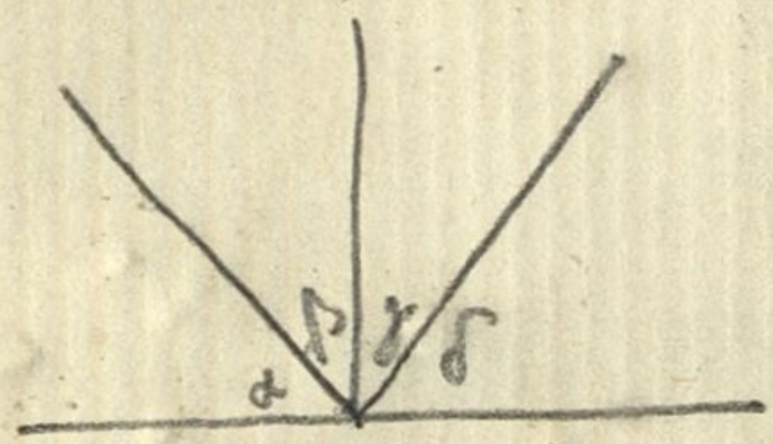
Anton Kotnik m.p.

Laibach den 15. Mai 1863.

Septimianus
Octavianus.

Du bist zu wenig Blei, mein Sohn.

Keck muß man sein.



~~α + β + γ + δ = 2R~~

~~α + β = R~~

2β + 2γ = 2R

Lehrbuch

der

Geometrie

für die

Ober-Gymnasien.

Von

Dr. Franz Močnik,

k. k. Schulrath.

Mit 372 in den Text gedruckten Holzschnitten.

Fünfte Auflage.

Wien.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1858.

d. 97196 a

Narodna in univerzitetna knjižnica Ljubljana

20161092 4

Vorwort zur vierten Auflage.

Die vorliegende vierte Auflage des von mir im Jahre 1850 herausgegebenen Lehrbuches der Geometrie darf in mehrfacher Beziehung eine neu bearbeitete genannt werden. Während fast sämmtliche Abschnitte bedeutende Zusätze und Erweiterungen erhielten, wurde überall auch für größere Deutlichkeit und strengere Begründung Sorge getragen.

In der Planimetrie hat die geometrische Analysis eine besondere Berücksichtigung gefunden, wodurch das Lehrbuch an Brauchbarkeit jedenfalls nur gewonnen haben dürfte. Indem diese Methode den Schüler bei den Lehrsätzen die das jedesmalige Theorem bedingenden Sätze selbst aufsuchen, und dadurch die Basis gewinnen läßt, auf welcher dann der synthetische Beweis konstruirt werden kann; indem sie ihm bei den Aufgaben die Hindeutungen auf die verbindenden Glieder erschließt, die zur Lösung führen: erweiset sich dieselbe als ein vorzüglich geeignetes Mittel, die Erfindungsgabe und den mathematischen Scharfsinn des Schülers zu wecken und auszubilden.

Die Stereometrie hat durch die Aufnahme der auf die ähnlichen Körper Bezug nehmenden Lehren, die in den ersten drei Auflagen übergangen wurden, gleichfalls eine Bereicherung erhalten.

In der ebenen Trigonometrie, welche einer durchgreifenden Umarbeitung unterzogen wurde, war ich bemüht, den Definizionen eine größere Schärfe zu verleihen, und in die Formeln eine bessere Anordnung zu bringen. Die Anleitung über die Berechnung der

trigonometrischen Funkzionen ist neu hinzugekommen. Die Formeln für den Sinus und Cosinus der Summe zweier Winkel werden auch hier unabhängig vom Kreise zunächst für den Fall entwickelt, daß diese Summe ein spitziger Winkel ist; es wird aber dann auch ausführlich dargelegt, daß sich die Giltigkeit dieser Formeln, ohne zu der Darstellung am Kreise Zuflucht zu nehmen, auf gleiche Weise für jeden beliebigen Werth jener Winkel nachweisen lasse, selbst dann, wenn einer derselben negativ wäre. Auch die sphärische Trigonometrie hat eine ganz neue Anordnung erhalten; es wurden auch hier, wie bei der ebenen Trigonometrie, zuerst die Sätze für die rechtwinkligen Dreiecke begründet, und dann aus diesen die Formeln für die schiefwinkligen Dreiecke abgeleitet. Ich hoffe durch diese Abänderungen mehrseitigen Wünschen entsprochen zu haben.

Laibach, am 15. September 1855.

Der Verfasser.

Inhalts-Verzeichniß.

Seite

Einleitung 1

Erster Theil.

Die Planimetrie.

Erster Abschnitt.

Gerade Linien und geradlinige Figuren.

I. Richtung und Größe der Geraden 5
1. Richtung der Geraden . . . . . —
2. Größe der Geraden 14
II. Erklärungen und besondere Eigenschaften der geradlinigen Figuren 15
1. Das Dreieck . . . . . —
2. Das Viereck 20
3. Das Vieleck . . . . . —
III. Kongruenz der geradlinigen Figuren 22
1. Kongruenz der Dreiecke . . . . . —
2. Anwendung der vorhergehenden Kongruenzfälle 25
a) Lehrsätze von den Dreiecken überhaupt . . . . . —
b) Sätze von den gleichschenkligen Dreiecken insbesondere 29
c) Sätze von den Parallelogrammen und den parallelen Linien . . . 31
d) Satz von den regelmäßigen Vielecken 34
3. Kongruenz der Vielecke 35
4. Aufgaben, welche nach der Kongruenzlehre aufgelöset werden können . 38
IV. Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren 46
1. Geometrische Verhältnisse und Proporzionen . . . . . —
a) Verhältnisse . . . . . —
b) Proporzionen 47
2. Aehnlichkeit der Dreiecke 51
3. Aehnlichkeit der Vielecke 56
4. Aufgaben, welche nach der Aehnlichkeitslehre aufgelöset werden können . 57
V. Flächeninhalt der geradlinigen Figuren 62
1. Vergleichung der Flächenräume . . . . . —
2. Berechnung des Flächeninhaltes 71
3. Verwandlung geradliniger Figuren 76
4. Theilung geradliniger Figuren 79

Seite

Zweiter Abschnitt.
Krumme Linien und von ihnen begrenzte Figuren.

I. Die Kreislinie 82
1. Gerade Linien, die in Beziehung auf den Kreis vorkommen . . . —
2. Winkel, die in Beziehung auf den Kreis vorkommen 87
3. Lage zweier Kreise gegen einander 93
4. Dem Kreise eingeschriebene und umschriebene Vielecke 95
5. Ausmessung des Kreises 101
a) Länge der Kreislinie 102
b) Flächeninhalt des Kreises 107
6. Aufgaben, deren Lösung auf der Lehre vom Kreise beruhet 110
II. Die Ellipse 119
III. Die Hyperbel 122
IV. Die Parabel 125

Zweiter Theil.
Die Stereometrie.

Erster Abschnitt.
Gerade Linien und Ebenen im Raume 129

I. Gerade Linien im Raume 131
II. Gerade Linien mit der Ebene verglichen . . . . . —
III. Ebenen mit Ebenen verglichen 1 8
IV. Körperwinkel 142

Zweiter Abschnitt.
Körper.

I. Erklärungen und besondere Eigenschaften der Körper . . 145
1. Eckige Körper . . . . . —
a) Das Prisma . . . . . —
b) Die Pyramide 148
c) Regelmäßige Körper 151
2. Runde Körper 153
a) Der Zylinder 154
b) Der Kegel . . . . . —
c) Die Kugel 155
II. Oberfläche der Körper 160
1. Prisma . . . . . —
2. Pyramide und Pyramidalstutz 161
3. Reguläre Körper 163
4. Zilinder . . . . . —
5. Kegel und Kegelstutz 164
6. Kugelzone und Kugel 167

Seite

III. Kubikinhalt der Körper 169
1. Vergleichung der Körperinhalte . . . . . —
2. Berechnung des Körperinhaltes 179
a) Kubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds und eines Würfels —
b) Kubikinhalt irgend eines Prisma 181
c) Kubikinhalt einer Pyramide und eines Pyramidalstutzes 182
d) Kubikinhalt eines regulären Körpers 183
e) Kubikinhalt eines Zilinders 184
f) Kubikinhalt eines Kegels und eines Kugelstutzes . . . . . —
g) Kubikinhalt einer Kugel 186

Dritter Theil.

Die Trigonometrie.

Erster Abschnitt.

Die ebene Trigonometrie.

I. Trigonometrische Funkzionen und ihr Zusammenhang . 190
1. Sinus und Cosinus . . . . . —
2. Tangente und Secante 191
3. Cotangente und Cosecante 193
4. Relazionen zwischen den trigonometrischen Funkzionen desselben Winkels 194
5. Relazionen zwischen den trigonometrischen Funkzionen verschiedener Winkel 196
6. Trigonometrische Tafeln 205
II. Auflösung der ebenen Dreiecke 209
a) Rechtwinklige Dreiecke . . . . . —
b) Schiefwinklige Dreiecke 212
III. Berechnung regelmäßiger Vielecke 219
IV. Verschiedene Anwendungen der ebenen Trigonometrie . . 223

Zweiter Abschnitt.

Elemente der sphärischen Trigonometrie.

I. Auflösung rechtwinkliger sphärischer Dreiecke 228
II. Auflösung schiefwinkliger sphärischer Dreiecke 232
II. Verschiedene Anwendungen der sphärischen Trigonometrie 245

Vierter Theil.

Anwendung der Algebra arf die Geometrie.

Erster Abschnitt.

Anwendung der Algebra auf die Lösung geometrischer Aufgaben 253
I. Gleichartigkeit der Ausdrücke 255

Seite

II. Konstrukzion der Gleichungen des ersten und zweiten Grades 256
1. Gleichungen des ersten Grades . . . . . —
2. Gleichungen des zweiten Grades 259
III. Algebraische Auflösung von geometrischen Aufgaben . . 261

Zweiter Abschnitt.

Elemente der analytischen Geometrie in der Ebene.

I. Analytische Bestimmung des Punktes 271
a) Rechtwinklige Koordinaten . . . . . —
b) Polarkoordinaten 273
c) Transformazion der Koordinaten 274
II. Analytische Darstellung der geraden Linie 277
a) Eine einzige Gerade . . . . . —
b) Zwei Gerade 288
c) Drei gerade Linien 292
III. Analytische Darstellung der Linien der zweiten Ordnung 296
a) Die Kreislinie . . . . . —
b) Die Ellipse 316
c) Die Hyperbel 327
d) Die Parabel 334
e) Wechselseitige Beziehungen der Kurven zweiter Ordnung . . . 342

Einleitung.

Gegenstand der Geometrie.

§. 1. Die Geometrie ist die Wissenschaft von den Raumgrößen, d. i. von jenen Größen, welche sich im Raume ausdehnen, oder darin ausgedehnt gedacht werden können.

§. 2. Das Ausgedehntsein kann nach drei Hauptrichtungen Statt finden: in die Länge, in die Breite und in die Höhe (Tiefe, Dicke). Dehnt sich eine Raumgröße nur nach einer Richtung, in die Länge aus, so heißt sie eine Linie; eine Raumgröße, welche zwei Ausdehnungen hat, in die Länge und in die Breite, nennt man eine Fläche; eine Raumgröße endlich, welche sich nach allen drei Richtungen ausdehnt, in die Länge, in die Breite und in die Höhe, wird ein Körper genannt. Zur Vorstellung eines geometrischen Körpers gelangt man, wenn man bei einem in der Wirklichkeit vorkommenden Körper nur den Raum, den er einnimmt, in Betrachtung zieht, alle übrigen Eigenschaften aber, als Gewicht, Härte, Farbe u. dgl sich hinwegdenkt. Ein Körper ist demnach ein nach allen Seiten begrenzter Raum; die Grenzen eines Körpers sind Flächen; die Grenzen einer Fläche sind Linien; die Grenzen einer Linie heißen Punkte. Ein Punkt ist keine Raumgröße, weil ihm keine Ausdehnung zukommt.

Ein geometrischer Punkt und eine geometrische Linie lassen sich nur vorstellen, aber nicht wirklich zeichnen; die Punkte und Linien auf dem Papiere sind nicht geometrische Punkte und Linien, sondern nur Zeichen derselben.

Linien.

§. 3. Man unterscheidet gerade und krumme Linien.

Eine Linie, welche in allen Punkten die nämliche Richtung hat, heißt eine gerade Linie, oder auch bloß Gerade.

Die Gerade hat die Eigenschaft, daß sie die kürzeste Linie ist, welche zwischen zwei Punkten gezogen werden kann. Sie dient daher auch dazu, um den Abstand oder die Entfernung zweier Punkte von einander anzugeben.

Da es zwischen zwei Punkten nur eine einzige gerade Linie geben kann, so folgt, daß durch zwei Punkte sowohl die Richtung als die Länge einer Geraden vollkommen bestimmt ist. Sobald daher eine Gerade mit einer anderen zwei Punkte gemeinschaftlich hat, so machen sie nur

eine einzige Gerade aus. Zwei verschiedene gerade Linien können nur einen einzigen Punkt gemeinschaftlich haben, oder sich nur in einem einzigen Punkte durchschneiden.

Fig. 1.

Fig. 2.

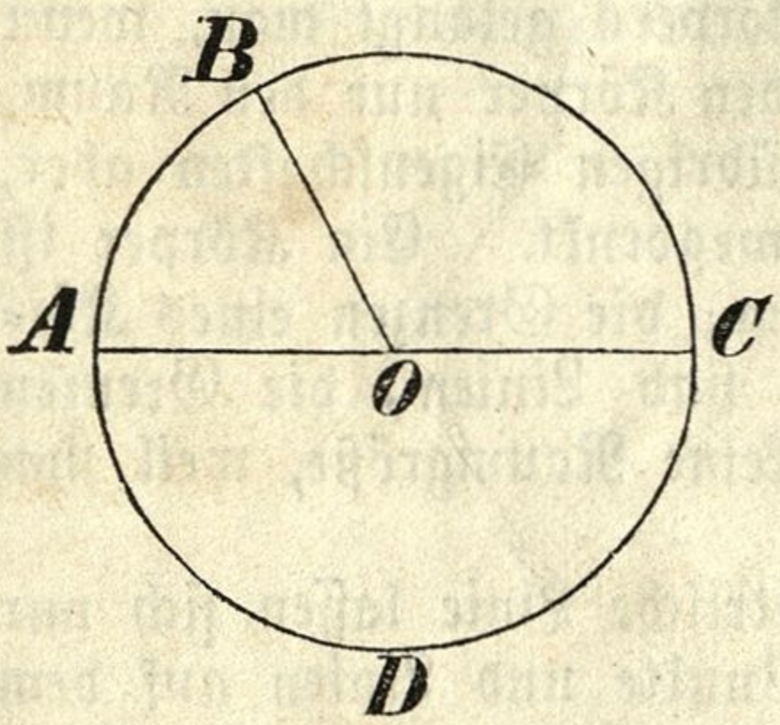
Fig. 3.

Um von einem bestimmten Punkte reden zu können, setzt man neben das Zeichen des Punktes einen Buchstaben hin; um daher eine gerade Linie auszudrücken, braucht man nur ihre Endpunkte mit Buchstaben zu bezeichnen und diese zusammen zu stellen. So heißt die Gerade zwischen den Punkten A und B (Fig. 1) die Gerade AB oder BA.

Jede Linie, von welcher kein Theil gerade ist, heißt krumm; wie z B. die Linien CD und EF (Fig. 2, 3).

§. 4. Unter den krummen Linien ist die Kreislinie die wichtigste. Sie hat die Eigenschaft, daß alle ihre Punkte von einem innerhalb derselben liegenden Punkte gleich weit entfernt sind. Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt oder das Zentrum des Kreises.

Fig. 4.



ABCDA (Fig. 4) stellt eine Kreislinie vor, deren Mittelpunkt O ist.

Jeder Theil der Kreislinie, wie AB, wird ein Kreisbogen (Arcus) genannt; die ganze Kreislinie heißt auch der Umfang oder die Periferie des Kreises.

Eine Gerade, welche vom Mittelpunkte zu irgend einem Punkte des Umfanges gezogen wird, heißt ein Halbmesser (Radius) des Kreises, z. B. AO, BO. Alle Halbmesser eines Kreises sind einander gleich, weil alle Punkte des Umfanges vom Mittelpunkte dieselbe Entfernung haben.

Eine gerade Linie, welche von einem Punkte des Umfanges durch das Zentrum bis zum entgegengesetzten Punkte des Umfanges gezogen wird, heißt ein Durchmesser (Diameter) des Kreises, wie AC. Jeder Durchmesser ist doppelt so groß als ein Halbmesser; woraus folgt, daß auch alle Durchmesser des Kreises einander gleich sind.

Je größer der Halbmesser, desto größer muß auch die Kreislinie sein. Wenn zwei Kreise aus demselben Mittelpunkte mit demselben Halbmesser beschrieben werden, so fallen sie vollkommen über einander.

Eine Linie, welche die Eigenschaft hat, daß sämmtliche in ihr liegende Punkte, aber auch nur diese, einer bestimmten Bedingung Genüge leisten, heißt der geometrische Ort für diese Punkte. Die Periferie eines Kreises ist also der geometrische Ort für alle Punkte, welche von einem gegebenen Punkte (nämlich dem Mittelpunkte) eine gegebene Entfernung (nämlich gleich dem Halbmesser) haben.

§. 5. Der Umfang eines jeden Kreises wird in 360 gleiche Bögen eingetheilt, welche man Grade nennt. Auf die halbe Periferie kommen 180, und auf den vierten Theil derselben 90 Grade. Ein Grad wird wieder in 60 kleinere Bögen, welche Minuten heißen, und 1 Minute in 60 Sekunden eingetheilt. Die Grade, Minuten und Sekunden werden durch die Zeichen °, ', " ausgedrückt.

Flächen.

§. 6. Die Flächen werden in ebene und gekrümmte eingetheilt.

Eine ebene Fläche, auch bloß Ebene, ist eine Fläche, bei welcher jede Gerade, welche zwei Punkte der Fläche verbindet, ganz in dieselbe hineinfällt.

Da durch drei nicht in derselben Geraden liegende Punkte eine einzige Ebene gelegt werden kann, so folgt, daß durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte die Richtung einer Ebene vollkommen bestimmt ist.

Eine Fläche, wovon kein Theil eine Ebene ist, heißt eine gekrümmte Fläche.

Jede begrenzte Fläche wird eine Figur genannt. Eine ebene Figur ist entweder geradlinig oder krummlinig, je nachdem sie von geraden oder krummen Linien eingeschlossen wird. Die Kreisfläche ist eine krummlinige ebene Figur.

Die Linien, von denen eine Figur begrenzt wird, nennt man die Seiten derselben, und die Summe aller Grenzlinien den Umfang. Die Größe der Fläche, welche eine Figur einschließt, wird der Flächenraum oder Flächeninhalt der Figur genannt.

Körper.

§. 7. Man unterscheidet eckige und runde Körper.

Ein Körper heißt eckig, wenn er von lauter Ebenen begrenzt wird, z. B. ein Würfel. Rund heißt ein Körper, wenn er nicht von lauter Ebenen, sondern entweder bloß von gekrümmten, oder theils von ebenen, theils von gekrümmten Flächen eingeschlossen wird, z. B. eine Kugel, eine Walze.

Die Summe aller Grenzflächen eines Körpers nennt man dessen Oberfläche, und den von ihnen eingeschlossenen Raum den Körperinhalt, Kubikinhalt, auch kubischen Inhalt.

Messen der Raumgrößen.

§. 8. Eine Größe messen heißt untersuchen, wie oft eine andere bekannte Größe derselben Art in ihr enthalten ist.

Jede Raumgröße kann nur durch eine gleichartige Raumgröße gemessen werden, also eine Linie nur durch eine Linie, eine Fläche nur durch eine Fläche, ein Körper nur durch einen Körper.

Größe, Form und Lage.

§. 9. Die Geometrie betrachtet an den Raumgrößen nicht nur die Größe, d. i. das Maß der Ausdehnung, sondern auch die Form oder

Gestalt, d. i. die Art, wie die einzelnen Theile an einander geordnet sind, und die Lage, d. i. die Größe der Entfernungen von bekannten Punkten, Linien oder Flächen.

Zwei Raumgrößen können gleiche Größe haben und doch in der Form verschieden sein; eben so können zwei Raumgrößen gleiche Form und verschiedene Größe haben.

Raumgrößen, welche dieselbe Größe haben, heißen gleich; wenn die Raumgrößen dieselbe Form haben, so heißen sie ähnlich; haben sie endlich gleiche Größe und gleiche Form, so nennt man sie kongruent.

Um anzuzeigen, daß zwei Größen gleich sind, wird dazwischen das Zeichen = (gleich) gesetzt; die Aehnlichkeit wird durch das Zeichen ∼ (ähnlich), und die Kongruenz durch die Verbindung beider Zeichen, nämlich durch ≅ (kongruent) ausgedrückt.

Kongruente Raumgrößen unterscheiden sich nur durch den Ort, an dem sie sich befinden, und müssen, wenn sie über einander gelegt werden, in allen Begrenzungen zusammenfallen, oder was dasselbe ist, sie müssen sich vollkommen decken.

Eintheilung der Geometrie.

§. 10. Die Geometrie zerfällt in zwei Haupttheile, in die Planimetrie und Stereometrie.

Die Planimetrie oder ebene Geometrie handelt von jenen Raumgrößen, welche sich in einer und derselben Ebene darstellen lassen; die Stereometrie beschäftiget sich dagegen mit jenen Raumgrößen, die nicht in einer einzigen Ebene liegen, sondern sich auch noch außerhalb derselben ausdehnen.

In dieser Schrift sollen die vorzüglichsten Lehren der ebenen Geometrie und der Stereometrie zuerst nach der graphischen Methode, d. i. mit Hilfe der geometrischen Konstrukzion entwickelt werden; diese Methode, welche die Sätze durch die Zeichnung versinnlichet, macht alle ihre Schlüsse aus der Konstrukzion, und konstruirt dann wieder die Folgen ihrer Schlüsse. Wir werden später mit der Konstrukzion die Rechnung verbinden, worin die trigonometrische Methode bestehet; und endlich die mannigfaltigen Beziehungen der Raumgrößen, namentlich deren Lage durch bloße Rechnung darzustellen suchen, was den Gegenstand der analytischen Geometrie bildet.

Erster Theil.

Die Planimetrie.

Erster Abschnitt.

Gerade Linien und geradlinige Figuren.

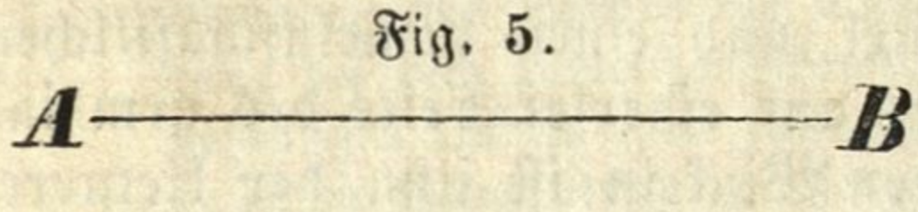
I. Richtung und Größe der Geraden.

1. Richtung der Geraden.

Parallele und nicht parallele Linien.

§. 11. Zwei Gerade, welche in einer Ebene gezogen werden, liegen entweder so neben einander, daß die Richtung beider eine und dieselbe ist, oder sie weichen in ihren Richtungen von einander ab. Zwei gerade Linien, welche in der nämlichen Richtung fortlaufen, heißen **parallel**; z. B. die Linien AB und CD (Fig. 5). Daß AB mit CD parallel ist, wird durch das dazwischen gesetzte Zeichen ∥ (parallel) angezeigt, nämlich

Fig. 5.



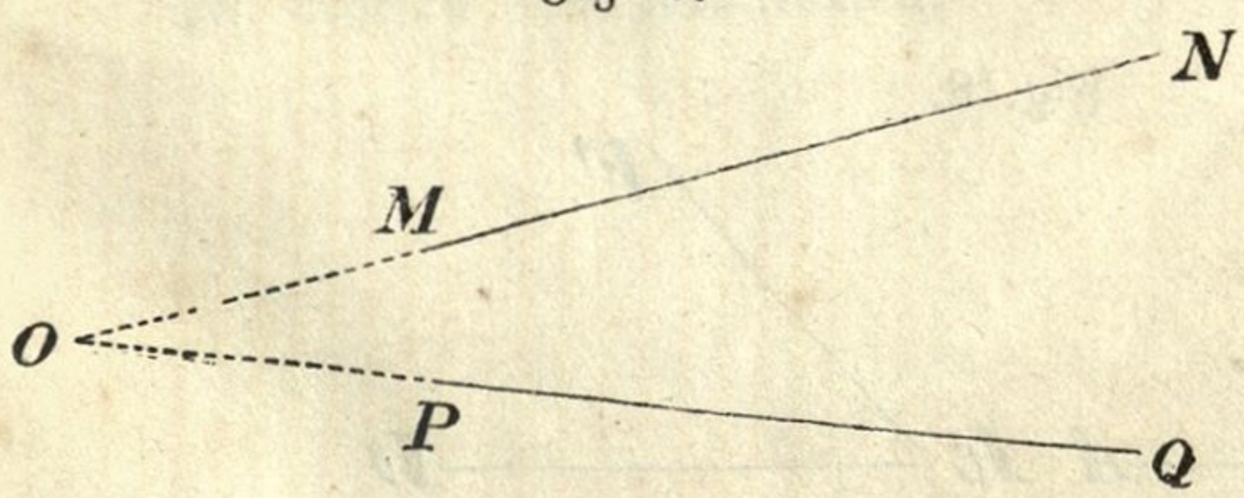
AB ∥ CD.

Zwei parallele Gerade können, da sie immer die nämliche Lage gegen einander behalten, nie zusammentreffen, wenn man sie auch noch so weit verlängert.

Wenn zwei Gerade in ihren Richtungen von einander abweichen, so nennt man sie **nicht parallel**. Wenn zwei Gerade nicht parallel sind, so müssen sie, hinreichend verlängert, sich jederzeit schneiden. Denn schnitten sie sich niemals, wie weit man sie auch nach beiden Seiten verlängerte, so müßten sie offenbar beide immer eine und dieselbe Lage gegen einander behalten, also in der nämlichen Richtung fortlaufen, d. i. parallel sein, was aber gegen die Voraussetzung ist.

Zwei nicht parallele gerade Linien heißen nach der Seite hin, wo sie verlängert sich schneiden, **konvergirend**, und nach der entgegengesetzten Seite **divergirend**. MN und PQ (Fig. 6) sind nicht parallel, nach der rechten Seite hin sind sie divergirend, nach der linken konvergirend.

Fig. 6.

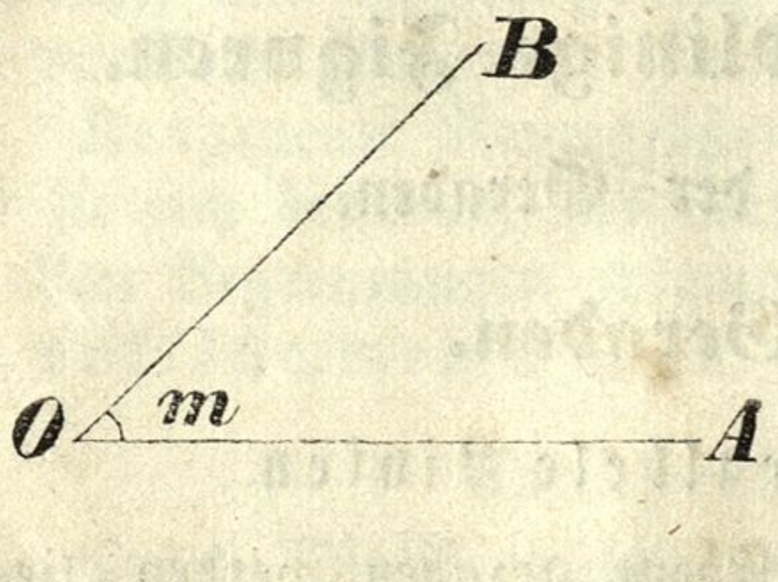


Winkel.

§. 12. Die Abweichung der Richtungen zweier Geraden, die in einem Punkte zusammentreffen, wird ein Winkel (∠) genannt. Den Punkt, in welchem die beiden Geraden zusammenkommen, nennt man den Scheitel oder die Spitze, und die zwei Geraden selbst die Schenkel des Winkels.

Ein Winkel wird entweder mit einem einzigen Buchstaben, den man in seine Oeffnung setzt, benannt, oder mit dem Buchstaben am Scheitel oder mit drei Buchstaben, indem man zuerst einen Buchstaben an dem einen Schenkel, dann den Buchstaben am Scheitel, und endlich einen Buchstaben am andern Schenkel ausspricht.

Fig. 7.



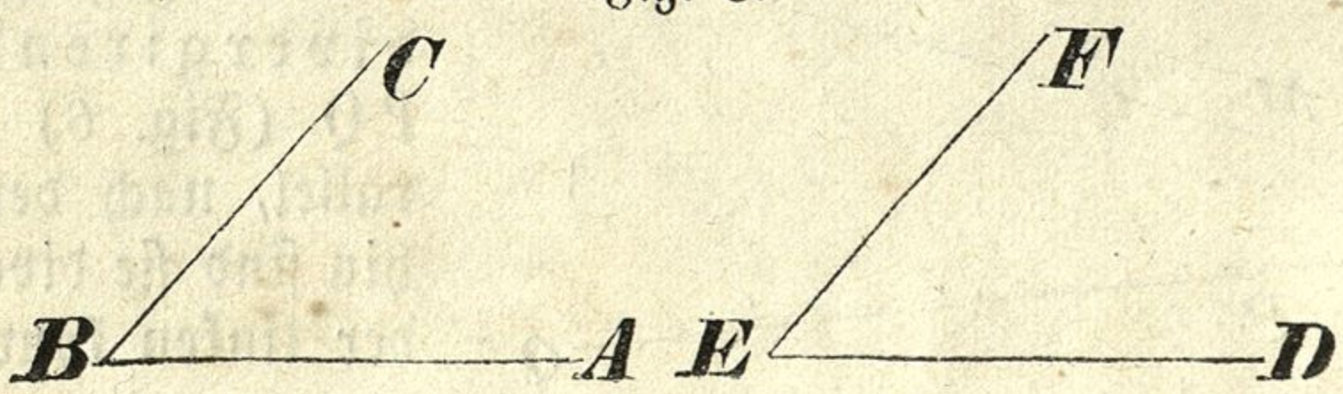
In dem nebenliegenden Winkel (Figur 7) ist O der Scheitel, OA und OB sind die Schenkel; der Winkel heißt entweder der Winkel m, oder der Winkel O, oder der Winkel AOB oder BOA.

§. 13. Ein Winkel ist um so größer, je mehr die Richtungen seiner Schenkel von einander abweichen. Um daher zwei Winkel hinsichtlich ihrer Größe mit einander zu vergleichen, denkt man sich dieselben so über einander gelegt, daß sie denselben Scheitel und einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, ihre andern Schenkel aber auf einerlei Seite des gemeinschaftlichen fallen; derjenige von den beiden Winkeln ist nun der kleinere, dessen zweiter Schenkel zwischen den Schenkeln des andern Winkels liegt. Fallen beide Schenkel eines Winkels mit den Schenkeln eines andern Winkels zusammen, so sind die beiden Winkel gleich; und umgekehrt: wenn man zwei gleiche Winkel so über einander legt, daß sie einerlei Scheitel und einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, und daß die beiden andern Schenkel auf einerlei Seite des gemeinschaftlichen liegen, so müssen auch diese andern Schenkel nothwendig zusammenfallen.

Die Länge der Schenkel hat auf die Größe eines Winkels keinen Einfluß; denn wenn man auch die Schenkel verlängert oder verkürzt, so behalten diese noch immer ihre frühern Richtungen, es bleibt also auch die Abweichung ihrer Richtungen, d. i. der von ihnen gebildete Winkel unverändert.

§. 14. Lehrsatz. Zwei Winkel, deren Schenkel nach derselben Seite hin parallel laufen, sind einander gleich.

Fig. 8.



Voraussetzung. Es sei (Fig. 8) AB ∥ DE und BC ∥ EF.

Behauptung. Es muß ∠ ABC = DEF sein.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Voraussetzung. Weil nämlich je zwei Schenkel als parallele Linien die nämliche Richtung haben, so muß auch die Abweichung der Richtungen in beiden Fällen dieselbe, d. i. der Winkel ABC = DEF sein.

Anmerkung. Ein Satz, welcher eine geometrische Wahrheit ausspricht, deren Richtigkeit nicht an und für sich selbst einleuchtet, sondern erst begründet werden muß, heißt ein geometrischer Lehrsatz. Durch jeden solchen Satz wird ausgesagt, daß, wenn einer oder mehreren Raumgrößen eine bestimmte Eigenschaft zugesprochen wird, denselben nothwendig auch andere bestimmte Eigenschaften zukommen. Ein geometrischer Lehrsatz bestehet demnach im Allgemeinen aus zwei Theilen, aus einer Voraussetzung, auch Annahme oder Bedingung, und aus der Behauptung oder Folgerung.

Jeder Lehrsatz bedarf, um von uns für wahr erkannt zu werden, einer Begründung oder eines Beweises. Durch diesen muß gezeigt werden, daß, wenn die Voraussetzung Statt findet, nothwendig auch die Folgerung Statt finden müsse. Der Beweis kann manchmal unmittelbar aus der Erklärung der Voraussetzung hergenommen werden, indem man zeigt, daß schon in der Voraussetzung, wenn man die darin vorkommenden Begriffe zergliedert, auch die Folgerung enthalten ist; in den meisten Fällen jedoch muß man sich dabei auf andere bereits als wahr anerkannte Sätze berufen, und es müssen häufig sogar Hilfslinien gezogen werden, um den Zusammenhang zwischen den bekannten Lehrsätzen und dem erst zu begründenden Satze zu erkennen. Die Beweise sind entweder direkt oder indirekt. Bei einem direkten Beweise werden die Gründe, aus welchen die Wahrheit des Satzes hervorgeht, unmittelbar angegeben; bei dem indirekten Beweise aber wird auf die Wahrheit einer Behauptung geschlossen, indem man zunächst nur nachweiset, daß die Annahme der entgegengesetzten Behauptung zu Folgerungen führen würde, welche mit schon als wahr erkannten Sätzen in offenbarem Widerspruch stehen.

Was endlich die Methode der Beweisführung anbelangt, so ist dieselbe entweder synthetisch oder analytisch. Bei der synthetischen Methode geht man von den bereits als wahr anerkannten Sätzen aus, und verbindet dieselben so mit einander, daß der zu beweisende Satz als Endresultat erscheint; bei der analytischen geht man von dem zu beweisenden Satze aus, man zergliedert denselben, sucht alle Bedingungssätze auf, die zu seiner Begründung nothwendig sind, und schließt dann aus der bereits nachgewiesenen Wahrheit der Bedingungssätze auch auf die Richtigkeit des aufgestellten Lehrsatzes. Bei der analytischen Methode sucht man selbst den Weg, der zum Beweise führt; man lernt dabei nicht nur die Schlüsse, aus denen die Wahrheit eines Satzes hervorgehen soll, richtig an einander reihen, sondern sieht auch bei jedem Schritte des Beweises, warum gerade dieser Schluß gemacht werden müsse, um zu dem gewünschten Ziele zu gelangen. Auf Grund der analytischen Behandlung läßt sich stets sehr leicht auch der synthetische Beweis herstellen; man braucht dabei nur in der analytischen Entwicklung zurückschreitend die gefundenen Bedingungssätze unter Benützung derjenigen Hilfslinien, welche sich zu der Ableitung des Satzes als wesentlich erwiesen haben, gehörig mit einander zu verbinden, bis man auf den Lehrsatz selbst zurückkommt.

Gerade, hohle, erhabene Winkel.

Fig. 9.

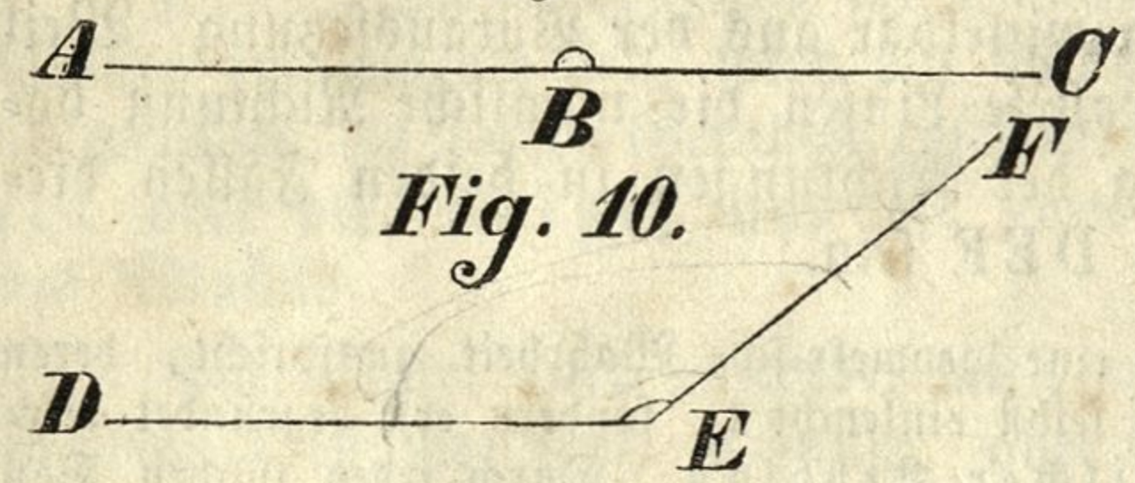
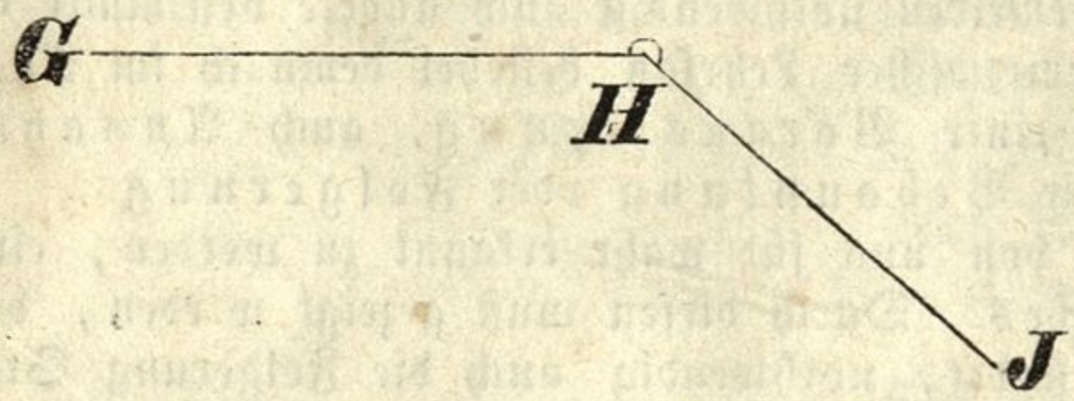


Fig. 10.

Fig. 11.



§. 15. Ein Winkel, dessen beide Schenkel eine entgegengesetzte Richtung haben, so daß sie in einer geraden Linie liegen, heißt ein gerader Winkel. Jeder Winkel, der kleiner als ein gerader ist, wird ein hohler, und jeder Winkel, der größer als ein gerader ist, ein erhabener genannt.

ABC (Fig. 9) ist ein gerader, DEF (Fig. 10) ein hohler, GHJ (Fig. 11) ein erhabener Winkel.

Rechte, spitzige, stumpfe Winkel.

§. 16. Am öftesten kommen in der Geometrie hohle Winkel vor; daher werden dieselben wieder besonders untergetheilt.

Ein Winkel, welcher die Hälfte eines geraden ist, wird ein rechter genannt. Man bezeichnet einen rechten Winkel gewöhnlich mit dem Buchstaben R. Ein Winkel, welcher kleiner ist als ein rechter, heißt ein spitziger, und ein Winkel, welcher größer als ein rechter aber doch kleiner als ein gerader ist, ein stumpfer.

Fig 12.

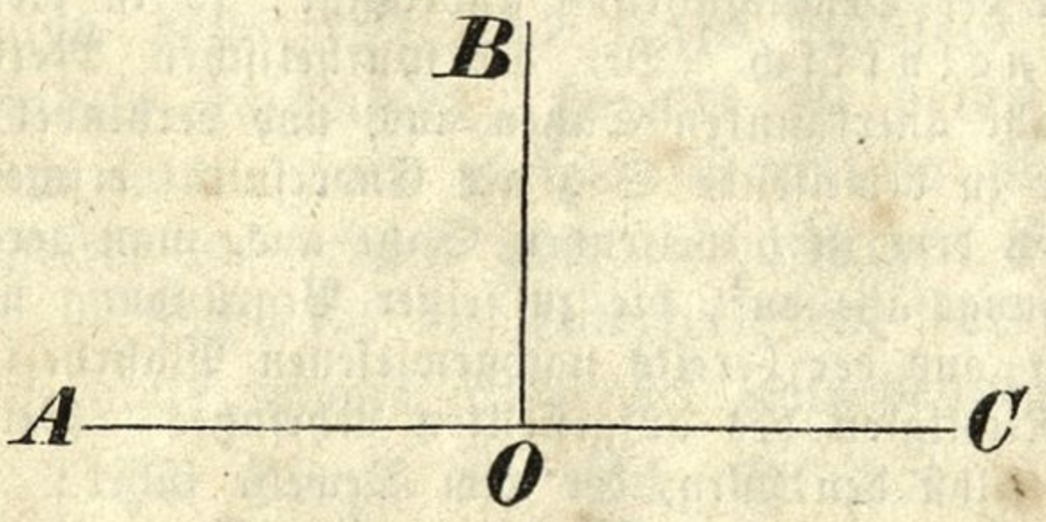
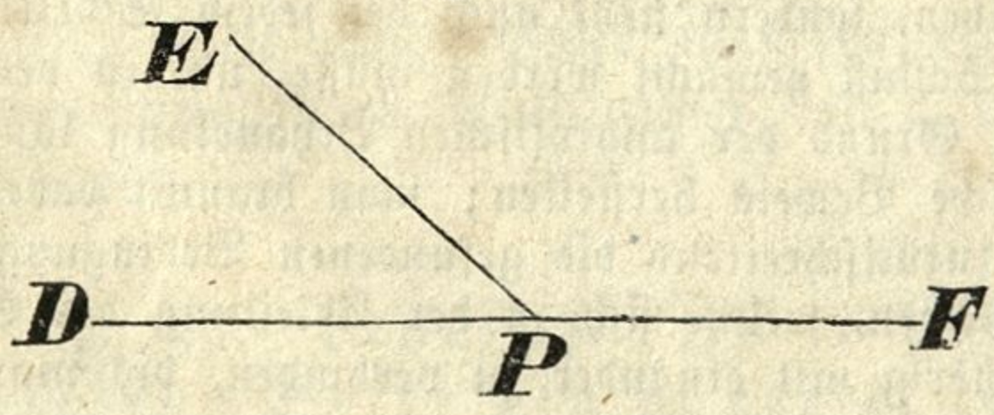


Fig. 13.



Wenn (Fig. 12) der ∠ AOB = BOC ist, so ist jeder die Hälfte des geraden Winkels AOC, also sind AOB und BOC rechte Winkel. DPE (Fig. 13) ist ein spitziger, EPF ein stumpfer Winkel.

Den spitzigen und den stumpfen Winkel pflegt man auch mit dem gemeinschaftlichen Namen schiefe Winkel zu bezeichnen.

Da alle geraden Winkel dieselbe Größe haben, so sind auch ihre Hälften, die rechten Winkel, einander gleich.

Nebenwinkel.

§. 17. Zwei Winkel, welche denselben Scheitel und einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, und deren beide andern Schenkel in einer geraden Linie liegen, heißen Nebenwinkel; z. B. (Fig 14) AOB und BOC, eben so DPE und EPF.

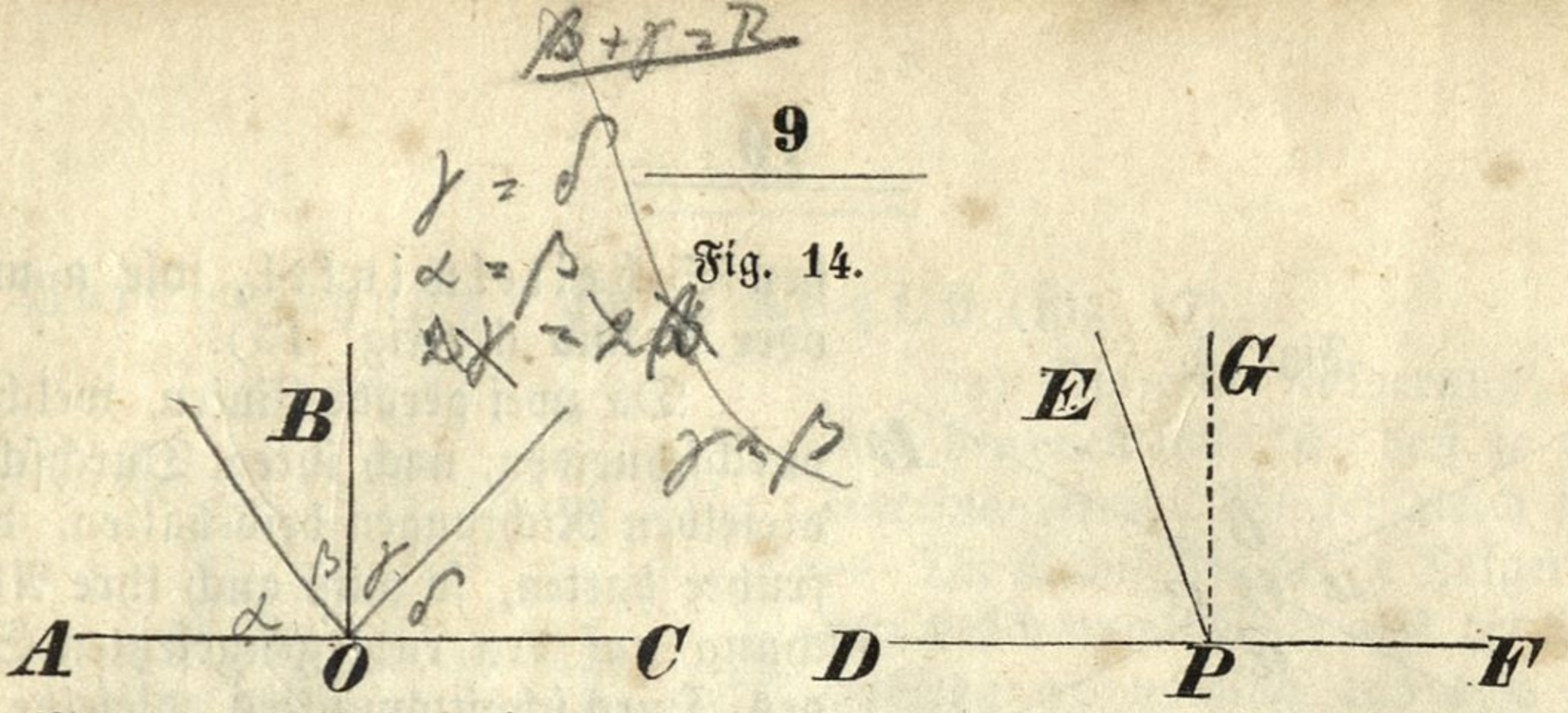


Fig. 14.

Wenn zwei Nebenwinkel gleich sind, so ist jeder von ihnen ein rechter; von zwei ungleichen Nebenwinkeln ist der kleinere spitzig, der größere stumpf.

1. Lehrsatz. Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich zwei Rechten.

Beweis. a) Sind die Nebenwinkel AOB und BOC einander gleich, so ist

$$\begin{aligned} AOB &= R, \\ BOC &= R, \\ \text{daher } AOB + BOC &= 2R. \end{aligned}$$

b) Sind aber die Nebenwinkel ungleich, wie DPE und EPF, so läßt sich dieser Fall auf den früheren zurückführen, indem man sich eine Gerade PG so gezogen denkt, daß zwei gleiche Nebenwinkel DPG und GPF entstehen; es ist dann

$$\begin{aligned} DPE &= DPG - EPG, \\ EPF &= GPF + EPG, \\ \text{also } DPE + EPF &= DPG + GPF = 2R. \end{aligned}$$

§. 18. Man suche noch folgende Sätze zu begründen:

a) Alle Winkel, welche auf derselben Seite einer Geraden um einen Punkt derselben herum liegen, betragen zusammen zwei rechte Winkel.

b) Die Summe aller Winkel, welche um denselben Scheitel rings herum liegen, ist gleich vier Rechten.

c) Die Halbirungslinien zweier Nebenwinkel schließen einen rechten Winkel ein.

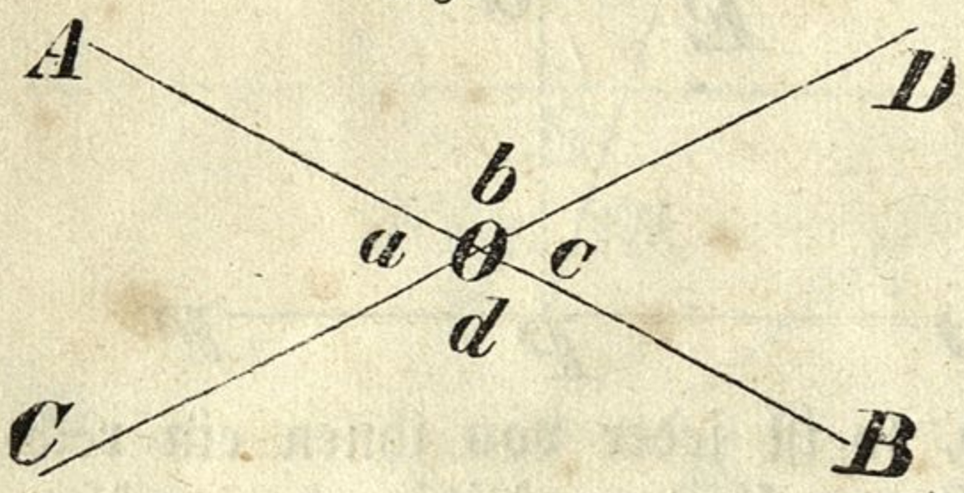
§. 19. Wenn eine Gerade mit einer andern Geraden zwei gleiche Nebenwinkel bildet, so steht sie auf ihr senkrecht, sonst schief. So ist BO senkrecht auf AC, EP schief auf DF. Daß BO auf AC senkrecht steht, wird so angezeigt: BO $\perp$ AC.

Eine Gerade, welche auf einer andern senkrecht steht, bildet mit dieser zwei rechte Winkel; eine Schiefe bildet mit der andern Geraden einen spitzigen und einen stumpfen Winkel.

Scheitelwinkel.

§. 20. Zwei Winkel, welche von denselben zwei geraden Linien auf entgegengesetzten Seiten ihres Durchschnittspunktes gebildet werden, hei-

Fig. 15.



ßen Scheitelwinkel, wie a und c oder b und d (Fig. 15).

Da zwei gerade Linien, welche sich durchschneiden, nach ihrem Durchschnitte dieselben Richtungen beibehalten, die sie früher hatten, so muß auch ihre Abweichung auf den entgegengesetzten Seiten des Durchschnittspunktes dieselbe sein, d. h. Zwei Scheitelwinkel sind einander gleich.

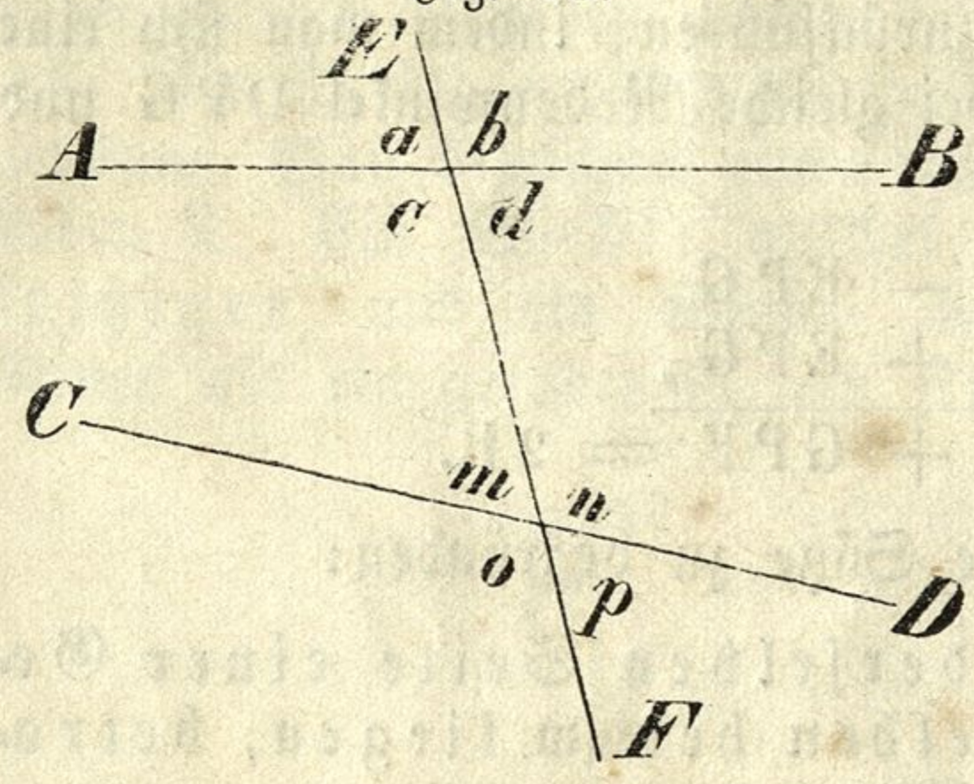
Es ist demnach a = c und b = d.

Wie könnte dieser Lehrsatz mit Hilfe des Satzes in §. 17 bewiesen werden?

Korrespondirende und Wechselwinkel.

§. 21. Wenn zwei Gerade AB und CD (Fig. 16) von einer dritten Geraden EF durchschnitten werden, so entstehen um die beiden Durchschnittspunkte herum acht Winkel. Die Winkel c, d, m, n, welche zwischen den beiden geschnittenen Geraden liegen, heißen innere; die Winkel a, b, o, p dagegen äußere Winkel.

Fig. 16.



Ein äußerer und ein innerer Winkel auf der nämlichen Seite der Durchschnittslinie und an verschiedenen Scheiteln heißen korrespondirende Winkel; wie a und m, b und n, c und o, d und p.

Zwei äußere Winkel oder auch zwei innere Winkel auf den entgegengesetzten Seiten der Durchschnittslinie und an verschiedenen Scheiteln werden Wechselwinkel genannt; wie a und p, b und o, c und n, d und m.

Lehrsätze.

§. 22. Wenn zwei Parallele von einer dritten Geraden durchschnitten werden, so sind

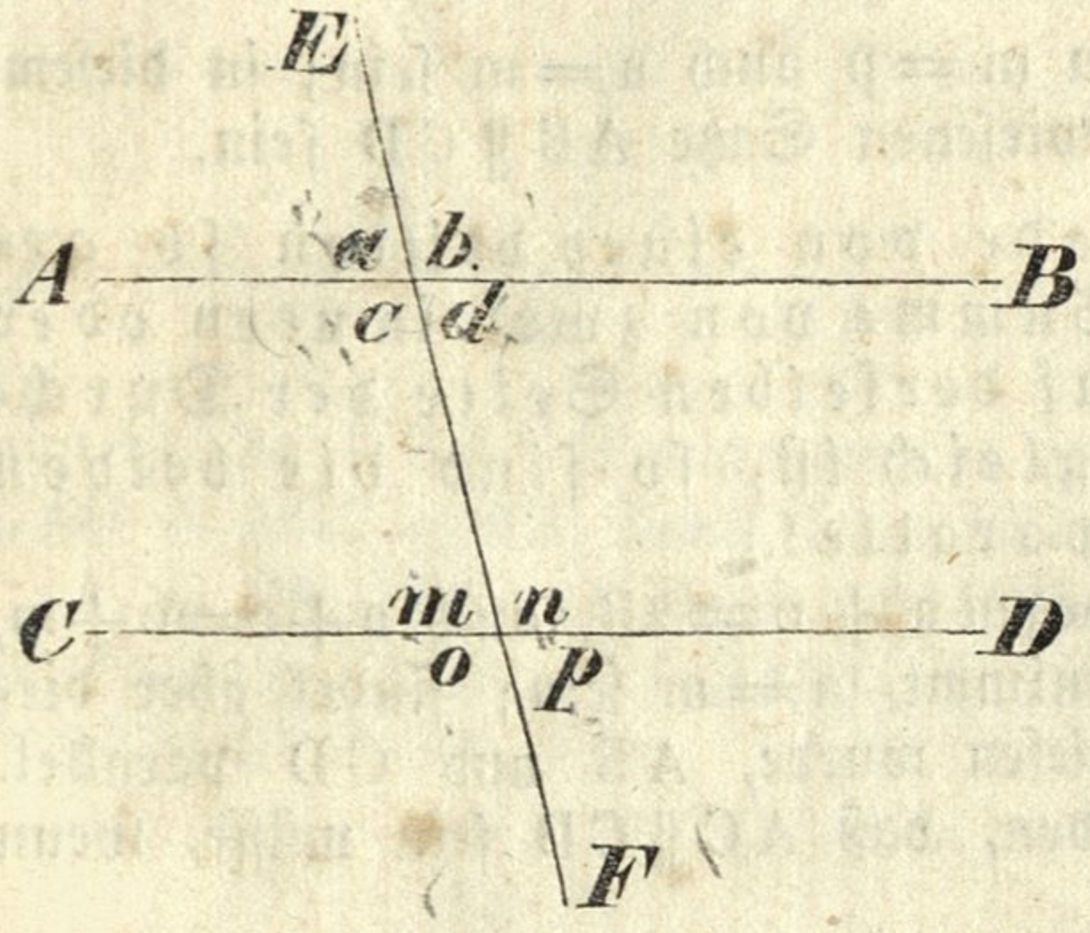
a) je zwei korrespondirende Winkel gleich,

b) je zwei Wechselwinkel gleich,

c) die Summe von je zwei innern oder äußern Winkeln, welche auf derselben Seite der Durchschnittslinie liegen, ist gleich zwei Rechten.

Voraussetzung. Es sei AB ∥ CD (Fig. 17).

Fig. 17.



a) Die erste Folgerung, die man beweisen soll, ist: daß je zwei korrespondirende Winkel gleich sind. — Die Richtigkeit dieser Folgerung ergibt sich unmittelbar aus der Voraussetzung, nämlich aus dem Begriffe der parallelen Linien. Wenn die beiden durchschnittenen Geraden AB und CD parallel sind, so müssen sie dieselbe Richtung haben, folglich müssen sie von der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie EF nach derselben Seite hin gleich stark abweichen; diese Abweichungen aber bilden eben die korrespondirenden Winkel; mithin sind je zwei korrespondirende Winkel gleich, also a = m, b = n, c = o, d = p.

b) Der zweite Theil der Behauptung ist: daß je zwei Wechselwinkel gleich sind. — Untersuchen wir, wie diese Folgerung mit der ersten bereits als richtig erwiesenen zusammenhängt. Die erste Behauptung, die schon bewiesen ist, sagt aus, daß z. B. a = m sei; bei der zweiten Behauptung ist zu zeigen, daß a = p sein müsse. Wenn nun nachgewiesen werden kann, daß m = p ist, so folgt aus der ersten Behauptung von selbst auch die zweite. m und p sind nun Scheitelwinkel, und als solche wirklich einander gleich; wenn daher a = m, so muß auch a = p sein. — Auf dieselbe Art, nämlich mit Berufung auf die bereits für wahr erkannten Sätze von den korrespondirenden und Scheitelwinkeln kann man auch zeigen, daß b = o, c = n, d = m ist.

c) Endlich ist zu beweisen, daß zwei innere und zwei äußere Winkel auf der nämlichen Seite der Durchschnittslinie zusammen zwei Rechte betragen. — Es soll zunächst gezeigt werden, daß c + m = 2R ist; man erinnert sich hier sogleich an den bereits bewiesenen Satz, daß die Summe zweier Nebenwinkel gleich zwei Rechten, daß also c + a = 2R ist; aus dieser Gleichung aber folgt sofort die obige c + m = 2R, sobald man weiß, daß a = m ist; a und m sind nun korrespondirende Winkel, und ihre Gleichheit wurde schon unter a) begründet; somit ist c + m = 2R.

Aus d + b = 2R und b = n folgt eben so d + n = 2R. Auf ähnliche Art kann man zeigen, daß auch a + o = 2R und b + p = 2R ist.

§. 23. Wenn zwei Gerade von einer dritten so geschnitten werden, daß die korrespondirenden Winkel gleich sind, so sind sie parallel.

Es sei z. B. a = m. Daraus folgt, daß die Geraden AB und CD von der Durchschnittslinie EF nach derselben Seite hin gleich stark abweichen, was nur sein kann, wenn AB und CD die nämliche Richtung haben, d. h. wenn sie parallel sind.

§. 24. Wenn zwei Gerade von einer dritten so geschnitten werden, daß die Wechselwinkel gleich sind, so sind sie parallel.

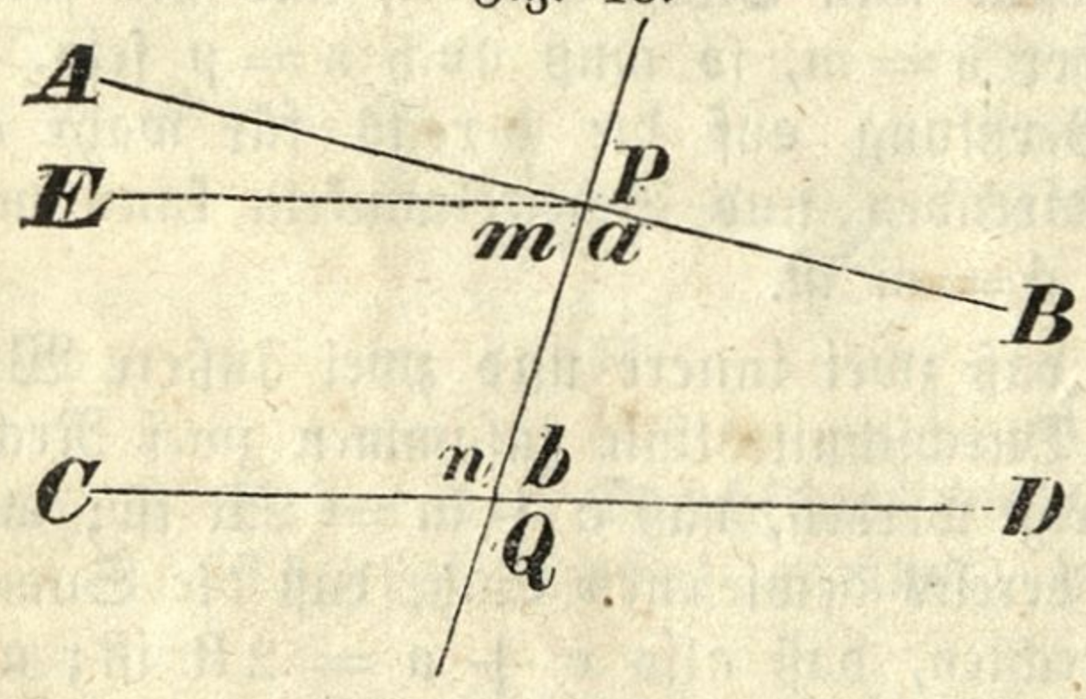
Ist z. B. $a = p$, so muß wegen $m = p$ auch $a = m$ sein; in diesem Falle aber muß nach dem früher erwiesenen Satze $AB \parallel CD$ sein.

§. 25. Wenn zwei Gerade von einer dritten so geschnitten werden, daß die Summe von zwei innern oder von zwei äußern Winkeln auf derselben Seite der Durchschnittslinie zwei Rechten gleich ist, so sind die beiden durchschnittenen Geraden parallel.

Ist z. B. $c + m = 2R$, so muß wegen $a + c = 2R$, auch $a + c = c + m$, oder wenn man beiderseits c hinwegnimmt, $a = m$ sein; findet aber dieses Statt, so sind, wie früher bewiesen wurde, AB und CD parallel. Auf gleiche Weise kann gezeigt werden, daß $AC \parallel CD$ sein müsse, wenn $a + o = 2R$ angenommen wird.

§. 26. Wenn zwei Gerade von einer dritten so geschnitten werden, daß die Summe der innern Winkel auf einer Seite der Durchschnittslinie kleiner ist als zwei Rechte, so sind die beiden durchschnittenen Geraden nicht parallel, sondern sie konvergiren nach derjenigen Seite hin, auf welcher die beiden innern Winkel liegen, deren Summe kleiner ist als zwei Rechte.

Fig. 18.



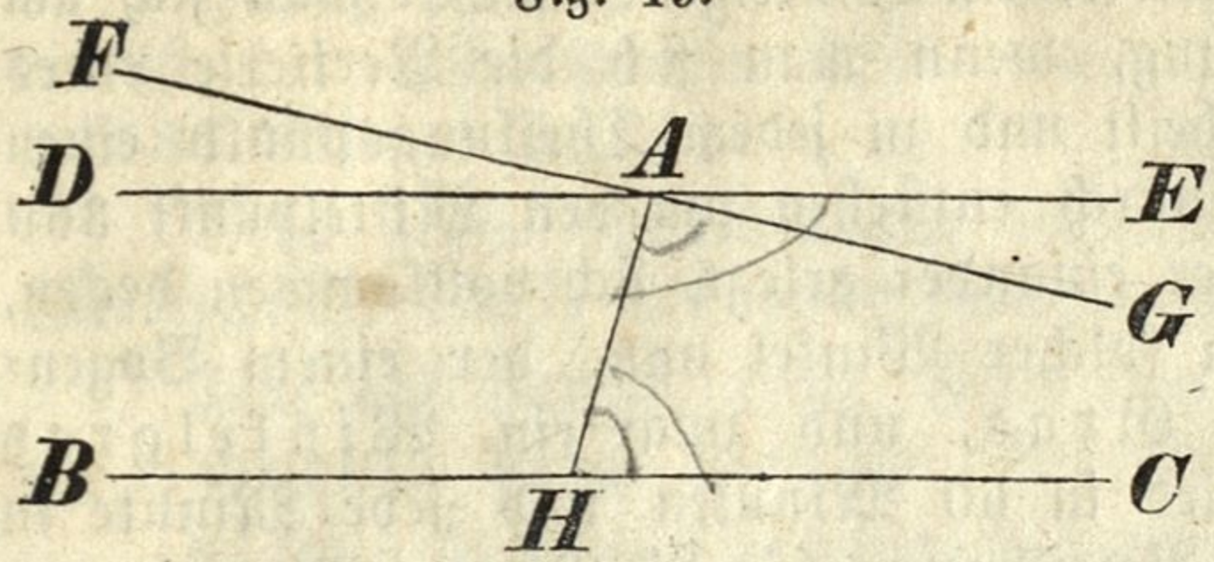
Voraussetzung. $a + b < 2R$ (Fig. 18).

Behauptung. Die Geraden AB und CD müssen nach der rechten Seite hin konvergiren.

Beweis. AB und CD können erstlich nicht parallel sein, weil sonst $a + b = 2R$ sein müßte, was der Voraussetzung widerspricht. Man hat nur noch nachzuweisen, daß AB wirklich nach der Seite B hin mit AC konvergirt. Weil alle innern Winkel a, b, n, APQ zusammengenommen 4R betragen und $a + b < 2R$ ist, so muß $APQ + n > 2R$ sein. Denkt man sich nun von dem Winkel APQ einen solchen Theil APE hinweggenommen, daß dann $m + n = 2R$ wird, so muß $EP \parallel CD$ sein. Die Gerade BA entfernt sich nun nach der Seite A hin von der Geraden EP, daher divergirt sie nach derselben Seite hin auch mit der Geraden CD, welche mit EP parallel ist; somit muß AB mit dieser Geraden CD nach der entgegengesetzten Seite, nämlich in der Verlängerung über B hinaus, konvergiren.

§. 27. Durch einen Punkt kann zu einer Geraden nur eine einzige Parallele gezogen werden.

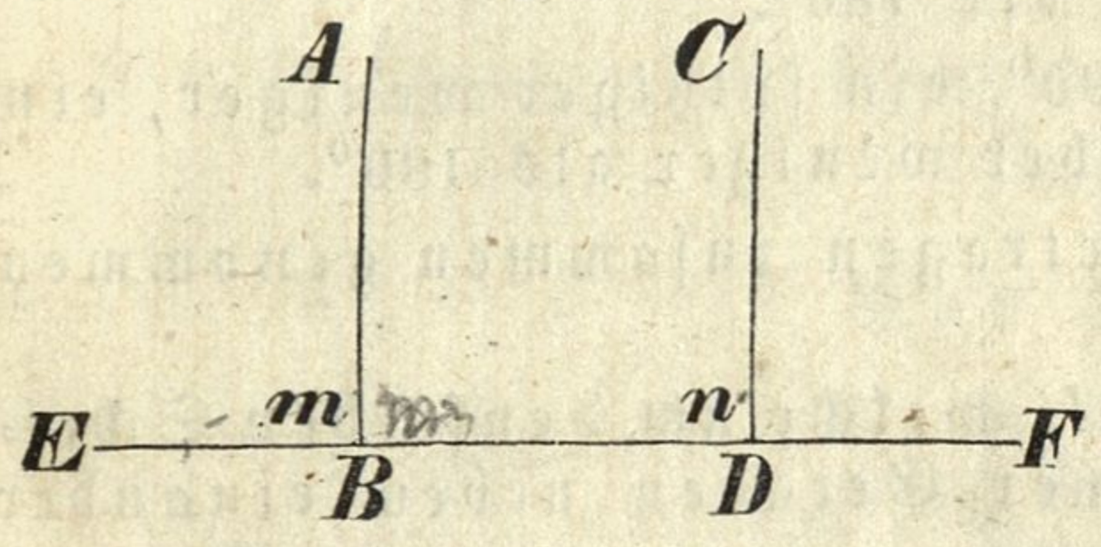
Fig. 19.



Es sei die durch A (Fig. 19) gezogene Gerade DE ∥ BC, so kann keine andere durch A gezogene Gerade, z. B. die FG mit BC parallel sein. — Man ziehe von dem Punkte A zu der BC eine beliebige Gerade AH, so ist GAH < EAH, daher auch GAH + AHC < EAH + AHC; nun ist, da DE ∥ BC angenommen wurde, EAH + AHC = 2R; folglich GAH + AHC < 2R, somit kann EG mit BC nicht parallel sein.

§. 28. Wenn von zwei Parallelen die eine auf einer Geraden senkrecht steht, so muß auch die andere darauf senkrecht sein.

Fig. 20.

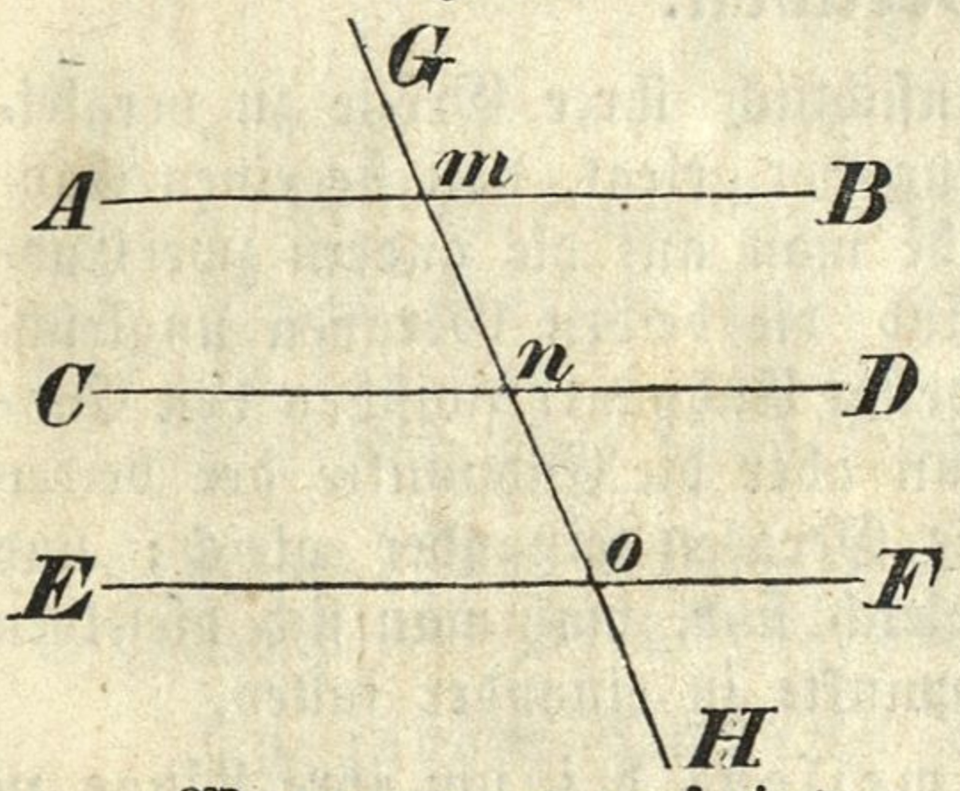


Es sei (Fig. 20) AB ∥ CD und AB ⊥ EF; so muß auch CD ⊥ EF sein. Wegen AB ∥ CD ist m = n, wegen AB ⊥ EF ist m = R; daher muß auch n = R, oder CD ⊥ EF sein.

§. 29. Wenn zwei Gerade auf derselben dritten senkrecht stehen, so sind sie parallel.

Es sei AB ⊥ EF und CD ⊥ EF, so muß AB ∥ CD sein. — Weil AB ⊥ EF, so ist m = R, und wegen CD ⊥ EF auch n = R, daher m = n, und folglich AB ∥ CD.

Fig. 21.



§. 30. Wenn zwei Gerade mit einer dritten parallel sind, so sind sie auch unter einander parallel.

Es sei (Fig. 21) AB ∥ EF und CD ∥ EF, so muß auch AB ∥ CD sein. — Weil AB ∥ EF, so ist m = o, und weil CD ∥ EF, so ist auch n = o daher m = n, und folglich AB ∥ CD.

Man beweise hier noch folgenden Lehrsatz:

Wenn man auf jeden Schenkel eines hohlen Winkels eine Senkrechte errichtet, so müssen sich diese in einem Punkte schneiden. (§. 26.)

Messen der Winkel.

§. 31. Um die Winkel zu messen, nimmt man irgend einen bekannten Winkel als Maß an und untersucht, wie oft dieser als Einheit angenommene Winkel in dem gegebenen enthalten ist. Als Einheit des Winkelmaßes wird der neunzigste Theil eines rechten Winkels, welchen man

Grad nennt, angenommen. Von einem Winkelgrade macht man sich am leichtesten eine richtige Vorstellung, wenn man sich die Periferie eines Kreises in ihre 360 Grade getheilt und zu jedem Theilungspunkte einen Halbmesser gezogen denkt. Dadurch entstehen um den Mittelpunkt 360 kleine Winkel, welche, da sie über einander gelegt, sich vollkommen decken, unter einander gleich sind. Ein solcher Winkel nun, der einem Bogengrade entspricht, wird auch ein Grad, und zwar ein Winkelgrad genannt. Jeder Winkelgrad wird in 60 Minuten und jede Minute in 60 Sekunden eingetheilt. Die Bezeichnung für die Grade, Minuten und Sekunden ist bei den Winkeln dieselbe, wie bei den Bögen.

Zum Messen und Verzeichnen der Winkel bedient man sich, wenn keine große Genauigkeit erfordert wird, des Transporteurs.

§. 32. Aus dem Begriffe eines Winkelgrades ergeben sich folgende Sätze:

a) Ein gerader Winkel enthält 180°, ein hohler weniger, ein erhabener mehr als 180°.

b) Ein rechter Winkel hat 90°, ein spitziger weniger, ein stumpfer mehr als 90°, aber weniger als 180°.

c) Je zwei Nebenwinkel betragen zusammen genommen 180°.

d) Die Summe aller Winkel, welche um denselben Scheitel auf einer Seite einer Geraden neben einander liegen, ist gleich 180°.

e) Die Summe aller Winkel, welche um einen Punkt rings herum neben einander liegen, beträgt 360°.

Größe der Geraden.

§ 33. Um zwei gerade Linien hinsichtlich ihrer Größe zu vergleichen, denke man sich dieselben so über einander gelegt, daß sie einen Endpunkt gemeinschaftlich haben. Sodann sehe man auf die andern zwei Endpunkte; fallen sie nicht zusammen, so sind die beiden Geraden ungleich, und zwar ist diejenige kleiner, deren zweiter Endpunkt zwischen den Endpunkten der andern Geraden liegt. Wenn aber die Endpunkte der beiden Geraden zusammen fallen, so sind diese Geraden einander gleich; und umgekehrt: wenn zwei Gerade einander gleich sind, muß man sich dieselben auch so vorstellen können, daß ihre Endpunkte in einander fallen.

§. 34. Um die geraden Linien zu messen, d. i. um ihre Länge zu bestimmen, nimmt man irgend eine bekannte Gerade als Maß an und untersucht, wie oft diese als Einheit angenommene Linie in der gegebenen Geraden enthalten ist.

Als Einheit des Linienmaßes nimmt man einen Fuß oder Schuh an und theilt denselben, um auch kleinere Linien messen zu können, in 12 Zoll und einen Zoll in 12 Linien. 6 Fuß nennt man eine Klafter. Die Klafter, Fuß, Zoll, Linien werden folgenderweise durch die Zeichen °, ', '', ''' ausgedrückt.

Häufig werden die Längen auch nach Meter bestimmt. Ein Meter ist der 10000000ste Theil eines Meridianquadranten; er enthält 3·1635 Wiener Fuß.

Sehr große Entfernungen werden nach Meilen gemessen. Eine österreichische Meile hat 4000 Wiener Klafter.

Eine auf Papier, Holz, Glas oder Metall aufgetragene und gehörig eingetheilte Länge wird ein Maßstab genannt.

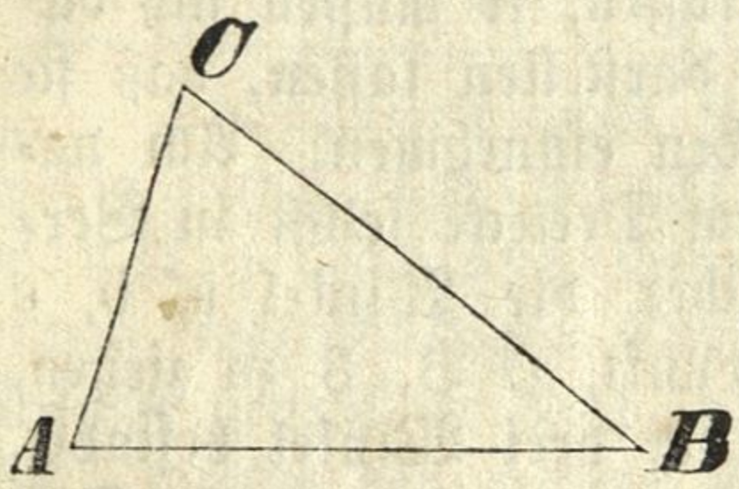
§. 35. Um eine gegebene Gerade wirklich auszumessen, trägt man auf ihr, je nachdem sie größer oder kleiner ist, eine Klafter, einen Fuß, oder einen Zoll so oftmal auf, als es möglich ist. Bleibt nach dem Auftragen kein Rest, so gibt die Zahl, wie oft die Einheit in der Geraden enthalten ist, die Länge jener Geraden, und zwar in der Benennung der aufgetragenen Einheit. Bleibt ein Rest, so trägt man auf demselben die nächst niedrigere Einheit auf.

II. Erklärungen und besondere Eigenschaften der geradlinigen Figuren.

I. Das Dreieck.

§. 36. Eine von drei geraden Linien begrenzte Figur wird ein Dreieck genannt.

Fig. 22.



Bei jedem Dreiecke hat man auf sechs Stücke Rücksicht zu nehmen, auf drei Seiten und auf drei Winkel. Jede Seite, z. B. AB (Fig. 22) hat zwei anliegende Winkel A und B und einen gegenüber liegenden C; jeder Winkel, z. B. A, wird von zwei Seiten AB und AC eingeschlossen, die dritte BC liegt ihm gegenüber.

§. 37. Von den Seiten eines Dreieckes gilt der Satz:

Zwei Seiten zusammen genommen sind immer größer als die dritte.

Die Richtigkeit dieses Satzes ist von selbst einleuchtend.

§. 38. Aus $AC + BC > AB$ folgt, wenn man beiderseits BC wegnimmt, $AC > AB - BC$; d. h.:

In jedem Dreiecke ist eine Seite größer, als der Unterschied der beiden andern Seiten.

§. 39. In Hinsicht der Seiten werden die Dreiecke in ungleichseitige, gleichschenklige und gleichseitige eingetheilt.

Ein Dreieck, worin jede Seite von jeder andern Seite verschieden ist, heißt ungleichseitig (Fig. 23); sind in einem Dreiecke zwei Seiten gleich, so heißt es gleichschenklig (Fig. 24); sind alle drei Seiten gleich, so wird das Dreieck gleichseitig genannt (Fig. 25).

Fig. 23.

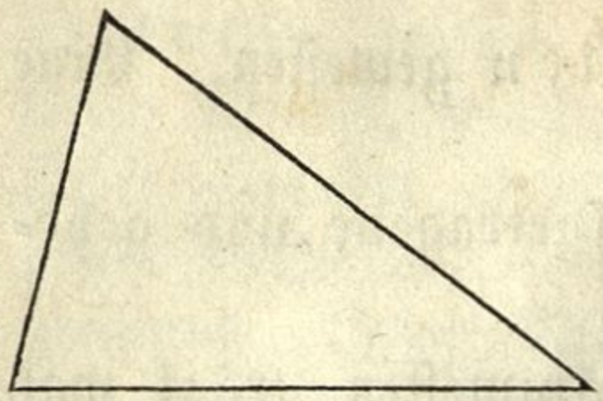


Fig. 24.

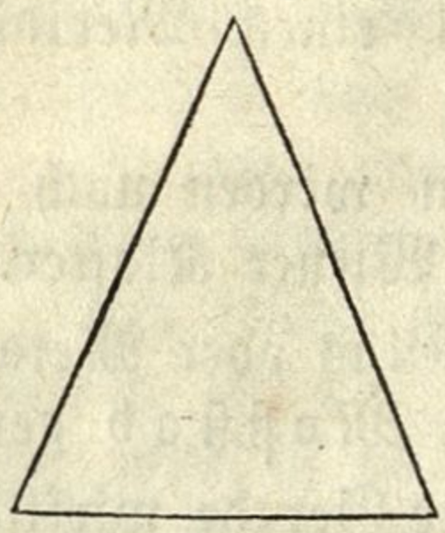
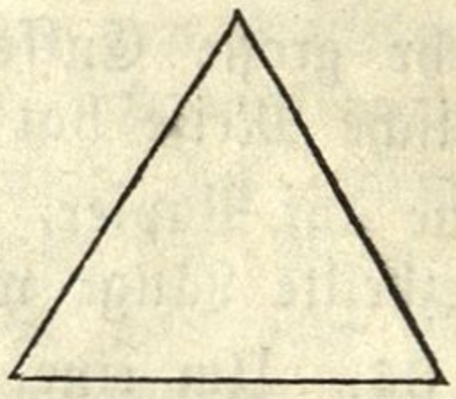


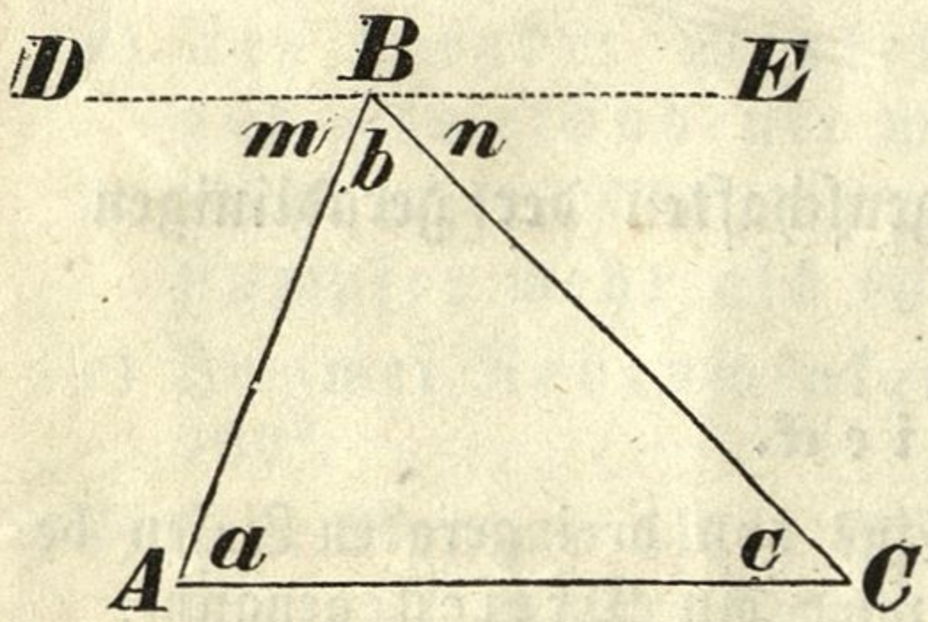
Fig. 25.



§. 40. In Hinsicht der Winkel eines Dreieckes läßt sich folgender Satz erweisen:

Die Summe aller Winkel eines Dreieckes ist gleich zwei Rechten.

Fig. 26.



Wir wollen hier zunächst die Analysis geben, durch welche man auf den ganz einfachen Beweis dieses wichtigen Satzes hingeführt wird. Aus dem §. 18, a) ist bekannt, daß die Summe aller Winkel, welche auf derselben Seite einer Geraden um einen Punkt derselben herum liegen, zwei Rechte beträgt. Soll nun auch die Summe der drei Winkel eines beliebigen Dreieckes ABC (Fig. 26) zwei Rechte betragen, so müssen sich dieselben um einen Punkt einer Geraden herum so darstellen lassen, daß sie den ganzen Raum auf einer Seite jener Geraden einnehmen. Am natürlichsten erscheint es, diese Konstrukzion mit dem Dreiecke selbst in Verbindung zu bringen, und die Gerade, an welcher die Winkel a, b, c dargestellt werden sollen, durch einen Dreieckspunkt, z. B. B zu ziehen, weil sich in demselben bereits der Scheitel eines der drei Winkel befindet. Es sei also DE diese Gerade, wo dann $m + b + n = 2R$ ist. Soll auch $a + b + c = 2R$ sein, so muß DE eine solche Lage erhalten können, daß m und n den Winkeln a und c, mit denen sie Wechselwinkel sind, gleich seien; dieß ist nun wirklich möglich, da man nur DE mit AC parallel annehmen darf, damit jener Bedingung entsprochen werde. Hiedurch ist die Richtigkeit des aufgestellten Lehrsatzes nachgewiesen. Der synthetische Beweis, der sich auf die vorangehende analytische Betrachtung gründet, würde sich so gestalten:

Man denke sich durch B die Gerade $DE \parallel AC$ gezogen, so ist

$a = m$ als Wechselwinkel,
$b = b$,
$c = n$ als Wechselwinkel;

daher $a + b + c = m + b + n$;
nun ist $m + b + n = 2R$,
folglich muß auch $a + b + c = 2R$ sein.

Ließen sich die drei Winkel a, b, c nicht auch um den Scheitel C an der verlängerten Dreiecksseite AC darstellen, und wie wäre dann der Beweis zu führen?

§. 41. Aus dem eben erwiesenen Lehrsatze ergeben sich sehr wichtige Folgerungen:

a) Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel bekannt sind, so findet man den dritten, wenn man die beiden gegebenen Winkel addirt und ihre Summe von zwei Rechten oder von 180^0 abzieht.

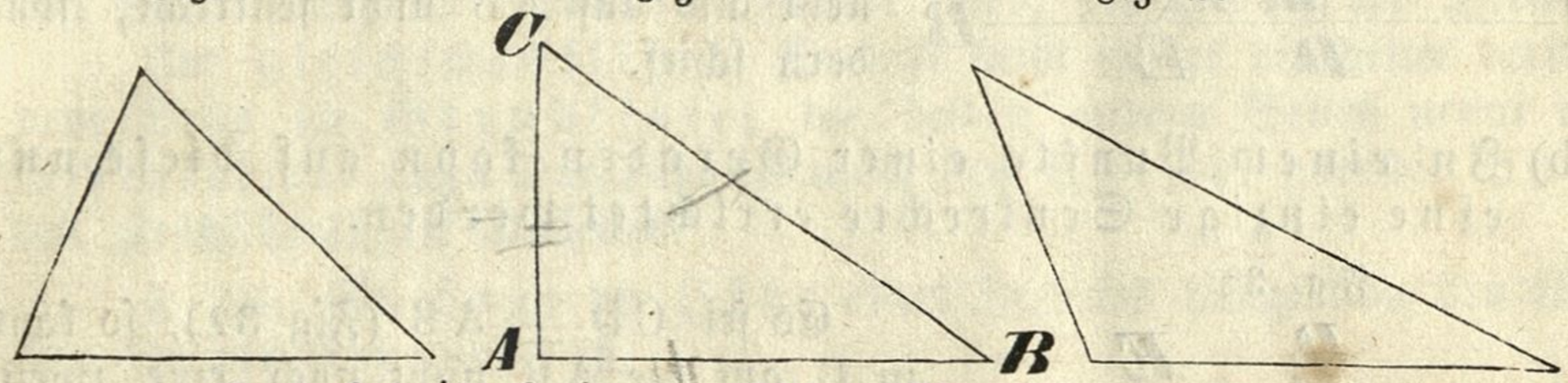
b) Wenn zwei Winkel eines Dreieckes zwei Winkeln eines andern Dreieckes gleich sind, so müssen auch die dritten Winkel in beiden Dreiecken gleich sein.

c) Ist ein Winkel eines Dreieckes so groß als die beiden andern zusammengenommen, so ist er ein rechter.

d) Die Summe zweier Winkel eines Dreieckes ist immer kleiner als zwei Rechte; in einem Dreiecke kann daher nur ein rechter, so wie auch nur ein stumpfer Winkel vorkommen; zwei Winkel müssen immer spitzig sein.

§. 42. Mit Rücksicht auf die Winkel werden die Dreiecke in spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige eingetheilt.

Fig. 27. Fig. 28. Fig 29.

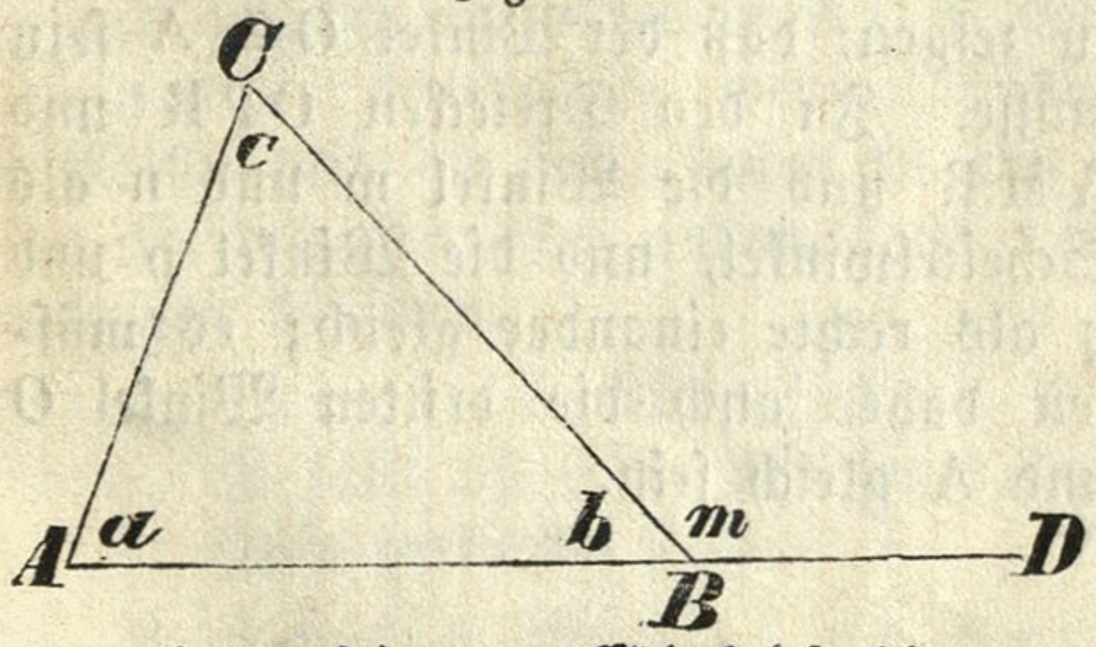


Ein Dreieck heißt spitzwinklig (Fig. 27), wenn alle drei Winkel spitzig sind; rechtwinklig (Fig. 28), wenn darin ein rechter, stumpfwinklig (Fig. 29), wenn darin ein stumpfer Winkel vorkommt. — In einem rechtwinkligen Dreiecke heißt die Seite BC, welche dem rechten Winkel gegenüber liegt, die Hypotenuse; die beiden Seiten AB und AC, welche den rechten Winkel einschließen, werden die Katheten genannt. Das spitz- und stumpfwinklige Dreieck bezeichnet man mit dem gemeinschaftlichen Namen schiefwinklige Dreiecke.

§. 43. Wenn man in einem Dreiecke eine Seite verlängert, so heißt der Winkel, welcher von dieser Verlängerung mit einer Seite gebildet wird, ein äußerer Winkel des Dreieckes.

So ist CBD (Fig. 30) ein äußerer Winkel des Dreieckes ABC.

Fig. 30.



Jeder äußere Winkel eines Dreieckes ist gleich der Summe der beiden innern entgegengesetzten Winkel.

Denn es ist erstlich, weil m und b Nebenwinkel sind, $m + b = 2R$; ferner $a + b + c = 2R$; daher auch $m + b = a + b + c$, oder wenn man beiderseits den Winkel b hinwegnimmt, $m = a + c$.

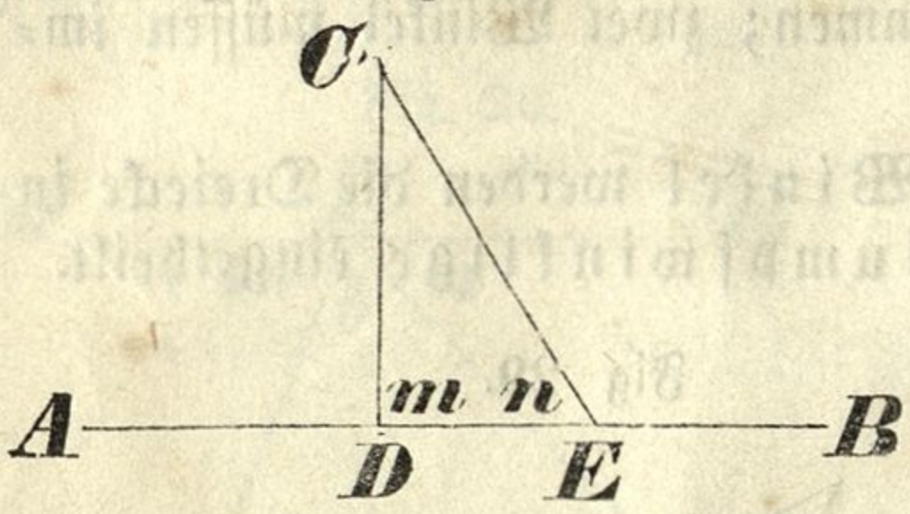
Wenn man jede Seite eines Dreieckes über den einen Scheitel hinaus verlängert, so ist die Summe der dadurch gebildeten äußeren Winkel gleich vier Rechten.

Der Beweis wird dem Fleiße des Anfängers überlassen.

§. 44. Aus dem Vorhergehenden lassen sich nun auch folgende Sätze beweisen.

a) Von einem Punkte außerhalb einer geraden Linie kann auf diese nur eine einzige Senkrechte herabgelassen werden.

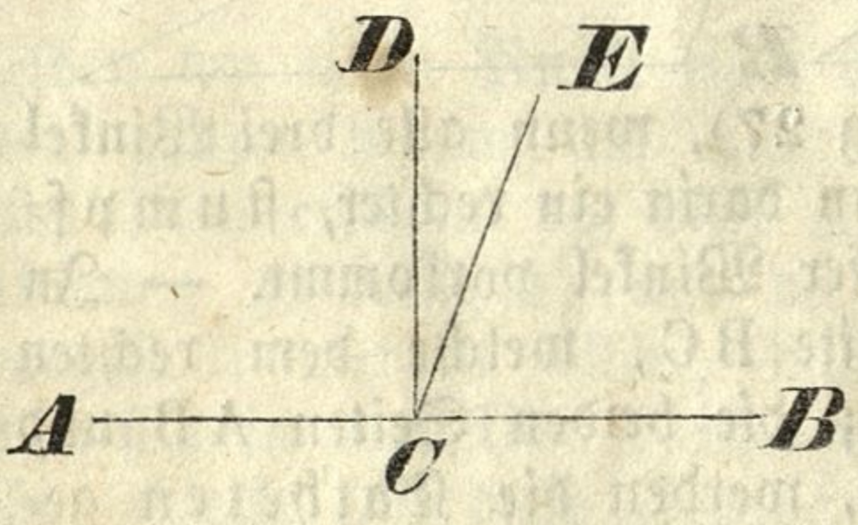
Fig. 31.



Es sei CD ⊥ AB (Fig. 31), so kann aus C auf die AB keine zweite Linie, z. B. CE, senkrecht geführt werden. Denn im Dreiecke CDE ist der Winkel m nach der Voraussetzung ein rechter, somit n ein spitziger; die CE steht also auf AB nicht senkrecht, sondern schief.

b) In einem Punkte einer Geraden kann auf diese nur eine einzige Senkrechte errichtet werden.

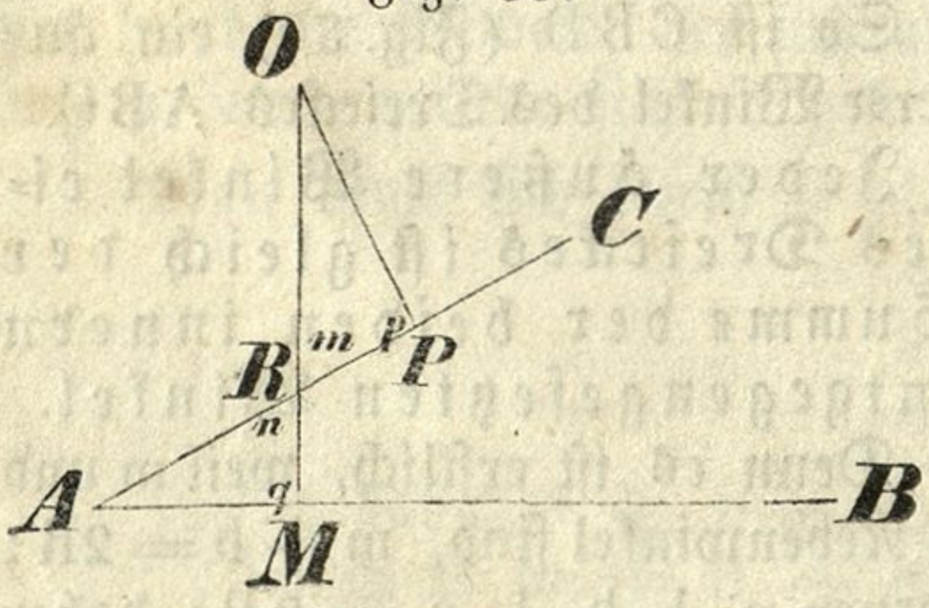
Fig. 32.



Es sei CD ⊥ AB (Fig 32), so kann in C auf die AB nicht noch eine zweite Linie, z. B. CE, senkrecht errichtet werden. Denn der Winkel BCD ist nach der Annahme ein rechter, folglich muß ECB ein spitziger Winkel sein. CE steht also nicht senkrecht auf AB.

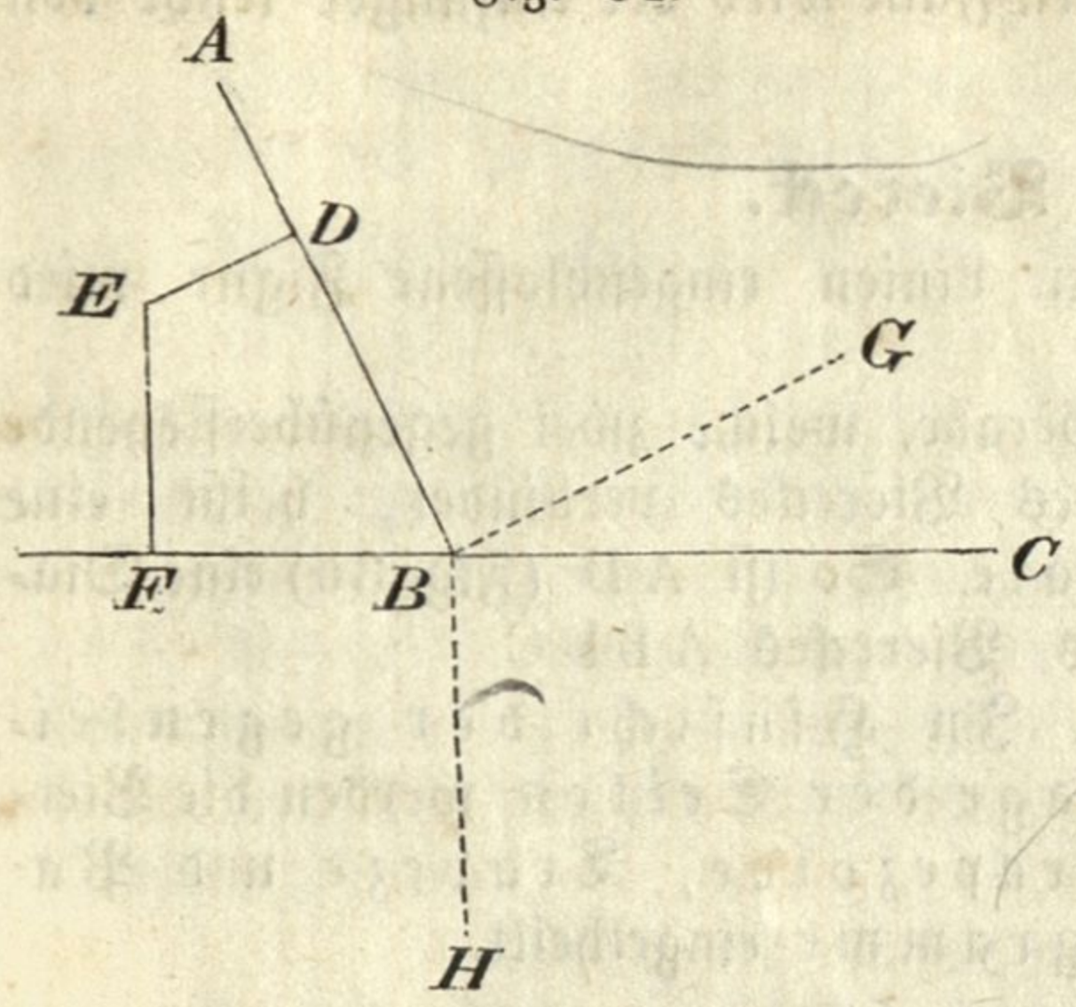
c) Zwei spitzige oder zwei stumpfe Winkel, deren Schenkel auf einander wechselseitig senkrecht stehen, sind einander gleich.

Fig. 33.



Es sei erstlich der spitzige Winkel BAC (Fig. 33) gegeben; man ziehe OM ⊥ AB und OP ⊥ AC; so ist zu zeigen, daß der Winkel O = A sein müsse. In den Dreiecken OPR und AMR sind die Winkel m und n als Scheitelwinkel, und die Winkel p und q als rechte einander gleich; es müssen daher auch die dritten Winkel O und A gleich sein.

Fig. 34.



Konstruiren wir [illegible] stumpfen Winkel ABC (Fig. 34), so ziehen ED ⊥ AB und EF ⊥ BC. Um die beiden Winkel DEF und ABC mit einander vergleichen zu können, denken wir uns durch B die BG ∥ ED und BH ∥ EF gezogen, so ist ∠ GBH = DEF.

Es ist nun

CBH = ABG = R,

daher auch

CBH + CBG = ABG + CBG,

oder GBH = ABC,

folglich auch

DEF = ABC.

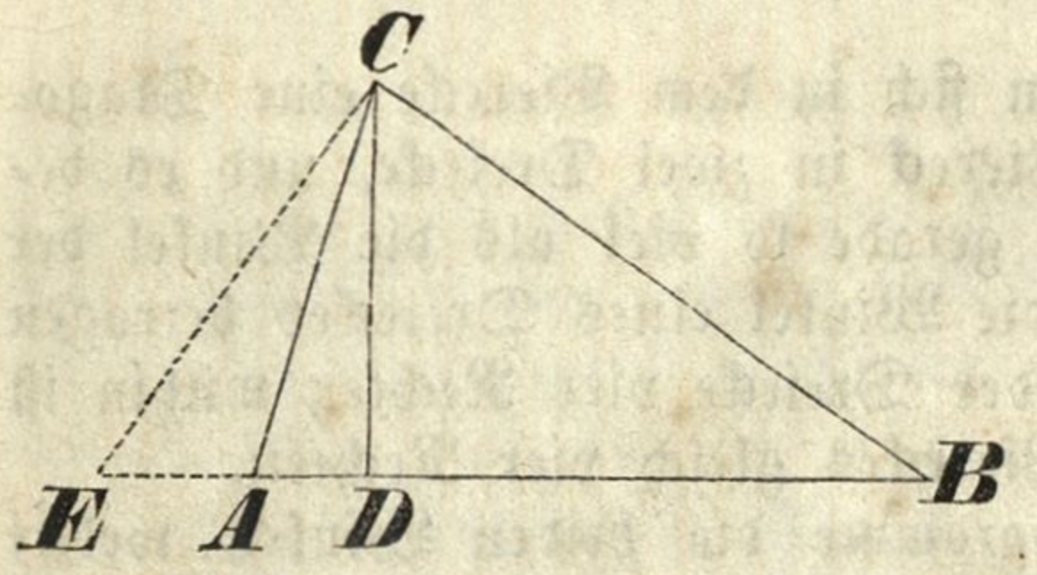
§. 45. Wenn man irgend eine Seite eines Dreieckes als Grundlinie annimmt, so heißt die Senkrechte, welche von dem gegenüberliegenden Scheitel auf die Grundlinie gefällt wird, die Höhe des Dreieckes.

Im gleichschenkligen Dreiecke heißt immer die dritte verschiedene Seite die Grundlinie; die beiden andern Seiten nennt man Schenkel und ihren Durchschnittspunkt den Scheitel oder die Spitze des gleichschenkligen Dreieckes.

§. 46. Die Lage der Höhe eines Dreieckes hängt von den Winkeln an der Grundlinie ab.

1. Sind beide Winkel an der Grundlinie spitzig, so muß die Höhe innerhalb des Dreieckes fallen.

Fig. 35.



Sind im Dreiecke ABC (Fig. 35) die Winkel A und B spitzig, so stehen AC und BC auf AB schief auf, und es kann also die Höhe erstlich nicht in eine der Seiten CA oder CB fallen; die Höhe kann ferner auch nicht außerhalb des Dreieckes, z. B. nach CE hinfallen, weil der Winkel CAB nach der Voraussetzung spitzig, daher sein Nebenwinkel CAE stumpf, und folglich im Dreiecke ACE der Winkel AEC spitzig ist, da er doch ein rechter sein müßte, wenn CE die Höhe des Dreieckes ABC sein sollte. Wenn nun die Höhe weder in eine der Seiten AC oder BC, noch außerhalb des Dreieckes fallen kann, so muß sie innerhalb des Dreieckes zu liegen kommen.

2. Wenn ein Winkel an der Grundlinie ein rechter ist, so fällt die Höhe mit jener Kathete zusammen, welche auf der Grundlinie senkrecht steht.

3. Ist ein Winkel an der Grundlinie ein stumpfer, so muß die Höhe außerhalb des Dreieckes, und zwar auf der Seite des stumpfen Winkels hinausfallen.

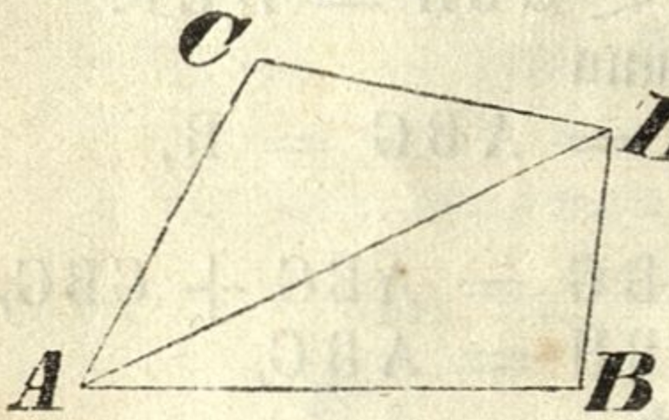
Die Beweise für die zwei letztern Fälle wird der Anfänger leicht von *selbst* auffinden.

2. Das Viereck.

§. 47. Eine von vier geraden Linien eingeschlossene Figur wird ein Viereck genannt.

Die Gerade, welche zwei gegenüberstehende Punkte des Viereckes verbindet, heißt eine Diagonale. So ist AD (Fig. 36) eine Diagonale des Viereckes ABDC.

Fig. 36.



§. 48. In Hinsicht der gegenseitigen Lage der Seiten werden die Vierecke in Trapezoide, Trapeze und Parallelogramme eingetheilt.

Fig. 37.

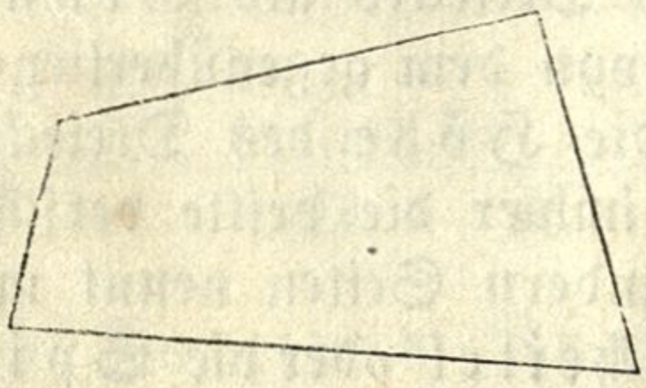


Fig. 38.

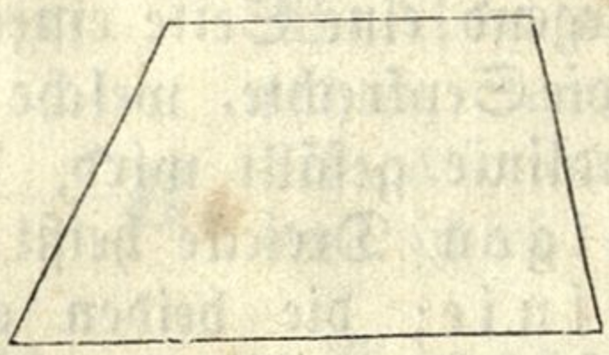
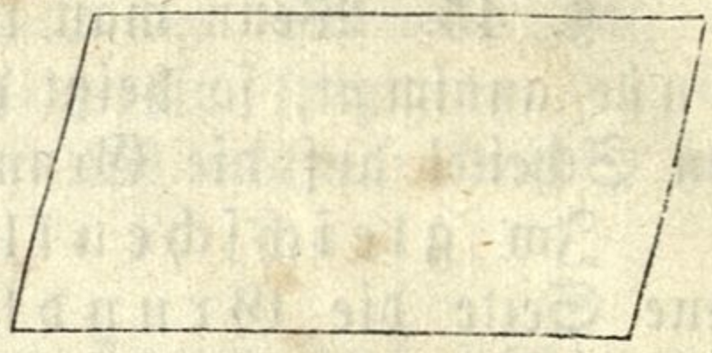


Fig. 39.



Ein Trapezoid ist ein Viereck, worin keine Seite mit einer andern parallel ist, wie (Fig. 37). Ein Trapez (Fig. 38) ist ein Viereck, in welchem nur zwei gegenüberstehende Seiten parallel, die andern zwei Seiten aber nicht parallel sind. Ein Parallelogramm (Fig. 39) ist ein Viereck, worin je zwei gegenüberstehende Seiten parallel sind.

§ 49. In Hinsicht der Winkel eines Viereckes gilt der Satz:

Die Summe aller Winkel eines Vierreckes ist gleich vier Rechten.

Um dieses einzusehen, denke man sich in dem Vierecke eine Diagonale gezogen; dadurch zerfällt das Viereck in zwei Dreiecke, und es betragen die vier Winkel des Viereckes gerade so viel als die Winkel der beiden Dreiecke zusammengenommen; die Winkel eines Dreieckes betragen nun zwei Rechte, also die Winkel beider Dreiecke vier Rechte; mithin ist auch die Summe aller Winkel des Viereckes gleich vier Rechten.

§. 50. Da in jedem Parallelogramme die beiden Winkel, welche an einer Seite liegen, als innere Winkel zwischen zwei geschnittenen Parallelen zusammengenommen zwei Rechten gleich sind, so folgt:

a) Wenn in einem Parallelogramme ein Winkel ein rechter ist, so müssen auch die andern Winkel recht sein.

b) Ist ein Winkel des Parallelogramms ein schiefer, so sind es auch die andern, und zwar sind je zwei gegenüberliegende Winkel gleich.

Man unterscheidet daher rechtwinklige und schiefwinklige Parallelogramme.

3. Das Vieleck.

§. 51. Jede von mehreren geraden Linien eingeschlossene Figur wird ein Vieleck oder ein Polygon genannt.

Eine Gerade, welche zwei nicht unmittelbar auf einander folgende Eckpunkte des Polygons verbindet, heißt eine Diagonale.

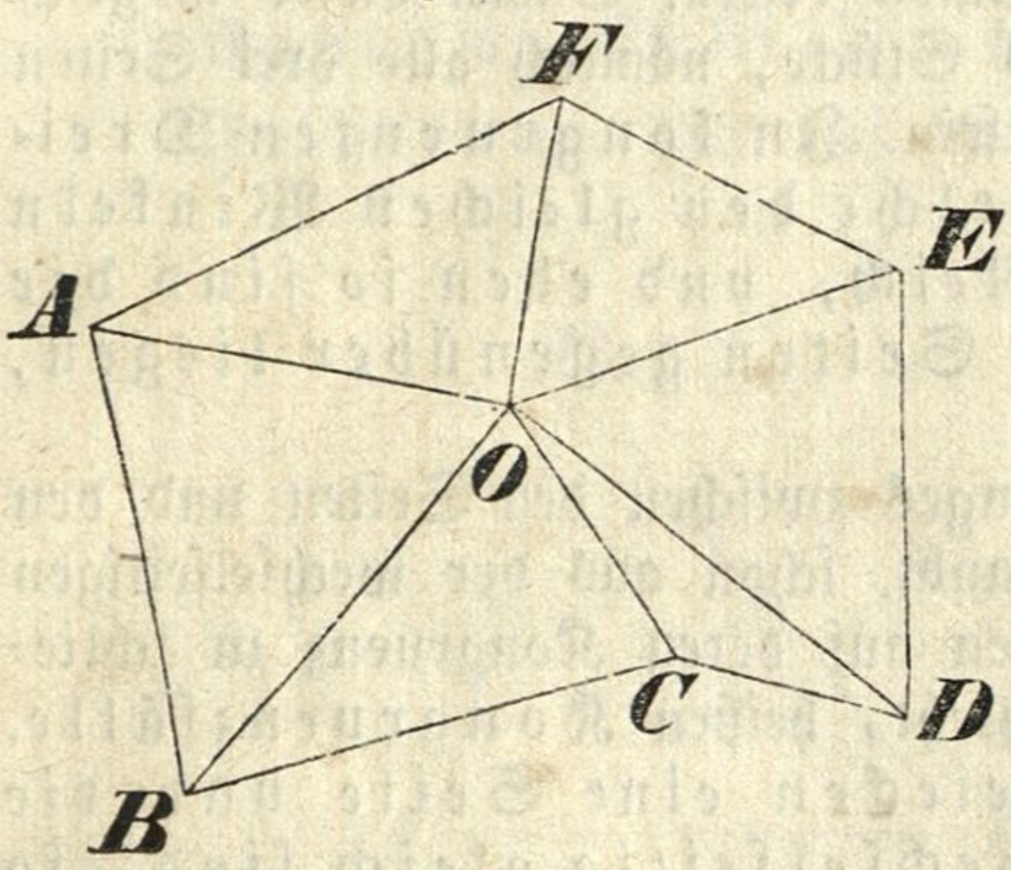
Wie viele Diagonalen sind in einem nseitigen Vielecke möglich?

Mit Rücksicht auf die Anzahl der Seiten werden die Vielecke in dreiseitige oder Dreiecke, vierseitige oder Vierecke, fünfseitige oder Fünfecke, u. s. w. eingetheilt.

Hinsichtlich der wechselseitigen Größe der Seiten und Winkel unterscheidet man regelmäßige oder reguläre, und unregelmäßige oder irreguläre Polygone. Ein Vieleck, worin alle Seiten und alle Winkel gleich sind, heißt regulär; jedes andere Vieleck ist irregulär.

§. 52. Die Summe aller Winkel eines Vieleckes ist gleich so vielmal zwei Rechten, als das Polygon Seiten hat, weniger vier Rechten.

Fig. 40.



Um die Richtigkeit dieses Satzes einzusehen, nehme man innerhalb des Vieleckes irgend einen Punkt O (Fig. 40) an, und verbinde denselben mit allen Eckpunkten des Polygons durch gerade Linien. Dadurch zerfällt das Polygon in so viele Dreiecke, als es Seiten hat; und es ist die Summe aller Winkel des Polygons gleich den Winkeln aller dieser Dreiecke, weniger den Winkeln, welche um den Punkt O herumliegen. Die Summe der Winkel in allen Dreiecken beträgt so vielmal zwei Rechte, als das Polygon Seiten hat; die Summe der Winkel um den Punkt O herum beträgt vier Rechte. Die Summe aller Winkel des Polygons ist also gleich so vielmal zwei Rechten, als das Polygon Seiten hat, weniger vier Rechten.

Die Summe aller Winkel

eines Fünfeckes ist gleich $5 \times 2R - 4R = 6R = 540^{\circ}$,
" Sechseckes " " $6 \times 2R - 4R = 8R = 720^{\circ}$,
" Siebeneckes " " $7 \times 2R - 4R = 10R = 900^{\circ}$.

Man suche den Beweis des voranstehenden Satzes mittelst Zerlegung des Vieleckes in Dreiecke, welche durch das Ziehen von Diagonalen entstehen, zu führen.

Wie groß ist die Summe aller äußeren Winkel eines Vieleckes, dessen innere Winkel alle hohl sind?

§. 53. Da in einem regulären Vielecke alle innern Winkel gleich sind, so findet man die Größe eines solchen Winkels, wenn man die Summe aller Winkel durch die Anzahl derselben dividirt. So ist

der Winkel eines regulären Dreieckes $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$,

" " " " Viereckes $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$,

" " " " Fünfeckes $\frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$,

" " " " Sechseckes $\frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$, u. s. w.

III. Kongruenz der geradlinigen Figuren.

1. Kongruenz der Dreiecke.

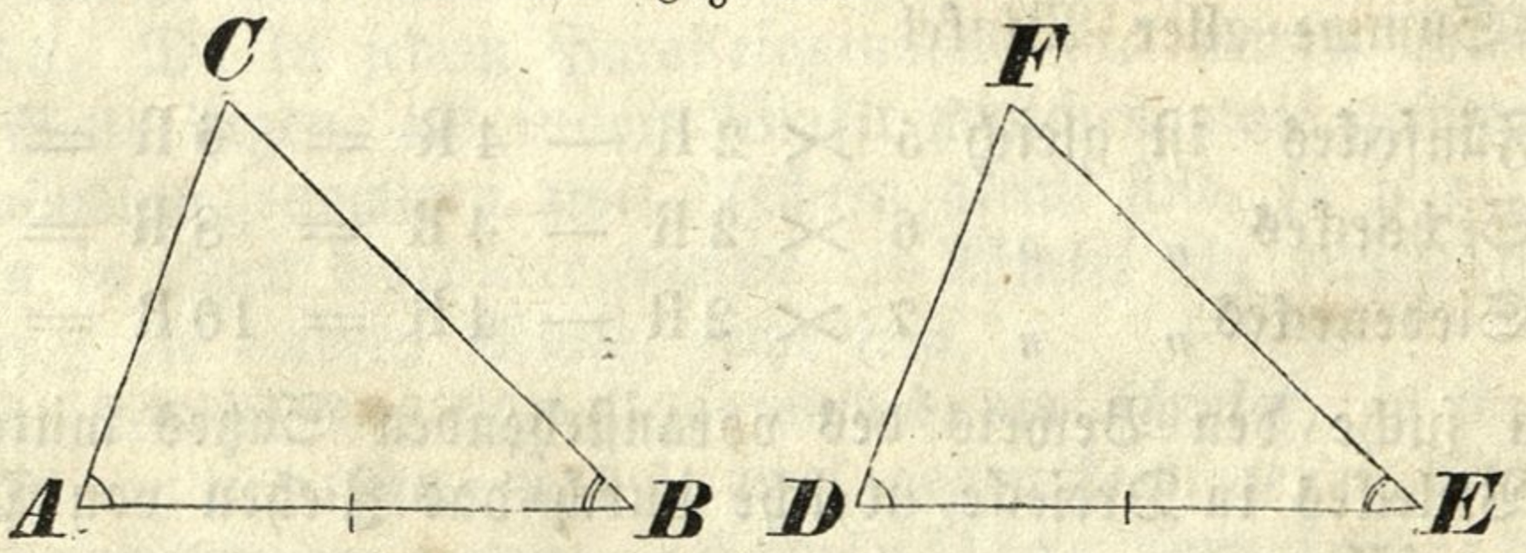
§. 54. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie gleiche Form und gleiche Größe haben. Kongruente Dreiecke können sich nur durch den Ort, an dem sie sich befinden, von einander unterscheiden, und müssen daher über einander gelegt sich vollkommen decken. Damit dieses möglich sei, müssen in den Dreiecken alle sechs Stücke, nämlich alle drei Seiten und alle drei Winkel wechselseitig gleich sein. In kongruenten Dreiecken sind also die Seiten, welche den gleichen Winkeln gegenüber liegen, einander gleich, und eben so sind die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüber liegen, gleich.

Wegen des innigen Zusammenhanges zwischen den Seiten und den Winkeln eines Dreieckes ist es oft erlaubt, schon aus der wechselseitigen Gleichheit dreier Stücke in zwei Dreiecken auf deren Kongruenz zu schließen. Die Fälle, in denen dieses geschieht, heißen Kongruenzfälle.

§. 55. Wenn in zwei Dreiecken eine Seite und die beiden anliegenden Winkel wechselseitig gleich sind, so sind die zwei Dreiecke kongruent.

Voraussetzung. Es sei (Fig. 41) die Seite AB = DE, der Winkel A = D, und B = E.

Fig. 41.



Folgerung. Es muß das △ ABC ≅ DEF sein.

Beweis. Man lege das △ DEF so auf ABC, daß die Punkte D und E auf die Punkte A und B fallen, was möglich ist, weil AB = DE ist. Weil der Winkel A = D ist, so muß DF längs AC fallen; eben so muß wegen B = E die Seite EF längs BC zu liegen kommen. Wenn aber die Geraden DF und EF längs den Geraden AC und BC fallen, so muß auch

der Durchschnittspunkt F der ersteren auf den Durchschnittspunkt C der letzteren fallen. Die beiden Dreiecke A B C und D E F decken sich also, über einander gelegt, vollkommen, folglich sind sie kongruent.

§. 56. Aus diesem Kongruenzfalle folgt:

a) Zwei Dreiecke, welche eine Seite und irgend zwei gleichliegende Winkel wechselseitig gleich haben, sind kongruent.

b) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind kongruent, wenn sie eine Kathete und den anliegenden oder den gegenüberliegenden spitzigen Winkel gleich haben.

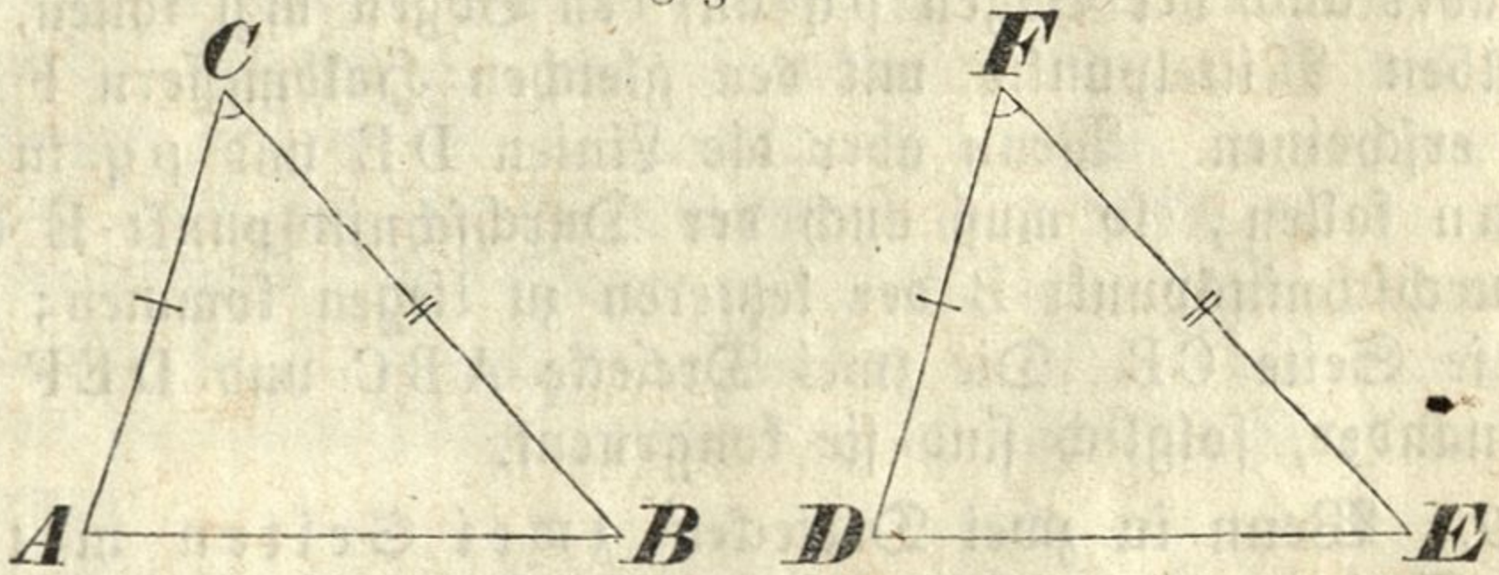
c) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind kongruent, wenn sie die Hypotenuse und einen anliegenden Winkel gleich haben.

§. 57. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel wechselseitig gleich sind, so sind die beiden Dreiecke kongruent.

Annahme. Es sei (Fig. 42) A C = D F, B C = E F, und C = F.

Folgerung. Es muß das △ A B C ≅ D E F sein.

Fig. 42.

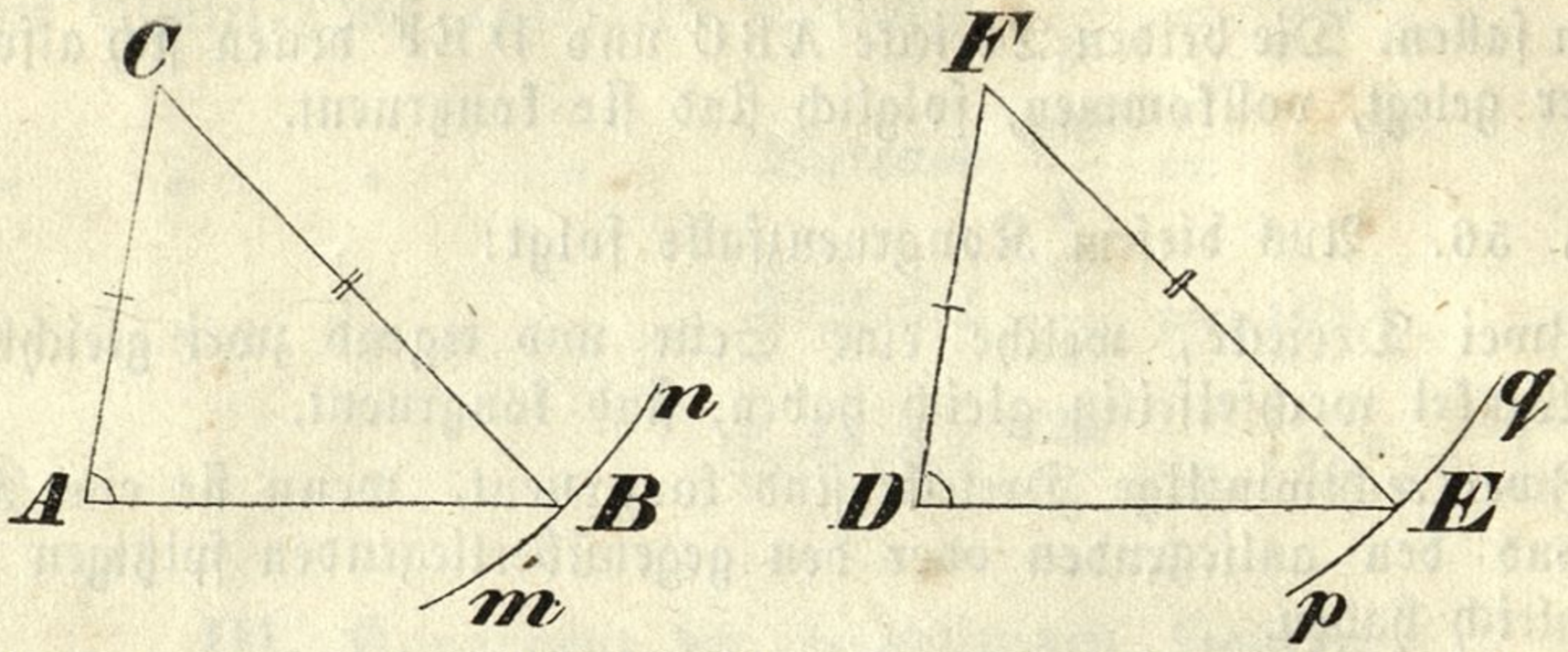


Beweis. Man lege das Dreieck D E F so auf das Dreieck A B C, daß F auf C, F D längs C A, und F E längs C B falle, was möglich ist, da nach der Voraussetzung die Winkel F und C gleich sind. Wegen A C = D F muß auch der Punkt D auf A, und wegen B C = E F der Punkt E auf B, folglich die Seite D E auf A B fallen. Die zwei Dreiecke A B C und D E F sind also so beschaffen, daß sie übereinander gelegt sich vollkommen decken, d. h sie sind kongruent.

Folgesatz: Zwei rechtwinklige Dreiecke sind kongruent, wenn sie die beiden Katheten gleich haben.

§. 58. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten mit dem der größern Seite gegenüberliegenden Winkel wechselweise gleich sind, so sind die beiden Dreiecke kongruent.

Fig. 43.



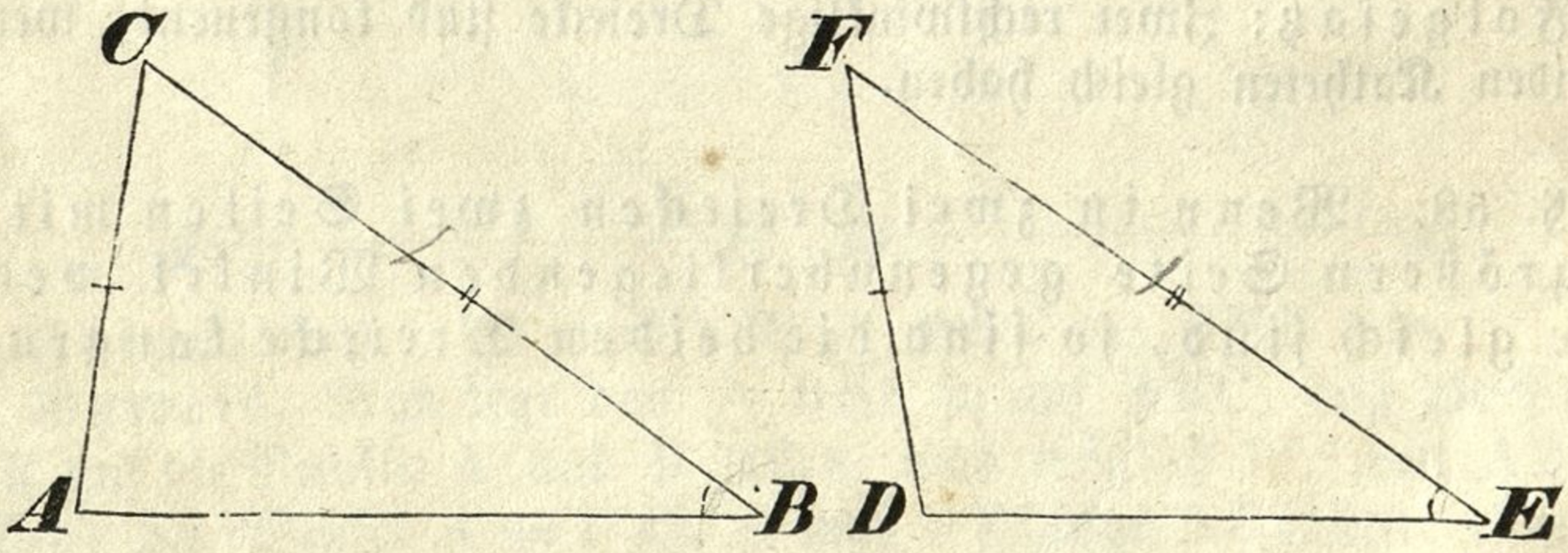
Voraussetzung. Es sei (Fig. 43) AC = DF, BC = EF, ferner BC > AC, wo dann auch EF > DF sein muß, und der Winkel A = D.

Behauptung. Die Dreiecke ABC und DEF müssen kongruent sein.

Beweis. Man beschreibe aus C mit dem Halbmesser CB den Kreisbogen mn, welcher die Seite AB in B durchschneidet, mit dem Halbmesser FE beschreibe man eben so aus F den Kreisbogen pq, welcher durch den Punkt E gehet. Legt man nun das △ DEF sammt dem Bogen pq so auf das Dreieck ABC, daß die gleichen Winkel D und A genau in einander fallen, so wird der Schenkel DE längs AB, und DF längs AC zu liegen kommen. Weil AC = DF ist, so fällt der Punkt F auf C; dann muß aber auch der Bogen pq auf den Bogen mn fallen, weil beide aus demselben Mittelpunkte mit den gleichen Halbmessern FE und CB beschrieben erscheinen. Wenn aber die Linien DE und pq in die Linien AB und mn fallen, so muß auch der Durchschnittspunkt E der ersteren auf den Durchschnittspunkt B der letzteren zu liegen kommen; daher deckt auch EF die Seite CB. Die zwei Dreiecke ABC und DEF fallen also ganz in einander, folglich sind sie kongruent.

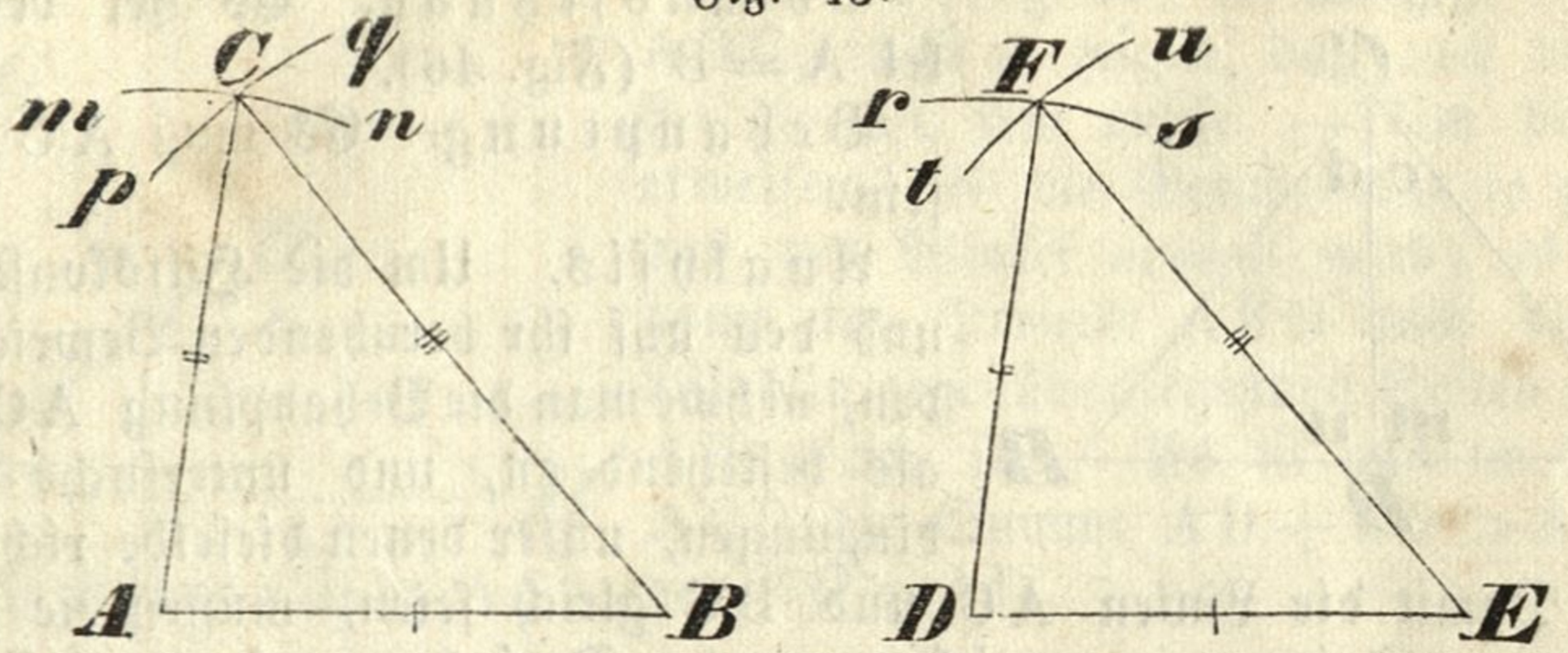
§. 59. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten mit dem der kleinern Seite gegenüberliegenden Winkel wechselseitig gleich sind, so ist es nicht erlaubt, auf die Kongruenz der beiden Dreiecke zu schließen, da es möglich ist, daß die zwei Dreiecke nicht kongruent sind. So haben die Dreiecke ABC und DEF (Fig. 44) die Seite AC = DF, BC = EF, wo AC < BC und DF < EF ist, und den Winkel B = E, und doch sind sie nicht kongruent, da das eine spitzwinklig, das andere stumpfwinklig ist.

Fig. 44.



§. 60. Wenn in zwei Dreiecken alle drei Seiten wechselseitig gleich sind, so sind die beiden Dreiecke kongruent.

Fig. 45.



Voraussetzung. Es sei (Fig. 45) AB = DE, AC = DF, und BC = EF.

Behauptung. Die Dreiecke ABC und DEF müssen kongruent sein.

Beweis. Man beschreibe aus A mit dem Halbmesser AC den Kreisbogen mn, und aus B mit dem Halbmesser BC den Bogen pq, so werden sich diese Bögen im Punkte C schneiden. Ferner beschreibe man auch aus D und E beziehungsweise mit den Halbmessern DF und EF die Bögen rs und tu, welche sich in F schneiden. Nun lege man das △ DEF mit seinen Kreisbögen so auf das △ ABC, daß die Punkte D und E auf die Punkte A und B fallen, was möglich ist, da AB = DE angenommen wurde. Wegen AC = DF muß der Bogen rs auf den Bogen mn, und wegen BC = EF der Bogen tu auf den Bogen pq fallen; es muß demnach auch der Durchschnittspunkt F der Bögen rs und tu auf den Durchschnittspunkt C der Bögen mn und pq zu liegen kommen. Fallen aber die Punkte D, E, F auf die Punkte A, B, C, so decken sich auch die dazwischen liegenden Dreieckseiten; folglich sind die Dreiecke ABC und DEF kongruent.

§. 61. Da kongruente Dreiecke in Form und Größe übereinstimmen, so folgt, daß die Stücke, aus deren Gleichheit in zwei Dreiecken man auf die Kongruenz dieser letztern schließen kann, die Form und die Größe eines Dreieckes vollkommen bestimmen. Die ein Dreieck vollkommen bestimmenden Stücke sind also:

1) eine Seite mit den beiden ihr anliegenden Winkeln;
2) zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel;
3) zwei Seiten mit dem der größern Seite gegenüberliegenden Winkel;
endlich
4) alle drei Seiten.

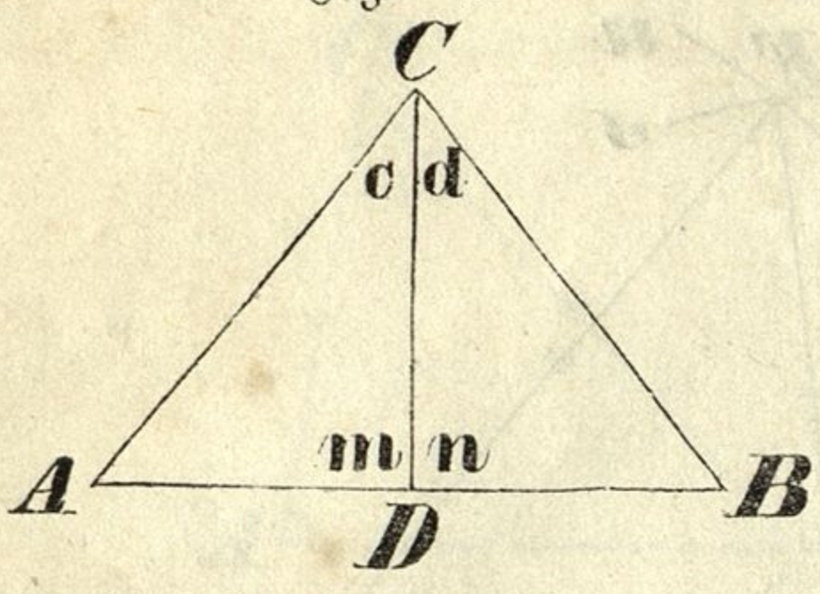
Unter den bestimmenden Stücken eines Dreieckes muß sich immer wenigstens eine Seite befinden.

2. Anwendung der vorhergehenden Kongruenzfälle.

a) Lehrsätze von den Dreiecken überhaupt.

§. 62. Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel gleich sind, so müssen auch die ihnen gegenüberstehenden Seiten einander gleich sein.

Fig. 46.



Voraussetzung. Es sei der Winkel A = B (Fig. 46).

Behauptung. Es muß AC = BC sein.

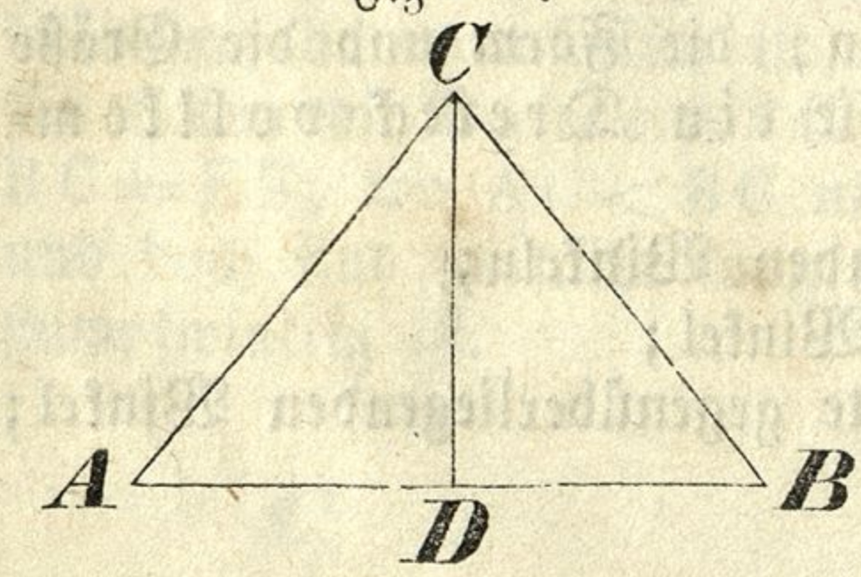
Analysis. Um die Hilfskonstrukzion und den auf ihr beruhenden Beweis zu finden, nehme man die Behauptung AC = BC als bestehend an, und untersuche die Bedingungen, unter denen dieselbe richtig sein kann. Damit die Linien AC und BC gleich seien, müssen sie sich als gleichliegende Seiten von zwei kongruenten Dreiecken darstellen lassen. Es kommt also darauf an, zwei Dreiecke so zu zeichnen, daß man unter Benützung obiger Voraussetzung auf ihre Kongruenz schließen darf, und daß in denselben die Seiten AC und BC gleichen Winkeln gegenüber liegen. Zwei solche Dreiecke erhält man nun wirklich, wenn man CD ⊥ AB zieht.

Synthetischer Beweis. Man denke sich von C auf AB die Senkrechte CD gezogen. In den Dreiecken ACD und BCD sind nun die Winkel A und B nach der Voraussetzung gleich, die Winkel m und n sind also Rechte gleich; also müssen auch die dritten Winkel c und d gleich sein. Die Dreiecke ACD und BCD haben daher eine Seite CD gemeinschaftlich, und die ihr anliegenden Winkel wechselseitig gleich; folglich sind sie kongruent. In kongruenten Dreiecken liegen gleichen Winkeln auch gleiche Seiten gegenüber, den gleichen Winkeln m und n stehen die Seiten AC und BC gegenüber, also ist AC = BC.

Auf welche Art hätte man ebenfalls die zwei gewünschten kongruenten Dreiecke erhalten können?

§. 63. Wenn in einem Dreiecke zwei Seiten gleich sind, so müssen auch die ihnen gegenüberliegenden Winkel gleich sein (Fig. 47).

Fig. 47.



Voraussetzung. AC = BC.

Behauptung. A = B.

Beweis. Man nehme D als die Mitte der AB an, und ziehe CD, so ist

△ ACD ≅ BCD (§. 60),

daher A = B.

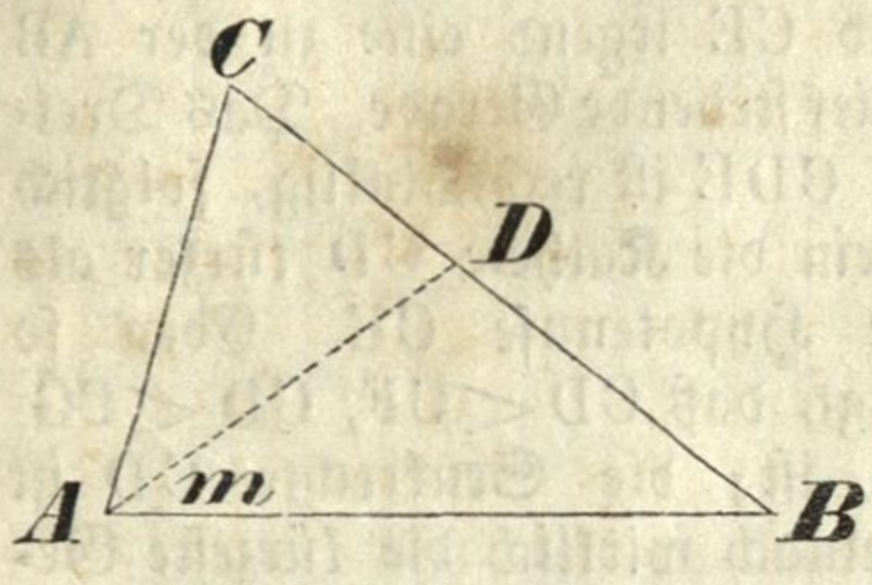
§. 64. Aus diesem Satze folgt:

a) In einem gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich.

b) In einem gleichseitigen Dreiecke sind alle Winkel gleich, und daher jeder 60°.

§. 65. Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel ungleich sind, so sind auch die ihnen gegenüberliegenden Seiten ungleich, und zwar liegt dem größern Winkel auch eine größere Seite gegenüber.

Fig. 48.



Es sei (Fig. 48) der Winkel B A C > A B C, so ist zu zeigen, daß auch die Seite B C > A C sein müsse. — Um dieses zu erweisen, sei die Gerade A D so gezogen, daß der Winkel m = B wird; es müssen dann im Dreiecke A B D auch die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten B D und A D gleich sein. Es ist nun im Dreiecke A C D die Summe A D + C D > A C; daher auch B D + C D > A C, oder B C > A C.

§. 66. Aus diesem Satze läßt sich folgern:

a) Im rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse größer als jede Kathete.

b) Im stumpfwinkligen Dreiecke ist die dem stumpfen Winkel gegenüberstehende Seite die größte.

c) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind kongruent, wenn sie die Hypotenuse und eine Kathete gleich haben (§. 58).

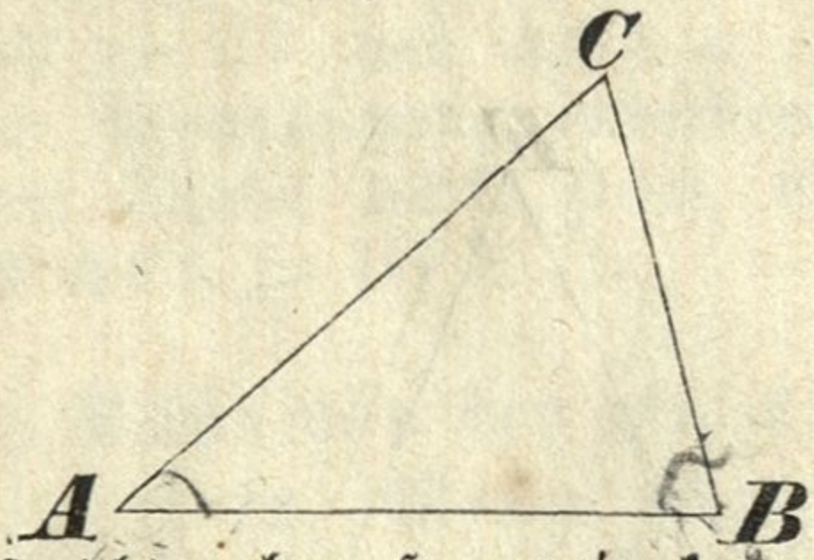
d) Zwei gleichseitige Dreiecke sind kongruent, wenn sie gleiche Höhen haben.

e) Zwei gleichschenklige Dreiecke sind kongruent, wenn sie gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben.

f) Die aus den Endpunkten der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes auf die Schenkel gefällten Senkrechten sind einander gleich.

§. 67. Wenn zwei Seiten eines Dreieckes ungleich sind, so sind auch die ihnen gegenüberliegenden Winkel ungleich, und zwar liegt der größern Seite auch ein größerer Winkel gegenüber.

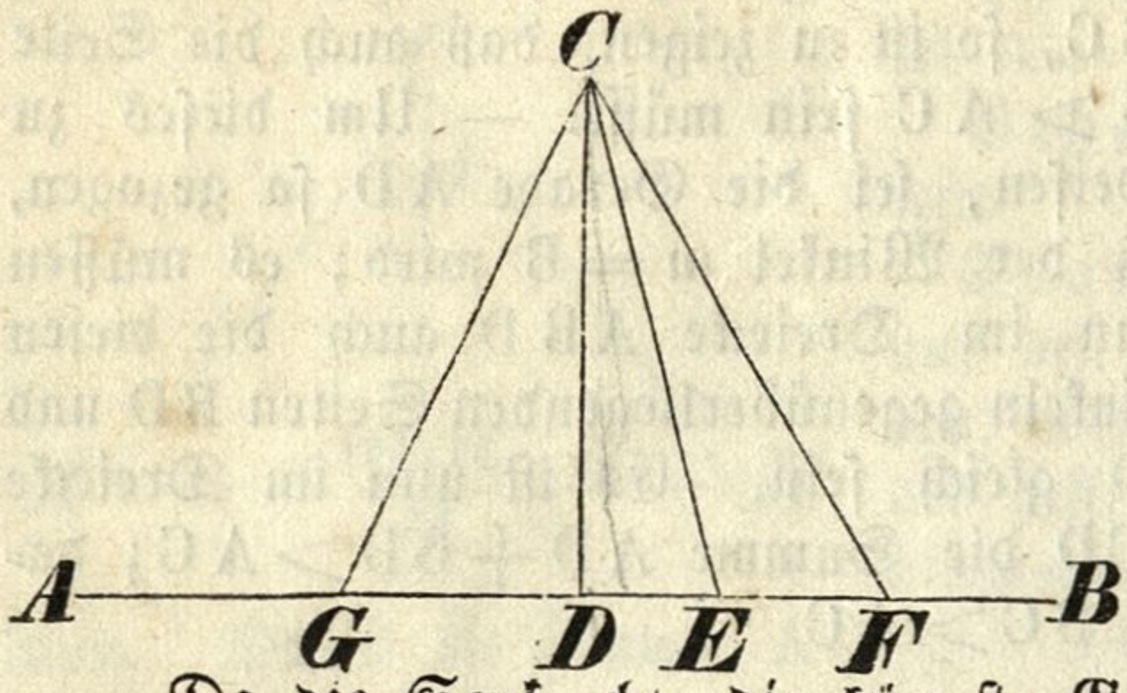
Fig. 49.



Es sei (Fig. 49) die Seite A C > B C; so läßt sich indirekt beweisen, daß auch der Winkel B > A sein müsse. Würde Jemand läugnen, daß B > A ist, so müßte er behaupten, daß entweder B = A, oder daß B < A ist. Nun kann B nicht gleich A sein, weil dann auch A C = B C sein müßte, was der Voraussetzung A C > B C widerspricht; eben so wenig kann B < A sein, denn da wäre auch A C < B C, was gleichfalls gegen die Annahme ist. Es muß daher B > A sein.

§. 68. Unter allen Geraden, welche von einem Punkte zu einer gegebenen Geraden gezogen werden können, ist die Senkrechte die kürzeste.

Fig. 50.



Es sei (Fig. 50) CD ⊥ AB, und CE irgend eine zu der AB schief stehende Gerade. Das Dreieck CDE ist rechtwinklig, folglich darin die Kathete CD kürzer als die Hypotenuse CE. Eben so folgt, daß CD < CF, CD < CG, ... ist; die Senkrechte CD ist demnach wirklich die kürzeste Gerade zwischen C und der AB.

Da die Senkrechte die kürzeste Gerade ist, die von einem Punkte zu einer Geraden gezogen werden kann, so dient sie dazu, um die Entfernung eines Punktes von einer Geraden anzuzeigen.

§. 69. Man suche noch folgende Sätze zu beweisen:

a) Wenn zwei Gerade, welche aus einem Punkte an eine gegebene Gerade zu beiden Seiten der Senkrechten schief gezogen werden, von der Senkrechten gleich weit abstehen, so sind die beiden schiefen Geraden einander gleich (§. 57, Folgesatz).

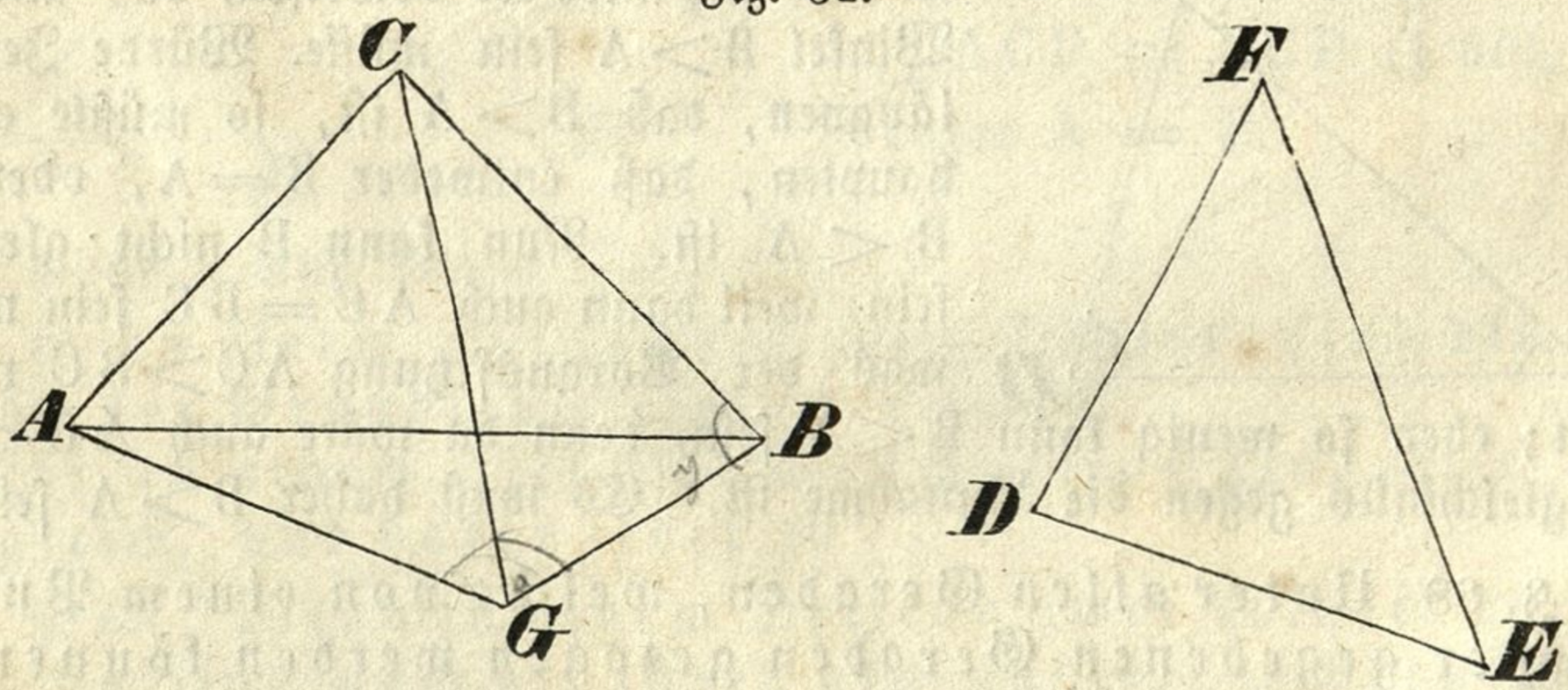
Der vorstehende Satz läßt sich auch so ausdrücken: Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von zwei gegebenen Punkten gleichweit abstehen, ist die Senkrechte, welche auf der Verbindungslinie der beiden Punkte in ihrer Mitte errichtet wird.

b) Von zwei schiefen Geraden, welche aus einem Punkte an eine gegebene Gerade so gezogen werden, daß sie von der Senkrechten ungleiche Abstände haben, ist diejenige größer, welche von der Senkrechten weiter absteht (§. 65).

§. 70. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten wechselseitig gleich, die von ihnen eingeschlossenen Winkel aber ungleich sind, so sind auch die dritten Seiten ungleich, und zwar ist die dritte Seite in jenem Dreiecke größer, in welchem jener eingeschlossene Winkel größer ist.

Es sei (Fig. 51) AC = DF, BC = EF, und ACB > DFE; so ist zu beweisen, daß auch AB > DE sein müsse. — Um den Beweis zu führen, nehme man den Winkel ACG = DFE an, mache CG = FE,

Fig. 51.

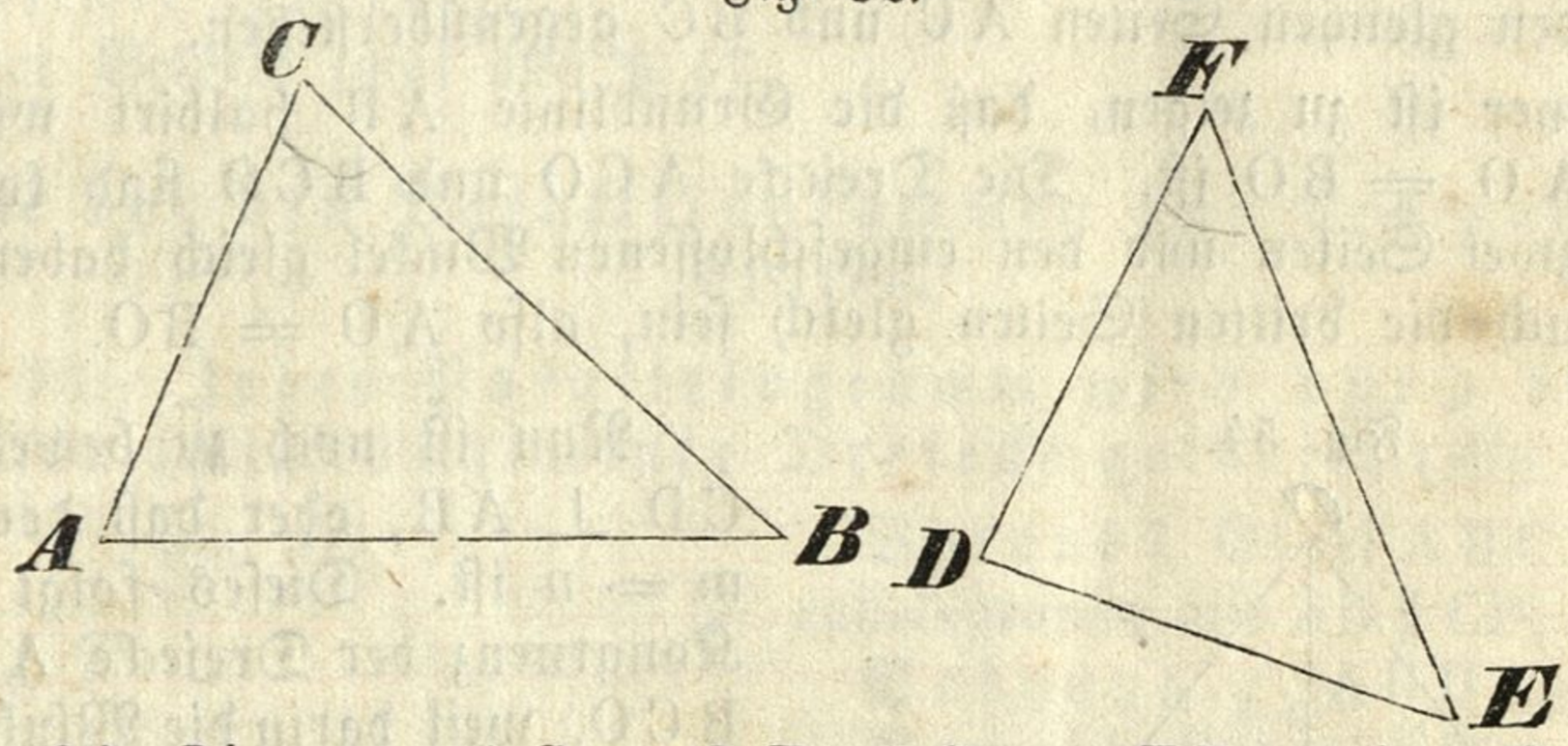


und ziehe AG. Die Dreiecke ACG und DFE haben nun zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gleich, sie sind daher kongruent, und es

müssen auch die dritten Seiten AG und DE gleich sein. Man braucht also nur zu zeigen, daß AB > AG ist, oder daß, wenn man die BG zieht, im Dreiecke ABG der Winkel AGB > ABG sein müsse. Weil BC = EF, und GC = EF, so muß auch BC = GC, und daher der Winkel CGB = CBG sein. Nun ist offenbar der Winkel AGB größer als sein Theil CGB, also auch größer als der mit CGB gleiche Winkel CBG, daher um so mehr größer als ein Theil des letztern, nämlich als der Winkel ABG. Wenn aber AGB > ABG ist, so muß auch AB > AG, oder AB > DE sein.

§. 71. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten wechselseitig gleich, die dritten Seiten aber ungleich sind; so sind auch die von den gleichen Seiten eingeschlossenen Winkel ungleich, und zwar ist derjenige Winkel größer, welcher der größern Seite gegenüber liegt.

Fig. 52.



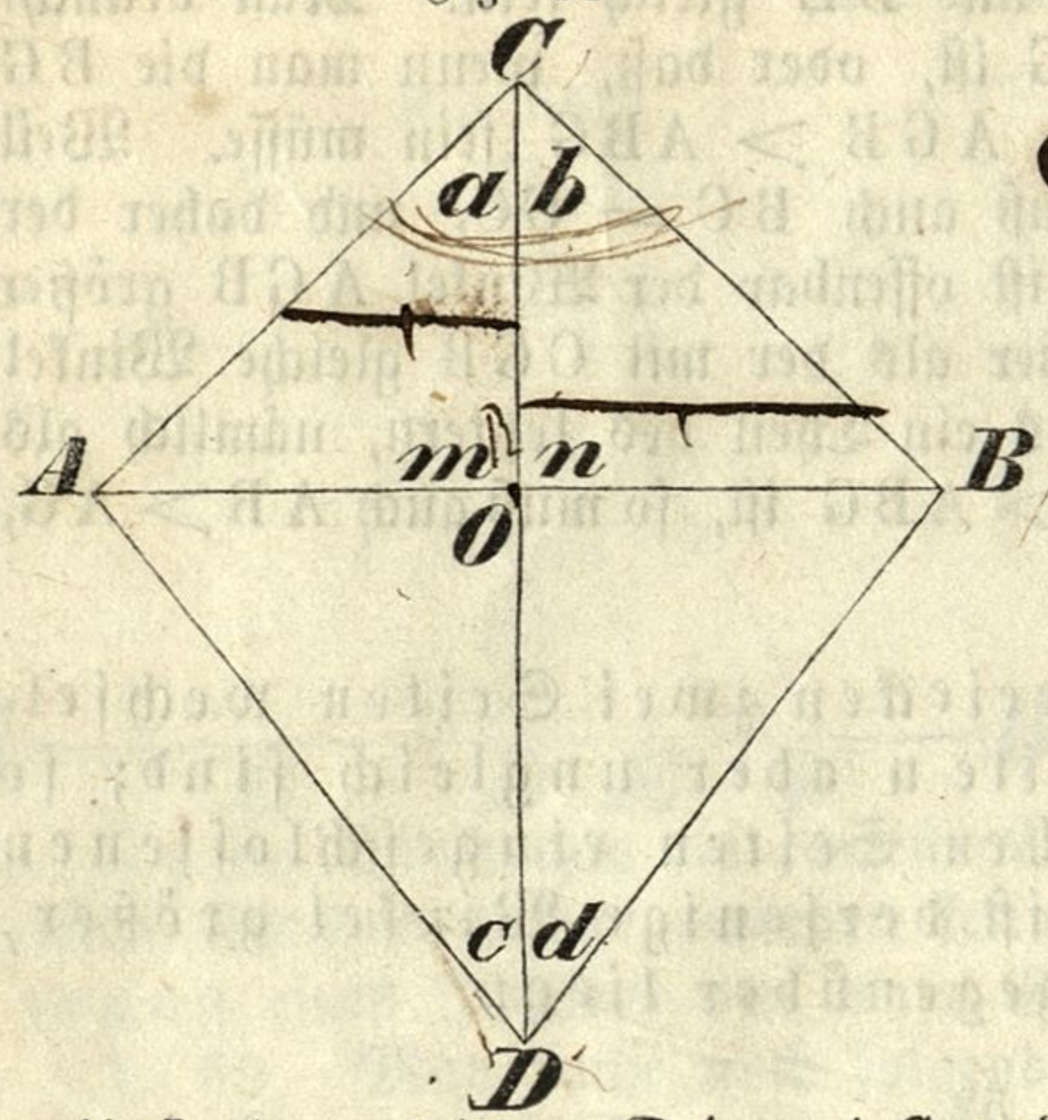
Es sei (Fig. 52) AC = DF, BC = EF, und AB > DE; zu beweisen ist, daß auch ACB > DFE sein muß.

Indirekter Beweis. Wer nicht zugibt, daß ACB > DFE ist, muß behaupten, daß entweder ACB = DFE, oder daß ACB < DFE ist. Das erstere ist nicht möglich; denn wenn ACB = DFE wäre, so hätten die Dreiecke ABC und DEF zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich, müßten daher kongruent sein, und es wäre auch AB = DE, was der Annahme AB > DE widerspricht. Es kann aber auch nicht ACB < DFE sein; denn dann müßte wegen AB = DF, BC = EF und ACB < DFE auch AB < DE sein, was ebenfalls der Voraussetzung widerstreitet. Der Winkel ACB kann also weder dem Winkel DFE gleich, noch kann er kleiner als DFE sein; mithin ist ACB > DFE.

b) Sätze von den gleichschenkligen Dreiecken insbesondere.

§. 72. Wenn über derselben Grundlinie zwei gleichschenklige Dreiecke aufliegen, und man verbindet ihre Scheitel durch eine gerade Linie; so halbirt diese Gerade erstlich die Winkel an den Scheiteln, zweitens halbirt sie die gemeinschaftliche Grundlinie, und drittens steht sie auf der Grundlinie senkrecht.

Fig. 53.

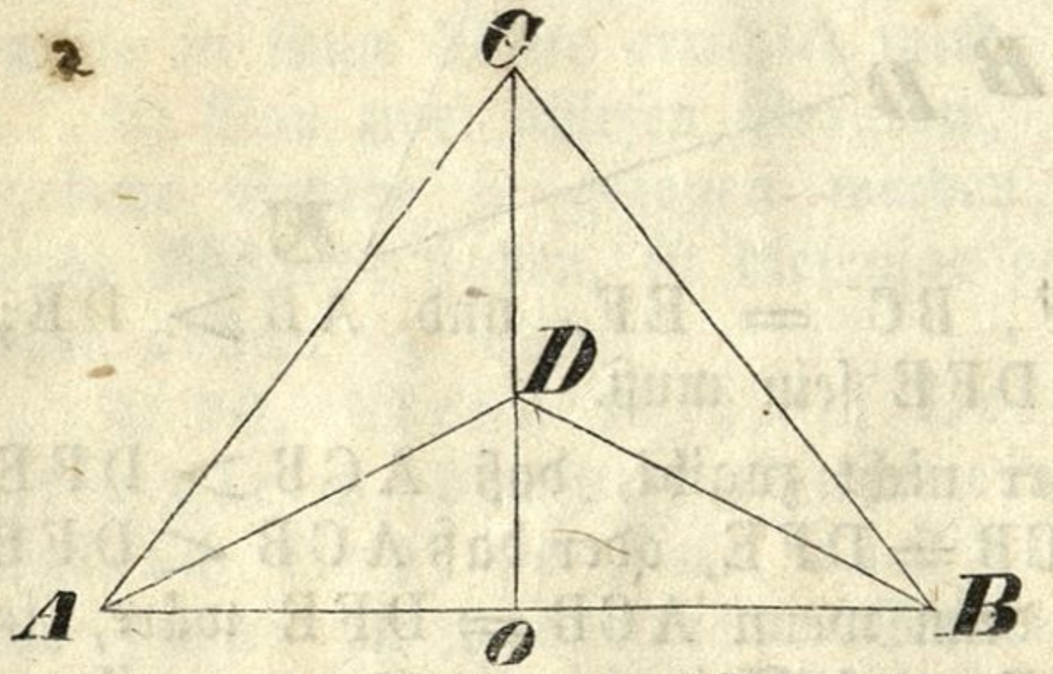


Voraussetzung (Fig. 53): AC = BC, AD = BD.

Zu beweisen ist erstlich, daß die Gerade CD die Winkel C und D halbirt, daß nämlich a = b und c = d ist. Zu diesem Ende vergleiche man die Dreiecke ACD und BCD; sie haben alle drei Seiten wechselseitig gleich, sind demnach kongruent; folglich liegen darin den gleichen Seiten auch gleiche Winkel gegenüber. Den gleichen Seiten AD und BD liegen die Winkel a und b gegenüber, also ist a = b; eben so müssen die Winkel c und d gleich sein, weil sie den gleichen Seiten AC und BC gegenüberstehen.

Ferner ist zu zeigen, daß die Grundlinie AB halbirt wird, daß nämlich AO = BO ist. Die Dreiecke ACO und BCO sind kongruent, weil sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben; daher müssen auch die dritten Seiten gleich sein, also AO = BO.

Fig. 54.

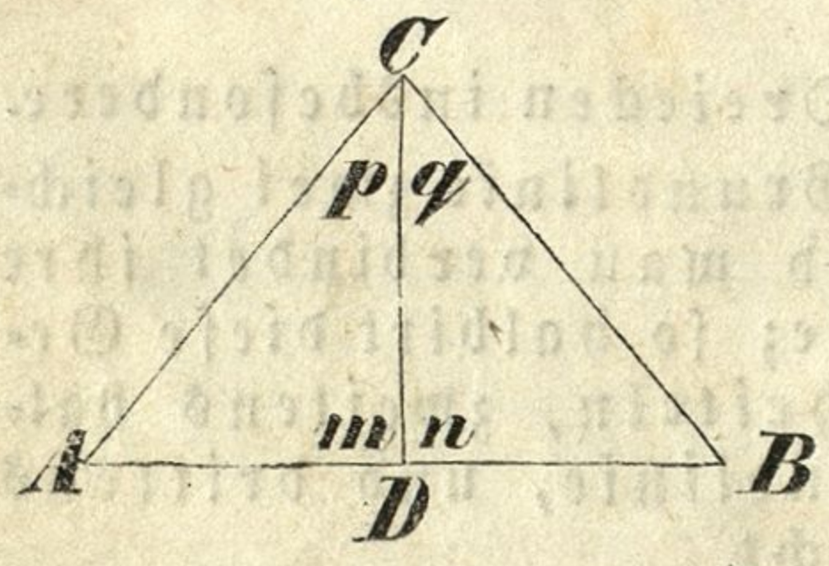


Nun ist noch zu beweisen, daß CD ⊥ AB, oder daß der Winkel m = n ist. Dieses folgt aus der Kongruenz der Dreiecke ACO und BCO, weil darin die Winkel m und n den gleichen Seiten AC und BC gegenüberliegen.

Wie wird der Beweis geführt, wenn die beiden gleichschenkligen Dreiecke ABC und ABD (Fig. 54) auf derselben Seite der Grundlinie AB liegen?

§. 73. Wenn man in einem gleichschenkligen Dreiecke die Mitte der Grundlinie mit dem Scheitel durch eine Gerade verbindet, so steht diese Gerade auf der Grundlinie senkrecht, und halbirt den Winkel am Scheitel (Fig. 55).

§. 55.



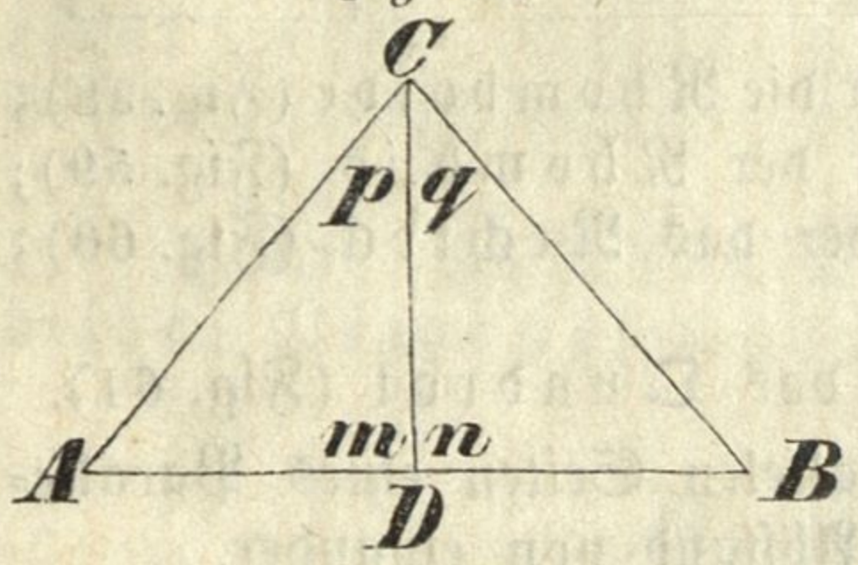
Voraussf. AC = BC, AD = BD.
Behaupt. CD ⊥ AB und p = q.
Beweis. △ ACD ≅ BCD (§. 60), daher

m = n oder CD ⊥ AB,

und p = q.

§. 74. Die Senkrechte, welche von der Spitze eines gleichschenkligen Dreieckes auf die Grundlinie gezogen wird, halbirt die Grundlinie und den Winkel am Scheitel (Fig. 56).

Fig. 56



Voraussf. AC = BC, CD ⊥ AB.
Behaupt. AD = BD und p = q.
Beweis. △ ACD ≅ BCD (§. 66, c),
daher
AD = BD und p = q.

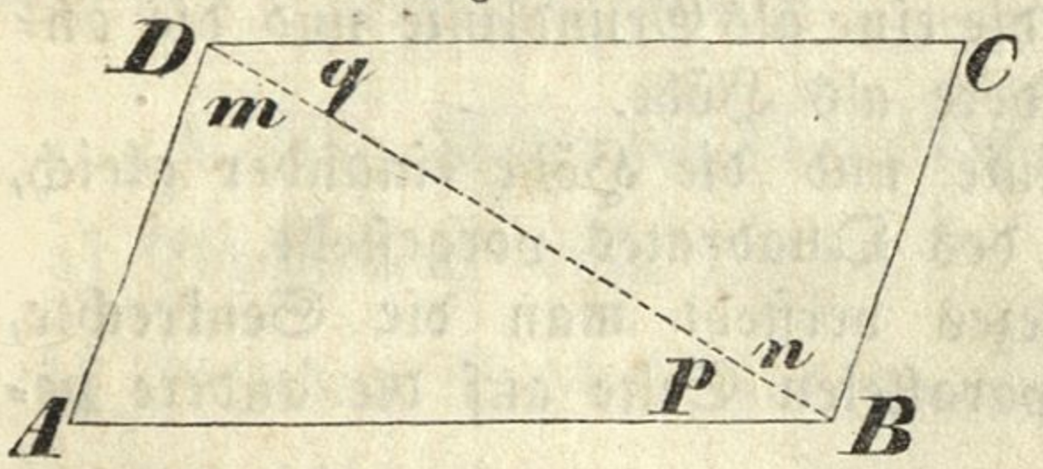
§. 75. Wenn der Winkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes durch eine Gerade halbirt wird, so halbirt diese auch die Grundlinie und steht auf der Grundlinie senkrecht.

Der Beweis folgt aus §. 57.

c) Sätze von den Parallelogrammen und den parallelen Linien.

§. 76. Jedes Parallelogramm wird durch die Diagonale in zwei kongruente Dreiecke getheilt (Fig. 57).

Fig. 57.



Voraussf. Es sei ABCD ein Parallelogramm, also AB ∥ CD, AD ∥ BC.
Behaupt. △ ABD ≅ BCD.
Beweis. BD = BD
m = n } als Wechselwinkel
p = q }
△ ABD ≅ BCD.

§. 77. Aus diesem Satze folgt:

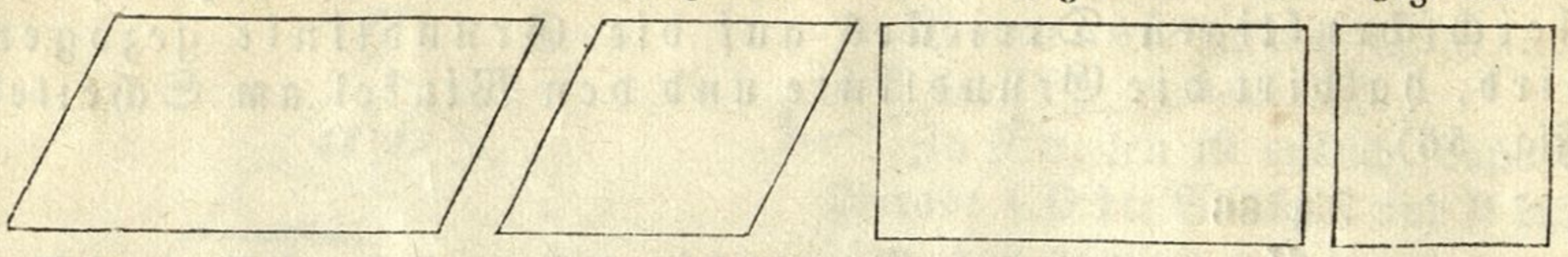
1) In jedem Parallelogramme sind die gegenüberstehenden Seiten einander gleich; oder: Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich.
2) Senkrechte zwischen Parallelen sind einander gleich. Zwei parallele Gerade haben demnach überall dieselbe Entfernung von einander. Man kann daher auch sagen:

Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von einer gegebenen Geraden eine gegebene Entfernung haben, ist eine Gerade, welche in dieser Entfernung mit jener Geraden parallel gezogen wird.

§. 78. Sind in einem Parallelogramme zwei zusammenstoßende Seiten gleich, so sind es auch die anderen, und das Parallelogramm ist gleichseitig; sind dagegen zwei zusammenstoßende Seiten ungleich, so heißt das Parallelogramm ungleichseitig.

Nimmt man nun sowohl auf die Länge der Seiten als auf die Größe der Winkel (§. 50) Rücksicht, so ergeben sich vier Arten von Parallelogrammen:

Fig. 58. Fig. 59. Fig. 60. Fig. 61.

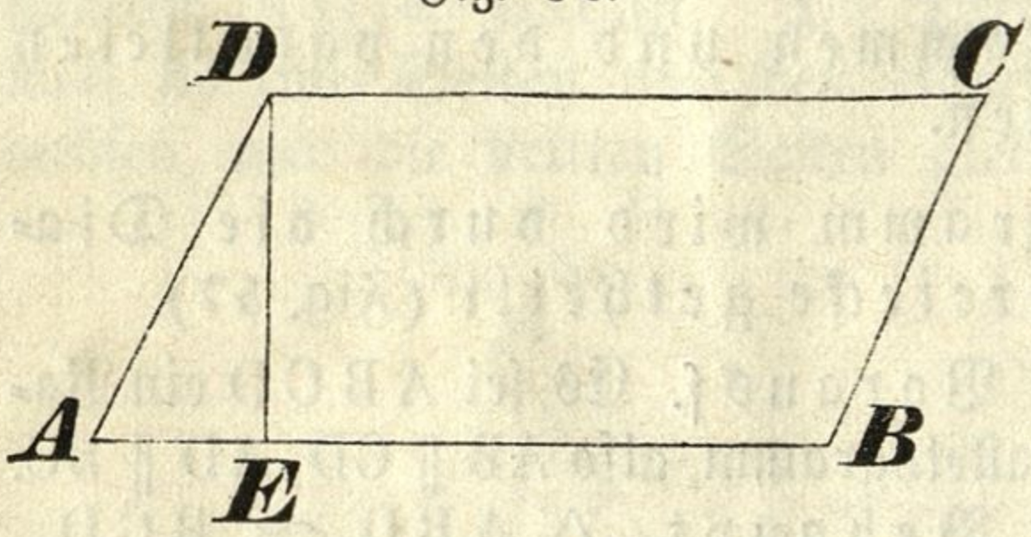


1) Das ungleichseitige und schiefwinklige oder die Rhomboide (Fig. 58);
2) das gleichseitige und schiefwinklige oder der Rhombus (Fig. 59);
3) das ungleichseitige und rechtwinklige oder das Rechteck (Fig. 60); und
4) das gleichseitige und rechtwinklige oder das Quadrat (Fig. 61).

§. 79. Nach §. 77, 2) haben die parallelen Seiten eines Parallelogramms oder Trapezes überall denselben Abstand von einander.

Wenn man in einem Parallelogramme irgend eine Seite als Grundlinie annimmt, so heißt die Senkrechte, welche von irgend einem Punkte der gegenüberstehenden Seite auf diese Grundlinie gefällt wird, die Höhe des Parallelogramms.

Fig. 62.



Nimmt man in dem Parallelogramme ABCD (Fig. 62) die Seite AB als Grundlinie an, und ist die Gerade DE senkrecht auf AB, so stellt DE die Höhe vor.

In einem Rechtecke betrachtet man von zwei zusammenstoßenden Seiten die eine als Grundlinie und die andere als Höhe.

Im Quadrate sind die Grundlinie und die Höhe einander gleich, und zwar wird jede durch eine Seite des Quadrates vorgestellt.

Unter der Höhe eines Trapezes versteht man die Senkrechte, welche von einem Punkte der einen parallelen Seite auf die andere parallele Seite gezogen wird.

§. 80. Wenn in einem Vierecke die gegenüberstehenden Seiten gleich sind, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

Es sei (Fig. 57) $AB = CD$ und $AD = BC$, so muß $AB \parallel CD$ und $AD \parallel BC$, also ABCD ein Parallelogramm sein. — Man ziehe die Diagonale BD, so sind die Dreiecke ABD und BCD kongruent, weil sie alle drei Seiten wechselseitig gleich haben; es müssen daher den gleichen Seiten auch gleiche Winkel gegenüberliegen, also $m = n$ und $p = q$ sein; wenn aber die Wechselwinkel m und n gleich sind, so müssen die Geraden AD und BC parallel sein; eben so folgt wegen $p = q$ auch $AB \parallel CD$. Das Viereck ABCD ist demnach ein Parallelogramm.

§. 81. Wenn in einem Vierecke zwei gegenüberstehende Seiten gleich und parallel sind, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

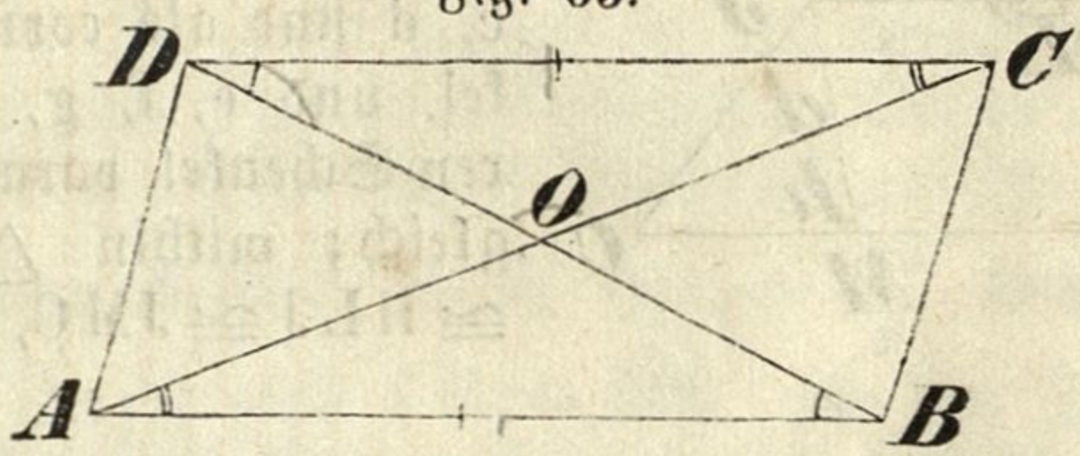
Wenn (Fig. 57) $AB = CD$ und zugleich $AB \parallel CD$ ist, so muß ABCD ein Parallelogramm sein. — Zieht man die Diagonale BD, so ist $AB = CD$, $BD = BD$ und $p = q$ als Wechselwinkel, daher muß

$\triangle$ ABD $\cong$ BCD, und somit m = n sein; aus der Gleichheit der Wechselwinkel m und n aber folgt, daß AD $\parallel$ BC, und daher ABCD, weil auch AB $\parallel$ CD angenommen wurde, ein Parallelogramm ist.

Folgesatz: Wenn zwei Punkte einer Geraden von einer andern Geraden auf einerlei Seite gleich weit abstehen, so müssen die beiden Geraden parallel sein.

§. 82 In jedem Parallelogramme halbiren sich die beiden Diagonalen in ihrem Durchschnittspunkte.

Fig. 63.



Es sei ABCD (Fig. 63) ein Parallelogramm, also AB $\parallel$ CD und AD $\parallel$ BC, so läßt sich zeigen, daß die Diagonalen AC und BD im Punkte O halbirt werden, daß nämlich AO = CO und BO = DO ist. — Die Dreiecke ABO und CDO haben eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gleich, daher sind sie kongruent; es müssen also auch die Seiten gleich sein, welche den gleichen Winkeln gegenüberliegen; mithin AO = CO und BO = DO.

§. 83. Sätze zur Selbstauffindung der Beweise:

a) Ein Viereck, dessen Diagonalen sich halbiren, ist ein Parallelogramm.

b) In jedem Rechtecke sind die Diagonalen gleich.

c) Jedes Parallelogramm, dessen Diagonalen einander gleich sind, ist ein Rechteck.

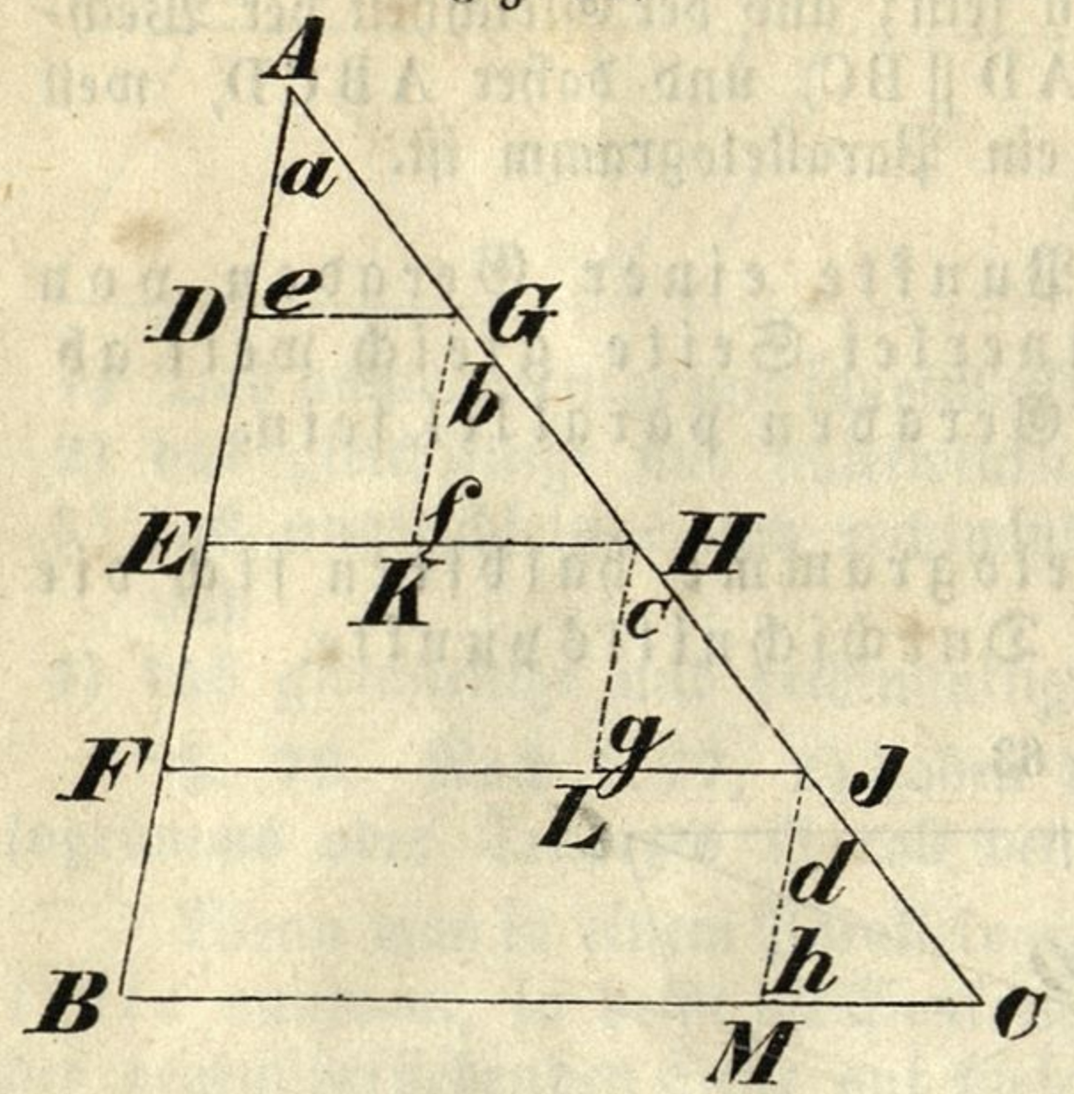
d) In jedem Rhombus stehen die Diagonalen senkrecht auf einander.

e) Jedes Parallelogramm, dessen Diagonalen senkrecht auf einander stehen, ist gleichseitig.

§. 84. Wenn in einem Dreiecke eine Seite in mehrere gleiche Theile getheilt, und durch jeden Theilungspunkt eine Parallele mit einer zweiten Seite gezogen wird, so wird dadurch auch die dritte Seite in eben so viele gleiche Theile getheilt.

Es sei (Fig. 64) AB z. B. in vier gleiche Theile getheilt, nämlich AD = DE = EF = FB, und es seien durch die Punkte D, E, F die Geraden DG, EH, FJ parallel mit BC gezogen; so ist zu beweisen, daß auch AG = GH = HJ = JC sein muß. — Man denke sich die Hilfs-

Fig. 64.

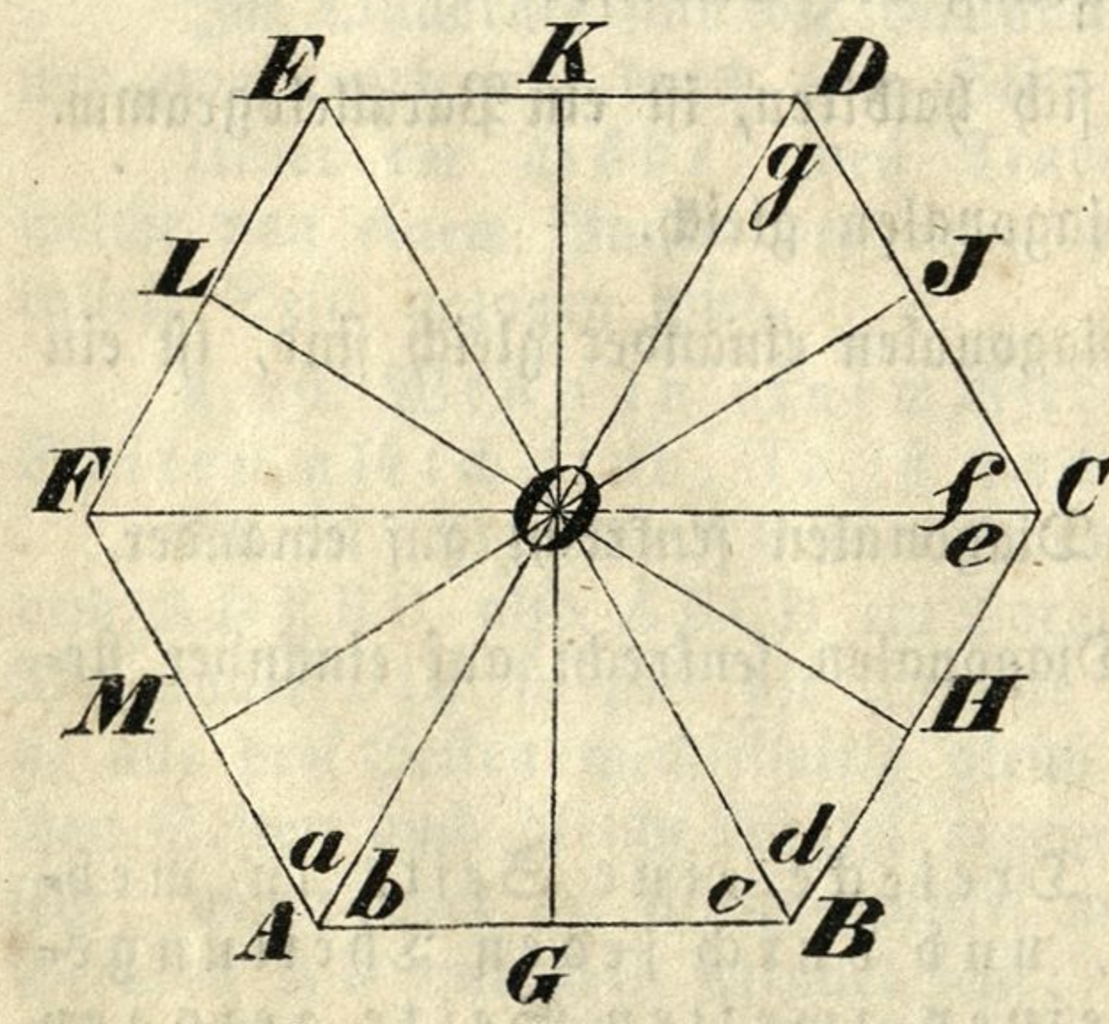


linien GK, HL, JM parallel mit AB gezogen, so ist, weil Parallele zwischen Parallelen gleich sind, GK = DE, HL = EF, JM = FB. Da nun nach der Voraussetzung AD = DE = EF = FB, so ist auch AD = GK = HL = JM. Die Dreiecke ADG, GKH, HLJ, JMC haben also erstlich eine Seite gleich; sie haben überdieß auch die dieser Seite anliegenden Winkel gleich, denn a, b, c, d sind als correspondirende Winkel, und e, f, g, h als Winkel, deren Schenkel parallel sind, einander gleich; mithin $\triangle$ ADG $\cong$ GKG $\cong$ HLJ $\cong$ JMC, und daher AG = GH = HJ = JC.

d. Sätze über die regelmäßigen Vielecke.

§. 85. Wenn in einem regulären Vielecke zwei auf einander folgende Winkel durch gerade Linien halbirt sind, so ist der Durchschnittspunkt dieser Halbirungslinien von allen Eckpunkten des Polygons gleichweit entfernt, und eben so von allen Seiten gleichweit entfernt.

Fig. 65.



Es sei ABCDEF (Fig. 65) ein regelmäßiges Polygon, also AB = BC = CD = DE = EF = FB, und $\angle$ A = B = C = D = E = F.

Sind die Winkel A und B halbirt, so daß a = b und c = d ist, so müssen sich, da A + B < 4R, also b + c < 2R ist, die Halbirungslinien AO und BO in einem Punkte O schneiden; und es ist erstlich zu beweisen, daß dieser Punkt O von allen Eckpunkten des Polygons gleichweit absteht, daß nämlich AO = BO = CO = DO = EO = FO sein muß. Zu diesem Ende braucht man nur zu zeigen, daß die Dreiecke AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOA kongruent und gleichschenklig sind. In den Dreiecken AOB und BOC ist AB = BC, BO = BO, c = d; daher $\triangle$ AOB $\cong$ BOC, und somit b = e. Um die Congruenz der Dreiecke BOC und COD nachzuweisen, ist erstlich BC = CD und CO = CO, es braucht nur auch e = f zu sein, was sich leicht erweisen läßt; weil nämlich b = e und A = C ist, so folgt aus $b = \frac{A}{2}$ auch

$e = \frac{C}{2}$; wenn aber $e = \frac{C}{2}$, so ist auch $f = \frac{C}{2}$, und daher $e = f$; die Dreiecke B O C und C O D sind demnach kongruent, folglich auch $d = g$. Auf dieselbe Art läßt sich zeigen, daß $\triangle$ C O D $\cong$ D O E, $\triangle$ D O E $\cong$ E O F, $\triangle$ E O F $\cong$ F O A ist. Da der Winkel $b = c$, so ist das $\triangle$ A O B gleichschenklig, und es müssen daher auch die übrigen Dreiecke, da sie mit A O B kongruent sind, gleichschenklig sein. Sind aber alle diese Dreiecke kongruent und gleichschenklig, so muß A O = B O = C O = D O = E O = F O sein; also steht O von allen Eckpunkten des Polygons gleichweit ab.

Um zu zeigen, daß O auch von allen Seiten des Polygons gleichweit absteht, seien die Geraden O G, O H, O J, O K, O L, O M senkrecht auf die Seiten des Polygons, so daß sie die Entfernungen des Punktes O von den Seiten des Polygons vorstellen. Da die Senkrechte, welche vom Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes auf die Grundlinie gefällt wird, die Grundlinie halbirt, so ist $BG = \frac{AB}{2}$ und $BH = \frac{BC}{2}$; weil nun A B = B C, so ist auch B G = B H. In den Dreiecken B O G und B O H ist nun B G = B H, B O = B O, $c = d$; also ist $\triangle$ B O G $\cong$ B O H; und folglich O G = O H. Auf dieselbe Art kann man beweisen, daß O H = O J, O J = O K, O K = O L, O L = O M, O M = O G ist. Der Punkt O ist also von allen Seiten des regulären Polygons leichweit entfernt.

Dieser Punkt O, welcher von allen Eckpunkten und von allen Seiten des regulären Polygons gleichweit absteht, wird der Mittelpunkt des Polygons genannt.

§. 86. Aus dem hier geführten Beweise folgt:

Wenn man den Mittelpunkt eines regulären Vieleckes mit allen Eckpunkten durch gerade Linien verbindet, so werden dadurch alle Vieleckswinkel halbirt, und das reguläre Vieleck selbst zerfällt in so viele kongruente gleichschenklige Dreiecke, als es Seiten hat.

3. Kongruenz der Vielecke.

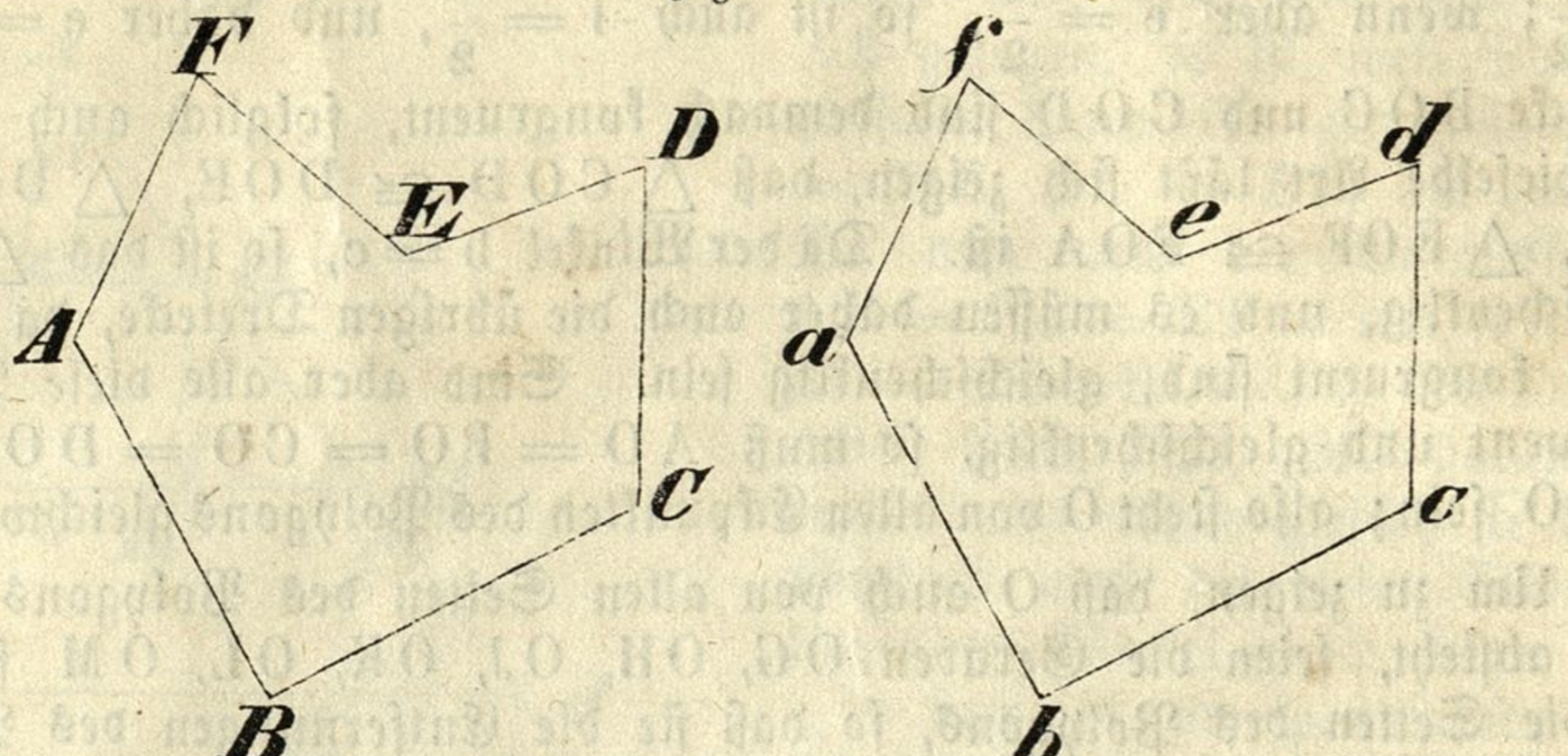
§. 87. Damit zwei Vielecke kongruent sein, d. h. über einander gelegt sich vollkommen decken können, müssen sie alle Seiten in derselben Ordnung gleich haben, und zwischen gleichen Seiten auch gleiche Winkel enthalten.

Zwei Vielecke sind demnach kongruent, wenn sie alle Seiten und alle Winkel nach der Ordnung wechselseitig gleich haben.

Die Vielecke A B C D E F und a b c d e f (Fig. 66) sind kongruent, wenn

A B = a b, B C = b c, C D = c d, D E = d e, E F = e f, F A = f a, und A = a, B = b, C = c, D = d, E = e F = f ist.

Fig. 66.



In Bezug auf die Kongruenz der Vielecke sind besonders die nachfolgenden Sätze wichtig.

§. 88. Zwei Parallelogramme sind kongruent, wenn sie zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel wechselseitig gleich haben.

Es sei (Fig. 67) in den Parallelogrammen ABCD und EFGH die Seite AB = EF, AD = EH, und der Winkel A = E, so muß ABCD ≅ AFGH

Fig. 67.

sein. Zieht man die Diagonalen BD und FH, so wird jedes der beiden Parallelogramme in zwei kongruente Dreiecke getheilt, also ABD ≅ BCD und △EFH ≅ FGH. Allein die Dreiecke ABD und EFH sind kongruent, weil sie nach der Voraussetzung zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gleich haben; daher müssen auch die Dreiecke BCD und FGH kongruent sein. Denkt man sich nun das Parallelogramm EFGH so auf ABCD gelegt, daß sich die kongruenten Dreiecke ABD und EFH decken, so müssen auch die Dreiecke BCD und FGH zusammenfallen. Die beiden Parallelogramme decken sich vollkommen, mithin sind sie kongruent.

§. 89. Aus dem hier bewiesenen Satze folgt:

a) Zwei Rechtecke sind kongruent, wenn sie zwei an einander stossende Seiten wechselseitig gleich haben.

b) Zwei Quadrate sind kongruent, wenn sie eine gleiche Seite haben.

c) Ein Parallelogramm ist durch zwei Seiten mit dem von ihnen eingeschlossenen Winkel, ein Rechteck durch zwei zusammenstossende Seiten, ein Quadrat endlich durch eine Seite vollkommen bestimmt.

§. 90. Man beweise noch folgende Sätze:

a) Zwei Quadrate sind kongruent, wenn sie gleiche Diagonalen haben.

b) Zwei Trapeze sind kongruent, wenn sie alle vier Seiten einzeln gleich haben.

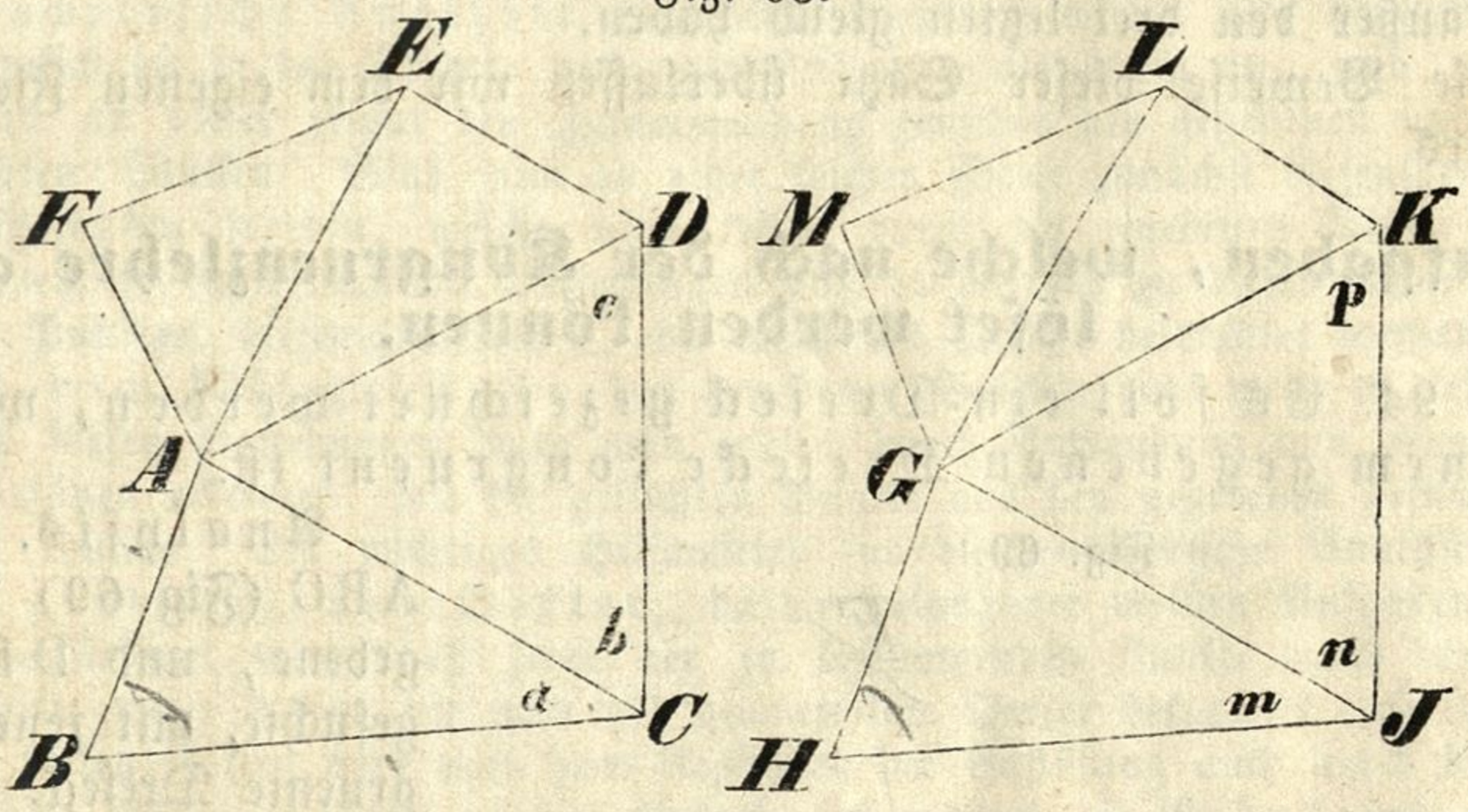
c) Zwei Vierecke sind kongruent, wenn sie drei Seiten und die zwischen ihnen liegenden Winkel wechselseitig gleich haben.

d) Zwei Vierecke sind kongruent, wenn sie zwei Seiten und alle Winkel gleich haben.

e) Jede Gerade, welche durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen eines Parallelogramms gezogen wird, theilt dieses in zwei kongruente Vierecke.

§ 91. Zwei Vielecke sind kongruent, wenn sie aus gleich vielen, der Ordnung nach kongruenten Dreiecken zusammengesetzt sind.

Fig. 68.



Es sei (Fig. 68) $\triangle$ ABC $\cong$ GHJ, $\triangle$ ACD $\cong$ GJK,
$\triangle$ ADE $\cong$ GKL, $\triangle$ AEF $\cong$ GLM;
so muß ABCDEF $\cong$ GHJKLM sein.

Wenn man sich das Polygon GHJKLM auf das Polygon ABCDEF so gelegt denkt, daß die kongruenten Dreiecke GHJ und ABC zusammenfallen, so werden sich auch die Dreiecke GJK und ACD decken, folglich auch die Dreiecke GKL und ADE, also auch GLM und AEF. Es fallen also die beiden Polygone selbst vollkommen zusammen, oder sie sind kongruent.

§. 92. Umgekehrt:

Wenn man in zwei kongruenten Polygonen von zwei gleichliegenden Eckpunkten zu den übrigen Eckpunkten Diagonalen zieht, so zerfallen dadurch die beiden Polygone in Dreiecke, welche der Ordnung nach kongruent sind.

Es sei das Vieleck ABCDEF $\cong$ GHJKLM, also
AB = GH, BC = HJ, CD = JK, DE = KL, EF = LM, FA = MG;
A = G, B = H, C = J, D = K, E = L, F = M.

Zieht man nun von den gleichnamigen Punkten A und G Diagonalen zu allen übrigen Eckpunkten der beiden Polygone, so ist zu beweisen, daß die gleichliegenden Dreiecke in den beiden Polygonen kongruent sein

müssen. — Wegen $AB = GH$, $BC = HJ$, $B = H$ ist erstlich das Dreieck $ABC \cong GHJ$; daher $AC = GJ$ und $a = m$. Weil $C = J$ und $a = m$, so ist auch $C - a = J - m$ oder $b = n$; ferner ist $AC = GJ$, $CD = JK$, daher $\triangle ACD \cong GJK$, und $AD = GK$, $c = p$. Auf dieselbe Weise kann auch die Kongruenz von je zwei folgenden Dreiecken nachgewiesen werden.

§. 93. a) Zwei reguläre Polygone von gleich viel Seiten sind kongruent, wenn sie eine gleiche Seite haben.

b) Zwei Polygone von gleich vielen Seiten sind kongruent, wenn sie alle gleichliegenden Seiten mit Ausnahme der beiden letzten, und alle gleichliegenden Winkel, außer dem von den zwei letzten Seiten eingeschlossenen, wechselseitig gleich haben.

c) Zwei Polygone sind kongruent, wenn sie alle Seiten, außer der letzten, und alle Winkel, außer den zwei dieser letzten Seite anliegenden, wechselseitig gleich haben.

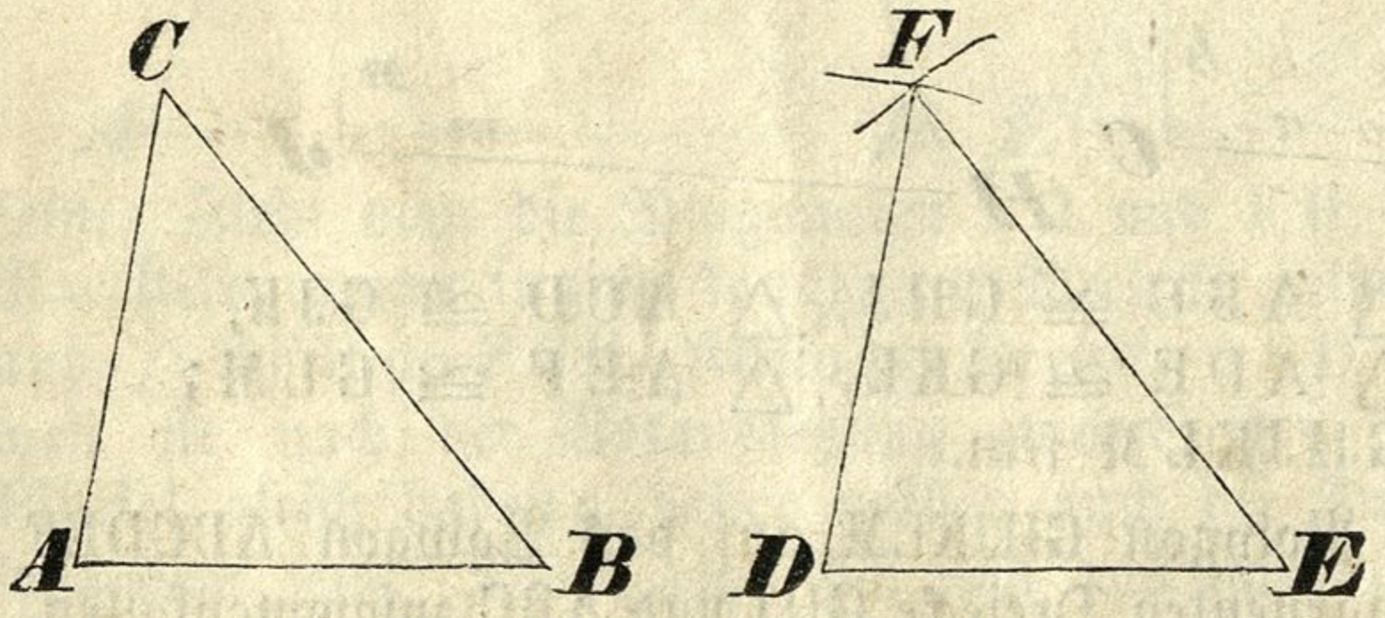
d) Zwei Polygone sind kongruent, wenn sie alle Seiten und die Winkel außer den drei letzten gleich haben.

Die Beweise dieser Sätze überlassen wir dem eigenen Fleiße des Anfängers.

4. Aufgaben, welche nach der Kongruenzlehre aufgelöset werden können.

§. 94. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, welches mit einem gegebenen Dreiecke kongruent ist.

Fig. 69.



Analysis. Es sei ABC (Fig. 69) das gegebene, und DEF das gesuchte, mit jenem kongruente Dreieck. Da die beiden Dreiecke wechselseitig gleiche Seiten haben sollen, so muß erstlich $DE = AB$ sein; es ist also DE bestimmt, und folglich sind auch die Punkte D und E gegeben. Es ist nun noch nöthig, die Lage des Punktes F zu bestimmen. Da $DF = AC$ sein soll, so folgt, daß der Punkt F von D die Entfernung AC haben müsse; der geometrische Ort aber für die Punkte, welche von D die Entfernung AC haben, ist ein Kreis, welcher aus D als Mittelpunkt mit AC als Halbmesser beschrieben wird (§. 4); somit muß F in der Periferie eines solchen Kreises liegen. Weil ferner auch $EF = BC$ sein soll, so folgt auf gleiche Weise, daß F in der Periferie eines aus E mit dem Halbmesser BC beschriebenen Kreises liegen müsse. Der Punkt F ist mithin der Durchschnitt zweier Kreise, welche aus D und E mit den Halbmessern AC und BC beschrieben werden.

Konstrukzion. Man mache $DE = AB$, beschreibe aus dem Mittelpunkte D mit dem Halbmesser AC und aus dem Mittelpunkte E mit dem Halbmesser BC Kreisbögen, die sich in F schneiden, und ziehe endlich DF und EF; so ist DEF das verlangte Dreieck.

Beweis. Nach der Konstrukzion ist $DE = AB$, $DF = AC$ und $EF = BC$, daher $\triangle DEF \cong ABC$.

Anmerkung. Durch eine *geometrische Aufgabe* wird die Forderung ausgesprochen, eine Figur zu verzeichnen, welche gegebenen Bedingungen entspricht. Jede Aufgabe erfordert eine *Auflösung*, d. i. die Angabe des Verfahrens, wodurch die in der Aufgabe verlangte Zeichnung oder *Konstrukzion* ausgeführt wird. Bei der Auflösung der Aufgaben kommt es beinahe in allen Fällen auf die Bestimmung von gewissen Punkten an, von deren Lage die Figur abhängt, und es werden dabei die verschiedenen geometrischen Lehrsätze zu Grunde gelegt. Die Konstrukzion erscheint manchmal als unmittelbare Folge eines bereits erwiesenen Lehrsatzes, meistens aber steht sie mit demselben nur in einem mehr versteckten mittelbaren Zusammenhange, oder beruhet gar auf der Kombinazion mehrerer Lehrsätze. Um bei den Aufgaben der ersteren Art zu der Auflösung zu gelangen, überlege man, ob nicht ein Lehrsatz bekannt ist, in welch m das in der Aufgabe Verlangte als Folgerung ausgesprochen wird; die Voraussetzung eines solchen Lehrsatzes zeigt sodann den Weg zur Konstrukzion. In jedem Falle aber muß der Konstrukzion eine verständige Beurtheilung der in der Aufgabe enthaltenen Bedingungen vorausgehen, welche durch die sogenannte *geometrische Analysis* wesentlich erleichtert wird. Die Analysis nimmt nämlich die in der Aufgabe verlangte Zeichnung als fertig an, und untersucht dann an dieser Figur den Zusammenhang zwischen den gegebenen und den gesuchten Stücken. Sind nun an einer solchen Figur zunächst diejenigen Punkte aufgefunden worden, welche unmittelbar durch die gegebenen Stücke bestimmt werden, so sucht man die Beziehungen auf, in welchen zu diesen schon bestimmten Punkten diejenigen stehen, die noch als gesucht betrachtet werden müssen, und deren Abhängigkeit von den gegebenen Stücken eine mehr mittelbare ist; aus diesen Beziehungen wird man endlich durch Anwendung von geometrischen Lehrsätzen erkennen, wie die gesuchten Punkte aus den gegebenen gefunden werden können. Ein wichtiges Hilfsmittel für die geometrische Analysis bilden die *geometrischen Oerter*, da die Lösung der meisten Aufgaben dadurch bewerkstelliget wird, daß jeder der zu bestimmenden Punkte durch den Durchschnitt zweier Linien, die man als geometrische Oerter betrachtet, erhalten wird. In vielen Fällen wird man zum Auffinden der Auflösung auch durch die *Analogie* mit einer schon gelösten Aufgabe, oder durch die *Redukzion* auf eine einfachere Aufgabe geleitet.

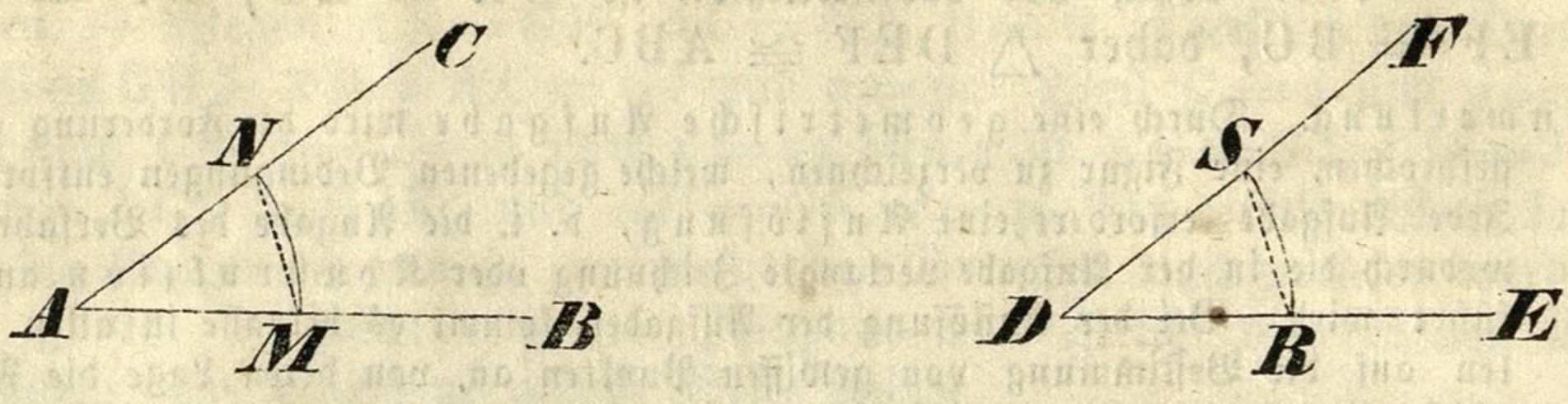
Ist die Analysis einer Aufgabe gehörig durchgeführt worden, so unterliegt die *Konstrukzion* keiner weiteren Schwierigkeit; man braucht dabei nur der Analysis Schritt für Schritt zu folgen, und die Punkte, welche zur Bestimmung der durch die Aufgabe verlangten Figur nöthig sind, genau in der Ordnung aus einander abzuleiten, in welcher sie in der Analysis als gegeben oder aus einander folgend nachgewiesen wurden.

Nun bedarf es noch des *Beweises*, daß durch die ausgeführte Konstrukzion wirklich allen in der Aufgabe gestellten Anforderungen entsprochen werde. Dieser ergibt sich meistens aus der Konstrukzion selbst, oder auch aus der Analysis, indem man in dem analytischen Entwicklungsgange zurückschreitend, die Schlüsse, wie sie in der Analysis aus einander hervorgehen, im Beweise gerade in umgekehrter Ordnung auf einander folgen läßt.

Zur vollständigen Durchführung einer Aufgabe gehören demnach vier Stücke: die *Aufgabe* selbst, die *Analysis*, die *Konstrukzion* und der *Beweis*.

§. 95. Es soll ein Winkel verzeichnet werden, der einem gegebenen Winkel gleich ist.

Fig. 70.



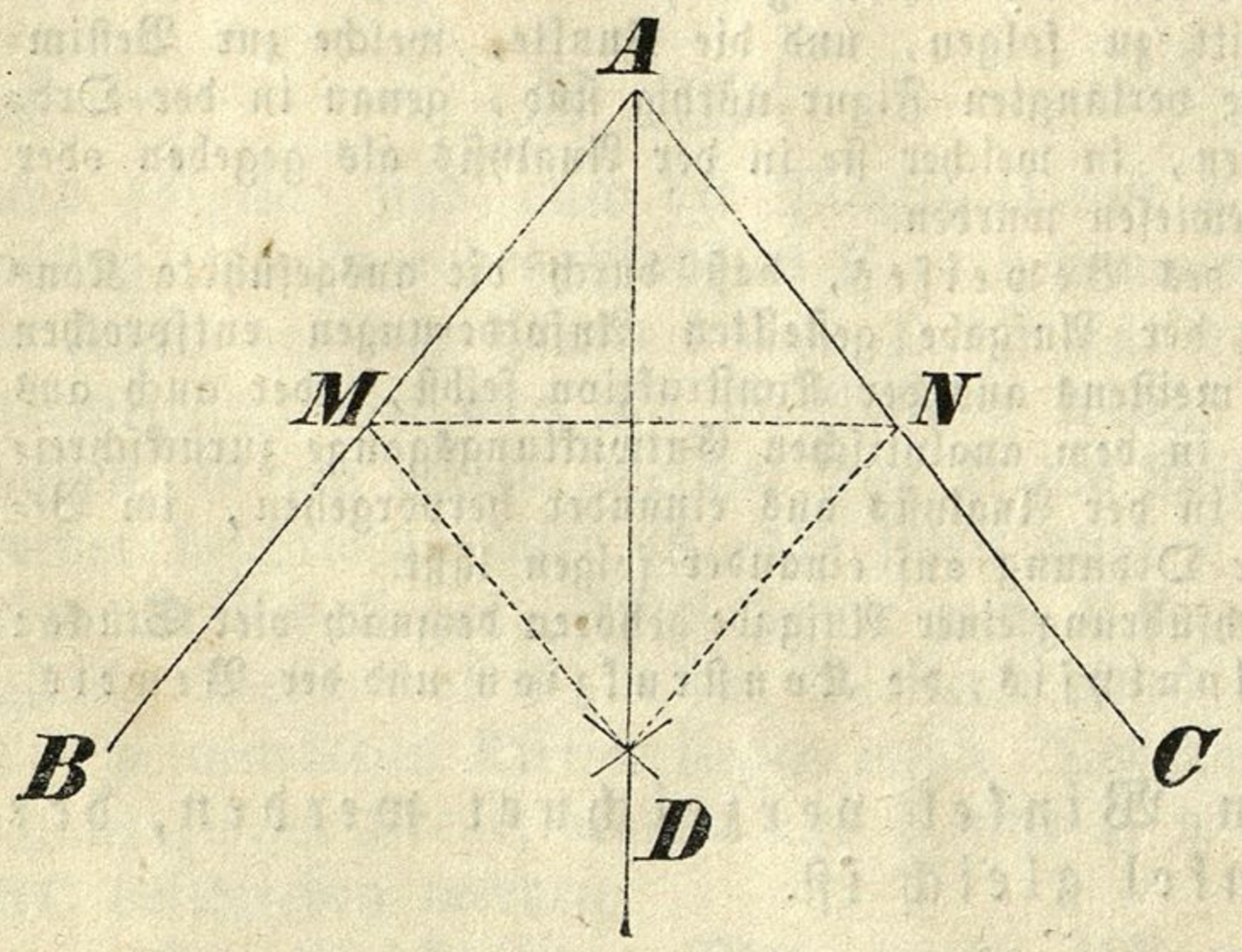
Analyſis. Es ſei (Fig. 70) BAC der gegebene, und EDF der geſuchte Winkel. Sollen dieſe zwei Winkel gleich ſein, ſo müſſen ſie ſich als gleichliegende Winkel in zwei kongruenten Dreiecken darſtellen laſſen. Zieht man daher zwiſchen den Schenkeln des Winkels A eine beliebige Gerade MN, am einfachſten eine ſolche, welche von den Schenkeln gleiche Stücke AM und AN abſchneidet; ſo kommt es zur Beſtimmung des Winkels D nur auf die Konſtrukzion eines Dreieckes DRS an, welches mit AMN kongruent iſt, und es reduzirt ſich daher die Löſung der vorliegenden Aufgabe auf die im §. 94 entwickelte Konſtrukzion.

Konſtrukzion. Man ziehe eine Gerade DE, beſchreibe aus A mit einem beliebigen Halbmeſſer einen Bogen, welcher die Schenkel des gegebenen Winkels in M und N ſchneidet; mit demſelben Halbmeſſer beſchreibe man auch aus D einen Bogen, welcher die Gerade DE in R durchſchneidet; endlich beſchreibe man mit dem Abſtande MN als Halbmeſſer aus R einen Kreisbogen, welcher den von D aus beſchriebenen Bogen in S ſchneidet; zieht man nun durch D und S die Gerade DF, ſo iſt der EDF der verlangte Winkel.

Beweis. Man ziehe die Geraden MN und RS, und vergleiche die Dreiecke AMN und DRS. Da AM = DR, AN = DS und MN = RS, ſo iſt △ AMN ≅ DRS, und ſomit der Winkel A = D.

§. 96. Es ſoll ein gegebener Winkel BAC (Fig. 71) halbirt werden.

Fig. 71.



Analyſis. Man denke nach, ob nicht ein Lehrſatz vorgekommen iſt, in welchem ausgeſprochen wird, daß unter einer beſtimmten Bedingung eine Gerade einen Winkel halbirt; man wird ſich ſogleich an den im §. 72 nachgewieſenen Satz erinnern. Die Vorausſetzung dieſes Lehrſatzes zeigt nun den Weg zur Auflöſung der vorgelegten Aufgabe. Es handelt ſich nämlich zuerſt darum, ein gleichſchenkliges Dreieck zu verzeichnen, worin der gegebene Winkel BAC als Winkel am Scheitel vorkommt; dieſes geſchieht, indem man von den Schenkeln des

Winkels BAC gleiche Stücke AM und AN abschneidet, und die MN zieht. Dann braucht man nur noch über dieser Grundlinie MN ein zweites gleichschenkliges Dreieck MND zu beschreiben, und durch die Scheitel die Gerade AD zu ziehen.

Konstrukzion. Man schneide von A aus die gleichen Stücke AM und AN ab, und beschreibe aus den Punkten M und N mit einem gleich großen Halbmesser Bögen, welche sich in D schneiden; zieht man nun AD, so wird dadurch die Aufgabe gelöst.

Beweis. Denkt man sich die Geraden MN, DM, DN gezogen, wodurch über derselben Grundlinie MN zwei gleichschenklige Dreiecke konstruirt erscheinen; so muß die Gerade AD, welche die beiden Scheitel verbindet, den Winkel am Scheitel A halbiren.

§. 97. Die Voraussetzung desselben Lehrsatzes (§. 72) führt auch auf die Auflösung der folgenden Aufgaben:

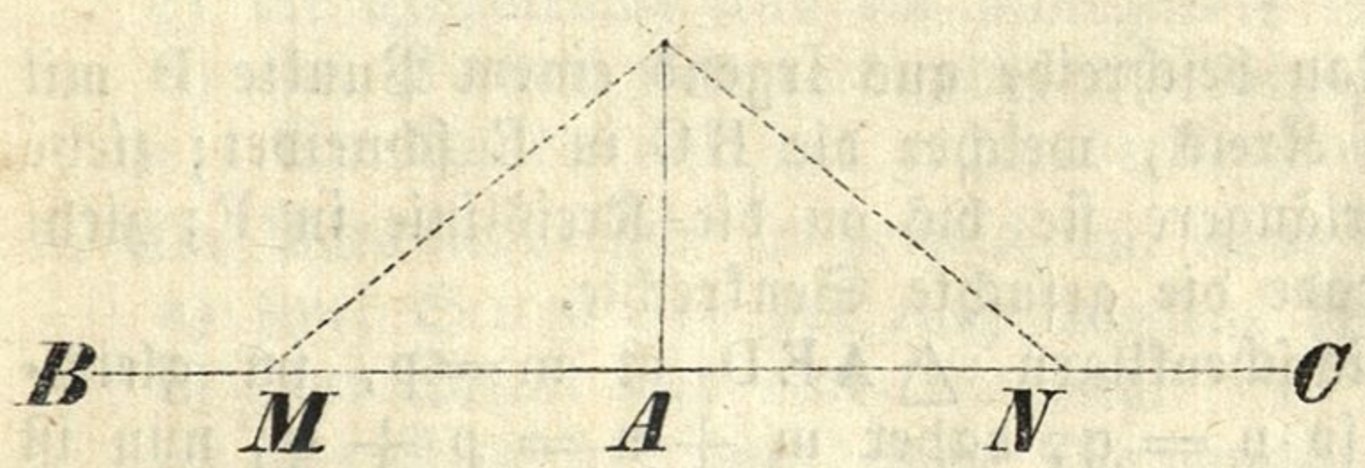
a) Eine gegebene gerade Linie zu halbiren.

b) Von einem Punkte außerhalb einer Geraden auf diese eine Senkrechte zu fällen.

§. 98. Es soll in einem gegebenen Punkte A (Fig. 72) einer Geraden BC auf diese eine Senkrechte errichtet werden.

a) Wenn der gegebene Punkt gegen die Mitte der gegebenen Geraden liegt.

Fig. 72.



Analysis. Ist AD die gesuchte Senkrechte, so wird die Lage derselben offenbar bekannt sein, sobald in ihr außer dem Punkte A noch ein zweiter Punkt D bestimmt ist. Um nun diesen Punkt D zu finden, ziehen wir zur BC zwei Gerade DM und DN, wodurch das Dreieck DMN gebildet wird; und es folgt aus §. 73, daß AD $\perp$ BC sein müsse, sobald DMN ein gleichschenkliges Dreieck, und A die Mitte seiner Grundlinie MN ist. Der zu bestimmende Punkt D liegt also im Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes, dessen Grundlinie in die gegebene Gerade so hineinfällt, daß der gegebene Punkt A als Mittelpunkt der Grundlinie erscheint.

Konstrukzion. Man schneide von A aus die gleichen Stücke AM und AN ab, und beschreibe aus den Punkten M und N mit einem gleich großen Halbmesser Bögen, welche sich in D schneiden; zieht man nun AD, so wird dadurch die Aufgabe gelöst.

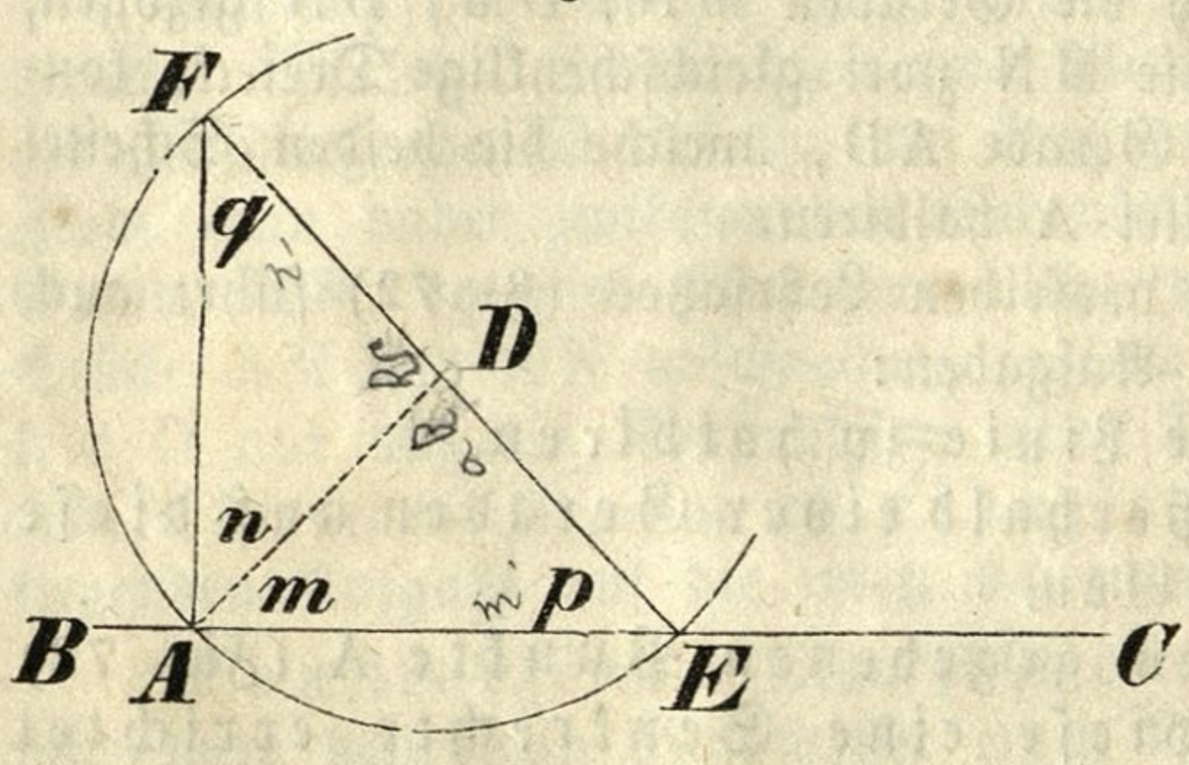
Beweis. AM = AN, DM = DN, AD = AD, daher $\triangle$ DAM $\cong$ DAN, und somit $\angle$ DAM = DAN oder DA $\perp$ BC.

Die vorliegende Aufgabe hätte auch nach der Analogie mit der im §. 96 betrachteten gelöst werden können. Wenn nämlich AB und AC mit einander eine gerade Linie bilden, so können sie als Schenkel eines Winkels von 180° betrachtet werden, und wenn daher verlangt wird,

man solle auf BC in A eine Senkrechte errichten, d. i. in A an AB einen Winkel von 90° konstruiren, so ist dieß übereinstimmend mit der Aufgabe, den Winkel BAC = 180° zu halbiren. In der That paßt für die hier behandelte Aufgabe und für jene in §. 96 wortgetreu dieselbe Konstrukzion.

2) Wenn der gegebene Punkt A (Fig. 73) mehr gegen den einen Endpunkt der gegebenen Geraden BC liegt.

Fig. 73.



Analysis. Man denke sich die Aufgabe gelöst, und es sei AF die verlangte Senkrechte. Um die Lage des Punktes F zu finden, ziehen wir die beliebige Gerade EF. In dem dadurch entstehenden rechtwinkligen Dreiecke FAE ist

$$p + q = R,$$

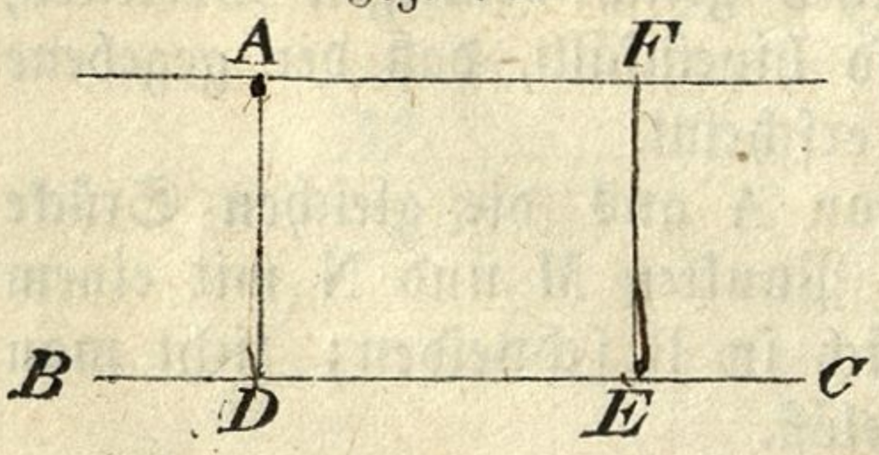
und es muß sich daher immer auch der rechte Winkel FAE durch eine Gerade so theilen lassen, daß die Winkel m und n einzeln den Winkeln p und q gleich seien. Es sei AD diese Gerade, so ist m = p und n = q, daher AD = DE und AD = DF; woraus folgt, daß E, A und F in der Periferie eines Kreises liegen, welcher aus D mit dem Halbmesser DA beschrieben wird, und daß F der Endpunkt des von E aus gezogenen Durchmessers sei.

Konstrukzion. Man beschreibe aus irgend einem Punkte D mit dem Halbmesser DA einen Kreis, welcher die BC in E schneidet; ziehe die Gerade ED, und verlängere sie bis an die Kreislinie in F; zieht man AF, so ist diese Gerade die gesuchte Senkrechte.

Beweis. Im gleichschenkligen △ AED ist m = p, im gleichschenkligen △ ADF eben so n = q, daher m + n = p + q; nun ist m + n + q + p = 2R, daher m + n = R, also FA ⊥ BC.

§. 99. Durch einen Punkt A (Fig. 74) außerhalb einer Geraden BC mit dieser eine Parallele zu ziehen.

Fig. 74.



Analysis. Es sei AF die gesuchte Parallele, so handelt es sich mit Rücksicht auf den in §. 81 abgeleiteten Folgesatz nur darum, den Punkt F so zu bestimmen, daß er von der Geraden BC dieselbe Entfernung hat, als der Punkt A. Man hat zu diesem Ende folgende

Konstrukzion: Man fälle von A die Senkrechte AD auf BC, errichte in irgend einem Punkte E dieser letzteren darauf die Senkrechte EF, und mache diese der AD gleich. Zieht man nun durch A und F eine gerade Linie, so ist diese mit AB parallel.

Beweis. AD = EF und AD ∥ EF (§. 29), daher ist ADEF ein Parallelogramm (§. 81), und somit AF ∥ DE.

Zwei andere Auflösungen dieser Aufgabe können aus §. 29 und §. 23 hergeleitet werden.

§ 100. Aufgaben zur Selbstauffindung der Auflösungen.

1. Ein Dreieck zu verzeichnen, wenn gegeben sind:
   a) eine Seite und die beiden anliegenden Winkel;
   b) eine Seite, ein anliegender und ein gegenüberliegender Winkel;
   c) zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel;
   d) zwei Seiten mit dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel;
   e) alle drei Seiten.

2. Ein gleichschenkliges Dreieck zu verzeichnen, wenn gegeben sind:
   a) die Grundlinie und ein anliegender Winkel;
   b) die Grundlinie und der Winkel am Scheitel;
   c) ein Schenkel und ein Winkel an der Grundlinie;
   d) ein Schenkel und der Winkel am Scheitel;
   e) die Grundlinie und die Höhe;
   f) ein Schenkel und die Höhe;
   g) die Höhe und der Winkel am Scheitel.



3. Ein gleichseitiges Dreieck zu konstruiren, wenn gegeben ist:
   a) eine Seite;
   b) die Höhe.

4. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruiren, wenn gegeben sind:
   a) die beiden Katheten;
   b) die Hypotenuse und eine Kathete;
   c) die Hypotenuse und ein anliegender Winkel;
   d) eine Kathete und der anliegende spitzige Winkel;
   e) eine Kathete und der gegenüberliegende Winkel.

5. Ein Parallelogramm zu verzeichnen, wenn gegeben sind:
   a) zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel;
   b) zwei Seiten und eine Diagonale;
   c) eine Seite und die beiden Diagonalen;
   d) die Diagonalen und der von ihnen eingeschlossene Winkel;
   e) die Grundlinie, die zweite Seite und die Höhe.

6. Einen Rhombus zu konstruiren, wenn gegeben sind:
   a) eine Seite und ein Winkel;
   b) eine Seite und die Höhe;
   c) eine Seite und eine Diagonale.

7. Ein Rechteck zu konstruiren, wenn gegeben sind:
   a) zwei Seiten;
   b) eine Seite und die Diagonale;
   c) eine Seite und der ihr gegenüberliegende Winkel der beiden Diagonalen.

8. Ein Quadrat zu beschreiben, wenn eine Seite gegeben ist.

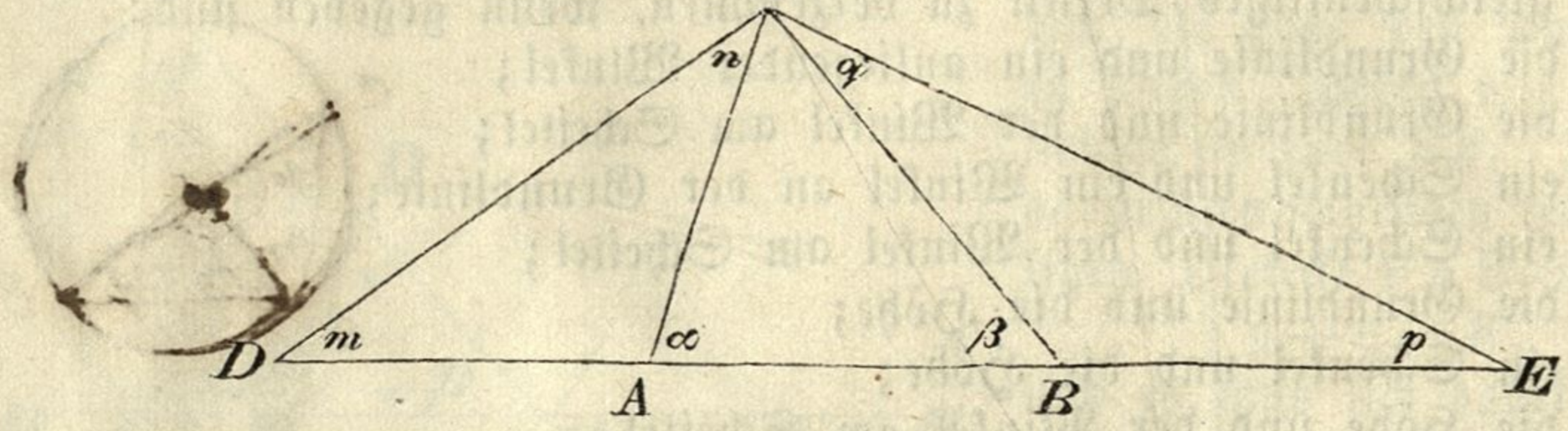
9. Ein Trapez zu konstruiren, wenn gegeben sind:
   a) alle vier Seiten;
   b) drei Seiten und ein Winkel.

10. Einen rechten Winkel in drei gleiche Theile zu theilen [§. 64, b)].

11. Eine gegebene Gerade in mehrere gleiche Theile zu theilen (§. 84).
12. Den Mittelpunkt eines regelmäßigen Vieleckes zu finden (§. 85).
13. Ein Vieleck zu konstruiren, das mit einem gegebenen Vielecke kongruent ist (§. 91).

§. 101. Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem zwei beliebige Winkel und die Summe aller drei Seiten gegeben sind (Fig. 75).

Fig. 75.



Analysis. Es sei ABC das verlangte Dreieck, welches die gegebenen Winkel $BAC = \alpha$, $ABC = \beta$, und die gegebene Summe der drei Seiten $AB + BC + AC = s$ hat. Um die Summe der drei Seiten in Verbindung mit dem Dreiecke ABC darzustellen, wird es am zweckmäßigsten sein, die Seite AB nach beiden Seiten zu verlängern, so daß $AD = AC$ und $BE = BC$ wird. Die Gerade DE ist dann eine Linie von gegebener Größe s, und es sind dadurch auch die Punkte D und E als gegeben zu betrachten. Man wird von selbst darauf verfallen, daß man, um von den bekannten Punkten D und E aus die Lage des noch als unbekannt betrachteten Punktes C zu bestimmen, die Geraden DC und EC ziehen müsse, wodurch man die zwei gleichschenkligen Dreiecke CAD und CBE erhält, in denen somit $m = n$ und $p = q$ ist. Ueberlegt man ferner, daß α ein äußerer Winkel des Dreieckes CAD, und β ein äußerer Winkel des Dreieckes CBE ist, so sieht man auch sogleich, daß die Winkel m, n, p, q leicht bestimmt werden können; es ist nämlich

$$\alpha = m + n = 2m = 2n \text{ und } \beta = p + q = 2p = 2q,$$

daher

$$m = n = \frac{\alpha}{2} \text{ und } p = q = \frac{\beta}{2}.$$

Durch die bekannten Winkel m und p ist nun auch die Lage der Linien CD und CE gegen die gegebene Gerade DE, und daher auch der Punkt C bestimmt. Ist nun C bekannt, so bestimmen die Winkel n und q die Lage der Linien CA und CB gegen die bekannten Linien CD und CE, und daher auch die Punkte A und B in der Geraden DE, wodurch das gesuchte Dreieck ABC vollkommen bestimmt wird.

Konstrukzion. Man mache $DE = s$, trage in D und E die Winkel $m = \frac{\alpha}{2}$ und $p = \frac{\beta}{2}$ auf, deren Schenkel sich in C schneiden; in diesem Punkte konstruire man wieder die Winkel $n = \frac{\alpha}{2}$ und $q = \frac{\beta}{2}$, de-

ren Schenkel die Gerade DE in A und B durchschneiden; ABC ist dann das verlangte Dreieck.

Beweis. Nach der Konstrukzion ist m = n und p = p, daher sind CAD und CBE gleichschenklige Dreiecke, und somit AC = AD und BC = BD; folglich

$$AB + AC + BC = AB + AD + BE = DE = s,$$

so daß das Dreieck ABC wirklich die gegebene Seitensumme hat. Ferner ist

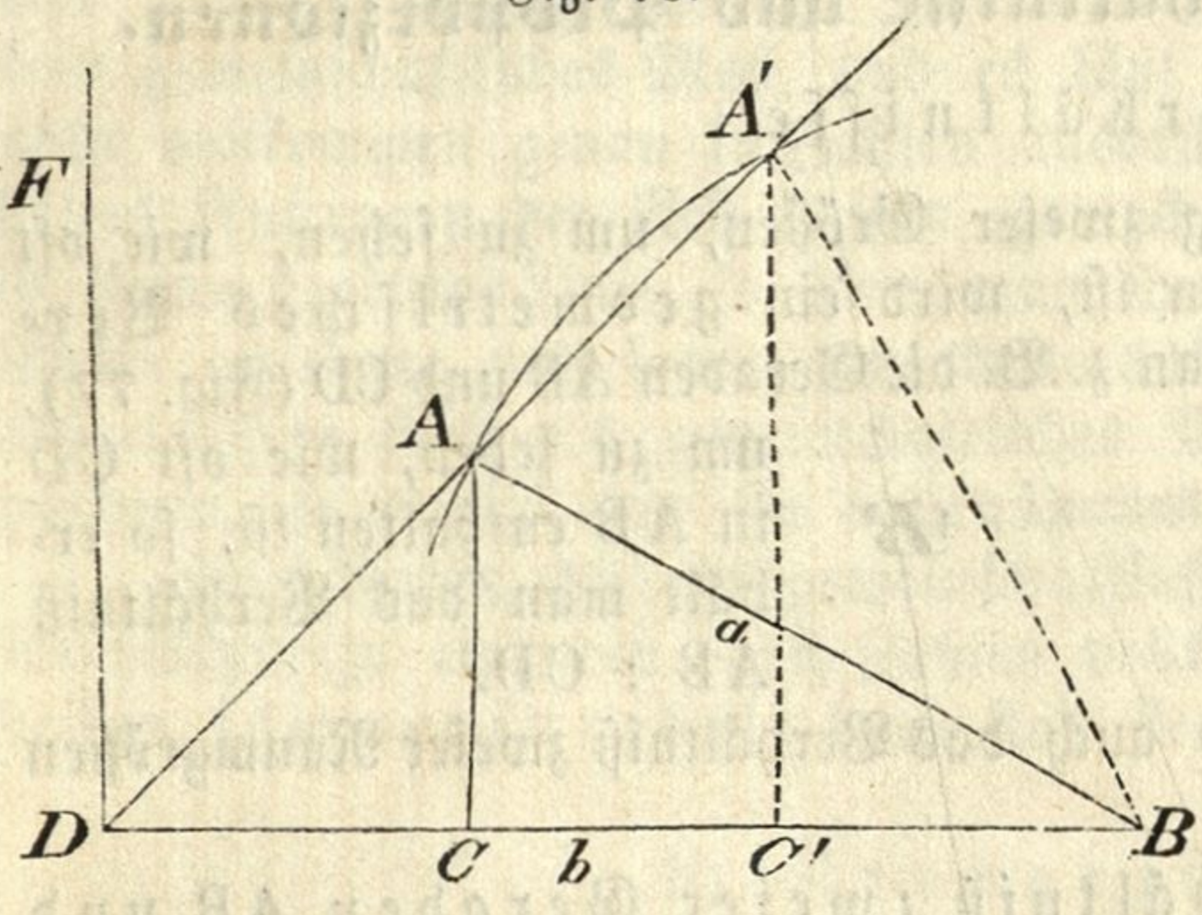
$$BAC = m + n = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha;$$

$$ABC = p + q = \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = \beta \text{ und}$$

das Dreieck ABC hat also auch die beiden gegebenen Winkel α und β, und genügt daher vollständig den Bedingungen der vorgelegten Aufgabe.

§. 102. Ein rechtwinkliges Dreieck zu verzeichnen, von welchem die Hypotenuse und die Summe der Katheten gegeben ist.

Fig. 76.



Analysis. Es sei ABC (Fig. 76) das gesuchte Dreieck, von welchem AB = a und AC + BC = b gegeben ist. Um die Summe der beiden Katheten wirklich darzustellen, wird man BC bis D verlängern, so daß CD = AC sei. Da nun die BD = b bekannt ist, so sind dadurch auch die Punkte B und D gegeben. Da ferner AC = CD, also ADC = CAD, und folglich $ADC = \frac{R}{2}$ ist, so ist dadurch auch die Lage der DA gegeben. Da AB = a der Größe nach bekannt ist, so ist hiedurch auch der Punkt A auf der DA bestimmt. Nun handelt es sich noch um die Bestimmung des Punktes C, von welchem bekannt ist, daß er von A und D gleiche Entfernung hat, und daher nach §. 69, a) in der Senkrechten liegen muß, welche auf der AD in ihrer Mitte errichtet wird; mithin ist C der Durchschnitt dieser Senkrechten mit der DB. Kürzer aber findet man den Punkt C, wenn man von A auf DB eine Senkrechte fällt.

Konstrukzion. Man ziehe DB = b, errichte DF ⊥ DB, und halbire den rechten Winkel BDF durch die Gerade DA; dann beschreibe man aus B mit einem Halbmesser = a einen Kreisbogen, welcher die DA in A durchschneidet, und fälle von diesem Punkte auf BD die Senkrechte AC, so ist ACB das verlangte Dreieck.

Beweis. AB = a; ferner AC = CD, weil $CDA = CAD = \frac{R}{2}$ ist, daher AC + BC = CD + BC = DB = b.

Durch die voranstehende Konstrukzion erhält man zwei Dreiecke A C B und A′C′B, die aber, wie leicht zu sehen, einander kongruent sind.

§. 103. Durch eine ähnliche Analysis gelangt man zu den Konstrukzionen für folgende Aufgaben, deren Auflösung wir dem eigenen Scharfsinne des Schülers überlassen:

1. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruiren, von welchem die Hypotenuse und die Differenz der beiden Katheten gegeben sind.
2. Ein Dreieck zu verzeichnen, von welchem eine Seite, und die Summe der beiden anderen Seiten nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel gegeben sind.
3. Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem gegeben sind: eine Seite, die Differenz der beiden anderen Seiten und der von diesen eingeschlossene Winkel.
4. Ein Dreieck zu konstruiren, von welchem eine Seite, ein anliegender Winkel und die Summe der beiden anderen Seiten gegeben sind.

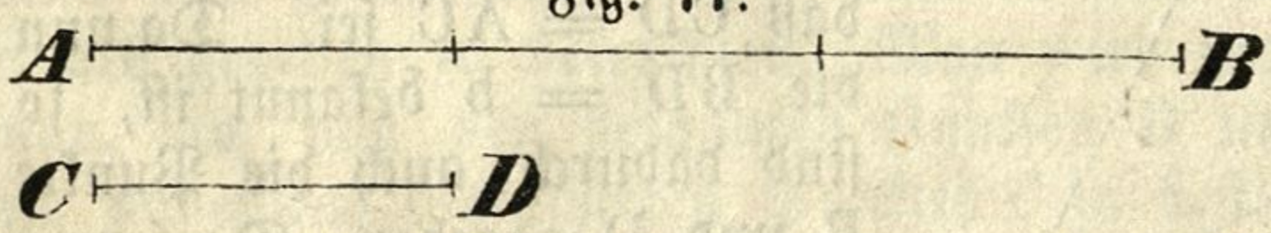
IV. Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.

1. Geometrische Verhältnisse und Proporzionen.

a) Verhältnisse.

§. 104. Die Vergleichung zweier Größen, um zu sehen, wie oft die eine in der anderen enthalten ist, wird ein geometrisches Verhältniß genannt. Vergleicht man z. B. die Geraden AB und CD (Fig. 77), um zu sehen, wie oft CD in AB enthalten ist, so erhält man das Verhältniß AB : CD.

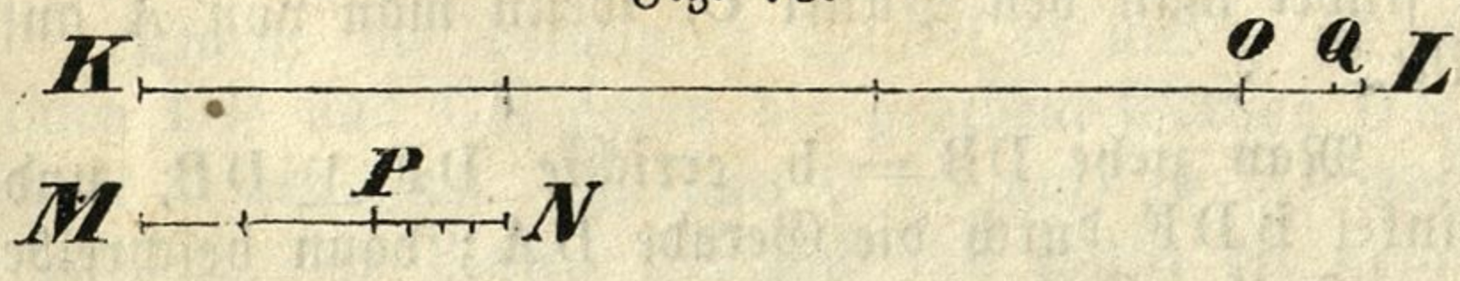
Fig. 77.



Wie jedes Verhältniß, wird auch das Verhältniß zweier Raumgrößen durch Zahlen ausgedrückt.

§. 105. Um das Verhältniß zweier Geraden AB und CD in Zahlen darzustellen, trage man die kleinere Gerade CD auf der größeren so oft auf, als es möglich ist. Bleibt nach dem mehrmaligen Auftragen kein Rest übrig, so ist die kleinere Gerade selbst ein Maß von der größeren. Da in Fig. 77 das Maß CD in AB 3mal, und in CD 1mal enthalten ist, so verhalten sich die Geraden A B und CD wie 3 : 1.

Fig. 78.



Wäre aber die kleinere Gerade MN (Fig. 78) in der größern KL nicht genau enthalten, so daß nach dem 3maligen Auftragen noch ein Rest O L übrig bleibt, der natürlich kleiner ist als M N, so müßte man eine dritte Linie suchen, welche ein gemeinschaftliches Maß von KL und MN ist. Dieses geschieht auf folgende Art. Nachdem man die kleinere Gerade MN auf der größern KL aufgetragen hat, untersucht man, wie oft der Rest O L in der kleinern

Linie MN enthalten ist, indem man OL auf MN so oft aufträgt als es angeht; es sei OL in MN 2mal enthalten, und es bleibe PN als Rest. Dieser Rest wird wieder auf dem frühern Reste OL aufgetragen; es sei dieses 1mal möglich, mit dem Reste QL. Der Rest QL wird ferner auf PN so oft aufgetragen, als es möglich ist; es sei QL in PN genau 4mal enthalten, so daß kein Rest übrig bleibt. QL ist nun das größte gemeinschaftliche Maß zwischen den beiden Geraden KL und MN. Um das Zahlenverhältniß zwischen diesen zwei geraden Linien aufzustellen, hat man

$$PN = 4QL,$$
$$OL = PN + QL = 5QL,$$
$$MN = 2OL + PN = 14QL,$$
$$KL = 3MN + OL = 47QL.$$

Da also das Maß QL in KL 47mal, in MN 14mal enthalten ist, so haben die Geraden KL und MN das Verhältniß 47 : 14.

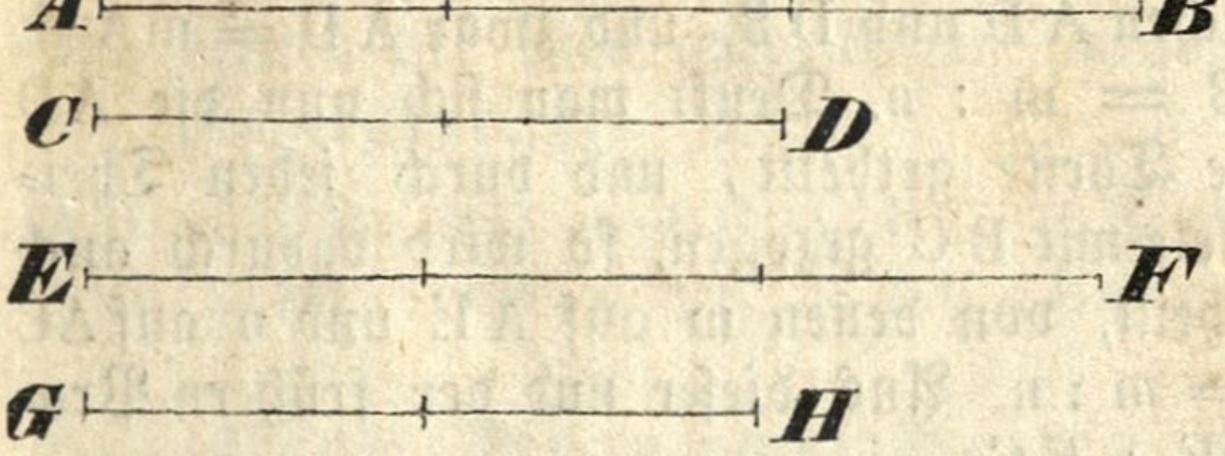
Da der nach dem Auftragen gebliebene Rest zwar kleiner als der vorhergehende Rest sein muß, demselben übrigens keine Grenze vorgeschrieben ist; so ist es möglich, daß das Auftragen des jedesmaligen Restes auf dem vorhergehenden Reste ohne Ende fortgesetzt wird, und doch immer ein Rest übrig bleibt. In diesem Falle haben die zwei Geraden kein gemeinschaftliches Maß, und es läßt sich ihr Verhältniß zu einander nicht vollkommen genau in Zahlen ausdrücken. Da jedoch durch wiederholtes Auftragen der Rest kleiner gemacht werden kann, als jede noch so kleine gegebene Linie, so kann man ihn endlich als eine verschwindende Größe ansehen, und somit ganz vernachläßigen. Wird dann der letzte aufgetragene Rest als gemeinschaftliches Maß der beiden Geraden angenommen, so erhält man ein angenähertes Verhältniß zwischen denselben.

Zwei Linien, die ein gemeinschaftliches Maß haben, so daß sich ihr Verhältniß zu einander durch Zahlen vollkommen genau bestimmen läßt, heißen *kommensurabel*; sonst sind sie *inkommensurabel*.

b) *Proporzionen.*

§ 106. Zwei Verhältnisse, welche dasselbe Zahlenverhältniß geben, sind einander *gleich*.

Fig. 79.



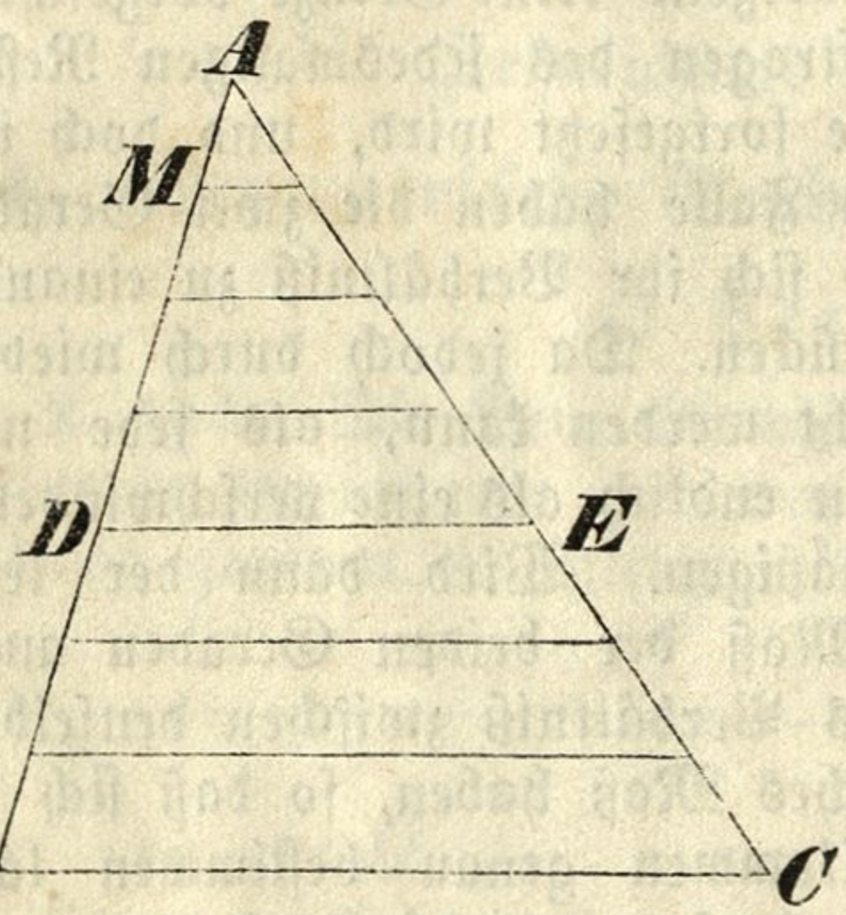
Die Verhältnisse AB : CD und EF : GH (Fig. 79) sind einander gleich, weil beide das Zahlenverhältniß 3 : 2 geben. Die Gleichstellung von zwei gleichen geometrischen Verhältnissen wird nun eine *geometrische Proporzion* genannt, z. B. AB : CD = EF : GH.

Eine Proporzion, in welchen die beiden mittlern Glieder gleich sind, heißt eine *stetige Proporzion*; das mittlere Glied wird die *mittlere geometrische Proporzionale* zwischen den beiden äußern Gliedern, und das vierte Glied die *dritte stetige Proporzionale* zu dem ersten und mittlern Gliede genannt.

Wenn zwei Arten von Raumgrößen so von einander abhängen, daß das Verhältniß zwischen je zwei Größen der einen Art gleich ist dem Verhältnisse der beiden zugehörigen Größen der andern Art, in derselben Ordnung genommen; so sagt man: die beiden Arten von Raumgrößen stehen in geradem Verhältnisse, oder sie sind gerade proporzionirt. Wenn hingegen zwei Arten von Raumgrößen so von einander abhängen, daß das Verhältniß zwischen je zwei Größen der einen Art gleich ist dem Verhältnisse der zwei zugehörigen Größen der andern Art, aber in umgekehrter Ordnung genommen; so sagt man: die beiden Arten von Raumgrößen stehen in verkehrtem Verhätnisse, oder sie sind verkehrt proporzionirt.

§. 107. Hinsichtlich der Proporzionalität der Dreieckseiten sind besonders folgende Sätze wichtig:

Fig. 80.



Wenn man durch irgend einen Punkt einer Dreieckseite eine Parallele mit einer andern Seite zieht, so sind die Stücke der beiden geschnittenen Seiten sowohl unter einander, als mit den ganzen Seiten gerade proporzionirt.

Voraussetzung: Es sei DE ∥ BC (Fig. 80).

Behauptung: Es muß
AD : DB = AE : EC, ferner
AB : AD = AC : AE, und
AB : DB = AC : EC sein.

Beweis. Zunächst ist zu zeigen, daß die Proporzion

$$AD : DB = AE : EC$$

Statt findet.

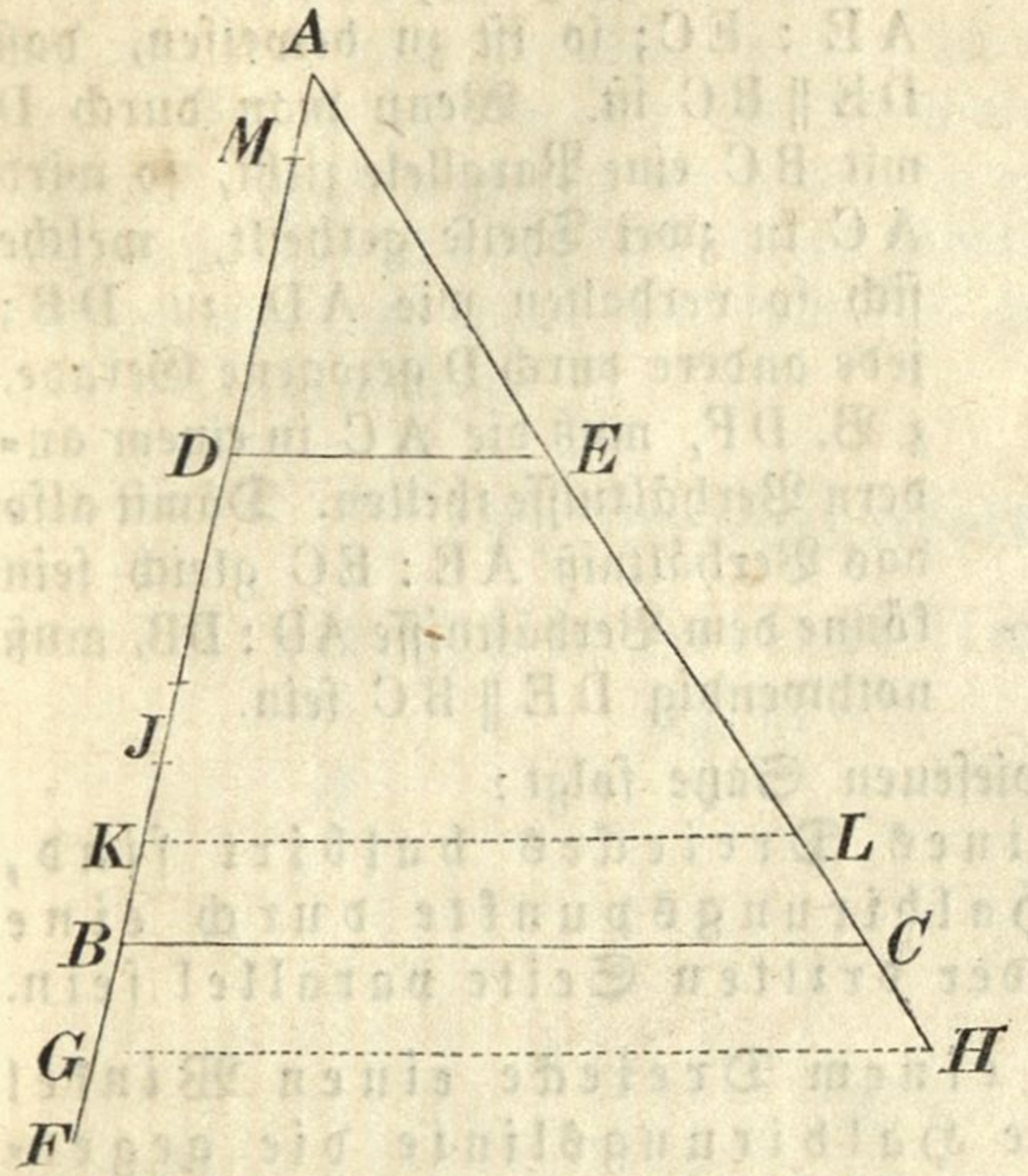
Dabei unterscheiden wir zwei Fälle:

a) Die Geraden AD und DB seien kommensurabel; es sei nämlich AM ein gemeinschaftliches Maß zwischen AD und DB, und zwar AD = mAM, DB = nAM, so ist AD : DB = m : n. Denkt man sich nun die AD in m, und die DB in n gleiche Theile getheilt, und durch jeden Theilungspunkt der AB eine Parellele mit BC gezogen, so wird dadurch auch AC in lauter gleiche Theile getheilt, von denen m auf AE und n auf AC kommen; es ist also AE : EC = m : n. Aus dieser und der frühern Proporzion folgt AD : DB = AE : EC.

b) Sind die Geraden AD und DB inkommensurabel, und würde in diesem Falle die Proporzion AD : DB = AE : EC nicht Statt finden, so müßte das Verhältniß AD : DB größer oder kleiner als AE : EC sein.

Wäre nun erstlich AD : DB > AE : EC, so sei AD : DF = AE : EC (Fig. 81), wo DF > DB ist.

Fig. 81.



Wird nun die AD in lauter gleiche Theile getheilt, deren jeder kleiner ist als BF, und trägt man einen solchen Theil von D gegen F hin auf, so muß wenigstens ein Theilungspunkt zwischen B und F, z. B. in G fallen. Zieht man nun GH ∥ DE, so findet, weil nun AD und DG kommensurabel sind, die Proporzion AD : DG = AE : EH Statt. Aber nach der Voraussetzung wäre AD : DF = AE : EC, daher müßte DG : DF = EH : EC sein, was jedoch eine Ungereimtheit in sich enthält, da DG < DF, aber EH > EC ist. Es kann daher nicht AD : DB > AE : EC sein.

Wäre ferner AD : DB < AE : EC, so sei AD : DJ = AE : EC, wo DJ < DB ist. Wird wieder die AD in gleiche Theile getheilt, deren jeder kleiner als BJ ist, und ein solcher Theil auf DB aufgetragen, so wird wenigstens ein solcher Theilungspunkt zwischen B und J, z. B. in K, zu liegen kommen. AD und DK sind dann kommensurabel, und es findet, wenn man KL ∥ DE zieht, die Proporzion AD : DK = AE : EL Statt; aber nach der Voraussetzung wäre AD : DJ = AE : EC; es müßte also auch DK : DJ = EL : EC, und da DK > DJ, auch EL > EC sein, was nicht ist. Es kann also auch nicht AD : DB < AE : EC sein.

Da also das Verhältniß AD : DB, auch wenn diese Geraden inkommensurabel sind, weder größer noch kleiner sein kann, als das Verhältniß AE : EC, so muß auch hier

$$AD : DB = AE : EC$$

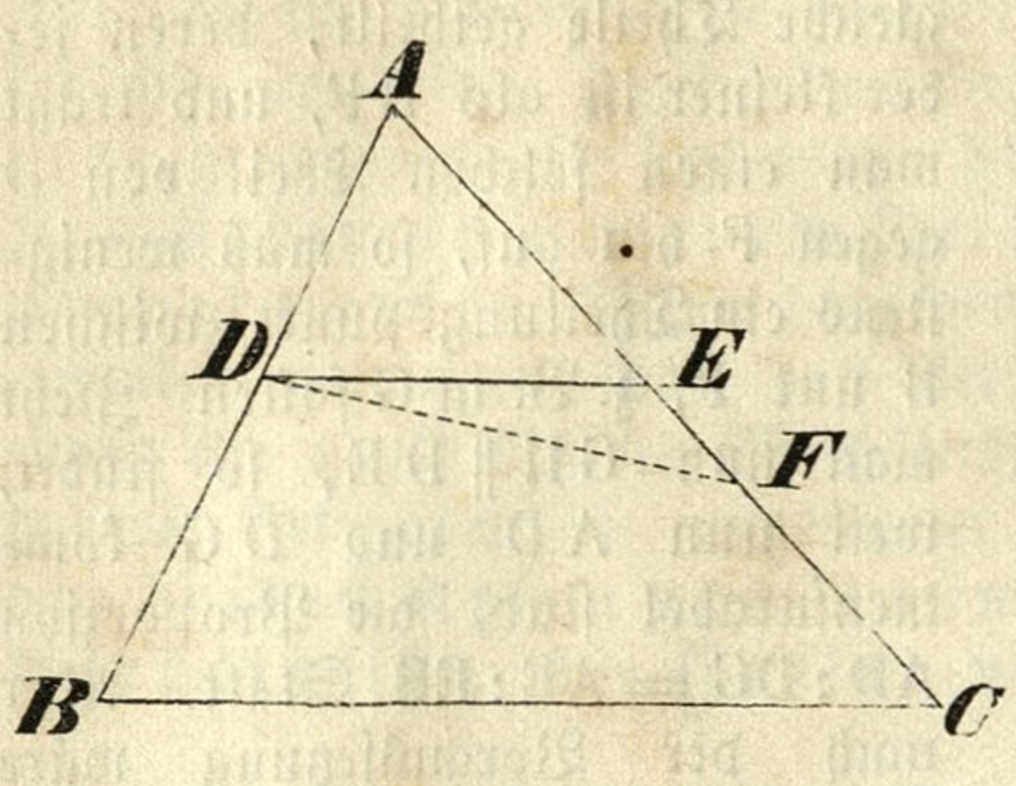
sein.

Aus dieser Proporzion ergibt sich auch die Richtigkeit der zweiten und dritten der oben aufgestellten Proporzionen. Man hat nämlich nach der Proporzionslehre

AD + DB : AD = AE + EC : AE oder AB : AD = AC : AE, und
AD + DB : DB = AE + EC : EC oder AB : DB = AC : EC.

§. 108. **Wenn zwei Seiten eines Dreieckes von einer Geraden so geschnitten werden, daß die Abschnitte gerade proporzionirt sind; so ist die schneidende Gerade mit der dritten Seite des Dreieckes parallel.**

Fig. 82.

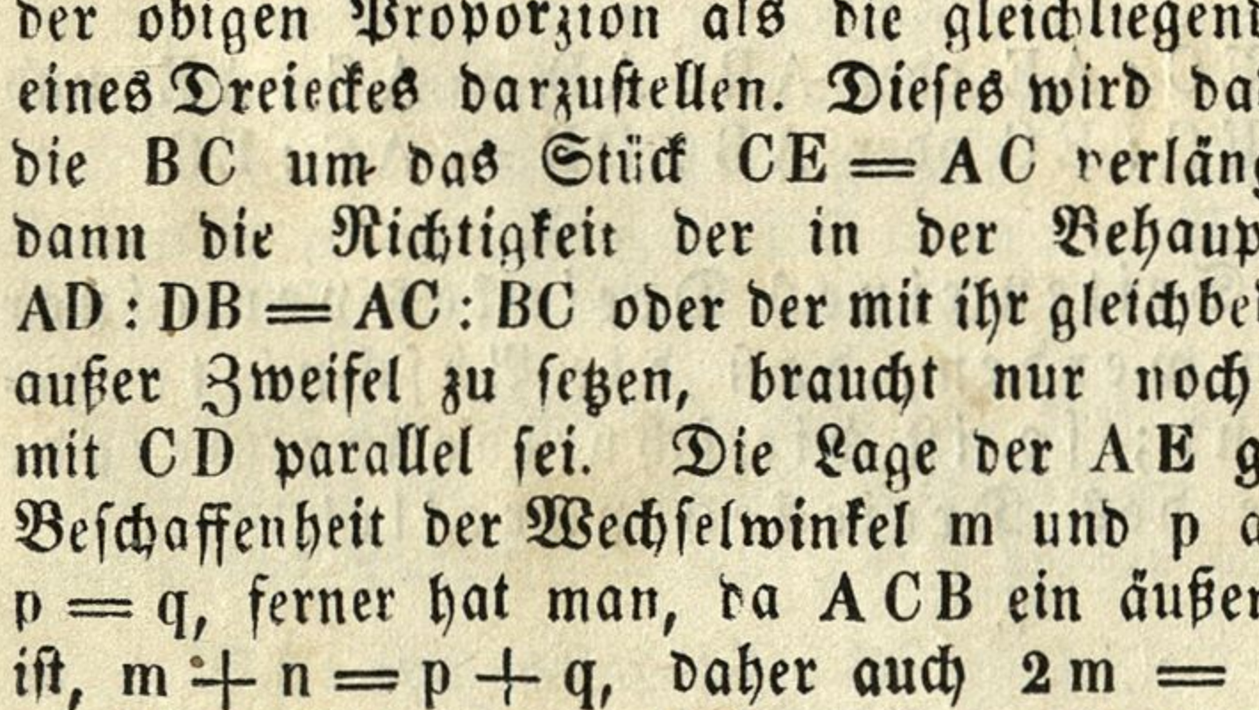


Es sei (Fig. 82) AD : DB = AE : EC; so ist zu beweisen, daß DE ∥ BC ist. Wenn man durch D mit BC eine Parallele zieht, so wird AC in zwei Theile getheilt, welche sich so verhalten wie AD zu DB; jede andere durch D gezogene Gerade, z. B. DF, muß die AC in einem andern Verhältnisse theilen. Damit also das Verhältniß AE : EC gleich sein könne dem Verhältnisse AD : DB, muß nothwendig DE ∥ BC sein.

§. 109. Aus dem hier bewiesenen Satze folgt:
Wenn zwei Seiten eines Dreieckes halbirt sind, und man verbindet die Halbirungspunkte durch eine Gerade, so muß diese mit der dritten Seite parallel sein.

§. 110. Wenn man in einem Dreiecke einen Winkel halbirt, so wird durch die Halbirungslinie die gegenüberstehende Seite in zwei Abschnitte getheilt, welche sich zu einander verhalten, wie die ihnen anliegenden Seiten des Dreieckes.

Fig. 83.



Voraussetzung. Es sei im Dreiecke ABC (Fig. 83) der Winkel C durch die Gerade CD halbirt, so daß m = n wird.

Behauptung. Es muß AD : DB = AC : BC sein.

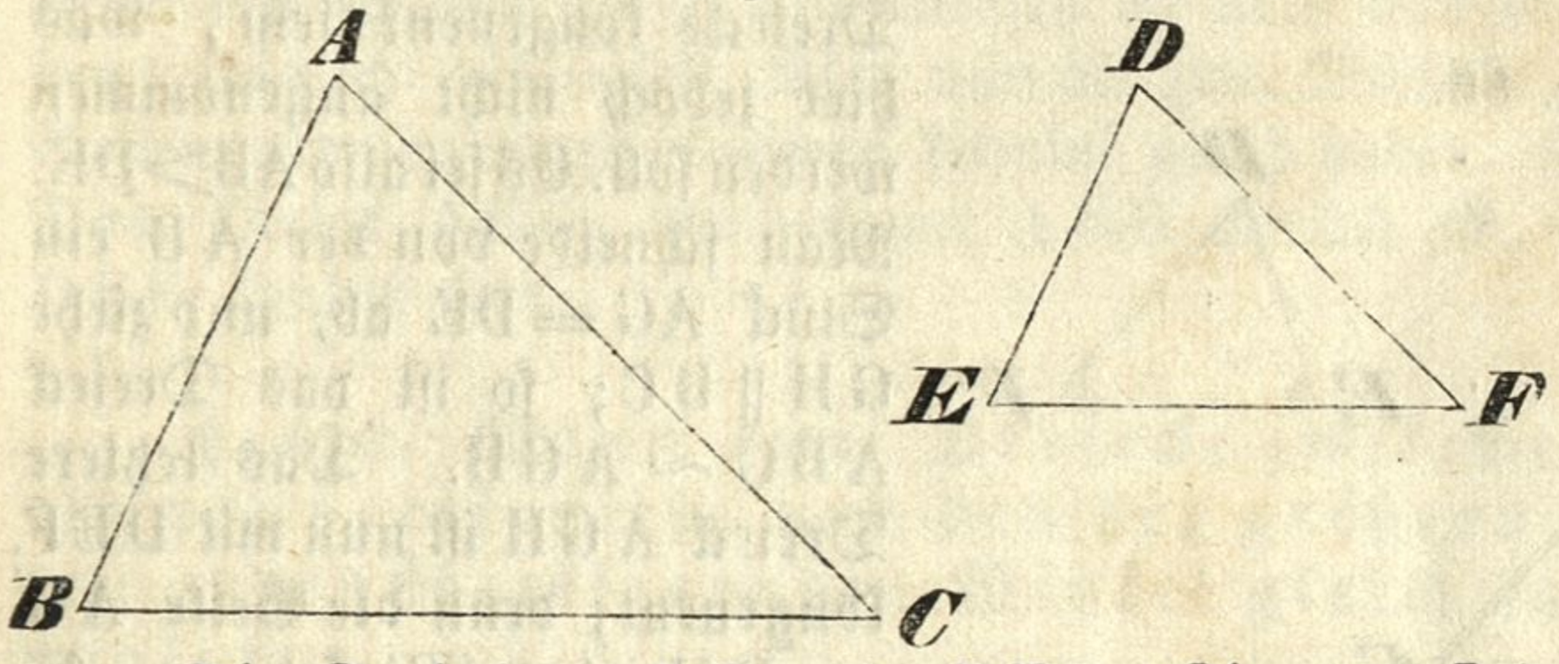
Analytischer Beweis. Da von den Gliedern der zu beweisenden Proporzion die beiden ersten AD und DB als die Stücke einer in D getheilten Dreiecksseite AB erscheinen, so liegt die Vermuthung nahe, daß hier bei der Beweisführung der in §. 107 erwiesene Lehrsatz werde Anwendung finden können, zu welchem Ende es nur nöthig sein wird, auch die letzten zwei Glieder AC und BC der obigen Proporzion als die gleichliegenden Stücke der zweiten Seite eines Dreieckes darzustellen. Dieses wird dadurch bewerkstelliget, daß man die BC um das Stück CE = AC verlängert, und die AE zieht. Um dann die Richtigkeit der in der Behauptung enthaltenen Proporzion AD : DB = AC : BC oder der mit ihr gleichbedeutenden AD : DB = CE : BC außer Zweifel zu setzen, braucht nur noch gezeigt zu werden, daß AE mit CD parallel sei. Die Lage der AE gegen CD hängt aber von der Beschaffenheit der Wechselwinkel m und p ab; wegen CE = AC ist nun p = q, ferner hat man, da ACB ein äußerer Winkel des Dreieckes ACE ist, m + n = p + q, daher auch 2m = 2p und m = p; folglich ist wirklich AE ∥ CD, und somit der aufgestellte Lehrsatz richtig.

Synthetischer Beweis. Man verlängere BC und ziehe durch A mit DC eine Parallele, welche die Verlängerung der BC in E schneidet. Es ist nun m = p als Wechselwinkel, n = q als korrespondirende Winkel, und wegen m = n auch p = q, folglich EC = AC. In dem DreieckeABE ist CD ‖ EA, daher findet die Proporzion AD : DB = EC : CB Statt, woraus, wenn AC statt EC gesetzt wird, die Proporzion AD : DB = AC : CB folgt.

2. Aehnlichkeit der Dreiecke.

§. 111. Zwei Dreiecke sind ähnlich, d. i. sie haben dieselbe Form, wenn sie alle drei Winkel gleich haben, und wenn je zwei Seiten, welche den gleichen Winkeln gegenüber liegen, in demselben Verhältnisse zu einander stehen.

Fig. 84.



Die Dreiecke ABC und DEF (Fig. 84) sind also ähnlich, wenn

A = D, B = E, C = F und

AB : DE = AC : DF = BC : EF ist.

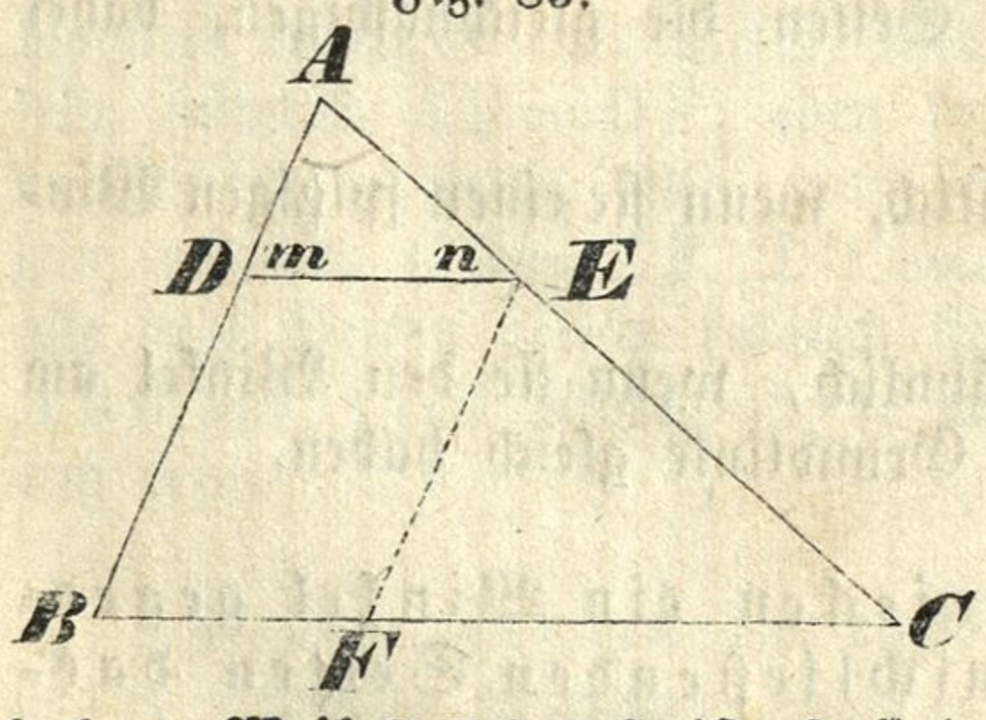
Die Seiten, welche den gleichen Winkeln gegenüber liegen, werden gleichnamige Seiten genannt.

In ähnlichen Dreiecken müssen also alle drei Winkel wechselseitig gleich, und die gleichnamigen Seiten gerade proporzionirt sein.

Es sollen nun die wichtigsten Fälle aufgestellt werden, in denen man auf die Aehnlichkeit zweier Dreiecke schließen darf.

§. 112. Wenn man in einem Dreiecke mit einer Seite eine Parallele zieht, so ist das gegebene Dreieck mit dem neu entstandenen kleinen Dreiecke ähnlich.

Fig. 85.



Es sei DE ‖ BC (Fig. 85), so ist zu beweisen, daß das △ ABC ~ ADE. — Die beiden Dreiecke ABC und ADE haben erstlich gleiche Winkel, denn der Winkel A ist in beiden Dreiecken gemeinschaftlich, und die Winkel B und C sind ihren korrespondirenden Winkeln m und n gleich. Nun ist noch zu zeigen, daß auch je zwei Seiten, welche den gleichen Winkeln gegenüber liegen, dasselbe Verhältniß zu einander haben. Weil DE ‖ BC ist, so findet die Proporzion AB : AD = AC : AE Statt. Zieht man EF ‖ AB, so muß auch AC : AE = BC : BF, oder

weil $BF = DE$ ist, $AC : AE = BC : DE$ sein. Verbindet man diese Proporzion mit der ersten, so hat man

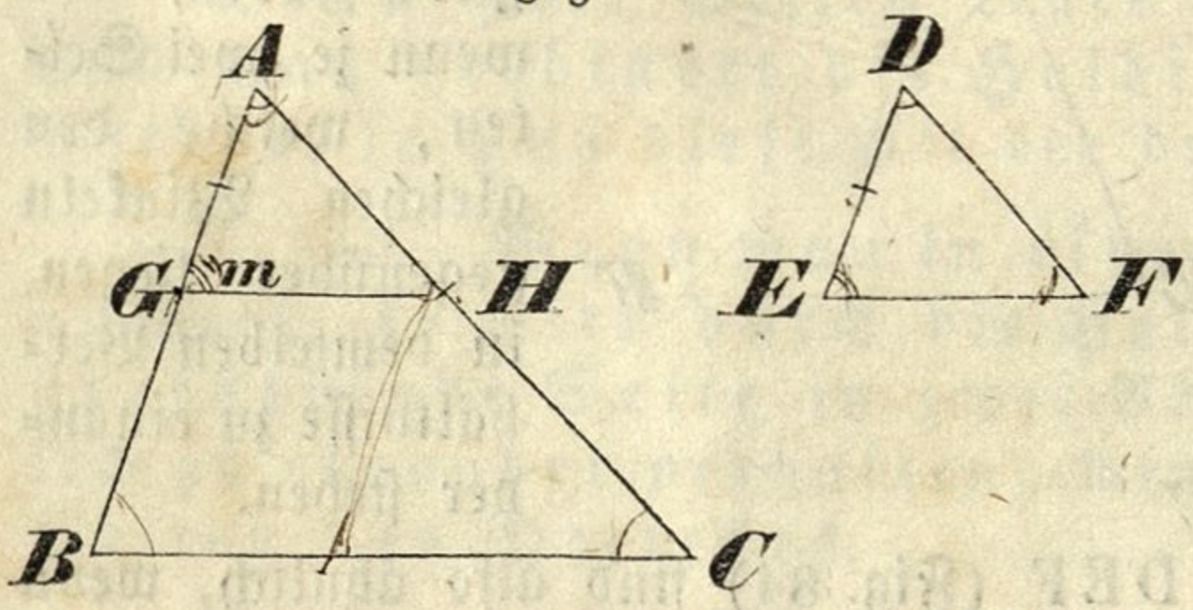
$$AB : AD = AC : AE = BC : DE.$$

Die Dreiecke ABC und ADE haben also gleiche Winkel und proporzionirte Seiten, folglich sind sie ähnlich.

§. 113. **Wenn in zwei Dreiecken alle drei Winkel wechselseitig gleich sind, so sind die beiden Dreiecke ähnlich.**

Es sei (Fig. 86) in den Dreiecken ABC und DEF der Winkel $A = D$, $B = E$ und $C = F$. Wäre $AB = DE$, so müßten die beiden Dreiecke kongruent sein, was hier jedoch nicht angenommen werden soll. Es sei also $AB > DE$. Man schneide von der AB ein Stück $AG = DE$ ab, und ziehe $GH \parallel BC$; so ist das Dreieck $ABC \sim AGH$. Das letztere Dreieck AGH ist nun mit DEF kongruent; denn die Seite $AG = DE$, der Winkel $m = E$, weil beide dem Winkel B gleich sind, und der Winkel $A = D$. Wenn aber das Dreieck ABC mit AGH ähnlich, und AGH mit DEF kongruent ist, so muß auch $\triangle ABC \sim DEF$ sein.

Fig. 86.



§. 114. Aus diesem Aehnlichkeitsfalle folgt:

a) **Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie zwei Winkel wechselseitig gleich haben;** weil dann auch die dritten Winkel gleich sein müssen.

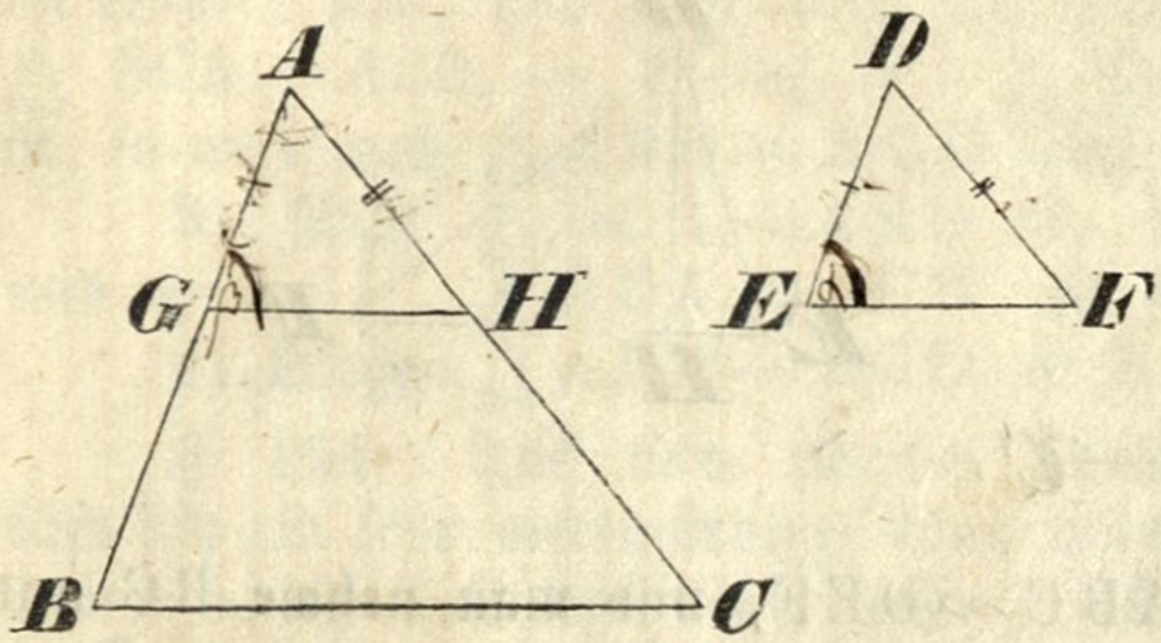
b) **Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn alle drei Seiten wechselseitig parallel sind oder auf einander senkrecht stehen;** denn in beiden Fällen haben die Dreiecke alle drei Winkel gleich, da Winkel, deren Schenkel parallel laufen, oder auf einander senkrecht stehen, einander gleich sind. In solchen Dreiecken sind die parallelen oder auf einander senkrechten Seiten die gleichnamigen, daher einander proporzionirt.

c) Rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie einen spitzigen Winkel gleich haben.

d) Gleichschenklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie den Winkel am Scheitel oder auch den Winkel an der Grundlinie gleich haben.

§. 115. **Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel gegenseitig gleich ist, und die ihn einschließenden Seiten dasselbe Verhältniß zu einander haben, so sind die beiden Dreiecke ähnlich.**

Fig. 87.



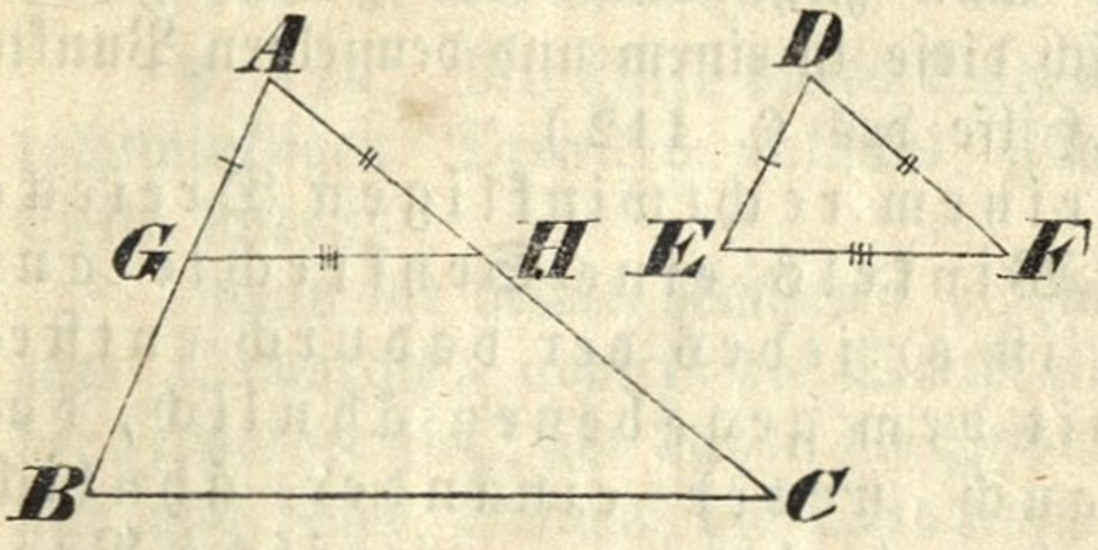
Es sei (Fig. 87) A = D und AB : DE = AC : DF. Man mache AG = DE, und ziehe GH ∥ BC, so ist △ ABC ~ AGH. Man braucht nur noch zu zeigen, daß das △ AGH ≅ DEF ist. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und AGH folgt AB : AG = AC : AH. Diese und die in der Voraussetzung aufgestellte Proporzion haben die ersten drei Glieder gleich, also müssen sie auch das vierte Glied gleich haben; folglich AH = DF. Weil nun die zwei Dreiecke AGH und DEF zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben, so sind sie kongruent. Das Dreieck ABC, welches mit AGH ähnlich ist, muß daher auch mit DEF ähnlich sein.

§. 116. Wenn zwei Dreiecke zwei Seiten wechselseitig proporzionirt, und den der größern von diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich haben, so sind sie ähnlich.

Der Beweis ist demjenigen des vorigen Lehrsatzes analog.

§. 117. Wenn in zwei Dreiecken alle drei Seiten wechselseitig proporzionirt sind, so sind die beiden Dreiecke ähnlich.

Fig. 88.



Es sei (Fig. 88)
AB : DE = AC : DF und
AB : DE = BC : EF.

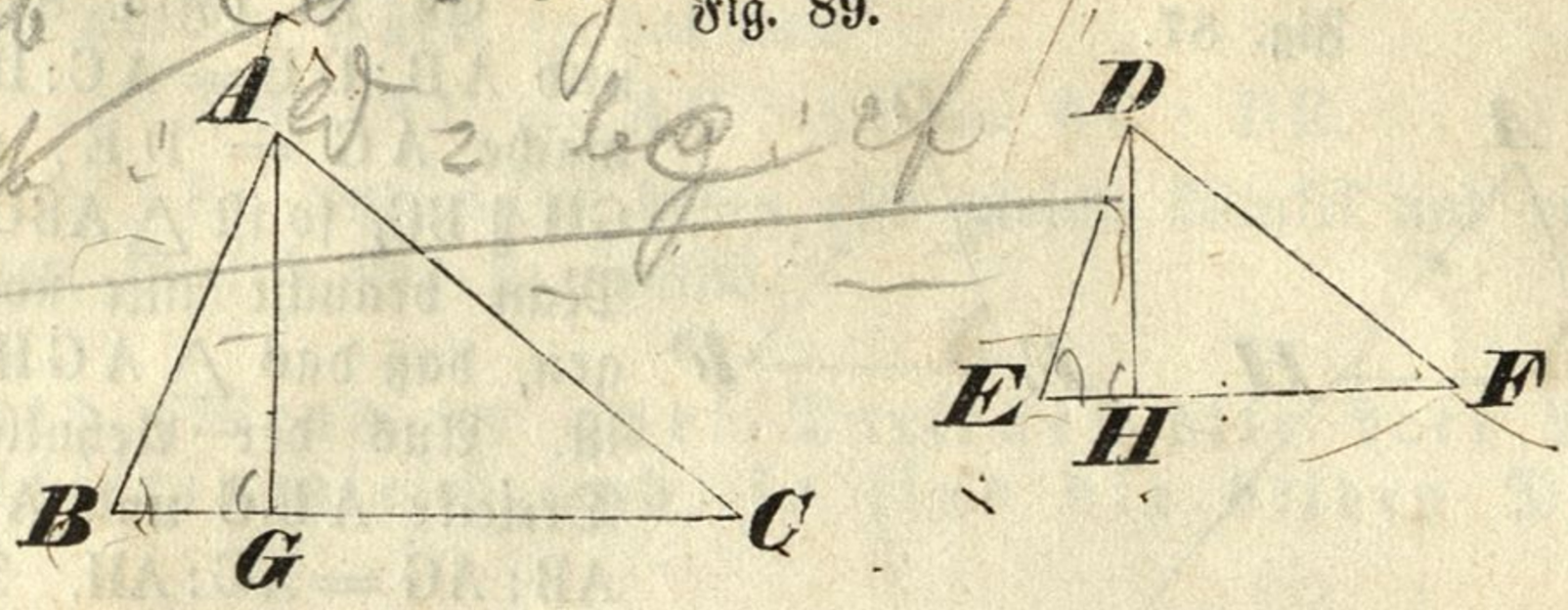
Man mache AG = DE, und ziehe GH ∥ BC, so ist das △ ABC ~ AGH; daher AB : AG = AC : AH,
und AB : AG = BC : GH.

In der dritten und ersten der hier vorkommenden Proporzionen sind die drei ersten Glieder gleich, also muß darin auch das vierte Glied gleich sein, nämlich AH = DF; eben so haben die vierte und zweite Proporzion drei Glieder gleich, also muß in denselben auch das vierte Glied gleich sein, nämlich GH = EF. Die beiden Dreiecke AGH und DEF haben also alle drei Seiten gleich, folglich sind sie kongruent. Weil nun das Dreieck ABC mit AGH ähnlich ist, so muß es auch mit dem Dreiecke DEF ähnlich sein.

§. 118. Aus den hier entwickelten Aehnlichkeitsfällen lassen sich folgende Lehrsätze ableiten:

In ähnlichen Dreiecken verhalten sich die Höhen so wie die Grundlinien.

Fig. 89.



Es sei (Fig. 89) das △ ABC ∼ DEF, und man nehme BC und EF als die Grundlinien, AG und DH als die Höhen der beiden Dreiecke an; zu beweisen hat man, daß AG:DH = BC:EF ist. — Die Dreiecke ABG und DEH haben zwei Winkel wechselseitig gleich, sind daher ähnlich; mithin findet die Proporzion AG:DH = AB:DE Statt. Weil nach der Annahme △ ABC ∼ DEF, so ist auch BC:EF = AB:DE. Aus den beiden Proporzionen folgt nun AG:DH = BC:EF.

Auf ähnliche Art läßt sich auch zeigen, daß in ähnlichen Dreiecken die Grundlinien von den Höhen proporzionirt geschnitten werden.

§. 119. Lehrsätze zur Selbstübung im Beweisen:

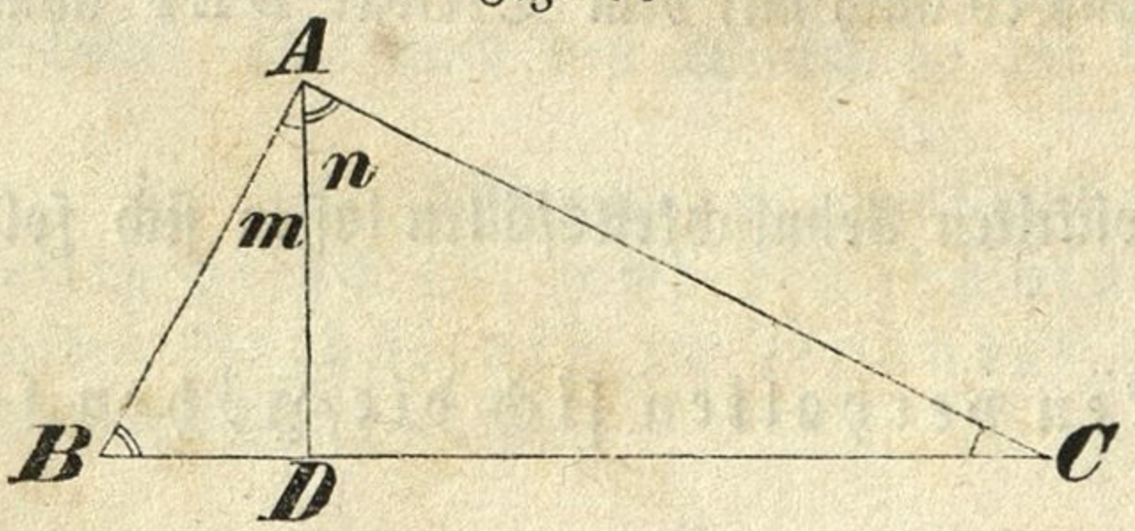
1) Wenn zwei parallele Gerade von mehreren aus einem Punkte gezogenen Geraden geschnitten werden, so sind die Abschnitte der Parallelen zwischen jenen Geraden proporzionirt.

2) Wenn man in zwei Dreiecken, welche dieselbe Grundlinie haben, und zwischen denselben Parallelen liegen, mit der Grundlinie eine Parallele zieht, so sind die Stücke dieser Parallelen, welche in die beiden Dreiecke fallen, einander gleich.

3) Wenn zwei ähnliche Dreiecke so gestellt werden, daß ihre gleichliegenden Seiten parallel sind, und man zieht durch die gleichliegenden Punkte gerade Linien, so müssen sich diese in einem und demselben Punkte schneiden. Indirekter Beweis mit Hilfe des §. 112.)

§. 120. Wenn man in einem rechtwinkligen Dreiecke vom Scheitel des rechten Winkels eine Senkrechte auf die Hypothenuse fällt; so ist a) jedes der dadurch entstehenden kleinen Dreiecke mit dem gegebenen ähnlich, daher die kleinen Dreiecke auch unter einander ähnlich sind; b) jede Kathete ist die mittlere geometrische Proporzionale zwischen der ganzen Hypothenuse, und dem jener Kathete anliegenden Abschnitte der Hypothenuse; c) die Senkrechte ist die mittlere geometrische Proporzionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypothenuse.

Fig. 90.



Es sei (Fig. 90) der Winkel BAC ein rechter, und AD ⊥ BC.

a) In den Dreiecken BCA und ABD ist der Winkel B = B, BAC = ADB = R, es ist daher auch der dritte Winkel C = m, und das △ BAC ∼ ABD. —

Die Dreiecke BCA und ACD haben den Winkel bei C gemeinschaftlich, die Winkel BAC und ADC sind als rechte gleich, daher auch B = n, und △ BCA ~ ACD. — Wenn aber △ BCA ~ ABD, und △ BCA ~ ACD ist, so muß auch △ ABD ~ ACD sein.

b) Weil △ BCA ~ ABD ist, so folgt BC : AB = AB : BD, und weil △ BCA ~ ACD, so ist auch BC : AC = AC : CD.

c) Wegen △ ABD ~ ACD ist BD : AD = AD : DC.

§ 121. Aus dem zweiten Theile des hier bewiesenen Lehrsatzes läßt sich ein sehr merkwürdiger Satz ableiten, der wegen seiner Wichtigkeit weiter unten noch von einer anderen Seite betrachtet werden soll.

Nimmt man irgend eine Längeneinheit an, und findet man, nachdem die Katheten des rechtwinkligen Dreieckes, die Hypothenuse und deren Abschnitte damit gemessen wurden, AB = a, AC = b, BC = c, BD = p, DC = q; so ergibt sich aus den unter b) aufgestellten Proporzionen

$$c : a = a : p,\quad c : b = b : q,$$

$$\text{daher } cp = a^2,\qquad cq = b^2.$$

Addirt man diese letzten Gleichungen, so erhält man

$$cp + cq = a^2 + b^2.$$

Allein es ist $cp + cq = c(p + q) = c \cdot c = c^2$; daher

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Wenn man also die Zahlen, welche das Maß der Hypothenuse und der Katheten ausdrücken, zum Quadrat erhebt, so ist das Quadrat der Maßzahl der Hypothenuse gleich der Summe aus den Quadraten der Maßzahlen der Katheten.

Man kann diesen Satz kürzer so ausdrücken:

In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypothenuse gleich der Summe aus den Quadraten der beiden Katheten.

§. 122. Mit Hilfe dieses Satzes kann man, wenn zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes bekannt sind, durch bloße Rechnung die dritte Seite finden.

Wenn die beiden Katheten bekannt sind, so erhebt man jede Kathete zum Quadrate, addirt die Quadrate, diese Summe gibt das Quadrat der Hypothenuse; um daher die Hypothenuse selbst zu erhalten, darf man nur aus jener Summe die Quadratwurzel ausziehen.

Es sei z. B. die eine Kathete 240″, die andere 44″, wie groß ist die Hypothenuse?

$$240^2 = 57600$$
$$44^2 = 1936$$
$$\text{Hypothenuse} = \sqrt{59536} = 244''.$$

Wenn die Hypotenuse und eine Kathete bekannt sind, so erhebe man beide zum Quadrate, ziehe vom Quadrate der Hypothenuse das Quadrat der Kathete ab, der Rest gibt das Quadrat der andern noch unbekannten Kathete; will man diese Kathete selbst finden, so darf man nur aus jenem Reste die Quadratwurzel ausziehen.

1) Es sei z. B. die Hypothenuse 117″, die eine Kathete 45″; wie groß ist die zweite Kathete?

$117^2 = 13689$
$45^2 = 2025$
die zweite Kathete $= \sqrt{11664} = 108''$.

2) Man suche die Höhe h eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Seite s ist.

$$h = \sqrt{\frac{4s^2}{4} - \frac{s^2}{4}} = \frac{s}{2}\sqrt{3}.$$

3) Wie groß ist die Diagonale eines Quadrates, dessen Seite 1 ist?

4) Man suche die Seite eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Höhe $3\cdot2'$ ist.

§. 123. Es wird nicht schwer sein, die Richtigkeit folgender zwei Sätze nachzuweisen, wobei unter der Hypothenuse und den Katheten die Zahlen zu verstehen sind, welche die Längen dieser Seiten ausdrücken:

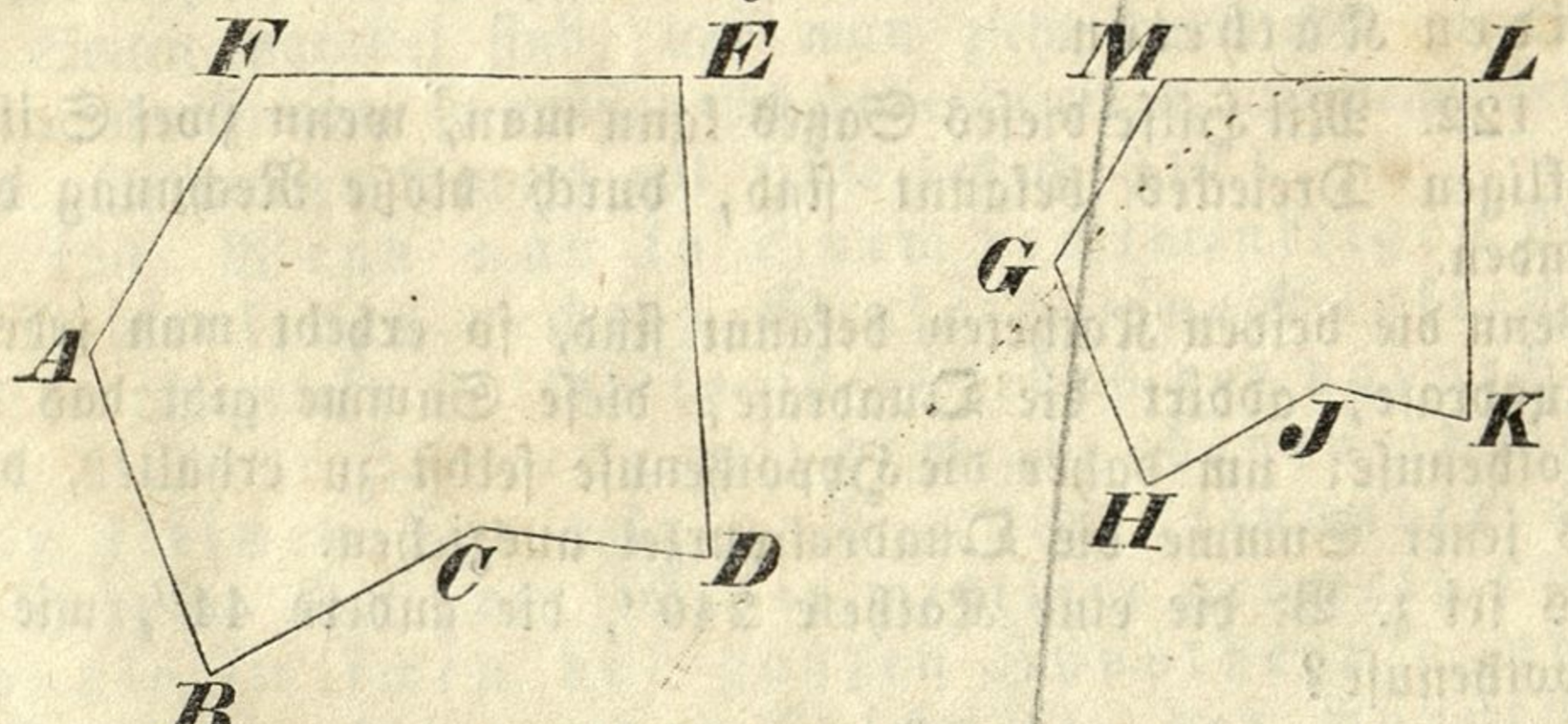
a) In jedem rechtwinkligen Dreiecke verhalten sich die Quadrate der Katheten so zu einander, wie die ihnen anliegenden Abschnitte der Hypothenuse (§. 120, b).

b) Das Quadrat der Hypothenuse verhält sich zum Quadrate einer Kathete, wie die Hypothenuse zu dem dieser Kathete anliegenden Abschnitte der Hypothenuse (§. 120, b).

3. Aehnlichkeit der Vielecke.

§. 124. Zwei Vielecke sind ähnlich, wenn ihre Winkel nach der Ordnung gleich, und die gleichliegenden Seiten gerade proporzionirt sind.

Fig. 91.



Wenn (Fig. 91) der Winkel $A = G$, $B = H$, $C = J$,
$D = K$, $E = L$, $F = M$, und
$AB : GH = BC : HJ = CD : JK = DE : KL = EF : LM = FA : MG$
ist, so ist $ABCDEF \sim GHJKLM$.

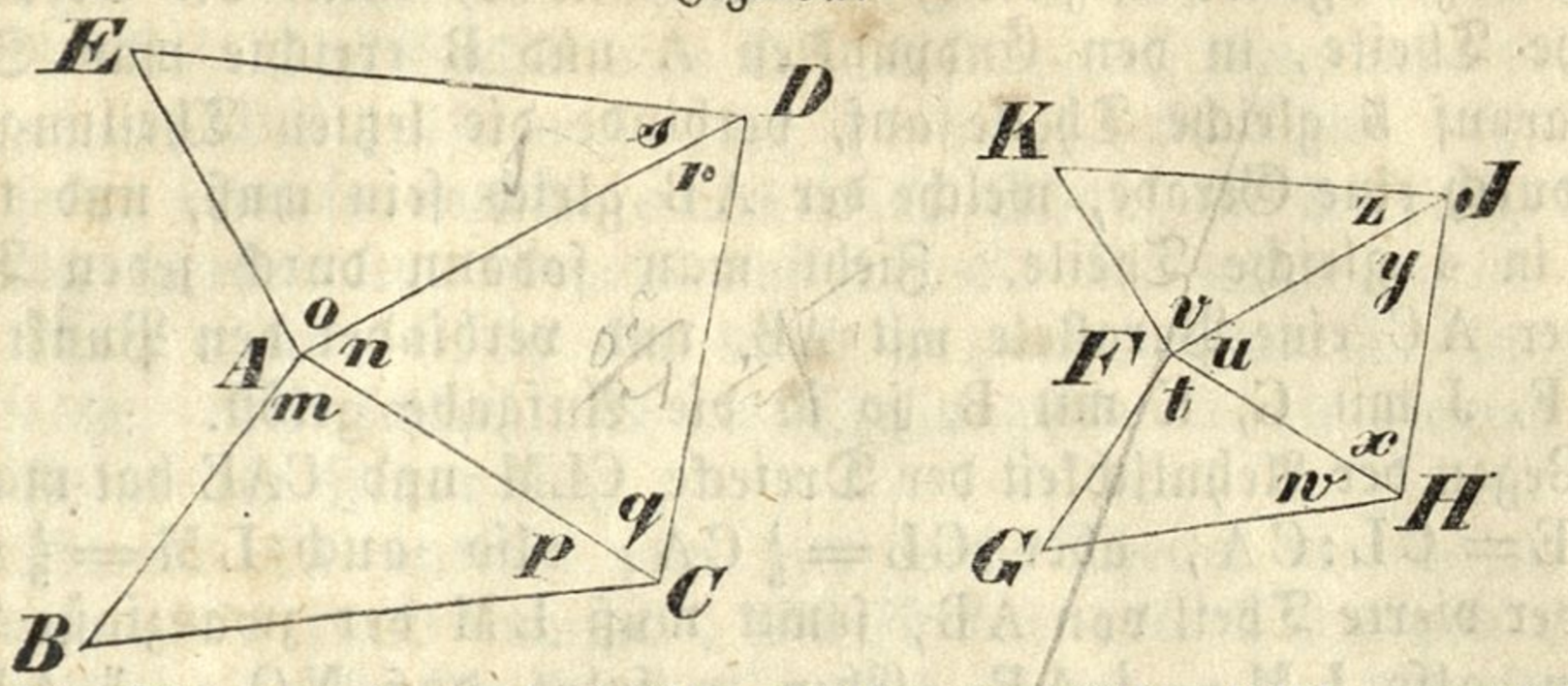
Zwei regelmäßige Vielecke von gleich viel Seiten sind einander ähnlich. Daraus folgt, daß sich in regelmäßigen Vielecken von gleich viel Seiten die Umfänge so zu einander verhalten wie zwei gleichliegende Seiten.

§. 125. Zwei Vielecke, welche aus gleich vielen der Ordnung nach ähnlichen Dreiecken zusammengesetzt sind, sind ähnlich.

$$s^2 - \frac{s^2}{4} \qquad \frac{4s^2}{4} - \frac{s^2}{57} = \frac{3s^2}{4}$$

h

Fig. 92.



Es sei (Fig. 92) das △ ABC∼FGH, △ ACD∼FHJ, △ ADE∼FJK. Nach dieser Voraussetzung sind je zwei gleichliegende Dreieckswinkel gleich, und je zwei gleichliegende Seiten haben dasselbe Verhältniß zu einander. — Es ist zuerst zu beweisen, daß auch je zwei gleichliegende Vieleckswinkel einander gleich sind. Daß B = G, E = K ist, liegt schon in der Annahme; wegen m = t, n = u, o = v ist auch m + n + o = t + u + v oder A = F; eben so folgt p + q = w + x oder C = H, und r + s = y + z oder D = J. Nun ist noch zu zeigen, daß die gleichliegenden Vielecksseiten proporzionirt sind. Nach der Annahme ist AB : FG = BC : GH; ferner sind die Verhältnisse BC : GH und CD : HJ einander gleich, weil sie beide einem dritten Verhältnisse AC : FH gleich sind; eben so folgt aus CD : HJ = AD : FJ und DE : JK = AD : FJ auch CD : HJ = DE : JK; endlich ist nach der Voraussetzung DE : JK = EA : KF. Man hat daher AB : FG = BC : GH = CD : HJ = DE : JK = EA : KF. Die beiden Vielecke ABCDE und FGHJK haben also in der Ordnung gleiche Winkel und proporzionirte Seiten; sie sind demnach ähnlich.

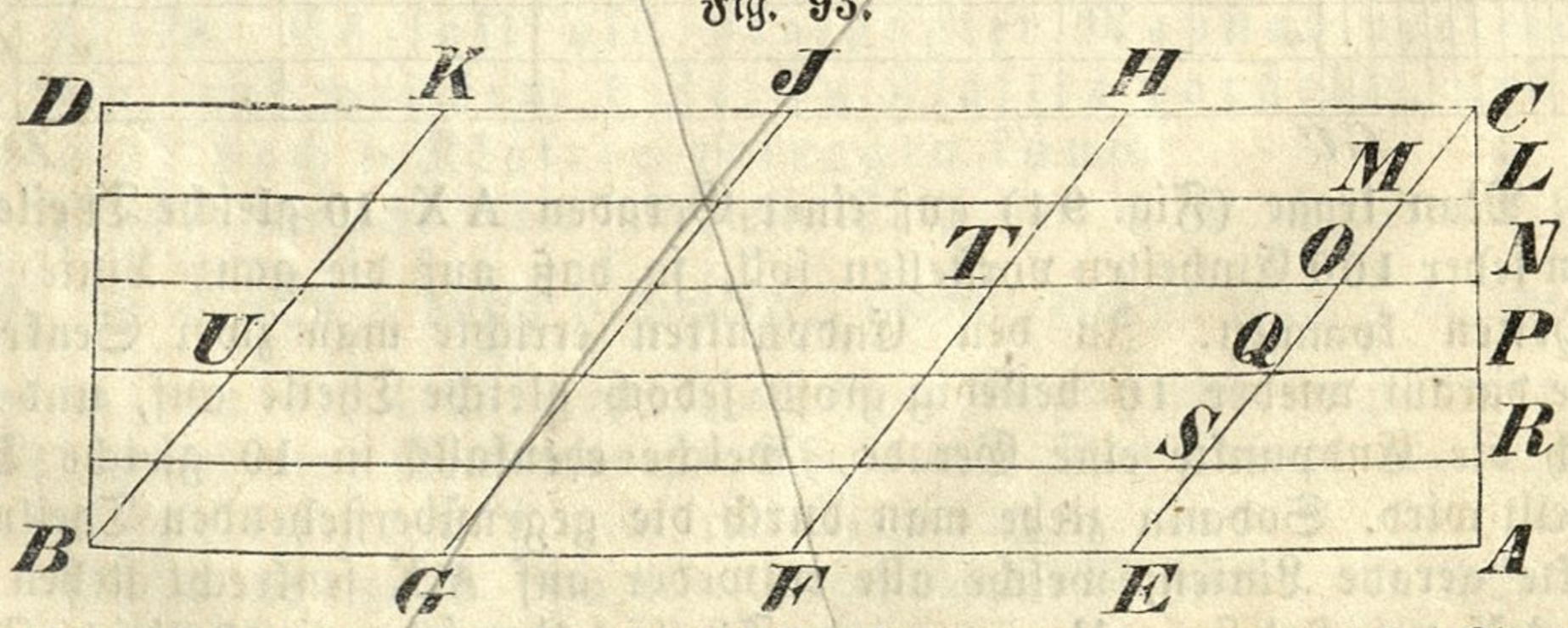
Umgekehrt läßt sich beweisen:

Wenn man in zwei ähnlichen Polygonen von zwei gleichliegenden Punkten zu den übrigen Eckpunkten Diagonalen zieht, so zerfallen dadurch die beiden Polygone in Dreiecke, welche der Ordnung nach ähnlich sind.

4. Aufgaben, welche nach der Aehnlichkeitslehre aufgelöset werden können.

§. 126. Es soll eine Gerade mittelst Transversalen in mehrere gleiche Theile getheilt werden.

Fig. 93.



Es sei z. B. die Gerade AB (Fig. 93) in 20 gleiche Theile zu theilen.

Man zerlege 20 in zwei Faktoren 4 und 5, theile die Gerade AB in 4 gleiche Theile, in den Endpunkten A und B errichte man Senkrechte, trage darauf 5 gleiche Theile auf, verbinde die letzten Theilungspunkte C und D durch eine Gerade, welche der AB gleich sein muß, und theile auch dieselbe in 4 gleiche Theile. Zieht man sodann durch jeden Theilungspunkt der AC eine Parallele mit AB, und verbindet den Punkt C mit E, H mit F, J mit G, K mit B, so ist die Aufgabe gelöst.

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke CLM und CAE hat man nämlich $LM:AE = CL:CA$, aber $CL = \frac{1}{5} CA$, also auch $LM = \frac{1}{5} AE$; nun ist AE der vierte Theil von AB, somit muß LM der zwanzigste Theil von AB sein, also $LM = \frac{1}{20} AB$. Eben so folgt, daß $NO = \frac{2}{20} AB$, $PQ = \frac{3}{20} AB$, $RS = \frac{4}{20} AB$, . . . $NT = \frac{7}{20} AB$, . . . $PU = \frac{18}{20} AB$, . . . ist.

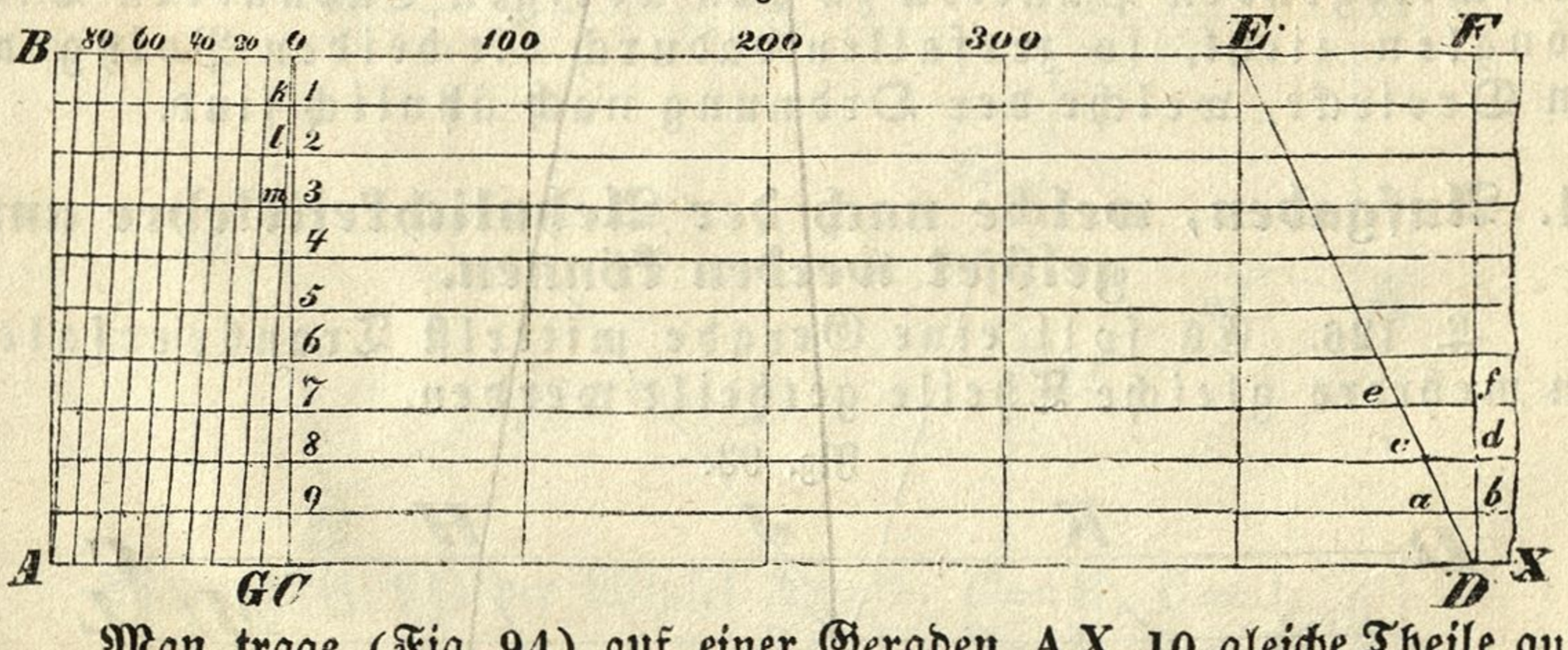
Die Geraden CE, HF, JG, KB heißen Transversalen

Es ist von selbst einleuchtend, daß die Theilung einer Geraden in mehrere gleiche Theile mittelst Transversalen nur dann Statt finden kann, wenn sich die Zahl der verlangten Theile in zwei Faktoren zerlegen läßt, welche ganze Zahlen sind. Der eine Faktor zeigt an, in wie viel gleiche Theile die Gerade unmittelbar zu theilen ist, oder wie viele Transversalen man zu ziehen hat; und der andere Faktor, wie viele gleiche Theile man auf den Senkrechten aufzutragen hat.

Die Theilung einer Geraden mittelst Transversalen wird insbesondere bei der Konstrukzion von verjüngten Maßstäben angewendet. Unter einem verjüngten Maßstabe versteht man nämlich einen Maßstab, auf welchem die in der Wirklichkeit üblichen Maße sammt ihren Unterabtheilungen nach einem bestimmten Verhältnisse verkleinert aufgetragen sind.

§. 127. Einen tausendtheiligen Maßstab zu verfertigen.

Fig. 94.



Man trage (Fig. 94) auf einer Geraden AX 10 gleiche Theile auf, deren jeder 100 Einheiten vorstellen soll, so daß auf die ganze Linie 1000 Einheiten kommen. In den Endpunkten errichte man zwei Senkrechte, trage darauf wieder 10 beliebig große jedoch gleiche Theile auf, und ziehe durch die Endpunkte eine Gerade, welche ebenfalls in 10 gleiche Theile getheilt wird. Sodann ziehe man durch die gegenüberstehenden Theilungspunkte gerade Linien, welche alle entweder auf AX senkrecht stehen oder mit AX parallel sind. Um nun einen Theil AC wieder in 10 gleiche Theile zu theilen, darf man nur in irgend einer Abtheilung eine Diagonale DE

ziehen; wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke D a b und D E F muß das Verhältniß a b : E F dem Verhältnisse D b : D F gleich sein; nun ist D b der zehnte Theil von D F, also muß auch a b der zehnte Theil von E F oder von A C sein; eben so enthält c d 2 solche Theile, e f 3 Theile, u. s. w. Diese Theile werden nun sowohl auf A C als B o aufgetragen. Endlich zieht man durch o und G, so wie durch je zwei folgende Theilungspunkte Transversalen, und schreibt an die Theilungspunkte die Zahlen so hin, wie man ste in der Figur steht.

Die Gerade A C enthält nun 100 solche Theile, von denen auf die ganze untere Linie 1000 kommen; C G ist der 10te Theil von A C, enthält demnach 10 solche Theile; k l endlich ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke o k l und o G C der 10te Theil von G C, und enthält somit einen solchen Theil, wie deren auf die ganze Gerade 1000 kommen, l 2 enthält 2 solche Theile u. s. w.

Ein solcher Transversal-Maßstab dient sowohl dazu, um eine auf dem Papier verzeichnete Gerade zu messen, als auch, um eine Linie von bestimmter Länge auf dem Papiere aufzutragen.

Um eine gegebene gerade Linie zu messen, fasse man dieselbe mit dem Zirkel ab, setze dann die beiden Zirkelspitzen auf eine und dieselbe Parallellinie des Maßstabes, und zwar auf diejenige, wo die eine Spitze in eine Senkrechte, die andere in eine Transversale hineinfällt; die Senkrechte gibt sodann die Hunderter, die Transversale die Zehner, die Parallele die Einheiten der gemessenen Linie an. Wenn z. B. die eine Zirkelspitze in die Senkrechte 300, und die andere genau in 0 eintrifft, so ist die Länge der Linie 300; würde die zweite Zirkelspitze auf 60 fallen, so hätte ste 360 Theile; würde ste zwischen 60 und 70 fallen, so müßte man mit dem Zirkel so weit herabrücken, bis die zweite Spitze genau auf eine Transversale trifft, während die erste Spitze auf derselben Parallelen in der Senkrechten 300 steht; wäre diese Parallele mit 3 bezeichnet, so enthält die gemessene Gerade 363 Theile.

Um umgekehrt von dem Maßstabe eine gegebene Länge, z. B. 300 abzufassen, setze man die eine Zirkelspitze in 300, die andere in 0 ein; um 320 abzufassen, setze man die eine Zirkelspitze in 300, die andere in 20 ein; um 327 abzutragen, suche man die durch 7 gehende Parallele auf, setze auf derselben die eine Spitze in die Senkrechte 300, die andere in die Transversale 20.

§. 128. Es soll ein verjüngter Maßstab verzeichnet werden, auf welchem 1 Zoll a Klafter vorstellt, und von dem man noch b Klafter abtragen kann.

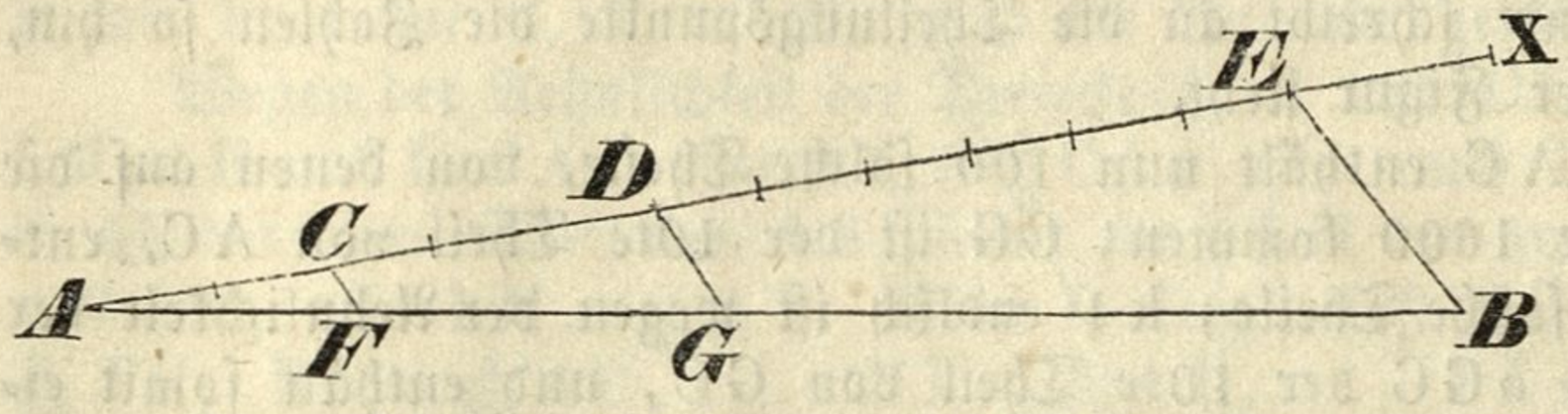
Man untersuche, der wievielte Theil von a die abzulesende Größe b ist, indem man a durch b dividirt, sodann zerlege man $\frac{a}{b}$ in zwei Faktoren m und n, theile einen Zoll in m Theile, und trage auf den in §. 127 angedeuten Senkrechten n Theile auf. Das weitere Verfahren ist dasselbe, wie bei jedem Transversal-Maßstabe.

Wollte man z. B. von einem verjüngten Maßstabe, wo 1 Zoll 10 Klafter vorstellt, noch Fuß ablesen, so müßte man, da hier a = 10,

$b = \frac{1}{6}$, also $\frac{a}{b} = 10 \times 6$ ist, einen Zoll in 10 gleiche Theile theilen, und auf den Senkrechten 6 Theile auftragen.

§. 129. Eine gegebene Gerade nach einem bestimmten Verhältnisse zu theilen.

Fig. 95.

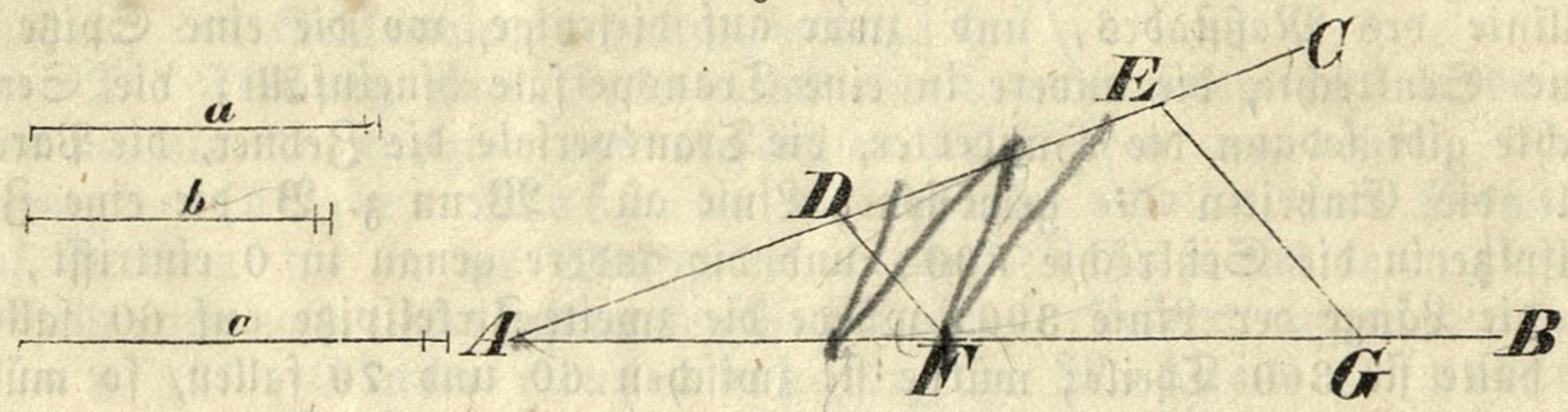


Es sei z. B. die Gerade AB (Fig. 95) in 3 Theile zu theilen, welche sich zu einander verhalten, wie 2 : 3 : 6

Man ziehe durch A eine willkürliche Gerade AX, trage darauf von A bis C 2 gleiche Theile, von C bis D 3 eben solche Theile, von D bis E 6 Theile, und ziehe EB. Zieht man nun CF ∥ DG ∥ EB, so ist AF : FG : GB = 2 : 3 : 6.

§. 130. Zu drei Geraden die vierte Proporzionale zu finden.

Fig. 96.

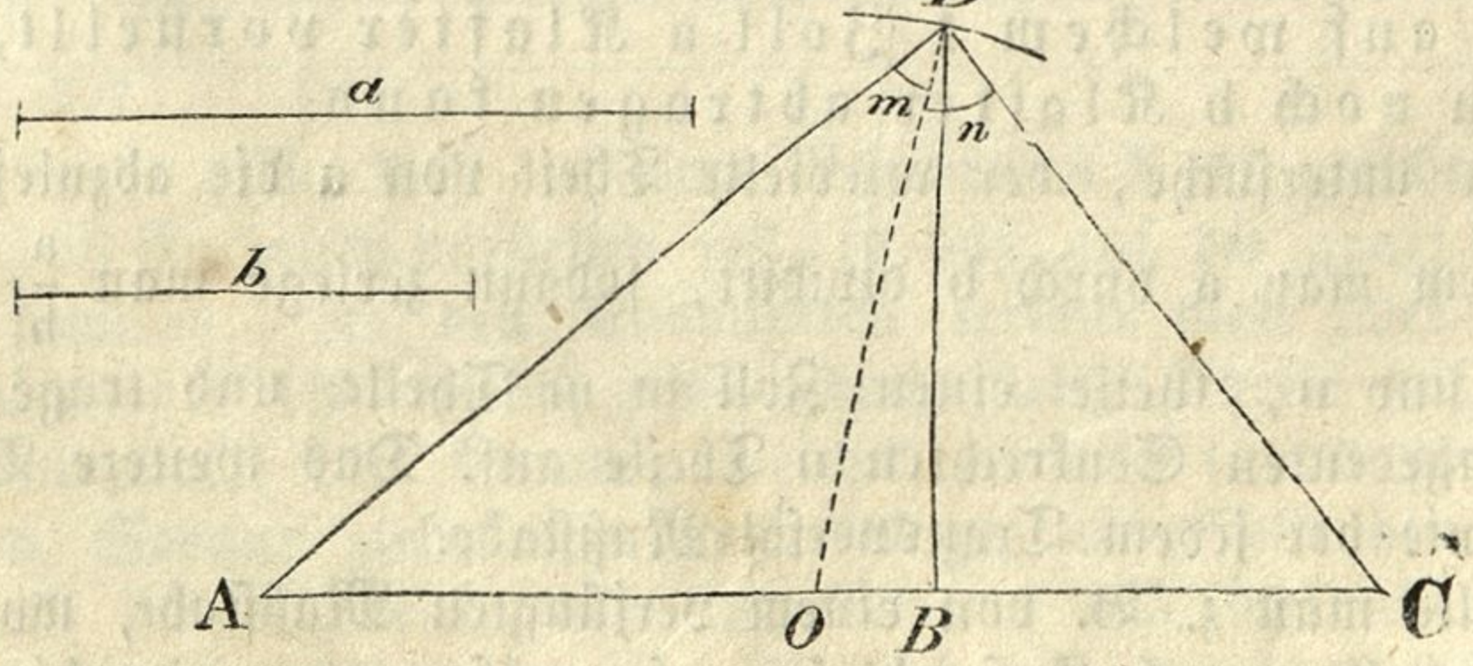


Man konstruire einen willkürlichen Winkel BAC (Fig. 96), mache AD = a, DE = b, AF = c, ziehe DF, und damit parallel die EG, so ist FG die vierte Proporzionale zu a, b, c. Es ist nämlich, wegen DF ∥ EG, AD : DE = AF : FG, oder a : b = c : FG.

Um zu den Linien a und b die dritte stetige Proporzionale zu finden, darf man nur b = c, und somit DE = AF machen.

§. 131. Zwischen zwei Geraden die mittlere geometrische Proporzionale zu finden.

Fig. 97.

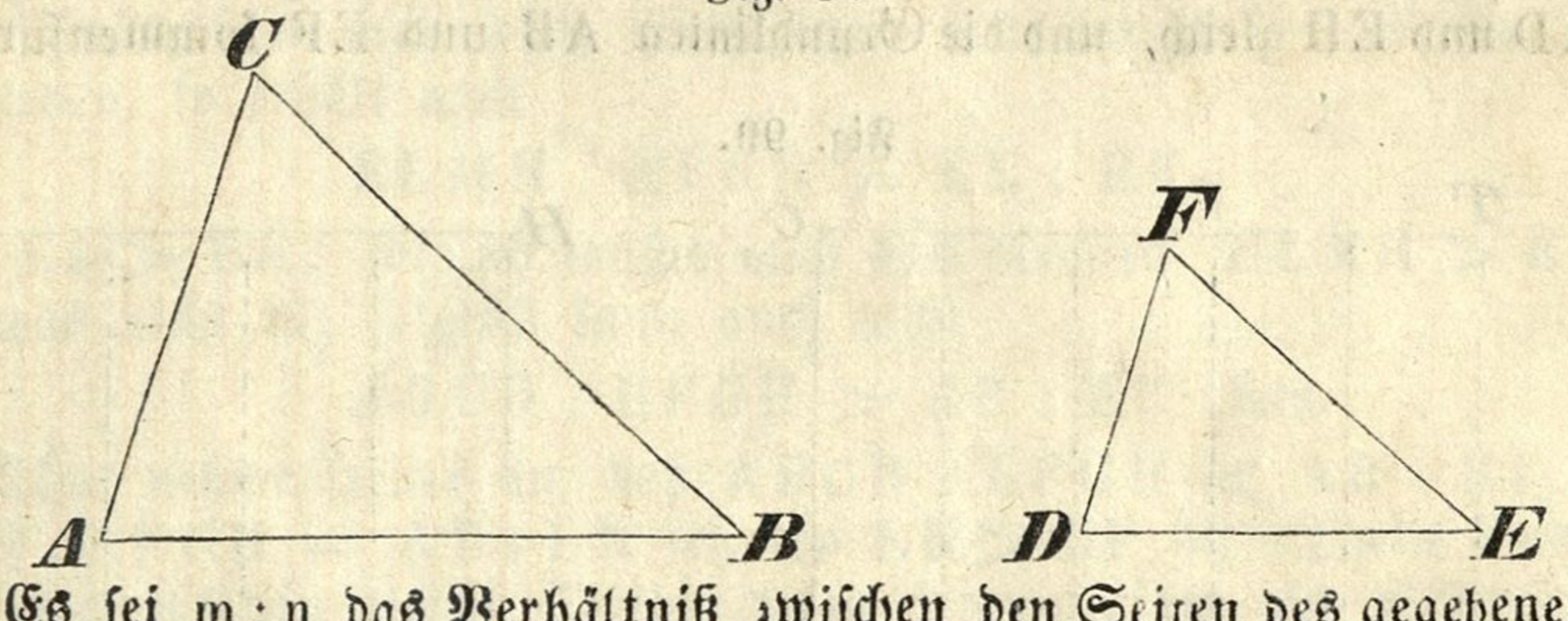


Analysis. Man wird sogleich auf die Vermuthung geführt, daß die Auflösung dieser Aufgabe aus dem im §. 120 unter b) oder c) erwiesenen Lehrsatze abgeleitet werden könne. Fassen wir den Satz c) ins Auge, wornach in einem rechtwinkeligen Dreiecke die vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypothenuse gefällte Senkrechte die mittlere Proporzionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypothenuse ist; so werden wir, um diesen Lehrsatz hier anwenden zu können, zunächst die gegebenen Linien a und b als Theile einer Geraden AC darstellen, indem wir AB = a und BC = b machen, und dann in B eine Senkrechte BD auf AC errichten. Es handelt sich nun bloß noch darum, in dieser Senkrechten einen solchen Punkt D auszumitteln, daß das Dreieck ADC bei D rechtwinklig werde, weil dann BD die gesuchte mittlere Proporzionale zwischen a und b sein muß. Nimmt man diesen Punkt D als gefunden, und somit den Winkel ADC als einen rechten an, so muß auch A + C = R sein, und es muß sich der rechte Winkel ADC durch eine Gerade DO in zwei Theile m und n so theilen lassen, daß m = A und n = C wird. Dann aber ist AO = DO und CO = DO, also auch AO = CO; der Punkt O ist also der Halbirungspunkt der AC, und es hat zugleich D dieselbe Entfernung von O, wie die Punkte A und C; wodurch die Lage des Punktes D, und somit auch die Länge der gesuchten Linie BD vollkommen bestimmt ist.

Wie sind nun, dieser Analysis zu Folge, die Konstrukzion und der Beweis auszuführen?

§. 132. Ein Dreieck zu verzeichnen, welches mit dem Dreiecke ABC (Fig. 98) ähnlich ist, und dessen Seiten zu den Seiten des andern Dreieckes ein bestimmtes Verhältniß haben.

Fig. 98.



Es sei m : n das Verhältniß zwischen den Seiten des gegebenen und denen des verlangten Dreieckes. Man suche zu m, n, AB die vierte Proporzionale; sie sei DE. In den Endpunkten dieser Geraden DE konstruire man zwei Winkel, welche den Winkeln A und B gleich sind; ihre Schenkel schneiden sich in F, und es ist DEF das verlangte Dreieck.

§. 133. Ein Vieleck zu konstruiren, das mit einem gegebenen Vielecke ähnlich ist, und dessen Seiten zu den Seiten des gegebenen Vieleckes ein bestimmtes Verhältniß n : m haben.

Die Auflösung beruhet auf den §§. 130, 125 und 132.

§. 134. Wir empfehlen dem Anfänger noch folgende Aufgaben zur Selbstlösung:

1. Eine Gerade zu verzeichnen, welche $\frac{m}{n}$ einer gegebenen Geraden beträgt.
2. Eine Gerade in zwei Theile zu theilen, welche sich zu einander verhalten, wie zwei gegebene Gerade.
3. Eine Gerade so in zwei Theile zu theilen, daß eine andere gegebene Gerade die mittlere Proporzionale zwischen beiden Theilen ist.
4. In einen spitzigen Winkel ein Rechteck einzuschreiben, dessen Seiten ein gegebenes Verhältniß zu einander haben.
5. Durch einen gegebenen Punkt zwischen den Schenkeln eines Winkels eine Gerade so zu ziehen, daß die dadurch an den Schenkeln abgeschnittenen Stücke ein gegebenes Verhältniß zu einander haben.
6. Durch einen zwischen den Schenkeln eines Winkels gegebenen Punkt eine Gerade so zu ziehen, daß sie in diesem Punkte nach einem gegebenen Verhältnisse getheilt wird.

V. Flächeninhalt der geradlinigen Figuren.

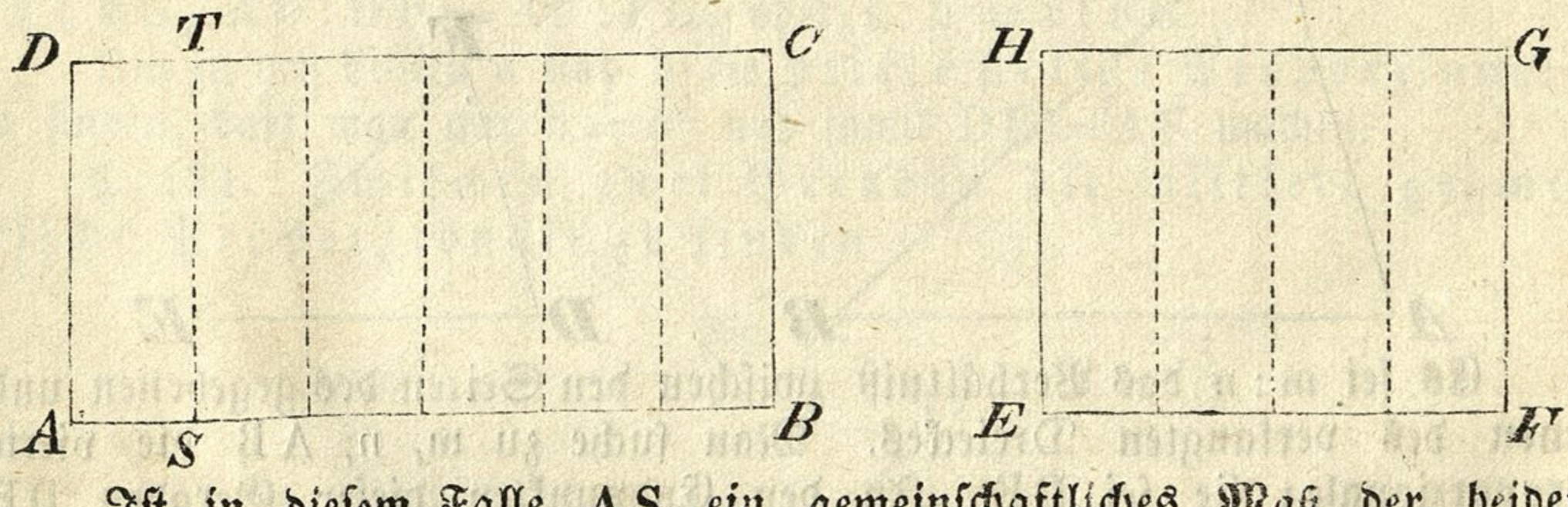
1. Vergleichung der Flächenräume.

Lehrsätze.

§. 135. Zwei Rechtecke, welche gleiche Höhe haben, verhalten sich gerade so zu einander, wie ihre Grundlinien.

a) Es seien in den Rechtecken ABCD und EFGH (Fig. 99) die Höhen AD und EH gleich, und die Grundlinien AB und EF kommensurabel.

Fig. 99.



Ist in diesem Falle AS ein gemeinschaftliches Maß der beiden Grundlinien, und zwar $AB = m \cdot AS$ und $EF = n \cdot AS$; so hat man $AB : EF = m : n$. Theilt man wirklich die AB in m, und die EF in n Theile, deren jeder gleich AS ist, und errichtet in jedem Theilungspunkte auf die Grundlinien senkrechte Gerade, so zerfällt dadurch das Rechteck ABCD in m, und das Rechteck EFGH in n kleinere Rechtecke, welche alle kongruent sind; es ist daher

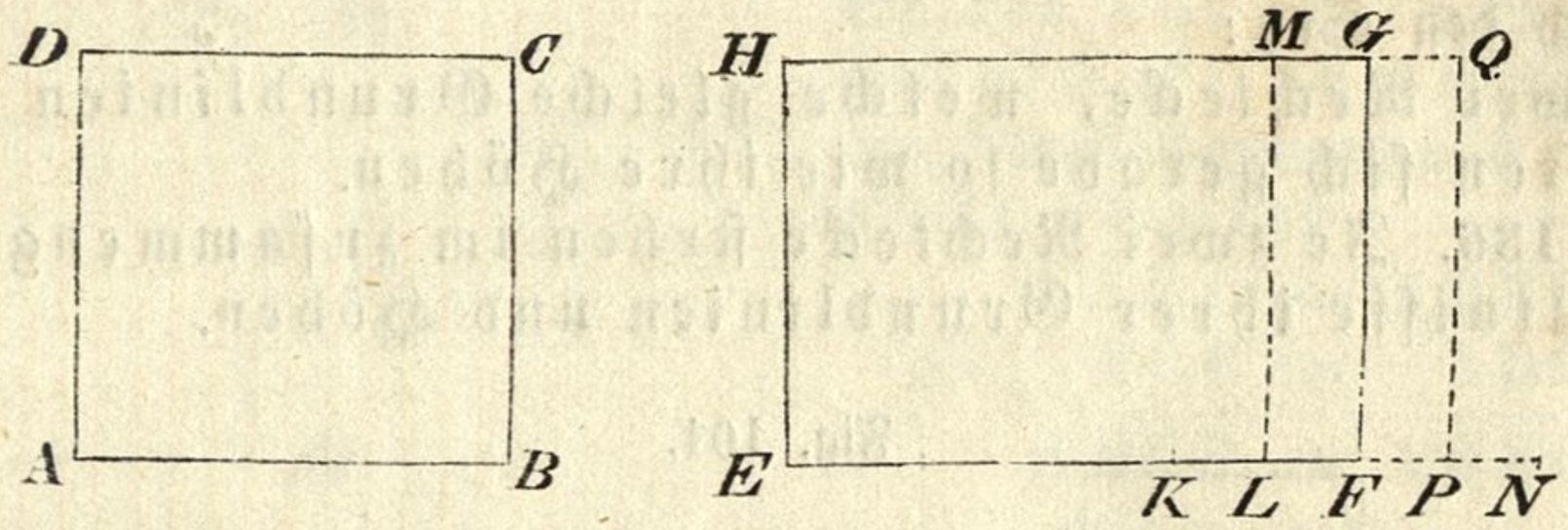
$$ABCD = m \cdot ASTD \text{ und } EFGH = n \cdot ASTD,$$

somit ABCD : EFGH = m : n. Aus dieser und der obigen Proporzion folgt nun

ABCD : EFGH = AB : EF.

b) Sind auch in den Rechtecken ABCD und EFGH (Fig. 100) die Höhen AD und EH gleich, die Grundlinien AB und EF aber inkommensurabel, und würden in diesem Falle die Rechtecke sich nicht wie die Grundlinien verhalten, so müßte das Verhältniß der Rechtecke größer oder kleiner sein, als jenes der Grundlinien.

Fig. 100.



Wäre also erstlich ABCD : EFGH > AB : EF, so sei

ABCD : EFGH = AB : EK,

wo EK < EF ist. Wird nun die Gerade AB in lauter gleiche Theile getheilt, deren jeder kleiner als FK ist, und ein solcher Theil von E aus auf der EF aufgetragen, so kann kein Theilungspunkt auf F fallen, weil AB und EF inkommensurable Linien sind; wohl aber wird wenigstens ein solcher Punkt zwischen K und F, z. B. in L fallen müssen. Errichtet man nun in L auf EF die Senkrechte LM, so wird, da nun die Grundlinien EL und AB kommensurabel sind,

ELMH : ABCD = EL : AB

sein. Multiplizirt man diese Proporzion mit der in der Voraussetzung enthaltenen, so erhält man

ELMH : EFGH = EL : EK.

Aber EL > EK, folglich müßte auch das Rechteck ELMH > EFGH sein, was nicht ist; folglich kann auch nicht

ABCD : EFGH > AB : EF sein.

Man nehme ferner an, daß ABCD : EFGH < AB : EF, z. B. ABCD : EFGH = AB : EN sei, wo EN > EF ist. Theilt man nun wieder die AB in gleiche Theile, deren jeder kleiner als FN ist, und trägt einen solchen Theil auf der EN von E angefangen auf, so muß wenigstens ein Theilungspunkt zwischen F und N, z. B. in P fallen. Wird nun PQ ⊥ EN gezogen, und die HG verlängert, so wird, da die Grundlinien EP und AB kommensurabel sind,

EPQH : ABCD = EP : AB.

Werden nun diese und die in der Voraussetzung enthaltene Proporzion

ABCD : EFGH = AB : EN

Glied für Glied mit einander multiplizirt, so findet man

EPQH : EFGH = EP : EN,

und es müßte, da FP < EN ist, auch EPQH < EFGH sein, was jedoch nicht möglich ist. Es ist daher auch nicht möglich, daß

$$ABCD : EFGH < AB : EF$$

wäre. Da also das Verhältniß der Rechtecke, auch wenn die Grundlinien inkommensurabel sind, weder größer noch kleiner sein kann, als jenes der Grundlinien, so ist auch hier

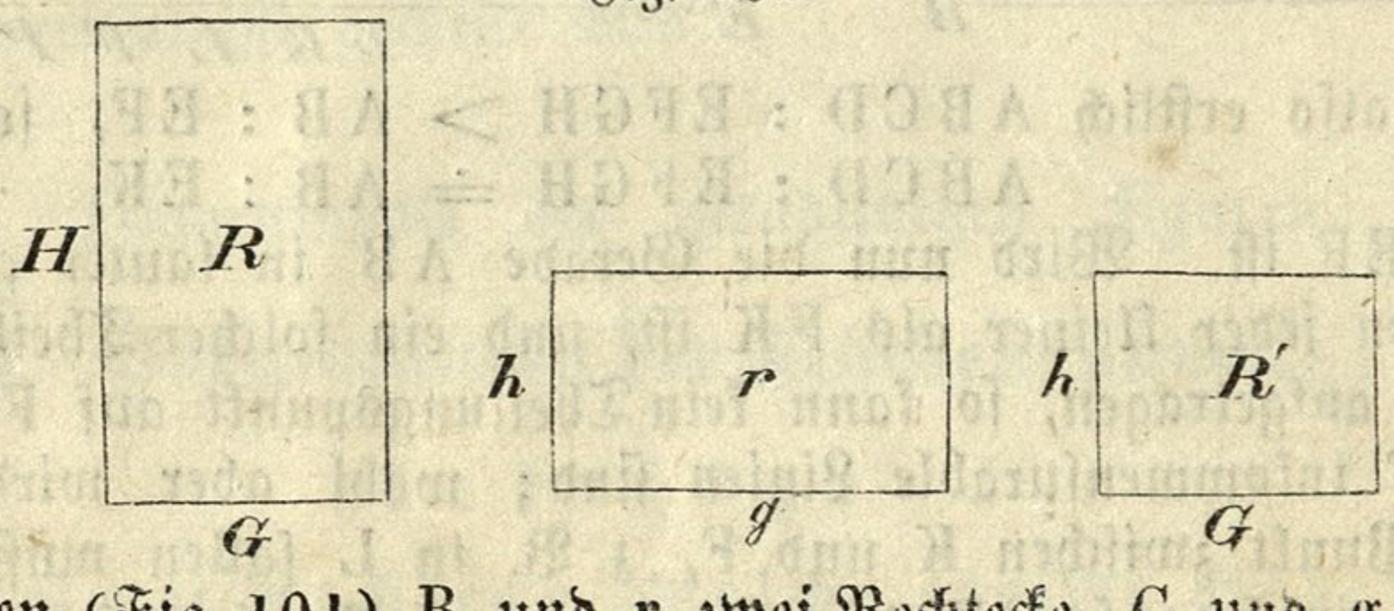
$$ABCD : EFGH = AB : EF.$$

Folgesatz. Da man in den obigen Rechtecken auch AD und EH als die Grundlinien, AB und EF als die Höhen betrachten kann, so hat man auch den Satz:

Zwei Rechtecke, welche gleiche Grundlinien haben, verhalten sich gerade so wie ihre Höhen.

§. 136. Je zwei Rechtecke stehen im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundlinien und Höhen.

Fig. 101.



Es seien (Fig. 101) R und r zwei Rechtecke, G und g ihre Grundlinien, H und h ihre Höhen. Konstruirt man nun ein drittes Rechteck R′, welches mit dem Rechtecke R gleiche Grundlinie G, und mit dem Rechtecke r gleiche Höhe h hat, so ist

$$R : R' = H : h, \text{ und}$$
$$R' : r = G : g;$$

daher durch Multiplikazion

$$R : r = (G : g)\ (H : h).$$

Das Verhältniß der beiden Rechtecke ist also zusammengesetzt aus den Verhältnissen der Grundlinien und der Höhen.

Will man unter den Ausdrücken Grundlinie und Höhe die unbenannten Zahlen verstehen, welche das Verhältniß dieser Seitenlinien zur Längeneinheit angeben, so kann man statt des obigen Ausdruckes auch setzen:

$$R : r = G . H : g . h,$$

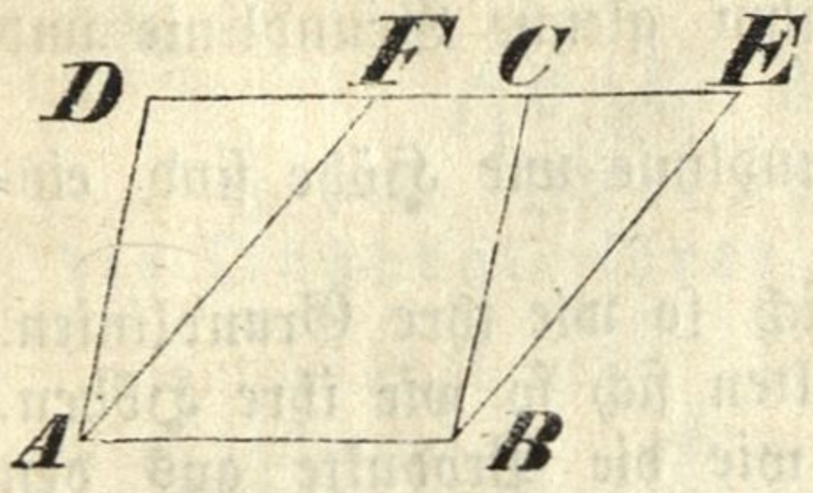
und daher den nachgewiesenen Lehrsatz auch so aussprechen:

Zwei Rechtecke verhalten sich wie die Produkte aus ihren Grundlinien und Höhen.

§. 137. Zwei Parallelogramme, welche dieselbe Grundlinie und gleiche Höhe haben, sind einander gleich.

Wegen der gleichen Höhe der Parallelogramme müssen erstlich die der gemeinschaftlichen Grundlinie gegenüberstehenden Seiten in einer geraden Linie liegen. Im Beweise sind dann drei Fälle zu unterscheiden.

Fig. 102.

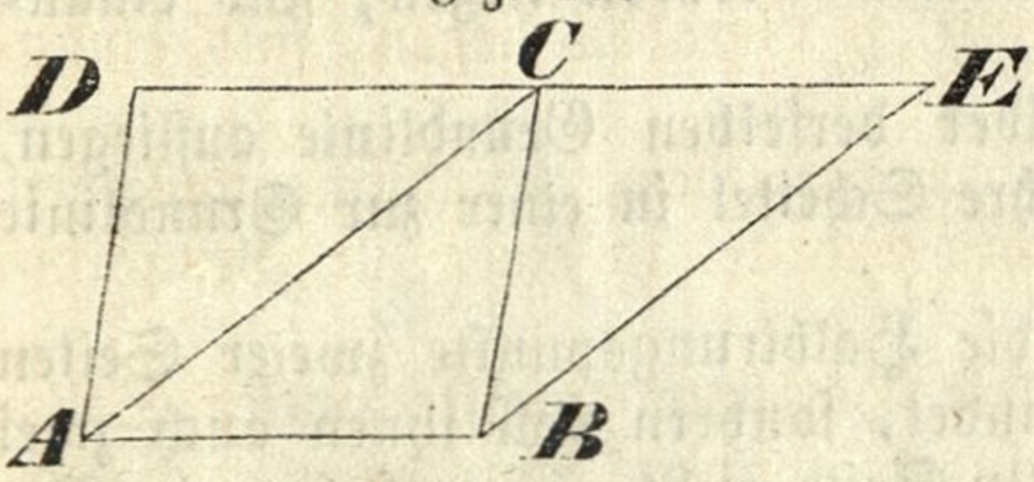


a) Wenn die der Grundlinie gegenüberstehenden Seiten ein Stück gemeinschaftlich haben, wie in den Parallelogrammen ABCD und ABEF (Fig. 102)

ABED = ABED
ab △BCE ≅ ADF (§. 57)
ABCD = ABEF

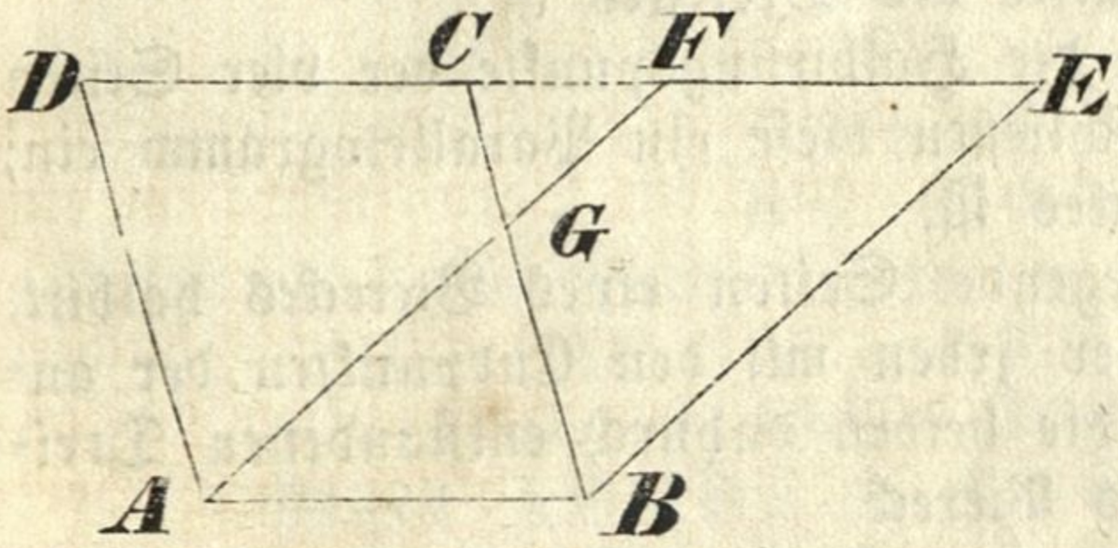
b) Wenn die der Grundlinie gegenüberliegenden Seiten nur einen Punkt gemeinschaftlich haben, wie in den Parallelogrammen ABCD und ABEC (Fig. 103)

Fig. 103.



ABED = ABED
ab △BCE ≅ ADC (§. 57)
ABCD = ABEC.

Fig. 104.



c) Wenn die der Grundlinie gegenüberstehenden Seiten keinen Punkt gemeinschaftlich haben, wie in den Parallelogrammen ABCD und ABEF (Fig. 104)

ABED = ABED
ab △BCE ≅ ADF
ABCD = ABEF.

§. 138. Folgesätze:

a) Jedes Parallelogramm ist einem Rechtecke gleich, welches mit demselben eine gleiche Grundlinie und Höhe hat.

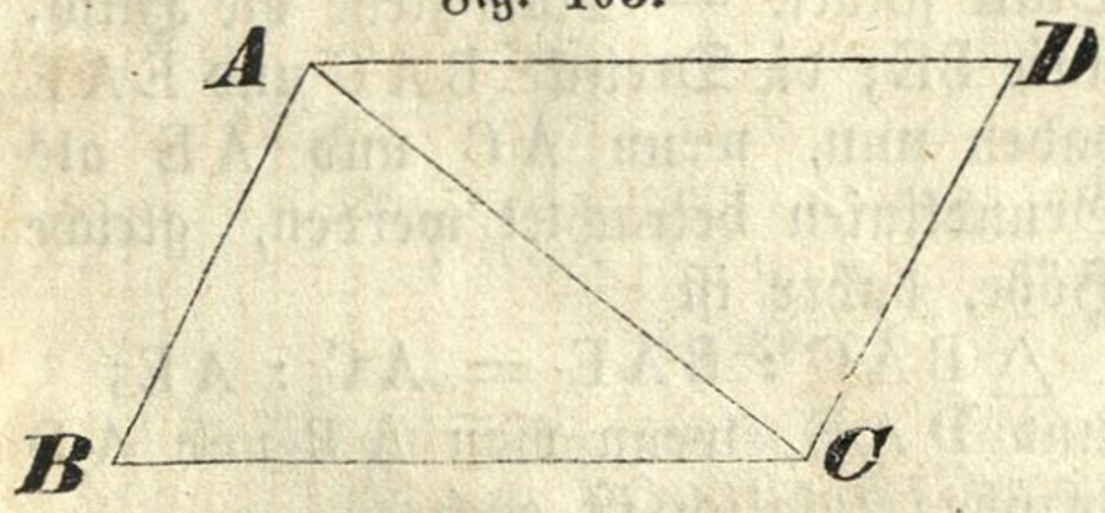
b) Parallelogramme von gleicher Höhe verhalten sich so wie ihre Grundlinien.

c) Parallelogramme von gleicher Grundlinie verhalten sich so wie ihre Höhen.

d) Parallelogramme überhaupt verhalten sich so wie die Produkte aus den Grundlinien und Höhen.

§. 139. Ein Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogrammes, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

Fig. 105.



Betrachtet man das △ABC (Fig. 105), und zieht durch die Punkte A und C mit den gegenüberstehenden Seiten parallele Linien, welche sich in D schneiden; so entsteht ein Parallelogramm ABCD, das mit dem Dreiecke ABC gleiche Grundlinie und Höhe hat. Dieses Parallelogramm besteht nun aus den zwei kongruenten Drei-

ecken A B C und C D A; folglich ist das Dreieck A B C wirklich die Hälfte eines Parallelogrammes A B C D, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

§. 140. a) Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind einander gleich.

b) Dreiecke von gleicher Höhe verhalten sich so wie ihre Grundlinien.

c) Dreiecke von gleicher Grundlinie verhalten sich so wie ihre Höhen.

d) Dreiecke überhaupt verhalten sich so wie die Produkte aus den Grundlinien und Höhen.

e) Zwei Dreiecke, welche dieselbe Grundlinie haben, und deren Scheitel in einer zur Grundlinie parallelen Geraden liegen, sind einander gleich.

f) Wenn zwei Dreiecke, welche über derselben Grundlinie aufliegen, einander gleich sind, so müssen ihre Scheitel in einer zur Grundlinie parallelen Geraden liegen.

g) Wenn man in einem Dreiecke die Halbirungspunkte zweier Seiten nicht nur unter einander verbindet, sondern von ihnen auch zwei beliebige Parallele nach der dritten Seite zieht, so entstehet ein Parallelogramm, welches die Hälfte des Dreieckes ist.

h) Wenn man in einem Vierecke die Halbirungspunkte der vier Seiten durch Gerade verbindet, so schließen diese ein Parallelogramm ein, welches die Hälfte des Viereckes ist.

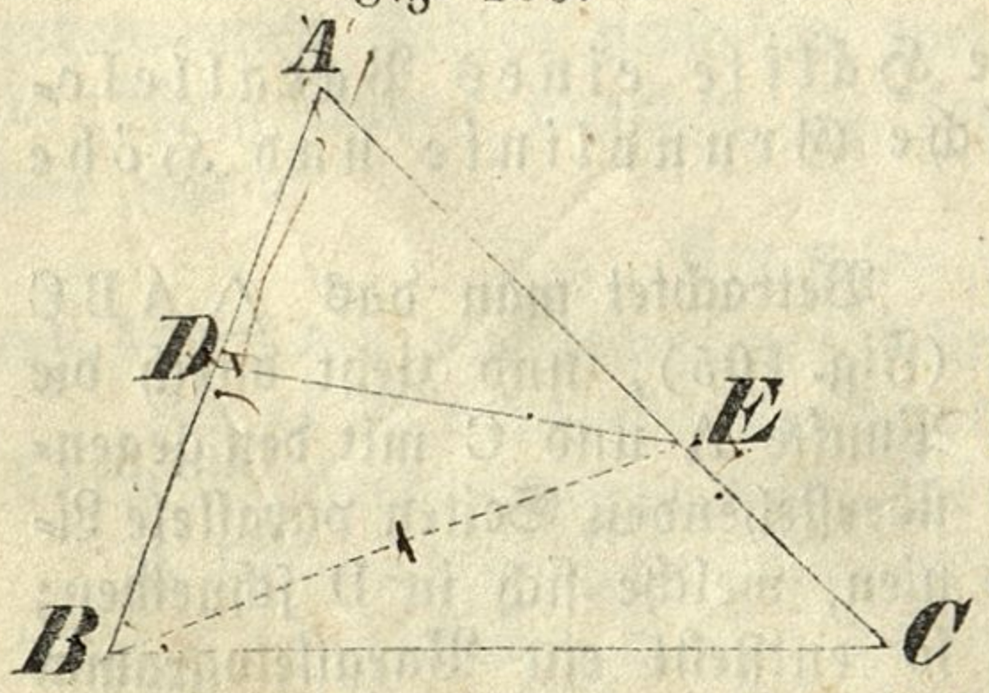
i) Wenn man zwei gegenüberliegende Seiten eines Viereckes halbirt, und den Halbirungspunkt einer jeden mit den Endpunkten der andern Seite verbindet, so sind die beiden dadurch entstandenen Dreiecke zusammen so groß als das Viereck

k) Wenn man durch den Halbirungspunkt einer Diagonale eines Parallelogramms zu den Seiten desselben Parallele zieht, so wird das Parallelogramm in vier kongruente Theile getheilt.

Die Richtigkeit dieser Sätze wird der fleißige Anfänger ohne Schwierigkeit von selbst nachweisen können.

§. 141. Zwei Dreiecke, welche einen gleichen Winkel haben, verhalten sich so wie die Produkte aus den Seiten, die den gleichen Winkel einschließen.

Fig. 106.



Die Dreiecke B A C und D A E (Fig. 106) haben den Winkel A gemeinschaftlich, und es ist zu beweisen, daß die Proporzion

$$\triangle BAC : ADE = AB . AC : AD . AE$$

Statt findet. — Man ziehe die Hilfslinie BE; die Dreiecke B A C und E A E haben nun, wenn A C und A E als Grundlinien betrachtet werden, gleiche Höhe, daher ist

$$\triangle BAC : BAE = AC : AE;$$

eben so haben die Dreiecke B A E und D A E, wenn man A B und A D als Grundlinien annimmt, dieselbe Höhe, folglich ist auch

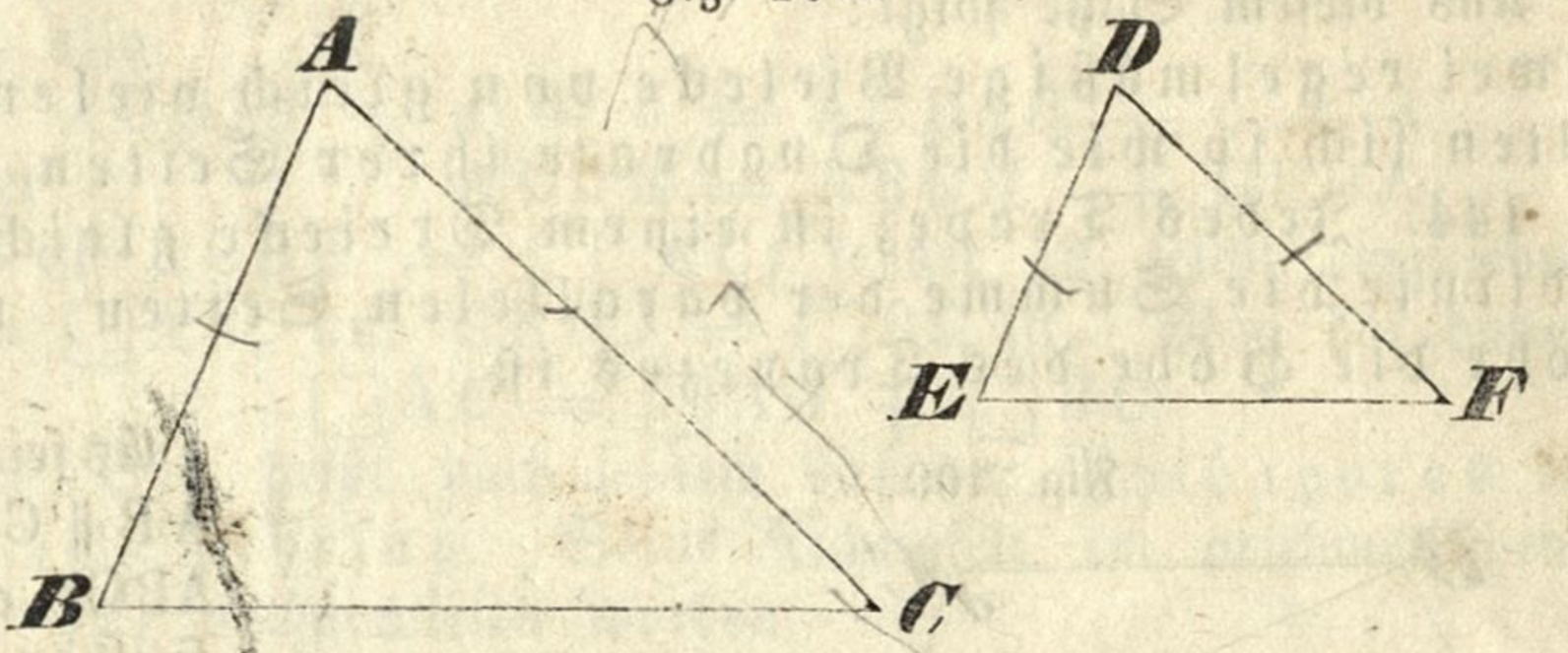
$$\triangle BAE : DAE = AB : AD.$$

Multiplizirt man nun die gleichnamigen Glieder dieser beiden Proporzionen, so erhält man

$$\triangle BAC : DAE = AB \cdot AC : AD \cdot AE.$$

§. 142. Zwei ähnliche Dreiecke verhalten sich so wie die Quadrate ihrer gleichliegenden Seiten.

Fig. 107.



Es sei (Fig. 107) $\triangle ABC \sim DEF$.
Da der Winkel $A = D$ ist, so hat man

$$\triangle ABC : DEF = AB \cdot AC : DE \cdot DF.$$

Es ist nun

$$AB : DE = AB : DE, \text{ und auch}$$
$$AC : DF = AB : DE,$$

daher durch die Multiplikazion

$$AB \cdot AC : DE \cdot DF = AB^2 : DE^2,$$

somit $\triangle ABC : DEF = AB^2 : DE^2$.
Wegen $AB : DE = AC : DF = BC : EF$ ist auch

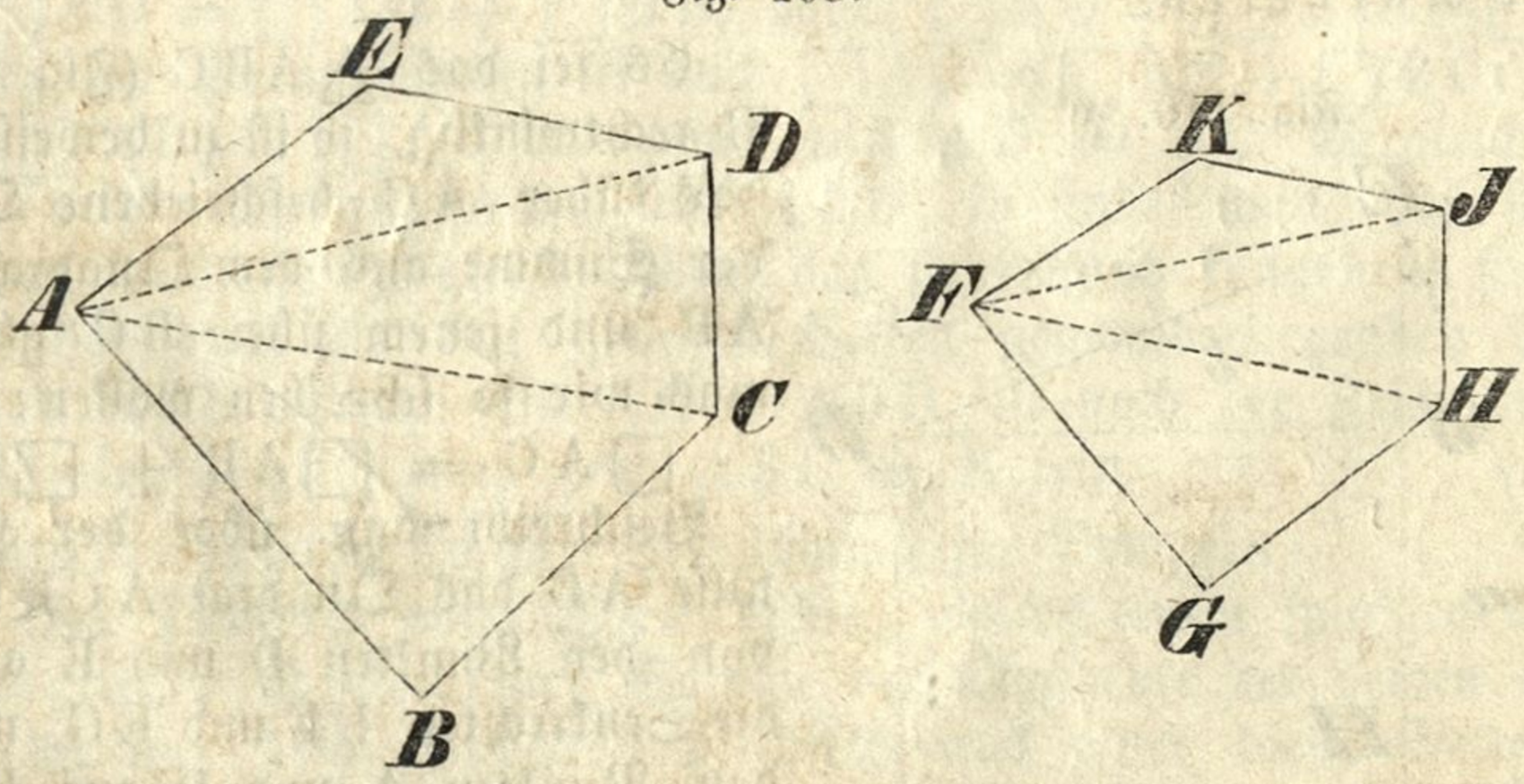
$$AB^2 : DE^2 = AC^2 : DF^2 = BC^2 : EF^2,$$

daher

$$\triangle ABC : DEF = AB^2 : DE^2 = AC^2 : DF^2 = BC^2 : EF^2.$$

§. 143. Zwei ähnliche Vielecke verhalten sich so wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten.

Fig. 108.



Es sei (Fig. 108) das Vieleck ABCDE ~ FGHJK. Zieht man die Diagonalen AC, AD, FH, FJ, so ist das $\triangle ABC \sim FGH$, $\triangle ACD \sim FHJ$, $\triangle ADE \sim FJK$; daraus folgt

$$\triangle ABC : FGH = AB^2 : FG^2,$$
$$\triangle ACD : FHJ = CD^2 : HJ^2 = AB^2 : FG^2,$$
$$\triangle ADE : FJK = DE^2 : JK^2 = AB^2 : FG^2,$$

somit auch

$$(ABC + ACD + ADE) : (FGH + FHJ + FJK) = AB^2 : FG^2,$$

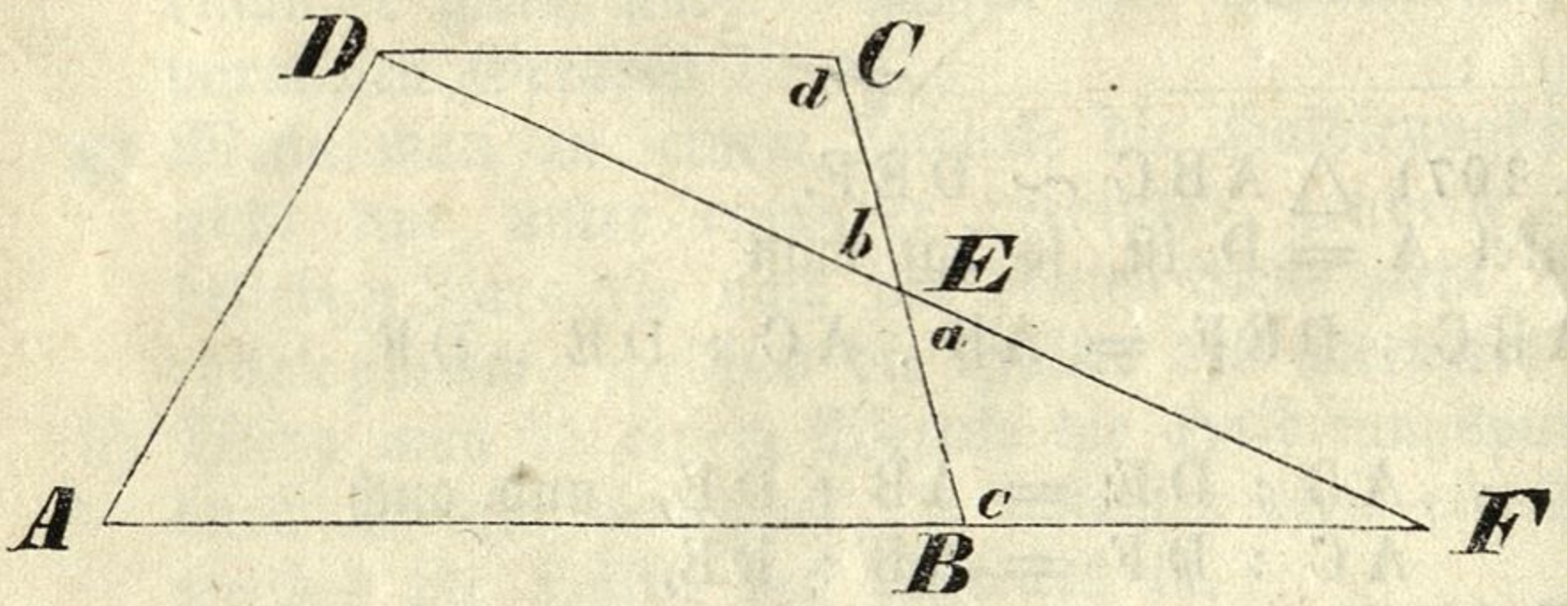
oder $$ABCDE : FGHJK = AB^2 : FG^2.$$

Aus diesem Satze folgt:

Zwei regelmäßige Vielecke von gleich vielen Seiten verhalten sich so wie die Quadrate ihrer Seiten.

§. 144. Jedes Trapez ist einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie die Summe der parallelen Seiten, und dessen Höhe die Höhe des Trapezes ist.

Fig. 109.



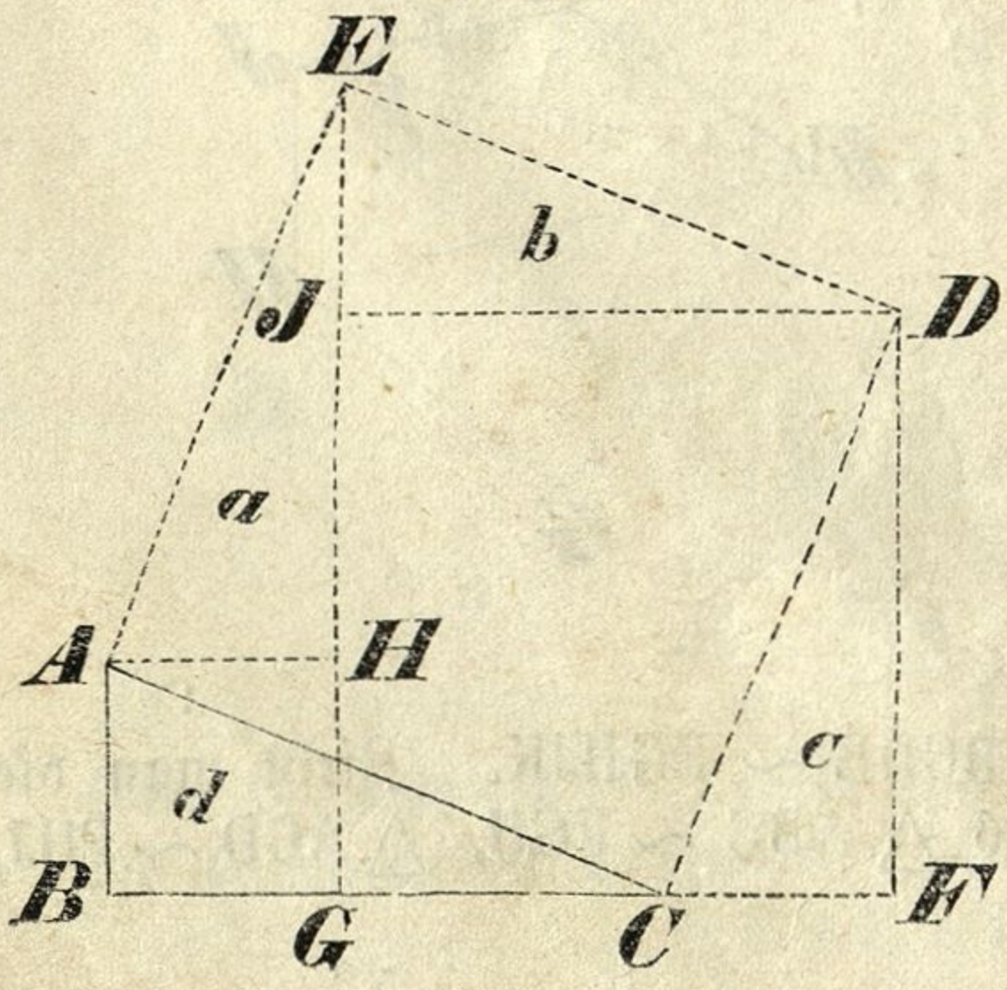
Es sei (Fig. 109) AB ∥ CD, somit ABCD ein Trapez. Halbirt man eine der nicht parallelen Seiten, z. B. die BC, in E, und zieht durch D und E eine Gerade, welche die verlängerte AB in F schneidet, so ist das $\triangle BEF \cong CED$, weil $BE = CE$, $a = b$ als Scheitelwinkel, und $c = d$ als Wechselwinkel; daher auch $BF = CD$. Addirt man zu jedem der gleichen Dreiecke CED und BEF das Viereck ABED, so muß auch $\triangle CED + ABED = \triangle BEF + ABED$, oder Trapez $ABCD = \triangle AFD$ sein. Die Höhe dieses Dreieckes AFD ist nun die Höhe des Trapezes, und die Grundlinie desselben ist

$$AF = AB + BF = AB + CD,$$

folglich gleich der Summe der beiden parallelen Seiten des Trapezes.

§. 145. In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate beider Katheten.

Fig. 110.



Es sei das $\triangle ABC$ (Fig. 110) in B rechtwinklig, so ist zu beweisen, daß das über AC beschriebene Quadrat der Summe aus dem Quadrate über AB und jenem über BC gleich ist, was wir so schreiben wollen:

$$\square AC = \square AB + \square BC.$$

Beschreibt man über der Hypotenuse AC das Quadrat ACDE, fällt von den Punkten D und E auf BC die Senkrechten DF und EG, und von den Punkten A und D auf EG die Senkrechten AH und DJ; so sind die rechtwinkligen Dreiecke AHE, EJD, CFD und ABC, welche wir nach der

Ordnung durch a, b, c und d bezeichnen wollen, kongruent, weil sie eine gleiche Hypotenuse haben, und die der Hypotenuse anliegenden Winkel als Winkel, deren Schenkel entweder parallel sind oder auf einander senkrecht stehen, ebenfalls wechselseitig gleich sind.

Setzt man nun zu dem Fünfeck ACDJH einmal die Dreiecke a und b, das andere Mal aber die Dreiecke c und d hinzu, so müssen die Summen gleich sein, also

$$ACDJH + a + b = ACDJH + c + d$$

oder

$$ACDE = ABGH + GFDJ.$$

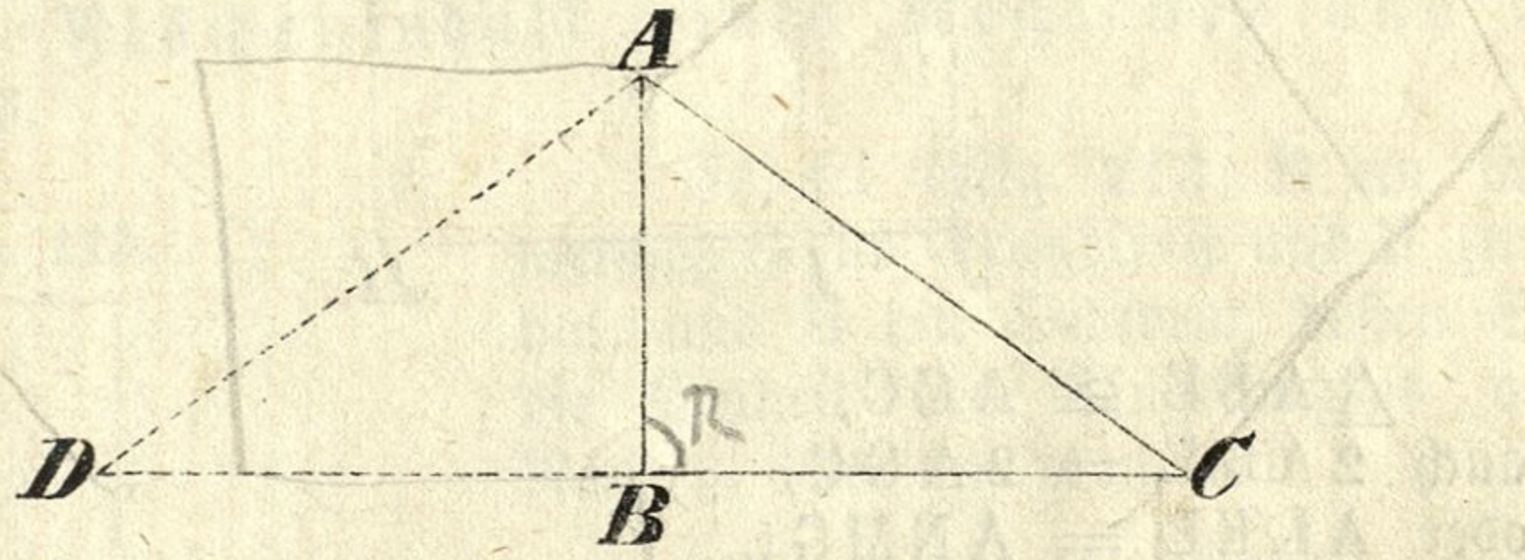
Nun ist $ACDE = \square AC$; ferner ist leicht einzusehen, daß $ABGH = \square AB$, und $GFDJ = \square BC$ ist. Man hat daher

$$\square AC = \square AB + \square BC.$$

Dieser Satz heißt nach seinem Erfinder Pythagoras der Pythagoräische Lehrsatz. Seine Richtigkeit im arithmetischen Sinne ist schon §. 121 nachgewiesen worden.

§. 146. Wenn das Quadrat einer Seite eines Dreieckes so groß ist als die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, so ist der Winkel, welcher der erstern Seite gegenüber liegt, ein rechter.

Fig. 111.



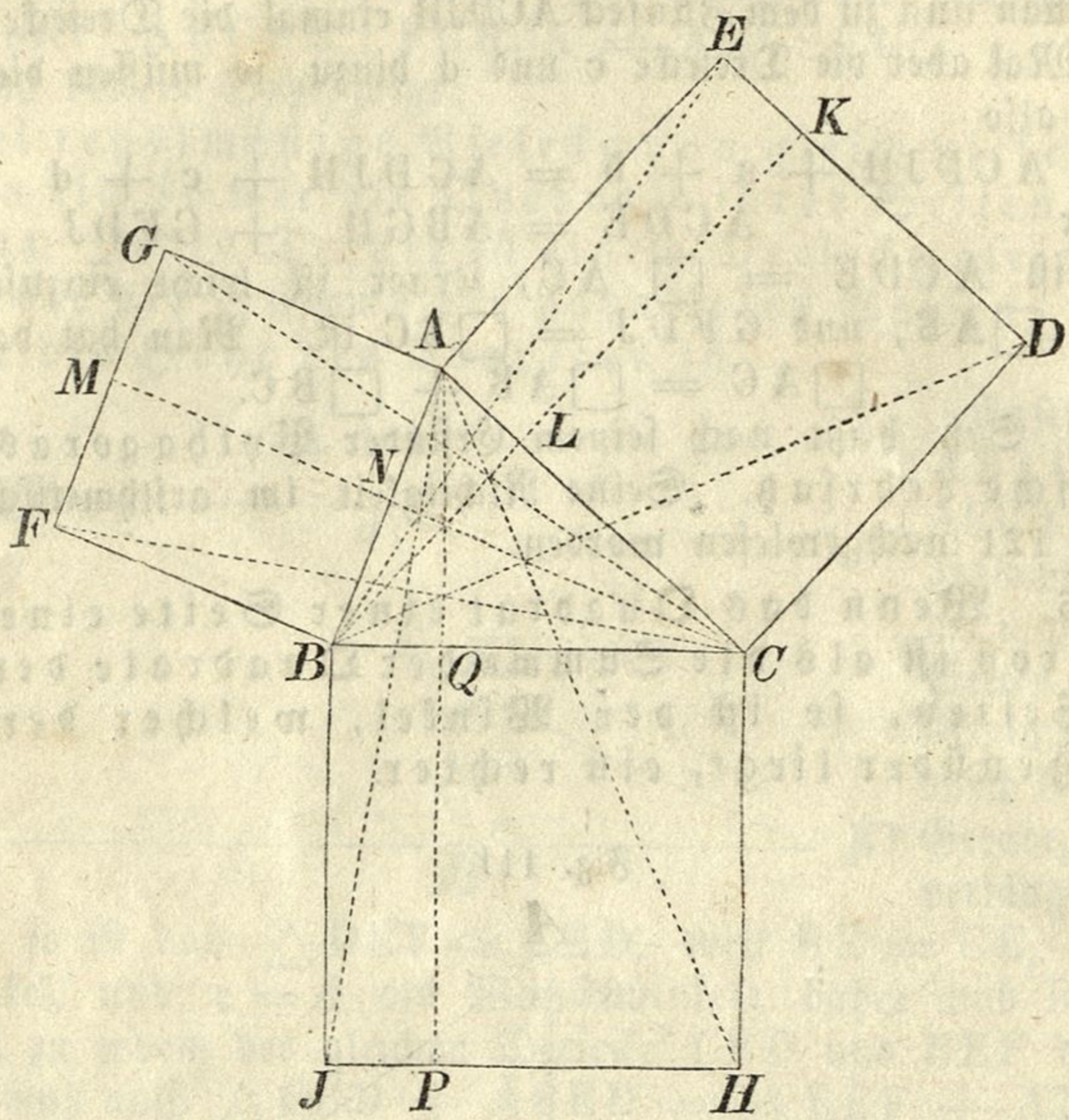
Wenn (Fig. 111) $\square AC = \square AB + \square BC$ ist, so muß der Winkel $ABC = R$ sein. Konstruirt man in B den rechten Winkel ABD, macht $BD = BC$, und zieht AD, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke ABD, $\square AD = \square AB + \square BD$, daher $\square AD = \square AB + \square BC$; aber nach der Voraussetzung ist auch $\square AC = \square AB + \square BC$; es ist demnach $\square AD = \square AC$ und somit auch $AD = AC$. Vergleicht man nun die beiden Dreiecke ABC und ABD, so findet man, daß sie alle drei Seiten wechselseitig gleich haben, daß sie folglich kongruent sind, es müssen daher auch die den gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel ABC und ABD gleich sein; aber ABD ist nach der Zeichnung ein rechter Winkel, folglich muß auch $ABC = R$ sein.

§. 147. Lehrsätze zur Selbstübung im Beweisen:

a) Das Quadrat einer Dreiecksseite, welche einem spitzigen Winkel gegenüber liegt, ist gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, weniger dem doppelten Rechtecke aus einer dieser Seiten und dem Abschnitte derselben, der zwischen dem Scheitel jenes Winkels und dem Fußpunkte der auf diese letztere Seite von dem gegenüberstehenden Scheitel gefällten Senkrechten liegt.

Wir wollen dem Anfänger die Durchführung des Beweises durch Beisetzung der Figur und einige Andeutungen erleichtern (Fig. 112).

Fig. 112.



$$\begin{aligned}
\triangle ABE &\cong AGC,\\
\text{daher auch } 2ABE &= 2AGC,\\
\text{oder } ALKE &= ANMG;\\
\text{eben so } CLKD &= CQPH,\\
\hline
\text{daher } ACDE &= ANMG + CQPH\\
&= ABFG + BCHJ - BFMN - BJPQ,\\
\text{somit } \square AC &= \square AB + \square BC - 2BJPQ.
\end{aligned}$$

b) Das Quadrat einer Dreiecksseite, welche einem stumpfen Winkel gegenüber liegt, ist gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, mehr dem doppelten Rechtecke aus einer dieser Seiten und dem Abschnitte derselben, der zwischen dem Scheitel jenes Winkels und dem Fußpunkte der auf diese letztere Seite von dem gegenüberstehenden Scheitel gefällten Senkrechten liegt.

Der Beweis ist dem vorigen ähnlich.

c) Wenn man von einer Winkelspitze eines Dreieckes zur Mitte der gegenüberliegenden Seite eine Gerade zieht, so ist die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten gleich dem doppelten Quadrate der halben getheilten Seite, mehr dem doppelten Quadrate der Theilungslinie. [Folgt aus a) und b).]

d) In jedem Parallelogramme ist die Summe der Quadrate der beiden Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der vier Seiten.

2. Berechnung des Flächeninhaltes.

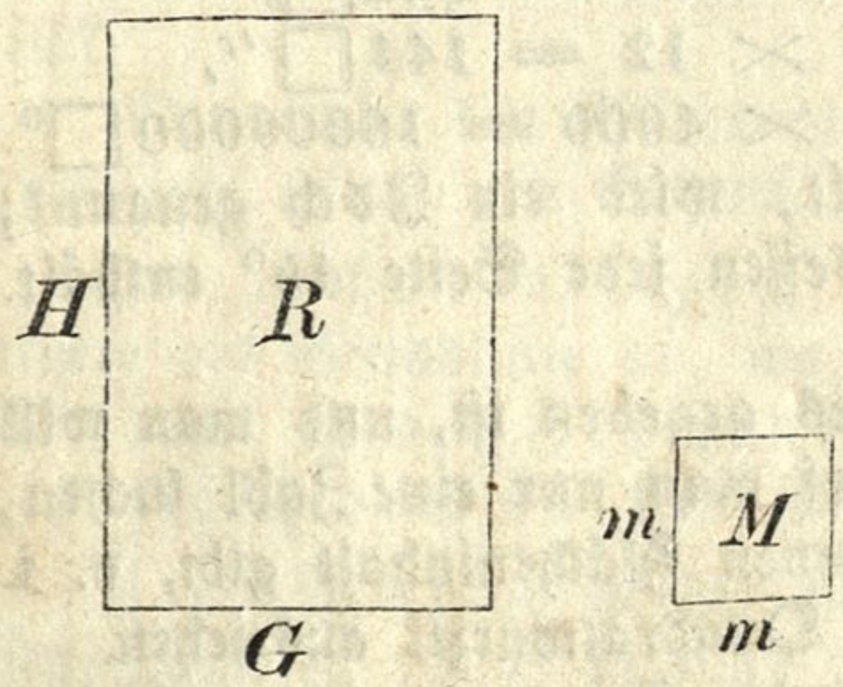
§. 148. Um den Flächeninhalt einer Figur zu messen, nimmt man irgend eine bekannte Fläche als Einheit des Maßes an, und untersucht, wie oft diese als Einheit angenommene Fläche in der gegebenen Figur enthalten ist.

Als Einheit des Flächenmaßes wird ein Quadrat angenommen, dessen jede Seite der Längeneinheit gleich ist, und das eine Quadratklafter ($\square^0$), ein Quadratfuß ($\square'$), ein Quadratzoll ($\square''$), . . eine Quadratmeile ($\square$ Meile) heißt, je nachdem die Länge einer Seite eine Klafter, einen Fuß, Zoll, . . eine Meile beträgt.

Die Ausmessung einer Fläche sollte eigentlich mittelst des wirklichen Auftragens der Quadratklafter, Quadratfuß, . . . geschehen; allein ein solches Verfahren wäre zu schwierig und in den meisten Fällen auch gar nicht ausführbar; daher sollen hier die Sätze abgeleitet werden, nach denen man, wenn die Länge der Linien, von denen die Größe der Figur abhängt, bekannt ist, daraus durch bloße Rechnung den Flächeninhalt bestimmen kann.

§. 149. Flächeninhalt eines Rechteckes und eines Quadrates.

Fig. 113.



Es sei (Fig. 113) R ein Rechteck, welches G zur Grundlinie und H zur Höhe hat, und M ein Quadrat, dessen Seite m die Einheit des Längenmaßes vorstellt. Nach §. 136 hat man nun

$$R : M = (G : m) \cdot (H : m)$$

oder

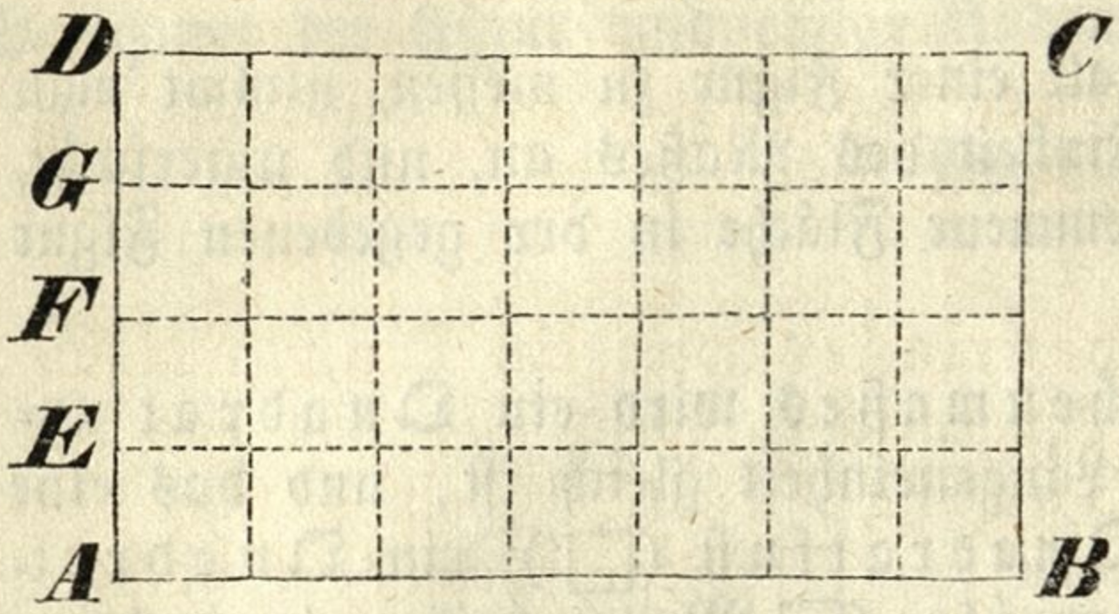
$$\frac{R}{M} = \frac{G}{m} \cdot \frac{H}{m}.$$

Es bedeutet nun $\frac{R}{M}$ die Zahl, welche angibt, wie oft die Flächeneinheit M in dem gegebenen Rechtecke R vorkommt; $\frac{G}{m}$ und $\frac{H}{m}$ aber sind die Zahlen, welche angeben, wie oft die Längeneinheit m in der Grundlinie und in der Höhe jenes Rechteckes enthalten ist. Es ist also die Zahl, welche den Flächeninhalt des Rechteckes ausdrückt, gleich dem Produkte aus den Zahlen, welche die Länge seiner Grundlinie und die Länge seiner Höhe angeben.

Diese Beziehung pflegt man kürzer durch folgenden Satz auszusprechen:

Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Produkte aus der Grundlinie und der Höhe.

Fig. 114.



Um die Richtigkeit dieses Satzes an einem besondern Falle anschaulich darzustellen, sei ABCD (Fig. 114) ein Rechteck, dessen Grundlinie $AB = 7^o$, und die Höhe $AD = 4^o$ ist. Um den Flächeninhalt dieses Rechteckes zu bestimmen, sollte man, dem Begriffe des Messens zu Folge eine Quadrat-Klafter wiederholt auf dem Rechtecke umlegen, und bestimmen, wie oft dieses Auftragen möglich ist. Längs der Grundlinie AB läßt sich eine Quadratklafter 7mal auftragen, diese Reihe von 7 Quadratklafter gehört zur Höhe AE; zur Höhe EF gehört eine zweite solche Reihe, welche ebenfalls 7 Quadratklafter enthält; eben solche Reihen gehören zu den Höhen FG und GD. Man erhält also 4 Reihen von Quadraten, deren jede 7 Quadratklafter enthält; es sind also zusammen 4 mal $7 = 28 \square^o$.

§. 150. Da jedes Quadrat als ein Rechteck betrachtet werden kann, worin die Grundlinie der Höhe gleich ist, so hat man folgenden Satz:

Der Flächeninhalt eines Quadrates wird gefunden, wenn man eine Seite mit sich selbst multiplizirt, oder zum Quadrate erhebt.

Aus diesem Satze folgt:
$$1 \square^o = 6 \times 6 = 36 \square',$$
$$1 \square' = 12 \times 12 = 144 \square'',$$
$$1 \square'' = 12 \times 12 = 144 \square''',$$
$$1 \square \text{ Meile} = 4000 \times 4000 = 16000000 \square^o.$$

Eine Fläche, welche $1600 \square^o$ enthält, wird ein Joch genannt; ein Joch ist also einem Quadrate gleich, dessen jede Seite 40° enthält.
$1 \square$ Meile $= 10000$ Joch.

Wenn der Flächeninhalt eines Quadrates gegeben ist, und man will daraus die Länge einer Seite finden, so darf man nur eine Zahl suchen, welche mit sich selbst multiplizirt den gegebenen Flächeninhalt gibt, d. i. man darf nur aus dem Flächeninhalte die Quadratwurzel ausziehen.

Heißen Q und q die Flächeninhalte zweier Quadrate, deren Seiten S und s sind, so hat man

$$Q = S^2 \text{ und } q = s^2,$$
$$\text{daher } Q : q = S^2 : s^2,$$

d. h. die Flächeninhalte zweier Quadrate verhalten sich so zu einander, wie die Quadrate ihrer Seiten.

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt auch aus §. 143.

§. 151. Aufgaben.

1) Die Grundlinie eines Rechteckes ist 23′, die Höhe 10′; wie groß ist der Flächeninhalt?

2) Wie groß ist die Fläche eines Rechteckes, dessen Grundlinie $5^o 3'$ und dessen Höhe $3^o 4'$ ist?

3) Ein Garten ist $21^o 4'$ lang und $13^o 5'$ breit; wie groß ist sein Flächenraum?

4) Man bestimme den Flächeninhalt eines Quadrates, dessen Seite $3^0\ 3'\ 7''$ ist?

5) Wie groß ist die Seite eines Quadrates, dessen Flächenraum $37\square^0\ 13\square'\ 64\square''$ ist?

§. 152. Flächeninhalt eines schiefwinkligen Parallelogramms.

Jedes schiefwinklige Parallelogramm ist einem Rechtecke gleich, welches mit demselben eine gleiche Grundlinie und Höhe hat. Daraus folgt:

Der Flächeninhalt eines schiefen Parallelogramms ist gleich der Grundlinie multiplizirt mit der Höhe.

§. 153. Flächeninhalt eines Dreieckes.

Da jedes Dreieck die Hälfte eines Parallelogramms ist, das mit ihm einerlei Grundlinie und Höhe hat, so muß man, um die Fläche eines Dreieckes zu erhalten, auch die Grundlinie mit der Höhe multipliziren, aber von diesem Produkte nur die Hälfte nehmen. Daraus folgt:

Der Flächeninhalt eines Dreieckes ist gleich dem halben Produkte aus der Grundlinie in die Höhe.

Z. B. Die Grundlinie eines Dreieckes ist $3^0\ 4'\ 5''$, die Höhe $2^0\ 1'\ 6''$; wie groß ist der Flächenraum?

$3^0\ 4'\ 5'' = 267''$
$2^0\ 1'\ 6'' = 162''$

$$\frac{267 \times 162}{2} = 267 \times 81 = 21627\square''$$
$$= 4\square^0\ 6\square'\ 27\square''.$$

Wie groß ist die Fläche eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Seite a ist?

Man suche den Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreieckes, dessen Grundlinie a und ein Schenkel b ist.

Im rechtwinkligen Dreiecke nimmt man gewöhulich eine Kathete als Grundlinie an, wo sodann die andere Kathete die Höhe vorstellt; daher ist der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes gleich dem halben Produkte aus den beiden Katheten.

Z. B. Wie groß ist der Flächenraum eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten $7^0\ 4'$ und $5^0\ 3'$ sind?

§. 154. Flächeninhalt eines Trapezes.

Da ein Trapez einem Dreiecke gleich ist, dessen Grundlinie die Summe der beiden parallelen Seiten, und dessen Höhe die Höhe des Trapezes ist, so folgt:

Der Flächeninhalt eines Trapezes wird berechnet, wenn man die Summe der beiden Parallelseiten mit der Höhe multiplizirt, und das Produkt durch 2 dividirt.

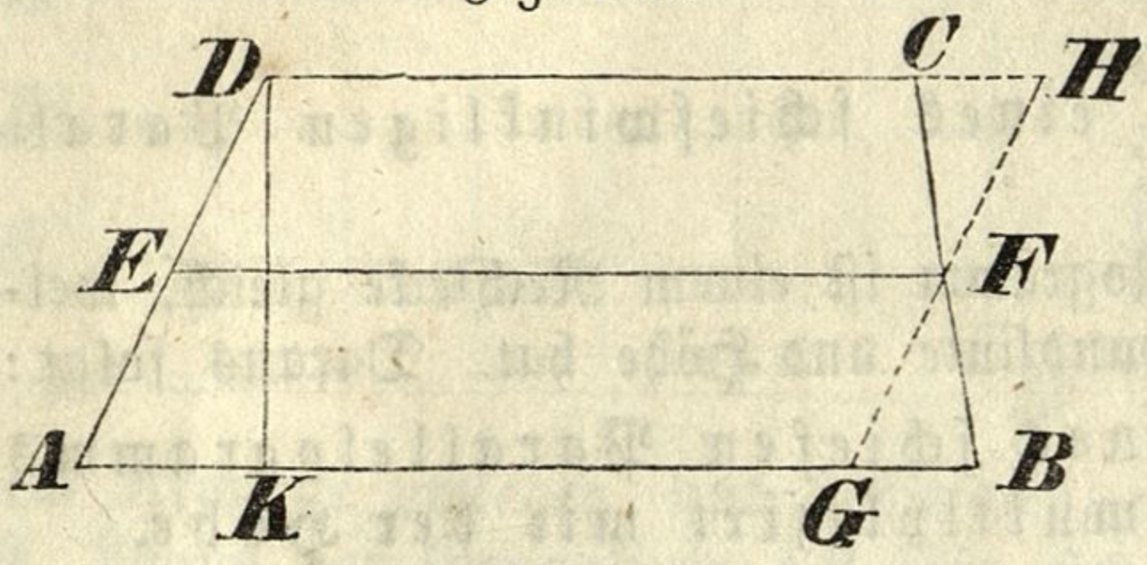
Z. B. Die parallelen Seiten eines Trapezes betragen $5^0\ 4'$ und $4^0\ 2'$, die Höhe $2^0\ 4'$; wie groß ist der Flächeninhalt?

$5^0\ 4' = 34'$
$4^0\ 2' = 26'$
Summe $= 60'$
$2^0\ 4' = 16'$

$$\text{Flächeninhalt} = \frac{60 \times 16}{2} = 60 \times 8$$
$$= 480\square' = 13\square^0\ 12\square'.$$

Der Flächeninhalt eines Trapezes kann auch noch auf eine andere Art bestimmt werden.

Fig. 115.



Halbirt man in dem Trapeze ABCD (Fig. 115) die zwei nicht parallelen Seiten, zieht durch die Halbirungspunkte E und F eine Gerade, ferner GH ∥ AD, so ist das △ BFG ≅ CFH, daher BG = CH. Es ist nun, wenn DK die Höhe des Trapezes vorstellt, der Flächeninhalt des Trapezes

$$f = (AB + CD) \times \frac{DK}{2}.$$

Aber

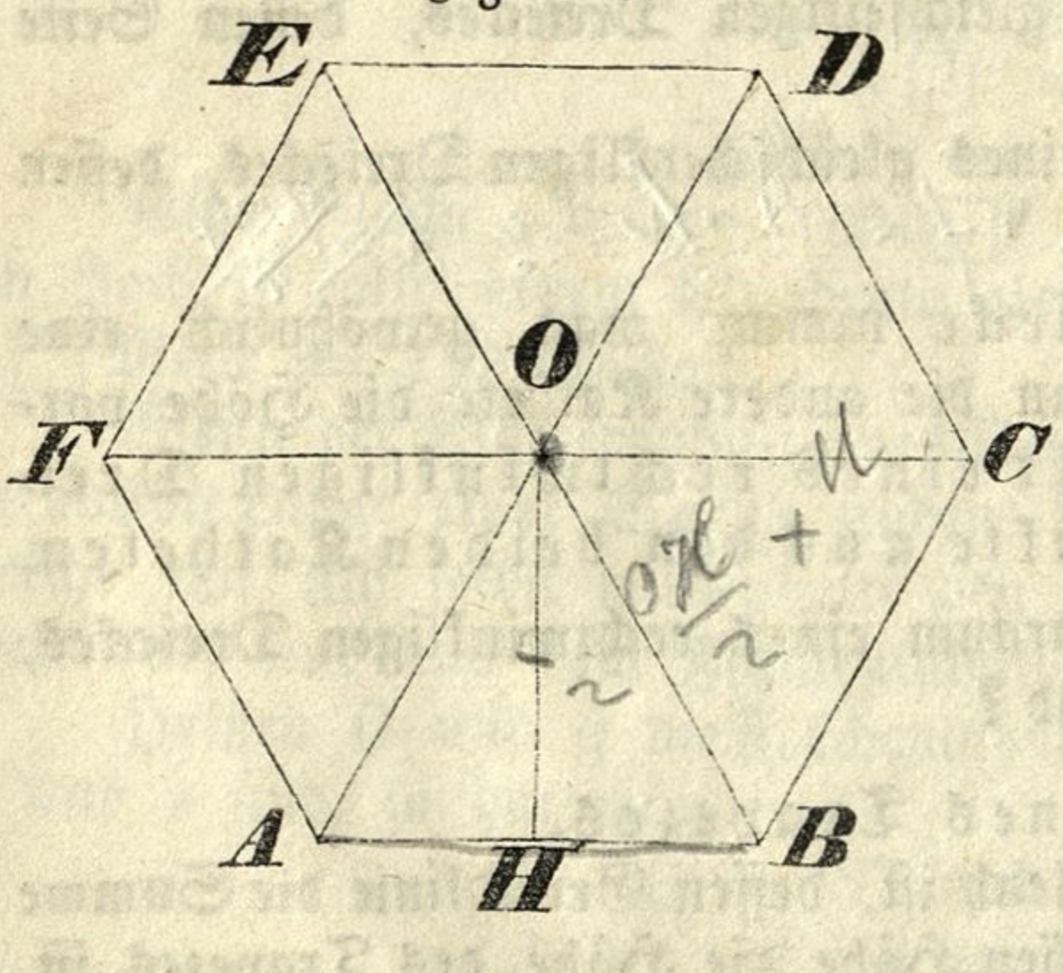
$$AB + CD = (AG + BG) + (DH - CH) = AG + DH = 2EF;$$

$$\text{daher } f = 2EF \times \frac{DK}{2} = EF \times DK,$$

d. h. der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich der Geraden, welche die zwei nicht parallelen Seiten halbirt, multiplizirt mit der Höhe.

§. 155. Flächeninhalt eines regulären Vieleckes (Figur 116).

Fig. 116.



Die Fläche eines regulären meckes wird man sicher finden, wenn man von der Mitte zu allen Eckpunkten gerade Linien zieht, und die dadurch entstehenden Dreiecke berechnet; da aber diese Dreiecke kongruent sind, so braucht man nur eines zu bestimmen, und die gefundene Fläche mit der Anzahl der Dreiecke zu multipliziren. Der Flächeninhalt eines solchen Dreieckes AOB ist gleich der Grundlinie AB multiplizirt mit der halben Höhe OH; daher die Fläche aller m Dreiecke gleich mmal AB multiplizirt mit der halben Höhe OH; mmal AB ist der Umfang des Vieleckes, OH ist der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite des Vieleckes. Daher hat man den Satz:

Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes ist gleich dem Umfange multiplizirt mit dem halben Abstande des Mittelpunktes von einer Seite.

§. 156. Beispiele.

1) In einem regelmäßigen Zehnecke beträgt eine Seite $2^0\ 1'\ 3''$, und der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite $2^0\ 5'\ 7''$; wie groß ist der Flächeninhalt?

Seite $2^0\ 1'\ 3'' = 159''$ $\quad 1590 \times \frac{211}{2} = 795 \times 211$
Umfang $= 1590''$ $\quad = 167745\ \square''$
Abstand $2^0\ 5'\ 7'' = 211''$ $\quad = 32\square^0\ 12\square'\ 129\square''$.

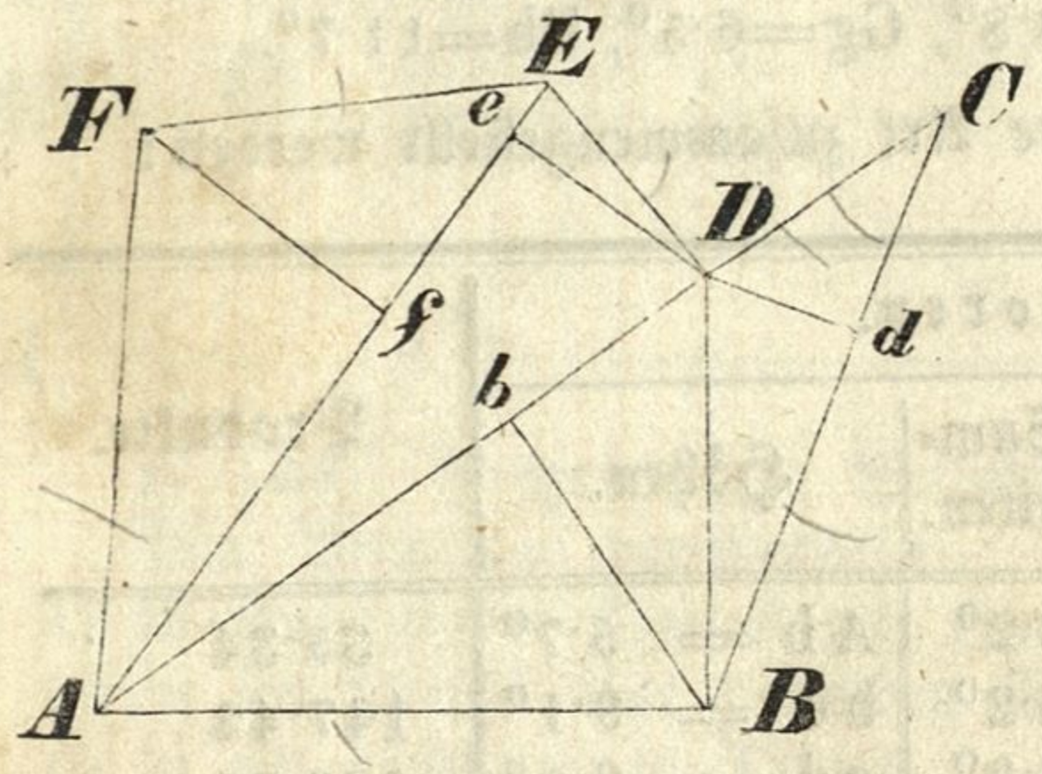
2) Wie groß ist die Fläche eines regulären Sechseckes, dessen Seite $3'\ 4''$ beträgt?

Man überzeugt sich leicht daß im Dreieck AOB (Fig. 116) jeder Winkel 60^0 beträgt, daß somit dieses Dreieck gleichseitig ist. Für ein gleichseitiges Dreieck aber, worin eine Seite $3'\ 4''$ ist, findet man die Höhe $= 2'\ 10{\cdot}6''$. Man hat daher

Seite $3'\ 4'' = 40''$ $\quad 240 \times 17{\cdot}3 = 4152\ \square''$
Umfang $= 240''$ $\quad = 28\ \square'\ 120\ \square''$
Abstand $2'\ 10{\cdot}6'' = 34{\cdot}6''$,

§. 157. Flächeninhalt irgend einer geradlinigen Figur.

Fig. 117.



Den Flächeninhalt einer geradlinigen Figur kann man vorzüglich auf folgende zwei Arten bestimmen:

a) Man zerlege die Figur durch Diagonalen in lauter Dreiecke, berechne jedes dieser Dreiecke, und addire alle Dreiecksflächen.

Es sei z. B. die Fläche des Sechseckes ABCDEF (Fig. 117) auszurechnen. Man zerlege dasselbe in Dreiecke, und es sei

$AD = 20{\cdot}7^0$, $BC = 17{\cdot}8^0$, $AE = 21{\cdot}3^0$;
$Bb = 9{\cdot}5^0$, $Dd = 3{\cdot}9^0$, $De = 7^0$, $Ff = 8{\cdot}8^0$

Man hat nun

$$\triangle ABD = \frac{AD \,.\, Bb}{2} = \frac{20{\cdot}7 \times 9{\cdot}5}{2} = 98{\cdot}32\square^0$$

$$\triangle BCD = \frac{BC \,.\, Dd}{2} = \frac{17{\cdot}8 \times 3{\cdot}9}{2} = 34{\cdot}71\ ''$$

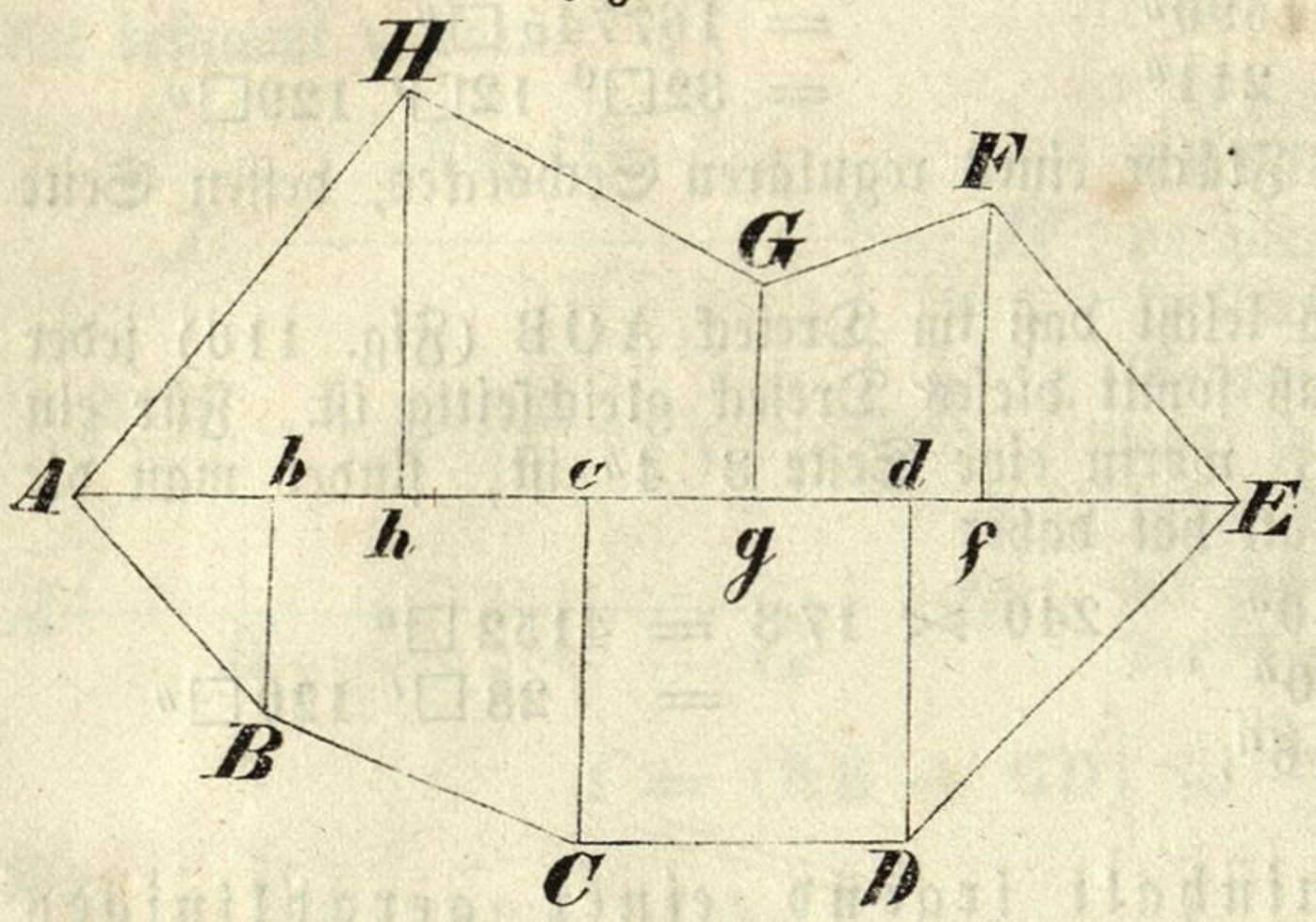
$$\triangle ADE = \frac{AE \,.\, De}{2} = \frac{21{\cdot}3 \times 7}{2} = 74{\cdot}55\ ''$$

$$\triangle AEF = \frac{AE \,.\, Ff}{2} = \frac{21{\cdot}3 \times 8{\cdot}8}{2} = 93{\cdot}72\ ''$$

Sechseck $ABCDEF = 301{\cdot}3\square^0$.

b) Man ziehe durch zwei Eckpunkte eine Gerade, und fälle darauf von allen übrigen Eckpunkten Senkrechte, so zerfällt die Figur in lauter rechtwinklige Dreiecke und Trapeze, welche einzeln berechnet und dann addirt werden. Dabei betrachtet man die Senkrechten als Grundlinien der Dreiecke oder als parallele Seiten der Trapeze, die Abschnitte der durch die Mitte gezogenen Geraden aber als Höhen. Es ist dabei nicht nöthig,

Fig. 118.



die einzelnen für die Dreiecke und Trapeze erhaltenen Produkte durch 2 zu dividiren; man addirt vielmehr sogleich die ganzen Produkte, und dividirt erst die Summe durch 2. Um z. B. den Flächeninhalt des Vieleckes ABCDEFGII (Fig. 118) zu berechnen, ziehe man die Gerade AE, und fälle darauf die Senkrechten Bb, Cc, Dd, Ff, Gg, Hh.

Es sei nun

Ab=5·7°, bh=3·8°, hc=5·3°, cg=5°, gd=4·5°, df=2 3°, fE=7·6°;
Bb=6·2°, Cc=10°, Dd=9·9°, Ff=8·8°, Gg=6·5°, Hh=11·7°.

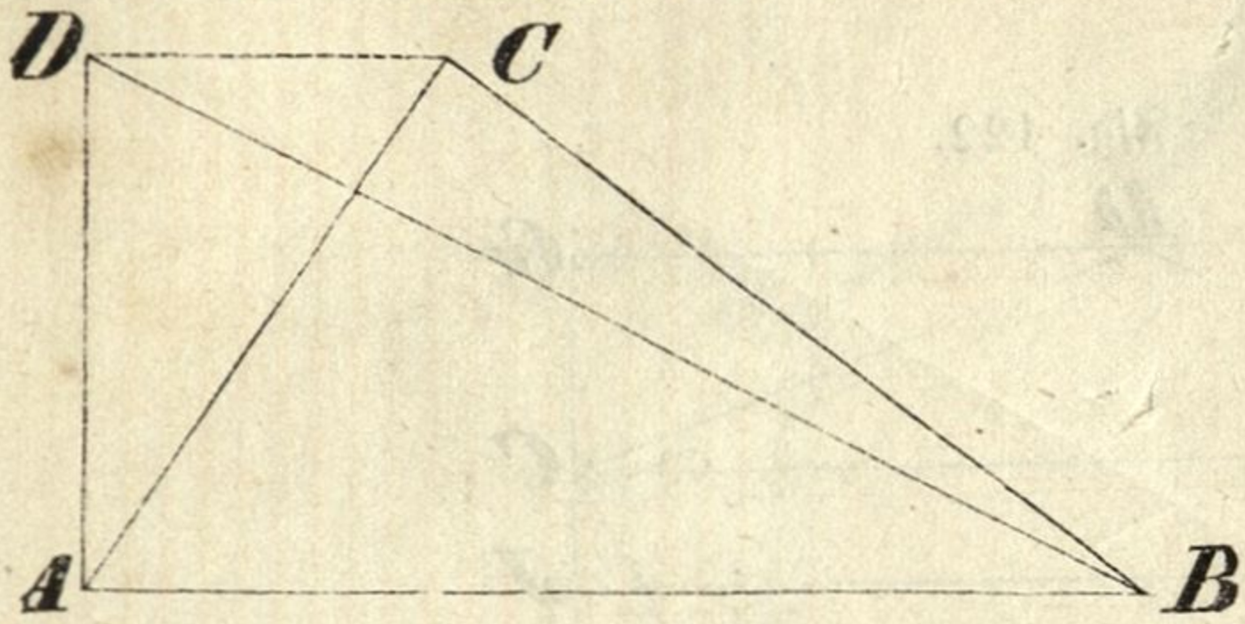
Die Rechnung kann auf folgende Art zusammengestellt werden:

Bestandtheile der Figur.	Faktoren.		Produkte.
	Grundlinien oder Summen der Parallelseiten.	Höhen.	
Dreieck ABb .	Bb = 6·2°	Ab = 5·7°	35·34
Trapez BbcC .	Bb + Cc = 16·2°	bc = 9·1°	147·42
" CcdD .	Cc + Dd = 19·9°	cd = 9·5°	189·05
Dreieck DdE .	Dd = 9·9°	dE = 9·9°	98·01
" FfE .	Ff = 8·8°	fE = 7·6°	66·88
Trapez FfgG .	Ff + Gg = 15·3°	fg = 6·8°	104·04
" GghH .	Gg + Hh = 18·2°	gh = 10·3°	187·46
Dreieck AhH .	Hh = 11·7°	AH = 9·5°	111·15
			939·15
	Figur ABCDEFGH		469·57 □°

3. Verwandlung geradliniger Figuren.

§. 158. Ein jedes Dreieck in ein gleich großes rechtwinkliges zu verwandeln.

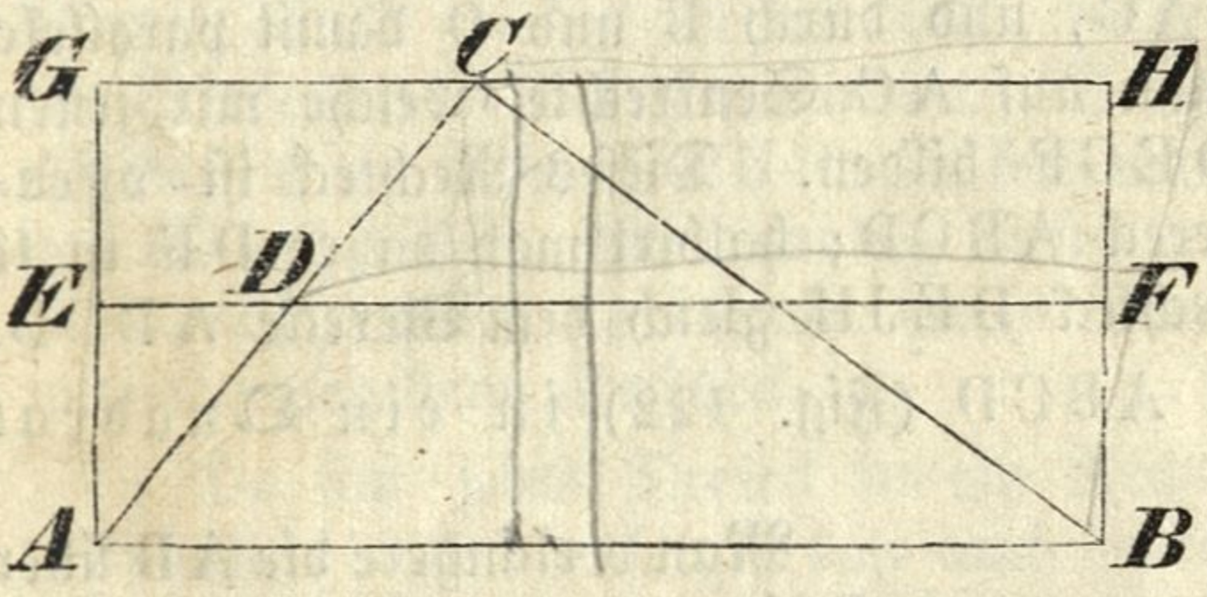
Fig. 119.



Um das △ A B C (Figur 119) in ein rechtwinkliges zu verwandeln, errichte man in A auf die A B eine Senkrechte, und ziehe durch C mit A B eine Parallele, welche jene Senkrechte in D trifft. Zieht man nun die B D, so ist das rechtwinklige △ BAD = BAC, weil beide Dreiecke dieselbe Grundlinie und eine gleiche Höhe haben.

§. 159. Es soll ein Dreieck ABC (Fig. 120) in ein gleichgroßes Rechteck verwandelt werden.

Fig. 120.



Man errichte in A und B Senkrechte auf A B, halbire die Seite A C in D und ziehe durch diesen Punkt eine Parallele mit A B, welche jene Senkrechten in E und F schneidet. Das Rechteck A B F E ist nun dem Dreiecke A B C gleich, weil jedes die Hälfte des Rechteckes A B H G ist.

§. 160. Aufgaben zur Selbstübung im Auflösen:
Ein Dreieck zu verwandeln
a) in ein anderes Dreieck mit einem gegebenen Winkel,
b) in ein Dreieck über derselben Grundlinie, welches gleichschenklig ist,
c) in ein gleichseitiges Dreieck,
d) in ein anderes Dreieck von gegebener Höhe,
e) in ein Parallelogramm mit einem gegebenen Winkel.

§. 161. Es soll ein Viereck A B C D (Fig. 121) in ein Dreieck verwandelt werden, dessen Grundlinie längs einer Seite AB, und dessen Scheitel in D liegt.

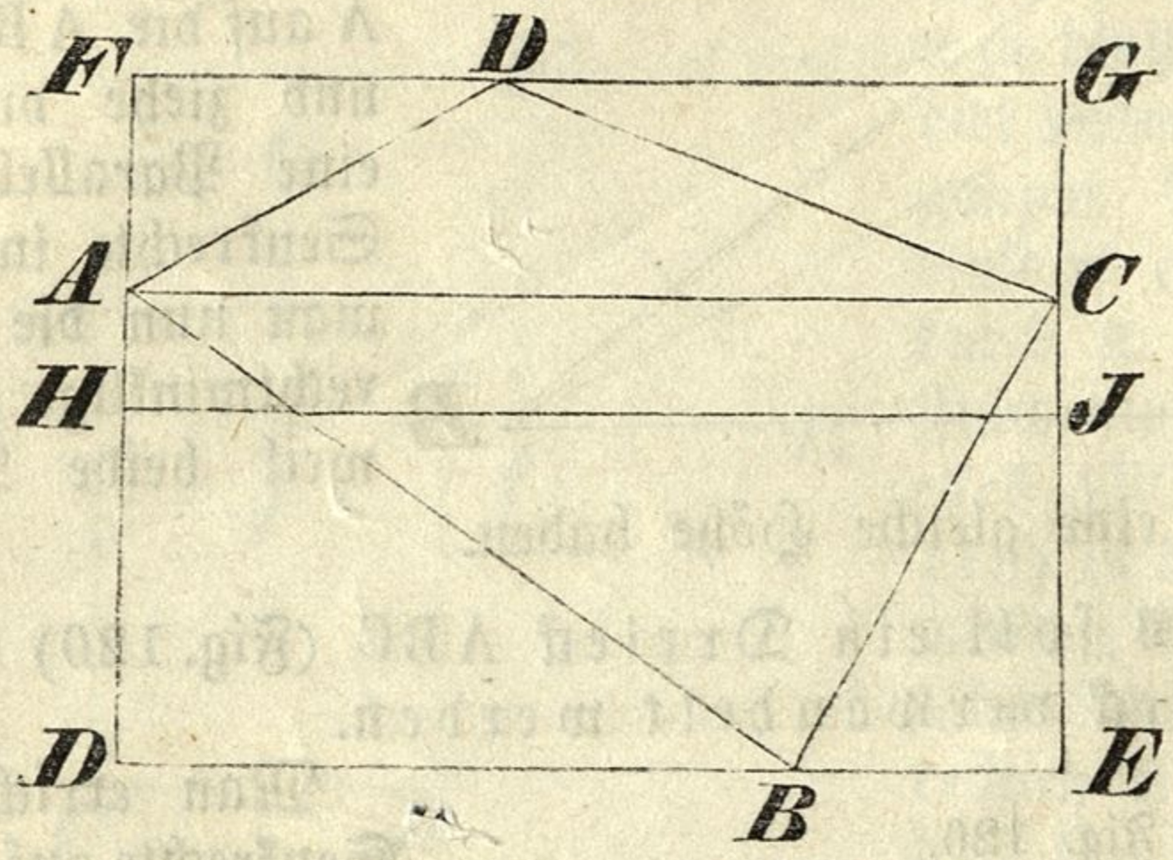
Fig. 121.

Analysis. Es sei A E D das verlangte Dreieck. Da dasselbe aus den Dreiecken A B D und B D E bestehet, und daher mit dem gegebenen Vierecke einen Theil, nämlich das durch die Diagonale BD abgeschnittene Dreieck A B D gemeinschaftlich hat, so muß auch das Dreieck B D E dem andern Theile B D C des Viereckes gleich sein.

Wie wird daher die Konstrukzion zu bewerkstelligen, und der Beweis zu führen sein?

§. 162. Ein beliebiges Viereck ABCD (Fig. 122) in ein Rechteck zu verwandeln.

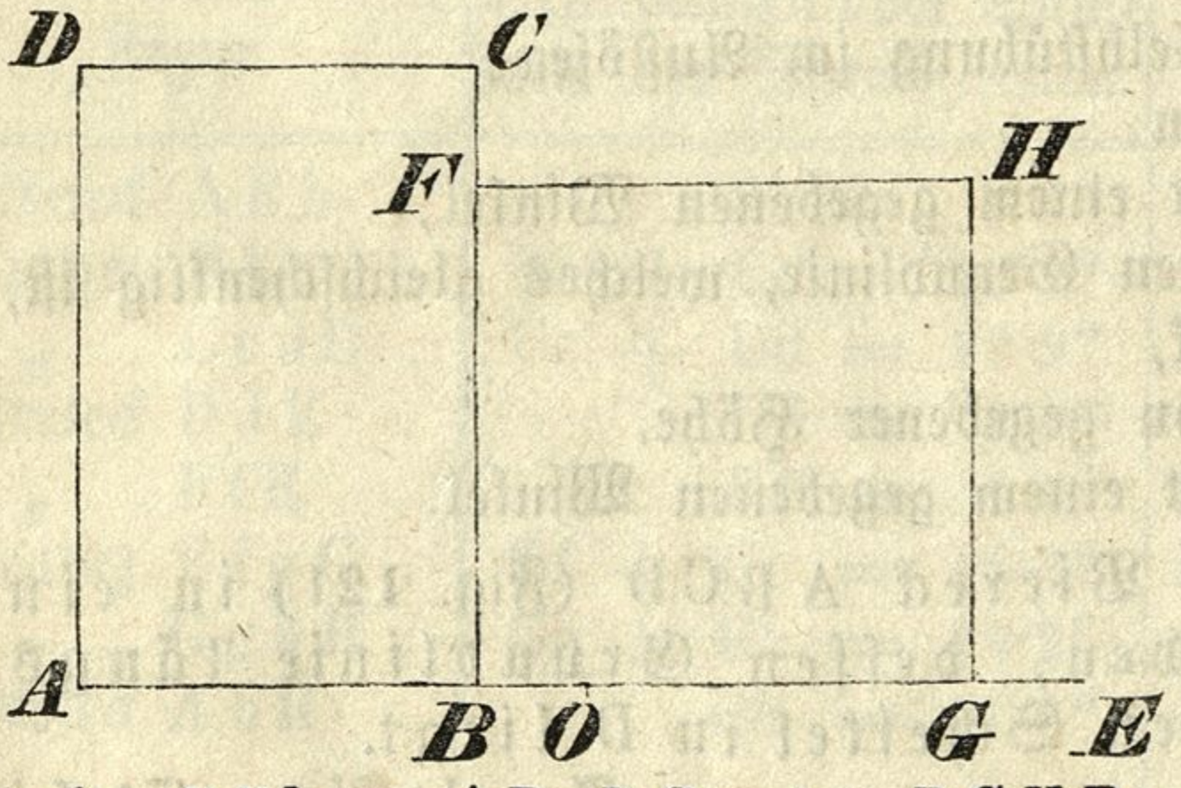
Fig. 122.



Man ziehe die Diagonale AC, und durch B und D damit parallele Linien, durch A und C zieht man auf AC Senkrechte, welche mit jenen zwei Parallelen das Rechteck DEGF bilden. Dieses Rechteck ist offenbar doppelt so groß als das Viereck ABCD; halbirt man daher DF in H und zieht HJ || DE, so ist das Rechteck DEJH gleich dem Vierecke ABCD.

§. 163. Ein Rechteck ABCD (Fig. 122) in ein Quadrat zu verwandeln.

Fig. 123.



Man verlängere die AB über B hinaus, und mache BE = BC; hierauf halbire man die AE im Punkte O, beschreibe aus O mit dem Halbmesser AO einen Kreisbogen, welcher die BC in F trifft, und konstruire über BF das Quadrat BGHF. Da BF die mittlere Proporzionale zwischen AB und BE ist (§. 131), so hat man

$$AB : BF = BF : BE,$$

oder $AB : BF = BF : BC$,

daher $BF^2 = AB . BC$, oder BGHF = ABCD; BGHF ist also das verlangte Quadrat.

§. 164. Ein Parallelogramm zu verwandeln.

a) in ein anderes Parallelogramm, worin ein Winkel gegeben ist,
b) in ein Parallelogramm von gegebener Höhe,
c) in ein Parallelogramm über einer gegebenen Grundlinie,
d) in ein Dreieck über derselben Grundlinie,
e) in ein Dreieck von derselben Höhe,
f) in einen Rhombus.

Die Auflösungen überlassen wir dem eigenen Nachdenken des Schülers.

§. 165. Ein Vieleck ABCDEF (Fig. 124) in ein Dreieck zu verwandeln.

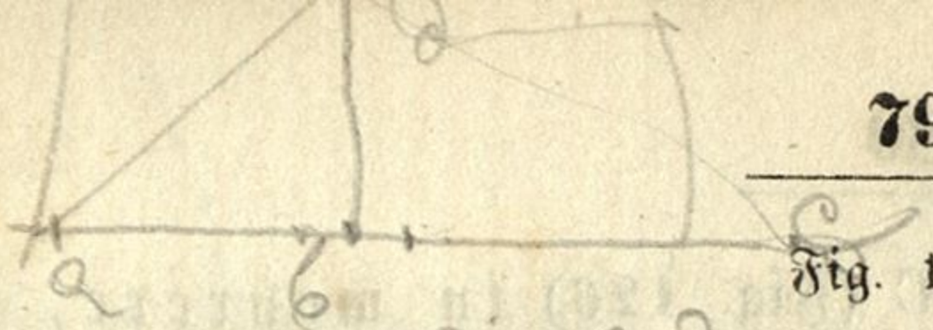
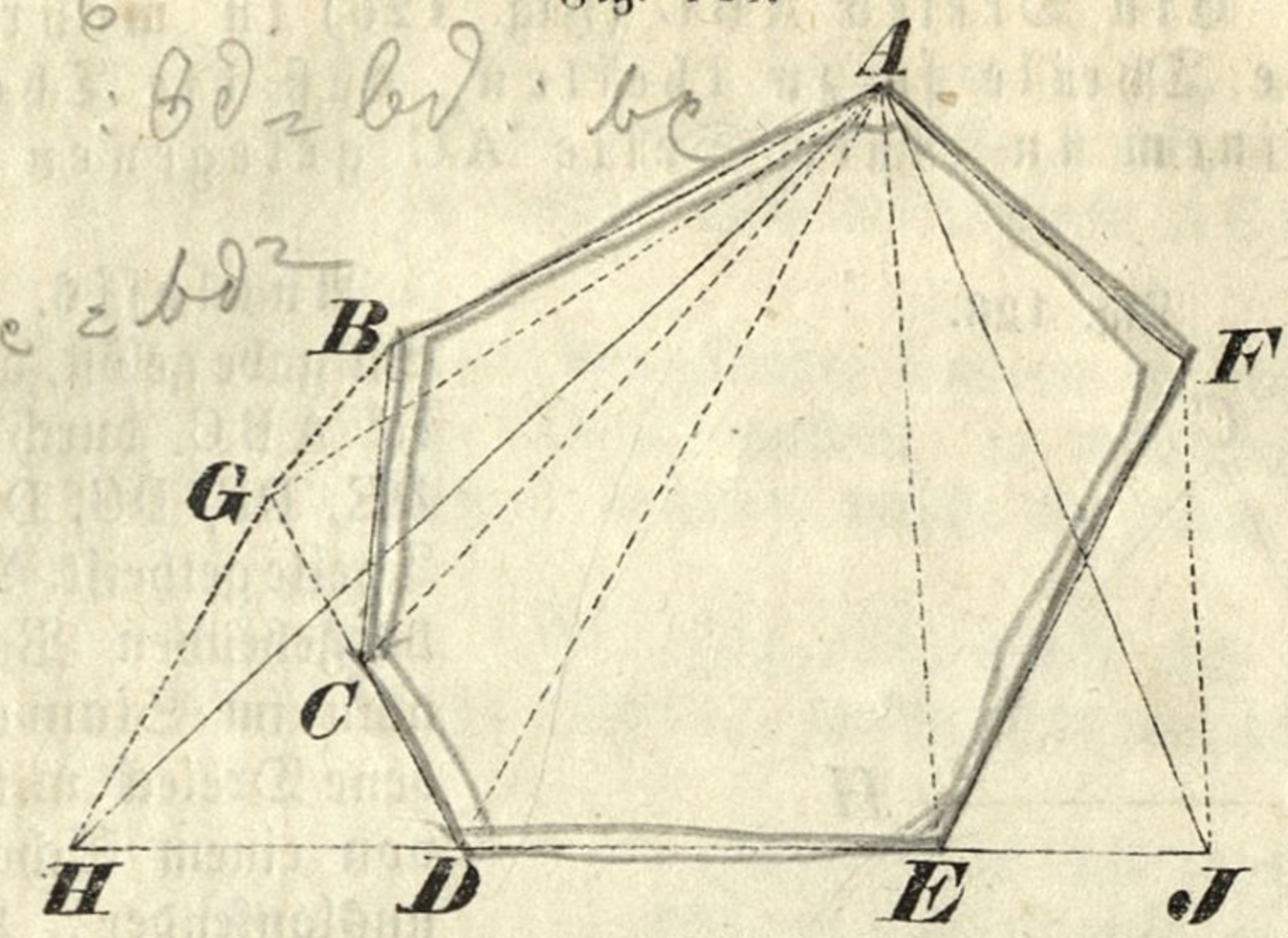


Fig. 124.



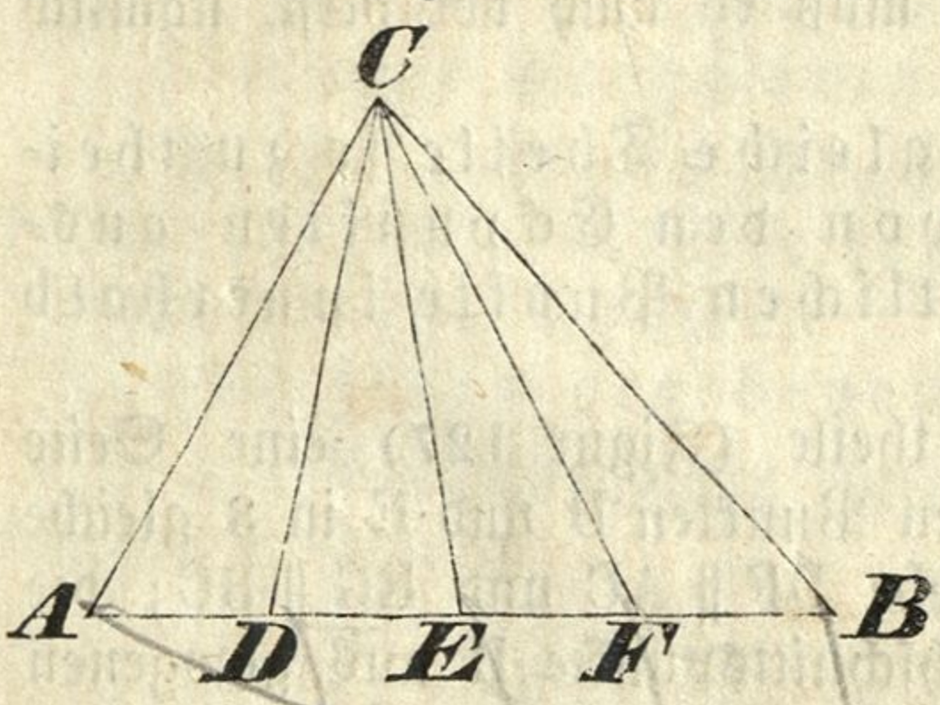
Man ziehe die Diagonalen AC, AD, AE. Nun verwandelt man das Viereck ABCD in das Dreieck AGD, so erscheint das Sechseck ABCDEF in ein Fünfeck AGDEF verwandelt. Sodann verwandle man das Viereck AGDE in ein Dreieck AHE, so hat man statt des gegebenen Sechseckes das Viereck AHEF. Wird endlich dieses letzte Viereck wieder in ein Dreieck AHJ verwandelt, so enthält dieses Dreieck AHJ denselben Flächenraum wie das gegebene Sechseck.

Da sich jedes Dreieck in ein Rechteck, und dieses in ein Quadrat verwandeln läßt, so folgt, daß auch jedes beliebige Vieleck in ein Rechteck oder in ein Quadrat verwandelt werden kann.

4. Theilung geradliniger Figuren.

§. 166. Ein Dreieck in mehrere gleiche Theile so zu theilen, daß alle Theilungslinien in demselben Eckpunkte zusammenlaufen.

Fig. 125.

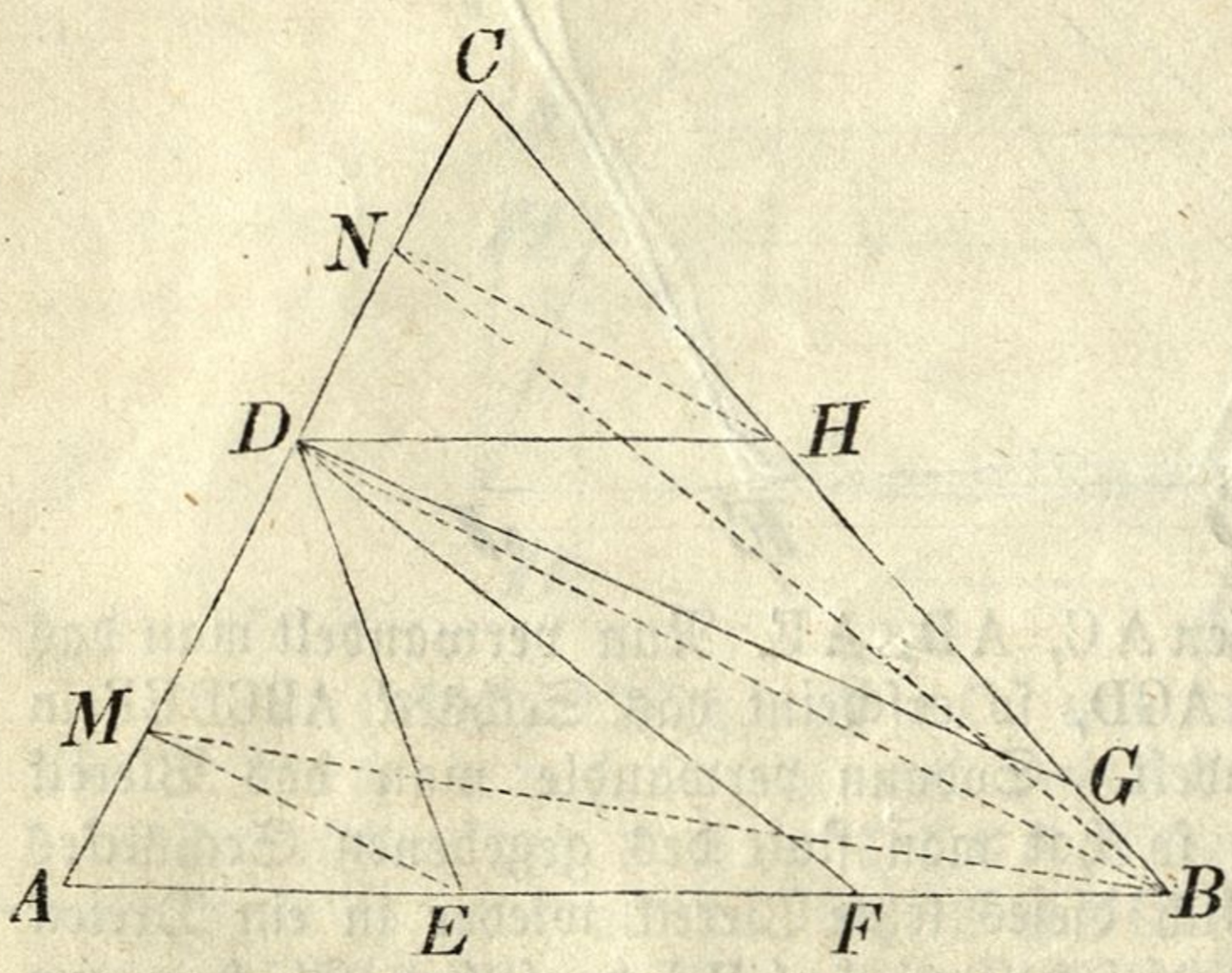


Um das Dreieck ABC (Fig. 125) z. B. in vier gleiche Theile zu theilen, so daß die Theilungslinien durch den Punkt C gehen, theile man die gegenüberstehende Seite AB in vier gleiche Theile, und ziehe durch die Theilungspunkte die Geraden CD, CE, CF. Die vier Dreiecke CAD, CDE, CEF, CBF sind nun wirklich einander gleich, weil sie gleiche Grundlinien und dieselbe Höhe haben.

Wollte man das Dreieck ABC nicht in gleiche, sondern in Theile, welche unter einander ein bestimmtes Verhältniß haben, theilen, so dürfte man nur die Grundlinie AB nach jenem Verhältnisse theilen und die Theilungspunkte mit C durch gerade Linien verbinden.

§. 167. Ein Dreieck ABC (Fig. 126) in mehrere, z. B. in 5 gleiche Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien von einem in einer Seite AC gelegenen Punkte D ausgehen.

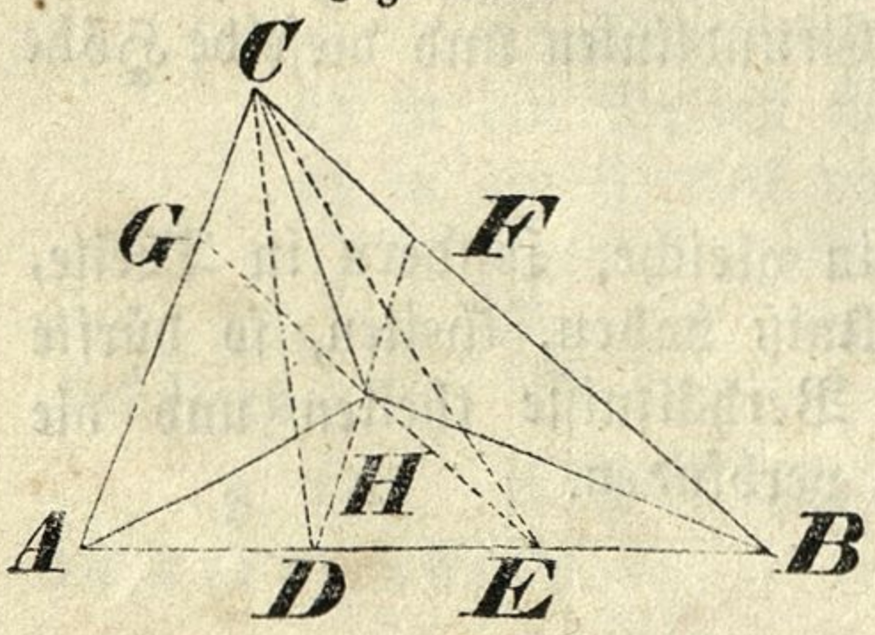
Fig. 126.



Analysis. Es sei die Aufgabe gelöst, also das Dreieck ABC durch die Geraden DE, DF, DG, DH in 5 gleiche Theile getheilt. Nach dem vorhergehenden Paragraphe ist man im Stande, das gegebene Dreieck mittelst gerader, von einem Scheitel, z. B. B auslaufender, Linien in 5 gleiche Theile zu theilen; es seien nun ABM uud BCN zwei solche Theile. Damit das Dreieck ADE der fünfte Theil des Dreieckes ABC sei, muß es offenbar dem Dreiecke ABM gleich sein; es müssen daher, da in diesen beiden Dreiecken das Dreieck AEM als gemeinschaftlicher Theil vorkommt, auch die noch übrigen Theile, nämlich die Dreiecke DEM und BEM, einander gleich sein. Damit aber dieses Statt finde, muß EM ∥ BD sein. Da nun die BD und der Punkt M bekannt sind, so ist hiedurch auch die Lage der ME, somit der Punkt E, und daher auch die Lage der Theilungslinie DE gegeben. Eben so folgt, daß man, um den Punkt H zu erhalten, NH ∥ BD ziehen müsse. Um die Lage der Theilungslinie DF zu bestimmen, bedenke man, daß das Dreieck DEF dem Dreiecke DAE gleich werde, sobald EF = AE gemacht wird. Eben so wird das Dreieck DGH dem Dreiecke DCH gleich, sobald man GH = CH abschneidet. Ist aber jedes der vier Dreiecke ADE, DEF, CDH, DGH der fünfte Theil des gegebenen Dreieckes ABC, so muß es auch der Rest, nämlich die vierseitige Figur DFBG sein.

§. 168. Ein Dreieck in drei gleiche Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien von den Eckpunkten ausgehen und in einem gemeinschaftlichen Punkte innerhalb des Dreieckes zusammentreffen.

Fig. 127.



Man theile (Figur 127) eine Seite AB in den Punkten D und E in 3 gleiche Theile, ziehe DF ∥ AC und EG ∥ BC; die vom Durchschnittspunkte H aus gezogenen Geraden AH, BH und CH sind die verlangten Theilungslinien.

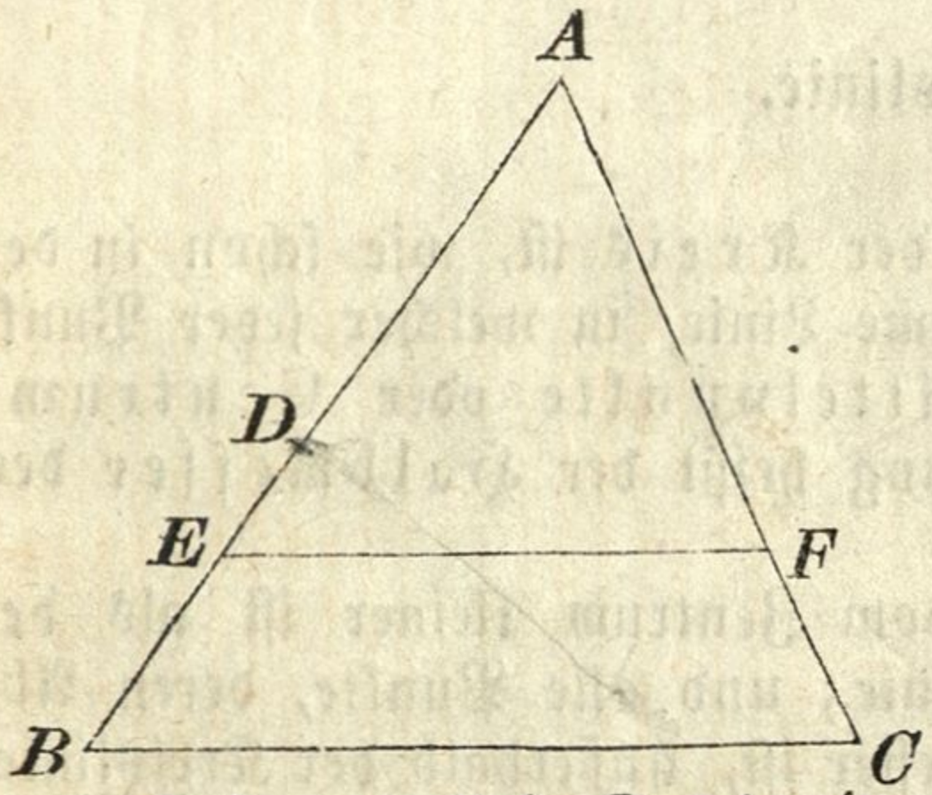
Um sich von der Richtigkeit zu überzeugen, ziehe man die Hilfslinien CD und CE. Es ist nun △ ACH = ACD, weil beide dieselbe Grundlinie AC und

gleiche Höhe haben; eben so ist $\triangle BCH = BCE$; daher muß auch $\triangle ABH = CDE$ sein. Nun sind die Dreiecke ACD, CDE, BCE unter einander gleich; folglich müssen auch die Dreiecke ACH, ABH, BCH gleich sein.

Hätte man AB nicht in drei gleiche, sondern in drei durch ein gegebenes Verhältniß bestimmte Theile getheilt, so wäre dadurch auch das $\triangle ABC$ in drei Theile getheilt worden, welche in jenem Verhältnisse zu einander stehen.

§. 169. Ein Dreieck ABC (Fig. 128) durch eine zur BC parallele Gerade in zwei Theile zu theilen, welche sich wie die Zahlen m : n verhalten sollen.

Fig. 128.



Man theile AB in D nach dem gegebenen Verhältnisse, so daß AD : DB = m : n wird. Sodann suche man zwischen AB und AD die mittlere Proporzionale AE, und ziehe durch E die $EF \parallel BC$, so verhalten sich die Flächen AEF und BCFE wie m : n.

Den Beweis für die Richtigkeit dieser Auflösung wird der Anfänger von selbst leicht finden, so wie auch die Lösung der folgenden Aufgaben:

a) Ein Dreieck durch eine mit einer Seite parallele Gerade in zwei gleiche Theile zu theilen.

b) Ein Dreieck in drei gleiche Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien mit einer Seite parallel laufen.

c) Ein Dreieck in vier kongruente Dreiecke zu theilen.

§. 170. 1) Ein Parallelogramm durch Linien, welche mit einer Seite parallel laufen,

a) in mehrere gleiche Theile zu theilen,

b) in Theile zu theilen, welche unter einander ein bestimmtes Verhältniß haben.

2) Es soll ein Trapez durch gerade Linien, welche die beiden Parallelseiten durchschneiden,

a) in gleiche Theile,

b) nach einem gegebenen Verhältnisse getheilt werden.

Die Auflösung dieser Aufgaben wird dem eigenen Fleiße des Anfängers überlassen.

Zweiter Abschnitt.

Krumme Linien und von ihnen begrenzte Figuren.

1. Die Kreislinie.

§. 171. Die Kreislinie oder der Kreis ist, wie schon in der Einleitung gesagt wurde, diejenige krumme Linie, in welcher jeder Punkt von einem gegebenen Punkte, dem Mittelpunkte oder Centrum, dieselbe Entfernung hat. Diese Entfernung heißt der Halbmesser des Kreises.

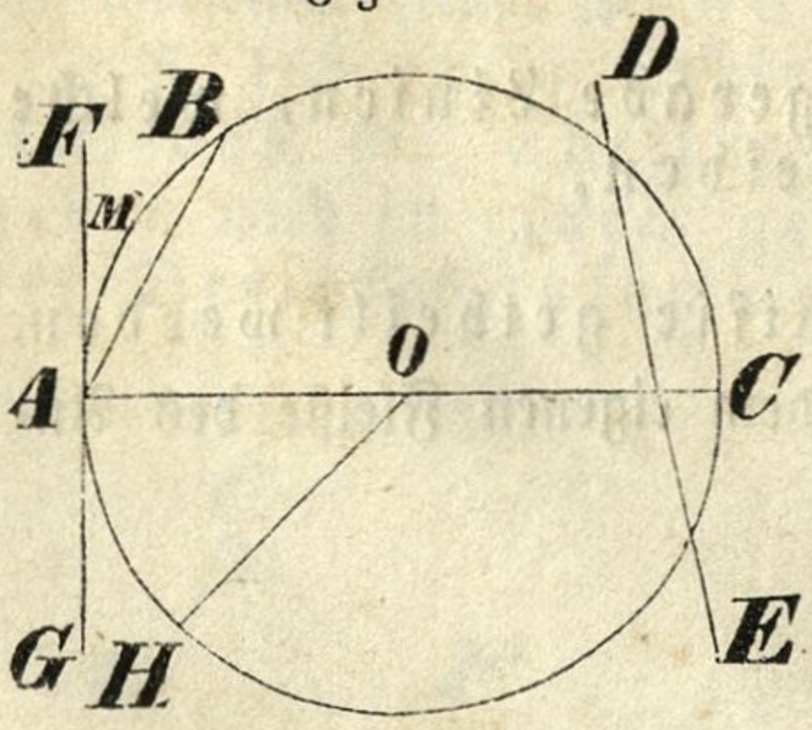
Alle Punkte, deren Entfernung vom Zentrum kleiner ist als der Halbmesser, liegen innerhalb der Kreislinie; und alle Punkte, deren Abstand vom Zentrum größer als der Halbmesser ist, außerhalb der Kreislinie.

Damit ein Kreis vollkommen bestimmt sei, muß man den Mittelpunkt und die Länge des Halbmessers kennen.

1. Gerade Linien, die in Beziehung auf den Kreis vorkommen.

§. 172. Eine Gerade AB (Fig. 129), welche zwei Punkte des Umfanges verbindet, heißt Sehne, Chorda.

Fig. 129.



Diejenige Sehne AC, welche durch den Mittelpunkt geht, ist der Durchmesser des Kreises.

Eine Gerade DE, welche den Kreisumfang in zwei Punkten durchschneidet, so daß sie Theile außerhalb und innerhalb des Kreises hat, heißt eine Durchschneidungslinie, Sekante. Eine Gerade FG, welche mit der Kreislinie nur einen Punkt gemeinschaftlich hat, so daß alle andern Punkte außerhalb des Kreises liegen, heißt eine Berührungslinie, Tangente.

Durch den Schnitt des Kreises mit der Geraden entstehen folgende Figuren:

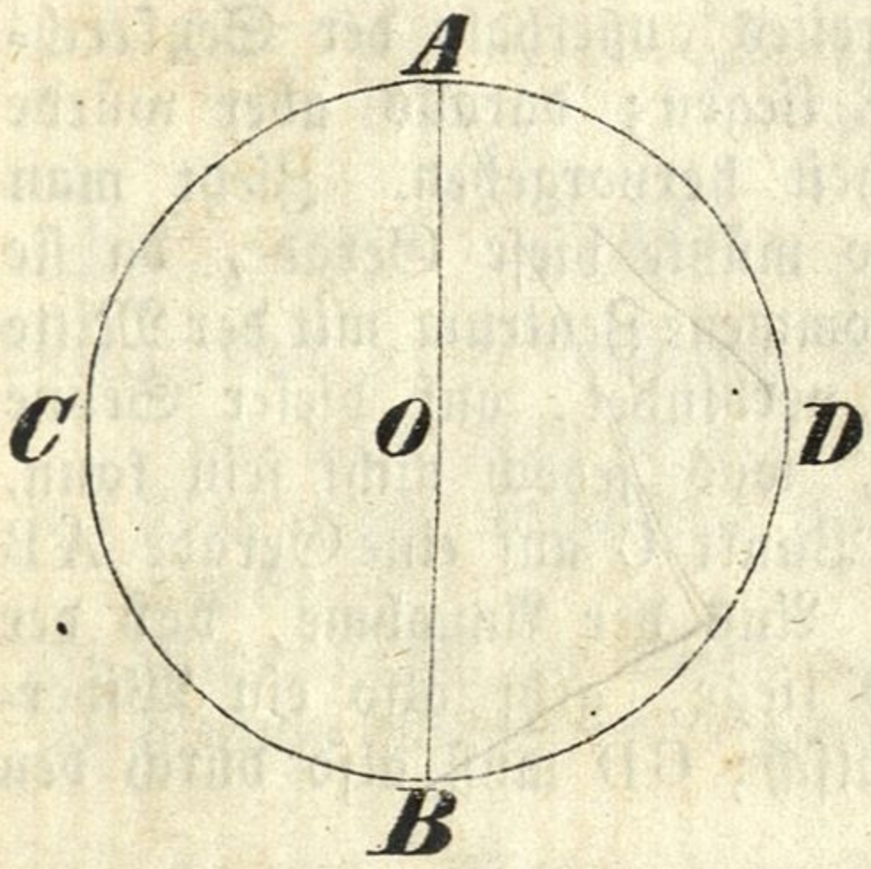
1. Der Kreisabschnitt, Segment, d. i. ein solcher Theil der Kreisfläche, welcher zwischen einer Sehne und dem dazu gehörigen Bogen liegt, wie ABMA.

2. Der Kreisausschnitt, Sektor, d. i. ein solches Stück der Kreisfläche, welches von zwei Halbmessern und dem dazwischen liegenden Bogen begrenzt wird, wie AOHA.

Lehrsätze.

§. 173. Der Durchmesser halbirt die Kreisfläche und die Periferie.

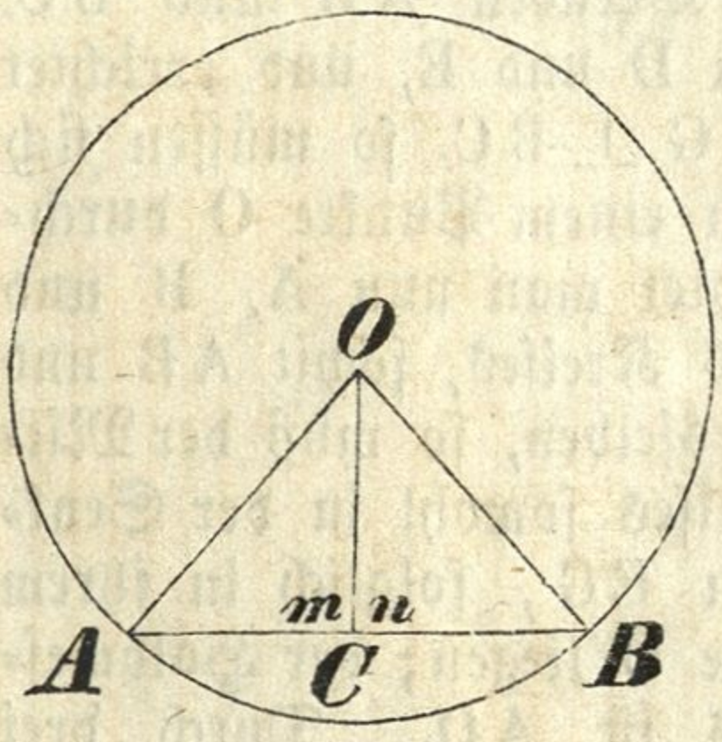
Fig. 130.



Denkt man sich den Kreisabschnitt ACB (Fig. 130) so über den Kreisabschnitt ADB gelegt, daß AB als Sehne des Abschnittes ACB auf AB als Sehne des Abschnittes ADB fällt, so wird auch der Bogen ACB den Bogen ADB vollkommen decken müssen, weil sonst nicht alle Punkte der beiden Kreisbögen vom Zentrum O gleich weit entfernt sein könnten. Die beiden Kreisabschnitte fallen also in allen Grenzen vollkommen zusammen, somit sind sie kongruent. Der Durchmesser AB halbirt daher sowohl die Kreisfläche, als den Kreisumfang.

§. 174. a) Wenn man das Zentrum des Kreises mit dem Halbirungspunkte einer Sehne durch eine Gerade verbindet, so steht diese auf der Sehne senkrecht.

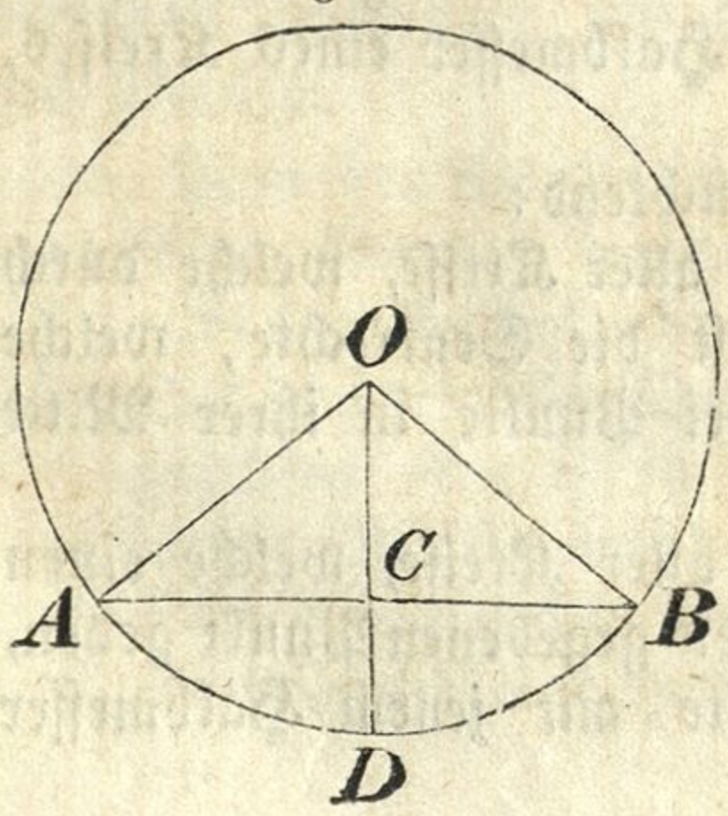
Fig. 131.



Es sei (Fig. 131) AC = CB, so muß OC ⊥ AB, oder m = n sein. — Weil AO = BO, AC = BC und OC = OC ist, so muß das △ AOC ≅ BOC, und daher der Winkel m = n sein.

b) Wenn man vom Mittelpunkte eines Kreises auf eine Sehne eine Senkrechte zieht, so wird dadurch die Sehne und der dazu gehörige Bogen halbirt.

Fig. 132.

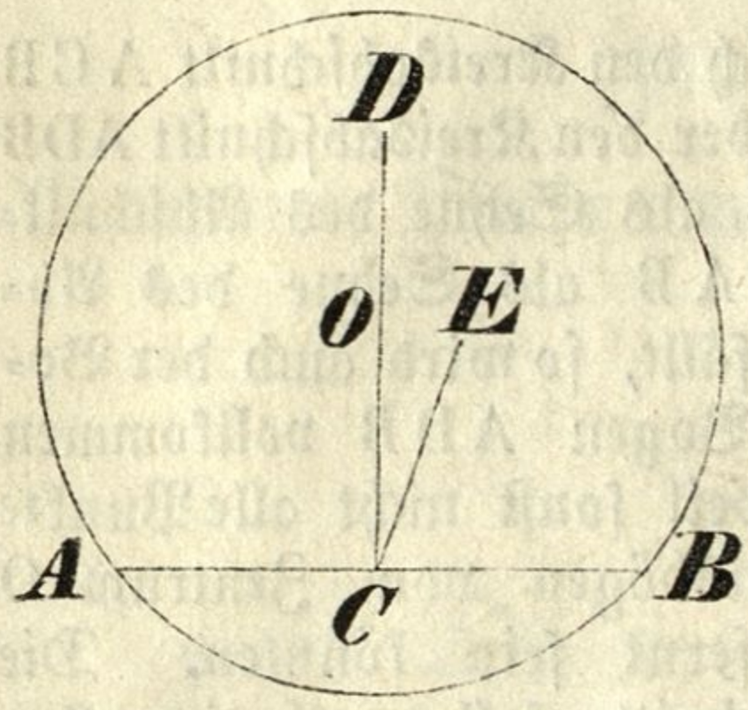


Ist (Fig. 132) OD ⊥ AB, so muß AC = CB und Bogen AD = BD sein. — In den Dreiecken AOC und BOC sind zwei Seiten mit dem der größern Seite gegenüberstehenden Winkel gleich, folglich sind die beiden Dreiecke kongruent, und somit auch die dritten Seiten AC und CB gleich; auch ist der Winkel AOD = BOD. Legt man daher den Kreisausschnitt BOD auf jenen AOD, so daß OD über OD fällt, so müssen wegen der Gleichheit der Winkel BOD und AOD auch die Halbmesser OB und OA zusammenfallen, und

sich daher auch die Bögen BD und AD decken, weil alle ihre Punkte vom Mittelpunkte O gleich weit abstehen; folglich ist der Bogen AD = BD.

c) Wenn man in der Mitte einer Sehne auf dieselbe eine Senkrechte errichtet, so muß diese durch den Mittelpunkt des Kreises gehen.

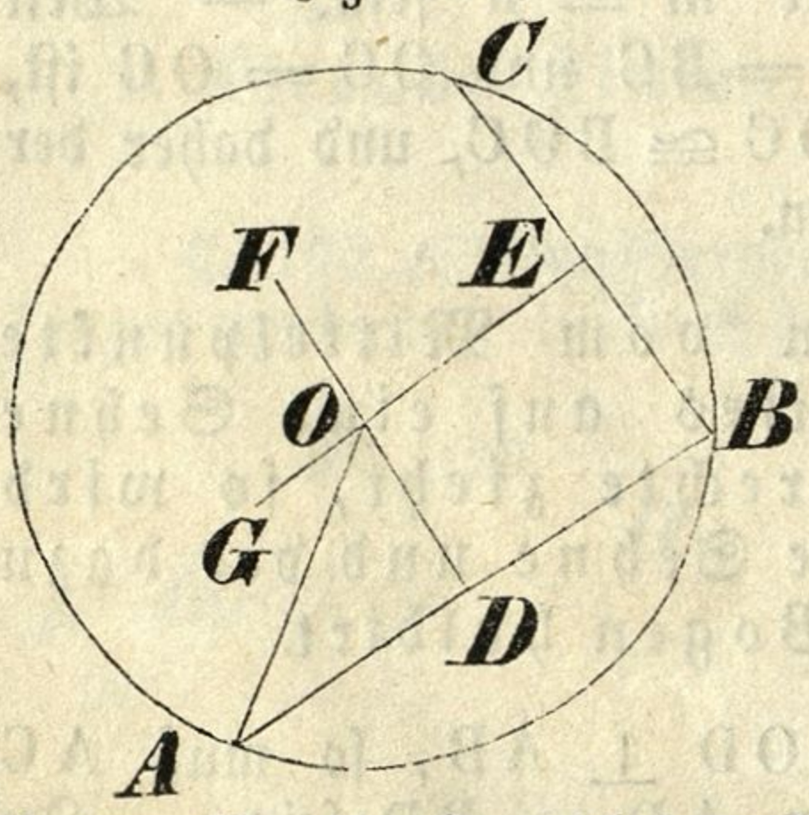
Fig. 133.



Es sei (Fig. 133) AC = CB, und CD ⊥ AB; so ist zu beweisen, daß CD durch den Mittelpunkt des Kreises durchgehen müsse. — Wäre dieses nicht der Fall, so müßte der Mittelpunkt des Kreises außerhalb der Senkrechten, z. B. in E liegen; daraus aber würde eine Ungereimtheit hervorgehen. Zieht man nämlich EC, so müßte diese Gerade, da sie das in E angenommene Zentrum mit der Mitte der Sehne AB verbindet, auf dieser Sehne senkrecht stehen, was jedoch nicht sein kann, da durch einen Punkt C auf eine Gerade AB nur eine Senkrechte gezogen werden kann. Aus der Annahme, daß der Mittelpunkt außerhalb der Senkrechten CD liege, geht also ein Widerspruch hervor, folglich ist diese Annahme falsch; CD muß also durch den Mittelpunkt des Kreises gehen.

§. 175. Durch drei nicht in einer geraden Linie liegende Punkte A, B und C (Fig. 134) ist ein Kreis vollkommen bestimmt.

Fig. 134.



Zieht man die Geraden AB und BC, halbirt dieselben in D und E, und errichtet DF ⊥ AB und EG ⊥ BC, so müssen sich diese Senkrechten in einem Punkte O durchschneiden. Betrachtet man nun A, B und C als Punkte eines Kreises, somit AB und BC als Sehnen desselben, so muß der Mittelpunkt dieses Kreises sowohl in der Senkrechten DF als in EG, folglich in ihrem Durchschnittspunkte O liegen; der Halbmesser dieses Kreises ist AO. Durch drei Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, ist also sowohl der Mittelpunkt als der Halbmesser eines Kreises, somit der Kreis selbst, vollkommen bestimmt.

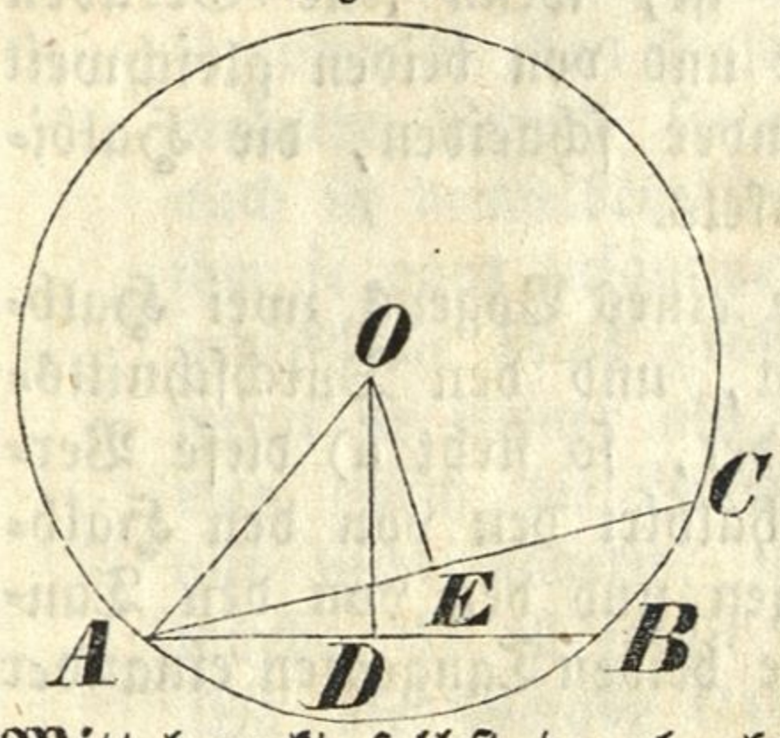
Folgende zwei Sätze sind von selbst einleuchtend:

a) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch zwei gegebene Punkte A und B gehen, ist die Senkrechte, welche auf der Verbindungslinie AB dieser zwei Punkte in ihrer Mitte errichtet wird.

b) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Halbmesser haben und durch einen gegebenen Punkt gehen, ist die Peripherie eines aus diesem Punkte mit jenem Halbmesser beschriebenen Kreises.

§. 176. Von zwei Sehnen ist jene die größere, die den kleinern Abstand vom Mittelpunkte hat.

Fig. 135.



Es liege die Sehne AC (Fig. 135) näher am Mittelpunkte als jene AB, es sei nämlich die Senkrechte OE < OD; so läßt sich zeigen, daß AC > AB ist. — Man ziehe AO, so ist $AE = \sqrt{AO^2 - OE^2}$ und $AD = \sqrt{AO^2 - OD^2}$. Wegen OE < OD ist nun $AO^2 - OE^2 > AO^2 - OD^2$, also AE > AD; somit auch 2AE > 2AD, oder AC > AB.

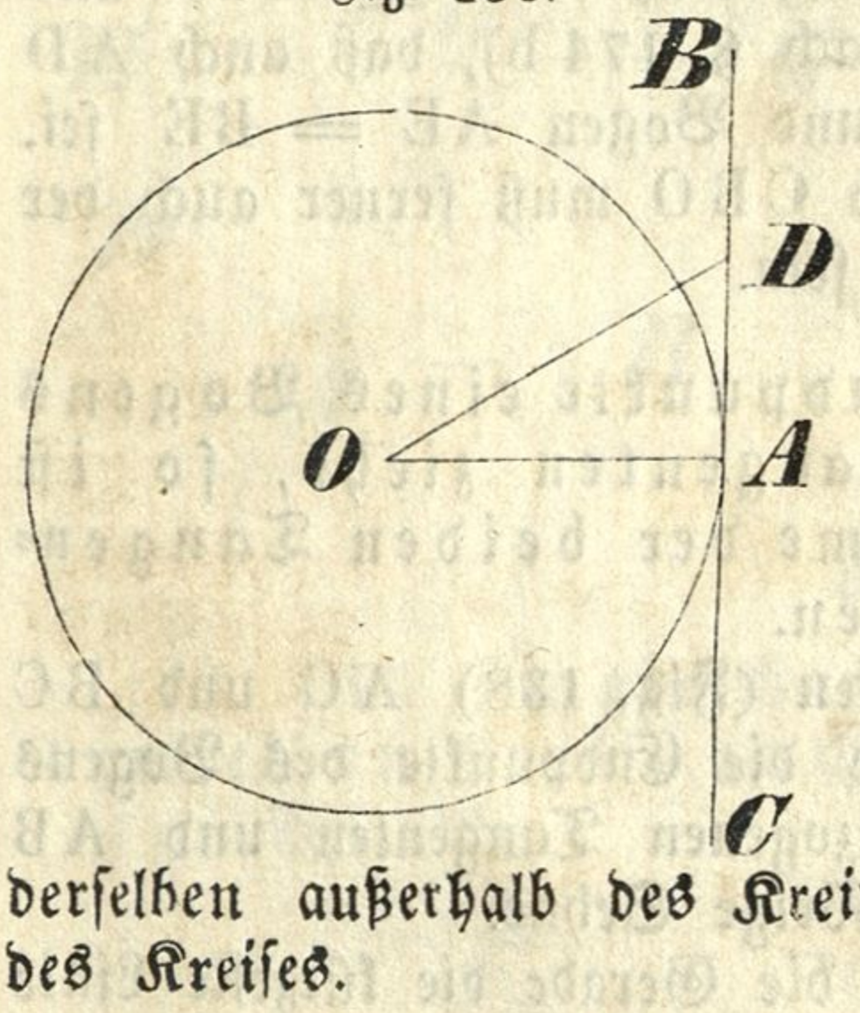
Aus diesem Satze folgt, daß die längste Sehne im Kreise diejenige ist, die durch den Mittelpunkt selbst durchgeht, d. i. der Durchmesser.

Es wird nicht schwer sein, hier noch folgende Sätze zu beweisen:

a) Von zwei ungleichen Sehnen liegt die größere näher am Mittelpunkte.
b) Sehnen, die gleichweit vom Zentrum abstehen, sind einander gleich.
c) Gleiche Sehnen sind gleichweit vom Zentrum entfernt.

§. 177. Wenn man im Endpunkte eines Halbmessers darauf eine Senkrechte errichtet, so ist diese eine Tangente des Kreises.

Fig. 136.



Es sei AB ⊥ AO (Fig. 136).

Nimmt man in der Geraden AB irgend einen Punkt D an, und zieht die OD, so ist in dem rechtwinkligen △ AOD die Hypotenuse DO größer als die Kathete AO; der Punkt D liegt also, weil seine Entfernung vom Mittelpunkte größer ist als der Halbmesser, außerhalb des Kreises. Dasselbe kann nun von jedem Punkte der Geraden AB, den Punkt A ausgenommen, gezeigt werden; die Gerade AB hat also mit der Kreislinie den einzigen Punkt A gemeinschaftlich, während alle andern Punkte derselben außerhalb des Kreises liegen; folglich ist AB eine Tangente des Kreises.

Man beweise hier noch die Sätze:

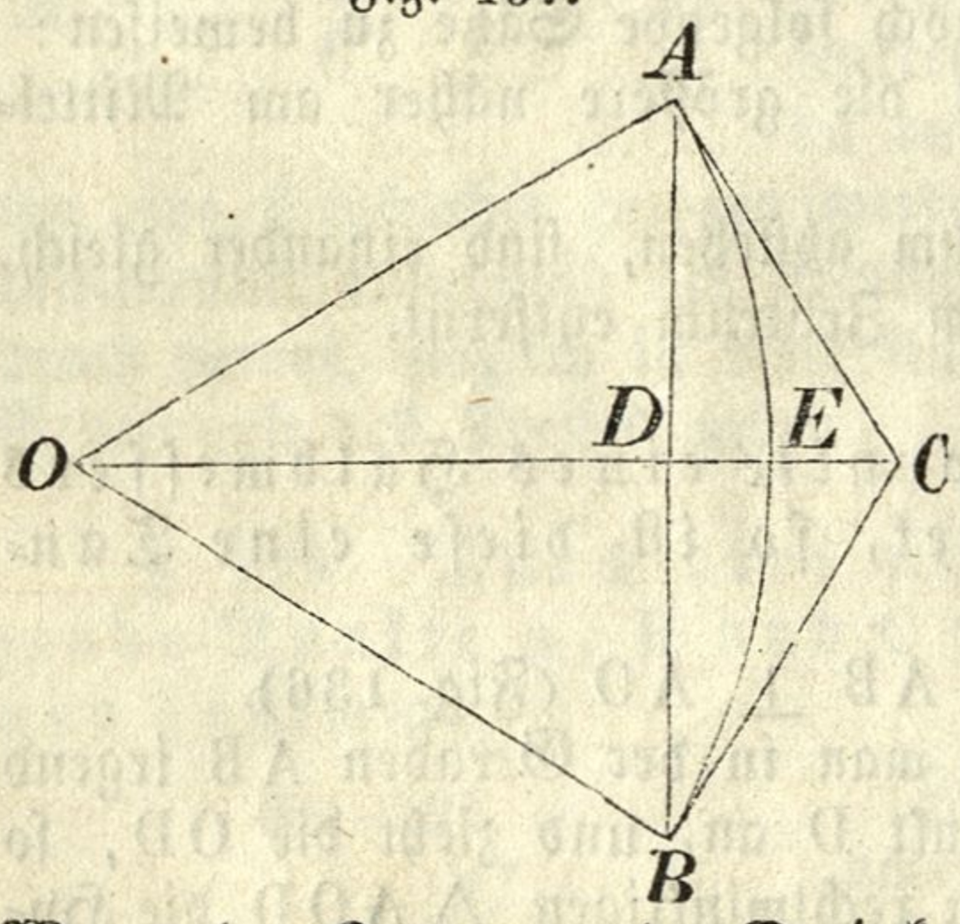
a) Eine Gerade, welche auf der Tangente eines Kreises im Berührungspunkte senkrecht stehet, gehet durch den Mittelpunkt des Kreises.
b) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche eine gegebene Gerade in einem Punkte derselben berühren, ist eine in diesem Punkte auf der Geraden errichtete Senkrechte.
c) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Halbmesser haben, und eine gegebene Gerade be-

rühren, ist eine Parallele mit dieser Geraden in einer Entfernung, welche jenem Halbmesser gleich ist.

d) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene gerade Linien berühren, ist, wenn jene Geraden parallel sind, eine mit denselben parallele und von beiden gleichweit abstehende Gerade, wenn sie aber einander schneiden, die Halbirungslinie des von ihnen gebildeten Winkels.

§. 178. Wenn man durch die Endpunkte eines Bogens zwei Halbmesser, zwei Tangenten und eine Sehne zieht, und den Durchschnittspunkt der Tangenten mit dem Zentrum verbindet, so steht a) diese Verbindungslinie senkrecht auf der Sehne, b) sie halbirt den von den Halbmessern gebildeten Winkel, die Sehne, den Bogen und den von den Tangenten eingeschlossenen Winkel; auch sind c) die beiden Tangenten einander gleich.

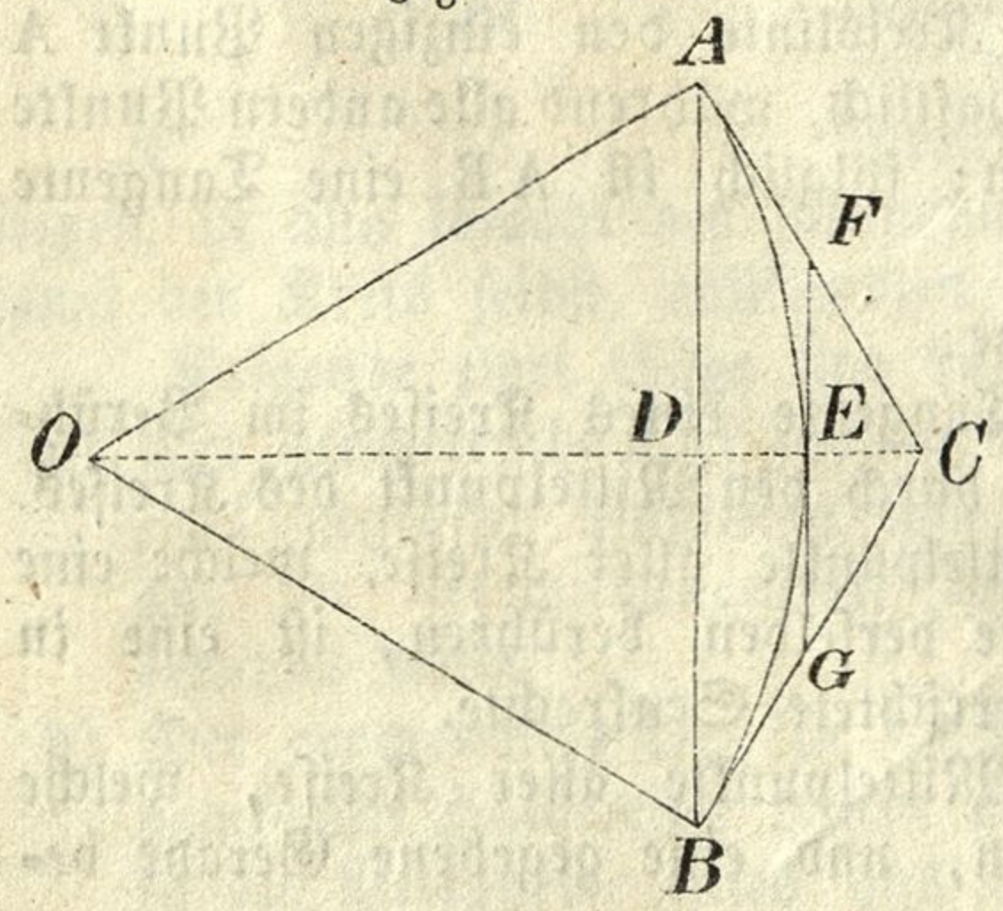
Fig. 137.



Errichtet man (Fig. 137) in A und B auf die Halbmesser AO und BO zwei Senkrechte, welche daher Tangenten des Kreises sind, so müssen sich diese in einem Punkte C schneiden. Zieht man nun die Sehne AB und die Gerade CO, so sind die rechtwinkligen Dreiecke CAO und CBO kongruent und somit die Winkel AOC und BOC gleich. Daraus folgt vermöge §. 76, daß CO $\perp$ AB, und sodann nach §. 174 b), daß auch AD = BD und Bogen AE = BE sei. Wegen der Kongruenz der Dreiecke CAO und CBO muß ferner auch der Winkel ACO = BCO und AC = BC sein.

§. 179. Wenn man durch die Endpunkte eines Bogens eine Sehne und zugleich zwei Tangenten zieht, so ist a) die Sehne kleiner, b) die Summe der beiden Tangenten aber größer als der Kreisbogen.

Fig. 138.



Es seien (Fig. 138) AC und BC die durch die Endpunkte des Bogens AEB gezogenen Tangenten und AB die zugehörige Sehne.

a) Da die Gerade die kürzeste Linie ist, welche zwischen zwei Punkten gezogen werden kann, so ist die Sehne AB $<$ Bogen AB.

b) Um zu beweisen, daß AC + BC $>$ Bogen AB sei, denke man sich durch einen zwischen A und B gelegenen Punkt E des Bogens an diesen eine Tangente FG ge-

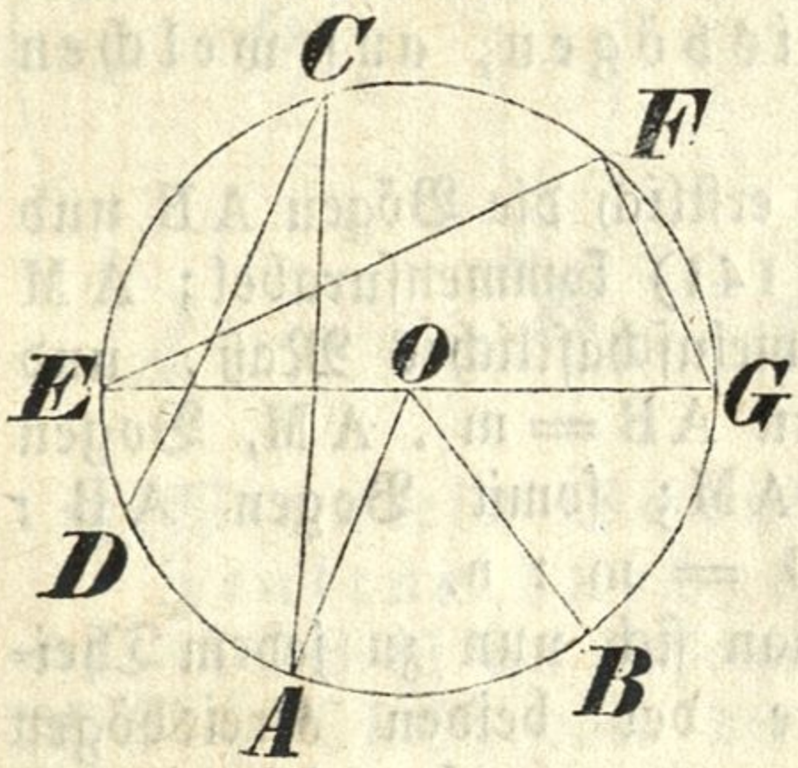
zogen; es entstehet dadurch eine neue gebrochene Linie AFGB, welche, wegen $FG < FC + CG$, kleiner ist als die gebrochene Linie ACB. Wenn man auf diese Art in dem Bogen AB immer mehrere Punkte annimmt und durch dieselbe Tangenten gezogen denkt, so wird die von diesen gebildete gebrochene Linie um so kleiner, je mehrere Punkte sie mit dem Bogen gemeinschaftlich hat, sich aber auch in demselben Grade dem Bogen selbst nähern, ohne jedoch mit ihm je ganz zusammen zu fallen. Daraus folgt nun, daß jede solche gebrochene Linie größer als der Kreisbogen sein müsse, da dieselbe, wenn sie kleiner als der Bogen wäre, beim fortwährenden Abnehmen durch die Vermehrung der Berührungspunkte sich diesem nicht nur nicht nähern, sondern sogar von ihm immer mehr entfernen würde. Es ist somit $AC + BC >$ Bogen AB.

Da die Gerade CO sowohl die Sehne AB als aus den Bogen AB halbirt, und da die Tangenten AC und BC gleich sind, so folgt, daß auch $AD <$ Bogen AE, und $AC > AE$ sein müsse.

2. Winkel, die in Beziehung auf den Kreis vorkommen.

§. 180. Ein Winkel, dessen Scheitel im Mittelpunkte des Kreises liegt, dessen Schenkel also zwei Halbmesser sind, heißt ein Mittelpunktswinkel; ein Winkel dagegen, dessen Scheitel in dem Umfange des Kreises liegt, dessen Schenkel also Sehnen sind, wird ein Umfangswinkel genannt. Wenn die Schenkel eines Umfangswinkels durch die Endpunkte eines Durchmessers gehen, so heißt derselbe ein Winkel im Halbkreise.

Fig. 139.

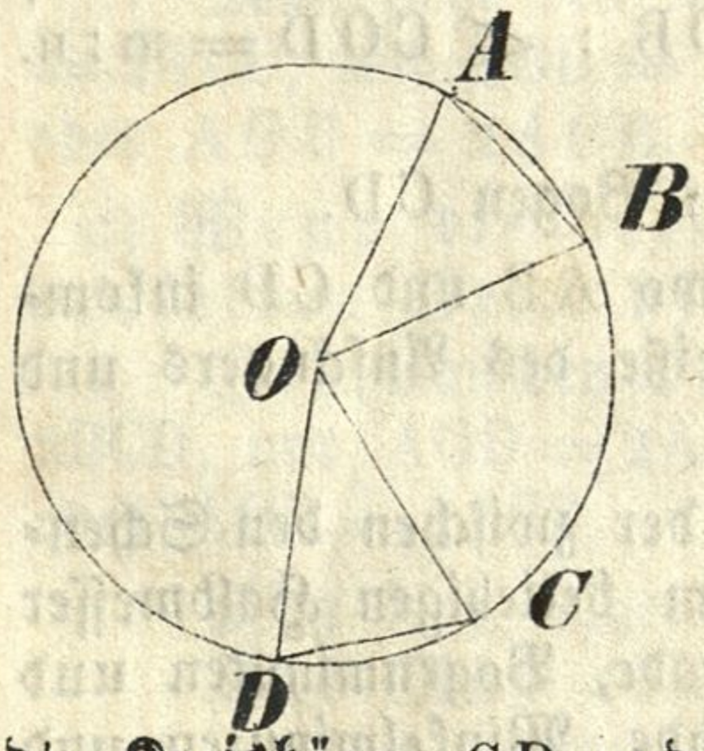


AOB (Fig. 139) ist ein Mittelpunktswinkel, ACD ein Umfangswinkel, EFG endlich ein Winkel im Halbkreise.

Lehrsätze.

§. 181. Zu gleichen Mittelpunktswinkeln gehören in demselben Kreise auch gleiche Sehnen und Bögen.

Fig. 140.



Es sei (Fig. 140) der Winkel AOB = COD. Denkt man sich den Kreisausschnitt COD so über den Kreisausschnitt AOB gelegt, daß die Halbmesser OC und OD auf die Halbmesser OA und OB fallen, was möglich ist, weil nach der Voraussetzung die Winkel COD und AOB gleich sind; so müssen, wegen der Gleichheit der Halbmesser, auch die Punkte C und D auf die Punkte A und B fallen, somit muß die Sehne CD = AB sein. Wenn aber die Sehne CD auf AB fällt, so müssen auch die Kreisbögen CD und AB vollkommen zusammenfallen, weil sonst nicht

alle Punkte derselben vom Mittelpunkte gleiche Entfernung haben würden; also Bogen CD = AB.

Auf ähnliche Art lassen sich auch die zwei umgekehrten Sätze erweisen:

a) Zu gleichen Bögen gehören gleiche Mittelpunktswinkel und gleiche Sehnen.

b) Gleichen Sehnen entsprechen gleiche Mittelpunktswinkel und gleiche Bögen.

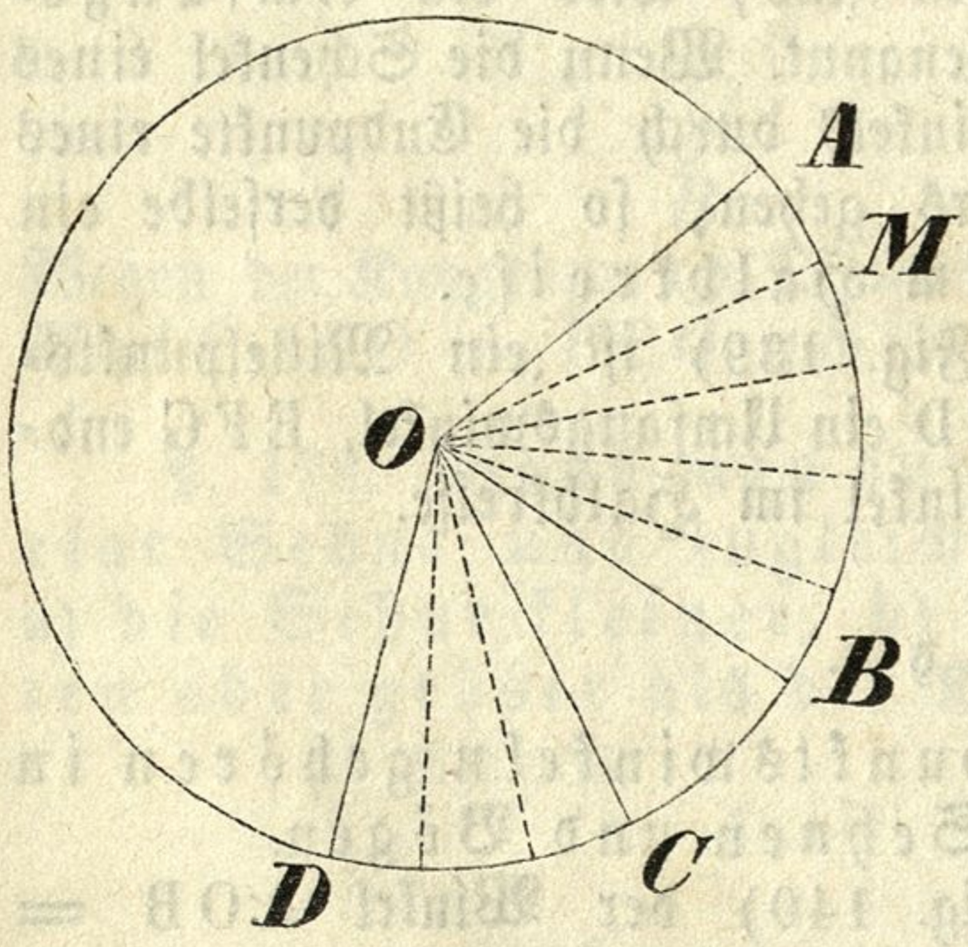
§. 182. Kreisbögen zwischen parallelen Linien sind einander gleich.

Bei dem Beweise, in welchem ein auf die parallelen Linien senkrechter und daher die zu denselben gehörigen Bögen halbirender Durchmesser gezogen wird, unterscheidet man folgende Fälle:

1. Von den beiden Parallelen geht die eine durch den Mittelpunkt.
2. Die beiden parallelen Geraden liegen auf derselben Seite des Mittelpunktes.
3. Die beiden Parallelen liegen auf den entgegengesetzten Seiten des Mittelpunktes.
4. Die eine der zwei Parallelen ist eine Tangente des Kreises.
5. Beide Parallelen sind Tangenten des Kreises.

§. 183. In demselben Kreise verhalten sich die Mittelpunktswinkel gerade wie die Kreisbögen, auf welchen sie stehen.

Fig. 141.



Es seien erstlich die Bögen AB und CD (Fig. 141) kommensurabel; AM sei ihr gemeinschaftliches Maß, und zwar Bogen AB = m . AM, Bogen CD = n AM; somit Bogen AB : Bogen CD = m : n.

Denkt man sich nun zu jedem Theilungspunkte der beiden Kreisbögen Halbmesser gezogen, so wird dadurch der Mittelpunktswinkel AOB in m, und COD in n Theile getheilt, deren jeder dem Winkel AOM gleich ist; man hat daher $\angle$ AOB = m . AOM, $\angle$ COD = n . AOM, folglich $\angle$ AOB : $\angle$ COD = m : n.

Aus dieser und der frühern Proporzion folgt

$\angle$ AOB : $\angle$ COD = Bogen AB : Bogen CD.

Den Beweis dieses Satzes für den Fall, wo AB und CD inkommensurabel sind, überlassen wir dem eigenen Fleiße des Anfängers und verweisen ihn dießfalls auf den §. 107, b.

Aus dem hier bewiesenen Satze folgt, daß der zwischen den Schenkeln eines Winkels aus seinem Scheitel mit einem beliebigen Halbmesser beschriebene Bogen jederzeit eben so viele Bogengrade, Bogenminuten und Bogensekunden enthält, als der Winkel Winkelgrade, Winkelminuten und

Winkelsekunden, so daß man also, wenn die Anzahl der ersteren bekannt ist, immer auch die Anzahl der letzteren kennt, und jene folglich dazu dienen können, diese zu zählen. Dieß ist der eigentliche Sinn, wenn man sagt:

Das Maß eines Mittelpunktswinkels ist der Bogen, auf welchem er steht.

§. 184. In demselben Kreise verhalten sich die Mittelpunktswinkel gerade so, wie die zugehörigen Kreisausschnitte.

Der Beweis ist dem vorigen ähnlich.

§. 185. Der Mittelpunktswinkel ist doppelt so groß, als der Umfangswinkel, wenn beide auf demselben Bogen aufstehen.

Beim Beweise dieses Satzes sind drei Fälle zu unterscheiden.

Fig. 142.

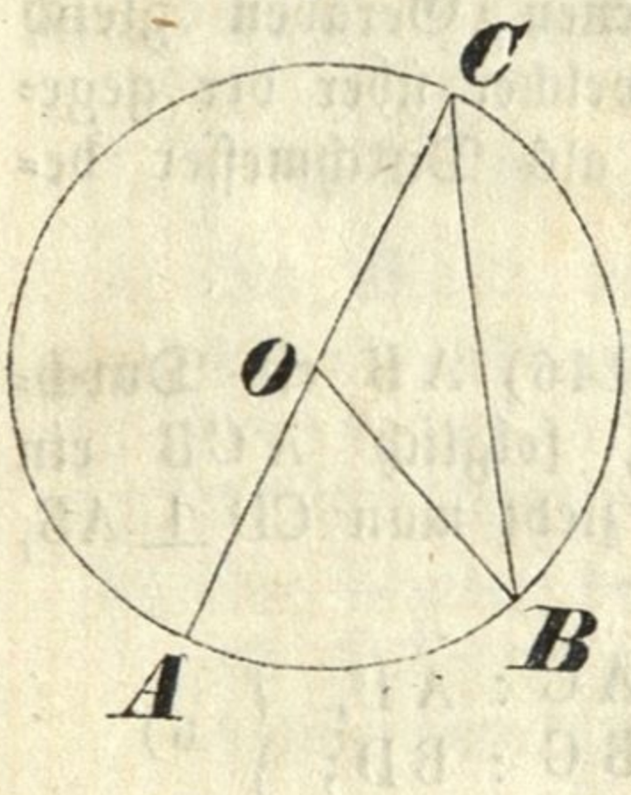


Fig. 143.

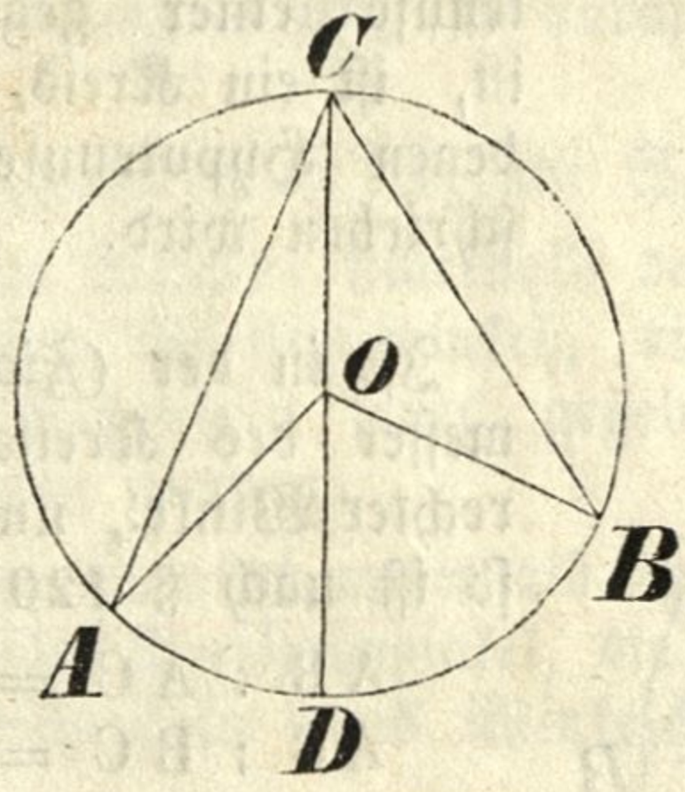
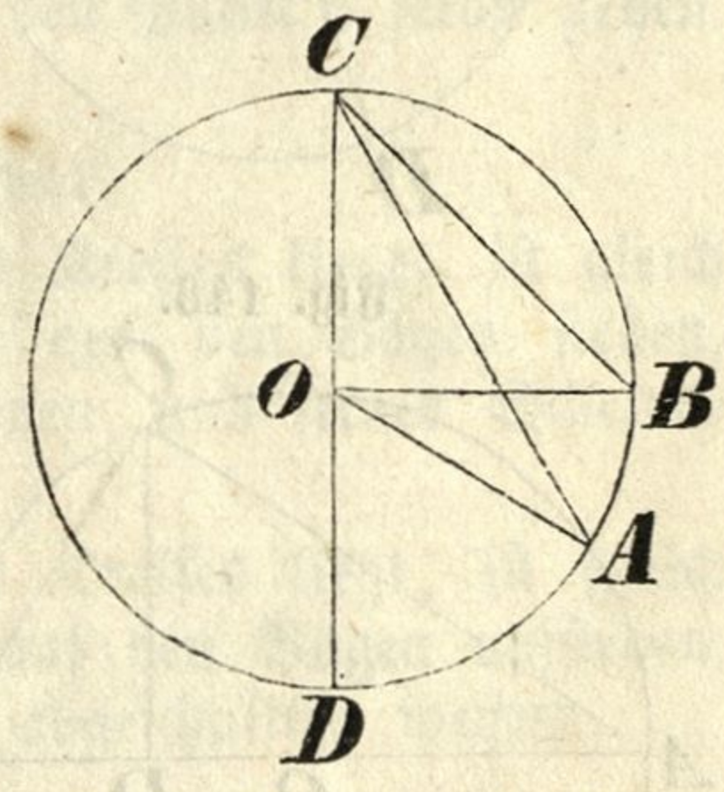


Fig. 144.



a) Wenn ein Schenkel des Umfangswinkels durch das Zentrum durchgeht (Fig. 142).

AOB ist ein äußerer Winkel des Dreieckes BOC, daher AOB = BCO + CBO; aber der Winkel BCO = CBO, weil das △ BOC gleichschenklig ist, somit ist der Mittelpunktswinkel AOB = OCB + OCB = 2ACB.

b) Wenn die beiden Schenkel des Umfangswinkels auf den entgegengesetzten Seiten des Mittelpunktes liegen (Fig. 143).

Man ziehe den Durchmesser CD, so ist nach a) der Winkel AOD = 2ACD, und BOD = 2BCD, daher auch AOD + BOD = 2(ACD+BCD), oder AOB = 2ACB.

c) Wenn die beiden Schenkel des Umfangswinkels auf derselben Seite des Mittelpunktes liegen (Fig. 144).

Zieht man den Durchmesser CD, so ist nach a) der Winkel BOD = 2BCD, und AOD = 2ACD; somit auch BOD — AOD = 2(BCD — ACD), oder AOB = 2ACB.

Man kann daher mit Rücksicht auf §. 183 auch sagen:

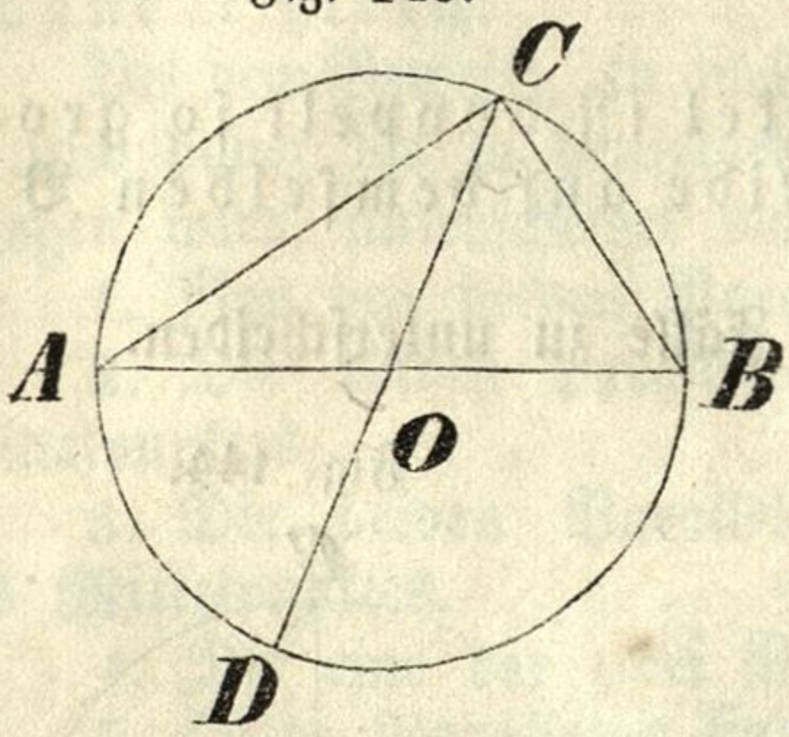
Das Maß eines Umfangswinkels ist der halbe Bogen, auf welchem er steht.

§. 186. Da alle Umfangswinkel, welche auf einem gleichen Bogen aufstehen, gleich sind dem halben Mittelpunktswinkel über einem eben so großen Bogen, so folgt:

Umfangswinkel, welche in demselben Kreise über gleichen Bögen aufliegen, sind einander gleich.

§. 187. Jeder Winkel ACB (Fig. 145) im Halbkreise ist ein rechter.

Fig. 145.

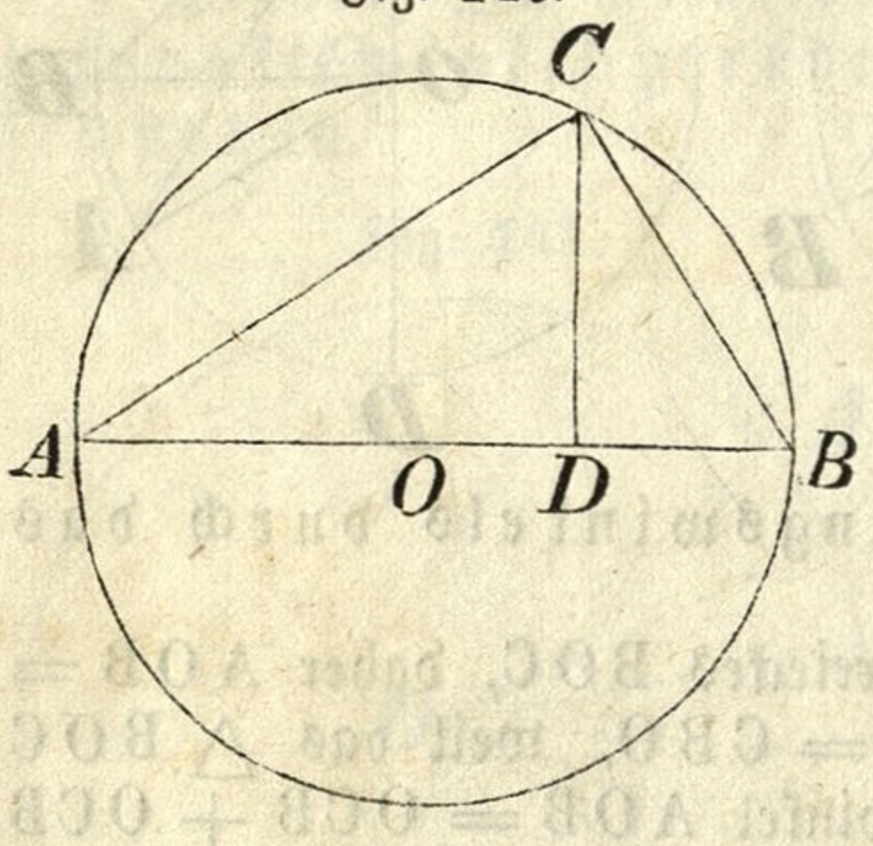


Man ziehe den Durchmesser CD, so ist der Winkel $ACD = \frac{1}{2}AOD$ u. $BCD = \frac{1}{2}BOD$, daher $ACD + BCD = \frac{1}{2}(AOD + BOD)$, oder $ACB = \frac{1}{2}(AOD + BOD)$; aber $AOD + BOD = 2R$, folglich $ACB = R$.

Aus diesem Satze folgt:

Der geometrische Ort für die Scheitel aller rechtwinkligen Dreiecke, deren Hypotenuse einer gegebenen Geraden gleich ist, ist ein Kreis, welcher über der gegebenen Hypotenuse als Durchmesser beschrieben wird.

Fig. 146.



Ist in der (Fig. 146) AB ein Durchmesser des Kreises, folglich ACB ein rechter Winkel, und zieht man $CD \perp AB$, so ist nach §. 120

$$\left.\begin{aligned} AB : AC &= AC : AD, \\ AB : BC &= BC : BD; \end{aligned}\right\} \text{a)}$$

ferner

$$AD : CD = CD : BD \ldots \text{b)}$$

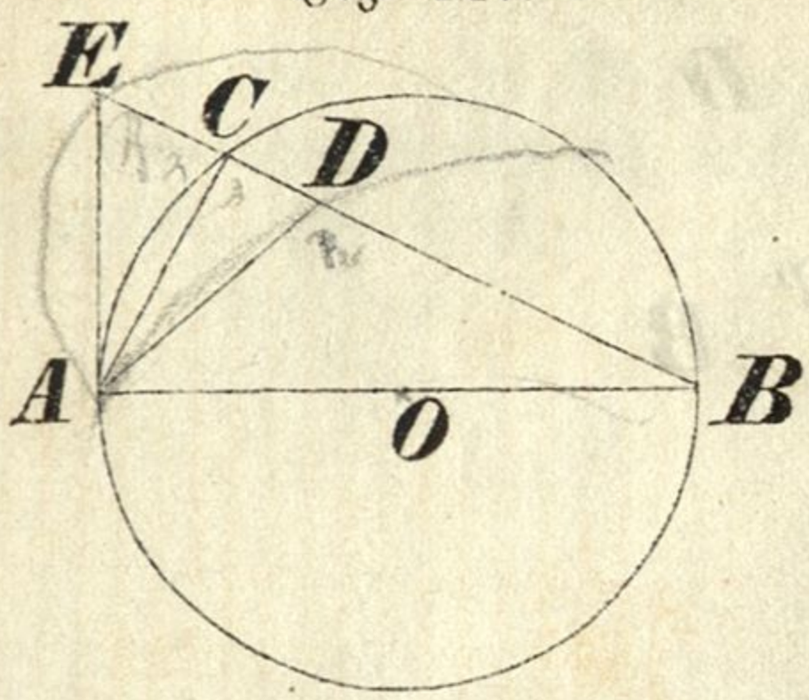
Man hat demnach folgende Lehrsätze:

a) Wenn man von einem Punkte des Kreisumfanges zu den Endpunkten eines Durchmessers Sehnen, und auf diesen eine Senkrechte zieht, so ist jede Sehne die mittlere geometrische Proporzionale zwischen dem ganzen Durchmesser und dem dieser Sehne anliegenden Abschnitte desselben.

b) Die von einem Punkte der Periferie auf den Durchmesser gefällte Senkrechte ist die mittlere Proporzionale zwischen den beiden Abschnitten des Durchmessers.

§. 188. Wenn man die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes halbirt und aus dem Halbirungspunkte mit der halben Hypotenuse als Halbmesser einen Kreis beschreibt, so muß der Umfang dieses Kreises durch den Scheitel des rechten Winkels gehen.

Fig. 147.



Es sei (Fig. 147) das △ ABC bei C rechtwinklig und AO = BO, so muß die aus O mit dem Halbmesser AO beschriebene Kreislinie durch C durchgehen.

Würde die Kreislinie nicht durch den Punkt C gehen, so müßte sie entweder die Kathete BC in einem Punkte D, oder die Verlängerung derselben in einem Punkte E schneiden. Im ersten Falle zieht man AD, und es müßte ADB als Winkel im Halbkreise ein rechter sein; es wären daher von A auf BC zwei Senkrechte gezogen, was nicht sein kann. Im zweiten Falle ziehe man AE, und es müßte eben so AEB als Winkel im Halbkreise ein rechter sein; man hätte also wieder von A auf BC zwei Senkrechte, was unmöglich ist. Da also die Kreislinie weder die Kathete BC selbst, noch auch ihre Verlängerung in irgend einem Punkte schneiden kann, so muß sie durch den Punkt C selbst gehen.

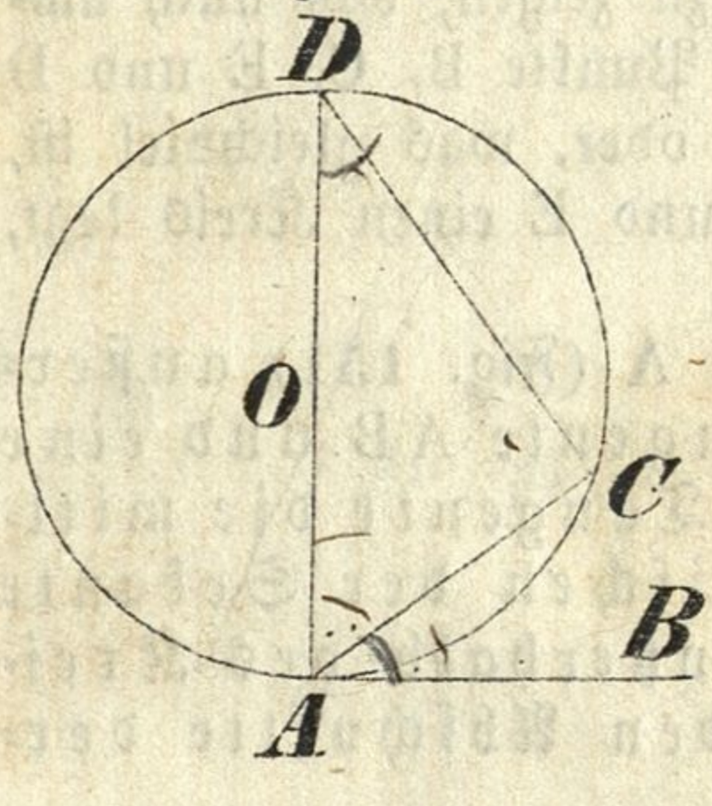
Aufgabe

§. 189. Man beweise noch folgende Sätze:

a) Ein Winkel, dessen Scheitel innerhalb des Kreises liegt, ist gleich der Summe zweier Periferiewinkel, die auf den Bögen stehen, welche von den Schenkeln jenes gegebenen und seines Scheitelwinkels abgeschnitten werden.

b) Ein Winkel, dessen Scheitel außerhalb des Kreises liegt, ist gleich der Differenz zweier Periferiewinkel, die auf den Bögen aufstehen, welche von den Schenkeln jenes Winkels abgeschnitten werden.

Fig. 148.



§. 190. Der Winkel, den eine Tangente mit einer Sehne bildet, ist gleich dem Umfangswinkel über dem Bogen, den die Sehne abschneidet.

Es sei (Fig. 148) AB ⊥ AO, so ist zu beweisen, daß der Winkel BAC = ADC ist.

In dem rechtwinkligen Dreiecke ACD ist ADC + CAD = R; allein es ist auch BAC + CAD = R; folglich BAC + CAD = ADC + CAD, und wenn man beiderseits CAD wegnimmt, BAC = ADC.

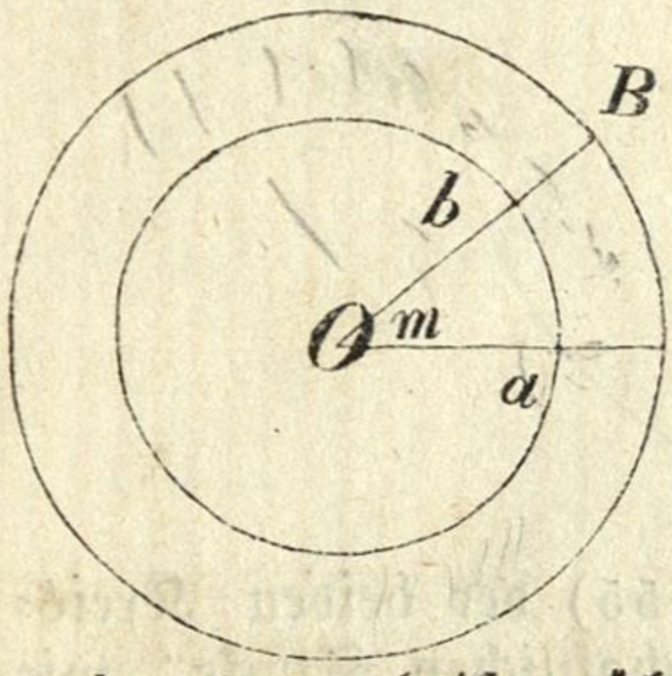
§. 181. Wenn in einem Kreise zwei Sehnen sich schneiden, so stehen ihre Abschnitte in verkehrtem Verhältnisse.

Es schneiden sich (Fig. 149) die Sehnen AB und CD im Punkte E, und man ziehe die Sehnen AC und BD. In den Dreiecken ACE und BDE sind die Winkel m und n gleich, weil sie beide über demselben Bogen BC aufstehen; eben so ist o = p; daher △ ACE ∼

3. Lage zweier Kreise gegen einander.

§. 194. In Beziehung auf die gegenseitige Lage zweier Kreise sind zwei Hauptfälle zu unterscheiden; entweder haben sie denselben Mittelpunkt, oder nicht.

Fig. 152.



Kreise, welche denselben Mittelpunkt haben, nennt man konzentrisch, wie in Fig. 152.

Die Fläche, welche zwischen den Periferien zweier konzentrischer Kreise enthalten ist, wird ein Ring, und ein Theil desselben, wie aABb, ein Ringstück genannt. Den Unterschied aA der beiden Halbmesser nennt man die Breite des Ringes.

Zwei Kreisbögen oder Kreisausschnitte, welchen gleiche Mittelpunktswinkel entsprechen, heißen ähnlich; z. B. die Bögen ab und AB, oder die Sektoren aOb und AOB.

Zwei Kreise, welche verschiedene Mittelpunkte haben, nennt man erzentrisch, und die Gerade, welche diese Mittelpunkte verbindet, die Zentrilinie. Zwei erzentrische Kreise können sich entweder berühren, oder schneiden, oder es ist keines von beiden der Fall.

§. 195. Zwei Kreise berühren sich, wenn ihre Umfänge nur einen Punkt gemeinschaftlich haben.

Wenn der eine Kreis innerhalb des anderen liegt, wie in Fig. 153, so sagt man: die Kreise berühren sich von innen; im entgegengesetzten Falle, wie in Fig. 154, geschieht die Berührung von außen.

Fig. 153.

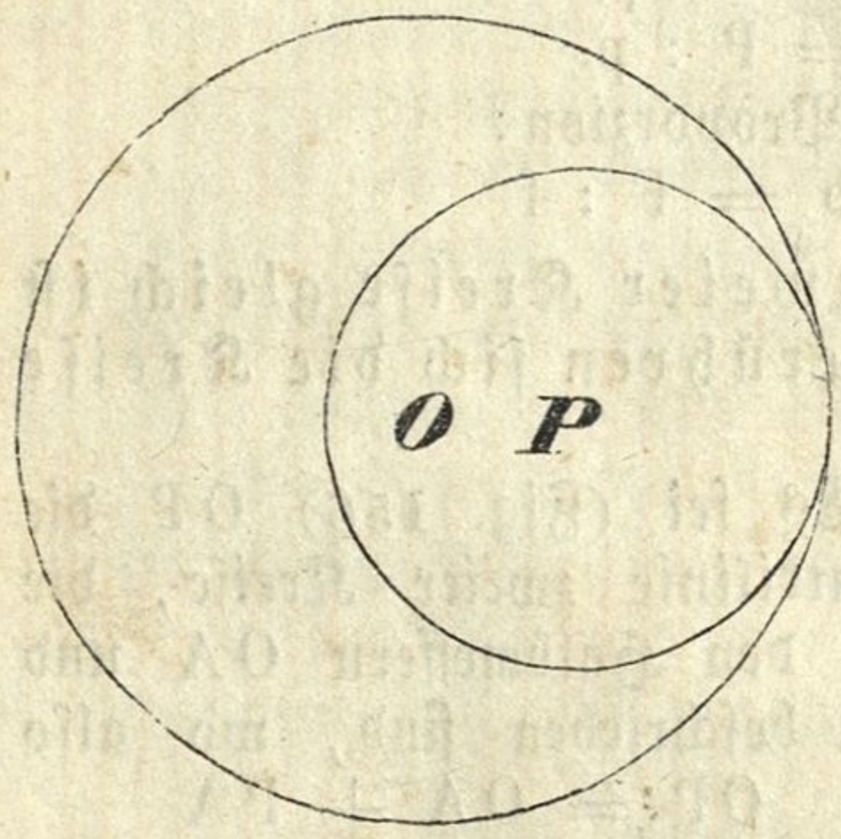
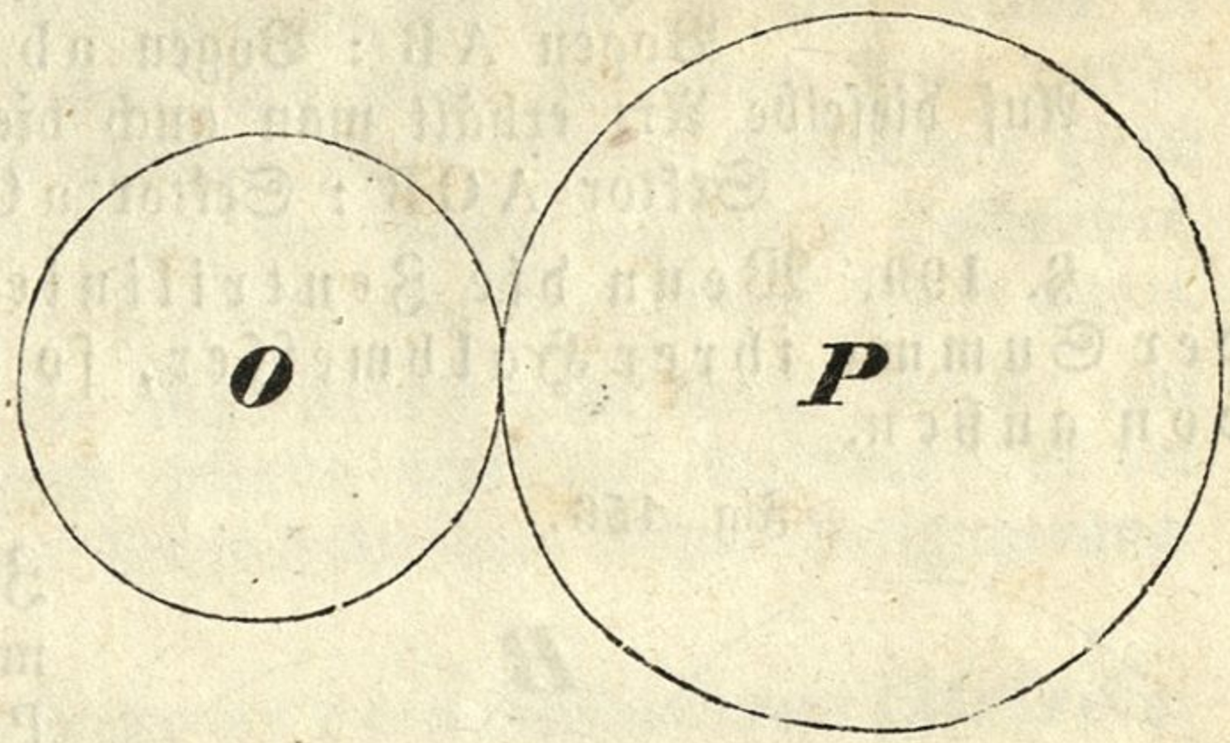
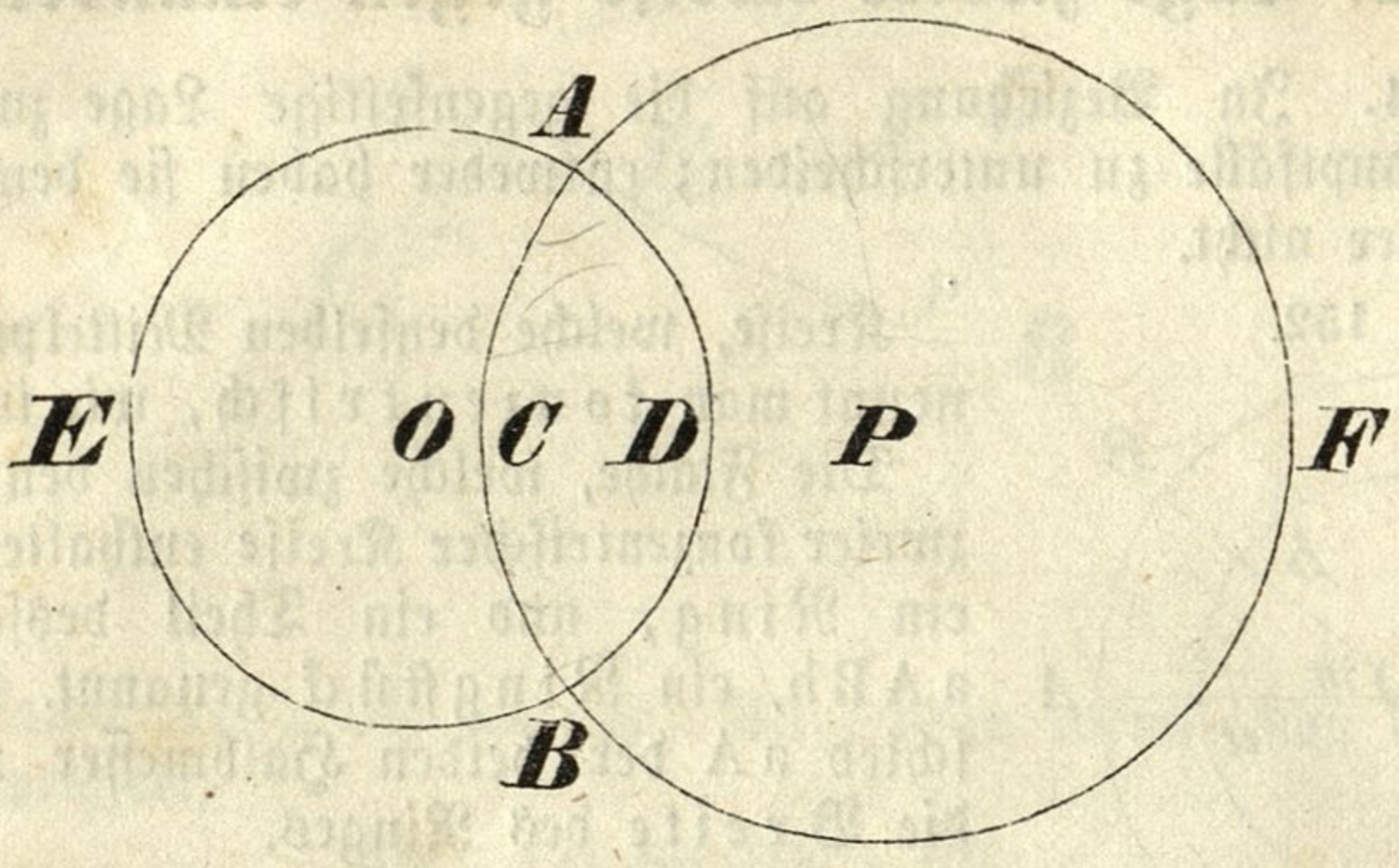


Fig. 154.



§. 196. Zwei Kreise durchschneiden sich, wenn ihre Umfänge zwei Punkte gemeinschaftlich haben. In mehr als zwei Punkten können die Periferien zweier Kreise nicht zusammentreffen; denn hätten sie drei gemeinschaftliche Punkte, so müßten sie ganz zusammenfallen und würden nur eine einzige Kreislinie bilden.

Fig. 155.



Das gemeinschaftliche Stück ACBD (Fig. 155) der beiden Kreisflächen heißt eine Linse; jedes der nicht gemeinschaftlichen Stücke, wie AEBC und AFBD, ein Mond.

§. 197. Exzentrische Kreise, die sich weder berühren noch schneiden, können wieder in einander oder außer einander liegen.

Lehrsätze.

§. 198. Aehnliche Kreisbögen verhalten sich so wie die Umfänge, und ähnliche Kreisausschnitte so wie die Flächenräume der zugehörigen ganzen Kreise.

Heißen P und p die Periferien, F und f aber die Flächenräume zweier Kreise, deren Halbmesser OB und Ob (Fig. 152) sind, so hat man

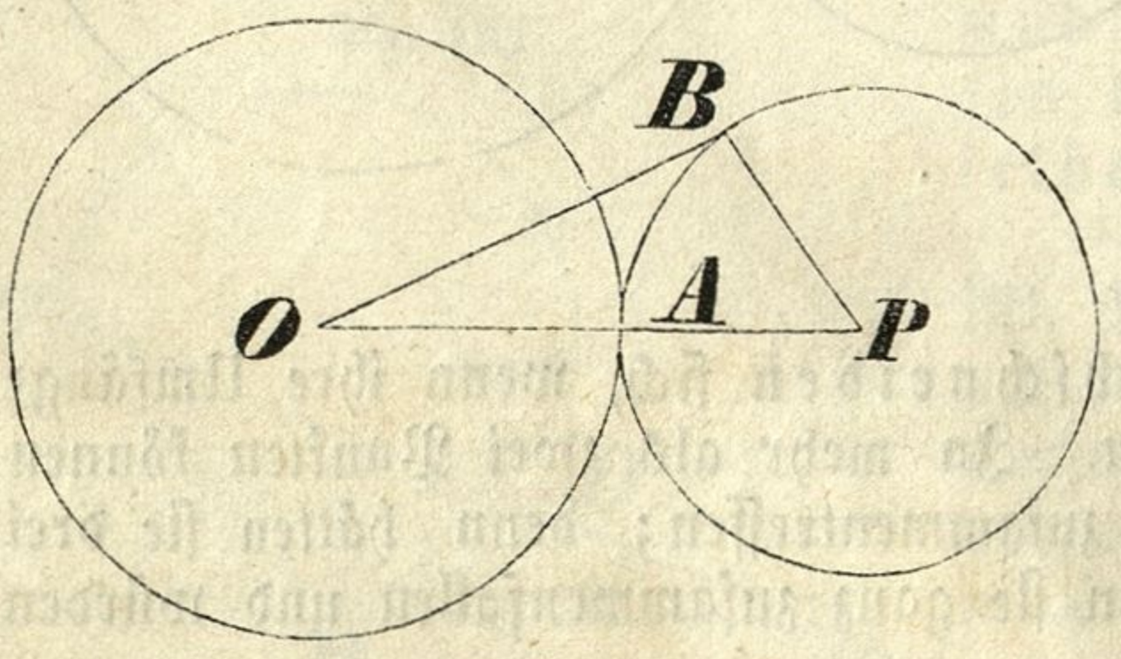
Bogen AB : P = m^0 : 360^0, und
Bogen ab : p = m^0 : 360^0; daher
Bogen AB : P = Bogen ab : p, oder
Bogen AB : Bogen ab = P : p.

Auf dieselbe Art erhält man auch die Proporzion:

Sektor AOB : Sektor aOb = F : f

§. 199. Wenn die Zentrilinie zweier Kreise gleich ist der Summe ihrer Halbmesser, so berühren sich die Kreise von außen.

Fig. 156.



Es sei (Fig. 156) OP die Zentrilinie zweier Kreise, die mit den Halbmessern OA und PA beschrieben sind, wo also

OP = OA + PA

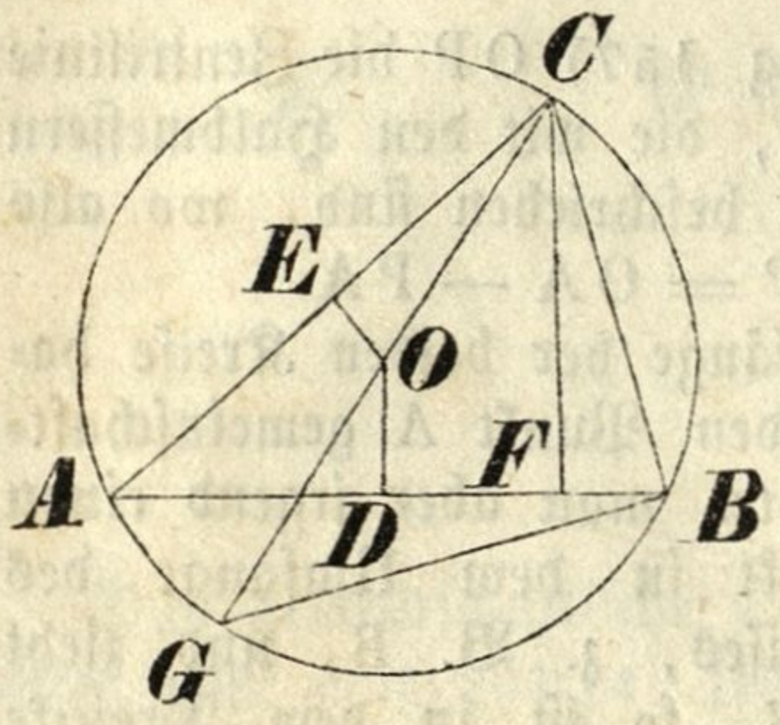
ist. Die beiden Kreise treffen offenbar in dem Punkte A zusammen. Nimmt man aber außer A irgend einen andern Punkt der zweiten Kreisperiferie, z. B. B, und zieht OB und PB, so ist in dem △ OPB, OB > OP — BP, oder OB > OA, d. h. der Punkt B

Am wichtigsten sind die regelmäßigen, dem Kreise eingeschriebenen und umschriebenen Vielecke.

Lehrsätze.

§. 203. Jedem Dreiecke läßt sich ein Kreis umschreiben.

Fig. 158.



Halbirt man (Fig. 158) zwei Dreiecksseiten AB und AC, und errichtet in den Halbirungspunkten D und E Senkrechte, welche sich in O schneiden, so ist O der Mittelpunkt des dem Dreiecke ABC umschriebenen Kreises.

Um den Halbmesser dieses Kreises zu bestimmen, fälle man von C auf AB eine Senkrechte FC, ziehe den Durchmesser CG und die Sehne BG. Aus der Aehnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke CBG und CFA folgt $CG : AC = BC : CF$, daher $CG = \frac{AC \cdot BC}{CF}$, oder wenn man Zähler und Nenner mit AB multiplizirt, $CG = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{AB \cdot CF}$.

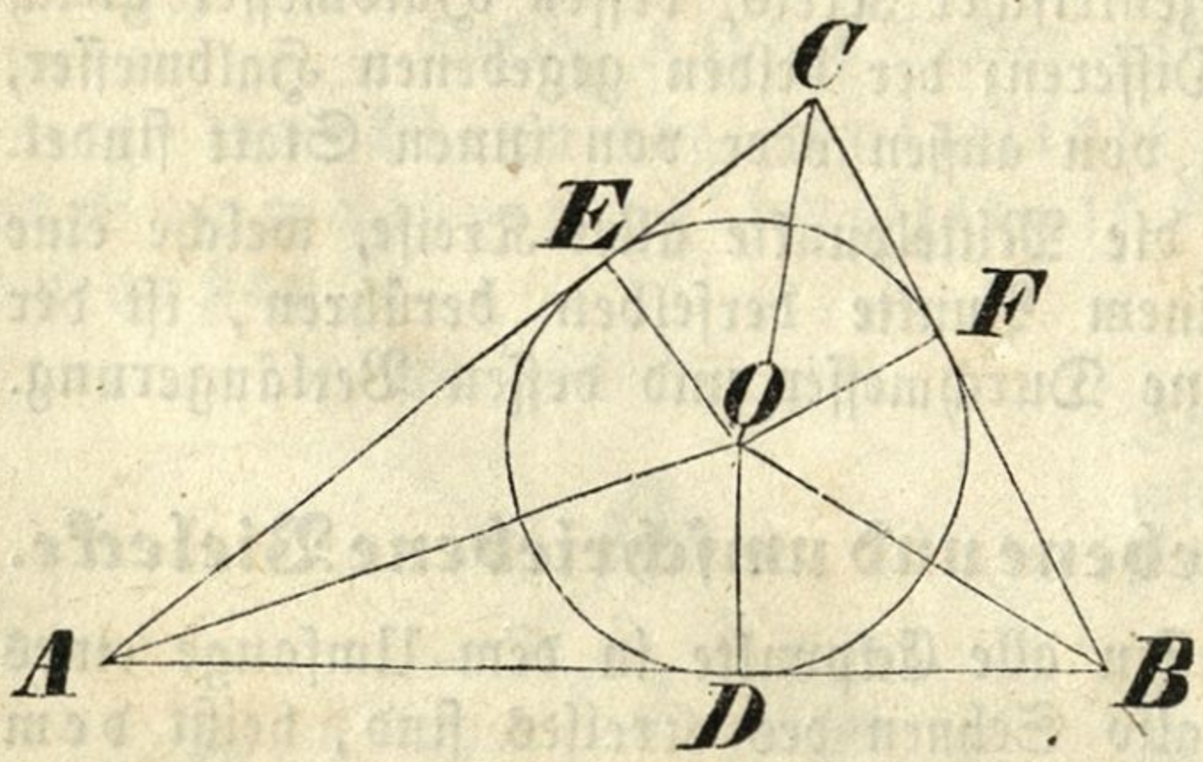
Setzt man nun $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, und heißt f der Flächeninhalt des Dreieckes ABC, und R der Halbmesser des ihm umschriebenen Kreises, so ist, da man $AB \cdot CF = 2f$ setzen kann,

$$2R = \frac{abc}{2f}, \text{ also } R = \frac{abc}{4f},$$

d. i. der Halbmesser des einem Dreiecke umschriebenen Kreises ist gleich dem Produkte aller drei Seiten, dividirt durch den vierfachen Flächeninhalt des Dreieckes.

§. 204. Jedem Dreiecke läßt sich ein Kreis einschreiben.

Fig. 159.



Man halbire (Fig. 159) zwei Dreieckswinkel, z. B. A und B; aus dem Punkte O, wo sich die Halbirungslinien schneiden, fälle man auf irgend eine Seite, z. B. AB, die Senkrechte OD. Es läßt sich nun zeigen, daß der aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser OD beschriebene Kreis dem Dreiecke ABC eingeschrieben ist.

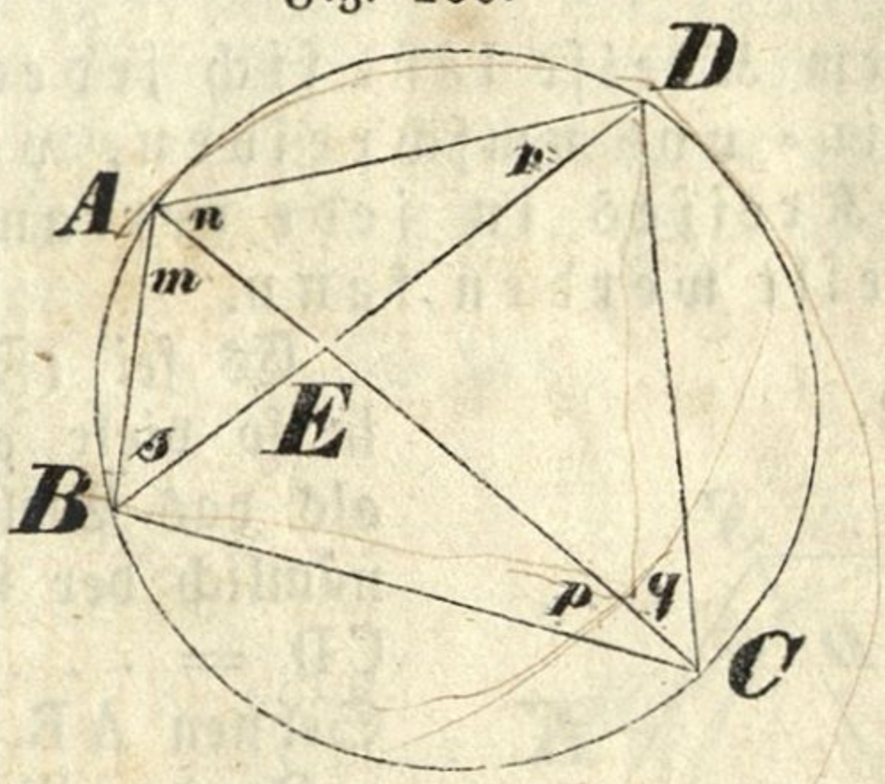
Man fälle von O Senkrechte auch auf AC und BC. Aus der Kongruenz der Dreiecke AOD und AOE folgt $OD = OE$, und weil $\triangle BOD \cong BOF$ ist, so hat man auch $OD = OF$. Da also $OD = OE = OF$, so wird der Umfang des aus O mit dem Halbmesser OD beschriebenen

Kreises durch die Punkte D, E, F gehen, und weil in diesen Punkten die Seiten AB, AC, BC auf den Halbmessern senkrecht stehen, somit Tangenten des Kreises sind, so ist wirklich der Kreis dem Dreiecke eingeschrieben.

Um den Halbmesser dieses Kreises darzustellen, sei wieder BC = a, AC = b, AB = c, der Flächeninhalt des Dreieckes ABC heiße f, und r der Halbmesser des ihm eingeschriebenen Kreises. Es ist $\triangle BOC + AOC + AOB = f$ oder $\frac{2}{ar} + \frac{2}{br} + \frac{2}{cr} = f$, woraus $r = \frac{2f}{a+b+c}$ folgt, d. h. der Halbmesser des einem Dreiecke eingeschriebenen Kreises ist gleich dem doppelten Flächeninhalte des Dreieckes, dividirt durch den Umfang desselben.

§. 205. In jedem Vierecke, welches einem Kreise eingeschrieben ist, betragen je zwei gegenüberstehende Winkel zusammen zwei rechte.

Fig. 160.



Man ziehe (Fig. 160) die Diagonalen AC und BD; es ist dann der Winkel p = r, q = s. In dem Dreiecke ABD ist nun

$$m + n + r + s = 2R,$$

daher auch

$$m + n + p + q = 2R,$$

oder

$$A + C = 2R.$$

Da die Summe aller Winkel eines Viereckes gleich ist vier rechten, so muß auch $B + D = 2R$ sein.

Der umgekehrte Satz heißt:

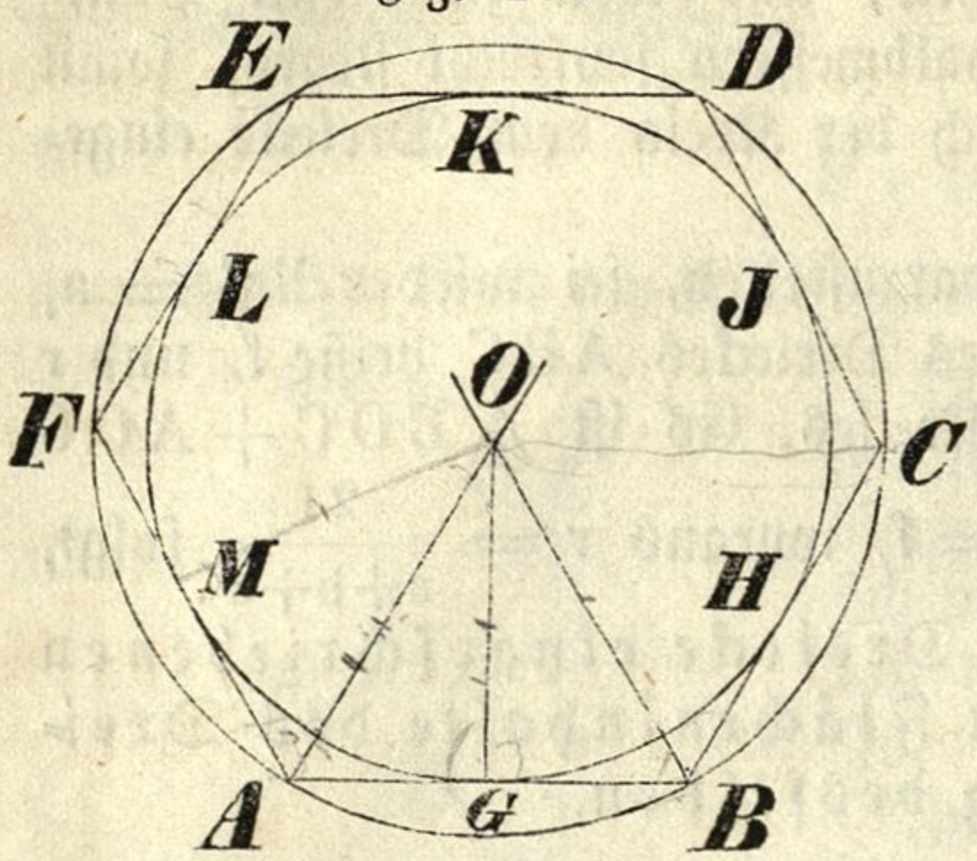
Wenn in einem Vierecke zwei einander gegenüberliegende Winkel zusammen gleich zwei rechten sind, und man beschreibt durch drei Eckpunkte desselben einen Kreis, so muß dieser auch durch den vierten Eckpunkt gehen.

Der Beweis wird indirekt geführt.

§. 206. Jedem regelmäßigen Vielecke läßt sich ein Kreis ein- und umschreiben.

Es sei ABCDEF (Fig. 161) ein regelmäßiges Polygon. Halbirt

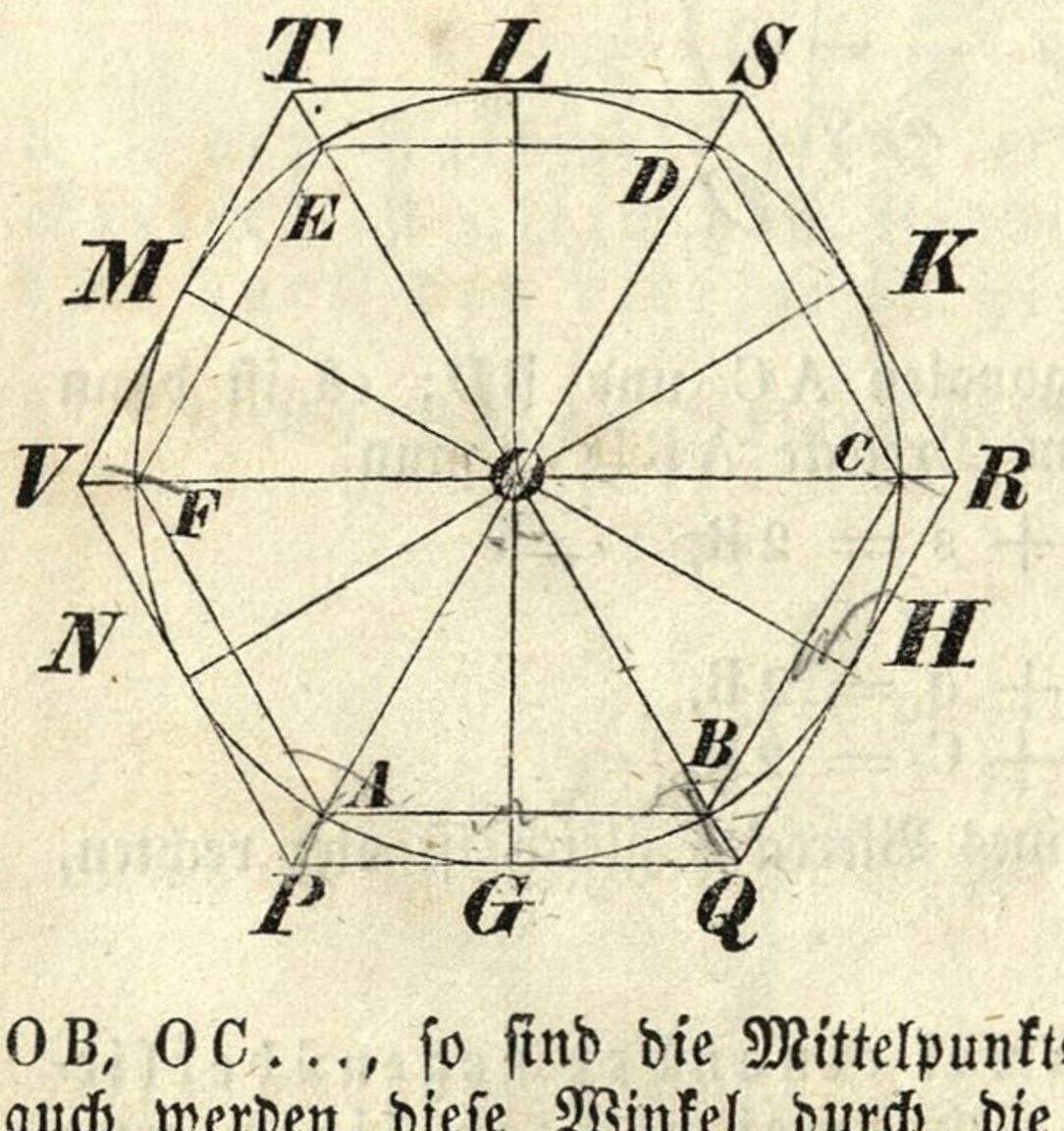
Fig. 161.



man zwei Winkel, z. B. A und B, so besitzt der Durchschnittspunkt O der beiden Halbirungslinien die Eigenschaft, daß er von allen Seiten und eben so von allen Eckpunkten gleichweit absteht. Fällt man daher auf die Vielecksseiten von O aus Senkrechte, welche in den Punkten G, H, J, K, L, M eintreffen, und beschreibt aus O mit OG als Halbmesser einen Kreis, so muß die Periferie desselben durch die Punkte G, H, J, K, L, M gehen, und da die Seiten des Vieleckes Tangenten zu diesem Kreise sind, so ist dieser dem Vielecke eingeschrieben. Beschreibt man eben so aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser OA eine Kreislinie, so muß dieselbe durch alle Eckpunkte A, B, C, D, E, F gehen, und ist somit dem Vielecke umschrieben.

§. 207. Einem Kreise läßt sich jedes verlangte regelmäßige Vieleck ein- und umschreiben, vorausgesetzt, daß der Umfang des Kreises in jede verlangte Anzahl gleicher Theile getheilt werden kann.

Fig. 162.



Es sei (Fig. 162) die Periferie in so viele gleiche Theile getheilt, als das Vieleck Seiten haben soll, nämlich der Bogen AB = BC = CD = . . ., und man ziehe die Sehnen AB, BC, CD, . . .

In dem Vielecke ABCD . . . sind nun alle Seiten AB, BC, CD, . . . als Sehnen, welche zu gleichen Bögen gehören, einander gleich, eben so sind die Winkel A, B, C, . . . gleich, weil sie auf gleichen Bögen aufstehen; das dem Kreise eingeschriebene Vieleck ist demnach ein regelmäßiges.

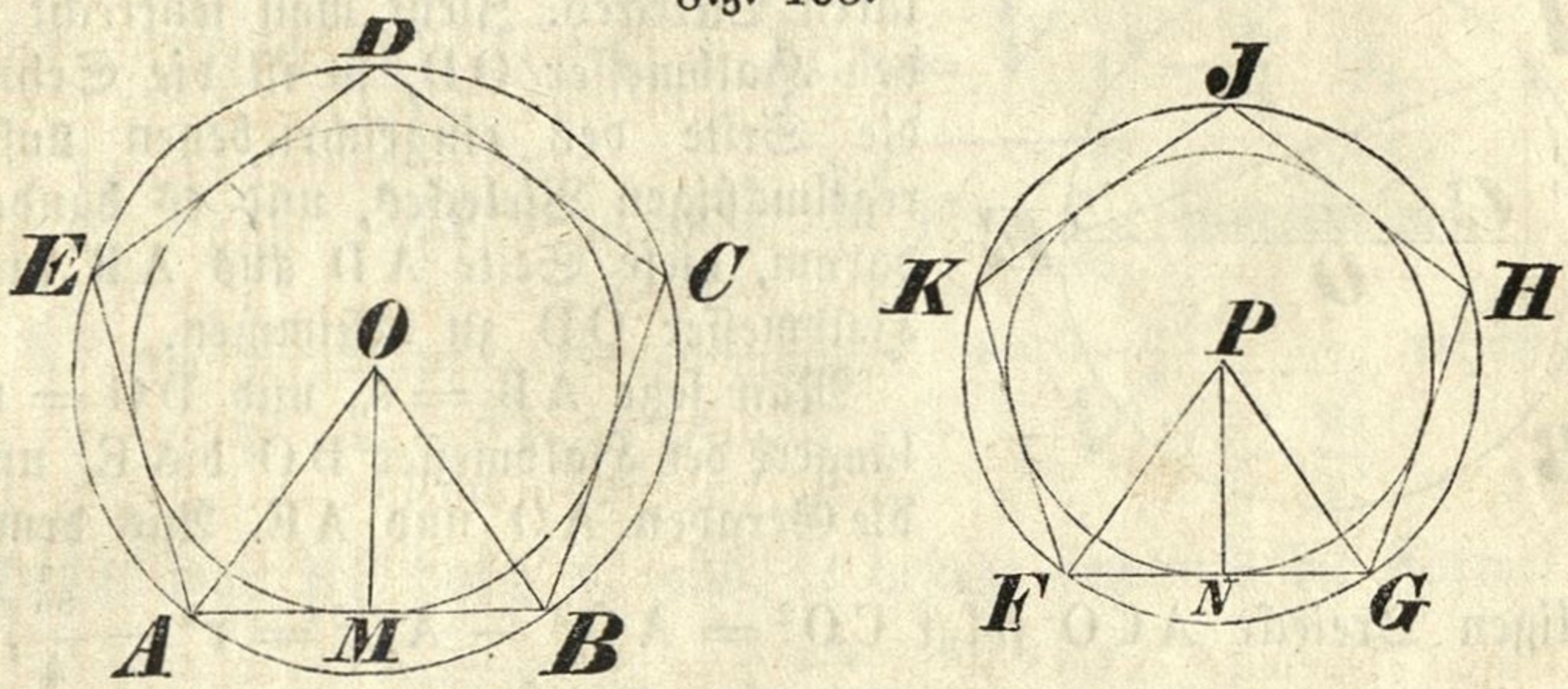
Zieht man die Halbmesser OA, OB, OC . . ., so sind die Mittelpunktswinkel AOB, BOC, COD, . . . gleich; auch werden diese Winkel durch die Senkrechten OG, OH, OK, . . ., welche auf die Sehnen AB, BC, CD, . . . gefällt werden, halbirt; woraus folgt, daß auch die Winkel GOH, HOK, KOL, . . . durch die Halbmesser OB, OC, OD, . . . halbirt werden. Man ziehe durch die Punkte G, H, K, . . . Senkrechte auf die betreffenden Halbmesser, so müssen sich je zwei aufeinander folgende Senkrechte in einem Punkte schneiden, und man erhält ein dem Kreise umschriebenes Polygon PQRS . . . Wenn man den Durchschnittspunkt Q zweier Tangenten GQ und HQ mit dem Mit-

telpunkte O verbindet, so muß die Verbindungslinie OQ den Mittelpunktswinkel GOH halbiren; dieser Winkel wird aber auch von dem Halbmesser OB halbirt, daher müssen die Linien OQ und OB zusammenfallen, oder es liegt der Punkt Q in der Verlängerung des Halbmessers OB. Eben so folgt, daß die Punkte R, S, . . . in den Verlängerungen der Halbmesser OC, OD, . . . liegen. Weil das $\triangle$ POQ $\sim$ AOB und $\triangle$ QOR $\sim$ BOC, so ist PQ : AB = OQ : OB und QR : BC = OQ : OB, daher PQ : AB = QR : BC, und wegen AB = BC auch PQ = QR; eben so kann man zeigen, daß QR = RS, RS = ST, u. s. w. ist. Weil ferner die Winkel P, Q, R, . . . den Winkeln A, B, C, . . . gleich sind, indem ihre Schenkel gegenseitig parallel laufen, und A = B = C = . . . ist, so muß auch P = Q = R = . . . sein. Das dem Kreise umschriebene Vieleck PQRS . . . hat also gleiche Seiten und gleiche Winkel, ist somit regelmäßig.

Vermöge §. 179 ist der Umfang jedes eingeschriebenen Vieleckes kleiner, der Umfang jedes umschriebenen Vieleckes aber größer als die Periferie des Kreises.

§. 208. *In regelmäßigen Vielecken von gleich viel Seiten verhalten sich die Umfänge wie die Halbmesser der diesen Vielecken eingeschriebenen oder umschriebenen Kreise, und die Flächeninhalte wie die Quadrate eben dieser Halbmesser.*

Fig. 163.



Es seien (Fig. 163) die beiden Vielecke ABCDE und FGHJK regelmäßig; ihre Umfänge heißen U und u, ihre Flächenräume F und f.

Da die beiden regelmäßigen Vielecke gleich viel Seiten haben, so sind sie ähnlich, daher hat man

$$U : u = AB : FG \text{ und } F : f = AB^2 : FG^2.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABO und FGP folgt aber

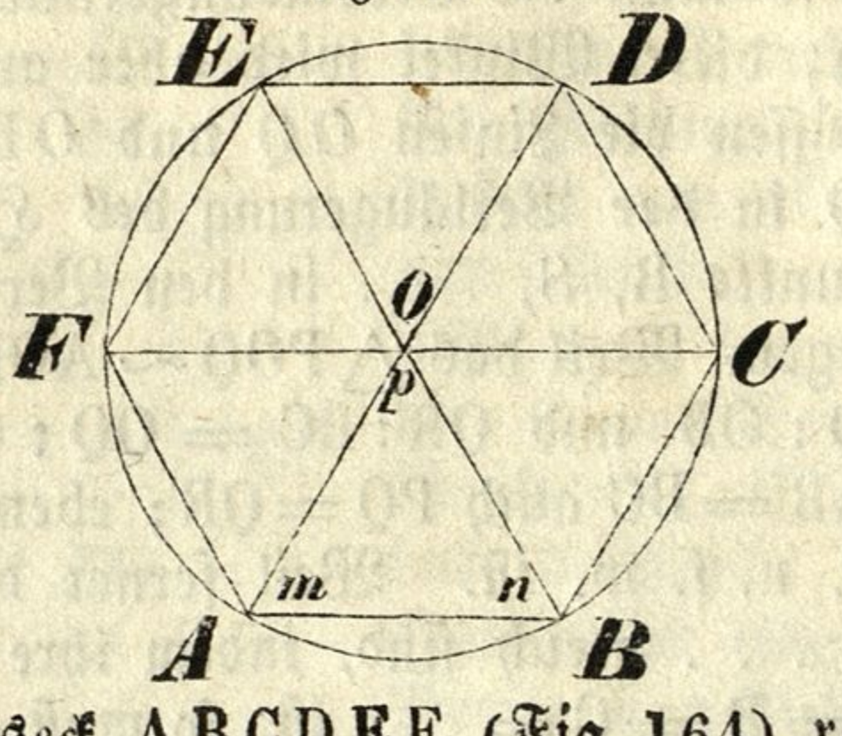
$$AB : FG = OM : PN = OA : PF;$$

daher ist

$$U : u = OM : PN \text{ und } F : f = OM^2 : PN^2$$
$$= OA : PF \qquad = OA^2 : PF^2$$

§. 209. *Die Seite des regelmäßigen einem Kreise eingeschriebenen Sechseckes ist gleich dem Halbmesser des Kreises.*

Fig. 164.

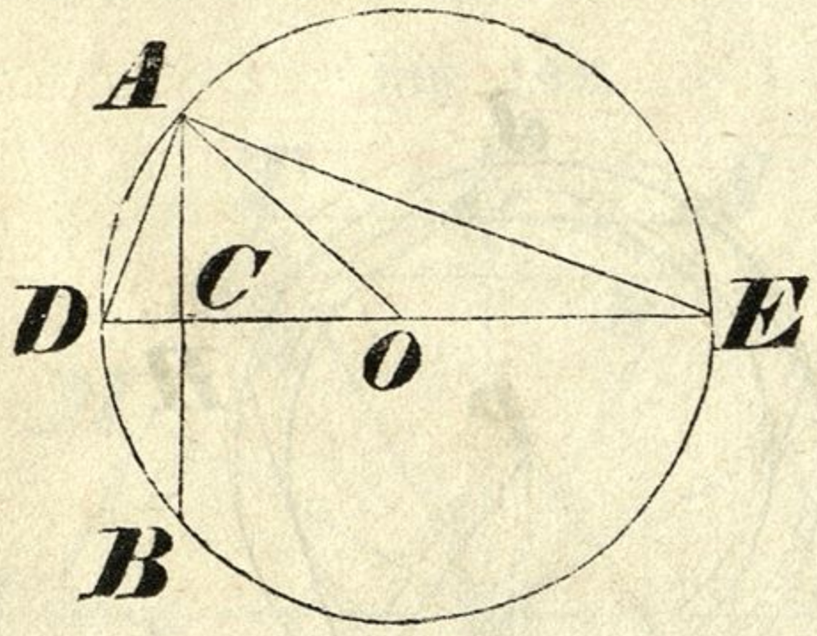


Es sei das Sechseck ABCDEF (Fig. 164) regelmäßig.

Der Winkel eines regelmäßigen Sechseckes ist gleich $\frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$, also ist $A = B = 120^\circ$, und $m = n = 60^\circ$, daher muß auch $p = 60^\circ$, und daher das Dreieck ABO gleichseitig sein; folglich ist $AB = OA$.

§. 210. Aus der Seite eines dem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Vieleckes kann die Seite eines demselben Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Vieleckes von doppelt so viel Seiten bestimmt werden.

Fig .165.



Es sei AB (Fig. 165) die Seite des dem Kreise eingeschriebenen nseitigen regulären Vieleckes. Zieht man senkrecht darauf den Halbmesser OD, so ist die Sehne AD die Seite des eingeschriebenen 2nseitigen regelmäßigen Vieleckes, und es handelt sich darum, diese Seite AD aus AB und dem Halbmesser OD zu bestimmen.

Man setze $AB = s_n$ und $DO = r$, verlängere den Halbmesser DO bis E, und ziehe die Geraden AO und AE. Aus dem rechtwinkligen Dreiecke ACO folgt $CO^2 = AO^2 - AC^2 = r^2 - \frac{s_n^2}{4}$, daher

$$CO = \frac{r}{2}\sqrt{4 - \frac{s_n^2}{r^2}},$$

und somit

$$CD = DO - CO = r - \frac{r}{2}\sqrt{4 - \frac{s_n^2}{r^2}}.$$

Aus dem bei A rechtwinkligen Dreiecke DAE hat man ferner $DE : AD = AD : CD$, also $AD^2 = DE \cdot CD$; oder wenn man für DE und CD ihre Werthe substituirt,

$$AD^2 = 2r\left(r - \frac{r}{2}\sqrt{4 - \frac{s_n^2}{r^2}}\right) = r^2\left(2 - \sqrt{4 - \frac{s_n^2}{r^2}}\right), \text{ und}$$

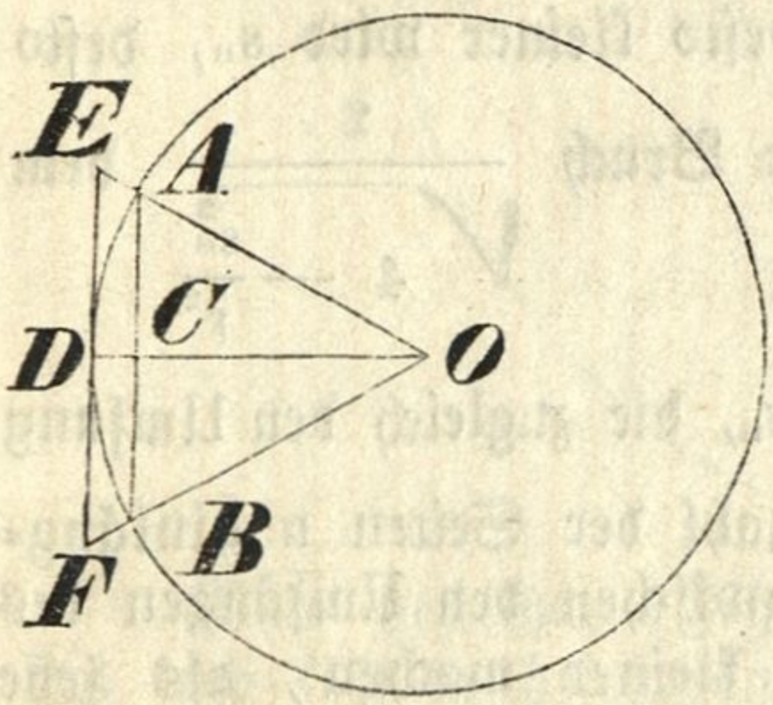
$$AD = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{s_n^2}{r^2}}}.$$

Wird AD durch s_{2n} ausgedrückt, so ist also

$$s_{2n} = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{s_n^2}{r^2}}}.$$

§. 211. Aus der Seite eines dem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Vieleckes läßt sich die Seite eines demselben Kreise umschriebenen regulären Vieleckes von eben so viel Seiten bestimmen.

Fig. 166.



Es sei (Fig. 166) $AB = s_n$ die Seite des einem Kreise eingeschriebenen nseitigen regelmäßigen Vieleckes, und der Halbmesser dieses Kreises $AO = r$. Fällt man von O auf AB eine Senkrechte, welche die Periferie in D trifft, und errichtet in D auf den Halbmesser OD eine Senkrechte, welche die verlängerten Halbmesser OA und OB in den Punkten E und F schneidet, so ist EF die Seite des umschriebenen nseitigen regulären Polygons.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke EFO und ABO folgt nun $EF : AB = DO : CO$, oder weil

$$CO = \sqrt{AO^2 - AC^2} = \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}} \text{ ist,}$$

$$EF : s_n = r : \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}, \text{ woraus man}$$

$$EF = \frac{r\,s_n}{\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}} = \frac{s_n}{\sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4r^2}}} = \frac{2\,s_n}{\sqrt{4 - \frac{s_n^2}{r^2}}} \text{ erhält.}$$

Drückt man EF durch S_n aus, so besteht demnach die Formel

$$S_n = \frac{2\,s_n}{\sqrt{4 - \frac{s_n^2}{r^2}}}.$$

5. Ausmessung des Kreises.

§. 212. Jedes Messen setzt eine Vergleichung der zu messenden Größe mit der Maßeinheit voraus. Die Einheit des Linienmaßes ist eine gerade Linie, die Einheit des Flächenmaßes eine von geraden Linien begränzte Fläche, das Quadrat. Wegen der verschiedenartigen Natur der geraden und krummen Linien, der gerad- und krummlinigen Figuren kann nun aber weder die Kreislinie mit einer Geraden, noch die Kreisfläche mit einem Quadrate unmittelbar verglichen werden; man muß daher bei der Messung des Kreises zu einem mittelbaren Verfahren Zuflucht nehmen, welches auf folgenden Betrachtungen beruhet.

Wenn man dem Kreise ein regelmäßiges Polygon einschreibt und ein anderes von eben so viel Seiten umschreibt, so ist, so groß auch die Anzahl der Seiten eines jeden Polygons sein mag, stets der Umfang des eingeschriebenen Vieleckes kleiner, der Umfang des umschriebenen Vieleckes größer als die Periferie des Kreises. Heißen s_n und S_n die Seiten, u_n und U_n die Umfänge des eingeschriebenen und umschriebenen nseitigen regelmäßigen Polygons, und r der Halbmesser des Kreises, so hat man $u_n = ns_n$ und $U_n = nS_n = ns^n \cdot \frac{2}{\sqrt{4 - \frac{S_n^2}{r^2}}}$, weil $S_n = \frac{2s_n}{\sqrt{4 - \frac{S_n^2}{r^2}}}$ ist

Je mehrere Seiten die beiden Vielecke haben, desto kleiner wird s_n, desto mehr nähert sich dann $\frac{S_n^2}{r^2}$ der Nulle, daher der Bruch $\frac{2}{\sqrt{4 - \frac{S_n^2}{r^2}}}$ dem Ausdrucke $\frac{2}{\sqrt{4}} = 1$, folglich U_n der Größe ns_n, die zugleich den Umfang u_n bezeichnet. Man kann also, wenn die Anzahl der Seiten n hinlänglich groß angenommen wird, den Unterschied zwischen den Umfängen des eingeschriebenen und umschriebenen Polygons kleiner machen, als jede noch so kleine angebbare Größe. Die Periferie des Kreises liegt aber immer zwischen den Umfängen des eingeschriebenen und umschriebenen Polygons, und fällt daher mit ihnen zusammen, wenn deren Seitenzahl unendlich groß angenommen wird. Daraus folgt von selbst, daß bei hinlänglicher Vergrößerung der Seitenanzahl auch der Unterschied zwischen den Flächeninhalten des eingeschriebenen und umschriebenen regelmäßigen Vieleckes kleiner gemacht werden kann, als jede noch so kleine denkbare Größe, und daß der Flächeninhalt des Kreises, welcher stets zwischen denselben gelegen ist, endlich mit ihnen zusammenfällt, sobald die Anzahl der Seiten unendlich groß angenommen wird.

Der Kreis kann daher als ein regelmäßiges Polygon von unendlich viel Seiten betrachtet werden, in welchem der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite den Halbmesser des Kreises vorstellt.

Auf Grundlage dieses Satzes kann nun sowohl die Länge der Periferie als der Flächeninhalt des Kreises bestimmt werden.

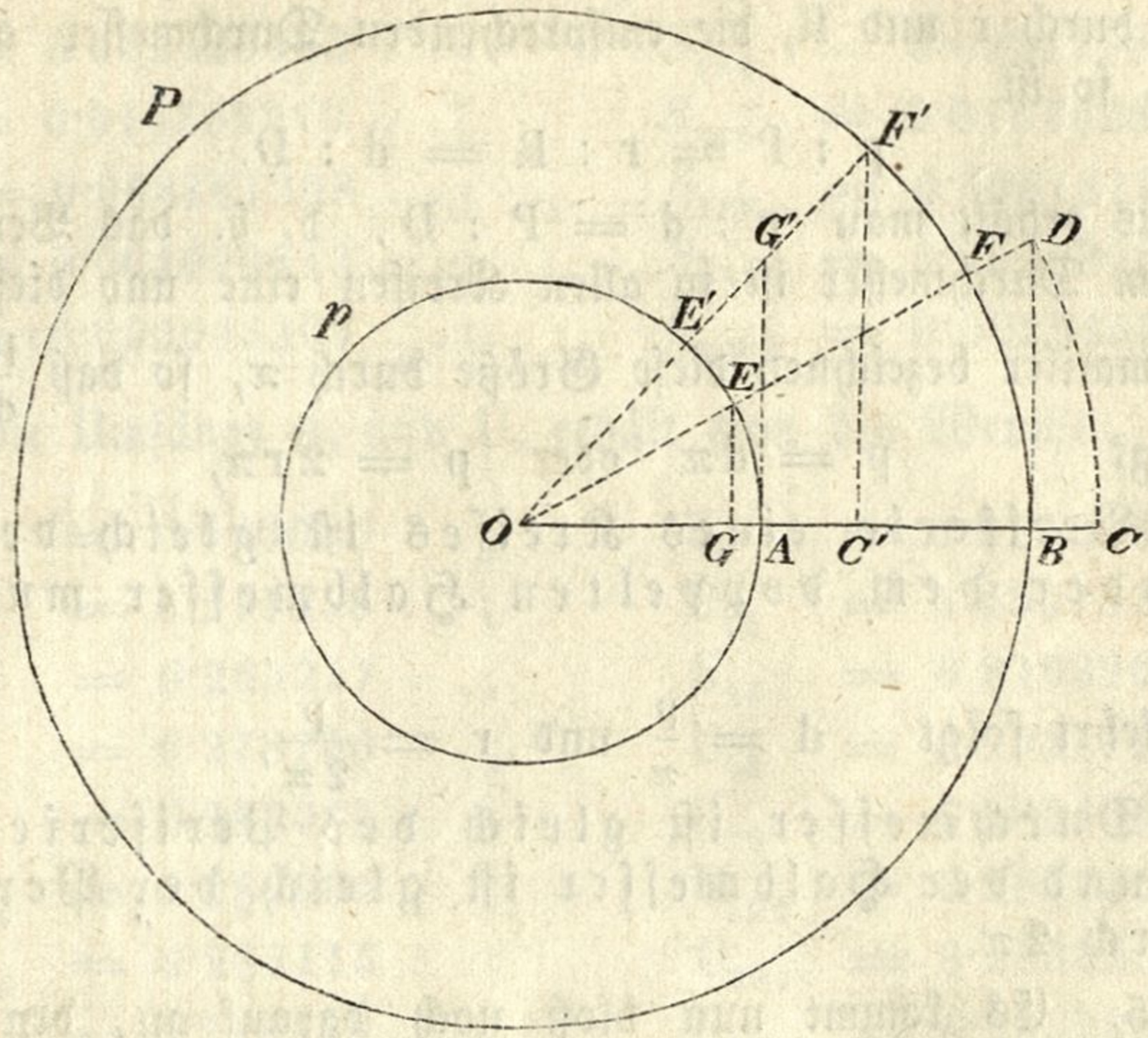
a) Länge der Kreislinie.

§. 213. Da sich die Umfänge zweier regelmäßigen Vielecke von gleich viel Seiten, wie groß auch ihre Anzahl sein mag, so zu einander verhalten, wie die Halbmesser der ihnen eingeschriebenen Kreise, d. i. wie die Abstände ihrer Mittelpunkte von den Seiten, so folgt schon daraus auch der Satz:

Die Umfänge zweier Kreise verhalten sich wie ihre Halbmesser.

Wir wollen übrigens für diesen Satz hier auch noch einen selbstständigen indirekten Beweis folgen lassen.

Fig. 167.



Man bezeichne (Fig. 167) die Periferien der mit den Halbmessern OA und OB beschriebenen Kreise mit p und P. Wäre nun nicht p : P = OA : OB, so müßte die vierte Proporzionale zu p, P, und OA größer oder kleiner sein als OB.

Es sei nun erstlich

$$p : P = OA : OC,$$

wo $OC > OB$ ist. Beschreibt man aus O mit dem Halbmesser OC einen Kreisbogen, welcher eine in B auf OB errichtete Senkrechte in D schneidet, und zieht die DO, ferner $EG \perp OB$, so müßte, da sich ähnliche Bögen so wie die ganzen zugehörigen Periferien verhalten, auch Bog. AE : Bog. BF = OA : OC sein. Allein es ist auch EG : BD = OE : OD = OA : OC; es müßte daher auch Bog. AE : Bog. BF = EG : BD sein. Es müßte somit, da Bog. $AE > EG$ ist, auch Bog. $BF > BD$ sein, was vermöge §. 179 nicht möglich ist. Es ist demnach auch nicht möglich, daß die vierte Proporzionale zu p, P und OA größer sei als OB.

Man nehme nun an, daß

$$p : P = OA : OC'$$

sei, wo $OC' < OB$ ist. Errichtet man $C'F' \perp OB$, zieht den Halbmesser OF', und $AG' \perp OB$, so müßte dasselbe Verhältniß, wie zwischen den Periferien, auch zwischen den ähnlichen Bögen AE' und BF' statt finden, und daher Bog. AE' : Bog. BF' = OA : OC' sein. Weil nun auch AG' : C'F' = OA : OC' ist, so wäre Bog. AE' : Bog. BF' = AG' : C'F' und es müßte, da Bog. $AE' < AG'$ ist, auch Bog. $BF' < C'F'$ sein; dieses ist jedoch nicht möglich, da nach §. 179 Bog. $BF' > C'F'$ sein muß; daher ist es auch nicht möglich, daß die vierte Proporzionale zu p, P und OA kleiner sei als OB.

Die vierte Proporzionale zu p, P und OA kann demnach weder größer noch kleiner als OB sein; sie ist daher OB selbst, und man hat

$$p : P = OA : OB.$$

§. 214. Drückt man die zu den Periferien p und P gehörigen Halbmesser durch r und R, die entsprechenden Durchmesser aber durch d und D aus, so ist

$$p : P = r : R = d : D.$$

Daraus erhält man $p : d = P : D$, d. h. das Verhältniß der Periferie zum Durchmesser ist in allen Kreisen eine und dieselbe Größe.

Die Mathematiker bezeichnen diese Größe durch π, so daß $\frac{p}{d} = \pi$ ist.

Daraus folgt $p = d\pi$ oder $p = 2r\pi$,

d. h. die Periferie eines Kreises ist gleich dem Durchmesser oder dem doppelten Halbmesser multiplizirt mit π.

Umgekehrt folgt $d = \frac{p}{\pi}$ und $r = \frac{p}{2\pi}$,

d. h. der Durchmesser ist gleich der Periferie dividirt durch π, und der Halbmesser ist gleich der Periferie dividirt durch 2π.

§. 215. Es kommt nun bloß noch darauf an, den numerischen Werth der Größe π, welche auch die Ludolfische Zahl genannt wird, auszumitteln.

Nimmt man als Halbmesser des Kreises die Einheit an, so ist $r = 1$, $d = 2$, und $\pi = \frac{p}{2}$. Die Größe π kann also als der halbe Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser $= 1$ ist, betrachtet werden. Um nun den Umfang eines solchen Kreises zu berechnen, bestimmt man die Umfänge des eingeschriebenen und umschriebenen regelmäßigen Polygons von gleicher Seitenanzahl, und zwar in Dezimalen; diejenigen Dezimalstellen, in denen die Umfänge der beiden Polygone übereinstimmen, bezeichnen mit völliger Sicherheit auch die Länge der Periferie des Kreises. Da nun der Unterschied jener beiden Umfänge mit der Zunahme der Seitenanzahl immer kleiner wird, und deßhalb die beiden Umfänge immer mehr Dezimalen gemeinschaftlich haben, so kann auf diese Art die Länge der Periferie so genau, als man will, bestimmt werden. Nach den Formeln

$$s_{2n} = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{s_n^2}{r^2}}} \quad \text{und} \quad S_n = \frac{2s_n}{\sqrt{4 - \frac{s_n^2}{r^2}}}$$

welche für $r = 1$ in die folgenden

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}} \quad \text{und} \quad S_n = \frac{2s_n}{\sqrt{4 - s_n^2}}$$

übergehen, erhält man wegen $s_6 = r = 1$, nachfolgende Werthe:

$s_6 = 1{\cdot}000000000\ldots$;	$S_6 = 1{\cdot}154700538\ldots$
$s_{12} = 0{\cdot}517638180\ldots$;	$S_{12} = 0{\cdot}535898478\ldots$
$s_{24} = 0\,261052384\ldots$;	$S_{24} = 0{\cdot}263303993\ldots$
$s_{48} = 0{\cdot}130866258\ldots$;	$S_{48} = 0\,131086925\ldots$

s_{96}	$= 0{\cdot}065438173\ . .;$	S_{96}	$= 0{\cdot}065473230\ . .$
s_{192}	$= 0{\cdot}032723463\ . .;$	S_{192}	$= 0{\cdot}032727844\ . .$
s_{384}	$= 0{\cdot}016362279\ . .;$	S_{384}	$= 0{\cdot}016362827\ . .$
s_{768}	$= 0{\cdot}008181208\ . .;$	S_{768}	$= 0{\cdot}008181276\ . .$
s_{1536}	$= 0{\cdot}004090613\ . .;$	S_{1536}	$= 0{\cdot}004090621\ . .$
s_{3072}	$= 0{\cdot}002045307\ . .;$	S_{3072}	$= 0{\cdot}002045308\ . .$

Für die Umfänge u_n und U_n erhält man die Werthe:

u_6	$= 6{\cdot}000000\ . .;$	U_6	$= 6\,928203\ . .$
u_{12}	$= 6{\cdot}211658\ . .;$	U_{12}	$= 6{\cdot}430782\ . .$
u_{24}	$= 6{\cdot}265257\ . .;$	U_{24}	$= 6\,319320\ . .$
u_{48}	$= 6{\cdot}278700\ . .;$	U_{48}	$= 6\,292172\ . .$
u_{96}	$= 6{\cdot}282065\ . .;$	U_{96}	$= 6{\cdot}285430\ . .$
u_{192}	$= 6{\cdot}282905\ . .;$	U_{192}	$= 6{\cdot}283746\ .$
u_{384}	$= 6{\cdot}283115\ . .;$	U_{384}	$= 6{\cdot}283325\ . .$
u_{768}	$= 6{\cdot}283168\ . .;$	U_{768}	$= 6{\cdot}283220\ . .$
u_{1536}	$= 6{\cdot}283181\ . .;$	U_{1536}	$= 6{\cdot}283194\ . .$
u_{3072}	$= 6{\cdot}283183\ .;$	U_{3072}	$= 6{\cdot}283187\ . .$

Die Umfänge des eingeschriebenen und umschriebenen regelmäßigen Vieleckes von 3072 Seiten unterscheiden sich erst in der sechsten Dezimale; da nun die Periferie des Kreises zwischen jenen beiden Umfängen liegt, so muß nothwendig der gemeinschaftliche Theil obiger Zahlen die Periferie selbst ausdrücken, somit ist $p = 6{\cdot}28318\ . . .$, und daher

$$\pi = \frac{p}{2} = 3{\cdot}14159\ . . .$$

Nach dem eben angegebenen Verfahren kann die Zahl π mit jeder beliebigen Genauigkeit entwickelt werden.

Auf 20 Dezimalstellen genau hat man

$$\pi = 3{\cdot}14159\ 26535\ 89793\ 23846.$$

Die Anzahl der Dezimalen, die man für π beibehält, hängt von dem Grade der Genauigkeit ab, welche man verlangt. Die sechs ersten Dezimalen, welche für die meisten praktischen Fälle ausreichen, findet man, wenn man die ersten drei ungeraden Zahlen jede zweimal neben einander hinschreibt, und die zweite Hälfte 355 durch die erste 113 dividirt; es ist

$$355 : 113 = 3{\cdot}1415929\ . . .$$

Beispiele.

1) Wie groß ist der Umfang eines Kreises, dessen Durchmesser 8″ ist?

$$p = 8 \times 3{\cdot}14159 = 25{\cdot}13272''.$$

2) Es sei $r = 3'\ 4''$; wie groß ist p?

$$p = 2r\pi = 80 \times 3{\cdot}14159 = 251{\cdot}3272'' = 3^0\,2'\ 11{\cdot}3273''.$$

3) Es sei $p = 30'$; wie groß ist d?

$$d = 30 : 3{\cdot}14159 = 9{\cdot}54931''.$$

4) Wie groß ist r, wenn $p = 4^0\,3'\,5''$ ist?

§. 216. Da sich jeder Bogen zur Periferie, wie sein Mittelpunktswinkel zu 360^0 verhält, so hat man, wenn b die Länge eines Bogens von a Graden, und r den Halbmesser bedeutet, die Proporzion

$$b : 2r\pi = a^0 : 360^0,$$

aus welcher man, wenn von den drei Größen b, a und r zwei gegeben sind, sogleich die dritte finden kann.

Beispiele.

1) Wie groß ist die Länge eines Bogens von 35^0 für den Halbmesser 4'?

Die Periferie ist gleich $8 \times 3{\cdot}14159 = 25{\cdot}13272'$; daher

$$b : 25{\cdot}13272 = 35 : 360,$$

woraus $b = 2{\cdot}44345'$ folgt.

2) Es sei $b = 0{\cdot}15708'$, $r = 1'$; wie groß ist a?

Man hat $0{\cdot}15708 : 6{\cdot}28318 = a : 360$, daher $a = 9^0$.

3) Ein Bogen von $7^0\ 40'$ ist $0{\cdot}4684'$ lang; wie groß ist der Halbmesser des Kreises?

Man hat $0{\cdot}4684 : 2r \times 3{\cdot}14159 = 7\frac{2}{3} : 360$, woraus $r = 3{\cdot}5'$ folgt.

4) Wie lang ist für den Halbmesser = 1

a) ein Bogen von 1^0,
b) ein Bogen von $1'$,
c) ein Bogen von $1''$?

5) Wie viel Grade hat ein Bogen von 5' Länge für den Halbmesser 2'?

§. 217. Zwei ähnliche Bögen verhalten sich so wie ihre Halbmesser.

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt aus §§. 198 und 213. Heißen B und b die ähnlichen Bögen zweier Kreise, deren Halbmesser R und r sind, so hat man

$$B : b = R : r.$$

Für $r = 1$ hat man $B : b = R : 1$, daher $B = b\,R$ und $b = \frac{B}{R}$;

d. h. die Länge eines Kreisbogens ist gleich der Länge des ähnlichen Bogens für den Halbmesser 1, multiplizirt mit dem Halbmesser; und

die Länge eines Bogens für den Halbmesser 1 ist gleich der Länge eines ähnlichen Bogens, dividirt durch den Halbmesser des letzteren.

In der Mathematik wird die Länge eines Bogens, welcher mit dem Halbmesser 1 aus dem Scheitel eines Winkels zwischen dessen Schen-

keln beschrieben wird, häufig für das Maß dieses Winkels selbst angenommen, was jedoch, da Längen und Winkel als verschiedenartige Größen, im eigentlichen Sinne nicht durch einander gemessen werden können, stets nur in dem Sinne zu verstehen ist, daß aus der Bogenlänge für den Halbmesser 1 unzweideutig auch auf die Anzahl Grade des dazu gehörigen Winkels geschlossen werden könne. Diese Bedeutung muß auch im Auge behalten werden, wenn man die letzten zwei Sätze manchmal in folgender Weise ausdrückt:

Ein Kreisbogen ist gleich seinem Winkel multiplizirt mit dem Halbmesser; und:

Ein Winkel ist gleich seinem Bogen dividirt durch den Halbmesser.

b) Flächeninhalt des Kreises.

§. 218. Da die Fläche eines jeden regulären Polygons gleich ist dem Umfange multiplizirt mit dem halben Abstande des Mittelpunktes von einer Seite, so folgt schon daraus vermöge §. 212 auch der Satz:

Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich der Periferie multiplizirt mit dem halben Halbmesser.

Wir wollen übrigens die Richtigkeit dieses Satzes auch noch durch den nachfolgenden indirekten Beweis außer Zweifel stellen.

Heißt f der Flächeninhalt und p die Periferie eines Kreises, dessen Halbmesser r ist und würde Jemand nicht zugeben, daß $f = p \cdot \frac{r}{2}$ ist, so müßte er behaupten, daß f größer oder kleiner sei als $p \cdot \frac{r}{2}$.

Man nehme nun erstlich an, daß $f > p \cdot \frac{r}{2}$, und zwar $f - p \cdot \frac{r}{2} = w$ sei. Es läßt sich nun vermöge §. 211 dem Kreise immer ein regelmäßiges Vieleck einschreiben, dessen Flächeninhalt sich von dem Flächeninhalte des Kreises um weniger unterscheidet, als jede noch so kleine gegebene Größe w. Heißt u der Umfang eines solchen Vieleckes, und a der Abstand seines Mittelpunktes von einer Seite, so ist $f - u \cdot \frac{a}{2} < w$.

Es wäre daher $f - u \cdot \frac{a}{2} < f - p \cdot \frac{r}{2}$, und somit $u \cdot \frac{a}{2} > p \cdot \frac{r}{2}$, was jedoch nicht sein kann, da $u < p$ und $a < r$ ist. Es ist daher auch nicht möglich, daß $f > p \cdot \frac{r}{2}$ sei.

Wäre ferner $f < p \cdot \frac{r}{2}$, und zwar $p \cdot \frac{r}{2} - f = w'$; so ließe sich dem Kreise immer ein solches regelmäßiges Vieleck umschreiben, daß der Unterschied zwischen seinem und dem Flächeninhalte des Kreises kleiner ist, als jede noch so kleine gegebene Größe w'. Heißt u' der Umfang eines solchen Vieleckes, so ist $u' \cdot \frac{r}{2} - f < w'$, und es wäre demnach $u' \cdot \frac{r}{2} - f < p \cdot \frac{r}{2} - f$, und daher $u' \cdot \frac{r}{2} < p \cdot \frac{r}{2}$, was nicht möglich

ist, da $u' > p$ sein muß; daher ist es auch nicht möglich, daß $f < p \cdot \frac{r}{2}$ sei.

Da also f weder größer noch kleiner sein kann als $p \cdot \frac{r}{2}$, so folgt, daß $f = p \cdot \frac{r}{2}$ sein müsse.

§. 219. Setzt man in der Gleichung $f = p \cdot \frac{r}{2}$ für p den Werth $2r\pi$, so erhält man

$$f = r^2\pi,$$

d. h. der Flächeninhalt eines Kreises wird gefunden, wenn man das Quadrat des Halbmessers mit der Ludolfischen Zahl multiplizirt.

Aus $f = r^2\pi$ folgt $r = \frac{f}{\pi}$, nach welcher Formel sich aus dem Flächeninhalt des Kreises der Halbmesser bestimmen läßt.

Da $r = \frac{p}{2\pi}$, so folgt aus $f = r^2\pi$ auch $f = \frac{p^2}{4\pi^2} \cdot \pi = \frac{p^2}{4\pi}$, und daraus $p = 2\sqrt{f\pi}$.

Beispiele.

1) Es sei $r = 5'$; wie groß ist f?
$$f = r^2\pi = 25 \times 3{\cdot}14159 = 78{\cdot}53975 \square'.$$
2) Es sei $d = 18''$; man berechne p und f.
$$p = 18 \times 3{\cdot}14159 = 56{\cdot}54862''$$
$$f = 56{\cdot}54862 \times 4\tfrac{1}{2} = 254{\cdot}46879 \square''.$$
3) Es sei $p = 20'$; wie groß ist f?
$$f = p^2 : 4\pi = 400 : 12{\cdot}56636 = 31{\cdot}83101 \square'.$$
4) Wie groß ist r, wenn $f = 10 \square'$ ist?
$$f : \pi = 10 : 3{\cdot}14159 = 3{\cdot}1831$$
$$r = \sqrt{3{\cdot}1831} = 1{\cdot}784'.$$
5) Man berechne p, wenn $f = 1 \square^0\ 15 \square'\ 37 \square''$ ist.
$$\pi = 1 \square^0\ 15 \square'\ 37 \square'' = 7381 \square''$$
$$f\pi = 7381 \times 3{\cdot}141593 = 23188{\cdot}097933$$
$$\sqrt{f\pi} = \sqrt{23188{\cdot}097933} = 152{\cdot}276$$
$$p = 2\sqrt{f\pi} = 304{\cdot}552'' = 4^0\ 1'\ 4''.$$

§. 220. Heißen F und f die Flächenräume zweier Kreise, deren Halbmesser R nnd r sind, so hat man

$$F = R^2\pi \text{ und } f = r^2\pi,$$
$$\text{daher } F : f = R^2 : r^2,$$

d. h. die Flächen zweier Kreise verhalten sich so wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

§ 221. Um den Flächeninhalt seines Kreisausschnittes, der dem Mittelpunktswinkel a entspricht, zu berechnen, hat man die Proporzion $s : r^2\pi = a : 360$, woraus

$$s = \frac{r^2 \pi a}{360} = \frac{r \pi a}{180} \cdot \frac{r}{2}$$

folgt. Nun erhält man, wenn b die Länge des dem Winkel a entsprechenden Bogens bedeutet, die Proporzion $b : 2r\pi = a : 360$, und daraus $b = \frac{r \pi a}{180}$. Es ist daher auch

$$s = b \cdot \frac{r}{2},$$

d. h. der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes ist gleich dem im Längenmaße ausgedrückten Bogen multiplizirt mit dem halben Radius.

Ist z. B. $a = 30^0$ und $r = 2'$, so findet man aus der Proporzion

$$s : 4 \times 3{\cdot}14159 = 30 : 360$$

$$s = \frac{4 \times 3{\cdot}14159}{12} = 1{\cdot}04710 \square'$$

Für den Bogen $b = 8{\cdot}5'$ und $r = 4'$ erhält man

$$s \quad 8{\cdot}5 \times 2 = 17 \square'.$$

§. 222. Zwei ähnliche Kreisabschnitte verhalten sich so wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich aus §§. 198 und 220.

§. 223. Um den Flächeninhalt eines Kreisabschnittes zu finden, muß man zuerst die Fläche des zugehörigen Kreisausschnittes bestimmen, und davon die Dreiecksfläche subtrahiren, welche von der Sehne und den beiden Halbmessern eingeschlossen wird.

Man bestimme z. B. die Fläche eines Kreisabschnittes, dessen Halbmesser $1{\cdot}4'$, und dessen Sehne dem Halbmesser gleich ist.

§. 224. Der Flächeninhalt eines Kreisringes (§. 194) wird gefunden, wenn man den Flächeninhalt des kleineren der beiden konzentrischen Kreise von dem Flächeninhalte des größeren abzieht.

Heißt a der Flächeninhalt des Ringes, R der Halbmesser des größeren, und r des kleineren Kreises, so ist

$$a = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi.$$

Da $(R^2 - r^2)\pi = (R + r)(R - r)\pi = \frac{2R\pi + 2r\pi}{2} \cdot (R - r)$

ist, so hat man auch

$$a = \frac{P + p}{2} \cdot (R - r),$$

wo P und p die Periferien der beiden Kreise bedeuten.

Der Flächeninhalt eines Kreises ist also gleich der halben Summe der beiden Kreisumfänge multiplizirt mit der Breite des Ringes.

Heißen B und b die Längen der ähnlichen Bögen eines Ringstückes, so findet man auf gleiche Weise für den Flächeninhalt s desselben den Ausdruck

$$s = \frac{B + b}{2} \cdot (R - r),$$

d. h. der Flächeninhalt eines Ringstückes ist gleich der halben Summe der beiden Bögen multiplizirt mit der Breite des Ringstückes.

Beispiele.

1) Es seien 6′ und 4′ die Halbmesser der beiden konzentrischen Kreise, so ist der Flächeninhalt des Kreisringes

$$a = (6^2 - 4^2) . 3{\cdot}14159 = 62.8318 \square'.$$

2) Die Umfänge eines Kreisringes sind 4′ und 3′, und seine Breite 0·5′; wie groß ist sein Flächeninhalt, wie groß der Halbmesser des innern, und wie groß jener des äußern Kreises?

3) Die beiden konzentrischen Bögen eines Ringstückes betragen 15′ und 12′, und ihre Entfernung 2′; man suche den Flächeninhalt des Ringstückes, ferner den innern und den äußern Halbmesser.

4) Die Bögen eines Ringstückes entsprechen einem Winkel von 48°, und haben 5′ und 4′ zu Halbmessern; wie groß ist der Flächeninhalt dieses Ringstückes?

6. Aufgaben, deren Lösung auf der Lehre vom Kreise beruhet.

§. 225. a) Durch drei Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.

b) Den Mittelpunkt eines Kreises oder Kreisbogens zu finden.

Die Auflösung dieser beiden Aufgaben ist in §. 175 enthalten.

c) Ueber einer gegebenen Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck zu verzeichnen, von welchem auch eine Kathete gegeben ist.

Die Konstrukzion beruhet auf §. 187.

d) Zwischen zwei Geraden die mittlere geometrische Proporzionale zu finden.

Für diese Aufgabe liefern die Lehrsätze a) und b) in §. 187 zwei Auflösungen.

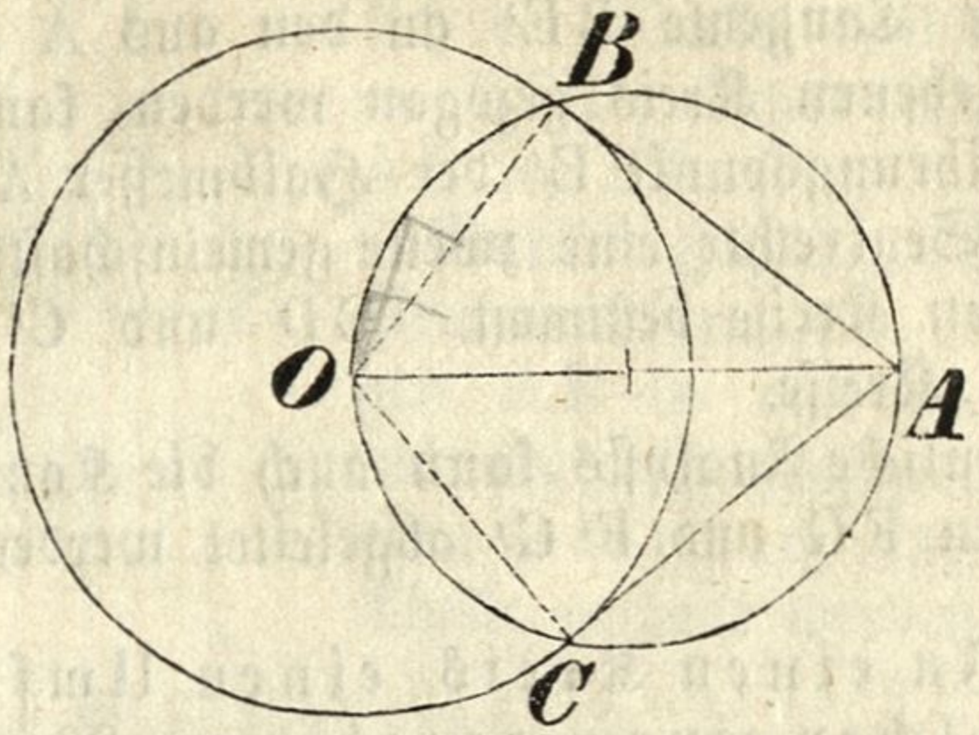
§. 226. a) Durch einen Punkt der Periferie an den Kreis eine Tangente zu ziehen.

Die Auflösung folgt aus §. 177.

b) Durch einen Punkt A (Fig. 168) außerhalb des Kreises an diesen eine Tangente zu ziehen.

Analysis. Es sei die Aufgabe gelöst, und AB die verlangte Tangente; so muß, wenn man den Halbmesser OB und die Gerade OA zieht, das Dreieck ABO bei B rechtwinklig sein, und somit nach §. 187 der Punkt B in einer Kreislinie liegen, welche über der Hypotenuse AO als Durchmesser beschrieben wird. Da nun der Berührungspunkt B zugleich auch in der Periferie des gegebenen Kreises liegt, so muß er der Durchschnitt dieser beiden Kreise selbst sein. Weil sich die zwei Kreislinien noch in einem zweiten Punkte C durchschneiden, so entspricht auch dieser Punkt denselben Bedingungen, wie der Punkt B, und es ist daher auch AC eine Tangente des gegebenen Kreises.

Fig. 168.

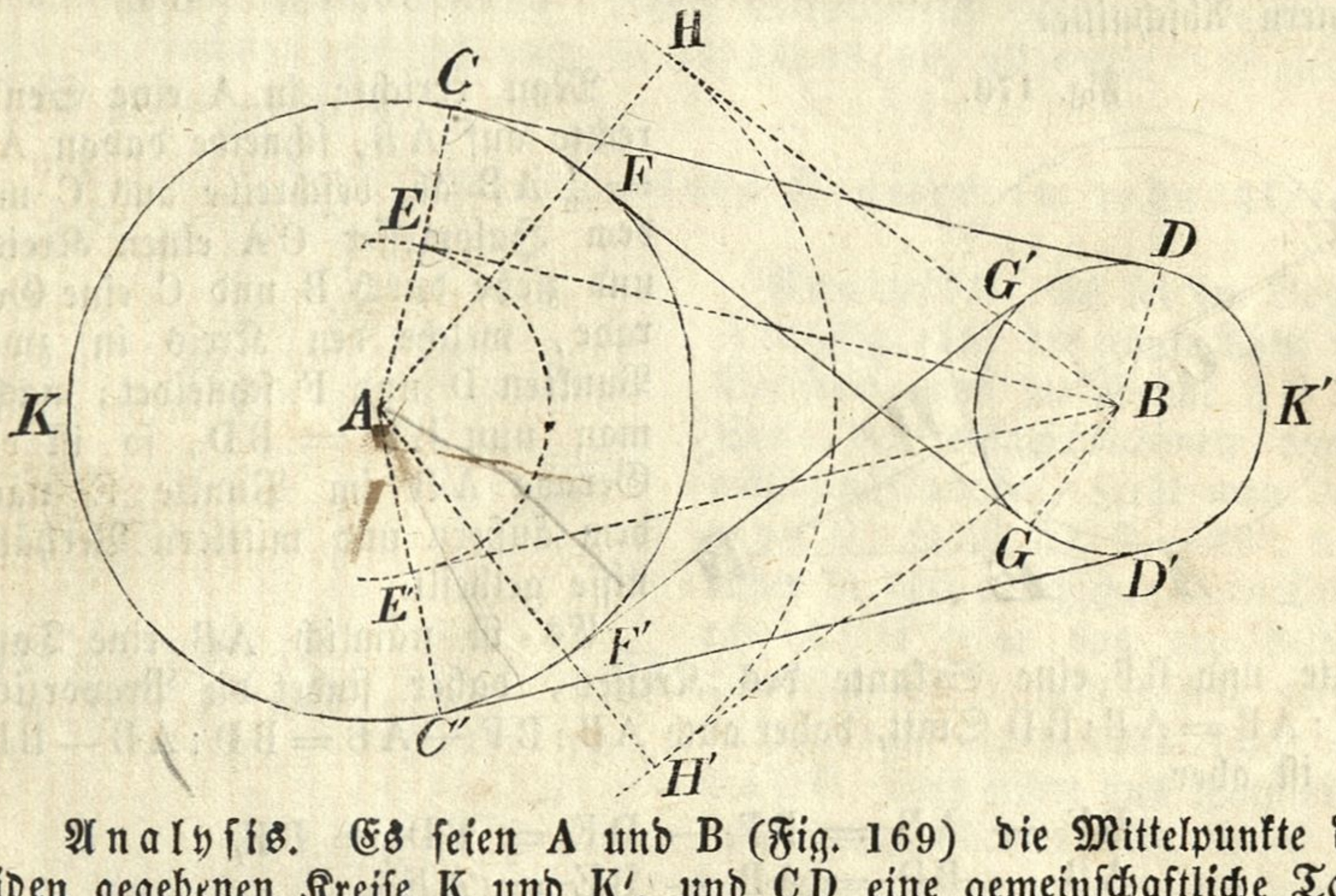


Konstruktzion. Man ziehe AO, beschreibe über dieser Geraden als Durchmesser einen Kreis, welcher den gegebenen in den Punkten B und C schneidet, und ziehe die Geraden AB und AC.

Beweis. Die Winkel ABO und ACO sind als Winkel im Halbkreise rechte Winkel, daher AB ⊥ OB und AC ⊥ OC; es sind also AB und AC die verlangten Tangenten.

c) An zwei gegebene Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen.

Fig. 169.



Analysis. Es seien A und B (Fig. 169) die Mittelpunkte der beiden gegebenen Kreise K und K', und CD eine gemeinschaftliche Tangente derselben. Zieht man die Halbmesser AC und BD, so ist AC ⊥ CD und BD ⊥ CD, daher AC ∥ BD. Zieht man ferner BE ∥ CD, so ist AE = AC — BD, und zugleich BE ⊥ AE, somit BE eine Tangente an den Kreis, welcher aus dem Mittelpunkte A mit einem Halbmesser, der dem Unterschiede der beiden gegebenen Halbmesser gleich ist, beschrieben wird. Da dieser Kreis vollkommen bestimmt ist, so ist auch die an denselben von dem gegebenen Punkte B aus gezogene Tangente BC, und somit der Punkt E bestimmt; durch diesen aber ist der Halbmesser AC, und folglich auch die

darauf senkrechte Gerade CD, d. i. die gesuchte Tangente, gegeben. Da von B noch eine zweite Tangente BE' an den aus A mit dem Halbmesser AC — BD beschriebenen Kreis gezogen werden kann, so wird durch diesen zweiten Berührungspunkt E' der Halbmesser AC', und durch die auf diesen gezogene Senkrechte eine zweite gemeinschaftliche Tangente C'D' der beiden gegebenen Kreise bestimmt. CD und C'D' heißen äußere Tangenten der zwei Kreise.

Durch eine ähnliche Analysis kann auch die Konstrukzion der beiden inneren Tangenten FG und F'G' abgeleitet werden.

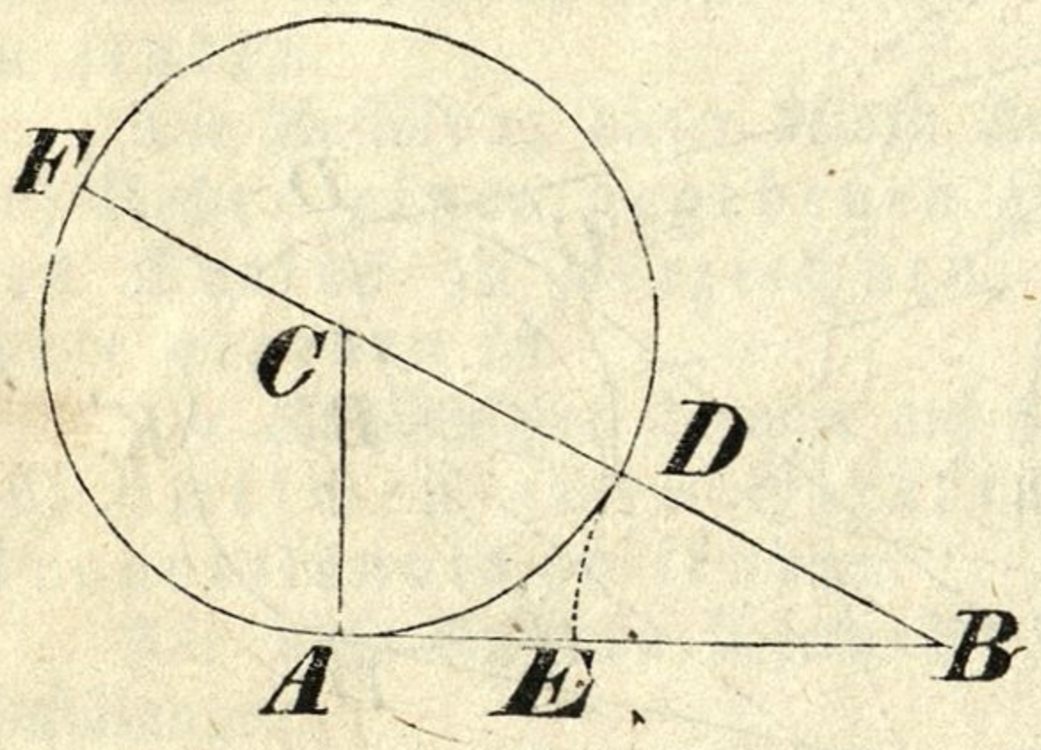
§. 227. a) In einen Kreis einen Umfangswinkel zu verzeichnen, welcher einem gegebenen Winkel gleich ist.

b) Ueber einer gegebenen Geraden als Sehne einen Kreisabschnitt zu beschreiben, dessen Umfangswinkel einem gegebenen Winkel gleich ist.

Die Konstrukzion dieser beiden Aufgaben läßt sich mit Hilfe des Satzes §. 190 ausführen.

§. 228. Eine Gerade AB (Fig. 170) im äußern und mittlern Verhältnisse zu theilen, d. h. so, daß sich die ganze Gerade zum größern Abschnitte verhält, wie dieser größere Abschnitt zum kleinern Abschnitte.

Fig. 170.



Man errichte in A eine Senkrechte auf AB, schneide davon AC $= \frac{1}{2}$ AB ab, beschreibe aus C mit dem Halbmesser CA einen Kreis, und ziehe durch B und C eine Gerade, welche den Kreis in zwei Punkten D und F schneidet; macht man nun BE = BD, so ist die Gerade AB im Punkte E nach dem äußern und mittlern Verhältnisse getheilt.

Es ist nämlich AB eine Tangente und BF eine Sekante des Kreises, daher findet die Proporzion BF : AB = AB : BD Statt, daher auch AB : BF — AB = BD : AB — BD, Es ist aber

$$BF - AB = BF - DF = BD = BE,$$
$$AB - BD = AB - BE = AE,$$

mithin, wenn man in der letzten Proporzion diese Werthe substituirt,

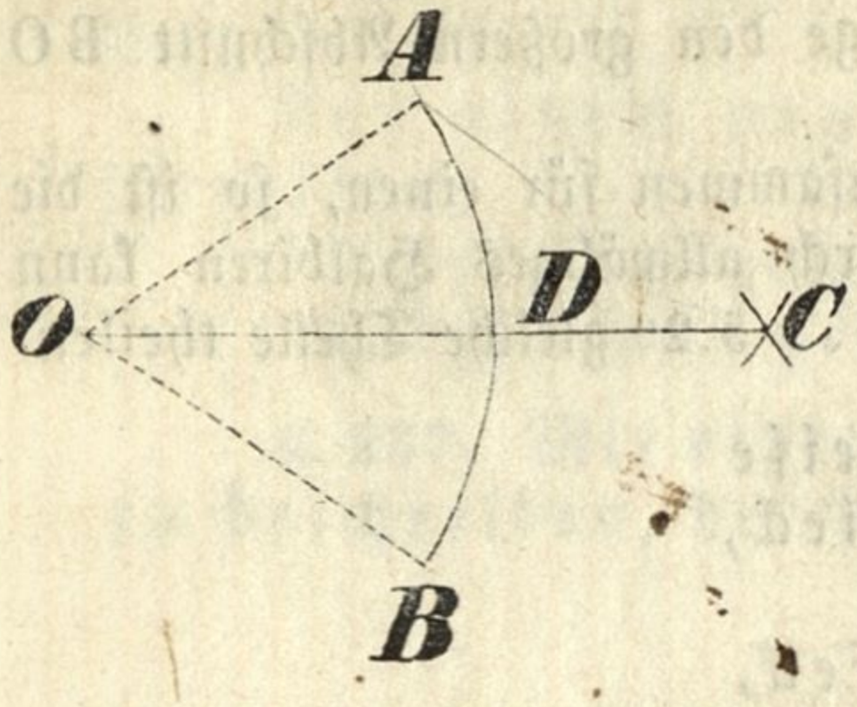
$$AB : BE = BE : AE.$$

Die Gerade AB ist also in dem Punkte E im äußern und mittlern Verhältnisse getheilt.

§. 229. Einen Kreisbogen AB (Fig. 171) zu halbiren.

Man beschreibe aus den Endpunkten A und B mit demselben Halbmesser Bögen, welche sich in C schneiden, und ziehe die CO, welche den gegebenen Kreisbogen in D schneidet, so ist dieser Bogen im Punkte D halbirt.

Fig. 171.



Nach der Konstrukzion erscheint nämlich der Winkel AOB halbirt, also AOD = BOD; daher muß auch der Bogen AD = BD sein.

Durchs Halbiren eines jeden der zwei gleichen Bögen AD und BD wird der Bogen AB in vier gleiche Theile getheilt, und durch fortgesetztes Halbiren kann er eben so in 8, 16, 32, 64, . . . 2^n gleiche Theile getheilt werden.

§. 230. Die Periferie eines Kreises in zwei gleiche Theile zu theilen.

Man ziehe einen Durchmesser, so ist dadurch die Periferie halbirt.

Durch fortgesetztes Halbiren kann der Kreisumfang in 4, 8, 16, 32, 64, . . . 2^n gleiche Theile getheilt werden.

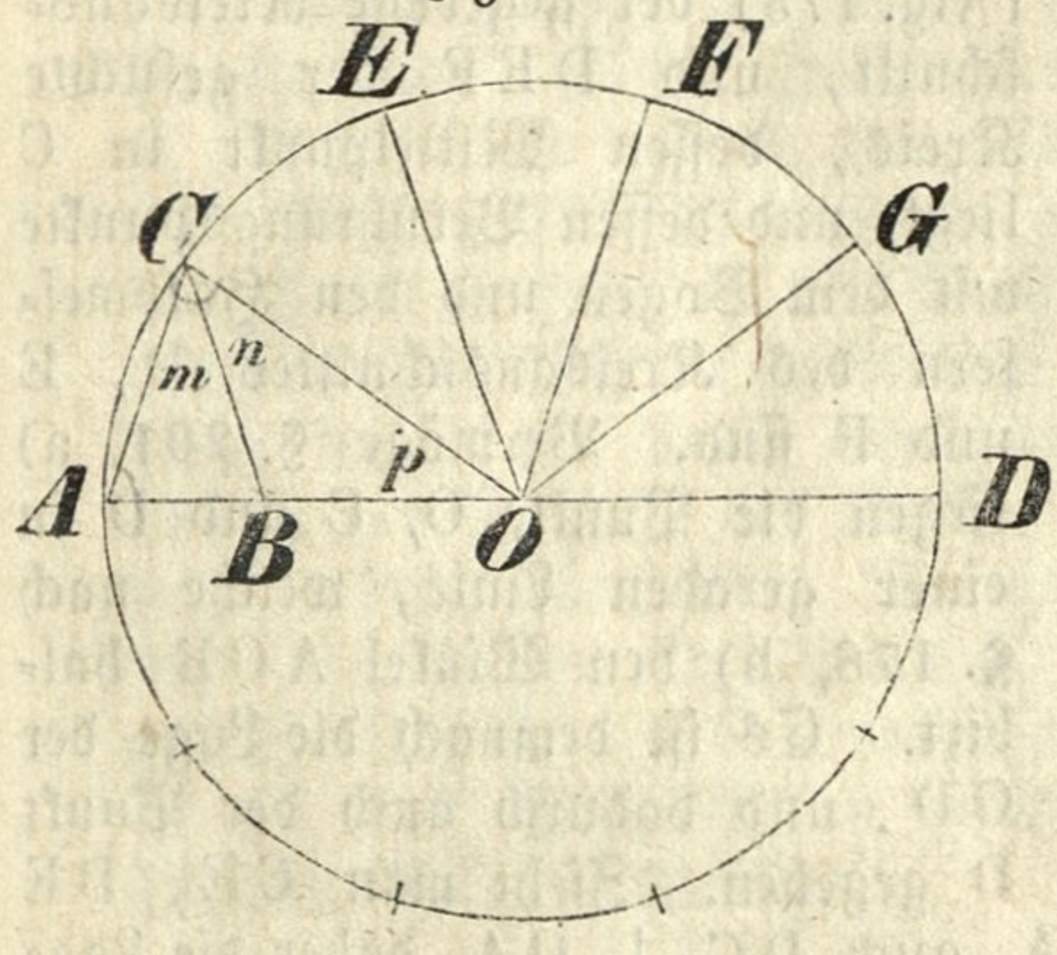
§. 231. Die Periferie eines Kreises in sechs gleiche Theile zu theilen.

Man trage den Halbmesser als Sehne im Kreise herum (§. 209).

Nimmt man zwei solche Bögen für einen einzigen, so ist der Kreis in drei gleiche Theile getheilt. Durch wiederholtes Halbiren der Bögen kann der Umfang nach und nach in 12, 24, 48, 96, allgemein 3.2^n gleiche Theile getheilt werden.

§. 232. Den Umfang eines Kreises in zehn gleiche Theile zu theilen.

Fig. 172.



Analysis. Es sei der Bogen AC (Fig. 172) der zehnte Theil der Periferie, und die Sehne AC die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Zehneckes. Zieht man AO und CO, so ist AOC = 36°, und daher in dem gleichschenkligen Dreiecke ACO jeder von den beiden Winkeln ACO und CAO gleich 72°, also ist der Winkel ACO = 2AOC. Dieß führt uns ganz einfach darauf, den Winkel ACO zu halbiren, so daß m = n = p wird; daraus geht dann die Aehnlichkeit der Dreiecke ACO und ABC hervor, daher AO : AC = AC : AB, oder weil AC = BC = BO ist, auch AO : BO = BO : AB.

Es ist also die Seite AC des eingeschriebenen regelmäßigen Zehneckes gleich dem größern Abschnitte BO des im äußern und mittleren Verhältnisse getheilten Halbmessers.

Konstrukzion. Man theile den Halbmesser AO im Punkte B im äußern und mittlern Verhältnisse, und trage den größern Abschnitt BO als Sehne im Kreise herum.

Betrachtet man zwei solche Bögen zusammen für einen, so ist die Kreislinie in 5 gleiche Theile getheilt. Durch allmäliges Halbiren kann man dann den Umfang auch in 20, 40, 80, ... 5.2^n gleiche Theile theilen.

§. 133. Einem gegebenen Kreise
a) ein gleichseitiges Dreieck,
b) ein Quadrat,
c) ein regelmäßiges Fünfeck,
d) ein regelmäßiges Sechseck,
e) ein regelmäßiges Zehneck
ein- und umzuschreiben.

Die Auflösungen beruhen auf den vorhergehenden §§. und auf §. 207.

§. 234. a) In einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, welches einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist.

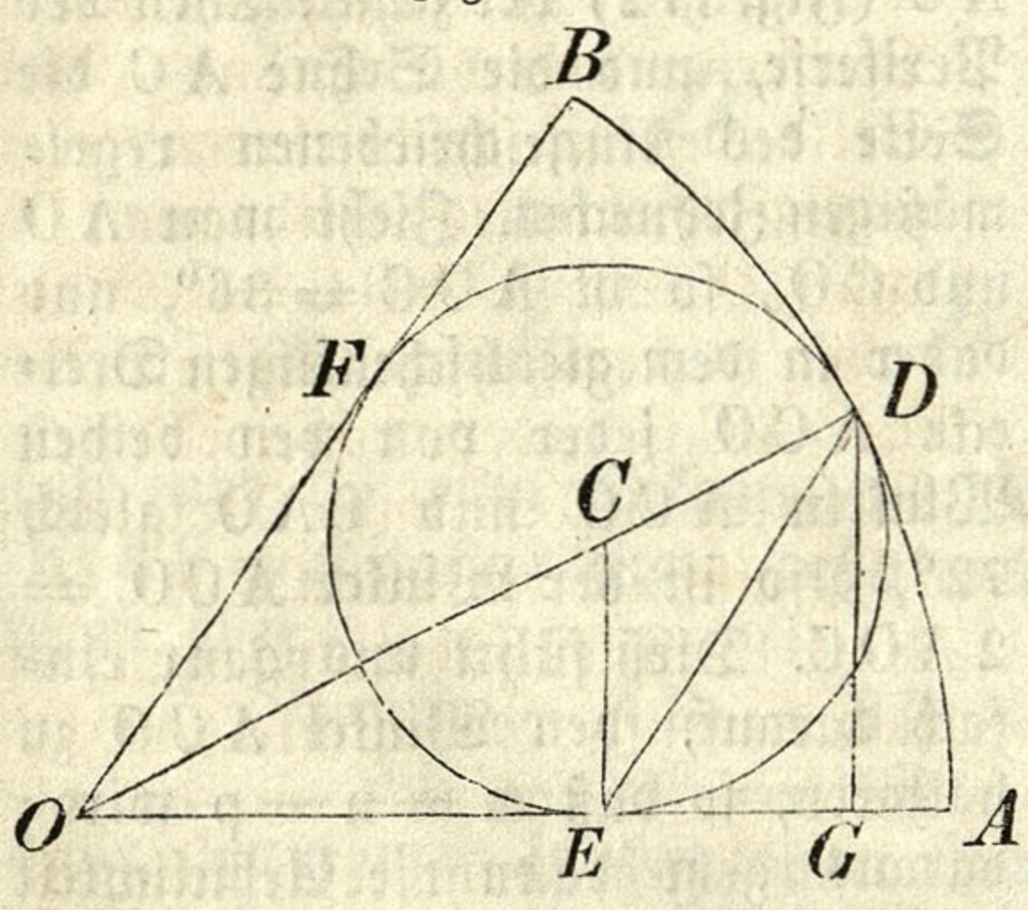
b) Um einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, welches einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist.

Die Aufgabe a) kann mit Hilfe des Satzes §. 190 aufgelöst werden.

Bei der Aufgabe b) verzeichnet man die äußern Winkel des gegebenen Dreieckes als Mittelpunktswinkel des Kreises, und zieht durch die Endpunkte der dießfälligen Halbmesser Tangenten.

§. 235. In einen gegebenen Kreisausschnitt einen Kreis zu beschreiben.

Fig. 173.



Analysis. Es sei AOB (Fig. 173) der gegebene Kreisausschnitt, und DEF der gesuchte Kreis, dessen Mittelpunkt in C liegt, und dessen Berührungspunkte mit dem Bogen und den Halbmessern des Kreisausschnittes D, E und F sind. Vermöge §. 201, a) liegen die Punkte O, C und D in einer geraden Linie, welche nach §. 178, b) den Winkel AOB halbirt. Es ist demnach die Lage der OD, und dadurch auch der Punkt D gegeben. Zieht man CE, DE und DG ∥ CE, so ist, weil CE ⊥ OA, auch DG ⊥ OA, daher die Lage der DG gegeben; ferner ist der Winkel EDG = CED als Wechselwinkel, und weil in dem gleichschenkeligen Dreiecke CDE der Winkel CDE = CED ist, so ist auch EDG = CDE; die Gerade DE halbirt also den Winkel ODG, folglich ist der Punkt E gegeben, und daher, da EC ⊥ OA steht, auch der Mittelpunkt C, und somit auch der Halbmesser EC des gesuchten Kreises.

Konstrukzion und Beweis bleiben hier und bei den folgenden Berührungsaufgaben dem Schüler überlassen.

§. 236. Sehr leicht läßt sich die Konstrukzion für die folgenden zwei Aufgaben ableiten:

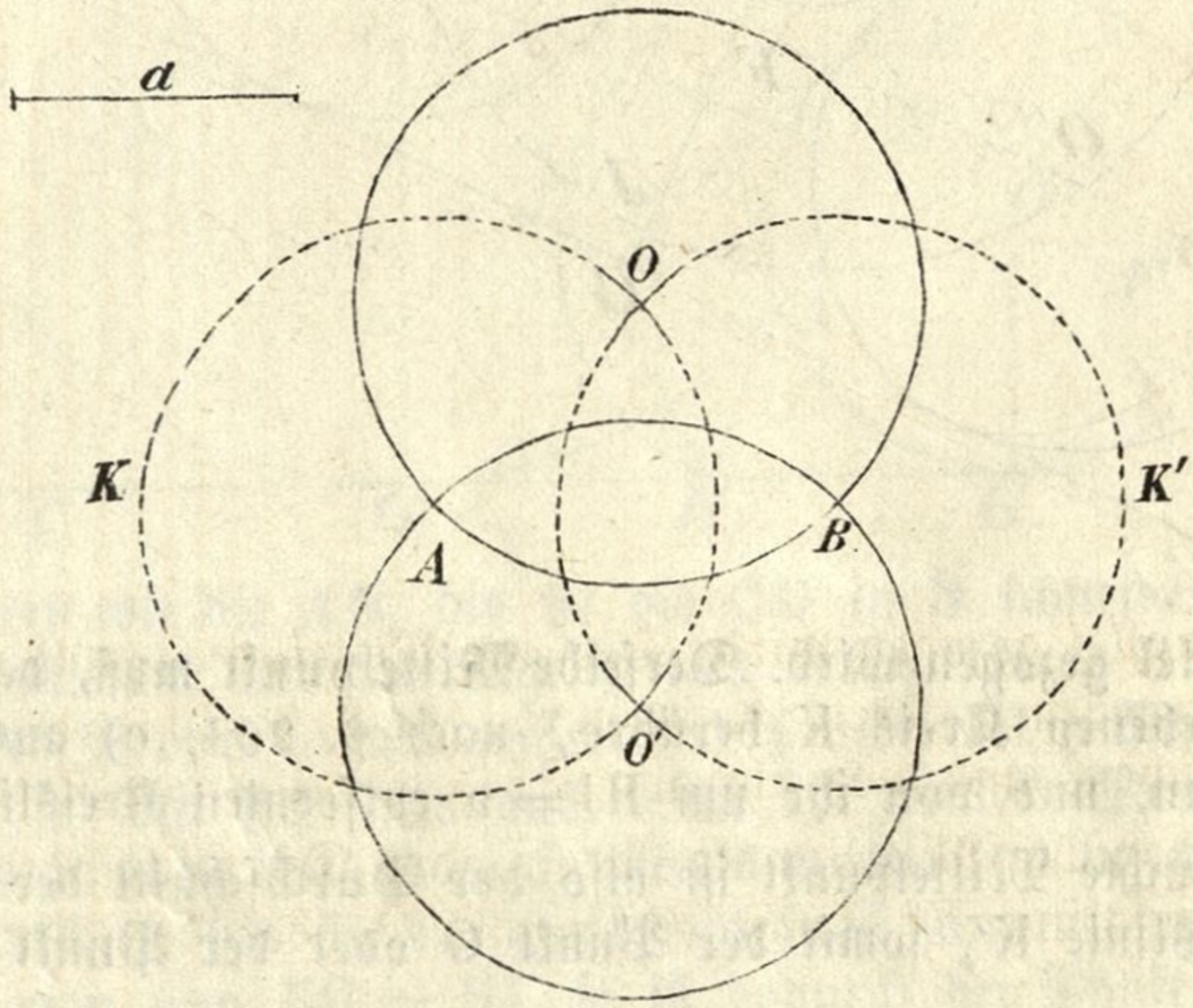
Aus einem gegebenen Punkte einen Kreis zu beschreiben,

a) der eine gegebene Gerade berührt (§. 177),

b) der einen gegebenen Kreis berührt (§. 199, 200).

§. 237. Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei gegebene Punkte geht.

Fig. 174.



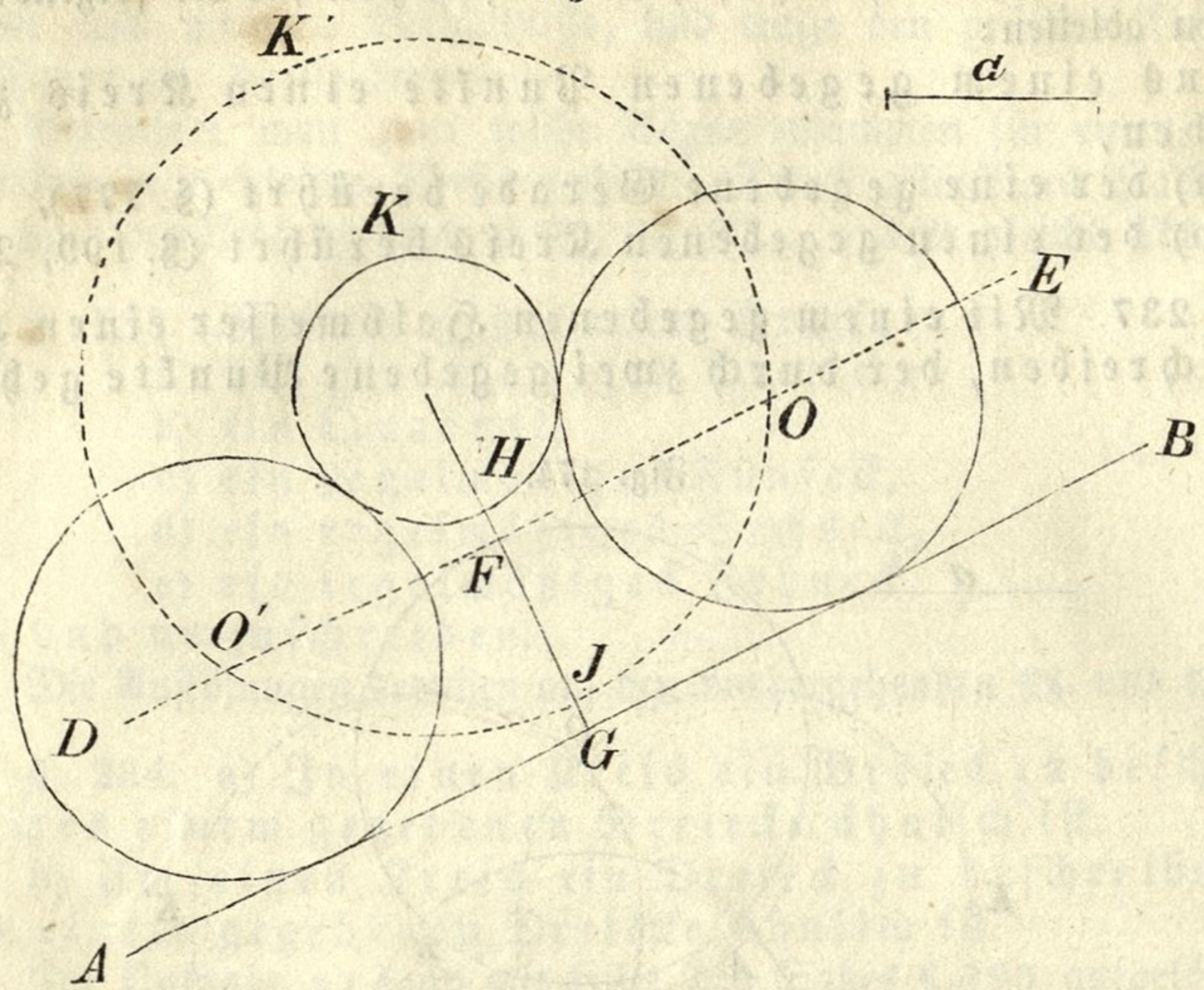
Analysis. Es seien (Fig. 174) A und B die zwei gegebenen Punkte, und a sei der Halbmesser des gesuchten Kreises. Offenbar handelt es sich hier nur darum, den Mittelpunkt dieses Kreises zu bestimmen.

Nach §. 175, b) muß der gesuchte Mittelpunkt, damit der Kreis durch den Punkt A gehe, in der Periferie eines Kreises liegen, welcher aus A mit dem Halbmesser a beschrieben wird, also in der Periferie des Kreises K; damit ferner der Kreis durch den Punkt B gehe, muß sein Mittelpunkt auch in der Periferie des Kreises K' liegen, welcher aus B mit dem Halbmesser a beschrieben wird. Der gesuchte Mittelpunkt ist demnach der Durchschnitt der beiden Kreislinien K und K'; und es leistet, da sich diese in zwei Punkten O und O' durchschneiden, sowohl der aus O, als jener aus O' mit dem Halbmesser a beschriebene Kreis den Forderungen der vorgelegten Aufgabe Genüge.

§. 238. Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, der eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt.

Analysis. Es sei (Fig. 175) a der Halbmesser des verlangten Kreises, AB die gegebene Gerade und K der gegebene Kreis. Damit der gesuchte Kreis die Gerade AB berühre, muß dessen Mittelpunkt vermöge §. 177, c) in der Geraden DE liegen, welche in dem Abstande FG = a

Fig. 175.



mit AB parallel gezogen wird. Derselbe Mittelpunkt muß, damit der Kreis auch den gegebenen Kreis K berühre, nach §. 201, c) auch in der mit K konzentrischen, und von ihr um HJ = a entfernten Kreislinie K' liegen.

Der gesuchte Mittelpunkt ist also der Durchschnitt der Geraden DE und der Kreislinie K', somit der Punkt O oder der Punkt O'.

§. 239 Auf ähnliche Art können auch die Konstrukzionen für die folgenden Aufgaben abgeleitet werden:

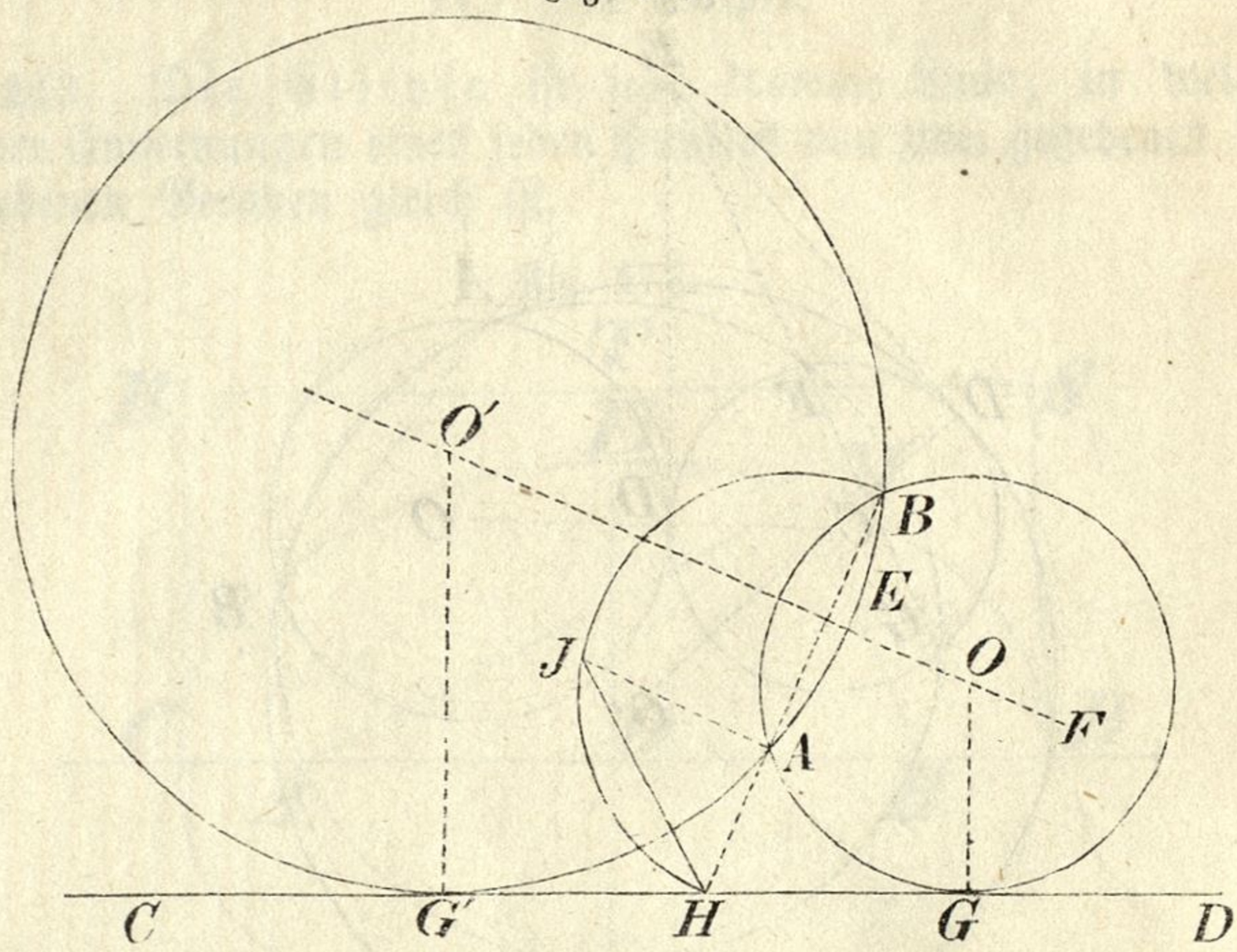
Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben,

a) der eine Gerade in einem bestimmten Punkte berührt [§. 177, b)],
b) der einen Kreis in einem bestimmten Punkte berührt [§. 201, d)],
c) der durch einen gegebenen Punkt geht und eine Gerade berührt [§§. 175, b) und 177, c)],,
d) der durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis berührt [§§. 175, b) und 201, c)],
e) der zwei gegebene Gerade berührt [§. 177, c)],
f) der zwei gegebene Kreise berührt [§ 201, c)].

§. 240. Einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei gegebene Punkte geht, und eine gegebene Gerade berührt.

Analysis. Es seien A und B (Fig. 176) die zwei gegebenen Punkte, und CD die gegebene Gerade; O sei der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Halbirt man die AB in E, so muß der Mittelpunkt O in der durch E auf AB geführten Senkrechten liegen, und es handelt sich, wenn OG ⊥ CD ist, nur darum, denjenigen Punkt G der Geraden CD zu bestimmen, in welchem auf CD die Senkrechte errichtet werden muß, damit ihr Durchschnitt mit der EF der gesuchte Mittelpunkt O sei. Zu diesem

Fig. 176.



Ende verlängern wir die AB, bis sie die CD in H schneidet; es ist dann der Punkt H bestimmt, und vermöge §. 193 AH : GH = GH : BH, somit GH die mittlere Proporzionale zwischen AH und BH Da AH und BH gegeben sind, so läßt sich dazu auch leicht die mittlere Proporzionale finden, indem man über BH einen Halbkreis beschreibt, in A auf AB eine Senkrechte errichtet, bis sie den Halbkreis in J schneidet, und HJ zieht.

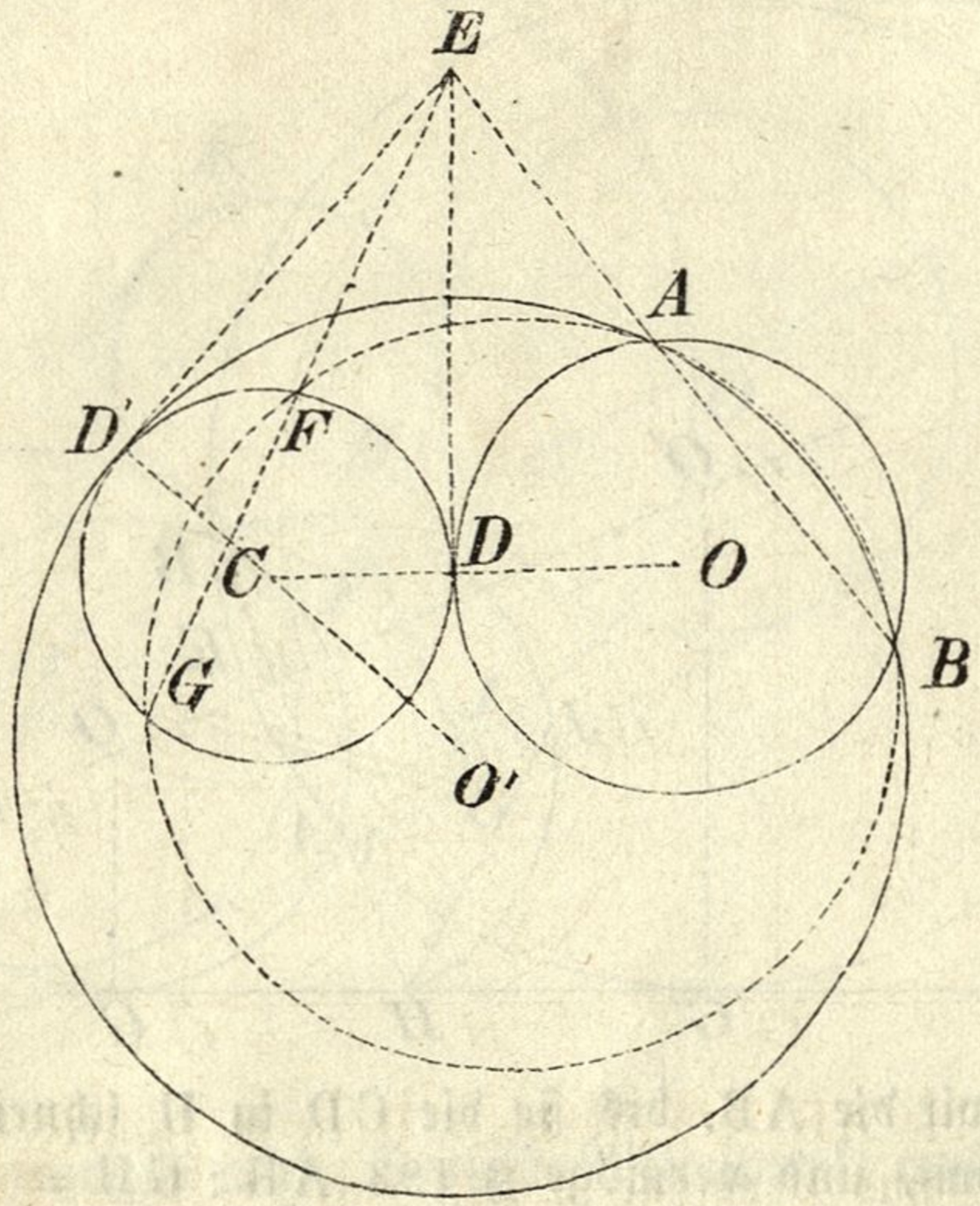
Macht man nun HG = HJ, so ist dadurch der Punkt G, und durch die Senkrechte GO auch der Mittelpunkt O, und daher auch der Halbmesser GO, also der gesuchte Kreis gegeben.

Einen zweiten Kreis, der ebenfalls der Aufgabe Genüge leistet, würde man erhalten, wenn man HJ von H gegen C hin aufträgt.

§. 241. Einen Kreis zu beschreiben, welcher durch zwei gegebene Punkte geht, und einen gegebenen Kreis berührt.

Analysis. Es seien (Fig. 177) A und B die zwei gegebenen Punkte, und C der Mittelpunkt des gegebenen Kreises. Die Aufgabe sei aufgelöst, O sei der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, und D der Berührungspunkt beider Kreise. Die in D auf CO errichtete Senkrechte ist eine gemeinschaftliche Tangente der zwei Kreise; sie schneide die durch A und B gezogene Gerade in E, so ist nach §. 193 AE : DE = DE : BE. Zieht man nun von E aus eine beliebige Sekante EG zu dem gegebenen Kreise, so ist auch EF : DE = DE : EG. Aus diesen beiden Proporzionen folgt AE : EF = EG : BE, daher müssen vermöge §. 192 die Punkte A, B, F und G auf der Periferie eines Kreises liegen, welcher durch die zwei gegebenen Punkte A und B geht, und den gegebenen Kreis in zwei willkürlichen Punkten F und G schneidet. Beschreibt man daher durch A, B und einen beliebigen Punkt F des gegebenen Kreises eine Kreislinie, welche jenen Kreis auch in G schneidet, so ist dadurch FG,

Fig. 177.



also auch ihr Durchschnitt E mit der verlängerten AB, und somit auch die von E an den gegebenen Kreis gezogene Tangente ED, folglich der Punkt D bestimmt; und man braucht, um die vorgelegte Aufgabe zu lösen, nur durch die drei Punkte A, B und D einen Kreis zu legen.

Führt man von E an den gegebenen Kreis die zweite Tangente ED', und beschreibt dann durch A, B und D' eine Kreislinie, so wird diese von dem gegebenen Kreise von innen berührt.

§. 242. Geübtere Schüler mögen noch die Auflösung der folgenden Aufgaben abzuleiten und auf die Lösung der vorhergehenden zurückzuführen suchen:

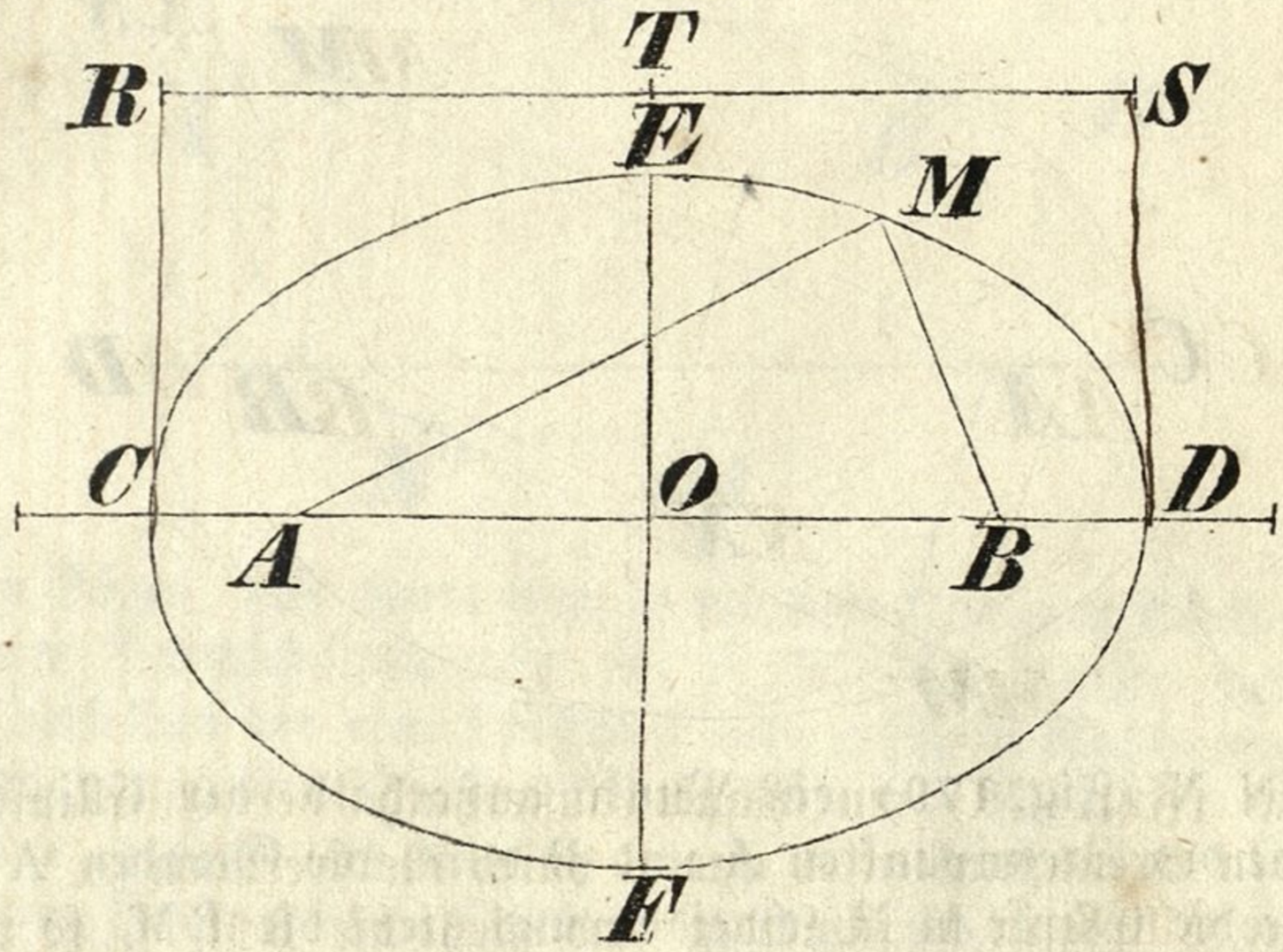
Einen Kreis zu konstruiren,

a) der durch einen gegebenen Punkt geht, und
   1) zwei gegebene Gerade berührt,
   2) eine Gerade und einen Kreis berührt,
   3) zwei gegebene Kreise berührt,
b) der eine Gerade in einem bestimmten Punkte und einen Kreis berührt,
c) der einen Kreis in einem bestimmten Punkte und eine Gerade berührt,
d) der zwei Gerade, und zwar die eine in einem bestimmten Punkte berührt,
e) der zwei Kreise, und zwar den einen in einem bestimmten Punkte berührt,
f) der zwei Gerade und einen Kreis berührt,
g) der eine Gerade und zwei Kreise berührt,
h) der drei gegebene Kreise berührt.

II. Die Ellipse.

§. 243. Die Ellipse ist jene krumme Linie, in welcher die Summe der Entfernungen eines jeden Punktes von zwei gegebenen Punkten einer gegebenen Geraden gleich ist.

Fig. 178.



Sind A und B (Fig. 178) die zwei gegebenen Punkte, und RS die gegebene Gerade, so liegt der Punkt M in der Ellipse, wenn AM + BM = RS ist.

Die zwei gegebenen Punkte A und B heißen die Brennpunkte; die Mitte O ihres Abstandes AB wird das Zentrum, und die Entfernung OA = OB die Exzentrizität der Ellipse genannt. Die Geraden AM und BM nennt man die Leitstrahlen oder Vektoren des Punktes M.

Halbirt man die gegebene Gerade RS im Punkte T, und trägt die Hälfte RT auf die Verlängerung der AB von O bis C und D auf, so sind C und D Punkte der Ellipse; denn es ist

$$AC + BC = AC + AD = CD = RS$$
$$\text{und } AD + BD = AD + AC = CD = RS.$$

Die Gerade CD nennt man die große Axe der Ellipse, und ihre Endpunkte C und D die Scheitel.

Es ist also in der Ellipse die Summe der Leitstrahlen eines jeden Punktes der großen Axe gleich.

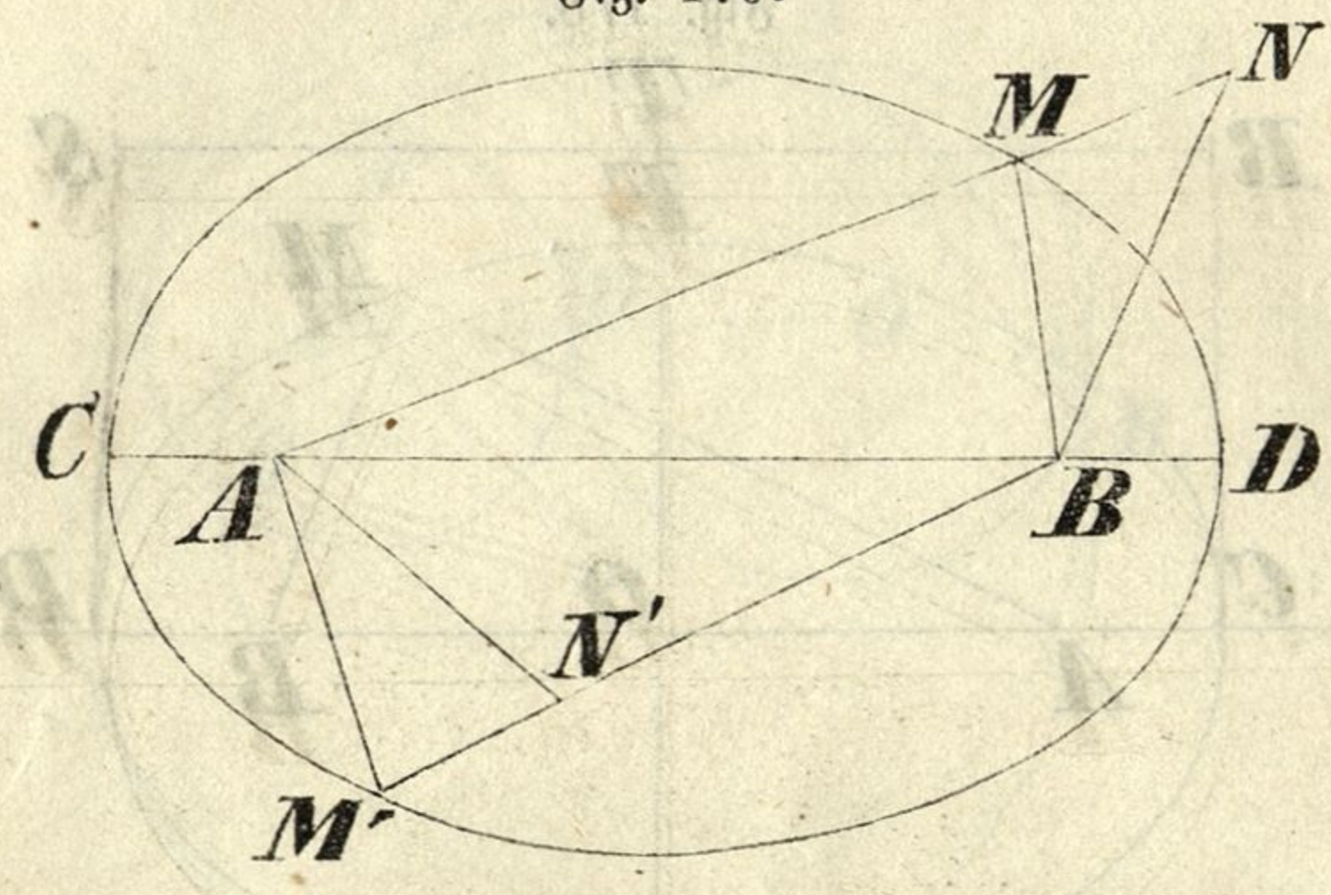
Beschreibt man aus beiden Brennpunkten A und B mit der halben großen Axe CO nach oben und unten Bögen, so liegen die Durchschnittspunkte E und F auch in der Ellipse, weil bei jedem die Summe der beiden Leitstrahlen der großen Axe gleich ist. Zieht man durch E und F eine Gerade, so muß dieselbe, weil über AB nach oben und unten ein gleichschenkliges Dreieck gedacht werden kann, durch den Punkt O gehen und auf AB senkrecht sein.

Die Gerade EF heißt die kleine Axe der Ellipse.

§. 244. Die Summe der Entfernungen eines außerhalb der Ellipse liegenden Punktes von den beiden

Brennpunkten ist stets größer als die große Axe. Die Summe der Entfernungen eines innerhalb der Ellipse liegenden Punktes von den beiden Brennpunkten ist kleiner als die große Axe.

Fig. 179.



Es sei N (Fig. 179) ein Punkt außerhalb der Ellipse; verbindet man ihn mit den Brennpunkten A und B durch die Geraden AN und BN, deren erstere die Ellipse in M schneidet, und zieht die BM, so ist $MN + BN > BM$, folglich auch $AM + MN + BN > AM + BM$ oder $AN + BN > AM + BM$; allein da M ein Punkt der Ellipse ist, so ist $AM + BM = CD$, daher muß $AN + BN > CD$ sein.

Für den Punkt N', welcher innerhalb der Ellipse liegt, ziehe man eben so AN' und BN', verlängere die letztere, bis sie die Ellipse im Punkte M' schneidet, und ziehe die Gerade AM'. Man hat nun $AN' < AM' + M'N'$, daher auch $AN' + BN' < AM' + M'N' + BN'$ oder $AN' + BN' < AM' + BM'$; nun ist $AM' + BM' = CD$, folglich $AN' + BN' < CD$.

§. 245. Aus den vorhergehenden Sätzen läßt sich indirekt folgern:

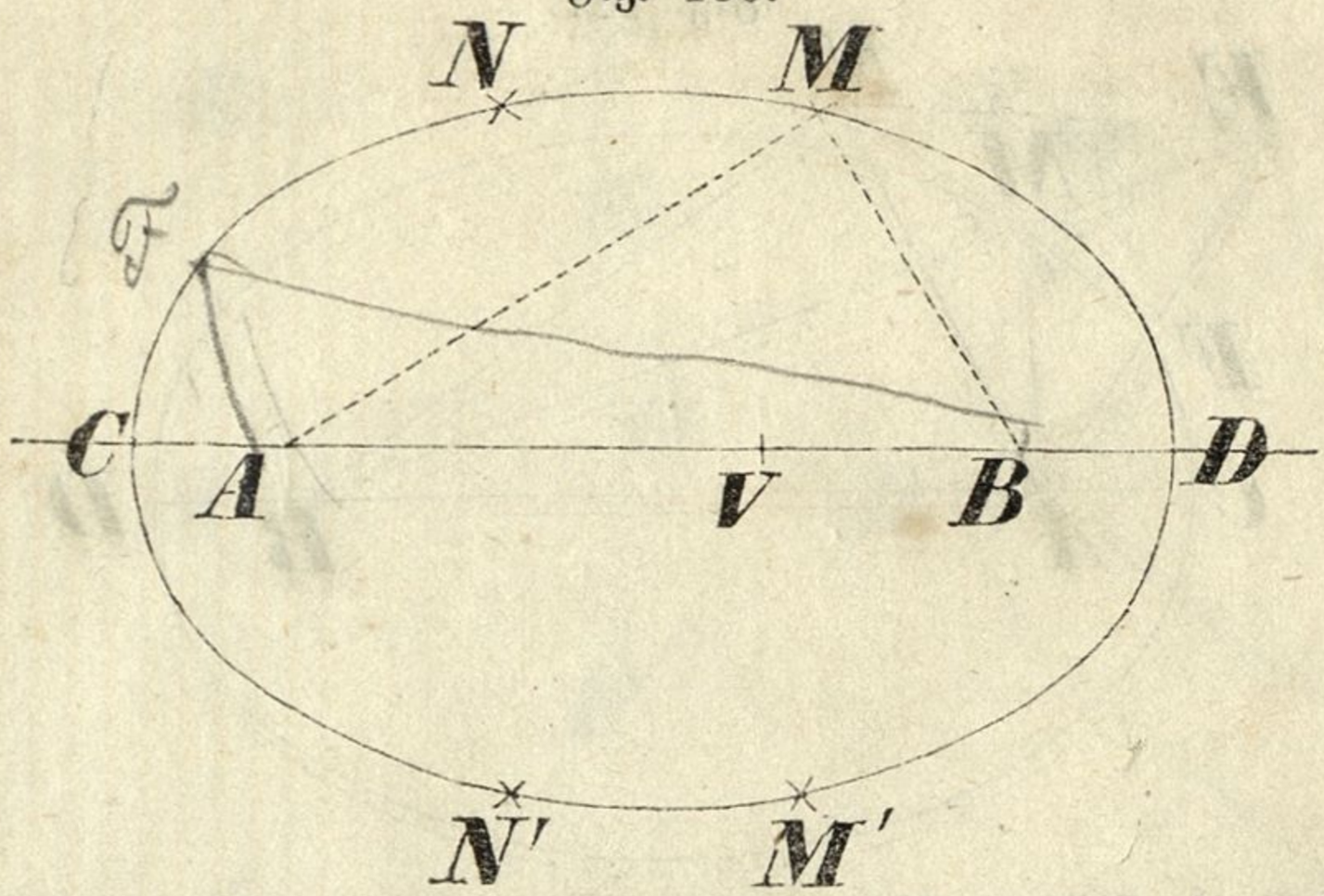
Ist die Summe der Entfernungen eines Punktes von den zwei Brennpunkten einer Ellipse größer als die große Axe derselben, so muß dieser Punkt außerhalb der Ellipse liegen. Ist dagegen die Summe der Entfernungen eines Punktes von den Brennpunkten einer Ellipse kleiner als die große Axe derselben, so muß dieser Punkt innerhalb der Ellipse liegen.

Aufgaben.

§. 246. Wenn die große Axe und die beiden Brennpunkte gegeben sind, beliebig viele Punkte der Ellipse zu bestimmen.

Es sei CD (Fig. 180) die große Axe der Ellipse, A und B seien ihre Brennpunkte. Man nehme zwischen den Brennpunkten irgend einen Punkt V an, so wird dadurch die große Achse in zwei Abschnitte getheilt; beschreibt man zuerst mit dem größern CV aus beiden Brennpunkten nach

Fig. 180.



oben und unten Bögen, und dann eben so mit dem kleineren Abschnitte D V, so sind die vier Durchschnittspunkte M, N, M', N' Punkte der Ellipse, weil für jeden derselben der eine Leitstrahl dem größern Abschnitte C V der großen Axe, und der andere Leitstrahl dem kleineren Abschnitte D V, also ihre Summe der ganzen großen Axe gleich ist. Auf diese Art können, wenn man in der Linie A B verschiedene Punkte annimmt, beliebig viele Punkte der Ellipse bestimmt werden. Liegen diese sehr nahe an einander so kann man sie durch eine stetige Linie verbinden, und erhält dadurch die Ellipse.

§. 247. Eine Ellipse mit Hilfe eines Fadens in einem Zuge zu beschreiben.

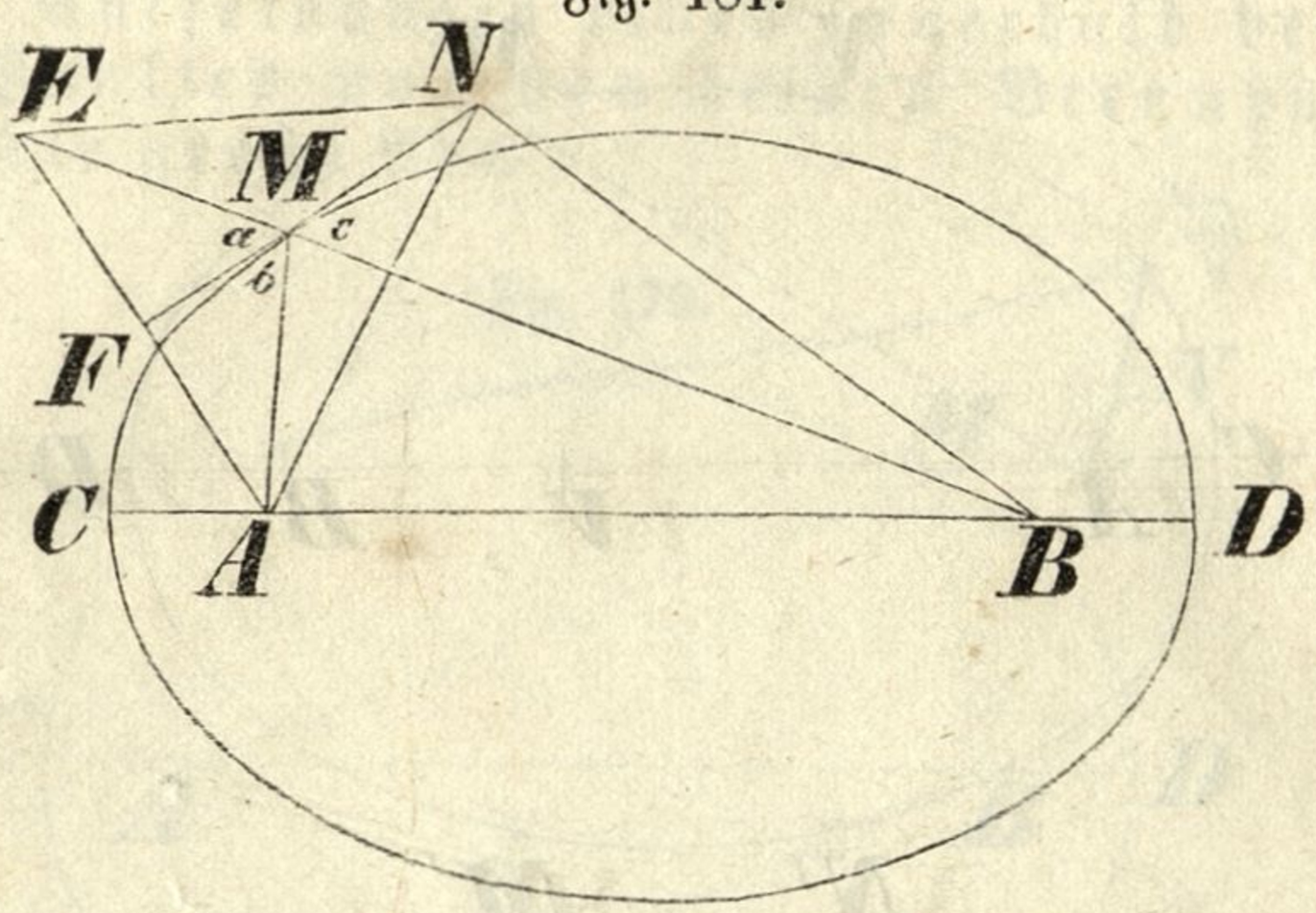
Man setze in die Brennpunkte A und B zwei Nadeln, und lege um dieselben einen Faden, dessen Länge gleich ist AB + CD, und dessen Enden zusammengebunden sind. Nimmt man nun einen Zeichenstift, legt ihn in das Innere des Fadens, und fährt damit um die beiden Punkte so herum, daß der Faden immer straff gespannt bleibt, so beschreibt dieser Stift eine Ellipse. Denn es ist bei dieser Bewegung in jeder Lage des Stiftes M die Summe der Fadenstücke A M und B M, welche die Vektoren vorstellen, der Länge der großen Axe C D gleich.

§. 248. Eine gerade Linie zu ziehen, welche die Ellipse in einem gegebenen Punkte M (Fig. 181) berührt.

Man ziehe an den Punkt M die Leitstrahlen A M und B M, und verlängere B M bis E, so daß M E = A M ist. Sodann ziehe man die Gerade A E und halbire sie in F; die durch F und M gezogene Gerade F M ist nun die verlangte Tangente.

Nimmt man in der Geraden F M außer M irgend einen Punkt N an, und zieht die Linien A N, B N und E N; so ist wegen M E = M A das Dreieck A M E gleichschenklig, daher die aus dem Scheitel M zur Mitte der Grundlinie gezogene Gerade M F senkrecht auf A E. Weil nun F N = F N, A F = E F, und A F N = E F N = R, so ist △ A F N ≅ E F N, daher A N = E N. Addirt man beiderseits B N dazu, so ist A N + B N = E N +

Fig. 181.



BN; aber EN + BN > BE, daher auch AN + BN > BE, oder weil BE = BM + ME = BM + AM = CD ist, auch AN + BN > CD; der Punkt N liegt daher außerhalb der Ellipse; und da dieses von jedem Punkte der Geraden FM, den einzigen Punkt M ausgenommen, bewiesen werden kann, so folgt, daß FM die Ellipse im Punkte M berührt.

Aus der Auflösung dieser Aufgabe ergibt sich der Satz:

Jede Tangente der Ellipse macht in dem Berührungspunkte mit den beiden Leitstrahlen gleiche Winkel.

Es ist nämlich in dem gleichschenkligen △ AME der Winkel a = b, aber a = c, daher auch b = c.

III. Die Hyperbel.

§. 249. Die Hyperbel ist eine krumme Linie, in welcher der Unterschied der Entfernungen eines jeden Punktes von zwei gegebenen Punkten einer gegebenen Geraden gleich ist.

Sind A und B (Fig. 182) die gegebenen Punkte, und RS die gegebene Gerade, so liegt der Punkt M in der Hyperbel, wenn AM — BM = RS ist.

Die Punkte A und B heißen die Brennpunkte, die Mitte O ihres Abstandes AB das Zentrum, und die Entfernung OA = OB die Exzentrizität der Hyperbel; die Geraden AM und BM sind die Leitstrahlen des Punktes M.

Wird die gegebene Gerade RS in T halbirt, und die Hälfte RT von O aus bis C und D aufgetragen, so sind C und D zwei Punkte der Hyperbel; denn man hat

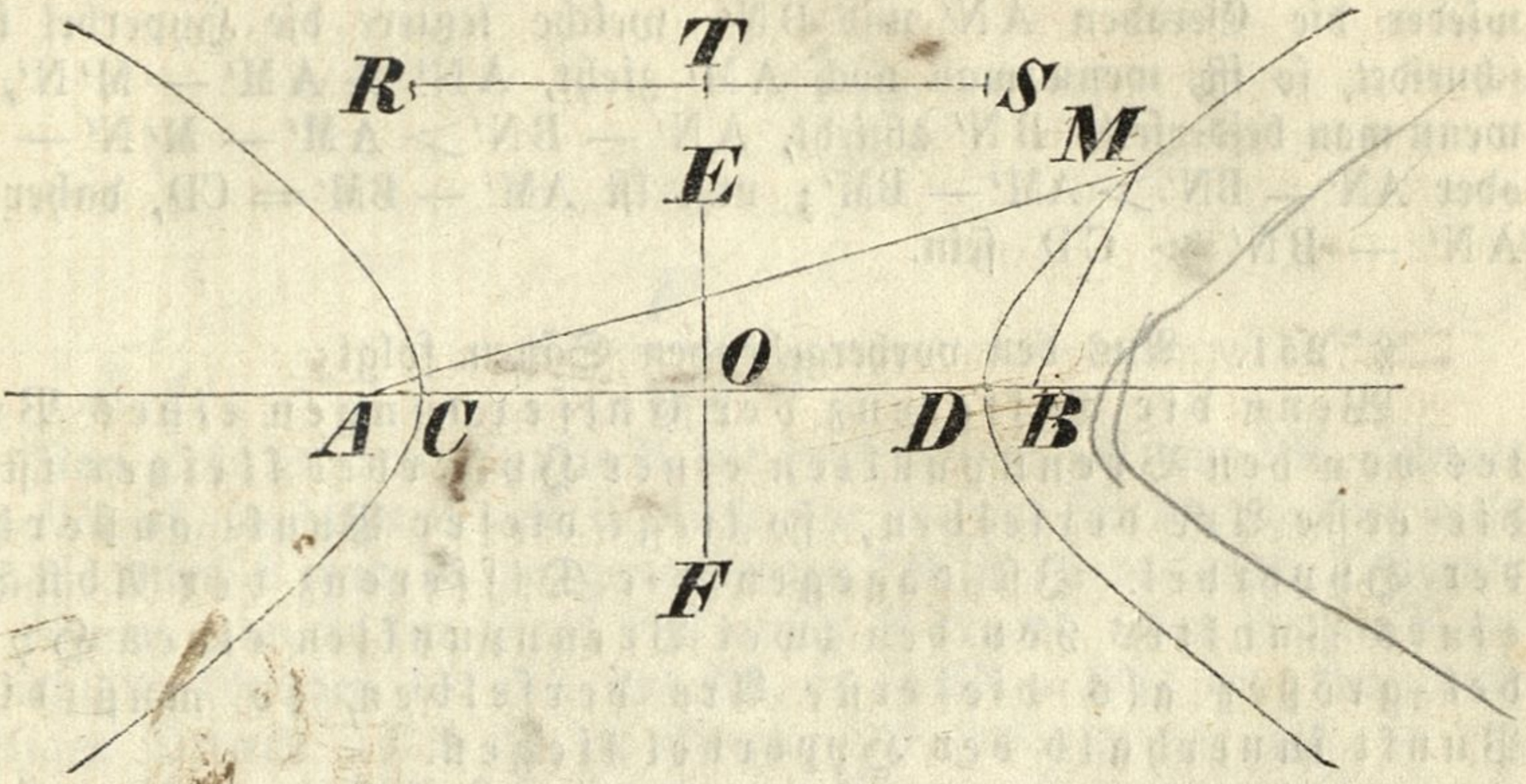
$$BC - AC = BC - BD = CD = RS$$
$$\text{und } AD - BD = AD - AC = CD = RS.$$

Die Gerade CD nennt man die Hauptaxe oder erste Axe, und ihre Endpunkte C und D die Scheitel der Hyperbel.

In der Hyperbel ist also die Differenz der Leitstrahlen eines jeden Punktes der ersten Axe gleich.

Beschreibt man aus den beiden Scheiteln C und D mit der Exzentrizität AO als Halbmesser nach oben und unten Bögen, welche sich in

Fig. 182.

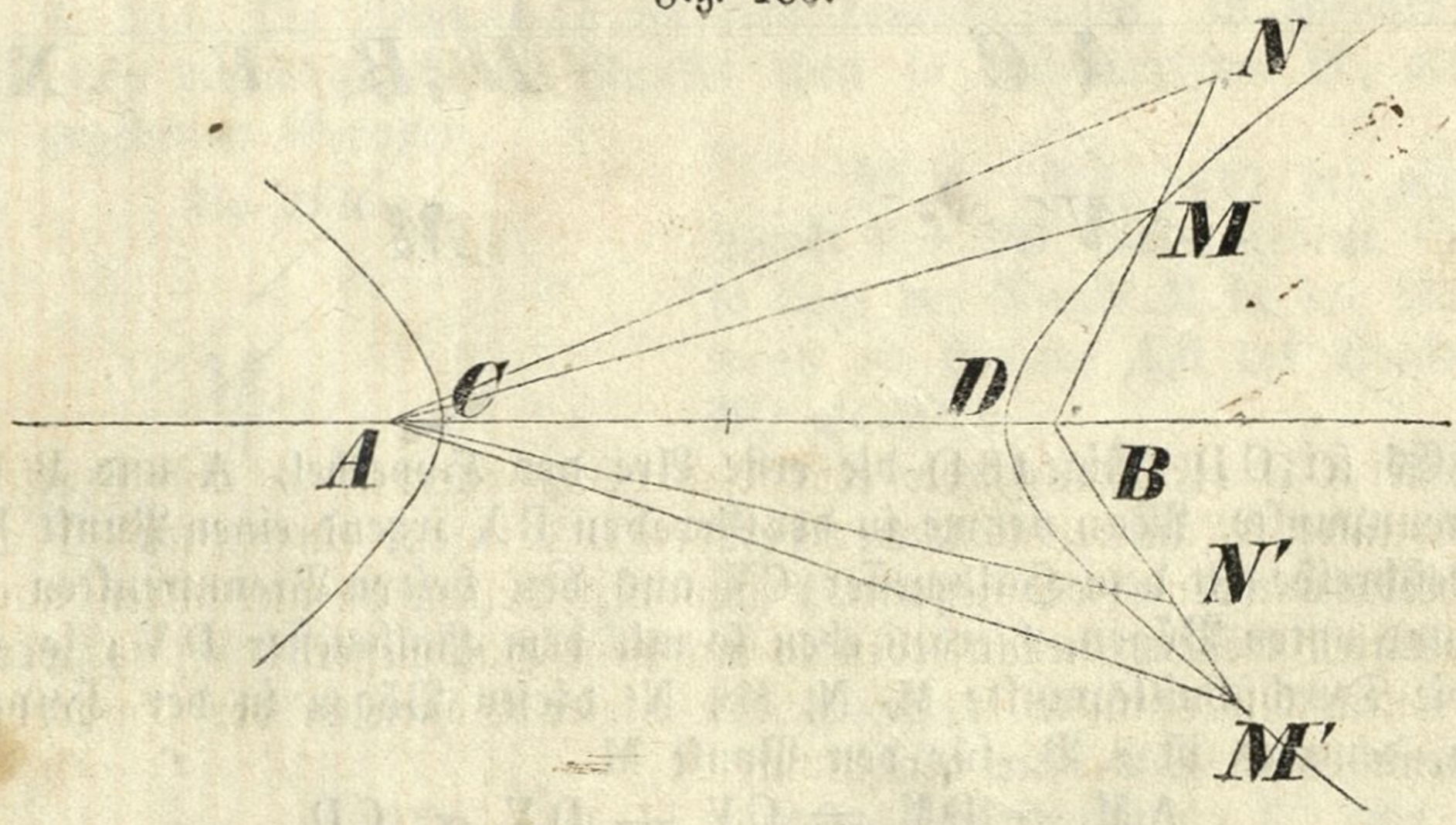


den Punkten E und F durchschneiden, und zieht die Gerade EF, so muß diese durch das Zentrum O gehen und auf der ersten Axe CD senkrecht stehen.

Die Gerade EF wird die konjugirte oder zweite Axe der Hyperbel genannt.

§. 250. Liegt ein Punkt außerhalb der Hyperbel, so ist die Differenz seiner Abstände von den beiden Brennpunkten kleiner als die erste Axe. Liegt dagegen ein Punkt innerhalb der Hyperbel, so ist der Unterschied seiner Abstände von den Brennpunkten größer als die erste Axe.

Fig. 183.



Es liege der Punkt N (Fig. 183) außerhalb der Hyperbel; zieht man zu den Brennpunkten A und B die Geraden AN und BN, deren letztere die Hyperbel in M schneidet, so ist, wenn man noch die AM zieht, $AN - MN < AM$, und wenn man beiderseits BM abzieht, $AN - MN - BM < AM - BM$, oder $AN - BN < AM - BM$; da nun M ein Punkt der Hyperbel ist so muß $AM - BM = CD$, daher $AN - BN < CD$ sein.

Es sei ferner N' ein Punkt innerhalb der Hyperbel, und man ziehe wieder die Geraden AN' und BN', welche letztere die Hyperbel in M' schneidet, so ist, wenn man noch AM' zieht, $AN' > AM' - M'N'$, und wenn man beiderseits BN' abzieht, $AN' - BN' > AM' - M'N' - BN'$, oder $AN' - BN' > AM' - BM'$; nun ist $AM' - BM' = CD$, daher muß $AN' - BN' > CD$ sein.

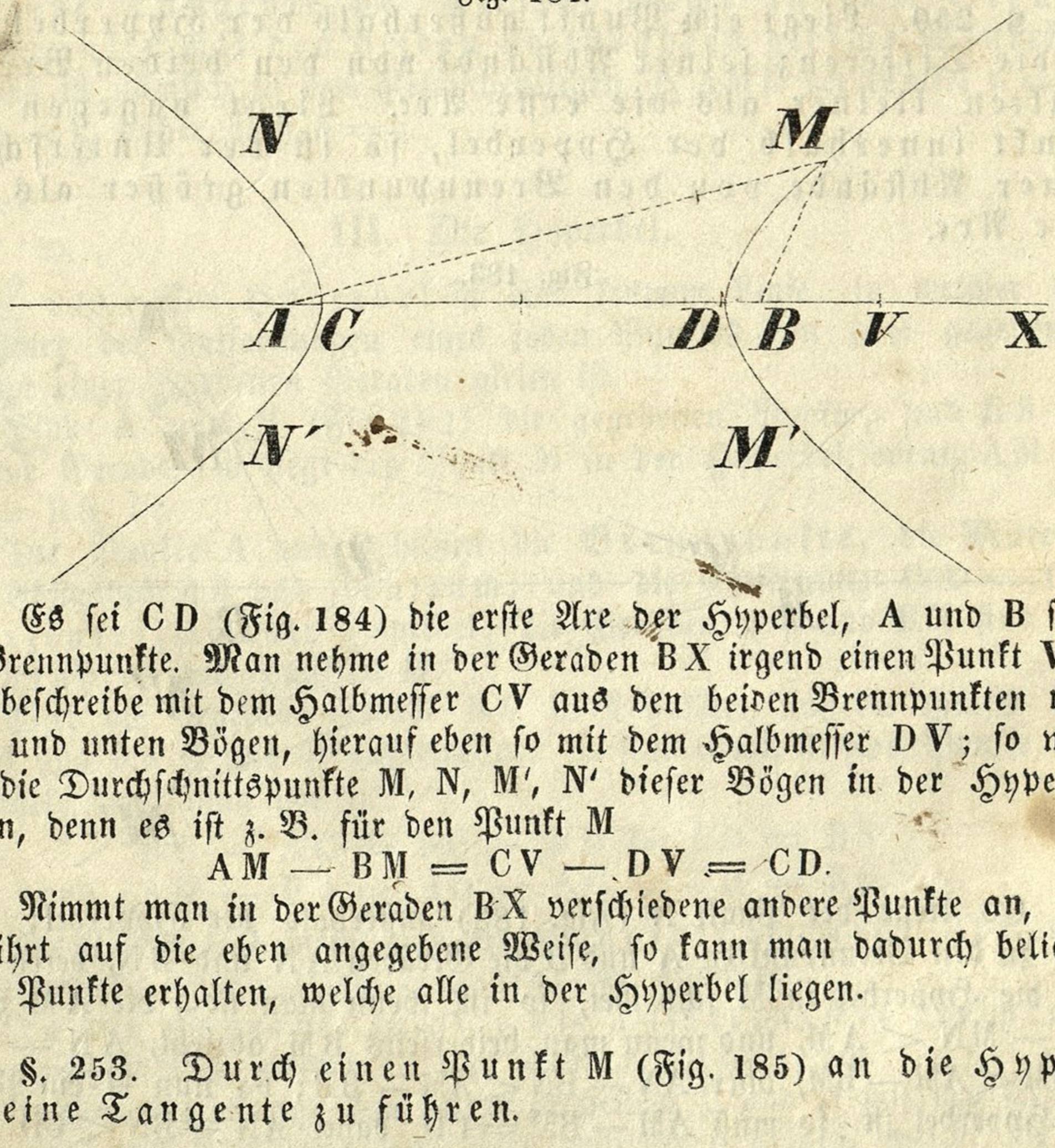
§. 251. Aus den vorhergehenden Sätzen folgt:

Wenn die Differenz der Entfernungen eines Punktes von den Brennpunkten einer Hyperbel kleiner ist als die erste Axe derselben, so liegt dieser Punkt außerhalb der Hyperbel. Ist dagegen die Differenz der Abstände eines Punktes von den zwei Brennpunkten einer Hyperbel größer als die erste Axe derselben, so muß dieser Punkt innerhalb der Hyperbel liegen.

Aufgaben.

§. 252. Wenn die erste Axe und die beiden Brennpunkte gegeben sind, beliebig viele Punkte der Hyperbel zu bestimmen.

Fig. 184.



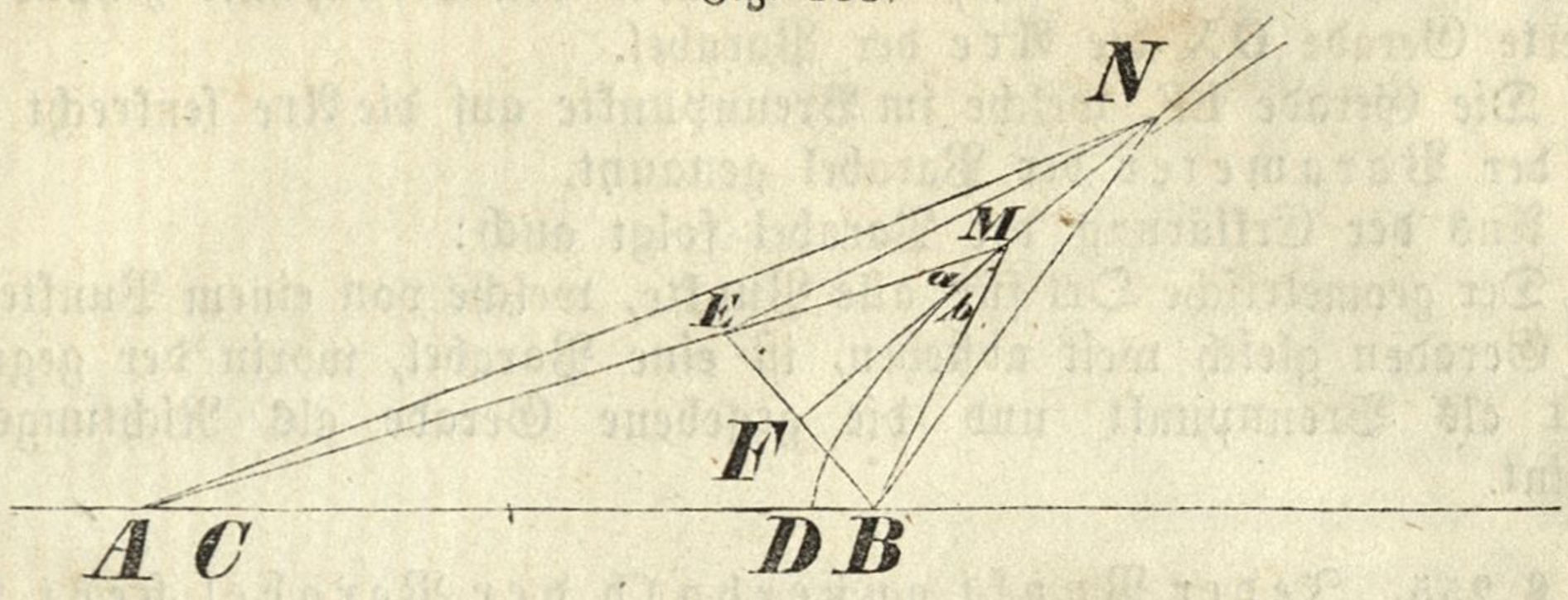
Es sei CD (Fig. 184) die erste Axe der Hyperbel, A und B seien die Brennpunkte. Man nehme in der Geraden BX irgend einen Punkt V an und beschreibe mit dem Halbmesser CV aus den beiden Brennpunkten nach oben und unten Bögen, hierauf eben so mit dem Halbmesser DV; so werden die Durchschnittspunkte M, N, M', N' dieser Bögen in der Hyperbel liegen, denn es ist z. B. für den Punkt M

$$AM - BM = CV - DV = CD.$$

Nimmt man in der Geraden BX verschiedene andere Punkte an, und verfährt auf die eben angegebene Weise, so kann man dadurch beliebig viele Punkte erhalten, welche alle in der Hyperbel liegen.

§. 253. Durch einen Punkt M (Fig. 185) an die Hyperbel eine Tangente zu führen.

Fig. 185.



Man ziehe zu dem Punkte M die Leitstrahlen AM und BM, schneie ME = BM ab, verbinde E und B durch eine Gerade EB und halbire diese in F; die durch F und M gezogene Gerade FM ist die verlangte Tangente

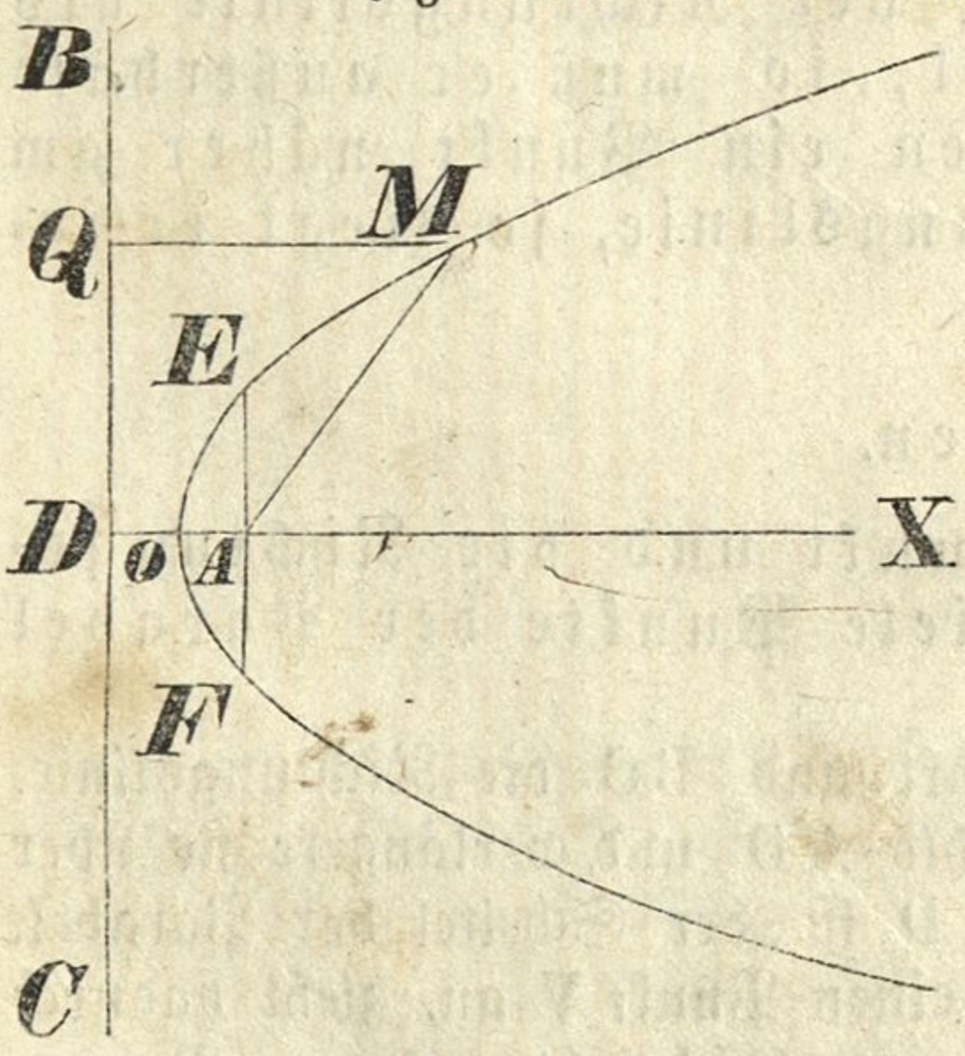
Nimmt man in der Linie FM außer M irgend einen Punkt N an und zieht die Geraden AN, BN und EN, so ist EN = BN; denn im gleichschenkligen Dreiecke BME ist die Gerade FM senkrecht auf BE; in den Dreiecken EFN und BFN sind daher zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gleich, somit $\triangle$ EFN $\cong$ BFN und EN = BN. Es ist nun AN — EN < AE; oder AN — BN < AM — EM, oder AN — BN < AM — BM, daher AN — BN < CD; der Punkt N liegt daher außerhalb der Hyperbel. Da nun dasselbe auch von jedem andern Punkte der FM, den einzigen Punkt M ausgenommen, bewiesen werden kann, so ist FM eine Tangente der Hyperbel.

Weil das Dreieck BME gleichschenklig ist, so ist der Winkel a = b, d. h. in der Hyperbel macht die Tangente mit den Leitstrahlen des Berührungpunktes gleiche Winkel.

IV. Die Parabel.

§. 254. Die Parabel ist jene krumme Linie, in welcher jeder Punkt von einem gegebenen Punkte eben so weit entfernt ist, als von einer gegebenen Geraden.

Fig. 186.



Ist A (Fig. 186) der gegebene Punkt und BC die gegebene Gerade, so liegt der Punkt M in der Parabel, wenn die Gerade AM der Senkrechten MQ gleich ist.

Der gegebene Punkt A heißt der Brennpunkt, die Gerade BC die Richtungslinie der Parabel; die Gerade AM nennt man den Leitstrahl des Punktes M.

Zieht man vom Brennpunkte A auf die Richtungslinie BC eine Senkrechte und halbirt diese in O, so steht dieser Punkt vom Brennpunkte und von der Richtungslinie gleich weit ab, und ist somit ein Punkt der Parabel. Der

Punkt O heißt der Scheitel, und die über den Brennpunkt hinaus verlängerte Gerade OX die Axe der Parabel.

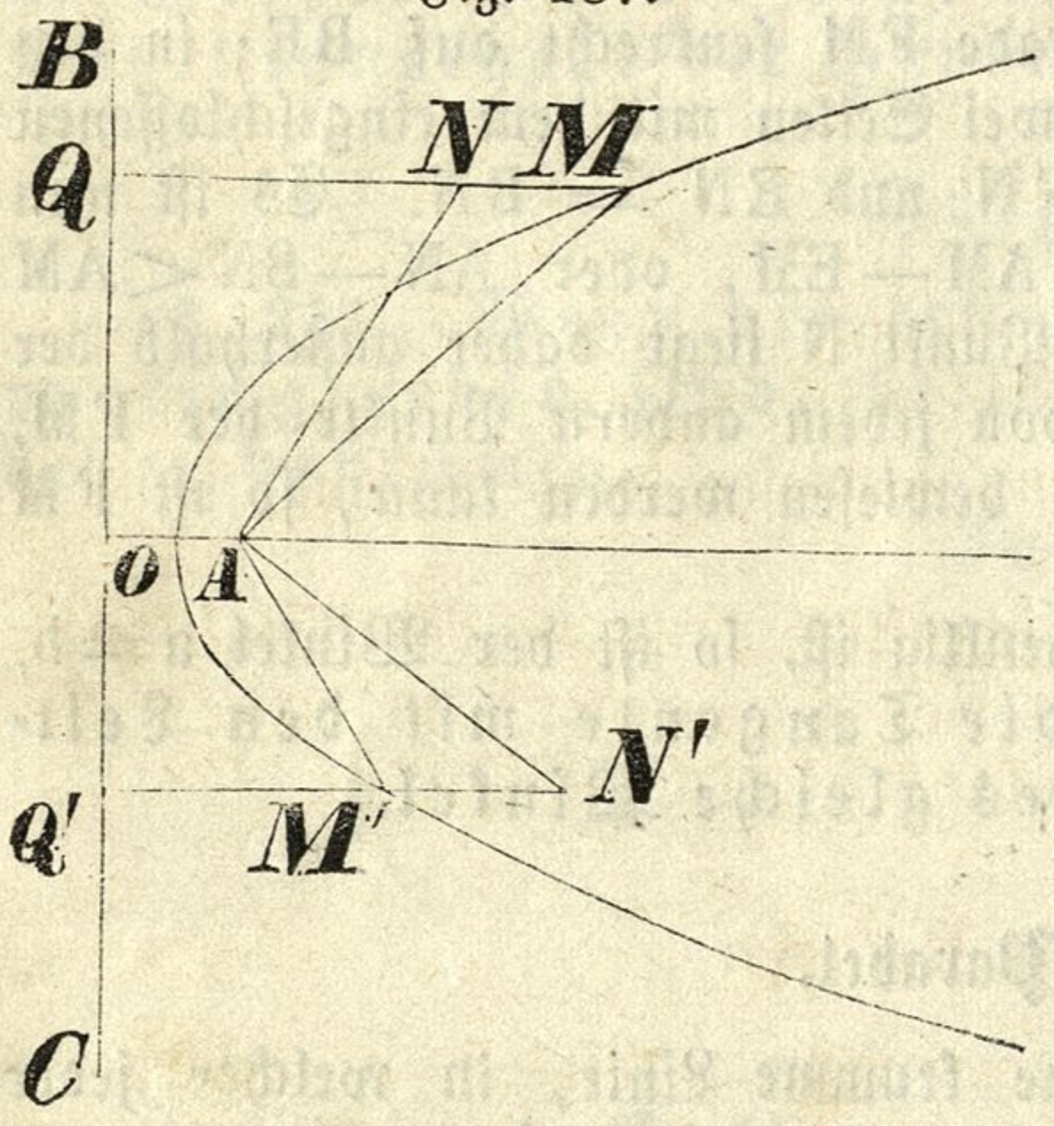
Die Gerade EF, welche im Brennpunkte auf die Axe senkrecht steht, wird der Parameter der Parabel genannt.

Aus der Erklärung der Parabel folgt auch:

Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von einem Punkte und einer Geraden gleich weit abstehen, ist eine Parabel, worin der gegebene Punkt als Brennpunkt und die gegebene Gerade als Richtungslinie erscheint.

§. 255. Jeder Punkt außerhalb der Parabel steht vom Brennpunkte weiter ab als von der Richtungslinie. Jeder Punkt innerhalb der Parabel steht näher am Brennpunkte als an der Richtungslinie.

Fig. 187.



Ist N (Fig. 187) ein Punkt außerhalb der Parabel, so ziehe man von N auf BC die Senkrechte NQ, welche verlängert die Parabel im Punkte M schneidet. Ziehet man nun AN und AM, so ist $AN + MN > AM$, und wegen $AM = MQ$ auch $AN + MN > MQ$, folglich $AN > MQ - MN$ oder $AN > NQ$.

Liegt der Punkt N' innerhalb der Parabel, so fälle man wieder auf BC die Senkrechte N'Q', welche die Parabel in M' schneidet, und man hat, wenn die Geraden AN' und AM' gezogen werden, $AN' < AM' + M'N'$, und wegen $AM' = M'Q'$ auch $AN' < M'Q' + M'N'$, oder $AN' < N'Q'$.

§. 256. Aus den vorhergehenden Sätzen folgt:

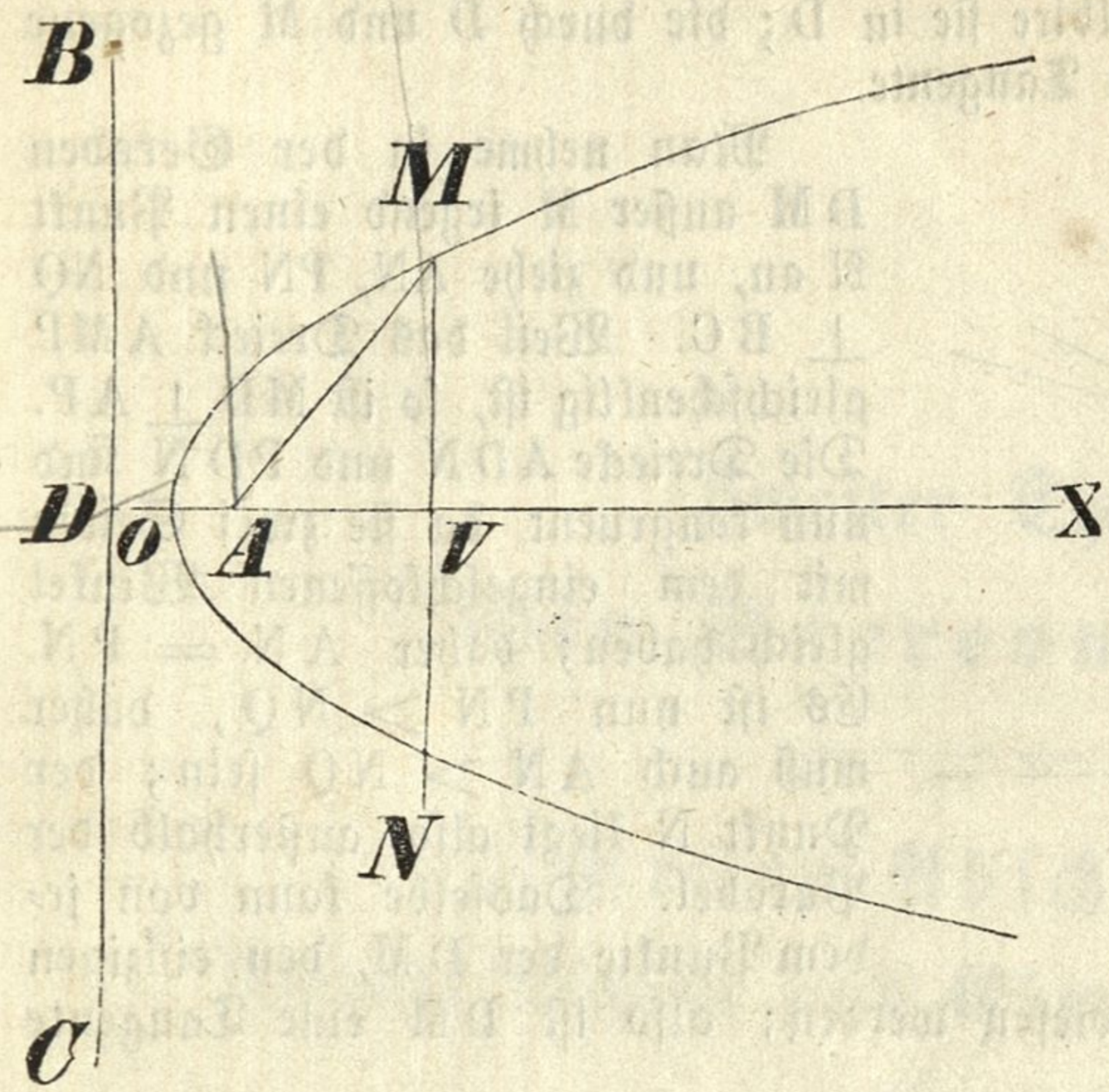
Liegt ein Punkt näher an der Richtungslinie als am Brennpunkte einer Parabel, so muß er außerhalb der Parabel liegen; ist dagegen ein Punkt näher am Brennpunkte als an der Richtungslinie, so liegt er innerhalb der Parabel.

Aufgaben.

§. 257. Wenn der Brennpunkt und die Richtungslinie gegeben sind, beliebig viele Punkte der Parabel zu bestimmen.

Es sei A (Fig. 188) der Brennpunkt und BC die Richtungslinie. Man ziehe von A auf BC eine Senkrechte AD und verlängere sie über A hinaus. Der Mittelpunkt O der AD ist der Scheitel der Parabel. Nimmt man nun in der Axe OX irgend einen Punkt V an, zieht dadurch die auf die Axe senkrechte Gerade MN, und beschreibt aus dem Brenn-

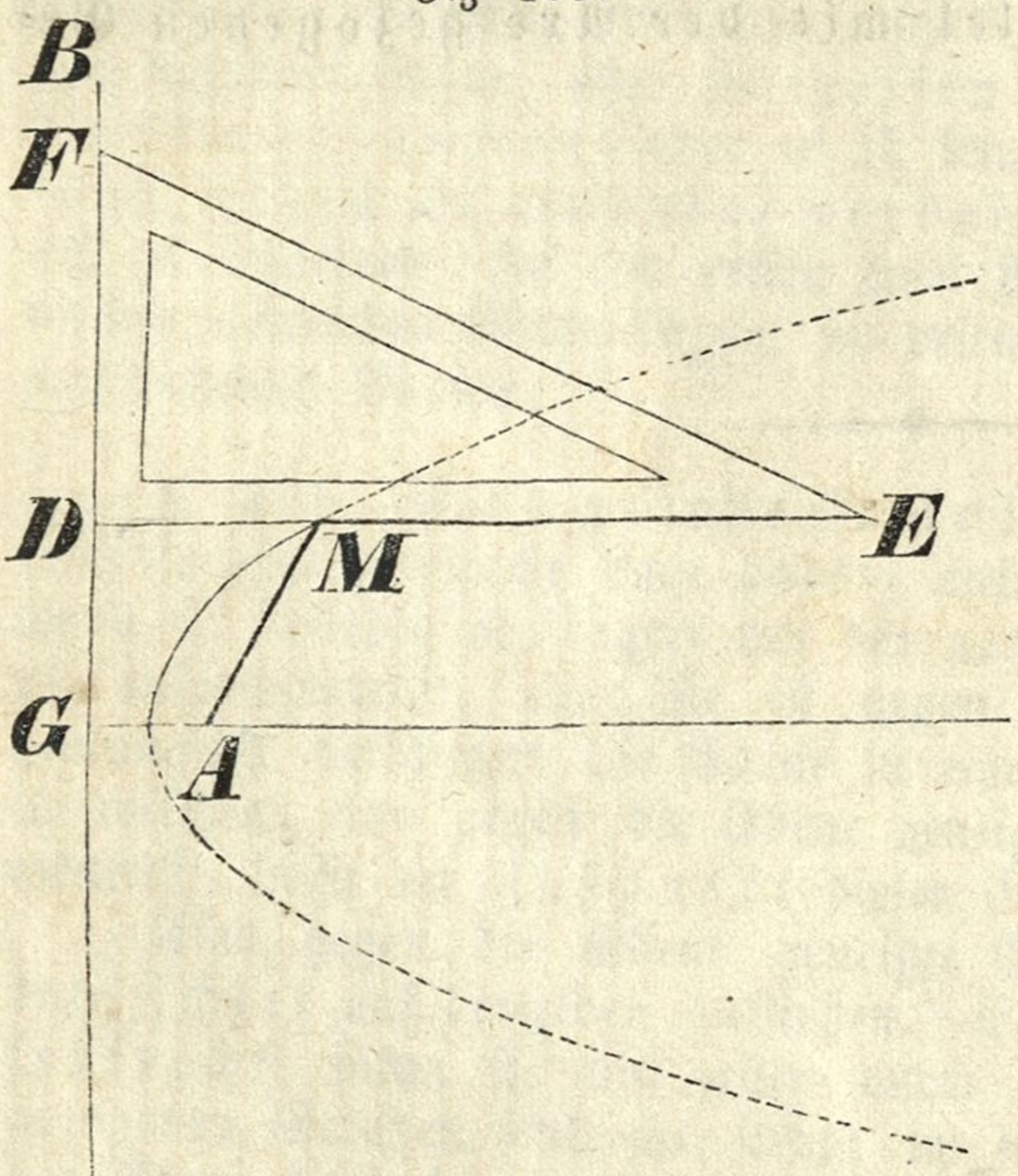
Fig. 188.



punkte A mit dem Halbmesser D V zwei Bögen, welche jene Senkrechte in den Punkten M und N durchschneiden, so müssen diese Punkte in der Parabel liegen, weil sie nach der Konstrukzion vom Brennpunkte eben so weit abstehen, als von der Richtungslinie. Wenn man auf dieselbe Art sehr viele Senkrechte auf der Axe errichtet und sie gehörig durchschneidet, so erhält man beliebig viele Punkte der Parabel. Liegen diese sehr nahe an einander, so gibt ihre Verbindung mit einer stetigen Linie die Parabel.

§. 258. Die Parabel in einem Zuge zu beschreiben.

Fig. 189.

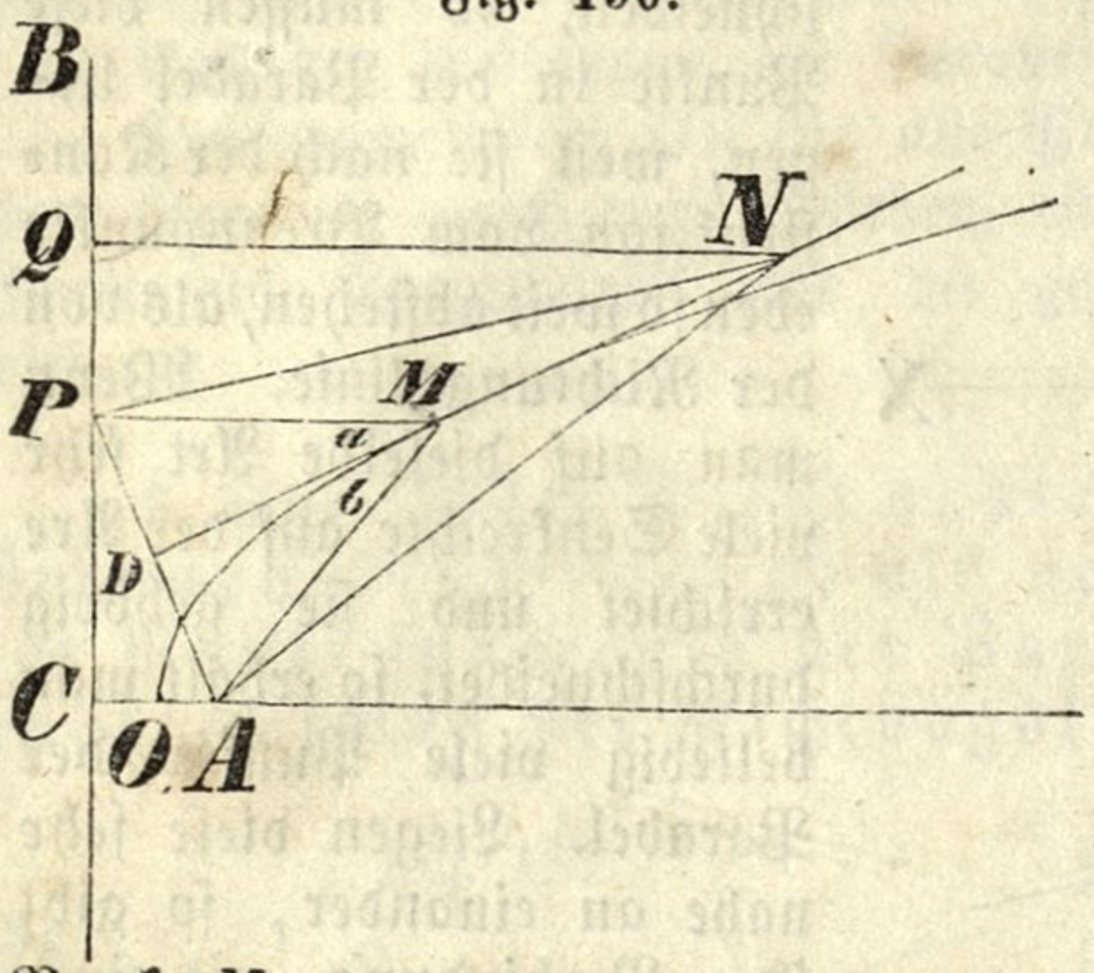


Man nehme ein hölzernes rechtwinkliges Dreieck E D F (Fig. 189) und einen Faden von der Länge D E, befestige das eine Ende des Fadens im Brennpunkte A und das andere in E. Dann läßt man das Dreieck mit der Kathete D F längs der Richtungslinie fortgleiten, und führt zugleich den Zeichenstift M längs der Kathete D E so fort, daß dabei der Faden immer straff gespannt bleibt; der Stift M beschreibt dadurch den obern Ast der Parabel. Denn es wird bei jeder Lage des Dreieckes die Fadenlänge A M dem abgewickelten Stücke D M der Kathete D E gleich sein, d. h. es wird in jeder Lage der Punkt M vom Brennpunkte eben so weit abstehen als von der Richtungslinie. Um eben so den untern Ast der Parabel zu erhalten, wird man das Dreieck so umdrehen, daß die Kathete D F in die Richtung G C fällt.

§. 259. Durch einen Punkt M (Fig. 190) der Parabel an diese eine Tangente zu ziehen.

Man fälle von M auf die Richtungslinie BC die Senkrechte MP, ziehe die Gerade AP und halbire sie in D; die durch D und M gezogene Gerade DM ist die verlangte Tangente.

Fig. 190.



Man nehme in der Geraden DM außer M irgend einen Punkt N an, und ziehe AN, PN und NQ ⊥ BC. Weil das Dreieck AMP gleichschenklig ist, so ist MD ⊥ AP. Die Dreiecke ADN und PDN sind nun kongruent, da sie zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gleich haben; daher AN = PN. Es ist nun PN > NQ, daher muß auch AN > NQ sein; der Punkt N liegt also außerhalb der Parabel. Dasselbe kann von jedem Punkte der DM, den einzigen Punkt M ausgenommen, bewiesen werden; also ist DM eine Tangente der Parabel.

Da der Winkel a = b ist, so folgt:

Die Tangente einer Parabel halbirt den Winkel, den der Leitstrahl des Berührungspunktes mit einer durch diesen Punkt parallel mit der Axe gezogenen Geraden bildet.

Zweiter Theil.

Die Stereometrie.

Erster Abschnitt.

Gerade Linien und Ebenen im Raume.

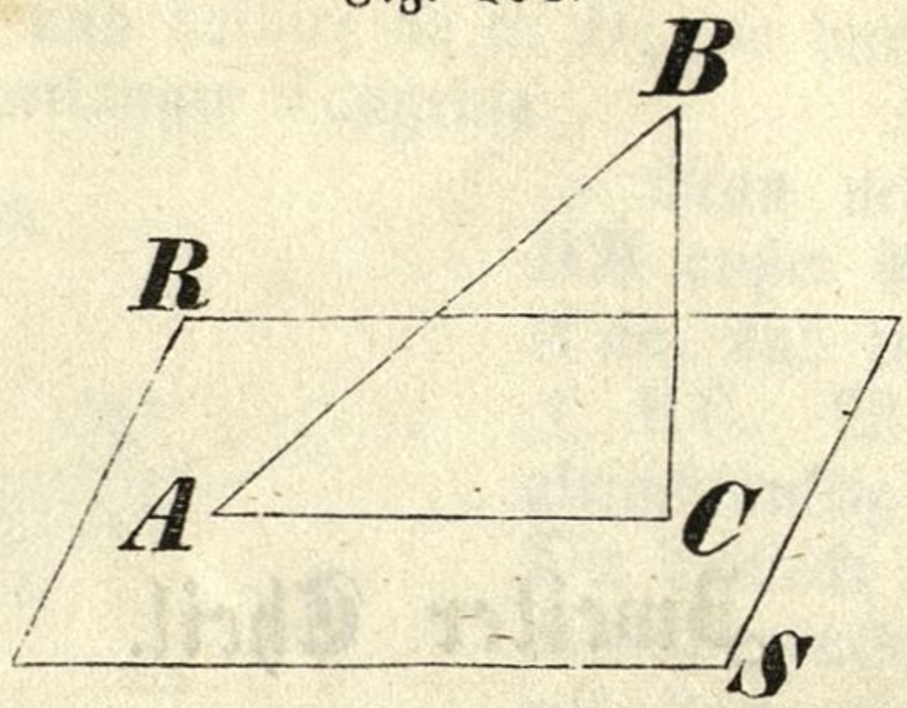
§. 260. Zwei Gerade im Raume können eine dreifache Lage gegen einander haben; entweder sind sie parallel, wenn sie nämlich in derselben Richtung fortlaufen, so daß sie überall dieselbe Entfernung von einander haben, oder sie treffen hinlänglich verlängert in einem Punkte zusammen; oder es ist keines von beiden der Fall, die Geraden gehen an einander vorbei, ohne parallel zu sein und ohne sich zu schneiden. In den ersten zwei Fällen müssen die beiden Geraden in der nämlichen Ebene liegen, im dritten Falle befinden sie sich in zwei verschiedenen Ebenen.

§. 261. Eine gerade Linie im Raume kann gegen eine Ebene eine zweifache Lage haben; entweder ist sie mit ihr parallel, wenn sie beliebig verlängert mit der nach allen Seiten erweiterten Ebene nie zusammentrifft, oder sie ist gegen die Ebene geneigt, wenn sie hinlänglich verlängert die Ebene in einem Punkte schneidet. Der Punkt, in welchem eine gegen die Ebene geneigte Gerade mit derselben zusammentrifft, heißt der Fußpunkt dieser Geraden in der Ebene.

Eine gegen die Ebene geneigte Gerade kann wieder senkrecht oder schief auf derselben aufstehen. Eine Gerade heißt auf der Ebene senkrecht, wenn sie auf allen durch ihren Fußpunkt in dieser Ebene gezogenen Geraden senkrecht steht; im entgegengesetzten Falle ist sie auf der Ebene schief.

Wenn eine Gerade auf einer Ebene schief steht, und man fällt von einem Punkt derselben eine Senkrechte auf die Ebene, so heißt die gerade Linie, welche den Fußpunkt jener Geraden mit dem Fußpunkte der Senkrechten verbindet, die Projekzion jener Geraden in der Ebene, und der Winkel, den die schiefe Gerade mit ihrer Projekzion bildet, der Neigungswinkel der Geraden gegen die Ebene.

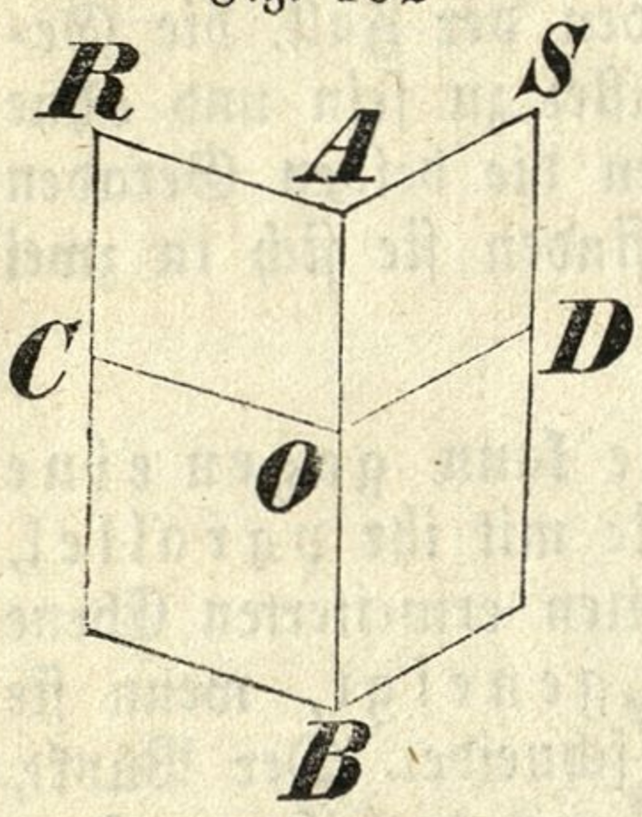
Fig. 191.



Steht AB (Fig. 191) schief auf der Ebene RS und ist BC ⊥ Ebene RS, so ist AC die Projekzion der Geraden AB in der Ebene RS, und BAC der Neigungswinkel der AB gegen die Ebene RS.

§. 262. Vergleicht man zwei Ebenen hinsichtlich ihrer gegenseitigen Lage, so sind dieselben einander parallel, wenn sie noch so weit erweitert nie zusammentreffen; sonst heißen sie gegen einander geneigt. Zwei gegen einander geneigte Ebenen müssen daher hinlänglich erweitert einander durchschneiden, und zwar ist der Durchschnitt eine gerade Linie; denn wäre die Durchschnittslinie nicht gerade, so müßte sie durch drei Punkte gehen, welche nicht in derselben Geraden liegen, und es würden also durch jene drei Punkte zwei verschiedene Ebenen gelegt sein, was nicht möglich ist (§. 6).

Fig. 192



Wenn man in einem Punkte der Durchschnittslinie zweier Ebenen auf dieselbe in jeder Ebene eine Senkrechte errichtet, so heißt der Winkel, welchen diese Senkrechten einschließen, der Neigungswinkel der beiden Ebenen.

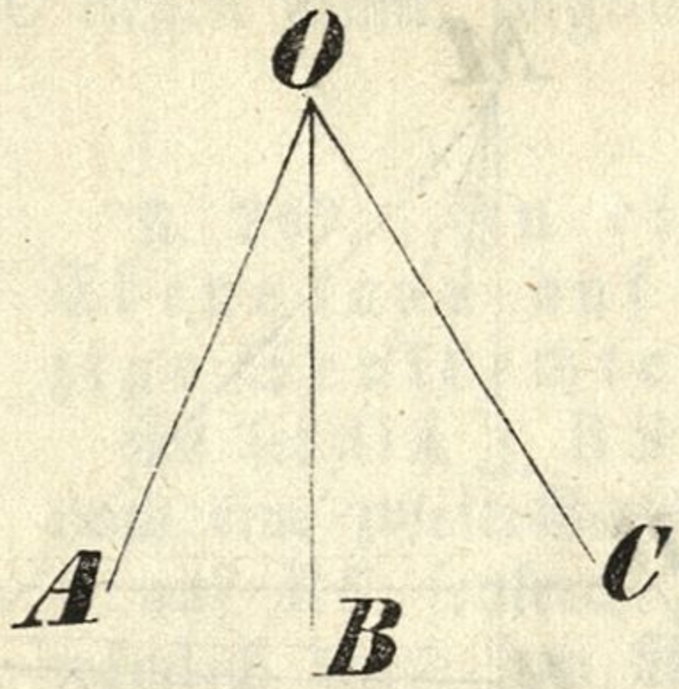
Ist (Fig. 192) CO ⊥ AB und DO ⊥ AB, so ist COD der Neigungswinkel der zwei Ebenen BR und BS.

Zwei Ebenen stehen auf einander senkrecht, wenn ihr Neigungswinkel ein rechter ist; im entgegengesetzten Falle stehen sie schief auf einander.

§. 263. Die gegenseitige Neigung von drei oder mehreren in einem Punkte zusammenstoßenden Ebenen wird ein Körperwinkel, auch Körpereck, genannt. Der Punkt, in welchem alle Ebenen zusammentreffen, heißt die Spitze oder der Scheitel; die geraden Linien, in denen sich je zwei nach einander folgende Ebenen durchschneiden, nennt man die Kanten, und die Winkel, welche je zwei auf einander folgende Kanten bilden, die Kantenwinkel.

Um einen Körperwinkel anzugeben, nennt man entweder bloß den Buchstaben an der Spitze, oder zugleich auch einen Buchstaben an jeder Kante, so jedoch, daß der Buchstabe an der Spitze dabei die erste Stelle einnimmt.

Fig. 193.



In dem Körperwinkel O oder OABC (Fig. 193) sind OA, OB OC die Kanten, und AOB, AOC, BOC die Kantenwinkel.

Hinsichtlich der Anzahl der Kanten ist ein Körperwinkel drei-, vier- oder mehrkantig, je nachdem er drei, vier oder mehrere Kanten hat.

I. Gerade Linien im Raume.

§. 264. Wenn die Schenkel eines Winkels im Raume mit den Schenkeln eines anderen Winkels gleiche Richtung haben, so muß auch die Abweichung der Richtungen in beiden Winkeln dieselbe sein.

Es gilt also auch in Bezug auf den Raum der Satz:

Winkel, deren Schenkel nach derselben Seite hin parallel laufen, sind einander gleich.

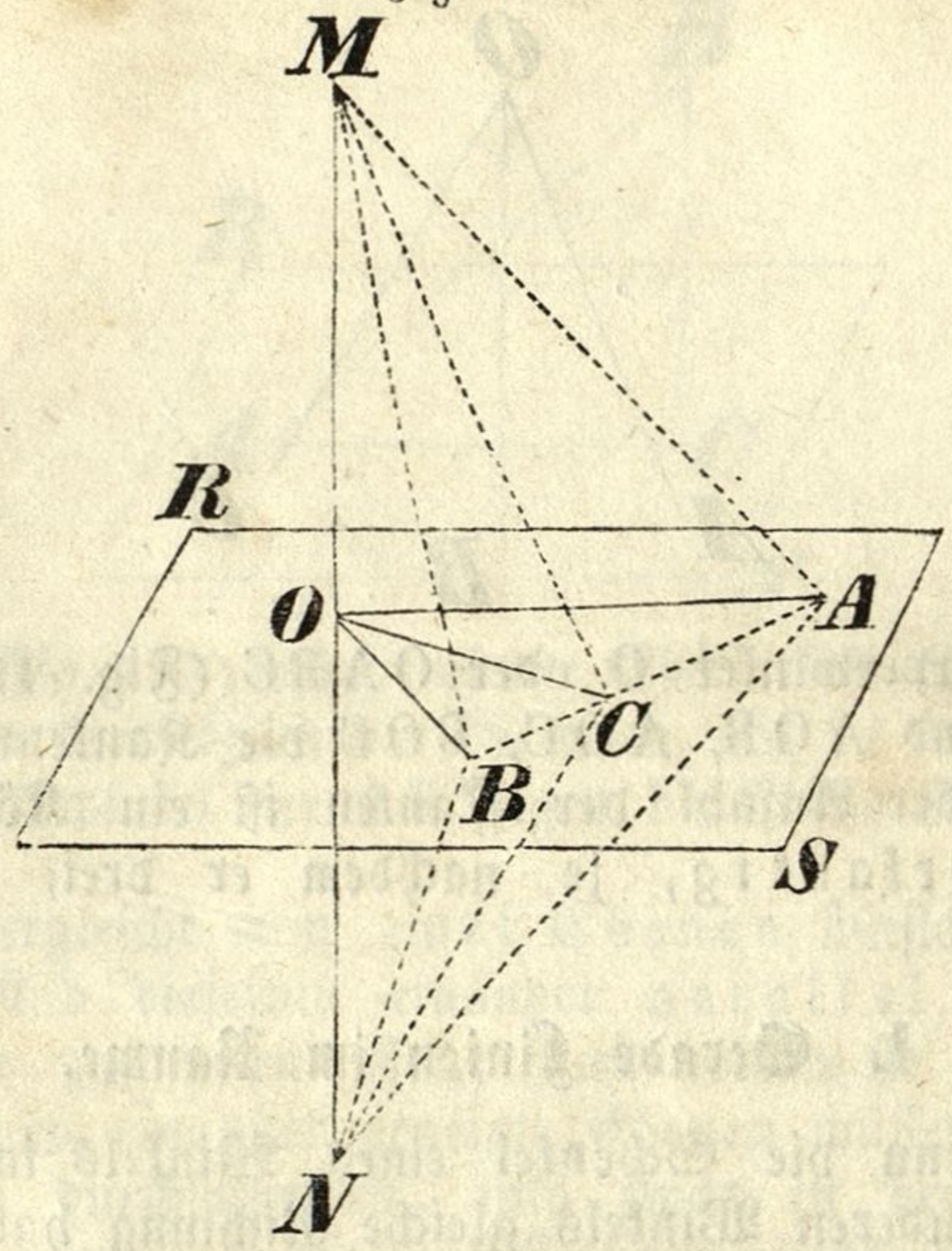
II. Gerade Linien mit der Ebene verglichen.

Lehrsätze.

§. 265. Wenn eine Gerade auf zwei Geraden, welche durch ihren Fußpunkt in einer Ebene gezogen werden, senkrecht steht, so ist sie auch auf jeder anderen durch ihren Fußpunkt in dieser Ebene gezogenen Geraden, und somit auf dieser Ebene selbst, senkrecht.

Es stehe (Fig. 194) die Gerade MO auf der Ebene RS so auf, daß sie mit den in dieser Ebene durch O gezogenen Geraden OA und OB rechte Winkel bildet; so ist zu beweisen, daß sie auf jeder durch O willkürlich gezogenen Geraden, z. B. auf OC, welche die Verbindungslinie AB in C schneidet, senkrecht steht. — Man verlängere die Gerade MO unter die Ebene RS, mache ON = OM, und ziehe MA und NA, so sind die rechtwinkligen Dreiecke MOA und NOA kongruent, weil sie die beiden Katheten wechselseitig gleich haben; folglich ist auch MA = NA. Zieht man MB und NB, so sind aus demselben Grunde auch die rechtwinkligen Dreiecke MOB und NOB kongruent, daher MB = NB. Die Dreiecke MAB und NAB haben nun alle drei Seiten wechselseitig gleich, folglich sind sie kongruent, und es müssen die den gleichen Seiten MB und NB gegenüberliegenden Winkel MAB und NAB gleich sein. Zieht man endlich noch MC und NC, so ist wegen AC = AC, MA = NA und MAC = NAC das

Fig. 194.

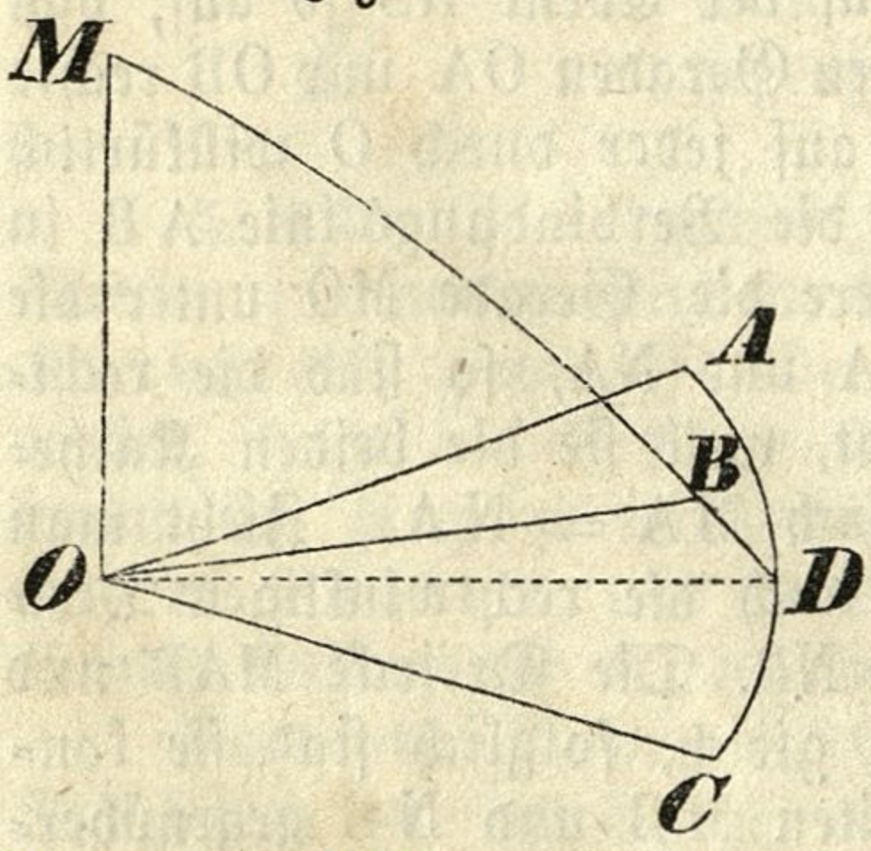


△ MAC ≅ NAC, daher MC = NC. Die Dreiecke MOC und NOC haben nun alle drei Seiten wechselweise gleich, also sind sie kongruent, und folglich die Winkel MOC und NOC gleich, und da sie Nebenwinkel sind, rechte; es steht also MO wirklich auf OC, und eben so auf jeder andern durch O in der Ebene RS gezogenen Geraden, folglich auf der Ebene RS selbst, senkrecht.

§. 266. Wenn drei gerade Linien auf einer andern Geraden in demselben Punkte senkrecht stehen, so müssen sie in einer und derselben Ebene liegen.

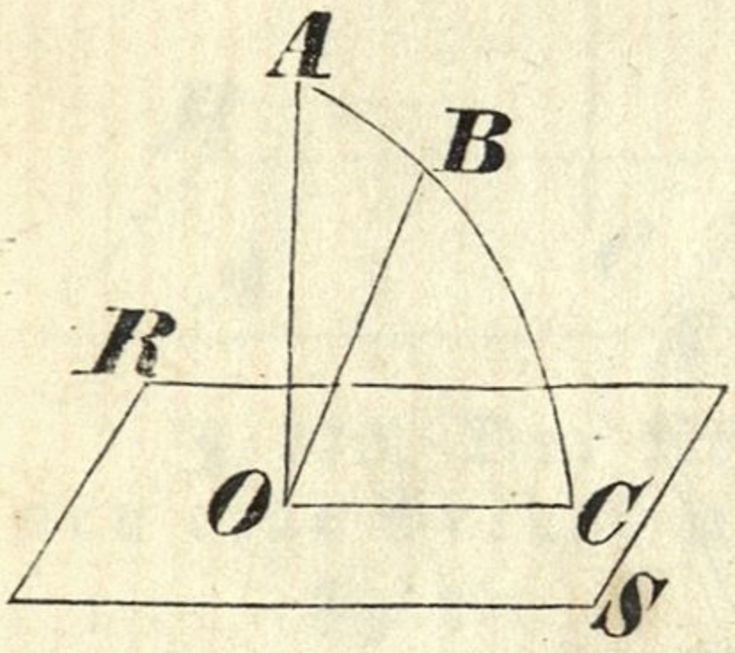
Es seien (Fig. 195) die Geraden OA, OB und OC senkrecht auf OM, so müssen sie in der nämlichen Ebene liegen. Man denke sich durch OA und OC die Ebene AOC gelegt, auf welcher nach dem eben bewiesenen Satze die Gerade OM senkrecht steht, so muß auch die OB in dieser Ebene liegen. Wäre dieses nicht der Fall, so müßte sie über oder unter dieser Ebene zu liegen kommen. Nehmen wir erstlich an, die OB liege über der Ebene AOC, und denken wir uns durch den Winkel MOB eine Ebene gelegt, welche die Ebene AOC in der Geraden OD durchschneiden würde, so müßte der Winkel MOB < MOD sein; allein da die Durchschnittslinie OD in der Ebene AOC liegt, worauf OM senkrecht ist, so ist MOD = R, somit müßte MOB < R sein, was der Voraussetzung MOB = R widerspricht. Es kann also die Annahme, daß OB über der Ebene AOC liegt, nicht möglich sein. Eben so kann gezeigt werden, daß OB

Fig. 195.



nicht unter der Ebene AOC liegen könne, folglich muß OB in der Ebene AOC selbst liegen.

Fig. 196.

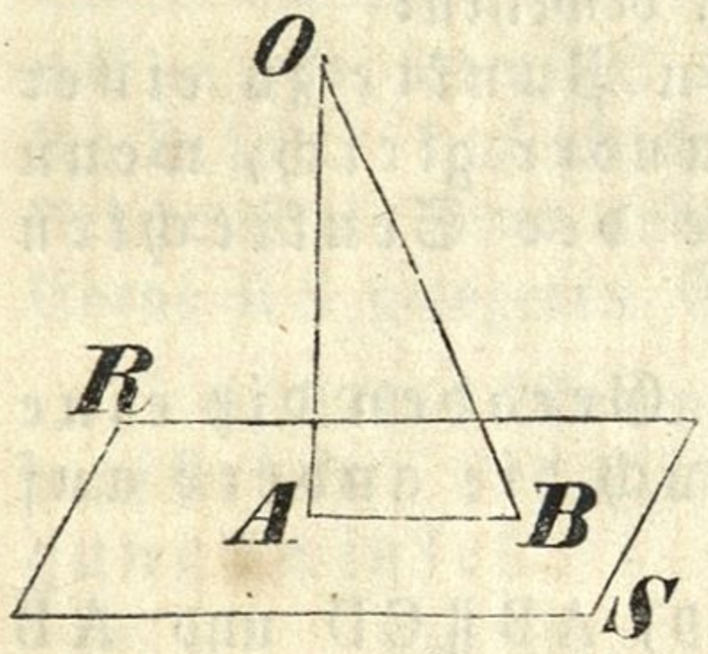


§. 267. In einem Punkte einer Ebene kann auf diese nur eine einzige Senkrechte errichtet werden.

Es sei OA ⊥ RS (Fig. 196), so kann nicht noch eine zweite Gerade, z. B. OB, im Punkte O auf RS senkrecht stehen. Denkt man sich nämlich durch den Winkel AOB eine Ebene gelegt, welche die Ebene RS in einer geraden Linie OC schneidet, so ist offenbar der Winkel BOC < AOC; aber nach der Voraussetzung ist AOC = R, daher BOC < R, mithin kann OB nicht senkrecht auf RS sein.

§. 268. Von einem Punkte außerhalb einer Ebene kann auf diese nur eine einzige Senkrechte herabgelassen werden.

Fig. 197.



Es sei OA ⊥ RS (Fig. 197), so kann aus dem Punkte O nicht noch eine zweite Gerade, z. B. OB, auf die Ebene RS senkrecht geführt werden. Denkt man sich nämlich durch den Winkel AOB eine Ebene gelegt, welche die Ebene RS in der geraden Linie AB schneidet, so ist in dem Dreiecke AOB nach der Voraussetzung der Winkel A ein rechter, daher muß B spitzig sein, und es kann daher OB auf die Ebene RS nicht senkrecht stehen.

§. 269. Die Senkrechte ist die kürzeste Gerade, welche von einem Punkte außerhalb einer Ebene auf diese gezogen werden kann.

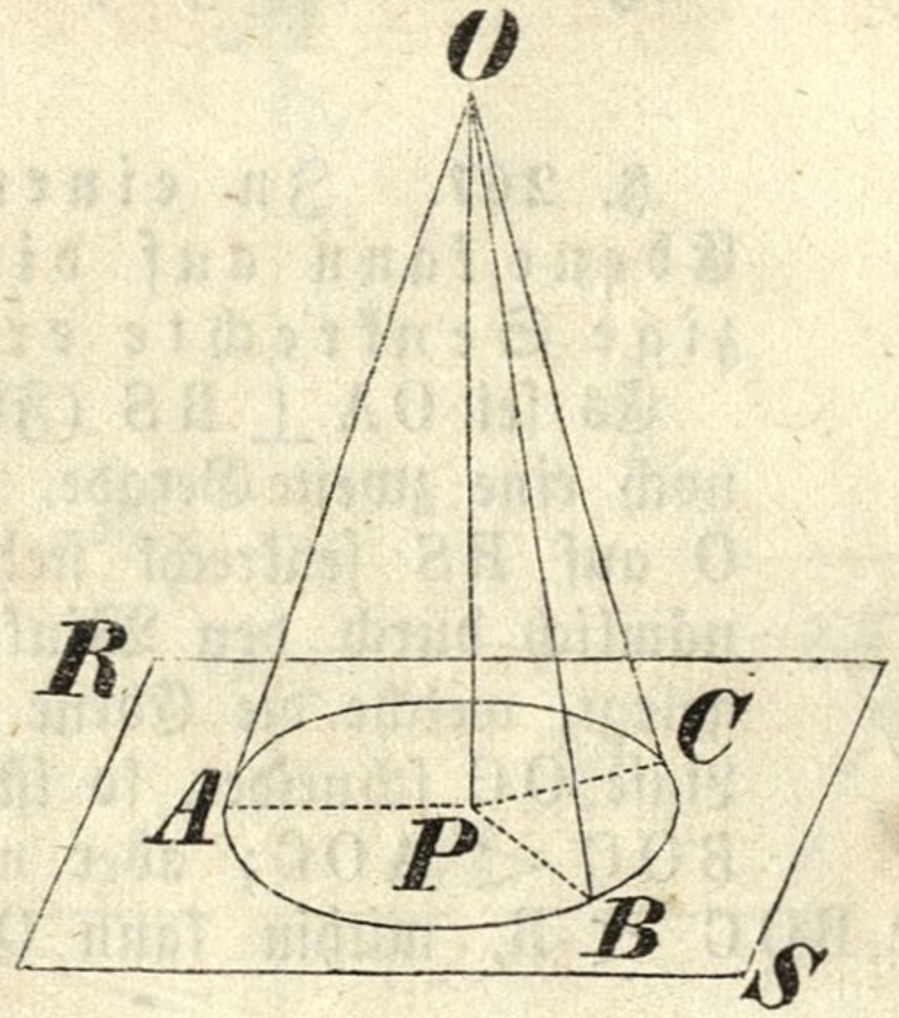
Ist nämlich OA ⊥ RS, und OB irgend eine schiefe Gerade, so muß in dem rechtwinkligen Dreiecke AOB die Kathete OA kleiner sein als die Hypotenuse OB.

Aus diesem Grunde dient die Senkrechte von einem Punkte auf eine Ebene, um die Entfernung dieses Punktes von der Ebene zu bestimmen.

§. 270. a) Wenn man von einem Punkte außerhalb einer Ebene zu dieser drei gleich lange gerade Linien zieht, und durch die Fußpunkte derselben einen Kreis beschreibt, so fällt der Mittelpunkt dieses Kreises mit dem Fußpunkte der Senkrechten, welche von jenem Punkte auf die Ebene herabgelassen wird, zusammen.

Es sei (Fig. 198) AO = BO = CO, und OP ⊥ RS, so muß P der Mittelpunkt des durch die Punkte A, B und C beschriebenen Kreises sein.

Fig. 198.



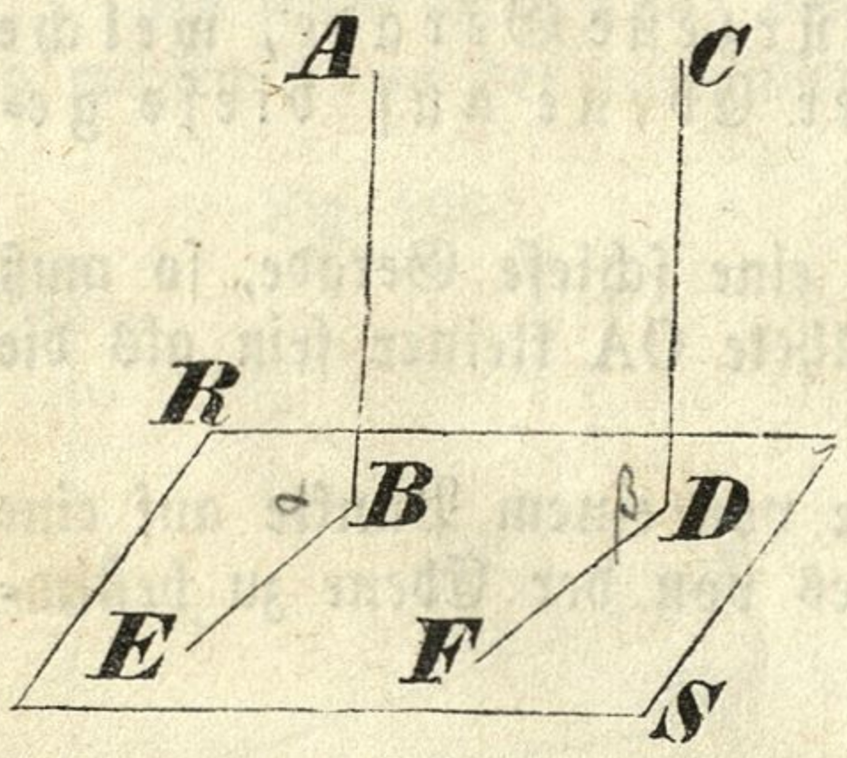
Zieht man AP, BP und CP, so haben die bei P rechtwinkligen Dreiecke AOP, BOP und COP eine gemeinschaftliche Kathete OP und gleiche Hypotenusen, folglich sind sie kongruent und müssen auch die andere Kathete gleich haben, mithin ist AP = BP = CP, und also P wirklich der Mittelpunkt des durch A, B und C gelegten Kreises.

Auf gleiche Weise kann man auch den Satz beweisen:

b) Zwei Gerade, die von demselben Punkte zu einer Ebene schief gezogen werden, sind einander gleich, wenn ihre Fußpunkte von dem Fußpunkte der Senkrechten gleichweit abstehen.

§. 271. Wenn von zwei parallelen Geraden die eine auf einer Ebene senkrecht steht, so ist auch die andere auf diese Ebene senkrecht.

Fig. 199.

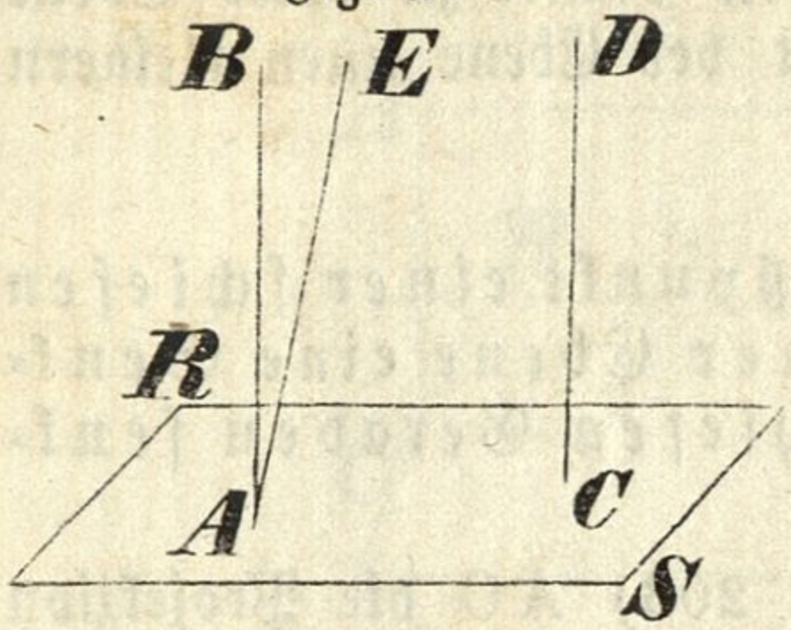


Es sei (Fig. 199) AB ∥ CD und AB ⊥ RS, so muß auch CD ⊥ RS sein. Man ziehe durch D in der Ebene RS die willkürliche Gerade DF, und damit parallel die Gerade BE, so müssen die Winkel D und B gleich sein, weil sie parallele Schenkel haben; aber nach der Voraussetzung ist B ein rechter Winkel, also muß es auch D sein, und es ist CD ⊥ DF. Da nun DF in der Ebene RS durch D ganz willkürlich gezogen wurde, so gilt das von DF Bewiesene auch von jeder anderen durch D in der Ebene RS gezogenen Geraden; CD steht demnach auf allen solchen geraden Linien, mithin auf der Ebene RS selbst senkrecht.

§. 272. Wenn zwei Gerade auf einer Ebene senkrecht stehen, so sind sie parallel.

Es seien (Fig. 200) AB und CD senkrecht auf RS, so muß AB ∥ CD sein. Wäre AB nicht parallel mit CD, so müßte sich durch A eine an-

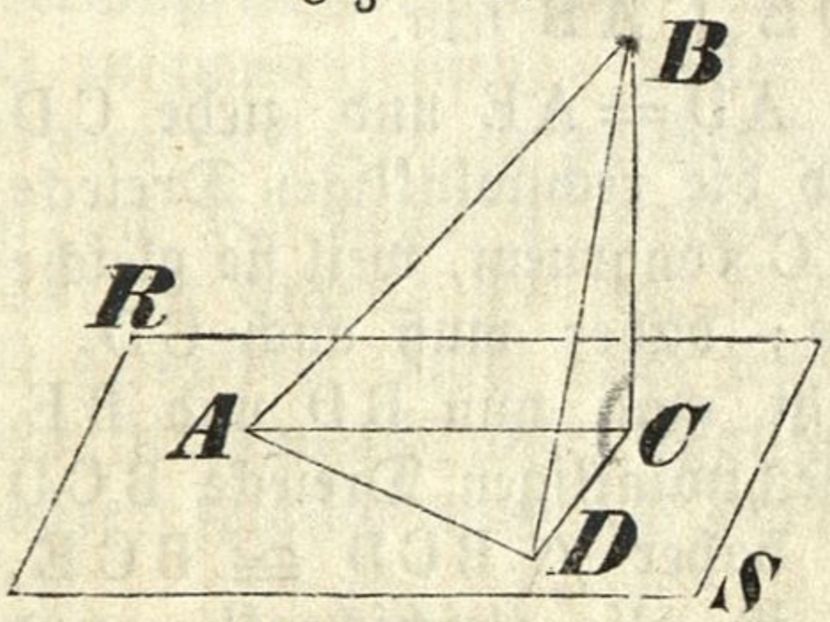
Fig. 200.



dere mit CD parallele Linie AE ziehen lassen; dann müßte AE ⊥ RS sein, was nicht möglich ist, da im Punkte A auf die Ebene RS nicht zwei verschiedene Senkrechte AB und AE errichtet werden können. Die Annahme, daß AB mit CD nicht parallel sei, ist demnach nicht möglich; folglich muß AB ∥ CD sein.

§. 273. Der Neigungswinkel ist der kleinste Winkel, den eine Gerade mit einer Ebene bilden kann.

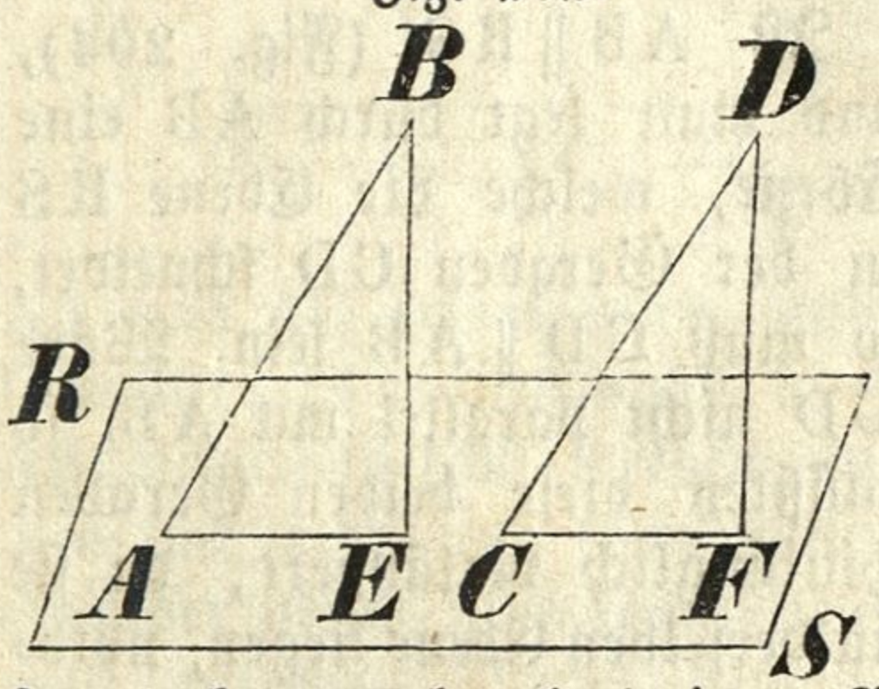
Fig. 201.



Ist BC ⊥ RS (Fig. 201), so ist BAC der Neigungswinkel der Geraden AB in der Ebene RS Zieht man durch A in der Ebene RS außer der AC irgend eine Gerade AD = AC, ferner noch die CD und BD, so ist das Dreieck BCD bei C rechtwinklig, daher BC < BD. Vergleicht man nun die beiden Dreiecke BAC und BAD, so findet man, daß in denselben AB = AB, AC = AD, aber BC < BD ist; daher muß auch der Winkel BAC < BAD sein. Auf gleiche Weise kann man zeigen, daß der Winkel BAC kleiner ist als jeder andere Winkel, den die Ab mit einer durch A in der Ebene RS gezogenen Geraden bildet.

§. 274. Wenn zwei Parallele auf einer Ebene schief aufstehen, so bilden sie mit dieser Ebene gleiche Neigungswinkel.

Fig. 202.



Es sei AB ∥ CD (Fig. 202). Fällt man von B und D auf die Ebene RS die Senkrechten BE und DF, und zieht AE und CF, so sind BAE und DCF die Neigungswinkel der Geraden AB und CD gegen die Ebene RS. In den Dreiecken ABE und CDF sind nun die Winkel E und F als rechte einander gleich, ferner auch die Winkel B und D gleich, weil ihre Schenkel parallel sind; es müssen daher auch die dritten Winkel A und C gleich sein; folglich bilden AB und CD mit der Ebene RS gleiche Neigungswinkel.

§. 275. Man suche hier noch folgende Sätze zu erweisen:

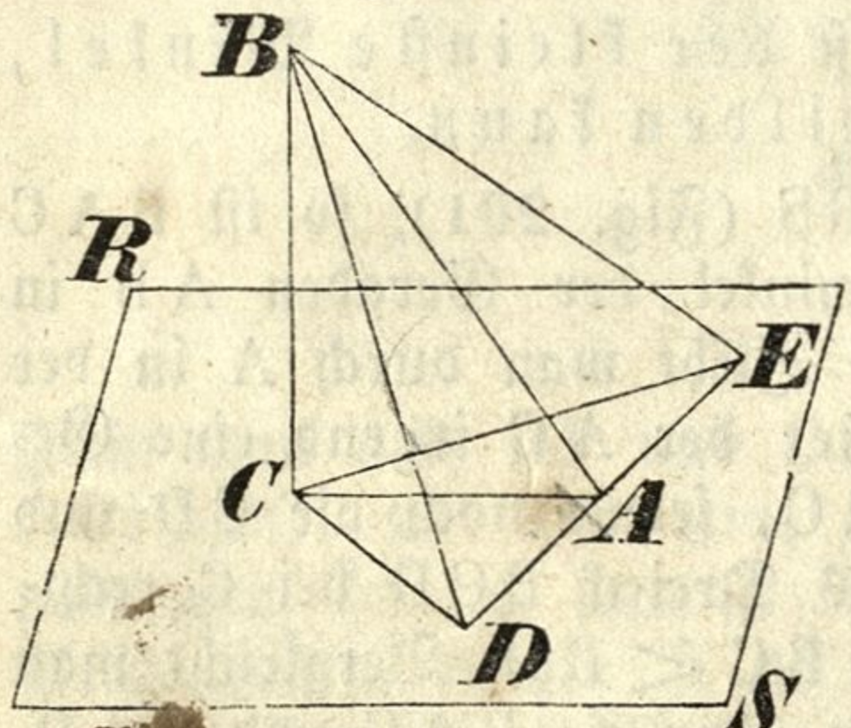
a) Alle von einem Punkte zu einer Ebene gezogenen Geraden, welche mit der Ebene gleiche Neigungswinkel bilden, sind einander gleich.

b) Von zwei Geraden, welche durch denselben Punkt zu einer Ebene gezogen werden, ist diejenige größer, welche mit der Ebene einen kleinern Neigungswinkel bildet.

c) Von zwei Geraden, welche aus demselben Punkte zu einer Ebene gezogen werden, bildet die größere mit der Ebene einen kleinern Neigungswinkel.

§. 276. Zieht man durch den Fußpunkt einer schiefen Geraden auf ihre Projekzion in einer Ebene eine Senkrechte, so muß diese auch auf der schiefen Geraden senkrecht stehen.

Fig. 203.

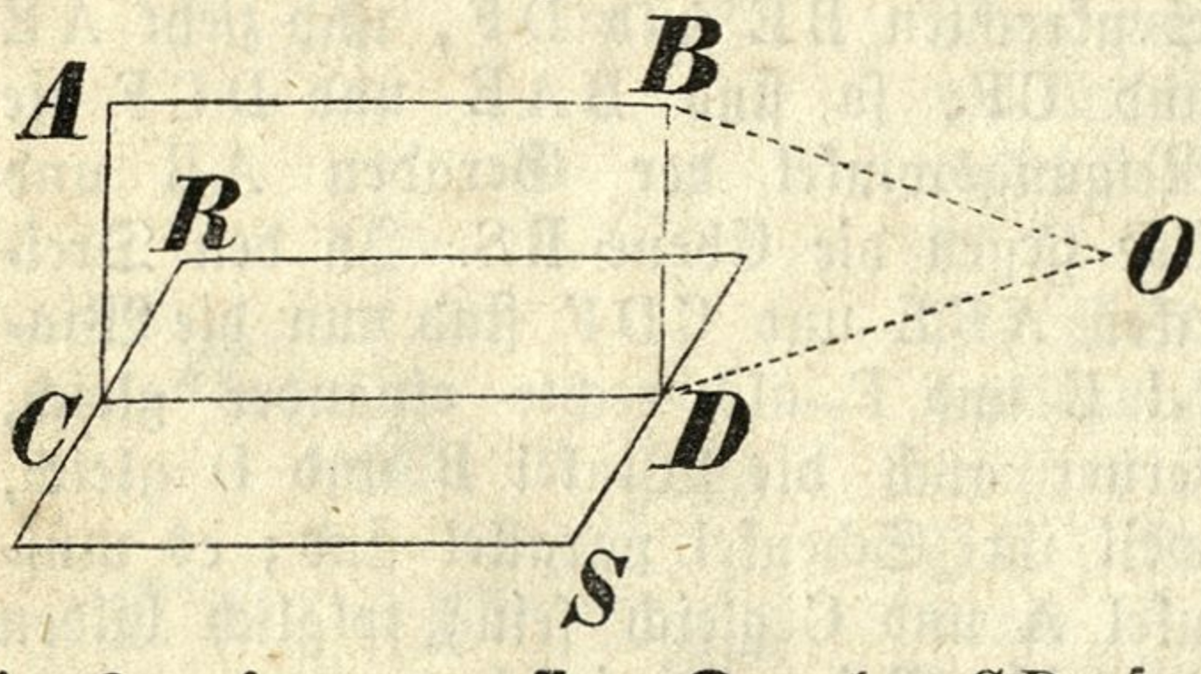


Es sei (Fig. 203) AC die Projekzion der schiefen Geraden AB in der Ebene RS, somit BC ⊥ Ebene RS; ferner sei die in der Ebene RS gezogene Gerade DE ⊥ AC; so muß auch DE ⊥ AB sein.

Man mache AD = AE und ziehe CD und CE, so sind die rechtwinkligen Dreiecke DAC und EAC kongruent, weil sie gleiche Katheten haben; daher muß auch CD = CE sein. Zieht man nun BD und BE, so haben die rechtwinkligen Dreiecke BCD und BCE ebenfalls gleiche Katheten; es ist daher △ BCD ≅ BCE, und folglich BD = BE. Das Dreieck BDE ist also gleichschenklig, und es muß die Gerade BA, welche darin den Scheitel B mit der Mitte A der Grundlinie DE verbindet, auf dieser senkrecht stehen; mithin ist wirklich DE ⊥ AB.

§. 287. Wenn eine Gerade mit einer Ebene parallel ist, und man legt dadurch eine Ebene, welche die andere Ebene schneidet, so muß die Durchschnittslinie mit jener Geraden parallel sein.

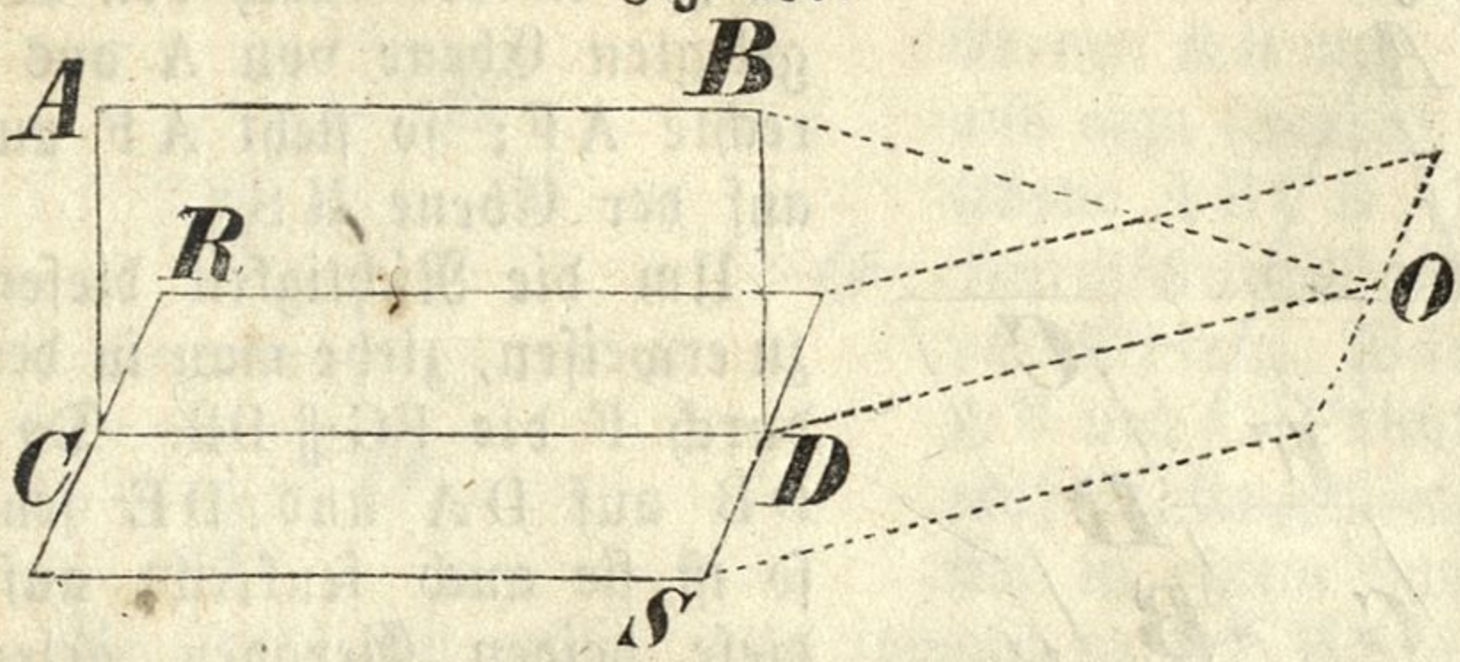
Fig. 204.



Ist AB ∥ RS (Fig. 204), und man legt durch AB eine Ebene, welche die Ebene RS in der Geraden CD schneidet, so muß CD ∥ AB sein. Wäre CD nicht parallel mit AB, so müßten diese beiden Geraden hinlänglich verlängert, da sie in derselben Ebene liegen, nothwendig in einem Punkte, z. B. in O zusammentreffen. Da aber CD, somit auch jeder Punkt ihrer Verlängerung in der Ebene RS liegt, so müßte die Gerade AB im Punkte O mit der Ebene RS zusammentreffen, was der Annahme AB ∥ RS widerspricht. Es muß daher CD ∥ AB sein.

§. 278. Wenn eine außerhalb einer Ebene liegende Gerade mit einer Geraden, welche in der Ebene liegt, parallel ist, so ist die erstere Gerade mit der Ebene selbst parallel.

Fig. 205.

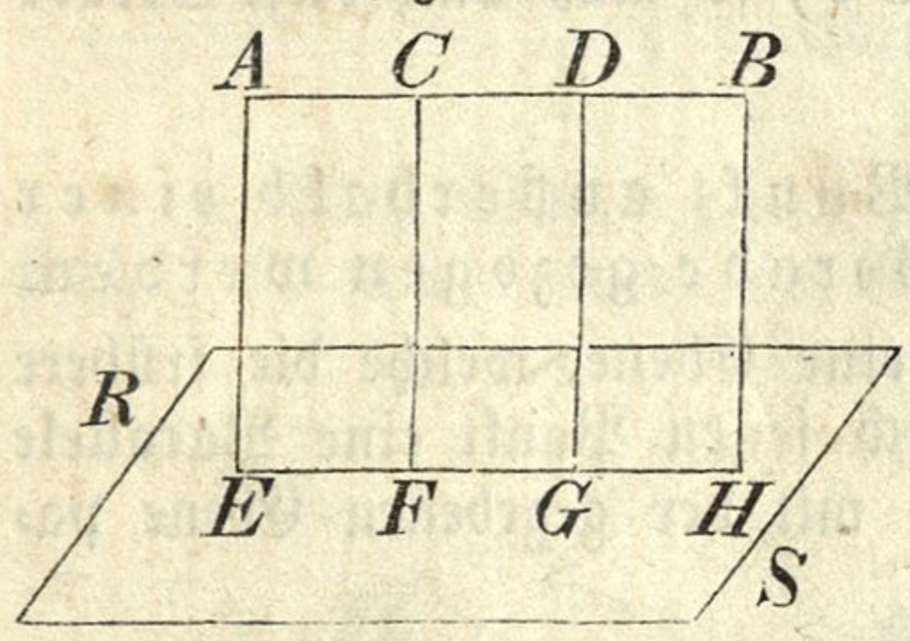


Es sei (Fig. 205) AB ∥ CD, so muß auch AB ∥ Ebene RS sein.

Wäre AB nicht parallel mit der Ebene RS, so müßte die gehörig verlängerte Gerade mit der hinlänglich erweiterten Ebene in einem Punkte O zusammentreffen. Dieser Punkt müßte nun, da er sich sowohl in der Ebene ABCD, in welcher die Verlängerung der AB liegt, als auch in der Ebene RS befindet, nothwendig in der Durchschnittslinie CD der beiden Ebenen liegen; AB und CD würden also verlängert sich in einem Punkte O schneiden, was nicht sein kann, weil AB ∥ CD angenommen wurde. Es ist demnach nicht möglich, daß AB mit der Ebene RS nicht parallel wäre; folglich muß AB ∥ RS sein.

§. 279. Eine mit einer Ebene parallele Gerade ist von derselben überall gleich weit entfernt.

Fig. 206.



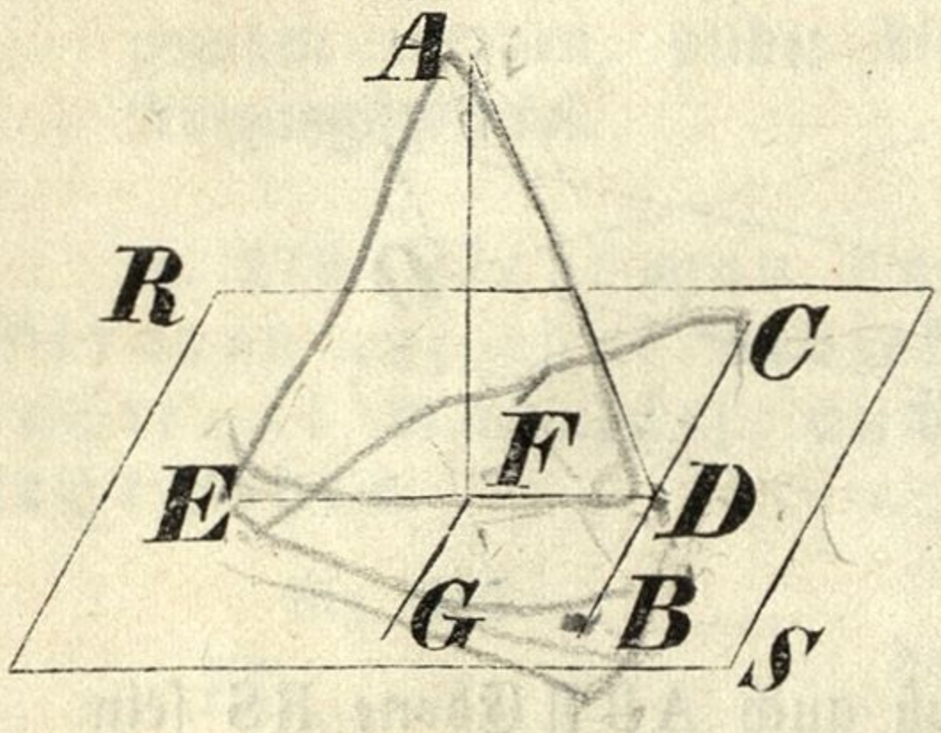
Es sei (Fig. 206) AB ∥ RS. Fällt man von beliebig vielen Punkten der Geraden AB auf die Ebene RS senkrechte Linien AE, CF, DG, BH, welche daher die Entfernungen jener Punkte von der Ebene RS vorstellen, so müssen diese Geraden, da sie auf derselben Ebene senkrecht stehen, mit einander parallel sein, und daher, da sie zugleich durch die Gerade AB gehen, alle in einer Ebene liegen, welche durch AB und AE gelegt wird, und welche die Ebene RS in der Geraden EH schneidet; es müssen daher die Fußpunkte aller Senkrechten, welche von der AB auf RS gefällt werden, in die Gerade EH fallen. Nun ist AB ∥ EH, also sind auch jene Senkrechten als parallele Gerade zwischen Parallelen einander gleich, und somit alle Punkte der AB von der Ebene RS gleichweit entfernt.

Aufgaben.

§. 280. Es soll von einem Punkte A (Fig. 207) außerhalb einer Ebene RS auf diese eine senkrechte Gerade gefällt werden.

Man ziehe in der Ebene RS eine beliebige Gerade BC, fälle in der durch A und BC gelegten Ebene von A auf BC die Senkrechte AD; in D errichte man in der Ebene RS auf BC die Senkrechte DE, und führe

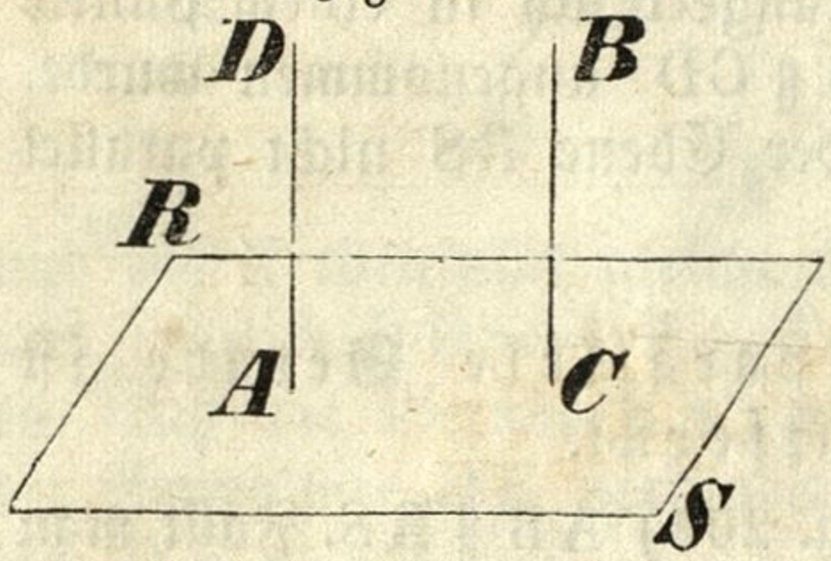
Fig. 207.



darauf in der durch den Winkel ADE gelegten Ebene von A aus die Senkrechte AF; so steht AF auch senkrecht auf der Ebene RS.

Um die Richtigkeit dieser Auflösung zu erweisen, ziehe man in der Ebene RS durch F die FG ‖ DB. Da die Gerade DB auf DA und DE senkrecht steht, so ist sie auch senkrecht auf der durch diese beiden Geraden gelegten Ebene ADE, und weil FG ‖ DB, so muß auch FG auf der Ebene ADE und somit auf der Geraden AF senkrecht stehen. Wenn aber die Gerade AF sowohl auf FG als auf DF, welche beide in der Ebene RS liegen, senkrecht steht, so ist sie auch senkrecht auf der Ebene RS.

Fig. 208.



§ 281. Es soll in dem Punkte A (Fig. 208) einer Ebene RS auf diese eine senkrechte Gerade errichtet werden.

Man fälle von einem beliebigen außerhalb der Ebene RS liegenden Punkte B auf dieselbe eine Senkrechte BC, und ziehe in der durch A und BC gelegten Ebene durch A die AD ‖ BC; so muß auch diese Gerade AD auf der Ebene RS senkrecht stehen.

§. 282. Es soll durch einen Punkt außerhalb einer Ebene mit dieser eine parallele Gerade gezogen werden.

Man lege durch den gegebenen Punkt eine Ebene, welche die frühere in einer Geraden schneidet, und ziehe durch jenen Punkt eine Parallele zu dieser Geraden; so wird dieselbe auch mit der gegebenen Ebene parallel sein.

§. 283. Aufgaben zur Selbstübung im Auflösen:

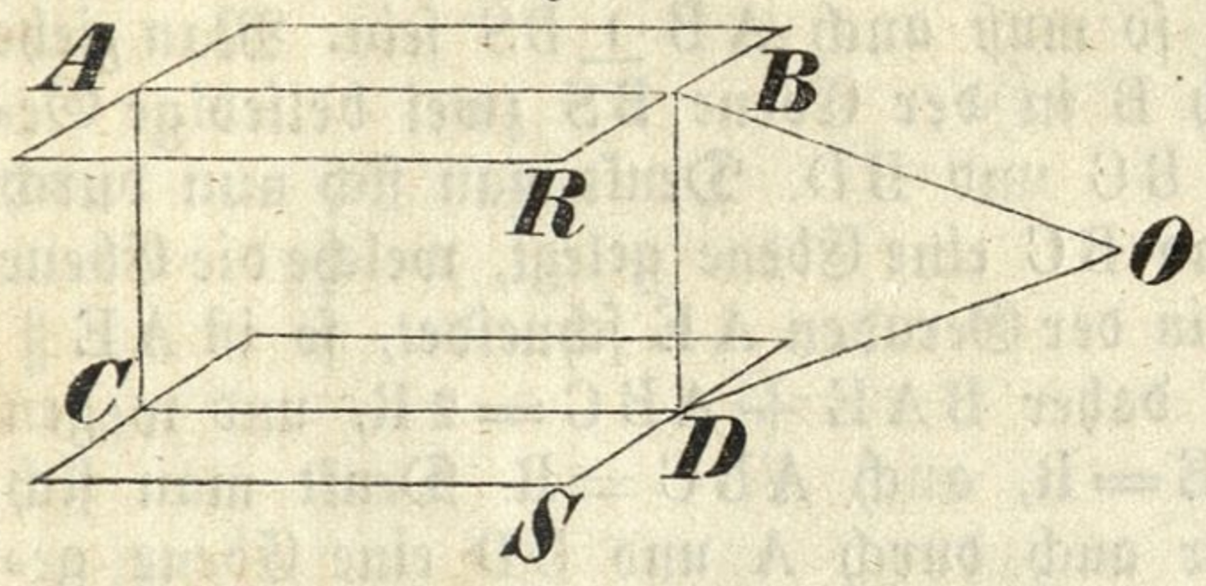
1. Durch einen gegebenen Punkt einer Geraden auf diese eine senkrechte Ebene zu legen.
2. In einer Ebene einen Punkt zu bestimmen, welcher von drei außerhalb der Ebene liegenden Punkten gleichweit absteht.
3. Durch eine Gerade eine Ebene zu legen, von welcher ein gegebener Punkt eine gegebene Entfernung hat.

III. Ebenen mit Ebenen verglichen.

Lehrsätze.

§. 284. Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten werden, so sind die Durchschnittslinien parallel.

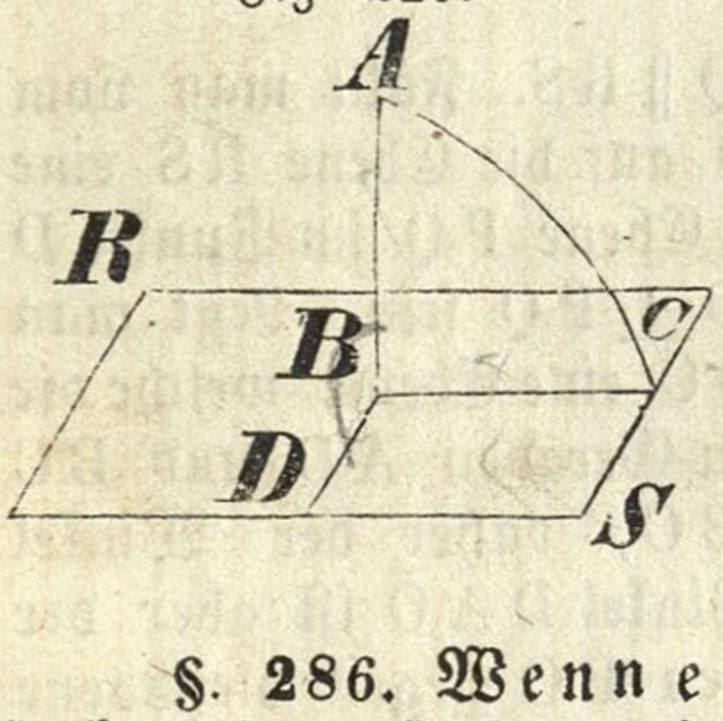
Fig. 209.



Es seien (Fig. 209) die Ebenen AR und CS parallel, und man schneide sie durch die Ebene ABCD, so müssen die Durchschnittslinien AB und CD parallel sein. Wären die Linien AB und CD nicht parallel, so müßten sie gehörig verlängert, sich in einem Punkte, z. B. in O schneiden. Dieser Punkt müßte nun sowohl in der Ebene AR als in der Ebene CS liegen, was nicht sein kann, weil diese Ebenen nach der Voraussetzung parallel sind und somit keinen gemeinschaftlichen Punkt haben können. Es muß also AB ∥ CD sein.

§. 284. Wenn eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht, und man legt durch die Gerade eine Ebene, so ist diese auf der erstern Ebene senkrecht.

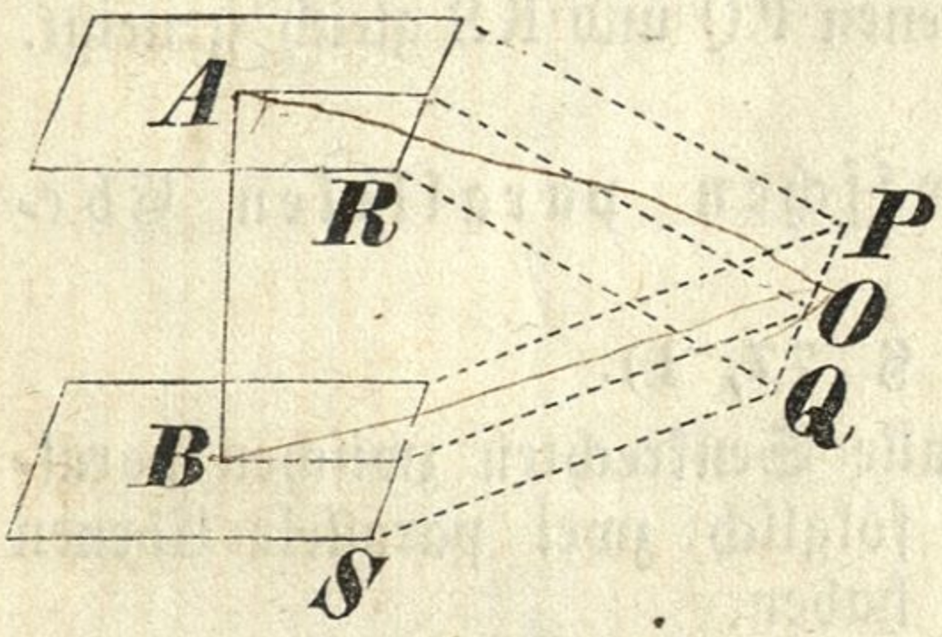
Fig. 210.



Es sei AB ⊥ RS (Fig. 210), so muß auch die Ebene ABC ⊥ RS sein. Man ziehe in der Ebene RS auf die gemeinschaftliche Durchschnittslinie BC die Senkrechte BD, so ist ABD der Neigungswinkel der Ebene ABC gegen die Ebene RS. Der Winkel ABD aber ist wegen AB ⊥ RS ein rechter; folglich ist die Ebene ABC ⊥ RS.

§. 286. Wenn eine Gerade auf zwei Ebenen senkrecht steht, so müssen diese Ebenen parallel sein.

Fig. 211.



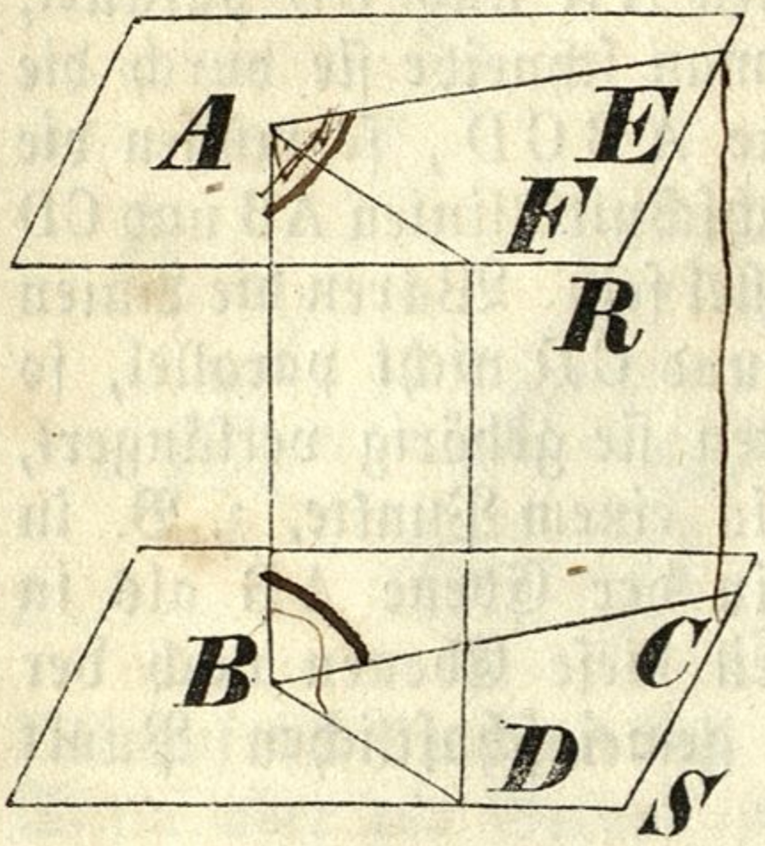
Es sei AB (Fig. 211) senkrecht auf den Ebenen AR und BS, so muß AR ∥ BS sein. Wären diese beiden Ebenen nicht parallel, so müßten sie hinlänglich erweitert sich in irgend einer geraden Linie PQ schneiden. Nimmt man in dieser Linie einen beliebigen Punkt O an, und zieht OA und OB, so erhält man ein Dreieck ABO, worin zwei rechte Winkel OAB und ABO vorkämen, was nicht sein kann. Die Annahme, daß sich die beiden Ebenen AR und BS durchschneiden, führt also auf eine Ungereimtheit; folglich muß AR ∥ BS sein.

Daraus läßt sich auch folgern:

Wenn zwei Ebenen sich schneiden, so kann keine gerade Linie auf beiden zugleich senkrecht stehen.

§. 287. Wenn eine Gerade auf einer von zwei parallelen Ebenen senkrecht steht, so ist sie auch auf der andern senkrecht.

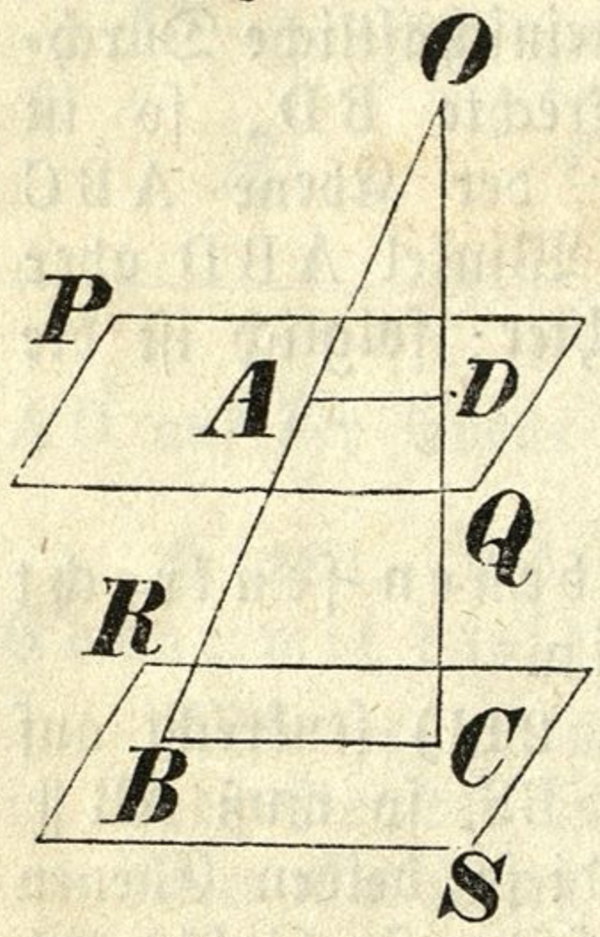
Fig. 212.



Es sei (Fig. 212) AR ∥ BS, und AB ⊥ AR, so muß auch AB ⊥ BS sein. Man ziehe durch B in der Ebene BS zwei beliebige Gerade BC und BD. Denkt man sich nun durch A und BC eine Ebene gelegt, welche die Ebene AR in der Geraden AE schneidet, so ist AE ∥ BC, daher BAE + ABC = 2R, und wegen BAE = R, auch ABC = R. Denkt man sich ferner auch durch A und BD eine Ebene gelegt, welche die Ebene AR in der Geraden AF durchschneidet, so ist AF ∥ BD, daher BAF + ABD = 2R, und wegen BAF = R auch ABD = R. Die Gerade AB steht demnach auf der Ebene BS so auf, daß sie mit BC und BD rechte Winkel bildet; folglich ist AB ⊥ BS.

§. 288. Eine Gerade ist gegen zwei parallele Ebenen gleich geneigt.

Fig. 213.



Es sei (Fig. 213) PQ ∥ RS. Fällt man vom Punkte O der Geraden BO auf die Ebene RS eine Senkrechte OC, welche die Ebene PQ im Punkte D schneidet, so muß auch OD ⊥ PQ sein. Legt man nun durch den Winkel BOC eine Ebene, welche die Ebenen PQ und RS in den Geraden AD und BC schneidet, so muß AD ∥ BC, daher der Winkel DAO = CBO sein. Der Winkel DAO ist aber der Neigungswinkel der Geraden BO gegen die Ebene PQ, und CBO der Neigungswinkel der BO gegen die Ebene RS; also ist wirklich die BO gegen die beiden parallelen Ebenen PQ und RS gleich geneigt.

§. 289. Parallele Linien zwischen parallelen Ebenen sind einander gleich.

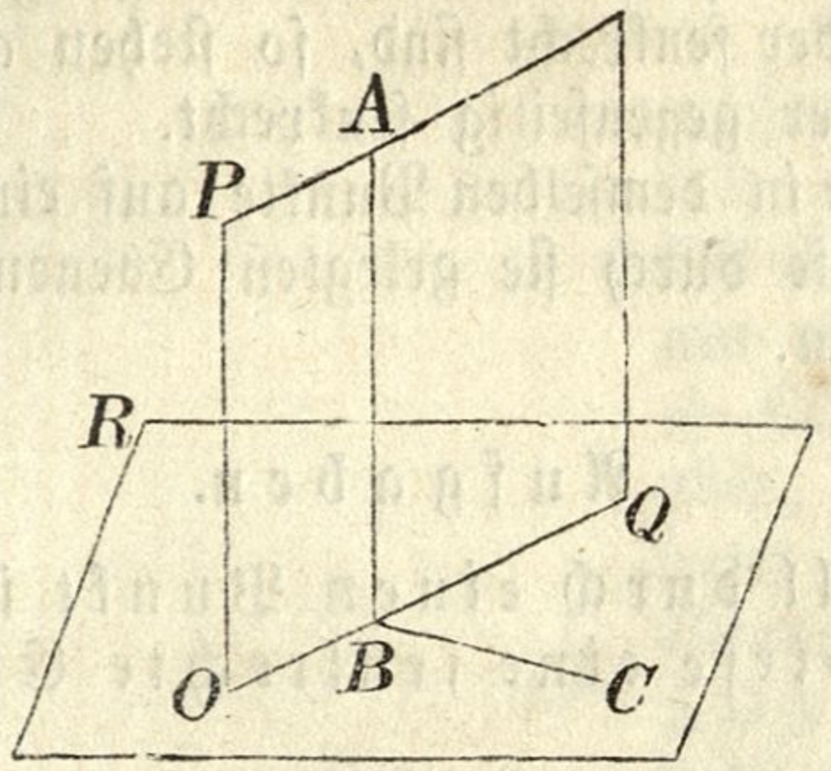
Der Beweis folgt aus §. 284 und §. 77, 1).

Aus diesem Satze folgt auch, daß alle Senkrechten zwischen parallelen Ebenen einander gleich sind, daß folglich zwei parallele Ebenen überall dieselbe Entfernung von einander haben.

§. 290. Wenn zwei Ebenen auf einander senkrecht stehen, und man zieht in der einen Ebene eine Senkrechte auf die gemeinschaftliche Durchschnittslinie, so ist dieselbe auch senkrecht auf die zweite Ebene.

Es sei (Fig. 214) PQ ⊥ RS und AB ⊥ OQ, so muß AB ⊥ RS sein. Man ziehe durch B in der Ebene RS die Gerade BC ⊥ OQ, so ist ABC als Neigungswinkel der Ebenen PQ und RS nach der Voraussetzung ein rechter Winkel. Es steht daher die Gerade AB senkrecht auf BC, und

Fig. 214.



da ſie auch auf BQ ſenkrecht iſt, ſo ſteht AB auf der Ebene RS ſelbſt ſenkrecht.

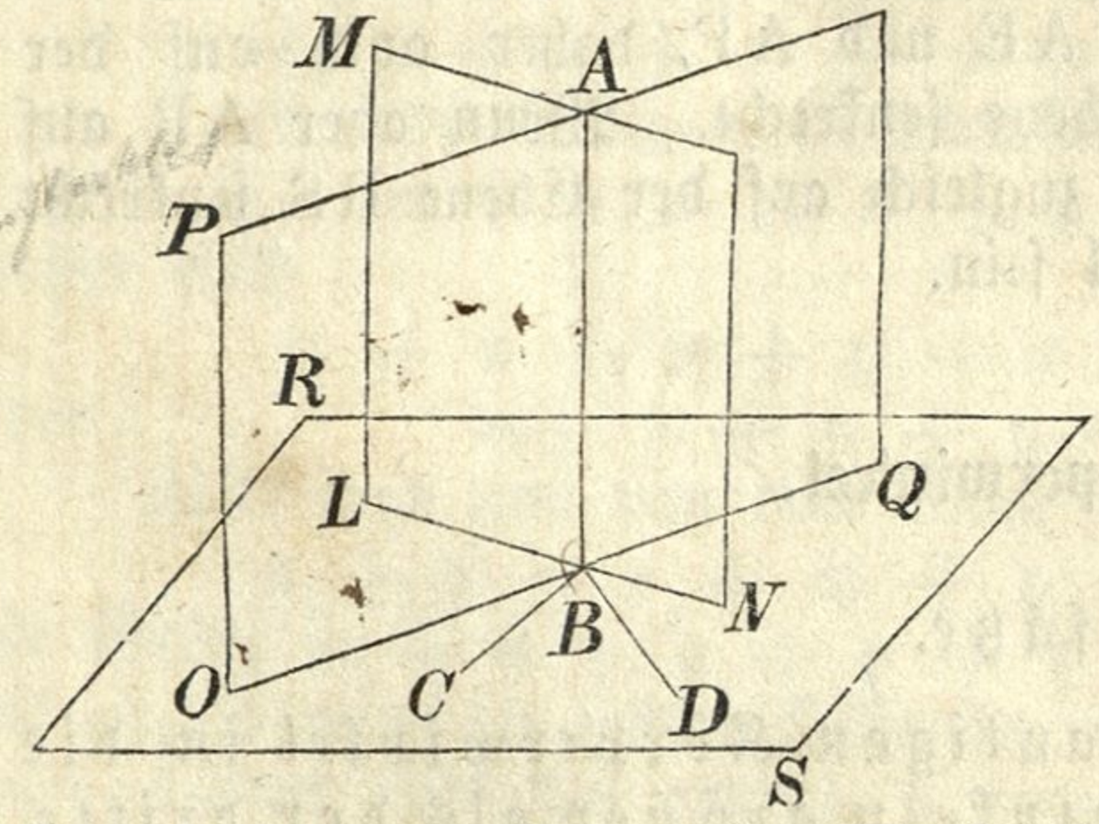
§. 291. Mit Hilfe des eben entwickelten Lehrſatzes verſuche der Anfänger auch folgende zwei Sätze indirekt zu beweiſen:

a) Wenn zwei Ebenen auf einander ſenkrecht ſtehen, und man fällt aus einem Punkte der einen auf die andere eine ſenkrechte Gerade, ſo muß dieſe ganz in der erſteren Ebene liegen.

b) Wenn zwei Ebenen auf einander ſenkrecht ſtehen, und man errichtet in einem Punkte der Durchſchnittslinie auf die eine Ebene eine Senkrechte, ſo muß dieſe ganz in die andere Ebene hineinfallen.

§. 292. Wenn zwei ſich ſchneidende Ebenen auf derſelben dritten Ebene ſenkrecht ſtehen, ſo iſt auch ihre Durchſchnittslinie auf dieſer Ebene ſenkrecht.

Fig. 215.



Es ſei (Fig. 215) MN ⊥ RS und PQ ⊥ RS, ſo muß auch AB ⊥ RS ſein. Wenn man in der Ebene RS in B auf die Durchſchnittslinie LN eine Senkrechte BC errichtet, ſo muß nach §. 290 BC ⊥ MN, alſo ABC = R ſein. Errichtet man ferner in der Ebene RS in B auf die Durchſchnittslinie OQ die Senkrechte BD, ſo muß BD ⊥ PQ, daher ABD = R ſein. Es ſtehet ſomit die AB auf der Ebene RS ſo auf, daß ſie mit BC und BD rechte Winkel bildet, folglich ſteht ſie auf der Ebene RS ſelbſt ſenkrecht.

§. 293. Sätze zur Selbſtauffindung der Beweiſe:

a) Durch denſelben Punkt kann mit einer Ebene nur eine einzige Ebene parallel gelegt werden.

b) Wenn durch einen Punkt drei Ebenen gelegt werden, welche wechselseitig auf einander senkrecht sind, so stehen auch ihre Durchschnittslinien auf einander gegenseitig senkrecht.

c) Wenn drei Gerade in demselben Punkte auf einander senkrecht stehen, so müssen auch die durch sie gelegten Ebenen auf einander wechselseitig senkrecht sein.

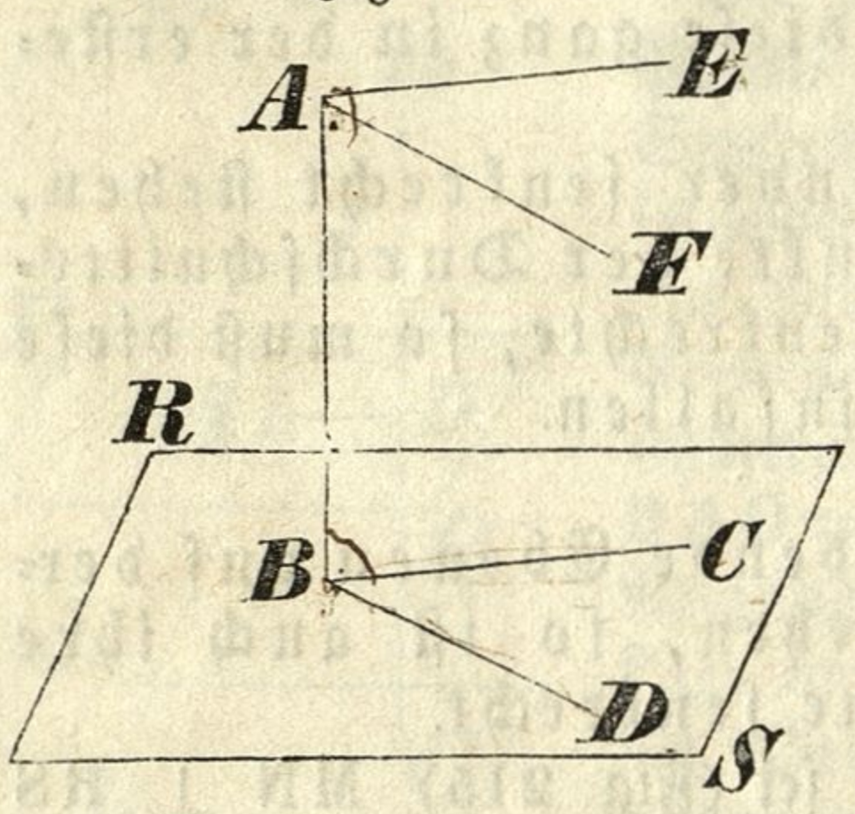
Aufgaben.

§. 294. Es soll durch einen Punkt in oder außerhalb einer Ebene auf diese eine senkrechte Ebene geführt werden.

Man ziehe durch den gegebenen Punkt auf die Ebene eine senkrechte Gerade und lege dadurch eine Ebene, so ist dieselbe auf der ersten Ebene senkrecht.

§. 295. Es soll durch einen Punkt A (Fig. 216) außerhalb einer Ebene RS mit dieser eine parallele Ebene gelegt werden.

Fig. 216.



Man fälle von A eine Senkrechte AB auf die Ebene RS, ziehe von B aus in dieser Ebene zwei beliebige Gerade BC und BD, führe sodann in der durch ABC gelegten Ebene die AE ∥ BC, und in der durch ABD gelegten Ebene die AF ∥ BD. Legt man nun durch den Winkel EAF eine Ebene, so muß diese mit der Ebene RS parallel sein.

Es ist nämlich wegen AE ∥ BC und ABC = R, auch BAE = R; ferner wegen AF ∥ BD und ABD = R, auch BAF = R. Die Gerade AB steht also auf AE und AF, daher auch auf der durch den Winkel EAF gelegten Ebene senkrecht. Wenn aber AB auf der durch EAF gelegten Ebene und zugleich auf der Ebene RS senkrecht steht, so müssen diese Ebenen parallel sein.

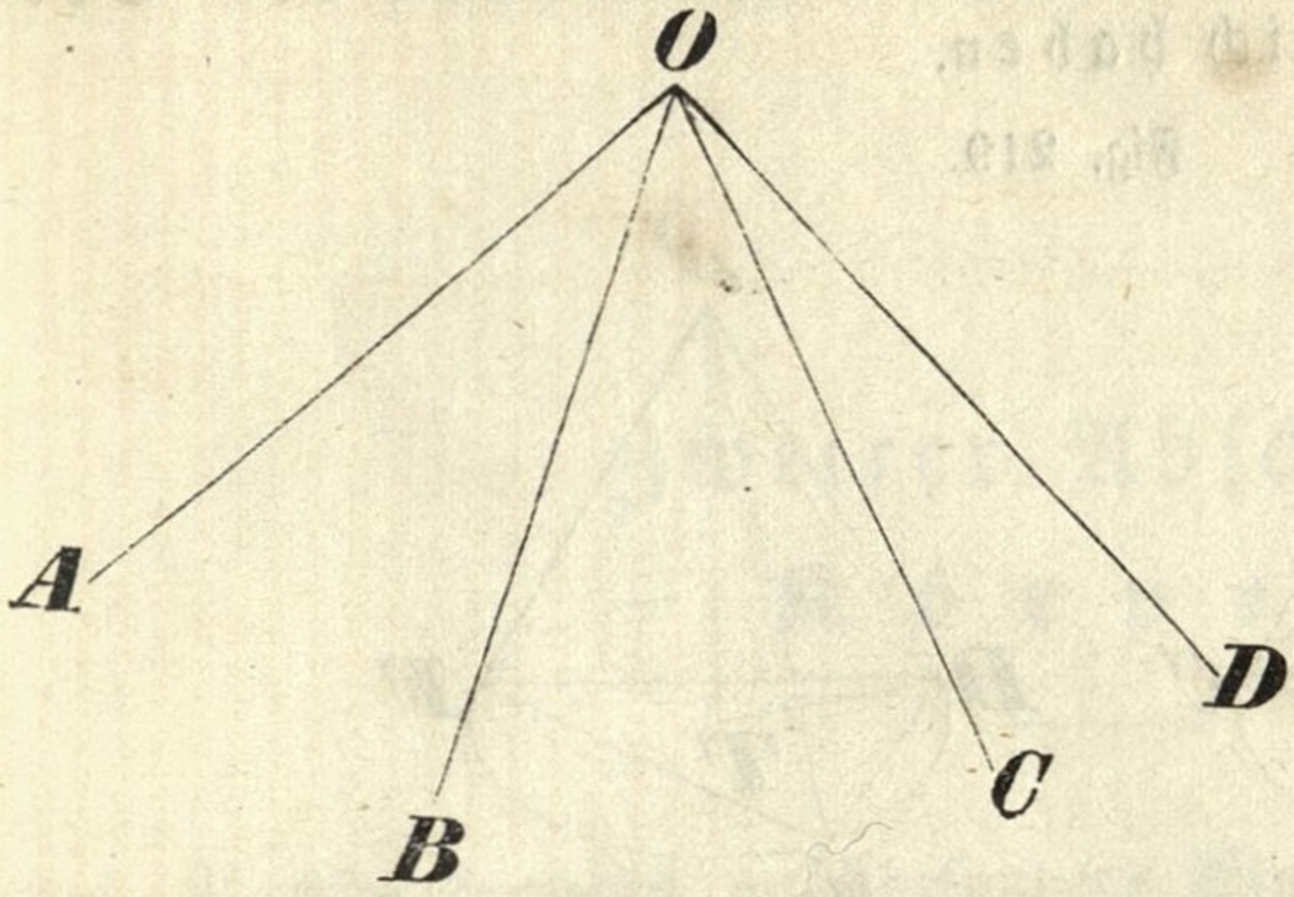
IV. Körperwinkel.

Lehrsätze.

§. 296. In jedem dreikantigen Körperwinkel ist die Summe von je zwei Kantenwinkeln größer als der dritte.

Um die Richtigkeit dieses Satzes nachzuweisen, soll (Fig. 217) aus den drei ebenen Winkeln AOB, BOC und COD, von denen BOC der größte sei, ein Körperwinkel gebildet werden. Zu diesem Ende wird man die Ebenen AOB und COD um die Geraden OB und OC so lange gegen einander drehen, bis die Geraden OA und OD in einander fallen. Würden diese Geraden gar nicht, oder in der Ebene BOC zusammenfallen, so entstünde

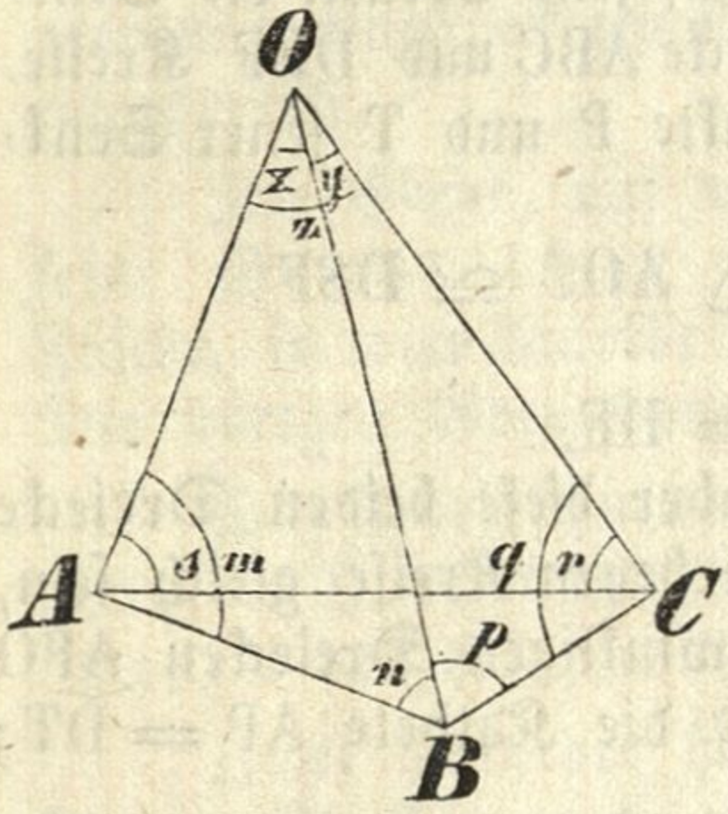
Fig. 217.



kein Körperwinkel. Damit ein Körperwinkel entstehe, müssen die Geraden OA und OD außerhalb der Ebene BOC zusammenfallen, was nur möglich ist, wenn AOB + COD > BOC ist. Es ist aber, da BOC der größte unter den drei gegebenen Winkeln ist, offenbar auch AOB + BOC > COD und BOC + COD > AOB. In einem dreikantigen Körperwinkel ist also wirklich die Summe von je zwei Kantenwinkeln größer als der dritte.

§. 297. In jedem Körperwinkel ist die Summe aller Kantenwinkel kleiner als vier Rechte.

Fig. 218.



Betrachten wir den dreikantigen Körperwinkel O (Fig. 218) und legen durch einen beliebigen Punkt A der Kante OA eine Ebene, welche die beiden anderen Kanten in den Punkten B und C durchschneidet, so bildet die Durchschnittsfigur das Dreieck ABC, in welchem

$$A + B + D = 2R$$

ist. Setzt man der Kürze halber AOB = x BOC = y, AOC = z, ferner OAB = m, OBA = n, OBC = p, OCB = q, OCA = r, OAC = s, so ist, da alle diese Winkel die Winkel von drei Dreiecken vorstellen.

$$x + y + z + m + n + p + q + r + s = 6R.$$

An den dreikantigen Körperwinkeln A, B, C ist ferner

$$m + s > A,\ n + p > B,\ q + r > C,$$

daher auch

$$m + n + p + q + r + s > A + B + C$$

oder

$$m + n + p + q + r + s > 2R.$$

Zieht man nun von dem ersten Theile der Gleichung

$$x + y + z + m + n + q + p + r + s = 6R.$$

die Größe m + n + q + p + r + s, und von dem zweiten Theile 2R ab, so wird die erstere Differenz, wobei eine größere Zahl subtrahirt wird, kleiner ausfallen als die letztere; man wird demnach

$$x + y + z < 4R$$

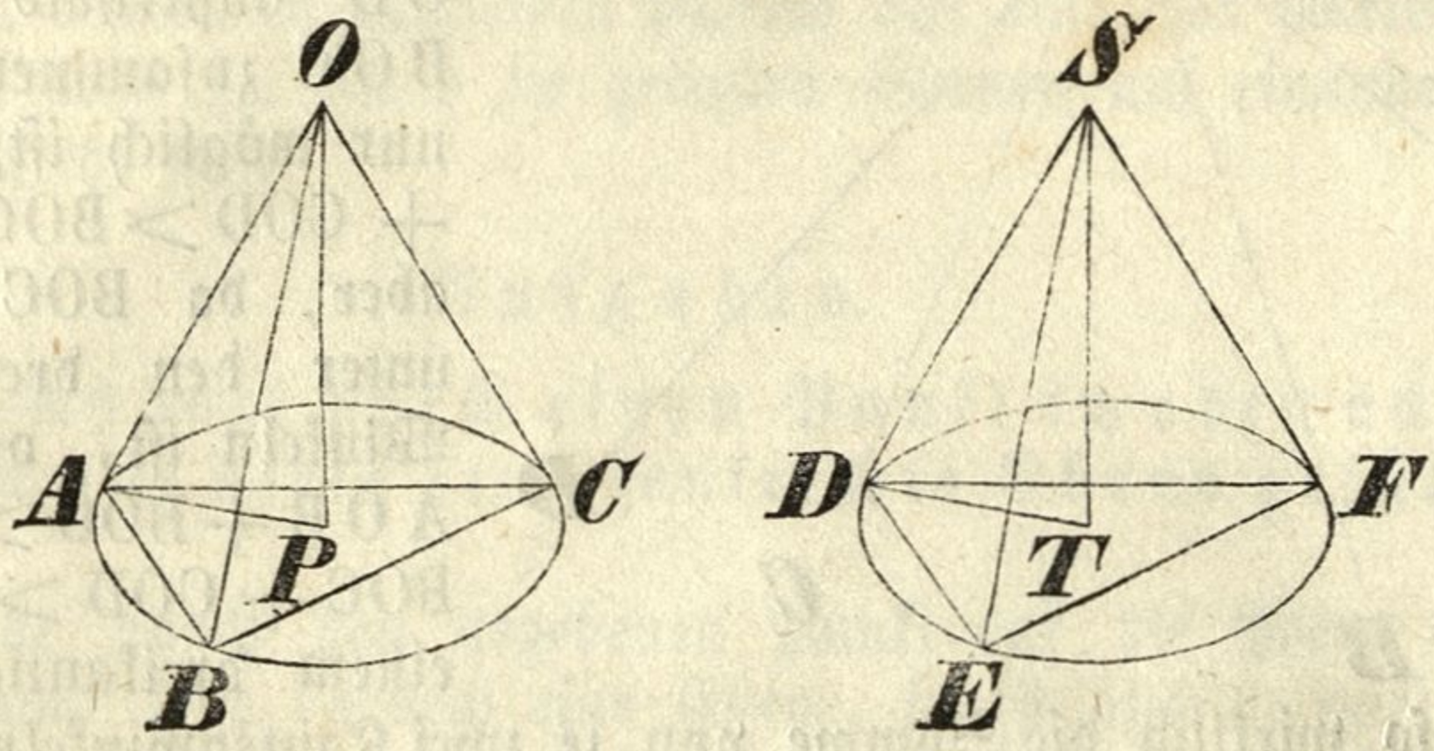
haben.

Auf gleiche Weise kann die Richtigkeit dieses Satzes bei vier- oder mehrkantigen Körperwinkeln erwiesen werden.

§. 298. Zwei dreikantige Körperwinkel sind kon-

gruent, wenn sie alle drei Kantenwinkel nach der Ordnung wechselseitig gleich haben.

Fig. 219.



Es sei (Fig. 219) der Kantenwinkel AOB = DSE, BOC = ESF, AOC = DSF, so müssen die Körperwinkel O und S kongruent sein. Um dieses zu beweisen, schneide man auf allen Kanten von den Spitzen aus gleiche Stücke ab, man mache nämlich OA = OB = OC = SD = SE = SF, und lege durch die Punkte A, B, C und D, E, F die Ebenen ABC und DEF. Fällt man nun von den Spitzen O und S auf jene Ebenen die Senkrechten OP und ST, und beschreibt um die Dreiecke ABC und DEF Kreise, so fallen ihre Mittelpunkte genau in die Fußpunkte P und T jener Senkrechten. Weil nun, wie leicht zu sehen,

$$\triangle AOB \cong DSE,\ \triangle BOC \cong ESF,\ \triangle AOC \cong DSF$$

ist, so folgt daraus, daß auch

$$AB = DE,\ BC = EF,\ AC = DF,$$

und somit das Dreieck $ABC \cong DEF$ ist. Sind aber diese beiden Dreiecke kongruent, so müssen auch die um dieselben beschriebenen Kreise gleich sein, folglich der Halbmesser AP = DT. In den rechtwinkligen Dreiecken APO und DTS ist nun die Hypotenuse AO = DS und die Kathete AP = DT; daher $\triangle$ APO $\cong$ DTS und PO = TS.

Denkt man sich nun den Körper SDEF so in den Körper OABC gelegt, daß sich die kongruenten Dreiecke DEF und ABC decken, so werden auch die um diese Dreiecke beschriebenen Kreise, folglich auch ihre Mittelpunkte T und P, in einander fallen; da ferner in P auf die Ebene ABC nur eine Senkrechte möglich ist, so fällt die TS in die Richtung der PO, und wegen TS = PO auch der Punkt S in den Punkt O; daher müssen auch die Ebenen DSE, ESF, DSF mit den Ebenen AOB, BOC, AOC zusammenfallen, es sind also die Körperwinkel S und O kongruent.

Zweiter Abschnitt.

Körper.

1. Erklärungen und besondere Eigenschaften der Körper.

1. Eckige Körper.

§. 299. Ein Körper, welcher von lauter Ebenen begrenzt wird, heißt ein eckiger Körper oder ein Polyeder.

Drei Ebenen schließen einen Raum nicht vollständig ab; zur Begrenzung eines eckigen Körpers sind daher wenigstens vier Ebenen erforderlich.

Die Ebene, auf welcher ein Körper aufstehend gedacht wird, heißt seine Grundfläche oder Basis. Liegt dieser gegenüber auch eine Fläche, so wird dieselbe die obere Grundfläche des Körpers genannt. Die übrigen Grenzebenen nennt man Seitenflächen des Körpers.

Die Durchschnittslinien zweier Grenzebenen heißen Kanten, und zwar die Durchschnittslinien zweier Seitenflächen insbesondere Seitenkanten des Körpers.

Zwei Polyeder heißen ähnlich, wenn sie in derselben Ordnung kongruente Körperecke und ähnliche Grenzflächen haben.

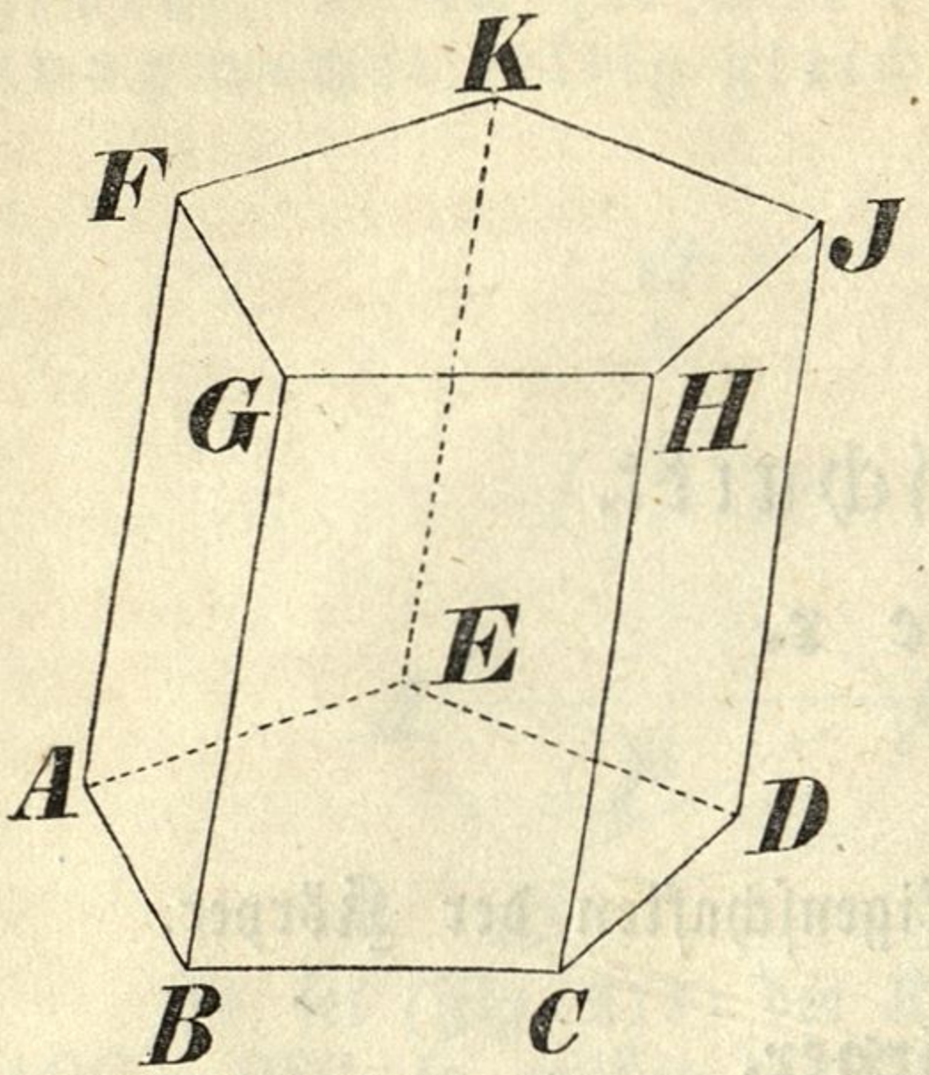
§. 300. Mit Rücksicht auf die Beschaffenheit der Grenzebenen theilt man die eckigen Körper in regelmäßige und unregelmäßige Körper ein. Regelmäßig heißt ein Körper, wenn er von lauter regelmäßigen und kongruenten Vielecken eingeschlossen wird; im entgegengesetzten Falle unregelmäßig.

Unter den unregelmäßigen Körpern kommen zwei Arten besonders häufig vor: Körper, deren alle Seitenkanten parallel sind, und Körper, deren alle Seitenkanten in einem Punkte zusammenlaufen. Die Körper der ersteren Art nennt man prismatische, die Körper der letzteren Art pyramidale Körper.

a) Das Prisma.

§. 301. Ein eckiger Körper, welcher zwei parallele Grundflächen und lauter parallele Seitenkanten hat, heißt ein Prisma.

Fig. 220.



Der Körper ABCDEFGHJK (Figur 220) ist ein Prisma, wenn die Ebene ABCDE || FGHJK, und wenn

AF || BG || CH || DJ || EK ist.

Aus der Erklärung eines Prisma geht hervor, daß seine beiden Grundflächen kongruente Vielecke sein müssen; denn je zwei gleichliegende Seiten sind als Parallele zwischen zwei parallelen Seitenkanten gleich, und je zwei gleichliegende Winkel sind als Winkel, deren Schenkel parallel sind, ebenfalls gleich.

Auch ist von selbst klar, daß alle Seitenflächen des Prisma Parallelogramme, und alle Seitenkanten gleich lang sind.

Eine Senkrechte, welche von irgend einem Punkte der obern Grundfläche auf die untere Grundfläche gefällt wird, heißt die Höhe des Prisma.

Eine Ebene, welche durch zwei nicht unmittelbar auf einander folgende Seitenkanten des Prisma gelegt wird, heißt ein Diagonalschnitt desselben.

Wird von einem Prisma durch eine mit der Basis nicht parallele Ebene ein Theil abgeschnitten, so heißt der Rest ein abgekürztes Prisma.

§. 302. Mit Rücksicht auf die Anzahl der Seitenkanten heißt ein Prisma ein drei-, vier- oder mehrseitiges, je nachdem es drei, vier oder mehrere Seitenkanten hat.

Mit Rücksicht auf die Lage der Seitenkanten gegen die Grundflächen unterscheidet man gerade und schiefe Prismen. Wenn die Seitenkanten auf den Grundflächen senkrecht aufstehen, so heißt das Prisma ein gerades; sonst ein schiefes.

Ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind, wird ein Parallelepiped genannt. Ein Parallelepiped kann so wie jedes Prisma gerade oder schief sein. Ein gerades Parallelepiped, dessen Grundflächen Rechtecke sind, heißt ein rechtwinkliges Parallelepiped. Ein rechtwinkliches Parallelepiped, dessen alle Kanten gleich sind, wird ein Kubus oder Würfel genannt; jede Kante heißt auch eine Seite des Würfels.

Jedes Parallelepiped wird von sechs Parallelogrammen, ein rechtwinkliges Parallelepiped von sechs Rechtecken, ein Würfel von sechs Quadraten begrenzt.

Lehrsätze.

§. 303. Wird ein Prisma durch eine Ebene geschnitten, welche mit der Grundfläche parallel ist, so ist die Durchschnittsfigur mit der Grundfläche kongruent.

Die gleichliegenden Seiten der Basis und des Schnittes sind als Parallele zwischen Parallelen gleich; die gleichliegenden Winkel haben

parallele Schenkel, sind also auch gleich; folglich ist der Schnitt mit der Grundfläche kongruent.

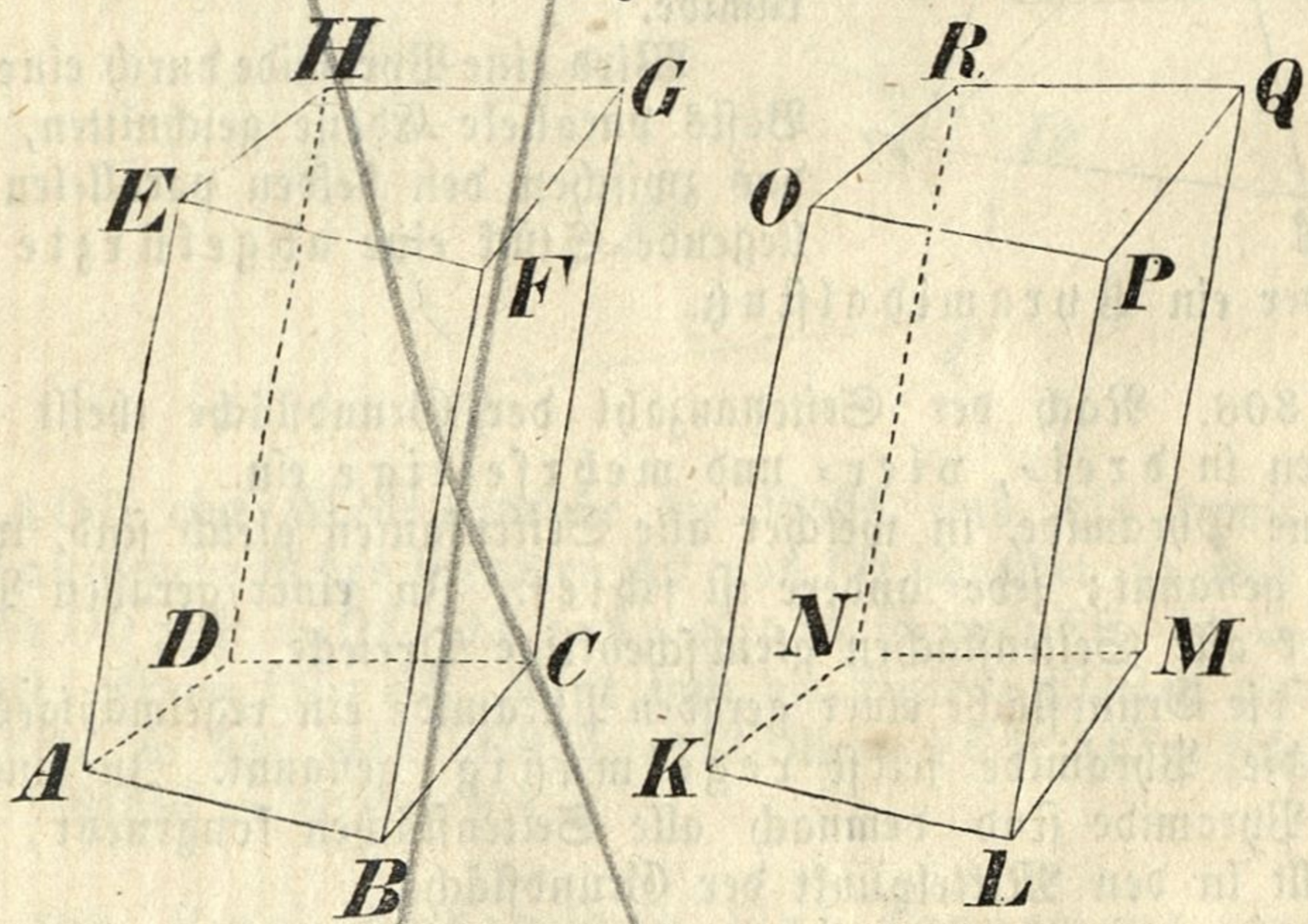
Man begründe noch folgende Sätze:

a) Jeder Diagonalschnitt eines Prisma ist ein Parallelogramm.

b) Wenn man ein dreiseitiges Prisma durch eine Ebene schneidet, welche mit einer Seitenfläche parallel ist, so ist die Durchschnittsfigur ein Parallelogramm.

§. 304. Zwei Prismen sind kongruent, wenn in beiden ein Körperwinkel vorkommt, welcher von drei kongruenten in derselben Ordnung auf einander folgenden Ebenen gebildet wird.

Fig. 221.



Es seien (Fig. 221) die Ebenen, welche die Körperwinkel A und K einschließen, in derselben Ordnung kongruent, nämlich ABCD ≅ KLMN, ABFE ≅ KLPO, ADHE ≅ KNRO. Nach dieser Voraussetzung ist der Winkel BAD = LKN, BAE = LKO, DAE = NKO, daher der Körperwinkel A ≅ K. Denkt man sich nun das Prisma KQ über das Prisma AG so gelegt, daß die kongruenten Körperwinkel K und A zusammenfallen, so müssen sich die kongruenten Ebenen KLMN und ABCD, KLPO und ABFE, KNRO und ADHE vollkommen decken, daher die Punkte K, L, M, N, O, P, R folgeweise auf die Punkte A, B, C, D, E, F, H fallen. Wenn aber die obern Grundflächen, welche mit den untern, und daher auch unter einander kongruent sind, in drei Punkten O und E, P und F, R und H, zusammenfallen, so müssen sie sich vollkommen decken, daher auch der Punkt Q auf G fällt. Die beiden Prismen lassen sich also so über einander legen, daß alle ihre Eckpunkte, somit auch alle Seitenflächen zusammenfallen; folglich sind sie kongruent.

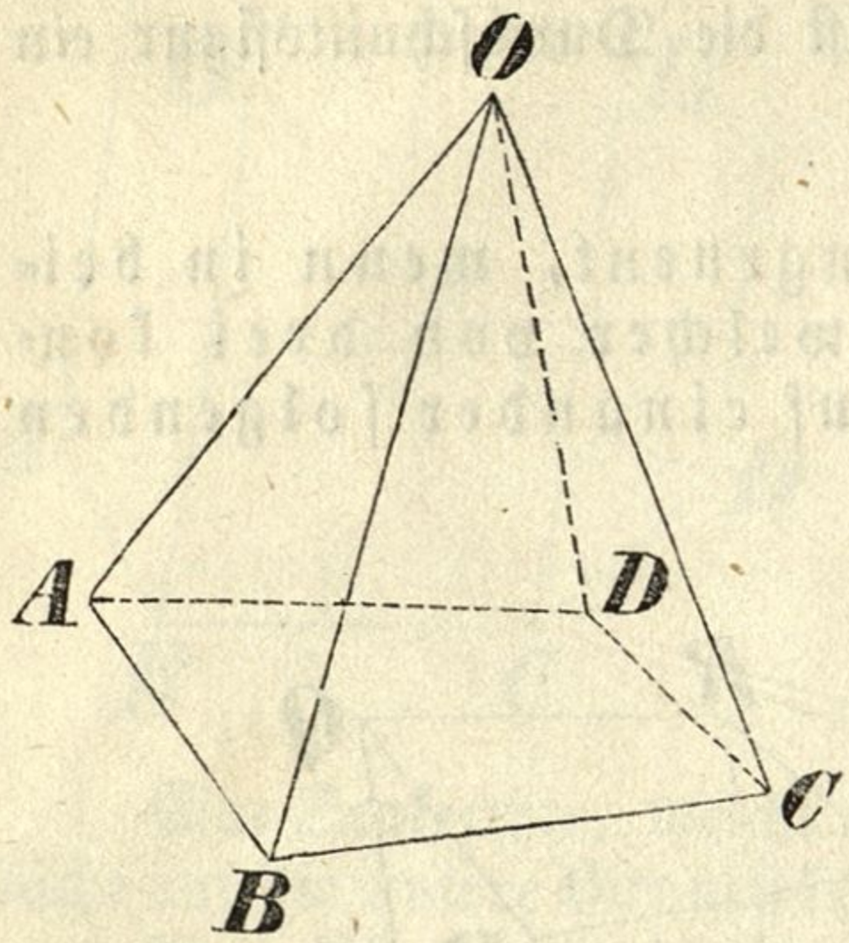
Aus diesem Satze folgt:

Zwei gerade Prismen sind kongruent, wenn sie kongruente Grundflächen und gleiche Höhen haben.

b) Die Pyramide.

§. 305. Ein eckiger Körper, dessen Grundfläche irgend ein Vieleck ist, und dessen Seitenkanten alle in einem Punkte zusammenlaufen, heißt eine Pyramide.

Fig. 222.



Der Körper OABCD (Fig. 222) ist eine Pyramide.

Der Punkt O, in welchem alle Seitenkanten zusammenstoßen, wird der Scheitel oder die Spitze der Pyramide genannt.

Aus der Erklärung der Pyramide folgt, daß ihre Seitenflächen Dreiecke sind.

Eine Senkrechte von der Spitze auf die Grundfläche heißt die Höhe der Pyramide.

Wird eine Pyramide durch eine mit der Basis parallele Ebene geschnitten, so heißt das zwischen den beiden parallelen Ebenen liegende Stück eine abgekürzte Pyramide oder ein Pyramidalstutz.

§. 306. Nach der Seitenanzahl der Grundfläche theilt man die Pyramiden in drei-, vier- und mehrseitige ein.

Eine Pyramide, in welcher alle Seitenkanten gleich sind, wird eine gerade genannt; jede andere ist schief. In einer geraden Pyramide sind daher alle Seitenflächen gleichschenklige Dreiecke.

Ist die Grundfläche einer geraden Pyramide ein regelmäßiges Vieleck, so wird die Pyramide selbst regelmäßig genannt. In einer regelmäßigen Pyramide sind demnach alle Seitenflächen kongruent, und die Höhe fällt in den Mittelpunkt der Grundfläche.

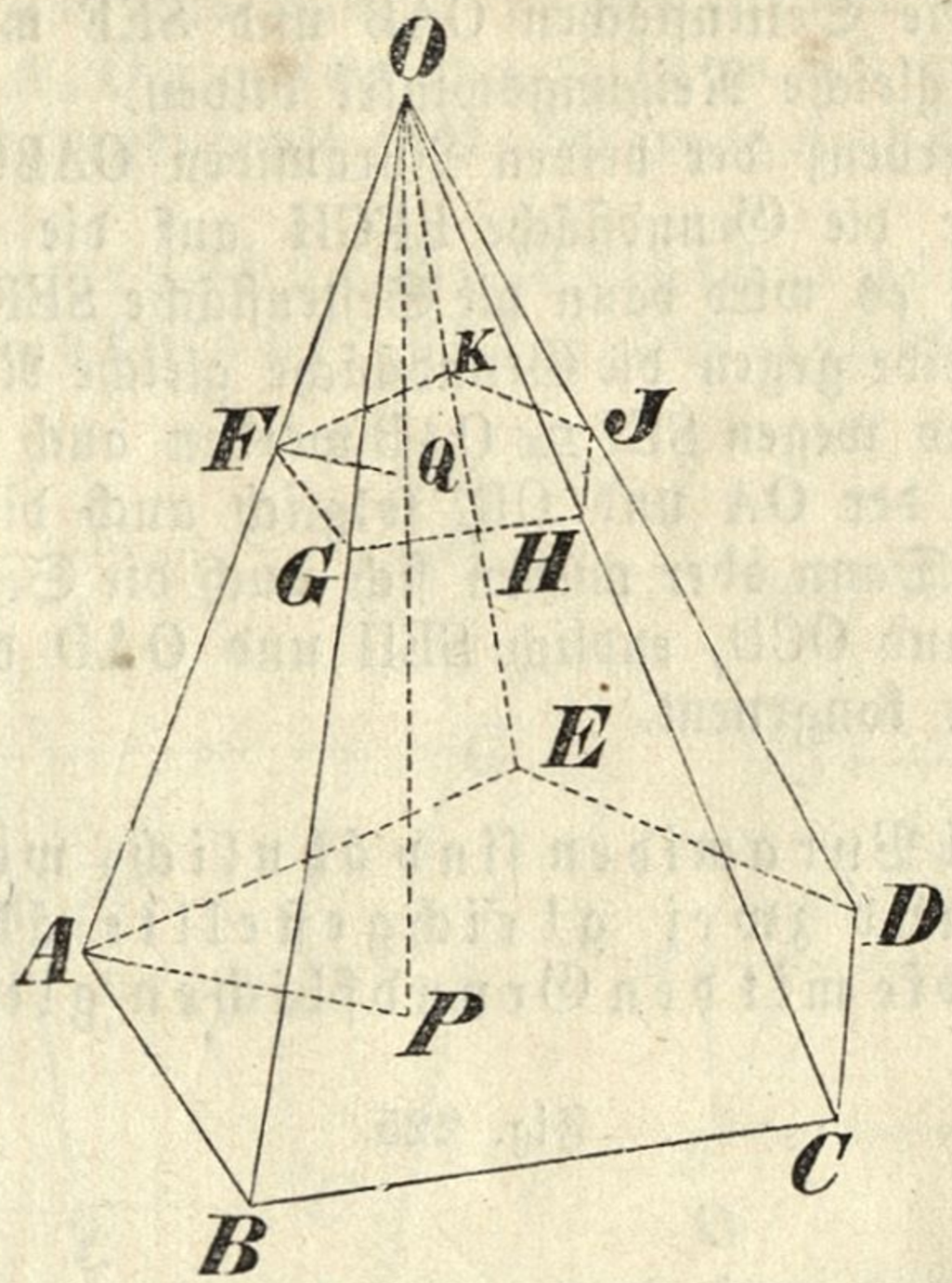
Lehrsätze.

§. 307. Wird eine Pyramide durch eine mit der Basis parallele Ebene geschnitten, so ist der Durchschnitt eine mit der Basis ähnliche Figur, und ihre Flächenräume verhalten sich wie die Quadrate ihrer Entfernungen vom Scheitel der Pyramide.

Es sei (Fig. 223) die Ebene FGHJK ∥ ABCDE. Da diese beiden Ebenen von den Seitenflächen geschnitten werden, so müssen die Durchschnittslinien FG und AB, GH und BC, HJ und CD, . . . parallel, und daher die Winkel F und A, G und B, H und C, . . . gleich sein. Weil ferner $\triangle$ OFG ∼ OAB, so ist FG : AB = OG : OB, und weil $\triangle$ OGH ∼ OBC, so ist auch GH : BC = OG : OB; daraus folgt FG : AB = GH : BC. Auf dieselbe Art kann man beweisen, daß auch GH : BC = HJ : CD, u. s. w. ist. Der Durchschnitt und die Basis haben also nach der Ordnung gleiche Winkel und proporzionirte Seiten; folglich sind sie ähnlich.

Fällt man von O auf die Basis die Senkrechte OP, so muß diese auch auf der Ebene FGHJK senkrecht stehen. Legt man nun durch den

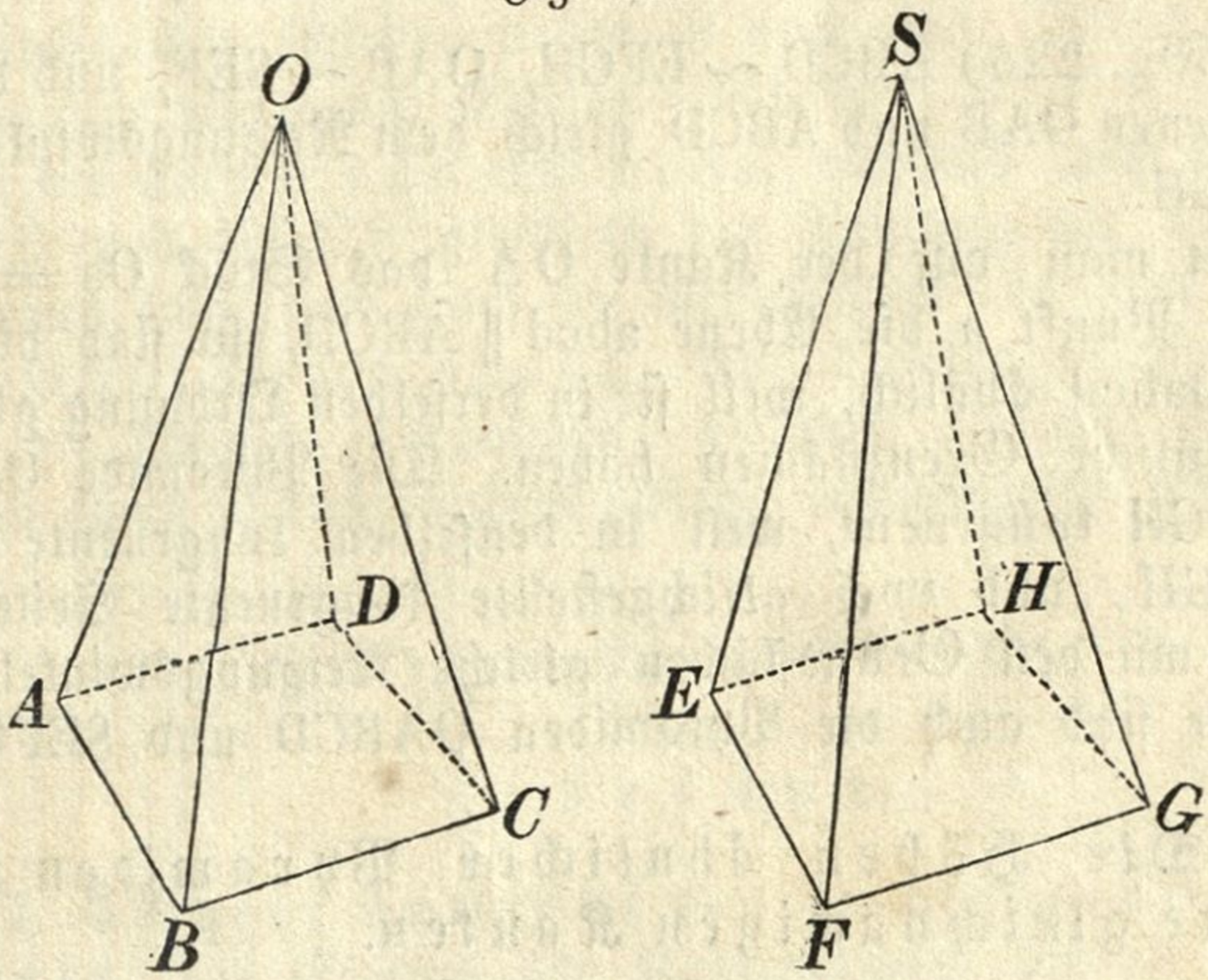
Fig. 155.



Winkel AOP eine Ebene, welche die Basis und die damit parallele Durchschnittsebene in den Geraden AP und FQ schneidet, so muß AP ∥ FQ, und daher OQ : OP = OF : OA sein; aber es ist auch FG : AB = OF : OA, daher OQ : OP = FG : AB. Weil nun die Vielecke FGHJK und ABCDE ähnlich sind, so hat man FGHJK : ABCDE = $FG^2 : AB^2$; folglich auch FGHJK : ABCDE = $OQ^2 : OP^2$.

§. 308. Zwei Pyramiden sind kongruent, wenn sie kongruente Grundflächen und zwei gleichgestellte kongruente Seitenflächen haben, die mit den Grundflächen gleiche Neigungswinkel bilden.

Fig. 224.

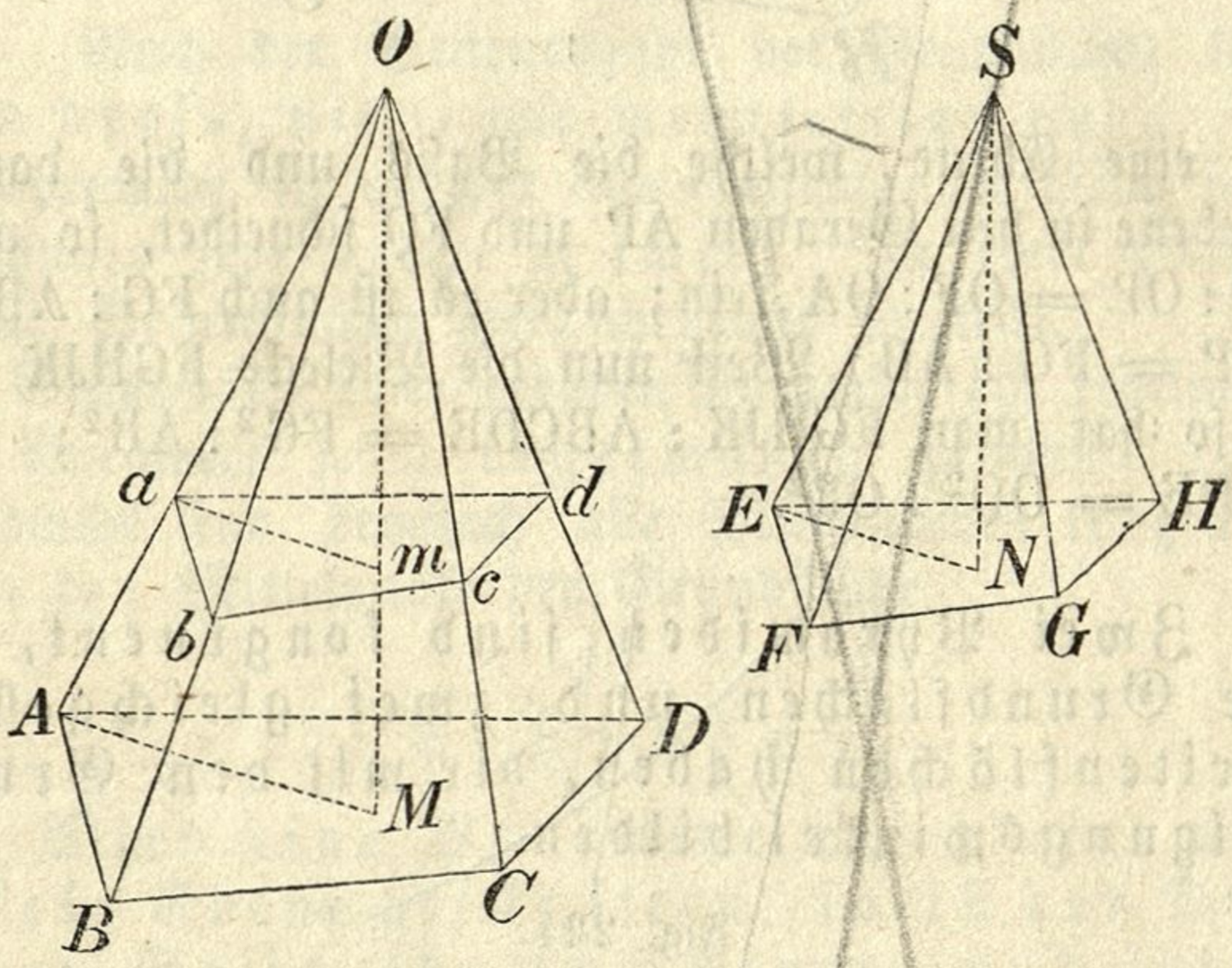


Es sei (Fig. 224) ABCD ≅ EFGH, OAB ≅ SEF, und nehmen wir überdieß an, daß die Seitenflächen OAB und SEF mit den Grundflächen ABCD und EFGH gleiche Neigungswinkel bilden.

Um die Kongruenz der beiden Pyramiden OABCD und SEFGH zu beweisen, legen wir die Grundfläche EFGH auf die mit ihr kongruente Grundfläche ABCD; es wird dann die Seitenfläche SEF in die Seitenfläche OAB fallen, weil beide gegen die Grundfläche gleiche Neigung und dieselbe Stellung haben, und wegen SEF ≅ OAB werden auch die Kanten SE und SF in die Richtung der OA und OB, folglich auch die Punkte S und O in einander fallen. Dann aber müssen sich auch die Seitenflächen SFG und OBC, ferner SGH und OCD, endlich SEH und OAD decken; folglich sind die zwei Pyramiden kongruent.

§. 309. Zwei Pyramiden sind ähnlich, wenn sie ähnliche Grundflächen nnd zwei gleichgestellte ähnliche Seitenflächen haben, die mit den Grundflächen gleiche Neigungswinkel bilden.

Fig. 225.



Es sei (Fig. 225) ABCD ∼ EFGH, OAB ∼ SEF, und der Neigungswinkel der Ebenen OAB und ABCD gleich dem Neigungswinkel der Ebenen SEF und EFGH.

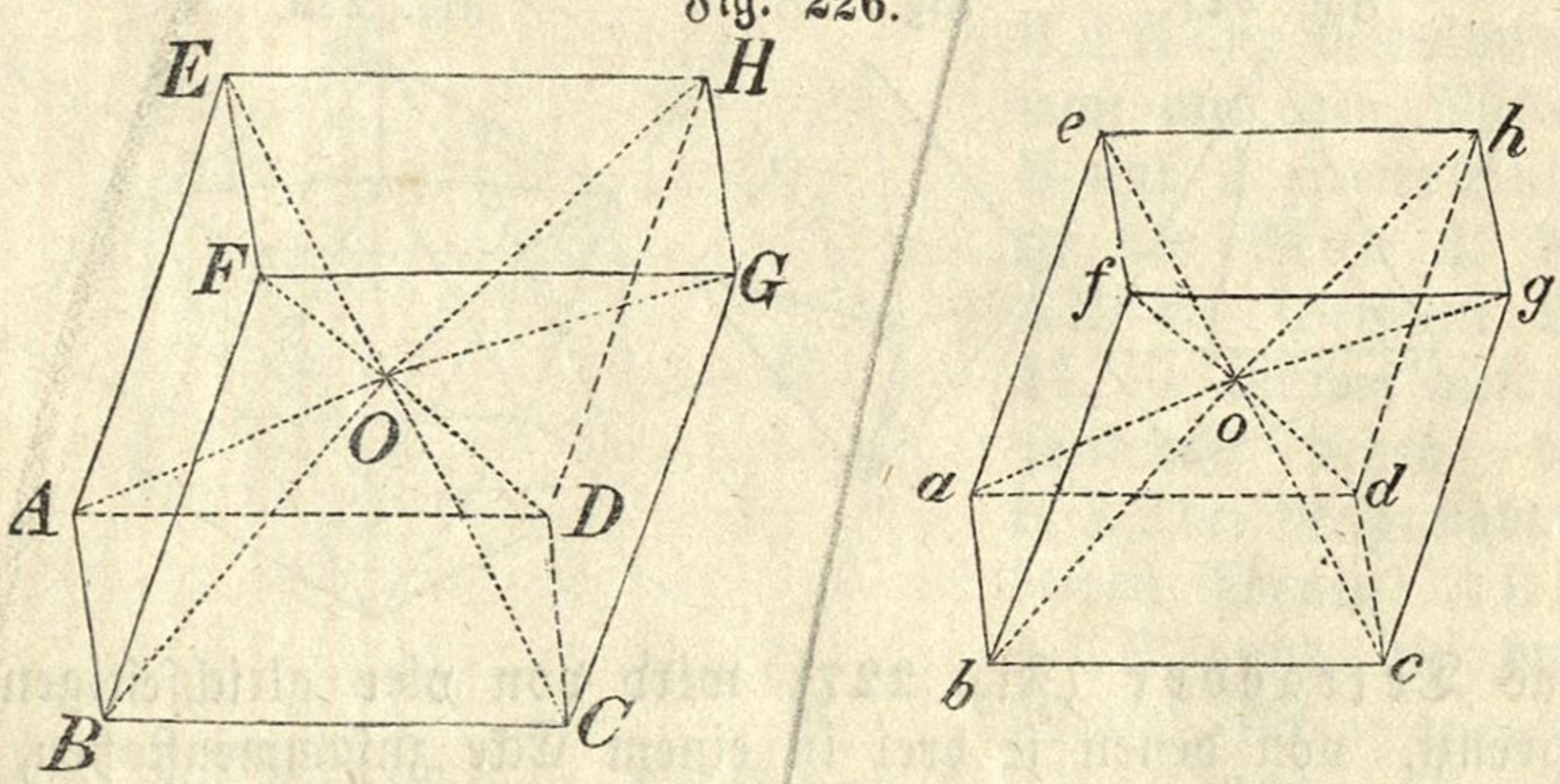
Schneidet man auf der Kante OA das Stück Oa = SE ab, und legt durch den Punkt a die Ebene abcd ∥ ABCD, so sind die Pyramiden OABCD und Oabcd ähnlich, weil sie in derselben Ordnung gleiche Körperwinkel und ähnliche Grenzflächen haben. Die Pyramide Oabcd aber ist mit jener SEFGH kongruent, weil in denselben kongruente Grundflächen abcd und EFGH, und zwei gleichgestellte kongruente Seitenflächen Oab und SEF, die mit den Grundflächen gleiche Neigungswinkel bilden, vorkommen; daher sind auch die Pyramiden OABCD und SEFGH ähnlich.

§. 310. Die Höhen ähnlicher Pyramiden verhalten sich wie ihre gleichnamigen Kanten.

Ist (Fig. 225) OM ⊥ ABCD und SN ⊥ EFGH, und zieht man die Geraden AM, am und EN, so ist das Dreieck OAM ∼ Oam, daher OM : Om = OA : Oa; allein wegen Oa = SE ist △ Oam ≅ SEN, folglich Om = SN, und somit OM : SN = OA : SE.

§ 311. Je zwei ähnliche Polyeder lassen sich in eine gleiche Anzahl ähnlicher und gleichliegender Pyramiden zerlegen.

Fig. 226.



Es seien ABH und abh (Fig. 226) zwei ähnliche Polyeder; und man zerlege das erstere ABH in so viele Pyramiden, als es Grenzflächen hat, indem man durch jede Kante und einen beliebigen, im Innern des Polyeders gelegenen Punkt O eine Ebene legt. Um im zweiten Polyeder abh den mit O gleichliegenden Punkt zu bestimmen, lege man durch die Seite ab eine Ebene, welche mit der Ebene abcd denselben Neigungswinkel bildet, wie die Ebene OAB mit ABCD, konstruire in dieser Ebene den Winkel bao = BAO, und nehme auf der ao den Punkt o so an, daß oa : OA = ab : AB wird. Legt man durch diesen Punkt o und die Kanten des Polyeders abh Ebenen, so zerfällt dieses in so viele Pyramiden, als es Grenzflächen hat.

Die beiden Pyramiden OABCD und oabcd sind ähnlich, weil sie ähnliche Grundflächen und zwei ähnliche, gegen die Grundflächen gleichgeneigte Seitenflächen haben; daher ist auch das Dreieck OBC ∼ obc, und der Neigungswinkel der Ebenen OBC und BCDA gleich dem Neigungswinkel der Ebenen obc und bcda, weßhalb auch die Neigung der Ebenen OBC und BCGF gleich ist der Neignng der Ebenen obc und bcgf. Daraus folgt nun auch die Aehnlichkeit der zwei nächstfolgenden Pyramiden OBCGF und obcgf. Auf dieselbe Weise kann auch die Aehnlichkeit der übrigen Pyramiden, die zwei ähnliche Grenzflächen des Polyeders zu ihren Grundflächen haben, nachgewiesen werden.

c) Regelmäßige Körper.

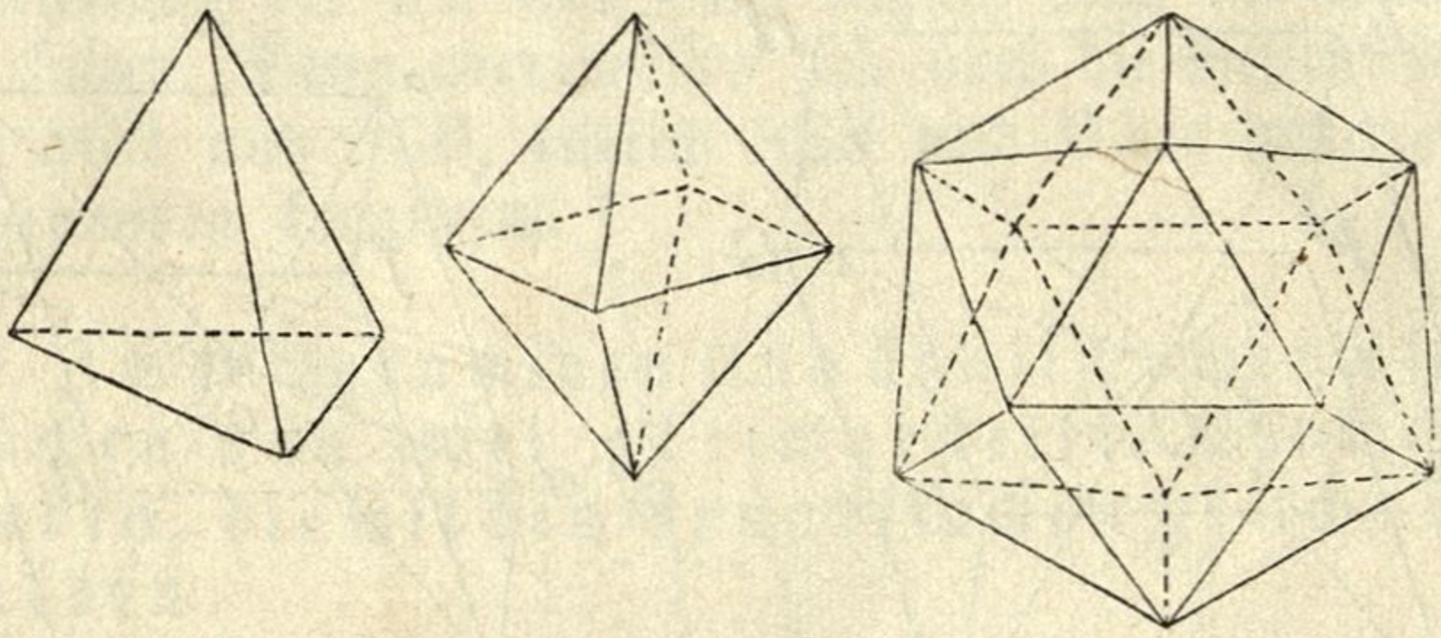
Lehrsätze.

§. 312. Es gibt nur fünf regelmäßige Körper.

Beweis. Die Summe der Kantenwinkel, die an einem Körpereck

vorkommen, muß kleiner als 4R oder 360° sein. In einem regelmäßigen (gleichseitigen) Dreiecke beträgt jeder Winkel 60°; von solchen Winkeln können drei, vier oder auch fünf, aber nie mehr an einem Ecke zusammenstoßen, weil die Summe von sechs oder mehr solchen Winkeln schon 360° oder darüber beträgt. Von gleichseitigen Dreiecken können daher nur drei reguläre Körper gebildet werden, nämlich das Tetraëder, Oktaëder und Isokaëder.

Fig. 227. Fig. 228. Fig. 229.

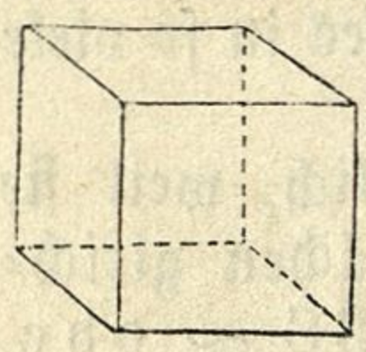


Das Tetraëder (Fig. 227) wird von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt, von denen je drei in einem Ecke zusammenstoßen, es hat 4 Ecke und 6 Kanten.

Das Oktaëder (Fig. 228) wird von acht gleichseitigen Dreiecken eingeschlossen, von denen je vier ein Körpereck bilden; es hat 6 solche Ecke und 12 Kanten.

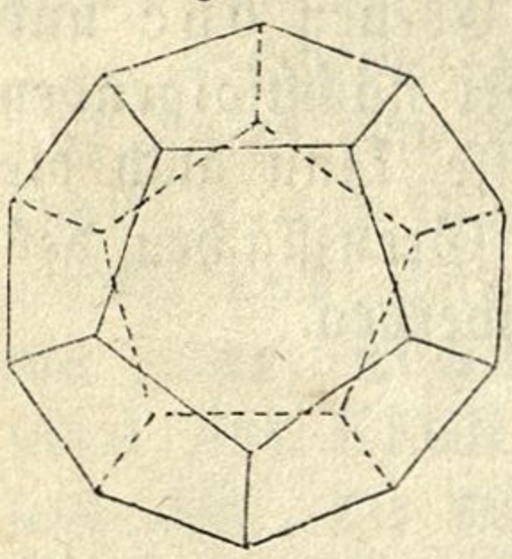
Das Ikosaëder (Fig. 229) wird von zwanzig gleichseitigen Dreiecken begrenzt, von denen je fünf einen Körperwinkel bilden; es hat 12 Ecke und 30 Kanten.

Fig. 230.



In einem regelmäßigen Vierecke (Quadrate) ist jeder Winkel ein rechter. Von solchen Winkeln können nur drei in einem Ecke zusammenstoßen; vier solche Winkel geben schon vier Rechte. Es gibt daher einen einzigen von Quadraten eingeschlossenen regulären Körper; er heißt Hexaëder, Kubus oder Würfel, hat 6 Seitenflächen, 8 dreikantige Körperecke und 12 Kanten (Fig. 230).

Fig. 231.



Der Winkel eines regelmäßigen Fünfeckes beträgt 108°. Von solchen Winkeln können wieder nur drei in einem Ecke zusammenkommen. Es gibt daher nur einen einzigen von regelmäßigen Fünfecken begrenzten Körper; dieser ist das Dodekaëder (Fig. 231) und hat 12 Seitenflächen, 20 Ecke und 30 Kanten.

Im regelmäßigen Sechsecke ist jeder Winkel 120°. Von solchen Winkeln kann kein Körpereck gebildet werden, weil schon drei derselben 360° betragen. Dasselbe gilt um so mehr von den Winkeln eines regelmäßigen Polygons von mehr als sechs Seiten.

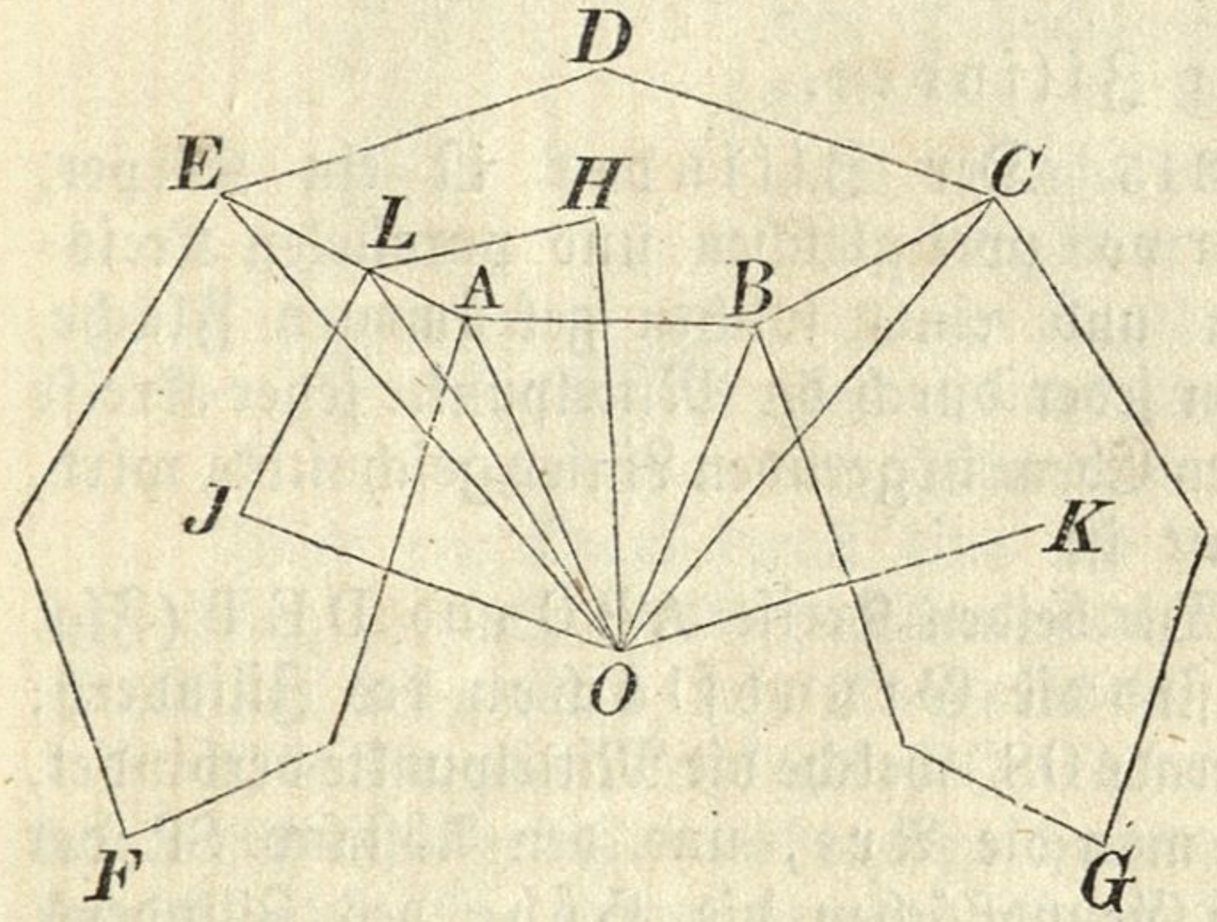
Es kann also nur fünf reguläre Körper geben.

§. 313. Jeder regelmäßige Körper hat einen Punkt, der

a) von allen Seitenflächen,
b) von allen Eckpunkten

gleichweit abstehet.

Fig. 232



a) Es seien (Fig. 232) ABD, AEF, BCG drei Seitenflächen eines regulären Körpers, und H, J, K ihre Mittelpunkte. Zieht man aus den Mittelpunkten H und J zweier Seitenflächen zu der Mitte L der Seite AE die Geraden HL und JL, so müssen diese auf AE senkrecht stehen, daher ist HLJ der Neigungswinkel der beiden Ebenen ABD und AEF, und die durch den Winkel HLJ gelegte Ebene senkrecht auf den Ebenen ABD und AEF (§. 285). Werden daher auf diese Ebenen in den Punkten H und J Senkrechte errichtet, so müssen sie in der Ebene HLJ liegen (§. 291, b), und werden sich verlängert in irgend einem Punkte O schneiden. Zieht man nun OL, so ist $\triangle$ OHL $\cong$ OJL, daher OH = OJ; d. h. der Punkt O ist von den beiden Seitenflächen ABD und AEF gleichweit entfernt. Was aber von der an ABD anstoßenden Seitenfläche AEF gilt, gilt eben so von den übrigen Seitenflächen, welche an ABD anstoßen; eben das gilt auch wieder von den die anstoßenden Seitenflächen umgebenden Ebenen. Also ist der Punkt O von allen Seitenflächen des regelmäßigen Körpers gleichweit entfernt.

b) Da ferner OH, OJ, OK, . . . auf den Seitenflächen ABD, AEF, BCG, . . . senkrecht sind, und durch die Mittelpunkte H, J, K, . . . derselben gehen, so müssen nach §. 270, b) alle schiefen Geraden aus O nach den Eckpunkten der Seitenflächen gleich lang sein; denn diese Punkte stehen von den Mittelpunkten H, J, K, . . . gleichweit ab. Es ist daher der Punkt O auch von allen Eckpunkten des Polygons gleichweit entfernt.

Der Punkt O heißt der Mittelpunkt des regulären Polyeders.

Wie findet man den Mittelpunkt eines regelmäßigen Körpers?

2. Runde Körper.

§. 314. Körper, welche theils von ebenen, theils von gekrümmten Flächen, oder von einer einzigen gekrümmten Fläche begrenzt werden, heißen runde Körper.

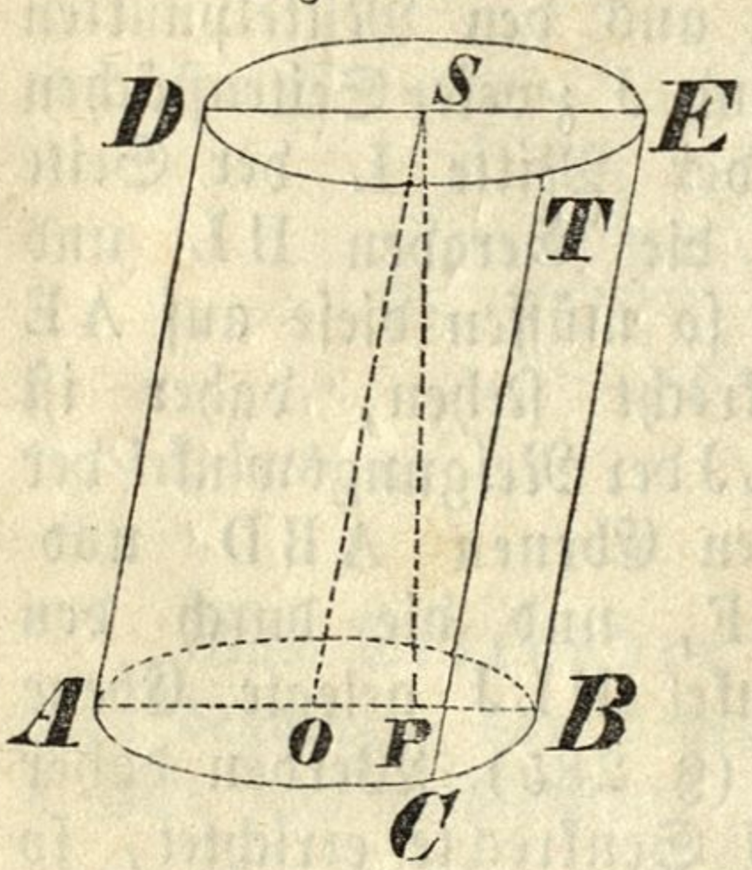
Bei denjenigen runden Körpern, deren Grenzflächen zum Theil Ebenen sind, werden diese als Grundflächen betrachtet, weil man sich die

Körper darüber aufgerichtet vorstellen kann; die gekrümmte Fläche wird die Mantelfläche genannt.

Hier sollen nur jene runden Körper in Betrachtung gezogen werden, welche mit den oben angeführten eckigen im Zusammenhange stehen. Dem Prisma entspricht nämlich der Zilinder, der Pyramide der Kegel, den regulären Körpern die Kugel.

a) Der Zilinder.

Fig. 233.



§. 315 Der Zilinder ist ein Körper, welcher von zwei gleichen und parallelen Kreisflächen und einer solchen gekrümmten Fläche, die von jeder durch die Mittelpunkte jener Kreise gelegten Ebene in geraden Linien geschnitten wird, begrenzt ist.

Die beiden Kreise ABC und DET (Fig. 233) sind die Grundflächen des Zilinders; die Gerade OS, welche die Mittelpunkte verbindet, nennt man die Axe, und den Abstand SP der beiden Grundflächen die Höhe des Zilinders

Ist die Axe eines Zilinders auf den Grundflächen senkrecht, so heißt der Zilinder ein gerader, sonst ein schiefer. In einem geraden Zilinder stellt die Axe zugleich die Höhe vor.

Die geraden Linien AD und BE, in denen die Mantelfläche von einer durch die Axe gelegten Ebene geschnitten wird, heißen Seiten des Zilinders.

Ein gerader Zilinder, dessen Seite dem Durchmesser der Grundfläche gleich ist, wird gleichseitig genannt.

Ein Körper, welcher zwischen den Mantelflächen zweier Zilinder, die eine gemeinschaftliche Axe haben, eingeschlossen wird, heißt ein ausgehöhlter Zilinder oder eine zilindrische Röhre.

Zwei Zilinder heißen ähnlich, wenn ihre Axen mit den Durchmessern der Grundflächen proporzionirt sind, und zugleich mit den Grundflächen gleiche Neigungswinkel bilden.

§. 316 Da sich der Kreis als ein regelmäßiges Polygon von unendlich viel Seiten betrachten läßt, so kann man sagen:

Der Zilinder ist ein Prisma, dessen Grundflächen regelmäßige Vielecke von unendlich viel Seiten sind.

Daraus folgt mit Bezug auf die für das Prisma erwiesenen Sätze:

1. Alle Seiten des Zilinders sind gleich und parallel.

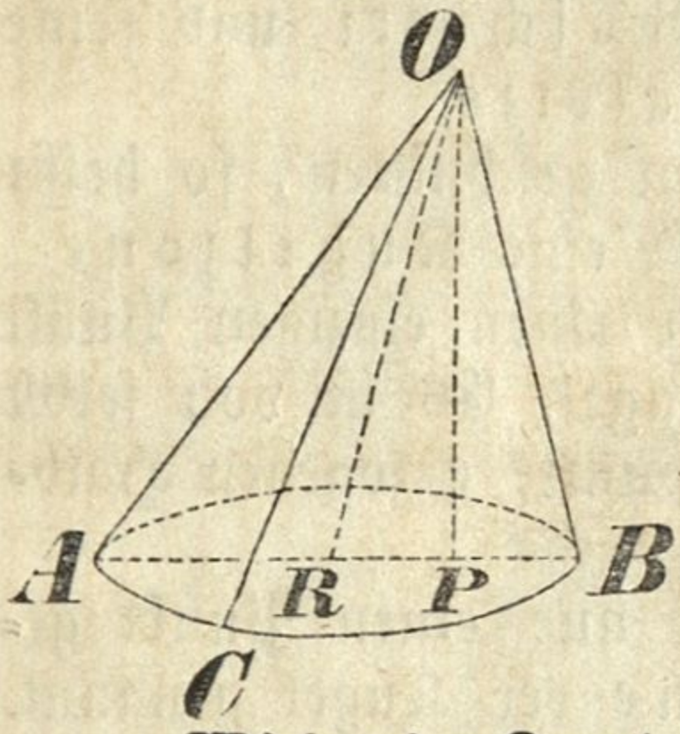
2. Wenn ein Zilinder durch eine Ebene, die mit der Basis parallel ist, geschnitten wird, so ist der Schnitt mit der Basis kongruent, somit ein Kreis von demselben Halbmesser.

b) Der Kegel.

§. 317. Der Kegel ist ein Körper, welcher von einer Kreisfläche und einer in einem Punkte zusammenlaufenden gekrümmten Fläche, die

von jeder durch diesen Punkt und den Mittelpunkt des Kreises gelegten Ebene in geraden Linien geschnitten wird, begrenzt ist.

Fig. 234.



Der Kreis ABC (Fig. 234) ist die Grundfläche des Kegels; der Punkt O, in welchen die Mantelfläche ausläuft, heißt der Scheitel oder die Spitze, und die Gerade OR, welche den Scheitel mit dem Zentrum der Grundfläche verbindet, die Axe des Kegels; die Senkrechte OP vom Scheitel auf die Grundfläche ist die Höhe. Wenn die Axe auf der Grundfläche senkrecht steht, heißt der Kegel ein gerader, sonst ein schiefer. In einem geraden Kegel stellt die Axe zugleich die Höhe vor.

Wird ein Kegel durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so heißt das zwischen den beiden parallelen Ebenen liegende Stück ein abgekürzter Kegel oder ein Kegelstutz.

Die Geraden AO und BO, in welchen die Mantelfläche von einer durch die Axe gelegten Ebene geschnitten wird, nennt man die Seiten des Kegels. In einem geraden Kegel sind alle Seiten gleich.

Ein gerader Kegel, dessen Seite dem Durchmesser der Basis gleich ist, heißt gleichseitig.

Zwei Kegel heißen ähnlich, wenn ihre Axen mit den Durchmessern der Grundflächen proporzionirt sind, und zugleich gegen die Grundflächen gleiche Neigungen haben.

§. 318. So wie sich der Zilinder als Prisma betrachten läßt, so kann auch der Kegel als eine Pyramide, deren Basis ein regelmäßiges Polygon von unendlich viel Seiten ist, betrachtet werden.

Daraus folgt mit Bezug auf den ähnlichen für die Pyramide erwiesenen Satz:

Wenn ein Kegel durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten wird, so ist die Durchschnittsfigur ein Kreis, und es verhalten sich die Flächenräume der beiden Kreise wie die Quadrate ihrer Entfernungen vom Scheitel des Kegels.

c) Die Kugel.

§. 319. Die Kugel ist ein von einer gekrümmten Fläche so begrenzter Körper, daß alle Punkte der Oberfläche von einem innerhalb liegenden Punkte gleich weit abstehen.

Dieser innerhalb der Kugel liegende Punkt heißt der Mittelpunkt oder das Zentrum. Eine Gerade, welche vom Mittelpunkte bis an die Oberfläche gezogen wird, heißt ein Halbmesser; eine Gerade, welche durch den Mittelpunkt geht und zwei Punkte der Oberfläche verbindet, ein Durchmesser der Kugel.

Man kann sich die Kugel durch Umdrehung eines Halbkreises um

den Durchmesser entstanden denken. Dieser Durchmesser heißt dann die Axe, und dessen Endpunkte sind die Pole der Kugel.

Wenn man eine Kugel durch eine Ebene schneidet, so heißt das dadurch abgeschnittene Stück der Kugel ein Kugelabschnitt und seine gekrümmte Oberfläche eine Kugelmütze oder Kalotte.

Wird eine Kugel durch zwei parallele Ebenen geschnitten, so heißt der dazwischen befindliche Theil der Kugeloberfläche eine Kugelzone.

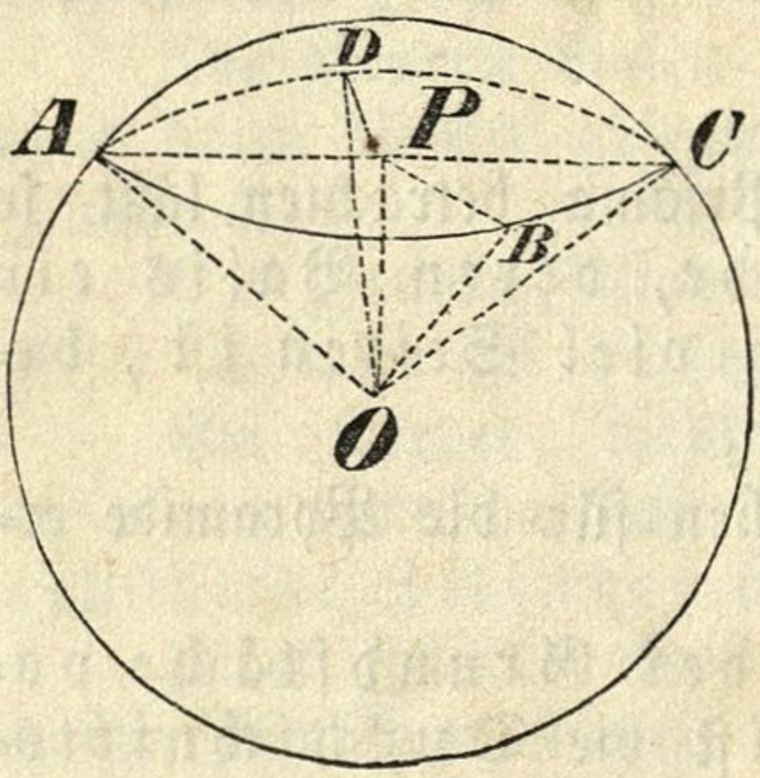
Eine Gerade, welche mit der Kugeloberfläche einen einzigen Punkt gemeinschaftlich hat, heißt eine Tangente der Kugel. Es ist von selbst klar, daß die Tangente auf dem zum Berührungspunkte gezogenen Halbmesser senkrecht stehen müsse.

Eine Ebene, welche mit der Kugeloberfläche nur einen Punkt gemeinschaftlich hat, wird eine Berührungsebene der Kugel genannt.

Nach §. 313 kann man aus dem Mittelpunkte eines jeden regulären Körpers eine Kugel beschreiben, welche alle Seitenflächen desselben berührt; und eben so eine Kugel, welche durch alle Eckpunkte des Polyëders durchgeht. Die erstere Kugel heißt dem regelmäßigen Körper eingeschrieben, die letztere umschrieben.

§. 320. Lehrsatz. Wird die Kugel durch eine Ebene geschnitten, so ist die Durchschnittsfigur ein Kreis.

Fig. 235.



Es sei ABCD (Fig. 235) der Durchschnitt einer Ebene mit der Oberfläche der Kugel. Da die Punkte A, B, C, D, . . . in der Oberfläche der Kugel liegen, so sind die Geraden AO, BO, CO, DO, . . . als Halbmesser der Kugel gleich. Fällt man nun von O auf die Ebene ABCD die Senkrechte OP, so sind die rechtwinkligen Dreiecke APO, BPO, CPO, DPO, . . . kongruent, daher $AP = BP = CP = DP = \ldots$; es liegen also die Punkte A, B, C, D, . . . in dem Umfange eines Kreises, dessen Mittelpunkt in der aus dem Zentrum der Kugel auf die Durchschnittsebene gefällten Senkrechten liegt.

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke APO folgt $AP = \sqrt{AO^2 - OP^2}$. Da nun AO als Halbmesser der Kugel eine beständige Größe ist, so wird der Halbmesser AP und somit auch der Kreis ABCD desto größer sein, je kleiner OP ist. Je näher am Mittelpunkte der Kugel also der Schnitt geführt wird, desto größer wird der Kreis; am größten wird er, wenn die schneidende Ebene durch den Mittelpunkt selbst geht; ein solcher Kreis, dessen Mittelpunkt im Zentrum der Kugel liegt, dessen Halbmesser also so groß ist als der Halbmesser der Kugel, heißt ein größter Kreis der Kugel. Wenn dagegen OP zunimmt, so wird AP und somit auch der Kreis ABCD immer kleiner. Wenn endlich der Abstand OP dem Halbmesser der Kugel gleich wird, so verschwindet jener Kreis; die Ebene hat in diesem Falle mit der Kugeloberfläche nur einen Punkt gemeinschaftlich, sie wird eine Berührungsebene der Kugel.

Durch je zwei Punkte an der Kugeloberfläche, welche mit dem Mittelpunkte der Kugel nicht in einer geraden Linie liegen, ist die Lage eines größten Kreises vollkommen bestimmt.

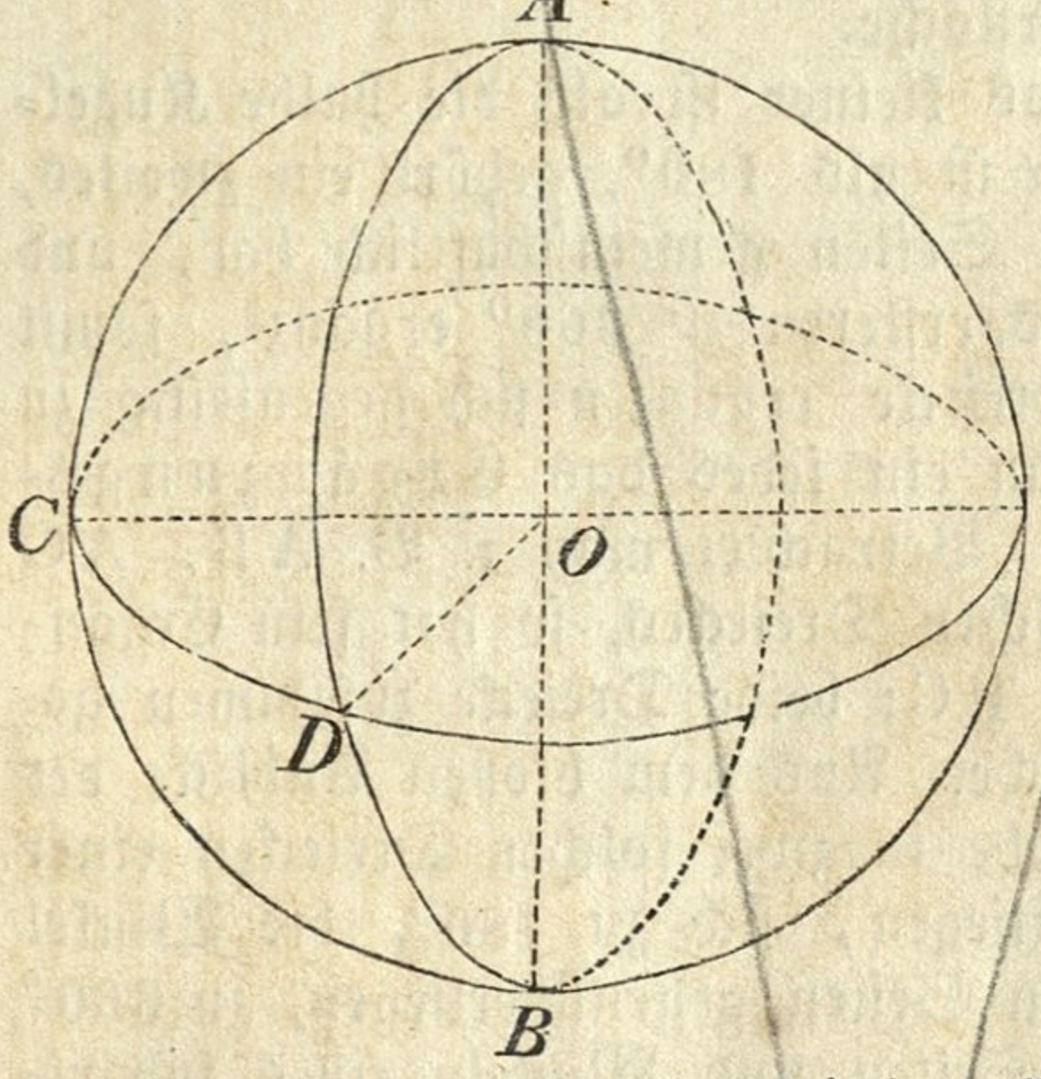
§. 321. Den Durchmesser der Kugel, welcher auf der Ebene eines größten Kreises senkrecht steht, nennt man die Axe, und dessen Endpunkte die Pole dieses größten Kreises.

Legt man durch die Axe irgend eine Ebene, so hat in dem Durchschnittskreise der Bogen vom Pole bis zum größten Kreise einen Mittelpunktswinkel von 90°. Man pflegt dieses so auszudrücken:

Die Pole eines größten Kreises stehen von jedem Punkte seines Umfanges um 90° ab.

§. 322. Wenn sich zwei größte Kreise durchschneiden, so heißt der von ihren Ebenen gebildete Neigungswinkel der sphärische Winkel der beiden größten Kreise. Die Schenkel eines sphärischen Winkels sind die Bögen der zwei größten Kreise, und der Scheitel liegt in ihrem Durchschnittspunkte.

Fig. 236.



Das Maß eines sphärischen Winkels ist der Bogen eines größten Kreises, welcher jene zwei Punkte der Schenkel verbindet, die vom Scheitel um 90° abstehen. Ist nämlich (Fig. 236) AC = 90° und AD = 90°, so sind die Mittelpunktswinkel AOC und AOD Rechte, daher CO ⊥ AO und DO ⊥ AO, und somit ist COD der Neigungswinkel der beiden größten Kreise ACB und ADB oder ihr sphärischer Winkel. Legt man nun durch die beiden Punkte C und D einen größten Kreis, so ist der Bogen CD das Maß für den Winkel COD, und folglich auch für den sphärischen Winkel CAD.

§ 323. Ein Stück der Kugeloberfläche, welches zwischen zwei größten Halbkreisen liegt, wie z. B. ACBDA, heißt ein Kugelstreifen.

1. Zu gleichen sphärischen Winkeln derselben Kugel gehören auch gleiche Kugelstreifen.

2. Zwei Streifen derselben Kugel verhalten sich so wie ihre sphärischen Winkel.

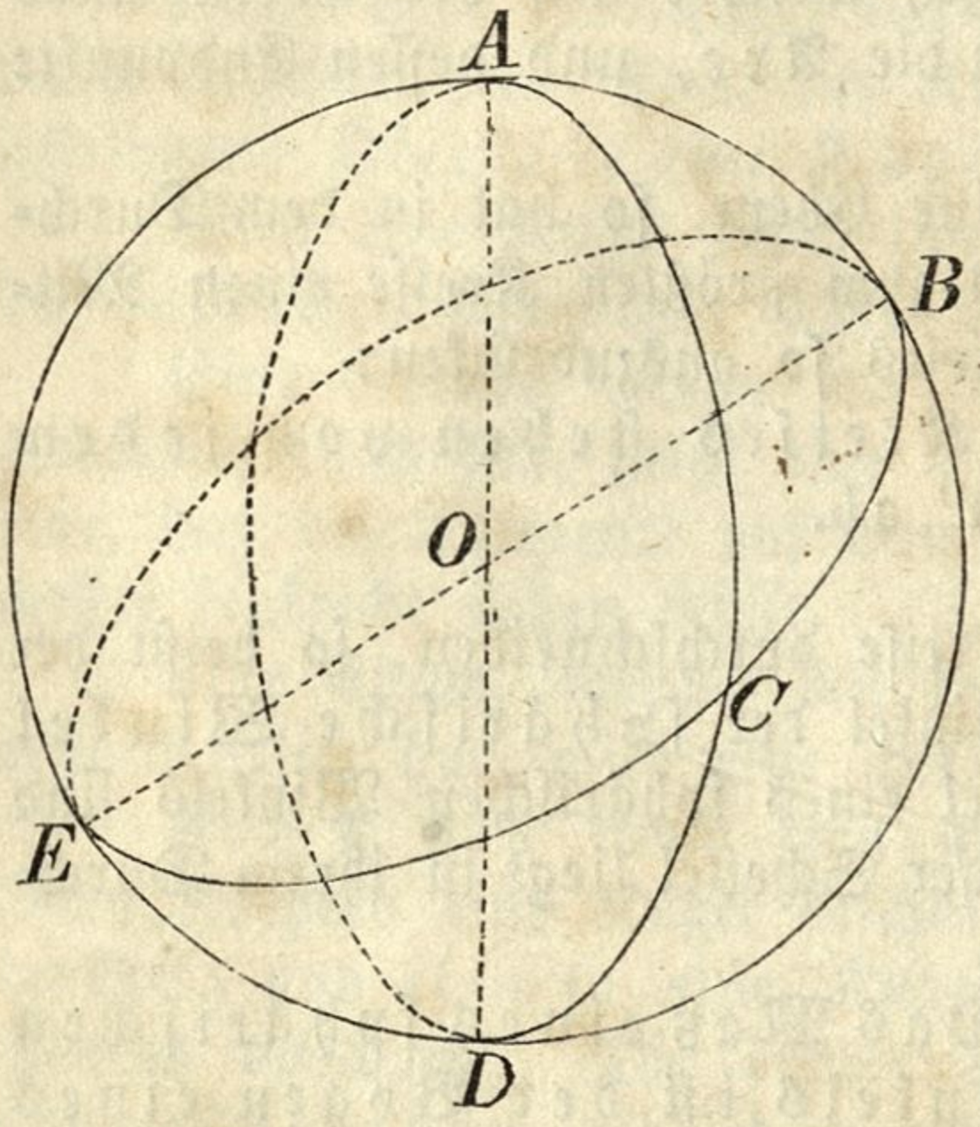
Die Beweise dieser beiden Lehrsätze sind analog mit jenen für die in §§. 181 und 183 aufgestellten Sätze.

Aus dem zweiten Satze folgt:

3. Der Flächeninhalt eines Kugelstreifens verhält sich zur ganzen Kugeloberfläche, wie der sphärische Winkel des Streifens zu 360°.

§. 324. Wenn sich drei größte Kugelkreise ABD, ACD und BCE (Fig. 237) durchschneiden, so heißt der von drei Bögen AB, AC und BC jener größten Kreise begrenzte Theil ABC der Kugeloberfläche ein

Fig. 237.



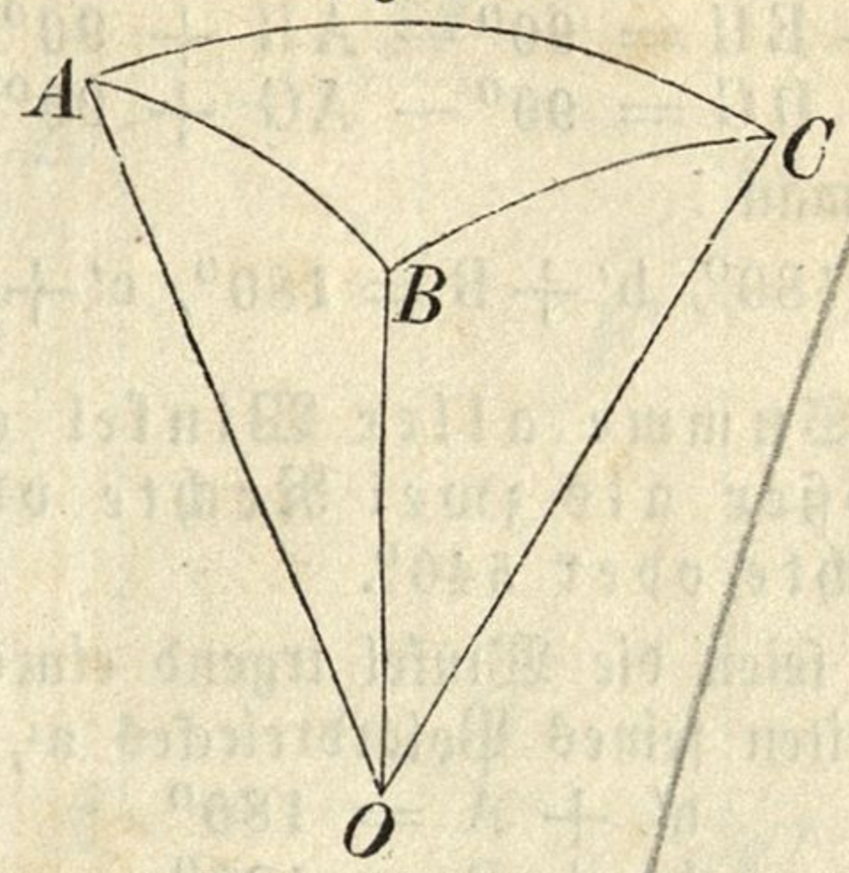
sphärisches Dreieck. Die Kreisbögen AB, AC und BC werden die Seiten, und die sphärischen Winkel ACB, ABC und BAC die Winkel des sphärischen Dreieckes genannt. Die Größe der Seiten wird stets nach dem Gradmaße bestimmt.

Die Seiten eines jeden sphärischen Dreieckes bilden zugleich die Seiten eines zweiten sphärischen Dreieckes, welches den ganzen übrigen Theil der Kugeloberfläche einnimmt. Wenn übrigens nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, so ist immer dasjenige sphärische Dreieck zu verstehen, welches kleiner ist als die halbe Kugeloberfläche.

Zu jedem sphärischen Dreiecke, das kleiner ist als die halbe Kugeloberfläche, und dessen eine Seite größer ist als 180°, gehört ein zweites, welches mit jenem die beiden andern Seiten gemeinschaftlich hat, und dessen dritte Seite, die dritte Seite des ersteren zu 360° ergänzt, somit kleiner als 180° ist. Die beiden Dreiecke ergänzen sich gegenseitig zu der halben Kugeloberfläche, weßhalb man ein jedes das Ergänzungsdreieck des andern zu nennen pflegt. Betrachtet man z. B. AB, AC und BEC als die Seiten eines sphärischen Dreieckes, so hat sein Ergänzungsdreieck die Seiten AB, AC und BC; beide Dreiecke zusammen genommen bilden die halbe Kugeloberfläche. Aus dem bloßen Anblicke der Figur ergibt sich, daß die Winkel, welche in zwei solchen Dreiecken einer der gemeinschaftlichen Seiten gegenüberliegen, sich zu 180°, die Winkel aber, welche den nicht gemeinschaftlichen Seiten gegenüberliegen, zu 360° ergänzen. Da sich demnach aus den Seiten uud Winkeln eines sphärischen Dreieckes sogleich auch die Seiten und Winkel seines Ergänzungsdreieckes bestimmen lassen, so wollen wir bei unseren folgenden Untersuchungen stets nur solche sphärische Dreiecke voraussetzen, in denen die Seiten einzeln kleiner als 180° sind.

§. 325. Es sei ABC (Fig. 238) ein sphärisches Dreieck, dessen jede Seite kleiner ist als 180°, und O der Mittelpunkt der Kugel. Zieht man die Halbmesser AO, BO und CO, und legt durch je zwei eine Ebene, so entsteht am Mittelpunkte O der dreiseitige Körperwinkel OABC, dessen Kantenwinkel AOB, AOC und BOC die Seiten AB, AC und BC als Bögen von größten Kreisen zum Maße haben, und dessen Flächenwinkel den Winkeln des sphärischen Dreieckes gleich sind. Es finden daher zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreieckes dieselben Beziehungen statt, wie zwischen den Kantenwinkeln und den Neigungs-

Fig. 238.



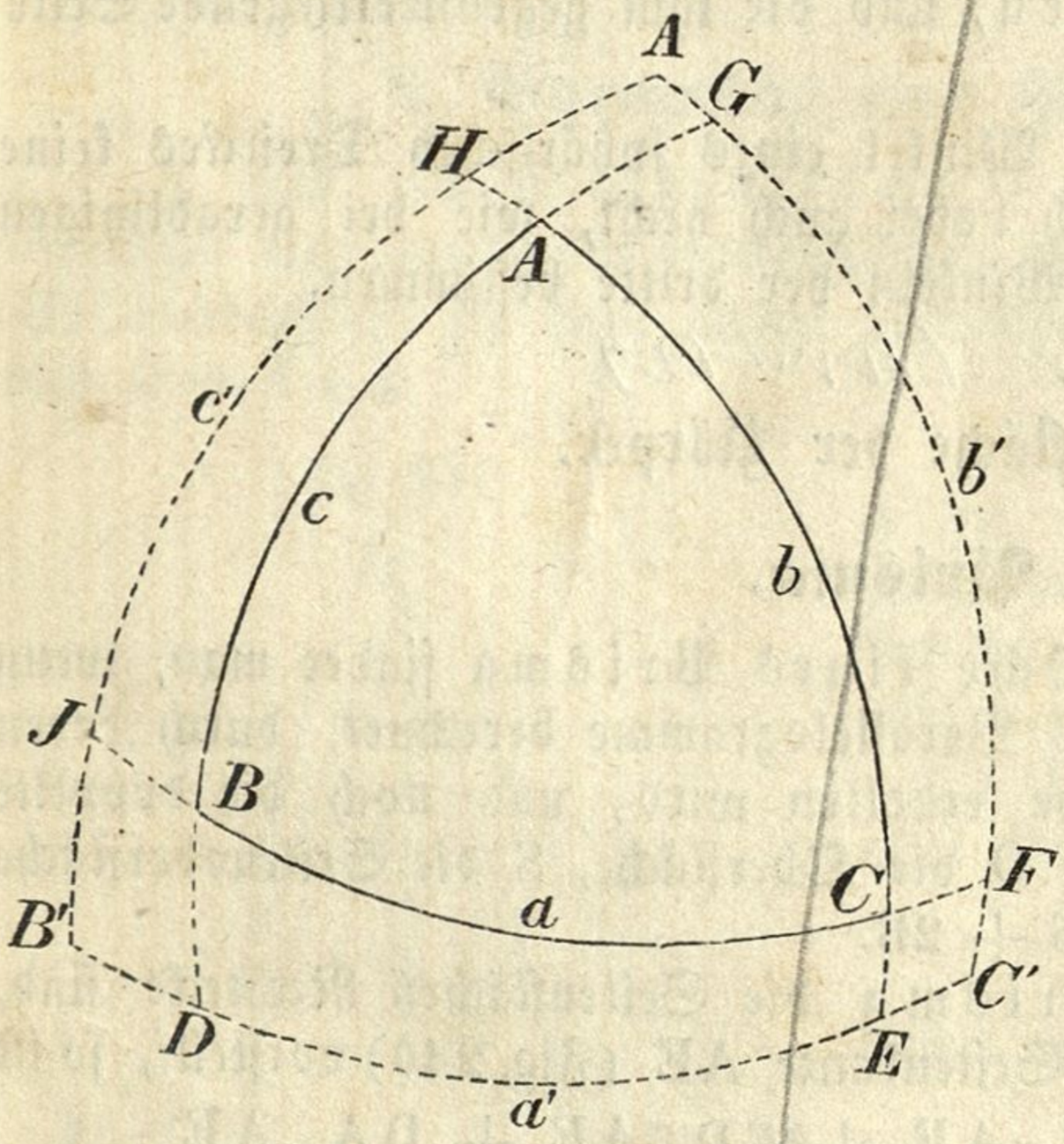
winkeln der Ebenen eines dreiseitigen Körperwinkels. Mit Rücksicht auf §§. 296 und 297 hat man demnach folgende zwei Sätze:

1. Jede Seite eines sphärischen Dreieckes ist kleiner als die Summe der beiden andern.

2. Die Summe aller drei Seiten eines sphärischen Dreieckes ist kleiner als 360°.

§ 326. Wenn man aus den Scheitelpunkten eines sphärischen Dreieckes, als Pole, größte Kreisbögen beschreibt, so heißt das dadurch entstehende neue sphärische Dreieck das Polardreieck des ersteren.

Fig. 239.



Ist ABC (Fig. 239) ein sphärisches Dreieck, und macht man AD = AE = BF = BG = CH = CJ = 90°, so ist, wenn durch die Punkte D und E, F und G, H und J die größten Kreisbögen B'C', A'C' und A'B' beschrieben werden, A'B'C' das Polardreieck des gegebenen sphärischen Dreieckes ABC, und dieses wieder, wie man leicht sieht, das Polardreieck von A'B'C'.

Die Seiten eines sphärischen Dreieckes ergänzen die Winkel seines Polardreieckes zu 180°.

Beweis. Heißen A, B, C die Winkel, und a, b, c die gegenüber liegenden Seiten in dem Dreiecke ABC, ferner A', B', C' die Winkel, und a', b', c' die Seiten in dem Polardreiecke A'B'C', so sind nach §. 322 die Bögen DE, FG, HJ, FJ, EH und DG folgeweise die Maße für die sphärischen Winkel A, B, C, A', B' und C'. Man hat demnach

$$a + A' = BC + FJ = 90^0 - CF + 90^0 + CF = 180^0;$$
$$b + B' = AC + EH = 90^0 - AH + 90^0 + AH = 180^0;$$
$$c + C' = AB + DG = 90^0 - AG + 90^0 + AG = 180^0.$$

Eben so findet man

$$a' + A = 180^0,\ b' + B = 180^0,\ c' + C = 180^0.$$

§ 327. Die Summe aller Winkel eines sphärischen Dreieckes ist größer als zwei Rechte oder 180^0, und kleiner als sechs Rechte oder 540^0.

Beweis. Es seien die Winkel irgend eines sphärischen Dreieckes A, B, C, und die Seiten seines Polardreieckes a', b', c', so ist

$$a' + A = 180^0$$
$$b' + B = 180^0$$
$$c' + C = 180^0, \text{ daher}$$

$$a' + b' + c' + A + B + C = 540^0, \text{ aber}$$
$$a' + b' + c' < 360^0, \text{ folglich}$$

$$A + B + C > 180^0.$$

Auch folgt aus $a' + b' + c' + A + B + C = 540^0$, daß $A + B + C < 540^0$ sein müsse.

Ein sphärisches Dreieck kann also zwei oder auch drei rechte, ja sogar drei stumpfe Winkel haben.

Ein sphärisches Dreieck, welches keinen rechten Winkel enthält, heißt schiefwinklig; kommt darin ein rechter Winkel vor, so wird es ein rechtwinkliges genannt. Auch hier heißen die den rechten Winkel einschließenden Seiten die Katheten, und die ihm gegenüberliegende Seite die Hypotenuse.

Da die Summe aller drei Winkel eines sphärischen Dreieckes keine beständige Größe ist, so läßt sich dabei auch nicht, wie bei geradlinigen Dreiecken, aus zwei gegebenen Winkeln der dritte bestimmen.

Zweiter Cursus.

II. Oberfläche der Körper.

1. Prisma.

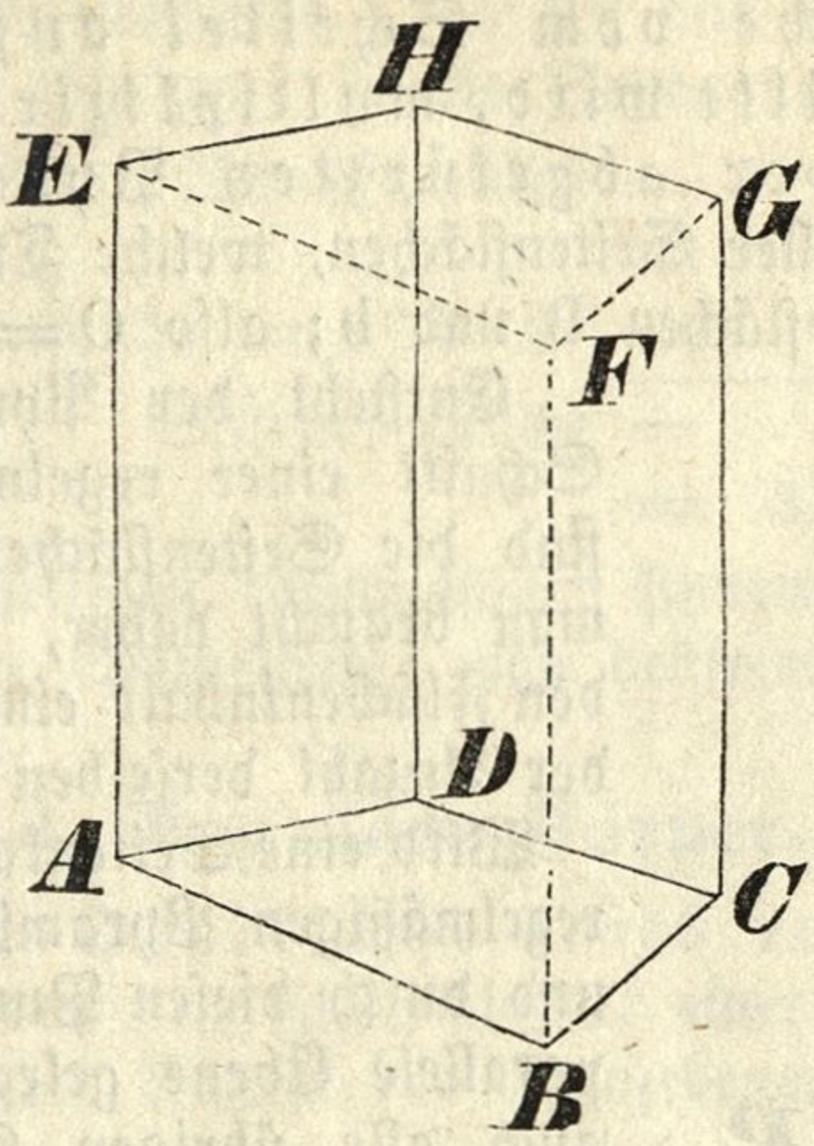
§. 328. Die Oberfläche eines Prisma findet man, wenn man zuerst die Seitenflächen als Parallelogramme berechnet, durch deren Summirung die Seitenoberfläche erhalten wird, und noch die doppelte Grundfläche dazu addirt. Heißt O die Oberfläche, S die Seitenoberfläche und B die Basis, so ist $O = S + 2B$.

Da beim geraden Prisma die Seitenflächen Rechtecke sind, deren gemeinschaftliche Höhe eine Seitenkante AE (Fig. 240) vorstellt, so ist

$$S = AB \,.\, AE + BC \,.\, AE + CD \,.\, AE + DA \,.\, AE$$
$$= (AB + BC + CD + DA) \,.\, AE,$$

d. h. die Seitenoberfläche eines geraden Prisma wird gefunden, wenn man den Umfang der Basis mit einer Seitenkante multiplizirt.

Fig. 240.



Beispiel.

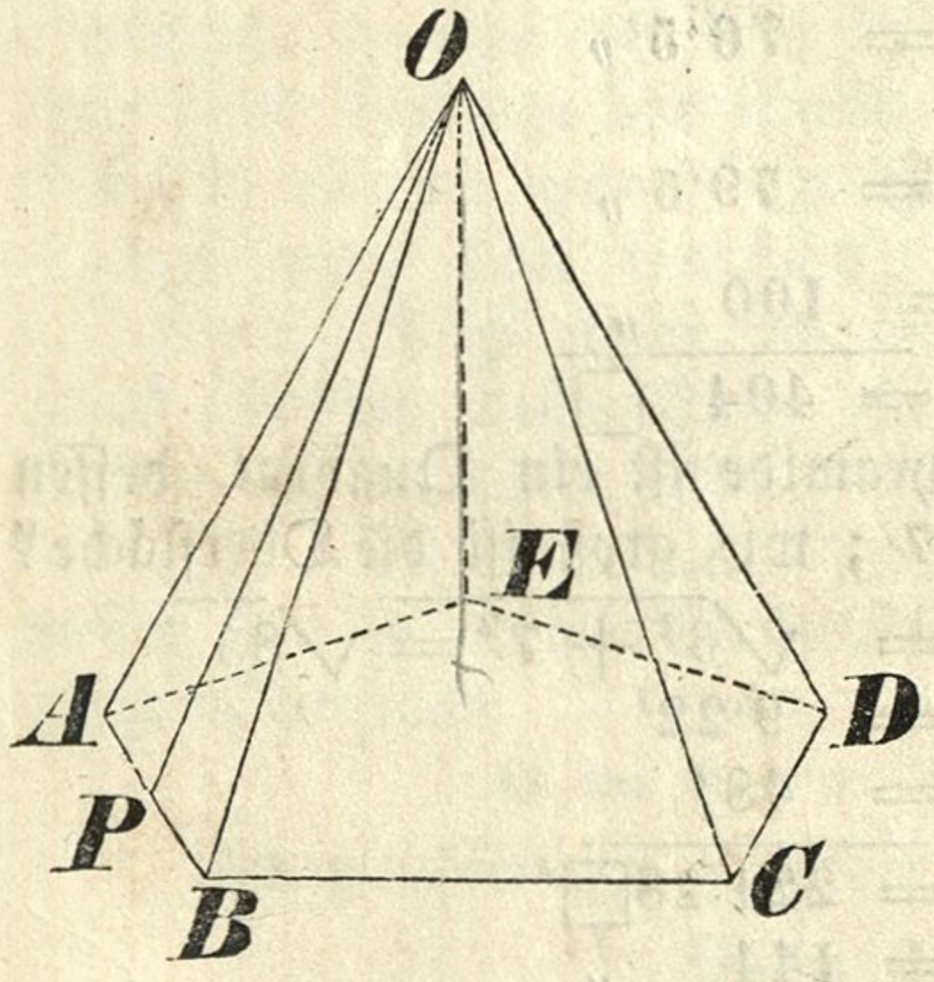
Wie groß ist die Oberfläche eines rechtwinkligen Parallelepipeds, dessen Länge $2^0\ 4'$, die Breite $1^0\ 5'$, und die Höhe $1^0\ 3'$ ist;

Länge = 16′ Umfang der Basis = 54′ Basis = 16×11
Breite = 11′ Seitenkante = 9′ = 176 □′
Höhe = 9′ Seitenoberfläche = 486 □′
dappelte Basis = 352 ″
Oberfläche = 838 □′ = 23 □° 10 □′.

2. Pyramide und Pyramidalstutz.

§. 329. Um die Oberfläche O einer Pyramide zu erhalten, berechnet man zuerst die Seitenflächen als Dreiecke, ihre Summe gibt die Seitenoberfläche S; dazu addirt man noch den Flächeninhalt B der Basis also $O = S + B$.

Fig. 241.



Ist die Pyramide eine regelmäßige, so wird die Seitenoberfläche S gefunden, wenn man nur ein Seitendreieck berechnet, und dessen Fläche mit der Anzahl der Seitenkanten multiplizirt.

Ist OP (Fig. 241) die Höhe des Dreieckes OAB, so ist

$$\triangle OAB = AB \cdot \frac{OP}{2},$$

daher wenn die Pyramide nseitig ist,

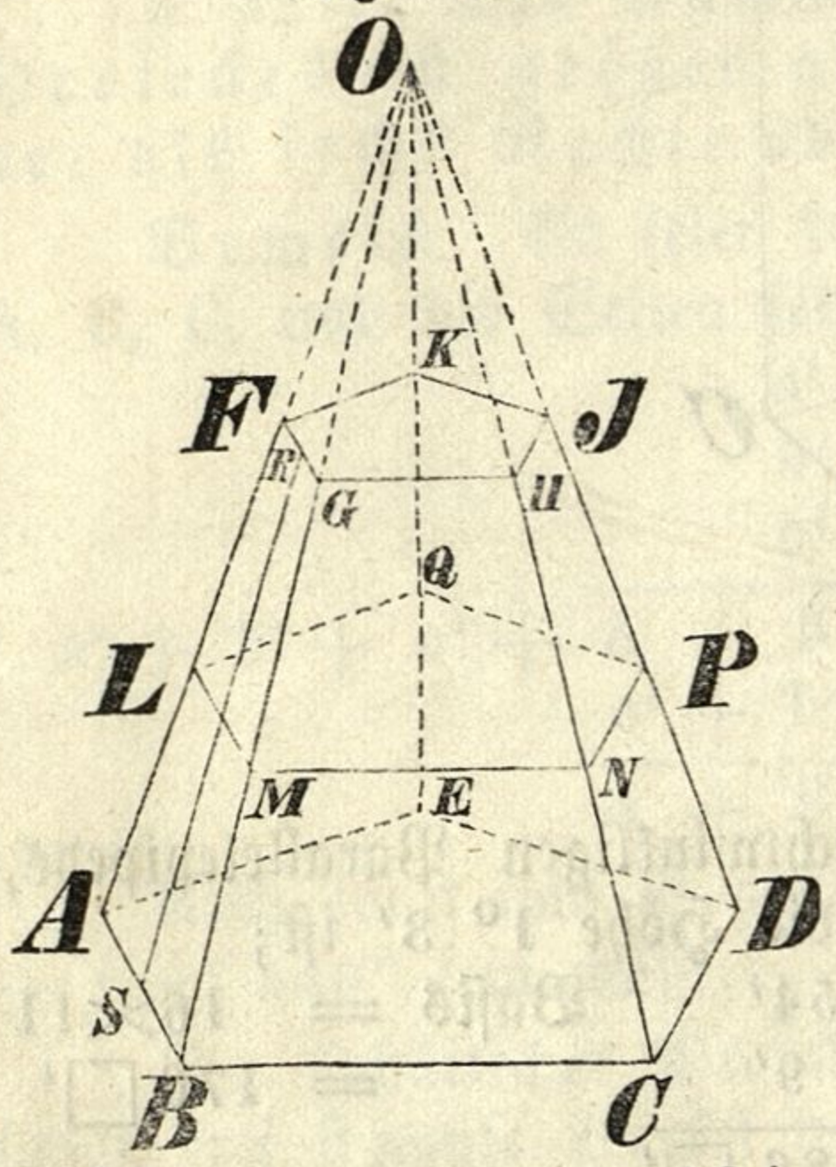
$$S = n \cdot \triangle OAB = n \cdot AB \cdot \frac{OP}{2}.$$

Die Seitenoberfläche einer regelmäßigen Pyramide wird demnach gefunden, wenn man

den Umfang der Grundfläche n.AB mit der halben Senkrechten OP, welche vom Scheitel auf eine Seite der Grundfläche gefällt wird, multiplizirt.

§. 330. Bei der abgekürzten Pyramide berechnet man zuerst die Summe S aller Seitenflächen, welche Trapeze sind, und addirt dazu die beiden Grundflächen B und b; also $O = S + B + b$.

Fig. 242.



Entsteht der Pyramidalstutz durch den Schnitt einer regelmäßigen Pyramide, so sind die Seitenflächen kongruente Trapeze; man braucht daher, um S zu erhalten, nur den Flächeninhalt eines solchen Trapezes mit der Anzahl derselben zu multipliziren.

Wird eine Seitenkante AF (Fig. 242) des regelmäßigen Pyramidalstutzes in L halbirt, und durch diesen Punkt eine mit der Basis parallele Ebene gelegt, so halbirt dieselbe auch alle übrigen Seitenkanten, und der Schnitt LMNPQ ist ein regelmäßiges Polygon. Es sei nun die Basis nseitig, und RS die Höhe des Trapezes ABGF, so ist Trapez ABGF = LM.RS, daher S = n. Trapez ABGF = n.LM.RS.

Die Seitenoberfläche einer abgekürzten regelmäßigen Pyramide ist also gleich n.LM, d. i. dem Umfange des mittlern Durchschnittes LMNPQ, multiplizirt mit der Höhe RS einer Seitenfläche.

§. 331. Beispiele.

1) Die Basis einer Pyramide ist ein Quadrat, dessen jede Seite 10′ beträgt, die Höhen der Seitendreiecke sind 15′, 14·6′, 15·3′, 15·9′; wie groß ist die Oberfläche dieser Pyramide?

$$\text{Dreieck I} = \frac{10 \times 15}{2} = 75 \ \square'$$
$$\text{„ II} = \frac{10 \times 14{\cdot}6}{2} = 73 \ \text{„}$$
$$\text{„ III} = \frac{10 \times 15{\cdot}3}{2} = 76{\cdot}5 \ \text{„}$$
$$\text{„ IV} = \frac{10 \times 15{\cdot}9}{2} = 79{\cdot}5 \ \text{„}$$
$$\text{Basis} = 10^2 = 100 \ \text{„}$$
$$\text{Oberfläche} = 404 \ \square'.$$

2) Die Basis einer regelmäßigen Pyramide ist ein Quadrat, dessen Seite 12′ beträgt, die Höhe derselben ist 7′; wie groß ist die Oberfläche?

$$\text{Die Höhe eines Seitendreieckes ist} = \sqrt{6^2 + 7^2} = \sqrt{85} = 9{\cdot}22'$$
$$\text{Umfang der Basis} = 48'$$
$$\text{Seitenoberfläche} = 221{\cdot}28 \ \square'$$
$$\text{Basis} = 12^2 = 144 \ \text{„}$$
$$\text{Oberfläche} = 365{\cdot}28 \ \square'$$

3) In einer abgekürzten, dreiseitigen regelmäßigen Pyramide beträgt die Höhe einer Seitenfläche $1^0\ 5'\ 2''$ und eine Seite des mittlern Durchschnittes $3'\ 10''$; wie groß ist die Seitenoberfläche?

Seite des mittlern Durchschnittes $= 3'\ 10'' = 46''$
Umfang " " " $= 138''$
Höhe einer Seitenfläche $= 1^0\ 5'\ 2'' = 134''$

Seitenoberfläche $= 18492\square''$
$= 3\square^0\ 20\square'\ 60\square''$.

4) In einer dreiseitigen regelmäßigen Pyramide ist a eine Seite der Grundfläche und s eine Seitenkante; man bestimme die Oberfläche.

3. Reguläre Körper.

§. 332. Um die Oberfläche eines regulären Körpers zu erhalten, berechne man den Flächeninhalt einer Grenzebene, und multiplizire denselben mit der Anzahl der Grenzebenen.

Beispiele.

1) Wie groß ist die Oberfläche eines Würfels, dessen Seite $4'\ 6''$ beträgt?

Seite $= 4'\ 6'' = 54''$.
Eine Grenzfläche $= 54^2 = 2916\square''$.
Oberfläche $= 17496\square'' = 3\square^0\ 13\square'\ 72\square''$.

2) In einem Ikosaëder beträgt jede Seite $8''$; wie groß ist die Oberfläche?

Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreieckes, worin eine Seite $8''$ beträgt, ist $27{\cdot}72\square''$; die Oberfläche des Ikosaëders ist daher

$$27\,72 \times 20 = 554{\cdot}4\square'' = 3\square'\ 122{\cdot}4\square''.$$

4. Zilinder.

§. 333. Beim Zilinder berechnet man zuerst die Mantelfläche M, und addirt dazu die doppelte Basis 2B; also $O = M + 2B$.

In einem geraden Zilinder läßt sich der Mantel in ein Rechteck abwickeln, welches mit dem Zilinder einerlei Höhe hat, und dessen Grundlinie dem Umfange der Basis des Zilinders gleich ist. Die Mantelfläche eines geraden Zilinders wird daher gefunden, wenn man den Umfang der Basis mit der Seite multiplizirt. Dieß ergibt sich auch, wenn der gerade Zilinder als ein gerades Prisma, dessen Basis ein regelmäßiges Polygon von unendlich viel Seiten ist, betrachtet wird.

Ist s die Seite eines geraden Zilinders, dessen Basis r zum Halbmesser hat, so ist die Mantelfläche $= 2srπ$, die Basis $r^2π$, daher die ganze Oberfläche

$$O = 2srπ + 2r^2π = 2rπ(s + r).$$

Im gleichseitigen Zilinder ist $s = 2r$, daher

$$O = 2rπ \,.\, 3r = 6r^2π.$$

§. 334. Beispiele.

1) Wie groß ist die Oberfläche eines geraden Zilinders, dessen Grundfläche 3′ 4″ zum Halbmesser hat, und dessen Höhe 4′ 8″ ist?

Umfang der Basis = 80 × 3·1416 = 251·328″

Mantelfläche = 251·328 × 56 = 14074·368 □″

Basis = 251·328 × 20 = 5026·56 □″

Doppelte Basis = 10053·12 □″

Oberfläche = 24127·488 □′,

= 1 □° 23 □′ 79 □″.

2) Wie groß ist die Oberfläche eines gleichseitigen Zilinders, wenn der Halbmesser der Grundfläche 2′ 5″ beträgt?

Basis = 29^2 × 3·14159 = 2642·078 □″

Oberfläche = 2642·078 × 6 = 15852·468 □″

= 3 □° 2 □′ 12 □″.

3) Die Oberfläche eines hohlen senkrechten Zilinders zu berechnen, wenn der Halbmesser R des ganzen Zilinders, der Halbmesser r des ausgeschnittenen Zilinders und die Höhe h gegeben sind.

4) Man suche den Halbmesser eines Kreises, der so groß ist als die Mantelfläche eines geraden Zilinders, dessen Basis a zum Halbmesser hat, und dessen Höhe b ist.

5. Kegel und Kegelstutz.

§. 335. Die Oberfläche eines Kegels wird gefunden, wenn man zuerst die Mantelfläche M, dann die Basis B berechnet, und beide addirt; somit ist $O = M + B$.

Bei einem geraden Kegel wird die Mantelfläche berechnet, wenn man den Umfang der Basis mit der halben Seite des Kegels multiplizirt. Denn wenn man sich die Mantelfläche des geraden Kegels auf eine Ebene abgewickelt denkt, so erscheint sie als ein Kreisausschnitt, dessen Bogen dem Umfange der Basis, und dessen Halbmesser der Seite des Kegels gleich ist; nun ist der Flächeninhalt eines Kreissektors gleich der Länge des Bogens multiplizirt mit dem halben Halbmesser, folglich ist die Mantelfläche eines geraden Kegels gleich dem Umfange der Basis multiplizirt mit der halben Seite. Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich auch, wenn man den geraden Kegel als eine gerade Pyramide, deren Basis ein reguläres Polygon von unendlich viel Seiten ist, betrachtet.

Heißt s die Seite eines geraden Kegels, und r der Halbmesser der Basis, so ist die Mantelfläche $= 2r\pi \cdot \frac{s}{2} = rs\pi$, die Basis $= r^2\pi$, daher die ganze Oberfläche

$$O = rs\pi + r^2\pi = r\pi(s + r).$$

Wäre die Höhe h mit dem Halbmesser r bekannt, so ist

$$s = \sqrt{h^2 + r^2}, \text{ daher}$$

$$O = r\pi\left\{r + \sqrt{h^2 + r^2}\right\}.$$

Für den gleichseitigen Kegel ist $s = 2r$, daher

$$O = r\pi \cdot 3r = 3r^2\pi.$$

§. 336. Beim Kegelstutz berechnet man die Mantelfläche M, und addirt dazu die beiden Grundflächen B und b; also $O = M + B + b$.

Da ein abgekürzter gerader Kegel als eine abgekürzte regelmäßige Pyramide von unendlich viel Seiten betrachtet werden kann, worin die Seite des Kegelstutzes als Höhe eines Trapezes erscheint; so folgt:

Die Mantelfläche eines abgekürzten geraden Kegels ist gleich dem Umfange des mittlern Durchschnittes multiplizirt mit einer Seite.

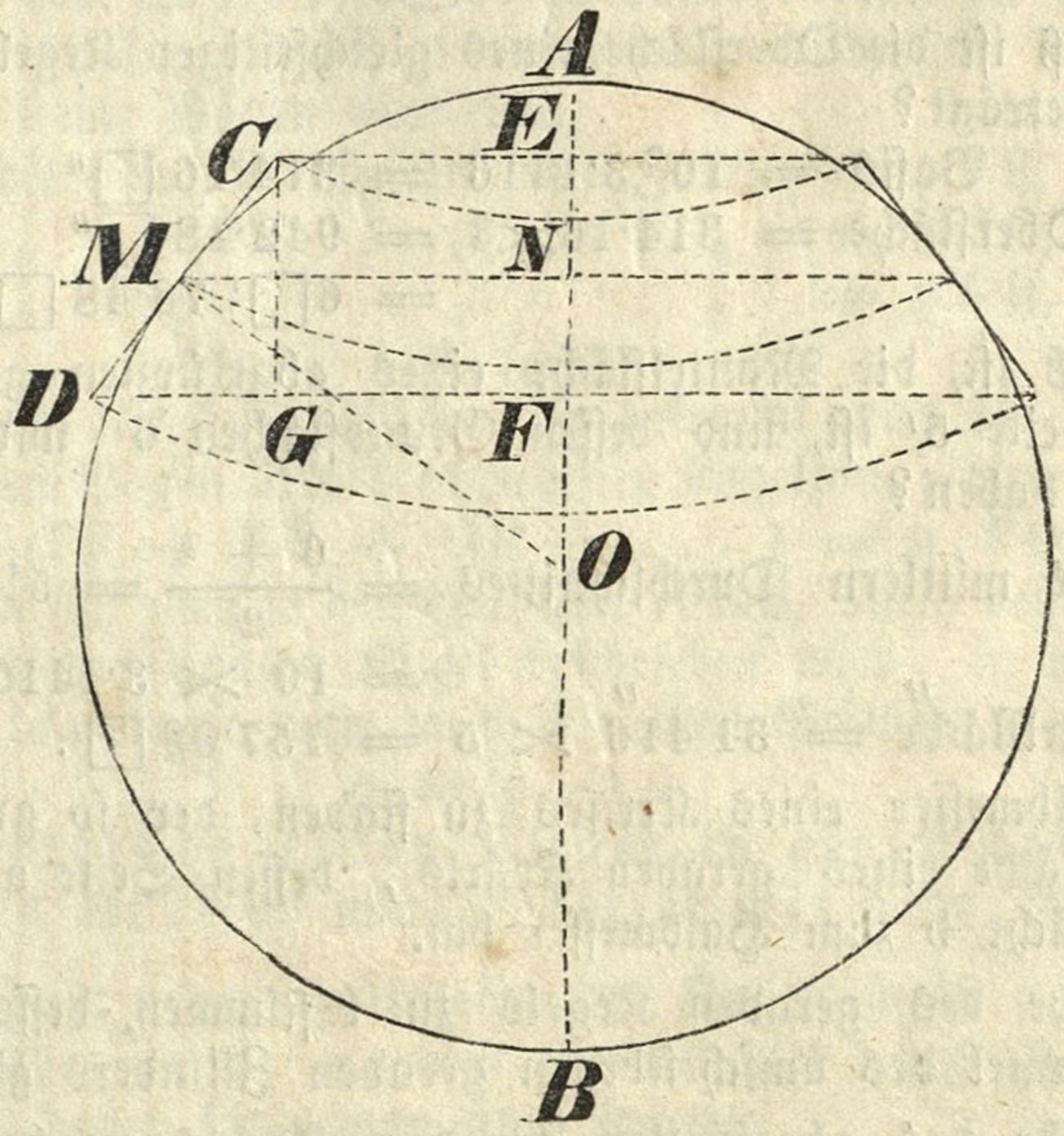
Heißt s die Seite, R der Halbmesser der untern, r der Halbmesser der obern Basis, so ist $\frac{R + r}{2}$ der Halbmesser des mittlern Durchschnittes, daher sein Umfang $(R + r)\,\pi$, und somit die Mantelfläche

$$(R + r)\,s\,\pi.$$

Die ganze Oberfläche ist gleich $R^2\,\pi + r^2\,\pi + (R + r)\,s\,\pi$.

§. 337. Es sei AMB (Fig. 243) ein Halbkreis. Man nehme in dem Umfange irgend einen Punkt M an, ziehe durch denselben die Tangente CD, mache $CM = DM$, und fälle von den Punkten C, M, D auf den Durchmesser AB die Senkrechten CE, MN, DF. Denkt man sich nun die ganze Figur um den Durchmesser AB herumgedreht, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückkommt, so beschreibt der Halbkreis AMB die Oberfläche einer Kugel, und die Tangente CD die Mantelfläche eines abgekürzten geraden Kegels, dessen Grundflächen die Senkrechten CE und DF zu Halbmessern haben, und dessen Mitteldurchschnitt, zugleich ein Durchschnitt der Kugel, der mit dem Halbmesser MN beschriebene Kreis ist. Ein solcher Kegelstutz heißt der Kugel umschrieben.

Fig. 243.



Zur Berechnung der Mantelfläche M eines solchen abgekürzten Kegels hat man als Umfang des mittlern Durchschnittes $2 \cdot MN \cdot \pi$ und

als Seite die Tangente CD; daher ist $M = 2\pi \cdot MN \cdot CD$. Diese Größe läßt sich nun noch auf eine andere Art darstellen. Zieht man CG ⊥ DF, so sind die Dreiecke MNO und CGD ähnlich, weil ihre Seiten auf einander wechselseitig senkrecht stehen, daher ist $MN : CG = MO : CD$, oder $MN \cdot CD = MO \cdot CG$. Substituirt man diesen Werth in dem früher für M erhaltenen Ausdrucke, so hat man $M = 2\pi \cdot MO \cdot CG$. Da nun $2\pi \cdot MO$ die Periferie eines größten Kreises der Kugel und CG die Höhe des Kegelstutzes vorstellt, so gilt der Satz:

Die Mantelfläche eines der Kugel umschriebenen Kegelstutzes ist gleich der Periferie des größten Kreises der Kugel multiplizirt mit der Höhe des Kegelstutzes.

§. 338. **Beispiele.**

1) Wie groß ist die Oberfläche eines geraden Kegels, dessen Seite 2′ 5″ ist, und dessen Grundfläche 1′ 8″ zum Halbmesser hat?

Umfang der Basis $= 40 \times 3{\cdot}1416 = 125{\cdot}664''$

Mantelfläche $= 125{\cdot}664 \times \frac{29}{2} = 1822{\cdot}128\ \square''$

Basis $= 125{\cdot}664 \times 10 = 1256{\cdot}64\ \square''$

Oberfläche $= 3078\,768\ \square''$

$= 21\ \square'\ 54{\cdot}768\ \square''$.

2) Man suche die Mantelfläche eines Kegels, dessen Höhe 3′ 9″ ist, und dessen Grundfläche 8″ zum Halbmesser hat.

Umfang der Basis $= 16 \times 3{\cdot}1416 = 50{\cdot}2656''$

Seite des Kegels $= \sqrt{45^2 + 8^2} = 45{\cdot}706''$

Mantelfläche $= 1148{\cdot}7\ \square'' = 7\ \square'\ 140{\cdot}7\ \square''$.

3) Wie groß ist die Oberfläche eines gleichseitigen Kegels, dessen Seite 1′ 8″ beträgt?

Basis $= 10^2 . 3{\cdot}1416 = 314{\cdot}16\ \square''$

Oberfläche $= 314{\cdot}16 \times 3 = 942{\cdot}48\ \square''$

$= 6\ \square'\ 78{\cdot}48\ \square''$.

4) Wie groß ist, die Mantelfläche eines abgekürzten geraden Kegels, dessen Seite 5′ ist, und dessen Grundflächen 6′ und 4′ zu Halbmessern haben?

Halbmesser des mittlern Durchschnittes $= \frac{6 + 4}{2} = 5'$

Umfang " " " $= 10 \times 3{\cdot}1416 = 31{\cdot}416'$

Mantelfläche $= 31{\cdot}416 \times 5 = 157{\cdot}08\ \square'$.

5) Den Halbmesser eines Kreises zu finden, der so groß ist als die Mantelfläche eines geraden Kegels, dessen Seite a ist, und dessen Grundfläche b zum Halbmesser hat.

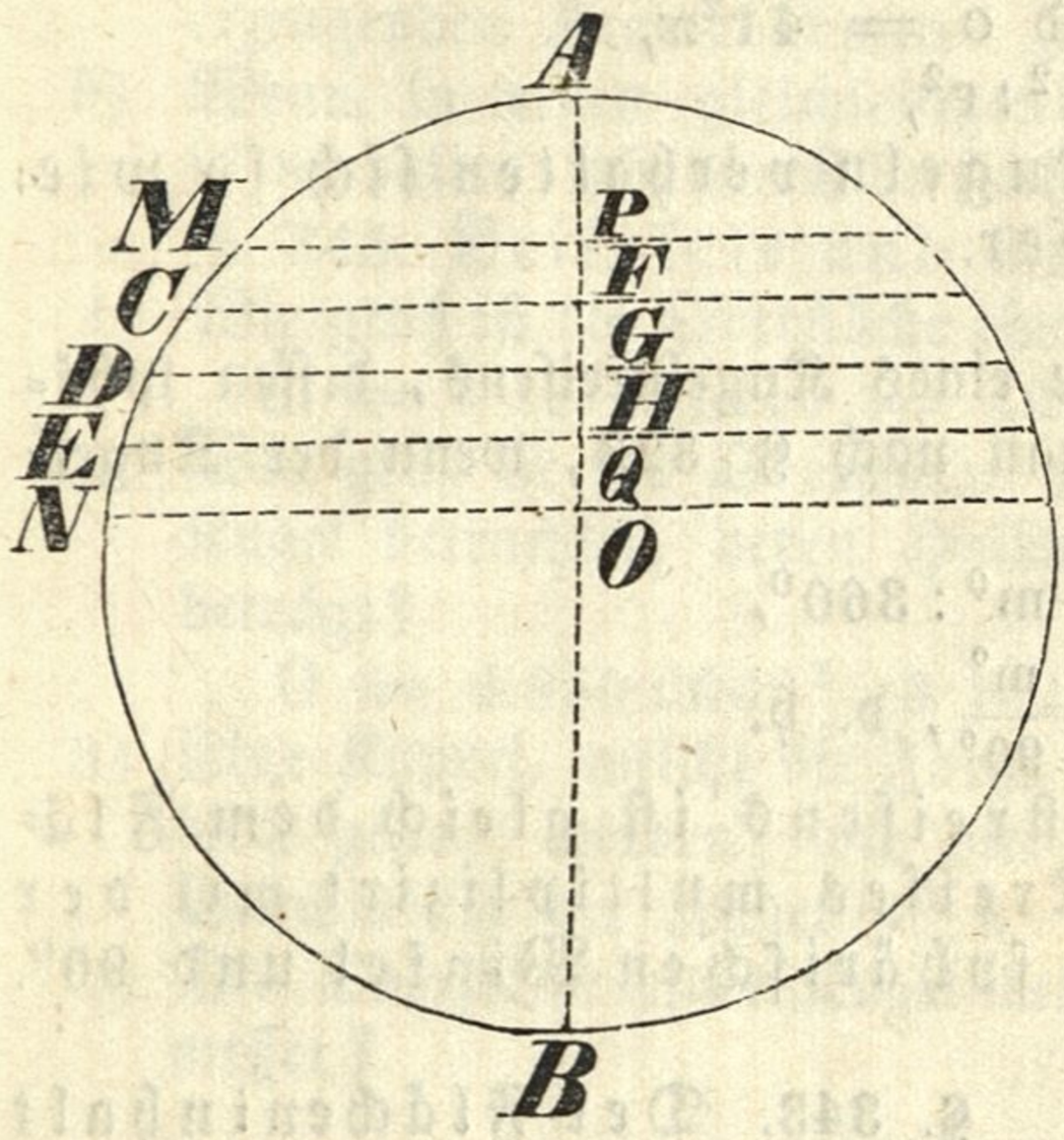
6) Die Höhe des geraden Kegels zu bestimmen, dessen Mantelfläche dem Mantel des umschriebenen geraden Zilinders gleich ist.

7) Die Höhe des abgekürzten geraden Kegels zu bestimmen, dessen Mantelfläche dem Mantel des umschriebenen geraden Zilinders gleich ist.

6. Kugelzone und Kugel.

§. 339. Die krumme Oberfläche einer Kugelzone ist gleich dem Umfange eines größten Kreises multiplizirt mit der Höhe.

Fig. 244.



Beweis. Theilt man (Fig. 244) den Kreisbogen MN in mehrere Theile MC, CD, DE...., zieht dann auf den Durchmesser die Senkrechten MP, CF, DG . . . ., und dreht den Halbkreis AMNB um den Durchmesser AB, so beschreibt der Bogen MN die Mantelfläche einer Kugelzone, deren Grundflächen die Halbmesser NQ, MP haben, und deren Höhe PQ ist. Diese Mantelfläche ist offenbar die Summe aus den Mantelflächen, welche von den Bögen MC, CD, DE, . . . während des Herumdrehens beschrieben werden. Je kleiner nun diese Bögen sind, um so mehr nähern sich die von ihnen beschriebenen Flächen den Mantelflächen von abgekürzten der Kugel umschriebenen Kegeln, und fallen mit ihnen zusammen, wenn jene Bögen unendlich klein sind, d. i. wenn der Bogen MN in unendlich viele Theile getheilt wird. Die Mantelfläche eines solchen Kegelstutzes aber ist gleich dem Umfange eines größten Kreises der Kugel multiplizirt mit der Höhe des Kegelstutzes; es ist daher, wenn die Periferie eines größten Kreises der Kugel durch p ausgedrückt wird, und MC, CD, DE, . . . unendlich kleine Bögen vorstellen,

die von MC beschriebene Fläche = p.PF,
" " CD " " = p.FG,
" " DE " " = p.GH,
u. s. w.

Addirt man alle diese Flächen, so bekommt man die krumme Oberfläche der von dem Bogen MN beschriebenen Kugelzone; diese ist also gleich

$$p\,(PF + FG + GH + \ldots) = p\,.\,PQ.$$

Denkt man sich eben so den Halbkreis AMB, durch dessen Umdrehung die Oberfläche o der ganzen Kugel beschrieben wird, in unendlich viele Theile getheilt, so gelangt man durch dieselben Schlüsse zu dem Resultate

$$o = p\,.\,AB,$$

d. h. die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem Umfange eines größten Kreises multiplizirt mit dem Durchmesser.

§ 340. Heißt r der Halbmesser der Kugel, so ist $p = 2r\pi$ und $AB = 2r$, daher $o = 4r^2\pi$; aber $r^2\pi$ bedeutet den Flächeninhalt eines größten Kreises, daher kann man auch sagen:

Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem vierfachen Inhalte eines größten Kreises.

Aus $o = 4r^2\pi$ folgt $r = \sqrt{\frac{o}{4\pi}}$ mittelst welcher Formel man aus der Oberfläche einer Kugel deren Halbmesser bestimmen kann.

§. 341. Heißen O und o die Oberflächen zweier Kugeln, deren Halbmesser R und r sind, so hat man

$$O = 4R^2\pi \text{ und } o = 4r^2\pi,$$

daher

$$O : o = R^2 : r^2,$$

d. h. die Oberflächen zweier Kugeln verhalten sich so wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

§. 342. Es sei f die Oberfläche eines Kugelstreifens, dessen sphärischer Winkel m^0 beträgt, so hat man nach §. 323, wenn der Kugelhalbmesser durch r bezeichnet wird.

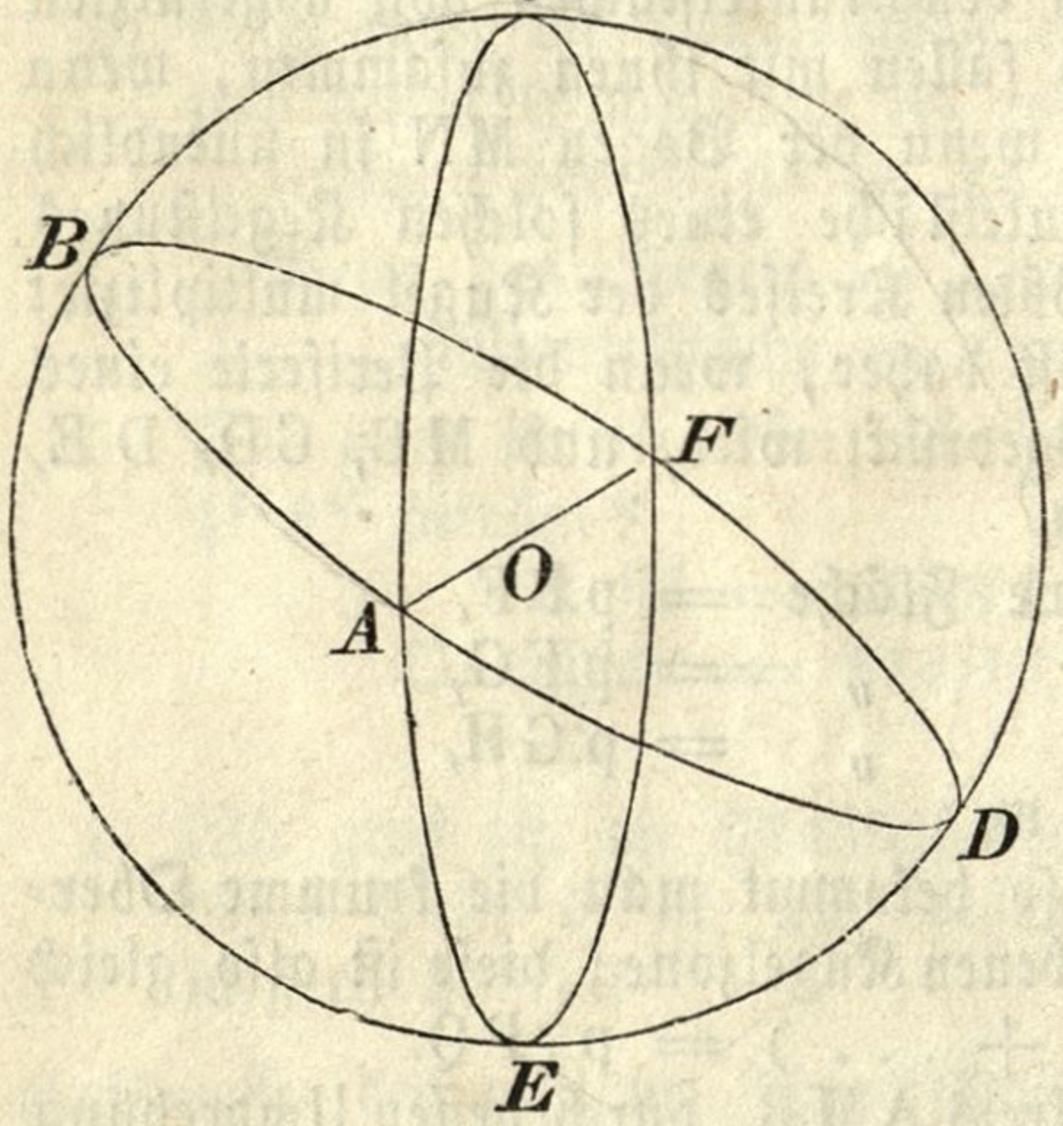
$$f : 4r^2\pi = m^0 : 360^0,$$

daher

$$f = r^2\pi \frac{m^0}{90^0}, \text{ d. h.}$$

die Oberfläche eines Kugelstreifens ist gleich dem Flächeninhalte eines größten Kreises multiplizirt mit der Verhältnißzahl zwischen dem sphärischen Winkel und 90^0.

Fig. 245.



§. 343. Der Flächeninhalt eines sphärischen Dreieckes ist gleich dem Flächeninhalte eines größten Kreises multiplizirt mit der Verhältnißzahl zwischen dem Ueberschusse der drei sphärischen Winkel über 180^0 und zwischen 180^0 (Fig. 245.)

Beweis. Da der Bogen BC = DE, CF = AE und BF = AD, so ist BCF = ADE, daher

$$ABC + ADE = ABC + BCF,$$

oder

$$ABC + ADE = ABFCA.$$

Ferner ist

$$ABC + ACD = BADCB,$$
$$ABC + ABE = CAEBC.$$

Durch Addizion der letzten drei Gleichungen erhält man:

$$2ABC + (ADE + ACD + ABC + ABE) =$$
$$= ABFCA + BADCB + CAEBC.$$

Bezeichnet man nun den Flächeninhalt des sphärischen Dreieckes ABC durch f, den Kugelhalbmesser durch r, wo dann $ADE + ACD + ABC + ABE = 2r^2\pi$ wird, und die Winkel des sphärischen Dreieckes ABC durch A^0, B^0, C^0; so ist mit Rücksicht auf §. 342

$$2f + 2r^2\pi = r^2\pi \cdot \frac{A^0}{90^0} + r^2\pi \cdot \frac{B^0}{90} + r^2\pi \cdot \frac{C^0}{90^0},$$

woraus

$$f = r^2 \pi . \frac{A^0 + B^0 + C^0 - 180^0}{180^0}$$

folgt.

§. 344. Sätze zur Selbstübung im Beweisen.

a) Eine Kugelmütze ist einem Kreise gleich, welche die Sehne des halben erzeugenden Kreisabschnittes zum Halbmesser hat.

b) Wenn in einen gleichseitigen Zilinder eine Kugel beschrieben wird, so verhalten sich die Oberflächen dieser zwei Körper wie 3 : 2.

§. 345. Beispiele und Aufgaben.

1) Wie groß ist die Oberfläche einer Kugel, deren Halbmesser 1′ 6″ ist?

$O = 4 \cdot 18^2 . 3 \cdot 1416 = 4071 \cdot 5 \square'' = 28 \square' 39 \cdot 5 \square''$.

2) Wie groß ist die Oberfläche der Erde, wenn man dieselbe als eine Kugel betrachtet, deren Halbmesser 859·0909 geographische Meilen beträgt?

$O = 4 . 859 \cdot 0909^2 . 3 \cdot 141593 = 9274537 \square$ Meilen.

3) Eine Kuppel, welche die Form einer Halbkugel hat, soll mit Kupferblech gedeckt werden; wie viel Blech ist dazu erforderlich, wenn der Durchmesser der Kugel 4° 3′ ist?

4) Die Oberfläche einer Kugel beträgt 20 □′; wie groß ist der Halbmesser?

$$4\pi = 12 \cdot 566; \quad \frac{O}{4\pi} = 1 \cdot 591;$$

$$r = \sqrt{1 \cdot 591} = 1 \cdot 261' = 1' \; 3 \cdot 132''.$$

5) Ein zilindrischer Dampfkessel mit zwei halbkugelförmigen Endstücken ist 3′ weit und 21′ lang, so daß die Länge des Zilinders 18′ beträgt; wie groß ist die Oberfläche?

Mantelfläche des Zilinders = 169·646 □′
Oberfläche der Endstücke (Kugel) = 28·274 „
ganze Oberfläche = 197·92 □′.

6) Wie groß ist die Fläche eines sphärischen Dreieckes, dessen Winkel 125°, 87°, 82° sind, wenn der Halbmesser der Kugel 2′ beträgt?

7) Den Halbmesser einer Kugel zu finden, deren Oberfläche so groß ist, als

a) die Oberfläche eines gegebenen geraden Zilinders,

b) die Oberfläche eines gegebenen geraden Kegels.

III. Kubikinhalt der Körper.

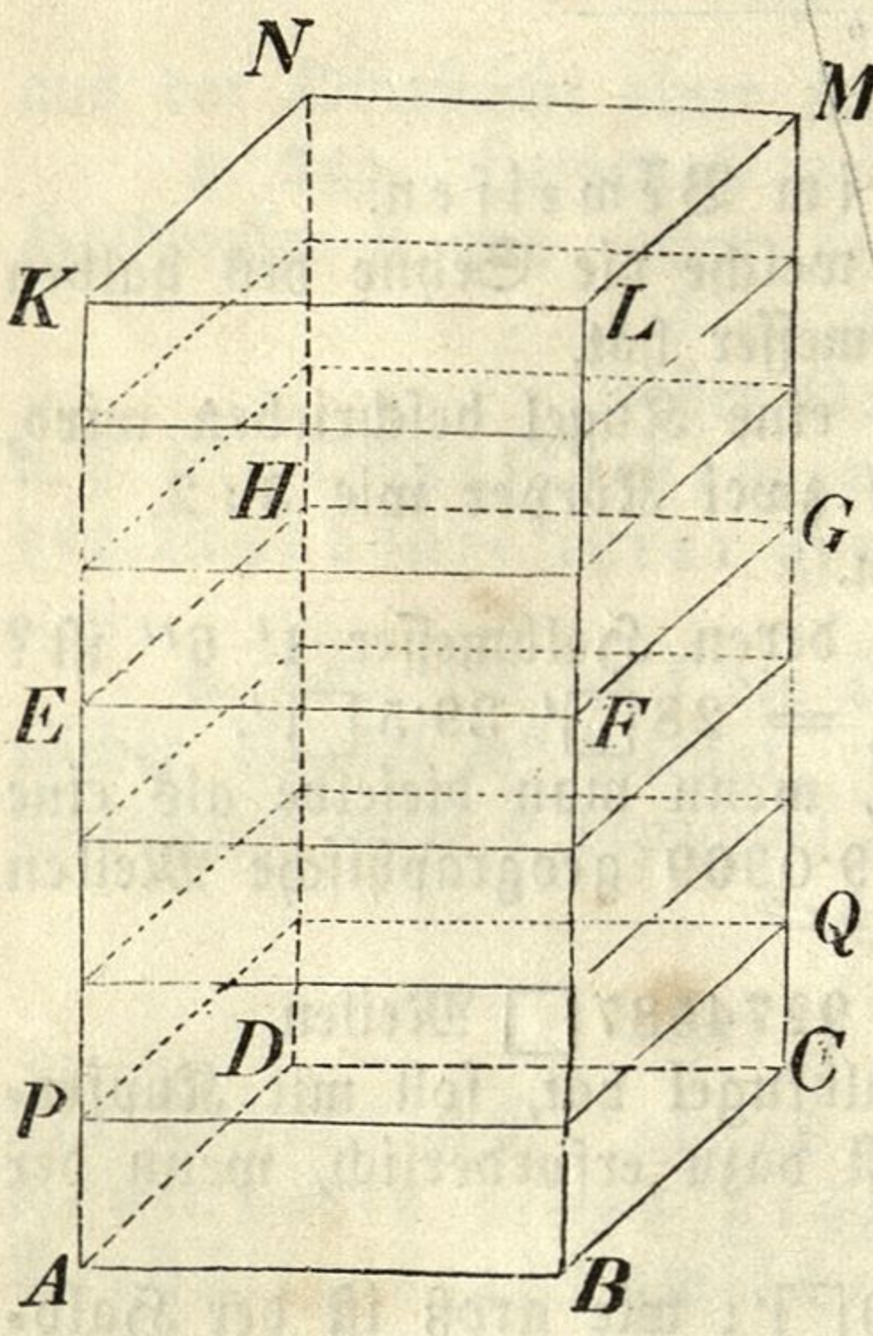
1. Vergleichung der Körperinhalte.

Lehrsätze.

§. 346. Zwei rechtwinklige Parallelepipede über derselben Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen.

a) Es seien die Höhen AE und AK (Fig. 246) kommensurabel, AP das gemeinschaftliche Maß derselben, und AE = m . AP, AK = n . AP, folglich AE : AK = m : n. Denkt man sich nun AK wirklich in n gleiche Theile getheilt, von denen AE m enthalten wird, und denkt man sich durch jeden Theilungspunkt eine mit

Fig. 246.



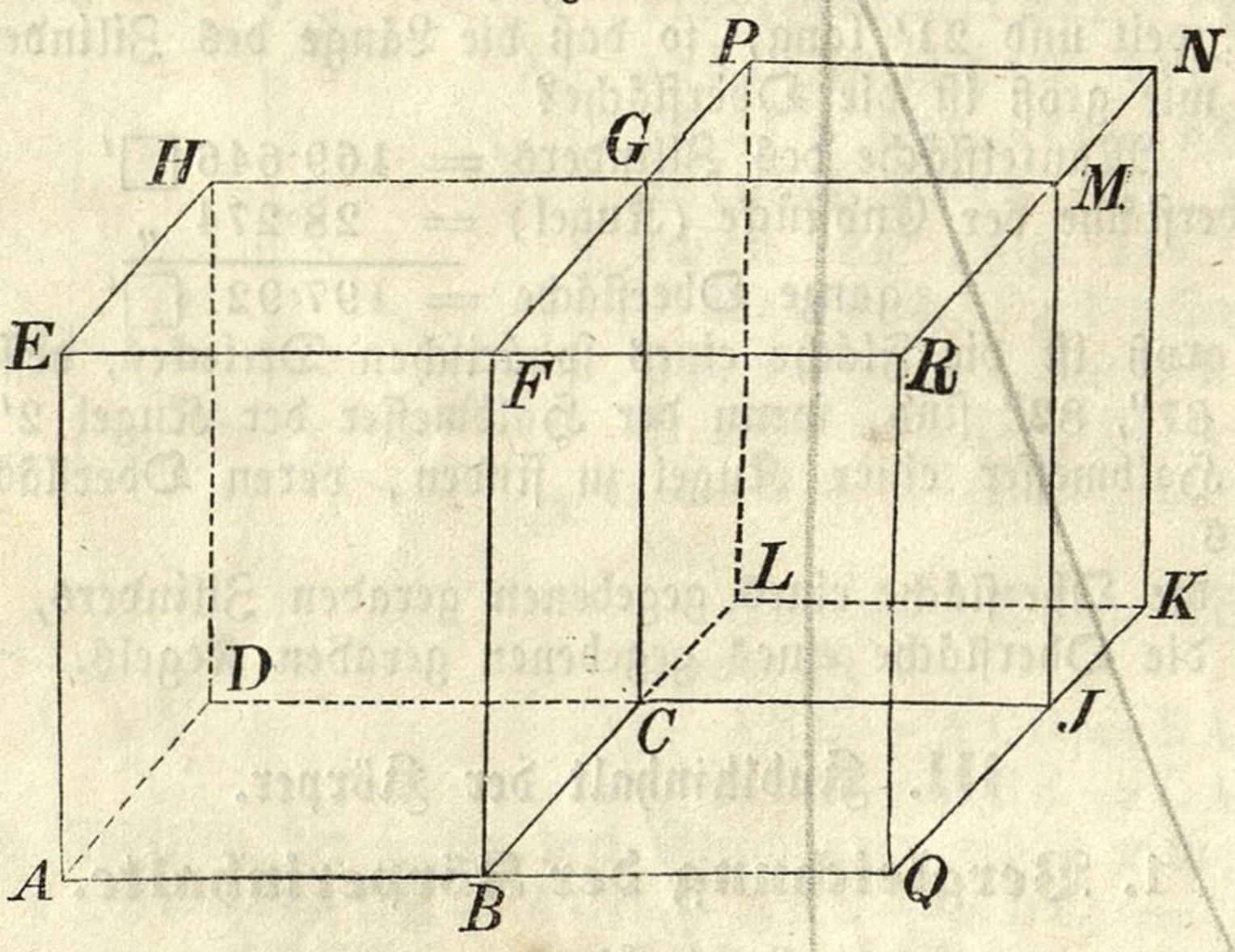
der Basis parallele Ebenen gelegt, wie durch den Punkt P die Ebene PQ, so werden alle diese Durchschnitte mit der Grundfläche kongruent sein. Es wird also auf diese Weise das Parallelepiped AG in m, und jenes AM in n Parallelepipede getheilt, deren jedes nach §. 304 dem Parallelepiped AQ gleich ist, so daß AG = m . AQ, AM = n . AQ, und folglich AG : AM = m : n ist. Da nun auch AE : AK = m : n, so hat man

AG : AM = AE : AK.

b) Die Vervollständigung des Beweises für den Fall, daß die Höhen AE und AK inkommensurabel sind, bleibt dem Schüler überlassen, welchem hiebei der §. 135, b) zur Richtschnur dienen wird.

§. 347. Zwei rechtwinklige Parallelepipede von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen.

Fig. 247.



Es seien (Fig. 247) die rechtwinkligen Parallelepipede CE und CN, deren gemeinschaftliche Höhe CG ist.

Man lege die beiden Parallelepipede auf derselben Ebene ABK so an einander, daß die Schenkel der rechten Winkel BCD und JCL in denselben geraden Linien liegen. Da CG auf der Ebene ABK senkrecht steht, und die beiden Flächen GE und GN mit ABK parallel sind, so müssen auch diese zwei Flächen in derselben Ebene liegen; auch werden die Flächen

CH und CM in der nämlichen Ebene CDM, so wie die Flächen CF und CP in derselben Ebene BCP liegen. Werden nun die Ebenen BE, JN und EN erweitert, bis sie sich in den Linien QR, FR und MR durchschneiden so entsteht ein neues rechtwinkliges Parallelepipeded CR. Weil nun die Parallelepipede CE und CR über derselben Grundfläche BG liegen, so verhalten sie sich wie ihre Höhen, und es ist also CE : CR = CD : CJ. Eben so ist, weil die Parallelpipede CR und CN über der nämlichen Grundfläche CM liegen, CR : CN = BC : CL. Multiplizirt man diese beiden Proporzionen Glied für Glied mit einander, so hat man CE : CN = CD × BC : CJ × CL oder CE : CN = ABCD : CJKL.

§. 348. Zwei rechtwinklige Parallelepipede stehen im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundflächen und Höhen.

Der Beweis ist demjenigen in §. 136 ähnlich.

Versteht man unter Grundfläche und Höhe die unbenannten Zahlen, welche beziehungsweise das Verhältnist derselben zur Flächeneinheit und zur Längeneinheit angeben, so kann man diesen Satz auch so ausdrücken:

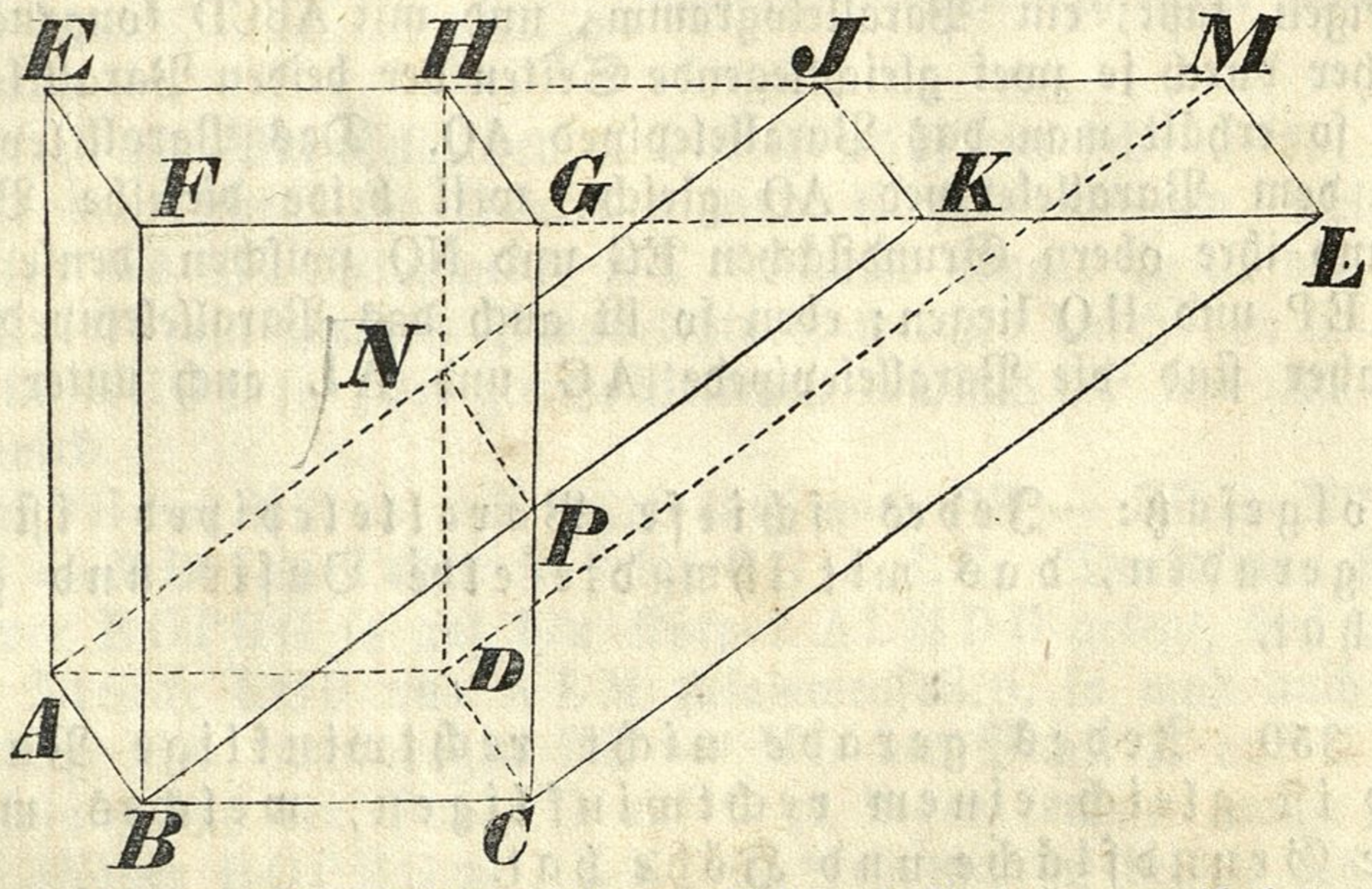
Zwei rechtwinklige Parallelepipede verhalten sich wie die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen.

§. 349. Zwei Parallelepipede sind gleich, wenn sie dieselbe Grundfläche und gleiche Höhe haben.

Wenn zwei Parallelepipede auf derselben Grundfläche aufstehen und gleiche Höhe haben, so müssen die obern Grundflächen nothwendig in einer und derselben Ebene liegen. Im Beweise selbst sind dann zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Wenn die obern Grundflächen zwischen denselben Parallelen EM und FL liegen (Fig. 248).

Fig. 248.

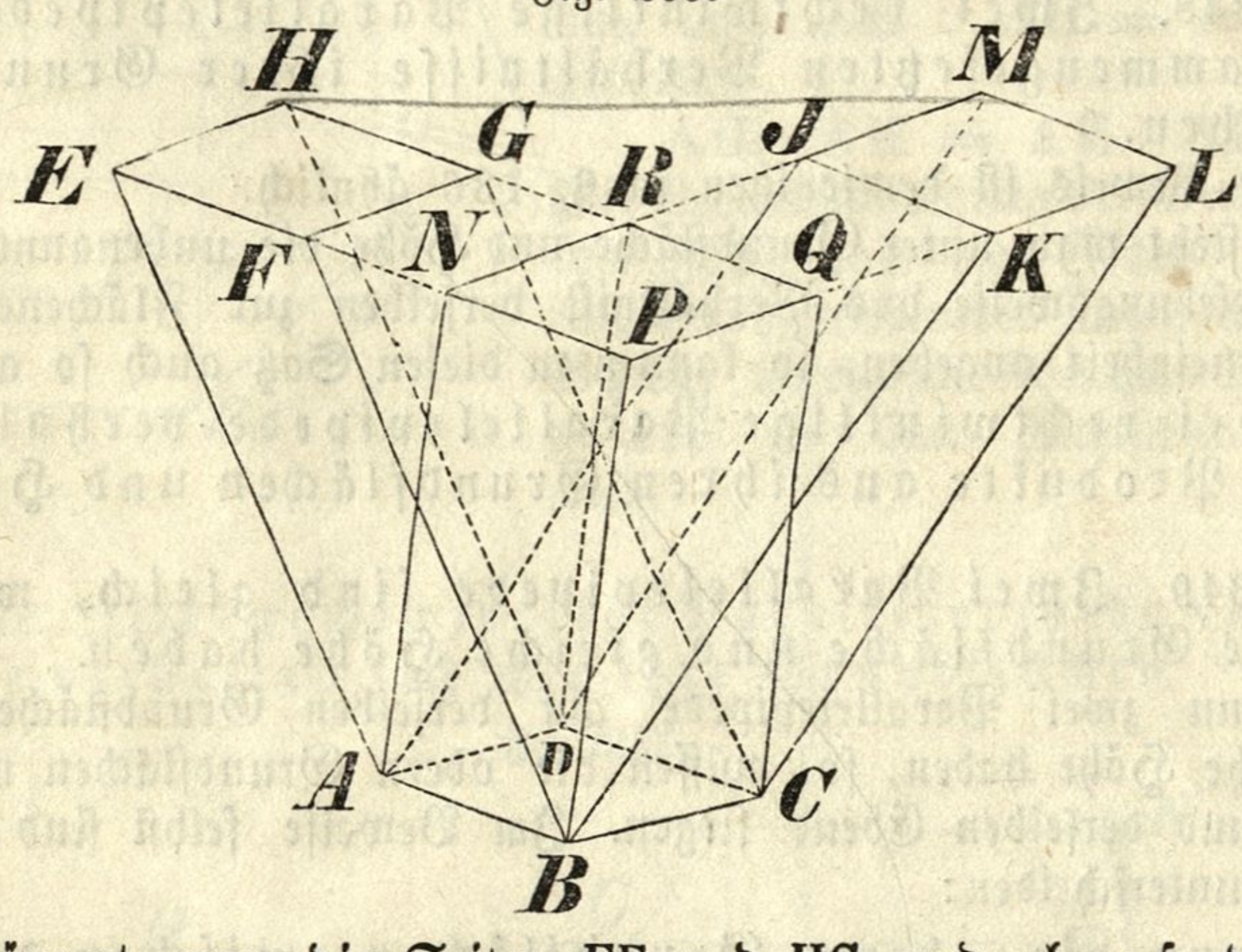


Der Körper AEJBFK ist ein dreiseitiges Prisma weil seine Grundflächen AEJ und BFK parallel liegen, und auch die Seitenkanten AB, EF und JK parallel sind. Eben so ist der Körper DHMCGL ein drei-

seitiges Prisma. Diese beiden Prismen sind nun kongruent, da die Körperwinkel bei F und G von drei in derselben Ordnung kongruenten Ebenen eingeschlossen werden. Nimmt man von beiden Prismen den Körper NHJPGK hinweg, so müssen auch die Reste, nämlich die Körper AEHNBFGP und DNJMCPKL gleich sein, und addirt man zu diesen beiden den Körper ADNBCP, so müssen auch die Summen, nämlich die Parallelepipede AG und AL gleich sein.

b) Wenn die obern Grundflächen nicht zwischen denselben Parallelen liegen, wie in den Parallelepipeden AG und AL (Fig. 249)

Fig. 249.



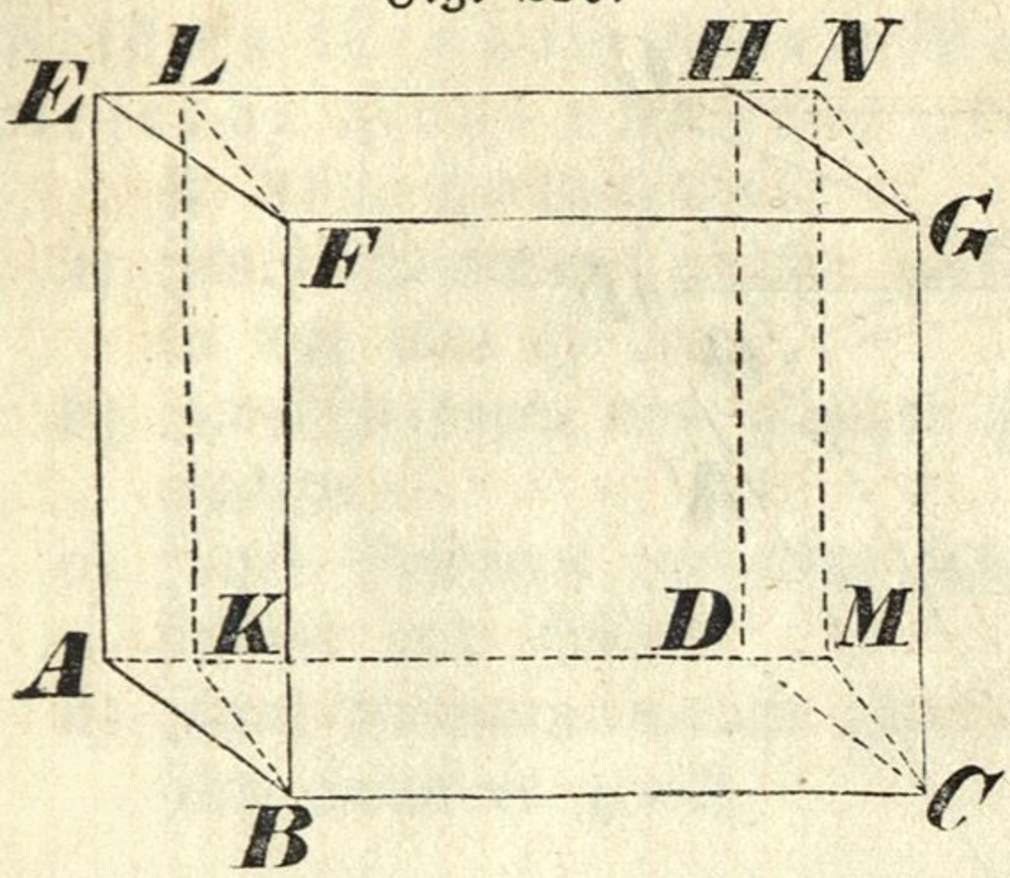
Verlängert man die Seiten EF und HG und eben so die Seiten MJ und LK, so müssen sich dieselben, da sie in einerlei Ebene liegen, in den Punkten N, P, Q, R schneiden. Die Figur NPQR ist nun, wie sich leicht zeigen läßt, ein Parallelogramm, und mit ABCD kongruent; legt man daher durch je zwei gleichliegende Seiten der beiden Parallelogramme Ebenen, so erhält man das Parallelepiped AQ. Das Parallelepiped AG ist nun dem Parallelepiped AQ gleich, weil beide dieselbe Basis AC haben und ihre obern Grundflächen EG und NQ zwischen denselben Parallelen EP und HQ liegen; eben so ist auch das Parallelepiped AL = AQ; daher sind die Parallelepipede AG und AL auch unter einander gleich.

Folgesatz: Jedes schiefe Parallelepiped ist gleich einem geraden, das mit ihm dieselbe Basis und gleiche Höhe hat.

§. 350. Jedes gerade nicht rechtwinklige Parallelepiped ist gleich einem rechtwinkligen, welches mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Es sei BH (Fig. 250) ein gerades Parallelepiped, dessen Basis ABCD ein schiefwinkliges Parallelogramm ist. Man lege durch die Kanten BF und CG Ebenen, welche anf der Ebene ADHE senkrecht

Fig. 250.



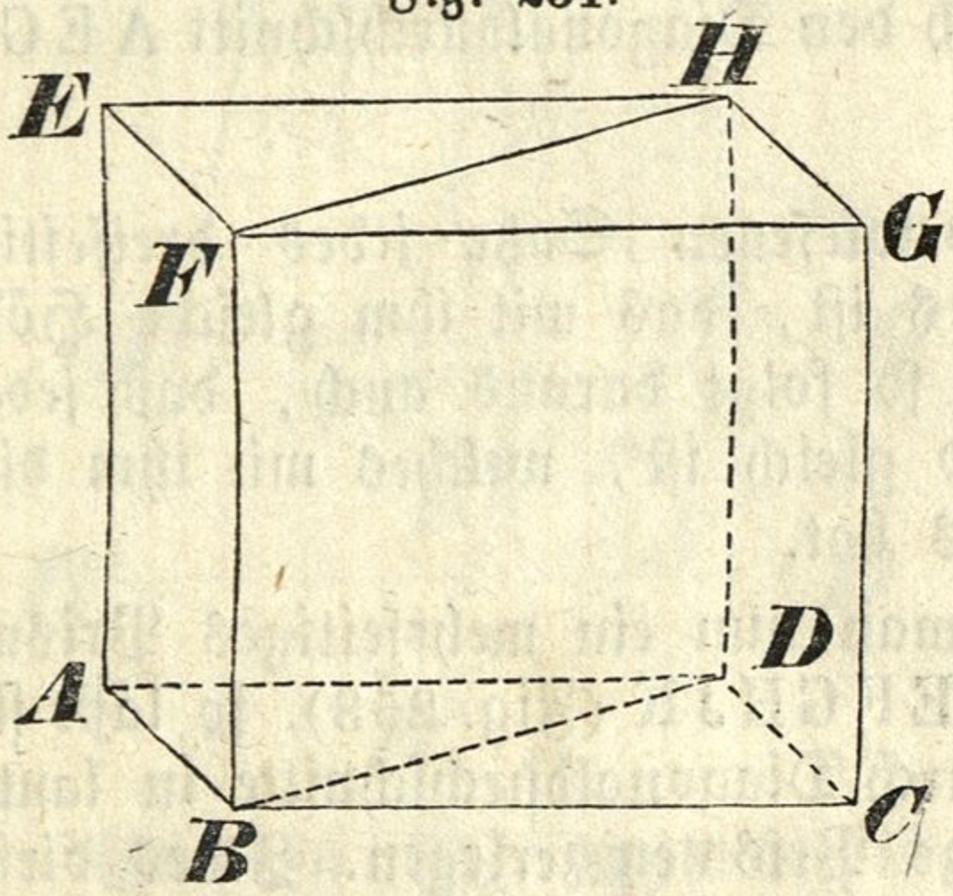
stehen, so ist BN ein rechtwinkliges Parallelepiped, welches mit dem gegebenen geraden Parallelepiped BH gleiche Höhe und gleiche Grundfläche hat, da das Rechteck MB dem schiefwinkligen Parallelogramme BD gleich ist. Betrachtet man nun in den beiden Parallelepipeden BH und BN das Rechteck B C G F als die gemeinschaftliche Grundfläche, so erscheinen die oberen Grundflächen ADHE und KMNL zwischen denselben Parallelen AM und EN, somit sind die beiden Parallelepipede einander gleich.

Folgesatz: Jedes schiefe Parallelepiped ist einem rechtwinkligen gleich, das mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

§. 351. Jedes Parallelepiped wird durch den Diagonalschnitt halbirt.

a) Es sei das Parallelepiped A G (Fig. 251) ein gerades.

Fig. 251.



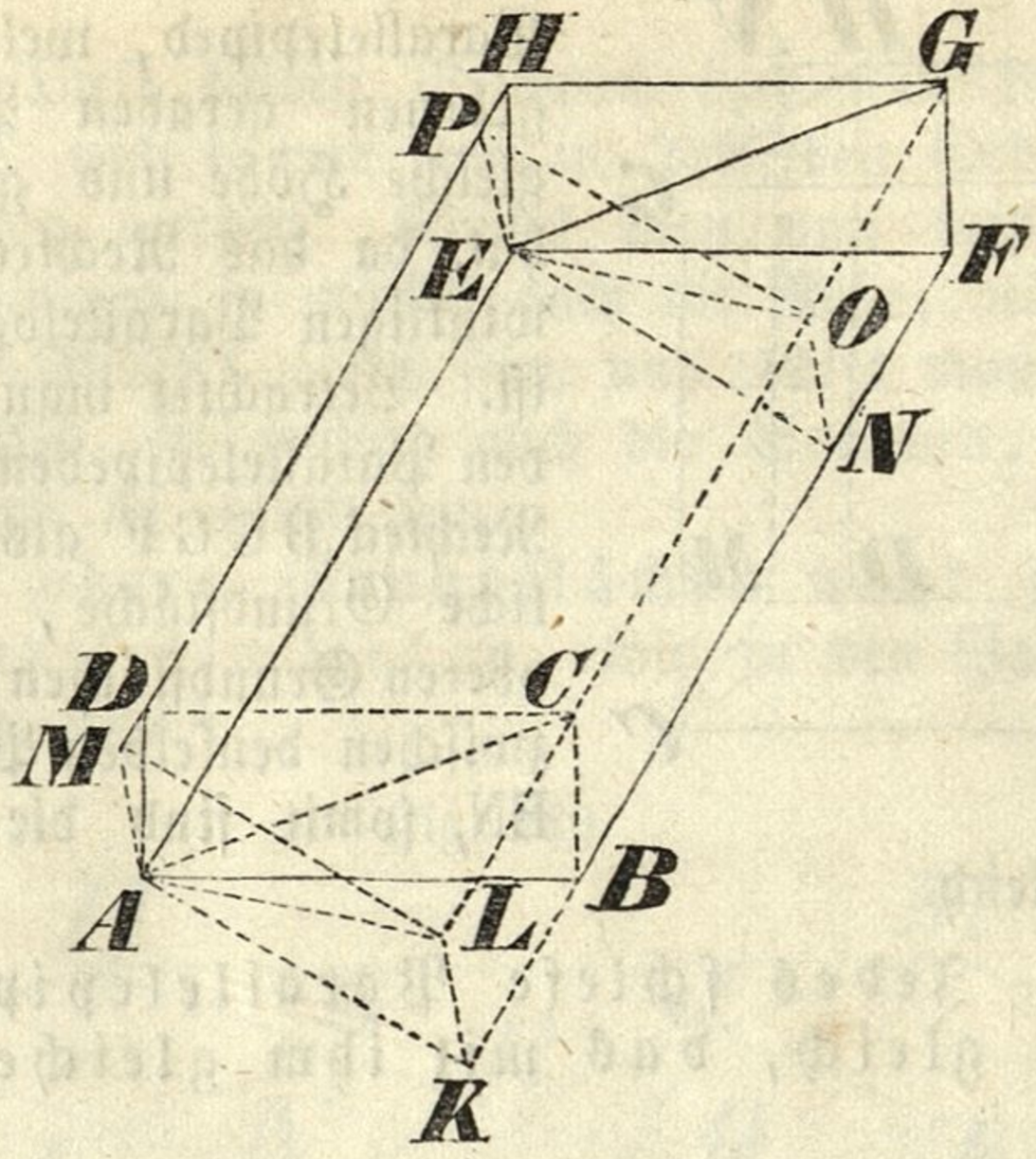
Durch den Diagonaldurchschnitt B D H F werden die Parallelogramme A C und E G in kongruente Dreiecke getheilt. Die beiden geraden dreiseitigen Prismen A B D E F H und B C D F G H haben nun kongruente Grundflächen und gleiche Höhen, sind demnach kongruent, und es ist daher das Parallelepiped A G durch den Diagonaldurchschnitt halbirt.

b) Es sei das Parallelepiped A G (Fig. 252) ein schiefes.

Legt man durch die Punkte A und E zwei Ebenen, welche auf den Kanten des Parallelepipeds A G senkrecht stehen, so ist der Körper A K L M E N O P ein gerades Parallelepiped, welches durch den Diagonaldurchschnitt A E O L in zwei gleiche Prismen A L M E O P und A K L E N O getheilt wird.

Da D H = M P = A E ist, so muß auch D H — D P = M P — D P oder P H = M D sein; eben so folgt O G = L C. Denkt man sich nun den Körper E O P H G so auf den Körper A L M D C gelegt, daß die kongruenten Dreiecke E O P und A L M zusammenfallen, so muß auch P H in der Richtung M D, und wegen P H = M D der Punkt H auf D fallen; eben so folgt, daß der Punkt G auf C zu liegen kommen müsse; es ist daher der Körper E O P H G ≅ A L M D C. Setzt man zu beiden den Körper A C D E O P dazu, so müssen auch die Summen gleich sein, nämlich das

Fig. 252.

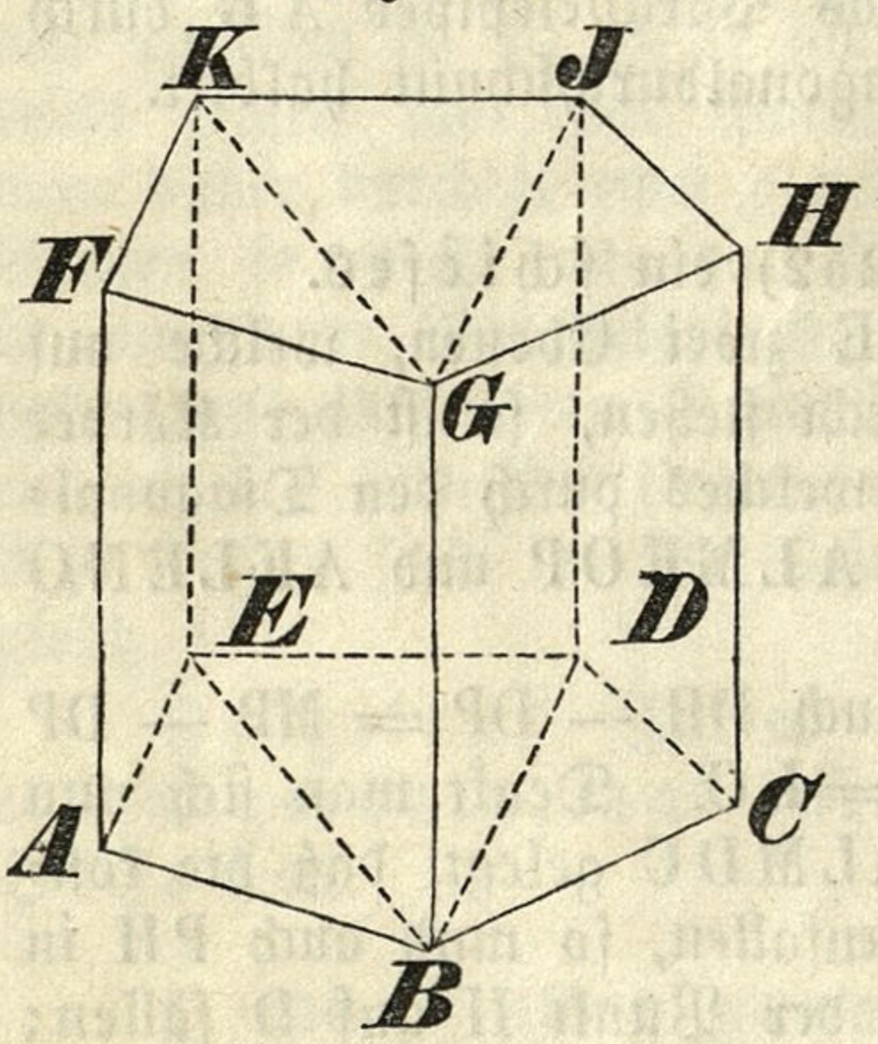


Prisma ACDEGH = ALMEOP. Eben so kann man beweisen, daß das Prisma ABCEFG = AKLENO sein müsse.

Da nun die Prismen ALMEOP und AKLENO gleich sind, so müssen auch die Prismen ACDEGH und ABCEFG gleich sein; somit wird das schiefe Parallelepiped AG durch den Diagonaldurchschnitt AEGC halbirt.

§. 352. Da nach dem eben bewiesenen Satze jedes dreiseitige Prisma die Hälfte eines Parallelepipeds ist, das mit ihm gleiche Höhe und eine doppelt so große Basis hat; so folgt daraus auch, daß jedes dreiseitige Prisma einem Parallelepiped gleich ist, welches mit ihm dieselbe Höhe und eine gleich große Basis hat.

Fig. 253.



Hat man nun ein mehrseitiges Prisma ABCDEFGHJK (Fig. 253), so läßt sich dieses durch Diagonaldurchschnitte in lauter dreiseitige Prismen zerlegen. Jedes dieser dreiseitigen Prismen ist einem Parallelepiped von derselben Höhe gleich, dessen Grundfläche mit seiner Grundfläche gleichen Flächeninhalt hat. Es wird daher auch die Summe aller dieser dreiseitigen Prismen, d. i. das mehrseitige Prisma gleich sein der Summe eben so vieler Parallelepipede, welche mit dem Prisma gleiche Höhe, und deren Grundflächen zusammen genommen mit der Grundfläche des mehrseitigen Prisma gleichen Flächeninhalt haben. Die Summe dieser Parallelepipede aber kann als ein einziges Parallelepiped dargestellt werden, welches mit dem mehrseitigen Prisma dieselbe Höhe und eine

gleich große Grundfläche hat. Man hat somit den Satz: Jedes Prisma ist gleich einem Parallelepiped, welches mit ihm dieselbe Höhe und eine gleiche Grundfläche hat.

§. 353. Folgesätze.

a) Zwei Prismen, welche gleiche Grundflächen haben, verhalten sich so wie ihre Höhen.

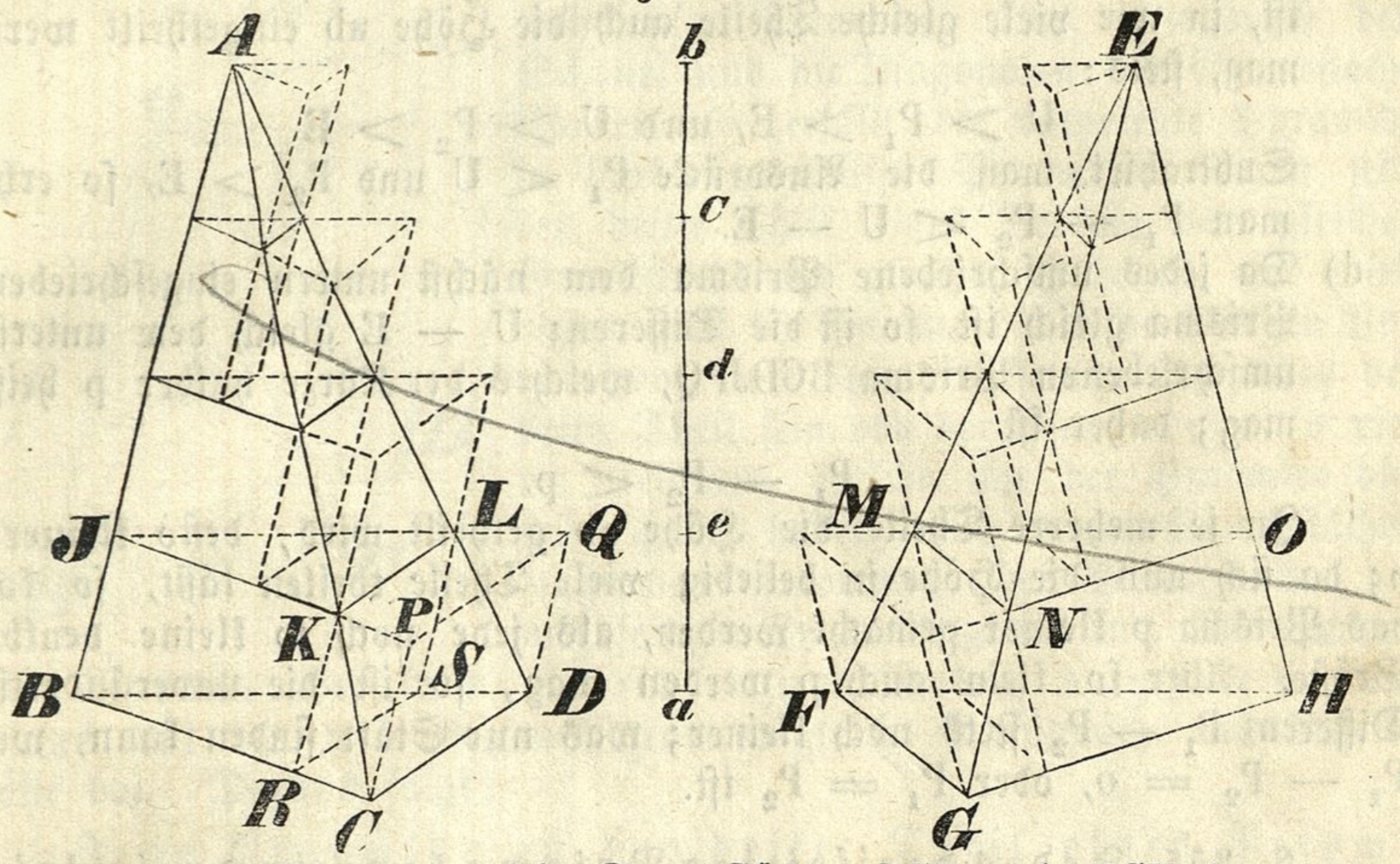
b) Zwei Prismen von gleicher Höhe verhalten sich so wie ihre Grundflächen.

c) Zwei Prismen verhalten sich wie die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen.

d) Zwei Prismen, welche gleiche Grundflächen und dieselbe Höhe haben, sind einander gleich.

§. 354. Zwei Pyramiden, welche gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben, sind einander gleich.

Fig. 254.



Es seien (Fig. 254). die Grundflächen BCD und FGH der beiden Pyramiden ABCD und EFGH gleich und in einerlei Ebene gelegen; ab sei die gemeinschaftliche Höhe der Pyramiden.

Theilt man ab in mehrer gleiche Theile, und legt durch die Theilungspunkte c, d, e mit den Grundflächen parallele Ebenen, so schneidet jede solche Ebene die beiden Pyramiden in zwei gleichen Dreiecken. So ist z. B. das $\triangle$ JKL = MNO; denn

JKL : BCD = be^2 : ab^2, und MNO : FGH = be^2 : ab^2,

daher auch JKL : BCD = MNO : FGH.

Nun ist $\triangle$ BCD = FGH, folglich auch $\triangle$ JKL = MNO.

Auch sieht man, daß durch jene Durchschnittsebenen die zwei Pyramiden in mehrere Pyramidalstücke zerlegt werden. Wird zwischen den beiden Grundflächen eines solchen Pyramidalstückes BCDJKL ein Prisma BCDJPQ konstruirt, welches die untere Grundfläche BCD zur Basis hat, so heißt dieses Prisma dem Pyramidalstücke umschrieben. Be-

schreibt man aber zwischen den beiden Grundflächen über der kleinern JKL ein Prisma BRSJKL, so hat man ein jenem Pyramidalstücke eingeschriebenes Prisma.

Konstruirt man auf diese Weise zu allen Pyramidalstücken die umschriebenen und eingeschriebenen Prismen, so läßt sich in Hinsicht derselben Folgendes behaupten:

a) Das unterste umschriebene Prisma ist in beiden Pyramiden gleich groß, weil zwei dreiseitige Prismen von gleicher Grundfläche und Höhe denselben Körperraum einschließen. Aus demselben Grunde ist jedes nächstfolgende Paar von umschriebenen Prismen gleich. Es wird daher auch die Summe aller umschriebenen Prismen in beiden Pyramiden gleich sein; diese Summe heiße U.

b) Dasselbe gilt in Bezug auf die eingeschriebenen Prismen; die Summe derselben, die durch E ausgedrückt werden soll, muß in beiden Pyramiden gleich groß ausfallen.

c) Heißt P_1 die Pyramide ABCD, und P_2 die Pyramide EFGH, so ist, in wie viele gleiche Theile auch die Höhe ab eingetheilt werden mag, stets:

$$U > P_1 > E, \text{ und } U > P_2 > E$$

Subtrahirt man die Ausdrücke $P_1 < U$ und $P_2 > E$, so erhält man $P_1 - P_2 < U - E$.

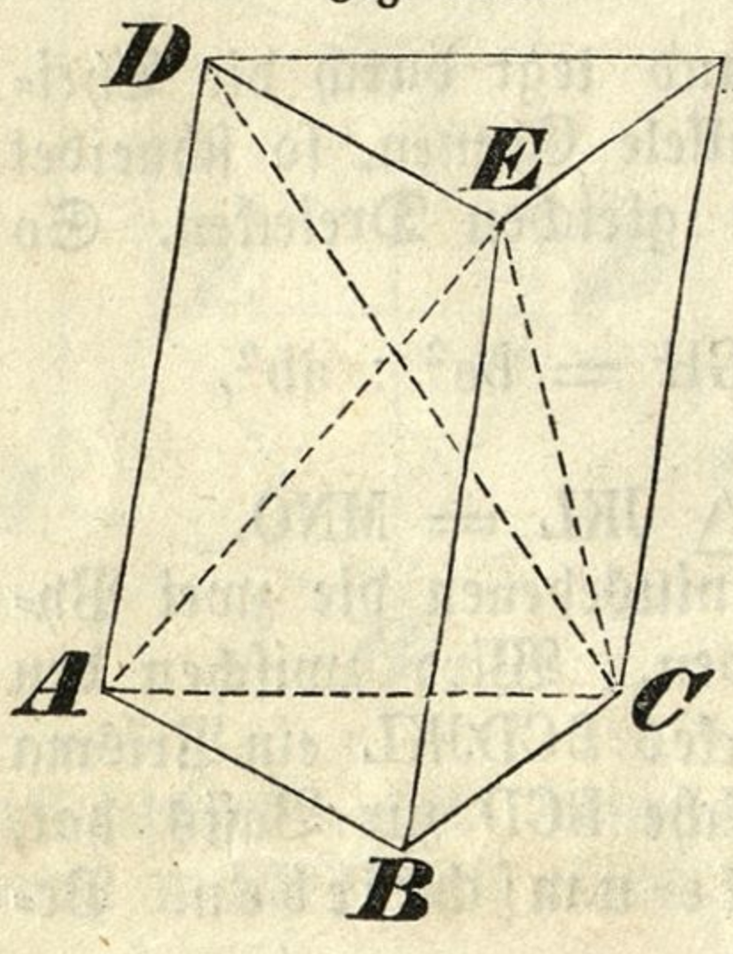
d) Da jedes umschriebene Prisma dem nächst untern eingeschriebenen Prisma gleich ist, so ist die Differenz U — E gleich dem untersten umschriebenen Prisma BCDJPQ, welches der Kürze halber p heißen mag; daher ist

$$P_1 - P_2 < p.$$

In je mehrere Theile die Höhe ab getheilt wird, desto kleiner ist p; da sich nun die Höhe in beliebig viele Theile theilen läßt, so kann das Prisma p kleiner gemacht werden, als jede noch so kleine denkbare Größe. Aber so klein auch p werden mag, so ist die unveränderliche Differenz $P_1 - P_2$ stets noch kleiner; was nur Statt finden kann, wenn $P_1 - P_2 = 0$, oder $P_1 = P_2$ ist.

§. 355. Jedes dreiseitige Prisma kann in drei gleiche Pyramiden zerlegt werden.

Fig. 255.



Legt man (Fig. 255) durch die Punkte A, E und C des dreiseitige Prisma ABCDEF eine Ebene, so zerfällt dadurch das Prisma in zwei Pyramiden eine dreiseitige EABC und eine vierseitige EACFD. Wird ferner in dieser vierseitigen Pyramide durch die Punkte C, E und D eine Ebene gelegt, so schneidet sie jene Pyramide in die zwei dreiseitigen Pyramiden EACD und ECDF.

Die beiden Pyramiden EACD und ECDF sind nun einander gleich, weil sie einen gemeinschaftlichen Scheitel E und daher gleiche Höhe haben und auch die

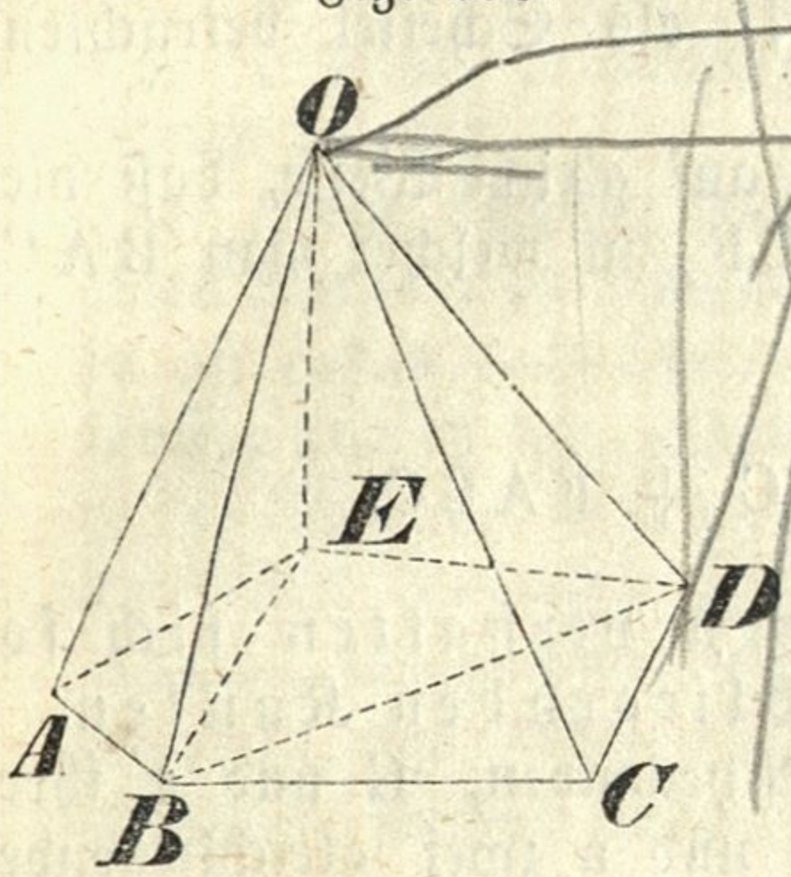
Grundflächen A C D und C D F als Hälften des Parallelogrammes A C F D gleich sind.

Betrachtet man in der Pyramide E C D F den Punkt C als Scheitel, und D E F als Grundfläche, und vergleicht dann dieselbe mit der Pyramide E A B C, deren Scheitel E und die Grundfläche A B C ist, so sieht man, daß beide Pyramiden gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben, daß sie somit selbst gleich sind.

Die drei Pyramiden E A B C, E A C D und E C D F, in welche das dreiseitige Prisma A B C D E F zerlegt wird, sind also unter einander gleich.

§. 356. Aus dem vorhergehenden Satze folgt, daß jede dreiseitige Pyramide der dritte Theil eines dreiseitigen Prisma von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe ist.

Fig. 256.



Es sei nun O A B C D E (Fig. 256) eine mehrseitige Pyramide. Legt man durch den Scheitel und die Diagonalen der Grundfläche Ebenen, so zerfällt die vorgelegte Pyramide in lauter dreiseitige Pyramiden, deren jede der dritte Theil eines Prisma von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe ist. Es wird daher auch die Summe dieser dreiseitigen Pyramiden, d. i. die mehrseitige Pyramide der dritte Theil sein von der Summe eben so vieler Prismen, welche mit der Pyramide dieselbe Höhe haben, und deren Grundflächen zusammen genommen der Grundfläche der mehrseitigen Pyramide gleich sind. Die Summe dieser Prismen aber kann als ein einziges Prisma dargestellt werden, welches mit der mehrseitigen Pyramide gleiche Grundfläche und dieselbe Höhe hat. Daraus folgt:

Jede Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

§. 257. Folgesätze.

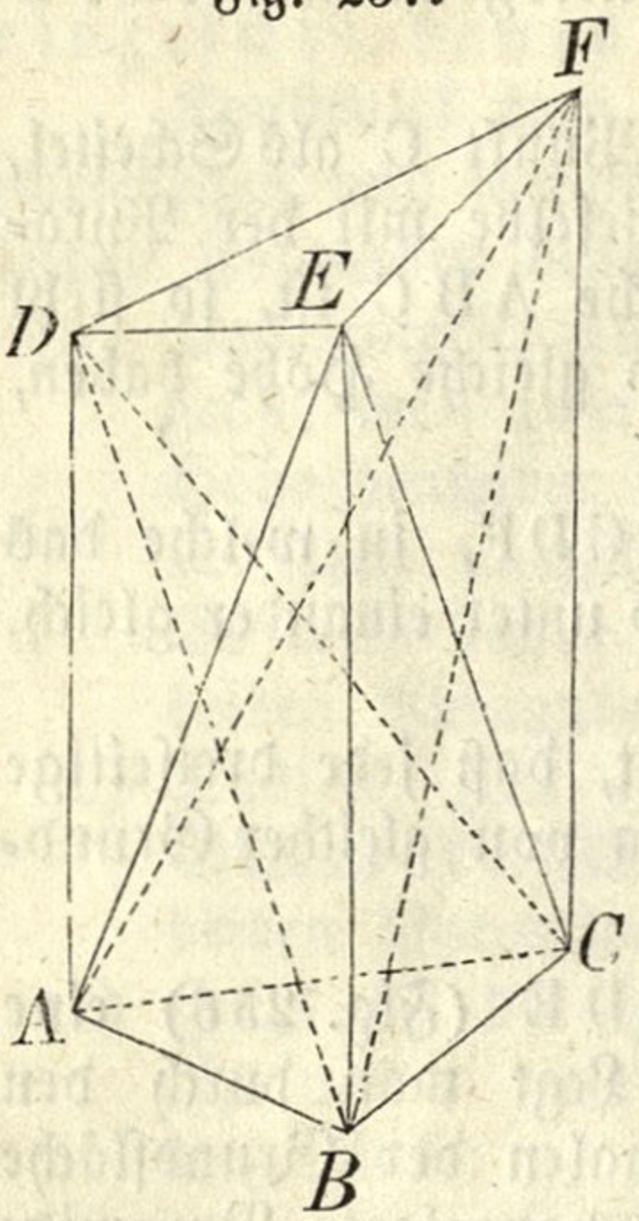
a) Zwei Pyramiden von gleicher Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen.

b) Zwei Pyramiden von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen.

c) Zwei Pyramiden verhalten sich wie die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen.

§. 358. Ein abgekürztes dreiseitiges Prisma ist gleich drei Pyramiden, deren gemeinschaftliche Grundfläche die Basis des Prisma ist, und deren Scheitel die Winkelpunkte des schiefen Durchschnittes sind.

Fig. 257.



Es sei ABCDEF (Fig. 257) ein abgekürztes Prisma. Legt man durch die Punkte A, E, C eine Ebene, ferner durch C, E, D eine zweite Ebene, so zerfällt dasselbe in drei Pyramiden EABC, EACD und ECDF; es ist also

$$ABCDEF = EABC + EACD + ECDF.$$

Die Pyramide EABC hat ABC zur Grundfläche und ihren Scheitel in E.

Zieht man die Gerade BD, so entsteht die Pyramide BACD, welche mit EACD gleich ist, da beide Pyramiden auf derselben Basis ACD aufstehen, und ihre Scheitel B und E in der zur Basis parallelen Geraden BE liegen, somit beiden dieselbe Höhe zukommt. EACD ist also gleich der Pyramide BACD, in welcher man auch BAC als Grundfläche und D als Scheitel betrachten kann.

Zieht man ferner AF und BF, so folgt auf gleiche Weise, daß die Pyramide ECDF gleich ist der Pyramide BACF, in welcher man BAC als Basis und F als Scheitel ansehen kann.

Es ist somit

$$ABCDEF = EABC + DABC + FABC.$$

§. 359. **Zwei ähnliche Pyramiden verhalten sich so wie die dritten Potenzen ihrer gleichliegenden Kanten.**

Es seien P und p die beiden ähnlichen Pyramiden, G und g ihre Grundflächen, H und h ihre Höhen, und A und a zwei gleichliegende Kanten. Man hat

$$P : p = G \times H : g \times h.$$

Nun sind die Grundflächen G und g ähnlich, und die Höhen H und h zwei gleichliegenden Kanten A und a proporzionirt, daher

$$G : g = A^2 : a^2,$$
$$H : h = A : a.$$

Multiplizirt man die gleichnamigen Glieder dieser beiden Proporzionen, so findet man

$$G \times H : g \times h = A^3 : a^3,$$

und folglich auch

$$P : p = A^3 : a^3.$$

§. 360. **Zwei ähnliche Polyeder verhalten sich so wie die dritten Potenzen ihrer gleichliegenden Kanten.**

Heißen K und k die zwei ähnlichen Polyeder, A und a ihre gleichliegenden Kanten, und denkt man sich beide Polyeder in eine gleiche Anzahl ähnlicher Pyramiden, welche bei dem ersten durch P, P′, P″, . . ., und bei dem zweiten in derselben Ordnung durch p, p′, p″, . . . bezeichnet werden mögen, so hat man

$$P : p = A^3 : a^3,$$
$$P' : p' = A^3 : a^3,$$
$$P'' : p'' = A^3 : a^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

folglich auch

$$(P + P' + P''' + \ldots) : (p + p' + p'' + \ldots) = A^3 : a^3.$$

oder

$$K : k = A^3 : a^3.$$

2. Berechnung des Körperinhaltes.

§ 361 Um den Kubikinhalt eines Körpers zu finden, nimmt man irgend einen bekannten Körper als Maß an, und untersucht, wie oft dieser als Einheit angenommene Körper in dem gegebenen enthalten ist.

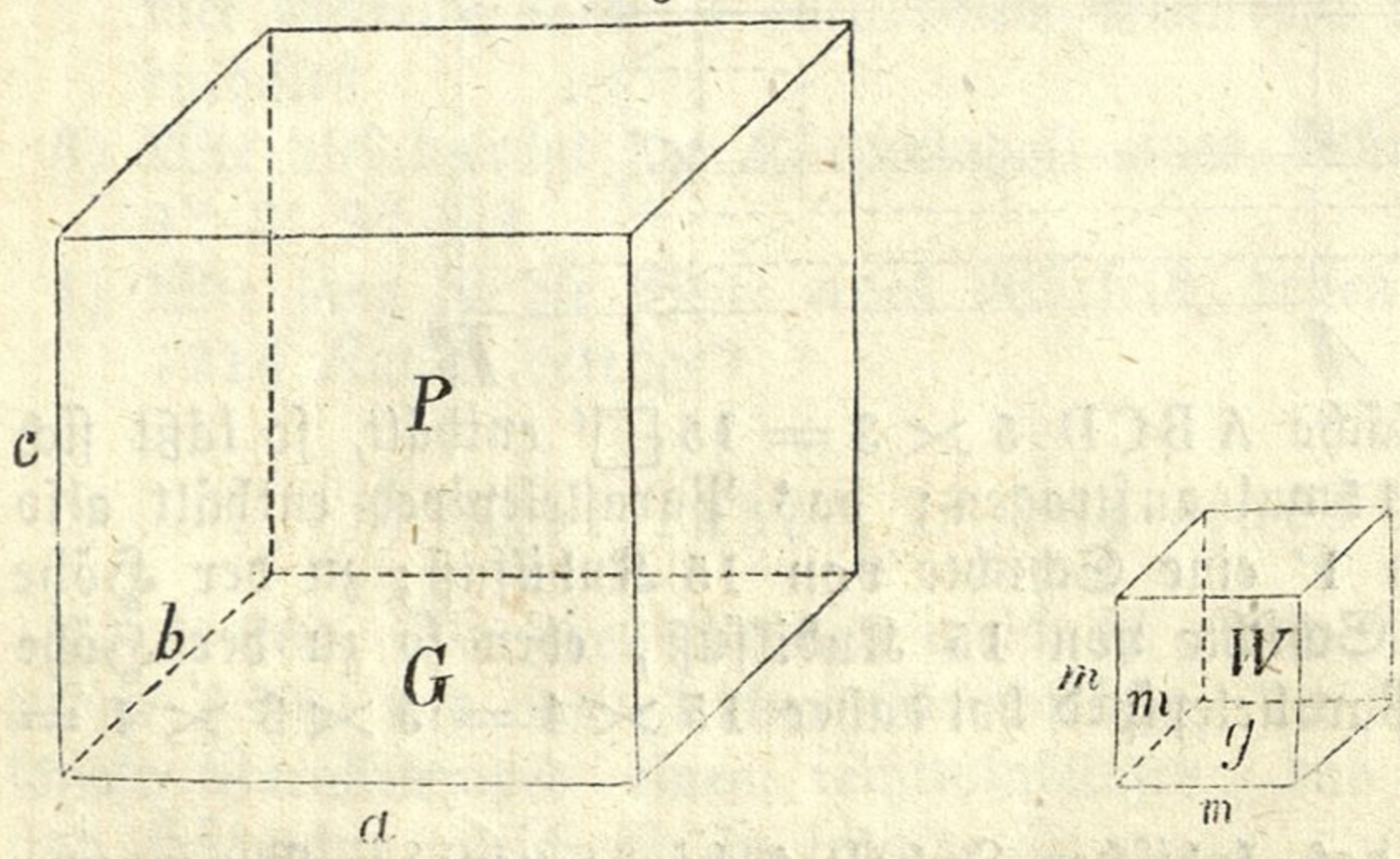
Als Einheit des Körpermaßes wird ein Kubus angenommen, welcher Kubikzoll (Kub.''), Kubikfuß (Kub.'), . . Kubikmeile heißt, je nachdem eine Seite desselben einen Zoll, Fuß, . . eine Meile beträgt.

Dem Begriffe des Messens zu Folge sollte man, um den Inhalt eines Körpers zu bestimmen, darin eine Kubikklafter, einen Kubikfuß, . . so oft neben und über einander legen, als es möglich ist. Dieses weitläufige und in den seltensten Fällen ausführbare Verfahren wird übrigens in der Wirklichkeit so wenig angewendet, als man den Flächeninhalt durch wirkliches Auftragen der Flächenmaße sucht; es lassen sich nämlich Sätze ableiten, nach denen der kubische Inhalt aus dem Maße der Linien oder Flächen, von denen die Größe des Körpers abhängt, durch Rechnung gefunden werden kann.

a) Kubikinhalt eines rechtwinkeligen Parallelepipeds und eines Würfels.

§. 362. Es sei (Fig. 258) P ein rechtwinkeliges Parallelepiped, dessen Grundfläche G die Seiten a und b hat, und dessen Höhe c ist; ferner sei der Würfel W die Einheit des Körpermaßes, daher das Quadrat g die Einheit des Flächenmaßes, und die Seite m die Einheit des Längenmaßes. Nach §. 348 hat man nun

Fig. 258.



$$\frac{P}{W} = \frac{G}{g} \times \frac{c}{m},$$

woraus hervorgeht, daß die Zahl, welche das Körpermaß des Parallelepipeds ausdrückt, gleich ist dem Produkte der beiden Zahlen, welche das Flächen-

maß der Grundfläche und das Längenmaß der Höhe anzeigen. Man pflegt dieses kürzer so auszudrücken:

Der Körperinhalt eines rechtwinkeligen Parallelepipeds ist gleich dem Produkte aus der Grundfläche und der Höhe.

Da nach §. 136

$$\frac{G}{g} = \frac{a}{m} \times \frac{b}{m}$$

ist, so hat man auch

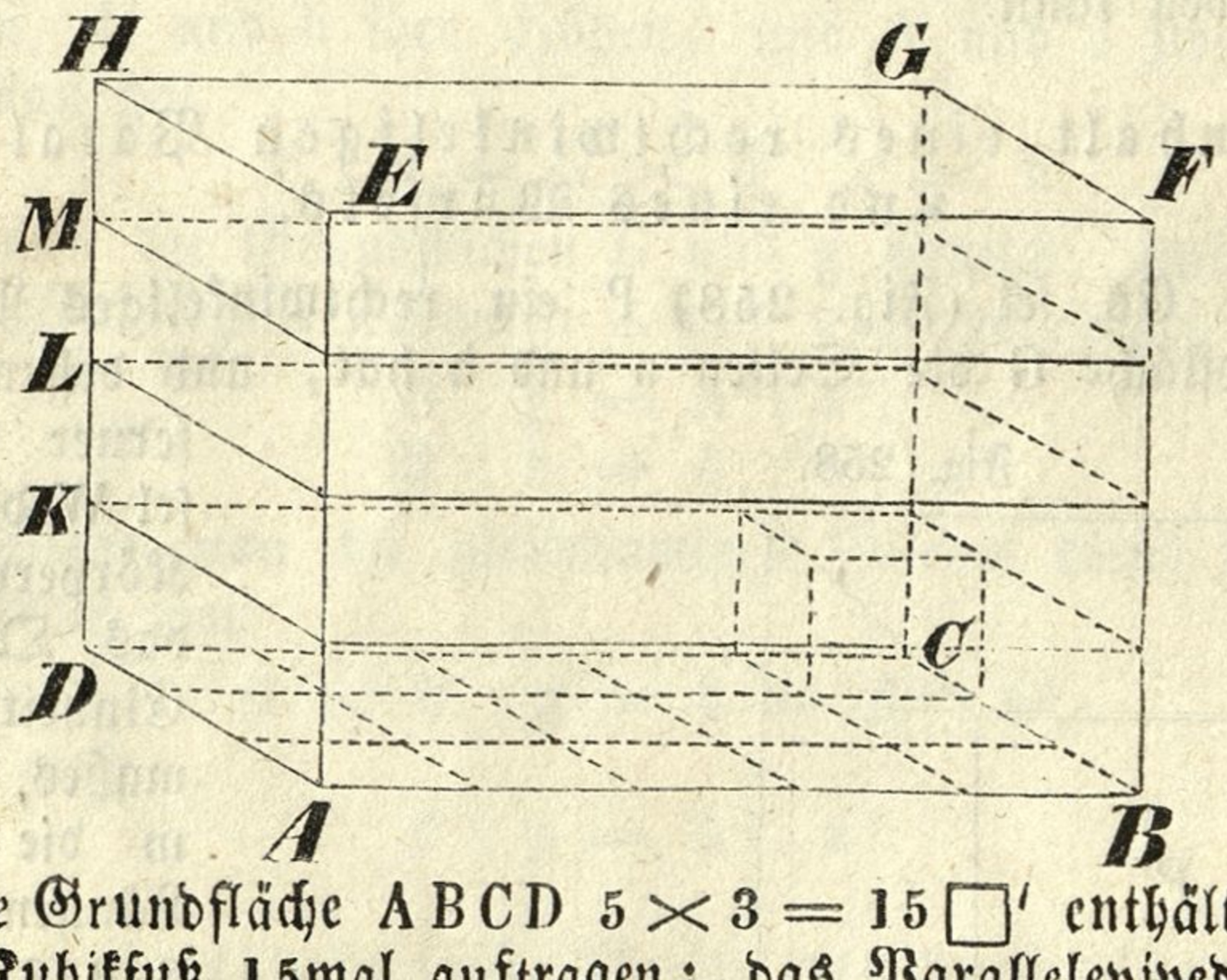
$$\frac{P}{W} = \frac{a}{m} \times \frac{b}{m} \times \frac{c}{m},$$

d. h. die Zahl, welche den Körperinhalt eines rechtwinkeligen Parallelepipeds angibt, ist gleich dem Produkte der drei Zahlen, welche die Längenmaße der Länge, der Breite und der Höhe des Parallelepipeds ausdrücken; oder kürzer:

Der Kubikinhalt eines rechtwinkeligen Parallelepipeds ist gleich dem Produkte aus der Länge, Breite und Höhe.

Um die Richtigkeit dieses Satzes an einem besondern Falle anschaulich darzustellen, soll (Fig. 259) der Kubikinhalt eines rechtwinkeligen Parallelepipeds, worin die Länge AB = 5′, die Breite AD = 3′ und die Höhe AE = 4′ ist, bestimmt werden.

Fig. 259.



Weil die Grundfläche ABCD $5 \times 3 = 15 \square'$ enthält, so läßt sich darauf ein Kubikfuß 15mal auftragen; das Parallelepiped enthält also bis zu einer Höhe von 1′ eine Schichte von 15 Kubikfuß; zu der Höhe KL gehört eine neue Schichte von 15 Kubikfuß, eben so zu der Höhe LM, MH; das ganze Parallelepiped hat daher $15 \times 4 = 5 \times 3 \times 4 = 60$ Kubikfuß.

Die Benennung des kubischen Inhaltes hängt von der Benennung der Seiten ab; sind diese in Klafter ausgedrückt, so bedeutet die Zahl, welche den Körperinhalt anzeigt, Kubikklafter; u. s. w.

§. 363. Ein Würfel kann als ein rechtwinkeliges Parallelepiped, worin Länge, Breite und Höhe einander gleich sind, betrachtet werden; daher ist

der Kubikinhalt eines Würfels gleich einer Seite, dreimal als Faktor gesetzt, oder zur dritten Potenz erhoben.

Heißt K der Kubikinhalt eines Würfels, dessen Seite S ist, so hat man $K = S^3$.

Aus diesem folgt:

1 Kub.^{o} = 6^3 = 216 Kub.',
1 Kub.' = 12^3 = 1728 Kub.'',
1 Kub.'' = 12^3 = 1728 Kub.''',
1 Kub. Meile 4000^3 = 64000000000 Kub.^{o}

Wenn man umgekehrt aus dem kubischen Inhalte eines Würfels die Länge einer Seite finden will, so darf man nur jene Zahl suchen, welche dreimal als Faktor gesetzt den Kubikinhalt gibt, d. h. man braucht nur aus dem gegebenen Kubikinhalte die Kubikwurzel auszuziehen.

Sind K und k die Kubikinhalte zweier Würfel, deren Seiten S und s heißen, so hat man

$$K = S^3 \text{ und } k = s^3,$$
$$\text{daher } K : k = S^3 : s^3,$$

d. h. die Körperinhalte zweier Würfel verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Seiten.

§. 364. Beispiele.

1) Wie groß ist der Körperinhalt eines rechtwinkeligen Parallelepipeds, in welchem die Länge = 4' 6'', die Breite = 3' 5'' und die Höhe = 2' 8'' ist?

Länge = 4' 6'' = 54'' 54 × 41 × 32 = 70848 Kub.''
Breite = 3' 5'' = 41'' = 41 Kub.'
Höhe = 2' 8'' = 32''

2) Wie groß ist der Kubikinhalt eines Getreidekastens, bei welchem die Länge 1°, die Breite 4' 3'' und die Höhe 4' 6'' beträgt; und wie viel Getreide kann er aufnehmen, wenn ein Metzen 3365 Kub.'' enthält?

3) Wie viel beträgt der Körperinhalt eines Würfels, dessen Seite = 1° 3' 3'' ist?

4) Wie lang ist die Seite eines Würfels, dessen Kubikinhalt 12 Kub.' 1216 Kub.'' beträgt?

b) Kubikinhalt irgend eines Prisma.

§. 365. Da jedes Prisma gleich ist einem Parallelepiped von derselben Höhe und von gleicher Grundfläche, da ferner jedes gerade oder schiefe Parallelepiped einem rechtwinkeligen, das mit ihm gleiche Basis und Höhe hat, gleich ist, so folgt:

Der Körperinhalt eines jeden Prisma ist gleich der Grundfläche multiplizirt mit der Höhe.

Beispiele.

1) Die Basis eines Prisma ist 3 □′ 65 □″, die Höhe 1′ 8′; wie groß ist der Körperinhalt?

Basis = 3 □′ 65 □″ = 497 □″
Höhe = 1′ 8″ = 20″
Kubikinhalt = 497 × 20 = 9940 Kub.″
= 5 Knb.′ 1300 Kub.″

2) Wie groß ist der Körperinhalt eines geraden Prisma, dessen Höhe 3° beträgt, und dessen Basis ein regelmäßiges Sechseck ist, worin eine Seite 8″ Länge hat?

Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Sechseckes, dessen Seite 8″ beträgt, ist 166·32 □″; daher

Kubikinhalt des Prisma = 166·32 × 216 = 35922 Kub.″
= 20 Kub.′ 1362 Kub.″

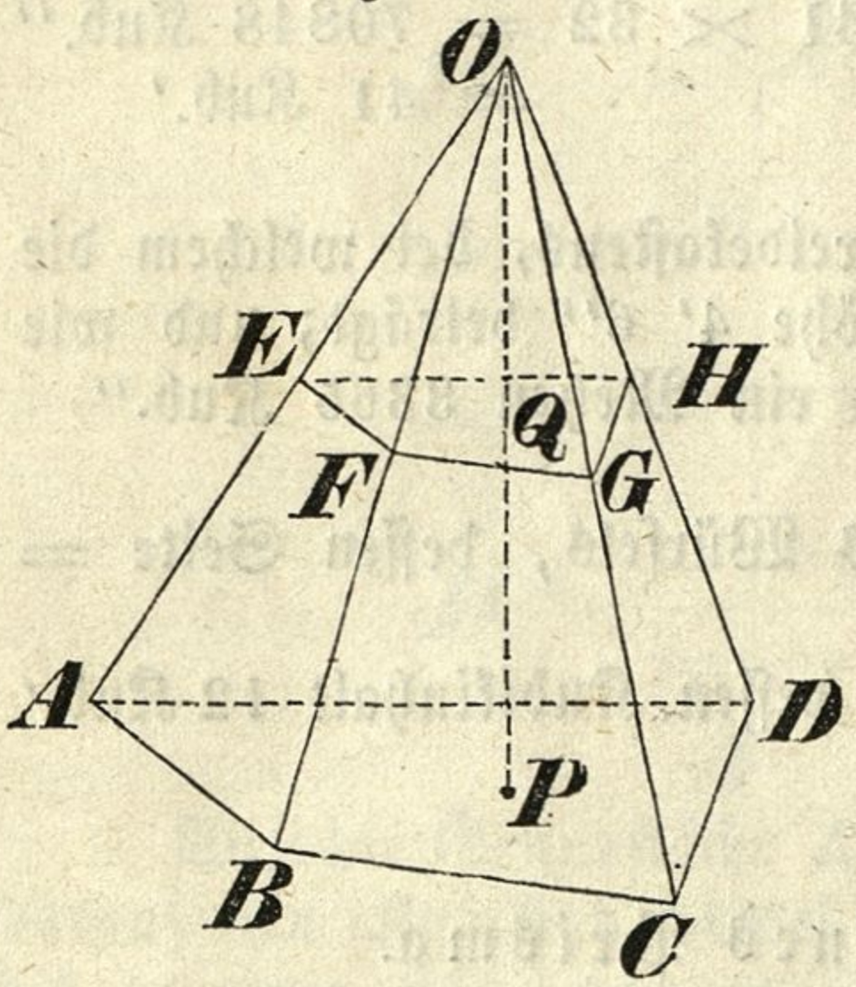
c) Kubikinhalt einer Pyramide und eines Pyramidalstutzes.

§. 366. Da jede Pyramide der dritte Theil eines Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe ist, so folgt:

Der Körperinhalt einer jeden Pyramide ist gleich der Grundfläche, multiplizirt mit dem dritten Theile der Höhe.

§. 367. Um den Kubikinhalt einer abgekürzten Pyramide zu finden, bestimme man die Körperinhalte der beiden Pyramiden, deren Unterschied der Pyramidalstutz ist, und ziehe den Inhalt der kleinern Pyramide von jenem der größern ab.

Fig. 260.



Sind (Fig 260) die beiden Grundflächen A B C D = B und E F G H = b, und die Höhe h des Pyramidalstutzes gegeben, so läßt sich der Kubikinhalt K desselben auf folgende Art bestimmen:

Man erweitere die Seitenflächen des Pyramidalstutzes, bis sie im Punkte O zusammentreffen, und es ist

K = Pyr. O A B C D — Pyr. O E F G H.

Zieht man von O auf A B C D die Senkrechte O P, welche auch auf E F G H senkrecht sein muß, so hat man P Q = h, und wenn O Q = x gesetzt wird, O P = h + x. Es ist nun

$$\text{Pyr. } OABCD = \frac{B\,(h+x)}{3} \text{ und}$$

$$\text{Pyr. } OEFGH = \frac{b\,x}{3}, \text{ daher}$$

$$K = \frac{B\,(h+x)}{3} - \frac{b\,x}{3} = \frac{B\,h}{3} + \frac{x}{3}\,(B-b)$$

Zur Bestimmung von x hat man die Proporzion:

$$B : b = (h + x)^2 : x^2 \text{ oder } \sqrt{B} : \sqrt{b} = (h + x) : x.$$

Daraus folgt $x\sqrt{B} = (h + x)\sqrt{b}$ und $x = \frac{\sqrt{h} - \sqrt{b}}{B\sqrt{b}}$.

Durch Substituzion dieses Werthes erhält man sofort

$$K = \frac{Bh}{3} + \frac{h\sqrt{b}}{3(\sqrt{B} - \sqrt{b})}(B - b) = \frac{Bh}{3} + \frac{h\sqrt{b}}{3}(\sqrt{B} + \sqrt{b})$$

$$= \frac{Bh}{3} + \frac{\sqrt{Bb} \cdot h}{3} + \frac{bh}{3} = (B + \sqrt{Bb} + b) \cdot \frac{h}{3}.$$

Der Ausdruck $K = B \cdot \frac{h}{3} + \sqrt{Bb} \cdot \frac{h}{3} + b \cdot \frac{h}{3}$ gibt den Satz:

Eine abgekürzte Pyramide ist gleich drei Pyramiden, die mit der abgekürzten gleiche Höhe haben, und deren Grundflächen die beiden Grundflächen der abgekürzten Pyramide und deren mittlere geometrische Proporzionale sind.

§. 368. Beispiele.

1) Wie groß ist der Körperinhalt einer Pyramide, deren Basis 3 □′ 72 □″, und deren Höhe 5′ 3″ ist?

Basis = 3 □′ 72 □″ = 504 □″
Höhe = 5′ 3″ = 63″
Körperinhalt = 504 × 21 = 10584 Kub.″
= 6 Kub.′ 216 Kub.″

2) In einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide ist jede Seite der Basis 3′ 4″, und jede Seitenkante 7′ 3″; wie groß ist der Kubikinhalt?

Basis = 40^2 = 1600 □″
Diagonale der Basis = $\sqrt{40^2 + 40^2}$ = 56·57″
Höhe der Pyramide = $\sqrt{87^2 - 28{\cdot}285^2}$ = 82·2737″
Körperinhalt = 1600 × 27·4246 = 43879·36 Kub.″
= 25 Kub.′ 679 Kub.″

3) In einem Pyramidalstutz ist die Höhe 5′, die Grundflächen sind gleichseitige Dreiecke, deren Seiten 1′ 6″ und 1′ 2″ betragen; wie groß ist der Kubikinhalt?

Untere Basis = 140·22 □″
Obere „ = 84·84 „
Mittlere Proporzionale = 109·67 „
334·13 □″
Körperinhalt = 334·13 × 20 = 6682·6 Kub.″
= 3 Kub.′ 1599 Kub.″

d) Kubikinhalt eines regulären Körpers.

§. 369. Der Kubikinhalt eines regulären Polyeders ist gleich der Oberfläche desselben multiplizirt mit dem dritten Theile des Abstandes einer Seitenfläche vom Mittelpunkte.

Der Beweis ergibt sich aus §. 313 und §. 366.

Man suche den Kubikinhalt eines Tetraeders, dessen Seite a ist.

c) Kubikinhalt eines Zilinders.

§. 370. Ein Zilinder kann als ein Prisma, dessen Grundfläche ein Kreis ist, betrachtet werden; daher gilt der Satz:

Der Kubikinhalt eines Zilinders ist gleich der Grundfläche multiplizirt mit der Höhe.

Heißt h die Höhe und r der Halbmesser der Basis, so ist der Körperinhalt $k = r^2 h \pi$.

Für den gleichseitigen Zilinder, wo $h = 2r$ ist, hat man $k = 2r^3\pi$.

§. 371. Heißen C und c die Körperinhalte zweier ähnlichen Zilinder, R und r die Halbmesser ihrer Grundflächen, H und h ihre Höhen, so hat man

$$C : c = R^2 H \pi : r^2 h \pi = R^2 H : r^2 h.$$

Nun verhalten sich in ähnlichen Zilindern die Höhen wie die Axen, und diese wie die Halbmesser der Grundflächen; daher ist

$$H : h = R : r, \text{ und somit}$$
$$C : c = R^3 : r^3,$$

d. h. die Körperinhalte ähnlicher Zilinder verhalten sich wie die dritten Potenzen der Halbmesser ihrer Grundflächen.

§. 372. Beispiele.

1) Wie groß ist der Körperinhalt eines Zilinders, dessen Grundfläche 2′ 4″ zum Halbmesser hat und dessen Höhe 1′ 2″ ist?

Basis $= 28^2.3 \cdot 1416 = 2463 \cdot 0144$ □″
Kubikinhalt $= 2463 \cdot 0144 \times 14 = 34482$ Kub.″
$= 19$ Kub.′ 1650 Kub.″

2) Der Durchmesser eines gleichseitigen Zilinders ist 1′ 4″; wie groß ist der Körperinhalt?

Grundflächen $= 8^2.3 \cdot 1416 = 201 \cdot 0624$ □″
Körperinhalt $= 201 \cdot 0624 \times 16 = 3216.9984$ Kub.″
$= 1$ Kub.′ 1488 Kub.″

3) Eine zilindrische Röhre ist 3′ lang, die Weite im Lichten 1′, die Dicke 1′; wie viel beträgt der Kubikinhalt?

Für den großen Zilinder ist
die Basis $= 7^2.3 \cdot 14 = 153 \cdot 86$ □″
der Kubikinhalt $= 153 \cdot 86 \times 36 = 5539$ Kub.″
Für den kleinen Zilinder hat man
Basis $= 6^2.3 \cdot 14 = 113 \cdot 04$ □″
Kubikinhalt $= 113 \cdot 04 \times 36 = 4069$ Kub.″
daher Kubikinhalt der zilindrischen Röhre $= 1470$ Kub.″

f) Kubikinhalt eines Kegels und eines Kegelstutzes.

§. 373. Der Kegel kann als eine Pyramide, deren Basis ein Kreis ist, angesehen werden.

Der Körperinhalt eines Kegels wird daher gefunden, wenn man die Grundfläche mit dem dritten Theile der Höhe multiplizirt.

Heißt h die Höhe und r der Halbmesser der Basis, so ist der Körperinhalt $k = \frac{r^2 h \pi}{3}$.

Ist der Kegel ein gerader und heißt s eine Seite desselben, so ist

$$h = \sqrt{s^2 - r^2}, \quad \text{daher} \quad k = \frac{r^2 \pi}{3} \sqrt{s^2 - r^2}.$$

Für den gleichseitigen Kegel ist $s = 2r$, folglich $h = r\sqrt{3}$, und

$$k = \frac{r^3 \pi}{3} \sqrt{3}.$$

Die Körperinhalte ähnlicher Kegel verhalten sich wie die dritten Potenzen der Halbmesser ihrer Grundflächen.

Der Beweis ist demjenigen in §. 371 gleich.

§. 374. Den abgekürzten Kegel kann man als eine abgekürzte Pyramide, deren Grundflächen Kreise sind, betrachten. Daraus folgt:

Der Körperinhalt eines abgekürzten Kegels ist gleich den Inhalten dreier Kegel, die mit dem abgekürzten gleiche Höhe haben, und deren Grundflächen die beiden Grundflächen des Kegelstutzes und ihre mittlere Proporzionale sind.

Heißen B und b die Grundflächen des Kegelstutzes, und h seine Höhe, so ist der Körperinhalt

$$K = B \cdot \frac{h}{3} + b \cdot \frac{h}{3} + \sqrt{Bb} \cdot \frac{h}{3} = (B + b + \sqrt{Bh}) \cdot \frac{h}{3}.$$

Sind nun R und r die Halbmesser der Grundflächen B und b, so ist

$$B = R^2 \pi, \quad b = r^2 \pi, \quad \sqrt{Bb} = Rr\pi;$$

daher

$$K = (R^2 + r^2 + Rr) \cdot \frac{h\pi}{3}.$$

§. 375. Beispiele.

1) Die Basis eines Kegels hat 1′ 3″ zum Halbmesser, die Höhe ist 1′ 9″; wie groß ist der Kubikinhalt?

$$\text{Basis} = 15^2 . 3{\cdot}1416 = 706{\cdot}86 \square''$$

$$\text{Kubikinhalt} = 706{\cdot}86 = 7 = 4948{\cdot}02 \text{ Kub.}''$$
$$= 2 \text{ Kub.}' \; 1492 \text{ Kub.}''$$

2) Wie groß ist der Körperinhalt eines geraden Kegels, dessen Seite 1^0 beträgt, und dessen Basis 4′ zum Durchmesser hat?

$$\text{Basis} = 2^2 . 3{\cdot}1416 = 12{\cdot}5664 \square'$$

$$\text{Höhe} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 5{\cdot}6569'$$

$$\text{Kubikinhalt} = 12{\cdot}5664 \times 1{\cdot}8856 = 23{\cdot}6851 \text{ Kub.}'$$
$$= 23 \text{ Kub.}' \; 1201 \text{ Kub.}''$$

3) Es sei 2′ 8″ die Seite eines gleichseitigen Kegels; man bestimme den Kubikinhalt.

4) Es ist der Kubikinhalt eines 3′ 6″ hohen Kegelstutzes zu berechnen, dessen untere Basis 2′ 1″, und die obere Basis 1′ 8″ zum Halbmesser hat.

$R^2 = 625$
$r^2 = 400$
$Rr = 500$
1525

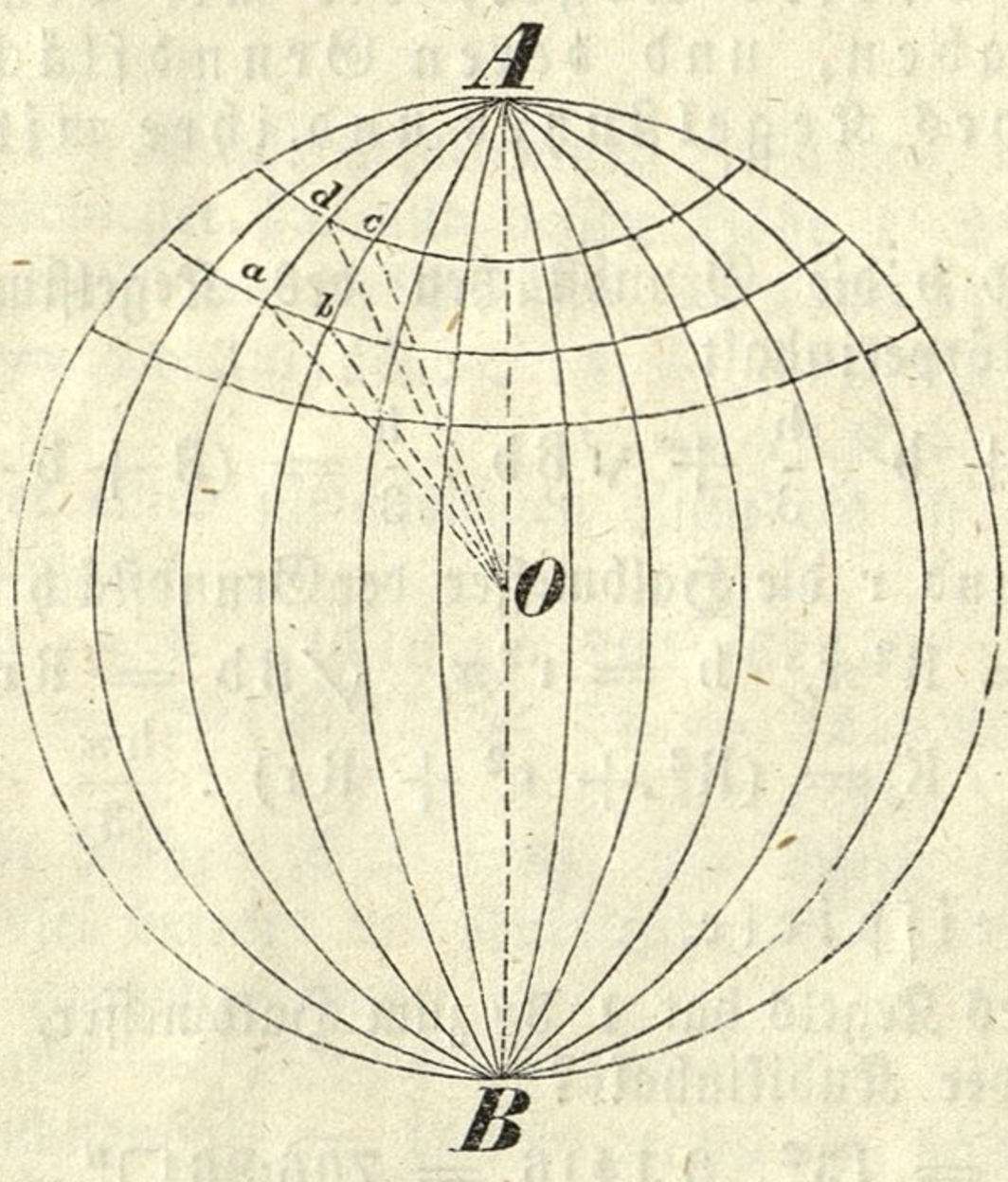
$(R^2 + r^2 + Rr)\pi = 4790{\cdot}92475\ \square''$
Kubikinhalt $= 4790{\cdot}92475 \times 14$
$= 67072{\cdot}4565$ Kub.″
$= 38$ Kub.′ 1409 Kub.″

5) Man soll in der Seite eines geraden Kegels den Punkt bestimmen, durch welchen eine mit der Basis parallele Ebene gelegt werden muß, damit der abgeschnittene Kegelstutz $\frac{m}{n}$ des ganzen Kegels betrage.

g) Kubikinhalt einer Kugel.

§. 376. Es sei AB (Fig. 261) ein Durchmesser und O der Mittelpunkt der Kugel. Denkt man sich nun durch AB sehr viele Ebenen gelegt,

Fig. 261.



welche die Kugeloberfläche in größten Kreisen schneiden, und ferner senkrecht auf AB mehrere Ebenen geführt, welche die Oberfläche in parallel laufenden Kreisen durchschneiden, so zerfällt dadurch die ganze Oberfläche in lauter Drei- und Vierecke, welche man als eben und geradlinig ansehen kann, wenn die Anzahl jener Schnitte unendlich groß angenommen wird. Zieht man nun zu allen Durchschnittspunkten der Oberfläche Halbmesser, und denkt sich durch dieselben Ebenen gelegt, so erscheint die Kugel aus lauter Pyramiden zusammengesetzt, welche alle ihre Basis an der Kugeloberfläche und ihren Scheitel im Mittelpunkte haben, so daß der Halbmesser der Kugel ihre gemeinschaftliche Höhe vorstellt; eine solche Pyramide ist z. B. O a b c d. Der Kubikinhalt einer Pyramide aber wird

gefunden, wenn man die Grundfläche mit dem dritten Theile der Höhe multiplizirt; daher ist der Körperinhalt aller jener Pyramiden zusammengenommen, d. i. der Inhalt der ganzen Kugel, gleich der Summe aller Grundflächen, d. i. der Kugeloberfläche, multiplizirt mit dem dritten Theile der gemeinschaftlichen Höhe, d. i. des Halbmessers.

Der Kubikinhalt einer Kugel ist also gleich der Oberfläche, multipliziri mit dem dritten Theile des Halbmessers.

Heißt r der Halbmesser der Kugel, so ist die Oberfläche $o = 4r^2\pi$, daher der Körperinhalt

$$k = 4r^2\pi \cdot \frac{r}{3} = \frac{4r^3\pi}{3}.$$

Aus $k = \frac{4r^3\pi}{3}$ folgt $r = \sqrt[3]{\frac{3k}{4\pi}}$, mittelst welcher Formel man aus dem gegebenen Körperinhalte der Kugel den Halbmesser berechnen kann.

§. 377. Heißen K und k die Inhalte zweier Kugeln, deren Halbmesser R und r sind, so hat man

$$K = \frac{4R^3\pi}{3} \text{ und } k = \frac{4r^3\pi}{3}$$

daher

$$K : k = R^3 : r^3,$$

d. h. die Körperinhalte zweier Kugeln verhalten sich so wie die dritten Potenzen ihrer Halbmesser.

§. 378. Beispiele und Aufgaben.

1) Wie groß ist der Kubikinhalt einer Kugel, deren Halbmesser 3′ 6″ ist?

$$o = 4 \times 42^2.3{\cdot}14159 = 22167{\cdot}05904 \square''$$
$$k = 22167{\cdot}05904 \times 14 = 310339 \text{ Kub.}''$$
$$= 179 \text{ Kub.}' 1027 \text{ Kub.}''$$

2) Man bestimme den Inhalt einer Kugel, deren Durchmesser 3′ 8″ beträgt.

3) Wie groß ist der Halbmesser einer Kugel, deren Kubikinhalt 48 Kub.″ beträgt?

$$\frac{3k}{4\pi} = 11{\cdot}459157,$$

$$r = \sqrt[3]{11{\cdot}459157} = 2{\cdot}26''.$$

4) Ein Dampfkessel ist 3′ weit, der Zilinder ist 28′ 6″ lang und hat zu beiden Seiten zwei halbkugelförmige Endstücke; man suche den Körperinhalt.

Kubikinhalt des Zilinders = 225969 Kub.″
Inhalt der Endstücke (Kugel) = 24429 ″
Kubikinhalt des Kessels = 250398 Kub.″
= 144 Kub.′ 1566 Kub.″

5) In einen gleichseitigen Zilinder werden eine Kugel und ein Kegel eingeschrieben; wie verhalten sich die Inhalte dieser drei Körper?

6) Den Halbmesser einer Kugel zu finden, deren Kubikinhalt so groß ist als

a) der Inhalt eines gegebenen Zilinders,

b) der Inhalt eines gegebenen Kegels,

7) Die Oberfläche einer Kugel ist gleich der Oberfläche eines Würfels; welcher Körper hat einen größern kubischen Inhalt?

Dritter Theil.

Die Trigonometrie.

---

§. 379. Jedes ebene oder sphärische Dreieck enthält sechs Stücke, drei Seiten und drei Winkel. Diese stehen in einem so innigen Zusammenhange, daß man im Allgemeinen aus drei gegebenen Stücken, worunter jedoch bei ebenen Dreiecken wenigstens eine Seite sein muß, durch einfache Konstrukzionen auch die übrigen drei Stücke bestimmen, und so das Dreieck verzeichnen kann. Allein die geometrische Konstrukzion hat den Uebelstand, daß sie wegen der Unvollkommenheit der dabei benöthigten Instrumente stets nur angenäherte und unzureichende Auflösungen liefern kann; man sah sich daher veranlaßt, das graphische Verfahren mit der Rechnung zu verbinden, welche letztere jeden Grad von Genauigkeit zuläßt. Da aber zwischen Linien und Winkeln keine unmittelbare Vergleichung möglich ist, weil beiden wesentlich verschiedene Maßeinheiten zu Grunde liegen; so hat man statt der Winkel selbst gewisse Hilfsgrößen, welche die Größe der Winkel auf eine unzweideutige Art bestimmen, in die Rechnung eingeführt. Diese Hilfsgrößen heißen trigonometrische Funkzionen, und jener Theil der Geometrie, welcher ihre gegenseitigen Relazionen untersucht und dieselben anwenden lehrt, die Trigonometrie.

Je nachdem sich die Trigonometrie mit der Berechnung der ebenen oder sphärischen Figuren beschäftiget, wird sie die ebene oder sphärische Trigonometrie genannt.

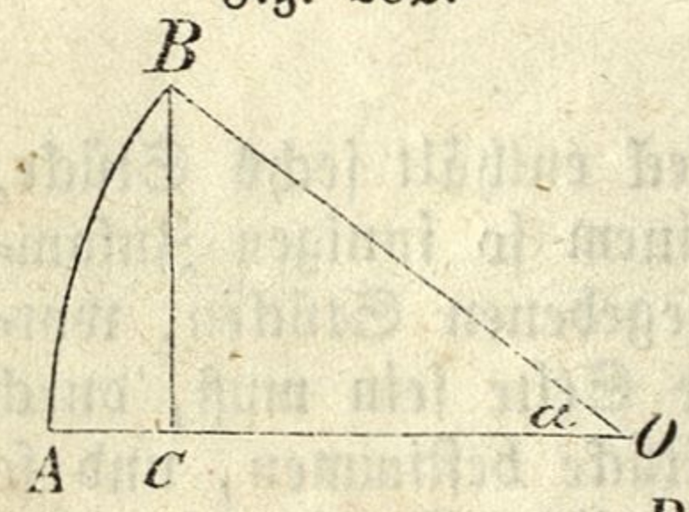
Erster Abschnitt.
Die ebene Trigonometrie.

I. Trigonometrische Funkzionen und ihr Zusammenhang.

1. Sinus und Cosinus.

§. 380. Wenn man von dem einen Schenkel eines Winkels ein Stück abschneidet, welches der Einheit des Längenmaßes gleich ist, und vom Endpunkte eine Senkrechte auf den andern Schenkel fällt, so heißt die Zahl, welche die Länge dieser Senkrechten ausdrückt, der **Sinus**, die Zahl aber, welche den Abstand der Senkrechten vom Scheitel des Winkels angibt, der **Cosinus** dieses Winkels.

Fig. 262.



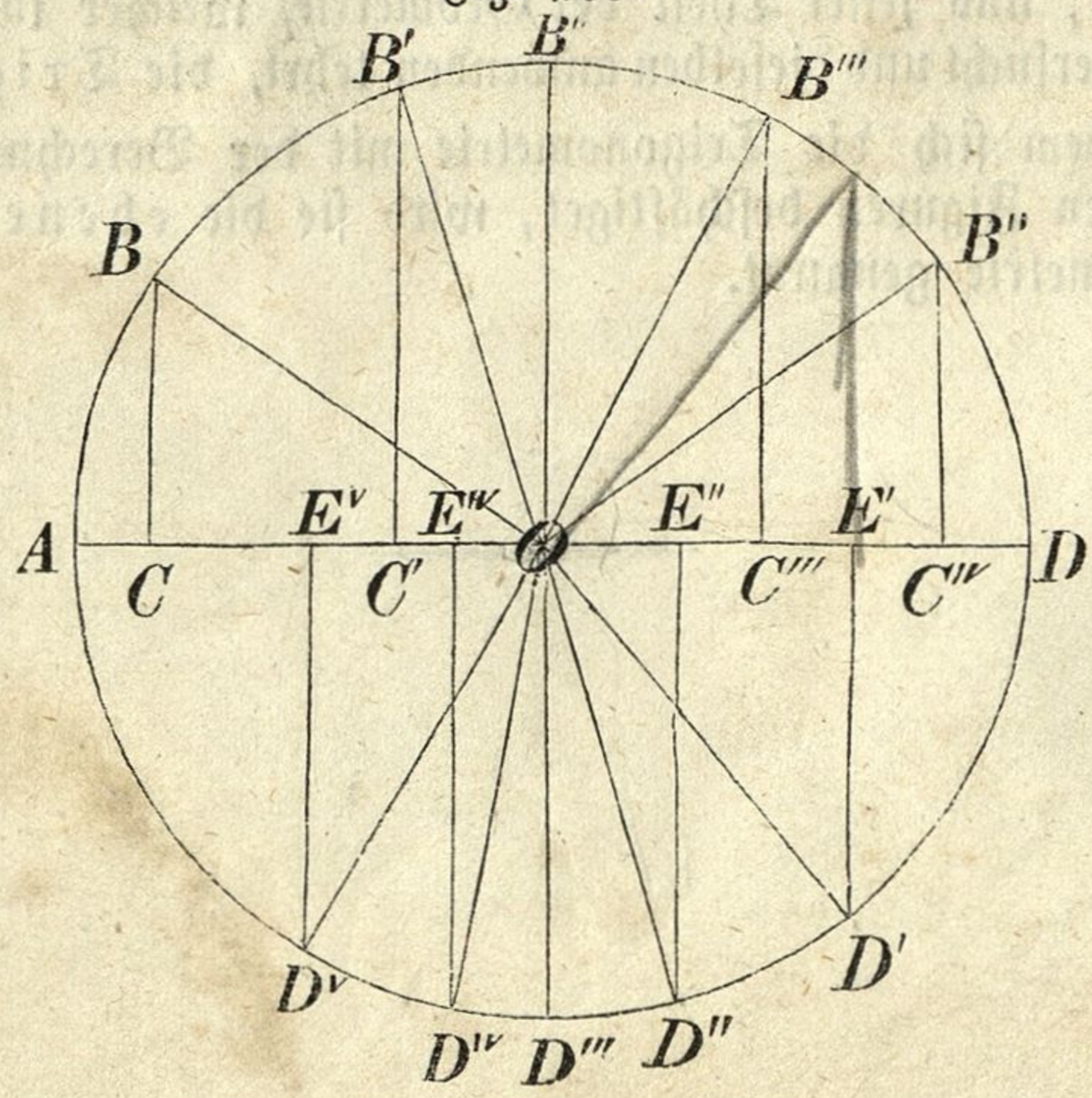
Nimmt man (Fig. 262) $BO = 1$ an, und zieht $BC \perp AO$, so stellen auch BC und CO Zahlen vor, welche das Verhältniß der Linien BC und CO zu der als Maßeinheit angenommenen Linie BO ausdrücken; die durch BC und CO dargestellten Zahlen sind nun beziehungsweise der Sinus und der Cosinus des Winkels $AOB = \alpha$, was man so anschreibt:

$$BC = \sin\alpha, \quad CO = \cos\alpha.$$

Beschreibt man aus dem Scheitel des Winkels α als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $= 1$ den Kreisbogen AB, so ist dieser das Maß des Winkels α, und man kann auch sagen: BC ist der Sinus, CO der Cosinus des Bogens AB.

§. 381. Wenn sich der Winkel α ändert, so werden sich offenbar auch die Linien BC und CO, folglich auch die dadurch dargestellten Zahlen, nämlich $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ ändern. Um den Zusammenhang zwischen dem Winkel und dessen Sinus und Cosinus für jede Größe des Winkels klar zu ersehen, nehme man (Fig. 263) den Schenkel AO des Winkels α als

Fig. 263.



unbeweglich, den Schenkel BO dagegen als beweglich an, so daß er nach und nach in die Lagen $B^{I}O$, $B^{II}O$, $B^{III}O$, $B^{IV}O$, DO, $D^{I}O$, ... zu stehen kommt. Man sieht, daß zur Bestimmung des Sinus die Senkrechte auf AO oder auf die Verlängerung davon bald von oben herab, bald von unten hinauf gezogen werden müsse; wird nun der Sinus oberhalb von AO als positiv betrachtet, so muß der unter AO liegende Sinus als negativ angenommen werden. Eben so wird der Cosinus bald von O gegen A hin, bald von O gegen D hin gerechnet; nimmt man den Cosinus im ersten Falle als positiv an, so muß er im zweiten Falle, wo er in der gerade entgegengesetzten Richtung liegt, als negativ betrachtet werden. Aus der bloßen Anschauung der Figur ergeben sich folgende Relazionen:

1) Je kleiner der Winkel α, desto kleiner ist auch der Sinus, während sich der Cosinus ohne Ende der Einheit nähert; es ist daher $\sin 0^{o} = 0$, $\cos 0^{o} = +1$. Ferner sieht man, daß sich für sehr kleine Winkel der Bogen und der Sinus dieses Bogens um so weniger von einander unterscheiden, je mehr sich der Bogen und somit auch der Winkel der Nulle nähert, wobei jedoch nach §. 179 der Sinus stets kleiner bleibt als der Bogen.
2) Läßt man α von 0° bis 90° wachsen, so nimmt $\sin \alpha$ zu, während $\cos \alpha$ abnimmt, beide sind positiv. Für $\alpha = 90^{o}$ fällt die Senkrechte in die Lage des Schenkels selbst, und es ist daher $\sin 90^{o} = +1$, $\cos 90^{o} = 0$.
3) Wächst α von 90° bis 180°, so ist der Sinus positiv und nimmt ab, der Cosinus dagegen ist negativ und wächst. Wird $\alpha = 180^{o}$, so hat man $\sin 180^{o} = 0$, $\cos 180^{o} = -1$.
4) Während α von 180° bis 270° zunimmt, ist $\sin \alpha$ negativ und zunehmend, $\cos \alpha$ auch negativ, aber abnehmend; und es wird endlich $\sin 270^{o} = -1$, $\cos 270^{o} = 0$.
5) Wird $\alpha > 270^{o}$ aber $< 360^{o}$, so ist der Sinus negativ und abnehmend, der Cosinus positiv und wachsend. Für $\alpha = 360^{o}$ werden Sinus und Cosinus wieder so groß wie für $\alpha = 0^{o}$, nämlich $\sin 360^{o} = 0$, $\cos 360^{o} = +1$.

Verzeichnet man ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite $= 1$ ist, und verbindet darin die Mitte einer Seite mit dem gegenüberstehenden Scheitel, so kann man daraus ersehen, daß

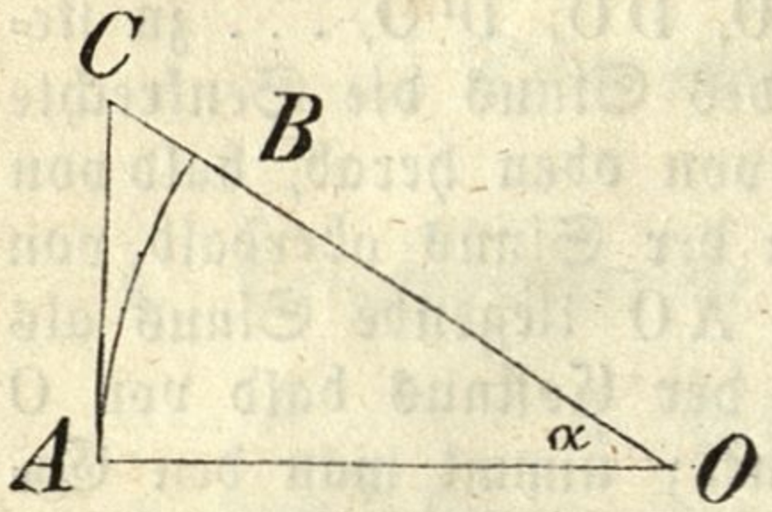
$$\sin 30^{o} = \tfrac{1}{2} \text{ und auch } \cos 60^{o} = \tfrac{1}{2}$$

ist.

2. Tangente und Sekante.

§. 382. Wenn man von dem einen Schenkel eines Winkels ein Stück $= 1$ abschneidet, und im Endpunkte darauf eine Senkrechte errichtet, welche von der Verlängerung des zweiten Schenkels geschnitten wird; so heißt die Zahl, welche die Größe der zwischen den beiden Schenkeln enthaltenen Senkrechten ausdrückt, die **Tangente**, die Zahl aber, welche die Länge des zweiten Schenkels zwischen dem Scheitel und der Senkrechten anzeigt, die **Sekante** dieses Winkels, oder auch des Bogens, welcher für den Halbmesser $= 1$ zu jenem Winkel gehört.

Fig. 264.



Nimmt man (Fig. 264) $AO = 1$ an, und zieht $AC \perp AO$; so sind die durch AC und OC dargestellten Zahlen folgeweise die Tangente und die Sekante des Winkel $AOB = \alpha$. und man schreibt

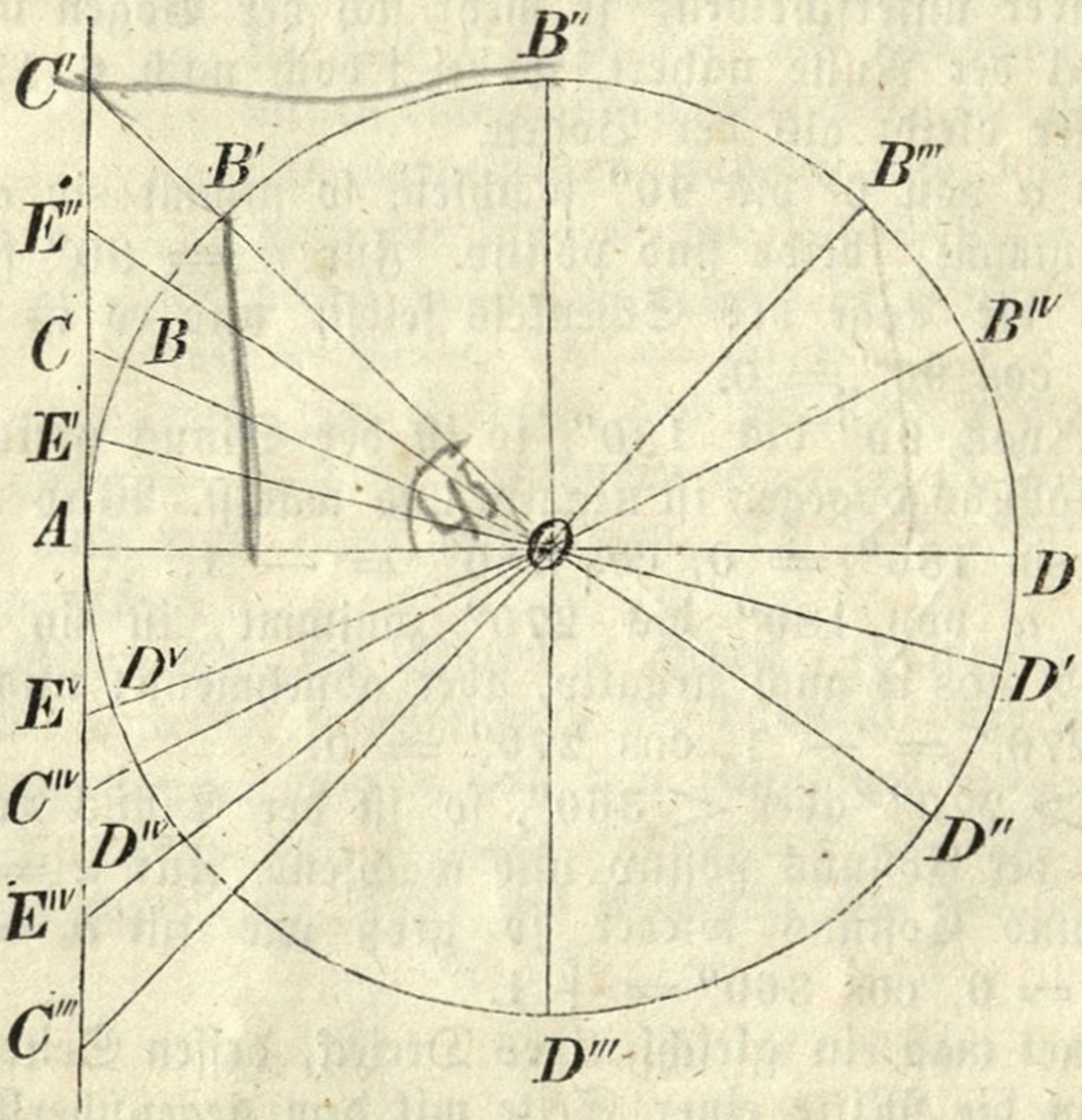
$$AC = \text{tang } \alpha, \quad OC = \sec \alpha,$$

wobei aber AC und OC nicht als Linien, sondern als Zahlenausdrücke für die Länge dieser Linien anzusehen sind.

§. 383. Die Abhängigkeit der Tangente und der Sekante eines Winkels von der Größe desselben ersieht man aus der Fig. 265.

Die Tangenten nach aufwärts werden als positiv angenommen, daher jene nach abwärts negativ sind. Nimmt man eben so die Sekanten, wenn der zweite Schenkel in seiner eigentlichen Richtung verlängert wird,

Fig. 265.



als positiv an, so müssen sie als negativ betrachtet werden, wenn die Verlängerung in der entgegengesetzten Richtung über den Scheitel hinaus geschieht.

1) Je kleiner der Winkel, desto kleiner wird auch die Tangente, während sich die Sekante der Einheit nähert; fallen die beiden Schenkel zusammen, so hat man $\text{tang } 0^0 = 0$ und $\sec 0^0 = +1$ Ferner: je kleiner der Winkel, desto kleiner wird auch der Unterschied zwischen dem Bogen und der Tangente dieses Bogens, während jedoch die Tangente nach §. 179 stets größer bleibt als der Bogen, wenn auch um eine noch so kleine Größe.
2) Wächst α von 0^0 bis 90^0, so sind tang α und sec α positiv und zunehmend. Wird endlich $\alpha = 90^0$, so werden Tangente und Sekante unendlich groß.

3) Läßt man α über 90° hinaus bis 180° wachsen, so werden Tangente und Sekante negativ und abnehmend. Erreicht α die Größe 180°, so wird tang 180° = 0, sec 180° = — 1.

4) Wenn α von 180° bis 270° wächst, nehmen Tangente und Sekante zu, und zwar ist die Tangente positiv, die Sekante negativ. Für $\alpha = 270°$ sind Tangente und Sekante unendlich groß.

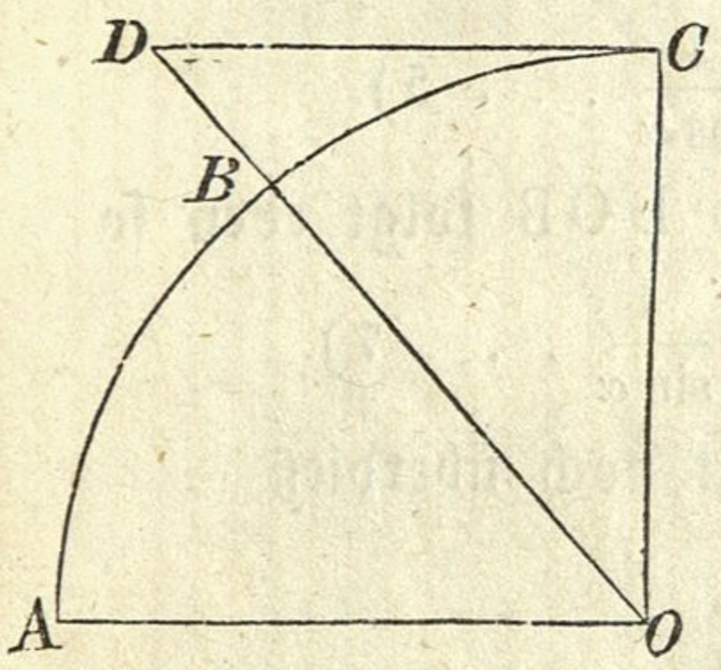
5) Wächst α über 270° bis 360°, so nehmen Tangente und Sekante ab, die Tangente ist negativ, die Sekante positiv, und es wird endlich tang 360° = 0, sec 360° = + 1.

Wie groß ist die Tangente eines Winkels von 45°?

3. Cotangente und Cosekante.

§. 385. Wenn man im Scheitel eines Winkels auf den einen Schenkel eine Senkrechte = 1 zieht, auf diese im Endpunkte wieder eine Senkrechte errichtet, und den zweiten Schenkel verlängert, bis er diese durchschneidet; so heißt die Zahl, welche die Größe des dadurch abgeschnittenen Stückes der letzteren Senkrechten ausdrückt, die **Cotangente**, und die Zahl, welche die Größe des zweiten Schenkels zwischen dem Scheitel und der Senkrechten angibt, die **Cosekante** des gegebenen Winkels, oder auch des Bogens, welcher für den Halbmesser = 1 zu diesem Winkel gehört.

Fig. 266.



Zieht man (Fig. 266) $OC \perp AO$, macht $OC = 1$, und errichtet $CD \perp OC$; so ist

$$CD = \cot \alpha \text{ und } OD = \operatorname{cosec} \alpha,$$

wo unter CD und OD die Zahlen zu verstehen sind, welche das Verhältniß der Linien CD und OD zur Längeneinheit OC angeben.

Die Beschaffenheit der Cotangente und Cosekante für die von 0 bis 360° wachsenden Winkel läßt sich auf dieselbe Art ableiten, wie jene der Tangente und Sekante nachgewiesen wurde.

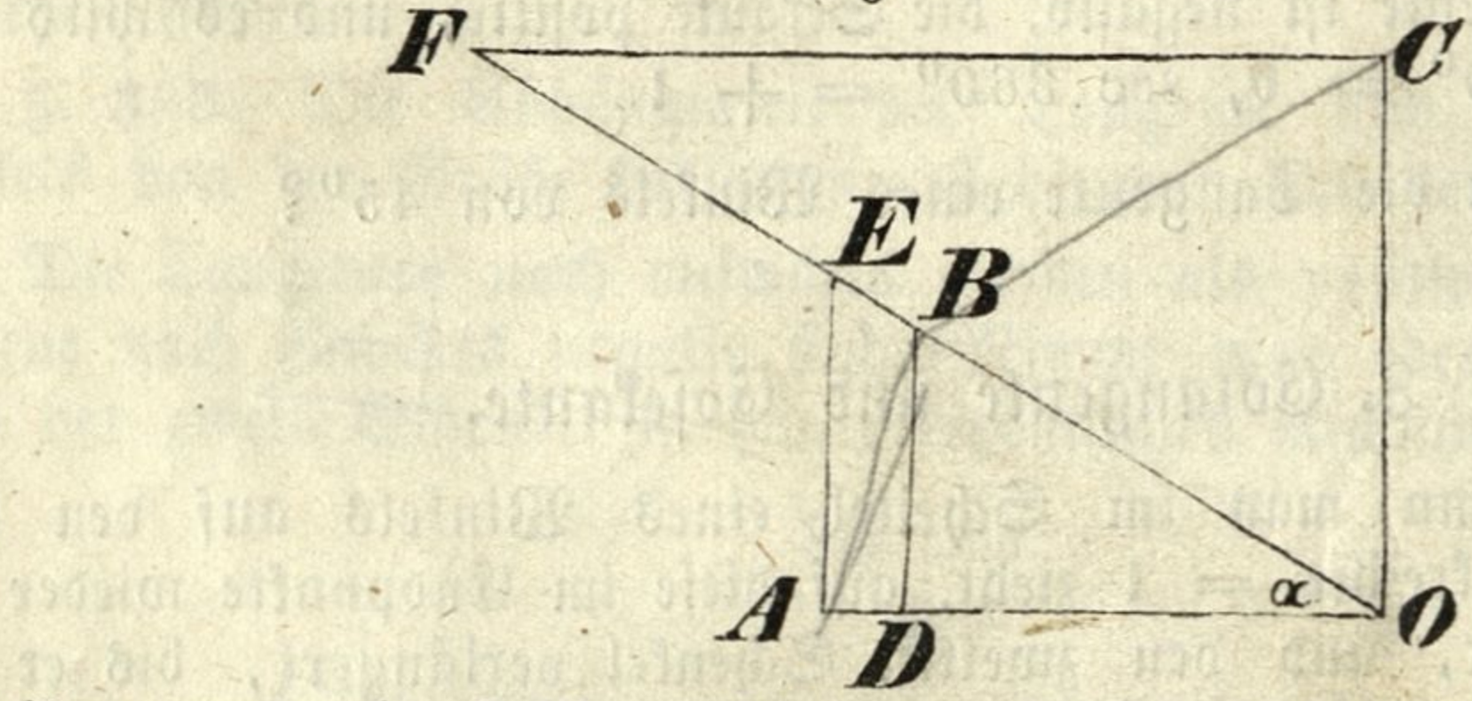
§. 386. Die hier erklärten Zahlen, nämlich Sinus, Cosinus, Tangente, Sekante, Cotangente und Cosekante sind jene **trigonometrischen Funkzionen**, welche die Größe eines Winkels unzweideutig bestimmen, und deren gegenseitige Relazionen wir nun näher betrachten wollen.

4. Relazionen zwischen den trigonometrischen Funkzionen desselben Winkels.

§. 387. Es sei (Fig. 267) $AO = BO = CO = 1$, ferner $BD \perp AO$, $AE \perp AO$, $OC \perp AO$, und $CF \perp OC$, so ist

$$BD = \sin\alpha, \quad AE = \text{tang}\,\alpha, \quad CF = \cot\alpha,$$
$$DO = \cos\alpha, \quad OE = \sec\alpha, \quad OF = \text{cosec}\,\alpha.$$

Fig. 267.



Aus den rechtwinkligen Dreiecken BDO, EAO, FCO folgt

$BD^2 + DO^2 = BO^2$, oder $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ . . . 1),
$AE^2 + AO^2 = OE^2$, oder $\text{tang}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$ . . . 2),
$CF^2 + CO^2 \quad OF^2$, oder $\cot^2\alpha + 1 = \text{cosec}^2\alpha$ . . . 3).

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke AEO und DBO ist

$$AE : BD = AO : DO \text{ und } EO : BO = AO : DO$$

oder $\text{tang}\,\alpha : \sin\alpha = 1 : \cos\alpha$ und $\sec\alpha : 1 = 1 : \cos\alpha$,

woraus $\text{tang}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ . . . 4), $\quad \sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ . . . 5).

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CFO und DOB folgt eben so

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \text{ . . . 6)}, \quad \text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \text{ . . . 7)}.$$

Aus den beiden Ausdrücken 4) und 6) folgt noch überdieß

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} \text{ . . . . 8)}.$$

§. 388. Ist nun von einem Winkel auch nur *eine* trigonometrische Funkzion bekannt, so lassen sich daraus mittelst der vorhergehenden Gleichungen auch die übrigen Funkzionen leicht bestimmen.

Es sei z. B. $\sin\alpha$ gegeben.

Aus der Gleichung 1) folgt $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, daher

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}.$$

Aus 4) und 6) erhält man sodann

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}, \text{ und}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Die Ausdrücke 5) und 7) geben endlich

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}, \text{ und}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

§. 389. Man findet auf gleiche Weise,

a) wenn $\cos\alpha$ gegeben ist:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}, \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha},$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}, \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}};$$

b) wenn $\operatorname{tang}\alpha$ gegeben ist:

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha}},$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\operatorname{tang}\alpha}, \qquad \sec\alpha = \sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha},$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha}}{\operatorname{tang}\alpha};$$

c) wenn $\cot\alpha$ gegeben ist:

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}, \qquad \cos\alpha = \frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}},$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}, \qquad \sec\alpha = \frac{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}{\cot\alpha},$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{1+\cot^2\alpha};$$

d) wenn $\sec\alpha$ bekannt ist:

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha},$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{\sec^2\alpha-1}, \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}},$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}};$$

e) wenn $\operatorname{cosec}\alpha$ gegeben ist:

$$\sin\alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}, \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}{\operatorname{cosec}\alpha},$$

$$\operatorname{lang}\alpha = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}, \qquad \operatorname{col}\alpha = \sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1},$$

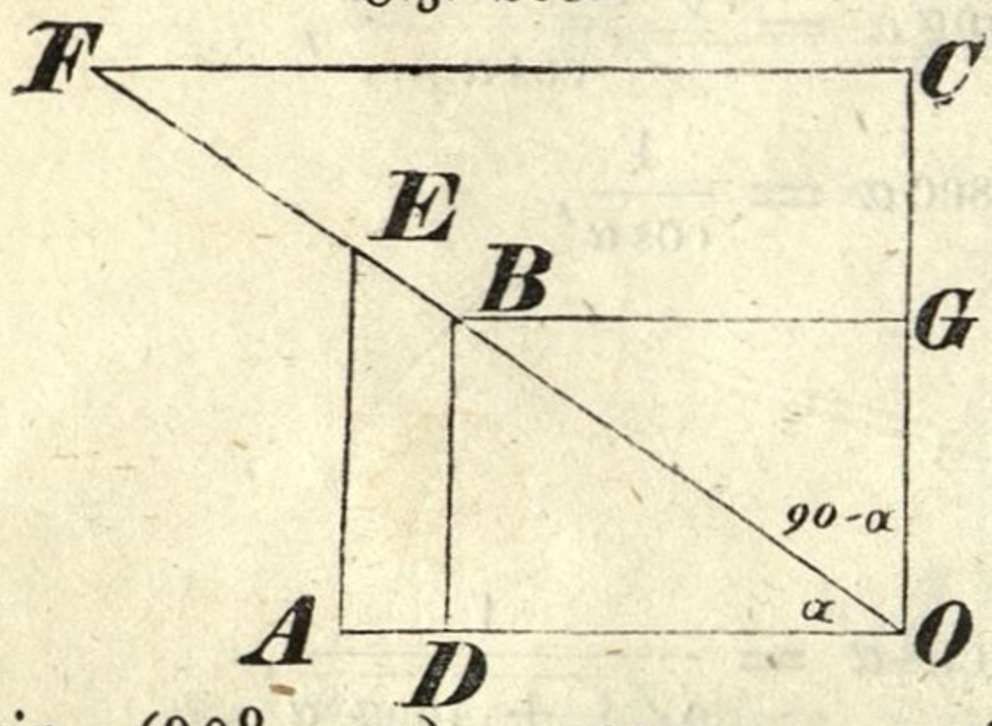
$$\sec\alpha = \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}.$$

5. Relazionen zwischen den trigonometrischen Funkzionen verschiedener Winkel.

a) Komplementäre und supplementäre Winkel.

§. 390. Zwei Winkel, welche sich zu 90^0 ergänzen, z. B. 60^0 und 30^0, heißen komplementär. Zwei solche Winkel können allgemein durch α und $90^0 - \alpha$ ausgedrückt werden.

Fig. 268.



Da (Fig. 268)

$BD = \sin\alpha$, $BG = \sin\ (90^0 - \alpha)$
$DO = \cos\alpha$, $GO = \cos\ (90^0 - \alpha)$
$AE = \text{tang}\,\alpha$, $CF = \text{tang}\ (90^0 - \alpha)$
$OE = \sec\alpha$, $OF = \sec\ (90^0 - \alpha)$
$CF = \cot\alpha$, $AE = \cot\ (90^0 - \alpha)$
$OF = \text{cosec}\,\alpha$, $OF = \text{cosec}\ (90^0 - \alpha)$

ist, so folgt

$\sin\ (90^0 - \alpha) = \cos\alpha$ . . . 9) $\text{cosec}\ (90^0 - \alpha) = \sin\alpha$ . . . 10)
$\text{tang}\ (90^0 - \alpha) = \cot\alpha$ . . . 11) $\cos\ (99^0 - \alpha) = \text{tang}\,\alpha$ . . . 12)
$\sec\ (90^0 - \alpha) = \text{cosec}\,\alpha$ . . . 13) $\cot\ (90^0 - \alpha) = \sec\alpha$ . . . 14)

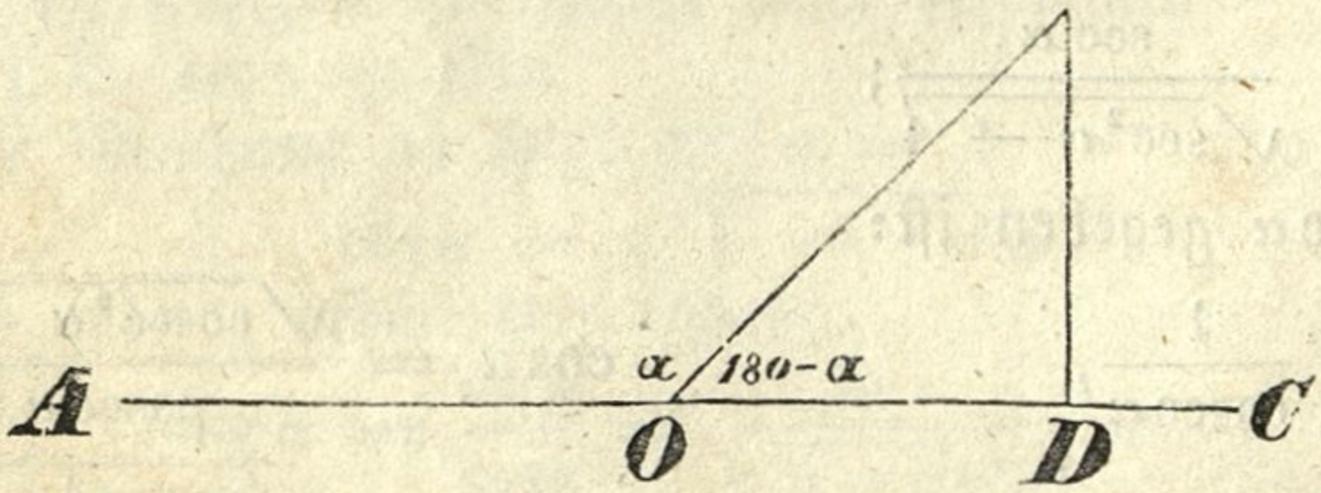
Man pflegt diese Gleichungen durch folgenden allgemeinen Satz auszudrücken: Jede Funkzion eines spitzigen Winkels ist gleich der Cofunkzion des komplementären Winkels.

Es ist Anfängern sehr anzuempfehlen, daß sie die entwickelten Formeln stets auch mit Worten ausdrücken, weil dadurch das Behalten und Anwenden derselben erleichtert wird.

Da die Sekante und Cosekante in den logarithmisch-trigonometrischen Berechnungen nicht angewendet werden, so wollen wir uns in den nachfolgenden Entwicklungen auch nur auf den Sinus, Cosinus, die Tangente und Cotangente beschränken.

§. 391. Zwei Winkel, deren Summe 180^0 beträgt, werden supplementäre Winkel genannt, z. B. 126^0 und 54^0. Zwei supplementäre Winkel werden im Allgemeinen durch α und $180^0 - \alpha$ bezeichnet.

Fig. 269.



Da (Fig. 269)

$BD = \sin\alpha$, $BD = \sin\ (180^0 - \alpha)$,
$OD = -\cos\alpha$. $OD = \cos\ (180^0 - \alpha)$

ist, so ergibt sich

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha \quad \ldots 15) \qquad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \quad \ldots 16)$$

$$\operatorname{tang}(180^\circ - \alpha) = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\operatorname{tang}\alpha \quad \ldots 17)$$

$$\cot(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{-\operatorname{tang}\alpha} = -\cot\alpha \quad \ldots 18)$$

§ 392. Man suche durch entsprechende Konstrukzionen eben so auch die Richtigkeit nachstehender Ausdrücke nachzuweisen:

a) $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$,
$\operatorname{tang}(90^\circ + \alpha) = -\cot\alpha$, $\cot(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{tang}\alpha$;

b) $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$,
$\operatorname{tang}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tang}\alpha$, $\cot(180^\circ + \alpha) = \cot\alpha$;

c) $\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$, $\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$,
$\operatorname{tang}(270^\circ - \alpha) = \cot\alpha$, $\cot(270^\circ - \alpha) = \operatorname{tang}\alpha$;

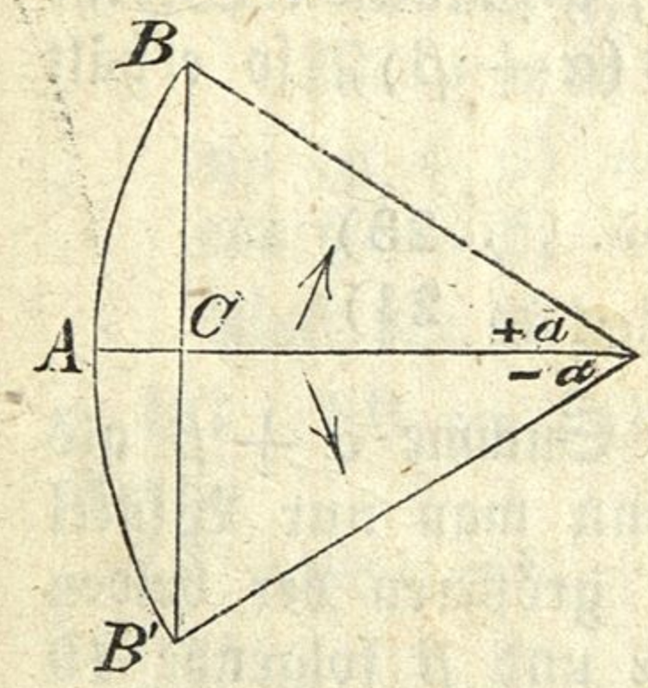
d) $\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$, $\cos(270^\circ + \alpha) = \sin\alpha$,
$\operatorname{tang}(270^\circ + \alpha) = -\cot\alpha$, $\cot(270^\circ + \alpha) = -\operatorname{tang}\alpha$;

e) $\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha$,
$\operatorname{tang}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{tang}\alpha$, $\cot(360^\circ - \alpha) = -\cot\alpha$.

b) Negative Winkel.

§. 393. Werden die Winkel, welche entstehen, wenn der bewegliche Schenkel BO (Fig. 270) von dem unbeweglichen AO aus nach oben gedreht wird, als positiv betrachtet, so müssen die Winkel, welche durch die Drehung des beweglichen Schenkels nach unten entstehen, als negativ angesehen werden.

Fig. 270.



Ist der Winkel $AOB = AOB'$, setzt man $AOB = +\alpha$, und denkt sich die Winkel durch die Drehung von AO aus entstanden, so muß $AOB' = -\alpha$ angenommen werden. Macht man nun $OB = OB' = 1$, und zieht von B und B' auf AO Senkrechte, so müssen die dadurch entstehenden Dreiecke kongruent sein, und daher jene beiden Senkrechten in demselben Punkte C zusammentreffen. Da nun

$BC = \sin\alpha$, $B'C = -\sin(-\alpha)$, und
$OC = \cos\alpha = \cos(-\alpha)$ ist, so folgt

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \quad \ldots 19) \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha \quad \ldots 20)$$

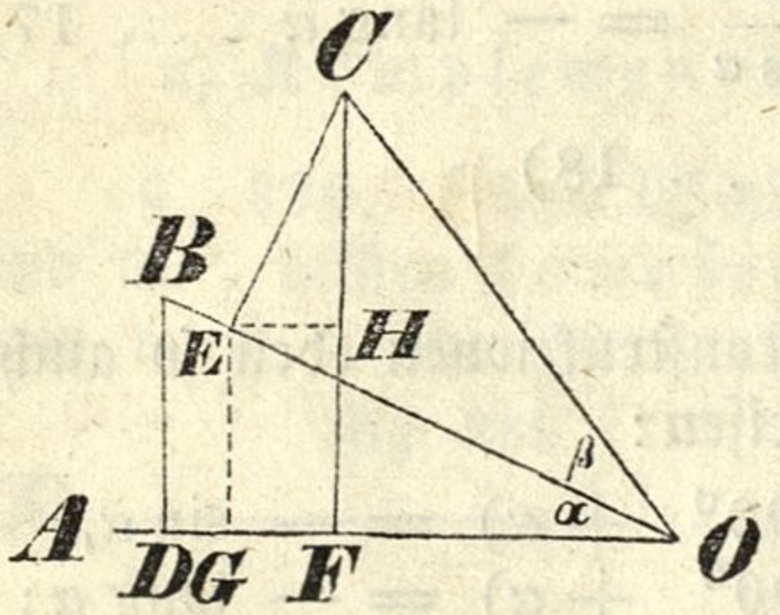
$$\operatorname{tang}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tang}\alpha \quad \ldots 21)$$

$$\cot(-\alpha) = \frac{1}{\operatorname{tang}(-\alpha)} = \frac{1}{-\operatorname{tang}\alpha} = -\cot\alpha \quad \ldots 22)$$

Man suche die Richtigkeit dieser Gleichungen auch für jene Fälle zu beweisen, wo der Winkel α zwischen 90° und 180°, zwischen 180° und 270°, oder zwischen 270° und 360° liegt.

c) Die Summe zweier Winkel.

Fig. 271.



§. 394. Ist (Fig. 271) $AOB = \alpha$, $BOC = \beta$, so ist $AOC = \alpha + \beta$. Macht man nun $OB = OC = 1$, und zieht $BD \perp AO$, $CE \perp BO$, $CF \perp AO$, so ist

$BD = \sin \alpha$, $CE = \sin \beta$, $CF = \sin(\alpha+\beta)$,
$DO = \cos \alpha$, $EO = \cos \beta$, $FO = \cos(\alpha+\beta)$.

Es soll nun $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$ durch den Sinus und Cosinus von α und β ausgedrückt werden. Es ist, wenn man $EG \perp AO$ und $EH \perp CF$ zieht,

$$\sin(\alpha + \beta) = CF = HF + CH = EG + CH,$$
$$\cos(\alpha + \beta) = FO = GO - GF = GO - EH.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke EGO und BDO folgt

$EG : BD = EO : BO$, $\quad GO : DO = EO : BO$,

oder

$EG : \sin\alpha = \cos\beta : 1$, $\quad GO : \cos\alpha = \cos\beta : 1$,

daher $\quad EG = \sin\alpha\cos\beta$, $\quad GO = \cos\alpha\cos\beta$.

Da der Winkel $ECH = BOD$ ist, indem die Schenkel beider Winkel auf einander senkrecht stehen, und da somit die Dreiecke EHC und BDO ähnlich sind, so hat man auch

$CH : DO = CE : BO$, $\quad EH : BD = CE : BO$,

oder

$CH : \cos\alpha = \sin\beta : 1$, $\quad EH : \sin\alpha = \sin\beta : 1$;

daher

$CH = \cos\alpha\sin\beta$, $\quad EH = \sin\alpha\sin\beta$.

Substituirt man nun die für EG, GO, CH, EH, gefundenen Werthe in den obigen Ausdrücken für $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$, so erhält man die Formeln

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad \ldots \; 23)$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad \ldots \; 24)$$

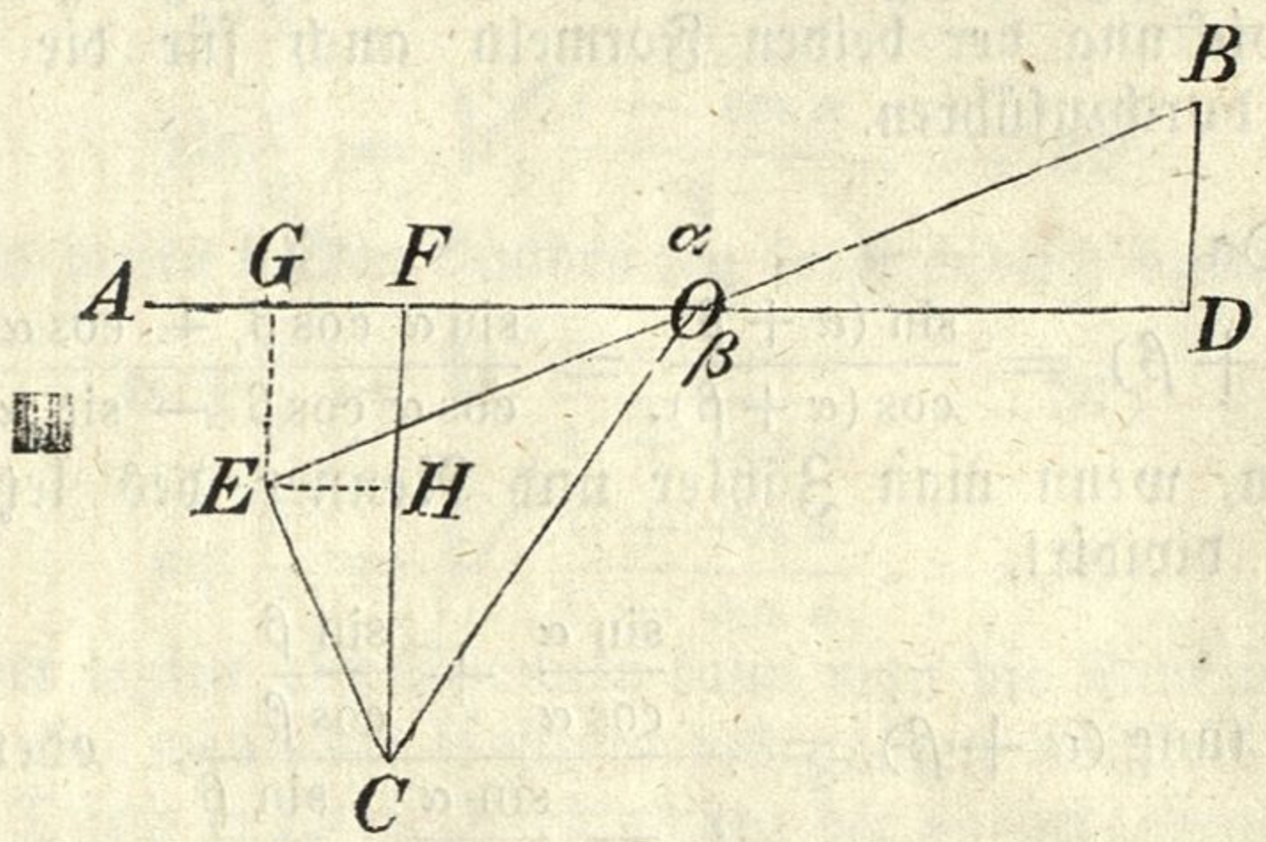
§. 395. Hier wurden α und β, und selbst ihre Summe $\alpha + \beta$ als spitzige Winkel vorausgesetzt. Es sind übrigens, wenn man nur Winkel unter 360^0 in Betrachtung zieht, und α als den größeren der beiden Winkel annimmt, in Hinsicht auf die Größe von α und β folgende 10 Fälle möglich:

a) wenn $\alpha + \beta$ zwischen 0^0 und 90^0 liegt, so muß
   1) α zwischen 0^0 und 90^0, und β zwischen 0^0 und 90^0 liegen;
b) wenn $\alpha + \beta$ zwischen 90^0 und 180^0 liegt, so kann
   2) α zwischen 0^0 und 90^0, und β zwischen 0^0 und 90^0, oder
   3) α zwischen 90^0 und 180^0, und β zwischen 0^0 und 90^0 sein;
c) wenn $\alpha + \beta$ zwischen 180^0 und 270^0 hineinfällt, so kann
   4) α zwischen 90^0 und 180^0, und β zwischen 0^0 und 90^0,
   5) α zwischen 90^0 und 180^0, und β zwischen 90^0 und 180^0, oder
   6) α zwischen 180^0 und 270^0, und β zwischen 0^0 und 90^0 liegen;

d) wenn $\alpha + \beta$ zwischen 270° und 360° fällt, so kann
7) α zwischen 90° und 180°, und β zwischen 90° und 180°,
8) α zwischen 180° und 270°, und β zwischen 0° und 90°,
9) α zwischen 180° und 270°, und β zwischen 90° und 180°, oder
10) α zwischen 270° und 360°, und β zwischen 0° und 90° liegen.

Daß die Ausdrücke 23) und 24), welche für den ersten dieser 10 Fälle entwickelt wurden, auch in allen übrigen Fällen giltig sind, ist leicht nachzuweisen. Betrachten wir z. B. den 7. Fall, so führt uns die Fig. 272, wo $AOB = \alpha$, $BOC = \beta$, und der erhabene Winkel $AOC = \alpha + \beta$ ist, auf nachstehende Entwicklung:

Fig. 272.



Macht man $BO = CO = 1$, und zieht $BD \perp AO$, $CE \perp BO$, $CF \perp AO$ so ist

$$BD = \sin\alpha, \quad CE = \sin\beta, \quad CF = -\sin(\alpha+\beta),$$
$$DO = -\cos\alpha, \quad EO = -\cos\beta, \quad FO = \cos(\alpha+\beta).$$

Wenn man $EG \perp AO$ und $EH \perp CF$ zieht, so ist

$$\sin(\alpha+\beta) = -CF = -(HF + CH) = -EG - CH,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = FO = GO - GF = GO - EH.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke EGO und BDO folgt

$$EG : BD = EO : BO, \qquad GO : DO = EO : BO,$$

oder

$$EG : \sin\alpha = -\cos\beta : 1, \qquad GO : -\cos\alpha = -\cos\beta : 1,$$

daher

$$EG = -\sin\alpha\cos\beta, \qquad GO = \cos\alpha\cos\beta.$$

Da der Winkel $ECH = BOD$ ist, indem die Schenkel beider Winkel auf einander senkrecht stehen, und da somit die Dreiecke EHC und BDO, ähnlich sind, so hat man auch

$$CH : DO = CE : BO, \qquad EH : BD = CE : BO,$$

oder

$$CH : -\cos\alpha = \sin\beta : 1, \qquad EH : \sin\alpha = \sin\beta\ 1,$$

daher

$$CH = -\cos\alpha\sin\beta, \qquad EH = \sin\alpha\sin\beta.$$

Subſtituirt man nun die für EG, GO, CH, EH gefundenen Werthe in den obigen Ausdrücken für $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$, ſo erhält man auch hier die Formeln

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

So wie für dieſen Fall dieſelbe Beweisführung, die in §. 394 für den erſten Fall, wo $\alpha+\beta<90^\circ$ iſt, gegeben wurde, wortgetreu mit alleiniger Ausnahme der Vorzeichen, in welchen während der Entwicklung eine Verſchiedenheit eintritt, die ſich aber in den Endreſultaten wieder behebt, angewendet werden kann; ſo findet dieſes, wie man ſich leicht überzeugen kann, auch in allen übrigen Fällen Statt, ſobald in den dazu gehörigen Figuren die nämlichen Buchſtaben beibehalten werden.

Wir rathen dem Anfänger, zur vollen Ueberzeugung und größeren Uebung die Entwicklung der beiden Formeln auch für die übrigen acht Fälle vollſtändig durchzuführen.

§. 396. Da

$$\operatorname{tang}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

iſt, ſo erhält man, wenn man Zähler und Nenner des letzteren Bruchs durch $\cos\alpha\cos\beta$ dividirt,

$$\operatorname{tang}(\alpha+\beta) = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}, \quad \text{oder}$$

$$\operatorname{tang}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{1 - \operatorname{tang}\alpha\,.\,\operatorname{tang}\beta} \quad \ldots\ 25)$$

Auf ähnlichem Wege findet man auch

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha\,.\,\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta} \quad \ldots\ 26)$$

§. 397. Setzt man in den Formeln 23), 24), 25) und 26) $\beta=\alpha$, ſo erhält man:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad \ldots\ 27)$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \quad \ldots\ 28)$$
$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tang}\alpha}{1 - \operatorname{tang}^2\alpha} \quad \ldots\ 29)$$
$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha} \quad \ldots\ 30),$$

aus welchen Gleichungen ſich die Funkzionen des doppelten Winkels finden laſſen, wenn jene des einfachen Winkels bekannt ſind.

Wenn man in den Formeln 27) und 28) überall α ſtatt 2α, daher $\frac{\alpha}{2}$ ſtatt α ſetzt, ſo verwandeln ſich dieſelben in folgende:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \quad \ldots\ 31)$$
$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \quad \ldots\ 32).$$

§. 398. Da

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{nach 1)}$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{nach 32)}$$

so findet man, wenn diese beiden Gleichungen addirt und subtrahirt werden,

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \quad \ldots \; 33)$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \quad \ldots \; 34)$$

aus welchen Gleichungen

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad \ldots \; 35)$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad \ldots \; 36)$$

hervorgeht. Aus diesen beiden Ausdrücken folgt endlich durch die Division:

$$\text{tang}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \quad \ldots \; 37)$$

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} \quad \ldots \; 38).$$

Mittelst der letzten vier Formeln kann man die Funkzionen des halben Winkels bestimmen, wenn der Cosinus des ganzen Winkels bekannt ist.

§. 399. Durch gehörige Verbindung der vorhergehenden Gleichungen lassen sich noch folgende Formeln ableiten. Wir überlassen die vollständige Entwicklung derselben dem eigenen Fleiße des Schülers und fügen überall als leitende Winke bloß die Hinweisung auf die Gleichungen bei, welche bei der Herleitung zu Grunde gelegt werden.

a) $\sin 2\alpha = \dfrac{2\,\text{tang}\,\alpha}{1+\text{tang}^2\alpha}$.

[Aus der Formel 27), wenn man darin den Werth für $\sin\alpha$ aus 4) und dann für $\cos^2\alpha$ aus §. 389, b) substituirt.]

b) $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\text{tang}^2\alpha}{1+\text{tang}^2\alpha}$.

[Aus 28) durch ähnliche Substituzionen wie bei a)]

c) $1 + \sin\alpha = \left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$,

d) $1 - \sin\alpha = \left(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$.

[Durch Addizion und Subtrakzion von 1) und 31), nachdem in 1) $\frac{\alpha}{2}$ statt α gesetzt wurde.]

e) $\sin\frac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}}{2}$,

f) $\cos\frac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}}{2}$.

[Aus c) und d)]

g) $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}}{\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}}$. [Aus e) und f)]

h) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$. [Aus 31) und 33)].

i) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \cot\frac{\alpha}{2}$. [Aus 31) und 34)].

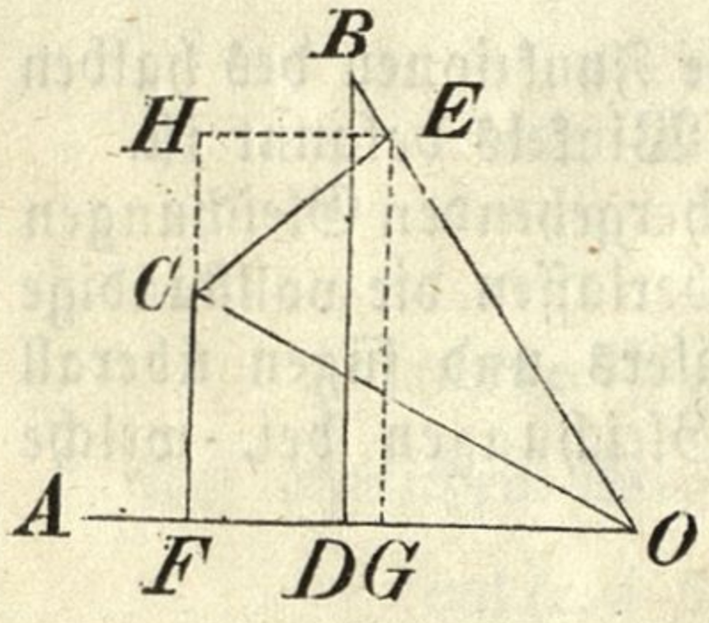
k) $\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\operatorname{tang}^2\frac{\alpha}{2}}{2}$. [Aus 32) und 33)].

l) $\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{\cot^2\frac{\alpha}{2}-1}{2}$. [Aus 32) und 34)].

d) Der Unterschied zweier Winkel.

§. 400. Es sei (Fig. 273) $AOB = \alpha$, $BOC = \beta$, so ist $AOC = \alpha - \beta$. Macht man nun $OB = OC = 1$, und zieht $BD \perp AO$, $CE \perp BO$, $CF \perp AO$, so ist

Fig. 273.



$BD = \sin\alpha$,
$DO = \cos\alpha$,
$CE = \sin\beta$,
$EO = \cos\beta$,
$CF = \sin(\alpha-\beta)$
$FO = \cos(\alpha-\beta)$.

Es soll nun

$\sin(\alpha-\beta)$ und $\cos(\alpha-\beta)$

durch den Sinus und Cosinus von α und β ausgedrückt werden. Es ist, wenn man $EG \perp AO$ und $EH \perp CF$ zieht,

$$\sin(\alpha-\beta) = CF = HF - CH = EG - CH,$$
$$\cos(\alpha-\beta) = FO = GO + FG = GO + EH.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke EGO und BDO folgt

$EG : BD = EO : BO$, $GO : DO = EO : BO$,

oder

$EG : \sin\alpha \quad \cos\beta : 1$, $GO : \cos\alpha \quad \cos\beta : 1$,

daher

$EG = \sin\alpha\cos\beta$, $GO \quad \cos\alpha\cos\beta$.

Da der Winkel ECH BOD ist, indem die Schenkel beider Winkel auf einander senkrecht stehen, und da somit die Dreiecke EHC und BDO ähnlich sind, so hat man auch

$CH : DO = CE : BO$, $EH : BD \quad CE : BO$,

oder

$CH : \cos\alpha = \sin\beta : 1$, $EH : \sin\alpha = \sin\beta : 1$,

daher

$CH = \cos\alpha\sin\beta$, $EH = \sin\alpha\sin\beta$.

Subſtituirt man nun die für EG, GO, CH, EH gefundenen Werthe in den obigen Ausdrücken für $\sin(\alpha - \beta)$ und $\cos(\alpha - \beta)$, ſo erhält man die Formeln

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \quad \ldots 39)$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad \ldots 40).$$

Man ſieht, daß die Entwicklung dieſer Formeln mit der Herleitung der Ausdrücke für $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$ in §. 394 mit Ausnahme der Vorzeichen wörtlich übereinſtimmt.

Die Formeln für $\sin(\alpha - \beta)$ und $\cos(\alpha - \beta)$ gehen unmittelbar aus den Formeln für $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$ hervor, ſobald man in den letzteren $-\beta$ ſtatt β ſetzt.

Man ſoll hier die verſchiedenen Fälle angeben, welche unter der Vorausſetzung, daß α nicht über 360^0 beträgt, hinſichtlich der Größe von α und β möglich ſind, und die Giltigkeit der Formeln 39) und 40) für jeden dieſer Fälle einzeln nachweiſen.

§. 401. Aus den Formeln 39) und 40) erhält man auf demſelben Wege, welcher in §. 396 eingeſchlagen wurde,

$$\operatorname{tang}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta}{1 + \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta} \quad \ldots 41)$$

$$\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\alpha - \cot\beta} \quad \ldots 42)$$

§ 402. Man ſuche hier noch folgende zwei Formeln zu entwickeln:

a) $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha.$
[Aus 23), 39) und 1)].

b) $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha.$
[Aus 24), 40) und 1)].

e) Verwandlung von Summen und Differenzen der Funkzionen in Produkte und Quozienten.

§. 403. Da die trigonometriſchen Rechnungen ſämmtlich logarithmiſch durchgeführt werden, ſo ſind in denſelben die Summen und Differenzen von Funkzionen möglichſt zu vermeiden. Es iſt daher nöthig zu zeigen, wie die Summen und Unterſchiede der trigonometriſchen Funkzionen in Produkte und Quotienten umgewandelt werden können.

Aus den Formeln 23), 24), 39) und 40) erhält man durch Addizion und Subtrakzion

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= 2\sin\alpha\cos\beta,\\
\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) &= 2\cos\alpha\sin\beta,\\
\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) &= 2\cos\alpha\cos\beta,\\
\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) &= -2\sin\alpha\sin\beta;
\end{aligned}$$

oder wenn man

$$\alpha + \beta = \varphi, \qquad \alpha - \beta = \psi,$$

daher

$$\alpha = \frac{\varphi + \psi}{2}, \qquad \beta = \frac{\varphi - \psi}{2} \text{ ſetzt,}$$

$$\sin\varphi + \sin\psi = 2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2} \quad \ldots 43)$$

$$\sin\varphi - \sin\psi = 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2} \quad \ldots 44)$$

$$\cos\varphi + \cos\psi = 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2} \quad \ldots 45)$$

$$\cos\varphi - \cos\psi = -2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2} \quad \ldots 46)$$

Aus 43) und 44) folgt durch die Division

$$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\varphi - \sin\psi} = \frac{\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}}{\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\varphi}{2}} = \operatorname{tang}\frac{\varphi+\psi}{2}\cot\frac{\varphi-\psi}{2}$$

oder

$$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\varphi - \sin\psi} \quad \frac{\operatorname{tang}\frac{\varphi+\psi}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\varphi-\psi}{2}} \quad \ldots 47)$$

§. 404. Man entwickle noch folgende Formeln:

a) $\operatorname{tang}\alpha \pm \operatorname{tang}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$. [Aus 4), 23) und 39)]

b) $\frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$. [Aus a)]

c) $\cot\alpha \pm \cot\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$. [Aus 6), 23) und 39)]

d) $\cot\alpha \pm \cot\beta = \frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$. [Aus 4), 6), 24) und 40)]

e) $1 + \sin\alpha = 2\sin^2\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$.

f) $1 - \sin\alpha = 2\cos^2\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$.

g) $\pm\cos\alpha = 2\cos\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$.
[Aus 43), 44), 45) für $\varphi = 90^0$, $\psi = \alpha$.]

h) $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \cot\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tang}\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$.
[Aus g) und e)].

i) $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \operatorname{tang}\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right) = \cot\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$.
[Aus g) und f)].

k) $\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} = \operatorname{tang}^2\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right) = \cot^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$.
[Aus e) und f)].

l) $\sin(\beta+\gamma-\alpha) + \sin(\alpha+\gamma-\beta) + \sin(\alpha+\beta-\gamma) - \sin(\alpha+\beta+\gamma)$
$= 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

m) $\cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cos(\beta+\gamma-\alpha) + \cos(\alpha+\gamma-\beta) + \cos(\alpha+\beta-\gamma)$
$= 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.
[Aus 23), 24), 39) und 40).]

6. Trigonometrische Tafeln.

§. 405. Die bisher entwickelten Formeln können zunächst dazu verwendet werden, um die trigonometrischen Funkzionen der verschiedenen Winkel zu berechnen. Da nach §§. 391 und 392 die Funkzionen aller Winkel auf jene der spitzigen zurückgeführt werden können, so handelt es sich eigentlich bloß um die Bestimmung der trigonometrischen Funkzionen für die spitzigen Winkel; ja es reicht sogar hin, wenn nur die Funkzionen der Winkel bis 45^0 berechnet werden, da $45^0+\varphi$ und $45^0-\varphi$ komplementäre Winkel sind, und daher

$$\begin{aligned}\sin\ (45^0+\varphi) &= \cos\ (45^0-\varphi),\\ \cos\ (45^0+\varphi) &= \sin\ (45^0-\varphi),\\ \text{tang}\ (45^0+\varphi) &= \cot\ (45^0-\varphi),\\ \cot\ (45^0+\varphi) &= \text{tang}\ (45^0-\varphi)\end{aligned}$$

ist. Wir wollen nun in dem Folgenden die Rechnung andeuten, durch welche die trigonometrischen Funkzionen der Winkel von 0^0 bis 45^0 gefunden werden können.

Da für jeden solchen Winkel der Bogen, der für den Halbmesser $= 1$ diesem Winkel entspricht, stets zwischen dem Sinus und der Tangente desselben liegen muß, so ist, wenn b die Zahl bedeutet, welche die Länge eines solchen zu dem Winkel α gehörigen Bogens ausdrückt,

$$\text{tang}\,\alpha > b \text{ und } \sin\alpha < b.$$

Aus der ersteren Relazion folgt nun $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > b$, daher $\sin\alpha > b\cos\alpha$ oder $\sin\alpha > b\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, und wenn man mit Rücksicht auf $\sin\alpha < b$ statt $\sin^2\alpha$ die größere Zahl b^2 setzt, um so mehr

$$\sin\alpha > b\sqrt{1-b^2}.$$

Da ferner für $\alpha < 45^0$ der Ausdruck $1-b^2$ kleiner als 1 ist, so ist $\sqrt{1-b^2} > 1-b^2$; um so mehr ist also

$$\sin\alpha > b\,(1-b^2), \text{ woraus}$$
$$b-\sin\alpha < b^3$$

folgt. Es ist also für alle Winkel unter 45^0 der Unterschied zwischen dem Bogen und dem Sinus stets kleiner als die dritte Potenz des Bogens selbst.

Für $\alpha = 1'$ ist $b = 0{\cdot}000\ 290\ 8882$, daher

$$b-\sin\alpha < 0{\cdot}000\ 290\ 8882^3; \text{ aber}$$

$$0{\cdot}000\ 290\ 8882^3 < \frac{1}{10^{10}},$$

daher um so mehr

$$b-\sin\alpha < \frac{1}{10^{10}},$$

woraus hervorgeht, daß man den Bogen von 1 Minute bis auf 10 Dezimalen genau für sin 1′ setzen kann; also ist

$$\sin 1' = 0{\cdot}000\ 290\ 8882.$$

Wird daraus $\cos 1' = \sqrt{1-\sin^2 1'}$ bestimmt, so geben dann die Formeln 27), 28), 23) und 24) den Sinus und Cosinus für 2′, 4′, 8′, ... den Sinus und Cosinus für $1'+2'=3'$, für $2'+3'=5'$, für $2'+5'=7'$, . . . und aus diesen wieder für 6′, 10′, 14′, 9′,

15′, 21′ u. s. w. bis 60′ oder 1°. Aus sin 1° und cos 1° findet man auf gleiche Weise die Sinus und Cosinus aller Winkel bis 45°.

Wollte man auch den Sinus und Cosinus solcher Bögen bestimmen, welche bloß eine oder mehrere Sekunden betragen, so kann man hier um so mehr für den Sinus den Bogen selbst setzen; dieser aber ist der 60ste Theil des Bogens von 1′; also ist

$$\sin 1'' = 0{\cdot}0000048481.$$

Ferner ist

$$\sin 2'' = 2\sin 1'', \quad \sin 3'' = 3\sin 1'', \quad \sin 4'' = 4\sin 1'' \quad \text{u. s. w.}$$

Daraus lassen sich sofort auch die Cosinus für die einzelnen Sekunden bestimmen.

Hat man nun die Sinus und Cosinus der Winkel von 0° bis 45° gefunden, so können daraus mittelst der Formeln 4) und 6) auch die Tangenten und Cotangenten derselben berechnet werden.

§. 406. Indem außer

$$\sin 90^\circ = \cos 0^\circ = 1,$$
$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \tfrac{1}{2}, \text{ und}$$
$$\operatorname{tang} 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$$

alle übrigen Funkzionen irrazionale Werthe haben, so werden dieselben um so genauer bestimmt sein, durch je mehrere Dezimalstellen man sie ausdrückt; aber in demselben Grade wird dann auch das Multipliziren und Dividiren durch diese Funkzionen erschwert. Um diesem Uebelstande zu begegnen, bedient man sich in allen trigonometrischen Rechnungen der Logarithmen, zu welchem Ende die briggischen Logarithmen der Funkzionen für die einzelnen Winkel bestimmt, und in den Logarithmentafeln gehörig zusammengestellt wurden.

Solche logarithmisch-trigonometrische Tafeln enthalten gewöhnlich die Logarithmen der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten der Winkel von 0° bis 90° mit einem doppelten Tabellenkopfe; in dem obern findet man die Winkel von 0° bis 45° von vorne nach hinten, in dem untern die komplementären Winkel von 45° bis 90° und zwar von hinten nach vorne angeführt; die Minuten oder auch Zehner von Sekunden stehen bei den ersteren Winkeln links von oben nach unten, bei den letzteren rechts von unten nach aufwärts fortlaufend. In den sechsstelligen Tafeln sind meistens die Logarithmen der Funkzionen für die beiden ersten und letzten Grade von 10 zu 10 Sekunden, für die Winkel von 2° bis 88° aber von Minute zu Minute angegeben.

Da die Sinus und Cosinus aller spitzigen Winkel, ferner die Tangenten der Winkel unter 45°, und die Cotangenten jener über 45° kleiner als 1 sind, so werden ihre Logarithmen negativ, und somit mit einer negativen Karakteristik darzustellen sein. Um nun in den Tafeln Raum zu ersparen, hat man alle Logarithmen, selbst jene der Tangenten über 45° und der Cotangenten unter 45°, auf die gemeinschaftliche Karakteristik — 10 gebracht, und diese in den Tafeln weggelassen. Diese in den Tafeln ausgelassene Kennziffer — 10 muß daher zu jedem daraus gefundenen Logarithmus noch hinzugefügt werden.

§ 407. Bei dem Gebrauche der trigonometrischen Tafeln*) kommen zwei Aufgaben vor:

I. Zu einem gegebenen Winkel den Logarithmus einer zugehörigen trigonometrischen Funkzion zu finden.

a) Wie man für einen Winkel, der bloß Grade und Minuten enthält, oder bei den ersten und letzten zwei Graden nebst den Minuten auch noch Zehner von Sekunden mit sich führt, den Logarithmus einer Funkzion findet, zeigt schon der bloße Anblick der Tafel, und bedarf daher keiner weiteren Erörterung.

Man findet z. B.

$$\log \sin 38^\circ 17' = 9{\cdot}792\,077 - 10,$$
$$\log \cos 57^\circ 48' = 9{\cdot}726\,626 - 10,$$
$$\log \operatorname{tang} 1^\circ 25' 40'' = 8{\cdot}396\,628 - 10,$$
$$\log \cot 77^\circ = 9{\cdot}363\,364 - 10.$$

b) Ist aber für einen bis auf einzelne Sekunden bestimmten Winkel der Logarithmus einer trigonometrischen Funkzion zu bestimmen, so suche man den zu dem nächst kleineren Winkel, der noch in den Tafeln steht, gehörigen Logarithmus. Dann wird die daneben stehende Differenz für 1″ mit der Zahl der übrigen Sekunden multiplizirt, und das Produkt nach Hinweglassung der Dezimalen mit dem obigen herausgeschriebenen Logarithmus durch die Addizion oder Subtrakzion vereinigt, je nachdem die trigonometrische Funkzion mit dem Winkel wächst oder abnimmt, d. h. beim Sinus und bei der Tangente addirt, beim Cosinus und bei der Cotangente subtrahirt.

Beispiele.

1) Man suche $\log \sin 25^\circ 48' 13''$.

$$\log \sin 25^\circ 48' = 9{\cdot}638\,720 - 10$$
$$4{\cdot}35 \times 13 = 56{\cdot}55 \ldots + 57$$
$$\log \sin 25^\circ 48' 13'' = 9{\cdot}638\,777 - 10$$

2) Man suche $\log \cos 76^\circ 31' 48''$.

$$\log \cos 76^\circ 31' = 9{\cdot}367\,659 - 10$$
$$8{\cdot}79 \times 48 = 421{\cdot}92 \ldots - 422$$
$$\log \cos 76^\circ 31' 48'' = 9{\cdot}367\,237 - 10$$

3) Für $\log \operatorname{tang} 45^\circ 45' 45''$ hat man

$$\log \operatorname{tang} 45^\circ 45' = 10{\cdot}011\,371 - 10$$
$$4{\cdot}21 \times 45 = 189{\cdot}4 \ldots + 189$$
$$\log \operatorname{tang} 45^\circ 45' 45'' = 10{\cdot}011\,560 - 10$$

4) Zur Bestimmung von $\log \cot 1^\circ 17' 34''$ ist

$$\log \cot 1^\circ 17' 30'' = 11{\cdot}646\,899 - 10$$
$$93{\cdot}3 \times 4 = 373{\cdot}2 \ldots - 373$$
$$\log \cot 1^\circ 17' 34'' = 11{\cdot}646\,526 - 10$$

---

*) Eine ausführlichere Belehrung über die Einrichtung und den Gebrauch solcher Tafeln findet man in der Einleitung zu den von mir herausgegebenen: Logarithmentafeln zum Schulgebrauche. Wien bei Gerold.

$\cos\alpha \pm \frac{2\pi}{n}$ / - dvia

Man suche noch folgende Logarithmen:

5) log sin 17° 8′ 20″ — 6) log sin 51° 58′ 33″
7) log sin 0° 48′ 37″ — 8) log cos 39° 0′ 47″
9) log cos 50° 9′ 9″ — 10) log cos 1° 2 12″
11) log tang 69° 27′ 39″ — 12) log tang 23° 23′ 23″
13) log tang 89° 19′ 31″ — 14) log cot 8° 51′ 54″
15) log cot 0° 40′ 29″ — 16) log cot 78° 15′ 8″.

§. 408. II. Zu dem Logarithmus einer trigonometrischen Funkzion den zugehörigen Winkel zu finden.

a) Man suche den gegebenen Logarithmus in einer der Spalten auf, welche entweder oben oder unten mit seiner Benennung überschrieben sind. Findet man ihn in den Tafeln vollständig, so nimmt man die oben stehenden Grade nebst den links befindlichen Minuten und Zehnern von Sekunden, oder die unten angeschriebenen Grade mit den rechts stehenden Minuten und Zehnern von Sekunden, je nachdem der Name der gegebenen Funkzion oberhalb oder unterhalb der Spalte vorkommt. So findet man

für log sin x = 9·496 537 — 10 . . . x = 18° 17′
„ log cos x = 8·490 326 — 10 . . . x = 88° 13′ 40″
„ log tang x = 10·132 642 — 10 . . . x = 53° 37′
„ log cot x = 11·442 664 — 10 . . . x = 2° 4′.

b) Findet man aber den gegebenen Logarithmus nicht vollständig in den Tafeln, so suche man am entsprechenden Orte den nächst kleineren Logarithmus und schreibe den dazu gehörigen Winkel heraus. Dann subtrahire man diesen Logarithmus von dem gegebenen, und dividire den Unterschied durch die neben jenem Logarithmus stehende Differenz für 1″; der Quozient gibt Sekunden, welche man beim Sinus und bei der Tangente zu dem obigen herausgeschriebenen Winkel addirt, beim Cosinus und bei der Cotangente aber davon subtrahirt.

Beispiele:

1) Es sei log sin x = 9·793 578 — 10. Man findet
9·793 513 — 10 = log sin 38° 26′
65 : 2·65 . . . . + 25″
also x = 38° 26′ 25″.

2) Für log cos x = 9·179 739 — 10 hat man
9·179 726 — 10 = log cos 81° 18′
13 : 13·75 . . . . — 1″
x = 81° 17′ 59″.

3) Für log cot x = 11·620 868 — 10 findet man
11·620 615 — 10 log cot 1° 22′ 20″
253 : 88·0 . . . . — 3″
x = 1° 22′ 17″

Man suche noch zu folgenden Logarithmen den entsprechenden Winkel:

4) log sin α = 8·741090 — 10 — 5) log sin β = 9 998357 — 10
6) log sin γ = 8 40(913 — 10 — 7) log cos x = 9 849291 — 10

8) $\log\cos y = 9{\cdot}977064 - 10$ 9) $\log\cos z = 8{\cdot}125444 - 10$
10) $\log\operatorname{tang}\alpha = 10{\cdot}645700 - 10$ 11) $\log\operatorname{tang}\beta = 8{\cdot}955289 - 10$
12) $\log\operatorname{tang}\gamma = 8{\cdot}473804 - 10$ 13) $\log\cot x = 10{\cdot}216711 - 10$
14) $\log\cot y = 9{\cdot}908276 - 10$ 15) $\log\cot z = 12{\cdot}440329 - 10$

II. Auflösung der ebenen Dreiecke.

§. 409. Ein Dreieck auflösen heißt, aus denjenigen Stücken, welche ein Dreieck vollkommen bestimmen, die übrigen Stücke durch Rechnung finden.

Dabei kommt es vor Allem darauf an, aus den geometrischen Eigenschaften des Dreieckes Gleichungen abzuleiten, in welchen sowohl die bestimmenden als die zu suchenden Stücke vorkommen; durch Auflösung dieser Gleichungen findet man dann die gesuchten Größen.

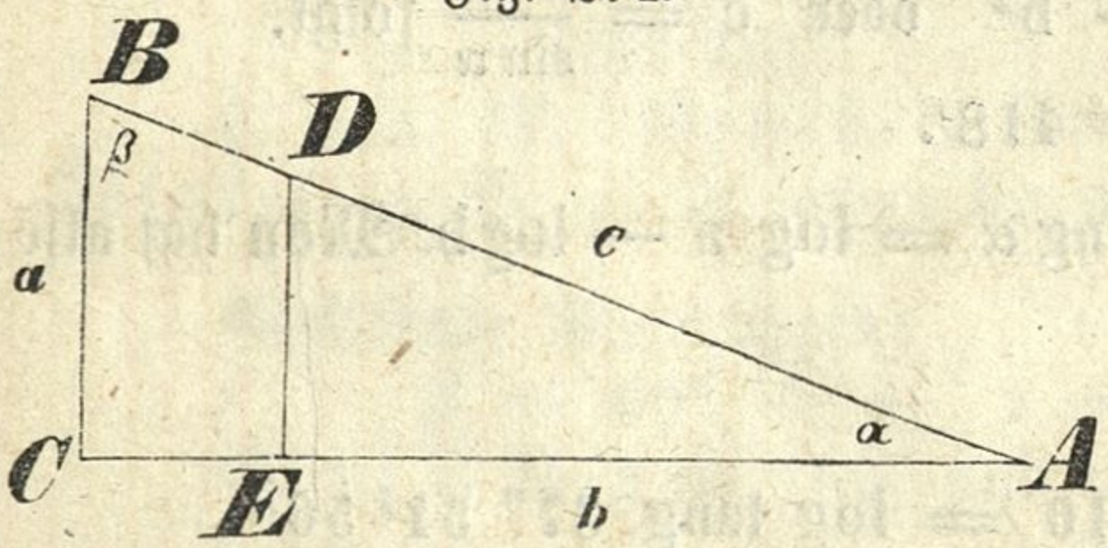
Da Winkel und Seiten ungleichartige Größen sind, so ist von selbst einleuchtend, daß man dieselben nicht unmittelbar mit einander vergleichen kann. Man nimmt daher statt der Winkel die trigonometrischen Funkzionen derselben, und sucht aus den Eigenschaften der Dreiecke Gleichungen, welche die Relazionen zwischen den Seiten des Dreieckes und den trigonometrischen Funkzionen der Winkel enthalten.

a) Rechtwinklige Dreiecke.

Lehrsätze, aus denen sich die Auflösungs-Gleichungen ergeben.

§. 410. Jede Kathete ist gleich der Hypotenuse multiplizirt mit dem Sinus des jener Kathete gegenüberliegenden oder mit dem Cosinus des ihr anliegenden Winkels.

Fig. 274.



Es seien (Fig. 274) die Katheten $BC = a$, $AC = b$ und die Hypotenuse $AB = c$; die den Katheten a und b gegenüberliegenden Winkel sollen α und β heißen.

Macht man $AD = 1$, und zieht $DE \perp AC$, so ist $DE = \sin\alpha$. $AE = \cos\alpha$; und da $\alpha + \beta = 90^o$, auch $DE = \cos\beta$, $AE = \sin\beta$.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und ADE folgt nun

$$BC : DE = AB : AD \text{ und } AC : AE = AB : AD$$

oder

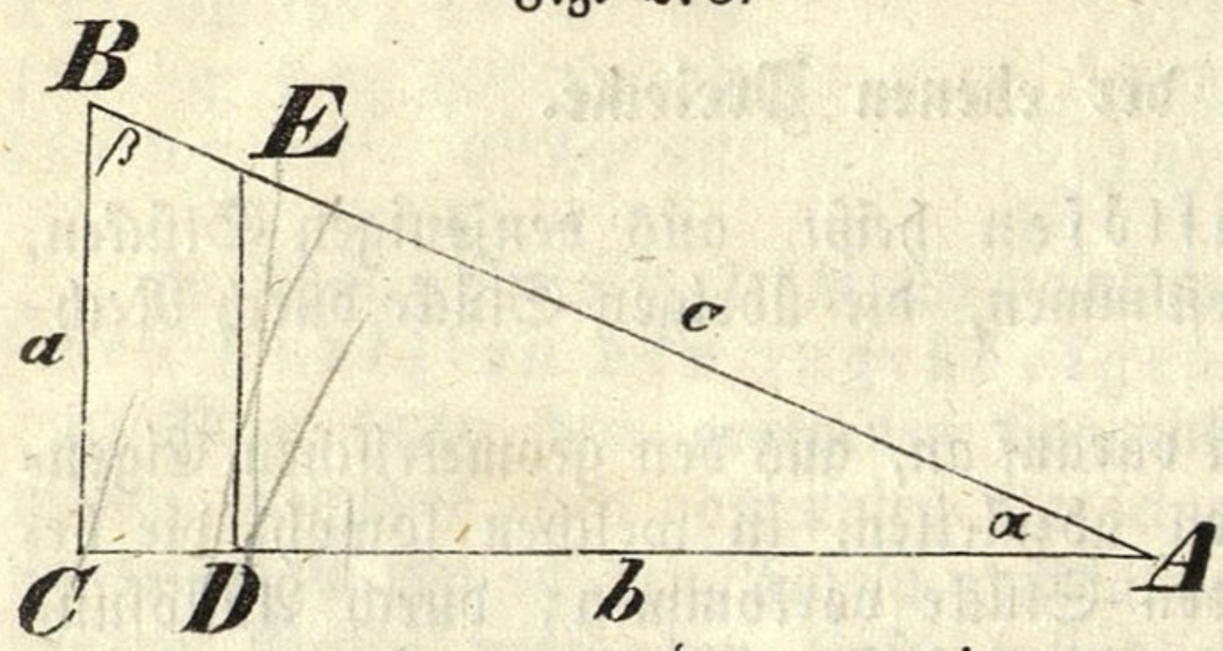
$$a : \sin\alpha = c : 1 \quad \text{und} \quad b : \sin\beta = c : 1,$$
$$a : \cos\beta = c : 1 \quad " \quad b : \cos\alpha = c : 1,$$

daher

$$a = c\sin\alpha \quad \text{und} \quad b = c\sin\beta$$
$$= c\cos\beta \quad " \quad = c\cos\alpha.$$

§. 411. Jede Kathete ist gleich der andern Kathete multiplizirt mit der Tangente des der erstern Kathete gegenüberliegenden, oder mit der Cotangente des ihr anliegenden Winkels.

Fig. 275.



Man mache im rechtwinkligen Dreiecke ACB (Fig. 275) das Stück AD = 1 und ziehe DE ⊥ AC, so ist

$$DE = \text{tang}\,\alpha = \cot\beta.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und AED folgt

$$BC : DE = AC : AD$$

oder $a : \text{tang}\,\alpha = b : 1,$

$a : \cot\beta = b : 1,$

daher $a = b\,\text{tang}\,\alpha$

$= b\cot\beta.$

Auflösungsfälle.

§. 412. I. Es seien die beiden Katheten a und b gegeben; man suche die Winkel α und β, und die Hypotenuse c.

Aus $a = b\,\text{tang}\,\alpha = b\cot\beta$ folgt

$$\text{tang}\,\alpha = \qquad \cot\beta = \frac{a}{b},$$

woraus sich die beiden spitzigen Winkel α und β berechnen lassen.

Zur Bestimmung der Hypotenuse wendet man die Gleichung $c^2 = a^2 + b^2$ oder $a = c\sin\alpha$ an, woraus beziehungsweise

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{oder} \quad c = \frac{a}{\sin\alpha} \text{ folgt.}$$

Es sei z. B. a = 325′, b = 418′.

Aus $\text{tang}\,\alpha = \frac{a}{b}$ folgt $\log\text{tang}\,\alpha = \log a - \log b$. Man hat also

$\log a = 2{\cdot}511\ 883$

$\log b = 2{\cdot}621\ 176$

$\log\text{tang}\,\alpha = 9{\cdot}890\ 707 - 10 = \log\text{tang}\ 37^0\ 51'\ 56''$

$\alpha = 37^0\ 51'\ 56''$

daher $\beta = 52^0\ 8'\ 4''.$

Weil nun $c = \frac{a}{\sin\alpha}$, so hat man

$\log a = 2{\cdot}511\ 883$

$\log\sin\alpha = 9{\cdot}788\ 034 - 10$

$\log c = 2{\cdot}723\ 849 = \log 529{\cdot}48$

$c = 529{\cdot}48',$

welcher Werth sich auch aus der Formel $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ergibt.

§. 413. II. Die Hypotenuse c und eine Kathete a sind gegeben; man suche die Winkel α und β, und die zweite Kathete b.

Zur Bestimmung der Winkel folgt aus $a = c \sin\alpha = c \cos\beta$ die Formel

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{a}{c}.$$

Die Kathete b ergibt sich aus einer der Formeln

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ oder } b = \frac{a}{\text{tang}\,\alpha}.$$

Es sei z. B. $c = 1234'$ und $a = 765'$. Man hat

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad b = \frac{a}{\text{tang}\,\alpha}$$

$$\begin{array}{rl} \log a = & 2{\cdot}883\ 661 \\ \log c = & 3{\cdot}091\ 315 \\ \hline \log \sin\alpha = & 9{\cdot}792\ 346 - 10 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log a = & 2{\cdot}883\ 661 \\ \log \text{tang}\,\alpha = & 9{\cdot}897\ 668 - 10 \\ \hline \log b = & 2{\cdot}985\ 993 \end{array}$$

$$\alpha = 38^0 18' 41', \qquad b = 968{\cdot}26'$$

daher $\beta = 51^0 41' 19''$.

§. 414. III. Gegeben sind eine Kathete a und ein Winkel, z. B. α; zu suchen sind der andere Winkel β, die Hypotenuse c und die zweite Kathete b.

Zur Berechnung dienen die Formeln

$$\beta = 90^0 - \alpha, \quad c = \frac{a}{\sin\alpha'}, \quad b = \frac{a}{\text{tang}\,\alpha}.$$

Ist z. B. $a = 714{\cdot}3'$ und $\alpha = 58^0 43' 30''$,

so hat man $\beta = 31^0 16' 30''$

$$c = \frac{a}{\sin\alpha} \qquad b = \frac{a}{\text{tang}\,\alpha}$$

$$\begin{array}{rl} \log a = & 2{\cdot}853\ 881 \\ \log \sin\alpha = & 9{\cdot}931\ 806 - 10 \\ \hline \log c = & 2{\cdot}922\ 075 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log a = & 2{\cdot}853\ 881 \\ \log \text{tang}\,\alpha = & 0{\cdot}216\ 516 \\ \hline \log b = & 2{\cdot}637\ 365 \end{array}$$

$$c = 935{\cdot}75'. \qquad b = 433{\cdot}86'.$$

§. 415. IV. Gegeben sind die Hypotenuse c und ein Winkel, z. B. α; zu suchen der andere Winkel und die beiden Katheten.

Auflösende Gleichungen:

$$\beta = 90^0 - \alpha, \quad a = c \sin\alpha, \quad b = c \cos\alpha.$$

Es sei z. B. $c = 197'$ und $\alpha = 27^0 13' 57'$. Man erhält

$$\beta = 62^0 46' 3'$$

$$a = c \sin\alpha \qquad b = c \cos\alpha$$

$$\begin{array}{rl} \log c = & 2{\cdot}294\ 466 \\ \log \sin\alpha = & 9{\cdot}660\ 488 - 10 \\ \hline \log a = & 1{\cdot}954\ 954 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log c = & 2{\cdot}294\ 466 \\ \log \cos\alpha = & 9{\cdot}948\ 978 - 10 \\ \hline \log b = & 2{\cdot}243\ 444 \end{array}$$

$$a = 90{\cdot}15' \qquad b = 175{\cdot}16'$$

§. 416. Uebungsaufgaben.

a) In einem rechtwinkligen Dreiecke, in welchem c die Hypotenuse, a und b die Katheten, α und β die diesen gegenüberliegenden Winkel vorstellen, ist

1) $a = 17{\cdot}8'$, $b = 37{\cdot}5'$; man suche α, β, c;

2) $c = 38{\cdot}7^0$, $b = 25{\cdot}8^0$; man suche α, β, a;
3) $b = 947''$, $\alpha = 33^0\,33'\,33''$; man suche β, a, c;
4) $c = 413{\cdot}8^0$, $\beta = 48^0\,15'$; man suche α, a, b.

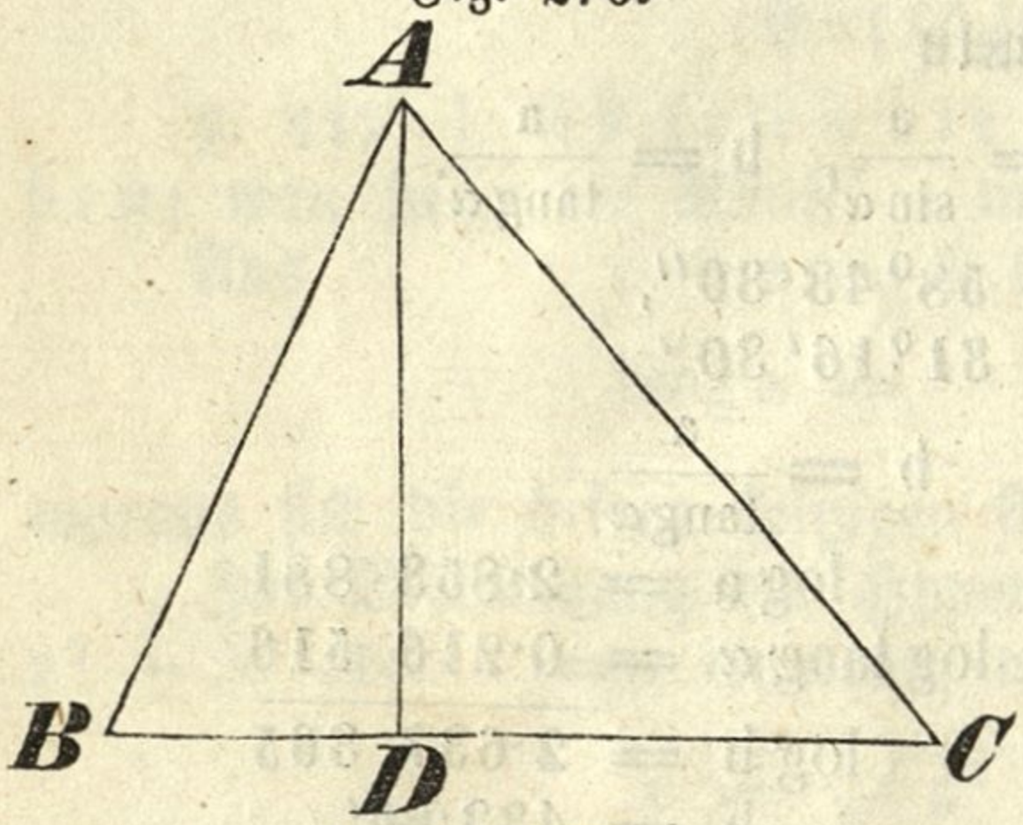
b) Ein rechtwinkliges Dreieck aufzulösen, wenn gegeben sind,
1) der Flächeninhalt und ein spitziger Winkel,
2) der Umfang und ein spitziger Winkel,
3) die Summe aus der Hypotenuse und einer Kathete und ein spitziger Winkel,
4) der Unterschied zwischen der Hypotenuse und einer Kathete und ein spitziger Winkel.

b) Schiefwinklige Dreiecke.

Lehrsätze, auf denen die Auflösung beruht.

§. 417. In jedem Dreiecke verhalten sich die Seiten so zu einander wie die Sinus der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel.

Fig. 276.



Zieht man $AD \perp BC$ (Fig. 276), so ist in den rechtwinkligen Dreiecken ADB und ADC

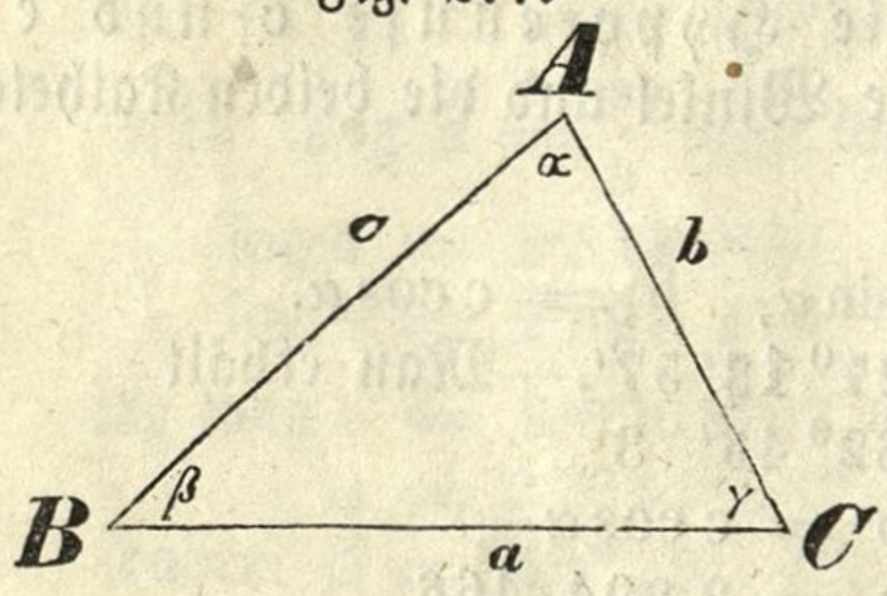
$AD = AB \cdot \sin B$ und $AD = AC \sin C$,

daher $AB \cdot \sin B = AC \cdot \sin C$

oder $AB : AC = \sin C : \sin B$.

§. 418. In jedem Dreiecke verhält sich die Summe zweier Seiten zu ihrem Unterschiede wie die Tangente der halben Summe der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel zu der Tangente des halben Unterschiedes derselben Winkel. (Fig. 277.)

Fig. 277.



Setzt man hier und in dem Folgenden $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, und drückt die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel durch α, β, γ aus, so ist

$$c : b = \sin\gamma : \sin\beta,$$

daher auch

$$(c + b) : (c - b) = (\sin\gamma + \sin\beta) : (\sin\gamma - \sin\beta).$$

Nun ist nach Formel 47)

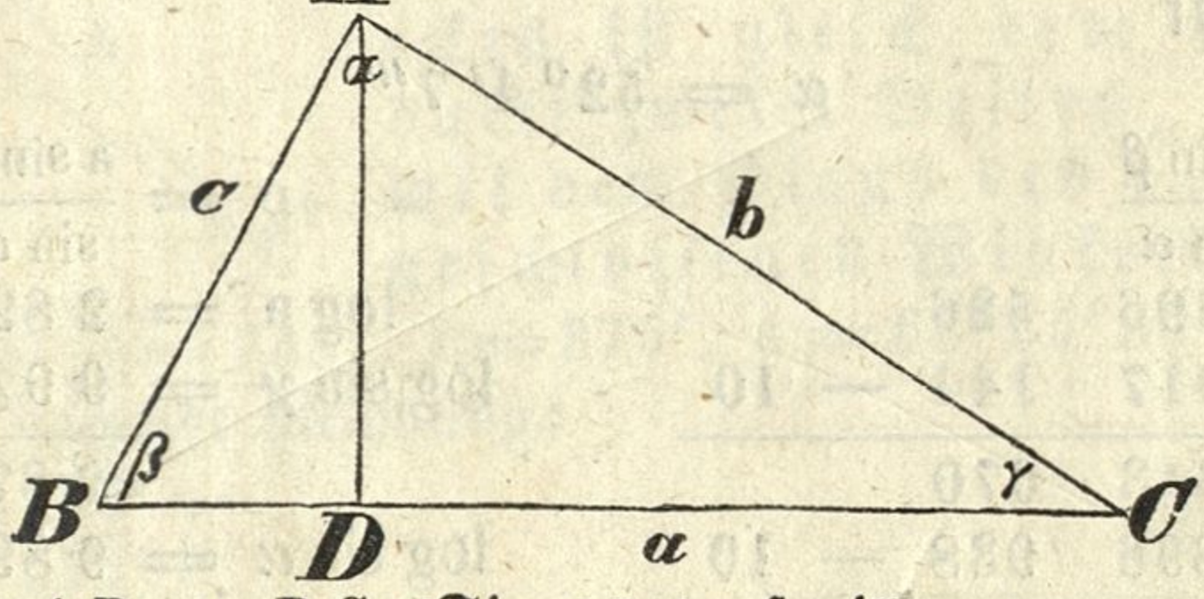
$$(\sin\gamma + \sin\beta) : (\sin\gamma - \sin\beta) = \operatorname{tang}\frac{\gamma+\beta}{2} : \operatorname{tang}\frac{\gamma-\beta}{2},$$

daher

$$(c + b) : (c - b) = \operatorname{tang}\frac{\gamma+\beta}{2} : \operatorname{tang}\frac{\gamma-\beta}{2}.$$

§. 419. In jedem Dreiecke ist das Quadrat der einen Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten weniger dem doppelten Produkte dieser beiden Seiten multiplizirt mit dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels. (Carnot'scher Lehrsatz.)

Fig. 278.



Zieht man $AD \perp BC$ (Fig. 278), so ist

$$BD = c \cdot \cos\beta, \text{ und}$$
$$CD = b \cdot \cos\gamma, \text{ daher}$$
$$BD + CD = c \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\gamma,$$

oder

$$a = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta.$$

Eben so erhält man

$$b = a \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\alpha,$$
$$c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha.$$

Multiplizirt man die erste dieser drei Gleichungen mit a, die zweite mit b, und die dritte mit c, so findet man

$$a^2 = ab \cdot \cos\gamma + ac \cdot \cos\beta,$$
$$b^2 = ab \cdot \cos\gamma + bc \cdot \cos\alpha,$$
$$c^2 = ac \cdot \cos\beta + bc \cdot \cos\alpha.$$

Subtrahirt man nun von der ersten Gleichung die Summe der beiden letztern, so erhält man

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cdot \cos\alpha,$$

oder

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha.$$

Eben so ergibt sich

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta.$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma.$$

Wie man leicht sieht, ist der Pythagoräische Lehrsatz nur ein besonderer Fall des Carnot'schen; denn setzt man $\gamma = 90^0$, wo sodann c die Hypotenuse, a und b die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes bedeuten, so hat man wegen $\cos 90^0 = 0$ die Gleichung

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Auflösungsfälle.

§. 420. 1) Wenn eine Seite a und die beiden anliegenden Winkel β und γ gegeben sind.

Man hat erstlich $\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$.

Ferner folgen aus $b : a = \sin\beta : \sin\alpha$ und $c : a = \sin\gamma : \sin\alpha$ die Formeln

$$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha} \quad \text{und} \quad c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Es sei z. B.

$$a = 788', \ \beta = 55^0\,43'\,18'', \ \gamma = 72^0\,12'\,35''.$$

Man erhält

$$\alpha = 52^0\,4'\,7''$$

$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}$				$c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}$			
$\log a =$	2·896	526		$\log a =$	2·896	526	
$\log \sin\beta =$	9·917	144	— 10	$\log \sin\gamma =$	9·978	720	— 10
	2·813	670			2·875	246	
$\log \sin\alpha =$	9·896	938	— 10	$\log \sin\alpha =$	9·896	938	— 10
$\log b =$	2·916	732		$\log c =$	2·978	308	
$b =$	825·53′			$c =$	951·28′		

Wäre außer der Seite a ein anliegender Winkel β und der gegenüberliegende α gegeben, so würde man zuerst γ berechnen, und dann wie vorhin verfahren.

§. 421. II. Wenn zwei Seiten b und c, und der von ihnen eingeschlossene Winkel α gegeben sind.

In diesem Falle wendet man zur Bestimmung der Winkel β und γ die Proporzion

$$(b + c) : (b - c) = \text{tang}\frac{\beta + \gamma}{2} : \text{tang}\frac{\beta - \gamma}{2}$$

an, aus welcher

$$\text{tang}\frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{(b - c)\,\text{tang}\frac{\beta + \gamma}{2}}{b + c}$$

folgt. Da

$$\beta + \gamma = 180^0 - \alpha \ \text{und} \ \frac{\beta + \gamma}{2} = 90^0 - \frac{\alpha}{2},$$

so ist $\text{tang}\frac{\beta+\gamma}{2}$ bekannt, und es läßt sich mittelst der letzten Gleichung auch $\frac{\beta - \gamma}{2}$ bestimmen. Kennt man aber

$$\frac{\beta + \gamma}{2} \ \text{und} \ \frac{\beta - \gamma}{2}$$

so sind dadurch auch β und γ gegeben; denn es ist

$$\frac{\beta + \gamma}{2} + \frac{\beta - \gamma}{2} = \beta \ \text{und} \ \frac{\beta + \gamma}{2} - \frac{\beta - \gamma}{2} = \gamma.$$

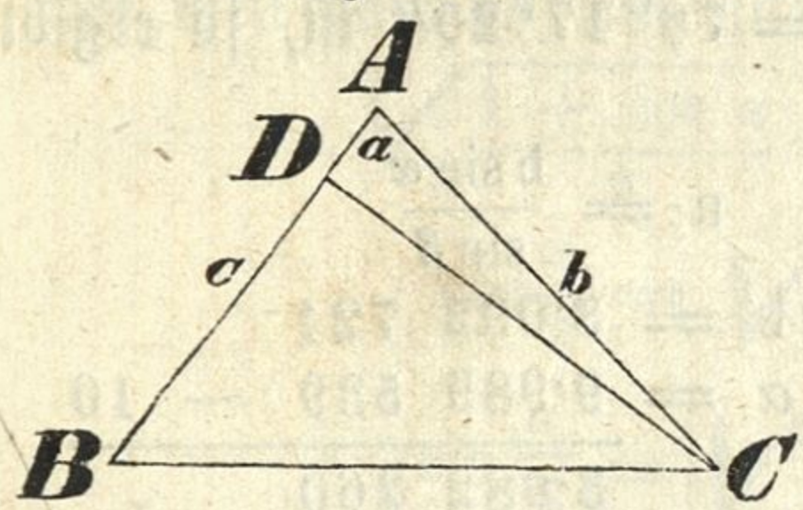
Die dritte Seite a findet man dann aus der Gleichung

$$a = \frac{b \sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Aus b, c und α kann man unmittelbar auch den Flächeninhalt f des Dreieckes bestimmen. Ist nämlich CD $\perp$ AB (Fig. 279), so hat man

$$f = \frac{c \cdot CD}{2}.$$

Fig. 279.



Aber $CD = b \sin\alpha$, daher

$$f = \frac{bc}{2} \sin\alpha,$$

d. h. der Flächeninhalt eines Dreieckes ist gleich dem halben Produkte zweier Seiten, multiplizirt mit dem Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Es sei z. B. $b = 748'$, $c = 375'$, $a = 63^0\,35'\,30''$.

Man hat folgende Rechnung:

$b + c = 1123'$
$b - c = 373'$
$\beta + \gamma = 116^0\,24'\,30''$

$$\frac{\beta+\gamma}{2} = 58^0\,12'\,15''$$

$$\frac{\beta-\gamma}{2} = 28^0\,10'\,54''$$

$$\beta = 86^0\,23'\,9''$$
$$\gamma = 30^0\,1'\,21''$$

$$\operatorname{tang}\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{(b-c)\operatorname{lang}\frac{\beta+\gamma}{2}}{b+c}$$

$\log (b-c) = 2{\cdot}571\,709$
$\log \operatorname{tang}\frac{\beta+\gamma}{2} = 10{\cdot}207\,660 - 10$
$12{\cdot}779\,369 - 10$
$\log (b+c) = 3{\cdot}050\,380$
$\log \operatorname{tang}\frac{\beta-\gamma}{2} = 9{\cdot}728\,989 - 10$

$$\frac{\beta-\gamma}{2} = 28^0\,10'\,54''$$

$$a = \frac{b \sin\alpha}{\sin\beta}$$

$\log b = 2{\cdot}873\,902$
$\log \sin\alpha = 9{\cdot}952\,137 - 10$
$2{\cdot}826\,039$
$\log \sin\beta = 9{\cdot}999\,135 - 10$
$\log a = 2{\cdot}826\,904$
$a = 671{\cdot}28'$

$$f = \frac{bc}{2} \sin\alpha$$

$\log b = 2{\cdot}873\,902$
$\log c = 2{\cdot}574\,031$
$\log \sin\alpha = 9{\cdot}952\,137 - 10$
$5{\cdot}400\,070$
$\log 2 = 0{\cdot}301\,030$
$\log f = 5{\cdot}099\,040$
$f = 125615\,\square'.$

§. 422. III. Es seien zwei Seiten b und c, wo $b > c$, und der der größern Seite gegenüberliegende Winkel β gegeben.

Aus $b : c = \sin\beta : \sin\gamma$ erhält man

$$\sin\gamma = \frac{c \sin\beta}{b}.$$

Diese Formel gibt den Sinus von γ. Da aber zu jedem Sinus zwei Winkel gehören, ein spitziger und ein stumpfer, so würde der Werth von γ unbestimmt sein, wenn nicht bekannt wäre, daß β der größern Seite gegenüber liegt. Diese Unbestimmtheit verschwindet, sobald man weiß, daß $b > c$, also auch $\beta > \gamma$ ist, weil dann γ spitzig sein muß, welchen Werth auch β haben mag.

Da nun β und γ bekannt sind, erhält man

$$\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma).$$

Die Seite a findet man aus der Gleichung

$$a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Wenn z. B. $b = 1238'$, $c = 519'$, $\beta = 78^0\,17'\,20''$ ist, so ergibt sich folgende Auflösung:

$$\sin \gamma = \frac{c \sin \beta}{b}$$

$$\begin{aligned} \log c &= 2{\cdot}715\ 167 \\ \log \sin \beta &= 9{\cdot}990\ 864 - 10 \\ \hline & 2{\cdot}706\ 031 \\ \log b &= 3{\cdot}092\ 721 \\ \hline \log \sin \gamma &= 9{\cdot}613\ 310 - 10 \\ \gamma &= 24^0\,14'\,10'' \\ \beta &= 78^0\,17'\,20'' \\ \hline & 102^0\,31'\,30'' \\ \text{daher } \alpha &= 77^0\,28'\,30''. \end{aligned}$$

$$a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\begin{aligned} \log b &= 3{\cdot}092\ 721 \\ \log \sin \alpha &= 9{\cdot}989\ 539 - 10 \\ \hline & 3{\cdot}082\ 260 \\ \log \sin \beta &= 9{\cdot}990\ 864 - 10 \\ \hline \log a &= 3{\cdot}091\ 396 \\ a &= 1234{\cdot}23' \end{aligned}$$

§. 423. **IV. Wenn alle drei Seiten a, b und c bekannt sind.**

Zur Bestimmung der drei Winkel könnte unmittelbar der Carnot'sche Lehrsatz angewendet werden; aus der Gleichung

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos \alpha$$

folgt nämlich

$$\cos \alpha = \frac{b + c^2 - a^2}{2bc}$$

woraus sich der Winkel α finden läßt. Auf dieselbe Art könnten auch die Winkel β und γ bestimmt werden.

Dieses Verfahren, die Winkel zu berechnen, ist übrigens unbequem, weil die Formeln zur logarithmischen Berechnung nicht geeignet sind. Es sollen daher hier Formeln entwickelt werden, welche sich logarithmisch behandeln lassen.

Addirt und subtrahirt man die beiden Gleichungen

$$1 = 1$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

so erhält man

$$1 + \cos \alpha = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc},$$

$$1 - \cos \alpha = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc},$$

oder

$$1 + \cos \alpha = \frac{(b + c + a)\,(b + c - a)}{2bc},$$

$$1 - \cos \alpha = \frac{(a + b - c)\,(a - b + c)}{2bc}, \text{ somit}$$

$$\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{(b+c+a)\,(b+c-a)}{4bc}}$$

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{(a+b-c)\,(a-b+c)}{4bc}},$$

oder weil nach 35) und 36)

$$\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sin\frac{\alpha}{2} \text{ ist,}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(b+c+a)\,(b+c-a)}{4bc}},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a+b-c)\,(a-b+c)}{4bc}}.$$

Drückt man nun der Kürze halber die halbe Summe der drei Seiten a, b, c durch s aus, so daß

$$a + b + c = 2s$$

gesetzt wird, so erhält man, wenn von dieser Gleichung nach der Ordnung 2a, 2b, 2c abgezogen wird,

$$-a + b + c = 2(s-a),$$
$$a - b + c = 2(s-b),$$
$$a + b - c = 2(s-c).$$

Durch Substituzion dieser Werthe in obige Formeln hat man endlich

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s\,(s-a)}{bc}},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{bc}}.$$

Wenn man dieselben Berechnungen in Bezug auf β und γ durchführt, so findet man

$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s\,(s-b)}{ac}}, \quad \text{und} \quad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s\,(s-c)}{ab}}.$$

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-c)}{ac}}, \quad \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)}{ab}}.$$

In Bezug auf die Bedeutung der Winkel $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$ kann keine Unbestimmtheit eintreten, da sie als halbe Dreieckswinkel nothwendig spitzig sein müssen. Ist der gesuchte halbe Winkel sehr nahe bei 0°, so läßt sich derselbe mittelst der Formel für den Cosinus nicht mit gehöriger Schärfe bestimmen, da sich die Cosinus sehr nahe bei 0° liegender Winkel nur sehr wenig ändern. Dasselbe gilt bezüglich der Formel für den Sinus, wenn der halbe Winkel sehr nahe an 90° liegt. Es ist daher im ersten Falle die Formel für den Sinus, im zweiten jene für den Cosinus des halben Winkels anzuwenden.

Aus den gegebenen drei Seiten eines Dreieckes läßt sich unmittelbar auch der Flächeninhalt berechnen.

Es ist $f = \frac{ab}{2} \cdot \sin\gamma = \frac{ab}{2} \cdot 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, woraus

$$f = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

folgt, d. h. der Flächeninhalt eines Dreieckes ist gleich der Quadratwurzel aus dem Produkte von vier Faktoren, deren einer die halbe Summe der Seiten ist, die drei andern aber die Unterschiede zwischen dieser halben Summe und jeder einzelnen Seite sind.

Man nehme z. B. $a = 328{\cdot}5'$, $b = 412.3'$, $c = 371{\cdot}4'$ an.

Wenn man zur Bestimmung der Winkel die Formeln für den Sinus der halben Winkel anwendet, so hat man

a	$=$	$328{\cdot}5$
b	$=$	$412{\cdot}3$
c	$=$	$371{\cdot}4$
$a + b + c$	$=$	$1112{\cdot}2$
s	$=$	$556{\cdot}1$
$s - a$	$=$	$227{\cdot}6$
$s - b$	$=$	$143{\cdot}8$
$s - c$	$=$	$184{\cdot}7$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{bc}}.$$

$\log(s-b)$	$=$	$2{\cdot}157$	759
$\log(s-c)$	$=$	$2{\cdot}266$	467
		$4{\cdot}424$	226
$\log b$	$=$	$2{\cdot}615$	213
$\log c$	$=$	$2{\cdot}569$	842
		$19{\cdot}239$	$171 - 20$
$\log\sin\frac{\alpha}{2}$	$=$	$9{\cdot}619$	$585 - 10$
$\frac{\alpha}{2}$	$=$	$24^0\,36'\,43{\cdot}3''$	
α	$=$	$49^0\,13'\,26{\cdot}6''$	

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-c)}{ac}}$$

$\log(s-a)$	$=$	$2{\cdot}357$	172
$\log(s-c)$	$=$	$2{\cdot}266$	467
		$4{\cdot}623$	639
$\log a$	$=$	$2{\cdot}516$	635
$\log c$	$=$	$2{\cdot}569$	842
		$19{\cdot}537$	$262 - 20$
$\log\sin\frac{\beta}{2}$	$=$	$9{\cdot}768$	$631 - 10$
$\frac{\beta}{2}$	$=$	$35^0\,56'\,37{\cdot}4''$	
β	$=$	$71^0\,53'\,14{\cdot}8''$	

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)}{ab}}.$$

$\log(s-a)$	$=$	$2{\cdot}357$	172
$\log(s-b)$	$=$	$2{\cdot}157$	759
		$4{\cdot}514$	931
$\log a$	$=$	$2{\cdot}516$	535
$\log b$	$=$	$2{\cdot}615$	213
		$19{\cdot}383$	$183 - 20$
$\log\sin\frac{\gamma}{2}$	$=$	$9{\cdot}691$	$591 - 10$
$\frac{\gamma}{2}$	$=$	$29^0\,26'\,39'3''$	
γ	$=$	$58^0\,53'\,18{\cdot}6''$	

Um sich von der Richtigkeit der Auflösung zu überzeugen, darf man nur die für α, β, γ gefundenen Werthe addiren, ihre Summe beträgt genau 180^0.

Zur Bestimmung des Flächeninhaltes hat man

$$f = \sqrt{s\,(s-a\,(s-b)\,(s-c)}$$

$\log s$	$=$	$2{\cdot}745$	153
$\log(s-a)$	$=$	$2{\cdot}357$	172
$\log(s-b)$	$=$	$2{\cdot}157$	759
$\log(s-c)$	$=$	$2{\cdot}266$	467
		$9{\cdot}526$	551
$\log f$	$=$	$4{\cdot}763$	275
f	$=$	$57980\,\square'$.	

§ 424. Uebungsaufgaben.

1. Ein schiefwinkliges Dreieck, dessen Seiten a, b, c, und die diesen gegenüberliegenden Winkel α, β, γ heißen, aufzulösen, wenn gegeben sind

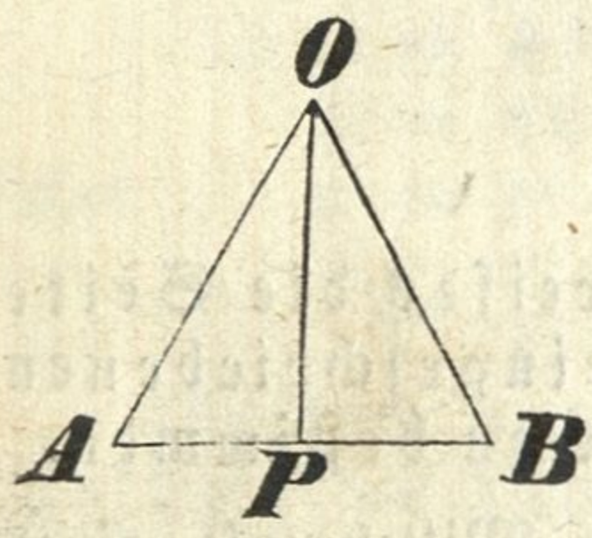
a) $c = 315{\cdot}7'$, $\alpha = 58^0\,12'\,38''$, $\beta = 63^0\,15'\,15''$;
b) $a = 97{\cdot}45^0$, $\alpha = 48^0\;8'\,43''$, $\beta = 45^0\,45'\,45''$;
c) $a = 89{\cdot}7^0$, $b = 104{\cdot}2^0$, $\gamma = 53^0\;5'\,56''$;
d) $a = 137{\cdot}4'$, $b = 179{\cdot}8'$, $\alpha = 72^0\,17'\,23''$;
e) $a = 419'$, $c = 328'$, $\gamma = 43^0\,51'\;7''$;
f) $a = 2134'$, $b = 3124'$, $c = 1432'$.

2. Ein gleichschenkliges Dreieck aufzulösen, wenn gegeben sind
   a) die Grundlinie und ein Schenkel,
   b) die Grundlinie und der gegenüberliegende, oder ein anliegender Winkel,
   c) ein Schenkel und der Winkel am Scheitel, oder der Winkel an der Grundlinie,
   d) die Grundlinie und die Höhe,
   e) ein Schenkel und die Höhe.

III. Berechnung regelmäßiger Vielecke.

§. 425. Aus der Seite eines regelmäßigen Vieleckes den Flächeninhalt desselben, und umgekehrt aus dem Flächeninhalte die Seite zu bestimmen.

Fig. 280



Es sei (Fig. 280) $AB = s$ die Seite eines nseitigen regelmäßigen Polygons, dessen Mittelpunkt sich in O befindet, und $OP \perp AB$. Offenbar ist dann der Winkel

$$AOB = \frac{360^0}{n}, \quad \text{daher} \quad AOP = \frac{180^0}{n}.$$

Im rechtwinkligen Dreiecke APO ist nun

$$OP = AP \,.\, \cot AOP = \frac{s}{2} \cot \frac{180^0}{n},$$

somit der Flächeninhalt des Dreieckes

$$ABO = AB \,.\, \frac{OP}{2} = s \,.\, \frac{s}{4} \cot \frac{180^0}{n} = \frac{s^2}{4} \cot \frac{180^0}{n}.$$

Heißt nun f der Flächeninhalt des ganzen Polygons, so hat man

$$f = \frac{n\,s^2}{4} \cot \frac{180^0}{n};$$

woraus sofort

$$s = \sqrt{\frac{4\,f}{n} \,.\, \operatorname{tang} \frac{180^0}{n}} \quad \text{folgt.}$$

Mit Hilfe der ersten Formel kann man aus der bekannten Seite des regulären Vieleckes dessen Flächeninhalt, mittelst der zweiten aus dem Flächeninhalte die Seite berechnen.

§. 426. Beispiele.

1) Es sei die Seite eines regelmäßigen Zehneckes 15″, wie groß ist der Flächeninhalt?

Hier ist $n = 10$, $\frac{180^\circ}{n} = 18^\circ$, $s = 15$; daher hat man

$$\begin{aligned}
\log s &= 1{\cdot}176\ \ 091 \\
\log s^2 &= 2{\cdot}352\ \ 182 \\
\log n &= 1{\cdot}000\ \ 000 \\
\log \cot \tfrac{180^\circ}{n} &= 0{\cdot}488\ \ 224 \\
\hline
& 3{\cdot}840\ \ 406 \\
\log 4 &= 0{\cdot}602\ \ 060 \\
\hline
\log f &= 3{\cdot}238\ \ 346 \\
f &= 1731{\cdot}2\,\square''.
\end{aligned}$$

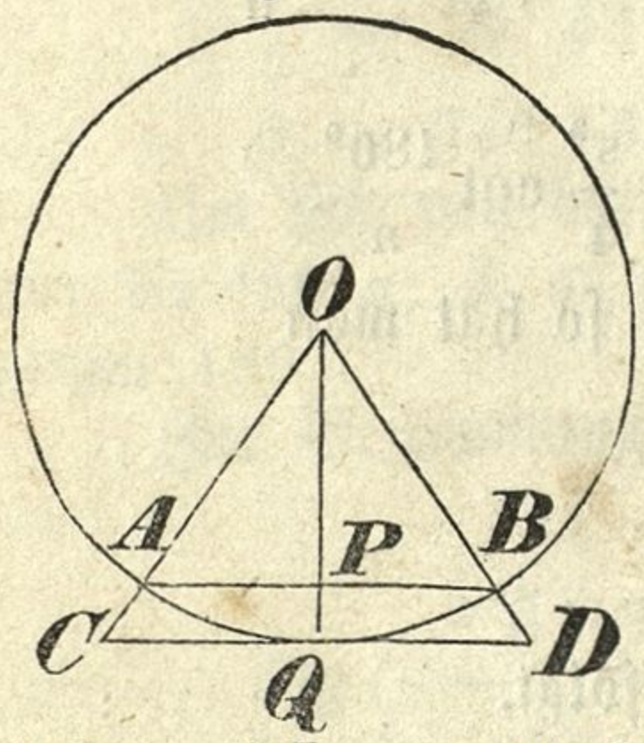
2) Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Zwölfeckes sei $140\,\square'$; man suche die Länge einer Seite.

Hier ist $n = 12$, $\frac{180^\circ}{n} = 15^\circ$, $f = 140$; man hat somit

$$\begin{aligned}
\log 4 &= 0{\cdot}602\ \ 060 \\
\log f &= 2{\cdot}146\ \ 128 \\
\log \operatorname{tang} \tfrac{180^\circ}{n} &= 9{\cdot}428\ \ 052 - 10 \\
\hline
& 2{\cdot}176\ \ 240 \\
\log n &= 1{\cdot}079\ \ 181 \\
\hline
& 1{\cdot}097\ \ 059 \\
\hline
\log s &= 0{\cdot}548\ \ 529 \\
s &= 3{\cdot}536''.
\end{aligned}$$

§. 427. Aus dem Halbmesser eines Kreises die Seite und den Flächeninhalt des dem Kreise eingeschriebenen oder umschriebenen regelmäßigen Vieleckes zu bestimmen.

Fig. 281.



Es sei O (Fig. 281) der Mittelpunkt eines Kreises und $AB = s$ die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen neckes. Zieht man $OQ \perp AB$, durch Q die Tangente CD und verlängert die Halbmesser OA und OB, bis sie jene Tangente in C und D schneiden, so ist $CD = S$ die Seite des umschriebenen regelmäßigen nseitigen Polygons.

Aus den rechtwinkligen Dreiecken APO und CQO erhält man

$AP = AO \cdot \sin AOP$ und $CQ = QO \cdot \operatorname{tang} COQ$,

daher $AB = 2AO \cdot \sin AOP$ und $CD = 2QO \cdot \operatorname{tang} COQ$,

oder, wenn $AO = QO = r$ gesetzt wird,

$$s = 2r \sin \frac{180^\circ}{n} \quad \text{und} \quad S = 2r \operatorname{tang} \frac{180^\circ}{n}.$$

Für die Umfänge u und U des eingeschriebenen und umschriebenen regelmäßigen neckes hat man sofort

$$u = 2nr \sin \frac{180^\circ}{n} \text{ und } U = 2nr \operatorname{tang} \frac{180^\circ}{n}.$$

Zur Bestimmung der Flächeninhalte f und F findet man zunächst

$$\triangle AOB = AB \cdot \frac{PO}{2} \text{ und } \triangle COD = CD \cdot \frac{OQ}{2},$$

oder

$$\triangle AOB = 2r \sin \frac{180^\circ}{n} \cdot \frac{r}{2} \cos \frac{180^\circ}{n} \text{ und } \triangle COD = 2r \operatorname{tang} \frac{180^\circ}{n} \cdot \frac{r}{2}.$$

oder

$$\triangle AOB = \frac{r^2}{2} \sin \frac{360^\circ}{n} \text{ und } \triangle COD = r^2 \operatorname{tang} \frac{180^\circ}{n},$$

und daraus folgt

$$f = \frac{nr^2}{2} \cdot \sin \frac{360^\circ}{n} \text{ und } F = nr^2 \operatorname{tang} \frac{180^\circ}{n}.$$

Es sei z. B. der Halbmesser eines Kreises 4′; man bestimme die Seite, den Umfang und den Flächeninhalt des eingeschriebenen und des umschriebenen regelmäßigen Achteckes.

Man hat folgende Rechnung:

$$r = 4,\ n = 8,\ \frac{180^\circ}{n} = 22^\circ 30',\ \frac{360^\circ}{n} = 45^\circ$$

$s = 2r \sin \frac{180^\circ}{n}$	$S = 2r \operatorname{tang} \frac{180^\circ}{n}$
$\log 2 = 0{\cdot}301\ 030$	$\log 2 = 0{\cdot}301\ 030$
$\log r = 0{\cdot}602\ 060$	$\log r = 0{\cdot}602\ 060$
$\log \sin \frac{180^\circ}{n} = 9{\cdot}582\ 840 - 10$	$\log \operatorname{tang} \frac{180^\circ}{n} = 9{\cdot}617\ 224 - 10$
$\log s = 0{\cdot}485\ 930$	$\log S = 0{\cdot}520\ 314$
$s = 3{\cdot}0615'$	$S = 3{\cdot}3137'$
daher $u = 24{\cdot}492'$	$U = 26{\cdot}5096'$
$f = \frac{nr^2}{2} \sin \frac{360^\circ}{n}$	$F = nr^2 \operatorname{tang} \frac{180^\circ}{n}$
$\log r = 0{\cdot}602\ 060$	$\log r = 0{\cdot}602\ 060$
$\log r^2 = 1{\cdot}204\ 120$	$\log r^2 = 1{\cdot}204\ 120$
$\log n = 0{\cdot}903\ 090$	$\log n = 0{\cdot}903\ 090$
$\log \sin \frac{360^\circ}{n} = 9{\cdot}849\ 485 - 10$	$\log \operatorname{tang} \frac{180^\circ}{n} = 9.617\ 224 - 10$
$1{\cdot}956\ 695$	$\log F = 1{\cdot}724\ 434$
$\log 2 = 0{\cdot}301\ 030$	$F = 53{\cdot}019\ \square'$
$\log f = 1{\cdot}655\ 665$	
$f = 45{\cdot}255\ \square'$	

Man suche hier mit Hilfe der obigen Formeln den nachstehenden Satz zu beweisen:

Das Quadrat der Seite eines eingeschriebenen regelmäßigen Fünfeckes ist gleich der Summe aus den Quadraten des Halbmessers und der Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Zehneckes.

§ 428. Aus der Seite oder dem Flächeninhalt eines regelmäßigen Polygons den Halbmesser des eingeschriebenen und des umschriebenen Kreises zu finden.

Es sei s die Seite und f der Flächeninhalt eines regulären nseitigen Vieleckes; r heiße der Halbmesser des eingeschriebenen und R jener des umschriebenen Kreises.

Das gegebene Vieleck ist dem eingeschriebenen Kreise umschrieben, daher

$$s = 2r \operatorname{tang} \frac{180^\circ}{n}, \qquad f = n r^2 \operatorname{tang} \frac{180^\circ}{n}.$$

Dem umschriebenen Kreise dagegen erscheint das gegebene Polygon eingeschrieben; folglich ist

$$s = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}, \qquad f = \frac{nR^2}{2} \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

Aus diesen vier Gleichungen ergeben sich die Formeln

$$r = \frac{s}{2} \cot \frac{180^\circ}{n}, \qquad r = \sqrt{\frac{f}{n} \cot \frac{180^\circ}{n}}$$

$$R = \frac{s}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}, \qquad R = \sqrt{\frac{2f}{n \sin \frac{360^\circ}{n}}},$$

mittelst welcher man im Stande ist, aus der Seite oder dem Flächeninhalte eines regelmäßigen Vieleckes den Halbmesser des eingeschriebenen oder umschriebenen Kreises zu berechnen.

§. 429. Beispiele.

1) Es sei die Seite eines regulären Fünfeckes 20″; man suche r und R

Hier ist $s = 20$, $n = 5$, $\frac{180^\circ}{n} = 36^\circ$; daher hat man

$$r = \frac{s}{2} \cdot \cot \frac{180^\circ}{n}$$

$$\log s = 1{\cdot}301\ 030$$
$$\log \cot \frac{180^\circ}{n} = 0{\cdot}138\ 739$$
$$1{\cdot}439\ 769$$
$$\log 2 = 0{\cdot}301\ 030$$
$$\log r = 1{\cdot}138\ 739$$
$$r = 13{\cdot}764''$$

$$R = \frac{s}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$$

$$\log s = 1{\cdot}301\ 030$$
$$\log 2 = 0{\cdot}301\ 030$$
$$\log \sin \frac{180^\circ}{n} = 9{\cdot}769\ 219 - 10$$
$$\log R = 1{\cdot}230\ 781$$
$$R = 17{\cdot}013''$$

2) Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Zwölfeckes sei 10□; man berechne r und R.

Man hat folgende Rechnung:

$$f = 10,\ n = 12,\ \frac{180^\circ}{n} = 15^\circ,\ \frac{360^\circ}{n} = 30^\circ.$$

$$r = \sqrt{\frac{f}{n}\cot\frac{180^\circ}{n}}$$

$$\begin{aligned}
\log f &= 1{\cdot}000\quad 000\\
\log\cot\tfrac{180^\circ}{n} &= 0{\cdot}571\quad 947\\
&\overline{\qquad\qquad}\\
&1{\cdot}571\quad 947\\
\log n &= 1{\cdot}079\quad 181\\
&\overline{\qquad\qquad}\\
&0{\cdot}492\quad 766\\
&\overline{\qquad\qquad}\\
\log r &= 0{\cdot}246\quad 383\\
r &= 1{\cdot}7635^\circ
\end{aligned}$$

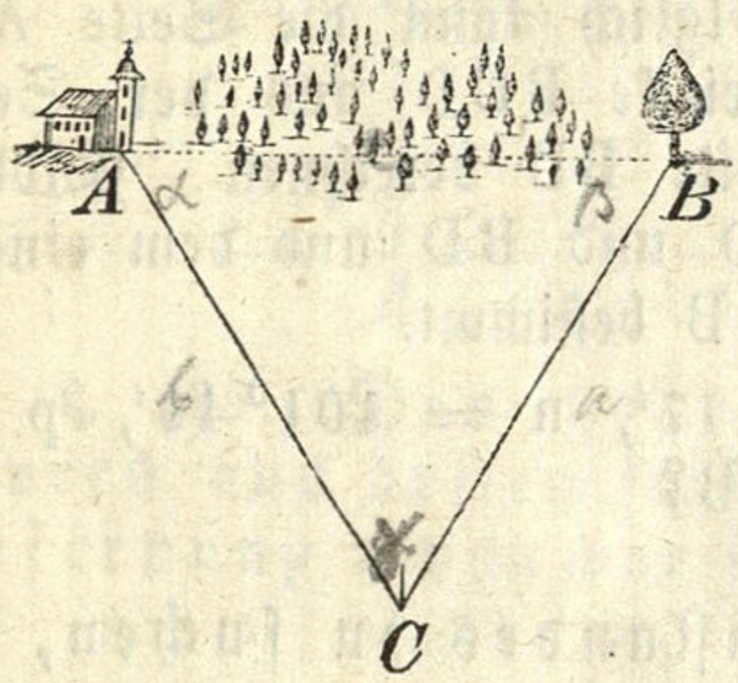
$$R = \sqrt{\frac{2f}{n\sin\frac{360^\circ}{n}}}$$

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0{\cdot}301\quad 030\\
\log f &= 1{\cdot}000\quad 000\\
&\overline{\qquad\qquad}\\
&1{\cdot}301\quad 030\\
\log n &= 1{\cdot}079\quad 181\\
\log\sin\tfrac{360^\circ}{n} &= 9{\cdot}698\quad 970-10\\
&\overline{\qquad\qquad}\\
&0{\cdot}522\quad 879\\
&\overline{\qquad\qquad}\\
\log R &= 0{\cdot}261\quad 439\\
R &= 1{\cdot}8257^\circ.
\end{aligned}$$

IV. Verschiedene Anwendungen der ebenen Trigonometrie.

§. 430. Die Entfernung zweier Punkte auf dem Felde zu bestimmen, wenn sich dieselbe wegen eines dazwischen befindlichen Hindernisses nicht unmittelbar messen läßt.

Fig. 282.

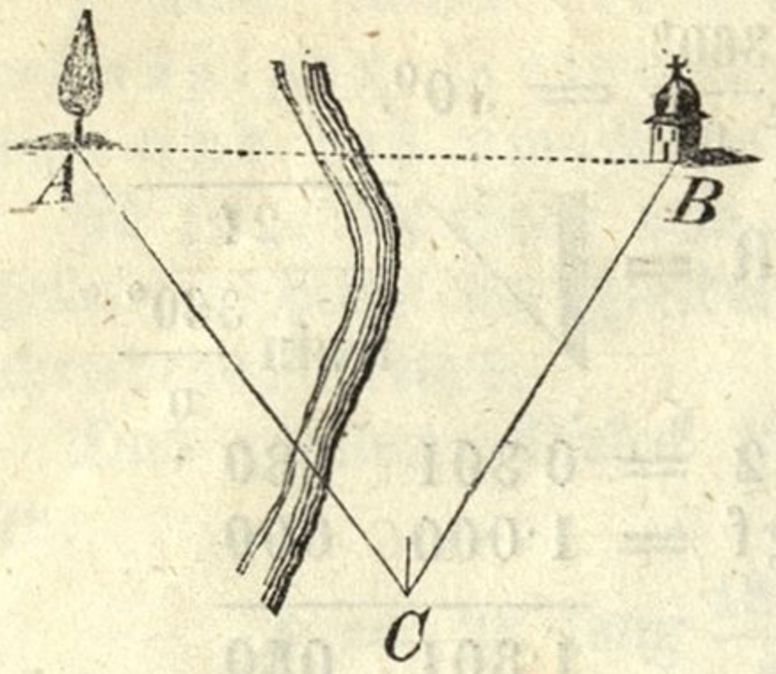


Es seien A und B (Fig. 282) die beiden Punkte, deren Abstand von einander man wissen will, zwischen welchen aber z. B. ein Wald, Teich, . . . liegt, so daß eine unmittelbare Messung nicht Statt finden kann. Man wähle einen dritten Punkt C, von welchem aus man nach A und B sehen und messen kann, und messe die Geraden CA und CB, so wie den Winkel ACB. Man hat nun ein Dreieck ABC, worin zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel bekannt sind, und es kann daraus nach §. 424 auch die dritte Seite AB, d. i. die gesuchte Entfernung berechnet werden.

Es sei z. B. $AC = 58^\circ$, $BC = 54^\circ$ und $ACB = 65^\circ\ 29'$; wie groß ist AB?

§. 431. Die Entfernung zweier Punkte auf dem Felde zu bestimmen, wenn man nur zu einem derselben kommen kann.

Fig. 283.

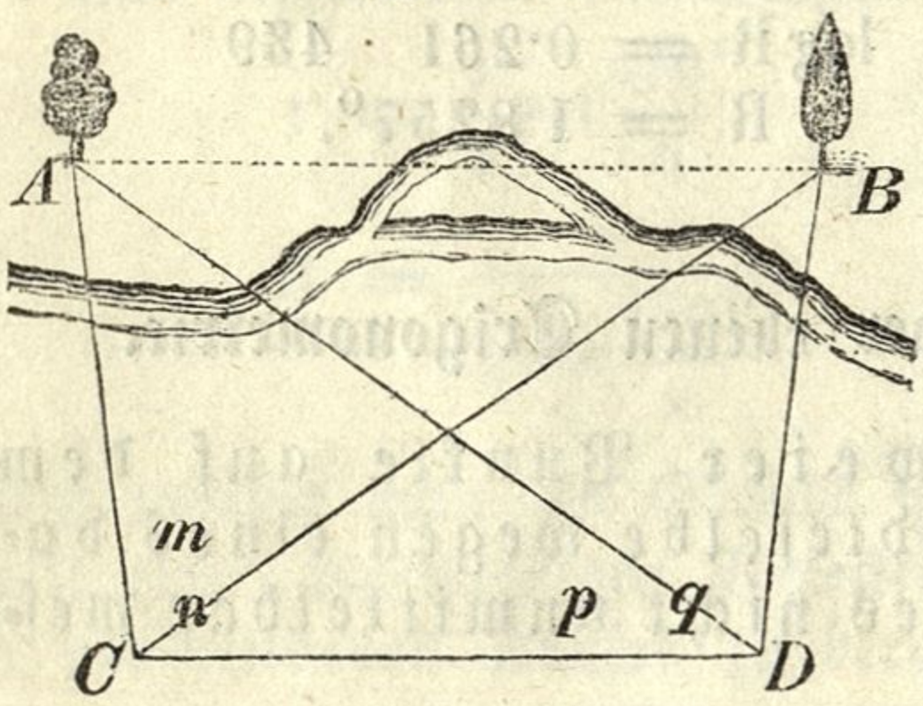


Man wähle zuerst einen dritten Standpunkt C (Fig. 283), von dem man zu einem der beiden Punkte A und B hin messen kann, und messe die Gerade BC, so wie die Winkel C und B. Aus diesen drei Größen kann nach §. 420 die gesuchte Länge AB gefunden werden.

Man nehme z. B. BC = 52°, C = 63° 15′, B = 57° 18′ an, und suche AB.

§. 432. Die Entfernung zweier Punkte auf dem Felde zu bestimmen, wenn man zu keinem derselben kommen kann.

Fig. 284.

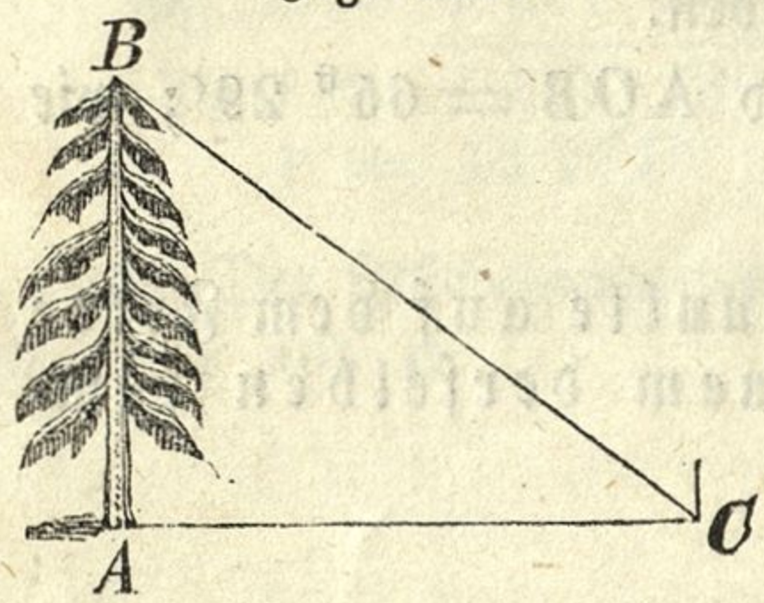


Es sei z. B. die Entfernung der beiden Bäume A und B (Fig. 284), welche sich jenseits eines Flusses befinden, zu bestimmen. Man wähle zwei solche Standpunkte C und D, daß man zwischen ihnen unmittelbar messen, und von ihnen aus nach den beiden gegebenen Punkten A und B sehen kann. Nun messe man die Standlinie CD, und an ihren Endpunkten die Winkel ACB = m, ACD = n, CDA = p und CDB = q. Es ist dann im Dreiecke ACD die Seite CD mit den anliegenden Winkeln n und p bestimmt, folglich kann die Seite AD gefunden werden; eben so kann man im Dreiecke BCD aus der Seite CD und den Winkeln n — m und q die Seite BD berechnen. Endlich wird im Dreiecke ADB aus den Seiten AD und BD und dem eingeschlossenen Winkel q — p die gesuchte Linie AB bestimmt.

Es sei z. B. CD = 75°, m = 59° 17′, n = 101° 46′, p = 42° 10′ und q = 108° 39′; wie groß ist AB?

§. 433. Die Höhe eines Gegenstandes zu suchen, zu dessen Fußpunkte man kommen kann.

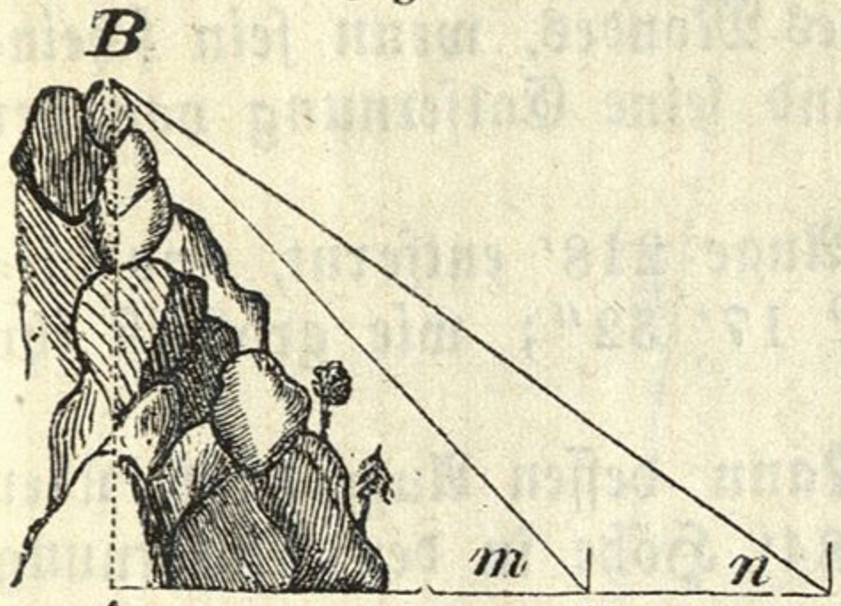
Fig. 285.



Es sei z. B. die Höhe eines Baumes AB (Fig. 285), zu bestimmen. Man messe von dem Fußpunkte A des Baumes bis zu irgend einem willkürlichen Punkte C, und in diesem Punkte den Winkel ACB. Mit diesen zwei Größen kann dann aus dem rechtwinkligen Dreiecke BAC die Höhe AB berechnet werden

§. 437. Die Höhe eines Gegenstandes zu bestimmen, zu dessen Fußpunkte man nicht gelangen kann.

Fig. 286.

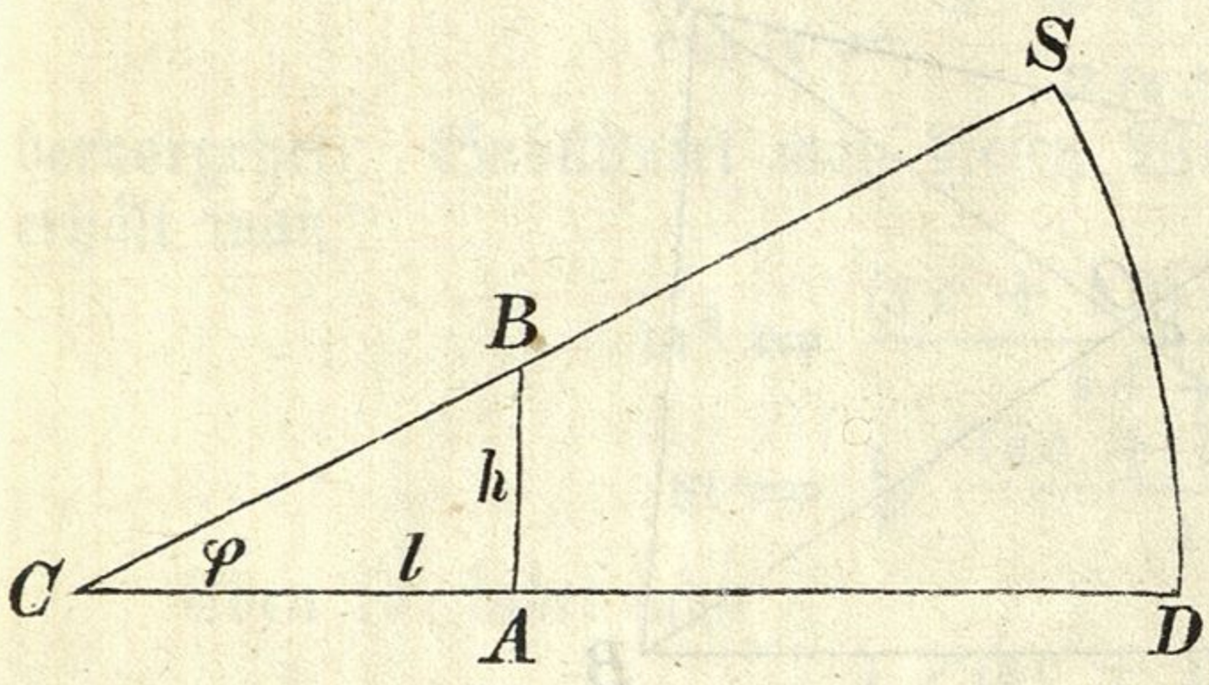


Man soll z. B. die Höhe AB (Fig. 286) eines Berges über dem Horizonte AC finden. Man wähle zwei Standpunkte C und D, welche mit AB in einerlei Vertikalebene liegen, und zwischen welchen man unmittelbar messen kann; man messe die Standlinie CD = a, und bestimme an ihren Endpunkten die Höhenwinkel ACB = m und ADB = n. Durch die Auflösung des Dreieckes BCD erhält man BG, und dann durch jene des rechtwinkligen Dreieckes BAC die gesuchte Höhe AB.

Man entwickle hier wirklich den Ausdruck für AB durch die Größen a, m und n.

§. 438. Aus der Höhe eines Gegenstandes und der Länge seines Schattens die Höhe der Sonne zu bestimmen.

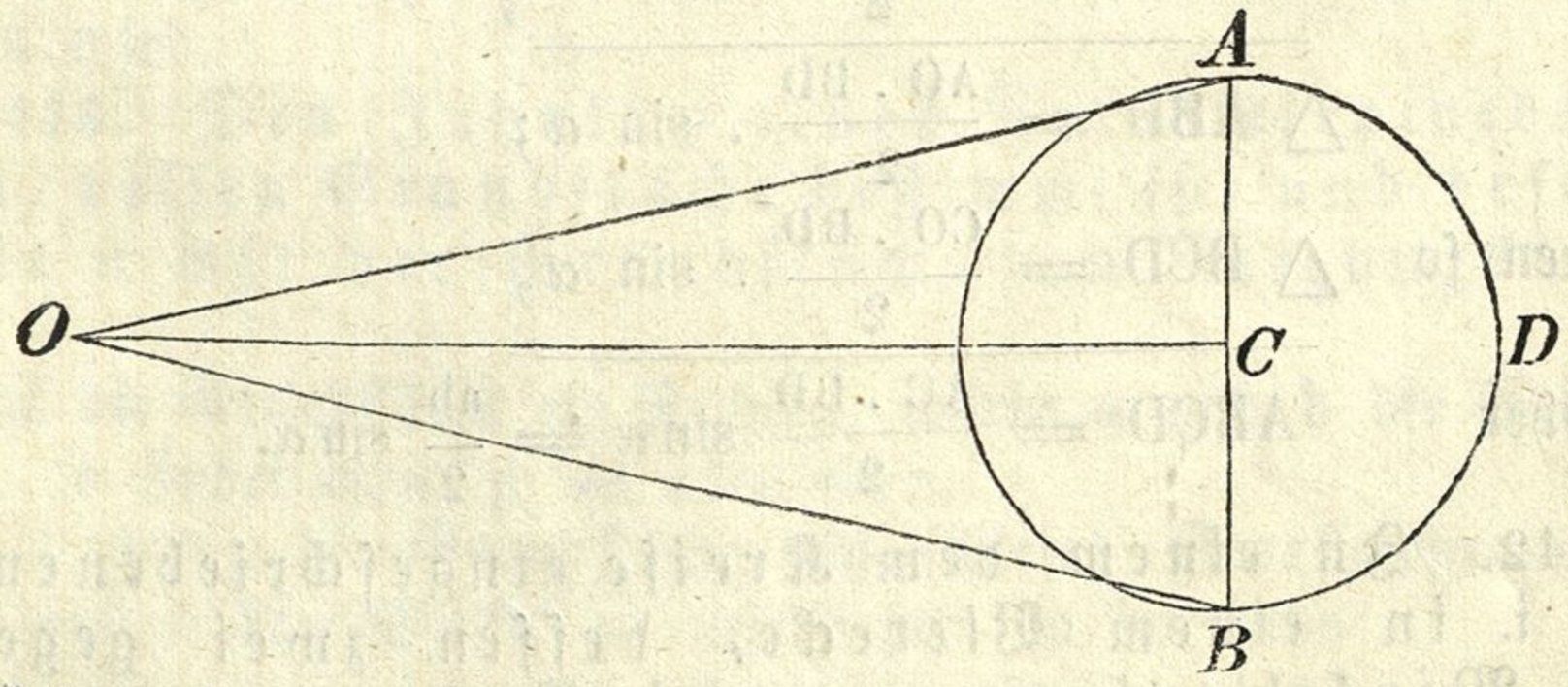
Fig. 287.



Es sei h die Höhe eines senkrechten Gegenstandes AB (Fig. 287), l die Länge seines Schattens, so erhält man zur Bestimmung der Sonnenhöhe φ, welche durch den Bogen SD oder den Winkel ACB vorgestellt wird, aus dem rechtwinkligen Dreiecke BAC die Formel tang $\varphi = \frac{h}{l}$.

§. 439. Den wahren Durchmesser D eines Himmelskörpers aus dessen scheinbaren Durchmesser d und dessen Entfernung a von der Erde zu finden.

Fig. 288.



Befindet sich das Auge in O (Fig. 288), so gibt der Sehwinkel AOB den scheinbaren Durchmesser d des Gestirns ADB; AB ist der wahre

Durchmesser D, und OC die Distanz a von der Erde. Man hat nun $AC = CO \cdot \text{tang } AOC$, oder $\frac{D}{2} = a \cdot \text{tang } \frac{d}{2}$, daher $D = 2a \cdot \text{tang } \frac{d}{2}$.

Wie groß ist der wahre Durchmesser des Mondes, wenn sein scheinbarer mittlerer Halbmesser 15′ 31 · 69″, und seine Entfernung von der Erde 51810 Meilen beträgt?

Der Mittelpunkt einer Kugel ist vom Auge 218′ entfernt, und dieselbe erscheint unter einem Winkel von 2° 17′ 32″; wie groß ist ihr Durchmesser?

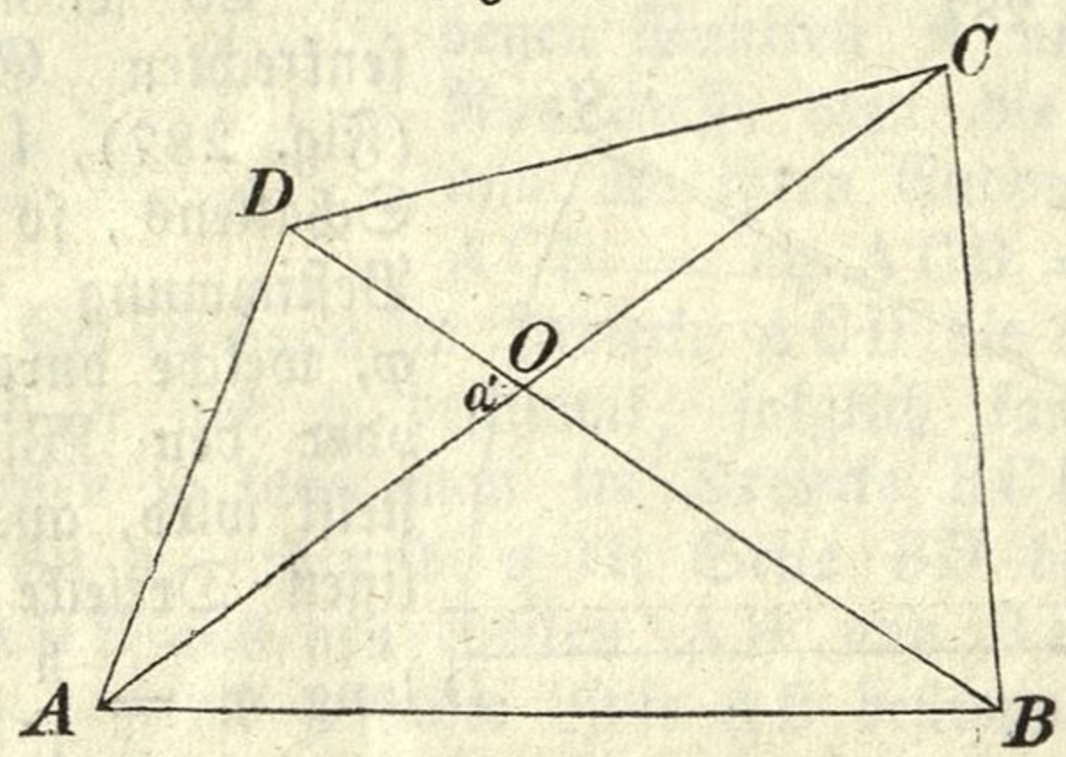
Unter welchem Winkel φ steht ein Mann dessen Auge 5· 1′ über den Boden erhaben ist, einen Thurm von 184′ Höhe in der Entfernung von 125′?

§. 440. Den Flächeninhalt f eines Parallelogramms, in welchem zwei zusammenstoßende Seiten a und b den Winkel γ einschließen, zu berechnen.

Man findet $f = ab \sin \gamma$.

§. 441. Wenn in einem Vierecke die beiden Diagonalen und ihr Neigungswinkel gegeben sind, den Flächeninhalt des Viereckes zu bestimmen. (Fig. 289)

Fig. 289.



$AC = a,\ BD = b,\ AOD = \alpha$

$$\left.\begin{aligned} \triangle AOD &= \frac{AO \cdot DO}{2} \cdot \sin \alpha \\ \triangle AOB &= \frac{AO \cdot BO}{2} \cdot \sin \alpha \end{aligned}\right\} \text{ addirt}$$

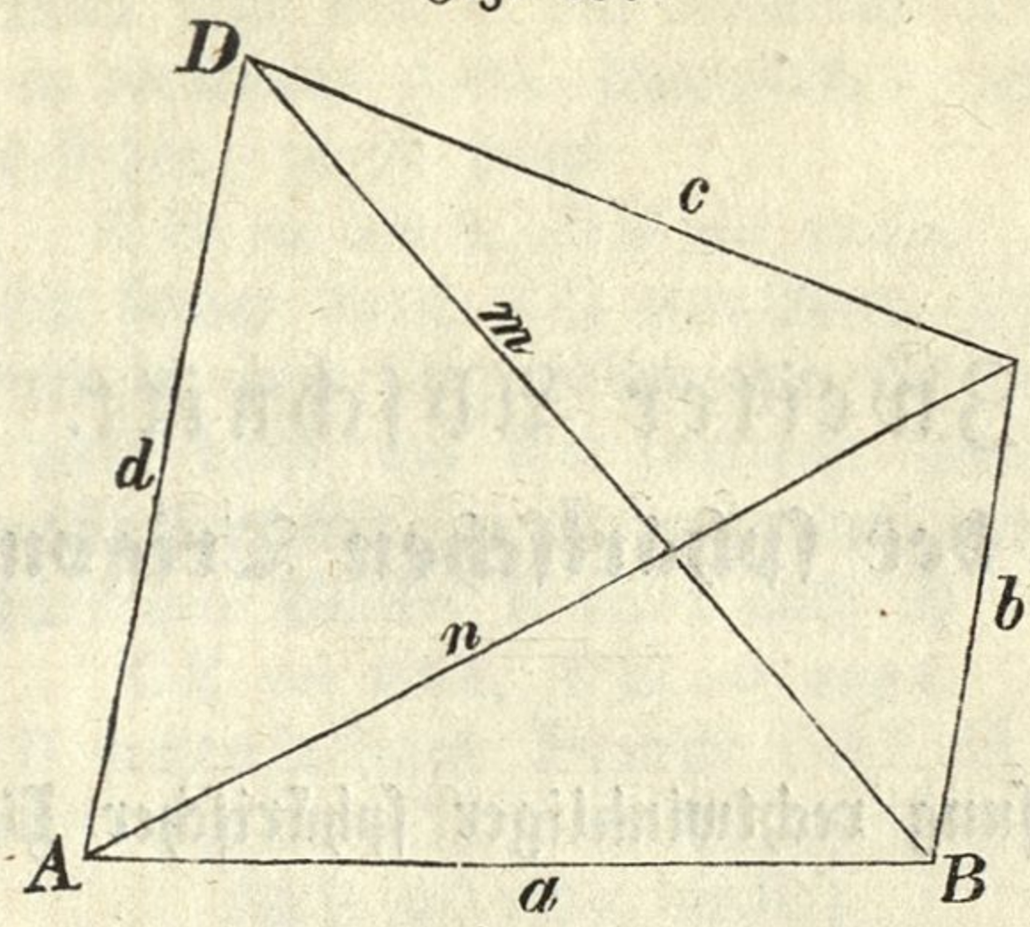
$$\triangle ABD = \frac{AO \cdot BD}{2} \cdot \sin \alpha;$$

$$\text{eben so } \triangle BCD = \frac{CO \cdot BD}{2} \cdot \sin \alpha,$$

$$\text{daher } ABCD = \frac{AC \cdot BD}{2} \sin \alpha = \frac{ab}{2} \sin \alpha.$$

§. 442. In einem dem Kreise eingeschriebenen Vierecke, d. i. in einem Vierecke, dessen zwei gegenüberstehende Winkel zusammen zwei Rechte betragen, sind a, b, c, d die aufeinander folgenden Seiten; man bestimme die beiden Diagonalen. (Fig. 290.)

Fig. 290.



Aus dem Dreiecke A B D folgt

$$m^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos A,$$

und aus dem Dreiecke B C D

$$m^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos C$$
$$= b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos A,$$

daher

$$a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos A = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos A,$$

woraus

$$\cos A = \frac{a^2 + d^2 - (b^2 + c^2)}{2(ad + bc)}$$

hervorgehet. Substituirt man diesen Werth in der ersten Gleichung, so erhält man

$$m^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}, \text{ und}$$

$$m = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}}$$

Eben so findet man

$$n = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}.$$

Aus diesen beiden Ausdrücken folgt:

$$mn = ac + bd \text{ und } \frac{m}{n} = \frac{ab + cd}{ad + bc};$$

zwei merkwürdige Relazionen, welche der Anfänger leicht durch Worte ausdrücken wird.

§. 443. Den Inhalt p eines Parallelepipeds zu berechnen, dessen Grundfläche bestimmt ist, und dessen Seitenkante c mit der Grundfläche den Neigungswinkel n bildet.

Ist die Grundfläche ein Rechteck, worin a und b die Seitenlängen vorstellen, so findet man $p = abc \sin n$.

Ist dagegen die Grundfläche ein schiefes Parallelogramm, dessen Seiten a und b den Winkel γ einschließen, so hat man

$$p = abc \sin \gamma \sin n.$$

Zweiter Abschnitt.

Elemente der sphärischen Trigonometrie.

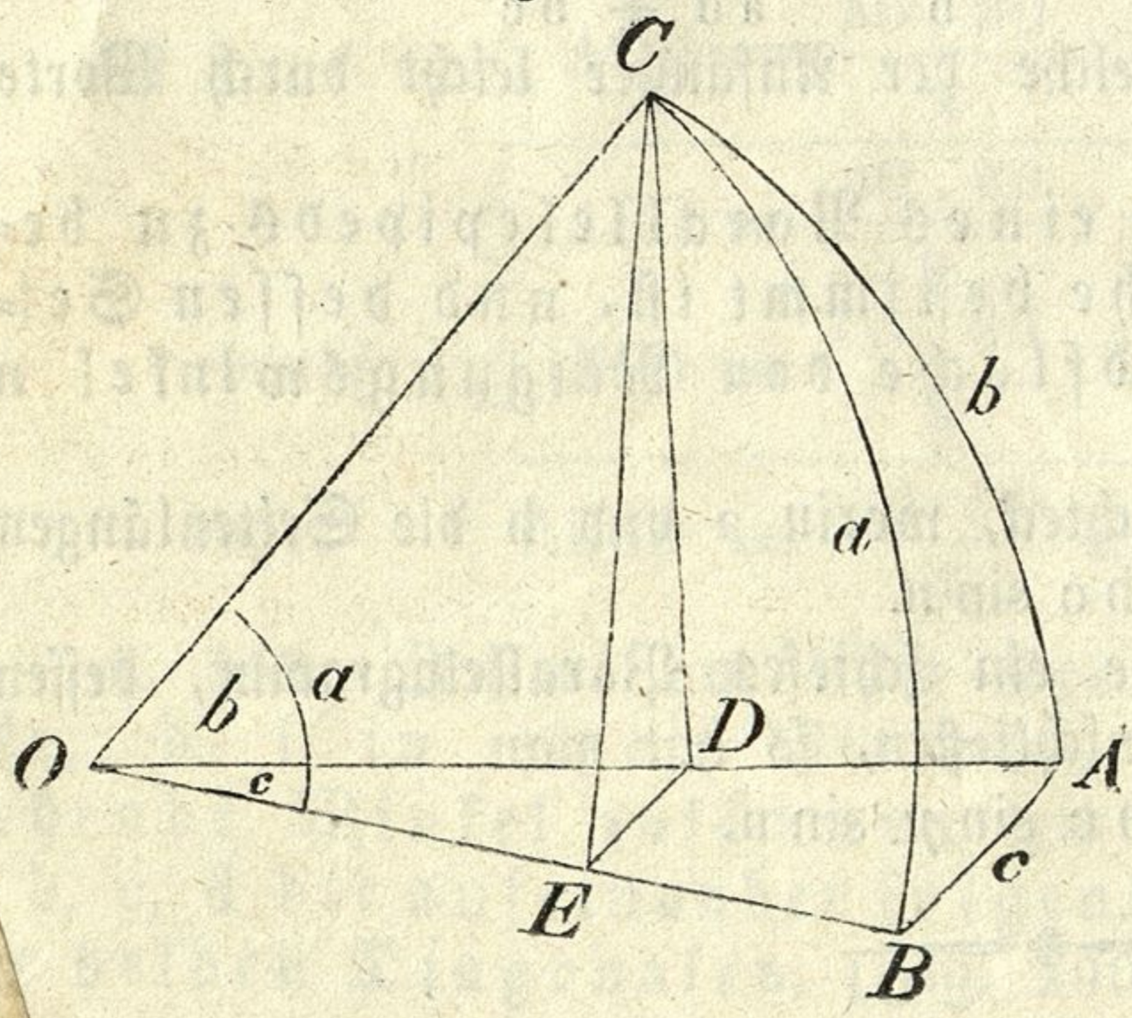
I. Auflösung rechtwinkliger sphärischer Dreiecke.

§. 444. Ein sphärisches Dreieck kann einen, zwei oder auch drei rechte Winkel enthalten. Sind alle drei Winkel eines sphärischen Dreieckes rechte, so sind die drei Seiten Quadranten; kommen zwei rechte Winkel vor, so stehen denselben ebenfalls Quadranten gegenüber, und die dritte Seite muß eben so viele Grade enthalten, wie der dritte Winkel. Diese beiden Fälle geben also zu keiner Aufgabe Anlaß, und es brauchen hier nur solche sphärische Dreiecke betrachtet zu werden, welche bloß einen rechten Winkel enthalten.

a. Lehrsätze, auf denen die Auflösung beruhet.

§. 445. Es sei O (Fig. 291) der Mittelpunkt einer Kugel, deren Halbmesser der Einheit des Längenmaßes gleich ist, und AB, AC, BC seien Bögen von drei größten Kreisen; so ist ABC ein sphärisches Dreieck. Setzen wir den Winkel BOC oder den Bogen BC = a, den Winkel AOC oder Bogen AC = b, und den Winkel AOB oder den Bogen AB = c; bezeichnen wir ferner die Neigung der Ebenen AOB und AOC durch A, die Neigung der Ebenen AOB und BOC durch B, und die Neigung der Ebenen AOC und BOC durch C, so stellen offenbar A, B, C die Winkel vor, welche im sphärischen Dreiecke ABC den Seiten a, b, c gegenüber liegen.

Fig. 291.



Nehmen wir nun an, daß der Winkel A = 90° ist, so läßt sich zunächst folgender Lehrsatz begründen: Der Sinus einer jeden Kathete eines rechtwinkligen sphärischen Dreieckes ist gleich dem Sinus der Hypotenuse multiplizirt mit dem Sinus des dieser Kathete gegenüberliegenden Winkels.

Beweis. Man fälle von C auf die Ebene AOB eine Senkrechte CD, so muß diese in die Ebene AOC hineinfallen, und auch auf der Geraden AO senkrecht stehen; es ist daher

$$CD = \sin b, \quad OD = \cos b.$$

Denkt man sich ferner durch CD eine Ebene gelegt, welche auf der Geraden BO senkrecht ist, und in derselben die Geraden CE und DE gezogen, so müssen diese beide auf BO senkrecht stehen, und es stellt der von ihnen gebildete Winkel CED die Neigung der zwei Ebenen AOB und BOC, oder den sphärischen Winkel B vor; auch ist

$$CE = \sin a, \quad OE = \cos a.$$

In dem bei D rechtwinkligen Dreiecke CDE ist nun

$$CD = CE \,.\, \sin CED, \text{ oder}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin b = \sin a \sin B.\\ \sin c = \sin a \sin C.\end{array}\right\} \ldots 1)$$

Eben so läßt sich ableiten:

d. h. der Sinus jeder Kathete ist gleich dem Sinus der Hypotenuse multiplizirt mit dem Sinus des der Kathete gegenüberliegenden Winkels.

§. 446. Aus dem bei E rechtwinkligen Dreiecke DEO folgt ferner

$$OE = OD \,.\, \cos DOE, \text{ oder}$$

$$\cos a = \cos b \cos c \ldots 2)$$

d. h. der Cosinus der Hypotenuse ist gleich dem Produkte aus den Cosinus der beiden Katheten.

§. 447. Aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken CDE und DEO erhält man

$$DE = CE \,.\, \sin CED = \sin a \cos B, \text{ und auch}$$
$$DE = OD \,.\, \sin DOE = \cos b \sin c;$$

daher ist

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c,$$

und mit Rücksicht auf 1)

$$\sin a \cos B = \cos b \sin a \sin C$$

oder

$$\left.\begin{array}{l}\cos B = \cos b \sin C.\\ \cos C = \cos c \sin B.\end{array}\right\} \ldots 3).$$

Eben so erhält man

In jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke ist daher der Cosinus eines schiefen Winkels gleich dem Cosinus der gegenüberliegenden Seite multiplizirt mit dem Sinus des andern schiefen Winkels.

§. 448. Wenn man in der oben entwickelten Gleichung

$$\cos b \sin c = \sin a \cos B$$

für $\cos b$ den aus 2) hervorgehenden Werth $\frac{\cos a}{\cos c}$ substituirt, so hat man

$$\frac{\cos a \sin c}{\cos c} = \sin a \cos B$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang } c = \text{tang } a \cos B.\\ \text{tang } b = \text{tang } a \cos C.\end{array}\right\} \ldots 4)$$

Auf dieselbe Art findet man

Die Tangente einer jeden Kathete ist also gleich der Tangente der Hypotenuse multiplizirt mit dem Cosinus des dieser Kathete anliegenden schiefen Winkels.

§. 449. Substituirt man in der obigen Gleichung

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c$$

für $\sin a$ den Werth $\frac{\sin b}{\sin B}$ aus 1), so hat man

$$\frac{\sin b \cos B}{\sin B} = \cos b \sin c,$$

woraus

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} b &= \operatorname{tang} B \sin c \\ \operatorname{tang} c &= \operatorname{tang} C \sin b. \end{aligned}\right\} \ldots 5)$$

folgt. Eben so findet man

Es ist also die Tangente einer jeden Kathete auch gleich der Tangente des gegenüberliegenden Winkels multiplizirt mit dem Sinus der andern Kathete.

§. 450. Aus 2) und 3) erhält man endlich

$$\cos a = \cos b \cos c = \frac{\cos B}{\sin C} \cdot \frac{\cos C}{\sin B}, \text{ oder}$$

$$\cos a = \cot B \cot C \ldots 6),$$

d. h. der Cosinus der Hypotenuse ist gleich dem Produkte aus den Cotangenten der beiden schiefen Winkel.

§ 451. Wenn in einem sphärischen Dreiecke eine Seite $= 90^\circ$ ist, so ist das Polardreieck ein rechtwinkliges, also können auch hier die vorhergehenden Gleichungen nach gehöriger Umänderung angewendet werden.

§. 452. Bevor wir zur Anwendung der hier entwickelten Lehrsätze auf die Auflösung rechtwinkliger sphärischer Dreiecke schreiten, wollen wir noch aus der unter 3) vorkommenden Gleichung $\cos B = \cos b \sin C$ einige Folgerungen ableiten Da $C < 180^\circ$ sein muß, so ist $\sin C$ stets positiv, und es müssen, damit die frühere Gleichung richtig sei, $\cos B$ und $\cos b$ stets gleichbezeichnet sein.

Ist daher $b \gtreqless 90^\circ$, und folglich $\cos b \gtreqless 0$, so muß auch $\cos B \gtreqless 0$,

somit $B \gtreqless 90^\circ$ sein.

Eben so folgt: Wenn $B \gtreqless 90^\circ$ ist, so muß auch $b \gtreqless 90^\circ$ sein.

b. Auflösungsfälle.

§. 453. 1) Es seien die beiden Katheten b und c gegeben; man suche die Hypotenuse a und die Winkel B und C.

Hier erhält man aus den Gleichungen 2) und 5) die verlangten drei Stücke, nämlich

$$\cos a = \cos b \cos c, \quad \operatorname{tang} B = \frac{\operatorname{tang} b}{\sin c}, \quad \operatorname{tang} C = \frac{\operatorname{tang} c}{\sin b}.$$

Es sei z. B. $b = 27^0\ 28'\ 36''$ und $c = 51^0\ 12'\ 8''$. Man hat

$$\log\cos b = 9{\cdot}948\ 021 - 10$$
$$\log\cos c = 9{\cdot}796\ 972 - 10$$
$$\log\cos a = 9{\cdot}744\ 993 - 10$$
$$a = 56^0\ 13'\ 21''$$

$$\log\operatorname{tang} b = 9{\cdot}716\ 044 - 10 \qquad \log\operatorname{tang} c = 10{\cdot}094\ 767 - 10$$
$$\log\sin c = 9{\cdot}891\ 739 - 10 \qquad \log\sin b = 9{\cdot}664\ 066 - 10$$
$$\log\operatorname{tang} B = 9{\cdot}824\ 305 - 10 \qquad \log\operatorname{tang} C = 10{\cdot}430\ 701 - 10$$
$$B = 33^0\ 42'\ 51'' \qquad C = 69^0\ 38'\ 54''.$$

§ 454. In den folgenden Fällen wollen wir, ohne die ohnehin einfache Rechnung an besondern Beispielen durchzuführen, uns mit der bloßen Anführung der Auflösungs-Gleichungen und mit der Untersuchung, ob das Dreieck in dem jedesmaligen Falle vollkommen bestimmt ist, begnügen.

II) Die Hypotenuse a und eine Kathete b seien gegeben; die andere Kathete c und die Winkel B und C zu finden.

Hier sind die Formeln 2), 1) und 4) anzuwenden, aus denen

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b},\quad \sin B = \frac{\sin b}{\sin a},\quad \cos C = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}$$

folgt. Obwohl zu $\sin B$ im Allgemeinen zwei Winkel gehören, ein spitziger und ein stumpfer, so fällt doch hier jede Unbestimmtheit hinweg, da $B \gtrless 90^0$ angenommen werden muß, je nachdem $b \gtrless 90^0$ gegeben ist.

§. 455. III) Gegeben sind eine Kathete b und ihr gegenüberliegender Winkel B; man soll a, c und C finden.

Aus den Formeln 1), 5) und 3) erhält man

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B},\quad \sin c = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} B},\quad \sin C = \frac{\cos B}{\cos b},$$

oder aus 2) und 4)

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b},\quad \cos C = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}.$$

Wenn a gefunden wurde, so können daraus mittelst der Gleichungen für $\cos c$ und $\cos C$ die Werthe für c und C unzweideutig bestimmt werden; allein zur Bestimmung von a kennt man nur den Sinus von a, darum ist diese Aufgabe eine unbestimmte.

§. 456. IV) Gegeben sind eine Kathete b und ihr anliegender Winkel C; man suche a, c und B.

Die Formeln 4), 5) und 3) geben

$$\operatorname{tang} a = \frac{\operatorname{tang} b}{\cos C},\quad \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} C \sin b,\quad \cos B = \cos b \sin C.$$

§. 457. V) Die Hypotenuse a und ein anliegender Winkel B seien gegeben; man soll b, c und C finden.

Aus den Formeln 1), 4) und 6) folgt

$$\sin b = \sin a \sin B,\quad \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B,\quad \operatorname{cot} C = \frac{\cos a}{\operatorname{cot} B}.$$

Hier ist b durch $\sin b$ vollkommen bestimmt, da man $b \gtrless 90^0$ annehmen muß, je nachdem $B \gtrless 90^0$ ist.

§. 458. VI) Die beiden schiefen Winkel B und C seien gegeben; man finde die Seiten a, b, c.

Mittelst der Relazionen 6) und 3) erhält man

$$\cos a = \cot B \cot C,\ \cos b = \frac{\cos B}{\sin C},\ \cos c = \frac{\cos C}{\sin B}.$$

§. 459. Uebungsaufgaben.

Ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck, worin A den rechten Winkel vorstellt, aufzulösen, wenn gegeben sind

a) $b = 127^0\ 58'\ 32''$, $c = 63^0\ 15'\ 48''$;
b) $a = 154^0\ 8'\ 15''$, $c = 81^0\ 18'\ 27''$;
c) $b = 51^0\ 50'\ 2''$, $B = 78^0\ 41'\ 19''$;
d) $c = 83^0\ 12'\ 38''$, $b = 65^0\ 55'\ 55''$;
e) $a = 95^0\ 6'\ 42''$, $C = 70^0\ 40'\ 25''$;
f) $B = 88^0\ 13'\ 9''$, $C = 58^0\ 59'\ 22''$.

II. Auflösung schiefwinkliger sphärischer Dreiecke.

a) Lehrsätze, aus denen sich die Auflösungs-Gleichungen ergeben.

§. 460. Es sei ABC (Fig. 292) ein schiefwinkliges sphärisches Dreieck, dessen Winkel wir durch A, B, C, und die ihnen gegenüberliegenden Seiten durch a, b, c ausdrücken wollen. Zieht man durch A einen größten Kreisbogen AD ⊥ BC, so ist nach §. 445 in dem bei D rechtwinkligen Dreiecke ADC

$$\sin AD = \sin b \sin C,$$

und im Dreiecke ADB

$$\sin AD = \sin c \sin B;$$

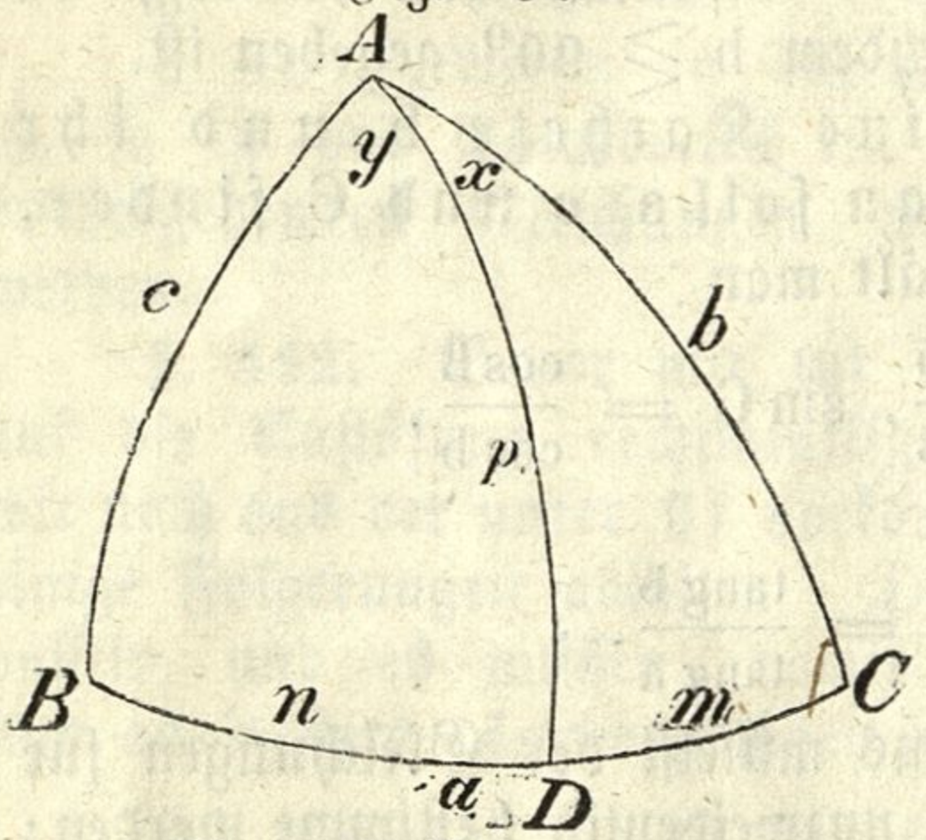
daher

$$\sin b \sin C = \sin c \sin B,$$

oder

$$\sin b : \sin c = \sin B : \sin C.$$

Fig. 292.



Eben so findet man

$$\sin a : \sin b = \sin A : \sin B \quad \text{und} \quad \sin a : \sin c = \sin A : \sin C.$$

In jedem sphärischen Dreiecke verhalten sich also die Sinus zweier Seiten, wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

Die angeführten Proporzionen geben folgende Auflösungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \sin a \sin B &= \sin b \sin A \\ \sin a \sin C &= \sin c \sin A \\ \sin b \sin C &= \sin c \sin B \end{aligned}\right\} \ldots A)$$

§. 461. Bezeichnet man in der vorhergehenden Figur die Bögen AD, CD und BD durch p, m und n, und die den zwei letzteren gegenüberstehenden Winkel durch x und y, so hat man

$$\cos a = \cos (m + n) = \cos m \cos n - \sin m \sin n.$$

Nun ist nach §§. 446 und 389, b)

$$\cos m \cdot \cos n = \frac{\cos b}{\cos p} \cdot \frac{\cos c}{\cos p} = \cos b \cos c \cdot \frac{1}{\cos^2 p} =$$

$$= \cos b \cos c (1 + \operatorname{tang}^2 p) = \cos b \cos c + \cos b \cos c \operatorname{tang}^2 p.$$

Aber nach §. 448 ist $\operatorname{tang} p = \operatorname{tang} b \cos x$, und auch $\operatorname{tang} p = \operatorname{tang} c \cos y$, daher $\operatorname{tang}^2 p = \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c \cos x \cos y$, und somit

$$\cos m \cos n = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos x \cos y.$$

Ferner hat man mit Rücksicht auf §. 445.

$$\sin m \sin n = \sin b \sin x \cdot \sin c \sin y,$$

folglich durch Subtrakzion dieser Gleichungen

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c (\cos x \cos y - \sin x \sin y),$$

oder wegen $\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos (x + y) = \cos A$,

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \\ \text{Eben so erhält man} & \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \end{aligned}\right\} \ldots \text{B)}$$

Diese Gleichungen mit Worten ausgedrückt geben den Lehrsatz:

In einem sphärischen Dreiecke ist der Cosinus einer jeden Seite gleich dem Produkte aus den Cosinus der beiden andern Seiten mehr dem Produkte aus den Sinus derselben Seiten multiplizirt mit dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

§. 462. Heißen a', b', c' die Seiten, und A', B', C' die ihnen gegenüberliegenden Winkel des zu ABC gehörigen Polardreieckes, so ist, da auch für dieses die eben entwickelten Gleichungen gelten,

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A'.$$

Nun ist aber $a' = 180^0 - A$, $b' = 180^0 - B$, $c' = 180^0 - C$ und $A' = 180^0 - a$; daher

$$\cos a' = -\cos A, \quad \cos b' = -\cos B, \quad \cos c' = -C$$

$$\sin b' = \sin B, \quad \sin c' = \sin C, \quad \cos A' = -\cos a.$$

Substituirt man diese Werthe in die obige Gleichung, so hat man

$$-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a,$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a. \\ \text{Auf dieselbe Art findet man} & \\ \cos B &= -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b, \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c; \end{aligned}\right\} \ldots \text{C)}$$

d. h. der Cosinus eines jeden Winkels in einem sphärischen Dreiecke ist gleich dem negativen Produkte aus den Cosinus der beiden andern Winkel, mehr dem Produkte aus den Sinus derselben Winkel multiplizirt mit dem Cosinus der von ihnen eingeschlossenen Seite.

§. 463. Wenn man die zweite und dritte Gleichung in A) addirt und subtrahirt, so erhält man

$$(\sin a + \sin b) \sin C = (\sin A + \sin B) \sin c,$$

$$(\sin a - \sin b) \sin C = (\sin A + \sin B) \sin c;$$

oder mit Rücksicht auf die §§. 403 und 397

$$\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}\ldots\alpha)$$

$$\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\sin C = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}\ldots\beta)$$

Ferner findet man durch Addizion der beiden ersten Gleichungen in B) und mit Rücksicht auf die Gleichungen in A)

$$\cos a + \cos b = (\cos a + \cos b)\cos c + (\sin b\cos A + \sin a\cos B)\sin c,$$

oder

$$(\cos a + \cos b)(1-\cos c) = \left(\frac{\sin B\ \sin c}{\sin C}\cos A + \frac{\sin A\ \sin c}{\sin C}\cos B\right)\sin c$$

$$= \left(\sin B\ \cos A + \sin A\ \cos B\right)\frac{\sin^2 c}{\sin C}$$

daher

$$(\cos a + \cos b)\ (1-\cos c)\ \sin C = \sin(A+B)\ \sin^2 c,$$

oder mit Rücksicht auf die §§. 403, 398 und 397

$$\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\cdot\sin^2\frac{c}{2}\sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\sin^2\frac{c}{2}\cos^2\frac{c}{2},$$

daher

$$\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\cos^2\frac{c}{2}\ldots\gamma)$$

Dividirt man nun die Gleichungen α) und β) durch γ), so erhält man

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{a+b}{2} &= \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\cdot\tan\frac{c}{2}\\ \tan\frac{a-b}{2} &= \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\cdot\tan\frac{c}{2}\end{aligned}\right\}\ldots D)$$

d. h. die Tangente der halben $\binom{\text{Summe}}{\text{Differenz}}$ zweier Seiten ist gleich dem Quozienten aus den $\binom{\text{Cosinus}}{\text{Sinus}}$ der halben Differenz und der halben Summe der beiden gegenüberliegenden Winkel, multiplizirt mit der Tangente der halben dritten Seite.

§. 464. Da die beiden letzten Gleichungen auch für das zu ABC gehörige Polardreieck A′ B′ C′ gelten, so hat man

$$\tan\frac{a'+b'}{2} = \frac{\cos\frac{A'-B'}{2}}{\cos\frac{A'+B'}{2}}\cdot\tan\frac{c'}{2}.$$

$$\tan\frac{a'-b'}{2} = \frac{\sin\frac{A'-B'}{2}}{\sin\frac{A'+B'}{2}}\cdot\tan\frac{c'}{2}.$$

Setzt man nun in diese Gleichungen die Werthe
$a' + b' = 360^0 - (A + B)$, $a' - b' = 360^0 - (A - B)$, $c' = 180^0 - C$,
$A' + B' = 360^0 - (a + b)$, $A' - B' = 360^0 - (a - b)$,
so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \text{tang}\,\frac{A+B}{2} &= \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} \cdot \cot\frac{C}{2} \\ \text{tang}\,\frac{A-B}{2} &= \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}} \cdot \cot\frac{C}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{E)}$$

d. h. die Tangente der halben $\left(\begin{smallmatrix}\text{Summe}\\ \text{Differenz}\end{smallmatrix}\right)$ zweier Winkel ist gleich dem Quozienten aus den $\left(\begin{smallmatrix}\text{Cosinus}\\ \text{Sinus}\end{smallmatrix}\right)$ der halben Differenz und der halben Summe der beiden gegenüberstehenden Seiten, multiplizirt mit der Cotangente des halben dritten Winkels.

Die vier Gleichungen in D) und E) sind unter dem Namen der Neper'schen Analogien bekannt.

§. 465. Aus den Formeln in E) lassen sich sehr wichtige Folgerungen ableiten:

a) Da in der zweiten jener Formeln, nämlich

$$\text{tang}\,\frac{A-B}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}} \cdot \cot\frac{C}{2},$$

$\sin\frac{a+b}{2}$ und $\cot\frac{C}{2}$ stets positiv sind, indem $\frac{a+b}{2} < 180^0$ und $\frac{C}{2} < 90^0$ ist, so müssen auch $\text{tang}\,\frac{A-B}{2}$ und $\sin\frac{a-b}{2}$ stets gleichbezeichnet sein.

Für $a = b$ ist $\sin\frac{a-b}{2} = 0$, daher muß auch $\text{tang}\,\frac{A-B}{2} = 0$, und weil $\frac{A-B}{2}$ stets kleiner als 90^0 ist, $\frac{A-B}{2} = 0$, also $A = B$ sein. Gleichen Seiten liegen also auch gleiche Winkel gegenüber.

Umgekehrt läßt sich folgern: wenn $A = B$ ist, so muß auch $a = b$ sein, d. h. gleichen Winkeln stehen gleiche Seiten gegenüber.

Ist $a > b$, so ist $\sin\frac{a-b}{2}$ positiv, daher muß auch $\text{tang}\,\frac{A-B}{2}$ positiv, und somit $A > B$ sein. Der größern Seite liegt also auch ein größerer Winkel gegenüber.

Umgekehrt läßt sich zeigen: wenn $A > B$ ist, so muß auch $a > b$ sein, d. h. dem größern Winkel steht eine größere Seite gegenüber.

b) In der ersten Formel in E, nämlich

$$\text{tang}\,\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} \cdot \cot\frac{C}{2}.$$

sind die beiden Faktoren $\cos\frac{a-b}{2}$ und $\cot\frac{C}{2}$ immer positiv, da sowohl $\frac{a-b}{2}$ als $\frac{C}{2}$ kleiner als 90° sein muß; es müssen daher auch $\text{tang}\,\frac{A+B}{2}$ und $\cos\frac{a+b}{2}$ stets einerlei Zeichen haben.

Ist daher $a + b \leqq 180^\circ$, also $\cos\frac{a+b}{2} \gtrless 0$, so muß auch $\text{tang}\,\frac{A+B}{3} \gtrless 0$, und somit $A + B \leqq 180^\circ$ sein; d. h. wenn die Summe zweier Seiten kleiner oder größer ist als 180°, so ist auch die Summe der gegenüberliegenden Winkel beziehungsweise kleiner oder größer als 180°.

Eben so folgt: wenn $A + B \leqq 180^\circ$ ist, so muß auch $a + b \leqq 180^\circ$ sein.

Aus derselben Gleichung kann man auch die zwei Folgerungen ziehen:

1) Wenn $a + b = 180^\circ$ ist, so ist auch $A + B = 180^\circ$.

2) Wenn $A + B = 180^\circ$ ist, so muß auch $a + b = 180^\circ$ sein.

b) Auflösungsfälle.

§. 466. I) Es sei eine Seite c mit den ihr anliegenden Winkeln A und B gegeben; man soll a, b und C finden.

Die zwei Seiten a und b ergeben sich aus den Gleichungen des Systems D)

$$\text{tang}\,\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\,\text{tang}\,\frac{c}{2},$$

$$\text{tang}\,\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\,\text{tang}\,\frac{c}{2}.$$

Zur Bestimmung des Winkels C erhält man aus C)

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c,$$

welcher Gleichung wir jedoch eine für die logarithmische Berechnung geeignete Form geben wollen. Es ist

$$\cos C = \cos A\ (-\cos B + \sin B\ \text{tang}\, A\ \cos c),$$

und wenn man eine solche Hilfsgröße x sucht, daß $\text{tang}\, A\ \cos c = \cot x$ wird,

$$\cos C = \cos A\ (-\cos B + \sin B\ \cot x),$$

$$= \frac{\cos A}{\sin x}\ (-\cos B\ \sin x + \sin B\ \cos x),$$

daher

$$\cos C = \frac{\cos A\ \sin (B - x)}{\sin x}.$$

Es sei z. B. $A = 158^0\,14'\,16''$, $B = 21^0\,17'\,22''$, $c = 73^0\,15'\,20''$.
Man hat

$A + B = 179^0\,31'\,38''$ $\quad A - B = 136^0\,56'\,54''$ $\quad \frac{c}{2} = 36^0\,37'\,40''$

$\frac{A+B}{2} = 89^0\,45'\,49''$ $\quad \frac{A-B}{2} = 68^0\,28'\,27''$

$\log \cos \frac{A-B}{2} = 9{\cdot}564\ 572 - 10$ $\quad \log \sin \frac{A-B}{2} = 9{\cdot}968\ 601 - 10$

$\log \text{tang}\, \frac{c}{2} = 9{\cdot}871\ 233 - 10$ $\quad \log \text{tang}\, \frac{c}{2} = 9{\cdot}871\ 233 - 10$

$19{\cdot}435\ 805 - 20$ $\quad 19{\cdot}839\ 834 - 20$

$\log \cos \frac{A+B}{2} = 7{\cdot}615\ 500 - 10$ $\quad \log \sin \frac{A+B}{2} = 9{\cdot}999\ 996 - 10$

$\log \text{tang}\, \frac{a+b}{2} = 11{\cdot}820\ 305 - 10$ $\quad \log \text{tang}\, \frac{a-b}{2} = 9{\cdot}839\ 838 - 10$

$\frac{a+b}{2} = 89^0\ 8'$ $\quad \frac{a-b}{2} = 34^0\,40'$

$\frac{a-b}{2} = 34^0\ 40'$

$a = 123^0\,48'$

$b = 54^0\,28'$

$\log \text{tang}\, A = 9{\cdot}601\ 198 - 10$ (n)

$\log \cos c = 9{\cdot}459\ 548 - 10$

$\log \cot x = 9{\cdot}060\ 746 - 10$ (n)

$x = 96^0\,33'\,39''$

$B - x = -75^0\,16'\,17''$

$\log \cos A = 9{\cdot}967\ 889 - 10$ (n)

$\log \sin (B - x) = 9{\cdot}985\ 489 - 10$ (n)

$19{\cdot}953\ 378 - 20$

$\log \sin x = 9{\cdot}997\ 146 - 10$

$\log \cos C = 9{\cdot}956\ 232 - 10$

$C = 25^0\,17'\,34''$.

Das Zeichen (n) nach den Logarithmen bedeutet, daß die zugehörigen trigonometrischen Funkzionen negativ sind.

§. 467. II. Eine Seite a, ein anliegender Winkel B und der gegenüberliegende A seien gegeben; man suche b, c und C.

Für die Seite b findet man aus dem Systeme A)

$$\sin b = \frac{\sin B \sin a}{\sin A}.$$

Hier kann b im Allgemeinen spitzig oder stumpf sein und die Aufgabe ist unbestimmt; nur unter besondern Voraussetzungen kann das Dreieck ein vollkommen bestimmtes sein.

Es sei erstlich $a = 90^\circ$. Für $A + B = 180^\circ$ ist auch $a + b = 180^\circ$, also $b = 90^\circ$, und das Dreieck bestimmt. Für $A + B < 180^\circ$ ist auch $a + b < 180^\circ$, daher $b < 90^\circ$, und das Dreieck ebenfalls bestimmt. Für $A + B > 180^\circ$ endlich, wo auch $a + b > 180^\circ$, und somit $b > 90^\circ$ sein muß, ist die Aufgabe gleichfalls bestimmt.

Es sei ferner $a < 90^\circ$. Für $A + B \gtreqless 180^\circ$ muß auch $a + b \gtreqless 180^\circ$, somit $b > 90^\circ$ sein, so daß die Aufgabe nur eine Auflösung zuläßt. Für $A + B < 180^\circ$ aber, und somit $a + b < 180^\circ$, kann $b \gtrless 90^\circ$ sein, und das Dreieck ist unbestimmt, wenn nicht der stumpfe Winkel b so groß ist, daß $a + b \gtreqless 180^\circ$ wäre, was immer eintritt, wenn $B \gtreqless A$ ist; in diesem Falle darf also b nur spitzig genommen werden.

Ist endlich $a > 90^\circ$, so hat man für $A + B \lessgtr 180^\circ$ auch $a + b \lessgtr 180^\circ$, und somit $b < 90^\circ$; das Dreieck ist also bestimmt. Wenn dagegen $A + B > 180^\circ$ und daher auch $a + b > 180^\circ$ ist, so kann $b \lessgtr 90^\circ$ sein und das Dreieck ist unbestimmt, ausgenommeu, wenn der spitzige Winkel b so klein ist, daß $a + b \lessgtr 180^\circ$ wäre, was für $B \gtreqless A$ geschieht, in welchem Falle dann b nur stumpf sein kann.

Das Dreieck ist also in diesem Auflösungsfalle unbestimmt, wenn

$$a < 90^\circ, \quad A + B < 180^\circ \quad \text{und} \quad A < B,$$
oder
$$a > 90^\circ, \quad A + B > 180^\circ \quad \text{und} \quad A > B \text{ ist.}$$

Ist einmal b bestimmt, so erhält man für die Berechnung von c und C aus den Systemen D) und E) die Ausdrücke

$$\operatorname{tang} \frac{c}{2} = \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A-B}{2}} \operatorname{tang} \frac{a-b}{2}.$$

$$\cot \frac{C}{2} = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{a-b}{2}} \cdot \operatorname{tang} \frac{A-B}{2}.$$

Es sei z. B. $A = 57^\circ 38'$, $B = 31^\circ 12'$, $a = 104^\circ 25' 30''$.
Man hat zuerst

$$\log \sin B = 9{\cdot}714\ 352 - 10$$
$$\log \sin a = 9\ 986\ 088 - 10$$
$$19{\cdot}700\ 440 - 20$$
$$\log \sin A = 9\ 926\ 671 - 10$$
$$\log \sin b = 9{\cdot}773\ 769 - 10$$
$$b = 36^\circ 26' 23''.$$

Da hier $a > 90^\circ$, $A + B < 180^\circ$, somit auch $a + b < 180^\circ$ ist, so muß $b < 90^\circ$ sein.

Ferner hat man

$$A + B = 88^\circ 50' \qquad \frac{A+B}{2} = 44^\circ 25'$$
$$A - B = 26^\circ 26' \qquad \frac{A-B}{2} = 13^\circ 13'$$
$$a + b = 140^\circ 51' 53'' \qquad \frac{a+b}{2} = 70^\circ 25' 56{\cdot}5''$$
$$a - b = 67^\circ 59' 7'' \qquad \frac{a-b}{2} = 33^\circ 59' 33{\cdot}5''$$

$$\log \sin \frac{A+B}{2} = 9{\cdot}845\ 018 - 10$$
$$\log \tang \frac{a-b}{2} = 9{\cdot}828\ 762 - 10$$
$$19{\cdot}673\ 780 - 20$$
$$\log \sin \frac{A-B}{2} = 9{\cdot}359\ 141 - 10$$
$$\log \tang \frac{c}{2} = 10{\cdot}314\ 639 - 10$$
$$\frac{c}{2} = 64^\circ\ 8' 47''$$
$$c = 128^\circ 17' 34''$$
$$\log \sin \frac{a+b}{2} = 9{\cdot}974\ 165 - 10$$
$$\log \tang \frac{A-B}{2} = 9{\cdot}370\ 799 - 10$$
$$19{\cdot}344\ 964 - 20$$
$$\log \sin \frac{a-b}{2} = 9{\cdot}747\ 479 - 10$$
$$\log \cot \frac{C}{2} = 9{\cdot}597\ 485 - 10$$
$$\frac{C}{2} = 68^\circ 24' 21''$$
$$C = 136^\circ 48' 42''.$$

§. 468. **III.** Zwei Seiten a, b und der von ihnen eingeschlossene Winkel C sind gegeben, man soll c, A, B finden,

Die Winkel A und B ergeben sich aus den Gleichungen des Systems E)

$$\text{tang}\,\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} \cdot \cot\frac{C}{2},$$

$$\text{tang}\,\frac{A-B}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}} \cdot \cot\frac{C}{2}.$$

Für die Seite c hat man aus dem Systeme B) die Gleichung

$$\cos c = \cos a\,\cos b + \sin a\,\sin b\,\cos C$$
$$= \cos a\,(\cos b + \sin b\,\text{tang}\,a\,\cos C).$$

Wird nun ein Hilfswinkel w so bestimmt, daß $\text{tang}\,w = \text{tang}\,a\,\cos C$ ist, so hat man dann

$$\cos c = \cos a\,(\cos b + \sin b\,\text{tang}\,w)$$
$$= \frac{\cos a}{\cos w}\,(\cos b\,\cos w + \sin b\,\sin w)$$

oder
$$\cos c = \frac{\cos a\,\cos\,(b-w)}{\cos w}.$$

Es sei z. B. $a = 97^0\,30'\,20''$, $b = 55^0\,12'\,10''$, $C = 39^0\,58'$,

$a + b = 152^0\,42'\,30''$ $\quad a - b = 42^0\,18'\,10''$ $\quad \frac{C}{2} = 19^0\,59'$

$\frac{a+b}{2} = 76^0\,21'\,15''$ $\quad \frac{a-b}{2} = 21^0\,9'\,5''$

$\log\cos\frac{a-b}{2} = 9.969\,709-10$ $\quad \log\sin\frac{a-b}{2} = 9{\cdot}557\,307-10$

$\log\cot\frac{C}{2} = 10{\cdot}439\,327-10$ $\quad \log\cot\frac{C}{2} = 10{\cdot}439\,327-10$

$20{\cdot}409\,036-20$ $\quad 19{\cdot}996\,634-20$

$\log\cos\frac{a+b}{2} = 9{\cdot}372\,764-10$ $\quad \log\sin\frac{a+b}{2} = 9{\cdot}987\,565-10$

$\log\text{tang}\frac{A+B}{2} = 11{\cdot}036\,272-10$ $\quad \log\text{tang}\frac{A-B}{2} = 10{\cdot}009\,069-10$

$\frac{A+B}{2} = 84^0\,44'\,39''$ $\quad \frac{A-B}{2} = 45^0\,35'\,54''$

$\frac{A-B}{2} = 45^0\,35'\,54''$

$A = 130^0\,20'\,33''$

$B = 39^0\,8'\,45''.$

$\log\text{tang}\,a = 10{\cdot}880\,246 - 10$ (n)

$\log\cos C = 9{\cdot}884\,466 - 10$

$\log\text{tang}\,w = 10{\cdot}764\,712 - 10$ (n)

$w = 99^0\,45'\,15''$

$b - w = -44^0\,33'\,5''$

$$\begin{aligned}
\log\cos a &= 9{\cdot}116\ 017 - 10 \text{ (n)}\\
\log\cos(b-w) &= 9{\cdot}852\ 859 - 10\\
&\overline{}\\
&18{\cdot}968\ 876 - 20 \text{ (n)}\\
\log\cos w &= 9{\cdot}228\ 967 - 10 \text{ (n)}\\
&\overline{}\\
\log\cos c &= 9{\cdot}739\ 909 - 10\\
c &= 56^0\,40'\,20''.
\end{aligned}$$

§. 469. IV. Zwei Seiten a, b und ein gegenüberliegender Winkel A seien gegeben; man soll c, B und C finden.

Für den Winkel B gibt das System A) den Ausdruck

$$\sin B = \frac{\sin A \sin b}{\sin a}.$$

Die Werthe von c und C geben dann die Gleichungen der Systeme D) und E

$$\operatorname{tang}\frac{c}{2} = \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}\cdot\operatorname{tang}\frac{a-b}{2},$$

$$\cot\frac{C}{2} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}}\cdot\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}.$$

Diese Aufgabe bietet, da B aus sin B zu bestimmen ist, nur in besonderen Fällen eine bestimmte Auflösung.

Für $A = 90^0$ und $a+b \gtreqless 180^0$ ist auch $A+B \gtreqless 180^0$, und somit $B \gtreqless 90^0$, also das Dreieck bestimmt.

Ist $A < 90^0$, und $a+b \gtreqless 180^0$, so ist auch $A+B \gtreqless 180^0$, und daher $B > 90^0$; der Werth von B ist also unzweideutig bestimmt. Wäre aber $a+b < 180^0$, also auch $A+B < 180^0$, so könnte B spitzig oder stumpf sein, außer wenn der stumpfe Winkel B so groß ist, daß $A+B \gtreqless 180^0$ wäre, was für $b \gtreqless a$ eintritt; in diesem Falle kann nur $B < 90^0$ sein.

Wenn endlich $A > 90^0$ ist, so hat man für $a+b \gtreqless 180^0$ auch $A+B \lesseqgtr 180^0$, daher $B < 90^0$; die Auflösung ist also in diesem Falle bestimmt. Für $a+b > 180^0$ dagegen hat man auch $A+B > 180^0$, also $B \gtrless 90^0$; das Dreieck ist somit unbestimmt, ausgenommen, wenn der spitzige Winkel B so klein wäre, daß $A+B \lesseqgtr 180^0$ ausfiele, welches immer eintritt, wenn $b \gtreqless a$ ist; in diesem Falle kann für B nur der stumpfe Winkel angenommen werden.

In diesem Auflösungsfalle ist demnach das sphärische Dreieck unbestimmt, wenn

$A < 90^0$, $a+b < 180^0$ und $a < b$ oder
$A > 90^0$, $a+b > 180^0$ und $a > b$ ist.

Nimmt man z. B. $a = 45^0$, $b = 25^0$, $A = 92^0\,1'\,10''$ an, so findet man durch ähnliche Rechnungen, wie im §. 467

$B = 36^0\,40'\,37''$, $c = 37^0\,46'\,20''$, $C = 60^0$:

§. 470. V. Es seien alle drei Seiten a, b, c gegeben; man suche die Winkel A, B, C.

Man wird sich hierzu der Formeln des Systems B) bedienen, welche jedoch vor ihrem Gebrauche noch eine bequemere Einrichtung erhalten müssen.

Um zuerst aus der Gleichung

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

für den Winkel A eine logarithmisch brauchbare Formel abzuleiten, hat man zunächst

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

daher

$$1 + \cos A = \frac{\sin b \sin c - \cos b \cos c + \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a - \cos (b + c)}{\sin b \sin c},$$

$$1 - \cos A = \frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\sin b \sin c}.$$

Bedenkt man nun, daß

$$1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2}, \quad 1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{A}{2}$$

und allgemein

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

ist, so gehen die letzteren Gleichungen über in

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{a + b + c}{2} \sin \frac{b + c - a}{2}}{\sin b \sin c},$$

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{a + b - c}{2} \sin \frac{a - b + c}{2}}{\sin b \sin c},$$

oder

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{a + b + c}{2} \sin \frac{b + c - a}{2}}{\sin b \sin c}},$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{a + b - c}{2} \sin \frac{a - b + c}{2}}{\sin b \sin c}},$$

Eben so findet man

$$\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{a + b + c}{2} \sin \frac{a - b + c}{2}}{\sin a \sin c}},$$

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{b + c - a}{2} \sin \frac{a + b - c}{2}}{\sin a \sin c}},$$

$$\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin a \sin b}},$$

$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{b+c-a}{2}\sin\frac{a-b+c}{2}}{\sin a \sin b}}.$$

Ist z. B. $a = 50^0\,54'\,32''$, $b = 37^0\,47'\,18''$, $c = 74^0\,51'\,50''$; so hat man

$$a + b + c = 163^0\,33'\,40'', \qquad \frac{a+b+c}{2} = 81^0\,46'\,50'',$$

$$-a + b + c = 61^0\,44'\,36'', \qquad \frac{-a+b+c}{2} = 30^0\,52'\,18'',$$

$$a - b + c = 87^0\,59'\,4'', \qquad \frac{a-b+c}{2} = 43^0\,59'\,32'',$$

$$a + b - c = 13^0\,50', \qquad \frac{a+b-c}{2} = 6^0\,55'.$$

Zur Berechnung von A hat man nun

$\log\sin\frac{a-b+c}{2}$	=	9·841 712 — 10
$\log\sin\frac{a+b-c}{2}$	=	9·080 719 — 10
		19·922 431 — 20
$\log\sin b$	=	9·787 281 — 10
$\log\sin c$	=	9·984 666 — 10
		19·150 484 — 20
$\log\sin\frac{A}{2}$	=	9·575 242 — 10
$\frac{A}{2}$	=	$22^0\,5'\,20''$
A	=	$44^0\,10'\,40'$.

Um den Winkel B zu erhalten, hat man

$\log\sin\frac{-a+b+c}{2}$	=	9·710 216 — 10
$\log\sin\frac{a+b-c}{2}$	=	9·080 719 — 10
		18·790 935 — 20
$\log\sin a$	=	9·889 942 — 10
$\log\sin c$	=	9·984 666 — 10
		18·916 327 — 20
$\log\sin\frac{B}{2}$	=	9·458 163 — 10
$\frac{B}{2}$	=	$16^0\,41'\,22''$
B	=	$33^0\,22'\,44''$.

Zur Bestimmung von C hat man

$$\log\sin\frac{-a+b+c}{2} = 9\,710\;\;216 - 10$$
$$\log\sin\frac{a-b+c}{2} = 9\,841\;\;712 - 10$$
$$19{\cdot}551\;\;928 - 20$$
$$\log\sin a = 9{\cdot}889\;\;942 - 10$$
$$\log\sin b = 9\,787\;\;281 - 10$$
$$19{\cdot}874\;\;705 - 20$$
$$\log\sin\frac{C}{2} = 9\,937\;\;352 - 10$$
$$\frac{C}{2} = 59^\circ\,57'\,34''$$
$$C = 119^\circ\,55'\;\;8''.$$

Ob die Formeln für den Sinus, oder jene für den Cosinus des halben Winkels anzuwenden sind, hängt von der Größe des gesuchten Winkels ab; und es gilt hier alles das, was wir über die Anwendbarkeit der im §. 426 entwickelten Formeln bemerkt haben.

§. 471. VI. Es seien die drei Winkel A, B, C gegeben, und die Seiten a, b, c zu suchen.

Die gesuchten Stücke ergeben sich aus den Formeln in C), welche aber vorerst eine für die logarithmische Berechnung geeignete Form erhalten müssen.

Um aus der Gleichung

$$\cos A = -\cos B\,\cos C + \sin B\,\sin C\,\cos a$$

für a eine logarithmisch brauchbare Formel abzuleiten, hat man

$$\cos a = \frac{\cos B\,\cos C + \cos A}{\sin B\,\sin C},$$

daher

$$1 + \cos a = \frac{\sin B\,\sin C + \cos B\,\cos C + \cos A}{\sin B\,\sin C} = \frac{\cos(B-C) + \cos A}{\sin B\,\sin C}$$
$$1 - \cos a = \frac{\sin B\,\sin C - \cos B\,\cos C - \cos A}{\sin B\,\sin C} = \frac{-\cos(B+C) - \cos A}{\sin B\,\sin C},$$

Nun ist

$$1 + \cos a = 2\cos^2\frac{a}{2},\quad 1 - \cos a = 2\sin^2\frac{a}{2},$$

und allgemein

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Die letztern zwei Gleichungen gehen somit in die folgenden über:

$$\cos^2\frac{a}{2} = \frac{\cos\frac{A+B-C}{2}\cos\frac{A-B+C}{2}}{\sin B\,\sin C},$$
$$\sin^2\frac{a}{2} = \frac{-\cos\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{B+C-A}{2}}{\sin B\,\sin C},$$

daher

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos\frac{A+B-C}{2}\cos\frac{A-B+C}{2}}{\sin B \sin C}},$$

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{B+C-A}{2}}{\sin B \sin C}}.$$

Eben so findet man

$$\cos\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\cos\frac{B+C-A}{2}\cos\frac{A+B-}{2}}{\sin A \sin C}},$$

$$\sin\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{A-B+C}{2}}{\sin A \sin C}},$$

$$\cos\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\cos\frac{B+C-A}{2}\cos\frac{A-B+C}{2}}{\sin A \sin B}},$$

$$\sin\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{A+B-C}{2}}{\text{isn A sin B}}}.$$

Nimmt man z. B. $A = 107^\circ\,48'$, $B = 52'\,30''$, $C = 38^\circ\,58'\,30''$ an, so findet man durch ähnliche Rechnung, wie in dem vorhergehenden Auflösungsfalle,

$$a = 70^\circ\,22'\,43'', \quad b = 51^\circ\,42'\,26'', \quad c = 38^\circ\,28'\,49''.$$

§. 472. Uebungsaufgaben.

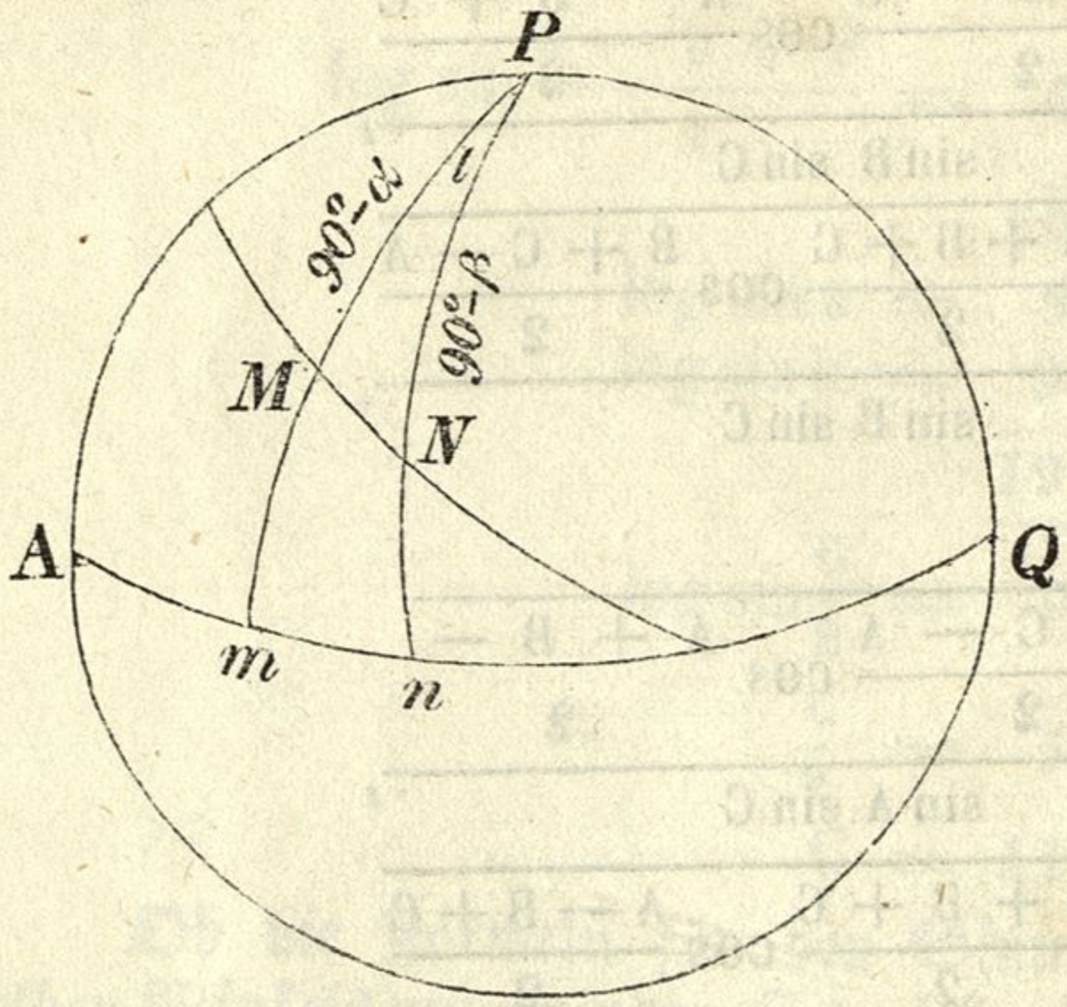
Ein schiefwinkliges sphärisches Dreieck aufzulösen, wenn gegeben sind

a) $a = 85^\circ\,13'\,58''$, $B = 64^\circ\,35'\,32''$, $C = 71^\circ\,17'\,53''$;
b) $b = 57^\circ\,35'\,30''$, $A = 88^\circ\,13'\,23''$, $B = 151^\circ\,1[\,'\,12''$;
c) $a = 48^\circ\,23'\,57''$, $A = 59^\circ\,17'\,44''$, $B = 75^\circ\,15'\,42''$;
d) $b = 83^\circ\,48'\,40''$, $c = 72^\circ\,73'\,13''$, $A = 108^\circ\,5'\,28''$;
e) $a = 102^\circ\,13'\,24''$, $c = 75^\circ\,51'\,21''$, $B = 65^\circ\,31'\,54''$;
f) $b = 126^\circ\,8'\,29''$, $c = 83^\circ\,38'\,7''$, $B = 95^\circ\,52'\,41''$;
g) $a = 137^\circ\,28'\,37''$, $b = 55^\circ\,57'\,8'''$ $c = 38^\circ\,17'\,35''$;
h) $A = 70^\circ\,18'\,35''$, $B = 48^\circ\,17'\,10''$, $C = 94^\circ\,40'\,27''$.

III. Verschiedene Anwendungen der sphärischen Trigonometrie.

§. 473. Aus der geographischen Breite zweier Oerter der Erdoberfläche und deren Längenunterschiede die Entfernung derselben zu bestimmen.

Fig. 293.



Es seien M und N (Fig. 293) die beiden Oerter, so ist ihre Entfernung MN ein Stück eines größten Kugelkreises. Es sei ferner P der Pol, AQ der Aequator, und APQA der erste Meridian, so ist mn der Längenunterschied der beiden Oerter, welcher dem Winkel MPN gleich ist; ferner sind Mm und Nn die Breiten dieser Oerter.

Setzt man $mn = l$, $Mm = \alpha$, $Nn = \beta$, so sind in dem sphärischen Dreiecke MNP zweiten Seiten $MP = 90^o - \alpha$ und $NP = 90^o - \beta$ sammt dem eingeschlossenen Winkel $MPN = l$ gegeben, und man kann daraus nach §. 468 die dritte Seite MN, nämlich die gesuchte Entfernung durch folgende Formel bestimmen:

$$\cos MN = \frac{\sin \alpha \, \sin (\beta + w)}{\cos w}$$

wozu die Hilfsgröße w aus der Gleichung

$$\text{tang } w = \cot \alpha \, \cos l$$

berechnet wird.

Man sucht daher zuerst w, daraus den Bogen MN, und verwandelt diesen in geographische Meilen, wovon 15 auf einen Grad gehen.

Damit Anfänger hierüber Beispiele durchführen können, geben wir die geographische Lage folgender Oerter an:

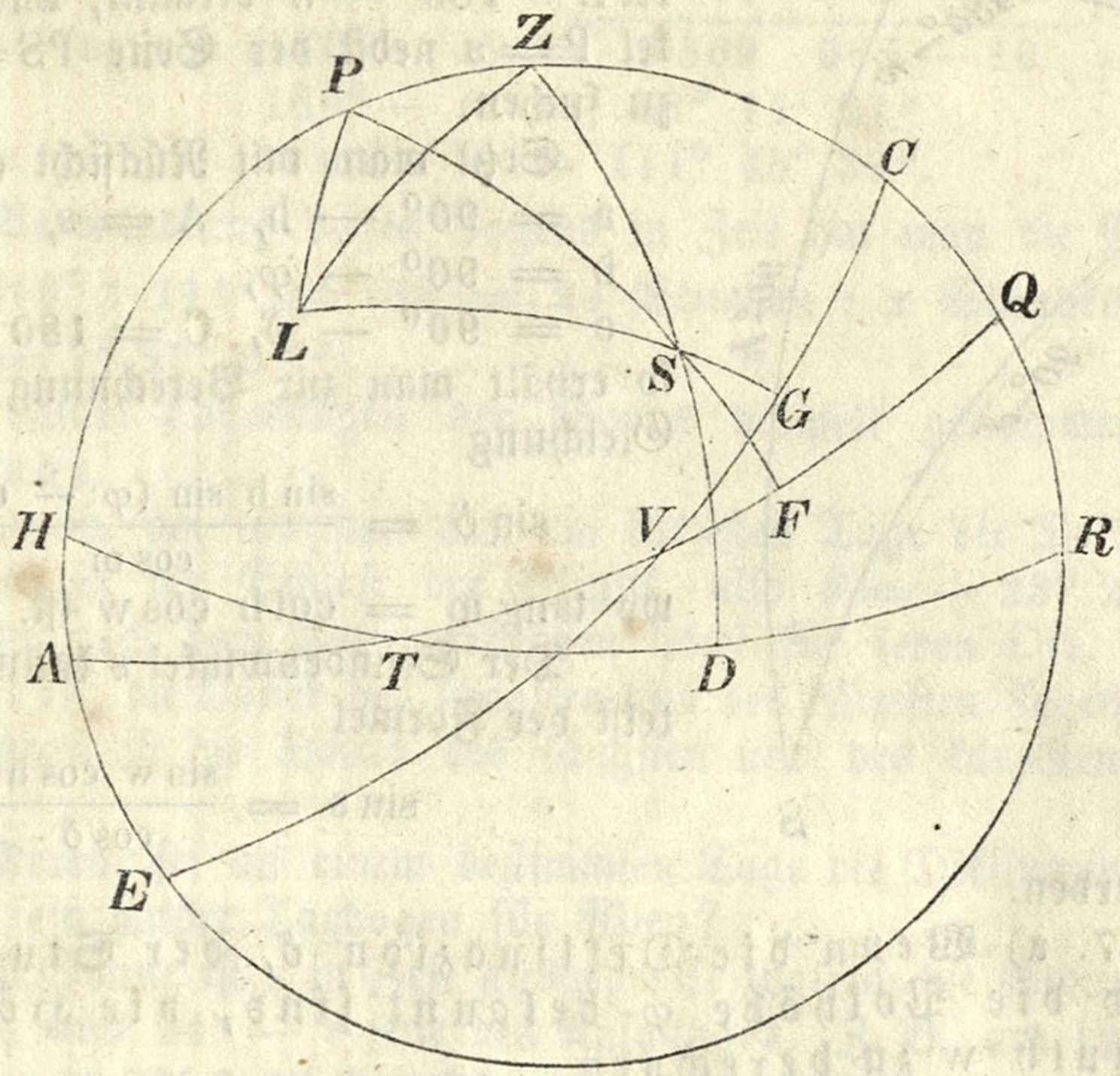
Wien . . .	48°	12′	35″	Breite,	34°	2′	36″ Länge.
Triest . . .	45°	38′	37″	"	31°	26′	12″ "
Berlin . . .	52°	30′	16″	"	31°	3′	30″ "
Paris . . .	48°	50′	14″	"	20°		"
Petersburg .	59°	56′	31″	"	47°	57′	57″ "
Konstantinopel	41°	1′	27″	"	46°	35′	15″ "

§. 474. Die geographische Breite und Länge dreier Oerter der Erde nebst dem Halbmesser der letzteren ist gegeben; man suche die Seiten, die Winkel und den Flächeninhalt des durch jene Oerter gelegten sphärischen Dreieckes.

Nach §. 473 erhält man zuerst die Seiten, nach §. 470 sodann die Winkel, und daraus nach §. 343 den Flächeninhalt des sphärischen Dreieckes.

§. 475. Es sei S (Fig. 294) irgend ein Gestirn, Z der obere Pol des Horizontes HTR oder das Zenith, P der obere Pol des Aequators

Fig. 294.



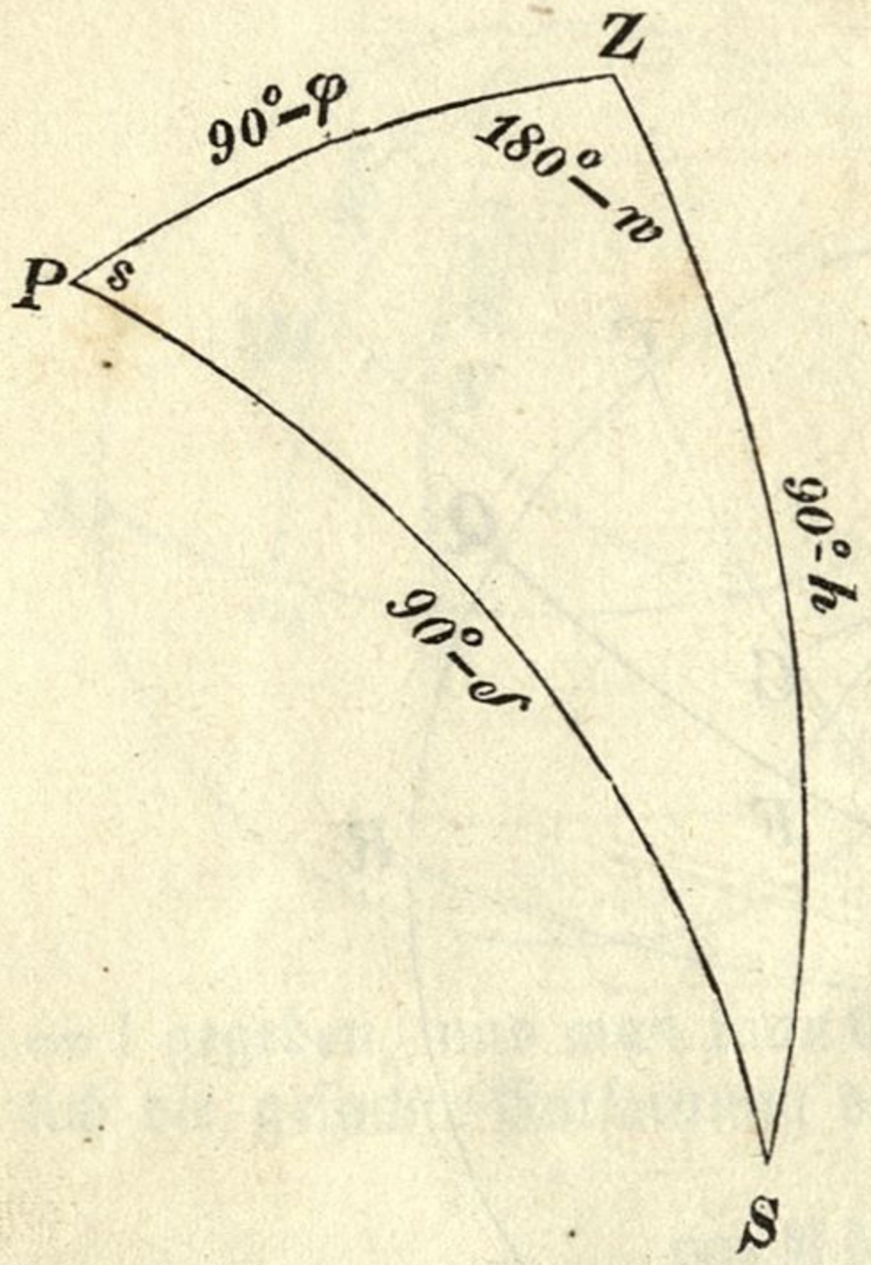
AVQ oder der Weltpol, L der obere Pol der Ekliptik EVC; ferner HZR der Meridian des Ortes der Erde, dessen Zenith in Z ist. Zieht man durch S und durch die Pole Z, P, L die größten Kreise ZSD, PSF, LSG, welche somit nach der Ordnung auf HR, AQ, EC senkrecht sind; so ist

SD = h die Höhe des Gestirns,
SZ = 90° — h die Zenithdistanz,
RD = DZR = w das Azimuth,
SF = δ die Deklinazion,
SP = 90° — δ die Poldistanz in Bezug auf den Aequator,
QF = QPF = s der Stundenwinkel,
VF = α die Rektaszension oder gerade Aufsteigung,
SG = β die Breite,
SL = 90° — β die Poldistanz in Beziehung auf die Ekliptik,
VG = λ die Länge des Gestirns.

Ferner ist V der Frühlingsnachtgleichenpunkt, HP = φ die Polhöhe des Ortes der Erde, dessen Zenith Z ist, und der Winkel QVC oder der Bogen LP = ε die Schiefe der Ekliptik.

§. 476. Die Höhe h und das Azimuth w eines Gestirns sind nebst der Polhöhe φ des Ortes gegeben; man suche den Stundenwinkel s und die Deklinazion δ.

Fig. 295.



In dem Dreiecke ZPS (Fig. 295) sind zwei Seiten $ZS = 90^\circ - h$ und $ZP = 90^\circ = \varphi$ sammt den eingeschlossenen Winkel $Z - 180^\circ - w$ bekannt, und der Winkel $P = s$ nebst der Seite $PS = 90^\circ - \delta$ zu suchen.

Setzt man mit Rücksicht auf §. 468

$a = 90^\circ - h$, $A = s$,
$b = 90^\circ - \varphi$,
$c = 90^\circ - \delta$, $C = 180 - w$,

so erhält man zur Berechnung von δ die Gleichung

$$\sin \delta = \frac{\sin h \sin (\varphi - m)}{\cos m},$$

wo $\text{tang}\, m = \cot h \cos w$ ist.

Der Stundenwinkel s kann dann mittelst der Formel

$$\sin s = \frac{\sin w \cos h}{\cos \delta}$$

bestimmt werden.

§. 477. a) Wenn die Deklinazion δ, der Stundenwinkel s und die Polhöhe φ bekannt sind, die Höhe h und das Azimuth w zu berechnen.

Die Auflösung ist der vorhergehenden ähnlich.

b) Wenn h, δ und φ gegeben sind, s zu finden.

Nach §. 470 findet man zur Bestimmung von s die Formeln:

$$\cos \frac{s}{2} = \sqrt{\frac{\sin\left(45^\circ + \frac{h + \varphi + \delta}{2}\right) \sin\left(45^\circ - \frac{\varphi + \delta - h}{2}\right)}{\cos \varphi \cos \delta}}$$

$$\sin \frac{s}{2} = \sqrt{\frac{\sin\left(45^\circ - \frac{h + \delta - \varphi}{2}\right) \sin\left(45^\circ + \frac{h + \varphi - \delta}{2}\right)}{\cos \varphi \cos \delta}}$$

§. 478. Die Zeit des Auf- und Unterganges eines Gestirns zu bestimmen.

Das letzt betrachtete sphärische Dreieck ZPS gibt mit Rücksicht auf die Formeln B) im §. 461 den Ausdruck:

$$\sin h = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos s.$$

Für den Auf- oder Untergang des Gestirns ist nun $h = 0$, daher

$$0 = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos s,$$

woraus

$$\cos s = - \text{tang}\, \delta \, \text{tang}\, \varphi, \text{ oder}$$
$$\cos (180^\circ - s) = \text{tang}\, \delta \, \text{tang}\, \varphi$$

folgt, worin s den Stundenwinkel des auf- oder untergehenden Sternes oder die Zeit ausdrückt, welche zwischen der Kulminazion und dem Auf- oder Untergange desselben enthalten ist, und welche der halbe Tagbogen des Gestirns genannt wird.

Wie groß ist für Wien der halbe Tagbogen der Sonne am 12. Mai, wo ihre Deklinazion $18^\circ\ 20'$ beträgt?

Die Polhöhe von Wien ist 48° 12′ 35″. Man hat daher

$$\cos(180^0 - s) = \text{tang}\, 18^0\, 20' \,.\, \text{tang}\, 48^0\, 12'\, 35''$$

$$\log \text{tang}\, 18^0\, 20' = 9{\cdot}520\;\; 305 - 10$$

$$\log \text{tang}\, 48^0\, 12'\, 35'' = 10{\cdot}048\;\; 761 - 10$$

$$\log \cos(180^0 - s) = 9{\cdot}569\;\; 066 - 10$$

$$180^0 - s = 68^0\, 14'\, 21''$$

$$\text{und}\quad s = 111^0\, 45'\, 39''.$$

Zur Verwandlung dieses Bogens in Zeit hat man die Proporzion

$$360^0 : 111^0\, 45'\, 39 = 24 \text{ Stunden} : x \text{ Stunden},$$

woraus $x = 7^h\, 27'\, 2{\cdot}6''$.

Der halbe Tagesbogen der Sonne doppelt genommen gibt die Tageslänge.

Da sowohl am längsten als am kürzesten Tage die Deklinazion der Sonne gleich ist der Schiefe der Ekliptik, also $\delta = +23^0\, 27'\, 30''$ ist, so kann man nach dem Vorhergehenden leicht für jeden Ort, dessen Polhöhe bekannt ist, die Dauer des längsten und des kürzesten Tages bestimmen.

Wie groß ist die Dauer des längsten und des kürzesten Tages für Wien?

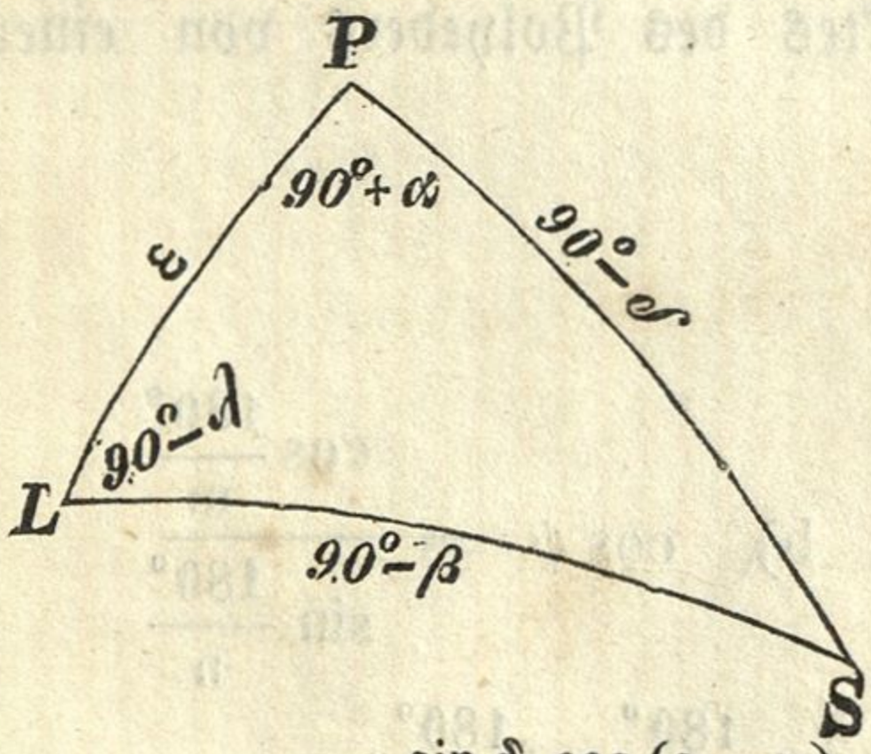
Für Merkur sei an einem bestimmten Tage die Deklinazion 21° 27′; wie groß ist sein halber Tagbogen für Wien?

Für die Sonne ist s in Zeit ausgedrückt zugleich die Sonnenzeit ihres Unterganges, und 24^h — s jene des Aufganges. Z. B. am 12. Mai geht die Sonne um $7^h\, 27'\, 2{\cdot}6''$ Abends unter, und um $16^h\, 32'\, 57{\cdot}4''$ oder um um $4^h\, 32'\, 57\, 4''$ Morgens auf.

Für andere Gestirne muß man zu der Zeit der Kulminazion, s in Zeit addiren, um die Zeit des Unterganges, und davon s subtrahiren, um die Zeit des Aufganges zu berechnen. Es sei z. B. für Merkur die Sonnenzeit seiner Kulminazion an dem Tage, für welchen oben der halbe Tagesbogen zu berechnen war, $0^h\, 37'\, 3''$; man suche die Sonnenzeit seines Unterganges und jene seines Aufganges.

§. 479. Es seien die Rektaszension α und die Deklinazion δ eines Gestirns nebst der Schiefe der Ekliptik ε gegeben; man suche die Länge λ und die Breite β.

Fig. 296.



In dem Dreiecke LPS (Fig. 296) sind zwei Seiten $LP = \varepsilon$ (§. 475) und $PS = 90^0 - \delta$ nebst dem eingeschlossenen Winkel $P = 90^0 + \alpha$ gegeben, und der Winkel $L = 90^0 - \lambda$ nebst der Seite $LS = 90^0 - \beta$ zu suchen. Aus den in §. 468 aufgestellten Auflösungsformeln folgt nun, wenn man darin $a = 90^0 - \delta$, $b = \varepsilon$, $c = 90^0 - \beta$, $A = 90^0 - \lambda$ und $C = 90^0 + \alpha$ setzt,

$$\sin\beta = \frac{\sin\delta\, \cos(\varepsilon - n)}{\cos n},$$

wo $\text{tang}\, n = -\cot\delta \sin\alpha$ ist.

Zur Bestimmung von λ hat man dann

$$\cos\lambda = \frac{\cos\alpha\,\cos\delta}{\cos\beta}.$$

§. 480. Auf ähnliche Art geschieht auch die Auflösung der umgekehrten Aufgabe:

Die Größen α und δ zu bestimmen, wenn λ, β und ε gegeben sind.

§. 481. Die in §§. 460 — 464 entwickelten Relazionen zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreieckes enthalten zugleich auch die Relazionen zwischen den Kantenwinkeln und zwischen den Neigungswinkeln der Ebenen eines dreiseitigen Körpereckes; man darf nur a, b, c als die drei Kantenwinkel, und A, B, C als die Neigungswinkel je zweier gegenüberstehenden Ebenen betrachten.

Diese Bemerkung im Auge, suche man folgende zwei sehr interessante Aufgaben zu lösen, denen wir bloß die Resultate beifügen.

1. Ein reguläres Polyeder wird von p nseitigen Polygonen, von denen je m in einer Ecke zusammenstoßen, und deren Seite a ist, eingeschlossen: man suche (§. 313 und Fig. 232)

a) den Winkel $AOL = \varphi$ zwischen zwei Geraden, welche vom Mittelpunkte des Polyeders zum Eckpunkte und zur Mitte einer Seite gezogen werden;

b) den Winkel $JOL = \psi$ zwischen zwei Geraden, welche zur Mitte einer Seitenkante und zum Mittelpunkte der dazu gehörigen Seitenfläche gezogen werden;

c) den Winkel $AOJ = \omega$ zwischen den zwei Geraden, welche vom Mittelpunkte des Polyeders zum Mittelpunkte einer Seitenfläche und zu einem Eckpunkte gezogen werden;

d) den halben Neigungswinkel $JLO = \frac{N}{2}$ zweier in einer Kante zusammenstoßender Seitenflächen;

e) den Halbmesser $OJ = r$ der dem Polyeder eingeschriebenen Kugel, d. i. die Entfernung des Mittelpunktes des Polyeders von einer Seitenfläche;

f) den Halbmesser $OA = R$ der dem Polyeder umschriebenen Kugel, d. i. die Entfernung des Mittelpunktes des Polyeders von einer Ecke;

g) die Oberfläche O;

h) den Körperinhalt K des Polyeders.

Man findet

$$\text{a)}\quad \cos\varphi = \frac{\cos\frac{180^\circ}{n}}{\sin\frac{180^\circ}{m}} \qquad \text{b)}\quad \cos\psi = \frac{\cos\frac{180^\circ}{m}}{\sin\frac{180^\circ}{n}}$$

$$\text{c)}\quad \cos\omega = \cos\varphi\,\cos\psi = \cot\frac{180^\circ}{m}\cot\frac{180^\circ}{n},$$

d) $\sin\frac{N}{2} = \cos\psi = \frac{\cos\frac{180^\circ}{m}}{\sin\frac{180^\circ}{n}}$,

e) $r = \frac{a}{2}\cot\frac{180^\circ}{n}\operatorname{tang}\frac{N}{2}$,

f) $R = \frac{a}{2}\operatorname{tang}\frac{180^\circ}{m}\operatorname{tang}\frac{N}{2}$,

g) $O = \frac{npa^2}{4}\cot\frac{180^\circ}{n}$,

h) $K = \frac{npa^3}{24}\cot\frac{180^\circ}{m}\cot\frac{180^\circ}{n}\operatorname{tang}\frac{N}{2}$.

2. Aus den drei zusammenstoßenden Kanten a, b, c eines schiefwinkligen Parallelepipeds und den Winkeln α, β, γ, welche jene Seiten mit einander bilden, den Inhalt P des Parallelepipeds zu bestimmen.

Man findet

$$P = 2abc\,.\,\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}.$$

Vierter Theil.

Anwendung der Algebra auf die Geometrie.

---

§. 482. Durch das Messen der Raumgrößen wird das Verhältniß derselben zu den gleichartigen Maßeinheiten gefunden. Daraus folgt, daß sich die Linien, Flächen und Körper durch Zahlen ausdrücken lassen, welche allgemein durch Buchstaben dargestellt werden. So ist z. B. $\sqrt{2}$ die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Kathete 1 ist; $3.4 = 12$ die Fläche eines Rechteckes, dessen Seiten 3 und 4 sind; $3 . 4 . 5 = 60$ der Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds, dessen zusammenstoßende Seiten 3, 4, 5 sind. Enthält die Seite eines Würfels a Längeneinheiten, so ist a^2 eine Seitenfläche und a^3 der Inhalt des Würfels. Sind a, b, c die Zahlen, welche anzeigen, wie oft die Längeneinheit in den zusammenstoßenden Seiten eines rechtwinkligen Parallelepipeds enthalten ist, so sind ab, ac, bc die Seitenflächen und abc der Inhalt eines solchen Körpers.

Lassen sich aber die Raumgrößen algebraisch darstellen, so ist es von selbst klar, daß man geometrische Größen in algebraische Rechnung ziehen und dadurch auch bei geometrischen Untersuchungen die Algebra anwenden kann. Die Trigonometrie selbst kann schon als eine solche Anwendung der Algebra betrachtet werden.

Wir werden uns in dem Nachfolgenden mit der Anwendung der Algebra auf die Lösung geometrischer Aufgaben, und was von besonderer Wichtigkeit ist, auf die Bestimmung der Lage der Raumgrößen beschäftigen. Diese letztere Anwendung bildet den Gegenstand der analytischen Geometrie, von welcher wir jedoch in dieser Abhandlung nur jenen Theil vornehmen werden, welcher sich mit der Bestimmung der Punkte und Linien in der Ebene befaßt.

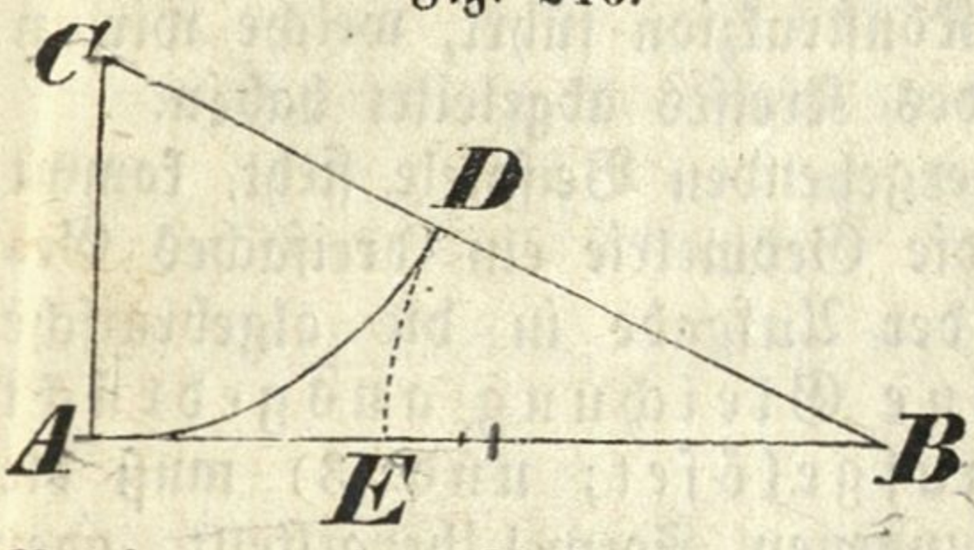
Erster Abschnitt.

Anwendung der Algebra auf die Lösung geometrischer Aufgaben.

§. 483. Die Anwendung der Algebra auf die Lösung geometrischer Aufgaben ist oft so leicht, daß es hierzu gar nicht besondere Regeln bedarf, wie wir dieses sogleich an folgendem Beispiele sehen wollen.

Es soll eine gegebene Gerade AB (Fig. 297) im äußern und mittlern Verhältnisse getheilt werden.

Fig. 246.



Um diese Aufgabe algebraisch aufzulösen, muß zuerst die Linie AB durch eine Zahl ausgedrückt werden. Es sei a die Zahl, welche anzeigt, wie viele Längeneinheiten die Gerade AB enthält; der größere Abschnitt enthalte x Längeneinheiten, so werden ihrer auf den kleinern Abschnitt $a - x$ kommen. Der Bedingung der Aufgabe zu Folge muß nun

$$a : x = x : a - x$$

oder

$$x^2 = a^2 - ax$$

sein, woraus

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$$

folgt. Da nun der gesuchte größere Abschnitt offenbar nur eine positive Größe sein kann, so ist von den beiden Werthen von x der zweite nicht brauchbar, und die Aufgabe führt auf die einzige Auflösung

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Führt man nun die in diesem Ausdrucke angezeigten Rechnungen aus, und trägt die für x gefundene Zahl Längeneinheiten von B bis E auf, so ist E der Punkt, in welchem AB im mittlern und äußern Verhältnisse getheilt wird.

Es ist übrigens gar nicht nöthig, jene Rechnungen wirklich auszuführen, was sich oft nur näherungsweise thun läßt; man darf nur die geometrische Bedeutung des für x erhaltenen Ausdruckes ins Auge fassen, um sofort den Punkt E durch eine ganz einfache geometrische Konstrukzion zu erhalten.

Die Größe $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$ bedeutet bekanntlich die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten a und $\frac{a}{2}$ sind. Errichtet man daher in A eine Senkrechte, trägt darauf $AC = \frac{a}{2}$ auf und zieht CB, so ist

$$CB = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a}{4}}.$$

Von dieser Größe ist, um den Werth von x zu erhalten, noch $\frac{a}{2}$ abzuziehen. Beschreibt man also aus C mit dem Halbmesser $CA = \frac{a}{2}$ den Bogen AD, so ist $CD = \frac{a}{2}$, daher

$$BD = CB - CD = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2} = x$$

Man darf nun bloß noch auf der Geraden AB das Stück $BE = BD$ abschneiden, so ist E der gesuchte Punkt. Man sieht, daß die algebraische Auflösung dieser Aufgabe auf dieselbe Konstrukzion führt, welche wir in der Planimetrie aus den Eigenschaften des Kreises abgeleitet haben.

§. 484. Wie man aus dem vorhergehenden Beispiele sieht, kommt bei der Anwendung der Algebra auf die Geometrie ein dreifaches Geschäft vor: 1) müssen die Bedingungen der Aufgabe in die algebraische Zeichensprache übersetzt, oder durch eine Gleichung ausgedrückt werden; 2) wird diese Gleichung aufgelöset; und 3) muß die geometrische Bedeutung der gefundenen Formel hergestellt, oder der für die Unbekannte erhaltene Ausdruck geometrisch konstruirt werden.

Für die Uebersetzung einer geometrischen Aufgabe in die algebraische Zeichensprache gibt es keine allgemeinen Regeln; sie ist das Werk der Urtheilskraft, und erfordert oft sehr viel Scharfsinn. Als einigermaßen leitende Vorschrift kann folgende von Newton aufgestellte Regel dienen:

Man betrachte die gegebene Aufgabe vorläufig als aufgelöst, und vergleiche alle darin vorkommenden Größen mit einander, ohne Rücksicht darauf, ob sie bekannt oder unbekannt sind; hierauf untersucht man, wie sie von einander abhängen, um diejenigen zu erkennen, welche als gegeben zur Bestimmung anderer dienen können, und stelle aus dieser erkannten Abhängigkeit die Gleichung her.

Hat man aus den gegebenen Bedingungen einer Aufgabe dieselbe als Gleichung dargestellt, so wird diese nach den Regeln der Algebra aufgelöst, und dann der erhaltene Ausdruck geometrisch konstruirt.

Ehe wir jedoch über die geometrische Konstrukzion der algebraischen Ausdrücke handeln, wird es nöthig sein, Einiges über die Gleichartigkeit derselben voraus zu schicken.

I. Gleichartigkeit der Ausdrücke.

§. 485. Wir haben oben bemerkt, daß die Größen a, b, c die Länge einer Linie, ab, ac, a^2 eine Fläche, abc, b^2c, a^3 einen Körperinhalt bedeuten. Faßt man bei diesen Größen die Potenzexponenten der Buchstaben ins Auge, so sieht man sogleich, daß die Summe der Exponenten in einem solchen Ausdrucke bei der Linie 1, bei der Fläche 2, bei dem Körper 3 ist.

Die Summe der Exponenten eines einfachen algebraischen Ausdruckes wird dessen Dimension genannt; dabei werden aber die Exponenten der darin etwa vorkommenden besondern Zahlen nicht berücksichtiget. Bei einem Bruche bestimmt man die Dimension, wenn man von der Dimension des Zählers jene des Nenners abzieht. Die Dimension einer Potenzgröße wird gefunden, wenn man die Dimension der Wurzel mit dem Potenzexponenten multiplizirt; und die Dimension einer Wurzelgröße, wenn man die Dimension der Größe unter dem Wurzelzeichen durch den Wurzelexponenten dividirt.

Diesen Erklärungen zu Folge haben die Größen

$$, \quad 2b, \quad \frac{ab}{c}, \quad \frac{a^3}{bc}, \quad \frac{3ax^2}{4bc}$$

eine Dimension; die Größen

$$ab, \quad 3bc, \quad \pi a^2, \quad \frac{5abc}{m}, \quad \frac{x^3}{a}, \quad \left(\frac{ab}{p}\right)^2, \quad \sqrt{\frac{ax^3y}{b}}$$

zwei Dimensionen; endlich die Ausdrücke

$$abc, \quad ac^2, \quad a^3, \quad \frac{3a^2b^2}{c}, \quad \left(\frac{2a^2x}{3by}\right)^3, \quad \sqrt{\frac{a^2b^3c^3}{py}}$$

drei Dimensionen.

Mehr als drei Dimensionen können geometrische Größen nicht haben; wohl aber kann dieses bei rein algebraischen Ausdrücken der Fall sein. So ist z. B. die Größe $3a^3bx^2$ ein Ausdruck von 6 Dimensionen.

§. 486. Eine Gleichung oder ein Ausdruck heißt in Beziehung auf gewisse Buchstaben gleichartig oder homogen, wenn alle Glieder in Bezug auf diese Buchstaben gleich viele Dimensionen haben. So ist die Gleichung $x^2 - 2ax + a\sqrt{bc} = \frac{bx^2}{a} - cx$ in Beziehung auf die Buchstaben a, b, c, x gleichartig, weil jedes Glied zwei Dimensionen hat.

Wenn man die Linien durch Buchstaben a, b, c darstellt, und es wird keine besondere Linie als Einheit angenommen, so ist die Gleichung, auf welche man durch die Anwendung der Algebra auf die Geometrie geführt wird, immer in Beziehung auf diese Buchstaben gleichartig.

Diese Gleichartigkeit der Gleichung findet nicht mehr Statt, sobald eine gegebene Linie als Einheit angenommen wird, denn dann verschwinden die Faktoren und Theiler, welche dieser Linie gleich sind. So z. B. erhält man statt der gleichartigen Gleichungen $x = \frac{abc}{m^2}$, $x = \frac{ma^2}{b^2}$, wenn m als Einheit angenommen wird, die ungleichartigen Gleichungen $x = abc$, $x = \frac{a^2}{b^2}$.

§ 487. Es ist übrigens immer leicht, die Gleichartigkeit eines Ausdruckes herzustellen; man darf nur die Längeneinheit durch einen Buchstaben α ausdrücken, und diesen in der nöthigen Potenz in den ungleichartigen Ausdruck als Faktor oder als Theiler einführen.

Um z. B. den Ausduck $x = ab$ gleichartig zu machen, dividire man ab durch den Buchstaben α, welcher als Linieneinheit zu Grunde gelegt wird; man erhält $x = \frac{ab}{\alpha}$. Die Buchstaben x, a, b haben jedoch nicht mehr die frühere Bedeutung; denn früher nahm man $\alpha = 1$ an, so daß x, a, b die Maße der Linien bedeuteten, während jetzt die Einheit α ganz unbestimmt bleibt, so daß man sich statt x, a, b die Größen $\frac{x}{\alpha}$, $\frac{a}{\alpha}$, $\frac{b}{\alpha}$ denken muß, wodurch der frühere ungleichartige Ausdruck $x = ab$ in jenen $\frac{x}{\alpha} = \frac{a}{\alpha} \cdot \frac{b}{\alpha}$ oder $x = \frac{ab}{\alpha}$ übergehet, welcher gleichartig ist

Wäre der Ausdruck $x = \frac{a - b^2}{cm}$ gleichartig zu machen, so bedenke man, daß x eine Linie vorstellt, somit eine Dimension hat; damit nun der Bruch $\frac{a - b^2}{cm}$ auch eine Dimension erhalte, muß man, da der Nenner zwei Dimensionen hat, dem Zähler drei Dimensionen geben, indem man a mit α^2, und b^2 mit α multiplizirt, wo α die noch unbestimmte Längeneinheit vorstellt; dadurch erhält man

$$x = \frac{a\alpha^2 - b^2\alpha}{cm}.$$

Eigentlich haben wir bei dieser Umformung nichts anderes gethan, als statt x, a, b, c, m die Größen

$$\frac{x}{\alpha}, \frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\alpha}, \frac{c}{\alpha}, \frac{m}{\alpha}$$

eingeführt, denn durch diese Substituzion geht der Ausdruck

$$x = \frac{a - b^2}{cm} \text{ über in } \frac{x}{\alpha} = \frac{\frac{a}{\alpha} - \frac{b^2}{\alpha^2}}{\frac{c}{\alpha} \cdot \frac{m}{\alpha}} \text{ oder } x = \frac{a\alpha^2 - b^2\alpha}{cm}.$$

II. Konstrukzion der Gleichungen des ersten und zweiten Grades.

§. 488. Eine Gleichung geometrisch konstruiren heißt den für die Unbekannte erhaltenen algebraischen Ausdruck mittelst der Durchschnitte geometrischer Linien darstellen. Wir wollen uns hier auf die bestimmten Gleichungen des ersten und zweiten Grades beschränken, und überdieß nur gleichartige Gleichungen in Betrachtung ziehen, weil sich die andern auf solche zurückführen lassen.

1. Gleichungen des ersten Grades.

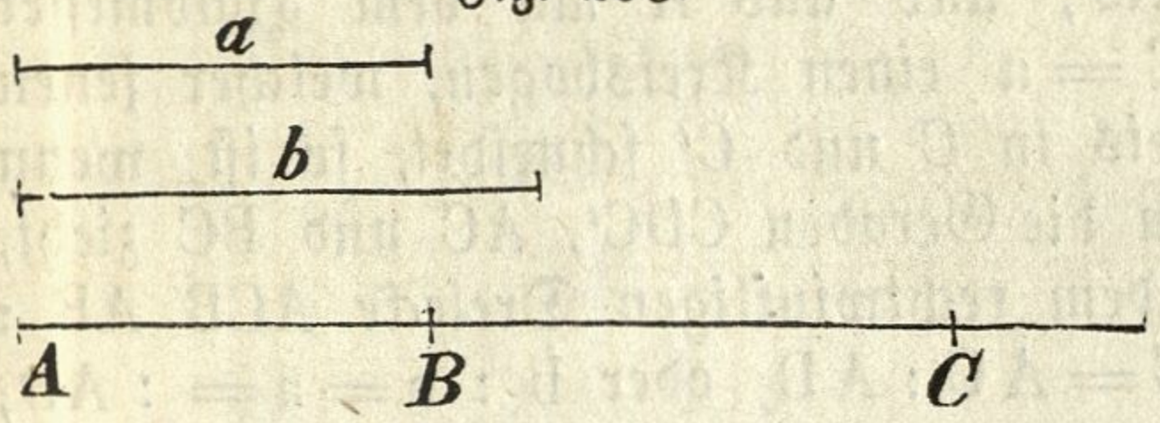
§. 489. Bei diesen wird der Werth der Unbekannten durch lauter Durchschnitte von geraden Linien gefunden.

Jede gleichartige Gleichung des ersten Grades läßt sich auf eine der folgenden Grundformen zurückführen:

$$x = a + b,\quad x = a - b,\quad x = \frac{ab}{c},$$

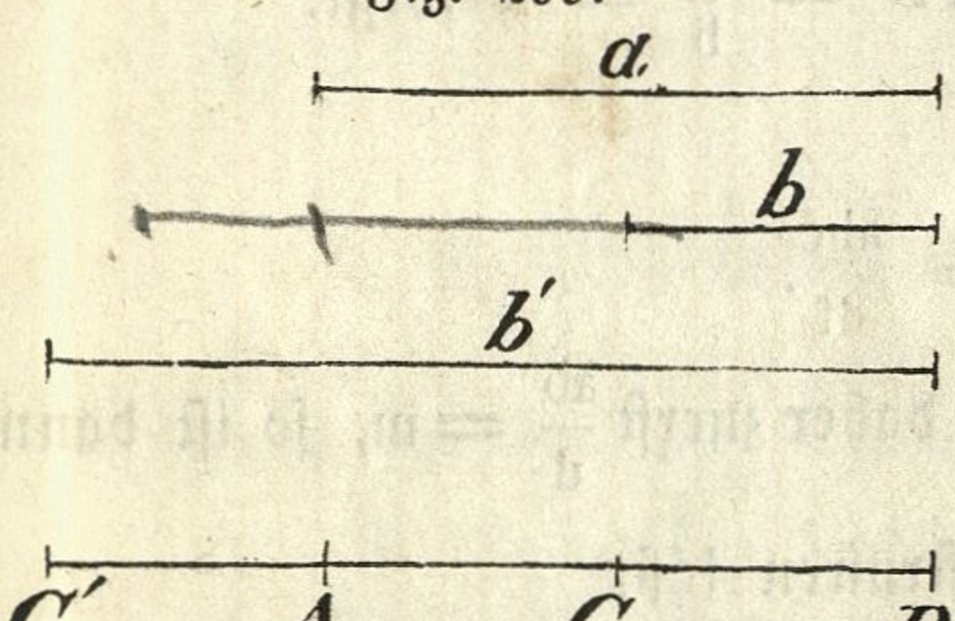
die wir der Reihe nach konstruiren wollen.

Fig. 298.



1. Um die Gleichung $x = a + b$ zu konstruiren, nehme man auf einer unbestimmten Geraden AX (Fig. 298) das Stück $AB = a$, $BC = b$; so ist $AC = AB + BC = a + b = x$.

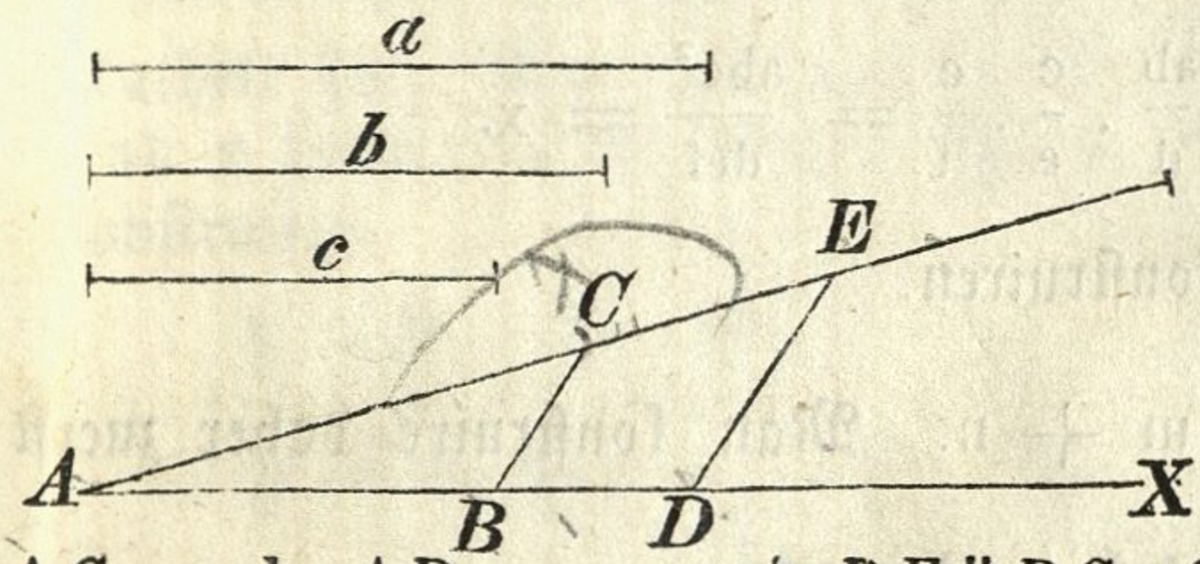
Fig. 299.



2. Um die Gleichung $x = a - b$ zu konstruiren, nehme man (Fig. 299) in einer Geraden einen beliebigen Punkt A an, schneide $AB = a$ ab, und trage von B gegen A zurück $BC = b$ auf, so ist $AC = AB - BC = a - b = x$. Der Unterschied AC erscheint hier auf der rechten Seite des Punktes A.

Wäre aber $x = a - b'$, wo $b' > a$ ist, so würde x negativ sein. Um eine solche negative Differenz zu konstruiren, schneidet man ebenfalls $AB = a$ ab, und trägt von B gegen A zurück $BC' = b'$ auf, so ist $AC' = a - b' = x$ die gesuchte Differenz, welche nun auf der linken Seite des Punktes A liegt.

Fig. 300.



3. Soll die Gleichung $x = \frac{ab}{c}$ konstruirt werden, so darf man, da aus dieser Gleichung die Proporzion $c : b = a : x$ folgt, nur zu den Linien c, b, a die vierte Proporzionirte suchen.

Ist daher (Fig. 300) $AB = c$, $AC = b$, $AD = a$, und $DE \parallel BC$, so hat man

$$AB : AC = AD : AE \text{ oder } c : b = a : AE,$$

somit $AE = \frac{ab}{c} = x$.

§. 490. Beispiele.

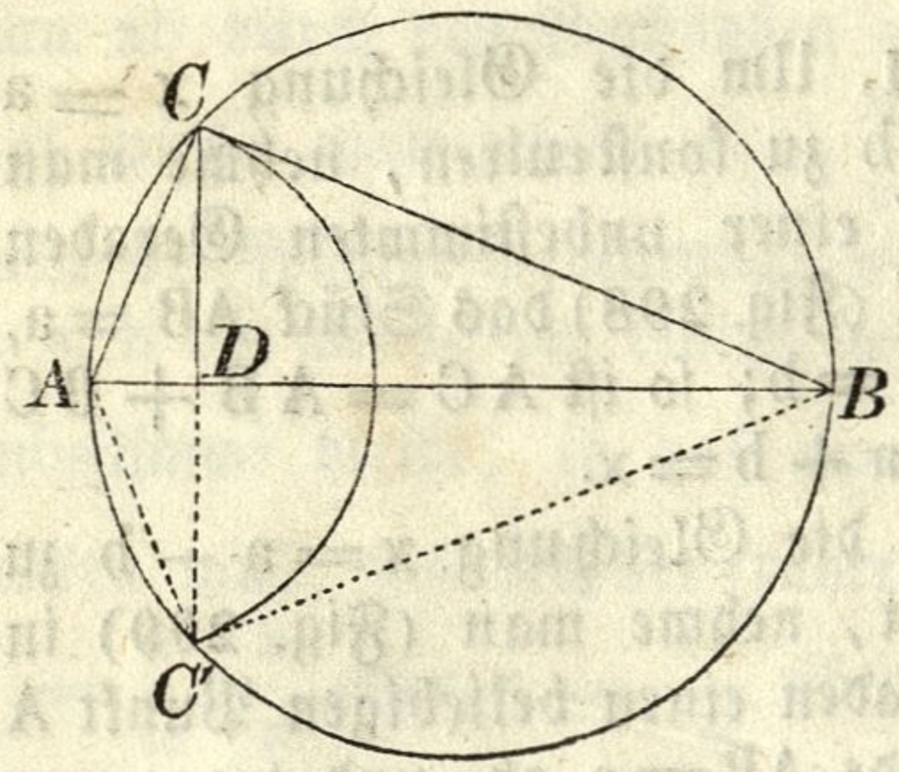
1) Es soll die Gleichung $x = a + b - c + d - e$ konstruirt werden.

Man hat $x = a + b + d - (c + e)$. Konstruirt man daher zuerst $a + b + d = A$, ferner $c + e = B$, und endlich $A - B = x$, so ist die Aufgabe gelöset.

2) Es soll die Gleichung $x = \frac{a^2}{b}$ konstruirt werden.

Aus dieser Gleichung folgt $b : a = a : x$. Man darf daher nur zu b, a, a die vierte Proporzionallinie, oder was dasselbe ist, zu b, a die dritte stetige Proporzionale bestimmen.

Fig. 301.



Für b > a kann auch die folgende Konstrukzion sehr vortheilhaft angewendet werden. Man mache (Fig. 301) AB = b, beschreibe über AB als Durchmesser einen Kreis, und aus A mit dem Halbmesser AC = a einen Kreisbogen, welcher jenen Kreis in C und C' schneidet, so ist, wenn man die Geraden CDC', AC und BC zieht, in dem rechtwinkligen Dreiecke ACB AB : AC = AC : AD, oder b : a = a = : AD, woraus $AD = \frac{a^2}{b} = x$ folgt.

3) Man konstruire die Gleichung $x = \frac{abc}{df}$.

Es ist $x = \frac{ab}{d} \cdot \frac{c}{f}$. Man konstruire daher zuerst $\frac{ab}{d} = m$, so ist dann $x = \frac{mc}{f}$, welcher Ausdruck sich nun konstruiren läßt.

4) Es soll $x = \frac{abc^2}{def}$ konstruirt werden.

Man hat $x = \frac{ab}{d} \cdot \frac{c}{e} \cdot \frac{c}{f}$. Konstruirt man daher zuerst $\frac{ab}{d} = m$, $\frac{mc}{e} = n$, endlich $\frac{nc}{f}$, so ist diese letztere Linie x selbst; denn

$$\frac{nc}{f} = \frac{mc}{c} \cdot \frac{c}{f} = \frac{ab}{d} \cdot \frac{c}{e} \cdot \frac{c}{f} = \frac{abc^2}{def} = x.$$

5) Man soll $x = \frac{ab + cd}{e}$ konstruiren.

Es ist $x = \frac{ab}{e} + \frac{cd}{e} = m + n$. Man konstruire daher zuerst $\frac{ab}{e} = m$, dann $\frac{cd}{e} = n$, und endlich $m + n = x$.

6) Um den Ausdruck $x = \frac{ab}{c - d}$ zu konstruiren, suche man zuerst $c - d = m$, und konstruire dann $x = \frac{ab}{m}$.

7) Sei die Gleichung $x = \frac{a^2 - b^2}{c + d}$ zu konstruiren.

Man hat $x = \frac{(a + b)(a - b)}{c + d}$. Es wird also zuerst $a + b = m$, dann $a - b = n$, ferner $c + d = p$, und daraus $x = \frac{mn}{p}$ konstruirt.

8) Hat man $x = \frac{a^3 - bc^2}{de + fg}$ zu konstruiren, so setze man

$$de + fg = d\left(e + \frac{fg}{d}\right),$$

konstruire $\frac{fg}{d} = m$, dann $e + m = n$, und endlich $x = \frac{a^3 - bc^2}{dn}$.

9) Man konstruire die Gleichung $x = \frac{a^3 - 2a^2b + 3ab^2 - c^3}{2a^2 + ab - c^2}$.

Es ist $x = \frac{a^2\left(a - 2b + \frac{3b^2}{a} - \frac{c^3}{a^2}\right)}{a\left(2a + b - \frac{c^2}{a}\right)} = \frac{a\left(a - 2b + \frac{3b^2}{a} - \frac{c^3}{a^2}\right)}{2a + b - \frac{c^2}{a}}$,

Man konstruire nun die Linien $\frac{3b^2}{a} = m$, $\frac{c^3}{a^2} = n$, $\frac{c^2}{a} = p$, ferner $a - 2b + m - n = q$, $2a + b - p = r$, und endlich $x = \frac{aq}{r}$.

2. Gleichungen des zweiten Grades.

§. 491. Die reinen quadratischen Gleichungen lassen sich immer auf eine der folgenden Formen bringen:

$$x = \sqrt{ab}, \quad x = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad x = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

1. In der Gleichung $x = \sqrt{ab}$ bedeutet x die mittlere geometrische Proporzionallinie zwischen a und b, und kann als solche konstruirt werden.

2. Der Ausdruck $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten a und b sind.

3. Der dritte Ausdruck $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ stellt die Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes vor, das a zur Hypotenuse und b zur andern Kathete hat. Man kann auch $\sqrt{a^2 - b^2}$ in $\sqrt{(a+b)(a-b)}$ zerlegen, und x somit als die mittlere Proporzionale zwischen $a + b$ und $a - b$ konstruiren.

§. 492. Beispiele.

1) Man konstruire die Gleichung $x = \sqrt{\frac{a^2 b}{c}}$.

Es ist $x = \sqrt{\frac{a^2}{c}} \cdot b = \sqrt{mb}$, wenn $\frac{a^2}{c} = m$ gesetzt wird.

Man konstruire also zuerst eine Linie $m = \frac{a^2}{c}$ und dann $x = \sqrt{mb}$.

2) Sei $x = \sqrt{a^2 + bc}$ zu konstruiren.

Man konstruire vorläufig $m = \sqrt{bc}$, so ist $bc = m^2$, und $x = \sqrt{a^2 + m^2}$, welcher Ausdruck nun leicht zu konstruiren ist.

3) Man konstruire $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + e^2}$.

Setzt man $a^2 + b^2 = m^2$, $m^2 - c^2 = n^2$, $n^2 - d^2 = p^2$, und konstruirt $m = \sqrt{a^2 + b^2}$, $n = \sqrt{m^2 - c^2}$, $p = \sqrt{n^2 - d^2}$, so braucht man zuletzt nur noch $x = \sqrt{p^2 + e^2}$ zu konstruiren.

4) Es soll die Gleichung $x = \sqrt{ab + cd - ef}$ konstruirt werden.

Man konstruire vorläufig $m = \sqrt{ab}$, $n = \sqrt{cd}$, $p = \sqrt{ef}$; so ist dann $x = \sqrt{m^2 + n^2 - p^2}$, wovon die Konstrukzion bekannt ist.

5) Um die Gleichung $x = \sqrt{\frac{a^2b + c^2d}{f - g}}$ zu konstruiren, suche man zuerst die Linie $\sqrt{\frac{a^2b}{f-g}} = m$, dann $\sqrt{\frac{c^2d}{f-g}} = n$, und konstruire daraus $x = \sqrt{m^2 + n^2}$.

§. 493. Jede vollständige Gleichung des zweiten Grades läßt sich unter die Form

$$x^2 \pm ax = \pm p^2$$

bringen. Führt man, um diese Gleichung homogen zu machen, statt p die Größe $p\alpha = b^2$ ein, so hat man folgende vier Formen:

$$x^2 - ax = b^2 \ldots 1)$$
$$x^2 + ax = b^2 \ldots 2)$$
$$x^2 - ax = -b^2 \ldots 3)$$
$$x^2 + ax = -b^2 \ldots 4)$$

Die allgemeine Form, unter welcher die beiden Wurzeln jeder dieser vier Gleichungen enthalten sind, ist

$$x = \pm \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} \pm b^2},$$

aus welchem Ausdrucke ersichtlich ist, daß sich die Wurzeln einer vollständigen quadratrischen Gleichung schon nach den vorhergehenden Angaben konstruiren lassen; man braucht nur

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2} = m \quad \text{oder} \quad \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2} = n$$

zu konstruiren, und dann

$$x = \pm \frac{a}{2} \pm m \quad \text{oder} \quad x = \pm \frac{a}{2} \pm n$$

zu suchen.

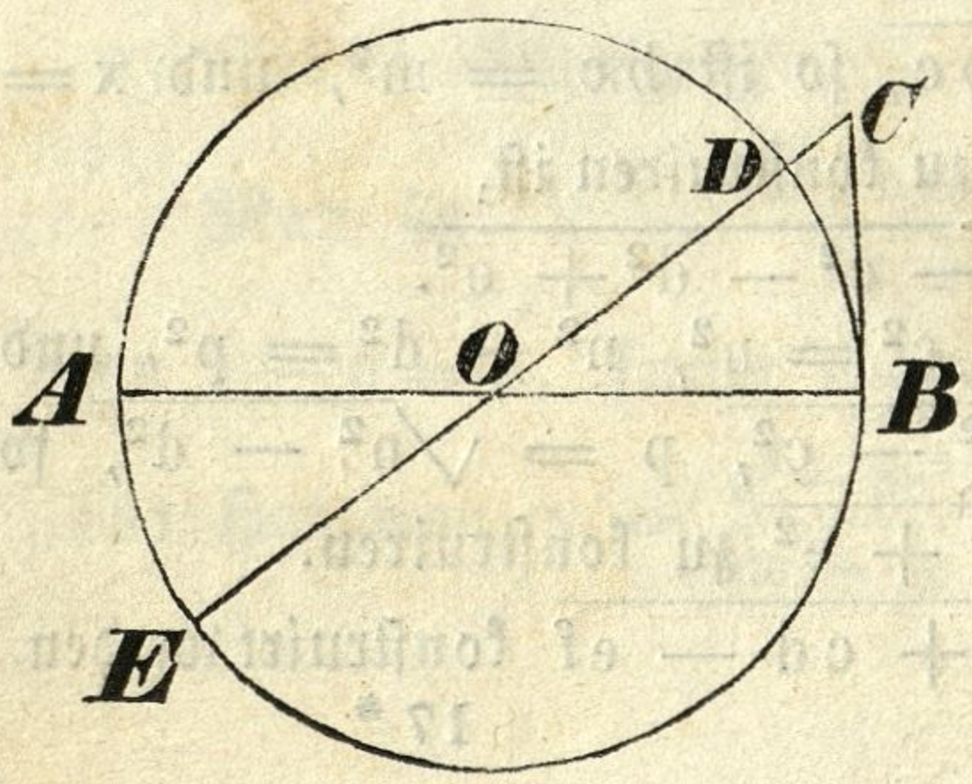
§. 494. Viel einfacher lassen sich jedoch die beiden Wurzeln jeder der vier obigen Gleichungen durch eine einzige Konstrukzion erhalten.

1) Aus der Gleichung $x^2 - ax = b^2$ folgt

$$x(x - a) = b^2.$$

Man sieht nun, daß x und $x - a$ zwei Linien sind, deren Differenz a ist, und deren Rechteck dem Quadrate b^2 gleich kommt. Beschreibt man daher (Fig. 302) über dem Durchmesser $AB = a$ einen Kreis, zieht die Tangente $BC = b$, und von C aus durch den Mittelpunkt O die Sekante CDE; so sind CE und $-CD$ die beiden Werthe von x. Denn wenn jeder derselben in die Gleichung $x(x - a) = b^2$ anstatt x gesetzt wird, so wird der Gleichung Genüge geleistet, weil man in beiden Fällen zu der Gleichung $CD \cdot CE = BC^2$ geführt wird, deren Richtigkeit in der Lehre vom Kreise bewiesen wurde.

Fig. 302.



2) Die Gleichung $x^2 + ax = b^2$ geht aus der frühern $x^2 - ax = b^2$ hervor, wenn man in dieser $-x$ statt x setzt; sie hat also die Wurzeln der frühern Gleichung mit entgegengesetzten Vorzeichen genommen; die Werthe von x sind also

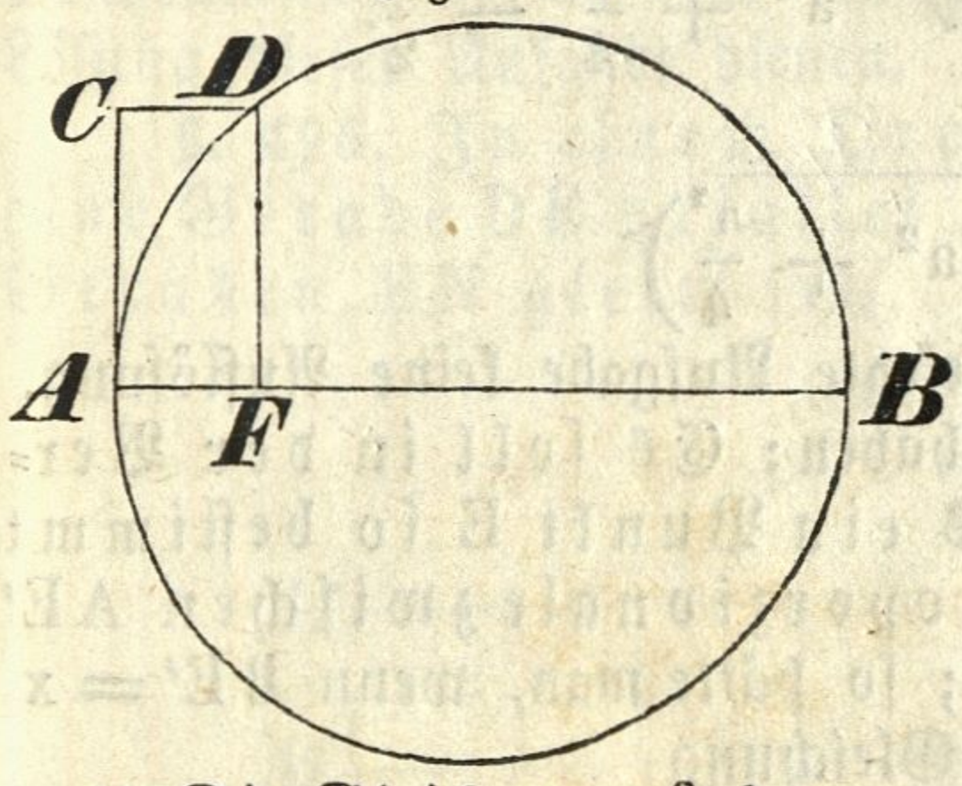
$$x = CD, \quad x = -CE.$$

3) Die Gleichung $x^2 - ax = -b^2$, wenn sie auf die Form

$$x(a - x) = b^2$$

gebracht wird, zeigt, daß x und $a - x$ zwei Linien sind, deren Summe gleich einer gegebenen Länge a, und deren Rechteck einem gegebenen Quadrate gleich ist.

Fig. 303.



Beschreibt man daher (Fig. 303) über dem Durchmesser $AB = a$ einen Kreis; errichtet auf AB die Senkrechte $AC = b$, zieht $CD \parallel AB$ und $DF \perp AB$; so sind die Abschnitte AF und BF die Werthe von x. Denn sowohl AF als BF, in die Gleichung $x(a - x) = b^2$ statt x substituirt, leistet dieser Genüge, indem man in beiden Fällen auf das Resultat $AF \cdot BF = DF^2$ geführt wird, dessen Richtigkeit in der Lehre vom Kreise bewiesen wurde.

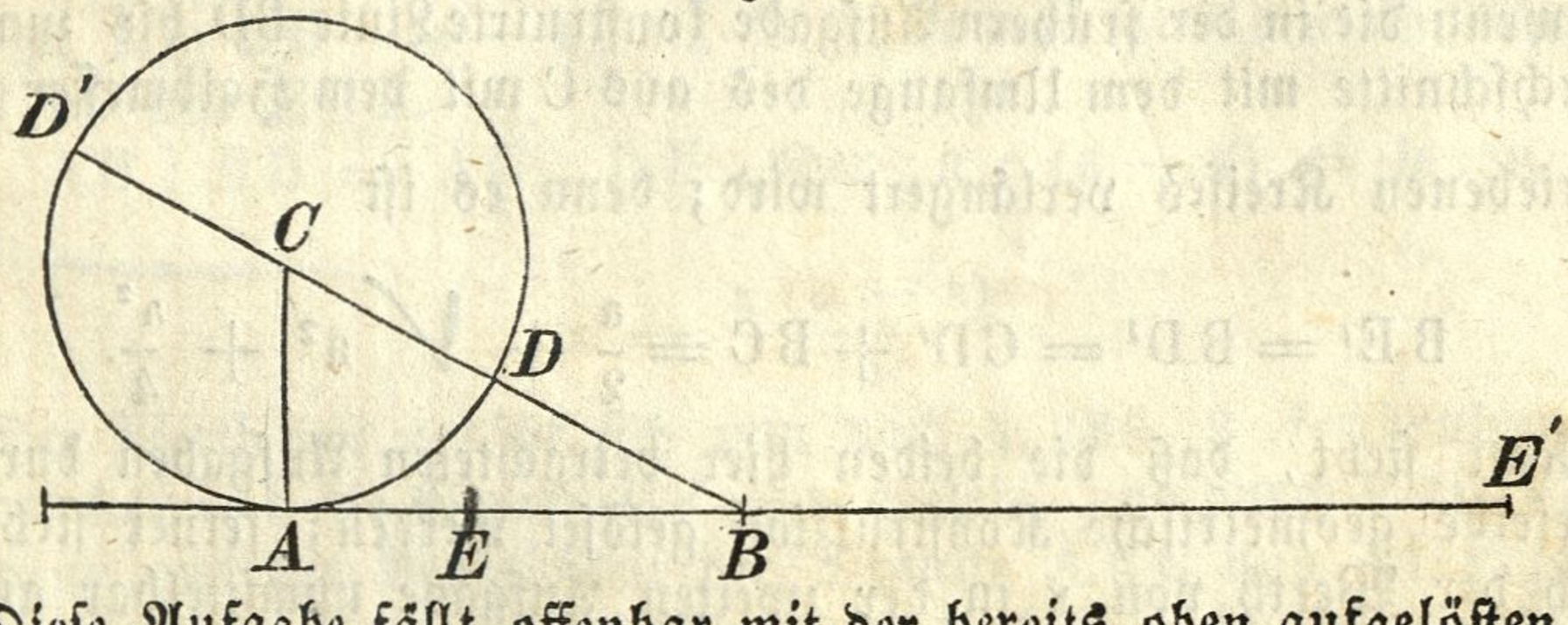
4) Die Gleichung $x^2 + ax = -b^2$ hat die Wurzeln der frühern $x^2 - ax = -b^2$ mit entgegengesetzten Vorzeichen genommen; somit ist

$$x = -AF \text{ oder } x = -BF.$$

III. Algebraische Auflösung von geometrischen Aufgaben.

§. 495. **Eine Gerade AB (Fig 304) im Punkte E so in zwei Theile zu theilen, daß BE die mittlere Proporzionale zwischen AB und AE ist.**

Fig. 304.



Diese Aufgabe fällt offenbar mit der bereits oben aufgelösten zusammen: eine Gerade AB im Punkte E im äußern und mittlern Verhältniß zu theilen. Wir wollen sie übrigens hier noch einmal vornehmen, um namentlich die Bedeutung der negativen Werthe der Unbekannten nachzuweisen. Macht man $AB = a$, $BE = x$, so ist $AE = a - x$, und man hat zur Lösung der Aufgabe die Gleichung

$$x^2 = a(a - x),$$

woraus

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$$ folgt.

Der erste Werth von x ist positiv und kleiner als a; er bestimmt also wirklich einen zwischen A und B liegenden Punkt E, wie es die Aufgabe verlangt. Er wird, wie schon oben gezeigt wurde, erhalten, wenn man in A eine Senkrechte auf AB errichtet, davon $AC = \frac{a}{2}$ abschneidet, die BC zieht, ferner aus C mit dem Halbmesser CA einen Kreis beschreibt, welcher die BC in D schneidet und $BE = BD$ macht; denn es ist

$$BE = BD = BC - CD = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}.$$

Der zweite Werth

$$x = -\left(\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}\right)$$

ist negativ, und gibt daher für die vorgelegte Aufgabe keine Auflösung.

Würde man die Aufgabe so gestellt haben: Es soll in der Verlängerung der AB über B hinaus ein Punkt E so bestimmt werden, daß BE' die mittlere Proporzionale zwischen AE' und der gegebenen Linie AB sei; so hätte man, wenn $BE' = x$, daher $AE' = a + x$ gesetzt wird, die Gleichung

$$x^2 = a\,(a + x),$$

woraus

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$$ folgt.

Der zweite dieser Werthe ist negativ und eignet sich daher nicht für diese Aufgabe. Der erste Werth

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$$

dagegen ist positiv und stellt die Linie $BE' = BD'$ dar, welche letztere man erhält, wenn die in der frühern Aufgabe konstruirte Linie BD bis zum zweiten Durchschnitte mit dem Umfange des aus C mit dem Halbmesser $CA = \frac{a}{2}$ beschriebenen Kreises verlängert wird; denn es ist

$$BE' = BD' = CD' + BC = \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Man sieht, daß die beiden hier betrachteten Aufgaben durch eine und dieselbe geometrische Konstrukzion gelöset werden; ferner sieht man, daß sich der Werth von x in der zweiten Aufgabe unmittelbar aus dem negativen Werthe von x in der ersten Aufgabe, für deren Lösung er nicht brauchbar war, herleiten läßt, wenn man nur das Vorzeichen ändert. Es enthält somit die algebraische Auflösung der ersten Aufgabe auch schon jene der zweiten in sich, sobald man den negativen Werth von x auf der AB von B aus rechts aufträgt, während der positive auf AB von B aus links aufgetragen wird; sie liefert also alle Auflösungen der in folgender Weise allgemein gestellten Aufgabe:

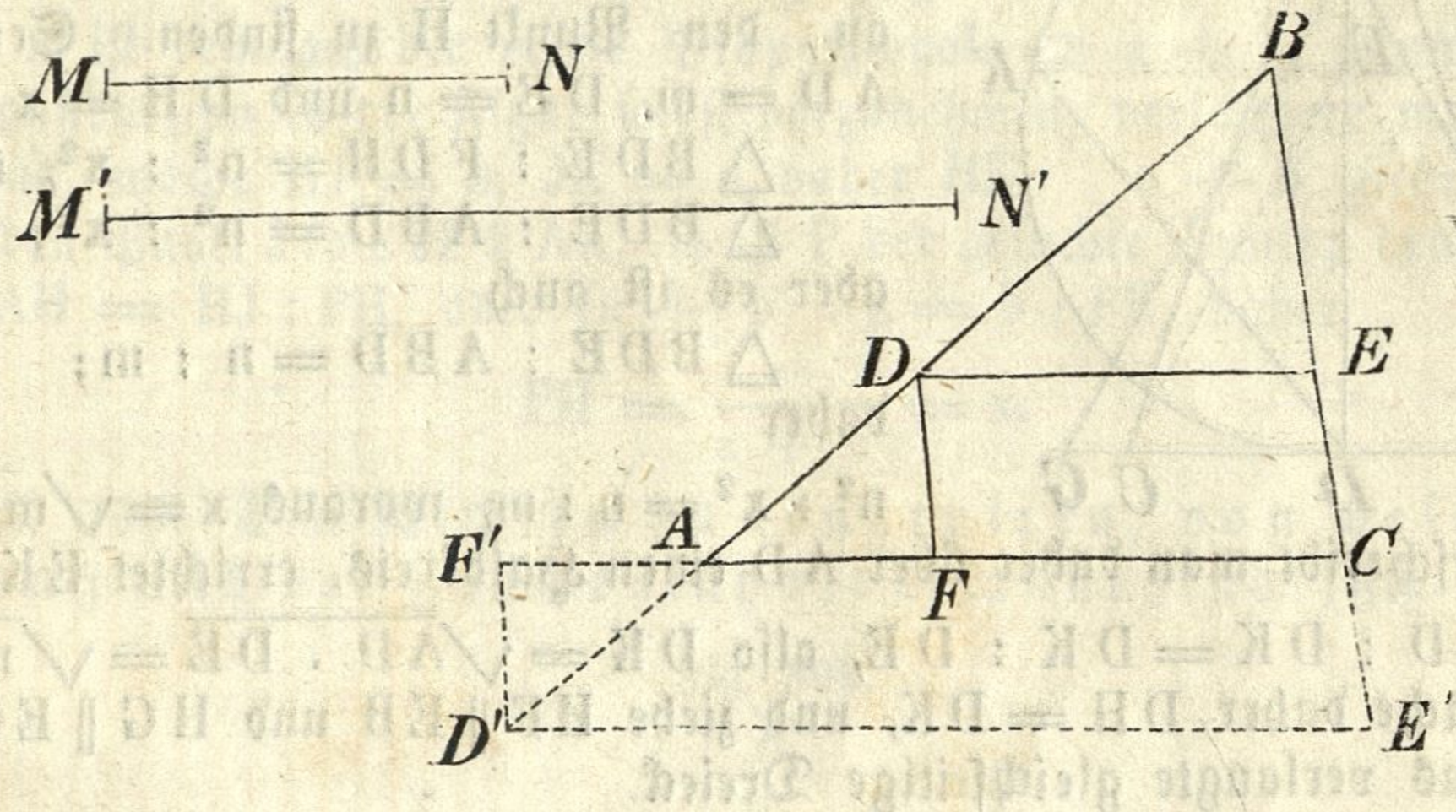
Auf einer unbegrenzten Geraden, welche durch zwei gegebene Punkte A und B geht, soll ein Punkt bestimmt werden, dessen Abstand von B die mittlere Proporzionale zwischen seinem Abstande von A und der gegebenen Entfernung AB sei.

Wird überhaupt die Algebra zur Auflösung einer geometrischen Aufgabe angewendet, und man nimmt als Unbekannte auf einer gegebenen Linie eine Entfernung, die von einem festen Punkte nach einer bestimmten Richtung ausgeht, so müssen die negativen Werthe der Unbekannten nach einer der frühern entgegengesetzten Richtung genommen werden.

Zugleich sieht man, daß die negativen Werthe zur Aufhebung der Beschränkung, die in eine Aufgabe gelegt wurde, somit zur vollständigen Lösung dieser Aufgabe dienen.

§. 496. In einem Dreiecke ABC (Flg. 305) zur Seite AC eine Gerade DE parallel zu ziehen, welche der gegebenen Geraden MN gleich sei.

Fig. 305.



Setzt man AB = a, AC = b, MN = s, und nimmt den Abstand AD = x, also BD a — x, an, so erhält man aus den ähnlichen Dreiecken BAC und BDE.

$$AB : BD = AC : DE \quad \text{oder} \quad a : (a - x) = b : s,$$

folglich

$$x = \frac{a\,(b - s)}{b}.$$

Der Werth von x läßt sich nun nach §. 489, 3. konstruiren, wenn man von AC = b die Gerade CF = s abzieht, und durch F die FD ∥ CB zieht; denn aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und ADF folgt

$$AB : AD = AC : AF \text{ oder } a : AD = b : (b - s),$$

daher

$$AD = \frac{a\,(b - s)}{b} = x.$$

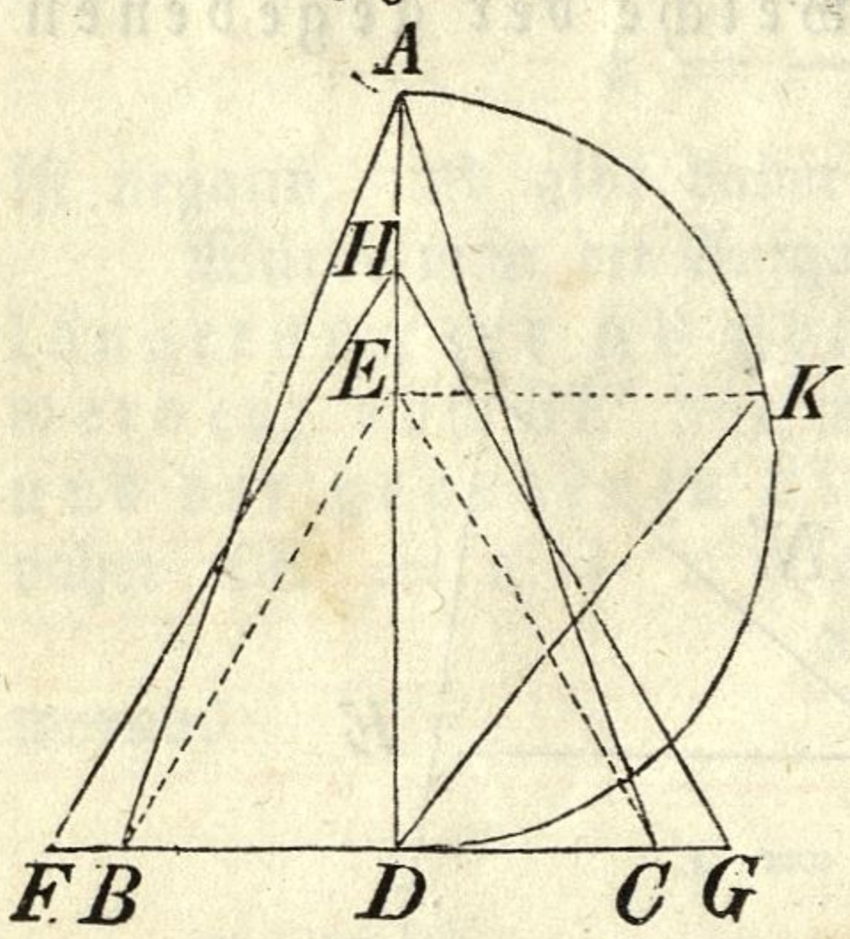
Wird nun durch den Punkt D die DE ∥ AC gezogen, so ist die Aufgabe gelöst.

Wenn die Linie s größer als b, z. B. $s = M'N'$ wäre, so würde die Differenz $b - s$, daher auch x negativ sein; man müßte also den Werth von x, von A aus nach der entgegengesetzten Seite bis D' auftragen, und dann $D'E' \parallel AC$ ziehen. Damit stimmt auch die geometrische Konstrukzion des für x erhaltenen Ausdruckes überein.

Wenn man nämlich nach §. 489, 2. von $AC = b$ die größere Gerade $CF' = M'N' = s$ abzieht, so wird die negative Differenz AF' auf der linken Seite des Punktes A liegen, und die durch F' mit CB parallel geführte Gerade F'D' kann nicht die Seite AB selbst, sondern nur ihre Verlängerung in D' treffen.

§. 497. Ein gleichschenkliges Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln.

Fig. 306.



Es sei in dem Dreieck ABC (Fig. 306) $AB = AC$; ferner sei BEC ein gleichseitiges Dreieck über der Seite BC, und FGH das gesuchte gleichseitige Dreieck. Zur Bestimmung dieses Dreieckes kommt es nur darauf an, den Punkt H zu finden. Setzen wir $AD = m$, $DE = n$ und $DH = x$, so ist

$$\triangle BDE : FDH = n^2 : x^2, \text{ oder}$$
$$\triangle BDE : ABD = n^2 : x^2;$$

aber es ist auch

$$\triangle BDE : ABD = n : m;$$

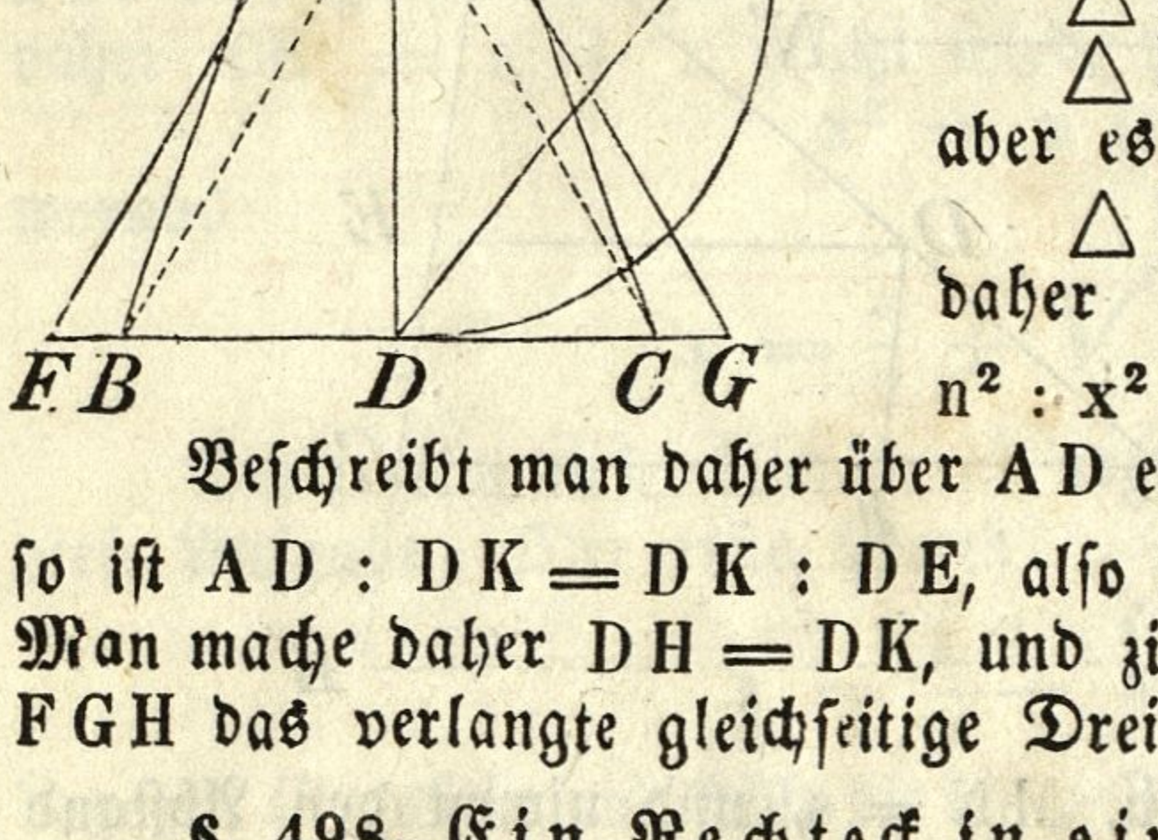
daher

$n^2 : x^2 = n : m$, woraus $x = \sqrt{mn}$ folgt.

Beschreibt man daher über AD einen Halbkreis, errichtet $EK \perp AD$, so ist $AD : DK = DK : DE$, also $DK = \sqrt{AD \cdot DE} = \sqrt{mn} = x$. Man mache daher $DH = DK$, und ziehe $HF \parallel EB$ und $HG \parallel EC$, so ist FGH das verlangte gleichseitige Dreieck.

§. 498. Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Fig. 307.

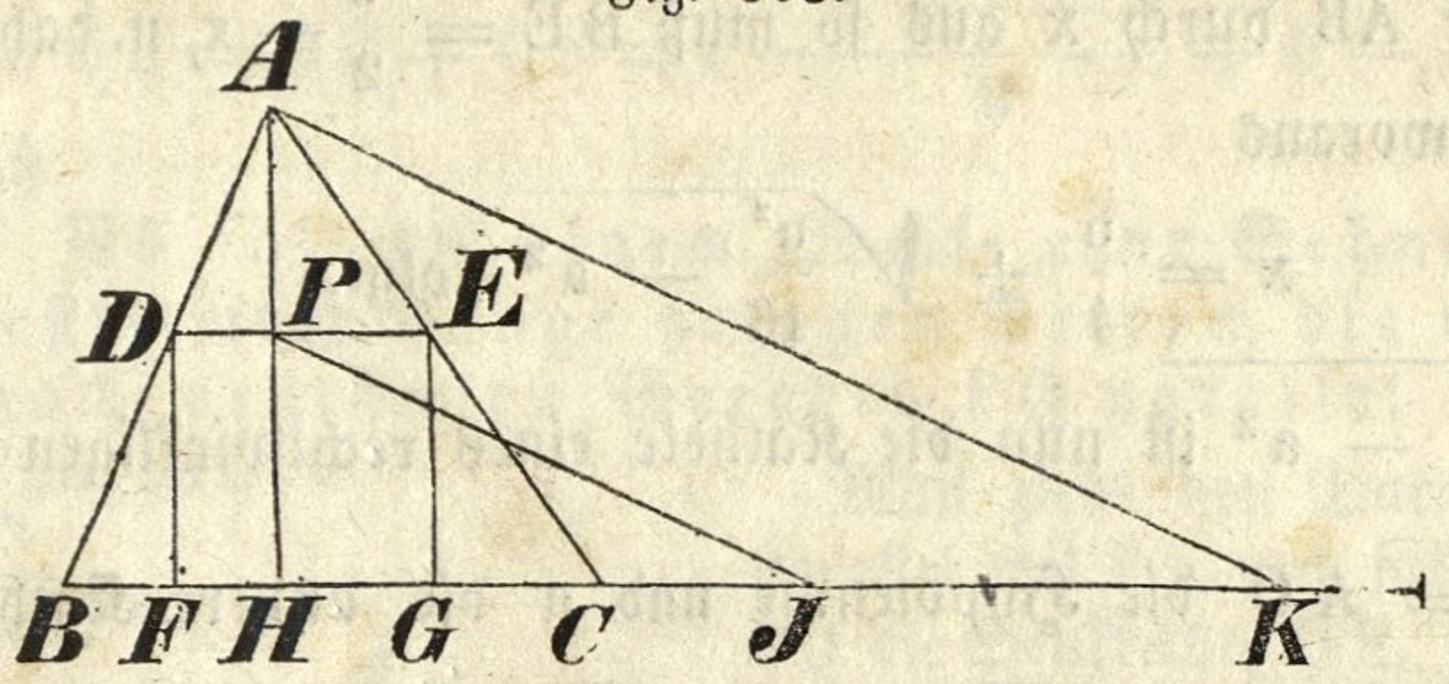


Es sei ABCD (Fig. 307) das gegebene Rechteck, worin $AB = a$, $BC = b$ ist. Setzen wir die Seite BE des gesuchten Quadrates BEFG gleich x, so hat man $x^2 = ab$, daher $x = \sqrt{ab}$.

Man verlängert daher AB, macht $BH = b$, beschreibt über AH einen Halbkreis, so ist $AB : BE = BE : BH$, folglich $BE = \sqrt{AB \cdot BH} = \sqrt{ab}$; BE ist also die Seite des verlangten Quadrates.

§. 499. In ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 308) soll ein Quadrat eingeschrieben werden.

Fig. 308.



Man denke sich die Aufgabe gelöst, nun es sei DEGF das verlangte Quadrat. Ist AH = a die Höhe des Dreieckes, so handelt es sich offenbar nur darum, den Punkt P zu bestimmen, durch welchen die mit BC parallele Gerade DE gezogen werden muß, damit DE = DF werde. Man setze also PH = DE = x, daher AP = a — x, und die Seite BC = b. Da sich in ähnlichen Dreiecken die Grundlinien wie die Höhen verhalten, so hat man die Proporzion BC : DE = AH : AP oder b : x = a : (a — x), woraus

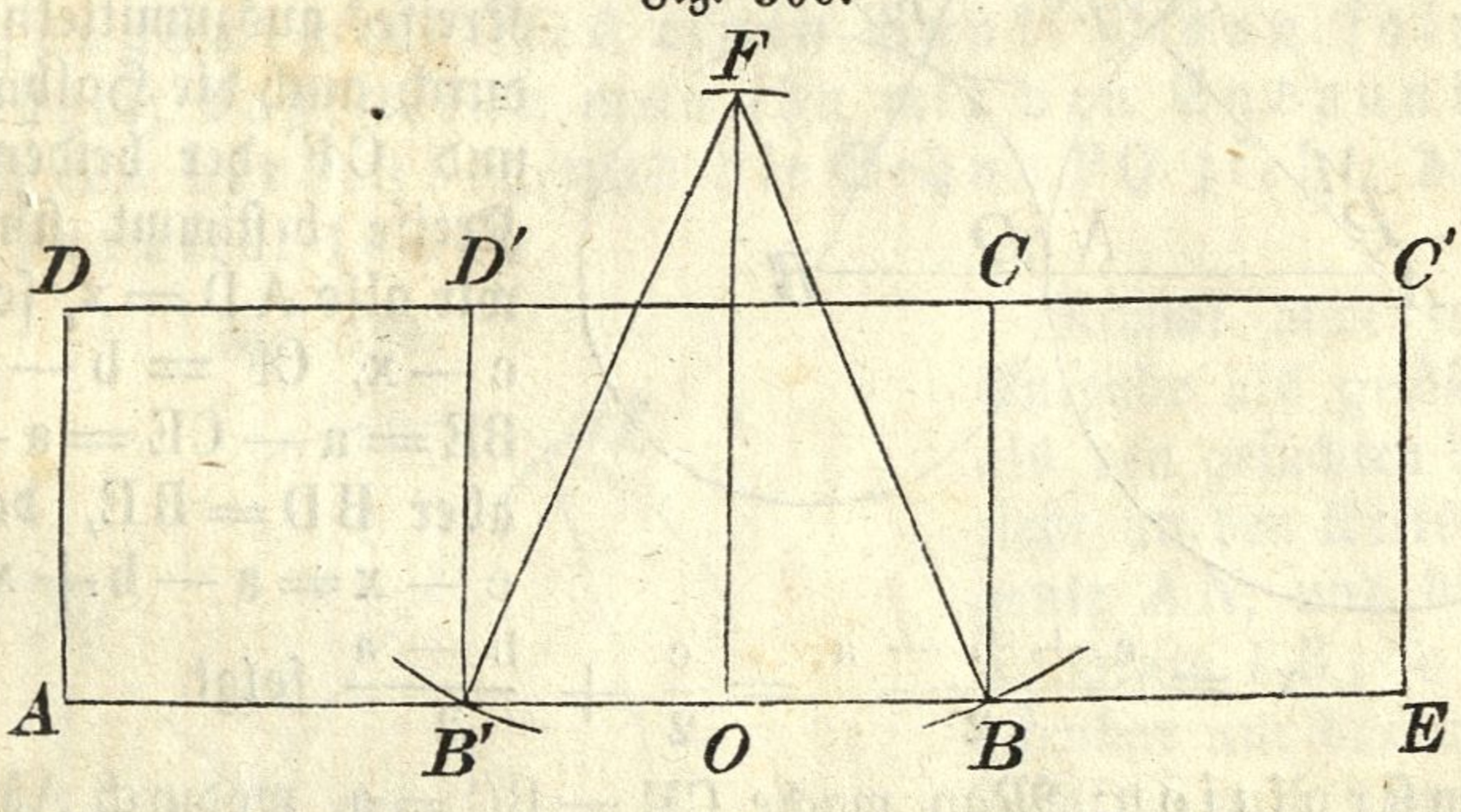
$$x = \frac{ab}{a + b}$$

folgt; x ist demnach die vierte Proporzionale zu a + b, a und b. Um die Konstrukzion in der Figur selbst vorzunehmen, verlängere man BC über C hinaus, mache HJ = b, JK = a daher HK a + b, ziehe AK, und durch den Punkt J die JP ∥ AK, so ist P der gesuchte Punkt; denn man hat HK : AH = HJ : PH, oder (a + b) : a = b : PH, daher

$$PH = \frac{ab}{a + b} = x.$$

§. 500. Ein Rechteck zu konstruiren, von welchem der Umfang und der Flächeninhalt bekannt sind. (Fig. 309.)

Fig. 309.



Es sei u der Umfang und a^2 der Inhalt des zu konstruirenden Rechteckes ABCD. Trägt man die Höhe BC auf der Verlängerung der Grundlinie von B bis E auf, so ist $AE = \frac{u}{2}$, und demnach bestimmt. Es handelt sich nun darum, den Punkt B in der AE so zu bestimmen, daß auch der zweiten Bedingung der Aufgabe Genüge geleistet werde, wornach $AB \times BC = a^2$ sein muß.

Drücken wir AB durch x aus so muß $BE = \frac{u}{2} - x$, u. daher $x\left(\frac{u}{2} - x\right) = a^2$ sein, woraus

$$x = \frac{u}{4} \pm \sqrt{\frac{u^2}{16} - a^2} \text{ folgt.}$$

$\sqrt{\frac{u^2}{16} - a^2}$ ist nun die Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes, in welchem $\frac{u}{4} = AO$ die Hypotenuse und a die andere Kathete ist. Errichtet man daher in der Mitte O der AE auf diese eine Senkrechte, trägt darauf $OF = a$ auf, und beschreibt aus F mit dem Halbmesser AO einen Kreisbogen, welcher die AE in B und B' schneidet, so ist

$$OB = OB' = \sqrt{\frac{u^2}{16} - a^2},$$

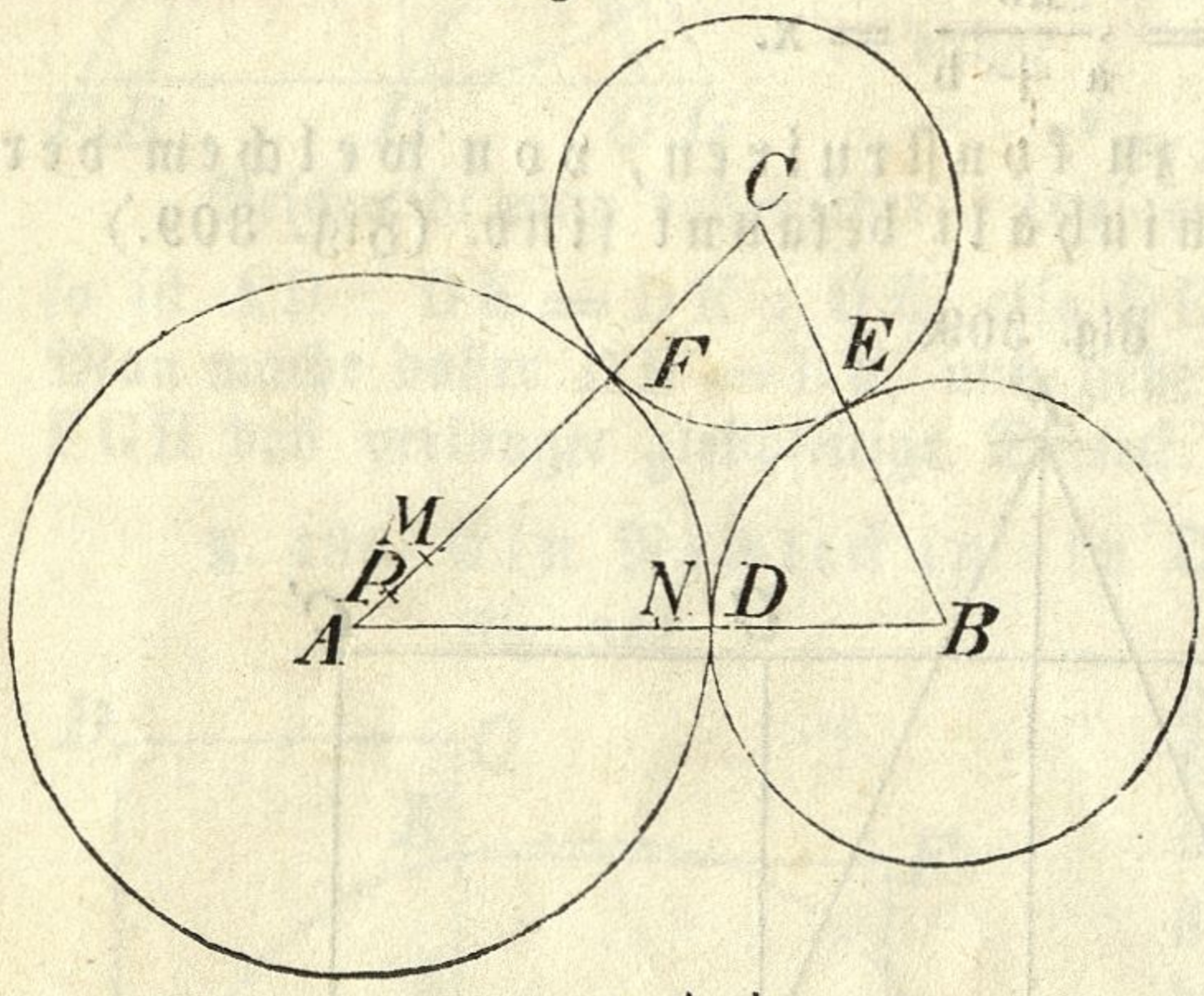
und daher

$$x = AO \pm OB \text{ und } \frac{u}{2} - x = AO \mp OB,$$

also sind AB und BE, oder was gleichviel ist, AB' und B'E die Seiten des verlangten Rechteckes.

§. 501. Es sind drei Punkte der Lage nach gegeben; man beschreibe um sie als Mittelpunkte drei Kreise, welche sich wechselseitig berühren.

Fig. 310.



Es seien A, B, C (Fig. 310) die drei gegebenen Punkte, und ihre Abstände $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Es genügt, den Halbmesser $AD = AF$ des einen Kreises auszumitteln, weil dadurch auch die Halbmesser BD und CF der beiden anderen Kreise bestimmt sind. Setzen wir also $AD = x$, so ist $BD = c - x$, $CF = b - x$; ferner $BE = a - CE = a - b + x$; aber $BD = BE$, daher auch $c - x = a - b + x$ woraus

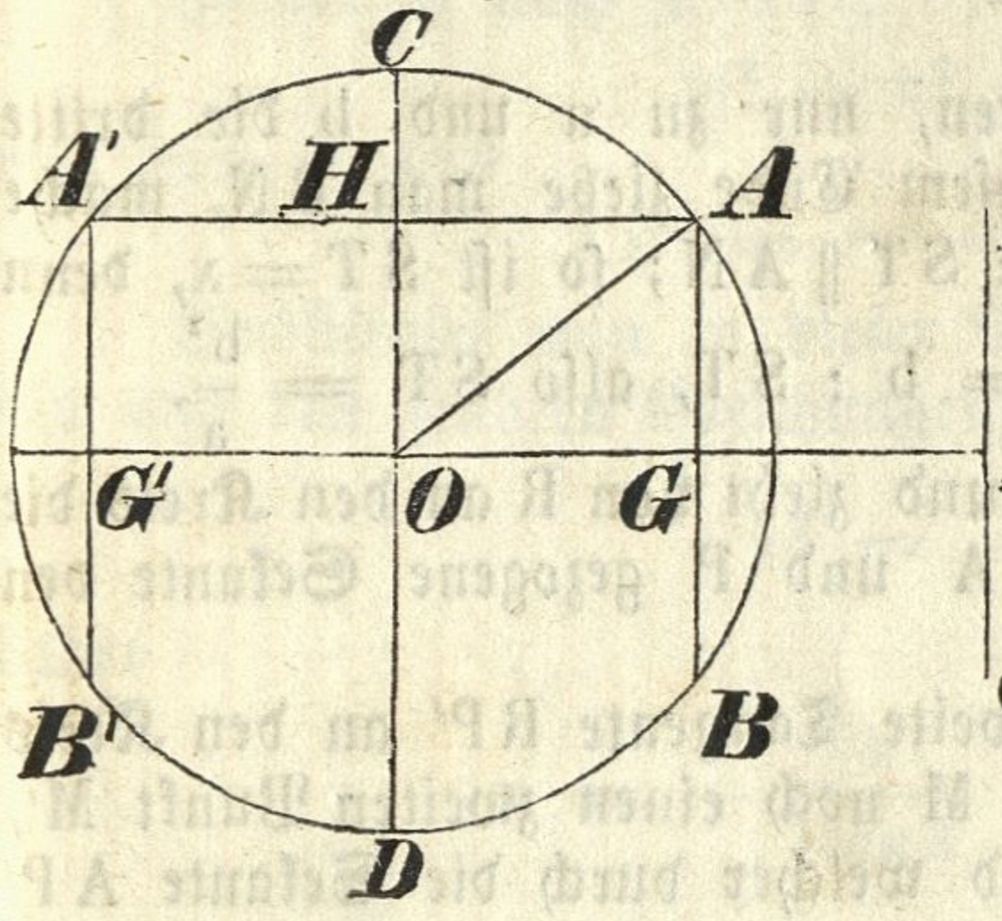
$$x = \frac{c + b - a}{2} = \frac{c}{2} + \frac{b - a}{2} \text{ folgt.}$$

Konstrukzion. Man mache $CM = BC = a$, wodurch $AM = b - a$ wird; halbirt man sodann AB und AM in den Punkten N und P und macht $ND = AP$, so ist $AD = AN + AP = \frac{c}{2} + \frac{b - a}{2} = x$. Beschreibt man nun aus A mit dem Halbmesser AD einen Kreis, welcher die AC in F schneidet, ferner aus B mit dem Halbmesser BD einen zweiten, und aus C mit dem Halbmesser CF einen dritten Kreis, so berühren diese den ersten Kreis in den Punkten D und F, einander selbst aber in dem Punkte

E, weil $BE + CE = BD + CF = c - \frac{c+b-a}{2} + b - \frac{c+b-a}{2}$ $= a = BC$ ist.

§. 502. Es soll in einem Kreise eine Sehne AB (Fig. 311) von bestimmter Länge gezogen werden, die mit einer der Lage nach gegebenen Geraden PQ parallel läuft.

Fig. 311.



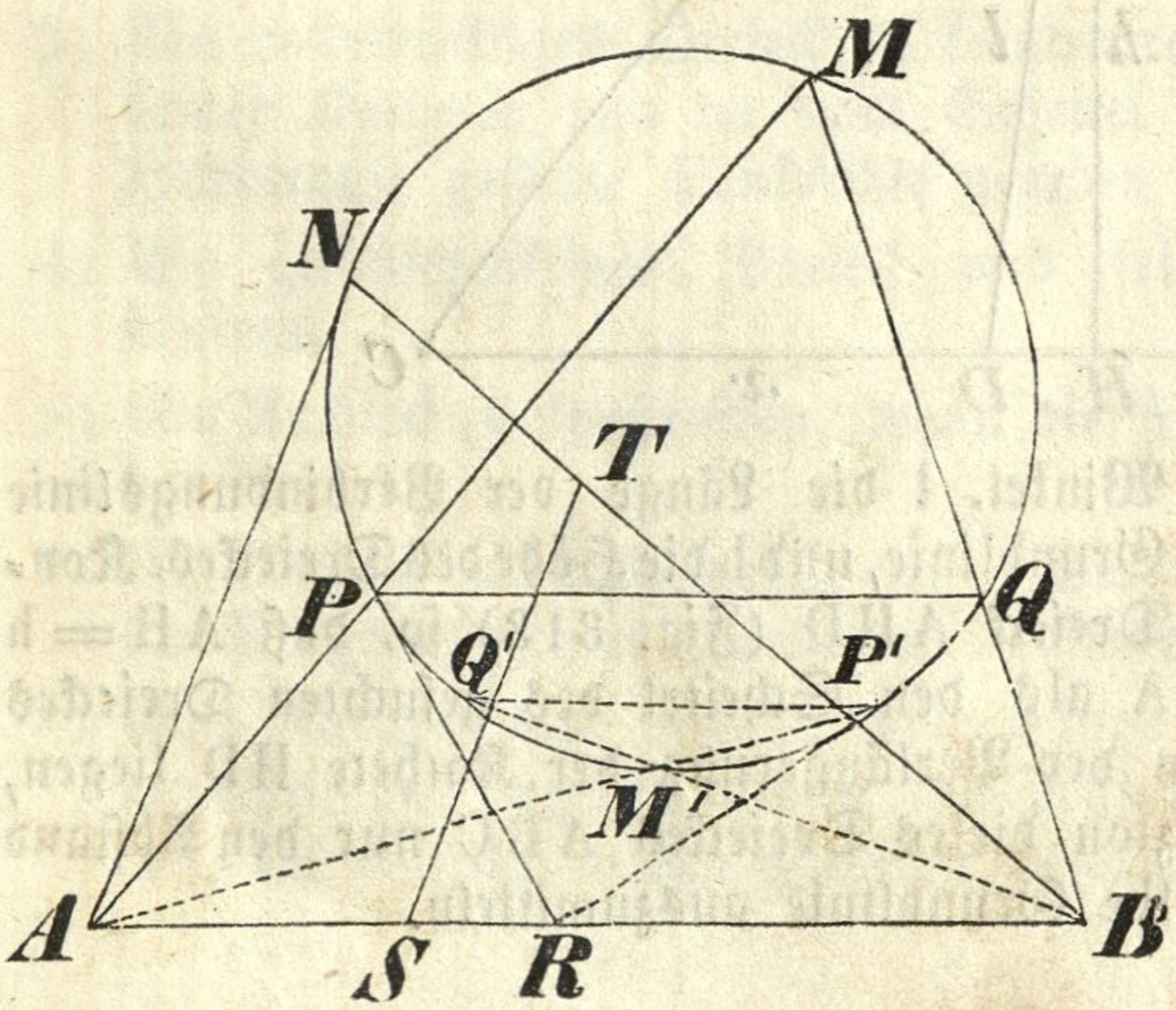
Man ziehe den Durchmesser CD parallel mit PQ, und fälle von O auf PQ die Senkrechte OE, so muß diese auch auf der gesuchten Sehne AB senkrecht stehen, und es handelt sich zur vollkommenen Bestimmung der Lage von AB nur darum, den Abstand OG auszumitteln. Setzt man $OG = x$, den Halbmesser $OA = a$, so hat man, wenn AB die Länge p also AG die Länge $\frac{p}{2}$ haben soll, wegen

$$OG^2 = OA^2 - AG^2, \quad x = \pm \sqrt{a^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

Schneidet man daher von dem Halbmesser OC ein Stück $OH = \frac{p}{2}$ ab, zieht durch den Punkt H die Sehne $AA' \perp CO'$ und durch die Punkte A und A' die Sehnen AB und A'B' parallel mit der PQ, so sind OG und OG' die beiden Werthe von x, und es leisten beide Sehnen AB und A'B der vorgelegten Aufgabe Genüge.

§. 503. Eine Gerade AB (Fig. 312) und ein Kreis MNPQ sind der Größe und der Lage nach gegeben, man suche in dem Umfange des Kreises einen Punkt M von solcher Beschaffenheit, daß, wenn man ihn mit den Endpunkten der Geraden AB verbindet, und die Sehne PQ zieht, diese mit der AB parallel laufe.

Fig. 312.



Nimmt man wieder die Aufgabe als gelöst, und M als den gesuchten Punkt an, zieht an den Kreis die Tangente AN, und durch P die Tangente PR; so kommt es offenbar nur darauf an, den Punkt R zu bestimmen, durch welchen die Tangente RP zu ziehen ist, um den Punkt P zu erhalten; wir setzen daher $AR = x$.

Weil PQ mit AB parallel sein soll, so ist der Winkel $ARP = RPQ$; aber $RPQ = PMQ$; daher auch $ARP =$

PMQ. In den Dreiecken ARP und AMB kommt nun der Winkel A gemeinschaftlich vor, ferner ist ARP = AMB; daher $\triangle$ ARP $\sim$ AMB und somit AP : AB = AR : AM, woraus AB . AR = AP . AM = AN^2, und daher $AR = \frac{AN^2}{AB}$ folgt, oder, wenn AB = a und AN = b gesetzt wird,

$$x = \frac{b^2}{a}.$$

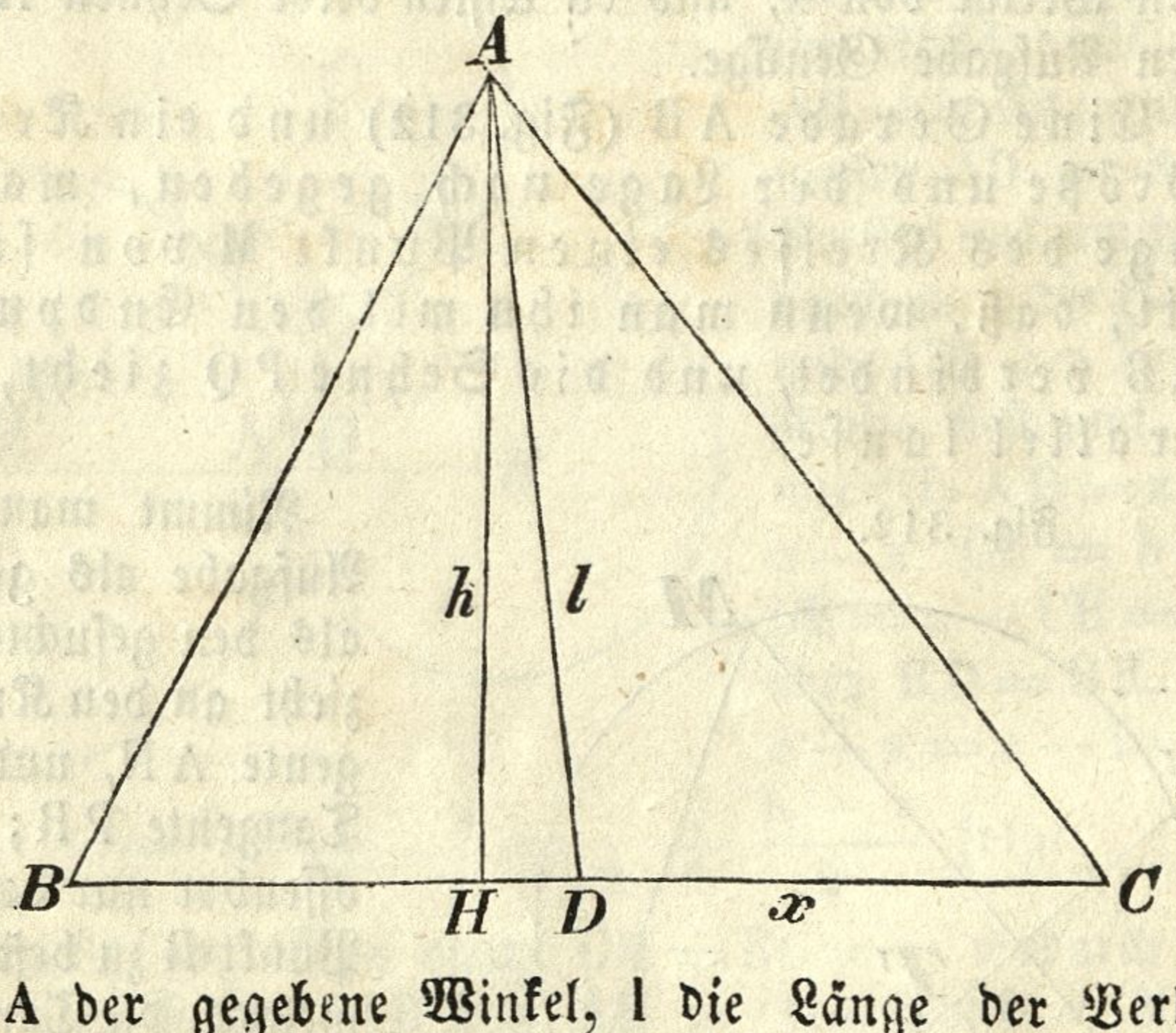
Man braucht, um x zu konstruiren, nur zu a und b die dritte stetige Proporzionale zu suchen; zu diesem Ende ziehe man BN, mache BS = AN, und ziehe durch S die Gerade ST $\parallel$ AN; so ist ST = x, denn AB : BS = AN : ST oder a : b = b : ST, also $ST = \frac{b^2}{a}$.

Macht man daher AR = ST = x, und zieht von R an den Kreis die Tangente RP, so bestimmt die durch A und P gezogene Sekante den Punkt M.

Da aber von R aus noch eine zweite Tangente RP′ an den Kreis gezogen werden kann, so gibt es außer M noch einen zweiten Punkt M′, welcher der Aufgabe Genüge leistet, und welcher durch die Sekante AP′ bestimmt wird.

§. 504. In einem Dreiecke ist ein spitziger Winkel, die Gerade, welche zu der Mitte der gegenüberstehenden Grundlinie gezogen wird, und die Höhe gegeben; man soll das Dreieck konstruiren.

Fig. 313.



Es sei A der gegebene Winkel, l die Länge der Verbindungslinie seines Scheitels mit der Mitte der Grundlinie, und h die Höhe des Dreieckes. Konstruirt man das rechtwinklige Dreieck AHD (Fig. 313) so, daß AH = h und AD = l ist, und nimmt A als den Scheitel des gesuchten Dreieckes an, so wird die Grundlinie in der Verlängerung der Kathete HD liegen, und man braucht zur Konstrukzion dieses Dreieckes ABC nur den Abstand BD = DC = x, d. i. die halbe Grundlinie auszumitteln.

Nennt man die den Winkel A einschließenden Seiten m und n, so hat man für den Inhalt des Dreieckes die zwei gleichgeltenden Ausdrücke

$$\frac{m\,n\sin A}{2} \text{ und } h\,x$$

daher

$$m\,n\,\sin A = 2\,h\,x, \text{ und } m\,n = \frac{2\,h\,x}{\sin A}.$$

Ferner ist nach §. 147, c)

$$m^2 + n^2 = 2\,l^2 + 2\,x^2,$$

und nach §. 419

$$4\,x^2 = m^2 + n^2 - 2\,m\,n\,\cos A.$$

Substituirt man in dieser Gleichung die Werthe von $m^2 + n^2$ und $m\,n$ aus den frühern Gleichungen, so hat man

$$x^2 = -\frac{2\,h\,x}{\text{tang}\,A} + l^2$$

daher

$$x = -\frac{h}{\text{tang}\,A} \pm \sqrt{\frac{h^2}{\text{tang}^2 A} + l^2}.$$

Da $\frac{h}{\text{tang}\,A}$ offenbar die Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes ist, worin h als zweite Kathete und A als der ihr anliegende Winkel vorkommt, $\sqrt{\frac{h^2}{\text{tang}^2 A} + l^2}$ aber die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes vorstellt, dessen Katheten $\frac{h}{\text{tang}\,A}$ und l sind; so hat die Konstrukzion des für x erhaltenen Werthes, worin die Wurzelgröße nur positiv genommen werden kann, keine Schwierigkeit.

§. 505. Geübteren Schülern empfehlen wir noch die algebraische Auflösung folgender Angaben:

1) In ein Dreieck einen Rhombus zu beschreiben.
2) Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruiren, von welchem die Hypotenuse und die Summe der beiden Katheten gegeben sind.
3) Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruiren, von welchem die Summe beider Katheten und die vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Senkrechte gegeben sind.
4) Ein gleichschenkliges Dreieck aus seinen beiden Höhen zu konstruiren.
5) Ein Rechteck zu konstruiren, wenn die Fläche und die Diagonale gegeben sind.
6) Ein Rechteck zu konstruiren, dessen Diagonale doppelt so lang ist, als die Diagonale eines gegebenen Rechteckes.
7) Eine Gerade von unbestimmter Länge und zwei Punkte außerhalb derselben sind gegeben; man soll denjenigen Punkt der Geraden finden, der von den beiden Punkten gleiche Entfernung hat.

8) An dem einen Ende des Durchmessers eines Kreises ist eine Tangente gezogen; man soll von dem andern Ende des Durchmessers eine Gerade so ziehen, daß das zwischen dem Kreise und der Tangente liegende Stück derselben eine gegebene Länge hat.

9) Es sind zwei konzentrische Kreise gegeben: man soll durch einen gegebenen Punkt des äußern Kreises eine Gerade so ziehen, daß die Sehnen ein gegebenes Verhältniß haben.

10) In einem gegebenen Kreise durch einen Punkt, dessen Abstand bekannt ist, zwei auf einander senkrechte Sehnen zu ziehen, von denen die eine das mfache der andern ist.

§. 506

Zweiter Abschnitt.

Elemente der analytischen Geometrie in der Ebene.

---

§. 506. Die Lage der Punkte und Linien in der Ebene auf eine unzweideutige Art durch Zahlen ausdrücken, heißt dieselben analytisch bestimmen.

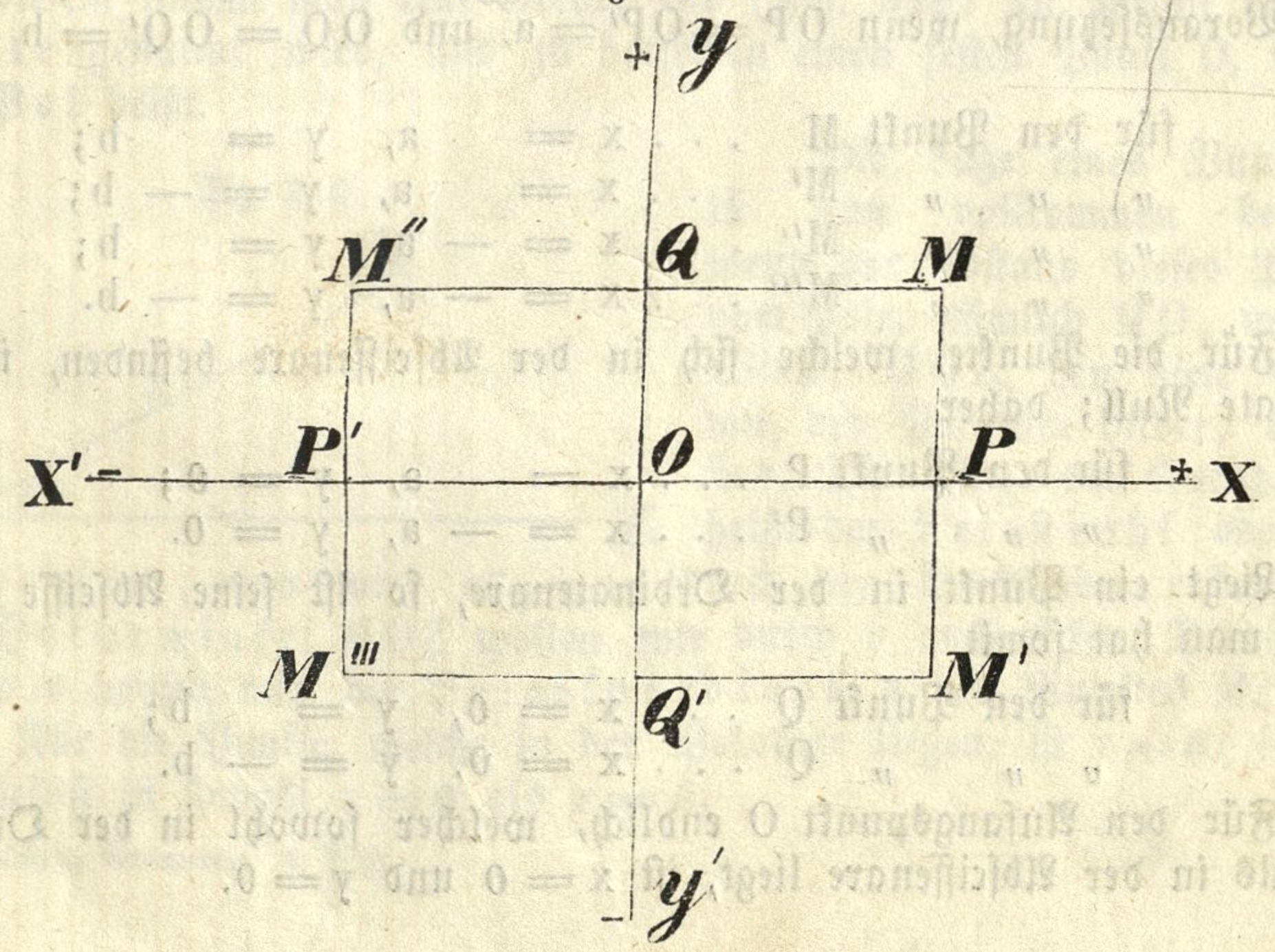
Da eine Linie vollkommen bestimmt ist, wenn man die Lage jedes einzelnen ihrer Punkte kennt, so handelt es sich zunächst darum, die Lage eines Punktes in der Ebene analytisch darzustellen.

I. Analytische Bestimmung des Punktes.

a) Rechtwinklige Koordinaten.

§. 507. Um die Lage eines Punktes M (Fig. 314) in einer Ebene zu bestimmen, zieht man in derselben zwei auf einander senkrechte Gerade

Fig. 314.



XX′ und YY′, welche sich in O schneiden, und fällt auf dieselben von M die Senkrechten MP und MQ; kennt man nun die Abstände OP und OQ, so ist dadurch die Lage des Punktes M vollkommen bestimmt. Denn sind die Abstände OP und OQ bekannt, so sind auch die Punkte P und Q gegeben; dadurch aber ist der Punkt M bestimmt, da man nur in P eine Senkrechte auf XX′ und in Q eine Senkrechte auf YY′ errichten darf, um durch deren Durchschnitt den Punkt M zu erhalten.

Die Länge der Geraden OP heißt die Abscisse, die Länge der Geraden OQ = MP die Ordinate des Punktes M, beide zusammen heißen Koordinaten, und zwar rechtwinklige, weil sich die Geraden XX′ und YY′ unter einem rechten Winkel schneiden. Die Abscisse drückt man allgemein durch den Buchstaben x, die Ordinate durch y aus; für den Punkt M ist also x = OP, y = MP. Die Gerade XX′ wird die Abscissenaxe, die Gerade YY′ die Ordinatenaxe und ihr Durchschnittspunkt O der Ursprung oder Anfangspunkt der Koordinaten genannt.

Diesen Begriffen gemäß braucht man, um die Koordinaten eines Punktes M zu erhalten, von diesem Punkte nur eine Senkrechte auf die Abscissenaxe zu fällen; die Länge dieser Senkrechten MP stellt die Ordinate, und die Länge des Stückes OP der Abscissenaxe, welches zwischen dem Anfangspunkte und der Senkrechten liegt, die Abscisse jenes Punktes vor.

§. 508. Die beiden Koordinatenaxen theilen die Ebene in vier Abtheilungen oder Quadranten. Um nun anzuzeigen, in welchem Quadranten der zu bestimmende Punkt liegt, werden die Koordinaten auf den entgegengesetzten Seiten jeder Axe durch die Zeichen + oder — unterschieden. Nimmt man z. B. die Abscissen rechts von der Ordinatenaxe als positiv an, so sind die Abscissen auf der linken Seite negativ; nimmt man eben so die Ordinaten oberhalb der Abscissenaxe für positiv an, so sind die unterhalb fallenden Ordinaten negativ. Man hat daher unter dieser Voraussetzung, wenn OP = OP′ = a, und OQ = OQ′ = b gesetzt wird,

für den Punkt M . . . x = a, y = b;
" " " M′ . . . x = a, y = — b;
" " " M″ . . . x = — a, y = b;
" " " M‴ . . . x = — a, y = — b.

Für die Punkte, welche sich in der Abscissenaxe befinden, ist die Ordinate Null; daher

für den Punkt P . . . x = a, y = 0;
" " " P′ . . . x = — a, y = 0.

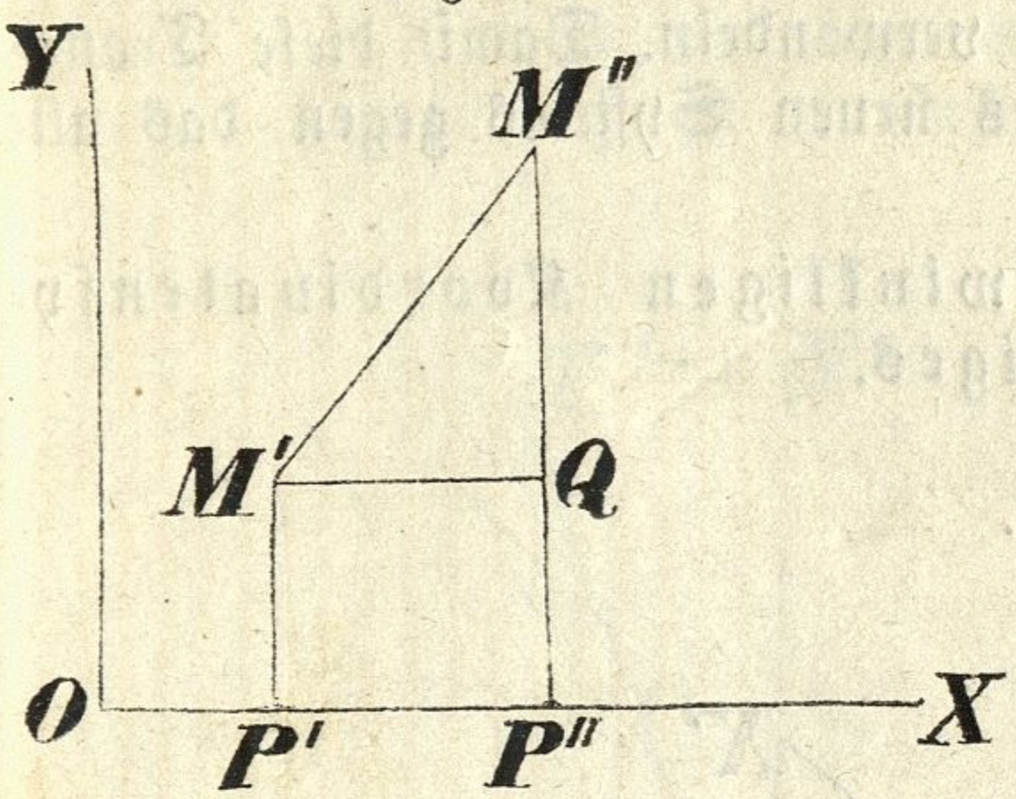
Liegt ein Punkt in der Ordinatenaxe, so ist seine Abscisse gleich Null; man hat somit

für den Punkt Q . . . x = 0, y = b;
" " " Q′ . . . x = 0, y = — b.

Für den Anfangspunkt O endlich, welcher sowohl in der Ordinaten- als in der Abscissenaxe liegt, ist x = 0 und y = 0.

§. 509. Wenn man die Koordinaten zweier Punkte kennt, so läßt sich aus denselben unmittelbar auch die Entfernung der beiden Punkte bestimmen.

Fig. 315.



Bezeichnen wir die Koordinaten des Punktes M′ (Fig. 315) durch x′, y′, und jene des Punktes M″ durch x″, y″, so ist $x' = OP'$, $y' = M'P'$; $x'' = OP''$, $y'' = M''P''$. Zieht man nun $M'Q \perp M''P''$, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke $M'QM''$

$$M'M''^2 = M'Q^2 + M''Q^2;$$

aber es ist

$$M'Q = P'P'' = OP'' - OP' = x'' - x',$$
$$M''Q = M''P'' - QP'' = M''P'' - M'P' = y'' - y';$$

daher, wenn der Abstand $M'M'' = d$ gesetzt wird,

$$d^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2$$

und

$$d = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}.$$

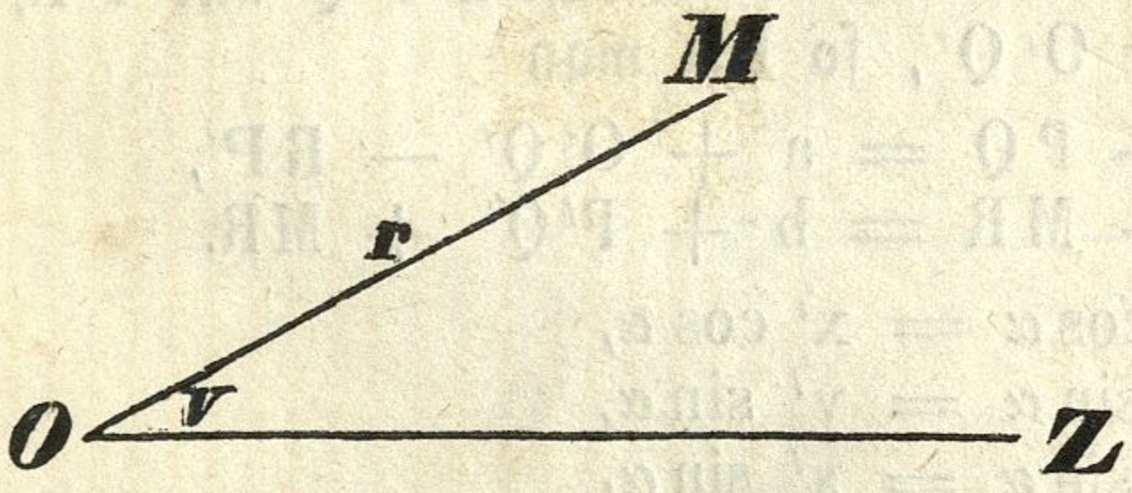
Sind z. B. die Koordinaten des Punktes M′ $x' = 2$, $y' = 3$, und jene des Punktes M″ $x'' = 5$, $y'' = 7$; so ist die Entfernung der beiden Punkte

$$d = \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

b) Polarkoordinaten.

§. 510. Außer dem rechtwinkligen Koordinatensysteme ist noch ein zweites, das Polar-Koordinatensystem, vorzüglich im Gebrauche. Bei diesem nimmt man eine Gerade OZ (Fig. 316) an, welche die Polarare genannt wird, und in derselben einen festen Punkt O, welcher der Pol heißt.

Fig. 316.



Die Lage eines Punktes M ist nun vollkommen bestimmt, wenn der Abstand dieses Punktes vom Pole, nämlich MO, und der Winkel MOZ, den diese Gerade mit der Polarare bildet, bekannt sind. Die Länge der Geraden MO heißt der Leitstrahl oder Radiusvektor, und wird allgemein durch den Buchstaben r bezeichnet; den Polarwinkel MOZ wollen wir durch v ausdrücken. Die Größen r und v heißen nun die Polarkoordinaten des Punktes M.

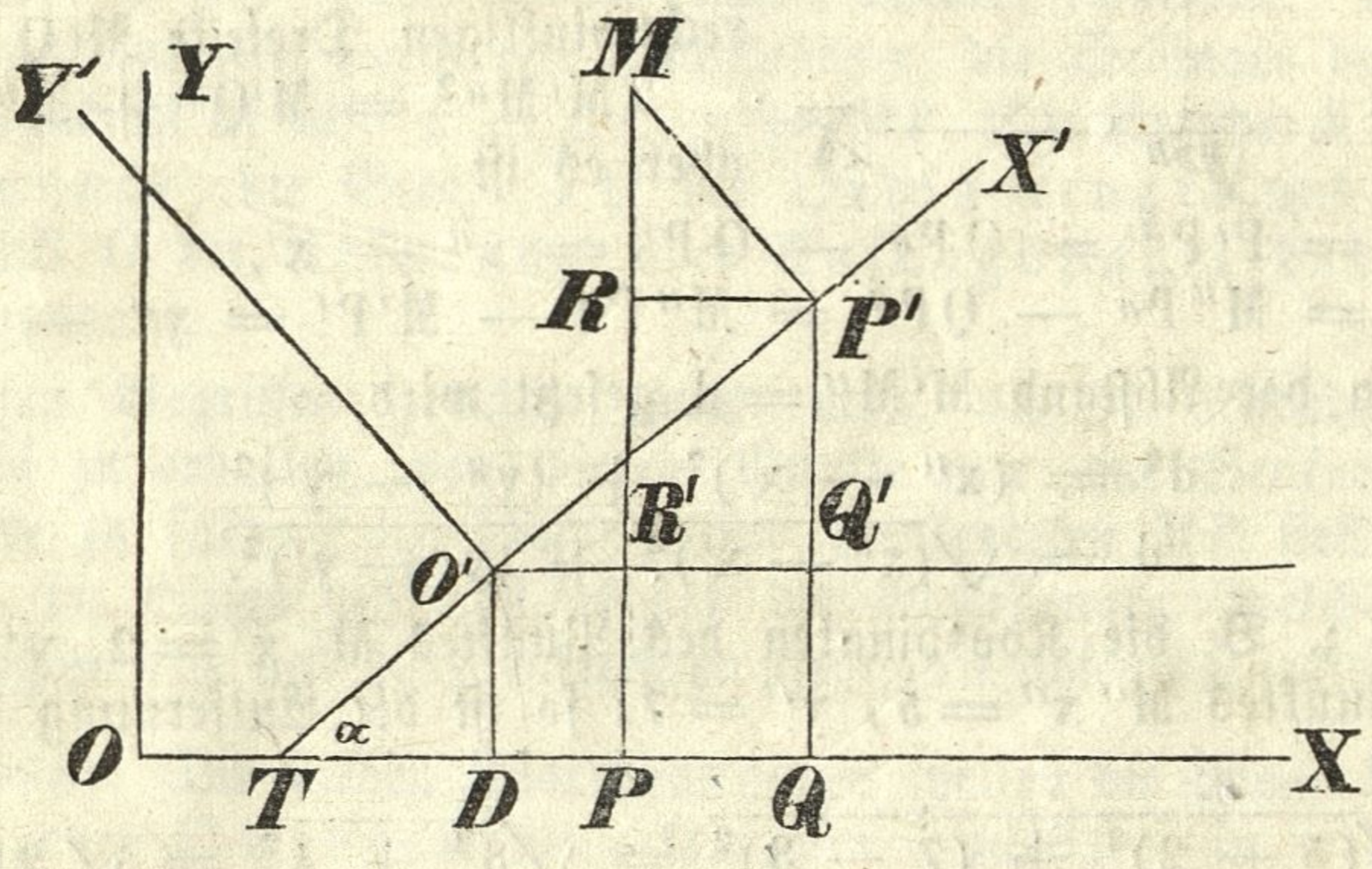
Für die Punkte, welche in der Polarare liegen, ist $v = 0$; für den Pol selbst ist sowohl $v = 0$ als $r = 0$.

c) Transformazion der Koordinaten.

§. 111. Oft ist es, um eine einfachere Rechnung zu erzielen, vortheilhaft, die Koordinaten eines Punktes in dem einen Systeme in die Koordinaten eines andern Systemes zu verwandeln. Damit diese Transformazion möglich sei, muß die Lage des neuen Systems gegen das alte gegeben sein.

Verwandlung eines rechtwinkligen Koordinatensystems in ein anderes rechtwinkliges.

Fig. 317.



Es seien (Fig. 317) OX und OY die alten, O′X′ und O′Y′ die neuen Axen, x, y die alten, und x′ y′ die neuen Koordinaten des Punktes M, also $x = OP$, $y = MP$, $x' = O'P'$, $y' = MP'$. Die beiden Koordinatensysteme seien so gegen einander gelegen, daß die Koordinaten des neuen Anfangspunktes O′ in Bezug auf das alte System a und b sind, nämlich $OD = a$, $O'D = b$, und daß der Winkel, den die beiden Abscissenaxen bilden, gleich α ist. Es handelt sich nun darum, die alten Koordinaten x und y durch die neuen x′ und y′ und durch die Größen a, b, α auszudrücken.

Zieht man von P auf OX und MP die Senkrechten P′Q und P′R, und von O′ auf P′Q die Senkrechte O′Q′, so hat man

$$x = OP = OD + DQ - PQ = a + O'Q' - RP',$$
$$y = MP = PR' + RR' + MR = b + P'Q' + MR.$$

Nun ist

$$O'Q' = O'P' \cos\alpha = x' \cos\alpha,$$
$$RP' = MP' \sin\alpha = y' \sin\alpha,$$
$$P'Q' = O'P' \sin\alpha = x' \sin\alpha,$$
$$MR = MP' \cos\alpha = y' \cos\alpha.$$

Man erhält daher nach verrichteter Substituzion die Gleichungen:

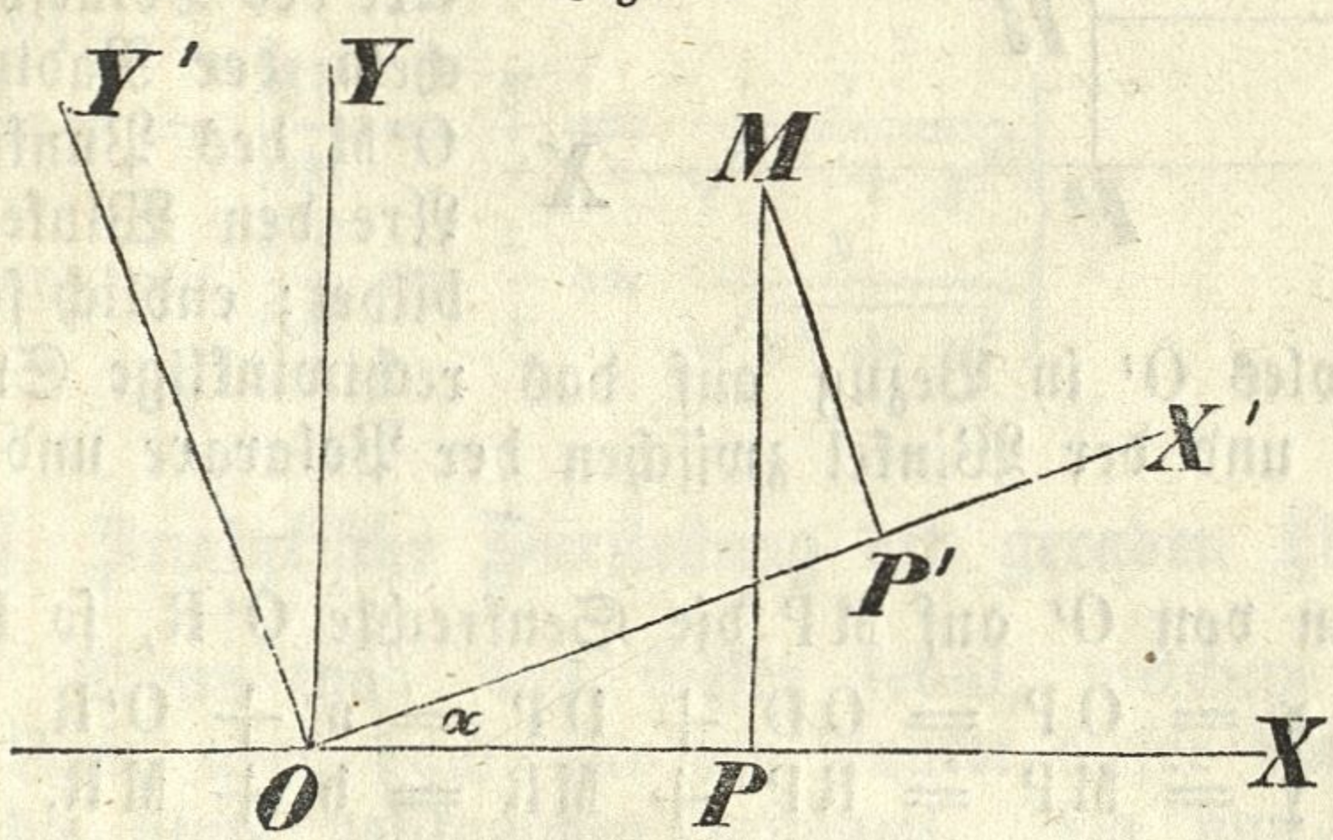
$$\left.\begin{aligned} x &= a + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y &= b + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

wodurch unsere Aufgabe gelöst ist.

Haben beide rechtwinkligen Systeme denselben Anfangspunkt O (Fig. 318), so ist $a = b = 0$; daher hat man unter dieser Voraussetzung die einfacheren Transformazionsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

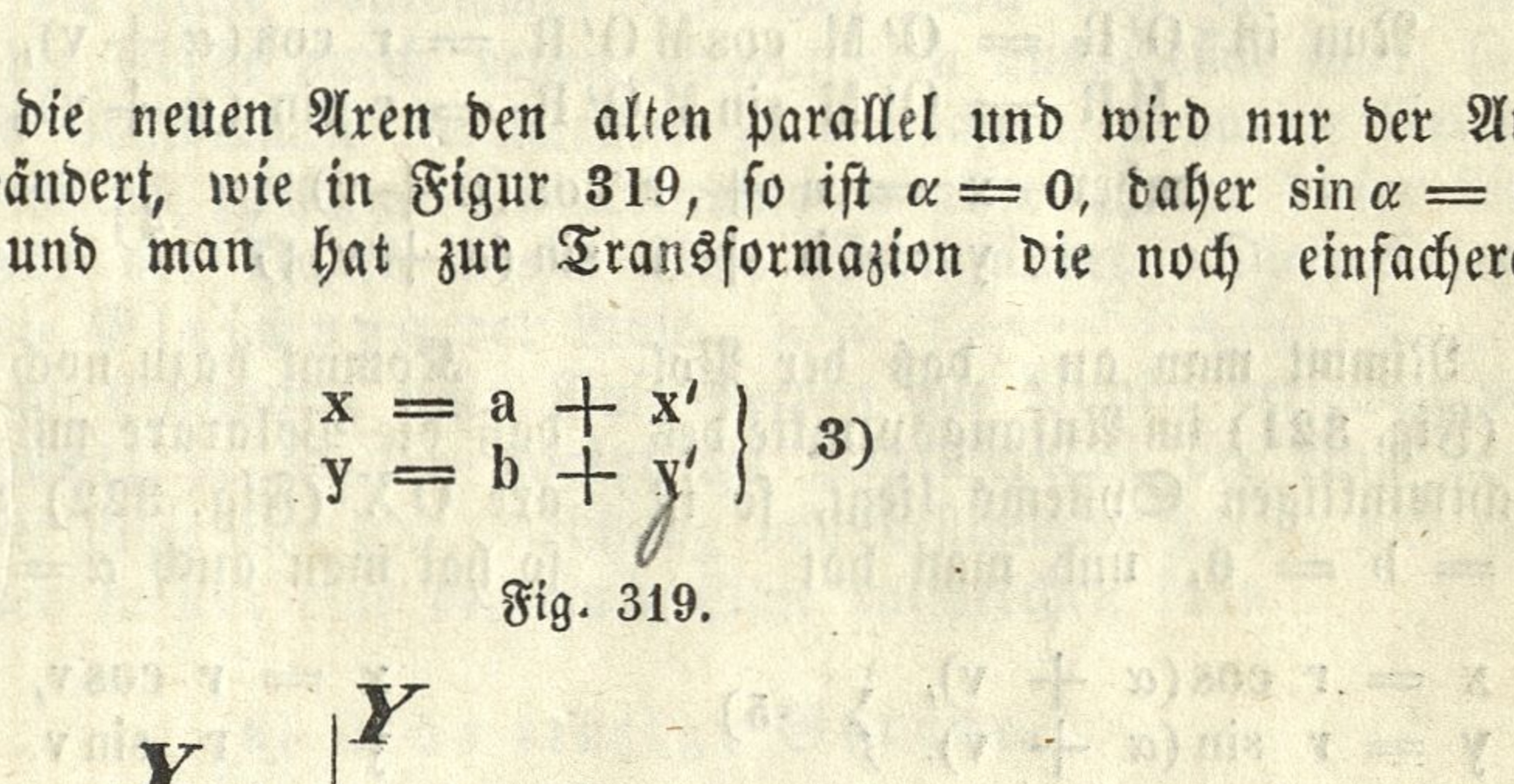
Fig. 318.



Bleiben die neuen Axen den alten parallel und wird nur der Anfangspunkt geändert, wie in Figur 319, so ist $\alpha = 0$, daher $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$, und man hat zur Transformazion die noch einfacheren Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x' \\ y &= b + y' \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

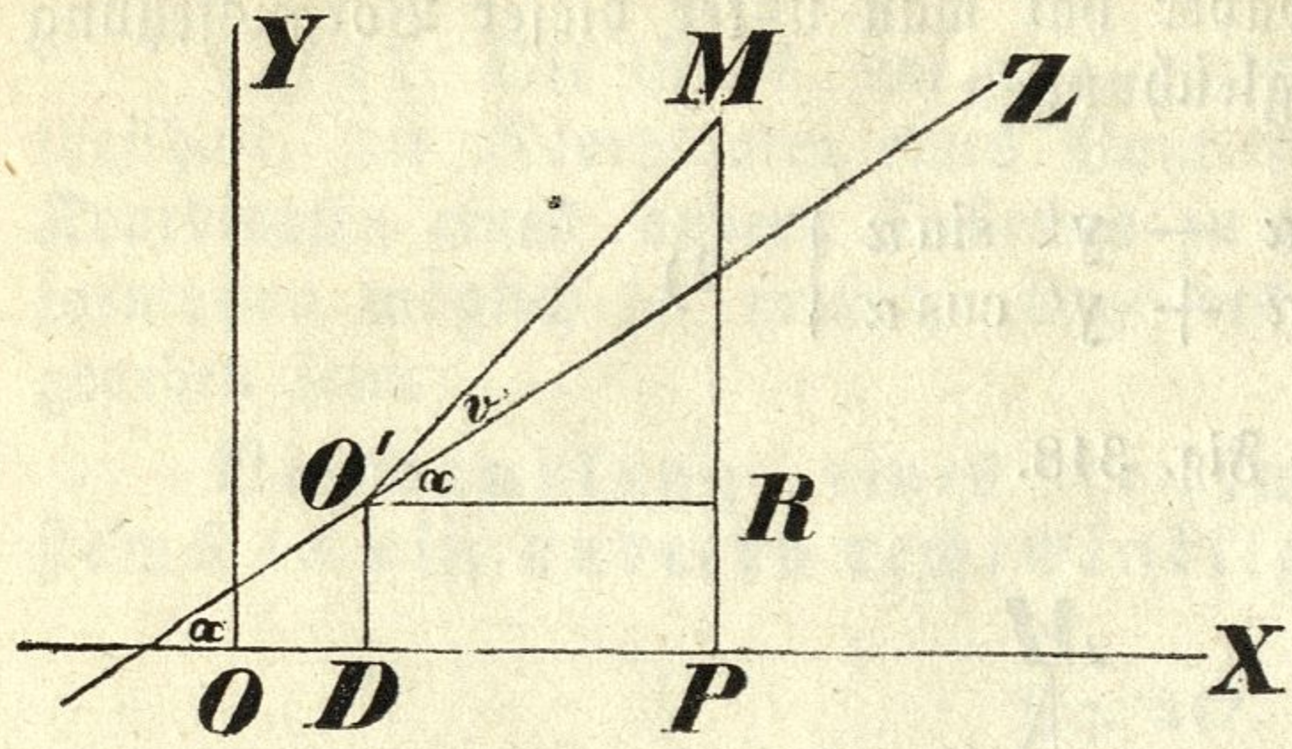
Fig. 319.



Die Gleichungen 2) und 3) lassen sich aus den darunter stehenden Figuren auch für sich besonders ableiten.

§. 512. Verwandlung eines rechtwinkligen Systems in das Polarsystem und umgekehrt.

Fig. 320.



Es seien (Fig. 320) OX und OY die Axen des rechtwinkligen Koordinatensystems, für welches der Punkt M die Koordinaten x und y hat, also $x = OP$, $y = MP$; ferner sei O' der Pol und O'Z die Axe des Polarsystems, in welchem der Radiusvektor $r = O'M$ des Punktes M mit der Axe den Winkel $v = MO'Z$ bildet; endlich seien die Koordinaten des Poles O' in Bezug auf das rechtwinklige System $OD = a$, $O'D = b$, und der Winkel zwischen der Polaraxe und der Abscissenaxe gleich α.

Zieht man von O' auf MP die Senkrechte O'R, so hat man

$$x = OP = OD + DP = a + O'R,$$
$$y = MP = RP + MR = b + MR.$$

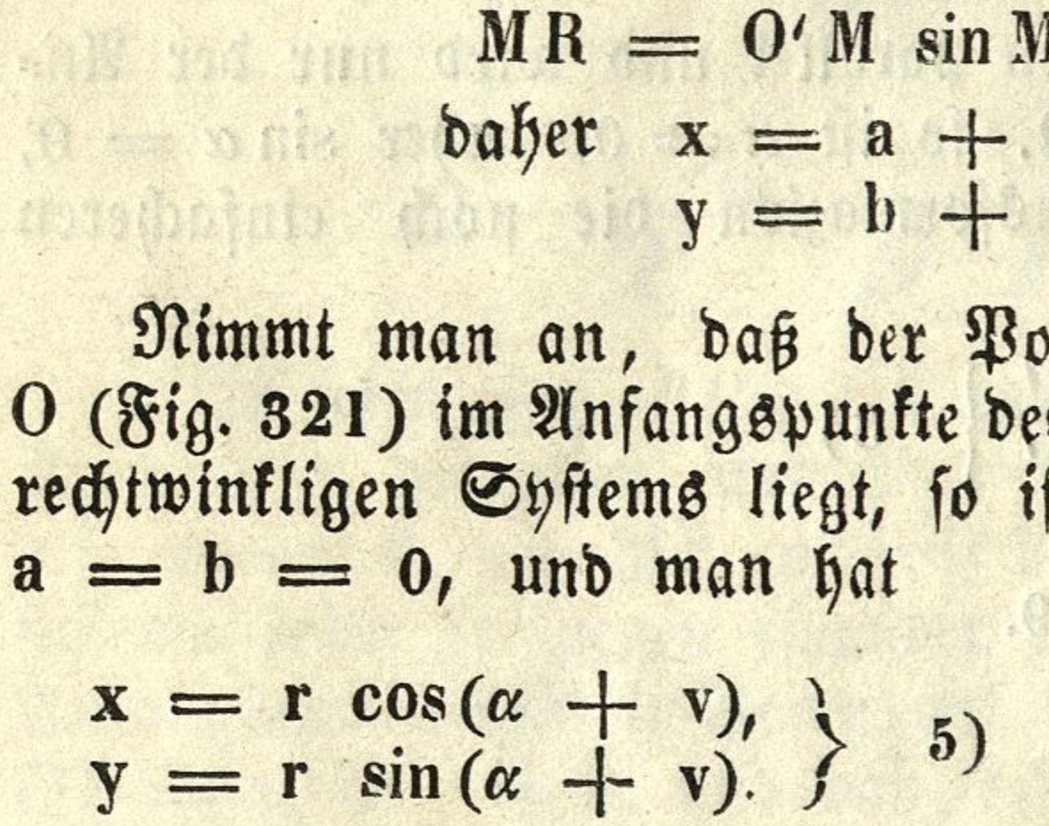
Nun ist
$$O'R = O'M \cos MO'R = r \cos(\alpha + v),$$
$$MR = O'M \sin MO'R = r \sin(\alpha + v);$$

daher
$$\left.\begin{aligned} x &= a + r\cos(\alpha + v), \\ y &= b + r\sin(\alpha + v); \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Nimmt man an, daß der Pol O (Fig. 321) im Anfangspunkte des rechtwinkligen Systems liegt, so ist $a = b = 0$, und man hat

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos(\alpha + v), \\ y &= r\sin(\alpha + v). \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

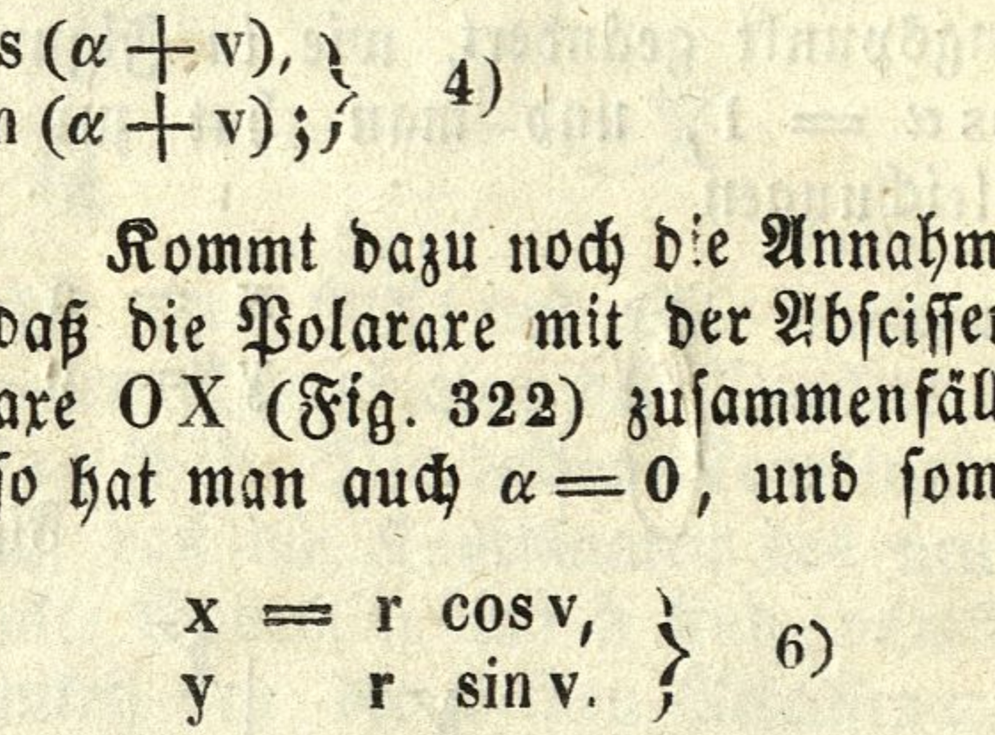
Fig. 321.



Kommt dazu noch die Annahme, daß die Polaraxe mit der Abscissenaxe OX (Fig. 322) zusammenfällt, so hat man auch $\alpha = 0$, und somit

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos v, \\ y &= r\sin v. \end{aligned}\right\} \quad 6)$$

Fig. 322.



Die Gleichungen 5) und 6) lassen sich aus den darunter stehenden Figuren auch für sich besonders sehr leicht ableiten.

§. 513. Um umgekehrt von den Polarkoordinaten auf die rechtwinkligen überzugehen, muß man aus den obigen Gleichungen r und v durch

x und y ausdrücken. Betrachten wir bloß die Gleichungen 6) als die einfachsten, so folgt daraus

$$x^2 = r^2 \cos^2 v$$
$$y^2 = r^2 \sin^2 v$$

daher $$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 v + \sin^2 v) = r^2$$

und $$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad . \quad . \quad 7)$$

Ferner ist

$$\left.\begin{aligned} \sin v &= \frac{MP}{OM} = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \cos v &= \frac{OP}{OM} = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}\right\} 8)$$

II. Analytische Darstellung der geraden Linie.

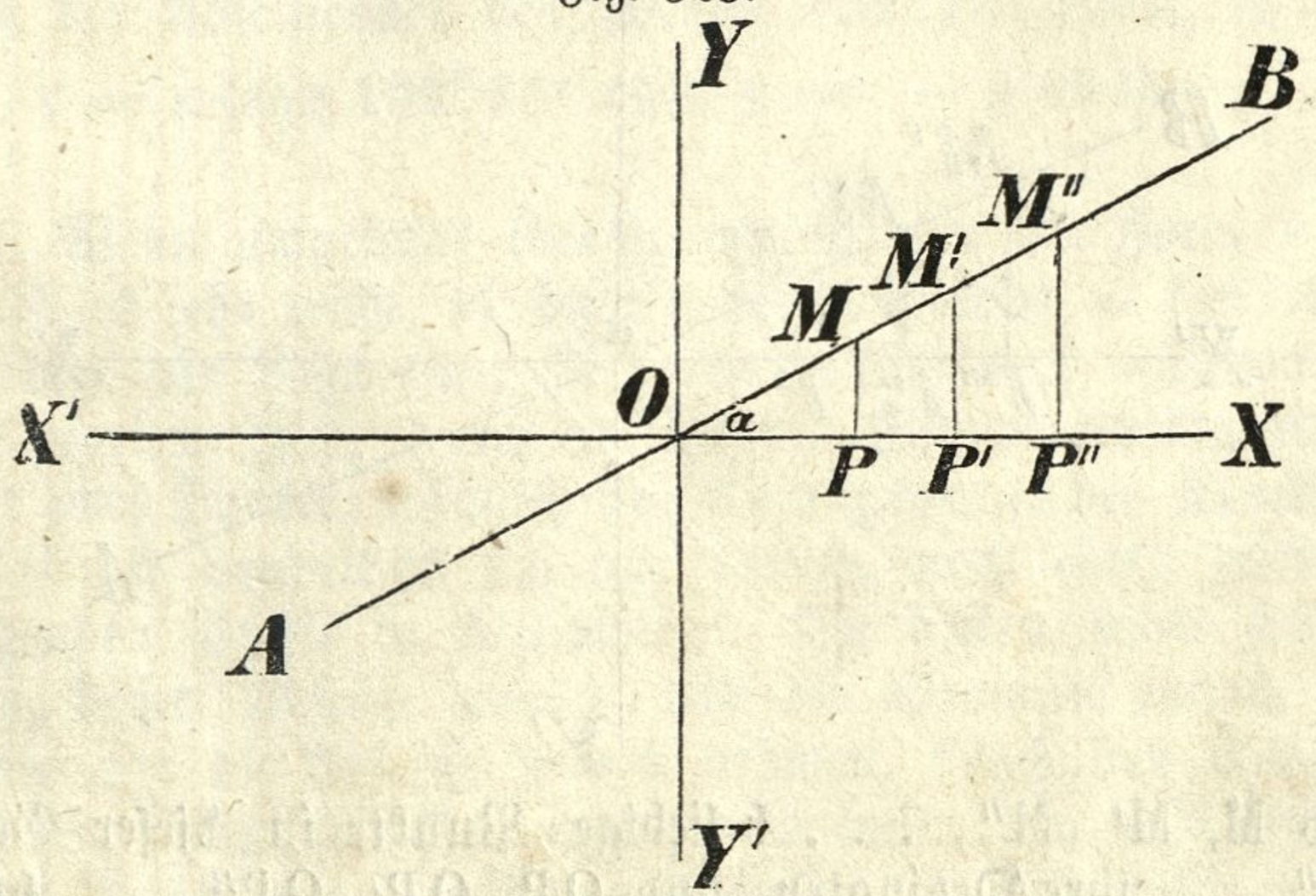
§. 514. Wenn man das Gesetz kennt, welchem die Lage aller Punkte einer Linie, aber auch nur der Punkte dieser Linie unterliegt, so ist dadurch die Linie vollkommen bestimmt. Da nun die Lage eines Punktes in der Ebene durch dessen Koordinaten ausgedrückt wird, so ist eine Linie als vollkommen karakterisirt zu betrachten, wenn die Relazion bekannt ist, welche zwischen den Koordinaten aller Punkte dieser Linie, aber auch nur der Punkte dieser Linie Statt findet. Diese Relazion heißt dann die **Gleichung** der Linie.

Durch die Gleichung einer Linie werden alle Punkte derselben vollkommen bestimmt; sie ist der analytische Repräsentant der Linie dergestalt, daß jeder Linie nur eine Gleichung von bestimmter Form, und jeder Gleichung eben so nur eine bestimmte Linie entsprechen kann.

a) Eine einzige Gerade.

§. 515. **Gleichung einer Geraden, welche durch den Anfangspunkt der Koordinaten geht.**

Fig. 323.



Es sei AB (Fig. 323) eine beliebige Gerade, welche durch den Anfangspunkt O geht, und mit der Abscissenaxe OX den spitzigen Winkel $BOX = \alpha$ bildet.

Nimmt man in dieser Geraden willkürlich die Punkte M, M', M'', .. an, zu denen folgeweise die Ordinaten MP, M'P', M''P', ... und die Abscissen OP, OP', OP'', ... gehören, so ist in den rechtwinkligen Dreiecken MPO, M'P'O, M''P''O, ...

$MP = OP \text{ tang } \alpha$, $M'P' = OP' \text{ tang } \alpha$, $M''P'' = OP'' \text{ tang } \alpha$, ...

Es ist daher die Ordinate eines jeden Punktes gleich der zugehörigen Abscisse, multiplizirt mit tang α. Heißen daher x und y die Koordinaten irgend eines Punktes der Geraden AB, so ist

$$y = x \cdot \text{tang } \alpha,$$

oder, wenn $\text{tang } \alpha = a$ gesetzt wird,

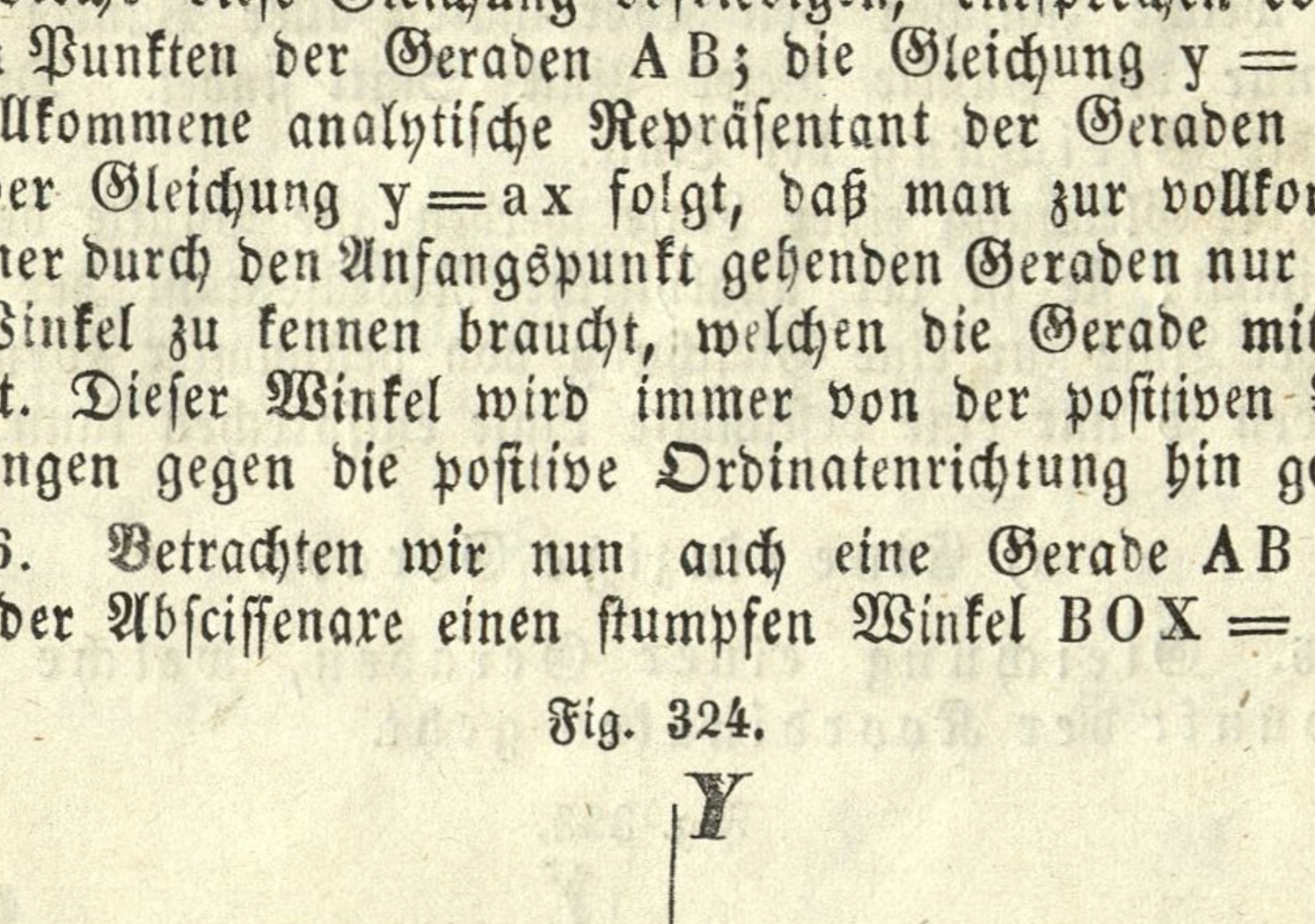
$$y = ax$$

die Gleichung der Geraden AB. Diese Gerade wird durch die Gleichung $y = ax$ so bestimmt ausgedrückt, daß, wenn man darin für x beliebige Werthe OP, OP', OP'', ... setzt, daraus die entsprechenden Werthe von y berechnet, und diese auf den in P, P', P'', ... errichteten Senkrechten folgeweise bis M, M', M'', ... aufträgt, alle diese Punkte in der Geraden AB liegen. Die unendlich vielen zusammengehörigen Koordinatenwerthe, welche diese Gleichung befriedigen, entsprechen eben so vielen verschiedenen Punkten der Geraden AB; die Gleichung $y = ax$ ist demnach der vollkommene analytische Repräsentant der Geraden AB.

Aus der Gleichung $y = ax$ folgt, daß man zur vollkommenen Bestimmung einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden nur die Größe a, somit den Winkel zu kennen braucht, welchen die Gerade mit der Abscissenaxe bildet. Dieser Winkel wird immer von der positiven Abscissenrichtung angefangen gegen die positive Ordinatenrichtung hin gerechnet.

§. 516. Betrachten wir nun auch eine Gerade AB (Fig. 324), welche mit der Abscissenaxe einen stumpfen Winkel $BOX = \alpha$ bildet.

Fig. 324.



Sind M, M', M'', ... beliebige Punkte in dieser Geraden, MP, MP', MP'', ... ihre Ordinaten, und OP, OP', OP'', ... ihre Abscissen, so erhält man aus den rechtwinkligen Dreiecken MPO, M'P'O M''P''O, ...

$$MP = OP \cdot \text{tang}(180 - \alpha),\ M'P' = OP' \cdot \text{tang}(180 - \alpha),$$
$$M''P'' = OP'' \cdot \text{tang}(180 - \alpha), \ldots$$

Es ist also jede Ordinate gleich der entsprechenden Abscisse multiplizirt mit $\text{tang}(180 - \alpha)$, wo jedoch nicht zu übersehen ist, daß die Ordinaten und die Abciſſen entgegengesetzte Zeichen haben. Drückt man die allgemeine Ordinate durch y, die Abscisse durch $-x$ aus, und bedenkt, daß $\text{tang}(180 - \alpha) = -\text{tang}\,\alpha$ ist, so hat man

$$y = -x \cdot -\text{tang}\,\alpha, \quad \text{oder} \quad y = x\,\text{tang}\,\alpha$$

als die allgemeine Relazion zwischen den Koordinaten der Geraden AB, folglich als ihre Gleichung.

Man sieht, daß die Gleichung $y = x\,\text{tang}\,\alpha$ jede Gerade karakterisirt, welche durch den Anfangspunkt geht und mit der Abscissenaxe den Winkel α bildet, mag dieser Winkel ein spitziger oder ein stumpfer sein.

Bezeichnet man im letztern Falle, wo der Winkel α stumpf ist, und daher eine negative Tangente hat, diese durch $-a$, so erhält die Gleichung der Geraden die Form

$$y = -ax.$$

Die allgemeine Gleichung jeder Geraden, welche durch den Anfangspunkt geht, ist demnach $y = ax$, wo a die trigonometrische Tangente des Winkels α bedeutet, den die Gerade mit der Abscissenaxe bildet, und positiv oder negativ ist, je nachdem α spitzig oder stumpf ist.

Beispiele.

1) Es sei eine Gerade, welche durch den Anfangspunkt geht, und mit der Abscissenaxe den Winkel 65^0 bildet, so ist die Gleichung derselben

$$y = x \cdot \text{tang}\,65^0 \quad \text{oder} \quad y = 2{\cdot}144507\,x.$$

2) Die Gleichung einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden, welche mit der Abscissenaxe den Winkel 45^0 bildet, ist

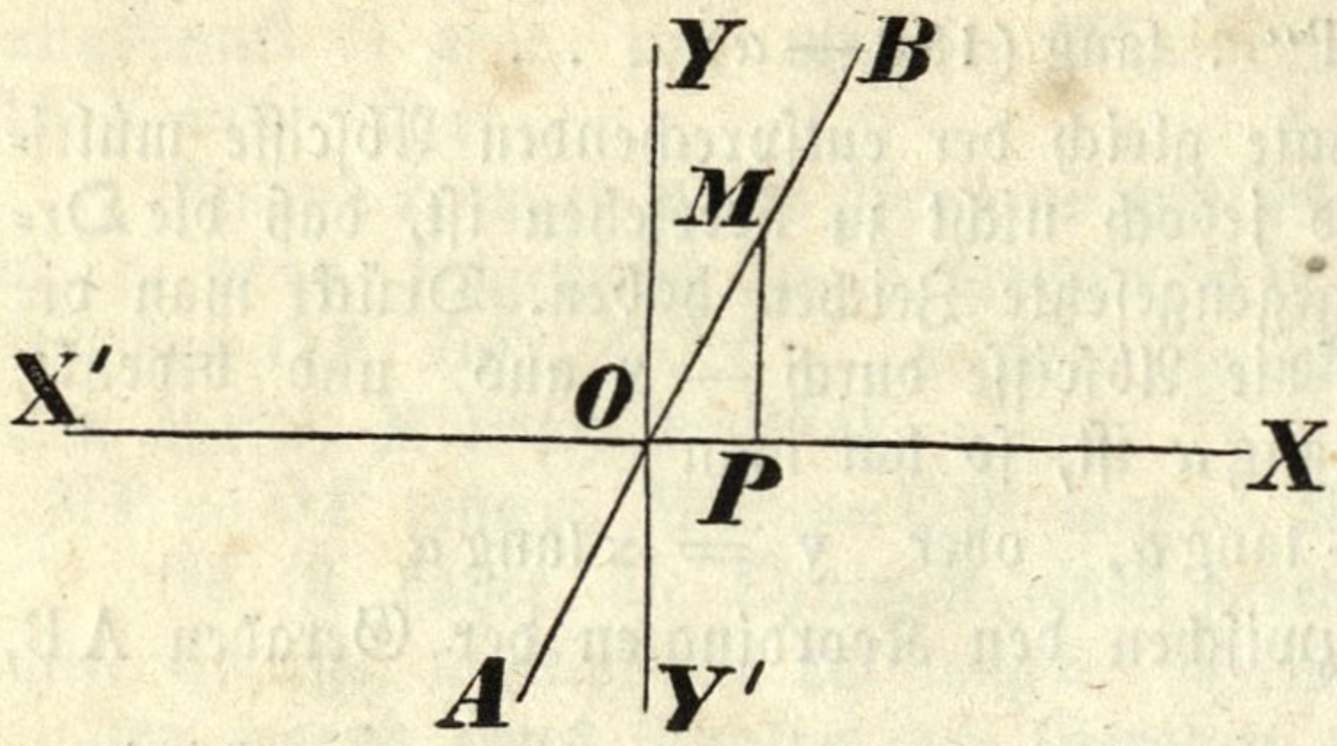
$$y = x\,\text{tang}\,45^0 \quad \text{oder} \quad y = x.$$

3) Die Gleichung einer Geraden, welche durch den Anfangspunkt geht, und mit der Abscissenaxe den Winkel $132^0 25'$ bildet, ist

$$y = x\,\text{tang}\,132^0 25' \quad \text{oder} \quad y = -1{\cdot}0945\,x.$$

§. 517. Wenn umgekehrt eine Gleichung von der Form $y = ax$ gegeben ist, so ist es sehr leicht, die dazu gehörige Gerade zu konstruiren. Bedenkt man, daß die Lage einer Geraden vollkommen bestimmt ist, wenn zwei Punkte gegeben sind, durch welche die Gerade durchgeht, und daß hier einer der zwei Punkte, nämlich der Anfangspunkt der Koordinaten bereits bekannt ist; so handelt es sich nur darum, noch einen zweiten in der Geraden liegenden Punkt zu bestimmen. Am besten wird sich dazu der Punkt eignen, dessen Abscisse $x = 1$, und die Ordinate sonach $y = a$ ist. Man darf also nur die Abscisse $x = 1$ nehmen, durch den Endpunkt eine Senkrechte ziehen, darauf die Ordinate $y = a$ auftragen, und den auf diese Art bestimmten Punkt mit dem Anfangspunkte durch eine Gerade verbinden; so stellt diese die durch die Gleichung $y = ax$ ausgedrückte Gerade vor.

Fig. 325.



Um z. B. die Gleichung $y = 2x$ zu konstruiren, hat man für $x = 1$, $y = 2$; man schneidet also (Fig. 325) $OP = 1$ ab, macht die Senkrechte $PM = 2$, und zieht durch O und M die Gerade AB, welche somit der Gleichung $y = 2x$ entspricht. Will man ihre Neigung gegen die Abscissenaxe wissen,

so hat man

$$\text{tang}\,\alpha = 2, \quad \text{daher} \quad \alpha = 63^0\,26'\,6''.$$

Eben so geben die Gleichungen

$$y = \tfrac{3}{4}x, \qquad y = -3x$$

folgende gerade Linien (Fig. 326, 327).

Fig. 326.

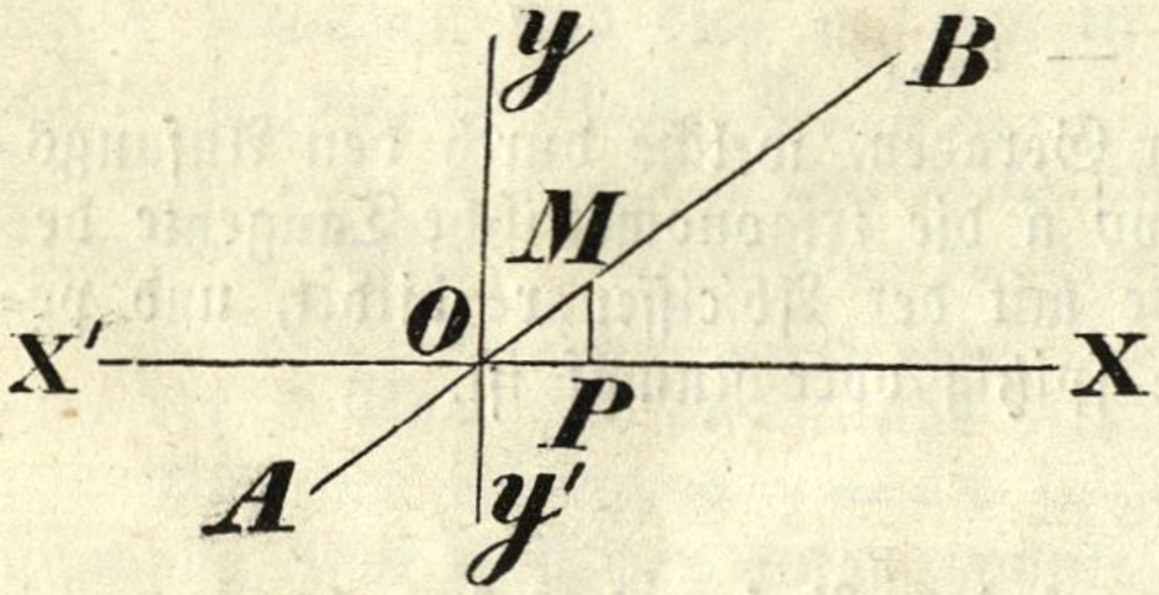
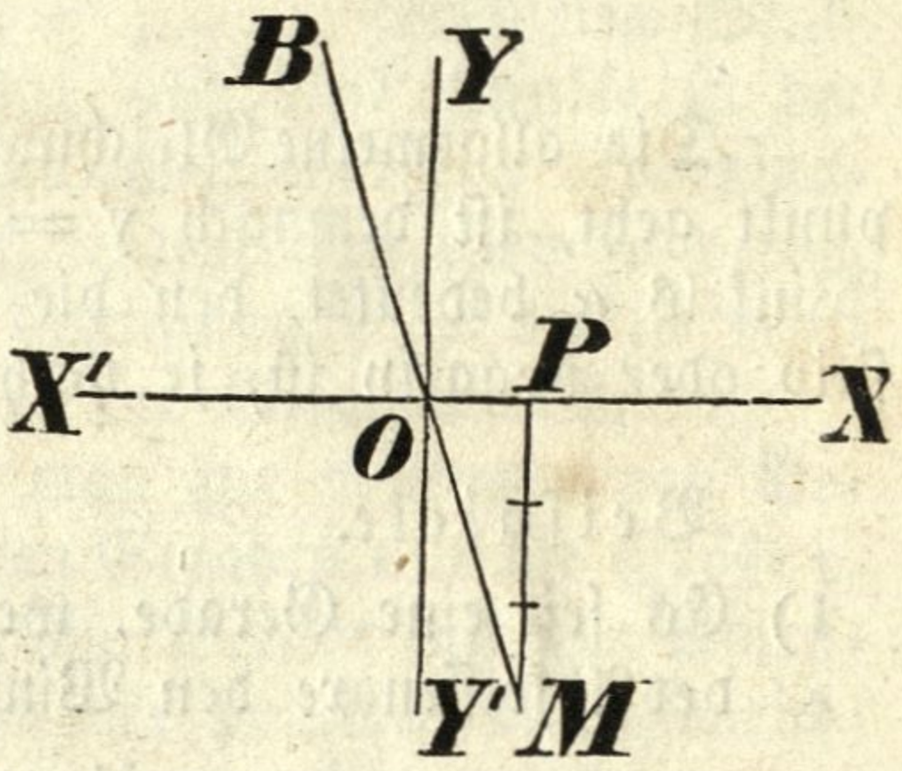


Fig. 327.



Man konstruire noch die Gleichungen:

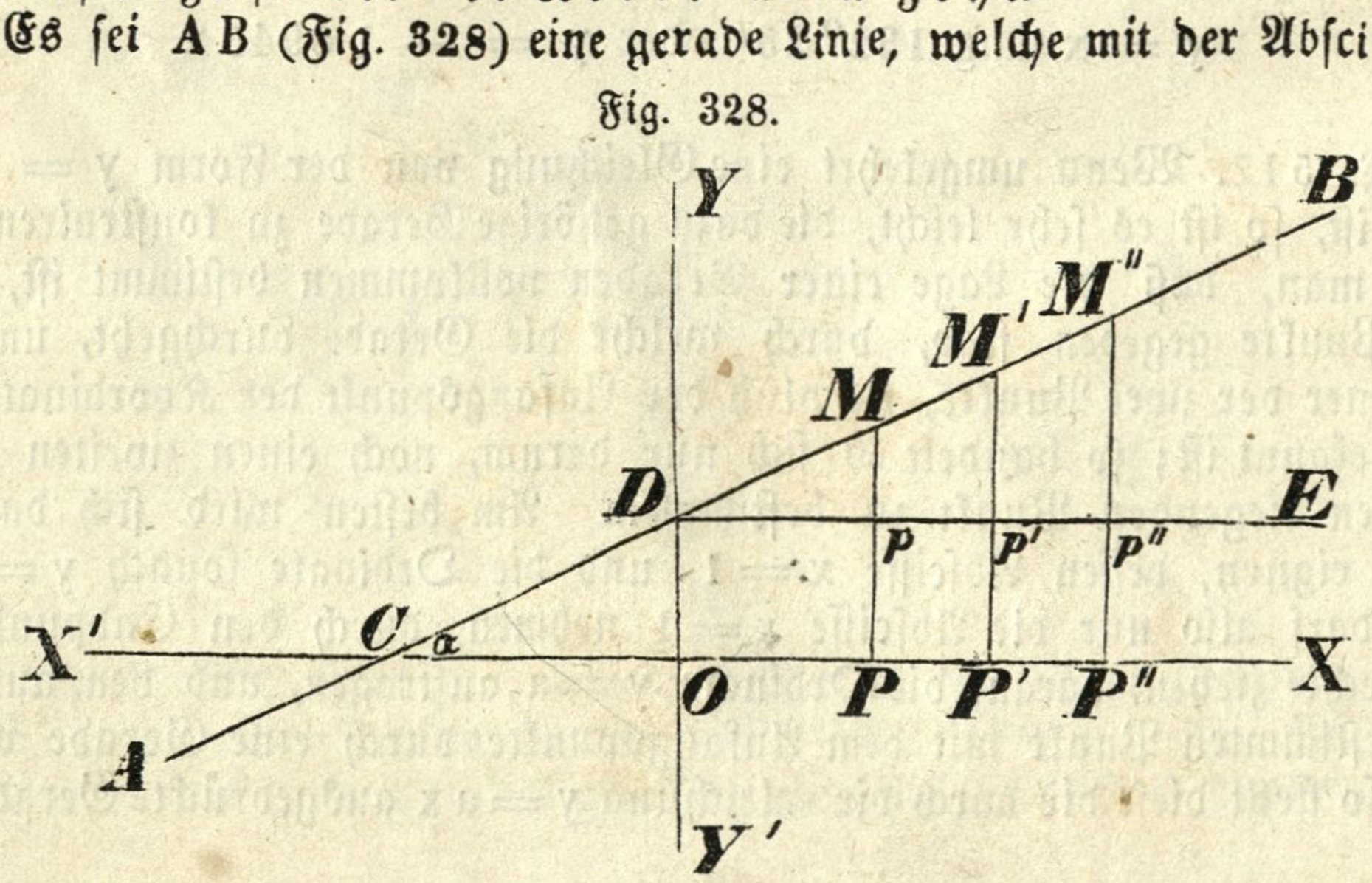
a) $y = \frac{3x}{2}$, b) $y = -2x$,

c) $y = -\frac{x}{3}$ d) $5y = 2x$.

§. 518. Gleichung einer Geraden, welche nicht durch den Anfangspunkt der Kordinaten geht.

Es sei AB (Fig. 328) eine gerade Linie, welche mit der Abscissenaxe

Fig. 328.



den Winkel α bildet, und die Ordinatenaxe im Punkte D schneidet, so daß $DO = b$ ist.

Sind M, M', M'', ... beliebige Punkte in der Geraden AB; MP, MP', MP'', ... ihre Ordinaten; OP, OP', OP'', ... ihre Abciſſen, und zieht man durch D die mit OX parallele Gerade DE, so ist in den rechtwinkligen Dreiecken MpD, M'p'D, M''p''D, ...

$Mp = Dp \cdot \text{tang}\,\alpha$, $M'p' = Dp' \cdot \text{tang}\,\alpha$, $M''p'' = Dp'' \cdot \text{tang}\,\alpha$, ...

oder

$MP - b = OP \cdot \text{tang}\,\alpha$, $MP' - b = OP' \cdot \text{tang}\,\alpha$, $M''P'' - b = OP'' \cdot \text{tang}\,\alpha$, ...

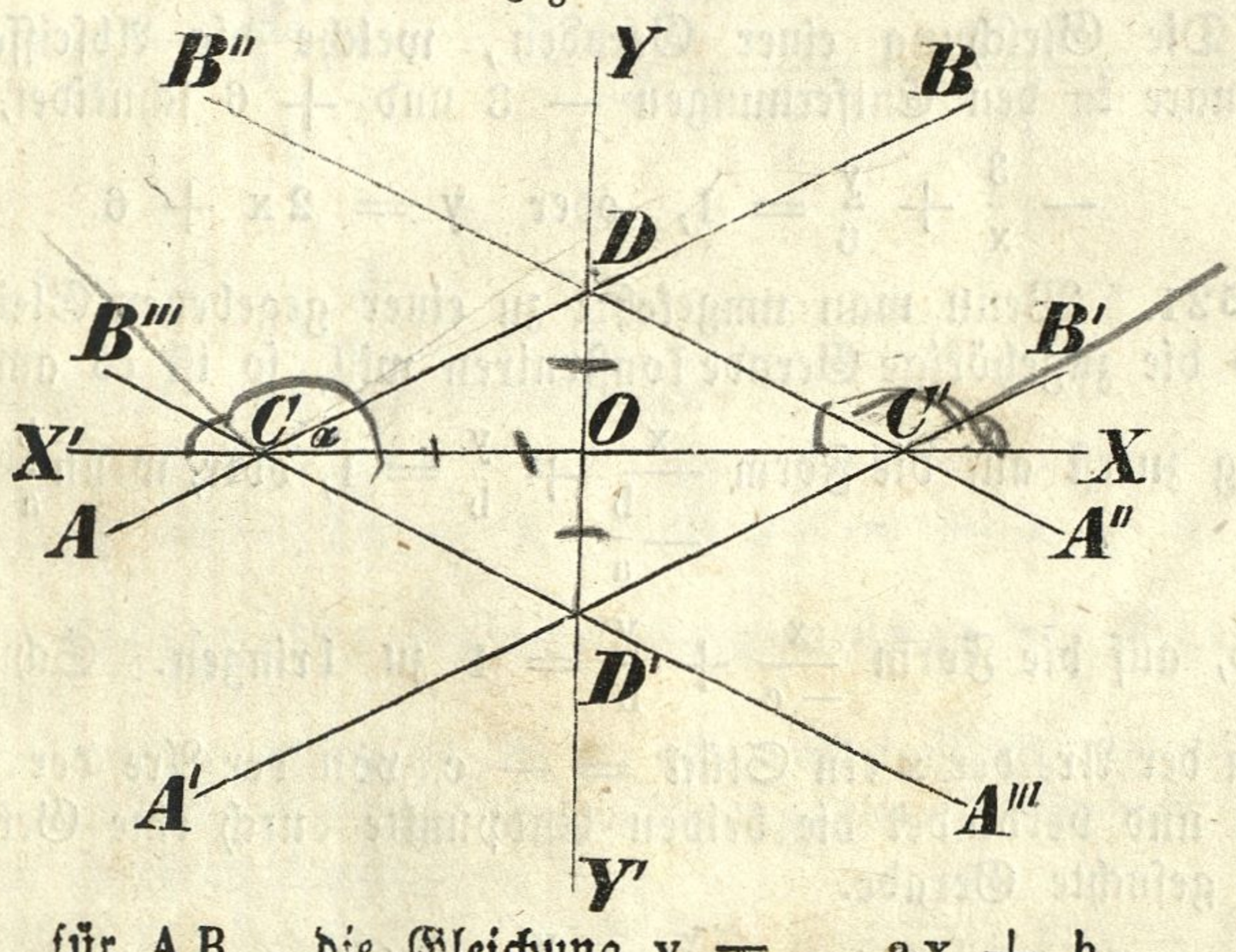
Es ist also die um b verminderte Ordinate eines jeden Punktes der Geraden gleich der zugehörigen Abſciſſe multiplizirt mit $\text{tang}\,\alpha$. Bezeichnet man daher die Koordinaten irgend eines Punktes der Geraden AB durch x und y, und ſetzt $\text{tang}\,\alpha = a$, so ist

$$y - b = ax \quad \text{oder} \quad y = ax + b$$

die Gleichung der Geraden AB.

§. 519. Auf gleiche Weiſe kann man auch die Gleichungen für ſolche Gerade ableiten, welche mit der Abſciſſenaxe einen ſtumpfen Winkel bilden, oder welche die Ordinatenaxe unterhalb des Anfangspunktes durchſchneiden. Die Gleichungen werden mit der frühern dieſelbe Form haben und ſich von ihr nur durch die Vorzeichen von a und b unterſcheiden. Es wird nämlich a poſitiv, wenn der Winkel α ſpitzig, und negativ, wenn α ein ſtumpfer Winkel iſt. Eben ſo iſt b poſitiv oder negativ, je nachdem die Ordinatenaxe von der Geraden oberhalb oder unterhalb der Abſciſſenaxe geſchnitten wird. Man hat demnach, wenn (Fig. 329) $D'O = DO$ iſt, wenn ferner die Geraden AB und A'B' mit der Abſciſſenaxe den ſpitzigen Winkel α, A'' B'' und A''' B''' dagegen den ſtumpfen Winkel $180 - \alpha$ bilden,

Fig. 329.



für AB die Gleichung $y = ax + b$,
" A'B' " " $y = ax - b$,
" A''B'' " " $y = -ax + b$,
" A'''B''' " " $y = -ax - b$.

Eine für die Konstrukzion sehr geeignete Form erhält die Gleichung $y = ax + b$, wenn man darin $\frac{b}{a} = c$ sezt, wo dann $c = \frac{DO}{\text{tang}\,\alpha} = CO$ ist; die Gleichung verwandelt sich dadurch wegen $a = \frac{b}{c}$ in die folgende $y = \frac{bx}{c} + b$, oder, wenn man durch b dividirt, und das mit x verbundene Glied auf die erste Seite überträgt,

$$\frac{x}{-c} + \frac{y}{b} = 1.$$

Die Nenner von x und y bedeuten offenbar die Länge der Stücke, welche die Gerade AB an der Abscissen- und an der Ordinatenaxe vom Ursprunge angefangen abschneidet.

§. 520. Beispiele.

1) Eine Gerade schneide von der Ordinatenaxe das Stück $b = 2$ ab, und bilde mit der Abscissenaxe einen Winkel von 45^0; so ist die Gleichung dieser Geraden

$$y = x\,\text{tang}\,45^0 + 2, \quad \text{oder} \quad y = x + 2.$$

2) Wenn eine Gerade die Ordinatenaxe unterhalb des Ursprunges im Abstande -3 schneidet und mit der Abscissenaxe den Winkel $128^0\,28'\,28''$ bildet; so ist ihre Gleichung

$$y = x\,\text{tang}\,128^0\,28'\,28'' - 3, \quad \text{oder} \quad y = -1{\cdot}25832x - 3$$

3) Die Gleichung einer Geraden, welche die Abscissen- und die Ordinatenaxe in den Abständen 4 und 2 durchschneidet, ist

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1, \quad \text{oder} \quad y = -\frac{x}{2} + 2.$$

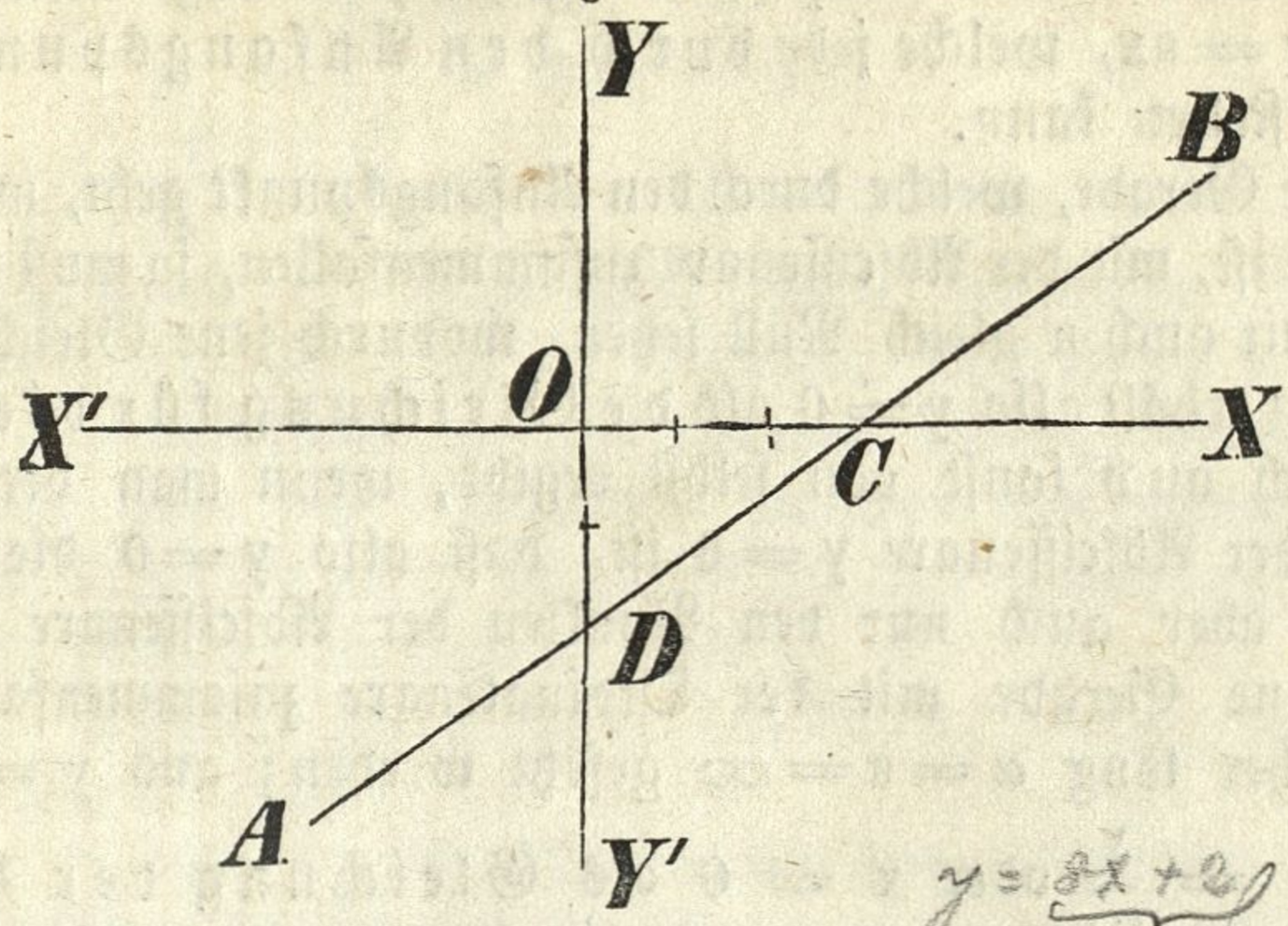
4) Die Gleichung einer Geraden, welche die Abscissen- und die Ordinatenaxe in den Entfernungen -3 und $+6$ schneidet, ist

$$-\frac{3}{x} + \frac{y}{6} = 1, \quad \text{oder} \quad y = 2x + 6.$$

§. 521. Wenn man umgekehrt zu einer gegebenen Gleichung $y = ax + b$ die zugehörige Gerade konstruiren will, so ist es am besten, die Gleichung zuerst auf die Form $\frac{x}{-\frac{b}{a}} + \frac{y}{b} = 1$, oder, wenn $\frac{b}{a} = c$ gesezt wird, auf die Form $\frac{x}{-c} + \frac{y}{b} = 1$ zu bringen. Schneidet man dann von der Axe der x ein Stück $= -c$, von der Axe der y ein Stück $= b$ ab, und verbindet die beiden Endpunkte durch eine Gerade, so ist diese die gesuchte Gerade.

Um z. B. die Gleichung $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$ zu konstruiren, macht man (Fig. 330) $OC = 3$, $OD = -2$, und zieht durch C und D die Gerade AB.

Fig. 330.



Eben so stellen die beiden Gleichungen

$$y = -3x + 4 \quad \text{und} \quad y = 8x + 2$$

oder, was gleichviel ist, die Gleichungen

$$\frac{x}{\frac{4}{3}} + \frac{y}{4} = 1 \quad \text{und} \quad -\frac{x}{\frac{1}{4}} + \frac{y}{2} = 1$$

die folgenden Geraden (Fig. 331, 332) vor:

Fig. 331.

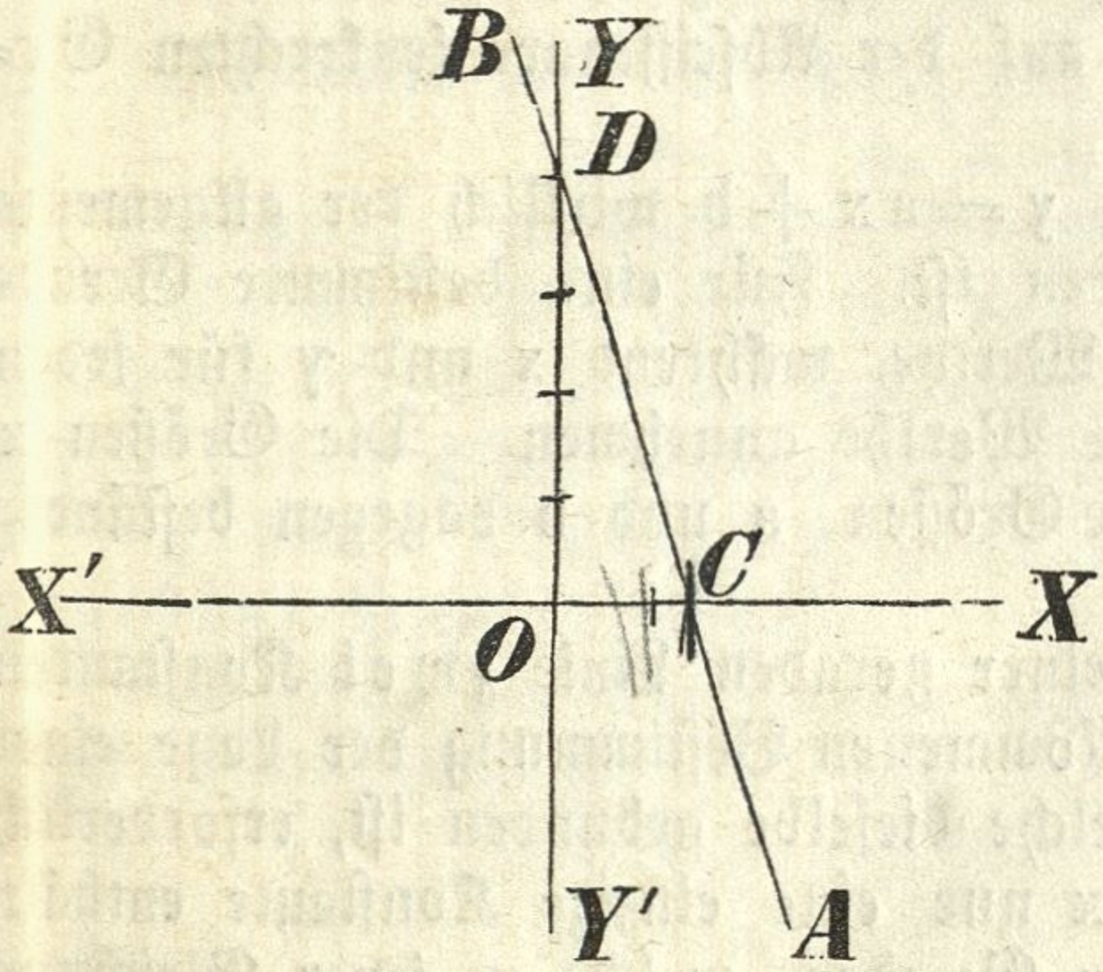
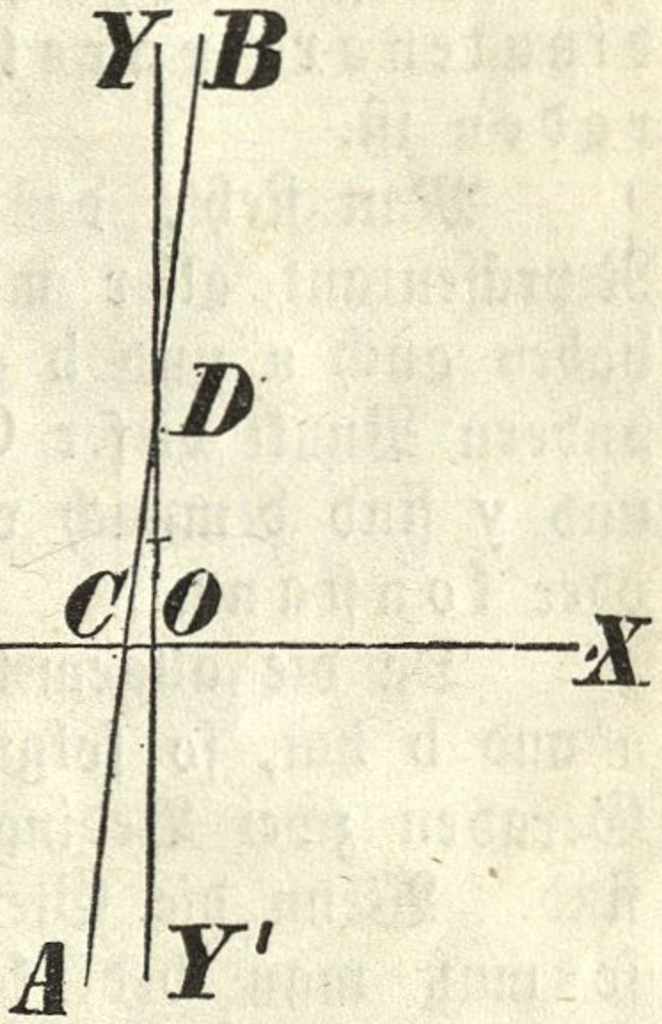


Fig. 332.



Man konstruire noch die Gleichungen:

a) $y = 3x + 7$, b) $y = x - \frac{3}{4}$,
c) $y = -2x + 3$, d) $3y = -x + 9$.

§. 522. Allgemeine Betrachtungen über die Gleichung der Geraden.

Der Ausdruck $y = ax + b$ ist die allgemeine Gleichung einer geraden Linie, da man daraus durch Spezialisirung der Werthe von a und b alle möglichen Geraden konstruiren kann.

Läßt man a und b von Null verschieden, aber bald positiv, bald negativ sein, so stellt $y = ax + b$ jede beliebige Gerade vor, welche nicht durch den Anfangspunkt der Koordinaten gehet.

Nimmt man $b = 0$ an, so übergehet jene allgemeine Gleichung in die folgende $y = ax$, welche jede durch den Anfangspunkt gehende Gerade vorstellen kann.

Soll die Gerade, welche durch den Anfangspnnkt geht, und deren Gleichung $y = ax$ ist, mit der Abscissenaxe zusammenfallen, so muß man den Winkel α und somit auch a gleich Null setzen, wodurch jene Gleichung in $y = 0$ übergeht; man erhält also $y = 0$ als die Gleichung für die Abscissenaxe, was sich auch sonst von selbst ergibt, wenn man bedenkt, daß für alle Punkte der Abscissenaxe $y = 0$ ist, daß also $y = 0$ die Relazion ist, welche allen, aber auch nur den Punkten der Abscissenaxe zukommt.

Soll jene Gerade mit der Ordinatenaxe zusammenfallen, so muß $\alpha = 90^o$, daher tang $\alpha = a = \infty$ gesetzt werden; aus $y = ax$ ergibt sich dann $x = \frac{y}{a} = \frac{y}{\infty}$ oder $x = 0$ als Gleichung der Ordinatenaxe, was ebenfalls ganz klar ist, da für alle Punkte der Ordinatenaxe $x = 0$ sein muß.

Soll die Gerade mit der Axe der x, und zwar in dem Abstande b parallel laufen, so muß man in der allgemeinen Gleichung $y = ax + b$ den Winkel α, also auch a gleich Null setzen, wodurch man $y = b$ als Gleichung einer mit der Abscissenaxe parallelen, oder was einerlei ist, einer auf die Ordinatenaxe senkrechten Geraden erhält.

Eben so folgt, daß $x = c$ die Gleichung einer mit der Ordinatenaxe parallelen, oder auf der Abscissenaxe senkrechten Geraden ist.

Man sieht, daß die Gleichung $y = ax + b$ wirklich der allgemeine Repräsentant aller möglichen Geraden ist. Für eine bestimmte Gerade haben auch a und b ganz bestimmte Werthe, während x und y für jeden andern Punkt dieser Geraden andere Werthe annehmen. Die Größen x und y sind demnach variabel; die Größen a und b dagegen beständig oder konstant.

Da die allgemeine Gleichung einer geraden Linie zwei Konstanten a und b hat, so folgt, daß zur vollkommenen Bestimmung der Lage einer Geraden zwei Bedingungen, an welche dieselbe gebunden ist, erforderlich sind. Wenn die Gleichung $y = ax$ nur eine einzige Konstante enthält, so muß man bedenken, daß bei der Geraden, welche zu jener Gleichung gehört, eine Bedingung schon dadurch angegeben ist, daß diese Gerade durch den Anfangspunkt gehen muß. Aus gleichen Gründen enthalten die Gleichungen $y = b$ und $x = c$ nur eine, und die Gleichungen $x = 0$ und $y = 0$ gar keine Konstante.

§. 523. Jede Gleichung des ersten Grades stellt eine gerade Linie vor.

Beweis. Jede Gleichung des ersten Grades zwischen zwei veränderlichen Größen läßt sich auf die Form

$$y = ax + b$$

zurückführen. Betrachtet man diese Gleichung als den Ausdruck für eine Linie, indem man x und y als die Koordinaten ihrer Punkte, a und b aber als konstante Größen ansieht, so hat man für irgend zwei Punkte dieser Linie, deren Koordinaten x', y', und x'', y'' sind,

$$y' = ax' + b'$$
$$y'' = ax'' + b'$$

daher $$y' - y'' = a(x' - x'')$$

und $$\frac{y' - y''}{x' - x''} = a.$$

Es hat demnach der Unterschied zweier beliebigen Ordinaten zum Unterschiede ihrer Abscissen dasselbe konstante Verhältniß a, eine Eigenschaft, welche ausschließlich nur der geraden Linie zukommt, da sich für jede nicht gerade Linie das Verhältniß zwischen den Zunahmen der Ordinaten und jenen der Abscissen stetig ändert. Die Gleichung $y = ax + b$ bezeichnet daher immer eine gerade Linie.

§. 524. Gleichung einer Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt geht.

Es seien x' und y' die Koordinaten des gegebenen Punktes, den wir darum der Kürze halber den Punkt x' y' nennen wollen; man suche die Gleichung einer Geraden, welche durch diesen Punkt geht.

Die verlangte Gleichung wird jedenfalls die Form

$$y = ax + b \quad . \; . \; . \; 1)$$

haben, wobei a und b der Bedingung der Aufgabe gemäß zu bestimmen sind.

Damit die Gerade durch den Punkt x' y' gehe, müssen dessen Koordinaten x' und y' statt x und y in der Gleichung 1) substituirt, dieser Genüge leisten; es muß also auch

$$y' = ax' + b \quad . \; . \; . \; 2)$$

sein. Zieht man diese Gleichung von der obigen ab, so ist

$$y - y' = a(x - x') \quad . \; . \; . \; 3)$$

die Gleichung einer durch den Punkt x' y' gehenden Geraden.

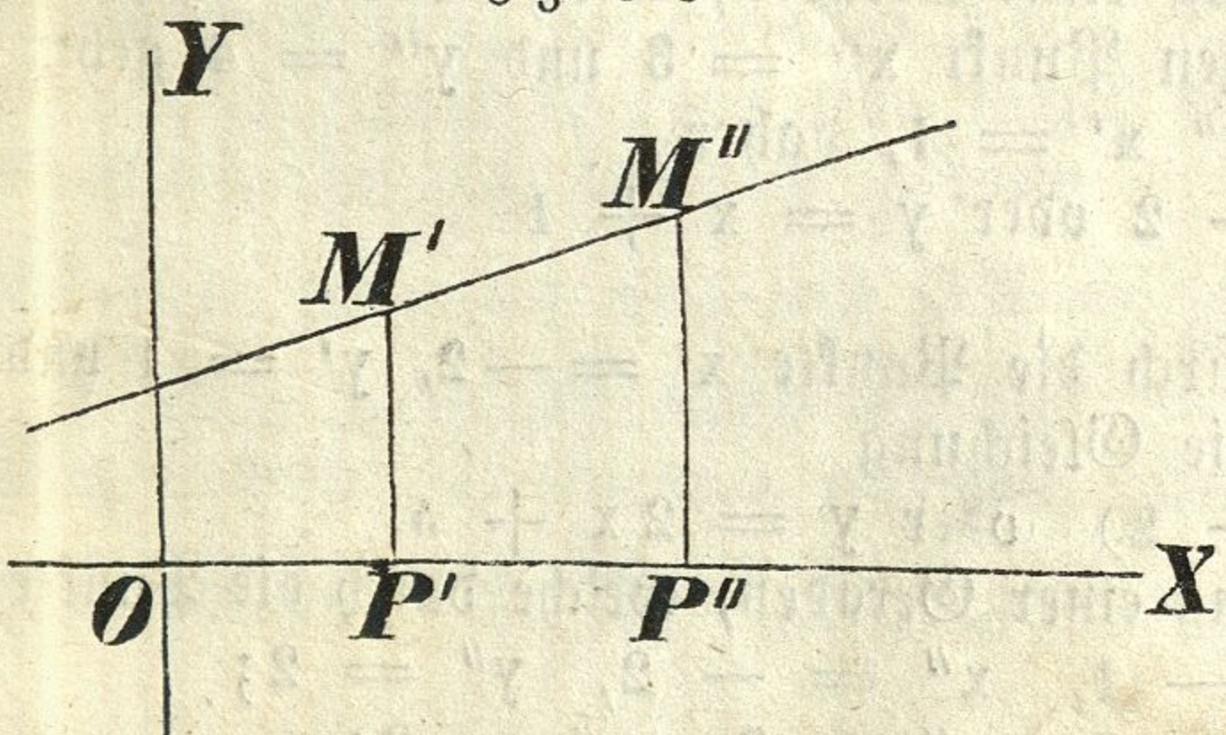
Da hier für a jeder beliebige Werth gesetzt werden kann, so folgt aus dieser Gleichung, daß durch einen einzigen Punkt unzählig verschiedene gerade Linien gehen können, was auch sonst von selbst einleuchtet.

§. 525. Gleichung einer Geraden, welche durch zwei gegebene Punkte geht.

Es seien die Koordinaten zweier Punkte M' und M'' (Fig. 333) gegeben, und zwar sei

für M' . . $OP' = x'$, $M'P' = y'$;
„ M'' . . $OP'' = x''$, $M''P'' = y''$.

Fig. 333.



Es soll nun die Gleichung einer Geraden entwickelt werden, welche durch die beiden Punkte M' und M'', oder x' y' und x'' y'' geht.

Die verlangte Gleichung wird die Form

$$y = ax + b \quad . \; . \; . \; 1)$$

haben, und es kommt nur darauf an, die noch unbekannten Größen a und b den Bedingungen der Aufgabe gemäß zu bestimmen.

Damit die Gerade durch den Punkt $x' y'$ gehe, muß ihrer Gleichung Genüge geschehen, wenn man darin x' und y' anstatt x und y setzt; es muß demnach die Bedingungsgleichung

$$y' = a x' + b \ldots 2)$$

erfüllt werden. Soll die Gerade auch durch den Punkt $x'' y''$ gehen, so muß ihrer Gleichung auch Genüge geleistet werden, wenn man x'' und y'' statt x und y setzt, es muß also auch die Bedingungsgleichung

$$y'' = a x'' + b \ldots 3)$$

Statt finden.

Aus diesen beiden Bedingungsgleichungen lassen sich nun durch Elimination die noch unbekannten Größen a und b bestimmen; man erhält

$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x''}, \qquad b = y' - \frac{y'' - y'}{x'' - x'} \cdot x'.$$

Setzt man nun diese für a und b gefundenen Werthe in die Gleichung 1), so findet man

$$y = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} \cdot x + y' - \frac{y'' - y'}{x'' - x'} \cdot x' \ldots 4)$$

als die gesuchte Gleichung einer durch die Punkte $x' y'$ und $x'' y''$ gehenden Geraden.

Diese Gleichung wird kürzer gewöhnlich auf folgende Art abgeleitet.

Subtrahirt man die Gleichung 2) von 1), und dann von 3), so erhält man

$$y - y' = a (x - x') \ldots 5),$$
$$y'' - y' = a (x'' - x') \ldots 6),$$

Aus der Gleichung 6) folgt nun

$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'},$$

welcher Werth in 5) substituirt,

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (x - x') \ldots 7)$$

als die verlangte Gleichung gibt.

Diese letztere Form, welche sich sehr leicht auf jene 4) zurückführen läßt, ist in der Anwendung bequemer, und läßt sich auch leichter dem Gedächtnisse einprägen.

§ 526. Beispiele.

1) Man suche die Gleichung einer Geraden, welche durch den Punkt $x' = 2$, $y' = 3$ und durch den Punkt $x'' = 3$ und $y'' = 4$ geht.

Es ist $y'' - y' = 1$, $x'' x' = 1$, daher

$$y - 3 = x - 2 \text{ oder } y = x + 1$$

die gesuchte Gleichung.

2) Die Gerade, welche durch die Punkte $x' = -2$, $y' = 1$ und $x'' = 0$, $y'' = 5$ geht, hat die Gleichung

$$y - 1 = \tfrac{4}{2} (x + 2) \text{ oder } y = 2x + 5.$$

3) Man suche die Gleichung einer Geraden, welche durch die Punkte

a) $x' = 1$, $y' = -1$, $x'' = -2$, $y'' = 2$;

b) $x' = -\frac{1}{2}$, $y' = 3$, $x'' = 3$, $y'' = 0$;

c) $x' = 4$, $y' = -2$, $x'' = -4$, $y = -3$

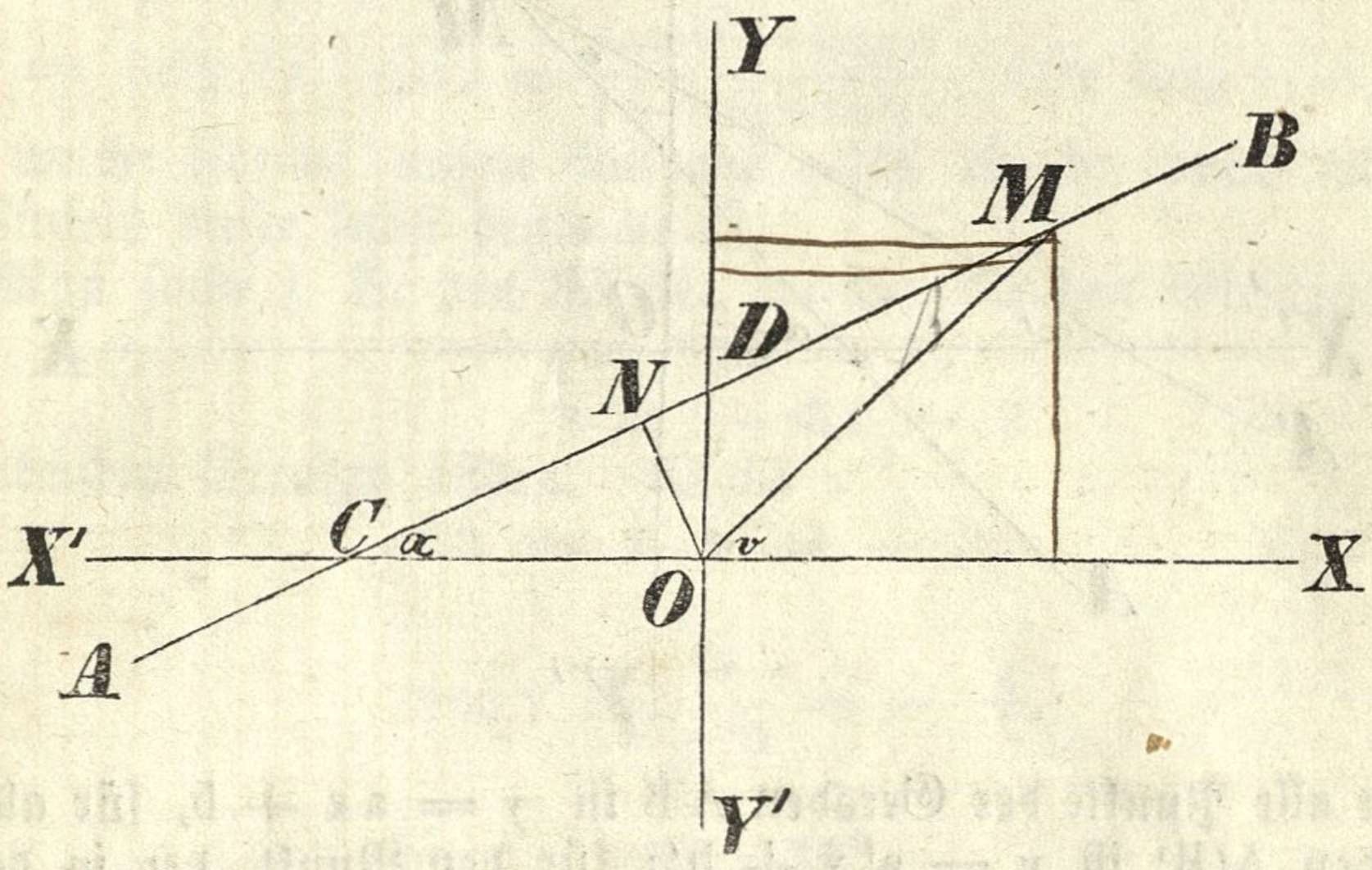
gehet.

4) Es ist die Bedingungsgleichung anzugeben, welche zwischen den Koordinaten dreier Punkte Statt finden muß, damit diese in einer und derselben Geraden liegen.

§. 527. Polargleichung für die Gerade.

Um die Gleichung der Geraden AB (Fig. 334) für die Polarkoordinaten zu erhalten, nehmen wir der Einfachheit halber den Pol im Anfangspunkte der rechtwinkligen Koordinaten, und die Abscissenaxe OX als die Polaraxe an; für den Punkt M ist dann $r = OM$, $v = MOX$, und man darf nur in der für rechtwinklige Koordinaten entwickelten Gleichung $y = ax + b$ die Substituzionen $y = r \sin v$ und $x = r \cos v$ vollführen. Man bekommt

Fig. 334.



$$r \sin v = ar \cos v + b,$$
$$r (\sin v - a \cos v) = b,$$
$$r (\sin v - \operatorname{tang} \alpha \cos v) = b,$$
$$r \cdot \frac{\sin v \cos \alpha - \cos v \sin \alpha}{\cos \alpha} = b,$$
$$r \cdot \sin (v - \alpha) = b \cos \alpha \text{ und } r = \frac{b \cos \alpha}{\sin (v - \alpha)},$$

Setzt man $CO = c$, so ist $b = c \operatorname{tang} \alpha$ oder $b \cos \alpha = c \sin \alpha$; daher

$$r = \frac{c \sin \alpha}{\sin (v - \alpha)}$$

die Polargleichung der Geraden AB.

Diese Gleichung kann man kürzer finden, wenn man von O auf AB die Senkrechte ON fällt; es ist dann

$$ON = OC \sin \alpha = c \sin \alpha \text{ und } OM = \frac{ON}{\sin NMO} \text{ oder } r = \frac{c \sin \alpha}{\sin (v - \alpha)}.$$

Geht die Gerade durch den Pol, so ist $v = \alpha$ die Relazion, welche allen Punkten der Geraden zukommt, also die Polargleichung der Geraden. Die allgemeine Polargleichung $r = \frac{c \sin a}{\sin (v - a)}$ geht wegen $c = o$ und $\sin (v - \alpha) = \sin o = o$ in $r = \frac{0}{0}$ über, welcher unbestimmte Ausdruck andeutet, daß r alle möglichen Werthe annehmen könne.

b) Zwei Gerade.

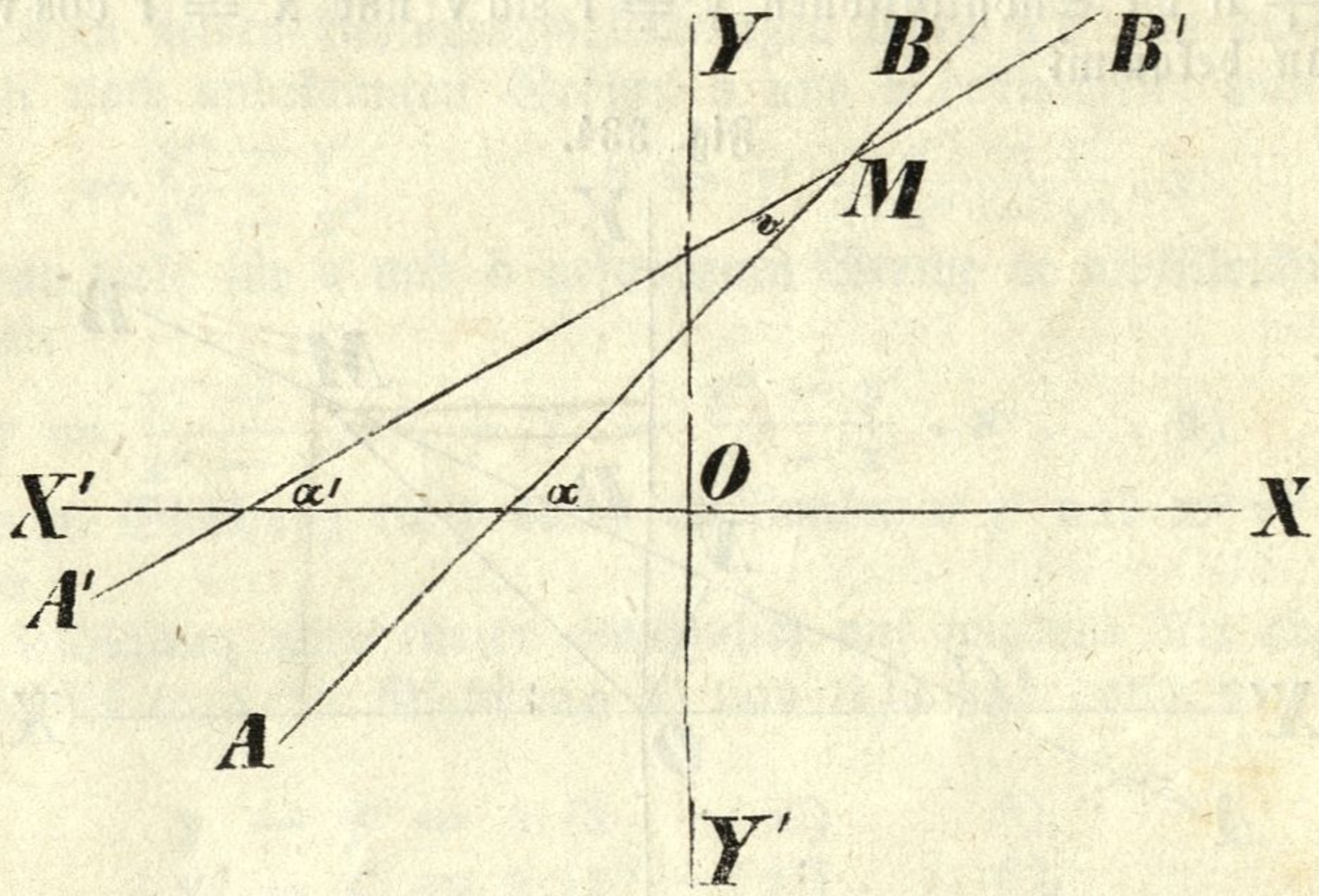
§. 528. Durchschnittspunkt zweier Geraden.

Es seien

$$y = ax + b \quad \ldots 1)$$
$$y = a'x + b' \quad \ldots 2)$$

die Gleichungen der beiden Geraden AB und A'B' (Fig. 335); man suche die Koordinaten ihres Durchschnittspunktes.

Fig. 335.



Für alle Punkte der Geraden AB ist $y = ax + b$, für alle Punkte der Geraden A'B' ist $y = a'x + b'$; für den Punkt, der in den beiden Geraden liegt, nämlich für den Durchschnittspunkt M, muß daher $y = ax + b$ und zugleich auch $y = a'x + b'$ sein. Dem Punkte M werden also jene Koordinaten x und y zukommen, durch welche beiden Gleichungen zugleich Genüge geleistet wird; diese Werthe erhält man aber offenbar durch Auflösung jener zwei Gleichungen, man bekommt nämlich

$$x = \frac{b - b'}{a' - a}, \quad y = \frac{a'b - ab'}{a' - a}.$$

Kennt man daher die Gleichungen zweier Geraden, so kann man aus diesen, auch ohne alle Konstrukzion der Linien, die Koordinaten ihres Durchschnittspunktes finden.

Es seien z. B.

$$y = 2x - 3,$$
$$y = 3x + 4,$$

die gegebenen Gleichungen, so ist

$a' = 3$	$b = -3$	$a'b = -9$
$a = 2$	$b' = 4$	$ab' = 8$
$a' - a = 1$	$b - b' = -7$	$a'b - ab' = -17$

daher sind die Koordinaten des Durchschnittspunktes der zwei Geraden

$$x = -7; \quad y = -17.$$

Wäre in den zwei gegebenen Gleichungen $a' = a$, so würden die Werthe für x und y unendlich groß werden, d. h. der Durchschnittspunkt

der Geraden würde in unendliche Entfernung hinausfallen, oder, die beiden Geraden würden sich gar nicht schneiden. Dieses ist ganz natürlich; denn wenn $a' = a$ ist, so bilden die beiden Geraden mit der Abscissenaxe gleiche Winkel, sind somit parallel, und können sich nicht schneiden.

§. 529. Winkel zweier Geraden.

Es seien die Gleichungen der Geraden AB und A′B′, welche mit der Abscissenaxe die Winkel α und α' bilden,

$$y = ax + b \ldots 1),$$

$$y = a'x + b' \ldots 2),$$

wo also $a = \text{tang}\,\alpha$, $a' = \text{tang}\,\alpha'$ ist; man soll den Winkel bestimmen, den diese beiden Geraden einschließen. Bezeichnet man diesen Winkel AMA′ durch v, so hat man

$$\text{tang}\,v = \text{tang}\,(\alpha - \alpha') = \frac{\text{tang}\,\alpha - \text{tang}\,\alpha'}{1 + \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\alpha'} \text{ oder } \text{tang}\,v = \frac{a - a'}{1 + aa'},$$

durch welche Formel unsere Aufgabe gelöst ist, da durch die Tangente des Winkels dieser selbst bestimmt ist.

Man suche z. B. den Winkel, welchen die den Gleichungen

$$y = 2x - 3,$$

$$y = -3x + 2$$

entsprechenden Geraden bilden. Es ist

$$a = 2,\ a' = -3,$$

daher

$$\text{tang}\,v = \frac{5}{-5} = -1,$$

somit

$$v = 135^0.$$

Man suche die Koordinaten des Durchschnittspunktes, so wie den Winkel der beiden Geraden

a) $y = -3x + 5,\ y = 2x - 4;$

b) $y = \frac{2x}{3} + 3,\ 4y = -2x + 3.$

§. 530. Die Gleichung $\text{tang}\,v = \frac{a - a'}{1 + a\,a'}$ gibt ein sehr einfaches Kennzeichen an die Hand, nach welchem man unmittelbar aus den Gleichungen zweier Geraden beurtheilen kann, ob diese mit einander parallel oder auf einander senkrecht sind. Sollen die beiden Geraden AB und A′B′ mit einander parallel sein, so muß der Winkel $v = 0$, daher auch tang $v = 0$, folglich

$$a' = a$$

sein.

Sollen dagegen die Geraden AB und A′B′ auf einander senkrecht stehen, so muß der Winkel $v = 90^0$, daher tang $v = \infty$, und somit $1 + a\,a' = 0$, oder

$$a' = -\frac{1}{a} \text{ sein.}$$

§. 531. Gleichung einer Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und mit einer andern gegebenen Geraden parallel ist.

Es seien x', y' die Koordinaten des gegebenen Punktes, und

$$y = ax + b \ldots 1)$$

die Gleichung der gegebenen Geraden; die Gleichung der gesuchten mit ihr parallelen Linie wird der Form nach sein

$$y = a'x + b' \ldots 2),$$

wo a' und b' den Bedingungen der Aufgabe gemäß zu bestimmen sind.

Damit die gesuchte Gerade durch den Punkt $x'y'$ gehe, muß

$$y - y' = a'(x - x') \ldots 3)$$

sein.

Damit nun die Gerade mit der gegebenen parallel sei, muß die Bedingungsgleichung $a' = a$ Statt finden; daher ist die gesuchte Gleichung

$$y - y' = a(x - x') \ldots 4).$$

Z. B. Für eine Gerade, welche durch den Punkt $x' = 2$, $y' = -2$ geht, und mit der Geraden, deren Gleichung $y = 6x - 4$ ist, parallel läuft, hat man die Gleichung

$$y + 2 = 6(x - 2) \text{ oder } y = 6x - 14.$$

Man suche die Gleichung einer Geraden,

1) welche durch den Anfangspunkt geht, und mit der Geraden $y = ax + b$ parallel ist;
2) welche durch den Punkt $x'y'$ geht, und mit der Abscissenaxe parallel ist;
3) welche durch den Punkt $x'y'$ geht, und mit der Ordinatenaxe parallel ist.

§. 532. Gleichung einer Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt geht und auf einer gegebenen Geraden senkrecht ist.

Es seien x', y' die Koordinaten des gegebenen Punktes,

$$y = ax + b \ldots 1)$$

die Gleichung der gegebenen, und

$$y = a'x + b' \ldots 2)$$

die Gleichung der gesuchten auf ihr senkrechten Geraden.

Da die gesuchte Gerade durch den Punkt $x'y'$ gehen soll, so wird ihre Gleichung

$$y - y' = a'(x - x') \ldots 3)$$

ein, wo a' noch unbestimmt ist.

Da ferner diese Gerade auf der gegebenen senkrecht sein soll, so muß die Bedingungsgleichung, $a' = -\frac{1}{a}$ Statt finden.

Die gesuchte Gleichung ist somit

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x') \ldots 4).$$

Z. B. Zu einer Geraden, welche durch den Punkt $x' = 1$, $y' = 2$ geht und auf der Geraden, deren Gleichung $y = -\frac{x}{2} + 1$ ist, senkrecht steht, gehört die Gleichung

$$y - 2 = 2(x - 1) \text{ oder } y = 2x.$$

Man suche die Gleichung einer Geraden,

1) welche durch den Anfangspunkt geht, und auf der Geraden $y = ax + b$ senkrecht ist;

2) welche durch den Punkt x′y′ geht, und auf der Abscissenaxe senkrecht steht;
3) welche durch den Punkt x′y′ geht, und auf der Ordinatenaxe senkrecht ist.

§. 533. Länge der Senkrechten von einem gegebenen Punkte auf eine gegebene Gerade.

Sind x′, y′ die Koordinaten des gegebenen Punktes, und

$$y = ax + b \quad \ldots 1)$$

die Gleichung der gegebenen Geraden, so ist

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x') \quad \ldots 2)$$

die Gleichung einer auf dieser Geraden senkrechten, und durch den Punkt x′y′ gehenden geraden Linie.

Um die Länge dieser Senkrechten zu finden, muß der Abstand zwischen dem Punkte x′y′ und dem Punkte, in welchem die Senkrechte die gegebene Gerade durchschneidet, gesucht werden. Zur Bestimmung dieses Durchschnittspunktes darf man nur die Gleichungen 1) und 2) als zusammengehörig betrachten, und daraus x und y bestimmen; man erhält

$$x = \frac{x' + ay' - ab}{1 + a^2} \qquad y = \frac{a(x' + ay') + b}{1 + a^2},$$

welche Koordinaten wir der Unterscheidung halber durch x″, y″ bezeichnen wollen. Kennt man aber die Koordinaten x′, y′ und x″, y″ zweier Punkte, so hat man für die Berechnung ihres Abstandes, den wir hier d nennen wollen, den Ausdruck

$$d = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}.$$

Nun ist

$$x'' - x' = \frac{a(y' - ax' - b)}{1 + a^2}$$

$$y'' - y' = -\frac{y' - ax' - b}{1 + a^2};$$

daher

$$d = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Ist M der Anfangspunkt der Koordinaten, so hat man wegen x′ = y′ = 0

$$d = \frac{-b}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Z. B. die Senkrechte, die vom Punkte x′ = 3, y′ = 1 auf die Gerade, deren Gleichung y = x + 3 ist, gefällt wird, hat die Länge

$$d = \frac{1 - 3 - 3}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{-5}{\sqrt{2}},$$

wo $\sqrt{2}$ negativ zu nehmen ist.

Für die Senkrechte, welche vom Anfangspunkte der Koordinaten auf die Gerade, deren Gleichung y = 3x − 1 ist, gezogen wird, findet man die Länge

$$d = \frac{1}{\sqrt{10'}},$$

wo die Wurzelgröße positiv genommen werden muß.

Es sind gegeben

a) der Punkt $x' = 1$, $y' = -1$ und die Gerade $y = 5x + 1$;

b) „ „ $x' = -3$, $y' = 0$ „ „ „ $y = -3x + 4$;

c) „ „ $x' = 0$, $y' = 0$ „ „ „ $y = \frac{x}{3} - 3$.

Man suche

α) die Gleichung der Geraden, welche durch den gegebenen Punkt geht und mit der zugehörigen Geraden parallel ist;

β) die Gleichung der Geraden, welche durch jeden dieser Punkte geht und auf die zugehörige Gerade senkrecht ist;

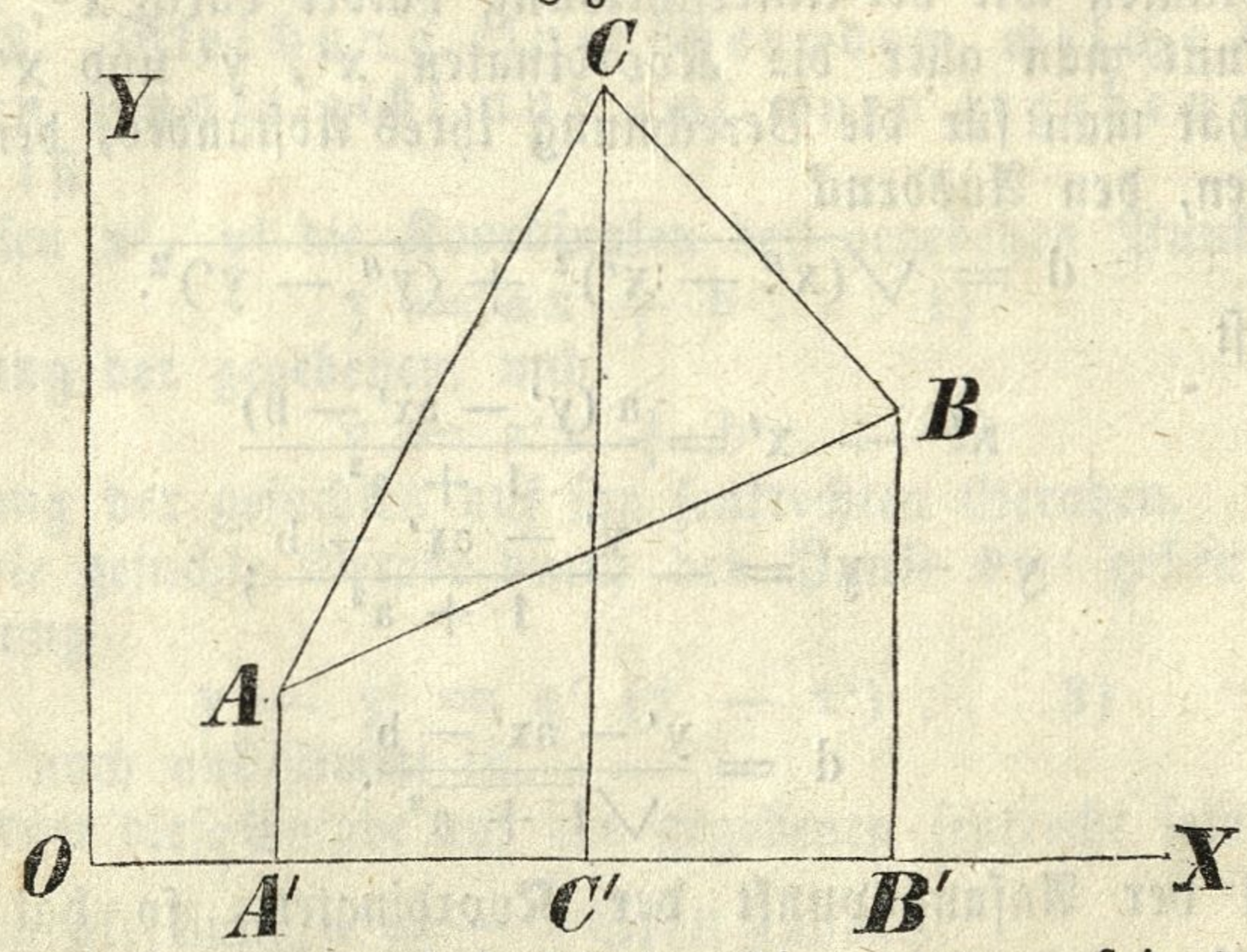
γ) die Entfernung eines jeden dieser Punkte von der entsprechenden Geraden.

c. Drei gerade Linien.

§. 534. Drei gerade Linien, welche sich wechselseitig schneiden, schließen ein geradliniges Dreieck ein, und dieses ist es, welches wir hier analytisch darstellen wollen.

Lage und Länge der Seiten, und Fläche des Dreieckes.

Fig. 336.



Beziehen wir das Dreieck ABC (Fig. 336) auf das rechtwinklige Koordinatensystem XOY, und es seien die Koordinaten

des Punktes A . . . x', y',

„ „ B . . . x'', y'',

„ „ C . . . x''', y'''.

Hinsichtlich der Lage der Seiten ist dann

$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x')$ die Gleichung der Seite AB,

$y - y' = \frac{y''' - y'}{x''' - x'}(x - x')$ „ „ „ „ AC,

$y - y'' = \frac{y''' - y''}{x''' - x''}(x - x'')$ „ „ „ „ BC.

Drückt man die Längen der Seiten BC, AC, AB folgeweise durch s', s'', s''' aus, so ist

$$s' = \sqrt{(x''' - x'')^2 + (y''' - y'')^2},$$
$$s'' = \sqrt{(x''' - x')^2 + (y''' - y')^2},$$
$$s''' = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}.$$

Heißt endlich f die Fläche des Dreieckes ABC, so ist offenbar

$$f = AA'C'C + CC'B'B - AA'B'B;$$

nun ist

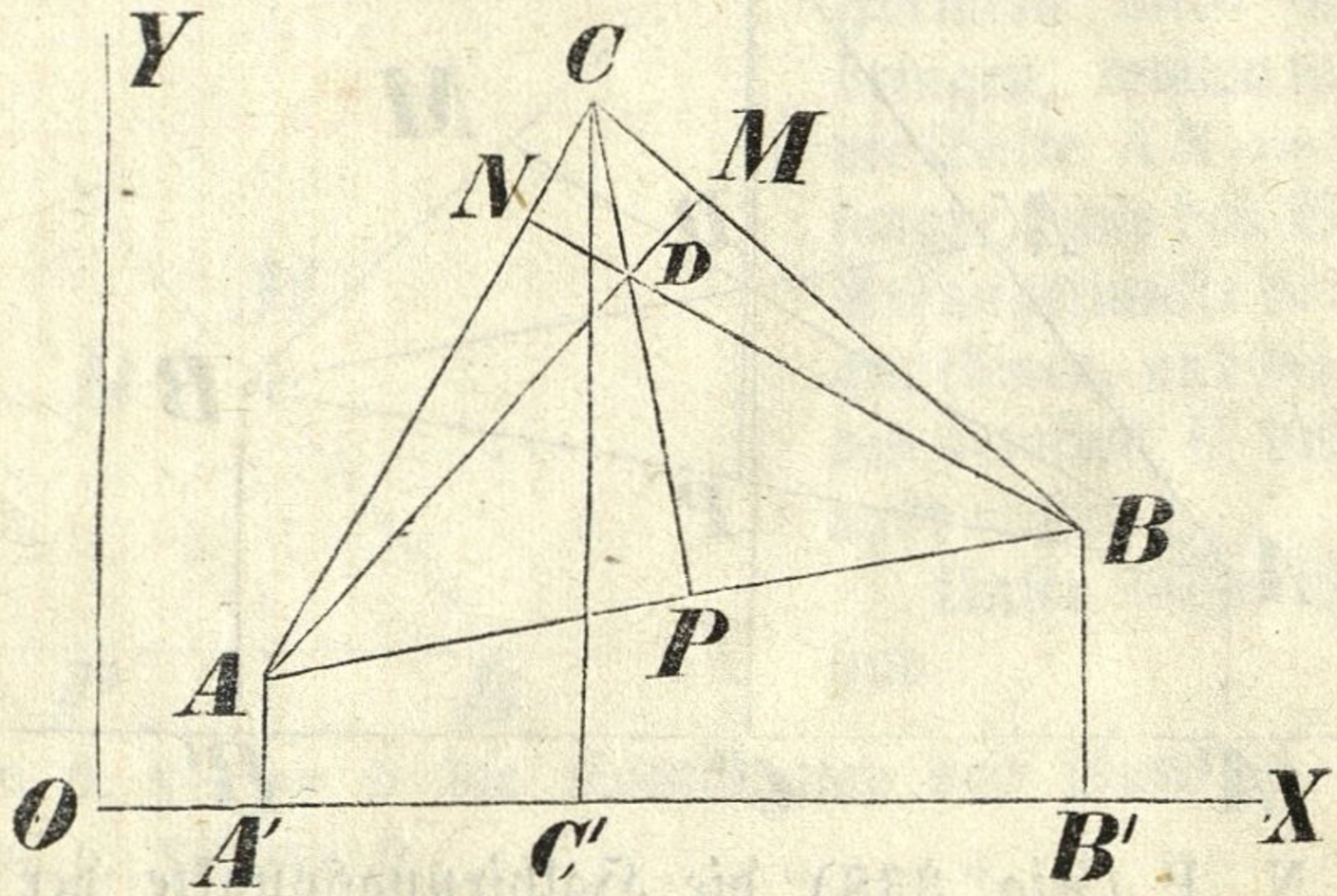
$$AA'C'C = \frac{(y' + y''')(x''' - x')}{2},$$
$$CC'B'B = \frac{(y'' + y''')(x'' - x''')}{2},$$
$$AA'B'B = \frac{(y' + y'')(x'' - x')}{2};$$

und daher

$$f = \frac{x'(y'' - y''') - x''(y' - y''') + x'''(y' - y'')}{2}.$$

§. 535. Senkrechte, welche von den Scheitelpunkten eines Dreieckes auf die gegenüberstehenden Seiten gefällt werden.

Fig. 337.



Die Gerade AM (Fig. 337), welche durch den Punkt A [x' y'] geht und auf BC [$y - y'' = \frac{y''' - y''}{x''' - x''}(x - x'')$] senkrecht ist, hat die Gleichung

$$y - y' = \frac{x'' - x'''}{y''' - y''}(x - x') \quad \ldots \quad 1).$$

Eben so sind die Gleichungen der Geraden BN und CP, welche durch die Punkte B und C auf die Seiten AC und AB senkrecht gezogen werden,

$$y - y'' = \frac{x' - x'''}{y''' - y'}(x - x'') \quad \ldots \quad 2)$$
$$y - y''' = \frac{x' - x''}{y'' - y'}(x - x''') \quad \ldots \quad 3).$$

Sucht man nun die Koordinaten des Durchschnittspunktes D zwischen den Senkrechten A M und B N, so erhält man dafür, wenn man die Gleichungen 1) und 2) als koexistirend betrachtet, und daraus x und y durch Elimazion bestimmt,

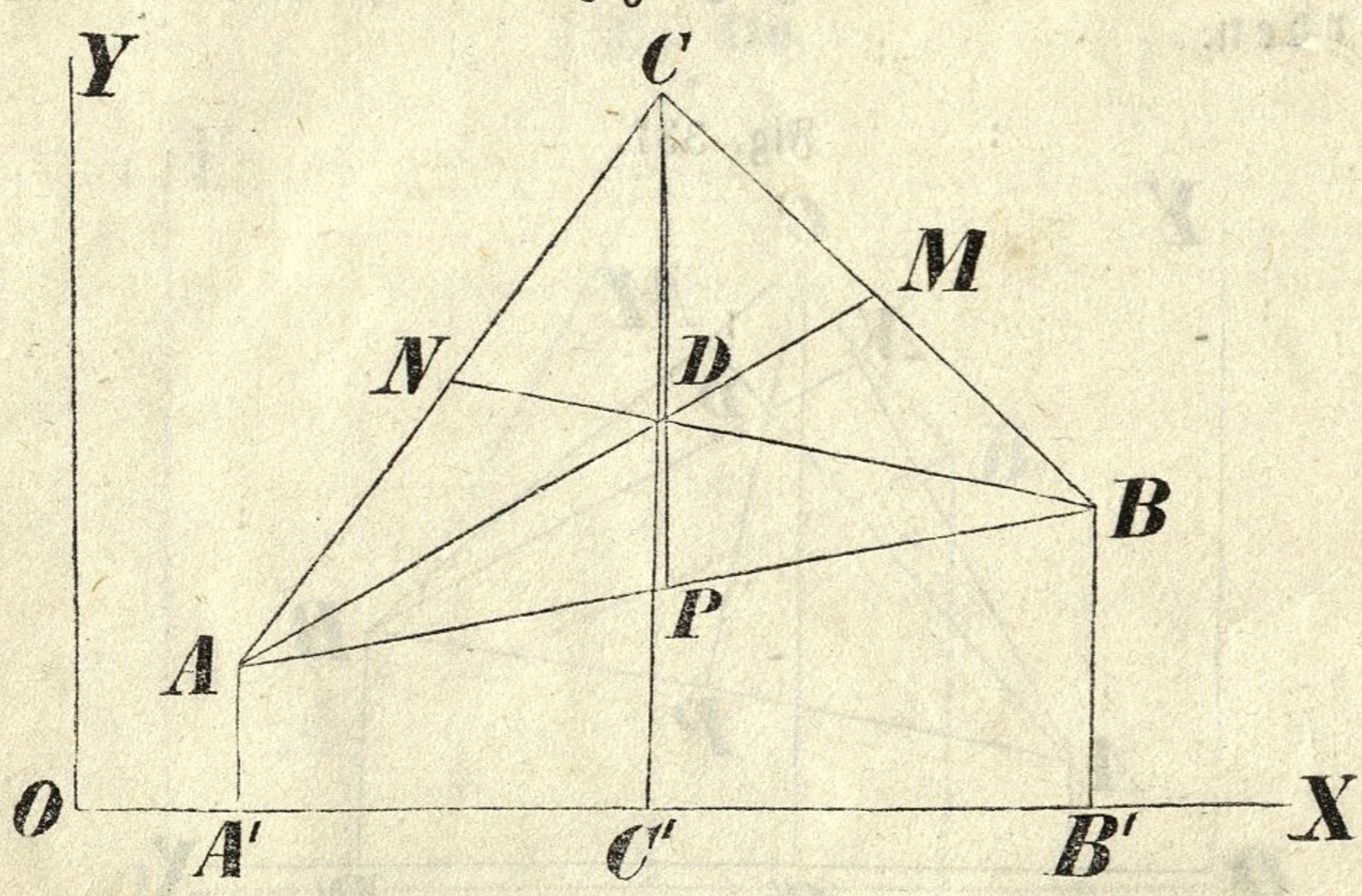
$$x = \frac{(y'''-y'')(y'''-y')(y''-y') + x'(x''-x''')(y'''-y') - x''(x'-x''')(y'''-y'')}{(x''-x''')(y'''-y') - (x'-x''')(y'''-y'')}$$

$$y = \frac{(x'''-x'')(x'''-x')(x''-x') + y'(y''-y''')(x'''-x') - y''(y'-y''')(x'''-x').}{(y''-y''')(x'''-x') - (y'-y''')(x'''-x'')}$$

Allein dieselben Koordinaten erhält man auch für den Durchschnittspunkt zwischen den Senkrechten A M und C P, so wie zwischen B N und C P; woraus hervorgeht, daß sich die Senkrechten, welche von den Scheitelpunkten eines Dreieckes auf die gegenüberstehenden Seiten gefällt werden, in einem und demselben Punkte schneiden.

§. 536. Verbindungslinien zwischen den Scheitelpunkten und den Halbirungspunkten der Seiten.

Fig. 338.



Sind M, N, P (Fig. 338) die Halbirungspunkte der Seiten B C, A C, A B, so hat man für dieselben folgende Koordinaten:

für den Punkt M . . $\frac{x'' + x'''}{2}$, $\frac{y'' + y'''}{2}$;

" " " N . . $\frac{x' + x'''}{2}$, $\frac{y' + y'''}{2}$;

" " " P . . $\frac{x' + x''}{2}$, $\frac{y' + y''}{2}$.

Die Gleichung der A M, als einer durch die Punkte (x', y') und $\left(\frac{x'' + x'''}{2}, \frac{y'' + y'''}{2}\right)$ gehenden Geraden, ist

$$y - y' = \frac{2y' - y'' - y'''}{2x' - x'' - x'''}(x - x') \ldots 1).$$

Eben so sind die Gleichungen der Geraden BN und CP

$$y - y'' = \frac{2y'' - y' - y'''}{2x'' - x' - x'''}(x - x'') \quad \ldots \; 2)$$

$$y - y''' = \frac{2y''' - y' - y''}{2x''' - x' - x''}(x - x''') \quad \ldots \; 3).$$

Sucht man nun die Durchschnittspunkte von je zwei dieser Geraden, so erhält man für alle drei Punkte die nämlichen Koordinaten, nämlich

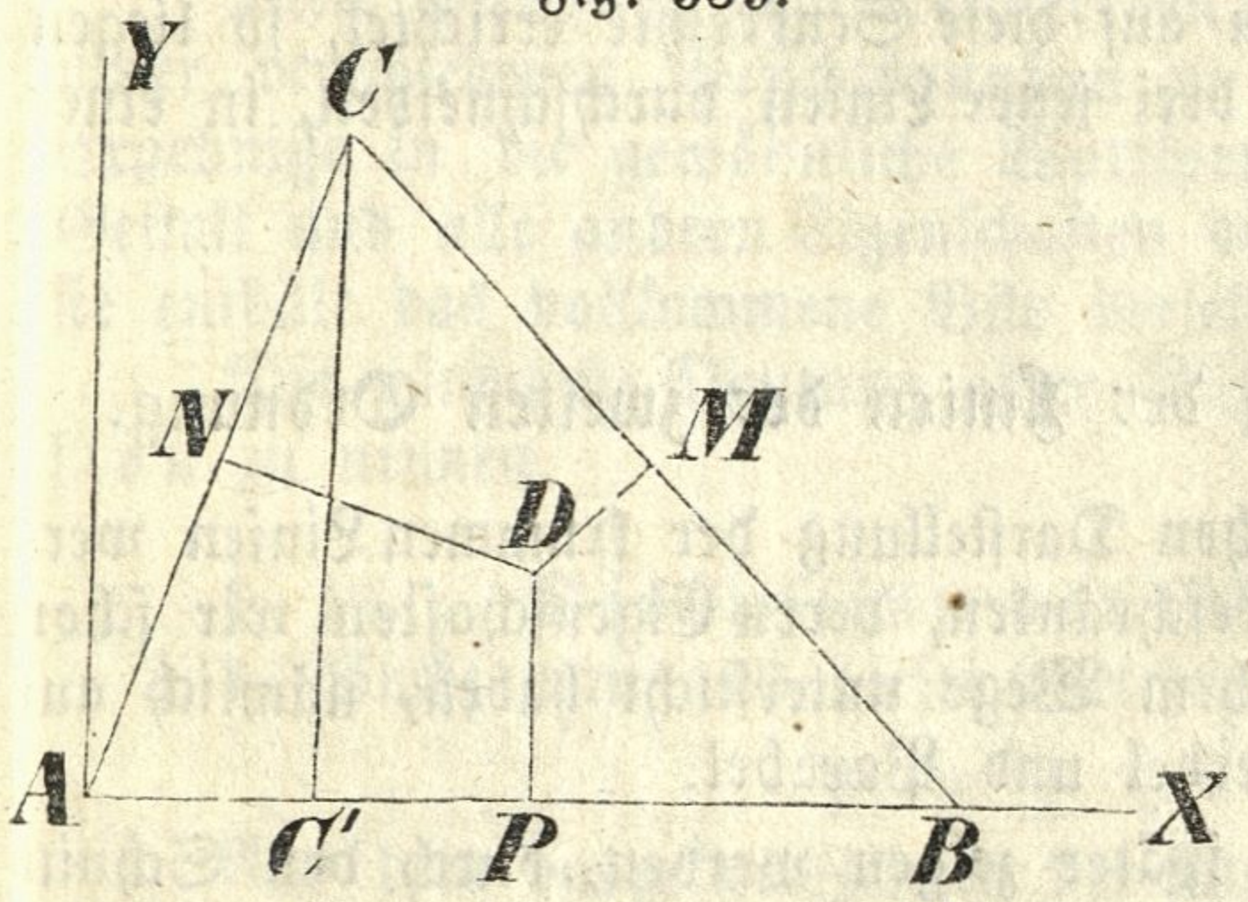
$$x = \frac{x' + x'' + x'''}{3},$$

$$y = \frac{y' + y'' + y'''}{3}.$$

Daraus folgt, daß sich die Geraden, welche die Halbirungspunkte der Seiten mit den gegenüberstehenden Scheitelpunkten verbinden, in einem und demselben Punkte schneiden. Dieser merkwürdige Punkt wird der Schwerpunkt des Dreieckes genannt.

§. 537. Senkrechte, welche in den Halbirungspunkten der Seiten auf diese errichtet werden.

Fig. 339.



Um in die zu entwickelnden Formeln mehr Einfachheit zu bringen, wollen wir (Fig. 339) die Seite $AB = c$ zur Abscissenaxe, und den Scheitel A zum Anfangspunkte der Koordinaten annehmen, und die Koordinaten des Punktes C durch α und β ausdrücken.

Unter dieser Voraussetzung sind

$x' = 0,\ y' = 0$ die Koordinaten des Punktes A,
$x'' = c,\ y'' = 0$ " " " " B,
$x''' = \alpha,\ y''' = \beta$ " " " " C;

ferner $\frac{\alpha + c}{2}, \frac{\beta}{2}$ " " " Halbirungspunktes M,
$\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ " " " " N,
$\frac{c}{2}, 0$ " " " " P;

sodann $y = 0$ die Gleichung der Seite AB,
$y = \frac{\beta}{\alpha}x$ " " " " AC,
$y = \frac{\beta}{\alpha - c}(x - c)$ " " " " BC,

und

$x = \frac{c}{2}$ die Gleichung der in P auf AB Senkrechten,

$y - \frac{\beta}{2} = -\frac{\alpha}{\beta}\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)$ " " " " N " AC "

$y - \frac{\beta}{2} = \frac{c-\alpha}{\beta}\left(x - \frac{\alpha+c}{2}\right)$ " " " " M " BC "

Sucht man nun die Koordinaten für die Durchschnittspunkte zwischen je zwei dieser Senkrechten, so findet man für alle drei Punkte dieselben Größen, nämlich

$$x = \frac{c}{2},\ y = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha(\alpha - c)}{2\beta};$$

woraus folgt, daß die in den Halbirungspunkten der Dreiecksseiten errichteten Senkrechten sich in einem und demselben Punkte schneiden.

§. 538. Man suche noch folgenden Lehrsatz auf analytischem Wege zu beweisen:

Wenn man in einem geradlinigen Dreiecke von den Scheitelpunkten auf die gegenüberliegenden Seiten Senkrechte fällt, die Halbirungspunkte der Seiten mit den gegenüberstehenden Scheitelpunkten verbindet und in den Halbirungspunkten der Seiten auf diese Senkrechte errichtet, so liegen die drei Punkte, in denen sich je drei jener Linien durchschneiden, in einer geraden Linie.

III. Analytische Darstellung der Linien der zweiten Ordnung.

§. 539. Bei der analytischen Darstellung der krummen Linien werden wir uns auf jene Kurven beschränken, deren Eigenschaften wir schon in der Planimetrie auf graphischem Wege untersucht haben, nämlich auf die Kreislinie, die Ellipse, Hyperbel und Parabel.

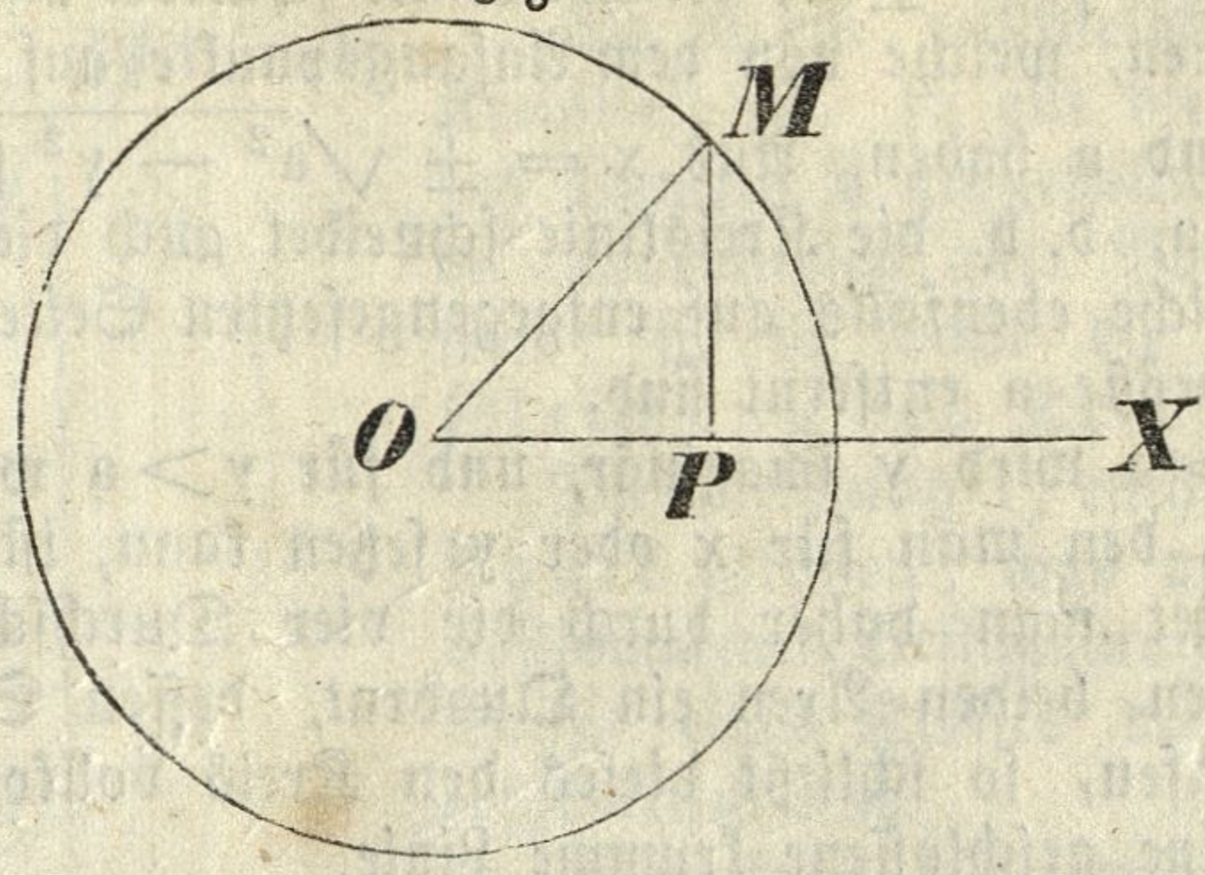
Da diese Linien, wie wir später zeigen werden, durch den Schnitt eines Kegels mit einer Ebene entstehen, so nennt man sie, und insbesondere die letzten drei Kegelschnittslinien. Auch werden sie Linien der zweiten Ordnung genannt, weil ihre Gleichungen sämmtlich des zweiten Grades sind.

a. Die Kreislinie.

§. 540. In der Kreislinie sind alle Punkte von dem Mittelpunkte gleich weit entfernt. Um nun die Gleichung des Kreises zu erhalten, darf man nur diese Haupteigenschaft desselben in die analytische Zeichensprache übertragen.

Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkte der Koordinaten liegt.

Fig. 340.



Es sei O (Fig. 340) der Mittelpunkt eines Kreises, dessen Halbmesser $OM = a$ ist, und zugleich der Anfangspunkt der Koordinaten, OX sei die Abscissenaxe, so daß für einen beliebigen Punkt M der Kreislinie $x = OP$, $y = MP$ ist. Da nun in dem rechtwinkligen Dreiecke MPO $OP^2 + MP^2 = OM^2$ ist, so hat man $x^2 + y^2 = a^2$. Der Punkt M ist aber ein willkürlicher Punkt der Kreislinie, daher gilt die für x und y des Punktes M abgeleitete Relazion für die Koordinaten aller Punkte der Kreislinie; die Relazion $x^2 + y^2 = a^2$ ist somit die gesuchte Gleichung des Kreises.

Diese Gleichung charakterisirt den Kreis dergestalt, daß man sie nur unter verschiedenen Gesichtspunkten zu betrachten und die jedesmaligen Ergebnisse in die gewöhnliche Wortsprache zu übersetzen braucht, um die Gestalt und alle andern Eigenschaften dieser krummen Linie herauszulesen; sie enthält das vollkommene Bild derselben.

Die räumliche Deutung einer Gleichung pflegt man ihre Diskussion zu nennen.

§. 541. Diskussion der Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$.

1. Sucht man aus dieser Gleichung den Werth von y, so hat man

$$y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Aus dem doppelten Zeichen der Wurzelgröße ersieht man, daß jedem Werthe von x, für welchen überhaupt y möglich ist, zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werthe von y entsprechen; woraus folgt, daß sich die Kreislinie oberhalb und unterhalb der Abscissenaxe gleichförmig ausdehnt.

2. Löst man die Gleichung des Kreises nach x auf, so erhält man

$$x = \pm \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Es gehören also auch zu jedem Werthe von y, für den überhaupt x möglich ist, zwei gleiche entgegengesetzte Werthe von x; die Kreislinie erstreckt sich demnach auch zu beiden Seiten der Ordinatenaxe in zwei symmetrischen Aesten, welche so über einander gelegt werden können, daß sie sich vollkommen decken.

Der Kreis wird daher durch die beiden Koordinatenaxen in vier kongruente Theile getheilt.

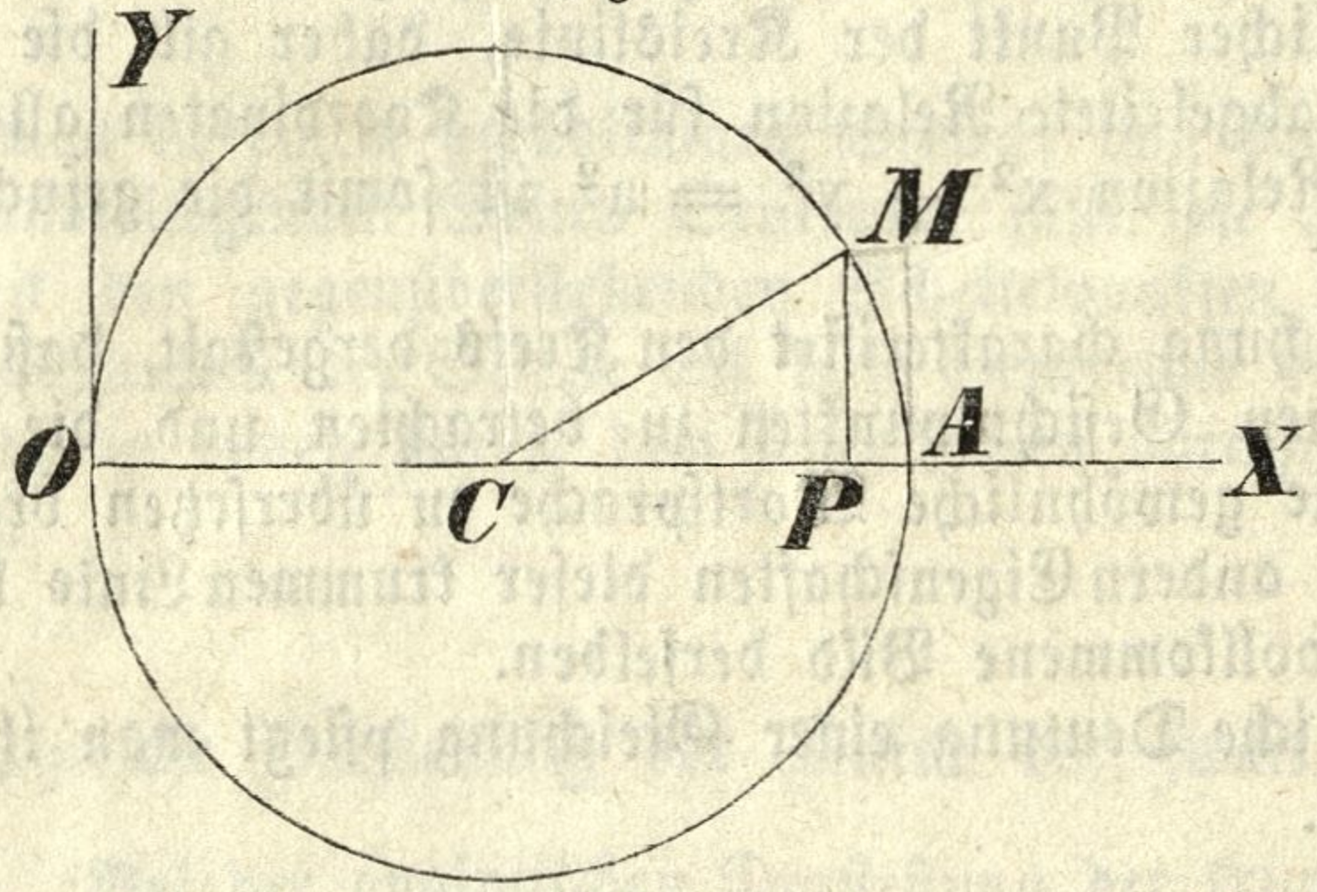
3. Setzt man in der Gleichung $y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$ die Abscisse $x = 0$, so erhält man das y für die Durchschnittspunkte des Kreises mit der Or-

dinatenaxe, es wird $y = \pm a$; die Kreislinie schneidet also die Ordinatenaxe in zwei Punkten, welche von dem Anfangspunkte auf entgegengesetzten Seiten den Abstand a haben. Aus $x = \pm \sqrt{a^2 - y^2}$ folgt für $y = 0$ eben so $x = \pm a$, d. h. die Kreislinie schneidet auch die Abscissenaxe in zwei Punkten, welche ebenfalls auf entgegengesetzten Seiten vom Anfangspunkte um die Größe a entfernt sind.

4. Für $x > a$ wird y imaginär, und für $y > a$ wird x imaginär; der größte Werth, den man für x oder y setzen kann, ist also der Halbmesser a. Errichtet man daher durch die vier Durchschnittspunkte der Kreislinie mit den beiden Axen ein Quadrat, dessen Seiten mit diesen Axen parallel laufen, so schließt dieses den Kreis vollkommen ein. Der Kreis ist somit eine geschlossene krumme Linie.

§. 542. Gleichung eines Kreises, dessen Periferie durch den Anfangspunkt der Koordinaten geht, und dessen Mittelpunkt in der Abscissenaxe liegt.

Fig. 341.



Es sei C (Fig. 341) der Mittelpunkt eines Kreises, dessen Radius $CO = a$ ist; O sei der Anfangspunkt der Koordinaten, und OX die Abscissenaxe. Ist nun M ein willkürlich angenommener Punkt der Kreislinie, so ist für denselben $x = OP$, $y = MP$, und man hat in dem rechtwinkligen Dreiecke MPC die Gleichung $MP^2 + CP^2 = CM^2$, oder $y^2 + (x - a)^2 = a^2$, woraus $y^2 + x^2 - 2ax = 0$ als die zwischen den Koordinaten jedes beliebigen Punktes der Kreislinie vorherrschende Relazion, somit als die Gleichung dieser Kreislinie hervorgehet.

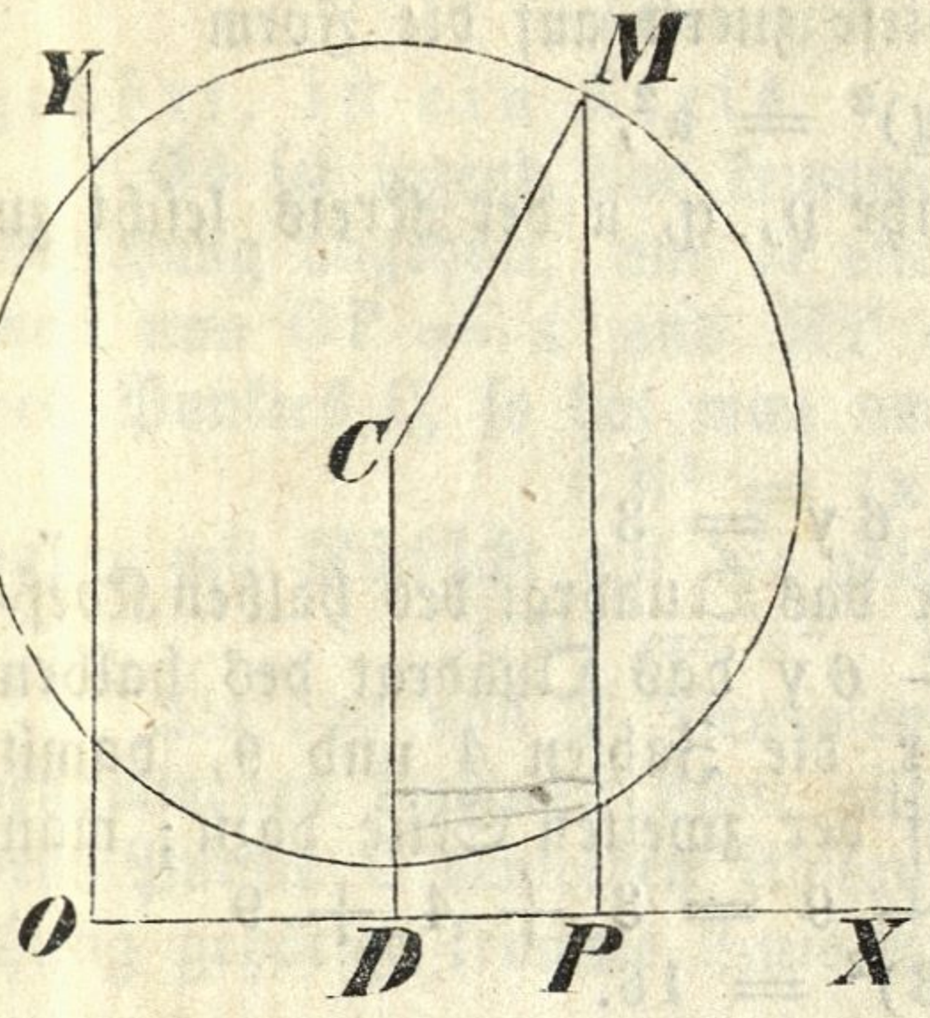
Aus $y^2 + x^2 - 2ax = 0$ folgt $y^2 = x(2a - x)$, oder auf die Figur bezogen, $MP^2 = OP \cdot PA$, d. h. jede auf dem Durchmesser senkrechte Ordinate ist die mittlere geometrische Proporzionale zwischen den beiden Abschnitten desselben.

§. 543. Allgemeine Gleichung des Kreises.

Es seien (Fig. 342) $OD = p$, $CD = q$ die Koordinaten des Mittelpunktes C in Bezug auf das rechtwinklige System XOY, M irgend ein beliebiger Punkt der Kreislinie, seine Koordinaten $x = OP$, $y = MP$ und $CM = a$ der Halbmesser; so hat man für den Abstand der Punkte M und C (nach §. 509) die Gleichung

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = a^2 \quad \ldots \quad 1).$$

Fig. 342.



Da M ein willkürlicher Punkt der Kreislinie ist, so gilt die für x und y des Punktes M aufgestellte Relazion für die Koordinaten aller Punkte der Periferie; sie ist somit die allgemeine Gleichung des Kreises.

Die Gleichung 1) enthält drei konstante Größen, was anzeigt, daß zur vollkommenen Bestimmung der Lage und Größe eines Kreises drei Bedingungen erforderlich sind.

Man kann diese drei Konstanten p, q, a beliebig ändern, so bedeutet die Gleichung immer wieder einen Kreis, wenn auch dessen Lage und Größe eine andere wird; die Natur der krummen Linie wird durch die Aenderung der Konstanten durchaus nicht geändert.

§. 544. Die zwei früher entwickelten Gleichungen des Kreises sind in der Gleichung 1) als besondere Fälle enthalten.

Nimmt man nämlich den Durchmesser zur Abscissenaxe und den Anfangspunkt der Koordinaten in der Periferie des Kreises an, so ist

$$p = a,\ q = 0,$$

und die Gleichung 1) geht über in $(x-a)^2 + y^2 = a^2$, oder

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0 \ldots 2).$$

Nimmt man den Mittelpunkt selbst zum Anfangspunkte der Koordinaten, so ist $p = 0$, $q = 0$, und man erhält aus 1) die Gleichung

$$x^2 + y^2 = a^2 \ldots 3).$$

Die Gleichungen 2) und 3) enthalten nur eine einzige Konstante, was ganz natürlich ist, da von den drei im Allgemeinen nöthigen Bedingungen zwei bereits durch die Voraussetzungen, unter welchen jene Gleichungen Statt finden, ausgesprochen sind.

§. 545. Beispiele.

1) Es seien $p = 1$, $q = 2$ die Koordinaten des Mittelpunktes und $a = 3$ der Halbmesser des Kreises, so ist

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$$

oder

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 4$$

die Gleichung desselben.

2) Zu einem Kreise, für welchen $p = 0$, $q = -1$ und $a = 3$ ist, gehört die Gleichung

$$x^2 + (y+1)^2 = 9$$

oder

$$x^2 + y^2 + 2y = 8.$$

3) Ein Kreis, für welchen $p = -2$, $q = 1$, $a = \frac{2}{3}$ ist, hat die Gleichung

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = \tfrac{4}{9}$$

oder

$$9x^2 + 9y^2 + 36x - 18y + 41 = 0.$$

§. 546. Wenn man umgekehrt den Kreis, zu dem eine Gleichung gehört, konstruiren will, so bringe man diese zuerst auf die Form

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = a^2,$$

wo sodann mittelst der gefundenen Werthe p, q, a der Kreis leicht zu verzeichnen ist.

Beispiele.

1) Um den Kreis, dessen Gleichung

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y = 3$$

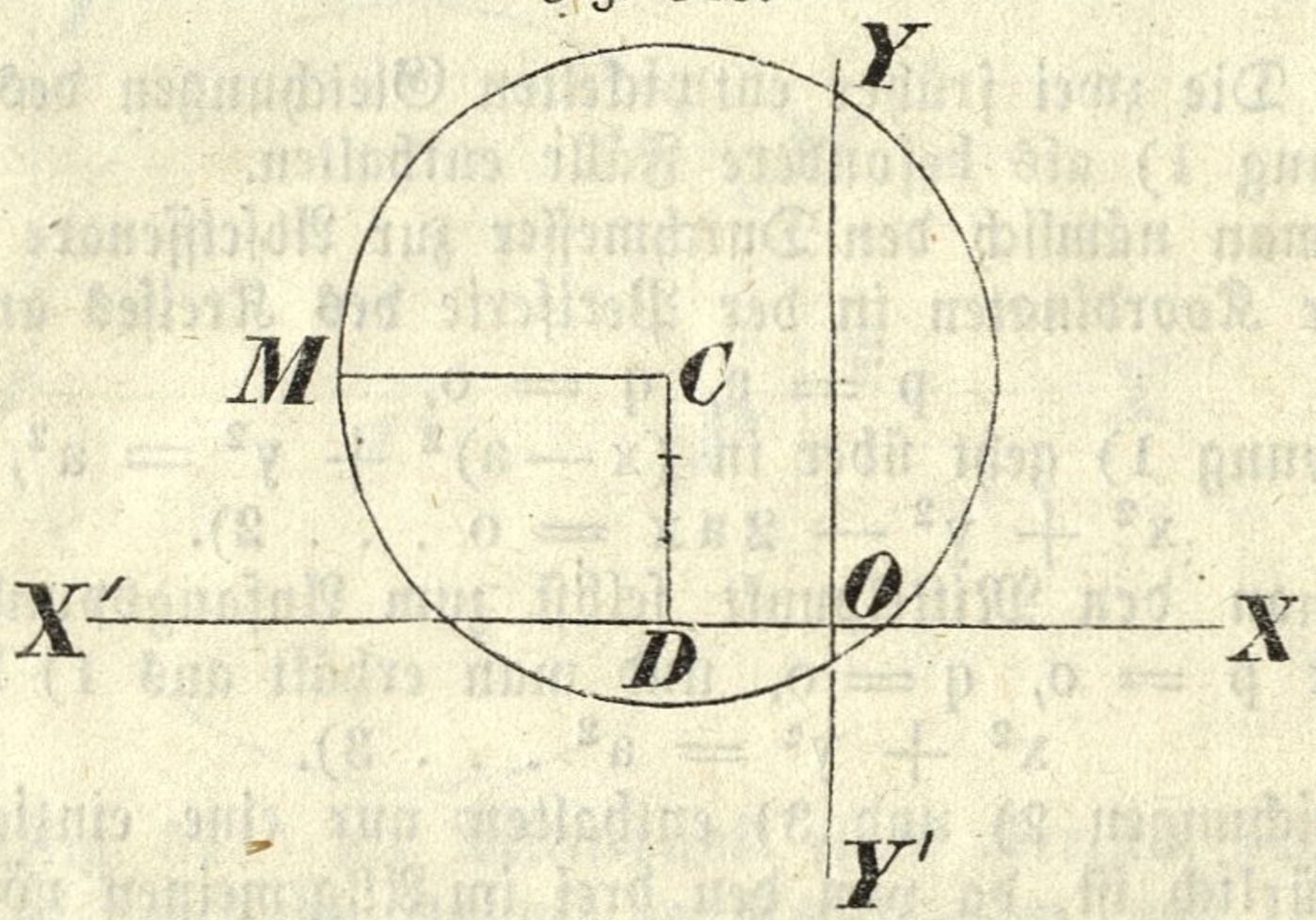
ist, zu konstruiren, addire man zu $x^2 + 4x$ das Quadrat des halben Koeffizienten von x, nämlich 4, und zu $y^2 - 6y$ das Quadrat des halben Koefffizienten von y, nämlich 9; setze aber die Zahlen 4 und 9, damit die Gleichheit nicht gestört werde, auch auf der zweiten Seite dazu; man erhält $x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 3 + 4 + 9$

oder $$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16.$$

Es ist somit $p = -2$, $q = 3$, $a = \sqrt{16} = 4$.

Um nun den Kreis zu konstruiren, suche man zuerst einen Punkt C

Fig. 343.



(Fig. 343), dessen Koordinaten — 2 und 3 sind, und beschreibe aus diesem Punkte als Zentrum einen Kreis, dessen Radius $CM = 4$ ist.

2) Um die Gleichung

$$36x^2 + 36y^2 - 36x + 144y + 89 = 0$$

zu konstruiren, erhält man

$$x^2 - x + y^2 + 4y = -\frac{89}{36}$$

oder $$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + 4y + 4 = -\frac{89}{36} + \frac{1}{4} + 4$$

$$(x - \tfrac{1}{2})^2 + (y + 2)^2 = \tfrac{16}{9}.$$

Es ist daher die Mittelpunkts-Abscisse $p = \frac{1}{2}$,

" " Ordinate $q = -2$,

der Radius $a = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$,

aus welchen Daten sich sofort der Kreis konstruiren läßt.

3) Die Gleichung eines Kreises ist

a) $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 24$;

b) $x^2 + y^2 = 8x + 6y + 75$;

man bestimme die Koordinaten des Mittelpunktes und die Länge des Halbmessers.

§. 547. Jede krumme Linie, welche zur Gleichung

$$(x-p)^2+(y-q)^2=a^2$$

gehört, ist ein Kreis.

Es sei irgend eine krumme Linie (Fig. 342), welche der gegebenen Gleichung angehört, und M ein willkürlicher Punkt dieser Linie. Setzt man nun $OP = x$ und $MP = y$, und sind p und q die Koordinaten des Punktes C, so hat man nach §. 509

$$CM^2=(x-p)^2+(y-q)^2,$$

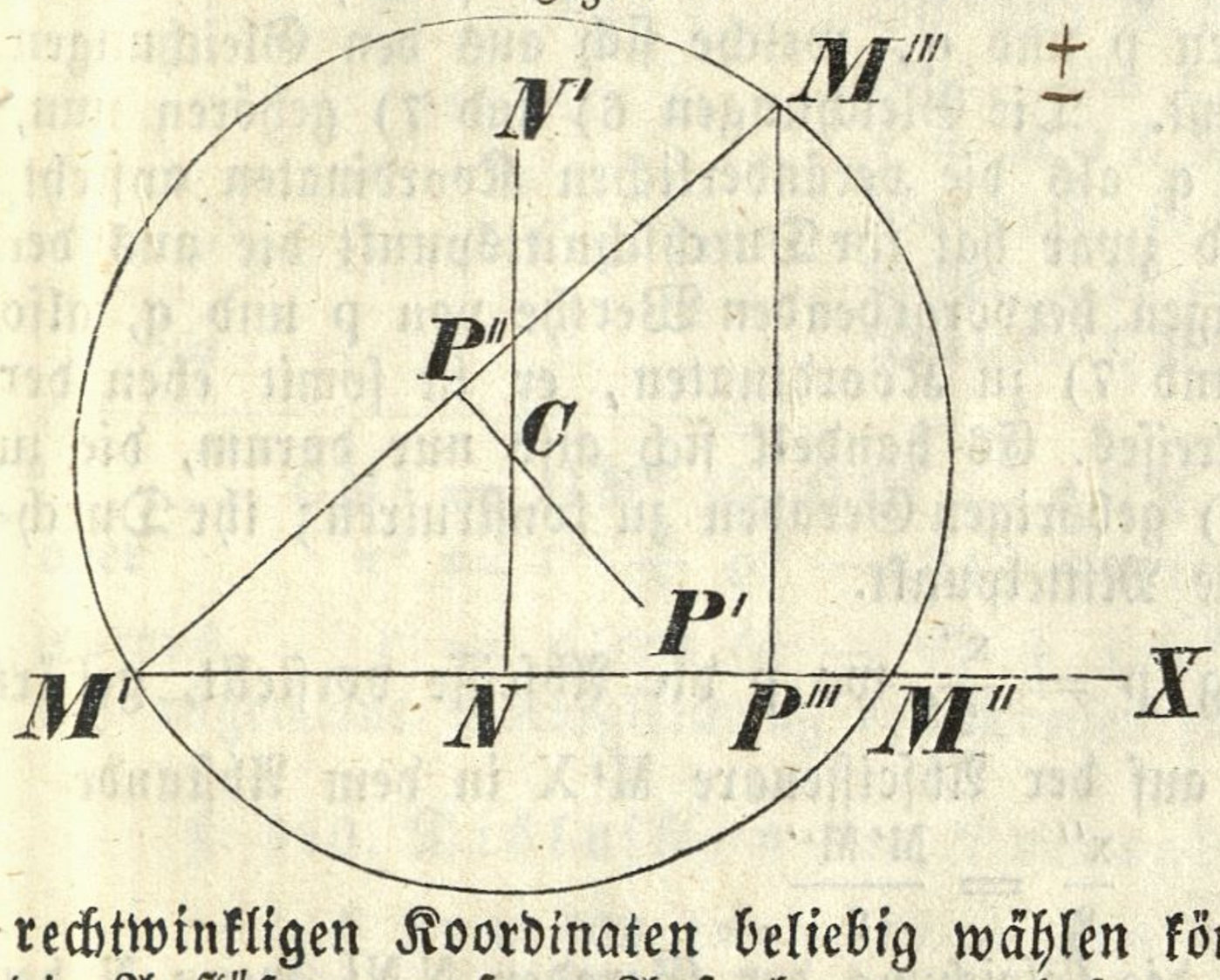
daher mit Rücksicht auf die obige Gleichung

$$CM^2=a^2, \text{ und folglich } CM=a.$$

Da das von M Bewiesene auch von jedem andern Punkte der angenommenen krummen Linie gilt, so folgt, daß jeder Punkt derselben von dem Punkte C denselben Abstand a habe, daß somit die zu obiger Gleichung gehörige krumme Linie ein Kreis sein müsse.

§. 548. Gleichung eines Kreises, welcher durch drei gegebene Punkte geht.

Fig. 344.



Es seien M', M'', M''' (Fig. 344) die drei Punkte, deren Koordinaten x', y', x'', y'', x''', y''' gegeben sind, und man suche die Gleichung des durch diese drei Punkte gelegten Kreises.

Die gesuchte Gleichung wird offenbar die Form

$$(x-p)^2+(y-q)^2=a^2 \ldots 1)$$

haben, wo p, q, a noch unbekannt sind.

Da wir die Lage der rechtwinkligen Koordinaten beliebig wählen können, so wollen wir, um die Auflösung unserer Aufgabe zu vereinfachen, den Punkt M' selbst als Anfangspunkt, und die durch M' und M'' gezogene Gerade M'X als Abscissenaxe annehmen; es sind dann

die Koordinaten des Punktes M' . . . $x'=0$, $y'=0$;
" " " " M'' . . . x'' $y''=0$;
" " " " M''' . . . x''', y'''.

Damit der Kreis durch den Punkt M' gehe, müssen die Koordinaten dieses Punktes statt x, y in die Gleichung 1) substituirt derselben Genüge leisten, es muß also

$$p^2+q^2=a^2 \ldots 2)$$

sein, und vermöge dieser Relazion nimmt die Gleichung 1) die einfachere Form an

$$x^2+y^2-2px-2qy=0 \ldots 3).$$

Damit ferner der Kreis durch die Punkte M'', M''' gehe, müssen auch die Bedingungsgleichungen

$$x'^2 - 2px' = 0 \ldots 4),$$
$$x''^2 + y''^2 - 2px'' - 2qy'' = 0 \ldots 5)$$

erfüllt werden, aus denen sich

$$p = \frac{x''}{2} \ldots 6)$$

$$q = \frac{x''^2 + y''^2 - x'' x''}{2y''} \ldots 7)$$

ergibt, und durch Substituzion in 3)

$$x^2 + y^2 - x''x - \frac{x''^2 + y''^2 - x'' x''}{y''} \cdot y = 0 \ldots 8)$$

als die Gleichung des gesuchten Kreises.

Da man die Werthe für p und q, daher vermöge 2) auch $a = \sqrt{p^2 + q^2}$ kennt, so läßt sich mit Hilfe dieser Größen der Kreis, welcher durch die Punkte M', M'', M''' geht, auch wirklich konstruiren. Diese Konstrukzion würde sich übrigens sehr zusammengesetzt herausstellen, daher es zweckmäßiger sein wird, zur Beschreibung des fraglichen Kreises einen andern einfacheren Weg einzuschlagen. Offenbar kommt es nur darauf an, daß man den Mittelpunkt C des zu beschreibenden Kreises finde; dieser aber wird durch die Koordinaten p und q, welche sich aus den Gleichungen 6) und 7) ergeben, bestimmt. Die Gleichungen 6) und 7) gehören nun, wenn man darin p und q als die veränderlichen Koordinaten ansieht, zwei geraden Linien an, und zwar hat ihr Durchschnittspunkt die aus der Verbindung beider Gleichungen hervorgehenden Werthe von p und q, also gerade die Werthe in 6) und 7) zu Koordinaten, er ist somit eben der gesuchte Mittelpunkt des Kreises. Es handelt sich also nur darum, die zu den Gleichungen 6) und 7) gehörigen Geraden zu konstruiren; ihr Durchschnitt ist dann der gesuchte Mittelpunkt.

Die erstere Gleichung $p = \frac{x''}{2}$, wo p die Abscisse vorstellt, gehört einer Geraden an, welche auf der Abscissenaxe M'X in dem Abstande

$$\frac{x''}{2} = \frac{M'M''}{2}$$

senkrecht steht; sie ist also die Gleichung der Geraden NN', wenn N der Halbirungspunkt der M'M'', und NN' ⊥ M'M'' ist. Die andere Gleichung 7), welche sich auch so darstellen läßt:

$$q - \frac{y'''}{2} = -\frac{x'''}{y'''}\left(p - \frac{x'''}{2}\right),$$

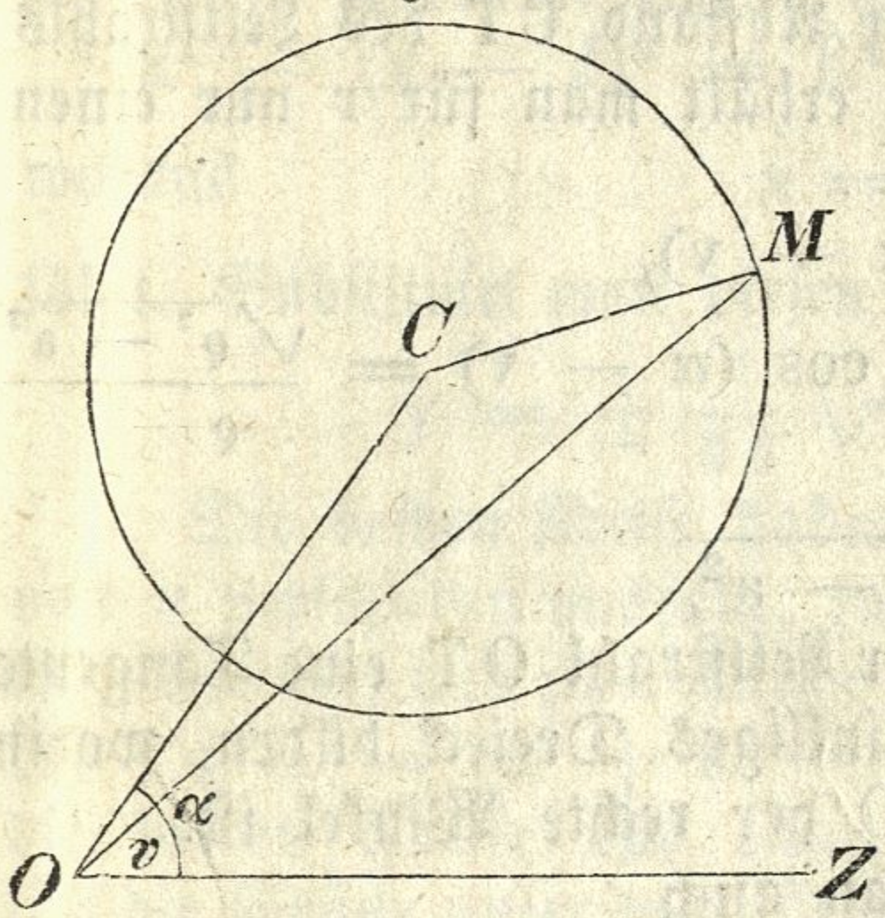
drückt eine Gerade aus, welche durch den Punkt $\frac{x'''}{2}$, $\frac{y'''}{2}$ geht und auf der Geraden, deren Gleichung $y = \frac{y'''}{x'''} x$ ist, senkrecht steht; der Punkt $\frac{x'''}{2}$, $\frac{y'''}{2}$ ist nun der Halbirungspunkt P'' der Geraden M'M''', und die Gerade, für welche die Gleichung $y = \frac{y'''}{x'''} x$ Statt findet, ist M'M'''; die Gleichung 7) kommt daher der Geraden P''P' zu, wenn P''P' ⊥ M'M'' gezogen wird. Der Durchschnitt C der beiden Geraden NN' und P''P' ist der Mittelpunkt des zu beschreibenden Kreises.

Um daher den Mittelpunkt des Kreises zu finden, der durch drei gegebene Punkte geht, darf man nur zwischen diesen Punkten zwei Gerade ziehen, dieselben halbiren und in den Halbirungspunkten Senkrechte errichten; der Durchschnitt dieser Senkrechten ist der gesuchte Mittelpunkt. Es ist offenbar dasselbe Verfahren, das wir schon in der Planimetrie auf einem andern Wege begründet haben.

§. 549. Polargleichung des Kreises.

1) Ist der Mittelpunkt des Kreises zugleich der Pol des Polar-Koordinatensystems, so ist $r = a$ die Polargleichung des Kreises, wo a den Halbmesser des Kreises und r den in seiner Richtung veränderlichen Radiusvektor bedeutet.

Fig. 345.



2) Liegt der Pol O (Fig. 345) nicht im Mittelpunkte C des Kreises, so sei $OC = \varrho$ der Leitstrahl des Mittelpunktes, und $COZ = \alpha$ der Winkel, den dieser Leitstrahl mit der Polarare OZ bildet. Ist nun M irgend ein Punkt der Kreislinie, also $r = OM$ sein Leitstrahl und $v = MOZ$ der Winkel desselben mit der Polarare, so erhält man, wenn der Halbmesser $CM = a$ gesetzt wird, aus dem Dreiecke CMO

$$CM^2 = OM^2 + OC^2 - 2\,OM \,.\, OC \,.\, \cos COM,$$

oder
$$a^2 = r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos(\alpha - v),$$

woraus
$$r = \varrho \cos(\alpha - v) \pm \sqrt{a^2 - \varrho^2 \sin^2(\alpha - v)}$$

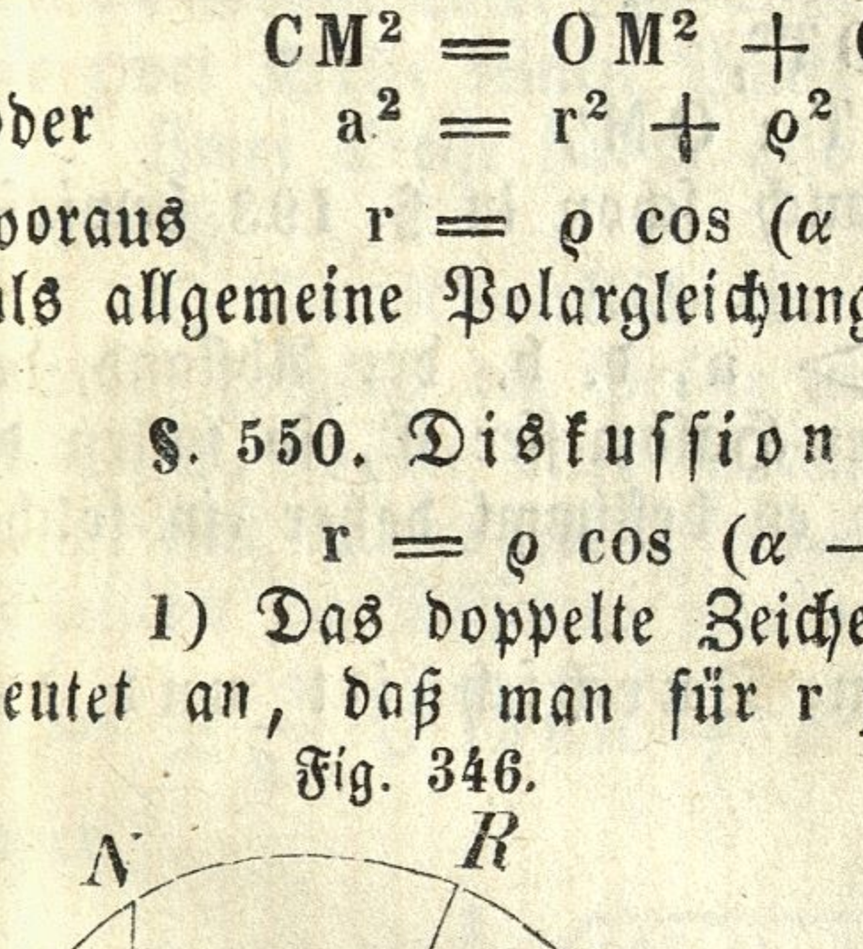
als allgemeine Polargleichung des Kreises folgt.

§. 550. Diskussion der Polargleichung des Kreises

$$r = \varrho \cos(\alpha - v) \pm \sqrt{a^2 - \varrho^2 \sin^2(\alpha - v)}$$

1) Das doppelte Zeichen, welches hier vor der Wurzelgröße steht, deutet an, daß man für r jedesmal zwei reelle Werthe erhält, sobald

Fig. 346.



$\varrho \sin(\alpha - v) < a$ ist. Nun ist, wenn (Fig. 346) $CP \perp OM$ gezogen wird, $\varrho \sin(\alpha - v) = CO \,.\, \sin COP = CP$. Sobald also der Abstand CP des Leitstrahles vom Mittelpunkte kleiner als der Halbmesser a ist, so nimmt der Leitstrahl zwei reelle Werthe

$$OM = \varrho\cos(\alpha - v) + \sqrt{a^2 - \varrho^2\sin^2(\alpha - v)},$$

$$OM' = \varrho\cos(\alpha - v) - \sqrt{a^2 - \varrho^2\sin^2(\alpha - v)}$$

an, und bestimmt daher zwei Punkte M und M' des Kreises, welche mit dem Pole O in einer geraden Linie liegen.

Durch die Multiplikazion jener Werthe erhält man

$$OM \cdot OM' = \varrho^2 - a^2.$$

Ist ON irgend eine andere Lage des Leitstrahls, so findet man eben so

$$ON \cdot ON' = \varrho^2 - a^2;$$

daher ist

$$OM \cdot OM' = ON \cdot ON'$$

oder

$$OM : ON = ON' : OM',$$

welche Proporzion den in §. 192 auf einem andern Wege entwickelten Lehrsatz enthält.

Für $v = \alpha$ geht der Leitstrahl durch den Mittelpunkt des Kreises, und man erhält aus der obigen Gleichung für r die Werthe

$$OR = \varrho + a \text{ und } OR' = \varrho - a,$$

deren Richtigkeit auch unmittelbar aus der Figur zu ersehen ist.

2) Ist $\varrho \sin(\alpha - v) = a$, d. h. der Abstand CT des Leitstrahls vom Mittelpunkte gleich dem Halbmesser, so erhält man für r nur einen einzigen Werth, nämlich

$$OT = r = \varrho \cos(\alpha - v),$$

oder, da $\sin(\alpha - v) = \frac{a}{\varrho}$, und somit $\cos(\alpha - v) = \frac{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}{\varrho}$ ist, auch

$$OT = r = \sqrt{\varrho^2 - a^2},$$

woraus hervorgeht, daß in diesem Falle der Leitstrahl OT eine Tangente des Kreises ist, indem r, ϱ und a ein rechtwinkliges Dreieck bilden, worin $\varrho = OC$ die Hypotenuse, und daher CTO der rechte Winkel ist.

Da $OT^2 = \varrho^2 - a^2$ ist, so hat man auch

$$OM \cdot OM^1 = OT^2,$$

oder

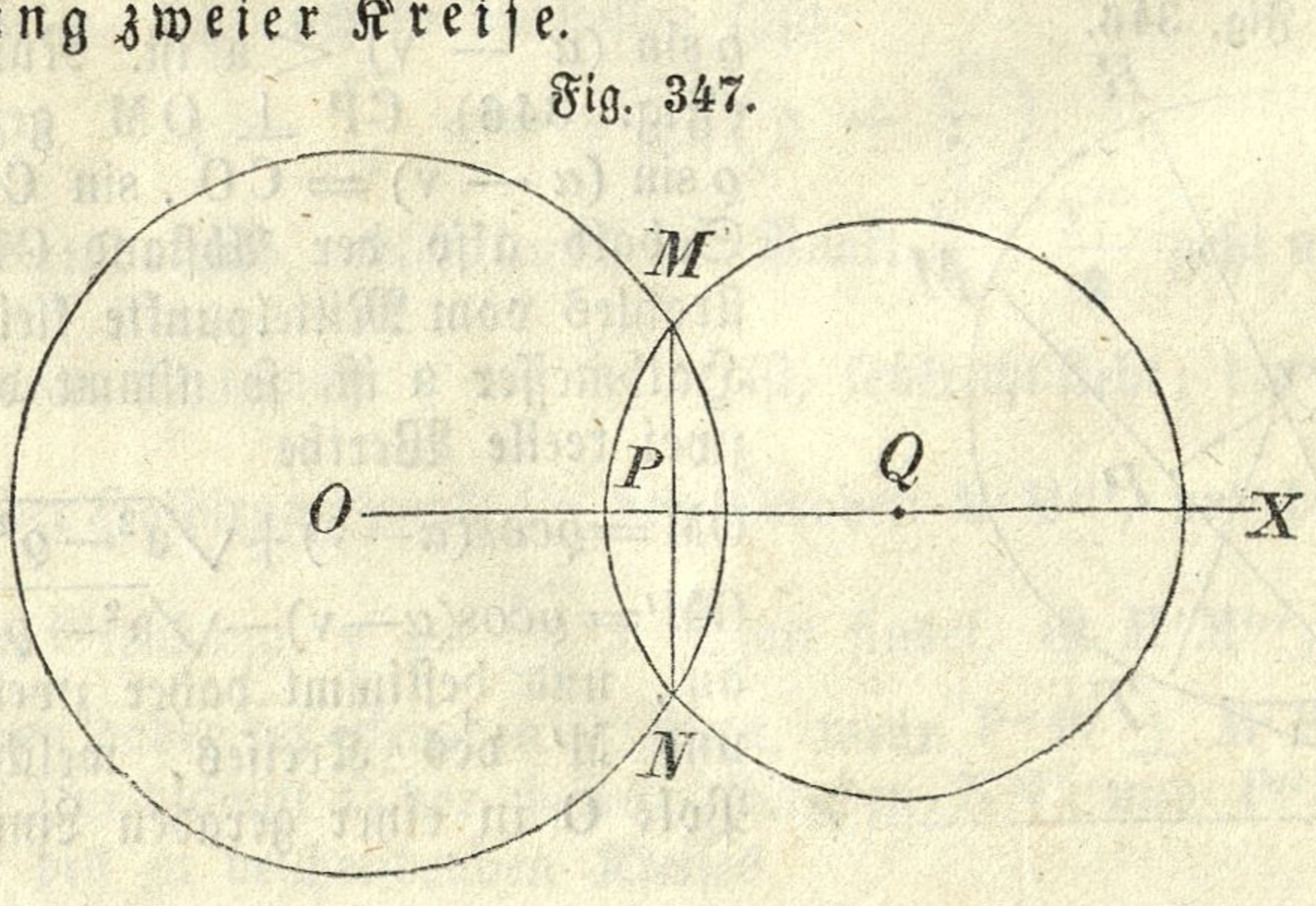
$$OM : OT = OT : OM',$$

eine Proporzion, deren Richtigkeit wir auch schon in §. 193 bewiesen haben.

3) Wenn endlich $\varrho \sin(\alpha - v) > a$, d. h. der Abstand des Leitstrahls vom Mittelpunkte größer als der Halbmesser ist, so fallen die beiden Werthe von r imaginär aus, und es bestimmt daher ein solcher Leitstrahl keinen Punkt des Kreises.

§. 551. Bedingungen für den Durchschnitt und die Berührung zweier Kreise.

Fig. 347.



Es seien O und Q (Fig. 347) die Mittelpunkte zweier Kreise, $OQ = d$ ihre Entfernung, und R und r die Halbmesser der Kreise. Man kann unbeschadet der Allgemeinheit der Aufgabe O als Anfangspunkt der Koordinaten, und die durch O und Q gehende Gerade OX als Abscissenaxe annehmen; dann sind die Gleichungen der beiden Kreise

$$x^2 + y^2 = R^2 \text{ und } (x - d)^2 + y^2 = r^2.$$

Die Koordinaten eines jeden, den beiden Kreislinien gemeinschaftlichen Punktes müssen diesen beiden Gleichungen Genüge leisten, und umgekehrt gehören zwei Koordinaten, welche diesen Gleichungen genügen, zu einem Durchschnittspunkte der beiden Kreislinien. Zur Bestimmung der Koordinaten der Durchschnittspunkte wird man also die beiden Gleichungen mit einander verbinden und daraus x und y bestimmen. Zieht man zu diesem Ende die zweite Gleichung von der ersten ab, so erhält man

$$x^2 - (x - d)^2 = R^2 - r^2 \text{ oder } 2dx - d^2 = R^2 - r^2,$$

woraus

$$x = \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2d}$$

folgt. Substituirt man diesen Werth in die erste Gleichung, so findet man

$$y = \pm \frac{1}{2d} \sqrt{4d^2R^2 - (d^2 + R^2 - r^2)^2}.$$

Die beiden Kreise haben also, wenn die Wurzelgröße in y reell und von o verschieden ausfällt, zwei gemeinschaftliche Punkte, welche die nämliche Abscisse, und zwei gleiche aber entgegengesetzt liegende Ordinaten haben. Ist $4d^2R^2 = (d^2 + R^2 - r^2)^2$, so wird $y = o$, und es haben dann die beiden Kreise nur einen einzigen gemeinschaftlichen Punkt. Ist endlich die Größe unter dem Wurzelzeichen negativ, so wird y imaginär, daher die zwei Kreise keinen Punkt mit einander gemein haben.

Zwei Kreise haben also zwei, einen oder gar keinen Punkt gemeinschaftlich.

1) Damit wirklich ein Durchschnittspunkt Statt finde, muß y reell, folglich die Größe unter dem Wurzelzeichen positiv sein. Um zu erkennen, wann diese Bedingung eintritt, wollen wir den Ausdruck für y auf eine andere Form bringen. Da nämlich die Größe unter dem Wurzelzeichen die Differenz zweier Quadrate ist, so kann man auch setzen

$$y = \pm \frac{1}{2d} \sqrt{(2dR + d^2 + R^2 - r^2)\,(2dR - d^2 - R^2 + r^2)}$$

oder

$$y = \pm \frac{1}{2d} \sqrt{[(d + R)^2 - r^2] \cdot [r^2 - (d - R)^2]},$$

und da hier jeder Faktor selbst wieder eine Differenz zweier Quadrate ist, so hat man auch

$$y = \pm \frac{1}{2d} \sqrt{(d + R + r)\,(d + R - r)\,(r + d - R)\,(r - d + R}.$$

Es ist uns immer gestattet, den Anfangspunkt der Koordinaten in den Mittelpunkt des größeren Kreises zu versetzen, wo dann d positiv und $R \geqq r$ wird. Unter dieser Voraussetzung sind die Faktoren $d + R + r$ und $d + R - r$ immer positiv, und damit y reell sei, müssen die beiden andern Faktoren entweder beide positiv, oder beide negativ sein; man muß also entweder

$$r + d > R \text{ und } r + R > d,$$
$$\text{oder } r + d < R \text{ und } r + R < d$$

haben. Letzteres ist nicht möglich, da sonst $d < R$ und zugleich $d > R$ sein müßte, was einen Widerspruch enthält. Die Bedingungen für den Durchschnitt zweier Kreise sind also

$$r + d > R \text{ und } r + R > d,$$

und da immer auch $d + R > r$ ist, so folgt, daß sich zwei Kreise nur dann schneiden, wenn von den drei Größen d, R, r je zwei zusammen größer sind als die dritte, also nur dann, wenn sich aus den drei Linien d, R, r ein Dreieck konstruiren läßt

Da in diesem Falle die beiden Durchschnittspunkte M und N eine gemeinschaftliche Abscisse OP, aber zwei gleiche einander entgegengesetzte Ordinaten MP und NP haben, so ergibt sich daraus der Satz: Wenn sich zwei Kreislinien schneiden, so steht die Verbindungslinie der Mittelpunkte senkrecht auf der Mitte der Sehne, welche die Durchschnittspunkte verbindet.

2) Sollen sich die beiden Kreise berühren, also nur einen Punkt gemeinschaftlich haben, so müssen die zwei Punkte M und N in einen einzigen zusammenfallen, somit vollkommen gleiche Koordinaten haben, was aber nur dann möglich ist, wenn $y = o$ ist, d. i. wenn die Größe unter dem Wurzelzeichen verschwindet. Dieses kann nun, da wir die ersten zwei Faktoren nach den früheren Bemerkungen stets als positiv ansehen dürfen, nur dann der Fall sein, wenn

$$\text{entweder } r + d - R = o \text{ oder } r + R - d = o$$

ist, wenn also eine der zwei Bedingungsgleichungen

$$d = R - r, \quad d = R + r$$

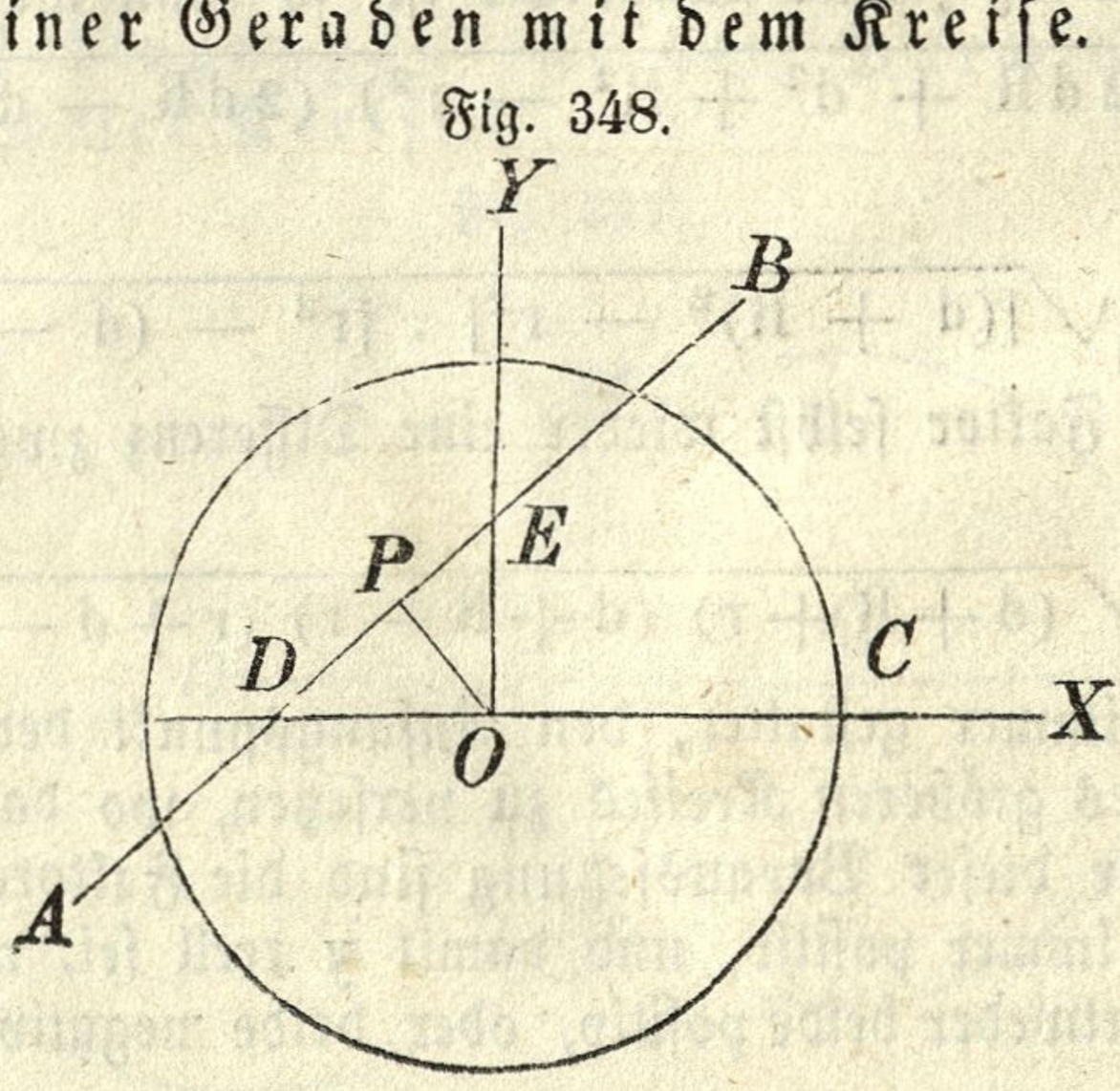
erfüllt wird.

Zwei Kreise können sich also nur dann berühren, wenn die Entfernung ihrer Mittelpunkte gleich ist dem Unterschiede oder der Summe ihrer Halbmesser.

Da in diesem Falle $y = o$ ist, so folgt daraus, daß der Berührungspunkt zweier Kreise in ihrer Zentrilinie liegt.

§. 552. Bedingungen für den Durchschnitt und die Berührung einer Geraden mit dem Kreise.

Fig. 348.



Ist (Fig. 348) $OC = r$ der Halbmesser eines Kreises, O der Anfangspunkt der Koordinaten, die durch O und C gehende Gerade OX die Abscissenaxe und AB eine Gerade, welche die Abscissenaxe unter dem Winkel $BDX = \alpha$, und die Ordinatenaxe in dem Abstande $OE = b$ schneidet, so ist

$$x^2 + y^2 = r^2$$

die Gleichung des Kreises, und

$$y = ax + b,$$

wo $a = \text{tang}\,\alpha$, die Gleichung der Geraden AB.

Trifft die Gerade den Kreis, so sind für den Durchschnittspunkt die Koordinaten beider Linien gleich, und man darf, um dieselben zu erhalten, nur die beiden Gleichungen als koexistirend betrachten und auflösen. Man erhält, wenn man in der ersten Gleichung den Werth von y aus der zweiten substituirt,

$$x^2 + (ax + b)^2 = r^2,$$

und daraus $$x = \frac{-ab \pm \sqrt{r^2(1 + a^2) - b^2}}{1 + a^2}.$$

1) Ist hier $b^2 < r^2(1 + a^2)$ oder $\frac{b}{\sqrt{1 + a^2}} < r$, so hat x zwei reelle Werthe; man erhält also zwei Abscissen, deren zugehörige Ordinaten dann aus der Gleichung $y = ax + b$ gefunden werden. Nun ist, wenn man $OP \perp AB$ zieht,

$$\frac{b}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{b}{\sqrt{1 + \text{tang}^2\alpha}} = b\cos\alpha = EO \cdot \sin PEO = OP,$$

so daß die Größe $\frac{b}{\sqrt{1 + a^2}}$ die Entfernung OP der Geraden AB von dem Mittelpunkte O vorstellt. Ist daher diese Entfernung kleiner als der Halbmesser des Kreises, so schneidet die Gerade den Kreis in zwei Punkten.

2) Wenn $\frac{b}{\sqrt{1 + a^2}} = r$, d. h. der Abstand der Geraden vom Mittelpunkte gleich dem Halbmesser ist, so hat man

$$x = \frac{-ab}{1 + a^2} \text{ und } y = ax + b = \frac{b}{1 + a^2};$$

die Gerade und die Kreislinie haben also in diesem Falle nur einen gemeinschaftlichen Punkt, oder, die Gerade ist eine Tangente des Kreises.

3) Ist endlich $\frac{b}{\sqrt{1 + a^2}} > r$, d. i. der Abstand der Geraden vom Mittelpunkte größer als der Halbmesser, so sind die Werthe von x imaginär; die Gerade hat also mit der Kreislinie keinen Punkt gemeinschaftlich.

Zu denselben Ergebnissen führten auch schon die in §. 550 angestellten Betrachtungen.

Beispiel. Die Gleichung eines Kreises ist $x^2 + y^2 = 100$. Wie viel Punkte hat die Gerade

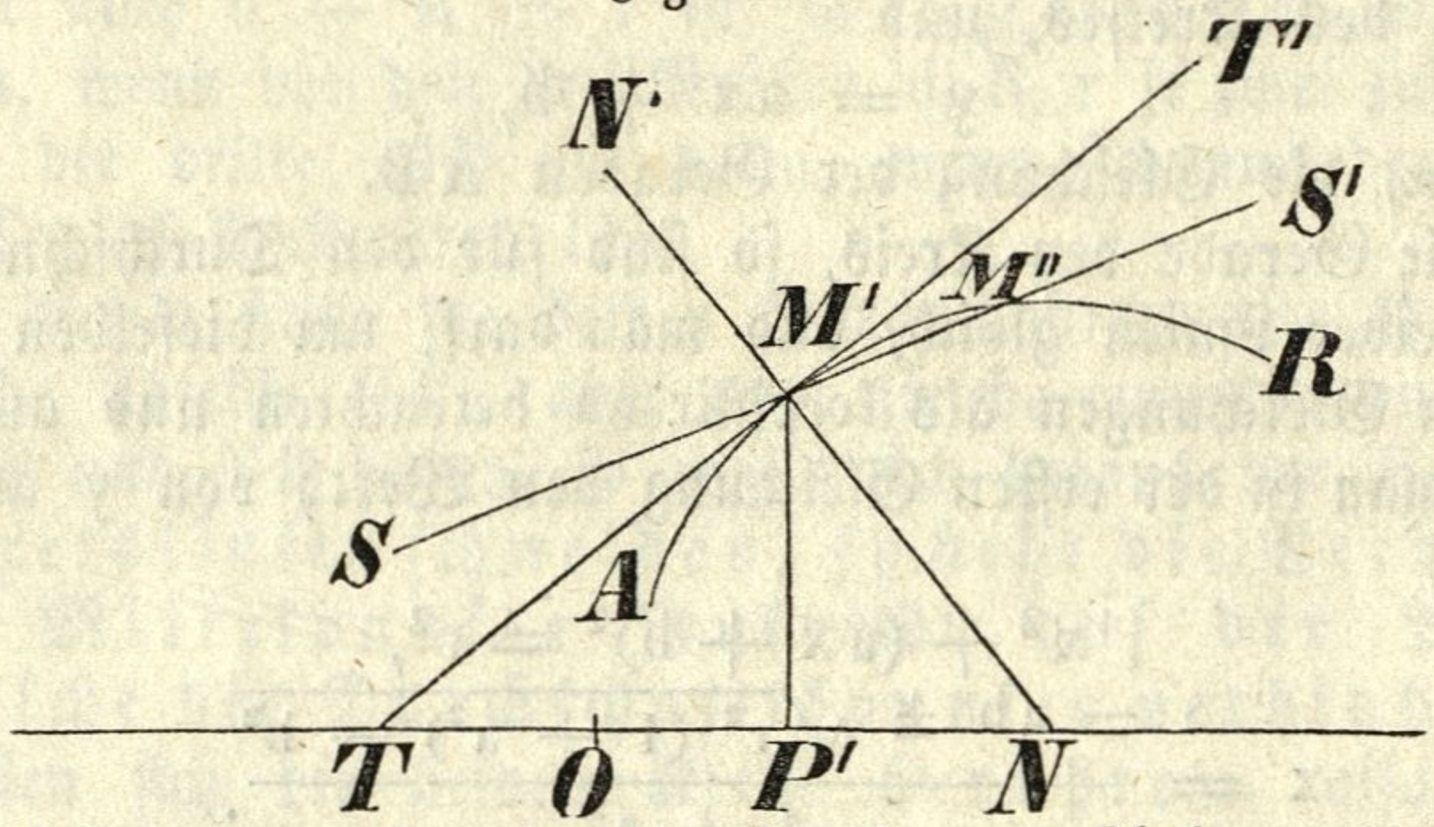
a) $x = 6x - 12$;
b) $4y + 3x = 50$;
c) $4y = x + 40$

mit diesem Kreise gemein?

§. 553. Allgemeiner Begriff der Tangente.

Bevor wir die Berührungslinien am Kreise in eine nähere analytische Betrachtung ziehen, wird es nothwendig sein, für die Tangente eine allgemeine, für alle krummen Linien passende Erklärung, auf welche sich die Rechnung bequem anwenden läßt, aufzustellen.

Fig. 349.



Es sei AR (Fig. 349) irgend eine krumme Linie, und M' der Punkt, in welchem sie von der geraden TT' berührt werden soll. Man denke sich nun durch diesen Berührungspunkt M' und durch einen benachbarten Punkt M'' zuerst eine Sekante SS' gezogen, und diese dann um den Punkt M' so gedreht, daß der Punkt M'' jenem M' immer näher rückt; so wird sich auch die Sekante SS' der Berührungslinie TT' immer mehr nähern, und endlich mit ihr zusammenfallen, wenn der Punkt M'' über den Berührungspunkt M' zu liegen kommt.

Man kann daher die Tangente als eine Sekante betrachten, die zuerst durch zwei Punkte der Kurve geht, und sich dann um einen dieser Punkte, den Berührungspunkt, so lange drehet, bis der andere Punkt mit diesem zusammenfällt.

Eine im Berührungspunkte M' auf der Tangente senkrechte Gerade NM' heißt eine Normallinie oder Normale der Kurve.

§. 554. Bei der Berührung einer krummen Linie mit einer Geraden sind nachstehende vier Größen, die von der Lage des Berührungspunktes M' abhängen, und über den Lauf der Kurve besondern Aufschluß gewähren, von großer Wichtigkeit:

1) Die Tangente M'T, d. i. das Stück der Berührungslinie vom Berührungspunkte bis zum Durchschnittspunkte mit der Abscissenaxe;
2) die Subtangente TP', d. i. das Stück der Abscissenaxe zwischen der Tangente und der Ordinate;
3) die Normale M'N, d. i. das Stück der Normallinie zwischen dem Berührungspunkte und der Abscissenaxe; und
4) die Subnormale NP', d. i. das Stück der Abscissenaxe zwischen der Normale und der Ordinate.

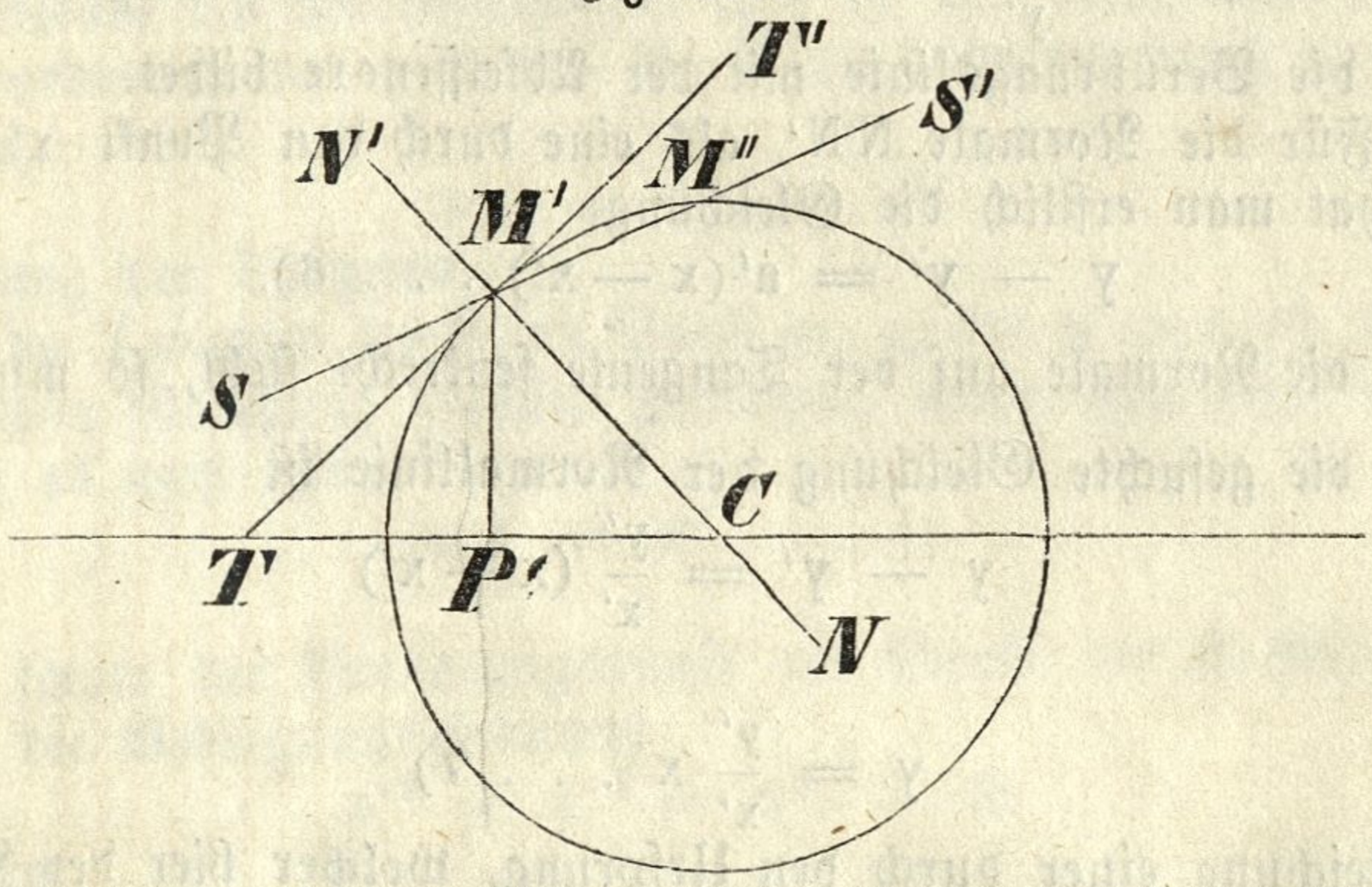
Von diesen vier Berührungsgrößen sind die Tangente und die Normale wesentlich positiv; die Subtangente und die Subnormale können

positiv oder negativ sein, je nachdem erstere von T aus, letztere von P′ aus, nach der positiven oder negativen Abscissenrichtung hin, fällt.

§. 555. Gleichungen der Berührungs- und der Normallinie am Kreise.

Es seien x′, y′ die Koordinaten des Berührungspunktes M′ (Figur 350) und x″, y″ jene eines benachbarten Punktes M″ der Kreislinie.

Fig. 350.



Man hat nun für die Sekante SS′, welche durch die Punkte x′ y′ und x″ y″ geht, die Gleichung

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (x - x') \ldots 1).$$

Da M′ und M″ Punkte des Kreises sind, so müssen, wenn der Halbmesser durch a ausgedrückt wird, die Bedingungsgleichungen

$$x'^2 + y'^2 = a^2, \qquad x''^2 + y''^2 = a^2$$

Statt finden, durch deren Subtrakzion man

$$(x''^2 - x'^2) + (y''^2 - y'^2) = 0,$$

oder

$$(x'' + x')(x'' - x') + (y'' + y')(y'' - y') = 0$$

und daher

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = -\frac{x'' + x'}{y'' + y'} \ldots 2)$$

bekommt. Wird dieser Werth in 1) substituirt, so erhält man für die Gleichung der Sekante SS′

$$y - y' = -\frac{x'' + x'}{y'' + y'} (x - x') \ldots 3).$$

1) Läßt man nun die Sekante SS′ um den Punkt M′ drehen, bis M″ mit M′ zusammenfällt, so wird die Sekante in die Lage der Berührungslinie TT′ kommen; und man erhält für diese, wenn in 3) $x'' = x'$, $y'' = y'$ gesetzt wird, die Gleichung

$$y - y' = -\frac{x'}{y'} (x - x') \ldots 4),$$

welche sich auch so darstellen läßt

$$yy' + xx' = x'^2 + y'^2$$

oder, weil $x'^2 + y'^2 = a^2$ ist,

$$y y' + x x' = a^2 \quad \ldots \quad 5).$$

In dieser letztern Form läßt sich die Gleichung der Tangente unmittelbar aus jener des Kreises

$$y y + x x = a^2$$

sehr leicht ableiten.

Die Größe $-\frac{x'}{y'}$ in 4) ist die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Berührungslinie mit der Abscissenaxe bildet.

2) Für die Normale N N', als eine durch den Punkt x' y' gehende Gerade, hat man erstlich die Gleichung

$$y - y' = a'(x - x') \quad \ldots \quad 6).$$

Da die Normale auf der Tangente senkrecht steht, so muß $a' = \frac{y'}{x'}$ sein, und die gesuchte Gleichung der Normallinie ist

$$y - y' = \frac{y'}{x'}(x - x')$$

oder

$$y = \frac{y'}{x'} x \quad \ldots \quad 7)$$

welche Gleichung einer durch den Ursprung, welcher hier der Mittelpunkt des Kreises ist, gehenden Geraden angehört; was ganz natürlich ist, da bekanntlich die Tangente auf dem zum Berührungspunkte gezogenen Halbmesser senkrecht stehen muß.

§. 556. Bestimmung der vier Berührungsgrößen.

1) Um die Subtangente TP' zu erhalten, suche man zuerst die Abscisse CT des Punktes T der Berührungslinie, also das x, welches aus der Gleichung der Tangente 5) für $y = 0$ hervorgehet; man bekommt

$$CT = x = \frac{a^2}{x'}.$$

Nun ist $TP' = CT - CP' = \frac{a^2}{x'} - x' = \frac{a^2 - x'^2}{x'} = \frac{y'^2}{x'}$; daher, wenn man beachtet, daß hier x' negativ ist, die Subtangente aber positiv ausfallen muß,

$$\text{Subtangente } TP' = \frac{x'^2 - a^2}{x'} = -\frac{y'^2}{x'} \quad \ldots \quad 8).$$

2) Zur Bestimmung der Tangente M'T hat man aus dem rechtwinkligen Dreiecke M'P'T

$$M'T^2 = M'P'^2 + TP'^2 = y'^2 + \frac{y'^4}{x'^2} = \frac{y'^2}{x'^2}(x^2 + y'^2) = \frac{a^2 y'^2}{x'^2},$$

daher

$$\text{Tangente } M'T = \pm \frac{a y'}{x'} \quad \ldots \quad 9),$$

wo das Vorzeichen so zu wählen ist, daß die Tangente positiv wird.

3) Für die Subnormale hat man

$$\text{Subnormale } CP' = -x' \quad \ldots \quad 10).$$

4) Endlich hat man noch

$$\text{Normale } M'C = a \quad \ldots \quad 11).$$

§. 557. Aus einem außerhalb eines Kreises gelegenen Punkte, dessen Koordinaten m und n sind, soll an den Kreis eine Tangente geführt werden. Man suche die Koordinaten des Berührungspunktes.

Es sei a der Halbmesser des gegebenen Kreises. Nehmen wir, da die Lage des Koordinatensystems willkürlich ist, den Mittelpunkt des Kreises als Anfangspunkt der Koordinaten, und die durch den Punkt m, n gezogene Gerade als die Abscissenaxe an; so ist, wenn die noch unbekannten Koordinaten des gesuchten Berührungspunktes durch x' y' bezeichnet werden,

$$xx' + yy' = a^2$$

die Gleichung der Tangente.

Da die Tangente durch den Punkt m, n, wo $n = o$ ist, gehen soll, so muß ihrer Gleichung Genüge geschehen, wenn man darin m, o statt x, y setzt; es muß also

$$mx' = a^2 \ldots 1)$$

sein.

Da ferner der Berührungspunkt ein Punkt der Kreislinie ist, so muß auch die Bedingungsgleichung

$$x'^2 + y'^2 = a^2 \ldots 2)$$

Statt finden.

Aus 1) und 2) folgt nun

$$x' = \frac{a^2}{m}, \quad y' = \pm \sqrt{a^2 - \frac{a'^4}{m^2}},$$

woraus hervorgehet, daß es zwei Berührungspunkte gibt, welche in einer auf die Abscissenaxe senkrechten Geraden liegen. Um dieselben zu erhalten, darf man nur den Ausdruck $x' = \frac{a^2}{m}$ nach §. 490, 2) konstruiren, und man wird dadurch auf dieselbe Konstrukzion geleitet, welche für die vorgelegte Aufgabe §. 226, b) aufgestellt wurde.

§. 558. Es soll an zwei der Lage und der Größe nach gegebene Kreise eine gemeinschaftliche Tangente geführt werden.

Es seien R und r die Halbmesser der beiden Kreise, und d der Abstand ihrer Mittelpunkte. Nimmt man den Mittelpunkt des ersten Kreises als Anfangspunkt der Koordinaten, und die Zentrilinie als die Abscissenaxe an, so sind

$$x^2 + y^2 = R^2 \ldots 1)$$

und

$$(x - d)^2 + y^2 = r^2 \ldots 2)$$

die Gleichungen der zwei gegebenen Kreise. Die Gleichung der gesuchten gemeinschaftlichen Tangente wird die Form

$$y = ax + b \ldots 3)$$

haben, wo a und b noch zu bestimmen sind.

Lassen wir die Gerade 3) die beiden Kreise zuerst durchschneiden, so müssen die Bedingungsgleichungen

$$x^2 + (ax + b)^2 = R^2 \quad \ldots 4)$$

und

$$(x - d)^2 + (ax + b)^2 = r^2 \quad \ldots 5)$$

Statt finden, aus denen beziehungsweise

$$x = \frac{-ab}{1+a^2} \pm \frac{\sqrt{R^2(1+a^2) - b^2}}{1+a^2} \quad \ldots 6)$$

und

$$x = \frac{-ab+d}{1+a^2} \pm \frac{\sqrt{r^2(1+a^2) - (ad+b)^2}}{1+a^2} \quad \ldots 7)$$

hervorgehet, welche Gleichungen die Werthe der Abscissen für die Durchschnittspunkte der Geraden mit jedem der beiden Kreise vorstellen.

Soll nun die Gerade zu einer Tangente werden, so müssen die zwei Durchschnittspunkte bei jedem Kreise in einen einzigen zusammenfallen, was nur sein kann, wenn in den obigen Werthen die Größen unter dem Wurzelzeichen verschwinden. Für den Fall, daß die Gerade 3) eine Tangente der beiden Kreise wird, hat man also die Bedingungsgleichungen

$$R^2(1+a^2) = b^2 \quad \ldots 8)$$

und

$$r^2(1+a^2) = (ad+b)^2 \quad \ldots 9)$$

und man erhält unter dieser Voraussetzung, wenn die Koordinaten des Berührungspunktes beim ersten Kreise durch x', y', und beim zweiten durch x'', y'' bezeichnet werden, aus 6) und 7) die Werthe

$$x' = \frac{-ab}{1+a^2} \quad \ldots 10), \qquad x' = \frac{-ab+d}{1+a^2} \quad \ldots 11).$$

Aus 8) und 9) folgt nun

$$\frac{R^2}{r^2} = \frac{b^2}{(ad+b)^2},$$

so daß, wie auch immer die Quadratwurzeln bezeichnet sein mögen, sicher allgemein

$$\frac{R}{r} = \pm \frac{b}{ad+b} \text{ oder } R(ad+b) = \pm br \quad \ldots 12)$$

sein wird.

Aus 12) folgt nun

$$b = \frac{-adR}{R \mp r},$$

ferner aus 8)

$$b = R\sqrt{a^2+1},$$

und aus diesen beiden Gleichungen

$$a = \frac{R \mp r}{\sqrt{d^2-(R \mp r)^2}}, \qquad b = \frac{-dR}{\sqrt{d^2-(R \mp r)^2}} \quad \ldots 14).$$

Die Gleichung der gesuchten Tangente ist daher

$$y = \frac{R \mp r}{\sqrt{d^2-(R \mp r)^2}} \cdot x - \frac{dR}{\sqrt{d^2-(R \mp r)^2}} \quad \ldots 15).$$

Wegen des doppelten Vorzeichens sowohl bei r als in der Wurzelgröße erhält man für y, so wie für a und b, vier Werthe; es sind demnach im Allgemeinen vier verschiedene Tangenten an die beiden Kreise möglich.

Wenn man in 10) und 11) die Werthe von a und b aus 14) substituirt, so erhält man

$$x' = \frac{(R \mp r)\,R}{d} \quad \text{und} \quad x'' = \frac{\pm (R \mp r)\,r + d^2}{d};$$

und daher

$$y' = a\,x' + b = \frac{R\sqrt{d^2 - (R \mp r)^2}}{d}, \quad \text{und}$$

$$y'' = a\,x'' + b = \frac{\pm\, r\sqrt{d^2 - (R \mp r)^2}}{d}.$$

Man hat daher für die Berührungspunkte der vier Tangenten mit jedem der zwei Kreise nachstehende Koordinaten:

$x' =$	$y' =$	$x'' =$	$y'' =$
$\frac{(R - r)\,R}{d}$	$\frac{R\sqrt{d^2 - (R - r)^2}}{d}$	$\frac{(R - r)\,r + d^2}{d}$	$\frac{r\sqrt{d^2 - (R - r)^2}}{d}$
$\frac{(R - r)\,R}{d}$	$\frac{-R\sqrt{d^2 - (R - r)^2}}{d}$	$\frac{(R - r)\,r + d^2}{d}$	$\frac{-r\sqrt{d^2 - (R - r)^2}}{d}$
$\frac{(R + r)\,R}{d}$	$\frac{R\sqrt{d^2 - (R + r)^2}}{d}$	$\frac{-(R + r)\,r + d^2}{d}$	$\frac{-r\sqrt{d^2 - (R + r)^2}}{d}$
$\frac{(R + r)\,R}{d}$	$\frac{-R\sqrt{d^2 - (R + r)^2}}{d}$	$\frac{-(R + r)\,r + d^2}{d}$	$\frac{r\sqrt{d^2 - (R + r)^2}}{d}$

Je zwei Berührungspunkte desselben Kreises haben dasselbe x, und unterscheiden sich nur durch das Zeichen von y; sie liegen demnach in einer Geraden, welche auf der Zentrilinie senkrecht steht.

Um die Beziehung zwischen zwei Berührungspunkten, welche zu der nämlichen Tangente gehören, zu ersehen, denken wir uns zu denselben Halbmesser gezogen. Heißt nun α der Winkel, den ein solcher Halbmesser im ersten Kreise mit der Abscissenaxe bildet, und β der Winkel des korrespondirenden Halbmessers im zweien Kreise ebenfalls mit der Abscissenaxe, so ist

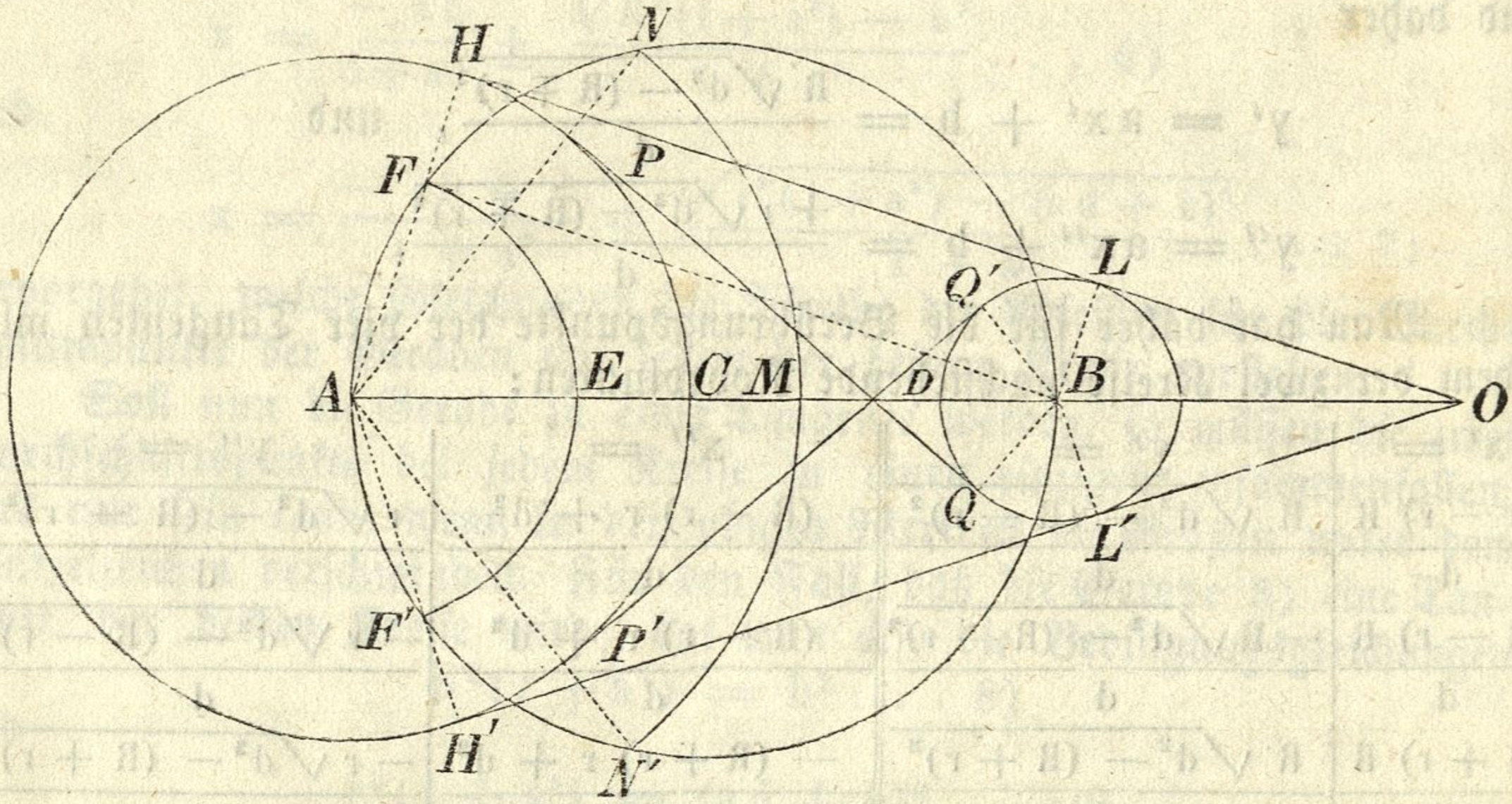
$$\text{tang}\,\alpha = \frac{y'}{x'} = \frac{\sqrt{d - (R \pm r)^2}}{R \mp r}, \quad \text{und}$$

$$\text{tang}\,\beta = \frac{y''}{x'' - d} = \frac{\sqrt{d - (R \mp r)^2}}{R \mp r},$$

daher $\text{tang}\,\alpha = \text{tang}\,\beta$, woraus folgt, daß die Halbmesser, welche zu zwei Berührungspunkten derselben Tangente in den beiden Kreisen gezogen werden, parallel sind. Kennt man daher den Berührungspunkt in dem einen Kreise, so kann man hiernach sehr leicht den korrespondirenden Berührungspunkt des andern Kreises finden. Wie aber die Berührungspunkte des einen z. B. des ersten Kreises gefunden werden können, ergibt sich aus der Gleichung $\text{tang}\,\alpha = \frac{y'}{x'}$, woraus $\cos\alpha = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$, oder $\cos\alpha = \frac{R \mp r}{d}$ folgt. Es zeigt nämlich diese letzte Gleichung, daß α der Winkel eines rechtwinkligen Dreieckes sei, worin die anliegende Kathete $R \mp r$, und die Hypotenuse d ist.

Die Auflösung der vorgelegten Aufgabe wird daher durch folgende schon in §. 226, c) entwickelte Konstrukzion bewerkstelliget:

Fig. 351.



Es sei (Fig. 351) $AB = d$, $AC = R$, $BD = r$. Man beschreibe über AB als Durchmesser einen Kreis, mache $CE = r$, und beschreibe aus A mit dem Halbmesser $AE = R - r$ einen Kreisbogen, welcher den früher beschriebenen Kreis in F und F' schneidet. Im rechtwinkligen Dreiecke AFB ist nun die Hypotenuse $AB = d$, die Kathete $AF = R - r$; daher bestimmt der unter dem Winkel $BAF = \alpha$ gezogene Halbmesser den einen Berührungspunkt H an dem ersten Kreise. Zieht man in dem zweiten Kreise den Halbmesser $BL \parallel AH$, so ist L ein mit H zu derselben Tangente gehöriger Punkt dieses zweiten Kreises, und somit HL eine gemeinschaftliche Tangente der beiden Kreise. Auf gleiche Weise gibt der andere Durchschnittspunkt F' die Tangente $H'L'$.

Man mache ferner $CM = r$, und beschreibe aus A mit dem Halbmesser $AM = R + r$ einen Kreisbogen, welcher den über AB beschriebenen Kreis in N und N' schneidet, so werden hiedurch die beiden andern Tangenten PQ und $P'Q'$ bestimmt

§. 559. Während die analytische Behandlung einer Aufgabe ganz naturgemäß auf die Konstrukzion derselben führt, erhält man dabei meistens nicht nur die speciell gesuchte Auflösung, sondern oft noch eine Anzahl anderer wichtiger Wahrheiten und Auflösungen, so wie den Zusammenhang, der zwischen denselben Statt findet.

In der voranstehenden Aufgabe sind die beiden Kreise ihrer Größe und Lage nach als gegeben zu betrachten; man braucht nur diese Angaben verschieden zu modifiziren, um eben so mannigfaltige Resultate zu gewinnen. Die in dieser Beziehung möglichen Fälle sind:

a) für $R = r$

1) $d = o$,
2) $o < d < 2R$,
3) $d = 2R$,
4) $d > 2R$;

b) für $R > r$

5) $d = o$, 6) $o < d < R - r$,
7) $d = R - r$, 8) $R - r < d < R + r$,
9) $d = R + r$, 10) $d > R + r$.

Wir empfehlen es dem Anfänger als eine sehr bildende Uebung, die hier angeführten Fälle mit Rücksicht auf die oben für die Koordinaten der Berührungspunkte entwickelten Ausdrücke einzeln in Betrachtung zu ziehen, und bemerken noch, daß für $-r$ die Koordinaten der Berührungspunkte für die äußern Tangenten, für $+r$ aber die Koordinaten der zu den innern Tangenten gehörigen Berührungspunkte erhalten werden.

§. 560. Wir wollen noch den Durchschnittspunkt der zwei äußern Tangenten HL und H'L' analytisch zu bestimmen suchen.

Der Tangente HL entspricht die Gleichung

$$y = \frac{R-r}{\sqrt{d^2-(R-r)^2}} \cdot x - \frac{dR}{\sqrt{d^2-(R-r)^2}},$$

und der Tangente H'L' die Gleichung

$$y = -\frac{R-r}{\sqrt{d^2-(R-r)^2}} \cdot x + \frac{dR}{\sqrt{d^2-(R-r)^2}}.$$

Um die Koordinaten des Durchschnittspunktes der beiden Tangenten zu erhalten, braucht man nur ihre Gleichungen als koexistirend zu betrachten und daraus x und y zu suchen. Durch Addizion derselben erhält man

$$2y = o, \quad \text{also auch} \quad y = o,$$

d. h. der gesuchte Durchschnittspunkt liegt in der Zentrilinie.

Durch Subtrakzion der beiden Gleichungen findet man

$$o = \frac{2(R-r)}{\sqrt{d^2-(R-r)^2}} \cdot x - \frac{2dR}{\sqrt{d^2-(R-r)^2}},$$

woraus

$$x = \frac{dR}{R-r}$$

folgt.

Es ist also $AO = \frac{dR}{R-r}$, und $BO = \frac{dR}{R-r} - d = \frac{dr}{R-r}$.

Um hievon eine Anwendung zu machen, nehmen wir an, daß die beiden Kreise die Durchschnitte der Sonnen- und der Erdkugel vorstellen; LOL' ist dann der Durchschnitt des Schattenkegels, den die Erde wirft, und BO die Länge dieses Schattenkegels. Der Halbmesser der Sonne ist nun 112mal, und die Entfernung der Mittelpunkte der Sonne und der Erde 24054mal so groß als der Erdhalbmesser, welcher nahe 859.4 Meilen beträgt. Man hat also $R = 112r$, $d = 24054r$, und daher

$$BO = \frac{rd}{R-r} = 216{\cdot}7r = 186232 \text{ Meilen.}$$

Da nun die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde nur 51821 Meilen beträgt, so muß jederzeit eine Mondesfinsterniß eintreten, wenn zur Zeit des Vollmondes die Breite (§. 475) des Mondes geringer

ist als die Summe aus dem Halbmesser des Mondes und dem des Erdschattens da, wo der Mond ihn schneidet.

Auf ähnliche Art kann man auch die Erscheinung der Sonnenfinsternisse nachweisen.

§. 561. Uebungsaufgaben.

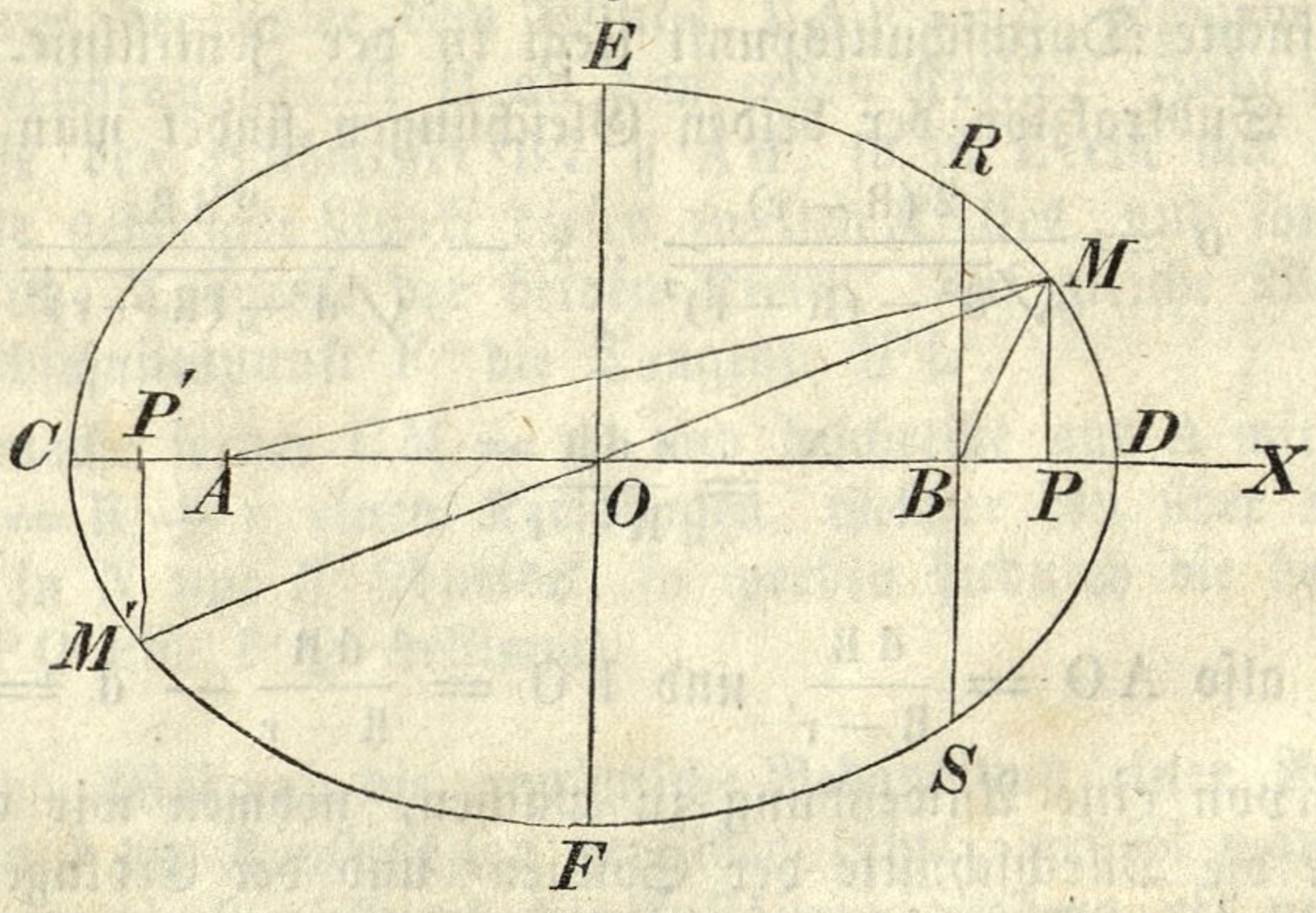
1) Zwei Punkte und eine Gerade sind gegeben; man soll einen Kreis finden, welcher durch jene zwei Punkte geht und die Gerade berührt.
2) Die Gleichung eines Kreises zu finden,
   a) welche durch zwei gegebene Punkte geht, und einen der Größe und Lage nach gegebenen Kreis berührt;
   b) welcher durch einen gegebenen Punkt geht, und zwei gegebene Kreise berührt;
   c) welcher drei gegebene Kreise berührt.

b. Die Ellipse.

§. 562. Bei der Ableitung der Gleichung für die Ellipse wird man ihre Haupteigenschaft, daß nämlich die Summe der Entfernungen jedes ihrer Punkte von den beiden Brennpunkten gleich ist einer gegebenen Geraden, zu Grunde legen.

Gleichung einer Ellipse, deren Mittelpunkt im Ursprunge und deren große Axe in der Abscissenaxe liegt.

Fig. 352.



Es seien A und B (Fig. 352) die Brennpunkte der Ellipse. Halbirt man AB im Punkte O, nimmt O als Anfangspunkt der Koordinaten und OX als Abscissenaxe an, so ist für irgend einen Punkt M

$$x = OP,\ y = MP.$$

Ist nun M ein Punkt der Ellipse, so sind AM und BM seine Leitstrahlen, und zwar ist

$$AM = \sqrt{AP^2 + MP^2},\ BM = \sqrt{BP^2 + MP^2},$$

oder wenn $OA = OB = e$ gesetzt wird.

$$AM = \sqrt{(x + e)^2 + y^2},\ BM = \sqrt{(x - e)^2 + y^2}.$$

Da nun M ein Punkt der Ellipse sein soll, so muß die Summe der beiden Leitstrahlen gleich sein einer gegebenen Geraden, deren Länge 2a heißen mag; man hat daher

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2} + \sqrt{(x-e)^2+y^2} = 2a$$

und wenn diese Gleichung razional gemacht wird,

$$(a^2-e^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^2\,(a^2-e^2).$$

Im Dreiecke ABM ist nun $AM + BM > AB$, also $2a > 2e$, oder $a > e$, daher auch $a^2 > e^2$, und somit der Unterschied $a^2 - e^2$ positiv. Drückt man nun $a^2 - e^2$ durch die gewiß positive Größe b^2 aus, indem man $a^2 - e^2 = b^2$ setzt, so hat man

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

als die Relazion, welche zwischen den Koordinaten des in der Ellipse willkürlich angenommenen Punktes M Statt findet, folglich als die Gleichung der Ellipse selbst.

Diese Gleichung läßt sich auch so darstellen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

§. 563. Diskussion der Gleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

1) Löst man diese Gleichung nach y auf, so erhält man

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2};$$

woraus hervorgehet, daß zu jedem Werthe von x, für welchen y reell ausfällt, zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von y gehören, daß sich also die Ellipse zu beiden Seiten der Abscissenaxe gleichförmig ausdehnt.

2) Bestimmt man aus der Gleichung der Ellipse den Werth von x, so ergibt sich $x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$, woraus folgt, daß zu jeder Ordinate y zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe der Abscisse x gehören, daß sich also die Ellipse auch zu beiden Seiten der Ordinatenaxe gleichförmig ausdehnt.

Die Ellipse wird also durch die beiden Koordinatenaxen in vier kongruente Aeste getheilt.

3) Aus $x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$ folgt für $y = 0$, $x = \pm a$; und aus $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ für $x = 0$, $y = \pm b$. Die Ellipse schneidet also die Abscissenaxe in den Abständen $+a$ und $-a$, und die Ordinatenaxe in den Abständen $+b$ und $-b$ vom Anfangspunkte.

4) Der größte Werth, den x annehmen kann, ist a, und der größte Werth von y ist b; für $x > a$ wird y, für $y > b$ wird x imaginär. Zieht man daher mit der Ordinatenaxe in den Abständen $+a$ und $-a$, mit der Abscissenaxe aber in den Abständen $+b$, und $-b$ parallele Gerade, welche ein Rechteck bilden, so wird die ganze Ellipse innerhalb dieses Rechteckes enthalten sein. Daraus folgt, daß die Ellipse eine geschlossene krumme Linie ist.

5) Ist $y = a'x$ die Gleichung irgend einer durch den Anfangspunkt O gezogenen Geraden MM', so erhält man für die Durchschnittspunkte der-

…en mit der Ellipse, deren Gleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ist, die Koordinaten

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2a'^2 + b^2}}, \quad y = \pm \frac{aa'b}{\sqrt{a^2a'^2 + b^2}},$$

wobei die obern Zeichen dem Punkte M, die untern jenem M' entsprechen. Die Abscissen der Punkte M und M', eben so die Ordinaten derselben, haben also gleiche numerische Werthe, es ist nämlich $OP = OP'$, $MP = M'P'$; daher sind in den rechtwinkligen Dreiecken MPO und M'P'O auch die dritten Seiten OM und OM' gleich, oder es wird die Sehne MM' in O halbirt. Da MM' eine willkürliche durch O gezogene Sehne bedeutet, so folgt, daß alle durch den Ursprung O gezogenen Sehnen in diesem Punkte halbirt werden. Der Punkt O heißt daher der Mittelpunkt, und jede durch ihn gehende Sehne ein Durchmesser der Ellipse.

6) Drückt man den halben zu dem Punkte M gehörigen Durchmesser, nämlich OM oder OM' durch d aus, so ist $d = \sqrt{x^2 + y^2}$, oder wegen

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2,$$

auch

$$d = \sqrt{b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot x^2}.$$

Da nun dieser Ausdruck für $x = o$ den kleinsten Werth annimmt, so ist der kleinste halbe Durchmesser $d = \sqrt{b^2} = \pm b = OE = OF$. Dagegen nimmt jener Ausdruck den größten Werth an, wenn x den größten Werth, dessen es fähig ist, erreicht hat, also für $x = \pm a$; dafür erhält man somit den größten halben Durchmesser $d = \sqrt{a^2} = \pm a = OD = OC$. Es ist daher unter allen Durchmessern der Ellipse CD der größte und EF der kleinste. Den Durchmesser $CD = 2a$ nennt man darum die große oder erste, jenen $EF = 2b$ die kleine oder zweite Axe der Ellipse; die Punkte C und D heißen die Scheitel.

7) Zur Bestimmung der Lage der Brennpunkte A und B gegen den Mittelpunkt O folgt aus $a^2 - e^2 = b^2$,

$$OA = OB = e = \sqrt{a^2 - b^2},$$

welche Größe die Exzentrizität der Ellipse ist.

In der Astronomie versteht man unter der Exzentrizität gewöhnlich das Verhältniß zwischen e und der halben großen Axe a, also $\frac{e}{a}$, und drückt dieses durch ε aus, so daß

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \text{ ist.}$$

8) Je kleiner die Exzentrizität ist, desto weniger ist a von b unterschieden, und desto mehr nähert sich die Ellipse dem Kreise; für $e = o$ wird $a = b$ und die Gleichung der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ geht über in die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 = a^2$. Der Kreis kann demnach als eine Ellipse betrachtet werden, deren Exzentrizität Null ist, deren beide Axen daher gleich sind.

9) Um die durch die Brennpunkte gehenden Ordinaten zu bestimmen, setzt man in der Gleichung

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$x = e = \sqrt{a^2 - b^2}$, wodurch man

$$y = \pm \frac{b^2}{a} = BR = BS$$

erhält. Die durch einen Brennpunkt senkrecht auf die große Axe gezogene Sehne RS heißt der Parameter der Ellipse, und wird durch 2p bezeichnet. Es ist daher der halbe Parameter $p = \frac{b^2}{a}$, woraus $a : b = b : p$ folgt, d. h. der halbe Parameter ist die dritte stetige Proporzionale zu der halben großen und der halben kleinen Axe.

§ 564. Jede krumme Linie, welche zur Gleichung

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

gehört, ist eine Ellipse.

Man mache $OC = OD = a$, $OA = OB = \sqrt{a^2 - b^2}$. Ist nun M ein beliebiger Punkt der krummen Linie CEM, und $OP = x$, $MP = y$, so hat man

$$AM^2 = (\sqrt{a^2 - b^2} + x)^2 + y^2$$

$$= a^2 - b^2 + 2x\sqrt{a^2 - b^2} + x^2 + b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$$

$$= a^2 + 2x\sqrt{a^2 - b^2} + \frac{x^2}{a^2}(a^2 - b^2)$$

$$= [a + \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - b^2}]^2,$$

daher $AM = a + \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$.

Eben so findet man

$$BM = a - \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - b^2},$$

folglich $AM + BM = 2a$, und daher CEM eine Ellipse.

§. 565. Bestimmung der Leitstrahlen.

Bezeichnet man die Leitstrahlen des Punktes M, AM und BM durch r und r', so hat man

$$r = AM = \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = \sqrt{(x+e)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)}$$

$$= \sqrt{a^2 + 2ex + \frac{e^2 x^2}{a^2}},$$

$$r' = BM = \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \sqrt{(x-e)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)}$$

$$= \sqrt{a^2 - 2ex + \frac{e^2 x^2}{a^2}}$$

oder

$$r = a + \frac{ex}{a},$$

$$r' = a - \frac{ex}{a};$$

und es ist, wie es sein muß, $r + r' = 2a$.

Die Gleichungen der beiden Leitstrahlen werden wir nach §. 525 bestimmen.

Für den Leitstrahl AM, welcher durch die Punkte A (— e, o) und M (x′, y′) geht, erhält man die Gleichung

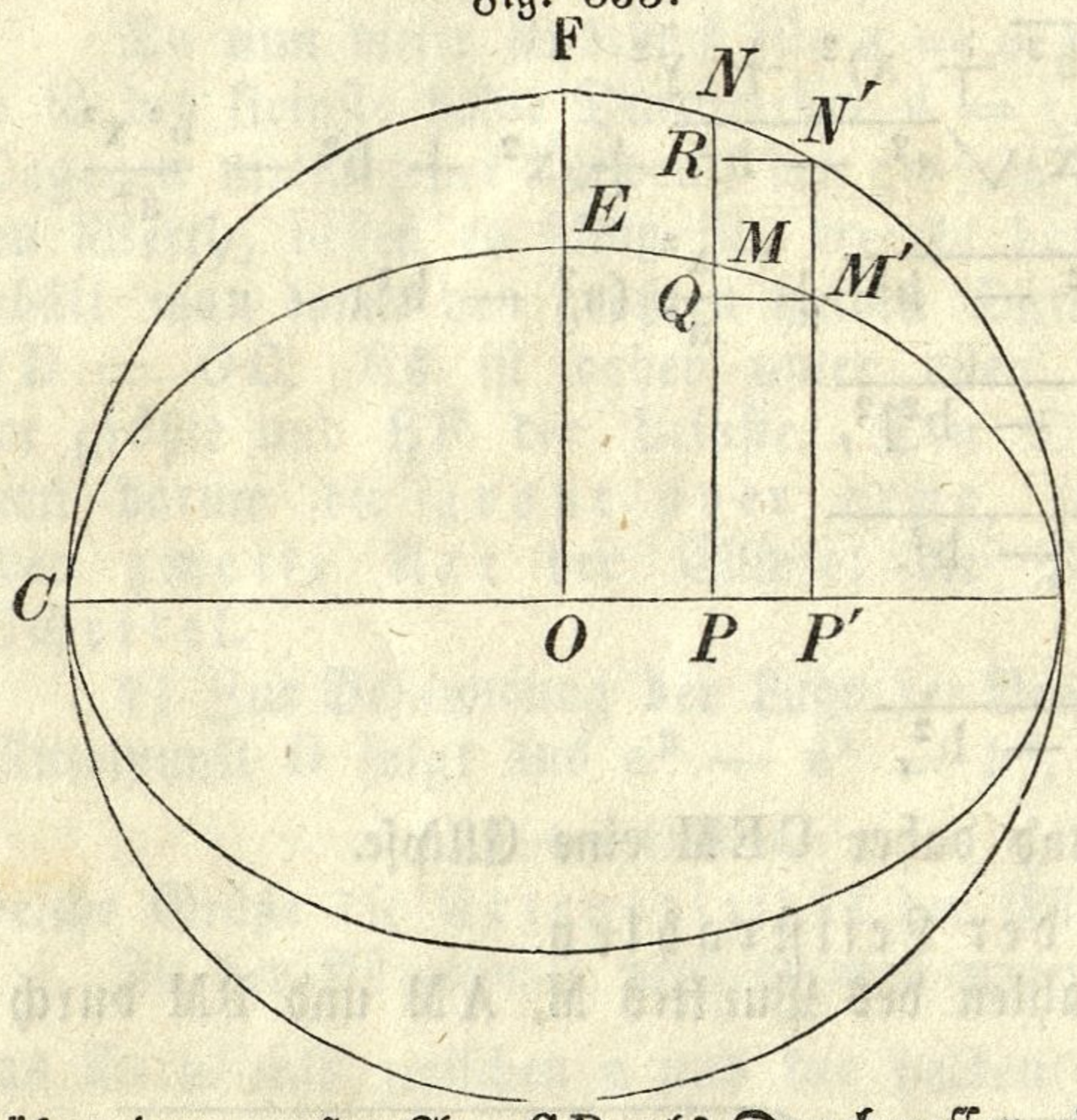
$$y = \frac{y'}{x' + e}(x + e);$$

für den Leitstrahl BM aber, welcher durch die Punkte B (e, o) und M (x′, y′) geht,

$$y = \frac{y'}{x' - e}(x - e).$$

§. 566. Wenn man über der großen Axe einer Ellipse als Durchmesser einen Kreis beschreibt, so verhalten sich die derselben Abscisse entsprechenden Ordinaten des Kreises und der Ellipse, wie die halbe große zur halben kleinen Axe.

Fig. 353.



Setzt man (Fig. 353) $OP = x$, $MP = y$, und $NP = y'$, so ist

$$y'^2 = a^2 - x^2,$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2);$$

daher

$$\frac{y'^2}{y^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

und

$$y' : y = a : b.$$

Dieser Satz gibt uns ein Mittel an die Hand, beliebig viele Punkte einer Ellipse, wovon die beiden Axen gegeben sind, zu finden.

Man beschreibe nämlich über der großen Axe CD als Durchmesser einen Kreis, schneide von der im Mittelpunkte errichteten Senkrechten OF das Stück OE gleich der halben kleinen Axe ab, ziehe sodann beliebig viele Ordinaten NP, N′P′ . . ., und schneide dann jede derselben in dem Verhältnisse OC : OE; so werden die Durchschnittspunkte M, M′, . . . eben so viele Punkte der Ellipse sein.

§. 567. Mit Hilfe desselben Satzes läßt sich auch der Flächeninhalt der Ellipse bestimmen.

Sind MP und M′P′ die Ordinaten der Ellipse, NP und N′P′ die Ordinaten des über CD beschriebenen Kreises, welche zu den Abscissen OP

und OP' gehören, und zieht man M'Q und N'R parallel mit der Axe CD, so haben die Rechtecke M'P'PQ und N'P'PR dieselbe Grundlinie und verhalten sich daher so wie ihre Höhen; somit ist M'P'PQ : N'P'PR = M'P' : N'P' = b : a. Denkt man sich nun die Ordinaten NP und N'P' unendlich nahe an einander, so können die Dreiecke MM'Q und NN'R als unendlich klein vernachläßiget, und folglich die Rechtecke M'P'PQ und N'P'PR als Elemente der Ellipse und des Kreises betrachtet werden. Stellt man sich die Ellipse und den Kreis aus lauter solchen Elementen bestehend vor, so verhält sich jedes Element der Ellipse zu dem entsprechenden Elemente des Kreises, und somit auch die Summe aller Elemente der Ellipse zur Summe aller Kreiselemente, wie b : a. Aber letztere Summe ist die Kreisfläche, folglich $= a^2\pi$, erstere Summe die Fläche der Ellipse; heißt diese f, so hat man also $f : a^2\pi = b : a$, woraus $f = ab\pi$ folgt.

Der Flächeninhalt einer Ellipse ist demnach gleich dem Produkte der beiden Halbaxen multiplizirt mit der Ludolfischen Zahl.

§. 568. **Gleichung der Ellipse, wenn der Ursprung in einem Scheitel liegt, und die Abscissen an der großen Axe gezählt werden.**

Nimmt man den Scheitel C (Fig. 352) als Anfangspunkt der Koordinaten und die große Axe CD als Abscissenaxe an, so werden für dieses neue Koordinatensystem die Ordinaten dieselben bleiben, wie in dem früher zu Grunde gelegten Systeme, die neuen Abscissen dagegen werden sämmtlich um die halbe große Axe a größer ausfallen als die frühern. Man darf daher in der oben entwickelten Gleichung $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ bloß $x - a$ statt x setzen und y ungeändert lassen, um die Gleichung der Ellipse für das neue System zu erhalten. Diese nimmt daher folgende Gestalt an:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2},$$

oder

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

und wenn $\frac{b^2}{a} = p$ gesetzt wird,

$$y^2 = \frac{p}{a}(2ax - x^2),$$

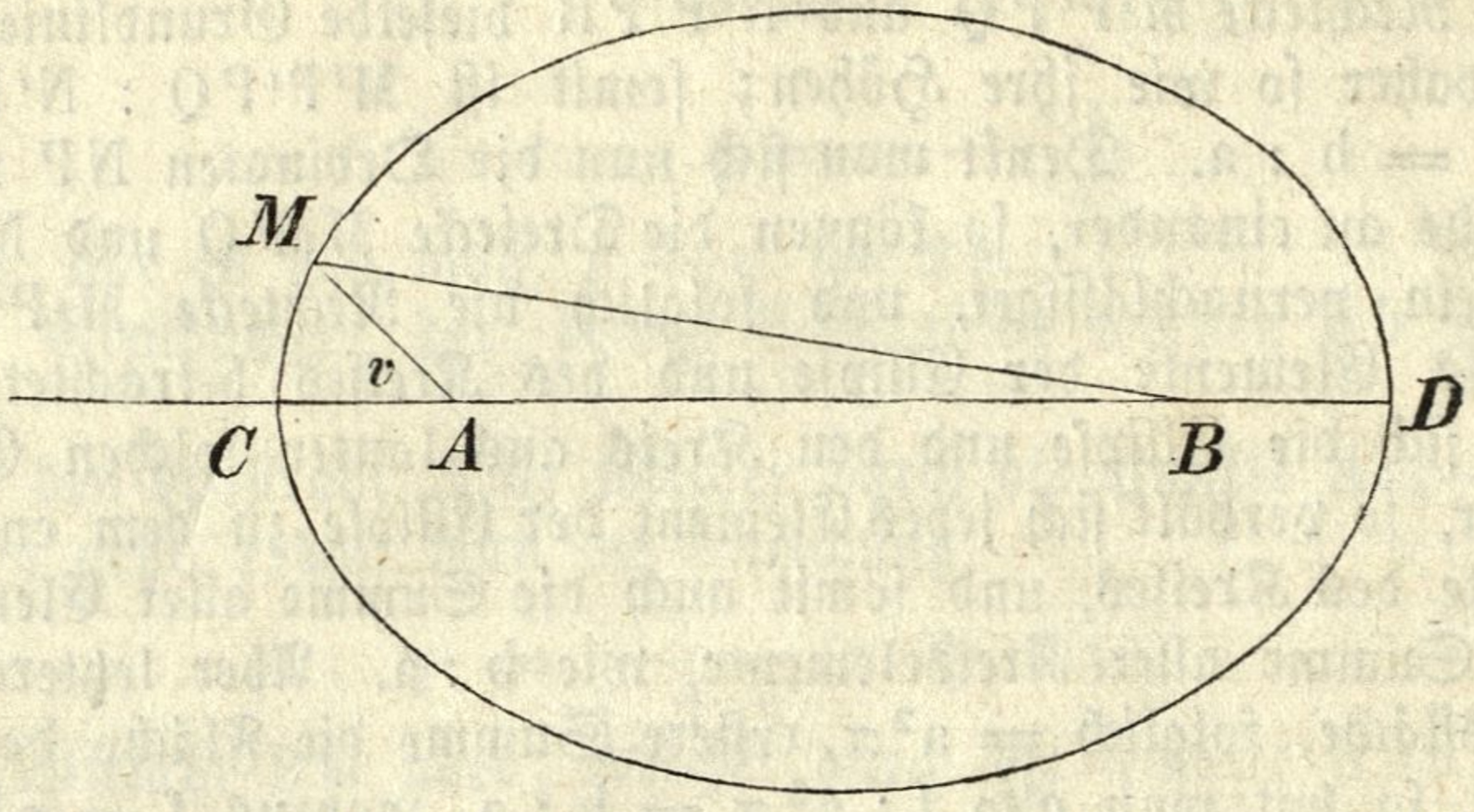
oder

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}.$$

§. 569. **Polargleichung der Ellipse.**

Es sei A (Fig. 354) der Pol und AC die Polaraxe; so ist für den Punkt M der Radiusvektor $r = AM$, und der Polarwinkel $v = MAC$. Aus dem Dreiecke ABM folgt nun

Fig. 354.



$$BM^2 = AM^2 + AB^2 - 2AM \cdot AB \cdot \cos BAM,$$

oder

$$BM^2 = r^2 + 4e^2 + 4er\cos v.$$

Wegen $AM + BM = 2a$ ist auch

$$BM^2 = (2a - r)^2 = 4a^2 - 4ar + r^2,$$

daher

$$r^2 + 4e^2 + 4er\cos v = 4a^2 - 4ar + r^2,$$

woraus

$$r = \frac{a^2 - e^2}{a + e\cos v} \quad \ldots \; 1)$$

als die Polargleichung für die Ellipse folgt.

In der Anwendung auf Astronomie, wo $\frac{e}{a} = \varepsilon$, also $e = a\varepsilon$ gesetzt wird, nimmt die Gleichung die Form an

$$r = \frac{a^2 - a^2\varepsilon^2}{a + a\varepsilon\cos v},$$

oder

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos v} \quad \ldots \; 2).$$

Will man in dieser Gleichung statt a den halben Parameter $p = \frac{b^2}{a}$ einführen, so erhält man aus $e^2 = a^2 - b^2 = a^2\varepsilon^2$, $a^2(1-\varepsilon^2) = b^2$, oder $a(1-\varepsilon^2) = \frac{b^2}{a} = p$. Die Gleichung 2) gehet also in die folgende über:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos v} \quad \ldots \; 3).$$

Für die verschiedenen Werthe von $v = 0$ bis $v = 360^\circ$ erhält man alle möglichen Werthe für $r = AM$, und dadurch alle möglichen Punkte der Ellipse.

§. 570. Wir wollen nun die Gleichung der Ellipse $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ mit der Gleichung einer Geraden $y = Ax + B$ verbinden, und daraus bestimmen, in wie vielen Punkten die beiden Linien zusammentreffen. Für die gemeinschaftlichen Punkte sind die Koordinaten bei-

der Linien gleich; man erhält daher

$$(Ax + B)^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

und daraus

$$x = \frac{-ABa^2 \pm ab\sqrt{A^2a^2 + b^2 - B^2}}{A^2a^2 + b^2}.$$

Aus diesem Ausdrucke für die Abscisse des Punktes, welcher der Ellipse und der Geraden gemeinschaftlich ist, folgt, daß die Gerade mit der Ellipse entweder zwei Punkte, oder einen einzigen oder gar keinen Punkt gemeinschaftlich hat, je nachdem $A^2a^2 + b^2 \gtreqless B^2$ ist.

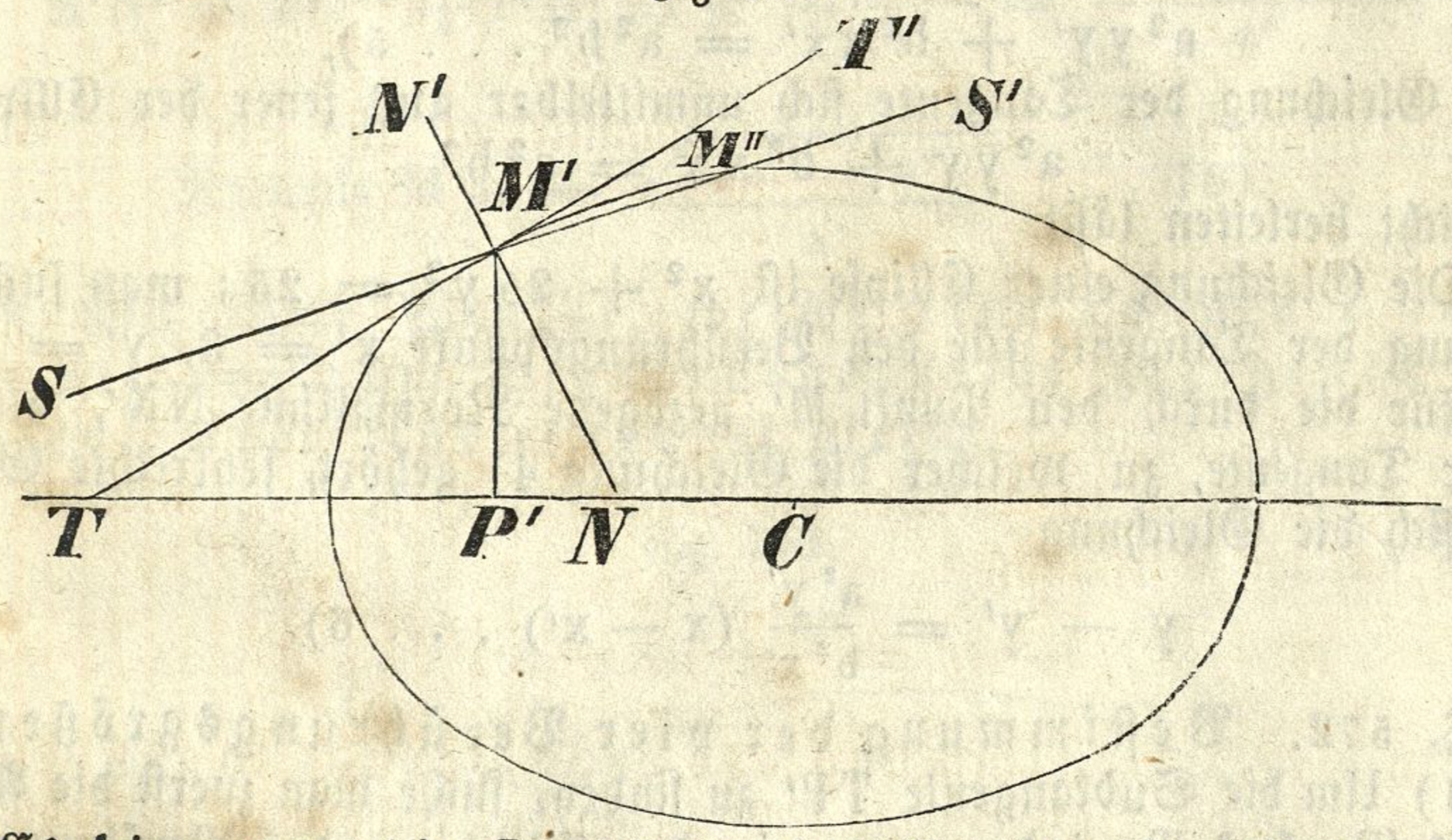
Aufgabe. Die Gleichung einer Ellipse ist $9x^2 + 16y^2 = 144$, die Gleichung einer Geraden

a) $y = 3x + 5$,
b) $y = x + 5$,
c) $y = 2x - 9$;

man bestimme, wie viele Punkte die Ellipse mit jeder dieser Geraden gemeinschaftlich habe.

§. 571. Gleichungen der Berührungs- und der Normallinie.

Fig. 355.



Es seien x', y' die Koordinaten des Punktes M' (Fig. 355) einer Ellipse, deren Gleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ist, und es soll die Gleichung der durch diesen Punkt M' an die Ellipse geführten Tangente gefunden werden.

Nimmt man einen zweiten Punkt M'' der Ellipse an, dessen Koordinaten x'', y'' sind, so ist die Gleichung der durch M' und M'' gehenden Sekante SS'

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x') \quad \ldots \quad 1).$$

Für die Punkte M' und M'' der Ellipse finden nun die Gleichungen

$$b^2x'^2 + a^2y'^2 = a^2b^2, \qquad b^2x''^2 + a^2y''^2 = a^2b^2$$

Statt, durch deren Subtrakzion man

$$b^2(x''^2 - x'^2) + a^2(y''^2 - y'^2) = 0,$$

oder

$$b^2(x'' + x')(x'' - x') + a^2(y'' + y')(y'' - y') = 0$$

und daher

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = -\frac{b^2(x'' + x')}{a^2(y'' + y')} \quad \ldots 2)$$

erhält. Subſtituirt man dieſen Werth in 1), ſo nimmt die Gleichung der Sekante SS' die Form an:

$$y - y' = -\frac{b^2(x'' + x')}{a^2(y'' + y')}(x - x') \quad \ldots 3).$$

Fällt nun der Punkt M'' mit M' zuſammen, wo $x'' = x'$, $y'' = y'$ wird, ſo kommt die Sekante SS' in die Lage der Tangente TT'; ſetzt man alſo in 3) $x'' = x'$, $y'' = y'$, ſo erhält man als die geſuchte Gleichung der Tangente TT'

$$y - y' = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}(x - x') \quad \ldots 4),$$

wobei $-\frac{b^2 x'}{a^2 y'}$ die trigonometriſche Tangente des Winkels bezeichnet, den die Berührungslinie mit der Abſciſſenaxe bildet.

Die Gleichung 4) läßt ſich auch ſo darſtellen:

$$a^2 y y' + b^2 x x' = a^2 y'^2 + b^2 x'^2$$

oder, weil $a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2$ iſt,

$$a^2 y y' + b^2 x x' = a^2 b^2 \quad \ldots 5),$$

welche Gleichung der Tangente ſich unmittelbar aus jener der Ellipſe

$$a^2 y y + b^2 x x = a^2 b^2$$

ſehr leicht herleiten läßt.

Die Gleichung einer Ellipſe iſt $x^2 + 25 y^2 = 25$; man ſuche die Gleichung der Tangente für den Berührungspunkt $x' = 3$, $y' = \frac{4}{5}$.

Für die durch den Punkt M' gezogene Normallinie NN', als eine auf der Tangente, zu welcher die Gleichung 4) gehört, ſenkrechte Gerade, ergibt ſich die Gleichung

$$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x') \quad \ldots 6).$$

§. 572. Beſtimmung der vier Berührungsgrößen.

1) Um die Subtangente TP' zu finden, ſuche man zuerſt die Abſciſſe CT des Punktes T, indem man in der Gleichung der Berührungslinie $y = 0$ ſetzt, man erhält $CT = x = \frac{a^2}{x'}$; daher iſt

$$TP' = CT - CP' = \frac{a^2}{x'} - x' = \frac{a^2 - x'^2}{x'}.$$

Da nun hier die Subtangente poſitiv ſein muß, die Größe

$$\frac{a^2 - x'^2}{x'}$$

aber negativ iſt, ſo hat man

$$\text{Subtangente } TP' = \frac{x'^2 - a^2}{x'} \quad \ldots 7).$$

Dieſer Ausdruck zeigt, daß die Subtangente von der kleinen Axe $2b$ gar nicht abhängt, daß ſomit alle Ellipſen, welche über derſelben gro-

ßen Axe beschrieben werden, für Punkte von einerlei Abscissen auch eine und dieselbe Subtangente haben. Dieselbe Subtangente muß für eine gleiche Abscisse auch ein über der großen Axe beschriebener Kreis haben, als eine Ellipse, deren beide Axen gleich sind; was übrigens auch unmittelbar aus §. 556, 1) folgt.

2) Für die Tangente M′T erhält man

$$M'T^2 = M'P'^2 + TP'^2 = y'^2 + \frac{(x'^2 - a^2)^2}{x'^2} = \frac{y'^2}{x'^2}\left(x'^2 + \frac{a^4 y'^2}{b^4}\right),$$

daher

$$\text{Tangente } M'T = \frac{y'}{b^2 x'}\sqrt{b^4 x'^2 + a^4 y'^2} \quad \ldots 8).$$

3) Um die Subnormale P′N zu erhalten, suche man die Abscisse CN des Punktes N, indem man in der Gleichung der Normallinie $y = 0$ setzt; man bekommt $CN = x = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x'$; somit ist

$$P'N = CP' - CN = x' - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x' = \frac{b^2 x'}{a^2}.$$

Da aber hier die Subnormale positiv ist, so folgt

$$\text{Subnormale } P'N = -\frac{b^2 x'}{a^2} \quad \ldots 9).$$

4) Zur Bestimmung der Normale M′N hat man

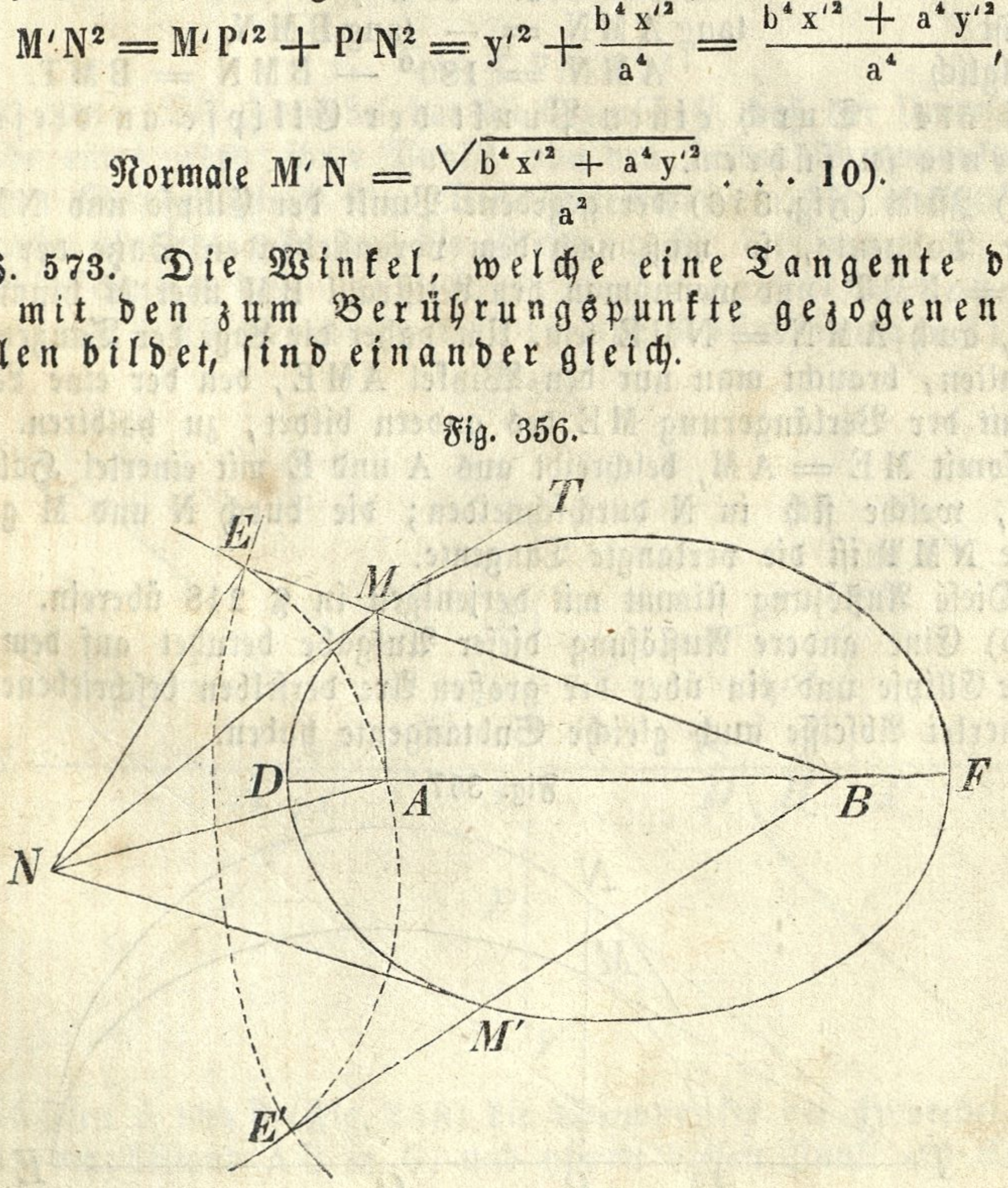
$$M'N^2 = M'P'^2 + P'N^2 = y'^2 + \frac{b^4 x'^2}{a^4} = \frac{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}{a^4},$$

daher

$$\text{Normale } M'N = \frac{\sqrt{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}}{a^2} \quad \ldots 10).$$

§. 573. Die Winkel, welche eine Tangente der Ellipse mit den zum Berührungspunkte gezogenen Leitstrahlen bildet, sind einander gleich.

Fig. 356.



Da (Fig. 356)

$$a^2 y y' + b^2 x x' = a^2 b^2 \text{ oder } y = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'} \cdot x + \frac{b^2}{y'}$$

die Gleichung der durch den Punkt M (x', y') der Ellipse gezogenen Tangente NM, und

$$y = \frac{y'}{x' + e}(x + e) \text{ oder } y = \frac{y'}{x' + e} \cdot x + \frac{e y'}{x' + e}$$

die Gleichung für den einen Leitstrahl AM desselben Punktes ist, so findet man nach §. 529

$$\text{tang } AMN = \frac{\frac{y'}{x' + e} + \frac{b^2 x'}{a^2 y'}}{1 - \frac{y'}{x' + e} \cdot \frac{b^2 x'}{a^2 y'}} = \frac{b^2}{e y'}.$$

Eben so erhält man für den Winkel BMN, welchen die Tangente mit dem zweiten Leitstrahle BM bildet, dessen Gleichung

$$y = \frac{y'}{x' - e}(x - e) \text{ oder } y = \frac{y'}{x' - e} \cdot x - \frac{e y'}{x' - e} \text{ ist:}$$

$$\text{tang } BMN = \frac{\frac{y'}{x' - e} + \frac{b^2 x'}{a^2 y'}}{1 - \frac{y'}{x' - e} \cdot \frac{b^2 x'}{a^2 y'}} = -\frac{b^2}{e y'};$$

daher ist $\text{tang } AMN = -\text{tang } BMN$,

und folglich $AMN = 180^0 - BMN = BMT$.

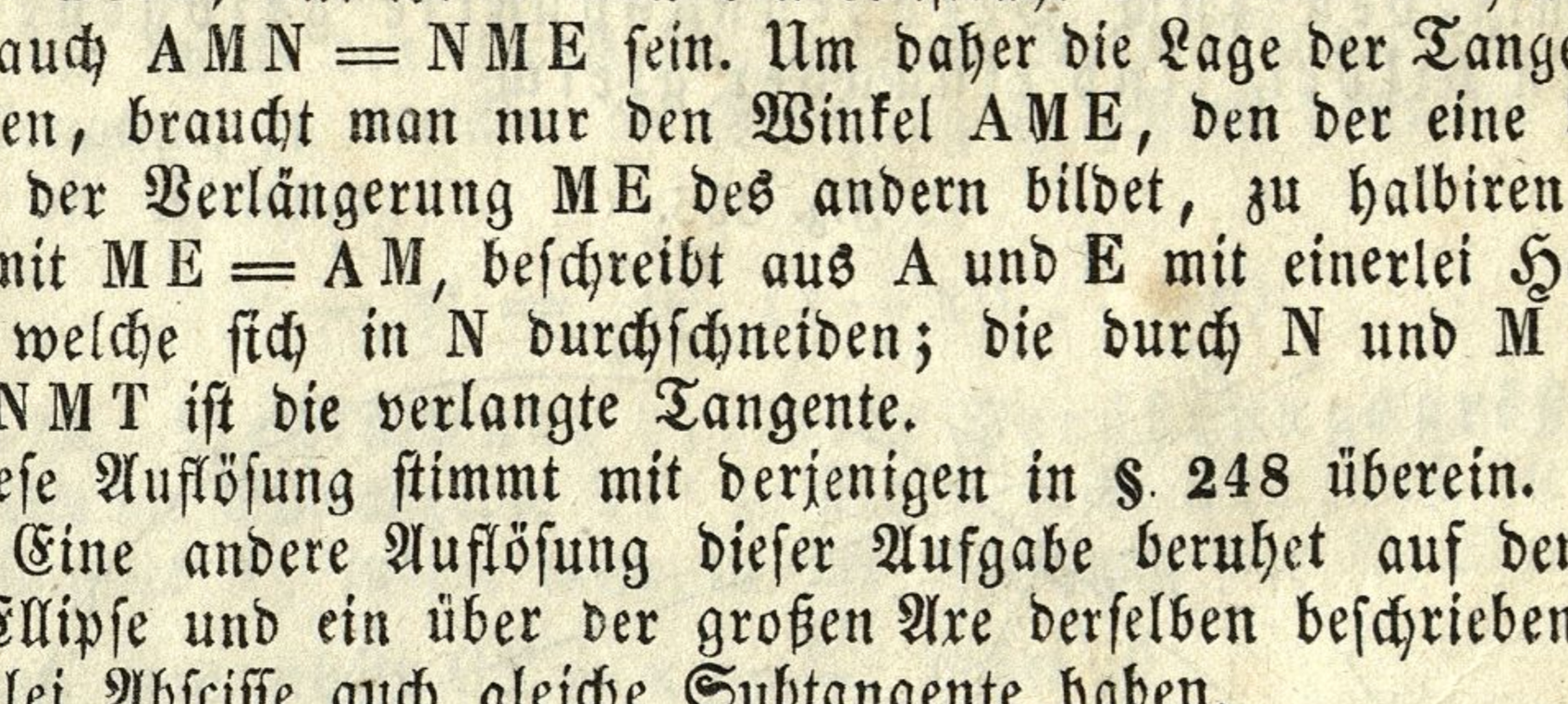
§. 574. Durch einen Punkt der Ellipse an diese eine Tangente zu führen.

a) Ist M (Fig. 356) der gegebene Punkt der Ellipse und NMT die gesuchte Tangente, so muß nach dem voranstehenden Satze der Winkel $AMN = BMT$, und wenn man den Leitstrahl BM über M hinaus verlängert, auch $AMN = NME$ sein. Um daher die Lage der Tangente NM zu erhalten, braucht man nur den Winkel AME, den der eine Leitstrahl AM mit der Verlängerung ME des andern bildet, zu halbiren. Man macht somit $ME = AM$, beschreibt aus A und E mit einerlei Halbmesser Bögen, welche sich in N durchschneiden; die durch N und M gezogene Gerade NMT ist die verlangte Tangente.

Diese Auflösung stimmt mit derjenigen in §. 248 überein.

b) Eine andere Auflösung dieser Aufgabe beruhet auf dem Satze, daß die Ellipse und ein über der großen Axe derselben beschriebener Kreis für einerlei Abscisse auch gleiche Subtangente haben.

Fig. 357.



Ist (Fig. 357) M der Punkt der Ellipse, durch welchen die Tangente geführt werden soll, so beschreibe man über der großen Axe DE als Durchmesser einen Kreis, ziehe die Ordinate MP, verlängere dieselbe, bis sie jenen Kreis in N trifft, und führe an diesen durch N die Tangente TN, so wird die Subtangente TP auch zum Punkte M der Ellipse gehören, dessen Tangente daher gefunden wird, wenn man die Punkte T und M durch eine Gerade verbindet.

§. 575. Aus einem Punkte N (Fig. 356) außerhalb der Ellipse an diese eine Tangente zu ziehen.

Hier kommt es mit Rücksicht auf §. 574, a) offenbar nur darauf an, einen Punkt E zu finden, der von N eben so weit absteht als der eine Brennpunkt A, und dessen Entfernung von dem andern Brennpunkte B der großen Axe gleich ist. Diesen Punkt findet man aber in dem Durchschnitte der aus N mit dem Halbmesser NA, und aus B mit dem Halbmesser DF beschriebenen Bögen. Zieht man dann die Gerade EB, welche die Ellipse in M schneidet, so ist M der Berührungspunkt, und NM die gesuchte Tangente.

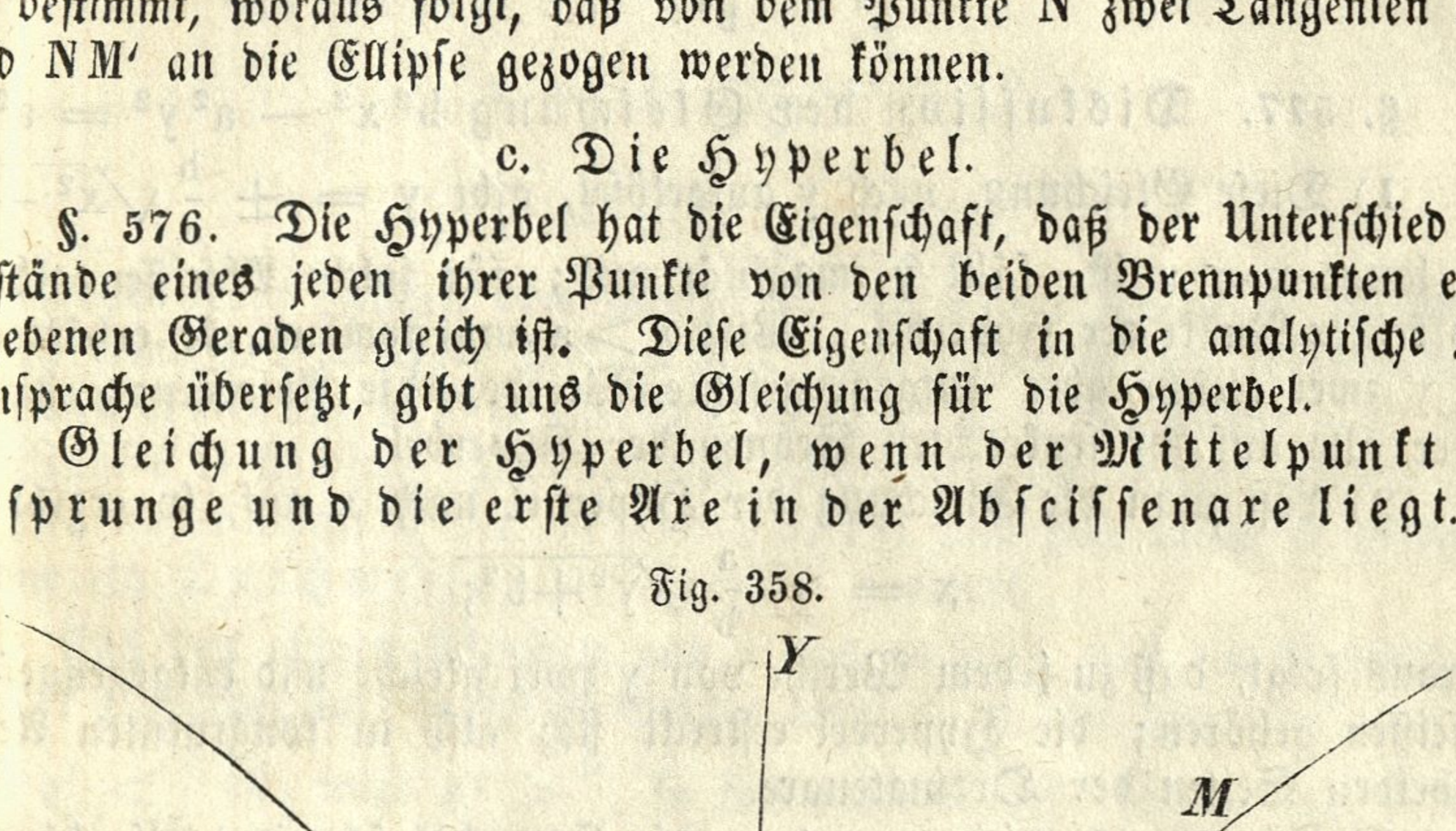
Da jene zwei Bögen auch noch einen zweiten Durchschnittspunkt E' geben, so wird durch die Gerade E'B noch ein zweiter Berührungspunkt M' bestimmt, woraus folgt, daß von dem Punkte N zwei Tangenten NM und NM' an die Ellipse gezogen werden können.

c. Die Hyperbel.

§. 576. Die Hyperbel hat die Eigenschaft, daß der Unterschied der Abstände eines jeden ihrer Punkte von den beiden Brennpunkten einer gegebenen Geraden gleich ist. Diese Eigenschaft in die analytische Zeichensprache übersetzt, gibt uns die Gleichung für die Hyperbel.

Gleichung der Hyperbel, wenn der Mittelpunkt im Ursprunge und die erste Axe in der Abscissenaxe liegt.

Fig. 358.



Es seien A und B (Fig. 358) die Brennpunkte der Hyperbel. Halbirt man den Abstand AB in O, und nimmt diesen Punkt als Anfangs-

punkt der Koordinaten und OX als die Abscissenaxe an, so ist für den Punkt M, $x = OP$, $y = MP$. Damit der Punkt M in der Hyperbel liege, muß $AM - BM$ gleich sein einer Geraden von gegebener Länge, die durch $2a$ ausgedrückt werden soll. Man hat nun, wenn $OA = OB = e$ gesetzt wird,

$$AM = \sqrt{(x+e^2) + y^2}, \quad BM = \sqrt{(x-e)^2 + y^2};$$

daher muß

$$\sqrt{(x+e^2) + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a$$

sein, oder wenn die Gleichung rational gemacht wird,

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2).$$

Im Dreiecke ABM ist $AM - BM < AB$; es muß daher $2a < 2e$, oder $a < e$, folglich auch $a^2 < e^2$, und somit $a^2 - e^2$ negativ sein. Setzt man $a^2 - e^2$ der gewiß negativen Größe $-b^2$ gleich, so erhält man

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$$

oder

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

als die gesuchte Gleichung der Hyperbel, welche sich auch so darstellen läßt:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

§. 577. Diskussion der Gleichung $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

1) Diese Gleichung, nach y aufgelöset, gibt $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. So lange $x < a$ ist, fällt y imaginär aus; für solche Abscissen gibt es also keinen Punkt der Hyperbel. Wird $x > a$ angenommen, so erhält man für y zwei gleiche aber entgegengesetzte Werthe; die Abscissenaxe halbirt daher alle auf ihr senkrechten Sehnen der Hyperbel.

2) Löst man die Gleichung der Hyperbel nach x auf, so ergibt sich

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2};$$

woraus folgt, daß zu jedem Werthe von y zwei gleiche und entgegengesetzte Abscissen gehören; die Hyperbel erstreckt sich also in kongruenten Aesten zu beiden Seiten der Ordinatenaxe.

3) Für $y = 0$ wird $x = \pm a$; die Hyperbel schneidet also die Abscissenaxe in zwei Punkten D und C, deren Abstand $2a$ beträgt. Die Gerade $CD = 2a$ ist die erste oder Hauptaxe der Hyperbel; C und D nennt man die Scheitel.

4) Da x und y jeden noch so großen Werth annehmen können, so folgt, daß die Hyperbel nicht so, wie der Kreis oder die Ellipse, in sich selbst zurückkehrt, sondern daß sich ihre Aeste ins Unendliche ausdehnen.

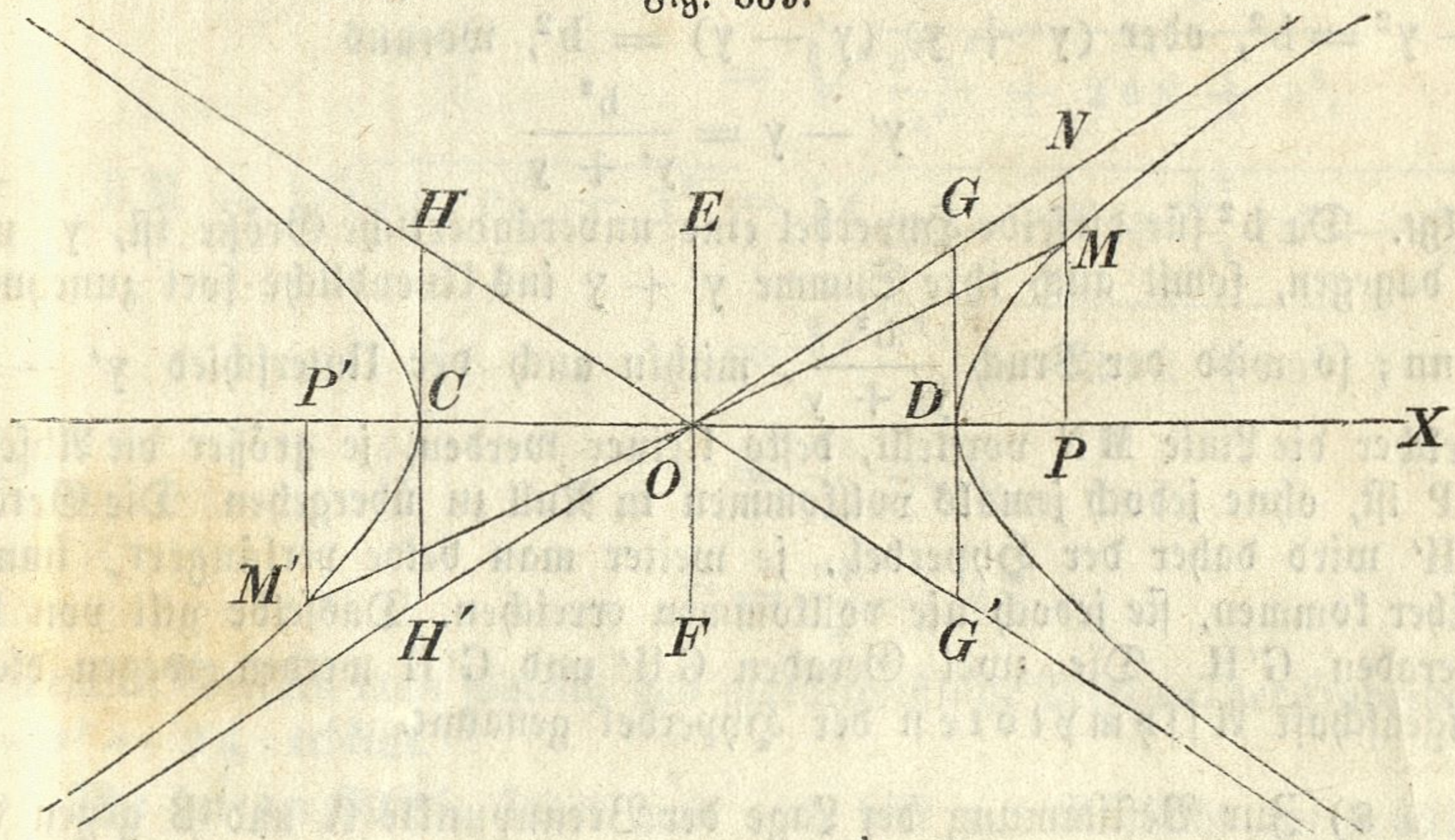
5) Um die Bedeutung von b auszumitteln, beschreibe man aus dem Scheitel D mit $OB = e$ als Halbmesser einen Kreisbogen, welcher die Ordinatenaxe in den Punkten E und F schneidet, und ziehe DE. Es ist nun

$$EO^2 = FO^2 = DE^2 - DO^2 = e^2 - a^2 = b^2,$$

daher $EO = FO = b$, und EF $2b$. Man nennt nun, analog wie bei der Ellipse, die Gerade $EF = 2b$ auch eine Axe, und zwar die zweite oder konjugirte Axe.

6) Verbindet man mit der Gleichung der Hyperbel auch die Gleichung $y = a'x$ einer durch O (Fig. 359) gezogenen Geraden M′ M, so erhält man für die Durchschnittspunkte der beiden Linien:

Fig. 359.



$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2 a'^2}}$$

$$y = \pm \frac{aa'b}{\sqrt{b^2 - a^2 a'^2}},$$

wobei das obere Zeichen dem Punkte M, das untere jenem M′ entspricht. Es ist somit $OP = OP'$, $MP = M'P'$, und daher in den rechtwinkligen Dreiecken MPO und M′P′O auch $OM = OM'$, d. h. die Sehne MM′ wird im Punkte O halbirt. Da dasselbe auch von jeder andern Sehne gilt, so wird dieser Punkt O der Mittelpunkt, und jede durch O gezogene Sehne ein Durchmesser der Hyperbel genannt.

Aus den obigen Werthen von x und y folgt, daß ein Durchschnitt mit der Hyperbel nur für solche Gerade möglich ist, bei denen $b^2 > a^2 a'^2$ oder $a' < \frac{b}{a}$ ist; wird $a' > \frac{b}{a}$, so fallen die Werthe von x und y imaginär aus.

7) Besonders merkwürdig sind jene Geraden, für welche

$$a' = \pm \frac{b}{a},$$

also $b^2 = a^2 a'^2$ ist; für diese werden die Werthe von x und y unendlich groß, was anzeigt, daß die beiden Geraden mit der Hyperbel zu beiden Seiten erst in unendlicher Entfernung, also nie zusammentreffen.

Um diese zwei geraden Linien zu konstruiren, errichte man im Scheitel D eine Senkrechte, trage darauf $DG = DG' = b$ auf, und ziehe durch den Mittelpunkt O und die Punkte G und G′ die Geraden GOH′ und G′OH; man hat für diese in der That

$$\text{tang } GOD = \frac{b}{a} \quad \text{und} \quad \text{tang } HOD = -\frac{b}{a}.$$

Betrachtet man nun eine dieser Geraden, z. B. GH', so ist, wenn, OP = x, MP = y, NP y' gesetzt wird, $y' = \frac{b}{a} x$ und $y'^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2$; ferner, da M ein Punkt der Hyperbel ist, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, daher $y'^2 - y^2 = b^2$, oder $(y' + y)(y' - y) = b^2$, woraus

$$y' - y = \frac{b^2}{y' + y}$$

folgt. Da b^2 für dieselbe Hyperbel eine unveränderliche Größe ist, y' und y dagegen, somit auch ihre Summe $y' + y$ ins Unendliche fort zunehmen kann; so wird der Bruch $\frac{b^2}{y' + y}$, mithin auch der Unterschied $y' - y$, welcher die Linie MN vorstellt, desto kleiner werden, je größer die Abscisse OP ist, ohne jedoch jemals vollkommen in Null zu übergehen. Die Gerade GH' wird daher der Hyperbel, je weiter man beide verlängert, immer näher kommen, sie jedoch nie vollkommen erreichen. Dasselbe gilt von der Geraden G'H. Die zwei Geraden GH' und G'H werden wegen dieser Eigenschaft Assymptoten der Hyperbel genannt.

8) Zur Bestimmung der Lage der Brennpunkte A und B gegen den Mittelpunkt O hat man

$$OA = OB = e = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Die Größe e oder auch $\frac{e}{a} = \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ wird die Exzentrizität der Hyperbel genannt.

9) Auch in der Hyperbel wird die durch den Brennpunkt senkrecht auf die erste Axe gezogene Sehne der Parameter genannt und durch 2p bezeichnet. Da der halbe Parameter p der im Brennpunkte errichteten Ordinate gleich ist, so braucht man zur Bestimmung desselben nur in

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

$x^2 = e^2 = a^2 + b^2$ zu setzen; man erhält dadurch $y = \pm \frac{b^2}{a}$. Es ist somit $p = \frac{b^2}{a}$ oder a : b = b : p, d. h. der halbe Parameter ist die dritte stetige Proporzionale zwischen der halben ersten und der halben zweiten Axe.

10) Für a = b wird die Hyperbel eine gleichseitige genannt; ihre Gleichung ist $y = \pm \sqrt{x^2 - a^2}$.

§. 578. Jede krumme Linie, welche zur Gleichung

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$$

gehört, ist eine Hyperbel.

Der Beweis wird auf ähnliche Art geführt, wie im § 564.

§. 579. Bestimmung der Leitstrahlen.

Für die Leitstrahlen r und r' des Punktes M hat man

$$r = AM = \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = \sqrt{(x+e)^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)}$$

$$= \sqrt{\frac{e^2x^2}{a^2} + 2ex + a^2},$$

$$r' = BM = \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \sqrt{(x-e)^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)}$$

$$= \sqrt{\frac{e^2x^2}{a^2} - 2ex + a^2};$$

oder

$$r = \frac{ex}{a} + a,$$

$$r' = \frac{ex}{a} - a;$$

in welchen Werthen man sogleich das charakteristische Merkmal der Hyperbel, $r - r' = 2a$, erblickt.

Wie bei der Ellipse findet man auch hier mit Rücksicht auf §. 525

$$y = \frac{y'}{x' + e}(x + e) \text{ und } y = \frac{y'}{x' - e}(x - e)$$

als die Gleichungen der beiden Leitstrahlen AM und BM.

§. 580. Gleichung der Hyperbel, wenn der Anfangspunkt der Koordinaten in einem Scheitel liegt.

Nimmt man den Scheitel D als Ursprung und DX als die Abscissenaxe an, so bleiben die Ordinaten gegen das frühere System ungeändert, die früheren Abscissen aber sind sämmtlich um a größer als die neuen; um daher die neue Gleichung zu erhalten, darf man in der frühern Gleichung

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)}$$

nur $x + a$ statt x setzen; man bekommt dadurch

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 + 2ax},$$

oder

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2),$$

und wenn man $\frac{b^2}{a} = p$ setzt,

$$y^2 = \frac{p}{a}(2ax + x^2),$$

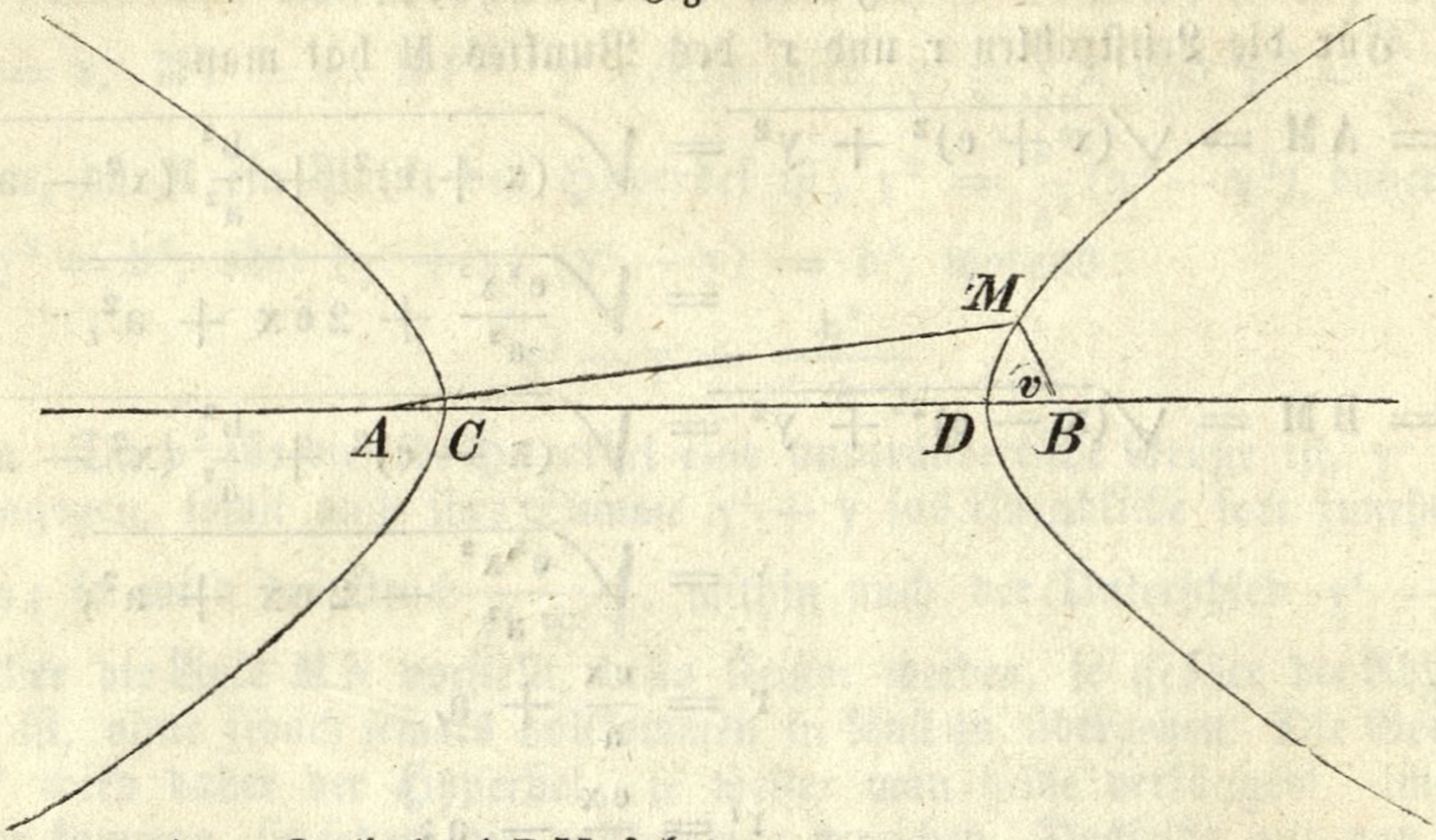
oder

$$y^2 = 2px + \frac{px^2}{a}.$$

§. 581. Polargleichung der Hyperbel.

Ist B (Fig. 360) der Pol und BD die Polaraxe, so hat man für den Punkt M, $r = BM$, $v = MBD$.

Fig. 360.



Aus dem Dreiecke ABM folgt nun

$$AM^2 = BM^2 + AB^2 - 2BM \cdot AB \cdot \cos ABM$$

oder

$$AM^2 = r^2 + 4e^2 - 4er\cos v.$$

Wegen $AM - BM = 2a$ ist aber auch

$$AM^2 = (2a + r)^2 = 2a^2 + 4ar + r^2.$$

Setzt man nun diese beiden Werthe von AM^2 einander gleich, so erhält man

$$r = \frac{e^2 - a^2}{a + e\cos v} \quad \ldots \; 1)$$

als die gesuchte Polargleichung.

Würde man $\frac{e}{a} = \varepsilon$ setzen, so erhielte man

$$r = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{1 + \varepsilon\cos v} \quad \ldots \; 2)$$

oder, wenn die Größe $p = \frac{b^2}{a} = a(\varepsilon^2 - 1)$ eingeführt wird,

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos v} \quad \ldots \; 3).$$

Setzt man für v alle möglichen Werthe von 0 bis 360°, so erhält man für den Radiusvektor $r = BM$ die entsprechenden Werthe, wodurch alle Punkte der Hyperbel bestimmt werden.

§. 582. Läßt man die Gleichung der Hyperbel $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ mit der Gleichung $y = Ax + B$ koexistiren, so erhält man für den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der beiden Linien

$$x = \frac{-ABa^2 \pm ab\sqrt{B^2 - (A^2a^2 - b^2)}}{A^2a^2 - b^2},$$

woraus hervorgeht, daß eine Gerade entweder zwei Punkte, oder nur einen, oder keinen Punkt mit der Hyperbel gemein hat, je nachdem $B^2 \gtreqless A\,a^2 - b^2$ ist.

Die Gleichung einer Hyperbel ist $9y^2 - 4x^2 = 36$; wie viele Punkte hat die Gerade

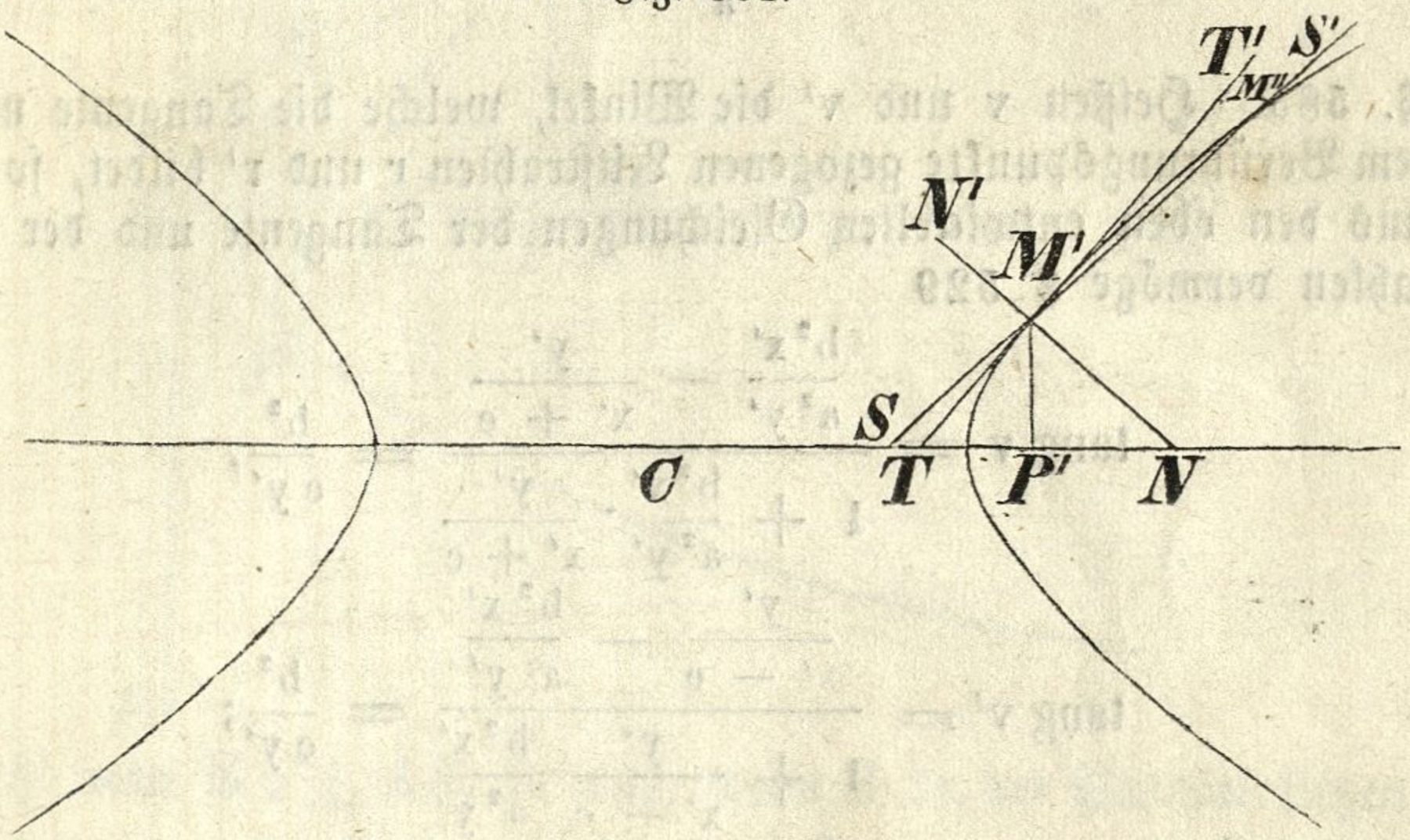
$$a)\quad y = \frac{2x}{3} + 2,$$
$$b)\quad y = 2x - 8,$$
$$c)\quad y = x - 3,$$

mit der Hyperbel gemeinschaftlich?

§. 583. Gleichungen der Tangenzial- und Normallinie.

Es sei $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ die Gleichung einer Hyperbel; man suche die Gleichung der Tangente, welche durch den Punkt M' (Fig. 361), dessen Koordinaten x', y' sind, an die Hyperbel gezogen wird.

Fig. 361.



Sind x'', y'' die Koordinaten eines zweiten Punktes M'' der Hyperbel, so ist die Gleichung der durch M' und M'' gehenden Sekante SS'

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x') \quad \ldots \quad 1).$$

Ferner ist, da M' und M'' Punkte der Hyperbel sind,

$$b^2x'^2 - a^2y'^2 = a^2b^2,\ b^2x''^2 - a^2y''^2 = a^2b^2,$$

daher

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'' + x'}{y'' + y'} \quad \ldots \quad 2)$$

und durch Substituzion in 1)

$$y - y' = \frac{b^2(x'' + x')}{a^2(y'' + y')}(x - x') \quad \ldots \quad 3).$$

Läßt man nun M'' mit M' zusammenfallen, also $x'' = x'$, $y'' = y'$ sein, so erhält man als die Gleichung der Tangenziallinie TT'

$$y - y' = \frac{b^2x'}{a^2y'}(x - x') \quad \ldots \quad 4)$$

oder auch

$$b^2xx' - a^2yy' = a^2b^2 \quad \ldots \quad 5).$$

Aus 4) folgt die Gleichung der durch M′ gehenden Normallinie NN′

$$y - y' = -\frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x') \ldots 6).$$

§. 584. Bestimmung der vier Berührungsgrößen.

Auf ähnliche Art, wie bei der Ellipse, findet man auch für die Hyperbel

$$\text{Subtangente } TP' = x' - \frac{a^2}{x'} \ldots 7)$$

$$\text{Tangente } M'T = \frac{y'}{b^2 x'}\sqrt{b^4 x'^2 + a^4 y'^2} \ldots 8)$$

$$\text{Subnormale } P'N = \frac{b^2 x'}{a^2} \ldots 9)$$

$$\text{Normale } M'N = \frac{\sqrt{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}}{a^2} \ldots 10).$$

§. 585. Heißen v und v′ die Winkel, welche die Tangente mit den nach dem Berührungspunkte gezogenen Leitstrahlen r und r′ bildet, so erhält man aus den oben entwickelten Gleichungen der Tangente und der beiden Leitstrahlen vermöge §. 529

$$\text{tang } v = \frac{\frac{b^2 x'}{a^2 y'} - \frac{y'}{x' + e}}{1 + \frac{b^2 x'}{a^2 y'} \cdot \frac{y'}{x' + e}} = \frac{b^2}{e y'},$$

und

$$\text{tang } v' = \frac{\frac{y'}{x' - e} - \frac{b^2 x'}{a^2 y'}}{1 + \frac{y'}{x' - e} \cdot \frac{b^2 x'}{a^2 y'}} = \frac{b^2}{e y'};$$

folglich ist

$$\text{tang } v = \text{tang } v'$$

und somit auch

$$v = v',$$

d. h. die Tangente der Hyperbel bildet mit den nach dem Berührungspunkte gezogenen Leitstrahlen gleiche Winkel.

§. 586. Aufgaben.

1) Durch einen Punkt der Hyperbel an diese eine Tangente zu ziehen.

2) Von einem außerhalb der Hyperbel liegenden Punkte an dieselbe eine Tangente zu ziehen.

Die Auflösung dieser Aufgaben ist analog mit den Konstrukzionen, welche zur Bestimmung der Tangenten der Ellipse in §. 574, a) und §. 575 abgeleitet wurden.

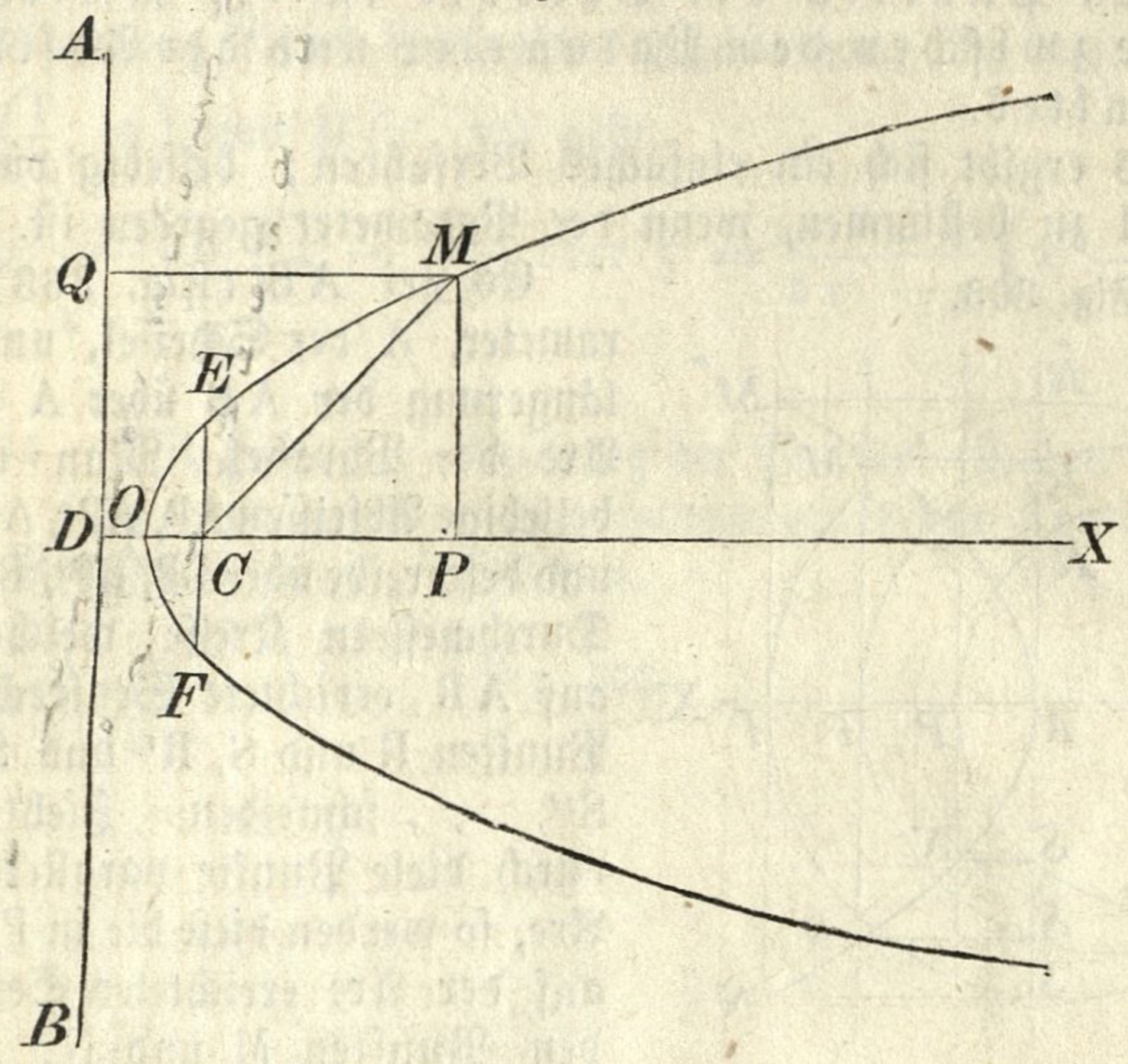
b. Die Parabel.

§. 587. Die charakteristische Eigenschaft der Parabel besteht darin, daß jeder Punkt derselben von dem Brennpunkte eben so weit absteht als von der Richtungslinie.

Gleichung der Parabel, wenn der Ursprung im Scheitel liegt und die Abscissen auf der Axe derselben gezählt werden.

Es sei AB (Fig. 362) die Richtungslinie und C der Brennpunkt der Parabel. Zieht man CD ⊥ AB, halbirt die CD im Punkte O, und nimmt O als Anfangspunkt der Koordinaten und OX als die Abscissenaxe an, so ist für den Punkt M, $x = OP$, $y = MP$.

Fig. 362.



Zieht man $MQ \perp AB$, so muß, wenn M in der Parabel liegen soll, $CM = MQ$ sein. Nun ist, wenn $OC = \frac{p}{2}$ gesetzt wird,

$$CM = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},\ MQ = DP = x + \frac{p}{2},$$

daher

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2},$$

woraus

$$y^2 = 2px$$

als die gesuchte Gleichung der Parabel folgt.

§. 588. Diskussion der Gleichung $y^2 = 2px$.

1) Aus dieser Gleichung ergibt sich $y = \pm \sqrt{2px}$. Zu jedem positiven Werthe von x gehören zwei gleiche, aber entgegengesetzte Ordinaten; die Parabel dehnt sich also vom Anfangspunkte an zu beiden Seiten der Abscissenaxe in zwei kongruenten Aesten aus, und zwar, da x und y jede beliebige Größe erreichen können, ins Unendliche fort. Die Gerade OX heißt darum die Axe der Parabel.

2) Für $x = 0$ wird auch $y = 0$; der Anfangspunkt der Koordinaten ist also ein Punkt der Parabel, er heißt der Scheitel.

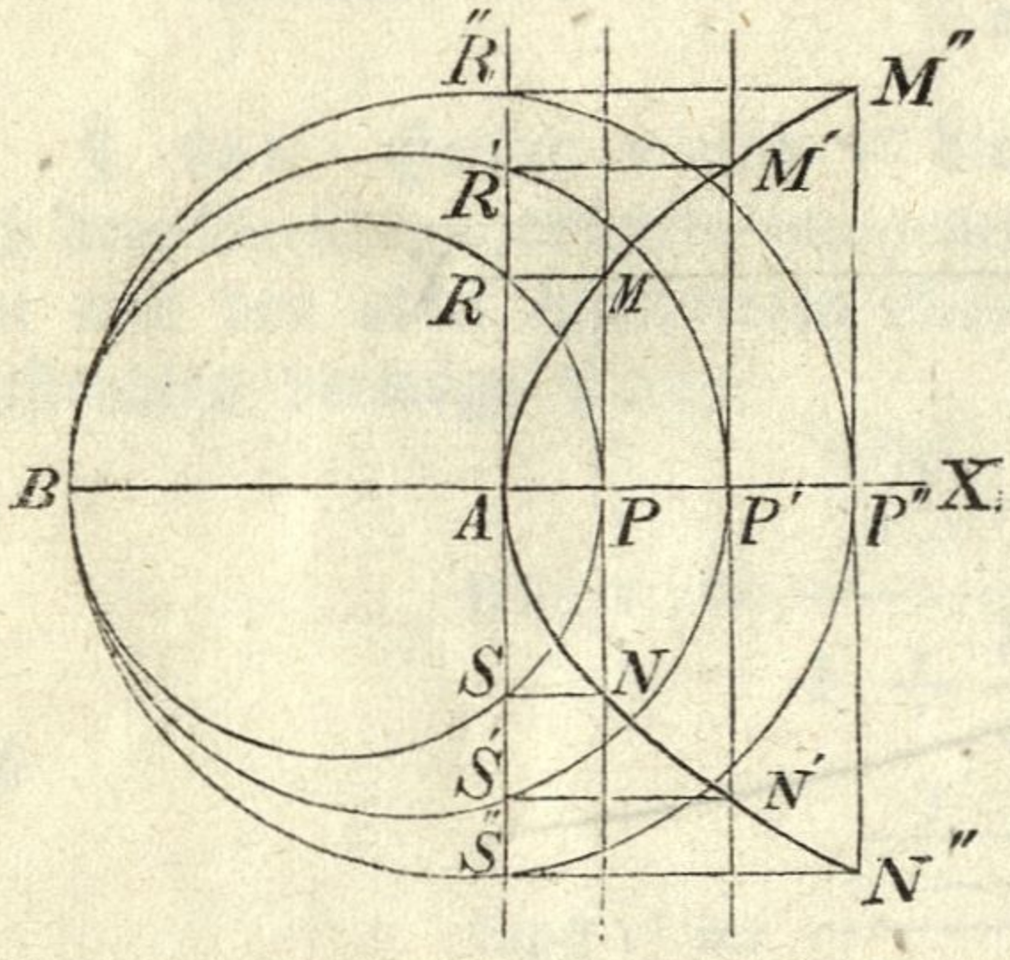
3) Für ein negatives x wird y imaginär; negativen Abscissen entsprechen daher keine Punkte der Parabel.

4) Setzt man $x = \frac{p}{2} = OC$, so wird $y = CE = CF = \pm p$; daher ist $EF = 2p$. Die Größe $2p$ stellt also die durch den Brennpunkt senkrecht auf die Axe gezogene Sehne EF vor, und ist der Parameter der Parabel.

5) Aus $y^2 = 2px$ folgt $2p : y = y : x$, d. h. die Ordinate eines jeden Punktes der Parabel ist die mittlere Proporzionale zwischen dem Parameter und der Abscisse desselben Punktes.

Hieraus ergibt sich ein einfaches Verfahren, beliebig viele Punkte einer Parabel zu bestimmen, wenn der Parameter gegeben ist.

Fig. 363.



Es sei AB (Fig. 363) der Parameter, A der Scheitel, und die Verlängerung der AB über A hinaus die Axe der Parabel. Man nehme nun beliebige Abscissen AP, AP′, AP″, ... an, und beschreibe über BP, BP′, BP″, ... als Durchmessern Kreise, welche die in A auf AB errichtete Senkrechte in den Punkten R und S, R′ und S′, R″ und S″, ... schneiden. Zieht man nun durch diese Punkte parallele Linien zur Axe, so werden diese die in P, P′, P″, ... auf der Axe errichteten Senkrechten in den Punkten M und N, M′ und N′, M″ und N″, ... durchschneiden, und es sind diese Punkte sämmtlich Punkte einer Parabel, deren Parameter AB ist. Denn es ist z. B. für den Punkt M vermöge der Konstrukzion $AB : AR = AR : AP$, daher auch $AB : MP = MP : AP$, folglich M ein Punkt der Parabel.

6) Sind x' und x'' die Abscissen, y' und y'' die zugehörigen Ordinaten zweier Punkte einer Parabel, deren Parameter $2p$ ist, so hat man

$$y'^2 = 2px' \quad \text{und} \quad y''^2 = 2px'',$$

daher

$$y'^2 : y''^2 = x' : x'',$$

d. h. in der Parabel verhalten sich die Quadrate der Ordinaten, so wie die zugehörigen Abscissen.

§. 589. Jede krumme Linie, welche zur Gleichung

$$y^2 = 2px$$

gehört, ist eine Parabel.

Man mache (Fig. 362) $OC = \frac{p}{2}$. Ist nun M ein beliebiger Punkt der krummen Linie OEM, und $OP = x$, $MP = y$; so ist

$$CM^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2,$$

daher

$$CM = x + \frac{p}{2}.$$

Macht man also $OD = OC$, zieht $DA \perp DX$ und $MQ \perp AD$, so ist

$$CM = x + \frac{p}{2} = OP + OD = DP = MQ,$$

und folglich die krumme Linie OEM eine Parabel.

§. 590. Bestimmung des Leitstrahles der Parabel.

Da (Fig. 362) $CM = MQ = DP = OP + DO$ ist, so hat man, wenn die Koordinaten des Punktes M durch x' und y' bezeichnet werden,

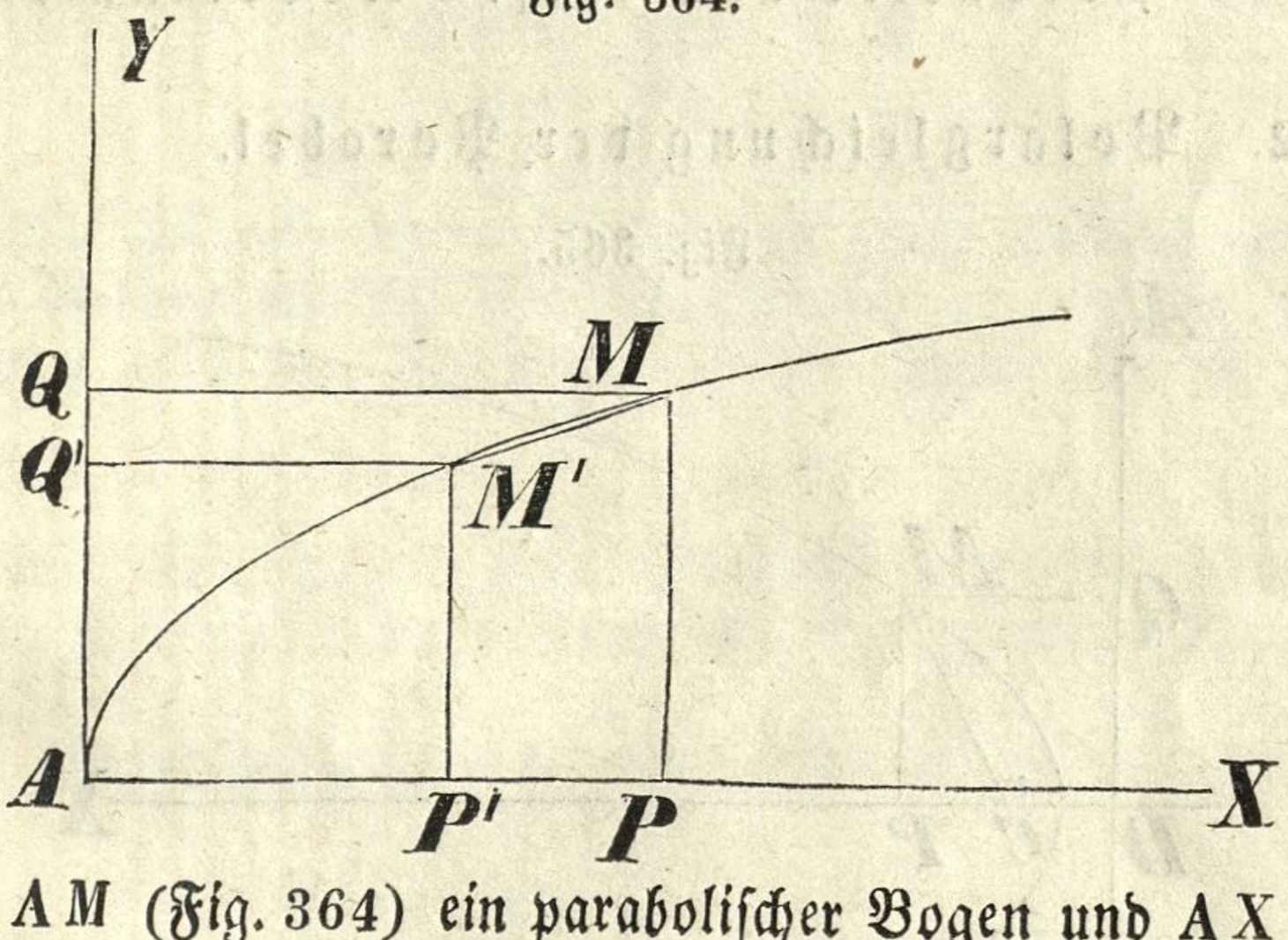
$$CM = r = x' + \frac{p}{2}.$$

Als Gleichung dieses Leitstrahles erhält man, da derselbe durch die Punkte $C\left(\frac{p}{2}, o\right)$ und $M(x', y')$ geht,

$$y = \frac{y'}{x' - \frac{p}{2}}\left(x - \frac{p}{2}\right), \text{ oder } y = \frac{2y'}{2x' - p}\left(x - \frac{p}{2}\right).$$

§. 591. Mit Hilfe der Gleichung der Parabel ist man nun auch im Stande, die Fläche eines von zwei zusammengehörigen Koordinaten abgeschnittenen Parabelstückes zu bestimmen.

Fig. 364.



Es sei AM (Fig. 364) ein parabolischer Bogen und AX die Axe der Parabel; es soll die Fläche des Parabelstückes AMP gefunden werden.

Man ziehe $AY \perp AX$, und fälle von den Punkten M, M' auf AX die Senkrechten MP, $M'P'$ und auf AY die Lothe MQ, $M'Q'$. Heißen nun x, y die Koordinaten des Punktes M, und x', y' jene des Punktes M', so ist, wenn man die Sehne MM' zieht,

$$\text{Trapez } MM'P'P = (y+y') \cdot \frac{x-x'}{2} = (y+y') \cdot \frac{y^2-y'^2}{4p} = \frac{(y+y')^2}{2p} \cdot \frac{y-y'}{2},$$

$$\text{Trapez } MM'Q'Q = (x+x') \cdot \frac{y-y'}{2},$$

daher

$$\frac{\text{Trap. } MM'P'P}{\text{Trap. } MM'Q'Q} = \frac{(y+y')^2}{2p(x+x')}.$$

Läßt man nun die Punkte M und M′ unendlich nahe an einander liegen, unter welcher Annahme $y + y'$ in $2y$ und $x + x'$ in $2x$ übergeht, so kann man das Trapez $MM'P'P$ als ein Element des gesuchten Parabelstückes AMP, und das Trapez $MM'Q'Q$ als ein Element der außerhalb der Parabel liegenden Fläche AMQ betrachten, und es ist

$$\frac{MM'P'P}{MM'Q'Q} = \frac{4y^2}{4px} = \frac{y^2}{px} = 2,$$

also $$MM'P'P = 2MM'Q'Q.$$

Stellt man sich nun die Flächen AMP und AMQ aus lauter solchen Elementen bestehend vor, so ist jedes Element der Fläche AMP doppelt so groß als das entsprechende Element der Fläche AMQ, und somit auch die ganze Fläche AMP doppelt so groß als AMQ, also

$$2AMQ = AMP,$$

und $$3AMQ = AMP + AMQ = APMQ = xy;$$

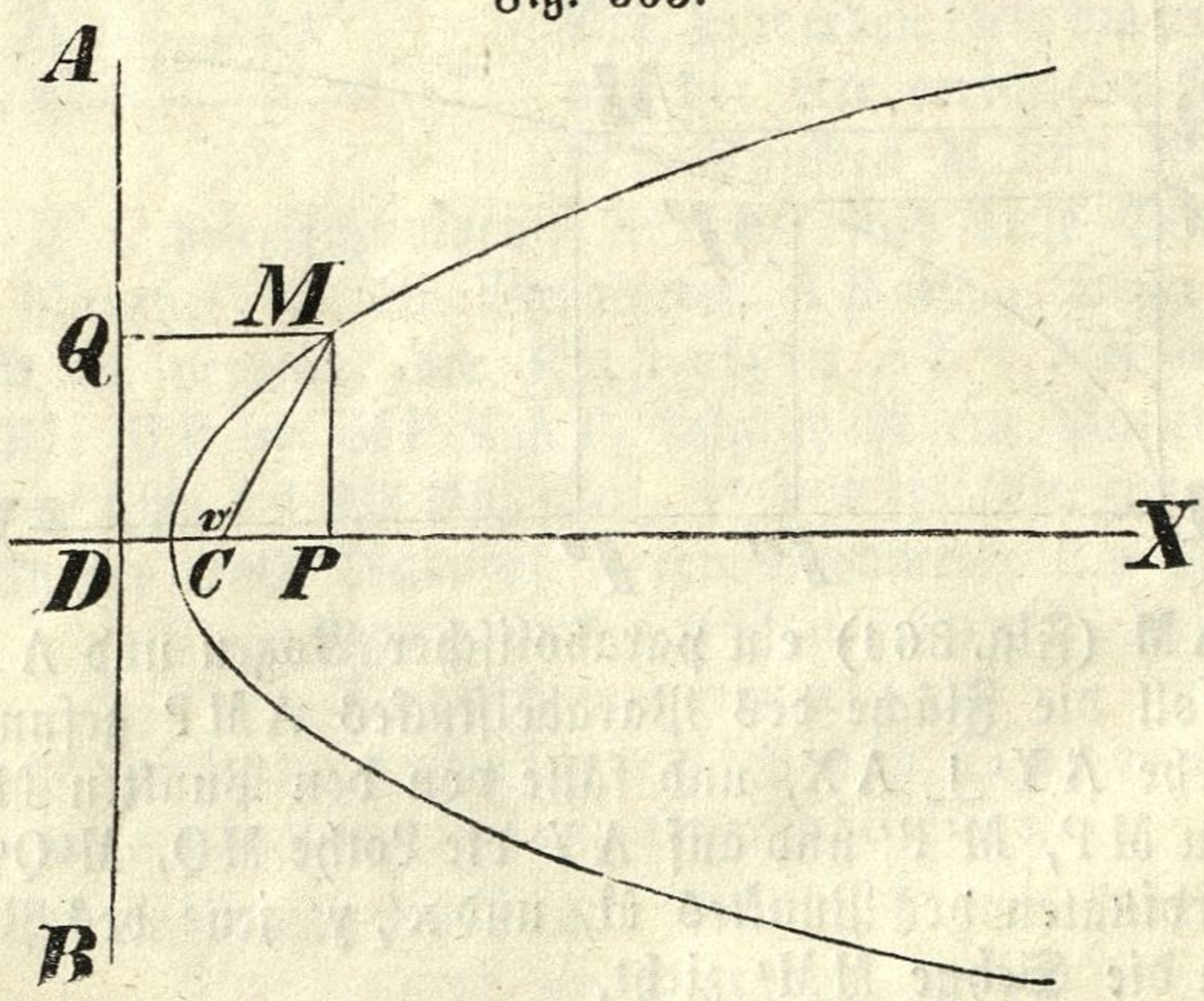
daher $$AMQ = \frac{1}{3}xy;$$

und $$AMP = \frac{2}{3}xy;$$

d. h. der Flächeninhalt des zwischen zwei zusammengehörigen Koordinaten eingeschlossenen Parabelstückes ist gleich $\frac{2}{3}$ des Produktes aus diesen Koordinaten.

§. 592. Polargleichung der Parabel.

Fig. 365.



Es sei C (Fig. 365) der Pol und CD die Polaraxe, so ist für den Punkt M, $r = CM$, $v = MCD$. Soll M ein Punkt der Parabel sein, so muß die Gleichung $CM = MQ$ Statt finden. Nun ist

$$CM = r,\quad MQ = DP = DC + CP = p - r\cos v,$$

daher $$r = p - r\cos v,$$

und somit $$r = \frac{p}{1 + \cos v}$$

die Polargleichung der Parabel.

Für $v = 0,\ 90^0,\ 180^0,\ 270^0$

wird $r = \begin{matrix} p \\ 2' \end{matrix}\quad p,\quad \infty,\quad p;$

wie es der Natur der Parabel gemäß sein muß.

§. 593. Eine Gerade hat mit der Parabel entweder zwei Punkte, oder einen, oder keinen Punkt gemeinschaftlich.

Da $y^2 = 2px$ die Gleichung der Parabel und $y = ax + b$ die Gleichung der Geraden ist, so erhält man für den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, welchem in beiden Linien gleiche Koordinaten zukommen,

$$y^2 = 2p \cdot \frac{y - b}{a},$$

und daraus

$$y = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 2abp}}{a}.$$

Ist nun $p^2 > 2abp$, oder $p > 2ab$, so hat y zwei Werthe; die Gerade schneidet also in diesem Falle die Parabel in zwei Punkten. Wenn $p = 2ab$, so hat y nur einen Werth, und daher die Gerade mit der Parabel nur einen Punkt gemeinschaftlich. Ist endlich $p < 2ab$, so wird y imaginär, d. h. die Gerade trifft die Parabel gar nicht.

Z. B. Die Gleichung einer Parabel ist $y^2 = 5x$, und die Gleichung einer Geraden

$$1)\quad 6y = 18x + 5,$$
$$2)\quad y = 2x - 1,$$
$$3)\quad y = 3x + 2;$$

wie viele Punkte hat jede dieser Geraden mit der Parabel gemein?

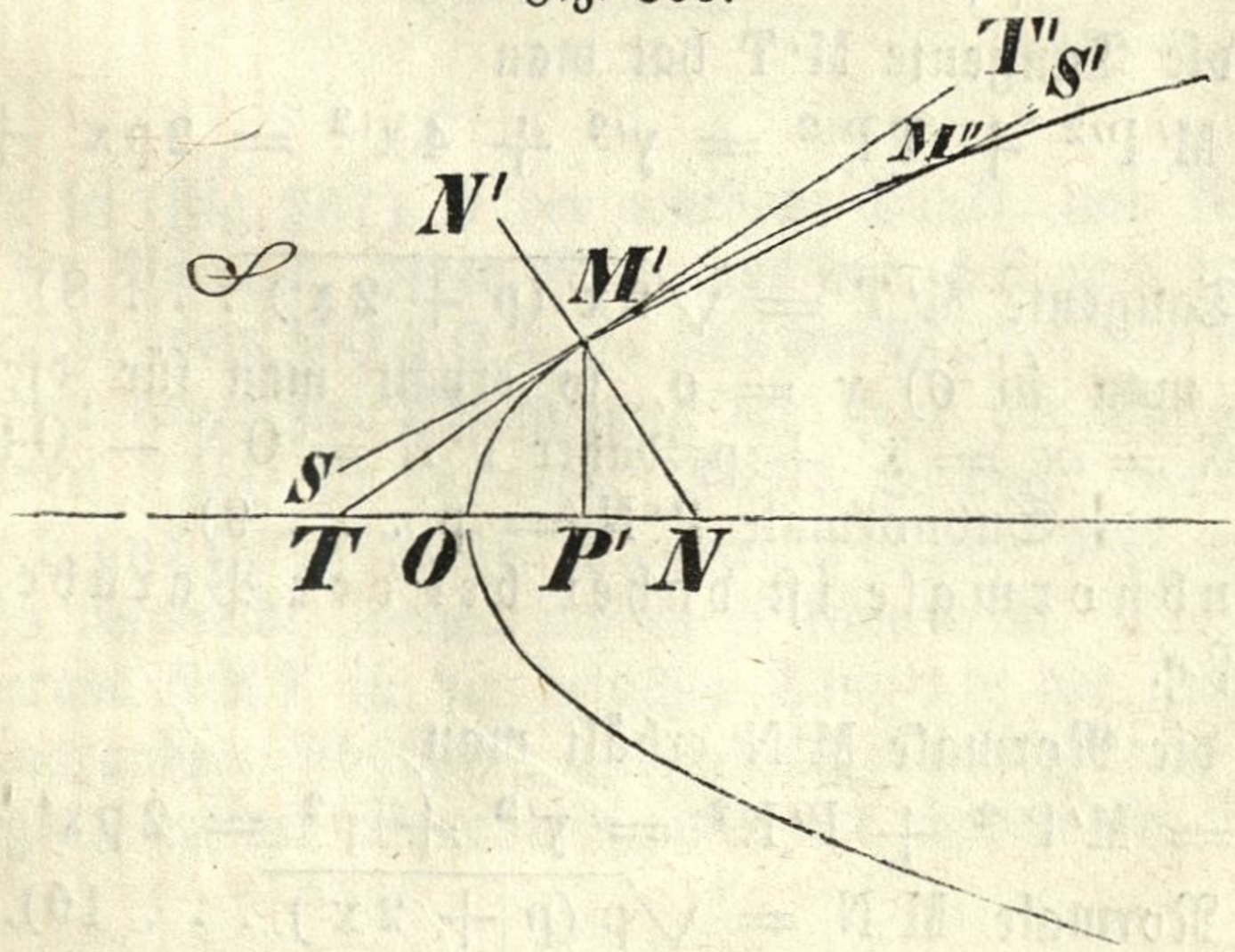
Ist eine Gerade mit der Axe der Parabel $y^2 = 2px$ parallel, in welchem Falle $y = b$ ihre Gleichung ist, so erhält man für den Durchschnittspunkt

$$x = \frac{b^2}{2p},\quad y = b.$$

Jede mit der Axe parallel gezogene Gerade schneidet also die Parabel in einem, aber auch nur in einem einzigen Punkte.

§. 594. Gleichungen der Berührungs- und der Normallinie.

Fig. 366.



Heißen x', y' die Koordinaten des Punktes M' (Fig. 366) einer Parabel, deren Gleichung $y^2 = 2px$ ist, so wird man, um die Gleichung der durch M' an die Parabel gezogenen Tangente zu erhalten, noch einen zweiten Punkt M'' der Parabel annehmen, dessen Koordinaten x'', y'' seien. Die Gleichung der durch M' und M'' gezogenen Sekante SS' ist

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (x - x') \ldots 1).$$

Für die Punkte M' und M'' der Parabel ist aber

$$y'^2 = 2px', \quad y''^2 = 2px'',$$

woraus

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{2p}{y'' + y'} \ldots 2)$$

folgt. Substituirt man diesen Werth in 1), so hat man als Gleichung der Sekante SS'

$$y - y' = \frac{2p}{y'' + y'} (x - x') \ldots 3).$$

Läßt man nun den Punkt M'' mit M' zusammenfallen, wodurch $y'' = y'$ wird, so erhält man aus 3) die Gleichung der Berührungslinie TT'

$$y - y' = \frac{p}{y'} (x - x') \ldots 4),$$

oder

$$yy' = p(x + x') \ldots 5).$$

Für die durch M' gehende Normallinie NN' findet man aus 4)

$$y - y' = -\frac{y'}{p} (x - x') \ldots 6).$$

§. 595. Bestimmung der vier Berührungsgrößen.

1) Sucht man aus 5) die Abscisse des Punktes T, indem man $y = 0$ setzt, so erhält man $TO = x = -x'$; daher ist

$$TP' = TO + OP' = x' + x' = 2x',$$

folglich

$$\text{Subtangente } TP' = 2x' \ldots 7).$$

In der Parabel ist also die Subtangente eines Punktes immer der doppelten Abscisse gleich.

2) Für die Tangente $M'T$ hat man

$$M'T^2 = M'P'^2 + TP'^2 = y'^2 + 4x'^2 = 2px' + 4x'^2,$$

somit

$$\text{Tangente } M'T = \sqrt{2x'(p + 2x')} \ldots 8).$$

3) Setzt man in 6) $y = 0$, so erhält man für die Abscisse des Punktes N, $ON = x = x' + p$, daher $P'N = ON - OP' = p$; also

$$\text{Subnormale } P'N = p \ldots 9).$$

Die Subnormale ist daher bei der Parabel eine konstante Größe.

4) Für die Normale $M'N$ erhält man

$$M'N^2 = M'P'^2 + P'N^2 = y'^2 + p^2 = 2px' + p^2,$$

also

$$\text{Normale } M'N = \sqrt{p(p + 2x')} \ldots 10).$$

§. 596. Die Tangente einer Parabel bildet mit dem Leitstrahle des Berührungspunktes und mit einer zur Axe parallelen Geraden gleiche Winkel.

Die Gleichung der zu dem Punkte $x'y'$ gezogenen Tangente der Parabel ist $y = \frac{p}{y'}(x + x')$, und die Gleichung des Leitstrahles für denselben Punkt $y = \frac{2y'}{2x' - p}\left(x - \frac{p}{2}\right)$, daher hat man für den Winkel v, den diese beiden Linien mit einander bilden,

$$\operatorname{tang} v = \frac{\frac{2y'}{2x' - p} - \frac{p}{y'}}{1 + \frac{2y'}{2x' - p} \cdot \frac{p}{y'}} = \frac{p}{y'}.$$

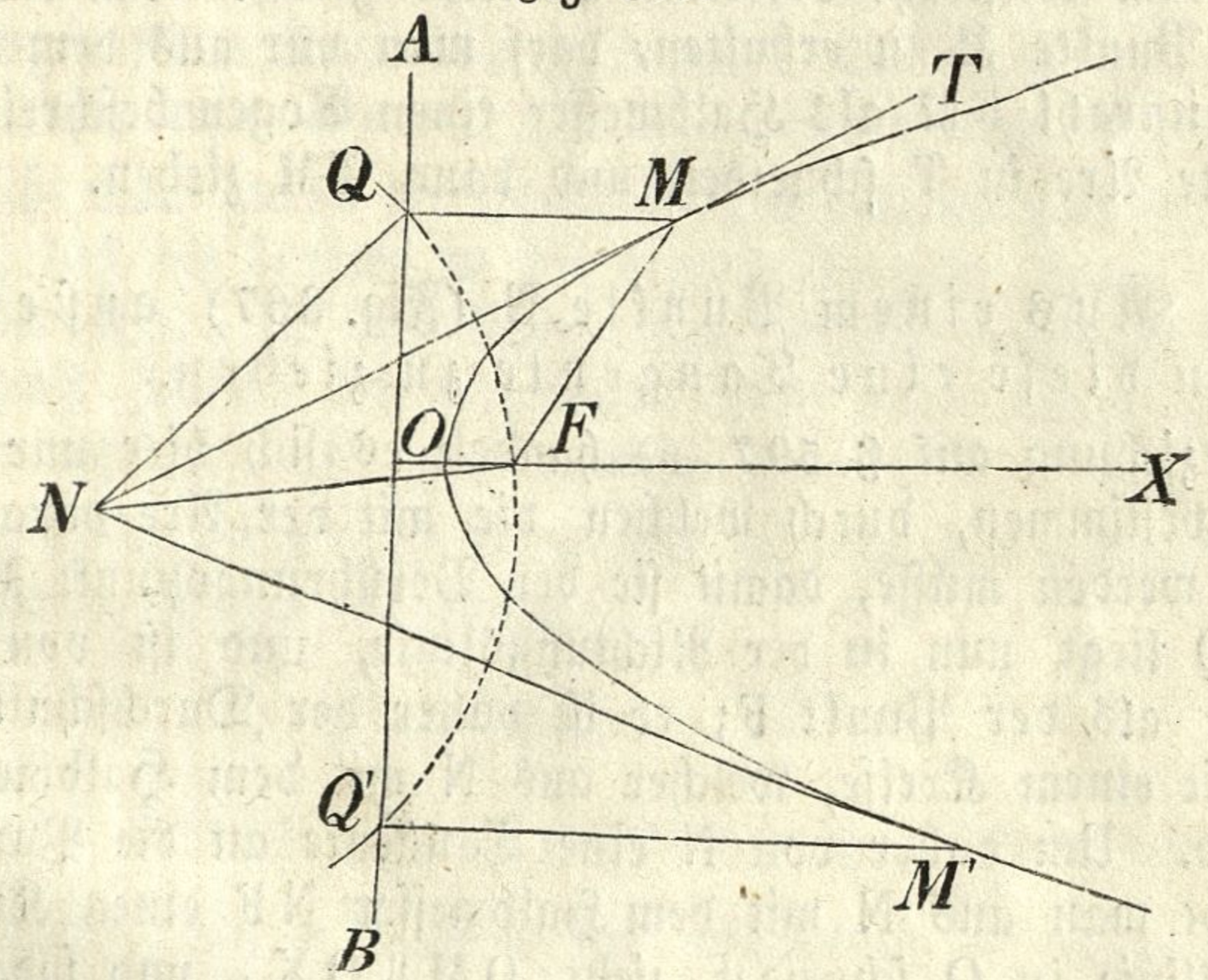
Allein es ist auch für den Winkel v', den die Tangente mit der Axe oder einer mit ihr parallelen Geraden bildet,

$$\operatorname{tang} v' = \frac{p}{y'};$$

folglich $\operatorname{tang} v = \operatorname{tang} v'$, und somit auch $v = v'$.

§. 597. Durch einen Punkt der Parabel an diese eine Tangente zu ziehen.

Fig. 367.

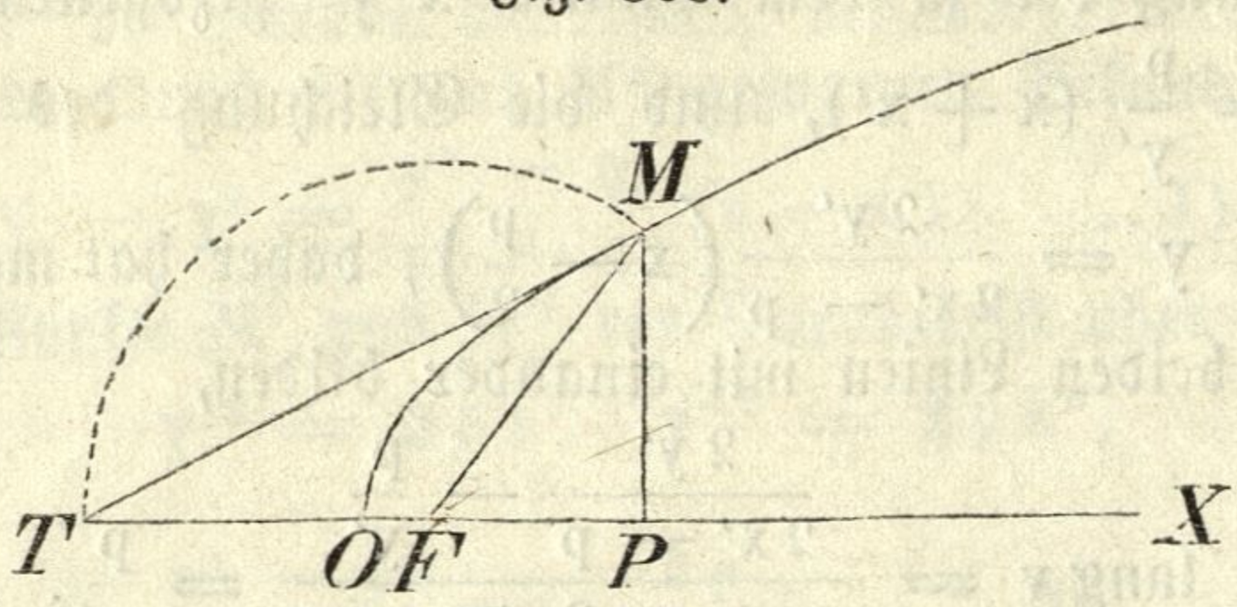


a) Es sei (Fig. 367) M der gegebene Punkt, und NMT die gesuchte Tangente der Parabel, deren Richtungslinie AB und deren Brennpunkt in F ist. Zieht man $MQ \parallel OX$, so muß der Winkel $NMF = NMQ$ sein, und es kommt daher zur Bestimmung der Lage der Tangente nur darauf an, den Winkel FMQ zu halbiren. Dieses geschieht, wenn man aus den Endpunkten F und Q der gleichen Schenkel MF und MQ mit einerlei Halbmesser Bögen beschreibt, welche sich in N schneiden. Die durch N und M gezogene Gerade NMT ist die gesuchte Tangente der Parabel.

b) Eine andere Auflösung dieser Aufgabe folgt aus dem Satze, daß die Subtangente in der Parabel immer der doppelten Abscisse gleich ist.

Ist M (Fig. 368) der gegebene Punkt der Parabel, deren Scheitel O und deren Brennpunkt F ist, und TM die gesuchte Tangente, so muß, wenn

Fig. 368.



MP die Ordinate des Punktes M ist, die Subtangente PT = 2OP sein. Zieht man daher MP ⊥ OX, macht OT = OP, und verbindet die Punkte T und M durch eine Gerade, so ist diese die verlangte Tangente.

c) Eine noch einfachere Auflösung beruhet auf folgenden Betrachtungen. Es ist (Fig. 368), wenn man die Koordinaten des Punktes M durch x′, y′, und den halben Parameter durch p ausdrückt, FT = OT + OF = $x' + \frac{p}{2}$; aber es ist auch FM = $x' + \frac{p}{2}$; folglich FT = FM, d. h. das Stück der Axe zwischen dem Brennpunkte und der Tangente ist dem Leitstrahl desselben Punktes gleich. Um daher die Tangente zu dem Punkte M zu erhalten, darf man nur aus dem Brennpunkte F mit dem Leitstrahl FM als Halbmesser einen Bogen beschreiben, welcher die verlängerte Axe in T schneidet, und dann TM ziehen.

§. 598. Aus einem Punkte N (Fig. 367) außerhalb der Parabel an diese eine Tangente zu ziehen.

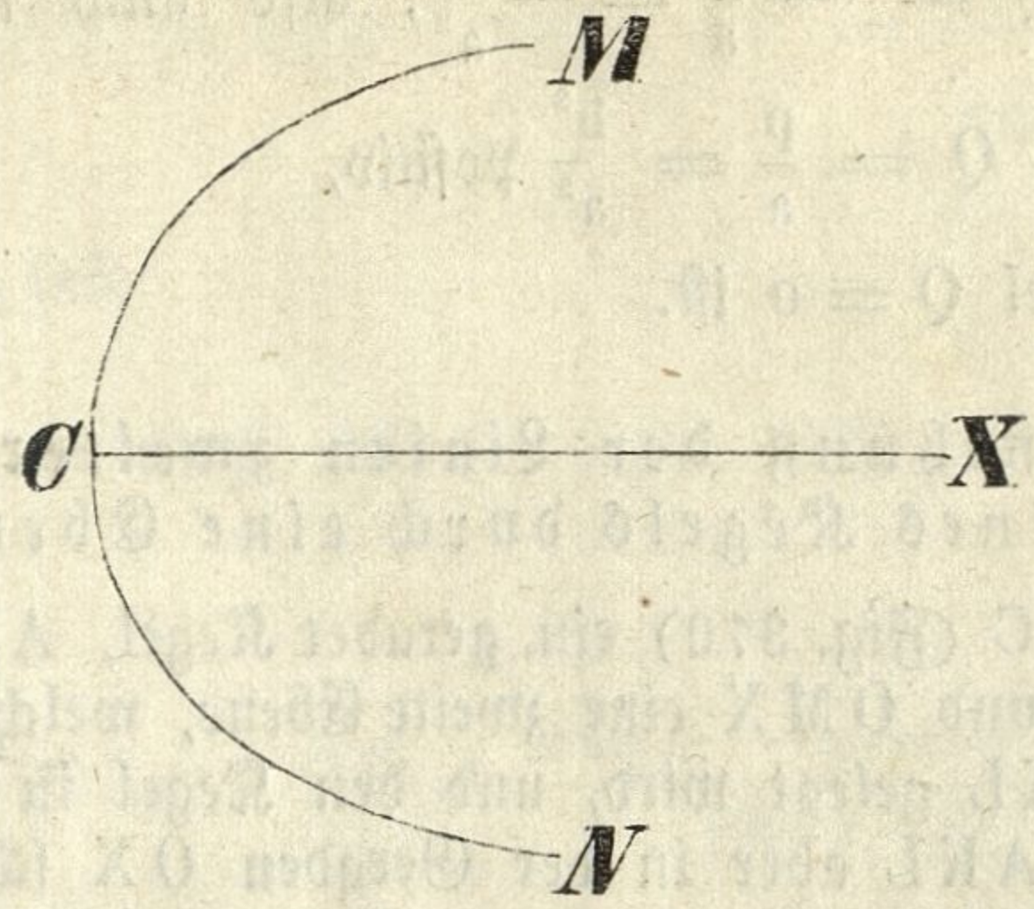
Mit Beziehung auf §. 597, a) handelt es sich hier nur darum, den Punkt Q zu bestimmen, durch welchen die mit der Axe parallele Gerade QM gezogen werden müsse, damit sie den Berührungspunkt M abschneide. Der Punkt Q liegt nun in der Richtungslinie, und ist von N eben so weit entfernt, als der Punkt F; er ist daher der Durchschnitt der Richtungslinie mit einem Kreise, welcher aus N mit dem Halbmesser NF beschrieben wird. Um daher von N eine Tangente an die Parabel zu ziehen, beschreibt man aus N mit dem Halbmesser NF einen Kreis, welcher die Richtungslinie in Q schneidet, zieht QM ∥ OX, und sodann die Gerade NM.

Da jener Kreis die Richtungslinie auch noch in einem zweiten Punkte Q′ schneidet, so erhält man, wenn Q′M′ ∥ OX gezogen wird, den zweiten Berührungspunkt M′, und es ist auch NM′ eine Tangente der Parabel.

e. Wechselseitige Beziehungen der Kurven zweiter Ordnung.

§. 599. Zusammenhang der Gleichungen für rechtwinklige Koordinaten.

Fig. 369.



Ist C (Fig. 369) der Anfangspunkt der Koordinaten, CX die Abscissenaxe, und denkt man sich C als Endpunkt eines Kreisdurchmessers, oder als Scheitel einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel, so ist

die Gleichung des Kreises . . . $y^2 = 2ax - x^2$,

" " der Ellipse . . . $y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$,

" " " Hyperbel . . $y^2 = 2px + \frac{px^2}{a}$,

" " " Parabel . . $y^2 = 2px$,

wo a in Bezug auf den Kreis den Halbmesser, für die Ellipse und Hyperbel aber die halbe erste Axe und p den halben Parameter vorstellt.

Vergleicht man zuerst die Gleichung des Kreises und jene der Ellipse, so sieht man, daß die letztere in die erstere übergeht, wenn $p = a$ gesetzt wird. In der That ist der Kreis eine Ellipse, deren Brennpunkte in den Mittelpunkt fallen; der Parameter wird unter dieser Voraussetzung zu einem Durchmesser und daher wirklich $p = a$.

Die Gleichung der Ellipse kann auch in jene der Parabel übergehen. Läßt man nämlich in der Gleichung

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$$

die Größe a ohne Ende zunehmen, während p ungeändert bleibt, was bei gehöriger Annahme von b vermöge der Gleichung $\frac{b^2}{a} = p$ immer möglich ist; so wird endlich für $a = \infty$ der Quozient $\frac{px^2}{a} = 0$, und die Gleichung der Ellipse verwandelt sich in jene der Parabel $y^2 = 2px$. Die Parabel kann demnach als eine Ellipse angesehen werden, deren erste Axe unendlich groß ist.

Sämmtliche Linien der zweiten Ordnung lassen sich daher durch die einzige Gleichung

$$y^2 = Px + Qx^2$$

darstellen, worin P den Parameter und für den Kreis den Durchmesser bedeutet, und wobei für den Kreis $Q = -1$,

für die Ellipse $Q = -\frac{p}{a} = -\frac{b^2}{a^2}$, also auch negativ aber < 1,

für die Hyperbel $Q = \frac{p}{a} = \frac{b^2}{a^2}$ positiv,

und für die Parabel $Q = 0$ ist.

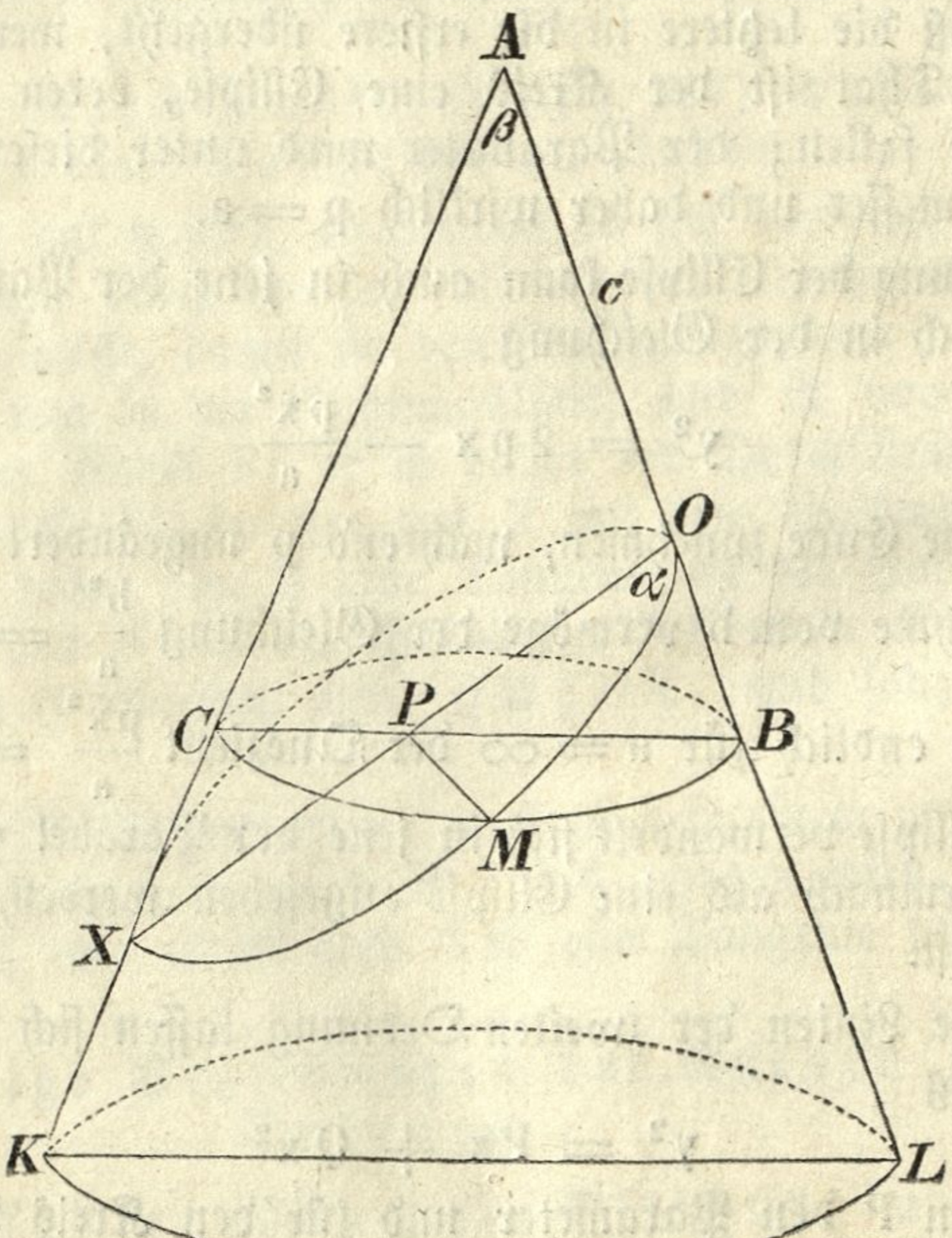
§. 600. Entstehung der Linien zweiter Ordnung aus dem Schnitte eines Kegels durch eine Ebene.

Es sei ABMC (Fig. 370) ein gerader Kegel, AKL eine durch die Axe gelegte Ebene, und OMX eine zweite Ebene, welche durch den Punkt O senkrecht auf AKL gelegt wird, und den Kegel in der krummen Linie OMX, die Ebene AKL aber in der Geraden OX schneidet. Legt man nun durch einen beliebigen Punkt M der krummen Linie OMX die Ebene MBC parallel mit der Grundfläche des Kegels, so wird dieselbe auch senkrecht auf AKL, und der Durchschnitt ein Kreis sein. Die Durchschnittslinie MP der Ebenen OMX und BMC muß daher ebenfalls auf die Ebene AKL, und daher auch auf OX und BC senkrecht sein. Da nun BMC ein Halbkreis, so ist nach §. 542

$$BP : MP = MP : CP, \text{ oder } MP^2 = BP \cdot CP.$$

Man nehme nun OX als die Abscissenaxe an, setze $OP = x$, $MP = y$, ferner $AO = c$, den Winkel $BOX = \alpha$, $BAX = \beta$; so hat man aus dem Dreiecke BPO

Fig. 370.



$$BP : PO = \sin\alpha : \cos\frac{\beta}{2},\quad BP = \frac{x\sin\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}};$$

aus dem Dreiecke AOX

$$OX : AO = \sin\beta : \sin(\alpha-\beta),\quad OX = \frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)},$$

und

$$PX = OX - OP = \frac{c\sin\beta - x\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)};$$

endlich aus dem Dreiecke CPX

$$CP : PX = \sin(\alpha-\beta) : \cos\frac{\beta}{2},\quad CP = \frac{c\sin\beta - x\sin(\alpha-\beta)}{\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Substituirt man nun die Werthe von MP, BP und CP in der Gleichung $MP^2 = BP \,.\, CP$, so erhält man

$$y^2 = \frac{c\,x\sin\alpha\,\sin\beta}{\cos^2\frac{\beta}{2}} - \frac{x^2\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{2\,c\,x\sin\alpha\,\sin\frac{\beta}{2}\,\cos\frac{\beta}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}} - \frac{2\,c\,x^2\sin\alpha\,\sin\frac{\beta}{2}\,\cos\frac{\beta}{2}\,\sin(\alpha-\beta)}{c\,\cos^2\frac{\beta}{2}\,\sin\beta}$$

$$= 2\,c\sin\alpha\,\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}\,.\,x - c\sin\alpha\,\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}\,.\,\frac{2\sin(\alpha-\beta)}{c\sin\beta}\,.\,x^2,$$

oder wenn man

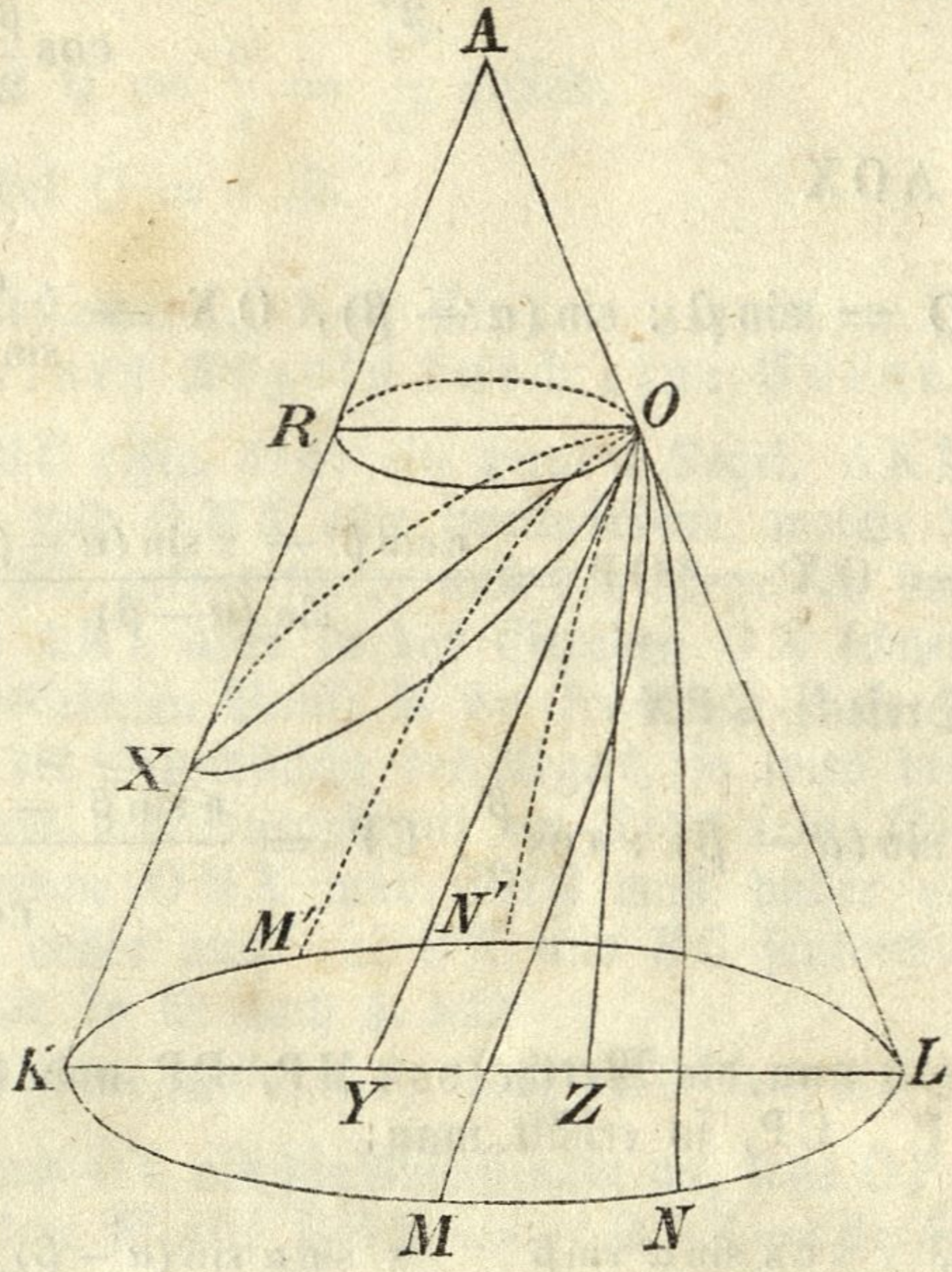
$$c\sin\alpha\,\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = p \quad \text{und} \quad \frac{2\sin(\alpha-\beta)}{c\sin\beta} = \frac{1}{a}\ \text{setzt},$$

$$y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$$

als die Gleichung der krummen Linie OMX.

Die Bedeutung dieser Gleichung hängt offenbar von den Größen p und a, somit von c, α und β ab; die Größen c und β bestimmen übrigens nur die Lage und Größe der Durchschnittslinie, während ihre Natur, wie wir sogleich zeigen werden, bloß von dem Winkel α abhängt.

Fig. 371.



1) Ist $\alpha > \beta$, z. B. $\alpha = LOX$ (Fig. 371), so ist $\sin(\alpha - \beta)$, daher auch $\frac{1}{a}$ positiv, und somit, da p wesentlich positiv ist, $-\frac{px^2}{a}$ negativ; die Gleichung $y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$ stellt also eine Ellipse vor.

Ist in diesem Falle $\alpha = LOR = 90^0 + \frac{\beta}{2}$, d. i. der Schnitt parallel mit der Grundfläche des Kegels, so geht die obige Gleichung nach gehöriger Reduktion über in $y^2 = 2px - x^2$, welche einem Kreise angehört.

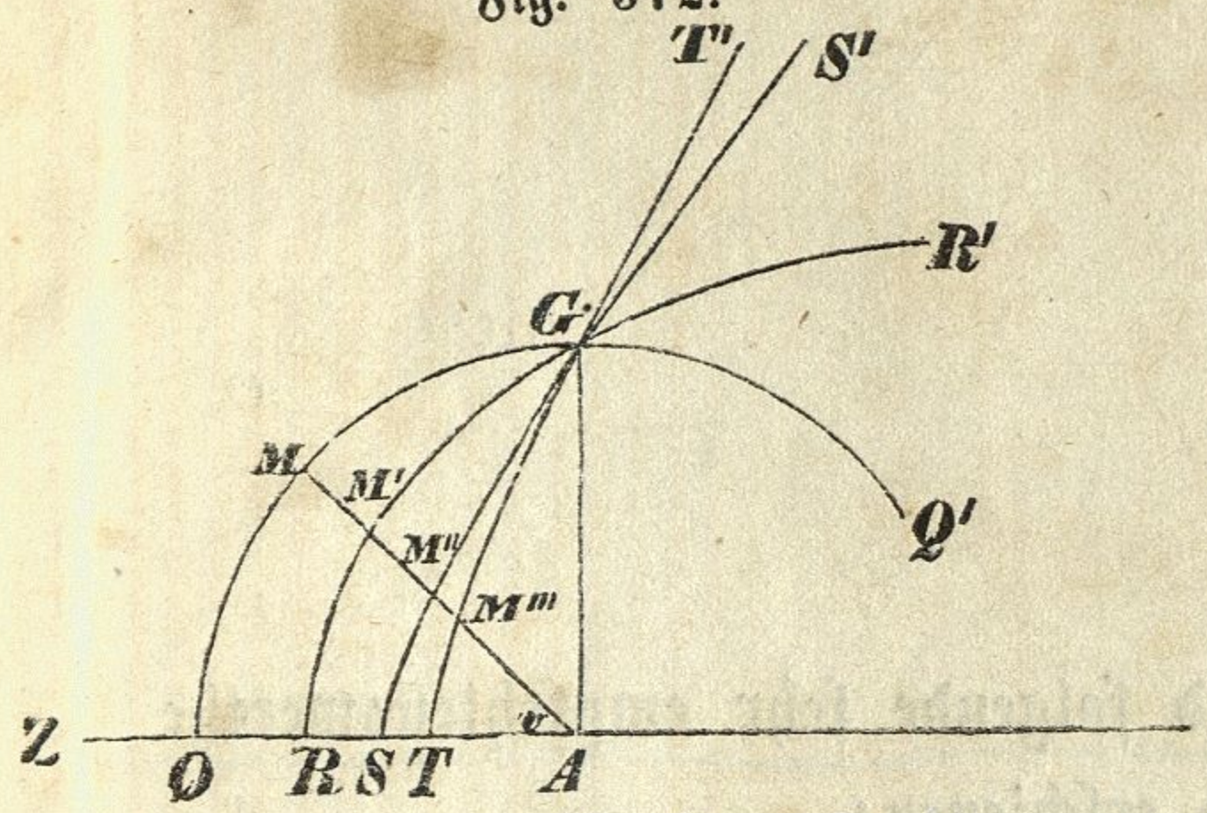
2) Ist $\alpha = LOY = \beta$, so ist $\sin(\alpha - \beta) = 0$, also auch, $\frac{1}{a} = 0$, und die allgemeine Gleichung verwandelt sich in $y^2 = 2px$; die Durchschnittslinie MOM' ist also eine Parabel.

3) Wenn endlich $\alpha < \beta$ z. B. $\alpha = LOZ$, so ist $\sin(\alpha - \beta)$ negativ, folglich in der Gleichung $y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$ das zweite Glied $\frac{px^2}{a}$ positiv; in diesem Falle ist demnach die krumme Linie NON' eine Hyperbel.

Die Kegelschnittslinie ist daher eine Ellipse (Kreis), eine Parabel oder eine Hyperbel, je nachdem α größer, gleich oder kleiner ist als der Winkel β.

§. 601. Zusammenhang zwischen den Polargleichungen der Kegelschnittslinien.

Fig. 372.



Stellt A (Fig. 372) den Pol, AZ die Polarаxe vor, so hat man, wenn p beim Kreise den Halbmesser, bei den übrigen Kurven den halben Parameter bedeutet, folgende Polargleichungen:

für den Kreis . . . $r = p$,

„ die Ellipse . . . $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos v}$,

für die Parabel . . . $r = \frac{p}{1 + \cos v}$,

„ „ Hyperbel . . . $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos v}$;

wobei für die Ellipse $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, also $\varepsilon < 1$, für die Hyperbel dagegen $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$, also $\varepsilon > 1$ ist.

Man kann demnach alle vier Kurven durch folgende allgemeine Polargleichung

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos v} \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

darstellen, worin

für den Kreis $\varepsilon = 0$
„ die Ellipse $\varepsilon < 1$
„ „ Parabel $\varepsilon = 1$
„ „ Hyperbel $\varepsilon > 1$ ist.

Denkt man sich aus demselben Brennpunkte A den Kreis, die Ellipse, die Parabel und die Hyperbel mit demselben Parameter $AG = p$ beschrieben, so folgt aus der allgemeinen Gleichung 1), daß zu demselben Polarwinkel v, so lange $v < 90^\circ$ ist, im Kreise ein größerer Leitstrahl gehört als in der Ellipse, in dieser ein größerer als in der Parabel, in dieser wieder ein größerer als in der Hyperbel; d. h. der Kreis weicht von A am stärksten ab, weniger die Ellipse, noch weniger die Parabel, am wenigsten die Hyperbel. Für $v = 90^\circ$ ist der Leitstrahl bei allen vier Kurven gleich p; es schneiden sich also dieselben in einem Punkte senkrecht über dem Brennpunkte. Wird $v > 90^\circ$, so ist dann cos v negativ, daher r desto größer, je größer ε wird; nach dem eben erwähnten Durchschnittspunkte wird also der Kreis von dem Punkte A am wenigsten divergiren, mehr die Ellipse, noch stärker die Parabel, und am meisten die Hyperbel. Die vorliegende Figur, in welcher QMQ' die Kreislinie, RM'R' die Ellipse, SM''S' die Parabel und TM'''T' die Hyperbel vorstellt, macht diese Beziehungen der vier krummen Linien anschaulich.

Von demselben Verfasser sind folgende sehr empfehlenswerthe Werke erschienen:

Lehrbuch der Arithmetik für die Unter-Gymnasien.

1. Abtheilung für die 1. und 2 Klasse. 7. Auflage. gr. 8. br. 38 kr.
2. Abtheilung für die 3. und 4. Klasse. 5. Aufl. gr. 8. br. 28 kr.

Geometrische Anschauungslehre für das Unter-Gymnasium.

1. Abtheilung für die 1. und 2. Klasse. 3. Auflage. gr. 8. br. 28 kr.
2. Abtheilung für die 3. und 4. Klasse. 2. Auflage. gr. 8. br. 28 kr.

Lehrbuch der Algebra für die Ober-Gymnasien. 5. Auflage. gr. 8. br. 54 kr.

Narodna in univerzitetna knjižnica Ljubljana

997196