Annuario

dell' i. r.

Ginnasio Superiore

di

Capodistria

(Anno scolastico 1906-07)

Funzioni lacunari — del prof. O. Inwinkl.
Notizie intorno al Ginnasio.

CAPODISTRIA
Stabilimento tipografico Carlo Priora
1907

ANNUARIO

DELL' I. R. GINNASIO SUPERIORE

DI

CAPODISTRIA

Anno scolastico 1906-07

Funzioni lacunari — *del prof. O. Inwinkl.*
Notizie intorno al Ginnasio.

CAPODISTRIA,
STABILIMENTO TIPOGRAFICO CARLO PRIORA
1907.

Edit. la direzione dell'i. r. Ginnasio

Funzioni Lacunari

Prof. O. Inwinkl.

Lista bibliografica delle opere consultate.

1. *M. G. d' Arone:* «Sur les fonctions à espaces lacunaires» Bulletin de la Societè mathèmatique de France. Tome XXIII, Année 1895, pag. 193—194.
2. *Borel:* «Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure». Iournal de mathém., S. V. T. II (1896), pag. 441—451.
3. *A. Cayley:* «Note on lacunary functions». The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. Tom. XXVI (1893). pag. 279—281.
4. *DuBois Reymond:* Mathemat. Annalen, Bd. XXI, pag. 109.
5. *Goursat:* «Sur les fonctions présentant des lacunes». Comptes Rendus hebdom. des séances de l' Academie de Paris. T. XCIV (1882) pag. 715—718.
6. *Goursat:* «Sur une fonction à espace lacunaire. Bulletin des sciences mathèmatiques S. II. Tom. XVII (1893) pag. 247—248.
7. *Goursat:* «Sur les fonctions à espaces lacunaires». Bulletin des sc. math. S. II, Tom. XI (1887) pag. 109—114.
8. *Krygowski:* «Sur les fonctions à espaces lacunaires». Bulletin de la Societé mathématique de France. T. XXV. (1897) pag. 40—243.
9. *Lerch:* Ueber Funktionen mit beschränktem Existenzbereiche». Abhandl. der Königlich. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaft. VII. Folge, II. Band. (1888)
10. *Lerch:* «Note sur les expressions qui, dans diverses parties du plan, répresentent des fonctions distinctes». Bulletin des sciences mathématiques. S. II, T. X (1886) pag. 45—49.
11. *Lerch:* «Brief an Mittag-Leffler». Acta Mathem. Band X. 1887.
12. *Mittag-Leffler:* «Sur une transcendante remarquable découverte par M. Fredholm». — Comptes Rendus de l' Academie de Paris Tom. CX. (1890) pag. 627—629.
13. *Poincaré:* Théorie des groupes fuchsiennes». Acta mathematica Tom. 1.

14. *Poincaré:* «Sur les fonctions à espaces lacunaires» American Journal of Mathematics. Tom. XIV. (1892) pag. 201—221.

15. *Pringsheim:* «Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Funktionen mit beschränktem Existenzbereich.» Mathematische Annalen. Tom. XLII (1893) pag. 153—184.

16. *Pringsheim:* «Ueber gewisse Reihen, welche in getrennten Convergenzgebieten verschiedene, willkürlich vorgeschriebene Funktionen darstellen». Mathematische Annalen, Tom. XXII (1883) pag. 109—116.

17. *Stieltjes:* «Exemple d' une fonction qui n' existe qu'à l'intérieur d'un cercle». Bulletin des sciences mathem., S. II., Tom. XI. (1887) pag. 46 - 51.

18. *Teixeira:* «Exemples de fonctions à espaces lacunaires». Nouvelles Annales de Mathématiques. S. III, Tom. VI (1887) pag. 43—45.

19. *Vivanti:* «Teoria delle funzioni analitiche».

20. *Weierstrass:* «Zur Funktionenlehre». Monatsberichte der Kgl. Preuss. Akademie der Wissenschaften. 12. August 1880. pag. 707—743.

21. *Weierstrass:* «Zur Funktionenlehre». Monatsberichte der Kgl. Preuss. Akademie der Wissenschaften. 1881, pag. 228—230.

22. *Borel:* «Sur la gènéralisation du prolongement analytique». Comptes Rendus de l'Académie de France. Tom. CXXX. (1900) pag. 1115—1118.

23. *Borel:* «Sur le prolongement des fonctions analytiques». Comptes Rendus de l'Ac. de Paris. Tom. CXXVII (1898) pag. 101—103.

24. *Fabry:* «Gènèralisation du prolongement analytique d' une fonction.» Comptes Rendus de l' Acad. de Paris. Tom. CXXVIII (1899) pag. 78—80.

24. *Picard:* «Quelques remarques sur le prolongement des fonctions.» Comptes Rendus de l' Acad. de Paris, Tom. CXXVIII (1899) p. 193-195.

I.

Una funzione analitica la quale non ha l'intero piano per campo d'esistenza si chiama *«funzione lacunare»*. La definizione stessa della funzione analitica data da Weierstrass fa risultare la possibilità dell'esistenza di queste funzioni lacunari, come vedremo più sotto. Tutte le funzioni che si trattano comunemente nella teoria delle funzioni hanno tutto il piano per campo d'esistenza, meno un insieme finito od infinito di punti singolari che non formano però nè linee nè aree.

Perciò appena molti anni dopo la formazione della teoria delle funzioni analitiche si venne a dimostrare l'esistenza delle funzioni lacunari. Siccome queste funzioni sono in molti riguardi di capitale importanza, non sarà inutile di dare un riassunto ordinato di tutte le più importanti ricerche fatte su questo argomento e di trarre da queste certe conseguenze importanti per lo sviluppo di questa moderna disciplina matematica.

Sia P(x) una serie di potenze con un cerchio di convergenza C_1 di raggio finito r_1. Se si considera soltanto lo sviluppo della serie suddetta, si dovrebbe ammettere tutto il campo fuori del cerchio quale lacuna della funzione rappresentata dalla serie P(x). Ora però si può estendere il campo d'esistenza oltre il cerchio. Prendiamo un punto a nel campo C_1 e sviluppiamo la funzione secondo la serie di Taylor in una serie di Potenze (x—a) che denominiamo P(x/a) e che chiamiamo la serie dedotta dalla P(x) rispetto al punto a. Questa avrà di solito un campo d'esistenza C_2 che esce in parte da C_1. Nel campo C_2 si può prendere un secondo punto b e formare la serie dedotta P(x/b) col campo C_3 e così via. Si dice allora che P(x/a) è la continuazione analitica di P(x) nella parte esterna di C_2 a C_1 e che P(x/b) è la continuazione analitica di P(x) nella parte di C_3 esterna a C_1 e C_2 ecc. Tutta la parte del piano ricoperta da questi cerchi di convergenza C_1, C_2, C_3 . . . costituirà il campo d'esistenza di una funzione continua f(x) determinata dai valori delle serie P in tutti quei campi. *Questa funzione f(x) dicesi «funzione analitica»*.

Per la maggior parte delle funzioni analitiche note, i cerchi C_1, C_2, C_3,... ricoprono tutto il piano una, due o anche un numero infinito di volte, escluso un insieme finito od infinito di punti isolati che non formano nè linee nè aree, e che si chiamano punti singolari.

La funzione esiste in tutto il piano eccettuati questi punti isolati. Essa dunque non sarà una funzione lacunare.

Ora questo non succede sempre, ma può avvenire che quei punti singolari formino linee o aree ed allora la funzione non esisterà, nè lungo quelle linee nè nell' interno di quelle aree. Nel primo caso si parlerà di *«sezioni»* o *«linee singolari»*, nel secondo di *«lacune»*, e la funzione analitica si dirà *«funzione lacunare»*.

Prima di passare alla formazione di funzioni di questa specie studieremo il caso di un punto singolare e da questo passeremo poi all' argomento che noi dobbiamo trattare.

Sia F(x) un' espressione aritmetica della variabile complessa x che definisce in un certo campo connesso C la funzione analitica f(x).

Nell' interno di C si avrà per ogni punto a:

$F_{(a)} = f_{(a)}$, $F^{(n)}_{(a)} = f^{(n)}_{(a)}$ per (n = 1, 2, 3 . . . .) e per ogni punto x di un certo intorno di a

$$f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}_{(a)} (x-a)^n =$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}_{(a)} (x-a)^n$$

Se invece a è un punto singolare di f(x), possono aver luogo i seguenti casi:

1. F(x) e le sue derivate non sono finite e determinate nel punto a.

2. F(x) e le sue derivate sono finite e determinate nel punto a, ma la serie:

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}_{(a)} (x-a)^n \qquad (1)$$

diverge per $|x-a| < \varepsilon$, ove ε segna un valore infinitamente piccolo. Con altre parole dunque la serie (1) ha il raggio di convergenza r = o.

3. La serie (1) non ha il raggio di convergenza nullo, ma per i punti x del suo cerchio di convergenza che appartengono al campo di esistenza di f(x) non può aver luogo l' eguaglianza:

$$f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}_{(a)} (x-a)^n$$

o con altre parole: la serie (1) non rappresenta la funzione f(x). Consideriamo ora quando possano avvenire questi singoli casi.

1. Il primo caso ha luogo, per esempio, quando il punto a è polo d' uno dei termini di F(x). Questo caso è notissimo e non richiede ulteriori considerazioni.

2. Di capitale importanza invece è il secondo caso. *Qui si tratta cioè di dimostrare che la funzione F(x), sebbene abbia nel punto a se stessa e tutte le sue derivate di ordine finito determinate e finite, non può esser sviluppata secondo la serie di Taylor.* Questa constatazione è molto preziosa, perchè contraria all' opinione avuta da Lagrange, che una funzione deve esser sviluppabile secondo la serie di Taylor, qualora essa stessa e le sue derivate di ordine finito siano determinate e finite in un dato punto *).

Basta dimostrare che $F^{n}_{(a)}$, se anche finita per qualunque valore finito di n, dovrà assumere, date certe condizioni, un valore infinitamente grande, quando $n = \infty$.

Applicando il noto criterio di Cauchy per la convergenza delle serie, risulta chiaramente che la serie (1) non potrà mai esser convergente, quanto piccolo sia anche il valore di (x—a), se:

$$\lim_{n=\infty}\left\{\left|\frac{f^{(n-1)}_{(a)}}{(n-1)!}\right| : \left|\frac{f^{(n)}_{(a)}}{n!}\right|\right\} = \lim_{n=\infty}\left\{n\left|\frac{f^{(n-1)}_{(a)}}{f^{n}_{(a)}}\right|\right\} = o$$

o con altre parole, se:

$$\left|\frac{f^{n}_{(a)}}{f^{(n-1)}_{(a)}}\right| > n,$$

una condizione che sarà certamente sodisfatta, se da un punto qualunque $n \geq m$ in poi

$$\left|\frac{f^{(n)}_{(a)}}{f^{(n-1)}_{(a)}}\right| = n \, . \, \varphi(n),$$

ove $\varphi(n)$ rappresenta un valore positivo, che è funzione di n, e che con n, se anche lentamente, cresce fino a valori infinitamente grandi.

---

*) L' inesattezza di questa asserzione del Lagrange fu del resto già illustrata da Cauchy con un esempio (se anche non del tutto esatto), e più tardi definitivamente con un altro esempio dato da Du Bois Reymond (Mathematische Annalen T.XXI).

La serie (1) divergerà certamente, se per un valore α infinitamente piccolo e per $n \geq m$, ove m è un punto qualunque,

$$\frac{\left| f_{(a)}^{(n)} \right|}{n!} \cdot \alpha^{n} \geq 1$$

oppure

$$\frac{\left| f_{(a)}^{n} \right|}{n!} \geq \left[\psi(v) \right]^{n} \tag{2}$$

ove $\psi(v)$ rappresenta un valore positivo, che è funzione di n e che con n cresce infinitamente.

Illustreremo questo fatto con degli esempi semplicissimi. Abbiasi

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{1 + a^{n} x} \tag{3}$$

ove a è un numero positivo > 1.

I poli di F(x) sono i punti $x = -\frac{1}{a^{n}}$, i quali si trovano tutti sulla parte negativa dell' asse reale ed hanno per punto limite l' origine.

Le derivate di F(x) sono:

$$F_{(x)}^{(m)} = (-1)^{m} m! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{a^{mn}}{(1 + a^{n}x)^{m+1}}$$

Da ciò segue per $x = o$

$$F(o) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

$$F_{(o)}^{m} = (-1)^{m} m! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^{mn} = (-1)^{m} . m! e^{am}$$

Dunque per valori di $m \geq r$ abbastanza grandi si ha:

$$\frac{F_{(o)}^{(m)}}{m!} > \left| e^{m} \right|^{m}$$

Ma in conseguenza della condizione fissata poc' anzi in (2) risulta che la serie

$$\sum \frac{F^{(n)}_{(o)}}{n!} x^n$$

sarà divergente per un valore qualunque di $x < \sigma$, sebbene $F(x)$ e tutte le sue derivate di ordine finito sieno determinate e finite nel punto $x = o$. Dunque sarà impossibile di sviluppare la funzione $F(x)$ secondo la serie di Mac—Laurin.

Se ora, sostituendo a^2 al luogo di a e per $x = x^2$, si traspongono i poli della funzione dall' asse reale negativo all' asse imaginario positivo e negativo, si ottiene un esempio ancor più istruttivo.

La serie diviene allora:

$$F(x) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{1 + a^{2n} x^2} \tag{4}$$

oppure:

$$F(x) = \frac{1}{2i} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{a^n x - i} - \frac{1}{a^n x + i} \right)$$

I suoi poli sono dunque $\pm \frac{i}{a^n}$ e giacciono sulla parte positiva e negativa dell'asse imaginario simmetricamente disposti rispetto all' origine, la quale è un punto limite dei poli. Le derivate sono:

$$F^{(m)}_{(x)} = \frac{1}{2i} \cdot m! \sum_{n=o}^{\infty} \frac{a^{mn}}{n!} \left(\frac{1}{(a^n x - i)^{m+1}} - \frac{1}{(a^n x + i)^{m+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2i} m! \sum_{n=o}^{\infty} \frac{a^{mn}}{n!} \frac{(a^n x + i)^{m+1} - (a^n x - i)^{m+1}}{(a^{2n} x^2 + 1)^{m+1}}$$

Da ciò segue:

$$F_{(o)} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

$$F^{(m)}_{(o)} = \frac{1}{2i} m! \sum_{n=o}^{\infty} \frac{a^{mn}}{n!} \left[(i)^{m+1} - (-i)^{m+1} \right]$$

$$F^{(2m-1)}_{(o)} = o$$

$$F^{(2m)}_{(o)} = (-1)^m (2m)!\, e^{a\,2m}$$

E la serie (1) diventa:

$$\sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n e^{a2n} x^{2n}$$

E qui si vede direttamente che essa è divergente. Poichè:

$$\left|\frac{F^{(2n)}_{(o)}}{(2n)!}\right| = \frac{|(-1)^n (2n)!\, e^{a\,2n}|}{(2n)!}$$

e da qui

$$\frac{F^{(2n)}_{(o)}}{(2n)!} > \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}$$

per valori abbastanza grandi di $2n > m$. Dunque la condizione (2) è sodisfatta e la serie perciò divergente.

Questo fatto assume una notevole importanza. Giacchè, se si considera la (4) come funzione reale della variabilità *reale* x, essa è finita e continua insieme a tutte le sue derivate per ogni valore finito di x compreso $x = o$, eppure non è sviluppabile nella serie di Taylor. E ciò appunto perchè $x = o$ non è un polo dell'espressione aritmetica, ma invece è un punto limite di poli, i quali tutti si trovano nel campo imaginario ed i quali ci sfuggono, se consideriamo la funzione soltanto nel campo reale di variabilità.

Concludendo, dalle cose suesposte si arriva al risultato, che si avrà sempre il secondo caso di un punto singolare a, quando questo, senza essere un polo della funzione, sarà invece *un punto limite di tali poli.*

3) Passiamo ora al terzo caso. Per dare un esempio per questo modificheremo lievemente l'espressione (3) ponendo nel luogo di $\frac{1}{n!}$ il valore $\frac{(-1)^n}{n!}$ Si avrà allora:

$$F(x) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{1 + a^n x} \qquad (5)$$

ove $a > 1$. Anche qui i poli di F (x) sono come per la (3) tutti i punti $-\frac{1}{a^n}$ aventi per punto limite l'origine.

Risulta dunque:

$$F^{(m)}_{(x)} = (-1)^m\, m! \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{a^{mn}}{(1 + a^n x)^{m+1}}$$

$$F_{(o)} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$$

$$F_{(o)}^{(m)} = (-1)^m \, m! \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} a^{mn} = (-1)^m \, m! \, e^{-a^m}$$

e la serie (5) diverrà:

$$\sum_{n=o}^{\infty} (-1)^m e^{-a^m} x^m = \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{1}{e}\right)^{a^m} x^m \qquad (6)$$

Siccome $\dfrac{f_{(o)}^{(m)}}{m!} = (-1)^m \left(\dfrac{1}{e}\right)^{a^m}$,

si vede che la serie (6) converge sempre ed ha anzi raggio di convergenza infinito. La serie (6) converge dunque, ma non rappresenta il valore di F (x) in alcun contorno dell'origine. E infatti: Si prenda un intorno qualunque dell'origine e sia $-\dfrac{1}{a_r}$ un punto qualunque dei poli $-\dfrac{1}{a^n}$ in esso contenuti.

Per questo punto $-\dfrac{1}{a^r}$ la (5) diventa

$$F(x) = \infty$$

ed invece la (6)

$$\sum_{n=o}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{1}{e}\right)^{a^m} \left(-\frac{1}{a^r}\right)^m = \sum_{n=o}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{a^m} \frac{1}{a^{mr}}$$

che è un valore finito. Nominiamolo M e prendiamo una quantità positiva $\mu > |M|$. Si potrà trovare allora un intorno di $-\dfrac{1}{a^r}$ in tutti i punti del quale il modulo della serie (6) è minore di μ e il modulo della (5) maggiore di μ. Ma allora non potrà mai sussistere l'eguaglianza fra la (5) e la (6).

Questa esposizione del comportamento di un'espressione aritmetica sulla periferia del suo cerchio di convergenza è basata, con lievi modificazioni ed aggiunte, su ricerche fatte dal sig. Pringsheim (15) *) e deve servire quasi per introduzione al vero tema del trattato che ora verrò ad esporre.

---

*) Le cifre aggiunte nel testo si riferiscono ai numeri coi quali sono segnate le opere consultate nella lista bibliografica.

si vede che la serie [illegible] ha il suo cerchio di convergenza infinito. La serie [illegible] converge dunque, ma non rappresenta il valore di $F(x)$ in un intorno dell'origine [illegible] è infinito. Si prenda un intorno qualunque dell'origine [illegible]

Per questo punto [illegible] la [illegible] diventa

[illegible]

ed invece la serie

[illegible]

che è un valore finito. [illegible] una positiva [illegible] M [illegible] si potrà [illegible]

in tutti i punti del quale il modulo della serie [illegible] minore di [illegible] e il modulo della [illegible] di [illegible]. Ma allora non potrà mai sussistere l'eguaglianza fra le due [illegible].

Questa separazione del comportamento di un'espressione aritmetica sulla periferia del suo cerchio di convergenza e fuori [illegible]

II.

II

Si tratta ora di costruire una funzione molto generale *che esista soltanto all' interno o all' esterno di un dato campo del piano.*

Prendasi una successione di quantità reali o complesse

$$c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad c_n \quad . \quad . \quad .$$

tali, che la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left| c_n \right|$ sia convergente, e una serie

$$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad a_n \quad . \quad . \quad .$$

di quantità complesse differenti tra di loro, che rappresentino un insieme numerabile di punti. Sia poi m una grandezza finita non positiva. Osserviamo ora l' espressione:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (x - a_n)^m \tag{1}$$

Anzitutto dimostreremo che questa serie rappresenterà una funzione sviluppabile in una serie di potenze:

$$A_0 + A_1 \, (x - x_0) + A_2 \, (x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{h=0}^{\infty} A_h \, (x - x_0)^h \tag{2}$$

per tutti i valori o punti x_0 che non sono infinitamente vicini ai punti a_n.

Per determinare il raggio di convergenza di questa serie (2) potremo osservare anche la serie

$$\sum_{h=\nu}^{\infty} h! \binom{h}{\nu} A_h \, (x - x_0)^{h-\nu}$$

che rappresenta la funzione

$$\frac{d^{\nu} f(x)}{d x^{\nu}} = m \, (m-1) \ldots (m - \nu + 1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (x - a_n)^{m-\nu},$$

la quale avrà il medesimo raggio di convergenza come la (2). Ammettiamo ora che di tutte le differenze $x_0 - a_n$ una di queste (p. e. $x_0 - a_\nu$) sia la più piccola in valore assoluto, di modo che

$$\left| \frac{x_0 - a_n}{x_0 - a_\nu} \right| > 1 \text{ per } n \gtrless \nu$$

Senza compromettere la generalità della dimostrazione, si può prendere $\varepsilon = o$. Dimostreremo allora che $| a_0 - x_0 |$ è il vero raggio di convergenza della serie (2) o, con altre parole, che la serie (2) converge per tutti i valori $| x - x_0 | < | a_0 - x_0 |$. I valori di x dovranno dunque trovarsi sul seguente $(x_0 \ldots \ldots a_0)$, in modo che

$$\left| \frac{x - a_n}{x - a_0} \right| > 1 \text{ per } n = 1, 2, 3, \ldots \ldots$$

e da ciò

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left| c_n \left(\frac{x - a_n}{x - a_0} \right)^m \right| < \sum_{n=k}^{\infty} \left| c_n \right|$$

per qualunque valore di k.

Ora si potrà prendere k tanto grande che, per ipotesi,

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left| c_n \right| < \frac{\delta}{2}$$

e dunque anche

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left| c_n \left(\frac{x - a_n}{x - a_0} \right)^m \right| < \frac{\delta}{2}, \tag{3}$$

ove δ è una grandezza piccola presa ad arbitrio. Ora si potrà scegliere sulla retta $(x_0 \ldots a_0)$ un punto x' tanto vicino al punto a_0 che per tutti i punti i quali si trovano su $(x' \ldots a_0)$ sussisterà la relazione:

$$\sum_{n=1}^{k-1} \left| c_n \left(\frac{x - a_m}{x - a_0} \right)^m \right| < \frac{\delta}{2} \tag{4}$$

Dalla combinazione di (3) e (4) segue

$$\left| \sum_{n=1}^{k-1} c_n \left(\frac{x - a_n}{x - a_0} \right)^m + \sum_{n=k}^{\infty} c_n \left(\frac{x - a_n}{x - a_0} \right)^m \right| < \delta$$

o con altre parole

$$\left| \frac{f x}{(x - a_0)^m} - c_0 \right| < \delta \tag{5}$$

per tutti i valori di x nell' intervallo x! . . . a_0. Dunque

$$\lim_{x = a_0} \frac{f(x)}{(x - a_0)^m} = c_0 \tag{6}$$

Da ciò segue immediatamente che $| x_0 - a_0 |$ sarà il raggio di convergenza della funzione f(x). Perchè, se fosse il raggio di convergenza maggiore di $| x_0 - a_0 |$, la funzione $f(x)$ dovrebbe assumere per $x = a_0$ un valore finito, e allora $\lim\limits_{x=a_0} \frac{f(x)}{(x-a_0)^m}$ sarebbe eguale a zero, il che sta in contraddizione col risultato in (6) ottenuto poc' anzi.

Dunque il raggio di convergenza è $| x_0 - a_0 |$ o con altre parole, il punto x_0 dovrà trovarsi sulla periferia del campo di convergenza della serie (2).

Potremo dunque riassumere i risultati ottenuti enunciando il seguente teorema:

«Se x_0 non è un punto limite dell' assieme numerabile di punti $a_0 a_1 a_2 .... a_n$ e se $|a_\nu - x_0|$ è la più piccola delle differenze $| a_n - x_0 |$, se inoltre le grandezze $c_0\ c_1\ c_2 .....\ c_n ....$ formano una serie convergente, allora la funzione

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a_n)^m,$$

ove m non può essere positivo, si potrà sviluppare nella serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} A_h (x - x_0)^h,$$

che ha il raggio di convergenza $r = | a_\nu - x_0 |$. Dunque la funzione $f(x)$ sarà entro questo campo di convergenza una funzione regolare».

Questo teorema ci permetterà ora di costruire funzioni analitiche, che non hanno tutto il piano per campo d' esistenza, ma che esistono soltanto nell' interno o all' esterno di un campo dato e che sono dunque *«funzioni lacunari»*.

Prendiamo a questo scopo un campo C, il cui contorno sia una linea semplice convessa l, e un insieme numerabile di punti

$$a_0\ a_1\ a_2 \ldots\ldots a_n \ldots.$$

non appartenente a C e denso in ogni parte di l, in modo che in ogni parte, per quanto piccola, di l si trovi un numero infinito di punti a_n, mentre tutti gli altri si trovano all' esterno di C.

Allora risulta dal teorema precedente che la funzione $f(x)$ (1) esiste soltanto nell' interno di C. Ed infatti, in qualunque intorno di qualunque punto della curva l si troveranno punti x_0, che appartengono a C e che saranno più vicini ad uno dei punti a_n; allora $f(x)$ si potrà sviluppare in una serie secondo potenze di $(x-x_0)$, il cui campo di convergenza arriva soltanto fino alla curva l. Siccome questo vale per tutti i punti di l (giacchè l' insieme dei punti a_n è denso in ogni parte di l) la funzione $f(x)$ non sarà regolare in nessun punto di l e dunque non potrà esistervi una continuazione analitica di $f(x)$ oltre il campo C. *Questo campo C sarà dunque il «campo d' esistenza» della funzione $f(x)$ e perciò la funzione $f(x)$ una «funzione lacunare.»*

Questo teorema, dimostrato (9) da Lerch, rappresenta un caso molto generale di funzioni lacunari e da questo si possono dedurre moltissime funzioni lacunari quali casi speciali, che furono in gran parte trovati, indipendentemente da Lerch, da altri matematici. Di questi citerò un paio dei più interessanti.

Il primo di questi in ordine di tempo è quello dato da Poincaré (14) con propria dimostrazione, la quale però per noi è superflua, essendo la funzione trovata da Poincaré un caso speciale del teorema di Lerch per $m = -1$. Eccolo:

Prendasi una serie di quantità reali o complesse $c_1\, c_2 \ldots c_n \ldots$, tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} | c_n |$$

sia convergente, ed un insieme numerabile di punti $a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots$, appartenente a un dato campo C (il contorno incluso) e denso in ogni parte di questo. Allora l' espressione

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{x - a_n} \tag{7}$$

rappresenterà una funzione analitica esistente in tutto il piano, ad eccezione del campo C, il quale sarà dunque una lacuna per questa.

Ecco alcuni esempî per la funzione (7):

Si ponga

$$F(x) = \sum \frac{u_1^{m_1}\, u_2^{m_2} \ldots u_p^{m_p}}{x - \dfrac{m_1\, \alpha_1 + m_2\, \alpha_2 + \ldots + m_p\, \alpha_p}{m_1 + m_2 + \ldots + m_p}} \tag{8}$$

e si ammetta che

1. $u_1\, u_2 \ldots u_p$ sieno p quantità costanti di modulo < 1
2. $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_p$ sieno quantità costanti qualunque
3. $m_1\, m_2, \ldots m_p$ prendano tutti i valori interi non negativi, esclusa la combinazione o, o, ..., o. Distribuiremo ora i punti α nel modo seguente: Tutti i punti α si trovano o sui vertici o sul perimetro o nell' interno di un poligono convesso P.

Allora la (8) rappresenta una funzione regolare che esiste soltanto all' esterno di P. Giacchè in conseguenza dell' ipotesi: la serie $\sum \left| u_1^{m_1}\, u_2^{m_2} \ldots u_p^{m_p} \right|$ è convergente, tutti i punti $\dfrac{m_1\, \alpha_1 + m_2\, \alpha_2 + \ldots + m_n\, \alpha_p}{m_1 + m_2 + \ldots + m_p}$ si trovano o sul perimetro o nell'interno di P e sono densi in ogni parte del perimetro di P. E infatti: se si prende un segmento $\alpha_1 \alpha_2$ (p. e. un lato) del poligono, si potranno scegliere i numeri interi e positivi m_1 e m_2 in un numero infinito di combinazioni in modo che il punto $\dfrac{m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2}{m_1 + m_2}$ si trovi sul segmento $\alpha_1 \alpha_2$.

L' espressione (8) ha dunque tutte le qualità volute per essere una funzione lacunare esistente soltanto all' esterno di P.

Nel caso $p = 3$ il poligono $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ diventa un triangolo. Nel caso $p = 2$ la funzione avrà una linea singolare o sezione, cioè il segmento $\alpha_1 \alpha_2$. — Si potrà p. e. costruire una funzione, che abbia per sezione la parte negativa dell' asse reale. Prendiamo

$$F(x) = \sum \frac{u_1^{m_1} u_2^{m_2}}{x - \dfrac{m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2}{m_1 + m_2}}$$

e si faccia la sostituzione lineare

$$y = \frac{x - \alpha_1}{x - \alpha_2}$$

e dunque

$$x = \frac{\alpha_2 y - \alpha_1}{y - 1}$$

Allora ai valori α_1 e α_2 di x corrisponderanno rispettivamente i valori o e ∞ di y e ai valori fra α_1 e α_2, valori negativi di y.

Si avrà allora:

$$F(x) = f(y) = \sum \frac{u_1^{m_1} u_2^{m_2}}{\dfrac{\alpha_2 y - \alpha_1}{y - 1} - \dfrac{m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2}{m_1 + m_2}}$$

$$= \frac{y - 1}{\alpha_2 - \alpha_1} \sum \frac{u_1^{m_1} u_2^{m_2}}{m_1 y + m_2}$$

Invece della funzione f(y) si potrà prendere la funzione

$$\varphi(y) = \sum \frac{u_1^{m_1} + u_2^{m_2}}{m_1 y + m_2}$$

Se si fa $u_1 = u_2 = \dfrac{1}{e}$ si ha il caso speciale

$$\psi(y) = \sum \frac{e^{-m_1 - m_2}}{m_1 y + m_2}$$

Altri casi speciali del teorema generale di Lerch per $m = -1$ sono i seguenti dati da Goursat. (5, 7). Egli prende l' espressione

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n\, a_n}{a_n - x},$$

ove le grandezze c_n formano una serie convergente

$$c_1, c_2, c_3 \ldots \ldots c_n \ldots \ldots,$$

mentre le a_n formano una serie di punti

$$a_1\, a_2\, a_3 \ldots \ldots a_n \ldots \ldots,$$

i quali si trovano tutti densi su ogni segmento finito di un dato numero di curve $C_1, C_2, C_3, \ldots$ Allora l' espressione suddetta $F(x)$ *) rappresenta una funzione analitica, la quale esiste per tutti i punti x che non si trovano su queste curve C. Se queste curve sono soltanto archi di curve non chiuse allora esse formeranno altrettante *«linee singolari»* o *«sezioni»* della funzione.

Se invece una o più di queste curve formeranno linee chiuse, allora avremo *una espressione la quale rappresenta più funzioni e cioè, funzioni le quali esistono soltanto all' interno di queste curve, mentre lo spazio esterno sarà uno spazio lacunare per esse, e funzioni che esistono soltanto all' esterno delle curve date, mentre le aree interne di queste saranno per esse spazi lacunari.* Abbiamo dunque qui l' esempio classico di un' espressione la quale in *differenti campi rappresenta funzioni differenti.* Di questi esempi ne esistono ancor molti e furono dati per la prima volta da Weierstrass. Siccome essi hanno suscitato la questione, se si debba o meno trattare queste funzioni come continuazioni analitiche le une delle altre, mi riservo di parlare di queste nella terza parte di questo lavoro, enumerando in questa occasione anche gli altri esempi trovati di questa specie.

Un esempio speciale della funzione nominata da Goursat è quella data da Stieltjes (17), ove i punti

$$|a_1| = |a_2| = \ldots\ldots = |a_n| = \ldots = 1$$

si trovano tutti sulla periferia del cerchio col centro nel punto $x = o$ e col raggio $r = 1$ e ove $c_n = \frac{1}{n^3}$.

La serie di Stieltjes è:

---

*) Qui invece di prendere l' espressione $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{a_n - x}$ fu presa la $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n\, a_n}{a_n - x}$, ma basta dividerla per a_n per ottenere $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{1 - \frac{x}{a_n}}$ ed allora avremo il caso generale, perchè essa esisterà soltanto per tutti quei punti x, per i quali $\frac{x}{a_n} \neq 1$ ovvero $\neq a_n$, dunque per tutti quei punti che non si avvicinano infinitamente ai punti a_n.

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left(\frac{x}{a_n - x}\right)$$

Si può anche scrivere

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left(\frac{x - a_n + a_n}{a_n - x}\right) =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \frac{a_n}{a_n - x}$$

ed ora abbiamo la serie di Goursat.

Questa sarà dunque una funzione che esiste soltanto nell' interno del cerchio suddetto.

Ritorniamo ora all' espressione

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{a_n - x} = F(x)$$

della pagina 22.

Rappresenterà la espressione F(x) una funzione lacunare, se i punti a_n non si troveranno densi su ogni parte del contorno l di C, ma se invece tutti i punti di l saranno punti limiti degli a_n?.

Questo succede p. e. prendendo

$$a_n = e^{\frac{1}{n} + 2n\varepsilon\pi i} \quad \text{per } n = 1, 2, 3 \ldots .$$

e ove ε è un numero irrazionale. Allora la periferia del cerchio col raggio 1, dunque del cerchio d' unità, non conterrà verun punto a_n, ma tutti i punti di essa saranno punti limiti degli a_n, che si trovano tutti all' esterno del cerchio.

Qui non si potrà applicare il teorema di Lerch, giacchè non vi esiste una differenza $|x_0 - a_n|$ la quale sarà più piccola di qualunque altra. E infatti, ammesso che ciò sia possibile, per il punto a_α di modo che

$$|x_0 - a_\alpha| < |x_0 - a_n| \text{ per } n = 1, 2 \ldots \alpha - 1, \alpha + 1, \ldots n \ldots,$$

nel cerchio col centro in x_0 e di raggio $|x_0 - a_\alpha|$ non dovrebbe trovarsi alcun punto dell' insieme a_n, ma allora i punti del contorno l che si trovano entro questo cerchio non potrebbero essere più punti limiti degli a_n, il che contradice all' ipotesi. Eppure anche in questo caso la funzione F(x) non esiste all' esterno del cerchio d' unità. Dimostreremo questo seguendo un metodo indicato da Pringsheim (15).

In questo caso generalmente si avrà una funzione la quale nell' interno e sulla circonferenza di un dato campo — p. e.

del cerchio di unità — sarà determinata e finita assieme a tutte le sue derivate d'ordine finito, senza poter svilupparla in una serie di potenze nei punti della periferia del campo.

Essa perciò non sarà continuabile oltre il contorno del campo. Questo caso non sarà altro dunque che la generalizzazione del secondo teorema annunciato a pagina 11 per un punto singolare.

Si prenda un insieme numerabile di punti a_n, i quali si trovano tutti fuori del cerchio d'unità, ma per i quali i punti della periferia del cerchio sono punti limiti.

Allora si avrà per ogni n di valore finito

$$|a_n| > 1$$

e per $n = \infty$

$$\lim |a_n| = 1. —$$

Se per caso anche punti fuori del cerchio sono punti limiti degli a_n, allora non si avrà sempre $\lim |a_n| = 1$ per $n = \infty$, ma questo limite sarà indeterminato ed il suo minimo valore sarà invece $= 1$. — I punti c_n debbono sodisfare alla solita condizione che

$$\sum |c_n| \text{ sia convergente.}$$

Allora la funzione F (x) sarà in ogni caso regolare nell' interno del cerchio e potrà dunque esser sviluppata nella serie convergente:

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m x^m \text{ ove } A_m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{a_n^{m+1}} \tag{10}$$

Però si potrà dimostrare che tanto la funzione F (x) quanto la serie (10) sono equiconvergenti anche sulla periferia del cerchio d'unità.

Se $x < 1$ si ha

$$|a_n - x| > |a_n| - |x| > |a_n| - 1$$

Dunque per i punti x sulla periferia

$$\left| \frac{|a_n| - 1}{a_n - x} \right| < 1$$

Si prenda ora la serie c_n in modo che

$$c_n = (|a_n| - 1)\, c_n'.$$

ove c_n' sono i termini di una serie assolutamente convergente.

Sarà allora $c_n' = \dfrac{c_n}{|a_n| - 1}$ e dunque $\sum \dfrac{|c_n|}{|a_n| - 1}$ sarà anche convergente. Si vede intanto che la funzione F (x) sarà convergente sulla periferia del cerchio d'unità. Ma anche la serie di potenze (10) lo sarà, perchè si ha

$$\sum_{m=o}^{\infty} \left| A_m x^m \right|_{|x|=1} = \sum_{m=o}^{\infty} \left| \sum_{n=o}^{\infty} \frac{c_n}{a_n^{m+1}} \right|$$

$$< \sum_{m=o}^{\infty} | c_n | \sum_{n=o}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|^{m+1} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{| c_n |}{| a_n | - 1}$$

Le derivate d' ordine r della funzione F(x) e della serie (10) sono:

$$F^{(r)}_{(x)} = r! \sum_{n=o}^{\infty} \frac{c_n}{(a_n - x)^{r+1}} = \sum_{m=r}^{\infty} m(m-1) \ldots (m-r+1) A_m x^{m-r}$$

Queste derivate sono anzitutto equiconvergenti nell' interno del cerchio, ma lo saranno anche sulla periferia. Ed ecco la dimostrazione:

Basta far sì che la serie $\sum \frac{| c_n |}{(|a_n| - 1)^{r+1}}$ sia convergente e questo si ottiene, se si pone

$c_n = (|a_n| - 1)^{r+1} c'_n$ ove $\sum (c_n')$ converge, nel caso che senz'altro $\lim | a_n | = 1$, oppure $c_n = \left(\frac{| a_n | - 1}{a_n} \right)^{r+1} c'_n$ nel caso secondo che il valore limite minimo a cui tende a_n per $n = \infty$ sia $= 1$.

Allora la $F^{(r)}_{(x)}$ risulta da sè equiconvergente per $x = 1$. Ma lo stesso vale per la derivata r^{esima} della serie (10). Giacchè si ha:

$$\sum_{m=r}^{\infty} m (m-1) \ldots (m-r+1) | A_m | \leq$$

$$\leq \sum_{m=r}^{\infty} m (m-1) \ldots (m-r+1) \sum_{n=o}^{\infty} \frac{| c_n |}{| a_n |^{m+1}} \leq$$

$$\leq \sum_{n=o}^{\infty} c_n \left| \frac{1}{a_n} \right|^{r+1} \sum_{m=o}^{\infty} (m+1)(m+2) \ldots (m+n) \left| \frac{1}{a_n} \right|^{m} =$$

$$= r! \sum_{n=o}^{\infty} \frac{|c_n|}{(|a_n|-1)^{r+1}};$$ ma questa serie converge per la suddetta ipotesi.

La scelta delle quantità c_n era legata alla condizione di far convergere la serie:

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{|c_n|}{(|a_n|-1)^r} \tag{11}$$

per qualunque valore di r da r = 1 fino a un valore finito.

Però si dimostra facilmente che si può fissare la serie c_n in modo che, per qualunque valore di r da r = 1 in poi, la serie (11) sia convergente.

Nel caso ove per $n = \infty \lim |a_n| = 1$ (cioè per tutti gli insieme di punti, i quali non hanno altri punti limiti che quelli giacenti sulla periferia del cerchio di unità), basta porre $c_n = (|a_n| - 1)^n b_n$ ove i b_n sono grandezze a piacere i cui moduli sono minori di un numero dato N.

Allora si ha:

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{|c_n|}{(|a_n|-1)^r} = \sum_{n=o}^{\infty} |b_n| (|a_n| - 1)^{n-r}$$

e da qui:

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{|c_n|}{(|a_n|-1)^r} = \sum_{n=o}^{\infty} |b_{r+n}| (|a_{r+n}| - 1)^n$$

$$< N. \sum_{n=o}^{\infty} |a_{r+n}| - 1)^n \tag{12}$$

Ora per l'ipotesi fatta $\lim |a_n| = 1$ si ha: $\lim (|a_n| - 1) = o$ e dunque la somma in (12) converge da un dato valore in poi.

Se invece la serie dei punti a_n ha punti limiti anche fuori del cerchio e dunque soltanto il limite inferiore di $|a_n|$ per $n = \infty$ sarà = 1, allora basta mettere in luogo di b_n i valori $\frac{b_n}{(a_n)^n}$ sempre colla condizione che i $|b_n| < N$. Nel caso che anche il punto ∞ è un valore limite degli a_n, allora per i b_n si dovrà scegliere una serie assolutamente convergente.

Si potrà dunque in diversi modi determinare la serie dei c_n che corrispondono ai nostri bisogni.

Segue dunque il teorema:

Se l' insieme numerabile di punti a_n si trova fuori del cerchio d' unità e possiede sulla periferia di questo dei punti limiti, si potrà in diversi modi formare delle serie di c_n di modo che le espressioni

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{a_n - x} \quad \text{e} \quad \overset{(r)}{F(x)} = r! \sum_{r=0}^{\infty} \frac{c_n}{(a_n - x)^{r+1}}$$

sono equiconvergenti nell' interno e sulla periferia del cerchio e potranno esser sviluppate per tutti i punti dell' interno e della periferia nelle serie di potenze equiconvergenti:

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m x^m \qquad F^{(r)}_{(x)} = \sum_{m=r}^{\infty} m(m-1)\ldots(m-r+1) A_m x^{m-r}$$

$$\text{ove } A_m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{a_n^{m+1}}$$

Per esaminare ora le proprietà della funzione stessa nei punti limiti degli a_n che chiameremo α_n, e la sua continuabilità analitica oltre la periferia del cerchio, prenderemo intanto uno di questi punti, p. e. α_1. — Se questo punto fosse uno appartenente all' insieme dei punti a_n, allora per il teorema di Lerch, questo dovrebbe esser un punto singolare per la funzione F(x). Ma si può facilmente dedurre che anche ogni punto α_n dovrà esser un punto singolare di questa funzione.

E infatti: se la funzione F(x) fosse regolare nel punto α_1, essa lo dovrebbe esser anche per tutti i punti in un certo intorno di α_1. Ma ciò non è possibile, giacchè per le supposizioni fatte, in qualunque contorno di α_1 devono trovarsi sempre punti dell' insieme a_n e dunque punti singolari della funzione. Ora se questi punti α_r saranno densi su tutta la periferia del cerchio d' unità, risulta che tutti questi saranno punti singolari della funzione F(x) e questa perciò *non sarà continuabile oltre la periferia* del cerchio di unità.

Dalle esposizioni fatte a pagina 27 si vede però anche facilmente, che le considerazioni fatte per la funzione

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{a_n - x}$$ avranno valore anche per la funzione

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a_n)^m, \text{ ove } m \text{ non è un numero positivo.}$$

Dunque per la funzione $\Phi(x)$ si potrà ripetere il medesimo teorema come per la $F(x)$ e ne segue, che *il teorema di Lerch espresso a pagina 21 avrà valore anche per il caso ove sulla periferia del cerchio di convergenza non si trovi un insieme di punti singolari, ma un insieme di punti limiti di questi, denso in ogni parte della periferia.*

E con ciò il teorema di Lerch acquista una forma ancora più generale.

Per dare degli esempî di tali funzioni si potrà prendere per i punti a_n l' insieme di punti già nominato a pagina 25: $a_n = e^{\frac{1}{n} + 2n\alpha\pi i}$ ove α è un numero irrazionale. Oppure più generalmente: $a_n = p_n \cdot \varepsilon^n$ ove $p_n > 1$, $\lim\limits_{n=\infty} p_n = 1$, $e\ \varepsilon = e^{\alpha\pi i}$ (α = numero irrazionale); per p_n si potranno prendere i valori $p_n = 1 + \frac{1}{n+1}$, $p_n = 1 + e^{-n}$, $p_n = e^{\frac{1}{n}}$. —

La funzione $F(x)$ diventa allora

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p_n \cdot \varepsilon^n - x}$$

Per c_n si pone p. e. $c_n = (p_n - 1)^n$ che formerà in ogni caso una serie convergente, come lo richiede il risultato ottenuto in (12) a pagina 28.

In tutti questi casi gli a_n avranno soltanto sulla periferia del cerchio d' unità dei punti limiti, mentre questi non esisteranno più all' infuori del cerchio.

Per ottenere invece un' insieme di punti a_n che abbia punti limiti anche fuori del cerchio oltre che sulla periferia si metta

$c_{m,n} = p_m \varepsilon^n$ ove di nuovo $p_m = 1 + \frac{1}{m}$ oppure $p_m = e^{\frac{1}{m}}$, $p_m = e^{-m}$ ed $= e^{2\alpha\pi i}$ (α è numero irrazionale)

Si formi allora la funzione:

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{m,n}}{p_m \varepsilon^n - x}$$

e si prenda $c_{m,n} = b^{m+n}$) $b < 1$

Si avrà:
$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^{m+n}}{p_m \varepsilon^n - x}$$

o trasformando F(x) in una serie di potenze: $F(x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^r$
ove

$$A_r = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^{m+n}}{(p_m\, \varepsilon^n)^{r+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b^m}{p_m^{\,r+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\varepsilon^{(r+1)n}}$$

$$= \frac{b}{\varepsilon^{r+1} - b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b^m}{p_m^{\,r+1}}$$

Allora la funzione F(x) e tutte le sue derivate di ordine finito saranno equiconvergenti nell' interno del cerchio d' unità e sulla periferia, ma questa sarà una linea singolare, oltre la quale la funzione F(x) non sarà continuabile.

Il campo di convergenza della funzione si estende però anche all' esterno del cerchio di unità fino alla periferia del cerchio col raggio p_1, da qui fino a quella col raggio p_2 e in generale consiste di un numero infinito di anelli di cerchi concentrici limitati dai raggi p_m e p_{m+1}, colla differenza però, che su tutte le altre periferie, meno la prima, la F(x) diverge. In tutti questi anelli circolari la F(x) rappresenta funzioni differenti, le quali non stanno in veruna dipendenza «analitica» fra di loro; e *qui abbiamo un secondo esempio di espressioni, le quali, come quelle esposte a pagina 24, in campi differenti rappresentano differenti funzioni.*

Un altro teorema molto generale, che ci fornirà molti gruppi di funzioni lacunari e che fu anche dato da Lerch (9), è il seguente.

Siano $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ $P_3(x)$ . . . . funzioni analitiche o regolari nell' interno del cerchio d' unità, le quali hanno sulla periferia dello stesso non più di un polo $(x) = 1$ e siano m_0, m_1, m_2 . . . . . m_n . . . . . numeri interi positivi, dei quali ogni singolo è un divisore di tutti i susseguenti.

Se allora l' espressione

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(x^{m_n}\right) \tag{13}$$

converge per tutti i punti all' interno del cerchio di unità e si lascia sviluppare in una serie di potenze, e se ancora per un numero infinito di valori r per tutti gli (x) < 1

$$\lim_{\text{per } x = 1} \sum_{n=r}^{\infty} P_n \left(x^{m_n} \right) = \infty,$$

allora la espressione (13) rappresenta una funzione F(x) che esiste soltanto nell' interno del cerchio di unità.

Ciò si dimostra indirettamente. Ammettiamo che la funzione F(x) sia regolare in un contorno di un punto qualunque $x = t$ della periferia del cerchio d' unità. Allora essa dovrebbe assumere un valore finito per tutti i punti che si trovano in questo contorno di $x = t$. Ma ciò è impossibile. E infatti: Si sceglie il valore r in modo, che almeno una radice dell' equazione $x^{m_r} = 1$ rappresenti un punto che cada nel contorno di t e si nomina questa radice con $x_0 = e^{\frac{2a\pi i}{m_r}}$ ove ,a' è un numero primo ralativo rispetto a m_r.

Prendiamo ora un numero α che sia una frazione propria positiva e poniamo

$$x = e^{\frac{2a\pi i}{m_r} - \alpha} = x_0 e^{-\alpha},$$

allora si avrà

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \left(x^{m_n} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{r-1} P_n \left[e^{m_n \left(\frac{2a i\pi}{m_r} - \alpha \right)} \right] + \sum_{n=r}^{\infty} P_n \left(x_0^{m_n} e^{-m_n} \right)$$

Ma per ipotesi è

$$\lim_{\alpha = 0} \sum_{n=r}^{\infty} P_n \left(e^{-\alpha m_n} \right) = \infty$$

e per la scelta di x_0 i primi r termini della (2) sono tutti finiti. Da ciò risulta che

$$\lim_{x = x_0} F(x) = \lim_{\alpha = 0} F\left(x_0 e^{-a} \right) = \infty$$

Dunque la supposizione è assurda e perciò la funzione esisterà soltanto all' interno del cerchio di unità.

Ed ora ecco un paio di casi speciali per questo teorema:

Si prenda $P_n(x) = c_n x$ e si ammetta che per le parti reali γ_n delle grandezze c_n sussista la relazione

$$\lim_{n=\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = +\infty.$$

Se la serie

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{m_n}$ converge per tutti gli $|x| < 1$, si avrà:

$$\lim_{x=1} \sum_{n=r}^{\infty} \gamma_n x^{m_n} = +\infty$$

e da ciò

$$\lim_{x=1} \sum_{n=r}^{\infty} c_n x^{m_n} = \infty.$$

Dunque sono sodisfatte tutte le condizioni necessarie per applicare il teorema di Lerch e la funzione rappresentata dalla serie sunnominata esisterà soltanto nell' interno del cerchio d' unità.

Se si pone $c_1 = c_2 = c_3 \ldots \ldots c_n = 1$ si avrà

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{m_n}$. Questa proprietà hanno p. e. le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}.$$

Questo teorema serve però anche a dimostrare, come osservò già Pringsheim, che il caso più generale per le serie di potenze è quello, in cui tutti i punti della circonferenza di convergenza sono singolari.

Prendasi la serie di potenze

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

il cui raggio di convergenza sia 1, e i cui coefficienti sieno reali e positivi. Scomponiamo ora la serie $P(x)$ in due serie $P(x) = Q(x) + R(x)$ di modo che la $Q(x)$ sia formata soltanto dai termini ove gli esponenti della variabile $m_1, m_2, m_3 \ldots\ldots$ sieno ognuno un multiplo del precedente, e ove i coefficienti

$a_{m_1}, a_{m_2}, a_{m_3} \ldots$ formino la serie $\sum_{r=1}^{\infty} a_{m_r} = \infty$. Dunque

$$P(x) = Q(x) + R(x) = \sum_{r=1}^{\infty} a_{m_r} x^{m_r} + R(x).$$

Allora tutti i punti della periferia del cerchio di convergenza della P(x) saranno punti singolari di Q(x). Ora, affinchè la P(x) abbia un insieme non denso di punti singolari sulla periferia del cerchio, bisogna che i punti singolari della R(x) distruggano una parte dei punti singolari della Q(x). Ma allora tra i coefficienti delle due serie e dunque tra i coefficienti della serie P(x) dovranno sussistere delle relazioni. Se invece questi saranno tra loro affatto indipendenti, la serie non sarà continuabile oltre la periferia del cerchio di convergenza. Ed altrettanto vale naturalmente anche per la funzione, che questa serie P(x) rappresenta nell'interno del cerchio. Si vede dunque che le « funzioni lacunari » sono il caso più generale delle funzioni analitiche, e che invece le funzioni esistenti per tutto il piano, e generalmente conosciute, sono appena eccezioni alla regola.

Oltre ai gruppi e agli esempi di funzioni lacunari citati in questo riassunto, ne esistono molti altri ancora. Così sono fra i più noti: quello scoperto da Fredholm (12) che è il primo in ordine di tempo, le funzioni cosidette fuchsiane trattate da Poincaré (13), ecc. Non mi dilungo però a esaminarli tutti, perchè ciò non era il compito di questo lavoro. Basta per noi di aver dimostrato, che vi esistono in realtà « funzioni lacunari » e di aver imparato a conoscere i più importanti gruppi di queste funzioni.

III.

Passiamo ora a trattare quelle espressioni aritmetiche, le quali non hanno un campo di convergenza *connesso*, ma sono equiconvergenti in *più campi separati* del piano.

Di queste espressioni aritmetiche abbiamo parlato già prima ed abbiamo citato anche degli esempi, i quali dimostrano la possibilità dell'esistenza di tali espressioni. Queste rappresenteranno dunque nei differenti campi non connessi differenti funzioni analitiche. Ora si presenta una questione importante. *Esiste o no una relazione fra queste differenti funzioni analitiche rappresentate nei campi differenti dalla medesima espressione aritmetica?*

Prima di rispondere a questa domanda, costruiremo una espressione aritmetica che rappresenterà nei «n» campi differenti C_1, C_2, C_3, ... C_n le funzioni differenti date ad arbitrio $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$...... $f_n(x)$. Ed allora la risposta alla domanda fatta risulterà da sè.

Il primo esempio di questa specie in forma molto generale fu dato da Weierstrass. (20) L'espressione di Weierstrass è però abbastanza complicata e più ancora lo sono le deduzioni necessarie per dimostrare le proprietà caratteristiche di questa. Siccome questo esempio viene superato per semplicità da altri posteriori, che servono egualmente al nostro scopo, noi ci limiteremo ad esporre questi soltanto.

Weierstrass stesso comunica poco dopo la sua pubblicazione del sunnominato primo esempio la seguente espressione trovata da J. Tannery (21):

$\dfrac{1+x^{m_n}}{1-x^{m_n}}$ ove i m_n formano una serie infinita di numeri positivi m_0, m_1, m_2 .... tali, che $\lim\limits_{n=\infty} m_n = \infty$ ed x è una variabile complessa.

Allora

$$\varphi(x) = \lim_{n=\infty} \frac{1+x^{m_n}}{1-x^{m_n}} = \begin{cases} +1 & \text{se } |x| < 1 \\ -1 & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

Per $|x| = 1$ invece la $\varphi(x)$ assume un valore indeterminato.

Ora si può scrivere:

$$\varphi(x)=\frac{\frac{m_0}{1+x}}{\frac{m_0}{1-x}}-\left(\frac{\frac{m_1}{1+x}}{\frac{m_1}{1-x}}-\frac{\frac{m_0}{1+x}}{\frac{m_0}{1-x}}\right)-\left(\frac{\frac{m_2}{1+x}}{\frac{m_2}{1+x}}-\frac{\frac{m_1}{1+x}}{\frac{m_1}{1+x}}\right)+\text{in inf.}$$

oppure

$$\varphi(x)=\frac{\frac{m_0}{1+x}}{\frac{m_0}{1-x}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\frac{m_n}{1+x}}{\frac{m_n}{1-x}}-\frac{\frac{m_{n-1}}{1+x}}{\frac{m_{n-1}}{1-x}}\right)$$

$$\varphi(x)=\frac{\frac{m_0}{1+x}}{\frac{m_0}{1-x}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^{m_{n-1}}\left(x^{m_n-m_{n-1}}-1\right)}{\left(x^{m_n}-1\right)\left(x^{m_{n-1}}-1\right)}$$

Questa serie converge dunque per ogni valore di $|x|$ differente da 1 ed assume i valori

$$\varphi(x)=+1 \quad \text{per } |x|<1$$
$$\varphi(x)=-1 \quad \text{per } |x|>1$$

Ed essa è per questi valori evidentemente equiconvergente.

Ora si prenda un cerchio C_1 con raggio r_1 e si denomini con C_2 tutto il campo rimanente del piano esterno al cerchio C_1. Siano poi $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due funzioni date ad arbitrio e ci prefiggiamo il compito di formare un' espressione aritmetica, che rappresenti nell' interno di C_1 la funzione $f_1(x)$ e nel campo C_2 la funzione $f_2(x)$. Adopreremo a questo scopo la serie di Tannery $\varphi(x)$ nel modo seguente.

Sia a_1 il centro di C_1 e prendiamo la serie $\varphi\left(\frac{x-a_1}{r_1}\right)$. Si avrà:

$$\varphi\left(\frac{x-a_1}{r_1}\right)=\begin{cases}+1 & \text{per } |x-a_1|<r_1\\ -1 & \text{per } |x-a_1|>r_1\end{cases}$$

Allora l'espressione:

$$F(x)=\frac{1+\varphi\left(\frac{x-a_1}{r_1}\right)}{2}f_1(x)-\frac{\varphi\left(\frac{x-a_1}{r_1}\right)-1}{2}f_2(x)$$

avrà le proprietà volute.

Giacchè si avrà per l' interno di C_1, dunque per $|x-a_1|<r_1$,

$$F(x)=f_1(x)$$

e per l'esterno di C_2 o per $|x-a_1|>r_1$.

$$F(x)=f_2(x)$$

Si potrebbe in generale costruire mediante la serie di Tannery un'espressione aritmetica, che rappresenti in cerchi separati n funzioni differenti qualunque. Ora potremo raggiungere il medesimo risultato con una serie ancora più semplice di quella di Tannery e perciò preferiremo di occuparci di questa.

Pringsheim (16) cita la seguente espressione nominata per la prima volta da Seidl *), se anche senza comprendere l'importanza di questa.

$$\psi(x) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{1+x^n} = \begin{cases} 1 \text{ per } |x| < 1 \\ 0 \text{ per } |x| > 1 \end{cases}$$

Ora si può scrivere:

$$\psi(x) = \frac{1}{1-x} + \left(\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1-x}\right) + \left(\frac{1}{1-x^4} - \frac{1}{1-x^2}\right) + \ldots \text{in inf.}$$

$$= \frac{1}{1-x} + \frac{x}{x^2-1} + \frac{x^2}{x^4-1} + \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

Oppure

$$\psi(x) = \frac{1}{1-x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^{n-1}}}{x^{2^n}-1}$$

Ora, per mezzo di questa serie dovremo costruire una espressione, che rappresenti nell'interno di n cerchi dati e separati $C_1, C_2, C_3 \ldots\ldots C_m$ le funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x) \ldots\ldots f_m(x)$ e nel campo rimanente del piano esterno a tutti i cerchi C la funzione $f_{m+1}(x)$, ove tutte le $f(x)$ sono funzioni analitiche uniformi arbitrarie e con un numero finito di punti singolari.

Denominiamo con $r_1, r_2, r_3 \ldots r_m$ i raggi e con $a_1, a_2, a_3 \ldots a_m$ i centri dei cerchi suddetti e costruiamo l'espressione:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{m} \psi\left(\frac{x-a_k}{r_k}\right) f_k(x) + \left[1 - \sum_{k=1}^{m} \psi\left(\frac{x-a_k}{r_k}\right)\right] f_{m+1}(x) \tag{14}$$

Questa sarà la serie cercata.
Giacchè si ha

$$\psi\left(\frac{x-a_k}{r_k}\right) = \begin{cases} 1 \text{ per } |x-a_k| < r_k \\ 0 \text{ per } |x-a_k| > r_k \end{cases} \quad \text{e invece}$$

$$1-\psi\left(\frac{x-a_k}{r_k}\right) = \begin{cases} 0 \text{ per } |x-a_k| < r_k \\ 1 \text{ per } |x-a_k| > r_k \end{cases}$$

Allora l'espressione (14) avrà le proprietà volute.

Se invece i cerchi C non sono tutti separati gli uni dagli altri si dovrà procedere altrimenti. — Prendiamo di nuovo il caso più generale, ove ogni cerchio susseguente C_k copra l'area dell'antecedente e sia di raggio maggiore di questo. Allora il piano sarà diviso nel campo circolare del primo cerchio C_k,

*) Vedi Crelle's Journal Tom. 73.

nei $(m-1)$ campi assomiglianti ad altrettanti anelli circolari e corrispondenti alle aree determinate da: (C_2-C_1), $C_3-C_2)$ . . . . (C_m-C_{m-1}) e nel campo esterno al cerchio ultimo e massimo C_m.

Allora

$$\psi\left(\frac{x-a_1}{r_1}\right)=1 \text{ per } |x-a_1|<r_1$$

ovvero nell'interno di C_1

$$\psi\left(\frac{x-a_k}{r_k}\right)-\psi\left(\frac{x-a_{k-1}}{r_{k-1}}\right)=1 \quad \begin{array}{l}\text{per } |x-a_{k-1}|>r_{k-1}\\ \text{e } |x-a_k|<r_k\end{array}$$

ovvero nell'interno di C_k-C_{k-1}

$$1-\psi\left(\frac{x-a_m}{r_m}\right)=1 \text{ per } |x-a_m|>r_m$$

ovvero nel campo all'esterno di C_m.

Si formi ora l'espressione:

$$F(x)=\psi\left(\frac{x-a_1}{r_1}\right)f_1(x)+\sum_{k=1}^{m-1}\left|\psi\left(\frac{x-a_{k+1}}{r_{k+1}}\right)-\right.$$

$$\left.-\psi\left(\frac{x-a_k}{r_k}\right)\right]f_{k+1}(x)+$$

$$+\left[1-\psi\left(\frac{x-a_n}{r_n}\right)\right]f_{m+1}(x)$$

oppure

$$F(x)=f_{m+1}(x)+\sum_{k=1}^{m}\psi\left(\frac{x-a_k}{r_k}\right)\left[f_k(x)-f_{k-1}(x)\right]$$

Questa espressione rappresenta nei $(n+1)$ campi sunnominati le funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ . . . . . $f_{m+1}(x)$.

Se invece di cerchi sono date delle curve algebriche di qualunque specie, basterà sostituire alla variabile x una funzione razionale corrispondente di x. Soltanto non devono tagliarsi le curve che formano il contorno del campo. *Abbiamo dato dunque per un caso assai generale un' espressione, che in campi differenti rappresenta funzioni analitiche date ad arbitrio.*

E basta questo fatto per rispondere ora alla domanda fatta poc' anzi. *Essendo le funzioni analitiche del tutto arbitrarie, non sarà necessaria nessuna relazione tra una e l' altra; esse potranno essere del tutto indipendenti e perciò non* *si potrà considerare l' una come continuazione analitica dell' altra.*

Altri esempi diede Lerch *) in forma di frazioni continue, i cui termini sono funzioni razionali.

Al medesimo risultato, espresso per la prima volta da Weierstrass, arrivò anche Poincaré. Egli divide il campo delle variabili complesse in due parti per mezzo dell' asse reale e costruisce un' espressione, la quale rappresenti nella parte del piano superiore all' asse reale una funzione analitica qualunque $f_1(x)$, regolare soltanto in questa parte del piano e nella parte inferiore la funzione analitica arbitraria $f_2(x)$, la quale a sua volta è soltanto regolare per la parte inferiore. A questo scopo egli divide l' asse reale in due sezioni e cioè nel segmento $x = -1$ fino $x = +1$ e nei segmenti $x = -\infty, -1$, e $x = +1, +\infty$ e forma una funzione $\Phi(x)$ che ha per sezione il primo segmento ed una $\psi(x)$ che invece non esiste lungo gli altri due. Queste due funzioni Φ e ψ sono tali poi che

$\Phi(x) + \psi(x) = f_1(x)$ per la parte superiore del piano

$\Phi(x) + \psi(x) = f_2(x)$ » » » inferiore » »

Siccome la medesima espressione $\Phi(x) + \psi(x)$ esiste in tutto il piano sopra e sotto l' asse reale, si dovrebbe considerare $f_2(x)$ quale continuazione analitica di $f_1(x)$. Ma questo è assurdo data l'arbitrarietà delle due funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$.

Ora si può domandare se, *sottoponendo le espressioni aritmetiche a certe condizioni, ne risultino tali funzioni analitiche rappresentate da quelle in campi differenti, che abbiano certe relazioni necessarie fra loro e che debbano perciò esser quasi considerate le une come continuazioni analitiche delle altre.* In questo modo si potrebbe generalizzare o rendere più ampio il concetto di continuazione analitica. Di questa questione si occupa specialmente Borel in varî suoi lavori (22, 23). Ecco il breve riassunto dei risultati da lui ottenuti.

Prendiamo l' espressione aritmetica:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(x - a_n)^{m_n}} \tag{15}$$

ove la serie dei c

$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ sia convergente, le grandezze $m_1, m_2, \ldots.$ sieno intere

*) Vedi Lerch: Note sur les expressions qui, dans diverses parties du plan, répresentent des fonctions distinctes. Bull. des scien. mathém. S. II_1 Tom. X (1886), pag. 45-49.

e positive e ammettano un limite superiore m e le a_n formino un insieme di punti denso su ogni parte di un contorno C chiuso e convesso.

Allora l'espressione (15) rassomiglia a quella trattata da Lerch a pagina 19. Richiamandosi ai risultati ottenuti già allora, è chiaro che la F(x) è equiconvergente tanto all'interno quanto all'esterno di C, giacchè potrà esser sviluppata in una serie di potenze per qualunque punto x_0 che non sia infinitamente vicino (punto limite) ai punti a_n. E quella serie di potenze ha per raggio di convergenza la grandezza $(a_\lambda - x_0)$, che segna la minima distanza dal punto x_0 dai punti dell' insieme a_n.

Prendiamo ora un punto b sul contorno C che non coincida con alcuno dei punti c_n. Essendo la C una curva convessa, si potrà sempre costruire nell'interno di C col centro in x_0 un cerchio di raggio $r < 1$ tangente internamente a C nel punto b e non contenente alcun altro punto di C. Si potrà allora sempre scegliere un numero ρ in modo che sia

$$\left| \sum_{n=1}^{\rho} \frac{a_n}{(x_0 - a)_n^{m_n}} \right| < \frac{\sum_{n=1}^{\rho} \left| a_n \right|}{\varepsilon^m}$$

ove $\varepsilon < 1$, positivo e minore della minima distanza dei punti $a_1\ a_2 \ldots\ a_n$ della retta x_0 b. Giacchè si avrà sempre

$$\left| x_0 - a_n \right| > \varepsilon$$

quindi:

$$\left| x_0 - a_n \right|^{m_n} > \varepsilon^{m_n}$$

ed essendo $m_n \leqq m$ ed $\varepsilon < 1$

$$\left| x_0 - a_n \right|^{m_n} > \varepsilon^m$$

Della convergenza della serie dei c segue ancora

$$\sum_{n=\rho+1}^{\infty} \left| c_n \right| < \eta \delta^m$$

ove η è una grandezza scelta ad arbitrio e δ la minima distanza dei punti x nell' interno di C dai punti del contorno C.

Essendo

$$r = \left| x_0 - b \right|$$

e

$$\left| x_0 - c_n \right| > r$$

$$\left| x_0 - c_n \right|^{m_n} > r^m$$

risulta

$$\left| \sum_{n=\rho+1}^{\infty} \frac{c_n}{(x_o - c_n)^{m_n}} \right| < \frac{\eta_1 \delta^m}{r^m}$$

quindi

$$\left| F(x_o) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(x_n - c_n)^{m_n}} < \frac{\eta_1 \delta^m}{r^m} + \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n \right|}{\varepsilon^m}$$

oppure

$$r^m \left| F(x_o) \right| < \eta_1 \delta^m + r^m \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n \right|}{\varepsilon^m}$$

Siccome η_1 è scelta ad arbitrio e $\sum_{n=1}^{\rho} \left| a_n \right|$ per la convergenza di questa serie deve avere un valore finito S, ne segue per $r = o$,

$$\lim_{r = o} r^m \, F(x_o) = o$$

oppure

$$\lim_{x_o = b} (x_o - b) \, F(x_o) = o$$

Se invece b è un punto dell' insieme di punti a_n, allora risulta già dalla dimostrazione fatta nel teorema di Lerch che

$$\lim_{x_o = a_n} (x_o - a_r)^m \, F(x_o) = c_r$$

per $m_r = m$.

Ora almeno uno dei punti $m_1 \, m_2 \ldots$ per la supposizione fatta deve esser eguale a m. Perciò sulla linea C si troverà almeno un punto b tale che il prodotto

$$(x - b)^m \, F(x)$$

non tende al valore «o», ma al valore c_r, se questo punto è a_r. Al medesimo risultato si arriva se, invece di prendere il punto x_o nell' interno di C, se lo prende all' esterno. Anche in questo caso il valore limite per un punto a_r del contorno è uguale a c_r.

Si arriva dunque al risultato che, facendo tendere il punto x tanto lungo la normale interna $x_o \, b$ verso il con-

torno C, quanto lungo una normale esterna, il prodotto $(x-b)^m F(x)$ *tende al medesimo valore limite all' interno e all' esterno di C* *). Questo valore limite non può essere però eguale a zero per tutti i punti di C.

Nel caso però che il sunnominato prodotto fosse eguale a zero per tutti i punti di C, allora dovrà essere $F(x) = o$ e ciò per tutti i punti dell' interno e dell' esterno di C, perchè altrimenti si avrebbe una contraddizione ai risultati ottenuti poc' anzi. Da qui si può però concludere: *Se la $F(x)$ è nulla per tutti i punti interni a C, allora il prodotto considerato ha il valore limite zero per tutti i punti di C stessa e dunque $F(x)$ dovrà esser nulla anche per tutti i punti esterni a C ed essa rappresenta dunque tanto all' interno, quanto all' esterno di C la funzione analitica costante: zero.*

Se ora due espressioni aritmetiche $F_1(x)$ e $F_2(x)$ della medesima forma di $F(x)$ rappresentano la medesima funzione analitica nell' interno di C, esse dovranno rappresentare pure la medesima funzione analitica anche all' esterno di C. Giacchè per il risultato di prima devono tendere tanto all' interno quanto all' esterno al medesimo valore limite i prodotti

$$\lim_{x=b} (x-b)^m F_1(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x=b} (x-b)^m F_2(x)$$

Ma più importante ancora è la seguente conclusione di forma generale che si può trarre dal suesposto teorema.

Ammettiamo che n espressioni della forma considerata

$$F_1(x),\ F_2(x),\ F_3(x)\ \ldots\ldots\ F_n(x)$$

rappresentino nell' interno di C le funzioni analitiche

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)\ \ldots\ldots\ f_n(x)$$

e all' esterno di C le funzioni analitiche

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x)\ \ldots\ldots\ \varphi_n(x)$$

e supponiamo ancora che fra le $f(x)$ sussista nell' interno di C la relazione

$$\Phi\ [\ f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)\ \ldots\ldots\ f_n(x)\ ] = o,$$

ove Φ segna una funzione razionale intera.

Allora ne segue che fra le $\varphi(x)$ dovrà sussistere anche all' esterno di C la medesima relazione. Poichè nell' interno di C l' espressione aritmetica

$$\Phi\ [\ F_1(x),\ F_2(x),\ F_3(x)\ \ldots\ldots\ F_n(x)\ ]$$

rappresenta la funzione analitica

$$\Phi\ [f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x) \ldots\ f_n(x)] = o$$

ed all' esterno la funzione

$$\Phi\ [\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x)\ \ldots\ldots\ \varphi_n(x)\ ].$$

---

*) Ad un simile risultato arriva del resto anche Fabry in un suo trattato sulla generalizzazione del concetto di continuazione analitica (24).

Ora segue da quello che abbiamo detto, che se la prima espressione è nulla nell' interno di C lo deve esser anche all' esterno. Ma allora anche la funzione da essa rappresentata

$$\Phi\ [\ \varphi_1(x),\ \varphi(x)_2,\ \varphi(x)_3\ \ldots\ldots\ \varphi_n(x)\ ] = 0$$

e con ciò è dimostrato l' asserto.

Riassumendo ora i risultati ottenuti da Borel si arriva alla conclusione: *Se si sottopongono le espressioni aritmetiche della specie considerata a delle lievi restrizioni, le funzioni da queste rappresentate nei due campi differenti non saranno più tra loro affatto indipendenti, ma vi esisteranno delle relazioni fra loro e si potrà dunque parlare di una «continuazione analitica», se al concetto di questa si vorrà dare un più vasto orizzonte.*

NOTIZIE SCOLASTICHE.

Corpo insegnante al termine dell'anno scol. 1906-07.

	NOME	MATERIE	ore	Capo-classe in	OSSERVAZIONI
1	**Giovanni Bisiac,** i. r. direttore.	Tedesco in VII e VIII	6		Membro dell'i. r. Consiglio scol. prov.
2	**Arturo Bondi,** i. r. professore.	Italiano in III, Geografia e storia in II, III, V, VI e VIII	20		Custode della collezione geografica.
3	**Giovanni Buttignoni,** i. r. docente effettivo; can. onor. del Cap. catt. di Trieste.	Religione in tutte le classi.	16		Membro della commissione esaminatrice per candidati al magistero nelle scuole popolari e cittadine.
4	**Antonio Caldini,** i. r. professore.	Latino in VII, Greco in VII e VIII, Proped. filosof. in VII e VIII	18	VII	Custode della biblioteca giovanile.
5	**Giulio Castelpietra,** i. r. professore.	Latino in I e VIII, Italiano in I	17	I	
6	**Oreste Gerosa,** i. r. professore della VII cl. di rango.	Matematica in I, II e III, Storia nat. in I, II, V e VI	17		Custode del gabinetto di storia nat. e membro della commissione esaminatrice per candidati al magistero nelle scuole popolari e cittadine. Rappresentante com.
7	**Orlando Inwinkl,** i. r. docente effettivo.	Matematica in IV, V, VI, VII e VIII, Fisica in VII e VIII	22	VIII	Custode del gabinetto di fisica e membro della commiss. esaminatrice per candidati al magistero nelle scuole popolari e cittadine.
8	**Giovanni Larcher,** i. r. professore dell'VIII cl. di rango.	Fu in permesso durante tutto l'anno.			I. r. ispettore scolast. distrettuale colla sede a Pola.
9	**Francesco Maier,** i. r. prof. della VII classe di rango.	Latino in IV e V, Greco in VI	17	VI	Rappresentante com.
10	**Don Giov. Musner,** i. r. docente effett.	Latino in II, Italiano in II, IV e VII	18	II	Membro della commissione esaminatrice per candidati al magistero nelle scuole popolari e cittadine.
11	**Celso Osti,** i. r. professore.	Greco in III e V, Italiano in V, VI e VII	19	V	Custode della biblioteca dei professori.

	NOME	MATERIE	ore	Capo-classe in	OSSERVAZIONI
12	**Giuseppe Vatovaz,** i. r. prof. dell' VIII classe di rango.	Latino in III e VI. Greco in IV	16	III	Insegnò la Calligrafia. (2 ore sett.). Fu custode del gab. archeol. e distributore dei libri scol. del fondo di beneficenza.
13	**Atanasio Chitter,** i. r. supplente.	Tedesco in I, III e IV, Geografia e storia in I, IV e VII	19	IV	
14	**Rodolfo Nachtigal,** i. r. supplente.	Tedesco in II, V e VI, Stor. nat. in III, Fisica in IV	14		Frequentò le lezioni del docente O. Inwinkl.
15	**Dr. Nicolò Albanese,** supplente ausiliare volontario.	Dal 4 aprile in poi: Storia naturale in V	2		Frequentò le lezioni dei professori O. Gerosa e O. Inwinkl.

Docenti delle materie facoltative.

16	**Matteo Kristofić,** i. r. maestro della IX cl. di rango presso la casa di pena.	Lingua croata, tre corsi.	6		
17	**Alessandro Šantel,** i. r. maestro suppl. presso l' istituto magistrale.	Disegno, due corsi.	4		
18	**Adolfo Schaup,** i. r. maestro di ginn. presso l'istituto mag.	Ginnastica, due corsi.	4		
19	**Giovanni Sokoll,** i. r. maestro di musica presso l' istituto magistrale.	Canto, due corsi.	3		

Civica deputazione ginnasiale:

Signor avv. **Felice Dr. Bennati,** rappresentante comunale
» **Luigi Dr. Longo,** » »
» **Pietro Dr. de Madonizza,** » »

Francesco Zetto, i. r. bidello e custode dell' edificio.

CRONACA DELL' ISTITUTO.

L' anno scolastico 1906—1907 ebbe principio il giorno 16 settembre. L' ufficio divino d' inaugurazione fu celebrato il giorno 18 settembre.

Il giorno 19 incominciarono le lezioni regolari.

Furono pure solennizzati nel modo consueto gli anniversari dell' Augusta Casa imperiale ai 18 agosto, 4 ottobre e 19 novembre.

Il giorno 27 settembre l' i. r. medico distrettuale sig. dott. Vittorio Gramaticopolo visita gli occhi degli scolari.

Nei giorni 9—10 novembre la scolaresca accedè ai ss. sacramenti della Confessione e della Comunione.

Cessava di vivere il primo di gennaio, dopo lunghe sofferenze, nell' ospitale di Trieste, Odilo Schaffenhauer, professore di disegno a mano libera in questo istituto.

Ai 9 febbraio si chiuse il primo semestre ed ai 13 del mese stesso si diede principio al secondo.

Nei giorni 10 e 12 marzo si tennero gli esercizi pasquali, alla fine dei quali la scolaresca accedette per la seconda volta ai ss. sacramenti della Confessione e Comunione.

Una dolorosa notizia giungeva il 19 marzo alla direzione del ginnasio: la morte inaspettata dello studente dell' ottava classe *Antonio Zanfabro*, avvenuta la sera antecedente a Valle di Rovigno, sua patria, dove si era recato per curare la propria salute. Giovane di bell' ingegno, era caro ai superiori pel suo amore allo studio e per la diligenza nell' adempimento de' suoi doveri, ai condiscepoli per la mitezza del suo carattere e la cortesia de' suoi modi, a tutti per la bontà del suo cuore, che gli traspariva dal volto sempre sorridente.

Ai funerali intervennero tutti gli alunni dell' ottava classe, il prof. Giovanni Musner ed il capoclasse prof. Orlando Inwinkl, il quale portò alla madre desolata le condoglianze del direttore e del corpo insegnante.

Nella chiesa parlò delle belle doti di mente e di cuore dell' estinto il rev. don Antonio Palin, rettore del Collegio-Convitto parentino-polese di Capodistria; e prima che la salma fosse resa alla terra, lo studente Romeo Neri diede con voce commossa all' amico l' estremo affettuoso saluto.

E qui sieno rese vivissime grazie al sig. Giovanni Sirotich di Valle ed alla sua famiglia, che con squisita cortesia e generosità cordiale non solo mise a disposizione degli studenti e dei professori la sua casa, ma li volle a pranzo alla sua mensa e procurò loro le vetture per giungere in tempo alla stazione di Dignano.

Ai 10 aprile il signor prof. Edoardo Brechler, delegato ispettore speciale per l' insegnamento del disegno a mano libera, visitò la scuola di disegno.

Nei giorni 6, 11, 13, 15, 16 e 17 maggio il sign. ispettore scolastico provinciale Dr. Francesco Swida ispeziona l' istituto e nella conferenza tenuta addì 17 maggio esprime la sua sodisfazione per il buon andamento dell' istruzione, l' operosità seria e proficua dei docenti e il buon profitto della scolaresca.

Nei giorni 16 e 24 maggio l' i. r. medico distrettuale sig. dott. Gramaticopolo praticò la vaccinazione a 40 scolari della I, II e VIII classe.

Dal 13 al 17 maggio si elaborarono i temi per gli esami di maturità.

Nei giorni 25 e 26 giugno la scolaresca s' accostò per la terza volta ai ss. sacramenti della Confessione e della Comunione.

L' anno scolastico si chiuse il 6 luglio col solenne ufficio divino di ringraziamento e con la distribuzione degli attestati semestrali.

L' 8 luglio si terranno gli esami di ammissione alla prima classe.

Gli esami di maturità orali cominceranno addì 11 luglio; presiederà l' ill.mo sig. ispettore scolastico provinciale, Dott. Francesco Swida.

Nel prossimo annuario si pubblicheranno i nomi dei candidati, che avranno sostenute le prove con buon esito.

Nel corso di quest' anno scolastico nell' istituto fu introdotta l' energia elettrica a scopo d' illuminazione e quale forza motrice per il gabinetto di fisica; furono costruiti inoltre al terzo piano due serbatoi nei quali viene inalzata mediante apposita pompa l' acqua del pozzo esistente al pianterreno e ciò allo scopo di poter risciacquare spesso e sistematicamente i cessi dell' edificio.

La spesa totale per queste utilissime innovazioni in linea d' igiene e di decoro ammontò a circa 2400 corone.

La Direzione si sente in dovere di esprimere, in nome anche dei docenti e degli scolari, vivi e sentiti ringraziamenti allo spettabile Municipio di Cap distria e all' imperiale Governo, che generosamente ne sostennero le spese.

Riassunto dei decreti più importanti

pervenuti alla direzione ginnasiale durante le ferie dell' anno scolastico 1905-06 e nel corso del 1906-07.

L' i. r. Luogotenenza di Trieste, con dispaccio 7 giugno 1906 n. 13053, comunica il contenuto d' un decreto ministeriale, il quale stabilisce che dai candidati esterni, che si assoggettano ad esami straordinari, si esiga il possesso di quelle cognizioni che si pretendono dai candidati, che danno gli esami regolari per divenire scolari pubblici.

L' i. r. Luogotenenza di Trieste, con dispaccio 15 luglio 1906 n. pr. 875, comunica che il sig. Ministro, con dispaccio 3 luglio 1906 n. 20752, promoveva all' VIII classe di rango il professore Giovanni Larcher, ispettore distrettuale provvisorio delle scuole italiane dei distretti scolastici di Pola e di Rovigno.

L' i. r. Luogotenenza di Trieste, con dispaccio 20 luglio 1906 n. pr. 748, comunica che Sua Maestà l' Imperatore, con Sovrana Risoluzione del 6 luglio 1906, si è graziosamente degnata di nominare il parroco di Volosca, Vincenzo Zamlić, i direttori degli i. r. Ginnasi dello Stato di Pola e Capodistria, Pietro Maresch e Giovanni Bisiac, e il direttore dell'i. r. Istituto Magistrale di Capodistria, Vittorio Bežek, a membri dell'i. r. consiglio provinciale scolastico dell'Istria per il prossimo sessennio.

L'i. r. Cons. scol. prov. dell'Istria, con decreto 21 agosto 1896 n. 1894, accorda al prof. Francesco Majer la quinta, e con decreto 21 agosto 1906 n. 1895, al prof. Celso Osti la prima aggiunta quinquennale di soldo.

L'i. r. Luogotenenza di Trieste, con dispaccio 6 agosto 1906 n. 18859, notifica che l'i. r. Min. del Culto e dell'Istruzione, con decreto 27 luglio 1906 n. 30050, nominò il prof. alla scuola reale dello stato del III distretto di Vienna, Edoardo Brechler, a delegato ispettore speciale per l'insegnamento del disegno a mano libera nelle scuole medie e magistrali del Litorale per gli anni scolastici 1906-07 e 1907-08.

L'i. r. Cons. scol. prov., con disp. 2 ottobre 1906 n. 1019, notifica che l'i. r. Min. del Culto e dell'Istruzione, con decreto 20 settembre 1906 n. 34434, nominò il supplente Giuseppe Delpiero a capo-maestro nell'i. r. Istituto magistrale femminile a Gorizia.

L'i. r. Cons. scol. prov. dell'Istria, con disp. 8 ottobre 1906 n. 2656, approva l'assunzione dei supplenti Giuseppe Delpiero e Atanasio Chitter.

L'i. r. Cons. scol. prov. dell'Istria, con disp. 23 ottobre 1906 n. 3003, nomina il docente effettivo Orlando Inwinkl a membro dell'i. r. Commissione esaminatrice per i candidati al Magistero nelle scuole popolari e cittadine con la sede a Capodistria.

Il Cons. scol. prov. dell'Istria, con disp. 31 ottobre 1906 n. 2942, approva l'assunzione del supplente Rodolfo Nachtigal al posto di Giuseppe Delpiero, nominato capo-maestro presso l'i. r. Istituto magistrale femminile a Gorizia.

Il Cons. scol. prov. dell'Istria, con disp. 15 Marzo 1907 n. 420, accorda che il candidato al magistero Dott. Nicolò Albanese venga assunto quale supplente ausiliare volontario.

L'i. r. Luogotenenza di Trieste, con disp. 29 marzo 1907 n. pr. 748, notifica che Sua Maestà l'Imperatore, con Sovrana Risoluzione dell'11 marzo 1907, si è graziosamente degnata di nominare il decano del capitolo del Duomo di Parenzo, Olivo Rismondo, a membro dell'i. r. consiglio scolastico provinciale dell'Istria.

Il Cons. scol. prov. dell'Istria, con disp. 4 aprile 1907 n. 509, comunica che l'i. r. Ministero del Culto e dell'Istruzione, con decreto 28 marzo 1907 n. 1166, Lo autorizzava ad accordare, in via eccezionale, a richiesta della parte interessata, la restituzione della tassa scolastica pagata per un semestre da scolari pubblici delle i. r. Scuole medie, i quali avessero abbandonato l'istituto a causa di malattia o fossero decessi prima della chiusa del semestre.

Lo spettabile Municipio di Capodistria, con nota 6 maggio 1907 n. 1675, notifica che il Consiglio Comunale nella pubblica sua seduta del 20 aprile a. c. riconfermava a membri della Civica Deputazione Ginnasiale gli onorevoli signori avv. Felice Bennati, dott. Luigi Longo e dott. Pietro Madonizza anche per il triennio di funzione 1907-1910.

L' i. r. Luogotenenza di Trieste, con dispaccio 6 maggio 1907 n. 475, comunica che l' i. r. Min. del Culto e dell' Istruzione, con decreto 21 aprile 1907 n. 16359, ordinò che in tutte le scuole medie, gli istituti magistrali maschili e femminili, le scuole industriali, commerciali e nautiche, e in tutti gli istituti affini di insegnamento, nei quali l' anno scolastico dovrebbe chiudersi normalmente il 15 luglio, si debba chiudere invece quest' anno, in via eccezionale, già il 6 luglio.

L' i. r. Cons. scol. prov., con disp. 9 maggio 1907 n. 629, notifica che l' i. r. Min. del Culto e dell' Istruzione, con decreto 30 aprile 1907 n. 3058, ha concesso che col principio dell' anno scolastico 1907-08 venga impiegato nell' istituto un inserviente ausiliare verso mercede giornaliera.

L' i. r. Cons. scol. prov. dell' Istria, con disp. 13 maggio 1907 n. 615, comunica che il sig. Ministro del Culto e dell' Istruzione, con decreto 29 aprile 1907 n. 1584, concesse il chiesto pensionamento al prof. Oreste Gerosa e autorizzò Esso Consiglio ad esprimergli in quest' occasione la Sua Ricognizione per le lunghe, proficue e zelanti prestazioni addimostrate nell' insegnamento.

La Direzione e il Corpo insegnante, dolenti di perdere nell' egregio professore un collega carissimo, che colle sue belle doti di mente e di cuore seppe farsi amare da tutti, fanno voti che prospere sorti lo accompagnino nel nuovo stato di riposo, assicurandolo della continuità del loro affetto e della riconoscenza degli allievi, che lo ebbero dotto, paziente e ben amato maestro.

LIBRI DI TESTO

da usarsi nell' anno scolastico venturo.

1. Religione.

Catechismo grande della religione cattolica, coll' approvazione della curia vescovile di Trieste-Capodistria. Trento. G. B. Monauni 1900; in cl. I. — Cimadomo, Catechismo del culto cattolico, Trento, Seiser 1904; in cl. II. — Schuster, Storia sacra del vecchio e del nuovo Testamento. Vienna '95; in cl. III e IV. — Favento, La Chiesa cattolica, la sua dottrina e la sua storia; Vol. I, Apologia. Capodistria, Priora '92; in cl. V. — Vol. secondo, Dommatica; in cl. VI. — Vol. terzo, Morale; in cl. VII. — Vol. quarto, Storia della Chiesa cattolica; in cl. VIII.

2. Latino.

Scheindler-Iülg, Grammatica latina, 2. ed. Trento, '00 Monauni; in cl. I-VI. — Steiner-Scheindler, Esercizi latini, Trento, Monauni '90; in cl. I e II. — Schultz, Grammatica latina, Trieste, Schimpff '88; in cl. VII e VIII. — Iülg, Esercizi di sintassi latina, parte I e II in cl. III e IV. — Gandino, Esercizi di sintassi latina in cl. V-VIII. — Cornelio Nepote e Q. Curzio Rufo di Schmidt-Vettach, Vienna, Tempsky '07 in cl. III. — Caesar, Bell. Gall., ed. Defant, Praga, Tempsky '92; in cl. IV. — Ovidius, Carm. sel., ed. Sedlmayer-Casagrande, Vienna, Tempsky '90; in cl. IV e V. — Livius a. u. c. lib. I, II, XI e XXII, ed. Zingerle, Praga, Tempsky '96; in cl. V. — Sallustius, Catilina, ed. Scheindler, Praga, Tempsky '91; in cl. VI. — Vergilius, Aen., ed. Klouček-Szombathely, Praga, Tempsky '91; in cl. VI e VII. — Caesar, De bello civili, ed. Paul, editio minor; in VI. — Cicero in Catil. in cl. VI; pro Milone, pro Archia poeta e de Senectute, ed. Nohl, Praga, Tempsky; in cl. VII. — Tacitus, Ann. Hist. Germ., ed. Müller, Praga, Tempsky '90; in cl. VIII. — Horatius, Carm. sel., ed. Petschenig, Praga, Tempsky '00; in cl. VIII.

3. Greco.

Curtius-Hartel, Grammatica greca, 2.ª ed. 1892, Trento, Monauni; in cl. III-VIII. — Schenkl, Esercizi greci, Trento, Monauni '89; in cl. III, IV e V. — Casagrande, Esercizi greci, II parte, Capodistria, Priora; in cl. VI-VIII. — Schenkl, Crestomazia di Senofonte, Torino, Loescher '80; in cl. V e VI. — Homeri Ilias, ed. Christ-Defant, Vienna, Tempsky '90; in cl. V e VI. — Herodoti Epitome, ed. Hintner, Vienna, Hölder 1898; in cl. VI. — Demosthenis Orationes, ed. Defant, Praga, Tempsky '89; in cl. VII. — Odissea di Omero, Christ-Leveghi, Vienna, Tempsky 1906; in cl. VII e VIII. — Platone, l'Apologia di Socrate, il Critone e l'epilogo del Fedone di C. Cristofolini. — Platone, l'Eutifrone di C. Cristofolini e Lisia, ed. Kral, Praga, Tempsky; in cl. VIII.

4. Italiano.

Curto, Gramm. ital., Capodistria, Priora, 2. ed. '03; in cl. I-IV. — Nuovo libro di letture italiane, parte I-IV, Trieste, Schimpff '98; in cl. I-IV. — Hassek, Antologia di poesie e prose italiane, parte I-IV, Trieste, Chiopris '91; in cl. V-VIII. — Manzoni, I Promessi Sposi, Hoepli 1900; in cl. III, IV e V. — L. Polacco, Dante, la Divina Commedia, ed. Hoepli, Milano; in VI-VIII.

5. Tedesco.

Defant, Lingua tedesca I, Trento, Monauni 2.ª ed.; in cl. I e II. — Defant, Lingua tedesca II, Trento, Monauni '04; in cl. III e IV. — Noë, Antologia tedesca I, Vienna, Manz '92; in cl. V e VI. — Noë, Antologia tedesca II, Vienna, Manz '98; in cl. VII e VIII. — Hassek, libro di versioni dall' it. in ted., Trieste, Schimpff '94; in cl. VII e VIII. — Willomitzer, deutsche Grammatik, 9. Aufl., Vienna, Manz '02; in cl. V, VI, VII e VIII.

6. Storia e Geografia.

Herr, Geografia, Trento, Monauni '96; in cl. I. — Morteani, Compendio di geografia II-IV, Trieste, Schimpff '94; in cl. II, III e IV. — Mayer, Manuale di storia univers. per le classi inf. delle scuole medie, parte I, II e III, Praga, Tempsky '97; in cl. II, III e IV. — Gindely, Storia universale per il ginnasio sup., parte I, II e III, Praga, Tempsky; in cl. V, VI e VII. — Hannak, Geografia e Storia dell' Austria-Ungheria, Vienna, Hölder '94; in cl. VIII. — Kozenn, geogr. Atlas, Vienna, Hölzl '01; in cl. I, II, III, IV e VIII. — Putzger, hist. Schulatlas, Vienna, Pichler '02; in cl. II-VII.

7. Matematica.

Wallentin, Manuale di Aritm., parte I, Trento, Monauni '96; in cl. I e II. — Hočevar, Geometria per le cl. inf., Praga, Tempsky '81; in cl. I-IV. — Wallentin, Manuale di Aritm. parte II, Trento, Monauni '92; in cl. III e IV. — Močnik-Menegazzi, Algebra per le classi superiori, Trieste, Dase '84; in cl. V-VIII. — Močnik-Menegazzi, Geometria per le classi sup., Trieste, Dase '84; in cl. V-VIII. — Dr. O. Schlömilch, Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln, 19. Auflage; in cl. VI-VIII.

8. Scienze naturali.

Pokorny-Lessona, Zoologia, Torino, Loescher '85; in cl. I e II. — Pokorny-Caruel, Botanica, Torino, Loescher '91; in cl. I e II. — Pokorny-Struever, Mineralogia, Torino, Loescher '88; in cl. III. — Christ-Postet, Elementi di Fisica, Trento, Monauni '94; in cl. III e IV. — Hochstädter-Bisching, Mineralogia e Geologia, Vienna, Hölder '82; in cl. V. — Burgerstein, Botanica per le classi superiori, Vienna, Hölder '95; in cl. VI. — Graber-Mik-Gerosa, Elementi di Zoologia, Praga, Tempsky '96; in cl. VI. — Münch-Job, Fisica, Vienna, Hölder '96; in cl. VII e VIII.

9. Propedeutica filosofica.

Lindner, Compendio di Logica formale, trad. da Erber, Zara '82; in cl. VII. — Lindner-Visintainer, Psicologia; in cl. VIII.

Di questi testi scolastici sono permesse, oltre le edizioni recentissime, anche le anteriori; sono eccettuati i seguenti libri: i quattro volumi della Antologia italiana per il ginnasio superiore; Defant, Letture tedesche, parte I; Wallentin, Manuale di Aritmetica per le cl. I e II; Hannak, Geografia e statistica dell' Austria; Münch, Trattato di Fisica per le classi superiori dei ginnasi. Gli scolari quindi avranno cura di acquistarne soltanto l'ultima edizione, essendo vietato, per ragioni didattiche, l'uso delle edizioni più vecchie.

Il piano didattico seguito in questo i. r. ginnasio corrispose anche quest'anno scolastico pienamente alle vigenti ordinanze ed istruzioni; si pubblica quindi soltanto l'elenco delle opere lette e commentate nell'insegnamento delle lingue classiche e della lingua italiana.

A. *Latino.*

Cl. III: Cornelio Nepote, Le vite, Milziade, Aristide, Pausania, Trasibulo, Epaminonda, Focione, Amilcare.

Cl. IV: G. Cesare, De bello gallico, Com. I, III e V. — Ovidio, Le 4 età del mondo; Il consiglio degli dei; Il diluvio.

Cl. V: Livio I e XXII. — Ovidio: Brani scelti dalle Metamorfosi, dai Fasti e dalle Ore tristi.

Cl. VI: C. Sallustio, La guerra giugurtina; M. T. Cicerone, Le catilinarie IV; C. G. Cesare, La guerra civile II; P. Virgilio, La bucolica I, V, VI; La georgica I, 1-42, II, 109-176; L'Eneide I.

Cl. VII: Cicerone, Pro lege Manilia, pro Marcello, Laelius (de amicitia).
P. Virgilio, Eneide II e VI.

Cl. VIII: Tacito, Hist I, e il II priv.; Germ. 1-27. Orazio, Carminum et Sermonum delectus.

B. *Greco.*

Cl. V: Senofonte, Brani scelti della Ciropedia e dell'Anabasi. Dalla Crestomazia dello Schenkel.
Omero, Iliade, C. I.

Cl. VI: Omero, Iliade, XI, XII e XXII. Erodoto, Libri V, VI, VII e VIII secondo il Hintner. — Senofonte, brani scelti dai «Detti memorabili di Socrate». Dalla Crestomazia dello Schenkel.

Cl. VII: Demostene, Le orazioni Olintiche, De pace 1-16.
Omero, Odissea I, VI, VIII, X e XI.

Cl. VIII: Platone, Apologia, Critone, Lachete; Sofocle, Edipo re.
Omero, Odissea XXIV.

C. *Italiano.*

Cl. V: I classicisti. — I romantici. — I puristi e gli studi sulla lingua. — Storici del secolo XIX. — Prosatori e poeti di varie tendenze letterarie. — Giacomo Leopardi. — I Promessi Sposi I-XV.

Lettura domestica: I sepolcri. — Nicolò de' Lapi. — Ettore Fieramosca. — Dialogo d'Ercole e d'Atlante. — Dialogo della Terra e della Luna. — La Scommessa di Prometeo. — La Bassvilliana. — Marco Visconti. — Il Paradiso perduto. — Angiola Maria. — Sommario della Storia d'Italia. — Caio Gracco. — Galeotto Manfredi. — Le mie prigioni. — Saggio sopra gli errori popolari degli antichi.

Cl. VI: L'Arcadia. — G. Parini. — M. Cesarotti. — A. Verri. — Cl. Bondi. — Storici del secolo XVIII. — Drammatici del sec. XVIII. — Lirici del sec. XVIII. — G. Baretti. — G. Gozzi. — G. Passeroni. — Dante, Inferno I-XXV.

Lettura domestica: Il giorno. — Le commedie politiche dell' Alfieri. — La Frusta letteraria. — Attilio Regolo. — Saul. — Filippo. — L'Avaro. — La Locandiera.

Cl. VII: *Il Cinquecento:* Storici e politici. — Epici. — Biografi. Trattatisti. — Commediografi. — Novellieri. — La tragedia. — Il dramma pastorale. — *Il Secento:* La scuola del Marini. — L'epica eroicomica. — Lirici e satirici. — Storici. — Galileo e la prosa del suo tempo. — Dante, Inferno XVII-XXXIV; Purgatorio I-X.

Lettura domestica: L'Aminta. — La Gerusalemme Liberata. — I primi dieci canti dell' Orlando Furioso e gli episodi più noti e più ammirati. — Castruccio Castracani. — Autobiografia del Cellini. — La Secchia Rapita.

Cl. VIII: I cronisti: Dino Compagni, i Villani. — I biografi: Vespasiano da Bisticci, Teo Belcari. — Storici ascetici e didattici: I fioretti di s. Francesco, s. Catterina da Siena. — I novellieri: Giovanni Boccaccio, Francesco Sacchetti. — Poeti lirici: Dante Alighieri, Francesco Petrarca, Lorenzo de' Medici, Angelo Poliziano (Le Stanze, Le Ballate, L'Orfeo), Iacopo Sannazzaro. — I canti carnascialeschi: Dante, Inferno c. XXI-XXXIV - Purgatorio, c. XXVII-XXXIII.

Letture private: Dante, Purgatorio c. I-XII. — Dante, La vita nova, Il convivio, Dino Compagni, La cronica. La sacra rappresentazione della s. Oliva.

D. Esercizi oratori degli studenti.

Cl. VII: *G. Bressan* - Il dramma pastorale. — *E. Schlechter* - La pittura italiana nel 500. — *S. Viezzoli* - L'architettura italiana nel 500. — *A. Zumin* - La scultura italiana nel 500. — *G. Majer* - Sordello.

Cl. VIII: *R. Neri* - L'architettura in Italia dalle origini al rinascimento. — *G. Sain* - L'arte italiana nel trecento e nel quattrocento. — *A. Herceg* - Il Galateo ovvero dei Costumi — di Giovanni Della Casa.

E. Conferenze storico-geografiche degli studenti.

Cl. VI: *Edvino Pogliato* - Cause della decadenza di Roma secondo il Gibbon. — *Paolo Sardotsch* - Le relazioni fra l' Egitto e la Mesopotamia intorno al 1400 a. C., in base alle tavolette di El-Amarna. — *Bortolo Vascotto* - Romanesimo e Germanesimo.

TEMI DI LINGUA ITALIANA

elaborati nel corso dell' anno scolastico dagli scolari delle classi superiori.

Classe V. — L'arrivo di un telegramma. — La vendemmia. — Il mio ritratto. — Classicisti e romantici in Italia. — Classicisti e romantici in Italia (il tema di scuola rifatto a casa). — Dirce e Argia. — Inverno nella vita cittadina. — La cultura egiziana. — Chi era il padre Cristoforo? — Il Cinque Maggio e la Morte di Ermengarda. — Ciro e Gobria. — La dottrina linguistica del Manzoni. — L'ape e la farfalla [dialogo]. — Ildegonda. — Annibale alle porte di Roma.

C. Osti.

Classe VI. — Dalla mia finestra. — Del rinnovamento intellettuale e sociale nella seconda metà del secolo XVIII. — T' avanza, t' avanza | Divino straniero; | Conosci la stanza | Che i fati ti diero. — La teorica dell' amore (cfr. Dante, Purgatorio, XVII). — Il cicisbeo. — La discesa di Enea nell' Averno. — Apologia di Socrate fatta da Senofonte. — La campana. — La storia e la coscienza. — La Commedia di C. Goldoni. — L'alba dell' età nuova. — Non parla bene chi pronunzia male.

C. Osti.

Classe VII. — La più alta e immortale poesia ha sempre avuto fondamento nella storia e nella tradizione. — Svantaggi dell' istituzione del feudalismo. — Fuga di tempi e barbari silenzi | Vince e dal flutto delle cose emerge | Sola, di luce a' secoli affluenti | Faro, l' idea. — S. Francesco d' Assisi nel pensiero di Dante e di Giotto. — Le cose. — Ulisse visita il regno delle ombre. — Il silenzio della notte. — L' Orlando Furioso. — La poesia compie la storia e ne riempie e adorna le pagine bianche con le sue visioni maravigliose. — Il mondo pagano e il mondo cristiano. — Sant' Elena. — Bella musica sonata male.

C. Osti.

Classe VIII. — Delle cronache e della loro importanza. — « Non si possono fare le congiure senza compagnia di altri, e perciò sono pericolosissime, perchè essendo la più parte degli uomini o imprudenti o cattivi, si corre troppo pericolo ad accompagnarsi con persone di simil sorta ». [Guicciardini]. — Giusta di gloria dispensiera è morte [Foscolo]. — Roma al Tribunale di Cornelio Tacito. — Le Alpi. — Il concetto della gloria presso gli antichi e presso i moderni. — Gli episodi danteschi del conte Ugolino e di Francesca da Rimini. — Quali insegnamenti porge al Teatro italiano il secondo centenario della nascita di Carlo Goldoni. — Il secolo d' Augusto e il secolo di Leone X. — Di quale vantaggio torni celebrare gli anniversari degli uomini grandi, e quanto a ragione abbiano gli Italiani celebrato quello della nascita di Carlo Goldoni. [Tema di maturità].

G. Musner.

MATERIE LIBERE

Lingua croata: Morfologia e sintassi, secondo il « Corso pratico comparativo per lo studio della lingua croata » di V. Danilo. Studio di brani scelti dai libri di lettura del Divković e del Meretić. Esercizi pratici a voce ed in iscritto.

M. Kristofić.

Calligrafia: Esercizi di scrittura obliqua a caratteri latini e tedeschi. L' alfabeto greco [nella cl. II].

Prof. Valoraz.

Canto: I. Esercizi elementari nei toni maggiori in Do, Fa, Sol; esercizi a due voci, [1 ora sett.]. II. Coro misto [1 ora sett.]. III. Coro a voci maschili; inni sacri, patriottici e profani [1 ora sett.].

G. Sokoll.

Disegno: I. Esercizi di disegno geometrico a mano libera; foglie simmetriche semplici; ornamenti piani e semplic' a matita e colorati. — II Disegno d' ornato policromo, disegno dal vero e figurale.

Al. Šantel.

Ginnastica: Esercizi d' ordine e sugli attrezzi.

Ad. Schaup.

Aumento delle Collezioni scientifiche.

A. Biblioteca dei professori.

Bibliotecario: *prof. Celso Osti.*

I. Doni.

Dall' i. r. Min. del Culto e dell' Istr.: Zeitschrift für oest. Volkskunde 1907. — Dall' i. r. Accademia di scienze e lettere in Vienna: Sitzungsberichte der kais. Akademie, phil.-hist. u. math.-nat. Klasse. — Dall' i. r. Luogotenenza di Trieste: Gesetze und Verordnungen der Landesbehörden für das oest. Küstenland 1907. — Dal signor dr. Pietro de Madonizza: Come si fa la critica d' un libro. Alfredo Trombetti, Bologna 1907. — Ehrenbuch des Kurbades Velden am Wörthersee von Karl Krobath. Dono dello Stabilimento balneare di Velden. — Dal sig. giudice Natale Piazzotta: Post-u. Eisenbahnkarte der oest.-ung. Monarchie.

II. Acquisti.

Nuova Antologia 1906-07. — Rivista di filologia classica 1907. — Giornale storico della letteratura italiana 1907. — Mitteilungen der k. k. geogr. Gesellschaft in Wien 1907. — Zeitschrift für oesterr. Gymnasien 1907. — Verordnungsblatt für den Dienstbereich des k. k. Min. für Kultus und Unterricht 1907. — Groeber, Romanische Philologie [continua]. — Zeidler, Deutsch-oesterr. Literaturgeschichte [continua]. — Roscher, Lexikon der Mythologie [continua]. — Wildermann, Iahrbuch der Naturwissenschaften 1905-06. — Haberlandt, Zeitschrift für oesterr. Volkskunde 1906. — Iwan von Müller, Handbuch der klassischen Altertumswissenschaft [continua]. — Storia letteraria d' Italia: Il Seicento di Belloni, il Quattrocento di Vittorio Rossi e il Settecento di Concari. — La Divina Commedia ill. da Gustavo Doré. — Arturo Graf, Miti, Leggende e Superstizioni del Medio Evo. — *Pasquale Villari*, Discussioni critiche e Discorsi. — *Guglielmo Draper*, La storia del conflitto fra la scienza e la fede. — *Francesco D' Ovidio*, Nuovi studi Danteschi. Il Purgatorio ed il suo Preludio. — *Luigi Leynardi*, La Psicologia dell' arte nella Divina Commedia. — *Ercole Ricotti*, Della rivoluzione protestante. — *Ercole Ricotti*, Breve storia della Costituzione inglese. — *I. E. Spingarn*, La critica letteraria nel Rinascimento. — *Nicola Marselli*, Le leggi storiche dell' incivilimento. — *S. Tonnini*, La Psicologia della civiltà Egizia. — *F. Nobili Vitelleschi*, Della storia civile e politica del Papato. — *Guido Mazzoni* e *P. E. Parolini*, Letterature straniere. — *Al. D' Ancona*, La poesia popolare italiana. — *Egidio Gorra*, traduttore di *Alfredo Bassermann*, Orme di Dante in Italia. — *Georg Webers* Lehr-u. Handbuch der Weltgeschichte. Vollständig neu bearbeitet von Dr. *Alfred Baldamus* [I, II e IV]. — *Iulius Hann*, Lehrbuch der Meteorologie. — *Fr. Ratzel*, Politische Geographie oder die Geographie der Staaten, des Verkehres und des Krieges. — *Ettore Ciccotti*, Il tramonto della schiavitù nel mondo antico. — *Franc. Ruffini*, La libertà religiosa. — *A. Harnack*, L' essenza del cristianesimo. Traduzione dal tedesco di A. Bongioanni. — *Paul La Cour* u. *Iakob Appel*, Die Physik auf Grund ihrer geschichtlichen Entwickelung. — *H. Weber*, *I. Wellstein* u. *W. Iacobsthal*, Encyklopedie der elementaren Geometrie. — *H. Weber*, Encyklopedie der elementaren Algebra u. Analysis. — *Paul Bräuer*, Lehrbuch der anorganischen Chemie. — *A. H. Bucherer*, Mathematische Einführung in die Elektronentheorie. — L. Tesar, Elemente der Differential-u. Integralrechnung. — *Tommaseo*, Vocabolario. Società Unione, Torino. — *G. B. Gandino*, La sintassi latina [2 parti]. — *Alfredo Trombelli*, Come si fa la critica d' un libro. — *Gius. Caprin*, L' Istria nobilissima. — *D.r H. Lückenbach* e *D.r C. Adami*, Arte e storia nel Mondo antico. — *Angelo De Gubernatis*, Ludovico Ariosto.

B. Biblioteca degli scolari.

Bibliotecario: *prof. Antonio Caldini.*

Acquisti.

Pellico, Le mie prigioni e tragedie scelte. — Inama, Antichità greche. — Alfani, Battaglie e vittorie, I tre amori del cittadino Checchi, Rossini, Verdi. — Finzi, Petrarca. — Menasci, Goethe. — Pigorini Beri, S. Caterina da Siena. — Rambaldi, Amerigo Vespucci. — Ricci, Michelangelo. — Turri, Macchiavelli. — Christomanos, Regina di dolore. — Brunamonti, Ricordi di viaggio. — Selvatico, L' arte nella vita degli artisti. — Venturini, Guida storica di Capodistria. — Verga, Dal tuo al mio. — Giacosa, Specchi dell' enigma. — Gorki, I caduti. — Sienkiewicz, Pan Michele, Per il pane. — Merejkowsky, Il tramonto degli Dei. — Cantù, Margherita Pusterla. — Gioli, In Toscana, studi dal vero. — Grandi, La nube. — Venturi, Il fiore dei Promessi sposi. — Coulevain, Sulla frasca. — Il cittadino italiano, giornale per le famiglie. — Ferrero, Grandezza e decadenza di Roma.

C. Gabinetto di Geografia e Storia.

Custode: *prof. Arturo Bondi.*

I. Doni.

Disegni a lapis e ad acquarello eseguiti e donati dagli studenti: — *Narciso Cesarek*, Spaccato della piramide di Ceope, due modelli di mastabe e piante delle necropoli di Memfi e di Tebe. — *Domenico Del Bello*, Vasi e teste sumeriche, parecchi rilievi babilonesi ed esempi di scrittura geroglifica, pianta e ricostruzione del palazzo e della rocca di Tirinto (alcune cartoline illustrate]. — *Francesco Romano*. La piramide di Saccara e cartina dell' Egitto antico. — *Paolo Sardotsch*, Disegno del mondo omerico, una carta fisica dell' Egitto, a colori, larga 48, lunga 112 cm., e una grande pianta della necropoli di Memfi. — *Paolo Schlechter*. Quattro fotografie di paesaggi della valle dell' Idria e dell' Isonzo [13×18] — Donarono cartoline illustrate gli studenti Loy, Candussi, Ferlan, Miniussi, Defranceschi, Prossen, Stanich, Bilucaglia e Komarek.

II. Acquisti.

Fr. Umlauft, Schulwandkarte der Karstländer. — *Bamberg*, Skandinavien. — *Bombig*, Carta dell' Istria. — *Hirt*, Le forme principali della superfice terrestre. — *Lehmann*, Villaggio lacustre, abitazione borghese, Olimpia, Convento benedettino [2 quadri]. — *Löhmeyer*, Ottone il Grande al Lechfeld; Federico il Grande a Zorndorf. — *Per le proiezioni mediante lo sciottico*, fotografie dei paesi alpini e carsici, della valle del Danubio, Germania, Inghilterra, Italia, Spagna. — *173 cartoline e fotografie* del Tirolo, della Bosnia, del Litorale austriaco e della Svizzera, raccolte in sei quadri dal prof. Bondi. — 82 cartoline illustranti la storia della pittura in Italia [scuola fiorentina, veneziana, padovana, lombarda e parmese], disposte e annotate in cinque quadri dal prof. Musner.

D. Gabinetto Archeologico.

Custode: *prof. Giuseppe Vatovaz.*

Iahreshefte des oesterr. archaeologischen Institutes. Dono dell' i. r. Min. del Culto e dell' Istruzione. — 34 monete fra antiche, venete, moderne, di bronzo, di rame, d' argento, rinvenute a S. Stefano d' Umago, dov' esistette già un convento. Dono dello scolaro G. Franco della III classe.

E. Gabinetto di Fisica.

Custode: *doc. eff. Orlando Inwinkl.*

Lista degli apparati di fisica e chimica acquistati nell' anno 1906-07:

1 apparato di Plateau per la rotazione d' una sfera d' olio; 12 lamelle di Plateau; 1 tubo capillare per la depressione; 1 apparato per l' ebollizione dell' acqua; 1 motore ad aria calda; 1 apparato di Clement e Desormes per l' urto pneumatico; 1 apparato per la legge di Doppler nell' acustica; 1 serie di 10 risonatori di Helmholtz; 18 disegni di movimenti ondulatori; 1 panca per esperimenti ottici; 1 fotometro di Bunsen; 1 foglia d' oro pellucida; 1 serie di 8 liquidi fluorescenti; 1 serie di 3

diapositivi per illusioni ottiche; 1 collezione «Skola» per esperimenti d'elettrostatica; 1 apparato di Palmieri per correnti indotte: 6 diversi tubi di Geissler; 1 serie di tubi di Geissler «Kompendium»; 1 serie di tubi gradatamente evacuati: 1 serie di 6 tubi di Crookes; 1 tubo di Crookes per l'ombra dei raggi catodici; 1 radiometro di Crookes; 1 tubo di Hittorf; 2 tubi di Röntgen; 102 oggetti diversi per esperimenti chimici e cioè: vasi di vetro, bicchieri di vetro, lampade a spirito, cilindri di vetro, provini, imbuti, fiasche, tubi, sifoni, cucchiai di vetro e di osso, stòrte, 1 diamante, 1 pallone d'Erone, turaccioli di cautschouc, apparati per lo sviluppo dell'idrogeno, del cloro, bottiglie di Woulf ecc.

F. Gabinetto di Storia naturale.

Custode: *prof. Oreste Gerosa.*

I. Doni.

Dallo scolaro della cl. VIII Schlechter Paolo: 4 pezzi di cinabro proveniente dalle miniere d'Idria ed un'efflorescenza di salnitro naturale di dette miniere.

II. Acquisti.

Dr. Paolo Pfurtscheller, 4 tavole zoologiche: Hirudo officinalis, Infusoria ciliata, Ophidia [Tropidonotus natrix], Aves ['Situs viscerum' della colomba domestica]. — Due preparati anatomici dell'Istituto zoologico Venceslao Hruby di Praga, rappresentanti l'occhio del 'Bos taurus' ed i visceri dell''Emis' europea.

ESAMI DI MATURITÀ.

1. Anno scolastico 1905—06.

Gli esami orali si tennero nei giorni 27 e 28 giugno sotto la presidenza dell'ill.mo signor ispettore scolastico provinciale *Nicolò Ravalico.*

Elenco dei candidati dichiarati maturi:

N. d'ord.	Cognome e nome	Luogo di nascita	giorno ed anno di nascita	Grado dell' attestato	Studi scelti
1	Apollonio Ferruc.	Trieste	14 agosto 1886	maturo	teologia
2	Bernobich Rodolfo	Castellier di Visin.	24 agosto 1886	»	teologia
3	Pesante Pio	Montona	26 luglio 1887	»	legge
4	Sbisà Giuseppe	Parenzo	2 dicembre 1886	»	legge
5	Schor Carlo	Vienna	29 ottobre 1888	»	legge

Gli esami di riparazione e suppletori si tennero *a)* in iscritto nei giorni 18—22 settembre 1906 e 6 febbraio 1907, *b)* a voce nei giorni 26 settembre 1906 e 9 febbraio 1907. In quest' ultima sessione la commissione esaminatrice fungeva sotto la presidenza del direttore Giovanni Bisiac.

Furono dichiarati maturi i seguenti candidati:

N. d'ord.	Cognome e nome	Luogo di nascita	giorno ed anno di nascita	Grado dell' attestato	Studi scelti
6	Delconte Antonio	Capodistria	12 febbr. 1888	maturo	filologia
7	Gerolimich Rom.	Lussinpicc	15 dic. 1887	»	legge
8	Perrotta Pietro	Palermo	8 dic. 1886	»	medicina
9	Quarantotto Luigi	Orsera	16 maggio 1886	»	filologia
10	Udina Mario	Lussinpicc.	10 genn. 1883	»	filologia
11	Apollonio Severo	Trieste	13 luglio 1885	»	commercio
12	Palisca Giovanni	Albona	8 luglio 1886	»	indeciso

Tre candidati, dei quali due erano allievi esterni, furono riprovati; una candidata non si presentò agli esami orali.

2. Anno scolastico 1906—07.

Furono ammessi agli esami 12 scolari pubblici dell'istituto e 3 privati esterni.

Le prove in iscritto si fecero nei giorni 13—17 maggio.

Furono assegnati i temi seguenti:

1. Per la versione dall'italiano nel latino: Bindi: Letteratura latina, p. 115: «Plauto».
2. Per la versione dal latino nell'italiano: Cic. Phil. II. 22.
3. Per la versione dal greco: Platone, Charmides c. 1—2.
4. Per il componimento italiano: «Di quale vantaggio torni celebrare gli anniversari degli uomini grandi e quanto a ragione abbiano gli italiani celebrato quest'anno quello della nascita di Carlo Goldoni.»
5. Per la lingua tedesca: «Welchen Nutzen gewähren uns die Tiere?»
6. Per la matematica:

   a) $6x^5 - 41x^4 + 97x^3\ 97x^2 + 41x - 6 = 0 \qquad x = ?$

   b) Un tale mette presso una banca il capitale di 19777·5 corone al $3\frac{1}{2}\%$ d'interesse composto per godere dal principio del secondo anno in poi per 25 anni una rendita annua scadibile al principio d'ogni anno. Quale sarà questa rendita?

   c) Che angoli nei quattro primi quadranti sodisfanno all'equazione:

   $$\frac{1 + \cos 2x}{\cos x} = \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{2 \operatorname{sen}^2 x}$$

   d) Quanto importa l'area comune dei due cerchi

   $$C_1 \begin{cases} -1 \\ 0 \\ 2 \end{cases} \quad e \quad C_2 \begin{cases} 1 \\ 1 \\ \sqrt{5} \end{cases} ?$$

Gli esami orali cominceranno l'11 luglio sotto la presidenza dell'ill.mo sig. ispettore scol. prov. Dr. Francesco Swida.

Il risultato dei medesimi verrà pubblicato nell'Annuario del prossimo anno scolastico.

Escursioni, sport nautico e giuochi giovanili

Allo sviluppo fisico della scolaresca, oltre che coi soliti esercizi ginnastici (4 ore settimanalmente), si provvide anche quest'anno con gite, con esercizi di remo e con giuochi giovanili.

Nel corso dell'anno vari gruppi di scolari e classi intere, accompagnati da professori, fecero passeggiate, gite ed escursioni nei dintorni della città e fuori, a piedi, per mare, con la ferrovia e in bicicletta.

Così il 23 febbraio 35 scolari delle due prime classi, guidati dal prof. A. Bondi, si recarono sul Monte San Marco, e il 2 marzo il medesimo professore condusse 25 scolari delle classi II e III sul Monte Sermino.

Otto scolari della V classe, sotto la guida del docente R. Nachtigal, fecero il 5 aprile una passeggiata a Scoffie.

Nello stesso giorno il prof. O. Inwinkl con circa 20 scolari delle classi IV, V, VI e VII fece una gita alla volta di Porto Rose. Partiti da Capodistria all'1 $^1/_2$ pom., dopo una breve sosta ad Isola, arrivarono alle 5 a Porto Rose e, dopo aver ammirato le bellezze naturali di quella ridente baia istriana, si recarono all'Albergo Pirano, dove s'intrattennero piacevolmente fino alle 7 $^1/_2$ di sera in attesa della ferrovia che li ricondusse a Capodistria.

Addì 8 maggio 25 scolari delle classi VIII, VI, V e IV, accompagnati dai professori Gerosa, Majer ed Inwinkl, partiti con un piroscafo della Società Capodistriana alle 6 del mattino e da Trieste colla ferrovia alle 7.20, giunsero a Divaccia coll'intenzione di visitare la grotta 'Principe ereditario Rodolfo', che si trova a breve distanza da questa stazione ferroviaria.

Si entrò nella grotta alle 10 e si rimase entro fino alle 12. Sarebbe troppo lungo descrivere le bellezze di questa grotta che si sprofonda, a dir delle guide, 200 metri sotto il livello dell'entrata, alla quale si arriva discendendo per una scala circolare di molti gradini.

Fantastica nei suoi varii riparti, nelle sue sale, nei suoi corridoi, nelle sue salite e nelle sue discese, varia nelle sue naturali formazioni, che, come in tutte le grotte, sembrano concezioni magistrali dei più distinti artefici, destò l'ammirazione di noi tutti, specie quando ad osservare le sue immense bellezze, ci venne in aiuto il magnesio, non bastando, com'è naturale, alla sua vastità la luce delle candele per illuminarla in modo da dare un'idea approssimativa della sua grandiosità e della sua magnificenza.

Il compianto Caprin nelle *Alpi Giulie* dice che essa è quasi un campionario di stalattiti panniformi; ma non panni soltanto si ammirano in questa grotta, e come delle altre grotte del Carso, anche di questa potrebbe dire il poeta, che si vedono in essa,

> Qui guglie alzarsi e candelabri e vasi,
> Bassorilievi, e tombe, ed oltre sparse
> Tribune e orchestre ed ornamenti mille
> Alle nostr' arti ignote,

a tacere della torre di Pisa, dei simulacri di uomini, dei multiformi animali e delle enormi fette di prosciutto grasso con venature rosee, che al lume delle candele appressate dalle guide sono di un effetto stupendo e facevano venire l'acquolina in bocca ai visitatori, ai quali la ginnastica dell'ascendere e del discendere aveva fatto appetito.

Furono due ore di godimento passate in quel *luogo d'ogni luce muto*, dove unici indizi di vita si scopersero in un pipistrello, che, appeso ai ricami sporgenti da un'artistica roccia, dormiva i suoi sonni tranquilli, e in una pianticina di noce, che caduta per caso germogliò, ed ora cresce stentata e pallida nella parte più bassa della grotta.

A mezzodì si rivide il sole e si prese la via per Corniale, dove arrivati alle 12.45 professori e studenti pranzarono con appetito e si riposarono.

Poco dopo le 3 ripresero il cammino per Lipizza, donde, soffermatisi alquanto per vedere gli stalloni, le cavalle e i puledri che si allevano in quell'i. r. stabilimento, continuarono per Basovizza.

Qui unitisi ad un altro gruppo di studenti, che vi era arrivato per altra via, dopo un breve riposo, alle 5 ½ partirono alla volta di Trieste.

A Trieste si imbarcarono sul Santorio, vapore della Società di navigazione cittadina, che per facilitare il ritorno ai vari gruppi degli studenti in gita, previo accordo col ginnasio, aveva voluto che un piroscafo li attendesse a Trieste fino alle 8 ½.

E qui sieno rese pubbliche grazie, a nome del ginnasio, alla spett. Direzione di quella Società, per la squisita gentilezza e per la cortesia colla quale venne incontro alla Direzione del Ginnasio, a fine di rendere possibile l'effettuazione delle diverse gite.

Prof. Fr. Majer.

Diffugere nives, redeunt iam gramina campis
arboribusque comae.

Alla buon'ora! si pensò e si pensò di fuggire, fosse pure per poco, ancor noi — vo' dire 20 scolari della I, 16 della II, 8 della III classe, 1 della VI, a cui il pensiero venne in ritardo, in tutto 45, e i professori G. Castelpietra, G. Musner e il sottoscritto — e si fuggì, agli 8 di maggio, lungi dall'aria umile, pestifera, opprimente, tetra della città, per drizzare il volo a quella *excelsior*, purissima, esilarante, serena del Carso triestino, non più roccia nuda, come direbbe l'infamato suo nome, ma rinverdito oramai nelle vaghe sue praterie e negli ameni boschetti, a cui, pur tardivo quest'anno, il tepore primaverile non poteva non essere stato generoso di fronde e di fiori, di fragranze e di salubrità.

Dico a bella posta *per drizzare il volo:* chè furon voli veramente e la traversata sul vaporino da qui a Trieste, fra le 7 e le 7.45, sul mare cheto come l'olio, accarezzati dalla vergine brezza del mattino, e la salita dell'erta, che mena ad Opcina, dalle 8.52 alle 9.25, in un vagone, espressamente noleggiato, della ferrovia elettrica triestina. Anche la breve sosta a Trieste, fra l'una e l'altra volata, volò via anch' essa, in meno che non si dica, a sorbire un piccolo caffè.

E man mano che l'erta si superava, gli animi erano da principio compresi di alta meraviglia per quel pesante e severo carrozzone, che procedeva baldo e sicuro di sè, senza gemiti nè sbuffi nè scosse; poi, quando a piè dell'altura venne a delinearsi agli sguardi, quasi a volo d'uccello, tutta quanta la immensa Trieste, co' suoi ponderosi edifici, incorniciata dai vasti porti e dalle lussureggianti colline, fu nuova meraviglia, che fece prorompere in liete canzoni. E cantando si arrivò ad Opcina, ove si rimase quindici minuti: ad ammirare ancora una volta l'ineffabile panorama.

A Sesana giungemmo alle 10.50 e, data un'occhiatina in giro a quel posto, ne ripartimmo alle 11. E per tre quarti d'ora continuammo per la strada polverosa, punto innaffiata nè incatramata per l'occasione, calda a 25° C., se anche nell'ultimo tratto fiancheggiata dalla pineta, che faceva la polvere profumata. Vero è che i giovani viandanti si sbrancavano continuamente di qua e di là a rintracciare e a rincorrere insetti sotto i sassi e fra le piante. E di molti begli esemplari ne ghermirono, con una beatitudine degna di miglior causa sì, ma non senza acquistarsi gran merito verso le piantagioni stesse e verso la instancabile commissione triestina per l'imboschimento del Carso.

Quindi entrammo nella deliziosa conca di Lipizza e all'ombra delle verdi fronde si respirò anche meglio.

A Lipizza giungemmo alle 12 e ci assidemmo subito a uno spuntino: chè ne avevamo ben donde. L'allegra seduta durò mezz'ora circa e poi visitammo minutamente la i. r. stazione d'allevamento equino. Dove quei magnifici animali, nel loro genere proprio perfetti e intelligenti da vero, attraverso i ferrei cancelli delle loro comode e pulite stanze, ci fecero accoglienze squisitissime e quasi a dire commoventi. Pareva proprio di leggere nei loro vividi occhi una gran voglia, che avessero, di esprimerci a parole la immensa gioia del vederci colà e quindi l'immenso dolore del non poterlo fare. Oh, con che voluttà divina si lasciavano carezzare! E poi con quale mansueto entusiasmo accorrevano a noi i puledri, scorazzanti in libertà sui prati recintati, figgendoci addosso i loro sguardi indagatori! E quanto dolorosa non fu la loro sorpresa, quando alle ore 13 si accorsero che avevamo risoluto di staccarci da loro, per correre al desinare, che ci attendeva a Basovizza! Con che semplicetta gentilezza non ci trotterellarono a fianco per buon tratto di via! Ne avessero avute, certo avrebbero stese le mani gentili ad amichevoli strette.....

Usciti un quarto d'ora dopo dalla conca di Lipizza, si attraversa ancora un bosco di pini e si arriva a Basovizza alle 13.45, più allegri che mai.

All'Albergo della Posta le mense ci attendono già imbandite e noi le prendiamo d'assalto. I cibi, se non troppo gustosi, sono, per compenso, abbondanti. Gli annaffia molt'acqua temperata con una foglietta di vino a bastanza generoso.

Levate ben presto le mense, i ragazzi continuano a sollazzarsi nell'ampio cortile: a rincorrersi, a far salti e capriole.

Alle 17 arriva da Lipizza il gruppo degli scolari, che visitarono Divazza e Corgnale, ed essi e le loro guide sono accolti da ovazioni, che non vogliono più finire.

La schiera così ingrossata prende, alle ore 18, la via più breve per Trieste e alle 20 ne attraversa il Corso, sfarzosamente illuminato, fra gl'innumeri ed eleganti passeggiatori della sera, e giunge così alla Riva della Sanità e al vaporino. Dove già l'attende quella parte degli scolari convittori, ch'è stata a visitare la grotta di San Canziano. E nuovi evviva si scambiano.

Arrivano un po' in ritardo anche gli scolari della VII ed il loro capoclasse ed altri entusiastici saluti si levano.

Tutti riuniti, alle 20.30 si dà il segnale della partenza e in un'ultima volata sul mare leggermente mosso dalla fresca brezza notturna, gli uni narrando agli altri le peripezie del giorno o facendo echeggiare tutt'insieme per l'aria qualche lieta canzone ancora, si riguadagna felicemente il molo di Capodistria.

Alle ore 22 tutt'e quarantanove i gitanti poterono già trovarsi sotto le coltri a sognare, se non altro, insetti leggeri e dorati e cavalli intelligenti e cortesi e l'aria buona per quattordici ore respirata a pieni polmoni e i 24 chilometri percorsi, di cui 4 in discesa, certo senza dolersi della spesa, meschina in proporzione di tanto diletto, di poco più di 2 corone a testa.

Prof. G. Vatovaz

Il dopopranzo del 7 maggio, con un cielo sereno e ben promettente, quattordici scolari della settima, guidati dal capoclasse prof. Caldini, partirono per Trieste alla volta di Gradisca. La gita fu amenissima e per l'allegria giovanile che l'animò e per la bellezza della regione fiorita e luminosa che si potè ammirare nella fretta incalzante del viaggio. Già da principio, nelle due ore di treno che occorsero da Trieste a Sagrado, passarono fuggenti, come bellezze fantastiche, Miramar, colle sue bianche torri, il castello di Duino, appollaiato sur uno scoglio, e la verde pianura friulana coi suoi campi vasti e ubertosi, incisa dai solchi diritti e simmetrici. Smontati a Sagrado, si passò l'Isonzo e col tramonto si arrivò a Gradisca.

Visitata questa simpatica città, si venne all'albergo dove era stata ordinata una cena abbondante, che poi terminò fra canzoni e risate generali con di più alcuni strimpellamenti di pianoforte.

Quindi ci coricammo e in braccio al sonno aspettammo la mattina che dalle Alpi Giulie si diffuse rorida sul piano.

A Sdraussina si montò di nuovo in treno che circa alle 9 $^1/_2$ ci condusse a Gorizia, la vera meta della nostra gita. Per fare un poco d'appetito, guidati dall'ottimo e compiacente professor Girardelli, si visitò la città che in tutti lasciò bellissima impressione. Salimmo ancora la Castagnavizza, da cui vedemmo l'Isonzo e in fondo un lembo di mare e ai piedi la città, che coll'agglomerazione delle sue case rompeva il verde continuo della pianura. Visitammo poi l'ipogeo di quel convento, dove ci sono le tombe degli ultimi Borboni. Discesi a Gorizia, si mangiò di tutto gusto, e sodisfatto questo obbligo verso lo stomaco, tutta la comitiva, a cui s'era aggiunto gentilmente anche l'egregio professore Delpiero, si diresse verso la borgata slovena di Salcano, dove si ammirò pieni di meraviglia il ponte omonimo tutto di pietra con un arco ardito aereo grandioso, che diede a tutti noi il concetto di quanto possa la forza geniale dell'uomo.

Alle 6 $^1/_2$ ritornammo per la ferrovia dei Tauri fra nuovi paesaggi, mentre il sole occiduo tingeva di un lieve vermiglio le Alpi Giulie, che si allontanavano sempre più tagliando il cielo colle loro linee titaniche e decise. Quando si sboccò sul ciglione sovrastante al mare e ci apparve Trieste come una visione luminosa, si disse tutti: la gita meritava di esser fatta anche solo per questa scena incantevole.

Uno studente della cl. VII.

Sport nautico.

A questo sport, al quale nelle città marinare specialmente si dovrebbe dare sempre la preferenza, perchè piacevole e sano rinforza il corpo ed indulge allo spirito, si iscrissero 38 scolari del nostro istituto, che, divisi in 2 armi, si esercitarono al remo diretti dai professori Majer, Inwinkl e Nachtigal.

Il ginnasio possiede due canotti ed un'imbarcazione scuola, capaci tutti e tre insieme di dar posto a 16 rematori. Ogni giorno che il tempo non frappose ostacoli le 3 barche uscirono, e varie furono le gitterelle fatte dagli studenti a S. Catterina, a S. Nicolò, a Gasello d'Oltra, su per il Risano, a Sermino e ad Isola. Addì 9 giugno, due barche con 10 rematori e un timoniere, guidati dal prof. Inwinkl, si spinsero fino a Pirano, donde partirono il dopo pranzo arrivando a Capodistria alle 8 dopo 2 ore di voga.

Sarebbe desiderabile che per il prossimo anno il Ginnasio acquistasse una barca nuova da sostituirsi ad una delle presenti che incomincia a sentire le ingiurie del tempo e richiede troppi sacrifici per la sua manutenzione.

Una lode speciale si meritano gli studenti Edvino Pogliato della VI e Francesco Polli della IV classe per lo zelo col quale si adoperarono ad aiutare i professori nella direzione di questo salutare esercizio, che per la sua indiscutibile utilità meriterebbe uno sviluppo sempre maggiore.

Prof. F. Majer.

Giuochi giovanili.

I giuochi all' aperto nei piazzali di s. Chiara furono frequentati, a cominciare dalla seconda metà di marzo alla fine di giugno, da cinquanta studenti, quasi tutti del ginnasio inferiore. I quali, divisi in gruppi, parteciparono al giuoco delle bocce e della palla col tamburello, per circa settanta ore, sotto la sorveglianza dello scrivente.

Prof. A. Bondi.

Elenco degli scolari al termine dell' anno scolastico 1906-07.

Classe I.

Almerigotti, de, Fr. da Capodistria
Benvenutti Virgilio da Isola
Bernardi Gianantonio da Pirano
Bianchi Cesare da Trieste
Biondi Domenico da Rovigno
Blasutto Mario da Basovizza
Bratti Andrea da Capodistria
Calogiorgio Mario da Capodistria
Cergna Antonio da Valle
Cibin Matteo da Parenzo
Cinich Giovanni da Buie
Depangher Pietro da Capodistria
Derin Giovanni da Capodistria
Fornasaro Fortunato da Pirano
Gherbaz Gius. da Hoboken (America)
Godina Fedele da Pisino
Grego Vittorio da Pirano
Gropuzzo Domenico da Dignano
Manzin Domenico da Dignano
Marinaz Vittorio da Portole
Martinolich Giov. da Lussinpiccolo
Marzas Ettore da Pedena
Palma Lionello da Portole
Paolini Romualdo da Valle
Parovel Antonio da Capodistria
Parutta Giovanni da Capodistria
Predonzani Elio da Orsera
Pregnolato Giovanni da Duino
Priora Luciano da Capodistria
Prodan Silvio da Dignano
Raffael Raffaello da Parenzo
Sandrin Giuseppe da Capodistria
Santin Giovanni da Albona
Simeoni Carlo da Suez (Egitto)
Spangaro Antonio da Pirano
Susanj Guido da Montona
Udina Antonio da Albona
Valentincig Guido da Buie
Zetto Francesco da Capodistria

39

Classe II.

Apollonio Alfonso da Orsera
Babudri Stefano da Parenzo
Bacich Giorgio da Capodistria
Bilucaglia Giovanni da Dignano
Biondi Giacomo da Rovigno
Cadamuro-Morgante Giuseppe da Capodistria
Candussi Giuseppe da Romans
Ceol Rodolfo da Capodistria
Cernutti Enrico da Cervignano
Cocianeich Francesco da Isola
Danelon Francesco da Parenzo
Defranceschi Luigi da Dignano

Delcaro Giuseppe da Dignano
Depangher Antonio da Capodistria
Depase Pietro da Isola
Dolenz Giuseppe da Rovigno
D' Osvaldo Ettore da Capriva
Ferlan Zvonimiro da Sansego
Fioranti Martino da Dignano
Fonda Bortolo da Pirano
Gregorich Mario da Capodistria
Loy, de, Emilio da Capodistria
Lugnani Adriano da Pirano
Marcolini Attilio da Capodistria
Parovel Vittorio da Capodistria
Pesel Nicolò da Rovigno
Prossen Andrea da Albona
Ruzzier Luigi da Pirano
Scok Tullio da Parenzo
Stanich Giovanni da Parenzo
Valentich Ferdin. da Capodistria
Vernier Mario da Dignano
Visintini Giovanni da Pinguente
Zelco Marco da Visignano
Zuliani Antonio da Rovigno

35

Classe III.

Ambrosi, d', Guido da Buie
Berti Giuseppe da Trento
Borri Bruno da Monfalcone
Caluzzi Nicolò da Orsera
Cassano Ottone da Montona
Cleva Pietro da Parenzo
Ferlan Vladimiro da Sansego
Franco Giorgio da Buie
Franolich Pietro da Gallesano (Pola)
Gennaro Giuseppe da Trieste
Gerin Francesco da Capodistria
Gogoli Giuseppe da Gorizia
Lucas Giuseppe da Fiumicello
Lucchi Vittorio da Cormons
Micatovich Guido da Torre
Miniussi Antonio da Pola
Opeka Giuseppe da Trieste
Orbanich Ferdinando da Capodistria
Pauluzzi Ottone da Verteneglio
Pavan Domenico da Rovigno
Pederzolli Guido da Trieste
Pieri Pietro da Montona
Predonzan Pietro da Pirano
Raunich Francesco da Rozzo
Ravasini Giorgio da Trieste
Rischner Luigi da Rovigno
Sain Lodovico da Umago
Sansa Pietro da Dignano
Simeoni Romano da Capodistria
Venier Antonio da Trieste
Zalacosta Temistocle da Capodistria

31

Classe IV.

Bonat Lino da Mezzano
Chierego Francesco da Pirano
Codan Ferdinando da Torre
Cossovel Andrea da Rovigno
Damiani Francesco da Grisignana
David Lorenzo da Parenzo
Ferra, conte, Guido da Trieste
Gambini Pio da Capodistria
Luches Luigi da Rovigno
Luxa Arturo da Trieste
Milienovich-Butinar Gius. da Rovigno
Muggia Costante da Rovigno
Negri Giorgio da Pola
Paliaga Giovanni da Rovigno
Petronio Francesco da Pirano
Piccoli Gioachino da Momiano
Poli Francesco da Pola
Pontevivo Giacomo da Rovigno
Premuda Eugenio da Gorizia
Sandri Luigi da Torre
Zetto Luigi da Capodistria 21

Classe V.

Bianchi Marcello da Trieste
Cadamuro-Morgante Angelo da Capodistria
Cesarek Narciso da Capodistria
Cherin Giovanni da Rovigno
Chierego Giovanni da Pirano
Clean Giacomo da Albona
Dapas Francesco da Rovigno
Del Bello Domenico da Capodistria
Dussich Antonio da Buie
Gavardo, de, Valent. da Capodistria
Grego Giovanni da Trieste
Komarek Antonio da Capodistria
Marcolini Mario da Capodistria
Poccecai Giovanni da Umago
Romano Francesco da Capodistria
Vardabasso Silvio da Buie 16

Classe VI.

Bonafin Carlo da Umago
Carbucicchio Giovanni da Pola
Grego Antonio da Trieste
Lazzarich Antonio da Albona
Lucas Luca da Fiumicello
Luciani Giacomo da Castel. (Ist.)
Magrin Pietro da Grado
Parovel Giovanni da Torre
Pesante Annibale da Montona
Pogliato Edvino da Capodistria
Sardotsch Paolo da Capodistria
Sellinger Silvio da Trieste
Vascotto Bortolo da Isola
Vissich Francesco da Capodistria

14

Classe VII.

Apollonio Giulio da Trieste
Blasevich Antonio da Parenzo
Bressan Giuseppe da Aiello
Budinich Giuseppe da Trieste
Calogiorgio Giorgio da Capodistria
Defranceschi Vitt. da Sanvincenti
Devescovi Matteo da Rovigno
Ferlan Francesco da Laurana
Maier Giovanni da Visinada
Pobega Pietro da Capodistria
Rasman Giovanni da Capodistria
Riccobon Andrea da Capodistria
Rocchi Francesco da Rovigno
Schlechter Edoardo da Trieste
Sfecich Giovanni da Momiano
Stipanich Antonio da Cherso
Tamburini Bortolo da Rovigno
Travan Marcello da Visignano
Viezzoli Silvestro da Pirano
Welvich Giuseppe da Umago
Zumin Augusto da Gradisca

21

Classe VIII.

Babuder Giuseppe da Capodistria
Gregorovich Carlo da Draguch
Herceg Alfonso da Capodistria
Mamolo Pietro da Capodistria
Marussich Vincenzo da Albona
Nadalini Augusto da Aiello
Neri Romeo da Trieste
Piccoli Luciano da Momiano
Pilato Mario da Parenzo
Sain Giuseppe da Parenzo
Sandrin Spartaco da Capodistria
Schlechter Paolo da Trieste

12

STATISTICA DEGLI SCOLARI.

	CLASSE I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Assieme
Iscritti alla fine dell' anno scol. 1905-06	40	37	27	20	17	27	13	13	194
Iscritti al principio dell' anno scol. 1906-07	52	42[1]	34	23	17	16	22	13	219[1]
Accettati durante l' anno	—	—	—	—	—	—	—	1	1
Assieme	52	42[1]	34	23	17	16	22	14	220[1]
Accettati per la prima volta:									
1. dalla scuola popolare	45	—	—	—	—	—	—	—	45
2. promossi	—	3	1	1	—	1	—	—	6
3. ripetenti	—	—	—	—	1	—	—	—	1
4. dallo studio privato	3	1[1]	2	1	—	1	—	—	8[1]
Allievi che frequentarono già questo istituto:									
1. promossi	—	33	29	20	13	13	22	13	143
2. ripetenti	4	5	2	1	3	1	—	1	17
Uscirono durante l'anno scol.	13	7[1]	3	2	1	2	1	2	31[1]
Rimasero alla fine dell' anno scol.									
1. pubblici	39	35	31	21	16	14	21	12	189
2. privati	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Assieme	39	35	31	21	16	14	21	12	189
Da Capodistria	9	9	4	2	6	3	4	3	40
Dall' Istria	25	23	17	15	7	7	12	6	112
Da Trieste	2	—	5	2	3	2	3	2	19
Dal Goriziano	1	3	4	1	—	2	2	1	14
Da altre provincie	—	—	1	1	—	—	—	—	2
Dall' estero	2	—	—	—	—	—	—	—	2
Cattolici	39	35	31	21	16	14	21	12	189
Italiani	39	35	31	21	16	14	21	12	189
Slavi	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Tedeschi	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Domicilio dei genitori:									
In questa città	14	12	9	6	8	4	9	4	66
Altrove	25	23	22	15	8	10	12	8	123
Età degli scolari:									
D' anni 11	7	—	—	—	—	—	—	—	7
» 12	14	4	—	—	—	—	—	—	18
» 13	14	9	7	—	—	—	—	—	30
» 14	3	16	9	3	—	—	—	—	31
» 15	1	6	6	6	3	—	—	—	22
» 16	—	—	7	9	4	4	—	—	24
» 17	—	—	2	2	3	4	3	—	14
» 18	—	—	—	1	4	2	2	2	11
» 19	—	—	—	—	1	2	9	2	14
» 20	—	—	—	-	1	2	5	4	12
» 21	—	—	—	—	—	—	1	4	5
» 22	—	—	—	—	—	—	—	—	—
» 23	—	—	—	—	—	—	1	—	1
Assieme	39	35	31	21	16	14	21	12	189

Classificazione definitiva dell'anno scol. 1905-06	CLASSE I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Assieme
Attestati d'eminenza	6	4	2	1	3	4	6	1	27
Di prima classe	28	27	21	12	10	22	7	11	138
Di seconda classe	2	4	2	7	2	1	—	1	19
Di terza classe	4	2	2	—	2	—	—	—	10
Non comparvero all'esame	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Classificazione finale dell'anno scolastico 1906-07									
Attestati d'eminenza	5	6	3	1	1	2	3	5	26
Di prima classe	21	24	18	15	12	10	16	7	123
Di seconda classe	3	2	9	3	2	1	—	—	20
Di terza classe	4	1	1	—	—	—	—	—	6
Attestati interinali	6	2	—	2	1	1	2	—	14
Allievi non classif. per malattia	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Assieme	39	35	31	21	16	14	21	12	189
Pagarono il didattro, nel I Sem.	31	11	12	5	7	9	3	3	81
nel II Sem.	19	9	17	9	7	7	4	2	74
Erano esenti per metà, nel I Sem.	—	—	—	—	—	—	—	—	—
nel II Sem.	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Erano esenti per intero, nel I Sem.	17	30	22	18	9	7	19	10	132
nel II Sem.	23	27	15	13	9	7	17	10	121
Importo del didattro pag. nel I Sem.	930	330	360	150	210	270	90	90	2430
nel II Sem.	570	270	510	270	210	210	120	60	2220
Assieme	1500	600	870	420	420	480	210	150	4650
Importo delle tasse di ammissione	—	—	—	—	—	—	—	—	247_{80}
Importo delle tasse per i mezzi di istruzione e per la manutenzione dei canotti e per i giuochi giov.	—	—	—	—	—	—	—	—	1105
Importo delle tasse per duplicati	—	—	—	—	—	—	—	—	20
Numero degli scolari stipendiati	1	—	5	2	1	3	4	2	18
Importo degli stipendi: Cor.	210	—	1460	620	188	1020	878	640	5016
Frequentazione dei corsi liberi:									
Calligrafia I corso	30	—	—	—	—	—	—	—	30
II corso	—	27	—	—	—	—	—	—	27
Lingua croata I corso	1	17	6	1	—	—	3	—	28
II corso	—	—	4	8	4	—	—	—	16
III corso	—	—	—	—	2	3	9	6	20
Disegno I corso	6	3	1	1	—	—	—	—	11
II corso	—	6	1	2	1	—	1	—	11
Ginnastica I corso	5	2	—	—	—	—	—	—	7
II corso	—	8	2	1	—	4	—	—	15
Canto I corso	11	—	—	—	—	—	—	—	11
II corso	1	5	2	1	3	1	2	—	15

FONDO DI BENEFICENZA

Chiusa di conto alla fine dell' anno scolastico 1905-06:

Introito: corone 1292.46
Esito: » 961.15

Civanzo: corone 331.31

Gestione dal 1 luglio 1906 al 30 giugno 1907.

Introito	Cor.	c.	**Esito**	Cor.	c.
Civanzo 1905-06	331	31	Per libri scol. nuovi . . .	610	70
Contributo degli scolari per legature di testi scol.	118	—	Per capi di vestiario e calzature	165	—
Interessi delle cartelle .	135	80	Sussidi in danaro . . .	40	—
Dall' incl. Giunta prov. .	300	—	Per gli amanuensi . . .	28	—
Dallo spett. Municipio di Capodistria	200	—	Per un armadio	16	—
Dalla rev. Curia vescovile di Parenzo	120	—	Contributo per la gita a Gradisca e Gorizia . .	20	—
Dalla sig.a Francesca Orbanich	5	—	Assieme	879	70
			Bilancio		
			Introito	1210	11
			Esito	879	70
Assieme	1210	11	Civanzo	330	41

Il fondo di beneficenza possiede un capitale in obbligazioni di Stato vincolate nell' importo nominale di corone 3300 ed una ricca collezione di testi scolastici che vengono prestati, durante l'anno scolastico, a scolari diligenti e bisognosi.

All' incl. Giunta provinciale dell' Istria, alla rev. Curia vescovile di Parenzo, all' incl. Municipio di Capodistria e a tutte quelle persone che con oblazioni di danaro o in altra maniera beneficarono gli scolari di questo istituto, la direzione, in nome dei beneficati, porge vivi e sentiti ringraziamenti.

L' amministratore:
Dir. G. Bisiac

I revisori:
Prof. O. Gerosa
Prof. F. Majer

ELENCO D'ONORE

DEGLI

SCOLARI CHE ALLA FINE DELL'ANNO SCOLASTICO 1906-07

RIPORTARONO UN ATTESTATO DI

PRIMA CON EMINENZA

CLASSE I

Derin Giovanni
Gherbaz Giuseppe
Gropuzzo Domenico
Manzin Domenico
Predonzani Elio

CLASSE II

Babudri Stefano
Bilucaglia Giovanni
Biondi Giacomo
Delcaro Giuseppe
Fonda Bartolomeo
Pesel Nicolò

CLASSE III

Ferlan Vladimiro
Gerin Francesco
Raunich Francesco

CLASSE IV

Muggia Costante

CLASSE V

Dussich Antonio

CLASSE VI

Parovel Giovanni
Vascotto Bartolomeo

CLASSE VII

Apollonio Giulio
Rasman Giovanni
Schlechter Edoardo

CLASSE VIII

Gregorovich Carlo
Nadalini Augusto
Neri Romeo
Sandrin Spartaco
Schlechter Paolo

AVVISO

per l'anno scolastico 1907-08.

L'anno scolastico 1907-08 incomincerà il 16 settembre a. c.

L'iscrizione principierà il giorno 12 settembre.

Tutti i ragazzi che vorranno entrare nella I classe, e quelli, i quali da un altro ginnasio entreranno in una delle altre classi di questo istituto, dovranno presentarsi in direzione accompagnati dai genitori o dal rappresentante dei medesimi, e muniti della fede di nascita, dell'attestato dimissorio della scuola eventualmente frequentata e di un certificato medico che comprovi lo stato di salute dello scolaro.

I genitori sono tenuti a dar avviso alla scrivente presso quale famiglia intendano collocare a dozzina i loro figli. Tutti gli scolari che si assoggetteranno ad un esame di ammissione, dovranno esser presenti addì 16 settembre alle ore 8 ant.

Gli scolari che frequentavano nell'anno scol. decorso una delle classi di questo ginnasio, sono anche obbligati a presentarsi per l'iscrizione nei giorni suindicati e ad esibire alla scrivente il loro ultimo attestato semestrale. Coloro che trascureranno di farsi regolarmente iscrivere, passato il 17 settembre, verranno senz'altro respinti.

All'atto dell'iscrizione ogni scolaro nuovo pagherà le tasse prescritte nell'importo di corone 9.20; tutti gli altri, senza eccezione, la tassa di corone 5.00, che servirà per l'aumento dei mezzi didattici, per incremento della biblioteca giovanile, per la manutenzione dei canotti ginnasiali e per l'acquisto degli istrumenti per i giuochi giovanili.

Per gli esami d'ammissione sono fissati i giorni 16 e 17 settembre; per gli esami posticipati e di riparazione i giorni 16, 17 e 18 settembre.

L'ufficio divino di inaugurazione si celebrerà addì 18 settembre alle 8 ant.; l'istruzione regolare principierà il 19 settembre.

Quegli scolari che vorranno chiedere l'esenzione dal pagamento del didattro o l'aggiornamento del medesimo, si procurino a tempo l'attestato di povertà, esteso in tutta regola. Alla loro istanza aggiungeranno anche l'ultimo ordine di pagamento dell'imposta sulla rendita personale dei genitori, qualora questi abbiano una rendita annua superiore all'importo di 1200 corone.

Dalla direzione dell' i. r. ginnasio superiore.

Capodistria, 6 luglio 1907.

Il Direttore

GIOV. BISIAC