

Factorizing the Rado graph and infinite complete graphs*

Simone Costa [†] , Tommaso Traetta 

DICATAM - Sez. Matematica, Università degli Studi di Brescia,
Via Valotti 9, I-25123 Brescia, Italy

Received 30 April 2021, accepted 18 January 2023, published online 1 August 2023

Abstract

Let $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ be a family of infinite graphs, together with Λ . The Factorization Problem $FP(\mathcal{F}, \Lambda)$ asks whether $\mathcal{F}$ can be realized as a factorization of Λ , namely, whether there is a factorization $\mathcal{G} = \{\Gamma_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ of Λ such that each Γ_α is a copy of F_α .

We study this problem when Λ is either the Rado graph R or the complete graph $K_{\aleph}$ of infinite order $\aleph$. When $\mathcal{F}$ is a countably infinite family, we show that $FP(\mathcal{F}, R)$ is solvable if and only if each graph in $\mathcal{F}$ has no finite dominating set. We also prove that $FP(\mathcal{F}, K_{\aleph})$ admits a solution whenever the cardinality of $\mathcal{F}$ coincides with the order and the domination numbers of its graphs.

For countable complete graphs, we show some non existence results when the domination numbers of the graphs in $\mathcal{F}$ are finite. More precisely, we show that there is no factorization of $K_{\aleph}$ into copies of a k -star (that is, the vertex disjoint union of k countable stars) when $k = 1, 2$, whereas it exists when $k \geq 4$, leaving the problem open for $k = 3$.

Finally, we determine sufficient conditions for the graphs of a decomposition to be arranged into resolution classes.

Keywords: Factorization problem, resolution problem, Rado graph, infinite graphs.

Math. Subj. Class. (2020): 05C63, 05C70

*The authors gratefully acknowledge support from GNSAGA of Istituto Nazionale di Alta Matematica.

[†]Corresponding author.

E-mail addresses: simone.costa@unibs.it (Simone Costa), tommaso.traetta@unibs.it (Tommaso Traetta)

Faktorizacija Radojevega grafa in neskončnih polnih grafov*

Simone Costa [†] , Tommaso Traetta 

DICATAM - Sez. Matematica, Università degli Studi di Brescia,
Via Valotti 9, I-25123 Brescia, Italy

Prejeto 30. aprila 2021, sprejeto 18. januarja 2023, objavljeno na spletu 1. avgusta 2023

Povzetek

Naj bo $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ družina neskončnih grafov, vključno z grafom Λ . Problem faktorizacije $FP(\mathcal{F}, \Lambda)$ sprašuje, ali se da $\mathcal{F}$ predstaviti kot faktorizacijo grafa Λ , z drugimi besedami, ali obstaja takšna faktorizacija $\mathcal{G} = \{\Gamma_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ grafa Λ , da je vsak Γ_α kopija grafa F_α .

Ta problem preučujemo ob pogoju, da je Λ bodisi Radojev graf R bodisi polni graf $K_{\aleph}$ neskončnega reda $\aleph$. Pokažemo, da je, kadar je $\mathcal{F}$ števno neskončna družina, $FP(\mathcal{F}, R)$ rešljiva natanko takrat, ko noben graf v $\mathcal{F}$ nima končne dominacijske množice. Dokažemo tudi, da je $FP(\mathcal{F}, K_{\aleph})$ rešljiva, kadar kardinalnost družine $\mathcal{F}$ sovпада z redom in dominacijskimi števili njenih grafov.

Za števne polne grafe dokažemo nekaj rezultatov o neobstoju, kadar so dominacijska števila grafov iz družine $\mathcal{F}$ končna. Natančneje, pokažemo da se $K_{\aleph}$ ne da faktorizirati v kopije k -zvezd (oz. v točkovno disjunktno unijo k števnih zvezd), kadar je $k = 1, 2$, medtem ko takšna faktorizacija obstaja, kadar je $k \geq 4$, kar pomeni, da problem faktorizacije za $k = 3$ ostaja odprt.

Določimo tudi zadostne pogoje za ureditev grafov dekompozicije v rešljivostne razrede.

Ključne besede: Problem faktorizacije, problem rešljivosti, Radojev graf, neskončni grafi.

Math. Subj. Class. (2020): 05C63, 05C70

* Avtorja sta hvaležno za podporo GNSAGA of Istituto Nazionale di Alta Matematica.

[†] Kontaktni avtor.

E-poštna naslova: simone.costa@unibs.it (Simone Costa), tommaso.traetta@unibs.it (Tommaso Traetta)