PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **15** (1987/1988)
Številka 6
Strani 358–361

Marko Razpet:

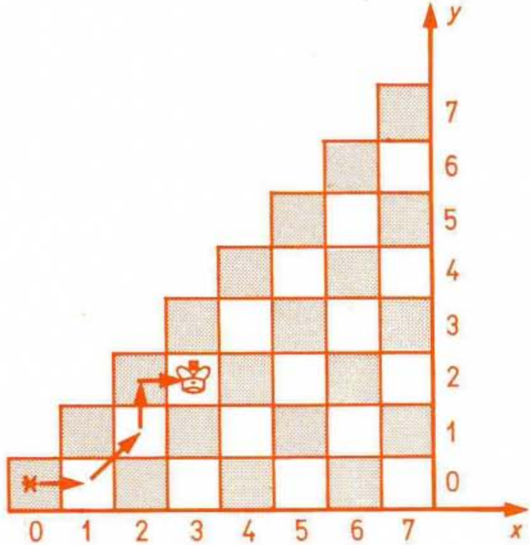
ŠAHOVSKI KRALJ Z OMEJENO SVOBODO GIBANJA

Ključne besede: matematika, kombinatorika, rekurzivna formula, poteza, pot, binomski koeficient, število poti.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/15/915-Razpet-kralj.pdf

ŠAHOVSKI KRALJ Z OMEJENO SVOBODO GIBANJA

Zamislimo si šahovskega kralja (barva ni pomembna), ki se lahko sprehaja samo po 36 poljih šahovske deske, kot prikazuje slika 1. Na druga polja ne sme, zato jih tudi nismo narisali. Položaj kralja bomo označevali nekoliko drugače, kot je navada v šahovskem svetu, in sicer z urejenim parom celih števil (x, y), pri čemer je $0 \leqslant x \leqslant 7$ in $0 \leqslant y \leqslant x$. Zadnja relacija predstavlja "omejeno suverenost" kralja.



Slika 1

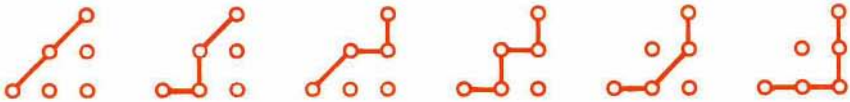
Ubogemu kralju, ki mu je na tak način okrnjeno kraljestvo, ni dovoljeno, da bi se premikal v vseh smereh, kakor to lahko počnejo običajni kralji na običajnih šahovnicah. Naš se lahko premika samo tako, da napreduje za eno polje proti desni ali za eno polje navzgor ali pa oboje hkrati. Dovoljene so torej poteze:

$$(x, y) \to (x+1, y), \quad (x, y) \to (x, y+1) \text{ in } (x, y) \to (x+1, y+1)$$

Skušali bomo odgovoriti na vprašanje: Koliko različnih poti ima kralj na izbiro, da pride s polja $(0, 0)$ na polje (x, y)?

Označimo število vseh teh različnih poti s $q(x, y)$.

Primer 1. Za manjše x in y lahko $q(x, y)$ določimo s tem, da vse možne poti narišemo. Določimo na primer $q(2, 2)$. Dovoljene poti so naslednje:



Slika 2

Torej je $q(2, 2) = 6$. Samo ena pot pripelje kralja z začetnega polja (0, 0) na polje (1, 0), zato je $q(1, 0) = 1$. Prav tako lahko pride na polja (2, 0), (3, 0), ..., (7, 0) na en sam način. To pomeni, da je $q(x, 0) = 1$ za $x = 1, 2, ..., 7$. Zaradi popolnosti bomo vzeli še $q(0, 0) = 1$.

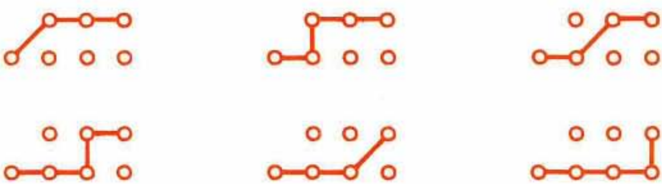
Nobenega razloga ni, da ne bi vzeli trikotne šahovske deske drugačnih razsežnosti, recimo take, ki ima na osnovnici n polj. Pri tem je lahko n poljubno naravno število. V vsakem primeru velja:

$$q(x, 0) = 1 \quad \text{za } x \geqslant 0 \tag{1}$$

Primer 2. S preštevanjem določimo $q(2, 1)$ in $q(3, 1)$. V prvem primeru so dovoljene naslednje poti:

Slika 3

Imamo torej 4 različne poti: $q(2, 1) = 4$. V drugem primeru pa so možne take poti:



Slika 4

Torej je $q(3, 1) = 6$. Polje (3, 2) je dosegljivo s polj (2, 2), (3, 1) in (2, 1). Kralj lahko pride na prvo od teh treh po $q(2, 2) = 6$ različnih poteh, na drugo po $q(3, 1) = 6$ različnih poteh in na tretje po $q(2, 1) = 4$ različnih poteh, vsakokrat začne na polju (0, 0). Do polja (3, 2) ima samo še korak. Od tod sklepamo, da s polja (0, 0) kralj s svojo omejeno svobodo gibanja prej ali slej zavzame polje (3, 2) po $q(2, 2) + q(3, 1) + q(2, 1) = 6 + 6 + 4 = 16$ različnih potez. Z enakim premislekom ugotovimo:

$$q(x, y) = q(x-1, y) + q(x, y-1) + q(x-1, y-1) \quad \text{za} \quad 1 \leqslant x \ \text{in} \ 1 \leqslant y \leqslant x \qquad (2)$$

To je rekurzivna formula za izračun števil $q(x, y)$. Upoštevajmo še relacijo (1), pa že lahko sestavimo preglednico:

$y \backslash x$	0	1	2	3	4	5	6	7
7								8558
6							1806	6752
5						394	1412	3534
4					90	304	714	1408
3				22	68	146	264	430
2			6	16	30	48	70	96
1		2	4	6	8	10	12	14
0	1	1	1	1	1	1	1	1

V vrstico z oznako y in stolpcu z oznako x stoji število $q(x, y)$. V spodnji vrstici smo upoštevali, da je $q(x, 0) = 1$. Ostale vrstice izpolnimo samo s seštevanjem največ treh števil v skladu s formulo (2). Pri tem vzamemo, da je $q(x, y) = 0$, če je $x < y$. Hitro se vidi, da so nad vrsto iz enic sama soda števila, to je

$$q(x, 1) = 2x \quad \text{za} \quad x \geqslant 1 \qquad (3)$$

Števila $q(x, 2)$ je že nekoliko teže razpoznati. Opazimo pa naslednjo zakonitost: števila $\frac{1}{2}q(x, 2)$ so po vrsti 3, 8, 15, ..., to pa so kvadrati števil 2, 3, 4,.., zmanjšani za 1. Velja torej:

$$q(x, 2) = 2(x^2 - 1) \quad \text{za} \quad x \geqslant 2 \qquad (4)$$

Uganiti števila $q(x, 3)$ ni več mačji kašelj, napišimo samo rezultat:

$$q(x, 3) = \frac{2}{3}(x-2)(2x^2 + 4x + 3) \quad \text{za} \quad x \geqslant 3 \qquad (5)$$

Pojavi se seveda vprašanje, kako se glasi formula za $q(x, y)$ v splošnem. Najbolj zadovoljni najbrž ne moremo biti z njo, ker je videti takale:

$$q(x, y) = \frac{x-y+1}{y} \sum_{k=0}^{y-1} \binom{x}{k}\binom{y}{k+1} 2^{k+1} \quad \text{za} \quad y > 0 \qquad (6)$$

Do nje pridemo z metodami tako imenovanega simboličnega ali umbralnega računa (Roman, [1]). Kot poseben primer dobimo iz (6) tudi (3), (4) in (5). Preverimo, če je res $q(3, 2) = 16$: $q(3, 2) = \binom{3}{0}\binom{2}{1} 2 + \binom{3}{1}\binom{2}{2} 2^2 = 4 + 12 = 16$.

Naloga za bralce: Vsak ponedeljek obiskujem tržnico. Branjevka, pri kateri kupujem, je prejšnji ponedeljek prodajala paradižnik po 400 din za kilogram. Danes je spet ponedeljek in cena njenega paradižnika je bila (začuda) še vedno ista. Na koliko načinov se je lahko gibala cena njenega paradižnika med tednom, če vemo, da

1) branjevka prodaja vsak dan v tednu,
2) branjevka cene pod nobenim pogojem ne spusti pod 400 din za kilogram,
3) ceno prilagaja razmeram na trgu vsako jutro, in sicer tako, da ceno prejšnjega dne pusti nespremenjeno ali pa jo zviša oziroma zniža za 50 din pri kilogramu?

Marko Razpet