

Mag. Mojca Suban, Zavod Republike Slovenije za šolstvo

## UČENJE IN POUČEVANJE MATEMATIKE S PREISKOVANJEM

### UVOD

Zahteve na področju dela in življenja v 21. stoletju postavljajo področju izobraževanja vedno nove izzive. Področje dela se hitro spreminja in povprečen delavec bo pred svojim štiridesetim letom opravljaj več kot deset različnih služb (Barron, Darling-Hamilton, 2008). Nekateri ocenjujejo, da bo 65 % otrok, ki so v letu 2016 vstopili v osnovno šolo, opravljalo poklice, ki jih danes še ni (World Economic Forum oziroma Svetovni gospodarski forum, 2016). Največ služb naj bi se pojavilo na področjih računalništva, matematike, arhitekture in inženiringa (prav tam). V nadaljevanju povzemamo najbolj iskane spretnosti v prihodnosti, kot jih navajajo pri Svetovnem gospodarskem forumu:

- spretnosti reševanja kompleksnih težav,
- koordinacija s preostalimi udeleženci,
- upravljanje ljudi,
- iznajdljivost v kritičnih položajih,
- pogajanje,
- nadzor kakovosti,
- storitvena usmerjenost,
- razsojanje in sprejemanje odločitev,
- aktivno poslušanje,
- ustvarjalnost.

Kako se lahko področje izobraževanja, s poudarkom na matematičnem izobraževanju, prilagodi potrebam po najbolj iskanih spretnostih v prihodnosti, ne da bi se odmaknilo od svojega temeljnega poslanstva? Med različnimi pristopi, ki lahko ponudijo odgovor na prej navedene izzive, izpostavljam raziskovalni pristop k učenju oz. učenje z raziskovanjem. Pri tem imamo v mislih splošno sprejeto razumevanje tega pojma kot pristopa k poučevanju in učenju matematike in naravoslovja na način, pri katerem se učenci učijo podobno, kot to pri svojem delu počnejo znanstveniki (Primas, 2011). Pristop je osredinjen na učenca in temelji na sodelovalnem delu, konstruktivističnih teorijah in razvoju miselnih procesov višjega reda.

Izobraževanje, temelječe na raziskovalnem pristopu pomeni izobraževanje, pri katerem se ideje in raziskovalni pristop pri pouku ne uporabljajo le občasno, ampak so prevzeti kot prevladujoč način dela (Artigue, Blomhøj, 2013).

### TERMINOLOŠKI POGLED NA UČENJE Z RAZISKOVANJEM, PREISKOVANJEM, ODKRIVANJEM (ANGL. INQUIRY BASED LEARNING – IBL) V NARAVOSLOVJU IN MATEMATIKI

Inquiry Based Learning (IBL) v slovenskem šolstvu prevajamo kot učenje z raziskovanjem, preiskovanjem, odkrivanjem (Skvarč, Bačnik, 2011). Na področju naravoslovja se je ustalilo poimenovanje učenje z raziskovanjem, pri matematiki pa je to poimenovanje nekoliko manj uporabljano in se poleg njega pojavlja tudi učenje s preiskovanjem<sup>1</sup>. V tem prispevku bomo za angleški izraz Inquiry Based Mathematics Learning uporabljali prevod učenje matematike s preiskovanjem<sup>2</sup>.

V tuji literaturi zasledimo, da je angleški izraz »inquiry« (raziskava, preiskava, analiza, vpašanje) mogoče obravnavati z različnih zornih kotov. Ropohl, Rönnebeck, Bernholz in Köller (2013) jih povzemajo (po Furtak, Shalveson, Shemwell in Figueroa, 2012) kot:

- način delovanja znanstvenikov,
- način učenja naravoslovja (in matematike) z vidika učenca,
- način poučevanja z vidika učitelja,
- kurikularna gradiva.

Pogosto se med temi različnimi zornimi koti v praksi ne ločuje. Isti vir opozarja tudi, da sta lahko uporaba in razumevanje angleškega izraza »inquiry« vezana na specifično predmetno področje. Prav tako se ta izraz lahko nanaša na dejavnost ali na proces (Calleja, 2016).

Od različnih področij se omejimo na naravoslovje, pri katerem se najpogosteje navaja opis devetih korakov

<sup>1</sup> Magajna in Žakelj (2000) navajata, da s preiskovanjem označujemo osnovnošolsko obravnavo problemskih situacij z nejasnimi cilji. Ni določeno, kaj moramo ugotoviti in kako naj pridemo do ugotovitev. Reševalec se mora sam odločiti, kaj natančno bo preučil in kako bo to preučil.

<sup>2</sup> Terminologijo učenja s preiskovanjem uporablja tudi aktualni projekt MERIA, ki se ukvarja z učenjem matematike s preiskovanjem na srednješolskem nivoju.

v procesu raziskovanja (Linn, Davis in Bell, 2004, po Skvarč in Bačnik, 2011). Učenci v raziskovalnem procesu:

- prepoznavajo probleme,
- kritično presoja/vrednotijo poskuse/raziskave,
- razlikujejo med alternativami,
- načrtujejo poskuse/raziskave,
- raziskujejo hipoteze,
- iščejo informacije,
- izoblikujejo modele,
- razpravljajo s sošolci (kolegi),
- oblikujejo koherentne argumente, sklepe.

Artigue in Blomhøj (2013) ugotavljata, da raziskovalni pristop k učenju in poučevanju ni tradicionalna značilnost matematičnega izobraževanja, v zadnjem času pa se tudi na tem področju pojavlja tovrstna terminologija, na kar so po njunem mnenju vplivali številni projekti s področja naravoslovja in matematike. Naštejmo nekatere izmed njih: CoReflect, Mind the Gap, S-TEAM, ESTABLISH, FIBONACCI, PRIMAS, PROFILES, Pathway, INQUIRE, SAILS, MASCIL. Opozorimo še na projekt MERIA Mathematics Education – Relevant, Interesting and Applicable (Matematično izobraževanje – pomembno, zanimivo in uporabno), ki trenutno teče in se osredotoča na pripravo gradiv za učenje matematike s preiskovanjem za učitelje.

### OD RAZISKOVALNEGA PRISTOPA V NARAVOSLOVJU DO PREISKOVALNEGA PRISTOPA V MATEMATIKI

Širjenje terminologije raziskovalnega pristopa k učenju in poučevanju s področja naravoslovja na področje matematike odraža dejstvo, da sta obe področji tesno povezani in da je matematika več kot zgolj deduktivna znanost. Tudi matematika podobno kot naravoslovje vsebuje eksperimentalno in raziskovalno komponento (prav tam). V naravoslovju se je terminologija raziskovanja močno zasidrala in je splošno uporabljana, za področje matematike pa tega (še) ne bi mogli trditi.

Vendar ideje in terminologija raziskovalnega pristopa pri vstopanju v matematično izobraževanje ne vstopajo v prazen prostor. V preteklih desetletjih so različne raziskave in učni pristopi poudarjali pomen učenja matematike z razumevanjem in dejavno vlogo učenca. Te teorije neposredno vplivajo na to, kako matematično izobraževanje podpira raziskovalno učenje in poučevanje.

Pri povezovanju matematičnega izobraževanja z raziskovalnim pristopom k učenju se najpogosteje omenja reševanje problemov, ki ima v matematiki dolgo tradicijo in ga pogosto povezujemo z delom Polye (1976). Rocard s sodelavci (2007) v svojem vplivnem poročilu o raziskovalnem pristopu omenja, da pri poučevanju matematike izobraževalna skupnost namesto učenje naravoslovja z raziskovanjem (angl. Inquiry based Science Education) uporablja bolj »učenje prek reševanja problemov« (angl. Problem-Based Learning). Ob tem Schoenfeld in Kilpatrick (2013) opozarjata, da je med tradicijo in jezikom reševanja problemov v matematiki in med raziskovanjem v naravoslovju velik prepad. Ta prepad pojasnita s tem, da s perspektive učenca reševanje problemov pomeni ukvarjanje z nalogo, za katero pot reševanja ni vnaprej znana.

Med poučevalnimi pristopi ali teorijami z značilnostmi učenja in poučevanja matematike s preiskovanjem je treba omeniti Teorijo didaktičnih situacij (angl. Theory of Didactical situations), realistično matematično izobraževanje (angl. Realistic Mathematics Education), modeliranje in antropološko teorijo didaktike (angl. Anthropological theory of didactics), katerih ideje se (delno) prepletajo z raziskovalnim pristopom oziroma pripomorejo h konceptualizaciji učenja in poučevanja matematike s preiskovanjem. Do neke mere se vsak približa matematičnemu izobraževanju s perspektive preiskovanja, vendar na svoj specifični način.

### KAKO LAHKO OPIŠEMO UČENJE MATEMATIKE S PREISKOVANJEM?

Artigue in Baptist (2012) primerjata učenje naravoslovja z raziskovanjem in učenje matematike s preiskovanjem ter ugotavljata, da sta v marsičem podobna: kot pri naravoslovju se tudi pri matematiki preiskovanje začne s problemom ali vprašanjem, do odgovora pa vodi pot prek opazovanja, raziskovanja, eksperimentiranja (mentalnega, materialnega, virtualnega); učenec išče povezave med obravnavanim problemom in drugimi njemu znanimi problemi; uporablja matematične tehnike, ki jih pozna, ali pa jih prilagodi. Učenec v preiskovalnem procesu pride do hipotetičnega odgovora, ki pa ga je treba še potrditi. V matematiki validacija temelji na dedukciji, dokazovanju ali na primerih, pri naravoslovju pa na rezultatih in izkušnjah iz poskusov.

Redko se zgodi, da je preiskovana pot linearna. V procesu preiskovanja se lahko porodijo nova vprašanja, kar pomeni, da mora učenec začetno hipotezo spremeniti, dopolniti ali pa popolnoma ovreči in ponovno začeti preiskovanje.

Ob tem avtorja opozorita, da se učenje z preiskovanjem pri matematiki od učenja z raziskovanjem pri naravoslovju lahko

razlikuje po tipu vprašanj, ki se pojavijo, in po procesih, ki pripeljejo do odgovora. Pomembno vlogo igra tudi dejstvo, da je narava matematičnega znanja bolj kumulativna kot pri naravoslovju in da je za izbor ustreznih problemov ključno učenčev predznanje. Ob tem je za celovit razvoj matematičnih pojmov in konceptov treba preseči parcialno in izolirano reševanje problemov ter učencu omogočiti širši pregled nad obravnavanimi matematičnimi vsebinami.

Cobb s sodelavci (1992) je med prvimi uporabljal termina raziskovanje in preiskovanje v zvezi z učnimi pristopi v matematiki (Ropohl, Rönnebeck, Bernholz, Köller, 2013). Preiskovanje v matematiki je opredelil z učenčevimi dejavnostmi: učenci pri preiskovanju v matematiki običajno razvijajo in poglobljajo razumevanje, ko ustvarjajo in manipulirajo z matematičnimi objekti tako, da jih razložijo in po potrebi utemeljijo (prav tam).

Navedimo opredelitev učenja in poučevanja matematike s preiskovanjem, kot jo najdemo v Encyclopedia of

Mathematics Education (Enciklopedija matematičnega izobraževanja): »Učenje in poučevanje matematike s preiskovanjem se nanaša na učenca usmerjeno na poučevalno paradigmo, pri kateri učenec deluje, kot delujejo matematiki in naravoslovci. To pomeni, da opazujejo pojave, zastavljajo vprašanja, iščejo matematične in naravoslovnepoti do odgovorov (kot so izvajanje poskusov, sistematično nadzorovanje spremenljivk, risanje diagramov, računanje, iskanje vzorcev in odnosov, postavljanje hipotez, posploševanje), interpretirajo in vrednotijo svoje rešitve, jih predstavijo in o njih razpravljajo.«

Pomen posameznih dejavnosti v procesu raziskovanja in preiskovanja se pri naravoslovju in matematiki lahko razlikuje. Najbolj je to opaziti pri vlogi poskusa, ki je pri matematiki precej manjša kot pri naravoslovju.

Reševalec se mora sam odločiti, kaj natančno bo preučil in kako bo to preučil.

Preglednica 1: Elementi raziskovalnega pristopa pri pouku matematike (Calleja, 2016)

Element IBL	Vloga učitelja	Pogoji za IBL
Matematične naloge	Učitelj predstavi raznolike matematične naloge, ki učence spodbudijo k razmišljanju ob usvajanju vsebine in ustvarjanju povezav.	<p>Predstavljene naloge:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>so dostopne, primerne za vse učence,</li> <li>vsebujejo dosegljive izzive,</li> <li>razvijajo razumevanje,</li> <li>imajo več vstopnih točk,</li> <li>vsebujejo možnost uporabe različnih strategij in metod,</li> <li>gradijo bolj na procesu kot na odgovoru.</li> </ul>
Sodelovalno učenje	Učitelj vzpostavi sodelovalno okolje, v katerem učenci izmenjujejo ideje in razvijajo argumente, ki izgrajujejo matematični pomen teh idej.	<p>Razredna kultura:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>podpira izmenjavo idej in pristopov,</li> <li>ceni raznolikost idej in razumevanja,</li> <li>spodbuja razpravo in kritično analizo,</li> <li>prepozna potencial medvrstniškega učenja.</li> </ul>
Smiselna vprašanja	Učitelj zastavlja vprašanja, ki zahtevajo utemeljevanje, učence pa spodbujajo k artikuliranemu sporočanju matematičnih misli in idej.	<p>Učiteljeva vprašanja:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>so načrtovana vnaprej,</li> <li>spodbujajo razmišljanje in utemeljevanje,</li> <li>omogočajo vrednotenje in komunikacijo o strategijah,</li> <li>razkrivajo napačne predstave učencev,</li> <li>podpirajo učence pri učenju iz napak,</li> <li>odpirajo prostor za raziskovanje alternativnih poti.</li> </ul>
Dejavnost in odgovornost učenca	Učitelj učencem omogoči priložnost, da prevzemajo odgovornost za učenje, in jih podpira pri prevzemanju dejavnejše vloge.	<p>Učenci so odgovorni za to, da:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>izberejo problem za reševanje,</li> <li>zastavljajo vprašanja in nanje odgovarjajo,</li> <li>se odločajo,</li> <li>oblikujejo strategije,</li> <li>predstavijo ideje,</li> <li>kritično vrednotijo poglede.</li> </ul>

Vsekakor pa se tako kot pri učenju naravoslovja z raziskovanjem tudi pri učenju matematike s preiskovanjem pojavljajo različne oblike preiskovalnih dejavnosti učencev (Artigue, Blomhøj, 2013):

- oblikovanje vprašanj,
- reševanje problemov,
- modeliranje in matematiziranje,
- iskanje virov in idej,
- raziskovanje,
- analiziranje dokumentov in podatkov,
- eksperimentiranje,
- postavljanje domnev,
- preizkušanje, razlaganje, utemeljevanje, dokazovanje,
- definiranje in strukturiranje,
- povezovanje, predstavljanje in sporočanje.

## ELEMENTI UČENJA Z RAZISKOVANJEM PRI POUKU MATEMATIKE

Elemente povzemamo po Calleju (2016), ki jih je na temelju svoje 20-letne prakse dela z učenci in učitelji strnil v: matematične naloge, sodelovalno učenje, smiselna vprašanja, dejavnost in odgovornost učenca. V preglednici 1 je predstavljena povezava med navedenimi štirimi elementi, vlogo učitelja ter pogoji za učenje z raziskovanjem.

Pri raziskovanju učenci največkrat delajo v parih ali manjših skupinah (Maaß, Artigue, 2013). Cohen (1994) delo v manjših skupinah opredeli kot skupno delo učencev, pri katerem velikost skupine omogoča, da lahko vsak učenec prispeva k skupni nalogi, ki jim je jasno predstavljena (prav tam). Sodelovalno delo v manjših skupinah omogoča, da učenci izmenjujejo svoje ideje in izkušnje. Ob tem razvijajo jezik (strokovno matematično terminologijo) ter matematične pojme in koncepte, med seboj primerjajo predstave in ugotavljajo svoje delno pravilne, nepopolne ali napačne predstave. Ubeseditiv lastnih miselnih procesov, načina razmišljanja in uporabljenih strategij ter postavljanje domnev učencu (in učitelju) omogočata vpogled v mrežo znanja in odpirata prostor za nadaljnje intervencije. Sodelovalno delo omogoča vzpostavljanje možnosti za razpravo med učenci in spodbuja učenje. Za ustvarjanje sodelovalne naravnosti in kulture pa je potreben čas tako pri učencih kot pri učiteljih.

Značilnosti sodelovalnega dela z razpravo se prepletajo z idejo formativnega spremljanja. Sem bi lahko uvrstili tudi zastavljanje vprašanj, sprejemanje odgovornosti za napredovanje, miselno in konkretno dejavnost učenca,

upoštevanje predznanja ob izbiri ustreznih nalog ter jasno postavljene zahteve in cilje.

Številne raziskave so se ukvarjale z učinki sodelovalnega učenja v manjših skupinah. Njihove prevladujoče ugotovitve poročajo o pozitivnih učinkih pri učencih, ki so skupaj ukvarjali z učno dejavnostjo (Johnson, Johnson, 1981, 1989, v Maaß, Artigue, 2013). Prav tam je naveden primer, kako so skupine in posamezniki reševali probleme. Skupine so se odrezale bolje, in študije so pokazale, da se posamezniki, ki so delovali v skupinah, kasneje odrežejo bolje tudi pri individualnem vrednotenju znanja.

## KAKO SE PRI UČENJU IN POUČEVANJU MATEMATIKE S PREISKOVANJEM SPREMENI VLOGA UČITELJA?

V preglednici 1 je Calleja namenil precej pozornosti vlogi učitelja pri oblikovanju pogojev za učenje matematike s preiskovanjem, saj je vloga učitelja pri izbiri nalog, pripravi učne ure, vodenju razreda in podpiranju učenja po njegovem mnenju ključna. V drugem stolpcu preglednice so navedene učiteljeve dejavnosti, ki nakazujejo, da se njegova vloga pri tem pristopu odmika od tradicionalne vloge v smer mentorja in usmerjevalca učnega procesa. S skrbnim izborom raznolikih nalog, ki vsebujejo učni potencial, učitelj pri učencih sproži miselne procese. Ti se odvijajo med celotnim preiskovanjem in vodijo k usvajanju novih matematičnih vsebin in veščin. Učiteljeva domišljena in predvsem odprta vprašanja imajo potencial, da vplivajo na potek preiskovanja, in z njimi lahko učitelj usmerja učence h ključnim ugotovitvam. Pri tem zaznava nepopolne ali napačne predstave učencev ter jih uporabi kot učno metodo učenja iz napak.

V projektu Primas (2011) je vloga učitelja osredotočena na vrednotenje učenčevih odgovorov ter na podlagi teh odgovorov na nadaljnjo izgradnjo znanja in krmiljenje učnega procesa, na povezovanje učenčevih izkušenj in pouka ter na motivacijo učencev s povezovanjem šolske matematike z matematiko na področju dela. Tako učitelj učenca podpira pri prevzemanju dejavne vloge pri razvijanju vsebinskega, procesnega znanja in veščin 21. stoletja.

Pri prevzemanju spremenjene vloge spodbujevalca učitelj potrebuje strokovno podporo v obliki izobraževanj in učnih gradiv. Izdatna podpora je pogoj za to, da se lahko spremembe odvijajo v večjem obsegu in prodrejo globlje v izobraževalni prostor (Maaß, Artigue, 2013). Strokovna izpopolnjevanja za učitelje so po mnenju učiteljev učinkovitejša, če se nanašajo na vsakodnevno poučevalno prakso in če omogočajo učiteljem medsebojno izmenjavo izkušenj pri poučevanju (prav tam). Prav tako je bolj učinkovito dolgoročno in intenzivno izobraževanje, kombinacija

izobraževanja v šoli in zunaj nje, učitelj pa naj bi prejemal povratne informacije o svojem napredku.

### NARAVA PROCESA IN NALOG PRI UČENJU MATEMATIKE S PREISKOVANJEM

Proces preiskovanja je zaznamovan s sodelovalnim delom in ni nujno omejen le na šolsko učilnico ali območje šole (Artigue, Blomhøj, 2013). Matematika je prisotna na skoraj vseh področjih človekovega delovanja in je kot takšna bogat vir za izzive in preiskovanja. Sami matematični pojmi in koncepti (števila, geometrijski liki, algebrski simboli, grafi ...) so ključni viri za preiskovalne matematične procese na vseh stopnjah matematičnega izobraževanja.

Nekaj izhodišč za preiskovanje navajamo po naslednji avtorjih: Artigue, Baptist (2012), Žakelj (2011), Suban (2013), in sicer:

- Kolikšen je največji produkt, ki ga lahko dobimo, če naravno število razčlenimo na vsoto pozitivnih števil in člene pomnožimo?
- Ali lahko vsako naravno število zapišemo kot razliko dveh kvadratov?
- Ali je vsako naravno število vsota dveh zaporednih naravnih števil?
- Ali lahko trikotnik z rezanjem in lepljenjem preoblikujemo v trikotnik, ki ima enako ploščino? Kako je s poljubnim parom večkotnikov?
- Ali za trikotnika, ki imata enako ploščino in obseg, nujno velja, da sta skladna?
- Obravnava/razišči enakokrake trapeze s ploščino  $24 \text{ cm}^2$ .
- Razišči količnike, ki nastanejo pri deljenju števila 1 z naravnim številom.
- Razišči like, ki nastanejo kot presečišče dveh (enakostraničnih) trikotnikov.

Prav tako so bogati potencialni viri tudi področja dela, kulture, znanosti, vsakdanjega življenja, zabave, tehnologije, športa in drugo.

Artigue in Baptist (2012) vire matematičnega preiskovanja razdelita v naslednje kategorije:

- naravni pojavi (na primer: Kako razumeti in opisati spremembe sence objekta na Soncu?),
- tehnični problemi (na primer: Kako izmeriti velikost nedostopnih objektov?),
- pripomočki (na primer: Kakšen učinek ima pantograf<sup>3</sup> na geometrijske like – in zakaj? Kako deluje GPS?),

- umetnost (na primer: Katere simetrije vsebuje arhitekturni objekt ali umetniško delo? Kateri minimalni elementi so potrebni za periodično tlakovanje?),
- vsakdanje življenje (na primer: Kako izbrati med različnimi ponudbami mobilne telefonije in interneta?).

V mnogih projektih o učenju z raziskovanjem (nekateri so omenjeni na začetku prispevka) so predstavljeni številni primeri, ki ilustrirajo različna področja matematičnega preiskovanja v matematiki in na drugih področjih.

Učenje z raziskovanjem in preiskovanjem ne pomeni nujno le dela na velikih dolgotrajnih projektih, ampak so pomembni tudi manjši koraki: dodatno vprašanje, ki spodbudi učence k razmišljanju in utemeljevanju ob računanju, ali naloga, ki učencem omogoča, da sledijo in ozaveščajo svojo pot reševanja (Maaß, Artigue, 2013).

Literatura navaja, da je v praksi mogoče zaslediti širok spekter poučevalnih praks, temelječih na raziskovanju, ki se razlikujejo v stopnji odgovornosti, dodeljeni učencem, in v stopnji odprtosti (Artigue, Blomhøj, 2013). Tako je pričakovati, da se bo tudi pri IBML oblikovalo več različnih izvedbenih modelov glede na institucionalne pogoje in omejitve okolja (prav tam).

Glede na stopnjo samouravnava učenca v projektu Pathway (Ropohl, Rönnebeck, Bernholz, Köller, 2013) ločujejo tri »tipe raziskovanja«, ki se nanašajo na naravoslovje, vendar so uporabni tudi na področju matematike:

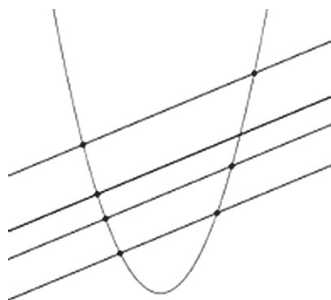
- odprto raziskovanje: učenec oblikuje (naravoslovno obarvano) vprašanje,
- vodeno raziskovanje: učenec izbere ali preoblikuje (naravoslovno obarvano) vprašanje iz danega nabora (s strani učitelja, iz različnih gradiv, iz drugih virov),
- strukturirano raziskovanje: učenec dobi (naravoslovno obarvano) vprašanje od učitelja, iz gradiva ali iz katerega drugega vira (Levy idr., 2011, v Ropohl, Rönnebeck, Bernholz, Köller, 2013).

Matematično preiskovanje je lahko učinkovito podprto s tehnologijo. Številni programi omogočajo učencu eksperimentiranje z geometrijskimi objekti, opazovanje, spreminjanje parametrov, postavljanje domnev in odpiranje prostora za utemeljevanje in dokazovanje. Razvoj tehnologije je močno povečal možnosti za eksperimentiranje pri matematiki, vendar tehnologija sama po sebi še ne krepi

<sup>3</sup> Pantograf je priprava za prerisovanje risb, zemljevidov, načrtov v povečanem ali zmanjšanem merilu (SSKJ).

preiskovalne dimenzije pri učenju in poučevanju (Artigue, Baptist, 2012). V naslednjem primeru na sliki 1 (Drijvers, Goddijn, Kindt, 2011) učencu lahko tehnologija pomaga do hipoteze.

Parabolo seka več vzporednih premic. Kaj lahko ugotoviš o razpoloviščih daljic, ki imajo za krajišča presečišča parabole in premic? Odgovor utemelji.



Slika 1: Primer za matematično preiskovanje, podprto s tehnologijo

Učenec s programom dinamične geometrije izdelava predlogo, s katero ugotavlja, kje so razpolovišča daljic, in preizkuša svojo hipotezo o skupni premici. Dinamično manipulira s snopom premic in opazuje, kako se spreminja lega navpične premice. Učenec utemelji svojo hipotezo na analitičen način (na primer s povezavo med algebro in geometrijo prek naklona premice). Nalogo lahko učenec reši tudi brez podpore tehnologije, pri čemer je preiskovalni proces osiromašen z vidika vizualizacije, spreminjanja naklona premice in porabe časa.

### ALI NACIONALNI KURIKULARNI DOKUMENTI PODPIRAJO UČENJE IN POUČEVANJE MATEMATIKE S PREISKOVANJEM?

Nacionalni kurikularni dokumenti v obliki učnih načrtov in katalogov znanja večplastno podpirajo učenje in poučevanje matematike s preiskovanjem, in sicer:

- s splošnimi cilji in kompetencami pouka matematike,
- z didaktičnimi priporočili,
- s konkretnimi vsebinskimi in procesnimi cilji.

Učna načrta za osnovno šolo in gimnazijo poudarjata, da so splošni cilji pouka matematike med drugim tudi, da se učenec nauči spoznavati pomen matematike kot univerzalnega jezika in orodja, uporabiti matematiko v različnih kontekstih in povezovati znanje znotraj matematike in tudi širše (medpredmetno), postavljati ključna vprašanja, ki izhajajo iz življenjskih položajev ali pa so vezana na raziskovanje matematičnih problemov, ter med matematičnimi

kompetencami navajata tudi raziskovanje in reševanje problemov. V Katalogu znanja za srednje strokovno izobraževanje med kompetencami prav tako najdemo zmožnost za raziskovanje in reševanje matematičnih problemov in zmožnost za generaliziranje in abstrahiranje ter reševanje problemov na splošni ali abstraktni ravni. Da bi okrepili pomen vsebinskega in procesnega znanja z vidika preiskovanja in reševanja problemov, je v posodobljeni učni načrt v osnovni šoli vključen poseben sklop Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami.

Didaktična priporočila so pomemben vir usmeritev za učitelja v fazi priprave na pouk in mu pomenijo izhodišče za oblikovanje učnega procesa. Po celotni vertikali je mogoče zaznati usmeritve k prevzemanju večje vloge učenca pri usvajanju znanja prek raziskovanja, preiskovanja in reševanja problemov. Ob tem je velika skrb posvečena sistematičnemu razvoju in nadgrajevanju pojmov ter veščin. Navajamo primer zapisa za gimnazijce v poglavju o geometrijskih likih in telesih: Priporočamo, da dijaki/dijakinje samostojno preiskujejo in raziskujejo ter pri tem uporabljajo tudi programe za dinamično geometrijo.

Na procese preiskovanja so vezani tudi konkretni vsebinski in procesni cilji. V osnovni šoli na primer učenci raziskujejo kombinatorične primere ter razvijajo različne metode reševanja kombinatoričnih problemov (metoda poskušanja), preiskujejo vzorce in razvijajo matematično mišljenje, postavljajo raziskovalna oziroma problemska vprašanja, rešujejo probleme in pri tem uporabljajo različne strategije. Učenci v 2. in 3. vzgojno-izobraževalnem obdobju izdelajo empirično raziskavo, v kateri združijo procesno znanje z vsebinskim znanjem s področja obdelave podatkov. Seveda pa učenje s preiskovanjem presega okvirje izdelave (empirične) raziskave in ga gre razumeti v širšem smislu.

Podpora preiskovalnemu pristopu k obravnavi matematičnih vsebin na ravni kurikularnih dokumentov pa je šele predpogoj za implementacijo v vsakodnevni šolski praksi. Učitelj je tisti, ki na koncu izbere pristop in z učenci izvede konkretno učno uro.

### SKLEP

Evropska komisija (2016) navaja, da je matematika osnova moderne znanosti in je nepogrešljiva pri reševanju izzivov na področju znanosti, tehnologije in družbe (razvoj računalnikov, obdelava velike količine podatkov (t. i. big data), modeliranje, simulacije, biomatematika, finančna matematika, transport, kvantna tehnologija ...).

Številni dokazi govorijo v prid tezi, da pristopi, ki temeljijo na preiskovanju, raziskovanju in sodelovalnem delu,

pozitivno prispevajo k izgradnji znanja posameznika in skupine (Barron, Darling-Hammond, 2008). Učenci, ki se učijo s preiskovanjem, poleg vsebinskega znanja razvijajo tudi vse bolj pomembne veščine 21. stoletja, kot so timsko delo, reševanje kompleksnih problemov in uporaba znanja v novih okoliščinah (prav tam). Zahteve sodobne globalizirane družbe nakazujejo vse večje potrebe po tovrstnem znanju in veščinah, vendar pa je med poučevalnimi pristopi bolj kot preiskovalni in raziskovalni pristop še vedno prisoten tradicionalni pristop. Literatura navaja, da je med izzivi pri izvajanju preiskovalnega pristopa lahko na eni strani tudi pomanjkanje izkušenj in razumevanja

kompleksnosti procesa preiskovanja s strani učitelja, po drugi strani pa neizkušenost in neveščost učencev (Barron, Darling-Hammond, 2008). Med okoliščinami, ki bi po mnenju učiteljev lahko zavirale vpeljavo dejavnih pristopov v pouk, so obsežni učni načrti, pomanjkanje časa, veliko število učencev v razredu, izzivi pri vrednotenju tovrstnih dosežkov in izzivi v zvezi z eksternimi nacionalnimi vrednotenji znanja. Za preseganje raznovrstnih zaprek na poti do učinkovitega učenja in poučevanja matematike s preiskovanjem obstaja v Sloveniji vrsta evropskih projektov in poučevalnih praks, ki so lahko posamezniku v navdih, da se odloči za potovanje v tej smeri.

## VIRI IN LITERATURA

- Artigue, M. in Baptist, P. (2012). Inquiry in Mathematics Education. Background Resources For Implementing Inquiry in Science and Mathematics at School. Fibonacci project. [http://www.fondation-lamap.org/sites/default/files/upload/media/minisites/action\\_internationale/inquiry\\_in\\_mathematics\\_education.pdf](http://www.fondation-lamap.org/sites/default/files/upload/media/minisites/action_internationale/inquiry_in_mathematics_education.pdf) (dostopno 1. 8. 2017).
- Artigue, M. in Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education*. 45: 797–810.
- Barron, B. in Darling-Hammond, L. (2008). Teaching for Meaningful learning: A Review of Research on Inquiry-Based and Cooperative Learning. *Edutopia*.
- Calle, J. (2016). Teaching Mathematics through Inquiry. A Continuing Professional Development Programme Design. Educational designer. *Journal of the International Society for Design and Development in Education*.
- Drijvers, P., Goddijn, A. in Kindt, M. (2011). Algebra education: Exploring topics and themes. V *Secondary Algebra Education. Revisiting Topics and Themes and Exploring the Unknown*. Ed. Drijvers, P. Utrecht: Freudenthal Institute.
- European Commission (2016). Mathematics for Europe [https://ec.europa.eu/futurium/en/system/files/ged/finalreport\\_maths.pdf](https://ec.europa.eu/futurium/en/system/files/ged/finalreport_maths.pdf) (dostopno 3. 8. 2017).
- Lerman, S. (2014). *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer Dordrecht. Heidelberg. New York. London.
- Maaf, K. in Artigue, M. (2013). Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching: a synthesis. *ZDM Mathematics Education*. 45: 779–795.
- Magajna, Z. in Žakelj, A. (2000). Obdelava podatkov pri pouku matematike 6–9. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo. MERIA Newsletter 1 <http://www.meria-project.eu/news/first-issue-meria-newsletter> (dostopno 3. 8. 2017).
- Polya, G. (1976): Kako rešujemo probleme. Kako rešujemo matematične probleme. Dopolna delavska univerza. Univerzum. Ljubljana
- Rocard, M., Hemmo, V., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D. in Wallberg Henriksson, H. (2007). *Science Education NOW: A Renewed Pedagogy for the Future of Europe!* Brussels. European Commission. Directorate General for Research.
- Rojko, C. idr. (2007). Katalog znanja. Matematika. Srednje strokovno izobraževanje (SSI). 383 ur do 408 ur. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport. Zavod Republike Slovenije za šolstvo. [http://eportal.mss.edus.si/msswww/programi2012/programi/Ssi/KZ-IK/KZ\\_MAT\\_SSI\\_383\\_408.pdf](http://eportal.mss.edus.si/msswww/programi2012/programi/Ssi/KZ-IK/KZ_MAT_SSI_383_408.pdf) (dostopno 2. 8. 2017).
- Ropohl, M., Rönnebeck, S., Bernholz, S. in Köller, O. (2013). A definition of inquiry-based STM education and tools for measuring the degree of IBE. Report from the FP7 project ASSISTME: Assess Inquiry in Science, Technology and Mathematics Education.
- Schoenfeld, A. H. in Kilpatrick, J. (2013). A US perspective on the implementation of inquiry-based learning in mathematics. *ZDM Mathematics Education*.
- Skvarč, M. in Bačnik, A. (2011). Raziskovalno eksperimentalno učenje kot imperativ sodobnega pouka naravoslovnih predmetov. *Vzgoja in izobraževanje*. l. XLII, št. 6, 2011, l. XLIII, št. 1, 2012. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.
- Suban, M. (2013). Razumevanje matematike z uporabo IKT. Zbornik vseh prispevkov. *Sirikt 2013*. Ur. Kreuh, N. et al. Kranjska Gora.
- The PRIMAS project (2011). Promoting inquiry-based learning (IBL) in mathematics and science education across Europe: PRIMAS guide for professional development providers. [www.primas-project.eu](http://www.primas-project.eu) (dostopno 3. 8. 2017).
- World Economic Forum (2016). The Future of Jobs Report. <http://reports.weforum.org/future-of-jobs-2016> (dostopno 2. 8. 2017).
- Žakelj idr. (2008). Učni načrt. Matematika. Gimnazija: splošna, klasična in strokovna gimnazija. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport. Zavod Republike Slovenije za šolstvo. [http://eportal.mss.edus.si/msswww/programi2010/programi/media/pdf/un\\_gimnazija/un\\_matematika\\_gimn.pdf](http://eportal.mss.edus.si/msswww/programi2010/programi/media/pdf/un_gimnazija/un_matematika_gimn.pdf) (dostopno 2. 8. 2017).
- Žakelj idr. (2011). Učni načrt. Program osnovna šola. Matematika. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport. Zavod Republike Slovenije za šolstvo. [http://www.mizs.gov.si/fileadmin/mizs.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni\\_UN/UN\\_matematika.pdf](http://www.mizs.gov.si/fileadmin/mizs.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf) (dostopno 2. 8. 2017).
- Žakelj, A. (2010). Raznovrstnost pristopov k učenju in poučevanju matematike. V *Posodobitve pouka matematike v gimnazijski praksi*. Ur. Kmetič, S., Sirnik, M. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.