

# GRAFI, GRAFI IN ŠE ENKRAT GRAFI

Tine Golež

Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana

**Povzetek** – Grafi niso le odlične in zgoščene predstavitve medsebojne odvisnosti fizikalnih količin nekega pojava, pač pa tudi izziv za razmislek. Avtor tako pokaže, kako se nekaterim računom ognemo prav z razmislekom ob grafu, pa tudi primere, ko graf postane osrednji vir podatkov za reševanje fizikalne naloge.

**Abstract** - Charts are not only an excellent and concise presentation of the interdependence of physical quantities of a given phenomenon, but also a challenge for reflection. The author shows how certain calculations can be replaced with the help of graphs, plus some examples in which the graphs are the central source of information for solving physics tasks.

## UVOD

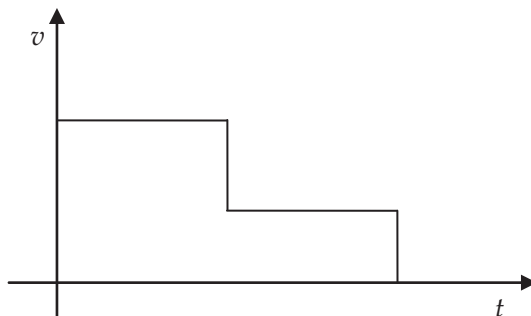
Preprosti, predvsem tortni in stolpični grafi so dobili domovinsko pravico že v nižjih razredih osnovne šole. To je prav, saj je razmislek ob grafični predstavitvi svojevrstna telovadba za možgane. Prav zato se mi zdi, da v gimnazijah še niso dobili toliko prostora, kot si ga zaslužijo. Nekaj primerov grafov, ki so nastali med mojimi pripravami na pouk in so bili večkrat v razredu tudi uporabljeni, ponujam bralcem v ogled in uporabo.

## NA BLED

Precej standardna naloga je vožnja dveh avtov na Bled (iz Ljubljane, tako da vzamemo za dolžino poti okroglih 60 km). Prvi avto vozi pol časa s hitrostjo 90 km/h, pol časa pa s hitrostjo 40 km/h. Drugi avto pa pol poti vozi s hitrostjo 90 km/h in pol poti s 40 km/h. Bosta sočasno prispela?

Kar nekaj dijakov trdi, da bosta. Ne prav zahtevni računi jim kmalu pokažejo, da to ni res. A ti računi niso nič posebnega, zato se lotimo naloge le s poznavanjem grafov kinematike.

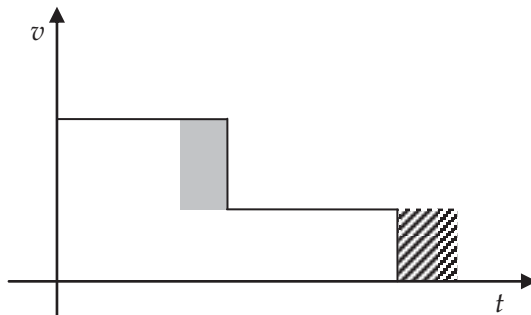
Narišemo graf  $v(t)$  za prvi avto. Ne vemo, kolikšna je vrednost na časovni osi, vemo pa, da je pol časa vozil z eno hitrostjo in pol z drugo.



Slika 1. Avto je pol časa vozil z večjo in pol časa z manjšo konstantno hitrostjo.

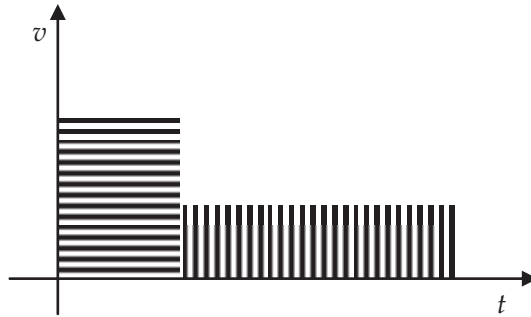
Iz grafa  $v(t)$  dobimo premik v izbranem časovnem intervalu tako, da pogledamo, kolikšna je ploščina med krivuljo in časovno osjo. Če gre za ploščino pod osjo, gre za premik nazaj. Pogled na graf na sliki 1 izda, da je bil znatno večji del poti prevožen z večjo hitrostjo.

Za grafični prikaz  $v(t)$  za drugi avtomobil je potrebno, da nekaj prvega pravokotnika odrežemo (odrežemo del, ki je sivi pravokotnik na sliki 2) in ga prestavimo k drugemu; sivi pravokotnik postane črtasti pravokotnik z enako ploščino, kot jo ima sivi. Odvezeti ga moramo toliko, da bosta ploščini novonastalih pravokotnikov pod grafoma obeh hitrosti enaki (slika 2), saj drugi avtomobil prevozi vsako polovico celotne poti z drugačno hitrostjo.



Slika 2. Hitri del vožnje skrajšamo in za isti premik (»ploščino«) počasno vožnjo podaljšamo. Seveda pa se počasna vožnja podaljša »na obeh straneh«, še za del pod sivim pravokotnikom.

Celotna ploščina (celotna pot) je še vedno enaka, po tej spremembi pa sta enaki tudi ploščini obeh pravokotnikov na sliki 3, seveda pa segata bolj daleč v desno. To pa pomeni, da je ta avto vozil daljši čas kot avto, ki je pol časa vozil z eno in pol z drugo hitrostjo. Tako smo le z analizo grafa ugotovili, da je prva vožnja (pol časa ena hitrost, pol časa druga) časovno krajša.



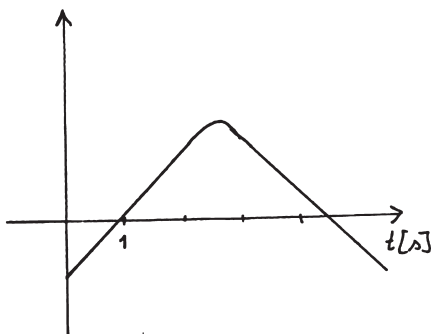
Slika 3. Prikaz vožnje avta, ki je pol poti vozil z eno in pol z drugo hitrostjo. Ploščini obeh pravokotnikov sta enaki.

Na koncu ni odveč vprašanje, kako bi se spremenil rezultat, če bi bila najprej na vrsti manjša hitrost in v drugem delu večja. V glavnem vsi dijaki zlahka odgovorijo, a vselej je dobro, da obravnavani pojav premislimo tudi ob malce spremenjenih okoliščinah in se vprašamo, kako to vpliva na rezultat.

### GRAFI KINEMATIKE

Bralci že vedo, da moje dijake čaka v prvi kontrolni nalogi ena naloga, pri kateri je glavni del graf. Potem iz tega grafa odčitajo in izračunajo več fizikalnih količin [1, 2]. Že pred leti pa sem – najbrž pod vplivom tekmovalnih nalog iz logike – sestavil še nekaj nalog z grafi za ustno spraševanje. Graf in vprašanja projiciram na belo tablo, tako da vsi vidijo, za kaj gre. Naloga, ki jih predstavljam, zastavim dijakom takrat, ko že vedo, kako iz grafov  $x(t)$  in  $v(t)$  kvalitativno preberemo hitrost in pospešek. Opozorim jih še na poljubno izbiro izhodišča opazovalnega sistema. Ob predpostavki, da je gibanje premo, se torej lotimo reševanja naslednjih nalog.

Kateri graf –  $x(t)$ ,  $v(t)$  ali  $a(t)$  – je na sliki, če veš, da velja:



- a) hitrost je bila vsaj v enem trenutku enaka 0;
- b) pospešek je bil vsaj v dveh trenutkih enak 0;
- c) pospešek ni bil nikoli več kot 1,2 sekunde enak 0.

Naloge se lotimo najprej ob predpostavki, da je na sliki graf  $x(t)$ , potem predpostavimo, da gre za graf  $v(t)$ , in nazadnje še tako, kot da imamo graf  $a(t)$ .

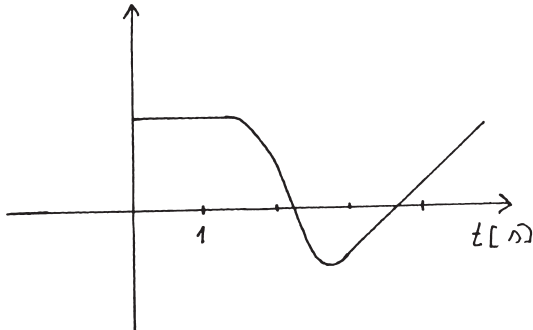
1.)	izjava ↓	predpostavka →	$x(t)$	$v(t)$	$a(t)$
	hitrost je bila vsaj v enem trenutku enaka 0		+ (1)	+ (4)	? (7)
	pospešek je bil vsaj v dveh trenutkih enak 0		+ (2)	- (5)	+ (8)
	pospešek ni bil nikoli več kot 1,2 sekunde enak 0		- (3)	+ (6)	+ (9)

- (1) Če je to graf  $x(t)$ , je vsekakor hitrost bila vsaj v enem trenutku enaka 0, saj je strmina tangente na krivuljo v eni točki vodoravna.
- (2) Če je to graf  $x(t)$ , je bil pospešek prve in zadnje sekunde enak nič. Strmina tangente, ki ustreza hitrosti, se ne spreminja. Če pa se hitrost ne spreminja, je pospešek enak 0.
- (3) Če je to graf  $x(t)$ , je bil pospešek več kot 1,2 s enak 0 (glej utemeljitev izjave 2), zato ta izjava ne more biti resnična. Na sliki torej ni graf  $x(t)$ .
- (4) Če je to graf  $v(t)$ , je bila hitrost kar v dveh trenutkih enaka 0; prva izjava je zato resnična.
- (5) Če je to graf  $v(t)$ , je bil pospešek enak 0 le tedaj, ko je tangenta na graf  $v(t)$  vodoravna. To pa velja le v enem trenutku. Zato izjava ne drži. Graf na sliki ne more biti  $v(t)$ . Kljub temu preverimo še tretjo izjavo.
- (6) Če je to graf  $v(t)$ , potem resnično ni bil pospešek več kot 1,2 s enak 0.
- (7) Pri utemeljitvi ugotavljanja pravilnosti te predpostavke je dobro dijake spomniti na navpični met navzgor. Če vrženo telo opazujemo le kratek čas, hitrost ne bo enaka nič. Če je čas opazovanja daljši od dviznega časa, pa bo hitrost enaka 0. Ker pri nalogi ne vemo ničesar o velikosti začetne hitrosti, je pospešek, ki ga kaže graf, lahko povzročil, da je bila hitrost v nekem trenutku enaka 0. Ker pa to ni nujno, našo nezmožnost določitve pravilnosti izjave označimo z vprašajem.
- (8) Če je to graf  $a(t)$ , je vsekakor bil pospešek v dveh trenutkih enak 0.
- (9) Če je to graf  $a(t)$ , je tudi zadnja izjava resnična.

Odgovor: graf na sliki zagotovo ni  $x(t)$  in tudi ni  $v(t)$ , lahko pa bi bil  $a(t)$ .

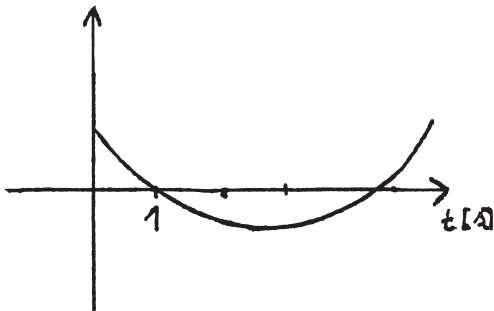
Pri naslednjih grafih je podana le rešitev brez razlage.

2. primer

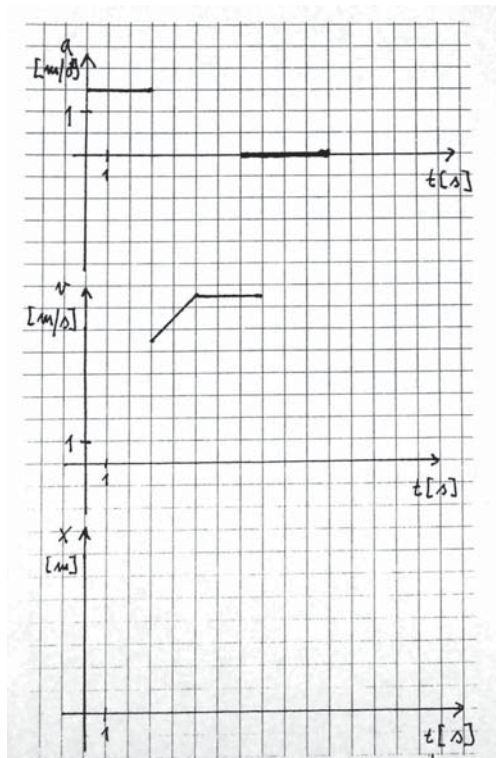


2. Kateri graf - $x(t)$ , $v(t)$ ali $a(t)$ - je na sliki? Vemo:	$x(t)$	$v(t)$	$a(t)$
a) vsaj v enem trenutku je bil pospešek enak 0;	+	+	+
b) več kot 1 sekundo se je telo gibalo premo in enakomerno;	+	+	-
c) hitrost ni bila nikoli več kot 1 sekundo enaka 0.	-	+	+

3. primer:



3. Kateri graf - $x(t)$ , $v(t)$ ali $a(t)$ - je na sliki? Vemo:	$x(t)$	$v(t)$	$a(t)$
a) ob času $t = 0$ telo ni bilo v izhodišču opazovalnega sistema;	+	?	?
b) ob času $t = 0$ hitrost ni bila enaka 0;	+	+	?
c) pospešek ni bil nikoli enak 0.	+	-	-



## ZA MATURANTE

Poglejmo še primer strukturirane naloge, ki sem jo pripravil za maturante. Tudi tokrat je osrednji vir podatkov graf. Slika iz tega testa je zgoraj.

Naloga:

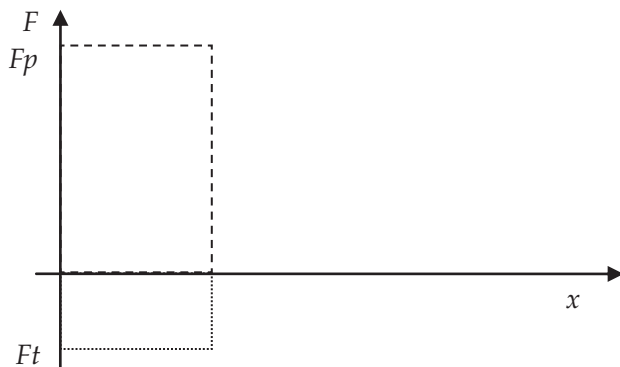
1. Avto se je gibal, kot kažeta grafa. Vendar grafa (vsak zase) ne opisujeta celotnega gibanja. Oba skupaj pa nam dasta dovolj informacij o tem premem gibanju, za katero vemo še:  $x(0) = 0$ .

- Kolikšna je bila hitrost ob času  $t = 0$ ?
- Dopolni grafe (na sliki, tu si lahko pomagaš s pomožnimi računi).
- Kolikšno pot je avto prevozil v prvih treh sekundah?
- č) Kolikšno pot je prevozil v tretji sekundi?
- S kolikšnim konstantnim pojemkom se je začel ob času  $t = 11$  s ustavljati, če vemo, da se je ustavil v treh sekundah?
- Kolikšna je celotna prevožena pot?
- Dopolni graf  $a(t)$  za ustavljanje.
- Dopolni graf  $v(t)$  za ustavljanje.
- Dopolni graf  $x(t)$  za ustavljanje.

(Precej dijakov je premalo pozornih pri risanju grafa  $x(t)$ . Nagib, ki ga doseže parabola v trenutku  $t = 5$  s, je enak nagibu ravnega (in poševnega) dela grafa  $x(t)$ , ki sedaj sledi. Dijaki radi narišejo parabolo prestrmo, potem pa se graf nadaljuje s položno daljico. Podobno napako naredijo pri zadnjem delu grafa  $x(t)$ .)

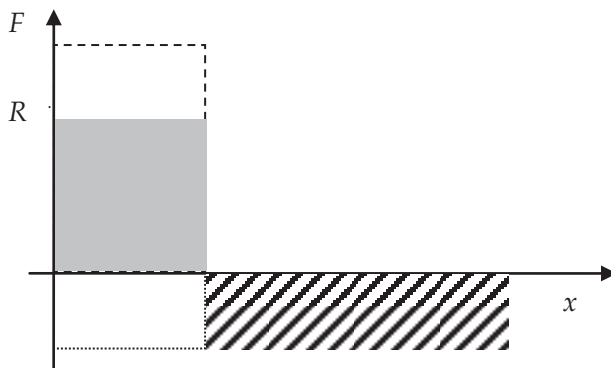
### ODRINEMO STOL

Predpostavimo, da je med stolom in tlemi konstanten koeficient trenja. Stol odrinemo tako, da nekaj časa nanj delujemo s stalno silo. Pri tem se stol premakne. Narišimo graf.



Slika 4. Sila potiskanja ( $F_p$ ) je znatno večja od sile trenja ( $F_t$ ). Med potiskanjem se stol premakne za  $x$ .

Vprašajmo se, koliko se bo stol še premaknil, ko ga bomo nehali odpraviti. Zanima nas primerjava tega premika s premikom, ko smo stol še potiskali. Naloge se lotimo brez enačb, le z razumevanjem grafov. Najprej dorišemo, kolikšna je rezultanta vseh zunanjih sil. Prav ta rezultanta odloča o tem, koliko kinetične energije bo imel stol. In natančno toliko bo lahko po odpravljanju še opravil dela.

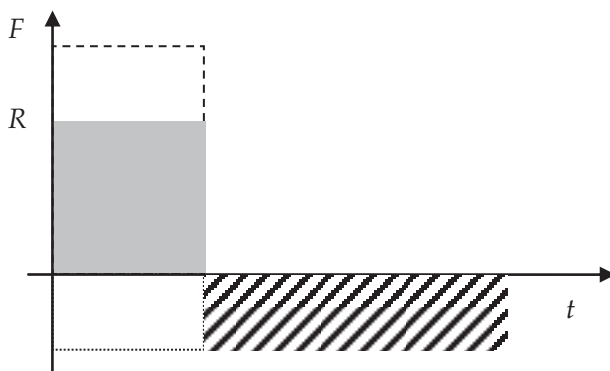


Slika 5. Sivi lik predstavlja delo, ki ga je opravila rezultanta zunanjih sil. (Velikost te rezultante je zgornji rob sivega pravokotnika, označena je z  $R$ .) Toliko dela, kot je ploščina tega pravokotnika, bo potem stol lahko še opravil, kar je prikazano s pravokotnikom z vzorcem.

Z merjenjem stranic (in s tem likov) smo tako ugotovili, da je premik pri prostem drsenju še enkrat tolikšen, kot je bila sprememba lege pri potiskanju.

Nalogo lahko nadaljujemo z vprašanjem o času. Ker gre za zaustavljanje, kjer je premik sorazmeren s kvadratom časa (enakomerno pospešeno gibanje), bi kdo pričakoval, da časa odriva in drsenja ne bosta v razmerju 1 : 2, kot sta bila pri obeh premikih. Tudi tokrat se podajmo na pot le z grafi in razumevanjem količin, ki se skrivajo v grafih.

Ploščina med krivuljo, ki ponazarja rezultanto sil, in vodoravno osjo bo sedaj sunek rezultante zunanjih sil in zato sprememba gibalne količine. Po koncu odrivanja pa je ploščina pod osjo. Gre za zaustavljanje stola, ki se mu zato zmanjšuje gibalna količina. Tudi tokrat morata biti obe ploščini enaki, saj sprva mirujoči stol na koncu spet miruje. Zato je tudi sedaj razmerje 1 : 2. Čas zaustavljanja je še enkrat daljši od časa potiskanja.



Slika 6. Količina na vodoravni osi ni več  $x$ , pač pa  $t$ . Sama oblika grafa se ne spremeni, vsebina pa bistveno. Tokrat sta siva in črtkana ploščina sunek rezultante zunanjih sil oziroma sprememba gibalne količine stola.

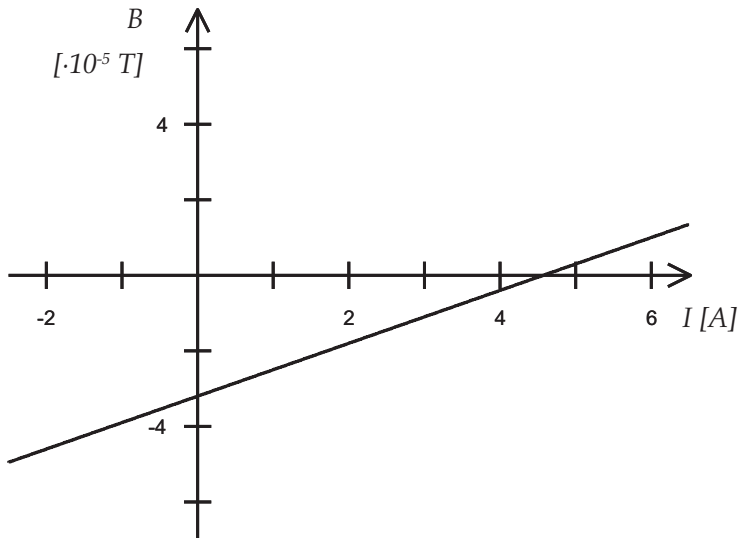
## MAGNETIZEM

Nič novega ni naloga, pri kateri je na tleh v smeri vzhod-zahod dolga ravna tuljava, v kateri je kompas. Ko po tuljavi teče tok, se seveda kompas odkloni in iz podatkov o toku, tuljavi ter zasuku izračunamo, kolikšna je vodoravna komponenta zemeljskega magnetnega polja na mestu meritve. Ker pa je to članek o grafih, pokažimo, kako se da nalogo, ki vključuje te pripomočke, zastaviti z grafom.

(Gre za nalogo iz testa za tretji letnik.)

Dolga, ravna tuljava je na vodoravnih tleh. Celotno magnetno polje v vodoravni smeri v tej tuljavi se spreminja, ko spreminjamo tok po tuljavi, tako kot kaže graf. Seveda je prisotno tudi zemeljsko magnetno polje. Dve stvari lahko iz grafa ugotovimo o zemeljskem magnetnem polju. Zapiši ju! (2 točki)





Vsekakor bo tedaj, ko po tuljavi ne bo tekel tok, magnetno polje kar enako vodoravni komponenti magnetnega polja Zemlje, ki je sodeč po grafu  $3,2 \cdot 10^{-5}$  T.

Celotno polje je vektorska vsota dveh polj. Vsota celotnega polja v vodoravni smeri linearno narašča s tokom samo tedaj, ko je geometrijska os tuljave v smeri sever-jug. Očitno geometrijska os te tuljave sovпада z vodoravno komponento magnetnega polja Zemlje.

Pravzaprav bi lahko nekaj povedali še o tuljavi, a tega naloga ne zahteva. Ta podatek bi bil količnik  $N/I$ . Vidimo namreč, da tok 5,0 A ustvarja v tej tuljavi tolikšno polje, da »kompenzira« vodoravno komponento zemeljskega magnetnega polja, ki pa jo že poznamo, tako da nas enačba za magnetno polje dolge, ravne tuljave privede do iskanega količnika.

## SKLEP

Ker sem imel ultrazvočni slednik na voljo že pred letom 1995, sem že od začetka svojega poučevanja kinematiko uvajal z grafi gibanja in šele potem z enačbami kinematike [3]. Seveda sem takemu načinu dela prilagodil tudi preverjanje znanja, ki je vselej zajemalo razumevanje grafov. Ta pristop postaja vse bolj razširjen in tudi sedanji maturitetni katalog zahteva, da znajo dijaki kaj več prebrati z grafa kot le posamezne pare točk (kot je na primer trivialno vprašanje: pri katerem  $t$  je bil  $x$  enak 0,2 m). Vsekakor se mi zdi prav, da bi se še več grafov pojavljalo pri pouku. Najbrž ima tak pristop še kdo od bralcev, zato ste vabljeni, da kaj o tem napišete.

Na koncu pa bi povabil tudi sestavjalce nalog za tekmovanja, da bi še oni vpletli kak graf kot glavni del naloge. (Morda za prvo tekmovalno skupino nekaj takega, kot je tu predstavljena naloga za maturante.) Saj so sicer tekmovalne naloge zelo raznolike, a prehod na graf kot osrednji del še ni bil narejen. Ali pač le preslabo spremljam tekmovalne naloge?

**VIRI:**

- [1] T. Golež, *Nova rubrika: pisno preverjanje znaja*, Fizika v šoli 17 (2011) 2, str. 106–114.
- [2] T. Golež, *Priloge in naloge*, samozal., 2007, Ljubljana.
- [3] T. Golež, *Infinitezimalni račun med matematiko in fiziko – nove povezave, ki jih omogoča sodobni merilni sistem*, Obzornik za matematiko in fiziko 54, št. 6 (2007), str. 194–201

**KULTURNI BAZAR**  
2 0 1 4  
KULTURA SE PREDSTAVI

**Vabljeni k udeležbi v programu strokovnega usposabljanja** na Kulturnem bazarju, ki ga namenjamo strokovnim delavcem v vzgoji in izobraževanju, kulturi, okolju, zdravstvu in socialni ter študentom s teh področij.

Udeležba je brezplačna, potrebna pa je e-prijava do 10. marca 2014. Vabilo, program in e-prijavnico najdete na spletni strani: **[www.kulturnibazar.si](http://www.kulturnibazar.si)**.

**Sreda, 26. marca 2014**  
med 9. in 20. uro

 **cankarjev dom**  
Prešernova cesta 10, Ljubljana