

Univerza
v Ljubljani

Fakulteta za
*gradbeništvo in
geodezijo*



ALEŠ KROFLIČ, univ. dipl. inž. grad.

**NELINEARNA ANALIZA VEČSLOJNIH
KOMPOZITNIH LINIJSKIH KONSTRUKCIJ**

DOKTORSKA DISERTACIJA

Ljubljana, marec 2012

Univerza
v Ljubljani

Fakulteta za
*gradbeništvo in
geodezijo*



PODIPLOMSKI ŠTUDIJ
GRADBENIŠTVA

DOKTORSKI ŠTUDIJ

Kandidat:

ALEŠ KROFLIČ, univ. dipl. inž. grad.

**NELINEARNA ANALIZA VEČSLOJNIH
KOMPOZITNIH LINIJSKIH KONSTRUKCIJ**

Doktorska disertacija štev.: 222

**NON-LINEAR ANALYSIS OF MULTILAYER
COMPOSITE STRUCTURES**

Doctoral thesis No.: 222

Temo doktorske disertacije je odobrila Komisija za doktorski študij na 8. redni seji,
8. julija 2010. Za mentorja je bil imenovan prof. dr. Goran Turk, za somentorja pa
doc. dr. Bojan Čas, ZRMK.

Ljubljana, 16. marec 2012

Univerza
v Ljubljani

Fakulteta za
gradbeništvo in
geodezijo



Komisijo za oceno ustreznosti teme doktorske disertacije v sestavi:

- prof. dr. Goran Turk,
- prof. dr. Franc Kosel, UL FS,
- prof. dr. Igor Planinc,
- izr. prof. dr. Boštjan Brank,

je imenoval Senat Fakultete za gradbeništvo in geodezijo na 10. redni seji,
dne 21. aprila 2010.

Poročevalce za oceno doktorske disertacije v sestavi:

- doc. dr. Sebastjan Bratina,
- prof. dr. Franc Kosel, UL FS,
- prof. dr. Igor Planinc,

je imenoval Senat Fakultete za gradbeništvo in geodezijo na 27. redni seji,
dne 25. januarja 2012.

Komisijo za zagovor doktorske disertacije v sestavi:

- prof. dr. Matjaž Mikoš, dekan UL FGG, predsednik,
- prof. dr. Goran Turk, mentor,
- doc. dr. Bojan Čas, ZRMK, somentor,
- prof. dr. Franc Kosel, UL FS,
- prof. dr. Igor Planinc,
- doc. dr. Sebastjan Bratina,

je imenoval Senat Fakultete za gradbeništvo in geodezijo na 28. redni seji
dne, 29. februarja 2012.

Univerza
v Ljubljani

Fakulteta za
*gradbeništvo in
geodezijo*



IZJAVA O AVTORSTVU

Podpisani **ALEŠ KROFLIČ**, univ. dipl. inž. grad., izjavljam, da sem avtor doktorske disertacije z naslovom:

»NELINEARNA ANALIZA VEČSLOJNIH KOMPOZITNIH LINIJSKIH KONSTRUKCIJ«.

Izjavljam, da je elektronska različica v vsem enaka tiskani različici.

Izjavljam, da dovoljujem objavo elektronske različice v repozitoriju UL FGG.

Ljubljana, 16. marec 2012

.....
(podpis)

BIBLIOGRAFSKO-DOKUMENTACIJSKA STRAN IN IZVLEČEK

UDK: 624.016:624.072.2:(0.43.3)
Avtor: Aleš Krofič
Mentor: prof. dr. Goran Turk
Somentor: doc. dr. Bojan Čas
Naslov: Nelinearna analiza večslojnih kompozitnih konstrukcij
Tip dokumenta: doktorska disertacija
Obseg in oprema: 104 str., 9 pregl., 77 sl., 320 en.
Ključne besede: večslojni kompozitni nosilec, zdrs, razmik, lezenje in krčenje, mehčanje, elastični uklon, metoda končnih elementov, analitična rešitev

Izvleček

V doktorski disertaciji je prikazan nov numerični model za nelinearno statično analizo večslojnih linijskih kompozitnih konstrukcij s podajnimi veznimi sredstvi. Vsebinsko je disertacija razdeljena na dva dela. V prvem delu je predstavljen numerični model za analizo ravninskih večslojnih okvirjev. V prikazanem modelu je vsak sloj kompozitnega okvirja modeliran z geometrijsko točnim Reissnerjevim modelom ravninskega nosilca. Pomembna novost modela je vpeljava konstitutivnega zakona veznih sredstev. Zakon, ki predstavlja poljubno nelinearno zvezo med vektorjem napetosti in vektorjem razlike pomikov na stiku med sloji, je zapisan v povprečni bazi. Tak zapis omogoča fizikalno smiselno posplošitev konstitutivnih zakonov veznih sredstev, ki so poznani pri linearnih modelih dvoslojnih linijskih nosilcev, kjer je zakon zapisan v prostorski bazi. Osnovni sistem nelinearnih ravnotežnih enačb matematičnega modela je v disertaciji rešen z Galerkinovo metodo končnih elementov. Predstavljena je nova družina deformacijskih končnih elementov. Nova numerična metoda za analizo večslojnih ravninskih kompozitnih okvirjev je zelo natančna in zato primerna za analizo togosti, duktilnosti, nosilnosti in uklonske nosilnosti vseh vrst večslojnih kompozitnih okvirjev, ki se uporabljajo v gradbeništvu. Detajlna parametrična analiza je pokazala, da imata prečna in vzdolžna togost stika velik vpliv na uklonsko nosilnost kompozitnih stebrov ter da je vpliv prečne togosti stika v primerjavi z vzdolžno togostjo stika pri upogibno obremenjenih večslojnih kompozitnih okvirjih zanemarljiv. V drugem delu doktorske disertacije je predstavljena točna rešitev uklonskih sil pri popolnoma razslojenih elastičnih ravnih prostorskih stebrih in elastičnih zavutih prostorskih stebrih. Točna rešitev je izpeljana z uporabo konsistentne linearizacije Reissner-Simovega matematičnega modela prostorskega nosilca in dejstva, da so kritične točke nelinearnega sistema enačb enake kritičnim točkam pripadajočega lineariziranega sistema enačb. S parametričnimi študijami je bilo ugotovljeno, da dolžina, lega in orientacija razslojenih delov prostorskih elastičnih stebrov pomembno vplivajo na njihovo uklonsko nosilnost ter da je uklonska nosilnost zavutih stebrov večja od uklonske nosilnosti ravnih stebrov.

BIBLIOGRAPHIC-DOCUMENTALISTIC INFORMATION

UDC: 624.016:624.072.2:(0.43.3)
Author: Aleš Kroflič
Supervisor: prof. dr. Goran Turk
Co-supervisor: doc. dr. Bojan Čas
Title: Non-linear analysis of multilayer composite structures
Document type: Ph. D. Thesis
Notes: 104 p., 9 tab., 77 fig., 320 eq.
Key words: multilayer composite beam, slip, uplift, creep and shrinkage, softening, elastic, buckling, finite element method, analytical solution

Summary

A new mathematical model for non-linear static analysis of multilayer composite structures with deformable connection is presented. Doctoral thesis is divided into two parts. In the first part a new mathematical model for analysis of plane multilayer frames is presented. Each layer of composite frame is modelled with geometrically exact Reissner model of plane beam. An important novelty of the model is the introduction of a new constitutive law for connection. Arbitrary non-linear relationship between stress vector and vector of displacement differences at the contact is described in the average base. This constitutive law presents a physically reasonable generalization of constitutive laws known from linear models of two-layer beams which are described in spatial base. The basic system of non-linear equilibrium equations which represents mathematical model is solved by Galerkin's finite element method. A new family of strain-based finite elements is presented. A new numerical method for analysis of multilayer plane composite structures is very accurate and therefore suitable for analysis of stiffness, ductility, ultimate capacity and buckling capacity of different types of multilayer composite structures used in civil engineering. Detailed parametric study revealed that shear and transverse connection stiffness have a major effect on buckling capacity of composite columns. The effect of transverse connection is negligible comparing to the effect of shear connection in the case of bending of multilayer composite frames. The influence of transverse connection stiffness is negligible when composite beams are subjected to bending. The exact solution of buckling capacity of completely debonded elastic spatial beams with straight axis and pre-twisted beams is presented in the second part of the doctoral thesis. The solution is derived based on consistent linearization of Reissner-Simo's spatial beam model and the fact that critical points of linearized system of equations are equal to the critical points of corresponding non-linear system of equations. Parametric studies revealed that initial twist of cross-sections, length and position of delaminated parts have an important effect on buckling capacity of fully delaminated elastic spatial beams. The buckling capacity is higher in the case of twisted columns.

Zahvale

Zahvaljujem se mentorju prof. dr. Goranu Turku in doc. dr. Bojanu Času za izkazano zaupanje in nesebično pomoč pri delu. Za vso pomoč, koristne nasvete in spodbudo pri delu se posebej zahvaljujem tudi prof. dr. Igorju Planincu, izr. prof. dr. Dejanu Zupanu in prof. dr. Miranu Sajetu. Hvala tudi ostalim sodelavcem Katedre za mehaniko za konstruktivne debate, pozitivno delovno vzdušje in skupna druženja izven delovnega časa.

Hvala staršem in sestri Mateji za podporo in razumevanje.

Katja, hvala za vse.

Kazalo

1	Uvod	1
1.1	Predstavitev problema in pregled stanja na obravnavanem področju	1
1.2	Vsebina dela	5
2	Ravninski večslojni linijski kompozitni nosilci	7
2.1	Osnovne enačbe ravninskih večslojnih linijskih kompozitnih nosilcev	7
2.1.1	Kinematične enačbe	7
2.1.2	Ravnotežne enačbe	10
2.1.3	Konstitutivne enačbe	12
2.1.4	Robni pogoji	14
2.1.5	Vezne enačbe	14
2.1.6	Linearizacija enačb	17
2.1.7	Modificiran izrek o virtualnem delu	19
2.2	Posplošene diskretne ravnotežne enačbe večslojnega linijskega kompozitnega nosilca . .	24
2.2.1	Galerkinova metoda končnih elementov	24
2.2.2	Reševanje diskretnih posplošenih ravnotežnih enačb večslojnega kompozitnega okvirja	28
2.3	Računski primeri	33
2.3.1	Verifikacija numeričnega modela	33
2.3.2	Validacija numeričnega modela	42
2.3.3	Parametrična študija vpliva prečne togosti stika na mehansko obnašanje dvoslojnih kompozitnih nosilcev	48
2.3.4	Prostoležeči armiranobetonski nosilec, ojačan s FRP-trakovi, in sovprežni nosilec – analiza lezenja in krčenja	55
2.3.5	Prostoležeči sovprežni nosilec – analiza mehčanja	60
2.3.6	Dvoslojni steber iz lesa in betona – Eulerjeve uklonske sile	66

2.3.7	Večslojni kompozitni elastični prostoležeči nosilec – analitična rešitev	68
3	Uklonska nosilnost razslojenih elastičnih prostorskih stebrov	74
3.1	Geometrijski model stebra	74
3.2	Osnovne enačbe prostorskega stebra	75
3.3	Linearizacija enačb	76
3.4	Analitična rešitev lineariziranih enačb	78
3.4.1	Raven elastični razslojeni prostorski steber	78
3.4.2	Zavit elastični razslojeni steber	79
3.4.3	Robni pogoji	80
3.5	Parametrične študije	81
3.5.1	Raven elastični razslojeni prostorski steber	81
3.5.2	Zavit elastični razslojeni prostorski steber	88
4	Zaključki	91
5	Povzetek	93
6	Summary	95
	Literatura	97

Seznam slik

2.1	Nedeformirana in deformirana lega večslojnega linijskega kompozitnega nosilca.	8
2.1	Undeformed and deformed configuration of a multilayer composite beam.	8
2.2	Materialna $\{\mathbf{e}_x^i, \mathbf{e}_y^i, \mathbf{e}_z^i\}$ in naravna $\{\mathbf{e}_t^i, \mathbf{e}_n^i, \mathbf{e}_b^i\}$ baza sloja i kompozitnega nosilca.	9
2.2	Material $\{\mathbf{e}_x^i, \mathbf{e}_y^i, \mathbf{e}_z^i\}$ and natural $\{\mathbf{e}_t^i, \mathbf{e}_n^i, \mathbf{e}_b^i\}$ basis of layer i of composite beam.	9
2.3	Zveze med kinematičnimi in deformacijskimi količinami sloja i kompozitnega nosilca.	10
2.3	Relationships between kinematic quantities and deformations of layer i of composite beam.	10
2.4	Obtežba sloja i kompozitnega nosilca in obremenitev prečnega prereza.	11
2.4	Loading of layer i of composite beam and loading of cross section.	11
2.5	Geometrijske in ravnotežne količine na stiku k med slojema i in $i + 1$ ter geometrijski pomen "povprečne" baze. Točki T^i in T^{i+1} sta v nedeformirani legi istoležni.	15
2.5	Geometrical and equilibrium quantities of contact k between layers i and $i + 1$ and geometrical meaning of "averaged" basis. Points T^i and T^{i+1} coincide in undeformed configuration.	15
2.6	Razdelitev časovnega intervala na korake pri koračni metodi (Ghali, Favre, 1994).	32
2.6	Division of time into steps for "step-by-step" analysis (Ghali, Favre, 1994).	32
2.7	Prečni prerez (a) in razpored moznikov (b) dvoslojnega lesenega nosilca.	33
2.7	Cross section (a) and arrangement of connectors (b) of two-layer timber beam.	33
2.8	Relativna napaka numerične rešitve na stiku prostoležečega elastičnega nosilca: (a) razmik na sredini nosilca (napaka _{$d,1$}) in (b) zdrs (napaka _{$\Delta,1$}) ob podpori.	34
2.8	Relative error of numerical solution at the contact of a simply supported elastic beam: (a) uplift at the midspan (napaka _{$d,1$}) and (b) slip (napaka _{$\Delta,1$}) at the support.	34
2.9	T-prečni prerez.	34
2.9	T cross-section.	34
2.10	Obtežba, geometrijski in materialni podatki nosilca (Girhammar, Gopu, 1993).	35
2.10	Loading, geometric and material data of the beam (Girhammar, Gopu, 1993).	35
2.11	Obtežba, geometrijski in materialni podatki obojestransko vpetega nosilca.	37

2.11 Loading, geometric and material data of a fully clamped beam.	37
2.12 Relativna napaka navpičnega pomika w_A v odvisnosti od števila elementov N_e za obtežna faktorja (a) $\lambda = 25$ in (b) $\lambda = 900$	37
2.12 Relative error of vertical displacement w_A vs. number of elements N_e for load level (a) $\lambda = 25$ and (b) $\lambda = 900$	37
2.13 Dejanske deformirane oblike polnovpetega nosilca za obtežne nivoje $\lambda = 25, 50, 900$	38
2.13 The actual deformed shapes of a fully clamped beam for load levels $\lambda = 25, 50, 900$	38
2.14 Obtežba in geometrijski podatki kontinuirnega nosilca.	38
2.14 Loading and geometric data of continuous beam.	38
2.15 Konstitutivni zakon lesa.	39
2.15 Timber constitutive law.	39
2.16 Nelinearni zakon stika v (a) tangentialni smeri \mathbf{e}_t^* in (b) normalni smeri \mathbf{e}_n^* (Čas, 2004a).	39
2.16 Non-linear contact relationship in (a) tangential direction \mathbf{e}_t^* and (b) normal direction \mathbf{e}_n^* (Čas, 2004a).	39
2.17 (a) Relativna napaka navpičnega pomika w_D v odvisnosti od števila končnih elementov za nivoja obtežbe $\lambda = 10$ in $\lambda = 54$: (a) togi stik v normalni smeri ($C^* = 1000 \text{ kN/cm}^2$) in (b) nelinearni stik v normalni smeri (kot na sliki 2.16(b)).	40
2.17 (a) Relative error of vertical displacement w_D vs. number of elements for load levels $\lambda = 10$ and $\lambda = 54$: (a) rigid normal connection ($C^* = 1000 \text{ kN/cm}^2$) and (b) non-linear contact in the normal direction (as in Fig. 2.16(b)).	40
2.18 Geometrija, obtežba in podpiranje osno obteženega dvoslojnega nosilca.	40
2.18 Geometry, loading and supports of axially loaded two-layer beam.	40
2.19 Geometrija, obtežba in podpiranje dvoslojnega nosilca, obteženega s točkovnim momentom.	41
2.19 Geometry, loading and supports of two-layer beam subjected to bending moment.	41
2.20 Deformirana oblika osno obremenjenega dvoslojnega nosilca pri $\lambda = 100, \zeta = 0.5$	41
2.20 Deformed shape of axially loaded two-layer beam at load level $\lambda = 100, \zeta = 0.5$	41
2.21 Deformirana oblika momentno obremenjenega dvoslojnega nosilca pri $\lambda = 150, \zeta = 0.5$	42
2.21 Deformed shape of two-layer beam subject to bending moment at load level $\lambda = 150, \zeta = 0.5$	42
2.22 Konstitutivni zakon lesa.	43
2.22 Constitutive law of timber.	43
2.23 Nelinearni zakoni stika: (a) obtežba na stiku v tangencialni smeri-zdrs ($p_X - \Delta$) in (b) obtežba na stiku v normalni smeri-razmik ($p_Z - d$).	43
2.23 Non-linear contact relationships: (a) shear traction-slip ($p_X - \Delta$) relationship and (b) normal traction-uplift ($p_Z - d$).	43

2.24	Izmerjen in izračunan odziv: (a) sila-pomik ($P - w_A^a$) in (b) sila-robni zdrs ($P - \Delta_B$).	44
2.24	Measured and calculated response: (a) load-deflection ($P - w_A^a$) and (b) load-slip ($P - \Delta_B$) curves.	44
2.25	Izmerjeni in izračunani prečni pomiki spodnjega sloja.	45
2.25	Measured and calculated vertical displacements of bottom layer.	45
2.26	McCutcheonov eksperimentalni preizkušanelec (McCutcheon, 1986).	45
2.26	Experimentally tested specimen of McCutcheon (McCutcheon, 1986).	45
2.27	Konstitutivni zakon stika v vzdolžni smeri (McCutcheon, 1986).	46
2.27	Constitutive contact relationship in longitudinal direction (McCutcheon, 1986).	46
2.28	Obtežba, podpiranje in geometrijske lastnosti sovprežnega kontinuirnega nosilca (An-sourian, 1981).	46
2.28	Loading, supports and geometrical properties of steel-concrete continuous beam (An-sourian, 1981).	46
2.29	Materialni modeli: (a) jeklo in armatura, (b) beton, (c) obtežba stika v tangencialni smeri v odvisnosti od "povprečnega" zdrsa ($p_t^* - \Delta^*$) in (d) obtežba stika v normalni smeri v normalni smeri v odvisnosti od "povprečnega" razmik ($p_n^* - d^*$).	47
2.29	Material models of: (a) steel and reinforcement, (b) concrete, (c) traction force in tangential direction as a function of mean slip ($p_t^* - \Delta^*$) and (d) traction force in normal direction as a function of mean uplift ($p_n^* - d^*$).	47
2.30	Primerjava obtežno-deformacijskih krivulj za navpični pomik pri točki 1 in 2.	48
2.30	Comparison of load-deflection curves of vertical displacement at points 1 and 2.	48
2.31	Nelinearni konstitutivni zakoni stika v normalni smeri.	49
2.31	Non-linear normal traction-uplift constitutive laws.	49
2.32	Zdrs Δ in razmik d na stiku za različne razporeditve žebeljev in različne tipe konstitutivnega zakona stika v normalni smeri (obtežba deluje na zgornjem sloju).	50
2.32	Slip Δ and uplift d distributions along the contact surface for different nail arrangements and different types of the normal contact traction-uplift relationships (load acting on the upper layer).	50
2.33	Vpliv različnih konstitutivnih zakonov stika v normalni smeri na prečni sili Q^a in Q^b (obtežba deluje na zgornjem sloju).	50
2.33	Influence of different normal contact traction-uplift relationships on shear forces Q^a and Q^b (load acting on the upper layer).	50
2.34	Vpliv različnih konstitutivnih zakonov stika v normalni smeri na prečni sili Q^a in Q^b (obtežba deluje na spodnjem sloju).	51
2.34	Influence of different normal contact traction-uplift relationships on shear forces Q^a and Q^b (load acting on the bottom layer).	51
2.35	Vpliv različnih konstitutivnih zakonov stika v normalni smeri na prečni sili Q^a in Q^b (obtežba deluje na spodnjem sloju).	51

2.35	Influence of different normal contact traction-uplift relationships on shear forces Q^a and Q^b (load acting on the bottom layer).	51
2.36	Zdrs (Δ) in razmik (d) na stiku za različne tipe konstitutivnih zakonov v normalni smeri na stiku (obtežba deluje na zgornjem sloju).	52
2.36	Slip (Δ) and uplift (d) distribution along the contact for different types of normal contact traction-uplift relationships (load acts on the upper layer).	52
2.37	Vpliv različnih konstitutivnih zakonov stika v normalni smeri na prečni sili Q^a in Q^b (obtežba deluje na zgornjem sloju).	52
2.37	Influence of different normal contact traction-uplift relationships on shear forces Q^a and Q^b (load acts on the upper layer).	52
2.38	Zdrs (Δ) in razmik (d) na stiku za različne tipe konstitutivnih zakonov v normalni smeri na stiku (sila deluje na spodnjem sloju).	53
2.38	Slip (Δ) and uplift (d) distribution along the contact for different types of normal contact traction-uplift relationships (force acts on the bottom layer).	53
2.39	Vpliv različnih konstitutivnih zakonov stika v normalni smeri na prečni sili Q^a in Q^b (obtežba deluje na zgornjem sloju).	53
2.39	Influence of different normal contact traction-uplift relationships on shear forces Q^a and Q^b (load acts on the upper layer).	53
2.40	Vpliv različnih konstitutivnih zakonov stika v normalni smeri na M^a in M^b	54
2.40	Effect of different normal contact laws on M^a and M^b	54
2.41	Vpliv različnih konstitutivnih zakonov stika v normalni smeri na p_t^* in p_n^*	54
2.41	Effect of different normal contact laws on p_t^* and p_n^*	54
2.42	Primerjava obtežno-deformacijskih krivulj za navpični pomik pri točki 1 in 2.	55
2.42	Comparison of load-deflection curves of vertical displacement at points 1 and 2.	55
2.43	Obtežba, geometrijske in materialne lastnosti.	56
2.43	Geometry, material properties and load.	56
2.44	Normaliziran relaksacijski modul lezenja (Hamed, Bradford, 2010).	56
2.44	Normalized creep relaxation modulus (Hamed, Bradford, 2010).	56
2.45	Začetni odziv: (a) osna sila v FRP-traku (R_X^{frp}) in (b) navpični pomik betonskega sloja (w_c).	57
2.45	Instantaneous response: (a) FRP axial force (R_X^{frp}) and (b) vertical deflection of concrete layer (w_c).	57
2.46	Tangencialna napetost na stiku slojev nosilca na koncu FRP-traku ($t = 0$).	57
2.46	Tangential contact stress at the end of FRP strip ($t = 0$).	57
2.47	Normiran časovni odziv lezenja: (a) maksimalna osna sila v FRP-traku in (b) maksimalen navpični pomik betonskega sloja.	58

2.47 Normalized creep response: (a) maximum FRP axial force and (b) maximum vertical deflection of concrete layer.	58
2.48 Normiran časovni odziv lezenja maksimalne tangentne napetosti na stiku slojev.	58
2.48 Normalized creep response of peak shear stress at adhesive layer.	58
2.49 Obravnavani preizkušane (Bradford, Gilbert, 1991a, Bradford, Gilbert, 1991b).	59
2.49 Description of the tested beam (Bradford, Gilbert, 1991a, Bradford, Gilbert, 1991b).	59
2.50 Pomik na sredini nosilca w	60
2.50 Mid-span deflection w	60
2.51 Vzdolžna deformacija D^i na sredini sovprežnega nosilca: (a) preizkušane B1 in (b) preizkušane B4.	60
2.51 Longitudinal strain D^i at the mid-span of a steel-concrete beam: (a) specimen B1 and (b) specimen B4.	60
2.52 Jekleno-betonski sovprežni nosilec.	62
2.52 Steel-concrete composite beam.	62
2.53 Konstitutivni zakoni: (a) nelinearni zakon betona (Eurocode 2, 2005) in (b) bilinearni zakon jekla.	62
2.53 Constitutive relationships: (a) non-linear concrete (Eurocode 2, 2005) and (b) bilinear steel.	62
2.54 Obtežno-deformacijska krivulja.	63
2.54 Load-deflection curve.	63
2.55 Potek deformacijskih količin v betonu vzdolž nosilca za različne obtežne nivoje: (a) osne deformacije ε^b in (b) psevdoukrivljenosti κ^b	64
2.55 Concrete deformation quantities along the length of the beam for different load levels: (a) axial strains ε^b and (b) pseudocurvatures κ^b	64
2.56 Potek deformacijskih količin v betonu vzdolž nosilca za različne obtežne nivoje pri dolžini območja mehčanja 44 cm: (a) osne deformacije ε^b in (b) psevdoukrivljenosti κ^b	64
2.56 Concrete deformation quantities along the length of the beam for different load levels length of softening area 44 cm: (a) axial strains ε^b and (b) pseudocurvatures κ^b	64
2.57 Potek deformacijskih količin v betonu vzdolž nosilca za različne obtežne nivoje pri dolžini območja mehčanja 6 cm: (a) osne deformacije ε^b in (b) psevdoukrivljenosti κ^b	65
2.57 Concrete deformation quantities along the length of the beam for different load levels at length of softening area 6 cm: (a) axial strains ε^b and (b) pseudocurvatures κ^b	65
2.58 Kratki končni element: (a) diagram osna sila – osna deformacija ($N^b - \varepsilon^b$) in (b) upogibni moment – psevdoukrivljenosti ($M^b - \kappa^b$).	66
2.58 Short constant-strain finite element: (a) axial force-graph axial strain ($N^b - \varepsilon^b$) and (b) bending moment-pseudocurvature ($M^b - \kappa^b$).	66
2.59 Prečni prerez dvoslojnega stebra iz lesa in betona.	67

2.59	Cross-section of a two-layer timber-concrete column.	67
2.60	Vpliv tangентne in normalne togosti stika na uklonsko silo F_{cr} dvoslojnega nosilca. . . .	68
2.60	Effect of tangential and normal contact stiffness on buckling load F_{cr} of two-layer composite beam.	68
2.61	Vpliv oslavitve stika v tangентni in normalni smeri na velikost uklonske sile $F_{cr, norm}$ dvoslojnega nosilca.	69
2.61	Effect of contact weakening in tangential and normal direction on critical buckling load $F_{cr, norm}$ of two-layer composite beam.	69
2.62	Prečni prerez kompozitnih nosilcev (Sousa, da Silva, 2010): (a) trislojni in (b) štirislojni.	69
2.62	Cross-section of multilayer beams (Sousa, da Silva, 2010): (a) three-layer and (b) four-layer.	69
2.63	Primerjava zdrsov (Sousa, da Silva, 2010): (a) trislojni nosilec in (b) štirislojni nosilec.	70
2.63	Comparison of slips (Sousa, da Silva, 2010): (a) three-layer and (b) four-layer beam.	70
2.64	Sestave večslojnih nosilcev: (a) dvoslojni, (b) štirislojni, (c) šestislojni in (d) osemislojni	70
2.64	Multilayer beams: (a) two-layer, (b) four-layer, (c) six-layer and (d) eight-layer.	70
2.65	Navpični pomik obravnavanih večslojnih lesenih nosilcev.	71
2.65	Vertical displacement of considered multi-layer timber beams.	71
2.66	Potek zdrsov vzdolž večslojnih lesenih nosilcev: (a) osemislojni ($N = 8$), (b) šestislojni ($N = 6$), (c) štirislojni ($N = 4$) in (d) dvoslojni ($N = 2$).	72
2.66	Slips along multilayer timber beams: (a) eight-layer ($N = 8$), (b) six-layer ($N = 6$), (c) four-layer ($N = 4$) and (d) two-layer ($N = 2$).	72
2.67	Potek razmikov vzdolž večslojnih lesenih nosilcev: (a) osemislojni ($N = 8$), (b) šestislojni ($N = 6$), (c) štirislojni ($N = 4$) in (d) dvoslojni ($N = 4$).	73
2.67	Uplifts along multilayer timber beams: (a) eight-layer ($N = 8$), (b) six-layer ($N = 6$), (c) four-layer ($N = 4$) and (d) two-layer ($N = 4$).	73
3.1	Geometrija, obtežba in značilni deli zavrnjenega stebra.	74
3.1	Geometry, loading and typical sections of twisted column.	74
3.2	Definicija μ in ϕ	75
3.2	Definition of μ and ϕ	75
3.3	Prostoležeči steber: normirana uklonska sila glede na različne vitkosti za različne vrednosti dolžine delaminacije (L_{23}/L), strižnega modula (G) in lege delaminacije glede na prečni prerez (μ).	84
3.3	Simply supported column: normalized critical force vs. slenderness for various delamination lengths (L_{23}/L), shear moduli (G) and delamination positions (μ).	84
3.4	Prostoležeči steber: normirana uklonska sila glede na različne vitkosti za različne vrednosti dolžine delaminacije (L_{23}/L) in relativne vzdolžne lege delaminacije ($L_{1,rel}$).	85

3.4	Simply supported column: normalized critical force vs. relative delamination length (L_{23}/L) and relative longitudinal position of delamination ($L_{1,rel}$).	85
3.5	Prostoležeči steber: normirana uklonska sila glede na različne vitkosti za različne vrednosti dolžine delaminacije (L_{23}/L) in relativne prečne lege delaminacije (μ).	85
3.5	Simply supported column: normalized critical force vs. relative delamination length (L_{23}/L) and relative lateral asymmetrical lege of delamination (μ).	85
3.6	Konzola: normirana uklonska sila (F_{cr}/F_E) v odvisnosti od zasuka delaminacije φ (za različne vrednosti prečne lege delaminacije μ in različne dolžine delaminacij L_{23}).	86
3.6	Cantilever column: normalized critical force (F_{cr}/F_E) vs. rotation of delamination φ (for different values of asymmetrical position of delamination μ and for different lengths of delamination L_{23}).	86
3.7	Obojestransko vpeti steber: normirana uklonska sila (F_{cr}/F_E) v odvisnosti od zasuka delaminacije φ (za različne vrednosti prečne lege delaminacije μ in različne dolžine delaminacij L_{23}).	87
3.7	Clamped–Clamped column: normalized critical force (F_{cr}/F_E) vs. rotation of delamination φ (for different values of asymmetrical position of delamination μ and for different lengths of delamination L_{23}).	87
3.8	Uklonske oblike konzole z nesimetrično pozicijo delaminacije ($\mu = 0.75$) za različne kote φ in dolžine delaminacij L_{23}/L	88
3.8	Buckling shapes of a cantilever column with non-symmetrical delamination ($\mu = 0.75$) for various angles φ and lengths of delaminations L_{23}/L	88
3.9	Uklonske oblike obojestransko vpetega stebra z nesimetrično pozicijo delaminacije ($\mu = 0.75$) za različne kote φ in dolžine delaminacij L_{23}/L	89
3.9	Buckling shapes of a clamped–clamped column with non-symmetrical delamination ($\mu = 0.75$) for various angles φ and lengths of delaminations L_{23}/L	89
3.10	Vpliv treh parametrov na uklonsko silo: (a) vitkost λ , (b) prečne lege delaminacije μ in (c) dolžine delaminacije L_{23}	90
3.10	Effect of three parameters on the critical buckling force: (a) slenderness λ , (b) asymmetrical position μ and (c) length of delamination L_{23}	90

Seznam preglednic

2.1	Analitični in numerični rezultati ter lastnosti konvergence navpičnega pomika na sredini nosilca za različne tipe povezave v tangentsni in normalni smeri.	35
2.1	Analytical and numerical results and convergence properties of the midpoint vertical deflection for different shear and uplift connections.	35
2.2	Analitični (Girhammar, Gopu, 1993) in numerični rezultati prostoležečega linearno elastičnega kompozitnega nosilca.	36
2.2	Analytical (Girhammar, Gopu, 1993) and numerical results of a simply supported linear elastic composite beam.	36
2.3	Osnovno obremenjen dvoslojni nosilec. Primerjava rezultatov za različne ζ pri $\lambda = 100$	41
2.3	Axially loaded two-layer beam. Comparison of results for different ζ at $\lambda = 100$	41
2.4	Dvoslojni nosilec, obremenjen z upogibnim momentom. Primerjava rezultatov za različne ζ pri $\lambda = 150$	42
2.4	A two-layer beam subjected to bending moment. Comparison of results for different ζ at $\lambda = 150$	42
2.5	Primerjava analitičnih in numeričnih rezultatov: rezultati v $[\text{kN}/\text{cm}^2]$ (elastični modul) in $[\text{cm}]$ (navpični pomik, zdrs).	45
2.5	Comparisons of analytical and numerical results; results in $[\text{kN}/\text{cm}^2]$ (elastic modulus) and $[\text{cm}]$ (vertical deflection, slip).	45
2.6	Privzeti koeficient togosti K^* v tangencialni smeri stika in koristna obtežba q na nosilec.	59
2.6	Tangential stiffness K^* of contact in tangential direction and superimposed load q on the beam.	59
2.7	Vpliv tangentsne in normalne togosti stika na uklonsko silo F_{cr} $[\text{kN}]$ predstavljenega dvoslojnega nosilca.	67
2.7	Effect of tangential and normal contact stiffness on buckling load F_{cr} $[\text{kN}]$ of considered two-layer composite beam.	67
3.1	Normirane uklonske sile za prostoležeči steber z dolžino delaminacije l_d na relativni višini prečnega prereza $r_d = 0.4$	83
3.1	Normalized buckling loads for simply supported column with delamination length l_d at relative vertical position $r_d = 0.4$	83

3.2	Normalizirane uklonske sile za obojestransko vpeti steber z dolžino delaminacije l_d na relativni višini prečnega prereza r_d	83
3.2	Normalized buckling loads of clamped–clamped column with delamination length l_d at relative vertical positions r_d	83

1 Uvod

1.1 Predstavitev problema in pregled stanja na obravnavanem področju

Pri projektiranju gradbenih konstrukcij pogosto uporabljamo konstrukcijske elemente, sestavljene iz več slojev, navadno iz različnih materialov. Kompozitne konstrukcije, kot s skupnim imenom imenujemo te konstrukcije, v novejšem času predstavljajo v gradbeništvu eno glavnih smeri razvoja. So pa kompozitne konstrukcije že zelo dolgo zelo uveljavljene, če ne kar nepogrešljive, v ladjedelniški, avtomobilski, letalski in vesoljski industriji.

Ostra konkurenca narekuje razvoj inovativnih pristopov v vseh fazah procesa gradnje. V grobem lahko izluščimo dva pomembna vzroka, ki sta privedla do razširjene uporabe kompozitnih konstrukcij v gradbeništvu: novi načini gradnje (polmontažna, montažna) in optimizacija porabe materiala. S polmontažno in montažno gradnjo pospešimo hitrost gradnje objektov, saj s tem del gradnje objekta preselimo z gradbišča v proizvodne hale, kjer imamo večjo kontrolo nad procesom izdelave posameznega gradbenega elementa. Nekateri načini take gradnje so možni zgolj z uporabo kompozitnih konstrukcijskih elementov. Tako na primer pri gradnji sovprežnih nosilcev iz jekla in betona na jeklene nosilce pritrdimo valovito pločevino, ki hkrati opravlja tudi funkcijo opaža na mestu vgrajene armiranobetonske plošče. Pri sanacijah premostitvenih sovprežnih konstrukcij iz jekla in betona predstavlja enega izmed inovativnejših pristopov tudi menjava obstoječih jeklenih nosilcev z nosilci FRP (angl. *fibre reinforced plastic*), ki so ojačani z armiranobetonsko ploščo. FRP-nosilci so v primerjavi z jeklenimi veliko lažji, kar omogoča lažjo gradnjo in tako hitrejšo popravilo premostitvenega objekta, kar je pogosto ena od najpomembnejših prednosti izbire takega načina sanacije mostov.

Sanacije so vsekakor področje gradbeništva, pri katerem se zelo pogosto srečamo z uporabo vseh vrst kompozitnih konstrukcij. Tako armiranobetonske konstrukcije pogosto ojačamo tako, da v natezni coni dodamo sloj iz materiala, ki ima dobre natezne lastnosti. Eden od učinkovitih načinov sanacij nosilnih elementov je ojačitev z dolepljenimi FRP-trakovi. Ta postopek sanacije konstrukcij je enostaven in učinkovit, saj tako konstrukcijo ojačamo z minimalno količino dodanega materiala. Pred iznajdbo FRP-materialov so se nosilni deli konstrukcij ojačevali z jeklenimi trakovi, ki jih je bilo zaradi velike teže na gradbišču težje kvalitetno pritrditi na konstrukcijo, so pa jekleni trakovi tudi zelo izpostavljeni koroziji. Lesene stropove starejših oziroma zgodovinskih stavb pogosto saniramo tako, da na obstoječo leseno konstrukcijo dodatno zabetoniramo sloj betona. Tako ustvarimo novo kompozitno konstrukcijo iz lesa in betona, pri kateri so leseni nosilci pri upogibni obtežbi natezno obremenjeni, dobetoniran betonski sloj pa tlačno. Čeprav mogoče neobičajen primer uporabe kompozitnih konstrukcij pri sanaciji dotrajanih betonskih površin armiranobetonskih plošč predstavlja tudi tehnološki postopek, s katerim obstoječi dotrajani betonski sloj konstrukcije nadomestimo s slojem novega betona. Tako smo ustvarili dvoslojno kompozitno konstrukcijo, katere sloja se zaradi različne starosti betona tudi različno obnašata,

kar lahko povzroči tudi dodatne poškodbe konstrukcije.

Široko področje uporabnosti kompozitnih konstrukcij predstavlja projektiranje lesenih konstrukcij. Tu imamo v mislih predvsem uporabo sestavljenih lesenih nosilcev, ki so sestavljeni iz dveh ali več z veznimi sredstvi povezanih slojev. Način povezave oziroma izbira veznih sredstev med sloji običajno narekuje kar stopnja obdelave posameznega sloja. Glede na to jih razdelimo v razrede, katerih skrajna razreda sta: navaden tramovni sklad (brez povezave) in leseni večslojni kompozitni nosilci z zelo togo povezavo med sloji (kot so na primer lepljenci).

Glede na način povezave razdelimo kompozitne konstrukcije na tri skupine. Prvo skupino predstavljajo kompozitni nosilci z nepovezanimi sloji, drugo s togo povezanimi sloji in tretjo, teh je v gradbeništvu največ, predstavljajo kompozitne konstrukcije z delno povezanimi sloji. Navadno stremimo k povezanemu delovanju slojev, če se da togemu povezovanju slojev, saj najpogosteje tako zagotovimo tudi največjo togost in nosilnost kompozitne konstrukcije. Izjema so na primer betonske kompozitne konstrukcije z različno starimi betonskimi sloji, pri katerih toga povezava med sloji pogosto ni optimalna. Vendar zaradi različnih vzrokov popolne toge povezave med sloji kompozitnih gradbenih konstrukcij praktično ne moremo zagotoviti. Pri kompozitnih konstrukcijah s podajnimi povezavami lahko med sloji zaradi zunanjih vplivov nastopi razslojevanje med sloji v prečni in vzdolžni smeri. Med sloji se pojavijo razmiki ali pa se en sloj vtisne v drugega (v nadaljevanju v obeh primerih govorimo o razmikih) in zdrsi. Lahko pa pride do razmika in zdrsa hkrati. Ker način povezave med sloji pomembno vpliva na mehansko obnašanje kompozitnih konstrukcij, ni presenetljivo, da v znanstveni literaturi zasledimo številne raziskave o tipih veznih sredstev med sloji in konstitutivnih modelih le-teh (Almusallam, Al-Salloum, 2001, Daniels, Crisnel, 1993, Dezi, Tarantino, 1993, Fabbrocino, Manfredi, Cosenza, 1999, Foschi, 1974, Foschi, 1977, Goodman, Popov, 1968, Kamiya, 1987, Kamiya, 1988, Nguyen, Chan, Cheong, 2001, Rahimi, Hutchinson, 2001, Rassam, Goodman, 1971, Razaqpur, Nofal, 1989, Salari, Spacone, 2001, Silfwerbrand, 1985, Toutanji, Ortiz, 2001, Van Der Linden, 1999, Wheat, Vanderbilt, Goodman, 1983, Ye, 2001).

Poglobljen pregled začetkov eksperimentalnega raziskovanja o kompozitnih konstrukcijah je predstavil Viest (1999). Začetki numeričnega modeliranja večslojnih kompozitnih konstrukcij (predvsem dvoslojnih nosilcev) pa segajo v sredino prejšnjega stoletja. Prve matematične modele kompozitnih nosilcev z upoštevanjem podajne povezave med sloji so neodvisno razvili Granholm (1949), Pleshkov (1952), Stüssi (1947) in Newmark (1951). V tem obdobju so raziskovalci skušali predvsem z relativno preprostimi matematičnimi modeli čim natančneje opisati vpliv podajne povezave med slojema kompozitnega nosilca na obnašanje kompozitnega nosilca kot celote. S pojavom računalnikov se je razvoj iskanja učinkovitega numeričnega modela za analizo obnašanja vseh vrst kompozitnih konstrukcij izredno pospešil. Večina numeričnih modelov je danes zasnovana na metodi končnih elementov (Xu, Wu, 2007, Adekola, 1968, Bradford, Gilbert, 1992, Kroflič et al., 2010a, Manfredi, Fabbrocino, Cosenza, 1999, Schnabl et al., 2006). Ti modeli praviloma ne upoštevajo možnosti razmikanja slojev, zasnovani pa so praviloma na geometrijsko linearni teoriji ravninskih nosilcev z upoštevanjem materialno nelinearnega obnašanja slojev in veznih sredstev (Betti, Gjelsvik, 1996, Čas, Saje, Planinc, 2004b, Gattesco, 1999, Hozjan, 2009, Milner, Tan, 2001, Planinc et al., 2008, Rasheed, Pervaiz, 2002, Seracion, Oehlers, Yeo, 2001, Wang, 1998). V zadnjem času zasledimo v znanstveni literaturi tudi numerične modele za analizo dvoslojnih kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsov med slojema, ki so zasnovani na geometrijsko nelinearnih modelih nosilcev (Čas, Saje, Planinc, 2004c, Hozjan, 2009, Ranzi, Bradford, 2007, Ranzi et al., 2010, Girhammar, Gopu, 1993), pa tudi modelov, s katerimi avtorji analizirajo vpliv zdrsa med slojema na uklonsko nosilnost kompozitnih stebrov (Kryžanovski et al., 2008, Kamiya, 1988, Rassam, Goodman, 1970).

Adekola (1968) je bil verjetno prvi, ki je analiziral vpliv zdrsov in razmikov med slojema na obnašanje dvoslojnih kompozitnih nosilcev. Izpeljal je matematični model za analizo sovprežnih prostoležečih nosilcev iz jekla in betona, dobljeni sistem navadnih diferencialnih enačb matematičnega modela pa je rešil z diferenčno metodo. V nadaljevanju sta točno rešitev za delno modificiran Adekolov matematični model v obliki eksplicitnih izrazov predstavila Robinson in Naraine (1988). Točno rešitev za določitev napetostnega in deformacijskega stanja dvoslojnih elastičnih kontinuirnih nosilcev z upoštevanjem razmikov in zamikov med slojema pa so predstavili Krofič in sodelavci (2010a). Z razvojem računalništva se tudi na tem raziskovalnem področju pojavljajo nelinearni numerični modeli za analizo kombiniranega vpliva zamikov in razmikov med sloji na obnašanje dvoslojnih kompozitnih nosilcev. Omenimo le tiste raziskave – modele, ki za modeliranje razmikov in zamikov upoštevajo bilinearne ali pa tudi splošne nelinearne konstitutivne modele (Gara, Ranzi, Leoni, 2006, Ranzi, Gara, Ansourian, 2006, Krofič et al., 2010b, Krofič, Saje, Planinc, 2011). Za te numerične modele je tudi značilno, da razslojevanje v vzdolžni in prečni smeri obravnavajo nepovezano. Natančnejši so seveda modeli, ki obnašanje veznih sredstev opišejo s povezanimi konstitutivnimi zakoni. Pregled teh matematičnih modelov in njihovo implementacijo pri analizi razslojevanja prostorskih kompozitnih konstrukcij sta detajlno predstavila Alfano in Crisfield (2001).

Raziskav na področju večslojnih kompozitnih linijskih konstrukcij z upoštevanjem zdrsov in razmikov med sloji je relativno malo. Schnabl in sodelavci (2006) so predstavili analitične rešitve napetostnega in deformacijskega stanja trislojnih elastičnih kompozitnih nosilcev, pri katerih se na stiku med sloji pojavijo le zdrsi. Krawczyk in sodelavca (2007) so nato predstavili nov numerični model za analizo vpliva geometrijske nelinearnosti slojev na globalno obnašanje večslojnih elastičnih kompozitnih nosilcev. Tudi oni so se omejili na taka vezna sredstva med sloji, ki omogočajo le zdrse. Izredno zanimiva je Volokhova in Needlemanova raziskava (2002) o uklonski nosilnosti t. i. "sendvič"-stebrov (trislojnih stebrov). Numerični model sta zasnovala na elastičnem Reissnerjevem modelu ravninskega nosilca in nelinearnem obnašanju veznih sredstev na stiku med sloji, ki omogočajo tako zamike kot tudi razmike slojev. Z numeričnim eksperimentiranjem sta ugotovila, da podajna povezava med sloji "sendvič"-stebra pomembno vpliva na njegovo uklonsko nosilnost.

V zadnjem obdobju opazimo izredno živahno raziskovanje o procesih razslojevanja kompozitnih nosilcev, ki so v nateznem delu ojačani s FRP-trakovi. Kot poročajo številni raziskovalci, je porušitev povezave med slojema kompozitnega nosilca v veliki meri odvisna od koncentracije strižnih in normalnih napetosti na stiku med slojema. Zato so bile prve raziskave o procesu razslojevanja osredotočene predvsem na metode za določitev strižnih in normalnih napetosti na stiku med slojema. Praviloma so pri teh raziskavah raziskovalci predpostavili linearno elastično obnašanje slojev in veznega sredstva ter prevladujoč vpliv strižnih napetosti na razslojevanje kompozitnega nosilca. Strižne napetosti so izrazili s preprostimi analitičnimi izrazi, medtem ko so normalne napetosti določili na osnovi kompatibilnostnih pogojev v prečni smeri. Tako sta Smith in Teng (2001) predstavila rešitev prvega reda, pri kateri so strižne in normalne napetosti konstantne po debelini vmesnega sloja. Slabost te sicer preproste rešitve je v tem, da z njo ne moremo ustrezno zadostiti robnih pogojev. Med temi raziskavami omenimo le še raziskavo De Lorenzisa in sodelavcev (2006), v kateri so raziskovalci predstavili strižne in normalne napetosti na stiku med slojema ukrivljenega kompozitnega nosilca. Fizikalno pravilni modeli razslojevanja kompozitnih konstrukcij so tisti, ki so zasnovani na mehaniki loma (Yang, Peng, Kwan, 2006, Au, Buyukozturk, 2006 in Rabanovitch, Frostig, 2001). V zadnjem času raziskovalci modelirajo razslojevanje kompozitnih konstrukcij najpogosteje z modelom kohezijskega območja. Koncept modela kohezijskega območja sta prva neodvisno predstavila Barenblatt (1959) in Dugdale (1960). Skladno z modelom kohezijskega območja opišemo razslojevanje kompozitnih konstrukcij z makroskopskim konstitutivnim zakonom adhezijskih slojev. Pri tem lahko upoštevamo ločeno ali pa povezano razslojevanje v prečni (normalni)

smeri in razslojevanje v vzdolžni (strižni) smeri. Glede na način razslojevanja določa model kohezijskega območja konstitutivno zvezo med strižnimi oziroma normalnimi napetostmi na stiku med slojema in skoki pomikov v prečni in vzdolžni smeri na stiku med slojema oziroma zdrsi in razmiki. Te zveze določimo z eksperimenti in so običajno nelinearne. Praviloma se napetosti v začetni fazi razslojevanja s povečevanjem zdrsov in razmikov povečujejo do največje vrednosti, nato pa se začnejo s povečevanjem zdrsov in razmikov manjšati do vrednosti nič, kar pomeni, da sta sloja popolnoma ločena. Tako lahko z modelom kohezijskega območja opišemo celoten proces razslojevanja stikov med sloji kompozitne konstrukcije, in sicer od delno razslojenih slojev pa do popolnoma razslojenih (Teng, Yuan, Chen, 2006, De Lorenzis, Zavarise, 2008, Rabanovitch, 2008, Alfano, Crisfield, 2001 in številni drugi).

V zadnjih tridesetih letih je bilo narejenih veliko eksperimentalnih, analitičnih in numeričnih raziskav o reoloških lastnostih betona. Tako sedaj relativno dobro poznamo krčenje in lezenje betona, hkrati pa so bili razviti številni modeli, s katerimi relativno dobro omenjena pojava tudi opišemo (Jiràsek, Bažant, 2001). Veliko manj pa je raziskav, ki analizirajo kombiniran vpliv krčenja in lezenja betona na obnašanje večslojnih kompozitnih linijskih konstrukcij z upoštevanjem zdrsov in razmikov med sloji. Med prvimi sta vpliv krčenja in lezenja betona pri sovprežnih nosilcih iz jekla in betona s podajnim stikom v vzdolžni smeri z numerično metodo analizirala Tarantino in Dezi (1992). Kot reološka modela krčenja in lezenja sta uporabila modela, ki ju je predstavil Bažant (1972) oziroma Dilger (1985). Novejše numerične modele za analizo vpliva lezenja in krčenja betona na napetostno in deformacijsko stanje dvoslojnih kompozitnih nosilcev iz jekla in betona z upoštevanjem zdrsov so med drugimi predstavili Ranzi in Bradford (2008) ter Jurkiewicz s sodelavci (2005). Poleg numeričnih modelov za analizo vpliva krčenja in lezenja na obnašanje dvoslojnih kompozitnih nosilcev zasledimo v literaturi tudi eksperimentalne raziskave o teh vplivih (Bradford, Gilbert, 1991b, Roll, 2009). Teh je zaradi zahtevnosti in dolgotrajnosti eksperimentalnih raziskav in njihove visoke cene relativno malo. Zanimivo pa je, da zaenkrat raziskav o vplivu diferenčnega krčenja različno starih betonov na napetostno in deformacijsko stanje dvoslojnih ali večslojnih armiranobetonskih kompozitnih nosilcev s podajnimi ali togimi stiki v literaturi praktično ni, kar je glede na pomembnost pojava, ki lahko povzroči poškodbe konstrukcije, izredno nenavadno.

Mehčanje je značilen pojav kompozitnih materialov. Tako mehčanje opazimo pri natezno obremenjenih betonskih in kamnitih konstrukcijah, pri tlačno obremenjenih betonskih konstrukcijah iz neobjetega betona in pri strižno konsolidirani zemljini. Znano je, da postanejo matematični modeli zaradi pojava mehčanja slabo pogojeni. Značilnosti mehčanja materiala so tudi: področje mehčanja se lokalizira v točko, obtežno-deformacijska krivulja ima vedno povratno smer (angl. *snap back*), porabljena energija loma je enaka nič (Jiràsek, Bažant, 2001) in rešitev je odvisna od mreže končnih elementov (Bratina, Saje, Planinc, 2004). Kot poročajo številni raziskovalci, predstavlja pojav mehčanja še vedno velik raziskovalni izziv. Pri armiranobetonskih ravninskih okvirjih sta se za analizo mehčanja prečnih prerezov razvila dva poenostavljena modela. Pri prvem modelu predpostavimo, da se mehčanje lokalizira v prečnem prerezu okvirja. Na tem mestu v okvir vstavimo plastični členek, s katerim mehčanje prečnega prereza opišemo z zvezo moment – zasuk. Kot poroča Jiràsek (1997), je prednost tega modela njegova preprostost, slabost pa v tem, da v modelu mehčanja ne upoštevamo osnih sil oziroma osnih deformacij. Drugi model mehčanja je zasnovan na eksperimentalni ugotovitvi, da se razpoke betona in s tem mehčanje pojavijo na ozkem območju s končno dolžino. Ta dolžina območja mehčanja, kjer so deformacije konstantne, se določi z eksperimenti na osnovi energije porušitve betona (Bažant, Pijaudier-Cabot, 1989, Bratina, Saje, Planinc, 2004). Poleg teh dveh poenostavljenih modelov mehčanja linijskih konstrukcij pa v literaturi zasledimo tudi posplošitve teh dveh modelov. To so t. i. nelokalne teorije mehčanja in gradientne metode (Jiràsek, Bažant, 2001). Raziskav o vplivu mehčanja prečnih prerezov na obnašanje večslojnih linijskih kompozitnih okvirjev s podajnimi stiki zaenkrat v znanstveni literaturi nismo zasledili.

Razslojenost je pogost vzrok uklonske porušitve kompozitnih konstrukcij. Tako se lahko zaradi zmanjšane togosti razslojen večslojen kompozitni steber poruši zaradi lokalnega uklona razslojenih delov stebra ali pa globalnega uklona stebra. Zato so uklonski pojavi predmet intenzivnih raziskav zadnjih trideset let. Največkrat so te raziskave osredotočene na iskanje optimalnega matematičnega oziroma numeričnega modela za analizo vpliva razslojenosti na uklonsko nosilnost večslojnih kompozitnih konstrukcij in iskanje s tem povezanih pomembnih materialnih in geometrijskih parametrov. Ker smo dosedanje raziskave o uklonski nosilnosti delno razslojenih večslojnih kompozitnih stebrov že opisali, v nadaljevanju na kratko opišemo raziskave o uklonski nosilnosti popolnoma razslojenih stebrov. Razlikujejo se predvsem po številu, velikosti in legi razslojenih delov stebra ali delaminacij, kot pogosto rečemo, in tudi po zahtevnosti matematičnih modelov, s katerimi te vplive analiziramo. V tem sklopu so se prve raziskave o uklonski nosilnosti popolnoma razslojenih kompozitnih elastičnih stebrov pojavile v sedemdesetih in osemdesetih letih prejšnjega stoletja (Almond, 1970, Chai, Babcock, Knauss, 1981 in Simites, Sallam, Yin, 1985). Prelomna je Kardomateasova in Schmueserjeva raziskava (1988), v kateri sta raziskovala vpliv striga na uklonsko nosilnost elastičnega stebra z eno delaminacijo. V nadaljevanju so Chen (1991) ter Moradi in Taheri (1999) analizirali vpliv dveh delaminacij na uklonsko nosilnost razslojenih stebrov. Vsi raziskovalci so vpliv striga analizirali z nekonsistentnim modelom, pri katerem vpliv striga upoštevamo s korekcijskimi faktorji. To slabost matematičnega modela so odpravili Kryžanovski in sodelavci (2008), ki so vpliv striga na uklonsko nosilnost elastičnega stebra z eno delaminacijo analizirali z Reissnerjevim modelom ravninskega nosilca. V nadaljevanju so Rodman in sodelavci (2007) analizo vpliva delaminacije na uklonsko nosilnost stebrov razširili še na elastične stebre s poljubnim številom, velikostmi in legami delaminacij. Do sedaj raziskav o vplivu razslojenosti na uklonsko nosilnost prostorskih stebrov v znanstveni literaturi nismo zasledili.

1.2 Vsebina dela

V doktorski disertaciji se ukvarjamo z nelinearno statično analizo večslojnih linijskih kompozitnih konstrukcij. Detajlno nas zanima vpliv vzdolžne in prečne podajnosti veznih sredstev med sloji kompozitnih konstrukcij na togost, duktilnost, nosilnost okvirjev in uklonsko nosilnost stebrov. Disertacijo razdelimo na dva vsebinsko ločena dela, katerih vsebino predstavimo v dveh poglavjih. Tako ima doktorska disertacija poleg uvoda in zaključka še dve poglavji.

V drugem poglavju, ki je tudi osrednji del disertacije, se ukvarjamo z analizo ravninskih večslojnih kompozitnih okvirjev. Predstavimo nov numerični model in pripadajoči računalniški program v programskem okolju Matlab za nelinearno statično analizo večslojnih kompozitnih okvirjev s podajnimi veznimi sredstvi. Pri izpeljavi matematičnega modela vsak sloj kompozitnega nosilca oziroma okvirja modeliramo z geometrijsko točnim Reissnerjevim modelom ravninskega nosilca (Reissner, 1972). Pri tem upoštevamo poljubno nelinearno obnašanje vsakega sloja in vseh veznih sredstev. Posebno pozornost v disertaciji posvetimo modeliranju veznih sredstev oziroma stika med sloji. Predpostavili bomo zelo splošen konstitutivni model veznih sredstev, ki bo omogočal modeliranje razslojevanja slojev kompozitnega nosilca tako v vzdolžni kot v prečni smeri. Konstitutivni model bomo predstavili z zvezo med vektorjem napetosti na stiku med sloji kompozitnega nosilca in razliko vektorjev pomikov zgornjega in spodnjega sloja kompozitnega nosilca na stiku. Ker so lahko v splošnem te razlike komponent vektorjev pomikov med slojema tudi zelo velike, standardne zveze, ki se uporabljajo predvsem pri geometrijsko linearnih modelih dvoslojnih kompozitnih nosilcev, pri katerih je zveza zapisana v prostorskem koordinatnem sistemu, niso primerne. V disertaciji bomo komponente konstitutivne zveze veznih sredstev zapisali v povprečni bazi med tangentnimi in normalnimi baznimi vektorji slojev na stiku. Tako dobi

komponentni zapis konstitutivnih zvez veznih sredstev tudi pri zelo razslojenih kompozitnih nosilcih fizikalno smiselno obliko. Osnovne ravnotežne nelinearne enačbe večslojnega linijskega kompozitnega nosilca bomo v disertaciji rešili numerično, in sicer z Galerkinovo metodo končnih elementov. Razvili bomo novo družino deformacijskih končnih elementov za analizo vseh vrst večslojnih linijskih kompozitnih okvirjev s podajnimi veznimi sredstvi. Družino deformacijskih končnih elementov bomo izpeljali s pomočjo modificiranega izreka o virtualnem delu za večslojne linijske kompozitne nosilce. Nezanemljive nove družine končnih elementov so deformacijske količine vsakega sloja kompozitnega nosilca in le robne vrednosti ravnotežnih ter kinematičnih količin kompozitnega okvirja. Osnovne diskretne nelinearne ravnotežne enačbe večslojnih linijskih kompozitnih nosilcev oziroma kompozitnih okvirjev bomo v disertaciji rešili z znano Newton-Raphsonovo iteracijsko shemo, obtežno-deformacijsko krivuljo kompozitnega okvirja bomo določili za znano obtežbo s konsistentno linearizirano Crisfieldovo metodo ločne dolžine (Schweizerhof, Wriggers, 1986), časovni odziv večslojnega linijskega kompozitnega nosilca okvirja zaradi lezenja in krčenja enega ali več betonskih slojev okvirja pa z znano koračno metodo (Ghali, Favre, 1994). Dodatno bomo v disertaciji za linearne večslojne linijske kompozitne nosilce predstavili analitične rešitve za določitev njihovega napetostnega in deformacijskega stanja, kar predstavlja posplošitev sedaj znanih rešitev, ki so omejene predvsem na dvoslojne kompozitne nosilce.

Predstavljeni numerični model za analizo večslojnih kompozitnih okvirjev je zelo splošen. Z ustrezno izbiro materialnih modelov slojev in veznih sredstev omogoča geometrijsko in materialno nelinearno analizo različnih vrst večslojnih kompozitnih okvirjev, ki se uporabljajo v gradbeništvu. Tako lahko analiziramo kompozitne okvirje, ki so sestavljeni iz poljubnih gradbenih materialov, v mejnem stanju uporabnosti in v mejnem stanju nosilnosti. Pri večslojnih armiranobetonskih okvirjih oziroma pri večslojnih kompozitnih okvirjih, pri katerih je en ali več slojev iz armiranega betona, lahko analiziramo tudi vpliv mehčanja prečnega prereza posameznega betonskega sloja na duktilnost in nosilnost kompozitnega okvirja in vpliv krčenja in lezenja betona na togost večslojnih kompozitnih okvirjev. Zaradi velike splošnosti je numerični model primeren tudi za analizo razslojevanja vseh vrst kompozitnih okvirjev in za določitev uklonske nosilnosti razslojenih večslojnih kompozitnih stebrov in okvirjev. To uporabnost predstavljenega numeričnega modela za analizo togosti, duktilnosti in nosilnosti večslojnih kompozitnih okvirjev ter tudi analizo natančnosti modela bomo v doktorski disertaciji predstavili s številnimi značilnimi računskimi primeri.

V tretjem poglavju doktorske disertacije predstavimo točno rešitev za določitev uklonske nosilnosti prostorskih stebrov. Točno rešitev določimo s konsistentno linearizacijo osnovnih nelinearnih enačb razslojenih prostorskih stebrov. Pri tem si pomagamo z dejstvom, da so uklonske sile lineariziranega modela stebra enake uklonskim silam osnovnega nelinearnega modela stebra (Keller, 1970). Točne rešitve bomo prikazali za ravne prostorske stebre z eno delaminacijo in za prostorske stebre z eno delaminacijo s sicer ravno osjo, katerih prečni prerezi se navijajo okoli osi. Pri izpeljavi uklonskih sil razslojenih stebrov bomo uporabili t. i. Reissner-Simov matematični model za prostorske nosilce (Simo, 1985). Vpliv velikosti, lege in oblike razslojenega dela obravnavanih prostorskih stebrov bomo v doktorski disertaciji prikazali s parametričnimi študijami.

2 Ravninski večslojni linijski kompozitni nosilci

V tem poglavju predstavimo numerični model za analizo ravninskih večslojnih linijskih kompozitnih nosilcev. Posebno pozornost posvetimo izpeljavi enačb za modeliranje stika med sloji, kjer upoštevamo, da se sosednja sloja kompozitnega nosilca med deformiranjem razslojita v vzdolžni in prečni smeri in reševanju osnovnih enačb matematičnega modela za analizo ravninskih večslojnih linijskih kompozitnih nosilcev z Galerkinovo metodo končnih elementov. Izpeljemo novo družino deformacijskih končnih elementov za analizo večslojnih kompozitnih okvirjev. S številnimi numeričnimi primeri na koncu poglavja prikažemo primernost in natančnost predstavljene numerične metode.

2.1 Osnovne enačbe ravninskih večslojnih linijskih kompozitnih nosilcev

2.1.1 Kinematične enačbe

Opazujemo raven večslojen kompozitni nosilec, ki ga sestavlja N slojev. Na splošnosti ne izgubimo, če je začetna dolžina vseh slojev kompozitnega nosilca enaka L . Prečni prerezi vsakega sloja kompozitnega nosilca se vzdolž referenčne osi sloja po obliki in velikosti ne spreminjajo, njihovo ploščino označimo z A^i ($i = 1, 2, \dots, N$). Ker predpostavimo ravninsko deformiranje kompozitnega nosilca, so prečni prerezi simetrični glede na ravnino deformiranja. Na sliki 2.1 prikazujemo nedeformirano in deformirano lego kompozitnega nosilca ter njegove značilne geometrijske količine. Deformiranje nosilca analiziramo v ravnini (X, Z) nepomičnega kartezičnega prostorskega koordinatnega sistema (X, Y, Z) z ortonormiranimi baznimi vektorji $\mathbf{E}_X, \mathbf{E}_Y, \mathbf{E}_Z = \mathbf{E}_X \times \mathbf{E}_Y$.

Kot referenčno os sloja i kompozitnega nosilca izberemo težiščno os. Ta je v nedeformirani legi vzporedna z osjo X prostorskega koordinatnega sistema. Delce vsakega sloja kompozitnega nosilca identificiramo z materialnimi koordinatami x^i, y^i, z^i , pri čemer referenčno os vsakega sloja kompozitnega nosilca parametriziramo s pripadajočo materialno koordinato x^i .

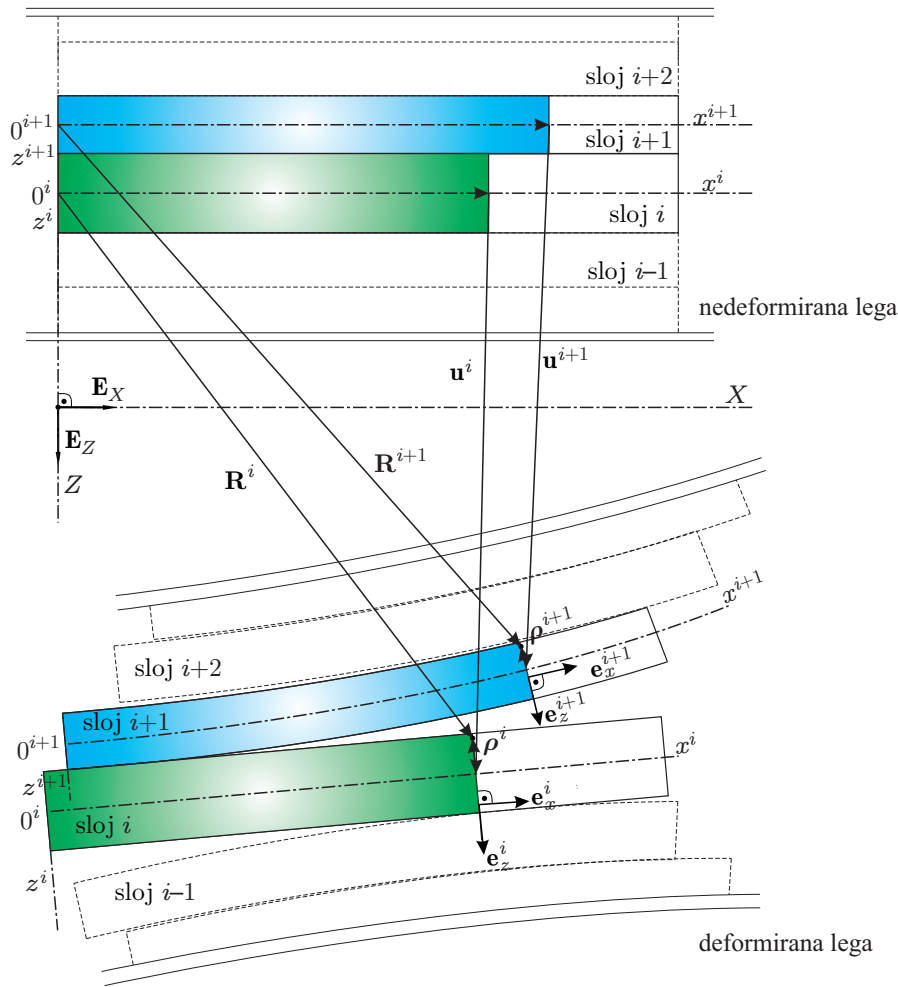
Deformirano težiščno os sloja i kompozitnega nosilca opišemo s krajevnimi vektorji \mathbf{r}^i ($i = 1, 2, \dots, N$):

$$\mathbf{r}^i(x^i) = x^i \mathbf{E}_X + \mathbf{u}^i(x^i) = (x^i + u^i(x^i)) \mathbf{E}_X + w^i(x^i) \mathbf{E}_Z, \quad (2.1)$$

kjer smo z zgornjim indeksom $(\bullet)^i$ označili količine, ki pripadajo sloju i . Tako količini u^i, w^i v enačbi (2.1) predstavljata komponenti v smeri X in Z vektorja pomikov \mathbf{u}^i delca na referenčni osi sloja i :

$$\mathbf{u}^i(x^i) = u^i(x^i) \mathbf{E}_X + w^i(x^i) \mathbf{E}_Z. \quad (2.2)$$

V ravnini deformiranja kompozitnega nosilca opišemo deformirano lego poljubnega delca sloja i kom-



Slika 2.1: Nedeformirana in deformirana lega večslojnega linijskega kompozitnega nosilca.

Figure 2.1: Undeformed and deformed configuration of a multilayer composite beam.

pozitnega nosilca, ki ga določajo materialne koordinate $x^i, y^i = 0, z^i$, s krajevnim vektorjem:

$$\mathbf{R}^i(x^i, z^i) = x^i \mathbf{E}_X + \mathbf{u}^i(x^i) + \boldsymbol{\rho}^i(x^i, z^i). \quad (2.3)$$

Deformirano lego sloja i kompozitnega nosilca, ki jo določa enačba (2.3), smo izpeljali z upoštevanjem dveh osnovnih predpostavk teorije o ravninskih nosilcih. Prvo o ravnih prečnih prerezih, ki pravi, da prečni prerezi, ki so ravni in pravokotni na nedeformirano os nosilca, ostanejo med deformiranjem ravni, vendar ne več pravokotni na deformirano referenčno os, in drugo predpostavko, ki pravi, da se oblika in velikost prečnih prerezov med deformiranjem ne spreminjata. Vektor $\boldsymbol{\rho}^i$ lahko v enačbi (2.3) zaradi omenjenih predpostavk izrazimo z vektorjem \mathbf{e}_z^i , ki skupaj z vektorjema $\mathbf{e}_x^i, \mathbf{e}_y^i$ tvori bazo materialnega koordinatnega sistema sloja i kompozitnega nosilca, z enačbo

$$\boldsymbol{\rho}^i(x^i, z^i) = z^i \mathbf{e}_z^i(x^i). \quad (2.4)$$

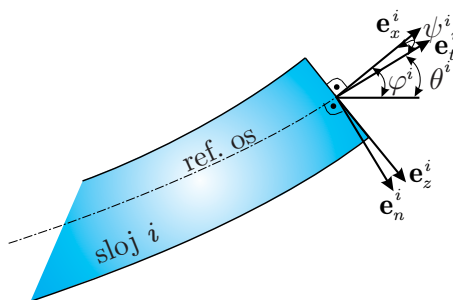
Bazni vektor \mathbf{e}_x^i predstavlja vektor normale na prečni prerez sloja i , ki v splošnem ni pravokoten na deformirano referenčno os sloja i kompozitnega nosilca. Bazna vektorja \mathbf{e}_z^i in \mathbf{e}_y^i ležita v ravnini prečnega prereza. Praviloma vektor \mathbf{e}_z^i izberemo tako, da leži v ravnini deformiranja kompozitnega nosilca, bazni

vektor \mathbf{e}_y^i pa tako, da materialna baza tvori desnosučni koordinatni sistem. Glede na povedano lahko materialno bazo izrazimo glede na prostorsko z enačbami (slika 2.2):

$$\mathbf{e}_x^i(x^i) = \cos \varphi^i(x^i) \mathbf{E}_X - \sin \varphi^i(x^i) \mathbf{E}_Z, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{e}_y^i(x^i) = \mathbf{E}_Y, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{e}_z^i(x^i) = \sin \varphi^i(x^i) \mathbf{E}_X + \cos \varphi^i(x^i) \mathbf{E}_Z. \quad (2.7)$$



Slika 2.2: Materialna $\{\mathbf{e}_x^i, \mathbf{e}_y^i, \mathbf{e}_z^i\}$ in naravna $\{\mathbf{e}_t^i, \mathbf{e}_n^i, \mathbf{e}_b^i\}$ baza sloja i kompozitnega nosilca.
Figure 2.2: Material $\{\mathbf{e}_x^i, \mathbf{e}_y^i, \mathbf{e}_z^i\}$ and natural $\{\mathbf{e}_t^i, \mathbf{e}_n^i, \mathbf{e}_b^i\}$ basis of layer i of composite beam.

V enačbah (2.5)–(2.7) smo s φ^i označili zasuk prečnega prereza sloja i kompozitnega nosilca glede na prostorski koordinatni sistem, ki zaradi strižnih deformacij v splošnem ni enak zasuku referenčne osi sloja θ^i . Zasuk φ^i lahko zapišemo kot vsoto zasukov $\varphi^i = \theta^i + \psi^i$, kjer ψ^i predstavlja dodaten zasuk prečnega prereza zaradi strižnega deformiranja sloja (slika 2.2).

Pri izpeljavi veznih enačb kompozitnega nosilca potrebujemo tudi t. i. naravni koordinatni sistem z baznimi vektorji $\{\mathbf{e}_t^i, \mathbf{e}_n^i, \mathbf{e}_b^i\}$ (slika 2.2). Te glede na prostorsko bazo zapišemo z enačbami ($i = 1, 2, \dots, N$):

$$\mathbf{e}_t^i(x^i) = \cos \theta^i(x^i) \mathbf{E}_X - \sin \theta^i(x^i) \mathbf{E}_Z, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{e}_b^i(x^i) = \mathbf{E}_Y, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{e}_n^i(x^i) = \sin \theta^i(x^i) \mathbf{E}_X + \cos \theta^i(x^i) \mathbf{E}_Z. \quad (2.10)$$

Krajevni vektor deformirane lege poljubnega delca sloja i kompozitnega nosilca je v ravnini deformiranja nosilca določen s prostorskima koordinatama X, Z , torej

$$\mathbf{R}^i(x^i, z^i) = X(x^i, z^i) \mathbf{E}_X + Z(x^i, z^i) \mathbf{E}_Z. \quad (2.11)$$

S primerjavo enačb (2.1) in (2.11) lahko prostorski koordinati X in Z poljubnega delca sloja i kompozitnega nosilca izrazimo s kinematičnimi količinami referenčne osi sloja i (v nadaljevanju kinematične količine) z enačbama:

$$X(x^i, z^i) = x^i + u^i(x^i) + z^i \sin \varphi^i(x^i), \quad (2.12)$$

$$Z(x^i, z^i) = w^i(x^i) + z^i \cos \varphi^i(x^i). \quad (2.13)$$

Kinematične količine sloja i kompozitnega nosilca u^i, w^i in φ^i s kinematičnimi enačbami povežemo z deformacijskimi količinami ε^i, κ^i in γ^i . Glede na privzeti Reissnerjev model ravninskega nosilca so kinematične enačbe poljubnega sloja kompozitnega nosilca naslednje (Reissner, 1972) ($i = 1, 2, \dots, N$):

$$1 + \frac{du^i(x^i)}{dx^i} - (1 + \varepsilon^i(x^i)) \cos \varphi^i(x^i) - \gamma^i(x^i) \sin \varphi^i(x^i) = 0, \quad (2.14)$$

$$\frac{dw^i(x^i)}{dx^i} + (1 + \varepsilon^i(x^i)) \sin \varphi^i(x^i) - \gamma^i(x^i) \cos \varphi^i(x^i) = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{d\varphi^i(x^i)}{dx^i} - \kappa^i(x^i) = 0. \quad (2.16)$$

V enačbah (2.14)–(2.16) predstavlja ε^i specifično vzdolžno deformacijo materialnega vlakna na referenčni osi sloja i (in hkrati tudi specifično spremembo dolžine referenčne osi sloja i , ko je $\gamma^i = 0$), γ^i predstavlja strižno deformacijo in κ^i upogibno deformacijo prečnega prereza sloja i kompozitnega nosilca. Deformacijske količine ε^i , γ^i in κ^i so določene tako, da so energijsko konjugirane inženirjem znani ravnotežni osni sili N^i , prečni sili Q^i in upogibnemu momentu M^i (Reissner, 1972).

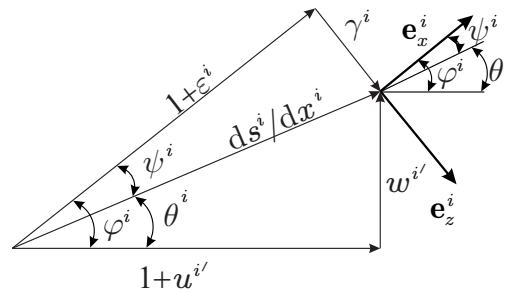
Skladno z Reissnerjevim modelom nosilca je vzdolžna deformacija D^i poljubnega materialnega vlakna sloja i kompozitnega nosilca določena z enačbo ($i = 1, 2, \dots, N$)

$$D^i(x^i, z^i) = \varepsilon^i(x^i) + z^i \kappa^i(x^i), \quad (2.17)$$

strižni zasuk prečnega prereza pa z enačbo

$$\tan(\psi^i(x^i)) = \frac{\gamma^i(x^i)}{1 + \varepsilon^i(x^i)}. \quad (2.18)$$

Zaradi večje preglednosti prikazujemo zveze med kinematičnimi in deformacijskimi količinami še v grafični obliki na sliki 2.3 (Hjelmstad, 2004).



Slika 2.3: Zveze med kinematičnimi in deformacijskimi količinami sloja i kompozitnega nosilca.

Figure 2.3: Relationships between kinematic quantities and deformations of layer i of composite beam.

2.1.2 Ravnotežne enačbe

Ravnotežne enačbe predstavljajo zveze med zunanjo obtežbo in notranjimi silami. Za večslojne kompozitne nosilce jih povzamemo skladno z Reissnerjevim modelom ravninskega nosilca (Reissner, 1972). Posebnost ravnotežnih enačb večslojnih kompozitnih nosilcev predstavlja obtežba. Sestavlja jo dejanska zunanja obtežba in zaradi interakcije med sloji tudi kontaktna obtežba na stiku med sloji. V nadaljevanju jo detajlneje predstavimo.

Obtežbo kompozitnega nosilca predstavljajo ločeno, za vsak sloj posebej, točkovne sile in točkovni momenti ter linijska obtežba in linijska momentna obtežba na referenčni osi sloja. Ta je posledica kontaktnih sil na površini sloja (točkovne sile, linijska in ploskovna obtežba) in sil na daljavo (prostorninska

obtežba). Obtežbo statično enakovredno prenesemo na referenčne osi sloja. Posebnost je ploskovna obtežba, ki je posledica vplivov okolice in medsebojnega vpliva med sloji kompozitnega nosilca (kontaktna obtežba med sloji). Na referenčno os prenešeno zunanjo ploskovno in prostorninsko obtežbo sloja i označimo s \mathbf{q}^i in \mathbf{m}^i , prenešeno kontaktno ploskovno obtežbo pa označimo s \mathbf{p}^i in \mathbf{h}^i . V prostorski bazi zapišemo linijsko obtežbo in linijsko momentno obtežbo z enačbami ($i = 1, 2, \dots, N$):

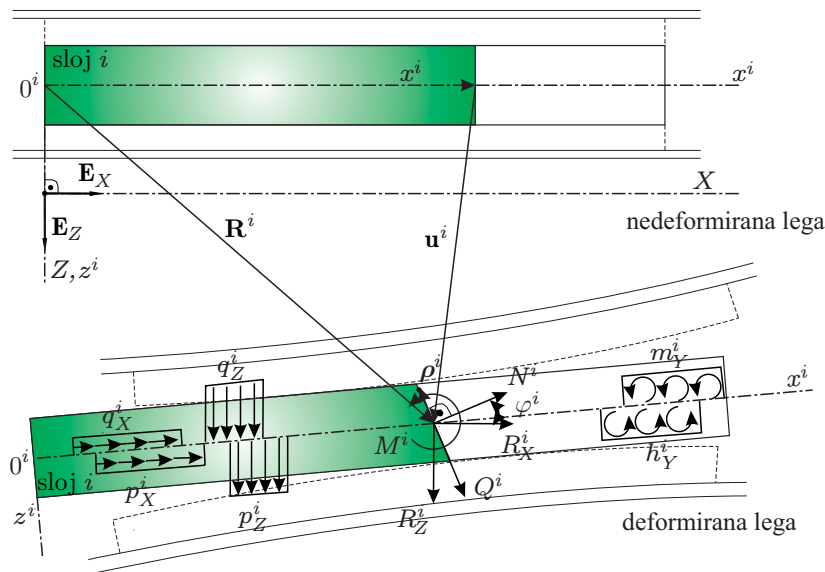
$$\mathbf{q}^i(x^i) = q_X^i(x^i)\mathbf{E}_X + q_Z^i(x^i)\mathbf{E}_Z, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{m}^i(x^i) = m_Y^i(x^i)\mathbf{E}_Y, \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^i(x^i) &= p_X^i(x^i)\mathbf{E}_X + p_Z^i(x^i)\mathbf{E}_Z = \\ &= (p_{X,\text{sp}}^i(x^i) + p_{X,\text{zg}}^i(x^i))\mathbf{E}_X + (p_{Z,\text{sp}}^i(x^i) + p_{Z,\text{zg}}^i(x^i))\mathbf{E}_Z = \\ &= (p_{t,\text{sp}}^i(x^i) + p_{t,\text{zg}}^i(x^i))\mathbf{e}_t^i + (p_{n,\text{sp}}^i(x^i) + p_{n,\text{zg}}^i(x^i))\mathbf{e}_n^i, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^i(x^i) &= h_Y^i(x^i)\mathbf{E}_Y = \\ &= (z_{\text{sp}}^i p_{X,\text{sp}}^i(x^i) + z_{\text{zg}}^i p_{X,\text{zg}}^i(x^i))\mathbf{E}_Y = \\ &= ((z_{\text{sp}}^i p_{t,\text{sp}}^i(x^i) + z_{\text{zg}}^i p_{t,\text{zg}}^i(x^i)) \cos \theta^i + (z_{\text{sp}}^i p_{n,\text{sp}}^i(x^i) + z_{\text{zg}}^i p_{n,\text{zg}}^i(x^i)) \sin \theta^i)\mathbf{E}_Y, \end{aligned} \quad (2.22)$$

kjer smo s $p_{X,\text{sp}}^i$, $p_{Z,\text{sp}}^i$, $p_{t,\text{sp}}^i$, $p_{n,\text{sp}}^i$ označili komponente linijske obtežbe, ki pripada stiku med slojema i in $i - 1$, s $p_{X,\text{zg}}^i$, $p_{Z,\text{zg}}^i$, $p_{t,\text{zg}}^i$, $p_{n,\text{zg}}^i$ pa komponente linijske obtežbe, ki pripada stiku med slojema i in $i + 1$. Podobno sta z_{sp}^i in z_{zg}^i koordinati stika med slojema i in $i - 1$ oziroma i in $i + 1$. Skladno z Reissnerjevimi modelom nosilca je obtežba merjena na nedeformirano dolžino referenčne osi posameznega sloja kompozitnega nosilca, deluje pa v deformirani legi (slika 2.4).



Slika 2.4: Obtežba sloja i kompozitnega nosilca in obremenitev prečnega prereza.

Figure 2.4: Loading of layer i of composite beam and loading of cross section.

Pogosto je preprosteje količine, ki pripadajo stiku med sloji, označiti z indeksom. V primeru N -slojnega kompozitnega nosilca je stikov med sloji $N - 1$. Če stik med slojema označimo z indeksom k , potem je za stik med slojema i in $i + 1$ indeks k enak indeksu i ($k = i$). Tako lahko $p_{X,\text{sp}}^i$ in $p_{X,\text{zg}}^i$ v enačbi (2.21) zapišemo tudi v obliki $p_{X,\text{sp}}^i = p_{X,k=i-1}^i = p_{X,i-1}^i$ in $p_{X,\text{zg}}^i = p_{X,k=i}^i = p_{X,i}^i$. Podobno indeksiramo tudi druge količine, ki pripadajo stiku k . Ravnotežne enačbe ravnotežnega večslojnega linijskega

kompozitnega nosilca zapišemo za vsak sloj posebej in so ($i = 1, 2, \dots, N$):

$$\frac{dR_X^i(x^i)}{dx^i} + q_X^i(x^i) + p_X^i(x^i) = 0, \quad (2.23)$$

$$\frac{dR_Z^i(x^i)}{dx^i} + q_Z^i(x^i) + p_Z^i(x^i) = 0, \quad (2.24)$$

$$\frac{dM^i(x^i)}{dx^i} - (1 + \varepsilon^i(x^i)) Q^i(x^i) + \gamma^i N^i(x^i) + m_Y^i(x^i) + h_Y^i(x^i) = 0. \quad (2.25)$$

Ravnotežne količine $R_X^i(x^i)$, $R_Z^i(x^i)$, $M^i(x^i)$, $N^i(x^i)$ in $Q^i(x^i)$ v enačbah (2.23)–(2.25) so komponente ravnotežne sile $\mathbf{n}^i(x^i)$ in ravnotežnega momenta $\mathbf{m}^i(x^i)$, izražene v prostorski oziroma materialni bazi, torej ($i = 1, 2, \dots, N$):

$$\mathbf{n}^i(x^i) = R_X^i(x^i)\mathbf{E}_X + R_Z^i(x^i)\mathbf{E}_Z = N^i(x^i)\mathbf{e}_x^i + Q^i(x^i)\mathbf{e}_z^i, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{m}^i(x^i) = M^i(x^i)\mathbf{E}_Y = M^i(x^i)\mathbf{e}_y^i. \quad (2.27)$$

Iz enačb (2.5)–(2.7) dobimo zveze med komponentami ravnotežne sile, zapisane v različnih bazah, ki so:

$$N^i(x^i) = R_X^i(x^i) \cos \varphi^i(x^i) - R_Z^i(x^i) \sin \varphi^i(x^i), \quad (2.28)$$

$$Q^i(x^i) = R_X^i(x^i) \sin \varphi^i(x^i) + R_Z^i(x^i) \cos \varphi^i(x^i). \quad (2.29)$$

2.1.3 Konstitutivne enačbe

Tretjo skupino osnovnih enačb ravninskega večslojnega linijskega kompozitnega nosilca predstavljajo konstitutivne enačbe. Skladno z Reissnerjevim modelom ravninskega nosilca jih določajo zveze med ravnotežnimi silami in ravnotežnim upogibnim momentom (N^i , Q^i , M^i) ter deformacijskimi količinami (ε^i , γ^i , κ^i). Za vsak sloj kompozitnega nosilca posebej te enačbe zapišemo v zelo splošni obliki ($i = 1, 2, \dots, N$):

$$N^i(x^i) = N_c^i(\varepsilon^i(x^i), \kappa^i(x^i)), \quad (2.30)$$

$$M^i(x^i) = M_c^i(\varepsilon^i(x^i), \kappa^i(x^i)), \quad (2.31)$$

$$Q^i(x^i) = Q_c^i(\gamma^i(x^i)), \quad (2.32)$$

kjer smo predpostavili homogene lastnosti po osi vsakega sloja kompozitnega nosilca.

V enačbah (2.30)–(2.32) smo tako z N_c^i označili konstitutivno osno silo, s Q_c^i konstitutivno prečno silo in z M_c^i konstitutivno upogibni moment sloja i kompozitnega nosilca. Konstitutivne količine N_c^i , M_c^i in Q_c^i predstavljajo rezultante normalne in strižne komponente napetostnega tenzorja prečnega prereza in so določene z enačbami ($i = 1, 2, \dots, N$):

$$N_c^i(x^i) = N_c^i(\varepsilon^i(x^i), \kappa^i(x^i)) = \int_{\mathcal{A}^i} \sigma^i(x^i, z^i) dA = \int_{\mathcal{A}^i} \sigma^i(D^i(x^i, z^i)) dA, \quad (2.33)$$

$$M_c^i(x^i) = M_c^i(\varepsilon^i(x^i), \kappa^i(x^i)) = \int_{\mathcal{A}^i} z^i \sigma^i(x^i, z^i) dA = \int_{\mathcal{A}^i} z^i \sigma^i(D^i(x^i, z^i)) dA, \quad (2.34)$$

$$Q_c^i(x^i) = Q_c^i(\gamma^i(x^i)) = \int_{\mathcal{A}^i} \tau^i(x^i, z^i) dA = \int_{\mathcal{A}^i} \tau^i(\gamma^i(x^i, z^i)) dA, \quad (2.35)$$

kjer \mathcal{A}^i predstavlja prečni prerez sloja i kompozitnega nosilca, σ^i predstavlja normalno napetost in τ^i strižno napetost. Konstitutivni zvezi za komponenti tenzorja napetosti zapišemo z nepovezanima

enačbama ($i = 1, 2, \dots, N$):

$$\sigma^i(x^i, z^i) = \mathcal{S}_1^i(D^i(x^i, z^i)), \quad (2.36)$$

$$\tau^i(x^i, z^i) = \mathcal{S}_2^i(\gamma^i(x^i, z^i)). \quad (2.37)$$

Funkciji $\mathcal{S}_1^i(D^i)$ in $\mathcal{S}_2^i(\gamma^i)$ sta poljubni, določimo ju z enoosnim in strižnim preizkusom. Pri inženirski teoriji striga linijskih konstrukcij lahko enačbo (2.35) poenostavimo v preprosto obliko (Cowper, 1966)

$$Q_c^i(\gamma^i(x^i)) = \int_{\mathcal{A}^i} \tau^i(x^i, z^i) dA = G^i A_s^i \gamma^i(x^i), \quad (2.38)$$

kjer G^i predstavlja strižni modul in $A_s^i < A^i$ strižni prečni prerez sloja i kompozitnega nosilca.

Z materialnim modelom, ki ga določa enačba (2.36), lahko opišemo zelo poljubno zvezo med specifično vzdolžno deformacijo materialnega vlakna sloja i kompozitnega nosilca in pripadajočo normalno napestostjo. S tako splošno zapisanim materialnim modelom, ki smo ga priredili vsakemu sloju kompozitnega nosilca posebej, lahko modeliramo zelo različno mehansko obnašanje kompozitnega nosilca. Tako se lahko sloji obnašajo elastično, hiperelastično, plastično, viskoelastično in tudi viskoplastično. Konkretno oblike materialnih modelov in pripadajočih materialnih parametrov vsakega sloja kompozitnega nosilca, ki ga analiziramo v računskih primerih, bomo opisali hkrati z računskim primerom.

Pri implementaciji metode končnih elementov in linearizaciji osnovnih enačb večslojnih linijskih kompozitnih nosilcev potrebujemo tudi variacije oziroma linearizacijo konstitutivnih količin N_c^i , Q_c^i in M_c^i . Zaradi preglednosti teh izrazov pri izpeljavi opustimo pisanje argumentov. Z variiranjem konstitutivnih enačb (2.33)–(2.35) dobimo ($i = 1, 2, \dots, N$):

$$\delta N_c^i = \left(\int_{\mathcal{A}^i} \frac{\partial \sigma^i}{\partial D^i} dA \right) \delta \varepsilon^i + \left(\int_{\mathcal{A}^i} z^i \frac{\partial \sigma^i}{\partial D^i} dA \right) \delta \kappa^i = C_{11}^i \delta \varepsilon^i + C_{12}^i \delta \kappa^i, \quad (2.39)$$

$$\delta M_c^i = \left(\int_{\mathcal{A}^i} z^i \frac{\partial \sigma^i}{\partial D^i} dA \right) \delta \varepsilon^i + \left(\int_{\mathcal{A}^i} (z^i)^2 \frac{\partial \sigma^i}{\partial D^i} dA \right) \delta \kappa^i = C_{12}^i \delta \varepsilon^i + C_{22}^i \delta \kappa^i, \quad (2.40)$$

$$\delta Q_c^i = \left(\int_{\mathcal{A}^i} \frac{\partial \tau^i}{\partial \gamma^i} dA \right) \delta \gamma^i = C_{33}^i \delta \gamma^i, \quad (2.41)$$

kjer smo s C_{11}^i , $C_{12}^i = C_{21}^i$, C_{22}^i in C_{33}^i označili komponente tangentne konstitutivne matrike \mathbf{C}^i prečnega prereza sloja i kompozitnega nosilca. V splošnem so komponente C_{11}^i , $C_{12}^i = C_{21}^i$, C_{22}^i odvisne od trenutnega tangentnega materialnega modula $E_T^i = \partial \sigma^i / \partial D^i$, od izbire lege referenčne osi in od dimenzij prečnega prereza sloja i . Tangentno konstitutivno matriko prečnega prereza sloja i kompozitnega nosilca zapišemo v obliki

$$\mathbf{C}^i = \begin{bmatrix} C_{11}^i & C_{12}^i & 0 \\ C_{21}^i & C_{22}^i & 0 \\ 0 & 0 & C_{33}^i \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Za stabilne materiale, kar moramo razumeti v sklopu linijskih konstrukcij, mora biti tangentna konstitutivna matrika prečnega prereza sloja i pozitivno definitna pri poljubnem x^i . Ker je C_{33}^i vedno pozitivna količina, mora za stabilne materiale veljati (Bratina, 2003) ($i = 1, 2, \dots, N$)

$$C_{11}^i > 0 \quad \text{in} \quad \det \mathbf{C}^i > 0. \quad (2.43)$$

Ko pri nekem x^i (prečnem prerezu) sloja i kompozitnega nosilca tem pogojem ni zadoščeno, govorimo o nestabilnem prečnem prerezu. Za tak prečni prerez je pogosto značilen pojav mehčanja prečnega prereza, kar pomeni, da se z večanjem deformacij prečnega prereza osna sila in upogibni moment zmanjšujeta. Značilen gradbeni material z izrazitim mehčanjem je beton.

2.1.4 Robni pogoji

Kinematične, ravnotežne in konstitutivne enačbe N -slojnega linijskega kompozitnega nosilca (2.14)–(2.16), (2.23)–(2.25) in (2.30)–(2.32) sestavlja $6N$ navadnih diferencialnih enačb prvega reda in $3N$ algebrskih enačb. Zato je splošna rešitev diferencialnih enačb odvisna od $6N$ integracijskih konstant. Te določimo s pomočjo robnih pogojev. Robne pogoje večslojnih linijskih kompozitnih nosilcev sestavljajo kinematični (bistveni) in statični (naravni) robni pogoji. Pri tem v skupino naravnih robnih pogojev spadajo predpisane posplošene robne točkovne sile, medtem ko v skupino bistvenih robnih pogojev spadajo predpisani posplošeni robni pomiki. V splošnem imamo tako za vsak sloj kompozitnega nosilca na voljo naslednje robne pogoje ($i = 1, 2, \dots, N$):

- $x^i = 0$:

$$R_X^i(0) - S_1^i = 0 \quad \text{ali} \quad u^i(0) = u_1^i, \quad (2.44)$$

$$R_Z^i(0) - S_2^i = 0 \quad \text{ali} \quad w^i(0) = u_2^i, \quad (2.45)$$

$$M^i(0) - S_3^i = 0 \quad \text{ali} \quad \varphi^i(0) = u_3^i, \quad (2.46)$$

- $x^i = L$:

$$R_X^i(L) - S_4^i = 0 \quad \text{ali} \quad u^i(L) = u_4^i, \quad (2.47)$$

$$R_Z^i(L) - S_5^i = 0 \quad \text{ali} \quad w^i(L) = u_5^i, \quad (2.48)$$

$$M^i(L) - S_6^i = 0 \quad \text{ali} \quad \varphi^i(L) = u_6^i. \quad (2.49)$$

V enačbah (2.44)–(2.49) predstavljajo u_m^i ($m = 1, 2, \dots, 6$) predpisane posplošene robne pomike, medtem ko so S_m^i ($m = 1, 2, \dots, 6$) predpisane posplošene robne sile pri $x^i = 0$ in $x^i = L$ sloja i kompozitnega nosilca.

2.1.5 Vezne enačbe

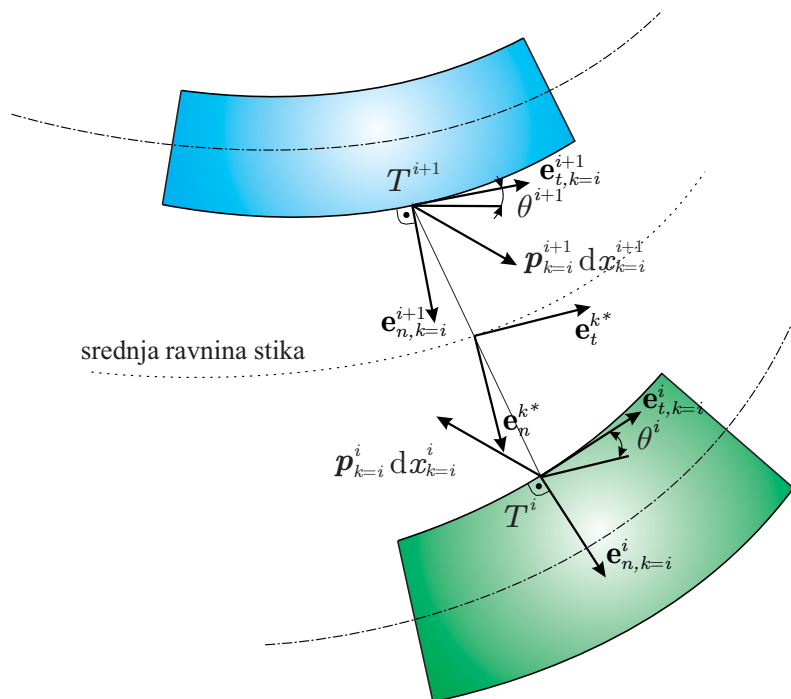
Z veznimi sredstvi povežemo sloje kompozitnega nosilca v celoto. Vezna sredstva so v splošnem deformabilna. Zato je obnašanje kompozitnega nosilca kot celote v veliki meri odvisno tudi od togosti oz. podajnosti veznih sredstev med sloji. V splošnem se zato lahko sloji razslojijo v prečni in vzdolžni smeri. Govorimo o razmikih in zdrsih med sloji. Če med sloji ni povezave, govorimo o popolnoma razslojenem kompozitnem nosilcu, drugače pa o delno razslojenem kompozitnem nosilcu. Obnašanje veznih sredstev na stiku med sloji kompozitnega nosilca opišemo z veznimi enačbami.

Pri analizi večslojnih linijskih kompozitnih nosilcev z geometrijsko nelinearnimi matematičnimi modeli so lahko v splošnem razmiki in zamiki med sloji tudi (zelo) veliki. Zato vezne enačbe v obliki, ki jih poznamo predvsem pri geometrijsko linearnih matematičnih modelih dvoslojnih kompozitnih nosilcev (Adekola, 1968, Bradford, Gilbert, 1992, Kroflič et al., 2010a, Manfredi, Fabbrocino, Cosenza, 1999, Schnabl et al., 2006, Xu, Wu, 2007), v osnovni obliki niso primerne za geometrijsko nelinearne modele, saj so vezne enačbe med sloji zapisane v prostorski bazi \mathbf{E}_X in \mathbf{E}_Z . V doktorski disertaciji bomo vezne enačbe med sloji kompozitnega nosilca zapisali v “povprečni” deformirani bazi na stiku med slojema (slika 2.5). “Povprečno” bazo označimo z vektorjema \mathbf{e}_n^{k**} in \mathbf{e}_t^{k**} in jo definiramo kot uteženo povprečje

vektorjev v naravni bazi na stiku med slojema ($k = 1, 2, \dots, N - 1$):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n^{k*}(x^i) &= \frac{\zeta \mathbf{e}_{n,i}^i(x^i) + (1 - \zeta) \mathbf{e}_{n,i}^{i+1}(x^{i+1})}{\left\| \zeta \mathbf{e}_{n,i}^i(x^i) + (1 - \zeta) \mathbf{e}_{n,i}^{i+1}(x^{i+1}) \right\|} = e_{nX}^{k*}(x^i) \mathbf{E}_X + e_{nZ}^{k*}(x^i) \mathbf{E}_Z, \\ \mathbf{e}_t^{k*}(x^i) &= \frac{\zeta \mathbf{e}_{t,i}^i(x^i) + (1 - \zeta) \mathbf{e}_{t,i}^{i+1}(x^{i+1})}{\left\| \zeta \mathbf{e}_{t,i}^i(x^i) + (1 - \zeta) \mathbf{e}_{t,i}^{i+1}(x^{i+1}) \right\|} = e_{tX}^{k*}(x^i) \mathbf{E}_X + e_{tZ}^{k*}(x^i) \mathbf{E}_Z, \end{aligned} \quad (2.50)$$

kjer smo z $\|\bullet\|$ označili dolžino vektorja.



Slika 2.5: Geometrijske in ravnotežne količine na stiku k med slojema i in $i + 1$ ter geometrijski pomen “povprečne” baze. Točki T^i in T^{i+1} sta v nedeformirani legi istoležni.

Figure 2.5: Geometrical and equilibrium quantities of contact k between layers i and $i + 1$ and geometrical meaning of “averaged” basis. Points T^i and T^{i+1} coincide in undeformed configuration.

V enačbi (2.50) predstavlja ζ utež z vrednostjo med 0 in 1, $\mathbf{e}_{t,i}^i, \mathbf{e}_{t,i}^{i+1}$ in $\mathbf{e}_{n,i}^i, \mathbf{e}_{n,i}^{i+1}$ predstavljajo tangenti in normalni vektor naravne baze na stični ravnini med slojema i in $i + 1$ v deformirani legi, $e_{nX}^{k*}, e_{nZ}^{k*}, e_{tX}^{k*}, e_{tZ}^{k*}$ pa predstavljajo X - in Z -komponento enotskih vektorjev \mathbf{e}_n^{k*} in \mathbf{e}_t^{k*} sloja k glede na prostorsko bazo. Omenimo še dejstvo, da vektorja \mathbf{e}_n^{k*} in \mathbf{e}_t^{k*} nista enolično definirana, ko je $\mathbf{e}_{n,i}^i = -\mathbf{e}_{n,i}^{i+1}$ in/ali $\mathbf{e}_{t,i}^i = -\mathbf{e}_{t,i}^{i+1}$. Vendar to predstavlja tako izjemen primer razslojenosti slojev kompozitnega nosilca, ki nima dejanskega fizikalnega pomena.

Skladno s tretjim Newtonovim zakonom mora linijska obtežba na stiku med slojema kompozitnega nosilca zadostiti ravnotežnemu pogoju

$$\mathbf{p}_i^i(x^i) dx_i^i + \mathbf{p}_i^{i+1}(x^{i+1}) dx_i^{i+1} = \mathbf{0}, \quad (2.51)$$

kjer $\mathbf{p}_i^i dx_i^i$ in $\mathbf{p}_i^{i+1} dx_i^{i+1}$ predstavljata diferencial kontaktne sile v izbrani točki na stiku k med slojema i in $i + 1$ (slika 2.5), dx_i^i in dx_i^{i+1} pa diferenciala dolžine krivulje na stiku v nedeformirani legi. Ker je

$dx^i = dx^{i+1}$, velja

$$\mathbf{p}_i^i(x^i) + \mathbf{p}_i^{i+1}(x^{i+1}) = \mathbf{0}. \quad (2.52)$$

Formulacija enačb se poenostavi, če linijsko kontaktno obtežbo na stiku k med slojema i in $i+1$ izrazimo z vektorjem \mathbf{p}^k :

$$\mathbf{p}^k(x^i) = \mathbf{p}_i^i(x^i) = -\mathbf{p}_i^{i+1}(x^{i+1}) = p_X^k(x^i)\mathbf{E}_X + p_Z^k(x^i)\mathbf{E}_Z, \quad (2.53)$$

kjer p_X^k, p_Z^k predstavljata komponenti vektorja \mathbf{p}^k glede na prostorski koordinatni sistem. Komponenti p_X^k in p_Z^k lahko izrazimo tudi s komponentami p_t^{k*} in p_n^{k*} , ki predstavljata komponenti vektorja \mathbf{p}_X^i v naravni bazi \mathbf{e}_t^{k*} in \mathbf{e}_n^{k*} . Po kratkem računu dobimo

$$p_X^k(x^i) = p_t^{k*}(x^i)e_{tX}^{k*}(x^i) + p_n^{k*}(x^i)e_{nX}^{k*}(x^i), \quad (2.54)$$

$$p_Z^k(x^i) = p_t^{k*}(x^i)e_{tZ}^{k*}(x^i) + p_n^{k*}(x^i)e_{nZ}^{k*}(x^i). \quad (2.55)$$

Za formulacijo veznih enačb na stiku k med slojema i in $i+1$ kompozitnega nosilca v “povprečni” bazi potrebujemo tudi vektorje pomikov sloja i in $i+1$ na stičnih ravninah med sloji oziroma komponente teh vektorjev pomikov v “povprečni” bazi. Za zgornji rob sloja i na stiku k je vektor pomikov določen z enačbo

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^i(x^i, z^i) &= U_X^i(x^i, z^i)\mathbf{E}_X + U_Z^i(x^i, z^i)\mathbf{E}_Z = \\ &= (u^i + z^i \sin \varphi^i)\mathbf{E}_X + (w^i + z^i \cos \varphi^i)\mathbf{E}_Z \end{aligned} \quad (2.56)$$

in za spodnji rob sloja $i+1$ na stiku k z enačbo

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{i+1}(x^{i+1}, z^{i+1}) &= U_X^{i+1}(x^{i+1}, z^{i+1})\mathbf{E}_X + U_Z^{i+1}(x^{i+1}, z^{i+1})\mathbf{E}_Z = \\ &= (u^{i+1} + z^{i+1} \sin \varphi^{i+1})\mathbf{E}_X + (w^{i+1} + z^{i+1} \cos \varphi^{i+1})\mathbf{E}_Z. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Ko vektorje pomikov na zgornjem oziroma spodnjem robu sloja i in $i+1$ kompozitnega nosilca stika k zapišemo v “povprečni” bazi \mathbf{e}_t^{k*} in \mathbf{e}_n^{k*} z enačbama

$$\mathbf{U}^i(x^i, z^i) = u_{t,i}^{i*}\mathbf{e}_t^{k*} + w_{n,i}^{i*}\mathbf{e}_n^{k*}, \quad (2.58)$$

$$\mathbf{U}^{i+1}(x^{i+1}, z^{i+1}) = u_{t,i}^{(i+1)*}\mathbf{e}_t^{k*} + w_{n,i}^{(i+1)*}\mathbf{e}_n^{k*}, \quad (2.59)$$

izračunamo komponente vektorjev pomikov \mathbf{U}^i in \mathbf{U}^{i+1} v “povprečni” bazi z enačbami:

$$w_{n,i}^{i*}(x^i) = \mathbf{U}^i(x^i, z^i) \cdot \mathbf{e}_n^{k*}(x^i), \quad (2.60)$$

$$u_{t,i}^{i*}(x^i) = \mathbf{U}^i(x^i, z^i) \cdot \mathbf{e}_t^{k*}(x^i), \quad (2.61)$$

$$w_{n,i}^{(i+1)*}(x^{i+1}) = \mathbf{U}^{i+1}(x^{i+1}, z^{i+1}) \cdot \mathbf{e}_n^{k*}(x^{i+1}), \quad (2.62)$$

$$u_{t,i}^{(i+1)*}(x^{i+1}) = \mathbf{U}^{i+1}(x^{i+1}, z^{i+1}) \cdot \mathbf{e}_t^{k*}(x^{i+1}). \quad (2.63)$$

S komponentami vektorja pomikov $w_{n,i}^{i*}, w_{n,i}^{(i+1)*}, u_{t,i}^{i*}$ in $u_{t,i}^{(i+1)*}$ definiramo “povprečni” zdrs, Δ^{k*} , in “povprečni” razmik, d^{k*} , na stiku k med slojema i in $i+1$ kompozitnega nosilca z enačbama:

$$\Delta^{k*}(x^i) = u_{t,i}^{i*}(x^i) - u_{t,i}^{(i+1)*}(x^{i+1}), \quad (2.64)$$

$$d^{k*}(x^i) = w_{n,i}^{i*}(x^i) - w_{n,i}^{(i+1)*}(x^{i+1}). \quad (2.65)$$

Vezne enačbe ali konstitutivne enačbe stika formuliramo kot zveze med količinami p_t^{k*} in p_n^{k*} , Δ^{k*} in d^{k*} . Tudi te zveze določimo z eksperimenti. Za različna vezna sredstva je seveda tudi oblika konstitutivnih enačb stika drugačna. Pregled konstitutivnih enačb stika, ki se največkrat uporabljajo pri analizi razslojevanja večslojnih kompozitnih konstrukcij, sta predstavila Alfano in Crisfield (2001). Kot poročata, je razslojevanje v vzdolžni in prečni smeri pogosto povezan proces, zato v takih primerih konstitutivni enačbi stika zapišemo v obliki ($k = 1, 2, \dots, N - 1$)

$$p_t^{k*}(x^i) = \mathcal{F}_1^{k*}(\Delta^{k*}(x^i), d^{k*}(x^i)), \quad (2.66)$$

$$p_n^{k*}(x^i) = \mathcal{F}_2^{k*}(\Delta^{k*}(x^i), d^{k*}(x^i)). \quad (2.67)$$

Za gradbene večslojne linijske kompozitne nosilce pa lahko enačbi (2.66) in (2.67) še dodatno poenostavimo. Kot poročajo številni raziskovalci, je za analizo togosti, duktilnosti in nosilnosti dvoslojnih kompozitnih nosilcev obnašanje veznih sredstev v vzdolžni in prečni smeri nepovezano (Adekola, 1968, Gara, Ranzi, Leoni, 2006). V teh primerih konstitutivni enačbi stika zapišemo v obliki ($k = 1, 2, \dots, N - 1$)

$$p_t^{k*}(x^i) = \mathcal{G}_1^{k*}(\Delta^{k*}(x^i)), \quad (2.68)$$

$$p_n^{k*}(x^i) = \mathcal{G}_2^{k*}(d^{k*}(x^i)). \quad (2.69)$$

Kljub poenostavitvam je tudi ta zapis konstitutivnih enačb stika zelo splošen in lahko z njim opišemo obnašanje mnogih različnih veznih sredstev. Tako lahko z njimi opišemo elastično, plastično, viskoelastično pa tudi viskoplastično obnašanje veznih sredstev.

2.1.6 Linearizacija enačb

Pri analizi togosti, duktilnosti in nosilnosti gradbenih kompozitnih konstrukcij, ki so sestavljene iz večslojnih linijskih kompozitnih nosilcev, se pogosto izkaže, da so zaradi geometrijskih in materialnih lastnosti konstrukcij pomiki in zasuki ter deformacije po velikosti majhne količine celo v fazi mejnega stanja nosilnosti konstrukcije. V takih primerih je smiselno osnovne enačbe večslojnih linijskih kompozitnih nosilcev ustrezno poenostaviti. Za to so na voljo različni postopki. V doktoratu bomo uporabili metodo konsistentne linearizacije. Metoda konsistentne linearizacije enačb je opisana v številnih knjigah, na primer Bonet in Wood (1997) ali Holzapfel (2001). Zato v doktoratu predstavimo konsistentno linearizacijo osnovnih enačb večslojnih linijskih kompozitnih nosilcev le na kratko.

Osnovne enačbe večslojnega linijskega kompozitnega nosilca, ki jih predstavljajo enačbe (2.14)–(2.16), (2.23)–(2.25), (2.30)–(2.32), (2.68) in (2.69), zapišemo v zgoščeni obliki

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (2.70)$$

Vektor neznanek v enačbi (2.70) predstavljajo kinematične, ravnotežne in deformacijske količine ter povprečni zamiki in razmiki na stiku med sloji kompozitnega nosilca. Linearizirane enačbe večslojnih linijskih kompozitnih nosilcev dobimo s konsistentno linearizacijo enačb (2.70) okoli nedeformirane lege $\mathbf{x}_0 = \langle 0, 0, \dots, 0 \rangle^T$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \approx \left. \frac{d}{d\alpha} \mathbf{f}(\mathbf{x} + \alpha\delta\mathbf{x}) \right|_{\alpha=0}. \quad (2.71)$$

Iz enačbe (2.71) in po daljšem računanju dobimo linearizirane enačbe večslojnih linijskih nosilcev. Te sestavljajo:

- kinematične enačbe ($i = 1, 2, \dots, N$)

$$\frac{du^i(x^i)}{dx^i} - \varepsilon^i(x^i) = 0, \quad (2.72)$$

$$\frac{dw^i(x^i)}{dx^i} + \varphi^i(x^i) - \gamma^i(x^i) = 0, \quad (2.73)$$

$$\frac{d\varphi^i(x^i)}{dx^i} - \kappa^i(x^i) = 0, \quad (2.74)$$

- ravnotežne enačbe ($i = 1, 2, \dots, N$)

$$\frac{dN^i(x^i)}{dx^i} + q_X^i(x^i) + p_X^i(x^i) = 0, \quad (2.75)$$

$$\frac{dQ^i(x^i)}{dx^i} + q_Z^i(x^i) + p_Z^i(x^i) = 0, \quad (2.76)$$

$$\frac{dM^i(x^i)}{dx^i} - Q^i(x^i) + m_Y^i(x^i) + h_Y^i(x^i) = 0, \quad (2.77)$$

,

- konstitutivne enačbe ($i = 1, 2, \dots, N$)

$$N^i(x^i) = C_{11}^i \varepsilon^i(x^i) + C_{12}^i \kappa^i(x^i), \quad (2.78)$$

$$M^i(x^i) = C_{21}^i \varepsilon^i(x^i) + C_{22}^i \kappa^i(x^i), \quad (2.79)$$

$$Q^i(x^i) = C_{33}^i \gamma^i(x^i), \quad (2.80)$$

- vezne enačbe ($k = 1, 2, \dots, N - 1$)

$$p_X^k(x^i) = K^k \Delta^k(x^i), \quad (2.81)$$

$$p_Z^k(x^i) = C^k d^k(x^i), \quad (2.82)$$

kjer smo prirastke $\delta \mathbf{x}$ označili kar z \mathbf{x} , na primer $\delta u^i = u^i$, saj je $\mathbf{x} = \mathbf{0} + \delta \mathbf{x} = \delta \mathbf{x}$. Konstanti K^k in C^k v enačbah (2.81) in (2.82) imenujemo vzdolžna in prečna togost stika. Na kratko v nadaljevanju opišemo samo linearizacijo veznih enačb. Ker velja $\mathbf{e}_{n,i}^i = \mathbf{e}_{n,i}^{i+1} = \mathbf{E}_Z$ in $\mathbf{e}_{t,i}^i = \mathbf{e}_{t,i}^{i+1} = \mathbf{E}_X$, velja tudi $\mathbf{e}_n^{k*} = \mathbf{E}_Z$ in $\mathbf{e}_t^{k*} = \mathbf{E}_X$, kar pomeni, da velja $e_{tX}^{k*} = e_{nZ}^{k*} = 1$ in $e_{nX}^{k*} = e_{tZ}^{k*} = 0$. Zato pa tudi velja

$$\Delta^{k*}(x^i) = \Delta^k(x^i), \quad (2.83)$$

$$d^{k*}(x^i) = d^k(x^i), \quad (2.84)$$

$$p_t^{k*}(x^i) = p_X^k(x^i), \quad (2.85)$$

$$p_n^{k*}(x^i) = p_Z^k(x^i). \quad (2.86)$$

Ko smo izpeljali zveze (2.83)–(2.86), je izpeljava enačb (2.81) in (2.82) iz (2.68) in (2.69) trivialna.

Pogosto je mehansko obnašanje večslojnih linijskih kompozitnih nosilcev zaradi nelinearnih materialnih lastnosti slojev in veznih sredstev nelinearno že pri nizkih nivojih obtežbe, kljub temu, da so pomiki, zasuki in deformacije kompozitnih konstrukcij po velikosti majhne količine. V takih primerih enačbe (2.72)–(2.82) preuredimo tako, da v modelu upoštevamo tudi nelinearno obnašanje materialov in veznih sredstev. Za te primere sestavljajo modificirane linearizirane osnovne enačbe večslojnih linijskih kompozitnih nosilcev, kot jih imenujemo, enačbe (2.72)–(2.77) in nelinearne konstitutivne in vezne enačbe:

- konstitutivne enačbe ($i = 1, 2, \dots, N$)

$$N^i(x^i) = N_c^i(\varepsilon^i(x^i), \kappa^i(x^i)), \quad (2.87)$$

$$M^i(x^i) = M_c^i(\varepsilon^i(x^i), \kappa^i(x^i)), \quad (2.88)$$

$$Q^i(x^i) = C_{33}^i \gamma^i(x^i), \quad (2.89)$$

- vezne enačbe ($k = 1, 2, \dots, N - 1$)

$$p_X^k(x^i) = \mathcal{G}^{k_1}(\Delta^k(x^i)), \quad (2.90)$$

$$p_Z^k(x^i) = \mathcal{G}^{k_2}(d^k(x^i)). \quad (2.91)$$

Linearizirane enačbe večslojnih linijskih kompozitnih nosilcev (2.72)–(2.82) algebrskih enačb in linearnih diferencialnih enačb prvega reda s konstantnimi koeficienti. Zato za ta sistem enačb obstajajo točne rešitve. Tako v literaturi zasledimo točno rešitev za trislojne linijske kompozitne nosilce (Škec et al., 2012), in za dvoslojne linijske kompozitne konstrukcije (Krofič et al., 2010a, Adekola, 1968, Robinson, Naraine, 1988). V tej disertaciji bomo v poglavju računski primeri za konkreten primer večslojnega linijskega kompozitnega nosilca predstavili točno rešitev v obliki vrste. Točno rešitev za modificirane linearne enačbe večslojnih linijskih kompozitnih nosilcev (2.72)–(2.77) in (2.87)–(2.91) v splošnem ne obstajajo, zato te enačbe kot osnovne enačbe večslojnih linijskih kompozitnih nosilcev rešimo numerično, pogosto z metodo končnih elementov.

V nadaljevanju predstavimo točno rešitev linearnega sistema algebrskih in diferencialnih enačb (2.72)–(2.82). Najprej algebrske konstitutivne enačbe (2.78)–(2.80) vstavimo v kinematične in ravnotežne enačbe (2.72)–(2.77). Tako dobimo sistem $6N$ linearnih diferencialnih enačb prvega reda s konstantnimi koeficienti za $6N$ neznanih funkcij, krajše ga zapišemo kot

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{B}\mathbf{y}(x) + \mathbf{g}, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad (2.92)$$

kjer smo z $(\bullet)'$ označili odvod količine po materialni koordinati $x = x^i = x^2 = \dots x^N$. V enačbi (2.92) predstavlja \mathbf{y} vektor neznanih funkcij, \mathbf{g} vektor zunanje obtežbe, \mathbf{B} matriko konstantnih koeficientov in \mathbf{y}_0 vektor robnih parametrov, ki jih določimo iz robnih pogojev obravnavanega večslojnega linijskega kompozitnega nosilca. Rešitev predstavljenega nehomogenega sistema diferencialnih enačb prvega reda s konstantnimi koeficienti je sestavljena iz homogenega in partikularnega dela (Goldberg, Schwartz, 1972) in jo zapišemo v obliki

$$\mathbf{y}(x) = e^{\mathbf{B}\mathbf{y}} \left(\mathbf{y}_0 + \int_0^x e^{-\mathbf{B}\xi} \mathbf{g} \, d\xi \right). \quad (2.93)$$

Ko na kompozitni nosilec delujejo zgolj točkovne sile, rešujemo le homogen sistem enačb, saj je $\mathbf{g} = \mathbf{0}$. Za te primere je točna rešitev enačb (2.72)–(2.82) (Goldberg, Schwartz, 1972) zelo preprosta:

$$\mathbf{y}(x) = e^{\mathbf{B}\mathbf{y}} \mathbf{y}_0. \quad (2.94)$$

2.1.7 Modificiran izrek o virtualnem delu

Točna rešitev napetostno-deformacijskega stanja ravninskega večslojnega linijskega kompozitnega nosilca je možna samo, če kompozitni nosilec modeliramo z lineariziranimi enačbami (2.72)–(2.82) (Adekola,

1968, Robinson, Naraine, 1988, Kroflič et al., 2010a, Škec et al., 2012). Zato moramo osnovne enačbe večslojnega linijskega kompozitnega nosilca rešiti numerično, največkrat z metodo končnih elementov. V doktorski disertaciji bomo rešili osnovne enačbe (2.14)–(2.16), (2.23)–(2.25), (2.30)–(2.32), (2.68) in (2.69) z deformacijsko metodo končnih elementov (Planinc, 1998), ki je zasnovana na modificiranem izreku o virtualnem delu. Izhodišče pri izpeljavi modificiranega izreka o virtualnem delu je izrek o virtualnem delu. Pri izpeljavi sledimo izpeljavi, ki jo je v svoji disertaciji predstavil Planinc (1998), le prilagodimo jo za večslojne linijske nosilce. Pri tem zaradi preglednosti izpeljave izpustimo funkcijske argumente.

Izrek o virtualnem delu N -slojnega linijskega kompozitnega nosilca je vsota izrekov o virtualnem delu vsakega sloja (Washizu, 1981)

$$\begin{aligned} \delta W = \sum_{i=1}^N \delta W^i = \sum_{i=1}^N \left\{ \int_0^L N^i \delta \varepsilon^i dx + \int_0^L Q^i \delta \gamma^i dx + \int_0^L M^i \delta \kappa^i dx - \right. \\ \left. - \int_0^L (q_X^i + p_X^i) \delta u^i dx - \int_0^L (q_Z^i + p_Z^i) \delta w^i dx - \int_0^L (m_Y^i + h_Y^i) \delta \varphi^i dx - \sum_{j=1}^6 S_j^i \delta u_j^i \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.95)$$

V funkcionalu (2.95) predstavljajo količine δu^i , δw^i , $\delta \varphi^i$ virtualne spremembe pomikov in zasukov referenčne osi sloja i kompozitnega nosilca, $\delta \varepsilon^i$, $\delta \gamma^i$, $\delta \kappa^i$ pa virtualne spremembe deformacijskih količin. Variacije δu_j^i ($j = 1, 2, \dots, 6$) so virtualne spremembe robnih kinematičnih količin sloja i :

$$\begin{aligned} \delta u_1^i &= \delta u^i(0), & \delta u_2^i &= \delta w^i(0), & \delta u_3^i &= \delta \varphi^i(0), \\ \delta u_4^i &= \delta u^i(L), & \delta u_5^i &= \delta w^i(L), & \delta u_6^i &= \delta \varphi^i(L). \end{aligned}$$

Z upoštevanjem kinematičnih in konstitutivnih enačb je funkcional (2.95) odvisen le od kinematičnih količin. To odvisnost na kratko opišemo v nadaljevanju.

Če je enačbam (2.30)–(2.32) identično zadoščeno, lahko izrek o virtualnem delu zapišemo v obliki

$$\begin{aligned} \delta W = \sum_{i=1}^N \delta W^i = \sum_{i=1}^N \left\{ \int_0^L N_c^i \delta \varepsilon^i dx + \int_0^L Q_c^i \delta \gamma^i dx + \int_0^L M_c^i \delta \kappa^i dx - \right. \\ \left. - \int_0^L (q_X^i + p_X^i) \delta u^i dx - \int_0^L (q_Z^i + p_Z^i) \delta w^i dx - \int_0^L (m_Y^i + h_Y^i) \delta \varphi^i dx - \sum_{j=1}^6 S_j^i \delta u_j^i \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.96)$$

V funkcionalu (2.96) predstavljajo kinematične enačbe (2.14)–(2.16) vezi med deformacijskimi in kinematičnimi količinami. Če se omejimo samo na sloj i , so od šestih količin, u^i , w^i , φ^i , ε^i , γ^i in κ^i , neodvisne samo tri. Pri standardnih formulacijah končnih elementov izberemo kot neodvisne spremenljivke kinematične količine u^i , w^i , φ^i . Slabosti takih končnih elementov so dobro znane, omenimo samo občutljivost elementov na vse vrste blokiranja (Planinc, 1998). Tem problemom se, kot je pokazal Planinc (1998), v celoti izognemo z vpeljavo deformacijskih končnih elementov. V nadaljevanju izpeljemo modificiran izrek o virtualnem delu za večslojne linijske kompozitne nosilce, ki je osnova izpeljave deformacijskih končnih elementov (Planinc, 1998).

Princip virtualnega dela (2.96) dejansko predstavlja vezan variacijski princip, katerega vezi so kinematične enačbe (2.14)–(2.16). Skladno s pravili variacijskega računa kinematične enačbe (2.14)–(2.16)

pomnožimo s poljubnimi, vsaj enkrat odvedljivimi funkcijami R_X^i , R_Z^i in M^i , Lagrangeovimi množitelji. Izraze nato integriramo po referenčni osi vsakega sloja kompozitnega nosilca in dobljene izraze variiramo po vseh neznankah funkcionala, torej po u^i , w^i , φ^i , ε^i , γ^i , κ^i , R_X^i , R_Z^i in M^i ($i = 1, 2, \dots, N$). Tako dobimo:

$$\begin{aligned} \delta E_1 = & \sum_{i=1}^N \int_0^L ((1 + u^{i'} - (1 + \varepsilon^i) \cos \varphi^i - \gamma^i \sin \varphi^i) \delta R_X^i \\ & + (\delta u^{i'} - \cos \varphi^i \delta \varepsilon^i + (1 + \varepsilon^i) \sin \varphi^i \delta \varphi^i - \sin \varphi^i \delta \gamma^i - \gamma^i \cos \varphi^i \delta \varphi^i) R_X^i) dx, \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} \delta E_2 = & \sum_{i=1}^N \int_0^L ((w^{i'} + (1 + \varepsilon^i) \sin \varphi^i - \gamma^i \cos \varphi^i) \delta R_Z^i \\ & + (\delta w^{i'} - \sin \varphi^i \delta \varepsilon^i + (1 + \varepsilon^i) \cos \varphi^i \delta \varphi^i - \cos \varphi^i \delta \gamma^i + \gamma^i \sin \varphi^i \delta \varphi^i) R_Z^i) dx, \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$\delta E_3 = \sum_{i=1}^N \int_0^L ((\varphi^{i'} - \kappa^i) \delta M^i + M^i (\delta \varphi^{i'} - \delta \kappa^i)) dx, \quad (2.99)$$

kjer smo odvode količin po materialni koordinati x^i označili z $\frac{d}{dx^i} = (\cdot)'$.

Dobljene izraze prištejemo k funkcionalu δW , integrale $\int_0^L R_X^i \delta u^{i'} dx^i$, $\int_0^L R_Z^i \delta w^{i'} dx^i$, $\int_0^L M^i \delta \varphi^{i'} dx^i$ pa preuredimo z integracijo po delih:

$$\int_0^L R_X^i \delta u^{i'} dx^i = R_X^i(L) \delta u^i(L) - R_X^i(0) \delta u^i(0) - \int_0^L R_X^{i'} \delta u^i dx^i, \quad (2.100)$$

$$\int_0^L R_Z^i \delta w^{i'} dx^i = R_Z^i(L) \delta w^i(L) - R_Z^i(0) \delta w^i(0) - \int_0^L R_Z^{i'} \delta w^i dx^i, \quad (2.101)$$

$$\int_0^L M^i \delta \varphi^{i'} dx^i = M^i(L) \delta \varphi^i(L) - M^i(0) \delta \varphi^i(0) - \int_0^L M^{i'} \delta \varphi^i dx^i. \quad (2.102)$$

Izraze v razširjenem funkcionalu nato uredimo po neodvisnih variacijah, tako dobimo Hu-Washizejev funkcional oziroma razširjeni izrek o virtualnem delu:

$$\begin{aligned} \delta W^* = & \delta W + \delta E_1 + \delta E_2 + \delta E_3 = \\ = & \sum_{i=1}^N \left\{ \int_0^L (N_c^i - N^i) \delta \varepsilon^i dx + \int_0^L (Q_c^i - Q^i) \delta \gamma^i dx + \int_0^L (M_c^i - M^i) \delta \kappa^i dx \right. \\ & - \int_0^L (R_X^{i'} + q_X^i + p_X^i) \delta u^i dx - \int_0^L (R_Z^{i'} + q_Z^i + p_Z^i) \delta w^i dx - \\ & - \int_0^L (M^{i'} - (1 + \varepsilon^i) Q^i + \gamma^i N^i + (m_Y^i + h_Y^i)) \delta \varphi^i dx \\ & + \int_0^L ((1 + u^{i'} - (1 + \varepsilon^i) \cos \varphi^i - \gamma^i \sin \varphi^i) \delta R_X^i) dx \\ & + \int_0^L (w^{i'} + (1 + \varepsilon^i) \sin \varphi^i - \gamma^i \cos \varphi^i) \delta R_Z^i dx + \int_0^L (\varphi^{i'} - \kappa^i) \delta M^i dx + \\ & + (-S_1^i - R_X^i(0)) \delta u^i(0) + (-S_2^i - R_Z^i(0)) \delta w^i(0) + (-S_3^i - M^i(0)) \delta \varphi^i(0) \end{aligned}$$

$$\left. + (-S_4^i + R_X^i(L)) \delta u^i(L) + (-S_5^i + R_Z^i(L)) \delta w^i(L) + (-S_6^i + M^i(L)) \delta \varphi^i(L) \right\} = 0. \quad (2.103)$$

Variacije δu^i , δw^i , $\delta \varphi^i$, $\delta \varepsilon^i$, $\delta \gamma^i$, $\delta \kappa^i$, δR_X^i , δR_Z^i in δM^i ($i = 1, 2, \dots, N$) v funkcionalu (2.103) predstavljajo poljubne neodvisne funkcije, poljubni neodvisni parametri $\delta u^i(0)$, $\delta w^i(0)$, $\delta \varphi^i(0)$, $\delta u^i(L)$, $\delta w^i(L)$, $\delta \varphi^i(L)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) pa variacije robnih količin.

Skladno s pravili variacijskega računa izpeljemo Euler-Lagrangeove enačbe funkcionala (2.103), ki predstavljajo ($i = 1, 2, \dots, N$):

- konstitutivne enačbe ($x^i \in (0, L)$):

$$f_i = N_c^i - N^i = 0, \quad (2.104)$$

$$f_{N+i} = Q_c^i - Q^i = 0, \quad (2.105)$$

$$f_{2N+i} = M_c^i - M^i = 0, \quad (2.106)$$

- kinematične enačbe ($x^i \in (0, L)$):

$$f_{3N+i} = 1 + u^{i'} - (1 + \varepsilon^i) \cos \varphi^i - \gamma^i \sin \varphi^i = 0, \quad (2.107)$$

$$f_{4N+i} = w^{i'} + (1 + \varepsilon^i) \sin \varphi^i - \gamma^i \cos \varphi^i = 0, \quad (2.108)$$

$$f_{5N+i} = \varphi^{i'} - \kappa^i = 0, \quad (2.109)$$

- ravnotežne enačbe ($x^i \in (0, L)$):

$$f_{6N+i} = R_X^{i'} + q_X^i + p_X^i = 0, \quad (2.110)$$

$$f_{7N+i} = R_Z^{i'} + q_Z^i + p_Z^i = 0, \quad (2.111)$$

$$f_{8N+i} = M^{i'} - (1 + \varepsilon^i) Q^i + \gamma^i N^i + (m_Y^i + h_Y^i) = 0; \quad (2.112)$$

ter pripadajoče naravne (statične) robne pogoje:

- $x^i = 0$:

$$f_{9N+i} = -S_1^i - R_X^i(0) = 0, \quad (2.113)$$

$$f_{10N+i} = -S_2^i - R_Z^i(0) = 0, \quad (2.114)$$

$$f_{11N+i} = -S_3^i - M^i(0) = 0, \quad (2.115)$$

- $x^i = L$:

$$f_{12N+i} = -S_4^i + R_X^i(L) = 0, \quad (2.116)$$

$$f_{13N+i} = -S_5^i + R_Z^i(L) = 0, \quad (2.117)$$

$$f_{14N+i} = -S_6^i + M^i(L) = 0. \quad (2.118)$$

V nadaljevanju z integriranjem točno zadostimo kinematičnim enačbam (2.107)–(2.109) in ravnotežnim enačbam (2.110)–(2.112), saj so le te relativno preproste. Tako izrazimo kinematične količine u^i , w^i , φ^i

in ravnotežne količine R_X^i , R_Z^i , M^i z deformacijskimi količinami ε^i , γ^i in κ^i , torej ($i = 1, 2, \dots, N$):

$$u^i(x^i) = u^i(0) + \int_0^{x^i} ((1 + \varepsilon^i) \cos \varphi^i + \gamma^i \sin \varphi^i - 1) d\xi, \quad (2.119)$$

$$w^i(x^i) = w^i(0) - \int_0^{x^i} ((1 + \varepsilon^i) \sin \varphi^i - \gamma^i \cos \varphi^i) d\xi, \quad (2.120)$$

$$\varphi^i(x^i) = \varphi^i(0) - \int_0^{x^i} \kappa^i d\xi, \quad (2.121)$$

$$R_X^i(x^i) = R_X^i(0) - \int_0^{x^i} (q_X^i + p_X^i) d\xi, \quad (2.122)$$

$$R_Z^i(x^i) = R_Z^i(0) - \int_0^{x^i} (q_Z^i + p_Z^i) d\xi, \quad (2.123)$$

$$M^i(x^i) = M^i(0) + \int_0^{x^i} ((1 + \varepsilon^i)Q^i - \gamma^i N^i - (m_Y^i + h_Y^i)) d\xi. \quad (2.124)$$

Ker smo tako integrandom pri variacijah δu^i , δw^i , $\delta \varphi^i$, δR_X^i , δR_Z^i , δM^i v funkcionalu (2.103) točno zadostili, ti členi v funkcionalu odpadejo. Tako dobimo funkcional, ki je odvisen samo od deformacijskih količin ε^i , γ^i in κ^i ($i = 1, 2, \dots, N$) in robnih vrednosti. Dobljeni funkcional imenujemo modificiran izrek o virtualnem delu večslojnega linijskega kompozitnega nosilca

$$\begin{aligned} \delta W^{**} = \sum_{i=1}^N \left\{ \int_0^L (N_c^i - N^i) \delta \varepsilon^i dx + \int_0^L (Q_c^i - Q^i) \delta \gamma^i dx + \int_0^L (M_c^i - M^i) \delta \kappa^i dx - \right. \\ \left. + (-S_1^i - R_X^i(0)) \delta u^i(0) + (-S_2^i - R_Z^i(0)) \delta w^i(0) + (-S_3^i - M^i(0)) \delta \varphi^i(0) + \right. \\ \left. + (-S_4^i + R_X^i(L)) \delta u^i(L) + (-S_5^i + R_Z^i(L)) \delta w^i(L) + (-S_6^i + M^i(L)) \delta \varphi^i(L) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Ravnotežne količine na robu $x^i = L$ ($i = 1, 2, \dots, N$), ki nastopajo v funkcionalu (2.125), izračunamo z enačbami:

$$R_X^i(L) = R_X^i(0) - \int_0^L (q_X^i + p_X^i) d\xi, \quad (2.126)$$

$$R_Z^i(L) = R_Z^i(0) - \int_0^L (q_Z^i + p_Z^i) d\xi, \quad (2.127)$$

$$M^i(L) = M^i(0) + \int_0^L ((1 + \varepsilon^i)Q^i - \gamma^i N^i - (m_Y^i + h_Y^i)) d\xi. \quad (2.128)$$

Kot pri vsaki konstrukciji moramo tudi pri kompozitni konstrukciji, ki je sestavljena iz večslojnih linijskih nosilcev, na robovih zadostiti tudi predpisanim kinematičnim robnim pogojem. Ker so ti pogoji v splošnem predpisani tako na začetku kot na koncu vsakega sloja kompozitnega nosilca, so med seboj

povezani. Povezujejo jih enačbe ($i = 1, 2, \dots, N$)

$$u^i(L) = u^i(0) + \int_0^L ((1 + \varepsilon^i) \cos \varphi^i + \gamma^i \sin \varphi^i - 1) d\xi, \quad (2.129)$$

$$w^i(L) = w^i(0) - \int_0^L ((1 + \varepsilon^i) \sin \varphi^i - \gamma^i \cos \varphi^i) d\xi, \quad (2.130)$$

$$\varphi^i(L) = \varphi^i(0) - \int_0^L \kappa^i d\xi \quad (2.131)$$

oziroma, ko v enačbah (2.129)–(2.131) upoštevamo (2.44)–(2.49), enačbe:

$$u_4^i = u_1^i + \int_0^L ((1 + \varepsilon^i) \cos \varphi^i + \gamma^i \sin \varphi^i - 1) d\xi, \quad (2.132)$$

$$u_5^i = u_2^i - \int_0^L ((1 + \varepsilon^i) \sin \varphi^i - \gamma^i \cos \varphi^i) d\xi, \quad (2.133)$$

$$u_6^i = u_3^i - \int_0^L \kappa^i d\xi. \quad (2.134)$$

Enačbe (2.132)–(2.134) so vezi, ki jim morajo zadostiti deformacijske količine vsakega sloja kompozitnega nosilca. Zato enačbe (2.129)–(2.131) predstavljajo tudi vezne enačbe k funkcionalu (2.125). Z enačbami (2.132)–(2.134) ali (2.129)–(2.131) zadoščamo robnim pogojem kompozitnega nosilca ali pa povezujemo nosilce v konstrukcijo. Osnovne neznanke funkcionala (2.125) so tako samo deformacijske količine ε^i , γ^i in κ^i ($i = 1, 2, \dots, N$), saj ostale kinematične in statične količine nastopajo v funkcionalu le s svojimi robnimi vrednostmi. Funkcional (2.125) predstavlja izhodišče za vpeljavo družine deformacijskih končnih elementov za numerično analizo ravninskih večslojnih linijskih kompozitnih nosilcev. Formulacijo diskretnih osnovnih ravnotežnih enačb ravninskega večslojnega linijskega kompozitnega nosilca, zasnovano na deformacijskih končnih elementih, in računske postopke za reševanje teh enačb predstavimo v nadaljevanju.

2.2 Posplošene diskretne ravnotežne enačbe večslojnega linijskega kompozitnega nosilca

2.2.1 Galerkinova metoda končnih elementov

Osnovne enačbe večslojnih linijskih kompozitnih nosilcev so nelinearne. Ker točne rešitve teh enačb ne poznamo, jih rešimo z Galerkinovo metodo končnih elementov. Numerično metodo bomo zasnovali na deformacijski metodi končnih elementov. Novo družino končnih elementov za analizo večslojnih linijskih kompozitnih konstrukcij bomo izpeljali z uporabo modificiranega izreka o virtualnem delu (2.125).

Skladno z metodo končnih elementov razdelimo večslojni linijski kompozitni nosilec oziroma vsak njegov sloj na N_{el} končnih elementov. Na končni element sloja i postavimo $M + 1$ ekvidistančnih točk in pripadajoče deformacijske količine interpoliramo z Lagrangeovimi interpolacijskimi polinomi stopnje

M. Interpolacijski nastavki za deformacijske količine sloja *i* kompozitnega nosilca so:

$$\varepsilon^i(x^i) = \sum_{m=1}^M P_m(x^i) \varepsilon_m^i, \quad (2.135)$$

$$\gamma^i(x^i) = \sum_{m=1}^M P_m(x^i) \gamma_m^i, \quad (2.136)$$

$$\kappa^i(x^i) = \sum_{m=1}^M P_m(x^i) \kappa_m^i. \quad (2.137)$$

V enačbah (2.135)–(2.137) predstavljajo ε_m^i , γ_m^i in κ_m^i vrednosti deformacij v interpolacijskih točkah na referenčni osi sloja *i* kompozitnega nosilca, P_m pa Lagrangeove interpolacijske polinome. Pri izbiri interpolacijskih nastavkov smo predpostavili, da vse deformacijske količine sloja *i* kompozitnega nosilca interpoliramo z interpolacijskimi polinomi iste stopnje, torej izberemo enako število interpolacijskih točk za vse sloje kompozitnega nosilca. Vendar ta predpostavka ne predstavlja pomembnejše omejitve metode.

Podobno interpoliramo tudi variacije deformacijskih količin:

$$\delta\varepsilon^i(x^i) = \sum_{m=1}^M P_m(x^i) \delta\varepsilon_m^i, \quad (2.138)$$

$$\delta\gamma^i(x^i) = \sum_{m=1}^M P_m(x^i) \delta\gamma_m^i, \quad (2.139)$$

$$\delta\kappa^i(x^i) = \sum_{m=1}^M P_m(x^i) \delta\kappa_m^i. \quad (2.140)$$

Interpolacijske nastavke (2.135)–(2.140) sedaj vstavimo v modificirani izrek o virtualnem delu (2.103). Euler-Lagrangeove enačbe tega funkcionala so ($i = 1, 2, \dots, N$):

$$f_m^i = \int_0^L (N_c^i - N^i) P_m dx^i = 0, \quad m = 1, \dots, M \quad (2.141)$$

$$f_{M+m}^i = \int_0^L (Q_c^i - Q^i) P_m dx^i = 0, \quad m = 1, \dots, M \quad (2.142)$$

$$f_{2M+m}^i = \int_0^L (M_c^i - M^i) P_m dx^i = 0, \quad m = 1, \dots, M \quad (2.143)$$

$$f_{3M+1}^i = -S_1^i + R_X^i(0) = 0, \quad (2.144)$$

$$f_{3M+2}^i = -S_2^i - R_Z^i(0) = 0, \quad (2.145)$$

$$f_{3M+3}^i = -S_3^i - M^i(0) = 0, \quad (2.146)$$

$$f_{3M+4}^i = -S_1^i + R_X^i(L) = 0, \quad (2.147)$$

$$f_{3M+5}^i = -S_2^i + R_Z^i(L) = 0, \quad (2.148)$$

$$f_{3M+6}^i = -S_3^i + M^i(L) = 0. \quad (2.149)$$

Skupaj z veznimi enačbami (2.129)–(2.131),

$$u^i(L) - u^i(0) - \int_0^L ((1 + \varepsilon^i) \cos \varphi^i + \gamma^i \sin \varphi^i - 1) d\xi = 0, \quad (2.150)$$

$$w^i(L) - w^i(0) + \int_0^L ((1 + \varepsilon^i) \sin \varphi^i - \gamma^i \cos \varphi^i) d\xi = 0, \quad (2.151)$$

$$\varphi^i(L) - \varphi^i(0) + \int_0^L \kappa^i d\xi = 0, \quad (2.152)$$

predstavljajo osnovne diskretne posplošene ravnotežne enačbe za N -slojni kompozitni nosilec. Kot že rečeno, z veznimi enačbami (2.150)–(2.152) zagotovimo kinematičnim robnim pogojem in povežemo končne elemente v konstrukcijo.

Enačbe (2.141)–(2.149) predstavljajo za znano obtežbo sistem $(3M + 9)N$ enačb za določitev $(3M + 9)N$ neznanih količin večslojnega linijskega kompozitnega nosilca. Razdelimo jih na $(3M)N + 3N$ neznanih notranjih prostostnih stopenj: ε_m^i , γ_m^i in κ_m^i ($m = 1, 2, \dots, M$) in $R_X^i(0)$, $R_Z^i(0)$, $M^i(0)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) in $6N$ neznanih zunanjih prostostnih stopenj: $u^i(0)$, $w^i(0)$, $\varphi^i(0)$, $u^i(L)$, $w^i(L)$ in $\varphi^i(L)$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Neznane količine v enačbah (2.141)–(2.149), ki so vse funkcije osnovnih neznanih količin končnega elementa, izračunamo z enačbami ($i = 1, 2, \dots, N$), ki pripadajo slojem kompozitnega nosilca:

$$N^i = R_X^i \cos \varphi^i - R_Z^i \sin \varphi^i, \quad (2.153)$$

$$Q^i = R_X^i \sin \varphi^i - R_Z^i \cos \varphi^i, \quad (2.154)$$

$$R_X^i = R_X^i(0) - \int_0^{x^i} (q_X^i + p_X^i) d\xi, \quad (2.155)$$

$$R_Z^i = R_Z^i(0) - \int_0^{x^i} (q_Z^i + p_Z^i) d\xi, \quad (2.156)$$

$$M^i = M^i(0) + \int_0^{x^i} ((1 + \varepsilon^i)Q^i - \gamma^i N^i - (m_Y^i + h_Y^i)) d\xi, \quad (2.157)$$

$$N_c^i = \int_{\mathcal{A}^i} \sigma^i dA, \quad (2.158)$$

$$M_c^i = \int_{\mathcal{A}^i} z^i \sigma^i dA, \quad (2.159)$$

$$Q_c^i = G^i A_s^i \gamma^i, \quad (2.160)$$

$$R_X^i(L) = R_X^i(0) - \int_0^L (q_X^i + p_X^i) d\xi, \quad (2.161)$$

$$R_Z^i(L) = R_Z^i(0) - \int_0^L (q_Z^i + p_Z^i) d\xi, \quad (2.162)$$

$$M^i(L) = M^i(0) + \int_0^L ((1 + \varepsilon^i)Q^i - \gamma^i N^i - (m_Y^i + h_Y^i)) d\xi, \quad (2.163)$$

$$\theta^i = \varphi^i - \arctan \frac{\gamma^i}{1 + \varepsilon^i}, \quad (2.164)$$

$$\mathbf{e}_{t,i}^i = \cos \theta^i \mathbf{E}_X - \sin \theta^i \mathbf{E}_Z, \quad (2.165)$$

$$\mathbf{e}_{t,i}^{i+1} = \cos \theta^{i+1} \mathbf{E}_X - \sin \theta^{i+1} \mathbf{E}_Z, \quad (2.166)$$

$$\mathbf{e}_{n,i}^i = \sin \theta^i \mathbf{E}_X + \cos \theta^i \mathbf{E}_Z, \quad (2.167)$$

$$\mathbf{e}_{n,i}^{i+1} = \sin \theta^{i+1} \mathbf{E}_X + \cos \theta^{i+1} \mathbf{E}_Z, \quad (2.168)$$

in z enačbami, ki pripadajo stikom med sloji kompozitnega nosilca ($k = 1, 2, \dots, N - 1$):

$$w_{n,i}^{i*} = (u^i + z_i^i \sin \varphi^i) e_{nX}^{k*} + (w^i + z_i^i \cos \varphi^i) e_{nZ}^{k*}, \quad (2.169)$$

$$u_{t,i}^{i*} = (u^i + z_i^i \sin \varphi^i) e_{tX}^{k*} + (w^i + z_i^i \cos \varphi^i) e_{tZ}^{k*}, \quad (2.170)$$

$$w_{n,i}^{(i+1)*} = (u^{i+1} + z_i^{i+1} \sin \varphi^{i+1}) e_{nX}^{k*} + (w^{i+1} + z_i^{i+1} \cos \varphi^{i+1}) e_{nZ}^{k*}, \quad (2.171)$$

$$u_{t,i}^{(i+1)*} = (u^{i+1} + z_i^{i+1} \sin \varphi^{i+1}) e_{tX}^{k*} + (w^{i+1} + z_i^{i+1} \cos \varphi^{i+1}) e_{tZ}^{k*}, \quad (2.172)$$

$$\Delta^{k*} = u_{t,i}^{i*} - u_{t,i}^{(i+1)*}, \quad (2.173)$$

$$d^{k*} = w_{n,i}^{i*} - w_{n,i}^{(i+1)*}, \quad (2.174)$$

$$p_t^{k*} = \mathcal{G}_1^{k*}(\Delta^{k*}), \quad (2.175)$$

$$p_n^{k*} = \mathcal{G}_2^{k*}(d^{k*}), \quad (2.176)$$

$$e_{nX}^{k*} = \mathbf{e}_n^{k*} \cdot \mathbf{E}_X = \frac{\zeta \mathbf{e}_{n,i}^i + (1 - \zeta) \mathbf{e}_{n,i}^{i+1}}{\left\| \zeta \mathbf{e}_{n,i}^i + (1 - \zeta) \mathbf{e}_{n,i}^{i+1} \right\|} \cdot \mathbf{E}_X, \quad (2.177)$$

$$e_{nZ}^{k*} = \mathbf{e}_n^{k*} \cdot \mathbf{E}_Z = \frac{\zeta \mathbf{e}_{n,i}^i + (1 - \zeta) \mathbf{e}_{n,i}^{i+1}}{\left\| \zeta \mathbf{e}_{n,i}^i + (1 - \zeta) \mathbf{e}_{n,i}^{i+1} \right\|} \cdot \mathbf{E}_Z, \quad (2.178)$$

$$e_{tX}^{k*} = \mathbf{e}_t^{k*} \cdot \mathbf{E}_X = \frac{\zeta \mathbf{e}_{t,i}^i + (1 - \zeta) \mathbf{e}_{t,i}^{i+1}}{\left\| \zeta \mathbf{e}_{t,i}^i + (1 - \zeta) \mathbf{e}_{t,i}^{i+1} \right\|} \cdot \mathbf{E}_X, \quad (2.179)$$

$$e_{tZ}^{k*} = \mathbf{e}_t^{k*} \cdot \mathbf{E}_Z = \frac{\zeta \mathbf{e}_{t,i}^i + (1 - \zeta) \mathbf{e}_{t,i}^{i+1}}{\left\| \zeta \mathbf{e}_{t,i}^i + (1 - \zeta) \mathbf{e}_{t,i}^{i+1} \right\|} \cdot \mathbf{E}_Z. \quad (2.180)$$

Integrale v enačbah (2.141)–(2.149) iz vrednotimo z Gaussovo numerično integracijsko shemo, vgnezdene integrale pa po postopku, ki ga je v svoji doktorski disertaciji predstavil Zupan (2003b).

Poleg velike natančnosti in neobčutljivosti deformacijskih končnih elementov na vse vrste blokiranja je njihova pomembna prednost tudi enostavna implementacija modela razpokanega območja (angl. *crack band model*), ki predstavlja eno izmed preprostejših modelov mehčanja prečnih prereзов pri linijskih konstrukcijah (Bratina, 2003), (Bratina, Saje, Planinc, 2004). Ker je razpokano območje na nosilcu relativno majhno, je Bratina ta končni element imenoval “kratki” končni element. Kot poročajo Jiršek (1997) in Bratina ter sodelavci (2004), lahko s “kratkim” končnim elementom dovolj natančno modeliramo vpliv lokalizacij deformacij na nekem končnem območju nosilca in s tem vpliv mehčanja prečnih prereзов na nosilnost linijskih konstrukcij. To lokalizirano razpokano območje nosilca predstavlja tudi velikost oziroma dolžino “kratkega” končnega elementa in je odvisno od geometrijskih in materialnih lastnosti konstrukcije. Ker dolžino razpokanega območja določimo z eksperimenti, je dolžina “kratkega” končnega elementa konstitutivna količina in kot taka konstantna. Ker tako velikost “kratkega” končnega elementa pri gostenju mreže ne spreminjamo, postane s tem numerična metoda neobčutljiva na izbiro mreže končnih elementov.

V “kratkem” končnem elementu sloja i kompozitnega nosilca torej predpostavimo konstanten potek deformacij po referenčni osi elementa:

$$\varepsilon^i(x^i) = \varepsilon_1^i = \text{konst.}, \quad (2.181)$$

$$\gamma^i(x^i) = \gamma_1^i = \text{konst.}, \quad (2.182)$$

$$\kappa^i(x^i) = \kappa_1^i = \text{konst.} \quad (2.183)$$

Ko interpolacijske nastavke za deformacije sloja i kompozitnega nosilca (2.181)–(2.183) upoštevamo v modificiranem izreku o virtualnem delu (2.125), dobimo sistem diskretnih posplošenih ravnotežnih enačb za “kratki” končni element sloja i kompozitnega nosilca (Bratina, 2003):

$$f_{1, \text{ kratki}}^i = (N_c^i - N^i)|_{x^i=\frac{L}{2}} = 0, \quad (2.184)$$

$$f_{2, \text{ kratki}}^i = (Q_c^i - Q^i)|_{x^i=\frac{L}{2}} = 0, \quad (2.185)$$

$$f_{3, \text{ kratki}}^i = (M_c^i - M^i)|_{x^i=\frac{L}{2}} = 0, \quad (2.186)$$

$$f_{4, \text{ kratki}}^i = -S_1^i + R_X^i(0) = 0, \quad (2.187)$$

$$f_{5, \text{ kratki}}^i = -S_2^i - R_Z^i(0) = 0, \quad (2.188)$$

$$f_{6, \text{ kratki}}^i = -S_3^i - M^i(0) = 0 \quad (2.189)$$

$$f_{7, \text{ kratki}}^i = -S_1^i + R_X^i(L) = 0, \quad (2.190)$$

$$f_{8, \text{ kratki}}^i = -S_2^i + R_Z^i(L) = 0, \quad (2.191)$$

$$f_{9, \text{ kratki}}^i = -S_3^i + M^i(L) = 0, \quad (2.192)$$

kjer smo integrale izračunali z Gaussovo enotočkovno integracijsko shemo. Prav tako upoštevamo konstanten potek deformacij tudi v kinematičnih veznih enačbah:

$$u^i(L) - u^i(0) - \int_0^L ((1 + \varepsilon_1^i) \cos \varphi^i + \gamma_1^i \sin \varphi^i - 1) d\xi = 0, \quad (2.193)$$

$$w^i(L) - w^i(0) + \int_0^L ((1 + \varepsilon_1^i) \sin \varphi^i - \gamma_1^i \cos \varphi^i) d\xi = 0, \quad (2.194)$$

$$\varphi^i(L) - \varphi^i(0) + \int_0^L \kappa_1^i d\xi = 0. \quad (2.195)$$

Sistem enačb (2.184)–(2.195) “kratkega” končnega elementa sloja i kompozitnega nosilca predstavlja $12N$ enačb za prav toliko neznank. Kot pri osnovnih končnih elementih tudi pri “kratkem” končnem elementu neznanje notranje prostostne stopnje elementa kondenziramo na nivoju elementa, zunanje pa združimo v posplošene diskretne ravnotežne enačbe konstrukcije.

2.2.2 Reševanje diskretnih posplošenih ravnotežnih enačb večslojnega kompozitnega okvirja

Posplošene diskretne ravnotežne enačbe večslojnega linijskega kompozitnega nosilca (2.141)–(2.149) po znanih postopkih metode končnih elementov združimo v diskretne ravnotežne enačbe večslojnega kompozitnega okvirja ali enačbe konstrukcije. V formalni obliki so te enačbe

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad (2.196)$$

kjer \mathbf{u} predstavlja vektor neznank (sestavljajo ga komponente vozliščnih pomikov in zasukov kompozitnega okvirja), \mathbf{p} je začetni vektor zunanje obtežbe in λ obtežni faktor. Enoparametrični sistem algebrskih enačb (2.196) lahko rešimo na različne načine (Crisfield, 1996, Wriggers, 2008, Bonet, Wood, 1997). Način reševanja je seveda prilagojen mehanskemu problemu, ki ga želimo rešiti. V doktorski

disertaciji bomo na kratko predstavili le tiste algoritme reševanja, ki jih bomo uporabili za analizo natančnosti in primernosti predstavljene numerične metode za analizo večslojnih kompozitnih okvirjev v računskih primerih. Tako v nadaljevanju predstavimo znano Newton-Raphsonovo kvadratično konvergentno metodo, nato konsistentno linearizirano Crisfieldovo metodo ločne dolžine in na koncu še koračno metodo.

Newton-Raphsonova metoda

Kot že rečeno, je najbolj znana in tudi najuporabnejša metoda za reševanje nelinearnega sistema enačb Newton-Raphsonova metoda. Uvrščamo jo med inkrementno-iteracijske metode. Postopek reševanja je naslednji. Za znani obtežni faktor $\lambda = \lambda_{\text{znani}}$ sistem (2.196) lineariziramo okrog λ_{znani} in linearizirani sistem rešujemo zaporedoma za $it = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_{it}, \lambda_{\text{znani}})\delta\mathbf{u}_{it+1} = -\mathbf{f}(\mathbf{u}_{it}, \lambda_{\text{znani}}), \quad (2.197)$$

$$\mathbf{u}_{it+1} = \mathbf{u}_{it} + \delta\mathbf{u}_{it+1} \quad (2.198)$$

do natančnosti, ki jo izrazimo s pogojevma

$$\|\delta\mathbf{u}_{it+1}\| \leq \epsilon_{\mathbf{u}} \quad \text{ali} \quad (2.199)$$

$$\|\delta\mathbf{f}_{it+1}\| \leq \epsilon_{\mathbf{f}}, \quad (2.200)$$

kjer sta $\epsilon_{\mathbf{u}}$ in $\epsilon_{\mathbf{f}}$ poljubno majhni realni števili. \mathbf{K}_T v enačbi (2.197) predstavlja tangentno togostno matriko konstrukcije, ki jo izračunamo s konsistentno linearizacijo enačb konstrukcije (2.196) (Bonet, Wood, 1997, Holzapfel, 2001),

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_{it}, \lambda_{\text{znani}})\delta\mathbf{u}_{it+1} = \left. \frac{d}{d\alpha} [\mathbf{f}(\mathbf{u}_{it} + \alpha\delta\mathbf{u}_{it+1}, \lambda_{\text{znani}})] \right|_{\alpha=0}. \quad (2.201)$$

Newton-Raphsonova metoda odpove, ko postane tangentna togostna matrika konstrukcije \mathbf{K}_T singularna, torej ko postane $\det\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_{\text{cr}}, \lambda_{\text{cr}}) = 0$. V večini primerov se temu problemu izognemo, ko enačbe (2.196) rešimo z metodami ločne dolžine.

Konsistentno linearizirana Crisfieldova metoda ločne dolžine

Konsistentno linearizirana Crisfieldova metoda ločne dolžine spada v družino metod ločne dolžine. S temi metodami obtežno-deformacijsko krivuljo, ki jo določa sistem enačb (2.196), reparametriziramo z naravnim parametrom s (Schweizerhof, Wriggers, 1986). Rešujemo torej sistem enačb

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \lambda\mathbf{p} = 0, \quad (2.202)$$

$$h(\mathbf{u}, \lambda, s) = 0. \quad (2.203)$$

Ker so metode ločne dolžine tudi inkrementno-iteracijske metode, zapišemo vezno enačbo (2.203) v koraku (inkrementu) $j + 1$ z enačbo

$$h(\mathbf{u}_{j+1}, \lambda_{j+1}, s_{j+1}) = (\mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{u}_j)^T \mathbf{W}(\mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{u}_j) + (\lambda_{j+1} - \lambda_j)^2 \mathbf{p}^T \mathbf{H} \mathbf{p} - (s_{j+1} - s_j)^2 = 0, \quad (2.204)$$

kjer so \mathbf{u}_j posplošeni pomiki koraka j , λ_j in s_j pa pripadajoči obtežni faktor in naravni parameter poti. S pravilno izbiro matrik \mathbf{W} in \mathbf{H} lahko kontroliramo neuravnoteženo velikost posameznih komponent pomikov, zasukov in obtežnega faktorja kompozitne konstrukcije ter vplivamo na robustnost algoritma. Najpogostejša izbira za matriko \mathbf{W} je identiteta, za matriko \mathbf{H} pa ničelna matrika.

V sklopu inkrementno-iteracijskih metod razdelimo reševanje enačb (2.202) in (2.203) na prediktorsko in korektorsko fazo. V prediktorski fazi določimo začetni približek novega inkrementa (koraka), v korektorski fazi nato z Newtonovo metodo izboljšamo natančnost začetnega približka.

Prediktorska faza. Prediktorski približek za neznanke v koraku $j + 1$ izrazimo iz linearizirane oblike sistema enačb (2.196) v koraku j :

$$\mathbf{K}_{Tj} \delta \mathbf{u}_{j+1}^{it=0} - \mathbf{p} \delta \lambda_{j+1}^{it=0} = \mathbf{0}, \quad (2.205)$$

torej:

$$\delta \mathbf{u}_{j+1}^{it=0} = \mathbf{K}_{Tj}^{-1} \mathbf{p} \delta \lambda_{j+1}^{it=0}. \quad (2.206)$$

Prediktor za posplošene pomike koraka $j + 1$ tako izrazimo kot

$$\mathbf{u}_{j+1}^{it=0} = \mathbf{u}_j + \delta \mathbf{u}_{j+1}^{it=0}. \quad (2.207)$$

Podobno zapišemo še prediktor obtežnega faktorja

$$\lambda_{j+1}^{it=0} = \lambda_j + \delta \lambda_{j+1}^{it=0}. \quad (2.208)$$

Prirastek $\delta \lambda_{j+1}^{it=0}$ določimo s pomočjo vezne enačbe (2.204) za obtežni korak $j + 1$

$$(\mathbf{u}_{j+1}^{it=0} - \mathbf{u}_j)^T \mathbf{W} (\mathbf{u}_{j+1}^{it=0} - \mathbf{u}_j) + (\lambda_{j+1}^{it=0} - \lambda_j)^2 \mathbf{p}^T \mathbf{H} \mathbf{p} - \Delta s_{j+1}^2 = 0, \quad (2.209)$$

kjer je $\Delta s_{j+1} = s_{j+1} - s_j$. Ko v enačbi (2.209) upoštevamo enačbi (2.207) in (2.208), izpostavimo $\lambda_{j+1}^{it=0}$

$$\delta \lambda_{j+1}^{it=0} = \text{sign}(\lambda_{j+1}^{it=0}) \frac{\Delta s_{j+1}^2}{\sqrt{(\mathbf{K}_{Tj}^{-1} \mathbf{p})^T \mathbf{W} (\mathbf{K}_{Tj}^{-1} \mathbf{p}) + \mathbf{p}^T \mathbf{H} \mathbf{p}}}. \quad (2.210)$$

Za uspešnost predlaganega algoritma je zelo pomembno pravilno izbrati predznak začetnega prirastka $\delta \lambda_{j+1}^{it=0}$. Določimo ga tako, kot predlagajo Feng in sodelavci (1996), in sicer na podlagi smeri tangente na obtežno pot v koraku j iz znanega koraka $j - 1$:

$$\text{sign}(\lambda_{j+1}^{it=0}) = \text{sign}(\mathbf{m}_j^T \mathbf{K}_{Tj}^{-1} \mathbf{p} + \alpha_j), \quad (2.211)$$

kjer sta \mathbf{m}_j in α_j določeni z linearizacijo vezne enačbe

$$\mathbf{m}_j = 2(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_{j-1})^T \mathbf{W}, \quad (2.212)$$

$$\alpha_j = 2(\lambda_j - \lambda_{j-1}) \mathbf{p}^T \mathbf{H} \mathbf{p}. \quad (2.213)$$

V prvem koraku je predznak prediktorja koraka enak predznaku determinante tangentne togostne matrike kompozitnega okvirja v začetni legi.

Korektorska faza. V korektorski fazi z znano Newtonovo metodo iterativno rešimo razširjen sistem enačb (2.202) in (2.204):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T(\mathbf{u}_{j+1}^{it-1}) & \mathbf{p} \\ \mathbf{m}^T(\mathbf{u}_{j+1}^{it-1}) & \alpha(\mathbf{u}_{j+1}^{it-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_{j+1}^{it} \\ \delta \lambda_{j+1}^{it} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{u}_{j+1}^{it-1}, \lambda_{j+1}^{it-1}) \\ h(\mathbf{u}_{j+1}^{it-1}, \lambda_{j+1}^{it-1}) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_{j+1}^{it} = \mathbf{u}_{j+1}^{it-1} + \delta \mathbf{u}_{j+1}^{it}, \quad (2.214)$$

$$\lambda_{j+1}^{it} = \lambda_{j+1}^{it-1} + \delta \lambda_{j+1}^{it}, \quad (2.215)$$

do želene natančnosti

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{j+1}^{it} \\ \delta \lambda_{j+1}^{it} \end{bmatrix} \right\| \leq \epsilon_{\mathbf{u}} \quad \text{ali}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ h \end{bmatrix} \right\| \leq \epsilon_{\mathbf{f}},$$

kjer sta $\epsilon_{\mathbf{u}}$ in $\epsilon_{\mathbf{f}}$ dve dovolj majhni pozitivni realni števili.

Ker je konvergenčni radij Newtonove metode omejen, je zelo pomembno, kako velik izberemo prirastek inkrementa ločne dolžine. Numerične izkušnje kažejo, da je prirastek najbolje prilagoditi znotraj vsakega obtežnega koraka glede na razmerje med doseženim in želenim številom iteracij korektorske faze (Crisfield, 1981, Ramm, 1980)

$$\Delta s_{j+1} = \left(\frac{I}{I_j} \right)^\beta \Delta s_j, \quad (2.216)$$

kjer I predstavlja število želenih iteracij, I_j pa število dejanskih iteracij v prejšnjem obtežnem koraku j . Za β navadno izberemo vrednost $\beta = 0.5$ (Ramm, 1980).

Koračna metoda

S koračno metodo (angl. *step by step method*) izračunamo časovno spremenljivo napetostno in deformacijsko stanje betonskih konstrukcij zaradi vpliva lezenja in krčenja betona. Prilagojena je za linearne modele lezenja betona (Ghali, Favre, 1994). Za take modele lezenja predpostavimo, da je celotna vzdolžna (geometrijska) deformacija poljubnega materialnega vlakna betona sestavljena iz vsote trenutne elastične deformacije in časovno odvisnih deformacij lezenja in krčenja betona. Pri večslojnih linijskih kompozitnih okvirjih geometrijsko deformacijo betonskega sloja i zapišemo z enačbo

$$D^i(t) = \frac{\sigma^i(t_0)}{E^i(t_0)} [1 + \varphi^i(t, t_0)] + D_{sh}^i(t, t_0), \quad (2.217)$$

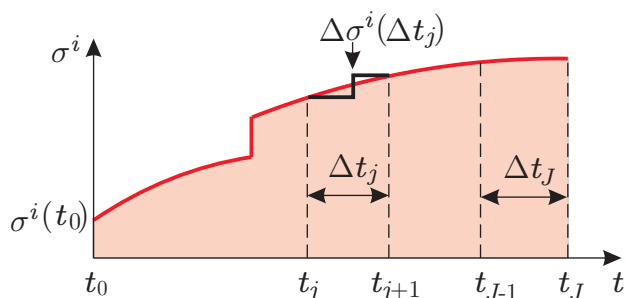
kjer smo s $\sigma^i(t_0) = konst.$ označili normalno napetost sloja i pri začetnem času t_0 , $E^i(t_0)$ elastični modul betona pri času t_0 , z $D_{sh}^i(t, t_0)$ smo označili deformacijo krčenja betona na intervalu med časoma t in t_0 in s $\varphi^i(t, t_0)$ brezdimenzijski koeficient lezenja betona.

Če se normalna napetost s časom spreminja, določimo vzdolžno deformacijo poljubnega materialnega vlakna sloja i kompozitnega nosilca z enačbo

$$D^i(t) = \sigma_0^i(t_0) \frac{1 + \varphi^i(t, t_0)}{E^i(t_0)} + \int_{\sigma^i(t_0)}^{\sigma^i(t)} \frac{1 + \varphi^i(t, \tau)}{E^i(\tau)} d\sigma^i(\tau) + D_{sh}^i(t, t_0), \quad (2.218)$$

Enačba (2.218) predstavlja konstitutivno zvezo med napetostmi in deformacijami. Konstitutivni enačbi (2.30) in (2.31) nam omogočata določiti neznane deformacije ob znanih notranjih silah. Pri koračni metodi neznane deformacije izračunamo tako, da časovni interval razdelimo na J časovnih podintervalov Δt_j ($j = 1, 2, \dots, J$). Za normalno napetost opazovanega materialnega vlakna pa predpostavimo znotraj časovnega inkrementa j stopničasto spreminjanje s skokom na sredini inkrementa pri času $t_{j+\frac{\Delta t_j}{2}}$ (slika 2.6)

$$\sigma^i(t) = \sum_{j=1}^J \Delta \sigma^i(\Delta t_j). \quad (2.219)$$



Slika 2.6: Razdelitev časovnega intervala na korake pri koračni metodi (Ghali, Favre, 1994).

Figure 2.6: Division of time into steps for “step-by-step” analysis (Ghali, Favre, 1994).

Vzdolžno deformacijo opazovanega materialnega vlakna pri času t izračunamo z enačbo (Gilbert, 1988)

$$D^i(\Delta t_j) = \sum_{j=1}^J \left[\Delta \sigma^i(\Delta t_j) \frac{1 + \varphi^i(t, t_j)}{E^i(t_j)} \right] + D_{sh}^i(t, t_0). \quad (2.220)$$

Ker pri enačbah (2.30) in (2.31) dejansko potrebujemo odvisnost napetosti od deformacije in ne obratno, izračunamo z uporabo enačbe (2.220) zadnji prirastek napetosti z enačbo

$$\Delta \sigma^i(\Delta t_j) = \frac{E^i(t_{J-1})}{1 + \varphi^i(t, t_{J-1})} [D^i(t) - D_{sh}^i(t, t_0)] - \sum_{j=1}^{J-1} \left[\Delta \sigma^i(\Delta t_j) \frac{1 + \varphi^i(t, t_j)}{E^i(t_j)} \right]. \quad (2.221)$$

Koračna metoda, ki smo jo predstavili, je prilagojena za geometrijsko linearne modele nosilcev oziroma slojev kompozitnega nosilca. Pri geometrijsko nelinearnem modelu ravninskega nosilca oziroma sloju kompozitnega nosilca moramo koračno metodo prilagoditi Newtonovi iteracijski shemi. V Newtonovem iteracijskem postopku D^i izrazimo kot vsoto

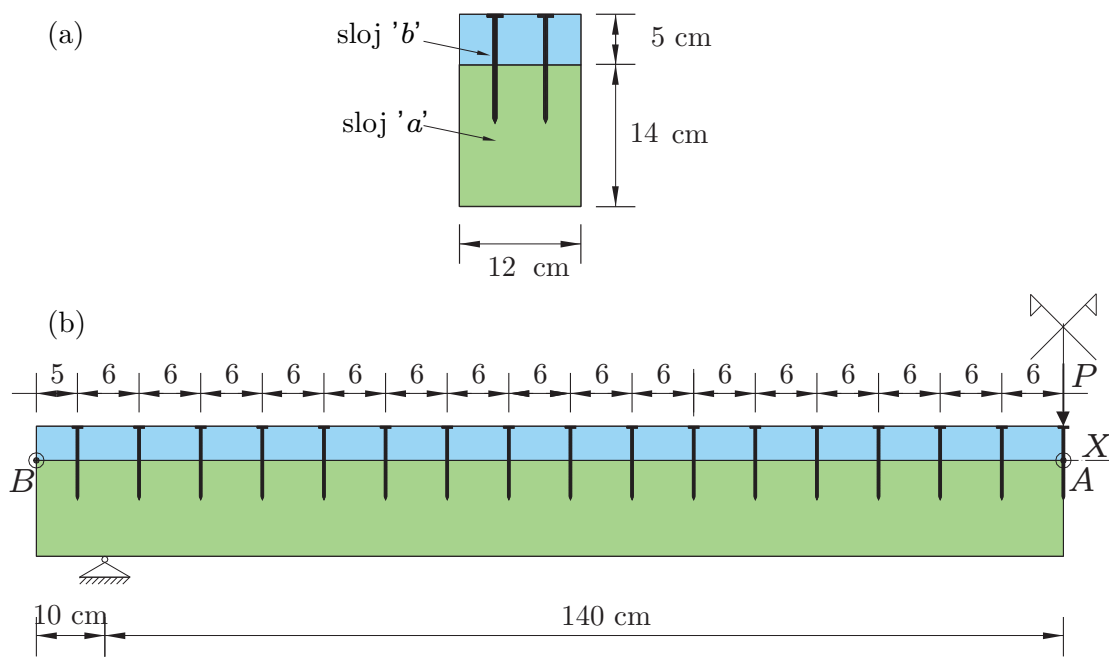
$$D_{it+1}^i(t) = D_{it}^i(t) + \delta D_{it+1}^i(t). \quad (2.222)$$

2.3 Računski primeri

2.3.1 Verifikacija numeričnega modela

Natančnost predstavljenega numeričnega modela in konvergenčne lastnosti deformacijskih končnih elementov bomo analizirali ločeno z računskimi primeri za geometrijsko linearne in nelinearne modele dvoslojnih linijskih kompozitnih nosilcev. Dodatno bomo z numeričnimi primeri analizirali tudi vpliv utežnega parametra ζ "povprečne" baze na kinematične količine obravnavanih dvoslojnih kompozitnih nosilcev.

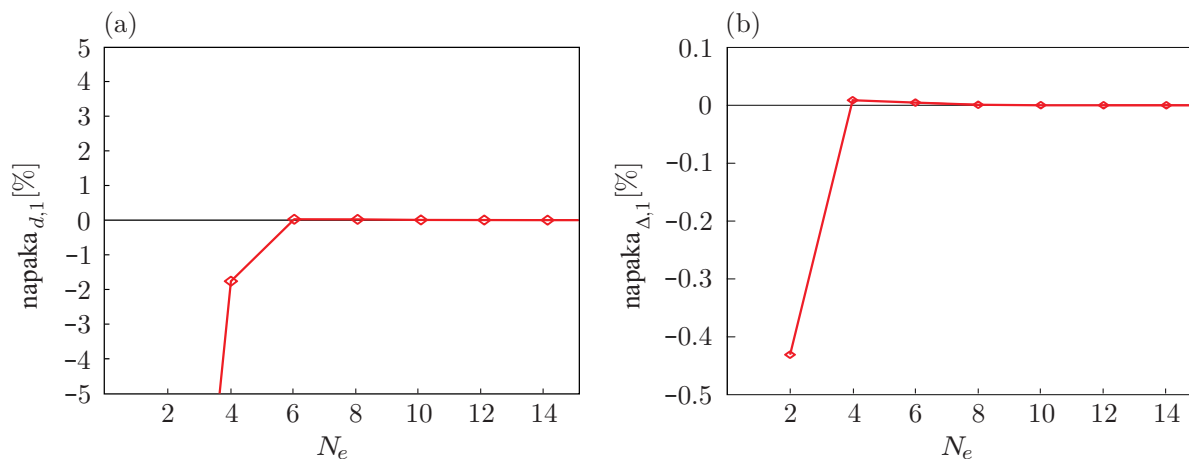
Geometrijsko linearna teorija. V prvem koraku bomo verificirali predstavljeni numerični model s primerjavo numeričnih rezultatov z analitično rešitvijo linearno elastičnega dvoslojnega nosilca (Kroflič et al., 2010a). Geometrijske karakteristike obravnavanega dvoslojnega lesenega nosilca privzamemo enake, kot jih je v svojih eksperimentalnih raziskavah privzel Planinc s sodelavci (2008) in jih prikazujemo na sliki 2.7. Pri tem spodnji sloj označimo z indeksom 'a', zgornjega pa z indeksom 'b'. Obravnavamo prostoležeči nosilec dolžine 300 cm z razponom med podporami 280 cm. Nosilec je sestavljen iz dveh lesenih slojev različnih višin, ki sta povezana s standardnimi žebli 40/100. Razdalja med žebli znaša 60 cm. Privzeti elastični modul lesa v tlaku in nategu znaša $E_t = E_c = 1150 \text{ kN/cm}^2$. Privzeti modul zdrsa znaša $K = 3.525 \text{ kN/cm}^2$. Za modul razmika privzamemo enako obnašanje v tlaku in nategu, pri čemer znaša $C = 13.497 \text{ kN/cm}^2$. Nosilec je obremenjen na sredini razpona zgornjega sloja s točkovno silo $P = 7.624 \text{ kN}$ v smeri globalne osi Z .



Slika 2.7: Prečni prerez (a) in razpored moznikov (b) dvoslojnega lesenega nosilca.
Figure 2.7: Cross section (a) and arrangement of connectors (b) of two-layer timber beam.

Slika 2.8(a) prikazuje relativno napako numerične rešitve (glede na analitično rešitev Krofliča in sodelavcev (2010a)) razmika na sredini nosilca za različno število mreže končnih elementov N_e (napaka $_{d,1} = \frac{d_A^{\text{num}_1} - d_A^{\text{anal}}}{d_A^{\text{anal}}}$). Ugotovimo lahko, da že model z mrežo šestih končnih elementov daje

rezultate v mejah natančnosti izračuna. Slika 2.8(b) prikazuje primerjavo relativne napake numerične rešitve zdrsa na robu prostoležečega nosilca (napaka $\Delta_{,1} = \frac{\Delta_B^{\text{num}_1} - \Delta_B^{\text{anal}}}{\Delta_B^{\text{anal}}} \cdot 100\%$). Vidimo lahko, da so rezultati v mejah natančnosti izračuna že pri mreži osmih končnih elementov. Za natančnejšo verifikacijo



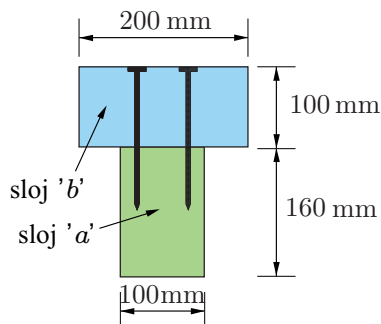
Slika 2.8: Relativna napaka numerične rešitve na stiku prostoležečega elastičnega nosilca: (a) razmik na sredini nosilca (napaka $d_{,1}$) in (b) zdrs (napaka $\Delta_{,1}$) ob podpori.

Figure 2.8: Relative error of numerical solution at the contact of a simply supported elastic beam: (a) uplift at the midspan (napaka $d_{,1}$) and (b) slip (napaka $\Delta_{,1}$) at the support.

numeričnega modela primerjamo numerične in analitične rezultate še za različne kombinacije modula zdrsa K in modula razmika C :

- $K = 0, C = 13.497 \text{ kN/cm}^2$ (brez strižne povezave – BSP),
- $K \approx \infty, C = 13.497 \text{ kN/cm}^2$ (toga strižna povezava – TSP),
- $K \approx \infty, C \approx \infty$ (popolnoma toga povezava – PTP).

Pri tem upoštevamo enak nosilec kot v prejšnjem primeru, dodatno analiziramo tudi primer s spremenjeno obliko prečnega prereza, ki ga prikazujemo na sliki 2.9 (T-prerez). Pri tem smo morali v primeru brez



Slika 2.9: T-prečni prerez.

Figure 2.9: T cross-section.

strižne povezave (BSP) dodatno podpreti zgornji sloj nosilca, da izpolnimo robne pogoje dvoslojnega

nosilca. Numerično rešitev za različno število končnih elementov (N_e) primerjamo z analitično rešitvijo Krofliča in sodelavcev (2010a). V preglednici 2.1 predstavljamo analitične rezultate in odstopanje numeričnih rezultatov od analitične rešitve (za mrežo štirih in osmih končnih elementov) navpičnega pomika w_A na sredini razpona spodnjega nosilca. V vseh predstavljenih numeričnih izračunih privza-

Preglednica 2.1: Analitični in numerični rezultati ter lastnosti konvergence navpičnega pomika na sredini nosilca za različne tipe povezave v tangentski in normalni smeri.

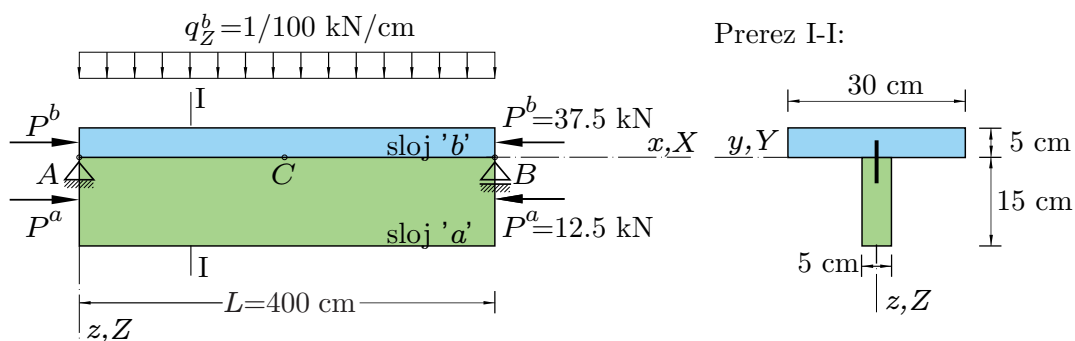
Table 2.1: Analytical and numerical results and convergence properties of the midpoint vertical deflection for different shear and uplift connections.

prerez	povezava	analitično [mm]	napaka _{4FE} [%]	napaka _{8FE} [%]
original	BSP	1.0568	-0.08020	-0.08155
original	TSP	0.44377	-0.67189	-0.67119
original	PTP	0.44224	-0.00289	-0.00327
T	BSP	0.59806	-0.62352	-0.62336
T	TSP	0.15562	-2.66826	-2.66452
T	PTP	0.15103	-0.01377	-0.01893

memo normo ostanka Newtonove metode 10^{-8} . Vsa odstopanja numeričnih rezultatov od analitične rešitve so znotraj pričakovanih mej. Opazimo lahko tudi manjše probleme pri konvergenci, posebej pri togi strižni povezavi (TSP), ko se relativna napaka stabilizira in se ne zmanjšuje z zgoščanjem mreže končnih elementov.

Geometrijsko nelinearna teorija. V nadaljevanju primerjamo numerične rezultate našega modela z analitično rešitvijo Girhammarja in Gopuja (1993). Študiramo konvergenco numeričnih rezultatov naprej geometrijsko linearnega elastičnega prostoležečega in nato geometrijsko nelinearnega elastičnega dvoslojnega lesenega nosilca.

Girhammar in Gopu (1993) sta predstavila točno rešitev napetostno-deformacijskega stanja dvoslojnega prostoležečega elastičnega kompozitnega nosilca s podajno povezavo (v vzdolžni smeri) na stiku po teoriji prvega in drugega reda. Geometrijo in obtežbo nosilca podajamo na sliki 2.10. Privzeti elastični modul spodnjega sloja znaša $E_a = 800 \text{ kN/cm}^2$, zgornjega pa $E_b = 1200 \text{ kN/cm}^2$. Strižna togost stika znaša $K^* = 5 \text{ kN/cm}^2$. Ponovno označimo spodnji sloj z indeksom 'a', zgornjega pa z indeksom 'b'. V normalni smeri, \mathbf{e}_n^* , smo privzeli togo povezavo ($C^* = 1000 \text{ kN/cm}^2$) stika. Pri tem \mathbf{e}_n^* predstavlja enotski vektor v normalni smeri "povprečene" baze obeh slojev dvoslojnega nosilca.



Slika 2.10: Obtežba, geometrijski in materialni podatki nosilca (Girhammar, Gopu, 1993).
Figure 2.10: Loading, geometric and material data of the beam (Girhammar, Gopu, 1993).

Primerjavo med dobljenimi numeričnimi in Girhammerjevimi analitičnimi (Girhammar, Gopu, 1993) rezultati predstavljamo v preglednici 2.2. Numerične rezultate smo izračunali z uporabo dveh končnih

Preglednica 2.2: Analitični (Girhammar, Gopu, 1993) in numerični rezultati prostoležečega linearno elastičnega kompozitnega nosilca.

Table 2.2: Analytical (Girhammar, Gopu, 1993) and numerical results of a simply supported linear elastic composite beam.

količina	Analytical (Girhammar, Gopu, 1993)		2 FE E_5	
	GLT ¹	MTDR ²	GLT ³	GNT ⁴
w_C^a [mm]	7.560	9.276	7.560	9.273
N_C^a [kN]	0.863	3.897	0.862	3.927
N_C^b [kN]	-50.863	-53.897	-50.862	-53.927
M_C^a [kNm] [†]	0.4977	0.6162	0.4978	0.6136
M_C^b [kNm] [†]	0.1659	0.2054	0.1659	0.2069
$p_{t,A}^*$ [kN/cm]	11.444	13.878	11.447	13.858

¹ Geometrijsko linearna teorija (Girhammar, Gopu, 1993)

² Modificirana teorija drugega reda (Girhammar, Gopu, 1993)

³ Geometrijsko linearna teorija (Kroflič et al., 2010a)

⁴ Geometrijsko nelinearna teorija (izračunani rezultati)

[†] Upogibni moment glede na težiščno os sloja

elementov E_5 (t. j. pet interpolacijskih in integracijskih točk vzdolž osi končnega elementa (Planinc, Saje, Čas, 2001)). V preglednici prav tako prikazujemo rezultate geometrijsko linearnega modela dvo-slojnega nosilca, ki ga je avtor disertacije skupaj s sodelavci predstavil v članku Kroflič in sodelavci (2010a). Opazimo lahko odlično ujemanje rezultatov tako za geometrijsko linearno kot tudi za geometrijsko nelinearno teorijo (pri uporabi samo dveh končnih elementov E_5).

V nadaljevanju predstavimo vpliv števila končnih elementov, stopnje interpolacije in reda numerične integracije na natančnost rezultatov v dveh različnih primerih. Geometrijo, obtežbo in materialne lastnosti prvega materialno linearno elastičnega geometrijsko nelinearnega obojestransko vpetega nosilca prikazujemo na sliki 2.11.

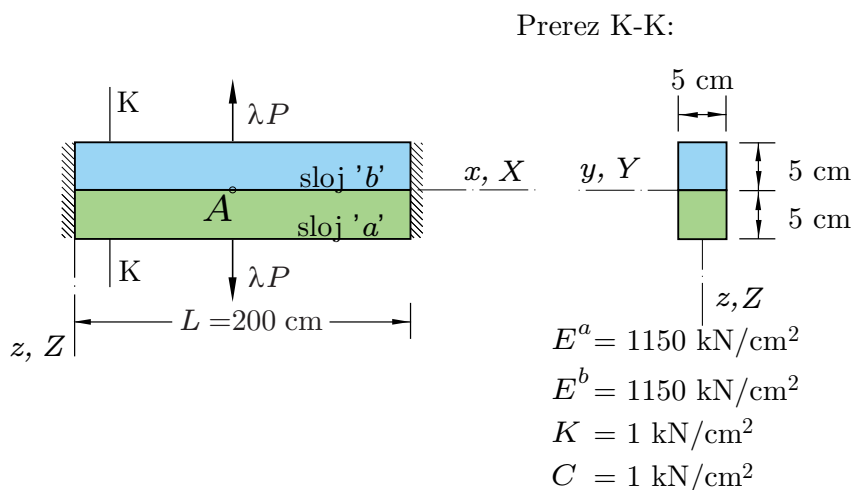
Konvergenco elementa merimo z analizo relativne napake, ki jo definiramo

$$\text{napaka}_{w,1} = \frac{w_{A,20,E_6}^a - w_{A,k}^a}{w_{A,20,E_6}^a}, \quad (2.223)$$

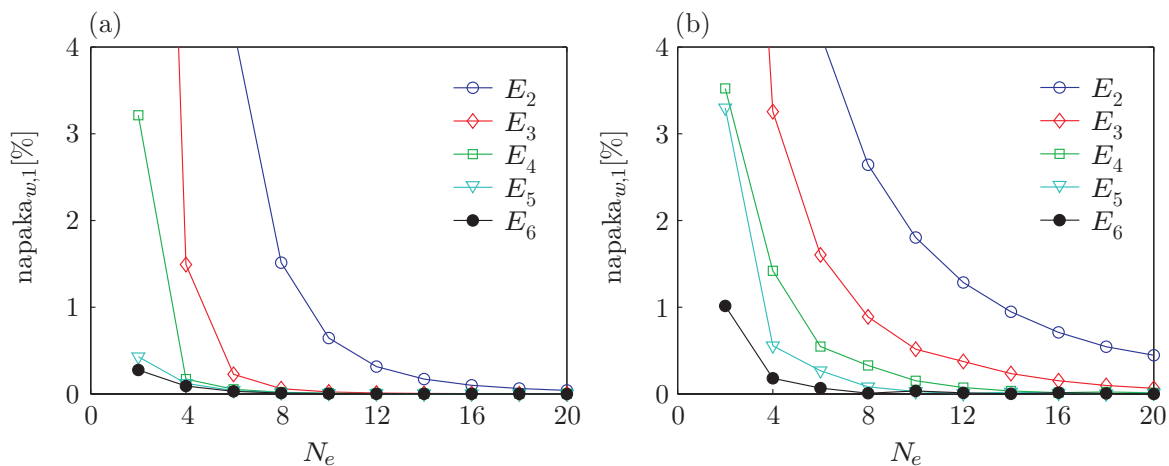
kjer $w_{A,20,E_6}^a$ predstavlja navpični pomik sloja 'a' na sredini nosilca (točka A) za mrežo 20 končnih elementov E_6 in $w_{A,k}^a$ predstavlja navpični pomik sloja 'a' v točki A za mrežo k končnih elementov. Rezultat za mrežo 20 končnih elementov E_6 privzamemo kot referenčni rezultat, saj je odstopanje rezultatov pri taki mreži končnih elementov in za takšen tip elementa manj kot promil v primerjavi z analitično rešitvijo pri elastični obtežbi.

Konvergenco pomika $w_{A,k}^a$ prikazujemo na sliki 2.12 za dva različna obtežna faktorja $\lambda = 25$ (slika 2.12(a)) in $\lambda = 900$ (slika 2.12(b)) ter končne elemente različnih stopenj E_N ($N = 2, \dots, 6$). Pri tem znaša sila $P = 10$ kN. V elementu E_N smo uporabili N-točkovno Gaussovo integracijo.

S povečanjem števila končnih elementov se opazno zmanjša napaka rešitve. Če privzamemo polinomsko interpolacijo visoke stopnje, so rezultati vedno zelo natančni tudi pri grobi mreži končnih elementov.



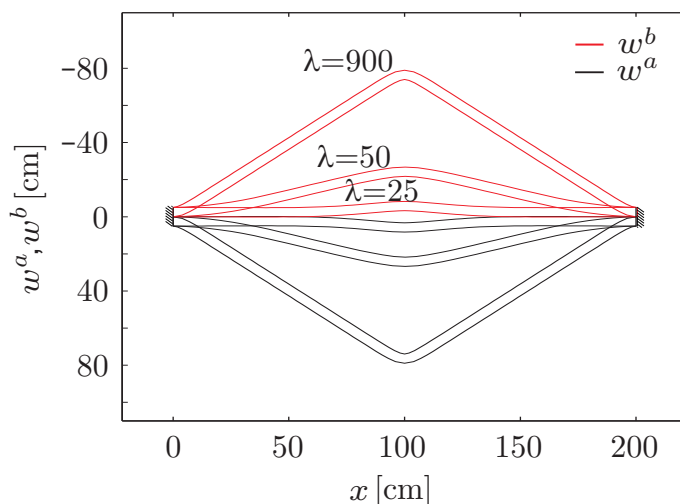
Slika 2.11: Obtežba, geometrijski in materialni podatki obojestransko vpetega nosilca.
 Figure 2.11: Loading, geometric and material data of a fully clamped beam.



Slika 2.12: Relativna napaka navpičnega pomika w_A v odvisnosti od števila elementov N_e za obtežna faktorja (a) $\lambda = 25$ in (b) $\lambda = 900$.

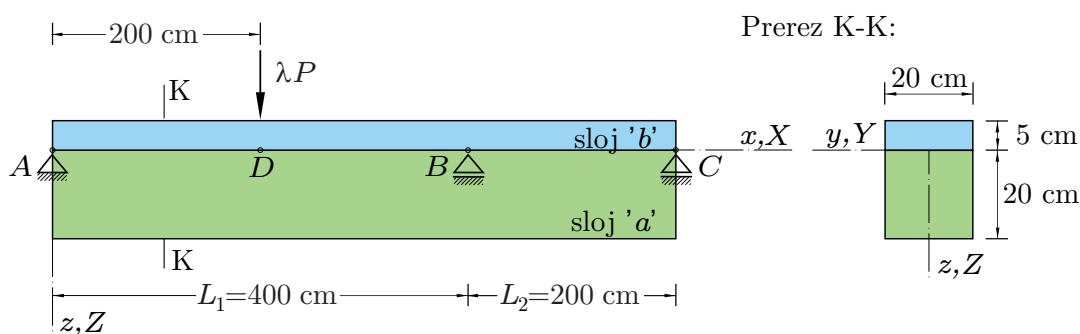
Figure 2.12: Relative error of vertical displacement w_A vs. number of elements N_e for load level (a) $\lambda = 25$ and (b) $\lambda = 900$.

Npr.: relativna napaka navpičnega pomika w_A^a , izračunanega pri mreži štirih končnih elementov E_5 , je okoli 0.12 % za $\lambda = 25$ (slika 2.12(a)) in 0.55 % za $\lambda = 900$ (slika 2.12(b)). Deformirane oblike nosilca pri obtežnih nivojih $\lambda = 25, 50$ in 900 predstavljamo na sliki 2.13. Pri tem opozorimo na zelo velik navpični pomik na sredini nosilca in tudi na velik razmik med slojema.



Slika 2.13: Dejanske deformirane oblike polnovpetega nosilca za obtežne nivoje $\lambda = 25, 50, 900$.
Figure 2.13: The actual deformed shapes of a fully clamped beam for load levels $\lambda = 25, 50, 900$.

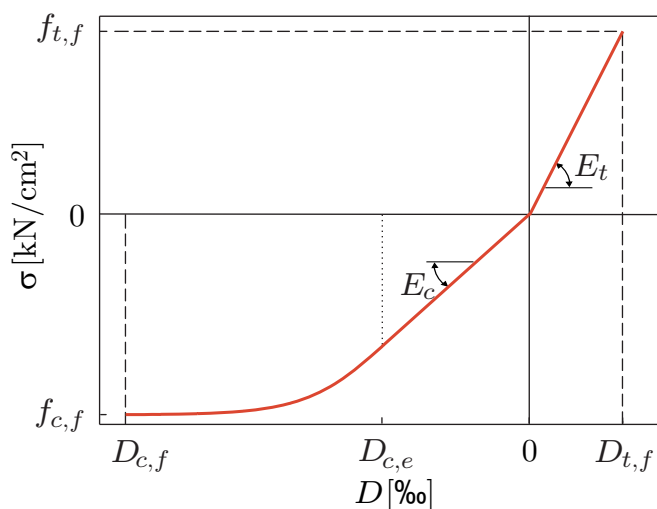
V drugem verifikacijskem primeru upoštevamo geometrijsko in materialno lesen nelinearni dvoslojni kontinuirni nosilec preko dveh polj. Celotna dolžina nosilca znaša $L = 600$ cm, dolžina posameznega polja pa znaša $L_1 = \frac{2}{3}L = 400$ cm in $L_2 = \frac{1}{3}L = 200$ cm. Obtežbo in geometrijo nosilca prikazujemo na sliki 2.14. Leseni sloji so medsebojno povezani s standardnimi žebli 40/100 v dveh vzporednih



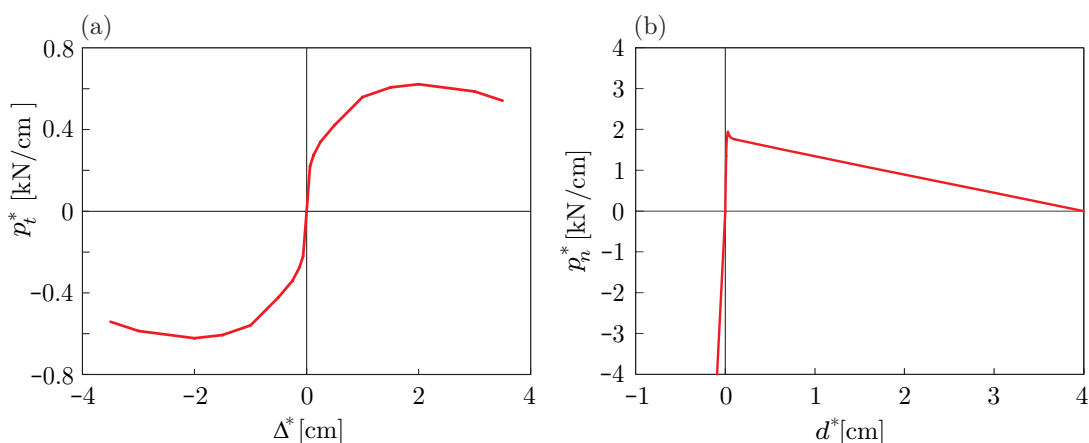
Slika 2.14: Obtežba in geometrijski podatki kontinuirnega nosilca.
Figure 2.14: Loading and geometric data of continuous beam.

vrstah. Razdalja med žebli v vzdolžni smeri znaša 6 cm. Podprt je samo spodnji sloj (slika 2.14). Privzamemo nelinearni konstitutivni zakon lesa (Pischl, 1980) (slika 2.15) z naslednjimi materialnimi parametri: $D_{c,e} = -200/85 \%$, $D_{c,f} = -6.5 \%$, $D_{t,f} = 32/10 \%$, $f_{c,f} = -2.88$ kN/cm², $f_{t,f} = 2.56$ kN/cm² in $E_c = E_t = 800$ kN/cm². Privzamemo nelinearni konstitutivni zakon "povprečni" zdrs (Δ^*) – tangencialna obtežba stika (p_t^*) in pripadajoči "povprečni" razmik (d^*) – normalna obtežba stika (p_n^*) (Čas, 2004a), ki ju prikazujemo na sliki 2.16(a) in 2.16(b).

Analizo konvergence naredimo v prvem koraku ob privzetem togem stiku v normalni smeri ($C^* = 1000$ kN/cm²), nato privzamemo nelinearni konstitutivni zakon v normalni smeri stika 2.16(b). Konvergenco elementa ponovno definiramo kot relativno napako navpičnega pomika spodnjega sloja 'a' na



Slika 2.15: Konstitutivni zakon lesa.
Figure 2.15: Timber constitutive law.



Slika 2.16: Nelinearni zakon stika v (a) tangentni smeri \mathbf{e}_t^* in (b) normalni smeri \mathbf{e}_n^* (Čas, 2004a).
Figure 2.16: Non-linear contact relationship in (a) tangential direction \mathbf{e}_t^* and (b) normal direction \mathbf{e}_n^* (Čas, 2004a).

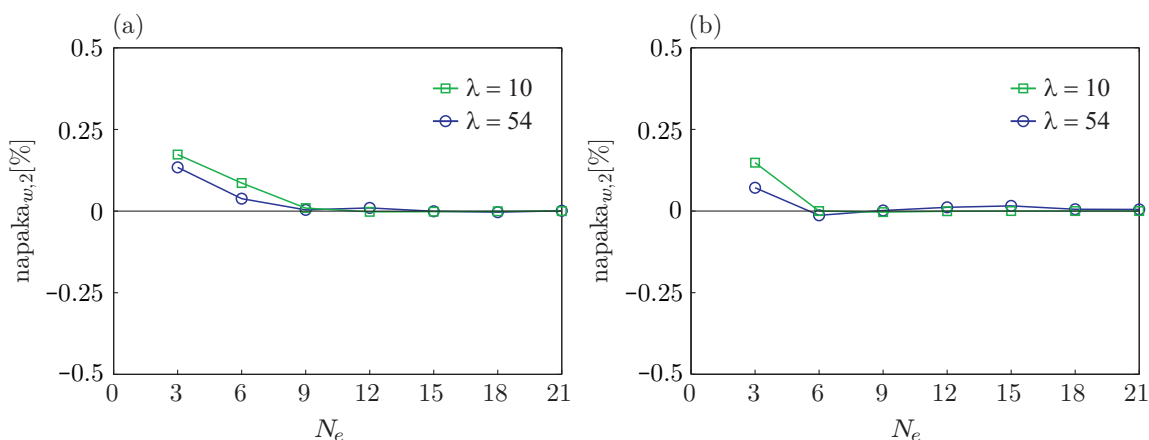
sredini prvega polja kontinuirnega nosilca:

$$\text{napaka}_{w_2} = \frac{w_{D,21}^a - w_{D,k}^a}{w_{D,21}^a}, \quad (2.224)$$

kjer je $w_{D,21}^a$ navpični pomik točke D sloja a (slika 2.14) za mrežo 21 končnih elementov tipa E_4 in $w_{D,k}^a$ je vrednost navpičnega pomika za mrežo k končnih elementov tipa E_4 . Rezultate prikažemo za dva nivoja obtežbe, $\lambda = 10$ in $\lambda = 54$. Obtežni nivo $\lambda = 54$ predstavlja dejansko nivo porušne obtežbe konstrukcije, ko se natezno porušijo lesena vlakna na spodnjem robu prečnega prereza.

Slika 2.17 prikazuje relativno napako navpičnega pomika w_D v odvisnosti od števila končnih elementov za nivoja obtežbe $\lambda = 10$ in $\lambda = 54$ za (a) togi stik v normalni smeri ($C^* = 1000 \text{ kN/cm}^2$) in (b) nelinearni stik v normalni smeri (kot na sliki 2.16(b)). Opazimo lahko odlično konvergenco za oba obtežna nivoja in konstitutivna zakona v normalni smeri stika. Že mreža treh končnih elementov zadostuje za

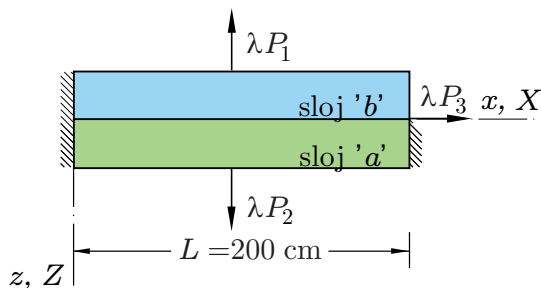
napako rezultata manjšo od 0.25 %.



Slika 2.17: (a) Relativna napaka navpičnega pomika w_D v odvisnosti od števila končnih elementov za nivoja obtežbe $\lambda = 10$ in $\lambda = 54$: (a) togi stik v normalni smeri ($C^* = 1000 \text{ kN/cm}^2$) in (b) nelinearni stik v normalni smeri (kot na sliki 2.16(b)).

Figure 2.17: (a) Relative error of vertical displacement w_D vs. number of elements for load levels $\lambda = 10$ and $\lambda = 54$: (a) rigid normal connection ($C^* = 1000 \text{ kN/cm}^2$) and (b) non-linear contact in the normal direction (as in Fig. 2.16(b)).

Vpliv parametra ζ . V enačbi (2.50) smo predstavili utež ζ pri definiciji tangenta in normalnega vektorja “povprečne” baze. V tem poglavju bomo raziskovali vpliv ζ na vodoravne in navpične pomike slojev. Obravnavamo dvoslojni nosilec z enakimi geometrijskimi in materialnimi lastnostmi kot v primeru na sliki 2.11. Pri tem privzamemo robne pogoje in obtežbo, kot je prikazana na slikah 2.18 in 2.19.

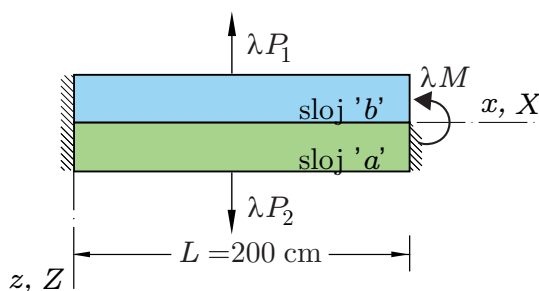


Slika 2.18: Geometrija, obtežba in podpiranje osno obteženega dvoslojnega nosilca.

Figure 2.18: Geometry, loading and supports of axially loaded two-layer beam.

V prvem obtežnem primeru je nosilec obtežen s silama $\lambda P_1 = \lambda \cdot 10 \text{ kN}$ in $\lambda P_2 = \lambda \cdot 5 \text{ kN}$ na sredini nosilca in osno silo $\lambda P_3 = \lambda \cdot 50 \text{ kN}$ na prostem robu zgornjega nosilca na stiku s spodnjim nosilcem (slika 2.18). V drugem primeru osno silo zamenjamo z upogibnim momentom $\lambda M = \lambda \cdot 50 \text{ kNcm}$ (slika 2.19). V obeh primerih upoštevamo bilinearni konstitutivni zakon stika v normalni smeri s tangentskim modulom v tlaku $C_c^* = 100 \text{ kN/cm}^2$ in nategu $C_t^* = 1 \text{ kN/cm}^2$. Hkrati privzamemo linearni konstitutivni zakon stika v tangencialni smeri s $K^* = 1 \text{ kN/cm}^2$.

V preglednici 2.3 predstavljamo rezultate za različne vrednosti ζ . Primerjamo navpični in vodoravni pomik slojev na sredini nosilca in pomike nepodprtega dela zgornjega nosilca pri različnih ζ . Relativna razlika med rezultati je majhna.



Slika 2.19: Geometrija, obtežba in podpiranje dvoslojnega nosilca, obteženega s točkovnim momentom.

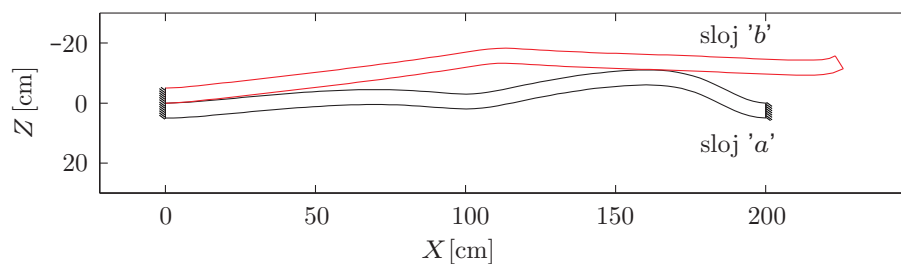
Figure 2.19: Geometry, loading and supports of two-layer beam subjected to bending moment.

Preglednica 2.3: Osno obremenjen dvoslojni nosilec. Primerjava rezultatov za različne ζ pri $\lambda = 100$.

Table 2.3: Axially loaded two-layer beam. Comparison of results for different ζ at $\lambda = 100$.

ζ	$w^a[L/2]$	$w^b[L/2]$	$u^a[L/2]$	$u^b[L/2]$	$w^b[L]$	$u^b[L]$
0.50	-3.06 cm	-13.22 cm	2.59 cm	10.69 cm	-11.45 cm	25.87 cm
0	-1.98 %	0.17 %	-1.15 %	-0.11 %	0.45 %	0.03 %
0.25	-1.01 %	0.16 %	-0.75 %	-0.08 %	0.38 %	0.04 %
0.75	-0.01 %	-0.32 %	1.05 %	0.12 %	-0.69 %	0.15 %
1.00	0.30 %	-0.59 %	2.06 %	0.24 %	-1.28 %	0.22 %

Slika 2.20 predstavlja deformirano obliko osno obremenjenega dvoslojnega nosilca, ki smo ga predstavili na sliki 2.18, pri obtežnem nivoju $\lambda = 100$ ob predpostavki, da je $\zeta = 0.5$. Opazimo lahko relativno velik pomik kontaktnih površin v normalni in tangencialni smeri.



Slika 2.20: Deformirana oblika osno obremenjenega dvoslojnega nosilca pri $\lambda = 100$, $\zeta = 0.5$.

Figure 2.20: Deformed shape of axially loaded two-layer beam at load level $\lambda = 100$, $\zeta = 0.5$.

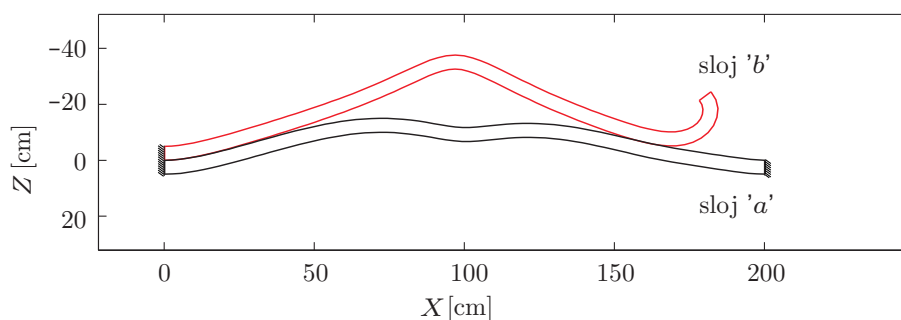
V preglednici 2.4 primerjamo navpični in vodoravni pomik slojev na sredini nosilca in pomike nepodprtega dela zgornjega nosilca pri različnih ζ za nosilec, obremenjen z upogibnim momentom na nepodprtem delu. Kot v prejšnjem primeru tudi tukaj opazimo relativno majhne razlike v rezultatih za različne vrednosti ζ .

Slika 2.21 predstavlja deformirano obliko dvoslojnega nosilca, ki smo ga predstavili na sliki 2.19, pri obtežnem nivoju $\lambda = 150$ ob predpostavki, da je $\zeta = 0.5$. Ponovno lahko opazimo relativno velik pomik kontaktnih površin v normalni in tangencialni smeri.

Preglednica 2.4: Dvoslojni nosilec, obremenjen z upogibnim momentom. Primerjava rezultatov za različne ζ pri $\lambda = 150$.

Table 2.4: A two-layer beam subjected to bending moment. Comparison of results for different ζ at $\lambda = 150$.

ζ	$w^a[L/2]$	$w^b[L/2]$	$u^a[L/2]$	$u^b[L/2]$	$w^b[L]$	$u^b[L]$
0.50	-11.71 cm	-32.62 cm	-0.76 cm	-3.26 cm	-24.50 cm	-18.04 cm
0	-0.02 %	-0.01 %	-0.22 %	0.28 %	-0.26 %	0.95 %
0.25	-0.01 %	-0.00 %	-0.16 %	0.14 %	-0.08 %	0.45 %
0.75	0.02 %	0.01 %	0.20 %	-0.09 %	0.05 %	-0.31 %
1.00	0.01 %	0.02 %	0.54 %	-0.12 %	-0.32 %	-0.63 %



Slika 2.21: Deformirana oblika momentno obremenjenega dvoslojnega nosilca pri $\lambda = 150$, $\zeta = 0.5$.

Figure 2.21: Deformed shape of two-layer beam subject to bending moment at load level $\lambda = 150$, $\zeta = 0.5$.

2.3.2 Validacija numeričnega modela

S to skupino računskih primerov analiziramo natančnost predstavljenega matematičnega modela za analizo večslojnih kompozitnih nosilcev s podajnimi veznimi sredstvi. Natančnost analiziramo s primerjavo med numeričnimi in eksperimentalnimi rezultati iz literature. Tudi tu natančnost modela analiziramo ločeno za geometrijsko linearne in nelinearne modele dvoslojnih linijskih kompozitnih nosilcev.

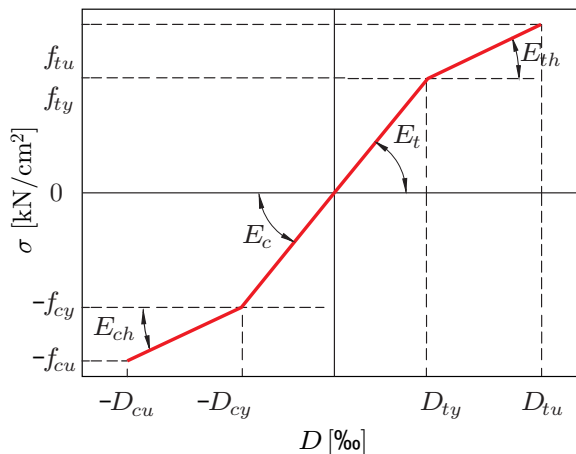
Geometrijsko linearna teorija. Najprej primerjamo numerične rezultate modificirane linearne teorije z eksperimentalno dobljenimi rezultati Planinca in sodelavcev (2008), ki so izvedli več laboratorijskih preiskav mehanskih lastnosti lesa, kontaktnih parametrov povezave lesenih elementov in deformabilnosti prostoležečega lesenega kompozitnega nosilca. Povzeli bomo samo vhodne podatke, ki jih bomo uporabili v naših numeričnih izračunih, in rezultate, ki jih bomo primerjali z našimi numeričnimi rešitvami. Poleg glavne eksperimentalne analize nosilca so Planinc in sodelavci (2008) izvedli še dodatne eksperimentalne raziskave:

- tlačna trdnost lesa v smeri vlaken,
- natezna trdnost lesa v smeri vlaken,
- nosilnost mozničenega stika na izvlek.

Obravnavamo lesen prostoležeči kompozitni nosilec enake geometrije, obtežbe in razporeditve veznih

sredstev, kot jih ima prvi primer v poglavju 2.3.1 (slika 2.7).

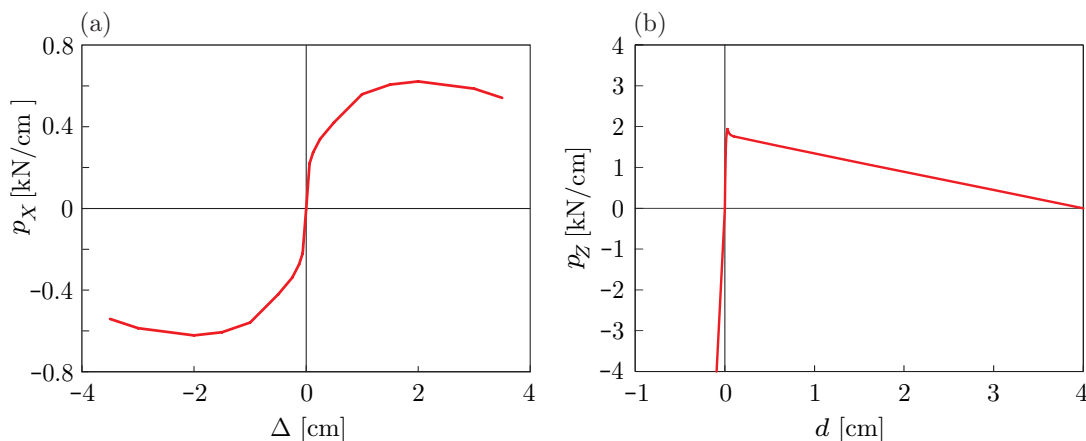
Les je bil glede na klasifikacijo po standardu EN 338 (2003) uvrščen v trdnostni razred C24. Privzeti materialni parametri konstitutivni zakona lesa so naslednji (slika 2.22): privzeti elastični modul lesa v



Slika 2.22: Konstitutivni zakon lesa.
Figure 2.22: Constitutive law of timber.

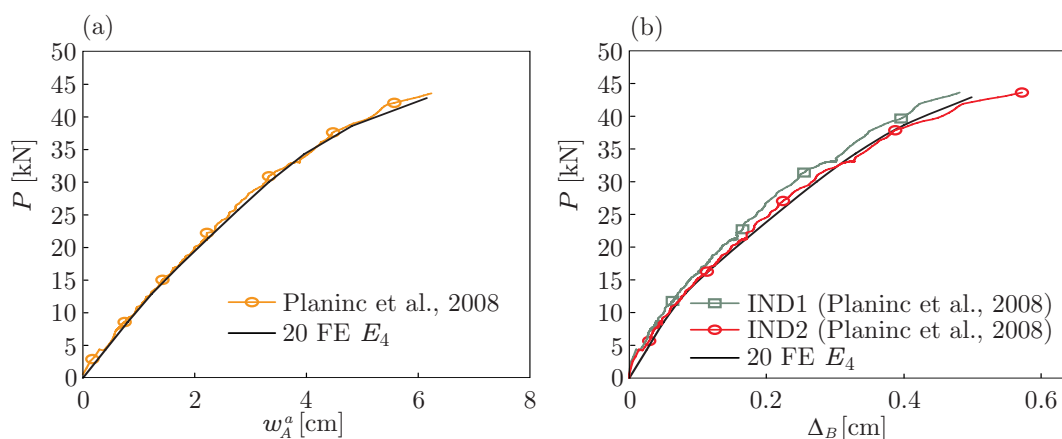
tlaku in nategu znaša $E_t = E_c = 1150 \text{ kN/cm}^2$, vrednosti preostalih parametrov pa so $D_{ty} = 0.32 \%$, $D_{tu} = 1.00 \%$, $D_{cy} = 0.35 \%$, $D_{cu} = 1.03 \%$, $E_{ch} = 0.1E_c$, $E_{th} = 0.05E_t$. Vrednosti mejnih deformacij lesa smo privzeli po Pischlu (1980).

Na sliki 2.23 prikazujemo konstitutivni zakona stika. Slika 2.23(a) predstavlja konstitutivni zakon stika v tangencialni smeri ($p_X - \Delta$), medtem ko slika 2.23(b) predstavlja konstitutivni zakon v normalni smeri stika ($p_Z - d$). Podrobnejši opis določitve konstitutivnih zakonov stika lahko zasledimo v Časovem doktoratu (2004a). Iz obeh diagramov je razvidno, da imamo tako v vzdolžni kot tudi v prečni smeri stika opravka z nelinearnimi konstitutivnimi zvezami.



Slika 2.23: Nelinearni zakoni stika: (a) obežba na stiku v tangencialni smeri-zdrs ($p_X - \Delta$) in (b) obežba na stiku v normalni smeri-razmik ($p_Z - d$).

Figure 2.23: Non-linear contact relationships: (a) shear traction-slip ($p_X - \Delta$) relationship and (b) normal traction-uplift ($p_Z - d$).



Slika 2.24: Izmerjen in izračunan odziv: (a) sila-pomik ($P - w_A^a$) in (b) sila-robni zdrs ($P - \Delta_B$).
Figure 2.24: Measured and calculated response: (a) load-deflection ($P - w_A^a$) and (b) load-slip ($P - \Delta_B$) curves.

Na sliki 2.24(a) primerjamo izračunano in izmerjeno krivuljo sila – pomik na sredini spodnjega sloja. V izračunu smo upoštevali eksperimentalno dobljene karakteristike: nelinearni materialni model lesa in nelinearni konstitutivni zakon na stiku (v vzdolžni in prečni smeri). Opazimo lahko odlično ujemanje eksperimentalnih in numeričnih rezultatov pri vseh obtežnih nivojih. Prav tako se eksperimentalno ugotovljeni porušni mehanizem sklada z dobljenim porušnim mehanizmom iz numerične analize. V obeh primerih pride namreč do natezne porušitve lesenih vlaken na spodnjem robu spodnjega nosilca na sredini razpona. Eksperimentalna porušna sila znaša $P_{ult}^{exp} = 43.6$ kN, medtem ko se vzorec v numerični analizi poruši pri $P_{ult}^{num} = 42.9$ kN.

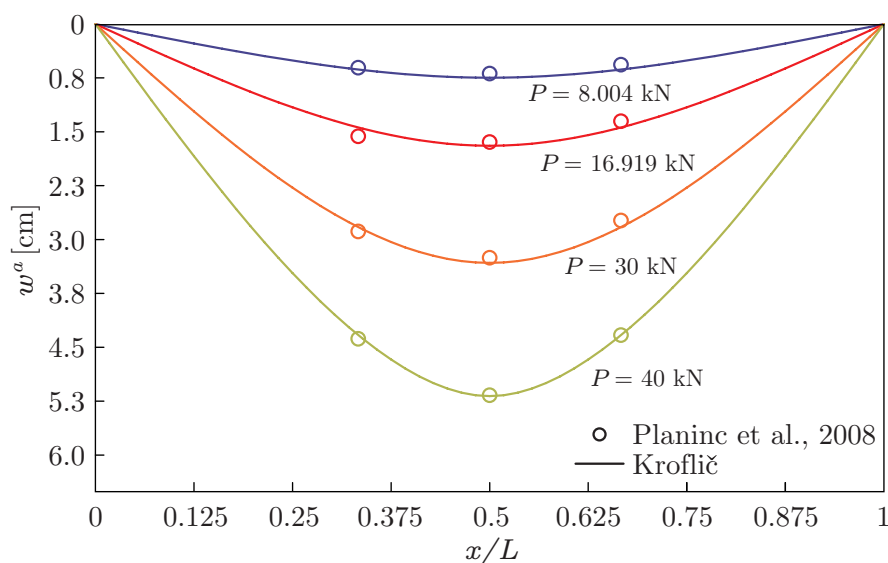
Na sliki 2.24(b) prikazujemo primerjavo med izmerjenimi in izračunanimi krivuljami sila – robni zdrs ($P - \Delta_B$). Robni zdrs je bil izmerjen na robu nosilca v točki B (slika 2.7), s tem da točko na levem robu označimo z IND1 in točko na desnem robu z IND2. Splošno ujemanje rezultatov je dobro, lahko pa opazimo manjšo razliko med izmerjenimi rezultati na levem in desnem robu.

Izmerjene in izračunane deformirane oblike nosilca za različne nivoje obtežbe prikazujemo na sliki 2.25. Opazimo lahko zelo dobro ujemanje rezultatov za vse obtežne nivoje.

V nadaljevanju validiramo numerični model s primerjavo numeričnih rezultatov z McCutcheonovimi eksperimentalnimi rezultati (1986). Opravil je več laboratorijskih testov lesenih T- in I-nosilcev. V našem primeru primerjamo samo rezultate za T-nosilce.

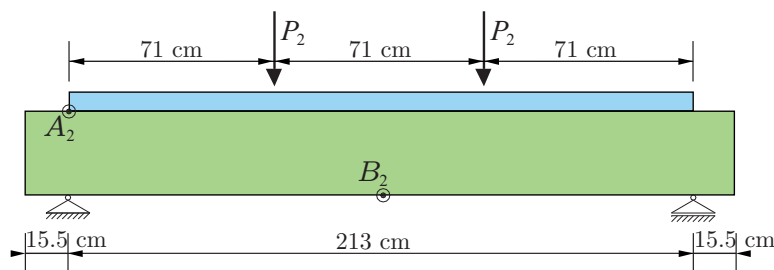
Nosilci so bili narejeni iz pasnic dimenzij $3.8 \times 8.9 \times 24.4$ cm in stojin dimenzije 1.9×40.6 cm (CDX plywood) ali 1.1×40.6 cm (plošč OSB (angl. *oriented standard board*)). Pasnice so bile na stojine primozničene s standardnimi žebli na razmiku 15.2 cm. Da bi zmanjšali vpliv trenja, so na stik elementov dodali dvoslojno polietilensko folijo. Nosilce so podprli na razdalji 213 cm in obtežili z dvema točkovnima silama $P_2 = 0.89$ kN (slika 2.26). Izbrane vrednosti obtežbe so izbrali zato, da napetosti nosilca v vsaki točki zagotovo ostanejo pod kritično mejo. Slika 2.26 prikazuje tudi meritveni točki zdrsa (A_2) in navpičnega pomika (B_2) na konstrukciji. Na osnovi eksperimentalnih rezultatov je bil ocenjen elastični modul pasnic $E_{CDX} = 770.8$ kN/cm² oz. $E_{OSB} = 330.9$ kN/cm².

Elastični modul stojin podajamo v preglednici 2.5 za vsak preizkušane posebej. Slika 2.27 prikazuje konstitutivni zakon stika v vzdolžni smeri (McCutcheon, 1986), ki smo ga upoštevali v naših numeričnih izračunih. Ker avtor ne podaja karakteristik stika v prečni smeri, smo v naši analizi predpostavili togo



Slika 2.25: Izmerjeni in izračunani prečni pomiki spodnjega sloja.

Figure 2.25: Measured and calculated vertical displacements of bottom layer.



Slika 2.26: McCutcheonov eksperimentalni preizkušaneč (McCutcheon, 1986).

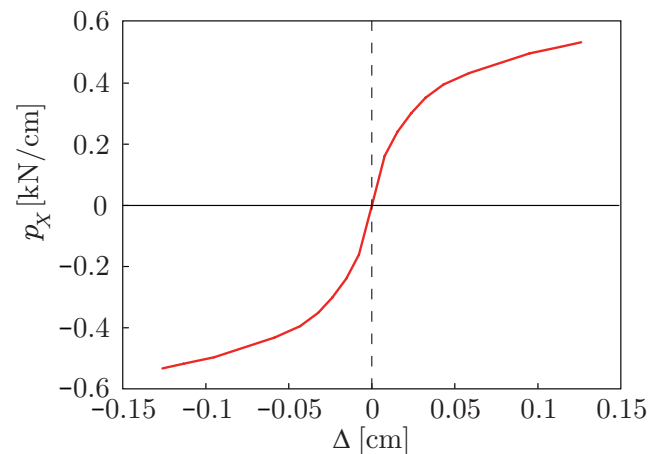
Figure 2.26: Experimentally tested specimen of McCutcheon (McCutcheon, 1986).

Preglednica 2.5: Primerjava analitičnih in numeričnih rezultatov: rezultati v $[\text{kN}/\text{cm}^2]$ (elastični modul) in $[\text{cm}]$ (navpični pomik, zdrs).

Table 2.5: Comparisons of analytical and numerical results; results in $[\text{kN}/\text{cm}^2]$ (elastic modulus) and $[\text{cm}]$ (vertical deflection, slip).

Pasnica	E_{stojina} [kN/cm^2]	$w_{B_2}^{\text{test}}$ [cm]	$w_{B_2}^{\text{num}}$ [cm]	napaka _w [%]	$\Delta_{A_2}^{\text{test}}$ [cm]	$\Delta_{A_2}^{\text{num}}$ [cm]	napaka _Δ [%]
CDX	1034.2	0.896	0.887	1.07	0.0603	0.0606	-0.53
CDX	944.6	0.975	0.954	2.10	0.0689	0.0652	5.38
CDX	868.7	1.037	1.022	1.45	0.0739	0.0698	5.55
OSB	979.1	1.060	0.968	8.67	0.0640	0.0623	2.66
OSB	1130.7	0.965	0.857	11.19	0.0574	0.0549	4.36
OSB	1117.0	0.884	0.866	2.04	0.0509	0.0555	-9.04

povezavo med sloji. V eksperimentu so analizirali tri različne vzorce za vsak tip stojine. Primerjavo med eksperimentalnimi in numeričnimi rezultati podajamo v preglednici 2.5. V splošnem lahko opazimo

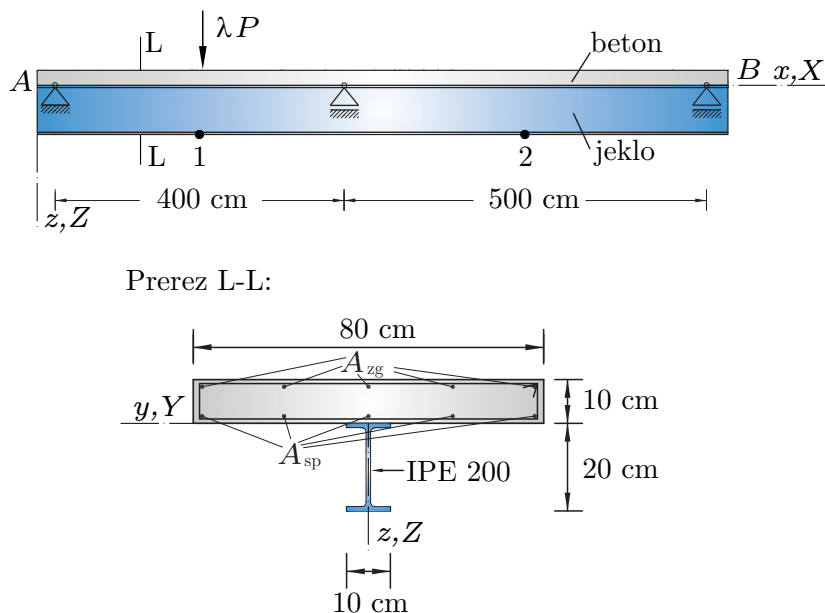


Slika 2.27: Konstitutivni zakon stika v vzdolžni smeri (McCutcheon, 1986).

Figure 2.27: Constitutive contact relationship in longitudinal direction (McCutcheon, 1986).

dobro ujemanje med eksperimentalnimi in numeričnimi rezultati. Določena odstopanja nastopajo najbrž zaradi povprečenja vrednosti elastičnega modula pasnice, ki smo ga uporabili v numeričnih izračunih.

Geometrijsko nelinearna teorija. Model validiramo tudi s primerjavo numeričnih rezultatov z eksperimentalnimi rezultati (Ansourian, 1981) in numeričnimi rezultati (Čas, 2004a) za kontinuirni sovprežni kompozitni nosilec. Čas (2004a) je v svojem numeričnem modelu upošteval geometrijsko linearno teorijo kompozitnih nosilcev. Obtežbo, podpiranje in geometrijo nosilca prikazujemo na sliki 2.28.



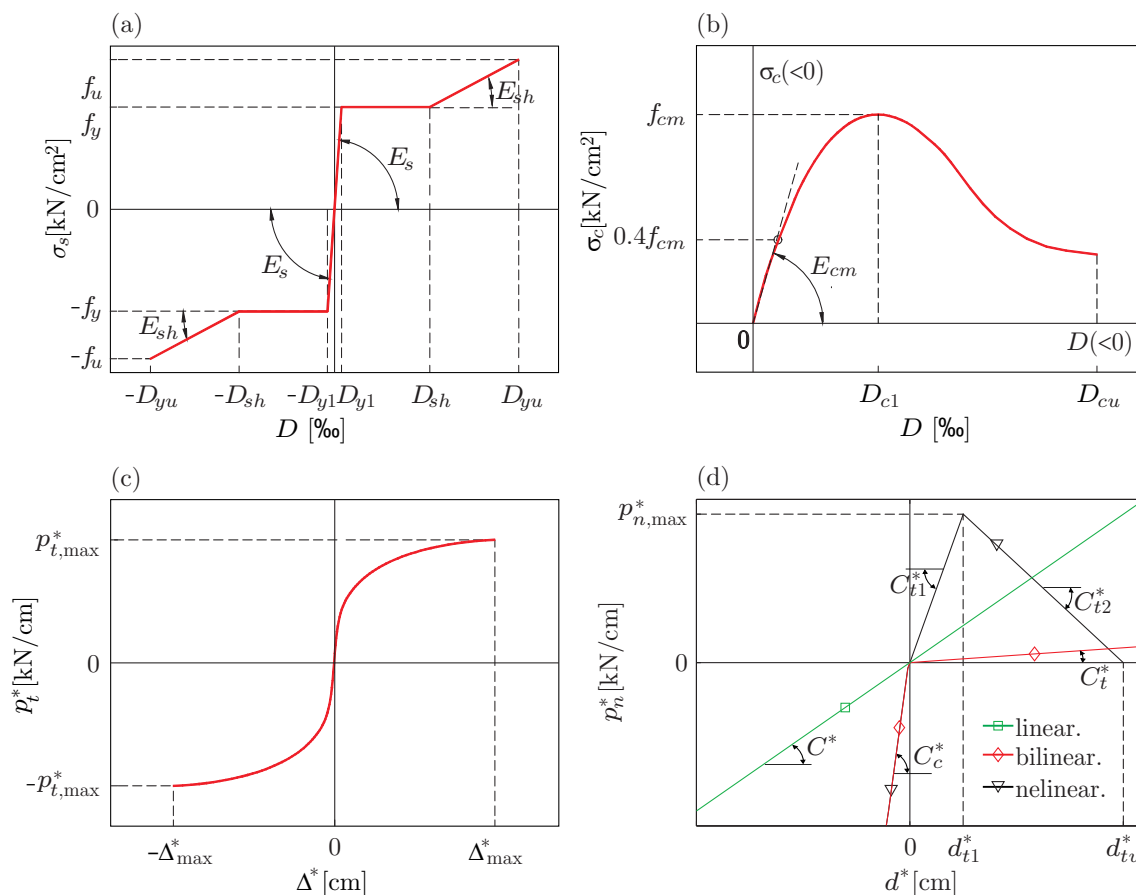
Slika 2.28: Obtežba, podpiranje in geometrijske lastnosti sovprežnega kontinuirnega nosilca (Ansourian, 1981).

Figure 2.28: Loading, supports and geometrical properties of steel-concrete continuous beam (Ansourian, 1981).

Betonski del nosilca je armiran z armaturnimi palicami na zgornjem in spodnjem delu prereza. Količina armature se vzdolž nosilca spreminja. V področju pozitivnih momentov (ang. *sagging*) imamo tako $A_{zg}^{sag} = 0 \text{ cm}^2$, $A_{sp}^{sag} = 1.6 \text{ cm}^2$, v področju negativnih momentov (ang. *hogging*) pa $A_{zg}^{hog} = 8.0 \text{ cm}^2$ in $A_{sp}^{hog} = 3.16 \text{ cm}^2$.

Na sliki 2.29 predstavljamo v analizi uporabljene materialne konstitutivne modele. Privzamemo trilinearni konstitutivni model jekla (2.29(a)), kjer je

$$\begin{aligned}
 E_s &= 21000 \text{ kN/cm}^2, & E_{sh} &= 0.008E_s, \\
 f_y^{pasnica} &= 27.7 \text{ kN/cm}^2, & f_u^{pasnica} &= 42.1 \text{ kN/cm}^2, \\
 f_y^{stojina} &= 34.0 \text{ kN/cm}^2, & f_u^{stojina} &= 44.0 \text{ kN/cm}^2, \\
 f_y^{armatura} &= 43.0 \text{ kN/cm}^2, & f_u^{armatura} &= 53.3 \text{ kN/cm}^2, & D_{sh} &= 0.012.
 \end{aligned}$$



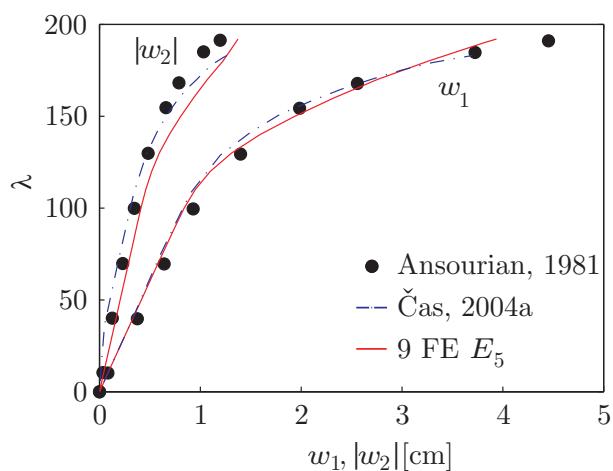
Slika 2.29: Materialni modeli: (a) jeklo in armatura, (b) beton, (c) obtežba stika v tangencialni smeri v odvisnosti od “povprečnega” zdrsa ($p_t^*-\Delta^*$) in (d) obtežba stika v normalni smeri v normalni smeri v odvisnosti od “povprečnega” razmik ($p_n^*-d^*$).

Figure 2.29: Material models of: (a) steel and reinforcement, (b) concrete, (c) traction force in tangential direction as a function of mean slip ($p_t^*-\Delta^*$) and (d) traction force in normal direction as a function of mean uplift ($p_n^*-d^*$).

Za konstitutivni zakon betona privzamemo model po Desayiju in Krishnanu (1964) (slika 2.29(b)), kjer je $f_{cm} = 3.0 \text{ kN/cm}^2$, $D_{c1} = -2.25 \text{ ‰}$ in $D_{cu} = -21 \text{ ‰}$. Nelinearni model "povprečni" zdrs-obtežba stika v tangencialni smeri privzamemo po Ollgaardu in Sodelavcih (1971) (2.29(c)) z naslednjimi materialnimi parametri: $\alpha = 0.558$, $\beta = 10 \text{ cm}^{-1}$ in $p_{t,max}^* = 6.53 \text{ kN/cm}$.

V literaturi lahko zasledimo različne konstitutivne zakone "povprečni" razmik-obtežba stika v normalni smeri. Na sliki 2.29(d) prikazujemo linearni, bilinearni (Rassam, Goodman, 1970) in nelinearni (Alfano, Crisfield, 2001) konstitutivni model.

Na sliki 2.30 prikazujemo primerjavo med rezultati (Ansourian, 1981, Čas, 2004a) ter predstavljenega modela. Primerjamo navpični pomik točke 1 (w_1) in točke 2 (w_2) pri togi povezavi stika v normalni smeri ($C^* = 1000 \text{ kN/cm}^2$). Za izračun smo uporabili mrežo devetih končnih elementov tipa E_4 .



Slika 2.30: Primerjava obtežno-deformacijskih krivulj za navpični pomik pri točki 1 in 2.
Figure 2.30: Comparison of load-deflection curves of vertical displacement at points 1 and 2.

Primerjava rezultatov kaže, da predstavljeni model zadovoljivo opiše togost, duktilnost in nosilnost sovprežnega nosilca. Tudi ocena nosilnosti nosilca 192 kN se zelo dobro ujema z eksperimentalnim rezultatom (196 kN). Na podlagi rezultatov lahko torej trdimo, da izbrano število moznikov ustvarja togo povezavo stika v normalni smeri. Prav tako je zelo dobra primerjava s Časovo numerično rešitvijo (2004a), kar nakazuje, da so pomiki, zasuki in deformacije majhne količine. To je posledica eksperimentalnega dejstva, da pride do porušitve konstrukcije takoj za simultano lokalizacijo deformacij v betonskem prerezu in velikega povečanja plastičnih deformacij v jeklenem nosilcu (Ansourian, 1981). Enak mehanizem porušitve smo zaznali pri predstavljenem numeričnem modelu.

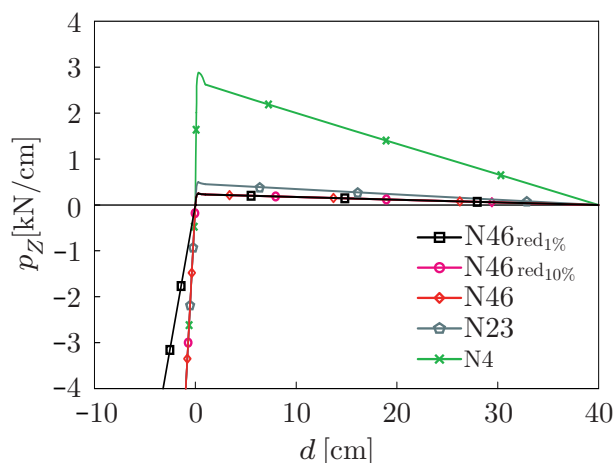
2.3.3 Parametrična študija vpliva prečne togosti stika na mehansko obnašanje dvoslojnih kompozitnih nosilcev

S to skupino računskih primerov analiziramo vpliv prečne podajnosti veznih sredstev na napetostno in deformacijsko stanje večslojnih linijskih kompozitnih nosilcev. Detajlno parametrično študijo prikažemo za dvoslojni leseni prostoležeči in kontinuirni nosilec ter kontinuirni sovprežni nosilec iz jekla in betona

Dvoslojni leseni prostoležeči nosilec. Najprej analiziramo vpliv prečne togosti stika na primeru dvoslojnega lesenega nosilca, predstavljenega v poglavju 2.3.1 (slika 2.7). Ponovno označimo spodnji sloj z indeksom 'a' in zgornji sloj z indeksom 'b'. V vzdolžni smeri na stiku upoštevamo nelinearni konstitutivni

zakon $p_X - \Delta$ za razporeditev žeblice na razdalji 23 cm (N23), ki ga dobimo z ustrežno transformacijo (ob upoštevanju privzete razdalje med žeblici) konstitutivnega zakona stika na sliki 2.23(a).

V parametrični študiji upoštevamo tri različne razporeditve žeblice v normalni smeri stika: relativno tog stik z razporeditvijo žeblice na razdalji 4 cm (N4), žeblice na razdalji 23 cm (N23) in relativno podajen stik z razporeditvijo žeblice na razdalji 46 cm (N46). V nadaljnji analizi reduciramo tlačni del konstitutivnega zakona $p_Z - d$ N46 s faktorjem 0.1 (10 %, N46_{red10%}) in 0.01 (1 %, N46_{red1%}) glede na originalne eksperimentalno dobljene vrednosti (slika 2.31). Z upoštevanjem tako različnih konstitutivnih zakonov v



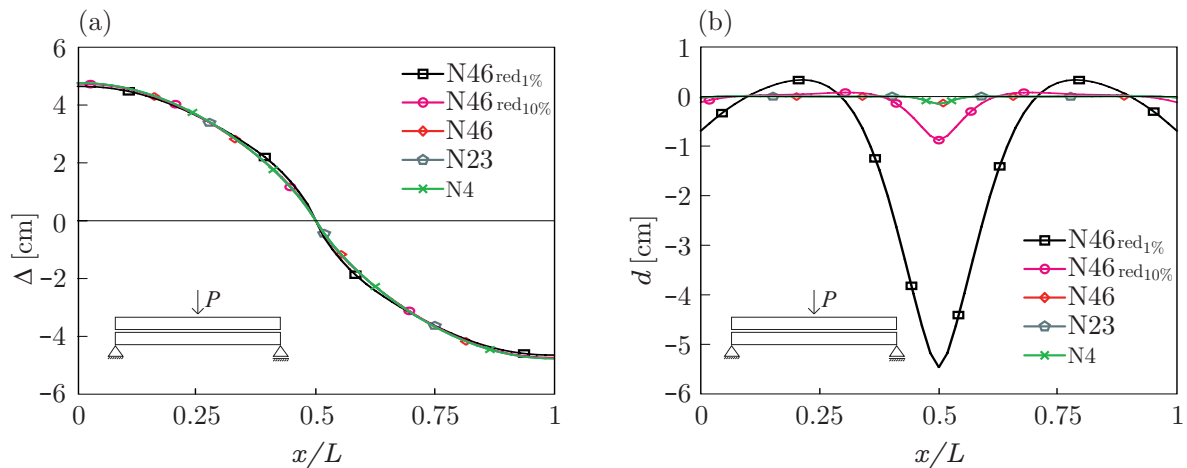
Slika 2.31: Nelinearni konstitutivni zakoni stika v normalni smeri.
Figure 2.31: Non-linear normal traction-uplift constitutive laws.

normalni smeri stika bomo zagotovili podrobno analizo vpliva na druge količine kompozitnega nosilca. Se pa hkrati zavedamo, da so nekateri modeli konstitutivnega zakona stika v normalni smeri nenavadni in služijo zgolj kot dokaz splošnosti uporabe predstavljene numerične metode. V nadaljevanju prikazujemo rezultate zgolj za količine, na katere ima konstitutivni zakon stika v prečni smeri največji vpliv.

Najprej upoštevamo v naši študiji prostoležeči kompozitni nosilec, obremenjen s točkovno silo velikosti $P = 34.9$ kN v smeri globalne osi Z , ki deluje na sredini nosilca. V prvem obtežnem primeru deluje sila na zgornjem robu zgornjega nosilca, v drugem pa na spodnjem robu spodnjega nosilca.

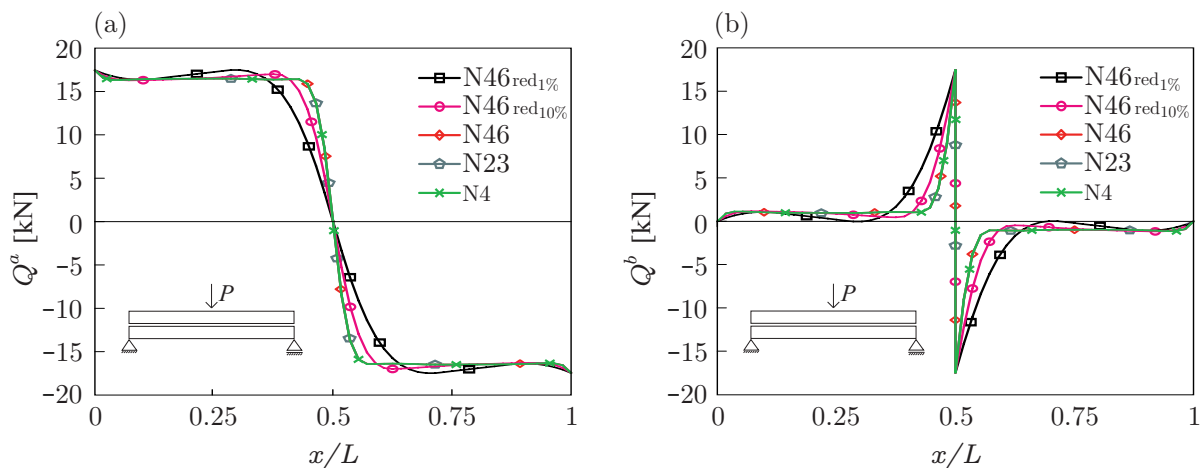
Slika 2.32(a) prikazuje vpliv nelinearnega zakona stika v normalni smeri na zdrs Δ . Opazimo lahko samo minimalen vpliv. Slika 2.32(b) prikazuje vpliv nelinearnega zakona stika v normalni smeri na razmik d . Opazimo lahko, da ima zmanjšanje tlačne togosti v normalni smeri pomemben vpliv na razmik d . Osnovne razporeditve žeblice imajo podoben raspored razmikov vzdolž nosilca, kar kaže na dejstvo, da je večina stika v normalni smeri vzdolž nosilca v tlačnem območju konstitutivnega zakona.

Slika 2.33(a) prikazuje vpliv nelinearnega zakona stika v normalni smeri na prečno silo Q^a spodnjega sloja. Podobno kot pri razmiku lahko opazimo, da različne osnovne razporeditve žeblice nimajo opaznega vpliva na rezultate, se pa pri reduciranih konstitutivnih zakonih opazi sprememba poteka prečne sile Q^a vzdolž nosilca na območju delovanja točkovne obtežbe. Podobno ugotovimo tudi za potek prečne sile Q^b v zgornjem sloju (slika 2.33(b)). V nadaljevanju upoštevamo enak nosilec kot do sedaj, spremenimo samo lego obtežbe. Točkovna sila deluje sedaj na spodnjem robu spodnjega nosilca. Še vedno je na sredini razpona nosilca in kaže v smeri globalne osi Z . Na sliki 2.34(a) prikazujemo vpliv nelinearnega zakona stika v normalni smeri na zdrs Δ . Tudi v tem primeru lahko vidimo, da je vpliv na rezultate zanemarljiv. Na sliki 2.34(b) prikazujemo vpliv nelinearnega zakona stika v normalni smeri na razmik d .



Slika 2.32: Zdrs Δ in razmik d na stiku za različne razporeditve žebeljev in različne tipe konstitutivnega zakona stika v normalni smeri (obtežba deluje na zgornjem sloju).

Figure 2.32: Slip Δ and uplift d distributions along the contact surface for different nail arrangements and different types of the normal contact traction-uplift relationships (load acting on the upper layer).

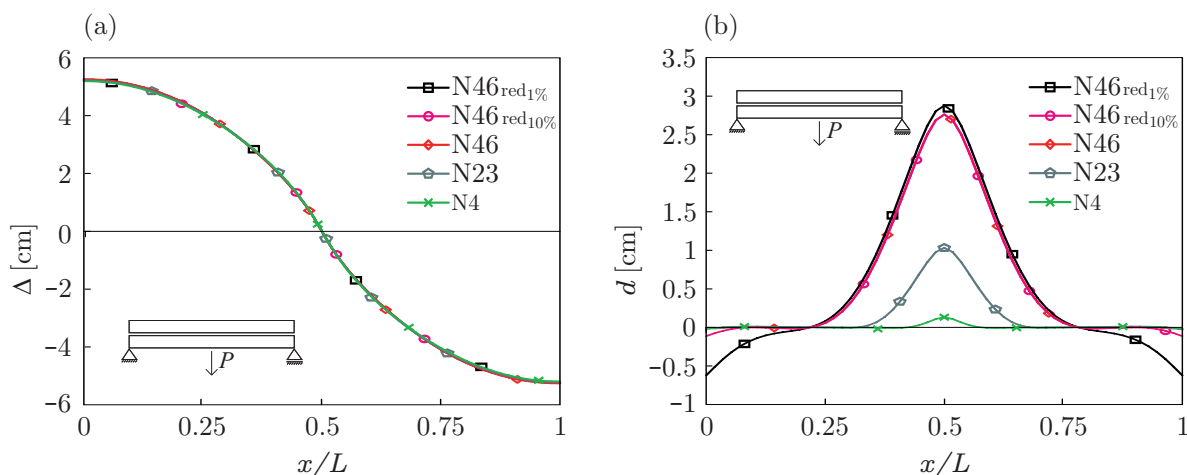


Slika 2.33: Vpliv različnih konstitutivnih zakonov stika v normalni smeri na prečni sili Q^a in Q^b (obtežba deluje na zgornjem sloju).

Figure 2.33: Influence of different normal contact traction-uplift relationships on shear forces Q^a and Q^b (load acting on the upper layer).

Izkaže se, da v tem obtežnem primeru izbira konstitutivnega zakona stika v normalni smeri pomembno vpliva na rezultate, saj pride v nosilcu večinoma do razmika med elementoma. Slika 2.35(a) prikazuje vpliv nelinearnega zakona stika v normalni smeri na prečno silo Q^a spodnjega sloja. Opazimo, da različne osnovne razporeditve žebeljev nimajo opaznega vpliva na rezultate, je pa opazen vpliv različnih tipov konstitutivnih zakonov stika v normalni smeri na potek prečne sile Q^b vzdolž nosilca. Omenimo še, da je opazen podoben vpliv tudi na upogibne momente spodnjega in zgornjega sloja. Rezultatov za upogibne momente tukaj ne prikazujemo.

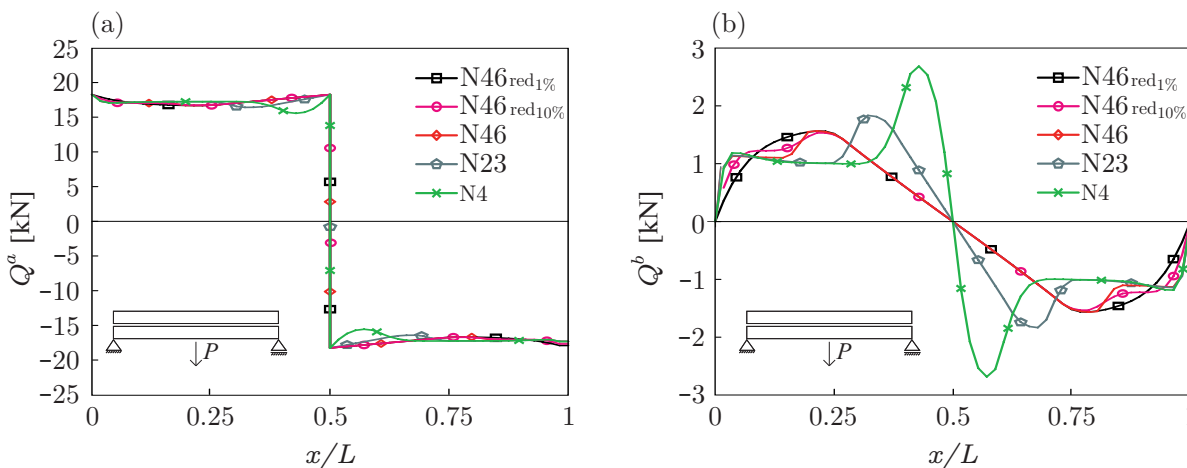
Dvoslojni leseni kontinuirni nosilec preko dveh polj. V tem poglavju obravnavamo dva različna obtežna primera. V prvem primeru sila $P = 33.7$ kN deluje na zgornjem sloju na sredini prvega razpona



Slika 2.34: Vpliv različnih konstitutivnih zakonov stika v normalni smeri na prečni sili Q^a in Q^b (obtežba deluje na spodnjem sloju).

Figure 2.34: Influence of different normal contact traction-uplift relationships on shear forces Q^a and Q^b (load acting on the bottom layer).

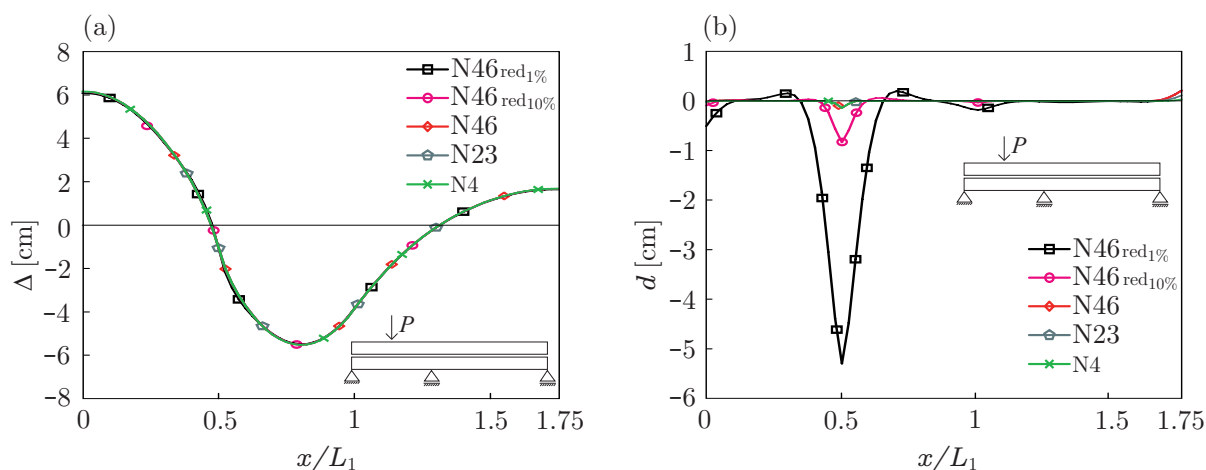
kontinuirnega nosilca. V drugem primeru silo samo prestavimo z zgornjega roba zgornjega na spodnji rob spodnjega nosilca. Celotna dolžina kontinuirnega nosilca je $L = 700$ cm. Dolžina prvega polja kontinuirnega nosilca je $L_1 = 400$ cm, drugega pa $L_2 = 300$ cm. Vsi drugi materialni in geometrijski parametri so enaki kot pri prostoležečem nosilcu, predstavljenem v poglavju 2.3.1 (slika 2.7).



Slika 2.35: Vpliv različnih konstitutivnih zakonov stika v normalni smeri na prečni sili Q^a in Q^b (obtežba deluje na spodnjem sloju).

Figure 2.35: Influence of different normal contact traction-uplift relationships on shear forces Q^a and Q^b (load acting on the bottom layer).

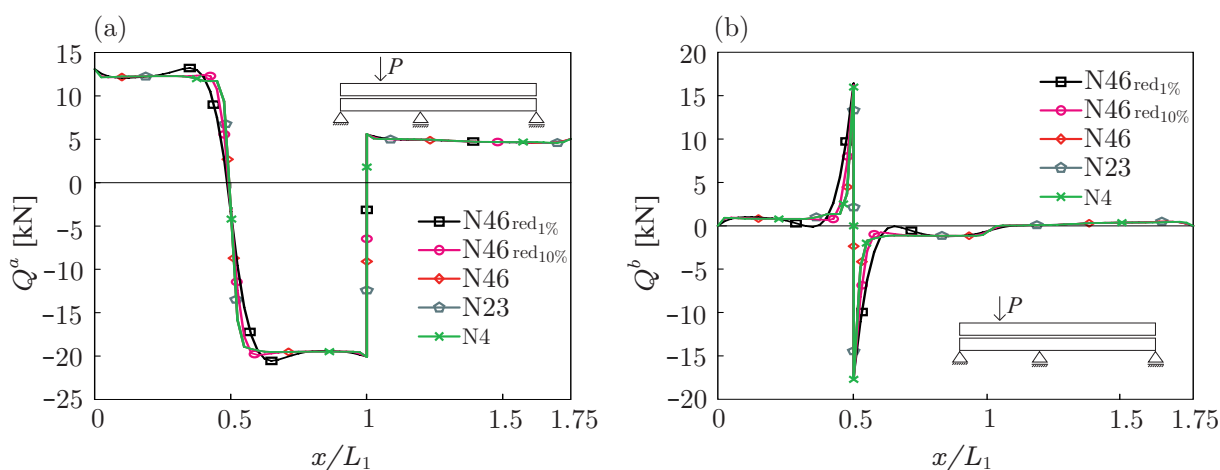
Na sliki 2.36(a) lahko vidimo, da tudi v primeru kontinuirnega nosilca konstitutivni zakon stika v normalni smeri zanemarljivo vpliva na potek zdrsa. Na potek razmika pa pomembno vpliva redukcija v tlaku pri konstitutivnih zakonih v normalni smeri stika (slika 2.36(b)).



Slika 2.36: Zdrs (Δ) in razmik (d) na stiku za različne tipe konstitutivnih zakonov v normalni smeri na stiku (obtežba deluje na zgornjem sloju).

Figure 2.36: Slip (Δ) and uplift (d) distribution along the contact for different types of normal contact traction–uplift relationships (load acts on the upper layer).

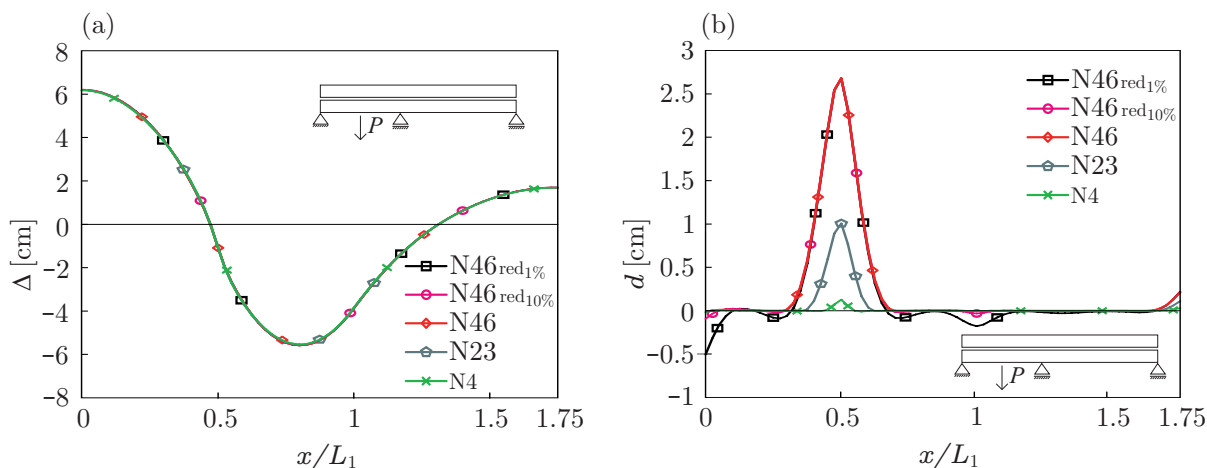
Slika 2.37(a) prikazuje, da je vpliv različnih razporeditev žebeljev v normalni smeri stika na prečno silo spodnjega sloja Q^a zanemarljiv. Lokalno lahko opazimo manjše spremembe poteka prečne sile pri reduciranih konstitutivnih zakonih. Tudi pri prečni sili zgornjega sloja Q^b lahko opazimo vpliv različnih konstitutivnih zakonov v normalni smeri na stiku samo lokalno v okolici delovanja točkovne sile (slika 2.37(b)).



Slika 2.37: Vpliv različnih konstitutivnih zakonov stika v normalni smeri na prečni sili Q^a in Q^b (obtežba deluje na zgornjem sloju).

Figure 2.37: Influence of different normal contact traction–uplift relationships on shear forces Q^a and Q^b (load acts on the upper layer).

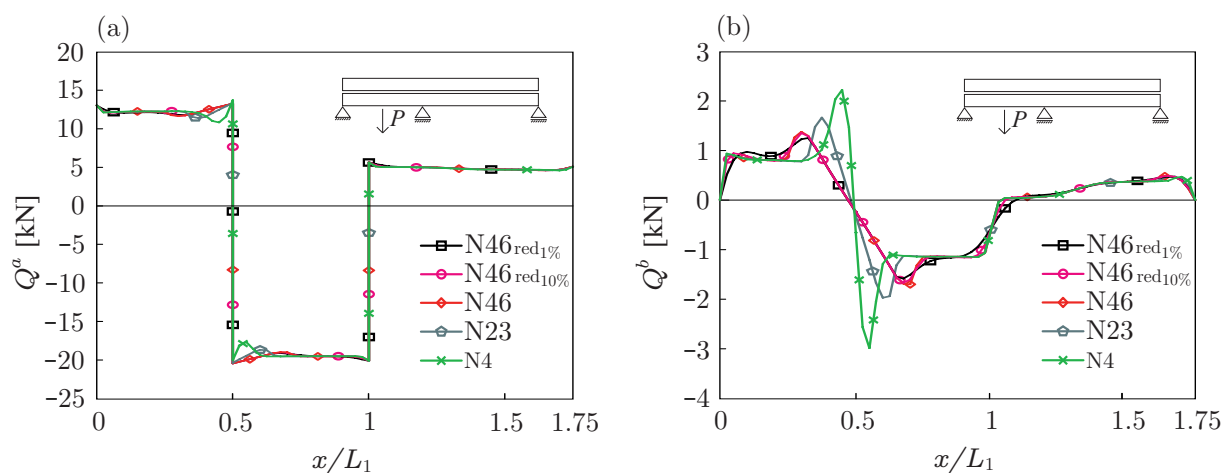
V nadaljevanju prikazujemo rezultate za kontinuirni nosilec, obremenjen s točkovno silo na spodnjem robu spodnjega sloja na sredini prvega razpona. Slika 2.38(a) kaže, da je vpliv različnih nelinearnih zakonov stika v normalni smeri na zdrs zanemarljiv, se pa izkaže, da tako kot v primeru prostoležečega nosilca potek razmika pogojuje izbira konstitutivnega zakona stika v normalni smeri (slika 2.38(b)).



Slika 2.38: Zdrs (Δ) in razmik (d) na stiku za različne tipe konstitutivnih zakonov v normalni smeri na stiku (sila deluje na spodnjem sloju).

Figure 2.38: Slip (Δ) and uplift (d) distribution along the contact for different types of normal contact traction-uplift relationships (force acts on the bottom layer).

Na koncu predstavljamo še vpliv izbranih konstitutivnih zakonov stika v normalni smeri na potek prečnih sil v slojih kontinuirnega nosilca. Izkaže se, da je vpliv na prečno silo v spodnjem sloju Q^a ponovno zanemarljiv (slika 2.39(a)), medtem ko je opazen vpliv na potek prečne sile v zgornjem sloju Q^b kontinuirnega nosilca (slika 2.39(b)).

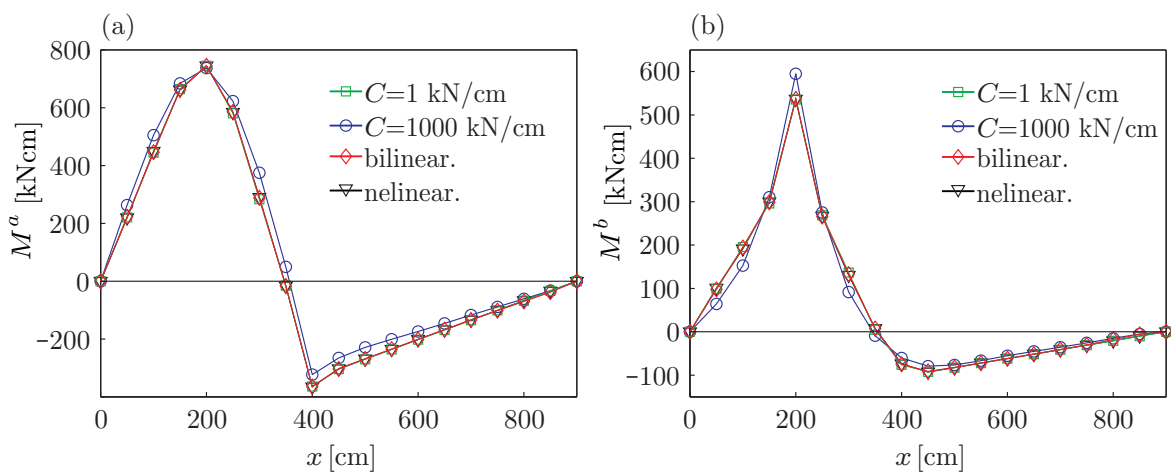


Slika 2.39: Vpliv različnih konstitutivnih zakonov stika v normalni smeri na prečni sili Q^a in Q^b (obtežba deluje na zgornjem sloju).

Figure 2.39: Influence of different normal contact traction-uplift relationships on shear forces Q^a and Q^b (load acts on the upper layer).

Dvoslojni sovprežni kontinuirni nosilec preko dveh polj. Nazadnje analiziramo še vpliv različnih konstitutivnih zakonov stika v normalni smeri e_n^* , predstavljenih na sliki 2.29(d), na različne notranje količine pri sovprežnem nosilcu, ki smo ga obravnavali v poglavju 2.3.2 (slika 2.28).

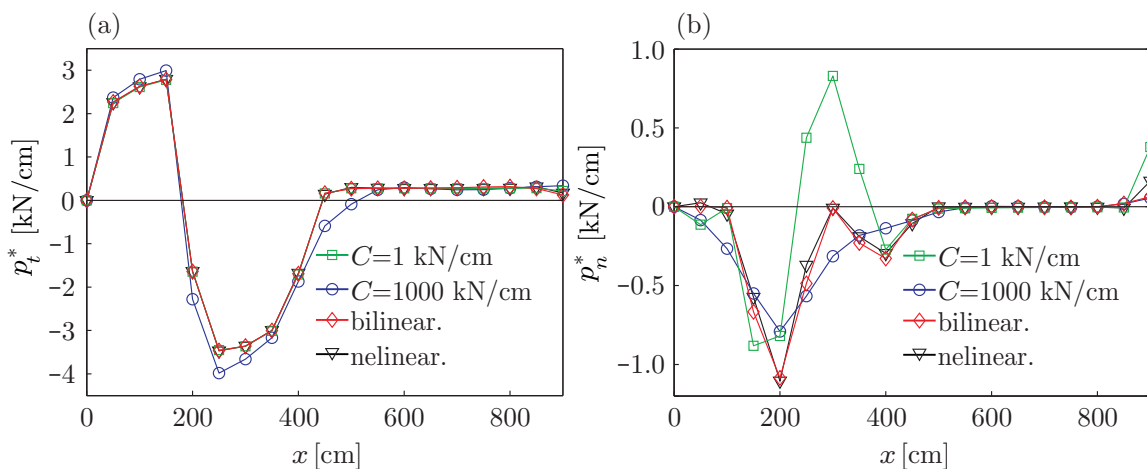
Zaradi natančnejše predstavitve rezultatov smo pri izračunu uporabili mrežo 20 končnih elementov E_4 , čeprav so rezultati dovolj natančni že pri bolj grobi mreži končnih elementov. Na sliki 2.40 predstavljamo potek notranjih momentov obeh slojev (M^a in M^b) za različne upoštevane konstitutivne zakone stika v normalni smeri. Ugotovimo, da je vpliv različnih kontaktnih konstitutivnih modelov na statične količine zanemarljiv. Slika 2.41 prikazuje vpliv različnih konstitutivnih zakonov stika v normalni smeri e_n^* na



Slika 2.40: Vpliv različnih konstitutivnih zakonov stika v normalni smeri na M^a in M^b .

Figure 2.40: Effect of different normal contact laws on M^a and M^b .

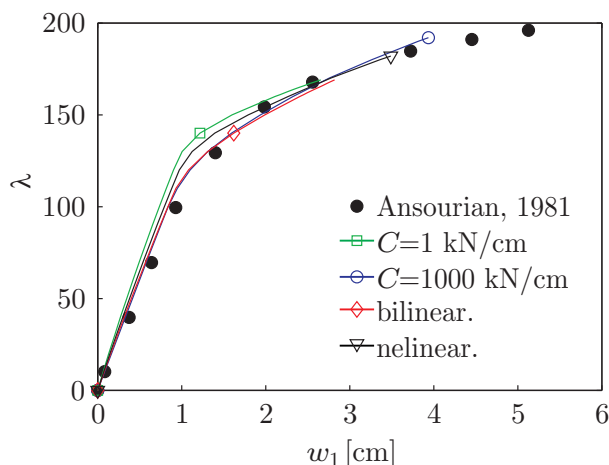
obtežbo stika v tangentsni (p_t^*) in normalni smeri (p_n^*). Kot je razvidno iz slike 2.41(a), je vpliv na p_t^* zanemarljiv, česar pa ne moremo trditi za p_n^* , kjer je pri podajnem tipu povezave p_n^* precej drugačen kot pri togi povezavi. Opozorimo, da so največje razlike omejene na lokalno območje okoli delovanja točkovne obtežbe.



Slika 2.41: Vpliv različnih konstitutivnih zakonov stika v normalni smeri na p_t^* in p_n^* .

Figure 2.41: Effect of different normal contact laws on p_t^* and p_n^* .

Analiziramo tudi vpliv vrste konstitutivnega zakona stika v normalni smeri na obtežno-deformacijsko krivuljo. Upoštevamo dva linearna (s tangentskim modulom $C^* = 1 \text{ kN/cm}^2$ in $C^* = 1000 \text{ kN/cm}^2$), bilinearni ($C_c^* = 100 \text{ kN/cm}^2$ in $C_t^* = 1 \text{ kN/cm}^2$) in nelinearni ($C_c^* = 100 \text{ kN/cm}^2$, $C_{t1}^* = 40 \text{ kN/cm}^2$, $C_{t2}^* = 13.33 \text{ kN/cm}^2$, $d_{t1}^* = 0.25 \text{ cm}$ in $d_{tu}^* = 1 \text{ cm}$) konstitutivni zakon stika. Primerjavo rezultatov prikazujemo na sliki 2.42. Kot lahko vidimo na sliki 2.42, je posledica zmanjšane togosti stika zmanjšana nosilnost in duktilnost nosilca. Prav tako lahko vidimo, da ima izbira konstitutivnega modela v normalni smeri stika majhen vpliv na obtežno-deformacijsko krivuljo v območju linearnih deformacij.



Slika 2.42: Primerjava obtežno-deformacijskih krivulj za navpični pomik pri točki 1 in 2.
Figure 2.42: Comparison of load-deflection curves of vertical displacement at points 1 and 2.

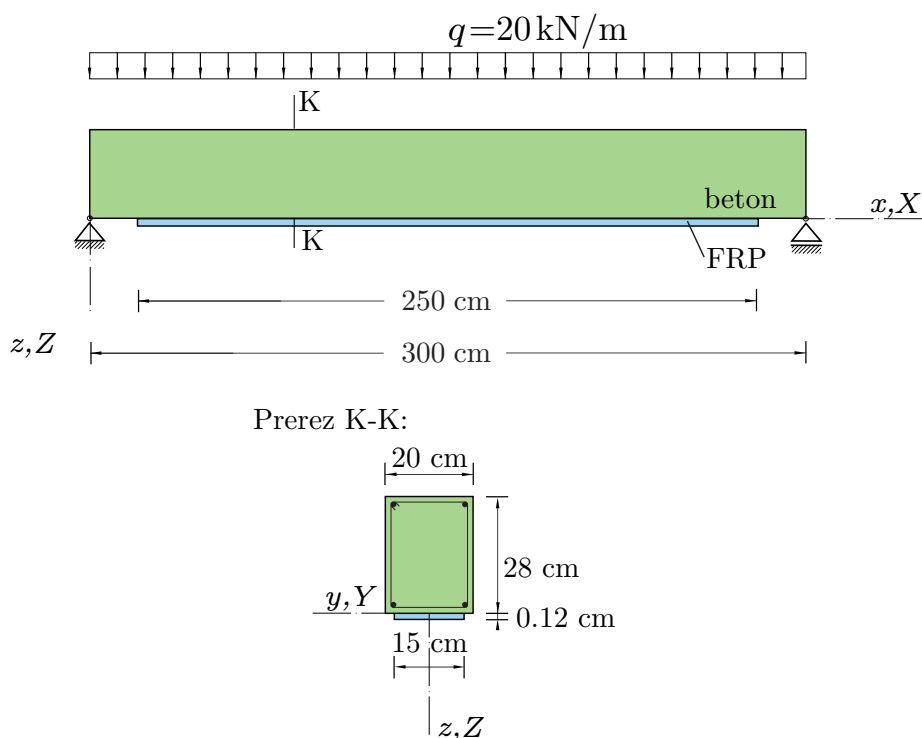
2.3.4 Prostoležeči armiranobetonski nosilec, ojačan s FRP-trakovi, in sovprežni nosilec – analiza lezenja in krčenja

V prvem primeru primerjamo numerične rezultate časovnega odziva obnašanja dvoslojnega geometrijsko nelinearnega elastičnega prostoležečega nosilca pod vplivom delovanja lezenja betonskega sloja s Hamedovo in Bradfordovo numerično rešitvijo (2010). Obtežbo in geometrijo obravnavanega nosilca prikazujemo na sliki 2.43.

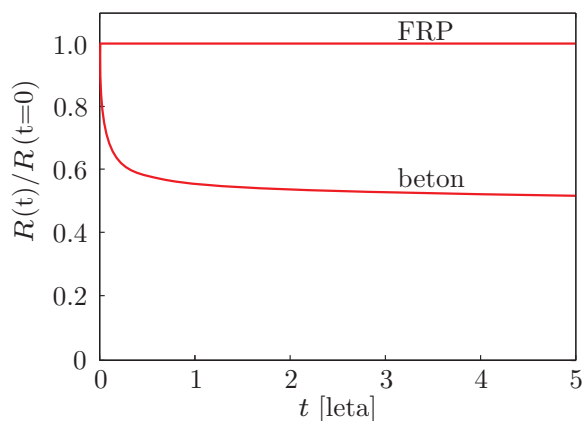
V predstavljenem primeru je predpostavljeno, da je bil betonski nosilec po 20 letih ojačan s FRP-trakovi, dva tedna po ojačanju pa so ga dodatno obremenili. Privzeti modul elastičnosti betona je $E_c = 3100 \text{ kN/cm}^2$ in Poissonov količnik betona $\nu_c = 0.17$. Upoštevan časovno odvisen relaksacijski modul betona je prikazan na sliki 2.44 ($R(0) = E_c$). Po znanih matematičnih obrazcih lahko na podlagi znanega relaksacijskega modula izračunamo koeficient krčenja $\varphi(t)$, ki ga upoštevamo v našem izračunu.

Avtorji v izračunu privzamejo potek lezenja betona po standardu ACI Committee 209 (1982) z naslednjimi parametri: $\lambda = 0.6$, $c = 10$ dni, $\varphi(\infty, 7) = 2.35$.

Ker v našem matematičnem modelu ne moremo predpisati konstitutivnega zakona stika na nivoju napetosti in deformacij, dejansko ne moremo upoštevati predpisanega adhezijskega reološkega modela. Privzamemo kar linearni konstitutivni zakon stika v tangencialni ($K^* = 4000 \text{ kN/cm}^2$) in normalni smeri ($C^* = 1000 \text{ kN/cm}^2$). V našem matematičnem modelu upoštevamo geometrijsko nelinearno teorijo brez upoštevanja vpliva strižnih deformacij.

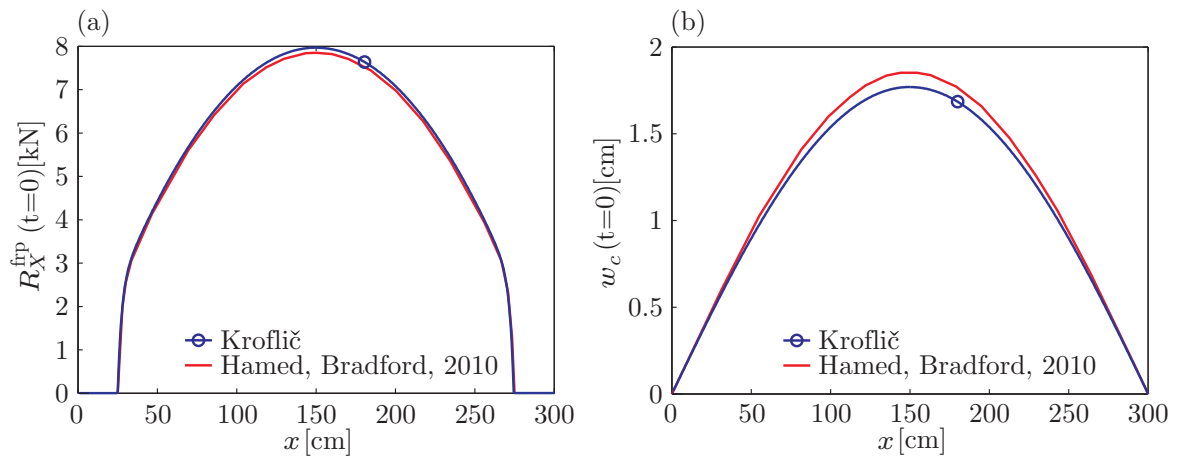


Slika 2.43: Obtežba, geometrijske in materialne lastnosti.
Figure 2.43: Geometry, material properties and load.

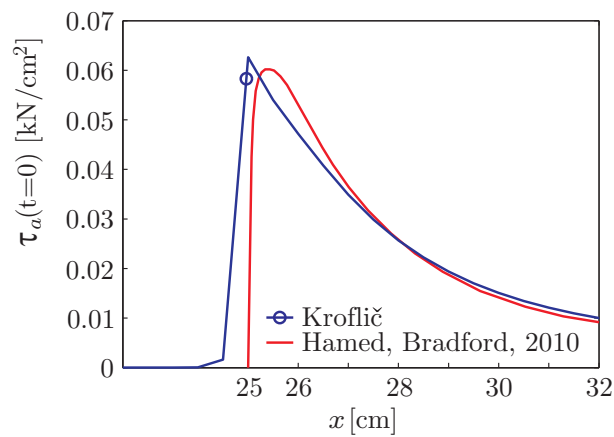


Slika 2.44: Normaliziran relaksacijski modul lezenja (Hamed, Bradford, 2010).
Figure 2.44: Normalized creep relaxation modulus (Hamed, Bradford, 2010).

Na sliki 2.45 prikazujemo primerjavo osne sile v FRP-traku vzdolž nosilca R_X^{FRP} (slika 2.45(a)) in navpičnega pomika betonskega sloja nosilca w_c (slika 2.45(b)) ob nanosu obtežbe ($t = 0$). V obeh primerih lahko ugotovimo zelo dobro ujemanje rezultatov. Prav tako ugotovimo dobro ujemanje numeričnih rezultatov tangencialne napetosti (τ_a) na stiku slojev nosilca na robu FRP-traku (slika 2.45). Iz tega lahko sklepamo, da se adhezivni sloj v tangencialni smeri obnaša dejansko togo.

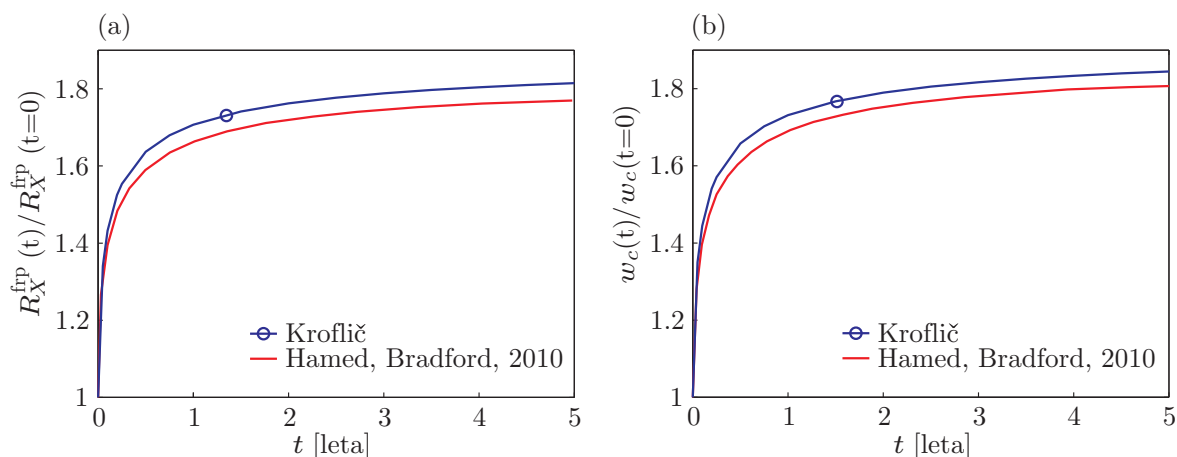


Slika 2.45: Začetni odziv: (a) osna sila v FRP-traku (R_X^{frp}) in (b) navpični pomik betonskega sloja (w_c).
Figure 2.45: Instantaneous response: (a) FRP axial force (R_X^{frp}) and (b) vertical deflection of concrete layer (w_c).



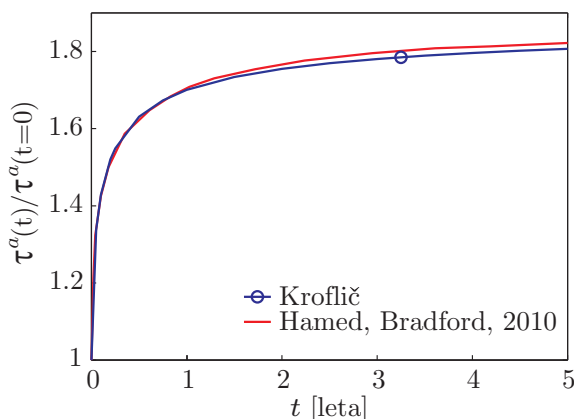
Slika 2.46: Tangencialna napetost na stiku slojev nosilca na koncu FRP-traku ($t = 0$).
Figure 2.46: Tangential contact stress at the end of FRP strip ($t = 0$).

Na sliki 2.47 lahko opazujemo časovni potek normirane maksimalne osne sile v FRP-traku (slika 2.47(a)) in normiran potek maksimalnega navpičnega pomika betonskega sloja (slika 2.47(b)). Prav tako ugotovimo zelo dobro ujemanje časovnega poteka normirane maksimalne tangentialne napetosti na stiku slojev (2.48).



Slika 2.47: Normiran časovni odziv lezenja: (a) maksimalna osna sila v FRP-traku in (b) maksimalen navpični pomik betonskega sloja.

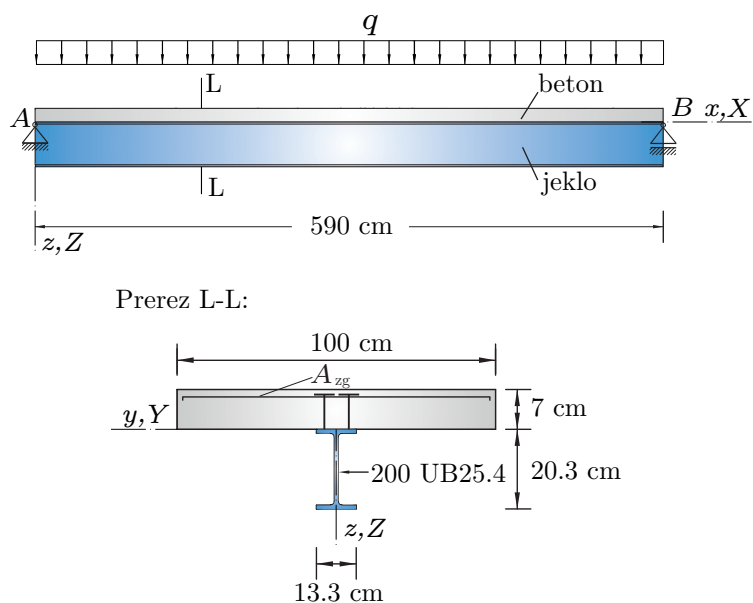
Figure 2.47: Normalized creep response: (a) maximum FRP axial force and (b) maximum vertical deflection of concrete layer.



Slika 2.48: Normiran časovni odziv lezenja maksimalne tangentne napetosti na stiku slojev.

Figure 2.48: Normalized creep response of peak shear stress at adhesive layer.

V naslednjem primeru primerjamo numerično rešitev z Bradfordovimi in Gilbertovimi eksperimentalnimi rezultati (Bradford, Gilbert, 1991a, Bradford, Gilbert, 1991b) in numerično rešitvijo Jurkiewieza in sodelavcev (2005). Geometrijske karakteristike in potek obtežbe obravnavanega sovprežnega nosilca prikazujemo na sliki 2.49. Opravka imamo s štirimi različnimi primeri (B1 – B4), ki se razlikujejo po tipu obtežbe (q) in tipu strižne povezave. Razlike med obravnavanimi primeri prikazujemo v preglednici 2.6. V vseh primerih v izračunu upoštevamo lastno težo nosilca.



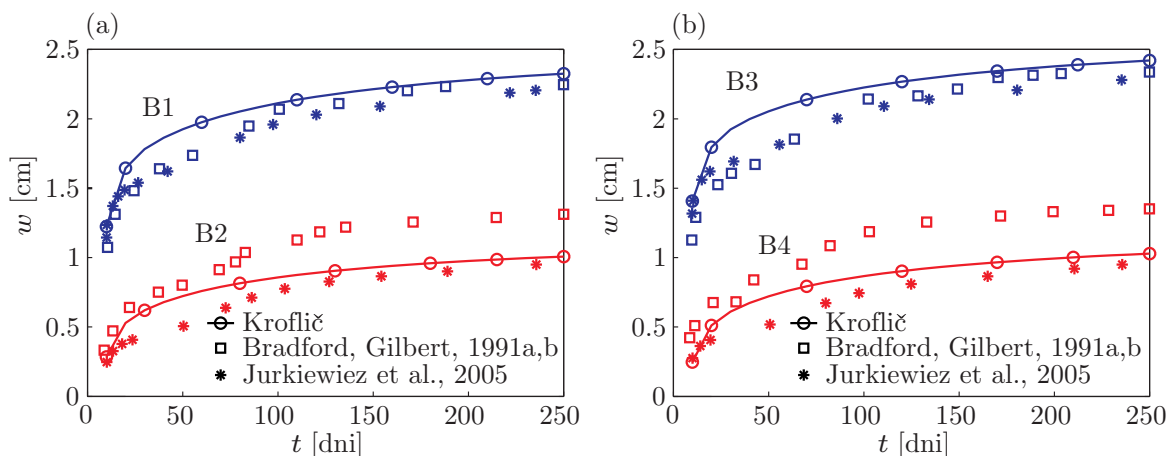
Slika 2.49: Obravnavani preizkušane (Bradford, Gilbert, 1991a, Bradford, Gilbert, 1991b).
Figure 2.49: Description of the tested beam (Bradford, Gilbert, 1991a, Bradford, Gilbert, 1991b).

Preglednica 2.6: Privzeti koeficient togosti K^* v tangencialni smeri stika in koristna obtežba q na nosilec.
Table 2.6: Tangential stiffness K^* of contact in tangential direction and superimposed load q on the beam.

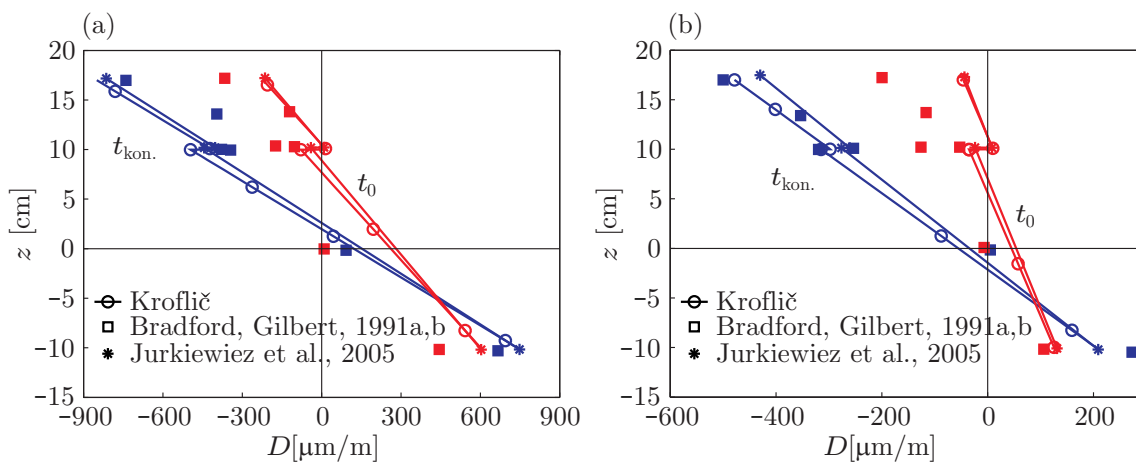
Nosilec	B1	B2	B3	B4
K^* [kN/cm ²]	42	42	14	14
q [kN/m]	7.52	0	7.52	0

Privzamemo linearni konstitutivni zakon stika v tangencialni smeri z vrednostmi K^* za posamezni obravnavani primer, kot je predstavljeno v preglednici 2.6, in tog stik v normalni smeri stika s $C^* = 1000$ kN/cm². Privzamemo linearno elastično obnašanje jeklenega nosilca z $E_s = 20000$ kN/cm². Za betonski sloj privzamemo linearno viskoelastični material s privzeto funkcijo lezenja po standardu CEB-FIB (1990) s privzetimi parametri $f_{ck} = 31.1$ MPa, $s = 0.25$, $RH = 50\%$, $h_0 = 6.975$ cm, $t_0 = 10$ dni. Funkcijo krčenja, za katerega privzamemo, da se pojavi po $t = 10$ dni, povzamemo iz meritev na cilindričnih vzorcih (Bradford, Gilbert, 1992). V betonskem delu nosilca upoštevamo armaturo $A_{zg} = 1.413$ cm² (slika 2.49). V izračunu upoštevamo geometrijsko nelinearno teorijo brez upoštevanja vpliva strižnih deformacij.

Na slikah 2.50(a) (eksperiment B1 in B2) in 2.50(b) (eksperiment B3 in B4) prikazujemo časovni razvoj pomika na sredini nosilca za štiri različne tipe obtežbe. Vidimo, da se eksperimentalni in numerični rezultati dobro ujemajo. Razlike med rezultati lahko izhajajo iz drugačnih modelov nosilcev, vzrok pa je lahko tudi izbira časovnih funkcij lezenja in krčenja.

Slika 2.50: Pomik na sredini nosilca w .Figure 2.50: Mid-span deflection w .

Na sliki 2.51 prikazujemo razvoj vzdolžnih deformacij D po prerezu na sredini nosilca za preizkušanece B1 (slika 2.51(a)) in preizkušanece B4 (slika 2.51(b)). Pri tem oznaka t_0 pomeni rezultate pri začetnem času ob nanosu obtežbe in t_{kon} deformacije pri času na koncu opazovanega časovnega intervala. Ugotovimo lahko, da se numerični rezultati dobro ujemajo, prihaja pa do določenih odstopanj med numeričnimi in eksperimentalnimi rezultati.

Slika 2.51: Vzdolžna deformacija D^i na sredini sovprežnega nosilca: (a) preizkušanece B1 in (b) preizkušanece B4.Figure 2.51: Longitudinal strain D^i at the mid-span of a steel-concrete beam: (a) specimen B1 and (b) specimen B4.

2.3.5 Prostoležeči sovprežni nosilec – analiza mehčanja

Coleman in Spacone (2001) navajata, da lahko koncept konstantne energije porušitve, ki je v literaturi že splošno uporaben pri natezno obremenjenem betonu (Bažant, Oh, 1983, Bažant, Planas, 1998), uporabimo tudi pri mehčanju tlačno obremenjenih nosilcev. Čeprav koncept konstantne energije porušitve pri

tlačno obremenjenem betonu še ni tako splošno v veljavi, kot velja to za natezno obremenjeni beton, pa so eksperimentalne raziskave (Jansen, Shah, 1997, [Lee, William, 1997]) in Markesetovi in Hillerborgovi analitični modeli (1995) pokazali, da teorija drži tudi za lokalizacijo tlačno obremenjenih elementov.

Osnovna naloga procesa regularizacije je tako vpeljava dodatnega materialnega parametra – energije porušitve v tlaku (\mathcal{G}_f^i) – v konstitutivni zakon betona sloja i večslojnega kompozitnega nosilca, ki jo definiramo kot

$$\mathcal{G}_f^i = \int \sigma_c^i du_p^i, \quad (2.225)$$

kjer σ_c^i predstavlja napetost v betonu in u_p^i neelastični pomik. Integral dejansko predstavlja površino pod postkritičnim delom konstitutivnega diagrama napetost-pomik.

Za splošno uporabo koncepta energije porušitve zapišemo gornji izraz v odvisnosti od napetosti in deformacij:

$$\mathcal{G}_f^i = h^i \int \sigma_c^i dD_p^i, \quad (2.226)$$

kjer dD_p^i predstavlja neelastično deformacijo in h^i dolžino območja mehčanja betonskega sloja i večslojnega linijskega kompozitnega nosilca. Za določitev dolžine območja mehčanja moramo poznati vrednosti energije porušitve \mathcal{G}_f^i .

Za običajne betone izberemo priporočeno vrednost tlačne energije porušitve betona na intervalu $\mathcal{G}_f^i = 20 - 30$ N/mm. Coleman in Spacone (2001) predlagata za objeti beton vrednost tlačne porušne energije $\mathcal{G}_f^i = 180$ N/mm. Na osnovi poznanih vrednosti energij porušitve lahko iz poznane oblike konstitutivnega zakona betona določimo računsko dolžino območja mehčanja.

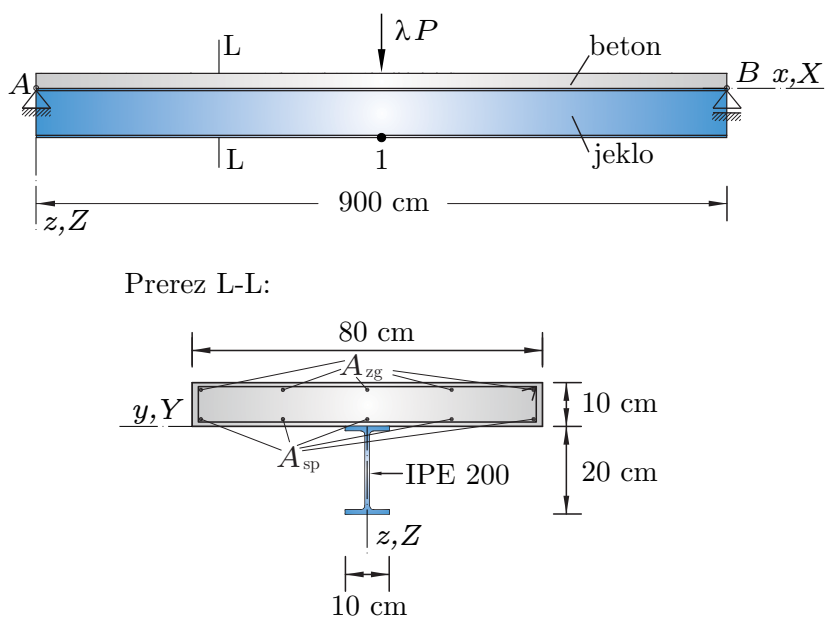
Primer mehčanja betonskega dela prereza sovprežnega nosilca. V tem poglavju obravnavamo primer mehčanja sovprežnega nosilca iz jekla in betona. S predstavljenim primerom želimo predvsem opozoriti na splošnost predstavljenega numeričnega modela. Raziskav o vplivu mehčanja prečnih prerezov na obnašanje sovprežnih konstrukcij s podajnim stikom zaenkrat v znanstveni literaturi nismo zasledili, zato dejanska primerjava z eksperimentalnimi oz. numeričnimi rezultati iz literature ni bila mogoča.

Obravnavamo primer prostoležečega sovprežnega nosilca dolžine $L = 900$ cm, ki ga prikazujemo na sliki 2.52. Spodnji sloj nosilca je prostoležeče podprt. Nosilec je obremenjen s točkovno silo $\lambda P = \lambda \cdot 1$ kN na zgornjem robu zgornjega sloja na sredini razpona nosilca, ki kaže v smeri globalne osi Z .

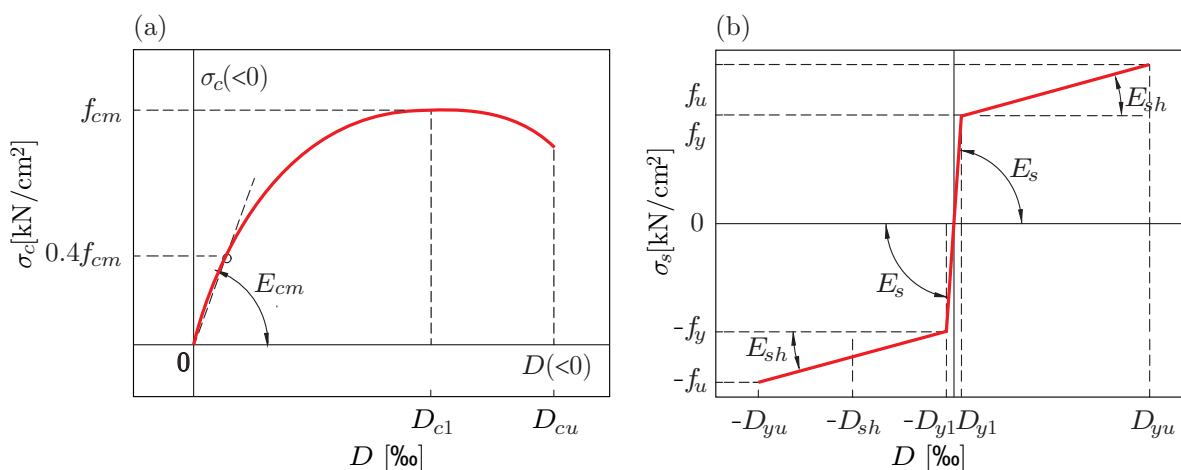
Privzamemo linearni konstitutivni zakon na stiku tako v tangencialni kot tudi normalni smeri. Pri tem privzamemo vrednost modula zdrsa $K^* = 50$ kN/cm² in modula razmika $C^* = 50$ kN/cm².

V izračunu upoštevamo nelinearni konstitutivni zakon betona v skladu s standardom Eurocode 2 (2005); prikazujemo ga na sliki 2.53(a). Pri tem smo upoštevali naslednje parametre: $f_{cm} = 3.8$ kN/cm², $D_{c1} = -2.2$ ‰, $D_{cu} = -3.5$ ‰, $E_{cm} = 3100$ kN/cm² in $G_c = 2100$ kN/cm². Kot lahko razberemo iz podanih parametrov, upoštevamo v izračunu vpliv strižnih deformacij na obnašanje nosilca. Betonski sloj je armiran tudi z armaturnimi palicami na zgornjem in spodnjem delu prereza, pri čemer privzamemo $A_{zg} = 8.0$ cm² in $A_{sp} = 3.16$ cm². Konstitutivni zakon armaturnega jekla prikazujemo na sliki 2.53(b), pri čemer privzamemo v izračunu naslednje parametre: $E_s = 21000$ kN/cm², $E_{sh} = 600$ kN/cm², $f_y^{arm} = 43$ kN/cm² in $D_{yu} = 0.029$.

Privzeli smo enak konstitutivni model jeklenega nosilca kot pri armaturi (2.53(b)), s tem da smo upoštevali drugačne osnovne parametre konstitutivnega zakona: $E_s = 21000$ kN/cm², $G_s = 7800$ kN/cm², $E_{sh} = 600$ kN/cm², $f_y^{arm} = 27.7$ kN/cm² in $D_{yu} = 0.2$. Tako kot pri betonskem nosilcu tudi



Slika 2.52: Jekleno-betonski sovprežni nosilec.
Figure 2.52: Steel-concrete composite beam.



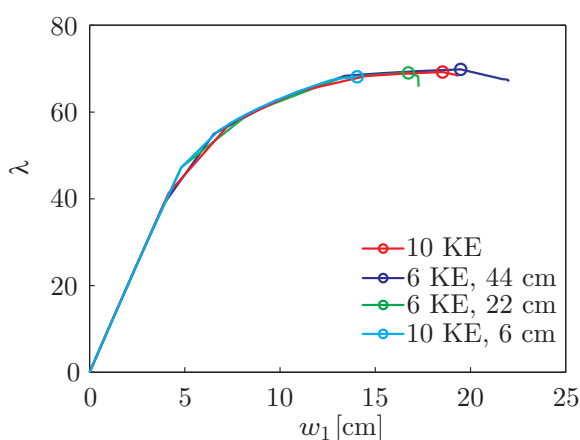
Slika 2.53: Konstitutivni zakoni: (a) nelinearni zakon betona (Eurocode 2, 2005) in (b) bilinearni zakon jekla.

Figure 2.53: Constitutive relationships: (a) non-linear concrete (Eurocode 2, 2005) and (b) bilinear steel.

pri jeklenem nosilcu upoštevamo vpliv strižnih deformacij v izračunu. Pri vseh materialnih modelih upoštevamo tudi možnost izotropnega utrjevanja materiala, kar je pri mehčanju betonskih prerezov nujno, saj v elementih, ki so izven območja mehčanja, navadno pride do razbremenitev.

V izračunu smo reševali diskretne ravnotežne enačbe konstrukcije z metodo ločne dolžine, katere algoritem smo podrobneje predstavili v poglavju 2.2.2. Privzeti osnovni parametri, ki so bili pri vseh izračunih enaki, so: $\delta\lambda(1) = 5$, $\lambda(1) = 0$, $\mathbf{W} = \mathbf{I}$ (enotska matrika), $\mathbf{H} = \mathbf{0}$, $\epsilon_u = 10^{-9}$, $\epsilon_f = 10^{-4}$, $ds(1) = 0$, $ds_{min} = 10^{-6}$, $ds_{max} = 20$ in $\beta = 0.5$. Parameter I v izračunu prilagajamo v vsakem koraku, zato bomo vrednosti parametra podali pri obravnavi primerov.

Na sliki 2.54 prikazujemo obtežno-deformacijsko krivuljo obravnavanega primera. Pri tem smo upoštevali štiri različne razporeditve končnih elementov v numeričnem izračunu. Najprej smo izračunali obtežno-deformacijsko krivuljo za primer uporabe navadne mreže 10 končnih elementov tipa E_4 . Z metodo ločne dolžine smo v 15 korakih izračunali obtežno-deformacijsko krivuljo. Pri tem smo vrednost parametra I prilagajali med vrednostma 10 in 12 glede na obtežni korak. Maksimalno vrednost obtežnega faktorja $\lambda = 69.2$ smo dosegli v 10. koraku pri pomiku $w_1 = 18.5$ cm, ki je vedno merjen na sredini razpona spodnjega nosilca. V 11. obtežnem koraku (označeno s krogcem na sliki 2.54) zaznamo negativno vrednost determinante konstitutivne matrike betonskega sloja prečnega prereza v integracijski točki najbližji mestu delovanja zunanje sile, kar nakazuje na mehčanje prereza. Prav tako je prišlo do zmanjšanja obtežnega faktorja na vrednost $\lambda = 68.6$. V zadnjem obtežnem koraku dosežemo $\lambda = 68.4$ in $w_1 = 19.4$ cm. Račun se nato prekine, ker postane prirast ločne dolžine ds manjši od predpisane minimalne vrednosti ds_{min} .



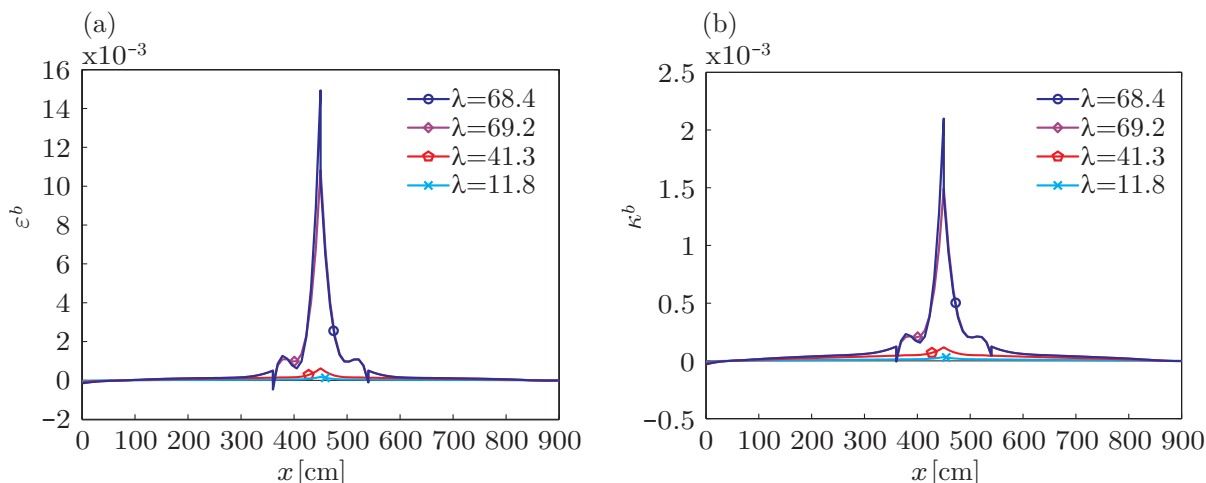
Slika 2.54: Obtežno-deformacijska krivulja.

Figure 2.54: Load-deflection curve.

Na sliki 2.55 prikazujemo potek osnih deformacij betonskega sloja ε^b (slika 2.55(a)) in psevdoukrivljenosti κ^b (slika 2.55(b)) vzdolž nosilca za različne nivoje obtežbe pri izbrani mreži 10 končnih elementov. Vidimo lahko, da v obeh primerih pride do nihanja deformacijskih količin v končnih elementih v okolici delovanja točkovne sile pri obtežnih nivojih blizu mehčanja prereza.

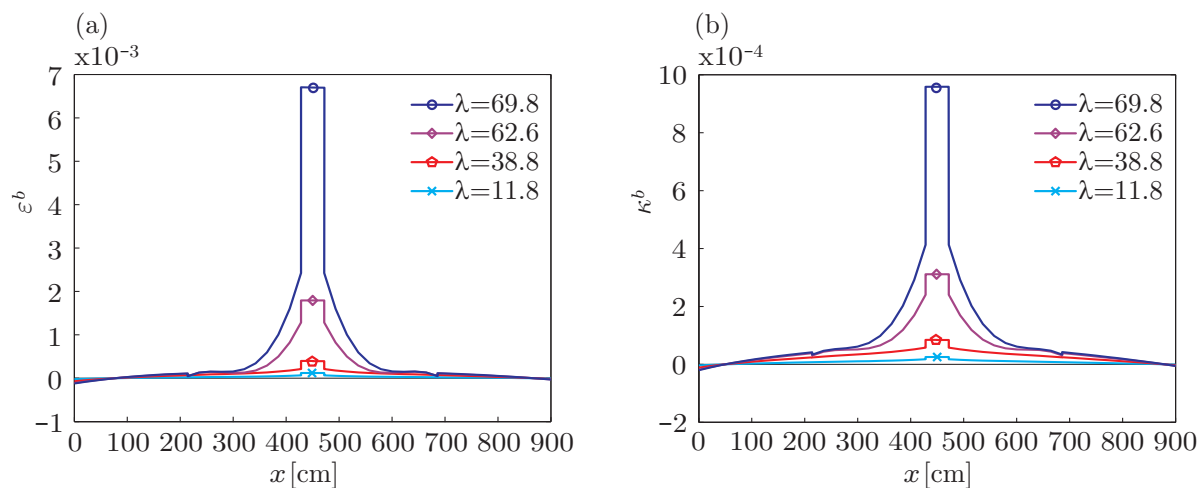
Iz enačbe (2.226) izračunamo dolžino območja mehčanja, pri čemer izberemo vrednost energije porušitve $\mathcal{G}_f^c = 23$ N/mm. Dobimo dolžino območja mehčanja 44 cm, ki jo upoštevamo v izračunu. Na sliki 2.54 tako prikazujemo rezultate za izbrani numerični model šestih končnih elementov, pri čemer območje mehčanja modeliramo z dvema konstantnima končnima elementoma dolžine 22 cm, preostali del nosilca pa modeliramo s štirimi končnimi elementi tipa E_4 . Vrednost parametra I smo ponovno prilagajali med vrednostma 10 in 12, odvisno od obtežnega koraka. V tem primeru dosežemo maksimalno vrednost obtežnega faktorja $\lambda = 69.8$ pri pomiku $w_1 = 21.7$ cm, ki prav tako kot v prejšnjem primeru predstavlja tudi začetek mehčanja betonskega prereza (označeno na sliki 2.54). V zadnjem obtežnem koraku dosežemo $\lambda = 67.0$ in $w_1 = 22.0$ cm. Račun se nato ponovno prekine, ker postane prirast ločne dolžine ds manjši od predpisane minimalne vrednosti ds_{min} .

Na sliki 2.56 prikazujemo še potek osnih deformacij betonskega sloja ε^b (slika 2.56(a)) in psevdoukrivljenosti κ^b (slika 2.56(b)) vzdolž nosilca za različne nivoje obtežbe za predstavljeno mrežo končnih elementov. Lahko opazimo, da v obeh primerih ni več pojava neustreznih nihanj deformacijskih količin ne glede na obtežni nivo.



Slika 2.55: Potek deformacijskih količin v betonu vzdolž nosilca za različne obtežne nivoje: (a) osne deformacije ε^b in (b) pseudoukrivljenosti κ^b .

Figure 2.55: Concrete deformation quantities along the length of the beam for different load levels: (a) axial strains ε^b and (b) pseudocurvatures κ^b .



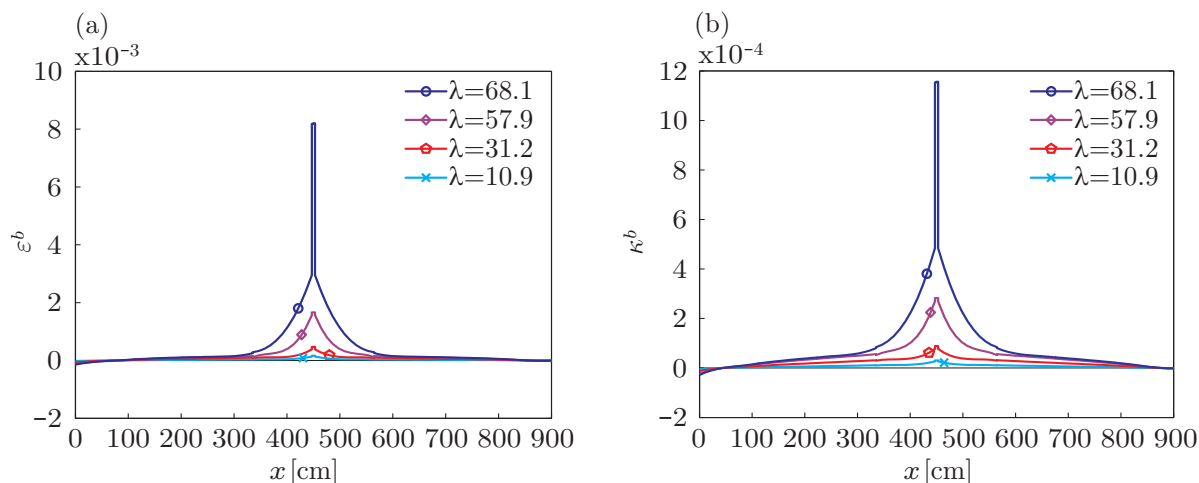
Slika 2.56: Potek deformacijskih količin v betonu vzdolž nosilca za različne obtežne nivoje pri dolžini območja mehčanja 44 cm: (a) osne deformacije ε^b in (b) pseudoukrivljenosti κ^b .

Figure 2.56: Concrete deformation quantities along the length of the beam for different load levels length of softening area 44 cm: (a) axial strains ε^b and (b) pseudocurvatures κ^b .

V nadaljevanju dodatno analiziramo vpliv dolžine kratkega elementa na obtežno-deformacijsko krivuljo, zato privzamemo še dve dolžini območja mehčanja, t. j. 22 cm in 6 cm. V obeh primerih modeliramo območje mehčanja z dvema kratkima končnima elementoma, s tem da preostalo območje v prvem primeru modeliramo s štirimi končnimi elementi, v drugem pa z osmimi končnimi elementi. V primeru dolžine območja mehčanja 22 cm dosežemo maksimalni obtežni faktor $\lambda = 68.4$ pri pomiku $w_1 = 17.2$ cm, ki predstavlja tudi točko začetka mehčanja prereza (označeno s krogcem na sliki 2.54). Pri dolžini območja mehčanja 6 cm dosežemo maksimalni obtežni faktor $\lambda = 68.11$ pri pomiku $w_1 = 14.05$ cm, ki predstavlja tudi točko pričetka mehčanja prereza (označeno s krogcem na sliki 2.54). V obeh primerih smo vrednost parametra I ponovno prilagajali med vrednostma 10 in 12, odvisno od obtežnega

koraka. V zadnjem obtežnem koraku dosežemo v prvem primeru $\lambda = 65.8$ in $w_1 = 17.3$ cm, v drugem pa $\lambda = 67.1$ pri pomiku $w_1 = 14.08$ cm. Račun se nato ponovno prekine, ker postane prirast ločne dolžine ds manjši od predpisane minimalne vrednosti ds_{min} .

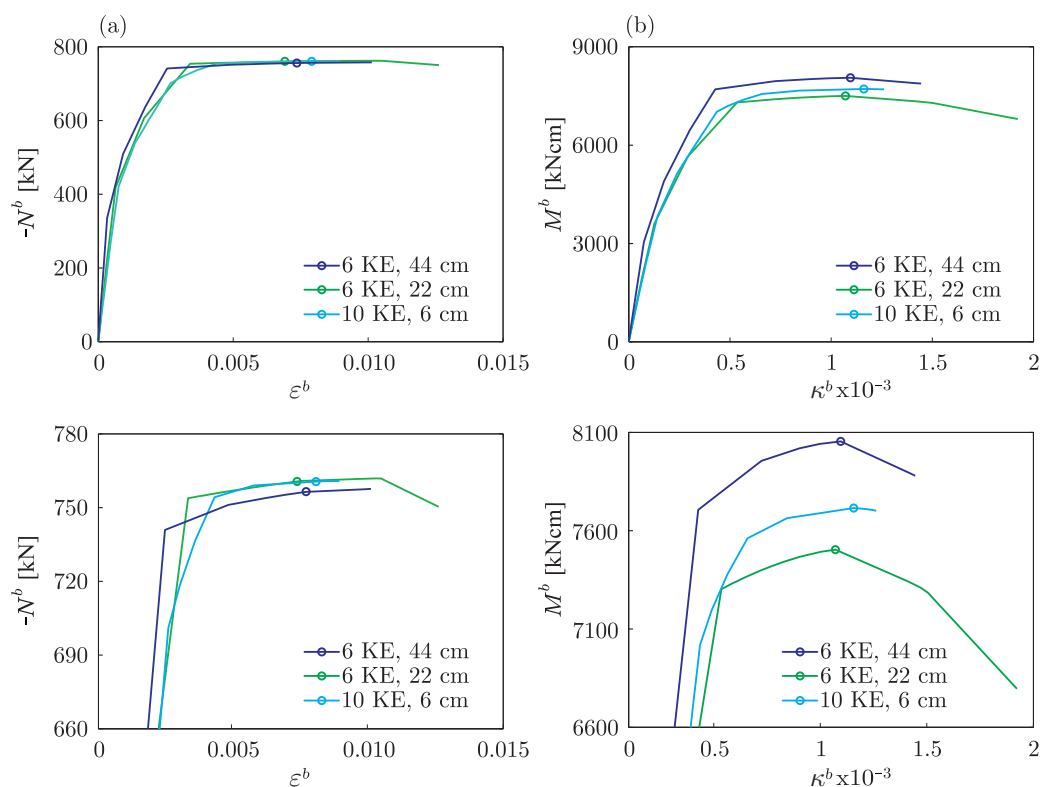
Na sliki 2.57 prikazujemo še potek deformacijskih količin vzdolž nosilca za privzeto mrežo končnih elementov z območjem mehčanja dolžine 6 cm. Tudi v tem primeru lahko vidimo, da ne pride več do neustreznih nihanj deformacij. Prav tako je proces mehčanja dejansko lokaliziran samo na območju kratkih elementov (skok deformacij).



Slika 2.57: Potek deformacijskih količin v betonu vzdolž nosilca za različne obtežne nivoje pri dolžini območja mehčanja 6 cm: (a) osne deformacije ε^b in (b) psevdoukrivljenosti κ^b .

Figure 2.57: Concrete deformation quantities along the length of the beam for different load levels at length of softening area 6 cm: (a) axial strains ε^b and (b) pseudocurvatures κ^b .

Sedaj prikažemo še potek osnih sil (slika 2.58(a)) in upogibnih momentov (slika 2.58(b)) v odvisnosti od osne deformacije ε^b oz. psevdoukrivljenosti κ^b v kratkem elementu med procesom deformiranja.



Slika 2.58: Kratki končni element: (a) diagram osna sila – osna deformacija ($N^b - \varepsilon^b$) in (b) upogibni moment – psevdoukrivljenosti ($M^b - \kappa^b$).

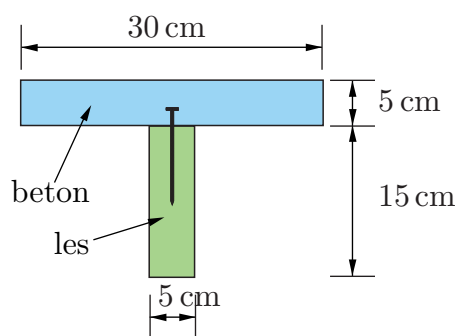
Figure 2.58: Short constant-strain finite element: (a) axial force-graph axial strain ($N^b - \varepsilon^b$) and (b) bending moment-pseudocurvature ($M^b - \kappa^b$).

Na zgornjih diagramih na slikah 2.58(a) in (b) prikazujemo razvoj količin med celotnim procesom deformiranja, na spodnjem diagramu pa zgolj zadnji del procesa deformiranja, da izraziteje prikažemo proces mehčanja. Na vseh diagramih smo s krogcem označili tudi točko začetka procesa mehčanja. Pri upogibnih momentih je lepo razvidno mehčanje betonskih prečnih prerezov, posebej pri upoštevanju dolžini območja mehčanja 22 cm in 44 cm.

2.3.6 Dvoslojni steber iz lesa in betona – Eulerjeve uklonske sile

V predzadnjem računskem primeru obravnavamo primer dvoslojnega stebra, sestavljenega iz betonskega in lesenega nosilca dolžine $L = 400$ cm. Geometrijske karakteristike obravnavanega primera prikazujemo na sliki 2.59. Oba sloja nosilca sta prostoležeče podprta. Privzete materialne karakteristike slojev so naslednje: elastični modul betona je $E_b = 1200$ kN/cm², strižni modul $G_b = 75$ kN/cm², elastični modul lesa $E_l = 800$ kN/cm² in strižni modul lesa $G_l = 50$ kN/cm². Privzamemo linearno obnašanje na stiku slojev nosilca tako v normalni kot tudi tangencialni smeri.

V preglednici 2.7 predstavljamo parametrično študijo vpliva tangencialne in normalne togosti stika na uklonsko nosilnost predstavljenega dvoslojnega nosilca. Uklonske sile smo dobili numerično z metodo bisekcije pri mreži osmih končnih elementov. Omenimo, da se rezultati zelo dobro ujemajo z analitično rešitvijo (Schnabl, Planinc, 2012).



Slika 2.59: Prečni prerez dvislojnega stebra iz lesa in betona.
Figure 2.59: Cross-section of a two-layer timber-concrete column.

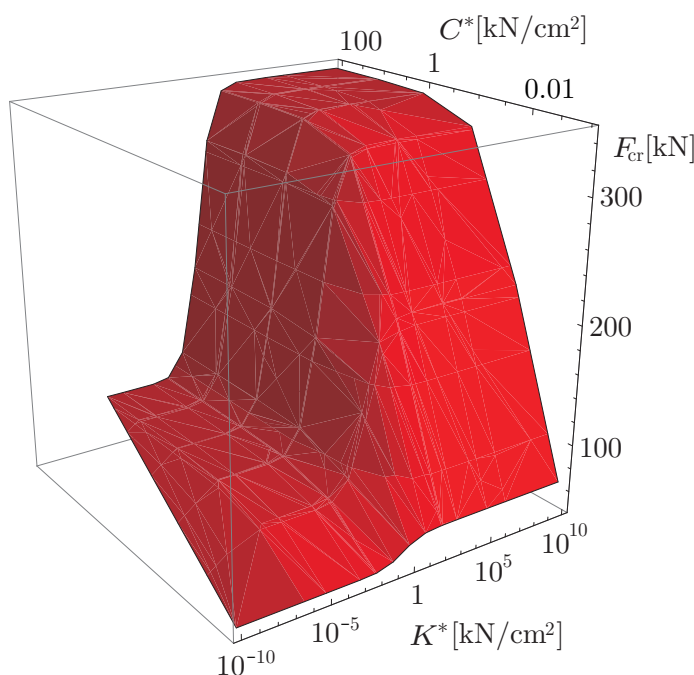
Preglednica 2.7: Vpliv tangентne in normalne togosti stika na uklonsko silo F_{cr} [kN] predstavljenega dvislojnega nosilca.

Table 2.7: Effect of tangential and normal contact stiffness on buckling load F_{cr} [kN] of considered two-layer composite beam.

K^* [kN/cm ²]	C^* [kN/cm ²]					
	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10	10^2
10^{-10}	47.5345	80.0741	89.7653	90.8817	90.9949	91.0062
10^{-5}	47.5352	80.0763	89.7681	90.8846	90.9978	91.0092
10^{-3}	47.6017	80.2956	90.0468	91.1705	91.2843	91.2958
10^{-2}	48.1800	82.2320	92.5180	93.7050	93.8254	93.8375
10^{-1}	52.2028	97.2572	112.3425	114.1205	114.3016	114.3198
1	60.9942	144.5576	184.5409	189.7579	190.2999	190.3548
10	66.3678	197.2588	286.9274	299.0829	300.3323	300.4580
10^2	67.5579	212.6040	323.7312	339.2761	340.8701	341.0300
10^3	67.7034	214.5552	328.7757	344.8332	346.4802	346.6453
10^5	67.7195	214.7604	329.3332	345.4500	347.1378	347.2870
10^{10}	67.7135	214.7626	329.3393	345.4564	347.1096	347.2937

Nazorneje predstavimo rezultate iz preglednice 2.7 na sliki 2.60. Ugotovimo lahko, da se pri togem stiku v normalni smeri uklonska nosilnost nosilca zelo poveča s povečanjem tangентne togosti. Nasprotno pa pri podajnem stiku v prečni smeri sprememba togosti v tangентni smeri ne vpliva pomembneje na povečanje uklonske sile. Izkaže se tudi, da pri togem stiku v tangencialni smeri uklonska nosilnost predstavljenega nosilca zelo naraste, če povečamo togost v normalni smeri.

V nadaljevanju analiziramo še vpliv nepovezanosti slojev na uklonsko nosilnost predstavljenega dvislojnega nosilca. Predpostavimo, da lahko pride na stiku nosilcev na določenem mestu do oslabitev. Dolžino oslabitve v tangencialni (vzdolžni) smeri označimo z $L_{d,K}$, dolžino oslabitve v normalni smeri pa $L_{d,C}$. Ker bomo analizirali samo vpliv dolžine, ne pa tudi vpliva lege oslabitve na uklonsko nosilnost, postavimo oslabitev vedno simetrično na sredino nosilca. V oslavljenem delu stika v določeni smeri torej privzamemo ničelno povezavo med slojema, v neoslavljenem delu stika pa pripišemo linearni konstitutivni zakon s togostma $K^* = 1$ kN/cm² in $C^* = 1$ kN/cm². V izračunu privzamemo naslednje dolžine oslabitve: $0.2L$, $0.4L$, $0.6L$, $0.8L$. Rezultate na sliki 2.61 smo normirali glede na uklonsko silo



Slika 2.60: Vpliv tangentne in normalne togosti stika na uklonsko silo F_{cr} dvoslojnega nosilca.
Figure 2.60: Effect of tangential and normal contact stiffness on buckling load F_{cr} of two-layer composite beam.

obravnavega dvoslojnega nosilca brez oslabeitev, ki znaša $F_{cr} = 189.7579$ kN. Lahko ugotovimo, da z večanjem dolžine oslabeitve uklonska sila pada ne glede na smer oslabeitve. Dolga oslabeitev povzroči zmanjšanje uklonske sile na manj kot 50 % vrednosti uklonske sile neoslabljenega nosilca.

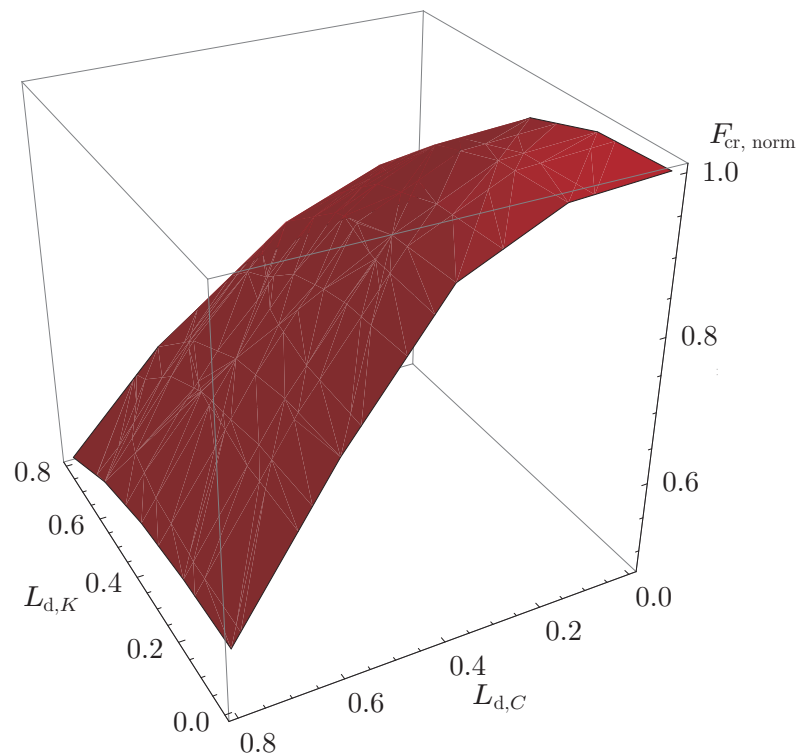
2.3.7 Večslojni kompozitni elastični prostoležeči nosilec – analitična rešitev

V zadnjem podpoglavju računskih primerov obravnavamo večslojne nosilce. V numeričnih izračunih upoštevamo linearizirano teorijo prvega reda večslojnih nosilcev, ki smo jo izpeljali v poglavju 2.1.6.

V prvem primeru bomo dobljeno analitično rešitev primerjali z numeričnimi in analitičnimi rezultati za analizo večslojnih kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa na stiku slojev, predstavila sta jih Sousa in da Silva (2010). Obravnavamo dva ločena primera: (a) trislojni in (b) štirislojni nosilec. V obeh primerih je obojestransko nepomično podprt samo spodnji sloj nosilca. Dolžina kompozitnega nosilca v obeh primerih znaša $L = 400$ cm, nosilec pa je obremenjen z zvezno linijsko obtežbo $q = 0.1$ kN/cm, ki deluje v obeh primerih na zgornjem robu zgornjega nosilca v smeri globalne osi Z . Prečni prerez obravnavanega trislojnega nosilca prikazujemo na sliki 2.62(a), štirislojnega pa na sliki 2.62(b).

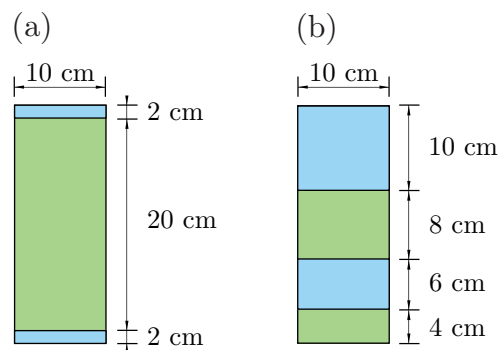
Trislojni nosilec je sestavljen iz betonskega jedra, na katerega sta pritrjeni jekleni plošči na spodnji in zgornji strani. Upoštevani elastični modul betona znaša $E_2 = 3450$ kN/cm², jekla pa $E_{1,3} = 20000$ kN/cm². Pri tem upoštevamo Poissonov količnik za beton $\nu_2 = 0.2$, za jeklo pa $\nu_{1,3} = 0.3$. Privzeti strižni modul spodnjega stika je $K^1 = 0.5$ kN/cm², medtem ko je zgornji stik znatno bolj tog s strižnim modulom $K^2 = 4$ kN/cm². Ker materialne karakteristike stika v prečni smeri niso podane, privzamemo za oba sloja togo obnašanje v prečni smeri.

Elastični modul vseh štirih slojev štirislojnega nosilca znaša $E_{1-4} = 5000$ kN/cm². Tudi privzeti strižni



Slika 2.61: Vpliv oslabitve stika v tangentialni in normalni smeri na velikost uklonske sile $F_{cr, norm}$ dvoslojnega nosilca.

Figure 2.61: Effect of contact weakening in tangential and normal direction on critical buckling load $F_{cr, norm}$ of two-layer composite beam.

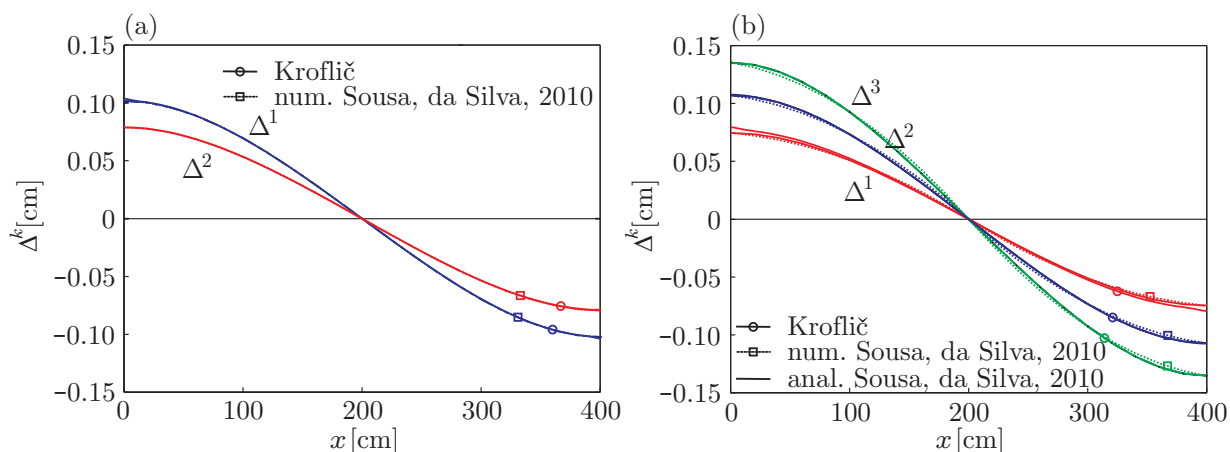


Slika 2.62: Prečni prerez kompozitnih nosilcev (Sousa, da Silva, 2010): (a) trislojni in (b) štirislojni. Figure 2.62: Cross-section of multilayer beams (Sousa, da Silva, 2010): (a) three-layer and (b) four-layer.

modul stika je za vse tri stike enak in znaša $K^{1-3} = 0.5 \text{ kN/cm}^2$. Tudi v tem primeru materialne karakteristike stika v prečni smeri niso podane, zato privzamemo togo obnašanje v prečni smeri vsakega stika. Manjka tudi podatek o strižnem modulu materiala, zato privzamemo vrednost $G_{1-4} = 100000 \text{ kN/cm}^2$.

Na sliki 2.63(a) predstavljamo potek zdrsov na obeh stičnih ravninah vzdolž osi obravnavanega trislojnega kompozitnega nosilca. Kot lahko vidimo, se analitični rezultati predstavljenega lineariziranega modela zelo dobro ujemajo z Sousovimi in da Silvovimi numeričnimi rezultati (2010). Na sliki 2.63(b)

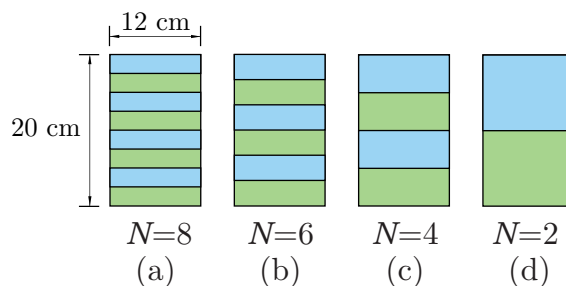
prikazujemo potek zdrsov na stičnih ravninah vzdolž osi obravnavanega štirislojnega kompozitnega nosilca. Dobljene rezultate primerjamo z analitično (Euler-Bernoullijevo) in numerično rešitvijo za analizo večslojnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa na stiku; predstavila sta ju Sousa in da Silva (2010). Ugotovimo, da se rezultati dobro ujemajo, majhne razlike pa so lahko posledica nepoznane vrednosti strižnega modula materiala.



Slika 2.63: Primerjava zdrsov (Sousa, da Silva, 2010): (a) trislojni nosilec in (b) štirislojni nosilec.

Figure 2.63: Comparison of slips (Sousa, da Silva, 2010): (a) three-layer and (b) four-layer beam.

V drugem delu računske obravnave večslojnih ravninskih nosilcev obravnavamo prostoležeči nosilec dolžine $L = 280$ cm, ki je obremenjen na sredini nosilca na zgornjem sloju s točkovno silo $P = 7.624$ kN v smeri globalne osi Z . Samo spodnji sloj nosilca je prostoležeče podprt. V osnovi je prečni prezek višine $h = 20$ cm in širine $b = 12$ cm. Obravnavamo različne primere. V prvem primeru prečni prezek sestavimo iz dveh slojev ($N = 2$) enake višine, t.j. $h_2 = 10$ cm, v drugem iz štirih slojev ($N = 4$) enake višine $h_4 = 5$ cm, v tretjem iz šestih slojev ($N = 6$) enake višine $h_6 = 3.33$ cm in v četrtem iz osmih slojev ($N = 8$) enake višine $h_8 = 2.5$ cm. Prečne prereze vseh obravnavanih primerov prikazujemo na sliki 2.64. Ker imamo opravka z linearnim modelom, so tudi vse konstitutivne

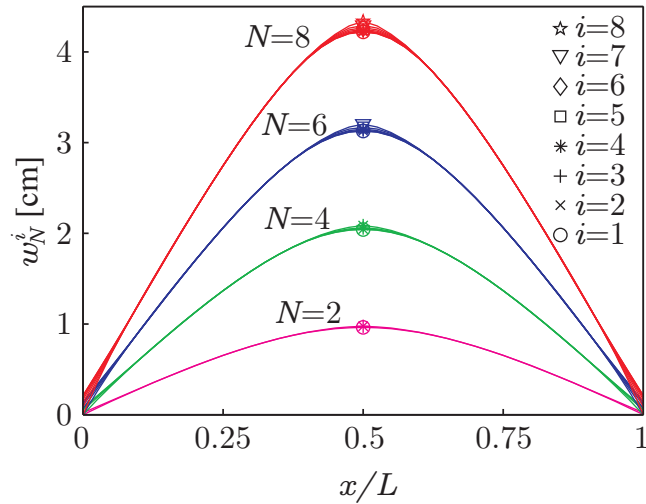


Slika 2.64: Sestave večslojnih nosilcev: (a) dvoslojni, (b) štirislojni, (c) šestislojni in (d) osemislojni

Figure 2.64: Multilayer beams: (a) two-layer, (b) four-layer, (c) six-layer and (d) eight-layer.

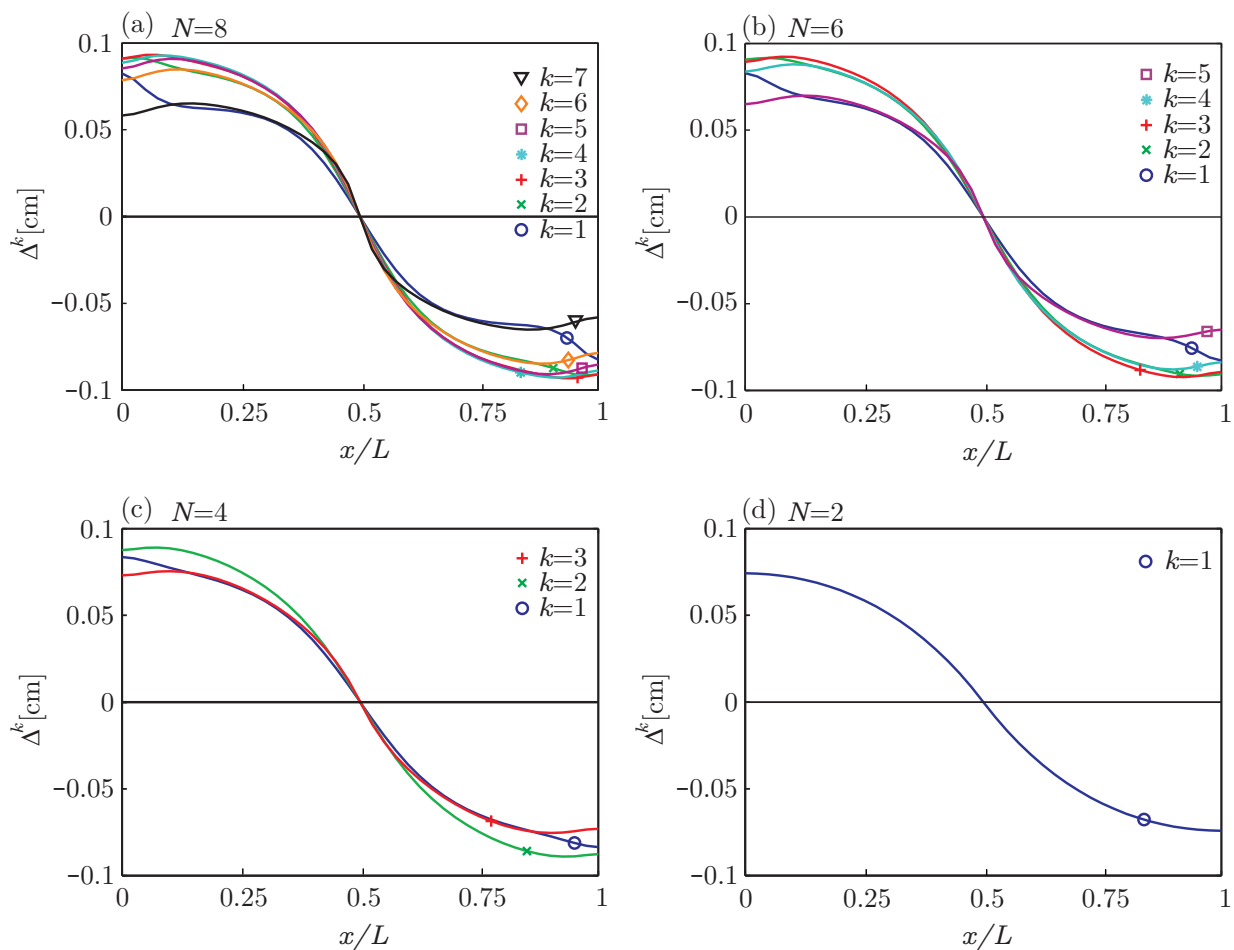
zveze linearne. Privzamemo elastični in strižni modul vseh slojev vseh obravnavanih primerov $E = 1150$ kN/cm² in $G = 72$ kN/cm² (les C27). Prav tako na stiku med sloji privzamemo linearne zveze s strižno togostjo $K = 2.45$ kN/cm² in prečno togostjo $C = 8.93$ kN/cm² stika. Na sliki 2.65 prikazujemo navpične pomike slojev vseh obravnavanih primerov. Kot lahko vidimo, je število slojev pomembno vpliva na končni pomik, saj je pri osemislojnim nosilcu pomik kar štirikrat večji kot pri dvoslojnim.

Očitno je torej, da karakteristike stika zelo vplivajo na togost nosilca. Ugotovimo, da se pomiki med sloji posameznega obravnavanega primera ne spreminjajo veliko. Lahko torej sklepamo, da ima pomemben vpliv na rezultate ravno strižna togost stika.



Slika 2.65: Navpični pomik obravnavanih večslojnih lesenih nosilcev.
Figure 2.65: Vertical displacement of considered multi-layer timber beams.

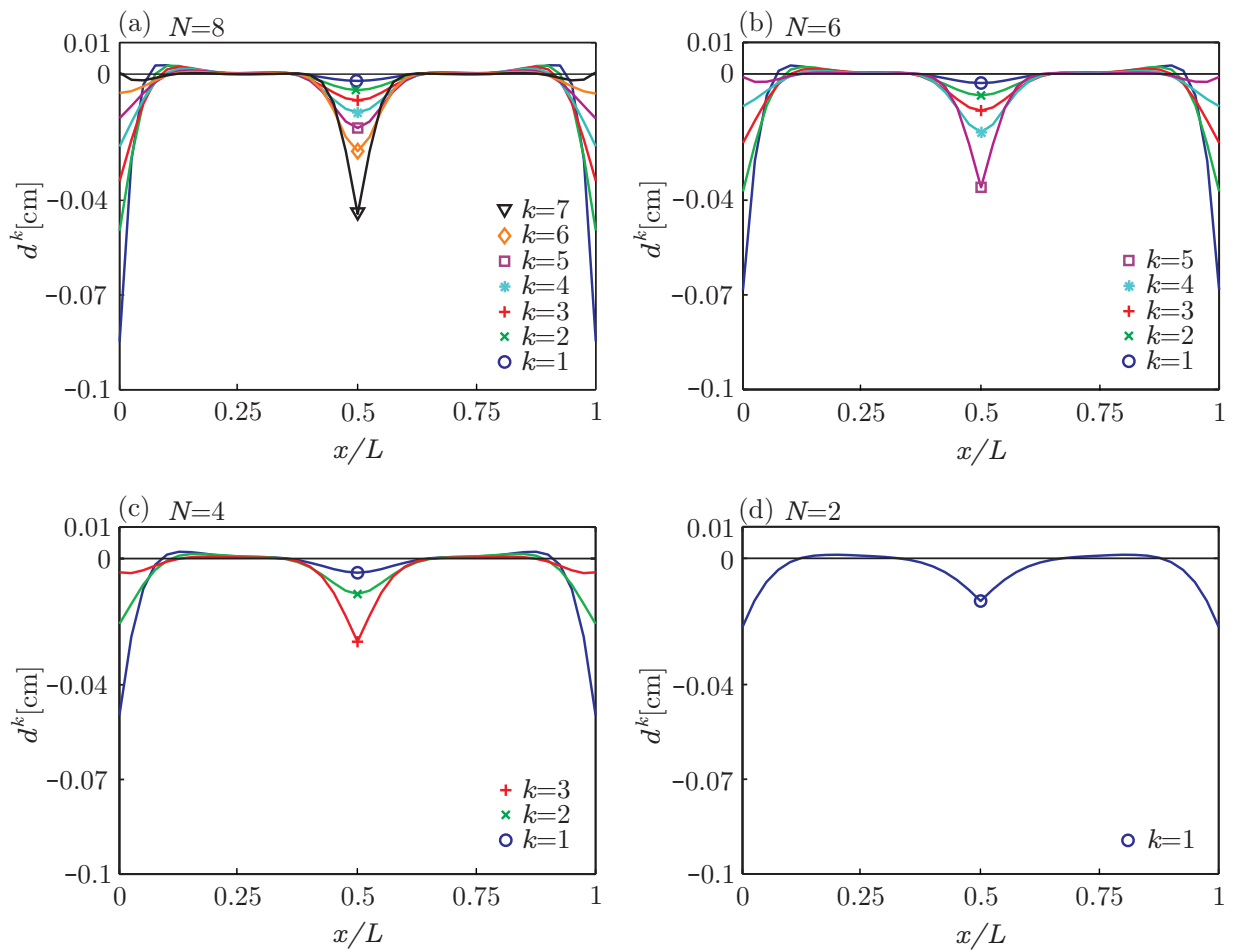
Na sliki 2.66 prikazujemo potek zdrsov vzdolž nosilca za obravnavane večslojne lesene nosilce. Kot lahko ugotovimo, so za vse tipe obravnavanih večslojnih nosilcev maksimalni zdrsi podobnega velikostnega razreda. Logično je, da se pri vseh večslojnih nosilcih maksimalni zdrsi zgodijo v vmesnih slojih, medtem ko sta zdrsa na prvem oz. zadnjem stiku navadno manjša.



Slika 2.66: Potek zdrsov vzdolž večslojnih lesenih nosilcev: (a) osemstojni ($N = 8$), (b) šeststojni ($N = 6$), (c) štirislojni ($N = 4$) in (d) dvoslojni ($N = 2$).

Figure 2.66: Slips along multilayer timber beams: (a) eight-layer ($N = 8$), (b) six-layer ($N = 6$), (c) four-layer ($N = 4$) and (d) two-layer ($N = 2$).

Slika 2.67 prikazuje potek razmikov vzdolž nosilca za obravnavane večslojne lesene nosilce. Vidimo, da pride na območju delovanja sile do vtiskov. Pri tem se logično najbolj vtisne zgornji sloj, vtiski pa se zmanjšujejo z oddaljenostjo slojev od sile. Prav tako ugotovimo, da so vtisi največji pri osemstojnem in najmanjši pri dvoslojnim nosilcu. Zanimivo je, da se na robovih vseh obravnavanih večslojnih nosilcev najbolj vtisnejo spodnji sloji in najmanj zgornji. Prav tako so maksimalni vtisi na robovih nosilca v vseh primerih po velikostnem redu večji od vtisov slojev na mestu delovanja točkovne sile.



Slika 2.67: Potek razmikov vzdolž večslojnih lesenih nosilcev: (a) osemstojni ($N = 8$), (b) šeststojni ($N = 6$), (c) štirislojni ($N = 4$) in (d) dvoslojni ($N = 4$).

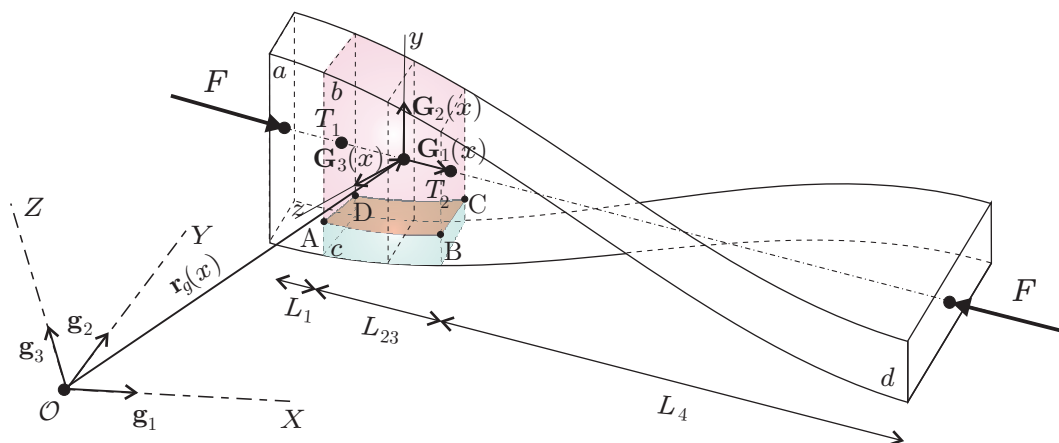
Figure 2.67: Uplifts along multilayer timber beams: (a) eight-layer ($N = 8$), (b) six-layer ($N = 6$), (c) four-layer ($N = 4$) and (d) two-layer ($N = 4$).

3 Uklonska nosilnost razslojenih elastičnih prostorskih stebrov

V tem poglavju prikažemo točno rešitev za uklonske sile razslojenih ravnih in zavrtih elastičnih prostorskih stebrov. Stebre modeliramo z Reissner-Simovim modelom prostorskih nosilcev, točne uklonske sile pa določimo z linearizirano stabilnostno analizo. S parametričnimi študijami bomo analizirali vpliv lege, velikosti in orientacije popolnoma razslojenega dela stebra na njegovo uklonsko nosilnost.

3.1 Geometrijski model stebra

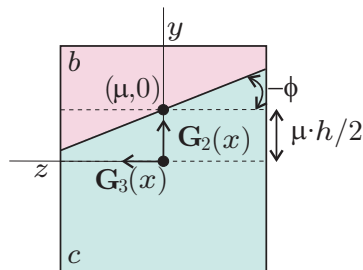
Vzamemo zavrt prostorski stebel s konstantnim prečnim prerezom (višine h in širine b), obremenjen s tlačno osno silo F (slika 3.1). Točka \mathcal{O} predstavlja koordinatno izhodišče nepomičnega prostorskega koordinatnega sistema (X, Y, Z) z baznimi vektorji $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$. Referenčno os stebra parametriziramo z materialno koordinato x . Deformirano lego stebra opišemo s krajevnim vektorjem referenčne osi \mathbf{r}_g in ortonormirano lokalno bazo $\{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3\}$, ki definirajo materialno bazo zavrtene prečnega prereza. Vektorja \mathbf{G}_2 in \mathbf{G}_3 kažeta v smeri glavnih vztrajnostnih osi prečnega prereza, vektor \mathbf{G}_1 pa kaže v smeri normale prečnega prereza, $\{\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2 \times \mathbf{G}_3\}$. \mathbf{G}_1 v splošnem ne kaže nujno v smeri tangente deformirane referenčne osi stebra.



Slika 3.1: Geometrija, obtežba in značilni deli zavrtenega stebra.
 Figure 3.1: Geometry, loading and typical sections of twisted column.

Lego razslojenega dela stebra oz. lego delaminacije definiramo z vpeljavo parametrov μ in ϕ (slika

3.2). Asimetrično lego delaminacije glede na lokalno os \mathbf{G}_2 definiramo s parametrom $\mu \in (-1, 1)$. Za navpično simetrične delaminacije je paramter $\mu = 0$. Delaminacija je lahko tudi zavrnjena v ravnini prečnega prereza okoli točke $y = \mu, z = 0$ za kot ϕ . Delaminacija A–B–C–D razdeli steber dolžine



Slika 3.2: Definicija μ in ϕ .
Figure 3.2: Definition of μ and ϕ .

L v vzdolžni smeri na štiri dele: elementa a in d z dolžinama L_1 in L_4 predstavljata nerazslojen del stebra, medtem ko dela stebra z oznakama b in c (dolžine L_{23}) predstavljata sloja s kontaktno ravnino A–B–C–D.

3.2 Osnovne enačbe prostorskega stebra

Privzamemo prostorske Reissner-Simove enačbe zavitega prostorskega stebra. Osnovni sistem enačb sestavljajo konstitutivne (3.1)–(3.2), ravnotežne (3.3)–(3.4) in kinematične enačbe (3.5)–(3.6) (Zupan, Saje, 2003a):

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{N}_g(x) - \mathbf{R}(x) \mathbf{C}_N(\gamma_G(x), \kappa_G(x)) = \mathbf{0}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{M}_g(x) - \mathbf{R}(x) \mathbf{C}_M(\gamma_G(x), \kappa_G(x)) = \mathbf{0}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{N}'_g(x) + \mathbf{n}_g(x) = \mathbf{0}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{f}_4 = \mathbf{M}'_g(x) + \mathbf{m}_g(x) - \mathbf{N}_g(x) \times \mathbf{r}'_g(x) = \mathbf{0}, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{f}_5 = \mathbf{r}'_g(x) - \mathbf{R}(x) (\gamma_G(x) - \mathbf{c}_G(x)) = \mathbf{0}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{f}_6 = \vartheta'_g(x) - \mathbf{T}^{-T}(x) (\kappa_G(x) - \mathbf{d}_G(x)) = \mathbf{0}. \quad (3.6)$$

Robni pogoji k diferencialnim enačbam (3.3)–(3.6) pri $x = 0$ in $x = L$ so:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{F}^0 + \mathbf{N}_g(0) = \mathbf{0}, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{P}^0 + \mathbf{M}_g(0) = \mathbf{0}, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{F}^L - \mathbf{N}_g(L) = \mathbf{0}, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{b}_4 = \mathbf{P}^L - \mathbf{M}_g(L) = \mathbf{0}. \quad (3.10)$$

Pomen oznak v predstavljenih enačbah je:

\mathbf{g} nepomična (oz. prostorska) ortonormirana baza $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ (slika 3.1);

\mathbf{G} lokalna ortonormirana baza $\{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3\}$ z $\{\mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3\}$, ki definirata prečni prerez;

$\mathbf{N}_g, \mathbf{M}_g$ rezultirajoča vektorja ravnotežnih sil in momentov prečnega prereza;

$\mathcal{C}_N, \mathcal{C}_M$ operatorja, ki definirata materialne lastnosti stebra;

γ_G deformacijski vektor (γ_{G1} je osna deformacija, γ_{G2}, γ_{G3} sta strižni deformaciji);

κ_G rotacijski deformacijski vektor (κ_{G1} je torzijska deformacija, κ_{G2}, κ_{G3} sta upogibni deformaciji);

\mathbf{r}_g krajevni vektor referenčne osi;

ϑ_g rotacijski vektor, ki opisuje rotacije med $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ in $\{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3\}$;

ϑ kot rotacije, $\vartheta = \|\vartheta_g\|$;

\mathbf{R} rotacijska matrika, ki predstavlja isto rotacijo kot rotacijski vektor ϑ_g
($\mathbf{R}\mathbf{u} = \mathbf{u} + \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} \vartheta_g \times \mathbf{u} + \frac{1 - \cos \vartheta}{\vartheta^2} \vartheta_g \times (\vartheta_g \times \mathbf{u})$, \mathbf{u} je poljuben vektor);

\mathbf{T}^T transformacijska matrika med κ_G in ϑ'_g
($\mathbf{T}^T \mathbf{u} = \mathbf{u} - \frac{1 - \cos \vartheta}{\vartheta^2} \vartheta_g \times \mathbf{u} + \frac{\vartheta - \sin \vartheta}{\vartheta^3} \vartheta_g \times (\vartheta_g \times \mathbf{u})$);

c_G, d_G variacijski konstanti, ki ju določimo iz znanih deformacij in kinematičnih pogojev nedeformiranega stebra;

$\mathbf{n}_g, \mathbf{m}_g$ zunanja porazdeljena točkovna in momentna obtežba na enoto nedeformirane dolžine računске osi;

$\mathbf{F}^0, \mathbf{F}^L$ zunanji točkovni sili pri $x = 0, x = L$;

$\mathbf{P}^0, \mathbf{P}^L$ zunanja točkovna momenta pri $x = 0, x = L$.

Katerikoli predstavljen vektor lahko izrazimo glede na obe predstavljeni bazi: indeks (g ali G) predstavlja izražavo glede na izbrano bazo. Rotacijska matrika \mathbf{R} predstavlja tudi koordinatno transformacijo med bazama $\mathbf{u}_g = \mathbf{R}\mathbf{u}_G$.

3.3 Linearizacija enačb

Enačbe (3.1)–(3.6) sestavlja 18 enačb za 18 funkcij, ki so komponente šestih vektorjev $\mathbf{r}_g, \vartheta_g, \mathbf{N}_g, \mathbf{M}_g, \gamma_G$ in κ_G . Če uporabimo zapis $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_{18}]$ za 18-komponenten vektor vseh neznanih funkcij, lahko linearizacijo komponent $f_{i,j}$ ($i = 1, \dots, 6$), ($j = 1, 2, 3$) funkcije \mathbf{f}_i okoli znane lege \mathbf{y}_0 zapišemo kot

$$\delta \mathbf{f}_i = \sum_{k=1}^{18} \left. \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial y_k} \right|_{\mathbf{y}_0} \delta y_k. \quad (3.11)$$

Poljubne variacije δy_k ($k = 1, \dots, 18$) izračunamo iz sistema linearnih enačb

$$\delta f_{i,j} |_{\mathbf{y}_0} = -f_{i,j}(\mathbf{y}_0), \quad (3.12)$$

ki ga pogosto zapišemo v obliki

$$\mathbf{K}(\mathbf{y}_0) \delta \mathbf{y} = -\mathbf{f}(\mathbf{y}_0), \quad (3.13)$$

kjer \mathbf{K} predstavlja tangentno togostno matriko in $\mathbf{f}(\mathbf{y}_0)$ vektor desnih strani. Predstavljena linearizacija je veljavna samo v linearnih vektorskih prostorih. Ker prostorske rotacije niso vektorji, moramo biti pozorni pri linearizaciji rotacijske matrike \mathbf{R} :

$$\delta \mathbf{R} \mathbf{u} = \delta \boldsymbol{\vartheta}_g \times \mathbf{R} \mathbf{u}, \quad (3.14)$$

kjer smo z $\delta \mathbf{R}$ označili variacijo rotacijske matrike, z $\delta \boldsymbol{\vartheta}_g$ pa variacijo rotacijskega vektorja. \mathbf{u} je v enačbi (3.14) poljuben vektor. Podrobnejšo razlago in postopek konsistentne linearizacije prostorskih rotacij je možno zaslediti v Argyrisovih (1982) in Ibrahimbegovićevih delih (1997).

Linearizacijo konstitutivnih enačb zapišemo z enačbama

$$\delta \mathbf{C}_N = \mathbf{C}_{\gamma\gamma} \delta \gamma_G + \mathbf{C}_{\gamma\kappa} \delta \kappa_G, \quad (3.15)$$

$$\delta \mathbf{C}_M = \mathbf{C}_{\kappa\gamma} \delta \gamma_G + \mathbf{C}_{\kappa\kappa} \delta \kappa_G, \quad (3.16)$$

kjer so komponente matrik $\mathbf{C}_{\gamma\gamma}$, $\mathbf{C}_{\gamma\kappa}$, $\mathbf{C}_{\kappa\gamma}$ in $\mathbf{C}_{\kappa\kappa}$ parcialni odvodi konstitutivnih operatorjev \mathbf{C}_N in \mathbf{C}_M glede na komponente vektorjev γ_G in κ_G .

Matriko $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\gamma\gamma} & \mathbf{C}_{\gamma\kappa} \\ \mathbf{C}_{\kappa\gamma} & \mathbf{C}_{\kappa\kappa} \end{bmatrix}$ imenujemo konstitutivna tangentna matrika prečnega prereza. Z upoštevanjem enačbe (3.14) so linearizirane enačbe (3.3)–(3.6):

$$\delta \mathbf{f}_3 = \delta \mathbf{N}'_g, \quad (3.17)$$

$$\delta \mathbf{f}_4 = \delta \mathbf{M}'_g - \delta \mathbf{N}_g \times \mathbf{r}'_g - \mathbf{N}_g \times \delta \mathbf{r}'_g, \quad (3.18)$$

$$\delta \mathbf{f}_5 = \delta \mathbf{r}'_g - \delta \boldsymbol{\vartheta}_g \times \mathbf{R} (\gamma_G - \mathbf{c}_G) - \mathbf{R} \delta \gamma_G, \quad (3.19)$$

$$\delta \mathbf{f}_6 = \delta \boldsymbol{\vartheta}'_g - \mathbf{R} \delta \kappa_G. \quad (3.20)$$

Pri tem smo predpostavili, da sta zunanji obtežbi \mathbf{n}_g and \mathbf{m}_g neodvisni od neznanih funkcij (Ibrahimbegović, 1997, Zupan, Saje, 2003a).

Ker v sistemu enačb (3.1)–(3.6) nastopajo algebrske enačbe (3.1) in (3.2) in diferencialne enačbe (3.3)–(3.6), je numerično ugodneje, da algebrske enačbe pred reševanjem diferencialnih enačb izločimo. Enačbe (3.1) in (3.2) najprej lineariziramo:

$$\delta \mathbf{f}_1 = \delta \boldsymbol{\vartheta}_g \times \mathbf{R} \mathbf{C}_N + \mathbf{R} \mathbf{C}_{\gamma\gamma} \delta \gamma_G + \mathbf{R} \mathbf{C}_{\gamma\kappa} \delta \kappa_G - \delta \mathbf{N}_g, \quad (3.21)$$

$$\delta \mathbf{f}_2 = \delta \boldsymbol{\vartheta}_g \times \mathbf{R} \mathbf{C}_M + \mathbf{R} \mathbf{C}_{\kappa\gamma} \delta \gamma_G + \mathbf{R} \mathbf{C}_{\kappa\kappa} \delta \kappa_G - \delta \mathbf{M}_g. \quad (3.22)$$

Nato izpostavimo deformacijski količini $\delta \gamma_G$ in $\delta \kappa_G$, da dobimo:

$$\delta \gamma_G = \mathbf{C}_{\gamma\gamma}^{-1} \mathbf{R}^T (\delta \mathbf{N}_g - \delta \boldsymbol{\vartheta}_g \times \mathbf{N}_g) + \mathbf{C}_{\kappa\gamma}^{-1} \mathbf{R}^T (\delta \mathbf{M}_g - \delta \boldsymbol{\vartheta}_g \times \mathbf{M}_g), \quad (3.23)$$

$$\delta \kappa_G = \mathbf{C}_{\kappa\gamma}^{-1} \mathbf{R}^T (\delta \mathbf{N}_g - \delta \boldsymbol{\vartheta}_g \times \mathbf{N}_g) + \mathbf{C}_{\kappa\kappa}^{-1} \mathbf{R}^T (\delta \mathbf{M}_g - \delta \boldsymbol{\vartheta}_g \times \mathbf{M}_g). \quad (3.24)$$

Zapišemo še linearizirane robne pogoje (3.7)–(3.10):

$$\delta \mathbf{b}_1 = -\delta \mathbf{N}_g(0) = \mathbf{0}, \quad (3.25)$$

$$\delta \mathbf{b}_2 = -\delta \mathbf{M}_g(0) = \mathbf{0}, \quad (3.26)$$

$$\delta \mathbf{b}_3 = -\delta \mathbf{N}_g(L) = \mathbf{0}, \quad (3.27)$$

$$\delta \mathbf{b}_4 = -\delta \mathbf{M}_g(L) = \mathbf{0}. \quad (3.28)$$

3.4 Analitična rešitev lineariziranih enačb

3.4.1 Raven elastični razslojeni prostorski steber

Linearizirane enačbe (3.17)–(3.24) moramo izvednotiti v osnovni legi, ki jo določajo pogoji

$$\boldsymbol{\vartheta}_{g,0}(x) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}_0(x) = \mathbf{I}, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{n}_g(x) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{m}_g(x) = \mathbf{0}, \quad (3.30)$$

$$\mathbf{P}^0 = [0, 0, 0]^T, \quad \mathbf{P}^L = [0, 0, 0]^T, \quad (3.31)$$

$$\mathbf{c}_G = [1, 0, 0]^T, \quad \mathbf{d}_G = [0, 0, 0]^T, \quad (3.32)$$

$$\mathbf{r}_0(x) = [x, 0, 0]^T, \quad (3.33)$$

$$\mathbf{F}^0 = [F, 0, 0]^T, \quad \mathbf{F}^L = [-F, 0, 0]^T. \quad (3.34)$$

Ker so tudi začetne ukrivljenosti $\boldsymbol{\kappa}_0$ in momenti \mathbf{M}_g v osnovni legi enaki nič, sta tako osna deformacija $\boldsymbol{\gamma}_g = \boldsymbol{\gamma}_G = [\gamma_1^i \ 0 \ 0]^T$ in osna sila $\mathbf{N}_g = [N_1^i \ 0 \ 0]^T$ konstantni ($i = \{a, b, c, d\}$). Ker privzamemo konstanten prečni prerez vzdolž referenčne osi razslojenega stebra, velja $\gamma_1^a = \gamma_1^b = \gamma_1^c = \gamma_1^d$ in $A^b + A^c = A^a = A^d$. Osne sile posameznih delov stebra lahko tako zapišemo:

$$N_{1,g}^a = N_{1,g}^d = -F, \quad (3.35)$$

$$N_{1,g}^b = -\frac{A^b}{A^d}F, \quad (3.36)$$

$$N_{1,g}^c = -\frac{A^c}{A^d}F. \quad (3.37)$$

Ko vstavimo enačbe (3.23)–(3.24) in (3.29)–(3.37) v enačbe (3.3)–(3.10), (3.17)–(3.20) in (3.25)–(3.28), dobimo lineariziran sistem enačb obravnavanega problema okoli osnovne lege:

$$\delta \mathbf{N}'_g = \mathbf{0}, \quad (3.38)$$

$$\delta \mathbf{M}'_g - \delta \mathbf{N}_g \times \mathbf{r}'_g - \mathbf{N}_g \times \delta \mathbf{r}'_g = \mathbf{M}'_{g,0} - \mathbf{N}_{g,0} \times \mathbf{r}'_{g,0}, \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r}'_g - \delta \boldsymbol{\vartheta}_g \times \mathbf{r}'_g - \mathbf{R}(\mathbf{C}_{\gamma\gamma}^{-1} \mathbf{R}^T (\delta \mathbf{N}_g - \delta \boldsymbol{\vartheta}_g \times \mathbf{N}_g) \\ - \mathbf{C}_{\kappa\gamma}^{-1} \mathbf{R}^T (\delta \mathbf{M}_g - \delta \boldsymbol{\vartheta}_g \times \mathbf{M}_g)) = \mathbf{r}'_{g,0} - \mathbf{R}(\boldsymbol{\gamma}_{G,0} - \mathbf{c}_G), \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\vartheta}'_g - \mathbf{R}(\mathbf{C}_{\kappa\gamma}^{-1} \mathbf{R}^T (\delta \mathbf{N}_g - \delta \boldsymbol{\vartheta}_g \times \mathbf{N}_g) \\ - \mathbf{C}_{\kappa\kappa}^{-1} \mathbf{R}^T (\delta \mathbf{M}_g - \delta \boldsymbol{\vartheta}_g \times \mathbf{M}_g)) = \boldsymbol{\vartheta}'_{g,0} - \mathbf{T}^{-T}(\boldsymbol{\kappa}_{G,0} - \mathbf{d}_G), \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\delta \mathbf{N}_g(0) = -[F, 0, 0]^T - \mathbf{N}_g(0), \quad (3.42)$$

$$\delta \mathbf{M}_g(0) = \mathbf{0}, \quad (3.43)$$

$$-\delta \mathbf{N}_g(L) = -[-F, 0, 0]^T + \mathbf{N}_g(L), \quad (3.44)$$

$$\delta \mathbf{M}_g(L) = \mathbf{0}. \quad (3.45)$$

V osnovni legi morajo biti izpolnjene kinematičnime enačbe (3.5)–(3.6), zato so desne strani v enačbah (3.40)–(3.41) enake nič. Ker je steber obtežen z osno silo, sta vektorja $\mathbf{N}_{g,0}$ in $\mathbf{r}_{g,0}$ vzporedna in je zato njihov vektorski produkt enak nič.

Sistem enačb (3.38)–(3.41) je homogen sistem linearnih diferencialnih enačb prvega reda s konstantnimi koeficienti. Lahko ga zapišemo v matrični obliki

$$\delta \mathbf{y}'(x) = \mathbf{B} \delta \mathbf{y}(x), \quad \delta \mathbf{y}(x_0) = \delta \mathbf{y}_0, \quad (3.46)$$

kjer \mathbf{B} predstavlja matriko konstantnih koeficientov in $\delta\mathbf{y}(x)$ vektor neznank. Analitična rešitev nehomogenega sistema diferencialnih enačb (3.46) za konstantno matriko \mathbf{B} je (Goldberg, Schwartz, 1972):

$$\delta\mathbf{y}(x) = e^{\mathbf{B}x}\boldsymbol{\beta}, \quad (3.47)$$

kjer je $\boldsymbol{\beta}$ vektor integracijskih konstant, ki jih določimo iz danih robnih pogojev stebra.

Rešitev (3.47) velja za vsak del stebra, torej za dele z oznakami a , b , c in d . Ker naš matematični model razslojenega stebra sestavljajo štirje deli, moramo določiti skupno 48 robnih pogojev oziroma pogojev, s katerimi dele stebrov povežemo v celoto.

3.4.2 Zaviti elastični razslojeni steber

Linearizirane enačbe (3.17)–(3.24) moramo izvednotiti v fundamentalni legi, ki jo določajo enačbe

$$\boldsymbol{\vartheta}_{g,0}(x) = [\psi(x), 0, 0]^T, \quad \mathbf{R}_0(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi(x) & -\sin \psi(x) \\ 0 & \sin \psi(x) & \cos \psi(x) \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

$$\mathbf{n}_g(x) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{m}_g(x) = \mathbf{0}, \quad (3.49)$$

$$\mathbf{P}^0 = [0, 0, 0]^T, \quad \mathbf{P}^L = [0, 0, 0]^T, \quad (3.50)$$

$$\mathbf{c}_G = [1, 0, 0]^T, \quad \mathbf{d}_G = \mathbf{T}_0^T \boldsymbol{\vartheta}'_{g,0}, \quad (3.51)$$

$$\mathbf{r}_0(x) = [x, 0, 0]^T, \quad \psi(x) = \frac{x}{L} \psi_L \quad (3.52)$$

$$\mathbf{F}^0 = [F, 0, 0]^T, \quad \mathbf{F}^L = [-F, 0, 0]^T. \quad (3.53)$$

Ker so tudi sedaj začetne ukrivljenosti κ_0 in momenti \mathbf{M}_g v začetni legi enaki nič, sta osna deformacija $\boldsymbol{\gamma}_g = \boldsymbol{\gamma}_G = [\gamma_1^i \ 0 \ 0]^T$ in osna sila $\mathbf{N}_g = [N_1^i \ 0 \ 0]^T$ konstantni, a ne nujno enaki po delih razslojenega zavitega stebra. Ker je prečni prerez vzdolž referenčne osi stebra konstanten, veljajo tudi enačbe (3.35)–(3.37).

Ko pogoje (3.23)–(3.24) in (3.48)–(3.53) vstavimo v sistem enačb (3.3)–(3.10), (3.17)–(3.20) in (3.25)–(3.28), dobimo sistem

$$\delta\mathbf{N}'_g = \mathbf{0}, \quad (3.54)$$

$$\delta\mathbf{M}'_g - \delta\mathbf{N}_g \times \mathbf{r}'_g - \mathbf{N}_g \times \delta\mathbf{r}'_g = \mathbf{0}, \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{r}'_g - \delta\boldsymbol{\vartheta}_g \times \mathbf{r}'_g - \mathbf{R}(\mathbf{C}_{\gamma\gamma}^{-1} \mathbf{R}^T (\delta\mathbf{N}_g - \delta\boldsymbol{\vartheta}_g \times \mathbf{N}_g) \\ - \mathbf{C}_{\kappa\gamma}^{-1} \mathbf{R}^T (\delta\mathbf{M}_g - \delta\boldsymbol{\vartheta}_g \times \mathbf{M}_g)) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\vartheta}'_g - \mathbf{R}(\mathbf{C}_{\kappa\gamma}^{-1} \mathbf{R}^T (\delta\mathbf{N}_g - \delta\boldsymbol{\vartheta}_g \times \mathbf{N}_g) \\ - \mathbf{C}_{\kappa\kappa}^{-1} \mathbf{R}^T (\delta\mathbf{M}_g - \delta\boldsymbol{\vartheta}_g \times \mathbf{M}_g)) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\delta\mathbf{N}_g(0) = [-F, 0, 0]^T - \mathbf{N}_g(0), \quad (3.58)$$

$$\delta\mathbf{M}_g(0) = \mathbf{0} \quad (3.59)$$

$$-\delta\mathbf{N}_g(L) = -[-F, 0, 0]^T + \mathbf{N}_g(L), \quad (3.60)$$

$$\delta\mathbf{M}_g(L) = \mathbf{0}. \quad (3.61)$$

Sistem enačb (3.54)–(3.57) predstavlja homogen sistem linearnih diferencialnih enačb prvega reda z nekonstantnimi koeficienti s pripadajočimi robnimi pogoji (3.58)–(3.61). V matrični obliki lahko sistem

zapišemo kot

$$\delta \mathbf{y}'(x) = \mathbf{B}(x)\delta \mathbf{y}(x), \quad \delta \mathbf{y}(x_0) = \delta \mathbf{y}_0, \quad (3.62)$$

kjer $\mathbf{B}(x)$ predstavlja matriko nekonstantnih koeficientov in $\delta \mathbf{y}(x)$ vektor neznank. Predstavljeni robni pogoji (3.58)–(3.61) ne zadostujejo za izračun enolične rešitve. Dodatne kinematične pogoje bomo predstavili v nadaljevanju.

Splošno rešitev sistema enačb (3.62) lahko poiščemo po teoriji analitičnih diferencialnih sistemov (Goldberg, Schwartz, 1972):

$$\delta \mathbf{y}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta \mathbf{y}_k (x - x_0)^k, \quad (3.63)$$

kjer je za $k = 0, 1, 2 \dots$

$$\delta \mathbf{y}_{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \mathbf{B}_i \delta \mathbf{y}_{k-(i+1)} \quad (3.64)$$

in

$$\delta \mathbf{y}_0 = \delta \mathbf{y}(x_0) = \beta. \quad (3.65)$$

Matrike \mathbf{B}_i v enačbi (3.64) predstavljajo koeficiente matrične vrste imatrične funkcije \mathbf{B} :

$$\mathbf{B}_i = \frac{\mathbf{B}^i(x_0)}{i!}. \quad (3.66)$$

Rešitev (3.63) je splošna in jo kot rešitev uporabimo za vsak del zavitega razslojenega stebra posebej. Rešitve se razlikujejo le zaradi različnih robnih pogojev. Podobno kot pri ravnem stebru sestavljajo tudi zaviti razslojeni steber štirje deli, ki jim lahko predpišemo 12 robnih pogojev oziroma pogojev, s katerimi dele razslojenega stebra povežemo v celoto. Te pogoje podrobneje opišemo v nadaljevanju.

3.4.3 Robni pogoji

Kot rečeno, sestavljajo robne pogoje obravnavanih razslojenih prostorskih stebrov kinematični in statični robni pogoji ter pogoji, s katerimi razslojene dele stebra povežemo v celoto. Ti kontinuitetni pogoji so (točki T_1 in T_2 na sliki 3.1):

$$\delta \mathbf{r}_g^a(L_1) = \delta \mathbf{r}_g^b(0) = \delta \mathbf{r}_g^c(0), \quad (3.67)$$

$$\delta \mathbf{r}_g^b(L_1 + L_{23}) = \delta \mathbf{r}_g^c(L_1 + L_{23}) = \delta \mathbf{r}_g^d(0), \quad (3.68)$$

$$\delta \vartheta_g^a(L_1) = \delta \vartheta_g^b(0) = \delta \vartheta_g^c(0), \quad (3.69)$$

$$\delta \vartheta_g^b(L_1 + L_{23}) = \delta \vartheta_g^c(L_1 + L_{23}) = \delta \vartheta_g^d(0) \quad (3.70)$$

in

$$\delta \mathbf{N}_g^a(L_1) = \delta \mathbf{N}_g^b(0) + \delta \mathbf{N}_g^c(0), \quad (3.71)$$

$$\delta \mathbf{N}_g^b(L_1 + L_{23}) + \delta \mathbf{N}_g^c(L_1 + L_{23}) = \delta \mathbf{N}_g^d(0), \quad (3.72)$$

$$\delta \mathbf{M}_g^a(L_1) = \delta \mathbf{M}_g^b(0) + \delta \mathbf{M}_g^c(0), \quad (3.73)$$

$$\delta \mathbf{M}_g^b(L_1 + L_{23}) + \delta \mathbf{M}_g^c(L_1 + L_{23}) = \delta \mathbf{M}_g^d(0). \quad (3.74)$$

S pogoji (3.67)–(3.74) smo predpostavili togo povezanost med razslojenimi deli stebra. Enačbe (3.67)–(3.74) predstavljajo 36 skalarnih pogojev, dodatnih 12 pogojev pa določajo statični in kinematični robni pogoji.

Ti pogoji so:

- za prostoležeči steber:

$$\delta\vartheta_1^a(0) = \delta\vartheta_2^a(0) = 0, \quad (3.75)$$

$$\delta M_3^a(0) = 0, \quad (3.76)$$

$$\delta\vartheta_1^d(L) = \delta\vartheta_2^d(L) = 0, \quad (3.77)$$

$$\delta M_3^d(L) = 0, \quad (3.78)$$

$$\delta r_a^1(0) = \delta r_a^2(0) = \delta r_a^3(0) = 0, \quad (3.79)$$

$$\delta r_d^2(L) = \delta r_d^3(L) = 0, \quad (3.80)$$

$$\delta N_d^1(L) = 0, \quad (3.81)$$

- za previsni steber (konzola):

$$\delta r_a^1(0) = \delta r_a^2(0) = \delta r_a^3(0) = 0, \quad (3.82)$$

$$\delta\vartheta_1^a(0) = \delta\vartheta_2^a(0) = \delta\vartheta_3^a(0) = 0, \quad (3.83)$$

$$\delta N_d^1(L) = \delta N_d^2(L) = \delta N_d^3(L) = 0, \quad (3.84)$$

$$\delta M_1^d(L) = \delta M_2^d(L) = \delta M_3^d(L) = 0, \quad (3.85)$$

- za obojestransko vpeti steber:

$$\delta r_a^1(0) = \delta r_a^2(0) = \delta r_a^3(0) = 0, \quad (3.86)$$

$$\delta\vartheta_1^a(0) = \delta\vartheta_2^a(0) = \delta\vartheta_3^a(0) = 0, \quad (3.87)$$

$$\delta\vartheta_1^d(L) = \delta\vartheta_2^d(L) = \delta\vartheta_3^d(L) = 0, \quad (3.88)$$

$$\delta r_d^2(L) = \delta r_d^3(L) = 0, \quad (3.89)$$

$$\delta N_d^1(L) = 0. \quad (3.90)$$

Celoten sistem pogojev za določitev integracijskih konstant lahko zapišemo kot homogen sistem algebrskih enačb

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}, \quad (3.91)$$

kjer \mathbf{K} predstavlja matriko koeficientov, $\boldsymbol{\beta}$ pa je vektor integracijskih konstant. Ker nas zanimajo zgolj netrivialne rešitve za $\delta\mathbf{y}$, mora biti $\boldsymbol{\beta}$ različen od nič. Uklonske sile določimo torej iz pogoja, ko je matrika \mathbf{K} singularna. Pri tem za rešitev izberemo najmanjšo vrednost.

3.5 Parametrične študije

3.5.1 Raven elastični razslojeni prostorski steber

Najprej bomo primerjali rezultate s primerljivimi rezultati iz literature. V ta namen v numeričnih študijah upoštevamo linearno elastični material. V tem primeru matriki $\mathbf{C}_N(\gamma_G, \kappa_G)$ in $\mathbf{C}_M(\gamma_G, \kappa_G)$ izgledata

takole:

$$\mathbf{C}_N(\gamma_G, \kappa_G) = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & ES_2 & -ES_3 \\ 0 & GA_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GA_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_G \\ \kappa_G \end{Bmatrix}, \quad (3.92)$$

$$\mathbf{C}_M(\gamma_G, \kappa_G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & GI_t & 0 & 0 \\ ES_2 & 0 & 0 & 0 & EI_2 & EI_{23} \\ -ES_3 & 0 & 0 & 0 & EI_{23} & EI_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_G \\ \kappa_G \end{Bmatrix}. \quad (3.93)$$

E in G predstavljata elastični in strižni modul; A je ploščina prečnega prereza, S_2 in S_3 sta statična momenta glede na lokalni osi, I_t je torzijski vztrajnostni moment prečnega prereza; A_2 in A_3 sta ploščini efektivnih strižnih prerezov v smeri G_2 in G_3 ; I_2 in I_3 sta vztrajnostna momenta in I_{23} je deviatorični vztrajnostni moment prečnega prereza glede na lokalni koordinatni sistem.

Najprej analiziramo vpliv dolžine delaminacije, položaj delaminacije, strižnega modula in vitkosti na uklonsko nosilnost. Uklonsko silo (F_{cr}) normiramo glede na klasično Eulerjevo uklonsko silo (F_E) nedelaminiranega stebra. Pri tem je vitkost stebra definirana kot

$$\lambda = L \sqrt{\frac{A}{I}}, \quad (3.94)$$

kjer I predstavlja manjši vztrajnostni moment prereza.

V nadaljevanju redstavimo rezultate za različna razmerja elastičnega in strižnega modula. S tem zajamemo razmerja najbolj uporabljenih materialov (beton, jeklo, les in anizotropni polimeri).

Najprej primerjamo rezultate predstavljene formulacije z različnimi rezultati iz literature. Opazujemo prostoležeči steber z vitkostjo $\lambda = 45$. Steber je delaminiran s simetrično delaminacijo v vzdolžni smeri ($L_1 = L_4$). Privzeti elastični modul je $E = 3000 \text{ kN/cm}^2$. V preglednici 3.1 primerjamo normirane uklonske sile za relativno navpično pozicijo delaminacije $r_d = 0.4$ in različne dolžine delaminacij ($l_d = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$) z rezultati iz literature (Simiteses, Sallam, Yin, 1985, Lim, Parsons, 1993). Vsak rezultat normiramo glede na Eulerjevo (1744) uklonsko silo nedelaminiranega stebra.

Predstavljena teorija se dobro ujema s klasičnim pristopom, če uvedemo določene poenostavitve. Za pravilno primerjavo predstavljenih analitičnih izrazov s klasičnimi moramo privzeti strižno tog in osno nestisljiv material ($G = \infty, \gamma_1 = 0$). Rezultate takega modela smo v preglednici 3.1 predstavili v zadnji vrstici.

V nadaljevanju primerjamo rezultate predstavljene teorije za obojestransko vpeti steber z delaminacijo različnih dolžin l_d na dveh relativnih višinah prečnega prereza $r_d = 0.2$ in 0.3 . Prečni prerez in elastični modul privzamemo enak kot v prejšnjem primeru, medtem ko je strižni modul enak $G = E/6$. V preglednici 3.2 primerjamo rezultate z rezultati Chena (1991) ter Kardomateasa in Schmueserja (Kardomateas, Schmueser, 1988), ki so upoštevali vpliv striga v svojih modelih. Za lažjo primerjavo rezultate normaliziramo enako, kot je to storil Chen (1991). Predstavljeni rezultati se dobro ujemajo z drugimi. Pri osno nestisljivem materialu ($\gamma_1 = 0$) se rezultati dobro ujemajo z rezultati Ibrahimbegovića (1997).

V naslednjem primeru obravnavamo raven razslojeni prostoležeči steber s konstantnim prečnim prerezom višine $h = 20 \text{ cm}$ in širine $b = 40 \text{ cm}$. V analizi spreminjamo dolžino delaminacije L_{23} glede na celotno dolžino stebra L in upoštevamo tri različna razmerja med strižnim in elastičnim modulom $G/E = 1, 1/2, 1/10$. Rezultate prikazujemo v odvisnosti od vitkosti stebra.

Preglednica 3.1: Normirane uklonske sile za prostoležeči steber z dolžino delaminacije l_d na relativni višini prečnega prereza $r_d = 0.4$.

Table 3.1: Normalized buckling loads for simply supported column with delamination length l_d at relative vertical position $r_d = 0.4$.

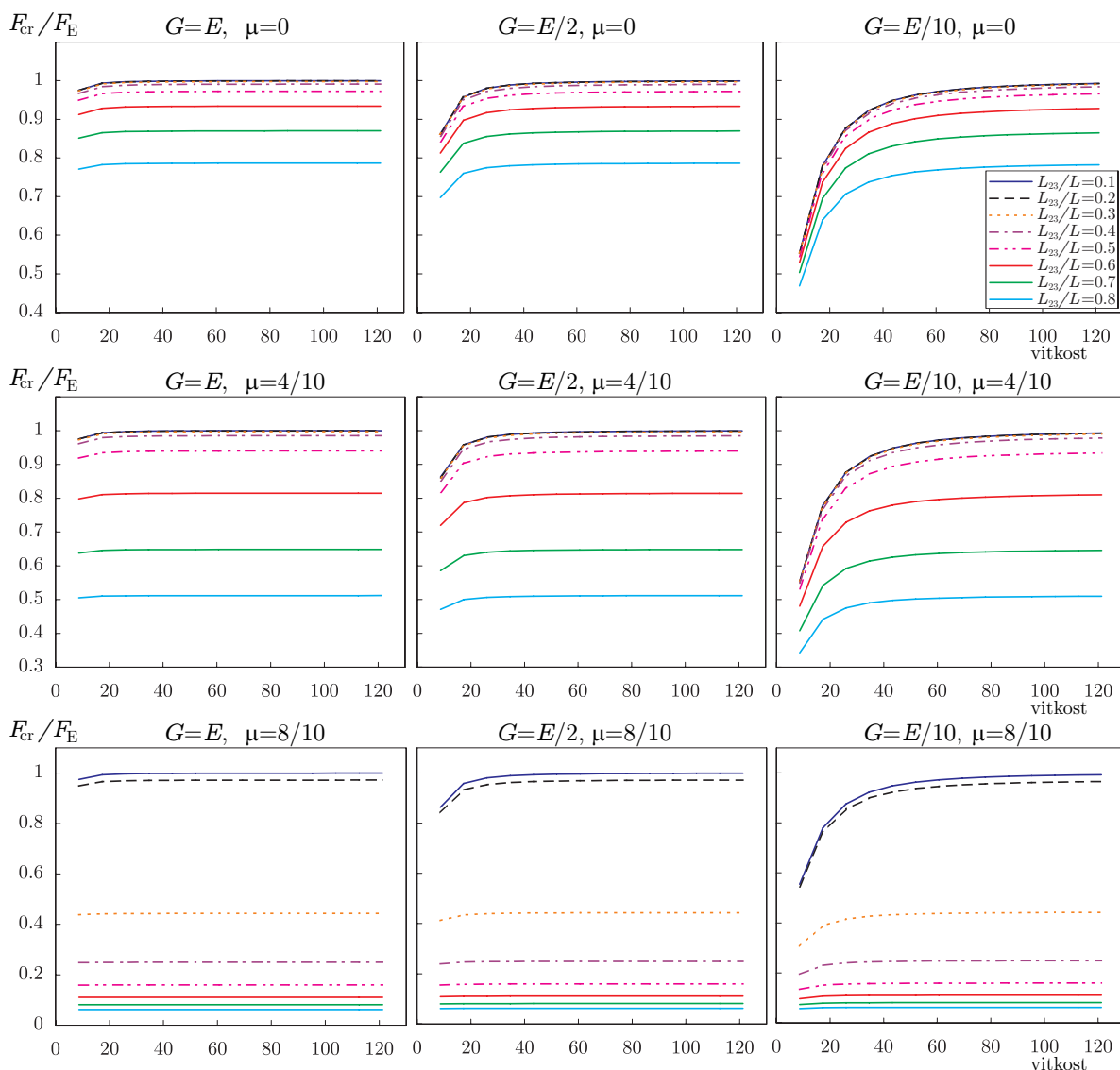
Method	l_d				
	0	0.2	0.4	0.6	0.8
Euler (1744)	1.0000	–	–	–	–
Timoshenko (1961)	0.9715	–	–	–	–
Reissner (1972)	0.9715	–	–	–	–
Energijska metoda (Lim, Parsons, 1993)	–	0.9997	0.9902	0.9198	0.7264
Abaqus (Lim, Parsons, 1993)	–	0.9997	0.9902	0.9197	0.7264
Simitses, Sallam, Yin (1985)	–	0.9997	0.9902	0.9198	0.7264
Kroflič ($G = E/6$)	0.9715	0.9712	0.9622	0.8956	0.7111
Kroflič ($G = \infty$)	1.0000	0.9997	0.9902	0.9198	0.7264

Preglednica 3.2: Normalizirane uklonske sile za obojestransko vpeti steber z dolžino delaminacije l_d na relativni višini prečnega prereza r_d .

Table 3.2: Normalized buckling loads of clamped–clamped column with delamination length l_d at relative vertical positions r_d .

l_d	r_d	Chen (1991)	Kordomateas, Schmueser (1998)	Kroflič ($\gamma_1 = 0$)	Kroflič
0.2	0.2	0.7816	0.8003	0.8003	0.8130
	0.3	0.8280	0.8543	0.8543	0.8688
0.4	0.2	0.2354	0.2215	0.2215	0.2226
	0.3	0.4803	0.4689	0.4689	0.4734
0.6	0.2	0.1080	0.0997	0.0997	0.1000
	0.3	0.2322	0.2184	0.2184	0.2194
0.8	0.2	0.0615	0.0565	0.0565	0.0565
	0.3	0.1353	0.1254	0.1254	0.1258

Na sliki 3.3 predstavljamo normirana uklonske sile v odvisnosti od različnih vitkosti za različne vrednosti dolžine delaminacije (L_{23}/L), strižnega modula (G) in lege delaminacije glede na prečni prerez (μ). Delaminacije pri vseh primerih na sliki 3.3 so vzporedne z robovi prečnega prereza ($\phi = 0$). Lahko opazimo, da za manjše razmerje G/E opazno pade uklonska sila pri vitkejših stebrih. Prav tako je uklonska sila pričakovano precej odvisna tudi od dolžine delaminacije. Daljše delaminacije znatno zmanjšajo uklonsko silo. Prav tako se uklonska sila zelo zmanjša, če je delaminacija na robu prečnega prereza stebra.

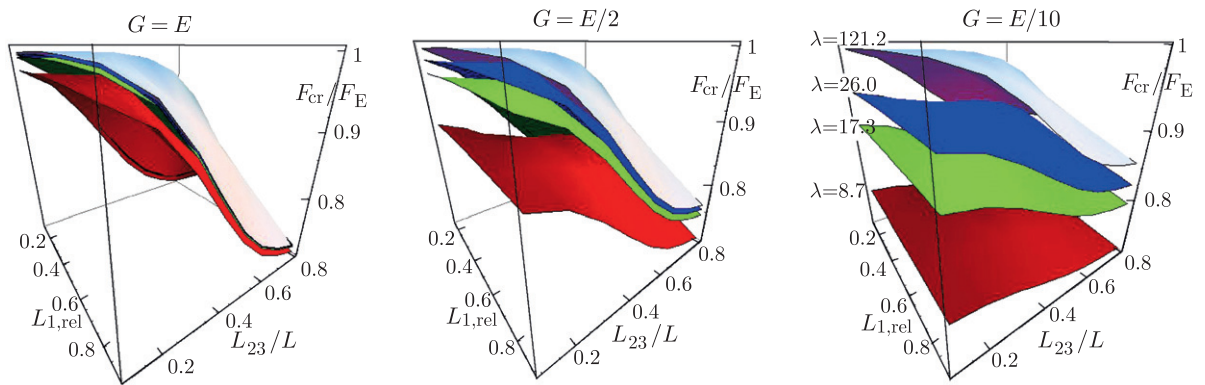


Slika 3.3: Prostoječi steber: normirana uklonska sila glede na različne vitkosti za različne vrednosti dolžine delaminacije (L_{23}/L), strižnega modula (G) in lege delaminacije glede na prečni prerez (μ).

Figure 3.3: Simply supported column: normalized critical force vs. slenderness for various delamination lengths (L_{23}/L), shear moduli (G) and delamination positions (μ).

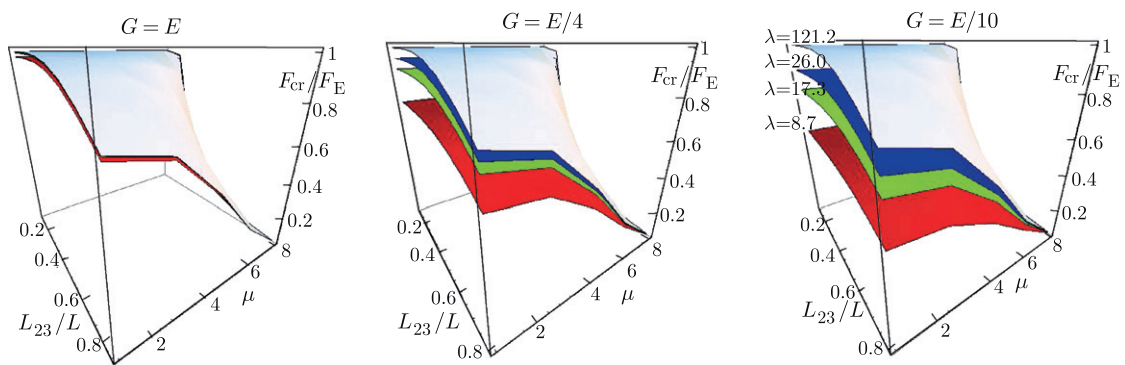
Slika 3.4 predstavlja normirano uklonsko silo v odvisnosti od različnih vitkosti za različne vrednosti dolžine delaminacije (L_{23}/L) in relativne vzdolžne lege delaminacije ($L_{1,rel} = L_1/(L - L_{23})$). Za vrednosti okoli $L_{1,rel} = 0.5$ (delaminacija na sredini) uklonska sila nekoliko naraste, povečanje dolžine delaminacije pa uklonsko silo zmanjša.

Slika 3.5 prikazuje normirano uklonsko silo glede na različne vitkosti za različne vrednosti dolžine delaminacije (L_{23}/L) in relativne prečne lege delaminacije (μ). Lahko opazimo, da robne delaminacije znatno zmanjšajo uklonsko silo, kar je še posebej razvidno pri daljših delaminacijah. Lahko opazimo tudi zmanjšanje uklonske sile na račun manjšega razmerja G/E .



Slika 3.4: Prostoležeči steber: normirana uklonska sila glede na različne vitkosti za različne vrednosti dolžine delaminacije (L_{23}/L) in relativne vzdolžne lege delaminacije ($L_{1,rel}$).

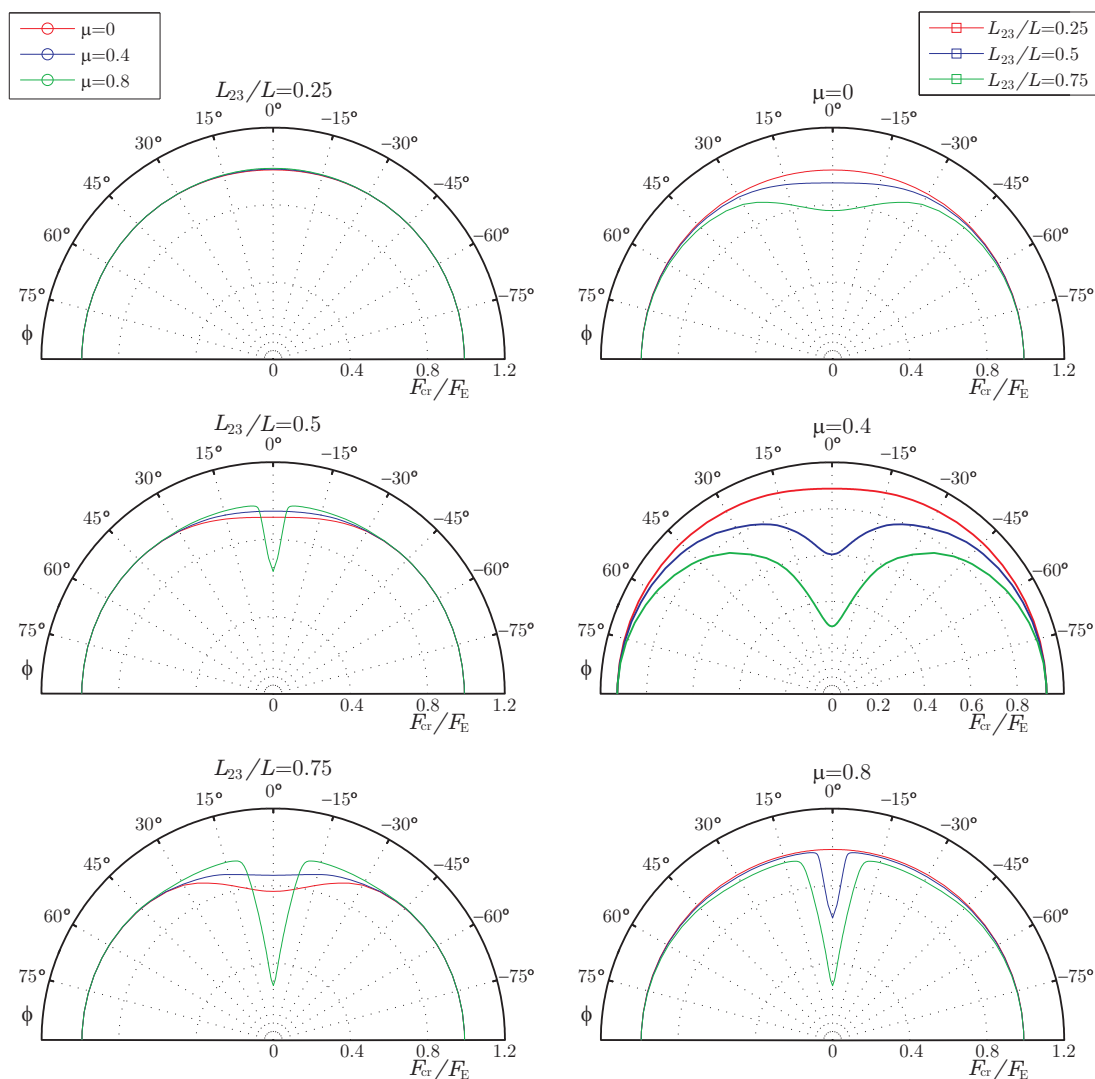
Figure 3.4: Simply supported column: normalized critical force vs. relative delamination length (L_{23}/L) and relative longitudinal position of delamination ($L_{1,rel}$).



Slika 3.5: Prostoležeči steber: normirana uklonska sila glede na različne vitkosti za različne vrednosti dolžine delaminacije (L_{23}/L) in relativne prečne lege delaminacije (μ).

Figure 3.5: Simply supported column: normalized critical force vs. relative delamination length (L_{23}/L) and relative lateral asymmetrical lege of delamination (μ).

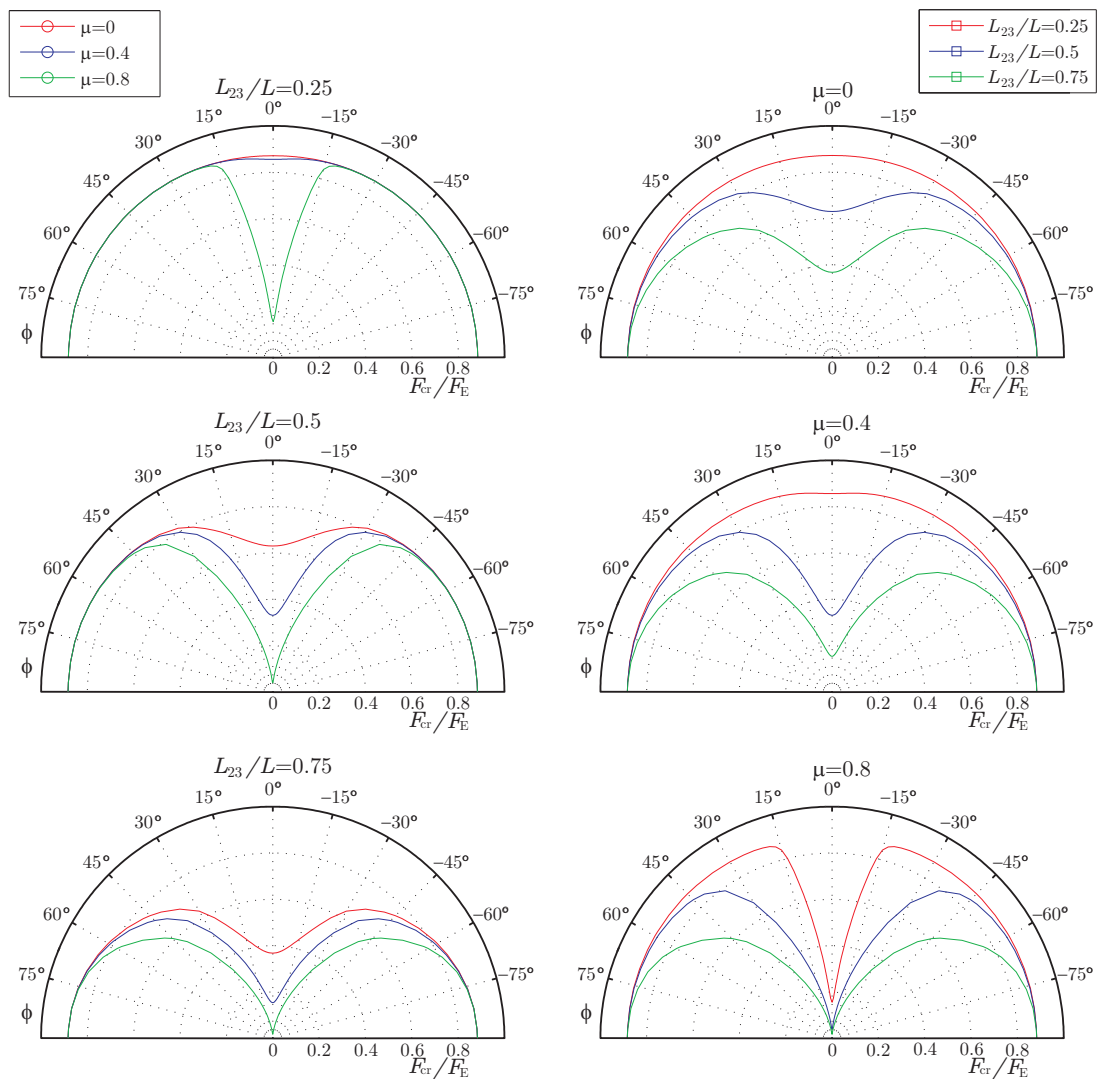
V naslednjem primeru prikazujemo rezultate uklonskih sil in uklonskih oblik za konzolno in obojestransko vpeti steber s prečnim prerezom debeline $h = 20$ cm in širine $b = 40$ cm. Višina stebra znaša $L = 400$ cm. Želimo pokazati, kako je velikost uklonske sile (F_{cr}) odvisna od kota delaminacije ϕ za različne navpične pozicije delaminacije μ in različne dolžine delaminacij L_{23} . Na slikah 3.6 (konzola) in 3.7 (obojestransko vpeti steber) predstavljamo rezultate v obliki polarnih grafov, na katerih prikazujemo normirano uklonsko silo v odvisnosti od kota delaminacije.



Slika 3.6: Konzola: normirana uklonska sila (F_{cr}/F_E) v odvisnosti od zasuka delaminacije ϕ (za različne vrednosti prečne lege delaminacije μ in različne dolžine delaminacij L_{23}).

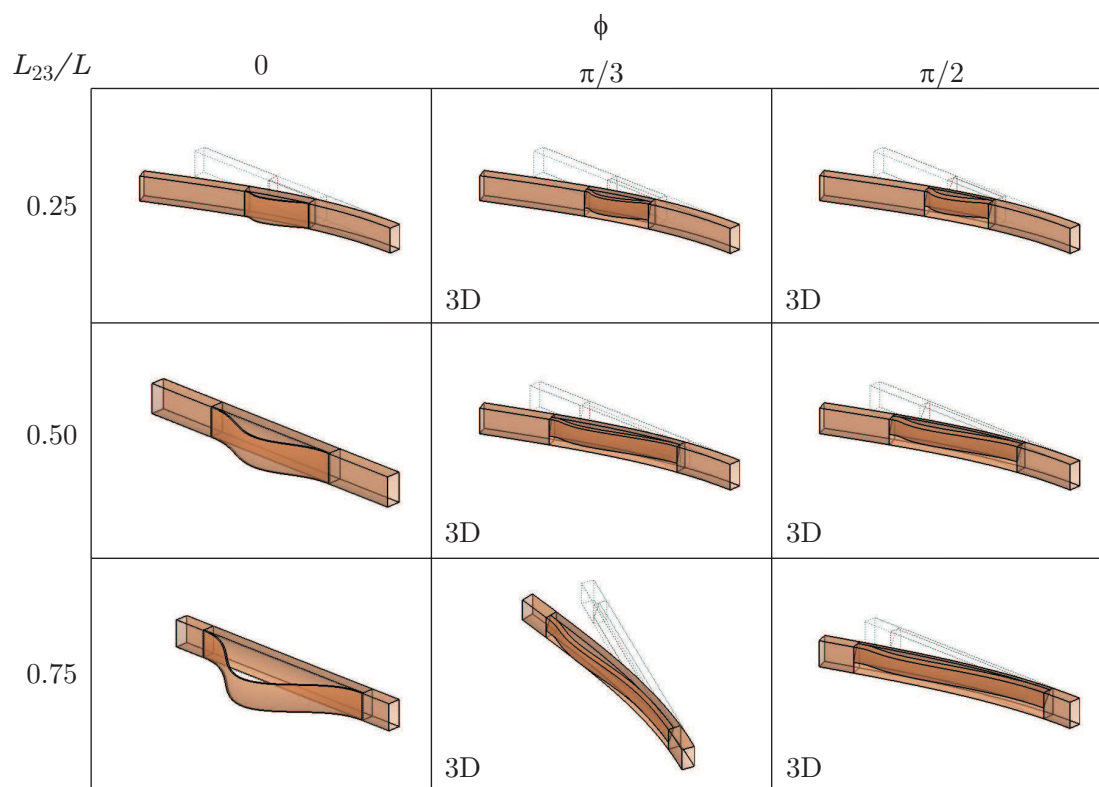
Figure 3.6: Cantilever column: normalized critical force (F_{cr}/F_E) vs. rotation of delamination ϕ (for different values of asymmetrical position of delamination μ and for different lengths of delamination L_{23}).

Pri obeh tipih podpiranj lahko opazimo padec uklonske sile za kote delaminacij okoli $\phi = 0^\circ$. Pri tem je opaznejši padec pri daljših delaminacijah in za delaminacije bližje robu stebra. Ugotovimo tudi, da so te razlike večje pri obojestransko vpetem stebri kot pri konzoli. Posledica padca uklonske sile je lokalno izbočenje ozkega delaminiranega dela stebra, ki se zgodi pri znatno nižji uklonski sili kot uklon globalnega stebra.



Slika 3.7: Obojestransko vpeti steber: normirana uklonska sila (F_{cr}/F_E) v odvisnosti od zasuka delaminacije φ (za različne vrednosti prečne lege delaminacije μ in različne dolžine delaminacij L_{23}).
Figure 3.7: Clamped–Clamped column: normalized critical force (F_{cr}/F_E) vs. rotation of delamination φ (for different values of asymmetrical position of delamination μ and for different lengths of delamination L_{23}).

Na slikah 3.8 in 3.9 predstavljamo uklonske oblike konzole in obojestranskovpetega stebra za delaminacijo pri $\mu = 0.75$. Simbol “3D” označuje prostorsko uklonsko obliko. Lahko vidimo, da v obeh primerih pride do ravninskega uklona pri delaminacijah s $\phi = 0^\circ$, pri delaminacijah pod kotom pa se v vseh primerih zgodi prostorski uklon. Opazimo lahko tudi, da v večini primerov pride do “mešanega” uklona, saj se poleg globalnega uklona stebra lokalno ukloni tudi delaminiran del stebra.



Slika 3.8: Uklonske oblike konzole z nesimetrično pozicijo delaminacije ($\mu = 0.75$) za različne kote ϕ in dolžine delaminacij L_{23}/L .

Figure 3.8: Buckling shapes of a cantilever column with non-symmetrical delamination ($\mu = 0.75$) for various angles ϕ and lengths of delaminations L_{23}/L .

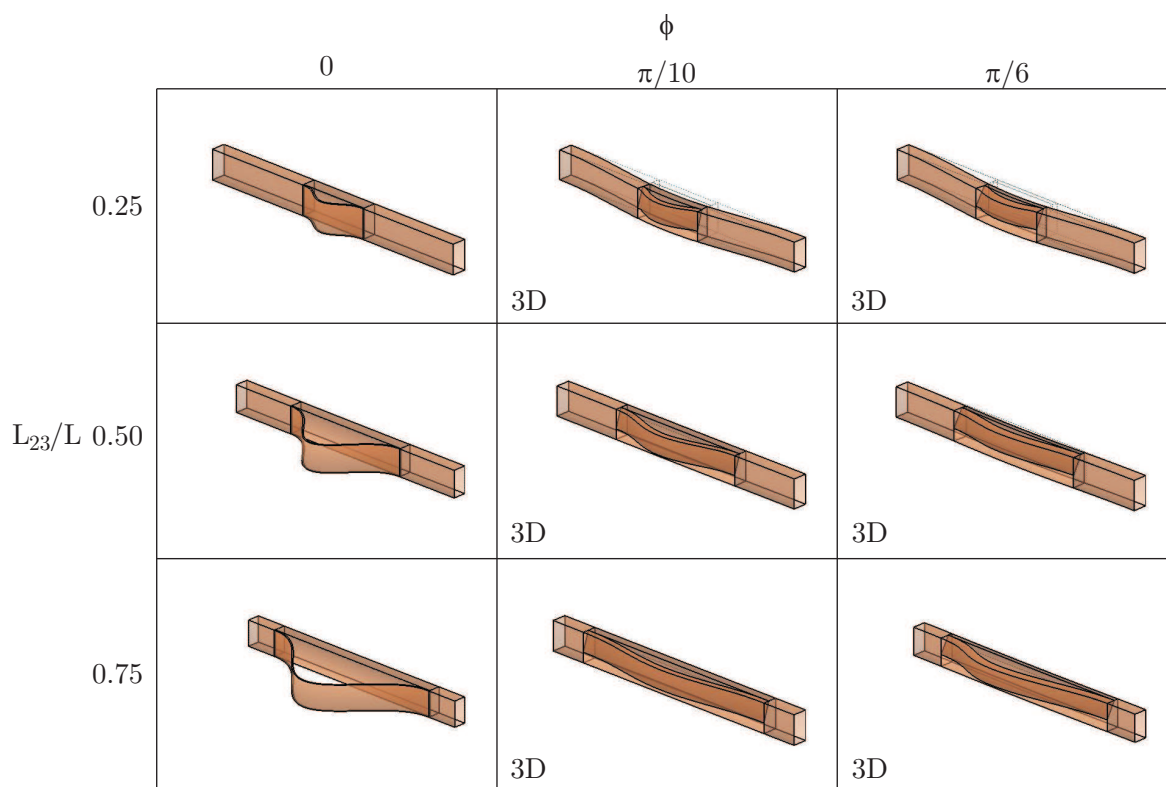
3.5.2 Zavrt elastični razslojeni prostorski steber

Kot v prejšnjem poglavju tudi tukaj upoštevamo linearno elastični material (3.92) in (3.93). Obravnavamo začetno zavrt konzolni steber s konstantnim prečnim prerezo višine $h = 50$ cm in širine $b = 23$ cm. Začetno zavrtje prečnega prereza ψ_L okoli računske osi se giblje na intervalu $[0, \pi]$. Privzamemo elastični modul $E = 1200$ kN/cm² in strižni modul $G = 75$ kN/cm². Višina stebra znaša $L = 300$ cm.

V rezultatih ločeno prikazujemo vpliv treh parametrov na uklonsko silo. Rezultati so prikazani v odvisnosti od različnih velikosti začetnega zavrtja prečnih prerezov ψ_L . Pri tem vse rezultate normiramo z Eulerjevo uklonsko silo ravnega nedelaminiranega stebra.

Najprej analiziramo vpliv vitkosti λ na uklonsko silo nedelaminiranega stebra v odvisnosti od različnega maksimalnega začetnega zavrtja prečnih prerezov ψ_L (slika 3.10(a)). Opazimo lahko, da uklonska sila narašča z naraščanjem začetnega kota navitja ne glede na izbrano vitkost stebra. Na sliki je opazen tudi vpliv striga na uklonsko silo čokatih stebra.

V nadaljevanju analiziramo vpliv prečne lege delaminacije μ na uklonsko silo delaminiranih stebrov. Privzamemo relativno dolgo delaminacijo ($L_{23} = 2/3L$), ki je v vzdolžni smeri postavljena na sredino stebra ($L_1 = L_2 = 2/3L$). Prečno lege delaminacije spreminjamo (glede na os \mathbf{G}_2) od simetrične postavitve $\mu = 0$ na sredini prečnega prereza proti robu stebra. Slika 3.10(b) predstavlja normirano

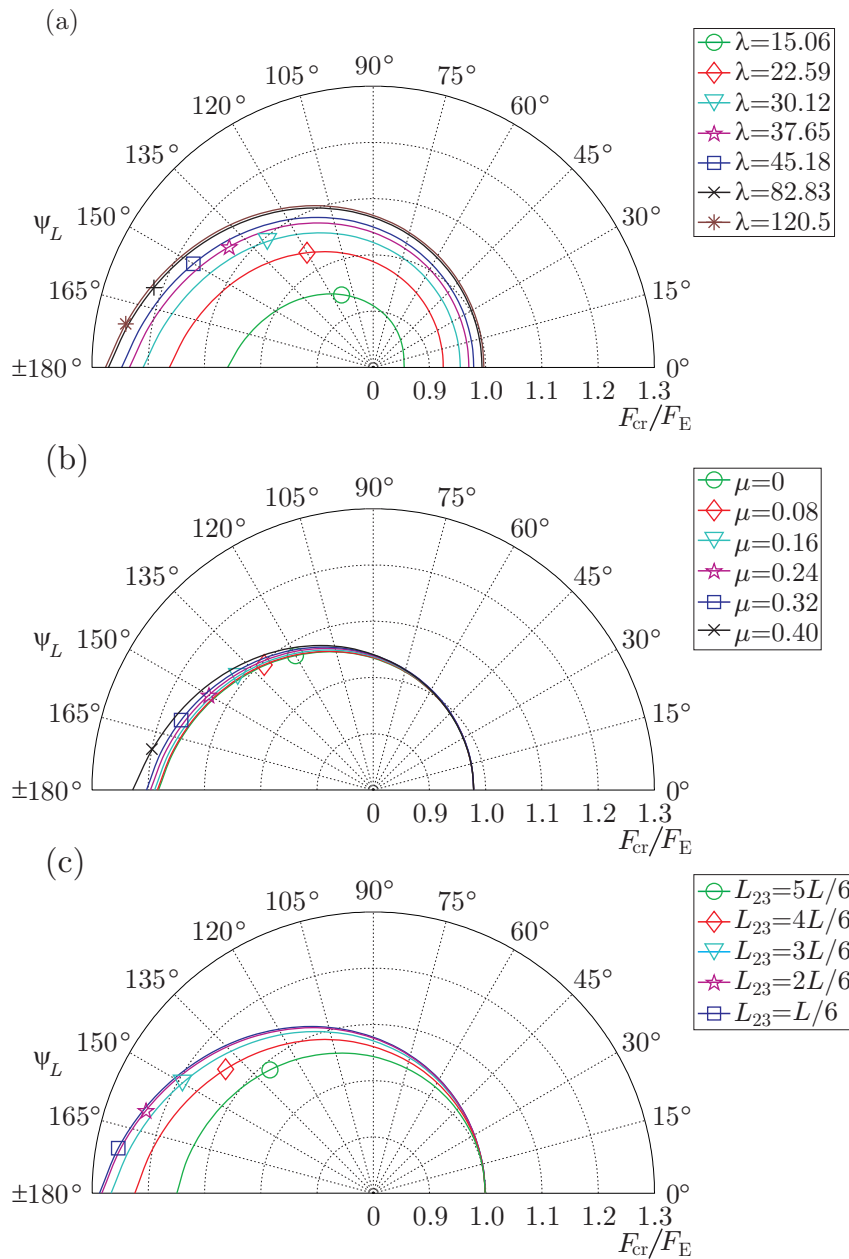


Slika 3.9: Uklonske oblike obojestransko vpetega stebra z nesimetrično pozicijo delaminacije ($\mu = 0.75$) za različne kote φ in dolžine delaminacij L_{23}/L .

Figure 3.9: Buckling shapes of a clamped-clamped column with non-symmetrical delamination ($\mu = 0.75$) for various angles φ and lengths of delaminations L_{23}/L .

uklonsko silo v odvisnosti od različnega maksimalnega začetnega zavijta prečnih prereзов ψ_L za različne vrednosti μ . Lahko opazimo zanemarljiv vpliv prečne pozicije delaminacije μ za stebre z začetnim navitjem do kota $\pi/2$.

V zadnjem primeru analiziramo vpliv dolžine delaminacije L_{23} na uklonsko silo. Privzamemo simetrično postavitev delaminacije glede na prečni prerez $\mu = 0$. Vzdolžno dolžino delaminacije spreminjamo od $L_{23} = 1/6L$ do $L_{23} = 5/6L$. Slika 3.10(c) predstavlja normalizirano uklonsko silo v odvisnosti od različnega maksimalnega začetnega zavijta prečnih prereзов ψ_L za različne dolžine delaminacij L_{23} . Pričakovano vrednost uklonske sile pada s povečevanjem dolžine delaminacije. S povečevanjem začetnega zavijta prereзов narašča tudi uklonska sila stebra. Ta vpliv je opaznejši pri stebrih s krajšimi delaminacijami, a ga ne moremo zanemariti tudi pri daljših delaminacijah.



Slika 3.10: Vpliv treh parametrov na uklonsko silo: (a) vitkost λ , (b) prečne lege delaminacije μ in (c) dolžine delaminacije L_{23} .

Figure 3.10: Effect of three parameters on the critical buckling force: (a) slenderness λ , (b) asymmetrical position μ and (c) length of delamination L_{23} .

4 Zaključki

V doktorski disertaciji smo predstavili nov numerični model za nelinearno statično analizo večslojnih linijskih kompozitnih nosilcev s podajnimi veznimi sredstvi. Vsebinsko smo disertacijo razdelili v dva dela. V prvem delu smo predstavili numerični model za analizo ravninskih večslojnih kompozitnih okvirjev. Vsak sloj kompozitnega okvirja smo modelirali z geometrijsko točnim Reissnerjevim modelom ravninskega nosilca. Konstitutivne enačbe veznih sredstev smo zapisali v "povprečni" bazi. Tako smo fizikalno smiselno posplošili znane konstitutivne zakone veznih sredstev, ki se uporabljajo pri linearnih modelih dvoslojnih kompozitnih nosilcev in so zapisani v prostorski bazi, tudi za analizo geometrijsko nelinearnih modelov večslojnih kompozitnih okvirjev. Nelinearni sistem ravnotežnih enačb matematičnega modela smo rešili z novo družino deformacijskih končnih elementov. S številnimi računskimi primeri smo analizirali konvergenčne lastnosti novih končnih elementov in natančnost numeričnega modela za analizo večslojnih kompozitnih okvirjev s podajnimi veznimi sredstvi. Ugotovili smo:

- da so konvergenčne lastnosti novih deformacijskih končnih elementov zelo dobre, saj le z nekaj končnimi elementi, pri katerih deformacije interpoliramo z Lagrangeovimi polinomi četrtega reda, dobimo zelo natančne rezultate pri geometrijsko in materialno linearnih in nelinearnih modelih večslojnih kompozitnih nosilcev;
- da parameter "povprečne" baze nima pomembnega vpliva na velikost kinematičnih količin upogibno obremenjenih dvoslojnih kompozitnih nosilcev;
- da je predstavljeni numerični model zelo natančen, saj z njim zelo natančno določimo togost, duktilnost in nosilnost ter način porušitve zelo različnih vrst večslojnih kompozitnih okvirjev, ki se uporabljajo v gradbeništvu.

Dodatno smo z detajlnimi parametričnimi analizami ugotovili:

- da ima pri upogibno obremenjenih dvoslojnih linijskih kompozitnih nosilcih vzdolžna togost stika prevladujoč vpliv na napetostno in deformacijsko stanje;
- da ima prečna togost stika pričakovano prevladujoč vpliv pri prečnem razslojevanju dvoslojnih kompozitnih nosilcev;
- da imata prečna in vzdolžna togost stika velik vpliv na uklonsko nosilnost dvoslojnih kompozitnih stebrov.

V drugem delu doktorske disertacije smo predstavili točno rešitev uklonskih sil pri popolnoma razslojenih ravnih in zavutih elastičnih prostorskih stebrih. Točno rešitev smo določili z linearizirano stabilnos-

tno analizo. S parametričnimi študijami smo analizirali vpliv velikosti, lege in orientacije razslojenega dela elastičnega prostorskega stebra na njegovo uklonsko nosilnost. Ugotovili smo:

- da lega in velikost popolnoma razslojenega dela ravnih in zavutih elastičnih prostorskih stebrov vplivata na njihovo uklonsko nosilnost. Tako je lahko uklonska nosilnost razslojenih ravnih elastičnih stebrov do devetdeset odstotkov manjša kot pri nerazslojenih stebrih, pri zavutih elastičnih razslojenih stebrih pa je ta vpliv mnogo manjši, do okoli petnajst odstotkov;
- da orientacija razslojenega dela ravnega prostorskega nosilca lahko povzroči, da je ravnina lokalne uklonske oblike sloja drugačna, kot je ravnina globalne uklonske oblike razslojenega elastičnega prostorskega stebra.

5 Povzetek

V doktorski disertaciji smo se ukvarjali z analizo večslojnih linijskih kompozitnih konstrukcij. Detajlno nas je zanimal vpliv vzdolžne in prečne podajnosti veznih sredstev med sloji kompozitnih konstrukcij na togost, duktilnost, nosilnost okvirjev in uklonsko nosilnost stebrov. Disertacijo smo razdelili na dva vsebinsko ločena dela.

Drugo poglavje je osrednji del disertacije. V njem smo predstavili nov numerični model in pripadajoči računalniški program v programskem okolju Matlab za nelinearno statično analizo večslojnih kompozitnih okvirjev s podajnimi veznimi sredstvi. Vsak sloj kompozitnega nosilca smo modelirali z geometrijsko točnim Reissnerjevim modelom ravninskega nosilca, pri čemer smo upoštevali poljubno nelinearno obnašanje vsakega sloja in vseh veznih sredstev. Posebno pozornost smo posvetili modeliranju veznih sredstev oziroma stika med sloji. Predpostavili smo zelo splošen konstitutivni model veznih sredstev, ki omogoča modeliranje razslojevanja slojev kompozitnega nosilca tako v vzdolžni kot v prečni smeri. V disertaciji smo komponente konstitutivne zveze veznih sredstev zapisali v povprečni bazi med tangentnimi in normalnimi baznimi vektorji slojev na stiku.

Osnovne ravnotežne nelinearne enačbe večslojnega linijskega kompozitnega nosilca smo v disertaciji rešili numerično, in sicer z Galerkinovo metodo končnih elementov. Predstavili smo novo družino deformacijskih končnih elementov za analizo različnih vrst večslojnih linijskih kompozitnih okvirjev s podajnimi veznimi sredstvi, ki smo jih izpeljali z modificiranim izrekom o virtualnem delu za večslojne linijske kompozitne nosilce. Neznanke nove družine končnih elementov so deformacijske količine vsakega sloja kompozitnega nosilca in le robne vrednosti ravnotežnih ter kinematičnih količin kompozitnega nosilca. Osnovne diskretne nelinearne ravnotežne enačbe večslojnih linijskih kompozitnih nosilcev oziroma kompozitnih okvirjev smo v disertaciji rešili z Newton-Raphsonovo iteracijsko shemo, obtežno-deformacijsko krivuljo kompozitnega okvirja smo za znano obtežbo določili s konsistentno linearizirano Crisfieldovo metodo ločne dolžine, časovni odziv večslojnega linijskega kompozitnega nosilca okvirja zaradi lezenja in krčenja enega ali več betonskih slojev okvirja pa s koračno metodo. Dodatno smo v disertaciji za linearne večslojne linijske kompozitne nosilce predstavili analitične rešitve za določitev njihovega napetostnega in deformacijskega stanja.

Z ustrežno izbiro materialnih modelov slojev in veznih sredstev lahko s predstavljenim numeričnim modelom izvedemo geometrijsko in materialno nelinearno analizo različnih vrst večslojnih kompozitnih okvirjev, ki se uporabljajo v gradbeništvu. Pri tem lahko analiziramo kompozitne okvirje iz poljubnih gradbenih materialov v mejnem stanju uporabnosti ali v mejnem stanju nosilnosti. Pri večslojnih armiranobetonskih okvirjih oziroma pri večslojnih kompozitnih okvirjih, pri katerih je en ali več slojev iz armiranega betona, lahko analiziramo tudi vpliv mehčanja prečnega prereza posameznega betonskega sloja na duktilnost in nosilnost kompozitnega okvirja in vpliv krčenja ter lezenja betona na togost večslojnih kompozitnih okvirjev. Zaradi velike splošnosti je numerični model primeren tudi za analizo razslojevanja

vseh vrst kompozitnih okvirjev in tudi za določitev uklonske nosilnosti razslojenih večslojnih kompozitnih stebrov ter okvirjev. Uporabnost predstavljenega numeričnega modela za analizo togosti, duktilnosti in nosilnosti večslojnih kompozitnih okvirjev smo v doktorski disertaciji predstavili s številnimi računskimi primeri. Z detajlnimi parametričnimi študijami smo ugotovili, da ima pri upogibno obremenjenih dvoslojnih linijskih kompozitnih nosilcih vzdolžna togost stika prevladujoč vpliv na napetostno in deformacijsko stanje. Pri prečnem razslojevanju dvoslojnih kompozitnih nosilcev se izkaže, da ima prevladujoč vpliv prečna togost stika. Na uklonsko nosilnost dvoslojnih kompozitnih stebrov vplivata obe, prečna in tudi vzdolžna togost stika.

V tretjem poglavju doktorske disertacije smo predstavili točno rešitev za določitev uklonske nosilnosti razslojenih prostorskih stebrov, ki smo jo določili s konsistentno linearizacijo osnovnih nelinearnih enačb razslojenih prostorskih stebrov. Točne rešitve smo prikazali za ravne in zavite prostorske stebre z eno delaminacijo. Pri izpeljavi uklonskih sil razslojenih stebrov smo uporabili Reissner-Simov matematični model za prostorske nosilce. Vpliv velikosti, lege in oblike razslojenega dela obravnavanih prostorskih stebrov smo v doktorski disertaciji prikazali s parametričnimi študijami. Izkazalo se je, da lega in velikost razslojenih delov ravnih in zavutih elastičnih prostorskih stebrov vplivata na njihovo uklonsko nosilnost. Ugotovili smo tudi, da lahko orientacija razslojenega dela ravnega prostorskega nosilca povzroči, da ravnina lokalne uklonske oblike sloja ne sovpada z ravnino globalne uklonske oblike razslojenega elastičnega prostorskega stebra.

6 Summary

The analysis of multilayer composite structures was the topic of the presented doctoral thesis. The effect of shear and transverse connection stiffness between layers of composite structure on stiffness, ductility, load capacity of frames and buckling capacity of columns was examined in detail. Doctoral thesis was divided into two parts.

The second chapter presents the main part of doctoral thesis in which a new numerical model and corresponding software developed in Matlab environment for non-linear static analysis of multilayer composite frames with flexible connection were presented. Each layer of composite beam was modelled by geometrically exact Reissner's plane beam model where arbitrary non-linear behaviour of connection between layers was considered. A versatile model capable of describing debonding and slipping at the contact was introduced. Components of contact constitutive relationships were described in an average base established from tangential and normal contact basis vectors.

Basic set of non-linear equations of multilayer composite beam was solved numerically by Galerkin's finite element method. A new family of strain-based finite elements for the analysis of different types of multilayer composite beams with flexible interface connection was introduced. They were derived with the use of modified principle of virtual work for multilayer composite beams. Basic unknowns of presented finite elements were deformation quantities of each layer and equilibrium and kinematic quantities at the ends of composite beam. Basic discrete non-linear equilibrium equations of multilayer composite beams or frames were solved with Newton-Raphson iteration scheme. Load-deflection curve of composite beam at known load level was defined by consistently linearized Crisfield's arc-length method. Transient response of multilayer composite beam subjected to creep and shrinkage of one or more concrete layers was determined with step-by-step method. Additionally, an analytical solution for stress and strains state in linear multilayer composite beam was introduced in the doctoral thesis.

Proper selection of material models of layers and connections enabled us to perform geometrically and materially non-linear analysis for several different multilayer composite beams used in engineering practice. The analysis can be carried out for composite frames made out of arbitrary material in ultimate or serviceability limit state. The effect of cross-section softening of multilayer concrete composite beam on frame ductility and load capacity and the effect of shrinkage and creep on stiffness of multilayer composite frames can also be analyzed. Due to its versatility the presented numerical model is suitable also for the debonding analysis of different types of composite frames and also for determination of buckling load capacity of debonded multilayer composite columns and frames. There were many numerical examples presented to show the versatility of presented numerical model for the analysis of stiffness, ductility and load capacity of multilayer frames. Detailed parametric studies revealed that shear stiffness has a dominant influence on stress-strain state of two-layer composite beams. Transverse contact stiffness has a dominant effect on debonding of two-layer beams. Both, shear and transverse stiffness have a

significant effect on buckling capacity of two-layer composite columns.

A new exact solution for evaluating buckling capacity of debonded spatial columns was presented in the third chapter. The consistent linearization of basic non-linear equations of debonded spatial columns was the key to the success of presented approach. Exact solutions were presented for the case of straight and twisted spatial columns with one delamination and were derived with the use of Reissner-Simo's mathematical model for spatial beams. The effect of length, position and shape of debonded part of considered composite columns was investigated. It is clear that position and length of debonded parts of a straight and twisted elastic spatial beams affect buckling capacity of the column. It was also determined that the orientation of debonded part of a straight spatial column sometimes causes local buckling shape of delaminated part in plane which doesn't coincide with the plane of global buckling shape of debonded elastic spatial column.

Literatura

- ACI committee-209. 1982. Prediction of creep, shrinkage, and temperature effects in concrete structures. Detroit, Michigan, American Concrete Institute (ACI).
- Adekola, A. O. 1968. Partial interaction between elastically connected elements of a composite beam. *Int. J. Solids Struct.* 4(11): 1125–1135.
- Alfano, G., Crisfield, M. A. 2001. Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: mechanical and computational issues. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 50: 1701–1736.
- Almond, E. A. 1970. Delamination in banded steels. *Metall. Trans.* 1(7): 2038–2041.
- Almusallam, T. H., Al-Salloum, Y. A. 2001. Ultimate strength prediction for RC beams externally strengthened by composite materials. *Comp., Part B Eng.* 32(7): 609–619.
- Ansourian, P. 1981. Experiments on continuous composite beams. *Proc. Inst. Civ. Eng.* 73(1): 25–51.
- Argyris, J. H. 1982. An excursion into large rotations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 32(1–3): 85–155.
- Au, C., Buyukozturk, O. 2006. Debonding of FRP plated concrete: a tri-layer fracture treatment. *Eng. Fract. Mech.* 73(3): 348–365.
- Barenblatt, G. I. 1959. On equilibrium cracks formed in brittle fracture. General concepts and hypotheses. Axisymmetric cracks. *J. Appl. Math. Mech.* 23(3): 622–636.
- Bažant, Z. P. 1972. Numerical determination of long-range stress history from strain history in concrete. *Mat. and Struct.* 5(27): 135–141.
- Bažant, Z. P., Oh, B. H. 1983. Crack band theory for fracture of concrete. *Mat. and Struct.* 16(3): 155–177.
- Bažant, Z. P., Pijaudier-Cabot, G. 1989. Measurement of characteristic length of nonlocal continuum. *J. Eng. Mech.* 115(4): 755–767.
- Bažant, Z. P., Planas, J. 1998. Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials. Boca Raton, Florida, CRC Press: 640 str.
- Betti, R., Gjelsvik, A. 1996. Elastic composite beams. *Comput. Struct.* 59(3): 437–451.
- Bonet, J., Wood, R. D. 1997. Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. Cambridge, Velika Britanija, Cambridge University Press: 248 str.

- Bradford, M. A., Gilbert, R. I. 1991a. Experiments on composite beams at service loads. Kensington, N.S.W. : University of New South Wales: 18 str.
- Bradford, M. A., Gilbert, R. I. 1991b. Time-dependent behaviour of simply-supported steel-concrete composite beams. *Mag. Concr. Res.* 43(157): 265–274.
- Bradford, M. A., Gilbert, R. I. 1992. Composite beams with partial interaction under sustained loads. *ASCE J. Struct. Eng.* 118(7): 1871–1883.
- Bratina, S. 2003. Odziv armiranobetonskih linijskih konstrukcij na požarno obtežbo. Doktorska disertacija. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Konstrukcijska smer: 159 str.
- Bratina, S., Saje, M., Planinc, I. 2004. On materially and geometrically non-linear analysis of reinforced concrete planar frames. *Int. J. Solids Struct.* 41(24–25): 7181–7207.
- CEB-FIB:1990. CEB-FIB Model Code (MC-90).
- Chai, H., Babcock, C. D., Knauss, W. G. 1981. One dimensional modelling of failure in laminated plates by delamination buckling. *Int. J. Solids Struct.* 17(11): 1069–1083.
- Chen, H. P. 1991. Shear deformation theory for compressive delamination buckling and growth. *AIAA J.* 29(5): 813–819.
- Coleman, J., Spacone, E. 2001. Localization issues in force-based frame elements. *J. Struct. Eng.* 127(11): 1257–1265.
- Cowper, G. R. 1966. The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory. *J. Appl. Mech.* 33(2): 335–340.
- Crisfield, M. A. 1981. A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through. *Comput. Struct.* 13(1): 55–62.
- Crisfield, M. A. 1996. Non-linear finite element analysis of solids and structures. Chichester idr., John Wiley & Sons: 362 str.
- Čas, B. 2004a. Nelinearna analiza kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med sloji. Doktorska disertacija. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Konstrukcijska smer: 136 str.
- Čas, B., Saje, M., Planinc, I. 2004b. Non-linear analysis of composite steel-concrete beams with incomplete interaction. *Steel Comput. Struct.* 4(6): 489–507.
- Čas, B., Saje, M., Planinc, I. 2004c. Non-linear finite element analysis of composite planar frames with an interlayer slip. *Comput. Struct.* 82(23–26): 1901–1912.
- Daniels, B. J., Crisnel, M. 1993. Composite slab behavior and strength analysis. Part II: Comparison with test results and parametric analysis. *J. Struct. Eng.* 119(1): 36–49.
- Desayi, P., Krishnan, S. 1964. Equation for the stress-strain curve of concrete. *J. Am. Conc. Inst.* 61(3): 345–350.
- De Lorenzis, L., Teng, J. G., Zhang, L. 2006. Interfacial stresses in curved members bonded with a thin plate. *Int. J. Solids Struct.* 43(25–26): 7501–7517.

- De Lorenzis, L., Zavarise, G. 2008. Modeling of mixed-mode debonding in the peel test applied to superficial reinforcements. *Int. J. Solids Struct.* 45(20): 5419–5436.
- Dezi, L., Tarantino, A. M. 1993. Creep in composite continuous beams. II: Parametric study. *J. Struct. Eng.* 119(7): 2112–2113.
- Dilger, W. H. 1982. Method of structural creep analysis. *Creep and Shrinkage in Concrete Structures*, Z. P. Bažant in F. H. Wittmann, eds., London, Velika Britanija, John Wiley and Sons: 305–339.
- Dugdale, D.S. 1960. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids* 8: 100–104.
- Euler, L. 1744. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*. Lausanne.
- EN 338: 2003. Structural timber – Strength classes.
- SIST EN 1992-1-1: 2005. Evrokod 2: Projektiranje betonskih konstrukcij -1-1.del: Splošna pravila in pravila za stavbe.
- Fabbrocino, G., Manfredi, G., Cosenza, E. 1999. Non-linear analysis of composite beams under positive bending. *Comput. Struct.* 70(1): 77–89.
- Feng, Y. T., Perić, D., Owen, D. R. J. 1996. A new criterion for determination of initial loading parameter in arc-length methods. *Comput. Struct.* 58(3): 479–485.
- Foschi, R.O. 1974. Load-slip characteristic of nails. *Wood Sci.* 7(1): 69–76.
- Foschi, R. O., Bonac, T., 1977. Load-slip characteristics for connections with common nails. *Wood Sci.* 9(3): 118–123.
- Gara, F., Ranzi, G., Leoni, G. 2006. Displacement based formulations for composite beams with longitudinal slip and vertical uplift. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 65(8): 1197–1220.
- Gattesco, N. 1999. Analytical modeling of nonlinear behavior of composite beams with deformable connection. *J. Constr. Steel Res.* 52(2): 195–218.
- Ghali, A., Favre, R. 1994. *Concrete structures: stress and deformation*. London, Velika Britanija, Spon Press; 2 Sub edition.
- Gilbert, R. I. 1988. *Time effects in concrete structures*. Amsterdam, Nizozemska, Elsevier Science Ltd: 33.
- Girhammar, U. A., Gopu, V. K. A. 1993. Composite beam-columns with interlayer slip – exact analysis. *ASCE J. Struct. Eng.* 119(4): 1265–1282.
- Goldberg, J. L., Schwartz, A. J. 1972. *System of ordinary differential equations: an introduction*. New York: Harper & Row, Publishes.: 315 str.
- Goodman, J. R., Popov, E. P. 1968. Layered beam systems with interlayer slip. *J. Struct. Div.* 94(11): 2535–2547.
- Granhölm, H. 1968. On composite beams and columns with special regard to nailed timber structures. *Trans. No. 88*. Goeteborg, Sweden, Chalmers University of Technology, (v švedščini).
- Hamed, E., Bradford, M. A. 2010. Creep in concrete beams strengthened with composite materials. *Eur. J. Mech. A. Solids* 29(6): 951–965.

- Hjelmstad, K. D. 2004. *Fundamentals of structural mechanics*. New York, Združene Države Amerike, Springer, 2. izdaja: 494 str.
- Holzapfel, K. D. 2001. *Nonlinear solid Mechanics: A continuum approach for engineering*. West Sussex, England, John Wiley & Sons, 1. izdaja: 455 str.
- Hozjan, T. 2009. Nelinearna analiza vpliva požara na sovprežne linijske konstrukcije. Doktorska disertacija. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Konstrukcijska smer: 117 str.
- Ibrahimbegović, A. 1997. On the choice of finite rotation parameters. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 149(1–4): 49–71.
- Jansen, D. C., Shah, S. P. 1997. Effect of length on compressive strain softening of concrete. *J. Eng. Mech.* 123(1): 25–35.
- Jiràsek, M. 1997. Analytical and numerical solutions for frames with softening hinges. *J. Eng. Mech.* 123(1): 8–14.
- Jiràsek, M., Bažant, Z. P. 2001. *Inelastic analysis of structures*. John Wiley and Sons, Chichester.
- Jurkiewicz, B., Buzon, S., Sieffert, J. G. 2005. Incremental viscoelastic analysis of composite beams with partial interaction. *Comput. Struct.* 83(21–22): 1780–1791.
- Kamiya, F. 1987. Buckling theory of sheated walls: Linear analysis. *J. Struct. Eng.* 113(9): 2009–2022.
- Kamiya, F. 1988. Buckling of sheated walls: Nonlinear analysis. *J. Struct. Eng.* 114(3): 625–641.
- Kordomateas, G. A., Schmueser, D. W. 1988. Buckling and postbuckling of delaminated composites under compressive loads including transverse shear effect. *AIAA J.* 26(3): 337–343
- Keller, H. B., 1970. Nonlinear bifurcation. *J. Differential Equations* 7: 417–434.
- Krawczyk, P., Frey, F., Zieliński, A. P. 2007. Large deflections of laminated beams with interlayer slips Part 1: model development. *Int. J. Comput.-Aided Eng. Soft.* 24(1): 17–32.
- Kroflič, A., Planinc, I., Saje, M., Čas, B. 2010a. Analytical solution of two-layer beam including interlayer slip and uplift. *Struct. Eng. Mech.* 34(6): 667–683.
- Kroflič, A., Planinc, I., Saje, M., Turk, G., Čas, B. 2010b. Non-linear analysis of two-layer timber beams considering interlayer slip and uplift. *Eng. Struct.* 32(6): 1617–1630.
- Kroflič, A., Saje, M., Planinc, I. 2011. Non-linear analysis of two-layer beams with interlayer slip and uplift. *Comput. Struct.* 89(23–24): 2414–2424.
- Kryžanovski, A., Saje, M., Planinc, I., Zupan, D. 2008. Analytical solution for buckling of asymmetrically delaminated Reissner's elastic columns including transverse shear. *Int. J. Solids Struct.* 45(3–4): 1051–1070.
- Lee, Y.-H., William, K. 1997. Mechanical properties of concrete in uniaxial compression. *ACI Mat. J.* 94(6): 457–471.
- Lim, Y. B., Parsons, I. D. 1993. The linearized buckling analysis of a composite beam with multiple delaminations. *Int. J. Solids Struct.* 30(22): 3085–3099.

- Manfredi, G., Fabbrocino, G., Cosenza, E. 1999. Modeling of steel–concrete composite beams under negative bending. *J. Eng. Mech.* 125(6): 654–662.
- Markeset, G., Hillerborg, A. 1995. Softening of concrete in compression – localization and size effect. *Cem. Concr. Res.* 25(4): 702–708.
- McCutcheon, W. J. 1986. Stiffness of framing members with partial composite action. *ASCE J. Struct. Eng.* 112(7): 1623–1637.
- Milner, H. R., Tan, H. H. 2001. Modelling deformation in nailed, thin-webbed timber box beams. *Comput. Struct.* 79(29–30): 2541–2546.
- Moradi, S., Taheri, F. 1999. Delamination buckling analysis of general laminated composite beams by differential quadrature method. *Compos.: Part B* 30(5): 503–511.
- Newmark, N. M., Siess, C. P., Viest, I. M., 1951. Tests and analysis of composite beams with incomplete interaction. *Proc. Soc. Exp. Stress Anal.* 9(1): 75–92.
- Nguyen, D. M., Chan, T. K., Cheong, H. K., 2001. Brittle failure and bond development length of CFRP-concrete beams. *J. Compos. Constr.* 5(1): 12–17.
- Ollgaard, J. G., Slutter, R. G., Fischer, J. W., 1971. Shear strength of stud connectors in lightweight and normal weight concrete. *AISC Eng. J.* 8: 55–64.
- Pischl, R. 1980. Holzbau mit kritischen betrachtungen und neuen vorschlägen zur bemessung nach theorie 1. und 2. ordnung. Institut für Stahlbau, Holzbau und Flächentragwerke, Technische Universität Graz.
- Planinc, I. 1998. Račun kritičnih točk konstrukcij s kvadratično konvergentnimi direktnimi metodami. Doktorska disertacija. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Konstrukcijska smer: 83f str.
- Planinc, I., Saje, M., Čas, B. 2001. On the local stability condition in the planar beam finite element. *Struct. Eng. Mech.* 12(5): 507–526.
- Planinc, I., Schnabl, S., Saje, M., Lopatič, J., Čas, B. 2008. Numerical and experimental analysis of timber composite beams with interlayer slip. *Eng. Struct.* 30(11): 2959–2969.
- Pleshkov, P. F. 2008. Theoretical studies of composite wood structures. Soviet Union (v ruščini).
- Rabanovitch, O., Frostig, Y. 2001. Delamination failure of RC beams strengthened with FRP strips – a closed-form high-order and fracture mechanics approach. *J. Eng. Mech.* 127(8): 852–861.
- Rabanovitch, O. 2008. Debonding analysis of fiber-reinforced-polymer strengthened beams: cohesive zone modelling versus a linear elastic fracture mechanics approach. *Eng. Fract. Mech.* 75(10): 2842–2859.
- Rahimi, H., Hutchinson, A. 2001. Concrete beams strengthened with externally bonded FRP plates. *J. Compos. Constr.* 5(1): 44–56.
- Ramm, E., 1980. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. 2nd US-Europe Workshop on nonlinear finite element analysis in structural mechanics. (Ruhr Universität Bochum, Germany, eds. K.-J. Bathe, E. Stein & W. Wunderlich), Berlin, Springer Verlag: 63–89.

- Ranzi, G., Gara, F., Ansourian, P. 2007. General method of analysis for composite beams with longitudinal and transverse partial interaction. *Comput. Struct.* 84(31–32): 2373–2384.
- Ranzi, G., Bradford, M. A. 2007. Direct stiffness analysis of a composite beam-column element with partial interaction. *Comput. Struct.* 85(15–16): 1206–1214.
- Ranzi, G., Bradford, M. A. 2008. Analysis of composite beams with partial interaction using the direct stiffness approach accounting for time effects. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 78(5): 564–586.
- Ranzi, G., Dall'Asta, A., Ragni, L., Zona, A. 2010. A geometric nonlinear model for composite beam with partial interaction. *Eng. Struct.* 32(5): 1384–1396.
- Rassam, H. Y., Goodman, J. R. 1970. Buckling behaviour of layered wood columns. *Wood Sci.* 2(4): 238–246.
- Rassam, H. Y., Goodman, J. R. 1971. Design of layered wood columns with interlayer slip. *Wood Sci.* 3(3): 149–155.
- Rasheed, H. A., Pervaiz, S. 2002. Bond slip analysis of fiber-reinforced polymer-strengthened beams. *J. Eng. Mech.* 128(1): 78–86.
- Razaqpur, A. G., Nofal, M. 1989. A finite element for modelling the nonlinear behavior of shear connectors in composite structures. *Comput. Struct.* 32(1): 169–174.
- Reissner, E. 1972. On one-dimensional finite-strain beam theory: The plane problem. *J. App. Math. Phys. (ZAPM)* 23: 795–804.
- Robinson, H., Naraine, K. S. 1988. Slip and uplift effects in composite beams. *Proceedings, Engineering Foundation Conference on Composite Construction (ASCE)*: 487–497.
- Rodman, U., Saje, M., Planinc, I., Zupan, D. 2007. Exact buckling analysis of composite columns including multiple delamination and transverse shear. *Eng. Struct.* 30(6): 1500–1514.
- Roll, F. 1971. Effects of differential shrinkage and creep on composite steel-concrete structures. *Designing for effects of creep, shrinkage and temperature in composite structures SP-27*, American Concrete Institute, Detroit: 187–214.
- Salari, M. R., Spacone, E. 2001. Analysis of steel-concrete composite frames with bond-slip. *J. Struct. Eng.* 127(11): 1243–1250.
- Seracion, R., Oehlers, D. J., Yeo, M. F. 2001. Partial-interaction flexural stresses in composite steel and concrete bridge beams. *Eng. Struct.* 23(9): 1186–1193.
- Schnabl, S., Planinc, I., Saje, M., Čas, B., Turk, G. 2006. An analytical model of layered continuous beams with partial interaction. *Struct. Eng. Mech.* 22(3): 263–278.
- Schnabl, S., Planinc, I. 2011. Exact buckling loads of two-layer Reissner's composite column with interlayer slip and uplift. *Osebna komunikacija*. (10.1.2011).
- Schweizerhof, K. H., Wriggers, P. 1986. Consistent linearization for path following methods in nonlinear fe analysis. *Comput. Method Appl. M.* 59(3): 261–279.
- Silfwerbrand, J. 1997. Stresses and strains in composite concrete beams subjected to differential shrinkage. *ACI Structural J.* 94(4): 347–353.

- Simitses, G. J., Sallam, S., Yin, W. L. 1985. Effect of delamination of axially loaded homogeneous laminated plates. *AIAA J.* 23(9): 1437–1445.
- Simo, J.C. 1985. A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 49(1): 55–70.
- Smith, S. T., Teng, J. G. 2001. Interfacial stresses in plated beams. *Eng. Struct.* 23(7): 857–871.
- Sousa Jr., J. B. M., da Silva, A. R. 2010. Analytical and numerical analysis of multilayered beams with interlayer slip. *Eng. Struct.* 32(6): 1671–1680.
- Stüssi, F. 1947. Zusammengesetzte Vollwandträger, *Int. Assoc. Bridge Struct. Eng.* 8: 249–269.
- Škec, L., Schnabl, S., Planinc, I., Jelenić, G. 2011. Analytical modeling of multilayer beams with compliant interfaces. *Osebna komunikacija.* (10.1.2012).
- Tarantino, A. M., Dezi, L. 1992. Creep effects in composite beams with flexible shear connectors. *J. Struct. Eng.* 118(8): 2063–2081.
- Teng, J. G., Yuan, H., Chen, J. F. 2006. FRP-to-concrete interfaces between two adjacent cracks: theoretical model for debonding failure. *Int. J. Solids Struct.* 43(18–19): 5750–5778.
- Timoshenko, S. P. 1961. *Theory of elastic stability.* New York, Zdrružene Države Amerike, McGraw–Hill Book.
- Toutanji, H., Ortiz, G. 2001. The effect of surface preparation on the bond interface between FRP sheets and concrete members. *Composites, Part B* 53(4): 457–462.
- Van Der Linden, M. 1999. Timber-concrete composite beams. *HERON*, 44(3): 215–239.
- Viest, I. M. 1999. Review of research on composite steel-concrete beams. *J. Struct. Div.* 86(6): 1–21.
- Volokh, K. Y., Needleman, A., 2002. Buckling of sandwich beams with compliant interfaces. *Comput. Struct.* 80(14-15): 1329–1335.
- Wang, Y. C. 1998. Deflection of steel-concrete composite beams with partial interaction. *J. Struct. Eng.* 124(10): 1159–1165.
- Washizu, K. 1981. *Variational methods in elasticity and plasticity.* Pergamon Press, Oxford: 540 str.
- Wheat, D. L., Vanderbilt, M. D., Goodman, J. R. 1983. Wood floors with nonlinear nail stiffness. *J. Struct. Eng.* 109(5): 1290–1302.
- Wriggers, P., 2008. *Nonlinear finite element methods.* Springer: 572 str.
- Xu, R., Wu, Y. F. 2007. Two-dimensional analytical solutions of simply supported composite beams with interlayer slips. *Int. J. Solids Struct.* 44(1): 165–175.
- Yang, Q. S., Peng, X. R., Kwan, A. K. H., 2006. Strain energy release rate for interfacial cracks in hybrid beams. *Mech. Res. Commun.* 33(6): 796–803.
- Ye, J. Q. 2001. Interfacial shear transfer of RC beams strengthened by bonded composite plates. *Cem. Concr. Compos.* 23(4–5): 411–417.

Zupan, D., Saje, M. 2003a. Finite-element formulation of geometrically exact threedimensional beam theories based on interpolation of strain measures. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 192(49–50): 5209–5248.

Zupan, D. 2003b. Rotacijsko invariantne deformacijske količine v geometrijsko točni teoriji prostorskih nosilcev. Doktorska disertacija. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Konstrukcijska smer: 210 str.