REŠENE NALOGE IZ PARCIALNIH DIFERENCIALNIH ENAČB

Jaka Cimprič, Jasna Prezelj

Ljubljana 2011

naslov: REŠENE NALOGE IZ PARCIALNIH DIFERENCIALNIH ENAČB
avtorske pravice: Jaka Cimprič, Jasna Prezelj
izdaja: prva izdaja
založnik: samozaložba Jaka Cimprič in Jasna Prezelj, Ljubljana
avtorja: Jaka Cimprič in Jasna Prezelj
leto izida: 2011
natis: elektronsko gradivo
dostop: `http://www.fmf.uni-lj.si/~prezelj/analiza4/PDE.pdf`

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

517.95(075.8)(076.2)(0.034.2)

CIMPRIČ, Jaka
Rešene naloge iz parcialnih diferencialnih enačb [Elektronski vir] / Jaka Cimprič, Jasna Prezelj. - 1. izd. - El. knjiga. - Ljubljana : samozal. J. Prezelj : samozal. J. Cimprič, 2011

Način dostopa (URL): `http://www.fmf.uni-lj.si/~prezelj/analiza4/PDE.pdf`

ISBN 978-961-93108-0-9

1. Prezelj-Perman, Jasna

256641792

Kazalo

Predgovor

Pričujoča zbirka vsebuje naloge, ki sva jih avtorja sestavljala za vaje in kolokvije iz parcialnih diferencialnih enačb in distribucij. Nekaj nalog je z vaj in kolokvijev najinih predhodnikov B. Gornika in S. Strleta, nekaj nalog pa sta prispevala profesorja M. Černe in M. Perman. Vsem se za njihov prispevek iskreno zahvaljujeva.

Zbirka pokriva naslednja področja: distribucije, Laplacova enačba, harmonične in subharmoni1ne funkcije, difuzijska enačba, valovna enačba. Ta snov v celoti pokriva predmet Parcialne diferencialne enačbe na drugi stopnji matematike. Vse naloge so opremljene z rešitvami.

1 Distribucije

S črko $\mathcal{D}_N$ označimo prostor **testnih funkcij**; to je množica gladkih funkcij s kompaktnim nosilcem, $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, na katerega vpeljemo posebno topologijo. Zaporedje testnih funkcij $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ konvergira v smislu testnih funkcij k testni funkciji φ, če za vsak $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ obstajata kompakt $K \subset \mathbb{R}^N$ in $M \in \mathbb{N}$, da je za vsak $m > M$ nosilec $\operatorname{supp}\varphi_m \subset K$ in $\|\varphi_m - \varphi\|_{C^k} < \varepsilon$. Prostor $\mathcal{D}'_N$ vseh zveznih linearnih funkcionalov na $\mathcal{D}_N$ imenujemo **distribucije**. Pri $N = 1$ indeks izpuščamo.

Izrek. V prostoru testnih funkcij na $\mathbb{R}^n$ je množica

$$\mathcal{L}\{\varphi_1(x_1)\cdot\ldots\cdot\varphi_N(x_N),\ \varphi_i \text{ je testna funkcija na } \mathbb{R}, 1 \le i \le N\}$$

gosta ($\mathcal{L}$ pomeni linearno ogrinjačo).

1.1 Ugotovi, kateri od naslednjih predpisov določajo distribucije:

(1) $T_1 : \varphi \to \sum_1^\infty \varphi(n)$,

(2) $T_2 : \varphi \to \sum_1^\infty \varphi(n^{-1})$,

(3) $T_3 : \varphi \to \sum_1^\infty n^{-2}\varphi(n^{-1})$,

(4) $T_4 : \varphi \to \sum_1^\infty \varphi^{(n)}(n)$,

(5) $T_5 : \varphi \to \int_{-\infty}^\infty \varphi(x)dx$,

(6) $T_6 : \varphi \to \varphi(2)$,

(7) $T_7 : \varphi \to \int_{-\infty}^\infty f(x)\varphi(x)dx$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$,

(8) $T_8 : \varphi \to$ Cauchyjeva glavna vrednost od $\int_{-\infty}^\infty x^{-1}\varphi(x)dx$.

1.2 Izračunaj prve odvode in za primere (2) - (4) tudi druge odvode v smislu distribucij za naslednje funkcije:

(1) $f_1(x) = \log|x|$,

(2) $f_2(x) = a\chi_{[b,\infty)}(x)$,

(3) $f_3(x) = |x|$,

(4) $f_4(x) = \operatorname{arctg}(x^{-1})$.

1.3 Naj bo $\mathcal{S}$ Schwarzov razred in $\mathcal{S}'$ njegov dual. Elemente iz $\mathcal{S}'$ imenujemo umirjene distribucije; to so vse tiste distribucije $u \in \mathcal{D}'$, ki imajo zvezno razširitev z $\mathcal{D}$ na $\mathcal{S}$ (v topologiji na $\mathcal{S}$). Naj bo

$$\mathcal{F}(f(x))(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(x)\, dx$$

Fourierova transformacija na $\mathcal{S}$ in $\mathcal{F}^{-1}$ njen inverz,

$$\mathcal{F}(f)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(y) dy.$$

Pokaži, da sta s predpisoma

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(u), \varphi \rangle &:= \langle u, \mathcal{F}\varphi \rangle, \\ \langle \mathcal{F}^{-1}(u), \varphi \rangle &:= \langle u, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle \end{aligned}$$

definirani zvezni linearni preslikavi $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S},' \ \mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S},'$ za kateri velja $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = id$. Izračunaj naslednje Fourierove transformiranke in inverzne Fourierove transformiranke: $\mathcal{F}(\delta_a(x))$, $\mathcal{F}^{-1}(\delta_a(x))$, $\mathcal{F}(e^{ixa})$, $\mathcal{F}^{-1}(e^{ixa})$, $\mathcal{F}(\sin(ax))$,
$\mathcal{F}(\cos(ax))$, $\mathcal{F}(\frac{1}{2}\chi_{[-a,a]}(x))$.

1.4 Naj bo $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ in

$$F = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \delta_0(x - x_i).$$

Pokaži, da zgornji predpis definira distribucijo na $\mathbb{R}$ v naslednjih primerih:

(i) $\sum_1^\infty |c_i| < \infty$,

(ii) $\lim_{i\to\infty} |x_i| = \infty$.

1.5 Poišči vse rešitve enačbe

$$x(x-1)y' = 0$$

v smislu distribucij. Dokaži, da si res našel vse rešitve.

1.6 Poišči vse rešitve enačbe

$$x^2 y' = 0$$

v smislu distribucij. Dokaži, da si res našel vse rešitve.

1.7 Poišči vse rešitve enačbe

$$\sin(x) y' = 0$$

v smislu distribucij. Dokaži, da si res našel vse rešitve.

1.8 (a) Izračunaj odvoda

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\chi_{[-1,1]}(x) \qquad \text{in} \qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\chi_{[-1,1]\times[-1,1]}(x,y)$$

v smislu distribucij.

(b) Naj bo $D = [-1,1]^n \subset \mathbb{R}^n$. Izračunaj odvod

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n}\chi_D$$

v smislu distribucij. Upoštevaj, da so linearne kombinacije testnih funkcij oblike

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) := \prod_1^n \varphi_i(x_i), \quad \varphi_i \text{ testna funkcija na } \mathbb{R},$$

goste v vseh testnih funkcijah na $\mathbb{R}^n$.

1.9 Reši enačbo

$$y'' - y = \delta_0$$

v smislu distribucij.

1.10 Reši enačbo

$$y'' + y = \delta_0$$

v smislu distribucij.

1.11 Reši naslednje enačbe v smislu distribucij: 1. $u_{xy} = 0$, 2. $u_{xy} = \delta_0$, 3. $u_{xx} - u_{yy} = \delta_0$.

1.12 Poišči fundamentalno rešitev za diferencialni operator $\triangle^2 = \triangle \circ \triangle$ v ravnini.

1.13 Poišči fundamentalno rešitev za operator $\triangle u + cu = 0, c > 0$ v $\mathbb{R}^n$.

1.14 Pokaži, da funkcija

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\chi_{[0,\infty)}(at-x)\chi_{[0,\infty)}(at+x), a \neq 0,$$

reši enačbo $u_{tt} - a^2 u_{xx} = \delta_0$.

1.15 Naj bo φ testna funkcija na $\mathbb{R}$.

(a) Poišči vse tiste $a \in \mathbb{R}$, za katere zaporedje $\varphi_n = a^n \varphi(a^n x)$ konvergira v prostoru testnih funkcij.

(b) Pokaži, da so za vsak $\varepsilon \neq 0$ s predpisom

$$\varphi_\varepsilon := \frac{(1+\varepsilon)\varphi((1+\varepsilon)x) - \varphi(x)}{\varepsilon},$$

definirane testne funkcije in izračunaj $\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon$ v prostoru testnih funkcij.

(c) Naj bo T distribucija in $a \neq 0$ realno število. Pokaži, da je s predpisom

$$T_a(x \mapsto \varphi(x)) = T(x \mapsto a\varphi(ax))$$

dana distribucija. Med distribucijami, ki jih predstavljajo odsekoma zvezne funkcije, poišči vse tiste, ki rešijo

(1) $T_a = T$ za vsak $a > 0$,
(2) $T_a = T$ za vsak $a < 0$,
(3) $T_a = T$ za vsak $a \neq 0$.

Pokaži, da so rešitve gornjih treh problemov tudi vse rešitve v smislu distribucij.

1.16 Naj bo F distribucija in $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Pokaži, da je Ff distribucija, za katero velja pravilo za odvajanje produkta.

1.17 Naj bo u distribucija, f testna funkcija, $\overline{f}(x) := f(-x)$. Pokaži, da je s predpisom $\langle u * f, \varphi\rangle := \langle u, \overline{f} * \varphi\rangle$ definirana distribucija in da velja naslednje pravilo za odvajanje: $(u * f)' = u' * f = u * f'$.

1.18 Dan je diferencialni operator

$$L(y) = ay'' + by' + cy, \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Naj bo $\overline{y}$ rešitev diferencialne enačbe, ki zadošča pogojema $\overline{y}(0) = 0$, $\overline{y}'(0) = \frac{1}{a}$.

(a) Naj bo $y_0(x) = \overline{y}(x)$ za $x \geq 0$ in $y_0(x) = 0$ za $x \leq 0$. Dokaži, da je y_0 fundamentalna rešitev za diferencialni operator L; to pomeni, da je $L(y_0)(x) = \delta_0(x)$ v smislu distribucij.

(b) Pokaži, da je $y = f * y_0$ rešitev $Ly = f$ za vsako $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

(c) Poišči fundamentalno rešitev za L pri $a = 1, b = 0, c = -1$.

1.19 (a) Pokaži, da je s predpisom

$$\left(\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}, \varphi\right) := \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\sum_{-N}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\varphi(x)dx$$

definirana distribucija.

(b) Naj ima testna funkcija φ nosilec v $[-\pi, \pi]$. Pokaži, da je

$$\frac{1}{2\pi}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}, \varphi\right) = (\delta_0, \varphi).$$

Nasvet: testna funkcija φ je na $[-\pi, \pi]$ enaka svoji Fourierovi vrsti $\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ in enaka 0 sicer.

(c) Pokaži, da je

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta_{2\pi k}$$

v smislu distribucij. Nasvet: nosilce testnih funkcij razreži po lihih večkratnikih π in izračunaj integrale za vsak tak kos posebej.

2 Laplacova enačba

Na $\mathbb{R}^n$ je s predpisom

$$\triangle u = u_{x_1 x_1} + \ldots + u_{x_n x_n}$$

definiran Laplacov diferencialni operator. Opisuje npr. stacionarno porazdelitev temperature. Rešitvam Laplaceove enačbe $\triangle u = 0$ pravimo harmonične funkcije. Harmonične funkcije zadoščajo principu maksimuma: če je D odprto omejeno območje in f nekonstantna harmonična funkcija na D, ki je zvezna na $\overline{D}$, zavzame f maksimum (in minimum) na robu. Harmonične funkcije imajo tudi lastnost povprečne vrednosti: za vsaka a, r za katera je $B(a, r) \subset D$, velja

$$f(a) = \frac{1}{vol(B(a,r))} \int_{B(a,r)} f dV.$$

2.1 Subharmonične funkcije

Naj bo G območje v $\mathbb{R}^n$. Funkcija $f : G \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, ki ni identično enaka $-\infty$, je *subharmonična*, če za vsako odprto kroglo $D \subset G$ velja naslednje: če je $f \leq g$ na ∂D, kjer je g harmonična na D in zvezna na $\overline{D}$, potem je $f \leq g$ na $\overline{D}$. Funkcija f je *superharmonična*, če je $-f$ subharmonična. Izkaže se, da vsaka C^2 subharmonična funkcija f zadošča $\triangle f \geq 0$.

2.1 Pokaži, da je supremum končnega števila subharmoničnih funkcij tudi subharmonična funkcija.

2.2 Poišči vse harmonične funkcije na realni osi.

2.3 Naj bo $|\cdot|$ norma na $\mathbb{R}^n$. Ugotovi, za katere $\alpha > 0$ je funkcija $|x|^\alpha$ subharmonična.

2.4 Pokaži, da je funkcija $f(x, y) = (x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2$ subharmonična, poišči njene kritične točke.

2.5 Pokaži, da je $-\log(a - r)$ subharmonična na $B(0, a)$.

2.6 Pokaži, da je za vsako holomorfno funkcijo f funkcija $f\overline{f}$ subharmonična.

2.7 Naj bo u harmonična in h poljubna C^2 konveksna funkcija. Dokaži, da je $h \circ u$ subharmonična.

2.8 Pokaži, da je funkcija

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} + x^2 + y^2$$

subharmonična na $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ in določi njen minimum.

2.9 Poišči kakšno subharmonično funkcijo u na kolobarju $K(0,1,3)$, ki gre proti neskončnosti, ko se približujemo robu.

Laplacova enačba v cilindričnih koordinatah

Kadar je območje D valj, izsek valja, zunanjost valja, izsek zunanjosti valja, valj s luknjo ali izsek valja z luknjo, uporabljamo pri reševanju Laplaceove enačbe cilindrične koordinate. V tem primeru je

$$\triangle u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + u_{zz}.$$

Če je funkcija u odvisna samo od r in z, dobimo za rešitev Laplacove enačbe $\triangle u = 0$ nastavek

$$u(r,\varphi) = C_0 + C_1 \log r + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n J_0(\mu_n r) + D_n N_0(\mu_n r))(A_n \operatorname{ch} \mu_n z + B_n \operatorname{sh} \mu_n z)$$

$$= C_0 + C_1 \log r + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n I_0(\nu_n r) + D'_n K_0(\nu_n r))(A_n \cos \nu_n z + B'_n \sin \nu_n z).$$

Drugo obliko dobimo iz prve, če namesto μ_n vstavimo $i\nu_n$ in upoštevamo, da je $J_0(is) = I_0(s)$, $N_0(is) = -\frac{2}{\pi}K_0(s)$, $\operatorname{ch}(is) = \cos s$ in $\operatorname{sh}(is) = i \sin s$. Prvo obliko uporabljamo, kadar je robni pogoj po r homogen, drugo pa, kadar sta robna pogoja po z homogena.

2.10 Reši Dirichletovo nalogo

$$\triangle u = 0,$$

$$u(r,0) = f(r), \quad u(r,h) = g(r), \quad u(a,z) = 0$$

na valju radija a in višine h.

2.11 Reši Dirichletovo nalogo

$$\triangle u = 0,$$

$$u(r,0) = 0, \quad u(r,h) = 0, \quad u(a,z) = k(z)$$

na valju radija a in višine h.

2.12 Reši Dirichletovo nalogo

$$\triangle u = 0,$$

$$u(r,0) = f(r), \quad u(r,h) = g(r), \quad u(a,z) = k(z)$$

na valju radija a in višine h.

2.13 Reši Dirichletovo nalogo

$$\triangle u = 0,$$

$$u(r,h) = 1, \quad u(r,0) = 0, \quad u(a,z) = 1$$

na valju radija a in višine h.

2.14 Valj z radijem a in višino l obdaja snov s temperaturo 0. Na majhna krožca z radijem b sredi zgornje in spodnje ploskve, pa prislonimo snov s temperaturo T_0. Poišči stacionarno porazdelitev temperature znotraj valja.

2.15 Poišči stacionarno porazdelitev toplote na valju $B^2(0,a) \times [0,l]$, ki ima spodnjo osnovno ploskev in plašč izoliran, zgornja ploskev pa ima konstantno temperaturo T_0.

Nasvet: Rešiti moraš enačbo $\triangle u = 0$ pri robnih pogojih

$$u_r(a,\varphi,z) = u_z(r,\varphi,0) = 0, \quad u(r,\varphi,l) = T_0.$$

2.16 Naj bo $D = B^2(0,a) \times [0,h]$. Reši Poissonovo nalogo

$$\triangle u = -f, \quad u|_{\partial D} = 0$$

v primeru, ko sta u in h odvisna samo od r in z.

2.17 Reši enačbo $\triangle u = \delta_0(r)\delta_0(z)$ na $D = B^2(0,a)\times\mathbb{R}$ pri pogoju $u|_{\partial D} = 0$. Rešitev lahko pustiš v integralski obliki.
Pomoč:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-izt}}{4\pi\sqrt{a^2+z^2}}dz = \frac{1}{2\pi}K_0(at).$$

2.18 Po sredi valja z radijem a in višino h teče žica, ki seva toploto s konstantno močjo Q na dolžinsko enoto. Površina valja se nahaja v tekoči vodi s temperaturo 0. Kakšna je stacionarna porazdelitev temperature po valju?

Nasvet: Rešiti moraš Poissonovo enačbo

$$\triangle u = -\frac{Q}{k}\delta_0(r), \quad u|_{\partial D} = 0,$$

kjer je δ_0 delta funkcija z nosilcem v $r = 0$. Ali znaš rešiti nalogo brez uporabe delta funkcij?

2.19 Plašč votlega valja z višine h in radija a je iz prevodnega materiala in je ozemljen. Na simetrijski osi valja na višini c se nahaja točkast delec z nabojem q. Določi porazdelitev elekričnega potenciala znotraj valja.

Nasvet: Rešiti moraš Poissonovo enačbo

$$\triangle u = -q\delta_0(r)\delta_c(z), \quad u|_{\partial D} = 0.$$

Ali znaš rešiti nalogo brez uporabe delta funkcij?

Laplacova enačba v sferičnih koordinatah

Kadar je območje D krogla, krogelni izsek, zunanjost krogle, izsek zunanjosti krogle, krogla z luknjo ali izsek krogle z luknjo, uporabljamo pri reševanju

Laplacove enačbe sferične koordinate. V tem primeru velja

$$\triangle u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2}(\operatorname{ctg}\theta)u_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi}.$$

Najprej si oglejmo nekaj primerov, ko je funkcija u odvisna samo od r.

2.20 Reši enačbo

$$\triangle u = -1$$

na krogli z radijem a pri robnem pogoju

$$(u_r + hu)|_{r=a} = 0, \quad h \neq 0.$$

2.21 Naj bo funkcija u_1 definirana na notranjosti, funkcija u_2 pa na zunanjosti krogle $B^2(0,a)$ in naj bosta obe odvisni samo od oddaljenosti r od izhodišča. Naj bosta λ_1 in λ_2 pozitivni konstanti. Reši sistem parcialnih diferencialnih enačb

$$\triangle u_1 = -1, \quad \triangle u_2 = 0,$$

pri robnih pogojih

$$\lim_{r\to 0} u_1(r) \neq \pm\infty, \quad \lim_{r\to\infty} u_2(r) = 0,$$

$$\lim_{r\to a-} u_1(r) = \lim_{r\to a+} u_2(r), \quad \lambda_1 \lim_{r\to a-} u_1'(r) = \lambda_2 \lim_{r\to a+} u_2'(r).$$

Pojasni fizikalni smisel naloge.

V primeru, ko je funkcija u odvisna samo od r in θ, dobimo za rešitev Laplacove enačbe $\triangle u = 0$ nastavek

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n r^{\nu_n} + B_n r^{-\nu_n-1})(C_n P_{\nu_n}(\cos\theta) + D_n Q_{\nu_n}(\cos\theta)).$$

Funkcije P_ν so Legendrove funkcije, Q_ν pa Legendrove funkcije druge vrste. Gre za linearno neodvisni rešitvi diferencialne enačbe $(1-x^2)y'' - 2xy' + \nu(\nu+1)y = 0$. P_ν je regularna na robu, Q_ν pa singularna na robu. Glede na obliko območja D ločimo naslednje možnosti:

(a) Če je D krogla $r \leq a$ (ali njena zunanjost), potem vzamemo $C_n = 1$, $D_n = 0$ in $\nu_n = n$.

(b) Če je D krogelni izsek $r \leq a, 0 \leq \theta \leq \theta_0$ (ali $r < a, \theta_0 < \theta < \pi$), potem vzamemo $C_n = 1$, $D_n = 0$, ν_n pa je odvisen od robnega pogoja:

   (a) Če je $u(r,\theta_0) = 0$, potem so ν_n pozitivne rešitve enačbe

$P_\nu(\cos\theta_0) = 0$. Pri polkrogli je $\nu_n = 2n - 1$.

(b) Če je $u_\theta(r,\theta_0) = 0$, potem so ν_n pozitivne rešitve enačbe $P'_\nu(\cos\theta_0) = 0$. Pri polkrogli je $\nu_n = 2n$.

(c) Če je D krogelni izsek $r < a$, $0 < \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 < \pi$ in $u(r,\theta_1) = u(r,\theta_2) = 0$, potem vzamemo $C_n = Q_{\nu_n}(\cos\theta_1)$, $D_n = -P_{\nu_n}(\cos\theta_1)$ in ν_n so pozitivne rešitve enačbe

$Q_\nu(\cos\theta_1)P_\nu(\cos\theta_2) - P_\nu(\cos\theta_1)Q_\nu(\cos\theta_2) = 0$. Podobno obravnavamo primere

$u_\theta(r,\theta_1) = u(r,\theta_2) = 0$, $u(r,\theta_1) = u_\theta(r,\theta_2) = 0$ in $u_\theta(r,\theta_1) = u_\theta(r,\theta_2) = 0$.

V primeru nehomogenih ali mešanih robnih pogojev po θ se pojavijo težave.

Primera, ko je funkcija u odvisna od vseh treh spremenljivk ne bomo obravnavali.

2.22 Reši enačbo

$$\triangle u = 0$$

na krogli z radijem a pri robnem pogoju

$$u(a,\theta) = f(\theta).$$

Podrobno obravnavaj primera

$$f(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ -1, & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad \text{in } f(\theta) = \begin{cases} T_0, & 0 \leq \theta \leq \theta_0 \\ 0, & \theta_0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} .$$

2.23 Reši enačbo

$$\triangle u = 0$$

na krogli $B^3(0,a)$ pri robnem pogoju

$$u_r(a,\theta) + hu(a,\theta) = f(\theta),$$

kjer je $h > 0$ in $f \in L^2[0,\pi;\sin\theta]$! V primeru

$$f(\theta) = \begin{cases} \cos\theta, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \end{cases}$$

rešitev tudi eksplicitno določi.

2.24 Na komplementu krogle $B^3(0,a)$ reši enačbo

$$\triangle u = 0$$

pri robnem pogoju

$$u_r(a,\theta) = 0$$

in pri asimptotskem pogoju

$$u(r,\theta) = cr\cos\theta$$

za velike r.

Nasvet: Pomagaj si z substitucijo $v = u - cr\cos\theta$. Naloga opisuje kako se vede ravni tok idealne tekočine, ki s hitrostjo c teče v smeri z osi, ko naleti na kroglo $B^3(0,a)$. Hitrost tekočine je gradient funkcije u.

3 Difuzijska enačba

Enačbo
$$u_t = \triangle u.$$
imenujemo difuzijska ali toplotna enačba in opisuje prevajanje toplote.

Izrek. *Parabolični princip maksima.* Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ omejeno območje z robom S in $0 < T < \infty$. Potem obstaja največ ena zvezna funkcija u na $\overline{D} \times [0, t]$, ki se na $(\overline{D} \times 0) \cup (S \times [0, T])$ ujema z dano funkcijo in reši enačbo $u_t = \triangle u$. **Kako bova oznacevala tocke v R^3? Z x ali z vektorjem?**

3.1 Naj bo $n > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ odprto omejeno območje z gladkim robom. Naj funkcija u reši enačbo $u_t = \triangle u$ na Ω. Začetna porazdelitev toplote naj bo $u(x, 0) = f(x)$ in naj bo območje na robu ali izolirano ali pa naj ima rob temperaturo 0. Privzemi, da je rešitev dovolj gladka na $\overline{\Omega}$ in pokaži, da je
$$E(t) := \int_\Omega u^2(x, t)\, dV \leq \int_\Omega f^2(x)\, dV.$$
Naj bo $u(x) = \lim_{t\to\infty} u(x, t)$. Kateri enačbi ustreza funkcija $u(x)$? Za oba primera u tudi izračunaj.

Nasvet: Izračunaj $\mathrm{div}(u \,\mathrm{grad}\, u)$.

3.1 Reševanje s separacijo spremenljivk

Naj bo D območje z gladkim robom ∂D in $c > 0$ konstanta. Iščemo tako funkcijo $u = u(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r} \in \overline{D}$, $t \geq 0$, ki reši nehomogeno difuzijsko enačbo
$$\triangle u = \frac{1}{c^2} u_t + F(\mathbf{r}, t)$$
pri pogojih
$$u(\mathbf{r}, 0) = f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \overline{D},$$
$$\alpha(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}, t) + \beta(\mathbf{r}) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{r}, t) = g(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial D, \quad t \geq 0.$$
Recept je takle:

(a) Homogenizacija robnih pogojev. Če funkcija g ni identično enaka nič, potem uganemo tako funkcijo $w = w(\mathbf{r})$, ki zadošča pogoju

$$\alpha(\mathbf{r})w(\mathbf{r}) + \beta(\mathbf{r})\frac{\partial w}{\partial n}(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial D$$

in napravimo substitucijo $u(\mathbf{r},t) = \tilde{u}(\mathbf{r},t) + w(\mathbf{r})$. Nova enačba je $\triangle\tilde{u} = \frac{1}{c^2}\tilde{u}_t + \tilde{F}(\mathbf{r},t)$, kjer je $\tilde{F} = F - \triangle w$, nova pogoja pa sta $\tilde{u}(\mathbf{r},0) = \tilde{f}(\mathbf{r})$, kjer je $\tilde{f} = f - w$ in $\alpha(\mathbf{r})\tilde{u}(\mathbf{r},t) + \beta(\mathbf{r})\frac{\partial\tilde{u}}{\partial n}(\mathbf{r},t) = 0$.

(b) Reševanje lastnega problema. S separacijo spremenljivk rešimo lastni problem $\triangle v = \lambda v$, $\alpha v + \beta\frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial D} = 0$. Dobimo števno mnogo lastnih vrednosti, ki so vse negativne. Vsaki pripada končno lastnih vektorjev. Naj bo v_n kompleten ortogonalen sistem sestavljen iz lastnih vektorjev.

(c) Razvijemo $\tilde{F}(\mathbf{r},t) = \sum_n F_n(t)v_n(\mathbf{r})$ in $\tilde{f}(\mathbf{r}) = \sum_n f_n v_n(\mathbf{r})$, kjer

$$F_n(t) = \frac{\int_D \tilde{F}(\mathbf{r},t)v_n(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}}{\int_D v_n(\mathbf{r})^2\,d\mathbf{r}}, \quad f_n = \frac{\int_D \tilde{f}(\mathbf{r})v_n(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}}{\int_D v_n(\mathbf{r})^2\,d\mathbf{r}},$$

(d) Rešitev (nove) enačbe je

$$\tilde{u}(\mathbf{r},t) = \sum_n T_n(t)v_n(\mathbf{r}),$$

kjer je funkcija T_n rešitev začetne naloge

$$\lambda_n T_n(t) = \frac{1}{c^2}T_n'(t) + F_n(t), \quad T_n(0) = f_n.$$

Na koncu k $\tilde{u}$ prištejemo w, da dobimo u.

Polarne koordinate

Naslednje naloge se nanašajo na prevajanje toplote po krogu ali neskončnem valju.

3.2 Reši enačbo

$$u_t = \triangle u,$$

za krog $B^2(0,1)$, če ima rob kroga temperaturo 0, začetna porazdelitev temperature pa je

$$u(r,\varphi,0) = f(r).$$

Podrobno obravnavaj primera $f(r) = 1$ in $f(r) = 1 - r^2$.

3.3 Naj bo $a, T_0, c > 0$. Reši enačbo

$$\triangle u = \frac{1}{c^2} u_t$$

na krogu z radijem a pri robnem pogoju

$$u|_{r=a} = 0,$$

in pri začetnem pogoju

$$u|_{t=0} = f(r).$$

Podrobno obravnavaj primera $f(r) = T_0$ in $f(r) = T_0(a^2 - r^2)/a^2$.
Enačba opisuje spreminjanje temperature neskončnega valja, ki je na začetku enaka T_0, nato pa se začne zmanjševati, ker rob valja držimo pri konstantni temperaturi 0.

3.4 Reši enačbo

$$u_t = c^2 \triangle u$$

na krogu z radijem a pri robnem pogoju

$$(u_r + hu)|_{r=a} = 0,$$

kjer je $h > 0$ in pri začetnem pogoju

$$u|_{t=0} = T_0.$$

Enačba opisuje ohlajanje neskončnega valja z začetno temperaturo T_0 v okolju s temperaturo 0. Toplotni tok iz valja (u_r) je sorazmeren razliki med zunanjo in notranjo temperaturo $(0 - u)$

3.5 Reši enačbo

$$\triangle u = u_t - 1$$

na enotskem krogu pri robnem pogoju

$$u|_{r=1} = 0$$

in pri začetnem pogoju

$$u|_{t=0} = 0.$$

Enačba opisuje segrevanje kabla z radijem a po katerem steče električni tok. Temperatura okolice in začetna temperatura kabla sta nič. Poučno je primerjati limito rešitve $t \to \infty$ z rešitvijo enačbe $\triangle u = -1, u|_{r=1} = 0$.

3.6 Reši enačbo

$$u_t = c^2 \triangle u$$

na krogu z radijem a pri robnem pogoju

$$u|_{r=a} = 0,$$

in pri začetnem pogoju

$$u|_{t=0} = f(r, \varphi).$$

Podrobno obravnavaj primer $f(r, \varphi) = br \cos \varphi$.

3.7 Naj bo D polkrog $r \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi$. Reši enačbo

$$u_t = c^2 \triangle u$$

pri robnem pogoju

$$u|_{\partial D} = 0$$

in začetnem pogoju

$$u|_{t=0} = br \sin \varphi.$$

3.8 Naj bo $0 < a < b$. Reši enačbo

$$u_t = c^2 \triangle u$$

pri robnih pogojih

$$u(a, t) = 0, \quad u(b, t) = 0$$

in pri začetnem pogoju

$$u(r, 0) = f(r).$$

Podrobno obravnavaj primer $f(r) \equiv T_0$.

Cilindrične in sferične koordinate

3.9 Naj bo $a, h, c, T_0 > 0$. Reši enačbo

$$u_t = c^2 \triangle u$$

na valju z radijem a in višino h pri začetnem pogoju

$$u(r, z, 0) = f(r, z)$$

in robnih pogojih

$$u(a, z, t) = 0, \quad u(r, 0, t) = 0, \quad u(r, h, t) = 0.$$

Podrobno obravnavaj primera

$$f(r, z) = T_0 \quad \text{in} \quad f(r, z) = T_0(a^2 - r^2)z(h - z)/a^2h^2.$$

3.10 Na krogli $B^3(0, a)$ reši enačbo

$$\triangle u = \frac{1}{c^2} u_t$$

pri začetnem pogoju

$$u(r, 0) = f(r)$$

in pri robnem pogoju

$$u(a, t) = 0.$$

Podrobno obravnavaj primer $f(r) = T_0$.

3.11 Na krogli $B^3(0, a)$ reši enačbo

$$\triangle u = \frac{1}{c^2} u_t$$

pri začetnem pogoju

$$u(r, 0) = T_0$$

in pri robnem pogoju

$$u(a, t) = T_1.$$

Naloga opisuje ohlajanje krogle z začetno temperaturo T_0 v okolju s temperaturo T_1.

3.12 Naj bo $a, c > 0$. Reši enačbo

$$\triangle u = \frac{1}{c^2} u_t - f(r),$$

na krogli z radijem a pri začetnem pogoju

$$u(r, 0) = 0,$$

in robnem pogoju

$$u(a, t) = 0.$$

Podrobno obravnavaj primer $f(r) = C$.

3.13 Na krogli $B^3(0, a)$ reši enačbo

$$\triangle u = \frac{1}{c^2} u_t$$

pri začetnem pogoju

$$u(r, \theta, 0) = f(r, \theta)$$

in pri robnem pogoju

$$u(a, \theta, t) = 0.$$

Podrobno obravnavaj primer $f(r, \theta) = T_0 \cos\theta$.

3.14 Ohlajanje gornje polkrogle z radijem a opisuje enačba

$$u_t = c^2 \triangle u$$

robni pogoji

$$u(a, \theta, t) = 0, \quad u(r, \frac{\pi}{2}, t) = 0$$

ter začetni pogoj

$$u(r, \theta, 0) = r\cos\theta.$$

Poišči u.

3.15 Naj bo $a, h, c, T_0 > 0$. Reši enačbo

$$u_t = c^2 \triangle u$$

na krogli z radijem a pri začetnem pogoju

$$u(r, 0) = f(r)$$

in robnem pogoju

$$u_r(a, t) + hu(a, t) = 0.$$

Podrobno obravnavaj primer $f(r) = T_0$.

4 Valovna enačba

Valovna enačba se glasi

$$u_t = \triangle u.$$

V eni dimenziji opisuje nihanje strune, v dveh nihanje membrane itd. Za nihanje neskončne strune

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

na območju $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ pri začetnih pogojih $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$, nam rešitev pove D'Alembertova formula:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds.$$

Podobne formule, kot je D'Alembertova, veljajo tudi v višjih dimenzijah. Za problem $u_t = \triangle u$, $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$ dobimo naslednji rešitvi:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi c}\int_{B^2(x,ct)} \frac{g(y)}{\sqrt{c^2t^2 - \|x-y\|^2}}\, dS_y + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2\pi c}\int_{B^2(x,ct)} \frac{f(y)}{\sqrt{c^2t^2 - \|x-y\|^2}}\, dS_y,\ x \in \mathbb{R}^2, \\ u(x,t) &= \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S^2(x,ct)} g(y)\, dS_y + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S^2(x,ct)} f(y)\, dS_y\right),\ x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Izrek. Naj bo u C^2 funkcija, definirana na $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ za nek $T > 0$ in naj reši $u_t = \triangle u$. Če je $u = u_t = 0$ na krogu $B(x_0, t_0) \times \{0\}$, $t_0 \in (0,T]$, potem je u enaka 0 na območju

$$\{(x,t), 0 \leq t \leq t_0 \text{ in } |x - x_0| \leq t - t_0\}.$$

Kartezične koordinate

4.1 Naj bosta $f(x,y)$ in $g(x,y)$ funkciji, ki sta simetrični tako na $x = 0$ kot $y = 0$, in naj bodo $c, a, b, h > 0$ konstante. Reši enačbo

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})$$

na območju $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$ pri robnih pogojih

$$u(x,-b,t) = 0, \quad u(x,b,t) = 0,$$

$$u(-a,y,t)=0, \quad u(a,y,t)=0$$

in pri začetnih pogojih $u(x,y,0)=f(x,y)$ in $u_t(x,y,0)=g(x,y)$. Explicitno izračunaj rešitev za primer $f(x,y)=1-\max\{|\frac{x}{a}|,|\frac{y}{b}|\}$, $g(x,y)=0$.

4.2 Reši enačbo $u_{tt}=\triangle u$ za vpeto membrano $[-1,1]^2$ pri pogoju $u(x,y,0)=(1-x^2)(1-y^2)$, $u_t(x,y,0)=0$.

4.3 Reši valovno enačbo

$$u_{tt}=\triangle u$$

za kocko $[0,2]^3$, če je $u(x,y,z,0)=x(x-2)y(y-2)z(z-2)$, $u_t(x,y,z,0)=0$ in $u(x,y,z,t)=0$ za $(x,y,z)\in\partial[0,2]^3$.

4.4 Reši enačbo dušenega nihanja

$$u_{tt}+u_t-u_{xx}=0$$

končne strune $[0,\pi]$, ki je v krajišču 0 vpeta ($u(0,t)=0$) krajišče π pa prosto niha ($u_x(\pi,t)=0$). Začetni pogoj je $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=\sin(x)$.

Polarne koordinate

4.5 Naj bosta $f(r)$ in $g(r)$ dani funkciji in $a,c>0$ konstanti. Reši enačbo

$$u_{tt}=c^2\triangle u$$

na krogu z radijem a pri robnem pogoju

$$u(a,t)=0$$

in pri začetnih pogojih

$$u(r,0)=f(r), \quad u_t(r,0)=g(r).$$

Podrobno obravnavaj primera

(a) $f(r)=h(1-\frac{r^2}{a^2})$, $g(r)=0$, kjer je $h>0$ konstanta,

(b) $f(r)=0$, $g(r)=v_0\chi_{[0,b]}(r)$, kjer sta $v_0>0$ in $0<b\leq a$ konstanti.

4.6 Naj bo $F(r,t)$ dana funkcija in $a, c > 0$ konstanti. Reši enačbo

$$u_{tt} = c^2 \triangle u + F(r,t)$$

na krogu z radijem a pri robnem pogoju

$$u(a,t) = 0$$

in pri začetnih pogojih

$$u(r,0) = 0, \quad u_t(r,0) = 0.$$

Podrobno obravnavaj primera

(a) $F(r,t) = A\chi_{[0,b]}(r) \sin \omega t$, kjer so A, b, ω konstante in $b \le a$,

(b) $F(r,t) = B\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$.

4.7 Naj bosta $f(r,\varphi)$ in $g(r,\varphi)$ dani funkciji in $a, c > 0$ konstanti. Reši enačbo

$$u_{tt} = c^2 \triangle u$$

na krogu z radijem a pri robnem pogoju

$$u(a,\varphi,t) = 0$$

in pri začetnih pogojih

$$u(r,\varphi,0) = f(r,\varphi), \quad u_t(r,\varphi,0) = g(r,\varphi).$$

Podrobno obravnavaj primer $f(r,\varphi) = 0$, $g(r,\varphi) = v_0 \delta_b(r) \delta_0(\varphi)$.

4.8 Reši valovno enačbo

$$u_{tt} = c^2 \triangle u$$

za polkrožno membrano $0 \le r \le a$, $0 \le \varphi \le \pi$, pri robnih pogojih

$$u(a,\varphi,t) = 0, \quad u(r,0,t) = u(r,\pi,t) = 0$$

in začetnih pogojih

$$u(r,\varphi,0) = f(r,\varphi), \quad u_t(r,\varphi,0) = g(r,\varphi).$$

Cilindrične in sferične koordinate

4.9 Naj bo V valj $r \le a, 0 \le z \le h$ in $f(r,z)$, $g(r,z)$ funkciji na V. Reši problem

$$u_{tt} = c^2 \triangle u,$$

$$u(a,z,t) = u(r,0,t) = u(r,h,t) = 0,$$

$$u(r,z,0) = f(r,z), \quad u_t(r,z,0) = g(r,z).$$

4.10 Naj bo V valj $r \le a, 0 \le z \le h$ in $f(r,z)$ funkcija na V. Reši problem

$$u_{tt} = c^2 \triangle u + f(r,z) \sin \omega t,$$

$$u(a,z,t) = u(r,0,t) = u(r,h,t) = 0,$$

$$u(r,z,0) = u_t(r,z,0) = 0.$$

Podrobno obravnavaj primer $f(r,z) = \delta_0(r)\delta_{z_0}(z)$, kjer je $(r,z) = (0,z_0)$ točka na osi valja.

4.11 Naj bo V krogla $r \le a$ in $f(r,\theta)$, $g(r,\theta)$ funkciji na V. Reši problem

$$u_{tt} = c^2 \triangle u$$

$$u(a,\theta,t) = 0,$$

$$u(r,\theta,0) = f(r,\theta), \quad u_t(r,\theta,0) = g(r,\theta).$$

5 Uporaba izreka Cauchy - Kovalevska

Cauchyjev problem za PDE k-tega reda lahko zapišemo v naslednji obliki:

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}u(x,t) = F\left(x, t, \left(\frac{\partial}{\partial t^j}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}u\right)_{|\alpha|+j\leq k, j<k}\right)$$

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j}u(x,0) = \varphi_j(x), \quad 1 \leq j \leq k-1,$$

za $x \in \mathbb{R}^n$. Oznaka $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ pomeni multiindeks in $|\alpha| = \sum \alpha_i$. O eksistenci in enoličnosti rešitve gornjega Cauchyjevega problema govori izrek Cauchy - Kovalevska:
Izrek. Če so F in φ_j, $1 \leq j \leq k-1$ analitične na okolici izhodišča, obstaja okolica izhodišča, na kateri je rešitev Cauchyjevega problema natanko ena.

5.1 S pomočjo razvoja v vrsto reši enačbo

$$u_{xx} + u_y = 2 + 2y$$

pri pogoju $u(0,y) = e^{-y} + y^2$, $u_x(0,y) = e^y$.

5.2 Z razvojem v vrsto reši enačbo

$$u_{xx} = u_y - e^y, \quad u(0,y) = 2e^y, \; u_x(0,y) = 0.$$

5.3 Z razvojem v vrsto reši enačbo

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u(x,0) = e^x, \; u_y(x,0) = e^x.$$

5.4 Z razvojem v vrsto reši enačbo

$$u_{xx} + u_y = 0, \quad u(0,y) = e^{-y}, \; u_x(0,y) = e^y.$$

5.5 Z razvojem v vrsto reši enačbo

$$u_{xx} + u_{yy} = x + y, \quad u(x,0) = e^x, \; u_y(x,0) = e^x.$$

5.6 Z razvojem v vrsto reši enačbo

$$u_{xy} - u_y = y - x, \quad u(x,0) = a(x), \; u_y(x,0) = b(x),$$

kjer sta a in b analitični funkciji.

6 Rešitve nalog

6.1 Distribucije

1.1. Edino T_2 ni distribucija.

1.2. $f_1' = T_8$ iz naloge 1.1, $f_2' = a\delta_b$, $f_2'' = a\delta_b'$, $f_3' = -1 + 2\chi_{[0,\infty)}$, $f_3'' = 2\delta_0$, $f_4'(x) = -(1+x^2)^{-1} + \pi\delta_0(x)$.

1.3. Ker je Fourierova transformacija izomorfizem $\mathcal{S}$ nase, zgornja predpisa definirata zvezna linearna funkcionala na umirjenih distribucijah. Preverimo še veljavnost enačb $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = id$:

$$\langle \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}u), \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}u, \mathcal{F}(\varphi) \rangle = \langle u, \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\varphi)) \rangle = \langle u, \varphi \rangle.$$

Upoštevali smo, da na Schwarzovem razredu velja $id = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}$. Podobno dokažemo še drugo enakost. Izračunajmo transformiranko in inverzno transformiranko za δ_a :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(\delta_a), \varphi \rangle &= \langle \delta_a, \mathcal{F}(\varphi) \rangle = \langle e^{-iay}, \varphi \rangle \\ \langle \mathcal{F}^{-1}(\delta_a), \varphi \rangle &= \langle \delta_a, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \rangle = \langle \frac{e^{iay}}{2\pi}, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

torej je

$$\mathcal{F}(\delta_a) = e^{-iax} \text{ in } \mathcal{F}^{-1}(\delta_a) = \frac{e^{iax}}{2\pi}$$

Ker velja inverzna formula, je po zgornjem

$$\mathcal{F}(e^{iax}) = 2\pi\delta_a \text{ in } \mathcal{F}^{-1}(e^{iax}) = \delta_{-a}.$$

Od tod takoj sledi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\sin(ax)) &= \frac{\mathcal{F}(e^{iax}) - \mathcal{F}(e^{-iax})}{2i} = \frac{\delta_a - \delta_{-a}}{4\pi i} \\ \mathcal{F}(\cos(ax)) &= \frac{\mathcal{F}(e^{iax}) + \mathcal{F}(e^{-iax})}{2} = \frac{\delta_a + \delta_{-a}}{4\pi} \end{aligned}$$

Izračunajmo še zadnjo transformiranko:

$$\langle \mathcal{F}(\frac{1}{2}\chi_{[-a,a]}(x)), \varphi \rangle = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\varphi(y)dy =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)dy\int_{-a}^{a}e^{-ixy}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(ay)}{y}\varphi(y)dy. \end{aligned}$$

1.4. (i) Dobra definiranost:

$$|F(\varphi)| \leq \sum_{i=1}^{\infty}|c_i||\varphi(x_i)| \leq \|\varphi\|_\infty \sum_1^\infty |c_i| < \infty.$$

Linearnost sledi iz absolutne konvergence vrst. Za zveznost zadošča preveriti zveznost v 0, za kar nam služi kar gornja ocena $|F(\varphi)| \leq \|\varphi\|_\infty \sum_1^\infty |c_i| = M\|\varphi\|_\infty$; od tu takoj sledi: $\varphi_j \to 0 \Rightarrow F(\varphi_j) \to 0$.

(ii) Dobra definiranost: naj bo $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]$ za nek $a > 0$ in N tako velik, da $x_m \notin [-a,a]$ za $m > N$. Potem je $F(\varphi) = \sum_{i=1}^N |c_i||\varphi(x_i)|$, zato je F dobro definirana. Linearnost je očitna, ker so vsote končne. Za zveznost zadošča preveriti zveznost v 0. Naj $\varphi_j \to 0$ v smislu distribucij. Potem obstaja $a > 0$, da je $\operatorname{supp}\varphi_j \subset [-a,a]$ za vsak j. Določimo N kot zgoraj in dobimo $|F(\varphi_j)| \leq \|\varphi_j\|_\infty \sum_1^N |c_i|$, kar pomeni, da gredo tudi $F(\varphi_j) \to 0$.

1.5. Enačbo prepišimo v

$$\langle x(x-1)y', \varphi\rangle = \langle y', x(1-x)\varphi\rangle = -\langle y, (x(1-x)\varphi)'\rangle\,.$$

V jedru so gotovo vse testne funkcije ψ, ki so oblike $(x(1-x)\varphi(x))'$. Za vsako tako testno funkcijo ψ velja, da je

$$\int_{-\infty}^{0}\psi(x)dx = \int_0^1\psi(x)dx = \int_1^\infty\psi(x)dx = 0,$$

to pa pomeni, da je ψ v jedru distribucij $\chi_{(-\infty,0)}$, $\chi_{(0,1)}$,$\chi_{(1,\infty)}$. Pokažimo, da velja tudi obrat: naj bo ψ v jedru gornjih treh distribucij. Definirajmo

$$\varphi_1(x) = \int_{-\infty}^{x}\psi(t)dt.$$

Očitno je $\varphi_1(0) = \varphi_1(1) = 0$ in φ_1 distribucija. Zaradi odvedljivosti je $\varphi_1(x) = x(x-1)\varphi$ za neko distribucijo φ. Ker je $\varphi_1' = \psi$, to pomeni, da je $\psi = (x(x-1)\varphi(x))'$. Trdimo, da je splošna rešitev oblike

$$y = A\chi_{(-\infty,0)} + B\chi_{(0,1)} + C\chi_{(1,\infty)}.$$

Označimo $u_1 = \chi_{(-\infty,0]}$, $u_2 = \chi_{(0,1)}$ in $u_3 = \chi_{(1,\infty)}$. Izberimo tri testne funkcije φ_1, φ_2 in φ_3, za katere je $\langle u_i, \varphi_j\rangle = \delta_{ij}$. Poljubno testno funkcijo φ lahko zapišemo v obliki

$$\varphi = (\varphi - \sum_1^3 \langle u_i, \varphi\rangle u_i) + \sum_1^3 \langle u_i, \varphi\rangle u_i.$$

Takoj vidimo, da je $\langle u_j, \varphi - \sum_1^3 \langle u_i, \varphi\rangle u_i) = 0$ za $j = 1, 2, 3$, torej je testna funkcija $\varphi - \sum_1^3 \langle u_i, \varphi\rangle u_i$ v jedru y. Dobimo

$$\langle y, \varphi\rangle = \sum \langle y, u_i\rangle \langle u_i, \varphi_i\rangle.$$

Ker je $\langle y, u_i\rangle$ lahko poljubna konstanta, je $y = Au_1 + Bu_2 + Cu_3$.

1.6. $y = A\chi_{(-\infty,0)} + B\chi_{(0,\infty)} + C\delta_0$. Dokaz, da so to vse rešitve, je popolnoma enak, kot v nalogi 1.5, le da so distribucije druge.

1.7. Rešitev je $y = \sum_{-\infty}^{\infty} a_i \chi_{(\pi(i-1),\pi i)}$. Dokaz, da so to res vse rešitve, je podoben, kot v nalogi 2.5.

1.8. Odvod je $\prod_1^n (\delta_{-1}(x_i) - \delta_1(x_i))$.

1.9. Enačbo prevedemo na sistem z uvedbo nove spremenljivke $z = y'$ in dobimo

$$\begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_0 \end{bmatrix}.$$

Rešujemo kot običajne sisteme. Fundamentalna matrika je

$$Y(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}(t) & \mathrm{sh}(t) \\ \mathrm{sh}(t) & \mathrm{ch}(t) \end{bmatrix},$$

partikularno rešitev pa dobimo z variacijo konstant, $\mathbf{v} = Y(t)\mathbf{w}(t)$, kjer za vektor $\mathbf{w}(t)$ velja

$$\mathbf{w}'(t) = Y^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_0 \,\mathrm{ch}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_0 \end{bmatrix}.$$

Integriramo in dobimo

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ \chi_{[0,\infty)} \end{bmatrix},$$

kar da partikularno rešitev

$$\mathbf{v} = Y(t)\begin{bmatrix} 0 \\ \chi_{[0,\infty)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{sh}(t)\chi_{[0,\infty)} \\ \mathrm{ch}(t)\chi_{[0,\infty)} \end{bmatrix}.$$

Splošna rešitev gornje enačbe je $y = A\,\mathrm{ch}(t) + B\,\mathrm{sh}(t) + \mathrm{sh}(t)\chi_{[0,\infty)}$.

1.10. Isti postopek kot pri prejšnji nalogi. Rešitev je $y = \chi_{[0,\infty)}(x)\sin(x)$.

1.11. 1. $u = 1 \times d_y + d_x \times 1$, kjer sta d_x, d_y poljubni distribuciji na $\mathbb{R}$; 2. Partikularna rešitev je $u = \chi_{[0,\infty)^2}$, 3. Partikularna rešitev je $\frac{1}{2}\chi_{[0,\infty)}(t-x)\chi_{[0,\infty)}(t+x)$.

1.12. Iščemo rešitev, ki je odvisna le od radija. Operator $\triangle^2$ v polarnih koordinatah se glasi:

$$\triangle^2 u(r) = u_{rrrr} + \frac{2}{r}u_{rrr} - \frac{1}{r^2}u_{rr} + \frac{1}{r^3}u_r = 0$$

Rešitev iščemo z nastavkom $u = r^\lambda$. Za λ dobimo enačbo $\lambda^2(\lambda-2)^2 = 0$. Splošna rešitev je oblike

$$u = a + b\log r + cr^2 + dr^2\log r$$

Ker sta 1 in r^2 povsod definirani rešitvi, lahko izberemo $a = c = 0$; ker je $\log r$ fundamentalna rešitev za Laplacov operator, bo $b = 0$. Ostane le $u = dr^2\log r$. Izračunamo integral

$$\begin{aligned}(\triangle^2 u, \varphi) &= (u, \triangle^2\varphi) = 2\pi d\int_0^\infty r^2\log r\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r(\triangle\varphi)_r)r\,dr \\ &= \ldots \text{ nekajkrat per partes } \ldots = 8\pi d\varphi(0);\end{aligned}$$

torej je

$$u(r) = \frac{1}{8\pi}r^2\log r$$

1.13. Najprej uvedemo substitucijo $u(r) = v(\sqrt{c}r)$ in potem še $v(r) =$

$r^{1-\frac{n}{2}}w(r)$. Izkaže se, da w zadošča Besselovi DE

$$w''r^2 + w'r + \left(r^2 - \left(\frac{n-2}{2}\right)^2\right) w = 0.$$

Fundamentalna rešitev je zato oblike $DN_{\frac{n-2}{2}}$ (zakaj?) za primerno konstanto D. Za $n = 2$ je konstanta $1/4$.

1.14. Računamo po definiciji.

$$\begin{aligned}
\langle Lu, \varphi\rangle &= \langle u, \varphi_{tt} - a^2\varphi_{xx}\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a}\chi_{[0,\infty)}(at-x)\chi_{[0,\infty)}(at+x)(\varphi_{tt}(x,t) - \\
&\quad -a^2\varphi_{xx}(x,t))dy \\
&= \frac{1}{4a^2}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0,\infty)}(u)\chi_{[0,\infty)}(v)4a^2\varphi_{uv}(u,v)dv \\
&= \int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} \varphi_{uv}(u,v)dv \\
&= -\int_0^{\infty} \varphi_u(u,0)du \\
&= \varphi(0,0).
\end{aligned}$$

Uvedli smo substitucijo $u = at - x, v = at + x$.

1.15. Za $\varphi = 0$ zaporedje konvergira za vsak a, zato privzemimo, da φ ni identično 0. Konvergenca je očitna za $a = 0, 1$. Če je $0 < |a| < 1$ in $\varphi \neq 0$, nosilci φ_n ne ležijo znotraj enega kompakta, če pa je $|a| > 1$, pa je $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_\infty = \infty$. Za $a = -1$ nimamo konvergence.

Za točko (b) najprej opazimo, da je linearna kombinacija dveh testnih funkcij spet testna funkcija. Po l'Hospitalu izračunamo limito po točkah:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(1+\varepsilon)\varphi((1+\varepsilon)x) - \varphi(x)}{\varepsilon} = x\varphi'(x) + \varphi(x) = (x\varphi(x))'.$$

Limitna funkcija je spet testna funkcija. Podobno dobimo tudi za odvode:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} \varphi_\varepsilon^{(n)}(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(1+\varepsilon)^{n+1}\varphi^{(n)}((1+\varepsilon)x) - \varphi^{(n)}(x)}{\varepsilon} \\
&= x\varphi^{(n+1)}(x) + (n+1)\varphi^{(n)}(x) = (x\varphi(x))^{(n+1)}.
\end{aligned}$$

Dokazati je potrebno še enakomerno konvergenco. Naj bo

$$\psi^n(x,\varepsilon) = (1+\varepsilon)^{(n+1)}\varphi^{(n)}((1+\varepsilon)x).$$

Po Lagrangevem izreku je

$$\varphi_\varepsilon^{(n)}(x) = \frac{\partial\psi^n}{\partial\varepsilon}(x,\tau_x)$$

za nek τ_x med 0 in ε in

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon^{(n)} = \frac{\partial\psi^n}{\partial\varepsilon}(x,0).$$

Za vsak $\varepsilon \in [-1,1]$ je $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon^{(n)} \subset [-M,M]$ za nek pozitiven M. Ocenimo

$$\begin{aligned}
\left|\varphi_\varepsilon^{(n)}(x) - \frac{\partial\psi^n}{\partial\varepsilon}(x,0)\right| &= \left|\frac{\partial\psi^n}{\partial\varepsilon}(x,\tau_x) - \frac{\partial\psi^n}{\partial\varepsilon}(x,0)\right| \\
&= \left|\frac{\partial^2\psi^n}{(\partial\varepsilon)^2}(x,\tilde{\tau}_x)\right| |\tau_x| \\
&\leq |\varepsilon| C,
\end{aligned}$$

kjer je

$$C = \sup_{(x,\varepsilon)\in[-M,M]\times[-1,1]} \left|\frac{\partial^2\psi^n}{(\partial\varepsilon)^2}(x,\varepsilon)\right|;$$

s tem je konvergenca v prostoru testnih funkcij dokazana.

Za točko (c) dobimo pri (1) vse stopnice s skokom v 0, tj. $a + b\chi_{[0,\infty)}$, pri (2) konstante in pri (3) seveda tudi konstante. Napišimo dokaz za prvi primer. Ker je $T_a = T$ za vsak $a > 0$, je

$$\frac{T_{1+\varepsilon} - T}{\varepsilon}(\varphi) = T\left(\frac{(1+\varepsilon)\varphi((1+\varepsilon)x) - \varphi(x)}{\varepsilon}\right) = 0$$

za vsak $\varepsilon > 0$. Če pošljemo $\varepsilon \to 0$ dobimo $T((x\varphi(x))') = 0$. Iščemo torej vse take distribucije T, da je

$$\langle T', x\varphi(x)\rangle = \langle xT', \varphi\rangle = 0.$$

Edine rešitve te enačbe pa so stopnice s skokom v 0. Podobno sklepamo pri ostalih dveh vprašanjih.

1.16. Pokažimo, da je Ff distribucija. Preslikava $\varphi \mapsto f\varphi$ je zvezna linearna preslikava $\mathcal{D} \to \mathcal{D}$. Ker je

$$\langle (Ff), \varphi\rangle = \langle F, f\varphi\rangle,$$

je Ff zvezen linearen funkcional na $\mathcal{D}$.

$$\begin{aligned}
\langle (Ff)', \varphi\rangle &= -\langle Ff, \varphi'\rangle \\
&= -\langle F, f\varphi'\rangle - \langle F, f'\varphi\rangle + \langle F, f'\varphi\rangle \\
&= -\langle F, (f\varphi)'\rangle + \langle F, f'\varphi\rangle \\
&= \langle F', f\varphi\rangle + \langle Ff', \varphi\rangle \\
&= \langle F'f, \varphi\rangle + \langle Ff', \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

1.17. Linearnost je očitna, za zveznost pa imamo: preslikava $f \mapsto \overline{f}$ je zvezna, preslikava $\varphi \mapsto \overline{f} * \varphi$ je zvezna, u je zvezna, zato je $u * f$ zvezna.

$$\begin{aligned}
\langle (u * f)', \varphi\rangle &= -\langle u * f, \varphi'\rangle = -\langle u, \overline{f}' * \varphi\rangle \\
&= \langle u, \overline{f'} * \varphi\rangle = \langle u * (f'), \varphi\rangle
\end{aligned}$$

Po drugi strani pa je $\langle u, \overline{f'} * \varphi\rangle = \langle u, -(\overline{f} * \varphi)'\rangle = \langle u', \overline{f} * \varphi\rangle = \langle u' * f, \varphi\rangle$.

1.18. (a)

$$\begin{aligned}
\langle Ly_0, \varphi\rangle &= \langle y_0, a\varphi(x)'' - b\varphi(x)' + c\varphi(x)\rangle \\
&= \int_0^\infty y_0(x)(a\varphi(x)'' - b\varphi(x)' + c\varphi(x)) = \ldots = \\
&= -ay_0'(x)\varphi(x)|_0^\infty = \varphi(0).
\end{aligned}$$

(b) Ker je vseeno, kaj odvajamo, je $y^{(n)} = y_0^{(n)} * f$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Vstavimo v enačbo in rezultat sledi.
(c) Splošna rešitev je $y = a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh}(x)$. Iz $y(0) = 0$ in $y'(0) = 1$ sledi $y_0 = \chi_{[0,\infty)}(x) \operatorname{sh}(x)$.

1.19. Pokazati moramo, da je z danim predpisom definiran zvezen linearen funkcional na testnih funkcijah. Z dvakratnim integriranjem per partes in upoštevajoč, da ima φ kompakten nosilec, dobimo

$$\sum_{-N}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{-N,N\neq 0}^{N} \frac{1}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,\varphi''(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Vse integrale lahko omejimo z

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi''(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

Limita v definiciji obstaja po točkah in definira linearen funkcional na prostoru testnih funkcij. Pokažimo še, da je ta funkcional zvezen. Naj bo φ_i zaporedje testnih funkcij, ki v prostoru testnih funkcij konvergira k 0, $\lim_{i\to\infty} \varphi_i = 0$. To pomeni, da so nosilci φ_i vsebovani v neki fiksni kompaktni množici K in velja $\varphi_i^{(j)} \to 0$ enakomerno na K za vsak j. Za vsak N je

$$\begin{aligned}
&\sum_{-N}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \varphi_j(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{-N,N\neq 0}^{N} \frac{1}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,\varphi_j''(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad \leq \sup_x |\varphi_i| \cdot \lambda(K) + \sum_{-N,N\neq 0}^{N} \frac{1}{k^2} \sup_x |\varphi_j''| \cdot \lambda(K) \\
&\quad \leq \sup_x |\varphi_j| \cdot \lambda(K) + \frac{\pi^2}{3} \sup_x |\varphi_j''| \cdot \lambda(K)\,.
\end{aligned}$$

λ je Lebesgueova mera. Ocena na desni je neodvisna od N, zato velja tudi, ko $N \to \infty$. Zveznost sledi.

Zveznost limite smo dokazali 'peš'. Splošno velja, da je linearen funkcional, ki je limita distribucij po točkah, tudi distribucija [22].

Za točko (b) opazimo, da gre za razvoj φ v Fourierovo vrsto:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} \varphi(t) dt = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} \varphi(t) dt\, e^{-ikx} \right) \Big|_{x=0} = \varphi(0).$$

Podobno je pri točki (c). Naj ima testna funkcija φ nosilec v $[\pi(-1-2N), \pi(1+2N)]$, $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} \varphi(t) dt &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} \sum_{-N}^{N} \varphi(t) \chi_{[-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi]}(t) dt \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} \sum_{-N}^{N} \varphi(t-2k\pi) dt \\
&= \sum_{-N}^{N} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} \varphi(t-2k\pi) dt \\
&= \sum_{-N}^{N} \varphi(2k\pi) = \langle \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_{2k\pi}, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

6.2 Laplacova enačba

2.1 Naj bosta f_1 in f_2 subharmonični na G in $f = \sup\{f_1, f_2\}$. Dokaz polzveznosti. Naj bo $a \in G$. Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak δ, da je

$$f_n(b) - f_n(a) < \varepsilon \text{ za vsak } b,\ |b-a| < \delta, n = 1, 2.$$

Privzemimo, da je $f(a) = f_1(a)$. Če je še $f(b) = f_1(b)$, uporabimo polzveznost f_1. Privzemimo, da je $f(b) = f_2(b)$ in zapišimo razliko $f(b) - f(a)$ drugače:

$$f(b) - f(a) = (f_2(b) - f_2(a)) + (f_2(a) - f_1(a)).$$

Po predpostavki je $f_2(a) - f_1(a) \leq 0$, člen $(f_2(b) - f_2(a))$ pa je po predpostavki pod ε, torej je $f(b) - f(a) \leq \varepsilon$.

Dokaz subharmoničnosti. Naj bo g harmonična na disku D in zvezna do roba in $f \leq g$ na $\overline{\partial D}$. Potem je $f_1, f_2 \leq g$ na $\overline{D}$ in zato tudi $f \leq g$ na $\overline{D}$.

2.2 To so vse resitve enačbe $y'' = 0$, torej vse premice $y = ax + b$.

2.3 Subharmonična je za $\alpha \geq 2 - n$.

2.4 $\triangle f(x, y) = 16(x^2 + y^2)$, kritične točke so $-1, 0, 1$.

2.5 Z odvajanjem takoj dokažemo, da je subharmonična na $B(0, a) \setminus 0$, za točko 0 pa uporabimo dejstvo, da je za vsak fiksen r_1 konstanta $-\log(a-r_1)$ enolično določena harmonična funkcija, ki ima na robu diska $B(0,r_1)$ predpisano vrednost $-\log(a-r_1)$ in velja $-\log(a-r) \leq -\log(a-r_1)$ za $r \leq r_1$.

2.6 $\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar{z}} f(z)\overline{f}(z) = |\frac{\partial f}{\partial z}|^2$.

2.7 $\triangle(h\circ u) = h''\circ u \cdot \|\operatorname{grad} u\|^2 + h'\circ u \triangle u \geq 0$.

2.8 $\triangle f(x,y) = 4(x^2+y^2)^{-3} + 4$ minimum je 2.

2.9 Funkcija

$$\frac{9}{x^2+y^2} + (x^2+y^2) - 10$$

je subharmonična, negativna na kolobarju in 0 na robu kolobarja. Če jo komponiramo s funkcijo, ki je na $(-\infty,0)$ konveksna in naraščajoča s polom v 0, je problem rešen. Taka funkcija je npr. $h(z) = -z^{-1}$. Dobimo

$$u(x,y) = (10 - \frac{9}{x^2+y^2} - (x^2+y^2))^{-1}.$$

2.10. Naj bo ξ_n n-ta pozitivna ničla funkcije J_0. Razvijmo

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n J_0(\xi_n \frac{r}{a}), \quad f_n = \frac{2}{a^2 J_1(\xi_n)^2}\int_0^a r f(r) J_0(\xi_n \frac{r}{a}) dr,$$

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n J_0(\xi_n \frac{r}{a}), \quad g_n = \frac{2}{a^2 J_1(\xi_n)^2}\int_0^a r g(r) J_0(\xi_n \frac{r}{a}) dr.$$

Potem je

$$u(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n \operatorname{sh}(\xi_n \frac{h-z}{a}) + g_n \operatorname{sh}(\xi_n \frac{z}{a})}{\operatorname{sh}(\xi_n \frac{h}{a})} J_0(\xi_n \frac{r}{a}).$$

2.11. Razvijmo

$$k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin(n\pi \frac{z}{h}), \quad k_n = \frac{2}{h}\int_0^h k(z)\sin(n\pi \frac{z}{h})\, dz.$$

Potem je

$$u(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n \sin(n\pi \frac{z}{h})}{I_0(n\pi \frac{a}{h})} I_0(n\pi \frac{r}{h}).$$

2.12 Seštejemo rešitvi robnih problemov

$$\triangle u = 0, \quad u(r,0) = f(r), \quad u(r,h) = g(r), \quad u(a,z) = 0,$$

$$\triangle u = 0, \quad u(r,0) = 0, \quad u(r,h) = 0, \quad u(a,z) = k(z),$$

ki sta podani v nalogah 2.10 in 2.11.

2.13 S substitucijo $v(r,z) = u(r,z) - 1$ prevedemo nalogo na nalogo 2.10.

2.14 Rešiti moraš enačbo $\triangle u = 0$ pri robnih pogojih

$$u(a,z) = 0, \quad u(r,0) = u(r,l) = T_0 \chi_{[0,b]}(r).$$

Formule so v rešitvah naloge 2.10.

2.15. Takoj opazimo, da je rešitev neodvisna od polarnega kota in radija, zato rešujemo

$$u_{zz} = 0.$$

Rešitve so linearne funkcije, $u(z) = az + b$. Iz začetnih pogojev $u_z(0) = 0$ in $u(l) = T_0$ dobimo $a = 0$ in $b = T_0$.

2.16. Najprej rešimo lastni problem

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + u_{zz} = \lambda u, \quad u|_{\partial D} = 0$$

Dobimo dvoparametričen sistem lastnih vektorjev in lastnih vrednosti

$$\lambda_{kl} = -\left(\frac{\xi_k}{a}\right)^2 - \left(\frac{l\pi}{h}\right)^2, \quad v_{kl}(r,z) = J_0(\xi_k \frac{r}{a}) \sin \frac{l\pi z}{h}.$$

Nato razvijemo funkcijo f po lastnih vektorjih v prostoru $L^2([0,a] \times [0,h]; r)$ $f = \sum_{k,l} f_{kl} v_{kl}$. Če iščemo rešitev z nastavkom $u = \sum_{k,l} c_{kl} v_{kl}$, dobimo $c_{kl} = -f_{kl}/\lambda_{kl}$, oziroma

$$u(r,z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{f_{kl}}{\frac{\xi_k^2}{a^2} + \frac{l^2\pi^2}{h^2}} J_0(\xi_k \frac{r}{a}) \sin \frac{l\pi z}{h},$$

$$f_{kl} = \frac{4}{ha^2 J_1(\xi_k)^2} \int\limits_0^h \int\limits_0^a r f(r,z) J_0(\xi_k \frac{r}{a}) \sin \frac{l\pi z}{h} drdz.$$

2.17. Najprej uvedeno novo funkcijo $v(r,z) = u(r,z) + (4\pi\sqrt{r^2+z^2})^{-1}$. Nova funkcija reči enačbo $\triangle v = 0$ pri robnem pogoju $v(a,z) = (4\pi\sqrt{a^2+z^2})^{-1}$. S Fourierovo transformacijo na z dobimo rešitev

$$u(r,z) = -\frac{1}{4\pi r} + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{izt} I_0(tr) K_0(at)}{I_0(at)} dt$$

2.18.**popravljena** Rešitev je $u(r,z) = \sum_{m,l} A_{m,l} \sin(\frac{m\pi z}{h}) J_0(\frac{\xi_l r}{a})$, kjer je ξ_l l-ta ničla J_0 in

$$A_{m,l} = \frac{2Q(1-(-1))^m}{\pi m k(\frac{m^2\pi^2}{h^2} + \frac{\xi_l^2}{a^2}) \|J_0(\frac{\xi_l r}{a})\|^2}, \quad \|J_0(\frac{\xi_l r}{a})\|^2 = \frac{a^2}{2} J_1(\xi_l)^2.$$

2.19. **popravljena** Rešitev je $u(r,z) = \sum_{k,l} A_{k,l} \sin(\frac{k\pi z}{h}) J_0(\frac{\xi_l r}{a})$, kjer je ξ_l l-ta ničla J_0 in

$$A_{k,l} = \frac{2q \sin(\frac{k\pi c}{h})}{h(\frac{k^2\pi^2}{h^2} + \frac{\xi_l^2}{a^2}) \|J_0(\frac{\xi_l r}{a})\|^2}, \quad \|J_0(\frac{\xi_l r}{a})\|^2 = \frac{a^2}{2} J_1(\xi_l)^2.$$

2.20. Rešitev je

$$u(r,\varphi,\theta) = -\frac{1}{6}r^2 + \frac{a^2}{6} + \frac{a}{3h}.$$

2.21. Rešitev je $u_1 = -\frac{1}{6}r^2 + A$, $u_2 = Br^{-1}$. Konstanti izračunamo iz robnih pogojev. Znotraj krogle se nahaja vir toplote, ki je enakomerno porazdeljen po krogli in neodvisen od časa. Krogla oddaja toploto v snov ki jo obdaja. Ta snov ima drugačno toplotno prevodnost kot krogla.

2.22. **Popravljeni obe resitvi** Z nastavkom $u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^n P_n(\cos\theta)$ dobimo

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta),$$

kjer je

$$f_n = \frac{2}{2n+1} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta.$$

V prvem primeru je $f_{2n} = 0$ zaradi lihosti in

$$f_{2n+1} = -\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/2 - n)\Gamma(2 + n_)}.$$

v drugem pa

$$f_0 = \frac{T_0}{2}(1 - \cos\theta_0), \quad f_n = \frac{T_0}{2n+1}(P_{n-1}(\cos\theta_0) - P_{n+1}(\cos\theta_0)) \text{ za } n \geq 1.$$

2.23. Z nastavkom $u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^n P_n(\cos\theta)$ dobimo

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{r^n}{na^{n-1} + ha^n} P_n(\cos\theta),$$

kjer je

$$f_n = \frac{2}{2n+1} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta.$$

V posebnem primeru dobimo $f_n = \frac{2}{2n+1} \int_0^1 x P_n(x) dx$, kar se da eksplicitno izračunati s pomočjo formul $xP_n = \frac{n}{2n+1} P_{n-1} + \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}$, $(2n+1)P_n = P'_{n+1} - P'_{n-1}$ in $P_{2k}(0) = \binom{-1/2}{k}$, $P_{2k-1}(0) = 0$. Dobimo

$$f_n = \frac{2\sqrt{\pi}}{(2n+1)(1-n)(2+n)\Gamma((1-n)/2)\Gamma((2+n)/2)}.$$

2.24. Rešitev je $u(r, \theta) = (r + a^3/2r^2)\cos\theta$.

6.3 Difuzijska enačba

3.1. Robna pogoja sta ali $u|_{\partial\Omega} = 0$ ali $\operatorname{grad} u|_{\partial\Omega} = 0$. Po nasvetu izračunamo $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u) = u\triangle u + u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$. Odvajajmo E in dokažimo, da je odvod negativen:

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \int_\Omega 2u(x,t)u_t(x,t)\, dV = \int_\Omega 2u(x,t)\triangle u(x,t)\, dV \\
&= \int_\Omega \operatorname{div}(u \operatorname{grad} u)\, dV - \int_\Omega (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\, dV \\
&= \int_{\partial\Omega} u \operatorname{grad} u\, dV - \int_\Omega (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\, dV \\
&= -\int_\Omega (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\, dV \leq 0.
\end{aligned}$$

To pomeni, da je $E(T) \le E(0) = \int_\Omega f^2(x)\,dV$. Funkcija $u(z)$ ustreza enačbi $\triangle u = 0$. V obeh primerih sta rešitvi konstanti. Kateri?

3.2. Naj bo ξ_n n-ta pozitivna ničla funkcije J_0 in

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n J_0(\xi_n r), \quad f_n = \frac{2}{J_1(\xi_n)^2} \int_0^1 r f(r) J_0(\xi_n r) dr.$$

Potem je rešitev naloge

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n J_0(\xi_n r) e^{-\xi_n^2 t}.$$

V primeru $f(r) = 1$ dobimo

$$f_n = \frac{2}{\xi_n J_1(\xi_n)},$$

v primeru $f(r) = 1 - r^2$ pa

$$f_n = \frac{8}{\xi_n^3 J_1(\xi_n)}.$$

3.3. Razvijemo

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n J_0(\xi_n r/a), \quad f_n = \frac{2}{a^2 J_1(\xi_n)^2} \int_0^a r f(r) J_0(\xi_n r/a) dr.$$

Rešitev naloge je

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n J_0(\xi_n r/a) e^{-c^2 \xi_n^2 t/a^2}.$$

V primeru $f(r) = T_0$ dobimo

$$f_n = \frac{2T_0}{\xi_n J_1(\xi_n)},$$

v primeru $f(r) = T_0(a^2 - r^2)/a^2$ pa

$$f_n = \frac{8T_0}{\xi_n^3 J_1(\xi_n)}.$$

3.4. Rešitev je

$$u(r,t) = 2T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\eta_n) J_0(\eta_n r/a)}{\eta_n (J_1(\eta_n)^2 + J_0(\eta_n)^2)} e^{-c^2 \eta_n^2 t/a^2},$$

kjer so η_n pozitivne rešitve enačbe $\eta_n J_1(\eta_n) = h J_0(\eta_n)$.

3.5. V enačbo vstavimo nastavek

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) J_0(\xi_n r)$$

in primerjamo istoležne koeficiente. Dobimo

$$-\xi_n^2 T_n = T_n' - \frac{2}{\xi_n J_1(\xi_n)}.$$

Iz začetnega pogoja dobimo $T_n(0) = 0$, sledi

$$T_n(t) = \frac{2}{\xi_n^3 J_1(\xi_n)} (1 - e^{-\xi_n^2 t}).$$

3.6. Rešitve lastnega problema $\triangle v = \lambda v$, $v|_{r=a} = 0$ so

$$\lambda_{kl} = -\frac{\xi_{kl}^2}{a^2}, \quad u_{kl}(r,\varphi) = J_k(\xi_{kl} \frac{r}{a}) \cos k\varphi, \quad v_{kl}(r,\varphi) = J_k(\xi_{kl} \frac{r}{a}) \sin k\varphi,$$

kjer je ξ_{kl} l-ta ničla funkcije J_k. Razvijemo $f = f(r,\varphi)$ po lastnih vektorjih v prostoru $L^2([0,a] \times [-\pi,\pi]; r)$

$$f = \sum_{k,l} (p_{kl} u_{kl} + q_{kl} v_{kl}), \quad p_{kl} = \frac{\langle f, u_{kl} \rangle}{\langle u_{kl}, u_{kl} \rangle}, \quad q_{kl} = \frac{\langle f, v_{kl} \rangle}{\langle v_{kl}, v_{kl} \rangle}.$$

Dobimo $u = \sum_{k,l} (p_{kl} u_{kl} + q_{kl} v_{kl}) e^{\lambda_{kl} c^2 t}$. V posebnem primeru je

$$u(r,\varphi,t) = 2bc \cos\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_{1n} J_2(\xi_{1n})} J_1(\xi_{1n} \frac{r}{a}) e^{-\xi_{1n}^2 c^2 t/a^2}.$$

3.7. Rešitev je

$$u(r,\varphi,t) = 2bc \sin\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_{1n} J_2(\xi_{1n})} J_1(\xi_{1n} \frac{r}{a}) e^{-\xi_{1n}^2 c^2 t/a^2},$$

kjer so ξ_{1n} pozitivne ničle funkcije J_1.

3.8. Poiščimo najprej od φ neodvisne rešitve lastnega problema $\triangle v = \lambda v$, $v|_{r=a} = v|_{r=b} = 0$. Splošna rešitev je $v = AJ_0(\sqrt{-\lambda}r) + BN_0(\sqrt{-\lambda}r)$. Iz robnega pogoja $v|_{r=a} = 0$ dobimo $v = CB_0(\sqrt{-\lambda}r)$, kjer je $B_0(\sqrt{-\lambda}r) = N_0(\sqrt{-\lambda}a)J_0(\sqrt{-\lambda}r) - J_0(\sqrt{-\lambda}a)N_0(\sqrt{-\lambda}r)$. Iz robnega pogoja $v|_{r=b} = 0$, dobimo $B_0(\sqrt{-\lambda}b) = 0$. Naj bo p_n n-ta pozitivna rešitev enačbe $B_0(pb) = 0$, potem so $\lambda_n = -p_n^2$, $v_n(r) = B_0(p_n r)$ vse iskane rešitve. **od tu danje mi je zmanjkalo zelesne volje, da bi preverila norme in skalarni produkt, ker mi je Mathematica dajala ven ene cudne funkcije** Razvijmo

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n B_0(p_n r), \quad f_n = \frac{\pi^2 p_n^2 J_0(p_n b)^2}{2(J_0(p_n a)^2 - J_0(p_n b)^2)} \int_a^b r f(r) B_0(p_n r)\, dr.$$

Za rešitev enačbe dobimo

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n B_0(p_n r) e^{-p_n^2 c^2 t}.$$

V posebnem primeru je

$$\begin{aligned} f_n \;=\; & \frac{\pi^2 p_n^2 J_0(p_n b)^2}{2(J_0(p_n a)^2 - J_0(p_n b)^2)} \cdot \frac{1}{p_n}\big[N_0(p_n a)(aJ_1(p_n a) - bJ_1(p_n b)) + \\ & + J_0(p_n a)(aN_1(p_n a) - bN_1(p_n b))\big]. \end{aligned}$$

Enačba opisuje spreminjanje temperature dolge cevi z notranjim radijem a in zunanjim radijem b, ki ima začetno temperaturo T_0 in se nahaja v okolju s temperaturo 0.

3.9. Najprej rešimo lastni problem

$$\triangle v = \lambda v, \quad v|_{\partial V} = 0.$$

Dobimo dvoparametričen sistem lastnih vektorjev in lastnih vrednosti

$$\lambda_{kl} = -\left(\frac{\xi_k}{a}\right)^2 - \left(\frac{l\pi}{h}\right)^2, \quad v_{kl}(r,z) = J_0(\xi_k \frac{r}{a}) \sin\frac{l\pi z}{h}.$$

Odtod sledi

$$u(r,z,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} f_{kl} v_{kl}(r,z) e^{\lambda_{kl} c^2 t},$$

kjer je

$$f_{kl} = \frac{4}{ha^2 J_1(\xi_k)^2} \int_0^h \int_0^a r f(r,z) J_0(\xi_k \frac{r}{a}) \sin \frac{l\pi z}{h} dr dz.$$

V primeru $f(r,z) = T_0$ dobimo

$$f_{kl} = T_0 \frac{2}{\xi_k J_1(\xi_k)} \frac{2}{l\pi} \left(1 - (-1)^l\right),$$

v primeru $f(r,z) = T_0(a^2 - r^2)z(h-z)/a^2h^2$ pa

$$f_{kl} = T_0 \frac{8}{\xi_k^3 J_1(\xi_k)} \frac{4}{(l\pi)^3} \left(1 - (-1)^l\right).$$

V stevcu dobim faktor 2 in ne 4.

3.10. Ker je rešitev neodvisna od kotov, nam od sferičnih funkcij ostane le konstanta, po r pa dobimo $J_{1/2}(\alpha_l r/a)/\sqrt{r}$. Nastavek za rešitev je

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\sin \frac{n\pi r}{a}}{r} e^{-\left(\frac{n\pi c}{a}\right)^2 t},$$

kjer je

$$f_n = \frac{2}{a} \int_0^a r^2 f(r) \frac{\sin \frac{n\pi r}{a}}{r} dr = \frac{2}{a} \int_0^a r f(r) \sin \frac{n\pi r}{a} dr.$$

V primeru $f(r) = T_0$ dobimo

$$f_n = \frac{2aT_0}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

Naloga opisuje ohlajanje krogle z začetno temperaturo T_0 v okolju s temperaturo 0.

3.11 S substitucijo $u(r,t) = v(r,t) + T_1$ prevedemo problem na nalogo 3.10.

3.12. Rešitev iščemo z nastavkom

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \frac{\sin \frac{k\pi r}{a}}{r}.$$

Razvijemo $f(r)$ v vrsto

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \frac{\sin \frac{k\pi r}{a}}{r}, \quad f_k = \frac{2}{a} \int_0^a r f(r) \sin \frac{k\pi r}{a}\, dr.$$

in primerjamo istoležne koeficiente

$$-(k\pi/a)^2 T_k = \frac{1}{c^2} T_k' - f_k.$$

pred f_k je bil C, ki sem ga pobrisala Iz začetnega pogoja dobimo $T_k(0) = 0$, odtod pa

$$T_k(t) = \frac{f_k}{(k\pi/a)^2}(1 - e^{-(\frac{k\pi c}{a})^2 t}).$$

V primeru $f(r) = C$, dobimo

$$f_k = C \frac{2a}{k\pi}(-1)^{k+1}.$$

3.13. Najprej rešimo lastni problem

$$\triangle v = \lambda v, \quad v|_{\partial V} = 0.$$

Dobimo dvoparametričen sistem lastnih vrednosti

$$\lambda_{ln} = -(\xi_{ln}/a)^2,$$

$$v_{ln}(r, \theta) = r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(\xi_{ln} r/a) P_n(\cos\theta),$$

kjer je ξ_{ln} l-ta pozitivna ničla funkcije $J_{n+\frac{1}{2}}$. Potem je

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} f_{ln} v_{ln}(r, \theta) e^{\lambda_{ln} c^2 t},$$

kjer je

$$f_{ln} = \frac{2n+1}{a^2 J_{n+\frac{3}{2}}(\xi_{ln})^2} \int_0^a \int_0^\pi r^2 \sin\theta f(r, \theta) v_{ln}(r, \theta) d\theta dr.$$

V primeru $f(r,\theta) = T_0 \cos\theta$ dobimo $f_{ln} = 0$ za $n \neq 1$, saj je $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$.

$$\begin{aligned}
I_{l1} &= \int_0^a \int_0^\pi r^2 \sin\theta T_0 \cos\theta r^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{3}{2}}(\xi_{l1} r/a) \cos\theta d\theta dr = \\
&= T_0 \int_0^a r^{\frac{3}{2}} J_{\frac{3}{2}}(\xi_{l1} r/a) dr \int_0^\pi \sin\theta \cos^2\theta d\theta = \\
&= -\frac{2a^{5/2}}{\sqrt{\pi}\xi_{l1}^{5/2}}(-2 + 2\cos\xi_{l1} + \xi_{l1}\sin\xi_{l1})\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Kar se razlikuje od prejsnje resitve

$$\frac{2T_0 a^{3/2}}{\xi_{l1} J_{5/2}(\xi_{l1})}.$$

3.14. **ta je skoraj enaka prejsnji, zato je potrebno resitev se enkrat preveriti**. Naj bo ξ_l l-ta pozitivna ničla funkcije $J_{3/2}$. Potem je

$$u(r,\theta,t) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n r^{-1/2} J_{3/2}(\xi_l \frac{r}{a}) \right) \cos\theta,$$

kjer je $f_n = 2a^{3/2}\xi_l^{5/2}/J_{5/2}(\xi_l)$.

3.15. Naj bo ν_n n-ta pozitivna rešitev enačbe $\operatorname{tg}\nu_n = \frac{\nu_n}{1-ah}$. Dobimo

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\sin\frac{\nu_n r}{a}}{r} e^{-\left(\frac{\nu_n c}{a}\right)^2 t}, \quad f_n = \frac{\int_0^a r f(r) \sin\frac{\nu_n r}{a} dr}{\int_0^a \sin^2\frac{\nu_n r}{a} dr}.$$

V posebnem primeru je

$$f_n = 2aT_0 \frac{(-\nu_n \cos\nu_n + \sin\nu_n)}{\nu_n(\nu_n - \sin\nu_n \cos\nu_n)}.$$

Ta izraz se da nekoliko poenostaviti s pomočjo definicijske relacije za ν_n.

6.4 Valovna enačba

4.1. Zapišimo najprej splošno rešitev. Naj bo

$$\omega_{mn} = c\pi \sqrt{\left(\frac{(2m+1)\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{(2n+1)\pi}{2b}\right)^2},$$

$$v_{mn}(x,y) = \cos\frac{(2m+1)\pi x}{2a}\cos\frac{(2n+1)\pi y}{2b}$$

za $m, n \in \mathbb{N}_0$. Lastne vektorje s sinusi smo izpustili, ker sta $f(x,y)$ in $g(x,y)$ sodi tako po x kot y. Rešitev je

$$u(x,y,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(f_{mn}\cos\omega_{mn}t + \frac{g_{mn}}{\omega_{mn}}\sin\omega_{mn}t\right)v_{mn}(x,y),$$

kjer je

$$f_{mn} = \frac{1}{\varepsilon_{mn}}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} f(x,y)v_{mn}(x,y)dxdy,$$

$$g_{mn} = \frac{1}{\varepsilon_{mn}}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} g(x,y)v_{mn}(x,y)dxdy,$$

$$\varepsilon_{mn} = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} v_{mn}(x,y)^2 dxdy = ab.$$

Za naš konkretni f dobimo

$$f_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}, & m = n \end{cases}.$$

4.2. Rešitev je

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= 16\sum_{l,n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{(2l+1)\pi}\right)^3\left(\frac{2}{(2k+1)\pi}\right)^3(-1)^{l+k}\cdot \\ &\cos\left(\frac{\pi t}{2}\sqrt{(2k+1)^2+(2l+1)^2}\right)\cos\left(\frac{(2l+1)\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{(2k+1)\pi y}{2}\right). \end{aligned}$$

4.3. Rešitev je

$$u(x,y,z,t) = -4^3 \sum_{k,l,m=1}^{\infty} \frac{2^9 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\sqrt{(2k+1)^2+(2l+1)^2+(2m+1)^2}\right)}{\pi^9(2k+1)^3(2l+1)^3(2m+1)^3} \cdot$$
$$\sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{(2l+1)\pi y}{2}\right)\sin\left(\frac{(2m+1)\pi z}{2}\right),$$

4.4. **se enkrat preveriti** Ker so pogoji homogeni po x, lahko naredimo separacijo na x. Dobimo lastne funkcije $X_k(x) = \sin(a_k x)$, kjer je $a_k = \frac{(2k+1)}{2}$. Rešitev iščemo z nastavkom

$$u(x,t) = \sum_1^{\infty} T_k(t)\sin(a_k x).$$

Vstavimo v enačbo in dobimo

$$\sum_1^{\infty}(T_k''(t) + T_k'(t) + a_k^2 T_k(t))\sin(a_k x) = 0.$$

Začetni pogoji so $T_k(0) = 0$ in $T_k'(0) = b_k$, kjer je

$$\sin(x) = \sum_1^{\infty} b_k \sin(a_k x) = \sum_1^{\infty} T_k'(0)\sin(a_k x).$$

Koeficienti b_k so

$$b_k = \frac{4(-1)^k}{\Pi(3-4n-4n^2)}.$$

Rešitve diferencialne enačbe $T_k''(t)+T_k'(t)+a_k^2T_k(t) = 0$ so $T_k = e^{-t/2}(A_k\sin(\sqrt{4a_k^2-1}t+$ $B_k\sin(\sqrt{4a_k^2-1}t)$. Ker je $T_k(0) = 0$, je $B_k = 0$ in

$$A_k = \frac{b_k}{\sqrt{4a_k^2-1}}.$$

4.5. Dobimo

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[f_n\cos\frac{c\xi_n t}{a} + \frac{ag_n}{c\xi_n}\sin\frac{c\xi_n t}{a}\right]J_0(\frac{\xi_n r}{a}),$$

kjer je ξ_n n-ta pozitivna ničla funkcije J_0 in

$$f_n = \frac{2}{a^2 J_1(\xi_n)^2}\int_0^a rf(r)J_0(\frac{\xi_n r}{a})dr,\ g_n = \frac{2}{a^2 J_1(\xi_n)^2}\int_0^a rg(r)J_0(\frac{\xi_n r}{a})dr.$$

V primeru (a) dobimo

$$f_n = \frac{8h}{\xi_n^3 J_1(\xi_n)}, \quad g_n = 0,$$

v primeru (b) pa

$$f_n = 0, \quad g_n = \frac{2v_0 b}{\xi_n a}\frac{J_1(\xi_n b/a)}{J_1(\xi_n)^2}.$$

4.6. Z nastavkom $u(r,t) = \sum_{n=1}^\infty T_n(t)J_0(\xi_n r/a)$ dobimo

$$T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t) = f_n(t), \quad T_n(0) = T_n'(0) = 0,$$

kjer je $\omega_n = c\xi_n/a$ in

$$f_n(t) = \frac{2}{a^2 J_1(\xi_n)^2}\int_0^a rF(r,t)J_0(\frac{\xi_n r}{a})dr.$$

Z Laplacovo transformacijo dobimo

$$T_n(t) = \frac{1}{\omega_n}\int_0^t \sin\left(\omega_n(t-s)\right) f_n(s)ds.$$

V primeru (a) dobimo

$$f_n(t) = A_n \sin\omega t, \quad A_n = \frac{2Ab}{\xi_n a}\frac{J_1(\xi_n b/a)}{J_1(\xi_n)^2},$$

torej je

$$T_n(t) = \begin{cases} \frac{A_n}{\omega_n(\omega^2-\omega_n^2)}\left(\omega\sin(\omega_n t) - \omega_n\sin(\omega t)\right) & \omega \neq \omega_n \\ \frac{C_n}{2\omega_n^2}\left(\sin(\omega_n t) - \omega_n t\cos(\omega_n t)\right) & \omega = \omega_n \end{cases}.$$

V primeru (b) dobimo

$$f_n(t) = B_n, \quad B_n = \frac{8B}{\xi_n^3 J_1(\xi_n)},$$

torej je

$$T_n(t) = \frac{B_n}{\omega_n^2}(1 - \cos(\omega_n t)).$$

4.7. Naj bo ξ_{mn} n-ta pozitivna ničla funkcije J_m,

$$v'_{mn}(r,\varphi) = \cos m\varphi J_m\left(\frac{\xi_{mn}r}{a}\right), \quad v''_{mn}(r,\varphi) = \sin m\varphi J_m\left(\frac{\xi_{mn}r}{a}\right),$$

$\omega_{mn} = \xi_{mn}c/a$ in

$$\varepsilon_{mn} = \begin{cases} 2, & m = 0 \\ 1, & m \neq 0 \end{cases}$$

Dobimo

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[f'_{mn}v'_{mn}(r,\varphi) + f''_{mn}v''_{mn}(r,\varphi)\right]\cos\omega_{mn}t +$$

$$+\frac{1}{\omega_{mn}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[g'_{mn}v'_{mn}(r,\varphi) + g''_{mn}v''_{mn}(r,\varphi)\right]\sin\omega_{mn}t,$$

kjer je

$$f'_{mn} = \frac{2}{\varepsilon_{mn}\pi a^2 J_{m+1}(\xi_{mn})^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^a rf(r,\varphi)v'(r,\varphi)d\varphi dr,$$

$$f''_{mn} = \frac{2}{\pi a^2 J_{m+1}(\xi_{mn})^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^a rf(r,\varphi)v''(r,\varphi)d\varphi dr.$$

Koeficiente g'_{mn} in g''_{mn} dobimo tako, da $f(r,\varphi)$ zamenjamo z $g(r,\varphi)$. V našem primeru je $f'_{mn} = f''_{mn} = 0$, $g''_{mn} = 0$ in

$$g'_{mn} = \frac{2}{\varepsilon_{mn}\pi a^2 J_{m+1}(\xi_{mn})^2}.$$

preveriti zadnje 4 cifre

4.8 Funkcije u, f in g glede na φ liho (zakaj?) nadaljujemo na cel krog $[0,a]\times[-\pi,\pi]$, nato uporabimo rešitev naloge 4.7. Opazimo, da so členi z eno črtico enaki nič.

4.9. Naj bo

$$\omega_{kl} = c\sqrt{\frac{\xi_k^2}{a^2} + \frac{l^2\pi^2}{h^2}}, \quad v_{kl}(r,z) = J_0(\xi_k\frac{r}{a})\sin\frac{l\pi z}{h}.$$

Rešitev je

$$u(r,z,t)=\sum_{k=1}\sum_{l=1}\left[f_{kl}\cos(\omega_{kl}t)+\frac{g_{kl}}{\omega_{kl}}\sin(\omega_{kl}t)\right]v_{kl}(r,z),$$

kjer je

$$f_{kl}=\frac{4}{ha^2J_1(\xi_k)^2}\int_0^a\int_0^h rf(r,z)v_{kl}(r,z)drdz,$$

$$g_{kl}=\frac{4}{ha^2J_1(\xi_k)^2}\int_0^a\int_0^h rg(r,z)v_{kl}(r,z)drdz.$$

4.10. Najprej poskusimo najti lastne funkcije. Takoj ugotovimo, da je to le funkcija 0, zato poskusimo z delno separacijo. Rešitev je neodvisna od spremenljivke φ. S separacijo po r in z dobimo lastne funkcije $R_k(r)=J_0(c_kr)$, kjer je $c_k=\frac{\xi_k}{a}$, ξ_k pa je k-ta ničla J_0 in $Z_k(z)=\sin(d_kz)$, kjer je $d_k=k\pi h^{-1}$. Rešitev iščemo z nastavkom

$$u(r,z,t)=\sum_{k,l}A_{k,l}(t)R_k(r)Z_l(z).$$

Odvajamo in vstavimo v prvotno enačbo:

$$f(r,z)\sin(\omega t)=\sum_{k,l}(A''_{k,l}(t)+(c_k^2+d_l^2)A_{k,l}(t))R_k(r)Z_l(z).$$

Naj bo

$$f(r,z)=\sum_{k,l}B_{k,l}R_k(r)Z_l(z).$$

Funkcije $A_{k,l}$ so potem rešitve enačb:

$$A''_{k,l}(t)+(c_k^2+d_l^2)A_{k,l}(t)=B_{k,l}\sin(\omega t),\quad A_{k,l}(0)=0,\ A'_{k,l}(0)=0.$$

Naj bo $\omega_{kl}=\sqrt{c_k^2+d_l^2}$. Splošna rešitev je

$$A_{kl}=a_{kl}\sin(\omega_{kl}t)+b_{kl}\cos(\omega_{kl}t).$$

Če je $\omega\neq\omega_{kl}$, je partikularna rešitev

$$A_{klp}=\frac{B_{kl}\sin(\omega t)}{\omega_k^2-\omega^2},$$

sicer pa je partikularna rešitev enaka

$$A_{klp} = -\frac{2B_{kl} t \sin(\omega t)}{\omega}.$$

Koeficienti a_{kl} so 0, za koeficiente b_{kl} pa dobimo

$$b_{kl} = -\frac{A'_{klp}(0)}{\omega}.$$

4.11. Naj bo

$$\omega_{nl} = c\xi_{nl}/a, \quad v_{nl}(r,\theta) = r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(\xi_{nl} r/a) P_n(\cos\theta),$$

kjer je ξ_{nl} l-ta pozitivna ničla funkcije $J_{n+\frac{1}{2}}$. Potem je

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\left[f_{nl}\cos\omega_{nl}t + \frac{g_{nl}}{\omega_{nl}}\sin\omega_{nl}t\right] v_{nl}(r,\theta),$$

kjer

$$f_{nl} = \frac{2}{2n+1}\frac{2}{a^2 J'_{n+\frac{1}{2}}(\xi_{nl})^2}\int_0^a\int_0^\pi r^2 \sin\theta f(r,\theta) v_{nl}(r,\theta)\,dr d\theta,$$

$$g_{nl} = \frac{2}{2n+1}\frac{2}{a^2 J'_{n+\frac{1}{2}}(\xi_{nl})^2}\int_0^a\int_0^\pi r^2 \sin\theta g(r,\theta) v_{nl}(r,\theta)\,dr d\theta.$$

Če je ξ ničla funkcije J_ν, potem je $J_{\nu-1}(\xi) = J'_\nu(\xi) = J_{\nu+1}(\xi)$.

6.5 Uporaba izreka Cauchy - Kovalevska

5.1. Enačba je nehomogena, zato poskusimo najprej najti kako partikularno rešitev. Takoj uganemo, da je $u_p = x^2 + y^2$ rešitev enačbe. Potem je $u = u_h + u_p$, kjer funkcija u_h reši homogeno enačbo pri pogojih $u_h(0,y) = u(0,y) - u_p(0,y) = e^{-y}$ in $u_{hx}(0,y) = u_x(0,y) - u_{px}(0,y) = e^y$. Funkcijo u_h iščemo v obliki

$$u_h(x,y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{i,j} x^i y^j.$$

Vstavimo v enačbo in dobimo

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} \left((i+1)(i+2)a_{i+2,j} + (j+1)a_{i,j+1}\right) x^i y^j = 0,$$

torej je

$$a_{i+2,j} = -a_{i,j+1}\frac{(j+1)}{(i+1)(i+2)}.$$

Dobimo rekurzivni formuli za sode in lihe i :

$$i = 2k : a_{2k,j} = -a_{2k-2,j+1}\frac{(j+1)}{2k(2k-1)} = \ldots = (-1)^k a_{0,j+k}\frac{(j+k)!}{j!(2k)!}$$

$$i = 2k+1 : a_{2k,j} = (-1)^k a_{1,j+k}\frac{(j+k)!}{j!(2k+1)!}.$$

Koeficiente $a_{0,j}$ in $a_{1,j}$ izračunamo iz začetnih pogojev:

$$\sum a_{0,j}y^j = e^{-j} \text{ in } \sum a_{1,j}y^j = e^y$$

in dobimo

$$a_{0,j} = \frac{(-1)^j}{j!}, \quad a_{1,j} = \frac{1}{j!}.$$

Koeficienti, ki jih iščemo so

$$a_{2k,j} = \frac{(-1)^j}{j!(2k)!} \text{ in } a_{2k+1,j} = \frac{(-1)^k}{j!(2k+1)!}.$$

Vstavimo koeficiente in dobimo

$$u_h(x,y) = \sum_{k,j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!(2k)!}x^{2k}y^j + \sum_{k,j=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{j!(2k+1)!}x^{2k+1}y^j = e^{-y}\operatorname{ch}(x) + e^y\sin(x).$$

Rešitev prvotne enačbe je $u(x,y) = e^{-y}\operatorname{ch}(x) + e^y\sin(x) + x^2 + y^2$.

5.2. $u = (\operatorname{ch}(x)+1)e^y$.

5.3. $u = e^x(\sin(y)+\cos(y))$.

5.4. $u = \operatorname{ch}(x)e^{-y} - \sin(x)e^y$.

5.5. $u = e^x(\sin(y)+\cos(y)) + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{6}y^3$.

5.6. Enačba je rešljiva le, če je $b(x) = x$. Potem je $u = a(x) + xy$. S substitucijo $t = x + y, s = y$ se prepričaj, da enačba ne ustreza izreku Cauchy - Kovalewska.

Literatura

Zbirke nalog

[1] Thomas William Körner: *Exercises in Fourier analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[2] Pavlina Mizori-Oblak: *Matematika za študente tehnike in naravoslovja*, 3. del, 2. izdaja, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 1991.

[3] Murray R. Spiegel: *Fourier analysis with applications to boundary value problems*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1974.

[4] Momčilo Ušćumlić, Pavle Miličić: *Zbirka zadataka iz više matematike, 2. dio*, 4. izdanje, Naučna knjiga, Beograd, 1984.

Teorija z nalogami in/ali primeri

[5] Lawrence Evans: *Partial differential equations*, AMS, Providence, 1998

[6] Gerald Folland: *Introduction to partial differential equations*, Princeton university Press, Princeton -New Jersey, 1995

[7] Fritz John: *Partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, Budapest, 1991

[8] Milan Hladnik: *Povabilo v harmonično analizo*, DMFA, Ljubljana, 1992.

[9] Andrej Nikolaevič Kolmogorov, Sergej Vasil'evič Fomin: *Elementi teoriji funkcij i funkcionalnogo analiza*, izdanije šestoje, Nauka, Moskva,

1989. (Angleški prevod ne vsebuje poglavja o diferencialnem računu v normiranih prostorih).

[10] France Križanič: *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun*, DMFA, Ljubljana, 1974.

[11] France Križanič: *Navadne in parcialne diferencialne enačbe*, DMFA, Ljubljana, 1985.

[12] France Križanič: *Parcialne diferencialne enačbe*, DMFA, Ljubljana, 2004.

[13] David Logan: *Applied differential equations* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, Budapest 2004

[14] Alois Kufner, Jan Kadlec: *Fourier series*, English Translation, Iliffe Books, London, 1971.

[15] Mihail Alekseevič Lavrent'ev, Boris Vladimirovič Šabat: *Metodi teorii funkciji kompleksnogo peremenogo*, Nauka, Moskva, 1987.

[16] Ian N. Sneddon: *Fourier Transforms*, McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1951.

[17] Anton Suhadolc: *Integralske transformacije in integralske enačbe*, DMFA, Ljubljana, 1985.

[18] Anton Suhadolc: *Robni problemi za linearne diferencialne enačbe drugeg reda*, DMFA, Ljubljana, 1993.

[19] Anton Suhadolc: *Navadne diferencialne enačbe*, DMFA, Ljubljana 1996.

[20] Nico M. Temme: *An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1996.

[21] Egon Zakrajšek: *Analiza 3*, DMFA, Ljubljana, 2000.

[22] Wolfgang Walter: *Einführung in die Theorie der Distributionen*, BI Wissenschaftsverlag, 1974.