MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#

4

PRESEK LETNIK 48 (2020/2021) ŠTEVILKA 4

PRESEK

- KOCKA SOMA
- SIVA MRENA
- VIRIALNI TEOREM
- O PREDSTAVITVI PODATKOV V RAČUNALNIKU: DECIMALNA ŠTEVILA

ISSN 0351-6652

9 770351 665845

MATEMATIČNI TRENUTKI

Zmes matematike in kuhanja

Povezave med matematiko in kuhanjem sežejo dlje od sadne pite, na katero nas spominja ime znamenite krožne konstante. Z uporabo diferencialnih enačb za opis gibanja tekočin in prevajanja toplote so skupine raziskovalcev odkrile, kako se špageti zvijejo med kuhanjem, kako zavrteti ponev, da bi spekli popolno palačinko, in kakšna je najboljša temperatura za popoln zrezek. Izkušeni kuharji vedo povedali, da je bolje meriti sestavine glede na maso kot na prostornino, saj sladkor, moka in druge sestavine v trdnem stanju zaradi zrnatosti ne napolnijo 100 % prostornine posode, ki jo zasedajo, ampak včasih precej manj.

Problemi pakiranja so aktivno področje matematičnih raziskav. Raziskovalci iščejo razporeditve objektov, ki porabijo najmanj prostora v posodi, ali pa razporeditve, ki porabijo čim manj posod. Rezultati različnih raziskav o pakiranju so lahko uporabni tudi pri kodah za popravljanje napak, ki so ključne za komuniciranje s pomočjo mobilnih telefonov ali interneta. Več o tem si lahko preberete v knjigi Eugenie Cheng: *How to bake Pi: An Edible Exploration of the Mathematics of Mathematics*. Pa dober tek!

SLIKA. Ena izmed nagrajenih Pit (avtor Jernej Puc) na tekmovanju ob Pi dnevu 14. 3. 2019 na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani.

Izvirno besedilo: Mixing Math and Cooking, Mathematical Moments from the AMS. Prevod in priredba: Boštjan Kuzman

× × ×

KOLOFON

Presek
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 48, šolsko leto 2020/2021, številka 4

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: info@dmfa-zaloznistvo.si

Naročnina za šolsko leto 2020/2021 je za posamezne naročnike 22,40 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 19,60 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1100 izvodov

ISSN 2630-4317 (Online)
ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps . . .), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **info@dmfa-zaloznistvo.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

SLIKA NA NASLOVNICI: Jesen ni vedno le siva in deževna, preseneti nas lahko s pisanimi barvami. (Foto: Tina Ogrinc).

Kocka Soma

Nada Razpet

→ **Kocko Soma je iznašel Piet Hein (1905–1996), ko je študiral naravoslovje. Leta 1936 je poslušal predavanja Wernerja Heisenberga o kvantni mehaniki. Ker je predavatelj govoril o delitvi prostora na kocke, je začel iz enotskih kock sestavljati telesa. Imenovali jih bomo gradniki. Odločil se je, da bodo imeli gradniki le tri ali štiri enotske kocke in da med njimi ne bo kvadrov. Takih gradnikov, ki imajo štiri enotske kocke, je šest, s tremi pa je eden. Ko je imel gradnike, jih je začel sestavljati. Ugotovil je, da lahko iz teh sedmih gradnikov sestavi kocko. Imenoval jo je *kocka Soma*. Hein se je kasneje uveljavil kot literat, izumitelj in še kaj.**

V Preseku so kocko Soma že omenjali [1]. Tokrat se bomo posvetili možnim legam gradnikov pri sestavljanju kocke in načinom zapisovanja leg. Dodali bomo še primer telesa, ki ga lahko zložimo iz teh gradnikov.

Igra je bila prvič objavljena leta 1958 v reviji Scientific American, vendar ni vzbudila splošnega zanimanja. Priljubljena je postala šele, ko je o njej v isti reviji julija 1969, v rubriki Mathematical Games, pisal Martin Gardner [2]. Kasneje je o tem objavil še več člankov.

Iz omenjenih gradnikov lahko sestavimo kocko na 240 različnih načinov, kar so šele v osemdesetih letih prejšnjega stoletja dokazali Christoph Peter-Orth, Jon Brunvoll s skupino avtorjev in mnogi drugi. Pri tem iskanju in zapisovanju rešitev so si pomagali z računalniki.

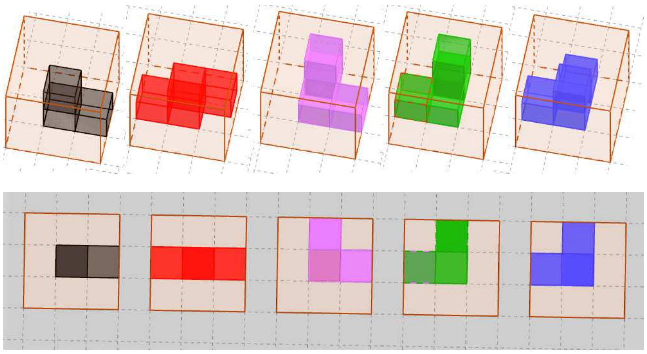
Na sliki 1 je fotografija gradnikov kocke Soma. Gradnike si lahki predstavimo tudi s programom Geogebra. Pri sestavljanju se morajo gradniki med seboj dotikati po celih ploskvah enotskih kock. Gradnike lahko izdelate sami iz lesenih kock ali iz papirja. Navodila za papirnate gradnike najdete na spletu, če v iskalnik vtipkate *Origami sonobe Soma cube*. Če imate 3D tiskalnik, pa jih natisnite.

Oznake gradnikov in njihove možne lege

Najprej gradnike označimo s številkami od 1 do 7, kakor kaže slika 1. Opazimo, da sta gradnika 5 in 6 zrcalno simetrična. Gradnik 1 sestavljajo tri enotske kocke, vse ostale gradnike pa štiri enotske kocke, skupaj torej 27 enotskih kock, kar je ravno prostornina kocke z robom tri enote. Različni avtorji barvajo gradnike različno, poleg tega nekateri gradnike označujejo s črkami V, L, T, Z, A, B in P.

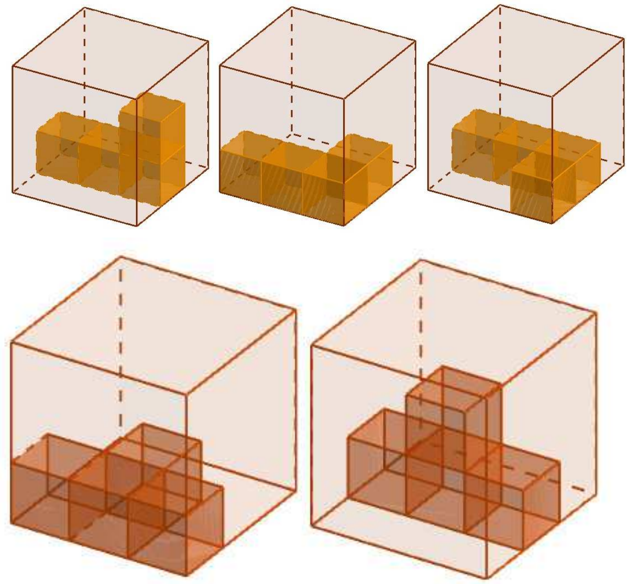
SLIKA 1.
Sedem gradnikov, sestavljenih iz enotskih kock.

Kam lahko postavimo posamezni gradnik? Gradnik 1, 4, 5, 6 in 7 lahko postavimo tako, da pokrijejo **en** vogal ali pa nobenega (slika 2).



SLIKA 2.
Zgoraj. Gradniki 1, 4, 5, 6 in 7 ne pokrivajo vogalov sestavljene kocke. Spodaj. Tloris gradnikov v legi, ko ne pokrivajo vogalov kocke.

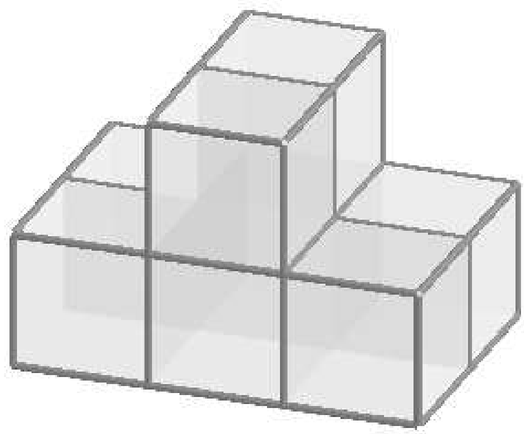
Gradnik 2 lahko pokrije nič, enega ali dva vogala. Gradnik 3 (zaradi boljše vidljivosti je na skicah temno rjave barve namesto barve lesa) pa lahko pokrije dva vogala ali pa nobenega (slika 3).



SLIKA 3.
Gradnik 2 pokriva nič, dva ali en vogal, gradnik 3 pokriva dva vogala ali nobenega.

Kako začeti?

Nekateri avtorji predlagajo, da začnemo z naslednjo nalogo. Iz samo dveh gradnikov sestavite skulpturo na sliki 4. Katere pare gradnikov lahko uporabimo? Odgovor: (2,5) ali (2,8). Poskusite.



SLIKA 4.
Iz samo dveh gradnikov sestavite to skulpturo.

Sestavljamo kocko

Za sestavljanje kocke sta torej najpomembnejši legi gradnikov 2 in 3. Imamo naslednje možnosti:

- Gradnika 2 in 3 pokrijeta po dva vogala, ostane še pet gradnikov, od katerih eden ne sme pokrivati vogala (primer uravnotežene kocke).
- Gradnik 2 pokrije dva vogala, gradnik 3 nobenega, ostalih pet gradnikov pa ne more pokriti šest vogalov, zato na ta način *ne moremo sestaviti kocke*, saj nimamo pokritih vseh osem vogalov.
- Gradnik 3 pokrije dva vogala, gradnik 2 pokrije en vogal, potem mora ostalih pet gradnikov pokriti vsak po en vogal. Kako v tem primeru sestavimo kocko, pa opišimo v naslednjem primeru.

Gradnik 3 pokrije dva vogala, vsi ostali gradniki pa po en vogal

Poskušajmo zapisati, kako sestavimo kocko. Dogovorimo se, da bomo sestavljena telesa opisovali po plasteh, nekako tako, kot so npr. po plasteh predstavljeni načrti za sestavljanje Lego kock.

Za primer vzemimo, da iz gradnikov sestavimo kocko, ki ji rečejo tudi uravnotežena kocka, to pa zato, ker jo lahko podpremo z enim samim prstom na sredini spodnje osnovne ploskve, pa se ne sesuje na sestavne dele.

Spodnja plast

2	4	6
4	4	6
4	5	3

Srednja plast

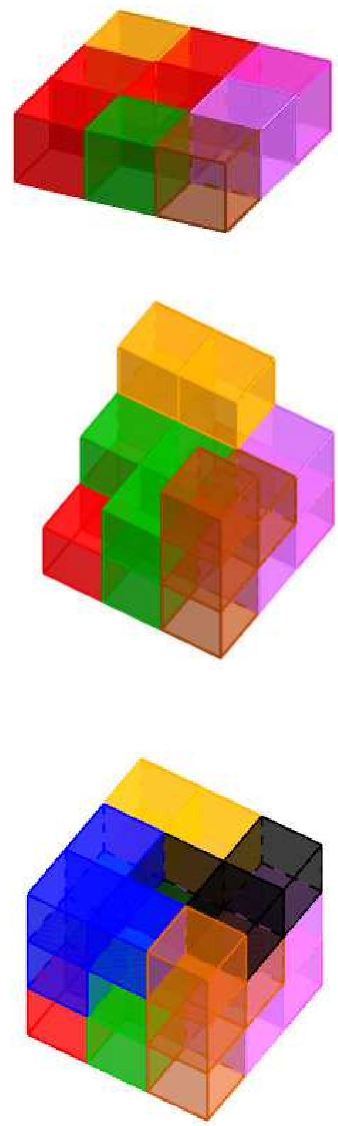
2	6	6
5	5	3
7	5	3

Zgornja plast

2	2	1
7	1	1
7	7	3

Kako smo iz gradnikov sestavili kocko, kaže slika 5. Oglejmo si najprej spodnjo plast. Sestavlja jo ena od enotskih kock gradnikov 2, 3 in 5, dve enotski kocki gradnika 6 in gradnik 4. Kako to zapišemo? V prvi vrstici prvega stolpca tabele je vpisana številka gradnika, katerega enotska kocka je v najnižji plasti zgoraj levo, to je enotska kocka rumenega gradnika, ki ima številko 2. V drugem stolpcu prve vrstice je zapisana številka gradnika, katerega enotska kocka je v najnižji plasti v zgornji vrstici na sredini, to je enotska kocka rdečega gradnika, ki ima številko 4, in tako naprej, vrstico za vrstico in plast za plastjo.

Sprva so mislili, da je možno sestaviti uravnoteženo kocko na en sam način, potem pa je Stuart Collins leta 1998 ugotovil, da je takih možnosti več. Sledil je plaz in z leti so dodajali nove rešitve za uravnoteženo kocko. Leta 2012 je Hartwig Beusch zapisal 27 načinov sestavljanja uravnotežene kocke, pri čemer niso vštete zrcalne ali rotacijske simetrije.



SLIKA 5.
Prva slika. Le gradnik 4 leži (ves) v prvi plasti, ostale gradnike vidimo v prerezu. Druga in tretja slika. Sestavljanje kocke iz gradnikov.

Literatura

[1] F. Savnik, *Pozabljeno med vsakdanjostmi*, Presek, **33** (2005/2006), 7–9, DMFA – založništvo, Ljubljana.

[2] M. Gardner, *The 2nd Scientific American book of mathematical puzzles & diversions*, University of Chicago Press, Chicago, 65–77, 1987.

[3] *Soma cubes*, dostopno na `www.mathematische-basteleien.de/somacube.htm`, ogled 18. 1. 2021.

× × ×

21 aritmetičnih vprašanj o številu 2021

Boštjan Kuzman

Matematika je kraljica znanosti,
teorija števil pa kraljica matematike.
(Carl Friedrich Gauss, 1777–1855)

Pa začnimo leto 2021 po kraljevsko, z ugankami iz teorije števil oziroma aritmetike, vede, ki je od antike dalje vznemirjala veleume, kot so bili Pitagora, Arhimed, Evklid, Eratosten, Diofant, Fibonacci, Fermat, Euler, Gauss, Legendre, Lagrange in številni drugi veliki matematiki.

21 vprašanj o številu 2021 na spodnjem seznamu je izbranih tako, da bi bila zanimiva in razumljiva čim širšemu krogu bralcev. Večine vprašanj se lahko lotimo povsem naivno s preiskovanjem in tabeliranjem, vsaj dve tretjini vprašanj pa je elegantno rešljivih s srednješolsko matematiko (in nekaj vztrajnosti). Velik del vprašanj je sicer povezan s klasičnimi izreki teorije števil, zato bodo teoretično dobro podkovani bralci na nekatera vprašanja odgovorili skoraj brez razmišljanja, drugi pa si bodo morali malo pomagati z literaturo in brskanjem po spletu. Bralci z osnovnim znanjem programiranja bi sicer večino nalog zlahka rešili s pomočjo računalnika, toda preverjanje lastnosti števila 2021 z grobo silo je podobno nabiranju travniških cvetlic z buldožerjem, čisto vseh odgovorov pa s pomočjo računalnika niti ni mogoče dobiti.

Vabljeni, da sprejmete izziv in preizkusite svoje znanje, ali pa se še kaj novega naučite. In če se vam slučajno kje zatakne, najdete rešitve na naslednjih straneh. Tam vas čaka tudi dodatna, nagradna uganka.

1. Ali je 2021 praštevilo?
2. Ali je 2021 popolno število?
3. Ali je 2021 Fibonaccijevo število?
4. Ali je 2021 trikotniško število?
5. Ali je 2021 k-kotniško število za kakšen $k < 2021$?
6. Ali je 2021 vsota dveh praštevil?
7. Ali je 2021 vsota treh praštevil?
8. Ali je 2021 vsota treh trikotniških števil?
9. Ali je 2021 vsota vsaj treh zaporednih naravnih števil?
10. Ali je 2021 razlika dveh kvadratov?
11. Ali je 2021 vsota dveh kvadratov?
12. Ali je 2021 vsota štirih kvadratov?
13. Katero je najmanjše število, ki ima natanko 2021 deliteljev?
14. Koliko manjših naravnih števil je tujih številu 2021?
15. Ali obstaja 2021 zaporednih sestavljenih števil?
16. Ali obstaja število z vsoto deliteljev 2021?
17. Ali obstaja celoštevilski pravokotni trikotnik s stranico dolžine 2021?
18. Ali obstaja praštevilo med številoma 2^{2020} in 2^{2021}?
19. Koliko je $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\ldots+[\sqrt{2021}]$, kjer je $[x]$ celi del števila x?
20. S koliko ničlami se konča število 2021! v običajnem desetiškem zapisu?
21. Ali velja $x^{2021}+y^{2021}=z^{2021}$ za kakšno trojico naravnih števil x, y, z?

Odgovori

1. Če 2021 ni praštevilo, mora biti deljivo z nekim praštevilom, ki je manjše od $\sqrt{2021} < 45$. Že na daleč vidimo, da število 2021 ni deljivo z $2, 3$ ali 5. Po zaporednih deljenjih s praštevili $7, 11, 13, \ldots, 43$ prav v zadnjem, štirinajstem koraku ugotovimo, da velja $2021 = 43 \cdot 47$, torej je število 2021 sestavljeno. Primer lepo pokaže, kako računsko zahteven je lahko problem faktorizacije števila z dvema velikima prafaktorjema, če uporabimo najbolj preprosto metodo z zaporednim deljenjem. Faktorizacijo bi v tem primeru našli precej hitreje, če bi opazili, da je $2021 = 45^2 - 2^2 = (45-2)(45+2)$.

2. Ne, saj je vsota pravih deliteljev števila 2021 enaka $1 + 43 + 47 = 91$. Marsikateri bralec bi verjetno znal iz glave našteti štiri najmanjša popolna števila 6, 28, 496 in 8128, ki jih je poznal že Evklid. Ker je 2021 liho število, pa lahko omenimo še, da je vseh 51 doslej znanih popolnih števil sodih. Vprašanje obstoja lihega popolnega števila je še vedno odprto.

3. Ne. Zaporedje Fibonaccijevih števil $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ lahko opišemo z rekurzivno zvezo $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ za $n \geqslant 2$ in začetnima pogojema $F_0 = 0, F_1 = 1$. Ker števila naraščajo zelo hitro, bomo tudi brez računalnika hitro ugotovili, da je $F_{17} = 1597$ in $F_{18} = 2584$, torej število 2021 ni Fibonaccijevo. Lahko pa bi uporabili tudi kriterij Ire Gessla (1971), ki je dokazal, da je število N Fibonaccijevo natanko tedaj, ko je vsaj eno od števil $5N^2 \pm 4$ popoln kvadrat.

4. Ne. Trikotniška števila, katerih lastnosti so preučevali že Pitagora in njegovi učenci, predstavljajo vsoto prvih n naravnih števil: $T_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, kvadratna enačba $\frac{n(n+1)}{2} = 2021$ pa nima rešitev v naravnih številih.

5. Ne. Že antični matematik Nikomah je v knjigi Uvod v aritmetiko iz 2. stoletja našega štetja ugotovil, da zvezo med večkotniškimi in trikotniškimi števili dobimo s pomočjo razreza k-kotnika na trikotnike. Od tod sledi, da lahko n-to k-kotniško število opišemo z izrazom $P_n(k) = \frac{n}{2}(2 + (k-2)(n-1))$ in hitro se prepričamo, da enačba $P_n(k) = 2021$ nima rešitev v naravnih številih za $k < 2021$.

6. Ne. Ker je 2021 liho število, bi iz $p + q = 2021$ sledilo, da je eno od praštevil p, q sodo, torej 2, toda potem bi bil drugi seštevanec 2019, to pa ni praštevilo, ker je deljivo s 3.

7. Da. Lahko se skličemo kar na Šibko Goldbachovo domnevo, ki jo je dokazal Harald Helfgott leta 2013: vsako liho število, večje od 5, lahko zapišemo kot vsoto treh praštevil. Z nekaj ugibanja hitro najdemo kakšno od možnosti, denimo 2003+13+5, iskanja vseh 3392 možnosti pa se raje lotimo z računalnikom. Kot zanimivost pa omenimo še, da je še vedno nedokazana izvirna Goldbachova domneva iz pisma Eulerju leta 1742. Ta pravi, da lahko vsako sodo število, večje od 2, zapišemo kot vsoto dveh praštevil.

8. Da. Domnevo, da lahko vsako naravno število zapišemo kot vsoto največ treh trikotniških števil, je zapisal že Fermat leta 1636, leta 1796 pa jo je prvi dokazal takrat 19-letni Carl Friedrich Gauss. Število 2021 lahko sicer zapišemo na 9 načinov, eden je $T_{61} + T_{15} + T_4 = 1891 + 120 + 10$. Pri iskanju takega zapisa je ugodno začeti s čim večjim prvim členom in s tem zmanjšati število možnosti za druga dva člena.

9. Da. Enačba $(a+1) + \ldots + (a+k) = ka + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k}{2}(2a + k + 1) = 2021$ ima za $k \geqslant 3$ dve rešitvi v naravnih številih: $(a = 19, k = 47)$ in $(a = 25, k = 43)$. Števila, ki jih lahko zapišemo kot vsoto vsaj dveh zaporednih naravnih števil, pa sicer imenujemo tudi trapezna števila, saj predstavljajo razliko dveh trikotniških števil. Znano je, da so taka vsa naravna števila razen potenc števila 2.

10. Da. Znano je, da lahko vsako liho naravno število vsaj na en način zapišemo kot razliko dveh kvadratov: $2k + 1 = (k+1)^2 - k^2$. Ta način je edini, kadar gre za praštevilo, v našem primeru pa z obravnavo enačbe $2021 = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ dobimo dve rešitvi: $2021 = 45^2 - 2^2 = 1011^2 - 1010^2$.

11. Ne. Iz Fermatovega izreka o vsoti dveh kvadratov sledi, da lahko dano naravno število zapi-

SLIKA 1.
Nekaj knjig o teoriji števil slovenskih avtorjev iz ponudbe DMFA – založništva.

šemo kot vsoto dveh kvadratov natanko tedaj, ko v njegovem razcepu na prafaktorje vsi prafaktorji tipa $p = 3 \pmod 4$ nastopajo s sodo potenco. To seveda ne velja v primeru števila $2021 = 43^1 \cdot 47^1$.

12. Da. Lagrangejev izrek o štirih kvadratih zagotavlja, da lahko vsako naravno število na vsaj en način zapišemo kot vsoto (največ) štirih kvadratov. Verjetno je to slutil že antični matematik Diofant v svoji knjigi Aritmetika. Število 2021 lahko sicer tako zapišemo na 57 načinov, eden je $44^2 + 9^2 + 2^2 + 0^2$. Brez računalnika je zapis najugodneje iskati tako, da začnemo s čim večjim členom, v našem primeru 44, in poskusimo ustrezno izbrati ostale tri.

13. Ker je $2021 = 43 \cdot 47$, iz osnovnega izreka aritmetike sledi, da so naravna števila z natanko 2021 delitelji bodisi oblike p^{2020} bodisi $p^{42}q^{46}$, kjer sta p in q različni praštevili. Najmanjše tako število pa je $2^{46} \cdot 3^{42}$.

14. Med vključno 1 in $2020 = 43 \cdot 47 - 1$ je natanko 46 večkratnikov števila 43 in natanko 42 večkratnikov števila 47. Ker ni skupnih večkratnikov, je preostalih $2020 - 46 - 42 = 1932$ števil tujih 2021. Bolj elegantno lahko problem rešimo z Eulerjevo funkcijo $\varphi(n)$, ki označuje število vseh števil od 1 do $n-1$, ki so tuja številu n. Potem za praštevilo p velja $\varphi(p) = p-1$, saj so številu p tuja vsa manjša števila. Zdaj lahko vsak sam poskusi dokazati, da za različni praštevili p, q velja $\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q)$. Posledično je $\varphi(2021) = \varphi(43)\varphi(47) = 42 \cdot 46 = 1932$.

15. Da. Števila $2022!+2, 2022!+3, \ldots, 2022!+2022$ so očitno zaporedna in sestavljena. Z istim trikom lahko ugotovimo, da za vsako naravno število n obstaja n zaporednih sestavljenih števil.

16. Ne. Lahko bi seveda pregledali vsote deliteljev vseh števil do 2020, nekoliko bolj elegantna, a kljub temu precej zavita pot pa je naslednja. Naj bo $\sigma(n)$ vsota vseh pozitivnih deliteljev števila n. Znano je, da je funkcija σ *multiplikativna*, torej je $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$, če sta a in b tuji števili. Če velja $n = p^k \cdot m$, kjer je p praštevilo, ki je tuje m, potem sledi

$$\sigma(n) = \sigma(p^k)\sigma(m) = (1 + p + \ldots + p^k)\sigma(m).$$

Da bi bil ta izraz liho število, mora biti $p = 2$ ali k sodo število, za primer $\sigma(n) = 2021 = 43 \cdot 47$ pa lahko sklepamo še, da ima n največ dva prafaktorja, torej je $n = p^k$ ali $n = p^k q^l$. Zato bi moralo število $\sigma(p^k)$ deliti 2021 oziroma zavzeti vrednost 43, 47 ali 2021 za neki p. Za $p = 2$ je zaporedje vrednosti $\sigma(2^k)$ enako 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023, 2047, ..., zato 2^k ne deli n. Podobno izločimo še potenco 3^k

za sode $k \leqslant 6$, potenco 5^k za sode $k \leqslant 4$ in nazadnje še potence p^2 za praštevila med 7 in 43. Tako smo preverili, da vsota deliteljev 2021 ni možna.

17. Da. Število 2021 mora biti element pitagorejske trojice (a, b, c) z lastnostjo $a^2 + b^2 = c^2$. Po Evklidovih formulah lahko vse take pitagorejske trojice zapišemo kot $a = t(m^2 - n^2)$, $b = t(2mn)$ in $c = t(m^2 + n^2)$, kjer so m, n, t naravna števila, $m > n$, števili m in n pa sta tuji in različne parnosti. Iz zapisa 2021 z razliko kvadratov $2021 = 45^2 - 2^2$ takoj razberemo eno rešitev $t = 1, m = 45, n = 2$, ki da pitagorejski trikotnik s stranicami $(2021, 180, 2029)$, možne pa so še tri druge rešitve, katerih iskanje bomo prepustili kar bralcu.

18. Da. Najlažje je to utemeljiti s sklicevanjem na Bertrandov postulat, ki pove, da za vsako naravno število $n \geqslant 2$ obstaja praštevilo med n in $2n$. To Bertrandovo ugotovitev je sicer prvi uspel dokazati Pafnutij Čebišev leta 1852.

19. Opazimo lahko, da se v vsoti zapored pojavljajo enaki členi: $1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + \ldots$. Natančneje, $2n + 1$ členov med vključno $[\sqrt{n^2}]$ in $[\sqrt{n^2 + 2n}]$ ima vrednost n. Za zgornjo mejo $n^2 + 2n$ lahko zato z uporabo znanih formul za vsoto kvadratov izračunamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n^2+2n} [\sqrt{k}] &= \sum_{k=1}^{n} (2k+1)k \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{k(k+1)(4k+5)}{6}. \end{aligned}$$

Po tej formuli zdaj hitro izračunamo iskano vrednost za zgornjo mejo $2024 = 44^2 + 2 \cdot 44$ in nato odštejemo $3 \cdot 44$, da dobimo iskano vrednost 59598.

20. Število ničel na koncu zapisa števila $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdots$ je enako potenci c, s katero nastopa praštevilo 5 v razcepu števila $n!$ na prafaktorje, saj vsaka ničla na koncu števila nastane z množenjem para prafaktorjev 2 in 5. To potenco pa lahko presenetljivo hitro izračunamo z uporabo De Polignacove formule $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right]$ za najvišji eksponent praštevila v $n!$. Za $n = 2021$ dobimo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2021}{5^k}\right] &= \left[\frac{2021}{5}\right] + \left[\frac{2021}{25}\right] + \left[\frac{2021}{125}\right] + \left[\frac{2021}{625}\right] \\ &= 404 + 80 + 16 + 3 = 503. \end{aligned}$$

21. Ne. To pove znameniti veliki Fermatov izrek, ki ga je dokazal Sir Andrew Wiles leta 1994. Podrobnosti dokaza prepuščamo nadebudnim bralcem, saj na teh straneh zanje ni dovolj prostora.

SLIKA 2.

Nagradna uganka

Za katera naravna števila n se število $n!$ v običajnem desetiškem zapisu konča z natanko 2021 ničlami?

Rešitev z razlago pošljite na e-naslov `info@dmfa-zaloznistvo.si` s pripisom Nagradna uganka 2021. Med pravilnimi rešitvami bomo na Mednarodni dan matematike 14. 3. 2021 izžrebali tri nagrajence, ki bodo za nagrado prejeli knjigo o teoriji števil iz ponudbe DMFA – založništvo. Tudi letos pa bo pri DMFA potekalo še nekaj aktivnosti ob Mednarodnem dnevu matematike. Obvestila o tem bodo objavljena na spletni strani `www.dmfa.si`.

× × ×

Izjemen uspeh na 61. mednarodni matematični olimpijadi

Boštjan Kuzman

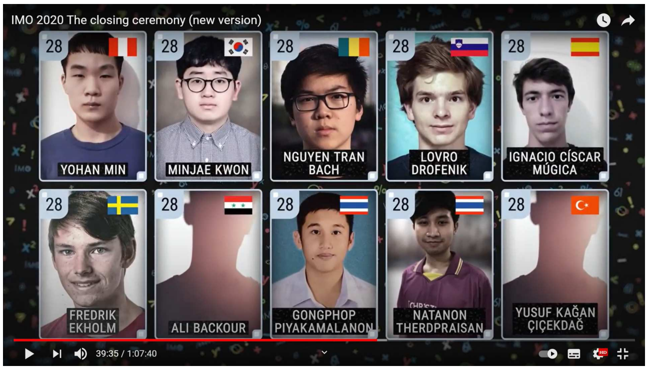
61. Mednarodna matematična olimpijada (v nadaljevanju MMO) je zaradi epidemije Covid-19 namesto v ruskem Sankt Petersburgu potekala 21. in 22. septembra 2020 na daljavo tako, da so tekmovalci večine držav naloge reševali v svoji domovini pod nadzorom mednarodnih predstavnikov. Slovenski tekmovalci so naloge reševali v Plemljevi vili na Bledu, kjer so preživeli nekaj dni skupaj s švicarsko ekipo. Največji uspeh je dosegel *Luka Horjak* s I. gimnazije v Celju, ki je osvojil prvo zlato medaljo na MMO v zgodovini samostojne Slovenije. S 33 točkami od 42 možnih je osvojil absolutno 22. mesto med 616-imi tekmovalci iz 105-ih držav. Njegov izjemen uspeh so dopolnili še *Lovro Drofenik* (I. gimnazija v Celju) s srebrno medaljo, *Job Petrovčič* (Gimnazija Bežigrad) z bronasto medaljo ter *Tevž Lotrič* (Gimnazija Kranj), *Jan Genc* (II. gimnazija Maribor) in *Jaka Vrhovnik* (I. gimnazija v Celju) s pohvalo.

Za radovedne bralce pa predstavimo rešitev ene izmed letošnjih nalog. Tretja naloga prvega dneva olimpijade je po tradiciji kombinatorična in med najslabše reševanimi – letos je bil povprečni rezultat pri tej nalogi komaj 0,94 točke od sedmih možnih. Naloga je enostavno razumljiva, a brez ustrezne ideje je težko priti do rešitve. S pravim namigom pa je rešitev čudovito preprosta.

SLIKA 1.
Luka Horjak je osvojil prvo slovensko zlato medaljo doslej.

Naloga. Na mizi je $4n$ kamnov, katerih mase so $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Vsak kamen je pobarvan z eno od n barv in z vsako barvo so pobarvani štirje kamni. Dokaži, da lahko razdelimo kamne na dva kupa z enako skupno maso, tako da vsak kup vsebuje natanko dva kamna vsake barve.

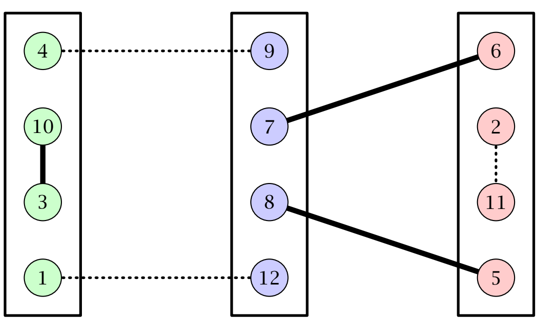
Rešitev. Vsako množico štirih kamnov iste barve si predstavljamo kot eno vozlišče grafa, v katerem vsak par kamnov z vsoto 4n+1 predstavlja eno povezavo. Dobljeni (multi)graf ima lahko zanke ali več različnih povezav med istim parom vozlišč. Graf ni nujno povezan, ampak ima lahko več komponent, vsaka od njih pa ima vsa vozlišča stopnje 4. Zato ima vsaka komponenta grafa Eulerjev obhod sode dolžine, v katerem lahko izmenično izberemo vsako drugo pove-



SLIKA 2.
Lovro Drofenik je prejel srebrno medaljo za doseženih 28 točk, kar je tretji najboljši slovenski dosežek vseh časov.

zavo. Kamne, ki predstavljajo krajišča izbranih povezav, zložimo na en kup, preostale na drugega. Tako smo na prvi kup zbrali po dva kamna vsake barve, skupna masa pa je ravno polovica celotne.

Zgled. Denimo, da imamo 12 kamnov različnih mas, od tega štiri rdeče z masami 2, 5, 6, 11, štiri modre z masami 7, 8, 9, 12 in štiri zelene z masami 1, 3, 4, 10. Če združimo po štiri kamne iste barve v eno vozlišče in povežemo pare kamnov z vsoto 13, dobimo povezan multigraf s šestimi povezavami in tremi vozlišči stopnje 4. Zaporedje povezav $(4,9)-(7,6)-(2,11)-(5,8)-(12,1)-(3,10)$ predstavlja Eulerjev obhod v tem grafu. Če izberemo vsako drugo povezavo (označeno črtkano) in zberemo njene kamne, ima ustrezni kup $\{1,2,4,9,11,12\}$ po dva kamna vsake barve, vsota mas pa je ravno polovica celotne.



× × ×

Barvni sudoku

V 8 × 8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2 × 4) nastopalo vseh osem števil.

		8	7	6		3	2
	3						
5			3		1	6	
	7		8				3
1					6		
		6	4		7		
				8			
		2					1

REŠITEV BARVNI SUDOKU

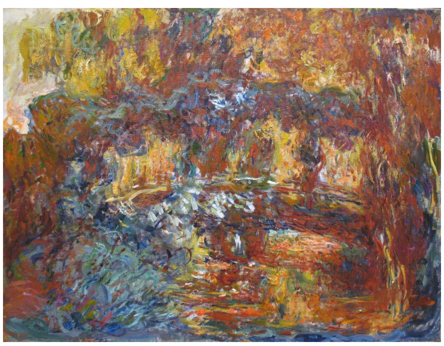
4	1	8	7	6	5	3	2
2	3	5	6	1	8	4	7
5	2	4	3	7	1	6	8
6	7	1	8	5	4	2	3
1	5	7	2	3	6	8	4
3	8	6	4	2	7	1	5
7	4	3	1	8	2	5	6
8	6	2	5	4	3	7	1

× × ×

Siva mrena

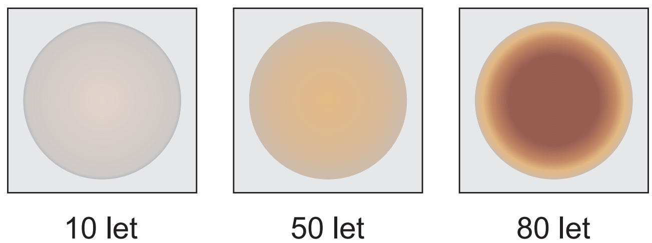
Aleš Mohorič in Jože Rakovec

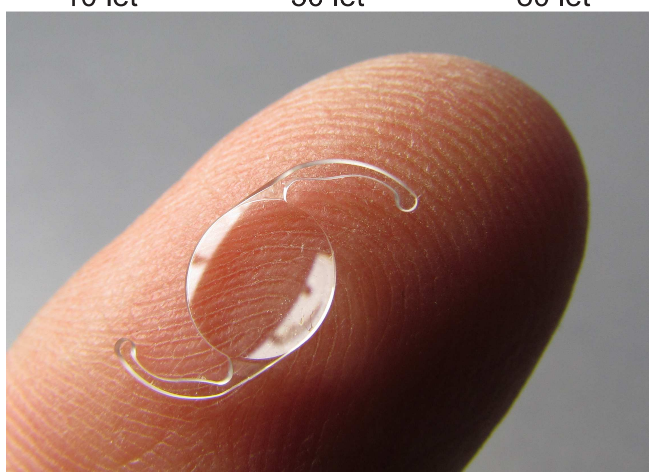
Ste se kdaj vprašali, ali se vaš vid in dojemanje barv z leti spreminjata? Zakaj je znameniti impresionistični slikar Claude Monet naslikal japonski most v svojem vrtu dvakrat tako zelo različno, kot vidimo na sliki 1?



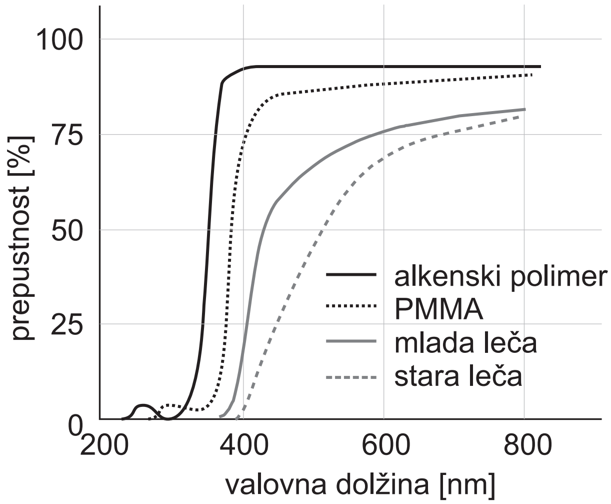
SLIKA 1.
Claude Monet 1840–1926 je bil francoski impresionistični slikar. Zgoraj je slika Vodne lilije in japonski most, ki je nastala med leti 1897–1899, spodaj pa slika Japonski most, 1920–1922. Isti motiv, a zelo različni sliki. Prva vsebuje mnogo podrobnosti ter žive, zelene barve, kot jih pričakujemo ob ribniku in na vrtu, druga je zabrisana in v rumenih odtenkih s prevladujočimi toplimi barvami.

Med zgornjo in spodnjo sliko 1 sta dobri dve desetletji razlike. Monet je prvo naslikal, ko je bil star slabih šestdeset let, drugo pa pri starosti nad osemdeset let. Morda bi razliko lahko pripisali eksperimentiranju s slogom, a mnogi so mnenja [1, 2], da so k drugačnim barvam bolj pripomogle težave z vidom. Slavni slikar je trpel za hudo obliko sive mrene [1, 2]. Siva mrena je degenerativna bolezen očesne leče, ki prizadene skoraj vse starejše in je posledica naravnega staranja. S starostjo postaja leča motna in porumenela (slika 2 zgoraj), zato se vid spreminja ter slabša. Svoje zaznavanje barv lahko preverite z enostavnim spletnim testom [3]. Na srečo zdaj obstaja





SLIKA 2.
Zoraj: risbe očesne leče v različnih življenjskih dobah, na katerih se vidi njeno rumenenje [6]. Spodaj: umetna leča, foto: Frank C. Müller. CC BY-SA 3.0.



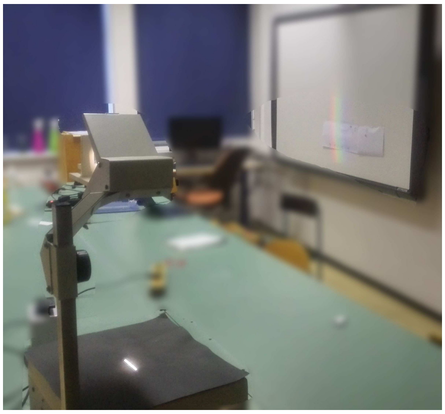
SLIKA 3.
Prepustnost leč iz štirih različnih snovi [4, 5]. Mlada naravna očesna leča ima večjo prepustnost od stare leče v modrem območju. Umetne leče so narejene iz različnih prozornih materialov, prikazana sta PMMA in alkenski polimer. Leča iz alkenskega polimera od prikazanih prepušča največ vijolične svetlobe, kar je lahko moteče, če jo uporabimo kot zamenjavo za naravno lečo. Nobena od prikazanih snovi ne prepušča ultravijolične svetlobe z valovno dolžino, krajšo od 300 nm.

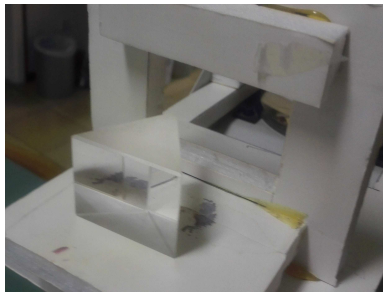
dokaj enostavna rešitev za sivo mreno: ostarelo lečo med ambulantno operacijo zamenjajo z umetno lečo (slika 2 spodaj). Umetna leča ima nekoliko drugačne optične lastnosti od naravne in spremembo pacient zazna, a se nanjo s časom navadi.

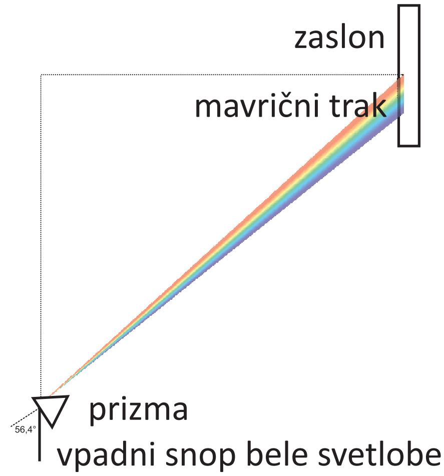
Oglejmo si dve optični lastnosti leč, prepustnost in lomnost. Lomnost je obratna vrednost goriščne razdalje izražena v enotah dioptrija ($1\ \mathrm{d} = 1\ \mathrm{m}^{-1}$). Leča z večjo lomnostjo bolj močno lomi svetlobo kot leča z manjšo lomnostjo. Lomnost več zaporednih leč pa je kar vsota lomnosti posameznih leč. Lomnost očesa je okoli 60 d, od tega roženica prispeva 40 d, leča sama pa okoli 20 d. Prednost leče je, da se njena lomnost prilagaja razdalji, na katero želimo z očesom izostriti pogled. Če želimo gledati na blizu, mišice stisnejo lečo, da se bolj ukrivi, poveča svojo lomnost in oko lahko izostri pogled bližje očesu. Z leti leča izgubi naravno prožnost in se čedalje slabše odziva na stiskanje ter s tem ostrenje pogleda na bližino, kar imenujemo starostna daljnovidnost. Kaj pa je prepustnost leče? Prepustnost določimo kot količnik prepuščenega in vpadnega svetlobnega toka. Za prozorno snov si mislimo, da enako prepušča katerokoli barvo svetlobe, pa ni tako. Pri obarvanem steklu – barvnem filtru, takoj opazimo, da nekatere barve prepušča bolj, druge pa manj. Rumen barvni filter npr. prepušča več rumene in manj modre (rumeni komplementarne) svetlobe. Prepustnost je torej lahko različna za različne barve svetlobe. Enobarvno (monokromatično) svetlobo opišemo z njeno valovno dolžino. Odvisnost prepustnosti leče od valovne dolžine najlažje prikažemo z grafom in za nekaj leč iz različnih snovi jih kaže slika 3.

Diagram na sliki 3 obsega območje valovnih dolžin okoli območja vidne svetlobe, ki je za povprečno oko v intervalu od 400 do 700 nm. Prepustnost stare naravne leče je za modro svetlobo (krajše valovne dolžine) precej manjša kot prepustnost mlade leče. Slika, ki jo vidi oko s sivo mreno (s staro lečo), je v primerjavi z mladim očesom videti porumenela. Zakaj porumenela? Vtis bele svetlobe v očesu ustvari mešanica svetlobe ene barve in njej komplementarne barve, ki pa mora imeti pravo intenziteto. Čim raz-

SLIKA 4.
Levo, pogled, kot ga vidi zdravo oko; sredina, pogled skozi sivo mreno; desno, pogled skozi umetno lečo. Pri očesu s sivo mreno je slika rumenkasta, motna in neostra, pri očesu z umetno lečo pa modrikasta in jasna.







SLIKA 5.
Levo, fotografija poskusa; spredaj levo je grafoskop z režo, za objektivom grafoskopa je prizma; na desni strani leve fotografije vidimo zaslon z mavričnim trakom. Sredina: trikotna prizma za objektivom grafoskopa. Desno, tloris poskusa, s prizmo, razklonjenim snopom svetlobe in mavričnim trakom na zaslonu.

merje ni pravo, se barvni vtis prevesi proti močnejši komponenti. Modri barvi komplementarna pa je rumena barva. Do enakega spoznanja pridemo, če barvni vtis opišemo s tremi primarnimi barvami, npr. modro, zeleno in rdečo. Vse tri zmešane v pravem razmerju dajo vtis bele, če pa je modre premalo, pa prevlada mešanica zelene in rdeče. Mešanica zelene in rdeče pa je rumena.

Zaradi neprožnosti in motnosti leče je slika tudi manj ostra in motna. Nadomestne umetne leče so izdelane iz različnih snovi, običajno je to akrilna plastika ali poli-metil metakrilat (PMMA), snov, iz katere je narejeno pleksi steklo. Akril je poceni, enostaven za predelavo, obstojen in ni strupen. Prepustnost leč iz umetnih stekel je v intervalu bližnje ultravijolične, od 300 do 400 nm, višja od prepustnosti naravne leče. Zato pacienti po zamenjavi stare leče z umetno opazijo nenavadno povečanje občutljivosti očesa v modrem in vijoličnem delu spektra. Pacientu z umetno lečo je vse videti nekoliko bolj modrikasto. Opisane razlike v vidu med zdravim očesom, očesom s sivo mreno in očesom z umetno lečo ponazarja slika 4. Fotografije na slikah so obdelane s programom in prirejene na podlagi pričevanj oseb, katerim so zamenjali lečo.

Mejo občutljivosti očesa na svetlobo pri različnih osebah lahko primerjamo z enostavnim poskusom. Na mavrici z opazovanjem poiščemo skrajni rob svetlobe, ki jo še vidimo. Mavrico naredimo iz snopa bele svetlobe, sončne ali svetlobe halogenske žarnice, z uklonsko mrežico ali razklonom na prizmi. Seveda je meja vidnosti odvisna tudi od jakosti svetlobe. Če pa nas zanima le primerjava med različnimi očmi, je dovolj, če poskrbimo, da so vsi opazovalci v enakih okoliščinah. Bolnikom s sivo mreno običajno zamenjajo lečo najprej na enem in šele čez nekaj časa tudi na drugem očesu. Tako je pacient po prvi operaciji idealen kandidat za primerjavo spremembe vida, saj lahko sam primerja vid z enim in drugim očesom.

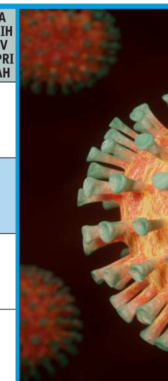
Primerjavo vida smo naredili z dvema osebama (A in B, starima 50 in 40 let) in osebo, ki je imela eno lečo umetno (Um), na drugi pa sivo mreno (Sm). Trak mavrične svetlobe lahko naredimo z grafoskopom. Na zaslon projiciramo režo, osvetljeno z belo svetlobo halogenske žarnice. Režo izrežemo v karton, ki ga položimo na grafoskop tja, kamor običajno položimo prosojnico. Grafoskop izostrimo tako, da na zaslonu nastane ostra slika reže. Za objektiv grafoskopa postavimo prizmo, ki curek svetlobe iz reže razkloni v mavrični svetlobni trak. Ta trak ne na-

18
nadaljevanje na strani →

Nagradna križanka

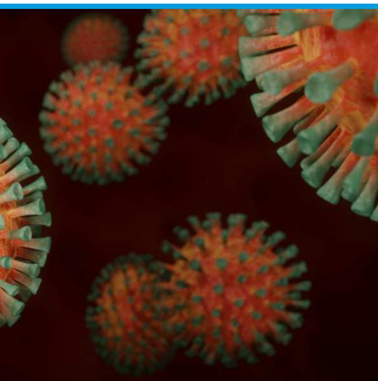
3,145

DRŽAVA V SRED. DELU ZDA
POKOJNI PIANIST BERTONCELJ
ŠPANSKI SLIKAR (PABLO)
EMMANUEL MACRON
EDEN NAJSTAREJŠIH GRŠKIH MODRECEV
ANTIČNO MESTO NA POLOTOKU HALKIDIKI
REKA NA SZ ZDA, LEVI PRITOK KOLUMBIJE
TOVARNA HIGIENSKIH IZDELKOV NA VIRU PRI DOMŽALAH
ELEKTRIČNO MERIMO V VOLTIH
DVOJINA



AVTOR MARKO BOKALIČ
JURČKU PODOBNA GOBA Z LUSKASTIM BETOM
POVEZANA ZDRUŽBA ŽIVIH BITIJ IN NARAV. OKOLJA
BELORUSKI DIKTATOR (ALEKSANDER)
NAŠ FIZIK (SIMON)
NAŠA REŽISERKA (HANNA)
OBDOBJE JURE V MEZOZOIKU
LISASTA KRAVA
AMERIŠKI TELEKOMUNIKACIJSKI SATELIT
POTAPLJAČICA ARTNIK
HAVAJSKA KITARA
POVEZANA CELOTA
HRVAŠKA IGRALKA VIŠTICA
TALENT
IDEALIZIRANA PODOBA
STRANSKA STRUGA REKE
NAŠ POKOJNI JAZZOVSKI GLASBENIK (ATI)
LJUBITELJSKO UKVARJANJE Z RADIOTEHNIKO
POVELIČEVANJE SREČE V ETIKI
PAS ŽELEZNIŠKE PROGE
JAPONSKI EKSPERIMENTALNI FIZIK (LEO)
OCVRTI PANIRANI SVALJKI
IGRALEC CAR
RAZPON PRI NIHANJU
MATEMATIK VIDAV
SRBSKI LITERAT IN PREVAJALEC (DANILO)
ANGLEŠKI REŽISER (DAVID)
FRANCOSKA STEKLARNA
IZBOLJŠANJE LESKA TEKSTILA
OPICA PIKE NOGAVIČKE
RUSKI KONSTRUKTOR VESOLJSKIH PLOVIL (LEONID)
EDVARD RUSJAN
ZAPOREDNI ČRKI
AMERIŠKI PEVEC GARFUNKEL
SMUČARKA (ANA)
OBMEJNA OBČINA V HALOZAH
IT. MESTO IN ZALIV SZ. OD NEAPLJA
OKROŽJE
NAJVIŠJA GORA NA SICILIJI, VULKAN
VODNA RAZTOPINA SULFATA
POSLOVNA ENOTA
PISATELJ MURNIK
ENAKI ČRKI
PROCES VRAČANJA TOPLOTE V STAVBO, KI POTEKA V TOPLOTNEM IZMENJEVALNIKU
NIKELJ
CEVAST PROSTOR POD ZEMLJO
IRACIONAL. KONSTANTA
RAZPAD ORGANSKE SNOVI
VRTILNI, VZTRAJNOSTNI, MAGNETNI, UPOGIBNI ?
USMERJEVALEC PLOVILA
LEDENA SKORJA NA SNEGU
URIN

NAŠ IGRALEC (BORIS)
OZIRISOVA ŽENA
VISOKOŠOLSKA IZOBRAŽEVALNA USTANOVA
OKRAJŠANA ELIZABETH
CIGARETNI OGOREK
IZLOČEK, KI MASTI KOŽO
VARNO PRIBEŽALIŠČE
NAGLAVNI VLADARSKI SIMBOL
SOPHIA LOREN
NESPODOBNOST
ZAŠČITNA POKRIVNA SNOV, LOŠČ
FRANCOSKA IGRALKA MOREAU



GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ | VEDA O RUSKEM JEZIKU | ENKRATNO IZPLAČILO OB KONCU SLUŽBOVANJA | DRŽAVA V JUŽNI AMERIKI | GRŠKI JUNAK, TELAMONOV SIN | NEKDANJI ETIOPSKI KNEZ | JUNAK IZ MOLIEROVEGA *TARTUFFA*, LAHKOVEREN DRUŽINSKI GLAVAR | OKREPITEV, UTRDITEV | ODPRTA POŠKODBA TKIVA | SPOZNAVOSLOVJE | GORA V SAVINJSKIH ALPAH | OKRAJŠAN IZRAZ ZA INTERNET

NASILEN PLENILEC DOBRIN | NOGOMETNI KLUB

URESNIČEVANJE | 7

POŠKODOVANOST OD PRASK | JADRANSKI OTOK

MIRNO, UBRANO STANJE V NARAVI | SPOŠTOVANJE, SLAVA | SAMO, ZGOLJ | OČI, ATEK

NEKDANJI FINSKI SMUČAR TEKAČ (JUHA) | SPLETNA DOMENA AVSTRIJE | OGNOJEK NA KOŽI, TVOR | TELEVIZIJEC PUCER | ITALIJAN. IGRALKA MIRANDA | DOVOZNA KLANČINA | AMERIŠKI IGRALEC (WARREN) | REKA NA JUGOVZHODU KAZAHSTANA | DOBA, EPOHA | GR. ČRKA (SIMBOL ZA GOSTOTO)

MESTO V ZDA | ELEMENT NAVORA

VELIKO JEZERO V SEVERNI FINSKI | PLEME STARIH GRKOV | DOMENA EKOLOGOV

SOSEDNJA METROPOLA | PODROČJE MATEMATIKE | LOV NA KITE | AMERIŠKA IGRALKA (WINONA) | 11 | 4. IN 1. SAMOGLASNIK | ODPADKI | NAŠ IGRALEC (MATIJA)

9 | ATOMSKA SKUPINA Z ELEKTRIČNIM NABOJEM | NEČAKOV SIN | SPODNJA PLOSKEV POSODE | SLOVENJ GRADEC | REVNA MESTNA ČETRT | RIMSKA 5 | PREDPONA ZA MILIJONINKO ENOTE

REKA NA BLIŽNJEM VZHODU | KOREOGRAF OTRIN ST. | POLOVICA ČETRTINE | OAZNO MESTO V ALŽIRIJI

PRIROJENA TEŽNJA, INSTINKT | PREDPONA, KI POMENI DVA | NEGIBNO NAHAJANJE | SMUČARSKI TRENER MASSI | NEKDANJI PREDSEDNIK HONDURASA (RAFAEL LEONARDO) | 6

VINOTEKA | EGIPČANSKI VLADAR | OFICIR PRIBOČNIK | KRAJ NA SEVERU GORIČKEGA

LEVI PRITOK REKE PARANA V BRAZILIJI | ANGLEŠKI IGRALEC (JEREMY) | NORDIJSKI BOGOVI | 12 | NEODLOČEN ŠAH. IZID | AM. FIZIK (CLARENCE; DIODA) | PIVO STARIH SLOVANOV

KOLIČINA SEVANJA, KI JO PREJME TELO ALI SNOV | PESNIŠKI IZRAZ ZA DIVJO RACO

8 | NAŠ PEVEC (KLEMEN) | ČEBELJA TVORBA | 13

NEMŠKI VELIKAN FIZIKE (ALBERT) | KOSITER | SPLETNA DOMENA ŠVICE

PREBIVALEC VELIKEGA INDONEZ. OTOKA

7. GRŠKA ČRKA | NAŠA PEVKA (MAJDA)

NAGRADNI RAZPIS

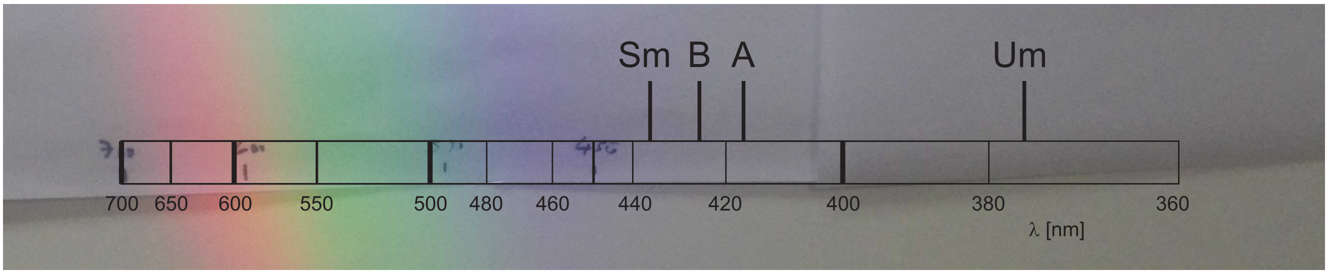
→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

`www.presek.si/krizanka`

ter ga oddajte do **15. marca 2021**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

× × ×

→ 15 nadaljevanje s strani



SLIKA 6.
Fotografija zaslona z mavričnim trakom in označenimi kratkovalovnimi mejami, do koder vidi oko z umetno lečo (Um), oko s sivo mreno (Sm) in dve drugi očesi (A in B).

stane tam, kjer bi nastala bela slika reže, če ne bi postavili prizme, temveč se na prizmi odkloni in razkloni. Zaslon, na katerem smo opazovali mavrični trak, je bil vzporeden curku bele svetlobe, ki je vpadal na prizmo, kot kaže slika 5.

Fotografijo zaslona z mavričnim trakom kaže slika 6. Kratkovalovno mejo vidne svetlobe je zelo enostavno razbrati: na zaslonu na modrem delu mavrice vsak opazovalec označi, do kam vidi svetlobo. Razlika med očesom z umetno lečo (Um) in očesom s sivo mreno (Sm) je očitna. Na traku sta označeni še meji dveh mlajših očes (A in B).

Skalo za valovno dolžino smo določili s spektrometrom na nekaj različnih mestih. Skala ni linearna, a iz nje lahko z linearno interpolacijo med izmerjenimi razdelki približno določimo kratkovalovno mejo vidnega območja. Pri očesu s sivo mreno je ta pri 435 nm, pri očesu z umetno lečo pa je meja pri 375 nm, torej skladno z diagramom prepustnosti na sliki 3.

Zdaj razumemo, zakaj je vid pri očesu s sivo mreno rumenkast. Manjka mu modre svetlobe, ki ne pride skozi lečo. Ker je leča toga in motna, je vid tudi manj oster, opazi se manj podrobnosti. Pravzaprav je Monet s svojima slikama kar dobro zabeležil razvoj bolezni. Zdaj težave olajšajo zdravniki z zamenjavo leče z umetno. Z očesom z umetno lečo vidimo svet okoli sebe v modrikastih odtenkih, saj je modre preveč. Možgani se sčasoma navadijo drugačnega vida in presežek modre ni moteč.

Literatura

[1] A. Gruener, *The effect of cataracts and cataract surgery on Claude Monet*, British Journal of General Practice **65** (634) 2015, 254-255.

[2] M. F. Marmor, *Ophthalmology and art: simulation of Monet's cataracts and Degas' retinal disease*, Arch. Ophthalmol. **124** (12) 2006, 1764–1769.

[3] *spletni barvni test FM100*, dostopno na `www.xrite.com/hue-test?PageID=77`, ogled 3. 8. 2020.

[4] R. P. Najjar in sodelavci, *Heterochromatic Flicker Photometry for Objective Lens Density Quantification*, Investigative ophthalmology & visual science **57** (3) 2016, 1063-1071.

[5] *Acrylic Sheet – Optical & transmission characteristics*, Altuglas International, Arkema Inc., 2000, dostopno na `www.plexiglas.com/export/sites/plexiglas/.content/medias/downloads/sheet-docs/plexiglas-optical-and-transmission-characteristics.pdf`, ogled 3. 8. 2020.

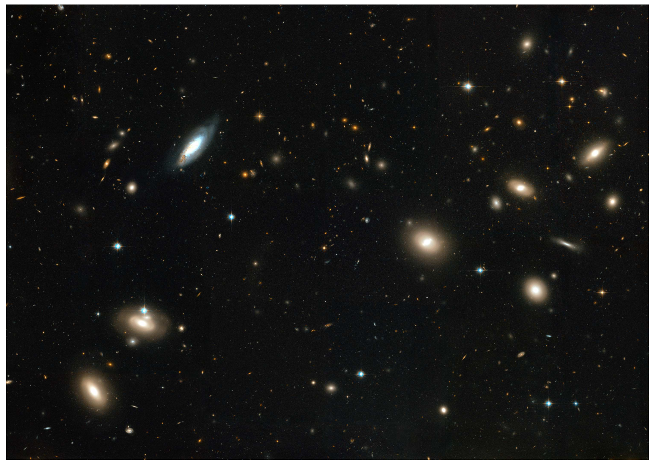
[6] S. Lerman, *Radiant Energy and the Eye*, Series: Functional ophthalmology, Macmillan, 1980.

× × ×

Virialni teorem

Krištof Skok

Virialni teorem je pomembna fizikalna enačba, ki povezuje kinetično in potencialno energijo sistema delcev v stacionarnem stanju. Leta 1870 ga je prvi formuliral nemški fizik in matematik Rudolf Clausius, ki je bil eden od utemeljiteljev termodinamike. Kasneje so ga nadgradili mnogi fiziki in astronomi ter uporabili v raznih področjih fizike. Viralni teorem je zelo uporaben v astrofiziki, saj je močno orodje, s katerim iz opazovanj dinamike delov sistema izračunamo ključne lastnosti sistema; pogosto je to njegova masa. Pri tem je govora o zvezdnih kopicah, ki so gravitacijsko vezane skupine zvezd; o galaksijah, pri katerih iz gibanja zvezd izračunamo t. i. virialno maso; o jatah galaksij, ki so gravitacijsko vezane skupine galaksij, in še o kakšnih drugih, ki bodo podrobneje opisani v članku. Najprej se bomo podali v izpeljavo teorema in si nato ogledali, kako je teorem opozoril na obstoj temne snovi.



SLIKA 1.
Slika Jate v Berenikinih kodrih posneta s kamero Advanced camera for surveys na vesoljskem teleskopu Hubble. Vidno polje je veliko $9{,}01 \times 6{,}40$ ločnih minut in zajema le središčni del jate. Sicer se jata na nebu razprostira na območju, večjem od dveh stopinj, foto: NASA, ESA, Hubble Heritage Team (STScI/AURA).

Izpeljava

Zamislimo si, da imamo sistem več delcev, tj. točkastih teles. Recimo, da kot Mali princ plujemo po praznem vesolju, ko iz žepa zagrabimo pest N frnikol in jih posujemo po prostoru. Gibanje naših frnikol opišemo v inercialnem sistemu. Položaje matematično zapišemo z radij vektorji $\mathbf{r}$, torej vektorji, ki kažejo od koordinatnega izhodišča do delcev. Hitrost je po definiciji časovni odvod položaja $\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$, gibalna količina pa $\mathbf{p} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$.

Začnimo z definiranjem količine Q:

$$Q \equiv \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i, \tag{1}$$

pri čemer sta $\mathbf{p}_i$ gibalna količina in $\mathbf{r}_i$ radij vektor delca i. Vsota teče po vseh delcih sistema. Na dolgo bi vrsto zapisali kot $\sum_{i=1}^{N}$, a v literaturi je navada, če gre vsota po vseh možnih vrednostih, ki jih sumacijski indeks i lahko zavzema (tukaj od 1 do N), potem samo napišemo $\sum_i$. Časovni odvod količine Q je

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \sum_i \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_i}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{r}_i + \mathbf{p}_i \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t} \right). \tag{2}$$

Enačbo (1) lahko zapišemo še drugače. Namesto gibalne količine i-tega delca vstavimo njeno definicijo $m_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t}$ ter namesto $\mathbf{r}_i \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t}$ zapišemo $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r_i^2\right)$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i m_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{r}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i r_i^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Na koncu prepoznamo izraz za vztrajnostni moment i-tega delca, vsota po vseh delcih pa da celotni vztrajnostni moment sistema: $I = \sum_i I_i = \sum_i m_i r_i^2$. Enačimo oba izraza za časovni odvod ((2) in (3)) in dobimo

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} - \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_i}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{r}_i. \tag{4}$$

Drugi člen na levi strani lahko še nadalje izračunamo:

$$-\sum_i \mathbf{p}_i \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = -\sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = -2\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = -2K.$$

Na koncu prepoznamo izraz za kinetično energijo i-tega delca, vsota po vseh delcih pa nam da skupno kinetično energijo sistema K. Ko ta rezultat vnesemo v enačbo (4) in upoštevamo drugi Newtonov zakon $\mathbf{F}_i = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_i}{\mathrm{d}t}$, pridemo do izraza

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} - 2K = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \tag{5}$$

Na desni strani enačbe imamo količino, ki se imenuje *Clausiusov virial* ali na kratko le *virial*. Sila, ki deluje na delec, izvira iz ostalih delcev v sistemu. To zapišemo kot $\mathbf{F}_i = \sum_{j,j\neq i} \mathbf{F}_{ij}$. $\mathbf{F}_i$ je skupna sila, ki deluje na delec i, $\mathbf{F}_{ij}$ pa je sila, s katero deluje delec j na delec i. Vsota teče po vseh delcih j, seveda z izjemo delca i, saj ta ne deluje s silo sam nase. Uporabimo še en trik $\mathbf{r}_i = \frac{1}{2}\left(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right)$ in zapišimo virial malo drugače

$$\begin{aligned}\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i &= \sum_i \left(\sum_{j,j\neq i} \mathbf{F}_{ij} \right) \cdot \mathbf{r}_i = \\ &\frac{1}{2}\sum_i \left(\sum_{j,j\neq i} \mathbf{F}_{ij} \right) \cdot (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j) + \frac{1}{2}\sum_i \left(\sum_{j,j\neq i} \mathbf{F}_{ij} \right) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j).\end{aligned}$$

Po tretjem Newtonovem zakonu velja $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$. Zamislimo si, da dvojno vrsto v prvem členu zadnjega izraza na dolgo razpišemo. Ko prva vrsta po i pride do delca k in druga vrsta po j pride do delca l, bo ta člen vrste $\frac{1}{2}\mathbf{F}_{kl}\left(\mathbf{r}_k + \mathbf{r}_l\right)$. V nekem drugem členu te vrste pa imamo obratno, $i = l$ in $j = k$. Ta člen je $\frac{1}{2}\mathbf{F}_{lk}\left(\mathbf{r}_l + \mathbf{r}_k\right)$. Ker sta si sili po tretjem Newtonovem zakonu ravno nasprotni, se ta dva člena odštejeta. To sklepanje velja za vsak par delcev, zatorej je celotna vrsta enaka nič. Tako lahko virial zapišemo kot

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j,j\neq i} \mathbf{F}_{ij} \cdot \left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right). \tag{6}$$

Tipično v astrofiziki delca med sabo interagirajo preko gravitacijske sile. Njena definicija kot vektorska količina je

$$\mathbf{F}_{ij} = G\frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ij}}, \tag{7}$$

pri čemer je $r_{ij} = \left|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\right|$ razdalja med delcema i in j. Izraz za gravitacijsko silo (7) vnesemo v izraz za virial (6) in računamo:

$$\begin{aligned}\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i &= -\frac{1}{2}\sum_i \sum_{j,j\neq i} G\frac{m_i m_j}{r_{ij}^3}\left(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\right)^2 \\ &= -\frac{1}{2}\sum_i \sum_{j,j\neq l} G\frac{m_i m_j}{r_{ij}}.\end{aligned} \tag{8}$$

V zadnjem izrazu smo dobili izraz za gravitacijsko potencialno energijo med delcema

$$U_{ij} = -\frac{G m_i m_j}{r_{ij}}.$$

Seveda velja $U_{ij} = U_{ji}$, to je ena in ista količina. Podobno kot smo imeli prej, imamo v vrsti v zadnjem izrazu (8) pri enem členu $i = k, j = l$ ter pri nekem drugem členu $i = l, j = k$. Zato se nam v vrsti dvakrat pojavi potencialna energija para delcev k in l in je vsota vrste enaka dvakratniku celotne gravitacijske potencialne energije sistema U. Končno lahko izračunamo virial:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = -\frac{1}{2}\sum_i \sum_{j,j\neq i} G\frac{m_i m_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j,j\neq i} U_{ij} = U. \tag{9}$$

Vrnimo se k naši prvotni izpeljavi. V izrazu (5) virial nadomestimo s potencialno energijo sistema:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} - 2K = U. \tag{10}$$

Naslednji korak je, da zapišemo časovno povprečje te enačbe. Povprečje matematične funkcije izračunamo po istem kopitu kot povprečje diskretnih količin, npr. meritev. Seštejemo vse meritve in delimo s številom meritev. Ker je funkcija zvezna, namesto, da seštevamo, integriramo ter namesto, da delimo s številom sumandov, delimo z velikostjo integracijskega intervala. Matematično definiramo kot

$$\langle f\rangle = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}.$$

Časovno povprečje pa samo pomeni, da funkcijo časa integriramo po časovnem intervalu. Ravno to naredimo na enačbi (10)

$$\frac{1}{2}\left\langle \frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2}\right\rangle - 2\langle K\rangle = \langle U\rangle.$$

Povprečje drugega odvoda vztrajnostnega momenta lahko izračunamo:

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2}\right\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2}dt = \frac{1}{\tau}\left(\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right|_\tau - \left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right|_0\right). \tag{11}$$

Če je sistem periodičen, kot na primer dvojne zvezde, lahko za τ določimo periodo sistema in se člena zadnjega izraza odštejeta. Če pa to ne velja, pa povprečje vseeno pade na nič, če le dovolj dolgo povprečimo, torej $\tau \to \infty$. To velja za sisteme, ki so že dosegli statistično ravnovesje, oz. rečemo, da so virializirani. V takem primeru je odvod $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ omejen med največjo in najmanjšo vrednostjo, razlika v oklepaju v (11) je končna količina, faktor $\frac{1}{\tau}$ pa gre proti nič, ko gre τ proti neskončnosti. Sedaj, ko imamo $\left\langle \frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2}\right\rangle = 0$, smo končno prispeli do virialnega teorema

$$2\langle K\rangle + \langle U\rangle. = 0 \tag{12}$$

Celotna mehanska energija je $E = K + U$, zato velja še

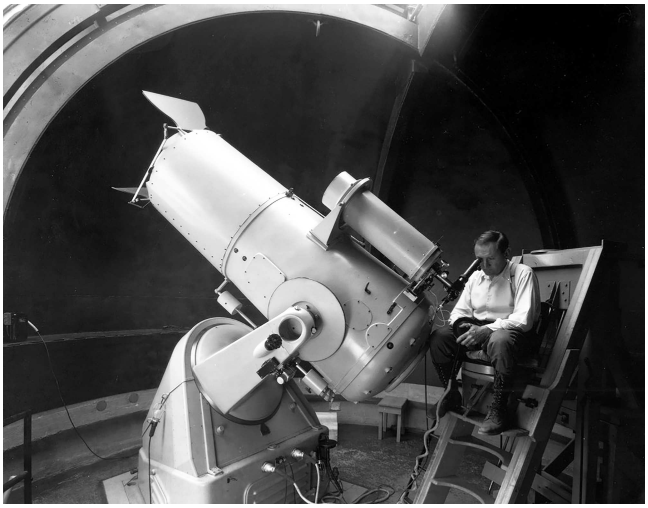
$$\langle E\rangle = -\langle K\rangle,$$
$$\langle E\rangle = \frac{1}{2}\langle U\rangle.$$

Potencialna energija satelita v krožni Zemljini orbiti je $U = -\frac{GMm}{r}$, pri čemer je M masa Zemlje, m masa satelita in r polmer kroženja. Ker je njegova krožilna hitrost $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$, je kinetična energija $K = \frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{2r}$. Tako res velja $U = -2K$. Mehanska energija satelita je $E = U + K = -\frac{GMm}{2r}$, tako da velja tudi $E = -K = \frac{1}{2}U$.

Pomen in primer uporabe

Fritz Zwicky je bil švicarski astronom, ki je večino življenja deloval na California Institute of Technology ter bil del osebja na observatorijih Mount Wilson in Palomar. V času med in po drugi svetovni vojni se je ukvarjal z raketnim pogonom. Znan je po mnogih stvareh; ena od teh je, da je skupaj z Walterjem Baadom skoval termin supernova. Te je zavzeto iskal na nočnem nebu s primerjanjem fotografksih plošč na oko; v življenju jih je odkril kar 120. Je tudi oče termina nevtronska zvezda. Leta 1937 je objavil članek, dolg pol strani, v katerem je predlagal, da bi kot posledica takrat še sveže Einsteinove splošne teorije relativnosti galaksije delovale kot gravitacijske leče. To bi dalo novo preizkušnjo za novo teorijo gravitacije ter omogočilo opazovanja sicer pretemnih, zelo oddaljenih objektov. Nenazadnje bi to bil način meritve mase galaksije, ki deluje kot leča. Tako bi lahko razjasnili neujemanje njegovega predhodnega odkritja, ki se tiče našega virialnega teorema.

Leta 1933 je Zwicky objavil članek, v katerem je komentiral takratno novo tehniko določevanja razdalj do izvengalaktičnih meglic (kot so takrat rekli galaksijam) preko rdečega premika in možne teoretične kozmološke razlage tega pojava. Eno poglavje članka nosi naslov Komentarji o disperziji hitrosti v Jati v Berenikinih kodrih. V njem najprej omeni opazovane razlike v hitrosti galaksij od 1500 do 2000



SLIKA 2.
Fritz Zwicky, foto: Caltech, Palomar Observatory.

km/s. Če je sistem Jate v Berenikinih kodrih (ang. Coma cluster) v mehaničnem stacionarnem stanju, potem zanjo velja virialni teorem (12). Privzemimo, da je masa porazdeljena enakomerno po Jati, da poenostavimo oceno. Jata ima približen polmer R en milijon svetlobnih let in vsebuje 800 galaksij, vsaka z maso 10^9 mas Sonca. Tako imamo maso

- $M \approx 800 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{30}$ kg $= 1{,}6 \cdot 10^{42}$ kg.

Potencialna energija gravitacijsko vezane homogene krogle je

- $U = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$.

Specifična potencialna energija Jate, torej potencialna energija na maso, je

- $\epsilon_p = \frac{U}{M} \approx -64 \cdot 10^8 \frac{m^2}{s^2}$.

Specifična kinetična energija je potemtakem

- $\epsilon_k = -\frac{\epsilon_p}{2} = 32 \cdot 10^8 \frac{m^2}{s^2}$.

Če to enačimo z $\frac{\bar{v}^2}{2}$, je povprečna hitrost $\bar{v} = 80 \frac{km}{s}$. V enem od prejšnjih poglavij izvornega članka je zapisana opazovana povprečna hitrost galaksij te jate, ki je 7500 km/s, kar je mnogo več, kot smo naračunali. Kot pravi Zwicky po zadnjemu rezultatu: »Da bi pridobili, kot opazovano, zmeren Dopplerjev efekt 1000 km/s ali več, bi morala povprečna gostota Jate v Berenikinih kodrih biti vsaj 400-krat večja kot izračunana na podlagi opazovanj svetle snovi /.../. Če bo to potrjeno, bo vodilo do presenetljivega rezultata, da je gostota temne snovi mnogo večja od gostote svetle snovi.«

Ta Zwickyjev članek je prelomen v zgodovini raziskovanja vesolja, kajti je eno od pionirskih del, kjer so astronomi prišli na sled obstoju temne snovi. Avtor je podal močan argument za njen obstoj kot rešitev neujemanja rezultatov novih opazovanj. Dolgo časa so zamisel obravnavali kot le eno izmed možnosti za razlago uganke; široko sprejeta je postala šele v 70-ih in 80-ih letih z odkritji ravnih rotacijskih krivulj galaksij.

Predstavljen izračun, ki sledi originalnemu članku, naj služi kot primer pomembnosti virialnega teorema v astrofiziki. Več ostalih računskih primerov pa si lahko obetate v prihodnjih številkah Preseka.

Literatura

[1] B. W. Carroll in D. A. Ostlie, *Introduction to modern stellar astrophysics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1996.

[2] *Palomar Skies* dostopno na `palomarskies.blogspot.com/2008/02/happy-birthday-fritz-zwicky.html`, ogled 24. 12. 2020.

[3] *Wikipedia contributors*, »Fritz Zwicky«, Wikipedia, The Free Encyclopedia, dostopno na `en.wikipedia.org/w/index.php?title=Fritz_Zwicky&oldid=980194858`, ogled 23. 12. 2020.

[4] *Angleški prevod originalnega članka*, dostopno na `ned.ipac.caltech.edu/level5/March17/Zwicky/frames.html`, ogled 23. 12. 2020.

× × ×

O predstavitvi podatkov v računalniku: decimalna števila

Jure Slak

Z računalniki lahko dandanes izvajamo kompleksne matematično-fizikalne izračune in simulacije. V marcu 2020 je omrežje Folding@Home, ki se uporablja za izračune zlaganja proteinov, preseglo 1.5 exaFLOPS-a, to je več kot 1,500,000,000,000,000,000 računskih operacij na sekundo. Že v enoti sami, ki jo uporabljamo za merjenje hitrosti FLOPS, se skriva glavni podatkovni tip, ki stoji za vsemi simulacijami. FLOPS namreč pomeni *floating point operation per second* in pove, koliko računskih operacij z decimalnimi števili lahko naredimo v eni sekundi. V tem prispevku se bomo poglobili v to, kako decimalna števila sploh predstavimo v računalniku in kako z njimi računamo.

Decimalna ali realna števila

Velikokrat se pogovorno reče, da v računalniku hranimo realna števila. Nekateri programski jeziki, npr. različne verzije SQL, tudi uporabljajo besedo `real` za oznako tipa. Vendar kljub temu v računalniku nekaterih realnih števil ne moremo predstaviti zelo enostavno. Iracionalna števila, kot npr. $\sqrt{2}$ ali π, običajno le aproksimiramo. Ravno število π je v programskem jeziku C definirano kot

```
#define M_PI 3.14159265358979323846,
```

torej »le« na 20 decimalk, precej manj kot trenutni slovenski rekord 3333 decimalk, ki jih je znal na pamet povedati zmagovalec zadnjega π-dneva. Kot bomo videli, računalnik uporablja le racionalna števila omejene natančnosti – morebitna realna števila so ustrezno zaokrožena. To nam omogoča enostavnost računanja in hitrost, natančnost pa ni največja. A brez skrbi, večinoma so decimalna števila, ki jih uporablja računalnik, povsem dovolj natančna.

Fiksna in plavajoča pika

FLOPS se v prvih dveh črkah nanaša na operacije s plavajočo piko.[1] Predstavitev decimalnih števil s plavajočo piko je ena izmed dveh osnovnih načinov predstavitve števil. Druga, enostavnejša možnost je predstavitev s fiksno decimalno piko. Pri slednji imamo na voljo nekaj mest za del pred piko in nekaj mest za decimalno piko. Denimo, da imamo dve mesti pred in dve mesti po piki. Števila, ki jih lahko zapišemo, so torej od 00.00 do 99.99. Interval od $[0, 100]$ smo enakomerno pokrili s 10000 števili na razdalji 0.01. Tem številom rečemo *predstavljiva*, vsem ostalim pa nepredstavljiva. Vsako realno število, s katerim želimo računati, moramo zaokrožiti; ponavadi izberemo najbližje predstavljivo število. Za število x bomo z $\mathrm{fl}(x)$ označili predstavljivo število, kjer zaokrožimo x.

Seštevanje in odštevanje predstavljivih števil je enostavno in natančno, lahko pa pride do prekoračitve ali podkoračitve; to pomeni, da rezultat leži izven razpona možnih vrednosti. Pri množenju in deljenju pridemo do novih težav. Če pomnožimo 0.5 in 0.41, pri točnem računanju dobimo 0.205, kar pa ni predstavljivo; rezultat je potrebno zaokrožiti na najbližje predstavljivo število. V našem primeru imamo dve izbiri: zaokrožimo lahko na 0.20 ali na 0.21. Čeprav je v resničnem življenju pogosto, da polovice zaokrožamo navzgor, v računalništvu pona-

[1] Pogosto se jim v slovenščini reče tudi števila s plavajočo vejico, saj je vejica v slovenščini ločilo, ki se uporablja za označevanje decimalnih mest. Vendar je v računalništvu precej bolj pogosta pika, zato jo bomo uporabljali tudi v tem prispevku.

vadi velja, da polovice zaokrožamo proti »sodemu številu«. V našem primeru bi zaokrožili k 0.20, saj je zadnja števka 0 soda. Tako pravilo uporabljamo, da bolj enakomerno razporedimo realna števila k njihovim decimalnim številom, saj se nekatere polovice zaokrožijo navzgor, nekatere pa navzdol. Računanje s fiksno decimalno piko zagotavlja določeno absolutno natančnost: v našem primeru bo zaokrožitvena napaka kvečjemu 0.005, polovica ločljivosti števil, s katerimi delamo. Napisano z enačbo:

- $|x - \mathrm{fl}(x)| \leqslant 0.005.$

Absolutna natančnost pa prinese tudi svoje težave. Kaj če želimo izračunati 0.05×0.08? Točen rezultat bi bil 0.04, kar se zaokroži na 0. Podobno ne moremo izračunati 30.12×40.23, saj je rezultat večji od 99.99. Računanje s fiksni decimalno piko preprosto ni dovolj fleksibilno za delo z velikimi ali majhnimi števili; dobro deluje le, če so vsa števila, s katerimi delamo, med 0 in 99.99. Tukaj pa je prednost drugega sistema predstavitve števil, predstavitev s plavajočo piko (angl. floating point). V tem sistemu števila predstavimo v obliki $m \times 10^e$, za število $m \in [0,1)$, ki se imenuje *mantisa*, in naravni eksponent e. Kako sistem deluje, si poglejmo na podobnem primeru kot pri predstavitvi s fiksno decimalno piko. Denimo, da imamo na voljo dve mesti za mantiso m in dve za eksponent e. Nekaj možnih števil je tako 0.23, $0.54 \cdot 10^{12}$, $0.10 \cdot 10^1$. Za eksponente bomo namesto dvomestnih števil od 0 do 99 dovolili števila od -50 do 49. Še vedno obdržimo enako količino števil, le malo jih zamaknemo, da lahko delamo tudi z negativnimi eksponenti. Tako so tudi števila $0.1 \cdot 10^{-12}$ in $0.43 \cdot 10^{-33}$ veljavna.

Ker lahko števila zapišemo na več različnih načinov (npr. $1 = 1 = 0.1 \cdot 10^1 = 0.01 \cdot 10^2$), se dogovorimo, da vedno pišemo v *normalizirani* obliki, to je v obliki, kjer se število začne z $0.x$, za neničelno decimalko x. Število 0.0062 bi napisali kot $0.62 \cdot 10^{-2}$, število 123 pa bi zaokrožili na $0.12 \cdot 10^2$. Razpon števil, ki ga s plavajočo piko lahko dosežemo s štirimi mesti, je precej večji kot pri fiksni piki: najmanjše normalizirano pozitivno število je $0.1 \cdot 10^{-50}$, torej 0.00000000000000000000000000000000000000000000000001, največje $0.9 \cdot 10^{49}$, torej 9000000000000000000000000000000000000000000000000. Seveda nimamo povsod enake absolutne natančnosti, saj imamo še vedno na voljo samo 10000 števil – pri številih okoli 500 bo razlika med sosednjimi števili 10 (npr. med $0.5 \cdot 10^3$ in $0.51 \cdot 10^3$), pri številih okoli 700000 bo ločljivost 10000, pri številih okoli 0.0003 pa 0.00001. Vidimo, da se ločljivost prilagaja velikosti števil. To je tudi smiselno: če računamo nekaj v kilometrih, pričakujemo tudi natančnost v redu velikosti kilometrov, če pa računamo v mikrometrih, prav tako pričakujemo natančnost v mikrometrih. Za števila, predstavljena s plavajočo piko, pravimo, da imajo približno enako *relativno* natančnost. Če število x zapišemo s plavajočo piko, bo absolutna napaka pri zaokrožitvi morda velika, relativna napaka

- $\dfrac{|\mathrm{fl}(x) - x|}{|x|}$

pa bo vedno manjša od 0.05. Tej vrednosti rečemo osnovna zaokrožitvena napaka.

Za konec si razliko med fiksno in plavajočo vejico poglejmo še grafično. Na sliki 1 vidimo primerjavo predstavljivih števil v fiksni in premični piki.

Računanje s premično piko

Premična pika je bolj fleksibilna pri računskih operacijah. Računalnik nam za osnovne računske operacije (+, −, ×, /) zagotavlja, da bo rezultat operacije zaokrožen na najbližje predstavljivo število. Če seštejemo 6.3 in 7.4 bi pri točnem izračunu dobili 13.7, vendar se rezultat zaokroži na 14, saj imamo na voljo le dve mesti natančnosti. Formalno izračun poteka tako:

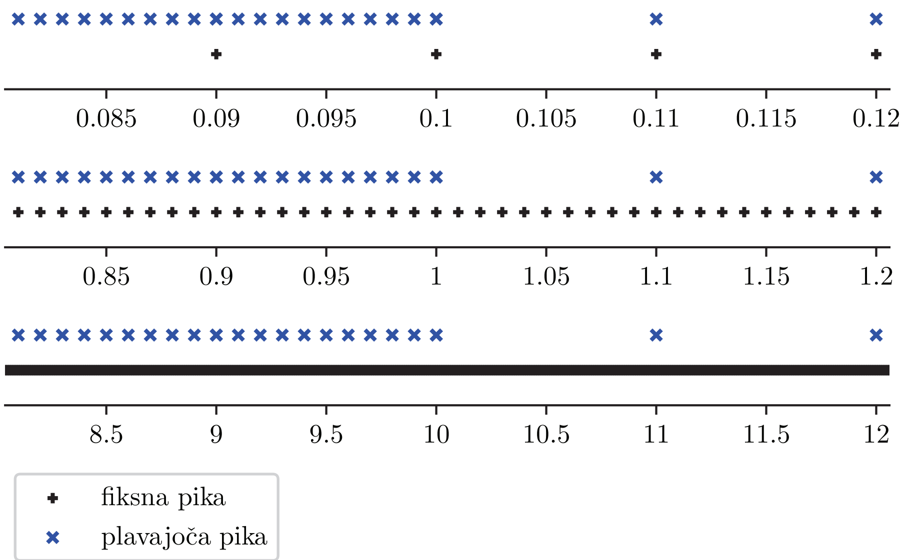
- $0.63 \cdot 10^1 + 0.74 \cdot 10^1 = \mathrm{fl}(1.37 \cdot 10^1) = 0.14 \cdot 10^2.$

Podobno se zgodi pri množenju: 6.3 pomnoženo s 7.4 bi s točnim računanjem dalo 46.62, v premični piki, pa se izračuna v

- $0.63 \cdot 10^1 \times 0.74 \cdot 10^1 = \mathrm{fl}(4.662 \cdot 10^1) = 0.46 \cdot 10^2.$

Ker imamo le dve mesti natančnosti, moramo pri rezultatu zavreči dve decimalki, toda relativna napaka $(46.62 - 46)/46.62 \approx 0.013$ je manjša od osnovne zaokrožitvene napake 0.05. Poglejmo še primer 0.05×0.08, ki je pri fiksni decimalni piki povzročal težave. Točen rezultat je 0.004, v premični piki dobimo

- $0.5 \cdot 10^{-1} \times 0.8 \cdot 10^{-1} = \mathrm{fl}(0.04 \cdot 10^{-1}) = 0.4 \cdot 10^{-2},$



SLIKA 1.
Primerjava pogostosti predstavljivih števil na treh različnih delih realne osi. Števila s fiksno piko imajo enako absolutno natančnost ne glede na lokacijo, števila s premično piko pa postajajo čedalje bolj redka, toda ohranjajo enako relativno natančnost. Na grafih se spreminjajo enote, zato števila s fiksno piko izgledajo, kot da so čedalje bolj gosta, števila s premično piko pa se zdijo enako gosta.

kar je popolnoma točno. Če bi dodali malo več decimalk in izračunali 0.053×0.082, bi izračun potekal tako:

- $0.53 \cdot 10^{-1} \times 0.82 \cdot 10^{-1} = \mathrm{fl}(0.4346 \cdot 10^{-1})$
  $= 0.43 \cdot 10^{-2}$.

V tem primeru rezultat ni točen, je pa precej boljši kot pri fiksni piki. Njegova relativna napaka je približno 1%.

Poučno je tudi,kaj se zgodi, če izračunamo npr. $100 + 0.1$. Dobimo

- $0.1 \cdot 10^3 \times 0.1 = \mathrm{fl}(0.1001 \cdot 10^3) = 0.1 \cdot 10^3$.

Rezultat je zopet točno 100, saj vrednost 0.1 ni bila dovolj velika, da bi jo upoštevali, in se je zgubila pri zaokroževanju. Še vedno pa je to znotraj zaokrožitvene napake: 0.1 predstavlja le 0.1% od 100, kar je močno znotraj dovoljene 5% napake.

Dejanska števila v računalniku

Pri delu z decimalnimi števili v računalniku ne uporabljamo le dveh decimalnih mest, kot smo jih mi do sedaj, a principi računanja kljub temu ostanejo enaki. Delo z decimalnimi števili predpisuje standard IEEE 754. Glavni tip, ki ga najpogosteje uporabljamo, se imenuje `double`. Velik je 64 bitov in se imenuje dvojna natančnost – tako ime ima, ker je dvakrat večji od 32-bitnega tipa `single`, ki predstavlja enojno natančnost. Decimalna števila so shranjena v dvojiškem sistemu, ne v desetiškem. Primer števila bi bilo npr.

- 0.101101×2^3,

kar pretvorimo v

- $(1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 0 \cdot 2^{-5} + 1 \cdot 2^{-6})$
  $\times 2^3 = 5.625$.

Izmed 64 bitov, ki so na voljo, jih je 11 rezerviranih za eksponent, 52 za mantiso (decimalke), in 1 za predznak števila (+ ali −). 11-bitni prosto za eksponent nam omogoča eksponente od −1022 do 1023, najmanjši in največji eksponent −1023 in 1024 pa sta rezervirana za posebna števila, o katerih bomo več povedali kasneje. V dvojiškem sistemu velja omeniti tudi posebno obliko normaliziranega zapisa. Če število zapišemo v običajnem normaliziranem zapisu, bo oblike $0.x$, kjer je x neničelna števka. Toda v dvojiškem je ta števka lahko le 1, zato je nepotrebno, da jo shranjujemo, in se raje dogovorimo, da kot normalizirano obliko za dvojiška decimalna števila vzamemo $1.x$, kjer je x poljuben, 0 ali 1. Tako najbolje izkoristimo 52 dvojiških decimalk, ki jih imamo na voljo, kar je enako približno 16 desetiškim decimalkam natančnosti. V tem sistemu je osnovna zaokrožitvena napaka enaka $1.11 \cdot 10^{-16}$.

Decimalno število s 64 biti je v računalniku predstavljeno kot:

- $s\,\underbrace{eee\ldots eee}_{\substack{\text{11 bitov}\\ \text{za eksponent}}}\,\underbrace{mmm\ldots mmm}_{\text{52 bitov za mantiso}},$

kjer s predstavlja en bit za predznak.

Poglejmo si konkreten primer. Bitni zapis števila 4269.6842 je enak

- 0 10000001011 0000101011011010111100100 111101110110010111111101100,

kjer so vrinjeni presledki za lažje branje. Prvi bit je enak 0, kar nam pove, da je število pozitivno. Sledi eksponent; če 10000001011 pretvorimo v desetiško, dobimo 1035. Vendar so eksponenti zamaknjeni, saj nimajo razpona od 0 do 2048, temveč od −1023 do 1024. Z upoštevanjem zamika je iskani eksponent enak $1035 - 1023 = 12$. Zapisano število je tako enako

- $1.00001010110110101111001001111011101\,1 \ldots$

- $1.0000101011011010111100100111101110110010111111101100 \times 2^{12}$,

kar je enako

- 1000010101101.1010111100100111101110110010111111101100

oz. približno 4269.6841999999996915. Kot vidimo, rezultat ni točno 4269.6842, temveč je za približno $3.09 \cdot 10^{-13}$, kar (relativno gledano) ustreza osnovni zaokrožitveni napaki.

Posledice zaokroževanja

Zaokroževanje na najbližjo vrednost pomeni, da običajna pravila računanja ne držijo več. Če v računalniku izračunamo $(a + b) + c$, to ni več nujno enako kot $a + (b + c)$. Poglejmo primer: vzemimo $a = 0.88$, $b = 0.56$ in $c = 0.13 \cdot 10^1$. Če izračunamo $a + b + c$ od leve proti desni, dobimo

- $$\begin{aligned} a + b + c &= 0.88 + 0.56 + 0.13 \cdot 10^1 \\ &= \mathrm{fl}(1.44) + 0.13 \cdot 10^1 \\ &= 0.14 \cdot 10^1 + 0.13 \cdot 10^1 \\ &= \mathrm{fl}(0.27 \cdot 10^1) = 0.27 \cdot 10^1. \end{aligned}$$

Če pa izračunamo $a + b + c$ od desne proti levi, dobimo

- $$\begin{aligned} a + b + c &= 0.88 + 0.56 + 0.13 \cdot 10^1 \\ &= 0.88 + \mathrm{fl}(1.86) = 0.88 + 0.19 \cdot 10^1 \\ &= \mathrm{fl}(2.78) = 0.28 \cdot 10^1. \end{aligned}$$

Razlika je majhna, vendar števili nista enaki. To je tudi eden izmed razlogov, da decimalna števila redko neposredno primerjamo, ali imajo popolnoma enako vrednost. Že majhne razlike v načinu izračuna namreč lahko prinesejo napake pri zadnjih decimalkah. Poslužimo se raje primerjanja s *toleranco*: namesto da bi pogledali, ali je $a = b$, pogledamo, ali je absolutna vrednost razlike med a in b manjša od tolerance t: $|a - b| \leqslant t$, za npr. $t = 0.00001$. Z izbiro vrednosti t lahko tudi določimo, kako velike napake so še sprejemljive.

Še ena zanimivost se pojavi pri računanju aritmetične sredine dveh števil. V matematiki smo navajeni, da aritmetična sredina $\frac{a+b}{2}$ dveh števil a in b leži natanko na sredini med številoma. Pri decimalnih številih temu ni tako: vzemimo npr. $a = 0.21$ in $b = 0.24$. Njuna izračunana aritmetična sredina je

- $$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &= \frac{1}{2}(0.21 + 0.24) = \frac{1}{2}\,\mathrm{fl}(0.43) = \\ &= \frac{1}{2}(0.43) = \mathrm{fl}(0.215) = 0.22, \end{aligned}$$

kar ni točen rezultat 0.215, toda je (eden izmed) najboljših možnih približkov.

Oglejmo si še en primer izračuna aritmetične sredine, tokrat za $a = 0.66$ in $b = 0.67$:

- $$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &= \frac{1}{2}(0.66 + 0.67) = \frac{1}{2}\,\mathrm{fl}(1.33) = \\ &= \frac{1}{2}(0.13 \cdot 10^1) = \mathrm{fl}(0.65) = 0.65. \end{aligned}$$

Tokrat smo dobili, da je sredina števil 0.66 in 0.67 enaka 0.65, kar seveda leži izven intervala $[0.66, 0.67]$! Če pogledamo izračun, vidimo, da je bil glavni krivec za izgubo natančnosti to, da smo zašli v prevelika števila. Pri predstavitvi 1.33 smo lahko obdržali le dve mesti in smo bili prisiljeni zadnjo zavreči, da smo shranili 1.3.

Izračun bi lahko popravili tako, da bi ga namesto $\frac{a+b}{2}$ napisali kot $a + \frac{b-a}{2}$. V tem primeru ne bi prišlo do dela s tako velikimi števili in rezultat bi bil

- $$\begin{aligned} a + \frac{b-a}{2} &= 0.66 + \frac{1}{2}(0.67 - 0.66) \\ &= 0.66 + \frac{1}{2}\,\mathrm{fl}(0.01) \\ &= 0.66 + \frac{1}{2}(0.1 \cdot 10^{-1}) \\ &= 0.66 + \mathrm{fl}(0.05 \cdot 10^{-1}) \\ &= 0.66 + 0.5 \cdot 10^{-2} = \mathrm{fl}(0.665) = 0.66. \end{aligned}$$

V tem primeru je rezultat do zadnjega koraka kljub vmesnim zaokrožitvam točen, na koncu pa se zaokroži na najboljši možni približek.

Pokažimo še nekaj zanimivih primerov dejanske dvojne natančnosti. V izbranem programskem jeziku (npr. Python) izračunajmo $s = 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1$. Če bi bilo računanje točno, bi rezultat moral biti enak 1. Vendar, ko preverimo `s == 1`, dobimo odgovor `False`, da enakost ne drži. Res, če izpišemo vrednost s na dovolj decimalk, dobimo $s = 0.99999999999999988898$, oz. razliko $|s - 1| = 1.110223 \cdot 10^{-16}$. Če bi pri preverjanju uporabili toleranco npr. 10^{-15}, bi dobili pravilni rezultat, da sta odgovora enaka.

Ponovimo eksperiment z 0.5 namesto 0.1. Rezultat bi v tem primeru moral biti 5, in vrednost s je 5.00000000000000000000 ter primerjava `s == 5` vrne `True`. Zakaj tokrat nismo dobili 4.99999999999999999 namesto 5? Odgovor je, da so bila vsa števila, ki so v računu nastopala, torej 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5 itd..., predstavljiva in nikoli ni prišlo do zaokroževanja. Tako je bil tudi rezultat točen. Če pazljivo izbiramo števila, lahko sicer konstruiramo primere, kot je zgornji, kjer napak ni. Vendar v praksi na kaj takega ne moremo računati – sprijazniti se je potrebno z napakami in znati z njimi ustrezno ravnati.

Posebne vrednosti

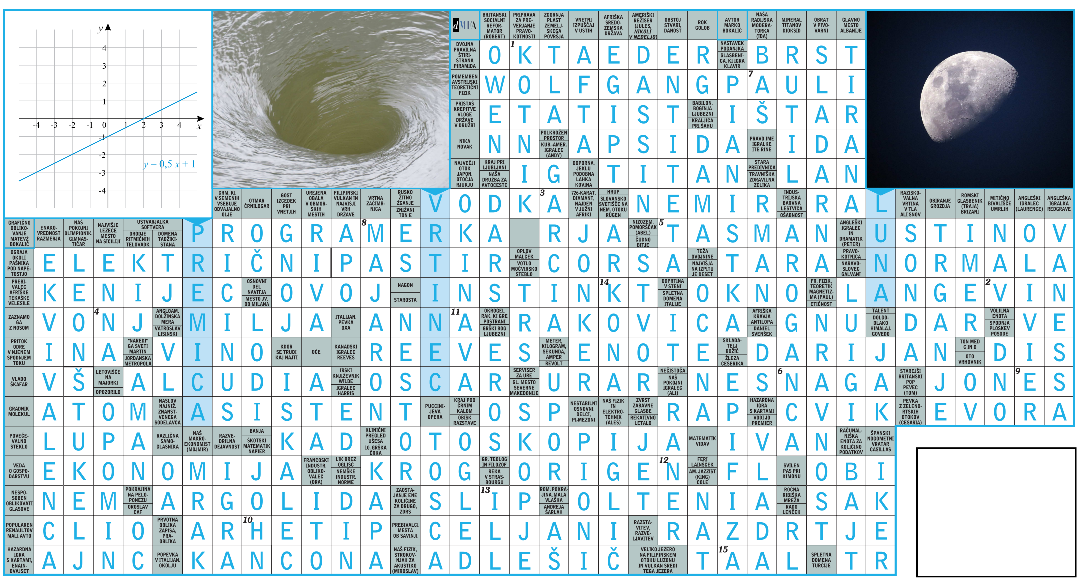
Prej smo omenili, da sta eksponenta -1023 in 1024 rezervirana za posebne vrednosti. To je potrebno, ker poleg decimalnih števil standard vsebuje tudi posebna števila $\pm\infty$ in NaN, ki predstavljajo (pozitivno ali negativno) neskočnost, in pa posebno število »not a number«, ki označuje, da je rezultat neveljaven ali nedoločen. Najlažji način, da dobimo vrednost ∞, ki ga običajno napišemo z besedilom kot »`inf`«, je, da poskusimo izračunati npr. 1.0 / 0.0. Večina programskih jezikov (z izjemo Pythona) bo vrnila vrednost `inf`. Za računanje z neskončnostjo veljajo naslednja pravila:

- $$\begin{aligned} \infty + a &= \infty \\ \infty - a &= \infty \\ \infty \cdot a &= \begin{cases} \infty; \text{ če } a > 0 \\ \mathrm{NaN}; \text{ če } a = 0 \\ -\infty; \text{ če } a < 0 \end{cases} \\ \infty / a &= \begin{cases} \infty; \text{ če } a \geqslant 0 \\ -\infty; \text{ če } a < 0 \end{cases} \\ a^{\infty} &= \begin{cases} 0; \text{ če } |a| < 1 \\ 1; \text{ če } |a| = 1 \\ \infty; \text{ če } |a| > 1 \end{cases} \\ \infty^{a} &= \begin{cases} 0; \text{ če } a < 0 \\ 1; \text{ če } a = 0 \\ \infty; \text{ če } a > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Pri tem smo predpostavili, da je a običajno število (torej ni ∞ ali NaN). Definirano pa je npr. tudi $\infty + \infty = \infty$ in $\infty \cdot \infty = \infty$. Definicije so smiselne z vidika matematičnih limit: če imamo dve zaporedij števil, ki gresta proti ∞, gre proti ∞ tudi njun produkt ali vsota. Za razliko ali kvocient pa to ne velja, zato so rezultati izrazov ∞/∞, $\infty - \infty$, $0/0$ ali $0 \cdot \infty$ enaki NaN. Računanje z NaN pa je enostavno definirati: čim je eden od operandov enak NaN, je tudi rezultat NaN: torej $a + \mathrm{NaN} = \mathrm{NaN}$, $a \cdot \mathrm{NaN} = \mathrm{NaN}$, $a^{\mathrm{NaN}} = \mathrm{NaN}$, ... S posebnimi vrednostmi pa znajo delati tudi elementarne funkcije. Velja npr. $\sqrt{\infty} = \infty$, $\sqrt{-2} = \mathrm{NaN}$, $\sin(\infty) = \mathrm{NaN}$, $\arctan(\infty) = \pi/2$.

Za NaN pa velja še ena posebnost: če ga primerjamo samega s sabo, vrne `False`. Torej, če npr. naredimo `x = 0.0/0.0` in nato izračunamo `x == x`, dobimo `False`. Ta posebna lastnost velja samo za NaN in ne drži za nobeno drugo decimalno število. Kot smo videli, je to le ena izmed pasti, v katero se lahko ujamemo pri delu z decimalnimi števili. S tem, kako računati, da se v naše izračune ne prikrade preveč napak, se ukvarja *numerična matematika*. Ta tudi neveščemu računalničarju omogoča zanesljivo delo z decimalnimi števili.

× × ×



REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 48/3

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz tretje številke Preseka je **Kvantna mehanika.** Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Andrea Ažman iz Blejske Dobrave, Neža Korenjak iz Mengša in Slavko Toplak iz Lenarta v Slovenskih goricah, ki bodo razpisane nagrade prejeli po pošti.

× × ×

Odboj in interferenca morskih valov

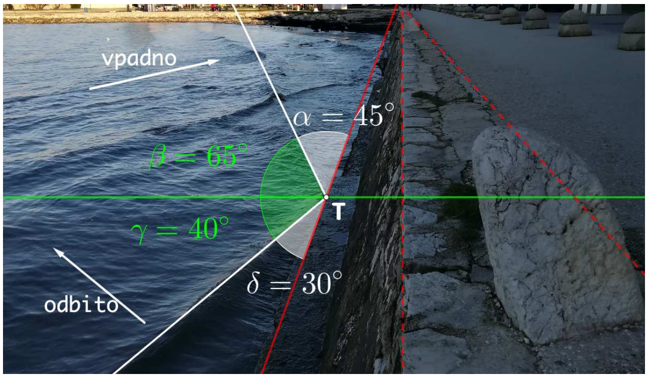
Jurij Senič

V zadnjih dnevih decembra 2019 sem se sprehajal po Peškeri v Poreču in opazil ter fotografiral zanimiv valovni pojav oz. več pojavov naenkrat.

Fotografija na sliki 1 prikazuje rahlo vzvalovano morsko gladino ob utrjenem kamnitem nabrežju, ki v daljavi preide v kamnito morsko obalo. Najbolj očitno dogajanje, ki sem ga ujel na fotografijah in ga najbrž najprej opazi tudi bralec, je odboj ravnih valov na gladini od ravnega kamnitega obalnega zidu. Ravni valovi so tisti, ki jih lahko prikažemo z ravnimi valovnimi črtami, črtami, ki ležijo na vrhovih valov.

Na sliki 2 je označena smer vpadnega in odbitega valovanja z belima puščicama. Odbiti val je tisti, ki se začne pri steni v točki (trenutnega) odboja T in se njegova valovna črta nadaljuje proti spodnjemu robu fotografije (z zidom, rdečo premico vzdolž roba zidu, oklepa kot δ). Če si natančneje ogledamo val, kjer se sreča s steno, lahko opazimo, da oklepa valovna črta vpadnega vala (bel poltrak) z zidom, od katerega se odbija, kot α, in da oklepa valovna črta odbitega vala (drugi bel poltrak) z zidom kot δ. Odbojni zakon pravi, da sta kot, pod katerim valovanje vpada na površino, in kot, pod katerim se valovanje od površine odbije, enaka. Na fotografiji to ni očitno, za kar je kriva projekcija 3-dimenzionalnega prizora v ravnino fotografije. V realnem 3D svetu sicer vzporedne premice (npr. rdeče premice na sliki 2) niso videti vzporedne, zelena premica, ki je pravokotna na zid, ni videti pravokotna na rdečo, ki je vzdolž zidu. V eni od prihodnjih številk bom morda skušal pojasniti, kako ugotovimo, da odboj valovanja, ki ga prikazuje fotografija, ne krši odbojnega zakona.

SLIKA 1.
Zanimiva morska gladina



SLIKA 2.
Valovna črta vala (prikazana z belima poltrakoma), ki se odbija od ravnega zidu. Z zeleno je narisana vpadna pravokotnica, z rdečo pa premica, vzporedna kamnitemu obalnemu zidu. Bela puščica označuje smer vpadnega in odbitega valovanja.

Od površin se odbijajo vsa valovanja, ne le morsko, in njihov odboj po odbojnem zakonu ima zanimive posledice. Zaradi odboja svetlobe od vodne gladine lahko (no, z nekaj domišljije) na morski gladini v daljavi opazimo odsev osončenega drevesa in bližnje okolice. Rahlo vzvalovana vodna gladina na sliki 3 deluje kot nagubano zrcalo, od katere se svetloba odbija tudi proti opazovalcu (oz. njegovemu fotoaparatu). Ta vidi na gladini odsev drevesa. V bonaci, ko je gladina povsem mirna, pa je odsev tako razločen, da mu rečemo slika.

Mojo pozornost pa je kasneje najbolj pritegnil pojav, ki ga pravzaprav nisem nameraval ujeti v objektiv. Ob ogledu zaporedno zajetih posnetkov mi je v oko padla podrobnost, ki se na fotografiji nahaja na mestu, kjer se vpadni val sreča s prejšnjim, od stene odbitim valom. Opazimo lahko, da je mesto srečanja obeh valov konica z višino približno enako vsoti višin obeh valov. Temu pojavu rečemo interferenca valovanja in je prisotna v mnogih vsakodnevnih prizorih.

Interferenca

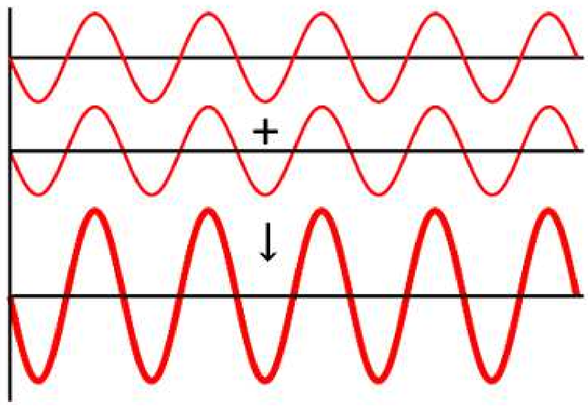
Interferenca je seštevanje valovanj. Pri predstavi, kakšno seštevanje to je, pomaga, če si prej predstavljamo samo valovanje – kako se premikajo deli snovi, po kateri valovanje potuje. Ko pobližje pogledamo, kako se premika voda ob vzvalovani gladini, ugotovimo, da to gibanje ni najbolj enostavno. A za to, da razumemo, kaj pomeni seštevanje valovanj, podrobnosti niti niso bistvene. Dovolj je, če si predstavljamo gladino morja in to, da se vsak delček vzvalovane gladine premika samo v navpični smeri kot žoga, ki plava na gladini, se dviga in spušča, kot jo dvigajo in spuščajo valovi, ki potujejo pod njo[2]. To gibanje je nihanje gor in dol okoli ravnovesne lege; ravnovesna lega gladine pa je tam, kjer je gladina, ko ni valov. Frekvenco in amplitudo, s katerima delček gladine niha, narekujejo valovi; zato sta enaki frekvenci in amplitudi valovanja. Valovi narekujejo tudi časovni potek nihanja delčka gladine. V skrajni zgornji legi so, ko skozi njih potuje vrh vala, in v skrajni spodnji, ko skozi njih potuje dolina vala. Količino, s katero opišemo trenutno lego delčka gladine in tudi to, ali se v tistem trenutku dviga ali spušča, imenujemo faza. Če s črto povežemo sosednje delčke gladine, ki so sočasno na vrhu vala (in so med seboj v fazi), dobimo valovne črte.

Ko se dve valovanji z enako valovno dolžino in frekvenco srečata na istem mestu, se glede na fazo valovanja to lahko zgodi na več različnih načinov. Ločimo dva skrajna primera:

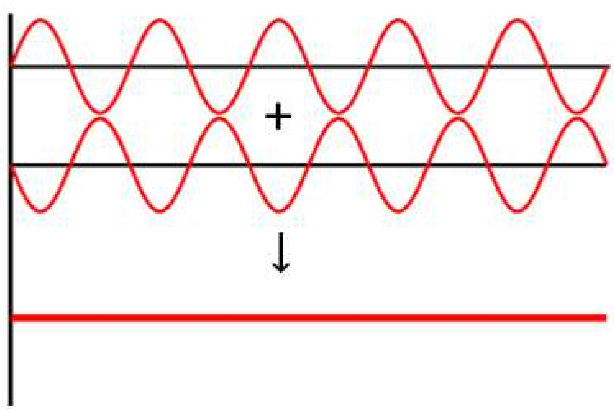
- V prvem primeru sta valovanji v fazi, kar pomeni, da se srečata valovna vrhova obeh valovanj. Amplitudi valovanj se seštejeta in na mestu srečanja

[2]Ko so valovi, je običajno tudi veter, ki jih povzroči. Veter po gladini zanaša tudi žogo.

SLIKA 3.
Odsev okolice na vodni gladini in vpadni valovi pred odbojem od stene.



SLIKA 4.
Konstruktivna interferenca. Amplitudi dveh valovanj v fazi se seštejeta v skupno, ki je dvakratnik posamezne. (Vir slike: Wikipedija)



SLIKA 5.
Destruktivna interferenca. Amplitudi dveh valovanj v protifazi se seštejeta v skupno, ničelno in nihanje se ustavi. (Vir slike: Wikipedija)

dobimo dvojni vrh vala. Takšnemu pojavu rečemo konstruktivna interferenca (slika 4).

- V drugem primeru pa se srečata npr. valovni vrh prvega in valovna dolina drugega ali obratno, čemur rečemo protifaza. Tudi tokrat se amplitudi seštejeta, vendar se zaradi njunih nasprotnih predznakov takšni valovanji izničita. Takšen pojav imenujemo destruktivna interferenca (slika 5).

Seveda pa so možni tudi vsi ostali vmesni primeri, le da ti nimajo kakšnega posebnega poimenovanja. Vsota amplitud vmesnih primerov je prav tako odvisna od fazne razlike med obema valovanjema in se lahko giblje med obema skrajnima primeroma bodisi bližje konstruktivni bodisi destruktivni interferenci.

Tudi v primeru na fotografiji imata seveda obe valovanji enako frekvenco, saj imata en sam izvor valovanja, in sicer skupek vetrnih in plimskih pogojev, razlikujeta pa se v smeri širjenja. Na mestu, kjer se srečata vrhova vpadnega in od zidu odbitega valovanja, se ustvari ojačitev, ki jo vidimo kot višji vrh oz. konico. Na mestih, kjer se srečata vrh in dolina omenjenih valovanj, pa bi morala gladina mirovati, saj se tam ustvari oslabitev. Tega zaradi zornega kota in večje valovne dolžine na fotografiji ne opazimo.

SLIKA 6.
Île de Ré. Foto: Michel Griffon

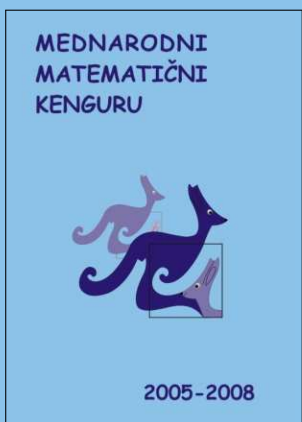
Dobra točka za opazovanje interference morskih valov, ki je bila opisana v tem prispevku je zahodna obala francoskega otoka Île de Ré, kjer se srečajo valovi, ki so nastali na različnih koncih Atlantskega oceana in v različnih vremenskih pogojih. Ti valovi se sekajo pod pravim kotom in v morju izrišejo vzorec šahovnice, kot je viden na sliki 6.

× × ×

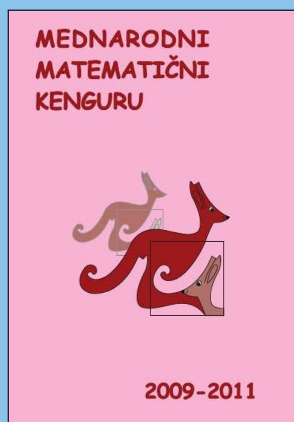
Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

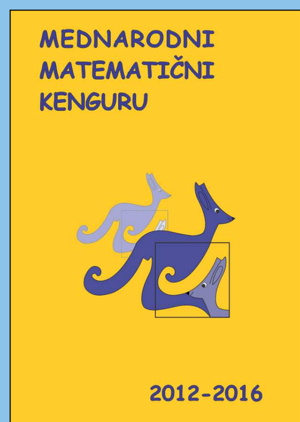
Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.



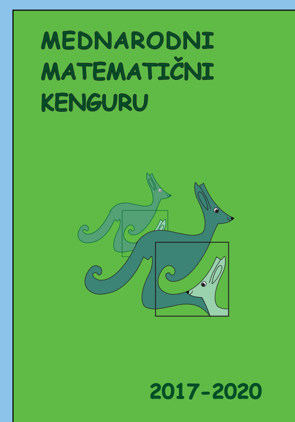
18,74 EUR



14,50 EUR



23,00 EUR



v pripravi

Pri DMFA – založništvo je izšlo že pet knjig Matematičnega kenguruja. Na zalogi so še:

- *Mednarodni matematični kenguru 2005–2008*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2009–2011*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2012–2016*.

V pripravi na tisk pa je že šesta knjiga Matematičnega kenguruja. Izšla bo v februarju ali marcu.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

`http://www.dmfa-zaloznistvo.si/`

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu starejših zbirk nalog pri DMFA – založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!