sqrt{a+b} - \sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a+b} + \sqrt{a} - \sqrt{b})$.

124. $\sqrt{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}.\sqrt{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}$.

125. $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2+1}} - \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

126. $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} - \frac{3x+\sqrt{x}}{1-x}$.

127. $(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{x^2-1})(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1})$.

128. $(\sqrt[3]{ab} + 3\sqrt[3]{xy})(5\sqrt[3]{ab} + 4\sqrt[3]{xy})$.

129. $(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.

130. $(\sqrt[3]{a^2b} - \sqrt[3]{ab^2}) : \sqrt[3]{ab}$.

131. $(6\sqrt{x} + 8x) : 2\sqrt[3]{x}$.

132. $(\sqrt{a} - \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[4]{a^3} + \sqrt[5]{a^4}) : \sqrt[6]{a}$.

133. $(\sqrt{ax} - \sqrt{cx} + \sqrt{az} - \sqrt{cz}) : (\sqrt{a} - \sqrt{c})$.

134. Bestimme den Werth des Quotienten $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}$ für $x = a$.

135. $(B - b) : (\sqrt[3]{B} - \sqrt[3]{b})$.

136. $\sqrt{\frac{m + n + 2\sqrt{mn}}{m - n}} : \sqrt{\frac{\sqrt{m} + \sqrt{n}}{\sqrt{m} - \sqrt{n}}}$.

---

137. $(a + \sqrt{b})^2$.

138. $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$.

139. $(3x\sqrt{y} - 2y\sqrt{x})^2$.

140. $(\sqrt{2x + a} - \sqrt{2x - a})^2$.

141. $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$.

142. $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$.

143. $\left\{\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}\right\}^2$.

144. $\left[\sqrt{\sqrt{a + b} + \sqrt{a - b}} \pm \sqrt{\sqrt{a + b} - \sqrt{a - b}}\right]^2$.

145. $(4a\sqrt[3]{b} - 3b\sqrt[3]{a})^3$.

146. $(a - 3\sqrt[3]{a^2} + 4\sqrt[3]{a})^3$.

147. $\left[\sqrt{a^3 + \sqrt{a^6 - b^6}} - \sqrt{a^3 - \sqrt{a^6 - b^6}}\right]^3$.

---

3. Potenzen und Wurzeln mit negativen und gebrochenen Exponenten.

Negative Exponenten. (§§. 172—174.)

1. Bestimme die Werthe folgender Potenzen:

a) 2^{-6}, b) 6^{-2}, c) 4^{-3}, d) $0{\cdot}4^{-1}$, e) $0{\cdot}125^{-3}$;

f) $\frac{1}{3^{-4}}$, g) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-5}$, h) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-3}$, i) $\left(\frac{15}{16}\right)^{-1}$, k) $\frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{m}{x}\right)^{-2}$.

2. Befreie von den negativen Exponenten:

a) $2x^2y^{-2}$, b) $3a^3b^{-3}$, c) $ab^{-1}x^{-1}y$;

d) $\frac{ax^{-m}}{by^{-m}}$, e) $\frac{3a^2m^{-3}y^{-1}}{4b^2n^{-2}x^{-2}}$, f) $\frac{13a^{-2}b^{-1}c^5}{8x^3y^{-5}z^{-2}}$.

3. Bringe auf die Form von ganzen Zahlen:

a) $\frac{5x}{y}$, b) $\frac{2ax^{-2}}{b^{-1}}$, c) $\frac{m^3x^2}{y^3z^{-2}}$, d) $\frac{12a^{-4}b}{25x^{-3}y^2}$.

Berechne und stelle die Resultate mit positiven Exponenten dar:

4. $(x^{-2})^4$. **5.** $(x^{-1})^{-1}$. **6.** $[(x^{-m})^n]^{-p}$.

7. $(-a^3)^{-2n}$. **8.** $(-a^{-2})^{2n-1}$. **9.** $(-a^{2n-1})^{-2}$.

10. $(a^{-3}b^4)^{-2}$. **11.** $(3a^2b^{-1}x^3y^{-1})^3$. **12.** $(-2x^{-3}y^3z^{-1})^4$.

13. $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{-2}$. **14.** $\left(\frac{2a^2b^3}{3mx^{-2}}\right)^{-1}$. **15.** $\left(\frac{1}{x}\right)^5.\left(\frac{1}{y}\right)^{-7}.\left(\frac{y}{x}\right)^{-6}$.

16. $5^{-2}.\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$. **17.** $(5a^{-1})^{-2}.(3b)^{-2}$. **18.** $(x^{-p})^{-s}.(y^{-q})^{-s}$.

19. $\left(\frac{x}{x+y}\right)^{-m} : \left(\frac{x}{x-y}\right)^{-m}$. **20.** $\frac{(a^2b^{-1})^{-4}}{(x^{-3}y^{-2})^{-4}}$.

21. $a^5.a^{-3}$. **22.** $x^{m+2}.x^{-3}$. **23.** $(-3a^{-5}).(-2a^{-1})$.

24. $x^{n-3} : x^{-5}$. **25.** $a^{-4} : -a^4$. **26.** $-4a : a^{-4}$.

27. $6a^3b^{-2} : 2a^4b^{-3}$. **28.** $36a^{-1}b^{-2}c^{-3} : 6a^{-2}b^{-3}c^{-4}$.

29. $\frac{a^{-1}b^{-2}c^3}{m^{-3}n^{-2}p}.\frac{m^{-2}n^{-5}p^{-4}}{a^{-1}b^{-3}c^{-1}}$. **30.** $\frac{x^{-m}y^{-m+1}}{a^{-2m}b^{m-n}} : \frac{x^{2n+m}y}{a^{-m+n}b^{2m}}$.

31. $(ax^{-4} + bx^{-3} + cx^{-2} + dx^{-1} + e).x^4$.

32. $(x^{-1}y^{-5} - 2xy^{-3} + 3x^3y^{-1})\,(3x^{-1}y^{-5} + 2xy^{-3} - x^3y^{-1})$.

33. $(a^{-5} - b^{-5}) : (a^{-1} + b^{-1})$.

34. $(x + x^{-1})^2$. **35.** $(3a^{-3}x^2 - 4a^2x^{-3})^2$.

36. $(x^2 - 2x^{-2})^3$. **37.** $(2a^2b^{-3} + 3a^{-3}b^2)^3$.

---

38. Bestimme die Werthe folgender Wurzeln:

a) $\sqrt[-n]{x}$, b) $\sqrt[-3]{27}$, c) $\sqrt[-4]{16}$, d) $\sqrt[-2]{0{\cdot}25}$, e) $\sqrt[-m]{a^{-mn}}$.

Stelle folgende Ausdrücke in ihrer einfachsten Form ohne negative Exponenten dar:

39. $\sqrt[-2]{\sqrt[3]{64}}$. **40.** $\sqrt[-m]{\sqrt[-n]{a^{-mn}}}$. **41.** $\sqrt[-n]{x^{np}y^{nq}}$.

42. $\sqrt[-n]{a}.\sqrt[n]{a}$. **43.** $a.\sqrt[-1]{a}$. **44.** $\sqrt{a^3}.\sqrt[-2]{a}$.

45. $\sqrt[3]{a^2} : \sqrt[-2]{a}$. **46.** $\sqrt{a} : \sqrt[-1]{a}$. **47.** $\sqrt{a} : \sqrt[-2]{a}$.

48. $\sqrt[-2]{\frac{a^2}{b^2}}$. **49.** $\sqrt[-3]{\frac{8}{125}}$. **50.** $\sqrt[-3]{\frac{a^{-3}b^6c^{-9}}{x^{-6}y^3}}$.

Gebrochene Exponenten. (§§. 175 und 176.)

51. Verwandle in Wurzeln und berechne:

a) $25^{\frac{1}{2}}$, b) $16^{\frac{1}{4}}$, c) $8^{\frac{2}{3}}$, d) $32^{\frac{2}{5}}$;

e) $49^{0{\cdot}5}$, f) $81^{0{\cdot}25}$, g) $64^{1{\cdot}5}$, h) $16^{1{\cdot}75}$;

i) $9^{-\frac{1}{2}}$, k) $125^{-\frac{1}{3}}$, l) $(\frac{1}{16})^{-\frac{3}{4}}$, m) $(\frac{2}{6}\frac{7}{4})^{-\frac{2}{3}}$.

52. Verwandle in Wurzeln mit ganzen Exponenten und berechne:

a) $\sqrt[\frac{1}{2}]{3}$, b) $\sqrt[\frac{3}{4}]{8}$, c) $\sqrt[\frac{4}{5}]{5\frac{1}{16}}$, d) $\sqrt[0{\cdot}4]{9}$;

e) $\sqrt[-\frac{2}{3}]{49}$, f) $\sqrt[-\frac{2}{5}]{36}$, g) $\sqrt[-\frac{4}{5}]{\frac{16}{81}}$, h) $\sqrt[-0{\cdot}2]{2}$.

Berechne und stelle die Resultate als Wurzeln und Potenzen mit positiven ganzen Exponenten dar:

53. $(x^n)^{\frac{1}{n}}$. **54.** $(x^{\frac{m}{n}})^n$. **55.** $(x^{-\frac{1}{n}})^{-\frac{1}{m}}$.

56. $(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}$. **57.** $(a^{-\frac{3}{4}})^{-\frac{2}{3}}$. **58.** $(a^{\frac{m+p}{n}})^{-\frac{n}{m-p}}$.

59. $\sqrt[m]{x^{-\frac{2m}{n}}}$. **60.** $\sqrt[-3]{a^{\frac{3}{4}}}$. **61.** $\sqrt[3]{(x^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{5}}}$.

62. $(4.25)^{\frac{1}{2}}$. **63.** $(xy^{-2}z^3)^{\frac{2}{3}}$. **64.** $(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{5}{6}})^6$.

65. $\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. **66.** $\left(\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{5}}$. **67.** $\left(\frac{81n^5p^4}{16m^3q^6}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

68. $a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}}$. **69.** $x^{-\frac{2}{5}}.(32y)^{-\frac{2}{5}}$. **70.** $(\frac{4}{5})^{\frac{1}{2}}.(3\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}.(\frac{3}{2})^{\frac{1}{2}}$.

71. $a^{\frac{2}{3}}.a^{\frac{1}{4}}$. **72.** $5^{\frac{2}{3}}.5^{\frac{1}{2}}.5^{\frac{5}{6}}$. **73.** $x^{0.1}.x^{0.02}.x^{0.005}$.

74. $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{n}{m}}$. **75.** $a^{\frac{5}{9}} : a^{-\frac{2}{3}}$. **76.** $x^{\frac{m}{n}}.x^{\frac{1}{n}} : x^{\frac{m-1}{n}}$.

77. $\frac{3^{\frac{1}{3}}.4^{-\frac{1}{2}}}{5^{\frac{2}{3}}.7^{\frac{3}{4}}} \cdot \frac{3^{\frac{2}{3}}.5^{-\frac{4}{3}}}{4^{-2}.7^{\frac{1}{4}}}$. **78.** $\frac{a^{\frac{3}{4}}.x^{\frac{1}{5}}}{b^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{4}}} : \frac{a^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}}{b^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{6}{5}}}$.

79. $(x^{\frac{3}{4}} + y^{\frac{2}{3}})(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{5}{6}})$. **80.** $(2a - 3b^{\frac{5}{6}})(5a^{\frac{3}{4}} + 6b^{\frac{4}{5}})$.

81. $(a + a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{5}{6}})(1 + a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{6}})$.

82. $(6x^{\frac{7}{6}} - 8x^{\frac{5}{4}} + 3x^{\frac{14}{15}} - 4x^{\frac{21}{20}}) : (3x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{3}{4}})$.

83. $(24a^{\frac{4}{3}} + \frac{34}{3}a^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}) : (6a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{2})$.

84. $(2a^{\frac{1}{2}} + 3b^{-\frac{3}{4}})^2$. **85.** $(x^{-\frac{1}{3}} - y^{\frac{2}{3}})^3$.

---

4. Irrationale und imaginäre Zahlen.

Irrationale Zahlen. (§§. 180—182.)

Berechne mit Rücksicht auf die §§. 168—170:

1. $\sqrt{4.5}$. **2.** $\sqrt{1200}$. **3.** $7\sqrt{75}$.

4. $\sqrt[3]{48}$. **5.** $2\sqrt[3]{81}$. **6.** $\sqrt[4]{80}$.

7. $\sqrt{8}.\sqrt{2}$. **8.** $\sqrt[3]{5}.\sqrt[3]{200}$. **9.** $6\sqrt{6.5}\sqrt[6]{2}$.

10. $\sqrt{75} : \sqrt{3}$. **11.** $\sqrt[3]{108} : \sqrt[3]{4}$. **12.** $3\sqrt{8} : 2\sqrt[3]{2}$.

13. $\sqrt{2} + \sqrt{8} + 3\sqrt{50}$. **14.** $4\sqrt{50} + 2\sqrt{72} - \sqrt{128}$.

15. $6\sqrt{125} - 3\sqrt{80} + 2\sqrt{20}$. **16.** $4\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{128}$.

17. $6\sqrt{12} - 4\sqrt{27} + 7\sqrt{48} - 5\sqrt{75} + 2\sqrt{108}$.

18. $(2\sqrt{8} - 7\sqrt{18} - \sqrt{50} + 4\sqrt{72}).\sqrt{2}$.

19. $(4 + 3\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})$. **20.** $(8 - 3\sqrt{5})(7 + 2\sqrt{5})$.

21. $\sqrt{3 + \sqrt{5}}.\sqrt{3 - \sqrt{5}}$. **22.** $(3\sqrt{7} + 4\sqrt[4]{3})(2\sqrt{7} - 3\sqrt[4]{3})$.

23. $(3\sqrt{8} - 5\sqrt{20}) : \sqrt{2}$. **24.** $(2\sqrt[3]{108} - 3\sqrt{2}) : \sqrt[3]{4}$.

25. $(5 - 2\sqrt{5})^2$. **26.** $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2$.

27. $(\sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{15})^2$. **28.** $(1 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3})^2$.

29. Welchen Werth hat der Bruch $\frac{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}{\sqrt{(x-a)^3}}$ für $x = a$?

Befreie folgende Brüche von dem irrationalen Nenner:

30. $\frac{2}{\sqrt{2}}$. **31.** $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}$. **32.** $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^2}}$. **33.** $\frac{m}{\sqrt{x\sqrt{x}}}$.

34. $\frac{a-x}{\sqrt[3]{a+x}}$. **35.** $\frac{3a^2}{5\sqrt[3]{2a}}$. **36.** $\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{3x}}$. **37.** $\frac{3x\sqrt{5a}}{2\sqrt[4]{2a}}$.

38. $\frac{\sqrt{2x+3y}}{\sqrt{2x-3y}}$.

39. $a\sqrt[3]{\frac{b^2}{a\sqrt{ab}}}$.

40. $\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1-x^2}}$.

41. $\frac{1}{2+\sqrt{2}}$.

42. $\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$.

43. $\frac{4\sqrt{3}}{1+3\sqrt{3}}$.

44. $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$.

45. $\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}$.

46. $\frac{2a+3\sqrt{b}}{3a-2\sqrt{b}}$.

47. $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

48. $\frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}$.

49. $\frac{m}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}$.

50. $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}}$.

51. $\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{5}}}$.

52. $\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}}$.

53. $\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$.

54. $\frac{a\sqrt{1-a^2}+b\sqrt{1-b^2}}{a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}}$.

55. $\frac{1+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

56. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

57. $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

58. $\frac{2}{\sqrt{13-2\sqrt{3}}}$.

59. $\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}}$.

60. $\frac{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4-y^4}}}{\sqrt{x^2-\sqrt{x^4-y^4}}}$.

61. $\frac{\sqrt{2x+3\sqrt{xy}}}{\sqrt{2x-3\sqrt{xy}}}$.

62. $\frac{4\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2\sqrt{6}}$.

63. $\frac{2\sqrt{5}-4\sqrt{10}}{3\sqrt{2}+4\sqrt{5}-2\sqrt{10}}$.

64. $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}}$.

65. $\frac{a}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}$.

66. $\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{5}}$.

67. $\frac{5}{\sqrt[8]{5}+\sqrt[8]{3}}$.

68. $\frac{2}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$.

69. $\frac{\sqrt[3]{10}}{2+\sqrt[3]{7}}$.

70. $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$.

71. $\frac{3\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{9}}{4\sqrt[3]{9}-3\sqrt[3]{3}}$.

72. $\frac{5\sqrt[3]{6}-2\sqrt[3]{12}}{4\sqrt[3]{12}+2\sqrt[3]{6}}$.

73. $\frac{2+7\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6}}$.

Verwandle folgende Summen und Differenzen von Quadratwurzeln in eine Quadratwurzel:

74. $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

75. $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$.

76. $\sqrt{12+\sqrt{23}}-\sqrt{12-\sqrt{23}}$.

77. $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

78. $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\pm\sqrt{5-2\sqrt{6}}$.

79. $\sqrt{11+6\sqrt{2}}\pm\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

80. $\sqrt{7+2\sqrt{10}}\pm\sqrt{7-2\sqrt{10}}$.

81. $\sqrt{14+6\sqrt{5}}\pm\sqrt{14-6\sqrt{5}}$.

82. $\sqrt{1+2a\sqrt{1-a^2}}\pm\sqrt{1-2a\sqrt{1-a^2}}$.

83. $\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}\pm\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}$.

---

5. Quadriren und Cubiren, Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzel.

Quadriren. (§§. 193 und 194.)

1. $(3x + 2y)^2$.
2. $(2a^2 - 4b^2)^2$.
3. $(2 \cdot 3a - 1 \cdot 5b)^2$.
4. $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)^2$.
5. $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2$.
6. $\left(\frac{3a^2}{4x} - \frac{2b^2}{9y}\right)^3$.
7. $(a + 2b - 3c)^2$.
8. $(4 + 2y - y^2)^2$.
9. $(3x - 5y + 8z)^2$.
10. $(6x^3 - 5x^2 + 4x - 3)^2$.
11. $(27x^6 - 54x^4 + 36x^2 - 8)^2$.
12. $\left(2 - \frac{a}{2} + \frac{2a^2}{3}\right)^2$.
13. $\left(\frac{2a}{3b} + \frac{3b}{4c} - \frac{4c}{5d}\right)^2$.
14. $\left(\frac{3y^2}{4b^2} + \frac{2y}{3b} - \frac{1}{2}\right)^2$.
15. $(-a + b + c)^2 + (a - b + c)^2 + (a + b - c)^2$.
16. $[(a + x)^2 + (b - y)^2]^2 - [(a + x)^2 - (b - y)^2]^2$.
17. 249^2.
18. 5019^2.
19. 72902^2.
20. 73215^2.
21. 135709^2.
22. 4612048^2.
23. $5 \cdot 91^2$.
24. $0 \cdot 887^2$.
25. $0 \cdot 7384\ldots^2$.
26. $(78^2)^2$.
27. 317^4.
28. $1 \cdot 025^8$.

Ausziehen der Quadratwurzel. (§§. 195—199.)

29. $\sqrt{4a^2 - 12ab + 9b^2}$.
30. $\sqrt{9m^4 - 12m^2n^2 + 4n^4}$.
31. $\sqrt{\{x^4 - 6ax^3 + 11a^2x^2 - 6a^3x + a^4\}}$.
32. $\sqrt{\{16m^6 + 16m^5 + 4m^4 - 16m^3 - 8m^2 + 4\}}$.
33. $\sqrt{\{16a^6 - 24a^5 + 25a^4 - 20a^3 + 10a^2 - 4a + 1\}}$.
34. $\sqrt{\{9y^6 - 12y^5 + 10y^4 - 28y^3 + 17y^2 - 8y + 16\}}$.
35. $\sqrt{\{25 - 70a + 139a^2 - 236a^3 + 235a^4 - 198a^5 + 121a^6\}}$.
36. $\sqrt{4a^2 - 16a\sqrt{-b} - 16b}$.
37. $\sqrt{1 - 4x}$.
38. $\sqrt{\{0 \cdot 16a^4 - 2 \cdot 4a^3 - 0 \cdot 16a^2b + 9a^2 + 1 \cdot 2ab + 0 \cdot 04b^2\}}$.
39. $\sqrt{\left[\frac{x^4}{9} - \frac{x^3}{3} + \frac{11x^2}{12} - x + 1\right]}$.
40. $\sqrt{\left[\frac{9x^6}{16y^6} - \frac{x^5}{2y^5} - \frac{26x^4}{9y^4} + \frac{53x^3}{6y^3} + \frac{2x^2}{3y^2} - \frac{20x}{y} + 25\right]}$.
41. $\sqrt{135424}$.
42. $\sqrt{556516}$.
43. $\sqrt{226576}$.
44. $\sqrt{1920996}$.
45. $\sqrt{26956864}$.
46. $\sqrt{53993104}$.
47. $\sqrt{395850816}$.
48. $\sqrt{422220304}$.
49. $\sqrt{54782211136}$.
50. $\sqrt{1406 \cdot 25}$.
51. $\sqrt{27 \cdot 973521}$.
52. $\sqrt{0 \cdot 00178929}$.
53. $\sqrt{785 \cdot 6809}$.
54. $\sqrt{0 \cdot 97535376}$.
55. $\sqrt{44105 \cdot 040144}$.
56. $\sqrt{\frac{676}{1681}}$.
57. $\sqrt[4]{\frac{178929}{797449}}$.
58. $\sqrt[8]{485380\frac{29}{169}}$.
59. $\sqrt{\sqrt{29986576}}$.
60. $\sqrt{362673936}$.
61. $\sqrt{1475789056}$.
62. $\sqrt{0 \cdot 1907\ldots}$.
63. $\sqrt{335 \cdot 779\ldots}$.
64. $\sqrt{0 \cdot 8423\ldots}$.

Berechne folgende irrationale Wurzeln auf 5 Decimalen:

65. $\sqrt{28}$.
66. $\sqrt{320}$.
67. $\sqrt{6584}$.
68. $\sqrt{552747}$.
69. $\sqrt{3 \cdot 92}$.
70. $\sqrt{0 \cdot 101}$.
71. $\sqrt{8 \cdot 376}$.
72. $\sqrt{0 \cdot 07854}$.
73. $\sqrt{0 \cdot 123457}$.
74. $\sqrt{55 \cdot 25734}$.
75. $\sqrt{19 \cdot 383838}$.
76. $\sqrt{\frac{67}{3}} = \sqrt{\frac{201}{9}} =$.
77. $\sqrt{\frac{591}{67}}$.
78. $\sqrt{251\frac{7}{12}}$.
79. $\sqrt{2}$.
80. $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.
81. $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$.

Berechne mittelst der Kettenbrüche auf 5 Decimalen:

82. $\sqrt{11}$. 83. $\sqrt{23}$. 84. $\sqrt{47}$. 85. $\sqrt{129}$.

Cubiren. (§§. 200 und 201.)

86. $(2x+3y)^3$. 87. $(5a^2-4bx^3)^3$. 88. $(0{\cdot}8x^2+0{\cdot}5y^2)^3$.

89. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3$. 90. $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^3$. 91. $\left(\frac{3a^2}{8x^2}-\frac{2x}{9a}\right)^3$.

92. $(y^2+2y-3)^3$. 93. $(x^2-3xy+2y^2)^3$.

94. $(1-2x-3x^2+4x^3)^3$. 95. $(1-2a^2+4a^4-8a^8)^3$.

96. $\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}-1\right)^3$. 97. $\left(4a-\frac{2x^2}{3a}+\frac{9x^4}{8a^3}\right)^3$.

98. 933^3. 99. 1585^3. 100. 6045^3. 101. 21704^3.

102. 90216^3. 103. 357946^3. 104. $45{\cdot}09^3$. 105. $5{\cdot}99203^3$.

106. $0{\cdot}858..^3$. 107. $(29^3)^3$. 108. $0{\cdot}865^6$. 109. $1{\cdot}05^{12}$.

Ausziehen der Cubikwurzel. (§§. 202—205.)

110. $\sqrt[3]{a^3x^6-3a^2bx^4y^2+3ab^2x^2y^4-b^3y^6}$.

111. $\sqrt[3]{\{8x^6-36x^5+78x^4-99x^3+78x^2-36x+8\}}$.

112. $\sqrt[3]{\{64x^6-144ax^5+204a^2x^4-171a^3x^3+102a^4x^2-36a^5x+8a^6\}}$.

113. $\sqrt[3]{\{8a-60\sqrt[3]{a^2b}+150\sqrt[3]{ab^2}-125b\}}$.

114. $\sqrt[3]{a^3+x^3}$. 115. $\sqrt[3]{x^3-a}$.

116. $\sqrt[3]{\left[\frac{a^3}{8b^3}-\frac{a^2c}{b^2d}+\frac{8ac^2}{3bd^2}-\frac{64c^3}{27d^3}\right]}$.

117. $\sqrt[3]{\left[1+\frac{6x}{a}+\frac{15x^2}{2a^2}-\frac{10x^3}{a^3}-\frac{45x^4}{4a^4}+\frac{27x^5}{2a^5}-\frac{27x^6}{8a^6}\right]}$.

---

118. $\sqrt[3]{262144}$. 119. $\sqrt[3]{3241792}$. 120. $\sqrt[3]{8615125}$.

121. $\sqrt[3]{746142643}$. 122. $\sqrt[3]{1767{,}172{,}329}$. 123. $\sqrt[3]{627{,}881{,}709{,}547}$.

124. $\sqrt[3]{0{\cdot}778688}$. 125. $\sqrt[3]{474{\cdot}552}$. 126. $\sqrt[3]{78{\cdot}402752}$.

127. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{20661046784}}$. 128. $\sqrt[6]{1126162419264}$.

129. $\sqrt[3]{\frac{704969}{1601613}}$. 130. $\sqrt[3]{32{\cdot}856\ldots}$. 131. $\sqrt[3]{0{\cdot}00008427\ldots}$.

Berechne folgende irrationale Wurzeln auf 5 Decimalen:

132. $\sqrt[3]{100}$. 133. $\sqrt[3]{5213}$. 134. $\sqrt[3]{8135}$. 135. $\sqrt[3]{47838}$.

136. $\sqrt[3]{0{\cdot}3}$. 137. $\sqrt[3]{25{\cdot}643}$. 138. $\sqrt[3]{0{\cdot}0957}$. 139. $\sqrt[3]{0{\cdot}12345}$.

140. $\sqrt[3]{\frac{5}{6}}=\sqrt[3]{\frac{180}{216}}=$. 141. $\sqrt[3]{\frac{37}{70}}$. 142. $\sqrt[3]{8\frac{7}{12}}$.

---

6. Logarithmen.

(§§. 208—218.)

1. $\log abc$. **2.** $\log 6xyz$. **3.** $\log 3a(c+d)$.

4. $\log (a+b)(m+n)$. **5.** $\log (a^2 - b^2)$. **6.** $\log a(x^2 - 1)$.

7. $\log \frac{2ab}{3x}$. **8.** $\log \frac{1}{ab}$. **9.** $\log \frac{ab - cd}{mn - pq}$.

10. $\log \frac{5mx}{1 - m^2}$. **11.** $\log \frac{x^2 - y^8}{2xy}$. **12.** $\log \frac{3(a^2 - b^2)x}{(3a+2b)y}$.

13. $\log a^x$. **14.** $\log ab^2$. **15.** $\log (ab)^2$.

16. $\log 2a^3$. **17.** $\log 5a^2x^3$. **18.** $\log (a+b)^{x+y}$.

19. $\log \frac{ax^m y^n}{bz^p}$. **20.** $\log \frac{2a^3}{3bx^2}$. **21.** $\log \frac{8mn^2x^3}{gpqy^5}$.

22. $\log \frac{1}{(2a^2)^3 (5b^3)^2}$. **23.** $\log \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 . \left(\frac{m}{n}\right)^3\right]$.

24. $\log \sqrt{ab}$. **25.** $\log \sqrt{xy^3}$. **26.** $\log 8a^2 \sqrt[4]{bx^3}$.

27. $\log \sqrt[n]{\frac{a^p}{b^q}}$. **28.** $\log \frac{2\sqrt{a}}{3\sqrt[3]{b}}$. **29.** $\log \frac{x^2\sqrt[3]{a}}{5by^3}$.

30. $\log (\sqrt[m]{x^n} \sqrt[p]{y^q})$. **31.** $\log \sqrt[n]{a^2b^3c^4}$. **32.** $\log \sqrt[m]{(\sqrt[n]{a^p})^q}$.

33. $\log (\sqrt[x]{a+b} . \sqrt[y]{c})$. **34.** $\log \sqrt[x]{a\sqrt[x]{a}}$. **35.** $\log x^{\log x}$.

36. $\log \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. **37.** $\log \frac{1}{b^2\sqrt[5]{a^3c}}$. **38.** $\log \frac{a(a+1)\sqrt[3]{a^2}}{b(b+1)\sqrt{b}}$.

39. $\log \sqrt{\frac{\sqrt[3]{28}}{2\sqrt{13}}}$. **40.** $\log m \sqrt[4]{\frac{a\sqrt{b}}{c^3}}$. **41.** $\log \sqrt{\frac{3^4 . \sqrt{17.13}}{7.14^2 . \sqrt[3]{69}}}$.

Bestimme den Ausdruck, dessen Logarithmus gleich ist:

42. $\log x + \log y - \log z$. **43.** $\log a - (\log b + \log c)$.

44. $3 \log a - 2 \log b + 4 \log c$.

45. $\frac{1}{2} \log a + \frac{1}{3} \log b - \frac{1}{4} \log c$.

46. $\log a + \frac{1}{x} \log a - \frac{1}{y} (\log a + \log b)$.

47. $\frac{n}{m} \log a - \left(\frac{q}{p} \log b + \frac{s}{r} \log c\right)$.

48. $2 \log (x - y) - \frac{1}{2} \log (x + y) - \frac{1}{2} \log (x^2 - xy + y^2)$.

49. $x \log (\log a)$. **50.** $x \log x - \log (\log x)$.

Suche aus den Logarithmentafeln zu folgenden Zahlen die Brigg'schen Logarithmen:

	a)	b)	c)	d)	e)
51.	7.	38.	218.	683.	995.
52.	1035.	4719.	5755.	7899.	9011.
53.	39070.	586100.	59·13.	9·015.	0·4792.
54.	86127.	78009.	0·68315.	85·201.	0·0075536.
55.	0·091457.	364228.	17·8193.	4·48197.	129·3567.

Suche zu folgenden Brigg'schen Logarithmen die zugehörigen Zahlen:

	a)	b)	c)	d)
56.	0·24055.	1·57287.	2·98547.	0·61278.
57.	3·89009.	0·66058.	0·27161 — 1.	1·02816.
58.	2·95742.	1·01396.	0·46370 — 3.	2·40016.
59.	0·73048 — 2.	2·81350.	3·91001.	3·69881.
60.	0·55342 — 3.	0·68012 — 1.	1·85603.	4·43065.
61.	4·89195.	0·05168 — 2.	0·69960 — 1.	1·99828.

Berechne mit Hilfe der Logarithmen folgende Ausdrücke:

62. 1·2345.1·3456. **63.** 9·68453.0·29758.

64. 1·025.1·0792.1·05625. — 1·0751.

65. 0·35679.1·0765.1·92234.0·33258.

66. 2·00415.0·56.0·0741.0·09972.1·25463.

67. $\frac{17\cdot846}{9.157}$. **68.** $\frac{1}{3\cdot14159}$. **69.** $\frac{2488. - 1926}{521347}$. **70.** $\frac{2\cdot3456.5\cdot2913}{769.0\cdot12345}$.

71. $\frac{413.5124.21358}{425.4998.76143}$. **72.** $\frac{2\cdot1457.9\cdot1248.1385.31\cdot273}{277.10\cdot7285.2\cdot2812.125\cdot092}$.

73. $(1\cdot05)^{12}$. **74.** $(1\cdot045)^{9}$. **75.** $(42\cdot456)^{-2}$. **76.** $2^{1\cdot235}$.

77. $\left(-\frac{323}{313}\right)^{17}$. **78.** $\left(\frac{54\cdot139}{55\cdot817}\right)^{11}$. **79.** $2\cdot45^{5\cdot127^{1\cdot05}}$.

80. $\frac{2035.(0\cdot00876)^{7}}{3164.(0\cdot00592)^{5}}$. **81.** $\frac{3\cdot14159^{2}.2\cdot0489^{3}.1\cdot07938^{4}}{4\cdot0932^{4}.0\cdot859^{2}.210\cdot895^{3}}$.

82. $\frac{4\,r^3\pi}{3}$ für $r = 1\cdot06234$ und $\pi = 3\cdot14159$.

83. $(3\cdot905)^{\frac{4}{5}}$. **84.** $\left(-\frac{89}{113}\right)^{\frac{2}{3}}$. **85.** $(11\cdot716)^{-1\frac{3}{4}}$.

86. $\sqrt[6]{29.}$ **87.** $\sqrt[8]{918.}$ **88.** $\sqrt[4]{7135.}$

89. $\sqrt[6]{1\cdot8354.}$ **90.** $\sqrt[8]{314\cdot2789.}$ **91.** $\sqrt[4]{13^{0\cdot3414}.}$

92. $\sqrt[5]{\frac{126}{115.}}$ **93.** $\sqrt[12]{\left(\frac{395}{129}\right)^{7}}$. **94.** $\sqrt[8]{\frac{9}{13}\sqrt[3]{6.}}$

95. $\sqrt{\frac{(a+b+c)\,(a+b-c)}{a\,b}}$ für $a = 2\cdot145$, $b = 3\cdot087$, $c = 3\cdot248$.

96. $\frac{35^4}{57^3}\cdot\sqrt[5]{30\cdot9.}$ **97.** $\frac{\sqrt[3]{37\cdot8.\sqrt[4]{13^2}}}{\sqrt[5]{7\cdot13945^3}}$. **98.** $\sqrt[4]{\frac{87.\sqrt{8105}}{93\cdot24^2}}$.

99. $\frac{\sqrt[8]{4.\sqrt{6}}}{\sqrt[11]{5\sqrt{124}}}$. **100.** $\sqrt[7]{340}\,.\sqrt[5]{\frac{24\cdot105.58\cdot937}{1\cdot47939^3}}$.

101. $\sqrt{10+\sqrt{10.}}$ **102.** $\frac{347\sqrt[5]{0\cdot35}+\sqrt{55\cdot33^{z}}}{4\cdot9275^3}$.

103. $\sqrt{\frac{4\cdot31957^3.\sqrt[3]{3\cdot19338}.\sqrt[5]{17\cdot39}}{15^4.\sqrt[3]{91.34}-9\sqrt[5]{3\cdot4071}}}$.

IV. Gleichungen.

Ordnen der Gleichungen. (§§. 220 und 221).

Ordne folgende Gleichungen:

1. $3(x-5)=4(10-2x)$.
2. $(a+b)x=2a-(a-b)x$.
3. $(9+x)(7-x)+(9-x)(7+x)=76$.
4. $(2-x)(3-x)=(4+x)(3+x)$.
5. $(x+a+b)(x-a+b)+(x+a-b)(x-a-b)=0$.
6. $\frac{5+x}{2}+\frac{13+7x}{3}=72$.
7. $a-b-\frac{ab}{x}=0$.
8. $\frac{x+a}{x}+\frac{x}{x+a}=3$.
9. $\frac{ax-2a}{ax-2b}=\frac{ax-2b}{ax+2a}$.
10. $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{3}+\frac{x-1}{4}=\frac{2x}{5}+\frac{7}{4}$.
11. $3x=\frac{6x^2-3ax+b^2}{2x}+a$.
12. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{5}+\frac{x}{7}+\frac{x}{11}-9=x+\frac{23}{66}$.
13. $\frac{4}{x^2-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{3x}{x-1}$.
14. $\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}=\frac{a}{a^2-x^2}$.
15. $\frac{20}{3x+4}-\frac{3}{5x-3}=6$.
16. $\frac{2a+x}{3a+2x}-\frac{3}{2}=\frac{3a-x}{3a+x}$.
17. $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{x+3}{x-3}+\frac{x+4}{x-4}$.
18. $\sqrt{4x^2+8x+13}=4x+1$.
19. $5\sqrt{x-1}+2\sqrt{x+1}=5\frac{1}{2}$.
20. $\sqrt{13+x}=\sqrt{x-13}$.
21. $a\sqrt{x+b}+b\sqrt{x+a}=ab(a+b)$.
22. $a\sqrt{bx+c}+b\sqrt{cx+a}=c\sqrt{ax+b}$.
23. $\frac{5x}{6y}-\frac{1}{xy}=\frac{x+y}{xy}$.
24. $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}$.
25. $\sqrt{(x+e)^2+y^2}+\sqrt{(x-e)^2+y^2}=2a$.

1. Bestimmte Gleichungen des ersten Grades.

Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten. (§. 223.)

1. $13+x=24$.
2. $5x+8=43$.
3. $b=a-x$.
4. $3x-2a+b=a-5b$.
5. $17+8x=71-x$.
6. $14a-6x+12=20-7x+9a$.
7. $5+(2x-15)=x$.
8. $8-(5-2x)=3x+1$.
9. $5(x-2)-2x=2(x-1)$.
10. $a(x-b)=b(a-x)-c$.
11. $m(x-a)-n(x-b)=(a+b)x$.
12. $3(2x+9)-9(4+x)=3(5+x)-2(x+6)$.
13. $(x+a):(x-a)=b:c$.
14. $(8x-1):(4x+2)=(6x-9):(3x-4)$.
15. $\{3(y-2)-5\}.5-4(2y-6)=y-19$.
16. $5(x+10)-4\{160-3(3x-2)+2x\}=2-x$.
17. $(z+1)(z-1)=z^2+z+1$.
18. $(2+x)(2x+1)+(2-x)(2x-1)=0$.
19. $x(x-2a)-(b-x)^2=3b^2-4a^2$.

20. $(a + x)(b + x)(c + x) - (a - x)(b - x)(c - x) = 2(x^3 + abc)$.

21. Löse die Gleichung $2s = n(a_1 + a_n)$ nach allen darin vorkommenden allgemeinen Zahlen auf.

22. $\frac{3 - 4x}{7} + 3 = 4x$.

23. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = x + 1$.

24. $\frac{x - a}{b} = \frac{x - b}{a}$.

25. $\frac{a - bx}{c} = \frac{m - nx}{p}$.

26. $\frac{5m}{x} - \frac{2(m - x)}{x} = 3$.

27. $\frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x^2 + 2x - 1} = x - 3$.

28. $\frac{m(a^2 + x^2)}{ax} - \frac{mx}{a} = cm$.

29. $\frac{a - b}{b - x} = \frac{a}{x}$.

30. $\frac{m}{x + m} - \frac{n}{x + n} = 0$.

31. $x - \frac{a - x}{b} + \frac{b - x}{c} = d$.

32. $\frac{a - b}{x} + 1 = \frac{a}{b} - \frac{a + x}{x}$.

33. $\frac{13}{x - 5} + \frac{3}{4} = \frac{65}{2x - 10}$.

34. $\frac{9x + 8}{6x + 5} = \frac{3x + 2}{2x + 1}$.

35. $\frac{8x - 3}{2x - 1} = \frac{3x + 4}{x + 1} + 1$.

36. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}$.

37. $\frac{a + b}{a - b} \cdot x - 4ab = \frac{b - a}{a + b} \cdot x$.

38. $\frac{x}{x + a} - \frac{x}{x - a} = \frac{b}{x + a}$.

39. $\frac{ax}{mx - a} + \frac{bx}{nx - b} = \frac{a}{m} + \frac{b}{n}$.

40. $\left(1 + \frac{m - n}{m + n}\right)x - 1 = \left(1 - \frac{m + n}{m - n}\right)x$.

41. $\frac{1}{ac - cx} - \frac{1}{bd - dx} = \frac{1}{ad - dx} - \frac{1}{bc - cx}$.

42. $\frac{7}{3}(2x + 5) + 3(2x - 3) - \frac{3}{4}(5x - 7) = 1$.

43. $\frac{4}{5}(3x - 7) - 22 = \frac{3}{7}\left[\frac{7}{9}(8x - 63) - (2x + 3)\right]$.

44. $\frac{1}{4}\left(\frac{8}{9}\left\{\frac{7}{6}\left[\frac{3}{2}(x + 5) + 3\right] - 3\right\} - 12\right) = 1$.

45. $\frac{x - \frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} + 4 = \frac{\frac{3}{4}x + 1}{\frac{1}{2}}$.

46. $\frac{23 \cdot 75x - 25}{6 \cdot 25} = 3 \cdot 6x$.

47. $\frac{3 \cdot 07x}{16} + \frac{x - 0 \cdot 08}{5} = \frac{3x}{8} - 0 \cdot 00925$.

48. $4 : \frac{2x}{3} = 1 : \left(15 - \frac{x}{3}\right)$.

49. $3\sqrt{x - 1} = 4$.

50. $\sqrt{4x^2 + 12x - 31} = 2x - 7$.

51. $\frac{\sqrt{6x + 7}}{5} = \frac{\sqrt{5x - 6}}{3}$.

52. $x(1 - a) : \sqrt{x} = \sqrt{x} : x$.

53. $(b - a\sqrt{x}) : (a - b\sqrt{x}) = a(b^2 - 1) : b(a^2 - 1)$.

54. $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1} = p$.

55. $\sqrt{x + 4} + \sqrt{x - 1} = \sqrt{4x + 5}$.

56. $\frac{a + \sqrt{x}}{b - \sqrt{x}} = \frac{a(1 + b)}{b(1 - a)}$.

57. $\frac{2\sqrt{x} + \sqrt{3}}{3\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{6 + 2\sqrt{3}}$.

58. $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}} = 2$.

59. $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots}}}} = a$.

60. $4 - \sqrt{x} = \sqrt{4 + x}$.

61. $a\sqrt{x + b^2} + b\sqrt{x + a^2} = 2ab$.

62. $\sqrt{a - x} + \sqrt{b - x} = \frac{a}{\sqrt{a - x}}$.

63. $\sqrt{8x - 7} - \frac{2x - 2}{\sqrt{2x + 3}} = \sqrt{2x + 3}$.

64. $x - 2a - \sqrt{x^2 - b^2} = (x - a)\left\{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - b^2}}\right\}$.

Bestimmte Gleichungen des ersten Grades mit zwei oder mehreren Unbekannten. (§§ 224—227.)

65. $8x - 5y = 25$,
$3x + 7y = 36$.

66. $3x + 4y = 4$,
$12x - 6y = 5$.

67. $16y - 25z = 7$,
$5z - 24y = 9$.

68. $x^2 - y^2 = a^2$,
$x + y = b$.

69. $x + 2y = 30$,
$\frac{3x}{5} + \frac{y}{2} = 11$.

70. $\frac{3}{4}x - \frac{1}{3}y = 2$,
$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 4$.

71. $\frac{x+7}{y} = \frac{4}{5}$,
$\frac{x}{y+4} = \frac{1}{2}$.

72. $\frac{28}{x} + \frac{6}{y} = 9$,
$\frac{9}{y} - \frac{4}{x} = 2$.

73. $\frac{m}{n+y} = \frac{n}{m+x}$,
$\frac{n}{m-y} = \frac{m}{n-x}$.

74. $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2b^2}$,
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{b^2}$.

75. $\frac{x-a+2b}{b} + \frac{y}{c} = \frac{b}{c}$,
$\frac{x}{ab} + \frac{y}{bc} = \frac{x+y}{ac}$.

76. $ax - by = a^2 + b^2$,
$bx + ay = a^2 + b^2$.

77. $(a + c)x + (a - c)y = 2bc$,
$(b - c)x + (b + c)y = 2ac$.

78. $\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}$,
$\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b}$.

79. $\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 2$,
$\frac{x}{a-b} - \frac{y}{a+b} = \frac{4ab}{a^2 - b^2}$.

80. $5(3x - 2y) = 10 - 3x$,
$\frac{1+2y}{3} - \frac{1-2y}{3} = \frac{7x}{3} - 1$.

81. $\frac{3x-2y}{5} + \frac{5x-3y}{3} = x + 1$,
$\frac{2x-3y}{3} + \frac{4x-3y}{2} = y + 1$.

82. $x - y = (2a + b) + \frac{4ab^2 - 2a(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2}$,
$ax - by = (a + b)^2 - \frac{a-b}{a+b} + \frac{(a^2 + b^2) - 2ab(a^2 - b^2 + 1)}{a^2 - b^2}$.

83. $\frac{x + 42\frac{1}{3}}{2} = y - 42\frac{1}{3}$,
$x - 23\frac{1}{2} = \frac{y + 23\frac{1}{2}}{3}$.

84. $41x - 32 \cdot 75y = 10 \cdot 42$,
$5 \cdot 2x - 36y + 2 \cdot 5 = 0$.

85. $5x : 8 = (y + 5) : 2$,
$3x : 8 = (y - 2) : 1$.

86. $(4x + y) : (2x - y) = 16 : 5$,
$(2x + 7y) : (x + 8) = 14 : 5$.

87. $(3x + 2y - 4) : (2x + 3y - 1) = 3 : 2$,
$(x - 2y - 3) : (2x - 3y - 6) = 2 : 3$.

88. $x\sqrt{a} + y\sqrt{b} = a + b$,
$x + y = 2\sqrt{a}$.

89. $3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 9$,
$2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 1$.
Setze $\sqrt{x} = u$, $\sqrt{y} = v$.

90. $\sqrt{x} + am = m(\sqrt{y} + b)$,
$m(\sqrt{x} - a) = \sqrt{y} - bm$.

91. $2\sqrt{x+5} - 3\sqrt{y-2} = 3$,
$3\sqrt{x+5} - 4\sqrt{y-2} = 5$.

92. $\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{y}} = 6$,
$\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{y}} = 1$.

93. $\frac{5}{\sqrt{x-2}} + \frac{4}{\sqrt{y+2}} = 2$,
$\frac{15}{\sqrt{x-2}} - \frac{8}{\sqrt{y+2}} = 1$.

94. $x + 3y = 30,$
$3x + 2z = 25,$
$4x - 3z = 12.$

95. $3x - 4y = 6,$
$2x + 3z = 26,$
$5y - 6z = 18.$

96. $3x + y + 2z = 13,$
$x + 2y + 3z = 17,$
$2x + 3y + z = 12.$

97. $6x - 4y + 3z = 28,$
$4x - y - 3z = 7,$
$2x - 3y + 4z = 13.$

98. $\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3. \end{aligned}\right\}$

Gib das Gesetz an, welches in den für x, y und z erhaltenen Ausdrücken vorherrscht.

99. $x + y + z = s,$
$x : y = a : b,$
$y : z = b : c.$

100. $0{\cdot}4x + 0{\cdot}5y + 0{\cdot}7z = 51,$
$0{\cdot}3x + 0{\cdot}4y + 0{\cdot}5z = 38,$
$0{\cdot}2x + 0{\cdot}3y + 0{\cdot}4z = 29.$

101. $\frac{x}{5} + \frac{3y}{4} + \frac{7z}{15} = 18,$
$\frac{2x}{5} + \frac{5y}{12} + \frac{2z}{3} = 19,$
$\frac{x}{10} + \frac{5y}{6} + \frac{4z}{5} = 23.$

102. $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 612,$
$\frac{x}{3} + y + \frac{z}{3} = 612,$
$\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + z = 612.$

103. $y + \frac{1}{2}x = 112,$
$\frac{1}{4}x + \frac{1}{5}z = 36,$
$\frac{2y - z}{z - y} = 3.$

104. $\frac{x + 1}{y + 1} = 2,$
$\frac{y + 2}{z + 1} = 4,$
$\frac{z + 3}{x + 1} = \frac{1}{2}.$

105. $3x - y - z = 10,$
$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 13,$
$\frac{x}{2} + \frac{y}{8} + \frac{z}{5} = 10.$

106. $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{5}{z} = 11,$
$-\frac{3}{x} + \frac{2}{y} + \frac{8}{z} = 25,$
$\frac{7}{x} + \frac{4}{y} - \frac{6}{z} = -19.$

107. $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a,$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = b,$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = c.$

108. $-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a,$
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = b,$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = c.$

109. $x + z = 18,$
$z - y = 2,$
$u + y = 12,$
$u + 2x = 26.$

110. $3u - 2x + y - 5z = 17,$
$4u + x - 3y + 2z = -7,$
$6u - 5x + 2y - z = 17,$
$u - x + y - z = 6.$

111. $3u - x + y + 2z = 20,$
$2u + 3x - y + z = 17,$
$u + 2x + 3y - z = 21,$
$-u + x + 2y + 3z = 12.$

112. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{4}z = 6,$
$\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}y + \frac{1}{6}u = 5,$
$\frac{1}{6}x + \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}u = 4,$
$\frac{1}{3}y + \frac{1}{5}z - \frac{1}{4}u = 3.$

113. $2x - 3y + 4z - 5u + 6w = 6,$
$3x + y - 5z + u - 3w = 3,$
$-x + 4y + 2z - 5u + w = 8,$
$x - y + z - u + w = 3,$
$x + y + z + u + w = 15.$

Anwendung der bestimmten Gleichungen des ersten Grades.

(§§. 228 und 229.)

114. Das 3fache und 4fache einer Zahl beträgt zusammen 196; wie groß ist die Zahl?

115. Von welcher Zahl ist der siebente Theil um 8 kleiner als der dritte Theil?

116. Wenn man eine Zahl mit 15 multiplicirt, zu dem Producte 20 addirt, die Summe durch 4 dividirt und von dem Quotienten 14 subtrahirt, so erhält man das 3fache der fraglichen Zahl; welche Zahl ist es?

117. Wie heißt die stetige geometrische Proportion, deren drei Glieder um gleichviel größer sind als 1, 3 und 6?

118. Die Zahl a soll in zwei Theile so getheilt werden, daß das mfache des ersten Theiles um d größer sei als das nfache des zweiten Theiles.

119. In welche zwei Theile muß man 60 zerlegen, damit der größere Theil durch den kleineren dividirt 2 zum Quotienten und 3 zum Reste gebe?

120. Eine Zahl a in solche 2 Theile zu zerlegen, daß deren Quotient der gegebenen Zahl selbst gleich sei.

121. Welche Zahl muß man vom Zähler und vom Nenner des Bruches $\frac{a}{b}$ $(\frac{7}{13})$ subtrahiren, damit er gleich $\frac{c}{d}$ $(\frac{1}{3})$ werde?

122. Welche Zahl muß zum Zähler des Bruches $\frac{a}{b}$ addirt und vom Nenner desselben subtrahirt werden, damit der erhaltene Bruch der reciproke des früheren sei?

123. Wenn man zum Zähler und Nenner eines Bruches 7 addirt, so erhält er den Werth $\frac{4}{5}$; subtrahirt man vom Zähler und Nenner 2, so erhält er den Werth $\frac{1}{2}$. Welches sind Zähler und Nenner des Bruches?

124. Zwei zweiziffrige Zahlen werden mit denselben zwei Ziffern geschrieben und verhalten sich wie 13 : 31; welche Zahlen sind es, wenn ihre Summe 88 beträgt?

125. Vermehre ich eine zweiziffrige Zahl um das 9fache ihrer Einer, so erhalte ich 80; vermehre ich sie dagegen um 18, so erscheinen in der Summe ihre Ziffern in umgekehrter Ordnung; wie heißt die zweiziffrige Zahl?

126. Jemand wird nach 10 Jahren doppelt so alt sein, als er vor 4 Jahren war; wie alt ist er jetzt?

127. Ein Vater ist jetzt 48, sein Sohn 21 Jahre alt; vor wieviel Jahren war der Vater 10mal so alt als sein Sohn?

128. Ein Vater ist 36, sein Sohn 10 Jahre alt; wie viel Jahre muß der Vater noch leben, damit er gerade doppelt so alt werde, als es dann sein Sohn sein wird?

129. A ist jetzt mmal so alt und wird nach a Jahren nmal so alt sein als B; wie alt ist A?

Welche Beziehung muß zwischen m, n und a stattfinden, damit die Auflösung einen Sinn habe? (Vergl. §. 229, Beispiel 2.)

130. Ein Vater ist gegenwärtig 3 mal so alt als sein Sohn; vor 12 Jahren war er 9mal so alt als der Sohn. Wie alt ist der Vater, wie alt der Sohn?

131. Ein Knabe sagt: meine Mutter ist 25 Jahre älter als ich, mein Vater ist 5 Jahre älter als die Mutter, und wir alle zusammen haben 91 Altersjahre. Wie alt ist der Knabe, die Mutter, der Vater?

132. Bei der Theilung einer gewissen Summe erhält A 1000 fl. und $\frac{1}{3}$ des Restes, B $\frac{1}{2}$ des neuen Restes und noch 500 fl. darüber, C die noch übrigen 2500 fl. Wie groß ist die Summe, wie viel erhält A, wie viel B?

133. Bei der Theilung einer gewissen Summe erhält A a fl. mehr als $\frac{1}{m}$ derselben, B b fl. mehr als $\frac{1}{n}$ des Restes, C den neuen Rest, welcher c fl. weniger beträgt als $\frac{1}{p}$ der ganzen Summe. Wie viel erhält jeder?

134. Unter drei Personen wird eine bestimmte Summe so vertheilt, daß B 20 fl. weniger als A, und C 20 fl. weniger als B bekommt; die ganze Summe ist um 25 fl. größer, als das 4fache dessen, was C bekommt. Wie viel erhält jeder?

135. Ein Vater läßt bei seinem Tode die Frau mit drei Söhnen zurück und vermacht sein Vermögen auf folgende Art: die Frau soll den dritten Theil des ganzen Vermögens, der erste Sohn den dritten Theil des Restes mehr 600 Mark, der zweite Sohn den dritten Theil des neuen Restes mehr 2200 Mark und der dritte Sohn den Rest von 4600 Mark erhalten. Wie groß war das ganze Vermögen, und wie viel kommt auf die Frau und jeden der ersten zwei Söhne?

136. Ein Vater verspricht seinem Sohne für jede fehlerfreie Aufgabe ein Geschenk von 10 Kreuzern; für jede fehlerhafte Aufgabe dagegen muß der Sohn dem Vater 5 Kreuzer zurückzahlen. Bei 20 Aufgaben ergab sich nun, daß dem Sohne von den erhaltenen Geschenken 80 Kreuzer übrig blieben; wie viele Aufgaben hat er ohne Fehler, und wie viele fehlerhaft gearbeitet?

137. Jemand dingt einen Gärtner auf einen Monat (30 Tage); er verspricht ihm während dieser Zeit die Kost, und für jeden Tag, an dem er arbeitet, $\frac{4}{5}$ fl.; für jeden Tag, an dem der Gärtner nicht arbeitet, muß dieser dem Herrn $\frac{1}{5}$ fl. für die Kost bezahlen. Nach einem Monate erhielt der Gärtner 18 fl.; wie viele Tage hat er gearbeitet, und wie viele nicht?

138. Zwei Arbeiter sollen einen Graben von 435 Meter Länge reinigen; der eine macht täglich 42 Meter, der andere 45 Meter fertig; wann wird die ganze Arbeit fertig sein?

139. Zwei Fässer enthalten 351 Liter Wein; nimmt man aus dem ersten den sechsten und aus dem zweiten den dritten Theil heraus, so bleibt in beiden gleichviel übrig. Wie viel Liter enthält jedes Faß?

140. In einer Gesellschaft waren doppelt soviel Männer als Frauen; nachdem 8 Männer mit ihren Frauen weggingen, blieben noch viermal so viel Männer als Frauen. Wie viel Männer und Frauen waren anfangs in der Gesellschaft?

141. In einer Fabrik arbeiten 26 Arbeiter, theils Meister, theils Gesellen; jeder Meister erhält täglich 2 fl., jeder Geselle nur die Hälfte davon; würde man jedem Meister von seinem Lohne $\frac{1}{5}$ fl. abziehen, und dafür jedem Gesellen so viel zulegen, so möchte der tägliche Lohn um $2\frac{4}{5}$ fl. mehr betragen. Wie viele Meister und wie viele Gesellen arbeiten in der Fabrik?

142. A und B machen eine Wette von 12 Mark; gewinnt A, so hat er dreimal so viel Geld als B; verliert er, so hat er nur doppelt so viel als B. Wie viel Geld hat jeder?

143. Jemand wettet bei jedem Spiele 4 fl. gegen 3 fl.; nach 28 Spielen hat er weder gewonnen, noch verloren. Wie viele Spiele hat er gewonnen, wie viele verloren?

144. Drei spielen mit einander; im ersten Spiele verliert der erste an jeden der anderen so viel, als jeder von diesen bei sich hatte; im zweiten Spiel verliert der zweite an den ersten und dritten so viel als jeder derselben hat; im dritten Spiele verliert der dritte an den ersten und zweiten so viel als jeder hat; nach geendigtem Spiel hatte jeder 24 fl. Wie viel hatte jeder am Anfange des Spieles?

145. In einem Landtage, in welchem 64 Abgeordnete stimmten, wurde ein Antrag mit einer Stimmenmehrheit von 10 angenommen. Wie viele stimmten dafür, wie viele dagegen?

146. Ein Kaufmann kaufte ein Stück Tuch, das Meter zu $3\frac{3}{4}$ fl.; hierauf verkaufte er dasselbe zu $4\frac{1}{2}$ fl. das Meter. Wenn er nun dabei 27 fl. gewonnen hat, wie viel Meter enthielt das Stück?

147. Ein Kaufmann hat zwei Sorten einer Waare, eine bessere, das Kilogr. zu 60 kr., und eine geringere, das Kilogr. zu 30 kr.; er will von beiden eine Mischung von 80 Kilogr. bereiten, die er zu 45 kr. das Kilogr. verkaufen kann. Wie viel Kilogr. muß er dazu von jeder Sorte nehmen?

148. Ein Weinhändler hat zweierlei Weine, von dem ersten kostet das Hektoliter 90 Mark, von dem zweiten 48 Mark, er will durch Mischung 7 Hektoliter zu 60 Mark bekommen. Wie viel Hektoliter wird er von jeder Gattung zu der Mischung nehmen müssen?

149. Mischt man 4 Kilogr. Caffee der einen Sorte mit 12 Kilogr. einer zweiten Sorte, so ist das Kilogr. der Mischung 1·24 fl. werth; mischt man aber 6 Kilogr. der ersten Sorte mit 10 Kilogr. der zweiten, so ist das Kilogr. der Mischung 1·22 fl. werth. Wie viel ist das Kilogr. jeder Sorte werth?

150. Feines Silber und 625 Tausendtheile feines Silber sollen zu Silber von 750 Tausendtheilen Feingehalt eingeschmolzen werden; wie viel von jeder Gattung kommt auf 24 Kilogr. dieser Legirung?

151. Wie viel Kupfer (Gehalt = 0) muß mit 26 Kilogr. Silber, das 900 Tausendtheile fein ist, legirt werden, damit man Silber à 520 Tausendtheile fein erhalte?

152. Zu 24 Kilogr. $\frac{13}{16}$ feinem Silber werden 12 Kilogr. einer andern Silbersorte hinzugesetzt, wodurch die Mischung $\frac{3}{4}$ fein wird; welchen Feingehalt hat die zweite Sorte?

153. Jemand hat drei Metallstücke, deren jedes aus den Metallen A, B, C besteht. Das erste Stück enthält von A a_1, von B b_1, von C c_1 Dekagr.; das zweite Stück enthält von A a_2, von B b_2, von C c_2 Dekagr.; das dritte Stück enthält von A a_3, von B b_3, von C c_3 Dekagr. Man will nun eine Composition bilden, welche von A a Dekagr., von B b Dekagr., von C c Dekagr. enthalten soll. Wie viel Dekagr. muß man dazu von jedem der drei Metallstücke nehmen?

Wird $a_1 + b_1 + c_1 = s_1$, $a_2 + b_2 + c_2 = s_2$, $a_3 + b_3 + c_3 = s_3$ gesetzt, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\frac{a_1 x}{s_1} + \frac{a_2 y}{s_2} + \frac{a_3 z}{s_3} = a,$$

$$\frac{b_1 x}{s_1} + \frac{b_2 y}{s_2} + \frac{b_3 z}{s_3} = b,$$

$$\frac{c_1 x}{s_1} + \frac{c_2 x}{s_2} + \frac{c_3 z}{s_3} = c.$$

154. Von drei Metallstangen enthält

die erste 4 Dekagr. Gold, 8 Dekagr. Silber, 12 Dekagr. Kupfer,
die zweite 8 " " 10 " " 2 " "
die dritte 10 " " 6 " " 14 " "

Aus diesen will man durch Legirung eine Metallstange erhalten, welche 10 Dekagr. Gold, 10 Dekagr. Silber und 11 Dekagr. Kupfer enthält; wie viel Dekagr. muß man von jeder der drei Metallstangen dazu nehmen?

155. Ein Wasserbehälter kann durch zwei Röhren gefüllt werden, und zwar durch die erste Röhre allein in a, durch die zweite allein in b Stunden. In welcher Zeit wird der Behälter gefüllt sein, wenn man das Wasser durch beide Röhren zugleich fließen läßt?

Man setze die gesuchte Zeit $= x$ und den Cubikinhalt des Behälters $= v$. Die erste Röhre allein füllt in x Stunden $\frac{vx}{a}$, die zweite Röhre allein $\frac{vx}{b}$; beide Röhren füllen also in x Stunden $\frac{vx}{a} + \frac{vx}{b}$, d. i. den ganzen Behälter $= v$. Man hat demnach $\frac{vx}{a} + \frac{vx}{b} = v$; oder $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$, daher

$$x = \frac{ab}{a + b}.$$

156. Ein Wasserbehälter kann durch drei Röhren gefüllt werden; die erste Röhre allein füllt das Gefäß in 4 Stunden, die zweite Röhre allein in 6 Stunden, die dritte Röhre allein in 12 Stunden. In wie viel Stunden wird der Wasserbehälter gefüllt, wenn man das Wasser durch alle drei Röhren zugleich fließen läßt?

157. Ein Wasserbehälter kann durch drei Röhren gefüllt werden, und zwar durch die Röhren R_1 und R_2 in a, durch R_1 und R_3 in b, durch R_2 und R_3 in c Stunden; wie viel Zeit braucht jede Röhre allein dazu, um den Behälter zu füllen?

158. Zu einer Arbeit erbieten sich drei Personen, A, B und C; A und B würden zusammen die verlangte Arbeit in 18 Tagen liefern können, A und C zusammen könnten dies in 12 Tagen, und B und C zusammen in 9 Tagen. In welcher Zeit kann die Arbeit durch alle drei Personen zusammen geleistet werden?

159. Zwei Körper vom specifischen Gewichte s_1 und s_2 sollen so mit einander verbunden werden, daß der entstehende Körper p Kilogramm wiege und das specifische Gewicht s habe; wie viel Kilogramm eines jeden Körpers hat man zu nehmen?

Da die Summe der absoluten Gewichte der beiden Bestandtheile dem absoluten Gewichte der Verbindung, und ebenso die Summe der Cubikinhalte der Bestandtheile dem Inhalte der Verbindung gleich sein soll, so hat man, wenn die Verbindung x Kilogr. des ersten und y Kilogr. des zweiten Körpers enthält,

$$x + y = p \text{ und } \frac{x}{s_1} + \frac{y}{s_2} = \frac{p}{s},$$

woraus $x = \frac{s_1\, p\, (s - s_2)}{s\, (s_1 - s_2)}$ und $y = \frac{s_2\, p\, (s_1 - s)}{s\, (s_1 - s_2)}$ folgt.

Die Auflösung ist nur möglich, wenn s zwischen s_1 und s_2 liegt.

160. Wie groß sind die specifischen Gewichte zweier Körper A und B, wenn a Kilogr. vom ersten und b Kilogr. vom zweiten zusammen das specifische Gewicht s, dagegen a_1 Kilogr. vom ersten und b_1 Kilogr. vom zweiten zusammen das specifische Gewicht s_1 haben?

161. Eine aus Gold und Silber gemachte Krone des Königs Hiero von Syracus wog 20 Pfund, unter Wasser getaucht nur $19\frac{8}{9}$ Pfund; wenn nun Gold im Wasser scheinbar $\frac{1}{19}$ und Silber $\frac{1}{16}$ von seinem Gewichte verliert, wie viel Gold und wie viel Silber war in der Krone?

162. In einem Zimmer befinden sich zwei Pendeluhren; das Pendel der ersten macht in jeder Sekunde eine Schwingung, das der zweiten macht in jeder Minute 80 Schwingungen. Nach welcher Zeit wird das Pendel an der zweiten Uhr 1000 Schwingungen mehr gemacht haben als das Pendel der ersten?

163. Ein Pendel, das a Millimeter lang ist, macht bei der Acceleration g in einer Minute n Schwingungen; wie lang muß ein anderes sein, das bei der Acceleration g_1 in einer Minute n_1 Schwingungen machen soll?

$$x : a = \frac{g_1}{n_1^2} : \frac{g}{n^2}.$$

164. Das Secundenpendel hat in Paris eine Länge von 0·99385 Meter; um wie viel Millimeter müßte man dasselbe verlängern, damit es in Wien Secunden schlage, wenn die Acceleration für Paris 9·809, für Wien 9·808 Meter beträgt?

165. Ein Dampfschiff legte in einer Stunde stromaufwärts einen Weg von $1\frac{1}{2}$ Meile, stromabwärts einen Weg von $2\frac{1}{2}$ Meile zurück; welchen Weg würde das Schiff durch die Kraft der Maschine allein (bei stillstehendem Wasser), welchen Weg durch die Kraft des Stromes allein (bei stillstehender Maschine) in einer Stunde zurücklegen?

166. Zwei Körper K' und K'' bewegen sich auf einer geraden Linie in derselben Richtung von den Punkten A' und A'' gleichförmig mit den Geschwindigkeiten c' und c''. Der Körper K' verläßt den Punkt A', welcher um d Längeneinheiten rückwärts von A'' liegt, um t Zeiteinheiten später, als der Körper K'' den Punkt A'' verläßt. Nach wie viel (T) Zeiteinheiten, von dem Abgange des Körpers K'' von A'' an gerechnet, werden beide zusammentreffen? (Vergl. §. 229, 3.)

Der Körper K' legt den Weg c' (T − t), der Körper K'' den Weg c'' T zurück; die Differenz beider Wege ist die Distanz d, daher c' (T − t) − c'' T = d und daraus

$$T = \frac{c' t + d}{c' - c''}.$$

Discutire dieses Resultat a) für positive Werthe von d, t, c' und c'', und für $c' \gtrless c''$; b) für $d \gtrless o$; c) für $t \gtrless o$; d) für $c'' < o$.

167. Behalte die Daten der vorhergehenden Aufgabe, und bestimme die Entfernung (D) des Punctes, in welchem die beiden Körper zusammentreffen, von dem näher gelegenen Puncte A''.

Da D = c'' T ist, so hat man

$$D = \frac{c''(c' t + d)}{c' - c''}.$$

Discutire dieses Resultat für die in der vorigen Aufgabe angeführten Fälle.

168. Einem Boten, der vor 3 Tagen von einem Orte abging und jeden Tag 40 Kilometer zurücklegt, wird von demselben Orte aus ein anderer Bote nachgeschickt, der täglich 60 Kilometer macht. Wann wird letzterer den ersteren einholen?

Durch Specialisirung der Werthe in Aufgabe 167, und zugleich davon unabhängig zu lösen.

169. A' und A'' sind durch eine Eisenbahn verbunden, deren Endpunkte 225 Kilometer von einander abstehen. Von A' geht gegen A'' ein Personenzug

ab, der in jeder Stunde 30 Kilometer zurücklegt; zu gleicher Zeit geht von A'' gegen A' ein Lastenzug ab, der in jeder Stunde 20 Kilometer zurücklegt. Wann begegnen sich die beiden Züge?

170. Vom Orte A' aus geht des Morgens 5 Uhr eine Locomotive ab, welche in $4\frac{1}{2}$ Stunden 105 Kilometer zurücklegt. Eine halbe Stunde später wird von A'' aus, welcher Ort $52\frac{1}{2}$ Kilometer hinter A' liegt, der ersten Locomotive eine zweite nachgesendet, die 105 Kilometer in 3 Stunden fährt. Wann wird die zweite Locomotive die erste einholen?

171. A' und A'' sind durch eine 152 Kilom. lange Eisenbahn verbunden. Von A' geht um 8 Uhr 30 Min. Vormittags ein Zug nach A'' ab mit der Geschwindigkeit von 10 Meter per Secunde; an demselben Vormittage um 9 Uhr 15 Minuten geht von A'' ein Zug mit der Geschwindigkeit von 9 Meter per Secunde nach A' ab. Wann und in welcher Entfernung von A'' begegnen sich diese Züge?

172. Ein Courier soll, von A aus, einem Regimente, das vor 6 Tagen von dort abmarschirt ist und täglich 28 Kilometer vorwärts geht, Ordre bringen. In welcher Entfernung von dem gemeinschaftlichen Abgangsorte wird er dasselbe erreichen, wenn er täglich 84 Kilometer zurücklegt?

173. Von A' geht ein Courier, welcher täglich 14 Meilen zurücklegt, nach A''; zu gleicher Zeit wird von A'' ein Courier, welcher dem ersten nach 5 Tagen begegnen soll, nach A' abgeschickt. Wie viel Meilen muß der zweite Courier täglich zurücklegen, wenn die Entfernung A'A'' 150 Meilen beträgt?

174. Um 6 Uhr Morgens fährt von A' nach A'' ein Eilwagen, der jede Stunde $1\frac{1}{5}$ Meile zurücklegt; 20 Minuten nach 2 Uhr Nachmittags verläßt ein Dampfwagen den Ort A'' und langt auf einer neben der Landstraße liegenden Eisenbahn, indem er stündlich 4 Meilen zurücklegt, zu derselben Zeit in A' an, zu welcher der Eilwagen in A'' ankommt; wie groß ist die Entfernung zwischen A' und A''?

175. Von A' nach A'' sind 315 Kilometer. Um Mittag geht von A' ein Eilwagen ab, der $9\frac{3}{8}$ Kilometer in der Stunde macht. Um wie viel Stunden früher muß von A' eine Fahrpost, die in der Stunde nur $5\frac{5}{8}$ Kilometer zurücklegt, abgehen, damit sie mit dem Eilwagen gleichzeitig in A'' eintreffe?

176. Ein Regiment bricht von A' gegen A'' auf und macht täglich 3 Meilen, 2 Tage später rückt ihm ein anderes Regiment nach. Wie viel Meilen muß dieses täglich zurücklegen, damit es das erstere in 4 Tagen einhole?

177. Einem Reisenden, der täglich 56 Kilometer zurücklegt, wird nach 3 Tagen ein Bote nachgeschickt, der ihn 350 Kilometer vom Ausgangsorte einholen soll. Wann wird er den Reisenden einholen und wie viel Kilometer muß er zu diesem Zwecke täglich zurücklegen?

178. Zwei Körper bewegen sich von den Puncten A' und A'', deren Entfernung d Meter beträgt, gegen einander. Fängt der erste t' Stunden früher an sich zu bewegen, so treffen sie T' Stunden nach dem Abgange des zweiten zusammen; fängt der zweite t' Stunden früher an sich zu bewegen, so treffen sie T'' Stunden nach dem Abgange des ersten zusammen. Wie viel Meter legt jeder in einer Stunde zurück?

179. Einem Körper K'', welcher in jeder Zeiteinheit c'' Längeneinheiten zurücklegt, folgt t Zeiteinheiten später von demselben Puncte aus ein zweiter K', welcher in jeder Zeiteinheit c' Längeneinheiten zurücklegt. Nach wie viel (T) Zeiteinheiten, vom Abgange des Körpers K' an gerechnet, werden beide Körper d Längeneinheiten von einander entfernt sein?

180. Zwei Körper bewegen sich auf der Peripherie eines Kreises, welche p Längeneinheiten beträgt, zu gleicher Zeit von demselben Puncte aus in derselben Richtung mit den Geschwindigkeiten c' und c''. Nach wie viel (T) Zeiteinheiten werden sie wieder zusammentreffen?

Nimmt man an, daß der erste Körper den Umfang p in a', der zweite in a'' Zeiteinheiten zurücklegt, so ist $c' = \frac{p}{a'}$ und $c'' = \frac{p}{a''}$, und man hat für das weitere Zusammentreffen derselben

$$T c' - T c'' = p, \text{ daher } T = \frac{p}{c' - c''} = \frac{a' a''}{a'' - a'}.$$

181. Wie viel Zeit verfließt von einem Zusammentreffen der beiden Zeiger einer Uhr bis zum nächsten Zusammentreffen derselben?

182. Wie viel Minuten nach vier Uhr wird der Minutenzeiger einer Uhr über den Stundenzeiger zu stehen kommen?

183. Es sind 20 Minuten über 12 Uhr; nach wie viel Minuten werden sich beide Zeiger der Uhr decken?

184. Der Mond vollendet, von der Erde aus gesehen, seinen Umlauf am Himmel in 27 Tagen 7 Stunden 43 Minuten 4·68 Secunden (Zeit des periodischen Monates), die Sonne dagegen in 365 Tagen 5 Stunden 48 Minuten 47·8 Secunden (Zeit des siderischen Jahres). Beide Himmelskörper schreiten durch die Sternbilder des Thierkreises von Westen gegen Osten fort. Wie viel Zeit verfließt von einem Neumonde bis zum andern (Zeit des synodischen Monates), d. i. in welcher Zeit wird der Mond seinen Umlauf einmal mehr gemacht haben als die Sonne?

185. Auf der Peripherie eines Kreises bewegen sich zwei Körper gleichförmig und in derselben Richtung; der erste beschreibt den Umfang in t Secunden und trifft mit dem zweiten alle T Secunden zusammen. In welcher Zeit vollendet der zweite einen Umlauf?

2. Unbestimmte Gleichungen des ersten Grades.

Auflösung in ganzen Zahlen. (§§. 233 und 234.)

1. $2x - 3y = 1.$
2. $2x + 3y = 17.$
3. $6x + 5y = 128.$
4. $7x + 11y = 18.$
5. $7x - 13y = 152.$
6. $8x - 11y = 200.$
7. $12x + 13y = 319.$
8. $5x - 7y = 1.$
9. $15x + 14y = 225.$
10. $13x + 19y = 73.$
11. $37x - 22y = 307.$
12. $23x - 13y = 2.$
13. $7y + 17y = 408.$
14. $24x - 35y = 10.$
15. $25x - 11y = 20.$
16. $36x - 115y = 643.$
17. $37x - 22y = 307.$
18. $115x = 424y - 539.$
19. $181x + 2y = 570.$
20. $520x = 919y - 1000.$
21. $3x + 4y - 5z = 12.$
22. $4x - 18y + 27z = 100.$
23. $5x + 3y + 7z = 36.$
24. $7x + 10y - 15z = 56.$

Auflösung in ganzen positiven Zahlen. (§. 235.)

25. $5x - 7y = 13.$
26. $5x - 7y = 94.$
27. $7x - 12y = 300.$
28. $17x + 14z = 24.$
29. $23x + 57y = 412.$
30. $25x = 36y - 7.$

31. $29x + 17y = 250.$
32. $17x - 1 = 12y - 5.$
33. $28x + 12 = 19y + 17.$
34. $24x - 31y = 196.$
35. $6x + 17y = 500.$
36. $18x + 7y = 600.$
37. $\frac{3x-2}{5} = y,$ $\frac{4x-3}{6} = z.$
38. $19x - 10y = 7,$ $19x - 8z = 15.$
39. $5x + 3y + 7z = 36.$
40. $8x + 11y - 20z = 6.$
41. $5x + 6y + 20z = 187.$
42. $9x + 5y + 3z = 105.$
43. $2x + 3y + 4z = 20.$
44. $5x + 7y - 3z = 39.$

Anwendung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades.

45. Suche zwei Zahlen von solcher Beschaffenheit, daß das 8fache der ersten um das 3fache der zweiten vermehrt 91 zur Summe gibt.

46. Man soll 50 in zwei Theile so zerlegen, daß der eine durch 7, der andere durch 5 theilbar sei.

47. Die Zahl 200 in zwei Theile zu zerlegen, von denen der eine durch 14, der andere durch 23 theilbar ist.

48. Suche zwei um 10 verschiedene Zahlen, deren kleinere durch 21, deren größere durch 34 theilbar ist.

49. Zerlege die Zahl 300 in zwei Theile so, daß der erste um 1 vermindert durch 9, der zweite um 7 vermehrt durch 11 theilbar sei.

50. Suche eine Zahl, welche durch 7 theilbar ist, aber durch 29 dividirt 13 zum Reste gibt.

51. Welche ist die allgemeine Form der ganzen Zahlen, welche durch 19 dividirt 1, und durch 28 dividirt 3 zum Reste geben?

52. Welche Zahlen geben durch 24 dividirt 18, durch 13 dividirt 1 zum Reste?

53. Zerlege den Bruch $\frac{101}{110}$ in zwei andere Brüche, deren Nenner 5 und 22 sind.

54. Welche zwischen 1000 und 2000 liegende Zahlen würden sich, wenn sie um 5 größer wären, durch 13, und wenn sie um 5 kleiner wären, durch 16 ohne Rest theilen lassen?

55. Jemand kauft für 90 fl. zweierlei Sorten Tuch; von der einen kostet das Meter 4 fl., von der andern 3 fl. Wie viel ganze Meter erhält er von jeder Sorte?

56. Jemand kauft 7 Kilogramm Caffee und 17 Kilogramm Zucker, zusammen für 18 fl. 60 kr. Wie viel ganze Kreuzer kostet das Kilogramm von jeder Art, vorausgesetzt, daß der Caffee theurer ist als der Zucker und daß das Kilogramm Zucker nicht unter 50 Kreuzer kostet?

57. Der Durchmesser der Achtguldenstücke beträgt 21, jener der Vierguldenstücke 19 Millimeter. Wie viel Acht- und Vierguldenstücke muß man in gerader Linie neben einander stellen, damit die Summe der Durchmesser 1 Meter betrage?

58. Von zwei gezahnten Rädern hat das eine 13, das andere 17 Zähne; beim Beginne der Bewegung greift der erste Zahn des ersten Rades in die erste Zahnlücke des zweiten Rades ein. Nach wie vielen Umdrehungen eines jeden dieser Räder wird der Zahn 1 des ersten Rades wieder in die Lücke 1 des zweiten eingreifen?

59. Welche Zahlen geben durch 11, 19, 29 dividirt bezüglich die Reste 5, 12, 4?

60. Bezeichnet N eine Jahreszahl der christlichen Zeitrechnung, so heißt

der Rest der Division $\frac{N+1}{19}$ die goldene Zahl,

" " " " $\frac{N+9}{28}$ der Sonnencirkel,

" " " " $\frac{N+3}{15}$ die Römerzinszahl

für jenes Jahr. Welche Jahreszahlen haben a) die goldene Zahl 15 und den Sonnencirkel 9; b) die goldene Zahl 14 und die Römerzinszahl 3; c) den Sonnencirkel 10 und die Römerzinszahl 5; d) die goldene Zahl 5, den Sonnencirkel 27 und die Römerzinszahl 9?

61. Die Zahl 50 ist in drei Theile zu zerlegen, die folgeweise durch 5, 6, 7 theilbar sind.

62. Zerlege $\frac{121201}{4400}$ in drei Brüche, deren Nenner 11, 16, 25 sind.

63. 30 Personen, Männer, Frauen und Kinder, haben gemeinschaftlich 30 Mark ausgegeben. Wenn nun die Ausgabe eines Mannes 6 Mark, einer Frau 1 Mark und eines Kindes 25 Pfennige beträgt, wie viel waren Männer, wie viel Frauen und wie viel Kinder?

---

3. Bestimmte Gleichungen des zweiten Grades.

Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten. (§§. 237—241.)

1. $x^2 = 9.$

2. $x^2 + 4 = 0.$

3. $2x^2 - 1 = 2 - 4x^2.$

4. $3x^2 - 4093 = x^2 + 139.$

5. $(x+7)(x-7) = 51.$

6. $(2x-3)(2x+3) = 7.$

7. $a - x = \frac{2ab}{a+x}.$

8. $\frac{x+a}{x+b} + \frac{x-a}{x-b} = 0.$

9. $\frac{7x}{1050} = \frac{3}{2x}.$

10. $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = \frac{5}{16}.$

11. $\frac{x}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{3}.$

12. $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{5}{2}.$

13. $\frac{a-x}{1-ax} = \frac{1-bx}{b-x}.$

14. $\frac{a}{1+2x} + \frac{a}{1-2x} = 2b.$

15. $\sqrt{33 + 2x - x^2} = x + 1.$

16. $\frac{ax^2+b^2}{\sqrt{bx^2+a^2}} = \sqrt{bx^2+a^2}.$

17. $\frac{2a^2}{x+\sqrt{4a^2-x^2}} + \frac{2a^2}{x-\sqrt{4a^2-x^2}} = x.$

18. $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = \frac{a}{b}.$

19. $\sqrt{x^2+a^2-2a\sqrt{x^2-b^2}} + x = \frac{ax}{\sqrt{x^2-b^2}}.$

20. $\sqrt[3]{\sqrt{5}+x} + \sqrt[3]{\sqrt{5}-x} = \sqrt[3]{5\sqrt{5}}.$

---

21. $x^2 - 4x = 21.$
22. $x^2 - 12x + 35 = 0.$
23. $x^2 + 15x + 56 = 0.$
24. $x^2 + x - 56 = 0.$
25. $x^2 - 4x + 4 = 0.$
26. $x^2 - 2x = 15.$
27. $x^2 - 6x + 7 = 0.$
28. $x^2 - 13x = 140.$
29. $x^2 + 9x + 5 = 0.$
30. $x^2 + 19x + 10 = 0.$
31. $x^2 - 7x = 7.$
32. $x^2 + 2x + 4 = 0.$
33. $5x^2 + 7x = 24.$
34. $12x^2 = 20x - 3.$
35. $5x^2 + 13x + 17 = 0.$
36. $18x^2 + 3x = 10.$
37. $x^2 - \frac{3x}{2} + \frac{11}{16} = 0.$
38. $x^2 - 12x + 100 = 0.$
39. $x^2 - 0{\cdot}9x = 0{\cdot}2.$
40. $2x^2 - 13{\cdot}6x + 43{\cdot}68 = 0.$
41. $x^2 - 0{\cdot}685x + 0{\cdot}0133 = 0.$
42. $x^2 - 8{\cdot}71235x = 7{\cdot}23475.$
43. $x^2 + 3{\cdot}162x - 1{\cdot}4248 = 0.$
44. $x^2 + 7{\cdot}66441 = 0{\cdot}80183x.$
45. $x^2 + 2ax = 2ab + b^2.$
46. $x^2 - 2abx = a^4 + a^2b^2 + b^4.$
47. $x^2 - (a + b)x + ab = 0.$
48. $x^2 - (a - b)x - ab = 0.$
49. $(a - b)x^2 - bx = a.$
50. $(2x - 5)(3x + 8) = 0.$
51. $\frac{5x^2}{6} - \frac{x}{2} = 9.$
52. $x + \frac{1}{x - 2} = 3.$
53. $\frac{10x + 3}{3x + 2} = x.$
54. $\frac{6x + 5}{2x - 3} = 4x - 15.$
55. $\frac{x + 18}{x + 6} = \frac{6}{x - 3}.$
56. $\frac{(2a - b)x - b^2}{2a + b - x} = \frac{2a(a - b)}{2a - x}.$
57. $\frac{3x - 4}{x - 4} - 10 = \frac{2 - x}{2} - 1.$
58. $\frac{5}{x} - \frac{5}{x + 1} = \frac{12}{x + 2}.$
59. $\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(1 - x)^2}.$
60. $\frac{a^2 - b^2}{2x} = \frac{a^2 + b^2}{x^2 + 1}.$
61. $ax - bx = \frac{a}{x} \cdot \frac{a - 2bx}{a + b}.$
62. $\frac{ab}{x} + abx = a^2 + b^2.$
63. $\frac{x}{x - 1} - \frac{x}{x + 1} = \frac{a}{b}.$
64. $\frac{a - x}{b + x} - \frac{b + x}{a - x} = \frac{b}{a} - \frac{a}{b}.$
65. $\left(\frac{a - x}{x - b}\right)^2 = 8\left(\frac{a - x}{x - b}\right) - 15.$ Setze $\frac{a - x}{x - b} = y.$
66. $\frac{x + 1}{x + 2} + \frac{2x - 3}{3x - 4} = 5.$
67. $\frac{5x + 4}{2x + 1} + \frac{x - 1}{3x - 4} - 3 = 0.$
68. $\frac{2x - a}{4x + 5a} = \frac{x + 6a}{2x} + 7.$
69. $\frac{3x^2 - 3}{x + 9} + \frac{6x^2 - 4}{2x - 1} = 6x - 6.$
70. $\frac{3a + 5b}{2(a + b)} - \frac{a - b}{a - x} = \frac{b - x}{a + b}.$
71. $\frac{2a - (1 + a^2)x}{1 + a^2 - 2ax} = \frac{2b + (1 + b^2)x}{1 + b^2 + 2bx}.$
72. $x^2 + 2x\sqrt{5} = 2\sqrt{6}.$
73. $x(x + 2\sqrt{11}) = 6\sqrt{2}.$
74. $x : (x + 1) = (2x + 3) : (3x + 4).$
75. $x + 7\sqrt{x} = 30.$
76. $ax - b\sqrt{x} = c.$
77. $2x - 3\sqrt{x - 1} = 4.$
78. $x - 10 = 2\sqrt{x^2 - 3x + 5}.$
79. $\sqrt{2x + 1 - 2\sqrt{2x + 3}} = 1.$
80. $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}} = x.$
81. $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$ Setze $\sqrt{x} = y.$
82. $\sqrt{7x - 13} - 12 = \sqrt{5x + 1}.$
83. $\sqrt{8x - 7} + 3 = \sqrt{15x + 4}.$
84. $\sqrt{\frac{a + x}{a + b}} + \sqrt{\frac{b - x}{a + b}} = 1.$
85. $\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{x - b}{\sqrt{c^2 + (b - x)^2}} = 0.$

Bilde Gleichungen, welche folgende Wurzeln haben:

86. $+5$ und -5.
87. $+3\sqrt{2}$ und $-3\sqrt{2}$.
88. -3 und $+7$.
89. 12 und 7.
90. 10 und -1.
91. -9 und -13.
92. $\frac{3}{2}$ und $\frac{1}{2}^{1}$.
93. $\frac{7}{3}$ und $-\frac{2}{3}$.
94. $0{\cdot}7$ und $-2{\cdot}4$.
95. $1{\cdot}36$ und $0{\cdot}75$.
96. $\frac{a+b}{2}$ und $\frac{a-b}{2}$.
97. $1+\sqrt{2}$ und $1-\sqrt{2}$.
98. $2a+3b\sqrt{2}$ und $2a-3b\sqrt{2}$.
99. $2+\sqrt{-1}$ und $2-\sqrt{-1}$.

Zerlege folgende Trinome in Factoren:

100. $x^2-17x+70$.
101. $x^2+3x-88$.
102. x^2+x+1.
103. $x^2-9x-10$.
104. $3x^2-14x+8$.
105. $3x^2-10x-153$.
106. $6x^2+x-1$.
107. $20x^2+17x-24$.
108. $x^2-ax+c(a-c)$.
109. $x^2+4abx-(a^2-b^2)^2$.
110. $abx^2+(a+b)x+1$.
111. $abx^2+(a^2-b^2)x-ab$.
112. $acx^2-(a^2+bc)x+ab$.
113. $acx^2-(3ab-bc)x-3b^2$.

Bestimmte quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

(§§. 242 – 243.)

114. $x^2+y^2=90$,
$x=3y$.

115. $xy+x=40$,
$x+y=12$.

116. $xy=a$,
$x-y=b$.

117. $2x^2-3y^2=71$,
$3x^2+2y^2=165$.

118. $xy+x=4$,
$xy+y=3$.

119. $xy+x=18$.
$xy-y=10$.

120. $x^2+y^2=a^2$,
$\frac{x}{y}=\frac{b}{c}$.

121. $x^2-y^2=32$,
$\frac{x}{y}=3$.

122. $x+y=4$,
$\frac{8}{x}-\frac{12}{y}=4$.

123. $\frac{a}{x^2}-\frac{b}{y^2}=c$,
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$.

124. $y=a_1+(x-1)d$,
$s_n=\frac{x}{2}(a_1+y)$.

125. $x^2+y^2=r^2$,
$y=ax+b$.

126. $x:y=4:1$,
$x:6=6:y$.

127. $x^2:y^2=a^2:b^2$,
$a^2-x=b^2-y$.

---

128. $xy=36$,
$\frac{x}{y}=4$.

129. $x^2+y^2=2a^2+2b^2$,
$x+y=2a$.

130. $x^2+y^2=a$,
$x-y=b$.

131. $x^2-2y^2=17$,
$x-2y=1$.

132. $x^2-y^2=a$,
$xy=b$.
} Setze $x^2=u$, $y^2=v$.

133. $x(x+y)=40$,
$y(x+y)=24$.

134. $x^2+y^2+x+y=a$,
$x^2+y^2-x-y=b$.

135. $x^2 + y^2 + x + y = 8,$
$xy = 2.$

136. $x^2 + y^2 - x - y = 12,$
$xy = 9.$

137. $x^2 + xy + y^2 = a,$
$x^2 + y^2 = b.$

138. $x^2 - xy + y^2 = a,$
$x^2 - y^2 = b.$

139. $x + y = 74,$
$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 12.$

140. $x : 11 = 704 : y.$
$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 19.$

Setze $\sqrt{x} = u$, $\sqrt{y} = v$.

141. $x - y + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{20}{x+y}.$
$x^2 + y^2 = 34.$

Setze $x^2 + y^2 = u^2$, $x^2 - y^2 = v^2$.

142. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6},$
$x^2y + xy^2 = 30.$

Setze $xy = u$, $x + y = v$.

---

143. $x(x + y + z) = a,$
$y(x + y + z) = b,$
$z(x + y + z) = c.$

144. $x^2 + y^2 + z^2 = 94,$
$x(y + z) = 45,$
$x + y + z = 14.$

145. $\frac{xy}{z} = m,$
$\frac{xz}{y} = n,$
$\frac{yz}{x} = p.$

146. $\frac{y+z}{xyz} = -a^2,$
$\frac{x+z}{xyz} = -b^2,$
$\frac{x+y}{xyz} = -(a+b)^2.$

Die letzten drei Gleichungen geben:

$$x = \mp\frac{1}{a},\ y = \mp\frac{1}{b},\ z = \pm\frac{1}{a+b}.$$

147. $x : y = y : z,$
$x + y + z = 26,$
$x^2 + z^2 = y^2 + 292.$

148. $x : y = z : u,$
$x + u = 13,$
$y + z = 20,$
$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 425.$

Anwendung der bestimmten Gleichungen zweiten Grades.

149. Welche Zahl gibt mit ihrer Hälfte multiplicirt 162?

150. Das Product aus dem dritten und vierten Theile einer Zahl beträgt 108; welches ist die Zahl?

151. Welche Zahl muß um d vermehrt und vermindert werden, damit das Product der beiden neuen Zahlen a sei?

152. Das 12fache einer Zahl um 45 vermehrt gibt das Quadrat derselben; welches ist die Zahl?

153. Wenn man zu einer Zahl 40 addirt und die Summe durch die ungeänderte Zahl dividirt, so ist der Quotient um 2 kleiner als die ursprüngliche Zahl; wie groß ist diese?

154. Wenn man die Summe und Differenz einer gewissen Zahl mit 5 bildet, so ist die Summe der Quadrate der so erhaltenen Zahlen 178; welches ist die Zahl?

155. Welche Zahl gibt zu ihrem reciproken Werthe addirt a zur Summe?

156. Suche zwei Zahlen, deren Summe 30 und deren Product 189 ist.

157. Die Zahl 15 in zwei Theile zu theilen, so daß die Summe ihrer Quadrate 113 wird.

158. Die Zahl 15 in zwei Theile zu theilen, deren Quadrate sich wie 4:9 verhalten.

159. Die Zahl 18 in zwei Factoren zu zerlegen, deren Quadrate 27 zur Differenz geben. (Siehe Aufg. 132, Seite 242.)

160. Eine Zahl a in zwei Theile zu zerlegen, so daß der eine Theil die mittlere geometrische Proportionale zwischen a und dem andern Theile wird.

161. Der Zähler und der Nenner eines Bruches betragen zusammen 33. Wäre der Zähler um 39, und der Nenner um 20 größer, so würde der Bruch doppelt so groß sein; welches ist der Bruch?

162. Man suche zwei Zahlen, deren Quadrate 45 zur Summe und 27 zur Differenz geben.

163. Von welchen zwei Zahlen ist das Product um 84 kleiner als die Summe der Quadrate, und um 44 größer als die Differenz der Quadrate?

164. Dividirt man eine zweiziffrige Zahl durch das Product ihrer Ziffern, so erhält man 6; vertauscht man die Ziffern, so ist die so erhaltene Zahl um 9 größer als die gesuchte; wie heißt die Zahl?

165. Zwei Zahlen verhalten sich wie 3:4, die Summe ihrer Quadrate ist 100; welche Zahlen sind es?

166. Suche zwei Zahlen von der Beschaffenheit, daß ihre Summe, ihr Product und die Differenz ihrer Quadrate gleich sind.

167. Drei Zahlen bilden eine stetige geometrische Proportion; ihre Summe ist 14, die Summe ihrer Quadrate 84; welche Zahlen sind es?

168. In einer geometrischen Proportion ist die Summe der äußeren Glieder 18, die Summe der inneren Glieder 17 und die Summe der Quadrate aller vier Glieder 325; wie heißt die Proportion?

169. Die Summe der vier Glieder einer geometrischen Proportion ist 72, das Product der inneren Glieder 140, die Summe der Quadrate aller vier Glieder 2050; wie heißt die Proportion?

170. Jemand kauft für 117 fl. Weizen und zwar kostet jedes Hektoliter davon um 4 fl. weniger als Hektoliter sind; wie viel Hektoliter Weizen hat er gekauft?

171. Jemand kaufte für 400 Mark Tuch; hätte das Meter 1 Mark weniger gekostet, so würde er für jenes Geld 20 Meter mehr erhalten haben. Wie viel Meter hat er gekauft?

172. A und B verkaufen zusammen 100 Meter einer Waare, und zwar der eine mehr als der andere, aber beide nahmen dennoch dieselbe Geldsumme ein; hätte A so viel Meter gehabt als B, so würde er 63 fl. dafür eingenommen haben; hätte B so viel Meter als A gehabt, so würde er nur 28 fl. dafür erhalten haben. Wie viele Meter hat jeder verkauft?

173. Die Kosten einer Reise, welche mehrere Personen unternommen, betragen 432 Gulden; da zwei Personen frei gehalten wurden, mußte jede der übrigen Personen um 3 Gulden mehr bezahlen. Wie viel Personen waren?

174. Eine Summe von 240 Mark soll unter eine bestimmte Anzahl Personen vertheilt werden; nun wurden 4 Personen ihres Antheils verlustig und da kamen dann auf jede der übrigen Personen um 3 Mark mehr. Für wie viele Personen war die Theilung ursprünglich bestimmt?

175. Ein Vater hinterließ seinen Kindern ein Vermögen von 14400 fl. zu gleichen Theilen; bald nach seinem Tode starben zwei Kinder, und es erhielt in Folge dessen jedes der übrigen Kinder um 1200 fl. mehr, als es sonst bekommen hätte. Wie viele Kinder hinterließ der Vater?

176. Ein Mittagsessen, bei dem doppelt so viel Herren als Damen speisten, kostete 176 Zehner; jeder Herr zahlte doppelt so viel Zehner, als Herren waren, und jede Dame dreimal so viel Zehner, als Damen waren. Wie viel Herren und wie viel Damen waren da?

177. Ein Baumgarten bildet ein Rechteck, in welchem 560 Bäume in gleichen Entfernungen von einander stehen; eine Reihe nach der Länge enthält 8 Bäume mehr als eine Reihe nach der Breite. Wie viel Bäume stehen in jeder Reihe?

178. Ein Grundstück von der Form eines Rechteckes ist a Meter lang und b Meter breit; um wie viel Meter muß die Länge verkleinert und um wie viel Meter die Breite vergrößert werden, damit das Grundstück an Inhalt gleich bleibe, an Umfang aber um $a-2b$ Meter kleiner werde?

179. In zwei Quadraten ist die Differenz der Diagonalen d, die Summe der Flächeninhalte a^2; wie groß sind die Seiten?

180. Man läßt einen Stein in einen Brunnen fallen und zählt t Secunden, bis man das Aufschlagen des Steines im Wasser hört. Wie tief ist der Brunnen, wenn die Acceleration g, und die Geschwindigkeit des Schalles c ist?

Die Zeit t ist die Summe aus der Zeit τ, welche der Stein zum Falle bis in die Tiefe des Brunnens braucht, und aus der Zeit τ', in welcher der Schall aus der Tiefe des Brunnens in unser Ohr gelangt. Da sowohl die von dem Steine, als die von dem Schalle zurückgelegte Strecke der Tiefe x des Brunnens gleich ist, so hat man nach den Gesetzen der Physik $x = \frac{g\tau^2}{2}$ und $x = c\tau'$, daher $\tau = \sqrt{\frac{2x}{g}}$ und $\tau' = \frac{x}{c}$. Es ist somit $\sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{c} = t$, woraus

$$x = \frac{c}{g}\left(c + gt \pm \sqrt{c^2 + 2cgt}\right)$$

folgt.

181. Berechne die vorhergehende Aufgabe für $t = 3$ Secunden, $g = 9{\cdot}81$ Meter und $c = 332{\cdot}25$ Meter.

182. Wie viel Zeit braucht ein mit der Geschwindigkeit c senkrecht in die Höhe geworfener Körper, um die Höhe h zu erreichen?

In x Secunden würde der Körper vermöge der ihm ertheilten Geschwindigkeit die Höhe cx erreichen; in derselben Zeit würde der Fallraum desselben $\frac{gx^2}{2}$ betragen, wo g die Acceleration bedeutet. Für die wirklich zurückgelegte Strecke h hat man demnach die Gleichung

$$h = cx - \frac{gx^2}{2}.$$

183. Ein Körper wird mit der Geschwindigkeit c senkrecht in die Höhe geworfen, t Secunden später wird ein zweiter Körper mit der Geschwindigkeit c' in die Höhe geworfen; nach wie viel Secunden erreicht dieser mit dem ersten die gleiche Höhe?

Discussion der erhaltenen Gleichung.

184. Ein Reisender braucht zu einem Wege von 520 Kilometer 3 Tage mehr als ein anderer, weil dieser täglich 12 Kilometer mehr zurücklegt als der erstere. Wie viel Tage braucht jeder zu dieser Reise?

185. Zwei Körper K' und K" bewegen sich auf einer geraden Linie gleichförmig und in derselben Richtung zu gleicher Zeit von den Punkten A' und A", von denen A' um d Längeneinheiten rückwärts von A" liegt, und kommen beide nach t Zeiteinheiten zu dem Punkte B. Dabei braucht der Körper K' zu einer Längeneinheit $\frac{1}{n}$ Zeiteinheiten weniger als K". Wie viel (D) Längeneinheiten beträgt die Entfernung des Punktes B von A"?

K' braucht zu einer Längeneinheit $\frac{t}{d+D}$ Zeiteinheiten,

K" " " " " $\frac{D}{t}$ "

folglich $\frac{t}{D} - \frac{t}{d+D} = \frac{1}{n}$, und $D = -\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + ndt}$.

Welche Bedeutung haben in dieser Gleichung negative Werthe von D, d, t, n?

186. Von zwei Orten, die 300 Kilometer von einander entfernt sind, gehen gleichzeitig zwei Eisenbahnzüge ab, von denen der eine zu einem Kilometer $\frac{1}{150}$ Stunde weniger braucht als der andere. Wenn sich nun diese Züge $4\frac{4}{9}$ Stunden nach ihrer Abfahrt begegnen, wie viel Zeit braucht jeder zu einem Kilometer?

187. Zwei Reisende gehen gleichzeitig, der eine von A' gegen A", der andere von A" gegen A' ab. Der erste kommt in A" in a' Stunden, der zweite in A' in a" Stunden nach ihrer gegenseitigen Begegnung an. Wie verhalten sich ihre Geschwindigkeiten c' und c"?

Bezeichnet d die Entfernung der Orte A' und A", so findet die Begegnung nach $\frac{d}{c' + c''}$ Zeiteinheiten statt; bis dahin haben die Reisenden die Wege $\frac{c'd}{c'+c''}$ und $\frac{c''d}{c'+c''}$ gemacht, sie haben daher bezüglich noch die Wege $\frac{c''d}{c'+c''}$ und $\frac{c'd}{c'+c''}$ zurückzulegen und brauchen dazu $\frac{c''d}{c'(c'+c'')}$ und $\frac{c'd}{c''(c'+c'')}$ Zeiteinheiten. Man hat daher $\frac{c''d}{c'(c'+c'')} = a'$ und $\frac{c'd}{c''(c'+c'')} = a''$.

Dividirt man die zweite Gleichung durch die erste, so erhält man

$$\frac{c'^2}{c''^2} = \frac{a''}{a'} \text{ folglich } \frac{c'}{c''} = \frac{\sqrt{a''}}{\sqrt{a'}}.$$

188. Zwei Punkte bewegen sich gleichförmig mit den Geschwindigkeiten c' und c" auf zwei sich rechtwinklig durchschneidenden geraden Linien zu dem Durchschnittspunkte hin. Ihre Entfernungen vom Durchschnittspunkte sind zu einer gewissen Zeit d' und d". Nach wie viel (t) Zeiteinheiten werden die beiden Punkte die Entfernung d von einander haben?

Nach t Zeiteinheiten ist

die Entfernung des Punktes K' vom Durchschnittspunkte $= d' - c't$,

" " " " K" " " $= d'' - c''t$;

folglich ist nach dem Pythagoräischen Lehrsatze

$$d^2 = (d' - c't)^2 + (d'' - c''t)^2,$$

woraus

$$t = \frac{c'd' + c''d'' \pm \sqrt{d^2(c'^2 + c''^2) - (c'd'' - c''d')^2}}{c'^2 + c''^2}$$ folgt.

Discussion. a) Soll t reell sein, so muß $d^2 (c'^2 + c''^2) \geqq (c' d'' - c'' d')^2$, also $d \geqq \frac{c' d'' - c'' d'}{\sqrt{c'^2 + c''^2}}$ sein. Die kleinste Entfernung, in welche die Punkte kommen können, ist demnach $d = \frac{c' d'' - c'' d'}{\sqrt{c'^2 + c''^2}}$.

b) Für die Zeit, nach welcher die Punkte diese kleinste Entfernung haben werden, hat man $t = \frac{c' d' + c'' d''}{c'^2 + c''^2}$.

c) Sollen die beiden Punkte im Durchschnittspunkte zusammentreffen, so muß ihre kleinste Entfernung $d = o$ werden, d. i.

$c' d'' = c'' d'$ oder $\frac{c'}{c''} = \frac{d'}{d''}$ sein.

Welche Bedeutung haben hier die negativen Werthe von t, c', c'', d', d''?

189. Zwei Punkte bewegen sich gleichförmig auf zwei sich senkrecht durchschneidenden geraden Linien nach dem Durchschnittspunkte hin, von dem sie die Entfernungen d' und d'' haben. Nach t Zeiteinheiten haben beide Punkte die kleinste Entfernung d von einander. Welche Geschwindigkeiten haben die beiden Punkte?

190. Die Entfernung zweier leuchtender Punkte ist d, die Lichtintensität des ersten a, des zweiten b. Welcher Punkt ihrer Verbindungslinie ist von beiden leuchtenden Punkten gleich stark erleuchtet?

Da die Stärke der Beleuchtung mit der Lichtintensität des leuchtenden Punktes gerade, mit dem Quadrate der Entfernung von demselben aber verkehrt proportionirt ist, so hat man, wenn die Entfernung des gesuchten Punktes von dem ersten leuchtenden Punkte x heißt,

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(d - x)^2}, \text{ daher } x = d \cdot \frac{a \pm \sqrt{a b}}{a - b}.$$

Discutire dieses Resultat.

191. Zwei Himmelskörper, deren Massen sich wie a : b verhalten, haben die Entfernung d. In welchem Punkte ihrer Verbindungslinie wird ein dritter Körper von beiden gleich stark angezogen?

192. In welcher Entfernung von der Erde würde zwischen dieser und dem Monde ein Körper schweben bleiben, wenn die Masse des Mondes $\frac{1}{81}$ der Erdmasse und die Entfernung des Mondes von der Erde 51800 Meilen beträgt?

---

4. Unbestimmte Gleichungen des zweiten Grades.

Auflösung in ganzen positiven Zahlen. (§. 245.)

Löse in ganzen positiven Zahlen auf:

1. $5xy - 3y = 168.$
2. $xy + x - y = 64.$
3. $3xy - 5y = 16x.$
4. $7xy + 10y = 136x.$
5. $5xy - 2x - 3y = 18.$
6. $x^2 + xy - 2x - 3y = 29.$
7. $12x^2 - xy - 3y + 87 = 0.$
8. $x^2 - 2xy + y = 4.$
9. $3x^2 - 2xy - y + 1 = 0.$
10. $x^2 - 2xy - 3x + 5y + 20 = 0.$
11. $x^2 + 3xy - 2x + 2y = 8.$
12. $2x^2 - 2xy - 4x + 3y = 0.$

Auflösung in rationalen Zahlen. (§§. 246 und 247.)

Löse in rationalen Zahlen auf:

13. $y^2 = 16x^2 + 5x + 7$.
14. $y^2 = 25x^2 - 39x + 12$.
15. $y^2 = 4x^2 - x + 3$.
16. $y^2 = x^2 - 4x - 3$.
17. $y^2 = 4x^2 - 5$.
18. $y^2 = x^2 + 1$.
19. $y^2 = 5x^2 - 7x + 4$.
20. $y^2 = 3x^2 - 2x + 1$.
21. $y^2 = 7x^2 + 9$.
22. $y^2 = 2x^2 + 3x + 4$.
23. $y^2 = 6x^2 - 5x - 6$.
24. $y^2 = 3x^2 + 17x + 10$.
25. $y^2 = 1 - x^2$.
26. $y^2 = 5x^2 + 42x + 16$.
27. $y^2 = 10x^2 + 5x + 6$.
28. $y^2 = 3x^2 + 4x + 2$.

Gib die Werthe von x an, für welche folgende Ausdrücke rational werden:

29. $\sqrt{x^2 - 4}$.
30. $\sqrt{9x^2 - 5x + 7}$.
31. $\sqrt{16x^2 + 9x - 8}$.
32. $\sqrt{2x^2 + x + 4}$.
33. $\sqrt{3x^2 + 2x + 9}$.
34. $\sqrt{8x^2 - 3x + 1}$.
35. $\sqrt{x^2 - 1}$.
36. $\sqrt{6x^2 + 2x - 20}$.
37. $\sqrt{2x^2 - 5x + 6}$.

Löse folgende Gleichungen in rationalen Zahlen auf:

38. $x^2 - y^2 = 25$.
39. $3x^2 - 4xy + y^2 + 1 = 0$.
40. $3x^2 - 4xy + y^2 + 3y = 7$.
41. $4y^2 - 4xy + 6x - 8y = 1$.
42. $2x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$.
43. $5x^2 - 12xy - 4y^2 - 6x + 4y = 3$.
44. $7x^2 - 6xy + y^2 + 8x - 2y + 16 = 0$.
45. $4x^2 + 2xy - y^2 + 11x - 4y + 9 = 0$.

Anwendungen.

46. Zwei ganze positive Zahlen zu finden, deren Summe zu dem Producte addirt 47 gibt.

47. Von welchen zwei ganzen positiven Zahlen ist das Product um 33 größer als ihre Differenz?

48. Zwei ganze positive Zahlen zu finden, deren Quotient und Summe zusammen 35 betragen.

49. Suche zwei ganze positive Zahlen, deren Quotient und Differenz gleich sind.

50. Von welchen zwei ganzen positiven Zahlen geben die Quadrate 35 zur Differenz?

51. Welche zweiziffrige Zahl gibt durch das Product ihrer Ziffern dividirt den Quotienten 5 mit dem Reste 2?

52. Zwei Zahlen von der Beschaffenheit anzugeben, daß die Differenz ihrer Quadrate wieder ein Quadrat sei.

53. Suche die allgemeine Form einer Zahl, welche, wenn man sie entweder um 1 vermehrt oder um 1 vermindert, in beiden Fällen ein Quadrat gibt.

Setzt man $x + 1 = a^2$ und $x - 1 = a^2 - 2 = b^2$, ferner $b = \sqrt{a^2 - 2} = a - p$, so folgt $a = \frac{p^2 + 2}{2p}$ und $x = \frac{p^4 + 4}{4p^2}$.

(Vergleiche auch Aufgabe 54 Seite 229.)

54. Die Summe zweier Quadrate $a^2 + b^2$ in die Summe zweier anderer Quadrate zu verwandeln.

$a^2 + b^2 = x^2 + y^2$. Setzt man $y = \sqrt{a^2 + (b + x)(b - x)} = a + p(b - x)$, so folgt $x = \frac{2ap + bp^2 - b}{1 + p^2}$ und $y = \frac{2bp - ap^2 + a}{1 + p^2}$.

55. Drei Zahlen von solcher Beschaffenheit anzugeben, daß die Summe der Quadrate der beiden ersten dem Quadrate der dritten Zahl gleich sei.

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Setzt man für beliebige Werthe $s^2 + m^2 = (s+n)^2$, so folgt daraus $s = \frac{m^2 - n^2}{2n}$ und $s + n = \frac{m^2 + n^2}{2n}$, daher

$$\left(\frac{m^2 - n^2}{2n}\right)^2 + m^2 = \left(\frac{m^2 + n^2}{2n}\right)^2,$$

oder, wenn man mit $4n^2$ multiplicirt,

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2.$$

Demnach sind

$$x = m^2 - n^2,\ y = 2mn,\ z = m^2 + n^2$$

rationale Werthe von x, y und z, welche der vorgelegten Aufgabe genügen, mögen für m und n was immer für rationale Zahlen gewählt werden.

Nimmt man für m und n ganze Zahlen, so erhält man auch für x, y, z ganze Zahlen.

Diese Aufgabe hat in der Geometrie ihre Anwendung, um rechtwinklige Dreiecke zu erhalten, deren Seiten commensurabel sind (Pythagoräische Dreiecke). Drücken x und y die Katheten aus, so ist z die Hypotenuse, und man hat für

m =	2	3	4	4	5	5	6	6 ...
n =	1	2	1	3	2	4	1	5 ...
x =	3	5	15	7	21	9	35	11 ...
y =	4	12	8	24	20	40	12	60 ...
z =	5	13	17	25	29	41	37	61 ...

56. Vier Zahlen von solcher Beschaffenheit anzugeben, daß die Summe der Quadrate der ersten drei dem Quadrate der vierten Zahl gleich sei.

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2.$$

Setzt man $s^2 + m^2 + n^2 = (s+p)^2$, so erhält man

$s = \frac{m^2 + n^2 - p^2}{2p}$ und $s + p = \frac{m^2 + n^2 + p^2}{2p}$; folglich ist

$$\left(\frac{m^2 + n^2 - p^2}{2p}\right)^2 + m^2 + n^2 = \left(\frac{m^2 + n^2 + p^2}{2p}\right)^2,$$

oder, wenn man mit $4p^2$ multiplicirt,

$$(m^2 + n^2 - p^2)^2 + (2mp)^2 + (2np)^2 = (m^2 + n^2 + p^2)^2.$$

Daher ist $x = m^2 + n^2 - p^2$, $y = 2mp$, $z = 2np$ und $u = m^2 + n^2 + p^2$.

Diese Aufgabe findet in der Stereometrie auf das rechtwinklige Parallelepiped Anwendung.

---

5. Einige höhere und Exponentialgleichungen.

Reine höhere Gleichungen. (§. 248.)

1. $x^5 - a^5 = 0.$

2. $x^4 - a^4 = 17x^4.$

3. $\frac{a^2}{x^3 - b} = x^3 + b.$

4. $\frac{a - x^3}{\sqrt{x^3 - b}} = \sqrt{x^3 - b}.$

5. $\frac{11x^4}{2} - 18x^2 = (3x^2 - 3)^2 - 65.$

6. $\frac{x^3 - 5}{x^3 + 5} + \frac{x^3 + 5}{x^3 - 5} = \frac{122}{11}.$

7. $\frac{3x^2 + 4}{3x^2 - 4} + \frac{3x^2 - 4}{3x^2 + 4} = \frac{290}{143}.$

8. $\begin{cases} x^n + y^n = a, \\ x^n - y^n = b. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 8x^4 - 3y^4 = 40\frac{5}{16}, \\ 5x^4 + 2y^4 = 25\frac{7}{16}. \end{cases}$

Höhere Gleichungen, die sich auf quadratische zurückführen lassen.

(§§. 249 und 250.)

10. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$

11. $6x^4 - 11x^2 = 35.$

12. $x^6 + 27 = 28x^3.$

13. $3x^6 - 7x^3 = 6.$

14. $x^2 + \left(\frac{32}{x}\right)^2 = 260.$

15. $x\sqrt{25 - x^2} = 12.$

16. $x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + 4a^2b^2 = 0.$

17. $(x^2 + ax)^2 + b(x^2 + ax) = c.$

18. $(x-2)^2 + \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{82}{9}.$

19. $\frac{x^3 + 3}{17 - x^3} = \frac{1}{x^3 + 3}.$

20. $\sqrt{x} - 8\sqrt[4]{x} = 9.$

21. $\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt[3]{x^2} = 54.$

22. $\sqrt{x^2 - n^2} = n + \sqrt[3]{x}.$

23. $\sqrt{x^3} + ax^3 = b.$

24. $x^2 - 8x + 5 = 2\sqrt{x^2 - 8x + 40}.$ Setze $x^2 - 8x + 5 = y.$

25. $(2x + \sqrt{2x})^4 - (2x + \sqrt{2x})^2 = 1260.$

---

26. $x^4 + y^4 = a,$
$x + y = b.$ } Setze $x - y = z.$

27. $x^4 + y^4 = a,$
$x - y = b.$

28. $x^3 + y^3 = a,$
$x + y = b.$

29. $x^3 - y^3 = a,$
$x - y = b.$

30. $x^2 + y^2 = 97,$
$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1.$

31. $x + y = 72,$
$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6.$

32. $x^3 + y^3 = 1512,$
$x^2y + xy^2 = 1440.$ } Suche zuerst $x + y$, dann xy.

33. $x^2(x + y) = a,$
$y^2(x + y) = b.$

34. $(x + y)(x^2 + y^2) = a,$
$(x - y)(x^2 - y^2) = b.$

35. $x^2 + y^2 + x - y = a,$
$(x^2 + y^2)(x - y) = b.$ } Setze $x^2 + y^2 = u,$ $x - y = v.$

36. $x^2 + y\sqrt{xy} = 9,$
$y^2 + x\sqrt{xy} = 18.$ } Setze $y = xz^2.$

37. $x + (x + y) + (x + 2y) + (x + 3y) = b,$
$x(x + y)(x + 2y)(x + 3y) = c.$

Man erhält $x = \frac{1}{4}\{b \mp \sqrt{5b^2 \pm 4m}\}$, und $y = \pm\frac{1}{6}\sqrt{5b^2 \pm 4m},$ wenn $\sqrt{b^4 + 144c} = m$ gesetzt wird.

38. $x(x + y)^2(x + 2y) = p,$
$x^2 + (x + 2y)^2 = s.$

39. $x(x+y)(x+2y)(x+3y) = p,$
$(x+2y)^2 - (x+y)^2 = d.$

40. $x + xy = b,$
$x^2 + x^2y^2 = c.$

41. $x + xy + xy^2 = b,$
$x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 = c.$

In der letzten Aufgabe erhält man zunächst $xy = \frac{b^2 - c}{2b}$ und durch Substitution in den beiden Gleichungen und durch weitere Transformationen

$$x = \frac{1}{4b}(b^2 + c \pm m) \text{ und } y = \frac{1}{2(b^2 - c)}(b^2 + c \mp m,)$$

wenn $\sqrt{(3b^2 - c)(3c - b^2)} = m$ gesetzt wird.

Löse folgende reciproke Gleichungen auf:

42. $x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$

43. $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0.$

44. $x^3 + \frac{7x^2}{2} + \frac{7x}{2} + 1 = 0.$

45. $x^3 - \frac{7x^2}{3} + \frac{7x}{3} - 1 = 0.$

46. $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0.$ **47.** $5x^3 - 21x^2 - 21x + 5 = 0.$

48. $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0.$

49. $x^4 - 12x^3 + 29x^2 - 12x + 1 = 0.$

50. $x^4 - \frac{x^3}{3} - 8x^2 - \frac{x}{3} + 1 = 0.$

51. $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0.$

52. $24x^4 - 50x^3 - 173x^2 - 50x + 24 = 0.$

53. $x^4 - \frac{4x^3}{3} + \frac{4x}{3} - 1 = 0.$

54. $x^5 - \frac{13x^4}{6} + x^3 - x^2 + \frac{13x}{6} - 1 = 0.$

55. $36x^5 - 15x^4 - 29x^3 - 29x^2 - 15x + 36 = 0.$

Exponentialgleichungen. (§. 251.)

56. $47^x = 255.$ **57.** $10^x = 2{\cdot}718282.$ **58.** $x^x = x.$

59. $a^{mx+n} = b.$ **60.** $a^{px+q} . b^{rx+s} = c^t.$

61. $5^{3x-4} . 2^{2+x} = 5^x.$ **62.** $3^{2x} . 5^{3x-4} = 7^{x-1} 11^{2-x}.$

63. $2^x . 3^{x-1} . 4^{x-2} = 5.$ **64.** $4096^x . 0{\cdot}5 = 4^{x+\frac{1}{8}}.$

65. $\frac{a^{mx} . b^{nx}}{c^{px} . d^{qx}} = s.$ **66.** $\left(\frac{123}{134}\right)^{\frac{x+1}{x+2}} = \frac{345}{456}.$ **67.** $2^{3x} = 100.$

68. $3^x . 5^y = 405,$
$2^x . 7^y = 112.$

69. $2^x . 5^y = 2000,$
$3^x . 6^z = 2916,$
$4^y . 7^z = 3136.$

70. $a^x . b^y = m,$
$\frac{a^x}{b^y} = n.$

71. $a^{7x-9} . a^{2-8y} = a^7,$
$\frac{b^{3x-5}}{b^{4y-1}} = \frac{1}{b^2}.$

72. $a^x + b^y = m,$
$a^x - b^y = n.$

73. $a^x + b^y = m,$
$a^x b^y = n.$

74. $\sqrt[x]{10} = 2.$ **75.** $\sqrt[10]{10} = \sqrt[x]{2{\cdot}57813}.$

76. $\sqrt[x]{2^{5+3x}} = 5.$ **77.** $\sqrt[x+1]{a} = b \sqrt[x+2]{c}.$

78. $\sqrt[x]{a} = b^x.$ **79.** $\sqrt[x+1]{5} = 2^{x+1}.$

80. $\sqrt[x+2]{2} = 3^{x+3}.$ **81.** $3{\cdot}2^x = 4 \sqrt[x]{9}.$

82. $\sqrt[mx+n]{a} = b^{px+q}.$ **83.** $a^2 b^x = \sqrt[x]{a^{2x+2}}.$

84. $\sqrt[x]{a} = m \sqrt[y]{b},$
$\sqrt[x]{c} = n \sqrt[y]{d}.$

85. $3^x . \sqrt[y]{1521} = 1053,$
$2^y . \sqrt[x]{1331} = 44.$

86. $3^{x^2-4x+5} = 1200.$ **87.** $a^{(x-m)(x-n)} = 1.$

88. $\frac{10(3^x + 100)}{3^x} = 15.3^x + 2.$ **89.** $735^{\frac{2x-1}{2x+1}} = 318^{\frac{3x-2}{3x+2}}.$

90. $13^{xy} = 2197,$
$5^{x+y-4} = 1.$

91. $x^y = 16,$
$\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{y}} = 0{\cdot}5.$

92. $6.7^{2x} + 7^x = 301.$ **93.** $3.4^{2x^2-2x+4} - 5.4^{x^2-x+2} = 28.$

94. $5 \sqrt[2x]{3} + 3 \sqrt[x]{3} = 10.$ **95.** $13 \sqrt[3x]{10} - 5 \sqrt[6x]{10} = 25.$

96. $x^y = y^x.$ Setze $y = ux.$

97. $x^{\log x} = 578.$ **98.** $x^{4-\log x} = 35{\cdot}3156.$

99. $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10.$ Man erhält $x = 100.$

V. Progressionen.

1. Arithmetische Progressionen.

(§§. 253—255.)

Suche das allgemeine und das Summenglied der arithmetischen Reihen:

1. 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
2. 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...
3. —28, —25, —22, —19, —16, —13, ...
4. 100, 97, 94, 91, 88, ...
5. 100, $92\frac{1}{2}$, 85, $77\frac{1}{2}$, 70, ...
6. Wie groß ist die Differenz einer Progression, deren erstes Glied 109, und deren 34stes Glied 10 ist?
7. Mit welcher Zahl fängt eine Progression an, deren Differenz 5, und deren 27stes Glied 139 ist?
8. Eine Progression fängt mit 1 an, und steigt nach der Differenz 5; das wievielte Glied ist 116?
9. Das erste Glied einer arithmetischen Progression ist 20, die Zahl der Glieder 10, das letzte Glied —16; wie groß ist die Summe?
10. Wie viele Anfangsglieder einer Progression muß man addiren, um 2808 zur Summe zu erhalten, wenn das erste Glied 2 und die Differenz 10 ist?
11. Die Summe einer Progression, deren Differenz 3 und deren letztes Glied 97 ist, beträgt 1612; wie groß ist a) das erste Glied, b) die Anzahl der Glieder?
12. Leite die allgemeinen Formeln ab, durch welche aus je dreien der Größen a_1, d, n, a_n und s_n (§. 254) die beiden anderen bestimmt werden.

Löse folgende Aufgaben:

	a_1	d	n	a_n	s_n
13.	125	35	13	a_n	s_n
14.	50	—5	n	15	s_n
15.	1	9	n	a_n	260
16.	250	d	18	1100	s_n
17.	$1\frac{4}{5}$	d	27	a_n	$928\frac{4}{5}$
18.	8	d	n	$-23\frac{1}{2}$	$-77\frac{1}{2}$
19.	a_1	—2	6	0	s_n
20.	a_1	0·27	16	a_n	52·08
21.	a_1	$8\frac{5}{11}$	n	99	630
22.	a_1	d	12	$7\frac{1}{4}$	54

23. Wie viele Zahlen muß man zwischen 16 und 250 einschalten, damit man eine arithmetische Progression mit der Summe 1995 erhalte?
24. Interpolire in der Reihe 1, 5, 9, 13, 17, 21, ... zwischen je zwei Glieder 8 Glieder, so daß wieder eine arithmetische Progression entsteht.
25. Zwischen p und q sollen r Glieder interpolirt werden; wie groß ist das nte dieser Glieder?

26. Wie viele durch p theilbare Zahlen liegen zwischen o und a?

$$(n - 1)\, p \leqq a.$$

27. Wie viele Zahlen, welche durch 6 theilbar sind, liegen zwischen 0 und 100? Wie groß ist ihre Summe?

28. Die Zahl 225 soll in mehrere Theile so getheilt werden, daß jeder folgende um 2 größer als der vorhergehende und der letzte 29 ist. Wie groß ist der erste Theil und wie groß die Anzahl der Theile?

29. Eine Summe Geldes wird unter mehrere Personen so vertheilt, daß die erste 80 fl. und jede folgende 4 fl. weniger bekommt; die letzte erhält 28 fl. Wie viel Personen sind betheilt worden, und wie groß ist die ganze Geldsumme?

30. Ein Diener war bei einem Herrn 6 Jahre im Dienste und erhielt in jedem folgenden Jahre 12 fl. an Lohn mehr als im vorhergehenden, zusammen 900 fl. Wie viel erhielt er das erste, wie viel das letzte Jahr?

31. Einen Brunnen von 12 Meter Tiefe zu graben, zahlt man für das erste Meter 4 fl. 40 kr., für jedes folgende 40 kr. mehr; wie viel zahlt man für das letzte Meter, wie viel für den ganzen Brunnen?

32. Ein Körper legt in der ersten Secunde a Meter, in jeder folgenden d Meter mehr zurück als in der vorhergehenden. a) Wie groß ist der in n Secunden zurückgelegte Raum; b) in welcher Zeit legt der Körper s Meter zurück?

33. Ein frei fallender Körper durchläuft in der ersten Secunde 4·9 Meter, und in jeder folgenden 9·8 Meter mehr; wie groß ist der Fallraum der 5ten Secunde, wie groß der Fallraum in 5 Secunden? (Der Widerstand der Luft bleibt unbeachtet.)

34. Wenn ein nach dem eben angeführten Gesetze von der Spitze eines Thurmes auf dessen Basis herabfallender Körper in der letzten Secunde 53·9 Meter zurückgelegt hat, wie hoch ist der Thurm?

35. Wenn eine senkrecht in die Höhe geschossene Kugel in der ersten Secunde 200 Meter, und in jeder folgenden 9·8 Meter weniger zurücklegt, wie hoch wird dieselbe steigen und in wie viel Zeit wieder auf die Erde zurückfallen?

36. Jemand setzt in die Lotterie auf eine Nummer 20 kr. und so lange er nicht gewinnt, jedes folgende Mal um 20 kr. mehr als das vorhergehende Mal. Wenn nun der Treffer einer Nummer mit dem 14fachen Einsatze bezahlt wird, bei welchem Spiele würde der Gewinnende sein ganzes bis dahin eingesetztes Geld zurückerhalten?

37. Eine unverzinsliche Schuld wird in 6 Jahreszahlungen getilgt. Im ersten Jahre bezahlt man 600 fl., in jedem folgenden aber um eine bestimmte Summe mehr; für das sechste Jahr beträgt die Zahlung 850 fl.; wie groß ist die ganze Schuld?

38. Ein Capital c wird nach n Jahren sammt den einfachen Zinsen zu p % zurückgezahlt; wie viel beträgt die Zahlung?

39. Durch n Jahre wird am Anfange eines jeden Jahres ein Capital c zu p % auf einfache Zinsen angelegt; zu welchem Werthe s sind sämmtliche Anlagen bis zum Schlusse des nten Jahres angewachsen?

$$s = c\left\{n + \frac{n(n+1)p}{200}\right\}.$$

40. Das dritte Glied einer arithmetischen Reihe ist 2, das siebente —4; wie groß ist das zehnte Glied?

41. In einer arithmetischen Progression beträgt die Summe des ersten und fünften Gliedes 52, die Summe des dritten und sechsten Gliedes 88; welches ist die Progression?

42. In einer arithmetischen Progression beträgt die Summe der ersten 5 Glieder 75, die Differenz zwischen dem fünften und zweiten Gliede 18; wie groß ist a) das erste Glied, b) die Differenz?

43. Vier Zahlen bilden eine arithmetische Progression, deren Differenz 4 ist; das Product der letzten zwei Zahlen beträgt 165; welche Zahlen sind es?

44. Zwei arithmetische Progressionen haben gleich viele Glieder, die erste fängt mit 1 an und endet mit 15, die zweite fängt mit 3 an und endet mit 24; wie groß ist die Summe jeder Reihe? (Die Lösung führt auf eine unbestimmte Gleichung.)

45. Die Summe von drei Zahlen, welche eine arithmetische Progression bilden, ist 36; die Summe ihrer Quadrate 482; welche Zahlen sind es?

46. Vier Zahlen bilden eine arithmetische Progression; ihre Summe ist 2, ihr Product 40; welche Zahlen sind es? (Vergl. Aufg. 37, Seite 250.)

47. In einer arithmetischen Progression von 4 Gliedern ist das Product aller Glieder 880, die Differenz der Quadrate der beiden mittleren Glieder 39; welche Progression ist es?

---

2. Geometrische Progressionen.

(§§. 256—258.)

Suche das allgemeine und das Summenglied der geometrischen Reihen:

1. 5, 15, 45, 135, ...

2. $6, 4\frac{1}{2}, 3\frac{3}{8}, 2\frac{17}{32}, \ldots.$

3. $10\cdot5, 2\cdot625, 0\cdot65625, 0\cdot1640625, \ldots.$

4. 3, —12, 48, —192, ...

5. Wie groß ist das erste Glied einer Progression, deren Quotient $1\frac{1}{2}$, deren 7tes Glied $68\frac{1}{32}$ ist?

6. Wie viele Anfangsglieder der geometrischen Progression 1, 3, 9, 27, ... muß man addiren, um 3280 zur Summe zu erhalten?

7. Wie groß ist der Quotient einer Progression, deren erstes Glied 2, deren 12tes Glied 4096 ist?

8. Wie groß ist die Summe der ersten 8 Glieder der geometrischen Progression

$$a, -b, \frac{b^2}{a}, -\frac{b^3}{a^2}, \ldots$$

9. Bestimme die Summe der Reihe

$$\frac{r}{e} + \frac{r}{e^2} + \frac{r}{e^3} + \ldots + \frac{r}{e^{n-1}} + \frac{r}{e^n}.$$

10. Leite die allgemeinen Formeln ab, durch welche aus je dreien der Größen a_1, q, n, a_n und s_n (§. 263) die beiden anderen bestimmt werden.

Sind a_1, n und s_n gegeben, so erhält man für q und a_n; sind n, a_n und s_n gegeben, für a_1 und q Gleichungen des nten Grades.

Löse folgende Aufgaben:

	a_1	q	n	a_n	s_n
11.	7	4	9	a_n	s_n
12.	6	$\frac{3}{4}$	n	$1\frac{2}{5}\frac{1}{1}\frac{7}{2}$	s_n
13.	4	3	n	a_n	118096
14.	4096	q	14	0·5	s_n
15.	31	q	n	$3827\frac{1}{8}\frac{3}{1}$	$5454\frac{7}{8}\frac{}{1}$
16.	a_1	$-\frac{1}{2}$	5	$\frac{3}{4}$	s_n
17.	a_1	2	14	a_n	$2047\frac{7}{8}$
18.	a_1	3	n	117147	265720

19. Zwischen 5 und 405 sollen 3 Glieder so eingeschaltet werden, daß dann alle fünf Glieder eine geometrische Progression bilden.

20. Interpolire zwischen je zwei Glieder der Progression 1, 10, 100, 1000, ... 5 neue Glieder.

21. Zwischen 1 und $\frac{1}{2}$ sind 11 Glieder einer geometrischen Progression zu interpoliren. (Anwendung in der Tonlehre.)

22. Interpolire zwischen x^8 und y^8 noch 7 Glieder so, daß eine geometrische Progression entsteht.

Bestimme die Summe folgender Progressionen:

23. $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$.

24. $a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6$.

25. $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-2} + x^{n-1}$.

26. Suche in der Progression $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2}\frac{1}{7} + \ldots$ a) die Summe der ersten 2, 3, 4, 5, 6 Glieder, b) die Summe der Reihe selbst.

Bestimme die Summe folgender fallender Reihen:

27. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{1}\frac{}{6} + \frac{1}{3}\frac{}{2} + \ldots$

28. $1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{1}\frac{}{6} - \frac{2}{6}\frac{7}{4} + \frac{8}{2}\frac{1}{5}\frac{}{6} - \ldots$

29. $1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} - \ldots$ für $b < a$.

30. $1 + \frac{1}{1 \cdot 05} + \frac{1}{1 \cdot 05^2} + \frac{1}{1 \cdot 05^3} + \ldots$

31. Verwandle mit Hilfe der geometrischen Progressionen einen rein periodischen Decimalbruch, worin b die Ziffern der Periode bildet und n ihre Anzahl ist, in einen gemeinen Bruch. (Vergl. §. 111, 2.)

32. Verwandle ebenso in gemeine Brüche:

a) $0\cdot\dot{6}$; b) $0\cdot\dot{8}\dot{1}$; c) $0\cdot\dot{1}0\dot{5}$; d) $8\cdot\dot{7}$.

33. In einem gemischt periodischen Decimalbruche x seien b die Ziffern der Periode, n die Anzahl derselben, ferner a die der Periode vorangehenden Decimalen und m ihre Anzahl; verwandle den Decimalbruch mit Anwendung der geometrischen Progressionen in einen gemeinen Bruch. (Vergl. §. 111, 3.)

34. Bestimme eben so a) $x = 0\cdot6\dot{4}$; b) $x = 0\cdot12\dot{5}\dot{4}$; c) $x = 9\cdot3\dot{5}1\dot{3}$.

35. Eine Summe von 248 fl. soll unter 5 Personen so vertheilt werden, daß jeder folgende doppelt so viel als der vorhergehende erhalte; wie viel erhält jeder?

36. Jemand setzt sechsmal in die Lotterie; das erste Mal 10 Kreuzer, und jedes folgende Mal doppelt so viel, als für die frühere Ziehung; das 6te Mal gewinnt er, und es wird ihm der letzte Einsatz 4800 mal zurückgezahlt. Wie viel beträgt dieser Gewinn und wie viel hat er im ganzen eingesetzt?

37. Es legt Jemand im Monate Jänner einen Kreuzer zurück, in jedem folgenden Monate 3 mal so viel als im vorhergehenden; wie viel hat er im ganzen Jahre zurückgelegt?

38. Eine Schuld von 13000 Mark soll in 4 Raten, deren jede 3 mal so groß ist als die vorhergehende, zurückgezahlt werden; wie groß ist jede Ratenzahlung?

39. Der Erfinder des Schachspiels erbat sich als Belohnung die Summe Weizenkörner, die herauskomme, wenn für das erste Feld des Schachbrettes 1 Korn, für das zweite 2, für das dritte 4, und so fort, für jedes folgende der 64 Felder doppelt so viel Körner gerechnet werden als für das vorhergehende. Wie viel Tonnen à 1000 Kilogramm würden diese Körner ausmachen, wenn 20000 Körner 1 Kilogramm wiegen?

40. In einem Fasse sind 100 Liter Wein. Man nimmt daraus 1 Liter und gießt dafür 1 Liter Wasser hinein; aus dieser Mischung nimmt man wieder 1 Liter und gießt eben so viel Wasser hinein. Wie oft kann man so verfahren, bis in der Mischung nur noch 50 Liter Wein übrig sind?

41. Ein Lichtstrahl verliert bei dem Durchgang durch eine Glasplatte $\frac{1}{10}$ seiner Intensität; wie groß wird diese noch sein, wenn er durch 10 hinter einander aufgestellte Platten hindurch gegangen ist?

42. Der Recipient einer Luftpumpe enthält 5·2 Cubik-Decimeter, der Stiefel sammt dem Verbindungsrohre 0·6 Cubik-Decimeter; nach wie viel Kolbenzügen wird die Luft im Recipienten nur noch $\frac{1}{10}$ der ursprünglichen Dichtigkeit betragen?

---

43. Die Summe von drei Anfangsgliedern einer geometrischen Reihe ist 156, das erste Glied 16; wie groß ist der Quotient?

44. Acht Zahlen bilden eine geometrische Progression, die Summe der ersten vier ist 15, die Summe der letzten 240; welche Zahlen sind es?

45. In einer geometrischen Progression ist die Summe des dritten und vierten Gliedes b, die Differenz des dritten und fünften d; bestimme den Quotienten und das erste Glied.

46. In einer geometrischen Progression von 10 Gliedern ist die Summe der ungeraden Glieder 36905, die Summe der geraden 110715; wie groß ist der Quotient, wie groß ist das erste Glied?

47. Die Summe dreier Zahlen, welche eine geometrische Progression bilden, ist = 21, die Summe ihrer Quadrate = 189; welche Zahlen sind es? (Vergl. Aufg. 41, S. 250.)

48. Zerlege jedes Glied der geometrischen Progression:

3, 48, 768, 12288, . . .

in 4 Theile, so daß alle diese Theile unter einander wieder eine geometrische Progression bilden.

49. Multiplicire die gleichstelligen Glieder der arithmetischen Progression

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \ldots$$

und der geometrischen Progression

$$1,\quad q,\quad q^2,\quad q^3,\quad \ldots$$

und bestimme das Summenglied s_n der dadurch entstehenden Reihe.

Suche zuerst $qs_n - s_n$, und daraus s_n.

50. Bestimme ebenso die Summe der Reihe

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots + nx^n.$$

---

3. Zinseszins- und Rentenrechnung.

(§§. 259—263.)

1. Zu welchem Werthe wächst ein Capital von 5800 fl. in 15 Jahren bei 5% Zinseszins an?

2. Jemand legt 5042 Mark in eine Sparcasse, welche die Einlagen zu $4\frac{1}{2}$% und zwar halbjährig verzinset, ein; nach 20 Jahren behebt er das Capital sammt Zins und Zinseszins; wie groß ist die Summe?

3. Wie viel werden 7324 fl. 20 kr. zu $4\frac{1}{2}$% Zinseszins nach $23\frac{3}{4}$ Jahren werth sein?

4. Der Bestand eines Waldes wird gegenwärtig auf 42350 Cub.^{m} geschätzt; wie groß wird derselbe bei einem jährlichen Zuwachs von 3% nach 10 Jahren sein?

5. Ein Land hat gegenwärtig 548200 Einwohner; wie groß wird die Bevölkerung bei einer jährlichen Zunahme von $1\frac{1}{2}$% nach 14 Jahren sein?

6. Ein Capital von 9000 fl. ist nach 10 Jahren unverzinslich fällig; wie groß ist sein Baarwerth, wenn Zinseszinsen zu 5% gerechnet werden?

7. Für ein durch 9 Jahre zu $4\frac{1}{2}$% Zinseszins angelegtes Capital erhält man 5234 fl.; wie groß war das ursprüngliche Capital?

8. Ein Waldbestand wird gegenwärtig auf 180000 Cub.^{m} veranschlagt; wie stark war derselbe vor 15 Jahren, wenn man annimmt, daß er sich während dieser Zeit regelmäßig jährlich um 4% vermehrt hat?

9. Eine Stadt zählt gegenwärtig 36230 Einwohner; wie groß war die Bevölkerung vor 30 Jahren bei einer jährlichen Zunahme von 2%?

10. Ein Capital von 7537 fl. 80 kr. wächst in 20 Jahren mittelst Zinseszinsen auf 20000 fl. an; zu wie viel % war es verzinset?

11. 3200 fl. sind vor 80 Jahren angelegt worden und während dieser Zeit sammt Zinseszins auf 34059·83 fl. angewachsen; zu wie viel % war das Capital angelegt?

12. Der Bestand eines Waldes hat sich in 12 Jahren von 27000 Cub.^{m} auf 35000 Cub.^{m} erhöht; wie viel % beträgt der jährliche Zuwachs?

13. In wie viel Jahren wird ein Capital a bei p% Zinseszins m mal so groß, als es ursprünglich war?

Hier muß man $ae^n = ma$ setzen, daher ist $n = \frac{\log m}{\log e}$.

14. In welcher Zeit verdoppelt sich ein Capital zu 5 % Zinseszins?

15. In wie viel Zeit wird ein Capital zu 4 % Zinseszins a) bei ganzjähriger, b) bei halbjähriger Capitalisirung auf das Dreifache anwachsen?

16. In wie viel Jahren erhöht sich die Bevölkerung eines Ortes bei $1\frac{1}{4}$ % jährlicher Zunahme von 5200 Einwohnern auf 9433 Einwohner?

17. Von einer Schuld von 10000 fl. werden nach 3 Jahren 2500 fl., nach 6 Jahren 1000 fl. bezahlt; wie groß ist noch die Schuld nach 10 Jahren, wenn 5 % Zinseszinsen gerechnet werden?

18. Ein Capital a wird zum Zinsfuße e verzinst, die Verwaltungskosten betragen v % und werden am Ende jedes Jahres abgerechnet; zu welcher Summe wächst das Capital in n Jahren an?

$$a_n = a\,e^n \left(1 - \frac{v}{100}\right)^n.$$

---

19. Durch 20 Jahre werden zu Anfang eines jeden Jahres 200 fl. angelegt; zu welchem Werthe werden diese Capitalien bei 4 % Zinseszins zur Zeit der letzten Anlage angewachsen sein?

20. Jemand hat 6 Jahre hinter einander jedes Jahr 285 fl. zu bezahlen; er bleibt sie aber bis zu Anfang des 6 ten Jahres schuldig; wie viel beträgt nun zu dieser Zeit seine Schuld, wenn 6 % Zinseszinsen gerechnet werden?

21. Durch n Jahre wird jährlich ein Capital r zum Zinsfuße e angelegt, die Verwaltungskosten betragen jährlich v % und werden am Ende des Jahres abgerechnet; zu welcher Summe sind diese Capitalsbeträge zur Zeit der letzten Anlage angewachsen?

22. Jemand hat durch 12 Jahre am Anfange eines jeden Jahres den gleichen Geldbetrag zu $4\frac{1}{2}$ % Zinseszins angelegt, und bezieht dafür nach dieser Zeit 1939 fl. 18 kr.; wie groß war die jährliche Einlage?

23. Ein Capital von 12500 Francs ist nach 7 Jahren fällig; es soll durch gleiche, am Anfange eines jeden der 7 Jahre zahlbare Summen getilgt werden. Wie groß sind die Theilzahlungen bei 5 % Zinseszins?

24. Wie hoch müssen die am Ende eines jeden Jahres zu leistenden Abschlagszahlungen sein, damit eine nach 10 Jahren unverzinslich fällige Schuld von 8000 Mark getilgt werde, den Zins zu $4\frac{1}{2}$ % gerechnet?

25. Ein Gutsbesitzer will seine Feldfrüchte in veranschlagtem Werthe von 6800 fl. gegen Hagel versichern; wie hoch wird die Assecuranz-Gesellschaft die jährliche Versicherungsprämie bei 5 % Zinseszins ansetzen, wenn angenommen wird, daß der Hagelschlag die Feldfrüchte jener Gegend durchschnittlich alle 16 Jahre gänzlich vernichtet?

---

26. Ein zu $4\frac{1}{2}$ % Zinseszins ausstehendes Capital von 5000 fl. wird am Ende jedes Jahres um 500 fl. vermehrt; wie hoch wird es in 8 Jahren anwachsen?

27. Von einem Walde, dessen jährlicher Zuwachs $4\frac{1}{4}$ % beträgt, ist der gegenwärtige Bestand 145678 Cub.^{m}; wie groß wird der Bestand nach 18 Jahren sein, wenn am Ende eines jeden Jahres 1175 Cub.^{m} gefällt werden?

28. Jemand will eine Schuld von 10000 Mark, die zu 5 % zu verzinsen ist, in 10 gleichen Jahresraten abtragen; wie groß wird eine Ratenzahlung sein?

29. Dem Vormunde eines Kindes von 5 Jahren wird eine Summe von 6000 fl. mit der Verpflichtung überwiesen, das Kind bis zum 18ten Jahre zu erziehen; welches ist der Betrag des nachschußweise zahlbar angenommenen jährlichen Erziehungsgeldes, wenn 5 % Zinseszinsen berechnet werden?

30. Eine Stadt will bei einer Bank ein Anlehen mit der Verpflichtung aufnehmen, dasselbe durch einen am Ende jedes Jahres zahlbaren Betrag von 28000 fl. binnen 25 Jahren zu tilgen; welche Summe wird die Bank der Stadt bei 5 % Zinseszins darleihen?

31. Wie viel bleibt von einer Schuld von 26000 fl. bei 5 % Zinseszins nach 10 Jahren übrig, wenn für Zinsen und Tilgung eines Theiles der Schuld jährlich 2000 fl. gezahlt werden?

32. Wie groß ist ein auf Zinseszinsen zu $4\frac{1}{2}$ % angelegtes Capital, wenn von demselben bei einer am Ende eines jeden Jahres eintretenden Verminderung um 250 Mark nach 15 Jahren noch 1300 Mark übrig sind?

33. Ein Vater hinterläßt seinen 5 Kindern ein Vermögen von 20000 fl., welches zu 5 % Zinseszins anliegt; davon beziehen die Kinder am Ende eines jeden Jahres 1500 fl. Wie viel erhält dann jedes der Kinder nach 6 Jahren, wenn der Rest des Vermögens zu gleichen Theilen unter sie vertheilt wird?

34. Jemand kauft ein Haus und bezahlt den Kaufschilling dadurch, daß er durch 20 Jahre am Schlusse eines jeden derselben eine Abschlagszahlung von 1200 fl. leistet; wie groß ist der Kaufpreis, wenn jede Abschlagszahlung zugleich 5 % Zinsen für die noch unbezahlte Schuld enthält?

35. Wie viel muß man am Schlusse eines jeden Jahres zu einem Capitale von 4500 fl. hinzufügen, damit es sich bei $5\frac{1}{2}$ % Zinseszins in 6 Jahren verdopple?

36. Ein Wald, dessen Bestand auf 150000 Cub.^{m} Holz mit einem jährlichen Zuwachs von 2 % veranschlagt wird, soll innerhalb 12 Jahren abgestockt werden; wie viel Holz wird man jährlich schlagen, um jedes Jahr gleich viel Holz zu erhalten?

37. Jemand hat ein Capital von 12532 Mark zu $4\frac{1}{2}$ % ausstehen, und gebraucht davon jährlich 1000 Mark; nach wie viel Jahren wird das Capital erschöpft sein?

38. Eine Eisenbahn-Gesellschaft macht eine Anleihe von 4 Millionen Gulden zu 6 % und will dieselbe dadurch amortisiren, daß sie jährlich 400000 fl. zur Zinsenzahlung und theilweisen Tilgung des Anlehens verwendet; nach wie viel Jahren wird die Schuld getilgt sein?

39. Jemand ordnet in seinem Testamente an, daß seinem treuen Diener bis zu dessen Tode jährlich 100 fl. ausgezahlt werden. Die Erben werden mit dem Diener einig, ihm dafür auf einmal einen Betrag von 1200 fl. zu zahlen. Wie viel Jahre müßte der Diener noch leben, wenn er von dem Uebereinkommen weder Schaden noch Vortheil haben sollte, die Zinsen zu 5 % gerechnet?

40. Jemand nimmt bei einer Sparcasse ein Capital von 8000 fl. auf, das er durch gleiche Theilzahlungen, die am Ende eines jeden Jahres fällig sind, in 15 Jahren tilgen will; wie groß ist eine Theilzahlung, wenn die Sparcasse verausgabte Gelder mit 6 %, empfangene dagegen mit $5\frac{1}{2}$ % Zinseszins in Rechnung bringt?

41. Ein Herr will seinem Diener bei einer Versicherungsanstalt ein nach 11 Jahren zahlbares Capital von 1000 fl. versichern; welche einmalige Prämie muß er an die Anstalt zahlen, wenn dieselbe zu 5% verzinst?

42. Welchen Baarwerth hat eine durch 11 Jahre am Ende jedes Jahres mit 420 fl. zu leistende Rente, wenn 4% Zinsen gerechnet werden?

43. Jemand verkauft eine nachschußweise Jahresrente von 620 Mark, die er noch durch 10 Jahre zu genießen hat; wie viel Geld wird er dafür erhalten, wenn 4% Zinseszinsen gerechnet werden?

44. Ein Vater will seinem Sohne, wenn dieser das 24ste Jahr erreicht hat, eine Summe versichern; er zahlt zu diesem Zwecke von der Geburt des Sohnes angefangen bis zu jener Zeit an eine Versicherungsanstalt am Anfange jedes Jahres 400 fl. Welchen Betrag wird die Anstalt bei 5% Zinseszins an den Sohn auszuzahlen haben?

45. Jemand will seinem Sohne bei einer Bank eine Summe von 1000 fl. versichern, welche dieselbe nach dem Beginne des 15ten Jahres auszahlen soll; welchen jährlichen Beitrag muß er am Anfange eines jeden Jahres bis zu jener Zeit zum Zinsfuße 1·055 leisten?

46. Jemand will seiner Frau nach seinem Absterben ein Capital von 4000 fl. versichern; wie viel muß er an eine Lebensversicherungsanstalt am Anfange jedes Jahres zahlen, wenn er der Wahrscheinlichkeit nach noch 15 Jahre zu leben hat, und man die Zinseszinsen zu 5% rechnet?

47. Ein Capital von 20000 fl. soll bei 4% Zinseszins durch eine jährliche Rente getilgt werden, die vom Ende des ersten Jahres beginnt und 30 Jahre dauert; wie groß muß die Rente sein?

48. Jemand erlegt 12000 fl. zu 4%, und will dafür durch 24 Jahre am Ende jedes derselben eine Rente beziehen; wie groß wird dieselbe sein?

49. Bei einer Anstalt werden 1000 fl. gegen Entrichtung einer jährlichen Prämie von 27 fl. versichert; nach wie viel Jahren ist bei $4\frac{3}{4}$% das versicherte Capital durch Prämien gedeckt?

50. Ein Capital von 8000 fl. soll durch die nachschußweise jährliche Rente von 801·12 fl. bei 4% Zins getilgt werden; wie lange muß die Rente gezahlt werden?

51. Wie viele Jahre hat eine nachschußweise Rente zu laufen, die jährlich 600 fl. beträgt und gegenwärtig einen Werth von 10000 fl. hat, die Zinsen zu 6% gerechnet?

52. Jemand versichert bei einer Anstalt 5000 Mark und muß am Anfange jedes Jahres eine Prämie von 180 Mark zahlen; wenn er nun nach 24 Jahren stirbt, wie groß ist der Gewinn oder Verlust der Anstalt bei 4% Zinseszins?

53. Wie groß muß die Jahresrente sein, die 10 Jahre hindurch zu zahlen ist, wenn sie einen gleichen gegenwärtigen Werth haben soll mit einer Jahresrente von 500 fl., die 15 Jahre zu laufen hat, die Zinseszinsen zu $4\frac{1}{2}$% gerechnet?

54. Jemand hat eine Jahresrente von 1800 Mark auf 30 Jahre zu beziehen; er wünscht aber statt derselben eine größere auf 20 Jahre zu haben; wie groß wird diese bei $4\frac{1}{2}$% Zins sein?

55. Eine Jahresrente r, die zum Zinsfuße e durch n Jahre zu zahlen ist, soll in eine andere r' zum Zinsfuße e' verwandelt werden; wie viel Jahre wird die neue Rente zu zahlen sein?

56. Jemand will durch 18 Jahre am Anfange eines jeden Jahres eine bestimmte Summe bezahlen, damit nach Verlauf dieser Zeit er selbst oder ein anderer 10 Jahre hindurch eine am Ende jedes Jahres fällige Jahresrente von 500 Mark genieße; wie groß ist die jährlich zu zahlende Summe, wenn 5% Zinsen gerechnet werden?

57. Welche Einlage muß man durch 20 Jahre am Anfange jedes Jahres an eine Versicherungsanstalt machen, um nach Verlauf dieser Zeit bei $4\frac{1}{2}$% Verzinsung eine Jahresrente von 300 fl. durch 12 Jahre zu genießen?

58. Jemand zahlt durch 30 Jahre zu Anfange eines jeden Jahres 68 Mark in eine Rentenbank, welche zu 4% verzinst; welche nachschußweise Rente wird ihm die Bank durch die 7 folgenden Jahre geben?

59. Jemand hält sich noch auf 20 Jahre für arbeitsfähig; wie viel muß er in dieser Zeit jährlich auf Zinsen à $5\frac{1}{2}$% legen, um nach Ablauf derselben noch 25 Jahre eine Jahresrente von 300 fl. zu genießen?

60. Welche nachschußweise Jahresrente wird man durch 15 Jahre beziehen, wenn man vorher durch 25 Jahre zu Anfang eines jeden Jahres einen Betrag von 125 fl. eingezahlt hat und wenn 5% Zinsen gerechnet werden?

61. Jemand, der sich noch 15 Jahre für arbeitsfähig hält, spart in dieser Zeit jährlich 250 fl. und legt sie zu 5% auf Zinsen an; wie lange kann er dafür nach Ablauf jener Zeit eine Jahresrente von 400 fl. ansprechen?

---

4. Convergenz und Divergenz der Reihen.

(§§. 264 und 266.)

Untersuche folgende Reihen, ob sie convergiren oder divergiren:

1. $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \ldots$

2. $\frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{4} + \frac{3^2}{8} + \frac{4^2}{16} + \ldots$

3. $1 + \frac{2.2}{3} + \frac{3.2^2}{3^2} + \frac{4.2^3}{3^3} + \ldots$

4. $1 + \frac{2}{2.3} + \frac{4}{3.9} + \frac{8}{4.27} + \ldots$

Untersuche folgende Reihen, ob und unter welchen Bedingungen sie convergent sind:

5. $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$

6. $\frac{1}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{3x^2}{4} + \frac{4x^3}{5} + \ldots$

7. $1 + \frac{1+d}{d} + \frac{1+2d}{d^2} + \frac{1+3d}{d^3} + \ldots$

8. $1 + ax + \frac{a^2x^2}{1.2} + \frac{a^3x^3}{1.2.3} + \ldots$

9. $\frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots$

Untersuche noch die Convergenz der unendlichen Reihen, deren allgemeines Glied ist:

10. $a_n = \frac{n.2^{n-1}}{3^{n-1}}$.

11. $a_n = \frac{n^2 + 2n + 2}{1.2.3 \ldots (n-1)}$.

12. $a_n = \frac{nx^n}{10n^2 - 1}$.

13. $a_n = \frac{4.6 \ldots (2n+2)}{3.5 \ldots (2n+1)} . x^{n-1}$.

VI. Combinationslehre.

1. Permutationen, Combinationen und Variationen.

Permutationen. (§§. 268—270.)

1. Wie viele und welche Permutationen erhält man aus den Buchstaben des Wortes ROMA?
2. Stelle für die Elemente a b c d e lexikographisch die Permutationen dar, die 1) mit a, 2) mit c anfangen.
3. Bilde die Permutationen aus den Elementen a a a b b c.
4. Wie groß ist die Zahl der Permutationen aus $a^5 b^3$?
5. Wie viele vierziffrige Zahlen gibt es, deren jede die Ziffern 3, 0, 7, 4 enthält?
6. Wie viele fünfziffrige Zahlen enthalten die Ziffer 6 2mal, die Ziffer 3 2mal und die Ziffer 5 1mal?
7. Wie viele neunziffrige Zahlen lassen sich aus den neun arabischen Ziffern bilden, wenn die Ziffern jeder Zahl ungleich sein sollen?
8. Wie oft können 5 Tischgenossen ihre Plätze am Tische wechseln, bis sie in allen Ordnungen gesessen sind?
9. Wie viele verschiedene Stellungen geben 3 weiße, eine blaue und 2 rothe Kugeln?

Combinationen. (§§. 271—274.)

10. Bilde für die Elemente $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5$ die Amben und Ternen 1) ohne Wiederholung, 2) mit Wiederholung.
11. Wie viele Amben und Ternen enthalten 6 Elemente 1) ohne Wiederholung, 2) mit Wiederholung?
12. Wie viele Elemente muß man haben, die mit Wiederholung combinirt für irgend eine Classe eben so viel Combinationen geben, als 10 Elemente ohne Wiederholung für dieselbe Classe combinirt?
13. Wie viele Unionen, Amben, Ternen, Quaternen und Quinternen geben a) die 90 Nummern der gewöhnlichen Zahlenlotterie, b) die in einer Ziehung herausgehobenen 5 Nummern?
14. Welche und wie viele Würfe durchaus ungleicher Felder können mit 2 Würfeln geworfen werden?
15. Wie viele Dreiecke können durch 10 sich durchschneidende gerade Linien gebildet werden?
16. Wie viele und welche Verbindungen zu drei sind aus den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ eines Dreiecks möglich?
17. Welche Arten des Wechsels von je drei der 6 Farben: roth, orange, gelb, grün, blau, violett sind möglich?
18. Wie viele einfache und zusammengesetzte Factoren hat die Zahl 2310?
19. Wenn man aus den 32 Blättern der sogenannten deutschen Karten zwei Blätter zugleich zieht, wie oft können die gezogenen Karten verschieden sein?
20. Auf wie vielfache Art lassen sich 32 Karten unter 4 Spieler so vertheilen, daß jeder 8 Karten erhält?

Variationen. (§. 275—278.)

21. Bilde die Variationen der 2ten und 3ten Classe ohne Wiederholung für die Elemente a b c d e.
22. Stelle die ersten 20 Variationen der 3ten und 4ten Classe mit Wiederholung für die Elemente a b c d dar.
23. Wie viele Variationen der 2ten, 3ten, 4ten Classe a) ohne Wiederholung, b) mit Wiederholung geben 10 Elemente?
24. Wie viele dreiziffrige Zahlen gibt es, deren Ziffern von einander verschieden sind?
25. Wie viele vierziffrige Zahlen sind mittelst der Ziffern 3, 4 und 5 darstellbar?
26. Wie viele verschiedene Würfe sind mit 2 Würfeln möglich?
27. Welche verschiedene Würfe geben bei 3 Würfeln 10 zur Summe?
28. Wie viele Würfe sind mit drei Würfeln möglich, von denen der eine weiß, der zweite gelb, der dritte roth ist, wenn man annimmt, daß Würfe von gleichviel Augen aber in verschiedenen Farben als verschieden zu betrachten sind?
29. Ein optischer Telegraph hat 6 Arme, von denen jeder 4 verschiedene Stellungen einnehmen kann; wie viele verschiedene Zeichen kann der Telegraph geben?
30. Es sind 4 Fächer mit 7 verschiedenfarbigen Kugeln zu besetzen, so daß in jedes Fach eine Kugel zu stehen kommt; auf wie vielfache Art kann dies geschehen?

---

2. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Absolute und relative Wahrscheinlichkeit. (§§. 279 und 280.)

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Aufwerfen eines Münzstückes „Bild" zu werfen?
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Münzstücke eher „Bild" als „Schrift" zu werfen?
3. In einer Urne sind 5 Kugeln; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, a) eine ungerade Zahl, b) eine gerade Zahl von Kugeln herauszuziehen?
4. In einer Urne befinden sich 10 weiße und 6 rothe Kugeln; welches ist die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen?
5. In einer Urne sind 4 weiße, 3 rothe und 2 blaue Kugeln; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, unter 4 Kugeln eine weiße, zwei rothe und eine blaue zu greifen?
6. In einer Urne befinden sich 8 weiße, 6 rothe, 10 blaue und 5 schwarze Kugeln; welche Wahrscheinlichkeit ist vorhanden, beim Herausziehen zweier Kugeln eher eine weiße und eine blaue, als eine rothe und eine schwarze Kugel zu ziehen?
7. Wie groß ist bei einem Spiel von 32 Karten die Wahrscheinlichkeit, a) eine rothe Farbe, b) eine Coeur, c) einen König, d) eine Figur, e) ein bestimmtes Blatt, z. B. Coeur-Dame zu ziehen?
8. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Spiel von 32 Karten a) 2 rothe Karten, b) 5 Piques zu ziehen?
9. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Spiel von 52 Karten a) eher eine rothe Figur als eine blaßrothe Karte zu ziehen?

10. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln zwei gleiche Felder zu werfen?

11. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln mehr als 8 Augen zu werfen?

12. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln auf einen Wurf a) gerade 3, 4 und 6, b) die Summe 6 zu werfen?

13. Wie groß ist die relative Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln a) eher 7 als 10 b) eher 7 als 5 zu werfen?

14. Welche Wahrscheinlichkeit, einen Gewinn zu machen, ist vorhanden, wenn man von 1000 Losen 12 besitzt?

15. Die gewöhnliche Zahlenlotterie enthält 90 Nummern, von denen jedes Mal 5 herausgezogen werden; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,
a) eine bestimmte genannte Nummer (Nominate) zu treffen,
b) überhaupt eine bestimmte Nummer (Extrate) zu treffen,
c) mit zwei genannten Nummern einen Ambo zu machen,
d) mit drei genannten Nummern einen Terno zu machen?

Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit. (§§. 281—285.)

16. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man mit 2 Würfeln auf den ersten Wurf einen Pasch, auf den zweiten die Augenzahl 8 werfe?

17. Wie groß ist bei 3 Würfeln die Wahrscheinlichkeit, zuerst die Summe 5, dann die Summe 4 zu werfen?

18. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel a) in zwei Würfen das erste Mal 1, das zweite Mal 2 zu werfen, c) in sechs Würfen das erste Mal 1, das zweite Mal 2, ... das sechste Mal 6 zu werfen?

19. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln 3mal nach einander einen Pasch zu werfen?

20. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man mit einem Würfel 3mal nach einander nicht 1 wirft?

21. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Kartenspiel von 52 Blättern 3mal hinter einander ein Aß zu ziehen?

22. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von zwei Spielern, deren jeder ein Blatt von 32 Karten in Händen hat und die beide zugleich jeder eine Karte ziehen, A ein blaßrothes Blatt und B eine schwarze Figur ziehe?

23. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Spiele von 32 Karten in den ersten zwei Zügen König und Dame derselben Farbe, jedoch in beliebiger Ordnung zu ziehen?

24. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus 52 Karten das erste Mal Coeur, das zweite Mal Carreau, das dritte Mal Pique, das vierte Mal Treffle zu ziehen?

25. In einer Urne sind 3 weiße, 4 rothe, 5 gelbe und 6 blaue Kugeln; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine weiße, rothe oder gelbe Kugel zu ziehen?

26. In einer Urne A befinden sich 4 weiße und 6 rothe Kugeln, in einer zweiten B 6 weiße und 8 rothe Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man, wenn man aus beiden Urnen zugleich zieht, aus jeder eine weiße Kugel ziehe?

27. In der Urne A befinden sich 4 Treffer und 20 Nieten, in der Urne B 6 Treffer und 24 Nieten, in der Urne C 8 Treffer und 28 Nieten; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, auf einen zufälligen Griff aus einer dieser Urnen einen Treffer zu ziehen?
28. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim zweimaligen Herausziehen je einer Nummer aus einer Urne von 90 Nummern das erste Mal die Nummer 1, das zweite Mal die Nummer 90 zu ziehen, a) wenn die zuerst gezogene Nummer wieder in die Urne zurückgelegt wird, b) wenn das nicht geschieht?
29. In einer Urne sind 12 weiße und 9 schwarze Kugeln. Man zieht 8mal je eine Kugel heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in den ersten 5 Ziehungen 5 weiße, und in den späteren 3 Ziehungen 3 schwarze Kugeln gezogen werden, a) wenn man nach jeder Ziehung die Kugel in die Urne zurückwirft, b) wenn das nicht geschieht?
30. Auf einer Eisenbahn fahren von A nach B täglich 4 Züge mit 8 Wagen, deren jeder 3 Coupé's hat. Jemand macht die Fahrt eines Tages und weiß, daß sein Freund eben dieselbe 2mal wöchentlich macht. Welche Wahrscheinlichkeit hat er, mit ihm in demselben Coupé zusammen zu treffen?

Mathematische Erwartung. (§§. 286 und 287.)

31. Jemand kann, wenn er mit zwei Würfeln die Summe 5 wirft, 2 fl. gewinnen; wie groß ist seine mathematische Erwartung?
32. Wie hoch kann der Einsatz sein, wenn beim Spiel mit zwei Würfeln jeder Pasch 1 fl. gewinnt, andere Würfe aber nicht zählen?
33. Zwei Spieler A und B kommen mit einander überein, daß derjenige den ganzen Einsatz erhalten solle, welcher zuerst 3 Partien gewinnt; nachdem aber A 1, B 2 Partien gewonnen hat, trennen sie sich; in welchem Verhältnisse ist nun der Einsatz zu theilen?
34. Jemand erbietet sich, demjenigen, der aus einer Urne mit 5 weißen, 6 rothen und 7 blauen Kugeln mit einem Griffe 2 weiße, 3 rothe und 4 blaue heraushebt, 1 fl. zu geben, wenn er selbst jedesmal 8 Kreuzer erhält, sobald 9 andere Kugeln herausgezogen werden; hat er zu seinem Vortheile oder zu seinem Nachtheile gewettet?
35. Jemand besitzt ein Loos einer aus 10000 Loosen bestehenden Lotterie, worin ein Treffer von 20000 fl., einer von 10000 fl., 10 Treffer von 1000 fl., 40 von 100 fl., und 1000 von 5 fl. enthalten sind; wie groß ist seine mathematische Erwartung?
36. Nach unseren Lottogesetzen wird a) für den Ambo der 240fache Einsatz, b) für den Terno der 4800fache Einsatz als Gewinn bezahlt; wie viel % Gewinn hat das Lotto, wenn man von den Verwaltungskosten absieht?

Wahrscheinlichkeit in Bezug auf die menschliche Lebensdauer.

(§§. 288—292.)

37. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine 20jährige Person a) das 30ste, b) das 56ste, c) das 70ste Jahr erreiche?
38. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß a) eine 18jährige, b) eine 35jährige, c) eine 50jährige Person 60 Jahre alt werde?

39. Welches ist die wahrscheinliche Lebensdauer a) eines neugebornen Kindes, b) einer 12-, c) 18-, d) 36-, e) 55jährigen Person?

40. Wie groß ist der Unterschied zwischen der wahrscheinlichen und der mittleren Lebensdauer einer Person, die a) 15, b) 36, c) 50, d) 65 Jahre alt ist?

41. Ein Mann ist 50, seine Frau 40 Jahre alt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß nach 20 Jahren a) noch der Mann lebe, b) noch die Frau lebe, c) noch beide leben; daß d) schon der Mann todt sei, e) schon die Frau todt sei, f) schon beide todt seien; daß g) der Mann die Frau überlebe, h) die Frau den Mann überlebe, i) entweder der Mann oder die Frau noch lebe, k) entweder der Mann oder die Frau schon todt sei?

Lebensvers. Renten

42. A ist 42 alt und will auf den Todesfall seinen Erben ein Capital von 4800 fl. versichern; welche Einlage muß er zu diesem Zwecke bei 4% Zinseszins bei einer Versicherungsanstalt machen?

43. Welche Prämie muß eine 32jährige Person zu Anfange jedes Jahres zahlen, um bei ihrem Ableben den Erben eine Summe von 2000 Mark zu sichern?

I **44.** Ein Vater zahlt an eine Versicherungsanstalt zu Anfange jedes Jahres eine Prämie von 500 Mark, damit dieselbe seiner neugebornen Tochter, falls sie das 18te Jahr erreichen sollte, ein gewisses Capital auszahle; wie groß wird dieses bei 5% Verzinsung ausfallen?

45. Wie groß ist bei 4% Zinseszins der gegenwärtige Werth einer Leibrente, welche eine 36jährige Person am Ende eines jeden Jahres im Betrage von 280 fl. zu beziehen hat?

46. Eine 45jährige Person kauft sich mit einer Einlage von 6000 fl. eine Leibrente, welche von dem Ende des laufenden Jahres angefangen bis an das Lebensende dauern soll; wie groß ist die Leibrente bei $4\frac{1}{2}$% Zinseszins?

47. Welches ist bei 5% Zins der bare Werth einer Leibrente von 1500 Mark für zwei Personen von 50 und 62 Jahren, welche so lange gezahlt wird, als noch eine der beiden Personen lebt?

48. A ist 60, B 48 Jahre alt; A will für B eine Leibrente von 600 fl. kaufen, welche mit dem Ende des Jahres beginnt, in welchem A stirbt. Welches Capital muß A an eine Rentenbank, die $4\frac{1}{2}$% Zinsen rechnet, einzahlen?

49. A ist 50, B 35 Jahre alt; A macht bei einer Versicherungsanstalt, welche 5% Zinsen rechnet, am Anfange eines jeden Jahres die gleiche Einlage, damit die Anstalt nach seinem Tode dem B am Ende eines jeden Jahres eine Rente von 500 fl. auszahle. Wie viel beträgt die jährliche Einlage?

50. A ist 65 Jahre alt und leistet in eine Rentencasse einen jährlichen Beitrag von 300 fl., um nach seinem Tode seinem jetzt 12jährigen Sohne bis zum vollendeten 30sten Jahre eine nachschußweise Jahresrente zu sichern. Wie viel beträgt diese Rente bei 4% Zinseszins?

51. Ein 40jähriger Mann tritt zu Gunsten seiner 35jährigen Frau einer Witwencasse, welche 4% Zinsen rechnet, bei; er bedingt eine jährliche Pension von 300 fl. und zahlt 800 fl. als Antrittsgeld. Welchen Jahresbeitrag hat er außerdem zu leisten?

3. Potenzen von Binomen.

(§§. 295 und 290.)

1. $(x + a)^4$. **2.** $(x - y)^{10}$. **3.** $(3a + 4b)^5$.
4. $(5a - 3b)^6$. **5.** $(x^2 + 2y)^4$. **6.** $(3m^2 - 2n^3)^5$.
7. Wie heißt a) das 6. Glied der Potenz $(5x^2 + 6a^2)^{10}$, b) der Coefficient von a^{12} in der Entwicklung von $(3a^2 - 2b^2)^m - (2a^2 - 3b^2)^{2m}$?
8. $\left(\frac{a}{2} + \frac{b^2}{3}\right)^5$. **9.** $\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right)^4$. **10.** $\left(\frac{2a}{3b} + \frac{3b}{4a}\right)^5$.
11. $\left(\frac{4m}{3n} - \frac{9n}{4m}\right)^6$. **12.** $\left(\frac{ax^2}{2by^2} + \frac{4b^2y}{a^2x}\right)^5$. **13.** $\left(\frac{3ab^2}{4c^2y^2} - \frac{2c^3y}{3a^2b}\right)^4$.
14. Gib an a) das 8te Glied der Reihe $\left(\frac{5ax^2}{6by^2} + \frac{3bx}{5ay}\right)$, b) den Coefficienten von x^9 in $\left(\frac{3x^2}{5a} + \frac{5a^2}{3x}\right)^{12}$.
15. Entwickle $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ in eine Reihe und gib den Werth derselben für $x = \infty$ an.

Man erhält die Reihe:

$$1 + \frac{1}{1} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{1.2} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{2}{x}\right)\cdot\frac{1}{1.2.3} + \ldots$$

und für $x = \infty$

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots,$$

welche Reihe die Basis für das System der natürlichen Logarithmen gibt (§. 208).

16. $(4 + \sqrt{3})^8$. **17.** $(6 - 5\sqrt{2})^6$. **18.** $(a\sqrt{b} - b\sqrt{a})^5$.
19. $(1 + \sqrt{-1})^3$. **20.** $(3 - i)^4$. **21.** $(1 + 2i)^5$.
22. $(x + i)^4$. **23.** $(\sqrt{-2} - 2)^6$. **24.** $(2\sqrt{a} - bi)^5$.
25. $(1 + \sqrt{-5})^4 + (1 - \sqrt{-5})^4$. **26.** $\left(\frac{3 + \sqrt{-2}}{2}\right)^5 + \left(\frac{3 - \sqrt{-2}}{2}\right)^5$.
27. $(a + b)^{-3}$. **28.** $(2x - 3y)^{-4}$. **29.** $(ax^2 - by^2)^{-2}$.
30. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^{-2}$. **31.** $\left(\frac{3a}{4} + \frac{5b}{6}\right)^{-3}$. **32.** $\left(\frac{2m}{5n} - \frac{10n}{3m}\right)^{-4}$.
33. $(a^2 + x)^{\frac{1}{2}}$. **34.** $(a^2 - x)^{\frac{1}{2}}$. **35.** $(x^6 - y^3)^{\frac{1}{3}}$.
36. $\sqrt[3]{a^3 + x}$. **37.** $\sqrt[3]{a^3 - x}$. **38.** $\sqrt[5]{1 - x^5}$.
39. $\sqrt{50} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{49}\cdot\sqrt{1 + \frac{1}{49}} = 7\cdot\left(1 + \frac{1}{49}\right)^{\frac{1}{2}} = \ldots$
40. $\sqrt{63} = \sqrt{64 - 1} = 8\cdot\left(1 - \frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{2}} = \ldots$
41. $\sqrt[3]{7}$. **42.** $\sqrt[3]{218}$. **43.** $\sqrt[3]{508}$.
44. $\sqrt[4]{85}$. **45.** $\sqrt[6]{66}$. **46.** $\sqrt[5]{3120}$.
47. $\sqrt[3]{a + bi} + \sqrt[3]{a - bi}$. **48.** $\sqrt[3]{a + bi} - \sqrt[3]{a - bi}$.
49. Welchen Werth hat der Bruch $\frac{\sqrt[3]{a + (x - b)} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{a - (x - b)} - \sqrt{a}}$ für $x = b$?
50. $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x}}$. **51.** $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}}$. **52.** $\frac{1}{\sqrt[3]{a^3 + x}}$.
53. $(x + a)^{-\frac{m}{n}}$. **54.** $(x^n - a^n)^{-\frac{m}{n}}$.

4. Arithmetische Reihen höherer Ordnung.

Höhere arithmetische Reihen. (§§. 300—304.)

Entwickle die Differenzreihen für folgende Hauptreihen:

1. 1, 3, 8, 16, 27, 41, ...
2. 1, 19, 55, 115, 205, 331, ...
3. 7, 1, —3, 1, 19, 57, ...
4. 9, 37, 69, 117, 217, 429, 837, ...
5. Von welcher Ordnung ist die arithmetische Reihe 1, 6, 15, 28, 45, 66, ...; wie heißt ihr allgemeines, wie ihr 12tes Glied?

Bestimme von folgenden Reihen die Ordnung, das allgemeine und Summenglied:

6. 1, 4, 11, 22, 37, 56, ...
7. 12, 42, 222, 792, 1992, 4062, ...
8. 2, 2, 3, 8, 20, 42, ...
9. 1, —7, —13, —12, 1; 31, ...
10. Wie heißt a) das 8te, b) das 11te, c) das 15te Glied der Reihe
    1, 15, 53, 127, 249, 431, 695, ...?
11. Wie groß ist die Summe von a) 7, b) 9, c) 14 Anfangsgliedern der Reihe
    1, 6, 21, 52, 105, 186, ...?
12. Wie groß ist die Summe der ersten 10 Cubikzahlen?
13. Wie groß ist die Summe des 6ten, 9ten und 12ten Gliedes der Reihe 3, 57, 255, 693, 1467, ...?
14. Das wievielte Glied der Reihe 1, 6, 14, 25, 39, ... ist 344?
15. Das allgemeine Glied einer Reihe ist $1 + 2n + n^2$; wie heißt a) die Reihe, b) ihr Summenglied?
16. Wie heißt die Reihe, deren allgemeines Glied $5 - 3n - 4n^2 + n^3$ ist?
17. Suche das Summenglied der Reihe, deren allgemeines Glied an^4 ist.
18. Wie heißt die Reihe, deren Summenglied $3n - 4n^2 + 2n^3$ ist?
19. Multiplicire die gleichstelligen Glieder der Reihen 1, 2, 3, 4, 5, ... und 1, 8, 27, 64, 125; und bestimme das Summenglied der neuen Reihe.
20. Untersuche, ob und unter welchen Bedingungen die Reihe
    $\frac{1}{1} + \frac{30}{15}x + \frac{79}{53}x^2 + \frac{148}{127}x^3 + \frac{237}{249}x^4 + \frac{346}{431}x^5 + \ldots$,
    in welcher die Zähler und die Nenner arithmetische Reihen bilden, convergent ist (§. 266).

Interpoliren der Reihen. (§. 306).

21. Schalte zwischen je 2 Glieder der Reihe 1, 22, 79, 172, .. 2 neue Glieder ein, welche mit den früheren eine Reihe derselben Ordnung bilden.
22. Interpolire ebenso zwischen je 2 Glieder der Reihe dritter Ordnung 1, 15, 74, 232, ... 2 neue Glieder.
23. Interpolire zwischen je zwei Glieder der Reihe 1, 8, 71, 241, 573, ..2 neue Glieder.
24. Interpolire zwischen je 2 Glieder der Reihe 1, 112, 637, 1900, 4225, ... 3 neue Glieder.
25. Interpolire 4 neue Glieder zwischen je 2 Glieder der Reihe 1, 4, 16, 37, 67, ..

26. Das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe der 2ten Ordnung hat die Form $a_n = a + bn + cn^2$; gegeben ist $a_1 = 5$, $a_3 = 25$ und $a_5 = 69$; bestimme durch Substitution und Auflösung der erhaltenen Gleichungen die Coefficienten a, b und c, und gib dann die Reihe selbst an.

27. Bestimme eben so eine Reihe der dritten Ordnung, deren allgemeines Glied $a_n = a + bn + cn^2 + dn^3$ ist, aus folgenden Angaben:

$$a_2 = 15,\ a_5 = 156,\ a_6 = 259 \text{ und } a_8 = 585.$$

28. Von einer arithmetischen Reihe der zweiten Ordnung sind gegeben die Glieder $a_2 = 15$, $a_4 = 67$, $a_8 = 291$; schalte die Zwischenglieder ein.

29. Von einer Reihe dritter Ordnung ist gegeben $a_1 = 3$, $a_4 = 57$, $a_6 = 203$, $a_{10} = 975$; wie heißen die übrigen der 10 Anfangsglieder?

30. Bestimme das Summenglied $s_n = An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4$ einer Reihe der dritten Ordnung, wenn gegeben ist: $s_1 = 1$, $s_3 = 159$, $s_5 = 1245$ und $s_6 = 2586$; wie heißt die Reihe?

Figurirte Zahlen. (§§. 307—310.)

31. Wie groß ist das 8te, 10te, 15te Glied in der Reihe der Dreieckszahlen?

32. Wie heißt das 12te Glied in der Reihe der a) Dreieckszahlen, b) Viereckszahlen, c) Fünfeckszahlen?

33. Bestimme die 6te, 9te, 12te dreiseitige Pyramidalzahl.

34. Wie heißt das 10te Glied in der Reihe der a) dreiseitigen, b) vierseitigen, c) fünfseitigen Pyramidalzahlen?

35. Wie viele Kugeln befinden sich in einer dreiseitigen Pyramide, deren unterste Schichte eine Seite von 9 Kugeln hat?

36. Ein unvollständiger dreiseitiger Kugelhaufen hat 5 volle Schichten und in jeder Seite der obersten Schichte 8 Kugeln; wie viele Kugeln liegen a) in der untersten Schichte, b) in dem ganzen Haufen?

37. Wie viele Kugeln liegen in einer vierseitigen Pyramide, in welcher eine Seite der untersten Schichte 10 Kugeln hat?

38. Wie viele Kugeln befinden sich in einem vollständigen Haufen von 12 Schichten, wenn die Schichten a) gleichseitige Dreiecke, b) Quadrate sind?

39. Ein unvollständiger vierseitiger Kugelhaufen hat in der obersten Schichte 16 Kugeln und in einer Seite der untersten Schichte 10 Kugeln; wie viele Kugeln sind in dem Haufen?

40. Ein Kugelhaufen hat die Form eines Daches; wie viele Kugeln liegen in demselben, wenn die unterste Schichte 15 Kugeln nach der Länge und 10 Kugeln nach der Breite hat?

41. Wie viele Kugeln befinden sich in einem dachförmigen Haufen, dessen oberste Schichte 6 Kugeln, die in einer Reihe liegen, und dessen unterste Schichte nach der Längenseite 11 Kugeln enthält?

Lyon 3

Lyon 5 (B)

Nancy 6

Nancy 6

Paris 1

Le Mans 2 (4) (B)

Nancy 5

Paris 3

Lyon 4

Inhalts-Verzeichniß.

Seite

Einleitung 1

Erster Abschnitt.

Addition und Subtraction.

I. Addition mit absoluten ganzen Zahlen 4
II. Subtraction mit absoluten ganzen Zahlen 5
III. Erweiterung des Zahlengebietes durch die Subtraction 10
1. Negative Zahlen 10
2. Addition und Subtraction mit algebraischen ganzen Zahlen 11

Zweiter Abschnitt.

Multiplication und Division.

I. Multiplication mit absoluten ganzen Zahlen 14
II. Division mit absoluten ganzen Zahlen 18
III. Multiplication und Division mit algebraischen ganzen Zahlen 24
IV. Dekadische ganze Zahlen 26
V. Theilbarkeit der Zahlen 31
VI. Erweiterung des Zahlengebietes durch die Division 41
1. Gemeine Brüche 42
2. Decimalbrüche 48
3. Kettenbrüche 58
VII. Verhältnisse und Proportionen 64
1. Verhältnisse 64
2. Proportionen 66
3. Anwendung der Proportionen 69

Dritter Abschnitt.

Potenziren, Radiciren und Logarithmiren.

I. Potenzen mit positiven ganzen Exponenten 75
II. Wurzeln mit positiven ganzen Exponenten 78
III. Potenzen und Wurzeln mit negativen und gebrochenen Exponenten 83
IV. Erweiterung des Zahlengebietes durch das Radiciren 85
1. Irrationale Zahlen 85
2. Imaginäre und complexe Zahlen 89
V. Quadriren und Cubiren, Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzel 95
VI. Logarithmen 106

Vierter Abschnitt.

Gleichungen 116

I. Bestimmte Gleichungen des ersten Grades 119
II. Unbestimmte Gleichungen des ersten Grades 127
III. Bestimmte Gleichungen des zweiten Grades 133
IV. Unbestimmte Gleichungen des zweiten Grades 139
V. Einige höhere und Exponentialgleichungen 142

Fünfter Abschnitt.

Progressionen.

Seite
I. Arithmetische Progressioneu 147
II. Geometrische Progressionen 149
III. Zinseszins- und Rentenrechnung 151
IV. Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen 156

Sechster Abschnitt.

Combinationslehre.

I. Permutationen, Combinationen und Variationen 159
II. Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung 165
III. Binomischer Lehrsatz 174
IV. Arithmetische Reihen höherer Ordnung 182

Anhang.

Uebungsaufgaben.

I. Addition und Subtraction.
1. Addition mit absoluten ganzen Zahlen 189
2. Subtraction mit absoluten ganzen Zahlen 189
3. Addition und Subtraction mit algebraischen ganzen Zahlen 190
II. Multiplication und Division.
1. Multiplication mit absoluten ganzen Zahlen 191
2. Division mit absoluten ganzen Zahlen 193
3. Multiplication und Division mit algebraischen ganzen Zahlen 195
4. Dekadische ganze Zahlen 197
5. Theilbarkeit ganzer Zahlen 198
6. Gebrochene Zahlen 200
A. Gemeine Brüche 200
B. Decimalbrüche 205
C. Kettenbrüche 207
7. Verhältnisse und Proportionen mit Anwendungen. 208
III. Potenziren, Radiciren und Logarithmiren.
1. Potenzen mit positiven ganzen Exponenten. 214
2. Wurzeln mit positiven ganzen Exponenten 215
3. Potenzen und Wurzeln mit negativen und gebrochenen Exponenten 218
4. Irrationale und imaginäre Zahlen 220
5. Quadriren und Cubiren, Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzeln . . . 224
6. Logarithmen 226
IV. Gleichungen.
1. Bestimmte Gleichungen des ersten Grades 228
2. Unbestimmte Gleichungen des ersten Grades 238
3. Bestimmte Gleichungen des zweiten Grades 240
4. Unbestimmte Gleichungen des zweiten Grades 247
5. Einige höhere und Exponentialgleichungen 249
V. Progressionen.
1. Arithmetische Progressionen 252
2. Geometrische Progressionen 254
3. Zinseszins- und Rentenrechnung. 257
4. Convergenz und Divergenz der Reihen 261
VI. Combinationslehre.
1. Permutationen, Combinationen und Variationen 262
2. Wahrscheinlichkeitsrechnung 263
3. Potenzen von Binomen 267
4. Arithmetische Reihen höherer Ordnung 268

Narodna in univerzitetna knjižnica Ljubljana

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d$

$a_4 = a_3 + d$

$= a_1 + 3d$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_{n+1} = a_n \cdot d$

$= a_1 + (n-1)d + d$

$= a_1 + nd - d + d$

$= a_1 + nd$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) \ldots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n$

$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) \ldots$

$2S_n = n(a_1 + a_n)$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$= 2a_1 +$

$= \frac{n}{2}(2a_1 + nd - d + a_n)$

$a > b$

$c > d$

$a = b$

$c > d$

$a > b$

$c < d$

$a - c > b - d$

$a=b$ $\quad$ $a=b$ $\quad$ $a=b$ $\quad$ $a>b$

$c=d$ $\quad$ $c>d$ $\quad$ $c>d$ $\quad$ $c=d$

$a+c=b+d$ $\quad$ $a+c>b+d$ $\quad$ $a-c \not> b-d$ $\quad$ $a-c>b-d$

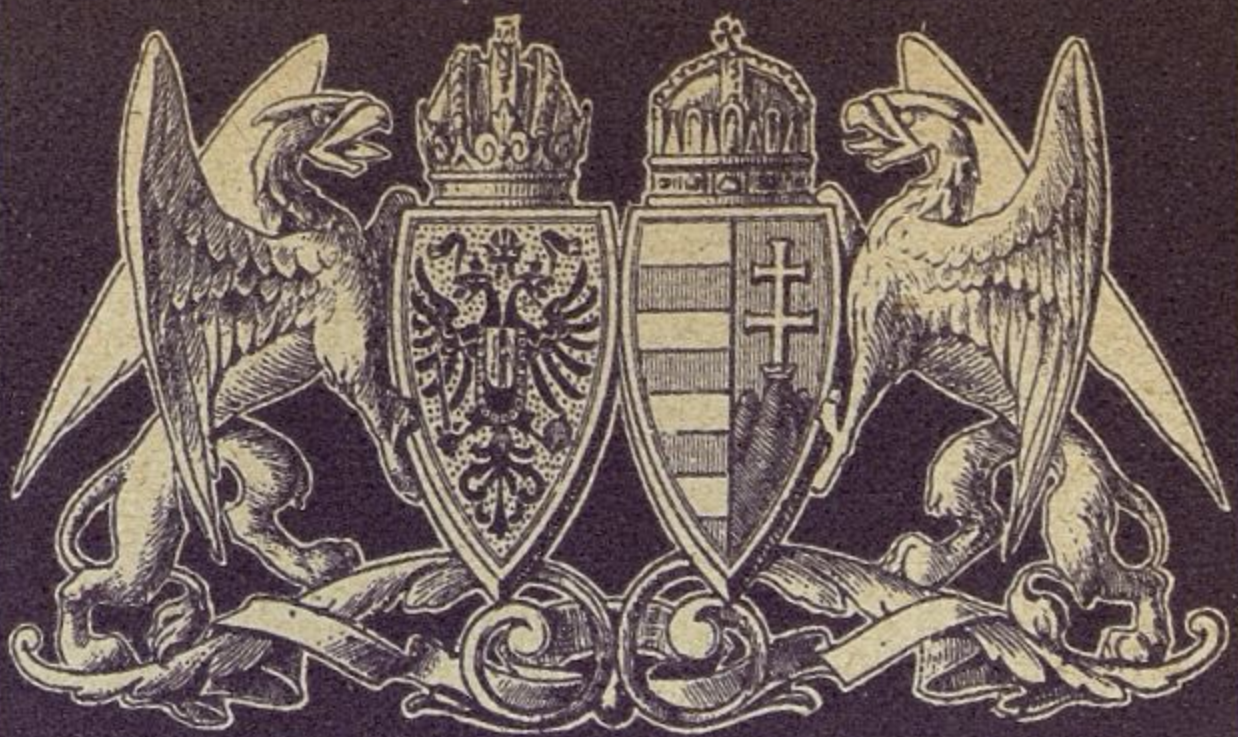
$a-c=b-d$

ἀποδείκνυμι

ἀποδέχομαι

ἀπέδεξα

CHOCOLADE BRÜNAUER



K.u.K. HOF-CHOCOLADE-FABRIKANTEN

CHOCOLATERIE FRANÇAISE

JACQUES BRÜNAUER & Co.

• WIEN •

XVIII/1, WÄHRINGER-GÜRTEL 15.

	Fahrt nach Wien . . .	1·90
	Verbraucht in „ . . .	— 87
4.	Fahrt nach Baden-Lour	
	retour bis Klettingbrunn	1·60
	Dem Schuldiener —	1
	Summa	5 f. 37