Sanela Mešinovič
Mara Cotič
Amalija Žakelj

učenje in poučevanje geometrije v osnovni šoli

UNIVERZA NA PRIMORSKEM
UNIVERSITÀ DEL LITORALE

PEDAGOŠKA FAKULTETA
FACOLTÀ DI STUDI EDUCATIVI

REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE, ZNANOST IN ŠPORT

EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

Naravoslovno MAtematična Pismenost, Opolnomočenje, Tehnologija in Interaktivnost (NA-MA POTI): Operacijo delno sofinancirata Republika Slovenija, Ministrstvo za izobraževanje, znanost in šport ter Evropska unija iz Evropskega socialnega sklada.

Učenje in poučevanje geometrije v osnovni šoli

Knjižnica Ludus · 5 · ISSN 2630-3809
Urednica zbirke · Silva Bratož

REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA IZOBRAŽEVANJE, ZNANOST IN ŠPORT

EVROPSKA UNIJA
EVROPSKI SOCIALNI SKLAD
NALOŽBA V VAŠO PRIHODNOST

NAravoslovno MAtematična Pismenost, Opolnomočenje, Tehnologija in Interaktivnost (NA-MA POTI): Operacijo delno sofinancirata Republika Slovenija, Ministrstvo za izobraževanje, znanost in šport ter Evropska unija iz Evropskega socialnega sklada. Operacija se izvaja v okviru Operativnega programa za izvajanje evropske kohezijske politike v obdobju 2014–2020, prednostna os »10. Znanje, spretnosti in vseživljenjsko učenje za boljšo zaposljivost«, prednostna naložba »10.1 Izboljšanje enakega dostopa do vseživljenjskega učenja za vse starostne skupine pri formalnih, neformalnih in priložnostnih oblikah učenja, posodobitev znanja, spretnosti in kompetenc delovne sile ter spodbujanje prožnih oblik učenja, tudi s poklicnim svetovanjem in potrjevanjem pridobljenih kompetenc«, specifični cilj »3. Spodbujanje prožnih oblik učenja ter podpora kakovostni karierni orientaciji za šolajočo se mladino na vseh ravneh izobraževalnega sistema«.

Publikacija je brezplačna.

Učenje in poučevanje geometrije v osnovni šoli

Sanela Mešinović
Mara Cotič
Amalija Žakelj

Učenje in poučevanje geometrije v osnovni šoli

Sanela Mešinović, Mara Cotič in Amalija Žakelj
Recenzenta · Darjo Felda in Štefko Miklavič
Lektor · Davorin Dukić
Oblikovanje naslovnice · Tina Cotič
Risbe, oblikovanje in tehnična ureditev · Alen Ježovnik

Knjižnica Ludus · 5 · ISSN 2630-3809
Urednica zbirke · Silva Bratož

Izdala in založila · Založba Univerze na Primorskem
Titov trg 4, 6000 Koper
www.hippocampus.si
Glavni urednik · Jonatan Vinkler
Vodja založbe · Alen Ježovnik
Koper · 2019

Digitalna izdaja

http://www.hippocampus.si/ISBN/978-961-7055-61-0.pdf
http://www.hippocampus.si/ISBN/978-961-7055-62-7/index.html
https://doi.org/10.26493/978-961-7055-61-0

Kataložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili
v Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani

COBISS.SI-ID=299731456
ISBN 978-961-7055-61-0 (pdf)
ISBN 978-961-7055-62-7 (html)

Kazalo

Seznam slik

Seznam preglednic

1 Uvod

Geometrija je ena izmed matematičnih disciplin, ki jo vsakodnevno uporabljamo pri reševanju življenjskih problemov. V svojem poklicu jo uporabljajo arhitekti, slikarji, inženirji in drugi strokovnjaki. Tudi doma nam je v veliko pomoč (npr. pri opremljanju sobe). To je le eden izmed razlogov, zakaj bi morala imeti geometrija pomembno mesto v osnovnošolski matematiki. Usiskin (1980) navaja, da ima geometrija zelo pomembno mesto v matematiki, ker:

- povezuje matematiko z realnim fizičnim svetom;
- omogoča reprezentacijo matematičnih pojmov, ki sami po sebi niso vizualni;
- je sama po sebi primer matematičnega sistema;
- spodbuja razvoj deduktivnega sklepanja in dokazovanja.

Geometrija ima osrednjo vlogo pri učenju drugih matematičnih vsebin. Merjenje je nedvomno povezano z geometrijo. Geometrijski vzorci so med prvimi, s katerimi imajo učenci izkušnje. Razmerje je neposredno povezano z geometrijskim konceptom podobnosti ipd.

Pouk geometrije v osnovni šoli naj bi temeljil predvsem na opazovanju in razvijanju prostorskih predstav ter sposobnosti vizualizacije. Izhodišče za usvajanje geometrijskih pojmov je vedno najprej opazovanje, raziskovanje in praktično delo s konkretnimi predmeti. Z raziskovanjem geometrijskih konceptov lahko učenci razvijejo sposobnost reševanja geometrijskih problemov, kar pa je temeljni cilj učenja matematike. Pouk matematike, ki je naravnan k iskanju poti in strategij reševanja problemov, pripomore k učinkovitemu učenju. Pri tem se poudarja predvsem aktivna vloga učencev. Konkretno-izkustvena dejavnost je dobra osnova za prehod na simbolno raven razumevanja. Ta način poučevanja in učenja je še posebej zaželen na področju geometrije, ki za razliko od ostalih matematičnih področij zahteva specifičen način mišljenja.

Kompleksnost geometrije obvladujemo tudi s pomočjo jezika. Zaznavanje oblik je bistveno v geometriji, vendar lahko hierarhijo pojmov v geometriji ustvarimo le s pomočjo jezika. Zaznavanje in opisovanje geometrijskih oblik vodi k miselni konstrukciji objektov ter k razvijanju pojmov v evklidski geometriji. Učenci na stopnji vizualizacije pri začetnem opisovanju geometrijskih likov s svojim besediščem iz vsakdanjika navadno navajajo različne lastnosti likov (npr. je okrogel, je dolg, je visok, ima vogal, spodaj je širše, proti vrhu se oža ipd.). S tem ko opisujejo geometrijske like s svojim besediščem, jim pripravljamo podlago za kasnejše spoznavanje in opisovanje z matematično terminologijo na osnovi lastnih izkustev ter predstav. Tako učenci geometrijskih pojmov ne pridobivajo kot nekaj tujega, kar si morajo zapomniti, ampak to sprejemajo kot nadgradnjo svojega znanja. Če so oglišče geometrijskega lika imenovali s svojo besedo »vogal«, bodo hitreje usvojili pojem oglišča kot točke, kjer se stikajo dve stranici lika. Tako si bodo tudi za stranice lika, ki so jih imenovali črte, hitreje zapomnili, da te črte, ki omejujejo lik, imenujemo stranice.

Za geometrijo v slovenskem prostoru bi lahko sklenili, da jo obravnavamo primerno stopnji otrokovega razvoja. Učenci se najprej srečajo s konkretnimi predmeti, ki jih opazujejo in z njimi manipulirajo. Začetna stopnja namreč narekuje, da morajo učenci pri učenju o oblikah le-te najprej vizualizirati. Potemtakem sledi, da morajo učenci pri začetnem učenju geometrije izhajati iz konkretnih predmetov oz. tridimenzionalnih objektov. Pri učenju geometrije je torej treba izhajati iz tridimenzionalnega sveta in postopoma prehajati na manjše dimenzije.

Pri oblikovanju pouka geometrije v prvem vzgojno-izobraževalnem obdobju smo upoštevali značilnost otrokovega spoznavnega razvoja in v naših šolah pouk geometrije ustrezno ter uspešno prilagodili učencem. Z različnimi aktivnostmi, manipuliranjem raznih materialov in učnimi pripomočki učenci spoznajo nekatere osnovne geometrijske pojme. V višjih razredih osnovnošolskega izobraževanja, ko je podajanje geometrije že zelo abstraktno, učitelji pri pouku geometrije postopoma opuščajo uporabo didaktičnih sredstev. Ob neustreznem učenju in poučevanju geometrije lahko pride do napačnih predstav, kar vodi v nerazumevanje in slabše rezultate pri preverjanju znanja geometrije. Učitelji seveda tega ne bi smeli spregledati.

2 Geometrija

Geometrija je poleg aritmetike najstarejša matematična veja, ki se ukvarja s prostorskimi značilnostmi teles in njihovimi medsebojnimi odnosi. Beseda *geometrija* izvira iz grških besed *geo = Zemlja* in *metria = merjenje*, kar nam pove, da se je potreba po merjenju pojavila že zelo zgodaj.

Kratka zgodovina geometrije

V kameni dobi je bila geometrija predvsem praktično usmerjena. Nastale so prve enote za merjenje dolžine, kot so palec, čevelj, laket in ped. Indijanci, ki so se ukvarjali s poljedelstvom, in mostiščarji v osrednji Evropi so postavili pravila, da so gradili hiše po ravnih črtah in s pravimi koti (Struik 1978). Zanimivi geometrijski vzorci na lončarskih izdelkih in košarah iz tkanin kažejo skladnost, simetrijo in podobnost.

Pogoste poplave Nila, Evfrata, Tigrisa in Inda so zahtevale poznavanje letnih časov in merjenje zemlje. Geometrijska znanja so uporabljali tudi v astronomiji, navigaciji in gradbeništvu. Tako najdemo prve zapisane geometrijske probleme v antičnem Egiptu, Mezopotamiji in v dolini Inda, in sicer okoli 2. in tudi 3. tisočletja pr. n. št. Stari Egipčani so ugotovili, da je ploščina trikotnika enaka polovici produkta iz osnovnice in višine (Struik 1978). Poznali so formulo za izračunavanje prostornine piramide in prisekane piramide, do katere so prišli empirično (Mitrović 1997). Geometrija je v tistem času temeljila na praktičnih metodah.

Tales iz Mileta (624–547 pr. n. št.) je prvi uporabil deduktivni pristop h geometriji. Starogrški matematik je dokazal tedaj že znani izrek o pravokotnosti kota nad premerom krožnice. Znan je predvsem po svojem izreku o sorazmerjih. Z metodo dokazovanja izrekov so v stari Grčiji nadaljevali tudi drugi filozofi in matematiki. Nekateri izmed teh, ki so v veliki meri prispevali k razvoju geometrije, so: Pitagora (580–490 pr. n. št.), Hipokrat (450–430 pr. n. št.), Platon (427–347 pr. n. št.), Evdoks (408–355 pr. n. št.), Aristotel (384–322 pr. n. št.) in Arhimed (287–212 pr. n. št.). Ob hitrem napredku geometrije, ki se je odražal v velikem številu dokazanih izrekov, se je pokazala potreba po sistematizaciji in s tem vpeljavi aksiomov (Mitrović 1997). Eden najvplivnejših geometrov vseh časov, Evklid iz Aleksandrije (330–270 pr. n. št.), je v svojem delu[1] postavil začetne trditve, ki jih je imenoval postulati ali aksiomi. Evklidska geometrija, za katero je prav Evklid postavil prve temelje, je dolga stoletja veljala za edino geometrijo.

Med pomembna odkritja v geometriji štejemo kartezični koordinatni sistem, ki ga je okoli leta 1637 opisal René Descartes (1596–1650) v svoji knjigi z naslovom *La Géométrie* (Geometrija). Pod vplivom njegovih idej se je razvila analitična geometrija, ki predstavlja povezavo med algebro in geometrijo (Struik 1978).

K nadaljnjemu razvoju geometrije je v veliki meri prispeval peti Evklidov aksiom, saj je veliko matematikov menilo, da ga ni treba obravnavati kot aksiom, ampak se ga lahko z ostalimi aksiomi dokaže kot izrek (Mitrović 1997). S tem problemom so se ukvarjali vse do 19. st., ko je Nikolaj I. Lobačevski (1793–1856) s pomočjo negacije aksioma o vzporednicah zgradil popolnoma novo geometrijo, kar je pomenilo, da je peti aksiom neodvisen od ostalih aksiomov. Geometrija Lobačevskega (imenovana tudi hiperbolična geometrija) temelji na vseh Evklidovih aksiomih z izjemo petega, ki ga zamenjamo z njegovo negacijo.

Do podobnih odkritij je v tem času prišel Janos Bolyai (1802–1860). Odkril je, da je mogoče zgraditi geometrijo, ki temelji na nekem drugem aksiomu, po katerem se da skozi eno točko v ravnini potegniti neskončno mnogo premic, ki ne sekajo dane premice v ravnini (Struik 1978).

Kasneje je prišlo do odkritja tudi drugih neevklidskih geometrij. Ena izmed teh je projektivna geometrija, ki se je razvila v 19. stoletju, čeprav jo je že dve stoletji pred tem nakazal Desargues (1591–1661). V njeni ravnini ni premic, ki se ne sekata (Struik 1978).

Med pomembne geometre sodijo še Felix Klein (1849–1925), ki je trdil, da je vsaka geometrija teorija invariant posebne transformacijske grupe. S širjenjem ali oženjem te grupe prehajamo od enega tipa geometrije na drugega (Struik 1978). Bernhard Riemann (1825–1866) je definiral prostor poljubne dimenzije, ki ni konstantne ukrivljenosti (Mitrović 1997). Francoski matematik Henri Poincare (1854–1912) je deloval na vseh področjih matematike. Njegovo delo je bistveno vplivalo na sodobno topologijo.

Čeprav se je v zadnjih nekaj stoletjih razvilo kar nekaj različnih teorij geometrije, je evklidska geometrija še danes temelj šolski geometriji.

[1] metria = merjenje

Evklidska geometrija

Evklidska geometrija je najbolj znan matematični sistem, zasnovan na delu grškega matematika Evklida, ki ga je opisal v 13 knjigah z naslovom *Elementi*. Izhajal je iz manjšega števila očitnih trditev, ki jih ni treba dokazovati, poimenoval pa jih je postulati ali aksiomi. Na njihovi podlagi je po deduktivni metodi dokazal veliko število izrekov. Z deduktivnim načinom sklepanja je dokazal tudi že znane izjave predhodnih matematikov.

Na začetku je v *Elementih* opisana ravninska geometrija. Knjige I., II., III., IV. in VI. govorijo o pogojih za skladnost dveh trikotnikov in enakosti njunih ploščin, odnosih med stranicami in koti, pojmu vzporednic, transformaciji mnogokotnika v kvadrat z enako ploščino, krožnici, včrtanih in očrtanih večkotnikih ter podobnosti večkotnikov (Pagon 1995). Knjige V., VII., VIII., IX. in X. so večinoma posvečene aritmetiki, podani v geometrijski obliki. Zadnje tri knjige (XI., XII. in XIII.) obravnavajo osnove stereometrije.

Prvo knjigo je Evklid začel s petimi postulati (ali aksiomi):

Aksiom 1 *Za poljubni dve točki obstaja daljica, ki ju povezuje.*
Aksiom 2 *Vsako daljico lahko neomejeno podaljšujemo na obe strani.*
Aksiom 3 *Poljubna točka je lahko središče krožnice s poljubnim polmerom.*
Aksiom 4 *Vsi pravi koti so enaki.*
Aksiom 5 *Če poljubni dve premici sekamo s tretjo premico in je vsota notranjih kotov, ki ju dobimo na eni strani te premice, manjša od dveh pravih kotov, se prvi dve premici sekata na tej strani tretje premice.*

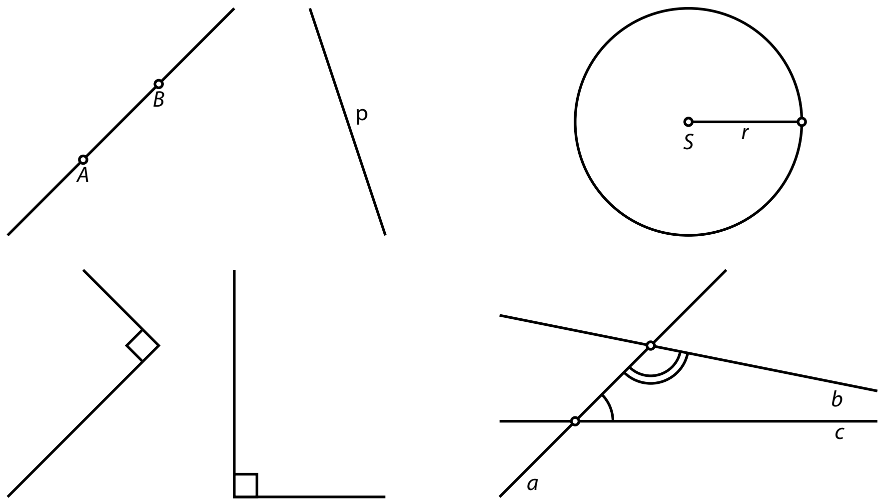
Matematiki so peti aksiom kasneje nekoliko poenostavili, po matematičnem pomenu pa je enakovreden Evklidovemu: *Skozi dano točko, ki ne leži na premici, poteka natanko ena vzporednica k tej premici* (aksiom o vzporednici).

Seveda so v *Elementih* tudi pomanjkljivosti. V nekaterih dokazih je Evklid določene dele sprejel kot očitne in jih ni dokazoval (Mitrović 1997). Šele po odkritju neevklidskih geometrij so matematiki postavili natančnejše geometrijske aksiome in te pomanjkljivosti odpravili.

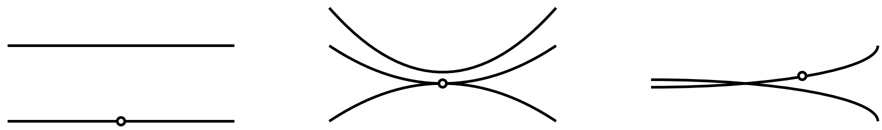
Z Einsteinovo teorijo relativnosti se je izkazalo, da fizični prostor ni evklidski. V prostoru vesoljskih razsežnosti je ugodneje uporabljati neevklidsko geometrijo s spremenljivo ukrivljenostjo (Mitrović 1997).

Neevklidska geometrija

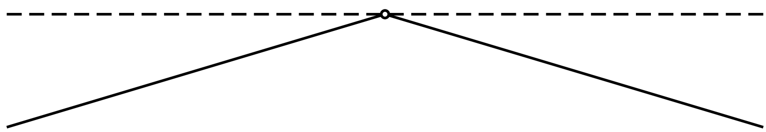
Neevklidska geometrija je geometrija, ki ne sloni na evklidskih aksiomih. Obstaja več različnih neevklidskih geometrij, ki temeljijo na različnih aksiomatskih sistemih.



Slika 2.1 Aksiomi ravninske evklidske geometrije (povzeto po Mitrović 1997, 14)



Slika 2.2 Aksiom o vzporednici v evklidski, hiperbolični in eliptični geometriji



Slika 2.3 Vzporedni premici se sekata v neskončnosti

Prvi, ki je trdil, da obstaja geometrija, ki ni v skladu z Evklidovo, je bil Lobačevski. Njegova t. i. hiperbolična geometrija temelji na spremenjenem aksiomu o vzporednici: *Skozi dano točko, ki ne leži na premici, poteka več kot ena vzporednica k tej premici.* Prvi štirje aksiomi so enaki kot pri evklidski geometriji.

Eno izmed neevklidskih geometrij je osnoval nemški matematik Riemann in jo imenujemo eliptična geometrija. Tudi Riemannova geometrija temelji na spremenjenem aksiomu o vzporednici: *Skozi dano točko, ki ne leži na premici, ne poteka nobena vzporednica k tej premici.* Ostali aksiomi so enaki kot pri evklidski geometriji.

Poleg hiperbolične in eliptične geometrije k neevklidski geometriji štejemo tudi projektivno geometrijo, ki poleg običajnih točk obravnava še točke v neskončnosti. Eden od prvih motivov za začetek razvoja projektivne geometrije izvira iz slikarstva oz. iz želje, da se občutek trirazsežnega prostora prenese v ravnino (Mitrović 1997). Vzporednici na sliki 2.3 sta predstavljeni kot premici, ki se sekata v neskončnosti.

3 Pristopi učenja in poučevanja

Kognitivni in konstruktivistični pogled na poučevanje

V pedagoški psihologiji obstajajo različne razlage in pogledi na to, kako se ljudje učimo.

Socialna kognitivna teorija razširja teorijo socialnega učenja in vključuje kognitivne dejavnike, kot so prepričanja, pričakovanja in zaznavanje osebe. Razlikuje med učenjem z dejavno udeležbo in učenjem z opazovanjem. Učenje z dejavno udeležbo je učenje s pomočjo lastnih dejanj in z izkušanjem posledic le-teh. Učenje z opazovanjem izziva behavioristično idejo, da so kognitivni dejavniki pri razlaganju učenju nepotrebni. Če se ljudje lahko učijo z opazovanjem, potem morajo usmerjati svojo pozornost, konstruirati podobe, si zapomniti, analizirati in se odločati, to pa vpliva na učenje. Torej se pred izvajanjem in preden se lahko zgodi ojačevanje na miselni ravni dogaja marsikaj. Elementi učenja z opazovanjem so usmerjanje pozornosti, ohranjanje informacij ali vtisov, izvajanje vedenja in motivacija za ponavljanje vedenja. Če se želimo učiti z opazovanjem, moramo biti pozorni na določene razsežnosti, ki nam pomagajo pri učenju. Če npr. hočemo posnemati vedenje modela, moramo ohranjati informacije. Motivacija oblikuje učenje in opazovanje v obliki spodbud. Novo spretnost lahko pridobimo z opazovanjem, vendar je ne bomo izvedli, vse dokler nimamo motivacije ali spodbud za to.

Štirje splošni elementi večine konstruktivističnih pogledov so: kompleksno izzivalno učno okolje in avtentične naloge, socialna pogajanja in deljena odgovornost kot del učenja, raznovrstne reprezentacije vsebine ter konstruktivno razumevanje znanja in na učenca usmerjen pouk.

Seveda pri vsakem od teh pogledov na učenje obstajajo odmiki, razlikujejo se po tem, kaj poudarjajo. Prav tako se konstruktivistični pogledi prekrivajo. Verjetno ni smiselno in zelo produktivno razpravljati o vrednosti posameznega pristopa, temveč raje upoštevamo njihov prispevek k razumevanju učenja in izboljšanju poučevanja. Različne poglede na učenje lahko uporabimo skupaj pri ustvarjanju produktivnega učenja. Kognitivni modeli, ki primerjajo mišljenje z delovanjem računalnika, nam pomagajo razumeti jezik in mišljenje višjega reda. Konstruktivistične teorije nam pomagajo razumeti posameznika kot ustvarjalca in konstruktorja znanja.

Preglednica 3.1 Kognitivni pogled na poučevanje

Kategorija	Behavioristični Skinner	Informacijsko procesni Anderson
Znanje	Pridobivanje fiksne oblike znanja. Stimulirano od zunaj.	Pridobivanje fiksne oblike znanja. Stimulirano od zunaj. Predznanje vpliva na procesiranje informacij.
Učenje	Pridobivanje dejstev, spretnosti, pojmov. Pojavlja se skozi urjenje, vodeno vajo.	Pridobivanje dejstev, spretnosti, pojmov. Pojavlja se skozi učinkovito uporabo strategij.
Poučevanje	Transmisija. Predstavitev (povedati)	Transmisija. Vodenje učencev k pravilnejšemu in popolnejšemu znanju.
Vloga učitelja	Upravljalec, supervizor. Popravlja napačne odgovore.	Poučuje in modelira učinkovite strategije. Popravlja zmotne predstave.
Vloga vrstnikov	Običajno ni upoštevana.	Ni nujno, vendar lahko vpliva na procesiranje informacij.
Vloga učenca	Pasivno sprejemanje informacij. Aktiven poslušalec, sledi navodilom.	Organizator, reorganizator informacij. Tisti, ki se spomni.

Opombe Povzeto po Woolfolk (2002, 310).

Transmisijski in konstruktivistični pristop učenja in poučevanja

Učitelji matematike se pogosto vprašajo, česa učenci ne razumejo, kaj pravzaprav razumejo, kako razumejo matematične koncepte in kako poučevati, da bodo učenci razumeli. V zadnjih desetletjih didaktiki in psihologi veliko pozornosti namenjajo učenju in poučevanju matematike z razumevanjem, kar dokazujejo prenove učnih načrtov v številnih državah, tudi v Sloveniji. Zadnja posodobitev učnega načrta je bila izvedena leta 2011 (*Učni načrt* 2011). Pri učenju pojmov se pojavljata predvsem dve poti (Marentič Požarnik 2000):

– pridobivanje obstoječih pojmov od odraslih, predvsem na osnovi besednih razlag (transmisijski pristop);
– samostojno oblikovanje (odkrivanje) pojmov (konstruktivistični pristop).

Transmisijski pristop

Konkretne pojme (npr. trikotnik in kocka) tradicionalni učitelj običajno poučuje s primeri (induktivno), abstraktne pojme (npr. praštevilo) pa z definicijami (deduktivno) (Marentič Požarnik 2000). Deduktivni pristop poučeva-

Preglednica 3.2 Konstruktivistični pogled na poučevanje

Kategorija	Psihološki/individualni Piaget	Sociološki/situacijski Vigotski
Znanje	Spremenljiva oblika zbiranja, individualno skonstruirana v socialnem svetu. Gradi na tem, kar prinese učenec.	Socialno skonstuirano znanje. Gradi na prispevkih udeležencev in njihovem skupnem konstruiranju.
Učenje	Aktivna konstrukcija, rekonstrukcija predznanja. Pojavlja se z mnogimi priložnostmi in različnimi procesi za povezovanje s tem, kar je že znano.	Sodelovalna konstrukcija socialno definiranega znanja. Pojavlja se s socialno skonstruiranimi priložnostimi.
Poučevanje	Izziva, usmerja mišljenje k popolnejšemu razumevanju.	Sokonstruira znanje z učenci.
Vloga učitelja	Spodbujevalec, vodič	Spodbujevalec, vodnik.
Vloga vrstnikov	Ni nujno, vendar lahko vzpodbudi mišljenje, zastavlja vprašanja.	Običajno del procesa konstruiranja znanja.
Vloga učenca	Dejaven konstruktor (na miselni ravni). Dejaven mislec, pojasnjevalec, interpret, spraševalec.	Dejaven konstruktor skupaj z drugimi in na miselni ravni. Dejaven mislec, pojasnjevalec, interpret, spraševalec. Dejaven socialni udeleženec.

Opombe Povzeto po Woolfolk (2002, 310).

nja pojmov je smiselno uporabiti takrat, ko so učenci na stopnji formalno-logičnega mišljenja. Seveda se učenci z nekaterimi pojmi srečajo že prej. Najprej spoznajo pojme na konkreten, kasneje pa tudi na abstraktnejši način.

Transmisijski pouk matematike običajno poteka po naslednjem vzorcu:

- *razlaga:* učitelj poda kratko razlago in na tablo reši enega ali več zgledov. Učenci razlago zapišejo v zvezke. Nekateri učenci med razlago aktivno sodelujejo v pogovoru z učiteljem. Če je treba, prosijo učitelja za dodatno pojasnilo;
- *utrjevanje:* učenec bolj ali manj po navodilih učitelja rešuje naloge pred tablo, ki jih je izbral učitelj. Ostali učenci rešujejo naloge v zvezek. Učitelj pojasni morebitne nejasnosti v nalogi. Predlagane postopke s strani učencev učitelj potrdi ali pokaže »pravilne« postopke;
- *preverjanje in ocenjevanje znanja:* učitelj preveri in oceni, v kolikšni meri so učenci usvojili določeno snov, in to s podobnimi nalogami, kot so jih reševali z učenci pri utrjevanju.

Pri obravnavi novih pojmov je v glavnem učitelj v središču pozornosti in podaja končne resnice, pri čemer je pomembno, kako bo nove pojme razložil. Posledice transmisijskega pouka se kažejo v nizki motivaciji, premajhni trajnosti in uporabnosti znanja, slabih rezultatih ter odporu do učenja (Ivanuš Grmek, Čagran in Sadek 2009).

Konstruktivistični pristop

Številne raziskave so pokazale, da si otroci pogosto oblikujejo nepopolne ali celo napačne predstave o pojmih. Za učitelje matematike je razumevanje pojmov nekaj najosnovnejšega za uspešno delo pri pouku matematike, saj matematika v osnovni šoli ni predmet, kjer bi učenci le memorizirali in reproducirali pojme, teoreme in postopke reševanja matematičnih problemov. Učence želimo naučiti matematičnega načina razmišljanja, ki ga bodo uporabili pri reševanju matematičnih problemov in tudi problemov iz vsakdanjega življenja.

Poznavanje besede, ki označuje nek pojem, še ne pomeni, da je učenec ta pojem tudi usvojil, kar je didaktike in psihologe spodbudilo k preučevanju aktivne udeleženosti v konstrukciji lastnega znanja. Ta pristop imenujemo konstruktivistično učenje pojmov. Konstruktivisti trdijo, da učenje ne bo uspešno, če učencu predstavimo že izdelan pravilen pojem, saj mora s poskušanjem, z opazovanjem, s postavljanjem in preverjanjem podmen, samostojnim miselnim delom ter v dialogu z drugimi zgraditi svoj pojem oz. spoznati njegov pomen (Marentič Požarnik 2000). Pristop, ki je usmerjen k učencu, temelji na aktivnih metodah dela, kot so raziskovanje, sklepanje in utemeljevanje, ki spodbujajo razvoj problemskih znanj.

Clements in Battista (1992) ugotavljata, da so učenci izredno neuspešni pri razumevanju in uporabi formalnih dokazov pri geometriji, čeprav je v učnem načrtu temu cilju namenjenega veliko časa. Sposobnost ugotavljanja pravilnosti v geometriji je pomanjkljiva. Neuspešnost dokazovanja se kaže tudi pri drugih matematičnih vsebinah. Kot razlog sta navedla, da učenci niso izoblikovali tistih prepričanj in idej, ki jih motivirajo in jim omogočajo, da določijo oz. ugotovijo matematično pravilnost. Rešitev vidita v konstruktivističnem učenju matematike, kjer učenci konstruirajo matematično razumevanje in zgradijo povezavo matematičnega znanja. S konstruktivističnim pristopom učenci samostojno ugotovijo matematično pravilnost, zaradi česar je le-ta učencem veliko pomembnejša in smiselnejša.

Vloga učitelja, ki poučuje na konstruktivističen način, se zelo razlikuje od vloge, ki jo ima tradicionalni učitelj. Njegova naloga ni več popraviti učenčeve napake, temveč pripraviti učno situacijo, ki bo učencu omogočila, da napako popravi sam (Hodnik Čadež 2004). To lahko doseže s smiselno postavljenimi vprašanji, izzivi in problemskimi situacijami, ki pomagajo pri spreminjanju napačnih ali nepopolnih predstav. Zato mora učitelj najprej ugotoviti in pri načrtovanju učne vsebine upoštevati otrokovo začetno znanje.

Konstruktivistični pristop je marsikje povzročil velike spremembe v poučevanju in s tem trajnejše in kakovostnejše učne rezultate ob močnejši notranji učni motivaciji. Spremembe se dogajajo tako v pojmovanju znanja kot pri poučevanju in učenju. Raziskave kažejo, da pouk, ki učencem ponudi le znanstveno klasifikacijo, ne da bi upošteval problematiko in jim pomagal spremeniti njihovo obstoječo kognitivno strukturo, daje le kratkotrajne in površinske rezultate. Znanje ni le paleta vsebin, temveč tudi »načini ravnanja« s temi vsebinami.

Induktivno in deduktivno učenje pojmov

Za razumevanje in sporazumevanje uporabljamo besede, s katerimi izražamo pojme. Z njimi določamo lastnosti predmetov in pojavov. Učenec pri pouku matematike pridobiva znanje o matematičnih pojmih in simbolih, razvija matematične spretnosti ter spoznava matematične strategije.

Dienes (1960) je oblikoval štiri načela, ki imajo pomembno vlogo pri oblikovanju matematičnih pojmov

- načelo dinamike;
- načelo konstrukcije;
- načelo matematične spremenljivosti;
- načelo zaznavne spremenljivosti.

Načelo dinamike izhaja iz Piagetevih spoznanj, da se učenci učijo veliko počasneje, kot si predstavljamo, zato potrebujejo veliko časa, da usvojijo matematični pojem. Dienes pravi tudi, da je učenje aktiven proces, v katerem so učenci aktivno udeleženi. Načelo konstrukcije temelji na tem, da je matematika za učence konstruktivna in ne analitična dejavnost. Učenci v procesu učenja izgradijo lastno matematično znanje. Načelo matematične spremenljivosti poudarja, kako pomembno je, da učenci spoznajo npr. kvadrat v različnih legah in velikostih. Načelo zaznavne spremenljivosti govori o individualnih razlikah učencev. Zaradi teh razlik Dienes predlaga organizacijo učenja v majhnih skupinah, delo z učnimi listi in raznolike reprezentacije pojma (Dienes 1960 v Hodnik Čadež 2004).

Predpogoj za učenje pojmov je učenje razlikovanja (Gagne 1985), npr., sadje razlikujemo po barvi, geometrijske like po obliki. Učencem zagotovimo raznolike čutne izkušnje, zaznavno-perceptivno učenje, dejavnosti za ugotavljanje tudi manjših razlik v dražljajih ter za prepoznavanje in razvrščanje predmetov ter pojavov na tej osnovi.

Ko pojem obvladamo, ga znamo tudi prepoznati. Definicija ni nujno sestavni del obvladovanja pojmov, zlasti ne na razredni stopnji. Pojmi so hkrati enote in ozadja mišljenja, organizirajo naše izkušnje. Delimo jih na:

- konkretne in abstraktne (prvi izhajajo neposredno iz čutne izkušnje, drugi ne),
- primarne in sekundarne,
- preproste in zapletene.

Kakšne pojme imajo otroci, pogosto preučujemo na osnovi razvrščanja in klasifikacije. Otroci klasificirajo predmete najprej po zunanji podobi, nato po uporabi ali funkciji in šele pozneje po objektivnih skupnih značilnostih. Piaget je podrobno preučeval razvoj pojmov v posameznih fazah mišljenja razvoja. Za predoperativno stopnjo so značilni predpojmi, za stopnjo konkretnih operacij pojmi in za stopnjo formalno logičnega mišljenja abstraktni pojmi.

Razvoj pojmov pa ni povezan le z razvojno stopnjo otrokovega mišljenja, temveč po Vigotskem (1983) tudi z okoljem. Vigotski meni, da na kognitivni razvoj posameznika ne moremo gledati kot na plezanje po lestvi, temveč kot na razvejano mrežo, ki predpostavlja več potencialnih začetkov in več možnih poti do konca, na katere pa vplivata organizem in okolje. Veščine se oblikujejo v enem kontekstu, potem pa morajo biti generalizirane z rekonstrukcijo še na druga področja, v drugih kontekstih. To se zgodi postopoma, z uporabo veščin v vedno širšem obsegu in počasi, brez podpore učitelja (Žakelj 2004).

Poučevanje pojmov s primeri

Konkretne pojme (npr. trikotnik in kocka) navadno poučujemo s primeri (induktivno), abstraktne z definicijo (deduktivno). Konstruktivisti trdijo, da je potrebno najprej ugotoviti, kakšno je znanje o določenem pojmu, potem pa ga je potrebno po potrebi preoblikovati. Poučevanje pojmov s primeri poteka vse do sposobnosti za formalno-logično mišljenje, to je vsaj do 11./12. leta. Ko so učenci že sposobni formalno-logičnega razmišljanja, pa lahko postopoma, vzporedno z induktivnim pristopom, ki je še vedno prevladujoč, vpeljujemo poučevanje pojmov tudi z definicijo. Za kakovostno znanje pa je ključnega pomena oba pristopa didaktično ustrezno dopolnjevati.

Poučevanje pojmov s primeri (induktivno) lahko poteka po teh fazah:

- učitelj se odloči za cilj: ali naj učenci novi pojem le prepoznajo ali naj ga znajo uporabiti v novi situaciji;
- odloči se, katere značilnosti bo uporabil;
- določi predpogoje: katere pojme morajo učenci že poznati, da bi razumeli novega;
- ugotovi stopnjo predznanja o danem pojmu;
- učitelj pove besedni izraz za pojem;
- učitelj pove nekaj uvodnih pozitivnih primerov za pojem in pozneje še nekaj tipičnih in bolj raznolikih za generalizacijo, da se izogne preozki obravnavi;
- v fazi utrjevanja učitelj predloži pozitivne in negativne primere, pomešane med seboj (če jih samostojno razvrstijo, so pojem razumeli);
- učitelj skupaj z učenci oblikuje definicijo, s tem da ta ni nujen sestavni del učenja pojmov;
- nov naučeni pojem se uvrsti v mrežo sorodnih pojmov.

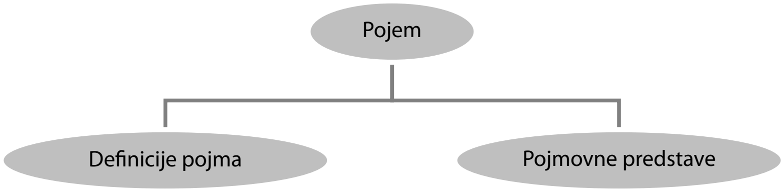
Pri vpeljevanju (novih) pojmov upoštevamo, da je najpomembnejši dejavnik, ki vpliva na učenje, tisto, kar učenec že zna in ve. Orton in Wain (1994) opozarjata, da struktura obstoječega znanja bistveno vpliva na vrstni red učenja in poučevanja. Če določeni pojmi, ki so potrebni za usvajanje novega znanja, še ne obstajajo v zavesti učenca, je novo znanje lahko naučeno le na pamet.

Pri vpeljevanju pojmov učencem ponudimo različne dejavnosti za razvoj konceptualnega znanja. Učenec izkaže poznavanje in razumevanje, ko prepozna matematične objekte, npr. oblike, števila, izraze in količine; prepozna matematične enote, ki so matematično enakovredne (npr. enakovredne enostavne ulomke, decimalna števila in odstotke); razvrsti/uvrsti predmete, oblike, števila in izraze glede na njihove skupne lastnosti; se pravilno odloča o pripadnosti razredom; zna urejati števila in predmete skladno z njihovimi lastnostmi idr.

Poučevanje pojmov prek definicij

Deduktivni pristop poučevanja pojmov je smiselno uporabiti takrat, ko so učenci na stopnji formalno-logičnega mišljenja. Seveda se učenci z nekaterimi pojmi srečajo že prej. Najprej spoznajo pojme na konkreten, kasneje pa tudi na abstraktnejši način.

Po 11./12. letu, ko so učenci že sposobni formalno-logičnega mišljenja, pa lahko uvajamo pojme na podlagi definicije – to poteka seveda v več fazah:



Slika 3.1 Pojmovna struktura (povzeto po Žakelj in Valenčič Zuljan 2015)

- posredujemo definicijo; ta je lahko bolj ali manj zahtevna, vendar je potrebno ugotoviti, ali učenci obvladajo vse pojme, ki definicijo sestavljajo;
- naštejemo nekaj značilnih pozitivnih in negativnih primerov, ki ponazarjajo širino pojma (generalizacija) in tudi razlikovanje med sorodnimi pojmi;
- preverimo, ali učenci pojem obvladajo s prepoznavanjem ali samostojnim navajanjem pozitivnih in negativnih primerov.

Definicije predstavljajo resen problem pri učenju matematike. Povzročajo konflikt med strukturo matematike, kot jo vidijo profesionalni matematiki, in kognitivnimi procesi učencev. Učenci velikokrat ne razumejo pojma, uvedenega z definicijo. Razumejo ga šele, ko si z dodatnimi primeri, vajami, ustvarijo pojmovno predstavo. Tudi pri reševanju problemov se pogosto pokaže, da ni definicija tista, ki pomaga rešiti problem, temveč pojmovna predstava s primeri in nasprotnimi primeri.

Pridobivanje pojmov pomeni oblikovanje pojmovnih predstav in pridobivanje besednega izraza – poimenovanja. V naši kognitivni strukturi sta navzoči dve celici: definicija pojma in pojmovna predstava. Pri učenju sta običajno dve možnosti: najprej se napolni celica pojmovne predstave, pozneje pa celica definicije ali pa obratno.

Npr.: Učenec ima svojo pojmovno predstavo o krožnici, ker je videl veliko narisanih krožnic. Krožnico si predstavlja kot sklenjeno krivuljo ali množico točk na sklenjeni krivulji (v danem primeru ima učenec nepopolno pojmovno predstavo, op. avt.). Njegova celica pojmovne predstave je polna, celica definicije pa prazna. Pozneje pri pouku sliši definicijo krožnice. Če v tej situaciji pri učencu nastopi kognitivni konflikt in učenec ni zadovoljen s pojmovno predstavo, ki jo ima, lahko nastopi sprememba oz. dopolnitev pojmovne predstave, ni pa nujno. Lahko napolni celico z definicijo, pri uporabi pa še vedno misli na krožnico kot na sklenjeno krivuljo: celica pojmovne predstave in celica definicije sta ločeni (Žakelj 2004).

Do težav z razumevanjem lahko pride tudi pri vpeljevanju definicij. Lahko se zgodi, da je celica pojmovne predstave, ko vpeljemo definicijo, prazna. To pomeni, da učenec nima nobene asociacije v zvezi s konceptom. V takih primerih obstaja možnost, da se učenec definicijo pojma nauči na pamet, ne da bi jo razumel. Običajno se kasneje celica pojmovne predstave napolni s primeri.

Tudi ni nujno, da sta obe celici identični. Pojmovna predstava je lahko precej drugačna od definicije. Učitelji pričakujejo, da se celica pojmovne predstave napolni pozneje in popolnoma kontrolirano tako, da je ekvivalentna z definicijo. Vendar se to ne zgodi vedno. Definicijo se naučimo na pamet, celica pojmovne predstave pa ostane prazna ali pa je napolnjena z napačnimi predstavami. Ker definicijo po navadi sestavljata nadredni pojem in vrstna razlika *(krožnica je množica točk v ravnini, ki so od središča oddaljene točno za polmer r)*, se moramo prepričati, da učenec razume vse pojme, ki definicijo sestavljajo; pri mlajših, npr. v prvih razredih, glede na njihovo razvojno stopnjo mišljenja učenje pojma prek definicij sploh ni primerno in nujno; zadostuje, če pravilno prepoznajo primere, ko jim jih predložimo, in jih poimenujejo (npr. kvadrat, pravokotnik, romb).

Učencem bo v veliko pomoč, če bo učitelj strokovno premišljeno povezoval induktivno in deduktivno pot spoznavanja, če bo poudarek na metodi demonstracije in različnih vrstah metode praktičnih del.

Reprezentacije pojmov

Za usvajanje matematičnih pojmov so ključne *reprezentacije pojmov*. Reprezentacija pojma *je* lahko konkretna, grafična, simbolna in abstraktna. Chapman (2001) poudarja, da reprezentacije učencem omogočajo, da komunicirajo na matematičen način, da modelirajo in interpretirajo realni, socialni in matematični kontekst ter da raziskujejo in interpretirajo pomene matematičnih pojmov, relacij ter procedur. Reprezentacije oz. načini učenčevega ravnanja z njimi omogočajo tudi spremljanje in ocenjevanje učenčevega napredovanja v matematičnem znanju. Bruner (1966) je z zaporedjem uporabe reprezentacij pri obravnavi matematičnih pojmov (najprej enaktivna, nato ikonična in nazadnje simbolična) opredelil tudi potek razvoja matematičnih pojmov pri učencu. Novejše raziskave kažejo, da so bolj kot zaporedje reprezentacij pomembne relacije med reprezentacijami določenega matematičnega pojma (Chapman 2001) oz. fleksibilno prehajanje med različnimi reprezentacijami.

Reprezentirati pojem pomeni generirati primere, predstavo. Simbolna reprezentacija je zunanje napisana ali izgovorjena. Mentalna reprezentacija pa se nanaša na interne sheme. Tako, npr., ko govorimo o Pitagorovem izreku, nekomu pride na misel pravokotni trikotnik, drugemu algebraično zapisan izrek. Biti uspešen v matematiki pomeni imeti bogato mentalno reprezentacijo pojma. Tako lahko človek zgradi eno ali več mentalnih reprezentacij za isti matematični pojem. Če pride do integracije le-teh v eno samo reprezentacijo, je ta proces integracije povezan z abstrakcijo. Za fleksibilno rabo pojma je potrebno fleksibilno prehajanje med različnimi reprezentacijami. Zato je pomembno, da navajamo učence k rabi več reprezentacij in poudarjamo prehod med njimi. Reprezentacija je bogata, če vsebuje veliko povezanih vidikov nekega pojma. Če ima premalo teh elementov, se to pokaže pri reševanju problemov. Najmanjša sprememba v strukturi problema ali celo v formulaciji le-tega namreč blokira reševanje. Zato je pomembno, da učitelj od samega začetka učence uvaja v rabo več reprezentacij (konkretne, grafične, simbolne, abstraktne), vpeljuje vizualizacijo, predpostavljanje, domnevanje, odkrivanje, translacijo (proces prehajanja med reprezentacijami), sintetiziranje, modeliranje, preverjanje itd.

Trifazni model

Sfardova (1991) meni, da abstraktne matematične ideje lahko razumemo na dva načina: strukturalno (kot objekte) in operacionalno (kot procese). Operacionalni pojmi so za večino ljudi prvi korak v usvajanju novih matematičnih pojmov. Prehod od procesa do objekta ni hiter niti ni brez velikih težav. Potem ko pojme razvijemo, oboji pojmi igrajo v matematični dejavnosti pomembno vlogo. Med operacionalnimi in strukturalnimi koncepcijami je globoka zareza. Videti matematični pojem kot objekt pomeni biti sposoben uporabljati ga kot realno stvar – sklicevati se nanj kot na statično strukturo. Operacionalni pojem pa je bolj dinamičen. Obstoj zgodovinskih stopenj, med katerimi so se razvili različni matematični pojmi, je vodil Sfardovo (1991) k oblikovanju trifaznega modela konceptualanega razvoja:

- *prva faza:* ponotranjanje (procesi se izvajajo na že znanih matematičnih objektih),
- *druga faza:* kondenzacija (operacija ali proces se zgosti v vodljivejše enote),
- *tretja faza:* konkretizacija (materializacija).

Za primer algebre npr. Rugelj (1995) ugotavlja, da mora učenec najprej usvojiti operacionalne in strukturalne pojme, da je sposoben translacij problemskih situacij v enačbe.

Aktivno učenje

Enega od ciljev kurikularne prenove, ki je zapisan v *Izhodiščih kurikularne prenove* (Nacionalni kurikularni svet 1996), bi v prenesenem pomenu za matematiko lahko zapisali takole: učenje in poučevanje naj ne bi bilo le posredovanje matematičnih dejstev in postopkov, ampak dejavno učenje, učenje učenja.

Kaj razumemo kot aktivno učenje?

Vsako učenje zagotovo zahteva določen miselni napor, četudi gre le za memoriranje dejstev. V tem smislu bi lahko rekli, da je vsako učenje dejavno. Seveda pa učenje izoliranih informacij brez oblikovanja novih pojmovnih povezav ne vodi do trajnega in kakovostnega znanja. Tudi ne gre slepo enačiti miselne dejavnosti z dejavnostmi, pri katerih učenci uporabljajo didaktični material. Učenje in poučevanje morata zagotoviti interakcijo med konkretno ter miselno dejavnostjo, ki privede do povezav. Zato bomo v nadaljevanju s pojmom »aktivno učenje« označevali tisto mentalno dejavnost, ki pripelje do povezav med miselno in konkretno dejavnostjo.

Aktivno učenje temelji na logičnem sklepanju in empiričnem preverjanju, opredeljujeta ga dve ravni: raven dialoga in raven izkušenj (Lebarič, Kobal in Kolenc 2002). Dejavno učenje spodbuja razvoj matematičnega razmišljanja (ustvarjalno, kritično, analitično in sistemsko). Raven izkušenj vključuje:

- opazovanje, ki se nanaša na kako dejavnost, povezano z obravnavano temo (priložnost za reflektiranje znanja),
- aktivnost, ki vključuje katerokoli dejavnost, pri kateri učenec samostojno opravi ali naredi neko nalogo (npr. predstavitev pojmov z modeli, diagrami, iskanje primerov in protiprimerov, eksperimentiranje).

Raven dialoga vključuje:

- dialog s samim seboj (učenec razloži, napiše, kaj misli o temi ali problemu),
- dialog z drugimi (učenec o temi ali problemu razpravlja v skupini, vsak prispeva svoj delež),
- dejavnosti učencev: izmenjava mnenj, postavljanje ugotovitev, utemeljevanje, postavljanje vprašanj.

Dialog in sodelovanje omogočata soočanje različnih stališč in vpogled v drugačno razmišljanje, ki lahko povzroči destabilizacijo prvotnega razumevanja npr. pojma ali postopka reševanja nekega problema. Skozi dialog in sodelovanje prihaja do izmenjave mnenj, postavljanja vprašanj, utemeljevanja, diskusije, preverjanja ugotovitev, soočanja z različnimi idejami. Z načinom dela učence navajamo na medsebojno sodelovanje, s tem pa jim omogočimo ubeseditev njihovih idej in rešitev.

Navedimo štiri tipe sodelovanja oz. sočasne elaboracije (Piciga 1995):

- podkrepljujoča koelaboracija (npr. en subjekt v paru pritrjuje rešitvi drugega in ga tako stimulira),
- sočasna konstrukcija (vsak od subjektov prispeva del rešitve),
- nasprotovanja z neargumentiranimi nesoglasji (subjekta se ne strinjata, vendar svojih odgovorov ne utemeljujeta),
- nasprotovanja z argumentiranimi nesoglasji (socialno-kognitivni konflikt).

Sodelovanje ali sočasna elaboracija ima lahko različne funkcije:

- en subjekt stimulira ali aktivira drugega,
- pritrjuje rešitvam drugega (podkrepitev),
- s svojimi prispevkom razširi polje iskanja rešitev,
- kontrolira rešitev drugega ali
- prispeva k destabilizaciji neustreznega postopka reševanja.

Izkustveno učenje

Izkustveno učenje je metoda učenja, ki skuša povezati neposredno izkušnjo (doživljaj), opazovanje (percepcijo), spoznavanje (kognicijo) in ravnanje (ak-

Slika 3.2

Krog izkustvenega učenja po Kolbu (povzeto po Marentič Požarnik, Magajna in Peklaj 1995)

1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	**6 1**
1 2	2 2	3 2	4 2	**5 2**	**6 2**
1 3	2 3	3 3	**4 3**	**5 3**	**6 3**
1 4	2 4	**3 4**	**4 4**	**4 5**	**4 6**
1 5	**2 5**	**3 5**	**4 5**	**5 5**	**5 6**
1 6	**2 6**	**3 6**	**4 6**	**5 6**	**6 6**

Slika 3.3 Izidi pri metu dveh kock (povzeto po Žakelj 2004)

cijo) v neločljivo celoto. Ne omejuje se zgolj na posredovanje simbolov, abstraktnega znanja pojmov in zakonitosti, temveč v učenje nenehno vpleta izkušnje udeležencev (Marentič Požarnik, Magajna in Peklaj 1995, 97).

Da bo učenec lahko res ponotranjil na novo usvojene pojme in z njimi nadomestil intuitivne predstave, mu je treba zagotoviti različne situacije, v katerih bo to novo znanje lahko uporabil in ga potrdil. Izkustveno učenje mu lahko pomaga pri postopnem usvajanju in graditvi pojmovnih predstav, od konkretnih izkušenj do abstraktnega pojma. Pomembno vlogo ima zlasti za učence, katerih izhodišče pri spoznavanju so čutila, zbiranje, merjenje in opazovanje. Npr., pri empirični verjetnosti učenci s konkretnimi dejavnostmi ocenjujejo in napovedujejo empirično verjetnost dogodka.

Primer 1 *Sočasno vržemo dve igralni kocki. S pomočjo poskusa oceni, kolikšna je verjetnost dogodka A, da bo vsota pik na obeh zgornjih ploskvah večja od 6.*

Empirična verjetnost dogodka sledi iz rezultatov poskusa. Pri izvedbi poskusa natančno beležimo vse izide in izračunamo relativne frekvence. Če natančno beležimo vse izide (npr. 23, 41 …), lahko kasneje ugotavljamo verjetnosti tudi drugih dogodkov. Pri posploševanju rezultatov pazimo na zadostno število ponovitev poskusa. Matematično verjetnost določimo ob upoštevanju, da je število vseh možnih izidov 36, da je število vseh ugodnih izidov za dogodek A enako 21, in izračunamo $P(A) = 21/36 = 0{,}58$. Na osnovnošolski ravni si pri utemeljitvi lahko pomagamo s tabelo vseh možnih izidov pri metu dveh kock. Ugodni izidi dogodka so natisnjeni polkrepko (slika 3.3).

Učenje z izkušnjo sta lahko tudi raziskovanje in ugotavljanje lastnosti ob konkretnem modelu. Npr., opazovanje in izdelava geometrijskih modelov omogočata reflektiranje geometrijskih znanj, spodbujata preprosto argumentiranje, opazovanje, učence usmerjata v matematično razmišljanje ter jim pomagata pri izgrajevanju prostorskih in pojmovnih predstav o geometrijskih elementih v prostoru ter odnosih med njimi.

Pogoji za aktivno učenje

Da je lahko aktivnost učencev čim večja, je pri pouku potrebno zagotoviti določene pogoje. Nekatere navajamo v nadaljevanju (Žakelj 2004).

Čas. Če naj bodo učenci dejavni pri konstrukciji znanja, morajo imeti za to čas. Le če imajo dovolj časa, lahko samostojno razmišljajo, eksperimentirajo, razpravljajo o rešitvah z drugimi učenci ali učiteljem ter utemeljijo odgovore sebi in drugim. Če učenci niso obremenjeni s časom, je lahko njihova pozornost usmerjena tudi v pristope pri reševanju, ne le v rezultate. V samem procesu učenja se lažje izmenjujejo situacije – iskanje strategij, razprave, utemeljevanje, izmenjava mnenj –, če je na razpolago dovolj časa. Postopno nadomeščanje urusvajanja matematičnih dejstev z ustvarjalnimi urami je žal dolgotrajen proces tako s stališča učiteljeve preobrazbe kot s stališča učnih rezultatov.

Sodelovanje. Socialni konstruktivizem je pripomogel k spoznanju, da učenje ni le individualna zadeva, nekakšen samoten proces, ampak da je zanj bistvenega pomena dialog, možnost spraševanja, sprotnega preverjanja smisla, lastnih domnev v skupini. Socialno učenje učencem omogoča, da pri učenju ne uporabljajo le svoje perspektive. Za razvoj npr. kritičnega mišljenja in sposobnosti za argumentirano razpravo so dobrodošli konflikti, povezani z vsebino (Marentič Požarnik 2001). Učenci imajo različna stališča do določenega vprašanja. Sprožimo izmenjavo idej, socialno-kognitivni konflikt ter odpremo komunikacijski prostor. T. i. švicarska šola poudarja socialno-kognitivni konflikt namesto kognitivnega konflikta in je izdelala mnoge aplikacije tega koncepta. Na mehanizem socialno-kognitivnega konflikta sta Doise in Murgny (1981) v sodelovanju z drugimi švicarskimi psihologi zasnovala serijo eksperimentov s piagetovskimi nalogami (npr. konzervacije količine in dolžine).

> *V eksperimentu sodelujejo trije otroci. Dva sta na operativni ravni, eden pa na predoperativni. Otrok, ki ni imel razvite konzervacije količine, je dobil nalogo, da drugima dvema natoči sok iz steklenice, tako da bosta imela oba enako. Problem pri natakanju je bil v tem, da kozarca nista bila enako široka. Otrok, ki je bil na predoperativni ravni, je obema natočil do iste višine, to pa je povzročilo protest otroka, ki je dobil manj. Razvila se je diskusija in vsak je imel priložnost povedati svoje argumente. In po taki diskusiji je tudi otrok, ki je bil na začetku na predoperativni ravni, dajal pravilne in argumentirane odgovore konzervacije.*

V taki in podobni situaciji so otroci na nižji ravni pokazali avtentičen napredek: generalizacija napredka na druge pojme, ki temeljijo na sorodnih operacijah, stabilnost napredka v času, novi in originalni argumenti, ki v eksperimentalni fazi niso bili izrečeni.

Vendar ima tudi učinkovitost socialno-kognitivnega konflikta svoje meje. V asimetričnih relacijah je pogost pojav enosmerne rešitve konflikta – otrok se podredi odraslemu in ne vztraja pri svojem stališču. V takih primerih relacijska razrešitev izpodrine kognitivno razrešitev konflikta. Pokazalo se je, da otroci, ki popustijo drugemu, ne napredujejo. Obstajati mora določena vzajemnost, ki omogoči izražanje stališč – brez tega ni mogoča socialno-kognitivna koordinacija v celoto.

Kompleksne situacije (odprti problemi, strategije). Za pridobivanje izkušenj z lastno aktivnostjo so primerni kompleksni/odprti problemi. Odprti problemi npr. zahtevajo samostojno postavljanje raziskovalnega vprašanja ter v nadaljevanju omogočajo veliko priložnosti za diskusijo o poteh reševanja in morebitnih rešitvah. Problem »iz danega kartona naredimo škatlo, razišči njeno prostornino« ni postavljen v obliki vprašanja, vprašanje je potrebno šele formulirati. Postavimo si lahko več vprašanj oz. ciljev, kaj bomo preiskovali. »Pri katerih pogojih bo prostornina škatle največja? Ali je lahko prostornina nič? Pri katerih pogojih bo prostornina najmanjša?«

Pri odprtih problemih se na eni strani učimo strategij reševanja problemov, na drugi pa dejavno iskanje rešitev z različnimi pristopi učencem omogoča vpoglede v vsebino z različnih perspektiv.

Razvoj različnih vrst mišljenja. Ko govorimo o razvijanju mišljenja, je koristno razlikovati med različnimi vrstami mišljenja: med ustvarjalnim in kritičnim ter analitičnim in sistemskim.

Ustvarjalno mišljenje ob določenem problemu išče različne poti, ideje in rešitve (divergentno, lateralno). *Kritično mišljenje* primerja in vrednoti, daje ideje z vidika logičnosti, uporabnosti, zanesljivosti. *Analitično mišljenje* poudarja posamezne elemente sistema, analitično napoveduje korak za korakom, spreminja eno spremenljivko, hkrati se opira na natančnost detajlov. *Sistemsko mišljenje* poudarja povezave, izmenjave učinkov med elementi, opira se na opažanja celote in spreminja več spremenljivk hkrati. Če se opiramo izključno na analitično mišljenje, ostajamo znotraj posameznih disciplin in znanja, ne povezujemo interdisciplinarno; posledici sta raztrgana mreža znanja in slabši transfer znanja.

Vloga lastne aktivnosti pri učenju geometrije

Lastna aktivnost učencev ima pomembno vlogo pri učenju geometrije, saj je učenje geometrijskih konceptov z razumevanjem ključnega pomena. Znanje, pridobljeno na način, kjer so učenci aktivni udeleženci pouka, je trajnejše, razumevanje je boljše, uporaba pridobljenega znanja pa je enostavnejša (Markovac 1992). To so osnovne spretnosti, ki jih od učencev zahtevamo pri sodobnem pouku matematike, katerega namen je učence naučiti matematičnega mišljenja, ki je potrebno za reševanje vsakodnevnih problemov.

Učenje matematike z razumevanjem ne nastopi s pasivnim poslušanjem razlage, ampak z aktivno udeležbo pri pouku. Da bi nastopilo učenje, poslušanje in gledanje ne zadostujeta, čeprav je lahko učitelj pripravil zanimiva predavanja in atraktivne demonstracije ter na tak način poskušal spodbujati učence k miselni aktivnosti.

Učenci so lahko pri pouku aktivni na več različnih načinov, najpomembnejše pa je, da jim omogočimo miselno aktivnost. To je glavno sredstvo za usvajanje geometrijskega znanja. Miselno aktivnost pri pouku geometrije dosežemo z manipuliranjem konkretnih predmetov, katerega namen je konkretizacija abstraktnih pojmov. Izkušnje, ki jih učenci na tak način pridobijo, so vir učinkovitega učenja. Spomnimo se, da po van Hielovem modelu učenci ne morejo napredovati na višje stopnje geometrijskega mišljenja, ne da bi manipulirali z didaktičnimi sredstvi. Piaget in Inhelder (1967) sta trdila, da je otrokova predstava o prostoru rezultat predhodnega manipuliranja s svojim okoljem. Torej imajo didaktična sredstva pomembno mesto pri aktivnem pridobivanju znanja in konstruktivnem učenju.

Metode učenja in poučevanja matematike

Ker učence zelo obremenjuje strah pred neuspehom, je zelo pomembno, da se učijo v stilu, v katerem lahko najbolje razvijejo svoje sposobnosti in izrazijo svoje dosežke. Zato naj bi učitelj pri poučevanju uporabljal različne poučevalne stile.

Večina raziskovalcev s tega področja se strinja, da človek znanje pridobiva večinoma po treh poteh: s čutili (percepcija), z razumom (mišljenje), z intuicijo (vpogled). Tem trem načinom v glavnem ustrezajo trije osnovni načini ali modusi spoznavanja: empirični, racionalni in noetični (Marentič Požarnik, Magajna in Peklaj 1995). Glede na to, da imajo učenci različne stile učenja, je dobro, če učitelj uvede nove pojme na več načinov: z opisom, definicijo, zgodbo, s slikami, z igro vlog ali pa moderira poti, ki ne vodijo do rešitve, sproža procese, v katerih so napake, in se o njih pogovori z učenci.

Noben poučevalni stil ni že sam po sebi preobremenjujoč ali razbremenjujoč. Tak postane zaradi svoje prevladujoče vloge (Novak in Kolenc 2001). Po Kolbu naj bi človek do neke mere razvijal tudi svoja deficitarna področja, saj je kakovostno učenje tisto, ki povezuje, integrira vse pole oz. modalitete.

Integracija (ne specializacija) je zaželeni cilj osebnostnega razvoja posameznika (Marentič Požarnik, Magajna in Peklaj 1995, 84). Idealno bi bilo, ko bi bili pristopi k učenju in poučevanju prilagojeni posamezniku, čeprav to realno verjetno ni povsem mogoče. Z različnimi situacijami pa bi morali dati učencem različne priložnost, da o novem pojmu razmišljajo, povezujejo že obstoječe znanje in tako novo znanje zavestno vključijo v obstoječo mrežo svojega znanja. Navedimo dva pristopa.

Učenje z odkrivanjem

Bruner se je zavzemal za to, da bi čim več pouka potekalo v obliki odkrivanja (Marentič Požarnik 2000, 83). To je utemeljil s trditvijo, da je tako pridobljeno znanje trajnejše in uporabnejše v novih situacijah, učenci so bolj motivirani, razvijeta se samostojnost in kritičnost, poleg vsebine se učenci naučijo tudi metod reševanja problemov.

Za zgled povzemimo ugotovitve Whitmanove (1976), ki je odkrila, da so tisti učenci, ki so se poleg formalnega reševanja enačb učili tudi reševanja enačb z odkrivanjem, kasneje bolje reševali splošne enačbe kot tisti, ki so se učili samo formalnega reševanja enačb. Withmanova ugotavlja, da učenci, ki so se učili samo formalnega reševanja enačb, niso konceptualno pripravljeni operirati z enačbami kot matematičnimi objekti s formalnimi, strukturnimi operacijami. Da učenci niso sposobni razlikovanja strukturalnih lastnosti, so ugotavljali tudi Wagner, Rachlin in Jensen (1984), ko so testirali učence, ali se zavedajo, da je rešitev enačbe določena s strukturo enačbe in ne s črko. To je pravilno ugotovilo le 38 odstotkov učencev.

Pri učenju z odkrivanjem učitelj predstavi primere in učenci delajo z njimi, dokler ne odkrijejo njihove medsebojne povezanosti – strukturo predmeta. Bruner (1966; 1971) je prepričan, da bi moralo šolsko učenje potekati v obliki induktivnega sklepanja, to pa pomeni, da pri oblikovanju splošnega načela uporabimo specifične primere. Npr., če učencem predstavimo zadostno število primerov trikotnikov in netrikotnikov, bodo po določene času odkrili lastnosti trikotnikov. Od nekaterih učencev induktivni pristop zahteva intuitivno mišljenje.

Pri Brunerjevem učenju z odkrivanjem učitelj učno uro organizira tako, da se učenci učijo z lastno dejavnost. Ponavadi ločujemo med samostojnim in vodenim odkrivanjem, pri katerem učitelj poskrbi za delno usmerjanje. Samostojno odkrivanje je primerno za predšolske otroke, za osnovnošolske pa je to lahko neobvladljiva situacija. Zanje je pogosto primernejše vodeno odkrivanje. Učencem postavimo nekaj vprašanj, izzivov. Namesto razlage, kako rešiti problem, učitelj poskrbi za ustrezno gradivo in spodbuja učence k opazovanju, oblikovanju hipotez in preverjanju odločitev. Učenci morajo v pravem trenutku dobiti povratno informacijo, ali lahko dobljene ugotovitve uporabijo, da lahko nadaljujejo v zastavljeni smeri. Učenje z odkrivanjem ima veliko prednosti, vendar ni primerno v vsaki situaciji.

Razlogi za učenje z odkrivanjem (Woolfolk 2001). Strokovnjaki, ki podpirajo učenje z odkrivanjem, trdijo, da je ta način skladen z načini učenja in razvojem ljudi. Bruner (1966; 1971) je določil tri faze kognitivne rasti, podobne Piagetovim. Menil je, da gredo otroci skozi tri faze: iz aktivne v ikonsko in na koncu v simbolno fazo. V dejavni fazi si otrok predstavlja svet na podlagi dejanj. V ikonski fazi si otrok predstavlja svet v podobah – prevladuje videz. V zadnji fazi je otrok že sposoben uporabiti abstraktne ideje, simbole in jezik. V mišljenju lahko še vedno uporablja dejanja in podobe, vendar ne prevladujejo. Učenje z odkrivanjem dopušča učencem, da se premikajo skozi te tri faze. Učenci na podlagi izkušenj izluščijo svoje ideje. Vendar učenje z odkrivanjem vodi k boljšemu učenju, če so učenci motivirani za to.

Razlogi proti učenju z odkrivanjem (Woolfolk 2001). Če želimo imeti korist od učenja z odkrivanjem, morajo učenci za to imeti določeno znanje o problemu in morajo vedeti, kako uporabiti strategije pri reševanju problemov. Metode odkrivanja lahko od manj sposobnih učencev preveč zahtevajo, ker jim primanjkuje predznanja in spretnosti za reševanje problemov, ki jih potrebujejo, da bi bile te metode zanje koristne. Namesto da bi se iz novega gradiva učili, se bodo lahko le igrali z njim.

Poučevanje z razlago

Ausubel (1963; 1977) pa je dal prednost sistematičnemu učenju. To je utemeljil s trditvijo, da učenci tako do znanja pridejo hitreje, njihovo znanje je bolj sistematično, ta način je primeren tudi za manj uspešne, za učitelje pa je manj zahteven. Oblikoval je model poučevanja z razlago, s katerim spodbujamo smiselno učenje, ne pa učenja na pamet. Razlaga pomeni pojasnjevanje ali nadgrajevanje idej in dejstev. Pri tem pristopu učitelj predstavi gradivo v organizirani obliki in zaporedju in tako učenci prejmejo najkoristnejše gradivo na najučinkovitejši način. Ausbel (1963; 1977) je v nasprotju z Brunerjem (1966; 1971) prepričan, da bi moralo učenje potekati deduktivno, od splošnega k specifičnemu, od pravila k posameznim primerom. Pri tem pristopu se uporabljamo deduktivno sklepanje.

Naslednji korak pri Ausbelovi (1966; 1971) metodi je predstavitev vsebine v smislu podobnosti in razlik z uporabo specifičnih primerov. Učenec mora pri učenju vsakega novega pojma videti podobnosti in razlike med novim pojmom in tem, kar že ve. Pri učenju z razlago je koristno, da učence prosimo, naj sami navedejo podobnosti in razlike. Skupaj s primerjavo pridejo v poštev specifični primeri. Poučevanje z razlago je razvojno primernejše za starejše učence v višjih razredih osnovne šole ali starejše.

Optimalno učenje se pojavi takrat, ko se učenčeve sheme in učno gradivo ujemajo. Da bi bilo to ujemanje čim verjetnejše, se učna ura po Ausbelovi teoriji vedno začne z vnaprejšnjimi organizatorji. To predstavlja uvod v odnos ali pojem višjega reda, ki je dovolj širok, da zajame vse informacije, ki sledijo. Njihova funkcija je poskrbeti za podporo novim informacijam. Organizatorji so lahko primerjalni ali opisovalni. Primerjalni prikličejo v delovni spomin že obstoječe sheme. Tako npr. lahko pri uvajanju pojma obratno sorazmerni količini primerjamo s pomočjo povezave s premo sorazmernimi količinami.

Opisovalni organizatorji zajemajo novo znanje, ki ga bodo učenci morali razumeti pri prihajajočih informacijah. Vsebuje lahko opis nadrednega pojma (npr. pojem odvisne količine je nadrejen pojmu obratno sorazmerni količini). Organizator mora nakazovati osnovne odnose med pojmi in izrazi, ki bodo uporabljeni. Konkretni modeli, diagrami, analogije so lahko zelo dobri organizatorji.

Procesno-didaktični pristop učenja in poučevanja matematike

Žakelj (2004), ki se je v raziskavi *Procesno-didaktični pristop in razumevanje matematičnih pojmov v osnovni šoli* ukvarjala s pristopi učenja in poučevanja matematike ter posledično z izgrajevnjem matematičnih pojmovnih predstav pri učencih v zadnjem triletju osnovne šole, povzema različne raziskovalce in navaja, da je pri izbiri didaktičnih pristopov za učinkovito učenje in poučevanje nujno treba upoštevati, da učenčevi razvojna stopnja mišljenja (Labinowicz 1989), struktura obstoječega znanja (Piciga 1995), organizacija dejavnosti in spodbude iz okolja (Forman, Minick in Addison 1993) *pomembno vplivajo na učenje z razumevanjem*. Hkrati pa je potrebno učenčevo mišljenje interpretirati z upoštevanjem novejših spoznanj o metakogniciji v povezavi z mišljenjem in jezikom (Vigotski 1983).

Davis (1984) ugotavlja, da se učenci v osnovni in srednji šoli naučijo veliko standardnih procedur ter matematičnih dejstev, ne gredo pa aktivno skozi procese, prek katerih bi samostojno ali ob podpori učitelja spoznavali in usvajali matematične pojme ter postopke.

Drugi problem, na katerega opozarja Dreyfus (1991), je, da se učitelji, ki te pojme posredujejo učencem, pogosto ne zavedajo, da vpeljava snovi ni vedno prilagojena kognitivnemu razvoju učencev. Pogosto je prehod od konkterih dejavnosti do formalne matematike prehiter. Za učenje z razumevajem morata biti pri vpeljavi novih pojmov kognitivni razvoj učenca in struktura obstoječega znanja, usklajena. Če tega ne upoštevamo v zadostni meri, lahko pričakujemo, da bo učenčevo razumevanje šibko, pojmovne predstave napačne in obvladovanje formalnih algoritmov nepopolno.

Na osnovi teoretskega poznavanja miselnega razvoja otrok, vključno z novejšimi spoznanji o otrokovem mišljenju ter poznavanjem socialne kognicije, učenja in poučevanja, je Žakelj (2004) v raziskavi oblikovala procesno-didaktični pristop za učenje in poučevanje matematike. Pri tem se je oprla na teorijo razvojne psihologije, ki preučuje razvoj pojmov glede na razvojno stopnjo otrokovega mišljenja (Horvat in Magajna 1987; Piciga 1995; Piaget in Inhelder 1978), ter upoštevala novejša kognitivno-konstruktivistična spoznanja pedagoške stroke o učenju, ki poudarjajo aktivnost učenca v procesu učenja (Marentič Požarnik 2000).

Pristop temelji na spoznanjih Vigotskega (1978), ki je trdil, da kognitivni razvoj temelji na socialni interakciji, ter na spoznanjih Piageta, da se znanje gradi na osebni ravni ter kognitivni usklajenosti razvoja učenca z uvajanjem zahtevnih pojmov. Ključna dejavnika sta kognitivni in socialno-kognitivni konflikt, ki ju pri učencih sprožimo s smiselno postavljenimi vprašanji, izzivi, problemskimi situacijami idr., posamezniku pa sta v pomoč in oporo pri:

- spreminjanju napačnih ali nepopolnih pojmovnih predstav (preverjanju razumevanja pojmov),
- uvidu v smiselnost učenja novih vsebin (zakaj je novo znanje potrebno, kje ga lahko uporabimo),
- navezovanju na obstoječo mrežo znanja (učenec novo znanje poveže z znanjem, ki ga že ima),
- povezovanju znanja (znotraj predmeta ali medpredmetno).

Kdaj pride do spremembe pojmovne predstave? Pojmovna predstava se lahko spremeni/dopolni, če je učenec nezadovoljen s pojmovno predstavo, ki jo trenutno ima. Učenec napoveduje rezultate, izidi pa so lahko v nasprotju z njegovimi predvidevanji, kar sproži izzive za razmišljanje. Nastane kognitivni konflikt (preglednica 3.3).

S kognitivnim konfliktom sprožimo tudi *motivacijo* in zanimanje za učenje. Učenec je v situaciji, ko ugotovi, da nima dovolj znanja za rešitev problema, kar pri njem sproži željo po učenju in radovednost ter uvidi potrebo po razširitvi znanja. Npr., smiselnost vpeljave Talesovega izreka poveže z delitvijo daljice na enake dele, ko z razpolavljanjem ne gre več. Učenec bo sprejel pomen učenja novih vsebin, če bo razumel, da mora obstoječe znanje razširiti, ker je sedaj preskromno, da bi bil kos določenim problemom. Tako nastane

Preglednica 3.3 Kognitivni konflikt in sprememba pojmovne predstave

Prvotna (nepopolna/napačna) pojmovna predstava	Situacija, ko se lahko spremeni/dopolni pojmovna predstava
Graf funkcije je nepretrgana krivulja.	Uvedba nezveznih funkcij lahko sproži kognitivni konflikt in spremembo pojmovne predstave.
Vsi štirikotniki so kvadrati.	Uvedba pojma pravokotnik sproži kognitivni konflikt in pravokotnik postane »čuden« kvadrat.
Količini sta premo sorazmerni, če se z večanjem ene veča tudi druga.	Soočanje s situacijo, pri kateri se vzporedno z večanjem prve količine veča tudi druga, vendar s kvadratno rastjo. To je v nasprotju s pojmovno predstavo učenca in nastane priložnost kognitivnega konflikta.

potreba po uvedbi novih pojmov oz. znanj in to je pravi čas za uvedbo le-teh. Če pa na silo uvedemo pojem, ki se ne navezuje na obstoječe znanje, pa je snov lahko naučena le na pamet. Zato je zelo pomembno, da novo snov združimo z znanjem, ki ga učenec že ima, na tak način, da primerjamo in križarimo med novim in starim znanjem. Informacije, ki se navežejo na obstoječe znanje, si zapomnimo bolje in lažje.

Vendar samo kognitivni konflikt, ki ga sprožimo pri učencih, ni dovolj, če »znanje« v nadaljevanju posreduje učitelj. Za učenje z razumevanjem so pomembni procesi učenja, konkretne dejavnosti, ki pa učenca miselno aktivirajo. To so lahko razne oblike izkustvenega učenja (metanje kocke ali kovanca pri učenju verjetnosti), uporaba modelov (najti matematično reprezentacijo za nematematični objekt ali proces), iskanje podobnosti, analogij (npr. trikotniku v ravnini je analogen trirob v prostoru), iskanje razlik ter povezav med pojmi in dejstvi, ki jih uvajamo.

Če hočemo, da bo učenje smiselno, moramo nove pojme in podatke, ki se jih učimo, vključiti v svojo miselno strukturo in najti povezave med pojmi, ki jih že poznamo (Marentič Požarnik, Magajna in Peklaj 1995). Vedenje je po svoji naravi organizirano hierarhično ali v obliki mrež: od najsplošnejših do vse specifičnejših. Učenje poteka od splošnih pojmov k specifičnim (npr. lik – štirikotnik – paralelogram – romb ali odvisne količine – premo sorazmerne količine). Kadar učenci ne poznajo splošnih pojmov in njihovih povezav z drugimi pojmi, učenje novih vsebin ne more biti smiselno, ampak si jih zapomnijo zgolj na pamet, ne da bi jih osmislili.

Premiki procesno-didaktičnega pristopa od transmisijskega

Procesno-didaktični pristop učenja in poučevanja matematike gradi matematično znanje postopoma, z aktivno udeležbo. Nakazuje premike od transmisijskega pristopa, pri katerem je poudarek na podajanju in sprejemanju znanja, k dejavni vlogi učenca, v kateri je središče učenja in poučevanja ustvarjalen učenec.

Premiki procesno-didaktičnega modela od transmisijskega so premiki od:

- prenašanja znanja k ustvarjanju situacij za odkrivanje znanja;
- učenja rezultatov in produktov k učenju kot procesu, v katerem odkrivamo znanje,
- učitelja, ki je prenašalec znanja, k učitelju mentorju,
- stortilnostno naravnanega učenja k raziskovalnemu in sodelovalnemu delu.

Procesno-didaktični pristop upošteva, da imajo *izkustveno učenje* (modeliranje, samostojno iskanje virov, podobnosti in povezav, primerov in protiprimerov …), *dialog* ter različne oblike *sodelovanja* (vpliv socialnih interakcij) pomembno vlogo pri konstrukciji znanja. Uvaja dejavnosti za razvoj problemskih znanj (reševanje odprtih problemov, razumevanje problemske situacije, postavljanje vprašanj, učenje strategij reševanja problemov, postavljanje ugotovitev, predstavitev rezultatov, utemeljevanje …) ter dejavnosti povezovanja znanja.

Dejavniki učenja in poučevanja učenja matematike

Kako učenec konstruira pojmovne predstave, je odvisno od več dejavnikov, zagotovo pa mu pri tem lahko pomaga tudi učitelj. Pomembno je, da (se) učitelj

- pravilno presodi, kdaj v učnem procesu uvede nove pojme in koncepte,
- pozna, kako učenec konstruira svoje znanje,
- zaveda, da struktura že obstoječega znanja bistveno vpliva na vrstni red učenja in poučevanja (Orton in Wain 1994).

Dejavnosti, na podlagi katerih pojme uvajamo, pridobivamo in preverjamo, so lahko različne: npr. predstavitev pojmov z modeli in diagrami, prepoznava pojma, iskanje primerov in protiprimerov, navezovanje na izkustva (prepogibanje papirja, uporaba paličic, izdelovanje modelov in trakov …), navezovanje na druga matematična in nematematična znanja (iskanje podobnosti, različnosti, analogije …) ter uporabo definicij in izrekov. Seveda pa sama dejavnost ni dovolj, če ni mentalne dejavnosti. Pogoj za usvajanje znanja na ravni razumevanja je interakcija med konkretno in miselno dejavnostjo (Žakelj 2003).

Pravočasno odkrivanje napačnih pojmovnih predstav

Pojmi so v matematiki hierarhično zgrajeni in le razumevanje primarnih pojmov omogoča učenje sekundarnih pojmov z razumevanjem, zato je odkrivanje napačnih pojmovnih predstav pri matematiki ključno za učenje z razumevanjem. Vzroki za težave pri učenju in razumevanju pojmov so različni:

- verbalizem (enačenje učenja pojmov z učenjem besed in zadovoljitev z obnovo definicij);
- prezahtevnost nekaterih pojmov glede na razvojno stopnjo – npr., otrok na razvojni stopnji konkretnih operacij težko v popolnosti obvladuje pojme, vezane na prostorsko orientacijo;
- premajhna povezanost pojmov med seboj ter zanemarjanje obravnave mrežnih povezav, odnosov med njimi;
- premalo je upoštevano dejstvo, da so pojmi v kognitivni strukturi razvrščeni v pojmovne mreže in jih povezujemo s sorodnimi pojmi.

Nadalje je pri odkrivanju napačnih pojmovnih predstav pomembno, da smo pozorni tudi na matematični jezik. Razumevanja ne smemo zamenjati z verbalizmom. Da se izognemo tovrstnim posledicam, spodbujamo dejavnosti izražanja, utemeljevanja, predstavljanja rešitev ali definicij s svojimi besedami idr. Brez tovrstnih izkušenj obstaja nevarnost, da bodo učenci probleme reševali pravilno, ne bodo pa znali s svojimi besedami smiselno povedati, zakaj so izbrali določeno strategijo, pravilo ali definicijo. Varneje se počutijo, če se npr. pravilo naučijo na pamet. Zato je učitelj v primeru težav dostikrat v dilemi, ker ne ve, kje je težava – v izražanju ali nerazumevanju pojma.

Greeno (1982) navaja napake učencev, ki so posledica nerazumevanja simbolnega matematičenga jezika ter nerazumevanja strukturalnih lastnosti algebre, zato se učenci učijo procedur, namesto da bi skušali razumeti strukturo. Pogoste napake, ki jih navaja: če učenec v izrazu ab pri zamenjavi b z $(-b)$ trdi, da je to $a - b$ in to utemeljuje z izkušnjo, da je pri zamenjavi a z $(-a)$ to $-ab$, lahko sklepamo, da ab ne razume kot produkta med a in b. Primer nakazuje, da urjenje brez razumevanja ali tudi učenje samo iz izkušenj, na podlagi zgledov, lahko zavira učenje z razumevanjem. Zato je pravočasno odkrivanje napačnih pojmovnih predstav ena najpomembnejših dejavnosti za učinkovito napredovanje v znanju.

Postopnost uvajanja pojmov

Na vprašanje, kdaj je najprimernejši čas za usvajanje določenih pojmov, je težko odgovoriti. Učenec se naj s posameznimi pojmi sreča večkrat, v različnih situacijah, kar mu bo omogočilo uvid v njegove lastne pojmovne predstave ter ponudilo priložnost, da napačne ali nepopolne predstave dopolni ali popravi. To dejstvo je v prid spiralni razvrstitvi učne snovi in cikličnemu ponavljanju pomembnih pojmov v učnih načrtih. Pojmi se razvijajo postopno in daljše obdobje. Učencem je treba pomagati povezati jih v mreže ali sisteme.

Pomembno je, da pri uvajanju novih pojmov upoštevamo hierarhijo pojmov (primarni, sekundarni …), da pojme vpeljemo postopoma, od konkretne, slikovne, simbolne do abstraktne ravni ter da uvajamo nove pojme, ko so usvojeni predhodni. Žal se zlasti zadnji vidik v šoli pogosto premalo upošteva. Korak od uvedbe novega pojma do uporabe le-tega v algoritmih in postopkih je pogosto prehiter. Otrok se lahko marsikaj nauči na pamet, toda tisto, česar ne razume, ne bo imelo nobenega vpliva na njegova spoznanja, njegove miselne strukture (Marentič Požarnik 2000). Kmetičeva (1996) poudarja, da učenec novega pojma ne more vključiti v obstoječo pojmovno shemo, če ni osvojil predhodnih pojmov; npr., definicije trapeza ne more vključiti v obstoječo pojmovno shemo, če ni osvojil pojmov matematični lik, štirikotnik, stranica, vzporednost.

Da bodo dejavnosti učenca lahko v čim večji meri prispevale k učenju z razumevanjem, morajo biti raznolike, tako konkretne (npr. manipuliranje z modeli) kot verbalne (npr.: opis razmisleka, samostojno formuliranje ugotovitev, utemeljevanje).

Pomen in uporaba modelov

Vrzeli med neformalnimi in formalnimi pojmovnimi predstavami lahko nadomeščajo modeli. Med prvimi, ki so zagovarjali uporabo ponazoril pri pouku matematike, so bili Piaget, Bruner, Montessori in Dienes (McNeil in Jarvin 2007; Moyer 2001). Strinjali so se, da interakcija s konkretnimi objekti zagotavlja osnove abstraktnega mišljenja. Piaget (1954) je trdil, da morajo imeti učenci veliko izkušenj s konkretnimi materiali in skicami oz. slikami, da bi razumeli abstraktne matematične koncepte, saj so na tej stopnji nezmožni razumeti le verbalno in simbolično podane razlage (Mešinović 2016).

Formalna matematika se praviloma razvije iz primarne neformalne in predformalne matematike. V tem procesu so nazorne predstavitve nujne.

Primer *Pokaži, da je vsota dveh sodih števil sodo število in vsota dveh lihih števil sodo število.*

Na nivoju *neformalnega* učenja si lahko pomagamo z žetoni, s katerimi ponazorimo soda in liha števila. Soda števila ponazorimo tako, da žetone zlo-

Slika 3.4 Slikovna predstavitev problema

žimo v dve vrsti tako, da ima vsak žeton v prvi vrsti svoj par v drugi vrsti. Liha števila prikažemo podobno: zadnji žeton v prvi vrsti nima para v drugi vrsti. *Da je vsota dveh sodih števil sodo število in vsota dveh dveh lihih števil prav tako sodo število, lahko na neformalnem nivoju ponazorimo z dvema vrstama žetonov tako, da spojimo dve in dve vrsti žetonov, v katerih je sodo število žetonov, in po dve in dve vrsti žetonov, v katerih je liho število žetonov.*

Na predformalni ravni razmišljamo ob konkretnih primerih. Vsota dveh sodih števil je sodo število (npr. $2+4=6$). Vsota dveh lihih števil je sodo število (npr.: $3+5=8$). *Na formalni ravni* izpeljemo dokaz in trditev posplošimo z uporabo spremenljivke.

- Soda cela števila: $2, 4, 6 \ldots$ posplošitev $\ldots 2 \cdot n, n \in Z$.
- Liha cela števila: $1, 3, 5, 7 \ldots$ posplošitev $\ldots 2 \cdot n + 1, n \in Z$.
- Vsota dveh sodih števil je sodo število: $2 \cdot n + 2 \cdot m = 2(n+m), (n, m \in Z)$.
- Vsota dveh lihih števil je sodo število: $2 \cdot n + 1 + 2 \cdot m + 1 = 2 \cdot n + 2 \cdot m + 2 = 2 \cdot (n + m + 1)(n, m \in Z)$.

Primer *Ali je mogoče vsebino pločevinke kokosovega mleka, ki je napolnjena do 1/3, zliti v pločevinko z enako prostornino, ki je že napolnjena do 3/4?*

Na nivoju *neformalnega* učenja si lahko pomagamo s pločevinkami in prozornimi steklenicami ter situacijo preverimo v realnem kontekstu. Na predformalni ravni pa v učno situacijo ob konkretnih primerih že uvajamo matematične pojme in zakonitosti. V danem primeru na nivoju predformalnega učenja za ponazoritev situacije namesto pločevink in steklenic uporabimo pravokotnike, kar je še vedno zelo blizu realistični situaciji (slika 3.4).

Na zadnji formalni stopnji nastopi abstraktno razmišljanje in dokazovanje z matematičnimi simboli.

Razvijanje matematičnega besedišča

Wakefield (2000) in Adams (2003) navajata značilnosti matematičnega jezika in med drugim poudarjata, da matematični jezik zaznamujejo: abstrakcija, simboli in pravila, nelinearnost in kompleksnost jezika, urejenost, kodiranje in dekodiranje informacij. Matematični teksti so konceptualno gosti, pogosto bolj kot druge zvrsti pisanja (Brennan in Dunlap 1985; Culyer 1988; Thomas 1988), in so polni jezikovnih ter simbolnih konvencij (Adams 2003). Matematika je jezik besed, številk in simbolov, ki so lahko povedno samostojni ali medsebojno povezani.

Povezave med jezikom in matematiko so preučevale različne raziskave (Clarkson in Williams 1994; Dawe 1983; MacGregor in Price 1999; Secada 1995). Secada (1995) je že v zgodnjih 90. letih prejšnjega stoletja objavil izsledke raziskave, ki kažejo, da sta znanje maternega jezika in uspeh pri matematiki povezana, ne glede na raso, narodnost, družbeni razvoj in jezik. MacGregor in Price (1999) menita, da so obseg besedišča, poznavanje in razumevanje števil, simbolov ter odnosov med njimi, sposobnost branja in razumevanja besedilnih problemov ključni dejavniki pri učenju matematike, ter dodajata, da so kognitivne sposobnosti, ki omogočajo razvoj simbolnega procesiranja, potrebne za razvoj jezika in matematike. Nadalje je Dawe (1983) v eni izmed svojih raziskav pokazal, da so imeli učenci, ki so izkazovali nizke dosežke pri matematiki, tudi šibko znanje maternega jezika; poudarjal je, da je uspešno učenje matematike na akademski ravni povezano z dobrim znanjem maternega jezika. Podobno navajata tudi Clarkson in Williams (1994), ki pravita, da napredovanje pri branju pomeni večje možnosti (ne pa zagotovila) tudi za napredovanje pri reševanju matematičnih besedilnih problemov, saj ima v besedilnih problemih oboje, matematično in nematematično besedilo, vpliv na uspešnost reševanja.

Petač (2011) za razvoj besedišča navaja besedno fluentnost kot sposobnost lahkotnega produciranja besed v slovenskem jeziku. Fluentnost izražanja spodbujamo z vajami, pri katerih učenci dopolnjujejo besede (pesmi, zgodbe) z izbranimi besedami in s številnimi vajami za bogatitev besedišča ter povezovanje besed v smiselne povedi (Petač 2011). Tudi matematično besedišče lahko razvijamo s podobnimi vajami, npr. k danim primerom dodajamo nove primere ali protiprimere, razlagamo pojme s svojimi besedami, iščemo sopomenke idr.

Pavlič Škerjanc (2015) za razvoj pojmov in vzporedno za razvoj besedišča predlaga uporabo Frayerjevega modela. To je učna aktivnost, ki temelji na kategorizaciji besed. Učenci analizirajo bistvene in nebistvene lastnosti besed/pojmov, tako, da navajajo primere in protiprimere ter pojem razložijo s svojimi besedami. Pri matematiki za izbrani pojem, npr. *n*-strana prizma, učenci najprej opredelijo definicijo *n*-strane prizme, nato pa zapisujejo značilnosti pravilne *n*-strane prizme, navajajo primere in protiprimere (pregled-

Preglednica 3.4 Frayerjev model za *n*-strano prizmo

Značilnosti: Prizma, ki ima vse stranske robove pravokotne na obe osnovni ploskvi, je pokončna prizma. Vse stranske ploskve pokončne prizme so pravokotniki. Višina pokončne prizme je enaka stranskemu robu. Prizma, ki ni pokončna, je poševna prizma. Prizma, ki ima vse (osnovne in stranske) robove enako dolge, je enakoroba (tudi: enakorobna) prizma.	*Definicija (z lastnimi besedami):* Prizma, ki ima za osnovno ploskev *n*-kotnik, je *n*-strana prizma.
Posebni primeri prizem: Paralelepiped (štiristrana prizma, ki ima za osnovno ploskev paralelogram). Kvader (pokončna štiristrana prizma, ki ima za osnovno ploskev pravokotnik). Kocka (pravilna enakoroba štiristrana prizma)	*Protiprimeri:* Valj Piramida

Opombe Prirejeno po Žakelj (2016).

nica 3.4). S tovrstno aktivnostjo poglabljamo razumevanje in širimo besedišče.

Bratina in Lipkin (2003) priporočata posebne jezikovne dejavnosti: prebrati besedilo ali razlago v učbeniku; kritično prebrati poljudno besedilo z matematično vsebino; opozoriti na besede, ki imajo v matematiki drugačen pomen kot v vsakdanjem življenju (npr. v življenjskih situacijah uporabljamo besedo *produkt* kot izdelek ali proizvod, pri matematiki produkt pomeni rezultat množenja; besede imajo lahko različne pomene tudi znotraj matematike: *kolobar* lahko pomeni množico elementov z natančno določenimi lastnostmi ali pa kolobar kot geometrijski pojem); poudarjati natančno rabo jezika; ustvarjati situacije za ocenjevanje učenčevih sposobnosti komuniciranja; spremljati napredek učencev; dovolj časa in priložnosti nameniti izražanju; podpirati vztrajnost.

Procesi učenja

Za globlje razumevanje so pomembni procesi, skozi katere gre učenec v fazi odkrivanja znanja. Pomembno je:

- nenehno preverjanje poznavanja in razumevanja pojmov oz. vsebin, ki smo jih že obravnavali,
- odkrivanje napačnih pojmovnih predstav,
- navezovanje nove vsebine navezovati na predznanje ter njeno osmišljanje,
- uvajanje novih pojmov brez zahtevnih računskih postopkov, sicer je

učenčeva pozornost usmerjena na sam izračun, ne pa na same pojme,
- ustvarjanje priložnosti za formiranje novih in dopolnjenih pojmovnih predstav,
- povezovanje znanja med učenjem,
- uporaba čim več različnih ponazoril pri pouku,
- upoštevanje, da »dril« ne zadostuje za trajno znanje,
- ustvarjanje priložnosti za komunikacijo in socialne interakcije,
- usmerjanje poučevanja v različna področja znanj,
- vključevanje različne dejavnosti/procesov v učni proces, takšnih, v katerih učenec gradi znanje.

Z vidika učenja z razumevanjem bi bilo najoptimalneje, če bi matematične postopke uvajali takrat, ko so usvojeni temeljni pojmi, ki so za izvajanje procedur potrebni. Ker to vedno ni povsem mogoče, je še toliko pomembneje stalno preverjanje razumevanja predhodnih pojmov, ki se navezujejo na novo vsebino.

Konceptualno, proceduralno in problemsko znanje

Za konec bi dodali še, da moramo biti pri poučevanju pozorni na vse vrste znanj, saj za reševanje problemov potrebujemo tako konceptualno kot tudi proceduralno znanje, kar potrjujejo statistično pomembne povezave med dosežki v konceptualnem znanju, znanju reševanja enostavnih matematičnih problemov in kompleksnem znanju (Žakelj 2004). Konceptualno znanje je do določene mere pogoj za reševanje enostavnih in zahtevnih problemov. Določene matematične postopke sicer lahko izvajamo, tudi če jih ne razumemo, navadno pa moramo vsaj delno razumeti pojem, s katerim operiramo. Problemsko znanje je delno splošno (splošne strategije ipd.), delno pa povezano s konkretnimi vsebinami in zahteva trdno konceptualno znanje, celo razumevanje določenih postopkov. Znanja tako učinkujejo eno na drugo: poznavanje algoritmov nekoliko vpliva tudi na razumevanje pojmov in obratno.

Če ima učenec več različnih izkušenj pri oblikovanju pojmov, se tudi postopkov, ki vsebujejo te pojme, bolje in hitreje nauči. Uvajanje algoritmov in računskih postopkov, ko učenec še ni osvojil temeih pojmov, vodi v učenje z memoriranjem. Seveda je tako znanje navadno kratkotrajno in ga hitro pozabimo.

4 Didaktična sredstva in pripomočki

Piaget, Bruner, Montessori in Dienes (McNeil in Jarvin 2007; Moyer 2001) so se strinjali, da interakcija s konkretnimi objekti zagotavlja osnove abstraktnega mišljenja. Učenec naj bi imel veliko izkušenj s konkretnimi materiali in skicami oz. slikami, da bi razumeli abstraktne matematične koncepte, saj so na tej stopnji nezmožni razumeti le verbalno in simbolično podane razlage (Moyer 2001). V procesu razvoja abstraktnih matematičnih konceptov mora učenec skozi tri stopnje predstavitev: enaktivno, ikonično in simbolno. Na prvi, enaktivni stopnji učenec uporablja predvsem fizične objekte (Moyer 2001).

Pojem didaktična sredstva

Didaktična sredstva so vsi pripomočki, ki jih učitelji in učenci uporabljajo pri poučevanju in učenju. Poleg tega termina se v literaturi pojavljajo še številni drugi termini: didaktični pripomočki, učna sredstva, učni pripomočki, didaktični material, konkretna ponazorila, didaktični mediji ipd. Nekateri didaktiki naštete termine med seboj razlikujejo. Tako Poljak (1970) učna sredstva pojmuje kot didaktično oblikovano objektivno realnost glede na velikost, obliko, strukturo in funkcijo, ki nadomešča izvirno realnost, učni pripomočki pa so orodja za delo (npr. geotrikotnik, šestilo, tehtnica). Po njegovem je pojma treba razlikovati, saj v učnem procesu nimata enake funkcije.

Prodanović in Ničković (1974) pojma učna sredstva in mediji uporabita kot enakovredna ter enakopomenska. To so osnovna sredstva oz. pripomočki, potrebni za pouk, ki jih uporabljajo tako učitelji kot učenci. Od ostalih učnih sredstev ločita pomožne tehnične medije (npr. tabla in projektor), s katerimi izboljšujemo tehnike poučevanja in učno metodologijo.

Zelo podobno učna sredstva opredeli Markovac (1992). Po njegovem so učna sredstva in pripomočki najrazličnejši materialni objekti, ki se uporabljajo pri učenju. Posebej poudari učna sredstva, s katerimi manipulirajo učenci. Množico predmetov, s katerimi pri pouku rokujejo učenci, imenuje didaktični material. Njihova osnovna funkcija je konkretizirati kvantitativne odnose.

Blažič idr. (2003) uporabijo izraz medij, ki ga opredelijo z didaktičnega vidika, in sicer kot nosilca oz. posredovalca informacij v didaktičnih funkcijskih sklopih. Ta je lahko personalni ali nepersonalni.

Uporaba didaktičnih sredstev

Didaktična sredstva lahko učencu služijo kot *kognitivno sredstvo* (kot opora za ponazoritev pojmov in odnosov, kot pomoč pri razumevanju, opora v procesu učenja, pomoč pri izvajanju in uporabi postopkov), kot *motivacijsko sredstvo* (z motivi, ki jih izbere učenec sam, opremljen opomnik reševanja besedilnih nalog) in lahko tudi za *občutek varnosti* (npr. kot opomnik s koraki reševanja, formule, ki jih uporabi po potrebi, ali opomnik, kaj je treba narediti pri konstrukciji geometrijskih likov ali pri reševanju besedilnih nalog) (Žakelj 2012, 76).

Pri odločitvah za pripomočke izhajamo iz potreb učencev. Učni pripomočki, ki jih uporabljamo pri pouku, dobijo drugačen pomen, če jih učenci izdelajo sami in jih tudi pozneje aktivno uporabljajo (Bone in Colja 2009, 109). Učence spodbujamo k načrtovanju in izdelovanju različnih modelov npr. teles, likov, številskih premic, ulomkov idr., ob čemer se jim lahko porajajo zanimiva raziskovalna vprašanja, ki vnašajo v pouk življenjskost, problemskost in zanimivost. Ob uporabi učnih pripomočkov vizualizirajo matematične pojme in objekte, kar prispeva k njihovemu poglobljenemu razumevanju in večji zapomnitvi.

Pripomočki so lahko zelo različni: kartonček s formulami za pomoč pri priklicu; karopapir pri seštevanju/odštevanju zaradi pravilnega podpisovanja; po korakih zapisan postopek reševanja, ki ga izdela učenec sam, z izrazi, ki jih razume; razpredelnica z enotami; kartončki s poštevanko ali z večkratniki; preglednica večkratnikov; stotični kvadrat pri učenju osnovnih računskih operacij; kovanci, žetoni, ploščice, s pomočjo katerih ponazarjamo števila; ploščice, s pomočjo katerih štejemo naprej, nazaj, po ena, po dve, dopolnjujemo števila, seštevamo, odštevamo, množimo; različne predloge; žepno računalo; modeli geometrijskih likov in teles idr.

Izbiro in uporabo didaktičnih pripomočkov opredelimo že v fazi načrtovanja (namen didaktičnih pripomočkov, kdo izdela didaktične pripomočke/gradiva; kdaj, čemu in koliko časa učenec pripomoček uporablja itd.) (Ivanuš Grmek in Javornik Krečič 2011).

Ob načrtovanju učitelj razmisli, kateri didaktični pripomočki so za posamezno vsebino učinkoviti. Prav tako se mora učitelj pogosto odločati, kdaj, koliko časa in katere učne pripomočke naj učenci uporabljajo pri učenju novih vsebin ali pri preverjanju in ocenjevanju znanja. Npr.: velik karopapir za podpisovanje pri pisnem seštevanju je pri težavah z orientacijo na listu in pri težavah z grafomotoriko učinkovit, vendar ne, če učenec ne razume postopka seštevanja. Žepno računalo, denimo, je pri reševanju geometrijskih proble-

Preglednica 4.1 Klasifikacija didaktičnih sredstev

Vrsta	Dvodimenzionalna	Tridimenzionalna
Statična	Risbe, slike, fotografije, diagrami, grafikoni, plakati, zemljevidi, diapozitivi ipd.	Zbirke različnih predmetov, modeli, reliefi, makete ipd.
Dinamična	Aplikacije, dinamične slike, filmi ipd.	Dinamični modeli, instrumenti, aparati, stroji, računala, globus ipd.

Opombe Povzeto po Poljak (1970, 51).

mov, ki vsebuje zahtevnejše računske postopke, učinkovito, če posameznik slabo obvlada računske postopke, ni pa ustrezno za učenje razumevanja geometrijskih pojmov in odnosov med njimi (Žakelj in Valenčič Zuljan 2015).

Vrste didaktičnih sredstev

Na podlagi različnih kriterijev didaktiki in strokovnjaki za izobraževalno tehnologijo razvrščajo didaktična sredstva na različne načine.

Poljak (1970) klasificira sredstva v štiri skupine glede na dve lastnosti. Tako so didaktična sredstva lahko dvodimenzionalna ali tridimenzionalna in statična ali dinamična (preglednica 4.1).

Prodanović in Ničković (1974) klasificirata učna sredstva v devet skupin:

- *verbalna učna sredstva:* z njimi omogočamo direktno (živi govor) in indirektno (prenašanje govora s pomočjo radia, televizije in drugih komunikatorjev) verbalno komunikacijo;
- *tekstualna učna sredstva:* k tem sredstvom prištevamo različne vrste pisanih in tiskanih besedil;
- *vizualna učna sredstva:* vključujejo vsa sredstva, ki jih uporabljamo s pomočjo vida;
- *avditivna učna sredstva:* vključujejo sredstva, ki jih uporabljamo s pomočjo sluha;
- *avdiovizualna učna sredstva:* z njimi omogočamo hkrati vidne in slušne dražljaje;
- *elektronsko-avtomatska učna sredstva (v sodobnem času jih imenujemo interaktivna učna sredstva):* sodobna sredstva, ki temeljijo na uporabi elektronike in avtomatike (računalnik, tablični računalnik);
- *manualna učna sredstva:* z njimi manipulirajo učenci, kar omogoča realizacijo različnih delovnih operacij v učnem procesu;
- *eksperimentalna učna sredstva:* z njimi omogočamo uvedbo eksperimentov pri učenju in poučevanju;
- *pomožna tehniška učna sredstva*.

Glede na čutno zaznavanje učenca, ki ga ustvarjajo didaktična sredstva, delimo sredstva v naslednje skupine (Blažič idr. 2003):

- *vizualna sredstva:* z njimi ustvarjamo različne vidne prikaze (zapisi, slike, modeli, fotografije, skice, sheme in projekcije);
- *avditivna sredstva:* z njimi ustvarjamo avditivno (slušno) prikazovanje in zaznavanje (govor, ustvarjanje različnih drugih glasov in zvokov);
- *avdiovizualna sredstva:* z njimi ustvarjamo vidne in slušne dražljaje (dramatizacije, eksperimentalno in praktično delo, zvočni filmi, televizijske oddaje);
- *multimedijska sredstva:* omogočajo ustvarjanje navidezne resničnosti (virtualna učilnica) in podpirajo različne aktivnosti učiteljev ter učencev (npr. uporaba računalnika, ki omogoča vizualno, avditivno in avdiovizualno prikazovanje, hkrati pa omogoča izvajanje drugih aktivnosti).

Glede na izvor lahko didaktična sredstva delimo na naravna in umetna (Markovac 1992). Naravna so sredstva iz neposredne okolice, ki jih ne preoblikujemo oz. le minimalno prilagodimo učnim potrebam (klopi, svinčniki, različni plodovi ipd.), umetna sredstva pa so tista, ki so posebej oblikovana in izdelana z namenom uporabe pri pouku (računala, modeli geometrijskih likov in teles, geoplošča, sredstva za merjenje, grafična sredstva ipd.).

Didaktična sredstva pri pouku geometrije

Učenje in poučevanje geometrije se v osnovni šoli začneta z opazovanjem in manipuliranjem s konkretnimi predmeti preko didaktičnih iger, ki učencem omogočata razvoj osnovnih geometrijskih predstav. Taktilno-kinestetična izkušnja, kot je premik geometrijskih teles v prostoru, je učencem, še posebej mlajšim, v veliko pomoč pri učenju nekaterih geometrijskih konceptov (Prigge 1978). Ne glede na stopnjo učenja geometrije je uporaba fizičnih pripomočkov, skic in računalniških modelov nujna, saj le-ti omogočajo boljšo predstavo in lažje dojemanje abstraktnih geometrijskih konceptov ter uspešnejše reševanje geometrijskih problemov. Uporaba didaktičnih sredstev olajša izgradnjo geometrijskih konceptov, ki so bili podani verbalno (Clements in Battista 1992). Učenci, ki pri pouku geometrije uporabljajo didaktična sredstva, usvojijo geometrijske koncepte temeljiteje in bolj poglobljeno (Raphael in Wahlstrom 1989). Učencem, ki svoje ideje težje verbalno izrazijo, omogočajo, da svoje »razlage« prikažejo s konkretnimi objekti oz. skicami (Fuys, Geddes in Tischler 1988). Poleg tega didaktična sredstva omogočajo, da so učenci aktivno vključeni v pouk, učitelj pa ni več le prenašalec znanja, saj lahko učenci samostojno raziskujejo geometrijske koncepte in z didaktičnimi sredstvi svoje ideje preverijo.

Medtem ko so didaktična sredstva in pripomočke nekoč uporabljali le učitelji kot pripomoček pri poučevanju, jih pri pouku v sodobni šoli uporabljajo tudi učenci. Njihova uporaba pozitivno vpliva na aktivno vlogo učencev pri učenju oz. konstrukciji znanja v procesu odkrivanja in raziskovanja (Fuys, Geddes in Tischler 1988). Konkretni materiali in didaktični pripomočki učencem omogočajo, da preizkusijo in izrazijo svoje zamisli ter jih po potrebi spremenijo. Na tak način samostojno izgradijo lastno znanje. Kot vemo, se v procesu izoblikovanja znanja vse bolj poudarja samostojno pridobljeno znanje, ki se povezuje z že pridobljenim in postaja trajna last učencev. Pri tem učitelj skuša ponuditi pogoje, pod katerimi lahko učenje poteka, zato izbira didaktična sredstva, ki omogočajo karseda samostojno učenje.

Učenje je uspešnejše, če je učenec miselno in tudi čustveno aktiven, saj nam vse, kar zaznamo in spoznamo, posredujejo čuti. »Začetek spoznavanja mora izhajati iz čutov in vse, kar koli je mogoče, je treba predložiti in predstaviti čutom … pritegniti, kolikor je mogoče, vse čute« (Blažič idr. 2003, 188). Pri pouku geometrije največ čutnih dražljajev sprožimo v procesu ponazarjanja z didaktičnimi sredstvi. Raziskave kažejo, da imajo vizualna učna sredstva prednost pred klasičnim verbalnim poučevanjem (Blažič idr. 2003). Vendar zgolj vizualizacija geometrijskih konceptov z didaktičnimi sredstvi za razumevanje geometrijene zadošča. Markovac (1992) meni, da mora pri pouku matematike vizualno komponento spremljati še avditivna komponenta za sprejemanje informacij, kar potrjuje tudi podatek, da v spominu ohranimo približno 20 % tistega, kar slišimo, 30 % tistega, kar vidimo, 50 % tistega, kar sočasno slišimo in vidimo, ter 90 % tistega, kar naredimo. Sredstva, ki pri učenju geometrije spodbujajo uporabo več čutov hkrati, so najučinkovitejša (Clements in Battista 1992). Vizualne in taktilne dražljaje sprožijo manipulativna didaktična sredstva, namenjena pa so ponazarjanju abstraktnih matematičnih konceptov. Torej sta vizualizacija geometrijskih konceptov in manipuliranje z didaktičnimi sredstvi nujna za razumevanje abstraktne geometrije. Poleg tega se je izkazalo, da manipuliranje s sredstvi izboljša spomin in razumevanje (Glenberg idr. 2004; Martin in Schwartz 2005).

Geometrija je abstraktna matematična disciplina, zato geometrijske probleme jemljemo iz otrokovega življenja. Vemo, da učenci uspešneje rešujejo matematične probleme, ki so vzeti iz konteksta njihovega praktičnega oz. realnega življenja. Tako gradijo matematična dejstva in zakonitosti na temelju svojih izkušenj. Didaktična sredstva so namenjena ravno temu, da usmerijo učence k povezovanju matematičnega in realnega sveta. Pri pouku geometrije si lahko pomagajo z geometrijskimi modeli teles in likov, šablono (ravnilom), šestilom, geotrikotnikom, geoploščo ipd. To so le nekatera didaktična sredstva, ki so priporočena v učnem načrtu za matematiko (*Učni načrt* 2011). Z njihovo pomočjo konkretiziramo abstraktne pojme in geometrijske probleme, na podlagi katerih lahko učenec razvija abstraktno mišljenje. Konkretna ponazoritev problemov je še posebej pomembna v začetni fazi učenja, saj se, po Piagetu, stopnja formalno-logičnega mišljenja oz. abstraktno mišljenje začne intenzivneje razvijati šele po 12. letu starosti. Huntington (1994 v Goldsby 2009) je pokazal, da poučevanje na način, kjer učenci postopoma prehajajo od konkretnega k abstraktnemu s pomočjo didaktičnih sredstev, izboljša reprezentacijo učencev in sposobnosti reševanja besedilnih problemov.

Manipuliranje s predmeti na konkretni stopnji je osnova, brez katere otroci skoraj ne morejo doseči abstraktne stopnje. Vendar pogosto precenjujemo miselne zmožnosti učencev in pri učenju geometrije ne ponudimo didaktičnih sredstev, s katerimi bi si učenec lahko vizualiziral abstraktne pojme. To je značilno predvsem za učitelje matematike v tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju, ki geometrijo največkrat poučujejo zelo formalno – zato ima veliko učencev težave z njeno predstavljivostjo. Da bi se te težave pojavljale v manjši meri, je treba najprej premisliti in ugotoviti, kakšne predstave učenci že imajo. Na podlagi predznanja učencem ponudimo ustrezna didaktična sredstva, s katerimi bodo lažje usvojili zanje nova dejstva. Ustrezni konkretni materiali so npr. omogočili šestošolcem, da so bolje usvojili koncepte vektorskega prostora kot njihovi vrstniki, ki takega materiala niso uporabljali (Lamon in Huber 1971). O vplivu didaktičnih sredstev pri pouku matematike je bilo doslej narejenih že veliko raziskav. Veliko več je takih, ki pričajo o uporabi sredstev na nižjih, kot takih, ki pričajo o takšni uporabi na višjih stopnjah izobraževanja. Nekatere med njimi poročajo, da je uporaba sredstev koristna za mlajše učence, vendar nepotrebna za starejše učence (Fennema 1972; Friedman 1978). S tem se ne strinjajo Fuys, Geddes in Tischler (1988), ki so ugotovili, da so didaktična sredstva bistvena pomoč pri učenju geometrije tudi v obdobju najstništva, še posebej za tiste učence, ki so na nižji stopnji glede na van Hielovo hierarhijo. Koristi rokovanja z didaktičnimi sredstvi se kažejo na vseh stopnjah izobrazbe in pri vseh matematičnih vsebinah, ne glede na zmožnosti posameznega učenca, vendar le, če je uporaba sredstev smiselna (Sowell 1989; Clements in Battista 1992).

Uporaba učnih sredstev in pripomočkov ne spodbuja nujno tudi miselne aktivnosti učencev. Njihova uporaba sama po sebi ne zagotavlja matematičnega znanja. Pogosto delo z didaktičnim sredstvi omogoča le spoznavanje predmetov, s katerimi učenci manipulirajo. Fizična aktivnost z didaktičnimi sredstvi postane sredstvo za učenje šele takrat, ko jo dosledno spremlja miselna aktivnost. Sredstva, ki izključujejo vsak miselni napor učencev, so neučinkovita in nesprejemljiva. V nekaterih primerih imajo lahko celo škodljiv učinek na učenje in uspešnost (McNeil in Jarvin 2007). Zato je pomembno, da učitelj ponudi ponazorilo, ki je smiselno uporabljeno, povečuje motivacijo otrok in tako vpliva na realizacijo vzgojno-izobraževalnih ciljev. Ustrezno didaktično sredstvo spodbuja višje miselne procese, v nasprotnem primeru pa ima funkcijo posrednika oz. je primitivni kalkulator, ki vodi do pravega rezultata (Hodnik Čadež in Manfreda Kolar 2009). Pri izbiri učnega sredstva moramo biti pozorni tudi na to, da ne moti učnih namenov. Če npr. dele celote ponazorimo s čokolado, lahko čokolada odvrača pozornost učencev od pravih namenov pouka, zato je izbrano sredstvo nekoristno. Prav tako učenci težje manipulirajo s prevelikimi oz. premajhnimi predmeti, zato moramo didaktična sredstva prilagoditi fizičnim sposobnostim učencev. Uporaba didaktičnih sredstev je odvisna predvsem od miselnih sposobnosti. Rokovanje s primernimi didaktičnimi sredstvi učencem dopušča, da razmišljajo o svojih geometrijskih idejah, kar ohranja njihovo zanimanje za sodelovanje pri ustvarjanju definicij in novih domnev ter jim pomaga pri pridobivanju vpogleda v nove odnose med geometrijskimi elementi (Fuys, Geddes in Tischler 1988).

Sowell (1989) ugotavlja, da je napredek pri znanju geometrije odvisen tudi od pogostosti uporabe didaktičnih sredstev. Kratka časovna uporaba namreč pogosto ne povzroča vidnega napredka. Smiselna je uporaba sredstev v vseh fazah učnega procesa in ne le pri obravnavi nove učne snovi. Predvsem je pomembno, da učenci uporabljajo sredstva pri samostojnem reševanju geometrijskih problemov, kjer jih opazujejo in z njimi manipulirajo, še zlasti pa, ko predstavijo svoje ideje. Le tako lahko dosežemo miselno aktivnost učencev.

Katero didaktično sredstvo je najprimernejše pri posamezni učni enoti, ne moremo določiti. Prav tako ne moremo trditi, da je neko sredstvo boljše od drugega, saj ima, kot navajata Prodanović in Ničković (1974), vsako sredstvo svojo didaktično vrednost. Ne glede na to, katero didaktično sredstvo ponudimo, to ne bo imelo enakega učinka pri vseh učencih in pri vsaki vsebini. Zato moramo pri oblikovanju geometrijskih pojmov učencem ponuditi več različnih sredstev, kar pozitivno vpliva na dosežke pri geometriji (Nickson 2004; Moyer 2001).

Za prikaz geometrijskih konceptov pri pouku geometrije najpogosteje uporabljamo skice in slike, ki lahko učencem omogočijo takojšnje intuitivno razumevanje določenih geometrijskih idej; vendar morajo biti zelo raznolike, saj le tako ne bodo povzročale nepravilne izgradnje geometrijskih konceptov (Clements in Battista 1992). Raziskave kažejo, da imajo skice v primerjavi z didaktičnimi sredstvi, s katerimi lahko učenci manipulirajo, nekoliko manjši vpliv na uspeh pri pouku matematike; v nekaterih primerih se njihova učinkovitost celo ne razlikuje od učinkovitosti abstraktnega pouka s simboli (Sowell 1989).

Geometrija je v tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju že zelo abstraktna. V začetni fazi učenja novih abstraktnih pojmov je uporaba didaktičnih sredstev, s katerimi lahko učenci manipulirajo in si te pojme vizualizirajo, nujna. Na tak način učenci konkretizirajo abstraktne pojme, na podlagi katerih razvijajo abstraktno mišljenje. Vendar naši učbeniki le redko predlagajo uporabo didaktičnih sredstev pri geometriji (zlasti učbeniki, namenjeni učencem tretjega vzgojno-izobraževalnega obdobja), kar je v nasprotju z uspešnimi Japonci, ki se pogosto učijo s pomočjo manipulativnih didaktičnih sredstev (Stigler, Lee in Stevenson 1990). Japonski osmošolci namreč dosegajo pomembno višje rezultate pri geometriji kot slovenski učenci 8. razreda (Japelj Pavešić, Svetlik in Kozina 2012). Razlike lahko pripišemo tudi različnim pristopom poučevanja. Poleg tega vsaka država z učnim načrtom odraža svoj odnos do uporabe didaktičnih sredstev. Naš učni načrt (*Učni načrt* 2011) neposredno ne predlaga nobenega sredstva, s katerim bi lahko učenci tretjega vzgojno-izobraževalnega obdobja rokovali in s tem samostojno raziskovali geometrijske koncepte, čeprav so za pouk v prvem vzgojno-izobraževalnem obdobju navedena konkretna didaktična sredstva. Za tretje vzgojno-izobraževalno obdobje učni načrt priporoča le uporabo raznovrstnih modelov teles, ki so namenjeni predvsem demonstraciji in ne manipuliranju z njimi. Like in druge abstraktnejše geometrijske elemente lahko naši učenci opazujejo samo na skicah in jih načrtujejo s standardnim geometrijskim orodjem (ravnilo s šablono, geotrikotnik in šestilo). Uporaba manipulativnih didaktičnih sredstev je odvisna od učitelja, njegovega prepričanja in učnega pristopa ter sredstev, ki jih šola ima na razpolago.

Didaktična sredstva so lahko učinkovita pomoč pri učenju in pozitivno vplivajo na mišljenje učencev. Ta učinkovitost pa je v veliki meri odvisna od učiteljev. Raphael in Wahlstrom (1989) sta ugotovila, da je uspeh učencev pri geometriji povezan z učnimi izkušnjami učiteljev. Raziskava je pokazala, da so učitelji z več izkušnjami pristopali na način, ki omogoča višje dosežke učencev. Izkušenejši učitelji vključujejo v pouk več različnih didaktičnih sredstev kot manj izkušeni učitelji, vendar učitelji z več izkušnjami vključujejo sredstva občasno, učitelji z manj izkušnjami pa pogosto. Poleg tega izkušenejši učitelji navajajo več utemeljenih razlogov, zakaj so izbrali določeno sredstvo, kot manj izkušeni učitelji (Raphael in Wahlstrom 1989). Pri izbiri didaktičnega sredstva mora biti učitelj pozoren na predhodno zastavljene cilje in vnaprej predvideti njegov vpliv na učenčevo mišljenje. Preprosta fizična uporaba geometrijskih pripomočkov ni zadostna oz. ne zagotavlja smiselnega učenja. Da bo učitelj dosegel želeni učinek, mora poučevanje in način dela prilagoditi izbranemu pripomočku. Učence mora voditi k razmišljanju o lastni uporabi pripomočka in k povezovanju izdelanih modelov z neformalnim znanjem geometrijskih konceptov (Clements in Battista 1992). Raziskava o vplivu didaktičnih sredstev pri pouku matematike kaže, da učitelji didaktičnim sredstvom priznavajo pomemben delež v procesu pridobivanja abstraktnih matematičnih pojmov in reševanja problemov (Hodnik Čadež in Manfreda Kolar 2009). Vendar učitelji niso najbolj naklonjeni temu, da bi učni proces prilagajali didaktičnim pripomočkom, in raje prilagajajo didaktična sredstva svojemu že obstoječemu načinu dela, saj to v poteku učnega procesa zahteva manj sprememb (Gellert 2004). Napačne predstave, ki se pojavijo pri uporabi sredstev, so po njihovem mnenju posledica pomanjkljivosti oz. slabosti materialov (Hall 1998).

Nekateri učitelji didaktična sredstva učencem ponudijo le za popestritev učne ure, namesto da bi jih uporabili kot orodja za učenje in z njimi pritegnili učence k sodelovanju ter aktivnemu učenju. Taki učitelji so prepričani, da so didaktična sredstva pri učenju in poučevanju matematike nepotrebna (Moyer 2001). Večina učiteljev meni, da se bodo učenci matematiko najbolje naučili s postopnim uvajanjem postopkov, potrebnih za reševanje matematičnih problemov, ter s ponavljanjem in z vadenjem teh postopkov (Smith 1996). Zato uporabljajo sredstva z namenom zabave, kar lahko ovira učenje in razvrednoti učinkovitost sredstev pri učenju matematičnih konceptov, vemo pa, da je učenje matematike s sredstvi smiselno le, če je njihova uporaba namenjena konstrukciji znanja (McNeil in Jarvin 2007).

Geoplošča

V geometriji je zaradi njene predstavljivosti veliko vsebin, pri katerih lahko učencem ponudimo najrazličnejše pripomočke. Eden najbolj znanih je geoplošča, s katero vizualiziramo osnovne geometrijske pojme. Najpogosteje jo uporabljamo za konkretizacijo pojmov, kot so obseg, ploščina, trikotnik, večkotnik, skladnost, osna in središčna simetrija, vzporednost, pravokotnost ipd. Na njej učenci najprej prikažejo poljubne slike, zatem pa posamezne osnovne like. Elastika, s katero prikažejo like, ponazarja črte. Ob hkratnem modelu lika, ki ga imamo na tabli, povemo in pokažemo, da lik omejujejo črte.

Opisujemo, kakšne so črte (ali so ravne, ali so vse enako dolge ipd.). Glede na sposobnosti učencev lahko povemo, da ravne črte, ki omejujejo lik, imenujemo stranice. Pogovarjamo se, ali lahko na isti geoplošči prikažemo tudi krog. Zakaj kroga ne moremo prikazati? Ugotovimo, da ima krog krivo črto.

Geoplošča učencem omogoča kreativnost in vizualno predstavljivost, ki je začetna stopnja pri učenju geometrije. Poleg tega lahko učenci z uporabo geoplošče rešujejo geometrijske probleme in odkrivajo ter raziskujejo nova dejstva. Leseno ali plastično tablico dimenzij $n \times n$ z žebljički, na katere napnemo elastike, je izumil angleški didaktik Caleb Gattegno že okrog leta 1950. Pri pouku matematike v slovenskem prostoru se je začela uporabljati šele v zadnjih letih (Cotič idr. 2010). Snovalci učnega načrta za matematiko uporabo geoplošče predlagajo le učencem do 6. razreda (*Učni načrt* 2011). Med predlaganimi didaktičnimi sredstvi za učence tretjega vzgojno-izobraževalnega obdobja, ko je geometrija čedalje abstraktnejša, ni omenjen noben konkreten material, s katerim bi lahko učenci manipulirali in na tak način konkretizirali ter si vizualizirali abstraktne geometrijske koncepte.

Učenje in poučevanje geometrije

5

Učenje in poučevanje geometrije v slovenski osnovni šoli

V Sloveniji je pouk geometrije na začetku šolanja zgrajen na osnovi ideje »od telesa k točki«, kar pomeni, da se učenje geometrije začne s prostorsko geometrijo, nadaljuje z ravninsko, šele nazadnje pa otroke seznanimo z različnimi črtami in točko. Ta pristop je v skladu z otrokovim razvojem, saj dobi otrok prve izkušnje z geometrijskimi elementi v prostoru s tridimenzionalnimi predmeti. Šele ko ima dovolj konkretnih izkušenj z geometrijskimi telesi, lahko pozornost usmeri na geometrijske like (Egsgard 1970). Dvodimenzionalne oblike sreča v obliki ploskev geometrijskih teles. Na tak način gradimo geometrijo na otrokovih izkušnjah, ki temeljijo na konkretnih operacijah. Osnovnih geometrijskih konceptov otroci ne usvajajo preko formalnih matematičnih definicij, ampak preko zgledov, ki so otrokom blizu (npr. žoga, šotor, pločevinka, igralna kocka, vrata, sonce, prometni znaki idr.) (Cotič idr. 1998). Modeli geometrijskih oblik omogočajo pridobivanje prostorskih in ravninskih predstav.

Naši osnovnošolci pouk geometrije začnejo z opazovanjem konkretnih predmetov in razvijanjem sposobnosti orientacije v prostoru. Že v 1. razredu se srečajo s kroglo, valjem, piramido, kocko, kvadrom in stožcem. Postopoma spoznajo tudi njihove lastnosti, jih izdelujejo iz različnih materialov in jih opišejo z naslednjimi pojmi: ploskev, rob in oglišče. Z opazovanjem in odtiskovanjem mejnih ploskev teles preidemo na ravninske oblike. Weinzweig (1978) trdi, da ravno odtiskovanje ploskev teles pripomore k razumevanju nekaterih lastnosti teles in spoznanju dvodimenzionalnih oblik. Na začetku učenci spoznajo le nekatere pravilne like, kasneje pa tudi nepravilne. Likom določijo lastnosti, jih narišejo, označijo oglišča in stranice ter jih poimenujejo glede na število stranic. Srečajo se s simetrijo in spoznajo nekatere osnovne pojme ravninske geometrije, kot sta črta in točka. Cilji, ki jih učenec pri pouku geometrije doseže v prvem vzgojno-izobraževalnem obdobju, so torej naslednji (*Učni načrt* 2002; 2011):

- učenec opredeli položaj predmeta v prostoru in na ravnini ter se po navodilih premika po prostoru in na ravnini;
- učenec razvija strategije branja in orientacije v mrežah, poteh, labirintih;

- učenec spozna geometrijske elemente: telesa, like, črte, točko;
- učenec izdela modele teles iz plastelina in gline ter modele likov iz kartona in papirja;
- učenec prepozna, poimenuje in opiše osnovna geometrijska telesa ter geometrijske like;
- učenec nariše črte (ravne, krive, sklenjene, nesklenjene in lomljene) in geometrijske like prostoročno ter s šablono;
- učenec nariše in označi točko ter označi presečišče črt;
- učenec večkotnik nariše, označi oglišča in stranice ter lik pravilno poimenuje;
- učenec prepozna in nariše skladen lik;
- učenec prepozna simetrijo pri predmetih iz okolice in likih ter nariše simetričen lik s pomočjo mreže.

Po letu 2011 učenci rišejo črte med dvema točkama in spoznajo pojem najkrajša razdalja med dvema točkama že v prvem vzgojno-izobraževalnem obdobju. Pred letom 2011 smo s tem učence seznanili šele v 4. razredu. Poleg tega je v posodobljenem učnem načrtu dodan sklop Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami, ki povezuje znanje vseh vsebinskih sklopov, torej tudi geometrije.

V drugem vzgojno-izobraževalnem obdobju je geometrija postopoma vedno abstraktnejša. Učenci spoznajo veliko novih in za njih še neznanih geometrijskih pojmov. Poleg tega morajo prepoznati in poznati odnose med geometrijskimi elementi. Obravnavane pojme naj bi učenci ponazarjali ob raznovrstnih modelih, vendar je v praksi opaziti, da učitelji pogosto uporabljajo le skice, ki pa nimajo takega učinka na razumevanje geometrijskih konceptov kot konkretni didaktični pripomočki (Clements in Battista 1992). Večino geometrijskih elementov, ki jih učenci spoznajo, tudi načrtajo, saj z načrtovalnimi nalogami pridobivajo spretnosti pri uporabi geometrijskega orodja. V tem obdobju pogosto uporabljajo simboliko. Učenci pri geometriji začnejo računati. Tako že ob koncu drugega vzgojno-izobraževalnega obdobja uporabljajo obrazce za izračun obsega in ploščine pravokotnika ter kvadrata in ju uporabljajo pri izračunu obsega in ploščine kocke ter kvadra. Glede na učni načrt pri matematiki (*Učni načrt* 2002; 2011) naj bi učenci v obdobju od 4. do 6. razreda dosegli naslednje cilje:

- učenec primerja prostornini dveh teles in meri prostornino s standardnimi ter z nestandardnimi enotami ter jo oceni;
- učenec razlikuje med prostornino in površino;

- učenec s premislekom izračuna prostornino kocke in kvadra;
- učenec usvoji pojma kot in velikost kota ter primerja kota po velikosti;
- učenec usvoji pojme in simboliko: vrh kota V, krak, meja, notranjost in zunanjost kota;
- učenec usvoji merske enote za merjenje kotov; pretvarja mnogoimenske kotne enote na istoimenske in obratno ter računa z njimi;
- učenec oceni, izmeri in nariše kot z geotrikotnikom;
- učenec razlikuje vrste kotov in opiše velikost posameznih vrst kotov;
- učenec danemu kotu poišče sovršni kot in sokot;
- učenec pozna in zapiše skladnost kotov;
- učenec določi vsoto in razliko kotov grafično ter računsko;
- učenec nariše in prepozna daljico, premico in poltrak;
- učenec prepozna in nariše skladne daljice;
- učenec nariše in označi presečišče dveh premic;
- učenec prepozna odnose »leži na« in »ne leži na« ter uporablja simboliko;
- učenec ugotovi, simbolično zapiše in nariše osnovne odnose med premico in točko oz. med dvema premicama;
- učenec prepozna in skicira pravokotni in vzporedni premici;
- učenec grafično sešteva in odšteva daljice;
- učenec poveže pojma razdalja med točkama in dolžina daljice;
- učenec oceni, ugotovi, meri in simbolično zapiše skladnost dveh daljic;
- učenec opredeli, oceni, izmeri in simbolično zapiše razdaljo med točko ter premico in med dvema vzporednima premicama;
- učenec skozi dano točko k dani premici nariše pravokotnico oz. vzporednico; nariše točko v določeni razdalji od premice in obratno ter dani premici nariše vzporednico v določeni razdalji;
- učenec opiše in označi večkotnik (oglišča in stranice);
- učenec nariše pravokotnik in kvadrat z upoštevanjem medsebojne lege stranic ter skladnosti daljic;
- učenec opredeli obseg lika; spretno izmeri in izračuna obseg lika brez uporabe obrazcev;
- učenec oceni in meri ploščino lika z nestandardnimi in standardnimi enotami;
- učenec izračuna obseg in ploščino pravokotnika ter kvadrata brez obrazcev in tudi z uporabo obrazcev ter ju uporablja pri izračunu površine kocke in kvadra;
- učenec razlikuje like in telesa; prepozna osnovna geometrijska telesa;
- učenec pokaže in razlikuje pojme: mejna ploskev, rob in oglišče;

- učenec opiše kocko in kvader ter sestavi njuna modela; izdela, opiše in nariše mrežo kocke in kvadra;
- učenec usvoji in prepozna pojme: polmer in premer kroga, sekanta, tangenta, mimobežnica in tetiva; s šestilom nariše krožnico z danim polmerom;
- učenec nariše krožni izsek, krožni lok, središčni kot in tetivo z dano dolžino; razlikuje med tetivo in sekanto;
- učenec nariše v dani razdalji od središča kroga premico in jo poimenuje (sekanta, tangenta ali mimobežnica); tangento nariše v dani točki krožnice tako, da upošteva dejstvo, da je tangenta pravokotna na polmer;
- učenec določi kvadratu, pravokotniku in krogu simetrale.

Na podlagi učnega načrta iz leta 2011 učenci poglabljajo znanje iz geometrije z reševanjem matematičnih problemov z življenjskimi situacijami.

V 7. razredu učenci rešijo veliko načrtovalnih nalog. Na tak način usvojijo številne lastnosti trikotnikov in štirikotnikov ter odnose med geometrijskimi oblikami. Večina ciljev v učnem načrtu, povezanih z geometrijo, zahteva izdelavo skic, zato je treba učence sistematično navajati na risanje skic (*Učni načrt* 2002). Sedmošolci spoznajo nekatere osnovne transformacije, in sicer zrcaljenje, premik in vrtež. Najprej jih obravnavajo z modeli, le zrcaljenje pa tudi konstruirajo. Papirnati in žični modeli geometrijskih teles ter modeli za potapljanje in oblačenje imajo pomembno vlogo pri vizualizaciji geometrijskih teles ter njihovih lastnosti, ki jih učenci spoznajo. Pri geometriji je vsako leto več računskih nalog. Tako učenci 9. razreda obvladajo številne obrazce za izračun obsega in ploščine trikotnikov, štirikotnikov ter kroga in obrazce za izračun površine ter prostornine geometrijskih teles. Učenci tretjega vzgojno-izobraževalnega obdobja naj bi pri pouku geometrije dosegli naslednje učne cilje (*Učni načrt* 2002; 2011):

- učenec usvoji pojem orientacije in označi oglišča danega lika v zahtevanji orientaciji;
- učenec opiše in nariše medsebojno lego dveh krožnic in središčno razdaljo;
- učenec opiše trikotnik in označi oglišča, stranice in kote; sortirati in razvrščati ga zna glede na kote in stranice ter pozna odnos med dolžinami stranic (trikotniško pravilo);
- učenec razlikuje pojma notranji in zunanji kot trikotnika, štirikotnika in večkotnika; pozna vsoto notranjih in zunanjih kotov trikotnika, štirikotnika in večkotnika ter to uporabi v preprostih računskih nalogah;

- pozna odnose med notranjimi koti trikotnika in stranicami trikotnika ter to uporabi pri načrtovalnih nalogah;
- učenec pozna potrebne in zadostne podatke za skladnost trikotnikov ter trikotnike načrta;
- učenec pozna višino trikotnika in jo nariše; usvoji pojem višine v paralelogramu in trapezu ter jo nariše;
- učenec pozna težišče in težiščnico;
- učenec razume pojem trikotniku očrtanega in včrtanega kroga ter določi središče trikotniku očrtanega in včrtanega kroga;
- učenec načrta trikotnik in štirikotnik glede na dane podatke;
- učenec določi osno somerne trikotnike in jih načrta; določi osno in središčno somerne štirikotnike (enakokrak trapez, deltoid, paralelogram) ter opiše njihove lastnosti; načrta središčno in osno somerne štirikotnike;
- učenec opiše in poimenuje štirikotnik ter označi oglišča, stranice, kote in diagonalo;
- učenec opredeli trapez, ga prepozna in uporablja izraze: osnovnica, krak in višina;
- učenec izračuna obseg in ploščino trikotnika z uporabo obrazcev;
- učenec izračuna obseg in ploščino paralelograma z uporabo obrazca (direktne in indirektne naloge);
- učenec določi ploščino trapeza in štirikotnika s pravokotnima diagonalama;
- učenec prepozna osnovne transformacije (zrcaljenje, premik in vrtež) in njihove lastnosti;
- učenec nariše zrcalno sliko točke, premice, daljice, kota in lika čez izbrano premico oz. točko; usvoji simbolični zapis preslikave in opiše lastnosti zrcaljenja;
- učenec usvoji pojem simetrale, daljice in kota ter načrta in reši preproste konstrukcijske naloge;
- s šestilom načrta kote: 60°, 30°, 15°, 45°, 90° in 120°;
- učenec prepozna kota s paroma vzporednimi kraki in ugotovi odnos med njunima velikostma;
- učenec reši preprosto nalogo o dvojicah kotov (sovršna kota, sokota, kota s paroma vzporednima krakoma);
- učenec opiše večkotnik in označi oglišča, stranice, kote ter diagonale;
- učenec usvoji pojem pravilni večkotnik;
- učenec uporabi osnovne strategije za določanje obsega in ploščine večkotnika (uporaba obrazca, merjenje in razbitje na trikotnike);

- učenec pozna vlogo števila π; izračuna obseg in ploščino kroga, dolžino krožnega loka in ploščino krožnega izseka;
- učenec pozna lastnosti pravokotnega trikotnika in poimenuje stranice; pozna in uporabi Pitagorov izrek ter izračuna dolžino neznane stranice v pravokotnem trikotniku; Pitagorov izrek uporabi v kvadratu, pravokotniku, enakostraničnem in enakokrakem trikotniku, trapezu, rombu, krogu ter celoštevilčnem koordinatnem sistemu;
- učenec pozna pojme: oglišče, osnovni rob, stranski rob, osnovna ploskev, stranska ploskev, višina telesa, stranska višina, diagonala mejne ploskve, telesna diagonala, plašč, presek in osni presek;
- učenec sestavi modela kocke in kvadra ter nariše mrežo kocke in kvadra;
- učenec izračuna plašč, površino in prostornino kocke ter kvadra in uporabi Pitagorov izrek v kocki ter kvadru;
- učenec spozna prizmo, valj, piramido in stožec ter geometrijska telesa opiše; izdela modele teles in nariše njihovo mrežo;
- učenec izračuna površino in prostornino prizme, valja, piramide ter stožca;
- učenec usvoji pojem osnega preseka stožca in reši s tem povezane preproste naloge;
- učenec spozna valj in stožec kot vrtenini ter reši preproste naloge;
- učenec ob modelu uporabi Pitagorov izrek v prostoru;
- učenec opiše kroglo; reši preproste naloge v zvezi s površino in prostornino krogle;
- učenec opredeli odnose med točkami, premicami in ravninami v prostoru (ob modelih) ter odnose zapiše s simboli;
- učenec opredeli in zapiše razmerje dolžin dveh daljic; računsko poišče dolžino druge daljice, če pozna dolžino ene daljice in razmerje dolžin obeh daljic; grafično odmeri drugo daljico, če pozna dolžino ene daljice in razmerje dolžin daljic; razdeli daljico v danem razmerju;
- učenec prepozna podobne like in s tem povezane pojme: istoležne stranice in istoležni koti; opredeli pojem podobna trikotnika; zapiše sorazmerje dolžin istoležnih stranic dveh podobnih trikotnikov in izračuna ustrezno stranico.

Poleg naštetih ciljev posodobljeni učni načrt (*Učni načrt* 2011) vključuje modeliranje fizičnih objektov z geometrijskimi modeli.

V primerjavi z vsebinami iz aritmetike in algebre je geometriji ter merjenju namenjenih veliko manj ur v vseh razredih osnovne šole, in to kljub spre-

Preglednica 5.1 Število ur, predvidenih za posamezno matematično področje v učnih načrtih za matematiko, ki sta bila sprejeta leta 1998 in leta 2011

Področje	Leto	Razred								
		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Geometrija in merjenje	2006	20	20	25	25	45	44	44	40	48
	2011	18	15	25	30	30	42	46	35	50
Aritmetika in algebra	2006	80	100	120	100	63	66	72	78	54
	2011	85	90	115	105	80	58	62	66	52
Druge vsebine	2006	30	10	15	8	16	12	8	6	16
	2011	22	20	20	25	15	20	12	14	18
Skupaj	2006	140	140	175	175	140	140	140	140	140
	2011	140	140	175	175	140	140	140	140	128

membi učnega načrta. V prvem vzgojno-izobraževalnem obdobju je aritmetiki in algebri namenjenih 290 ur, geometriji in merjenju pa le 58 ur. V drugem vzgojno-izobraževalnem obdobju je aritmetiki in algebri namenjenih 243 ur, geometriji in merjenju pa le 102 uri. V tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju je aritmetiki in algebri namenjenih 180 ur, geometriji in merjenju pa 131 ur (*Učni načrt* 2002; 2011).

Čeprav geometrija omogoča reprezentacijo pojmov v matematiki, ki niso nujno geometrijski in sami po sebi niso vizualni, je pri pouku matematike na sekundarnem mestu. Parzysz (1988) meni, da so nekatere vsebine iz geometrije zahtevne tako za učence kot za učitelje, zato je geometrija na slabšem položaju kot ostale matematične vsebine. V učnem načrtu iz leta 2011 je dodan sklop Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami, kjer lahko učenec poglablja znanje iz geometrije.

V učnem načrtu, sprejetem leta 2011, so, glede na učni načrt iz leta 1998, zmanjšali število ur pri geometriji in merjenju za vsa tri vzgojno-izobraževalna obdobja (*Učni načrt* 2011). Nekaj teh ur so snovalci učnega načrta namenili novemu sklopu (tj. Matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami), ki povezuje znanje vseh vsebinskih sklopov. V prvem vzgojno-izobraževalnem obdobju se je pri geometriji in merjenju zmanjšalo število ur iz 65 na 58 ur, v drugem vzgojno-izobraževalnem obdobju iz 114 na 102 uri, v tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju pa iz 132 na 131 ur, medtem pa so cilji ostali enaki, kar pomeni, da imajo učitelji na razpolago manj ur za obravnavanje vsebin iz geometrije. Če želijo tako učitelji obdelati vse vsebine iz geometrije, morajo hiteti, kar pa lahko vpliva na kakovost znanja učencev.

Največ ur za obravnavo vsebin iz geometrije in merjenja so imeli (in še vedno imajo) na razpolago učenci 9. razreda. Kot smo že omenili, rešujejo devetošolci pri pouku geometrije predvsem računske naloge, s katerimi imajo le malo možnosti razvijanja geometrijskih predstav, pouk geometrije pa bi moral temeljiti na opazovanju in razvijanju prostorskih predstav ter geometrijskega mišljenja (Kozina, Svetlik in Japelj Pavešić 2012), saj je zmožnost prostorskih predstav pomemben dejavnik pri učenju geometrijskih konceptov in pridobivanju geometrijskih spretnosti (Nickson 2004). S prostorskimi predstavami se ne rodimo, ampak so odvisne od učenja oz. poučevanja, ki ga je posameznik deležen. O tem pričajo številni dokazi, ki kažejo, da ustrezne dejavnosti pri pouku geometrije in izkušnje z oblikami, ki jih učenci pridobijo pri pouku, pomembno izboljšajo prostorske zmožnosti otrok (Ben-Chaim, Lappan in Houang 1988; Van de Walle, Karp in Bay-Williams 2013). Učenci bi morali biti deležni pouka geometrije, kjer bi lahko vizualizirali predmete in jih v mislih obračali. Opredeliti bi morali geometrijske lastnosti predmetov in opisati njihov položaj. Tovrstne sposobnosti učenci pridobivajo predvsem (Van de Walle, Karp in Bay-Williams 2013):

- s spoznavanjem lastnosti geometrijskih oblik in odnosov med njimi;
- z razumevanjem in izvajanjem geometrijskih transformacij;
- z določanjem in opisovanjem položaja predmetov v prostoru ter na ravnini;
- s prepoznavanjem odnosov med tridimenzionalnimi telesi in njihovimi dvodimenzionalnimi predstavitvami ter z opisovanjem pogledov na predmete z različnih zornih kotov – vizualizacija.

Z računanjem obsega in ploščine kvadrata ter pravokotnika se učenci srečajo že v 6. razredu, ne poznajo pa še niti lastnosti likov niti odnosov med geometrijskimi liki. Te spoznajo v 7. razredu, ko rešujejo načrtovalne naloge in so osredotočeni na pravilno rabo geometrijskega orodja, saj pri načrtovanju od učencev zahtevamo natančnost. V istem razredu učenci pri geometriji spoznajo tudi vse obrazce za računanje ploščine geometrijskih likov. Vidimo lahko, da naši učenci obravnavajo like predvsem v 7. razredu.

Vizualizacija kot vsebina pri pouku geometrije vključuje zmožnost ustvariti si miselne slike oblik, jih miselno obračati oz. si jih predstavljati z različnih zornih kotov ter napovedati rezultat teh transformacij. Vključuje tudi miselno usklajevanje dvo- in tridimenzionalnih oblik (Van de Walle, Karp in Bay-Williams 2013). V našem učnem načrtu ciljev, kot je npr. »učenec vizualizira tridimenzionalne objekte iz dvodimenzionalnega pogleda«, ni. Tudi nalog v učbenikih, s katerimi bi učenci izboljšali svojo vizualizacijo, ni oz. jih je zelo malo.

Prostorske predstave

Za razumevanje geometrije moramo imeti dobro razvito prostorsko predstavo, saj je nujna pri vizualizaciji, načrtovanju in konstrukciji oblik, geometrijskem pogledu na fizični svet ter uporabi znakov za prikaz nevizualnih matematičnih konceptov in odnosov. Prostorska predstavljivost je zmožnost miselne vizualizacije predmetov, transformacij in prostorskih odnosov. Zmožnost prostorske predstavljivosti je Gardner (1995) poimenoval prostorska inteligenca in je po njegovem ena izmed sedmih razmeroma samostojnih človeških intelektualnih sposobnosti. Za prostorsko inteligenco so »najpomembnejše zmožnosti pravilnega zaznavanja vidnega sveta, izvajanja pretvorb in sprememb začetnih zaznav, poustvarjanje vidikov svojih vidnih doživetij, celo v odsotnosti ustreznih telesnih dražljajev« (Gardner 1995, 208). Raziskave kažejo, da učni pristop, kjer je večja pozornost na razvijanju prostorskih, vizualnih in kinestetičnih zmožnosti učencev, pripomore k povezovanju med različnimi reprezentacijami osnovnih konceptov (Bryant 2009; Sinclair, Mamolo in Whiteley 2011).

Geometrije se ne moremo učiti, ne da bi imeli prostorske zmožnosti. Obstaja velik obseg dokazov, ki potrjujejo povezanost med geometrijskim znanjem in prostorskimi zmožnostmi (Lean in Clements 1981; Johnson in Meade 1987; Ben-Chaim, Lappan in Houang 1988; Nickson 2004). Prostorske predstave izkoriščamo pri vseh matematičnih vsebinah (aritmetiki, merjenju, obdelavi podatkov idr.), in ne le pri geometriji. Številni matematiki in didaktiki matematike menijo, da imata prostorska zmožnost in vizualna predstava bistveno vlogo v matematičnem mišljenju (Lean in Clements 1981; Clements in Battista 1992). Raziskave so pokazale, da je matematični uspeh v veliki meri odvisen od prostorske zmožnosti na vseh razrednih stopnjah (Fennema in Sherman 1977; Guay in McDaniel 1977; Clements in Battista 1992), saj večina matematičnih konceptov zahteva vizualno predstavo, ki je osnova za usvajanje zahtevnejših, abstraktnejših pojmov. Vendar imajo učitelji pogosto slabo razvite vizualne predstave, potrebne za poučevanje geometrije, zato jih je strah in ne vedo, kateri pristop ubrati (Battista, Wheatley in Talsma 1982; Sinclair, Mamolo in Whiteley 2011).

Rudolf Arnheim, psiholog umetnosti, vidnim in prostorskim predstavam pripisuje vlogo osnovnega vira mišljenja in zmanjšuje vlogo jezika, ker meni, da nismo zmožni jasno misliti o nekem procesu ali pojmu, če nam ne uspe ustvariti njegove predstave (Gardner 1995). Na zmožnost prostorske predstavljivosti vplivajo predvsem izkušnje, ki jih imamo z oblikami in prostorskimi odnosi. Prve izkušnje pridobimo kmalu po rojstvu z opazovanjem in manipuliranjem konkretnih predmetov v prostoru. Fizična dejanja ponotranjimo in posplošimo v koncepte ter odnose (Dickson, Brown in Gibson 1984).

Prostorske predstave nam omogočajo prepoznavanje predmetov in prizorov ter določanje odnosov med predmeti. Pomagajo nam pri orientaciji v prostoru in na zemljevidu ter pri ponazoritvi resničnega sveta z dvo- ali s tridimenzionalnimi predstavitvami. Izkoriščamo jih pri reševanju problemov v vseh znanostih ipd. Prostorske predstave vključujejo *orientacijo* (določanje lege in odnosov med predmeti v prostoru glede na lasten položaj) in *vizualizacijo* prostora (mentalni proces, ki nam omogoča tvorjenje mentalnih podob predmetov in v mislih njihovo premikanje v dvo- ali tridimenzionalnem prostoru).

Thurstone (1938 v Gardner 1995) je opisal tri komponente prostorskih predstav: zmožnost prepoznavanja istovetnosti predmeta, ko ga vidimo iz različnih kotov, zmožnost predstavljati si gibanje ali notranje premikanje med deli neke konfiguracije in zmožnost razmišljanja o tistih prostorskih odnosih, pri katerih je zorni kot opazovalca bistveni del problema. Clements in Battista (1992) navajata dve komponenti prostorskih predstav, kot zelo pomembni pri učenju matematike. Prva je zmožnost interpretiranja slikovnih informacij in vključuje razumevanje vizualnih ponazoritev ter ubeseditev. Druga je zmožnost vizualnega procesiranja, ki vključuje manipulacijo in transformacijo vizualnih ponazoritev ter podob in spremembo abstraktnih odnosov v vizualne ponazoritve. Oba avtorja poudarjata vlogo mentalne vizualizacije prostora, ki ne bi bila mogoča brez začetnega zaznavanja prostora z vsemi čuti. Zaznave oz. podobe prostora shranimo v spomin. Shranjene podobe lahko prikličemo iz spomina in si ustvarimo predstave predmetov tudi v njihovi odsotnosti. Predstavljanje je torej miselni proces, s katerim si ustvarimo miselne podobe prostora, predmetov, slik, simbolov in tudi abstraktnih pojmov. Sposobnost, da z znanimi podobami operiramo v mislih in ustvarimo notranje mentalne podobe (tudi vizualne podobe), imenujemo mentalna vizualizacija. Ljudje z visokimi prostorskimi zmožnostmi so sposobni ustvariti vizualno podobo, si jo predstavljati z različnih zornih kotov in izvajati miselne transformacije ter druge miselne operacije. Kosslyn in Shin (1991) sta opredelila štiri stopnje v procesu predstavljanja: ustvariti podobo, raziskati podobo, transformirati in operirati s podobo ter ohraniti podobo za namene neke druge miselne operacije.

Vizualizacija ima osrednje mesto pri oblikovanju prostorskih predstav. Številne raziskave so pokazale, da lahko prostorske zmožnosti izboljšamo z vajo (Ben-Chaim, Lappan in Houang 1988; Van de Walle, Karp in Bay-Williams 2013). Pri tem je uporaba manipulativnih pripomočkov skorajda nujna. Bishop (1980) je ugotovil, da so učenci, ki so pri učenju uporabili različne pripomočke, v primerjavi z učenci, ki jim je teh pripomočkov primanjkovalo, bolje opravili test prostorskih zmožnosti.

Nekateri teoretiki (Del Grande 1990) menijo, da so prostorske predstave povezane z geometrijo transformacij, saj izvajanje transformacij izboljša zmožnost prostorske vizualizacije in tudi zmožnost logičnega mišljenja.

Razvoj prostorskih predstav

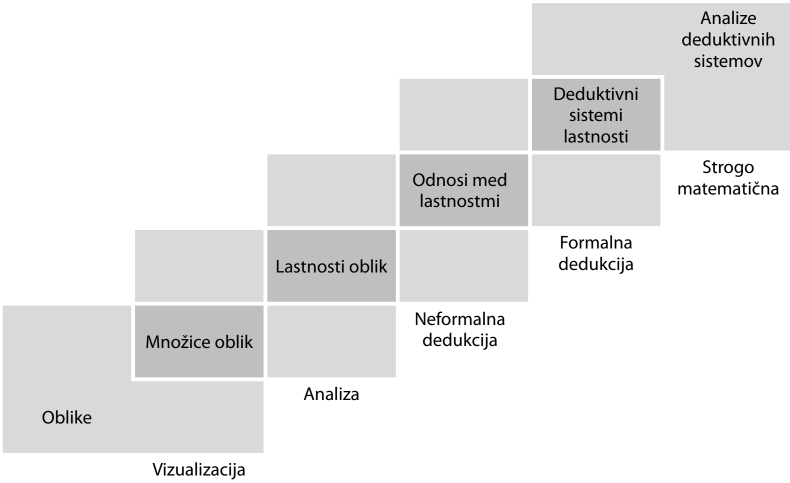
Z razvojem prostorskih predstav se je ukvarjalo le malo raziskovalcev. Izjema je Jean Piaget. Skupaj z Barbel Inhelder sta izvedla več raziskav o razvoju razumevanja prostora pri otrocih. Njuna teorija je bistveno vplivala na razumevanje zaznavanja prostora in oblikovanja prostorskih predstav.

Avtorja v svoji teoriji poudarjata pomen oblikovanja prostorskih predstav v odvisnosti od otrokove interakcije s svetom. Prostorske predstave se oblikujejo preko postopne organizacije otrokovih motoričnih in ponotranjenih aktivnosti, ki se odražajo v njegovem operativnem sistemu (Clements in Battista 1992). Za oblikovanje prostorskih predstav ni dovolj zaznavno posnemanje prostora, ampak je nujno predhodno manipuliranje z objekti v tem prostoru (Clements idr. 1999).

Piaget in Inhelder (1967) govorita o *zaznavnem prostoru* kot o znanju o predmetih, ki ga dobimo z neposrednim stikom z njimi, in o *prostoru miselnih predstav,* kjer gre za priklic predmetov v njihovi odsotnosti. Z opazovanjem in aktivnim rokovanjem s predmeti v prostoru otrok aktivnosti ponotranji. S tem preoblikuje že usvojene prostorske predstave, kar mu postopoma omogoča manipuliranje zgolj z miselnimi predstavami o prostoru. Otrokov zaznavni prostor se razvije v senzomotoričnem obdobju kognitivnega razvoja, sposobnost miselnih predstav pa v predoperacionalnem obdobju. Take predstave so statične in otrok nanje v svojih mislih ne more delovati. V obdobju konkretnih operacij so otroci mnogo bolj sposobni logičnega mišljenja in ravnanja s predmeti v prostoru. V mislih lahko obrnejo neko dejavnost, ki so jo predhodno izvedli (reverzibilnost), in se postopoma lahko vživijo v glediščno točko drugih oseb v prostoru. Vedno bolj se veča sposobnost razmišljanja o prostorsko odsotnih predmetih, ki temeljijo na živih predstavah iz preteklih izkušenj. Vendar je to mišljenje še vedno omejeno na konkretne predmete in dogodke. Šele v obdobju formalnih operacij lahko otroci sledijo razlagi tudi nevidnih predmetov in o prostoru razmišljajo na abstraktnejši način.

Geometrijske predstave

Prevladujejo tri teorije, ki podrobno opišejo razvoj geometrijskih predstav. Njihove temelje so postavili van Hiele (1959), Piaget in Inhelder (1967) ter ko-



Slika 5.1 Van Hielova teorija razvoja geometrijskih predstav (povzeto po Van de Walle, Karp in Bay-Williams 2013, 404)

gnitivni psihologi. Izmed teh je le van Hielova teorija postavila temelje v izobraževanju geometrije.

Van Hiele

Nizozemska didaktika Pierre in Dina van Hiele sta s svojo teorijo razvoja geometrijskih predstav vplivala na kurikularno prenovo v številnih državah. Čeprav sta svoja spoznanja predstavila že leta 1957, je njuno delo privabilo veliko pozornosti šele po letu 1973 (Usiskin 1982).

Zakonca van Hiele sta pojasnila, zakaj ima veliko otrok težave pri razumevanju geometrijskih vsebin. Poleg tega sta natančno razložila, kako lahko te težave odpravimo. Njun model je sestavljen iz petih stopenj, ki opisujejo miselni razvoj geometrijskih konceptov, in sicer od vizualizacije do analize, abstrahiranja in dokazovanja. Učenci napredujejo skozi stopnje s pomočjo vodenega učenja o geometrijskih konceptih. Na vsaki stopnji so opisane bistvene geometrijske ideje, o katerih razmišljamo, kar sta van Hielova imenovala *predmet mišljenja*. Predmeti mišljenja na določeni stopnji se morajo razviti tako, da bodo odnosi med njimi lahko postali osrednja tema mišljenja na naslednji stopnji (Van de Walle, Karp in Bay-Williams 2013), kar imenujemo *rezultat mišljenja*. Rezultat mišljenja na določeni stopnji torej postane predmet mišljenja na naslednji stopnji (slika 5.1). To lastnost stopenj geometrijskega mišljenja je van Hiele poimenoval sosednost (Usiskin 1982).

Van Hielove stopnje razvoja geometrijskega mišljenja (Van de Walle, Karp in Bay-Williams 2013) si sledijo v točno določenem zaporedju in so hierarhično razporejene. Za napredovanje na višjo stopnjo mora učenec obvladati vse predhodne (Clements in Battista 1992).

Stopnja 0 – vizualizacija. *Predmet mišljenja na stopnji 0 so oblike in njihov »izgled«.* Učenci na stopnji 0 prepoznajo in poimenujejo oblike na podlagi vidnega zaznavanja, in ne na podlagi razumevanja njihovih lastnosti. Pri tem pogosto uporabljajo prototipe (npr. »to je kvadrat, ker je podobno oknu«). Lastnosti geometrijskih oblik še ne poznajo. Učenci na tej stopnji verjetno ne bodo prepoznali kvadrata, pri katerem stranica ni vzporedna z listom (tablo). Oblike urejajo in razvrščajo le na podlagi videza.

Clements idr. (1999) so ugotovili, da v množici likov večina predšolskih otrok najlaže prepozna krog, sledi pa mu kvadrat. Nekaj težav imajo s prepoznavanjem trikotnika in pravokotnika.

Otrokom na stopnji vizualizacije moramo ponuditi oblike, ki jih lahko opazujejo, sestavljajo, razstavljajo, z njimi gradijo ipd. Glavni cilj je raziskovati in ugotoviti, kako so si oblike podobne oz. kako se razlikujejo, kar jim omogoča, da postopoma razvrščajo oblike glede na njihove lastnosti in oblikujejo množice. Učenci lahko izdelajo množico trikotnikov, kvadratov in krogov ali množico kvadrov, stožcev in valjev. Oblike lahko razvrščajo glede na njihove lastnosti (npr. na simetrične oz. nesimetrične oblike ali na oglata oz. okrogla telesa).

Rezultat mišljenja na stopnji 0 so množice na videz podobnih oblik.

Stopnja 1 – analiza. *Predmet mišljenja na stopnji 1 so množice oblik (in ne posamezne oblike, kot je bilo to značilno za prejšnjo stopnjo).* Učenci na stopnji analize brez težav razvrščajo oblike v množice, zato se osredotočijo na lastnosti oblik v posamezni množici. Lastnosti spoznajo z opazovanjem, risanjem, merjenjem ipd. Prepoznajo in določijo lastnosti oblik (npr., kvadrat je lik s štirimi enako dolgimi stranicami, stranici sta paroma vzporedni, vsi štirje koti so pravi koti ipd.). Na ta način spoznajo, da določene oblike tvorijo množico zaradi njihovih skupnih lastnosti, zato jih ne razvrščajo več le na podlagi videza. Lastnosti posamezne oblike posplošijo na vse oblike iz določene množice.

Učenci prepoznajo in znajo določiti oblike glede na njihove lastnosti, vendar pa med geometrijskimi oblikami še ne vidijo smiselnih povezav (npr. učenci prepoznajo vse lastnosti kvadrata in pravokotnika, vendar še ne zaznajo, da je kvadrat poseben pravokotnik; zanje sta to popolnoma različna lika). V raziskavi, kjer sta sodelovala 402 enajstletnika, je le 8 % otrok določilo, da je tudi kvadrat pravokotnik (Dickson, Brown in Gibson 1984).

Rezultat mišljenja na stopnji 1 so lastnosti oblik.

Stopnja 2 – neformalna dedukcija. *Predmet mišljenja na stopnji 2 so lastnosti oblik.* Učenci so, ne da bi mislili na konkretno obliko, sposobni razmišljati o lastnostih geometrijskih oblik in zaznati odnose med temi lastnostmi (npr. če so v liku vsi štirje koti pravi, potem je ta lik pravokotnik; vsi koti v kvadratu so pravi; torej je tudi kvadrat pravokotnik). Na podlagi sklepanja so sposobni določiti oblike le z majhnim številom opredeljenih značilnosti (npr. lik s štirimi skladnimi stranicami in enim pravim kotom imenujemo kvadrat). Učenci ne opazujejo le lastnosti oblik, ampak se osredotočajo na logične argumente o lastnostih. Sposobni so slediti in razumeti neformalno deduktivno podanim dokazom. Čeprav so dokazi bolj intuitivni kot strogo deduktivni, učenci razumejo logične implikacije. Odnose med geometrijskimi elementi in definicije so sposobni razumeti, vendar le z vodenim učenjem (Dickson, Brown in Gibson 1984). Še vedno pa ne razumejo aksiomatske strukture formalnega deduktivnega sistema.

Rezultat mišljenja na stopnji 2 so odnosi med lastnostmi geometrijskih oblik.

Stopnja 3 – dedukcija. *Predmet mišljenja na stopnji 3 so odnosi med lastnostmi geometrijskih oblik.* Učenci na stopnji dedukcije ne razmišljajo več le o lastnostih geometrijskih oblik, ampak o dokazih, ki so z njimi povezani. Sposobni so razumeti abstraktnejše izjave. Aksiome in definicije logično interpretirajo, ne več le intuitivno. Učenci so sposobni oblikovati dokaze na nivoju visokošolske geometrije, ko začnejo graditi celoten geometrijski sistem na deduktivni način.

Rezultat mišljenja na stopnji 3 so deduktivni aksiomski sistemi za geometrijo.

Stopnja 4 – strogo matematična stopnja. *Predmet mišljenja na stopnji 4 so deduktivni aksiomski sistemi za geometrijo.* Učenci na najvišji stopnji razumejo razlike in odnose med aksiomskimi sistemi. Vedo, da je evklidska geometrija le eden izmed abstraktnih matematičnih svetov in razumejo neevklidske sisteme. Razumejo in pri opisu geometrijskih lastnosti uporabljajo aksiome, definicije in izreke. Geometrijo popolnoma razumejo na abstraktnem nivoju, in to brez uporabe konkretnih ponazoritev (Dickson, Brown in Gibson 1984).

Strogo matematična stopnja je značilna za univerzitetni nivo študija matematike. Doseže jo le nekaj učencev oz. študentov.

Rezultat mišljenja na stopnji 4 so primerjave različnih aksiomskih sistemov geometrije.

Van Hiele (1959) je zelo podrobno opisal prve tri stopnje (stopnjo vizualizacije, analize in neformalne dedukcije). Dokumentiral je številne konkretne odgovore učencev med aktivnostmi iz geometrije, na podlagi katerih je določil stopnjo njihovega geometrijskega mišljenja. O višjih stopnjah (stopnji dedukcije in strogo matematični stopnji) je običajno govoril le v splošnem. Citatov učencev, ki bi natančno opisali geometrijsko mišljenje na višjih stopnjah, skorajda ni. Da je opis nižjih stopenj natančnejši in konkretnejši kot opis višjih stopenj, je popolnoma razumljivo, saj sta bila tako Dina kot tudi Pierre van Hiele osnovnošolska učitelja, zato sta imela veliko več možnosti opazovati učence na prvih treh stopnjah geometrijskega mišljenja (Fuys, Geddes in Tischler 1988).

Van Hielove stopnje razvoja geometrijskega mišljenja niso odvisne od starosti ali biološke zrelosti (Van de Walle, Karp in Bay-Williams 2013). Zgodi se lahko, da sta učenec 3. razreda in dijak na isti stopnji. Predšolski otroci so seveda na stopnji vizualizacije, vendar le zato, ker še nimajo dovolj geometrijskih izkušenj. Za napredovanje v višjo stopnjo morajo učenci imeti zadostne in ustrezne geometrijske izkušnje, ki jih pridobijo z raziskovanjem, s pogovorom in z interakcijo z vsebino na naslednji stopnji, hkrati pa povečajo njihove izkušnje na trenutni stopnji. Napredovanje v višjo stopnjo je odvisno bolj od socialnih vplivov in poučevanja, ki so ga učenci deležni, kot od starosti otrok (Clements idr. 1999).

Kritičen dejavnik prehajanja med stopnjami je struktura jezika (Clements in Battista 1992; Fuys, Geddes in Tischler 1988). Ko je poučevanje na stopnji višje, kot so učenci, ti ne bodo razumeli geometrijskih konceptov, saj ima vsaka stopnja svoj geometrijski jezik. Usiskin (1982) je ugotovil, da je večina dijakov na stopnji analize, medtem ko srednješolski pouk geometrije poteka na stopnji dedukcije. Pokazal je tudi, da pouk geometrije, ki poteka na stopnji višje, kot so učenci, učencem ne omogoča napredovanja v višjo stopnjo. Zato je že med izobraževalnim procesom treba ugotoviti, katere termine uporabljajo učenci za opis geometrijskih konceptov, in pouk prilagoditi stopnji geometrijskega mišljenja učencev.

Wirszup (1976) trdi, da so otroci, ki nimajo temeljnega znanja na nižjih stopnjah, obsojeni na neuspeh. Nekateri učenci bodo sprejeli učiteljevo razlago in učitelja celo posnemali, vendar dokler ne dosežejo predmeta mišljenja, ki je značilen za posamezno stopnjo, ne bodo sposobni lastnih aktivnosti (Fuys, Geddes in Tischler 1988).

Van Hiele (1959) je bil prepričan, da je kognitivni razvoj v geometriji mogoče pospešiti s poučevanjem. Pouk geometrije bo učinkovit le, če bodo učenci miselno aktivni. V nasprotnem primeru lahko dosežemo le memoriziranje postopkov, ki so potrebni za reševanje geometrijskih nalog. Fuys, Geddes in Tischler (1988) so ugotovili, da večina učencev meni, da raziskovanje in utemeljevanje ne spadata v šolsko matematiko. Prepričani so, da v matematiki veljajo pravila, ki jih ni treba pojasnjevati.

Miselno aktivnost učencev pri pouku geometrije lahko dosežemo z ustreznim pristopom (van Hiele 1959). Van Hiele (1959) je prispeval podrobna pojasnila, kako naj učitelj deluje, da učencem omogoči prehod na višjo stopnjo. Učni proces, ki omogoča popolno razumevanje in prehod na višjo stopnjo, poteka v petih fazah, predstavljenih v nadaljevanju, ki si ne sledijo nujno v tem vrstnem redu (Fuys, Geddes in Tischler 1988; Usiskin 1982).

Preverjanje in seznanjanje. Učitelj učence seznani z novo vsebino (npr. s primeri in protiprimeri) in hkrati ugotavlja, kakšno je njihovo predznanje o tej vsebini.

Vodena orientacija. Učenec raziskuje novo vsebino s pomočjo ustreznega didaktičnega gradiva, ki ga je učitelj skrbno izbral in pripravil. Take aktivnosti bi postopoma morale učencem odkriti strukture, ki so značilne za to stopnjo.

Razlaga. Na podlagi predhodnih izkušenj učenci izrazijo svoje mnenje glede struktur, ki so jih opazovali, in si jih med seboj izmenjajo. Učiteljeva vloga je minimalna, saj učencem pomaga le pri uporabi natančnega in ustreznega geometrijskega jezika.

Prosta orientacija. Učenci se srečajo in raziskujejo zahtevnejše geometrijske probleme z odprto potjo pa tudi z odprtim ciljem.

Primer *Raziskuj pravokotne trikotnike na geoplošči* 3 × 3.

Osnovni namen takih problemov ni v razumevanju pojmov ali ponavljanju snovi in različnih postopkov, ampak v pridobivanju znanj o obravnavanju problemskih situacij. Predvsem skušamo učenca naučiti samostojnega razmišljanja v novih situacijah, seveda na nivoju, ki ga zmore in razume (Allen 2006). To pa zahteva sposobnost postavitve izhodišč in ciljev, uporabo preprostih orodij za strukturiranje ter sposobnost iskanja pravilnosti in zakonitosti v pregledno strukturirani množici. Gre torej za neka osnovna in preprosta problemska znanja (Magajna 1996).

Primera različnih načinov raziskovanja, ki bi jih lahko izbrali učenci, sta:

- učenci izračunajo ploščine vseh različnih pravokotnih trikotnikov na geoplošči 3 × 3 in jih nato uredijo po ploščini od najmanjšega do največjega;
- učenci pravokotne trikotnike razvrstijo glede na lastnost »je enakokrak«.

Učenci v razredu lahko komentirajo vse načine reševanja geometrijskih problemov (v čem se razlikujejo, kaj imajo skupnega, kateri se jim zdi »najenostavnejši« oz. »najlažji«, zakaj ipd.).

Integracija. Učenci naredijo povzetek o novopridobljenem znanju, da dobijo pregled nad celotno vsebino in razmislijo o lastnih aktivnostih. Učitelj jih pri tem le usmerja. Učenci nova spoznanja povežejo in ponotranjijo.

Z van Hielovim pristopom učenci ne le prehajajo na višje stopnje geometrijskega mišljenja, pač pa tudi spoznajo, da je utemeljevanje nujno pri reševanju geometrijskih problemov in postopoma samostojno oblikujejo svoje razlage (Fuys, Geddes in Tischler 1988).

Bistvene lastnosti van Hielovih stopenj so:

- stopnje si sledijo v točno določenem zaporedju;
- vsaka stopnja ima svoj jezik in svoje simbole;
- rezultat mišljenja na neki stopnji postane predmet mišljenja na naslednji stopnji;
- napredovanje na višjo stopnjo je odvisno predvsem od metod poučevanja in ne toliko od starosti ali zrelosti;
- učenec mora skozi različne faze učenja, da bo napredoval z neke stopnje na naslednjo.

Kritike van Hielove teorije. Kritiki so van Hielove stopnje preštevilčili od 1 do 5, saj so dokazali, da obstaja stopnja, ki je še osnovnejša od vizualne stopnje. Raziskovalci (Clements in Battista 1992; Clements idr. 1999) so na podlagi raziskav pred vizualno stopnjo dodali t. i. *predspoznavno stopnjo* in njen obstoj tudi dokazali. Na tej stopnji si otroci oblikujejo šele začetne predstave o geometrijskih pojmih in vizualno zaznajo le nekatere geometrijske oblike, npr. razlikujejo med kvadratom in krogom, vendar razlik med kvadratom in trikotnikom ne vidijo. V svojih zadnjih delih je van Hiele (1959) združil zadnje tri stopnje in razvoj geometrijskega mišljenja opisal s tremi stopnjami: vizualizacijo, analizo in teoretično stopnjo. Kritiki tej združitvi oporekajo, saj menijo, da model ni več zadosten za karakterizacijo znanja (Clements in Battista 1992; Fuys, Geddes in Tischler 1988).

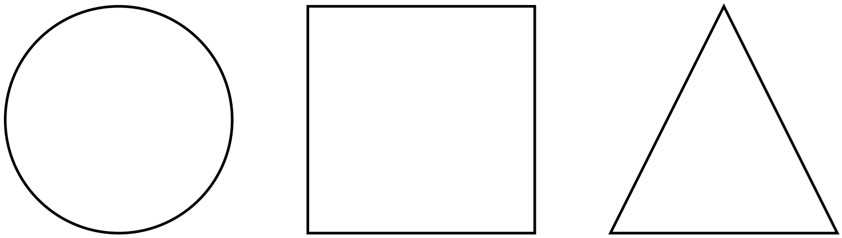
Raziskovalci, ki so preučevali van Hielove stopnje, so se spraševali, ali lahko učenčevo znanje enolično določimo in omejimo le na eno stopnjo. Učenec lahko dosega različne stopnje znanja glede na različna geometrijska področja. Spraševali so se tudi, ali je vedno očitno, na kateri stopnji je učenec. Med raziskavami ni bilo popolnoma jasno, kdaj je učenec dosegel določeno stopnjo. Kljub temu Clements in Battista (1992) potrjujeta, da so van Hielove stopnje pomembne in uporabne pri določanju razvoja geometrijskih konceptov učencev tako za osnovnošolce kot za študente.

Piaget in Inhelder

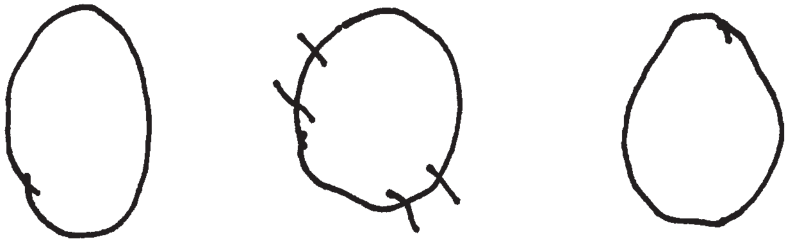
Raziskava enega izmed najvplivnejših psihologov, Jeana Piageta, ki je potekala v zgodnjih 40. letih 20. stoletja, je postavila temelje razvoju geometrijskega zaznavanja otrok. V svoji knjigi sta z Bärbel Inhelder prispevala teorijo o otrokovem pojmovanju prostora. Piaget je za testiranje otrokovih zmožnosti zaznavanja prostora opazoval risbe otrok in izdelal naloge, kjer so otroci morali prepoznati in poimenovati geometrijske oblike, vezati različne vozle ipd. (Wittmann 2010). V svojih testih je preverjal sposobnost prepoznave geometrijskih oblik z dotikom (Dickson, Brown in Gibson 1984). Na podlagi teh nalog je trdil, da si razvoj geometrijskih predstav sledi v določenem zaporedju, in sicer se najprej oblikujejo predstave o *topoloških relacijah* (sklenjenost), kasneje o *projektivnih relacijah* (ravnost) in nazadnje o *evklidskih relacijah* (vzporednost, dolžina). Razlika med njimi se nanaša na način, kako so oblike ali predmeti med seboj povezani. Topološke relacije se nanašajo na določeno obliko, projektivne vključujejo relacije med oblikami in predmeti, evklidske pa relacije med samimi oblikami (Clements in Battista 1992).

V eni izmed eksperimentalnih nalog so morali otroci prerisati določene oblike (slika 5.2). Triletni otroci so krog večinoma narisali z nepravilno sklenjeno krivuljo (slika 5.3). Tudi kvadrat in trikotnik so narisali z nepravilno sklenjeno krivuljo in lika se od kroga ne razlikujeta (slika 5.3). Seveda triletniki niso sposobni narisati kvadrata in trikotnika z ravnimi črtami (Wittmann 2010). S podobnimi nalogami sta Piaget in Inhelder (1967) ugotovila, da otroci pri tej starosti zaznavajo osnovne prostorske odnose, ki sta jih označila kot *bližina, razlikovanje, urejenost, sklenjenost* in *kontinuiteta*. Ti odnosi so osnovne lastnosti, ki opišejo topološki prostor, in so tuji razdalji, kotom, strogim oblikam in projektivnimim odnos. Po njunem mnenju so torej prvi prostorski odnosi, ki jih otroci spoznavajo na predoperacionalni stopnji kognitivnega razvoja, topološke narave. Do približno tretjega leta (v senzomotoričnem obdobju) je težko ugotoviti prostorske predstave otrok, ker v tem obdobju le čečkajo. V začetnem pojmovanju prostora je avtor odkril visoko abstraktne matematične strukture, vendar se je zavedal razlik med strogimi matematičnimi operacijami in intuitivnimi prostorskimi predstavami (Wittmann 2010).

Veliko psihologov in didaktikov oporeka izjavi, da risanje oblik izraža topološke ideje otrok, saj menijo, da se nepravilnosti pojavijo zaradi motorične nespretnosti. Piaget in Inhelder sta prepričana, da se prostorske predstave



Slika 5.2 Geometrijske oblike, ki so jih otroci prerisovali v Piagetovi raziskavi (povzeto po Piaget in Inhelder 1967, 54)



Slika 5.3 Geometrijske oblike, ki so jih narisali otroci v Piagetovi raziskavi (povzeto po Piaget in Inhelder 1967, 56)

razvijajo linearno z risanjem, jezikom in mišljenjem v splošnem (Wittmann 2010), in svojo trditev zagovarjata s primeri risb otrok (npr. otrok je lahko narisal drevo s pravimi koti, ni pa mogel narisati kvadrata) (Clements in Battista 1992).

Projektivne relacije nastopijo takrat, ko otrok razvije sposobnost predstave o prostoru z drugih perspektiv in ne več samo s svoje perspektive, kar je značilno za obdobje konkretnih operacij. Znan je preizkus »tri gore«, s katerim so ugotavljali otrokovo zmožnost privzeti drugo perspektivo. Na podlagi tega preizkusa sta Piaget in Inhelder sklepala, da je koordinacija različnih perspektiv predpogoj pri izgradnji enostavnih projektivnih relacij (Clements in Battista 1992). Ena izmed projektivnih lastnosti, ki jih v tem obdobju razvije otrok, je ravnost, saj so ravne črte videti ravne z vsakega zornega kota (Piaget in Inhelder 1967).

Evklidske relacije se razvijejo v obdobju formalnih operacij. To so tiste geometrijske lastnosti, ki se nanašajo na velikost, razdaljo in usmerjenost, kar posledično vodi v merjenje dolžine, kotov, površine ipd. (Dickson, Brown in Gibson 1984). Piaget in Inhelder (1967) sta raziskovala, kako otroci gradijo geometrijske predstave, medtem ko prehajajo iz projektivnega v evklidski prostor. S konstrukcijo podobnih geometrijskih oblik sta prikazala postopno usvajanje konceptov kota in vzporednosti, kar otrokom omogoča razlikovanje med liki (npr., otrok razlikuje med trapezom in pravokotnikom na podlagi velikosti kotov in dolžin stranic) (Clements in Battista 1992).

Ali otroci razumejo koncepta vodoravnost in navpičnost kot lastnosti evklidskega prostora, sta Piaget in Inhelder preverila tako, da sta otrokom pokazala steklenico, ko je bila do polovice napolnjena z vodo. Napovedati oz. narisati so morali lego vode v steklenici, če steklenico nagnemo. Otroci so bili sposobni pravilno napovedati lego vode okrog devetega leta (Piaget in Inhelder 1967). Na podlagi tega preizkusa sta Piaget in Inhelder sklepala, da je otrok zmožen natančno določiti prostorske odnose med predmeti v nekem okolju šele na zadnji stopnji zaznavanja prostora (Clements in Battista 1992).

Kritike teorije Piageta in Inhelderjeve. Čeprav je bilo delo Piageta in Inhelderjeve o otrokovem pojmovanju prostora zelo vplivno, je bilo deležno številnih kritik.

Lesh in Mierkiewicz (1978) sta pripomnila, da je Piaget dajal prevelik pomen razlikovanju med zaznavanjem in miselnimi predstavami. Zaznavanje pojmujeta kot kompleksen organizacijski proces, ki se od miselnih predstav razlikuje le v stopnji. Kot primer navajata dveletnega otroka, ki se lahko nauči pravilno poimenovati kvadrate in trikotnike, vendar mora za to imeti neke miselne predstave teh likov, ki so v skladu z njegovimi zaznavami.

Vprašljiva je raba izrazov, kot so topološki, razlikovanje, bližina in evklidski, ki niso matematično pravilni (Darke 1982; Kapadia 1974; Martin 1976a; Clements in Battista 1992). Piaget ne uporablja matematično sprejemljivih definicij, ki veljajo za topološke, projektivne in evklidske lastnosti (Dickson, Brown in Gibson 1984).

Kritiki se ne strinjajo z razvrščanjem geometrijskih oblik v topološke ali evklidske, saj imajo vse oblike tako topološke kot tudi evklidske lastnosti (Clements in Battista 1992).

Mnogi kritiki se ne strinjajo s trditvijo, da se topološke ideje razvijejo prve. Clements in Battista (1992) menita, da niso topološke lastnosti tiste, ki otrokom omogočajo, da prepoznajo določeno geometrijsko obliko, ampak so za to zaslužne lastnosti, ki jih prepoznamo na pogled, kot so oglišča, krivulje in koti. Prepričana sta, da se ne oblikujejo najprej topološke, potem projektivne in nazadnje evklidske ideje o prostorskih predstavah, ampak se te ideje oblikujejo istočasno in so sčasoma vse bolj povezane. Podobnega mnenja je Darke (1982), ki je svojo obsežno kritiko dela teorije, ki pravi, da se najprej oblikujejo topološke predstave, podprl z dokazi. Številne raziskave so pokazale, da so pri zaznavanju prostora predšolskega otroka, poleg topoloških idej, prisotne tudi evklidske ideje (Rosser, Campbell in Horan 2003; Geeslin in Shar 1979). Coxford (1978) pravi, da se nekateri topološki koncepti najverjetneje oblikujejo prej, drugi (npr. topološka ekvivalentnost) pa kasneje, in sicer šele ko otroci spoznajo nekatere evklidske in projektivne lastnosti, četudi so topološke ideje matematično neodvisne od topoloških ali projektivnih konceptov.

Nekateri raziskovalci so poskuse, ki sta jih izvajala Piaget in Inhelder, ponovili in ugotovili, da so otroci, mlajši od treh let, že sposobni razlikovati med krivočrtnimi in ravnočrtnimi oblikami (Clements in Battista 1992).

Številnih kritik so deležne tudi Piageteve metode raziskovanja, saj se rezultati nekaterih raziskav zelo razlikujejo. Martin (1976b) trdi, da risbe geometrijskih oblik, ki so jih izdelali štiriletni otroci, ne izražajo topoloških značilnosti. Opozoril je, da ne bi smeli biti pozorni na topološke lastnosti, ki otrokom pri prerisovanju oblik omogočajo homeomorfične slike, ampak na vse večjo usklajenost evklidskih in projektivnih lastnosti, saj se pri tem topološke lastnosti samodejno ohranjajo.

Fuson in Murray (1978) sta pokazala, da je pri prepoznavanju geometrijskih oblik z dotikom pomembna velikost teh oblik. Ugotovila sta, da otroci z dotikom lažje prepoznajo manjše geometrijske oblike od tistih, ki jih je pri podobni raziskovalni nalogi uporabil Piaget. Večje oblike težje prepoznajo predvsem zaradi nesistematičnega pristopa pri raziskovanju oblik. Ugotovila sta tudi, da večina otrok prepoznati krog, kvadrat, trikotnik in romb že pri treh letih in pol, vendar jih še ne zmore narisati. Krog in kvadrat narišejo pri štirih letih, trikotnik in romb pa šele po petem letu. Otroci so se nekoliko bolje odrezali pri konstrukciji likov iz paličic. Kvadrat so uspešno izdelali že otroci, stari tri leta in pol, medtem ko sta romb uspešno konstruirali le dve tretjini otrok, starih šest let in pol.

Donaldsonova (1978 v Dickson, Brown in Gibson 1984) trdi, da s preizkusom »treh gora« ne moremo dokazati egocentričnosti otrok in njihove nezmožnosti videti stvari z druge perspektive kot s svoje, saj pravi, da ta preizkus ni prilagojen otrokom. Nalogo je preoblikovala in prilagodila mlajšim otrokom ter pokazala, da si že štiriletniki (in tudi triletniki) lahko predstavljajo stvari z zornega kota druge osebe.

Primerjava teorij van Hiela in Piageta

Van Hielova teorija razvoja geometrijskih prestav se zelo razlikuje od Piagetove teorije o otrokovem pojmovanju prostora. Kljub temu imata teoriji kar nekaj skupnih lastnosti. Obe poudarjata pomembnost učenčeve vloge pri aktivni izgradnji lastnega znanja. Če učenec še ni dosegel določene stopnje, bo učiteljeva neposredna pomoč neuspešna, saj bo brez razumevanja le posnemal učiteljevo razlago – takrat pa ne moremo govoriti o učenčevem napredku. Napredek učenca učitelj ugotovi tako, da posluša, kaj je učenec samostojno odkril. Torej dober učitelj ni tisti, ki z razumljivo razlago učence nauči, ampak tisti, ki prepozna težave učencev in jih vodi k uspešni izgradnji lastnega znanja.

V nasprotju s Piagetovim prepričanjem van Hiele verjame, da je kognitivni razvoj v geometriji mogoče pospešiti z ustreznim učenjem in poučevanjem. Van Hiele je prispeval podrobna pojasnila, kako naj bi učitelj deloval, da bi učencem omogočil hitrejši in enostavnejši prehod na višjo stopnjo, Piaget pa je prepričan, da lahko otroci preidejo na višjo stopnjo le z lastnim delovanjem, ki je odvisno od njihove starosti.

Denisova (1987 v Clements in Battista 1992) je s pomočjo raziskave ugotovila povezanost Piagetovih stopenj kognitivnega razvoja z van Hielovimi stopnjami razvoja geometrijskega mišljenja. Pravi, da van Hielove stopnje potekajo hierarhično preko Piagetove stopnje konkretnih in formalnih operacij. Kljub temu pa van Hiele meni, da nivoji in obdobja, ki jih je opisal Piaget, niso povezani s starostjo, ampak so značilni za učne procese ne glede na starost, pri kateri potekajo. Van Hiele se s Piagotevim prepričanjem, da je logično mišljenje osnovno mišljenje, ni strinjal. Trdil je, da je logično mišljenje mogoče razviti le na temeljih prejšnjih stopenj mišljenja, ki jih Piaget ni poznal, saj je predhodno odkril stopnje drugačne narave (Clements in Battista 1992).

Kognitivni psihologi

Razvoj geometrijskih predstav so preučevali številni kognitivni psihologi, ki so si prizadevali, da bi razumeli, kako se učenci učijo geometrijo. Pri tem so poskusili vključiti spoznanja iz psihologije, filozofije, jezikoslovja in umetne inteligence. Med najopaznejšimi kognitivnimi psihologi, ki so preučevali razvoj geometrijskih predstav, sta Anderson in Greeno. Podrobno sta raziskala kognitivne procese, ki so potrebni za reševanje geometrijskih problemov, in izdelala računalniške simulacije miselnih procesov (Clements in Battista 1992).

Andersonov kognitivni model. V svojem kognitivnem modelu (model ACT – Adaptive Control of Thought) Anderson (1983) poudarja dva tipa znanja, in sicer *deklarativno* in *proceduralno*. Deklarativno znanje je »vedeti, kaj« (npr. poznati postulate in teoreme in jih predstaviti oz. opisati), proceduralno znanje pa je »vedeti, kako« in se kaže v delovanju. Nanaša se na akcije, ki se morajo zgoditi, da bi dobili rezultat.

Anderson (1983) je določil tri stopnje razvoja znanja in spretnosti: deklarativno stopnjo, stopnjo zbiranja znanja in proceduralno stopnjo (Royer, Cisero in Carlo 1993). Vsa znanja sprva nastopijo v deklarativni obliki in morajo biti predstavljna s splošnimi procedurami oz. dejstvi. Z raznimi aktivnostmi, predvsem z reševanjem problemov, procedure ponotranjimo, kar nam omogoča, da se deklarativno znanje postopoma spremeni v proceduralno. Stopnjo prehajanja iz deklarativne v proceduralno imenujemo stopnja zbiranja znanja. Na tej stopnji potekata dva procesa, ki ju Anderson imenuje *proceduralizacija* in *kompozicija*. Prvi je proces spreminjanja, v katerem učenec oblikuje metodo, ki je specifična za produkcijo znanja. Učenec mora biti sposoben presoditi, katero znanje je ustrezno v določeni situaciji. Proces presoje je kompozicija. Proceduralizacija in kompozicija se dopolnjujeta, rezultat teh dveh procesov pa imenujemo *kompilacija znanja* (Kraiger, Ford in Salas 1993; Clements in Battista 1992; Royer, Cisero in Carlo 1993). Svojo teorijo je Anderson preizkusil s srednješolci, ki so izvajali dokaze s področja geometrije (Anderson idr. 1995).

Učenje po tem modelu vključuje (Clements in Battista 1992):

- pridobivanje deklarativnega znanja;
- uporabo deklarativnega znanja v novih situacijah z raziskovanjem in iskanjem podobnosti;
- zbiranje posebnih in neodvisnih rezultatov;
- utrjevanje deklarativnega in proceduralnega znanja.

Znanje, ki ga zahteva reševanje problemskih nalog, lahko opišemo kot skupek deklarativnega in proceduralnega znanja, ki je tesno povezan s prakso. Šibko znanje se kaže v napakah, ki jih z vajo odpravimo. S poučevanjem in popravljanjem napak oz. dajanjem povratne informacije se deklarativno in proceduralno znanje krepi, kar omogoča hitrejšo izvedbo nalog z manj napakami (Anderson idr. 1995). Učencem moramo zagotoviti okolje, v katerem bodo lahko uporabljali pridobljeno proceduralno znanje in ga na ta način urili (Clements in Battista 1992).

Greenov model reševanja geometrijskih problemov. Greeno (1984) je na podlagi reševanja geometrijskih problemov šestih devetošolcev osnoval računalniški model, ki simulira reševanje geometrijskih problemov učencev. Računalniška simulacija temelji na treh temeljnih sposobnostih, ki naj bi jih imeli učenci za reševanje geometrijskih problemov. Učenci morajo najprej poznati terminologijo, ki se uporablja pri sklepanju (npr. če – potem). Sposobnost sklepanja in uporaba ustrezne terminologije sta prva in glavna stopnja pri reševanju geometrijskih problemov. Druga temeljna sposobnost je s pomočjo zaznavnih konceptov prepoznati vzorce oz. primere, ki so bili predhodno navedeni v številnih trditvah in teoremih. Poleg tega je za uspešno reševanje geometrijskih problemov potrebno strateško znanje, ki vključuje poznavanje splošnih in različnih načinov reševanja problemov (Greeno 1979).

Prvi dve sposobnosti učenci pridobijo že pri pouku geometrije, sposobnosti strateškega reševanja geometrijskih problemov pa ne. Strateške principe v najboljšem primeru spoznajo posredno pri pouku, večina učiteljev pa jih pri reševanju geometrijskih problemov ne poudari. Zato morajo učenci strategije reševanja poiskati sami. Tako se učenci naučijo strategij reševanja, ki so jih sposobni tudi izvajati, vendar teh ne znajo opisati ali analizirati. Greeno (1979) predlaga neposredno učenje strateških principov pri pouku geometrije. Prepričan je, da je jasna oz. vodena oblika pouka, kjer učenje strategij reševanja problemov poteka po korakih, učinkovitejša kot oblika pouka, kjer učenci samostojno odkrivajo strategije za reševanje geometrijskih problemov. V nasprotju z njegovim prepričanjem van Hiele trdi, da učenci lahko napredujejo na višje stopnje geometrijskega mišljenja le, če jih soočimo z dejavnostmi, ki omogočajo aktivno raziskovanje geometrijskih konceptov in samostojno reševanje problemov. Velika verjetnost je tudi, da bodo učenci naučene strategije reševanja geometrijskih problemov znali ponoviti, vendar jih ne bodo razumeli (Van de Walle, Karp in Bay-Williams 2013).

Kritike kognitivnih psihologov. Greenov model je bil deležen številnih kritik iz izobraževalnih vrst, saj pri svojem modelu ni upošteval različno razvitih sposobnosti učencev za dojemanje matematičnih oz. geometrijskih konceptov (Greeno 1979). Poleg tega je v raziskavo vključil zelo majhen vzorec, zaradi česar je posploševanje vprašljivo. Majhno število sodelujočih v raziskavah očitajo tudi drugim kognitivnim psihologom, ki so preučevali geometrijsko mišljenje učencev (Clements in Battista 1992).

Večina kognitivnih modelov ne upošteva učenčevega razvoja kvalitativno različnih nivojev mišljenja in predstav, motivacije, smiselnosti razlage določene vsebine, intuicije in kulture matematičnega mišljenja. Iz raziskav kognitivnih psihologov ni povsem razvidno, ali se je celotno proceduralno znanje razvilo iz kompilacije predhodno pridobljenega deklarativnega znanja. Kritiki menijo, da veliko učencev matematične ideje pridobi samo proceduralno, te procedure pa ne povežejo s koncepti. Učenci pogosto izvajajo zaporedne matematične procese, pri tem pa niso sposobni opisati, kaj delajo ali zakaj (Clements in Battista 1992).

Učenje geometrije po metodi van Hiele

Omenili smo že, da je imela van Hielova teorija razvoja geometrijskih predstav velik vpliv na prenovo učnih načrtov v številnih državah. Geometrijo, ki velja za abstraktno in zelo zahtevno matematično področje, sta zakonca van Hiele prilagodila stopnji otrokovega razvoja geometrijskih predstav. Na podlagi njunih spoznanj so didaktiki matematike predlagali številne aktivnosti, ki otrokom omogočajo enostavnejši prehod med stopnjami.

Na začetku osnovne šole, ko učenci spoznajo le nekatere osnovne geometrijske pojme, so običajno vsi učenci na stopnji vizualizacije. Geometrijske oblike kot celoto prepoznajo in poimenujejo na podlagi vizualnih značilnosti, in ne na podlagi posamezne lastnosti teh oblik. Postopoma učenci spoznajo geometrijske lastnosti v prostoru in na ravnini ter prehajajo na višje stopnje geometrijskega mišljenja. Vsak učenec, ki uspešno zaključi osnovnošolski izobraževalni program, bi se moral nahajati na stopnji neformalne dedukcije, torej na drugi van Hielovi stopnji. Na tej stopnji učenci ne razmišljajo le o lastnostih geometrijskih elementov, ampak o odnosih med njimi. Slediti bi morali logičnemu utemeljevanju in sposobni bi morali biti domnevati ter uporabljati argumente »če – potem«. Le tako bodo lahko sledili abstraktnemu pouku geometrije v srednji šoli.

Da lahko otroke učimo geometrijo in jim poučevanje ustrezno prilagodimo, moramo najprej ugotoviti, na kateri stopnji geometrijskega mišljenja po van Hielu se učenci nahajajo. Kot smo že omenili, so v začetnem izobraževanju geometrije vsi učenci na stopnji vizualizacije. Kasneje, predvsem v primeru učencev tretjega vzgojno-izobraževalnega obdobja, so lahko učenci istega razreda na različnih stopnjah geometrijskega mišljenja.

Enostavnega in enotnega testa za ugotavljanje, na kateri van Hielovi stopnji se nahajajo učenci, ni. Van de Walle, Karp in Bay-Williams (2013) pravijo, da morajo biti učitelji pri opredeljevanju učencev glede na njihovo stopnjo vizualizacije oz. analize, pozorni na naslednje:

- Ali lahko učenci geometrijske oblike sortirajo v množice?
- Ali se trditve učencev pri pojasnjevanju nanašajo na posamezno obliko določene množice oblik (na točno določen pravokotnik) ali na celotno množico teh oblik (na množico pravokotnikov)?
- Ali učenci razumejo, da se geometrijska oblika ne spremeni, kljub temu da se spremeni njena orientacija ali velikost?

Če so učenci že na stopnji 1, mora učitelj preveriti, ali so ti učenci sposobni razmišljati o geometrijskih konceptih tudi na stopnji višje, torej na stopnji neformalne dedukcije. Učitelj mora biti pozoren na to, ali učenci sledijo logičnemu utemeljevanju in ali so sposobni domnevati ter uporabljati argumente »če – potem« (prav tam). Jezik, ki ga uporabljajo učenci za opis osnovnih geometrijskih konceptov, je pomemben dejavnik, ki vpliva na njihovo uspešnost pri geometriji. Učenci na stopnji analize oz. učenci, ki prehajajo na stopnjo neformalne dedukcije, si hitro zapomnijo terminologijo, ki je potrebna za induktivno in deduktivno sklepanje v geometriji. Naučeni jezik tudi ustrezno uporabljajo (Fuys, Geddes in Tischler 1988).

Fuys, Geddes in Tischler (1988) so iz različnih virov zbrali odgovore učencev, ki natanko določajo stopnjo otrokovega geometrijskega mišljenja. V nadaljevanju smo navedli le nekatere odgovore učencev na prvih treh stopnjah.

– Stopnja 0:
  - učenec prepozna kvadrate v množici likov;
  - učenec oblikuje dani lik (npr. s palicami oblikuje pravokotnik);
  - učenec pokaže kot v trikotniku in ga imenuje »kot« ali »vogal«;
  - učenec meni, da se pravokotnik razlikuje od kvadrata, ker je daljši;
  - učenec reši enostavni geometrijski problem s tangramom (npr. oblikuje kvadrat iz dveh trikotnikov) s poskušanjem.
– Stopnja 1:
  - učenec samostojno zazna lastnosti kvadrata (npr.: kvadrat ima 4 enako dolge stranice);
  - učenec opazi podobnosti in razlike med kvadratom in pravokotnikom (npr.: oba lika imata vse skladne kote, kvadrat ima vse stranice enako dolge, pravokotnik pa ne);
  - učenec razvršča like na podlagi lastnosti, ki si jih izbere samostojno;
  - učenec ugotovi, da je vsota notranjih kotov trikotnika enaka iztegnjenemu kotu;
  - učenec poimenuje lik na podlagi danih lastnosti.
– Stopnja 2:
  - učenec navede najmanjše število lastnosti, ki enolično določajo posamezni lik;
  - učenec razume odnos med pravokotnikom in paralelogramom; učenec razloži, da je pravokotnik tudi paralelogram, saj ima vse njegove lastnosti, in ve, da obratni odnos ne velja, saj ima pravokotnik posebno lastnost pravokotnih kotov;

- učenec pojasni, zakaj sta nasprotna kota paralelograma enako velika;
- učenec predstavi različne razlage, zakaj je vsota notranjih kotov trikotnika enaka 180°.

V nadaljevanju smo zapisali nekaj aktivnosti, ki učencem omogočajo razvoj geometrijskih predstav do 2. stopnje po van Hielu. Učenje geometrije po metodi van Hiela bomo podrobneje opisali na primeru učenja in poučevanja geometrijskih likov ter njihovih lastnosti, saj smo v naši raziskavi preverjali znanje učencev ravno iz teh vsebin.

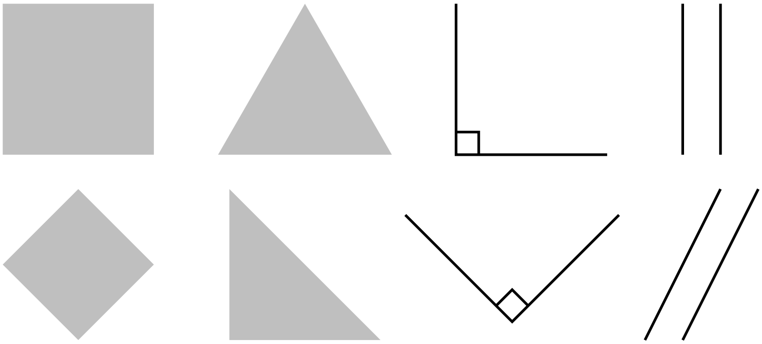
Geometrijski liki in njihove lastnosti

V času osnovnošolskega izobraževanja otroci spoznajo različne dvodimenzionalne oblike. Znajo jih poimenovati, opisati, oblikovati modele, narisati in načrtati ter poznajo njihove lastnosti. Ravno poznavanje lastnosti geometrijskih likov učencem omogoča, da jih med seboj razlikujejo. Lastnosti geometrijskih likov učenci usvojijo predvsem s konkretnimi dejavnostmi, ki omogočajo raziskovanje in primerjanje geometrijskih likov. Zadostne in potrebne izkušnje omogočajo različne ustrezne pripomočke, ki jih učenci uporabljajo med raziskovanjem geometrijskih likov.

V prvem vzgojno-izobraževalnem obdobju je dovolj, da otroci prepoznajo in opišejo le nekatere pravilne like – krog, kvadrat, pravokotnik in trikotnik. Učenci bi morali najprej spoznati bolj splošne primere, kot so štirikotniki, nato nadaljujejo s pravokotniki in nazadnje spoznajo kvadrate (Clements idr. 1999). Pri tem obravnavajo ustrezne značilnosti posameznega razreda in hierarhične odnose med njimi ter uporabljajo izraze, ki vključujejo te odnose (»kvadrat – pravokotnik«). Ta pristop je Kay preizkusil z učenci 1. razreda. V njegovi raziskavi je večina učencev prepoznala značilnosti štirikotnikov, pravokotnikov in kvadratov. Kar polovica učencev je prepoznala hierarhične odnose med temi razredi. Vendar sta Clements in Battista (1992) podvomila v posplošitve, ki so bile izdelane na podlagi empiričnih rezultatov.

Stopnja 0. Učence na stopnji vizualizacije moramo seznaniti z različnimi geometrijskimi liki. Opazovati morajo pravilne dvodimenzionalne oblike, kot je npr. enakostranični trikotnik, in tudi nepravilne like, ki imajo ravne ali neravne stranice oz. kombinacijo le-teh (slika 5.4). Zelo pomembno je, da učencem prikažemo like (tudi druge geometrijske elemente) različnih velikosti in v različnih legah. Npr., kvadrat običajno narišemo tako, da je njegova stranica vzporedna z robom lista, redkokdaj ga zavrtimo za 45° glede na list (slika 5.5).

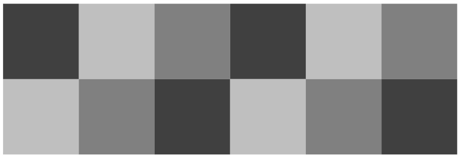
Slika 5.4 Geometrijski liki z ravnimi in neravnimi stranicami



Slika 5.5 Geometrijski elementi v standardnih (zgoraj) in nestandardnih legah (spodaj) (povzeto po Dickson, Brown in Gibson 1984, 30)

Učenci, ki imajo izkušnje le z liki, ki so vedno v enaki legi, verjamejo, da se pri spremembi položaja geometrijskega lika spremenijo tudi nekatere njegove lastnosti, npr. oblika, velikost ipd. (Dickson, Brown in Gibson 1984). Vizualna predstava, ki je tesno povezana z določenim geometrijskim konceptom, lahko povzroča težave pri pravilni uporabi tega koncepta, in to kljub pravilnemu verbalnemu opisu (Fuys, Geddes in Tischler 1988).

Lik je celotna ploskev in ne le črta, ki ga omejuje, zato moramo like, ki jih narišemo, tudi pobarvati, saj se lahko zgodi, da učenci na stopnji vizualizacije dobijo napačno predstavo. Učenci na stopnji o lastnosti geometrijskih likov ne poznajo oz. poznajo le nekatere, kot so stranice in oglišča. Likom velikokrat pripišejo lastnosti, ki niso »prave« geometrijske lastnosti (npr. »lik z udrtino« je konkavni lik), ali lastnosti, ki ne definirajo lika (npr. »lik, ki kaže navzgor«) (Van de Walle, Karp in Bay-Williams 2013).



Slika 5.6
Prekrivanje pravokotnika z manjšimi kvadrati

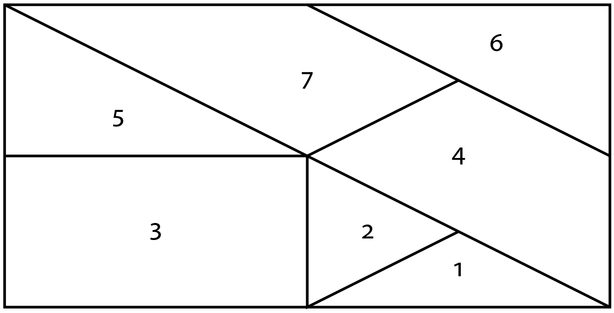
Na stopnji vizualizacije Van de Walle, Karp in Bay-Williams (2013) predlagajo dejavnosti, kjer otroci like sortirajo in razvrščajo glede na lastnosti, ki jih določijo sami. Na tak način lahko učitelj ugotovi, katere lastnosti učenci že prepoznajo in uporabijo ter kako dobro poznajo like. Novo lastnost lahko učenci spoznajo tako, da učitelj razvrsti like glede na še neznano lastnost in je otrokom ne razkrije. Učenci z opazovanjem množic likov poskušajo ugotoviti dano lastnost in se o njej pogovorijo. Če učenci prepoznajo neko lastnost lika, vendar jo nepravilno poimenujejo, lahko učitelj pri razvrščanju likov glede na to lastnost uporabi »negeometrijski« izraz, nato pa se z učenci o njej pogovori in jo pravilno poimenuje (npr. razvrstimo like glede na to, ali imajo udrtino ali je nimajo). Z dejavnostmi sortiranja in razvrščanja likov učenci opazujejo podobnosti in razlike med liki. Didaktiki (Van de Walle, Karp in Bay-Williams 2013; Egsgard 1970) predlagajo, da pri tovrstnih nalogah učenci uporabijo modele različnih likov – likov s krivimi in ravnimi stranicami, konveksnih in konkavnih liki, pravilnih in nepravilnih likov ipd.

Prehod na višjo stopnjo omogočajo tudi aktivnosti, kjer otroci like oblikujejo, rišejo, sestavljajo in razstavljajo. Na tak način samostojno raziskujejo, kako se liki med seboj ujemajo (in tvorijo večje oblike) in kako lahko večje oblike razstavimo na manjše like (Van de Walle, Karp in Bay-Williams 2013). Pri tem je nujna uporaba didaktičnih pripomočkov, kot so geometrijske ploščice, tangram, geoplošča, van Hielove »mozaik puzzle« ipd.

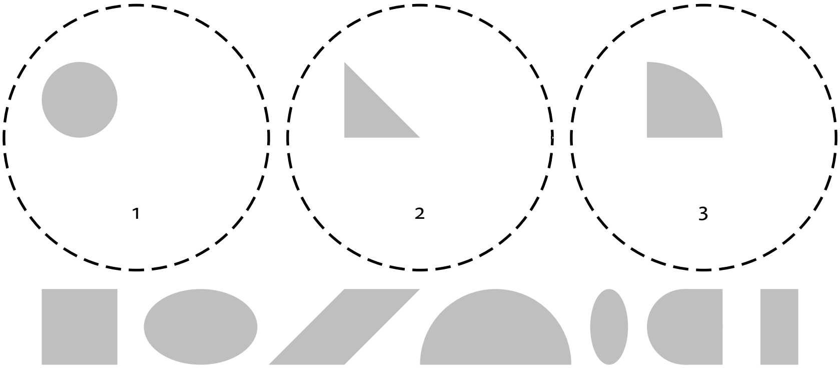
Egsgard (1970) predlaga dejavnosti, kjer učenci prekrivajo večje površine (npr. platnico knjige) z manjšimi in enako velikimi liki. Pri tem lahko oblikujejo najrazličnejše vzorce (slika 5.6). Take dejavnosti zagotavljajo temelje za kasnejše razumevanje ploščine (Dickson, Brown in Gibson 1984).

Konstruiranje različnih likov s tangramom omogoča razvitje predstav o pravem kotu in vzporednosti. Poleg tega ustvari problemske situacije, ki spodbujajo prostorske predstave (Dickson, Brown in Gibson 1984). Zelo podobne so van Hielove ploščice (slika 5.7), ki so ravno tako uporabne pri spoznavanju pravega kota in topih ter ostrih kotov (Van de Walle, Karp in Bay-Williams 2013).

Primer 1 *Like na sliki 5.8 sortiraj v ustrezno množico.*



Slika 5.7 Van Hielove ploščice



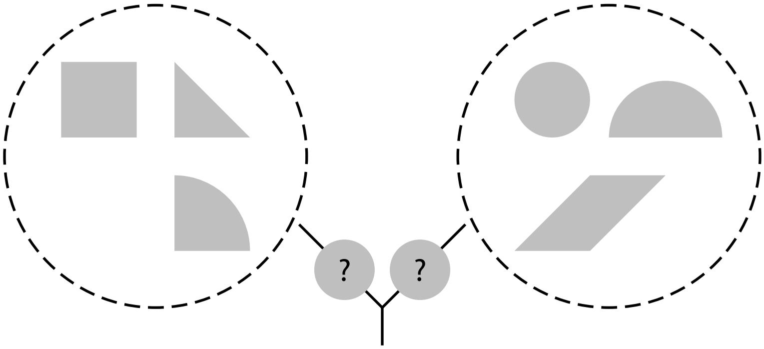
Slika 5.8 Razvrščanje likov v množice

Učenci na stopnji vizualizacije sortirajo like na podlagi podobnosti z liki v množici. Običajno svojo rešitev komentirajo s »ta lik gre v drugo množico, ker je podoben tistemu liku«, učenci na višjih stopnjah pa like sortirajo na podlagi lastnosti, npr. »paralelogram povežemo s prvo množico, ker ima vse stranice ravne«. Po končani dejavnosti učenci opazujejo in opišejo like v posamezni množici.

Primer 2 *Anej je nekatere like po eni lastnosti razvrstil v drevesni prikaz (slika 5.9). Bratec mu je izbrano lastnost prekril, da se je ne vidi. Pomagaj Aneju in ponovno nariši lastnost, po kateri je razvrstil like v drevo.*

Če opazujemo like v prikazu in jih med seboj primerjamo, vidimo, da imajo liki v levi krošnji vsaj en notranji kot pravi, liki v desni krošnji pa te lastnosti nimajo.

Drevesni prikaz je uporaben predvsem pri problemih iz logike in jezika. Naši osnovnošolci ga spoznajo že v 1. razredu, kjer razvrščajo elemente po



Slika 5.9 Razvrščanje likov v drevesni prikaz

različnih kriterijih. »Učence moramo navajati skozi vsa leta izobraževanja, da uporabljajo različne grafične prikaze, saj jih tako naučimo, da mora imeti vsaka zapisana rešitev določenega problema naslednje lastnosti: natančnost, jasnost, strogost in reverzibilnost« (Cotič 1996, 245).

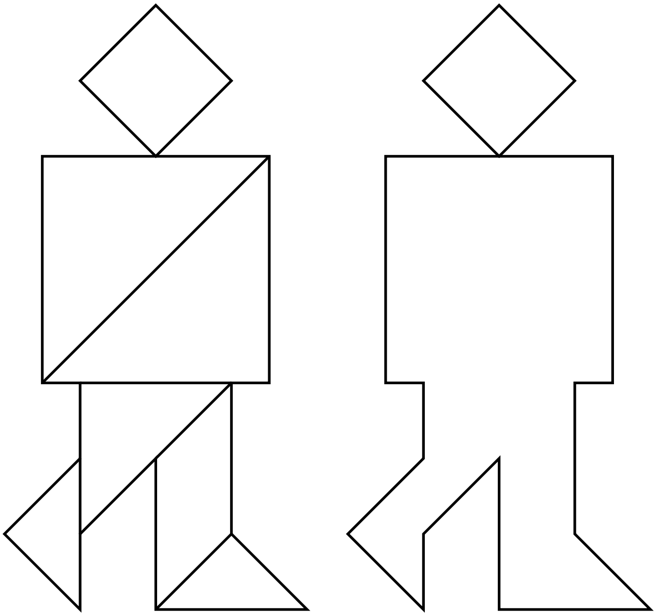
Učenci v slovenski osnovni šoli spoznajo pravokotnost v 4. razredu kot poseben primer dveh premic, ki se sekata. S koti, med njimi tudi s pravim kotom, učence seznanimo v 5. razredu, ko jih opazujejo v večkotniku in jih med seboj primerjajo (*Učni načrt* 2011).

Van de Walle, Karp in Bay-Williams (2013) menijo, da je primerjanje dveh kotov najboljši način, s katerim učenci usvojijo koncept kota, vendar didaktiki (Munier, Davichi in Merle 2008) ugotavljajo, da imajo učenci pogosto napačne predstave, saj so prepričani, da je velikost kota odvisna od dolžine krakov (kot z daljšima krakoma je tudi večji). Zato je pomembno, da učenci primerjajo kote s kraki različnih dolžin. Naši petošolci pojem kot najprej spoznajo pri likih (*Učni načrt* 2011), kjer sta kraka kota omejeni ravni črti (daljici) in ne poltraka s skupnim izhodiščem. Nato med seboj primerjajo velikost notranjih kotov likov. Na tak način lahko učenci dobijo napačno predstavo o pojmu kota in tudi o njegovi velikosti.

Primer 3 *S tangramom oblikuj figuro. Uporabiti moraš vseh sedem likov, ki se ne smejo prekrivati. Odgovori na vprašanja.*

- *–Kako imenujemo lik, ki sestavlja glavo možiclja?*
- *–Kateri liki sestavljajo trup možiclja?*
- *–Koliko trikotnikov sestavlja noge možiclja?*

Učencem najprej ponudimo manj zahtevne naloge (A), ki jih samostojno rešujejo. Kasneje, ko imajo dovolj izkušenj s sestavljanjem tangrama, rešu-



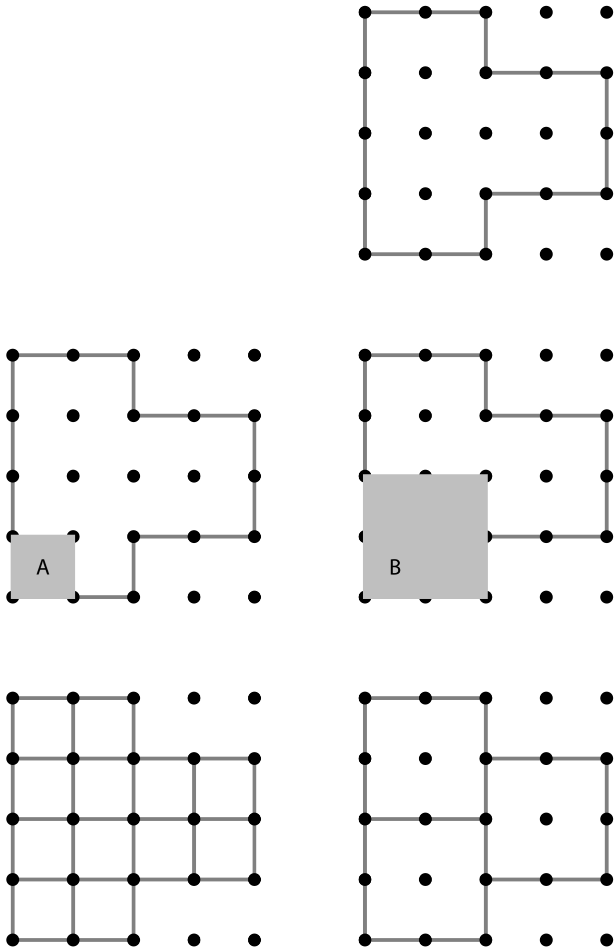
Slika 5.10
Oblikovanje figure s tangramom

jejo zahtevnejše probleme (B). Tovrstni problemi učencem omogočajo, da si rešitev predhodno miselno predstavijo, potem pa preverijo njeno pravilnost.

Primer 4 *Koliko enakih kvadratov sestavlja lik na geoplošči (slika 5.11)?*

Najprej moramo ugotoviti, koliko različnih kvadratov lahko oblikujemo v notranjosti lika. Učenec mora sam poiskati strategijo reševanja. Nekateri učenci ne izberejo nobene strategije in kvadrate oblikujejo zgolj po principu slučajnosti. Drugi imajo že sistematičen pristop pri oblikovanju rešitev. Tak geometrijski problem učenci običajno rešujejo na nesistematičen način, saj gre za enostaven problem, kjer je malo rešitev. Učence moramo navajati na uporabo strategij tudi pri enostavnih problemih. Tako pridobijo izkušnje, ki jih uporabijo pri reševanju zahtevnejših problemov. V notranjosti lika lahko oblikujemo dva različno velika kvadrata (A in B), zato dobimo dve rešitvi, in sicer lahko oblikujemo 12 manjših ali 3 večje kvadrate.

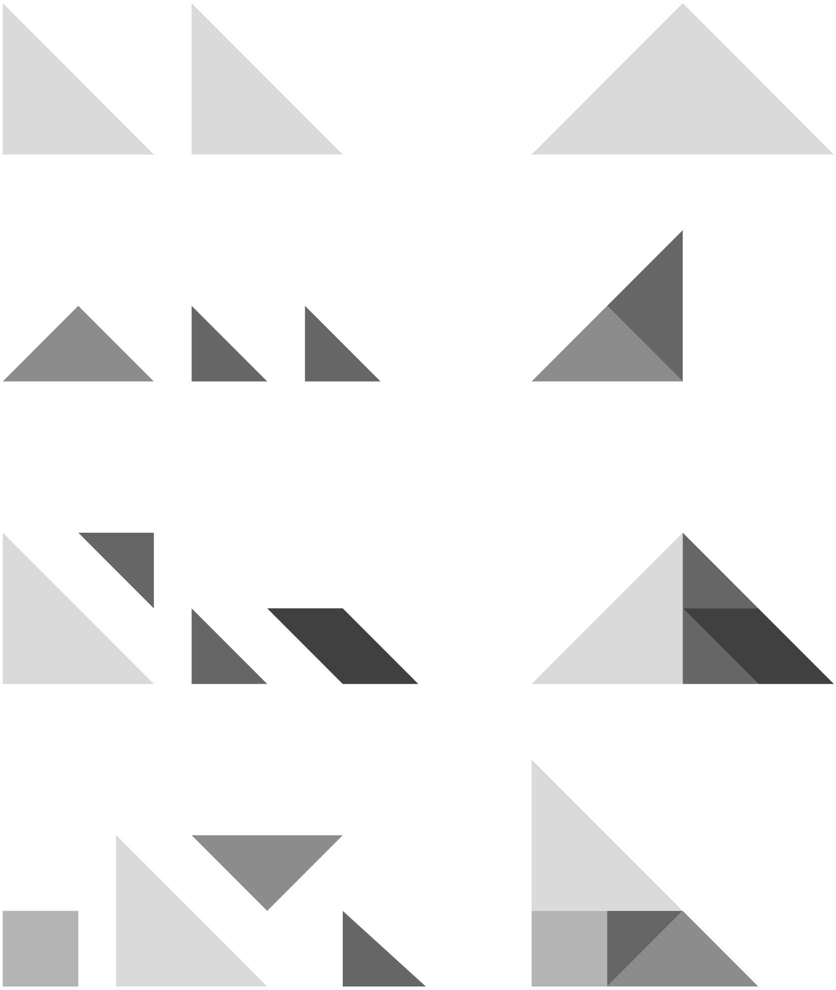
Pri pouku geometrije naši učenci rešijo premalo problemov z več rešitvami. Tovrstne probleme običajno zastavljamo in z učenci rešujemo pri pouku aritmetike. Učbeniki v glavnem ponujajo geometrijske naloge z eno samo rešitvijo, čeprav vsakdanji življenjski problemi skoraj nikoli nimajo ene same rešitve. Zato je nujno, da tudi pri pouku geometrije učence seznanimo s pro-



Slika 5.11
Koliko enakih kvadratov sestavlja lik na geoplošči?

blemi, ki imajo več rešitev. Poleg tega taki problemi učencu nudijo možnost spoznanja, da matematika ni dogmatična disciplina, v kateri ima vsaka situacija že vnaprej določeno natanko eno rešitev (Cotič 1995).

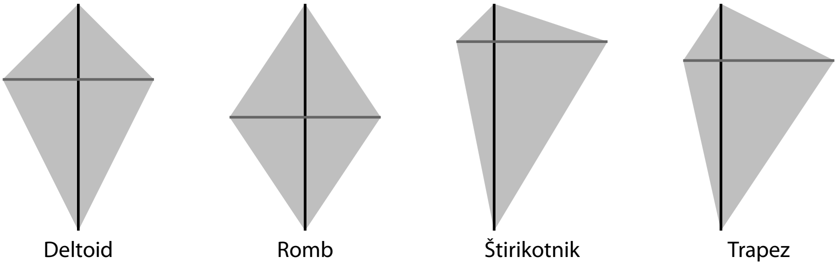
Stopnja 1. Učenci na stopnji analize so osredotočeni na lastnosti geometrijskih likov, ki jih odkrivajo in definirajo tako, da jih opazujejo, merijo in predvsem rešujejo geometrijske probleme. Na tej stopnji učenci spoznajo delitev trikotnikov glede na dolžino stranic in glede na velikost notranjih kotov, ugotavljajo vsoto notranjih kotov trikotnika in raziskujejo lastnosti posamezne skupine štirikotnikov (kvadrat, pravokotnik, paralelogram, trapez, deltoid), kot sta vzporednost stranic in diagonala. Tako kot na stopnji 0 učenci



Slika 5.12 Oblikovanje pravokotnega enakokrakega trikotnika iz le nekaterih likov tangrama

uporabljajo različne modele oz. material, ki omogoča raziskovanje lastnosti likov. Učenci na stopnji analize like pravilno poimenujejo in poznajo njihove lastnosti, vendar ne zaznajo odnosov med liki. Npr., učenci poznajo vse lastnosti pravokotnika in tudi paralelograma, kljub temu pa pravokotnika ne razvrstijo v množico paralelogramov.

Van de Walle, Karp in Bay-Williams (2013) predlagajo dejavnosti, kjer učenci razvrščajo like glede na lastnosti, ki definirajo posamezni lik. Za razvoj geometrijskega mišljenja na stopnji 1 moramo učencem ponuditi predvsem kon-



Slika 5.13 Oblikovanje različnih štirikotnikov z danima diagonalama

strukcijske naloge, in sicer najprej na konkretnem, nato pa še na slikovnem nivoju. Na tem mestu lahko učence seznanimo z nekaterimi simboli.

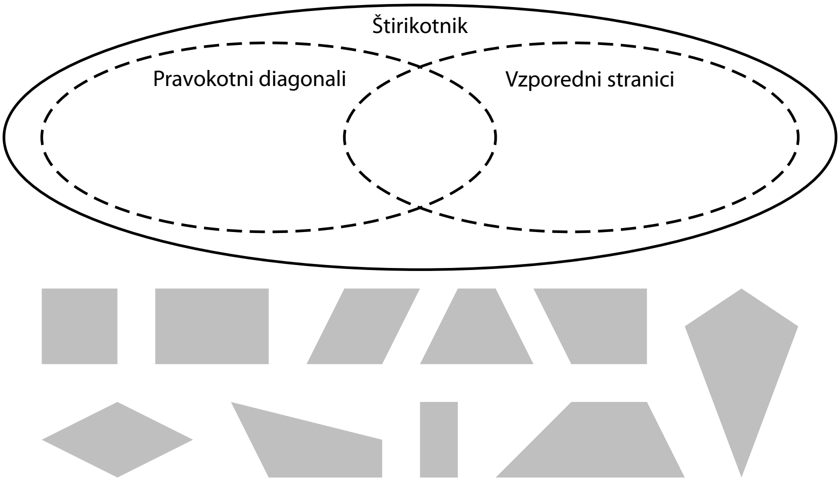
Primer 5 *Oblikuj pravokotni enakokraki trikotnik iz le nekaterih likov tangrama (slika 5.12).*

Med konstruiranjem pravokotnega enakokrakega trikotnika morajo biti učenci pozorni na njegove lastnosti (kraka sta enako dolga in kot med njima je pravi kot). Poleg tega morajo upoštevati skladnost stranic med posameznimi deli tangrama. Med dejavnostjo lahko opišejo posamezni lik tangrama (npr. kvadrat ima vse stranice enako dolge, kota ob osnovnici enakokrakega trikotnika sta enako velika, paralelogram ima paroma vzporedni stranici, določijo lahko velikosti posameznega notranjega kota pravokotnega enakostraničnega trikotnika ipd.).

Primer 6 *Katere štirikotnike lahko naredimo, če sta svetla in temna paličica različno dolgi pravokotni diagonali štirikotnika (slika 5.13)?*

Učenci 7. razredov vedo, da je pravokotnost diagonal lastnost deltoida, romba in kvadrata, ne vedo pa, ali imajo lahko to lastnost tudi drugi štirikotniki. Ravno zgornji primer (Primer 6) učencem omogoča, da raziščejo diagonali različnih štirikotnikov in poiščejo posebne primere štirikotnikov. Predstavljeni primer omogoča tudi, da učenci razmišljajo in postopoma preidejo na višjo stopnjo geometrijskega mišljenja. Učenci namreč ugotovijo, da lastnost »štirikotnik ima pravokotni diagonali« ni zadostni pogoj, ki enolično določi štirikotnik, saj ima to lastnost več različnih štirikotnikov. Zato lahko oblikovanim štirikotnikom pripišejo lastnost oz. lastnosti, ki zagotavljajo enoličnost.

Primer 7 *Štirikotnike ustrezno razvrsti v Euler-Vennov prikaz.*



Slika 5.14 Razvrščanje štirikotnikov v Euler-Vennov prikaz

Po končani dejavnosti učence vodimo k odkrivanju odnosov med posameznimi liki. Postavimo jim lahko naslednja vprašanja:

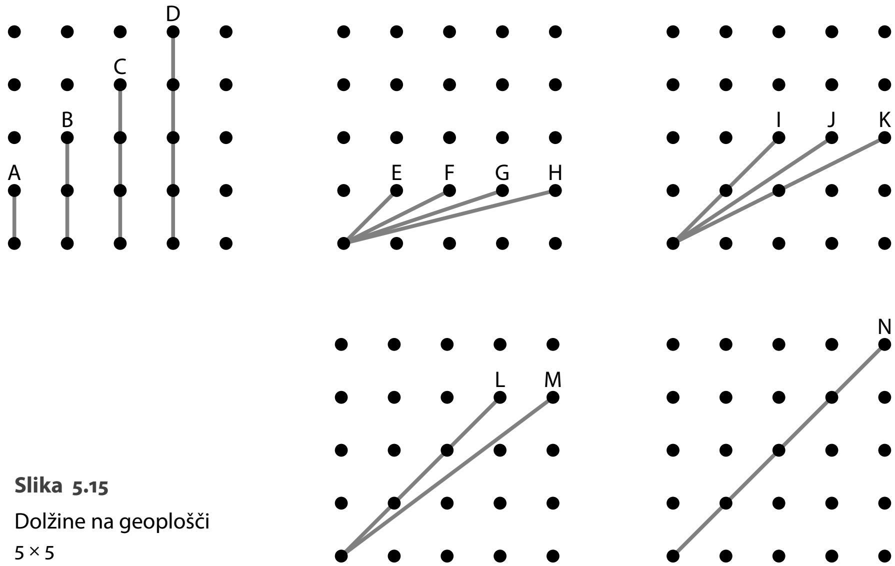
- Kako imenujemo like z vsaj enim parom vzporednih stranic?
- Kateri liki imajo vsaj en par vzporednih stranic?
- Ali ima paralelogram vsaj en par vzporednih stranic?
- Ali je paralelogram trapez?

Z vprašanji učence izzovemo, da logično razmišljajo in odkrivajo odnose med liki, in ne le o lastnostih posameznega lika, npr. »če so liki z vsaj enim parom vzporednih stranic trapezi, potem je paralelogram tudi trapez, saj ima dva para vzporednih stranic«. Na tak način učencem omogočamo prehod na višjo stopnjo geometrijskega mišljenja (na stopnjo neformalne dedukcije).

Primer 8 *Koliko paroma neskladnih pravokotnikov z enako dolgimi stranicami lahko naredimo na geoplošči* 5 × 5*?*

Učenci na stopnji analize poznajo vse lastnosti pravokotnika in kvadrata, vendar še ne zaznajo, da je kvadrat pravokotnik z enako dolgimi stranicami. Ko učenci oblikujejo like na podlagi podanih lastnosti, so nanje bolj osredotočeni in hitreje zaznajo tudi odnose med liki.

Posebno obliko pravokotnika bomo poiskali glede na dolžino stranic. Na geoplošči 5 × 5 je med žebljički 14 različnih dolžin (slika 5.15).

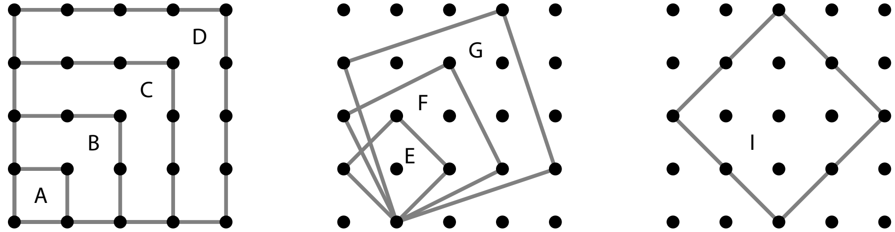


Slika 5.15
Dolžine na geoplošči
5 × 5

Ko učenci rešujejo take vrste problemov, velikokrat uporabijo že naučeno strategijo, toda kakor hitro bi morali v namen uspešne rešitve zamenjati strategijo, tega ne zmorejo in se preprosto zatečejo k »slepemu« oz. naključnemu reševanju problema (Frobisher 1994), kmalu pa ugotovijo, da na ta način težko poiščejo vse paroma neskladne kvadrate ali pa se jim kakšen ponovi. Zato učenec potrebuje veliko izkušenj in nasvetov, da postane pri teh vrstah problemov sposoben izbrati in izpeljati primerno strategijo.

Pravokotniki z dolžino stranice A, B, C, D, E, F, G in I so prikazani na sliki 5.16. Pravokotnikov z dolžino stranice H, J, K, L, M in N ne moremo narediti na geoplošči 5 × 5.

Stopnja 2. Na stopnji neformalne dedukcije učenci niso več osredotočeni le na prepoznavanje lastnosti likov, ampak jih raziskujejo s pomočjo logičnih



Slika 5.16 Pravokotniki na geoplošči 5 × 5

utemeljitev. Treba jih je spodbujati k postavljanju predpostavk in raziskovanju neformalnih deduktivnih trditev. Učenci naj bi poskušali podajati preproste dokaze ali jim vsaj slediti in raziskovati ideje, ki so neposredno povezane z algebro (Van de Walle, Karp in Bay-Williams 2013). Na tej stopnji so primerne naloge, kjer učenci poiščejo najmanjše število lastnosti, ki enolično določajo nek lik. Za vsak lik najprej zapišejo vse lastnosti, potem pa iz »seznama lastnosti« izberejo le tiste, ki zadostujejo in so potrebne, da opišejo posamezni lik. Učenci tovrstne geometrijske probleme rešujejo z logičnim sklepanjem, saj se morajo na podlagi premisleka odločiti o tem, ali izbrane lastnosti res določajo dani lik. Naloge, kjer so podane pravilne in nepravilne trditve o geometrijskih likih, prav tako spodbujajo logično mišljenje. Učenci lahko pravilnost trditev utemeljijo s preprostimi neformalnimi dokazi. S takimi nalogami pri učencih razvijamo deduktivno mišljenje.

Primer 9 *Določi, katere lastnosti zadoščajo za opis pravokotnika.*
(a) Ima štiri stranice.
(b) Ima štiri kote.
(c) Ima štiri oglišča.
(d) Nasprotni stranici sta vzporedni.
(e) Nasprotni stranici sta skladni.
(f) Nasprotni stranici sta enako dolgi.
(g) Vsi notranji koti so skladni.
(h) Vsi notranji koti so pravi koti.

Vse naštete lastnosti so lastnosti pravokotnika, vendar ne potrebujemo vseh, da bi ga enolično določili. Da bi določili potrebne in zadostne pogoje, ki definirajo pravokotnik, morajo učenci najprej preučiti vse lastnosti. Pri tej nalogi morajo učenci smiselno utemeljiti svoj odgovor, kar pa je mogoče le, če razumejo jezik neformalne dedukcije: vsi, nekateri, noben, če ni, če – potem ipd. Vemo, da je pravokotnik štirikotnik. Vsi štirikotniki imajo štiri kote, iz česar sledi, da je pravokotnik lik s štirimi koti. Ker ima štiri kote, ima tudi štiri oglišča in štiri stranice (lastnosti a in b sta v tem primeru nepotrebni). Vsi notranji koti v pravokotniku so skladni oz. pravi koti, kar pomeni, da sta zadnji dve izjavi (g in h) ekvivalentni. Če so vsi notranji koti skladni, potem sta nasprotni stranici vzporedni in enako dolgi oz. skladni. Potemtakem so lastnosti d, e in f nepotrebne. Lik, ki ima štiri kote (b) in so vsi notranji koti skladni (g) ali pravi (h), je lahko le pravokotnik.

Primer 10 *Določi, ali je trditev pravilna ali nepravilna. Svoj odgovor utemelji.*

(a) Kvadrat je tudi pravokotnik.
(b) Vsi paralelogrami imajo skladni diagonali.
(c) Nekateri rombi so kvadrati.

Naši učenci imajo največ težav pri nalogah, ki zahtevajo utemeljevanje odgovorov in dokazovanje trditev (Maleš idr. 2013; Maleš idr. 2014). Van de Walle, Karp in Bay-Williams (2013) navajajo, da so pri geometriji učenci osnovne šole že sposobni podajati dokaze. Veljavnost trditev lahko raziščejo s primeri, protiprimeri ali skico. Na podlagi teh lahko podajo neformalne utemeljene argumente.

Pri poučevanju geometrije in sestavljanju oz. izbiri nalog mora učitelj dobro poznati van Hielove stopnje. Določiti mora najnižjo stopnjo geometrijskega mišljenja, na kateri naj bi bili učenci, da bi lahko uspešno rešili posamezno nalogo. Vendar vsaki geometrijski nalogi ne moremo dodeliti stopnje mišljenja, saj lahko nekatere naloge učenec uspešno reši z uporabo algebrskih ali aritmetičnih procedur (najpogosteje z uporabo formul) oz. s pomočjo merjenja, kjer je geometrijsko mišljenje minimalno.

Vizualizacija geometrijskih problemov na geoplošči in mreži

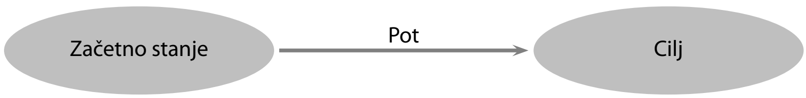
Matematični problem, torej tudi geometrijski problem, določajo tri komponente (slika 5.17) (Frobisher 1996):

- začetno stanje ali situacija, v kateri je dana vsebina problema z ustreznimi podatki in informacijami;
- cilj, ki ga mora reševalec problema doseči;
- pot od začetnega stanja ali situacije do cilja, ki jih mora reševalec poiskati, da reši problem.

Vse tri komponente si poglejmo na naslednjem primeru.

Primer 1 *Na geoplošči* 3 × 3 *oblikuj enakokraki pravokotni trikotnik. Določi velikost notranjih kotov tega trikotnika (slika 5.18).*

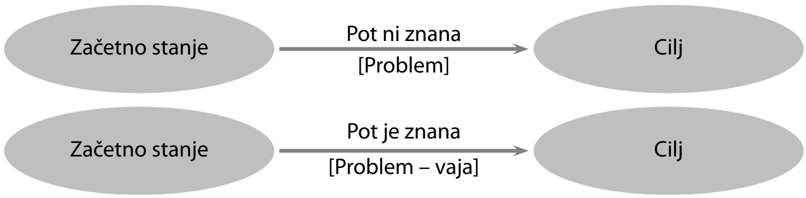
Če reševalec pozna strategijo reševanja, ne moremo več govoriti o problemu, ampak o *problemu – vaji* oz. *rutinskem problemu* (Cotič, Felda, Meši-



Slika 5.17 Komponente matematičnega problema (povzeto po Frobisher 1996, 239)

Začetno stanje	Pot	Cilj
Na geoplošči 3 × 3 oblikuj enakokraki pravokotni trikotnik. Določi velikost notranjih kotov tega trikotnika.	Če je trikotnik pravokoten, potem $\gamma = 90$ in 180ř – 90 = 90. Če je trikotnik enakokrak, potem $\alpha = \beta$ in $90 \div 2 = 45$.	$\gamma = 90$ $\alpha = \beta = 45$

Slika 5.18 Primer reševanja geometrijskega problema



Slika 5.19 Razlika med problemom in *problemom – vajo*

nović in Simčič 2011). Problem je situacija, ki se razlikuje od *problema – vaje* v tem, da reševalec nima na razpolago ne postopka in ne algoritma, ki bi ga zagotovo peljala k rešitvi problema. Zaradi tega je lahko ista situacija za nekoga problem, za drugega pa zgolj *problem – vaja*. Za učenca, ki že pozna velikost notranjih kotov pravokotnega enakokrakega trikotnika, je pot do cilja znana in zanj to ni problem, ampak *problem – vaja*. Za učenca, pri katerem šele uvajamo pojem notranji kot trikotnika in še ne pozna velikosti kotov v trikotniku, pa je problem, saj ga ne more rešiti zgolj na osnovi spomina, temveč z miselnimi postopki. Razliko med problemom in *problemom – vajo* ponazorimo s prikazom (slika 5.19).

Pri transmisijskem pristopu k pouku učitelj učencu pokaže postopek oz. strategijo reševanja problema, nato pa učenec vadi postopek na podobnih primerih. V takih primerih učenec le memorizira postopke in strategije reševanja problemov ter jih prenese v podobne situacije. Če se zamenja kontekst problema, ga učenec ni več sposoben rešiti. Poleg tega se učenec največkrat srečuje s takimi problemi, pri katerih je rešitev ena sama in takoj dosegljiva. Posledica tega je, da si učenec izgradi mnenje, da se vsak problem lahko reši brez miselnega napora. Če pot do rešitve ni očitna, je učenec hitro prepričan, da problema ni mogoče rešiti (Frobisher 1996).

Vrste geometrijskih problemov

Ločimo več vrst geometrijskih problemov, ki jih lahko opredelimo glede na pot in cilj. Frobisher (1994) je opredelil tri kategorije problemov:

- probleme z zaprto potjo in zaprtim ciljem;

– probleme z odprto potjo in zaprtim ciljem;
– probleme z odprto potjo in odprtim ciljem.

Problemi z zaprto potjo in zaprtim ciljem. Kot primer vzemimo geometrijski problem z zaprto potjo in zaprtim ciljem na geoplošči (slika 5.20).

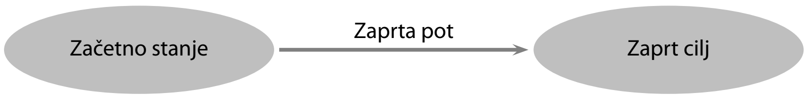
Primer 2 *Na geoplošči* 3 × 3 *oblikuj pravokotnik z največjo ploščino.*

Učenec se mora najprej srečati s tovrstnimi problemi, saj pri reševanju le-teh ugotovimo, ali razume osnovne geometrijske pojme in koncepte, hkrati pa pojme in koncepte utrdi in ponovi (Frobisher 1996). Šele nato učenca uvedemo v drugo kategorijo problemov.

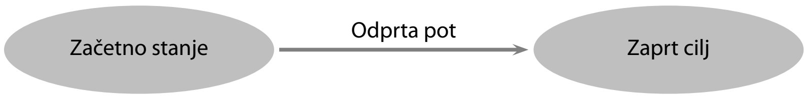
Problemi z odprto potjo in zaprtim ciljem. Poglejmo si geometrijski problem z odprto potjo in zaprtim ciljem na geoplošči (slika 5.21).

Primer 3 *Na geoplošči* 3 × 3 *oblikuj štirikotnike, ki imajo pravokotni diagonali. Koliko paroma neskladnih štirikotnikov lahko dobimo (slika 5.22)?*

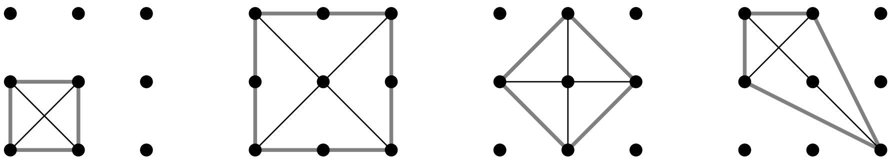
Cilj je zaprt, saj naj bi učenec oblikoval toliko štirikotnikov, kolikor jih je, oz. toliko, kolikor misli, da jih je. Pot je odprta, ker mora učenec sam poiskati strategijo reševanja. Nekateri učenci ne izberejo nobene strategije in zgolj po



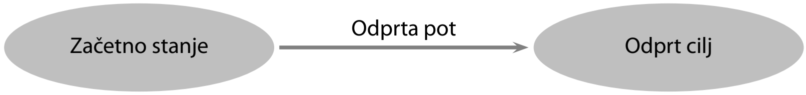
Slika 5.20 Problem z zaprto potjo in zaprtim ciljem



Slika 5.21 Problem z odprto potjo in zaprtim ciljem



Slika 5.22 Štirikotniki s pravokotnima diagonalama na geoplošči 3 × 3



Slika 5.23 Problem z odprto potjo in odprtim ciljem

principu slučajnosti iščejo različne štirikotnike, drugi pa že imajo sistematičen pristop k oblikovanju rešitev. Nekaj načinov reševanja primera 3:

1. Učenec išče različne štirikotnike in preveri, kateri med njimi imajo pravokotni diagonali.
2. Učenec poišče vse paroma neskladne štirikotnike. Potem izbere le tiste, ki imajo pravokotni diagonali.
3. Učenec se odloči, da bo najprej poiskal vse kvadrate, rombe in deltoide. Nato med njimi izbere le paroma neskladne štirikotnike.

Šele ko učenec pridobi dovolj izkušenj pri reševanju problemov druge kategorije, ga uvedemo v tretjo kategorijo problemov z odprto potjo in odprtim ciljem.

Problemi z odprto potjo in odprtim ciljem. Poglejmo si geometrijski problem z odprto potjo in odprtim ciljem na geoplošči (slika 5.23).

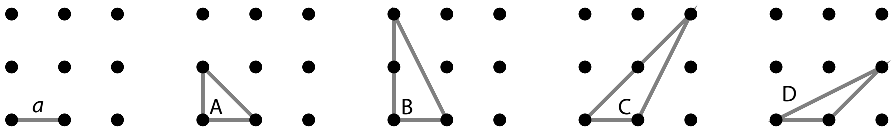
Primer 4 *Raziskuj trikotnike na mreži.*

Koliko neskladnih trikotnikov lahko dobimo na geoplošči (slika 5.24)?

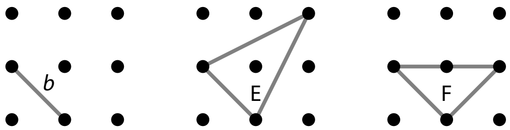
1. Učenec išče različne trikotnike na nesistematičen način, torej brez uporabe neke strategije. Kmalu pa ugotovi, da na ta način zelo težko poišče vse trikotnike ali pa da se mu kakšen od trikotnikov ponovi.
2. Odloči se, da bo trikotnike poiskal, npr. glede na dolžino najkrajše stranice.
3. Trikotnike išče tako, da najprej poišče vse enakostranične, nato enakokrake in raznostranične.
4. Trikotnike išče glede na kote: pravokotne, ostrokotne in topokotne.

Ta problem še nadgradimo:

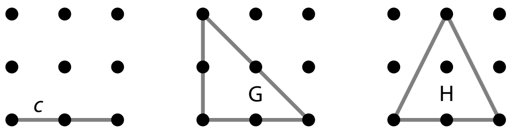
Razvrsti različne trikotnike, ki si jih poiskal na geoplošči, glede na naslednji dve lastnosti: »je pravokotni trikotnik« in »je enakokrak trikotnik« (na razredni stopnji ne uporabljamo izraza pravokotni trikotnik, ampak trikotnik z enim pravim kotom, in namesto izraza enakokrak trikotnik – trikotnik, ki ima dve stranici enako dolgi).



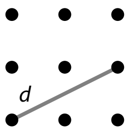
(a) Koliko trikotnikov ima najkrajšo stranico dolgo *a*?



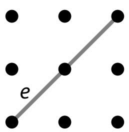
(b) Koliko trikotnikov ima najkrajšo stranico dolgo *b*?



(c) Koliko trikotnikov ima najkrajšo stranico dolgo *c*?



(d) Koliko trikotnikov ima najkrajšo stranico dolgo *d*? Takega trikotnika ni.

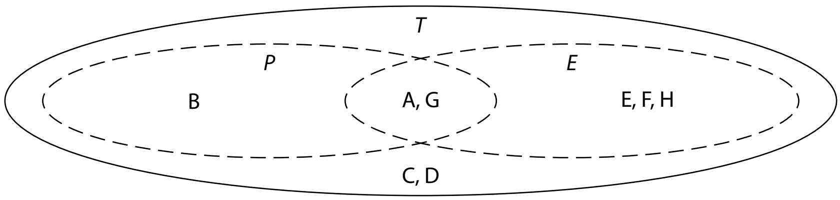


(e) Koliko trikotnikov ima najkrajšo stranico dolgo *e*? Takega trikotnika ni.

Trikotnik	Dolžine stranic	Trikotnik	Dolžine stranic
A	a, a, b	E	b, b, c
B	a, b, d	F	b, d, d
C	a, c, d	G	c, c, e
D	a, d, e	H	c, d, d

Slika 5.24 Trikotniki na geoplošči 3 × 3

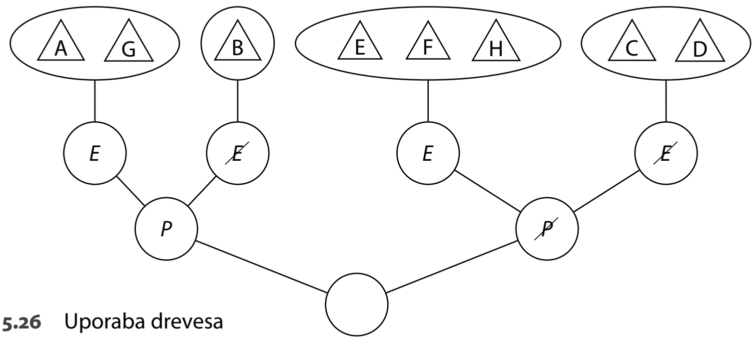
Pri problemih razvrščanja je zelo pomembno, da se učenec nauči uporabljati različne diagrame. Tako lahko problem reši na način, ki ga razume oz. ki se mu zdi najprimernejši. Reševanje tega problema se od prejšnjega razlikuje po tem, da je učenec pri prejšnjem problemu uporabil različne strategije po



Slika 5.25 Uporaba Euler-Vennovega diagrama

Preglednica 5.2
Uporaba Carrollovega diagrama

	P	$\cancel{P}$
E	A, G	E, F, H
$\cancel{E}$	B	C, D

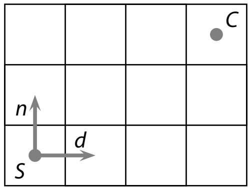


Slika 5.26 Uporaba drevesa

izkustveni poti, medtem ko ga v tem problemu učitelj seznani s posameznimi strategijami. Rešitev primera 3:

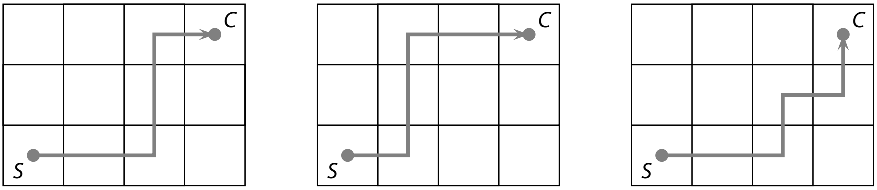
1. *Uporaba Euler-Vennovega diagrama*. Označimo s T množico vseh različnih trikotnikov na geoplošči 3 × 3, s P množico vseh pravokotnih trikotnikov in z E množico vseh enakokrakih trikotnikov – slika 5.25.
2. *Uporaba Carrollovega diagrama* – preglednica 5.2.
3. *Uporaba drevesa*. Ob uporabi tako nastalih diagramov naj bi učenci v razredu komentirali uporabo različnih diagramov (Katere prednosti ima vsak od njih? Katere slabosti? V čem se razlikujejo? Kaj imajo skupnega? Kateri se ti zdi »najenostavnejši« oz. »najlažji«? Zakaj? Kateri je najučinkovitejši? Zakaj?) – slika 5.26.

Učenec naj bi pri takih problemih odkril, poiskal in zgradil pot oz. način, s katerim bo prišel do rešitve. Pomembno je, da učitelj učence spodbuja, da sami iščejo pot(i) do rešitve. Nato naj se o različnih poteh pogovarjajo in jih primerjajo med seboj: primerjajo naj različno zapisane račune, enačbe, pre-

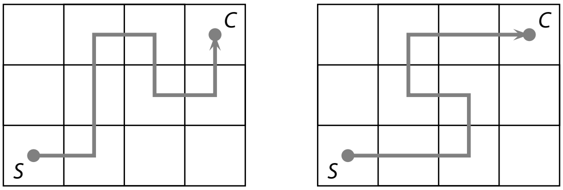


Slika 5.27 Iskanje poti

Učenec prepozna, da naslednje poti ustrezajo danemu navodilu:



Naslednji dve poti ne ustrezata danemu navodilu:



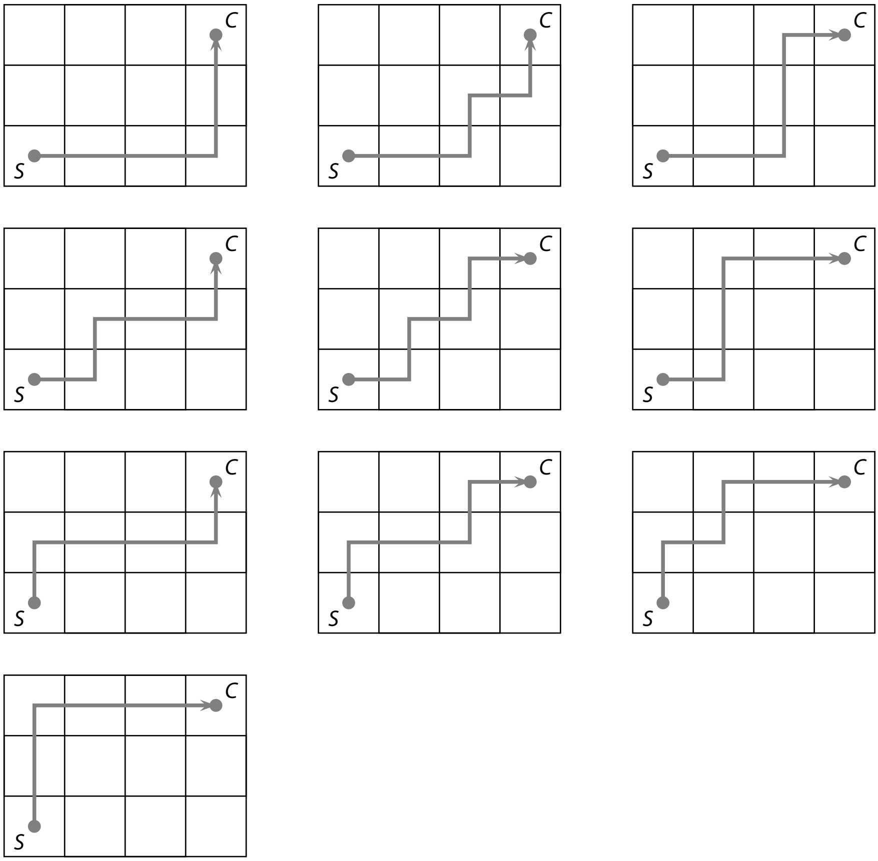
Slika 5.28 Rešitev iskanja poti

glednice, geometrijske konstrukcije … Taki problemi razvijajo sposobnost načrtovanja, intuicijo in kreativnost, torej poleg konvergentnega tudi divergentno mišljenje.

Čeprav pri teh problemih različne poti reševanja peljejo k enakim rešitvam, ne moremo trditi, da so te poti enakovredne med seboj, saj se razlikujejo tako z operativnega in s konceptualnega vidika kot z vidika »lepega«.

Določena pot je lahko uporabnejša in razumljivejša učencu, ampak manj sprejemljiva glede »elegantne« poti do rešitve, kot pravijo matematiki. Kategorija »lepega« je namreč v matematiki pomembna, saj kot so rekli že Pitagorejci: v matematiki je harmonija kozmosa. To pa nas pri pouku matematike na razredni stopnji še ne zanima v tolikšni meri. Pomembno je, da vsak učenec rešuje naloge na nivoju, ki ga zmore in razume (Tenuta 1992, 82).

Primer 6 *Skupina učencev (ne več kot 5) ima pred sabo mrežo in barvice. Zastavimo jim naslednji problem: Na koliko različnih načinov lahko prideš od starta (S) do cilja (C), če greš lahko samo na desno in navzgor (slika 5.27)? Prirejeno po Glaymann in Varga (1979).*

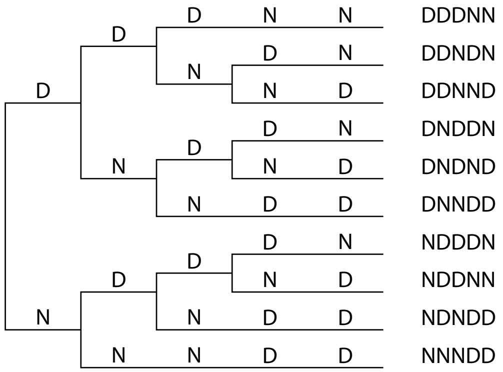


Slika 5.29 Dobljene poti

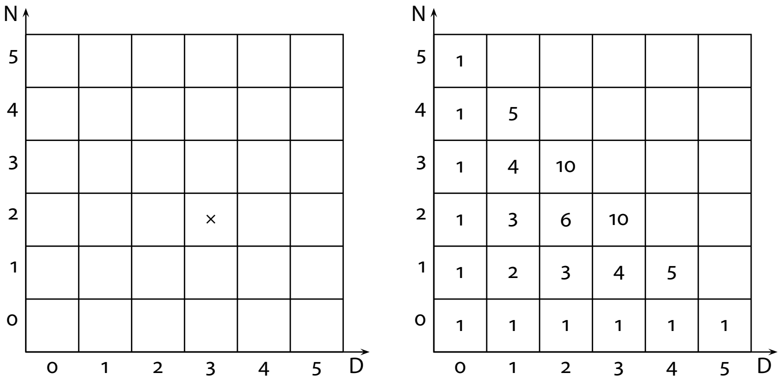
Vsak od učencev v skupini naj bi poiskal pot, ki je različna od ostalih že najdenih poti in jo označil z barvnim svinčnikom. Na začetku ne moremo pričakovati, da se bodo učenci lotili sistematičnega raziskovanja možnih poti. Lahko pa jih spodbujamo, da postopoma dosežejo naslednje cilje:

– uporabijo dano navodilo oz. pravilo igre;
– prepoznajo, ali narisana pot ustreza danim navodilom (slika 5.28);
– prepoznajo, ali je nastavljena pot nova ali je ponovitev katere prejšnjih;
– poiščejo čim več različnih poti;
– poiščejo natanko vse poti;
– se vprašajo, kako to, da po določenem številu najdenih različnih poti ne najdejo več nobene.

Ker je število vseh možnih poti majhno (10), jih večina skupin poišče. Če pa



Slika 5.30
Kombinatorično drevo



Slika 5.31 Število poti do vsakega polja

učenci ne najdejo vseh poti oz. se kakšna od poti ponovi, s pomočjo učitelja ugotovijo, da se je treba kombinatorične situacije lotiti predvsem sistematično (slika 5.29). Vsaka skupina naj nato razloži sistem (če ga seveda ima), po katerem so iskali poti. Na razredni stopnji je zadnji cilj prezahteven, saj zahteva že matematično analizo situacije in uporabo dedukcije.

Z D označimo premik za eno polje v desno, z N premik za eno polje navzgor. Prve štiri poti torej lahko zapišemo: DDDNN, DDNDN, DDNND, DNDDN. Kot vidimo, smo se srečali z nam znanim problemom: koliko je vseh besed s petimi črkami, ki so sestavljene iz dveh N in treh D (permutacije s ponavljanjem). Zelo dobro je sedaj to sistematično prikazati s kombinatoričnim drevesom (slika 5.30), nato pa narišemo tudi mrežo (slika 5.31).

Lego polja × lahko opišemo z urejenim parom (3D, 2N) oz. enostavneje (3,3). Kot že vemo, je iz polja (0,0) v polje (3,2) deset različnih poti, če se seveda premikamo samo na desno in navzgor. Slika 5.31 prikazuje število poti do vsakega polja na mreži 6 × 6. Dogovorimo se, da iz polja (0,0) vase vodi ena pot.

Poglobitev problema

Iz grafa na sliki 5.31 razberemo dve pomembni ugotovitvi:

1. Števila v simetričnih poljih glede na diagonalo so enaka.
2. Vsako število v polju je vsota števila, ki je v polju tik pod njim in števila v polju ¸ na njegovi levi.

Ali ta ugotovitev velja v splošnem? Da dobimo vse možne poti iz polja (0,0) v polje (u,v), je potrebno zapisati vse besede, sestavljene iz $u+v$ črk, pri čemer je $_u$ črk D in $_v$ črk N. Torej je

$$P_{u+v}^{u,v} = \binom{u+v}{u}.$$

število poti iz polja (0,0) v polje (u,v).

Analogno dobimo tudi število poti iz polja (0,0) v polje (v,u):

$$P_{v,u}^{v+u} = \binom{v+u}{v}.$$

Besede iz prvega primera se transformirajo v besede iz drugega primera s tem, da zamenjamo D z N in obratno.

Iz tega sledi, da do simetričnih polj vodi enako število poti

$$\binom{u+v}{u} = \binom{u+v}{v}.$$

Zapišimo $u+v=n$ in dobimo:

$$\binom{n}{u} = \binom{n}{n-u}.$$

Oglejmo si sedaj polja L, M in N iz mreže na sliki 5.32.

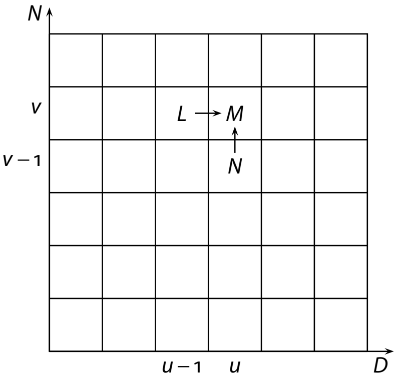
Lege polj L, M in N s koordinatami opišemo takole:

$$L=(u-1,v), \quad m=(u,v), \quad N=(u,v-1).$$

V tem primeru je:

$$\binom{u+v-1}{u-1} \text{ poti iz } (0,0) \text{ v } M;$$

$$\binom{u+v-1}{u} \text{ poti iz } (0,0) \text{ v } N;$$



Slika 5.32 Število poti do polja M

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Slika 5.33 Pascalov trikotnik

$$\binom{u+v}{v} \text{ poti iz } (0,0) \text{ v } L.$$

Vsaka pot, ki pelje v M, mora nujno skozi polje L ali skozi polje N, nobena pot v M pa ne more potekati skozi L in N hkrati. Torej je število poti iz $(0,0)$ v M vsota vseh poti iz $(0,0)$ v N in iz $(0,0)$ v L:

$$\binom{u+v}{u} = \binom{u+v-1}{u} + \binom{u+v-1}{u-1}.$$

Upoštevajmo enakost $n = u + v$ in dobimo:

$$\binom{n}{u} = \binom{n-1}{u} + \binom{n-1}{u-1}.$$

V našem primeru ($n = 5,\ u = 3$) imamo:

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2} = 6 + 4 = 10 \text{ poti.}$$

Namesto z mrežo (šahovnico) lahko naš problem prikažemo tudi s Pascalovim trikotnikom (slika 5.33).

Izziv *Raziskuj štirikotnike na geoplošči* 3×3.

Takoj vidimo, da se ta problem zelo razlikuje od prejšnjih dveh in problemov, ki jih dajemo učencem pri pouku matematike. Tak problem bi lahko po-imenovali *problem – raziskava*, metodo, s katerim ga rešujemo, pa raziskovanje (Cotič idr., 2011).

Različni načini raziskovanja primera 4:

1. Učenci se odločijo, da bodo štirikotnike razvrstili glede na dve lastnosti: »ima dva para vzporednih stranic« in »diagonali sta enako dolgi«.
2. Učenci se odločijo, da bo njihov cilj izračunati obsege vseh različnih štirikotnikov na geoplošči 3 × 3.

6 Sklep

Cilji izobraževanja, ki so bili naravnani k usvajanju konkretnih vsebin, se danes vse bolj dopolnjujejo s procesnimi znanji oz. z znanji, naravnanimi k iskanju poti in strategij reševanja problemov, ki jih je mogoče prenesti tudi na druga predmetna področja. Ob razvoju informacijske tehnologije se je zmanjšal pomen proceduralnih znanj, zelo pa se je povečala potreba po problemskih znanjih.

Vedno pomembnejše je kompleksno znanje, ki obsega vse od temeljnih spretnosti branja in računanja do zavedanj kompleksnih problemov ter načinov reševanja. Spremembe so v načinu razmišljanja o tem, kaj je znanje – od pojmovanja znanja kot enoznačnega in nespremenljivega h kompleksnemu in k dinamičnemu.

Vzporedno s temi spoznanji se razvijajo tudi splošna in specialne didaktike. Namen učenja in poučevanja matematike ni prenašanje matematičnih vednosti, temveč je temeljni namen doseči, da bi matematiko učenci odkrivali, mislili, gradili; naučiti se matematiko pomeni delati matematiko tako, da rešujemo in raziskujemo probleme.

Pouk geometrije na začetku šolanja v slovenski osnovni šoli temelji na opazovanju in manipuliranju konkretnih predmetov in materialov. Učenci se najprej srečajo s tridimenzionalnimi objekti oz. geometrijskimi telesi in postopoma prehajajo na manjše dimenzije, in sicer na geometrijske like, črte ter točke, kar omogoča, da iz konkretnega v nekoliko abstraktejše mišljenje prehajajo na sistematičen način. Učenci znanje o osnovnih geometrijskih pojmih pridobivajo na način, ki je prilagojen njihovemu kognitivnemu razvoju. Ravno opazovanje, tipanje in oblikovanje predmetov omogočajo učencem, da si vizualizirajo geometrijske elemente, s čimer razvijajo zmožnosti prostorskih predstav.

Prostorske predstave učenci pridobivajo s prepoznavanjem in z uporabo geometrijskih transformacij, izdelovanjem tri- in dvodimenzionalnih modelov oblik ter s prepoznavanjem odnosov med tridimenzionalnimi in njihovimi dvodimenzionalnimi predstavitvami.

Za uspešno in ustrezno vizualizacijo je uporaba didaktičnih sredstev in pripomočkov nujna, in to ne glede na stopnjo učenja geometrije. Sredstva, ki omogočajo hkrati vizualizacijo in manipuliranje (npr. geoplošča), olajšajo izgradnjo geometrijskih konceptov in omogočajo ustrezne miselne predstave.

Poleg tega so v veliko pomoč pri samostojnem raziskovanju, reševanju geometrijskih problemov in aktivni udeležbi pri pouku.

Številne raziskave so potrdile, da so didaktična sredstva učinkovit pripomoček pri pouku geometrije v številnih raziskavah. V raziskavi Mešinovićeve (2016) so učenci eksperimentalne skupine manipulirali z geoploščo. Glede na rezultate raziskave lahko sklepamo, da je njena uporaba pri pouku geometrije nujna. Uporaba več različnih sredstev pri oblikovanju geometrijskih pojmov pozitivno vpliva na dosežke pri geometriji. Zato bi bilo treba ugotoviti, katera sredstva, ki jih imajo učitelji na razpolago, so ravno tako učinkovita kot geoplošča. Temeljito bi bilo treba raziskati vpliv računalniških programov za dinamično geometrijo na vizualizacijo, saj omogočajo konstrukcije geometrijskih objektov in interaktivno manipuliranje z njimi. Vendar je v praksi opaziti, da učitelji niso najbolj naklonjeni uporabi didaktičnih sredstev. To velja predvsem za učitelje matematike v tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju (Hodnik Čadež in Manfreda Kolar 2009). Razloge bi bilo treba odkriti in ustvariti pogoje, ki učencem omogočajo uporabo didaktičnih sredstev in pripomočkov v večji meri.

Za izvajanje učinkovitega pouka geometrije je dobro upoštevati van Hielove stopnje geometrijskega mišljenja in prepoznati, na kateri stopnji se nahaja posamezen učenec. Učinkovitost van Van Hielovega modela pouka geometrije je v svoji raziskavi potrdila tudi Mešinovićeva (2016). Z upoštevanjem njegove teorije lahko učenci ob koncu osnovnošolskega izobraževanja razumejo tudi neformalno deduktivno podane dokaze. Seveda ne smemo pozabiti, da je to mogoče le, če učence na razlaganje in utemeljevanje svojih odgovorov (npr. navodilo »opiši robove kocke« je boljše kot vprašanje »koliko robov ima kocka«) navajamo že ob prvih korakih v svet geometrije.

V monografiji smo prikazali problemski pouk geometrije z uporabo geoplošče, ki temelji na van Hielovem modelu. Prikazali smo obravnavo vsebin iz ravninske geometrije z uporabo geoplošče, s pomočjo katere so si učenci vizualizirali osnovne geometrijske pojme in reševali geometrijske probleme. Zanimivo bi bilo raziskati stopnje geometrijskega mišljenja v prostorski geometriji. Tako bi imeli možnost izboljšati učenje in poučevanje geometrije iz vseh vsebin ter na vseh stopnjah izobraževanja.

Literatura

Adams, T. L. 2003. »Reading Mathematics: More Than Words Can Say.« *The Reading Teacher* 56 (8): 789–795.

Allen, D. S. 2006. »Geometry: More Than Just Shapes.« *Mathematics Teaching in the Middle School* 12 (2): 100–101.

Anderson, J. R. 1983. *The Architecture of Cognition.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Anderson, J. R., A. T. Corbett, K. R. Koedinger in R. Pelletier. 1995. »Cognitive Tutors: Lessons Learned.« *The Journal of the Learning Sciences* 4 (2): 167–207.

Ausubel, D. P. 1963. *The Psychology of Meaningful Verbal Learning.* New York: Grune and Stratton.

———. 1977. »The Facilitation of Meaningful Verbal Learning in the Classroom.« *Educational Psychologist* 12:162–178.

Battista, M. T., G. H. Wheatley in G. Talsma. 1982. »The Importance of Spatial Visualization and Cognitive Development for Geometry Learning in Preservice Elementary Teachers.« *Journal for Research in Mathematics Education* 13 (5): 332–340.

Ben-Chaim, D., G. Lappan in R. T. Houang. 1988. »The Effect of Instruction on Spatial Visualization Skills of Middle School Boys and Girls.« *American Educational Research Journal* 25 (1): 51–71.

Bishop, A. J. 1980. »Spatial Abilities and Mathematics Education: A Review.« *Educational Studies in Mathematics* 11 (3): 257–269.

Blažič, M., M. Ivanuš Grmek, M. Kramar in F. Strmčnik. 2003. *Didaktika.* Novo mesto: Visokošolsko središče.

Bone, J., in N. Colja. 2009. »Uporaba številskega traku pri pouku matematike v luči fleksibilnega predmetnika.« V *Od 0 do neskončnosti: jubilejni zbornik ob 60-letnici Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije,* ur. N. Razpet, 109. Ljubljana: DMFA.

Bratina T., in L. Lipkin. 2003. »Watch Your Language! Recommendations to Help Students Communicate Mathematically.« *Reading Improvement* 40 (1): 3–12.

Brennan, A. D., in W. P. Dunlap. 1985. »What Are the Prime Factors of Reading Mathematics?« *Reading Improvement* 22:152–159

Bruner, J. S. 1966. *Toward a Theory of Instruction.* New York: Norton.

———. 1971. *The Relevance of Education.* New York: Norton.

Bryant, P. 2009. *Key Understandings in Mathematics Learning.* London: Nuffield.

Chapman, J. O. 2001. »Teachers' Self-representations in Teaching Mathematics.« *Mathematics Teacher Education* 13:289–294.

Clarkson, S. P., in H. W. Williams. 1994. »Are You Assessing Reading or Mathematics?« Predstavljeno na Annual Meeting of the American Mathematics Association of Two Year Colleges (AMATYC), Tulsa, OK, november.

Clements, D., in M. Battista. 1992. »Geometry and Spacial Reasoning.« V *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* ur. D. Grouws, 420–464. New York: Macmillan.

Clements, D. H., S. Swaminathan, M. A. Z. Hannibal in J. Sarama. 1999. »Young Children's Concepts of Shape.« *Journal for Research in Mathematics Education* 30 (2): 192–212.

Culyer, R. C. 1988. »Reading and Mathematics Go Hand in Hand.« *Reading Improvement* 25:189–195.

Cotič, M. 1995. »Reševanje matematičnih problemov na razredni stopnji.« *Matematika v šoli* 3 (1): 18–24.

———. 1996. »Uporaba različnih diagramov pri pouku matematike.« V *Prispevki k poučevanju matematike,* ur. S. Kmetič, 245–250. Maribor: Rotis.

Cotič, M., D. Felda, S. Mešinović in B. Simčič. 2011. »Vizualizacija geometrijskih problemov na geoplošči.« *Revija za elementarno izobraževanje* 4 (4): 89–110.

Cotič, M., T. Hodnih, V. Manfreda in S. Mutič. 1998. *Prvo srečanje z geometrijo: priročnik.* Ljubljana: DZS.

Cotič, M., S. Mešinović, M. Valenčič Zuljan, in B. Simčič. 2010. »Geometrical Problems and the Use of Geoboard«. V *Facilitating Effective Student Learning through Teacher Research And Innovation,* ur. M. Valenčič Zuljan in J. Vogrinc, 375–398. Ljubljana: Faculty of Education.

Coxford, A. 1978. »Research Directions in Geometry.« V *Recent Research Concerning the Development of Spatial and Geometric Concepts,* ur. R. Lesh in D. Mierkiewicz, 323–332. http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED159062.pdf

Darke, I. 1982. »A Review of Research Related to the Topological Primacy Thesis.« *Educational Studies in Mathematics* 13 (2): 119–142.

Davis, R. B. 1984. *Learning Mathematics: The Cognitive Science Approach to Mathematics.* Norwood, NJ: Ablex.

Dawe, L. 1983. *Bilingualism and Special Education: Issues in Assessment and Pedagagogy.* Clevedon: Multilingual Matters.

Del Grande, J. 1990. »Spatial Sense.« *The Aritmetic Teacher* 37 (6): 14–20.

Dickson, L., M. Brown in O. Gibson. 1984. *Children Learning Mathematics: A Teacher's Guide to Recent Research.* London: Cassell.

Dienes, Z. 1960. *Building up Mathematics.* London: Hutchinson.

Doise, W., in G. Mugny. 1981. *Le developpement social de l' intelligence.* Pariz: InterEditions.

Dreyfus, T. 1991. »Advanced Mathematical Processes in Advanced Mathematical Thinking.« In *Advanced Mathematical Thinking,* ur. D. Tall, 25–41. Dordrecht: Kluwer.

Egsgard, J. C. 1970. »Some Ideas in Geometry That Can Be Taught from K-6.« *Educational Studies in Mathematics* 2 (4): 478–495.

Fennema, E. H. 1972. »The Relative Effectiveness of a Symbolic and a Concrete Model in Learning a Selected Mathematical Principle.« *Journal for Research in Mathematics Education* 3 (4): 233–238.

Fennema, E., in J. Sherman. 1977. »Sex-Related Differences in Mathematics Achievement, Spatial Visualization and Affective Factors.« *American Educational Research Journal* 14 (1): 51–71.

Friedman, M. 1978. »The Manipulative Materials Strategy: The Latest Pied Piper?« *Journal for Research in Mathematics Education* 9 (1): 78–80.

Frobisher, L. 1994. »Problems, Investigations and an Investigative Approach.« V *Issues in Teaching Mathematics,* ur. A. Orton in G. Wain, 150–173. London: Cassell.

———. 1996. »Changing a mathematics Problem into an Investigation.« V *Prispevki k poučevanju matematike,* ur. S. Kmetič, 239–244. Maribor: Rotis.

Fuson, K., in C. Murray. 1978. »The Haptic-Visual Perception, Construction, and Drawing of Geometric Shapes by Children Aged Two to Five: A Piagetian Extension.« V *Recent Research Concerning the Development of Spatial and Geometric Concepts,* ur. R. Lesh in D. Mierkiewicz, 49–84. http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED159062.pdf

Forman, E., N. Minick in C. Addison. 1993. *Contexts for Learning, Sociocultural Dynamics in Children' s Development.* New York: Oxford University Press.

Fuys, D., D. Geddes in R. Tischler. 1988. »The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents.« *Journal for Research in Mathematics Education* 3:1–196.

Gagne, R. M. 1985. *The Conditions of Learning and Theory of Instruction.* New York: Holt, Rinehart & Winston.

Gardner, H. 1995. *Razsežnosti uma: teorija o več inteligencah.* Ljubljana: Tangram.

Geeslin, W. E. in A. O. Shar. 1979. »An Alternative Model Describing Children's Spatial Preferences.« *Journal for Research in Mathematics Education* 10 (1): 57–68.

Gellert, U. 2004. »Didactic Material Confronted with the Concept of Mathematical Literacy.« *Educational Studies in Mathematics* 55 (1): 163–179.

Glaymann, M., in T. Varga. 1979. *La probabilità nella scuola dell'obligo.* Roma: Armando.

Glenberg, A. M., T. Gutierrez, J. R. Levin, S. Japuntich in M. P. Kaschak. 2004. »Activity and Imagined Activity Can Enhance Young Children's Reading Comprehension.« *Journal of Educational Psychology* 96 (3): 424–436.

Goldsby, D. 2009. »Research Summary: Manipulatives in Middle Grades Mathematics.« http://www.amle.org/TabId/270/ArtMID/888/ArticleID/325/Research-Summary-Manipulatives-in-Middle-Grades-Mathematics.aspx

Greeno, J. G. 1979. »Some Examples of Cognitive Task Analysis with Instructional Implications.« http://oai.dtic.mil/oai/oai?verb=getRecord&metadataPrefix=html&identifier=ADA073189

———. 1982. »A Cognitive Learning Analysis of Algebra.« Predstavljeno na letni konferenci American Educational Research Association, Boston, MA, 19.–23. marec.

———. 1984. *Forms of Understanding in Mathematical Problem Solving.* Washington, DC: National Institute of Education.

Guay, R. B., in E. D. McDaniel. 1977. »The Relationship between Mathematics Achievement and Spatial Abilities among Elementary School Children.« *Journal for Research in Mathematics Education* 8 (3): 211–215.

Hall, N. 1998. »Concrete Representation and the Procedural Analogy Theory.« *Journal of Mathematical Behavior* 17 (1): 33–51.

Hodnik Čadež, T. 2004. »Vloga konstruktivizma pri oblikovanju matematičnih pojmov na razredni stopnji.« V *Konstruktivizem v šoli in izobraževanje učiteljev,* ur. B. Marentič Požarnik, 321–336. Ljubljana: Center za pedagoško izobraževanje Filozofske fakultete.

Hodnik Čadež, T. in V. Manfreda Kolar. 2009. »Didaktična sredstva z vidika motivacije pri pouku matematike.« V *Pouk v družbi znanja,* ur. M. Cotič, V. Medved Udovič in M. Cencič, 232–247. Koper: Pedagoška fakulteta.

Horvat, L., in L. Magajna. 1987. *Razvojna psihologija.* Ljubljana: DZS.

Johnson, D. W., in R. Johnson. 1999. *Learning Together and Alone: Cooperation, Competition, and Individualization.* Boston, MA: Allyn & Bacon.

Ivanuš Grmek, M., B. Čagran in B. Sadek. 2009. *Didaktični pristopi pri poučevanju predmeta spoznavanje okolja v tretjem razredu osnovne šole.* Ljubljana: Pedagoški inštitut.

Ivanuš Grmek, M., in M. Javornik Krečič. 2011. *Osnove didaktike.* Maribor: Pedagoška fakulteta.

Japelj Pavešić, B., K. Svetlik in A. Kozina. 2012. *Znanje matematike in naravoslovja med osnovnošolci v Sloveniji in po svetu: izsledki raziskave TIMSS.* Ljubljana: Pedagoški inštitut.

Johnson, E. S., in A. C. Meade. 1987. »Developmental Patterns of Spatial Ability: An Early Sex Difference.« *Child Development* 58 (3): 725–740.

Kapadia, R. 1974. »A Critical Examination of Piaget-Inhelder's View on Topology.« *Educational Studies in Mathematics* 5 (4): 419–424.

Kmetič, S. 1996. »Od pojma do definicije.« V *Prispevki k poučevanju matematike,* ur. S. Kmetič, 219–234. Maribor: Založba Rotis.

Kosslyn, S. M., in L. M. Shin. 1991. »Visual Mental Images in the Brain.« *Proceedings of the American Philosophical Society* 135 (4): 524–532.

Kozina, A., K. Svetlik, in B. Japelj Pavešić. 2012. *Izhodišča raziskave TIMSS 2011: mednarodna raziskava trendov znanja matematike in naravoslovja.* Ljubljana: Pedagoški inštitut.

Kraiger, K., Ford, J. K. in Salas, E. 1993. »Application of Cognitive, Skill Based, and Affective Theories of Learning Outcomes to New Methods of Training Evalution.« *Jurnal of Applied Phychology Monograph* 78 (2): 311–328.

Labinowicz, E. 1989. *Izvirni Piaget: mišljenje – učenje – poučevanje.* Ljubljana: DZS.

Lamon, W. E., in L. E. Huber. 1971. »The Learning of the Vector Space Structure by Sixth Grade Students.« *Educational Studies in Mathematics* 4 (2): 166–181.

Lean, G., in M. A. Clements. 1981. »Spatial Ability, Visual Imagery, and Mathematical Performance.« *Educational Studies in Mathematics* 12 (3): 267–299.

Lebarič, N., D. Kobal in J. Kolenc. 2002. »Motivacija za učenje in samopodoba.« *Psihološka obzorja* 11 (3): 23–38.

Lesh, R., in D. Mierkiewicz. 1978. »Perception, Imagery, and Conception in Geometry.« V *Recent Research Concerning the Development of Spatial and Geometric Concepts,* ur. R. Lesh in D. Mierkiewicz, 7–28. http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED159062.pdf

Magajna, Z. 1996. »Štirje iz enega.« *Matematika v šoli* 4 (1): 23–26.

Maleš, M. M., K. Musek Lešnik, A. Polšak in M. Vehovec. 2013. *Nacionalno preverjanje znanja: letno poročilo o izvedbi v šolskem letu 2012/2013.* Ljubljana: Državni izpitni center.

Maleš, M. M., A. Polšak, M. Vehovec in J. Vogrinc. 2014. *Nacionalno preverjanje znanja: letno poročilo o izvedbi v šolskem letu 2013/2014.* Ljubljana: Državni izpitni center.

Marentič Požarnik, B. 2000. *Psihologija učenja in pouka.* Ljubljana: DZS.

———. 2001. »Zunanje preverjanje, kultura učenja in kakovost (maturitetnega) znanja.« *Sodobna pedagogika* 52 (3): 54–75.

Marentič-Požarnik, B., L. Magajna, in C. Peklaj. 1995. *Izziv raznolikosti: stili spoznavanja, učenja, mišljenja.* Nova Gorica: Educa.

Markovac, J. 1992. *Metodika početne nastave matematike.* Zagreb: Školska knjiga.

Martin, J. L. 1976a. »An Analysis of Some of Piaget's Topological Tasks from a Mathematical Point of View.« *Journal for Research in Mathematics Education* 7 (1): 8–24.

———. 1976b. »A Test with Selected Topological Properties of Piaget's Hypothesis concerning the Spatial Representation of the Young Child.« *Journal for Research in Mathematics Education* 7 (1): 26–38.

Martin, T., in D. L. Schwartz. 2005. »Physically Distributed Learning: Adapting and Reinterpreting Physical Environments in the Development of Fraction Concepts.« *Cognitive Science* 29:587–625.

MacGregor, M., in E. Price. 1999. »An Exploration of Aspects of Language Proficiency and Algebra Learning.« *Journal of Research in Mathematics Education* 30:449–467.

McNeil, N. M., in L. Jarvin. 2007. »When Theories Don't Add up: Disentangling the Manipulatives Debate: Theory into Practice.« *Research in the Service of Practice* 46 (4): 309–316.

Mešinović, S. 2016. »Vizualizacija geometrijskih pojmov z uporabo geoplošče v osnovni šoli.« Doktorska disertacija, Univerza na Primorskem, Koper.

Mitrović, M. 1997. »Projektivna geometrija.« http://books.google.si/books?id=XNoqflm5xLgC&printsec=frontcover&hl=sl&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false.

Moyer, P. S. 2001. »Are We Having Fun Yet? How Teachers Use Manipulatives to Teach Mathematics.« *Educational Studies in Mathematics* 47 (2): 175–197.

Munier, V., C. Devichi in H. Merle. 2008. »A Physical Situation As a Way to Teach Angle.« *Teaching Children Mathematics* 14 (7): 402–407.

Nacionalni kurikularni svet. 1996. *Izhodišča kurikularne prenove.* Ljubljana: Nacionalni kurikularni svet.

Nickson, M. 2004. *Teaching and Learning Mathematics: A Guide to Recent Research and its Applications.* 2. izd. London: Continuum.

Novak, B., in J. Kolenc. 2001. »Primerjanje učnih stilov v osemletni in devetletni osnovni šoli.« *Vzgoja in izobraževanje* 32 (1): 114–116.

Orton, A., in G. Wain. 1994. *Issues in Teaching Mathematics.* London: Cassell.

Pagon, D. 1995. *Osnove evklidske geometrije.* Ljubljana: DZS.

Parzysz, B. 1988. »'Knowing' vs. 'Seeing.' Problems of the Plane Representation of Space Geometry Figures.« *Educational Studies in Mathematics* 19 (1): 79–92.

Pavlič Škerjanc, K. 2015. »Razvijanje strokovnih pismenosti v TJ: gradiva projekta Obogateno učenje tujih jezikov.« http://www.zrss.si/naravoslovje2015/files/cetrtek-delavnice/Misliti-kot-naravoslovec-gradivo.pdf

Petač, D. 2011. »Razvijanje ustvarjalnih sposobnosti učencev v prvem triletju 9-letne osnovne šole: diplomsko delo.« Diplomsko delo, Univerza v Ljubljani, Ljubljana.

Piaget, J. 1954. *The Construction of Reality in the Child.* New York: Basic Books.

Piaget, J., in B. Inhelder. 1967. *The Child's Conception of Space.* New York: Norton.

———. 1978. *Intelektualni razvoj deteta.* Beograd: Zavod za udžbenike in nastavna sredstva.

Piciga, D. 1995. *Od razvojne psihologije k drugačenmu učenju in poučevanju.* Nova Gorica: Educa.

Poljak, V. 1970. *Didaktika za pedagoške akademije.* Zagreb: Školska knjiga.

Prigge, G. R. 1978. »The Diffrerential Effects of the Use of Manipulative Aids on the Learning of Geometric Concepts by Elementary School Children.« *Journal for Research in Mathematics Education* 9 (5): 361–367.

Prodanović, T., in R. Ničković. 1974. *Didaktika.* Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.

Raphael, D., in M. Wahlstrom. 1989. »The Influence of Instructional Aids on Mathematics Achievement.« *Journal for Research in Mathematics Education* 20 (2): 173–190.

Rosser, R. A., K. P. Campbell in P. F. Horan. 2003. »The Differential Salience of Spatial Information Features in the Geometric Reproduction of Young Children.« *The Journal of Genetic Psychology* 147 (4): 447–455.

Royer, J. M., C. A. Cisero in M. S. Carlo. 1993. »Techniques and Procedures for Assesing Cognitive Skills.« *Review of Educational Research* 63 (2): 201–243.

Rugelj, M. 1996. »Konstrukcija novih matematičnih pojmov.« Doktorsko delo, Univerza v Ljubljani, Ljubljana.

Secada, W. G. 1995. »Social and Critical Dimensions for Equity in Mathematics Education.« In *New Directions for Equity in Mathematics Education,* ur. W. G. Secada, E. Fennema in L. B. Adajian, 146–164. Cambridge: Cambridge University Press.

Sfard, A. 1991. »On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects As Different Sides of the Same Coin.« *Educational Studies in Mathematics* 22:1–36.

Sinclair, M., A. Mamolo in W. J. Whiteley. 2011. »Designing Spatial Visual Tasks for Research: The Case of the Filling Task.« *Educational Studies in Mathematics* 78 (2): 135–163.

Smith, J. P. 1996. »Efficacy and Teaching Mathematics by Telling: A Challenge for Reform.« *Journal for Research in Mathematics Education* 27 (4): 387–402.

Sowell, E. J. 1989. »Effects of Manipulative Materials in Mathematics Instruction.« *Journal for Research in Mathematics Education* 20 (5): 498–505.

Stigler, J. W., S. Y. Lee in H. W. Stevenson. 1990. *Mathematical Knowledge of Japanese, Chinese and American Elementary School Children.* Restor, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Struik, D. J. 1978. *Kratka zgodovina matematike.* Ljubljana: DZS.

Učni načrt: program osnovna šola; matematika. 2002. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport.

———. 2011. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport.

Usiskin, Z. 1980. »What Should Not Be in the Algebra and Geometry Curricula of Average College-Bound.« *Mathematics Teachers* 73:413–424.

———. 1982. *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry.* Chicago: University of Chicago.

Van Hiele, P. 1959. *The Child's Thought and Geometry.* Brooklyn, NY: City University of New York.

Van de Walle, J. A., K. S. Karp in J. M. Bay-Williams. 2013. *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally.* 8. izd. Boston, MA: Pearson.

Vigotski, L. 1978. *Mind in Society: The Develepment of Higher Psychological Processes.* Cambridge, MA: Harward University Press.

———. 1983. *Mišljenje i govor.* Beograd: Nolit.

Wakefield, D. V. 2000. »Math As a Second Language.« *The Educational Forum* 64:272–279.

Wirszup, I. 1976. »Breakthroughs in the Psychology of Learning and Taching Geometry.« V *Space and Geometry: Papers from a Research Workshop,* ur. J. L. Martin in D. A. Bradbard, 75–98. Columbus, OH: ERIC Center for Science, Mathematics, and Environmantal Education.

Tenuta, U. 1992. *Itinerari di logica, probabilitia', statistica, informatica.* Brescia: La Scuola.

Thomas, D. A. 1988. »Reading and Reasoning Skills for Mathematics Problem Solvers.« *Journal of Reading* 32 (3): 244–249.

Thurstone, L. L. 1938. *Primary Mental Abilities.* Chicago: University of Chicago Press.

Wagner, S., S. L. Rachlin in R. J. Jensen. 1984. »Algebra Learning Project: Final Report.« University of Georgia, Athens, GA.

Weinzweig, A. I. 1978. »Mathematical Fundation tor the Development of Spatial Concepts in Children.« V *Recent Research Concerning the Development of Spatial and Geometric Concepts,* ur. R. Lesh in D. Mierkiewicz, 105–176. http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED159062.pdf

Whitman, B. S. 1976. »Intuitive Equation Solving Skills and the Effects on Them of Formal Techniques of Education Solving.« Doktorska disertacija, Florida State University, Tallahassee, FL.

Wittmann, B. 2010. »Jean Piaget and the Child's Spontaneous Geometry.« https://www.mpiwg-berlin.mpg.de/en/news/features/features-feature11

Woolfolk, A. 2002. *Pedagoška psihologija.* Ljubljana: Educy.

Žakelj, A. 2003. *Kako poučevati matematiko, teoretična zasnova modela in njegova didaktična izpeljava.* Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.

———. 2004. »Procesno-didaktični pristop in razumevanje matematičnih pojmov v osnovni šoli.« Doktorsko delo, Univerza v Ljubljani, Ljubljana.

———. 2012. »Odkrivanje in prepoznavanje učnih težav in ukrepi pomoči učencem z učnimi težavami pri matematiki.« V *Zbornik prispevkov 1. mednarodne konference o učenju in poučevanju matematike – KUPM 2012, Maribor, 23. in 24. avgust 2012,* ur. S. Kmetič, in A. Sambolić Beganović, 67–78. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.

———. 2016. »Jezikovna dimenzija matematike in pouk matematike.« V *Bralna pismenost kot izziv in odgovornost,* ur. T. Devjak, I. Saksida in M. Dagarin Fojkar, 163–176. 1. izd. Ljubljana: Pedagoška fakulteta.

Žakelj, A., in M. Valenčič Zuljan. 2015. *Učenci z učnimi težavami pri matematiki: prepoznavanje učnih težav in model pomoči.* 1. izd. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.

Imensko kazalo