

Trikotniku pričrtani trikotniki

Iz danega trikotnika do novih trikotnikov

Hana in Sara Sambolić
Gimnazija Bežigrad

Izvleček

V raziskovalni nalogi, ki sva jo napisali še kot učenki 9. razreda OŠ Dravlje, sva preučevali lastnosti trikotnika, ki je bil na določen način pričrtani poljubnemu trikotniku. Ugotavljali sva, na kakšen način sta pričrtani in izhodiščni trikotnik povezana, ter dokazovali različne izreke. Obravnavali sva sedem takih trikotnikov, in sicer Feuerbachov trikotnik, medialni ali središčni trikotnik, nožiščni ali pedalni trikotnik, ortocentrični trikotnik, Napoleonov trikotnik, Miquelov trikotnik in Brocardov trikotnik.

Pri vsakem izmed omenjenih trikotnikov sva izpostavili nekaj njihovih zanimivih lastnosti in dokazali nekaj trditev (matematičnih resnic).

V pričujočem članku bova predstavili Feuerbachov in Miquelov trikotnik ter Miquelove točke. Meniva, da sta ta dva najbolj zanimiva za branje in da so o ostali vsebini osnovnošolci in srednješolci že nekaj slišali ali prebrali.

Vse konstrukcije sva risali s programom za dinamično geometrijo Geogebra.

Ključne besede: Feuerbachov trikotnik, medialni trikotnik, ortocentrični trikotnik, nožiščni trikotnik, Napoleonov trikotnik, Miquelov trikotnik, Eulerjeva krožnica in premica, Brocardovi trikotniki in tetivni štirikotnik

Triangles Drawn to a Triangle

Obtaining New Triangles from a Given Triangle

Abstract

The research paper, which we wrote in the 9th grade of the Dravlje Primary School, deals with the characteristics of a triangle which is joined with a random triangle in a certain way. We tried to find out the connections between the joined and the original triangle and prove different theorems. We chose seven triangles: the Feuerbach triangle, medial triangle, pedal triangle, orthocentric triangle, Napoleon triangle, Miquel triangle and the Brocard triangle. Each of the above-mentioned triangles is unique; therefore, we focused on their interesting characteristics and proved a few mathematical statements/truths.

In the article we present the Feuerbach triangle, the Miquel triangle and the Miquel points. We believe that these two triangles make for interesting reading and that primary and secondary school students have already heard or read a little about the other triangles.

All the constructions were drawn with the dynamic mathematics software Geogebra.

Keywords: Feuerbach triangle, medial triangle, orthocentric triangle, pedal triangle, Napoleon triangle, Miquel triangle, Euler's circle, Euler line, Brocard triangle, cyclic quadrilateral.

Uvod

Že kot učenki sva se spraševali, ali je trikotnik najbolj enostaven večkotnik. Presenetilo naju je, da je, tako kot naju, močno nagovarjal tudi druge matematike in nematematike, da so ga preučevali in z njim poimenovali območja, dogodke, odnose ...

Najino pozornost so pritegnili različni trikotniki: od Bermudskega trikotnika, ki velja za eno najbolj skrivnostnih področij na svetu, do ljubezenskega trikotnika, ki je spodbudil številne pisatelje in pesnike v znanih delih svetovne in slovenske književnosti. Naju so nagovorili pričrtani trikotniki in njihove lastnosti, ker za njih še nisva slišali. Zato sva v raziskovalni nalogi preučevali

lastnosti trikotnika, ki je bil na določen način pričrtan izhodiščnemu trikotniku. Ugotavljali sva, kako sta ta dva trikotnika povezana, ter dokazovali različne matematične resnice.

Ob tem sva skušali odgovoriti tudi na dve raziskovalni vprašanji, ki sva si jih v raziskovalni nalogi zastavili:

1. Ali je trikotnik kot najenostavnejši lik v geometriji res najbolj enostaven?
2. Ali lahko z osnovnošolskim znanjem matematike preučujemo vsebine zahtevnejših trikotnikov?

Izbrali sva sedem pričrtanih trikotnikov. Pri vsakem izmed izbranih trikotnikov sva izpostavili nekaj njihovih zanimivih lastnosti in dokazali nekaj trditev. Nalogo sva razdelili na osem poglavij.

V prvem poglavju definirava nekatere osnovne pojme: značilne točke trikotnika, skladnost trikotnikov, središčni in obodni kot, pričrtani in včrtani trikotnik, včrtano, očrtano in pričrtano krožnico. V nadaljevanju sva obravnavali krožnico devetih točk, tako imenovano Eulerjevo krožnico, ker brez teh pojmov ni bilo mogoče predstaviti in pojasniti lastnosti Feurbachova trikotnika. Nato sledita dve poglavji, ki obravnavata medialni ali središčni trikotnik ter nožiščni ali pedalni trikotnik. Opisali sva tudi posebno obliko nožišnega trikotnika – ortocentrični trikotnik. Napoleonove trikotnike predstavlja v šestem poglavju. Sledijo Miquelov trikotnik, Miquelove krožnice in Miquelova točka, ki so delo velikega francoskega matematika Augusta Miquela. V zaključku naloge predstavlja še en pričrtani trikotnik – Brocardov trikotnik, ki so ga poimenovali po Francozu Henriju Brocardu. Opisali sva tudi nastanek prve in druge Brocardove točke.

Ko na najino raziskovalno nalogo pogledava danes, ocenjujemo, da je bila zahtevna in obsežna, preplet znanih in nezanih vsebin tako za osnovnošolce in srednješolce. Odločili sva se, da v tem članku predstaviva dva pričrtana trikotnika: Feurbachov in Miquelov trikotnik ter Miquelovo krožnico in Miquelovo točko.

Želiva si, da bi pričrtani trikotniki navdušili tudi kakšnega učitelja ali profesorja, da bi mu najina naloga pomagala pri odločitvi, ali naj o tej temi spregovori z učenci in dijaki.

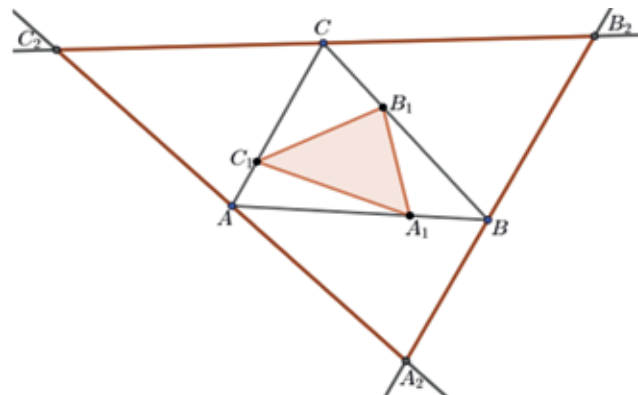
1 Trikotnik

Trikotnik je geometrijski lik s tremi oglišči in tremi stranicami. Trikotnik, ki je na določen način pričrtan poljubnemu/izhodiščnemu/danemu trikotniku, bomo imenovali pričrtan trikotnik. Posebna primera pričrtanih trikotnikov sta včrtan in očrtan trikotnik. Najprej pogledjmo, kako definiramo včrtani in očrtani trikotnik ter včrtano, očrtano in pričrtano krožnico.

1.1 Včrtani in očrtani trikotnik

Včrtani trikotnik $A_1B_1C_1$ je trikotnik, katerega posamezno oglišče leži na natanko eni izmed stranic trikotnika ABC ali nosilki stranice trikotnika (Slika 1).

Očrtani trikotnik $A_2B_2C_2$ je trikotnik, katerega stranice potekajo skozi oglišča A , B in C trikotnika ABC (Slika 1).



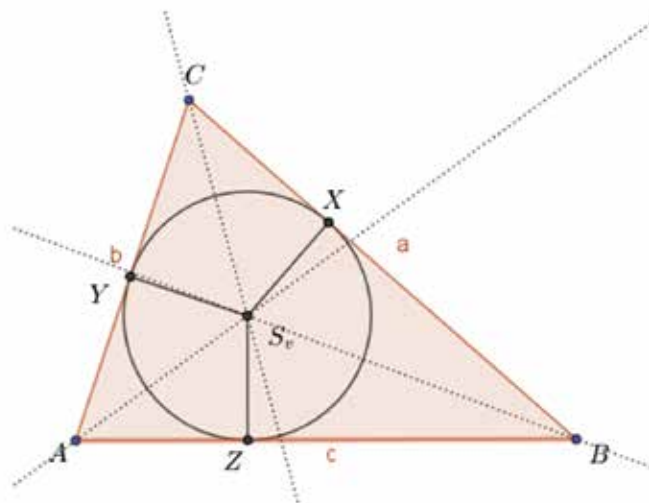
Slika 1: Včrtani in očrtani trikotnik.

1.2 Včrtana krožnica

Včrtana krožnica trikotnika ABC je krožnica s središčem v točki S_v , kjer se sekajo simetrale notranjih kotov trikotnika ABC (Slika 2).

Stranice trikotnika ABC so tangente na včrtano krožnico. Središče trikotniku včrtane krožnice je enako oddaljeno od vseh treh stranic danega trikotnika, in sicer za polmer včrtane krožnice.

Dotikališča včrtane krožnice trikotnika ABC s stranicami a , b , in c in označimo z X , Y in Z .



Slika 2: Včrtana krožnica.

Velja:

$$|AZ| = |AY| = s - a,$$

$$|BZ| = |BX| = s - b,$$

$$|CX| = |CY| = s - c,$$

$$\text{Pri čemer je } S = \frac{a+b+c}{2}.$$

Dokažimo te enakosti. Najprej bomo pokazali, da sta trikotnika AZS_v in AS_vY skladna. Stranica AS_v je skupna stranica obema trikotnikoma, stranici S_vZ in S_vY pa sta skladni, saj sta obe polmer včrtane krožnice trikotnika ABC . Prav tako sta skladna kota ZAS_v in S_vAY , saj stranica S_vA leži na simetrali kota ZAY , ki ta kot

razpolavlja. Vemo tudi, da sta kota S_0ZA in AYS_0 prava kота. Ker imata trikotnika AZS_0 in AYS_0 skladne vse kote in dve stranici, sta skladna. Torej imata stranici AZ in AY enako dolžino. Enako razmišljanje uporabimo pri ostalih dveh enakostih.

Izrazimo obseg trikotnika ABC .

$$o = a + b + c = |BX| + |CX| + |CY| + |AY| + |AZ| + |BZ| = 2|AZ| + 2|BX| + 2|CX|.$$

$$|AZ| + |BX| + |CX| = \frac{o}{2} = s.$$

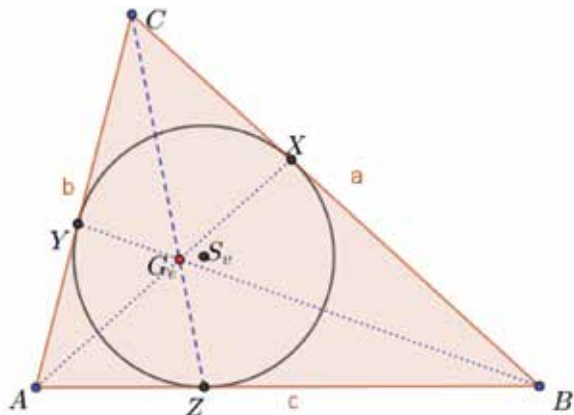
Torej velja:

$$|AZ| = s - (|BX| + |CX|) = s - a.$$

Na podoben način dokažemo tudi ostali dve enakosti.

S pomočjo včrtane krožnice trikotnika ABC je definirana tudi Gergonova točka (Ge) (Slika 3).

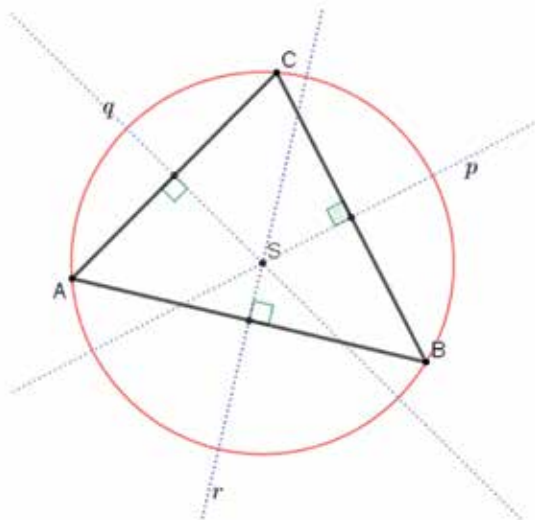
Daljice AX , BY in CZ in se sekajo v skupni točki Ge .



Slika 3: Gergonova točka.

1.3 Očrtana krožnica

Očrtana krožnica trikotnika ABC je krožnica s središčem v točki S_0 , ki ga dobimo v presečišču simetral stranice a , b in c in (Slika 4). Stranice a , b in c trikotnika ABC so tetive očrtane krožnice.



Slika 4: Očrtana krožnica.

Središče trikotniku S_0 očrtane krožnice je enako oddaljeno od vseh treh oglišč danega trikotnika za polmer r_0 očrtane krožnice.

Polmer krožnice r_0 je razdalja med središčem S_0 in poljubnim ogliščem trikotnika.

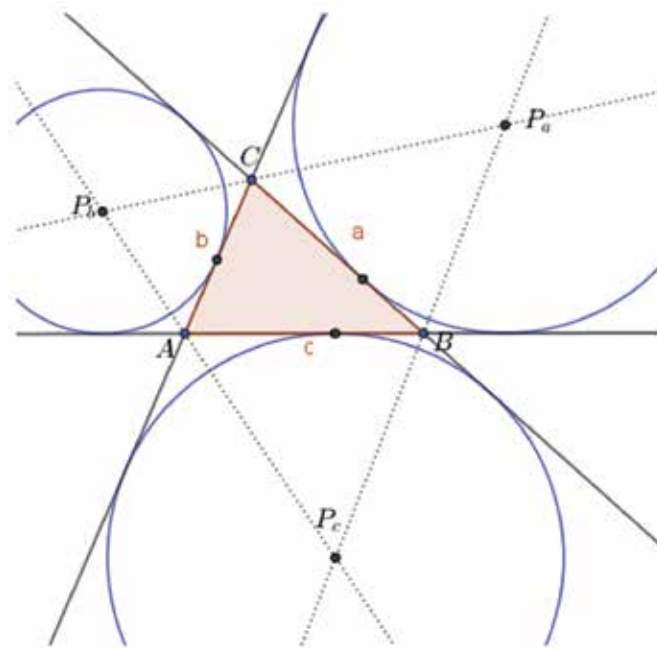
Velja:

$$r_0 = |S_0A| = |S_0B| = |S_0C|.$$

1.4 Pričrtana krožnica

Pričrtana krožnica trikotnika ABC je krožnica, ki leži izven trikotnika in se dotika ene stranice trikotnika ter nosilk preostalih dveh stranic (Slika 5). Pričrtane krožnice so tri krožnice s središčem izven trikotnika. Nosilke stranic trikotnika ABC so tangente na te krožnice.

Središča pričrtanih krožnic P_a , P_b in P_c so presečišča simetral zunanjih kotov trikotnika ABC in ležijo na simetrali notranjega kota.



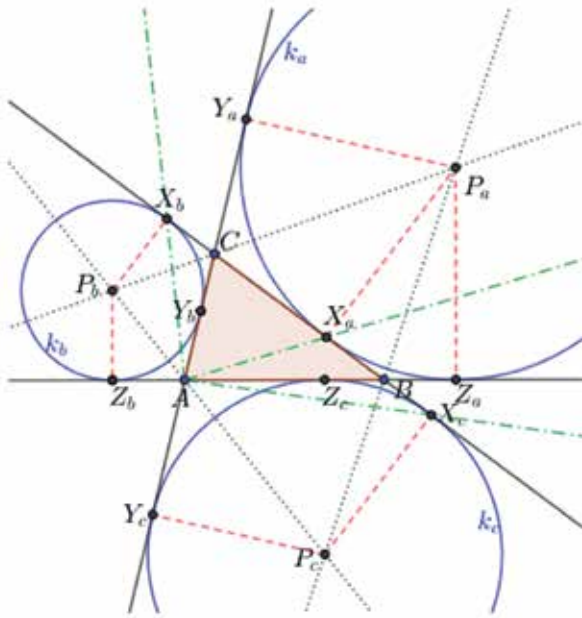
Slika 5: Trikotniku pričrtane krožnice.

Označimo z (Slika 6):

X_a , Y_a in Z_a dotikališča pričrtane krožnice k_a z nosilkami stranic trikotnika ABC ,

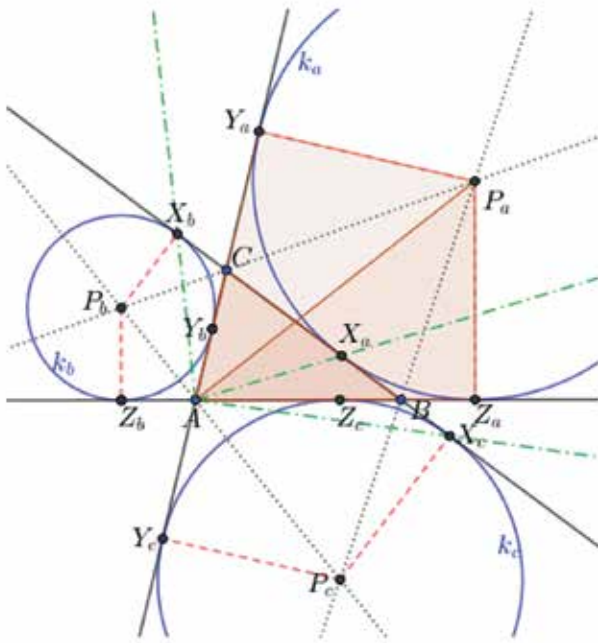
X_b , Y_b in Z_b dotikališča pričrtane krožnice k_b z nosilkami stranic trikotnika ABC ,

X_c , Y_c in Z_c dotikališča pričrtane krožnice k_c z nosilkami stranic trikotnika ABC .



Slika 6: Dotikališča pričrtanih krožnic z nosilkami stranic trikotnika.

Pokažimo, da velja $|AY_a| = |AZ_a| = \frac{o}{2} = s$.



Slika 7: Skladna trikotnika iz središča pričrtanih krožnic.

Najprej se bomo prepričali, da sta trikotnika AZ_aP_a in AP_aY_a skladna. Velja, da imata skupno stranico AP_a . Stranici P_aZ_a in P_aY_a sta skladni, saj sta polmer pričrtane krožnice k_a trikotnika ABC (slika 7). Stranica AP_a leži na simetrali kota Z_aAY_a , zato ta kot razpolovi. To pa pomeni, da sta koda Z_aP_a in P_aY_a skladna. Vemo tudi, da sta koda P_aZ_a in AY_aP_a prava koda, ker imata tri-

kotnika skladne vse kote in dve stranici, sta skladna. Iz tega sledi $|AY_a| = |AZ_a|$.

Izrazimo:

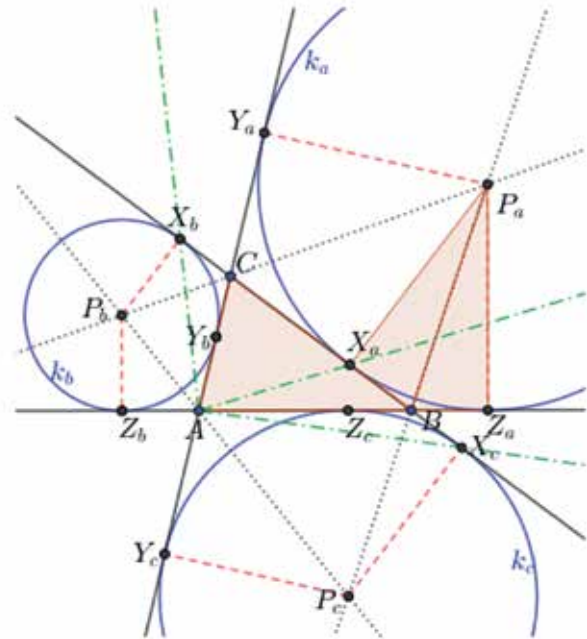
$$\begin{aligned} |AY_a| + |AZ_a| &= |AB| + |BZ_a| + |AC| + |CY_a| = \\ &= c + b + |BX_a| + |CX_a| = a + b + c = o \end{aligned}$$

Ker velja $|AY_a| = |AZ_a|$, sledi

$$|AY_a| = |AZ_a| = \frac{o}{2} = s.$$

Tudi enakosti $|BX_b| = |BZ_b|$, $|CX_c| = |CY_c|$ dokažemo na enak način.

Prav tako sta skladna trikotnika BZ_aP_a in BX_aP_a in velja $|BX_a| = |BZ_a|$.



Slika 8: Skladna trikotnika z oglišči v središču pričrtane, oglišču trikotnika in dotikališču krožnice s stranico oz. nosilko stranice.

Izrazimo $|BZ_a|$ na drug način.

$$|BZ_a| = |AZ_a| - |AB| = s - c.$$

Torej

$$|BX_a| = |BZ_a| = s - c.$$

Na podoben način dokažemo enakosti:

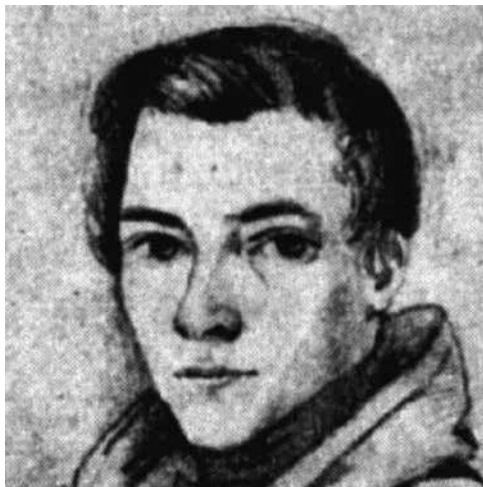
$$|BX_a| = |BZ_a| = s - c, |CX_a| = |CY_a| = s - b, |CX_b| = |CY_b| = s - a,$$

$$|AY_b| = |AZ_b| = s - c, |AY_c| = |AZ_c| = s - b, |BX_c| = |BZ_c| = s - a.$$

2 Feuerbachov trikotnik

2.1 Karl Wilhelm Feuerbach

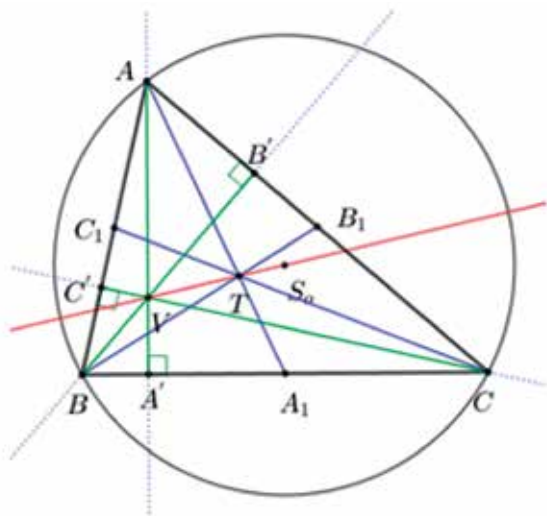
Karl Wilhelm Feuerbach se je rodil 30. maja 1800 v Svetem rimskem cesarstvu in umrl 12. marca 1834 v Nemčiji. Bil je nemški matematik, ki pa se je v celoti posvečal geometriji. Njegov oče, Paul Johann Anselm Ritter Feuerbach, je bil odličen pravnik, njegov brat, Ludwig Feuerbach, pa izvrsten filozof. Doktoriral je pri 22 letih in se takoj zaposlil na Erlangen gimnaziji kot profesor matematike. Leta 1822 je napisal knjigo, ki je govorila o krožnici devetih točk. Po njej je zaslovel kot dober matematik.



Slika 9: Karl Wilhelm Feuerbach.

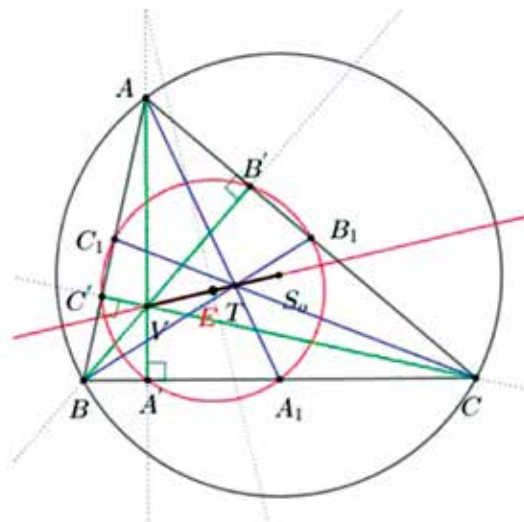
2.2 Eulerjeva premica in Eulerjeva krožnica

Središče očrtane krožnice S_o , težišče T in višinska točka V ležijo na skupni premici, velja pa tudi: $|S_o T| : |TV| = 1 : 2$ (Slika 10). To je pomembna lastnost, ki se nanaša na tri značilne točke trikotnika.



Slika 10: Eulerjeva premica in krožnica.

Premico, na kateri ležijo tri značilne točke, imenujemo Eulerjeva premica. Središče Eulerjeve krožnice danega trikotnika leži na tej premici in je hkrati središče daljice, ki jo določata višinska točka in središče očrtane krožnice tega trikotnika (Slika 11).

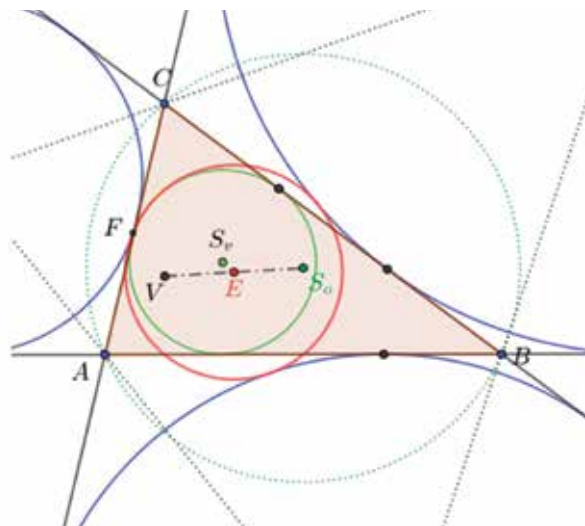


Slika 11: Eulerjeva premica in trikotnik z očrtano krožnico.

Eulerjeva krožnica se dotika trikotniku ABC včrtane krožnice od znotraj, vseh treh pričrtanih krožnic pa od zunaj.

2.3 Feuerbachova točka in trikotnik

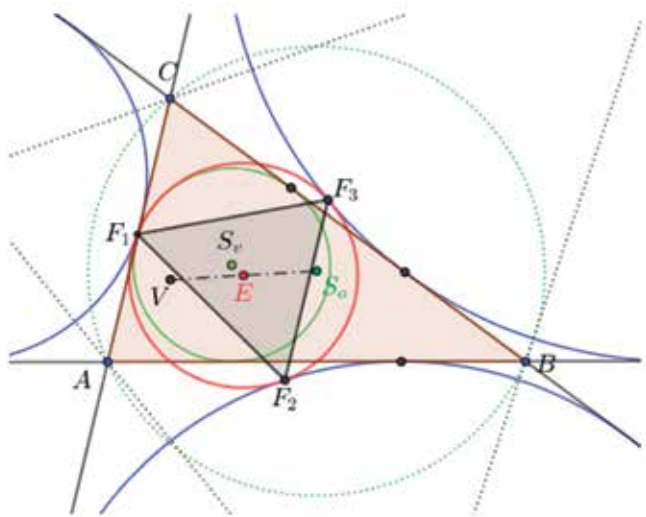
Točka, kjer se včrtana krožnica trikotnika ABC in Eulerjeva krožnica tega trikotnika dotikata, se imenuje Feuerbachova točka¹ F trikotnika ABC (Slika 12).



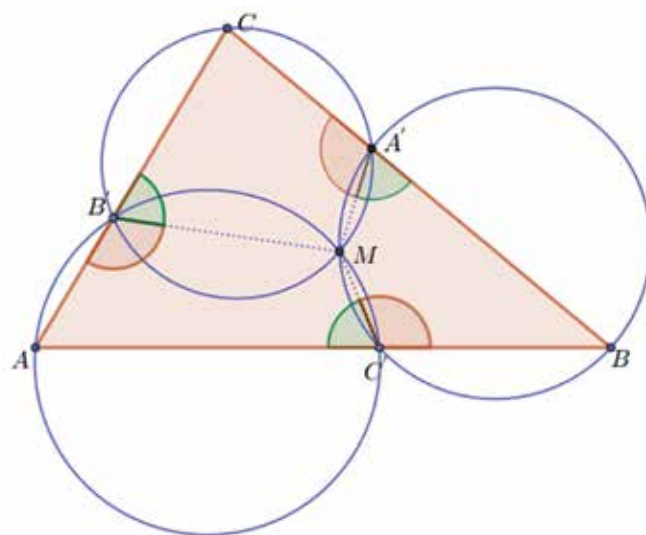
Slika 12: Feuerbachova točka.

Trikotnik, ki je določen s tremi točkami, ki so dotikališča Eulerjeve krožnice in vseh treh pričrtanih krožnic, je Feuerbachov trikotnik $F_1 F_2 F_3$.

¹ F na sliki 12 je enako F_1 na sliki 13



Slika 13: Feurbachov trikotnik.

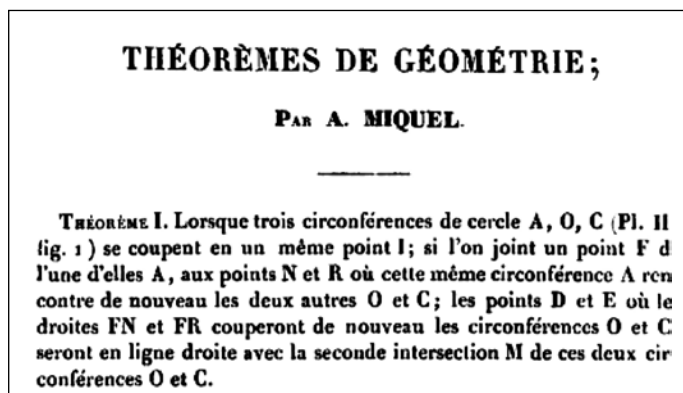


Slika 15: Miquelova točka.

3 Miquelov trikotnik

3.1 Auguste Miquel

Auguste Miquel se je rodil leta 1816 v Franciji. Po poklicu je bil znanstvenik, najraje pa se je ukvarjal z znanstvenima vedama matematiko in geometrijo. Svoje ugotovitve na teh dveh področjih je objavljajl v mnogih francoskih matematičnih revijah. Po njem so poimenovani Miquelova točka, Miquelove krožnice in Miquelov trikotnik. Umril je leta 1851.



Slika 14: Izsek iz knjige Theoremes De Geometrie.

3.2 Miquelov trikotnik

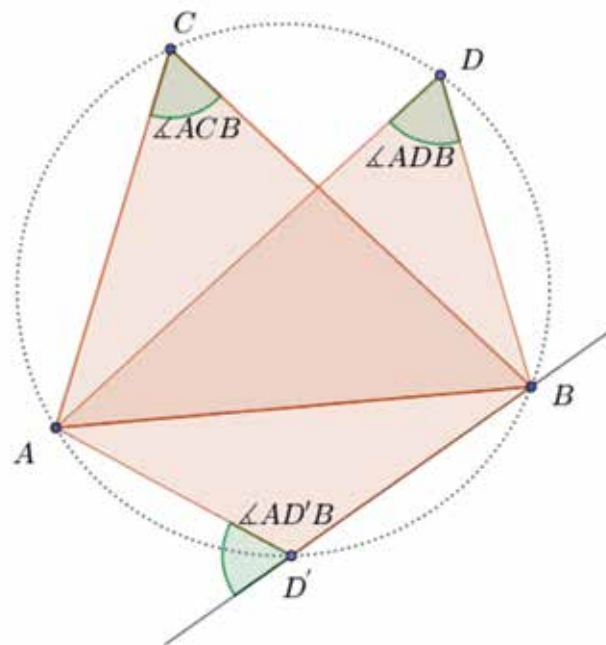
Naj bo ABC poljuben trikotnik ter A', B' in C' od oglišč različne točke na premicah BC, CA in AB . Krožnice $k_{AC'B'}$, $k_{BA'C'}$ in $k_{CA'B'}$ se sekajo v isti točki. Skupno presečišče teh treh krožnic imenujemo Miquelova točka trikotnika ABC ter izbranih točk A', B' in C' (Slika 15).

Preden dokažemo obstoj Miquelove točke M , pogledjmo, kdaj so točke A, B, C, D konciklične (ležijo na isti krožnici).

Glede na točko D ločimo dva primera.

Če ležita točki C in D na istem bregu premice AB (Slika 16) in so točke A, B, C in D konciklične, potem velja:

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB.$$



Slika 16: Konklicke točke.

V drugem primeru pa naj ležita točki C in D' na različnih bregovih premice AB . Potem so točke A, B, C in D' konciklične natančno tedaj, ko je:

$$\sphericalangle ACB + \sphericalangle AD'B = 180^\circ.$$

Zdaj pa se vrnimo k Miquelovi točki.

Označimo presečišče krožnic $k_{AC'B'}$ in $k_{BA'C'}$ z M . Pokažimo, da so točke C, A', B', M konciklične. Ker so točke A, B', C' in M konciklične, velja:

$$\sphericalangle MC'A = \sphericalangle MB'A.$$

Ker so točke A, B' in C kolinearne, velja:

$$\sphericalangle MB'A + \sphericalangle MB'C = 180^\circ.$$

Podobno velja:

$$\sphericalangle MC'B = \sphericalangle MA'B.$$

Ker so točke A, C' in B kolinearne, velja:

$$\sphericalangle MC'A + \sphericalangle MC'B = 180^\circ.$$

Ker so točke B, A' in C kolinearne, velja:

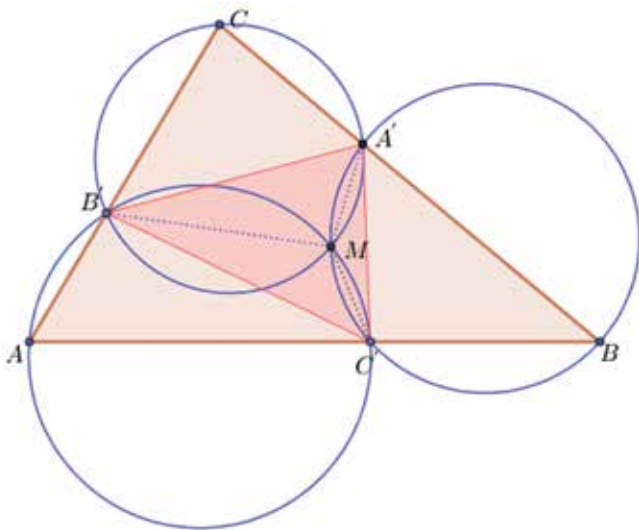
$$\sphericalangle MA'B + \sphericalangle MA'C = 180^\circ.$$

Sedaj upoštevamo zgornje enakosti in dobimo

$$\begin{aligned} \sphericalangle MB'C &= 180^\circ - \sphericalangle MB'A = 180^\circ - \sphericalangle MC'A = \\ &= 180^\circ - (180^\circ - \sphericalangle MC'B) = \sphericalangle MC'B = 180^\circ - \sphericalangle MA'C. \end{aligned}$$

Torej $\sphericalangle MB'C + \sphericalangle MA'C = 180^\circ$.

Iz slike 17 vidimo, da točki C in M ležita na nasprotnih bregovih premice $A'B'$ torej tudi točka M leži na krožnici $k_{CA'B'}$.



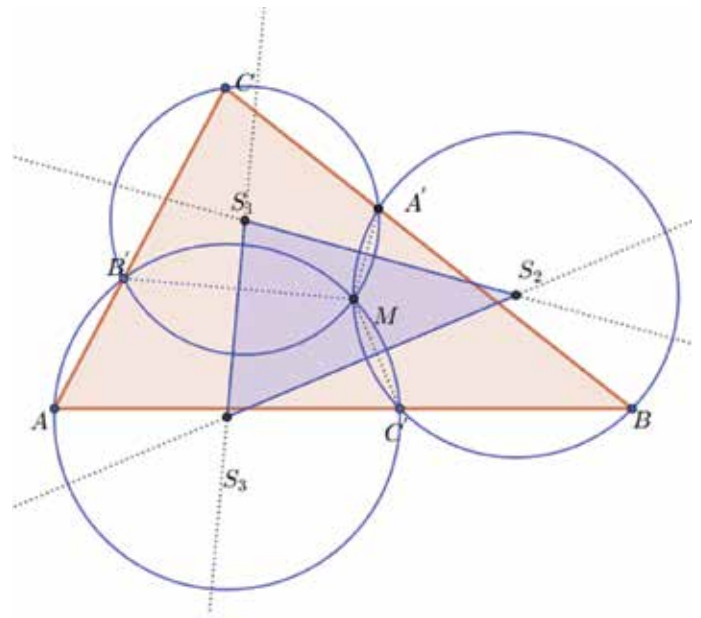
Slika 17: Miquelov trikotnik.

Če je ABC poljuben trikotnik ter A', B' in C' od oglišč različne točke na premicah BC, CA in AB , potem je trikotnik $A'B'C'$ Miquelov trikotnik (Slika 17). Krožnice $k_{AC'B'}$, $k_{BA'C'}$ in $k_{CA'B'}$ pa so Miquelove krožnice.

Središča Miquelovih krožnic določajo trikotnik $S_3S_2S_1$, ki je podoben trikotniku ABC (Slika 18).

Točka S_1 je središče krožnice skozi točke B', A' in C , točka S_2 je središče krožnice skozi točke A', C' in B ter točka S_3 središče krožnice skozi točke C', B' in A . Krožnice imajo skupne tetive MA', MB' in MC' . Točka N_1 naj bo presečišče daljice S_1S_3 in krožnice s središčem v točki S_3 , točka N_2 pa naj bo presečišče daljice S_2S_3 in krožnice s središčem v točki S_3 . Premica S_1S_3 je simetrala skupne tetive MB' (Slika 19), zato velja:

$$\sphericalangle B'S_1N_1 = \sphericalangle N_1S_1M.$$



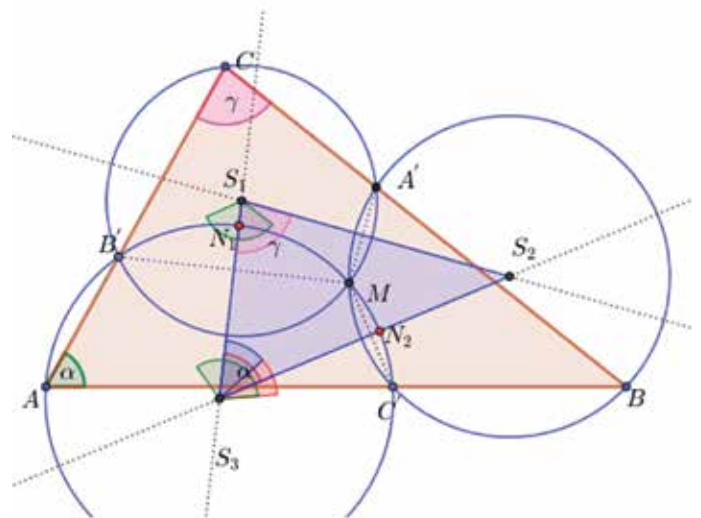
Slika 18: Središča Miquelovih krožnic.

Podobno je premica S_2S_3 simetrala skupne tetive MC' , zato velja:

$$\sphericalangle MS_3N_2 = \sphericalangle N_2S_3C'.$$

Sledi:

$$\sphericalangle N_1S_3N_2 = \sphericalangle N_1S_3M + \sphericalangle MS_3N_2 = \frac{1}{2} \sphericalangle B'S_3C'.$$



Slika 19: Dokaz podobnosti trikotnikov s pomočjo kotov.

Ker je kot $\sphericalangle B'AC' = \frac{1}{2} \sphericalangle B'S_3C'$, zato je:

$$\sphericalangle N_1S_3N_2 = \sphericalangle B'AC' = \sphericalangle ABC.$$

Podobno lahko dokažemo, da je kot

$\sphericalangle S_3S_1S_2 = \sphericalangle B'AA' = \sphericalangle ACB$ in zato je trikotnik $S_3S_2S_1$ podoben trikotniku ABC .

Zaključek

V najini raziskovalni nalogi sva preučevali lastnosti trikotniku pričrtanih trikotnikov. Raziskovali sva posebne primere pričrtanih trikotnikov, njihove lastnosti, ploščine, razmerja med koti ... Nekatere lastnosti sva tudi dokazovali. Vse slike sva risali s pomočjo programa Geogebra. Pri delu sva spoznali veliko novih geometrijskih pojmov, kot so na primer tetivni štirikotnik, Eulerjeva krožnica in premica, krožnica devetih točk, prvi in tretji skladnostni izrek, središčni ter obodni kot itd. Ne le da sva se pri pisanju raziskovalne naloge seznanili s tako veliko pojmi, temveč sva se seznanili tudi z matematiki, za katere do sedaj nisva vedeli. Najbrž bo marsikoga presenetilo dejstvo, da se Napoleonovi trikotniki, ki sva jih v nalogi obravnavali, imenujejo po francoskem vojaškem in političnem vodji, generalu in cesarju Napoleonu Bonaparteju. Nato sva odkrili še dva trikotnika – Brocardovega in Miquelovega. Oba trikotnika sta imenovana po matematikih francoskega rodu: Henriju Brocardu in Augusteu Miquelu.

Največji izziv so bili viri in literatura. Izjemno težko je bilo iskanje, izbiranje in branje besedil v povezavi z najino temo. Zahtevno je bilo, ker je večina virov in literature o pričrtanih trikotnikih v angleščini, nekaj v francoščini, nemščini in hrvaščini in ker so bila besedila za najino starost in matematično predznanje prezahtevna. Pri risanju vseh slik nama je bila v veliko pomoč najina mentorica pa tudi posnetki (video navodila), ob katerih sva se učili delati s programom za dinamično geometrijo Geogebra.

Ugotovili sva, da je trikotnik zelo zanimiv lik in da zagotovo tudi ni med najbolj enostavnimi v geometriji. Meniva, da nam osnovnošolska matematika omogoča možnosti raziskovanja trikotnikov na zahtevnejši stopnji, saj sva vse dokazovali z znanjem, ki sva ga pridobili v osnovni šoli. Čeprav se v šolah ne seznanjamo podrobno s to vsebino, ni prezahtevna za osnovnošolce. Je pa vsekakor zelo zanimiva tema, ki bi lahko še marsikoga pritegnila k raziskovanju, tako kot je naju.

Iskreno se zahvaljujemo za pomoč in nasvete najini mentorici in učiteljici Vesni Harej. Čeprav se nama je na začetku zdela vsebina najinega raziskovalnega področja zahtevna, sva raziskovalno nalogo uspešno napisali ter sva na najin izdelek ponosni.

Viri in literatura

Velić, H. (2010). Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, diplomsko delo, Trokutu pridruženi trokuti. <http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/> (Dostopno dne 3. 3. 2019).

Razpet, M. (2015). Matematično izrazje grškega izvora. Univerza v Ljubljani. <http://www.pef.uni-lj.si/matwww/Slovarcek.pdf> (Dostopno dne 3. 3. 2019).

Lokar: Zapiski geogebra, https://wiki.lokar.fmf.uni-lj.si/geogebrawiki/index.php/Glavna_stran (Dostopno dne 3. 3. 2019).

Mitrovič, M. (2013). Skozi Evklidsko geometrijo, Sevnica.

Znani matematiki in njihova dela: Leonard Euler. <http://www.matematiki.si/leonhard-euler/> (Dostopno dne 3. 3. 2019)

N. Altshiller-Court: College Geometry, 2nd ed., Mineola, NY: Dover, 2007 str. 96.

<http://www.isinj.com/mt-usamo/An%20Introduction%20to%20the%20Modern%20Geometry%20of%20the%20Triangle%20and%20the%20Circle%20-%20Altshiller>

Court%20N.%20College%20Geometry%20(Dover%202007).pdf

(Dostopno dne 3. 3. 2019).

Michael de Villiers: From nested Miquel triangles to Miquel distances, <http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/miquel.pdf>. (Dostopno dne 3. 3. 2019).

Feuerbach Triangle, <http://mathworld.wolfram.com/FeuerbachTriangle.html>

(Dostopno dne 3. 3. 2019).

August Miquel: https://de.wikipedia.org/wiki/Auguste_Miquel in <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/Miquel.pdf>

(Dostopno dne 3. 3. 2019).

Numericana's Biographies: <http://www.numericana.com/fame/bio.htm> (Dostopno dne 3. 3. 2019).

Karl Wilhelm Feurebach: https://en.wikipedia.org/wiki/Karl_Wilhelm_Feuerbach

H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, Geometry revisited, The Mathematical Association of America, 1967. http://www.aproged.pt/biblioteca/geometryrevisited_coxetergreitzer.pdf (Dostopno dne 3. 3. 2019).