Filozofski vestnik Letnik/Volume XXIII • Številka/Number 1 • 2002 • 25–51

KAKO LAHKO APLICIRAMO MATEMATIKO NA SVET?

ANDREJ ULE

V razpravah o matematiki se vedno znova zastavlja vprašanje, kako to, da lahko matematiko oz. matematične strukture tako dobro in natančno »apliciramo na svet«. To je še zlasti aktualno danes, ko lahko na nekaterih področjih znanosti določene zakonitosti predstavimo zgolj matematično, ker vsa druga intelektualna sredstva preprosto odpovedo (npr. v mikrofiziki ali v kozmologiji). To vprašanje so si zastavljali že antični filozofi, zlasti Platon. Platonov predlog rešitve tega vprašanja je klasičen in v določeni meri še danes zanimiv. Po Platonu je namreč matematika najbližja podoba idej. Je »umski odraz« idej, za razliko od empiričnih stvari, ki so zgolj čutna in zato manj popolna podoba idej, kot je matematika, kot ugotavlja Platon v 6. knjigi *Države* (Platon, 1995). Če zanemarimo nižji ontološki položaj stvari pojavnega sveta v primerjavi z matematičnimi stvarmi, kar za nas v tej razpravi ni pomembno, imamo torej nekakšno trikotniško strukturo razmerij:

$$\begin{tikzcd} & \text{ideje} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \text{matematika} \arrow[rr, dotted, no head] & & \text{pojavni svet} \end{tikzcd}$$

Ker sta matematika in pojavni svet dva odraza idej, sta seveda med seboj tudi nujno povezana, čeprav ta zveza ni neposredna. Pojavni svet že zaradi tega, ker ni idealen in je tudi podobnost stvari in idej nepopolna podobnost, le v približku ustreza matematičnim arhetipom (Platon, prav tam). Kljub temu Platon ni nikoli dvomil, da temeljni zakoni kozmosa izražajo določena matematična razmerja, za Platona so bila to razmerja med števili in razmerja med geometrijskimi liki. V dialogu *Timaj* je utelesil to svoje prepričanje v veličastni matematično-metaforični obliki (Platon, 1959, 31–36, 53d–55c).

Platonova rešitev uganke, zakaj lahko svet spoznamo s pomočjo matematike, je načeloma zadostna, če seveda sprejmemo domnevo o obstoju idej kot skupni podlagi matematike in empirične stvarnosti. Ostaja pa odprto novo vprašanje, čemu oz. zakaj imajo ideje dve vrsti podob, umsko podobo v matematiki in čutno podobo v empiričnih stvareh. Prav tako ni odgovorjeno na vprašanje, zakaj je ravno matematika umski odraz idej. Platon še ni imel izdelanega pojma logike, zato ne vemo, kako si je predstavljal razmerje med logiko in matematiko. Kaj bi dejal, če bi bolje poznal logiko, vsaj aristotelovsko silogistiko? Ali bi jo prišteval k umskemu odrazu idej, ali bi jo podredil, ali nadredil matematiki?

Zanimivo je, da si niti v antiki niti v času sholastike niso zastavljali teh vprašanj. Vsaj za neoplatonike se zdi, da je bila matematika zanje nekaj višjega kot logika, kajti matematika nam podaja čiste oblike (forme), medtem ko je logika zgolj organon, orodje razuma, in ne samostojna sfera idealnih resnic ali bitnosti. Več spoštovanja do logike najdemo že pri Aristotelu, še več pa pri stoikih, vendar so njihova pojmovanja razmerja med logiko in matematiko enako nejasna in nedoločna.

Aristotel in njegovi nasledniki so prav tako kot platoniki zgradili svojo teorijo matematike in jo skušali odlepiti od platonovske »paradigme«, a ta teorija je po mojem mnenju nezadostna in v končni posledici vodi k ponovitvi platonovske sheme, le da namesto idej stojijo substancialne forme, ki so dostopne zgolj umski intuiciji, vendar pa k njim težijo vse stvari. Aristotel je namreč domneval, da matematične resnice temeljijo na abstrakciji določenih potez, recimo temu kvantitativnih potez form stvari, od drugih, recimo temu kvalitativnih potez. Pri tem je tihoma predpostavljal, da sodijo kvantitativne značilnosti stvari in njihovih razmerij med skupne in splošne značilnosti vseh stvari. Te značilnosti ne odkriva kak posebni čut, temveč nekakšen skupni čut oz. skupnost vseh čutov. Razum lahko prepozna te skupne značilnosti in jih miselno loči od ostalih značilnosti. Razum obravnava te značilnosti v idealizirani obliki, tj. zanemari nujna odstopanja od čistih oblik pri konkretnih stvareh. Telo motri npr. *kot da bi bilo* zgolj geometrijsko telo, kot da bi bilo daljica, ploskev, kot da bi bilo nedeljivo ali deljivo itd. (Aristotel, 1999, 1076–1077). Zato za Aristotela matematične oblike in razmerja nimajo samostojnega obstoja nasproti realnim stvarem, kot je to domneval Platon, temveč so samostojne zgolj *in abstracto.*

Aristotel ni imel težav pri razlagi aplikacije matematike na svet, kajti če so matematične lastnosti in relacije izvedene po abstrakciji in idealizaciji določenih kvantitativnih lastnosti realnih bitnosti, potem je aplikacija matematičnih resnic na realne bitnosti razumljiva. Aristotel je poleg tega vnaprej omejil uporabo matematičnih zakonov na tista območjih stvarnosti, kjer vlada stroga pravilnost dogajanj, npr. stroga cikličnost gibanj itd. To je bil predvsem t. i. nadlunarni svet, medtem ko je za Aristotela v podlunarnem (tj. zemeljskem) svetu matematika uporabna le v omejeni meri. Močan napredek matematiziranih znanosti od renesanse dalje je seveda falzificiral takšno gledanje in ponovno zaostril vprašanje o bistvu matematičnega in vprašanje o tem, zakaj lahko tako uspešno apliciramo matematiko na realni svet.

Očitno je, da je bilo Aristotelovo pojmovanje matematike zavezano razmeroma ozkemu dometu matematike, ki omejuje na formalni in idealizirani posnetek realnosti. Vendar že naravnih števil, in zlasti ne apriorne veljavnosti aritmetičnih zakonov, ne bi mogli »izpeljati« iz formalnih abstrakcij realnih urejenosti, ne da bi jih že na tihem predpostavili kot splošno obliko linearne urejenosti na sploh.

Kljub tem omejitvam tvegajmo in zabeležimo formalno podobo Aristotelovega pojmovanja o razmerju med matematiko in svetom oz. formami realnih stvari.

matematične forme   substancialne forme

forme realnih stvari

Pri tem sta smeri odnosov različni. Medtem, ko ljudje iz realnega sveta abstrahirajo matematične forme (in jih potem znova aplicirajo na njem), torej so naša miselna konstrukcija in orodje, so substancialne forme relativno neodvisne od posameznih bitnosti. So imanentni smoter gibanj, ki nekako narekujejo bitnostim kakšne naj bodo oz. kaj naj postanejo. Vendar ta shema ne more vzdržati, moramo jo dopolniti, kajti ni jasno, od kod črpa matematika svojo apriorno in splošno resničnost. To lahko pojasnimo le tako, če tudi matematične forme navežemo na substancialne forme oz. na njihove posebne, tj. kvantitativne momente. Tega Aristotel v nam znanih spisih ni jasno izrekel, vendar to lahko predpostavimo. V nasprotnem bi se matematika spremenila zgolj v začasni miselni konstrukt, ki ga načelno ne bi mogli ločiti od kakih fantazij. Res pa je, da pri Aristotelu v matematičnem spoznanju ne gre za kake odraze po sebi veljavnih razmerij in struktur čistih form, kot pri Platonu. Če pa navežemo matematične forme na substancialne forme, se v bistvu vrnemo k že postavljeni trikotniški platonovski shemi razmerij med svetom, matematiko in območjem apriornih resnic in zakonov. Edina razlika bi bila v tem, da so za Platona matematične forme predpostavljene svetu, za Aristotela pa so nekako izpeljane iz sveta.

Za Platona je svet, ontološko gledano, sekundaren tako glede na matematične forme kot glede na ideje. Človekov um matematične forme le odkriva, pri čemer so matematične hipoteze in konstrukcije zgolj pripomoček v tem odkrivanju, medtem ko po Aristotelu ljudje matematične forme konstruiramo glede na momente substancialnih form in so ontološko gledano sekundarne glede na svet. Matematične forme živijo tedaj le v naši miselni abstrakciji in konstrukciji, ne pa po sebi. Pa tudi substancialne forme ne obstajajo neodvisno od sveta, temveč so kot notranji smoter vsebovane v bitnostih določene vrste. Aristotelov realizem form bi lahko skicirano označili kot realizem brez separabilnosti, Platonov pa kot realizem s separabilnostjo form. Podobno velja za matematične forme – tudi tu gre pri Aristotelu za realnost brez separabilnosti (od individualnih stvari), pri Platonu za realnost s separabilnostjo. Oz. točneje rečeno, pri Aristotelu so matematični stavki stavki o idealiziranih, abstrahiranih potezah realnih stvari, pri Platonu pa so o hipotetičnih idealnih konstruktih, ki jih ob tihem vzoru idej naredimo na osnovi nepopolnih realnih modelov. Je pa iz Aristotelovega pojmovanja matematike in logike razvidno, da je matematika neodvisna od logike, kajti logika ima opravka s stavki (sodbami) in sklepi, matematika pa s idealiziranimi formalnimi momenti realnih bitnosti. Določena posredna zveza vendarle tudi tu obstaja, namreč toliko, kolikor so logični sklepi nekakšen abstrakten in formalen posnetek vzročnih relacij, te pa zopet temeljijo na strukturnih relacijah med substancialnimi formami bitnosti. Težko pa je kaj več od te blede posredne zveze reči o odnosu med logiko in matematiko pri Aristotelu.

Na naslednjo koherentno razlago aplikabilnosti matematike na pojavni svet je bilo treba čakati več kot dva tisoč let, namreč do Kanta. Vse druge teorije so se namreč vrtele v Platonovi oz. Aristotelovi, torej konec koncev v Platonovi, senci. To še zlasti velja za racionaliste, le da so namesto Platonove »sfere idej« postavljali sfero čistih apriornih resnic, ki so dostopne razumu. Matematiko in logiko so imeli za dva nujna umska izraza teh resnic, pojavni oz. empirični svet pa se mora prav tako ravnati po njih, ker so to najvišji zakoni vsakega možnega sveta. Najjasneje je to misel izrazil Leibniz. Nekatere od umskih resnic lahko uvidimo z intelektualno intuicijo, druge pa logično izpeljemo iz njih. Te naloge človekov um ne more opraviti v celoti, pač zaradi svoje končnosti, toda neskončni, npr. božji um bi to lahko storil. Pomembna novost pa je vendarle Leibnizov izrecni *logicizem*, saj je izrecno trdil, da je matematika izpeljiva iz logike oz. so matematične resnice izpeljive iz logičnih resnic. Po drugi strani pa je zanj logiko možno *izraziti z računom*, namreč s simbolnim računom, ki ga je Leibniz vztrajno, a zaman poskušal določiti vse življenje. Še ena Leibnizova zamisel je zelo pomembna, namreč zamisel o obstoju objektivnih strukturnih podobnosti med formalnimi zakoni, kot jih popišemo v kakem simbolnem izrazu ali stavku ter lastnostmi stvari in relacijami med stvarmi v stvarnosti. Te strukturne podobnosti so po njegovem mnenju tudi podlaga za aplikacijo matematike na realni svet. Leibniz je tako prvi postavil idejo o *izomorfizmu struktur*, ki je podlaga za uporabo simbolnih jezikov, med drugim tudi matematike v svetu. Pri tem je pojem simbolnih jezikov razširil daleč nad obseg tedanje matematike (gl. Leibniz, 1960, 1966, 1996, več o tem Ule, 1997). S tem je preciziral Aristotelovo zamisel o abstrakciji formalnih lastnosti in relacij v matematičnih sodbah in pojmih. Vendar so njegove zamisli ostale skorajda neopažene kar dvesto let. Ponovno so oživele v začetkih moderne logike pri Boolu, Schröderju, Peirceju in seveda Fregeju.

Racionalisti so si že začeli zastavljati tudi vprašanja o natančnejšem razmerju med matematiko in logiko. Descartes je npr. strogo razločeval med logiko in matematiko in imel matematične resnice za višje kot logične. Logične resnice, kar je pomenilo tedaj zakone silogistike, je imel za urejevalna načela razuma, urejajo namreč zaporedje idej, tako da si sledijo po miselni nujnosti, matematične resnice pa za splošna načela »reda in mere«, tj. ureditvenih struktur na sploh. Toda izhajanje ene resnice iz drugih resnic za Descartesa ni podvrženo zgolj logiki, temveč tudi drugim apriornim načelom, ki pa jih ni podrobneje pojasnil, imel pa jih je za evidentna in razvidna (Descartes, 1957, pravilo IV). Nasprotno je Leibniz težil k zbliževanju in poenotenju logike in matematike, vsekakor je poskušal oboje zvesti na neki skupni simbolni račun (*mathesis universalis*) (Leibniz, 1996).

Empiristi nam glede matematike in logike nimajo kaj dosti povedati. Nekateri, kot je npr. Hobbes, so logiko in matematiko razumeli kot nekakšen račun pojmov, pri čemer so imeli logiko (tj. v obliki tradicionalne silogistike) za nekakšno trivialno in neplodno metodo, namreč nepotrebno nadaljnje razlage. Po drugi strani so empiristi še sledili Aristotelovi ideji, da matematične lastnosti in relacije, ki jih prilegamo naravi, dobimo s pomočjo indukcije, abstrakcije in idealizacije iz empiričnih pojavov, pri čemer si pomagamo z logično analizo pojavov v enostavnejše elemente. Tu so nekateri priznavali človeško ustvarjalnost, ki lahko ustvari simbolno posredovane miselne konstrukte, za katere ni nujno, da jim karkoli ustreza v dejanskosti, pa vendar lahko igrajo pomembno vlogo v izpeljavah in tudi v empiričnem raziskovanju. V tej točki so odstopali od tradicionalnega razumevanja matematike kot abstrakcije in idealizacije kvantitativnih lastnosti in relacij iz izkustva. Metoda analize in matematične konstrukcije je bila skupna tako racionalistom kot empiristom, predvsem pa tedanjim naravoslovcem z Galilejem na čelu. Empiristi pa so poudarjali, da z matematičnim raziskovanjem narave ne iščemo kakih skritih bistev ali vzrokov, temveč odkrivamo zgolj razmerja med pojavi in ta razmerja opisujemo s pomočjo matematično formuliranih zakonov.

Kot poudarja Cassirer, se v tem kaže moč novo odkritega relacijskega in funkcijskega razmišljanja, za razliko od aristotelovskega in platonovskega substancializma (Cassirer, 1911, str. 417).[1] Podobne misli lahko najdemo tudi pri

[1] Bacon npr. piše, da se moramo v naravoslovnih razmišljanjih previdno držati le tega,

Galileju, ki velja za očeta novoveškega in modernega naravoslovja (gl. Cassirer, 1911, str. 403–4, Becker, 1998, str. 32–33). V teh pojmovanjih se je odražala na novo odkrita kreativna in sistematična zveza metodičnega eksperimentiranja ter analize pojavov ob pomoči matematičnih formulacij splošnih zakonov. Matematika se je kazala obenem kot analitično in kot konstruktivno človekovo *sredstvo, orodje.* Vendar je ostalo odprto vprašanje, zakaj je uporaba matematike v naravoslovju in tehniki sploh uspešna in zlasti, zakaj je tako zelo uspešna. Splošno prepričanje, da je »knjiga narave napisana v jeziku matematike« (Galilei), ki je delno obnavljalo pitagorejsko-platonovske poglede na matematiko, je bilo pač premalo za to.

Matematika 16. in 17. stoletja je bila že tedaj tako razvita, da je razvijala svoje lastne simbolne kalkile, ki se niso več naslanjali na abstrakcije iz izkustva. In ravno nekateri takšni kalkili so se že tedaj izkazali za zelo plodne v naravoslovju (npr. razširitev pojma števil z imaginarnimi oz. kompleksnimi števili, analitična geometrija itd.). Zato nam zgolj sklicevanje na spretno matematično konstrukcijo ne more razložiti uporabnosti matematike v izkustvenem svetu. Nekateri empiristi so imeli veliko zadreg glede matematičnega naravoslovja. Znano je, da je npr. Berkeley ostro zavračal Newtonovo fiziko predvsem zaradi njene »spekulativne matematičnosti«, tj. aplikacije infinitezimalnega računa (v Becker, 1975, str. 156–8). Niti racionalisti, niti empiristi niso našli zadovoljivih odgovorov na to vprašanje. V kolikor so ga sploh tematizirali, so nanj praviloma odgovarjali v okviru platonovskih ali aristotelovskih »trikotniških« modelov odnosov med matematičnimi in naravnimi (empiričnimi) strukturami oz. oblikami.

V drugačno smer se je podal šele Kant. Matematiko je oprl na apriorne strukture čistega zora, tj. prostorskega in časovnega zora. Geometrija ustreza apriorni strukturi prostora, aritmetika apriorni strukturi časovnega reda, na geometriji in aritmetiki pa temelji vsa preostala matematika. Ker je po Kantu čisti zor obenem apriorna zmožnost zavesti in pogoj možnosti za nastop pojavov kot stvari v svetu možnega izkustva, je s tem tudi pojasnjeno, zakaj so matematične resnice same po sebi apriorne in zakaj so tudi nujne resnice za izkustveni svet. Podobno kot za zakone narave po Kantovi teoriji velja, da jih postavlja čista zavest (natančneje, čisti razum), ne pa, da jih narava zastavlja

---

kar realno obstaja, vendar pa nas to ne sme ovirati pri iskanju enostavnih narav s pomočjo matematičnih razmišljanj. Tako lahko »zapletene naloge prestavimo v enostavne, nesoizmerljive, v soizmerljive, iz iracionalnih v racionalne količine, iz neskončnih in meglenih v končne in gotove – kakor v primeru črk abecede in glasbenih not« (Bacon, 1939, II, 8). Govori o tem, da ima raziskovanje narave najboljše rezultate tedaj, ko začenja s fiziko in končuje v matematiki. Ne smemo se bati velikih števil ali majhnih delčkov. Kajti pri številih jih lahko tisoč razumemo kot eno samo ali pa razumemo tisoči del celega kot celo samo (prav tam).

zavesti, tudi za matematične resnice velja, da jih naravi zastavlja čista zavest (natančneje, čisto zrenje), ne pa, da jih narava zastavlja zavesti.

Tudi pri Kantovi teoriji lahko prikažemo shemo odnosov med empirično stvarnostjo, zavestjo in matematiko:

apriorne forme
čistega zrenja

apriorne forme
prostora in časa .... matematika

Zopet smo dobili značilno trikotniško strukturo, kjer določena vrsta apriornih form obenem pogojuje apriorne forme realnosti in podpira veljavnost matematike. Za Kantovo teorijo je značilna veliko tesnejša povezanost med izkustveno stvarnostjo in matematiko, kakor pri platonovski oz. platonovsko-aristotelovski teoriji. Pri Platonu je zveza posredna in le približna, kajti empirične stvari le približno ustrezajo idejam, matematika pa jim ustreza popolneje, ker so tako ideje kot matematične strukture umske stvarnosti, ki obstajajo onkraj empirične pojavnosti. Pri Aristotelu je zveza zopet posredna, čeprav nemara tesnejša kot pri Platonu. To pa zato, ker so matematične strukture abstrakcija iz realnih form in idealizacija razmerij med temi formami in niso stvarnost po sebi, onkraj čutnih form. Pri Kantu pa sta apriorna struktura prostora in časa in apriorna struktura čistega zrenja pravzaprav le dva vidika iste »transcendentalne« apriornosti, eno je apriorna urejenost čistega akta zrenja, drugo je apriorna urejenost možnih predmetov tega zrenja. Kant je pod pojmom »zrenja« (*Anschauung*) dejansko združil tako intencionalni akt zrenja kot tudi njegov predmet (Kant, 1980, str. 111 sq). Če njegovo tezo izrečemo na način Husserlove fenomenologije, potem bi lahko dejali, da so za Kanta apriorne forme noez čutnega zrenja strogo izomorfne apriornim formam možnih noem čutnega zrenja. Matematika na formalen način izraža apriorno skupno strukturo obeh vrst form. Odtod ne izhaja zgolj načelna aplikabilnost matematike na prostorsko-časovne stvari, temveč tudi apriorna veljavnost čiste matematike. Matematika je zato sistem čistih formalnih *resnic*, ne zgolj logični rezultat določenih konvencij.

Moramo pa ugotoviti, da Kant s svojo načelno rešitvijo vprašanja, kako je mogoča čista matematika, še ni dokončno odgovoril na vprašanje, kako je mogoče tako natančno, kakor npr. v newtonovski mehaniki, aplicirati matematiko na naravo. Na to vprašanje je Kant le delno odgovoril in to šele v *Kritiki razsodne moči*. Po njegovem potrebujemo nov princip, ki utemeljuje enotnost vseh empiričnih principov in utemeljuje tudi možnost sistematičnega ujemanja med njimi. Ta princip je po Kantu v tem, da gledamo na naravo kot na smotrno urejeno celoto, in to tako, da se sestav narave ujema z našimi spoznavnimi zmožnostmi (Kant, 1999, str. 20, 23–25, 336).[2] Ta urejenost ni zagotovljena z samimi transcendentalnimi principi možnega izkustva, saj bi se prav lahko zgodilo, pravi Kant, da bi bila lahko narava tako neznansko mnogovrstna in heterogena, da je ne bi mogli natančneje spoznati, pa čeprav bi spoznali transcendentalne pogoje možnega izkustva. Potrebujemo torej smotrno urejen sistem empiričnih zakonov, da bi bil lahko dostopen našemu razumu. Seveda je zamisel ne-človeškega razuma le predpostavka in vodilna ideja v raziskovanju narave, ne pa dokazljiva trditev.

V *Metafizičnih osnovah naravoslovja* pa je Kant trdil, da je v naravoslovju le toliko dejanske znanosti, kolikor je v njem matematike. To pa zato, ker vsako naravoslovje potrebuje neki apriorni del kot svojo podlago. Vendar se čisto spoznanje naravnih reči ne doseže zgolj skozi pojme, temveč nujno potrebujemo čisti zor. To pa pomeni konstruiranje naravoslovnih pojmov, ki je bistveno matematično. Čista filozofija narave morda lahko shaja brez matematike, ne pa filozofija (tj. znanost) o posebnih naravnih rečeh (npr. fizika ali psihologija). Torej, kolikor več matematike najdemo v kaki empirični znanosti, toliko bolj znanstvena je (Kant, 1957, str. 14 sq).

Opazimo lahko, da Kant ni mogel povsem brez dopolnilnih predpostavk utemeljiti aplikacije matematike na naravo, tako da se dejansko razrahlja – kot se kaže v navedeni trikotniški strukturi – na videz trdna in nedvoumna povezava med matematiko in empiričnim svetom. To pa njegovo »zgodbo« ponovno približa že znani platonovski matematični zgodbi o matematiki in svetu, pri čemer predpostavljeni »razum narave« stoji na mestu platonovskih čistih form, katerih odsev so tako matematične forme kot tudi realne forme.

Tako platonovska oz. aristotelovsko-platonovska kakor kantovska filozofija matematike kot tudi njuna rešitev vprašanja, kako lahko (tako dobro) apliciramo matematiko na svet, sta doživeli veliko kritik in zavračanj, tako da imamo danes opraviti z mešanico njunih delnih obnov in njihovih preostankov. Vprašanje je, ali smo namesto teh postavili kake trdnejše teorije, ali vsaj zanesljivejše načelne poglede ali pa še vedno živimo v ruševinah in od njih. Najprej lahko vidimo, da so vse tri prej navedene klasične rešitve – platonovska, aristotelovska in kantovska – po svoji formi tipično »trikotniške« struktu-

[2] Ko Kant govori o smotrnosti celotne narave, misli na smotrnost narave, v kolikor naravo presojamo glede na našo razsodno moč, tj. glede na umsko refleksijo, ne na objektivno smotrnost narave. Gre za »formalno smotrnost«, ki jo le privzamemo, ne dokazujemo. Čeprav z njo ni utemeljeno »ne teoretično spoznanje narave ne praktično načelo svobode«, je s tem privzetkom dano načelo, kako naj iščemo zakonitosti za posebna izkustva, tako da vzpostavimo koherenco izkustva (prav tam, str. 336).

re. Glavna ideja jim je, da sta tako matematika kot realni svet nekako navezani na neko skupno formalno osnovo, ki daje matematiki značaj splošnih in nujnih formalnih resnic, empiričnim pojavom pa omogoča objektivni obstoj ter jih medsebojno veže z najsplošnejšimi in nujnimi vezmi.

Pomemben odmik od trikotniških struktur, ki naj razložijo apriornost matematike in njeno splošno aplikacijo na svet, je predstavljala Fregejeva (delna) vezava matematike na logiko. Frege sicer ni uspel v ambiciji, da bi logično izvedel aritmetiko iz logike, ker je njegov sistem zašel v zanj nerešljivo protislovje (antinomija množic), a če bi uspel, bi dobili v bistvu naslednjo strukturo:

logika
matematika
↓
svet

Po Fregeju vse tiste matematične discipline, ki izhajajo iz pojma števila (aritmetika, algebra, analiza), izhajajo iz logike, del matematike, namreč geometrija, pa predstavlja samostojno apriorno-sintetično znanost. Zato sem v svoji grafični ponazoritvi »matematiko« nekoliko odmaknil od logike, vendar ne povsem. Ker vse znanosti predpostavljajo logiko in s tem razne logične zakone, s tem *eo ipso* predpostavljajo tudi veljavnost tistega dela matematike, ki izhaja iz logike. Aplikacija matematike na svet je tedaj le poseben primer aplikacije logike, ki pa je tako ali tako nujna predpostavka vseh znanosti. Ni potrebno, da bi bila matematika neki sekundarni odsev idej, svet pa prvotni odsev, kot je bilo pri Platonu, niti ni potrebno, da bi matematične resnice s pomočjo abstrakcije in idealizacije nekako izpeljevali iz realnih form. Zadnje deloma velja le za geometrijo, ki izraža apriorne forme prostora (Frege, 1973, 1987, 42–44). Frege ni pisal o tem, kako lahko apliciramo geometrijo na realni svet. Morda se je strinjal s Kantom, da geometrija izraža nujne pogoje možnosti prostorske eksistence realnih pojavov.

Še en namig nam lahko pomaga pojasniti Fregejevo gledanje na odnos logike-matematike in sveta. Po Fregeju ne moremo govoriti o dejstvih kot o nečem različnem od smislov oz. misli. Kot eksplicitno pravi v spisu »O misli«, so dejstva zgolj resnične misli (Frege, 1976, str. 50), pri tem pa je misli razumel kot objektivno veljavne in po sebi obstoječe smisle stavkov. Če npr. astronom pri astronomskem odkritju uporabi neko matematično resnico, potem to lahko stori zato, ker tako matematična resnica kot astronomsko dejstvo brezčasno obstajata neodvisno od človeka kot »dejstvi« v kraljestvu misli in sta na ta način brezčasno povezani med seboj (prav tam). Dejstva le odkrivamo, ne pa ustvarjamo.

Frege se torej ne bi strinjal z mislijo, da svet sestoji iz dejstev ali vsebuje dejstva, ta pa potem odražamo v mislih in stavkih, razen če ne bi ves svet spremenili v nekakšno vseobsežno »misel«, ki ustreza celoti vseh resničnih misli. Glede tega nam je Frege zapustil premalo sledi, da bi lahko natančno rekonstruirali njegovo stališče. V kolikor bi veljalo, da je svet sam morda le celota misli (»in ne stvari« – bi dodal Wittgenstein), potem je seveda po sebi razumljivo, da matematične oz. logične resnice »apliciramo« na svet, saj gre preprosto za logična razmerja med bolj in manj splošnimi resnicami.

Vendar tudi s to shemo ni pojasnjeno, zakaj se tako dobro obnesejo posebne in visoko »konstrukcijske« matematične teorije, začenši z infinitezimalnim računom. Kako to, da naš um zagrabi kakšno začasno povsem abstraktno, na videz neuporabno teorijo, ki pa se čez nekaj časa, morda celo čez več kot sto let, izkaže za izvrstno orodje znanosti? Na to vprašanje Fregejev logicizem, in tudi vsak drug logicizem, ni dal pametnega odgovora.

Sodobni filozofi v glavnem zavračajo ali vsaj močno dvomijo v obstoj neke matematiki in svetu skupne idealne apriornosti. Takšna predpostavka velja za »metafizično« v slabšalnem pomenu. Zlasti logični pozitivisti so bili smrtni sovražniki tovrstnih zamisli. Le pri Husserlu in nekaterih fenomenološko usmerjenih avtorjih najdemo odmeve klasične trikotniške rešitve. Pri Husserlu npr. v zamisli kategorialnega apriorija in kategorialnega zrenja, ki jo je razvil že v *Logičnih raziskavah*, izrecno pa to rešitev razvija npr. v svojih zgodnjih predavanjih o logiki in splošni teoriji znanosti iz let 1911–12 (Husserl, 1996, str. 274–8). Ta dva med drugim utemeljujeta apriorno resničnost matematike in njeno ontološko pomenljivost in sicer kot sestavino najsplošnejše formalne ontologije. Toda to še zdaleč ni bil odgovor na vprašanje, kako je mogoče uspešno in natančno matematično naravoslovje, kot ga pozna npr. moderna fizika. Husserlova kasnejša razmišljanja o tej temi bi še najlaže primerjal z Aristotelovimi. Oba imata namreč matematične strukture za abstrakcijo kvantitativnih ali relacijskih značilnosti od konkretnih značilnosti pojavov in njihovo idealizacijo v neki navidezno samostojni formalni svet. Pri Aristotelu je bilo izhodišče abstrakcije polje konkretnih substanc, njihovih lastnosti in odnosov, pri Husserlu pa primarni življenjski svet (gl. npr. Husserlova izvajanja o čisti geometriji v njegovih »Vprašanjih po izvoru geometrije«, 1998).

Husserlov učenec in filozof matematike O. Becker je po obsežni zgodovinsko-filozofski raziskavi ontoloških temeljev matematike svoje delo zaključil z mislijo, da moramo poleg transcendence predmetnosti glede na zavest upoštevati še eno transcendenco, namreč božjo. Neposredno se sklicuje na Kanta, ki je prav tako domnevo o smotrni povezavi vseh naravnih zakonov podprl z *ad hoc* idejo božjega razuma, ki »ureja« svet (za Kanta je to le izhod v sili, tj.

domneva, ki je nikoli ne moremo dokazati ali ovreči. Je le Ideja, ki vodi raziskovalce narave k novim spoznanjem). Becker se sklicuje tudi na Husserla, ki je v *Idejah* prav tako naznačil možnost boga kot transcendentnega bitja, ki »uredi« svet v kozmos in prepreči zmago kaosa (Becker, 1973, str. 327 sq, Husserl, 1997, 58. pogl.). Vendar je razmišljanje o bogu hitro zaključil z ugotovitvijo, da sodita pojem in obstoj boga v *epoché* fenomenološke redukcije, torej ga mora fenomenolog opustiti iz svojih raziskav. Vprašanje se tako izteče nazaj v metafiziko, od katere želijo fenomenologi pobegniti. Becker priznava, da je s tem naznačen tudi nerešeni del vprašanja, o načinu obstoja matematičnega. To pomeni, da se vrača v platonovsko-aristotelovsko verzijo trikotniške rešitve problema.

Logični pozitivisti so zavračali tudi apriorni status matematike (in včasih tudi logike) in jo po večini spreminjali v določene sisteme aksiomskih konvencij, pravil in logičnih izpeljav iz njih. Tu je prednjačil zlasti R. Carnap, ki se je skliceval na Wittgensteinov *Traktat* in njegovo kasnejšo teorijo »sintaktičnih jezikovnih sistemov«. Za Carnapa je bila matematika zgolj eden od sintaktičnih sistemov s povsem abstraktnimi pravili. Pri tem ni popolnoma nič važen morebitni vsebinski pomen teh znakov, temveč zgolj pravilnost ali nepravilnost računanja z znaki (Carnap, 1968). Kasneje je Carnap k sintaksi dodal še semantiko oz. modele (interpretacije) sintaktičnih kalkilov (Carnap, 1959), vendar tudi s tem ni povrnil matematiki njene apriorne veljave in nepoljubnosti, kajti interpretacije in modeli sintaktičnih sistemov niso enolično določeni, niso univerzalni. Lahko rečemo le to, da če se neka matematična teorija uspešno uporabi v kakšni empirični teoriji, kot sestavina njenega teoretskega dela, to pomeni, da se v modelih te empirične teorije skriva tudi neki model ustrezne matematične teorije. Toda od realnosti do modela teorije je še vedno potreben nadaljnji konstrukcijski preskok, zato ne moremo reči, da smo aplicirali matematiko na dejanskost, temveč smo kvečjemu določen vidik ali izsek dejanskosti podali v takšni obliki, da predstavlja model matematične teorije. Tu se vedno skriva element konvencionalnosti, izbire jezika, opisa itd.

Carnapu se je morda zdelo, da je s tem vprašanje aplikabilnosti matematike na svet spremenil v trivialno, namreč v vprašanje izbire sintaktičnega sistema in njegovega modela. Npr. za neko fizikalno teorijo »izberemo« matematično teorijo grup, v posebnem, eno od mnogih simetrijskih grup kot sestavino njenega teoretskega aparata. Izkaže se, da se ta teorija dobro potrdi v praksi, tj. daje pravilne in zelo natančne razlage in napovedi.

Odgovor na vprašanje, kako smo lahko v tem primeru aplicirali določeno strukturo grup in z njo vred teorijo grup na empirični svet, je po Carnapu v tem, da smo iz sveta pojavov »izbrali« prav tak podsistem pojavov, ki vsebuje takšne značilnosti svojih pojavnih struktur, ki jih lahko priredimo (preslikamo) formalnim strukturam teorije grup. To je v jedru kantovska rešitev, s to razliko, da namesto čistega razuma, ki »predpisuje« zakone naravi, sedaj stojita človeški izbiri – izbira teorije in izbira ustreznega empiričnega podsistema. Namesto apriorno zagotovljenega in splošno veljavnega soglasja med matematičnimi formami in prostorsko-časovnimi formami pri Kantu, imamo pri Carnapu in neopozitivistih opravka z obstojem preslikavne funkcije, ki preslika del matematičnega aparata teorije v izkustveni svet. Ta funkcija ne more zagotoviti splošne in nujne veljavnosti matematičnih resnic, saj pokriva kvečjemu omejeno definicijsko območje empiričnih pojavov.

V posebnem primeru se lahko vprašamo, kako se matematični izrazi in formule prevedejo v empirijski jezik. Carnap tega pravzaprav ni nikoli konsekventno izpeljal. Še najbliže temu cilju je bil v svojem zgodnjem delu *Logična zgradba sveta* (1928). Tam je poskusil na osnovi stavkov o čutnih podatkih posameznika izpeljati konstrukcijo celotnega sveta. Pri tem je moral predpostaviti nekaj matematičnih pojmov v naprej, torej jih ni mogel zvesti na čutne podatke (npr. pojem množice, ureditve, naravnega števila). Če v resnici ne moremo zvesti celotne matematike na izkustvo (oz. izkustvene stavke), potem je vsaj del matematike »skupen« tako teoriji kot izkustvu. Vendar je prav to problem, ki ga vseskozi rešujemo, saj je odločilen za sleherno aplikacijo matematike na svet. Vprašanje, kako je mogoče aplicirati matematiko na svet, se v Carnapovi viziji spremeni v vprašanje, kako je mogoče, da je vsaj del matematičnih struktur *skupen* empiričnemu svetu in teorijam, ki ga razlagajo in opisujejo?

Naj pripomnim, da tudi poskusi logične izločitve vseh teorijskih terminov iz teorij in redukcij teorij na čisto empirijsko jedro, ki je teoriji empirično ekvivalentno (kot je npr. Ramseyeva metoda eliminacije teorijskih pojmov), v načelu ne uspejo izločiti vseh matematičnih oz. vseh abstraktnih terminov iz teorije.[3] Če poskušamo po teh metodah izločiti še matematične termine, potem nujno zaidemo v območje nepreglednih predikatov drugega in višjih redov (npr. predikatov nad množicami ali nad predikati prvega reda, predikati nad funkcijami itd.), ki jih nikoli ne moremo zaobiti s kako popolno in odločljivo logiko, ki bi se nanašala le na individue. Običajne teorijske izraze, npr. »sila«, »masa«, »elektron« itd., sicer v prvem koraku eliminacije tudi preobrazimo v ustrezne predikate in nato eksistenčno kvantificiramo nad njimi, vendar se da vse te kvantifikatorje oz. vezane predikativne spremenljivke v naslednjem koraku analize preobraziti v kvantifikacije nad določenimi realnimi individui (npr. nad realnimi telesi ali prostorsko-časovnimi območji) oz. v vezane individualne spremenljivke.[4] Poleg tega tako ne moremo odpraviti mate-

---

[3] Podrobnejši prikaz te metode eliminacije teorijskih terminov si lahko bralec ogleda pri Stegmüllerju, 1970, str. 400–437, krajši prikaz tudi v Ule, 1992, str. 180–188.

[4] Tekoče znanstvene teorije ne potrebujejo bistveno več kot predikatno logiko prvega

matičnih operacij, ki se pogosto skrivajo v abstraktnih izrazih (npr. ulomki, potence, koreni, odvodi itd.).

Celo tako strogi empiristi in nominalistično navdahnjeni avtorji, kot sta npr. W. v. O. Quine in H. Putnam, menijo, da je nemogoče izločiti matematiko iz znanosti, še več, moramo priznati obstoj vsaj nekaterih osnovnih abstraktnih objektov, kot so npr. razredi, relacije, funkcije.[5]

Kljub vsem tem težavam obstaja nekaj pomembnih poskusov načelne eliminacije abstraktnih matematičnih objektov iz naravoslovnih znanosti (naravoslovne znanosti so najbolj reprezentativni primer uporabe matematike v znanostih). Med najbolj posrečenimi in najbolj doslednimi poskusi te vrste je nedvomno poskus Hartyja Fielda. Poskušal je zgraditi »znanost brez števil«. S tem je skušal pokazati, da matematike ne potrebujemo kot *teoretično ogrodje* znanosti, temveč zgolj kot pojmovni in formalni *instrument*, ki nam olajša teoretske ali empirične izpeljave (Field, 1980). Njegova metoda je v osnovi naslednja: vzemi določeno empirično teorijo, v kateri nastopajo matematični pojmi, formule, stavki in poišči netrivialen in znanstveno zanimiv »nominalistični« preostanek te teorije, v katerem ni nobenih takšnih izrazov, pojmov, stavkov, temveč kot osnovni objekti nastopajo zgolj prostorskočasovne točke oz. prostorskočasovna območja, kot lastnosti in relacije pa zgolj lastnosti in relacije teh objektov.[6] Nato določi preslikave (vsaj na ravni homomorfizma) med tako nominalistično očiščenim preostankom teorije in določenimi ma-

reda z identiteto, če seveda zanemarimo uporabo abstraktnih terminov, ki so bodisi povsem matematični ali mešanica realnih in matematičnih terminov. Teorijski termini, ki bi presegali to dvoje, so »metafizični«, tj. ne moremo jim dati empirične vsebine, a tudi niso nujno potrebni za znanstvene razlage ali napovedi, tj. z njihovo pomočjo ne pridobimo drugih resničnih stavkov kot brez njih. Več o tem gl. Carnap, 1956, Quine, 1961, Quine, 1992, str. 25–35.

[5] Gl. npr. argumente H. Putnama, ki se sklicuje tudi na Quina v njegovi *Filozofiji logike* (Putnam, 1979). Njegov argument bi lahko povzeli v dveh premisah in sklepu, namreč: 1. Moramo biti ontološko zavezani le takšni bitnosti, ki je nepogrešljiva (*indispensable*) v naših najboljših teorijah, 2. Matematične bitnosti so nepogrešljive v naših najboljših znanstvenih teorijah, torej smo ontološko zavezani matematičnim entitetam. Obe premisi sta za mnoge sporni. Prva zato, ker ni rečeno, kako daleč moramo iti z našo sprejemljivostjo, npr. kaj vse od zahtevnega in abstraktnega matematičnega aparata kake teorije moramo imeti za nepogrešljivega v kaki znanosti. Quine, Putnam in nekateri drugi teoretiki znanosti menijo, da moramo sprejeti znanstvene teorije kot celoto, drugi temu oporekajo in menijo, da mora privzeti le določen del teorij, saj vemo, da npr. fiziki še zdaleč ne sprejemajo vseh formalno uvedenih abstraktnih objektov kot fizikalnih entitet. Drugi premisi pa nasprotujejo oni, ki menijo, da lahko v načelu izločimo velik del ali celo ves matematični aparat neke teorije, pa se to ne bo nujno poznalo v tistih stavkih teorije, ki imajo čisto empirično vsebino.

[6] Dejansko ne gre za popolni nominalizem, temveč le za izločanje abstraktnih univerzalij iz primarne ontološke strukture dejanskosti, Field namreč dopušča realne lastnosti in realne relacije ne-abstraktne vrste.

tematičnimi teorijami (npr. aritmetiko, teorijo realnih števil, teorijo množic, teorijo vektorjev itd.), tako da določenim kompozicijam, predikatom ali relacijam nad prostorskočasovnimi točkami ali regijami ustrezajo določeni matematični ekvivalenti, npr. matematične entitete, lastnosti, relacije, funkcije, funkcionali itd. To preslikavo po zgledu Hilbertovega teorema reprezentacije geometrije v 3-D prostoru realnih števil $\mathfrak{R}^3$ imenuje tudi »reprezentacija« nominalistične teorije v matematičnem (abstraktnem) ekvivalentu. Drug korak v tem postopku je v tem, da pokažemo, da lahko določene kompleksne izpeljave stavkov v nominalistični teoriji pridobimo tudi tako, da namesto teh izpeljav izvedemo ustrezne matematične transformacije in izpeljave na ravni abstraktnega (matematičnega) ekvivalenta teorije in potem rezultate teh transformacij preslikamo nazaj v nominalistično teorijo. Na koncu moramo še pokazati, da v tej teoriji ni nobene izpeljave, ki je ne bi mogli v načelu doseči že zgolj v nominalističnemu preostanku teorije in morda še, zakaj je ovinek skozi matematični ekvivalent za nas pragmatično bolj primeren kot izpeljava zgolj na ravni nominalističnega preostanka teorije. Ta »recept« Field spretno in uspešno prikaže na metrični geometriji 3D prostora, 4D prostora-časa in Newtonovi klasični mehaniki.[7]

Splošno vzeto, gre mu za to, da bi dokazal *splošni konservativizem* matema-

[7] Vprašanje je, kako daleč gre lahko Field s to metodo. Nekateri kritiki, npr. M. D. Resnik, ugotavljajo, da Fieldov program ne more uspeti v nominalistični reformulaciji relativnostne in kvantne teorije, kajti vsebujejo veliko bolj zahtevno matematiko kot je Newtonova fizika. V kvantni fiziki npr. predpostavljamo neskončnodimenzionalni vektorski prostor (ti. Hilbertov prostor) in težko si je predstavljati neki nominalistično obsekani analogon tega pojma. Resnik dalje sprašuje, kako naj izgleda nominalistična redukcija uporabe statističnih ipd. matematičnih metod za ocenjevanje hipotez zunaj matematične fizike. Field po njegovem mnenju ni pokazal, kako apliciramo statistično sklepanje, natančneje, kako falsificiramo statistične hipoteze. Tu se ne bi smeli več sklicevati na verjetnost in sploh na nobena razmerja števil, saj moramo te nominalistično eliminirati. Tudi govor o »naključjih« ipd. ne pomaga, ker so tudi to abstraktne entitete. Statistične domneve gradijo na vzorcih dogodkov, na množicah stavkov ali možnostih itd., a vse to so matematične konstrukcije, ki slonijo na abstraktnih bitnostih (Resnik, 1997, str. 55–58). Nadalje bi moral Field uveljaviti svoj program tudi v metamatematiki, ne le v naravoslovnih znanostih. Field se sicer te naloge zaveda in skuša predstaviti svojo teorijo nominalizacije kot teorijo o konsistenci različnih teorij, nato pa izenači konsistentnost z logično možnostjo teorije. Tj., namesto, da rečemo, da obstaja tak in tak matematični objekt, rečemo, da je logično možno, da obstaja. To nas ne obvezuje k priznavanju obstoja takšnega objekta, kot nas nič ne sili k priznanju obstoja enorogov, čeprav priznavamo, da so logično možni. Po Resniku to nasprotuje našim utrjenim intuicijam glede matematike (poleg tega terja ustrezno nominalistično interpretacijo modalnosti, kar ne gre brez določene logike drugega reda, tj. kvantificiranja nad predikati in funkcijami). Končno Resnik ugotavlja, da Filedovo sprejemanje prostorsko-časovnih točk in območij kot osnovnih entitet ni načelno nič manj sporno kot sprejemanje obstoja kakšnih drugih standardnih matematičnih objektov (množice, števila itd.) (str. 59).

tičnih teorij glede na nominalistično očiščene teorije. Po Fieldu je matematična teorija M konservativna (glede na kako nominalistično teorijo oz. glede na nominalistični opis dejanskosti) natanko tedaj, če za poljuben nominalističen stavek A in poljubno množico nominalističnih stavkov N (iz dane nominalistične teorije) velja, da A ni logična posledica stavkov N + M, če ni že logična posledica množice N. Ali rečeno drugače: M je konservativna tedaj, če A izhaja iz izjav N + M, potem izhaja že iz množice N same (gl. Field, 1980, str. 12).[8] Iz Fieldove teorije izhaja, da je matematika strogo vzeto neresnična, čeprav koristna (str. 15). To se ne ujema z običajnim prepričanjem, da je matematika apriorno resnična. Toda nasprotje med obema izjavama bi lahko rešili s tem, da je matematika apriorno resnična le v toliko, v kolikor jo razumemo kot sestav pogojnih izjav tipa »Če ..., potem ...«), kjer v antencedensu nastopajo npr. izbrani matematični aksiomi in definicije, v konsekvensu pa kakšni matematični izreki, ki izhajajo iz njih. Kolikor pa bi gledali le konsekvense teh stavkov (in to običajno počnemo, kadar uporabljamo matematične stavke izven same matematike), pa so ti praviloma neresnični, ker govorijo o abstraktnih objektih, ki ne obstajajo, temveč so kvečjemu naše idealizacije določenih realnih objektov.

Fieldova metoda razlikovanja konservativnih matematičnih reprezentacij nominalističnih teorij v bistvu izhaja iz intuitivne domneve, da v empiričnih razlagah kot *premise razlage* ne smejo nastopati matematično ali logično resnični stavki. Ti stavki namreč sodijo k pravilom oz. postopkom izpeljave (dokazovanja) eksplanansa iz eksplananduma, saj veljajo v vseh možnih svetovih (so apriorni), torej ne prinašajo nobene vsebinske resnice, ki bi kakorkoli informativno pogojevala razlago. Na banalni ravni to začutimo takoj, če nam npr. nekdo skuša razložiti, zakaj je nenadoma v košari le pet jabolk, malo pred tem pa jih je bilo sedem in reče takole:

»To je zato, ker sem pred tem dva vzel ven *in ker je sedem minus dva enako pet.*« Čutimo, da je oni matematični del razlage trivialen oz. odvečen, saj nam prav nič ne pove o svetu, tj. dejstvih in stanjih stvari, o katerih je govora v razlagi. Pač pa zakon $7 - 2 = 5$ potrebujemo zato, če želimo dokazati, da če je bilo v košari sprva sedem jabolk in smo odvzeli dve ven, je ostalo še pet jabolk. Natančnejši prikaz tega, kar smo tu počeli, je seveda bolj zahteven.

Tudi tu na tihem potrebujemo ustrezen matematični, abstraktni ekvivalent ugotovitve, da je bilo v košari sprva to in to' in to'' in to''' in .... to''''''

---

[8] Tu sem nekoliko poenostavil Fieldove formulacije, kajti on upošteva še spremembo kvantificiranih izjav v stavku A in stavkih N še tako, da se vse začenjajo z antecedensom, ki se glasi nekako takole: Če je x število (ali kaka druga abstraktna entiteta), potem... Poleg tega mora Field dodati še zahtevo, da stavki N dopuščajo obstoj kakšnih ne-matematičnih objektov.

jabolko in ugotovitve, da je bilo nato morda le to''' in to'''' ... in to'''''' jabolko (pri tem naj nam indeksikalni izrazi oblike to''...' pomenijo individualne kazalke na posamezna jabolka v košari). Ti dve ugotovitvi sta namreč povsem empirični (opazovalni) in se v njih ne sklicujemo na abstraktne termine. Strog nominalist bi verjetno oporekal uporabi predikata »... je jabolko v košari«, kolikor bi le-ta impliciral neko *množico* objektov in ne zgolj nekakšno faktično celoto objektov, a pustimo to pripombo za sedaj ob strani.

Ugotovitvi, da je bilo sprva v košari to in to' in to'' in to''' in .... to'''''' jabolko, priredimo abstraktni ekvivalent, da je bilo v košari 7 jabolk. Ugotovitvi, da je sedaj v njej le to''' in ... to'''''' jabolko, priredimo abstraktni ekvivalent, da je sedaj v košari 5 jabolk. Trditvi, da sta bili iz košare odvzeti to in to' jabolko priredimo abstraktni ekvivalent, da sta bili odvzeti 2 jabolki. Na ravni abstraktnih ekvivalentov imamo torej opravka z mešanimi matematično-realnimi pojmi. Nato izpeljemo stavek, da je sedaj le pet jabolk s tem, da uporabimo premiso »V košari je (bilo) 7 jabolk« in premiso »Iz košare smo vzeli 2 jabolki« ter dodamo še en matematični ekvivalent te situacije, ki »interpretira« odvzemanje kot matematično odštevanje števil objektov. Šele sedaj lahko apliciramo matematični zakon $7 - 2 = 5$ in sicer kot pravilo, po katerem iz ugotovitve, da imamo 7 objektov, in trditve, da smo odšteli 2 objekta, izpeljemo, da je preostalo še 5 objektov. Nato ta rezultat prevedemo nazaj v prvotni jezik o konkretnih objektih, tj. jabolkih, tj. »V košari je še to''' in to'''' in ... in to'''''' jabolko«.

Jasno vidimo, da nam matematika kot takšna ni bistveno potrebna za izpeljavo tega stavka iz podanih premis, je pa koristen pripomoček (in vidimo tudi, da preslikava med jabolki v košari in matematičnimi objekti ni ravno izomorfna, temveč homomorfna, kajti ugotovitvi, da je v košari n jabolk ustreza lahko več različnih kombinacij jabolk iz košare). Na realni ravni imamo torej opravka z dejanskimi celotami določenih objektov, ki si delijo med seboj nekakšno »jabolkasto« podobnost ter z procesom izločanja nekaterih objektov iz te celote. Rezultat tega procesa je podan v dejstvu, da je sedaj v košari nekoliko manj teh objektov, pri čemer to »manjšost« ne smemo v naprej matematično razlagati (npr. tako, da povemo število objektov v košari). To lahko storimo šele na ravni ustreznega abstraktnega-matematičnega ekvivalenta opisanih dejstev, ne pa na ravni empirične stvarnosti.

Podobno deluje Fieldova metoda. Povsod skuša izločiti referenco abstraktnih terminov v empirični stvarnosti. In ker je zanj to tudi ekvivalentno opustitvi določenih eksistenčnih trditev, od tod izhaja, da se nam ni treba več sklicevati na obstoj matematičnih objektov, temveč jih lahko imamo zgolj za virtualni, abstraktni pripomoček pri proizvajanju določenih empiričnih stavkov iz drugih empiričnih stavkov.[9]

[9] Naj dodam k temu, da Field ne sprejema metod eliminacije običajnih teorijskih ter-

Fieldov odgovor na vprašanje, kako lahko apliciramo matematiko na svet, bi bil v kratkem v tem, da je pač struktura stvarnosti takšna, da lahko njen opis in še bolj njeno razlago poenostavimo in sistematično predstavimo (s tem, da apliciramo različne oblike abstraktnih matematičnih ekvivalentov »nominalističnih« stavkov in razlag, ki nam olajšajo prehod od enih k drugim nominalističnim stavkom). Ne vem, če Fieldova razlaga in metoda dejansko zdrži kritike, vsekakor nam ne pojasni, *zakaj* je matematika tako učinkovita v tem poslu, zakaj z njeno pomočjo, in *le z njo*, lahko dosežemo takšno fantastično natančnost razlag in napovedi, kot jo dosegamo npr. v sodobni znanosti. Pojasni nam kvečjemu postopek aplikacije matematike na svet in nam pomaga odstraniti zablode glede obstoja abstraktnih matematičnih bitnosti v dejanskosti. Pa še to ne povsem, kajti, kot sem opozoril v op. 5, je Field že v svojo osnovno ontologijo vključil pomemben »del« matematičnih struktur, namreč možnost neskončnih linearnih urejenosti elementarnih objektov in celote, ki predstavljajo kontinuum, tj. zvezno urejene celote (ne množice) svojih delov. Ni mi čisto jasno, kako je to mogoče doseči brez pojma množice in ureditve množic, pa pojma funkcije, ki imajo svoje utelešenje na primarni ravni stvarnosti. Kot rečeno, celo če je mogoča stroga nominalistična zgradba teh struktur, še vedno ne vemo, kako to, da nam omogočajo tako fantastično uspešnost matematičnih ekvivalentov realnim strukturam kot jo dokazuje moderna znanost z masovno uporabo matematičnih metod in matematičnih struktur.[10]

minov iz znanstvenih teorij, kot jo najdemo npr. pri Craigu, kajti po njegovem mnenju sega vsebina empirijskih teorij nad območje neposredno opazljivega, torej v območje »teorijskosti«, ne pa tudi v območje abstraktnih matematičnih objektov. Slednje po njegovem mnenju lahko v načelu izločimo iz empiričnih teorij (Field, 1980, str. 8–10). To počne med drugim tudi zato, ker dopušča nekaj ključnih teoretskih, tj. načelno neopazljivih stvarnosti, ki pa po njegovem mnenju niso »abstraktna« v platonističnem pomenu, saj ne predstavljajo univerzalij, temveč posebne strukture partikularij. Takšne stvarnosti so npr. obstoj potencialno neskončnih zaporedij realnih objektov, tj. prostorsko-časovnih točk ali območij in realni obstoj kontinuuma, npr. zveznih prostorskočasovnih intervalov ali območij.

[10] Chris Mortensen je v svoji kritiki Fieldove knjige ugotovil, da Fieldova metoda ne deluje vedno, oz. je ponekod močno artificielna. Ne zdi se mu pametno, da se matematiko predstavi kot napačno, čeprav koristno teorijo (napačno zato, ker matematika govori o abstraktnih entitetah, ki ne obstajajo). Navaja primere govora o številih in številskih razmerjih v fiziki, ki jih moramo razumeti tako, da števila oz. bolje številska razmerja realno obstajajo kot razmerja fizikalnih količin, ne pa zgolj kot abstraktni ekvivalent nominalističnih struktur dejanskosti (Mortersen, 1998). Po tem pojmovanju so kvantitete osnovna realnost, na katero se sklicujejo uspešne formulacije znanstvenih zakonov. Za kvantitete je značilno, da z njimi lahko računamo. Kvantitete različnih vrst lahko medsebojno množimo in delimo, medtem ko kvantitete istih vrst lahko še seštevamo in odštevamo. Vsaki kvantiteti lahko pridružimo ustrezni merski sistem, tj. določimo mersko enoto in merilno lestvico. Potem lahko objektivna razmerja med kvantitetami izrazimo matematično kot matematična razmerja med merjenimi merilnimi enotami (npr. 1 newton =

Eno pa je zelo pomembno: Field je po mojem mnenju uspešno dokazal, da ne moremo govoriti o tem, da bi bila matematika le učinek abstrakcije določenih realnih kvalitet in odnosov v idealizirane strukture, kot si je to predstavljal npr. Aristotel in si za njim predstavljajo mnogi teoretiki znanosti in filozofi. Potrebno je namreč transponiranje realnih objektov, njihovih lastnosti in relacij na novo raven njihovih abstraktnih matematičnih ekvivalentov. Ne moremo reči niti to, da je določen segment dejanskosti izbran za model (natančneje rečeno, za »modelno strukturo«) kakšnih matematičnih struktur, npr. da so določena prostorska razmerja izbrana za model abstraktne geometrije ali za model strukture tridimenzionalnega prostora $\mathfrak{R}^3$ nad množico realnih števil, kajti izbrani realni objekti, njihove lastnosti in relacije običajno ustrezajo zgolj nekaterim objektom, lastnostim in relacijam matematičnih objektov iz ustrezne matematične teorije, ne pa vsem matematičnim objektom, lastnostim in relacijam.

Že to, da v matematiki govorimo o matematičnih ekstenzijah, kot so npr. razredi (množice), v realnosti pa (vsaj po nominalistični doktrini) ni nobe-

---

1 kg.m.sek^{-2}). Potemtakem lahko rečemo, da kvantitete nekako vsebujejo števila, oz. da »sestojijo« iz števila in določene dimenzije. Matematične operacije nad kvantitetami lahko razumemo kot par dveh operacij, namreč čisto matematične operacije nad števili in psevdomatematičnih operacij »seštevanja«, »odštevanja«, »množenja«, »deljenja« itd. kvantitet, ki morajo upoštevati ustrezne dimenzije za primerjavo istovrstnih ali raznovrstnih kvantitet. Brezdimenzijska števila so nam nujno potrebna za to, da izrazimo npr. enaka razmerja istovrstnih kvantitet, npr. 20cm/5cm = 8kg/2kg = 4. Brezdimenzijska števila lahko imamo torej za izraz razmerij med pari (istovrstnih) kvantitet. Obstajajo nekatere razlike med brezdimenzijskimi števili in čisto matematičnimi števili, ki jih ne moremo zanemariti, npr. glede števila 0 ter razlike med razmerji kvantitet (magnitud) in čisto številskimi razmerji. Kljub temu se zdi sprejemljiva misel, da so brezdimenzijska števila realnost, ne zgolj matematična fikcija (Mortensen, 1998, str. 198–90). Brezdimenzijska števila, ki izražajo razmerja med kvantitetami, imajo očitno lahko tudi vzročno vlogo, kar dodatno podpira domnevo, da so v nekem smislu realnost. Distribucija (racionalnih ali realnih) števil v univerzumu je vzročno pomenljiva, saj bi njena sprememba spremenila svet (npr. podvojitev vseh kvantitet sicer ne bi spremenila matematičnih razmerij med njimi, a bi spremenila svet). Moram pa pripomniti, da tista razmerja med kvantitetami, ki jih lahko izrazimo z racionalnimi števili, tj. razmerji celih števil še lahko nominalistično odčaramo, npr. tako kot počnemo pri tehtanju. Če rečemo, da neki objekt (povsod enake gostote) tehta 3/4kg, potem je to enako, kot če bi rekli, da bi v primeru, ko bi vzeli katerokoli (povsod enako gosto) telo, ki tehta 1 kg (npr. telo, ki nam predstavlja enoto mase) in ga razdelili na dele a, b, c, d, ki tehtajo enako – tj. se vedno paroma uravnovesijo na kaki ravnotežni tehtnici – potem ta objekt lahko uravnotežili s katerikolimi tremi deli izmed a, b, c, d (natančneje, bodisi deli a, b, c ali b, c, d, ali a, c, d ali a, b, d).

V tem stavku nismo več potrebovali nobenih števil, uvedli smo nominalistični ekvivalent prvotnega stavka. Vendar tega ni mogoče storiti tedaj, kadar gre za razmerja kvantitet, ki jih ne moremo dokončno izraziti z racionalnimi števili in prav takšna razmerja nastopajo v nekaterih ključnih naravnih zakonih (praktično si pomagamo s približnimi, vedno natančnejšimi meritvami, ki so faktično izražene z racionalnimi števili).

nih razredov, pač pa kvečjemu mereološke celote delov, kaže na osnovno razliko med matematičnimi abstrakcijami in empirično dejanskostjo. Podobno velja za razliko med vsebinsko podanimi pravili, ki jim sledimo v realnosti in matematično določljivimi funkcijami. Matematične določljive funkcije lahko izenačimo povsem ekstenzionalno z množico urejenih parov, ki ustreza odgovarjajoči matematični funkciji (preslikavi iz ene množice v drugo), medtem ko pravila, s katerimi izvajamo primerjave med realnimi objekti nikoli ne moremo izčrpati z množicami urejenih parov, ki jim ustrezajo. Fieldovsko rečeno je dejanskost v najboljšem primeru nepopoln model oz. nepopolna modelna struktura matematike, matematične strukture pa so bolj transpozicija realnih struktur na abstraktno raven kot pa abstrakcija in idealizacija določenih značilnosti realnih objektov in struktur. Ne moremo reči, da npr. »realne daljice«, »realni kvadrati«, »realne krogle«, zgolj nepopolno ali približno ustrezajo idealnim matematičnim (geometrijskim) likom, saj vsaj za empiriste takih idealnih likov sploh ni (je le sistem geometrijskih izjav oz. predpostavk, s katerimi skušamo »opisati« določena razmerja med fizičnimi telesi), temveč kvečjemu to, da določene kvalitete fizičnih teles in razmerja med fizičnimi telesi preslikamo na abstraktno matematično raven in potem tam z njimi operiramo naprej čisto matematično, dokler se ponovno ne »vrnemo« v dejanskost (npr. s postopki merjenja).

Ugotovili smo, da vprašanje o tem, zakaj in kako je lahko matematika tako uspešna v znanostih, z nominalistično redukcijo matematično formuliranih teorij ni rešeno. To in tudi druge težave v zvezi z uporabo matematike v sodobni znanosti silijo nekatere teoretike v ravno nasprotno smer od tiste, ki jo odpira Field oz. nominalizem, namreč v nekakšno novopitagorejsko tezo, po kateri je razlika med dejanskostjo in matematično stvarnostjo konec koncev morda iluzija, zgolj učinek naših čutov in premajhnega poznavanja sveta, a z napredkom znanosti se morda približujemo temu, da bomo ves svet vsaj v načelu razložili čisto matematično.

Naj tu omenim le mnenje G. Chaplina, ki je v sestavku »Ali je teoretična fizika isto kot matematika?« branil tezo, da je teoretična fizika pravzaprav še ne do konca razvita matematika, oz. še več, da je fizikalna stvarnost konec koncev matematična (1999). Na to kažejo čudovita ujemanja kar najbolj abstraktnih matematičnih teorij in novejših fizikalnih odkritij, zlasti v teoriji supersimetrij, v neizogibni uporabi kompleksnih zveznih grup in matematičnih prostorov raznih vrst. Zdi se mu, da se fizika giblje v isto smer kot nekatera prizadevanja za poenotenje matematike na podlagi razmerij med temeljnimi matematičnimi strukturami itd. Ta misel se upira tistim, ki menijo, da je matematika zgolj človeška konstrukcija, torej ima zgodovinski značaj, kar se upira nadzgodovinskemu značaju fizike oz. fizikalnih zakonov. Že danes lahko nekatere mikroskopske pojave opišemo s čistimi matematičnimi interpretacijami. Po Chaplinu imamo lahko kvantno mehaniko za osnovno teorijo distribuiranih paralelnih računalniških procesov in avtomatskega razpoznavanja vzorcev (str. 97). V njej se torej sistematsko družijo matematika, teoretska fizika in nevrobiologija (oz. fizikalna teorija mentalnih pojavov). Pri tem se Chaplin opira tudi na napredujoče raziskave kvantnih računalnikov in nevronskih mrež in na vse več dokazov, da lahko te procese zajamemo z istimi matematičnimi teorijami in orodji kot kvantno mehaniko. To med drugim pomeni tudi razširitev teorij kvantne fizike iz območja mikrosveta tudi v naš običajni makrosvet, oz. kaže na univerzalnost kvantne mehanike. Zaključuje z domnevo, da je osnovna vez med matematiko in teoretično fiziko sposobnost za razpoznavanje vzorcev v človekovih možganih. Razumljivo se mu zdi domnevati, da sposobnost človeka oz. človekovih možganov za matematično razmišljanje izhaja iz bolj temeljnega procesa razpoznavanja vzorcev v možganih (možgane lahko imamo za primer naravno nastalega procesa paralelne komputacije v možganski nevronski mreži). Kot rečeno, lahko proces razpoznavanja vzorcev lepo prikažemo z matematičnimi formulacijami, kot jih poznamo v kvantni mehaniki.[11] Avtor se zaveda spekulativnosti svoje domneve, vendar meni, da je kljub temu uporabna v teorijah kvantnega računalništva in kvantne teorije informacije (str. 104).

Kljub intuitivni privlačnosti navedene domneve pa ostaja še vedno nejasno, kaj tedaj pomeni enačba »matematika = teoretična fizika« oz., še bolj drastično, enačba »Matematika = fizika kvantne informacije«, kot izhaja iz avtorjevih zaključkov. Tudi sedaj ni ukinjena načelna razlika med abstraktnimi, izvečasovnimi in neprostorskimi matematičnimi objekti in strukturami in realnimi, pa četudi kvantnomehanskimi objekti in strukturami. Toda avtorjevo zamisel moramo brati pravilneje takole: *matematika je abstraktni odraz temeljnih fizikalnih zakonov v človeških možganih in nato v človeškem duhu.* Tako smo zopet pristali pri neke vrste platonovski shemi, da je matematika določen formalni odraz bistvenih form fizikalne stvarnosti, namreč je reprezentacija načel, po katerih možgani razpoznavajo in prepoznavajo stabilne vzorce čutnih vtisov iz morja pridobljenih čutnih vtisov. Po čem se ravna ta reprezentacija, je rečeno jasneje kot pri Platonu. Ravna se po fundamentalnih kvantnomehanskih zakonih in strukturah, ki svojsko »odsevajo« v naših možganih, ko opažamo svet okrog sebe in razmišljamo o njem. To spominja tudi na Heisenberga, ki je podobno spekuliral o tem, da so morda kvantnomehanski zakoni neposredno matematični, oz. da so nekateri matematični zakoni kar nepo-

[11] Bralci se lahko o nekaterih od teh ugotovitev na bolj poljuben način seznanijo tudi v delih M. Peruša, ki si vztrajno prizadeva osvetliti pomembne analogije med mentalnimi pojavi, nevrofiziologijo, nevronskimi mrežami in kvantno fiziko (prim. Peruš, 2000).

sredno utelešeni v temeljnih strukturah fizikalnega sveta. Heisenberg sam se je pogosto skliceval na Platona, zlasti na dialog *Timaj* (npr. Heisenberg, 1977, pogl 20). Tako se nam tudi v sodobni filozofiji in znanosti znova in znova vračajo klasične trikotniške sheme odnosov matematika – svet čistih form – realni svet, s tem pa morda kažejo na njihovo nepreseženost, če ne že nepresegljivost.

Različne smeri v sodobni filozofiji matematike, kot so logicizem, formalizem, intuicionizem-konstruktivizem, zagovarjajo vsaka svoj pogled na matematiko, vendar vse branijo »čistost« matematike, tj. načelno razliko matematike od izkustva. Pri logicistih je tako zaradi apriornega značaja logike, iz katere skušajo izpeljati matematiko, pri formalistih zaradi sintaktične, čisto znakovne narave matematike, pri intuicionistih zaradi kantovske teorije o apriorni matematični intuiciji (intuiciji naravnih števil in intuiciji kontinuuma). Le kakšni strogi finitisti govorijo, da moramo vse matematične pojme in izreke narediti dosegljivo in pregledno finitne, tj. kot časovno zaključene poteke operacij. V tem primeru se »prepad« med čisto matematiko in izkustvom ukine, a žal tudi na račun matematike, ki v tej zožitvi ostane brez precejšnjih delov svoje vsebine. Imamo torej dva dokaj neizpodbitna rezultata, ki vsak za sebe kličeta po sistematični razlagi in medsebojni povezavi.

Prvi rezultat tega razmišljanja je, da je matematika bila in je »čista« znanost, tj. vsaj en njen pomemben del se zdi aprioren, strogo splošen in vsaj potencialno infinitaren. Drugi rezultat pa je, da ne moremo povsem izločiti matematike iz izkustva, kajti matematična razmerja in pojmi so tudi neločljiva sestavina izkustvenih stavkov in pojmov. Zdi se, da ti dve ugotovitvi pogojujeta druga drugo, čeprav še ne vemo natančno kako. Če to drži, potem smo znova pred klasičnim vprašanjem »aplikacije matematike na svet« in pred na novo vzbujenimi klasičnimi »trikotniškimi« rešitvami.[12]

[12] Tu moram opomniti, da prav zadnja leta ponovno oživljajo nove vrste matematičnega realizma, ki razume matematiko kot vedo o strukturah oz. še bolje, o splošnih vzorcih nahajanja abstraktnih objektov, npr. števil. Temu realizmu pravimo »matematični strukturalizem« (gl. Resnik, 1997). Po tem pojmovanju so matematični objekti brez individualnih potez, ki bi jim bile lastne mimo njihovega mesta v matematičnih strukturah. So zgolj abstraktni položaji v vzorcih nahajanja teh objektov. Ne moremo načelno razlikovati matematičnih objektov od vzorcev oz. struktur njihovega nahajanja. Npr. geometrijske točke so določene zgolj z medsebojnimi odnosi v določeni geometrijski strukturi, naravna števila so določena zgolj s svojim mestom v verigi naravnih števil, ki jo postuliramo s Peanovimi aksiomi itd. Zato matematične teorije lahko identificirajo matematične objekte le »do izomorfizma natančno«, tj. tako, da določajo splošne okvire konkretnih struktur, ki vse enako ustrezajo tem teorijam in so medsebojno izomorfne. Zato imamo lahko različne matematične teorije »enakih« matematičnih objektov, npr. različne aksiomatike naravnih števil, geometrij itd., pa jim vendar ustreza enak razred medsebojno izomorfnih struktur (vzorcev). Zato npr. ne moremo reči, ali so realna števila točke na evklidski pre-

Ekskurz: Matematika in sintetično a priori pri Platonu in Kantu

Nezmožnost popolne izpeljave vseh matematičnih resnic iz logičnih zakonov in pravil, vodi naravno do ponovne potrditve Kantove trditve, da so matematične sodbe sintetične sodbe a priori. To je bila izhodiščna točka Kantove filozofije. Vendar to ni bilo le Kantovo odkritje, kot je sam verjel, temveč je imel pomembnega predhodnika, ki pa so ga Kant (in tudi drugi avtorji) spregledali. Ta pa je kar Platon. Platon se je namreč upiral temu, da bi matematične resnice zvedli na kake delitve ali združitve. V dialogu *Faidon* je Platon skozi usta Sokrata razpravljal o relacijah. Zagovarja misel, da npr. pri relaciji večje–manjše ta relacija obstoji zaradi ideje Večjega in ideje Manjšega, na katerih sta udeleženi stvari, ki sta v relaciji večje–manjše (Platon, 1988, str. 204 sq). Večje in manjše nista v relaciji večje–manjše zaradi svoje narave, svoje velikosti, temveč zato, ker je velikost prvega manjša *v primerjavi* z drugim, oz. je velikost drugega večja v primerjavi s prvim.

Sokrat podobno ugotavlja, da če enico dodamo enici, dobimo dvojko. Prav tako dobimo dvojko, če enico (kot enoto) razdelimo na dva dela. Zdi se čudno, da bi do dvojke prišli na dva različna, povsem nasprotna načina. Stavek: 'dve je večje od ena' ne nastane zaradi kakega seštevanja ali delitve, npr. zato, ker lahko enici prištejemo še eno enico in dobimo dvojko, ali dvojko razdelimo na dve enojki. Ta relacija nastane zaradi tega, ker je dvojka udeležena v ideji Dvojosti, enojka pa v ideji Enosti. Tudi stvari, ki sta dve, morata biti (skupaj) udeleženi v ideji dvojega, čeprav sta vsaka za sebe udeleženi na Enosti.

---

mici ali dedekindovski rezi racionalnih števil, kajti obe pojmovanji sta medsebojno izomorfni, oz. vzpostavljata enako formalno strukturo realnih števil. Matematični strukturalizem nasprotuje nominalističnim redukcijam teorij na nematematično jedro, vendar pa ne sprejema tudi vseh matematičnih stavkov kot stavkov o matematičnih objektih. Matematiko lahko apliciramo v realnem svetu zato, ker materialni objekti in njihove različne ureditve ustrezajo določenim vzorcem, ki pa jih lahko (ob določenih idealizacijah) popišemo tudi z matematičnimi stavki. Pri tem lahko zaznavamo konkretne ureditve objektov, ne pa abstraktne matematične strukture, ki jo »naložimo« objektom. Resnik poudarja, da se pri tem praviloma uporabljamo vmesne vzorce, ki jih sami konstruiramo, npr. grafe na papirju, računalniške modele itd. Ti vzorci predstavljajo vmesni korak med konkretnimi ureditvami v realnem svetu in abstraktnimi strukturami, ki jih preciziramo v matematični teoriji. Ta razlaga je seveda varianta aristotelovske trikotniške strukture, ki dodatno poudarja konstruktivnost matematike, kajti do izrecno matematičnih struktur pridemo tako, da fingiramo različne fiktivne, idealizirane »posnetke« realnih ureditev, nato pa skušamo od tod izvleči najsplošnejše in čisto abstraktne vzorce razmerij, kjer povsem abstrahiramo od vseh kontingentnih, akcidentalnih lastnosti posameznih nosilcev v določenem tipu vzorcev. Matematika pa gre potem lahko še dalje in gradi čisto svoje matematične strukture, ki se logično naslanjajo na prvotno osvojene matematične abstrakcije in idealizacije realnih struktur, a nadaljujejo formalne strukture v različni smeri, dokler ne dobimo nove, zaokrožene matematične teorije.

Odtod izhaja, da sodbe 1 + 1 = 2 ne moremo razložili zgolj kot nekako »dodajanje« enice drugi enici. Sokrat/Platon je sila skromen v razlagi svoje misli. Morda je razlog v tem, ker iz dveh ločenih enic ne more nastati *eno* novo število (tj. 2). Tudi če vzamemo obe skupaj, še nista dve, temveč dvoje. Dejstvo, da sta se enojki v sodbi 1 + 1 = 2 nekako združili, tudi ne more biti vzrok temu, da postaneta dvojka.

Lahko bi dejali, da se Platon tu upira ekstenzionalnemu pojmovanju števil kot razredov. Platon gre s svojo kritiko še dlje. Sklepa da dokler smo ujeti v območje predstavnega mišljenja, ne vemo ne tega, kako »nastane« enica, ne tega, zakaj nastane in premine kaka druga stvar.

Če nekoliko ekstrapoliramo te Platonove misli, potem vidimo, da zavrača »analitično« ali kakršnokoli razdruževalno pojmovanje števil in številskih operacij. Zhateva neanalitično utemeljitev na osnovi svoje teorije idej. Zdi se, da se tu ne more izogniti nekakšni podvojitvi relacije. Relacijo 1 je manjše od 2 skuša utemeljiti s tem, da je 1 udeležena na Enosti in 2 na Dvojosti. To je mogoče razumeti le tako, da je Enosti in Dvojosti imanentno to, da je Enost manjša od Dvojosti. Lahko da je Platon tu poskušal načelno razlikovati med intenzionalnim pojmovanjem relacije, ki je stvar uma in ekstenzionalnim pojmovanjem, ki zadeva množice stvari (pojavov). A kakorkoli že, Platon brani tudi nekakšno apriorno sintetičnost že čisto elementarnih aritmetičnih resnic. Za razliko od Kanta, ki jo je utemeljeval s formami čiste zavesti in pojavnostjo, jo Platon utemeljuje z deležnostmi na idejah.

Kantova rešitev vprašanja, kako so mogoče sodbe čiste matematike, torej ni edino mogoča. Zanimivo je tudi, da so za Platona pravzaprav vse *matematične in logične resnice* sintetične a priori, namreč zato, ker jih ne dobimo z delitvami ali združevanjem pojmov ali stvari, temveč z udeležbo stvari ali njihovih pojmov na ustreznih idejah. »Analitične« bi bile le sodbe identitete in tiste, kjer predikat sodbe dejansko zgolj ponavlja eksplicitno navedeni del subjekta sodbe. Kantovo pojmovanje analitičnosti, češ da izhaja iz delitve pojmov in zakonov identitete/ protislovja, po Platonu ne bi bilo ustrezno in z njo ne bi mogli pojasniti apriorne veljavnosti vseh kantovskih analitičnih sodb. Menim, da je ob vsej nejasnosti in kratkosti navedenih argumentov, Platon vendarle zadel v bistvo stvari.

Gre za vprašanje, kako naj imamo število obenem za popolno enoto, torej nesestavljeno, in za rezultat različnih številskih operacij, torej za sestavljeno (na različne načine). Kje tedaj leži nujna resničnost matematičnih sodb? Če se strinjamo s Platonovo implicitno kritiko običajnega razumevanja aritmetičnih sodb, potem seštevanje ni z ničemer zvezano s predstavami ali pojmi sestavljanja ali pridajanja. Na ekstenzionalen način lahko rečemo npr. le »Eno in eno je dvoje«, ne pa »Ena in ena je dve«, kot to zahteva čista matematika.

Morda se zdi po stopetdesetih letih truda, da bi s pomočjo operacij in razmerij med množicami (razredi), ali s pomočjo konstruktivnih idr. definicij števil in aritmetičnih operacij opredelili pojem naravnega števila danes smešno zagovarjati takšno intenzionalno razmišljanje o številih in aritmetiki, vendar je nujno, v kolikor sprejmemo misel, da so aritmetične sodbe *po sebi resnične* in ne zgolj *pravilne* zaradi sprejetih definicij, aksiomov idr. konvencij. Tudi danes pogosto dokazovanje sodbe 1 + 1 = 2 s pomočjo unije med dvema enočlenskima množicama pomeni tiho zamenjavanje te enakosti z blažjo, njej le sorodno, ne pa enakovredno enakostjo: »Eno in eno je dvoje«. Ta sodba se zlahka zamenja s kakšno empirično ugotovitvijo o »zbiranju« različnih celot v nove celote, a to je daleč stran od matematike. Nekaj takšnega so imeli v mislih angleški empiristi, npr. Hobbes in Mill. V tem primeru bi empirično postalo pogoj idealnemu, kar ni mogoče.

To kritično razmišljanje leti tudi na Fregeja, ki je z vsemi močmi skušal ubraniti idealni in apriorni značaj obsegovne, tj. razredno-teorijske interpretacije števil in številskih operacij, prav zato, da bi se ubranil psihologizma in empirizma. Da to v celoti vendarle ni mogoče doseči, so hitro pokazale različne antinomije množic. Te antinomije po mojem mnenju kažejo na neki nezvodljiv presežek pojma števila nad pojmom množica (obseg, razred), oz. kažejo na intenzionalni vidik pojma števila. Tudi Kantov poskus utemeljitve aritmetike skozi čisto formo časovne zavesti sodi med poskuse intenzionalne utemeljitve aritmetike. Razlika med Platonom in Kantom je v tem, da je Kanta zanimala predvsem aritmetična sodba kot sinteza pojmov, Platona pa so zanimali odnosi med pojmi, tj. prehajanje enih pojmov v nove (npr. pojma eno v pojem dvoje ob navezavi na pojem vsote). Ker so po Platonu pojmi zasnovani na umskem uvidu v ideje, je videl tudi utemeljitev matematičnih sodb v naslonitvi na idealne bitnosti, ki so po sebi in veljajo po sebi:

»Kaj pa, če enemu prideneš eno ali če eno razcepiš v dve, mar se ne boš bal reči, da sta pridatek (seštevanje) in cepitev (deljenje) vzrok nastanaku dveh? Ali ne boš na vsa usta pričal, da za nobeno stvar ne poznaš drugega načina nastanka nego tega, da je sleherna deležna posebne bitnosti tega, k čemur pripada? Da torej za nastanek dveh ne veš drugega vzroka nego udeležbo na dvojnosti? Dvojnosti torej, porečeš, mora biti deležno, kar koli hoče postati dve, enosti, kar koli hoče postati eno: vse tisto deljenje in seštevanje in podobne tankoumnosti pa boš odklonil in prepustil ljudem, ki so bolj učeni mimo tebe!« (Platon, 1988, str. 211–212).

Moramo torej razlikovati med številom in mnogostjo (tj. številom in kardinalnim številom), prav tako med številom in zaporednim členom neke vrste (tj. številom in ordinalnim številom). Tako kardinalna kot ordinalna števila so kvečjemu vidiki ideje števila, ne pa njej enaki. Ali rečeno drugače, ena stvar je reči »Tri knjige in štiri knjige je sedem knjig« in »3 + 4 = 7«, prav tako je nekaj drugega reči »četrti naslednik tretjega naslednika od 1 je sedmi naslednik od 1« in »3 + 4 = 7«. Res je, da lahko predstavimo preslikavo navedene matematične resnice tako v »teorijo mnogosti« kot v »teorijo naslednikov«, a to ni ista stvar. Mogoče je predstaviti tudi ordinalna števila znotraj teorije množic, seveda tako, da poprej teorijo naslednikov predstavimo kot primer relacije stroge linearne urejenosti objektov, te pa lahko popišemo s pomočjo množičnoteorijskih izrazov (npr. s pomočjo »urejenih parov«). To kar trdim je, da naravno število *kot tako* ni niti kardinalno niti ordinalno ali kakšno drugo logično »konstruirano« število, temveč »je« nekaj pred tem. Seveda lahko vidimo naravna števila na različen način, npr. *kot kardinalna števila* ali kot *ordinalna števila*, vendar v tem primeru govorimo o tem, da jemljemo naravna števila kot *model* za aksiome teorije množic ali za Peanove aksiome. Še vedno s tem nismo izčrpali pojma in realitete števila, temveč smo zgolj odprli neki možen vidik števila. Še vedno pa smo prisiljeni »šteti« oz. uporabljati naravna števila mimo tega vidika. Npr. v metateoriji, ko apliciramo gödelizacijo teorije ali ko apliciramo Cantorjevo ali kako drugo diagonalizacijo znova apliciramo naravna števila in to mimo tistega vidika, ki ga sicer preučujemo v določeni teoriji (npr. v Peanovi teoriji). To pomeni, da pojem naravnega števila »uhaja« vsem svojim »aspektom«, oz. jim je predhoden. Kljub temu zajema neko stvarnost, saj sicer ne bi bil na tak način »aplikacijen«.

V tem smislu govorim, da naravna števila obstajajo, oz. da »so po sebi«, a nočem govoriti o tem, kaj so naravna števila. Vsak tak odgovor bi v končni fazi privedel do novega vidika naravnega števila, a ga ne bi izčrpal. Zopet bi uporabili naravna števila kot model kake teorije »o njih«, in zopet bi jih lahko, oz. bi jih morali poznati tudi neodvisno od te teorije oz. morali bi »obstajati« tudi neodvisno od tega modela. Če sledimo gornjim Platonovim razmislekom, potem moramo idejo (naravnih) števil razlikovati od njenih vidikov, npr. od pojma kardinalnih ali ordinalnih števil. Medtem ko za idejo naravnih števil lahko rečemo, da obstaja, tega ne moremo reči za njene vidike. Ti vidiki obstajajo le posredno, namreč kot odsev ideje v matematičnih teorijah in v aplikaciji matematike v znanostih. Razpravo o naravnih številih in o drugih vrstah števil na tem mestu raje prekinjam, ker bi nas nujno vodila v zahtevne formalne argumente, važen pa se mi zdi izjemno pomemben Platonov »poduk«, da je število po svoji ideji več od vseh posebnih vidikov številskosti. Domnevamo lahko le, da morda podobno velja tudi za druge temeljne matematične objekte: kontinuum, geometrijske objekte, funkcije in operacije.

Literatura

Aristotel (1999): *Metafizika.* Založba ZRC, Ljubljana.

Bacon, F. (1939): *Novum Organum.* V: *The English Philosphers from Bacon to Hume.* The Modern Library.

Becker, O. (1973): *Mathematische Existenz.* M. Niemayer Verlag, Tübingen.

Becker, O. (1975): *Grundlagen der Mathematik.* Suhrkamp, München.

Becker, O. (1998): *Veličina i granice matematičkog načina mišljenja.* Demetra, Zagreb.

Carnap, R. (1928): *Der logische Aufbau der Welt.* Dunaj.

Carnap, R. (1956): »The Methodological Character of Theoretical Concepts«. V: *Minnesota Studies in the Philosophy of Science,* Vol. 1, University of Minnesota Press, Minneapolis.

Carnap, R. (1959): *Introduction to Semantics.* Cambridge U. P., Cambridge/ Mass.

Carnap, R. (1968): *Logische Syntax der Sprache.* Springer Verlag, Dunaj, New York

Carnap, R. (1970): »Empiricism, Semantics and Ontology«. V: R. Carnap: *Meaning and Necessity.* The University of Chicago Press, Chicago, London.

Cassirer, E. (1911): *Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit,* 1. Zv.. Verlag B. Cassirer, Berlin.

Chaplin, G. (1999): »Is Theoretical Physics the Same Thing as Mathematics?«. V: *Physics Reports,* 315.

Descartes, R. (1957): *Pravila, Razprava o metodi.* Slovenska matica, Ljubljana.

Field, H. (1980): *Science Without Numbers.* Blackwell, Oxford.

Frege, G. (1973): »Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften«. V: G. Frege: *Schriften zur Nachlaß.* Akademie Verlag, Berlin.

Frege, G. (1987): *Die Grundlagen der Arithmetik.* Reclam, Stuttgart.

Heisenberg, W. (1977): *Del in celota.* Mohorjeva družba, Celje.

Husserl, E. (1968): *Logische Untersuchungen* II, Max Niemayer, Tübingen.

Husserl, E. (1996): *Logik und der allgemeine Wissenschaftstheorie.* Husserliana, zv. XXX, Kluwer Academic Publ., Dordrecht.

Husserl, E. (1997): *Ideje za čisto fenomenologijo in fenomenološko filozofijo.* Slovenska matica, Ljubljana.

Husserl, E. (1998): »Vprašanje po izvoru geometrije kot intencionalno-zgodovinski problem«. V: *Problemi,* št. 1/2.

Kant, I. (1999): *Kritika razsodne moči.* Založba ZRC, Ljubljana.

Kant, I. (1957): *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft.* V: I. Kant: *Werke,* IX,. Suhrkamp, Frtankfurt/M.

Kant, I. (1980): *Kritik der reinen Vernunft.* Reclam, Stuttgart.

Kant, I. (1999): *Kritika razsodne moči.* Založba ZRC, Ljubljana.

Leibniz, G. W. (1960): *Fragmente zur Logik.* Akademie Verlag, Berlin.

Leibniz, G. W. (1966): *Die Leibniz-Handschriften der königlichen öffentlichen Bibliothek zu Hannover.* E. Bodeman, Leipzig.

Leibniz, G. W. (1996): »Anfangsgründe einer allgemeiner Characteristik«. V: G.W. Leibniz, *Schriften zur Logik und zur philosophischen Grundlegung der Mathematik und Naturwissenschaft.* Suhrkamp, Frankfurt/M.

Mortensen, C. (1998): »On the possibility of science without numbers«. V: *Australasian Journal of Philosophy,* 76, št. 2.

Peruš, M. (2000): *Biomreže, mišljenje in zavest.* DZS, Ljubljana.

Platon (1959): *Timaios.* Rohwolt, Hamburg.

Platon (1995): *Država,* Mihelač, Ljubljana.

Platon (1988): *Poslednji dnevi Sokrata: Apologija – Kriton – Faidon.* Slovenska matica, Ljubljana.

Putnam, H. (1979): *Philosophy of Logic.* V: H. Putnam, *Philosophical Papers* 1. Cambridge University Press, Cambridge.

Quine, W. v. O. (1961): »On what there is«. V: W. v. O., Quine, *From a Logical Point of View.*, Harvard University Press, Harvard.

Quine, W. v. O. (1992): *Pursuit of Truth.* Harvard University Press, Harvard.

Resnik, M.D.(1997): *Mathematics as a Science of Patterns.* Clarendon Press, Oxford.

Stegmüller, W. (1970): *Beobachtungssprache, Theoretische Sprache und die partielle Deutung von Theorien.* Springer Verlag. Berlin, New York.

Ule, A. (1992): *Sodobne teorije znanosti.* ZPS, Ljubljana.

Ule, A. (1997): »Leibniz z Wittgensteinom – forma kot možnost strukture«. V: *Analiza,* 1.