Narodna in univerzitetna knjižnica
v Ljubljani

114587

$\frac{6}{II}$ A. 5

Georg Freyherrn von Vega,
Landes-Mitstands des Herzogthums Krain, Ritters des militär. M. Th. Ordens,
Oberstlieutenants des k. k. vierten Feldartillerie-Regiments, Mitglieds der gelehrten
Gesellschaften der Wissenschaften zu Berlin, Erfurt, Göttingen und Prag,

Vorlesungen
über die
Mathematik

sowohl
überhaupt zu mehrerer Verbreitung mathematischer
Kenntnisse in den k. k. Staaten, als auch insbesondere zum
Gebrauche des k. k. Artillerie-Corps.

Zweyter Band,
die
theoretische und practische Geometrie,
die geradlinige und sphärische Trigonometrie, die höhere Geometrie,
und die Infinitesimal-Rechnung enthaltend.

K.K. OBERBERGAMT ZU KLAGENFURT

Siebente Auflage.

Durchgesehen, verbessert und vermehrt von

Wilhelm Matzka,
Unterlieutenant und Lehrer der höheren Mathematik
im k. k. Bombardier-Corps.

Mit 16 Kupfertafeln.

Wien, 1835.
Verlag von F. Tendler, Buchhändler.

114587

114587

F7-l. 6315/1952

Gedruckt bei J. P. Sollinger.

Vorrede
zur siebenten Auflage.

So sehr auch die von dem rühmlichst bekannten Freyherrn von Vega herausgegebenen Lehrbücher der Mathematik die ihnen allgemein zu Theil gewordenen Vorzüge vor vielen anderen gleichzeitig erschienenen Schriften dieser Art verdienten: so wenig vermochten sie, bey den raschen Fortschritten der mathematischen und physikalischen Wissenschaften, diesen Vorrang gegen die vorzüglichen Werke neuerer Mathematiker zu behaupten, welche durch die Bestimmtheit der Begriffe, durch die Strenge der Beweise, durch die logische Ordnung in der Behandlung der Materien, durch die Präcision und Eleganz ihrer Rechnungsweisen vor den älteren sich auszeichnen. Dieses veranlaßte den mit der Leitung der im k. k. Bombardier = Corps bestehenden Artillerie = Schule beauftragten Herrn Hauptmann Professor matheseos Anton Fink, im Einverständnisse mit dem Herrn Verleger, mich aufzufordern, die Revision der gegenwärtigen Auflage des zweyten Bandes der von Vega zunächst für die k. k. Artillerie bestimmten Vorlesungen über die Mathematik zu besorgen und die nothwendigsten, mit dem Geiste

und der Tendenz dieses Werkes vereinbaren, Verbesserungen nach Thunlichkeit vorzunehmen.

Dem gemäß habe ich diesen Band sorgfältig durchgelesen, theils einzelne Stellen verbessert, theils ganze Paragraphe, Abschnitte und Hauptstücke neu verfaßt; nahmentlich habe ich die ebene und sphärische Trigonometrie mit ihren Anwendungen, die Differenzial- und Integral-Rechnung einer vollständigen Ueberarbeitung unterzogen. Dabey sah ich mich jedoch an vielen Puncten genöthiget, manche wesentliche Verbesserungen und Vermehrungen aufzugeben, theils weil sie sich mit den in dem Lehrbuche vorherrschenden Ansichten nicht in Einklang bringen ließen, theils weil — um nicht den Preis desselben zu steigern — weder die Bogenzahl ansehnlich vergrößert, noch die Kupfertafeln bedeutend abgeändert werden durften.

Ich enthalte mich der ausführlichen Aufzählung meiner Leistungen, da prüfende Kenner diese leicht selbst aufzufinden und zu würdigen vermögen. Sollte ich auch nicht an jeder Stelle ihres Beyfalls mich erfreuen dürfen, so hoffe ich doch von den Unbefangenen das offene Zugeständniß, daß die von mir vorgenommenen Aenderungen wahrhafte Verbesserungen sind und dieser Auflage wesentliche Vorzüge vor den früheren sichern.

Wien den 1. September 1834.

Wilhelm Matzka.

Inhalt.

Erstes Hauptstück.

Von den Eigenschaften der Linien.

I. Abschnitt.

	§.	S.
Vorläufige Einleitung in die Meßkunst	341	1

II. Abschnitt.

Von der verschiedenen Lage und Stellung der geraden Linien	357	11

III. Abschnitt.

Von den Vielecken	377	26

IV. Abschnitt.

Von den Proportionallinien	397	41

V. Abschnitt.

Von einigen Aufgaben über die Proportionallinien	417	61

Zweytes Hauptstück.

Von den Eigenschaften der ebenen Flächen.

I. Abschnitt.

Von der Bestimmung des Flächeninhaltes geradliniger Figuren	432	79

II. Abschnitt.

Von der Vergleichung und Verwandlung geradliniger Figuren	455	106

III. Abschnitt.

Von der Lage und Stellung der Ebenen	462	117

Drittes Hauptstück.

Von den Eigenschaften der Körper.

I. Abschnitt.

	§.	S.
Begriffe von den geometrischen Körpern, oder Einleitung in die Stereometrie	477	127

II. Abschnitt.

Von der Ausmessung der Oberflächen der Körper	489	136

III. Abschnitt.

Von der Ausmessung des Cubikinhaltes der Körper	501	144

Viertes Hauptstück.

Von der Trigonometrie.

I. Abschnitt.

Von den trigonometrischen Functionen	535	175

II. Abschnitt.

Von der Auflösung geradliniger Dreyecke	555	215

III. Abschnitt.

Von der Auflösung der sphärischen Dreyecke	565	234

IV. Abschnitt.

Begriffe von der Erd- und Himmelskugel, nebst Anwendung derselben auf die Lösung einiger der nützlichsten Aufgaben	580	265

Fünftes Hauptstück.

Von den Anfangsgründen der pract. Meßkunst.

I. Abschnitt.

Von der Auflösung der nothwendigsten Aufgaben mittelst der gebräuchlichsten Meßinstrumente	584	283

II. Abschnitt.

Von dem Centriren der Winkel, von der Reduction der schief geneigten Winkel auf den Horizont, von der Verbesserung der Höhen- und Tiefenwinkel und von dem Unterschiede des wahren und scheinbaren Horizontes	605	333

III. Abschnitt.

	§.	S.
Vom Nivelliren	611	343

IV. Abschnitt.

Von dem Gebrauche des Barometers bey Höhenmessungen	619	358

Sechstes Hauptstück.

Von einigen krummen Linien.

I. Abschnitt.

Einleitung	620	368

II. Abschnitt.

Von den Kegelschnittslinien	626	379

III. Abschnitt.

Von einigen transcendenten und höheren algebraischen krummen Linien	671	436

Siebentes Hauptstück.

Von der Differenzial-Rechnung.

I. Abschnitt.

Anfangsgründe der Differenzial-Rechnung	675	450

II. Abschnitt.

Anwendung der Differenzial-Rechnung in der Analysis	683	477

III. Abschnitt.

Anwendung der Differenzial-Rechnung auf die Geometrie	698	521

Achtes Hauptstück.

Von der Integral-Rechnung.

I. Abschnitt.

Anfangsgründe der Integral-Rechnung und die Entwickelung der Grundregeln derselben	709	565

II. Abschnitt.

Integration binomischer Differenzialformeln	720	583

III. Abschnitt.

Von der Integration der trinomischen Differenzialformeln	731	628

IV. Abſchnitt.

	§.	S.
Verwandlung einiger ſehr merkwürdigen irrationalen Differenziale in eine rationale Geſtalt	733	635

V. Abſchnitt.

Integration der merkwürdigſten exponentiellen, logarithmiſchen und trigonometriſchen Differenziale. Entwickelung der Integrale in Reihen	744	643

VI. Abſchnitt.

Von der Integration der höhern Differenziale, der Differenzialformeln mehrerer Veränderlichen und der Differenzialgleichungen	751	658

VII. Abſchnitt.

Anwendung der Integral-Rechnung auf die Beſtimmung des Flächeninhaltes krummliniger Figuren, auf die Rectification der krummen Linien und auf die Berechnung der Oberfläche und des Cubikinhaltes der Körper . .	758	677

VIII. Abſchnitt.

Auflöſung einiger Aufgaben, welche auf Differenzialgleichungen mit zwey Veränderlichen führen	766	694

Anhang.

I.

Verzeichniß der merkwürdigſten goniometriſchen Formeln für den Halbmeſſer 1	—	703

II.

Tafel zur Beſtimmung der Länge der Kreisbogen für den Halbmeſſer 1	—	713

Erstes Hauptstück.

Von den Eigenschaften der Linien.

I. Abschnitt.

Vorläufige Einleitung in die Meßkunst.

§. 341.

Stätige Größen (quantitates continuae) werden diejenigen genannt, welche aus ununterbrochen aneinander hängenden Theilen bestehen. Die Wissenschaft, welche sich mit der Vergleichung und Ausmessung der stätigen Größen beschäftiget, heißt Geometrie oder auch Meßkunst. Die stätigen Größen werden in drey Hauptgattungen in Körper, Flächen und Linien abgetheilet. Ein Körper (solidum) heißt im mathematischen Verstande eine begrenzte Ausdehnung in die Länge, Breite und Tiefe oder Dicke. In Fig. 1. ist ein solcher Körper abgebildet, den man einen Würfel nennet. Die Grenzen eines Körpers heißen Flächen (superficies), und sind nichts anders, als bloße Ausdehnungen in die Länge und Breite ohne alle Tiefe oder Dicke; ABCD, CDEF, BCFG u. s. w. stellen uns also Flächen vor. Die Grenzen einer Fläche heißen Linien, und sind Ausdehnungen in die bloße Länge ohne alle Breite und Dicke; AB, DE, GF, u. s. w. stellen uns demnach Linien vor. Die Grenzen, nähmlich der Anfang oder das Ende einer Linie, heißen endlich Puncte, die gar keine Ausdeh-

Fig. 1. nung mehr haben; durch A, B, C, u. s. w. werden also Puncte abgebildet. Mathematische Puncte und Linien können niemahls unseren Sinnen genau vorgestellet werden. Man pflegt in der Ausübung einen Punct auf dem Papiere mit einem kleinen runden Tüpflein, auf dem Felde mit einem Pflocke, oder einem andern beliebigen Merkmahle, und eine Linie auf dem Papiere mit einem feinen Striche, auf dem Felde aber entweder durch eine ausgespannte Schnur, oder auch durch eine schmale und seichte Vertiefung zu bezeichnen.

§. 342.

Aus dem Begriffe des Punctes, daß er nähmlich ohne alle Ausdehnung ist (§. 341 *), folget, daß er durch seine Bewegung einen Weg oder eine Länge ohne alle Breite und Dicke, das ist, eine Linie beschreibet. Bewegt sich aber eine Linie AD anders als nach ihrer Richtung z. B. bis BC; so wird der Weg, den sie durchläuft, zwey Ausdehnungen haben, und folglich eine Fläche seyn. Bewegt sich endlich eine Fläche ABCD anders als nach ihrer Lage z. B. bis in HGFE; so wird der Weg, den sie zurückleget, drey Ausdehnungen haben, und folglich ein Körper seyn. Doch kann man aus diesem keineswegs folgern, daß eine Linie aus Puncten, eine Fläche aus Linien, und ein Körper aus Flächen zusammengesetzet sey; nur soviel ist aus dem bisher Angeführten abzunehmen, daß man in einer Linie überall in ihrer ganzen Ausdehnung nach Belieben Puncte annehmen könne, weil sich in einer Linie überall ihr Anfang oder ihr Ende denken läßt.

§. 343.

Bleibt die Richtung des Punctes während seiner Bewegung ungeändert; so wird er eine gerade Linie beschreiben, und von einem Orte zu dem andern auf dem kürzesten Wege gelangen. Wird hingegen die Richtung des Punctes während seiner Bewegung in jedem Augenblicke geändert; so wird er eine krumme Li-

*) Die Zurückweisung auf die §§. sowohl des ersten Bandes der 4. Auflage als auch dieses zweyten Bandes werden öfters bloß mit der Nummer derselben ohne das Zeichen §., bemerket werden.

nie beschreiben. Eine Linie heißt nähmlich **gerad** oder eine **Gerade**, wenn alle ihre Theile überall dieselbe Richtung haben. Eine Linie aber, die keinen geraden Theil hat, heißt **krumm** oder eine **Krumme**.

§. 344.

Eine gerade Linie AB ist demnach die kürzeste Entfernung ihrer Endpuncte A und B. Durch zwey Puncte wird die Richtung oder die Lage einer geraden Linie bestimmt; und durch zwey Puncte läßt sich nur eine gerade Linie ziehen; weil alle übrige geraden Linien, wenn man sie auch in Gedanken ziehen wollte, mit der ersten übereinfallen, und mit derselben nur immer eine einzige gerade Linie ausmachen würden. Hingegen können durch dieselben zwey Puncte A und B unzählige krumme, oder auch aus Geraden zusammengesetzte Linien ADB, AEB, AFB, AGB u. s. w. gezogen werden; jedoch ist jede derselben größer oder länger als die Gerade AB. Auch ist leicht einzusehen, daß zwey gerade Linien, die sich durchschneiden, nur einen einzigen Punct und nicht einen Theil gemein haben. Haben hingegen zwey Geraden einen Theil, das ist ein gewisses Stück einer Geraden gemein: so liegen sie beyde nach einerley Richtung über einander und machen nur eine einzige Gerade aus. Fig. 2.

§. 345.

Eine Fläche, auf der sich durch was immer für zwey Puncte eine gerade Linie dergestalt ziehen läßt, daß sie nach ihrer ganzen Länge auf der Fläche liegt, heißt eine **Ebene** (planum). Alle Betrachtungen, die man in der Meßkunst vornimmt, beziehen sich auf eine und dieselbe Ebene, wenn man nicht das Gegentheil erinnert.

§. 346.

Drehet sich nun auf einer Ebene eine gerade Linie AC um einen unbeweglichen Punct C, bis sie wieder in ihre vorige Lage kommt; so beschreibt der Punct A eine in sich selbst zurückkehrende krumme Linie ABDEFA, bey der jeder Punct A, B, D, F, von dem in der Mitte liegenden Puncte C gleich weit absteht. Die von dieser krummen Linie eingeschlossene ebene Fläche heißt 3.

Fig. 3. ein **Kreis** oder **Zirkel** (circulus); der Punct C dessen **Mittelpunct** (centrum), und die krumme Linie ABDEFA der **Umkreis** (peripheria). Jeder Theil AB, DE u. s. w. des Umkreises wird ein **Kreisbogen** (arcus), jede Gerade zwischen zwey Puncten des Umkreises z. B. NM eine **Sehne** (chorda), jede Sehne, welche durch den Mittelpunct geht, der **Durchmesser** (diameter), jede Gerade zwischen dem Mittelpuncte und dem Umkreise der **Halbmesser** (radius), jeder Theil ACBA des Kreises zwischen zwey Halbmessern und einem Kreisbogen ein **Ausschnitt** (sector), und endlich jeder Theil EGFHE des Kreises zwischen der Sehne und dem Bogen wird ein **Kreisabschnitt** (segmentum) genannt.

§. 347.

Aus dieser Entstehungsart des Kreises folgt:

I. Daß alle Halbmesser eines Kreises einander gleich sind; weil der Umfang des Kreises von dessen Mittelpuncte überall gleich weit entfernt ist.

II. Daß auch alle Durchmesser eines Kreises einander gleichen; weil jeder Durchmesser nichts anders ist, als die Summe von zwey gleichen Halbmessern.

III. Daß gleiche Sehnen in demselben Kreise auch gleiche Bogen, und umgekehrt, abschneiden. Es sey z. B. die Sehne EF = MN; so ist auch der Bogen EF = MN. Denn man bilde sich nur ein, daß der Abschnitt EF auf den Abschnitt MN dergestalt geleget werde, daß der Punct E auf M, und F auf N zu liegen komme; so werden die Sehnen, weil sie einander gleich sind, und auch die Bogen einander decken, weil alle ihre Puncte von dem Mittelpuncte gleich weit entfernt sind, und ihre Endpuncte über einander fallen; folglich müssen diese Bogen einander gleich seyn.

IV. Daß endlich jeder Durchmesser die Kreisfläche und den Umkreis in zwey gleiche Theile theilt. Es sey z. B. AE ein Durchmesser; man lege in Gedanken den Theil ANFEA auf den andern Theil des Kreises ADEA: so werden sie einander decken, und folglich einander gleich seyn.

§. 348.

Diese Grundwahrheit: **Größen, welche einander decken, sind vollkommen gleich; und umgekehrt, vollkommen gleiche** Fig 3
Größen (die nicht anders als durch die Verschiedenheit des Ortes von einander unterschieden werden können, als z. B. gerade Linien von einerley Länge, Kreise von gleichen Durchmessern u. s. w.) **decken einander, wenn sie gehörig auf einander geleget werden**, nebst den zwey folgenden Forderungssätzen: **I. Durch jede zwey gegebene Puncte kann eine gerade Linie gezogen, und beiderseits nach Belieben verlängert werden, II. Aus jedem gegebenen Puncte kann mit einem beliebigen Halbmesser ein Kreis beschrieben werden**, muß man zu den (12) angeführten Grundsätzen hinzufügen, um daraus die meisten Wahrheiten in der Mathematik herzuleiten. Das erste nähmlich der Zug und die Verlängerung einer geraden Linie geschehen, auf dem Papiere, oder auf einer andern kleinen ebenen Fläche durch Hülfe des Lineals, und auf dem Felde durch mehrere hinter einander gerade gepflanzte Pflöcke, oder Stangen, die man sodann nach Erforderniß mit einer Schnur verbindet, und längst derselben die gerade Linie mit einer seichten Vertiefung bezeichnet (traciret). Das zweyte hingegen wird auf dem Papiere durch Hülfe des bekannten Instrumentes, welches man einen Zirkel nennet, und auf dem Felde durch Hülfe einer Schnur verrichtet, von der man das eine Ende an einen in dem angenommenen Mittelpuncte stehenden Pflock befestiget, und sodann auf der Erde die Linie bezeichnet, die das andere Ende der Schnur während der Umdrehung beschreibet.

§. 349.

Der Umfang eines jeden großen oder kleinen Kreises wird in 360 gleiche Theile abgetheilet, die man **Grade** nennet. Jeder Grad wird in 60 gleiche Theile, die **Minuten** heißen, und jede Minute in 60 **Secunden** abgetheilet u. s. w. Die Grade, Minuten, Secunden, Terzen u. s. w. werden mit $(^0)$, $(')$, $('')$, $(''')$ bezeichnet; z. B. ein Bogen von 65^0, $35'$, $40''$ wird also gelesen: **Ein Bogen von 65 Graden, 35 Minuten, 40 Secunden.** Diese Abtheiluug des Umkreises ist bloß willkührlich; man

Fig. 3. hat die Zahl 360 angenommen, weil sie aus sehr vielen Factoren zusammengesetzet ist. Auch gibt uns die Anzahl der Grade eines Bogens noch nicht dessen wirkliche Länge, sondern nur dessen Verhältniß zu dem ganzen Umkreise an. Wenn z. B. der Bogen $AB = 60^0$ ist, so ist dieß so zu verstehen, daß sich seine Länge zu der Länge des ganzen Umkreises verhält, wie 60 zu 360: nähmlich daß der Bogen $AB = \frac{60 \cdot ABEFA}{360} = \frac{1}{6} ABEFA$ = dem sechsten Theile des ganzen Umkreises ist *).

§. 350.

Die Neigung oder Oeffnung zweyer gerader Linien aC und bC, welche in einem Puncte C zusammenlaufen, heißt ein **Winkel** (angulus). Die Geraden aC und bC werden dessen **Schenkel** (crura), und der beyden Schenkeln gemeinschaftliche Punct C dessen **Scheitel** (vertex) oder Spitze genannt. Man pflegt einen Winkel entweder durch drey Buchstaben, von denen der mittlere den Scheitel bezeichnet, oder auch nur durch einen in die Oeffnung geschriebenen Buchstaben auszudrücken; man sagt z. B. der Winkel ACB oder BCA oder aCb, oder auch der Winkel m.

§. 351.

Die Verlängerung der Schenkel verändert ihre Oeffnung beym Scheitel nicht; daher wird auch ein Winkel durch das Verlängern oder Verkürzen seiner Schenkel weder größer noch kleiner; sondern ein Winkel wird größer, wenn sich seine Schenkel mehr öffnen, und kleiner, wenn sich diese mehr schließen. Bildet man sich nun ein, daß aus dem Scheitel C des Winkels aCb ein Kreisbogen ab beschrieben sey; so wird die Anzahl der Grade dieses Bogens das Maß des Winkels seyn. Denn wenn man sich vorstellet, daß der Schenkel bC sich um den Punct C drehe, und mit dem andern Schenkel aC einmahl eine kleinere, und einmahl eine größere Oeffnung mache; so wird auch der Bogen ab dadurch in demselben Verhältnisse einmahl kleiner, und einmahl größer werden:

*) Die neueren französischen Mathematiker theilen den ganzen Umkreis in vier gleiche Theile, in 4 Quadranten; jeden Quadranten in 100 Centesimal-Grade; jeden solchen Grad in 100 Centesimal-Minuten, und jede solche Minute in 100 Centesimal-Secunden.

das ist, der Bogen ab wird 2, 3, . . . nmahl kleiner oder größer werden, wenn die Oeffnung aCb 2, 3, . . . nmahl kleiner oder größer wird. Auch ist es gleichgültig, ob man den Kreisbogen mit einem kleinen Halbmesser aC, oder mit einem größeren AC beschreibet; weil ein Winkel nicht durch die wirkliche Länge des Bogens, sondern nur durch die Anzahl Grade desselben, das ist durch dessen Verhältniß zu dem ganzen Umkreise gemessen wird, und weil überdieß alle zwischen den Schenkeln AC und BC aus dem Scheitel C beschriebenen Kreisbogen dieselbe Anzahl Grade enthalten müssen, da sie zugleich erzeuget werden, wenn sich der eine Schenkel um den Scheitel drehet. Fig. 3.

§. 352.

Es folgt aus diesem, daß man auf einer Geraden ac aus dem Puncte c einen Winkel acb verzeichnen könne, der einem gegebenen Winkel ACB gleich ist, wenn man aus dem Scheitel C des gegebenen Winkels zwischen seinen Schenkeln mit einem beliebigen Halbmesser CA einen Bogen AB, und aus dem gegebenen Puncte c der Geraden ac mit eben demselben Halbmesser einen unbestimmten Bogen ab beschreibet; sodann die Sehne AB aus dem Puncte a auf den unbestimmten Bogen ab aufträgt, und endlich durch den auf diese Art gefundenen Punct b, und durch den gegebenen Punct c eine gerade Linie cb führet. Es kann dieses auch mit Hülfe des bekannten Instrumentes geschehen, welches ein Winkelmesser oder **Transporteur** genannt wird, und aus einem Halbkreise von Messing, ungefähr 3 Zoll im Durchmesser, besteht, dessen Rand in 180 Grade abgetheilet ist. Dieses Instrument dient nicht nur auf dem Papiere Winkel zu messen, sondern auch Winkel von einer gegebenen Anzahl Grade zu verzeichnen. 4.

§. 353.

Die Winkel werden in **rechte**, **spitzige** und **stumpfe** abgetheilet. Ein rechter Winkel ist derjenige, der den vierten Theil des ganzen Umkreises, das ist 90° zwischen seinen Schenkeln enthält; hingegen heißt ein Winkel spitzig, wenn er weniger als 90, und stumpf, wenn er mehr als 90 Grade enthält.

Fig.

§. 354.

5. Wenn man die Schenkel AC und BC eines Winkels ACB verlängert; so heißen die zwey entgegengesetzten Winkel ACB und DCE, so wie auch ACD und ECB **Scheitelwinkel** (anguli verticales); die zwey Winkel ACD und DCE, oder auch DCE und ECB u. s. w. werden **Nebenwinkel** (anguli contigui) genannt. Wenn nähmlich eine Gerade DC eine andere Gerade AE in einem Puncte C schneidet; so heißen die dadurch auf dieser Geraden entstandenen Winkel ACD und DCE **Nebenwinkel**. Bildet man sich ein, daß aus dem gemeinschaftlichen Scheitel C der Nebenwinkel ACD und DCE mit einem beliebigen Halbmesser CA ein Bogen ADE auf der Linie AE beschrieben sey; so wird dieser Bogen ein halber Umkreis seyn, das ist, er wird 180 Grad enthalten, weil man die Gerade AE als einen Durchmesser ansehen kann (347 IV.). Nun ist der Bogen AD das Maß des Winkels ACD, und der Bogen DE das Maß des Winkels DCE, nähmlich AD + DE, das ist, der halbe Umkreis oder 180 Grade sind das Maß beyder Nebenwinkel zusammengenommen; folglich enthalten zwey Nebenwinkel auf einer geraden Linie zusammen 180 Grade. Auf eben dieselbe Art läßt sich erweisen, daß auch ACD + ACB = 180° ist.

Da nun $ACD + DCE = 180^\circ$
und auch $ACD + ACB = 180^\circ$ ist;
so ist auch $ACD + DCE = ACD + ACB$
oder $DCE = ACB$

das ist, die Scheitelwinkel sind einander gleich. Man kann auf eben diese Art darthun, daß ACD = BCE ist u. s. w. Würde nun einer aus diesen vier Winkeln bekannt seyn, so sind zugleich auch die drey übrigen bekannt: es sey z. B. $ACB = 50^\circ$, so ist $ACD = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$, $DCE = 50^\circ$, und $ECB = 130^\circ$. Auch dieses wird man leicht einsehen, daß alle Winkel um einen Punct C z. B. ACD, DCE, ECE, BCA, wenn ihrer noch so viele sind, zusammen 360 Grade ausmachen.

§. 355.

6. Wenn man die Endpuncte A und B der Schenkel CA und CB eines Winkels ACB mittelst einer Geraden AB verbindet; so

heißt die dadurch von drey Geraden eingeschlossene ebene Fläche ein Dreyeck (triangulum); und die Geraden CA, AB, BC werden dessen Seiten (latera) genannt. Sind nun die drey Seiten eines Dreyeckes von gleicher Länge, so heißt das Dreyeck **gleichseitig** (aequilaterum); sind nur zwey Seiten einander gleich, so wird das Dreyeck **gleichschenkelig** (aequicrurum aut isosceles); und endlich **ungleichseitig** (scalenum) genannt, wenn alle drey Seiten von ungleicher Länge sind. In Hinsicht auf die Winkel heißt ein Dreyeck **rechtwinkelig**, wenn es einen rechten, **stumpfwinkelig**, wenn es einen stumpfen Winkel enthält, und endlich **spitzwinkelig**, wenn alle drey Winkel spitzig sind. In einem rechtwinkeligen Dreyecke wird noch insbesondere die dem rechten Winkel gegenüber stehende Seite die **Hypothenuse**, und die zwey übrigen Seiten, die den rechten Winkel einschließen, werden die **Katheten** genannt. Wir müssen hier einige Haupteigenschaften der Dreyecke anführen, die zu der Bestimmung sehr wichtiger Sätze in der Folge unentbehrlich sind, und können die übrigen Eigenschaften weiter unten auseinander setzen, wo wir von den ebenen Figuren, das ist von den begrenzten Ebenen, ausführlich handeln. Fig. 6.

§. 356.

Diese Haupteigenschaften der Dreyecke sind folgende:

I. **In jedem Dreyecke ist die Summe zweyer Seiten größer, als die dritte Seite**; z. B. $AB + AC < BC$. Dieses erhellet aus (344), weil der gerade Weg von B bis C kürzer ist, als was immer für ein Umweg von B über A bis C. 7

II. **Wenn in zwey Dreyecken ABC und abc zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel einander wechselsweise vollkommen gleich sind; so sind die ganzen Dreyecke einander vollkommen gleich.** Z. B. wenn $BC = bc$, $BA = ba$, und der Winkel $B = b$ ist; so ist auch $AC = ac$, der Winkel $A = a$, und $C = c$. Um diese Gleichheit einzusehen, bilde man sich nur ein, daß das Dreyeck abc auf das Dreyeck ABC dergestalt gelegt werde, daß der Scheitel b auf B, und die Seite bc auf BC zu liegen komme; so werden die Winkel B und b, die Geraden BC und bc, und auch die Geraden BA und ba einander decken, weil sie vermöge der Voraussetzung einander gleich sind. Da nun die

Fig. 7. Seiten bc und BC, und auch ba und BA einander decken; so muß der Punct a auf A, und der Punct c auf C fallen, und die Seiten ac und AC müssen einander decken, weil ihre Endpuncte über einander fallen; folglich ist die Seite AC = ac. Aus demselben Grunde des Deckens ist auch der Winkel A = a, und C = c (348).

III. **Wenn in zwey Dreyecken ABC, abc zwey Winkel mit der eingeschlossenen Seite einander wechselsweise gleich sind; so sind die ganzen Dreyecke einander vollkommen gleich;** z. B. wenn B = b, C = c, und BC = bc ist; so ist auch BA = ba, CA = ca, und A = a. Denn man lege nur das Dreyeck abc auf das Dreyeck ABC dergestalt, daß die gleichen Seiten bc und BC, die gleichen Winkel b und B, und endlich auch c und C einander decken; so wird die Seite ba auf BA, und ca auf CA liegen, und der beyden Seiten ba und ca gemeinschaftliche Punct a muß in den beyden Geraden BA und CA zugleich, nähmlich in ihrem Durchschnittspuncte oder Scheitel A anzutreffen seyn. Da nun der Punct a in dem Puncte A anzutreffen ist; so müssen die Seiten ba und BA, ca und CA, und auch die Winkel a und A einander decken; folglich ist BA = ba, CA = ca, und A = a.

IV. **Wenn in zwey Dreyecken ABC, abc alle drey Seiten einander wechselsweise gleich sind; so sind auch die Winkel, die den gleichen Seiten gegenüber stehen, einander gleich;** nähmlich wenn BC = bc, BA = ba, und CA = ca ist, so ist auch A = a, C = c, und B = b, das ist, die zwey Dreyecke sind einander vollkommen gleich. Um dieses deutlich einzusehen, bilde man sich ein, daß aus den Puncten B und b, ingleichen aus C und c mit den Halbmessern BA = ba, und CA = ca die Umkreise M, N, und m, n gezogen sind, die sich in den Puncten A und a durchschneiden. Sofort lege man in Gedanken das Dreyeck bca mit seinen Kreisen dergestalt auf BCA, daß die Seiten bc und BC einander decken, das ist, daß der Punct b auf B, und c auf C falle, der Punct a aber nach derjenigen Gegend hin zu liegen komme, nach der A liegt; so werden sowohl die zwey kleinen, als auch die zwey großen Kreise einander decken, weil sie gleiche Halbmesser haben, und ihre Mittelpuncte übereinander fallen. Da

nun der Punct a in den beyden Umkreisen m und n zugleich, nähmlich in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte sich befindet; so wird er ebenfalls nach dem Auflegen in den beyden Umkreisen M und N zugleich, nähmlich in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte A anzutreffen seyn; folglich werden die Seiten ba und BA, ca und CA, weil ihre Endpuncte übereinander fallen, und auch die Winkel a und A, b und B, c und C einander decken; es ist demnach der Winkel A = a, C = c, und B = b. Fig. 7.

II. Abschnitt.

Von der verschiedenen Lage und Stellung der geraden Linien.

§. 357.

Wenn eine Gerade CE auf eine andere Gerade AB dergestalt gezogen ist, daß sie mit derselben gleiche Nebenwinkel, nähmlich beyderseits rechte Winkel machet; so sagt man, daß CE auf AB senkrecht (perpendikulär) ist. Verlängert man nun CE, so ist der Winkel AEC = BED; weil sie Scheitelwinkel sind. Nun ist auch AEC = CEB; folglich auch CEB = BED, nähmlich diese zwey Nebenwinkel sind einander gleich, jeder derselben ist ein rechter Winkel, und BE ist senkrecht auf CD. Wenn demnach CD auf AB senkrecht ist; so ist auch AB auf CD senkrecht. 8.

§. 358.

Die Eigenschaften der senkrechten Linien sind folgende:

I. Ist AE = EB, und CE senkrecht auf BA, so ist jeder Punct der Senkrechten CE von A eben so weit, wie von B entfernt, z. B. CA = CB, aA = aB u. s. w. Denn in den Dreyecken CEA und CEB sind zwey Seiten AE = EB, und EC = EC mit dem eingeschlossenen rechten Winkel AEC = CEB einander gleich; folglich sind die ganzen Dreyecke einander vollkommen gleich, und CA = CB (356 II.). Eben dieß läßt sich von einem jeden anderen Puncte erweisen.

Fig. 8. Ingleichen wenn CE senkrecht auf AB, und CA = CB ist; so ist auch EA = EB, und auch aA = aB u. s. w. Um dieses einzusehen, verlängere man CE, mache ED = EC, und ziehe AD und BD; so ist AD = AC, BD = BC, (weil ED = EC, und AB senkrecht auf CD vermöge des Vorhergehenden ist). Da nun BD = BC, und BC = CA = AD ist, so ist auch BD = AD. Es ist demnach in den Dreyecken BCD und DCA die Seite AD = BD, AC = BC, und DC = DC; folglich sind sie einander vollkommen gleich, und der Winkel ACD = BCD (356 IV.). Ferner ist in den Dreyecken AEC und CEB die Seite CA = CB, CE = CE, und der eingeschlossene Winkel ACD = BCD; folglich sind auch diese Dreyecke einander vollkommen gleich, und EA = EB. Eben dieses läßt sich von einem jeden anderen Puncte erweisen. Wir ziehen hieraus folgenden Schluß: **Wenn eine Gerade CD auf AB senkrecht steht, und ein Punct dieser Senkrechten von zwey Puncten A und B der Geraden AB gleichweit entfernt ist; so sind jede zwey Entfernungen was immer für eines Punctes der Senkrechten CD von den zwey Puncten A und B der Geraden AB einander gleich.**

II. Wenn zwey Puncte C und a der Geraden CD von zwey Puncten A und B der Geraden AB gleich weit entfernt, wenn nähmlich CA = CB, und auch aA = aB sind; so ist CD in dem Puncte E senkrecht auf AB. Denn die Dreyecke AaC und aCB sind einander vollkommen gleich, weil ihre Seiten einander wechselsweise gleich sind; folglich ist der Winkel ACa = aCB. Nun ist in den Dreyecken AEC und ECB die Seite CA = CB, CE = CE, und der eingeschlossene Winkel ACE = ECB; folglich sind auch diese Dreyecke einander vollkommen gleich, und der Winkel CEA = CEB. Es sind aber CEA und CEB Nebenwinkel; folglich ist jeder derselben ein rechter Winkel, und CE steht in dem Puncte E senkrecht auf AB. Aus demselben Grunde der Gleichheit der Dreyecke AEC und ECB ist EA = EB.

III. Aus allen Geraden AE, Aa, CA, AD u. s. w., die aus dem Puncte A auf CD gezogen werden können, ist die Senkrechte AE die kürzeste. Denn jede Gerade Aa oder AC, die nicht durch den Punct E gezogen wird, ist größer als AE, welches ich

so erweise. Man verlängere die Senkrechte AE, mache EB=EA, und ziehe Ba, BC, BD u. s. w.; so ist Aa = aB, AC = CB, weil EA = EB und CD senkrecht auf AB ist. Nun ist Aa+aB>AB (356 I.): es ist also auch $\frac{Aa+aB}{2} > \frac{AB}{2}$; nähmlich Aa >AE, weil $\frac{Aa+aB}{2} = Aa$ und $\frac{AB}{2} = AE$ ist. Eben dieses läßt sich von einer jeden anderen AC, AD, u. s. w. erweisen. Fig. 8.

IV. Da nun aus allen diesen Geraden Aa, AE, AD, u. s. w. eine einzige die kürzeste seyn kann: so kann aus einem Puncte A auch nur eine einzige Senkrechte auf CD gezogen werden. Und umgekehrt wenn AE aus allen Geraden, die von dem Puncte A auf CD gezogen werden können, die kürzeste ist; so ist sie senkrecht auf CD. Denn wäre dieses nicht; so könnte eine andere Senkrechte z. B. Aa gezogen werden, welche auch die kürzeste wäre; und da wären zwey Geraden AE und Aa zugleich die kürzesten, die aus einerley Puncte A auf CD gezogen sind, welches nicht seyn kann. Nun pflegt man die Entfernung eines Punctes A von einer Geraden CD durch die kürzeste Linie anzugeben, die von A auf DC gezogen werden kann; **folglich ist die Entfernung eines Punctes A von einer Geraden CD nichts anders als die Senkrechte AE.**

§. 359.

Wir haben erwiesen (358 I.), daß EA = EB, der Winkel ACE = ECB, CAE = CBE ist, wenn CA = CB, und CE senkrecht auf AB ist. Nun aber sind AEC und BEC rechtwinkelige Dreyecke, in denen die Hypothenuse CA = CB, und die Kathete CE = CE ist; folglich können wir sagen, **daß zwey rechtwinkelige Dreyecke einander gleich sind, wenn sie die Hypothenuse und eine Kathete wechselsweise gleich haben.**

§. 360.

Die (358) angeführten Eigenschaften der senkrechten Linien setzen uns in den Stand folgende Aufgaben aufzulösen.

I. **Eine gegebene gerade Linie DC in zwey gleiche Theile zu theilen.** Dieses geschieht auf dem Papiere, wenn man aus den Endpuncten D und C mit einerley Halbmesser, der nicht viel 9.

Fig. 9. kleiner als DC seyn muß, Kreisbogen beschreibet, die sich in F und G durchschneiden, und sodann die Gerade FG zieht, welche die gegebene DC in dem Puncte E in zwey gleiche Theile ED = EC theilet. Denn es ist DF = FC, DG = GC; folglich FG senkrecht auf AB, und ED = EC. Wäre kein Platz übrig den Durchschnitt F jenseits der Geraden DC zu bestimmen; so mache man mit dem Halbmesser DG = CG den Durchschnitt G, und mit einem anderen Halbmesser Df = Cf den Durchschnitt f, und ziehe die Gerade GfE, so ist ebenfalls ED = EC. Auf dem Felde hingegen wird eine gerade Linie in zwey gleiche Theile getheilet, wenn man die gerade Linie ausmißt (das ist, untersucht, wie oft sie eine bekannte Linie, z. B. eine Wiener-Klafter in sich enthalte) und sodann die Hälfte dieses Maßes von dem einen Endpuncte gegen den anderen aufträgt. Dieses Ausmessen einer geraden Linie auf dem Felde geschieht meistentheils mit der Meßkette, deren Länge zehen Klafter beträgt; zuweilen auch mit dem Meßbalken, wenn die größte Genauigkeit erforderlich ist; und endlich mit bloßen Schritten, wenn man nur mit einem Beynahe zufrieden seyn kann. Nur ist dazu erforderlich, daß man sich einen gleichförmigen Schritt angewöhne. Bey uns ist es vorgeschrieben die Schritte so einzurichten, daß 5 Schritte 2 Klaftern gleich seyen.

II. In dem Puncte E der Geraden AB eine Senkrechte zu errichten. Auf dem Papiere schneide man EC = ED ab, beschreibe mit einerley Halbmesser zwey Kreisbogen, die sich in F oder G durchschneiden, und ziehe durch E und F, oder durch E und G die Gerade FG; so ist sie in dem Puncte E senkrecht auf AB. Denn es ist ED = EC, DF = CF; folglich EF senkrecht auf DC (358 II.). Auf dem Felde macht man ebenfalls ED = EC, bemerkt die Puncte D, E, C mit Pflöcken, befestiget in D und C die Ende einer Schnur, deren Mittelpunct F mit einem beliebigen Merkmahle bezeichnet ist, ergreifet diesen Mittelpunct F, bringet die zwey gleichen Theile DF = CF in eine solche Lage, daß sie beyde gerade ausgezogen, und gleich stark gespannt sind, bemerket den Punct F auf der Erde, und zieht sodann die Gerade FEG; so wird sie in dem Puncte E auf AB senkrecht seyn. Sollte

aus dem Endpuncte E einer Geraden AE eine Senkrechte errich- Fig.
tet werden, so verlängere man AE um ein beliebiges Stück EC, 9.
und verfahre sodann wie zuvor.

III. Durch einen außer der Geraden AB gegebenen Punct G eine Senkrechte auf AB zu ziehen. Man beschreibe aus dem gegebenen Puncte G einen Kreisbogen, welcher die Gerade AB in zwey Puncten D und C schneidet; aus den Puncten D und C beschreibe man mit einem beliebigen Halbmesser zwey Kreisbogen, die sich auf dieser oder jener Seite der Geraden AB in F oder f durchschneiden, und ziehe sodann die Gerade FG; so wird sie senkrecht auf AB seyn. Denn es ist DG = CG, und Df = Cf, folglich FG senkrecht auf AB (358 II.). Auf dem Felde läßt sich diese Auflösung nicht jederzeit anwenden; wir werden daher weiter unten (364) eine andere Auflösung dieser Aufgabe anführen. Auch merken wir noch an, daß man in der Ausführung auf dem Papiere die Senkrechten gemeiniglich mit Hülfe eines hölzernen rechtwinkeligen Dreyeckes zu ziehen pflegt: nur kommt es darauf an, daß dieses Dreyeck genau rechtwinkelig sey. Man untersucht diese Richtigkeit, wenn man die eine Seite EC eines solchen Dreyeckes FEC an eine gerade Linie AB anlegt, und längst der anderen Seite eine Linie EF zieht; dann wendet man das Dreyeck um, daß nähmlich die Seite EC in die Lage ED kommt, und zieht längst der andern Seite wieder eine Linie. Wenn nun die zwey gezogenen Linien einander decken, so ist das Dreyeck richtig. Schließen hingegen diese zwey gezogenen Linien einen Winkel ein; so ist das Dreyeck unrichtig, und muß verbessert werden.

§. 361.

Zwey gerade Linien AB und CD, die überall gleich weit 10.
von einander entfernt sind, heißen gleichlaufend oder parallel. Da nun die Entfernungen der Puncte einer Linie von einer anderen Geraden nichts anders sind, als die Senkrechten, welche von den Puncten der einen Linie auf die andere gezogen werden; so folget, daß bey den Parallelen AB und CD alle Senkrechten AC, DB, GF u. s. w. die aus was immer für Puncten der Linie AB auf CD, oder aus was immer für Puncten der Linie CD auf AB gezogen werden, einander gleich sind. Diese Gleichheit

Fig. 10. der Senkrechten gibt uns ferner zu erkennen, daß Parallelen niemahls zusammenstoßen oder sich durchschneiden, wenn sie auch in das Unendliche verlängert würden. Einige Meßkünstler haben dieses für die Erklärung der Parallelen angenommen, und die Gleichheit der Entfernungen daraus gefolgert.

§. 362.

Wenn zwey Parallelen AB und CD von einer Geraden EF geschnitten werden; so sind:

I. Die Wechselwinkel (anguli alterni) m und n, r und s einander gleich. Denn man ziehe nur FG senkrecht auf AB, und EH senkrecht auf CD; so ist in den rechtwinkeligen Dreyecken GFE und FEH die Hypothenuse EF = EF, und die Kathete FG = EH; folglich sind diese Dreyecke einander vollkommen gleich (359), und der Winkel m = n. Da überdieß n + r = 180°, und m + s = 180° ist; so ist auch n + r = m + s, und r = s. Sollte nun einer von den Wechselwinkeln z. B. x (wenn die Parallelen AB und CD von der Geraden DB geschnitten werden) ein rechter Winkel seyn; so muß auch der andere y ein rechter Winkel seyn: folglich muß jede Gerade DB auch auf CD senkrecht seyn, wenn sie auf den Parallelen AB senkrecht ist, das ist: wenn eine Gerade auf einer von zwey Parallelen senkrecht ist, so ist sie auch senkrecht auf der anderen.

II. Auch der äußere und innere Winkel auf einerley Seite sind einander gleich; nähmlich m = p, F = r, n = z, u. s. w. Denn es ist p = n, und auch m = n; also auch m = p; ingleichen F = s, und r = s; also auch F = r; u. s. w.

III. Die zwey inneren Winkel auf der nähmlichen Seite enthalten zusammen 180°, oder sind zwey rechten Winkeln gleich; es ist nähmlich m + r, oder n + s = 180°. Denn es ist n + r = 180°; nun ist n = m; also auch m + r = 180°.

Eben so findet man, daß p = z, E = F, E + z = 180° ist u. s. w. Alles dieses findet auch statt, wenn drey, vier oder mehr Parallelen von einer geraden Linie geschnitten werden.

§. 363.

11. Und umgekehrt wenn zwey Geraden AB und CD von einer dritten EF dergestalt geschnitten werden: daß I. entwe-

der die Wechselwinkel z. B. m = n; II. oder der äußere und innere Winkel auf einerley Seite einander gleich sind; III. oder endlich daß die zwey inneren Winkel zusammen 180° enthalten; so sind die zwey Geraden AB und CD parallel. Fig. 11.

Es sey z. B. I. m = n, nähmlich AEF = m. Wäre nun AB nicht parallel zu CD; so könnte durch E eine andere Gerade ab zu CD parallel gezogen werden, und es wäre vermöge des Vorhergehenden aEF = m. Nun ist aber vermöge der Voraussetzung AEF = m; also ist auch AEF = aEF, das ist, der Theil AEF ist dem Ganzen aEF gleich, wenn nicht AB sondern eine andere Gerade ab durch den Punct E parallel zu CD gezogen wäre, welches ungereimt ist. Es ist also auch nicht möglich, daß außer der Geraden AB was immer für eine andere ab zu CD parallel sey, wenn sie durch den Punct E gezogen ist. Wenn demnach m=n ist, so ist AB parallel zu CD.

Auf eben diese Art läßt sich erweisen, daß AB zu CD parallel ist, wenn eine der zwey anderen Bedingungen statt findet. Dieses geschieht kürzlich auf folgende Art: Es sey II. m=x; so ist wegen x=n auch m=n; und folglich wegen I. AB parallel zu CD. Endlich sey III. n+CFE=180°; so ist wegen m+CFE=180° auch m = n; folglich ist wegen I. AB parallel zu CD. Auch können wir daraus folgern, daß zu einer Geraden CD durch einen gegebenen Punct E nur eine einzige Parallele gezogen werden könne.

§. 364.

Sowohl auf dem Papiere als auf dem Felde wird zu einer Geraden CD durch einen gegebenen Punct E eine Parallele gezogen, wenn man aus dem gegebenen Puncte E die EH auf CD senkrecht zieht, dann in einem beliebigen Puncte C der Geraden CD ebenfalls eine Senkrechte CK errichtet, CA=EH abschneidet, und endlich durch die Puncte A und E die Gerade AB zieht. Diese Gerade AB wird nun parallel zu CD seyn. Denn die zwey inneren Winkel ACH und CAE enthalten zusammen 180 Grade. Die Lage der Geraden AB wird auch gefunden, wenn man durch den gegebenen Punct E eine Gerade EF dergestalt zieht, daß sie CD irgendwo in einem Puncte F durchschneidet, und sodann den Winkel pnq = rms, oder auch x=m verzeichnet (352).

Fig. 11. Denn die durch p und E, oder durch E und t gezogene Gerade AB wird parallel zu CD seyn, weil die Wechselwinkel m und n, oder der äußere und innere Winkel auf einerley Seite m und x einander gleich sind. In der Ausübung ist es sehr bequem auf dem Papiere die Parallelen mit Hülfe eines hölzernen rechtwinkeligen Dreyeckes zu ziehen.

Und nun können wir auf dem Felde aus einem gegebenen Puncte E eine Senkrechte auf eine Gerade CD ziehen, wenn wir mit Hülfe der Wechselwinkel die Lage der Parallelen AB bestimmen und in dem Puncte E die Senkrechte EH auf AB errichten (360 II.) Denn die Linie EH wird auch auf CD senkrecht seyn, weil sie auf AB senkrecht ist.

§. 365.

12. Wenn man von einem Puncte des Umkreises mehrere Sehnen AB, AD, AE, AG zieht; so ist

I. Die Sehne AB, welche durch den Mittelpunct geht, nähmlich der Durchmesser, größer, als jede andere Sehne AD oder AE. Denn wenn man die Halbmesser CD, CE zieht; so ist $AC + CD > AD$. Nun aber ist $AC + CD = AC + CB = AB$; es ist also auch $AB > AD$. Eben so läßt sich erweisen, daß $AB > AE$ ist.

II. Die übrigen Sehnen sind desto kleiner, je mehr sie sich von dem Durchmesser entfernen; nähmlich $AE < AD$. Denn es ist CD oder $CE < CF + FD$; also auch $CE - CF < CF + FD - CF$; nähmlich $FE < FD$. Ferner ist $AE < AF + FE$; es ist also auch, wenn man FD statt FE substituiret $AE < AF + FD$; das ist $AE < AD$.

§. 366.

Wir folgern aus diesem, daß in einem halben Umkreise zu größeren Bogen auch größere Sehnen, zu kleineren Bogen auch kleinere Sehnen; und umgekehrt zu größeren Sehnen auch größere Bogen, zu kleineren Sehnen auch kleinere Bogen gehören. Jedoch folgt daraus keineswegs, daß zu einem zweyfachen, dreyfachen, nfachen Bogen auch eine zweyfache, 3fache, nfache Sehne gehöre.

§. 367. Fig.

Wenn eine Sehne AB von einer Geraden GD geschnitten wird, und zwey von folgenden fünf Dingen statt finden; 13.
I. daß GD durch den Mittelpunct geht; II. daß GD auf der Sehne AB senkrecht steht; III. daß die Gerade GD die Sehne AB; IV. daß sie den Bogen ADB, oder endlich V. daß sie den Winkel ACB in zwey gleiche Theile theilt; so sind auch die übrigen drey Dinge richtig.

Denn es sey I. GD durch den Mittelpunct C auf AB senkrecht gezogen; so ist der Punct C der Senkrechten GD von A und B gleich weit entfernt; folglich ist jeder Punct derselben von A und B gleichweit entfernt (358 I.), nähmlich EA = EB, die Sehne DA = DB, der Bogen DA = DB (347 III.); und folglich auch der Winkel m = n (351).

Es sey II. GD senkrecht auf AB, und EA = EB; so ist wie früher die Sehne DA = DB, CA = CB, der Bogen DA = DB, und der Winkel m = n. Ferner ist auch die Sehne GA = GB, und der Bogen GA = GB. Da nun der Bogen GA = GB und AD = BD ist; so ist auch der Bogen GA + AD = GB + BD, nähmlich GAD = GBD = dem halben Umkreise; folglich geht GD durch den Mittelpunct und ist sonach ein Durchmesser.

Es sey III. GD durch den Mittelpunct C gezogen, und theile entweder die Sehne, oder den Bogen, oder endlich den Winkel in zwey gleiche Theile; so wird in jedem Falle CA = CB, EA = EB, oder DA = DB, und folglich GD senkrecht auf AB seyn (358 II.) u. s. w.

§. 368.

Diese Eigenschaften setzen uns in den Stand folgende Aufgaben aufzulösen.

I. Durch drey Puncte, A, B, D, die nicht in einer gera- 14.
den Linie liegen, und folglich ein Dreyeck ADB bestimmen, einen Kreis zu führen. Dieses geschieht auf folgende Art. Man verbinde die Puncte A, B, D durch die Geraden AB und BD, theile jede derselben durch die Senkrechten EF und + GH in zwey gleiche Theile: so wird ihr Durchschnittspunct C der Mittelpunct des gesuchten Kreises seyn, der durch die drey Puncte

Fig. 14. A, B, D zu ziehen ist. Denn AB und BD sind Sehnen, welche durch die Senkrechten EF und GH in zwey gleiche Theile getheilet sind; folglich gehen beyde Senkrechten durch den Mittelpunct (367). Nun aber ist der Punct C so beschaffen, daß beyde Senkrechten EF und GH durch denselben gehen; folglich ist dieser Punct C der Mittelpunct des gesuchten Kreises.

Sollten hingegen die drey Puncte A, B, D in einer geraden Linie liegen; so ist für sich klar, daß sich die Senkrechten niemahls durchschneiden können, weil sie mit einander parallel laufen. Man stellt sich in diesem Falle vor, daß der Durchschnittspunct der Senkrechten sich unendlich weit entferne; und in diesem Sinne kann man jede gerade Linie als einen Kreisbogen ansehen, dessen Halbmesser unendlich groß ist.

II. **Den Mittelpunct eines Kreisbogens oder auch eines ganzen Umkreises zu finden.** Man nehme drey Puncte in dem Bogen an, verbinde sie durch zwey Sehnen, theile jede derselben durch eine Senkrechte in zwey gleiche Theile; so wird dadurch der Mittelpunct, wie im vorigen Falle bestimmt werden. Zu einem ganzen Umkreise kann der Mittelpunct auch auf folgende Art gefunden werden. Man ziehe eine Sehne, theile sie durch eine Senkrechte in zwey gleiche Theile; so wird diese Senkrechte der Durchmesser seyn, welchen man demnach nur noch in zwey gleiche Theile zu theilen hat, um den Mittelpunct des gegebenen Kreises zu bestimmen.

15. III. **Einen Winkel ACB in zwey gleiche Theile zu theilen.** Man beschreibe mit einem beliebigen Halbmesser den Bogen ADB, aus den Puncten A und B beschreibe man zwey Kreisbogen, die sich in E oder F schneiden, und ziehe die Gerade CF; so wird diese den Winkel ACB in zwey gleiche Theile theilen, weil sie durch den Mittelpunct C geht, und auf der Sehne AB senkrecht steht. Der Bogen AB hingegen wird in zwey gleiche Theile getheilet, wenn man seine Sehne AB durch die Senkrechte EF halbirt. Da der Winkel DCB oder der Bogen DB wieder auf diese Weise in zwey gleiche Theile getheilet werden kann; so folgt, daß man jeden Winkel oder jeden gegebenen Kreisbogen in 2, 4, 8, 16, 32 gleiche Theile theilen könne. Sollte hingegen

ein Bogen in 3, 5, 7 . . gleiche Theile zu theilen seyn; so kann es nach den bisher gegebenen Gründen nicht anders als durch das Versuchen (tentando) geschehen. Fig.

§. 369.

16. Eine Gerade AB, die in der Ebene eines Kreises seinem Umfange in einem einzigen Puncte D begegnet, und übrigens beyderseits außer der Kreisfläche liegt, wird eine Tangente (Berührungslinie), und der Punct D der Berührungspunkt genannt.

Wenn man an den Berührungspunkt D einen Halbmesser CD zieht; so steht er auf der Tangente senkrecht. Denn dieser Halbmesser ist die kürzeste Linie, die aus dem Puncte C auf die Gerade AB gezogen werden kann; folglich steht er in dem Puncte D senkrecht auf AB (358 III). Und umgekehrt, wenn die Gerade AB in dem Puncte D auf dem Halbmesser CD senkrecht steht; so ist sie eine Tangente des Umkreises. Denn diese Senkrechte AB begegnet dem Umkreise in dem einzigen Puncte D, und liegt übrigens außer der Kreisfläche, weil jeder andere Punct derselben z. B. A oder B weiter als D von dem Mittelpuncte C entfernt ist. Es kann demnach bey einer schon gezogenen Tangente der Berührungspunct gefunden werden, wenn man aus dem Mittelpuncte eine Senkrechte auf die Tangente zieht. Und durch einen gegebenen Punct des Umkreises kann eine Tangente gezogen werden, wenn man am Ende des Halbmessers eine Senkrechte errichtet.

17. Sollte hingegen durch einen gegebenen Punct A eine Tangente zu einem gegebenen Kreise gezogen werden; so beschreibe man aus A mit dem Halbmesser AC einen Kreisbogen CD, und aus C mit einem Halbmesser = GF = CE = 2CB einen Kreisbogen ED; durch den Mittelpunct C, und durch den Durchschnittspunct D ziehe man die Gerade CD; und endlich ziehe man durch den auf diese Art gefundenen Durchschnittspunkt B des Umkreises, und durch den gegebenen Punct A die Gerade AB: so wird diese in dem Puncte B den gegebenen Kreis berühren. Denn AB ist in dem End-

Fig. 18. puncte des Halbmessers senkrecht auf CD oder auf CB, weil AC = AD, und BC = BD = $\frac{1}{2}$ DC = $\frac{1}{2}$ GF = $\frac{1}{2}$ CE ist (358 II.).

§. 370.

Wenn sich zwey Kreise berühren, es mag nun der kleinere Kreis innerhalb des größeren, oder der eine Kreis außerhalb des anderen liegen; so müssen die Mittelpuncte dieser beyden Kreise und der Berührungspunct derselben in einer geraden Linie liegen.

Denn wenn diese beyden Kreise sich außerhalb berühren sollen; so kann, da sie nur einen Punct mit einander gemein haben, die Entfernung der Mittelpuncte von einander nicht kleiner seyn als die Summe der beyden Halbmesser, weil sonst die beyden Kreise in einander greifen, also sich schneiden müßten. Der Berührungspunct ist aber von jedem der beyden Mittelpuncte um den Halbmesser des betreffenden Kreises entfernt; also können die Verbindungslinien des Berührungspunctes mit den beyden Mittelpuncten, und die Verbindung der Mittelpuncte selbst, nicht ein Dreyeck einschließen; weil, wenn ein Dreyeck entstehen sollte, zwey Seiten zusammen genommen gleich oder kleiner als die dritte seyn müßten. Es muß daher der Berührungspunct M in der Verbindungslinie der beyden Mittelpuncte liegen.

Wenn sich aber die beyden Kreise innerhalb berühren; so kann die Entfernung der beyden Mittelpuncte von einander nicht größer seyn als der Unterschied der beyden Halbmesser, weil sonst ein Theil des kleinern Kreises außerhalb des größeren fallen würde, also die beyden Kreise sich schneiden müßten; die Entfernung der Mittelpuncte kann aber auch nicht kleiner seyn als dieser Unterschied, weil dann die beyden Kreise nicht einen Punct mit einander gemein haben könnten; also ist die Entfernung der beyden Mittelpuncte dem Unterschiede der Halbmesser gleich. Würden die Mittelpuncte und der Berührungspunct nicht in einer geraden Linie liegen; so müßten diese drey Puncte ein Dreyeck bilden, in welchem die Summe zweyer Seiten so groß als die dritte Seite wäre, welches unmöglich ist.

Aus diesem Satze folgt, daß wenn sich mehrere Kreise in einem gemeinschaftlichen Puncte M berühren, die Mittelpuncte A, B, C, D u. s. w. dieser Kreise in einer Geraden liegen müssen, und daß die in M auf diese Gerade errichtete Senkrechte ET eine gemeinschaftliche Tangente dieser Kreise ist. Fig.

§. 371.

Der Winkel m, nähmlich ATB, welchen die Tangente AT und die Sehne TB in dem Berührungspuncte einschließen, hat zu seinem Maße die Hälfte des Bogens TDB, welchen die Sehne abschneidet, nähmlich $m = \frac{1}{2}TDB$. 19.

Um dieses einzusehen, ziehe man den Durchmesser Ee parallel, und Dd senkrecht auf BT, und dann auch an den Berührungspunct T den Halbmesser CT. Nun ist $m + x = 90^0$, und auch $n + y = 90^0$; folglich $m + x = n + y$; es ist aber $x = y$ (362. I.); folglich auch $m = n$. Ferner ist $n = DT$; es ist also auch $m = DT$; und endlich ist $DT = \frac{1}{2}TDB$ (367.); folglich auch $m = \frac{1}{2}TDB$. Eben so leicht ist zu begreifen, daß der Winkel $aTB = \frac{1}{2}TdB$ ist; denn es ist $ATB + aTB = 180^0 = \frac{1}{2}TBdT = \frac{1}{2}TDB + \frac{1}{2}TdB$; nun aber ist $ATB = \frac{1}{2}TDB$; also ist auch $aTB = \frac{1}{2}TdB$.

§. 372.

Der Winkel x am Umkreise, den zwey Sehnen TB und TD einschließen, hat zu seinem Maße die Hälfte des Bogens, auf welchem seine Schenkel stehen, nähmlich $x = \frac{1}{2}BD$. 20.

Denn man ziehe nur die Tangente ATa; so ist $m + x + n = 180^0 = \frac{1}{2}TBDET = \frac{1}{2}TFB + \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}DET$. Nun aber ist $m = \frac{1}{2}TFB$, und $n = \frac{1}{2}DET$; folglich $x = \frac{1}{2}BD$.

Wir ziehen hieraus folgende Schlüsse:

I. Der Winkel am Umkreise ist die Hälfte des Mittelpunctswinkels, nähmlich $x = \frac{1}{2}BCD$. Denn es ist $BCD = BD$; also auch $\frac{1}{2}BCD = \frac{1}{2}BD$; nun aber ist $x = \frac{1}{2}BD$, daher auch $x = \frac{1}{2}BCD$.

II. Alle Winkel am Umkreise E, F, G, H, die auf einem und demselben Bogen ADB oder auf eben derselben Sehne AB stehen, sind einander gleich. Denn jeder derselben hat zu seinem Maße die Hälfte des Bogens ADB. 21.

Fig. 22. III. Jeder Winkel am Umkreiſe, der mit ſeinen Schenkeln auf den Endpuncten des Durchmeſſers ſteht, iſt ein rechter Winkel. Denn er hat zu ſeinem Maße die Hälfte des halben Umkreiſes oder von 180^0 nähmlich 90^0.

23. IV. In einem jeden Vierecke, welches in einem Kreiſe eingeſchrieben iſt, enthalten jede zwey gegenüber ſtehende Winkel zuſammen 180^0; nähmlich $x+y=180^0$, und auch $m+n=180^0$. Denn es iſt $x=\frac{1}{2}MNB$, und $y=\frac{1}{2}MAGB$; folglich $x+y=\frac{1}{2}MNB+\frac{1}{2}MAGB=\frac{1}{2}MAGNM=180^0$.

V. Zwey parallele Sehnen ſchließen gleiche Bogen ein; nähmlich $DB=CA$. Denn man ziehe nur die Gerade CB: ſo iſt $a=c$ (362. I.); nun aber iſt $a=\frac{1}{2}BD$, und $c=\frac{1}{2}AC$; es iſt alſo auch $\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AC$, oder $BD=CA$. Und umgekehrt, wenn die eingeſchloſſenen Bogen DB und CA gleich ſind: ſo ſind die Sehnen AB und CD parallel; weil in dieſem Falle die Wechſelwinkel a und c einander gleichen. Auf eben dieſe Art kann man erweiſen, daß die Tangente und eine parallele Sehne gleiche Bogen einſchließen; und umgekehrt, daß ſie mit einander parallel laufen, wenn die eingeſchloſſenen Bogen einander gleich ſind.

§. 373.

24. Und nun ſind wir im Stande an dem Endpuncte B einer Geraden AB eine Senkrechte GD zu errichten, wenn auch die Verlängerung der Geraden AB unmöglich wäre; und zwar auf folgende Art. Man ſchneide von B gegen A ein beliebiges Stück BE ab; aus B und E beſchreibe man mit einerley Halbmeſſer zwey Kreisbogen, die ſich in C durchſchneiden; dann ziehe man ECF, mache $CF=CE$, und führe durch F und B eine Gerade DG; ſo wird dieſe in dem Puncte B ſenkrecht auf AB ſeyn, weil ABD ein rechter Winkel iſt. Denn man bilde ſich nur ein, daß aus dem Mittelpuncte C mit dem Halbmeſſer $CE=CB=CF$ durch die Punkte E, B, F ein Kreis beſchrieben iſt; ſo wird man gleich einſehen, daß der Winkel $EBF=ABD$ am Umkreiſe mit ſeinen Schenkeln auf den Endpuncten des Durchmeſſers EF ſteht, und folglich ein rechter iſt.

§. 374.

Ein Winkel FGC am Umkreise, den eine Sehne GF, und Fig.
eine andere Gerade GC einschließen, deren Verlängerung GD 25.
dem Umkreise wieder in einem anderen Puncte D begegnet, hat zu seinem Maße die halbe Summe der Bogen GHF und GED; es ist nähmlich $CGF = \frac{1}{2}GHF + \frac{1}{2}GED$.

Denn es ist $CGF + FGD = 180^0 = \frac{1}{2}GFDEG = \frac{1}{2}GHF + \frac{1}{2}GED + \frac{1}{2}DBF$; nun aber ist $FGD = \frac{1}{2}DBF$; folglich ist $CGF = \frac{1}{2}GHF + \frac{1}{2}GED$.

§. 375.

Ein Winkel m innerhalb des Umkreises hat zu seinem Maße die halbe Summe der Bogen DB und EG, welche seine Schenkel beyderseits einschließen; nähmlich $m = \frac{1}{2}DB + \frac{1}{2}EG$.

Denn man ziehe nur GF parallel zu AB; so ist $n = \frac{1}{2}DBF = \frac{1}{2}DB + \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}DB + \frac{1}{2}EG$, weil $BF = EG$ ist. Nun aber ist $n = m$; es ist also auch $m = \frac{1}{2}DB + \frac{1}{2}EG$. Eben so leicht läßt sich erweisen, daß $EAD = \frac{1}{2}ED + \frac{1}{2}GHB$ ist.

§. 376.

Ein Winkel $BAD = n$ außerhalb des Umkreises, den zwey Geraden AB und AD einschließen, welche verlängert 26.
die Kreisfläche durchschneiden (ein Winkel zwischen zwey Secanten) hat zu seinem Maße die halbe Differenz der eingeschlossenen Bogen, nähmlich $n = \frac{1}{2}BD - \frac{1}{2}CE$.

Denn man ziehe die parallele Sehne CF; so ist $m = \frac{1}{2}BF = \frac{BD - FD}{2} = \frac{1}{2}BD - \frac{1}{2}FD = \frac{1}{2}BD - \frac{1}{2}CE$, weil $FD = CE$ ist; nun aber ist $n = m$ also auch $n = \frac{1}{2}BD - \frac{1}{2}CE$.

Eben so leicht ist zu erweisen, daß $MAB = \frac{1}{2}BM - \frac{1}{2}MC$, so wie daß $MAN = \frac{1}{2}MDN - \frac{1}{2}MEN$ ist. Soll nun MAN ein rechter Winkel seyn; so muß der Bogen $MEN = 90^0$ seyn. Denn es sey $MEN = x$; so ist $MBDN = 360 - x$; nun muß $\frac{360 - x}{2} - \frac{x}{2} = 90^0$, folglich auch $x = 90^0$ seyn.

III. Abschnitt.

Von den Vielecken.

§. 377.

Fig. Eine ebene Fläche von geraden Linien eingeschlossen heißt ein **Vieleck** (polygonum); eine jede einschließende Linie heißt eine Seite; und alle Seiten zusammen werden der **Umfang** (perimeter) des Vieleckes genannt. Es gibt auch Flächen, die entweder bloß von krummen, oder theils von krummen, theils von geraden Linien eingeschlossen sind; allein wir handeln hier nur von den Vielecken oder vielmehr nur von dem Umfange solcher Vielecke, die von geraden Linien begrenzt sind. Ein Vieleck heißt insbesondere ein **Dreyeck**, wenn es von drey, ein **Viereck**, wenn es von vier, ein **Fünfeck**, wenn es von fünf Seiten eingeschlossen ist, u. s. w. nähmlich **Sechseck**, **Siebeneck**, **Achteck**, ...**neck**. Einige Schriftsteller nennen diejenigen ebenen Flächen **Vielecke**, welche von mehr als vier geraden Linien eingeschlossen sind. Eine begrenzte Ebene aber nennen sie überhaupt eine ebene **Figur**. Von den Dreyecken haben wir die Benennungen schon gegeben, und merken hier nur noch an, daß zwey oder mehrere Dreyecke einander **ähnlich** heißen, wenn die Winkel des einen den Winkeln des anderen Dreyeckes wechselweise gleich sind, weil solche Dreyecke auf vollkommen gleiche Art bestimmt sind, und nur bloß vermöge ihrer wirklichen Größe von einander unterschieden werden können, und daß in einem Dreyecke die Senkrechte, von der Spitze eines Winkels auf die gegenüberstehende Seite gezogen, die **Höhe**, und die Seite, auf welche die Senkrechte gezogen wird, die **Grundlinie** (basis) des Dreyeckes genannt wird. Bey den Vierecken aber kommen folgende
27. Benennungen vor. Ein Viereck heißt ein **Parallelogramm**, wenn jede zwey gegenüber stehenden Seiten parallel sind (Fig. 27..30). Ein Parallelogramm von gleichen Seiten und Winkeln wird ein
28. **Quadrat** (Fig. 27.); ein Parallelogramm von gleichen Winkeln und ungleichen Seiten ein **Rechteck** (ABCD Fig. 28.); ein Pa-

rallelogramm von gleichen Seiten und ungleichen Winkeln ein Rhombus oder eine Raute (Fig. 29.); und endlich ein Parallelogramm von ungleichen Seiten und Winkeln ein Rhomboides oder eine längliche Raute (Fig. 30.) genannt. Die Senkrechte, welche von der einen auf die gegenüber stehende Seite eines Parallelogramms gezogen wird, heißt die Höhe, und jede dieser zwey Seiten die Grundlinie des Parallelogramms. Ein Viereck, in welchem nur zwey gegenüber stehende Seiten parallel sind, heißt ein Trapez (Fig. 31.); läuft hingegen in einem Vierecke keine einzige Seite mit der andern parallel; so heißt es ein Trapezoid (Fig. 32.). Ueberhaupt werden die Vielecke in unregelmäßige, wenn weder die Seiten noch die Winkel am Umfange einander gleich sind; in symmetrische, wenn sie von einer geraden Anzahl Seiten umgeben werden, deren jede zwey gegenüber stehende einander gleich und parallel sind (Fig. 27..30..33.); und endlich in regelmäßige abgetheilet, in denen alle Seiten und Winkel gleich sind (Fig. 27. 34.). Der Winkel am Umfange eines Vieleckes von zwey Seiten eingeschlossen heißt der Vieleckswinkel oder Polygon-Winkel; er ist ausgehend wie m, oder eingehend wie n (Fig. 33.). Eine Gerade von einem Vieleckswinkel zu einem andern über die Fläche des Vieleckes gezogen, heißt eine Diagonale, als AB Fig. 31. AC, AD, AE, AB Fig. 34. ingleichen AD, BE, CF Fig. 33.

Fig. 29. 30. 31. 32. 33. 34.

§. 378.

In einem jeden Dreyecke ABC enthalten alle drey Winkel zusammen 180°, oder sie sind zwey rechten Winkeln gleich; nähmlich $m+x+z=180°$. 35.

Denn man ziehe nur durch den Scheitel C eines Winkels z zu der gegenüber stehenden Seite AB eine Parallele EF; so ist $n+z+y=180°$. Nun aber ist $y=x$, und $n=m$; es ist also auch $m+z+x=180°$.

Wir ziehen aus diesem folgende Schlüsse.

I. In einem Dreyecke ist nicht mehr als Ein rechter, und um so mehr auch nur ein einziger stumpfer Winkel möglich, folglich jeder der zwey übrigen spitzig.

Fig. II. In einem rechtwinkeligen Dreyecke müſſen die zwey ſpitzigen Winkel zuſammen 90° enthalten; ſollte demnach der eine bekannt z. B. = 50° ſeyn, ſo iſt auch der zweyte bekannt und = 90 — 50 = 40°.

III. Wenn zwey Winkel in einem Dreyecke gegeben ſind; ſo iſt dadurch auch der dritte Winkel beſtimmt. Es ſey z. B. m = 60; x = 40; ſo iſt z = 180° — (m + x) = 180° — 100° = 80°.

40. IV. Wenn zwey Winkel eines Dreyeckes zwey Winkeln eines anderen Dreyeckes wechſelweiſe gleich ſind; ſo iſt auch der dritte Winkel dem dritten gleich, und die Dreyecke ſind einander ähnlich. Sollte in dieſem Falle auch noch eine Seite des erſten der gleichnahmigen Seite des zweyten Dreyeckes gleich ſeyn; ſo ſind die Dreyecke einander vollkommen gleich. Man bezeichne z. B. in einem Dreyecke die drey Winkel mit A, B, C, und in dem andern mit a, b, c; und es ſey dabey A = a, B = b; ſo iſt C = c. Denn weil A + B + C = 180°, und a + b + c = 180° iſt; ſo iſt auch A + B + C = a + b + c; und beyderſeits A = a, B = b, nähmlich A + B = a + b abgezogen, bleibt C = c. Wenn nun dabey auch noch eine Seite des erſten der gleichnahmigen Seite des zweyten Dreyeckes gleich iſt, ſo erhellet, daß die Dreyecke einander vollkommen gleich ſind. (356. III.)

35. V. Wenn zwey Geraden AD und BG einer dritten AB dergeſtalt begegnen, daß die Winkel m + x < 180° ſind; ſo ſtoßen die Geraden AD und BG auf dieſer Seite zuſammen, wenn ſie hinreichend verlängert werden; und entfernen ſich auf der entgegengeſetzten Seite der Geraden AB immer mehr von einander, wenn die Winkel DAB + GBA > 180° ſind. Denn wenn m + x < 180° iſt; ſo entſteht durch die Verlängerung der Geraden AD und BG ein Winkel, der ſich angeben läßt, und mit den vorigen zweyen m und x zuſammengenommen in dem ſo entſtandenen Dreyecke 180° oder zwey rechten Winkeln gleich iſt. Wenn nun aber die Winkel DAB + GBA > 180° ſind; ſo ſind deren Nebenwinkel m + x < 180°, folglich ſtoßen dieſe zwey Geraden DA, GB gegen C verlängert zuſammen, und entfernen ſich daher auf dieſer Seite von einander, wo die Winkel DAB + GBA > 180° ſind. Daß die Nebenwinkel m + x < 180°

seyn müssen, wenn DAB + GBA > 180° sind, erhellet aus Fol- Fig.
gendem: es ist DAB + m = 180°, und GBA + x = 180°; also
DAB+m+GBA + x = 360°; und hievon DAB+GBA > 180°
abgezogen, bleibt m + x < 180°.

VI. Wenn man aus der Spitze eines Winkels C in einem 36.
Dreyecke ABC auf die gegenüber stehende Seite AB eine
Senkrechte CD zieht; so fällt sie in das Dreyeck, wenn die
anliegenden Winkel m, n spitzig sind; hingegen liegt die
Senkrechte BE ganz außer dem Dreyecke, wenn p ein
stumpfer Winkel ist. Denn würde die Senkrechte in das Dreyeck
fallen, und die Lage Be haben; so müßte das Dreyeck BeC einen
rechten BeC und einen stumpfen Winkel BCe haben, welches
nicht seyn kann. Eben so kann man erweisen, daß die Senkrechte
CD in dem Dreyecke liegen müsse.

§. 379.

Wenn man die Seite AC eines Dreyeckes ACB verlän-
gert, so ist der äußere Winkel BCE = q des Dreyeckes der
Summe der zwey inneren Winkel m und n gleich, nähm-
lich q = m + n. Denn es ist m + n + p = 180°, und auch
p + q = 180°; folglich auch p + q = m + n + p, und endlich
q = m + n.

§. 380.

Hieraus folgt, daß ein Winkel ABC zwischen zwey 37.
Parallelen der Summe der Winkel gleich ist, die seine Schen-
kel mit den Parallelen einschließen, nähmlich q = m + n.

Denn man verlängere nur AB bis D; so ist q = p + r;
nun aber ist p = m, und r = n; folglich auch q = m + n.

Hingegen ist ein Winkel ABC außer zwey Parallelen der 38.
Differenz der zwey Winkel gleich, welche seine Schenkel mit
den Parallelen einschließen, nähmlich q = n — m. Denn es ist
p = q + r, oder q = p — r; nun aber ist p = n, und r = m,
folglich auch q = n — m.

§. 381.

In jedem Dreyecke steht einem größeren Winkel auch 39.
eine größere Seite, einem kleineren Winkel auch eine klei-
nere Seite, und umgekehrt, entgegen.

Fig. 39. Denn man bilde sich nur ein, daß um das Dreyeck ABC ein Kreis beschrieben sey (368.), und es sey $A > C$; so ist auch $\frac{1}{2}BaC > \frac{1}{2}BcA$, weil $A = \frac{1}{2}BaC$ und $C = \frac{1}{2}AcB$ (vermöge 372.), oder $BaC > BcA$ ist: es ist also auch die Sehne, oder die Seite $BC > BA$ (366.). Deßgleichen wenn $BC > BA$ ist; so ist auch der Bogen $BaC > BcA$; folglich auch $\frac{1}{2}BaC > \frac{1}{2}BcA$, und endlich $A > C$, u. s. w.

§. 382.

Wir ziehen aus diesem folgende Schlüsse.

I. In einem jeden Dreyecke sind gleichen Winkeln auch gleiche Seiten, und umgekehrt, entgegengesetzet.

II. Ein gleichseitiges Dreyeck ist auch gleichwinkelig und folglich regelmäßig; jeder Winkel desselben enthält $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$.

Es kann demnach auf einer gegebenen Geraden ein regelmäßiges oder gleichseitiges Dreyeck verzeichnet werden, wenn man aus den Endpuncten der gegebenen Linie mit einem Halbmesser, der dieser Geraden gleich ist, zwey Kreisbogen beschreibet, und ihren Durchschnittspunct mit den Endpuncten der gegebenen Linie durch zwey Geraden verbindet.

III. In einem gleichschenkeligen Dreyecke sind die den gleichen Schenkeln gegenüber stehenden Winkel einander gleich, und beyde spitzig. Und umgekehrt, wenn in einem Dreyecke zwey Winkel einander gleichen, so ist es gleichschenkelig.

IV. Wenn in einem gleichschenkeligen Dreyecke nur ein Winkel bekannt ist, so sind auch die zwey übrigen bekannt.

V. Wenn in einem gleichschenkeligen Dreyecke aus der Spitze des Winkels, den die gleichen Schenkel einschließen, auf die gegenüber stehende Seite eine Gerade gezogen wird, und eines von folgenden drey Dingen statt findet: I. daß der Winkel, II. daß die gegenüber stehende Seite in zwey gleiche Theile getheilet ist, III. daß diese Gerade auf der gegenüber stehenden Seite senkrecht stehet; so müssen auch die zwey übrigen richtig seyn: und umgekehrt, wenn zwey von diesen drey Dingen statt finden, so ist das Dreyeck gleichschenkelig.

§. 383. Fig. 40.

I. Wenn bey zwey Dreyecken ABC und abc die Seiten des einen mit den Seiten des andern Dreyeckes wechselweise parallel laufen; so sind diese Dreyecke einander ähnlich; das ist die Winkel des einen sind den Winkeln des anderen Dreyeckes wechselweise gleich; nähmlich C = c, A = a, B = b.

Denn man verlängere nur eine Seite des ersten, und zwey Seiten des anderen Dreyeckes, bis sie einander durchschneiden; so ist m = c, und auch m = C, folglich C = c. Ingleichem ist n = a, und auch n = A; also auch A = a. Da nun C = c, und A = a ist; so ist auch B = b. 94.

II. Wenn bey zwey Dreyecken ABC und abc die Seiten des einen Dreyeckes, oder deren Verlängerungen, auf den Seiten des anderen Dreyeckes, oder auf deren Verlängerungen wechselweise senkrecht stehen; so sind diese Dreyecke einander ähnlich.

Denn es sey die Seite ab auf der Seite AB, die Seite ac auf AC, und die Verlängerung bD der Seite bc auf BC senkrecht; so ist vermöge dieser Voraussetzung p + q = 90°. Es ist aber in dem rechtwinkeligen Dreyecke AEa, wegen des rechten Winkels bey E, und (378.) t + p = 90°, folglich p + q = t + p, und q = t.

Ferner ist in den zwey Dreyecken BaD und abD (378.) die Summe aller Winkel, nähmlich m + s + v + u = 2. 180° = 360°; es ist aber vermöge der Voraussetzung v = 90°, und u = 90°; diese beyden Winkel abgezogen, gibt m + s = 180°. Nun ist auch (354.) s + r = 180°; folglich m + s = s + r, und m = r.

Da nun die zwey Winkel t und q, m und r einander wechselweise gleich sind; so ist auch der dritte Winkel C des einen Dreyeckes dem dritten Winkel c des andern Dreyeckes gleich; und folglich sind die beyden Dreyecke ABC und abc einander ähnlich.

§. 384.

Wenn ein Dreyeck abc auf ein ähnliches und größeres ABC dergestalt gelegt wird, daß der gleiche Winkel b auf B, die Seite ba auf BA, und die Seite bc auf BC zu lie- 41.

Fig. gen komme; so wird die dritte Seite ac mit AC parallel laufen.

Denn es ist a = A, oder C = c. Nun sind a und A, oder c und C der äußere und innere Winkel auf einer und derselben Seite; folglich ist ac parallel zu AC (363). Eben so könnte man erweisen, daß die Seite ab mit AB parallel laufen müßte, wenn c auf C, und ca auf CA gelegt würde; u. s. w.

§. 385.

42. Alle Polygon-Winkel (Vieleckswinkel) eines jeden Vieleckes, welches keine eingehenden Winkel hat, enthalten zusammen so vielmahl 180°, als es Seiten oder Winkel hat, weniger 360°.

Bey den Dreyecken ist dieser Satz einleuchtend, weil 180° = 3.180° — 360° ist; aber er ist auch bey den übrigen Vielecken eben so richtig. Denn man bilde sich nur ein, daß aus einem innerhalb des Vieleckes nach Belieben angenommenen Puncte P in alle Vieleckswinkel gerade Linien gezogen sind; so wird das Vieleck dadurch in so viele Dreyecke getheilet, als es Seiten oder Winkel hat. Nun enthält ein jedes Dreyeck 180°; folglich enthalten alle Dreyecke zusammen so vielmahl 180° als es Seiten oder Vieleckswinkel gibt. Es sind aber die Winkel dieser Dreyecke, weniger den Winkeln um den Punct P, allen Vieleckswinkeln zusammen genommen gleich, und die Winkel um den Punct P sind = 360° (354); folglich sind alle Polygon-Winkel eines Vieleckes, welches keine eingehenden Winkel hat, so vielmahl 180° als es Seiten oder Winkel hat, weniger 360° gleich. Z. B. A + B + C + D + E = 5.180° — 360° = 900° — 360° = 540°; denn es ist b + m + c + d + n + e + f + p + g + h + q + i + k + P + a = 5.180°; also auch a + b + c + d + e + f + g + h + i + k = 5.180° — (m + n + p + q + P); nun ist aber m + n + p + q + P = 360°, und a + b + c + d + . . . = A + B + C + D + E; folglich A + B + C + D + E = 5.180° — 360° = 540°.

Es folgt aus diesem I. daß an einem Vielecke, welches keinen eingehenden Winkel hat, alle äußeren Winkel, welche durch die Verlängerung der Seiten entstehen, zusammen 360° enthalten. Denn es sey die Anzahl der Seiten oder Viel-

eckswinkel = n, die Summe aller inneren Winkel oder aller Viel- Fig.
eckswinkel = s, und die Summe aller äußeren Winkel = x; so 42.
ist $x+s=n.180^0$. Nun aber ist $s=n.180^0-360^0$; folglich $x+n.180^0-360^0=n.180^0$, oder $x=360^0$.

II. Jeder Winkel des Quadrates und Rechteckes ist ein rechter Winkel. Denn die vier einander gleichen Winkel enthalten zusammen 360^0; folglich ist jeder derselben $=90^0$. Es kann demnach auf einer gegebenen Linie ein Quadrat oder ein regelmäßiges Viereck verzeichnet werden, wenn man an den Endpuncten der gegebenen Linie senkrechte Linien errichtet, jede derselben der gegebenen Geraden gleich macht, und endlich die dadurch bestimmten Puncte dnrch eine Gerade verbindet. Eben so kann über zwey gegebenen Geraden ein Rechteck verzeichnet werden, wenn man an den Endpuncten der ersten senkrechte Linien errichtet, jede derselben der zweyten gegebenen Geraden gleich macht, und endlich die auf diese Art bestimmten zwey Puncte durch eine Gerade vereinigt.

III. Jeder Polygon-Winkel eines regelmäßigen Vieleckes von n Seiten ist $=\frac{n.180^0-360^0}{n}=180^0-\frac{360^0}{n}$; daher enthält jeder Winkel eines regelmäßigen Fünfeckes $180^0-\frac{360^0}{5}=108^0$. Man kann demnach auf einer gegebenen Geraden ein regelmäßiges Fünfeck verzeichnen, wenn man an den Endpuncten der gegebenen Linie mit Hülfe des Transporteurs Winkel von 108^0 verzeichnet, jeden Schenkel dieser zwey Winkel der gegebenen Geraden gleich macht, und endlich wieder an den Endpuncten dieser Schenkel Winkel von 108^0 zeichnet. Diese Verzeichnung ist jedoch nur mechanisch oder handwerksmäßig, und nicht geometrisch; wir werden weiter unten Gelegenheit haben die geometrische Verzeichnung eines regelmäßigen Fünfeckes zu zeigen. — Eben so ist der Polygon-Winkel bey einem regelmäßigen Sechsecke = 120^0, beym Siebenecke $=128\frac{4}{7}{}^0$, Achtecke $=135^0$, Neunecke $=140^0$, Zehnecke 144^0, Eilfecke $=147\frac{3}{11}{}^0$, Zwölfecke $=150^0$, u. s. w.

Der im Eingange dieses Paragraphen aufgestellte Satz gilt

Fig. 42. selbst dann noch, wenn das Vieleck eingehende, nähmlich 180 Grad übersteigende, Winkel hat; so daß in jedem n seitigen Polygon die Summe aller Winkel $(n-2)\,180^0$ ist. — Denn jedes Vieleck von n Seiten kann durch eine Diagonale in ein Dreyeck, das von dieser Diagonale und von 2 Seiten des Vieleckes begrenzt wird, und in ein Polygon, welches von derselben Diagonale und den übrigen $n-2$ Seiten des Vieleckes, also von $n-1$ Seiten, eingeschlossen wird, zerschnitten werden. Wiederhohlt man diese Theilungsweise, so wird man nach und nach das gegebene n eck mittelst 1, 2, 3, ... m Diagonalen in 1, 2, 3, ... m Dreyecke und in ein $n-1$, $n-2$, $n-3$, ... $n-m$ seitiges Vieleck zerfällen. Soll letzteres bloß die geringste mögliche Anzahl Seiten, nähmlich 3 enthalten, also $n-m=3$ werden; so sind hiezu $m=n-3$ Diagonalen erforderlich. Man kann demnach mittelst $n-3$ Diagonalen das vorgelegte n eck in $m+1=n-2$ Dreyecke zerschneiden, deren Winkel zusammen alle Winkel dieses n eckes ausmachen. Da nun die Summe der Winkel jedes Dreyeckes $=180^0$ ist, so muß die Summe der Winkel der $n-2$ Dreyecke, d. i. die Summe der Vieleckswinkel $=(n-2)\,180^0$ seyn.

§. 386.

43. Wenn in einem Viereck jede zwey gegenüber stehenden Seiten mit einander parallel laufen, so sind sie auch einander gleich. Denn man ziehe nur die Diagonale CB, so ist $m=n$, $p=q$, und $BC=BC$, also auch $CD=AB$, und $DB=AC$ (356. III.).

Umgekehrt, wenn jede zwey gegenüber stehenden Seiten einander gleich sind, so sind sie auch parallel. Denn da $AB=CD$, $AC=BD$, und $BC=BC$ ist; so ist auch $m=n$, und $p=q$; folglich AB parallel zu CD, und AC parallel zu BD (363).

Endlich, wenn nur zwey einander entgegenstehende Seiten gleich und parallel sind, so sind auch die anderen zwey gleich und parallel. Denn es sey AB gleich und parallel zu CD, so ist in den Dreyecken CAB und CDB die Seite $AB=CD$, $BC=BC$, und der Winkel $n=m$; folglich auch $AC=BD$, der Winkel $p=q$, und AC parallel zu BD.

§. 387.

Bey den Parallelogrammen sind auch folgende Sätze zu merken. Fig.

I. Jedes Parallelogramm wird durch die Diagonale BC 43.
in zwey vollkommen gleiche Dreyecke getheilet, folglich ist jedes Dreyeck ABC die Hälfte eines Parallelogramms ABDC, mit welchem es zwey Seiten und den von diesen eingeschlossenen Winkel gleich hat. Dieß erhellet aus der Gleichheit der Dreyecke ACB und CBD.

II. Jede der Diagonalen AD und CB eines Parallelogramms wird in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte M wegen der Gleichheit der Dreyecke CMA und DMB in zwey gleiche Theile getheilet. Sollte nun das Parallelogramm ein Rechteck seyn, wie ABCD (Fig. 28), so ist MA = MB = 28.
MC = MD. Es kann demnach auf einer viereckigen Fläche, z. B. auf einem Bogen Papier, abcd ein Rechteck verzeichnet werden, wenn man die Diagonalen ac und bd zieht, MA = MB = MC = MD macht, und endlich die Puncte A, B, C, D mittelst gerader Linien verbindet.

III. Jede durch den Durchschnittspunct M der Diagona- 43.
len AD und BC gezogene Gerade PQ theilet sowohl das Parallelogramm als auch sich selbst in zwey gleiche Theile. Dieses erhellet aus der Gleichheit der Dreyecke CMQ und PMB. Es ist demnach in einem jeden Parallelogramme der Durchschnittspunct der Diagonalen zugleich der Mittelpunct der Größe des Parallelogramms. Denn derjenige Punct in einer ebenen Figur, durch den eine jede von irgend einem Puncte des Umfanges zu einem anderen gezogene Gerade, sowohl die Fläche als auch sich selbst in zwey gleiche Theile theilet, heißt der Mittelpunct der Größe dieser Figur.

§. 388.

Nicht das Parallelogramm allein, sondern jedes symme- 33.
trische Vieleck hat einen Mittelpunct der Größe. Denn man ziehe nur die gerade entgegengesetzten Winkel durch Diagonalen AD, BE, CF zusammen, so wird man sehen, daß wegen der vollkommenen Gleichheit jeder zwey gerade entgegengesetzten Dreyecke AMB und DME, BMC und EMF u. s. w. jede Dia-

Fig. gonale in dem gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte M in zwey gleiche Theile getheilet ist, und daß nicht nur jede Diagonale, sondern auch jede andere Gerade PQ sowohl sich selbst als auch die Fläche des symmetrischen Vieleckes in zwey gleiche Theile theilet. Daß hingegen die unsymmetrischen Vielecke, selbst wenn sie regelmäßig sind, keinen Mittelpunct der Größe haben, wird jedermann leicht einsehen.

§. 389.

44. Zwey Parallelogramme ABDC und ECDF auf einerley Grundlinie CD sind einander am Flächeninhalte gleich, wenn sie gleiche Höhen haben, oder zwischen zwey Parallelen stehen.

Denn es ist das Dreyeck BDF = ACE,
man subtrahire beyde von ACDF,
so ist ACDB = ECDF.

§. 390.

Wir folgern hieraus

45. I. daß auch zwey Dreyecke, die auf einerley Grundlinie zwischen zwey Parallelen stehen, einander am Flächeninhalte gleich sind, nähmlich ACD = ECD. Denn es ist ACDB = ECDF, also auch $\frac{1}{2}$ACDB = $\frac{1}{2}$ECDF oder das Dreyeck ACD = ECD. Eben so leicht ist einzusehen, daß am Flächeninhalte das Dreyeck ADE dem Dreyecke ACE gleich ist, wenn man zu ED und EC aus dem Puncte A Parallelen führet;

46. II. daß auch Parallelogramme ABDC und EGHF, oder Dreyecke BCD und EGH zwischen zwey Parallelen, wenn sie gleiche Grundlinien CD=GH haben, einander am Flächeninhalte gleich sind, obschon sie nicht auf derselben Grundlinie stehen. Denn man ziehe nur CE und DF; so ist das Viereck ECDF wegen der Gleichheit und des Parallelismus der Seiten ED und EF ein Parallelogramm (386), daher (nach 389) ACDB = ECDF, und auch EGHF=ECDF; folglich ACDB = EGHF, und $\frac{1}{2}$ACDB = $\frac{1}{2}$EGHF oder das Dreyeck BCD = EGH.

Da nun Parallelogramme und Dreyecke zwischen zwey Parallelen gleiche Höhen BM = EN haben; so können wir sagen:

daß Parallelogramme und Dreyecke, die gleiche Grundlinien und Höhen haben, einander am Flächeninhalte gleich sind. Fig.

III. Daß Parallelogramme von einerley Höhe sich am Flächeninhalte gegen einander verhalten, wie ihre Grundlinien, ADCB:EHGF = AD:EH, wenn diese zwey Parallelogramme einerley Höhe haben. Zur Ueberzeugung übertrage man die Grundlinie des kleineren Parallelogramms auf die Grundlinie des größeren, z. B. bis N, so daß EN = AD wird, theile die Grundlinie EH des größeren Parallelogramms in eine so große Anzahl gleicher Theile, daß der Punct N mit einem Theilungspuncte über einander falle, und ziehe sodann durch alle Theilungspuncte die Parallelen ab, NM, cd, u. s. w. Wenn nun EH in n gleiche Theile, deren jeder gleich Ea sey, getheilet ist, und der Punct N mit dem mten Theilungspuncte übereinfällt; so ist EN = m.Ea, EH = n.Ea, daher EN:EH = m:n; zugleich hat man aber auch ENMF = m.EabF, EHGF = n.EabF, mithin ENMF:EHGF = m:n. Hieraus folgt ENMF:EHGF = EN:EH (171.); und endlich ADCB:EHGF = AD:EH, wenn wir ADCB für ENMF und AD für EN substituiren. 47.

Wenn das Verhältniß AD:EH irrational wäre; so müßte man die größere Grundlinie in Gedanken in eine unendliche Anzahl gleicher Theile theilen, damit die kleinere Grundlinie genau bis auf einen Theilungspunct reiche, wenn sie auf die größere übertragen wird; wäre z. B. AD:EH = 3:$\sqrt{65}$; so wäre auch ABCD:EFGH = 3:$\sqrt{65}$.

§. 391.

Auch Dreyecke von einerley Höhe und verschiedenen Grundlinien verhalten sich am Flächeninhalte gegen einander, wie ihre Grundlinien, nähmlich ABD:EFH = AD:EH.

Denn es ist ABCD:EFGH = AD:EH, also auch $\frac{1}{2}$ABCD:$\frac{1}{2}$EFGH = AD:EH, folglich (nach §. 387. I.) ABD:EFH = AD:EH, oder auch ABD:AD = EFH:EH.

§. 392.

Um jedes regelmäßige Vieleck ABDFGH kann ein Kreis dergestalt geführet werden, daß die Scheitel aller Winkel in dem Umkreise liegen. 49.

Fig. 49. Denn man theile nur zwey neben einander liegende Vieleckswinkel, z. B. HAB und ABD durch die Geraden AC und BC in zwey gleiche Theile, und ziehe von ihrem Durchschnittspuncte C in die Scheitel aller Vieleckswinkel die Geraden CD, CF, CG, CH; so ist wegen des gleichschenkeligen Dreyeckes ACB die Gerade CA = CB. Ferner ist wegen der vollkommenen Gleichheit der Dreyecke ACB und BCD die Gerade CA = CD = CB, und der Winkel CDB = CAB = CBD = $\frac{1}{2}$ABD = $\frac{1}{2}$BDF. Eben so ist wegen der Gleichheit der Dreyecke BCD und DCF die Gerade CF = CB = CD = CA u. s. w.

Da nun CA = CB = CD = CF ist u. s. w.; so sind die Scheitel aller Vieleckswinkel von dem Puncte C gleich weit entfernt; folglich liegen sie in einem Umkreise, der aus dem Durchschnittspuncte C mit einem Halbmesser CA = CB beschrieben wird.

§. 393.

Hieraus folgt

I. Daß jedes regelmäßige Vieleck durch die Geraden CA, CB, CD u. s. w. in so viele gleichschenkelige, und vollkommen gleiche Dreyecke zerfället werde, als es Seiten oder Vielecks-winkel hat.

II. Daß jede Seite des Vieleckes einen Bogen von $\frac{360}{n}$ Graden abschneidet, wenn das Vieleck n Seiten enthält, oder daß der Mittelpunctswinkel eines regelmäßigen Vieleckes, z. B. ACB, $\frac{360}{n}$ Grad besitzt, wenn das Vieleck n Seiten enthält. So ist der Mittelpunctswinkel in einem gleichseitigen Dreyecke, nähmlich ACD oder ACG = $\frac{360}{3}$ = 120°; der Mittelpunctswinkel in einem Vierecke = $\frac{360}{4}$ = 90°, in einem Fünfecke = $\frac{360}{5}$ = 72°. In einem regelmäßigen Sechsecke ist der Mittelpunctswinkel ACB = $\frac{360}{6}$ = 60°, folglich CAB + CBA = 180 − 60 = 120°; nun aber ist das Dreyeck ABC gleichschenkelig, folglich der Winkel CAB = ABC = $\frac{120}{2}$ = 60°; es ist also das

Dreyeck ABC auch gleichseitig, und AC=AB=CB, das heißt: Die Seite eines regelmäßigen Sechseckes ist dem Halbmesser seines umschriebenen Kreises gleich; oder eine Sehne, die dem Halbmesser gleicht, schneidet einen Bogen von 60° ab. Fig. 49.

§. 394.

In jedes gegebene regelmäßige Vieleck kann ein Kreis so eingeschrieben werden, daß denselben jede Seite berühret.

Denn man ziehe nur aus dem Mittelpuncte C des umschriebenen Kreises die Senkrechten CM, CZ, CP, u. s. w. auf die Seiten DF, FG u. s. w.; so werden alle diese Senkrechten einander gleich seyn, und folglich die Puncte K, L, M, u. s. w. in einem Umkreise liegen, wovon CK oder CL der Halbmesser, und AB, BD, DF u. s. w. Tangenten sind, weil die Dreyecke DCM, MCF, FCZ, ZCG, GCP u. s. w. alle einander vollkommen gleich sind.

Diese Einschreibung des Kreises ist bey einem jeden, auch unregelmäßigen, Dreyecke möglich. Denn man theile nur zwey Winkel eines gegebenen Dreyeckes in zwey gleiche Theile, ziehe aus dem Durchschnittspuncte der Theilungslinien senkrechte Linien auf die Seiten des Dreyeckes; so werden diese drey Senkrechten einander gleich seyn, und folglich ihre Einschnitte in die Seiten in einem Umkreise liegen. Die Gleichheit dieser drey Senkrechten läßt sich mittelst §. 356. erweisen.

§. 395.

Auch läßt sich in einen gegebenen Kreis jedes regelmäßige Vieleck einschreiben, wenn man an dem Mittelpuncte des Kreises einen Winkel verzeichnet, der dem Mittelpunctswinkel des verlangten regelmäßigen Vieleckes gleich ist, und sodann die Sehne des Bogens, den die Schenkel des verzeichneten Winkels abschneiden, auf dem Umkreise so oft herumträgt, als es sich thun läßt.

Dieses geschieht bey der Einschreibung eines regelmäßigen Dreyeckes, wenn man aus einem Puncte des Umkreises B mit dem Halbmesser des gegebenen Kreises einen Bogen ACD ziehet, der den gegebenen Umkreis in A und D durchschneidet; und sodann die Sehne AD von D in G oder von A in G überträgt. Denn es ist der Bogen AB + BD = 60 + 60 = 120° = dem Mittel-

Fig. 49. punctswinkel des regelmäßigen Dreyeckes; und da DG = AD ist, so ist auch der Bogen DFG = ABD = 120°; und endlich AHG = AHGFBA — ABDFG = 360 — 240 = 120°; folglich auch AG = AD = DG. Oder man theile den Halbmesser CB in dem Puncte Q durch die Senkrechte AD in zwey gleiche Theile; so wird AD die Seite des regelmäßigen Dreyeckes seyn. Denn es ist die Seite CQ = QB, QA = QA, der Winkel AQC = AQB; folglich AB = AC = CD = DB, der Bogen AB = BD = 60°, und endlich der Bogen ABD = 120°.

Theilet man nun die Bogen AHG, GFD, DBA in den Puncten H, F, B in zwey gleiche Theile, und verbindet die Puncte A, B, D, F, G, H durch gerade Linien; so wird in demselben Kreise auch ein regelmäßiges Sechseck eingeschrieben seyn. Und so kann durch fernere Halbirung der Bogen aus einem Sechseck ein Zwölfeck, aus dem Zwölfeck ein Vierundzwanzigeck bestimmt werden u. s. w. Das regelmäßige Sechseck wird geschwinder in einen Kreis eingeschrieben, wenn man den Halbmesser sechs Mahl auf dem Umkreise herumträgt.

Ein regelmäßiges Viereck oder ein Quadrat wird in einen gegebenen Kreis eingeschrieben, wenn man zwey auf einander senkrechte Durchmesser BG und NE zieht, und ihre Endpuncte B, E, G, N durch gerade Linien verbindet. Theilet man nun einen jeden Bogen, den die Seite des eingeschriebenen Quadrates abschneidet, in zwey gleiche Theile; so wird man auch ein regelmäßiges Achteck einschreiben können. Und so läßt sich ferner ein 16, 32, 64eck u. s. w. in einen Kreis einschreiben.

Die Einschreibung eines Fünf-, Zehn-, Zwanzigeckes u. s. w. ingleichen eines 15, 30, 60eckes u. s. w. soll weiter unten vorkommen. Die Einschreibung der übrigen Vielecke aber läßt sich nach Gründen der Elementar-Geometrie nicht anders verrichten, als mit Hülfe des Transporteurs, oder durch bloßes Versuchen (tentando).

§. 396.

50. Auch läßt sich um einen gegebenen Kreis ein jedes regelmäßige Vieleck dergestalt beschreiben, daß jede Seite desselben den gegebenen Umkreis berühret, wenn man aus dem Mittelpuncte

des Kreises einen Winkel ECF verzeichnet, der dem Mittelpunctswinkel des verlangten regelmäßigen Vieleckes gleich ist; sodann die Sehne EF durch die Senkrechte CG in zwey gleiche Theile theilet, die Schenkel CE und CF verlängert, durch den Punct G die Parallele AB zu EF zieht, mit dem Halbmesser CA oder CB den Kreis AMNPB beschreibet, und endlich die Sehne AB in diesem Kreise so oft herumträgt, als es sich thun läßt. Der Grund dieses Verfahrens ist aus dem Vorhergehenden leicht einzusehen. Fig.

IV. Abschnitt.

Von den Proportional-Linien.

§. 397.

Wenn man in einem Dreyecke ABC zu einer Seite BC eine Parallele DE führt, so werden dadurch die zwey anderen Seiten in proportionale Theile geschnitten; nähmlich es wird AD:AE = BD:CE = AB:AC. Ueberdieß ist das Dreyeck ADE dem Dreyecke ABC ähnlich. 51.

Denn man ziehe nur die Geraden EB und DC; so ist am Flächeninhalte das Dreyeck DEB = EDC, weil diese zwey Dreyecke auf derselben Grundlinie DE zwischen zwey Parallelen stehen. Es ist also auch DEB+ADE=EDC+ADE, nähmlich AEB=ADC.

Weil jedoch Dreyecke von gleichen Höhen ihren Grundlinien proportional sind (391.), so ist, da die Dreyecke AED, ECD und ACD dieselbe Höhe besitzen,

AED:AE = ECD:CE = ACD:AC;

eben so hat man, da auch die Dreyecke ADE, BDE und ABE einerley Höhe haben,

AD:ADE = BD:BDE = AB:ABE.

Multiplicirt man diese Verhältnisse gliederweise mit einander und reducirt, so ergibt sich

AD:AE = BD:CE = AB:AC.

Weil ferner der Winkel BAC = DAE, und wegen des Parallelismus der Geraden DE und BC auch der Winkel ABC =

Fig. 51. ADE ist; so sind die Dreyecke ABC und ADE (nach 378. IV.) einander ähnlich.

§. 398.

Und umgekehrt, wenn eine Gerade DE zwey Seiten AB und AC eines Dreyeckes in proportionale Theile zerschneidet, so daß von den drey Verhältnissen AD:AE, BD:CE, AB:AC zwey gleich sind; so läuft dieselbe zur dritten Seite BC parallel.

Denn ist z. B. AD:AE = AB:AC und wäre DE nicht parallel zu BC; so könnte durch den Punct D eine andere Parallele, z. B. DG gezogen werden; dann wäre vermöge des Vorhergehenden AD:AG = AB:AC, und vermöge der Voraussetzung AD:AE = AB:AC, also auch AG:AE = AC:AC; folglich wäre AG = AE, welches nicht seyn kann; es kann demnach außer der DE keine andere DG durch den Punct D parallel zu BC geführet werden. Wenn also AD:AE = AB:AC statt findet; so läuft DE parallel zu BC.

§. 399.

I. Bey zwey ähnlichen Dreyecken ABC und abc stehen die gleichnahmigen Seiten (latera homologa), die nähmlich gleichen Winkeln gegenüber liegen, in Proportion; nähmlich es ist AB : ab = BC : bc = CA : ca.

Denn man lege nur das kleinere Dreyeck abc dergestalt auf das größere ABC, daß der Winkel a den Winkel A decke, die gleichnahmige Seite ab auf AB, und ac auf AC falle; so wird die Seite bc mit BC parallel laufen (384.), und es wird AD = ab, AE = ac seyn, wenn die Schenkel ab und ac bis D und E reichen. Nun ist vermöge des Vorhergehenden (§. 397) AB:AD = AC:AE, also auch AB:ab = CA:ca. Würde man nun den Winkel b auf B, und die gleichnahmige Seite bc auf BC legen; so würde ac mit AC parallel laufen, und vermöge des Vorhergehenden folgende Proportion statt finden: AB:ab = BC:bc, u. s. w.

II. Umgekehrt, wenn die Seiten eines Dreyeckes abc mit den Seiten eines anderen Dreyeckes ABC in Proportion stehen, nähmlich wenn AB:ab = BC:bc = AC:ac statt findet; so sind die Dreyecke ähnlich.

Denn man mache nur AD = ab, AE = ac, und ziehe die Gerade DE; so ist (398) DE zur BC parallel, daher sind (377) die Dreyecke ABC und ADE ähnlich, folglich (nach I.) AB : AD = BC : DE; allein der Annahme gemäß ist AB : ab = BC : bc, somit wegen AD = ab auch DE = bc. Da nun in den Dreyecken abc und ADE die Seiten AD = ab, AE = ac, DE = bc sind; so sind sie einander vollkommen gleich, das ist gleich und ähnlich, es ist nähmlich ADE ∽ abc. Nun aber ist das Dreyeck ADE ∽ ABC, also auch abc ∽ ABC. Fig. 51.

Wir werden durch dieses (∽) Zeichen die Aehnlichkeit anzeigen.

§. 400.

Wenn in zwey Dreyecken ABC und abc der Winkel A = a ist, und ab : AB = ac : AC statt findet; das ist, wenn die Seiten, die den gleichen Winkel einschließen, in Proportion stehen, so sind die Dreyecke einander ähnlich.

Denn man lege nur das Dreyeck abc dergestalt auf ABC, daß der Winkel a den Winkel A decke, die größere Seite ab auf AB bis D, und die kleinere ac auf AC bis E falle; so wird DE = bc, der Winkel ADE = b, und AED = c seyn: nun ist ab : AB = ac : AC, und ab = AD, ac = AE, also auch AD : AB = AE : AC, folglich DE parallel zu BC (398.), und das Dreyeck ADE dem Dreyecke ABC ähnlich. Nun aber ist das Dreyeck ADE mit abc identisch, folglich ist auch das Dreyeck abc ∽ ABC.

§. 401.

Wenn man in einem Dreyecke ABC einen Winkel BAC durch die Gerade AD in zwey gleiche Theile theilet; so ist CD : CA = DB : AB = BC : CA + AB. 52.

Denn man verlängere nur CA, mache AE = AB, und ziehe BE; so ist BE parallel zu DA, weil BAC = 2x = y + z = z + z = 2z, nähmlich x = z ist (363.); folglich (nach 397.) CD : CA = DB : AE = BC : CD, oder wegen AE = AB und CE = CA + AE = CA + AB, CD : CA = DB : AB = BC : CA + AB.

Umgekehrt, wenn die Gerade AD dergestalt gezogen wird, daß von den drey Verhältnissen CD : CA, DB : AB

Fig. 52. und $BC : CA + AB$ zwey gleich sind; so theilt sie den Winkel BAC in zwey gleiche Theile.

Denn ist z. B. $CD : CA = DB : AB$, so verlängere man CA, mache $AE = AB$, und ziehe BE; so ist DA parallel zu BE, weil vermöge der Voraussetzung $CD : CA = DB : AE$ statt findet (398.); folglich ist $x = z$. Ferner ist das Dreyeck BAE gleichschenkelig, daher $y = z$; nun aber ist der Winkel $CAB = y + z = 2z$, oder $CAB = 2x$, und somit $x = \frac{1}{2}$ CAB.

§. 402.

53. Wenn man in einem rechtwinkeligen Dreyecke aus der Spitze des rechten Winkels eine Senkrechte auf die Hypothenuse zieht; so sind die dadurch entstehenden Dreyecke dem gegebenen, und unter sich ähnlich; z. B. in Fig. 53 ist $ADB \sim ADC \sim ABC$.

Denn weil AD auf BC senkrecht steht, sind die Dreyecke ADB und ADC, eben so wie BAC rechtwinkelig. Ueberdieß hat das Dreyeck BAC mit ADB den Winkel x und mit ADC den Winkel y gemein; daher sind diese Dreyecke ADB und ADC (nach 378. II.) dem Dreyecke BAC, folglich auch einander selbst ähnlich.

§. 403.

In jedem rechtwinkeligen Dreyecke ABC ist das Quadrat der Hypothenuse den Quadraten der beyden Katheten zusammengenommen gleich; es ist nähmlich $BC^2 = AB^2 + AC^2$, oder $a^2 = b^2 + c^2$, wenn wir $BC = a$, $CA = b$, und $AB = c$ setzen.

Um diese wichtige Wahrheit einzusehen, ziehe man aus der Spitze des rechten Winkels die Senkrechte AD auf die Hypothenuse BC; so ist $ACD \sim ABD \sim ABC$ (402.). Es findet demnach in den Dreyecken ABD und ABC folgende Proportion statt: $BC : AB = AB : BD$, oder wenn wir BD mit d benennen, $a : c = c : d$ (A); deßgleichen ist in den Dreyecken ADC und ABC, $BC : AC = AC : DC$, oder $a : b = b : a - d$ (B), weil $DC = BC - BD = a - d$ ist.

Nun ist aus der Proportion A .... $ad = c^2$
und aus der Proportion B .. $a^2 - ad = b^2$ } (vermöge 182.); Fig.

also gibt die Addition .... $a^2 = b^2 + c^2$;
das ist, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Man kann diesen Satz auch auf folgende Art erweisen:

Auf jeder Seite des rechtwinkeligen Dreyeckes verzeichne 54.
man ein Quadrat, ziehe die Senkrechte AD, und die Geraden AE, CF, AF, PE, so wird man leicht einsehen, daß das Quadrat ABFH dem Rechtecke BPDE gleich ist. Denn es ist das Dreyeck FCB = BAE, weil die Seite BF = BA, BC = BE, und der Winkel m + p = p + n, nähmlich der Winkel FBC = ABE (356. II.) ist. Nun aber ist am Flächeninhalte das Dreyeck FCB = FAB, und BAE = BPE (390.); es ist also auch FAB = BPE, und auch 2FAB = 2BPE, das ist, FHAB = BPDE, nähmlich das Quadrat BH ist dem Rechtecke BD gleich. Auf eben diese Art kann man zeigen, daß CM = CD ist, wenn man von A nach G und von B nach N gerade Linien ziehet. Da nun BH = BD, und CM = CD ist; so ist auch BH + CM = BD + CD = BG, oder $BA^2 + AC^2 = BC^2$. Es ist nähmlich Sitte, das auf einer Geraden AC errichtete Quadrat mit AC^2 oder CA^2, oder auch mit b^2 zu bezeichnen, wenn man die Gerade AC = b setzt.

Anmerkung: Diese zwey Sätze: Das Quadrat der Hypothenuse ist den Quadraten der beyden Katheten zusammengenommen gleich; und in ähnlichen Dreyecken stehen die gleichnahmigen Seiten in Proportion: sind ungemein reiche und gleichsam unerschöpfliche Quellen, aus denen die wichtigsten Wahrheiten in alle Theile der niederen und höheren Geometrie fließen.

§. 404.

Umgekehrt, wenn in einem Dreyecke das Quadrat der größten Seite den Quadraten der beyden übrigen zusammengenommen gleich ist, so ist dieses Dreyeck rechtwinkelig; nähmlich wenn $AB^2 = AC^2 + CB^2$ ist, so ist $m = 90^0$.

Denn man errichte nur auf AC in dem Puncte C die Senk- 55.
rechte CD, und mache CD = CB; so ist in dem rechtwinkeligen

Fig. 55. Dreyecke ACD vermöge des Vorhergehenden $AD^2 = CA^2 + CD^2$, oder $AD^2 = AC^2 + CB^2$, (weil $CD = BC$ und folglich $CD^2 = CB^2$ gemacht worden ist). Nun ist aber vermöge der Voraussetzung $AB^2 = AC^2 + CB^2$; folglich ist $AD^2 = AB^2$, oder $AD = AB$. Da in den Dreyecken ACD und ACB die Seite $AC = AC$, $DC = CB$, und $AD = AB$ ist; so sind diese Dreyecke einander vollkommen gleich, und $n = m = 90°$.

§. 405.

Aus der Gleichung $a^2 = b^2 + c^2$ folgt, daß auch $b^2 = a^2 - c^2$, und $c^2 = a^2 - b^2$ ist. Es ist demnach in einem rechtwinkeligen Dreyecke die Hypothenuse $a = \sqrt{(b^2 + c^2)}$, die eine Kathete $b = \sqrt{(a^2 - c^2)}$, und die andere $c = \sqrt{(a^2 - b^2)}$. Es sey z. B. die eine Kathete $b = 3$, und die andere $c = 4$; so ist die Hypothenuse $a = \sqrt{(9 + 16)} = \sqrt{25} = 5$; folglich schließen drey Seiten, die sich wie 3, 4, 5 verhalten, ein rechtwinkeliges Dreyeck ein. Man pflegt auch wirklich in der Ausübung eine Schnur nach diesem Verhältnisse einzutheilen, und dann zur Errichtung der Senkrechten auf dem Felde zu gebrauchen.

Außer diesen drey ganzen Zahlen 3, 4, 5, und ihren Vielfachen $3n, 4n, 5n$ (z. B. 6, 8, 10; 9, 12, 15), gibt es unzählige, die auch ein rechtwinkeliges Dreyeck einschließen; z. B. 5, 12, 13; denn es ist $(13)^2 = (12)^2 + 5^2$, nähmlich $169 = 144 + 25 = 169$. Man findet dergleichen Zahlen, wenn man die unbestimmte Gleichung $a^2 = b^2 + c^2$ auflöst. Es ergibt sich nähmlich, wenn man im §. 225 Aufg. 6 die Buchstaben x, y, z mit c, b, a vertauscht, $b = \frac{c^2 - A^2}{2A} = \frac{c^2}{2A} - \frac{A}{2}$ und $a = \frac{c^2 + A^2}{2A} = \frac{c^2}{2A} + \frac{A}{2}$. Damit a und b ganze Zahlen werden, setzen wir $\frac{c^2}{2A} = m$ und $\frac{A}{2} = n$, wodurch $\frac{c^2}{4} = mn$, folglich

$c = 2\sqrt{mn}$, $b = m - n$, $a = m + n$ wird.

Soll aber auch c rational werden, so nehmen wir $m = x^2$ und $n = y^2$, und erhalten

$$c = 2xy,\ b = x^2 - y^2,\ a = x^2 + y^2.$$

Fig. 55.

Setzen wir nun	$x =$	2,	3,	4,	4,	5,
und	$y =$	1,	2,	1,	3,	2,
so ist die eine Kathete . .	$b =$	3,	5,	15,	7,	21,
die andere Kathete . . .	$c =$	4,	12,	8,	24,	20,
und die Hypothenuse . .	$a =$	5,	13,	17,	25,	29,

u. s. w.

Die Formeln $a = \sqrt{(b^2 + c^2)}$, und $b = \sqrt{(a^2 - c^2)}$ geben uns zu erkennen, daß man zu zwey Katheten die Hypothenuse, und zu der Hypothenuse und einer Kathete jederzeit die andere Kathete durch Rechnung bestimmen könne. Allein wir können dieses auch durch die Verzeichnung finden. Wenn nähmlich zu den gegebenen Katheten CD und CA die Hypothenuse durch Zeichnung zu suchen ist; so stelle man die zwey gegebenen Katheten unter einem rechten Winkel zusammen, und verbinde ihre Endpuncte durch eine Gerade AD; so wird diese die gesuchte Hypothenuse seyn. Deßgleichen aus der Hypothenuse und aus einer Kathete wird die andere Kathete durch die Verzeichnung gefunden, wenn man einen Schenkel eines rechten Winkels der gegebenen Kathete CA gleich macht, und aus A mit einem der Hypothenuse gleichen Halbmesser einen Kreisbogen beschreibet, der den andern Schenkel in D durchschneidet; die Gerade CD wird dann der gesuchten Kathete gleich seyn.

§. 406.

56. Wenn man an dem Endpuncte B einer gegebenen Geraden AB eine Senkrechte $BC = \frac{1}{2}AB$ errichtet, die Hypothenuse AC ziehet, $CE = CB = \frac{1}{2}AB$, und $AD = AE$ abschneidet; so wird dadurch die gegebene Gerade AB in dem Puncte D nach dem äußeren und mittleren Verhältnisse getheilet (media et extrema ratione secta); nähmlich der größere Theil AD wird die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem kleineren Theile BD und zwischen der ganzen Geraden AB seyn; das ist, es wird $BD : DA = DA : BA$ sich verhalten.

Denn es ist $AC^2 = AB^2 + BC^2$, oder $(AE + EC)^2 = (AD + BC)^2 = AB^2 + BC^2$, nähmlich $AD^2 + 2BC \cdot AD + BC^2 = AB^2 + BC^2$; also auch $AD^2 = AB^2 - 2BC \cdot AD =$

Fig. $AB^2 - AB.AD = (AB - AD).AB$, das ist $AD^2 = BD.AB$; und endlich $BD : AD = AD : AB$ (vermöge 185.).

§. 407.

57. Wenn man den Halbmesser CB eines Kreises nach dem äußeren und mittleren Verhältnisse, nähmlich in dem Puncte D dergestalt theilet, daß $BD : DC = DC : BC$ sich verhält, und die Sehne $BA = DC$ macht; so ist diese Sehne die Seite eines regelmäßigen Zehneckes.

Denn es ist der Bogen AB oder der Winkel $n = 36^0 = \frac{360^0}{10}$, welches ich auf folgende Art erweise. Es ist vermöge der Voraussetzung $BD : DC = DC : BC$, und $DC = BA$; folglich ist in den Dreyecken BDA und BAC, $BD : BA = BA : BC$, überdieß ist der Winkel p beyden Dreyecken gemein: demnach sind diese zwey Dreyecke einander ähnlich (400.), und folglich ist $n = r$. Ferner ist das Dreyeck ABC gleichschenkelig; es ist also auch das Dreyeck BDA gleichschenkelig, somit $m = p = (q + r)$, und $AB = AD = DC$; folglich ist auch das Dreyeck ADC gleichschenkelig, und $n = q$. Nun ist $m = n + q$, (379.) $= n + n = 2n$, also auch $p = 2n$, und $q + r = 2n$, weil $m = p = (q + r)$ ist; endlich ist auch $n + p + (q + r) = 180^0$ (378.); folglich ist auch $n + 2n + 2n = 5n = 180^0$, nähmlich der Mittelpunctswinkel $n = \frac{180^0}{5} = 36^0 = \frac{360^0}{10}$, oder der Bogen AB ist der zehnte Theil des ganzen Umkreises, und die Sehne AB ist die Seite eines regelmäßigen Zehneckes, die man also zehnmahl auf dem Umkreise herumtragen wird, um ein regelmäßiges Zehneck einzuschreiben.

§. 408.

In jedem Vierecke ADCE (Fig. 151.), dessen Winkelpuncte in der Peripherie eines Kreises liegen, gleicht das Product der Diagonalen der Summe der Producte der gegenüberstehenden Seiten; nähmlich es ist

$$AD.DE = AD.CE + AE.CD.$$

Denn man mache den Winkel $DAB = CAE = n'$, so wird $BAE = DAE - n' = CAD$; folglich sind, weil $m = m'$ (372. II) ist, die Dreyecke DAB und CAE, und wegen $p = p'$ (372. II), auch die Dreyecke ABE und CAD (nach 378. IV) ähnlich. Sonach erhalten wir die Proportionen Fig. 151.

$$AD : DB = AC : CE$$
$$AE : BE = AC : CD$$

oder die Gleichungen

$$AC . DB = AD . CE$$
$$AC . BE = AE . CD$$

deren Summe, da $DB + BE = DE$ ist,

$$AC . DE = AD . CE + AE . CD$$

gibt.

§. 409.

I. Ist $EF = c$ eine Sehne, oder die Seite eines regelmäßigen Vieleckes in einem Kreise, dessen Halbmesser r und Durchmesser d ist; so findet man ihren Abstand vom Mittelpuncte oder den Halbmesser des dem Vielecke eingeschriebenen Kreises $CD = \varrho$ aus dem rechtwinkeligen Dreyecke CDE, nähmlich 50.

$$\varrho = \sqrt{r^2 - \frac{c^2}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{d^2 - c^2}$$

und den Durchmesser desselben Kreises

$$\delta = \sqrt{d^2 - c^2}.$$

Setzen wir die Seite AB des jenem Kreise umschriebenen Vieleckes $= C$, den Halbmesser CA des Kreises, in dessen Peripherie die Spitzen dieses Vieleckes liegen $= R$, und seinen Durchmesser $= D$; so liefern die ähnlichen Dreyecke CED und CAG die Proportionen

$$C : c = R : r = r : \varrho = D : d = d : \delta,$$

woraus wir

$$C = \frac{cr}{\varrho} = \frac{cd}{\delta}, \quad R = \frac{r^2}{\varrho}, \quad D = \frac{d^2}{\delta}$$

erhalten.

Bezeichnet ferner n die Anzahl der Seiten der hier betrachteten regelmäßigen Vielecke, p den Umfang des eingeschriebenen

Fig. und P jenen des umschriebenen Vieleckes; so wird $c = \frac{p}{n}$ und $C = \frac{P}{n}$, daher findet man

$$\delta = \sqrt{d^2 - \frac{p^2}{n^2}}, \qquad P = \frac{pd}{\delta}.$$

152. II. Sind (Fig. 152) die Sehnen $AE = b$ und $EC = c$ zweyer Bogen AE und EC bekannt, so kann man auch die Sehne $AC = a$ der Summe $AE + EC = AEC$ dieser Bogen berechnen. Denn zieht man zu dem Puncte E den Durchmesser $ED = d$ und die Sehnen AD, CD; so ist (nach 405)

$$AD = \sqrt{d^2 - b^2}, \quad CD = \sqrt{d^2 - c^2},$$

daher (vermöge 408)

$$ad = b\sqrt{d^2 - c^2} + c\sqrt{d^2 - b^2},$$

folglich hat man

$$(1) \qquad a = b\sqrt{1 - \frac{c^2}{d^2}} + c\sqrt{1 - \frac{b^2}{d^2}}.$$

150. Eben so kann man, wenn (Fig. 150) die Sehnen $AC = b$ und $AE = c$ der Bogen AEC und AE gegeben sind, die Sehne $EC = a$ finden, welche der Differenz EC dieser Bogen zukommt. Zieht man nähmlich den Durchmesser $AD = d$, die Sehne

$$CD = \sqrt{d^2 - b^2} \text{ und } ED = \sqrt{d^2 - c^2};$$

so ergibt sich (nach 408) die Gleichung

$$b\sqrt{d^2 - c^2} = c\sqrt{d^2 - b^2} + ad,$$

woraus man

$$(2) \qquad a = b\sqrt{1 - \frac{c^2}{d^2}} - c\sqrt{1 - \frac{b^2}{d^2}}$$

erhält. Man sieht leicht, daß die Gleichung (2) aus (1) hervorgeht, wenn man in dieser c in $-c$ verwandelt.

III. Die Gleichung (1) läßt sich zur Berechnung der Sehnen der vielfachen Bogen benützen.

Bezeichnet nähmlich c die Sehne irgend eines Bogens, c_2, c_3, c_4, c_5, ... die Sehne des 2, 3, 4, 5, ... fachen Bogens; so setze man, um zuvörderst c_2 zu finden, $a = c_2$ und $b = c$, wornach

(3) $c_2 = 2c\sqrt{1 - \frac{c^2}{d^2}} = c\sqrt{4 - \frac{c^2}{r^2}}$ Fig. 49.

wird. Diese Gleichung kann auch durch die Betrachtung der Figur 49 gerechtfertiget werden; denn ist $BD = c$, $AD = c_2$, so hat man $GD = \sqrt{d^2 - c^2}$, daher gibt die Aehnlichkeit der Dreyecke BDQ und BDG die Proportion

$$BD : DQ = BG : GD,$$

oder

$$c : \tfrac{1}{2}c_2 = d : \sqrt{d^2 - c^2}$$

und somit

$$c_2 = 2c\sqrt{1 - \frac{c^2}{d^2}}.$$

Die Gleichung (3) dient uns zur Bestimmung der Sehne $c_{,,}$ des halben Bogens, dessen Sehne c ist; denn da die Sehne c einen nur halb so großen Bogen als die Sehne c_2 abschneidet, so gelangen wir zu unserem Zwecke, wenn wir in dieser Gleichung c für c_2, und $c_{,,}$ statt c schreiben und sie dadurch in

$$c = 2c_{,,}\sqrt{1 - \frac{c_{,,}^2}{d^2}}$$

verwandeln, woraus wir

$$c_{,,}^4 - c_{,,}^2 d^2 = -\frac{c^2 d^2}{4},$$

folglich

$$c_{,,} = \sqrt{\frac{d^2 - d\sqrt{d^2 - c^2}}{2}}$$

erhalten, wofern wir das Zeichen der Wurzelgröße $\sqrt{d^2 - c^2}$ dergestalt wählen, daß für $c = o$ auch $c_{,,} = o$ werde. — Man kann diese Gleichung ebenfalls aus den ähnlichen Dreyecken BDQ und BDG (Fig. 49) ableiten; denn nach ihnen ist $BQ : BD = BD : BG$, somit $BD = \sqrt{BQ \cdot BG}$; nimmt man nun $AD = c$, $BD = c_{,,}$, so wird $CQ = \varrho = \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - c^2}$ und $BQ = \frac{d - \delta}{2}$, folglich

$$(4) \quad c_{,,} = \sqrt{\frac{d(d - \delta)}{2}} = \sqrt{\frac{d(d - \sqrt{d^2 - c^2})}{2}}$$

$$= r\sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{c^2}{r^2}}}.$$

Fig. 49. Bedeutet p, wie in I., den Umfang des eingeschriebenen regelmäßigen n seitigen Vieleckes, dessen Seite c ist, und p_1 jenen des 2n seitigen Vieleckes, dem die Seite $c_{//}$ zugehört, so hat man

$$c = \frac{p}{n},\quad c_{//} = \frac{p_1}{2n},$$ folglich wegen der Gleichung (4)

$$p_1 = n\sqrt{2d(d-\delta)}.$$

Begehrt man ferner die Sehne c_3 des dreyfachen Bogens, so setze man in der Gleichung (1)

$$a = c_3 \text{ und } b = c_2 = 2c\sqrt{1-\frac{c^2}{d^2}},$$

wornach man

$$c_3 = 2c\left(1-\frac{c^2}{d^2}\right) + c\left(1-\frac{2c^2}{d^2}\right)$$

oder

$$(5)\qquad c_3 = c\left(3-\frac{4c^2}{d^2}\right) = c\left(3-\frac{c^2}{r^2}\right)$$

erhält.

Auf dieselbe Weise findet man

$$(6)\quad c_4 = 2c\left(2-\frac{4c^2}{d^2}\right)\sqrt{1-\frac{c^2}{d^2}} = c\left(2-\frac{c^2}{r^2}\right)\sqrt{4-\frac{c^2}{r^2}}$$

$$c_5 = c\left(5-\frac{20c^2}{d^2}+\frac{16c^4}{d^4}\right) = c\left(5-\frac{5c^2}{r^2}+\frac{c^4}{r^4}\right)$$

u. s. w.

IV. Die Ergebnisse dieser Vorarbeiten setzen uns in den Stand zwischen dem Halbmesser r eines jeden Kreises und der Seite c des ihm eingeschriebenen regelmäßigen n eckes eine Gleichung aufzustellen, woraus wir nach Erforderniß entweder die Seite c oder den Halbmesser r bestimmen können. Denn damit die Sehne c die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen n eckes werde, muß, wie eine leichte Betrachtung lehrt, die Sehne c_n ihres nfachen Bogens Null und die Sehne c_m des mfachen Bogens der Sehne c_{n-m} des n—mfachen Bogens gleich, nähmlich

$$c_n = 0 \text{ und } c_m = c_{n-m}$$

werden. Setzt man nun in der einen oder der anderen von diesen Gleichungen die, nach der in III. gegebenen Anleitung gefundenen, Werthe von c_n, c_m und c_{n-m}; so verwandelt sie sich in die verlangte zwischen r und c bestehende Gleichung.

Um dieß durch Beyspiele zu erläutern, suchen wir Fig.
1. diejenige Sehne c, welche die Hälfte des Umkreises, d. i. 180° 49.
abschneidet. Hier ist $n = 2$, daher $c_2 = 0$ oder $c\sqrt{4 - \frac{c^2}{r^2}} = 0$,
somit $c = 2r = d$, was wir nach §. 347. IV. erwarten konnten.

Mittelst dieses Werthes von c läßt sich die Seite c′ des eingeschriebenen regelmäßigen Viereckes oder die Sehne von 90° nach Gleichung (4) berechnen; denn setzt man in derselben

$$c = d = 2r,\ c_{,,} = c';$$

so wird

$$c' = \frac{d}{\sqrt{2}} = r\sqrt{2},$$

wozu wir auch gelangen, wenn wir die Gleichung $c_3 = c$, oder $c'\left(3 - \frac{c'^2}{r^2}\right) = c'$ auflösen. Bestätigt wird dieses Resultat durch das rechtwinkelige Dreyeck BCE (Fig. 49), in welchem
$BE = c' = \sqrt{BC^2 + EC^2} = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$ ist.

Hieraus finden wir den Halbmesser $r = \frac{1}{2}c'\sqrt{2}$, und den Halbmesser des dem Vierecke eingeschriebenen Kreises

$$\varrho' = \frac{c'}{2} = \tfrac{1}{2}r\sqrt{2}.$$

Auf dieselbe Weise ergibt sich mit Hülfe der Gleichung (4) die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Achteckes oder die Sehne von 45 Grad $c'' = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, woraus man

$$r = c''\sqrt{1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}}} \text{ und}$$

$$\varrho'' = \tfrac{1}{2}r\sqrt{2 + \sqrt{2}} = c''\left(\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)$$

erhält.

Wiederhohlt man diese Verwendung der Gleichung (4), so findet man nach und nach die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen 16, 32, 64eckes u. s. w.

2. Zur Bestimmung der Seite c des eingeschriebenen regelmäßigen Dreyeckes oder der Sehne von 120° setzen wir $c_3 = 0$, wodurch wir

$$3 - \frac{c^2}{r^2} = 0,$$

also $c = r\sqrt{3}$, und $r = \frac{c}{3}\sqrt{3}$ erhalten.

Fig. 49. Denselben Ausdruck liefert das rechtwinkelige Dreyeck ACQ (Fig. 49), da $AC = r$, $CQ = \frac{r}{2}$ (395), $AQ = \frac{c}{2}$, folglich

$\frac{c}{2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}$ und $c = r\sqrt{3}$ ist.

Bringen wir diesen Werth von c in die Gleichung (4), so finden wir die Seite des regelmäßigen Sechseckes oder die Sehne von 60 Grad $c' = r$, was mit §. 393. II. übereinstimmt.

Durch das nähmliche Verfahren erhalten wir die Seite des regelmäßigen 12eckes oder die Sehne von 30 Grad

$$c'' = r\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \tfrac{1}{2}r(\sqrt{6} - \sqrt{2}),$$

(nach §. 223), jene des 24eckes oder die Sehne von 15 Grad

$c''' = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$ u. s. w.

3. Die Seite c des regelmäßigen Fünfeckes oder die Sehne von 72° wird aus der Gleichung $c_5 = 0$ oder aus $\frac{c^4}{r^4} - 5\frac{c^2}{r^2} + 5 = 0$ gefunden; es ist nähmlich

$$c = r\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}.$$

Wird dieser Werth in die Gleichung (4) gebracht, so ergibt sich die Seite des regelmäßigen Zehneckes oder die Sehne von 36 Grad

$$c' = r\sqrt{2 - \sqrt{\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}}} = r\sqrt{2 - \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5})}$$
$$= r\sqrt{\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}} = \tfrac{1}{2}r(-1 + \sqrt{5}).$$

57. Denselben Ausdruck gewinnt man auch durch die im §. 407 und Fig. 57 erklärte Construction der Seite dieses Vieleckes; denn da hier $BC = r$, $CD = c'$, $BD = r - c'$ ist, so übergeht die daselbst aufgestellte Proportion $BD : DC = DC : BC$ in $r - c' : c' = c' : r$, woraus man $c'^2 + c'r = r^2$, folglich $c' = \frac{1}{2}r(-1 + \sqrt{5})$ findet.

Nun ist es leicht auch die Seite des regelmäßigen 20, 40, 80eckes u. s. w. zu bestimmen.

Quadriren wir die für c und c' gefundenen Ausdrücke, so ist

$$c^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}r^2$$

und

$$c'^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}r^2$$

daher $c^2 - c'^2 = r^2$ und $c^2 = c'^2 + r^2$,

woraus wir (vermöge §. 403 und 404) die interessante Wahrheit Fig.
lernen, daß der Halbmesser eines jeden Kreises und die Seiten des ihm eingeschriebenen regelmäßigen Zehneckes und Fünfeckes ein rechtwinkeliges Dreyeck einschließen, in welchem die letztere die Hypothenuse ist.

Da die Seite BP (Fig. 58) des regelmäßigen 6eckes einen 58.
Bogen von 60°, und die Seite BQ des 10eckes einen Bogen von 36° abschneidet, so muß, wenn man beyde aus demselben Puncte B nach derselben Gegend auf den Umkreis aufträgt, der zwischen ihren Endpuncten liegende Bogen

$$PQ = BP - BQ = 60° - 36° = 24°,$$

also der 15te Theil des Umkreises seyn; folglich ist die Sehne PQ die Seite des regelmäßigen 15eckes und kann demnach mittelst der Gleichung (2) berechnet werden, wenn man in ihr b = der Sehne von 60 Grad = r, c = der Sehne von 36 Grad $= \frac{1}{2}r(-1+\sqrt{5})$ und $d = 2r$ setzt, wodurch man die Seite des 15eckes oder die Sehne von 24 Grad $a = \frac{1}{4}r(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15})$ erhält. Von dieser kann man sofort mit Hülfe der Gleichung (4) leicht auf die Seite des 30, 60eckes u. s. w. übergehen, welches, so wie die im Vorhergehenden angedeutete Bestimmung der anderen Vielecksseiten, ihrer Abstände von dem Mittelpuncte u. m. a. dem Fleiße des Anfängers überlassen wird.

4. Wollten wir die Seite c des regelmäßigen 7eckes, 9eckes u. dgl. bestimmen, so würden wir der Ordnung nach $c_4 = c_3$, $c_5 = c_4$ u. s. w. setzen und so zu den Gleichungen

$$c^6 - 7r^2c^4 + 14r^4c^2 - 7r^6 = 0$$

$$c^8 - 9r^2c^6 + 27r^4c^4 - 30r^6c^2 + 9r^8 = 0 \text{ u. s. w.}$$

gelangen, aus denen wir für die Seite c zwar keine geschlossenen algebraischen Ausdrücke, wohl aber nach der 7. Vorlesung des 1. Theiles hinreichend genäherte Werthe anzugeben vermögen.

§. 410.

Wenn sich in einem Kreise zwey Sehnen durchschneiden, 60.
so ist das Product aus den Abschnitten der einen dem Producte aus den Abschnitten der anderen Sehne gleich; nähmlich $MP.PN = FP.PG$.

Fig. Denn die Dreyecke MFP und GPN sind einander ähnlich, weil der Winkel m = n, F = N, G = M ist (372.); folglich ist MP:FP = PG:PN (399.), und MP.PN = FP.PG (182).

§. 411.

61. I. Wenn man aus einem und demselben Puncte zwey Secanten zu einem Umkreise zieht: so sind die Producte aus den ganzen Secanten in ihren Abschnitten außer dem Umkreise einander gleich, oder diese Abschnitte verhalten sich umgekehrt wie die ganzen Secanten; nähmlich es ist AB.AE = AC.AD, oder AE:AD = AC:AB.

Denn es ist das Dreyeck ABC ∽ ADE, weil der Winkel BAC = DAE, BCA = AED, und ABC = EDA ist (374.); folglich hat man AE:AD = AC:AB, und AE.AB = AD.AC.

Eben so findet man, daß AD:AT = AT:AC nähmlich $AT^2 = AD.AC$, und $AT = \sqrt{AD.AC}$ ist, weil die Dreyecke ADT und ACT einander ähnlich sind.

II. Die Tangente AT ist demnach die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Secante und zwischen ihrem Abschnitte außer dem Kreise.

Da aus eben demselben Grunde auch $At = \sqrt{(AD.AC)}$ ist; so ist auch AT = At, das ist, die zwey Tangenten, die aus einem und demselben Puncte an einen Umkreis gezogen werden, sind einander gleich.

§. 412.

62. Wenn man aus irgend einem Puncte M des Umkreises eine Senkrechte MP auf den Durchmesser AB zieht, so ist diese Senkrechte die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten des Durchmessers; nähmlich

$$AP:PM = PM:PB \text{ oder } PM^2 = AP.PB.$$

Denn es ist $AMB = 90^0$ (372. I.), folglich nach §. 402 das Dreyeck APM ∽ BPM; und AP:PM = PM:PB. Man kann diesen Satz auch so erweisen: PM.PD = AP.PB (410.); nun ist aber PD = PM (367.), folglich auch $PM^2 = AP.PB$.

Es sey der Halbmesser AC = a, so ist AB = $2a$; der Abschnitt AP des Durchmessers zwischen dem Anfangspuncte A und

der Senkrechten MP sey $= x$, so ist $PB = AB - AP = 2a - x$; Fig. und die Senkrechte PM sey $= y$. Substituiren wir diese Wer- 62. the, so ist $y^2 = x(2a - x) = 2ax - x^2$; eine Gleichung, welche die bekannte Eigenschaft des Kreises ausdrückt, daß das Quadrat einer jeden Senkrechten PM dem Producte aus den dazu gehörigen Abschnitten des Durchmessers gleich ist.

Es ist gewöhnlich, daß man nicht nur allein bey dem Kreise, sondern auch bey einer jeden andern krummen Linie die Gerade AP eine Abscisse, und die Senkrechte PM eine Ordinate nennet. Um die Lage eines beliebigen Punctes M einer krummen Linie zu bestimmen, wird nähmlich eine Gerade AB in der Ebene der Krummen nach beliebiger Richtung gezogen, ein Punct derselben, z. B. A, für den Anfangspunct angenommen, und sodann aus dem Puncte M der Krummen eine Senkrechte MP auf die Gerade AB gefällt. Durch die bekannten Längen der zwey Geraden AP und PM ist nun die Lage des Punctes M bestimmt. Die Linie AB von unbestimmter Länge heißt die Abscissenlinie, der nach Belieben angenommene Punct A ist der Anfangspunct der Abscissen, die von einem Puncte M der Krummen auf die Abscissenlinie senkrecht gezogene Gerade MP wird die senkrechte Ordinate der Krummen für den Punct M, und das Stück AP der Abscissenlinie zwischen dem Anfangspuncte A und zwischen der Ordinate MP die Abscisse der Krummen für den Punct M genannt.

§. 413.

Setzet man $CP = x$, d. i. wenn man den Anfangspunct der Abscissen in den Mittelpunct versetzet; so ist $AP = a - x$, und $PB = a + x$; folglich $y^2 = (a - x)(a + x) = a^2 - x^2$, und $y = \pm\sqrt{(a^2 - x^2)}$ (215.). Dieses erhellet auch aus dem rechtwinkeligen Dreyecke PMC; denn es ist in demselben $PM^2 = MC^2 - CP^2$, nähmlich $y^2 = a^2 - x^2$, und $y = \pm\sqrt{(a^2 - x^2)}$. Das Zeichen $\pm$ bedeutet, daß zu einer jeden Abscisse CP zwey gleiche Ordinaten, nähmlich PM und PD gehören, die aber nach entgegengesetzten Richtungen, die eine aufwärts, die andere abwärts zu ziehen sind. Denn es ist aus dem Begriffe der positiven und negativen Größen bekannt, daß alle Senkrechten PD, pd, welche von der Geraden AB abwärts gezogen werden, negativ

Fig. 62. seyn müssen, wenn man die Senkrechten PM, pm, welche von eben derselben Geraden AB aufwärts gezogen sind, für positiv annimmt, oder umgekehrt. Ingleichen jede Abscisse Cp von dem angenommenen Anfangspuncte C gegen die Rechte gerechnet, muß negativ seyn, wenn man die Abscissen CP von demselben Anfangspuncte gegen die Linke gezählt für positiv annimmt, oder umgekehrt.

Aus dieser zweyten Gleichung des Kreises $y = \pm\sqrt{(a^2 - x^2)}$ können wir folgende, theils schon erläuterte, theils noch unerläuterte Eigenschaften herleiten:

I. Die Ordinate in dem angenommenen Anfangspuncte der Abscissen, nähmlich in dem Mittelpuncte des Kreises, ist dem Halbmesser gleich. Denn man setze nur $x = 0$, so ist $y = \pm\sqrt{a^2} = \pm a$.

II. Zu zwey gleichen Abscissen, von denen eine positiv, die andere negativ ist, gehören gleiche Ordinaten; z. B. wenn $CP = +x$, $Cp = -x$ ist, so ist auch

$$PM = pm,\quad PD = pd,\quad MD = md.$$

Zwey Sehnen MD und md in demselben Kreise, welche von dem Mittelpuncte gleich weit abstehen, sind demnach einander gleich.

III. An den Endpuncten des Durchmessers sind die Ordinaten $= 0$; denn man setze nur $x = a$, und $x = -a$; so ist in beyden Fällen $y = 0$.

IV. Ueber die Endpuncte A und B des Durchmessers hinaus sind keine Ordinaten möglich. Denn man setze nur $x = +(a + p)$, und $x = -(a + p)$; so ist in beyden Fällen die Ordinate $y = \pm\sqrt{(-2ap - p^2)}$ unmöglich, wenn p eine beliebig große positive Größe bedeutet.

V. Jede Gerade CM, aus dem angenommenen Anfangspuncte C zu was immer für einem Puncte M des Umkreises gezogen, ist $= a$, und folglich sind alle Puncte des Umkreises von diesem Puncte C gleich weit entfernt. Denn es ist $CM = \sqrt{(CP^2 + PM^2)} = \sqrt{[x^2 + (a^2 - x^2)]} = \sqrt{a^2} = a$.

Wenn nun der Halbmesser in Zahlen gegeben ist, z. B. $a = 10$, so kann man zu jeder in Zahlen angenommenen Abscisse die dazu gehörige Ordinate auch in Zahlen bestimmen. Es sey $x = 6$;

so ist $y = \sqrt{(100 - 36)} = \sqrt{64} = 8$; es sey $x = 7$; so ist Fig. $y = \sqrt{(100 - 49)} = \sqrt{51} = 7{,}1414$ u. s. w. 62.

§. 414.

Wenn man an den Endpunct M der Ordinate PM die Tangente TM zieht, die Abscissenlinie CA verlängert, bis sie die Tangente durchschneidet; so wird das Stück der Abscissenlinie zwischen der Ordinate und dem Durchschnittspuncte der Tangente, nähmlich die Gerade PT, die Subtangente genannt.

In dem Kreise ist die Subtangente $PT = \frac{a^2}{x} - x$. Denn in den zwey ähnlichen Dreyecken TMP und PMC ist $PT : PM = PM : PC$; folglich $PT = \frac{PM^2}{PC} = \frac{y^2}{x} = \frac{a^2 - x^2}{x} = \frac{a^2}{x} - x$.

Setzen wir nun $x = 0$; so ist die Subtangente $= \frac{a^2}{0} = \infty$ (305), welches leicht zu begreifen ist, da in diesem Falle die Tangente mit der Abscissenlinie parallel läuft, und folglich dieselbe nie durchschneidet. Denn wenn man $CP = x = 0$ setzet; so verwandelt sich die Ordinate $PM = y$ in den Halbmesser CN, auf welchen die Tangente Nt senkrecht steht. Nun aber steht auch die Abscissenlinie CP auf eben demselben Halbmesser CN senkrecht; folglich läuft CP mit Nt parallel.

§. 415.

Vielecke, z. B. ABCDEF und abcdef heißen ähnlich, wenn 63.
sie gleich viele Polygon-Winkel enthalten, die einander wechselweise gleich sind, und überdieß durch gleichnahmige Diagonalen, oder durch andere gleichnahmige gerade Linien in lauter ähnliche Dreyecke zertheilet werden können. Aus dieser Erklärung folgt:

I. Daß alle regelmäßigen Vielecke von einerley Gattung (z. B. alle Siebenecke) einander ähnlich sind. Denn sie können durch gerade Linien, die aus ihren Mittelpuncten an die Spitzen der Vieleckswinkel gezogen werden, in lauter ähnliche Dreyecke zerschnitten werden.

II. Jede zwey Seiten des einen Vielecks stehen mit den zwey gleichnahmigen Seiten des anderen Vieleckes in einer

Fig. Proportion; z. B. ba : BA = bc : BC, oder bc : BC = ca : CA.
63. Dieses erhellet aus der Aehnlichkeit der Dreyecke abc und ABC. Ingleichen dc : DC = ca : CA, und ca : CA = da : DA wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke acd und ACD; u. s. w. Da nun bc : BC = ca : CA und auch dc : DC = ca : CA ist; so ist auch bc : BC = dc : DC (190.), nähmlich, bey ähnlichen Vielecken sind die Seiten, welche gleiche Winkel einschließen, einander proportional.

III. Der Umfang (perimeter) des einen Vieleckes verhält sich zum Umfange des andern ähnlichen Vieleckes, wie jede Seite des ersten zu der gleichnahmigen Seite des zweyten Vieleckes, nähmlich

$$(ab + bc + cd + \text{etc.}) : (AB + BC + CD + \text{etc.}) = ab : AB = bc : BC = \text{etc.}$$

Denn es ist (vermöge II.)
$ab : AB = bc : BC = cd : CD = de : DE =$ u. s. w.
folglich (nach 191.)

$$(ab + bc + cd + \text{etc.}) : (AB + BC + CD + \text{etc.}) = ab : AB = bc : BC = \text{etc.}$$

§. 416.

64. Die Umfänge der regelmäßigen Vielecke von derselben Gattung verhalten sich gegen einander, wie die Halbmesser der umschriebenen Kreise; z. B. wenn ab und AB Seiten regelmäßiger Vielecke von einerley Gattung, cb und CB aber die Halbmesser der umschriebenen Kreise sind, und der Umfang des ersten $= p$, und der Umfang des zweyten $= P$ gesetzet wird; so findet folgende Proportion statt, $p : P = cb : CB$.

Denn die Dreyecke acb und ACB sind einander ähnlich; folglich $cb : ba = CB : AB$, oder $cb : CB = ba : BA$; nun aber ist vermöge des Vorhergehenden $p : P = ba : BA$; es ist also auch $p : P = cb : CB$. Eben so kann man erweisen, daß sich die Umfänge der regelmäßigen Vielecke von derselben Gattung gegen einander verhalten, wie die Halbmesser der eingeschriebenen Kreise, oder wie die Senkrechten cd und CD.

Sieht man nun die Kreise für regelmäßige Vielecke von einer Fig.
unendlichen Anzahl Seiten an; so wird man leicht begreifen, daß 64.
sich auch die Umkreise gegen einander verhalten wie ihre Halbmesser, oder wie ihre Durchmesser; wie auch, daß ähnliche, nähmlich gleich viel Grade haltende, Bogen von verschiedenen Kreisen in Hinsicht auf ihre wirkliche Länge sich gegen einander verhalten wie ihre Halbmesser, nähmlich der Bogen AEB : aeb = AC : ac. Wir bemerken hier nur noch, daß man zu jedem gegebenen Durchmesser den Umkreis nach diesem Satze finden könnte, wenn nur zu einem einzigen Durchmesser der zugehörige Umkreis bekannt wäre. Z. B. wenn wir einmahl überzeugt seyn werden, daß man zu einem Durchmesser = 113 den zugehörigen Umkreis = 355 setzen könne; werden wir zu jedem Durchmesser d den Umkreis p durch folgende Proportion bestimmen können, $113 : 355 = d : p$, denn es ist $p = \frac{355}{113} d$, und der zu einem gegebenen Umkreise $= p$ zugehörige Durchmesser $d = \frac{113}{355} p$. Wir werden weiter unten das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise durch Näherung zu bestimmen Gelegenheit haben.

V. Abschnitt.

Von einigen Aufgaben über die Proportional-Linien.

§. 417.

Zu drey gegebenen Geraden a, b, c die vierte Proportio- 65.
nal-Linie $x = \frac{bc}{a}$ durch Verzeichnung zu finden.

Auflösung. Auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels schneide man $GM = a$, $GN = b$, $GP = c$ ab, ziehe MN, und durch P die Parallele PQ; so ist $GQ = x = \frac{bc}{a}$. Denn GM : GN = GP : GQ, d. i. $a : b = c : x$, daher $x = \frac{bc}{a}$.

Wäre zu zwey gegebenen Geraden a und b die dritte Propor- 66.
tionale $x = \frac{b^2}{a}$ zu suchen; so mache man wieder $GM = a$, GN

Fig. $= b$, $GP = b$; ziehe NM, und durch P die Parallele PQ; so ist GQ die gesuchte Proportional-Linie $\frac{b^2}{a}$.

§. 418.

67. Zwischen zwey gegebenen Geraden a und b die mittlere Proportionale $x = \sqrt{ab}$ zu finden.

Auflösung. Man ziehe eine Gerade AM, schneide $AB = a$, $BD = b$ ab; auf dem Durchmesser AD beschreibe man den Halbkreis AED, und ziehe die Senkrechte BE; so ist diese Senkrechte die gesuchte mittlere Proportionale $x = \sqrt{ab} = \sqrt{(AB.BD)}$ (412.).

68. Oder man ziehe eine Gerade $DB = b =$ der größeren gegebenen, schneide $BA = a$ ab; über der AD beschreibe man den Halbkreis AED, ziehe durch den Punct B die Tangente BE (369.); so ist diese Tangente die gesuchte mittlere Proportionale $x = \sqrt{ab} = \sqrt{(BA.BD)} = BE$ (411.).

69. Oder endlich, man ziehe $BD = b$, beschreibe darüber den Halbkreis BED, mache $BA = a$, ziehe die Senkrechte AE, und die Sehne BE; so ist diese die gesuchte mittlere Proportionale zwischen BD und BA. Denn in den ähnlichen Dreyecken BEA und BED ist $BA : BE = BE : BD$, folglich $BE = \sqrt{(BA.BD)}$.

§. 419.

70. Eine gegebene Gerade AB in eine bestimmte Anzahl, z. B. in fünf gleiche Theile, zu theilen.

Auflösung. Man ziehe eine Gerade MN, und schneide von M gegen N fünf gleiche Theile M 1, 12, 23, 34, 45 dergestalt ab, daß $M5 > AB$ sey (welches zwar in der Theorie nicht unumgänglich nothwendig, aber in der Ausübung nützlich ist); auf M 5 errichte man ein gleichseitiges Dreyeck M5D, mache $DC = DF = AB$, und ziehe CF, so ist auch $CF = AB$; endlich ziehe man die Geraden D1, D2, D3, D4; so wird dadurch die Gerade CF oder die gegebene AB in fünf gleiche Theile getheilet, nähmlich $Ca = \frac{1}{5}AB$, $Cb = \frac{2}{5}AB$, u. s. w. Denn es ist $Ca : CD = M1 : MD$ oder $Ca : AB = M1 : M5 = 1 : 5$, folglich $Ca = \frac{1}{5}AB$.

Dasselbe ist zu beobachten, wenn man die Gerade AB nach einem gegebenen Verhältnisse theilen soll. Z. B. wenn diese Ge-

rade in zwey Theile zu theilen wäre, die sich wie 2:3 verhalten; Fig.
so schneide man auf der Linie MN fünf = 2 + 3 gleiche Theile ab,
und ziehe die Gerade D2, so ist CF = AB in dem Puncte b in
zwey Theile dergestalt getheilet, daß Cb : bF = 2:3 sich verhält.

§. 420.

Eine gerade Linie, z. B. fünf Zolle, oder eine andere be- 71.
liebige Länge in sehr viele, etwa in 1000 gleiche Theile zu
theilen, d. i. einen geometrischen Maßstab zu verfertigen.

Auflösung. Man ziehe eine Gerade AB, trage, von A gegen
B, 10 halbe Zolle oder andere beliebige gleiche Theile auf, in
A und B errichte man die Senkrechten AC und BD, trage auf
denselben, von A gegen C, und, von B gegen D, 10 gleiche
Theile von beliebiger Länge auf; durch diese Puncte ziehe man
zehn gerade Linien, die alle zu AB parallel seyn werden; auf die
letzte derselben, nähmlich auf CD, trage man wieder die 10 halben
Zolle von C gegen D auf, welche genau bis D reichen müssen,
wenn die Senkrechten AC und BD richtig gezogen sind; die Thei-
lungspuncte der beyden Linien AB und CD verbinde man mittelst
der Geraden ab, 100 d, 200 e, u. s. w.; dann theile man noch den
ersten halben Zoll Ab und Ca in 10 gleiche Theile, und ziehe durch
diese Theilungspuncte die Querlinien (Transversalen) am,
10 n u. s. w.; endlich schreibe man die Zahlen hin, wie sie in
Fig. 71 zu sehen sind; so ist die Linie AB in 1000 gleiche Theile
getheilet. Nähmlich 7 p enthält 7, a 10 enthält 10, a 30 enthält
30, 7 v enthält 37, a 100 enthält 100, und a 500 enthält 500
solcher Theile, von denen 1000 = AB sind; oder es ist $7p = \frac{7}{1000}$ AB, $7v = \frac{37}{1000}$ AB u. s. w. Denn in den Dreyecken abm
und a7p ist 7p : bm = a7 : ab. Nun ist aber a7 : ab = 7 : 10; und
$bm = \frac{1}{10}Ab = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}AB = \frac{1}{100}AB$; folglich $7p : \frac{1}{100}$ AB
= 7 : 10, und $7p = \frac{7}{1000}$. Eben so leicht ist einzusehen, daß
$7v = \frac{37}{1000}AB$ ist; denn es ist 7 v = 7 p + pv; ferner $7p = \frac{7}{1000}$ AB, und $pv = a30 = \frac{3}{10}aC = \frac{3}{100}CD = \frac{30}{1000}AB$; folg-

Fig. 71. lich ist $7v = \frac{7}{1000} AB + \frac{30}{1000} AB = \frac{37}{1000} AB$ u. s. w. Auf eben dieselbe Art sieht man ein, daß $xv = 537$ ist. Denn es ist $xv = x7 + 7p + pv = 500 + 7 + 30 = 537$ u. s. w.

Aus der Einrichtung dieses Maßstabes erhellet deutlich, daß man eine Linie, welche z. B. 530 solche Theile enthalten soll, deren $1000 = AB$ sind, von diesem Maßstabe mit dem Zirkel abnehmen könne, wenn man eine Spitze in 500 einsetzet, und die andere bis 30 eröffnet. Sollte eine Linie von 537 Theilen abgetragen werden; so eröffnet man den Zirkel von x bis v; wären endlich nur $536\frac{1}{2}$ Theile abzunehmen, so müßten die Zirkelspitzen in der Mitte der zwey Parallelen 66 und 77, und zwar die eine auf der Senkrechten 500 h, und die andere Spitze auf der Transversalen 30 v eingesetzet werden, u. s. w.

Auch kann man untersuchen, wie viele Theile eine gegebene Gerade auf diesem Maßstabe abschneide, wenn man die Zirkelspitzen in ihre Endpuncte einsetzt, und dann diese Oeffnung des Zirkels auf die Gerade CD so überträgt, daß die erste Spitze auf einem der Theilungspuncte 200, 300 u. s. w. eingesetzt ist, die zweyte aber zwischen C und a eintrifft. Sollte nun diese zweyte Spitze zwischen C und a genau in einem Theilungspuncte z. B. in 30, und die erste in 500 eintreffen, so würde die gegebene Linie $= 530$ seyn. Sollte hingegen diese zweyte Spitze zwischen zwey Theilungspuncte, z. B. zwischen 30 und 40 eintreffen; so rücke man mit dem Zirkel so lange parallel herunter, bis diese Spitze genau auf eine Transversale eintrifft. Ereignet sich nun dieses in dem Puncte v, nähmlich wenn die eine Spitze in v auf der Transversalen 30, die andere aber auf der Parallelen 77, in x eintrifft; so enthält die gegebene Gerade 537 Theile. Würden hingegen die Spitzen nur in der Mitte der Parallelen 66 und 77, jedoch auf der Senkrechten 500 und auf der Transversalen 30 eintreffen; so würde auch die gegebene Linie nur $536\frac{1}{2} = 536{,}5$ Theile enthalten. Sollte die gegebene Linie, welche auf diesem Maßstabe zu untersuchen ist, größer seyn als CD; so wird nur der 2te, 3te oder 4te Theil davon auf den Maßstab getragen, und diese Zahl

mit 2, 3 oder 4 multiplicirt, um die Theile der ganzen gegebenen Linie zu erhalten. Fig. 71.

Wenn man nun Ca 100 Zolle, oder 100 Schuhe, oder 100 Schritte, oder auch 100 Klafter u. s. w. gelten läßt, so heißt diese Eintheilung ein verjüngter Maßstab. Die Benützung der Transversalen zur Eintheilung eines Zolles in Linien und Puncte, des Durchmessers einer Bombe in 64, des Durchmessers einer Kanonenkugel in 32 gleiche Theile, und die Verfertigung ähnlicher Maßstäbe überlasse ich dem eigenen Nachdenken der Anfänger.

§. 421.

Der eben beschriebene geometrische Maßstab ist bey der Auflösung einiger geometrischen Aufgaben von großem Nutzen, wenn die Verzeichnung der gefundenen Gleichung einem Anfänger entweder gar nicht beyfällt, oder wenn sie weitläufig seyn sollte. Denn in diesem Falle untersuche man nur, wie viele Theile auf diesem Maßstabe eine jede in der Aufgabe gegebene Linie enthalte, entwickle aus der gefundenen Gleichung den Werth der unbekannten Linie in Zahlen, und nehme diesen gefundenen Werth von dem Maßstabe ab; so wird man die gesuchte Linie erhalten. Z. B. Zwischen den zwey gegebenen Linien a und b sollen zwey mittlere Proportionalen x und y gefunden werden. Vermöge der Bedingung der Aufgabe ist $a : x = x : y$, und $x : y = y : b$, oder $x^2 = ay$ und $y^2 = bx$; folglich $x = \sqrt[3]{a^2 b}$, und $y = \sqrt[3]{ab^2}$.

Es sey nun auf dem geometrischen Maßstabe $a = 216$ und $b = 1000$; so ist $x = 360$, und $y = 600$; man nehme demnach diese Theile von eben demselben Maßstabe mit dem Zirkel herab; so werden ihre Längen die gesuchten Linien seyn.

Eben so sey die Seite eines regelmäßigen Zwölfeckes gegeben, man soll daraus den Halbmesser des herumbeschriebenen Kreises finden. Es sey die gegebene Seite $= g = 200$ Theilen eines geometrischen Maßstabes, und der unbekannte Halbmesser sey $= a$; so ist $a\sqrt{2 - \sqrt{3}} = g = 200$ (vermöge §. 409), und $a = \frac{200}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$, oder $a^2 = \frac{40000}{2 - \sqrt{3}} = \frac{40000 \cdot (2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3}) \cdot (2 + \sqrt{3})} = \frac{40000 \cdot (2 + \sqrt{3})}{4 - 3} = 4000 \cdot (2 + \sqrt{3}) = 4000 \cdot (3{,}73205) =$

Fig. 149282, und endlich $a = \surd(149282) = 386{,}3 = 386\frac{1}{3}$ beynahe. Man nehme demnach nur die gefundenen $386\frac{1}{3}$ Theile auf demselben Maßstabe; so wird man die Länge des gesuchten Halbmessers haben.

Wir wollen zur Uebung noch einige Aufgaben hieher setzen, deren Auflösung wir in der Folge nöthig haben werden.

§. 422.

80. Aus den gegebenen drey Seiten eines Dreyeckes ABC die Höhe desselben CD, und die Abschnitte AD und DB der Grundlinie zu finden.

Auflösung. Es sey die für die Grundlinie angenommene Seite $AB = b$, $CA = a$, und $BC = c$, die Höhe $CD = y$, und der erste Abschnitt $AD = x$; so ist der zweyte Abschnitt $DB = AB - AD = b - x$. Nun ist $CD^2 = AC^2 - AD^2$ (vermöge §. 403), und auch $CD^2 = CB^2 - DB^2$, nähmlich $y^2 = a^2 - x^2$, und $y^2 = c^2 - (b-x)^2 = c^2 - b^2 + 2bx - x^2$. Es ist also auch $a^2 = c^2 - b^2 + 2bx$; folglich $x = \frac{a^2+b^2-c^2}{2b} = \frac{a^2-c^2}{2b} + \frac{1}{2}b = \frac{(a+c).(a-c)}{2b} + \frac{1}{2}b$.

Man suche also nur zu $2b$, zu $a+c$, und zu $a-c$ die vierte Proportionale, addire zu derselben $\frac{1}{2}b$, trage diese gefundene Gerade von A nach D, und verbinde die Puncte D und C mittelst der Geraden CD; so ist die Höhe CD, und jeder Abschnitt AD und DB bestimmt. Oder man untersuche die gegebenen Seiten auf einem Maßstabe, und berechne daraus den Werth von $x = AD$. Es sey z. B. $b = 140$, $a = 150$, $c = 130$; so ist $x = \frac{(150+130).(150-130)}{280} + 70 = 90$. Wäre hingegen $AB = b = 17$, $AC = a = 10$, und $CB = c = 21$; so müßte $x = \frac{(10+21).(10-21)}{34} + \frac{17}{2} = -\frac{52}{34}$, nähmlich negativ seyn; und dieses ist ein Zeichen, daß der Abschnitt AD auf der entgegengesetzten Seite liegen, und der Punct D nicht zwischen A und B, sondern auf der anderen Seite von A auf die Verlängerung von AB fallen müsse, und daß folglich in diesem Falle das Dreyeck ABC einen stumpfen Winkel in A habe.

Auch für die Höhe CD läßt sich ein allgemeiner Ausdruck finden. Denn da $y^2 = a^2 - x^2$ ist; so ist, wenn wir für x^2 seinen Werth $\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right)^2$ substituiren und reduciren, Fig. 80.

$$y = \sqrt{\left(\frac{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a4-b4-c4}{4b^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2b}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

oder

$y = \frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, wenn man die halbe Summe aller drey Seiten, nähmlich $\frac{a+b+c}{2} = s$, folglich

$a+b+c = 2s$, $b+c-a = 2(s-a)$, $c+a-b = 2(s-b)$, $a+b-c = 2(s-c)$ setzt. So z. B. ist im vorigen Falle, wo wir $a = 150$, $b = 140$, $c = 130$ angenommen haben, die Höhe $y = 120$.

§. 423.

Zwey parallele Sehnen AB und PQ eines Kreises, nebst ihrem Abstande FD sind gegeben, man soll daraus den Halbmesser bestimmen. 64.

Auflösung. Es sey $AB = 2a$, $PQ = 2b$, $FD = c$, der Halbmesser $MC = CE = x$, und $ED = y$; so ist $ME = 2x$, $DM = ME - DE = 2x - y$, $EF = ED + DF = y + c$, und $FM = ME - FE = 2x - y - c$. Nun ist $ED : DB = DB : DM$ (412.), und $EF : FQ = FQ : FM$, nähmlich $y : a = a : 2x - y$, und $y + c : b = b : 2x - y - c$. Aus diesen Proportionen erhält man die Gleichungen $2xy - y^2 = a^2$,

$$2xy + 2cx - y^2 - 2cy - c^2 = b^2,$$

welche, wenn man die erste von der zweyten abzieht,

$$2c(x-y) - c^2 = b^2 - a^2$$

folglich

$$x - y = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$$

geben. Quadrirt man diese Gleichung und addirt sie zur ersten, so hat man

$$x^2 = \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)^2 + a^2$$

mithin

$$x = \frac{1}{2c}\sqrt{(b^2+c^2-a^2)^2 + 4a^2c^2}.$$

Fig. Setzen wir nun AB = 60, PQ = 80, also $a = 30$, $b = 40$, und $c = 10$; so ist $x = \frac{\sqrt{[(1600+100-900)^2+360000]}}{20} = \frac{\sqrt{(640000+360000)}}{20} = \frac{\sqrt{(1000000)}}{20} = \frac{1000}{20} = 50$.

Wäre hingegen AB = $2a$, und ED = b gegeben; so findet man den Halbmesser EC = $x = \frac{a^2+b^2}{2b}$, weil ED : DB = DB : DM, nähmlich $b : a = a : 2x - b$ ist (412.).

§. 424.

72. Die (420.) vorgetragene Eintheilung mittelst der Transversalen kann auch auf die in der Artillerie gebräuchlichen Mund- und Pöller-Quadranten, auf Winkelmesser und andere mathematische Instrumente, bey denen ein Grad eines Kreisbogens noch in mehrere gleiche Theile zu theilen ist, mit Vortheil angewendet werden, und zwar auf folgende Art.

Es sey BD ein Bogen eines Quadranten, der in den Puncten 1, 2, 3 u. s. w. in die einzelnen Grade getheilet ist; der Halbmesser dieses Bogens sey AB = a; man verlangt jeden Grad in n gleiche Theile zu theilen. Um dieses zu erhalten, schneide man von dem Halbmesser AB ein beliebiges Stück BC = b von B gegen A ab, ziehe durch C mit dem Halbmesser AC = $a - b$ den Bogen CE, bemerke auf demselben wieder die einzelnen Grade 1′, 2′, 3′, u. s. w. und ziehe die Transversalen C 1, 1′2, 2′3 u. s. w., dann beschreibe man aus A die parallelen Kreisbogen 10p, 20q, 30s u. s. w. mit den Halbmessern A 10 = $\frac{na^2-nab}{na-1b}$, A 20 = $\frac{na^2-nab}{na-2b}$, A 30 = $\frac{na^2-nab}{na-3b}$ u. s. w.; so wird der durch den Durchschnittspunct g der Transversale C 1 gezogene Halbmesser Ad einen, und Af zwey $n$te Theile des Bogens B1 abschneiden, z. B. der erste 10, und der zweyte 20 Minuten, wenn B1 = 1° und $n = 6$ angenommen wird; u. s. w.

Denn es sey der unbekannte Halbmesser A 10 = x, der Bogen B1 = c, Bd = $\frac{c}{n}$, weil der Halbmesser Ad einen $n$ten Theil des Bogens B1 abschneiden muß, wenn er durch den Durch-

schnittspunct g der Transversale C1 und des ersten parallelen Kreisbogens 10p gezogen wird. Nun findet in den zwey Ausschnitten BAd und 10Ag folgende Proportion statt, AB : A 10 = Bd : 10g, oder $a : x = \frac{c}{n} : 10g$; folglich ist $10g = \frac{cx}{an}$. Ferner ist in den Dreyecken C10g und CB1 (weil man die kleinen Bogen 10g und B1, ohne für die Ausübung einen Fehler zu befürchten, als gerade Linien ansehen kann, 10g : B1 = C10 : CB = A10 — AC : CB nähmlich $10g : c = x - (a - b) : b$, und $10g = \frac{cx - ac + bc}{b}$; folglich ist auch $\frac{cx}{an} = \frac{cx - ac + bc}{b}$, oder $bx = nax - na^2 + nab$, und endlich $x = \frac{na^2 - nab}{na - b}$. Fig. 72.

Eben so findet bey der Bestimmung des zweyten Halbmessers A20 = y folgende Proportion statt: AB : A20 = Bf : 20h, nähmlich $a : y = \frac{2c}{n} : 20h$; folglich ist $20h = \frac{2cy}{an}$. Ferner ist CB : C20 = B1 : 20h, nähmlich $b : y - (a - b) = c : 20h$, und es ist $20h = \frac{cy - ac + bc}{b}$, daher auch $\frac{2cy}{an} = \frac{cy - ac + bc}{b}$, und endlich $y = \frac{na^2 - nab}{na - 2b}$.

Und auf dieselbe Art findet man für die Länge des dritten Halbmessers A30 = $\frac{na^2 - nab}{na - 3b}$ u. s. w.

Es sey nun auf einem geometrischen Maßstabe AB = a = 1000, die Breite des Randes CB = b = 100, und n = 6, nähmlich 1 Grad sey in 6 gleiche Theile, oder von 10 zu 10 Minuten zu theilen; so ist der Halbmesser AC = 900; A 10 = 915,3; A 20 = 931; A 30 = 947,4; A 40 = 964,3; A 50 = 981,8; A 60 = AB = 1000.

Diese Eintheilung mit Hülfe der Transversalen kann hauptsächlich auf jene Gattungen der Winkelmesser vortheilhaft angewendet werden, bey denen ein mit einem kleinen Gewichte beschwerter, frey hängender Faden auf dem Rande des Instrumentes die gesuchten Winkel anzeiget. Wenn z. B. die Lage des Fadens AF ist, so wird der Bogen BF, oder der Winkel BAF = 2°, 50′

Fig. seyn. Wir haben bey der Bestimmung der Halbmesser die kleinen Bogen 10g, 20h.... B1, für gerade und parallele Linien angesehen, welches wohl nicht ganz richtig ist; jedoch können wir dieses thun, ohne in der Ausübnng deßwegen einen Fehler zu begehen, wie wir es weiter unten in der Trigonometrie bestätiget sehen werden.

§. 425.

73. Bey jenen Winkelmessern hingegen, bey denen ein bewegliches Lineal die gesuchten Winkel auf dem Rande bezeichnet, pflegt man die kleineren Theile eines Grades mit Hülfe des sogenannten Verniers oder Nonius auf folgende Weise zu bestimmen.

Es sey AB ein Stück des Randes von einem Winkelmesser, der schon in die einzelnen Grade abgetheilet ist, D oder E sey ein Stück des um den Mittelpunct beweglichen Lineals, Dm oder Em die Mittel- oder Visirlinie, und mn ein an dem Ende des Lineals schief abgeschliffener Bogen, der sich sammt dem Lineale um den Mittelpunct des Instrumentes drehen läßt. Wenn man nun mit diesem Instrumente die Winkel bis auf die sechsten Theile eines Grades, oder von 10 zu 10 Minuten zu bestimmen verlanget; so mache man den Bogen $mn = 7^0$, theile denselben in 6 gleiche Theile, und setze die Ziffern dazu, wie sie in Fig. 73. zu sehen sind; so wird man dadurch im Stande seyn, den sechsten Theil eines Grades zu bestimmen, oder die Winkel von 10 zu 10 Minuten zu messen. Stellt man nun das bewegliche Lineal so, daß der Endpunct m in der Visirlinie Dm, oder der Nullpunct des Verniers mit einem Theilstriche des Randes, z. B. mit 10^0 genau übereinstimmt; so wird kein einziger Theilstrich des Verniers, außer dem letzten n, mit den Theilstrichen des Randes übereintreffen, sondern der Strich 10 des Verniers wird von dem Striche 9 des Randes um $\frac{1}{6}$ Grad = 10 Minuten, der Strich 20 von 8 Grad um $\frac{2}{6}$ Grad = 20 Minuten, der Strich 30 von 7 Grad um 30 Minuten entfernt seyn u. s. w., weil 6 Theile des Verniers um 1 Grad oder 60 Minuten größer sind als sechs Grade des Randes, und folglich ein Theil des Verniers um $\frac{1}{6}$ Grad = 10 Minuten, zwey Theile um 20, und drey Theile des Verniers um 30 Minuten größer seyn müssen, als 1, 2, oder 3 Grade des

Randes u. s. w. Wenn man demnach das Lineal so weit fortrückt, daß der Theilstrich des Verniers 40 mit dem 6ten Grade übereinstimmt; so wird der Nullpunct um 40 Minuten von 10 Graden weiter fortgerückt seyn. Da nun in der Lage des Lineals Em der Theilstrich 40 des Verniers mit einem Theilstriche des Randes genau übereintrifft, und der Nullpunct m zwischen 29 und 30 Grad weiset; so ist der Bogen, von 0 Grad gerechnet bis zum Nullpuncte des Verniers, oder der Winkel, welchen die Visirlinie Em mit der Linie F0 in dem Mittelpuncte des Instrumentes einschließt, $= 29^0, 40'$. Fig. 73.

Würde es erforderlich seyn, die Winkel von 5 zu 5 Minuten zu unterscheiden; so müßte der Bogen des Verniers $= 13^0$ seyn, und in 12 gleiche Theile getheilet werden. Allgemein: will man mittelst des Nonius Winkel von m Minuten oder, wenn m der nte Theil von 60 ist, von einem nten Theile des Grades nehmen; so wird man den Vernier $n - 1$ oder $n + 1$ Grade lang machen und in n gleiche Theile theilen, weil ein solcher Theil im ersten Falle $1 - \frac{1}{n}$ Grad, im zweiten aber $1 + \frac{1}{n}$ Grad, somit um $\frac{1}{n}$ Grad, d. i. um m Minuten weniger oder mehr als 1 Grad beträgt. Um z. B. noch einzelne Minuten oder 60ste Theile des Grades nehmen zu können; müßte ein 59 oder 61 Grade haltender Bogen des Verniers in 60 gleiche Theile getheilet werden. Jedoch da ein so großer Bogen des Verniers etwas unbequem ist; so pflegt man bey solchen Winkelmessern, mit denen Minuten zu messen sind, auf dem Rande des Instrumentes jeden Grad in 6 gleiche Theile, nähmlich von 10 zu 10 Minuten durch Theilstriche zu theilen, gibt sodann dem Bogen des Verniers 11 solche Theile und theilet denselben in 10 gleiche Theile; so können auch auf diese Art die Winkel in Graden und einzelnen Minuten gemessen werden. Denn 1 Theil des Verniers ist in diesem Falle um $\frac{1}{10}$ größer als 1 Theil des Randes, nähmlich, um eine Minute, weil ein Theil des Randes 10 Minuten enthält. Man könnte dem Vernier auch nur 9 oder 5 Theile des Randes geben, wenn ein Theil des Randes in 10 oder 6 Theile zu theilen ist; nur müßte

Fig. 73. der Vernierbogen in diesem Falle in umgekehrter Ordnung beschrieben werden, was jeder selbst leicht einsehen wird.

Die Eintheilung sowohl des Verniers als des Randes muß durch das Versuchen geschehen, wenn man mit keiner Theilmaschine versehen ist. Man pflegt den 4ten Theil des Umkreises in 90 gleiche Theile, d. i. in die einzelnen Grade zu theilen, wenn man ihn erstens in 3 gleiche Theile durch Uebersetzung des Halbmessers von den beyden Endpuncten, d. i. durch Einschreibung zweyer Sehnen, deren jede dem Halbmesser gleicht, zweytens jeden dieser 3 Theile durch das Versuchen in 5, drittens jeden dieser fünfzehn Theile in 3, und endlich viertens jeden dieser fünf und vierzig Theile wieder in 2 gleiche Theile theilet.

Daß die Eintheilung mit Hülfe des Verniers auch auf geradlinige Maßstäbe angewendet werden könne, wird ohne meine Erinnerung selbst ein Anfänger leicht begreifen.

§. 426.

74. Aufgabe. Auf einer gegebenen Geraden ab ein Dreyeck zu verzeichnen, welches einem gegebenen Dreyecke ABC ähnlich ist.

Auflösung. Man verzeichne den Winkel a = A, und b = B (352); so ist das Dreyeck abc ∽ ABC (378. IV.).

Oder man untersuche die Geraden AB, BC, CA und ab auf einem geometrischen Maßstabe; bestimme sofort durch Rechnung zu AB, CA und ab die vierte Proportionale, trage diese von demselben Maßstabe herab, und beschreibe mit einem dieser gefundenen Geraden gleichen Halbmesser aus a den Kreisbogen mn; endlich suche man auch zu AB, BC und ab die vierte Proportionale, und beschreibe mit derselben aus b einen Kreisbogen pq; darauf verbinde man den Durchschnittspunct c mit den Puncten a und b: so ist das Dreyeck abc ∽ ABC (399. II.).

63. Auf eben dieselbe Weise kann auf einer gegebenen Geraden ab ein Vieleck verzeichnet werden, welches einem gegebenen ABCDEFA ähnlich ist, wenn man die Diagonalen AC, AD, AE ziehet; sodann auf der gegebenen Linie ab das Dreyeck abc ∽ ABC, auf der Linie ac das Dreyeck dac ∽ DAC, auf der Linie ad das Dreyeck ade ∽ ADE, und endlich auf der Linie ae das Dreyeck afe ∽ AFE entweder durch Uebertragung der Winkel, oder mit

Hülfe der Proportional-Linien verzeichnet, und endlich die Puncte Fig.
a, f, e, d, c, b mittelst gerader Linien verbindet. 63.

Oder auch: Man übertrage die gegebene Gerade auf die gleichnahmige Gerade des gegebenen Vieleckes, z. B. von A bis b′, ziehe aus A in alle Vieleckswinkel die Diagonalen AC, AD, AE, und sodann aus dem Puncte b′ die Parallele b′c′ zu BC, aus c′ die Parallele c′d′ zu CD u. s. w.; so ist das Vieleck

$$Ab'c'd'e'f'A \backsim ABCDEFA,$$

weil die Dreyecke des einen den Dreyecken des anderen Vieleckes wechselweise ähnlich sind (415.). Statt der Parallelen b′c′, c′d′ u. s. w. kann man die Diagonalen Ac′, Ad′ u. s. w. durch Rechnung bestimmen, indem man sagt,

$$AB : Ab' = AC : Ac' = AD : Ad' \text{ u. s. w.}$$

Wäre z. B. $Ab' = \frac{1}{2}AB$; so darf man nur jede der Diagonalen in den Puncten c′, d′, e′, f′, in zwey gleiche Theile theilen, und die Puncte b′, c′, d′, e′, f′, A durch gerade Linien verbinden, um das Vieleck $Ab'c'd'e'f'A \backsim ABCDEFA$ zu erhalten.

Die übrigen Methoden, ein Vieleck, oder eine Figur zu verzeichnen, welche einer gegebenen Figur ähnlich ist, als z. B. durch die Einschreibung der Quadrate, mittelst zweyer Maßstäbe, u. m. dgl. überlasse ich dem eigenen Nachdenken der Anfänger.

§. 427.

Aufgabe. Eine gerade Linie AB auf dem Felde zu mes- 75.
sen, die nur an ihren Endpuncten, und nicht nach ihrer ganzen Länge zugängig ist.

Auflösung. Man suche einen Punct C außer der Geraden AB von der Beschaffenheit auf, daß man von C nach A und B in gerader Linie kommen könne, messe CA und CB aus, trage von C bis a den $n$ten (z. B. den 10ten) Theil der Geraden CA, eben so von C bis b den $n$ten Theil von CB, entweder auf die Schenkel CA und CB selbst, oder auf ihre Verlängerung, messe die Gerade ab und multiplicire dieselbe mit n (z. B. mit 10, wenn man $Ca = \frac{1}{10}CA$, $Cb = \frac{1}{10}CB$ aufgetragen hat); so wird dieses die Länge der Geraden AB seyn. Denn es ist das Dreyeck $aCb \backsim ACB$ (400.); folglich

$$AB : ab = AC : aC = n : 1 \text{ und } AB = n.ab.$$

§. 428.

Fig. 76. Aufgabe. Eine Gerade AB auf dem Felde, die nur an einem ihrer Endpuncte A zugängig ist; z. B. die Entfernung des Punctes A von B zu messen.

Auflösung. Man errichte auf AB in dem Puncte A die Senkrechte AC von beliebiger Länge, messe AC, und trage auf ihre Verlängerung den $n$ten Theil von AC, nähmlich $Ca = \frac{1}{n} AC$, errichte in a wieder eine Senkrechte ab von unbestimmter Länge, verlängere dann die Richtung BC, bis sie die Gerade ab in dem Puncte b durchschneidet, messe ab, und multiplicire dieselbe mit n; so wird dieses die Länge der Geraden AB, oder die Entfernung des Punctes A von B seyn.

Sollte es die Beschaffenheit des Bodens nicht zulassen, die Senkrechten zu errichten; so nehme man den Punct C dergestalt an, daß man von C nach B und A sehen, bis A messen, und beyde, CA und CB, rückwärts verlängern könne, mache $Ca = \frac{1}{n} AC$, verzeichne den Winkel $m = p$ (352.) und verlängere ab und BC, bis sie einander in b durchschneiden, messe sodann die Linie ab, und multiplicire dieselbe mit n; so wird auch dieses die Länge der Geraden AB seyn.

Man kann auch $\frac{1}{n} AC$ von C gegen A, z. B. bis a′ auftragen, den Winkel $m' = p$ verzeichnen; sodann die Gerade a′b′ messen, und dieselbe mit n multipliciren, um die Entfernung AB zu erhalten.

§. 429.

75. Aufgabe. Eine gerade Linie AB, d. i. die Entfernung zweyer Puncte A und B zu messen, wenn beyde unzugängig sind.

Auflösung. Man suche einen Punct C von der Beschaffenheit, daß man von C nach A und B sehen könne, messe AC und CB (nach §. 428.), mache $Ca = \frac{1}{n} CA$, $Cb = \frac{1}{n} CB$, messe sodann

die Linie ab und multiplicire sie mit n; so ist dieses die Länge der Fig.
Geraden AB.

§. 430.

Aufgabe. Einen unzugängigen Winkel, dessen Schenkel 77.
sich über den Scheitel hinaus verlängern lassen (z. B. einen Bollwerkswinkel CAB), in zwey gleiche Theile zu theilen, um die Halbirungslinie des Winkels (die Verlängerung der Capital-Linie AP) sichtbar zu machen.

Auflösung. Man nehme in der Verlängerung der Gesichtslinien die Puncte D und E von der Beschaffenheit an, daß man von D nach E sehen könne; messe DE, EA und DA, suche zu EA + AD, zu AD, und zu ED die vierte Proportional-Linie, trage dieselbe auf DE von D bis F; so wird die durch A und F gezogene Gerade den Winkel EAD = CAB in zwey gleiche Theile theilen, und folglich die Verlängerung der Capital-Linie AP seyn (401.).

Oder man verzeichne den Winkel n = m, theile den Winkel bDa durch die Linie Dd in zwey gleiche Theile, verlängere Dd, bis sie AE in dem Puncte G durchschneidet, messe sodann die Gerade GD, theile sie in dem Puncte N in zwey gleiche Theile; so wird auch die durch A und N gezogene Gerade den Winkel GAD = CAB in zwey gleiche Theile theilen, und folglich die Verlängerung der Capital-Linie seyn. Denn da n = m ist, so läuft aD mit AE parallel, (363. I.), folglich muß (nach 362. I.) AGD = GDa und der Construction gemäß = GDA, somit das Dreyeck GAD gleichschenkelig seyn. Nun aber wird die Gerade GD durch AN in zwey gleiche Theile getheilet; also auch der Winkel GAD (382. V.).

§. 431.

Diese vier letzten practischen Aufgaben können mittelst geometrischer Instrumente mit größerer Genauigkeit, und dabey in kürzerer Zeit aufgelöset werden, wie es in der Folge zu ersehen seyn wird. Ich habe sie hieher gesetzt, damit die Anfänger den Nutzen und Gebrauch der vorgetragenen Sätze einigermaßen einsehen.

Fig. 78. und 79. Zugleich will ich vorläufig erinnern, daß die Entfernungen der Gegenstände auf der Oberfläche unserer Erde gewöhnlich durch den horizontalen (wagerechten) Abstand bestimmt werden.

Es wird aber die Lage einer geraden Linie horizontal genannt, wenn sie von der Richtung eines frey fallenden Körpers, oder von der Richtung eines frey hängenden mit einem Gewichte beschwerten Fadens (Senkels) senkrecht durchschnitten wird; und die Richtung eines frey fallenden Körpers, oder überhaupt, jede gerade Linie, die mit dieser Richtung übereintrifft, heißt eine Vertical-Linie. Sollte nun die horizontale Entfernung zweyer Gegenstände auf unebenem Boden durch die Meßkette bestimmt werden; so ist es erforderlich, daß die Kettenstäbe vertical gehalten werden, die Kette selbst aber, so viel es das Augenmaß zuläßt, horizontal angespannt sey. Wäre hingegen der horizontale Abstand zweyer Gegenstände mit der möglichsten Genauigkeit zu bestimmen, und folglich mit Meßbalken auszumessen; so ist es unumgänglich nothwendig, die Meßbalken mit Hülfe eines besonderen Instrumentes in die horizontale Lage zu bringen, weil man in diesem Falle mit dem bloßen Augenmaße nicht zufrieden seyn darf. Man wählet dazu entweder die allgemein bekannte Setzwage (Schrotwage), deren Genauigkeit leicht mit einem bloßen Handzirkel untersuchet wird, oder auch die Wasserwage mit der Luftblase. Diese Wasserwage (libella) besteht aus einer gläsernen Röhre AB, welche bis auf eine Luftblase CD mit Weingeiste gefüllet, an beyden Enden hermetisch zugeschmolzen, und in ein dazu gehöriges Gehäuse von Messing EF befestiget ist. Sie hat die Eigenschaft, daß die Luftblase in gleichen Lagen oder Neigungen der Röhre alle Mahl die nähmliche Stelle einnimmt, bey der geringsten Veränderung derselben aber sogleich davon abweicht. Stellet man nun die Wasserwage mit der unteren Fläche des Gehäuses auf eine horizontale Ebene, und richtet die Röhre AB durch die Schraube y dergestalt, daß die Luftblase genau in der Mitte stehe; so sagt man, daß die Wasserwage berichtiget (rectificiret) sey. Stellet man sodann die berichtigte Wasserwage auf eine andere Ebene, z. B. auf die Mittellinie der oberen geraden Fläche eines Meßbalkens, und erhöhet oder erniedriget, z. B. durch unterlegte Keile

das eine Ende dieses Balkens so lange, bis die Blase genau in der Mitte bleibt; so ist diese Mittellinie des Balkens, oder der Balken selbst horizontal. Die Berichtigung der Wasserwage mit der Luftblase, und überhaupt derjenigen Instrumente, die mit dergleichen Wasserwagen versehen sind (als z. B. Pöller-, Mund- und Ricochet-Quadranten, Ricochet-Dioptern u. s. w.), kann in der Ausübung mit Hülfe eines dazu eingerichteten Rectificir-Bretes PQ sehr leicht geschehen, und zwar auf folgende Art. Man setze die Wasserwage EF dergestalt auf die Ebene des Rectificir-Bretes PQ, welches auf einer festen und unbeweglichen Unterlage ruhet, daß das eine Ende E gegen P, und das andere F gegen Q stehe, und erhöhe oder erniedrige diese Ebene durch die Schraube R, bis die Blase in ihre angewiesene mittlere Stelle kommt. Sodann kehre man die Wasserwage, ohne das Rectificir-Bret zu verrücken, so um, daß die Mittellinie der unteren Fläche des Gehäuses wieder auf eben derselben Linie der Ebene PQ liege, und E gegen Q, F aber gegen P gerichtet sey. Verbleibt nun bey dieser Umkehrung die Blase in ihrer Stelle; so ist die Wasserwage schon zuvor berichtiget gewesen, und folglich dadurch das Rectificir-Bret in den Horizont gebracht worden. Tritt aber die Blase nach der Umkehrung auf eine Seite; so weicht jene Linie der Ebene PQ, auf der die Wasserwage steht, von dem Horizonte um einen gewissen Winkel ab. Wird nun die Blase durch die Schraube R wieder an ihre angewiesene Stelle gebracht; so beschreibt dieselbe Linie das Doppelte von jenem Abweichungswinkel, und weicht sodann um eben soviel wie zuvor, jedoch nach der entgegengesetzten Seite, von dem Horizonte ab. Hat man nun für dieses Mahl die Umdrehungen der Schraube R gezählet, und führet die Ebene PQ um die halbe Anzahl der gezählten Umdrehungen zurück; so ist jene Linie der Ebene PQ, auf der die Wasserwage steht, horizontal. Man stelle demnach nur die Blase durch die Rectificir-Schraube y an ihre angewiesene Stelle; so ist die Wasserwage berichtiget.

Fig. 78. und 79.

Versucht man dieses durch eine zweyte Wendung der Wasserwage, und die Blase tritt nicht in die Mitte, weil etwa die Gewinde der Schraube R ungleich, oder vielleicht die gezählten Umdrehungen nicht genau halbiret sind; so wiederhohle man die

Fig. 78. und 79. Arbeit, und verfahre wie zuvor, bis endlich die Blase nach jeder Umkehrung genau in ihrer angewiesenen mittleren Stelle ruhet. Es erhellet von selbst, daß man bey den eingetheilten Instrumenten, z. B. bey den Ricochet-Quadranten das bewegliche Lineal, auf dem die Wasserwage befestigt ist, zuerst auf den Nullpunct stellen, und sodann das Instrument gehörig auf das Rectificir-Bret legen müsse. Das Rectificir-Bret kann von einem guten harten Holze verfertiget, und so eingerichtet werden, daß es für mehrere Instrumente zugleich dienet.

Zweytes Hauptstück.

Von den Eigenschaften der ebenen Flächen.

I. Abschnitt.

Von der Bestimmung des Flächeninhaltes geradliniger Figuren.

§. 432.

Die Fläche einer gegebenen geradlinigen Figur wird ausgemessen, wenn man untersucht, wie oft eine bekannte, für die Einheit angenommene, Fläche in derselben enthalten sey, das ist, wie vielmahl sich die bekannte Fläche in der gegebenen auszumessenden herumlegen lasse. Die Zahl nun, welche anzeigt, wie oft die bekannte Fläche in der gegebenen enthalten ist, heißt Flächeninhalt der auszumessenden Fläche, in Bezug auf die für die Einheit angenommene Fläche. Die Fläche, womit geradlinige Figuren ausgemessen werden, ist gemeiniglich ein Quadrat, dessen Seite bald einen Zoll, bald einen Schuh, bald eine Klafter, zuweilen auch bey der Bestimmung sehr großer Flächen (z. B. ganzer Provinzen) eine Meile beträgt. Die erste Fläche heißt ein Quadrat-Zoll, die zweyte ein Quadrat-Schuh, die dritte eine Quadrat-Klafter, u. s. w. Fig. 81.

Fig. §. 433.

81. Wenn die Seite des zum Maßstabe angenommenen Quadrates a in der Grundlinie DC eines gegebenen Rechteckes $n$mahl (z. B. 5mahl), und in der Höhe DA desselben $n$mahl (z. B. 3mahl) enthalten ist; so ist der Flächeninhalt des Rechteckes $ABCD = mn.a = 5.3.a = 15.a$.

Denn man theile nur die Grundlinien DC und AB in $m=5$, und die Höhen DA und CB in $n=3$ gleiche Theile, und verbinde die Theilungspuncte durch gerade Linien; so wird man leicht sehen, daß auf der Grundlinie DC eine Reihe von $m=5$ gleichen Quadraten entstehet, deren jedes dem für die Flächeneinheit angenommenen Quadrate gleich ist; und daß $n=3$ solche vollkommen gleiche Reihen über einander stehen. Es ist demnach die Anzahl aller eingeschriebenen Quadrate $= m.n = 5.3 = 15$. Nun ist jedes dieser Quadrate $= a$; also auch

$$ABCD = mn.a = 5.3.a = 15a.$$

§. 434.

Setzet man die Seite des für die Einheit angenommenen Quadrates $= s$; so ist $DC = ms$, und $DA = ns$, nähmlich $m = \frac{DC}{s}$, und $n = \frac{DA}{s}$, wenn s in DC...$m$mahl, und in DA...$n$mahl enthalten ist. Nun aber ist das Rechteck $ABCD = m.n.a$; es ist also auch

$$ABCD = \frac{DC}{s} \cdot \frac{DA}{s} \cdot a = \frac{DC \cdot DA \cdot a}{s^2}.$$

Setzet man ferner $s=1$ (z. B. $s=1$ Schuh); so ist $a=1$ Quadrat-Schuh, und folglich $ABCD = DC.DA$ Quadrat-Schuhen; nähmlich der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Producte aus der Grundlinie in die Höhe oder Breite des Rechteckes, wenn für die Einheit der Flächen das auf derjenigen Linie verzeichnete Quadrat genommen wird, mit der man die Grundlinie und Höhe des Rechteckes ausgemessen hat.

§. 435.

Da nun ein Quadrat nichts anders ist, als ein Rechteck von derselben Grundlinie und Höhe; so ist der Flächeninhalt eines Quadrates der zweyten Potenz einer Seite desselben gleich.

Es ist demnach der Flächeninhalt eines Quadrates, dessen jede Fig. Seite in der Länge 12 Zolle beträgt, nähmlich ein Quadrat-Schuh $= 12.12 = 144$ Quadrat-Zollen, eine Quadrat-Klafter $= 6.6 = 36$ Quadrat-Schuhen $= 36.144 = 5184$ Quadrat-Zollen; u. s. w.

§. 436.

Ist die Länge der Grundlinie, und auch die Höhe eines Rechteckes oder nur eine dieser zwey Abmessungen in Klaftern, Schuhen, Zollen u. s. w. ausgedrückt; so muß man diese zwey Abmessungen, damit sie beyde mit eben derselben Einheit gemessen werden, in Zolle verwandeln, wenn die kleinste gegebene Gattung aus Zollen besteht. Hierauf muß man diese zwey verwandelten Abmessungen mit einander multipliciren, um den Flächeninhalt in Quadrat-Zollen zu erhalten, und endlich dieses Product durch $36.144 = 5184$, den Rest aber durch 144 dividiren, um eben diesen Flächeninhalt in Quadrat-Klaftern und Quadrat-Schuhen zu bestimmen. Man kommt in diesem Falle mit der Rechnung am geschwindesten zu Ende, wenn man die Größen der kleineren Gattung in Brüche von der größeren Gattung (nach 92.) verwandelt; und somit die Multiplication (nach 89.) verrichtet. Es sey z. B. die Grundlinie eines Rechteckes $= 4^0, 0^I, 9^{II}$; und die Höhe $= 0^0, 3^I, 6^{II}$. (Die über die Ziffern gesetzten Zeichen $^0, ^I, ^{II}, ^{III}, ^{IV}, ^V \ldots$. bedeuten, wie es ohnehin bekannt ist, Klafter, Schuhe, Zolle, Linien, Puncte oder Scrupeln nach der bis jetzt üblichen Eintheilung der Klafter in 6 Schuhe oder Fuße, eines Fußes in 12 Zolle, eines Zolles in 12 Linien, einer Linie in 12 Puncte, eines Punctes in 12 Quinten, u. s. w.) Nun ist $4^0, 0^I, 9^{II} = \frac{33^0}{8}$, und $0^0, 3^I, 6^{II} = \frac{7^0}{12}$; folglich ist der Flächeninhalt $= \frac{33^0}{8} \cdot \frac{7^0}{12} = \frac{231}{96}$ Quadrat-Klaftern $= 2\frac{13}{32}\,\square^0 = 2\square^0$ und $\frac{13 \cdot 36}{32}$ Quadrat-Schuhen $= 2\,\square^0, 14\frac{5}{8}\,\square^I$; und eben so lassen sich $\frac{5}{8}$ Quadrat-Schuhe in $\frac{5 \cdot 144}{8} = 90$ Quadrat-Zolle verwandeln. Es ist demnach der Flächeninhalt des gegebenen Rechteckes $= 2\,\square^0, 14\,\square^I$ und $90\,\square^{II}$.

Fig.

§. 437.

Einige Geometer theilen die Quadrat-Klafter in 6 congruente Theile, die sie Quadrat-Klafterschuhe (oder Riemenschuhe) nennen; jeden solchen Theil zerfällen sie wieder in 12 gleiche Theile, und diese heißen sie Quadrat-Klafterzolle; u. s. w.

Ein Klafterschuh einer Quadrat-Klafter ist nähmlich ein Rechteck 1^0 lang 1^1 breit; ein Klafterzoll ist ein Rechteck 1^0 lang 1^{11} breit; eine Klafterlinie ist ein Rechteck 1^0 lang 1^{111} breit u. s. w.

Quadrat-Klaftern, Quadrat-Schuhe, Quadrat-Zolle..... können abgekürzt mit $\square^0$, $\square^1$, $\square^{11}$....., hingegen Quadrat-Klafterschuhe, Klafterzolle, Klafterlinien..... mit $\square kl^1$, $\square kl^{11}$, $\square kl^{111}$..... bezeichnet werden. Es ist demnach vermöge dieser Eintheilung, Benennung und Bezeichnung

$$1\square kl^1 = \tfrac{1}{6}\square^0 = \tfrac{1}{6}.36\square^1 = 6\square^1;$$
$$1\square kl^{11} = \tfrac{1}{12}\square kl^1 = \tfrac{1}{12}.6\square^1 = \tfrac{1}{2}\square^1 = 72\square^{11};$$
$$1\square kl^{111} = \tfrac{1}{12}\square kl^{11} = \tfrac{1}{12}.72\square^{11} = 6\square^{11};$$
$$1\square kl^{IV} = \tfrac{1}{12}\square kl^{111} = \tfrac{1}{12}.6\square^{11} = \tfrac{1}{2}\square^{11} = 72\square^{111};$$
$$1\square kl^{V} = \tfrac{1}{12}\square kl^{IV} = \tfrac{1}{12}.72\square^{111} = 6\square^{111}.$$

Und
$$1\square^1 = \tfrac{1}{6}\square kl^1 = 2\square kl^{11};$$
$$1\square^{11} = \tfrac{1}{6}\square kl^{111} = 2\square kl^{IV};$$
$$1\square^{111} = \tfrac{1}{6}\square kl^{V} = 2\square kl^{VI};$$
$$1\square^{IV} = \tfrac{1}{6}\square kl^{VII} = 2\square kl^{VIII};$$ u. s. w.

Nach dieser Benennung und Eintheilung enthält nun ein Rechteck, dessen Grundlinie $= 4^0, 0^1, 9^{11} = \frac{33^0}{8}$, und Höhe $= 0^0, 3^1, 6^{11} = \frac{7^0}{12}$ ist, einen Flächeninhalt $= \frac{33}{8} \cdot \frac{7}{12}\square^0 = 2\square^0, 2\square kl^1, 5\square kl^{11}, 3\square kl^{111}$.

I. Die Ausrechnung des Flächeninhaltes der Rechtecke in Quadratklaftern, Klafterschuhen, Klafterzollen ꝛc. geschieht sehr bequem durch folgenden Rechnungsvortheil.

Wenn die Grundlinie eines Rechteckes $= A^0 + B^1 + C^{11} + \ldots$ und die Höhe $= a^0 + b^1 + c^{11} + \ldots$ gesetzt wird; so ist

Fig.

$$\left.\begin{array}{l} A^0 + B^1 + C^{11} + \ldots^{111} \ldots^{IV} \ldots \\ a + b + c + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{multipl.}$$

$$\left.\begin{array}{r} aA + aB + aC + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + bA + 2bB + 2bC + \ldots\ldots\ldots \\ + cA + 2cB + 2cC + \ldots \end{array}\right\} \text{der Flächeninhalt}$$

$$= aA\square^0 + (aB + bA)\,\square kl^1 + (aC + 2bB + cA)\,\square kl^{11} + \ldots$$

Die Partial-Producte werden nähmlich in der angeführten Ordnung gehörig unter einander geschrieben, mit der Bemerkung, daß diejenigen Producte, deren beyde Factoren nur Theile der Klafter bedeuten, verdoppelt werden müssen. Die Zahlen unter der mit (^{0}) bezeichneten Stelle bedeuten dann Quadrat-Klaftern, mit (^{1}) Klafterschuhe, mit (^{11}) Klafterzolle u. s. w. Darauf werden die kleineren Benennungen durch die Division auf eine größere Gattung gebracht. Nähmlich die Klafterpuncte werden durch die Division mit 12 in Klafterlinien, diese ferner durch die Division mit 12 in Klafterzolle, und zuletzt die Klafterschuhe durch die Division mit 6 in Quadrat-Klaftern verwandelt. Was endlich nach dieser Reduction heraus kommt, ist der gesuchte Flächeninhalt in Quadrat-Klaftern, Klafterschuhen, Klafterzollen &c.

I. Beyspiel. Es sey bey einem Rechtecke die Grundlinie $= 15^0, 4^1, 5^{11}$, und die Höhe $= 4^0, 2^1, 6^{11}$; so wird der Flächeninhalt auf folgende Art berechnet.

15^0 , 4^1 , 5^{11} ^{111} ^{IV}
4 , 2 , 6

60 , 16 , 20
30 , 16 , 20
90 , 48 , 60

60 , 46 , 126 , 68 , 60

$69\square^0, 3\square kl^1, 0\square kl^{11}, 1\square kl^{111}, 0\square kl^{IV}$

Man sagt nähmlich
$4^0 . 15^0 = 60\,\square^0$
$4^0 . 4' = 16\,\square kl^1$
$4^0 . 5'' = 20\,\square k^{II}$,
ferner
$2' . 15^0 = 30\,\square kl^1$
$2' . 4' = 8.2\,\square kl^{II}$
$= 16\,\square kl^{II}$
$2' . 5'' = 10.2\,\square kl^{III}$
$= 20\,\square kl^{III}$,
endlich
$6'' . 15^0 = 90\,\square kl^{II}$
$6'' . 4' = 24.2\,\square kl^{III}$
$= 48\,\square kl^{III}$
$6'' . 5'' = 30.2\,\square kl^{IV}$
$= 60\,\square kl^{IV}$.

Fig. Diese letzten 60 □kl^{IV} betragen 5 □kl^{III}. Diese 5 □kl^{III} zu den 68 addirt geben 73 □kl^{III} = $\frac{73}{12}$ □kl^{II} = 6 □kl^{II} + 1 □kl^{III}. Der Rest 1 □kl^{III} wird angeschrieben, die 6 □kl^{II} aber werden zu den 126 □kl^{II} addirt, und sodann durch die Division mit 12 auf Klafterschuhe reducirt; u. s. w.

II. Beyspiel.

Grundlinie = 3^{0} ,	2^{I} ,	3^{II}	III	IV	
Höhe = 2 ,	5 ,	4			
	6 ,	4 ,	6		
	15 ,	20 ,	30		
		12 ,	16 ,	24	
	6 ,	19 ,	38 ,	46 ,	24

Flächeninhalt = 9□^{0}, 4□kl^{I}, 6 □kl^{II} , 0 □kl^{III} , 0 □kl^{IV}

III. Beyspiel.

Grundlinie = 4^{0} ,	0^{I} ,	9^{II} ,	III	IV	
Höhe = 0 ,	3 ,	6			
	12 ,	0 ,	54		
		24 ,	0	108	

Flächeninhalt = 2□^{0} , 2□kl^{I} , 5□kl^{II}, 3□kl^{III}, 0□kl^{IV}

IV. Beyspiel.

Gr. = 8^{0} ,	0^{I} ,	8^{II},	0^{III} ,	6^{IV}	
Höh. = 0 ,	5 ,	0 ,	4		
	40 ,	0 ,	80 ,	0 ,	60
		32 ,	0 ,	64 ,	0 , 48

Fl. = 6□^{0}, 4□kl^{I}, 9□kl^{II}, 4□kl^{III}, 10□kl^{IV}, 4□kl^{V}, 4□kl^{VI}

Die Richtigkeit des angeführten Rechnungsvortheiles ist aus folgender Betrachtung zu ersehen.

Bey der Multiplication der Grundlinie $A^{0} + B^{I} + C^{II} + \ldots\ldots$ mit der Höhe $= a^{0} + b^{I} + c^{II} + \ldots$ sind die einfachen Producte $a^{0}.B^{I} = aB$ □kl^{I} , $a^{0}.C^{II} = aC$ □kl^{II},

$b^{I} . A^{0} = bA$ □kl^{II}, $c^{II} . A^{0} = cA$ □kl^{II} vermöge der Erklärung Fig. des Klafterschuhes und Klafterzolles.

Hingegen sind $b^{I} . B^{I} = bB$ □$^{I} = 2\ bB$ □kl^{II} wegen 1 □$_{I} = 2$ □kl^{II}; $b^{I} . C^{II} = 12\ b^{II} . C^{II} = 12\ bC$ □$^{II} = 2\ bC$ □kl^{III} wegen 1 □$^{II} = \frac{1}{6}$ □kl^{III}; $c^{II} . C^{II} = cC$ □$^{II} = 2\ cC$ □kl^{IV} wegen 1 □$^{II} = 2$ □kl^{IV}; u. s. w.

Aus den oben angegebenen Gleichungen (1 □kl$^{I} = 6$ □^{I}; 1 □kl$^{II} = \frac{1}{2}$ □$^{I} = 72$ □^{II}; 1 □kl$^{III} = 6$ □^{II}; 1 □kl$^{IV} = \frac{1}{2}$□$^{II} = 72$ □^{III} ꝛc.) lassen sich nun auch Regeln ableiten, wie man einen in Klafterschuhen, Klafterzollen, Klafterlinien berechneten Flächeninhalt in Quadrat-Schuhe, Quadrat-Zolle, Quadrat-Linien, und umgekehrt bequem verwandeln kann.

II. Wenn man den Quadrat-Schuh für die Einheit des Flächenmaßes annimmt, und denselben in 12 Schuhzolle, den Schuhzoll in 12 Schuhlinien, die Schuhlinie in 12 Schuhpuncte ꝛc. eintheilet, so findet man den Flächeninhalt eines Rechteckes durch folgenden Rechnungsvortheil in Quadrat-Schuhen (□^{I}), Schuhzollen (Sch^{II}), Schuhlinien (Sch^{III}) ꝛc.

Grundlinie = $A^{I} + B^{II} + C^{III} + .. ^{IV} .. ^{V} ..$

Höhe = $a + b + c + ...$

Flächeninhalt.
$aA + aB + aC$
$+ bA + bB + bC$
$cA + cB + cC$

$= aA$□$^{I} + (aB + bA)$ Sch$^{II} + (aC + bB + cA)$ Sch$^{III} +$ ꝛc.

Beyspiel.

Grundlinie = 10^{I} , 5^{II} , 3^{III} ..... ^{IV} ..... ^{V} ..

Höhe = 6 , 8 , 4

60 ,	30 ,	18		
	80 ,	40 ,	24	
		40 ,	20 ,	12
60 ,	110 ,	98 ,	44 ,	12

Flächeninh. = 69□^{I}, 10 Sch^{II}, 5 Sch^{III}, 9Sch^{IV}, 0Sch^{V}.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens kann man aus den Erklärungen der Schuhzolle, Schuhlinien, Schuhpuncte, und aus

Fig. den daraus fließenden Gleichungen $1\,Sch^{II} = 12\,\square^{II}$, $1\,Sch^{III} = 1\,\square^{II}$, $1\,Sch^{IV} = 12\,\square^{III}$, $1\,Sch^{V} = 1\,\square^{III}$, ꝛc. erweisen. Auch läßt sich hieraus eine Regel ableiten, wie man Sch^{II}, Sch^{III}, Sch^{IV} ꝛc. in $\square^{II}$, $\square^{III}$, $\square^{IV}$, ꝛc. und umgekehrt auf eine leichte Art verwandeln kann.

Bey der wirklichen Ausübung kann die Verwandlung des Riemenmaßes in Quadrat-Maß, und umgekehrt des Quadrat-Maßes in Riemenmaß durch die beygefügte Tabelle sehr erleichtert werden. Auch ist leicht einzusehen, daß man sich bey der Multiplication dieser Längenmaße eines eigens hiezu eingerichteten Einmahleins bedienen kann, aus dem man die einzelnen Partial-Producte nur herausschreiben darf.

Riemen-Maß.	Quadrat-Maß.	Riemen-Maß.	Quadrat-Maß.	Quadrat-Maß.	Riemen-Maß.
$1\,\square kl^{II}$	$6\,\square^{I}$	$1\,Sch^{II}$	$12\,\square^{II}$	$1\,\square^{I}$	$2\,\square kl^{II}$
$1\,\square kl^{II}$	$72\,\square^{II}$	$1\,Sch^{III}$	$1\,\square^{II}$	$1\square^{II}$	$2\,\square kl^{IV}$
$1\,\square kl^{III}$	$6\,\square^{II}$	$1\,Sch^{IV}$	$12\square^{III}$	$1\,\square^{III}$	$2\,\square kl^{VI}$
$1\,\square kl^{IV}$	$72\square^{III}$	$1\,Sch^{V}$	$1\,\square^{III}$	$1\,\square^{IV}$	$2\square kl^{VIII}$
$1\,\square kl^{V}$	$6\,\square^{III}$	$1\,Sch^{VI}$	$12\,\square^{IV}$	$1\,\square^{II}$	$1\,Sch^{III}$
$1\,\square kl^{VI}$	$72\,\square^{IV}$	$1\,Sch^{VII}$	$1\,\square^{IV}$	$1\,\square^{III}$	$1\,Sch^{V}$
$1\,\square kl^{VII}$	$6\,\square^{IV}$	$1\,Sch^{VIII}$	$12\,\square^{V}$	$1\,\square^{IV}$	$1\,Sch^{VII}$

§. 438.

82. Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ABCD ist $= BC.AG = BC.CE = BC.BF = AD.AG =$ dem Producte aus einer Seite in ihren Abstand von der entgegengesetzten Seite.

Denn der Flächeninhalt des Parallelogramms ABCD ist = dem Rechtecke BFEC (389.); nun aber ist das Rechteck

$BFEC = BC.BF = BC.CE$. Es ist also auch der Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD = BC.BF = BC.CE = AD.AG$, weil $BF = AG = EC$, und $BC = AD$ ist. Fig. 82.

§. 439.

Der Flächeninhalt jedes Dreyeckes ABC ist $= \frac{1}{2}BC.AG$ = dem halben Producte aus der Grundlinie in die Höhe = dem halben Producte aus einer Seite in ihren Abstand von dem entgegengesetzten Winkelpuncte.

Denn es ist das Dreyeck $ABC = \frac{1}{2}ABCD$ (387. I.); nun aber ist $\frac{1}{2}ABCD = \frac{1}{2}BC.AG$, weil $ABCD = BC.AG$ ist; also ist auch das Dreyeck $ABC = \frac{1}{2}BC.AG$.

Aus der Gleichung $ABC = \frac{1}{2}BC.AG$ folgt $AG = \frac{ABC}{\frac{1}{2}BC}$ und $BC = \frac{ABC}{\frac{1}{2}AG}$; das ist, wenn man den Flächeninhalt eines Dreyeckes durch die halbe Grundlinie dividirt; so ist der Quotient = der Höhe des Dreyeckes. Dividirt man hingegen den Flächeninhalt durch die halbe Höhe; so ist der Quotient der Grundlinie gleich. Es sey z. B. der Flächeninhalt eines Dreyeckes $= 11\,\square^0$, $4\,\square kl^1 = \frac{35}{3}\,\square^0$, und die Grundlinie $= 5^0, 1^1, 6^{11} = \frac{21^0}{4}$; so ist die Höhe $= \frac{35}{3} : \frac{21}{8} = \frac{35}{3} \times \frac{8}{21} = \frac{40^0}{9} = 4^0, 2^1, 8^{11}$. Aus diesem Beyspiele ist leicht zu ersehen, wie dergleichen Divisionen vorzunehmen sind.

§. 440.

Wenn man nun bey einem rechtwinkeligen Dreyecke ABC eine Kathete für die Grundlinie annimmt; so wird die andere Kathete die Höhe dieses Dreyeckes seyn; folglich ist der Flächeninhalt eines rechtwinkeligen Dreyeckes gleich dem halben Producte aus beyden Katheten $= \frac{1}{2}AB \,.\, BC = \frac{1}{2}ab$, wenn $BC = b$, und $AB = a$ gesetzt wird. 83.

§. 441.

Denkt man sich die Höhe $AB = a$ des rechtwinkeligen Dreyeckes ABC in eine beliebige Anzahl, z. B. in n, gleiche Theile getheilt, und führt man durch die Theilungspuncte m, n, p...x, die Geraden me, nf, pg... xy zur Grundlinie $BC = b$ parallel;

Fig. 83. so zerschneiden diese das Dreyeck in Trapeze, von denen jedes offenbar größer als das über der kleineren, dagegen kleiner als das über der größeren seiner parallelen Seiten beschriebene, und mit ihm gleich hohe, Rechteck ist; woraus erhellet, daß das Dreyeck größer als alle kleineren, hingegen kleiner als alle größeren Rechtecke zusammen seyn muß.

Wenn demnach

$$Am = mn = np = \ldots = xB = \frac{a}{n}$$

und

$Am = \frac{a}{n}$, $An = 2\frac{a}{n}$, $Ap = 3\frac{a}{n}$, ... $Ax = (n-1)\frac{a}{n}$, $AB = n\frac{a}{n}$

ist, so haben wir (nach 397)

$me : mA = nf : nA = pg : pA = \ldots = xy : xA = BC : BA$

oder

$me : \frac{a}{n} = nf : 2\frac{a}{n} = pg : 3\frac{a}{n} = \ldots = xy : (n-1)\frac{a}{n} = b : a$

somit, wenn wir jedes dieser Verhältnisse mit dem letzten zu einer Proportion verknüpfen,

$me = \frac{b}{n}$, $nf = 2\frac{b}{n}$, $pg = 3\frac{b}{n}$, ..., $xy = (n-1)\frac{b}{n}$, $BC = n\frac{b}{n}$.

Nun ist das an der Spitze A liegende Trapez, da seine kleinere Seite auf den Punct A sich zusammen gezogen, also die Länge Null angenommen hat, mit dem Dreyecke Ame einerley, und sicher größer als das über dieser kürzeren Seite (Null) denkbare Rechteck, nähmlich größer als 0, dagegen kleiner als das über seiner größeren Seite me construirte Rechteck Ae oder größer als $Am.me = \frac{a}{n} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{n^2}$. Eben so ist das zweyte Trapez mefn größer als das auf der kleineren Seite me verzeichnete Rechteck mern, nähmlich größer als $mn.me = \frac{a}{n} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{n^2}$, jedoch kleiner als das auf der größeren Seite nf stehende Rechteck mf oder größer als $mn.nf = \frac{a}{n} \cdot 2\frac{b}{n} = 2\frac{ab}{n^2}$. Auf dieselbe Weise ist das dritte Trapez nfgp zwar größer als $np.nf = \frac{a}{n} \cdot 2\frac{b}{n} = 2\frac{ab}{n^2}$, aber kleiner als $np.pg = \frac{a}{n} \cdot 3\frac{b}{n} = 3\frac{ab}{n^2}$, das vierte Trapez

größer als $3\frac{ab}{n^2}$ und kleiner als $4\frac{ab}{n^2}$ u. ſ. w., endlich das nte und letzte Trapez xyCB größer als $(n-1)\frac{ab}{n^2}$, aber kleiner als $n\frac{ab}{n^2}$. Fig. 83.

Hieraus folgt, daß auch die Summe aller Trapeze, d. i. das Dreyeck ABC größer als die Summe aller kleineren oder eingeſchriebenen, dagegen kleiner als die Summe aller größeren oder umſchriebenen Rechtecke, nähmlich

$$ABC > 0 + \frac{ab}{n^2} + 2\frac{ab}{n^2} + 3\frac{ab}{n^2} + \ldots + (n-1)\frac{ab}{n^2}$$

und

$$ABC < \frac{ab}{n^2} + 2\frac{ab}{n^2} + 3\frac{ab}{n^2} + 4\frac{ab}{n^2} + \ldots + n\frac{ab}{n^2}$$

iſt. Sofort muß auch

$$ABC > \frac{ab}{n^2}[0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)]$$

und

$$ABC < \frac{ab}{n^2}(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n)$$

oder, wenn man dieſe arithmetiſchen Reihen (nach §. 232) ſummirt,

$$ABC > \frac{ab}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{und} \quad < \frac{ab}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2},$$

nähmlich

$$ABC > \tfrac{1}{2}ab - \tfrac{1}{2}\frac{ab}{n} \quad \text{und} \quad < \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{2}\frac{ab}{n} \text{ ſeyn.}$$

Laſſen wir jetzt die bisher beliebig groß gedachte Zahl n nach und nach über alle Grenzen wachſen, ſo müſſen die beyden Größen $\frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}\frac{ab}{n}$ und $\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}\frac{ab}{n}$, zwiſchen denen ABC liegt, weil ſie bloß um die unendlich abnehmenden Quotienten $\frac{ab}{n}$ von einander verſchieden ſind, immer enger und enger an einander ſich anſchließen und zugleich der Größe $\frac{1}{2}ab$, von welcher ſie nur um $\frac{1}{2}\frac{ab}{n}$ abſtehen, unaufhörlich ſich nähern. Wenn aber der Flächeninhalt des Dreyeckes ABC zwiſchen dieſen, der Grenze $\frac{1}{2}ab$ zuſtrebenden, Größen $\frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}\frac{ab}{n}$ und $\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}\frac{ab}{n}$ ſtets eingeſchloſſen bleiben ſoll, ſo muß derſelbe nothwendig mit dieſer

Fig. 84. Grenze $\frac{1}{2}ab$ selbst zusammenfallen, und somit die Gleichung $ABC = \frac{1}{2}ab$ bestätiget werden.

§. 442.

I. Auf dieselbe Weise, wie wir im vorhergehenden Paragraphe den Flächeninhalt eines rechtwinkeligen Dreyeckes bestimmten, läßt sich auch der Inhalt jener ebenen Figuren auffinden, welche von vier Seiten begrenzt werden, von denen zwey gerad und parallel sind, die beyden anderen aber gerad oder krumm seyn können, wie MmQM′, Fig. 173.; BMM′B′, Fig. 175; DMM′E Fig. 178; CPME Fig. 179. u. dgl.; daher auch der Flächeninhalt jener, in denen eine oder beyde parallelen Seiten in Null übergegangen sind, wie in MAm Fig. 173, APM Fig. 175., AMBM′A Fig. 178 u. m. a.

175. In dieser Absicht theilen wir in Fig. 175 den Abstand der zwey parallelen Seiten BB′ und MM′, welche man Grundlinien nennen kann, nähmlich das zwischen denselben liegende Stück $PF = x$ ihrer gemeinschaftlichen Senkrechten CN in eine willkührliche Zahl n gleicher Theile, und führen (wie aus Fig. 84 zu ersehen ist) durch ihre $n-1$ Theilungspuncte parallele Geraden zu BB′ und MM′, von denen die ganze Fläche BB′M′M in n trapezförmige Figuren zerschnitten wird, welche man die Elemente dieser Fläche zu nennen pflegt.

Ueber allen diesen parallelen Linien, deren Anzahl (mit Inbegriff von BB′ und MM′) $n+1$ ist, und die wir von BB′ gegen MM′ zählen wollen, construiren wir die den Elementen eingeschriebenen und umschriebenen Rechtecke, welche sämmtlich die Höhe $\frac{x}{n}$ haben, wie dieses die Figuren 48 und 84 weisen. Ferner bezeichnen wir diese parallelen Theilungslinien, welche, wenn wir der Kürze wegen h für $\frac{x}{n}$ schreiben, der Ordnung nach von der BB′ um 0, h, 2h, 3h, ... $(n-1)h$, nh abstehen, durch $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}, y_n$, indem wir durch y den allgemeinen Repräsentanten dieser Theilungslinien vorstellen, und sie mittelst der angehängten kleinen Ziffern, welche man Indices (Zeiger oder Stellenweiser) nennt, von einander unterscheiden. Läßt sich, was wir voraussetzen wollen, die Gerade MM′, die wir

durch y_n bezeichneten, wofür wir auch bloß y schreiben können, Fig. durch ihren Abstand x von BB′ analytisch ausdrücken, so findet 175. man die Werthe von y_0, y_1, y_2, y_3, ... y_{n-1}, y_n offenbar, wenn man in dem Ausdrucke von y an die Stelle von x der Reihe nach die Abstände 0, h, 2h, 3h, ... (n—1) h, nh setzt.

Zu Folge dieser Annahmen sind die Inhalte der eingeschriebenen Rechtecke

$$hy_0,\ hy_1,\ hy_2,\ \ldots,\ hy_{n-1}$$

und die der umschriebenen

$$hy_1,\ hy_2,\ hy_3,\ \ldots,\ hy_n$$

daher ist, wenn wir die Summe der ersteren mit f′, die der letzteren mit f″ bezeichnen,

$$f' = h(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})$$
$$f'' = h(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n).$$

Da nun jedes Element größer als das ihm eingeschriebene und kleiner als das ihm umschriebene Rechteck ist, so muß auch die Summe aller Elemente, nähmlich die Fläche BMM′B′, deren Inhalt wir durch F vorstellen wollen, größer als die Summe aller eingeschriebenen, aber kleiner als die Summe aller umschriebenen Rechtecke seyn; folglich ist

$$F > f' \quad \text{und} \quad F < f''.$$

Lassen wir jetzt die Anzahl n der Theile der Geraden x ohne Ende wachsen, so müssen die parallelen Theilungslinien

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ y_{n-1},$$

um so enger an ihre Nachbarn sich anschließen, und von ihnen in der Länge um so weniger verschieden seyn, je mehr diese Zahl n steigt. Die Folge davon ist, daß jedes eingeschriebene Rechteck seinem entsprechenden umschriebenen Rechtecke, daher auch beyde dem stets zwischen ihnen liegenden Elemente, welchem sie angehören, ohne Ende sich nähern, demnach auch die Summe aller eingeschriebenen Rechtecke und jene aller umschriebenen sowohl an einander selbst, als an die Summe aller Elemente d. i. an die Fläche BMM′B′ ohne Ende näher rücken müssen; woraus erhellet, daß beyde Summen von Rechtecken diese Fläche zur gemeinschaftlichen Grenze haben. Die Ausdrücke f′ und f″ der Flächeninhalte der Summen der ein- und umschriebenen Rechtecke

Fig. 175. müssen also bey dem grenzenlosen Wachsen der in ihnen stehenden Zahl n ohne Ende einer bestimmten Grenze f sich nähern, welche mit dem verlangten Inhalte F der Fläche BMM'B' übereinkommen muß; demnach ist

$$F = f.$$

Der Umstand, daß f' und f'' nothwendig eine gemeinschaftliche Grenze f haben, belehrt uns zugleich, daß es zur Bestimmung des mit dieser Grenze identischen Inhaltes F hinreicht, bloß eine der Größen f' und f'' zu berechnen und die Grenze f auszumitteln, der dieselbe bei der unendlichen Zunahme von n ohne Ende sich nähert.

II. Um das bey der Bestimmung des Inhaltes F der Fläche BMM'B' anzuwendende Verfahren zu erläutern, nehmen wir an, die Grundlinie $MM' = y$ lasse sich (wie dieß gewöhnlich der Fall ist) aus ihrem Abstande $FP = x$ von der anderen Grundlinie mittelst einer Gleichung von der Form

$$y = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots.$$

bestimmen, in welcher die Coefficienten A, B, C, ... die Größe x nicht enthalten, und die Exponenten a, b, c, ... positive Zahlen (mit Einschluß der Nulle) vorstellen.

Setzen wir nun, indem wir die Größe f'' zu bestimmen beabsichtigen, h, 2h, 3h, ... nh für x in dem Ausdrucke von y, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
y_1 &= A.1^a h^a + B.1^b h^b + C.1^c h^c + \ldots \\
y_2 &= A.2^a h^a + B.2^b h^b + C.2^c h^c + \ldots \\
y_3 &= A.3^a h^a + B.3^b h^b + C.3^c h^c + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n &= A.n^a h^a + B.n^b h^b + C.n^c h^c + \ldots
\end{aligned}$$

folglich ist

$$\begin{aligned}
f'' = {} & A h^{a+1} (1^a + 2 + 3^a + \ldots + n^a) \\
& + B h^{b+1} (1^b + 2^b + 3^b + \ldots + n^b) \\
& + C h^{c+1} (1^c + 2^c + 3^c + \ldots + n^c) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Summirt man diese Reihen (nach 316); so findet man Fig. 175.

$$f'' = Ah^{a+1}\left(\frac{n^{a+1}}{a+1} + \frac{n^a}{2} + \frac{a}{12}n^{a-1} + \ldots\right)$$
$$+ Bh^{b+1}\left(\frac{n^{b+1}}{b+1} + \frac{n^b}{2} + \frac{b}{12}n^{b-1} + \ldots\right)$$
$$+ Ch^{c+1}\left(\frac{n^{c+1}}{c+1} + \frac{n^c}{2} + \frac{c}{12}n^{c-1} + \ldots\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Schreiben wir hierin wieder $\frac{x}{n}$ für h und ordnen nach den Potenzen von n, so wird

$$f'' = A\frac{x^{a+1}}{a+1} + B\frac{x^{b+1}}{b+1} + C\frac{x^{c+1}}{c+1} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{n}\left(\frac{A}{2}x^{a+1} + \frac{B}{2}x^{b+1} + \frac{C}{2}x^{c+1} + \ldots\right)$$
$$+ \frac{1}{n^2}\left(\frac{Aa}{12}x^{a+1} + \frac{Bb}{12}x^{b+1} + \frac{Cc}{12}x^{c+1} + \ldots\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ein Blick auf diesen Ausdruck lehrt, daß alle unter der ersten Zeile stehenden Größen bey dem unendlichen Wachsen der Zahl n unendlich abnehmen, daher die Größe f der Grenze

$$f = A\frac{x^{a+1}}{a+1} + B\frac{x^{b+1}}{b+1} + C\frac{x^{c+1}}{c+1} + \ldots$$

ohne Ende sich nähert; folglich ist der verlangte Flächeninhalt von BMM′B′

$$F = A\frac{x^{a+1}}{a+1} + B\frac{x^{b+1}}{b+1} + C\frac{x^{c+1}}{c+1} + \ldots$$

Zu demselben Resultate wären wir gelangt, wenn wir f″ bestimmt hätten; wovon sich der Anfänger durch eigene Rechnung überzeugen mag.

Vergleichen wir den Ausdruck von F mit jenem der Grundlinie y nähmlich mit

$$y = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots$$

so ersehen wir, daß man den Flächeninhalt F erhält, wenn man in jedem Gliede des Ausdruckes von y den Exponenten von x um eine Einheit vergrößert, und dasselbe durch diesen so vergrößerten Exponenten dividirt.

Fig. 48. Um uns von der Richtigkeit dieses Resultates unserer Untersuchung durch die Anwendung desselben auf besondere Beyspiele zu versichern, wollen wir den Inhalt des Dreyeckes ABC (Fig. 48) bestimmen. In dieser Absicht setzen wir $CD = x$, $AB = y$, und nehmen an, daß die um die Längeneinheit von C abstehende zur AC parallele Gerade $= a$ sey, wodurch $y : a = x : 1$ also $y = ax$ wird.

Hieraus folgt nach unserer Regel der Inhalt des Dreyeckes $ABC = \frac{1}{2}ax^2$ oder $= \frac{1}{2}x \,.\, ax = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}CD \,.\, AB$ wie in §. 439.

82. Eben so ist bei dem Parallelogramm ABCD (Fig. 82), wenn wir $AD = a$, $AG = x$, $BC = y$ setzen,

$$y = a$$

daher der Inhalt dieses Parallelogramms $= ax = xy = AG \,.\, BG$ wie in §. 438.

§. 443.

85. Der Flächeninhalt eines Trapezes ABCD ist $= \frac{AB + CD}{2} \,.\, DE =$ dem Producte aus der halben Summe (oder aus dem arithmetischen Mittel) der zwey parallelen Seiten in ihren Abstand.

Denn es ist $ABCD = ABD + DBC$. Nun aber ist $ABD = \frac{AB \,.\, DE}{2}$, und $BDC = \frac{DC \,.\, BF}{2} = \frac{DC \,.\, DE}{2}$; folglich ist

$$ABCD = \frac{AB \,.\, DE + DC \,.\, DE}{2} = \frac{AB + CD}{2} \,.\, DE.$$

§. 444.

86. Der Flächeninhalt jedes Viereckes ABCD ist $= AC \,.\, \frac{DE + BF}{2} =$ dem Producte aus einer Diagonale in die halbe Summe (oder in das arithmetische Mittel) ihrer Abstände von den zwey ihr entgegenliegenden Winkelpuncten.

Denn es ist $ABCD = ACB + ACD$. Nun aber ist $ACB = \frac{AC \,.\, FB}{2}$, und $ACD = \frac{AC \,.\, DE}{2}$; folglich ist $ABCD = \frac{AC \,.\, FB + AC \,.\, DE}{2} = AC \,.\, \frac{DE + BF}{2}$.

§. 445. Fig.

Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes ist gleich dem halben Producte aus seinem Umfange in den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises, oder in die Senkrechte, welche aus dem Mittelpuncte auf eine Seite gezogen wird. Z. B. wenn die Seite eines regelmäßigen $n$eckes $= l$, sein Umfang $= nl = p$, und die aus dem Mittelpuncte auf eine Seite gezogene Senkrechte $= a$ ist; so ist der Flächeninhalt $= \frac{1}{2}ap$.

Denn man bilde sich nur ein, daß aus dem Mittelpuncte in alle Vieleckswinkel gerade Linien gezogen sind; so wird dadurch das regelmäßige $n$eck in n vollkommen gleiche Dreyecke getheilet, deren jedes $= \frac{1}{2}al$ ist; es ist demnach die Summe aller dieser Dreyecke, das ist, der Flächeninhalt des regelmäßigen $n$eckes $= n\frac{1}{2}al = \frac{1}{2}anl = \frac{1}{2}ap$, wenn wir p statt nl substituiren.

§. 446.

Wir wollen die Ausdrücke für den Flächeninhalt einiger regelmäßigen Vielecke hieher setzen; es ist nähmlich:

I. Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreyeckes ADG 49.
$= \frac{1}{4}c^2\sqrt{3}$, wenn wir die Seite desselben $= c$ setzen; weil GQ $= \sqrt{(GD^2 - QD^2)} = \sqrt{(c^2 - \frac{1}{4}c^2)} = \sqrt{\frac{3}{4}c^2} = \frac{1}{2}c\sqrt{3}$, und folglich $\frac{1}{2}AD \cdot GQ = \frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{2}c\sqrt{3} = \frac{1}{4}c^2\sqrt{3} = AGD$ ist.

II. Der Flächeninhalt eines Quadrates, dessen Seite $= c$ ist, ist $= c^2$.

III. Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Fünfeckes, dessen 60.
Seite $= c$ ist, ist $= \frac{5}{4}c^2\sqrt{(1 + \frac{2}{5}\sqrt{5})}$. Denn die Senkrechte CD in einem regelmäßigen Fünfecke ist $= \frac{1}{2}c\sqrt{(1 + \frac{2}{5}\sqrt{5})}$, wenn $AB = c$ gesetzt wird (409). Es ist folglich das Dreyeck $ACB = \frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{2}c\sqrt{(1 + \frac{2}{5}\sqrt{5})} = \frac{1}{4}c^2\sqrt{(1 + \frac{2}{5}\sqrt{5})}$, und alle fünf Dreyecke, das ist der Flächeninhalt des regelmäßigen Fünfeckes $= 5 \cdot \frac{1}{4}c^2\sqrt{(1 + \frac{2}{5}\sqrt{5})} = \frac{5}{4}c^2\sqrt{(1 + \frac{2}{5}\sqrt{5})}$.

IV. Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Sechseckes, dessen Seite $= c$ ist, ist $= \frac{3}{2}c^2\sqrt{3}$, weil die Senkrechte in einem regelmäßigen Sechsecke $= \frac{1}{2}c\sqrt{3}$ ist.

V. Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Achteckes, dessen Seite $= c$ ist, ist $= 2c^2\sqrt{(3 + 2\sqrt{2})} = 2c^2(1 + \sqrt{2})$.

Fig. 60. VI. Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Zehneckes, dessen Seite $= c$ ist, ist $= \frac{5}{2} c^2 \sqrt{(5+2\sqrt{5})}$.

VII. Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Zwölfeckes, dessen Seite $= c$ ist; ist $= 3c^2 \sqrt{(7+4\sqrt{3})} = 3c^2 (2+\sqrt{3})$.

Wenn man die Seite eines regelmäßigen Vieleckes und auch die Senkrechte CD durch den Halbmesser des umschriebenen Kreises ausdrückt (409); so erhält man den Flächeninhalt des regelmäßigen Vieleckes durch den Halbmesser seines umschriebenen Kreises angegeben. Z. B. Für den Halbmesser a eines Kreises ist der Flächeninhalt des eingeschriebenen Zwölfeckes $= 3a^2$.

Es wird dem eigenen Fleiße der Anfänger überlassen, die Flächeninhalte der angeführten regelmäßigen Vielecke sowohl durch den Halbmesser des umschriebenen, als auch durch den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises auszudrücken, und diese Berechnung nach Belieben fortzusetzen.

§. 447.

63. Der Flächeninhalt eines jeden unregelmäßigen Vieleckes abcdef wird erhalten, wenn man es durch die Diagonalen ae, ad, ac in lauter Dreyecke zertheilet, den Flächeninhalt jedes Dreyeckes besonders berechnet, und dann alle diese Inhalte addirt. Wenn man zwey Dreyecke auf einmahl zusammen nimmt, das ist, wenn man die Vierecke fade, adcb nach (444.) berechnet; so wird die Arbeit schneller zu Ende gebracht.

§. 448.

Die Kreisfläche ist gleich dem halben Producte aus dem Umkreise in den Halbmesser; nähmlich $= \frac{1}{2} ap$, wenn der Halbmesser $= a$, und der Umkreis $= p$ gesetzt wird.

Denn man kann den Kreis ansehen als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten, bey dem die aus dem Mittelpuncte auf die Vieleckseite gezogene Senkrechte dem Halbmesser a gleicht, und dessen Umfang $= p$ ist. Nun ist der Flächeninhalt eines solchen regelmäßigen Vieleckes $= \frac{1}{2} ap$; also auch die Kreisfläche $= \frac{1}{2} ap$. Daß bey einem regelmäßigen Vielecke von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten die aus dem Mittelpuncte auf eine Vieleckseite gezogene Senkrechte dem Halbmesser des umschriebenen Kreises gleiche, ist leicht einzusehen. Denn es

sey $AC = a$ der Halbmesser des Kreises und $AB = \alpha$ die Seite eines Fig. regelmäßigen Vieleckes von unendlich vielen unendlich kleinen Sei- 60. ten; so ist $AD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}\alpha$, folglich die Senkrechte

$$CD = \sqrt{(AC^2 - AD^2)} = \sqrt{\left(a^2 - \frac{\alpha^2}{4}\right)}$$

$$= a - (a - \sqrt{a^2 - \alpha^2}) = a - \frac{\alpha^2}{a + \sqrt{a^2 - \alpha^2}}.$$

Ist jedoch, wie wir voraussetzen, α unendlich klein, so kann das zweyte Glied wegen seines unendlich geringen Werthes in Bezug auf das erste vernachlässiget, also $CD = a$ gesetzt werden.

§. 449.

Daß die Kreisfläche $= \frac{1}{2}ap$ ist, wenn man den Halbmesser 84. mit a, und den Umkreis mit p bezeichnet, läßt sich auch so erweisen. Es sey was immer für ein Bogen eines Kreises $EF = b$. Man theile diesen in Gedanken in eine unendlich zunehmende Anzahl n gleicher Theile Ed, de, .. ; so ist jeder solcher Theil $= \frac{b}{n}$. Durch diese Theilungspuncte ziehe man die Halbmesser dB, eB, ...; so wird der Ausschnitt EBF dadurch in eine unendlich wachsende Anzahl gleicher Dreyecke EBd, dBe, ... aufgelöst, weil man die unendlich abnehmenden Bogen Ed, de, ... für gerade Linien ansehen kann. Nun ist jedes solche unendlich kleine Dreyeck $EBd = \frac{Ed \cdot Be}{2} = \frac{b}{n} \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab}{2n}$; also ist auch $n \cdot EBd = n \cdot \frac{ab}{2n} = \frac{ab}{2}$. Endlich ist $n \cdot EBd =$ dem Ausschnitte EBF; folglich auch $\frac{ab}{2} =$ dem Ausschnitte EBF; nähmlich der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes gleicht dem halben Producte aus dem Halbmesser in die Länge des Bogens. Setzen wir nun $b = p$, das ist, theilen wir den ganzen Umkreis in unendlich viele gleiche Theile; so erhalten wir $\frac{ap}{2}$ für die ganze Kreisfläche. Es ist demnach die ganze Kreisfläche gleich dem halben Producte aus dem Halbmesser in die Länge des ganzen Umkreises = einem Dreyecke, dessen Grundlinie p, und Höhe a ist.

Fig.

§. 450.

Wäre nun das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise bekannt; so könnte der Flächeninhalt eines jeden Kreises, und auch jedes Kreisausschnittes berechnet werden, wenn nur in dem letzten nebst dem Halbmesser auch der Winkel am Mittelpuncte bekannt wäre. Es sey z. B. das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise $= 113 : 355$, und die Länge eines gegebenen Halbmessers $= 100^1$; so ist (§. 416) $113 : 355 = 2 . 100^1 : \text{Umkr.}$; folglich der Umkreis $= \frac{2 . 100 . 355}{113} = 628{,}318^1$; und der Flächeninhalt $= \frac{1}{2} . 628{,}318 . 100 = 31415{,}9\ \square^1 = 31415\ \square^1$ und $\frac{9.144}{10}\ \square^{11} = 31415\ \square^1$ und $129{,}6\ \square^{11}$. In demselben Kreise ist ein Kreisausschnitt, dessen Winkel 60 Grad beträgt, $= 5235{,}9\square^1$, wenn man schließt $360^0 : 60^0 = 628{,}318$ (nähmlich die Länge des ganzen Umkreises): zur Länge des Bogens eines Ausschnittes von $60^0 = \frac{628{,}318 . 60}{360^0}$, und dann diese gefundene Länge mit dem halben Halbmesser multiplicirt. Man erhält diesen Ausdruck auch, wenn man schließt $360 : 60 = 31415{,}9\ \square^1$ (nähmlich die ganze Kreisfläche): zum Flächeninhalte des Ausschnittes von $60^0 = 5235{,}9\ \square^1$.

60. Wäre ein Kreisabschnitt AEBA zu berechnen; so müßte man erstens den Flächeninhalt des dazu gehörigen Kreisausschnittes AEBCA, zweytens den Flächeninhalt des Dreyeckes ABC bestimmen, und dann den zweyten Flächeninhalt von dem ersten abziehen; wornach der Ueberrest dem Flächeninhalte des Kreisabschnittes AEBA gleich würde.

§. 451.

87. Das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise können wir auf folgende Art durch Näherung bestimmen.

Wenn man in dem Mittelpuncte C Fig. 87. den Halbmesser CA auf den Durchmesser DP senkrecht errichtet, und einen unbestimmten Bogen AB durch die senkrechte Ordinate BM (412.) abschneidet; so muß man trachten diesen Bogen AB durch die zugehörige Abscisse CM (413.), und durch den Halbmesser des

Kreises analytisch auszudrücken. Diesen analytischen Ausdruck wird man erhalten, wenn man 1) das Stück CABM der Kreisfläche, und 2) die Fläche des Dreyeckes CBM durch die Abscisse CM und durch den Halbmesser CD = CA ausdrückt; 3) CBM von CABM abzieht, und 4) den dadurch erhaltenen Ausdruck des Kreisausschnittes BCA durch $\frac{1}{2}$CA dividirt; weil die Fläche des Kreisausschnittes BCA = $\frac{1}{2}$CA . AB (449.), und folglich AB = $\frac{BCA}{\frac{1}{2}CA}$ ist. Hat man einen solchen Ausdruck für den unbestimmten Bogen AB gefunden; so wird man die Abscisse CM einem gewissen Theile des Halbmessers, z. B. CM = $\frac{1}{2}$ CD gleichsetzen, für welchen der dazu gehörige Bogen AB ein bekannter Theil des ganzen Umkreises ist. Hiedurch wird sich dieser bekannte Theil des ganzen Umkreises, und daraus ferner der ganze Umkreis selbst für jeden beliebigen Halbmesser berechnen lassen. Fig. 87.

1) Es sey nun der Halbmesser eines Kreises CD = a, AC und BM senkrecht auf CD, CM = x und BM = y; so ist (vermöge §. 413)

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

oder, wenn wir diesen Ausdruck (nach §. 300) in eine unendliche Reihe auflösen,

$$y = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{1.x^4}{2.4.a^3} - \frac{1.3.x^6}{2.4.6.a^5} - \frac{1.3.5.x^8}{2.4.6.8.a^7} - \ldots.$$

Hieraus finden wir dem in §. 442 begründeten Verfahren gemäß den Flächeninhalt des Stückes CMBAC =

$$ax - \frac{x^3}{2.3.a} - \frac{1.x^5}{2.4.5.a^3} - \frac{1.3.x^7}{2.4.6.7.a^5} - \ldots.$$

2) Ferner ist der Flächeninhalt des Dreyeckes

$$BCM = \frac{1}{2}CM.MB = \frac{x}{2}.\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$= \frac{x}{2}\left(a - \frac{x^2}{2a} - \frac{1.x^4}{2.4.a^3} - \frac{1.3.x^6}{2.4.6a^5} - \ldots\right)$$

$$= \frac{ax}{2} - \frac{x^3}{2.2a} - \frac{1.x^5}{2.4.2.a^3} - \frac{1.3.x^7}{2.4.6.2.a^5} - \ldots$$

Fig. 87. 3) Nun ist der Kreisausschnitt BCA = CMBA − BCM; folglich auch

$$= ax\left(1-\tfrac{1}{2}\right) + \frac{x^3}{2.a}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\right) + \frac{x^5}{2.4.a^3}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{5}\right) + \frac{x^7}{2.4.6.a^5}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{7}\right) + .$$

$$= \frac{ax}{2} + \frac{1.x^3}{2.2.3.a} + \frac{1.3.x^5}{2.2.4.5.a^5} + \frac{1.3.5.x^7}{2.2.4.6.7.a^5} + \ldots$$

4) Wir haben jedoch auch $BCA = \frac{BA.CA}{2} = \frac{az}{2}$, wenn wir die Länge des Bogens BA = z setzen; folglich ist

$$\frac{az}{2} = \frac{ax}{2} + \frac{1.x^3}{2.2.3.a} + \frac{1.3.x^5}{2.2.4.5.a^3} + \ldots \text{ und endlich}$$

$$z = x + \frac{1.x^3}{2.3.a^2} + \frac{1.3.x^5}{2.4.5.a^4} + \frac{1.3.5.x^7}{2.4.6.7.a^6} + \frac{1.3.5.7.x^9}{2.4.6.8.9.a^8} + \ldots$$

Setzen wir nun $x = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}CD$; so ist

$$z = \frac{a}{2} + \frac{1}{2.3.a^2}\cdot\frac{a^3}{2^3} + \frac{1.3}{2.4.5.a^4}\cdot\frac{a^5}{2^5} + \ldots\ldots$$

$$= a.\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{1.3}{2.4.5.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.2^7} + \ldots\right)$$

Es ist aber bey dieser Annahme AB = z = arc 30° = dem Bogen von 30 Grad. Denn wegen der Gleichheit der Dreyecke DMB und CMB wird die Sehne BD = dem Halbmesser BC; folglich der Bogen BD = 60° (393. II.), und der Bogen AB = AD − BD = 90° − 60° = 30°. Es ist demnach die Länge eines Bogens von 30° in einem Kreise, dessen Halbmesser = a ist,

$$\text{arc } 30^\circ = a.\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{1.3}{2.4.5.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.2^7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9.2^9} + \ldots\right)$$

also auch

$$12.\text{arc } 30^\circ = 12.a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{1.3}{2.4.5.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.2^7} + \ldots\right);$$

nähmlich

$$\text{arc } 360^\circ = 12a.\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{1.3}{2.4.5.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.2^7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9.2^9} + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.11.2^{11}} + \ldots\ldots\right)$$

= dem ganzen Umkreise.

Diese Reihe läßt sich auch auf folgende Gestalt bringen; Fig. 87.

$$\text{arc } 360^0 = 12a.\left(\frac{1}{1.2^1} + \frac{1.1}{1.2.3.2^3} + \frac{1.1.3.3}{1.2.3.4.5.2^5} + \frac{1.1.3.3.5.5}{1.2.3.4.5.6.7.2^7} + .\right)$$

und endlich ist, wenn wir das erste Glied dieser letzten Reihe $\frac{1}{1.2^1} = A$, das zweyte $= B$, das dritte $= C$, das vierte $= D$, das fünfte $= E$ u. s. w. setzen,

$$\text{arc } 360^0 = 12a.\left(\frac{1}{2} + \tfrac{1}{4}A.\frac{1.1}{2.3} + \tfrac{1}{4}B.\frac{3.3}{4.5} + \tfrac{1}{4}C.\frac{5.5}{6.7} + \tfrac{1}{4}D.\frac{7.7}{8.9} + \tfrac{1}{4}E.\frac{9.9}{10.11} + \tfrac{1}{4}F.\frac{11.11}{12.13} + \tfrac{1}{4}G.\frac{13.13}{14.15} + \tfrac{1}{4}H.\frac{15.15}{16.17} + \ldots\right).$$

Nun ist

$\frac{1}{2} = 0{,}50000000000 = A$

$+\frac{1}{4}A.\frac{1.1}{2.3} = 0{,}02083333333 = B$

$+\frac{1}{4}B.\frac{3.3}{4.5} = 0{,}00234375000 = C$

$+\frac{1}{4}C.\frac{5.5}{6.7} = 0{,}00034877232 = D$

$+\frac{1}{4}D.\frac{7.7}{8.9} = 0{,}00005933974 = E$

$+\frac{1}{4}E.\frac{9.9}{10.11} = 0{,}00001092391 = F$

$+\frac{1}{4}F.\frac{11.11}{12.13} = 0{,}00000211826 = G$

$+\frac{1}{4}G.\frac{13.13}{14.15} = 0{,}00000042617 = H$

$+\frac{1}{4}H.\frac{15.15}{16.17} = 0{,}00000008814 = I$

$+\frac{1}{4}I.\frac{17.17}{18.19} = 0{,}00000001862 = K$

$+\frac{1}{4}K.\frac{19.19}{20.21} = 0{,}00000000401 = L$

$+\frac{1}{4}L.\frac{21.21}{22.23} = 0{,}00000000087 = M$

$+\frac{1}{4}M.\frac{23.23}{24.25} = 0{,}00000000016 = N$

$+\frac{1}{4}N.\frac{25.25}{26.27} = 0{,}00000000004 = O$

$+\frac{1}{4}O.\frac{27.27}{28.29} = 0{,}00000000000 = P$

$= \ldots\ldots\ldots 0{,}52359877557$

Fig. 87. $= 0{,}5235987756$, wenn wir die letzte Ziffer, weil sie etwas zu klein seyn muß, und folglich ungewiß ist, hinweglassen, und dafür die vorhergehende um 1 vermehren. Folglich ist

$$\text{arc } 360^0 = 12 \,.\, a \,.\, 0{,}5235987756.$$

Wenn wir nun den Umfang eines Kreises, dessen Durchmesser $= 1$ ist, mit π bezeichnen, so ist $a = \frac{1}{12}$, arc $360^0 = \pi$, und folglich $\pi = 12 \,.\, \frac{1}{2} \,.\, 0{,}5235987756 = 3{,}1415926536$; nähmlich ein Umkreis, dessen Durchmesser $= 1$ ist, ist $= 3{,}1415926536$. Es verhält sich demnach ein jeder Durchmesser zu seinem Umkreise wie 1 zu $3{,}1415926536$ (vermöge 416.), oder wie $10000000000 : 31415926536$, welches Verhältniß auch durch $7 : 22$ beynahe, oder $113 : 355$ sehr nahe (110. 111.) ersetzt werden kann. Das letzte Verhältniß $113 : 355$ ist sehr leicht im Gedächtnisse zu behalten, weil es aus den ersten drey ungeraden Zahlen 1, 1, 3, 3, 5, 5, zusammengesetzt ist. Das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise werden wir jederzeit mit $1 : \pi$ bezeichnen, das ist, es wird jederzeit $\pi = 3{,}1415926536$, oder auch $\pi = \frac{355}{113}$ seyn. Suchen wir zu dieser Zahl π den briggischen und den natürlichen oder neper'schen Logarithmus, so finden wir

$$\log \text{brig. } \pi = 0.4971499$$
$$\log \text{nat. } \pi = 1.1447299$$

§. 452.

Nun ist es leicht, zu jedem gegebenen Halbmesser sowohl den dazu gehörigen Umkreis als auch die Kreisfläche zu finden. Es sey z. B. der Halbmesser eines Kreises $= m$ Schuh; so ist der dazu gehörige Umkreis $= 2m\pi$ Schuh, weil $1 : \pi = 2m :$ zum Umkreise statt findet; und die Kreisfläche ist $= m^2\pi$ Quadrat-Schuh, weil die Kreisfläche dem halben Producte aus dem Umkreise $2m\pi$ in den Halbmesser m gleich ist. Setzen wir nun den Halbmesser $m = 2$ Schuh, so ist der Umkreis $= 2 \,.\, 2 \,.\, \pi = 4 \,.\, 3{,}14159 \ldots = 12{,}56636$ Schuh, und die Kreisfläche $= 12{,}56636$ Quadrat-Schuh.

Auch zu jeder gegebenen Länge eines Umkreises kann der dazu gehörige Halbmesser gefunden werden. Es sey z. B der gegebene Umkreis $= p$ Schuh, und der unbekannte Halbmesser $= a$, so ist $p = 2a\pi$, und folglich $a = \frac{p}{2\pi}$ Schuh. Eben so kann aus

dem gegebenen Flächeninhalte eines Kreises der Halbmesser gefunden werden. Es sey z. B. der gegebene Flächeninhalt = b Quadrat-Schuh, und der unbekannte Halbmesser = a; so ist $b = a^2\pi$, und folglich $a = \sqrt{\frac{b}{\pi}}$ Schuh. Fig.

§. 453.

Wenn man mehrere Glieder der unendlichen Reihe entwickelt, welche den zum Halbmesser a gehörigen Umkreis ausdrückt (451.); so findet man einen noch genaueren Werth für π, nähmlich

$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288$;

allein es ist der früher angegebene Werth von π schon so genau, daß man selten alle zehn Decimal-Stellen gebrauchet; man begnüget sich gemeiniglich nur mit den ersten fünf Decimal-Stellen; nähmlich man nimmt nur $\pi = 3{,}14159$.

Der Näherungswerth des Kreisverhältnisses π kann auch auf folgende Weise gefunden werden. Man bestimme die Umfänge p und P zweyer regelmäßiger Vielecke von derselben Anzahl der Seiten n, von denen das eine in, das andere um den Kreis beschrieben ist; so muß offenbar der Umfang des Kreises größer als jener, p, des eingeschriebenen, und kleiner als der, P, des umschriebenen regelmäßigen Vieleckes seyn. Läßt man hierauf die Anzahl der Seiten dieser Vielecke sich fortwährend verdoppeln, so können die Umfänge der allmählig hervortretenden Vielecke (nach §. 409) bestimmt werden, und müssen der zwischen ihnen liegenden Peripherie des Kreises unabläßig sich nähern; wodurch man, wenn die Umfänge der Vielecke in Decimaltheilen des Durchmessers des Kreises ausgedrückt sind, für den Werth der Peripherie diejenigen Anfangsziffern beyzubehalten berechtiget wird, welche in den Werthen jener Umfänge gleich sind.

Am vortheilhaftesten ist es, für den Durchmesser d des Kreises die Längeneinheit oder 1 zu nehmen, und von dem ihm eingeschriebenen regelmäßigen Sechsecke auszugehen, da seine Seite = dem Halbmesser $= \frac{1}{2}$, also sein Umfang $p = 3$ ist. Zu diesem wird man sonach den Durchmesser δ des ihm eingeschriebenen 50.

Fig. 50. Kreises, nach der Formel $\delta = \sqrt{1 - \frac{p^2}{n^2}}$ (§. 409) und mittelst desselben den Umfang P des dem gegebenen Kreise umschriebenen regelmäßigen Sechseckes nach der Gleichung $P = \frac{p}{\delta}$, endlich den Perimeter p_1 des demselben Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Zwölfeckes nach der Formel $p_1 = n\sqrt{2(1-\delta)}$ bestimmen. Von diesem schreitet man auf demselben Wege nach und nach zu den regelmäßigen Vielecken von 24, 48, 96 Seiten u. s. w., und setzt sich so in den Besitz folgender zusammengehöriger Werthe von n, p und P.

n_1	= 6,	p_1	= 3,0000000	P_1	= 3,4641016
n_2	= 12,	p_2	= 3,1058285	P_2	= 3,2153903
n_3	= 24,	p_3	= 3,1326286	P_3	= 3,1596599
n_4	= 48,	p_4	= 3,1393502	P_4	= 3,1460862
n_5	= 96,	p_5	= 3,1410319	P_5	= 3,1427146
n_6	= 192,	p_6	= 3,1414524	P_6	= 3,1418730
n_7	= 384,	p_7	= 3,1415576	P_7	= 3,1416630
n_8	= 768,	p_8	= 3,1415839	P_8	= 3,1416101
n_9	= 1536,	p_9	= 3,1415904	P_9	= 3,1415970
n_{10}	= 3072,	p_{10}	= 3,1415921	P_{10}	= 3,1415937
n_{11}	= 6144,	p_{11}	= 3,1415925	P_{11}	= 3,1415929
n_{12}	= 12288,	p_{12}	= 3,1415926	P_{12}	= 3,1415927

Die sieben ersten Ziffern, welche die Umfänge der dem Kreise ein- und umschriebenen regelmäßigen Vielecke von 12288 Seiten gemein haben, werden nun dem zwischen ihnen liegenden Umfange des Kreises angehören, daher dieser $= \pi = 3{,}141592$ seyn wird.

Weil die oben gefundene Reihe

$$\text{arc } 360^0 = 12\ a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{1.3.}{2.4.5.2^5} + \ldots\right)$$

ins Unendliche fortläuft, sich daher nicht genau summiren läßt; so kann auch der Umkreis nicht vollkommen rectificirt, die Kreisfläche nicht vollkommen quadrirt werden. Jedoch da diese Reihe sehr schnell zusammenläuft, so läßt sich ihre Summe durch Annäherung so genau bestimmen, als man es nur immer verlanget; folglich läßt sich auch jeder Umkreis von einem gegebenen Halb-

messer durch Annäherung so genau rectificiren, jede Kreisfläche so genau quadriren, als man es nur immer wünschen kann. Fig. 87.

§. 454.

I. Eben so leicht, als wir den Flächeninhalt von ACMB bestimmten, läßt sich auch jener eines ganzen oder halben Kreisabschnittes finden.

Will man z. B. den halben Kreisabschnitt PQN durch den Halbmesser CA = a des Kreises, und durch die Abscisse PQ = x ausdrücken, so findet man die Ordinate

$$QN = y = \sqrt{2ax - x^2} = x^{\frac{1}{2}}(2a - x)^{\frac{1}{2}}$$

oder, wenn man nach dem binomischen Lehrsatze potenzirt,

$$y = 2^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2.2^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}} - \frac{1.x^{\frac{5}{2}}}{2.4.2^{\frac{3}{2}} a^{\frac{3}{2}}} - \frac{1.3.x^{\frac{7}{2}}}{2.4.6.2^{\frac{5}{2}} a^{\frac{5}{2}}} \cdot$$

Hieraus folgt vermöge der (in §. 442. II) gegebenen Regel der Flächeninhalt von

$$PQN = \frac{2}{3} 2^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2.2^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{7} \cdot \frac{1.x^{\frac{7}{2}}}{2.4.2^{\frac{3}{2}} a^{\frac{3}{2}}}$$

$$- \frac{2}{9} \cdot \frac{1.3.x^{\frac{9}{2}}}{2.4.6.2^{\frac{5}{2}} a^{\frac{5}{2}}} - \cdots$$

$$= 2 = \sqrt{2ax} \left(\frac{x}{3} - \frac{x^2}{2.5.a} - \frac{x^3}{2.4.7a^2} - \frac{x^4}{2.4.6.9a^3} - \cdots \right)$$

Demnach ist der Flächeninhalt des ganzen Kreisabschnittes

$$RPNR = 4\sqrt{2ax} \left(\frac{x}{3} - \frac{x^2}{2.5.a} - \frac{x^3}{2.4.7a^2} - \frac{x^4}{2.4.6.9a^3} - \cdots \right)$$

II. Man erhält für den Flächeninhalt eines Abschnittes BEFAB auch einen Ausdruck, der nur den Halbmesser CA = a und die Sehne BF = z in sich enthält, wenn man von CMBA das Rechteck CMBE abzieht, den Unterschied ABEA mit 2 multiplicirt, und sodann $\frac{1}{2}$BF statt CM substituirt. Es ist nach gehöriger Reduction

Fig. 87. $BEFAB = \frac{2z^3}{3.2^3.a} + \frac{1.z^5}{5.2^5.a^3} + \frac{1.3.z^7}{4.7.2^7.a^5} + \frac{1.3.5.z^9}{4.6.9.2^9.a^7} + \frac{1.3.5.7.z^{11}}{4.6.8.11.2^{11}.a^9} + \ldots$

II. Abschnitt.

Von der Vergleichung und Verwandlung geradliniger Figuren.

§. 455.

Wenn man die Grundlinie eines Dreyeckes mit B, die Höhe mit A, und den Flächeninhalt mit S bezeichnet; so ist $S = \frac{1}{2} A.B$. Ingleichen, wenn die Grundlinie eines anderen Dreyeckes $= b$, die Höhe $= a$, und der Flächeninhalt $= s$ gesetzt wird; so ist ebenfalls $s = \frac{1}{2} a.b$ (§. 439.). Es ist also auch $S:s = \frac{1}{2} A.B : \frac{1}{2} a.b = AB:ab$ (185.); das ist, die Flächeninhalte der Dreyecke verhalten sich gegen einander wie die Producte aus den Grundlinien in ihre Höhen. Hieraus folgt

I. Daß Dreyecke von gleichen Grundlinien wie ihre Höhen, und Dreyecke von gleichen Höhen wie ihre Grundlinien sich verhalten. Denn wenn man $B = b$ setzt, so ist $S:s = A:a$. Ingleichen ist $S:s = B:b$, wenn $A = a$ gesetzt wird.

II. Daß bey zwey Dreyecken, deren Flächeninhalte einander gleichen, die Höhen mit den Grundlinien in einer verkehrten Proportion stehen. Denn man setze nur $S = s$, nähmlich $\frac{1}{2} A.B = \frac{1}{2} a.b$; so ist $\frac{1}{2} A : \frac{1}{2} a = b:B$ (185.), oder $A:a = b:B$.

88. III. Daß Dreyecke, die einen gleichen Winkel haben, sich verhalten wie die Producte aus den Seiten, welche den gleichen Winkel einschließen; nähmlich $ABC : abc = AB.AC : ab.ac$, wenn der Winkel $A = a$ ist. Denn es ist

$$ABC:abc = AB.CD:ab.cd = AB:ab.\frac{cd}{CD},$$

wenn cd und CD die Höhen sind; nun aber ist wegen der Aehn-

lichkeit der Dreyecke ACD und acd, AC : ac = CD : cd, nähmlich Fig.
$\frac{ac}{AC} = \frac{cd}{CD}$; also ist auch

$$ABC : abc = AB : ab . \frac{ac}{AC} = AB . AC : ab . ac.$$

IV. Daß ähnliche Dreyecke sich gegen einander verhalten, 40.
wie die Quadrate der gleichnahmigen Seiten; z. B.
$ABC : abc = BC^2 : bc^2 = AD^2 : ad^2 = AC^2 : ac^2 = AB^2 : ab^2$.

Denn es ist

$$ABC : abc = BC . AD : bc . ad = BC : bc . \frac{ad}{AD}.$$

Nun ist aber wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke,

$ad : AD = bc : BC$, nähmlich $\frac{ad}{AD} = \frac{bc}{BC}$, also auch $ABC : abc = BC : bc . \frac{bc}{BC} = BC^2 : bc^2$. Da ferner $BC : bc = AC : ac = AB : ab$, oder $BC^2 : bc^2 = AC^2 : ac^2 = AB^2 : ab^2$ ist; so hat man auch $ABC : abc = AC^2 : ac^2 = AB^2 : ab^2$.

V. Daß alles dieses auch bey Parallelogrammen statt findet; weil ein jedes Parallelogramm nichts anderes ist, als das Doppelte eines Dreyeckes von eben derselben Grundlinie und Höhe.

§. 456.

Die Flächeninhalte ähnlicher Vielecke verhalten sich gegen einander, wie die Quadrate der gleichnahmigen Seiten; z. B. $ABCDEF : abcdef = AB^2 : ab^2 = EF^2 : ef^2 = AD^2 : ad^2$, u. s. w. 63.

Denn wenn man die ähnlichen Vielecke durch gleichnahmige Diagonalen in Dreyecke zertheilet; so ist das Dreyeck
$ABC : abc = AB^2 : ab^2$, das Dreyeck
$ADC : adc = AC^2 : ac^2 = AB^2 : ab^2$, weil $AC : ac = AB : ab$ ist.
Eben so findet man $AED : aed = AB^2 : ab^2$; ingleichen
$AEF : aef = AB^2 : ab^2$, u. s. w. Es ist also auch
$ACB + ADC + AED + ..) : (acb + adc + aed + ...) = AB^2 : ab^2$ (191.), das ist $ABCDEF : abcdef = AB^2 : ab^2$. Da ferner $AB : ab = AF : af = EF : ef$ u. s. w. statt findet; so ist auch
$ABCDEF : abcdef = AF^2 : af^2 = EF^2 : ef^2$, u. s. w.

Fig.

§. 457.

Die Flächeninhalte der regelmäßigen Vielecke von derselben Gattung verhalten sich demnach wie die Quadrate der Seiten, wie die Quadrate der Halbmesser, wie die Quadrate der Durchmesser von den umschriebenen, oder auch von den eingeschriebenen Kreisen. Die Kreisflächen selbst verhalten sich wie die Quadrate der Halbmesser, wie die Quadrate der Durchmesser, wie die Quadrate der Sehnen von ähnlichen Bogen; u. s. w.

§. 458.

89. Wenn man auf den drey Seiten eines rechtwinkeligen Dreyeckes ähnliche Figuren, z. B. gleichseitige Dreyecke, Halbkreise, oder andere ähnliche Vielecke verzeichnet; so ist die Figur auf der Hypothenuse der Summe der zwey Figuren auf den beyden Katheten zusammengenommen gleich. Bezeichnen wir nähmlich die Katheten BC und CA durch a und b, die auf ihnen verzeichneten Figuren durch α und β, die Hypothenuse AB aber durch c und die über ihr gezeichnete Figur durch γ; so folgt aus der vorausgesetzten Aehnlichkeit dieser Figuren (nach 456)

$$\alpha : a^2 = \beta : b^2 = \gamma : c^2 \text{ oder vermöge §. 191}$$
$$= \alpha + \beta : a^2 + b^2$$

Es ist jedoch $c^2 = a^2 + b^2$ (§. 403),

daher wegen der Gleichheit der zwey letzten Verhältnisse

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

So ist demnach das Dreyeck ABD = ACF + BCE und die halbe Kreisfläche ACBA = der Summe aus den halben Kreisflächen auf AC und BC, nähmlich Q + R + P = N + Q + P + M, folglich auch R = N + M wenn man beyderseits Q + P abzieht; das ist, die hypokratischen Monde M und N sind zusammen dem rechtwinkeligen Dreyecke R gleich.

§. 459.

90. Nun können wir eine Figur verzeichnen, welche mehreren ähnlichen Figuren zusammengenommen an Flächeninhalte gleich, und zugleich ähnlich ist. Um dieses zu bewirken, darf man nur zwey gleichnahmige Seiten AB und BC der ersten zwey gegebenen ähnlichen Figuren unter einem rechten Winkel zusammenfügen, und die Hypothenuse AC führen, welche die gleichnahmige Seite einer

Figur vorstellt, deren Flächeninhalt jenem der zwey ähnlichen Fi- Fig.
guren auf den gleichnahmigen Seiten AB und BC gleicht. Wenn 90.
man sodann CD senkrecht auf AC setzt, diese Senkrechte der gleich-
nahmigen Seite der dritten ähnlichen Figur gleich macht, und die
Hypothenuse AD zieht; so ist diese die gleichnahmige Seite einer
Figur, welche den drey gegebenen zusammengenommenen am Flä-
cheninhalte gleich, und zugleich ähnlich ist, wenn man die Ver-
zeichnung (nach 426.) vornimmt; u. s. w. Wären z. B. AB, BC,
und CD Halbmesser von drey Kreisen, so würde die mit dem Halb-
messer AD beschriebene Kreisfläche den drey andern zusammen-
genommen gleich seyn.

§. 460.

Eben so kann eine Figur verzeichnet werden, welche zwey 69.
ähnlichen Figuren ähnlich, und dem Unterschiede ihrer Flächen
gleich ist, wenn man auf einer Seite BD der größern Figur einen
Halbkreis zieht, in diesen Halbkreis aus dem Endpuncte B des
Durchmessers eine Sehne BE einschreibt, die der gleichnahmigen
Seite der kleineren gegebenen Figur gleich ist, ferner die Sehne
DE zieht, und auf derselben als auf der gesuchten gleichnahmigen
Seite eine ähnliche Figur verzeichnet. Denn wegen des rechtwinke-
ligen Dreyeckes BDE ist die Figur auf ED = dem Unterschiede
der ähnlichen Figuren auf BD und BE.

§. 461.

Wir wollen diese Abhandlung von der Vergleichung und
Verwandlung geradliniger Figuren mit folgenden Aufgaben
beschließen.

I. Ein gegebenes Vieleck, z. B. das Fünfeck ABCDE, in 91.
ein Dreyeck von gleichem Inhalte zu verwandeln.

Auflösung. Man schneide mittelst einer Diagonale, z. B. mit-
telst AC, von dem gegebenen Vielecke ein Dreyeck ABC ab und
verwandle dieses in ein anderes AFE, dessen eine Seite AF in
die Richtung einer Seite AE des Vieleckes fällt, indem man durch
die der gezogenen Diagonale AC gegenüber liegende Dreyecks-
spitze B die BF zur AC parallel führt, mit ihr die verlängerte
Seite AE des Vieleckes in F schneidet, und die Gerade FC zieht;

Fig. wodurch in der That (nach §. 390. I) FAC = BAC wird. Durch diesen Vorgang verwandelt man das gegebene Vieleck in ein anderes, welches um eine Seite weniger enthält. Wiederholt man dasselbe Verfahren, indem man z. B. das Dreyeck CDE in CGE verwandelt, so wird man schrittweise zu Vielecken von immer geringerer Anzahl Seiten und endlich zu einem Dreyecke, wie CEF gelangen, welches dem vorgelegten Vielecke am Inhalte gleicht.

II. **Ein Dreyeck, dessen Grundlinie b, und Höhe a gegeben sind, in ein Quadrat von gleichem Inhalte zu verwandeln; nähmlich die Seite eines dem Dreyecke an Inhalt gleichen Quadrates zu finden.**

Auflösung. Es sey die Seite des gesuchten Quadrates $= x$, so ist $x^2 = \frac{1}{2}ab$, und folglich $x = \sqrt{\frac{1}{2}ab}$. Man suche also nur zwischen $\frac{1}{2}a$ und b, oder zwischen a und $\frac{1}{2}b$ die mittlere Proportionale (nach 418.); so ist diese die gesuchte Seite des Quadrates, welches dem gegebenen Dreyecke am Flächeninhalte gleich ist.

Eben so läßt sich jedes gegebene Parallelogramm in ein Quadrat von gleichem Inhalte verwandeln, wenn man zwischen der Grundlinie und Höhe des gegebenen Parallelogrammes die mittlere Proportionale suchet, und auf dieser ein Quadrat verzeichnet.

Auch jede gegebene Kreisfläche läßt sich in ein Quadrat von gleichem Inhalte verwandeln, indem man mit Hülfe eines geometrischen Maßstabes eine gerade Linie verzeichnet, die dem halben gegebenen Umkreise gleicht, dann zwischen dieser Geraden und dem Halbmesser die mittlere Proportionale sucht, und auf dieser ein Quadrat verzeichnet. Wenn man den Durchmesser eines Kreises in 44 gleiche Theile theilet, und 39 solcher Theile für die Seite eines Quadrates annimmt; so ist auch der Flächeninhalt dieses Quadrates der Kreisfläche sehr nahe gleich. Denn es sey der Durchmesser eines Kreises $= b$, und die Seite des gesuchten Quadrates, welches dem Kreise am Flächeninhalte gleich seyn soll, $= x$; so ist $\frac{1}{4}b^2\pi = x^2$, und folglich $x = \frac{1}{2}b\sqrt{\pi} = \frac{1}{2}b\sqrt{(3{,}1415926536)} = \frac{1}{2}b \cdot 1{,}77245 = b \cdot 0{,}88622 = \frac{88622}{100000}b$, oder endlich $x = \frac{39}{44}b$, wenn man den Bruch $\frac{88622}{100000}$ (nach 110. 111.) in $\frac{39}{44}$ verwandelt.

III. Ein gegebenes regelmäßiges Vieleck (z. B. ein gleich- Fig.
seitiges Dreyeck) in ein anderes, etwa in ein regelmäßiges Sechseck, von gleichem Inhalte zu verwandeln; das ist, aus der gegebenen Seite des ersten die Seite des letzten zu finden.

Auflösung. Es sey die Seite des gegebenen gleichseitigen Dreyeckes $= b$; so ist dessen Flächeninhalt $= \frac{1}{4}b^2\sqrt{3}$ (vermöge 446. I.). Die Seite des gesuchten regelmäßigen Sechseckes sey $= x$; so ist der Flächeninhalt dieses Sechseckes $= \frac{3}{2}x^2\sqrt{3}$ (vermöge 446. IV.). Nun soll $\frac{3}{2}x^2\sqrt{3} = \frac{1}{4}b^2\sqrt{3}$ seyn; folglich ist

$$x = \sqrt{\frac{b^2}{6}} = b\sqrt{\tfrac{1}{6}} = b\sqrt{\frac{6}{36}} = \tfrac{1}{6}b\sqrt{6}.$$

Wäre das gegebene Vieleck unregelmäßig, oder zwar regelmäßig, aber so beschaffen, daß sich sein Flächeninhalt nicht algebraisch ausdrücken ließe; so müßte man alle erforderlichen Linien des gegebenen Vieleckes auf einem geometrischen Maßstabe ausmessen, um den Flächeninhalt (nach 447.) bestimmen zu können. Dann müßte man diesen Flächeninhalt mit einem Buchstaben, z. B. mit a bezeichnen, und $\frac{3}{2}x^2\sqrt{3} = a$ setzen, wenn das Vieleck in ein regelmäßiges Sechseck zu verwandeln wäre. Aus dieser Gleichung findet man nun $x = \frac{1}{3}\sqrt{(2a\sqrt{3})} = \frac{1}{3}\sqrt[4]{12a^2}$.

IV. Ein regelmäßiges Vieleck, z. B. ein Achteck, zu verzeichnen, welches einen gegebenen Flächeninhalt $= a$ enthält.

Auflösung. Es sey die Seite dieses Achteckes $= x$; so ist dessen Flächeninhalt $= 2x^2(1+\sqrt{2})$. Nun muß vermöge der Bedingung der Aufgabe $2x^2(1+\sqrt{2}) = a$ seyn; folglich ist $x = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}a}$.

Wäre hingegen ein regelmäßiges Vieleck, dessen Flächeninhalt sich nicht algebraisch ausdrücken läßt, z. B. ein regelmäßiges Siebeneck von einem gegebenen Flächeninhalte zu verzeichnen; so beschreibe man mit einem beliebigen Halbmesser einen Kreis, verzeichne darin durch das Versuchen ein regelmäßiges Siebeneck, und messe bey demselben die erforderlichen Linien, um den Flächeninhalt berechnen zu können. Dann sage man: Der berechnete Flächeninhalt des verzeichneten regelmäßigen Siebeneckes verhält sich zu dem gegebenen Flächeninhalte, gleichwie das

Fig. Quadrat einer Seite des verzeichneten Siebeneckes zu dem Quadrate der Seite des gesuchten Siebeneckes; man verzeichne auf dieser gefundenen Seite ein regelmäßiges Siebeneck; so wird dasselbe den gegebenen Flächeninhalt enthalten. Oder auch: Der berechnete Flächeninhalt des verzeichneten regelmäßigen Siebeneckes verhält sich zu dem gegebenen Flächeninhalte, gleichwie das Quadrat des angenommenen Halbmessers zu dem Quadrate eines anderen Halbmessers. Wenn man nun mit diesem gefundenen Halbmesser einen Kreis beschreibet, und in denselben ein regelmäßiges Siebeneck verzeichnet; so wird dasselbe ebenfalls den gegebenen Flächeninhalt enthalten.

80. V. Es sind alle drey Seiten $CA = a$, $AB = b$, $BC = c$ eines Dreyeckes ABC gegeben; man soll seinen Flächeninhalt finden.

Auflösung. Es sey $AB = b$ die Grundlinie, so ist (vermöge 422.) die Höhe $CD = \frac{2}{b}\sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]}$ wobey $s = \frac{a+b+c}{2}$ die halbe Summe der drey Seiten bezeichnet; folglich ist der Flächeninhalt des Dreyeckes $ABC = \frac{1}{2}AB.CD = \sqrt{[s(s-a).(s-b).(s-c)]}$; das ist: wenn man von der halben Summe der drey Seiten eines Dreyeckes jede Seite abzieht, die drey gefundenen Differenzen sowohl mit einander, als auch mit der halben Summe der drey Seiten multiplicirt, und aus dem Producte die Quadrat-Wurzel zieht; so ist dieses Resultat der Flächeninhalt des gegebenen Dreyeckes.

Es sey z. B. $a = 150$, $b = 140$, und $c = 130$ Klafter; so ist $s = 210$, $s-a$ = nähmlich 60, $s-b = 70$, $s-c = 80$ Klafter, und folglich der Flächeninhalt $= \sqrt{(210.60.70.80)} = \sqrt{(70560000)} = 8400$ Quadrat-Klafter. Eben so findet man den Flächeninhalt $= 8400$ Quadrat-Klafter, wenn $a = 210$, $b = 170$, und $c = 100$ Klafter ist.

VI. Ein gegebenes Vieleck in ein anderes ähnliches so zu verwandeln, daß der Flächeninhalt des gegebenen zu dem Flächeninhalte des verwandelten Vieleckes sich verhalte, wie m zu n, z. B. wie 9 zu 4.

Fig.

Auflösung. Es sey eine Seite des gegebenen Vieleckes = a, z. B. = 450, und die gleichnahmige Seite des gesuchten Vieleckes = x; so ist $a^2 : x^2 = m : n$, und folglich

$x = \sqrt{\frac{a^2 n}{m}} = \sqrt{\frac{a^2 mn}{m^2}} = \frac{a}{m}\sqrt{mn} = \frac{450}{9} \cdot \sqrt{9.4} = 50 . \sqrt{36} = 50 . 6 = 300$. Denn der Flächeninhalt des gegebenen Vieleckes verhält sich zu dem Flächeninhalte des gesuchten wie a^2 zu x^2 (456.). Nun aber verhält sich auch vermöge der Bedingung der Aufgabe der Flächeninhalt des ersten zum Flächeninhalte des zweyten Vieleckes wie m zu n; also ist $a^2 : x^2 = m : n$.

VII. Ein Dreyeck CDF in n, z. B. in 5, gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Man theile eine Seite CF des gegebenen Drey- 70.
eckes in den Puncten a, b, c, d, in n gleiche Theile, verbinde diese Theilungspuncte mit dem entgegengesetzten Winkelpuncte durch gerade Linien; so wird dadurch das gegebene Dreyeck in n gleiche Theile getheilet. Denn alle n Dreyecke haben gleiche Grundlinien, und dieselbe Höhe; folglich sind sie einander am Flächeninhalte gleich.

Wäre das Dreyeck in zwey Theile zu theilen, die sich wie m zu n, z. B. wie 2 zu 3, verhalten sollen; so theile man eine Seite in m + n = 2 + 3 = 5 gleiche Theile, und verbinde den mten (in unserem Falle den 2ten) Theilungspunct b mit der entgegengesetzten Winkelspitze durch die Gerade bD; so ist dadurch das Dreyeck in zwey Theile CbD und DbF getheilet, die sich wie m zu n, das ist, wie 2 zu 3 verhalten. Dasselbe ist zu beobachten, wenn ein Dreyeck in mehrere Theile zu theilen wäre, die sich wie m, n, p, u. s. w. verhalten sollen.

Wäre ein Dreyeck abc in n, z. B. in 3, gleiche Theile durch 41
die Geraden mp und nq zu theilen, die mit ac parallel laufen, so findet man die Theilungspuncte durch folgende Proportion; $3 : 1 = ba^2 : bm^2$, und $3 2 : = ba^2 : bn^2$, nähmlich $bm = \sqrt{\frac{1}{3}} ba^2$, und $bn = \sqrt{\frac{2}{3}} ba^2$. Denn das Dreyeck bac : bmp = $ba^2 : bm^2$ (455. IV.); nun aber ist auch bac : bmp = 3 : 1; mithin $3 : 1 = ba^2 : bm^2$; u. s. w.

Fig. Wäre endlich ein Parallelogramm in mehrere Theile zu theilen, die sich wie m, n, p verhalten sollen; so wird jeder leicht einsehen, daß man zwey Seiten in diesem Verhältnisse theilen, und die Theilungspuncte durch gerade Linien verbinden müsse.

92. VIII. Eine geradlinige Figur ABCDE in n, z. B. in 3, gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Man ziehe die Diagonalen AD und AC, die Senkrechten EH, DG, BF, messe diese Geraden aus, und berechne den Flächeninhalt der Figur ABCDE. Diesen in Zahlen gefundenen Flächeninhalt theile man durch n (in unserem Falle durch 3), und einen solchen $n$ten Theil wieder durch 2. Dann ziehe man das Dreyeck ADE von dem $n$ten = 3ten Theile des ganzen berechneten Flächeninhaltes ab, und dividire diesen Ueberrest durch $\frac{1}{2}$AD; so ist der Quotient die Höhe eines Dreyeckes AID (439.), welches zu ADE addirt, einen $n$ten = 3ten Theil zum Vorschein bringt. Man ziehe also nur in der Entfernung der gefundenen Höhe zu AD eine Parallele; so wird dadurch der Punct I bestimmt, den man mit D verbinden muß, um IDEA = $\frac{1}{3}$ABCDE zu erhalten. Ferner theile man die Hälfte des $n$ten = 3ten Theiles des ganzen Flächeninhaltes durch $\frac{1}{2}$DI; so ist der Quotient der Höhe eines Dreyeckes DIK gleich, dessen Flächeninhalt = $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$ABCDE = $\frac{1}{6}$ABCDE ist. Man ziehe also nur in der Entfernung der gefundenen Höhe zu DI eine Parallele; so wird dadurch der Punct K bestimmt. Hierauf theile man dieselbe Hälfte des 3ten Theiles durch $\frac{1}{2}$DK, so ist der Quotient die Höhe eines Dreyeckes DKL, dessen Flächeninhalt = $\frac{1}{6}$ABCDE ist. Man ziehe also nur in der Entfernung der gefundenen Höhe zu DK eine Parallele, so ist dadurch auch der Punct L bestimmt. Wenn man nun K und L verbindet, so ist DIKL = DIK + DKL = $\frac{1}{6}$ABCDE + $\frac{1}{6}$ABCDE = $\frac{1}{3}$ABCDE; und folglich ist dadurch auch der zweyte gesuchte Theil gefunden. Endlich ist BCLK = ABCDE − DIKL − AIDE = ABCDE − $\frac{1}{3}$ABCDE − $\frac{1}{3}$ABCDE = $\frac{1}{3}$ABCDE, und somit auch der letzte gesuchte Theil bestimmt.

Wäre nun ADE > $\frac{1}{3}$ ABCDE, so ist ganz begreiflich, daß man $\frac{1}{3}$ ABCDE von ADE abziehen, und diesen Ueberrest durch $\frac{1}{2}$ AD dividiren müsse, um die Höhe eines Dreyeckes zu finden, welches von ADE abgezogen, den 3ten Theil des ganzen Flächeninhaltes zum Vorschein bringt. Fig. 92.

Wäre endlich eine Figur in mehrere Theile zu theilen, die sich wie m, n, p verhalten sollen; so ist ebenfalls sehr leicht einzusehen, daß man sie nach der gegebenen Vorschrift zuvörderst in (m + n + p) gleiche Theile theilen, und dann m solcher Theile für den ersten, n für den zweyten, p für den dritten gesuchten Theil nehmen müsse, u. s. w.

Der Grund, aus welchem der nte Theil des ganzen berechneten Flächeninhaltes wieder in zwey gleiche Theile getheilet wird, liegt darin, daß die gesuchten Theile, in welche die gegebene Figur zu theilen ist, nicht durch Dreyecke, sondern vielmehr durch viereckige Figuren ausgedrückt werden sollen.

IX. Ein Dreyeck ABC durch die Gerade DE, welche durch den in der Seite AB gegebenen Punct D geht, in zwey gleiche Theile zu theilen. 93.

Auflösung. Es sey AB = a, die größere Entfernung des gegebenen Punctes D von einem der anliegenden Winkelpuncte sey AD = c, die diesem Winkel anliegende Seite AC = b, und AE = x; so ist das Dreyeck AED : ACB = AE . AD : AC . AB = cx : ab, (455. III.). Nun aber ist AED : ACB = 1 : 2; folglich auch cx : ab = 1 : 2, und endlich $x = \frac{ab}{2c}$. Wenn nun a, b, c mittelst eines Maßstabes ausgemessen werden; so läßt sich nach eben diesem Maßstabe x = AE, und folglich der Punct E bestimmen, der mit D zu verbinden ist, damit das Dreyeck durch die Gerade DE in zwey gleiche Theile getheilet werde.

Der Werth von $x = \frac{ab}{2c}$ kann in folgende Proportion c : $\frac{1}{2}$a = b : x, nähmlich AD : $\frac{1}{2}$AB = AC : x aufgelöset werden. Theilet man nun AB in dem Puncte F in zwey gleiche Theile, zieht CD, und durch F die Parallele FE zu CD; so ist AD : AF = AC : AE, das ist, AD : $\frac{1}{2}$AB = AC : AE; und folglich ist AE = x.

Fig. 55. X. Es ist der Flächeninhalt A, und der Umfang b eines rechtwinkeligen Dreyeckes ACB gegeben; man soll die drey Seiten desselben finden.

Auflösung. Es sey die eine Kathete $CA = x$, die andere $CB = y$, und die Hypothenuse $AB = z$; so ist

$$\frac{xy}{2} = A, \quad x + y + z = b, \quad x^2 + y^2 = z^2.$$

Nun ist aus der zweyten Gleichung

$$x + y = b - z$$

und wenn man quadrirt

$$x^2 + 2xy + y^2 = b^2 - 2bz + z^2.$$

Zieht man hievon die dritte Gleichung nebst dem Vierfachen der ersten ab, so ergibt sich

$$0 = b^2 - 4A - 2bz,$$

woraus man .... $z = \frac{b^2 - 4A}{2b}$ erhält.

Subtrahirt man aber von der dritten Gleichung die vierfache erste, so ist der Rest

$$x^2 - 2xy + y^2 = z^2 - 4A,$$

oder wenn man auf den für z gefundenen Werth Bedacht nimmt,

$$(x - y)^2 = \frac{b^4 - 8Ab^2 + 16A^2}{4b^2} - 4A,$$

daher

$$x - y = \frac{1}{2b}\sqrt{16A^2 - 24Ab^2 + b^4}.$$

Wegen desselben Werthes von z wird aber auch nach der vierten Gleichung

$$x + y = \frac{4A + b^2}{2b},$$

daher ist (vermög §. 222. 1. Aufg.)

$$y = \frac{1}{4b}\left(4A + b^2 - \sqrt{16A^2 - 24Ab^2 + b^4}\right)$$

$$x = \frac{1}{4b}\left(4A + b^2 + \sqrt{16A^2 - 24Ab^2 + b^4}\right).$$

Es sey z. B. $A = 6$ Quadrat-Schuhen, und $b = 12$ Schuhen; so ist die eine Kathete $x = 4$, die andere $y = 3$, und die Hypothenuse $z = 5$ Schuhen.

Fig.

III. Abschnitt.

Von der Lage und Stellung der Ebenen.

§. 462.

Wir haben schon im §. 345 erklärt, daß eine Fläche, auf der sich durch was immer für zwey Puncte eine gerade Linie dergestalt ziehen läßt, daß sie nach ihrer ganzen Länge auf der Fläche liegt, eine Ebene genannt wird. Nun sollen auch einige Eigenschaften, die aus der verschiedenen Lage und Stellung der Ebenen entspringen, aus einander gesetzt werden. Bey dieser Untersuchung wird angenommen, daß man jede Ebene nach allen Seiten in Gedanken soweit ausdehnen könne, als man es nur immer verlangt. Die vorzüglichsten Eigenschaften der Ebenen sind folgende:

I. Es ist unmöglich, daß ein Theil AB einer geraden Linie AC auf einer Ebene liege, und ein anderer Theil derselben MN außer diese Ebene (das ist diess- oder jenseits, über oder unter dieselbe) falle. Denn würde ein Theil MN außer die Ebene PQ fallen, und der Theil AB in dieser Ebene liegen; so wäre entweder PQ keine Ebene, oder AC keine gerade Linie, welches wider die Voraussetzung läuft. 95

II. Eine gerade Linie AC muß nach ihrer ganzen Länge auf der Ebene PQ liegen, sobald sie zwey Puncte z. B. A und B mit der Ebene gemein hat. Denn würde z. B. der Theil MN außer die Ebene fallen, so müßte ein Theil MN der Geraden AC außer die Ebene fallen, und ein anderer Theil derselben AB auf der Ebene liegen, welches unmöglich ist.

III. Ein Dreyeck CBG muß ganz auf der Ebene PQ liegen, sobald ein Theil der Fläche desselben (z. B. NRB, oder GNR) auf der Ebene PQ liegt. Denn wenn z. B. GNR auf der Ebene PQ liegt; so hat die Seite GB mit der Ebene PQ zwey Puncte G und R gemein, folglich liegt sie nach ihrer ganzen Länge in der Ebene PQ. Nun hat auch die Seite CB zwey Puncte N und B mit der Ebene PQ gemein (weil B in der Geraden GB liegt); folglich liegt auch CB nach ihrer ganzen Länge

Fig. 95. in der Ebene PQ. Endlich hat auch CG die zwey Puncte C und G mit der Ebene PQ gemein (weil jener in der Geraden CB und dieser in der Geraden GB, nähmlich beyde in der Ebene PQ liegen); folglich liegt auch die dritte Seite CG nach ihrer ganzen Länge in der Ebene PQ. Da nun alle drey Seiten des Dreyeckes BCG in der Ebene PQ liegen, wenn der Theil GNR in derselben Ebene liegt; so liegt zu Folge dieser Voraussetzung auch das Dreyeck selbst in derselben Ebene.

§. 463.

Wenn man nun durch einen Theil NBR des Dreyeckes BCG eine Ebene führen wollte, so würde diese Ebene mit der Ebene oder Fläche des Dreyeckes BCG, und folglich auch mit der Ebene PQ übereinfallen, und mit derselben nur eine einzige Ebene ausmachen. Es wird also durch die Lage eines Dreyeckes die Lage oder Richtung einer Ebene gänzlich bestimmt. Nun aber wird die Lage des Dreyeckes durch die drey Puncte B, C, G bestimmt; es wird also auch durch dieselben drey Puncte die Lage der Ebene PQ festgesetzt; das heißt, durch drey Puncte, die nicht in einer geraden Linie liegen, läßt sich nur eine einzige Ebene führen. Hingegen können durch drey Puncte, die in einer geraden Linie liegen, das ist durch eine einzige gerade Linie unzählige Ebenen geführt werden.

§. 464.

Auch ist leicht einzusehen, daß zwey Geraden BC und BG, oder AC und HG, die sich durchschneiden, in einer und derselben Ebene liegen, das ist, daß durch zwey sich schneidende gerade Linien nur eine einzige Ebene geführet werden könne. Denn man nehme nur auf den zwey sich schneidenden Geraden BC und BG die Puncte R und N, und verbinde sie mittelst der Geraden NR; so liegt das ganze Dreyeck BNR in einer einzigen Ebene PQ. Nun aber haben die zwey sich schneidenden Geraden HG und AC jede mit der Ebene PQ zwey Puncte gemein; folglich liegen sie beyde in dieser Ebene PQ.

§. 465.

96. Schneidet eine Gerade AB eine Ebene PQ dergestalt, daß sie auf allen Geraden senkrecht steht, welche in dieser Ebene durch

den Durchschnittspunct können gezogen werden; so heißt sie senk- Fig.
recht auf der Ebene. 96.

§. 466.

Wenn eine Gerade AB auf zwey Geraden CB und DB in ihrem Durchschnittspuncte B zugleich senkrecht steht, so ist sie senkrecht auf jeder Geraden z. B. auf HG, die in derselben Ebene PQ durch den Durchschnittspunct B gezogen wird; das ist, sie ist senkrecht auf der Ebene PQ selbst.

Denn man verlängere nur CB und DB, mache BC = BD = BE = BF, und ziehe CD, DE, EF, FC; AC, AD, AE, AF, AH, und AG; so ist BH = BG, und FH = DG, weil HG durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunct der zwey Diagonalen des Parallelogramms CDEF gezogen ist (387. III.). Dann ist in den zwey Dreyecken CFA und EDA die Seite CF = ED, CA = EA, FA = AD (358. I.); folglich sind sie vollkommen gleich, und es ist der Winkel AFC = ADE, oder AFH = ADG. Ferner ist in den Dreyecken FHA und DGA die Seite FA = DA, FH = DG, und der eingeschlossene Winkel AFH = ADG; also sind auch diese zwey Dreyecke vollkommen gleich, und folglich ist HA = GA. Endlich ist in den zwey Dreyecken HBA und GBA die Seite BA = BA, BH = BG, HA = GA; daher sind auch diese Dreyecke einander vollkommen gleich, und der Winkel ABH = ABG = 90°. Folglich steht AB in dem Puncte B senkrecht auf HG. Da nun dieses auch von jeder anderen Geraden sich erweisen läßt, die in der Ebene PQ durch den Punct B gezogen wird; so ist AB auf jeder solchen Geraden, und folglich auf der Ebene PQ selbst senkrecht.

Hier ist noch zu merken:

I. Daß man aus einem außer einer Ebene PQ angenommenen Puncte A bloß eine einzige Senkrechte AB auf diese Ebene führen könne. Denn wäre noch eine andere Senkrechte z. B. AG möglich; so würde das Dreyeck ABG, welches entsteht, wenn man die Puncte B und G durch eine Gerade verbindet, zwey rechte Winkel ABG und AGB haben, was unmöglich ist.

II. Daß auch aus einem in der Ebene PQ angenommenen 95.
Puncte B bloß eine einzige Senkrechte BD auf diese Ebene errich-

Fig. 95. tet werden könne. Denn wäre noch eine andere Senkrechte in demselben Puncte auf die Ebene z. B. BE möglich; so müßten beyde Geraden BD und BE auf einer Geraden GH in einer und derselben Ebene in dem nähmlichen Puncte zugleich senkrecht stehen (wenn man nähmlich durch die zwey sich schneidenden Geraden BD und BE in Gedanken eine Ebene führt, und in der Ebene PQ die Gerade GH durch den Punct B dergestalt zieht, daß sie auch in der durch B, D, E geführten Ebene liegt); folglich müßte der Winkel $EBH = DBH = 90^0$, das ist, es müßte ein Theil dem Ganzen gleich seyn, was ebenfalls unmöglich ist.

96. III. Daß die Senkrechte AB von allen Geraden die kürzeste ist, die aus dem Puncte A auf die Ebene PQ gezogen werden können, und daß sie folglich die Entfernung des Punctes A von der Ebene PQ bestimmt.

Anmerkung. Aus einem außerhalb der Ebene gegebenen Puncte kann in der Ausübung am füglichsten eine Senkrechte auf die Ebene gefällt werden, wenn man in diesem Puncte eine Schnur befestiget, dann bey gleichförmiger Spannung und unveränderter Länge der Schnur auf der Ebene drey Puncte bemerkt, ferner diese als drey Puncte eines Umkreises betrachtet, dazu (vermöge 368. II.) den Mittelpunct bestimmt, und endlich diesen mit dem gegebenen Puncte außer der Ebene verbindet. Daß diese Verbindungslinie auf der Ebene senkrecht stehen müsse, ist leicht einzusehen. Denn, wenn man die Senkrechte aus dem gegebenen Puncte als schon gezogen denkt; so entstehen drey rechtwinkelige Dreyecke, welche eine gemeinschaftliche Kathete, und gleiche Hypothenusen haben, folglich einander gleich sind (359.). Es liegt demnach der Durchschnittspunct der Senkrechten auf der Ebene in demjenigen Puncte, welcher von den drey auf der Ebene abgeschnittenen Puncten gleich weit entfernt ist, nähmlich in dem Mittelpuncte des durch die drey Puncte gedachten Kreises. Aus einem in der Ebene liegenden Puncte kann eine Senkrechte auf die Ebene am sichersten mit Hülfe eines zuvor geprüften Winkelhakens errichtet werden, wenn man diesen an den gegebenen Punct in der Ebene anlegt.

§. 467. Fig.

Der Durchschnitt AB zweyer Ebenen DH und CG ist 97.
eine gerade Linie. Denn man verbinde nur zwey Puncte M und N ihres Durchschnittes (der eine Linie seyn muß, weil die Ebenen keine Dicke haben) durch die Gerade MN; so liegt diese nach ihrer ganzen Länge in beyden Ebenen zugleich, weil sie mit jeder derselben zwey Puncte gemein hat. Nun aber ist der Durchschnitt der zwey Ebenen DH und CG diejenige Linie, die nach ihrer ganzen Ausdehnung in beyden zugleich liegt; folglich ist die gezogene Gerade MN der Durchschnitt der zwey Ebenen DH und CG; das ist, die gezogene Gerade MN fällt mit der Durchschnittslinie AB überein, oder macht mit derselben nur eine einzige Gerade aus.

§. 468.

Wenn man durch einen Punct F der Durchschnittslinie AB zweyer Ebenen CG und DH auf AB zwey Senkrechten FE und FI, die erste in der Ebene DH, und die zweyte in der Ebene CG, führt; so heißt der Winkel EFI der Neigungswinkel der zwey Ebenen CG und DH. Ist nun dieser Neigungswinkel ein rechter, nähmlich $= 90^0$; so heißen die zwey Ebenen senkrecht auf einander. Z. B. CG und PQ in Fig. 98., sind senkrecht auf einander, wenn $MAD = 90^0$ ist. 98.

Hieraus folgt unmittelbar, daß die Ebene des Neigungswinkels zweyer Ebenen auf der Durchschnittslinie derselben senkrecht steht. (§. 466).

Eben so leicht sieht man ein, daß, wenn die Gerade AB auf der Ebene PQ senkrecht ist, auch jede durch AM geführte Ebene CG auf PQ senkrecht steht. Denn errichtet man in dem Vereinigungspuncte A der Durchschnittslinie CT beyder Ebenen mit der auf ihr (nach §. 465) senkrechten AM die AD in der Ebene PQ auf CT senkrecht; so ist der Voraussetzung und dem §. 465 gemäß, der Winkel MAD ein rechter. Dieser ist jedoch nach der aufgestellten Erklärung der Neigungswinkel der Ebenen CG und PQ, daher sind diese senkrecht auf einander.

Fig. §. 469.

98. **Wenn die Ebene CG auf der Ebene PQ senkrecht steht, und man fällt aus einem Puncte M der Ebene CG auf die Durchschnittslinie CT die Senkrechte MA, oder man errichtet in dem Puncte A der Durchschnittslinie CT auf diese in der Ebene CG die Senkrechte AM; so steht sie senkrecht auf der Ebene PQ.**

Denn man errichte nur in dem Puncte A in der Ebene PQ die Senkrechte AD auf die Durchschnittslinie CT; so ist MAD der Neigungswinkel der zwey Ebenen PQ und CG, und folglich ist dieser = 90°, weil die zwey Ebenen vermöge der Voraussetzung auf einander senkrecht stehen. Nun aber ist auch MAC oder MAT = 90°, weil MA auf CT senkrecht steht. Es ist also MA auf zwey Geraden in der Ebene PQ in ihrem Durchschnittspuncte zugleich senkrecht; folglich steht sie auch senkrecht auf allen Geraden, die durch denselben Punct A in der Ebene PQ können gezogen werden; nähmlich sie steht senkrecht auf der Ebene PQ selbst (466).

Eben so läßt sich erweisen, daß jede andere Gerade ma = auf der Ebene PQ senkrecht steht, wenn sie in der Ebene CG auf die Durchschnittslinie CT senkrecht gezogen ist. Nun sind bey den zwey Geraden MA und ma, die in einer und derselben Ebene CG liegen und auf der Ebene PQ senkrecht stehen, die Winkel MAa + maA = 90°+90°; folglich laufen sie mit einander parallel (363).

§. 470.

Umgekehrt, wenn die Ebene CG auf der Ebene PQ senkrecht steht, und eine Gerade AM durch was immer für einen Punct A der Durchschnittslinie CT auf die Ebene PQ senkrecht gezogen ist; so liegt dieselbe in der Ebene CG.

Denn würde diese Senkrechte AM außer der Ebene CG liegen, so könnte durch diesen Punct A eine andere Senkrechte AN auf die Durchschnittslinie CT in der Ebene CG gezogen werden. Nun würde diese Gerade vermöge des Vorhergehenden auf der Ebene PQ senkrecht stehen. Es würden also in demselben Puncte A zwey gerade Linien auf der Ebene PQ senkrecht seyn, welches unmöglich ist (466. II.). Es ist daher auch unmöglich,

daß die Gerade AM außer der Ebene CG liege, wenn sie in dem Puncte A auf PQ senkrecht steht. Fig.

§. 471.

Wenn zwey sich durchschneidende Ebenen CD und EF auf einer dritten Ebene PQ zugleich senkrecht stehen, so steht auch ihre Durchschnittslinie BA auf derselben Ebene PQ senkrecht. 99.

Denn man denke sich nur aus dem Durchschnittspuncte A eine Senkrechte AB auf die Ebene PQ, so muß diese Senkrechte vermöge des Vorhergehenden nach ihrer ganzen Länge in den beyden Ebenen CD und EF zugleich liegen; folglich muß sie mit der Durchschnittslinie dieser zwey Ebenen zusammen fallen, und mit derselben nur eine einzige Gerade ausmachen. Nun aber steht die gezogene Gerade AB auf der Ebene PQ senkrecht; es ist also auch die Durchschnittslinie der zwey Ebenen CD und EF auf der Ebene PQ senkrecht.

§. 472.

Wenn zwey Ebenen überall gleich weit von einander entfernt, das ist, wenn die Senkrechten, die man aus was immer für einem Puncte der einen Ebene auf die andere ziehen kann, alle einander gleich sind; so heißen die Ebenen gleichlaufend oder parallel. 100.

Hieraus folgt, daß zwey parallele Ebenen nie zusammen stoßen können, wenn man sie noch so weit ausdehnt; weil ihre Entfernung von einander immer unverändert bleibt. Auch ist leicht einzusehen, daß sowohl die Wechselwinkel, als auch die äußern und innern Winkel auf derselben Seite einander gleich sind, wenn zwey parallele Ebenen von einer dritten geschnitten werden. Ingleichen, daß eine Ebene, oder auch eine gerade Linie, wenn sie auf eine von mehreren parallelen Ebenen senkrecht geführet ist, auf allen übrigen parallelen Ebenen senkrecht steht; u. s. w.

§. 473.

Wenn zwey parallele Ebenen PQ und RS durch eine dritte Ebene AEDR geschnitten werden, so laufen die Durchschnittslinien AE und DR mit einander parallel.

Fig. 100. Denn die zwey geraden Durchschnittslinien AE und RD liegen in einer und derselben Ebene AEDR, und sind so beschaffen, daß sie nie zusammenstoßen können, wenn man sie auch noch so weit verlängert; weil sie in den parallelen Ebenen PQ und RS liegen; folglich laufen sie mit einander parallel.

§. 474.

Wenn man aus einem außerhalb der Ebene PQ gelegenen Puncte M auf die Ebene PQ mehrere gerade Linien MA, MB, MC, MG, MF, MN zieht, und eine Ebene RS führt, die mit PQ parallel läuft, und die gezogenen Geraden in a, b, c, g, f, n schneidet; so können folgende Sätze bewiesen werden.

I. Die Abschnitte stehen sowohl unter einander, als auch mit den ganzen Geraden in Proportion; nähmlich

Ma: Aa = Mb: Bb = Mc: Cc u. s. w.

und Ma: MA = Mb: MB = Mc: MC u. s. w.

= ab: AB = bc: BC = cd: CD u. s. w.

Denn wenn man durch zwey sich schneidende Geraden MA und MB eine Ebene MAB sich denkt, so laufen die Durchschnittslinien ab und AB mit einander parallel (473.); folglich finden in den zwey ähnlichen Dreyecken Mab und MAB folgende Proportionen statt Ma: Aa = Mb: Bb; Ma: MA = Mb: MB, u. s. w.

Eben so läßt sich erweisen, daß Mb: Mc = MB: MC, oder Mb: bc = MB: BC, u. s w. statt findet, wenn man durch die zwey sich schneidenden Geraden MB und CM eine Ebene BMC sich denkt.

II. Die zwey Vielecke ABCGF und abcgf sind einander ähnlich. Denn man zerschneide nur diese Vielecke durch gleichnahmige Diagonalen GA, GB, und ga, gb in lauter Dreyecke; so wird man gleich einsehen, daß das Dreyeck abg ∽ ABG, bgc ∽ BGC u. s. w., und daß folglich das Vieleck abcgf ∽ ABCGF ist (415.). Die Aehnlichkeit der Dreyecke abg und

ABG erhellet aus der Gleichheit folgender Verhältnisse Ma: MA = ab: AB = ag: AG = Mb: MB = bg: BG, so daß ab: AB = ag: AG = bg: BG ist; folglich ist das Dreyeck abg ∽ ABG (399. II.). Eben so läßt sich erweisen, daß das Dreyeck bgc ∽ BGC, agf ∽ AGF ist, u. s. w. Fig. 100.

III. Die Flächeninhalte dieser Vielecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer Entfernungen von dem Puncte M, nähmlich abcgf: ABCGF = Mn^2: MN^2, wenn MN aus dem Puncte M auf die zwey parallelen Ebenen PQ und RS senkrecht gezogen ist. Denn es ist abcgf: ABCGF = ab^2: AB^2; nun aber ist Mb: MB = ab: AB, oder Mb^2: MB^2 = ab^2: AB^2; also auch abcgf: ABCGF = Mb^2: MB^2. Endlich findet in den zwey ähnlichen Dreyecken Mbn und MBN, welche entstehen, wenn die Puncte n und N, in denen die Senkrechte MnN die parallelen Ebenen RS und PQ durchschneidet, mit b und B verbunden werden, folgende Proportion statt; Mb: MB = Mn: MN, oder Mb^2: MB^2 = Mn^2: MN^2; folglich ist auch abcgf: ABCGF = Mn^2: MN^2.

§. 475.

Da bey den Dreyecken bcg und BCG die Seiten des einen mit den Seiten des anderen Dreyeckes wechselweise parallel laufen, und diese Dreyecke einander ähnlich sind; so folgt, daß Dreyecke, deren Seiten mit einander parallel laufen, auch dann noch ähnlich seyn müssen, wenn sie in verschiedenen Ebenen liegen. Daß dieser Satz bey Dreyecken, die in einer und derselben Ebene liegen, statt findet, haben wir schon (383.) erwiesen.

§. 476.

Da überdieß in ähnlichen Dreyecken bcg und BCG die Winkel c und C gleich sind, und ihre Schenkel paarweise mit einander parallel laufen; so folgt, daß zwey Winkel, deren Schenkel mit einander wechselweise parallel laufen, auch dann einander gleich seyn müssen, wenn sie in verschiedenen Ebenen liegen.

Fig. 100. Man kann die Gleichheit der Winkel bcg und BCG auch erweisen, wenn man durch bc, bg und cg auf RS senkrechte Ebenen legt, und diese Ebenen so weit ausdehnt, bis sie die Ebene PQ durchschneiden. Da diese Gleichheit auch bey den Winkeln gbc und GBC, wie auch bey den Winkeln BGC und bgc statt findet; so läßt sich daraus die Aehnlichkeit der Dreyecke bgc und BGC, deren Seiten mit einander wechselweise parallel laufen, selbst dann noch folgern, wenn sie in verschiedenen Ebenen liegen.

Drittes Hauptstück.

Von den Eigenschaften der Körper.

I. Abschnitt.

Begriffe von den geometrischen Körpern, oder Einleitung in die Stereometrie.

§. 477.

Ein Körper ABCcab von zwey vollkommen gleichen und parallelen Vielecken ABC, abc, und von so vielen Parallelogrammen eingeschlossen, als jedes der zwey Vielecke Seiten hat, heißt ein Prisma (Eckſäule); die zwey vollkommen gleichen und parallelen Vielecke ABC, abc heißen die Grundflächen, und ihre Entfernung, das ist die Senkrechte von irgend einem Puncte der einen Grundfläche auf die Ebene der anderen Grundfläche (die man in erforderlichen Falle auch erweitern kann) gezogen, heißt die Höhe des Prisma. Ein Prisma, dessen sämmtliche Seitenflächen auf den Grundflächen senkrecht stehen, wird ein senkrechtes genannt; stehen hingegen nicht alle Seitenflächen auf den Grundflächen senkrecht, so heißt es ein schiefes Prisma. Man nennt ein Prisma dreyseitig, vierseitig, fünfseitig u. s. w., je nachdem die Grundflächen desselben Dreyecke, Vierecke, oder Fünfecke sind. Ein vierseitiges Prisma, dessen Grund- und Seitenflächen Fig. 101.

Fig. 101. Parallelogramme sind, und das demnach von sechs Parallelogrammen eingeschlossen ist, wird insbesondere ein Parallelepiped genannt. Ein senkrechtes Parallelepiped, dessen Grund- und Seitenflächen einander vollkommen gleich, folglich Quadrate sind, heißt ein Cubus (Würfel), Fig. 1. Ein Prisma, dessen Grund- 102. flächen Kreise sind, wird ein Cylinder (Rundsäule), und die Gerade, welche die Mittelpuncte der zwey Kreise verbindet, wird die Achse des Cylinders genannt. Ein Cylinder heißt senkrecht, wenn die Achse desselben auf den Grundflächen senkrecht, und schief, wenn die Achse desselben auf den Grundflächen schief steht. Wenn man von einem Prisma, oder von einem Cylinder ein Stück dergestalt abschneidet, daß die Durchschnittsebene mit der Grundfläche nicht parallel läuft; so heißt der Ueberrest ein schief abgeschnittenes Prisma, oder ein schief abgeschnittener Cylinder.

§. 478.

Da der Raum, den eine Fläche beschreibt, wenn sie sich anders, als nach ihrer Lage bewegt, drey Ausdehnungen hat, und folglich ein Körper ist; so ist ganz begreiflich, daß ein Prisma 101. ABCcab erzeugt wird, wenn ein Vieleck ABC mit einem Puncte A längs einer Geraden Aa immer parallel sich fortbewegt, bis es in abc anlangt; und daß ein Cylinder entsteht, wenn eine Kreisfläche AMBN mit ihrem Mittelpuncte längs einer Geraden EF, 102. bis F sich stets parallel bewegt. Ein senkrechter Cylinder entstehet auch, wenn ein Rechteck FB sich um eine seiner Seiten EF wie um eine unbewegliche Achse herumdreht, bis es wieder in die vorige Lage kommt. Diese Entstehungsart durch die Umdrehung findet bey einem schiefen Cylinder nicht statt, weil ein schiefer Cylinder, dessen Grundflächen Kreise sind, nichts anderes ist, als ein senkrechtes elliptisches (ovales) Prisma, welches an beyden Enden durch parallele Ebenen nach einer gewissen Richtung schief abgeschnitten ist, wie wir es in der Folge sehen werden.

§. 479.

100. Eine Pyramide (Spitzsäule) ABCGFM ist ein Körper, der von einer ebenen Grundfläche, und von so vielen Dreyecken eingeschlossen ist, als die Grundfläche Seiten hat. Die senkrechte

Entfernung MN der gemeinschaftlichen Spitze aller einschließen- Fig.
den Dreyecke von der Ebene der Grundfläche heißt die Höhe der 100.
Pyramide. Pyramiden heißen dreyseitig, vierseitig, fünfseitig, je nachdem ihre Grundflächen Dreyecke, Vierecke, Fünfecke sind. Ueberdieß werden Pyramiden regelmäßig (oder vielmehr gleichseitig) genannt, wenn ihre Grundflächen regelmäßige Vielecke, und die einschließenden Dreyecke alle gleich sind. Eine Pyramide 103.
ABC, deren Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten, nähmlich ein Kreis ist, wird ein Kegel genannt. Die Gerade CD, welche den Mittelpunct der Grundfläche mit der Spitze verbindet, heißt die Achse, und jede Gerade AC, BC von der Spitze an den Umkreis der Grundfläche gezogen, heißt die Seite des Kegels. Ein Kegel heißt senkrecht, wenn seine Achse auf der Grundfläche senkrecht, und schief, wenn die Achse auf der Grundfläche schief steht. Pyramiden ACFfca Fig. 100, und Kegel ABFE Fig. 103, heißen abgestutzt oder abgekürzt, wenn ihre Spitzen von einer zu der Grundfläche parallelen Ebene abgeschnitten sind.

§. 480.

Eine Pyramide entsteht, wenn ein Vieleck ABCGF mit 100.
dem Puncte A längs einer Geraden AM sich bis M parallel bewegt, und seine Seiten während dieser Bewegung immer gleichförmig, nähmlich eben so abnehmen, wie die Entfernungen des Punctes A von M. Ein Kegel ABC aber wird erzeugt, wenn 103.
ein Kreis AB mit seinem Mittelpuncte längs der Geraden DC sich immer parallel bewegt, und wenn sein Durchmesser während dieser Bewegung eben so abnimmt, wie die Entfernung des Mittelpunctes D von dem angenommenen Puncte C. Damit nähmlich bey der Bewegung der Kreisfläche ein Kegel entstehe, so ist erforderlich, daß sich $AB : EF = CD : CG$, oder $DB : GF = CD : CG$ verhalte, wenn der Punct D in G anlangt. Wenn hingegen der Durchmesser der Grundfläche während der Bewegung des Kreises nicht gleichförmig, sondern nach was immer für einem anderen Gesetze abnimmt, so heißt der dadurch erzeugte Körper ein Afterkegel (Konoid). Eben so wird ein Körper eine Afterpyramide (ein pyramidaler Körper) genannt, wenn er aus der parallelen Bewegung eines Vieleckes erzeugt wird, dessen Seiten nicht gleichför-

Fig. mig, sondern nach was immer für einem anderen Gesetze abneh-
103. men. Ein senkrechter Kegel ABC entstehet auch, wenn sich ein rechtwinkeliges Dreyeck CDB um die eine Kathete CD als um eine unbewegliche Achse herumdreht, bis es wieder in die vorige Lage zurückkommt. Diese Entstehungsart durch die Umdrehung eines Dreyeckes findet bey dem schiefen Kegel nicht statt, weil ein schiefer Kegel als ein senkrechter Kegel betrachtet werden kann, dessen Grundfläche eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, und der durch eine ebene Fläche nach einer gewissen Richtung schief abgeschnitten wurde.

§. 481.

104. Eine Kugel oder Sphäre ist ein Körper, der von einer einzigen krummen Fläche dergestalt eingeschlossen ist, daß alle Puncte derselben von einem in dem Körper befindlichen Puncte, welcher der Mittelpunct heißt, gleich weit abstehen. Ein solcher Körper entsteht, wenn eine halbe Kreisfläche AEB sich um den Durchmesser AB herumdreht. Die einschließende krumme Fläche heißt die Kugelfläche, oder die Oberfläche der Kugel. Jede durch den Mittelpunct beyderseits bis an die Kugelfläche gezogene Gerade wird der Durchmesser der Kugel genannt. Ein Stück deB von einer Kugel, durch eine ebene Fläche abgeschnitten, heißt ein Kugelabschnitt oder Segment. Ein solcher Kugelabschnitt wird durch die Umdrehung des halben Kreisabschnittes Bce um seine Höhe erzeugt. Ein Körper dCeBd', der durch die Umdrehung des Kreisausschnittes BCe um den einen Halbmesser CB entsteht, wird ein Kugelausschnitt genannt. Ein Stück DdeE, durch zwey parallele Ebenen aus einer Kugel ausgeschnitten, heißt endlich eine Zone; sie wird erzeugt, wenn das trapezförmige Stück CEec, welches zwischen zwey parallelen Ordinaten eines Halbkreises liegt, um den Durchmesser AB sich herumdreht.

§. 482.

Wenn eine Kugel durch eine ebene Fläche geschnitten wird; so ist der Schnitt jederzeit ein Kreis.

Wenn der Schnitt DE durch den Mittelpunct der Kugel geführt ist, so ist ganz begreiflich, daß er ein Kreis ist, weil alle Geraden CD, CM, CE, welche aus dem Mittelpuncte C an den

Umfang des Schnittes DNEM in der Ebene DE gezogen wer- Fig.
den, zugleich Halbmesser derselben Kugel, und folglich einander 104.
vollkommen gleich sind. Wäre hingegen der Schnitt de nicht durch den Mittelpunct der Kugel geführt, so denke man sich eine Senkrechte Cc aus dem Mittelpuncte der Kugel auf die Ebene de herabgelassen, ziehe durch diesen Punct c mehrere Geraden cm, ce, cn, in der Ebene de, und aus den Puncten des Umfanges m, e, n die Halbmesser der Kugel mC, eC, nC bis in den Mittelpunct der Kugel C. Nun sind die Dreyecke mcC, ecC, ncC alle einander vollkommen gleich, weil sie rechtwinkelig sind, und überdieß eine gemeinschaftliche Kathete cC, und gleiche Hypothenusen Cm = Ce = Cn haben. Es ist also auch cm=ce=cn, und folglich der Schnitt dnemd ein Kreis, dessen Mittelpunct c ist.

§. 483.

Es ist leicht einzusehen, daß die Kugelschnitte, welche von dem Mittelpuncte einer und derselben Kugel gleich weit abstehen, einander gleich, daß jene kleiner, welche weiter, und jene größer sind, welche weniger von dem Mittelpuncte entfernt sind. Die Kugelschnitte, welche durch den Mittelpunct einer Kugel gehen, heißen größte Kreise. Sie sind alle einander vollkommen gleich, weil sie gleiche Halbmesser haben. Jede zwey größten Kreise auf einer und derselben Kugel theilen einander, sowohl in Hinsicht auf ihre Flächen, als auch in Hinsicht auf ihre Umkreise, in zwey vollkommen gleiche Theile, weil ihre Durchschnitts- oder Theilungslinie durch die Mittelpuncte beyder Kreise geht.

§. 484.

Wenn man in dem Mittelpuncte C eines größten Kreises DMEN auf die Ebene desselben eine Senkrechte AB errichtet, und sie beyderseits bis an die Kugelfläche verlängert; so heißt sie die Achse, und ihre zwey äußersten Puncte A und B werden Pole des Kreises DMN genannt. Der Punct B oder A ist auch zugleich der Pol eines jeden zu EMN parallelen Kreises. Daraus folgt:

I. Alle Puncte der Peripherie eines Kreises DMEN

Fig. 104. sind von seinem Pole A gleich weit entfernt. Denn in den rechtwinkeligen Dreyecken ACM, ACE, ACN ist CA = CA, CM = CE = CN; folglich sind diese Dreyecke alle einander gleich, und MA = EA = NA, u. s. w.

II. Wenn ein größter Kreis BMAN durch den Pol B des Kreises DMEN gezogen ist, so steht er auf demselben senkrecht. Denn wenn man auf ihre Durchschnittslinie MN in dem Puncte C zwey Senkrechten, eine in der Ebene MBN und die andere in der Ebene MEN errichtet; so wird dieser Winkel der Neigungswinkel der zwey erwähnten Kreisflächen seyn (468.). Nun aber ist dieser Winkel = 90°, weil BC auf DMEN senkrecht steht; folglich ist auch der Neigungswinkel dieser zwey Kreisflächen = 90°, und die zwey Kreisflächen stehen demnach senkrecht auf einander.

III. Und umgekehrt, wenn ein größter Kreis BMA auf einem anderen größten Kreise DME senkrecht steht; so geht er durch den Pol des Kreises DME. Denn man errichte nur aus dem Mittelpuncte C der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie MN in der Ebene des Kreises MB die Senkrechte CB; so steht sie senkrecht auf der Ebene des Kreises DME (469.), und weil sie aus dem Mittelpuncte des Kreises DME gezogen ist; so ist ihr Endpunct B der Pol des Kreises DME. Nun aber geht der Kreis AMB durch den Punct B, weil CB sein Halbmesser ist; folglich geht auch eben dieser Kreis durch den Pol des Kreises DME.

IV. Der Durchschnitts-Punct B von zwey Bogen größter Kreise BM und BD, die auf einem dritten DME zugleich senkrecht stehen, ist der Pol des Kreises DME oder des Bogens DM. Denn die Durchschnittslinie BCA der Ebenen BDA und BMA steht senkrecht auf der Ebene DME (471.), und geht zugleich durch den Mittelpunct C; folglich ist ihr Endpunct, nähmlich der Durchschnittspunct B der zwey Kreisbogen BM und BD der Pol des Kreises DME, oder des Bogens DM.

V. Wenn ein größter Kreis BMAN oder ADBE durch den Pol B eines anderen größten Kreises DMN geführt ist; so ist der Bogen BM oder BD oder BN = 90°. Denn der Win-

kel BCM oder BCD oder BCN ist = 90°; es ist aber der Bogen Fig.
BM das Maß des Winkels BCM, der Bogen BD das Maß des 104.
Winkels BCD; und der Bogen BN das Maß des Winkels BCN;
folglich ist auch der Bogen BM = 90°, BD = 90°, BN = 90°,
u. s. w.

VI. Da nun allegrößte Kreislinien auf einer und derselben Kugel einander gleich sind, so sind auch ihre vierten Theile, oder die Bogen von 90° einander gleich; folglich ist der Bogen BD = BM = BN, u. s. w. Es ist demnach der Pol einer größten Kreislinie auf einer Kugelfläche von jedem Puncte der erwähnten Kreislinie um 90° entfernt.

VII. Nun wird es nicht mehr schwer seyn, zu einem auf der Kugelfläche gegebenen größten Kreise DMEN den dazu gehörigen Pol A oder B zu finden; und auch aus einem angenommenen Pole A eine größte Kreislinie DMEN auf einer gegebenen Kugel mit Hülfe des Taster-Zirkels zu ziehen. Das erste geschieht, wenn man aus zwey Puncten M und E des gegebenen größten Umkreises mit einem Halbmesser $MA = EA = \sqrt{(CA^2 + CE^2)} = \sqrt{2(CE)^2} = CE\sqrt{2} = \frac{1}{2}DE\sqrt{2}$ zwey sich in A schneidende Bogen auf der Kugelfläche zieht; und das zweyte, wenn man aus dem angenommenen Pole mit eben demselben Halbmesser $\frac{1}{2}DE\sqrt{2}$ einen Umkreis beschreibt.

§. 485.

Ein Winkel DBM, BNE, MBE u. s. w. von zwey Bogen größter Kreise auf der Kugelfläche eingeschlossen, heißt ein sphärischer Winkel. Ein sphärischer Winkel DBM kommt mit dem Neigungswinkel DCM der zwey größten Kreise DBEA und MBNA in Hinsicht auf seine Größe überein; nun aber wird dieser Neigungswinkel durch den Bogen DM des größten Kreises DMEN gemessen, dessen Pol sich in der Spitze des sphärischen Winkels DBM befindet; es wird also auch ein sphärischer Winkel durch den Bogen eines größten Kreises gemessen, der aus der Spitze, als aus einem Pole auf der dazu gehörigen Kugelfläche zwischen den Schenkeln des sphärischen Winkels in der Entfernung von 90° beschrieben wird. Da der Bogen dm des Parallelkreises dmen eben so viele Grade enthält, als der aus dem Pole beschriebene Bogen DM

Fig. 104. des größten Kreises DMEN; so könnte man auch sagen, daß der Bogen dm das Maß des sphärischen Winkels DBM ist; allein gewöhnlich werden die sphärischen Winkel nur durch Bogen von größten Kreisen ausgemessen.

Nun ist leicht einzusehen, daß sphärische Nebenwinkel zusammen 180^0 enthalten; wie auch, daß sphärische Scheitelwinkel einander gleich sind; u. s. w.

§. 486.

Wenn zwey Bogen BD und BM von größten Kreisen, die auf einer Kugelfläche durch einen und denselben Punct B gezogen sind, durch einen dritten Bogen DM eines größten Kreises geschnitten werden, ehe sie das zweyte Mahl zusammenstoßen; so entsteht ein krummliniges Dreyeck BDM, welches ein sphärisches Dreyeck genannt wird. Es ist demnach ein sphärisches Dreyeck ein Stück einer Kugelfläche, welches von drey Bogen größter Kreise eingeschlossen wird.

Da nun die Bogen BD und BM, ehe sie noch das zweyte Mahl zusammenstoßen, von einem dritten Bogen geschnitten werden müssen, wenn ein Dreyeck entstehen soll, und da diese zwey Bogen in der Entfernung von 180^0 das zweyte Mahl zusammentreffen (483.); so folgt, daß in dem Dreyecke BDM jeder der zwey Bogen BD und BM $< 180^0$ seyn muß. Eben dieses läßt sich von DB und DM, und auch von MB und MD behaupten. Es ist also jede Seite (oder jeder Bogen) eines sphärischen Dreyeckes $< 180^0$.

Ein sphärisches Dreyeck heißt rechtwinkelig, wenn es einen, oder mehrere rechte Winkel hat. Das Dreyeck BDM hat zwey rechte Winkel BDM=BMD, weil die Kreise DBEA und BMAN auf DMEN senkrecht stehen. Wenn nun der Bogen $DM = 20^0$ ist; so ist auch der Winkel $DBM = 20^0$, weil der Bogen DM den Punct B zum Pole hat. Es sind demnach in dieser Voraussetzung alle drey Winkel des sphärischen Dreyeckes BDM zusammen $= 90 + 90 + 20 = 200^0$. Der Winkel DBM kann größer und auch kleiner werden, ohne daß die zwey übrigen Winkel des sphärischen Dreyeckes BDM geändert werden. So z. B. enthalten alle drey Winkel in dem sphärischen Dreyecke MBE zusammen $90 + 90 + 160 = 340^0$, weil wir $DBM = 20^0$, und folglich $MBE = 180 - 20 = 160^0$ gesetzet haben. Wir ersehen hieraus,

daß die Anzahl Grade aller drey Winkel in einem sphärischen Dreyecke veränderlich ist. Man kann demnach bey den sphärischen Dreyecken aus zwey gegebenen Winkeln den dritten nicht bestimmen. Fig. 104.

§. 487.

Ein körperlicher Winkel (angulus solidus) ist ein Winkel, der von mehr als zwey geraden Linien eingeschlossen wird, welche allein einem Puncte zusammenstoßen, und von denen je zwey in einer andern Ebene liegen. So z. B. ist jedes Eck in einem Zimmer, jedes Eck an einem Würfel, jede Spitze an einer Pyramide ein körperlicher Winkel. Ein körperlicher Winkel besteht demnach aus mehr als zwey ebenen Winkeln, welche alle in einem Puncte zusammenstoßen. Alle diese ebenen Winkel zusammengenommen sind dem körperlichen Winkel gleich. Sie müssen in ihrer Summe weniger als vier rechte Winkel oder 360^0 enthalten; weil sie sonst in eine und dieselbe Ebene fallen müssen, sobald sie 360^0 enthalten.

§. 488.

Regelmäßige Körper werden diejenigen genannt, die von gleichen regelmäßigen Vielecken, und von vollkommen gleichen körperlichen Winkeln eingeschlossen sind. Deren gibt es nur fünf.

I. Die dreyeckige gleichseitige Pyramide, die von vier gleichseitigen Dreyecken eingeschlossen ist; sie heißt wegen der vier einschließenden Flächen ein Tetraeder. Jeder körperliche Winkel an diesem Körper ist $= 3.60^0 = 180^0$.

II. Der Würfel, Cubus oder das Hexaeder ist von 6 Quadraten eingeschlossen. Jeder körperliche Winkel desselben enthält $3.90^0 = 270^0$.

III. Das Oktaeder ist von acht gleichseitigen Dreyecken eingeschlossen, davon je vier Dreyecke zusammen den körperlichen Winkel machen, der folglich $4.60^0 = 240^0$ enthält. Ein Oktaeder ist nichts anderes als das Doppelte einer viereckigen gleichseitigen Pyramide.

IV. Das Dodekaeder ist von zwölf regelmäßigen Fünfecken eingeschlossen, davon je drey zusammen den körperlichen Winkel machen; und welcher daher $3.108 = 324^0$ enthält.

V. Das Ikosaeder ist von zwanzig gleichseitigen Dreyecken eingeschlossen, davon je fünf zusammen den körperlichen Winkel machen, der daher $5.60^0 = 300^0$ enthält.

Fig. Andere regelmäßige Körper gibt es nicht; denn sechs gleichseitige Dreyecke, vier Quadrate, drey regelmäßige Sechsecke, wenn man sie mit ihren Vieleckswinkeln in einem Puncte zusammenfügen wollte, um einen körperlichen Winkel zu machen, würden um diesen Punct herum schon 360° enthalten, und folglich in einer und derselben Ebene liegen. Noch viel weniger würden mehr als vier Quadrate, mehr als drey regelmäßige Fünfecke, mehr als drey regelmäßige Sechsecke dazu taugen; weil sie gar nicht zusammenpassen, und folglich keinen körperlichen Winkel einschließen können. Da übrigens drey Vieleckswinkel von den anderen regelmäßigen Vielecken auch schon über 360° enthalten; so können sie ebenfalls keinen körperlichen Winkel einschließen, und folglich auch keinen Körper allenthalben begrenzen.

II. Abschnitt.

Von der Ausmessung der Oberflächen der Körper.

§. 489.

101. Die Oberfläche eines jeden senkrechten Prisma ABCcba ohne die beyden Grundflächen oder die Mantelfläche des Prisma ist gleich dem Producte aus dem Umfange der Grundfläche in die Höhe, d. i. in eine Seite des Prisma. Z. B. wenn die Höhe dieses Prisma = p gesetzet wird, so ist seine Mantelfläche = (AB + BE + EC + CD + DA) . p.

Denn diese Mantelfläche ist gleich der Summe der Rechtecke Ba + Eb + Ce + Dc + Ad; nun aber ist Ba = AB . Bb = AB . p, Eb = BE . Ee = BE . p, u. s. w.; folglich ist die Summe dieser Rechtecke, das ist die Mantelfläche dieses senkrechten Prisma = AB . p + BE . p + EC . p + .. = (AB + BE + EC + ..) p = dem Producte aus dem Umfange der einen Grundfläche in die Höhe oder Seite des senkrechten Prisma.

Wäre das Prisma schief, so müßte man jedes der einschließenden Parallelogramme besonders berechnen, und die Flä-

cheninhalte addiren, um die Mantelfläche des schiefen Prisma zu erhalten. Fig. 101.

§. 490.

Da nun ein senkrechter Cylinder nichts anderes ist, als ein senkrechtes Prisma, dessen Grundfläche Kreise sind; so ist auch die Oberfläche eines senkrechten Cylinders ohne die beyden Grundflächen oder die Mantelfläche des Cylinders dem Producte aus dem Umkreise der einen Grundfläche in die Höhe des Cylinders gleich. Das ist, wenn wir den Durchmesser der Grundfläche eines senkrechten Cylinders mit b und die Höhe mit a bezeichnen; so ist seine krumme Oberfläche $= ab\pi$. Setzen wir die Höhe $a = b =$ dem Durchmesser der Grundfläche des senkrechten Cylinders, so ist sodann seine krumme Oberfläche $= b^2\pi$, und folglich viermahl so groß, als seine Grundfläche, weil diese $= \frac{1}{4}b^2\pi$ ist. Die ganze Oberfläche eines solchen gleichseitigen Cylinders ist endlich $= b^2\pi + \frac{1}{4}b^2\pi + \frac{1}{4}b^2\pi = \frac{3}{2}b^2\pi$.

Anmerkung. Die Mantelfläche eines schief abgeschnittenen senkrechten Cylinders, so wie jene eines schiefen Cylinders von parallelen Grundflächen ist gleich dem Producte aus dem Umfange der auf die Achse senkrechten Grundfläche in die Länge der Achse dieses Cylinders. Die Ursache hievon ist leicht einzusehen, und es wird dem eigenen Nachdenken der Anfänger überlassen, sie abzuleiten. Dessenungeachtet läßt sich die Mantelfläche eines schiefen Cylinders nach den bisher gegebenen Gründen noch nicht berechnen, weil der Umfang des auf die Achse senkrechten Durchschnittes kein Kreis, sondern eine Ellipse ist, wovon weiter unten gehandelt werden wird.

§. 491.

Die Mantelfläche einer regelmäßigen Pyramide ist gleich dem halben Producte des Umfangs der Grundfläche in den Abstand der Seiten der Grundfläche von der Spitze der Pyramide.

Denn die Mantelfläche einer solchen Pyramide besteht aus so viel gleichschenkeligen einander vollkommen gleichen Dreyecken, als die Grundfläche Seiten hat. Nun ist jedes dieser Dreyecke gleich dem halben Producte einer Seite der Grundfläche in die Senk-

Fig. rechte, welche von der Spitze der regelmäßigen Pyramide auf irgend eine Seite der Grundfläche gezogen wird. Es ist also auch die Summe dieser Dreyecke, das ist die Mantelfläche der Pyramide gleich dem halben Producte der Summe aller Seiten, nähmlich des Umfangs der Grundfläche in die Senkrechte, welche aus der Spitze der regelmäßigen Pyramide auf was immer für eine Seite der Grundfläche gezogen wird, d. h. in den Abstand dieses Umfanges von der Spitze der Pyramide.

§. 492.

Da bey einer unregelmäßigen Pyramide die einschließenden Dreyecke ungleich sind; so muß man ein jedes Dreyeck besonders berechnen, und alle diese Dreyecke zusammennehmen, um die Mantelfläche einer solchen Pyramide zu erhalten.

§. 493.

Ein senkrechter Kegel kann als eine regelmäßige Pyramide angesehen werden (479.). Es ist also auch die Mantelfläche eines senkrechten Kegels gleich dem halben Producte aus dem Umkreise der Grundfläche in die Seite des Kegels.

Die Mantelfläche eines schiefen Kegels läßt sich nach den bisher gegebenen Gründen noch nicht berechnen.

§. 494.

103. Die Mantelfläche eines abgekürzten senkrechten Kegels hingegen läßt sich auf folgende Weise bestimmen. Sie gleicht dem Producte aus dem arithmetischen Mittel der Umkreise beyder Grundflächen in die Seite dieses Kegels; nähmlich es ist die Oberfläche $ABFE = \frac{\pi . AB + \pi . FE}{2} . BF$ oder $= (a+b)\, c\pi$, wenn wir $DB = a$, $GF = b$, und $BF = c$ setzen.

Denn die Oberfläche ABFE ist = der Oberfläche ABC — der Oberfläche EFC; nun aber ist die Oberfläche $ABC = a\pi . BC = a\pi . (BF + FC) = a\pi . (c + FC)$, und die Oberfläche $EFC = \pi b . FC$, folglich ist die Oberfläche $ABFE = \pi ac + \pi (a - b) FC$, oder da die beyden ähnlichen Dreyecke CFG und BFP die Proportion $a - b : b = c : FC$ also $(a - b) FC = bc$ geben, $ABFE = \pi (a + b)\, c$.

§. 495. Fig.

Wird BF in N halbirt, und MN parallel zu AB gezogen, so ist $RN = \frac{1}{2}BP = \frac{1}{2}(a - b)$ und $NQ = RQ + RN = b + \frac{1}{2}(a - b) = \frac{1}{2}(a + b)$, daher $MN = 2NQ = a + b$; es ist also auch die Mantelfläche eines abgekürzten senkrechten Kegels $ABFE = 2\pi c . NQ = \pi . MN . BF$ = dem Umkreise von MN multiplicirt mit der Seite BF.

§. 496.

Die krumme Oberfläche 1) einer Zone, 2) eines Kugel- 105.
abschnittes, und 3) der ganzen Kugel ist gleich der Mantelfläche eines Cylinders, welcher einen größten Durchschnitt der Kugel zur Grundfläche, und in 1) die Höhe der Zone, in 2) die Höhe des Kugelabschnittes, und in 3) den Durchmesser der Kugel zur Höhe hat. Oder was dasselbe ist: Die Oberfläche a) einer Zone, b) eines Kugelabschnittes, und c) der ganzen Kugel ist gleich dem Umfange eines größten Kreises der Kugel multiplicirt in a) mit der Höhe der Zone, in b) mit der Höhe des Kugelabschnittes, und in c) mit dem Durchmesser der Kugel.

Um diese Wahrheit einzusehen, sey BMAC der vierte Theil eines größten Kreises der Kugel, BCAF ein Quadrat auf dem Halbmesser BC = a. Man setze ein Stück des Halbmessers AC, nähmlich PN = b, und Pp = dem nten Theile von $b = \frac{b}{n}$; man theile ferner Pp in dem Puncte G in zwey gleiche Theile, und führe durch die Puncte P, G, p und N zu CB die Parallelen PD, GM, pb und NR. Dann errichte man in dem Puncte M die Tangente Qm, mache mn = Pp parallel zu AC, und ziehe an den Berührungspunct M den Halbmesser MC. Dadurch entstehen zwey ähnliche Dreyecke CMG und Qmn, weil die Seiten derselben wechselweise auf einander senkrecht stehen (383.). Daher ist Qm : mn = MC : MG, und $Qm . MG = mn . MC = mn . a$. Dreht sich die ganze Figur um die unbewegliche Achse AC, so beschreibt die Fläche des Quadranten BAC die Halbkugel, das Stück NLEPN des Quadranten eine Zone, das Trapez QpPm einen abgekürzten Kegel, während das Quadrat BCAF und die Rechtecke RNPD, bpPD gerade Cylinder beschreiben, welche alle eine größte Durchschnittsfläche der

Fig. 105. Kugel zur Grundfläche haben. Die Oberfläche des entstandenen abgekürzten Kegels ist = Qm. MG. 2π (vermöge 495.). Die Oberfläche des durch die Umdrehung von bpPD entstandenen Cylinders ist = mn. 2PD. π = mn. a. 2π. Da nun dem Obigen gemäß Qm. MG. = mn. a ist; so sind auch diese beyden Oberflächen einander gleich. Ist nun Pp ein unendlich kleiner Theil von NP, so fallen der unendlich kleine Bogen hE und die Tangente Qm über einander. Daher ist die Oberfläche der durch hpPE entstandenen unendlich kleinen Zone der Mantelfläche des abgekürzten Kegels, und also auch der Mantelfläche des durch bpPD entstandenen Cylinders gleich, welcher einen größten Kreis der Kugel zur Grundfläche, und die unendlich kleine Höhe mn zur Höhe hat. Dieser Schluß gilt von jedem unendlich kleinen Theilchen Pp der Höhe PN, man mag es auf derselben wo immer abschneiden. Folglich ist die Summe der Oberflächen aller der zwischen P und N enthaltenen unendlich kleinen Zonen der Summe der Mantelflächen der zwischen P und N enthaltenen unendlich kleinen Cylinder gleich. Es ist aber die Summe der Oberflächen aller unendlich kleinen Zonen die Oberfläche der durch die Umdrehung von LNPE entstandenen Zone, und die Summe der Mantelflächen aller unendlich kleinen Cylinder ist die Mantelfläche des durch RNPD entstandenen Cylinders; folglich sind diese beyden Oberflächen einander gleich; das heißt, die Oberfläche einer Zone ist gleich der Mantelfläche eines Cylinders, welche eine größte Durchschnittsfläche der Kugel zur Grundfläche, und die Höhe der Zone zur Höhe hat.

Je näher der Punct P an den Punct A kommt, desto mehr nähert sich die obengenannte Zone einem Kugelabschnitte; und fällt der Punct P in A, so geht die Zone in denjenigen Kugelabschnitt über, welcher durch die Umdrehung des halben Kreisabschnittes LNA entsteht. Es ist also auch die Oberfläche eines Kugelabschnittes gleich der krummen Oberfläche eines Cylinders, welcher eben dieselbe Höhe, und den größten Durchschnitt der Kugel zur Grundfläche hat. Setzen wir die Höhe des Kugelabschnites = c, so ist dessen Oberfläche = 2a π. c. Die Halbkugel ist ein Kugelabschnitt, welcher den Halbmesser der Kugel zur

Höhe hat; es ist also ihre Oberfläche $= 2a\pi . a$. Folglich ist Fig.
die Oberfläche der ganzen Kugel $= 2a\pi . 2a = 4\pi . a^2$. Die Oberfläche der Kugel ist demnach gleich der Mantelfläche eines Cylinders, welcher die größte Durchschnittsfläche der Kugel zur Grundfläche, und den Durchmesser derselben zur Höhe hat; oder welches einerley ist, sie ist gleich dem Producte aus dem Umfange eines größten Kreises in den Durchmesser der Kugel.

§. 497.

Aus diesem aufgestellten Satze kann man folgern:

I. Daß die Kugelfläche viermahl so groß ist, als der Flächeninhalt eines dazu gehörigen größten Kreises.

Denn es sey der Halbmesser einer Kugel $= a$; so ist die Kugelfläche $= 2a\pi . 2a = 4a^2\pi$; der Flächeninhalt eines dazu gehörigen größten Kreises hingegen ist nur $2a\pi . \frac{1}{2}a = a^2\pi$.

II. Daß die Kugelfläche der krummen Oberfläche eines umschriebenen gleichseitigen Cylinders gleich ist. Denn der umschriebene gleichseitige Cylinder hat eine größte Durchschnittsfläche der Kugel zur Grundfläche, und den Durchmesser derselben zur Höhe.

III. Daß die Kugelflächen sich gegen einander verhalten wie die Quadrate der Halbmesser, wie die Quadrate der Durchmesser, u. s. w. Denn es sey der Halbmesser einer Kugel $= a$, ihr Durchmesser $= d$, die Oberfläche derselben $= s$, der Halbmesser einer anderen Kugel $= A$, ihr Durchmesser D, die Oberfläche derselben $= S$; so ist $s = 4a^2\pi = d^2\pi$, und $S = 4A^2\pi = D^2\pi$; folglich ist auch $s : S = a^2 : A^2 = d^2 : D^2$.

IV. Daß die Kugelfläche, die ganze Oberfläche des um- 106.
schriebenen Cylinders, und die ganze Oberfläche des umschriebenen gleichseitigen Kegels sich gegen einander verhalten, wie $4 : 6 : 9$. Denn es sey der Halbmesser der Kugel $CK = a$; so ist die Kugelfläche $= 4a^2\pi$, die ganze Oberfläche des Cylinders $= 4a^2\pi + a^2\pi + a^2\pi = 6a^2\pi$, und die ganze Oberfläche des umschriebenen gleichseitigen Kegels $= \frac{1}{2}IL . \pi . ID + IL . \pi . \frac{1}{4}IL =$
$\frac{\pi}{2} . IL^2 + \frac{\pi}{4} . IL^2 = 3\pi . \frac{JL^2}{4} = 3\pi . IK^2 = 9a^2\pi$, weil (vermöge

Fig. 106. §. 409. IV.) $IC = 2.CK = 2a$ und $IK^2 = IC^2 - CK^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$ ist. Folglich verhält sich die Kugelfläche zur ganzen Oberfläche des umschriebenen Cylinders, zur ganzen Oberfläche des umschriebenen gleichseitigen Kegels, wie $4a^2\pi : 6a^2\pi : 9a^2\pi = 4 : 6 : 9$.

§. 498.

Eben so läßt sich erweisen, daß die Kugelfläche, die ganze Oberfläche des eingeschriebenen gleichseitigen Cylinders, und die ganze Oberfläche des eingeschriebenen gleichseitigen Kegels sich gegen einander verhalten wie 16:12:9.

§. 499.

Daß die Oberfläche einer Zone dem Producte aus dem größten Umkreise in die Höhe, die halbe Kugelfläche dem Producte aus dem größten Umkreise in den Halbmesser, die ganze Kugelfläche dem Producte aus dem größten Umkreise in den Durchmesser, und die Oberfläche eines Kugelabschnittes dem Producte aus einem größten Umkreise der dazu gehörigen Kugel in die Höhe des Kugelabschnittes gleich ist; läßt sich auch durch die Summirung der Elemente auf folgende Art erweisen.

87. Es sey DAPND der Durchschnitt oder Erzeugungskreis einer Kugel; ein Stück $CM = x$ des Halbmessers $= a$ sey in n gleiche Theile getheilet, so daß ein solcher Theil $= \frac{x}{n} = h$ werde; und aus den Theilungspuncten seyen die senkrechten Ordinaten CA, cd, ef...qr, MB bis an den Umkreis gezogen; so sind die Elemente der Kugelfläche die Zonen, welche bey der Umdrehung der Figur CMBA um CM durch die Bogen Ad, df.... rB erzeugt werden. Ferner denke man sich die Sehnen Br, rn, nf,...., dA gezogen, welche bey der Umdrehung der Fläche CMBA Mäntel abgestutzter Kegel beschreiben. Die Oberfläche des von der Sehne Br erzeugten Kegelmantels ist $= \pi\,(BM+rq)Br$ oder, wenn $BM = y$, $rq = y'$ gesetzt wird,

$$= \pi\,(y + y')\sqrt{h^2 + (y' - y)^2}$$

$$= \pi\sqrt{h^2\,(y + y')^2 + (y'^2 - y^2)^2};$$

da aber (413)

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad y' = \sqrt{a^2 - (x-h)^2},$$ Fig. 87.

also

$$y'^2 - y^2 = 2xh - h^2 = h(2x - h)$$

ist; so wird die fragliche Mantelfläche auch

$$= \pi h \sqrt{(y + y')^2 + (2x - h)^2}.$$

Lassen wir nun die Anzahl n der gleichen Theile von x ohne Ende wachsen, so nimmt h unendlich ab, und y' rückt immer näher an y; daher nähert sich die Wurzelgröße $\sqrt{(y+y')^2 + (2x-h)^2}$ ohne Ende der Grenze $\sqrt{4y^2 + 4x^2} = \sqrt{4a^2} = 2a$ und die Oberfläche des Kegelmantels der Größe $2\pi ha$. Allein die Grenze, welcher sich der Kegelmantel selbst ohne Ende nähert, ist die von dem Bogen Br beschriebene krumme Oberfläche der zugehörigen Zone, folglich ist diese $= 2\pi ha$. Derselbe Ausdruck ergibt sich auch für alle übrigen Zonen.

Es ist demnach die Summe der Oberflächen aller n Zonen, d. i. die von dem Bogen AB beschriebene Oberfläche $= n.2\pi ha = 2\pi a.nh = 2\pi ax =$ dem größten Umkreise $2a\pi$ der Kugel multiplicirt mit der Höhe x der Zone. Setzen wir nun $x = a$, so ist die halbe Kugelfläche $= 2a\pi.a = 2a^2\pi$, und folglich die ganze Kugelfläche $= 2a\pi.2a =$ dem größten Umkreise multiplicirt mit dem Durchmesser; wie oben (§. 496.).

§. 500.

Wenn man sich einbildet, daß ein größter Umkreis DMEN 104.
in n gleiche Theile getheilet sey, und daß durch diese Theilungspuncte und durch die Pole A und B größte Kreise gezogen werden; so wird dadurch die ganze Kugelfläche in n Theile getheilet, die einander vollkommen gleich seyn müssen, weil sie alle auf dieselbe Art bestimmt sind. Es seyen nun D und M zwey von diesen Theilungspuncten, zwischen denen m gleiche Theile des Umfanges liegen, nähmlich es sey der Bogen $DM = \frac{m}{n}$ DMEND; so ist die Fläche ADBMA = m solchen nten Theilen der ganzen Kugelfläche $= \frac{m}{n}$ (DMEND . AB) $= \frac{m}{n}$ DMEND.AB = DM.AB,

Fig. 78. wenn wir DM statt $\frac{m}{n}$ DMEND substituiren; d. i. ein Stück der Kugelfläche, von zwey größten Halbkreisen BDA und BMA eingeschlossen, ist gleich dem Producte aus dem Durchmesser AB in den Bogen DM des größten Kreises, der aus der Spitze B oder A beschrieben wird. Da nun dieser Bogen den sphärischen Winkel B oder A mißt; so kann man auch sagen, daß ein Stück der Kugelfläche, von zwey größten Halbkreisen eingeschlossen, gleich ist dem Producte aus dem Durchmesser der Kugel, in die Länge des größten Kreisbogens, der den sphärischen Winkel mißt, welchen die zwey Halbkreise einschließen.

III. Abschnitt.

Von der Ausmessung des Cubikinhaltes der Körper.

§. 501.

Der Cubikinhalt (volumen) eines Körpers ist die Größe der Ausdehnung, die von der ganzen Oberfläche des Körpers eingeschlossen wird. Zwey Kugeln von gleichen Durchmessern, die eine von Bley, die andere von Eisen, haben gleiche Cubikinhalte, obschon ihre Massen (massae), das ist die Menge der Materie, und auch ihre Gewichte verschieden sind.

§. 502.

Der Cubikinhalt eines Körpers wird ausgemessen, wenn man untersucht, wie oft ein bekannter, für die Einheit angenommener, Körper in demselben enthalten ist; das ist, wenn man untersucht, wie oft der bekannte, für die Einheit angenommene, Körper in dem auszumessenden sich herumlegen lasse. Die Zahl nun, welche dieses anzeigt, bestimmt den Cubikinhalt des auszumessenden Körpers. Der für die Einheit angenommene Körper, mit dem andere Körper ausgemessen werden, ist gewöhnlich ein Würfel, oder Cubus, dessen Seite bald einen Zoll, bald einen Schuh,

bald eine Klafter, zuweilen auch eine Meile beträgt; und der Fig.
dann in Hinsicht auf die Seite Cubik-Zoll, Cubik-Schuh, Cubik-Klafter u. s. w. genannt wird.

§. 503.

Wenn die Seite des für die Einheit angenommenen 107.
Würfels m in der Länge AB der Grundfläche eines senkrechten Parallelepipeds amahl (z. B. 5mahl), in der Breite AD der Grundfläche bmahl (4mahl), und in der Höhe AF oder BC oder DE des Parallelepipeds cmahl (z. B. 3mahl) enthalten ist; so ist der Cubikinhalt desselben = a.b.c.m = 5.4.3.m = 60m.

Denn man theile nur die Länge AB in a, die Breite AD der Grundfläche in b, und die Höhe AF des senkrechten Parallelepipeds in c gleiche Theile, wenn die Seite des für die Einheit angenommenen Würfels m in AB.. amahl, in AD..bmahl, und in AF.. cmahl enthalten ist, und lege in Gedanken parallele Ebenen; erstlich zur Seitenfläche AE durch die Theilungspuncte der Geraden AB, dann zur Seitenfläche AC durch die Theilungspuncte der Geraden AD, endlich zu der Grundfläche DB durch die Theilungspuncte der Geraden AF; so wird dadurch dieses Parallelepiped in lauter vollkommen gleiche Würfel zertheilet. Die Anzahl dieser Würfel ist = a.b.c, weil jede Schichte deren a.b enthält, und c solcher Schichten übereinander liegen. Jeder von diesen Würfeln ist = m, weil sie dieselbe Seite besitzen. Es ist also auch a.b.c.m = dem Cubikinhalte desselben Parallelepipeds. Setzt man z. B. a = 5, b = 4, c = 3; so ist in diesem Falle der Cubikinhalt dieses Parallelepipeds = 5.4.3.m = 60m.

§. 504.

Setzt man die Seite des für die Einheit angenommenen Würfels = s, so ist AB = a.s, AD = b.s, und AF = c.s, nähmlich $\frac{AB}{s} = a$, $\frac{AD}{s} = b$, und $\frac{AF}{s} = c$, weil vermöge der Voraussetzung s in AB.. amahl, in AD..bmahl, und in AF.. cmahl enthalten ist. Es ist demnach auch der Cubik-Inhalt des

Fig. 107. senkrechten Parallelepipeds $AG = \frac{AB}{s} \cdot \frac{AD}{s} \cdot \frac{AF}{s} \cdot m = \frac{AB.AD.AF}{s^3} . m$, wenn man für die Größen a, b und c ihre Werthe substituirt. Setzt man ferner $s = 1$, z. B. = 1 Schuh, so ist $m = 1$ Cubik-Schuh, und der Cubik-Inhalt des Parallelepipeds $AG = AB.AD.AF$ Cubik-Schuhen; das ist: der Cubik-Inhalt eines senkrechten Parallelepipeds ist gleich dem Producte seiner drey Abmessungen, nähmlich seiner Länge, Breite und Höhe. Da überdieß $AB.AD$ = der Grundfläche BD ist; so kann man auch sagen, daß der Cubik-Inhalt eines senkrechten Parallelepipeds gleich ist dem Producte aus der Grundfläche BD in die Höhe AF, wobey für die Einheit ein Würfel auf derjenigen Linie genommen werden muß, mit der die Länge, Breite und Höhe des Parallelepipeds ausgemessen sind.

§. 505.

Da nun ein Würfel nichts anders ist, als ein senkrechtes Parallelepiped, bey dem die drey Abmessungen gleich sind; so ist der Cubik-Inhalt eines jeden Würfels = der dritten Potenz einer Seite. Ein Würfel z. B., dessen Seite 6 Schuh beträgt, das ist, eine Cubik-Klafter ist $= 6.6.6 = 6^3 = 216$ Cubik-Schuhen; ein Würfel, dessen Seite 12 Zoll beträgt, nähmlich ein Cubik-Schuh ist $= (12)^3 = 1728$ Cubik-Zollen; ein Cubik-Zoll ist $= (12)^3 = 1728$ Cubik-Linien, u. s. w.

§. 506.

Sind die Abmessungen eines senkrechten Parallelepipeds in Klaftern, Schuhen und Zollen ausgedrückt, so muß man alle diese Größen in Zolle verwandeln, wenn die Zolle die kleinste gegebene Gattung seyn sollten, damit alle drey Abmessungen durch dieselbe Einheit gemessen werden; hierauf muß man diese drey Zahlen mit einander multipliciren, um den Cubik-Inhalt in Cubik-Zollen zu erhalten. Dieser Ausdruck wird dann in Cubik-Klaftern und Cubik-Schuhe verwandelt, wenn man ihn durch $1728.216 = 373248$, und den Ueberrest durch 1728 dividirt.

Man wird mit der Rechnung meistens geschwinder fertig, wenn man die Größen der kleineren Gattung als Brüche von der größeren Gattung vorstellt (92.), und sofort die Multiplication (nach 89.) verrichtet. Es sey z. B. die Länge der Grundfläche eines senkrechten Parallelepipeds $= 7^0\ 3^1$, die Breite $= 2^0\ 4^1$, und die Höhe $= 0^0\ 5^1\ 9^{11}$; nun ist $7^0\ 3^1 = \frac{15^0}{2}$, $2^0\ 4^1 = \frac{8^0}{3}$, und $0^0 5^1\ 9^{11} = \frac{23^0}{24}$; folglich ist der Cubik-Inhalt dieses Parallelepipeds $= \frac{15}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{23}{24} = \frac{5}{2} \cdot 1 \cdot \frac{23}{3} = \frac{115}{6} =$ $19\frac{1}{6}$ Cubik-Klafter $= 19\,\text{Cbk}^0$ und $\frac{1 \cdot 216}{6}$ Cubik-Schuh $= 19\,\text{Cb}^0$ und $36\,\text{Cb}^1$. Fig.

§. 507.

Dieselben practischen Geometer, welche die Quadrat-Klafter in 6 Klafterschuhe (oder Riemenschuhe) abtheilen (437.), pflegen auch die Cubik-Klafter in 6 Cubik-Klafterschuhe, einen Cubik-Klafterschuh in 12 Cubik-Klafterzolle, einen Cubik-Klafterzoll in 12 Cubik-Klafterlinien u. s. w. zu theilen.

Ein Cubik-Klafterschuh (Cbkl^1) ist nähmlich ein senkrechtes Parallelepiped von der Grundfläche $= 1\,\square^0$ und Höhe $= 1^1$; ein Cubik-Klafterzoll (Cbkl^{11}) ist ein senkrechtes Parallelepiped von der Grundfläche $= 1\square^0$ und Höhe $= 1^{11}$; eine Cubik-Klafterlinie (Cbkl^{111}) ist ein senkrechtes Parallelepiped von der Grundfläche $= 1\,\square^0$ und Höhe $= 1^{111}$; u. s. w.

Es ist demnach vermöge dieser Eintheilung, Benennung und Bezeichnung

$1\,\text{Cbkl}^1 = \frac{1}{6}\text{Cb}^0 = 36\text{Cb}^1$;
$1\,\text{Cbkl}^{11} = \frac{1}{12}\text{Cbkl}^1 = 3\text{Cb}^1$
$1\,\text{Cbkl}^{111} = \frac{1}{12}\text{Cbkl}^{11} = \frac{1}{4}\text{Cb}^1 = 432\,\text{Cb}^{11}$;
$1\,\text{Cbkl}^{IV} = \frac{1}{12}\text{Cbkl}^{111} = 36\,\text{Cb}^{11}$;
$1\,\text{Cbkl}^{V} = \frac{1}{12}\text{Cbkl}^{IV} = 3\text{Cb}^{II}$;
$1\,\text{Cbkl}^{VI} = \frac{1}{12}\text{Cbkl}^{V} = \frac{1}{4}\text{Cb}^{11}$; $= 432\,\text{Cb}^{111}$.

Und $1\,\text{Cb}^1 = \frac{1}{36}\text{Cbkl}^1 = \frac{1}{3}\text{Cbkl}^{11} = 4\,\text{Cbkl}^{111}$;
$1\text{Cb}^{11} = \frac{1}{36}\text{Cbkl}^{IV} = \frac{1}{3}\text{Cbkl}^{V} = 4\,\text{Cbkl}^{VI}$;
$1\,\text{Cb}^{111} = \frac{1}{36}\text{Cbkl}^{VII} = \frac{1}{3}\text{Cbkl}^{VIII} = 4\text{Cbkl}^{IX}$; u. s. w.

Fig. Nach dieser Eintheilung und Benennung enthält nun das vorerwähnte Parallelepiped einen Cubikinhalt von 19 $\mathfrak{C}b^0$ 1 $\mathfrak{C}bkl^1$.

Die Ausrechnung des Cubikinhaltes eines senkrechten Parallelepipeds in $\mathfrak{C}b^0$, in $\mathfrak{C}bkl^1$, $\mathfrak{C}bkl^{11}$, $\mathfrak{C}bkl^{111}$, u. s. w. wenn die Abmessungen in Klaftern, Schuhen, Zollen, Linien u. s. w. gegeben sind, wird sehr bequem durch den (im §. 437.) angeführten Rechnungsvortheil verrichtet. Z. B.

Länge =	3^0,	0^1,	4^{11}	
Breite =	0 ,	5 ,	3	
	0 ,	15,	0,	40
			9,	0 , 24
Grundfläche =	2 ,	4,	0,	6
Dicke =	0,	4,	6,	—
	0,	8,	32,	0 , 48
			12,	48, 0 , 72
Cubikinhalt =	2,	0,	0,	4, 6

nähmlich = 2 $\mathfrak{C}b^0$, 0 $\mathfrak{C}bkl^1$, 0 $\mathfrak{C}bkl^{11}$, 4 $\mathfrak{C}bkl^{111}$, 6 $\mathfrak{C}bkl^{IV}$.

Bey der Multiplication der in $\mathfrak{Q}^0$, $\mathfrak{Q}kl^1$, $\mathfrak{Q}kl^{11}$ &c. ausgedrückten Grundfläche mit der in Klaftern, Schuhen, Zollen gegebenen Dicke werden eben so wie (§. 437.). diejenigen Partial-Producte verdoppelt, bey welchen keiner der Factoren ganze Klaftern bedeutet. Die in der angeführten Ordnung angeschriebenen Partial-Producte werden dann von der Rechten angefangen colonnenweise zusammenaddirt, und durch die bekannten Reductions-Zahlen auf größere Benennungen gebracht.

Daß dieses Rechnungsverfahren richtig ist, erhellet aus folgender Betrachtung. Bey der Multiplication der Grundfläche $= A\mathfrak{Q}^0 + B\,\mathfrak{Q}kl^1 + C\,\mathfrak{Q}kl^{11}$ mit der Höhe oder Dicke des Parallelepipeds $= a^0 + b^1 + c^{11}$ sind die einfachen Producte $a^0 . A\,\mathfrak{Q}^0 = aA\,\mathfrak{C}b^0$, $a^0 . B\,\mathfrak{Q}kl^1 = aB\,\mathfrak{C}bkl^1$, $a^0 . C\mathfrak{Q}kl^{11} = aC\mathfrak{C}bkl^{11}$, $b^1 . A\mathfrak{Q}^0 = bA\mathfrak{C}bkl^1$, $c^{11} . A\mathfrak{Q}^0 = cA\mathfrak{C}bkl^{11}$. Hingegen sind $b^1 . B\mathfrak{Q}kl^1 = b^1 . 6B\mathfrak{Q}^1 = 6bB\mathfrak{C}b^1 = 2bB\mathfrak{C}kl^{11}$ wegen $1\mathfrak{C}b^1 = \frac{1}{3}\,\mathfrak{C}bkl^{11}$. Eben so sind $b^1 . C\mathfrak{Q}kl^{11} = 12b^{11} . 72C\mathfrak{Q}^{11} = 864bC\mathfrak{C}b^{11} = 2bC\mathfrak{C}bkl^{111}$, weil $1\mathfrak{Q}kl^{11} =$

72 $\square^{II}$ (vermöge §. 437.), und $1\square b^{II} = \frac{1}{432}\square bkl^{III}$ wegen der Fig. oben angeführten Gleichungen ist.

Mittelst dieser Gleichungen ist es sehr leicht, einen in $\square bkl^{I}$, $\square bkl^{II}$, $\square bkl^{III}$ ꝛc. gegebenen körperlichen Inhalt in $\square b^{I}$, $\square b^{II}$, $\square b^{III}$ und umgekehrt, zu verwandeln.

Wenn man zur Ausmessung des körperlichen Inhaltes den Cubik-Schuh für die Einheit annimmt, und denselben in 12 Cubik-Schuhzolle, den Cubik-Schuhzoll in 12 Cubik-Schuhlinien ꝛc. eintheilt; so wird die Berechnung eben so geführt, wie es (im §. 437. II.) gezeigt worden.

Eben so wie bey der Berechnung der Flächen kann man sich hier folgender Tabelle bedienen, um in der wirklichen Ausübung Cubik-Klafterschuhe, Cubik-Klafterzolle, u. s. w. wie auch Cubik-Schuhzolle, Cubik-Schuhlinien, u. s. w. nähmlich um Schichten-Maß in Cubik-Maß, und umgekehrt zu verwandeln.

Schichten-Maß.	Cubik-Maß.	Schichten-Maß.	Cubik-Maß.	Cubik-Maß.	Schichten-Maß.
$1\square bkl^{I}$	$36\square b^{I}$	$1\square Sch^{II}$	$144\square b^{II}$	$1\square b^{I}$	$4\square bkl^{III}$
$1\square bkl^{II}$	$3\square b^{I}$	$1\square Sch^{III}$	$12\square b^{II}$	$1\square b^{II}$	$4\square bkl^{VI}$
$1\square bkl^{III}$	$432\square b^{II}$	$1\square Sch^{IV}$	$1\square b^{III}$	$1\square b^{III}$	$4\square bkl^{IX}$
$1\square bkl^{IV}$	$36\square b^{II}$	$1\square Sch^{V}$	$144\square b^{III}$	$1\square b^{IV}$	$4\square bkl^{XII}$
$1\square bkl^{V}$	$3\square b^{II}$	$1\square Sch^{VI}$	$12\square b^{III}$	$1\square b^{V}$	$4\square bkl^{XV}$
$1\square bkl^{VI}$	$432\square b^{III}$	$1\square Sch^{VII}$	$1\square b^{III}$	$1\square b^{II}$	$1\square Sch^{IV}$
$1\square bkl^{VII}$	$36\square b^{III}$	$1\square Sch^{VIII}$	$144\square b^{IV}$	$1\square b^{III}$	$1\square Sch^{VII}$
$1\square bkl^{VIII}$	$3\square b^{III}$	$1\square Sch^{IX}$	$12\square b^{IV}$	$1\square b^{IV}$	$1\square Sch^{X}$
$1\square bkl^{IX}$	$432\square b^{IV}$	$1\square Sch^{X}$	$1\square b^{IV}$	$1\square b^{V}$	$1\square Sch^{XIII}$

Fig. §. 508.

108. Zwey Parallelepipede DFGA und EFAH von vollkommen gleichen Grundflächen und von gleichen Höhen sind am Cubik-Inhalte einander gleich, sie mögen noch so verschieden geneigt seyn, wenn sie nur so beschaffen sind, daß sie genau zwischen zwey parallelen Seitenebenen BCA und GER stehen, wenn sie mit ihren gleichen Grundflächen gehörig über einander gestellt werden.

Denn es ist in diesem Falle, wenn man durch die oberen Grundflächen BD und CE eine Ebene legt, das dreyseitige Prisma DAE = GFH (weil diese zwey Prismen auf einerley Art bestimmt sind); nimmt man beyde von dem dreyseitigen Prisma GFE hinweg, so bleibt das Parallelepiped DFGA = EFHA.

§. 509.

109. Zwey Parallelepipede AB und AC von vollkommen gleichen Grundflächen und Höhen sind auch noch am Cubikinhalte gleich, wenn sie nicht so beschaffen sind, daß sie genau zwischen zwey parallelen Seitenebenen liegen, sobald sie mit ihren gleichen Grundflächen gehörig über einander gestellt werden.

Denn man bilde sich nur ein, daß zwey solche Parallelepipede AB und AC mit ihren vollkommen gleichen Grundflächen gehörig auf einander gestellt, und bey einem jeden, zwey entgegengesetzte Seitenflächen, wie auch die oberen Grundflächen hinreichend erweitert werden; so wird dadurch ein drittes Parallelepiped AD von eben dieser Grundfläche und von derselben Höhe zum Vorschein kommen. Nun ist aber vermöge des Vorhergehenden das Parallelepiped AB = AD, und auch AC = AD (weil jedes dieser zwey Parallelepipede AB und AC mit AD einerley Grundfläche und Höhe hat, und genau zwischen zwey parallelen Seitenebenen steht): es ist also auch am Cubikinhalte das Parallelepiped AB = AC.

§. 510.

Hieraus folgt, daß am Cubikinhalte ein wie immer schief stehendes Parallelepiped einem senkrechten Parallelepipede von gleicher Grundfläche und Höhe gleich ist. Es ist aber der Cubikinhalt eines senkrechten Parallelepipeds dem Producte aus der

Grundfläche in die Höhe gleich (504.); folglich ist auch der Cubikinhalt eines schiefstehenden Parallelepipeds dem Producte aus der Grundfläche in die Höhe gleich. Fig. 109.

§. 511.

Der Cubikinhalt eines dreyseitigen Prisma ABF ist gleich seiner dreyseitigen Grundfläche ABC multiplicirt mit der Höhe des Prisma DP. 110.

Denn man lege nur durch die Gerade BE zur Seitenfläche AF eine parallele Ebene BG, durch die Gerade CF zur Seitenfläche AE eine parallele Ebene CG, und erweitere die Grundflächen ABC, DEF; so ist das Prisma ABF = BCG, weil beyde Prismen auf dieselbe Art bestimmt sind. Nun ist ABF + BCG = dem Parallelepipede ABHGD; folglich ist auch ABF + ABF = ABHGD, nähmlich es ist $ABF = \frac{ABHGD}{2}$. Es ist aber ABHGD = ABHC.DP = 2ABC.DP; folglich ist $ABF = \frac{2ABC.DP}{2} = ABC.DP$; nähmlich der Cubikinhalt eines dreyseitigen Prisma ABF ist gleich der dreyseitigen Grundfläche ABC, multiplicirt mit der Höhe DP des Prisma, es möge dieses Prisma senkrecht oder schiefstehend seyn.

§. 512.

Der Cubikinhalt eines jeden vielseitigen Prisma ist gleich dem Producte aus seiner Grundfläche in die Höhe; nähmlich es ist ABCdb = ABECD.P, wenn wir die Höhe dieses Prisma = P setzen. 101.

Denn man zertheile nur die zwey parallelen vieleckigen Grundflächen durch gleichnahmige Diagonalen in lauter Dreyecke, und lege durch diese (parallelen) Diagonalen die Ebenen Ac, Ae, so ist ABCdb = AaeEB + AaeECc + AaeCd = AEB.*P* + AEC.P ACD.P = (AEB + AEC + ACD) *P* = ABECD.*P*.

Es folgt hieraus, daß Prismen von gleichen Höhen am Cubikinhalte einander gleich seyn müssen, wenn nur ihre Grundflächen einander am Flächeninhalte gleich sind, selbst wenn sie aus Vielecken von verschiedener Gattung bestehen, und wie immer schief stehen.

Fig.

§. 513.

Da man nun einen Cylinder für ein Prisma ansehen kann, dessen Grundflächen regelmäßige Unendlichecke sind; so ist auch der Cubikinhalt eines jeden Cylinders dem Producte aus seiner Grundfläche in die Höhe gleich. Es sey z. B. der Halbmesser der Grundfläche $= a$, und die Höhe des Cylinders $= b$; so ist die Grundfläche $= a^2\pi$, und der Cubikinhalt des Cylinders $= a^2 b\pi$.

§. 514.

Es folgt daraus:

I. Daß die Cubikinhalte der Prismen und Cylinder sich gegen einander verhalten, wie die Producte aus den Grundflächen in die Höhen: nähmlich es ist $S : s = AB : ab$, wenn des einen Prisma oder Cylinders Cubikinhalt $= S$, Grundfläche $= B$, Höhe $= A$, und des anderen Cubikinhalt $= s$, Grundfläche $= b$, und Höhe $= a$ gesetzt wird.

II. Daß Prismen und Cylinder von gleichen Grundflächen, wie ihre Höhen; und von gleichen Höhen, wie ihre Grundflächen sich verhalten. Denn man setze nur $B = b$, so ist $S : s = AB : aB = A : a$; ingleichen $S : s = AB : Ab = B : b$, wenn $A = a$ gesetzt wird.

III. Daß Prismen und Cylinder am Cubikinhalte einander gleich sind, wenn ihre Grundflächen mit den Höhen in verkehrter Proportion stehen. Denn wenn $B : b = a : A$ ist; so ist auch $AB = ab$, und folglich ist $S = s$.

IV. Daß man aus dem gegebenen Cubikinhalte und aus der Höhe eines Prisma oder Cylinders seine Grundfläche, und auch aus dem Cubikinhalte und aus der Grundfläche die Höhe desselben bestimmen kann. Denn wenn $s = ab$ ist; so ist $a = \frac{s}{b}$, und $b = \frac{s}{a}$. Es sey z. B. der Cubikinhalt eines Cylinders $= s = 100\ \text{Cb}_{\text{I}}\ 96\ \text{Cb}^{\text{II}}$, und die Höhe $a = 8^{\text{I}}\ 6^{\text{II}}\ 8^{\text{III}}$; so ist die Grundfläche $b = \frac{100\ \text{Cb}_{\text{I}}\ 96\ \text{Cb}^{\text{II}}}{8\,16^{\text{II}}\,8^{\text{III}}} = \frac{1801}{18}\ \text{Cb}^{\text{I}} : \frac{7^{7^{\text{I}}}}{9} = \frac{1801}{154}$ Quadrat-Schuh. Setzt man nun den Durchmesser der Grundfläche dieses Cylinders $= x$, so ist $\frac{1}{4}x^2\pi = \frac{801}{154}$ und folglich $x = \sqrt{\left(\frac{3602}{77\pi}\right)} = 3{,}859$ Schuh. Wenn man die gegebene Höhe $a = 8^{\text{I}}\ 6^{\text{II}}\ 8^{\text{III}}$ in

Linien, und auch den gegebenen Cubikinhalt in Cubik-Linien ver- Fig.
wandelt; so erhält man nach vollbrachter Division die gesuchte Grundfläche in Quadrat Linien, woraus sich sodann der unbekannte Durchmesser der Grundfläche in Linien ergibt. Aus diesem Beyspiele erhellet, wie man sich bey dergleichen Divisionen zu verhalten habe.

Anmerkung. Der Cubikinhalt eines schief abgeschnittenen senkrechten Cylinders ist gleich dem Producte aus der auf der Achse senkrechten Grundfläche in die Länge der Achse des Cylinders. Die Ursache hievon wird eben so wie bey der Bestimmung der Oberfläche dieses Cylinders gefunden, und dem eignen Nachdenken der Anfänger überlassen.

§. 515.

Wenn bey dem senkrechten dreyseitigen Prisma ABEFC, 111.
die Seite $AB = a$, $AD = b$, $AC = c$, und der Neigungswinkel $CAB = 90^0$ gesetzt wird; so ist $ABEFC = \frac{ac}{2}.b = \frac{abc}{2}$ (vermöge 511.).

Man kann dieses auch durch die Summirung der Elemente auf folgende Weise finden. Man stelle sich vor, daß $CA = c$ in n gleiche Theile getheilt, und ein solcher Theil $= \frac{AC}{n} = \frac{c}{n} = \gamma$ sey. Durch die Theilungspuncte denke man sich parallele Ebenen zu AE; so wird dadurch das Prisma in seine Elemente aufgelöst. Legt man ferner durch die Einschnitte dieser Ebenen in die Ebene BCFE parallele Ebenen zur AF, so wird jedem Elemente ein (kleineres) Prisma eingeschrieben und ein anderes (größeres) umschrieben. Der Inhalt K des Prisma ABF ist demnach größer als die Summe aller eingeschriebenen und kleiner als die Summe aller umschriebenen Prismen. Diese Prismen haben durchgehends zwey Abmessungen, nähmlich $AD = b$ und $AG = \gamma$ gleich, und ihre dritten zur AB parallelen Abmessungen sind, wenn man der Kürze wegen $\frac{a}{n} = \alpha$ setzt, der Ordnung nach

$0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots . (n-1)\alpha, n\alpha$, (§. 397.).

Hieraus folgt, wie man leicht einsieht,

$K > 0 + \alpha b\gamma + 2\alpha b\gamma + 3\alpha b\gamma + \ldots + (n-1)\alpha b\gamma$

$K < \alpha b\gamma + 2\alpha b\gamma + 3\alpha b\gamma + \ldots\ldots + n\alpha b\gamma$

Fig. oder, wenn man für α und γ ihre Werthe schreibt und die Reihen summirt,

$$K > \frac{abc}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}, \quad K < \frac{abc}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2},$$

nähmlich

$$K > \frac{abc}{2} - \frac{abc}{2n}, \quad K < \frac{abc}{2} + \frac{abc}{2n}.$$

Versetzen wir nun die Zahl n in den Zustand des unendlichen Wachsens, so nähern sich die beyden mit K verglichenen Ausdrücke ohne Ende ihrer gemeinschaftlichen Grenze $\frac{abc}{2}$, folglich ist $K = \frac{abc}{2}$.

§. 516.

Durch ein Verfahren, welches mit dem in §. 442. zur Bestimmung des Flächeninhaltes ebener Figuren angewendeten übereinkommt, kann man auch den Cubikinhalt solcher Körper bestimmen, in deren Oberflächen sich zwey parallele Ebenen befinden, die wir Grundflächen heißen wollen. Theilen wir nähmlich den Abstand dieser Grundflächen, in eine beliebige Anzahl gleicher
112. Theile, und legen, wie es Fig. 112 vorstellt, durch die Theilungspuncte ebene, zu den Grundflächen parallele Schnitte; so wird der Körper in seine Elemente zertheilt. Führen wir ferner durch alle Puncte der Umfänge dieser Schnitte senkrechte Geraden, so wird jedem Elemente ein senkrechtes Prisma eingeschrieben und ein anderes umschrieben. Da nun der Cubikinhalt eines jeden senkrechten Prisma dem Producte aus seiner Grundfläche in die Höhe gleich ist, so wie der Flächeninhalt eines Rechteckes dem Producte aus seiner Grundlinie in die Höhe gleicht: so können wir die in §. 442. erläuterte Bestimmungsweise des Flächeninhaltes ebener Figuren auf die Bestimmung des Cubikinhaltes von Körpern sehr leicht dadurch übertragen, daß wir die Rechtecke mit senkrechten Prismen, die Theilungs- oder Grundlinien mit Theilungsflächen (Schnitten) oder Grundflächen und den Flächeninhalt mit dem Cubikinhalte vertauschen, so daß wir gegenwärtig unter y den Flächeninhalt der einen Grundfläche, unter x ihren Abstand von der anderen und unter F den Cubikinhalt des zwischen beyden

Grundflächen befindlichen Körpers begreifen. Besteht demnach Fig. wie in §. 442 zwischen x und y die Gleichung

$$y = Ax^a + Bx^b + Cx + \ldots,$$

so finden wir den Cubikinhalt dieses Körpers ebenfalls nach der Gleichung

$$F = A\frac{x^{a+1}}{a+1} + B\frac{x^{b+1}}{b+1} + C\frac{x^{c+1}}{c+1} + \ldots.$$

So ist z. B. in einem Prisma, dessen Höhe = x und Grundfläche = y = b = bx^0 ist, der Cubikinhalt = $b\frac{x^{0+1}}{0+1} = bx = xy$ = dem Producte aus der Grundfläche in die Höhe. Eben so sey (in Fig. 111.) CG = x, GH = y, CA = a, AD = b, AB = c, 111. folglich ADEB = bc; so ist, weil die zu ADEB parallelen Schnitte Rechtecke von derselben Grundlinie sind,

$$GH : AE = GP : AB = CG : CA,$$

somit

$$y : bc = x : a, \quad \text{und} \quad y = \frac{bc}{a} \cdot x.$$

Demnach ist der Cubikinhalt des Prisma

$$GHFC = \frac{bc}{a} \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} = \frac{bc}{a} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{bc}{a} x = \frac{xy}{2}.$$

Uebergeht x in a, folglich y in bc, so findet sich der Cubikinhalt des Prisma $AEFC = \frac{abc}{2}$, wie in §. 515.

§. 517.

Wir wollen das eben Gefundene auf die Bestimmung des Cubikinhaltes einer Pyramide anwenden. Bedeutet b den Inhalt der Grundfläche, a die Höhe der Pyramide, y den Flächeninhalt eines zur Grundfläche parallelen Schnittes und x den Abstand desselben von der Spitze; so gilt (vermöge §. 474. III.) die Proportion

$$y : b = x^2 : a^2,$$

folglich ist

$$y = \frac{b}{a^2} x^2.$$

Hieraus ergibt sich (nach 516) sogleich der Cubikinhalt der über der Fläche y stehenden Pyramide =

$$\frac{b}{a^2} \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{b}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3} = \frac{x}{3} \cdot \frac{b}{a^2} x^2 = \tfrac{1}{3} xy.$$

Fig. Uebergeht x in a, mithin y in b, so ist der Cubikinhalt der ganzen Pyramide $P = \frac{1}{3}ab$, nähmlich gleich dem dritten Theile des Productes aus ihrer Grundfläche und Höhe.

§. 518.

Hieraus ersehen wir, daß jede Pyramide der dritte Theil eines Prisma ist, welches mit ihr gleiche Höhe und Grundfläche besitzt, und daß Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen denselben Cubikinhalt haben.

§. 519.

113. Daß der Cubikinhalt einer Pyramide dem dritten Theile des Productes aus der Grundfläche in die Höhe gleich ist, läßt sich auch auf folgende Weise darthun, wenn man den Satz, daß Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen denselben Cubikinhalt besitzen, als an und für sich wahr zugesteht. Denn gilt dieser Satz, so folgt aus ihm sogleich, daß Pyramiden ihren Grundflächen und Höhen proportional sind, nähmlich daß, wenn P den Inhalt, B die Grundfläche und H die Höhe einer Pyramide vorstellt, $P = pBH$ ist, wofern p den Inhalt derjenigen Pyramide bedeutet, die zu ihrer Höhe die Längeneinheit (z. B. 1 Schuh) und zu ihrer Grundfläche die Flächeneinheit (z. B. 1 Quadrat-Schuh) hat. Nun sey ABG ein senkrechtes dreyseitiges Prisma, $AB = a$, $CD = b$ und senkrecht auf AB, endlich $AE = c$; so ist das Prisma $ABG = \frac{1}{2}ab.c = \frac{abc}{2}$. Man denke sich ferner durch E, F, C eine Ebene gelegt; so ist das Prisma ABG = der Pyramide ECFG + der Pyramide EABFC,

$$\text{also} = p.ABFE.CD + p.EFG.CG$$

$$= p.ab.c + p.\tfrac{1}{2}ab.c = 3p.\frac{abc}{2},$$

mithin ist

$$\frac{abc}{2} = 3p.\frac{abc}{2},$$

und . . . . . $p = \frac{1}{3}$;

demnach hat man . . $P = \frac{1}{3}BH$, nähmlich jede Pyramide ist gleich dem dritten Theile des Productes aus der Grundfläche in die Höhe.

§. 520. Fig.

Auch der Cubikinhalt eines (senkrechten oder schiefen) Kegels ist gleich dem dritten Theile des Productes aus der Grundfläche in die Höhe; weil man einen Kegel für eine Pyramide ansehen kann, deren Grundfläche ein Kreis ist.

§. 521.

Hieraus folgt:

I. Daß jede Pyramide dem dritten Theile eines Prisma, und jeder Kegel dem dritten Theile eines Cylinders von gleichen Grundflächen und Höhen gleich ist.

II. Daß Pyramiden und Kegel sich am Cubikinhalte gegen einander verhalten, wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen.

III. Daß Pyramiden und Kegel von gleichen Grundflächen, wie ihre Höhen, und von gleichen Höhen, wie ihre Grundflächen sich verhalten.

IV. Daß Pyramiden und Kegel am Cubikinhalte einander gleich sind, wenn ihre Grundflächen mit den Höhen in verkehrter Proportion stehen. Alles dieses sieht man sehr leicht ein, wenn man der einen Pyramide Cubikinhalt $= S$, Grundfläche $= B$, Höhe $= A$, und der anderen Pyramide Cubikinhalt $= s$, Grundfläche $= b$, und Höhe $= a$ setzt.

V. Daß man aus dem Cubikinhalte und der Grundfläche einer Pyramide oder eines Kegels die Höhe, und aus dem Cubikinhalte und der Höhe die Grundfläche bestimmen kann. Es sey z. B. der Cubikinhalt eines Kegels $= s = 10\,\mathfrak{Cb}^0\,72\,\mathfrak{Cb}^1$, die Grundfläche $= b = 7\,\mathfrak{Q}^0\,18\,\mathfrak{Q}^1$, und die Höhe $= x$; so ist $s = \frac{1}{3}bx$, und folglich $x = \frac{3s}{b} = \frac{3\,.\,(10\,\mathfrak{Cb}^0\,72\mathfrak{Cb}^1)}{(7\mathfrak{Q}^0\,18\mathfrak{Q}^1)} = 3\,.\,\frac{31}{3}\,\mathfrak{Cb}^0 : \frac{15}{2}\mathfrak{Q}^0$ $= \frac{62}{15}$ Klafter $= 4^0\,0^1\,9^{11}\,7^{111}\,2^{1V}$.

Man erhält eben diesen Werth für x, wenn man das gegebene s in Cubik-Zolle, und b in Quadrat-Zolle verwandelt, und dann gehörig reducirt.

§. 522.

Auch der Cubikinhalt einer parallel abgestutzten Pyramide läßt sich aus den beyden gegebenen parallelen Grundflächen, und aus der Höhe bestimmen, wenn man die Höhe des abgeschnittenen Stückes der Pyramide aufsucht, dann die ergänzte Pyramide

Fig. 114. und den abgeschnittenen Theil berechnet, und endlich das zweyte Resultat von dem ersten abzieht. Es sey z. B. AF eine abgestutzte Pyramide, ihre Höhe DM = a, die untere Grundfläche = B, und die obere parallele Grundfläche = b. Man verlängere in Gedanken die Seiten AD, BE, CF, bis sie in dem Puncte P zusammenstoßen, ziehe aus dem Puncte P auf die Ebene der Grundfläche ABC die Senkrechte PN; so ist PN die Höhe der ergänzten Pyramide ACBP, und PQ die Höhe der abgeschnittenen Pyramide DEFP. Nimmt man PQ = x; so ist PN = PQ + DM = x + a; es ist aber DEF : ABC = $PQ^2 : PN^2$ (474. III.), nähmlich $b : B = x^2 : (x+a)^2$; folglich ist

$$x : x+a = \sqrt{b} : \sqrt{B}.$$

Hieraus findet man durch übereinstimmende Subtraction (187. IV.)

$$x : a = \sqrt{b} : \sqrt{B} - \sqrt{b}$$

und

$$x+a : a = \sqrt{B} : \sqrt{B} - \sqrt{b},$$

sonach

$$x = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}, \qquad x+a = \frac{a\sqrt{B}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}.$$

Es ergibt sich also der Cubikinhalt

$$AF = ABCP - DEFP = \tfrac{1}{3}ABC.PN - \tfrac{1}{3}DEF.PQ$$

$$= \tfrac{1}{3}B.\frac{a\sqrt{B}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}} - \tfrac{1}{3}b.\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}} = \frac{a}{3}.\frac{B\sqrt{B}-b\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}$$

$$= \frac{a}{3}(B+b+\sqrt{Bb}) \quad \text{oder auch}$$

$$= a.\frac{B+b+\sqrt{Bb}}{3},$$

das ist: der Cubikinhalt einer abgestutzten Pyramide wird erhalten, wenn man zwischen der oberen und unteren Grundfläche eine mittlere geometrische proportionale Fläche sucht, diese drey Flächen zusammen addirt, und ihre Summe mit dem dritten Theile der Höhe multiplicirt, oder der Cubikinhalt einer abgekürzten Pyramide gleicht dem Producte ihrer Höhe in das arithmetische Mittel von ihren Grundflächen und von dem geometrischen Mittel derselben.

Es ist leicht einzusehen, daß sich dieser Satz auf alle Gattungen der Pyramiden, und auch auf die Kegel erstreckt; nur ist

hiezu erforderlich, daß die beyden Grundflächen mit einander pa- Fig.
rallel laufen.

§. 523.

Auch der Cubikinhalt eines schief abgeschnittenen dreyseitigen 115.
Prisma AECDFB läßt sich bestimmen. Er ist gleich dem dritten Theile der Summe seiner drey parallelen Seiten multiplicirt mit der sie senkrecht durchschneidenden Fläche MNP, oder gleich dem Producte aus dem arithmetischen Mittel seiner drey parallelen Kanten in die auf ihnen senkrechte Durchschnittsfläche.

Denn der Cubikinhalt AECDFB ist

$$
\begin{aligned}
&= \text{der vierseitigen Pyramide AENMC}\\
&\quad + \text{der dreyseitigen Pyramide MCNP}\\
&\quad + \text{der dreyseitigen Pyramide MDNP}\\
&\quad + \text{der vierseitigen Pyramide MNFBD}\\
&= \tfrac{1}{3}\,AENM\,.\,QP + \tfrac{1}{3}\,MNP\,.\,PC\\
&\quad + \tfrac{1}{3}\,MNP\,.\,PD + \tfrac{1}{3}\,MNFB\,.\,QP\\
&= \tfrac{1}{3}\,(AENM + MNFB)\,.\,QP\\
&\quad + \tfrac{1}{3}\,(PC + PD)\,.\,MNP\\
&= \tfrac{1}{3}\,AEFB\,.\,QP + \tfrac{1}{3}\,MNP\,.\,CD\\
&= \tfrac{1}{3}\,(AB + EF)\,.\,\tfrac{1}{2}\,MN\,.\,PQ + \tfrac{1}{3}\,CD\,.\,MNP \quad (443.)\\
&= \tfrac{1}{3}\,(AB + EF)\,.\,MNP + \tfrac{1}{3}\,CD\,.\,MNP \quad (439.)\\
&= \frac{AB + CD + EF}{3}\,.\,MNP.
\end{aligned}
$$

§. 524.

Mit Hülfe dieses Satzes lassen sich nun die Cubikinhalte 116.
von mehreren unregelmäßigen Körpern berechnen. So z. B. ist der Cubikinhalt des schief abgeschnittenen vierseitigen Prisma

$$
\begin{aligned}
ABFGC = {} & \tfrac{1}{2}\,MN\,.\,PQ\,.\,\frac{AD + BC + HE}{3}\\
& + \tfrac{1}{2}\,PR\,.\,PQ\,.\,\frac{AD + HE + GF}{3},
\end{aligned}
$$

wenn MNPR die senkrecht durchschneidende Fläche, und PQ die Entfernung der zwey parallelen Grundflächen, nähmlich die Höhe dieses Körpers vorstellt; denn durch die Ebene AHED wird dieses Prisma in zwey dreyseitige schief abgeschnittene Prismen

Fig. 117. zerlegt. Ingleichen der zeltförmige Körper ABDEC ist $= FGH \cdot \frac{AB+ED+CP}{3}$, wenn die drey Seiten mit einander parallel laufen, und von FGH senkrecht durchschnitten werden.

118. Eben so ist der Cubikinhalt des Körpers AGHB (Fig. 118.), bey dem die vier Seiten AE, BF, DH, CG parallel laufen, und die Vierecke ABDC, EFHG nicht eben sind

$$= PMN \cdot \frac{DH+AE+CG}{3} + PMQ \cdot \frac{DH+AE+BF}{3},$$

wenn man sich vorstellt, daß durch die zwey parallelen Seiten DH und AE eine Ebene gelegt, und der Durchschnitt MNPQ auf die vier parallelen Seiten senkrecht sey. Durch dieselbe Zerlegung in zwey schief abgeschnittene dreyseitige Prismen läßt sich der Cubikinhalt eines Grabens, einer Brustwehre, eines Dammes, eines Merlons, und einer Schießscharte bey einer regelmäßigen Batterie, und mehrerer anderer Körper dieser Art berechnen.

§. 525.

Wenn ein unregelmäßiger Körper so beschaffen ist, daß er sich weder in Pyramiden, noch in Prismen, noch in andere bekannte Körper zerlegen läßt; so pflegt man seinen Cubikinhalt durch verschiedene andere Kunstgriffe zu suchen, als z. B. durch das Einlegen in ein mit Wasser angefülltes senkrechtes Parallelepiped, oder in einen mit Wasser gefüllten Cylinder. Man kann auch den Cubikinhalt eines Körpers aus seinem Gewichte bestimmen: z. B. es sey das Gewicht eines ausgebohrten metallenen Bombenmörsers = 1000 Pf., das Gewicht eines Wiener Cubik-Schuhes von diesem Metalle ist = 480 Wiener Pf., und der Cubikinhalt des Mörsers ohne Bohrung sey = x Cubik-Schuhe, so ist $x \cdot 480 = 1000$, und folglich $x = 2\frac{1}{12}$ Wiener Cb^1. Umgekehrt aus dem Cubikinhalte des Körpers, und aus dem Gewichte eines Cubik-Schuhes der Materie, woraus der Körper besteht, kann das Gewicht des Körpers bestimmt werden. Es sey z. B. der Cubikinhalt eines Körpers = a Cb^1, sein Gewicht = x Pf., und das Gewicht eines Cubik-Schuhes der Materie des Körpers = b Pf., so ist $x = ab$ Pf. Aus dieser Gleichung folgt auch $b = \frac{x}{a}$ Pfund,

das ist, wenn man das Gewicht x eines Körpers durch seinen Fig.
in Cubik-Schuhen ausgedrückten Cubikinhalt a dividirt; so erhält man das Gewicht eines Cubik-Schuhes der Materie, woraus der Körper besteht. Dieses Gewicht eines Cubik-Schuhes von einer Materie wird auch sonst die eigenthümliche Schwere (gravitas specifica) oder das eigenthümliche Gewicht dieser Materie genannt.

§. 526.

Der Cubikinhalt einer Kugel ist gleich dem dritten Theile des Productes aus der Oberfläche in den Halbmesser derselben.

Denn man bilde sich nur ein, daß die Kugelfläche in eine unendliche Anzahl gleicher Theile (z. B. in unendlich kleine Dreyecke) getheilet sey, und daß aus den Spitzen dieser Dreyecke gerade Linien zu dem Mittelpuncte der Kugel gezogen werden; so wird dadurch die Kugel in Elementar-Pyramiden von gleicher Höhe zertheilet. Nun ist der Cubikinhalt einer jeden solchen Elementar-Pyramide = dem dritten Theile des Productes aus dem Halbmesser in den unendlich kleinen Theil der Kugelfläche, welche dieser Pyramide zur Grundfläche dienet; es ist also auch die Summe der Cubikinhalte aller dieser Elementar-Pyramiden, nähmlich der Cubikinhalt der Kugel = dem dritten Theile des Productes aus dem Halbmesser in die Summe aller dieser unendlich kleinen Theile der Kugelfläche, d. i. in die Oberfläche der Kugel.

§. 527.

Da sich dieses ebenfalls von einem Kugelausschnitte sagen läßt; so ist auch der Cubikinhalt eines Kugelausschnittes gleich dem dritten Theile des Productes aus dem Halbmesser in die Oberfläche des Kugelausschnittes.

§. 528.

Setzen wir nun den Halbmesser einer Kugel = a, so ist eine größte Kreisfläche $= a^2\pi$, die Kugelfläche $= 4a^2\pi$ (497.), und folglich der Cubikinhalt $= \frac{1}{3}a \cdot 4a^2\pi = \frac{4}{3}a^3\pi$; der Cubikinhalt der Halbkugel aber ist $= \frac{2}{3}a^3\pi$. So z. B. ist der Cubikinhalt unseres Erdballes, wenn man ihn für eine Kugel ansieht = 2659074000 geographischen Cubik-Meilen; und die Oberfläche ist

Fig. nach dieser Voraussetzung = 9281922 geographischen Quadratmeilen, weil 15 geographische Meilen 1 Grad des größten Umkreises der Erdkugel ausmachen.

87. Daß der Cubikinhalt der Halbkugel $= \frac{2}{3}a^3\pi$ ist, läßt sich auch so erweisen. Dreht sich (in Fig. 87) die Fläche CMBA um ihre geradlinige Seite CM, so erzeugt sie eine Kugelzone, deren Inhalt auf folgende Weise bestimmt werden kann. Die von BM beschriebene Grundfläche ist ein Kreis, also ihr Inhalt $y = \pi . BM^2$ oder, wenn man $CA = a$ und $CM = x$ setzt, $y = \pi(a^2 - x^2) = \pi a^2 - \pi x^2$. Hieraus folgt nach §. 516 der Cubikinhalt dieser Zone

$$S = \pi a^2 x - \frac{\pi x^3}{3} = \pi x \left(a^2 - \frac{x^2}{3}\right).$$

Setzen wir nun $x = a$, so ist $S = a^3\pi - \frac{1}{3}a^3\pi = \frac{2}{3}a^3\pi =$ dem Cubikinhalte der Halbkugel, und $\frac{4}{3}a^3\pi =$ der ganzen Kugel.

Anmerkung. Noch einleuchtender, und eben so unabhängig von der Oberfläche einer Kugel läßt sich der Cubikinhalt derselben auf folgende Art bestimmen.

105. Es sey ACT der Quadrant eines größten Kreises; auf dem Halbmesser CT errichte man das Quadrat ACTS und verbinde die Puncte C und S durch die Gerade CS. Bewegt sich die ganze Figur um die unbewegliche Achse AC, so wird der Quadrant ACT die Halbkugel, das Quadrat ACTS einen Cylinder, und das rechtwinkelige Dreyeck CAS einen geraden Kegel beschreiben. Alle diese Figuren haben eine gemeinschaftliche Höhe; diese ist der Halbmesser AC. Wenn man demnach diesen Halbmesser in eine unendliche Anzahl gleicher Theile theilet, und durch die Theilungspuncte Parallelen zu AS zieht; so sind die erzeugenden Flächen, folglich auch die Körper selbst, in eine gleiche Anzahl Elemente zerlegt. Man setze den Halbmesser der Kugel $AC = a$, die gemeinsame Höhe der Elemente $= h$, und $CP = x$; so ist auch $PI = x$, weil in dem Dreyecke CAS die Seiten AC und AS einander gleich sind, und PI parallel zu AS gezogen ist. Ferner ist $PK = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ und $PH = a$. Nun ist in der Entfernung $CP = x$ vom Mittelpuncte das Element der Kugel $= \pi h (a^2 - x^2) = \pi h a^2 - \pi h x^2$, das gleichnahmige Element des Kegels $= \pi h x^2$, und das gleichnahmige Element des Cylinders $= \pi h a^2$; woraus man ersieht,

daß jedes Element der Kugel dem Ueberschusse des Elementes des Cylinders über jenes des Kegels gleich ist. Folglich ist auch die Summe aller Elemente des Cylinders, vermindert um die Summe aller Elemente des Kegels, gleich der Summe aller Elemente der Halbkugel; oder der Cubikinhalt einer Halbkugel ist der Differenz der Cubikinhalte eines Cylinders und Kegels gleich, welche beyde den Halbmesser der Kugel zur Höhe, und einen größten Kreis der Kugel zur Grundfläche haben. Es ist aber der Cubikinhalt dieses Cylinders $= a^2\pi . a = a^3\pi$, und der Cubikinhalt des Kegels $= \frac{1}{3}a^2\pi . a = \frac{1}{3}a^3\pi$; folglich ist der Cubikinhalt der Halbkugel $= a^3\pi - \frac{1}{3}a^3\pi = \frac{2}{3}a^3\pi$, und der Cubikinhalt der ganzen Kugel $= \frac{4}{3}a^3\pi = \frac{1}{3}a . 4a^2\pi =$ der Oberfläche der Kugel, multiplicirt mit dem dritten Theile des Halbmessers. Fig. 105.

Wenn die Oberfläche der Kugel nicht schon aus (§. 496.) bekannt wäre, so könnte man dieselbe aus dem eben gefundenen Ausdrucke des cubischen Inhaltes auf folgende Art viel kürzer ableiten, als es dort möglich war. Denn es ist klar, daß, wenn man die Kugel in pyramidalische, in den Mittelpunct der Kugel zusammenstoßende Elemente von unendlich kleiner Grundfläche zertheilt denkt, der Cubikinhalt derselben dem dritten Theile des Productes aus dem Halbmesser in die Oberfläche, welche wie immer beschaffen seyn mag, gleich ist (526). Setzen wir die unbekannte Oberfläche $= S$, so ist der Cubikinhalt $= \frac{1}{3}aS$; derselbe ist aber auch $= \frac{4}{3}a^3\pi$, folglich hat man $\frac{1}{3}aS = \frac{4}{3}a^3\pi$; nähmlich es ist die Oberfläche einer Kugel $S = 4a^2\pi$ viermahl so groß als eine größte Kreisfläche derselben, wie oben. Diejenigen Anfänger, deren Verstandeskräfte zu eingeschränkt sind, um die in §. 496 gegebene Ableitung der Oberfläche einer Kugel vollkommen einzusehen, können sich zu diesem Zwecke der hier gezeigten weit kürzeren Methode bedienen.

§. 529.

Der Cubikinhalt eines der Kugel umschriebenen Cylinders AG ist $= 2a^3\pi$, wenn wir den Halbmesser $AK = CE = a$ setzen; und der Cubikinhalt der Kugel ist $= \frac{4}{3}a^3\pi$. Folglich verhält sich der Cylinder AG zu der Kugel $MN = 2a^3\pi : \frac{4}{3}a^3\pi$, oder $AG : MN = 3 : 2$, nähmlich es ist $MN = \frac{2}{3}AG$, das heißt, 106.

Fig. 106. die Kugel ist gleich zwey Drittheilen des umschriebenen gleichseitigen Cylinders.

Eben so läßt sich erweisen, daß der umschriebene gleichseitige Kegel, der umschriebene Cylinder, und die Kugel sich am Cubikinhalte verhalten wie 9:6:4, nähmlich daß die Verhältnisse dieser Körper den Verhältnissen ihrer ganzen Oberflächen gleich sind (497. IV.).

§. 530.

104. Wenn wir bey dem Kugelausschnitte dCeBd die Gerade $Bc = x$, und den Halbmesser $BC = a$ setzen; so ist die Oberfläche $dBe = 2a\pi x$ (499.), und folglich der Cubikinhalt dieses Ausschnittes $= 2a\pi x \cdot \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a^2x\pi$. Ziehen wir nun von diesem Kugelausschnitte den Kegel deC ab; so erhalten wir den Cubikinhalt des Kugelabschnittes dceBd. Es ist aber der Kegel $deC = (dc)^2\pi \cdot \frac{1}{3}cC = [\sqrt{(2ax - x^2)}]^2\pi \cdot \frac{1}{3}(a - x) = \frac{2a^2x\pi - 3ax^2\pi + x^3\pi}{3}$. Sonach ist der Kugelabschnitt dceBd $= \frac{2a^2x\pi - 2a^2x\pi + 3ax^2\pi - x^3\pi}{3} = ax^2\pi - \frac{1}{3}x^3\pi$. Aus der Gleichung $y^2 = 2ax - x^2 = (dc)^2$ findet man $a = \frac{y^2 + x^2}{2x}$; folglich ist derselbe Cubikinhalt auch $=$

$$\frac{xy^2\pi + x^3\pi}{2} - \frac{1}{3}x^3\pi = \frac{xy^2\pi}{2} + \frac{x^3\pi}{6}.$$

Setzen wir $dc = z = 2y$, so ist $y = \frac{1}{2}z$, und somit eben dieser Abschnitt $dceBd = \frac{1}{8}xz^2\pi + \frac{1}{6}x^3\pi$.

§. 531.

119. Wenn der Halbmesser der Kugel $CM = a$, und $CP = x$ gesetzt wird; so ist die Zone $ADEB = \pi a^2x - \frac{\pi}{3}x^3$ (528.); und aus demselben Grunde, wenn $CQ = x'$ gesetzt wird, ist die Zone $AGFB = \pi a^2x' - \frac{\pi}{3}x'^3$, es ist also auch der Inhalt der Zone

$$DGFE = K = \pi a^2(x' - x) - \frac{\pi}{3}(x'^3 - x^3)$$
$$= \pi a^2(x' - x) - \frac{\pi}{3}(x' - x)(x'^2 + x'x + x^2)$$
$$= \frac{\pi}{3}(x' - x)[3a^2 - (x'^2 + x'x + x^2)].$$

Setzen wir nun die Dicke dieser Zone $PQ = c$, den Halbmesser der größeren Grundfläche $PE = b$, und den Halbmesser der kleineren Grundfläche $QF = b'$; so ist $c = x' - x$, also Fig. 119.

$$c^2 = x'^2 - 2x'x + x^2.$$

Es ist aber auch $b^2 = a^2 - x^2$

und $b'^2 = a^2 - x'^2$.

Multiplicirt man jede der beyden letzten Gleichungen mit 3 und addirt sie zu der ihnen vorangehenden, so erhält man

$$3b^2 + 3b'^2 + c^2 = 6a^2 - 2(x'^2 + x'x + x^2),$$

folglich

$$3a^2 - (x'^2 + x'x + x^2) = \tfrac{1}{2}(3b^2 + 3b'^2 + c^2).$$

Somit finden wir die Zone

$$DGFE = K = \frac{\pi}{6} c (3b^2 + 3b'^2 + c^2),$$

durch ihre Dicke und durch die Halbmesser ihrer Grundflächen ausgedrückt.

Setzen wir in diesem Ausdrucke $b' = 0$, so ist der Kugelabschnitt $DME = \frac{\pi}{6} c (3b^2 + c^2) = \frac{\pi}{2} b^2 c + \frac{\pi}{6} c^3$. Setzen wir hingegen $c = 2a = MN$, so ist b und $b' = 0$, und $K = \frac{4}{3}\pi a^3 =$ dem Cubikinhalte der ganzen Kugel. Setzen wir endlich $b = b' = \frac{1}{2}c$, so ist $K = \frac{}{12} c^3\pi =$ dem Cubikinhalte einer Zone, deren Dicke den Durchmessern beyder Grundflächen gleich ist.

§. 532.

Wenn man den Cubikinhalt einer Kugel, deren Halbmesser $= a$ und Durchmesser $= d$ ist, mit s, und den Cubikinhalt einer anderen Kugel, deren Halbmesser $= A$ und Durchmesser $= D$ ist, mit S bezeichnet; so ist

$$s = \tfrac{4}{3}a^3\pi = \frac{\pi}{6} d^3, \quad \text{und} \quad S = \tfrac{4}{3}A^3\pi = \frac{\pi}{6} D^3.$$

Folglich ist auch $s : S = a^3 : A^3 = d^3 : D^3$, d. i. die Cubikinhalte der Kugeln verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Halbmesser, oder ihrer Durchmesser, oder überhaupt wie die dritten Potenzen ihrer gleichnahmigen Abmessungen. Nun aber verhalten sich auch die Cubikinhalte der Kugeln von einerley Materie wie ihre Gewichte; folglich verhalten sich auch die Gewichte der Kugeln von einer und derselben Materie wie die dritten Po-

Fig. tenzen ihrer Halbmesser oder ihrer Durchmesser; und somit auch die Durchmesser wie die Cubikwurzeln der Gewichte; sind nähmlich p, P die Gewichte und d, D die Durchmesser zweyer Kugeln von der nähmlichen Materie, so ist $p : P = d^3 : D^3$, also auch

$$p : d^3 = P : D^3 \quad \text{und} \quad d : \sqrt[3]{p} = D : \sqrt[3]{P}$$

oder

$$\frac{d}{\sqrt[3]{p}} = \frac{D}{\sqrt[3]{P}}.$$

Es sey z. B. der Durchmesser einer 1pfündigen Kugel von einer gewissen Materie = D Zollen, so ist der Durchmesser d einer ppfündigen Kugel derselben Materie $d = D \sqrt[3]{p}$ Zollen.

In der k. k. Artillerie sind eiserne Voll- und Hohlkugeln, und bleyerne Vollkugeln eingeführt. Dem Gewichtsbetrage der bleyernen Kugeln liegt das Wiener, jenem der eisernen Kugeln aber das sogenannte Nürnberger Pfund zu Grunde, welches im Mittel 0,817 (oder nahe $^9/_{11}$, weniger genau $^5/_6$) Wiener Handelsgewichts-Pfund beträgt. Bey den eisernen Vollkugeln deutet ihre Benennung zugleich ihr wirkliches Gewicht an, so daß eine 24pfündige Vollkugel in der That 24 Nürnberger Pfund oder 0,817.24 Wiener Pfund, nähmlich 19 Pf. 19 Loth wiegt. Die 3- und 6pfündigen Granaten, welche so groß als die gleichnahmigen Vollkugeln sind, würden 3 und 6 Nürnberger Pfund wiegen, wenn sie nicht hohl wären. Die Benennung der übrigen Hohlkugeln (Granaten und Bomben) drückt das Gewicht von steinernen Vollkugeln aus, welche mit jenen in der Größe übereinkamen und vor der Erfindung der Bomben gebraucht wurden; eine solche steinerne Kugel nähmlich, die den Durchmesser einer unserer 60pfündigen Bomben hatte, wog 60 Nürnberger Pfund. — Die Durchmesser aller dieser Kugeln pflegt man in Wiener Zollen und ihren Unterabtheilungen anzugeben, und zwar ist der Durchmesser

der 1pf. eisernen Vollkugel $= 1^{\text{II}}\ 10^{\text{III}}\ 8^{\text{IV}}\ 2^{\text{V}} = 1^{\text{II}},890046$,

„ „ Hohlkugel oder steinernen Kugel $= 2^{\text{II}}\ 10^{\text{III}}\ 5^{\text{IV}}\ 7^{\text{V}} = 2^{\text{II}},872106$,

„ „ bleyernen Kugel $= 1^{\text{II}}\ 8^{\text{III}}\ 6^{\text{IV}}\ 9^{\text{V}} = 1^{\text{II}},713542$;

folglich findet man den Durchmesser

Fig.

der ppf. eisernen Kugel $d = 1{,}890046 \sqrt[3]{p}$,

» » steinernen » $d' = 2{,}872106 \sqrt[3]{p'}$,

» » bleyernen » $d'' = 1{,}713542 \sqrt[3]{p'}$.

Um diese Ausdrücke zu vereinfachen, ertheilen wir ihnen die Form

$$\frac{d}{\sqrt[3]{p}} = 1{,}890046 = \sqrt[3]{6{,}751762} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{54{,}014096}$$

oder nahe

$$= \frac{1}{2}\sqrt[3]{54} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2},$$

oder wenn man 6,751762 nach §. 111 abkürzt,

$$= \sqrt[3]{\tfrac{27}{4}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}};$$

$$\frac{d'}{\sqrt[3]{p'}} = 2{,}872106 = \sqrt[3]{23{,}691981} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{639{,}683487}$$

oder nahe

$$= \frac{1}{3}\sqrt[3]{640} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{10} = \frac{40}{3\sqrt[3]{100}},$$

oder nach §. 111. abgekürzt

$$= \sqrt[3]{\tfrac{308}{13}} = 2\sqrt[3]{\tfrac{77}{26}};$$

$$\frac{d''}{\sqrt[3]{p''}} = 1{,}713542 = \sqrt[3]{5{,}031347},$$

oder nahe

$$= \sqrt[3]{5} = \frac{5}{\sqrt[3]{25}},$$

oder nach §. 111,

$$= \sqrt[3]{\tfrac{161}{32}} = \frac{1}{4}\sqrt[3]{322}.$$

Man erhält demnach näherungsweise

für eiserne Kugeln $d = 1\frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{2p}$,

» steinerne » $d' = 1\frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{10p'}$ oder $= 2\sqrt[3]{\frac{77}{26}p'}$,

» bleyerne » $d'' = \sqrt[3]{5p''}$ oder $= \frac{1}{4}\sqrt[3]{322p''}$;

Fig. welche Gleichungen sich leicht in Worte übersetzen lassen. Zugleich erhellet aus den Gleichungen

$$\frac{d}{\sqrt[3]{p}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}, \quad \frac{d'}{\sqrt[3]{p'}} = \frac{13\frac{1}{3}}{\sqrt[3]{100}}, \quad \frac{d''}{\sqrt[3]{p''}} = \frac{5}{\sqrt[3]{25}},$$

daß der Durchmesser

einer 4pf. eisernen Kugel nahe 3 Zoll
» 100 » Bombe » $13\frac{1}{3}$ »
» 25 » Bleykugel » 5 » beträgt.

Aus dem angeführten Satze (die Gewichte der Kugeln von einerley Materie verhalten sich gegen einander, wie die dritten Potenzen ihrer Durchmesser) folgt, daß das Gewicht einer Kugel 8mahl größer wird, wenn man ihren Durchmesser verdoppelt, daß das Gewicht einer Kugel 64mahl kleiner wird, wenn man ihren Durchmesser 4mahl kleiner macht, das ist durch 4 dividirt: mit einem Worte, daß der Durchmesser einer apfündigen Kugel nmahl genommen, den Durchmesser einer n^3apfündigen Kugel gibt u. s. w. Ueberdieß lassen sich mittelst derselben Proportion noch viele andere Aufgaben auflösen, die jedoch mehr speculativ als practisch nützlich sind.

§. 533.

Bey ähnlichen Körpern verhalten sich die Cubikinhalte gegeneinander, wie die dritten Potenzen gleichnahmiger Abmessungen.

Bey ähnlichen Pyramiden läßt sich die Richtigkeit dieses Satzes daraus entnehmen, daß, wenn p, P die Inhalte, b, B die Grundflächen, h, H die Höhen zweyer ähnlicher Pyramiden vorstellen, nicht bloß (nach §. 521. II.)

$$p : P = bh : BH,$$

sondern auch (vermöge §. 474. III.)

$$b : B = h^2 : H^2,$$

folglich (nach §. 189.)

$$p : P = h^3 : H^3$$

statt finden muß. Sind aber a, A irgend zwey gleichnahmige Ab-

messungen dieser Pyramiden, so hat man (nach §. 474. II.) auch Fig.

$$h : H = a : A,$$

daher ist (§. 187. VII.)

$$p : P = a^3 : A^3.$$

Wenn dagegen die ähnlichen Körper keine Pyramiden, sondern von einer andern Form sind, so müssen sie sich wegen ihrer Aehnlichkeit in gleich viele der Ordnung nach ähnliche Pyramiden zerlegen lassen. Bezeichnen nun s und S die Cubikinhalte dieser Körper; a, A zwey gleichnahmige Abmessungen derselben; p, p′, p″,.... die Inhalte der Pyramiden, aus denen der erste, und P, P′, P″,... die Inhalte der Pyramiden, aus welchen der zweyte zusammengesetzt ist; so folgt aus der Aehnlichkeit dieser Pyramiden

$$p : P = p' : P' = p'' : P'' = \ldots\ldots = a^3 : A^3,$$

daher ist (§. 191.)

$$p + p' + p'' + \text{etc.} : P + P' + P'' + \text{etc.} = a^3 : A^3,$$

und somit

$$s : S = a^3 : A^3.$$

Anmerkung. Bey der gegenwärtigen Entwicklung dieses Lehrsatzes werden die vorkommenden Linien, arithmetisch als Zahlen, in Erwägung gezogen. Man stellt sich nähmlich vor, daß jede dieser Linien durch eine für die Einheit angenommene Linie ausgemessen sey. Durch die Zahlen nun, welche anzeigen, wie oft die für die Einheit angenommene Linie in jeder anderen Linie enthalten ist, werden diese Linien selbst vorgestellt. Auf eben diese Art ist der (im §. 403.) gegebene erste Beweis des berühmten Pythagorischen Lehrsatzes durch Zahlen ausgeführt, welche die Seiten des rechtwinkeligen Dreyeckes vorstellen. Die zweyten Potenzen dieser Zahlen sind die Quadrate der durch dieselben bezeichneten Seiten. Der zweyte Beweis dieses Lehrsatzes hingegen ist rein geometrisch. Bey dieser Gelegenheit ist es nicht überflüssig zu erinnern, daß es in vielen Fällen vortheilhaft ist, sowohl den Pythagorischen Lehrsatz, als auch den Lehrsatz von der Proportionalität der gleichnahmigen Seiten ähnlicher Dreyecke (§. 399.) in arithmetischer Bedeutung zu gebrauchen, so wie es bisher meistens geschehen ist, und auch noch im Folgenden vorkommen wird.

Fig. Ferner kann man hier noch erinnern, daß ein Product aus drey Linien oder Dimensionen jederzeit einen Körper vorstellt, wenn die Einheit dieses Productes durch einen Würfel auf derjenigen Linie ausgedrückt ist, mit der die drey Dimensionen ausgemessen sind. Es sey z. B. der Halbmesser der Grundfläche eines schiefen Kegels = x Schuhen, der halbe Umkreis = y Schuhen, und der dritte Theil der Höhe dieses Kegels = z Schuhen; so ist dieser Kegel = xyz Cubik-Schuhen. Eben diese xyz Cubik-Schuhe sind auch einem senkrechten Parallelepiped gleich, dessen Länge = x, Breite = y, und Höhe = z Schuhen ist; u. s. w. Ein Product aus zwey Linien oder Dimensionen hingegen stellt eine Fläche vor, wenn die Einheit dieses Productes durch ein Quadrat auf derjenigen Linie ausgedrückt ist, mit der die zwey Dimensionen ausgemessen sind. Aus diesem Grunde pflegt man xyz, 2axy, $3axz$, a^2x, $10x^3$, $\frac{x^4}{a}$, $\frac{a^2b^5}{c^4}$, $x^2\sqrt{ab}$, u. s. w. körperliche, hingegen ax, 2ab, $\frac{4a^2}{x}$, $x\sqrt{(a^2-x^2)}$, u. s. w. flache, und endlich x, $3a$, $\frac{2x^3}{5a^2}$, $\frac{y^2\sqrt[3]{(a^3+x^3)}}{a^2-x^2}$, u. s. w. lineäre Ausdrücke zu nennen, wenn durch jeden dieser Buchstaben eine Linie angezeigt ist.

§. 534.

Wir wollen diese Abhandlung von den Körpern mit folgenden Aufgaben beschließen.

I. Es ist die Seite eines Würfels gegeben; man soll die Seite eines andern Würfels finden, dessen Cubikinhalt zu dem des gegebenen sich wie n:m verhält.

Auflösung. Man messe die gegebene Seite des Würfels mit einem genau eingetheilten Maßstabe aus. Es sey z. B. die Länge dieser Seite = a = 5000 Puncten nach dem Wiener Schuhe, die unbekannte Seite des gesuchten Würfels aber sey = x; ferner sey der Cubikinhalt des gegebenen = S, und der des gesuchten Würfels = s; so ist vermöge der Bedingung der Aufgabe $S:s = m:n$; es ist aber $S:s = a^3:x^3$; folglich auch $m:n = a^3:x^3$; und endlich $x = a\sqrt[3]{\frac{n}{m}}$. Es sey z. B. $n = 2$, und $m = 1$; so ist $x = 5000\sqrt[3]{2} = 5000.1{,}25992 = 6299\frac{3}{5}$ Puncten desselben

Wiener Schuhes. Man verzeichne demnach nur mit Hülfe dieses Fig.
Maßstabes eine gerade Linie von $6299\frac{3}{5}$ Puncten; so ist diese Gerade die gesuchte Seite des Würfels, der am Cubikinhalte zweymahl so groß ist, als der gegebene Würfel.

Die eben angeführte Aufgabe von der Verdoppelung des Würfels hat in den ältesten Zeiten den Meßkünstlern viel Kopfbrechens verursachet. Sie suchten immer die unbekannte Seite des Würfels durch eine geometrische Verzeichnung zu bestimmen, weil ihnen die Kunstgriffe der heutigen Rechenkunst vielleicht nicht bekannt waren. Wäre ihnen die gegenwärtige Rechenkunst nebst dem geometrischen Maßstabe bekannt gewesen; so hätten sie gewiß nicht so viel Mühe auf die Erfindung der geometrischen Verzeichnungen verwendet, weil es eine ausgemachte Wahrheit ist, daß die bey der Auflösung einer Aufgabe gesuchten Linien durch Rechnung und mit Beyhülfe eines gut eingetheilten Maßstabes in der Ausübung viel genauer, als durch geometrische Verzeichnung bestimmt werden können.

II. Man soll den Durchmesser einer gegossenen eisernen Kugel von 24 Wiener Pfunden nach dem Wiener Maße daraus bestimmen, daß ein Wiener Cubikschuh des gegossenen Eisens $409\frac{1}{2}$ Wiener Pfunde wiegt.

Auflösung. Es sey der Durchmesser dieser Kugel $= x$ Wiener Schuhen; so ist der Cubikinhalt $= \frac{1}{6}x^3\pi$ Cubikschuhen. Nun verhalten sich die Cubikinhalte der Körper von einer und derselben Materie, wie ihre Gewichte; hier nähmlich

$$1\,\text{Cb}^1 : \tfrac{1}{6}x^3\pi\,\text{Cb}^1 = 409\tfrac{1}{2}\,\text{Pf.} : 24\,\text{Pf.}$$

Folglich ist

$$x = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 24}{409\frac{1}{2}\pi}} = \sqrt[3]{\frac{283}{819\pi}}$$

$= 0{,}4819$ Wiener Schuhen $= 5^{11}, 9^{111}, 5^{1v}$.

III. 1 Wiener Cubikschuh Kriegspulver wiegt 50 Wiener Pfunde; man soll nun ein hpfündiges cylindrisches Pulver-Ciment nach dem Wiener Schuhe bestimmen, bey dem der innere Durchmesser der Grundfläche sich zur inneren Höhe verhält, wie m : n.

Fig. Auflösung. Man setze den inneren Durchmesser = x Wiener Schuhen und die Höhe = y; so ist $y = \frac{nx}{m}$, weil m:n = x:y sich verhält; und der Cubikinhalt dieses Cylinders ist

$$\frac{\pi}{4} x^2 y = \frac{1}{4} x^2 \pi \cdot \frac{nx}{m} = \frac{nx^3\pi}{4m} \text{ Cb}^1.$$

Nun ist

$$1 \text{ Cb}^1 : \frac{nx^3\pi}{4m} \text{ Cb}^1 = 50 \text{ Pf.} : b \text{ Pf.},$$

folglich auch

$$x = \sqrt[3]{\frac{4mb}{50n\pi}} \text{ und } y = \sqrt[3]{\frac{4n^2b}{50m^2\pi}}.$$

Setzen wir nun m = 1, n = 2, b = $\frac{1}{4}$ Pf.; so ist

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{100\pi}} = 0{,}1471 \text{ Wiener Schuhen} = 1^{11}\,9^{111}\,2^{1v} = \text{dem}$$

Durchmesser der Grundfläche eines 8löthigen Pulver-Ciments, dessen Höhe = $2 . (1^{11}\,9^{111}\,2^{1v}) = 3^{11}\,6^{111}\,4^{1v}$ ist. Auf dieselbe Weise können die Abmessungen aller übrigen Pulver-Cimente berechnet werden, wenn man nur für m, n und b ihre Werthe setzt.

IV. Es ist die Seite einer gleichseitigen viereckigen Pyramide gegeben; man soll die Seite eines Würfels finden, dessen Cubikinhalt jenem der Pyramide gleich ist.

Auflösung. Es sey die gegebene Seite der Pyramide = a; so ist nach vorgenommener Untersuchung, die ich dem eigenen Nachdenken des Lesers überlasse, der Cubikinhalt dieser Pyramide = $\frac{1}{6}a^3\sqrt{2}$. Es sey ferner die unbekannte Seite des Würfels = x; so ist sein Cubikinhalt = x^3. Nun ist vermöge der Bedingung der Aufgabe $x^3 = \frac{1}{6}a^3\sqrt{2}$; folglich ist

$$x = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{6}a^3\sqrt{2})} = \frac{a}{\sqrt[6]{18}}.$$

V. Es ist der Durchmesser einer Kugel gegeben; man soll die Seite eines Würfels von gleichem Inhalte finden.

Auflösung. Es sey der gegebene Durchmesser der Kugel = d, und die gesuchte Seite des Würfels = x; so ist $x^3 = \frac{1}{6}d^3\pi$, und $x = d\sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi} = d . 0{,}805995977 = \frac{25d}{31}$ beynahe, wenn man den Bruch 0,805995977 (nach 110. 111.) in

$\frac{25}{31}$ verwandelt. Man theile demnach nur den Durchmesser der gegebenen Kugel in 31 gleiche Theile, so sind 25 solche Theile ziemlich genau der Seite desjenigen Würfels gleich, welcher mit der Kugel denselben Cubikinhalt enthält. Fig.

VI. Es sey DAQ ein pyramidaler Körper von der Beschaffenheit, daß sich die zur Grundfläche parallelen Schnitte am Flächeninhalte gegen einander verhalten, wie ihre Entfernungen von dem Scheitel Q, nähmlich der Schnitt DA:EF = PQ:RQ; die Grundfläche dieses Körpers sey = B, und die Höhe = a, man soll seinen Cubikinhalt finden. 120.

Auflösung. Man stelle sich vor, daß in dem Abstande QR = x unterhalb des Punctes Q der Schnitt EF = y zur Grundfläche parallel gelegt sey; so muß y:B = x:a, folglich $y = \frac{B}{a}x$ seyn. Hieraus finden wir zu Folge §. 516 den Cubikinhalt des pyramidalen Körpers $EFQ = \frac{B}{a} \cdot \frac{x^2}{2}$; somit, wenn wir x in a übergehen lassen, den Inhalt des Körpers $DAQ = \frac{1}{2}aB$; nähmlich der Cubikinhalt dieser After-Pyramide ist gleich dem halben Producte aus der Grundfläche B in die Höhe a.

Auf eben diese Art wird der Cubikinhalt von mehreren Körpern berechnet, welche sich in Elemente auflösen lassen, die unter einander ähnlich sind, und nach einem bekannten Gesetze auf einander folgen. Man findet z. B. daß der Cubikinhalt des Gewölbes $DAQ = \frac{2}{3}aB = \frac{2}{3}$ des Productes aus der Grundfläche B in die Höhe a ist, wenn die Bogen DEQ, AFQ, u. s. w. sämmtlich Viertelkreise sind. Denn legen wir in der Entfernung PR = x einen zur Grundfläche parallelen Schnitt EF = y, so folgt aus der Aehnlichkeit der Rechtecke DA und EF die Proportion

$DA:EF = DP^2:ER^2$ oder $B:y = a^2:a^2 - x^2$.

Dieß gibt

$$y = \frac{B}{a^2}(a^2 - x^2) = B - \frac{B}{a^2}x^2;$$

somit ist nach §. 516 der Cubikinhalt des Körpers

$DAFE = Bx - \frac{B}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3}$. Setzt man hierin x = a, so findet man den Inhalt des ganzen Gewölbes $= \frac{2}{3}aB$.

Fig. Die Berechnung der Oberflächen und der Cubikinhalte der Gewölbe von verschiedener Zusammensetzung ist für die Grenzen dieses Lehrbuches zu weitläufig. Derjenige, welcher sich eine genaue Kenntniß hievon verschaffen will, kann größere über diese Gegenstände handelnde Werke nachschlagen. Doch sind die gegebenen Gründe hinreichend, um in vorkommenden Fällen die dazu gehörigen Aufgaben richtig aufzulösen. Auch die Theorie der sogenannten regelmäßigen Körper kann nach den vorgetragenen Sätzen vollständig entwickelt werden, um daraus Regeln abzuleiten, nach welchen man diese Körper unter gegebenen Bedingungen sowohl verzeichnen, als auch verfertigen kann. Doch ist diese Theorie nach den Gründen des folgenden Hauptstückes weit leichter zu entwickeln. Ein Mehreres hierüber ist in J. Salamon's Lehrbuch der reinen Elementar-Geometrie. 2. Aufl. Wien, 1833. S. 235, und in Schulze's Taschenbuch der Dreyeckmeßkunst. Berlin 1783, anzutreffen.

Viertes Hauptstück.

Von der Trigonometrie.

I. Abschnitt.

Von den trigonometrischen Functionen.

§. 535.

Jedes Dreyeck enthält, ohne seinen Flächeninhalt in Erwägung zu ziehen, sechs Stücke, nähmlich drey Seiten und drey Winkel. Sind nun aus diesen sechs Stücken bey einem geradlinigen Dreyecke I. zwey Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel, oder II. zwey Winkel nebst einer Seite, oder III. alle drey Seiten, oder endlich IV. zwey Seiten nebst einem anliegenden rechten oder stumpfen Winkel gegeben; so ist dadurch jederzeit das Dreyeck bestimmt, und die drey übrigen Stücke können nach den bereits vorgetragenen Gründen durch Verzeichnung gefunden werden. Durch zwey gegebene Seiten und einen anliegenden spitzigen Winkel wird ein geradliniges Dreyeck, welches keinen rechten Winkel enthält, nur dann hinlänglich bestimmt seyn, wenn die dem gegebenen spitzigen Winkel gegenüber stehende Seite größer als die anliegende ist; im entgegengesetzten Falle aber lassen sich jederzeit zwey verschiedene Dreyecke verzeichnen, welche die gegebenen drey Stücke enthalten. Fig.

Fig. 121. Sind z. B. (Fig. 121.) die Längen der zwey Seiten MB und ME nebst dem anliegenden spitzigen Winkel B gegeben, und man beschreibt aus dem Puncte M mit dem Halbmesser ME einen Kreisbogen; so muß die Gerade BD in zwey Puncten geschnitten werden. Ist nun ME > MB, so muß der Punct B zwischen den zwey Durchschnittspuncten liegen; und es kann daher nur ein einziges Dreyeck entstehen, welches den gegebenen Winkel B in sich faßt. Ist aber MB und MC nebst dem Winkel B gegeben; so müssen die beyden Durchschnitte C und A des aus dem Puncte M mit der gegebenen Seite MC beschriebenen Bogens dem Winkel B gegenüber fallen, und daher zwey Dreyecke MAB und MCB entstehen, welche die gegebenen drey Stücke enthalten. Durch drey gegebene Winkel wird endlich ein geradliniges Dreyeck nie bestimmt; denn es sind unzählige gleichwinkelige Dreyecke, z. B bpm, bca, BCA, u. s. w. möglich, die alle in Hinsicht auf ihre Seiten von einander verschieden sind.

41.

§. 536.

Die Wissenschaft aus drey gegebenen Stücken eines Dreyeckes, wodurch dasselbe bestimmt wird, die übrigen Stücke durch Rechnung zu finden, wird die Trigonometrie genannt. Insbesondere heißt sie die ebene oder geradlinige Trigonometrie (trigonometria plana), wenn sie sich mit geradlinigen Dreyecken beschäftigt: hingegen wird sie die sphärische Trigonometrie (trigonometria sphaerica) genannt, wenn sie sphärische Dreyecke (486.) zu ihrem Gegenstande hat. Die unbekannten Stücke eines bestimmten Dreyeckes werden aus den gegebenen drey Stücken mit Hülfe gewisser Linien berechnet, die in Zahlen ausgedrückt, und so beschaffen sind, daß sie uns die Winkel zu erkennen geben, sobald sie einmahl bekannt sind, und welche daher Functionen der Winkel, oder vielmehr trigonometrische Functionen (trigonometrische Hülfs-Linien) heißen. Wir wollen sogleich zu ihrer Erklärung schreiten.

§. 537.

Schneiden wir aus einem festgestellten Puncte A der Peri- pherie eines Kreises AEaQA (Fig. 122.) beliebige Bogen ab, so lassen sich dieselben, weil sie nach entgegengesetzten Seiten von dem

122.

Puncte A, welchen wir den Anfangspunct der Bogen nennen wollen, auslaufen können, in positive und negative unterscheiden, von denen wir die ersteren von A aufwärts gegen E zählen werden. Führen wir ferner durch den Anfangspunct der Bogen den Durchmesser ACa und einen andern ECe auf denselben senkrecht, so zerschneiden diese zwey Durchmesser, die wir nach der Stellung unserer Figur den horizontalen und verticalen nennen werden, die Peripherie in vier gleiche Theile, welche Quadranten heißen sollen. Diese wollen wir vom Anfangspuncte aus zählen, wobey, da wir auf dem Umkreise ohne Ende herumgehen können,

Fig. 122.

mit dem 1sten, 2ten, 3ten, 4ten Quadranten,
der 5te, 6t, 7te, 8te,

so wie auch der 9te, 10te, 11te, 12te, u. s. w. völlig einerley ist.

Nehmen wir den Halbmesser des Kreises für die Längeneinheit, nähmlich = 1 an, ziehen zu den Puncten A und E die unbegrenzten Berührungslinien PAT und MES, fällen wir ferner aus dem Endpuncte B des beliebigen Bogens AB auf den horizontalen und verticalen Durchmesser die Senkrechten BD und BG, und verlängern wir endlich den zu dem Endpuncte des Bogens laufenden Halbmesser CB bis zu seinen Einschnitten in die beyden Berührungslinien: so heißen die Zahlen, welche die Längen der Geraden

BD, BG; AT, EM; CT, CM; AD, EG

angeben, oder auch diese Geraden selbst, der Ordnung nach der Sinus, Cosinus; die Tangente, Cotangente; Secante, Cosecante; der Sinusversus und Cosinusversus derjenigen Zahl a, welche die Länge des Bogens AB angibt, oder auch geradezu des Bogens AB selbst; was man durch folgende Gleichungen ausdrückt.

(1) $\begin{cases} BD = \sin a, BG = \cos a; AT = \operatorname{tang} a, EM = \cot a; \\ CT = \sec a, CM = \operatorname{cosec} a; AD = \operatorname{sinv} a, EG = \operatorname{cosv} a. \end{cases}$

Diese acht Linien heißt man die trigonometrischen oder goniometrischen Functionen und insbesondere diejenigen, deren Benennungen mit der Sylbe Co beginnen, die Cofunctionen des Bogens AB.

Fig. 122. Obgleich nach dieser Erklärung die trigonometrischen Functionen bloß den Längen der Bogen zukommen, so pflegt man doch auch, vorzüglich bey numerischen Rechnungen, statt der Länge des Bogens das Gradmaß desselben oder seines Mittelpunctswinkels zu gebrauchen; enthält nähmlich der Bogen, dessen Länge = a ist, a' Grade, so schreibt man in obigen Gleichungen gewöhnlich bloß a' statt a, obschon man, weil der Bogen von einem Grade die Länge $\frac{\pi}{180}$ h at, eigentlich a'. $\frac{\pi}{180}$ schreiben sollte.

Setzen wir

BD = u, BG = v, AT = x, EM = y, u. s. w.

so übergehen obige Gleichungen in

u = sin a, v = cos a, x = tang a, y = cot a, u. s. w.

Wollen wir nun umgekehrt ausdrücken, daß a die Länge desjenigen Bogens (arcus) ist, dessen Sinus u, Cosinus v, Tangente x, Cotangente y, u. s. w. ist; so schreiben wir

a = arc sin u = arc cos v = arc tang x = arc cot y u. s. w.

§. 538.

Vergleicht man die goniometrischen Functionen zweyer Bogen mit einander, so hat man dabey eben sowohl ihre gegenseitige Lage als ihre Länge zu beachten. In Betreff der ersteren nennt man die Sinus und Tangenten positiv oder negativ, je nachdem sie über oder unter dem horizontalen Durchmesser liegen; die Cosinus und Cotangenten aber werden positiv oder negativ genannt, je nachdem selbe links oder rechts vom verticalen Durchmesser sich befinden; die Secanten und Cosecanten endlich heißen positiv oder negativ, je nachdem der Endpunct ihres Bogens zwischen oder außer dem Mittelpuncte des Kreises und dem Endpuncte der Tangente und Cotangente liegt; bey den Sinusversus und Cosinusversus findet rücksichtlich der Lage kein Gegensatz statt, daher sind dieselben durchgehends positiv.

In Betreff der absoluten Größe und der Lage oder Qualität der trigonometrischen Functionen zweyer Bogen erkennt man leicht die Richtigkeit folgender Sätze.

I. Bey zwey Bogen a und $180^0 + a$, welche um 180^0 differiren, deren Endpuncte also in einem und demselben Durchmesser

liegen, sind, wie man aus der Figur 122. leicht ersieht, die trigonometrischen Functionen (mit Ausnahme der Sinusversus und Cosinusversus, welche sich gegenseitig zu 2 ergänzen) in ihrer Größe gleich, die Qualitätszeichen + und — jedoch sind bloß bey den Tangenten und Cotangenten gleich, bey den andern Functionen aber verschieden. Es ist nähmlich Fig. 122.

$\sin(180^\circ + a) = -\sin a$,	$\cos(180^\circ + a) = -\cos a$,
$\text{tang}(180^\circ + a) = \text{tang}\, a$,	$\cot(180^\circ + a) = \cot a$,
$\sec(180^\circ + a) = -\sec a$,	$\text{cosec}(180^\circ + a) = -\text{cosec}\, a$,
$\text{sinv}(180^\circ + a) = 2 - \text{sinv}\, a$,	$\text{cosv}(180^\circ + a) = 2 - \text{cosv}\, a$.

II. Bogen, welche von 90° gleich weit abstehen, daher auf 180° sich ergänzen, und wegen dieser Eigenschaft Supplementsbogen von einander heißen, folglich auch die zu 180° sich ergänzenden Winkel, die man Nebenwinkel nennt, haben (mit Ausschluß der Sinusversus, welche sich zu 2 ergänzen) gleich große Functionen, von denen bloß der Sinus, die Cosecante und der Cosinusversus dieselbe Qualität besitzen. Man überzeugt sich hievon leicht, wenn man in Gedanken den Kreis um seinen verticalen Durchmesser herumdreht. Es ist demnach

$\sin(180^\circ - a) = \sin a$,	$\cos(180^\circ - a) = -\cos a$,
$\text{tang}(180^\circ - a) = -\text{tang}\, a$,	$\cot(180^\circ - a) = -\cot a$,
$\sec(180^\circ - a) = -\sec a$,	$\text{cosec}(180^\circ - a) = \text{cosec}\, a$,
$\text{sinv}(180^\circ - a) = 2 - \text{sinv}\, a$,	$\text{cosv}(180^\circ - a) = \text{cosv}\, a$.

III. Bey zwey Bogen, welche sich zu 90° ergänzen, und deßwegen Complementsbogen von einander heißen, sind die Functionen des einen die Cofunctionen des anderen. Man sieht dieß leicht ein, wenn man sich den Kreis um 90° gedreht denkt, wodurch der verticale Durchmesser in die horizontale, folglich der horizontale in die verticale Lage kommt. Hiernach ist

$\sin(90^\circ - a) = \cos a$,	$\cos(90^\circ - a) = \sin a$,
$\text{tang}(90^\circ - a) = \cot a$,	$\cot(90^\circ - a) = \text{tang}\, a$,
$\sec(90^\circ - a) = \text{cosec}\, a$,	$\text{cosec}(90^\circ - a) = \sec a$,
$\text{sinv}(90^\circ - a) = \text{cosv}\, a$,	$\text{cosv}(90^\circ - a) = \text{sinv}\, a$.

Fig. 122. IV. Zwey gleich große, aber im Zeichen entgegengesetzte Bogen haben (mit Ausnahme der Cosinusversus, welche sich zu 2 ergänzen) der Größe nach gleiche Functionen, doch stimmen im Qualitätszeichen bloß ihre Cosinus, Secanten und Sinusversus überein. Hievon überzeugt man sich, wenn man in Gedanken den Kreis um den horizontalen Durchmesser dreht. Sofort ist

$\sin(-a) = -\sin a$, $\cos(-a) = \cos a$,
$\tang(-a) = -\tang a$, $\cot(-a) = -\cot a$,
$\sec(-a) = \sec a$, $\cosec(-a) = -\cosec a$,
$\sinv(-a) = \sinv a$, $\cosv(-a) = 2 - \cosv a$.

V. Bogen endlich, welche um eine ganze Zahl von vollen Kreisperipherien differiren und demnach einerley Endpunct haben, besitzen ganz dieselben goniometrischen Functionen. Es ist sonach, wenn n eine beliebige ganze (positive oder negative) Zahl vorstellt,

$\sin(a + n.360^0) = \sin a$, $\cos(a + n.360^0) = \cos a$,
$\tang(a + n.360^0) = \tang a$, $\cot(a + n.360^0) = \cot a$,
$\sec(a + n.360^0) = \sec a$, $\cosec(a + n.360^0) = \cosec a$,
$\sinv(a + n.360^0) = \sinv a$, $\cosv(a + n.360^0) = \cosv a$.

§. 539.

Lassen wir nun den Bogen AB allmählig von 0 bis 360^0 wachsen und betrachten wir die mit seinen goniometrischen Functionen vorgehenden Aenderungen.

I. Ist der Bogen Null, so ist der Sinus, die Tangente und der Sinusversus ebenfalls Null, der Cosinus, die Secante und der Cosinusversus $= 1$, die Cotangente und Cosecante aber unendlich groß, nähmlich es ist

$\sin 0 = 0$, $\tang 0 = 0$, $\sec 0 = 1$, $\sinv 0 = 0$,
$\cos 0 = 1$, $\cot 0 = \infty$, $\cosec 0 = \infty$, $\cosv 0 = 1$.

So lange der Endpunct des Bogens im ersten Quadranten liegt, wachsen die Functionen und die Cofunctionen nehmen ab; zugleich sind sie sämmtlich positiv.

Wird der Bogen $= 90^0$, so verschwinden der Cosinus, die Cotangente und der Cosinusversus, der Sinus, die Cosecante und

der Sinusverſus übergehen in 1, die Tangente und Secante end- Fig.
lich werden unendlich groß. In Zeichen iſt 122.

$\sin 90^\circ = 1$, $\tang 90^\circ = \infty$, $\sec 90^\circ = \infty$, $\sinv 90^\circ = 1$,
$\cos 90^\circ = 0$, $\cot 90^\circ = 0$, $\cosec 90^\circ = 1$, $\cosv 90^\circ = 0$.

Den Sinus von 90°, welcher unter allen der größte und der Einheit (alſo dem Halbmeſſer) gleich iſt, nennt man nicht ſelten den sinus totus (den ganzen Sinus), weil man die übrigen Sinus gleichſam durch ſeine Theile ausdrückt.

II. Uebertritt der Endpunct des Bogens in den zweyten Quadranten; ſo werden der Coſinus, die Tangente, Cotangente und Secante negativ; der Sinus, die Tangente und Secante nehmen ab, während alle übrigen Functionen wachſen. Bey 180° verſchwinden der Sinus und die Tangente, der Coſinus und die Secante übergehen in — 1, der Coſinusverſus in 1, der Sinusverſus in ſeinen größten Werth 2, die Cotangente wird $-\infty$, und die Coſecante $+\infty$. Man hat nähmlich

$\sin 180^\circ = 0$, $\tang 180^\circ = 0$, $\sec 180^\circ = -1$, $\sinv 180^\circ = 2$,
$\cos 180^\circ = -1$, $\cot 180^\circ = -\infty$, $\cosec 180^\circ = \infty$, $\cosv 180^\circ = 1$.

III. Schreitet der Endpunct des Bogens in den dritten Quadranten; ſo ändern der Sinus, die Tangente, die Cotangente und die Coſecante ihr Zeichen; der Sinus, die Tangente, Secante und der Coſinusverſus wachſen, während die übrigen Functionen abnehmen. Wird der Bogen 270°, ſo verſchwinden der Coſinus und die Cotangente, der Sinus und die Coſecante verwandeln ſich in — 1, der Sinusverſus in 1, der Coſinusverſus in ſeinen größten Werth 2, die Secante wird $-\infty$, und die Tangente $+\infty$. Es iſt nähmlich

$\sin 270^\circ = -1$, $\tang 270^\circ = \infty$, $\sec 270^\circ = -\infty$, $\sinv 270^\circ = 1$,
$\cos 270^\circ = 0$, $\cot 270^\circ = 0$, $\cosec 270^\circ = -1$, $\cosv 270^\circ = 2$.

IV. Fällt der Endpunct des Bogens in den vierten Quadranten: ſo verwechſeln der Coſinus, die Tangente, die Cotangente und die Secante ihre Zeichen; der Coſinus, die Cotangente und die Coſecante wachſen, während die andern Functionen ab-

Fig. 122. nehmen. Wird der Bogen 360°, so treten dieselben Umstände ein wie bey Null.

Um die Zeichen, welche die Functionen annehmen, während der Endpunct des Bogens die Peripherie durchläuft, schnell bestimmen zu können, merke man noch Folgendes.

Die Sinus u. Cosecanten sind im 1. u. 2. Quadranten positiv, im 3. und 4. = negativ.

Die Cosinus u. Secanten sind im 1. u. 4. Quadranten positiv, im 2. und 3. = negativ.

Die Tangenten u. Cotangenten sind im 1. u. 3. Quadr. positiv, im 2. u. 4. = negativ.

§. 540.

Bisher haben wir den Halbmesser des Kreises für die Einheit der Längen angenommen; allein dieses ist dann unthunlich, wenn wir bereits eine andere Linie zu dieser Einheit gewählt haben.

Man kann jedoch diesen Fall sehr leicht auf den vorigen zurückführen. Denn nach der von uns aufgestellten Erklärung der trigonometrischen Functionen sind die Zahlen, welche die Größe der Geraden

$$BD,\ BG;\ AT,\ EM;\ CT,\ CM;\ AD,\ EG$$

in Bezug auf die daselbst zu Grunde gelegte Linear-Einheit, nähmlich auf den Halbmesser angeben, folglich die Verhältnisse

$$\frac{BD}{AC},\ \frac{BG}{AC};\ \frac{AT}{AC},\ \frac{EM}{AC};\ \frac{CT}{AC},\ \frac{CM}{AC};\ \frac{AD}{AC},\ \frac{EG}{AC}$$

jener Linien zum Halbmesser, welche nähmlich andeuten, wie oft in diesen Linien der Halbmesser enthalten ist, respective der Sinus, Cosinus; die Tangente, Cotangente; Secante, Cosecante; der Sinusversus und Cosinusversus derjenigen Zahl $\frac{AB}{AC}$, welche die Länge des Bogens AB in Bezug auf den früher zur Längeneinheit genommenen Halbmesser oder das Verhältniß des Bogens zum Halbmesser ausdrückt. Es ist demnach ganz allgemein für jeden Halbmesser

Fig. 122.

$$\frac{BD}{AC} = \sin\frac{AB}{AC}, \quad \frac{BG}{AC} = \cos\frac{AB}{AC},$$
$$\frac{AT}{AC} = \tan\frac{AB}{AC}, \quad \frac{EM}{AC} = \cot\frac{AB}{AC},$$
$$\frac{CT}{AC} = \sec\frac{AB}{AC}, \quad \frac{CM}{AC} = \operatorname{cosec}\frac{AB}{AC},$$
$$\frac{AD}{AC} = \operatorname{sinv}\frac{AB}{AC}, \quad \frac{EG}{AC} = \operatorname{cosv}\frac{AB}{AC},$$

und umgekehrt

$$\frac{AB}{AC} = \arcsin\frac{BD}{AC} = \arccos\frac{BG}{AC},$$
$$= \arctan\frac{AT}{AC} = \operatorname{arccot}\frac{EM}{AC},$$
$$= \operatorname{arcsec}\frac{CT}{AC} = \operatorname{arccosec}\frac{CM}{AC},$$
$$= \operatorname{arcsinv}\frac{AD}{AC} = \operatorname{arccosv}\frac{EG}{AC}.$$

Das eben Gesagte erklärt zugleich den Sinn, den man mit dem Ausdrucke: „BD, BG, AT u. s. w. sind der Sinus, der »Cosinus, die Tangente u. s. w. des Bogens AB für den Halb»messer AC“, zu verbinden hat.

Will man, wie dieß gewöhnlich geschieht, statt des Verhältnisses $\frac{AB}{AC}$ des Bogens zum Halbmesser die Anzahl Grade dieses Bogens setzen, welche durch a vorgestellt werden möge, so erhält man, wenn man zugleich der Kürze wegen AC = r annimmt, BD = r.sin a, BG = r.cos a, AT = r.tang a, EM = r.cot a, CT = r.sec a, CM = r.cosec a, AD = r.sinv a, EG = r.cosv a.

Von der Richtigkeit dieser Gleichungen überzeugt man sich auch mittelst der Figur 124. Denn ist in dieser AC = r, aC = 1, ACB = a, so folgen aus dem Umstande, daß BCD ∽ bCd und ACT ∽ aCt ist, die Proportionen 124.

BD : bd = CD : Cd = BC : bC

und AT : at = CT : Ct = AC : aC

oder BD : sin a = CD : cos a = r : 1

AT : tang a = CT : sec a = r : 1,

folglich ist wie früher BD = r.sin a, CD = r.cos a u. s. w.

Fig. §. 541.

122. Setzen wir den Bogen $AB = a$, und den dazu gehörigen Halbmesser $AC = 1$; so ist $BD = \sin a$, und $CD = \cos a$. Es ist aber $BD^2 + CD^2 = BC^2$, folglich auch

I. $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$,

$\cos a = \sqrt{(1 - \sin^2 a)}$, und $\sin a = \sqrt{(1 - \cos^2 a)}$.

Es ist gebräuchlich die mte Potenz von $\sin a$ durch $\sin^m a$ zu bezeichnen, obgleich man sie eigentlich durch $(\sin a)^m$ ausdrücken sollte.

Ferner ist in den ähnlichen Dreyecken CDB und CAT $CD:DB = CA:AT$, oder $\cos a : \sin a = 1 : \text{tang } a$; folglich

II. $\text{tang } a = \frac{\sin a}{\cos a}$.

Setzen wir $a = 90^0$, so ist $\text{tang } a = \infty$; das heißt, die in dem Puncte A errichtete Tangente kann von dem anderen Schenkel BC nie durchschnitten werden, und muß folglich mit demselben parallel laufen, wenn der Winkel $ACB = 90^0$ ist.

Eben so ist in den ähnlichen Dreyecken BDC und CEM, $DB : CD = CE : EM$, oder

$\sin a : \cos a = 1 : \cot a$; und folglich

III. $\cot a = \frac{\cos a}{\sin a}$.

Endlich ist $CD : CB = CA : CT$, und $BD : CB = CE : CM$, das ist, $\cos a : 1 = 1 : \sec a$, und $\sin a : 1 = 1 : \text{cosec } a$, folglich ist

IV. $\sec a = \frac{1}{\cos a}$, und $\text{cosec } a = \frac{1}{\sin a}$.

Da ferner $AD = CA - CD$, und $EG = CE - GC$ ist; so ist

V. $\text{sinv } a = 1 - \cos a$, und $\text{cosv } a = 1 - \sin a$.

Aus diesen Grund-Formeln I. bis V. können noch sehr viele hergeleitet werden, wenn man sie mit einander verbindet. Multiplicirt man z. B. die Gleichungen II. und III. mit einander, so ergibt sich

VI. $\text{tang } a \cdot \cot a = 1$, folglich $\text{tang } a = \frac{1}{\cot a}$, $\cot a = \frac{1}{\text{tang } a}$.

Verlängert man BD bis F, so ist der Bogen BAF = 2a, BF = der Sehne von 2a = chorda 2a. Da aber auch BD = sin a und = $\frac{1}{2}$BF ist, so hat man Fig. 122.

VII. $\sin a = \frac{1}{2}$ chord 2a

und wenn man a mit $\frac{a}{2}$ vertauscht,

VIII. chord a = 2 $\sin \frac{1}{2}$ a.

Wir überlassen die weitere Ausführung dieser Formeln dem eigenen Fleiße der Anfänger, und müssen noch einige andere Formeln entwickeln, ehe wir zeigen können, wie man die Sinus, Cosinus, Tangenten, u. s. w., z. B. von Minute zu Minute von 0° bis 90° für einen nach Belieben angenommenen Halbmesser in Zahlen berechnen könne. Es ist aus dem Vorhergehenden leicht einzusehen, daß es nur erforderlich ist, die Sinus und Cosinus bis 45° zu berechnen, um die Sinus und Cosinus bis 90° zu haben. Denn ist z. B. sin 10° und cos 10° gefunden, so ist auch zugleich cos 80° und sin 80° ohne weitere Rechnung bekannt, weil cos 80° = sin (90° — 80°) = sin 10°, und sin 80° = cos (90° — 80°) = cos 10° ist. Sind einmahl die Sinus und Cosinus gefunden, so ergeben sich die Tangenten und Cotangenten sehr leicht nach den Formeln II. und III.

§. 542.

Um Formeln abzuleiten, mittelst deren der Sinus und Cosinus der Summe und Differenz zweyer Bogen durch die Sinus und Cosinus der einzelnen Bogen sich ausdrücken lassen; sey in einem Kreise, dessen Halbmesser = 1 ist, der Bogen AB = a, BK = BD = b. Bey diesen Voraussetzungen ist 123.

AD = a + b, AK = a — b,

BE = sin a, EC = cos a, DG = sin b, GC = cos b,
DF = sin (a + b), FC = cos (a + b),
KM = sin (a — b), MC = cos (a — b).

Fig. 123. Zugleich ist

$$\left.\begin{array}{l} DF = GP + LD,\quad KM = GP - LD \\ CF = CP - GL,\quad CM = CP + GL \end{array}\right\} (\alpha)$$

Ferner geben die beyden (wegen 397) ähnlichen Dreyecke CGP und CBE

$$GP : BE = CP : CE = CG : CB$$

oder $GP : \sin a = CP : \cos a = \cos b : 1$,

folglich $GP = \sin a \cos b$, $CP = \cos a \cos b$.

Endlich liefern die (wegen 383. II.) ähnlichen Dreyecke CBE und GDL, von denen das letztere dem Dreyecke KGH vollkommen gleich, also $GH = LD$ und $KH = GL$ ist, die Proportionen

$$DL : CE = GL : BE = DG : CB$$

oder $DL : \cos a = GL : \sin a = \sin b : 1$,

somit $DL = \cos a \sin b$, $GL = \sin a \sin b$.

Substituirt man in den Gleichungen (α) die Werthe der in ihnen stehenden Glieder, so findet man

I. $\sin (a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

II. $\sin (a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

III. $\cos (a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

IV. $\cos (a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

Es wird gut seyn zu bemerken, daß man dieselben Ausdrücke auch sehr leicht aus den Gleichungen (1) und (2) in §. 409 erhalten kann. Setzt man nähmlich

$$c = \text{chord}\, 2\beta = 2 \sin \beta, \qquad d = 2,$$

ferner $b = \text{chord}\, 2\alpha = 2 \sin \alpha$,

und in (1) $a = \text{chord}\, 2(\alpha + \beta) = 2 \sin (\alpha + \beta)$,

in (2) $a = \text{chord}\, 2(\alpha - \beta) = 2 \sin (\alpha - \beta)$;

so findet man die Formeln I. und II.

Nimmt man dagegen

$$b = \text{chord}\, (180 - 2\alpha) = 2 \sin (90 - \alpha) = 2 \cos \alpha$$

und in (2) $a = \text{chord}\, (180 - 2\alpha - 2\beta) = 2 \sin (90 - \alpha - \beta)$
$= 2 \cos (\alpha + \beta)$,

in (1) $a = \text{chord}\, (180 - 2a + 2\beta) = 2 \sin (90 - \alpha + \beta)$
$= 2 \cos (\alpha - \beta)$;

so ergeben sich die Formeln III. und IV.

Diese vier Formeln kommen in der sogenannten trigonometri- Fig.
schen Analysis sehr häufig vor, und sind daher dem Gedächtnisse 123.
wohl einzuprägen.

§. 543.

Setzen wir nun $b = a$, so ist (vermöge 542. I.).

I. $\sin 2a = 2 . \sin a . \cos a$, und folglich $\sin a . \cos a = \frac{1}{2} . \sin 2a$.

Eben so findet man nach der Formel III. (542.).

II. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ oder $\cos 2a = \cos^2 a - 1 + \cos^2 a$,
nähmlich $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$, folglich $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$
und endlich $\cos a = \sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{2}}$.

Setzen wir ferner in der letzten Formel $a = \frac{1}{2}c$, so ist

III. $\cos \frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{1 + \cos c}{2}}$ und

IV. $\cos c = 2\cos^2 \frac{1}{2}c - 1$.

Endlich erhalten wir, wenn wir in dieser letzten Formel statt $\cos^2 \frac{1}{2}c$ seinen Werth $1 - \sin^2 \frac{1}{2}c$ (aus 541. I.) substituiren:

V. $\cos c = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}c$, und

VI. $\sin \frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{1 - \cos c}{2}}$.

Die eben entwickelten Formeln IV. und V. werden uns in der Folge sehr gute Dienste leisten. So z. B. findet man mit Hülfe der Formel V, daß

VII. $\text{sinv } c = 2\sin^2 \frac{1}{2}c$ ist.

Denn es ist (§. 541. V.)

$\text{sinv } c = 1 - \cos c$, und folglich $\text{sinv } c = 2\sin^2 \frac{1}{2}c$,

wenn man statt $\cos c$ aus V. seinen Werth substituirt.

Wenn man nun in den Formeln (§. 542. I. und III.) $b = 2a$ setzt, und statt $\sin 2a$ und $\cos 2a$ die eben gefundenen Werthe I. und II. substituirt; so erhält man für $\sin 3a$ und $\cos 3a$ die zugehörigen Werthe, nähmlich $\sin 3a = 3 \sin a . \cos^2 a - \sin^3 a$, $\cos 3a = \cos^3 a - 3 \cos a . \sin^2 a$. Eben so kann $\sin 4a$, $\cos 4a$

Fig. gefunden werden, wenn man in eben diesen Formeln (§. 542. I. und III.) $b = 3a$, und für $\sin 3a$, $\cos 3a$ ihre Werthe setzt; u. s. w.

§. 544.

Nun sind wir im Stande einzusehen, wie man die Sinus und Cosinus aller Bogen von 0^0 bis 90^0, etwa von Minute zu Minute berechnen könne. Man setzt nähmlich bey dieser Berechnung den Halbmesser $= 1 = \sin 90^0$. Denn daraus folgt erstlich $\sin 30^0 = \frac{1}{2} = 0{,}5$, weil $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ chord 60^0 (vermöge §. 541. VII.) ist. Es ist aber chord 60^0 = dem Halbmesser (393. II.) $= 1$; folglich ist auch $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$. Sodann ist $\cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, weil $\cos 30^0 = \sqrt{(1 - \sin^2 30^0)} = \sqrt{(1 - \frac{1}{4})} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist. Diese Größe $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist zugleich $\sin 60^0$; nähmlich es ist $\sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, und $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$, weil 30^0 und 60^0 einander zu 90^0 ergänzen.

Ferner ist $\sin 18^0 = \frac{1}{4}.(-1 + \sqrt{5})$. Denn es ist $\sin 18^0 = \frac{1}{2}$ chord 36^0 = der halben Seite eines regelmäßigen Zehneckes, weil die Seite eines regelmäßigen Zehneckes einen Bogen von 36^0 abschneidet. Es ist aber die Seite eines regelmäßigen Zehneckes $= \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$, wenn man den Halbmesser $= 1$ setzt (409.); nähmlich es ist chord $36^0 = \frac{1}{2}.(-1 + \sqrt{5})$, folglich ist $\sin 18^0 = \frac{1}{4}.(-1 + \sqrt{5}) = \cos 72^0$. Daraus folgt $\cos 18^0 = \frac{1}{4}.\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$; weil $\cos 18^0 = \sqrt{(1 - \sin^2 18^0)} = \sqrt{[1 - \frac{1}{16}.(-1 + \sqrt{5})^2]} = \sqrt{(1 - \frac{1}{16} + \frac{2}{16}\sqrt{5} - \frac{5}{16})} = \sqrt{(\frac{10}{16} + \frac{2}{16}\sqrt{5})} = \frac{1}{4}.\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} = \sin 72^0$ ist.

Eben so ist $\sin 15^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, und $\cos 15^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$. Denn es ist (§. 543. VI.) $\sin 15^0 = \sin \frac{1}{2}30^0 = \sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 30^0)} = \sqrt{(\frac{2}{4} - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{3})} = \frac{1}{2}\sqrt{(2 - \sqrt{3})} = \frac{1}{4}.(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = \cos 75^0$. Daraus folgt $\cos 15^0 = \sqrt{(1 - \sin^2 15^0)} = \sqrt{[1 - \frac{1}{16}(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2]} = \sqrt{(1 - \frac{6}{16} + \frac{2}{16}\sqrt{12} - \frac{2}{16})} = \frac{1}{4}.\sqrt{(8 + 4\sqrt{3})} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) = \sin 75^0$.

Aus $\sin 18^0$ und $\cos 18^0$, $\sin 15^0$ und $\cos 15^0$ findet man nun (nach den Formeln II. und IV. §. 542.) $\sin(18^0 - 15^0) = \sin 3^0$, und auch $\cos(18^0 - 15^0) = \cos 3^0$. Es ist nähmlich

$\sin 3^0 = \frac{1}{16} \cdot [\sqrt{30} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - \sqrt{2} - 2\sqrt{15 + 3\sqrt{5}} + 2\sqrt{5 + \sqrt{5}}] = 0{,}052335956243$; und Fig.

$\cos 3^0 = \frac{1}{16} \cdot [\sqrt{30} - \sqrt{10} - \sqrt{6} + \sqrt{2} + 2\sqrt{15 + 3\sqrt{5}} + 2\sqrt{5 + \sqrt{5}}] = 0{,}998629534755$.

Aus diesen wird endlich (nach den Formeln §. 543. III. und VI.) $\sin 1\frac{1}{2}^0$ und $\cos 1\frac{1}{2}^0$, und dann $\sin \frac{3}{4}^0$ und $\cos \frac{3}{4}^0$ gefunden. Darauf wird (nach den Formeln §. 542. I. und III.) $\sin (1\frac{1}{2}^0 + \frac{3}{4}^0) = \sin 2\frac{1}{4}^0$ und auch $\cos 2\frac{1}{4}^0$, ferner $\sin 3\frac{3}{4}^0$, $\sin 4\frac{1}{2}^0$, $\sin 5\frac{1}{4}^0$, $\sin 6^0$, $\sin 6\frac{3}{4}^0$... nebst $\cos 3\frac{3}{4}^0$, $\cos 4\frac{1}{2}^0$, $\cos 5\frac{1}{4}^0$, $\cos 6^0$, $\cos 6\frac{3}{4}^0$, u. s. w. bis $\sin 45^0$ und $\cos 45^0$ bestimmt, und in Zahlen entwickelt. Auf diese Art kommen endlich die Sinus und Cosinus von 0^0 bis 90^0 von $\frac{3}{4}$ zu $\frac{3}{4}$ Grad zum Vorschein, wenn man die Rechnung nur bis 45^0 fortsetzt. Da überdieß $\sin 45^0$ auch aus anderen Gründen bekannt ist, (es ist nähmlich $\sin 45^0 = \frac{1}{2}$ chord 90^0 = der halben Seite eines eingeschriebenen Quadrates $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$, und auch $\cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}7071067812$); so dienet dieser Umstand zugleich zur Probe, ob bey der Berechnung der Sinus und Cosinus kein Fehler eingeschlichen sey. Diese Sinus und Cosinus von $\frac{3}{4}$ zu $\frac{3}{4}$ Grad von 0^0 bis 90^0 sind alle außer $\sin 90^0$ und $\sin 30^0$ irrational, und lassen sich nur durch Annäherung so genau in Zahlen berechnen, als man es immer verlangen kann.

Damit man nun die Sinus und Cosinus für alle einzelnen Minuten erhalte, ist es nothwendig vorerst $\sin 1'$ zu finden. Diesen erhält man auf folgende Art. Aus dem $\sin \frac{3}{4}^0 = \sin 45'$ findet man (nach der Formel §. 543. VI.) $\sin \frac{45}{2}'$, dann $\sin \frac{45}{4}'$, ferner $\sin \frac{45}{8}'$, aus diesem $\sin \frac{45}{16}'$, endlich $\sin \frac{45}{32}' = 0{,}000409061532$ und darauf $\sin \frac{45}{64}' = 0{,}00020453077$ Nun zeigt sich bey dieser Berechnung, daß der $\sin \frac{45}{64}'$ in so weit der Hälfte vom $\sin \frac{45}{32}'$ gleich ist, so wie $\frac{45}{64}'$ genau der Hälfte von $\frac{45}{32}'$ gleich ist, daß der Fehler keinen zehntausendmillionten Theil des Halbmessers oder weniger als 0,0000000001 beträgt. Aus diesem Grunde kann man schließen, daß zwischen $\frac{45}{32}'$ und $\frac{45}{64}'$ bey dem angenommenen Halbmesser die Sinus mit dem dazu gehörigen Bogen in Proportion stehen, und findet $\sin 1'$ durch folgende Proportion; $\frac{45}{64}' : 1' = \sin \frac{45}{64}' : \sin 1'$; das ist $\frac{45}{64}' : 1' = 0{,}00020453077 : \sin 1'$;

Fig. und somit $\sin 1' = \frac{45}{64} . 0{,}00020453077 = 0{,}00029088206$. Da jetzt $\sin 1'$ bekannt ist, so kann man die Sinus und Cosinus für alle einzelnen Minuten von 1′ bis 90° (nach den Formeln §. 542. I. und III.) berechnen. Es gibt sehr viele Vortheile, durch welche diese sehr beschwerliche Arbeit um vieles abgekürzt und erleichtert wird. Allein es ist hier der Ort nicht diese Vortheile aus einander zu setzen.

Aus den gefundenen Sinus und Cosinus wird man die Tangenten und Cotangenten nach den Formeln $\text{tang}\, a = \frac{\sin a}{\cos a}$, und $\cot a = \frac{\cos a}{\sin a}$ sehr leicht durch eine bloße Division berechnen.

Die Längen dieser Linien hat man in eine Tafel eingetragen, und überdieß noch zur größeren Bequemlichkeit zu denselben die entsprechenden gemeinen Logarithmen bestimmt, und ebenfalls in Tafeln eingetragen. Um jedoch die für die Rechnung und tabellarische Zusammenstellung unbequemen negativen Logarithmen zu vermeiden, hat man die Logarithmen aller die Einheit nicht überschreitenden Functionen um 10 volle Einheiten vergrößert.

Die Tafeln, in denen sich die trigonometrischen Functionen befinden, sind unter dem Nahmen der trigonometrischen Tafeln hinlänglich bekannt. Die älteren dieser Tafeln enthalten gewöhnlich sowohl die Functionen als ihre Logarithmen in sieben Decimalstellen; von den neueren biethen jedoch einige bloß sechs oder fünf Stellen, wodurch sie viel geschmeidiger werden und dennoch für die meisten Rechnungen vollkommen zureichend bleiben.

In einigen trigonometrischen Tafeln befinden sich auch die Secanten nebst ihren zustimmenden Logarithmen. Allein diese sind in der That entbehrlich, weil $\sec a = \frac{1}{\cos a}$, $\log \sec a = -\log \cos a$, und $\text{cosec}\, a = \frac{1}{\sin a}$, $\log \text{cosec}\, a = -\log \sin a$ ist. Wenn nun zu einer gegebenen Secante b der dazu gehörige Bogen u zu suchen, nähmlich wenn aus der Gleichung $\sec u = b$ der unbekannte Bogen u zu finden wäre; so setze man nur $\frac{1}{\cos u} = b$, woraus $\cos u = \frac{1}{b}$ folgt. Man suche demnach nur in

den trigonometrischen Tafeln in der mit cosinus bezeichneten Spalte Fig.
die Zahl $\frac{1}{b}$ auf, so sind die dazu gehörigen Grade und Minuten der gesuchte Werth von u. Sollte in der Tafel die Spalte cosinus nicht anzutreffen seyn, so suche man dieselbe Zahl $\frac{1}{b}$ in der Spalte sinus auf, und ziehe die dazu gehörigen Grade und Minuten von 90° ab; der Ueberrest ist der gesuchte Werth von u. Eben so kann zu einer gegebenen Cosecante, und zu einem gegebenen log sec, log cosec, der dazu gehörige Bogen gefunden werden.

Aus derselben Ursache sind die Sinusversus entbehrlich, weil $\sin\text{vers}\, a = 2\sin^2 \frac{1}{2} a$, $\log \text{sinvers}\, a = 2\log \sin \frac{1}{2} a + \log 2$, und $\log \sin \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} (\log \text{sinvers}\, a - \log 2)$ (vermöge §. 543. VII.) ist.

§. 545.

Die Sinus und Cosinus von 0° bis 90° lassen sich durch unendliche Reihen viel leichter berechnen, wie dieß aus dem Folgenden erhellet.

Es ist (nach 451.), wenn man $CD = CA = 1$, $CM = x$, 87.
und das Längenmaß des Bogens $AB = z$ setzt,

$$z = x + \frac{1.x^3}{2.3} + \frac{1.3.x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5.x^7}{2.4.6.7} + \ldots$$

Aus dieser Gleichung findet man (nach 288.)

$$x = z - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^5}{2.3.4.5} - \frac{z^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

Es ist aber $x = \sin z$, weil $x = CM = EB = \sin AB = \sin z$ ist. Folglich ist

$$\sin z = z - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^5}{2.3.4.5} - \frac{z^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

Es sey z. B. $z = \text{arc}\ 1' = \frac{\pi}{10800} = 0{,}0002908882$, indem man den Halbmesser $= 1$ annimmt; so ist sin arc $1'$, nähmlich $\sin 1' = 0{,}0002908882$ auch in der zehnten Dezimal-Ziffer noch vollkommen richtig, weil alle übrigen Glieder selbst an der eilften Stelle noch keine bedeutende Ziffer geben. Auf diese Art

Fig. können die Sinus von sehr vielen kleinen Bogen, etwa bis 8° oder 10°, von Minute zu Minute berechnet werden.

Da ferner $\cos z = \sqrt{(1 - \sin^2 z)}$ ist; so ist auch

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6} + \ldots,$$

wenn man den Werth von sin z, nähmlich die gefundene unendliche Reihe zur zweyten Potenz erhebt, dieselbe von 1 subtrahirt, und sodann die Quadrat-Wurzel zieht. Durch eben diese Reihe könnten die Cosinus von sehr vielen kleinen Bogen, etwa bis 10° berechnet werden, welche zugleich die Sinus von 80° bis 90° wären.

Damit die zwey gefundenen Reihen bey der Berechnung der Sinus und Cosinus von größeren Bogen eine bequemere Gestalt erhalten, so müssen dieselben auf folgende Art eingerichtet werden.

Man setze bey dem angenommenen Halbmesser 1 die Länge des Bogens von $90° = c$, und $z = \frac{m}{n} . c$; so ist $\sin z = \sin \frac{m}{n} . c$, und $\cos z = \cos \frac{m}{n} . c$ oder $\sin z = \sin \frac{m}{n} 90°$, und $\cos z = \cos \frac{m}{n} 90°$, weil der Bogen $c = 90°$ ist. Nun substituire man in den gefundenen zwey Reihen $\sin \frac{m}{n} 90°$ statt sinz, $\cos \frac{m}{n} 90°$ statt cos z, und $\frac{m}{n} . c$ statt z, $\frac{m^2}{n^2} . c^2$ statt z^2, u. s. w.; so ist

$$\sin \frac{m}{n} 90° = \frac{m}{n} . c - \frac{m^3}{n^3} . \frac{c^3}{2.3} + \frac{m^5}{n^5} . \frac{c^5}{2.3.4.5} - \frac{m^7}{n^7} . \frac{c^7}{2..7} + \ldots$$

$$\cos \frac{m}{n} 90° = 1 - \frac{m^2}{n^2} . \frac{c^2}{2} + \frac{m^4}{n^4} . \frac{c^4}{2.3.4} - \frac{m^6}{n^6} . \frac{c^6}{2..6} + \ldots$$

Es ist aber, da der Halbmesser $= 1$ gesetzt worden, der Bogen von 90 Grad $c = \frac{1}{2}\pi$, nähmlich es ist $c = 1{,}57079632679$, $\frac{c^2}{2} = 1{,}23370055014$, $\frac{c^3}{2.3} = 0{,}64596409751$, u. s. w.; folglich ist auch nach gehöriger Substitution

Fig.

$$\sin \frac{m}{n} 90^0 =$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{m}{n} \cdot 1{,}57079632679 \\ \frac{m^5}{n^5} \cdot 0{,}07969262625 \\ \frac{m^9}{n^9} \cdot 0{,}00016044118 \\ \frac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0{,}00000005692 \\ \frac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0{,}00000000000 \end{array} \right| - \left\{ \begin{array}{l} \frac{m^3}{n^3} \cdot 0{,}64596409751 \\ \frac{m^7}{n^7} \cdot 0{,}00468175414 \\ \frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0{,}00000359884 \\ \frac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0{,}00000000067 \\ \frac{m^{19}}{n^{19}} \cdot 0{,}00000000000 \end{array} \right|$$

$$\cos \frac{m}{n} 90^0 = 1$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{m^4}{n^4} \cdot 0{,}25366950790 \\ \frac{m^8}{n^8} \cdot 0{,}00091926027 \\ \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0{,}00000047109 \\ \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0{,}00000000007 \\ \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0{,}00000000000 \end{array} \right| - \left\{ \begin{array}{l} \frac{m^2}{n^2} \cdot 1{,}23370055014 \\ \frac{m^6}{n^6} \cdot 0{,}02086348076 \\ \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0{,}00002520204 \\ \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0{,}00000000639 \\ \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0{,}00000000000 \end{array} \right|$$

Wäre nun nach diesen Formeln z. B. sin 9° zu berechnen, so setze man $\frac{m}{n} 90^0 = 9^0$, nähmlich $\frac{m}{n} = \frac{9^0}{90^0} = \frac{1}{10}$; und substituire $\frac{1}{10}$ statt $\frac{m}{n}$, so wird man sogleich sin $9^0 =$ 0,15643446504 erhalten, wenn man nur zwey positive und zwey negative Glieder der vorhergehenden Reihe entwickelt. Wäre sin $(59^0\,30') = \cos(30^0\,30')$ zu entwickeln, so müßte man $\frac{m}{n} 90^0 = 30^0\,30' = 30\frac{1}{2}{}^0 = \frac{61^0}{2}$, nähmlich $\frac{m}{n} = \frac{61}{2.90} = \frac{61}{180}$ setzen, und in der zweyten Gleichung $\frac{61}{180}$ statt $\frac{m}{n}$ substituiren, und so würde man sehr geschwind cos $(30^0\,30')$, nähmlich sin $(59^0\,30')$ erhalten.

Fig. Da in diesen beyden Reihen $\frac{m}{n}$ nie größer werden kann als $\frac{1}{2}$ (wenn man nähmlich sin 45°, oder auch cos 45° berechnen will, muß $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ gesetzt werden); so ist leicht einzusehen, daß diese Reihen sehr schnell abnehmen, und daß folglich die Sinus und Cosinus auf diese Art leichter zu berechnen sind, als nach der vorigen Methode.

§. 546.

Die Sinus und Cosinus, welche man sowohl durch das früher angegebene Rechnungsverfahren als auch durch diese unendlichen Reihen erhält, gehören zu einem Kreise, dessen Halbmesser= 1 ist, oder sind die eigentlichen Sinus und Cosinus der Bogen oder Winkel, denen sie angehören. Wollte man, wie dieß in mehreren Anleitungen zur Trigonometrie zu geschehen pflegt, die trigonometrischen Functionen auf einen anderen Halbmesser als 1 beziehen, so würde man sie nach den am Schlusse des §. 540 stehenden Gleichungen mit dem gewählten Halbmesser multipliciren. Sollen aber, wie es bey dem Gebrauche mancher älteren trigonometrischen Tafel nothwendig wird, die auf einen beliebigen, von 1 verschiedenen Halbmesser bezogenen trigonometrischen Functionen auf den Halbmesser 1 zurückgeführt werden; so sind sie durch jenen Halbmesser zu dividiren. Z. B. Wenn man in einer Sinus=Tafel den Halbmesser r = 10000000 und sin 1′ = 2909, tang 89° = 572899620 findet, so ist, wenn man den Halbmesser=1 setzt, sin 1′ = 0,0002909, tang 89° = 57,2899620, u. s. w.

§. 547.

Der Gebrauch der trigonometrischen Tafeln läßt sich am besten erlernen, wenn man eine solche Tafel zur Hand nimmt, und sich zuerst mit der Einleitung, welche diesen Tafeln beygefügt ist, dann auch mit der inneren Einrichtung derselben bekannt macht. Hiezu dürfte vorzüglich dienlich seyn, mein Logarithmisch=trigonometrisches Handbuch, anstatt der kleinen Vlacqischen, Wolfischen, und anderen dergleichen meistens sehr fehlerhaften logarithmisch=trigonometrischen Tafeln, für die Mathema=

tik-Beflissenen eingerichtet; Leipzig in der Weidmannischen Fig.
Buchhandlung. Denjenigen, welche sich mit der ausübenden Mathematik beschäftigen, dürften meine Logarithmisch-trigonometrische Tafeln; nebst anderen zum Gebrauche der Mathematik eingerichteten Tafeln und Formeln in zwey Bänden, Leipzig in der Weidmannischen Buchhandlung, sehr nützlich seyn; so wie diejenigen, welche äußerst feine mathematische Berechnungen zu machen haben, meine Vollständige Sammlung größerer logarithmisch-trigonometrischer Tafeln (Thesaurus logarithmorum completus in Folio) Leipzig in der Weidmannischen Buchhandlung 1794 hiezu geeignet finden dürften.

Außer diesen können auch noch folgende Tafeln empfohlen werden: Tables portatives de logarithmes par F. Callet; édit. stéréotype, Paris; Logarithmisches Handbuch von J. Lindner, 2. Aufl. Wien; Tables de logarithmes par J. de Lalande, Paris. Die vorletzte dieser Tafeln gibt die Logarithmen in 6, die letzte nur in 5 Stellen an. Jeder dieser Tafeln ist eine Anleitung zu deren Gebrauche beygefügt. Aus dieser Ursache merken wir hier davon nur Folgendes an.

I. Zu einem Winkel oder Bogen, der nebst den Graden und Minuten auch Secunden enthält, findet man in den Tafeln, die nur von Minute zu Minute berechnet sind, die zugehörige trigonometrische Linie oder ihren Logarithmus (mit einem Worte die trigonometrische Function) im Allgemeinen auf folgende Art:

Man nehme vorerst die den angegebenen Graden und Minuten entsprechende Function unmittelbar aus der Tafel, und stelle dann die Proportion auf:

60 Secunden verhalten sich zu den gegebenen Secunden, wie die Differenz der Functionen von dem nächst größeren und nächst kleineren Winkel in den Tafeln sich zu einer 4ten Proportional-Zahl verhält. Diese gefundene Proportional-Zahl wird nun zu der Function des nächst kleineren Winkels addirt, wenn mit den Winkeln auch die Functionen wachsen, oder davon abgezogen, wenn die Functionen abnehmen, während die Winkel wachsen; und das Resultat hievon ist die gesuchte Function von dem gegebenen Winkel, der nebst den Graden und

Fig. Minuten auch Secunden enthält. Ist insbesondere der Logarithmus einer trigonometrischen Function, welche die Einheit nicht übersteigt, zu suchen, so ziehe man von dem durch das eben erklärte Verfahren gefundenen Logarithmen (wegen §. 544) die überschüssige Zahl 10 entweder wirklich ab, oder zeige die Subtraction bloß an, oder endlich, was das Beste ist, man behalte nur stets im Gedächtnisse, daß ein solcher Logarithme um 10 zu vermindern ist.

Z. B. Es sey zu suchen log sin (53° 28′ 54″),

so ist . . . . . log sin (53° 29′) = 9,9050852
und . . . . . log sin (53° 28′) = 9,9049916,

Differenz für 1′ oder 60″ . . . . = +936,
folglich 60″ : 54″ = 936 : x, nähml. x = 842
und weil . . . log sin (53° 28′) . . = 9,9049916
die vierte Zahl x wegen . . . 54″ = +842,

so ist . . . . log sin (53° 28′ 54″) = 9,9050758.

Ingleichen es sey zu suchen log cot (53° 28′ 54″),

so ist . . . . . log cot (53° 29′) = 9,8694731
und . . . . . log cot (53° 28′) = 9,8697372,

Differenz für 1′ oder 60″ . . . . = — 2641,
folgl. 60″ : 54″ = — 2641 : x, nähml. x = — 2377
und weil log cot (53° 28′) = 9,8697372
die vierte Zahl x wegen . . . 54″ = — 2377

so ist . . . . log cot (53° 28′ 54″) = 9,8694995.

II. Zu einer gegebenen trigonometrischen Function, die in den Tafeln nicht genau anzutreffen ist, wird der dazu gehörige Winkel oder Bogen in Graden, Minuten und Secunden auf folgende Art gefunden:

Man schreibe zuerst aus der Tafel diejenige Anzahl von Graden und Minuten ab, welche der kleineren von jenen zwey Functionen entspricht, zwischen denen die gegebene Function liegt; dann bilde man die Proportion:

Die Differenz der nächst größeren und nächst kleineren Function in den Tafeln verhält sich zu der Differenz zwischen der gegebenen und nächst kleineren Funtion, wie sich 60″ zu einer 4ten Proportional-Zahl verhalten. Diese 4te Proportio-

nal-Zahl gibt eine Anzahl von Secunden, die man zu den Gra- Fig.
den und Minuten der nächst kleineren Function addirt, wenn mit den Winkeln auch die Functionen wachsen, oder davon abzieht, wenn die Functionen abnehmen, während die Winkel wachsen. Wäre die gegebene Function ein negativer Logarithmus, so würde man ihn (wegen §. 544) wenigstens in Gedanken vorläufig so einrichten, daß von seiner positiven Karakteristik die Zahl 10 abgezogen werde, d. h. man wird einerseits zu ihm die Zahl 10 addiren, und anderseits dieselbe wieder von ihm abziehen.

Es sey z. B. 9,8807832 der Logarithmus des Cosinus eines gewissen Winkels, so findet man in den Tafeln, daß der zugehörige Winkel größer als 40° 32′, und kleiner als 40° 33′ ist.

Denn es ist . . . log cos (40° 33′) = 9,8807215
und . . . . . log cos (40° 32′) = 9,8808296,

Differenz für 1′ oder 60″ . . . . . = — 1081,
der gegebene Logarithmus . . . . . = 9,8807832,
der nächst kleinere log cos (40° 33′) = 9,8807215

Differenz . . . . . = 617,
folglich —1081 : 617 = 60″ : x nähml. x = — 34″,
da nun der nächst kleineren Function 40° 33′
und der 4ten Zahl x entsprechen — 34″,

so ist der gesuchte Winkel oder Bogen = 40° 32′ 26″.

Ingleichen es sey 10,1948376 der Logarithmus von der Tangente eines gewissen Winkels

so ist . . . . . log tang (57° 27′) = 10,1949767
und . . . . . log tang (57° 26′) = 10,1946981

Differenz für 1′ oder 60″ . . . . . = +2786,
der gegebene Logarithmus . . . . . = 10,1948376
der nächst kleinere log tang (75° 26′) = 10,1946981

Differenz . . . . . = 1395,
folglich 2786 : 1395 = 60″ : x nähml. x = +30″,
da nun der nächst kleineren Function 57° 26′
und der 4ten Zahl x entsprechen + 30″,

so ist der gesuchte Winkel oder Bogen = 57° 26′ 30″.

Fig. 124. Der Grund der angeführten Proportion liegt in Folgendem. Es sey MN = arc 1′ = arc 60″, und Mm = arc x″, z. B. Mm = arc 25″, so kann MmN für eine gerade Linie angesehen werden; dann ist das Dreyeck Mnm ∽ MpN; folglich MN : Mm = pN : nm, nähmlich 60″ verhalten sich zu x″ = TN — QM (die Differenz der Functionen z. B. der Sinus) sich zu nm verhält, welches gefundene nm zu QM addirt wird, um Sm als den Sinus von Pm zu erhalten. Ingleichen pN : nm = MN : Mm, oder TN—QM : Sm—QM = 60″ : x″, und diese gefundenen x″ werden zu PM addirt, um Pm zu erhalten; u. s. w. Da ferner bey sehr großen Zahlen und bey kleinen Unterschieden derselben sich die Differenzen der Zahlen so gegen einander verhalten, wie die Differenzen ihrer Logarithmen; so gilt die eben angeführte Proportion auch von den Logarithmen der Functionen jener Winkel, welche um eine sehr kleine Größe (hier nicht über 60 Secunden) von einander unterschieden sind.

Diese Proportion ist bey den Sinus und Cosinus aller (großen und kleinen) Winkel, so wie auch bey den Tangenten von allen Winkeln unter 45°, so gut als vollkommen richtig. Bey den Tangenten und deren Logarithmen nahe bey 90°, bey den Logarithmen der Sinus und Tangenten von kleinen Winkeln hingegen entfernt sie sich etwas von der Wahrheit, und zwar hauptsächlich, wenn man zu dem Winkel die Function sucht. Aus dieser Ursache ist es sehr gut, sich mit solchen Tafeln zu versehen, in denen (wie in jenen von Callet) die trigonometrischen Functionen für die ersten 3 oder 4, und auch für die letzten 3 oder 4 Grade des Quadranten von Secunde zu Secunde oder wenigstens von 10 zu 10 Secunden berechnet sind.

§. 548.

Wir wollen aus den (542.) gefundenen Gleichungen noch einige Formeln herleiten. Zu diesem Zwecke suchen wir die halbe Summe und Differenz zuerst von den Gleichungen III. und IV., dann von den Gleichungen I. und II., wodurch wir folgende Formeln erhalten:

I. $\sin a \sin b = \frac{1}{2}\cos(a-b) - \frac{1}{2}\cos(a+b)$, Fig.

II. $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\cos(a-b) + \frac{1}{2}\cos(a+b)$,

III. $\sin a \cos b = \frac{1}{2}\sin(a+b) + \frac{1}{2}\sin(a-b)$,

IV. $\sin b \cos a = \frac{1}{2}\sin(a+b) - \frac{1}{2}\sin(a-b)$.

§. 549.

Setzt man in diesen 4 letzten Formeln $a+b=p$, und $a-b=q$, nähmlich $a=\frac{1}{2}(p+q)$, und $b=\frac{1}{2}(p-q)$; so ergeben sich nachstehende 4 Formeln:

I. $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)$, aus III.

II. $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{1}{2}(p-q)\cos\frac{1}{2}(p+q)$, aus IV.

III. $\cos q + \cos p = 2\cos\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)$, aus II.

IV. $\cos q - \cos p = 2\sin\frac{1}{2}(p+q)\sin\frac{1}{2}(p-q)$, aus I.

§. 550.

Nehmen wir in den zwey letzten Formeln III. und IV. (549.) $q=0^0$, so ist $\cos q = \cos 0^0 = 1$ und folglich

I. $1+\cos d = 2\cos^2\frac{1}{2}p$,

II. $1-\cos p = 2\sin^2\frac{1}{2}p$;

III. $\tang^2\frac{1}{2}p = \frac{1-\cos d}{1+\cos p}$, wenn man die Formel II. durch I. theilt, und (nach 541. II.) reducirt. Aus den Formeln I. und II. findet man auch $\cos p = 2\cos^2\frac{1}{2}p - 1$, und $\cos p = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}p$, welches mit §. 543. IV. und V. übereintrifft.

§. 551.

Aus den in §. 549 aufgestellten Formeln ergibt sich, wenn man sie wechselweise durch einander dividirt und auf die Gleichung II. in §. 541 Bedacht nimmt:

I. $\frac{\sin p+\sin q}{\sin p-\sin q} = \frac{\tang\frac{1}{2}(p+q)}{\tang\frac{1}{2}(p-q)}$

II. $\frac{\cos q-\cos p}{\cos q+\cos p} = \tang\frac{1}{2}(p+q)\tang\frac{1}{2}(p-q)$

III. $\frac{\sin p+\sin q}{\cos p+\cos q} = \frac{\cos q-\cos p}{\sin p-\sin q} = \tang\frac{1}{2}(p+q)$ u. m. dgl.

§. 552.

Mittelst der im §. 542 abgeleiteten Formeln ist es leicht, die Tangenten und Cotangenten der Summe und Diffe-

Fig. renz zweyer Bogen durch jene der einfachen Bogen auszudrücken. Denn es ist

$$\text{tang}\,(a \pm b) = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a \pm b)} = \frac{\sin a \cos b \pm \cos a \sin b}{\cos a \cos b \mp \sin a \sin b},$$

folglich hat man, wenn man den Zähler und Nenner durch $\cos a \cos b$ dividirt und auf die Gleichung II. §. 541. Rücksicht nimmt:

I. $\text{tang}\,(a+b) = \frac{\text{tang}\,a + \text{tang}\,b}{1 - \text{tang}\,a\,\text{tang}\,b}$

II. $\text{tang}\,(a-b) = \frac{\text{tang}\,a - \text{tang}\,b}{1 + \text{tang}\,a\,\text{tang}\,b}$.

Hieraus findet man nach der letzten der Gleichungen VI. §. 541.

III. $\cot.\,(a+b) = \frac{1 - \text{tang}\,a\,\text{tang}\,b}{\text{tang}\,a + \text{tang}\,b}$

IV. $\cot\,(a-b) = \frac{1 + \text{tang}\,a\,\text{tang}\,b}{\text{tang}\,a - \text{tang}\,b}$.

Nun setze man in I. und III. $b = a$, so ist

V. $\text{tang}\,2a = \frac{2\,\text{tang}\,a}{1 - \text{tang}^2 a}$, und VI. $\cot 2a = \frac{1 - \text{tang}^2 a}{2\,\text{tang}\,a}$.

Anmerkung. Aus den bereits entwickelten Formeln können noch viele andere hergeleitet werden, wenn man sie ferner durch Addition, Subtraction, Multiplication, Division und Substitution mit einander verbindet; wenn man einen Bogen a, oder b, oder p einmahl $= 90°$, ein andermahl $= 0°$, einmahl $= 30°$, ein andermahl $= 45°$ setzt; und sich dabey erinnert, daß $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\text{tang}\,45° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = 1$ ist, u. s. w. Daß $\text{tang}\,45° = 1$ ist, erhellet auch
124. daraus, daß das Dreyeck ATC gleichschenkelig, und folglich $AT = AC =$ dem Halbmesser ist, sobald man den Bogen AB oder den Winkel $ACT = 45°$ setzt. Alle diese bisher entwickelten, und noch mehrere andere trigonometrische Formeln, welche bey dem Gebrauche vorkommen können, sind im Anhange diesem Lehrbuche beygefügt, damit man sie alle überblicken, und bey der Anwendung sogleich die nöthigen auswählen kann. Die fähigeren Anfänger können ihre Kräfte versuchen, um sich von der Richtigkeit derselben zu überzeugen.

§. 553. Fig.

I. Wenn man einen Kreisbogen $= z$, und seinen Halbmesser $= 1$ setzt, so ist $\text{tang } z = \frac{\sin z}{\cos z}$; folglich auch (vermöge 545.)

$$\text{tang } z = \frac{z - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^5}{2.3.4.5} - \frac{z^7}{2.3\ldots7} + \ldots}{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z6}{2.3.4.5.6} + \ldots}$$

und endlich nach verrichteter Division

$$\text{tang } z = z + \frac{2z^3}{2.3} + \frac{16z^5}{2.3.4.5} + \frac{272z^7}{2.3..7} + \frac{7936z^9}{2.3..9} + \ldots$$

Eben so kann cot z durch eine unendliche Reihe ausgedrückt werden. Diese zwey Reihen könnte man dann eben so einrichten, wie es (545.) bey dem sin z und cos z gezeigt worden ist, wenn es erforderlich wäre, die Tangenten und Cotangenten zu berechnen.

II. Setzt man $\text{tang } z = x$, so ist

$$x = z + \frac{2z^3}{2.3} + \frac{16z^5}{2.3.4.5} + \frac{272z^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots\ldots\ldots$$

Aus dieser Gleichung findet man

$$z = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 - \tfrac{1}{11}x^{11} + \ldots\ldots$$

wenn man $z = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \ldots$ setzt, und nach (288.) die unbekannten Coefficienten A, B, C, D . . bestimmt.

Da nun $x = \text{tang } z$ ist, so ist umgekehrt $z = \text{arc tang } x$, folglich

$$\text{arc tang } x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{(3-x^2)x}{1.3} + \frac{(7-5x^2)x^5}{5.7} + \frac{(11-9x^2)x^9}{9.11} + \ldots\ldots \quad (1)$$

III. Diese Reihe läßt sich mit sehr großem Vortheil zur Berechnung der von uns mit π bezeichneten Zahl benützen, welche das Verhältniß der Peripherie des Kreises zu seinem Durchmesser, folglich auch die Länge des halben Umkreises vom Durchmesser 1 anzeigt. Zu diesem Zwecke setzen wir für arc tang x einen Bogen, dessen Verhältniß zum Umkreise sich leicht ausdrücken läßt, und dessen Tangente x eine einfache, die Einheit nicht übersteigende Zahl ist. Dazu eignen sich die Werthe

Fig.

$$\text{arc tang } x = \text{arc } 45^0 = \frac{\pi}{4}, \qquad x = 1,$$

$$\text{arc tang } x = \text{arc } 30^0 = \frac{\pi}{6}, \qquad x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Substituirt man den ersten Werth $x = 1$ in die Gleichung (1), so erhält man die von Leibnitz zuerst angegebene Reihe

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right)$$

$$= 8\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \ldots\right)$$

Zu dem zweyten Werthe $x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ findet man

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.9^2} - \frac{1}{7.3^3} + \ldots.\right)$$

$$= 16\sqrt{3}\left(\frac{1}{1.3.3^1} + \frac{2}{5.7.3^3} + \frac{3}{9.11.3^5} + \ldots..\right)$$

Dieser Reihe, auf welche Lagny seine Bestimmung der Zahl π gründete, kann man auch die Form ertheilen

$$\pi = \frac{1}{1.3}\cdot\left(\frac{16\sqrt{3}}{3^1}\right) + \frac{2}{5.7}\cdot\left(\frac{16\sqrt{3}}{3^3}\right) + \frac{3}{9.11}\cdot\left(\frac{16\sqrt{3}}{3^5}\right) + \frac{4}{13.15}\cdot\left(\frac{16\sqrt{3}}{3^7}\right) + \ldots$$

woraus, wenn man nach der Ordnung die in Klammern eingeschlossenen Glieder mit A, B, C, D, ... bezeichnet,

$$\pi = \frac{1}{1.3}\cdot\overset{A}{\left(\frac{16\sqrt{3}}{3}\right)} + \frac{2}{5.7}\cdot\overset{B}{\left(\frac{A}{9}\right)} + \frac{3}{9.11}\cdot\overset{C}{\left(\frac{B}{9}\right)} + \frac{4}{13.15}\cdot\overset{D}{\left(\frac{C}{9}\right)} + \frac{5}{17.19}\cdot\overset{E}{\left(\frac{D}{9}\right)} + \ldots$$

gefunden wird.

Durch diese unendliche Reihe, die sehr schnell abnimmt, könnte der Werth von π sehr leicht berechnet werden.

IV. Setzt man (§. 552. II.) in der Gleichung

$$\text{tang}(a - b) = \frac{\text{tang } a - \text{tang } b}{1 + \text{tang } a \text{ tang } b}$$

$\text{tang } a = \alpha$, $\text{tang } b = \beta$,

also $a = \text{arc tang } \alpha$, $b = \text{arc tang } \beta$;

Fig.

so ist $\text{tang}\,(a-b) = \frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}$,

folglich

$$a-b = \text{arctang}\,\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta};$$

und daraus ergibt sich

$$\text{arctang}\,\alpha = \text{arctang}\,\beta + \text{arc tang}\,\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta} \qquad (2)$$

Würde insbesondere $\beta = \frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}$,

folglich $\beta = \frac{-1+\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}$, so hätte man

$$\text{arc tang}\,\alpha = 2\,\text{arc tang}\,\frac{-1+\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha} \qquad (3)$$

Mittelst dieser zwey Gleichungen läßt sich ein Bogen, dessen Tangente gegeben ist, in zwey andere zerlegen, deren Tangenten kleiner als die gegebene sind. Wendet man diese Zerfällung der Bogen wiederhohlt an, so hat man es, wie man leicht sieht, ganz in seiner Gewalt, ungemein convergirende Reihen für die Berechnung der Zahl π sich zu verschaffen. Das hiebey anzuwendende Verfahren möge man aus folgenden Beyspielen entnehmen.

1. Beyspiel. Es ist $\frac{\pi}{4} = \text{arc tg}\,1 = \text{arc tg}\,\frac{1}{3} + \text{arc tg}\,\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}$

$$= \text{arc tg}\,\frac{1}{3} + \text{arc tg}\,\tfrac{1}{2},$$

daher $\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \ldots\right)$

$$+\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \ldots\right)$$

Diese Reihe wurde von Euler angegeben.

Zerlegt man $\text{arc tang}\,\frac{1}{2}$ neuerdings, so hat man

$$\text{arctang}\,\frac{1}{2} = \text{arc tang}\,\frac{1}{3} + \text{arc tang}\,\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{6}}$$

$$= \text{arc tang}\,\frac{1}{3} + \text{arc tang}\,\frac{1}{7}$$

folglich $\frac{\pi}{4} = 2\,\text{arc tang}\,\frac{1}{3} + \text{arc tang}\,\frac{1}{7}$,

Fig. oder

$$\frac{\pi}{4} = 2.\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} - \frac{1}{11.3^{11}} + \ldots\right)$$
$$+\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} - \frac{1}{7.7^7} + \frac{1}{9.7^9} - \frac{1}{11.7^{11}} + \ldots\right)$$

und, wenn man in dieser Gleichung jede zwey neben einander stehende Brüche auf gleiche Benennung bringt, und schicklich reducirt;

$$\pi = 8\left\{\begin{array}{l} \frac{26}{1.3}\cdot\left(\frac{1}{3^3}\right) + \frac{58}{5.7}\cdot\left(\frac{1}{3^7}\right) + \frac{90}{9.11}\cdot\left(\frac{1}{3^{11}}\right) + \ldots \\ + \frac{73}{1.3}\cdot\left(\frac{1}{7^3}\right) + \frac{169}{5.7}\cdot\left(\frac{1}{7^7}\right) + \frac{265}{9.11}\cdot\left(\frac{1}{7^{11}}\right) + \ldots \end{array}\right\}$$

oder, wenn man nach der Ordnung die in Klammern eingeschlossenen Glieder mit A, B, C, D, ... a, b, c, d,... bezeichnet,

$$\pi = 8\left\{\begin{array}{l} \underset{A}{\frac{26}{1.3}\left(\frac{1}{27}\right)} + \underset{B}{\frac{58}{5.7}\left(\frac{A}{81}\right)} + \underset{C}{\frac{90}{9.11}\left(\frac{B}{81}\right)} + \underset{D}{\frac{122}{13.15}\left(\frac{C}{81}\right)} + \ldots \\ + \underset{a}{\frac{73}{1.3}\left(\frac{1}{343}\right)} + \underset{b}{\frac{169}{5.7}\left(\frac{a}{2401}\right)} + \underset{c}{\frac{265}{9.11}\left(\frac{b}{2401}\right)} + \underset{d}{\frac{361}{13.15}\left(\frac{c}{2401}\right)} + \ldots \end{array}\right\}$$

Diese doppelte Reihe (obschon die Zähler der Glieder um eine beständige Differenz, in der ersten um 32, und in der zweyten Reihe um 96 wachsen) läuft sehr schnell zusammen, und hat dabey eine gute Gestalt, die Annäherung zu dem Werthe von π, wenn er noch nicht berechnet wäre, so weit zu treiben, als man es nur immer verlangen kann. Um z. B. den Werth von π in 127 Decimal-Stellen richtig zu erhalten, muß man die Glieder einer jeden Reihe wenigstens in 128 Decimal-Stellen entwickeln. Man findet auf diese Art

$\pi =$ 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288
41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164
06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148
08651 32823 06647 09384 46 . . . . . .

wo jede Decimal-Ziffer mit Einschluß der 127ten richtig ist, wie ich mich durch wiederhohlte Berechnung nach einer anderen im nächsten Beyspiele folgenden Formel laut meines Thesaurus Logarithm. Lipsiae 1794 pag. 633. überzeugte. Dabey kommt noch zu bemerken, daß die Ziffer der 113ten Decimal-Stelle 8, aber nicht 7 seyn muß, wie man es sonst in allen mathematischen Schriften, wahrscheinlich nur als einen Schreib- oder Druckfehler findet.

2. Beyspiel. Man findet auch Fig.

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tg}\,1 = \text{arc tg}\,\frac{1}{7} + \text{arc tg}\,\frac{3}{4} = 2\,\text{arc tg}\,\frac{1}{7} + \text{arc tg}\,\frac{17}{31}$$
$$= 3\,\text{arc tg}\,\frac{1}{7} + \text{arc tg}\,\frac{44}{117} = 4\,\text{arc tg}\,\frac{1}{7} + \text{arc tg}\,\frac{191}{863}$$
$$= 5\,\text{arc tg}\,\frac{1}{7} + \text{arc tg}\,\frac{237}{3116}.$$

Um auch noch $\text{arc tang}\,\frac{237}{3116}$ aufzulösen, wird es gut seyn, sich der Gleichung (3) zu bedienen, da

$$\sqrt{1+\left(\frac{237}{3116}\right)^2} = \frac{\sqrt{9709456+56169}}{3116} = \frac{\sqrt{9765625}}{3116} = \frac{3125}{3116},$$

folglich $\text{arc tang}\,\frac{237}{3116} = 2\,\text{arc tang}\,\frac{9}{237} = 2\,\text{arc tang}\,\frac{3}{79}$ ist. Man hat demnach

$$\frac{\pi}{4} = 5\,\text{arc tang}\,\frac{1}{7} + 2\,\text{arc tang}\,\frac{3}{79},$$

und

$$\pi = 8\left\{\begin{array}{l} 5\left(\frac{73}{1.3.7^3} + \frac{169}{5.7.7^7} + \frac{265}{9.11.7^{11}} + \frac{361}{13.15.7^{15}} + \ldots.\right) \\ +2\left(\frac{3^1.9357}{1.3.79^3} + \frac{3^5.21821}{5.7.79^7} + \frac{3^9.34285}{9.11.79^{11}} + \ldots\ldots\ldots\right) \end{array}\right\}$$

3. Beyspiel. Nach einer anderen Zerfällung ist

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tg}\,1 = \text{arc tg}\,\frac{1}{5} + \text{arc tg}\,\frac{2}{3} = 2\,\text{arc tg}\,\frac{1}{5} + \text{arc tg}\,\frac{7}{17}$$
$$= 3\,\text{arc tg}\,\frac{1}{5} + \text{arc tg}\,\frac{9}{46} = 4\,\text{arc tg}\,\frac{1}{5} - \text{arc tg}\,\frac{1}{239},$$

und dadurch ergibt sich die von Bertrand zuerst gebrauchte Reihe

$$\pi = 16\left(\frac{2}{10} - \frac{2^3}{3.10^3} + \frac{2^5}{5.10^5} - \frac{2^7}{7.10^7} + \ldots\right)$$
$$-4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \frac{1}{7.239^7} + \ldots\right)$$

Löst man $\text{arc tang}\,\frac{1}{5}$ neuerdings auf, so findet man

$$\text{arc tg}\,\frac{1}{5} = \text{arc tg}\,\frac{1}{10} + \text{arc tg}\,\frac{5}{51} = 2\,\text{arc tg}\,\frac{1}{10} - \text{arc tg}\,\frac{1}{515},$$

folglich $\frac{\pi}{4} = 8\,\text{arc tg}\,\frac{1}{10} - 4\,\text{arc tg}\,\frac{1}{515} - \text{arc tg}\,\frac{1}{239}$, und darnach die von Buzengeiger angegebene äußerst convergirende Reihe

Fig.

$$\pi = 32\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{3.10^3} + \frac{1}{5.10^5} - \ldots\right)$$
$$- 16\left(\frac{1}{515} - \frac{1}{3.515^3} + \frac{1}{5.515^5} - \ldots\right)$$
$$- 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \ldots\right).$$

Auf dieselbe Weise erhält man auch

$$\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arc\,tang} \frac{4}{10} + \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{41}$$

$$\frac{\pi}{4} = 7 \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{10} + \operatorname{arc\,tang} \frac{11}{125} - \operatorname{arc\,tang} \frac{103444}{1837489766}.$$

4. Beyspiel. Eine andere interessante Benützung der Gleichung (2) läßt sich aus Folgendem ersehen. Es ist

$$\operatorname{arc\,tang} 1 = \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{1}{2} = \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{7}$$

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{1}{3} = \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{4} + \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{13} = \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{8}$$

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{1}{4} = \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{21}$$

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{1}{5} = \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{6} + \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{31} = \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{7} + \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{18}$$

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{1}{6} = \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{7} + \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{43}$$

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{1}{7} = \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{8} + \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{57} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{9} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{32}$$
$$= \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{12} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{17}$$

u. s. w.

Verbindet man diese Gleichungen zweckmäßig mit einander, so erfolgt

$$\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{7} = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{8}$$
$$= 3 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{8} + 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{18}$$
$$= 5 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{8} + 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{18} + 3 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{57}$$
$$= 5 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{13} + 5 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{21} + 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{31} + 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{43} + 3 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{57}$$

u. m. dgl.

Man bemerkt leicht, daß man bey fernerer Fortsetzung und Fig. treffender Auswahl dieser Gleichungen noch weit mehr convergirende Reihen für π erhalten würde.

V. Setzen wir in §. 545 für z seinen Werth arc sin x, so verwandelt sich die erste Reihe in folgende:

$$\text{arc sin } x = x + \frac{1.x^3}{2.3} + \frac{1.3.x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5.x^7}{2.4.6.7} + \ldots,$$

welche gleichfalls zur Berechnung von π benützt werden kann. Zu diesem Zwecke setzt man

$$\begin{aligned}
\text{arc sin } x &= \text{arc } 90^0 = \frac{\pi}{2}, & x &= 1\\
&= \text{arc } 60^0 = \frac{\pi}{3}, & &= \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\\
&= \text{arc } 45^0 = \frac{\pi}{4}, & &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\\
&= \text{arc } 30^0 = \frac{\pi}{6}, & &= \tfrac{1}{2},
\end{aligned}$$

und findet die Reihen

$$\begin{aligned}
\pi &= 2\left(1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1.3}{2.4.5} + \ldots\right)\\
&= \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(1 + \frac{1.3}{2.3.2^2} + \frac{1.3.3^2}{2.4.5.2^4} + \ldots\right)\\
&= 2\sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2.3.2} + \frac{1.3}{2.4.5.2^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.2^3} + \ldots\right)\\
&= 3\left(1 + \frac{1}{2.3.2^2} + \frac{1.3}{2.4.5.2^4} + \ldots\right).
\end{aligned}$$

Um rascher convergirende Reihen zu entdecken, könnten wir die Gleichung

$$\text{arc sin } a = \text{arc sin } b + \text{arc sin } (a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2}),$$

so wie in IV. die Gleichung (2) behandeln; doch damit möge sich der Leser selbst unterhalten.

§. 554.

Bevor wir die goniometrischen Functionen, ihrer eigentlichen Bestimmung gemäß, zur Auflösung der Dreyecke verwenden, wollen wir noch zeigen, wie mittelst derselben die mit reellen numerischen Coefficienten versehenen Gleichungen des zweyten und dritten Grades aufgelöst werden können.

Fig. I. Jede geordnete Gleichung des zweyten Grades ist in der allgemeinen Form

$$x^2 + ax + b = 0$$

enthalten, aus welcher man (nach §. 215) allgemein

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2} = -\frac{a}{2}\left(1 \mp \sqrt{1-\frac{4b}{a^2}}\right),$$

und wenn man die beyden Wurzeln der Gleichung mit x_1 und x_2 bezeichnet, insbesondere

$$x_1 = -\frac{a}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{4b}{a^2}}\right), \quad x_2 = -\frac{a}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{4b}{a^2}}\right)$$

findet.

Um diese Ausdrücke mittelst der Logarithmen bestimmen zu können, verwandeln wir dieselben auf folgende Weise.

Ist b negativ, so fällt $-\frac{4b}{a^2}$ positiv und x stets reell aus. Was nun auch der Werth dieses Bruches seyn mag, so muß es, da die absoluten Werthe der Tangenten aller Winkel zwischen 0 und ∞ sich befinden, immer einen zwischen 0 und 90° liegenden Winkel φ geben, dessen quadrirte Tangente dem erwähnten Bruche gleicht.

Setzen wir demnach

$$-\frac{4b}{a^2} = \text{tang}^2\varphi, \text{ also } \text{tang}\,\varphi = \frac{2}{a}\sqrt{-b},$$

so wird

$$x = -\frac{a}{2}\cdot\frac{\cos\varphi \mp 1}{\cos\varphi}, \text{ oder } = -\frac{\cos\varphi \mp 1}{\sin\varphi}\cdot\sqrt{-b},$$

wenn wir für a seinen aus der vorangehenden Gleichung folgenden Werth $\frac{2\cos\varphi}{\sin\varphi}\sqrt{-b}$ setzen. Folglich ist mit Rücksicht auf §. 543 I. und II.,

$$x_1 = \text{tang}\tfrac{1}{2}\varphi\cdot\sqrt{-b}$$
$$x_2 = -\cot\tfrac{1}{2}\varphi\cdot\sqrt{-b}.$$

Ist aber b positiv, so wird auch der Bruch $\frac{4b}{a^2}$ positiv. Wird er überdieß nicht unecht, so läßt sich, da von keinem Winkel der Sinus die Einheit überschreitet, stets ein zwischen 0 und 90° lie-

gender Winkel φ auffinden, dessen quadrirter Sinus jenem Bruche gleich ist. Fig.

Nehmen wir also

$$\frac{4b}{a^2} = \sin^2\varphi, \quad \text{folglich } \sin\varphi = \frac{2}{a}\sqrt{b},$$

so ist

$$x = -\frac{a}{2}(1 \mp \cos\varphi), \text{ oder auch } = -\frac{1 \mp \cos\varphi}{\sin\varphi}\sqrt{b},$$

wenn wir wieder die Größe a durch ihren Werth $\frac{2\sqrt{b}}{\sin\varphi}$ ersetzen.

Es wird demnach

$$x_1 = -a\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi = -\tan\tfrac{1}{2}\varphi \cdot \sqrt{b},$$
$$x_2 = -a\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi = -\cot\tfrac{1}{2}\varphi \cdot \sqrt{b}.$$

Fällt aber der Bruch $\frac{4b}{a^2}$ unecht, daher x imaginär aus, so setzen wir, auf die vorigen Gründe gestützt,

$$\frac{a^2}{4b} = \sin^2\varphi, \text{ also } \sin\varphi = \frac{a}{2\sqrt{b}},$$

und erhalten

$$x = -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\frac{\sqrt{\sin^2\varphi - 1}}{\pm\sin\varphi} \text{ oder } = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{b} \cdot \cos\varphi \cdot \sqrt{-1},$$

wenn wir im letzten Gliede für a seinen Werth $2\sin\varphi \cdot \sqrt{b}$ schreiben. Sofort ist

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \cos\varphi \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1},$$
$$x_2 = -\frac{a}{2} - \cos\varphi \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}.$$

Soll demnach die quadratische Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0$$

aufgelöst werden, so suche man, wenn erstens b negativ ist, zuvörderst den Hülfswinkel φ aus $\tan\varphi = \frac{2}{a}\sqrt{-b}$;

dann die beyden Wurzeln x_1 und x_2 aus

$$x_1 = \tan\tfrac{1}{2}\varphi \cdot \sqrt{-b},$$
$$x_2 = -\cot\tfrac{1}{2}\varphi \cdot \sqrt{-b}.$$

Fig. Ist aber zweytens b positiv, so bestimme man den Hülfswinkel φ mittelst der Gleichung $\sin\varphi = \frac{2}{a}\sqrt{b}$,

und sofort die Wurzeln aus

$$x_1 = -a\sin^2\frac{1}{2}\varphi = -\tang\frac{1}{2}\varphi \cdot \sqrt{b},$$

$$x_2 = -a\cos^2\frac{1}{2}\varphi = -\cot\frac{1}{2}\varphi \cdot \sqrt{b}.$$

Fällt jedoch hiebey der Bruch $\frac{2}{a}\sqrt{b}$ größer als 1, daher sein Logarithmus größer als 0 aus; so suche man den Hülfswinkel φ nach der Gleichung $\sin\varphi = \frac{a}{2\sqrt{b}}$,

und die Wurzeln selbst aus

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \cos\varphi \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1},$$

$$x_2 = -\frac{a}{2} - \cos\varphi \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}.$$

II. Die geordneten Gleichungen des dritten Grades besitzen die allgemeine Form

$$y^3 + Ay^2 + By + C = 0,$$

und können durch die Substitution

$$y = x - \frac{1}{3}A$$

in $x^3 + ax + b = 0$

verwandelt werden, wenn

$$a = B - \frac{1}{3}A^2,$$

$$b = C - \frac{1}{3}AB + \frac{2}{27}\cdot A^3$$

gesetzt wird.

Eine der Wurzeln dieser Gleichung ist (vermög §. 338)

$$x = -(u + v),$$

wenn $u = \sqrt[3]{\frac{b}{2}} \cdot \sqrt[3]{1 - \sqrt{\left(1 + \frac{4a^3}{27b^2}\right)}}$,

$$v = \sqrt[3]{\frac{b}{2}}\ \sqrt[3]{1 + \sqrt{\left(1 + \frac{4a^3}{27b^2}\right)}}$$

angenommen wird.

Dividirt man nun den erſten Theil der Gleichung Fig.
$x^3 + ax + b = 0$ durch $x + (u + v)$, und beachtet, daß, weil $-(u + v)$ eine Wurzel derſelben iſt,

$$(u + v)^3 + a(u + v) - b = 0$$

ſeyn muß; ſo findet man

$$x^2 - x(u + v) + a + (u + v)^2 = 0$$

oder weil (vermög §. 338) $a = -3uv$ iſt,

$$x^2 - x(u + v) + u^2 - uv + v^2 = 0;$$

folglich iſt

$$x = \frac{1}{2}(u + v) \pm (u - v)\sqrt{-3}.$$

Setzt man demnach

$$\frac{1}{2}(u + v) = p, \quad \frac{1}{2}(u - v)\sqrt{3} = q,$$

und bezeichnet die drey Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + ax + b = 0$$

durch x_1, x_2, x_3; ſo hat man

$$x_1 = -2p,$$
$$x_2 = p + q\sqrt{-1},$$
$$x_3 = p - q\sqrt{-1}.$$

Um die Größen p und q logarithmiſch berechnen zu können, ſetzen wir zuvörderſt zur Verwandlung des Radicals $\sqrt{1 + \frac{4a^3}{27b^2}}$, ſo lange a poſitiv iſt, aus dem in I. angeführten Grunde

$$\frac{4a^3}{27b^2} = \tang^2\varphi, \text{ nähmlich } \tang\varphi = \frac{2}{b}\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

dadurch wird

$$\sqrt{1 + \frac{4a^3}{27b^2}} = \sqrt{1 + \tang^2\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi},$$

folglich iſt

$$u = \sqrt[3]{\frac{b}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\cos\varphi - 1}{\cos\varphi}}, \quad v = \sqrt[3]{\frac{b}{2}} \sqrt[3]{\frac{\cos\varphi + 1}{\cos\varphi}},$$

oder wenn man für b ſeinen Werth $\frac{2\cos\varphi}{\sin\varphi}\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ ſchreibt,

$$u = -\sqrt[3]{\tang\tfrac{1}{2}\varphi} \cdot \sqrt{\frac{a}{3}}, \quad v = \sqrt[3]{\cot\tfrac{1}{2}\varphi} \cdot \sqrt{\frac{a}{3}}.$$

Fig.

Setzt man nun noch $\sqrt[3]{\text{tang}\frac{1}{2}\varphi} = \text{tang}\,\omega$, so wird

$$u = -\text{tang}\,\omega \cdot \sqrt{\frac{a}{3}},\quad v = \cot\omega \cdot \sqrt{\frac{a}{3}},$$

folglich

$$p = \frac{1}{2}(\cot\omega - \text{tang}\,\omega)\sqrt{\frac{a}{3}} = \frac{\cos^2\omega - \sin^2\omega}{2\sin\omega\cos\omega}\sqrt{\frac{a}{3}},$$

$$q = -\frac{1}{2}(\cot\omega + \text{tang}\,\omega)\sqrt{a} = -\frac{1}{2\sin\omega\cos\omega}\sqrt{a}$$

nähmlich

$$p = \cot 2\omega \cdot \sqrt{\frac{a}{3}},\quad q = -\frac{\sqrt{a}}{\sin 2\omega}.$$

Ist aber a negativ, also $\frac{-4a^3}{27b^2}$ positiv, so schreiben wir, so lange dieser Bruch nicht unecht wird, zur Umstaltung der Wurzelgröße $\sqrt{1 - \frac{-4a^3}{27b^2}}$,

$$\frac{-4a^3}{27b^2} = \sin^2\varphi,\ \text{also}\ \sin\varphi = \frac{2}{b}\left(\frac{-a}{3}\right)^{\frac{3}{2}};$$

dadurch wird

$$u = \sqrt[3]{-\frac{b}{2}} \cdot \sqrt[3]{1-\cos\varphi} = \sqrt[3]{\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}} \cdot \sqrt{\frac{-a}{3}} = \sqrt[3]{\text{tg}\tfrac{1}{2}\varphi} \cdot \sqrt{\frac{-a}{3}}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{b}{2}} \cdot \sqrt[3]{1+\cos\varphi} = \sqrt[3]{\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}} \cdot \sqrt{\frac{-a}{3}} = \sqrt[3]{\cot\tfrac{1}{2}\varphi} \cdot \sqrt{\frac{-a}{3}}.$$

Nehmen wir nun noch $\sqrt[3]{\text{tang}\frac{1}{2}\varphi} = \text{tang}\,\omega$, so ist

$$u = \text{tang}\,\omega \cdot \sqrt{\frac{-a}{3}},\quad v = \cot\omega \cdot \sqrt{\frac{-a}{3}},$$

also

$$p = \frac{1}{2}(\cot\omega + \text{tang}\,\omega)\sqrt{\frac{-a}{3}} = \frac{1}{2\sin\omega\,.\,\cos\omega}\sqrt{\frac{-a}{3}},$$

$$q = -\frac{1}{2}(\cot\omega - \text{tang}\,\omega)\sqrt{-a} = -\frac{\cos^2\omega - \sin^2\omega}{2\sin\omega\,.\,\cos\omega}\sqrt{-a}$$

nähmlich

$$p = \frac{1}{\sin 2\omega} \cdot \sqrt{\frac{-a}{3}},\quad q = -\cot 2\omega \cdot \sqrt{-a}$$

Wäre aber der Bruch $\frac{-4a^3}{27b^2}$ unecht, folglich das Radical $\sqrt{1 + \frac{4a^3}{27b^2}}$ imaginär,

so setzen wir Fig.

$$\frac{27b^2}{-4a^3} = \sin^2\varphi, \text{ oder } \sin\varphi = \frac{b}{2}\left(\frac{3}{-a}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Durch diese Annahme wird

$$u = \sqrt[3]{\frac{b}{2}} \cdot \sqrt[3]{\left(1 - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\sqrt{-1}\right)} = \sqrt[3]{(\sin\varphi - \sqrt{-1}\cos\varphi)}\sqrt{\frac{-a}{3}}$$

$$= -\sqrt[3]{(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)}\sqrt{\frac{a}{3}}$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{b}{2}} \cdot \sqrt[3]{\left(1 + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\sqrt{-1}\right)} = \sqrt[3]{(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)}\sqrt{\frac{a}{3}}.$$

Es ist jedoch

$$\sqrt[3]{(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi)} = \cos\tfrac{1}{3}\varphi \pm \sqrt{-1}\,.\sin\tfrac{1}{3}\varphi;$$

denn man findet

$$(\cos\tfrac{1}{3}\varphi \pm \sqrt{-1}\,.\sin\tfrac{1}{3}\varphi)^2 = \cos^2\tfrac{1}{3}\varphi - \sin^2\tfrac{1}{3}\varphi \pm 2\sqrt{-1}\,.\sin\tfrac{1}{3}\varphi\,.\cos\tfrac{1}{3}\varphi$$

$$= \cos\tfrac{2}{3}\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\tfrac{2}{3}\varphi,$$

folglich

$$(\cos\tfrac{1}{3}\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\tfrac{1}{3}\varphi)^3 = (\cos\tfrac{2}{3}\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\tfrac{2}{3}\varphi) \times (\cos\tfrac{1}{3}\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\tfrac{1}{3}\varphi)$$

$$= \cos\tfrac{2}{3}\varphi\cos\tfrac{1}{3}\varphi - \sin\tfrac{2}{3}\varphi\sin\tfrac{1}{3}\varphi \pm \sqrt{-1}(\sin\tfrac{2}{3}\varphi\cos\tfrac{1}{3}\varphi + \cos\tfrac{2}{3}\varphi\sin\tfrac{1}{3}\varphi)$$

$$= \cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi.$$

Man erhält demnach

$$u = -(\cos\tfrac{1}{3}\varphi + \sqrt{-1}\sin\tfrac{1}{3}\varphi)\sqrt{\frac{a}{3}}$$

$$v = (\cos\tfrac{1}{3}\varphi - \sqrt{-1}\sin\tfrac{1}{3}\varphi)\sqrt{\frac{a}{3}}.$$

Hieraus findet man

$$p = -\sin\tfrac{1}{3}\varphi\,.\sqrt{\frac{-a}{3}},$$

$$q = -\cos\tfrac{1}{3}\varphi\,.\sqrt{a};$$

Fig. folglich

$$x_1 = 2\sin\tfrac{1}{3}\varphi\sqrt{\frac{-a}{3}},$$

$$x_2 = (-\sin\tfrac{1}{3}\varphi - \cos\tfrac{1}{3}\varphi . \sqrt{3})\sqrt{\frac{-a}{3}},$$

$$x_3 = (-\sin\tfrac{1}{3}\varphi + \cos\tfrac{1}{3}\varphi . \sqrt{3})\sqrt{\frac{-a}{3}}.$$

Die beyden Wurzeln x_2 und x_3 lassen sich noch einfacher ausdrücken, wenn man bemerkt, daß $\sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$ ist; denn durch die Einführung dieser Werthe wird

$$-\sin\tfrac{1}{3}\varphi \mp \cos\tfrac{1}{3}\varphi\sqrt{3} = \mp 2\,(\sin 60^0 \cos\tfrac{1}{3}\varphi \pm \cos 60^0 \sin\tfrac{1}{3}\varphi)$$
$$= \mp 2\sin(60^0 \pm \tfrac{1}{3}\varphi),$$

mithin ist

$$x_1 = 2\sin\tfrac{1}{3}\varphi\sqrt{\frac{-a}{3}},$$

$$x_2 = -2\sin(60^0 + \tfrac{1}{3}\varphi)\sqrt{\frac{-a}{3}},$$

$$x_3 = 2\sin(60^0 - \tfrac{1}{3}\varphi)\sqrt{\frac{-a}{3}}.$$

Um daher die cubische Gleichung

$$x^3 + ax + b = 0$$

aufzulösen, bestimme man, wenn erstens a positiv ist, die Hülfswinkel φ und ω nach den Gleichungen

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{2}{b}\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \operatorname{tang}\omega = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi},$$

dann die Größen p und q aus

$$p = \cot 2\omega . \sqrt{\frac{a}{3}}, \quad q = -\frac{\sqrt{a}}{\sin 2\omega},$$

endlich die Wurzeln x_1, x_2, x_3 aus

$$x_1 = -2p, \quad x_2 = p + q\sqrt{-1}, \quad x_3 = p - q\sqrt{-1}.$$

Ist aber zweytens a negativ, so suche man die Hülfswinkel φ und ω mittelst der Gleichungen

$$\sin\varphi = \frac{2}{b}\left(\frac{-a}{3}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \operatorname{tang}\omega = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi},$$

ferner die Größen p und q aus Fig.

$$p = \frac{1}{\sin 2\omega}\sqrt{\frac{-a}{3}}, \quad q = -\cot 2\omega \cdot \sqrt{-a},$$

endlich die Wurzeln x_1, x_2, x_3 aus denselben Gleichungen

$$x_1 = -2p, \quad x_2 = p + q\sqrt{-1}, \quad x_3 = p - q\sqrt{-1}.$$

Fällt aber hiebey $\frac{2}{b}\left(\frac{-a}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ größer als 1, folglich sein Logarithmus größer als 0 aus, so suche man den Hülfswinkel φ aus der Gleichung

$$\sin\varphi = \frac{b}{2}\left(\frac{3}{-a}\right)^{\frac{3}{2}},$$

und die Wurzeln x_1, x_2, x_3 aus

$$x_1 = 2\sin\tfrac{1}{3}\varphi \cdot \sqrt{\frac{-a}{3}},$$

$$x_2 = -2\sin(60^\circ + \tfrac{1}{3}\varphi) \cdot \sqrt{\frac{-a}{3}},$$

$$x_3 = 2\sin(60^\circ - \tfrac{1}{3}\varphi) \cdot \sqrt{\frac{-a}{3}}.$$

Anfängern möchten wir rathen, die hier bloß im Allgemeinen erklärten Rechnungsweisen an besondern Beyspielen zu versuchen.

II. Abschnitt.

Von der Auflösung geradliniger Dreyecke.

§. 555.

Um die zwischen den Seiten und Winkeln eines geradli- 125.
nigen Dreyeckes bestehenden Beziehungen aufzufinden, betreten wir folgenden Weg.

In dem Dreyecke ABC sey die Seite BC = A, CA = B, AB = C; der Winkel CAB = a, ABC = b, BCA = c. Man fälle aus dem Puncte C auf AB die Senkrechte CD und denke sich aus A und B mit den Halbmessern AC und BC

Fig. 125. zwischen den Schenkeln der Winkel a und b Kreisbogen beschrieben, so sind (vermöge §. 540.) die Verhältnisse $\frac{AD}{AC}$ und $\frac{BD}{BC}$ die Cosinus der Winkel a und b; nähmlich es ist

$$\frac{AD}{AC} = \cos a, \quad \frac{BD}{BC} = \cos b;$$

somit auch $AD = B \cos a$, $BD = A \cos b$.

Zu diesen Gleichungen gelangt man auch, indem man aus den Puncten A und B mit dem Halbmesser $1 = Am = Bp$ Kreisbogen beschreibt, und beachtet, daß sowohl die Dreyecke Amn und ACD, als auch die Dreyecke Bpq und BCD einander ähnlich sind, und $An = \cos a$, $Bq = \cos b$ ist.

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung

$$AB = BD + DA,$$

so erfolgt

(1) $$C = A \cos b + B \cos a,$$

was man auch dann erhält, wenn der Punct D außer den Puncten A und B z. B. zur Linken von A liegt, weil in diesem Falle $DA = -B \cos a$ und $AB = BD - DA$ wird.

Diese Gleichung, welche unmittelbar aus dem Begriffe des Cosinus eines Winkels fließt und lehrt, daß im geradlinigen Dreyecke jede Seite der Summe der Producte jeder der beyden anderen Seiten in den Cosinus des von ihr und der ersten Seite eingeschlossenen Winkels gleich ist, begreift die ganze, sowohl ebene als sphärische Trigonometrie in sich, wie dieß aus dem Folgenden ersichtlich werden wird.

Vertauschen wir in der Gleichung (1) zuerst C mit B, folglich auch c mit b, dann C mit A, also auch c mit a; so gewinnen wir noch die zwey mit (1) übereinstimmenden (analogen) Gleichungen

(1′) $$B = C \cos a + A \cos c$$

(1″) $$A = B \cos c + C \cos b.$$

§. 556.

I. Werden die eben gefundenen drey Gleichungen der Ordnung nach mit C, B, A multiplicirt, so übergehen sie in

Fig.

$$C^2 = CA\cos b + BC\cos a$$
$$B^2 = BC\cos a + AB\cos c$$
$$A^2 = AB\cos c + CA\cos b,$$

woraus, wenn man je zwey addirt und die dritte subtrahirt, die Gleichungen

$$B^2 + C^2 - A^2 = 2BC\cos a$$
$$C^2 + A^2 - B^2 = 2CA\cos b$$
$$A^2 + B^2 - C^2 = 2AB\cos c$$

hervortreten, denen wir die Form

(2)
$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC\cos a$$
$$B^2 = C^2 + A^2 - 2CA\cos b$$
$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos c$$

ertheilen, in welcher sie zeigen, daß das Quadrat einer Seite erhalten werde, wenn man von der Summe der Quadrate der übrigen zwey Seiten das doppelte Product aus eben diesen Seiten und dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels abzieht.

Zu diesen Gleichungen wären wir auch gelangt, wenn wir (§. 422) in der Gleichung

$$a^2 = c^2 - b^2 + 2bx.$$

für x den Ausdruck a cos A gesetzt hätten.

§. 557.

II. Aus den Gleichungen (1′) und (1″) läßt sich die Größe A wegschaffen (eliminiren), wenn man ihren Werth aus der letzteren in die erstere substituirt, dadurch ergibt sich

$$B = C\cos a + B\cos^2 c + C\cos b\cos c,$$

folglich

$$B\sin^2 c = C(\cos a + \cos b\cos c). \qquad (\alpha)$$

Verwechseln wir hierin B mit C und b mit c, so erhalten wir

$$C\sin^2 b = B(\cos a + \cos b\cos c). \qquad (\alpha')$$

Werden diese zwey Gleichungen gliederweise mit einander multiplicirt, so erfolgt

$$(\cos a + \cos b\cos c)^2 = \sin^2 b\sin^2 c$$

daher
$$\cos a + \cos b\cos c = \pm\sin b\sin c$$

und
$$\cos a = -(\cos b\cos c \mp \sin b\sin c) = -\cos(b \pm c).$$

Fig. Von den vor c stehenden zwey Zeichen kann bloß das obere gelten, weil in einem gleichschenkeligen Dreyecke, wo $b = c$ ist, $\cos a = -\cos o = -1$, folglich $a = 180^o$ würde, was nicht statt findet.

Ist aber $\cos a = -\cos(b + c)$,

so muß die Summe $a + b + c$ ein durch eine ungerade Zahl angegebenes Vielfache von 180°, als 1.180^o, 3.180^o, 5.180^o, ... folglich, wenn man berücksichtiget, daß jeder Winkel des Dreyeckes unter 180°, also ihre Summe unter 3.180^o ist, 1.180^o seyn; es ist demnach

(3) $$a + b + c = 180^o.$$

Diese Gleichung lieferte uns zwar schon der §. 378, allein es bleibt doch immer interessant zu sehen, wie auch sie aus der Grundgleichung (1) gefolgert werden könne.

III. Multipliciren wir aber die Gleichungen (α) und (α') kreuzweise (d. i. den ersten Theil der einen mit dem zweyten Theile der anderen), ziehen aus dem reducirten Resultate die Quadratwurzel und bemerken, daß die vorkommenden Größen ihrer Natur nach (essentiell) positiv sind; so erhalten wir:

$$B \sin c = C \sin b,$$

und wenn hierin C und c mit A und a verwechselt werden,

$$B \sin a = A \sin b,$$

daher aus beyden Gleichungen

(4) $$\frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} = \frac{C}{\sin c}$$

oder

(4) $$A : \sin a = B : \sin b = C : \sin c;$$

woraus wir entnehmen, daß die Seiten der geradlinigen Dreyecke den Sinus ihrer Winkel proportional sind.

125. Diesen Satz bestätiget eine einfache Ansicht der Fig. 125, denn in ihr sind (vermöge §. 540.) die Verhältnisse $\frac{CD}{CA}$ und $\frac{CD}{BC}$ die Sinus der Winkel a und b, nähmlich

$$\frac{CD}{AC} = \sin a, \quad \frac{CD}{BC} = \sin b;$$

folglich Fig.

$$CD = B \sin a = A \sin b,$$

woraus unmittelbar $\frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b}$ ſich ergibt.

§. 558.

IV. Schreiben wir in der Gleichung (1″) für C ſeinen aus der Gleichung (4) folgenden Werth $\frac{B \sin c}{\sin b}$, ſo erhalten wir

$$A = B\,(\sin c \cot b + \cos c)$$

oder auch

$$(5) \qquad \frac{A}{B \sin c} = \cot b + \cot c,$$

eine Gleichung, durch welche vier nach einander folgende Stücke des geradlinigen Dreyeckes in Verbindung geſetzt werden.

§. 559.

Mittelſt der aus der Gleichung (1) entſprungenen vier Gleichungen (2), (3), (4), (5), vermöchten wir zwar ſchon alle Dreyecke aufzulöſen, allein da es für die numeriſche Beſtimmung der unbekannten Stücke wünſchenswerth bleibt, daß ihre Ausdrücke ſich logarithmiſch behandeln laſſen, ſo wollen wir aus jenen Gleichungen noch andere dieſem Wunſche entſprechende herzuleiten uns beſtreben.

In dieſer Abſicht ſuchen wir cos a aus der erſten der Gleichungen (2) und ſetzen den ſich darbiethenden Werth

$$(6) \qquad \cos a = \frac{B^2 + C^2 - A^2}{2BC}$$

in die Gleichungen (543. VI. III.)

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{2}(1 - \cos a), \quad \cos^2 \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{2}(1 + \cos a);$$

wodurch wir

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{1}{4BC}\,[A^2 - (B^2 - 2BC + C^2)]$$

$$= \frac{1}{4BC}\,[A^2 - (B - C)^2]$$

$$= \frac{(C + A - B)(A + B - C)}{4BC},$$

Fig.

$$\cos^2\tfrac{1}{2}a = \frac{1}{4BC}(B^2+2BC+C^2-A^2)$$

$$= \frac{1}{4BC}[(B+C)^2-A^2]$$

$$= \frac{(A+B+C)(B+C-A)}{4BC},$$

folglich

(7) $\sin\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(C+A-B)(A+B-C)}{BC}}$ oder $= \sqrt{\frac{(S-B)(S-C)}{BC}}$

(8) $\cos\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(A+B+C)(B+C-A)}{BC}}$ oder $= \sqrt{\frac{S(S-A)}{BC}}$

erhalten, wenn wir S den halben Umfang des Dreyeckes vorstellen lassen.

Dividiren und multipliciren wir diese Gleichungen gliederweise durch einander und nehmen auf die Gleichungen $\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}a} = \tang\frac{1}{2}a$, $\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\sin a$ Bedacht; so ergibt sich

(9) $\tang\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{(C+A-B)(A+B-C)}{(A+B+C)(B+C-A)}} = \sqrt{\frac{(S-B)(S-C)}{S(S-A)}}$

(10) $\sin a = \frac{1}{2BC}\sqrt{(A+B+C)(B+C-A)(C+A-B)(A+B-C)}$

$$= \frac{2}{BC}\sqrt{S(S-A)(S-B)(S-C)}.$$

§. 560.

Ferner gibt die Gleichung (4)

$$B:C = \sin b:\sin c,$$

daher (nach §. 187. III. und IV.)

$$B+C:B-C = \sin b+\sin c:\sin b-\sin c,$$

und somit $\frac{B+C}{B-C} = \frac{\sin b+\sin c}{\sin b-\sin c}$;

folglich, wenn man die Formel §. 551. I. beachtet,

(11) $\frac{B+C}{B-C} = \frac{\tang\frac{1}{2}(b+c)}{\tang\frac{1}{2}(b-c)} = \frac{\cot\frac{1}{2}a}{\tang\frac{1}{2}(b-c)}$

oder

(12) $B+C:B-C = \tang\frac{1}{2}(b+c):\tang\frac{1}{2}(b-c)$.

Wer sich durch geometrische Betrachtungen hievon überzeugen
131. will, besehe die Figur 131. In ihr ist $AC = B$, $AF = AB = AD = C$, daher sind D, B, F Puncte einer Kreislinie und $DBF = 90^0$, $u = q$, $x = q+p = u+p$, $CD = B+C$, $CF = B-C$; ferner ist CE

parallel zur BF geführt, dadurch wird $p = t$, und $u = y + t$, also Fig.
$x = y + 2t$, und hieraus $t = \frac{1}{2}(x - y) = \frac{1}{2}(b - c)$, folglich 131.
$t + y = \frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2}(b + c)$. Endlich macht der aus C mit dem Halbmesser CE gezogene Kreisbogen ersichtlich, daß (nach §. 540) $DE = CE \tang (t + y)$, $BE = CE \tang t$ ist, woraus man

$$DE : BE = \tang (t + y) : \tang t$$

und wenn die aus dem Parallelismus der Linien BF und CE (vermög §. 397) folgende Proportion

$$DC : CF = DE : BE$$

berücksichtiget wird,

$$DC : CF = \tang (t + y) : \tang t,$$

nähmlich

(12) $B + C ; B - C = \tang \frac{1}{2}(b + c) : \tang \frac{1}{2}(b - c)$ erhält.

§. 561.

Nachdem wir jetzt die für die geradlinigen Dreyecke im Allgemeinen geltenden Gleichungen zusammengestellt haben, wenden wir uns sogleich zur Auflösung der **rechtwinkeligen Dreyecke.**

In dieser Absicht nehmen wir in obigen Gleichungen den Winkel c für einen rechten an und bezeichnen die Hypothenuse C mit H.

Dadurch erhalten wir aus (2) und (3) die bekannten Gleichungen

(13) $H^2 = A^2 + B^2$

(14) $a + b = 90°$;

ferner geben die Gleichungen (1′), (1″) und (4)

(15) $A = H \sin a = H \cos b$

$B = H \sin b = H \cos a$,

so wie uns die Gleichung (5) mit ihren analogen die Formen

(16) $A = B \tang a = B \cot b$

$B = A \tang b = A \cot a$

darbiethet.

Den vier letzten Gleichungen zu Folge gleicht jede Kathete sowohl dem Producte aus der Hypothenuse und dem Sinus des der Kathete gegenüber liegenden oder dem Cosinus des ihm anliegenden Winkels als auch dem Producte aus der anderen Kathete und der Tangente des der ersten Kathete gegenüber lie-

Fig. genden oder der Cotangente des ihr anliegenden Winkels. Ihre Richtigkeit erhellet übrigens auch aus der Erklärung der trigonometrischen Functionen (§. 540.).

Die Auflösung der rechtwinkeligen Dreyecke kann mit Hülfe der Gleichungen (13) bis (16) vollkommen bewirkt werden. Denn sind zwey Stücke des rechtwinkeligen Dreyeckes gegeben und man verlangt ein drittes Stück, so wird man dasselbe aus derjenigen Gleichung suchen, welche diese drey Stücke enthält.

Wir wollen das Verfahren durch einige Beyspiele erläutern.

126. 1. Beyspiel. Es sey Fig. 126. ein Kanonenrohr, über den höchsten Punct des vorderen Visirreifes und über den obersten Punct A eines auf dem hintern Visirreife aufgestellten Aufsatzes nach einem Gegenstande C gerichtet, man soll den Aufsatz- oder Visirwinkel $AFD = \alpha$ berechnen.

Zu diesem Zwecke führe man durch B die BP zur Achse des Kanonenrohres parallel, so ist der Winkel $APB = 90^o$, und $ABP = AFD = \alpha$, folglich in dem Dreyecke APB

$$AP = PB \text{ tang } ABP$$

und $$\text{tang } \alpha = \frac{AP}{BP}.$$

Bezeichnet man mit d den Abstand der Ebenen der beyden Visirreife, ferner mit R und r den Halbmesser des hinteren und vorderen Visirreifes, mit a den Aufsatz, (wobey bedungen wird, daß alle Linien durch dieselbe Längeneinheit z. B. durch den Wiener Zoll gemessen seyen); so ist $AP = R + a - r$, $BP = d$, also

$$\text{tang } \alpha = \frac{R - r + a}{d}.$$

Bey einer 12pfdig. Feldkanone ist;
$d = 66{,}192^{II}$; $R = 6{,}305^{II}$; $r = 5{,}603^{II}$, also $R - r = 0{,}702^{II}$, ferner sey $a = 2^{II}$, so ist $R - r + a = 2{,}702^{II}$.

Hieraus folgt $\log (R - r + a) = 0{,}4316852$

$\log d = 1{,}8208055$

daher $\log \text{tang } \alpha = 8{,}6108797$

und der verlangte Aufsatzwinkel $\alpha = 2^o\ 20'$.

Wird kein Aufsatz gegeben, so übergeht der Aufsatzwinkel in den sogenannten Kernwinkel. Fig. 126.

Für ihn ist demnach $a = o$ und $\text{tang}\,\alpha = \frac{R-r}{d}$.

Im vorliegenden Falle ist

$$\log (R-r) = 0{,}8463371 - 1$$
$$\log d = 1{,}8208055$$

daher $\log \text{tang}\,\alpha = 8{,}0255316$

und der Kernwinkel $\alpha = 0^o\,36'$.

2. Beyspiel. Eine Kanone stehe auf einer Ebene und sey so gerichtet, daß die Achse ihres Rohres mit dieser Ebene parallel läuft; man verlangt die Entfernung x des Einschnittspunctes des über die höchsten Puncte der Visirreife gehenden Visirstrahles in jene Ebene, von dem Auftreffpuncte der aus dem höchsten Puncte des vorderen Visirreifes auf die Ebene herabgelassenen Senkrechten, wenn die Länge dieser Senkrechten $= p$ und der Kernwinkel $= \alpha$ ist.

Da x und p in einem rechtwinkeligen Dreyecke die Katheten sind und α der an x liegende spitzige Winkel ist, so hat man

$$p = x \,\text{tang}\,\alpha,$$

also
$$x = \frac{p}{\text{tang}\,\alpha} = p \cot \alpha.$$

Wäre die Kanone der im vorigen Beyspiele gebrauchte Zwölfpfünder, so hätten wir $\alpha = 0^o\,36'$, $p = 4{,}35$ Fuß, also

$$\log p = 0{,}6384893$$
$$\log \cot \alpha = 1{,}9799555$$
$$\log x = 2{,}6184448$$

und $x = 415$ Fuß $= 173$ Schritt.

3. Beyspiel. Die Längenmittellinie der Bettung eines Batteriegeschützes bilde mit der Magistrallinie der Batterie den Winkel δ, das eine vordere Eck der Bettung befinde sich in dieser Linie; man soll den Abstand x des zweyten vorderen Eckes von der Magistrallinie berechnen, wenn die Entfernung beyder Ecke auf der Mittellinie der Bettung senkrecht steht und $= d$ ist. — Eine einfache

Fig. Figur lehrt, daß hier $x = d \cos \delta$ ist. Für $d = 12^l$, $\delta = 70^o$ ist $x = 4{,}1^l$.

§. 562.

Da jedes gleichschenkelige Dreyeck von der aus der Spitze auf die Grundlinie gefällten Senkrechten in zwey congruente rechtwinkelige Dreyecke zerschnitten wird, so läßt sich die Auflösung der gleichschenkeligen Dreyecke auf jene der rechtwinkeligen zurückführen.

Um hievon eine Anwendung auf die Lehre von den regelmäßigen Vielecken zu machen, sey Fig. 50 die Seite eines regelmäßigen
50. neckes $= EF = c$, der Mittelpunctswinkel $ECF = \frac{360^o}{n} = \gamma$, der Halbmesser des umschriebenen Kreises $EC = r$; so ist in dem rechtwinkeligen Dreyecke CDE, $CE = r$, $DE = \frac{1}{2} c$, $ECD = \frac{1}{2}\gamma$, folglich

$$c = 2r \sin \tfrac{1}{2}\gamma, \quad r = \frac{c}{2 \sin \frac{1}{2}\gamma},$$

und der Umfang $p = nc = 2nr \sin \frac{1}{2}\gamma$.

Ferner ist der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises, nähmlich die Kathete $CD = \varrho = r \cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2} c \cdot \cot \frac{1}{2}\gamma$.

Für die Seite C des umschriebenen gleichartigen regelmäßigen Vieleckes hat man wegen des rechtwinkeligen Dreyeckes ACG, $AG = \frac{1}{2} C = r \operatorname{tang} \frac{1}{2}\gamma$, also

$$C = 2r \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\gamma;$$

und für den Halbmesser R des Kreises, in welchem das Vieleck liegt gibt dasselbe Dreyeck

$$R = \frac{r}{\cos \frac{1}{2}\gamma}.$$

Endlich ist der Flächeninhalt des Dreyeckes

$$ECF = \tfrac{1}{2} EF \cdot CD = \tfrac{1}{2} c \cdot \varrho = \tfrac{1}{4} c^2 \cot \tfrac{1}{2}\gamma;$$

folglich der Flächeninhalt des ganzen Vieleckes

$$s = n \cdot ECF = \frac{n}{4} c^2 \cot \tfrac{1}{2}\gamma.$$

§. 563.

Bey der Auflösung der schiefwinkeligen Dreyecke kommen rücksichtlich der gegebenen Stücke vier Fälle zu betrachten.

Es können nähmlich bekannt seyn: Fig.

1. Eine Seite mit zwey Winkeln, oder
2. Zwey Seiten mit dem Gegenwinkel der größeren, oder
3. Zwey Seiten mit dem von ihnen eingeschlossenen Winkel, oder endlich
4. Alle drey Seiten.

Wir wollen diese vier Fälle einzeln vornehmen, und jeden durch ein numerisches Beyspiel erläutern.

I. Fall. Die Seite A und zwey Winkel des Dreyeckes seyen 125½ gegeben; man verlangt den dritten Winkel und die beyden anderen Seiten B, C.

Da zwey Winkel bekannt sind, so findet man sehr leicht den dritten; denn er ist die Ergänzung ihrer Summe zu 180°. Sofort berechnet man jede der beyden übrigen Seiten nach den Gleichungen (4), und erhält

$$B = \frac{A \sin b}{\sin a}, \quad C = \frac{A \sin c}{\sin a}.$$

Es sey z. B. $A = 548$

$a = 48^\circ\ 16'\ 13''$

$b = 69\ 12\ 45;$

so ist $c = 62\ 31\ 2.$

Ferner ist $\log A = 2{,}7387806$

$\log \sin a = 9{,}8729093$

$\log \frac{A}{\sin a} = 2{,}8658713 \ldots = 2{,}8658713$

$\log \sin b = 9{,}9707666 \qquad \log \sin c = 9{,}9479969$

$\log B = 2{,}8366379 \qquad \log C = 2{,}8138682$

also $B = 686{,}496$

$C = 651{,}431.$

II. Fall. Es seyen gegeben zwey Seiten B und C mit einem ihrer Gegenwinkel b; man sucht die Seite A und die Winkel a, c.

Den Winkel c berechnet man mit Hülfe der Gleichungen (4), wornach man

$$\sin c = \frac{C \sin b}{B}$$

erhält. Von den für c sich ergebenden zwey Werthen wird der-

Fig. 125½ jenige genommen, welcher kleiner als b ist. Wären jedoch beyde kleiner als b, so könnte es zwey Dreyecke geben, denen dieselben Bestimmungsstücke zugehören (§. 535.).

Kennt man den Winkel c, so ist der noch fehlende

$$a = 180^\circ - (b + c).$$

Die dritte Seite A endlich läßt sich nach der aus (4) entnommenen Gleichung

$$A = \frac{B \sin a}{\sin b} = \frac{C \sin a}{\sin c}$$

bestimmen.

Z. B. Es sey wie im vorhergehenden Beyspiele

$$B = 686{,}496$$
$$C = 651{,}431$$
$$b = 69^\circ\,12'\,45''.$$

Hier ist zunächst $\log C = 2{,}8138685$

$\log \sin b = 9{,}9707666$

$2{,}7846351$

$\log B = 2{,}8366380$

$\log \sin c = 9{,}9479971$

also $c = 62^\circ\,31'\,2''$

und $a = 48\ 16\ 13$;

dann ist $\log B = 2{,}8366380$

$\log \sin a = 9{,}8729093$

$\log \frac{1}{\sin b} = 0{,}0292334$

$\log A = 2{,}7387807$

und . . . . $A = 548.$

III. Fall. Gegeben seyen zwey Seiten B und C mit dem eingeschlossenen Winkel a; man sucht die dritte Seite A, und die Winkel b, c.

Die Seite A ergibt sich nach der ersten der Gleichungen (2)

$$A = \sqrt{B^2 + C^2 - 2BC \cos a}.$$

Um aber diesen Ausdruck für die logarithmische Behandlung geeignet zu machen, setzen wir (nach §. 550.) für cos a entweder den Werth $1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}a$, oder $2\cos^2 \frac{1}{2}a - 1$; dadurch wird

$$A = \sqrt{[(B-C)^2 + 4BC\sin^2\tfrac{1}{2}a]} \qquad \text{Fig. } 125\tfrac{1}{2}$$
$$= \sqrt{[(B+C)^2 - 4BC\cos^2\tfrac{1}{2}a]}$$

oder
$$A = (B-C)\sqrt{1 + \frac{4BC\sin^2 1/2\,a}{(B-C)^2}}$$
$$= (B+C)\sqrt{1 - \frac{4BC\cos^2 1/2\,a}{(B+C)^2}}.$$

Da die Tangenten aller Winkel zwiſchen 0 und ∞ liegen, ſo muß es offenbar einen Winkel φ geben, bey welchem das Quadrat der Tangente dem Ausdrucke $\frac{4BC\sin^2 1/2\,a}{(B-C)^2}$ gleich, nähmlich $\tang^2\varphi = \frac{4BC\sin^2 1/2\,a}{(B-C)^2}$ iſt.

Wird dieſer Hülfswinkel φ eingeführt, ſo erhält man

$$A = (B-C)\sqrt{(1+\tang^2\varphi)} = \frac{B-C}{\cos\varphi}.$$

Eben ſo muß, da $\frac{4BC\cos^2 1/2\,a}{(B+C)^2}$ die Einheit nicht überſteigen kann, weil ſonſt A imaginär ausfiele, ein Winkel ψ möglich ſeyn, deſſen quadrirter Sinus dieſem Ausdrucke gleicht, ſo daß

$$\sin^2\psi = \frac{4BC\cos^2 1/2\,a}{(B+C)^2},$$

alſo auch $A = (B+C)\sqrt{(1-\sin^2\psi)} = (B+C)\cos\psi$ iſt.

Um demnach die Seite A zu beſtimmen, ſuche man zuerſt

φ aus . . . . $\tang\varphi = \frac{2\sin 1/2\,a}{B-C}\sqrt{BC}$,

und dann A aus . . $A = \frac{B-C}{\cos\varphi}$,

oder vorerſt ψ aus . . $\sin\psi = \frac{2\cos 1/2\,a}{B+C}\sqrt{BC}$,

und nachher A aus . . $A = (B+C)\cos\psi$.

Die Winkel b und c findet man, indem man zuerſt ihre halbe Summe aus

$$\tfrac{1}{2}(b+c) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}a,$$

und ihre halbe Differenz $\frac{1}{2}(b-c)$ nach (§. 559.) Gleichung (12) mittelſt der Gleichung

$$\tang\tfrac{1}{2}(b-c) = \frac{B-C}{B+C}\cot\tfrac{1}{2}a$$

Fig. berechnet, wornach
125½
$$b = \tfrac{1}{2}(b+c) + \tfrac{1}{2}(b-c),$$
$$c = \tfrac{1}{2}(b+c) - \tfrac{1}{2}(b-c)$$
ist.

Beyspiel. Man habe $B = 686{,}496$
$C = 651{,}431$ und $a = 48^\circ 16' 13''$;
so ist $B+C = 1337{,}927$
$B-C = 35{,}065$; $\frac{1}{2}a = 24\ 8\ 6{,}5$

$\log B = 2{,}8366380$	$\log(B-C) = 1{,}5448738$
$\log C = 2{,}8138685$	$\log\cot\frac{1}{2}a = 0{,}3486659$
$\log BC = 5{,}6505065$	
$\log\sqrt{BC} = 2{,}8252532$	$1{,}8935397$
$\log 2 = 0{,}3010300$	
$\log\cos\frac{1}{2}a = 9{,}9602726$	$\log(B+C) = 3{,}1264325$
$3{,}0865558$	
$\log(B+C) = 3{,}1264325$	$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b-c) = 8{,}7671072$
$\log\sin\Psi = 9{,}9601233$	$\frac{1}{2}(b-c) = 3^\circ 20' 51{,}4''$
$\Psi = 65^\circ 49' 15{,}4''$;	$\frac{1}{2}(b+c) = 65\ 51\ 53{,}5$
$\log\cos\Psi = 9{,}6123489$	
$\log(B+C) = 3{,}1264325$	$b = 69\ 12\ 45$
$\log A = 2{,}7387814$	$c = 62\ 31\ 2.$
$A = 548{,}001$	

IV. Fall. Es seyen die Seiten gegeben und die Winkel zu suchen.

Hier verwendet man (§. 559.) die Gleichungen
$$S = \tfrac{1}{2}(A+B+C),$$
$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{(S-B)(S-C)}{BC}},$$
$$\cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{S(S-A)}{BC}}.$$

Ist a sehr klein, so erhält man das Resultat genauer durch die erste Formel, weil die Cosinus kleiner Winkel sich nur unbedeutend ändern; dagegen liefert die zweyte Formel ein genaueres Resultat, wenn a sehr stumpf ausfällt, weil die Sinus der nahe

an 90° liegenden Winkel nur wenig sich ändern. Unabhängig von dieser Vorsicht ist man bey der Anwendung der Formel Fig. 125½

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{(S-B)(S-C)}{S(S-A)}}.$$

Bey dem Gebrauche der Gleichung

$$\sin a = \frac{2}{BC}\sqrt{[S(S-A)(S-B)(S-C)]}$$

muß man noch untersuchen, ob von den beyden entsprechenden Winkeln der spitze oder stumpfe zu wählen ist, wozu man den in §. 381. enthaltenen Satz verwendet.

Z. B. Gegeben sey

A =	548
B =	686,496
C =	651,431

so ist

2S =	1885,927
S =	942,9635
S—A =	394,9635
S—B =	256,4675
S—C =	291,5325

log (S—C) =	2,4646870
log (S—B) =	2,4090323
	4,8737193
log B =	2,8366380
log C =	2,8138685
	19,2232128—20
$\log\sin\frac{1}{2}a$ =	9,6116064
$\frac{1}{2}a$ =	24° 8′ 6,4″
a =	48 16 12,8

Anmerkung. Man kann die schiefwinkeligen Dreyecke, so wie es die älteren Mathematiker zu thun pflegten, auch dadurch auflösen, daß man sie in zwey rechtwinkelige Dreyecke zerschneidet, von denen das eine zwey bekannte Stücke enthält. Es mag jedoch dem Anfänger überlassen bleiben, diese Auflösungsweise selbst durchzuführen.

§. 564.

Aufgaben.

I. Man soll allgemeine Ausdrücke für den Flächeninhalt des geradlinigen Dreyeckes aufstellen. 80.

Auflösung. Es sey BC = A, CA = B, AB = C,
CAB = a, ABC = b, BCA = c,
und die Höhe CD = γ; so ist (§. 440) der Flächeninhalt des Dreyeckes ABC

$$F = \tfrac{1}{2}C\gamma.$$

Fig. 80. 1). Ist die Seite A mit den Winkeln gegeben, so hat man

$$C = \frac{A \sin c}{\sin a}, \quad \gamma = A \sin b;$$

daher $$F = \tfrac{1}{2} A^2 \frac{\sin b \sin c}{\sin a}.$$

2). Sind die Seiten A, B mit dem der größeren gegenüberliegenden Winkel b bekannt, so findet man aus der zweyten der Gleichungen (2)

$$C = A \cos b + \sqrt{(B^2 - A^2 \sin^2 b)},$$

daher ist $$F = \tfrac{1}{2} A \left(A \cos b + \sqrt{B^2 - A^2 \sin^2 b}\right) \sin b.$$

3). Hat man zwey Seiten A, C und den eingeschlossenen Winkel b bekannt, so ist

$$F = \tfrac{1}{2} AC . \sin b,$$

ein bemerkenswerther Ausdruck.

4). Wenn endlich die Seiten des Dreyeckes gegeben sind, so ist wie wir bereits in §. 461. fanden

$$F = \sqrt{[S(S-A)(S-B)(S-C)]}.$$

II. Die in §. 424. behandelte Aufgabe ist trigonometrisch aufzulösen.

72. Auflösung. Es sey AB = a, BC = b, B1 = c, Bf = γ, Ah = A, AC = a − b = α und der Winkel BC1 = φ, C1A = ω, also AC1 = 180 − φ; so bestehen in den Dreyecken AC1 und ACh (vermöge §. 558 5.), die Gleichungen

$$\cot c - \cot \varphi = \frac{\alpha}{a \sin c},$$

$$\cot \gamma - \cot \varphi = \frac{\alpha}{A \sin \gamma}.$$

Subtrahirt man die erste von der zweyten, so ist

$$\cot \gamma - \cot c = \frac{\alpha}{A \sin \gamma} - \frac{\alpha}{a \sin c} = \frac{\sin (c - \gamma)}{\sin \gamma \sin c},$$

also $$\frac{\sin c}{A} = \frac{\sin \gamma}{a} + \frac{\sin (c - \gamma)}{\alpha},$$

woraus man

$$A = \frac{a \alpha \sin c}{\alpha \sin \gamma + a \sin (c - \gamma)}$$

findet. Sind die Bogen c und γ, folglich auch $c-\gamma$ so klein, daß man sie selbst statt ihrer Sinus setzen kann, so hat man Fig. 72

$$A = \frac{\alpha a c}{ac-(a-\alpha)\gamma}.$$

Soll $\gamma = \frac{m}{n}\,c$ werden, so ergibt sich $A = \frac{naa}{na-mb}$ wie in §. 424.

Will man die Rechnung mit Hülfe der Logarithmen ausführen, so bestimme man zuerst aus dem Dreyecke AC1 den Winkel φ nach den aus §. 563. III. folgenden Formeln

$$\tan\tfrac{1}{2}(\varphi+\omega) = \frac{a+\alpha}{a-\alpha}\,.\,\tan\tfrac{1}{2}c,$$

$$\tfrac{1}{2}(\varphi-\omega) = \tfrac{1}{2}c,$$

sodann in dem Dreyecke ACh die Seite Ah nach der aus §. 563. I. sich ergebenden Formel

$$A = \frac{\alpha \sin\varphi}{\sin(\varphi-\gamma)}.$$

Z. B. Es sey $a = 1000$, $b = 100$, $\alpha = 900$, $c = 1^0$, $\gamma = 0^0\,10'$, so ist

$$a-\alpha = 100$$
$$a+\alpha = 1900$$
$$\tfrac{1}{2}c = 0^0\,30',$$

$\log\left(\frac{a+\alpha}{a-\alpha}\right)$	$= 1,2787536$	$\log\alpha$	$= 2,9542425$
$\log\tan\frac{1}{2}c$	$= 7,9408584$	$\log\sin\varphi$	$= 9,2360726$
$\log\tan\frac{1}{2}(\varphi+\omega)$	$= 9,2196120$		$2,1903151$
$\frac{1}{2}(\varphi+\omega)$	$= 9^0\,24'\,52''$	$\log\sin(\varphi-\gamma)$	$= 9,2287839$
$\frac{1}{2}(\varphi-\omega)$	$= 0\;\;30$	$\log A$	$= 2,9615312$
φ	$= 9^0\,54'\,52''$	A	$= 915,2.$

Es ist demnach A 10 = 915,2; eben so findet man A 20 = 931,0; A 30 = 947,2; u. s. w. Vergleichen wir diese Resultate mit den in §. 424. erhaltenen, so zeigt es sich, daß diese so gut als vollkommen richtig sind.

Wollte man untersuchen, wie viel man fehlen würde, wenn man den Rand in 6 gleiche Theile theilen wollte, so wäre φ auf obige Art, und γ aus der Gleichung

Fig.

$$\sin(\varphi - \gamma) = \frac{\alpha \sin \varphi}{A}$$

zu bestimmen. In unserem Falle wäre

$$b = 100, \frac{b}{6} = \frac{100}{6}, \alpha = 900,$$

$$\text{also } A = \alpha + \frac{b}{6} = \frac{5500}{6}, \quad \frac{\alpha}{A} = \frac{54}{55};$$

$\log 54 = 1{,}7323938$	$\varphi - \gamma = 9^0\,44'\,4''$
$\log \frac{1}{55} = 0{,}2596373 - 2$	$\varphi = 9\ 54\ 52$
$\log \sin \varphi = 9{,}2360726$	$\gamma = 0^0\,10'\,48''$,
$\log \sin(\varphi - \gamma) = 9{,}2281037$	also um $48''$ beynahe eine Minute zu groß.

80. III. Es ist in dem Dreyecke ABC die Summe der zwey Seiten BC und $AC = \alpha$, die Senkrechte $CD = \beta$, und die Grundlinie $AB = \gamma$ gegeben; man soll den Winkel $CAB = a$ bestimmen.

Auflösung. In dem Dreyecke ACD ist $CD = AC \cdot \sin CAD$, also ist $AC = \frac{\beta}{\sin a}$ und somit $BC = \alpha - \frac{\beta}{\sin a} = \frac{\alpha \sin a - \beta}{\sin a}$. Ferner ist in demselben Dreyecke $AD = \beta \cot a$, folglich $BD = \gamma - \beta \cot a = \frac{\gamma \sin a - \beta \cos a}{\sin a}$. Substituirt man diese Werthe in die aus dem Dreyecke BDC entspringende Gleichung, $BC^2 = BD^2 + CD^2$, so hat man

$$(\alpha \sin a - \beta)^2 = (\gamma \sin a - \beta \cos a)^2 + \beta^2 \sin a^2$$

oder, wenn man reducirt,

$$(\alpha^2 - \gamma^2) \sin a + 2\beta\gamma \cos a = 2\alpha\beta.$$

Nun könnte man für cos a den Werth $\sqrt{(1 - \sin^2 a)}$ substituiren, und dann sin a bestimmen. Allein auf diesem Wege würde man zu einer verwickelten quadratischen Gleichung gelangen. Viel leichter läßt sich der unbekannte Winkel a mittelst folgenden Kunstgriffes bestimmen.

Wenn man erstlich die Gleichung durch $2\beta\gamma$ dividirt, so ist

$$\frac{\alpha^2 - \gamma^2}{2\beta\gamma} \sin a + \cos a = \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Nun ſetze man die bekannte Größe $\frac{\alpha^2-\gamma^2}{2\beta\gamma} = \text{tang } q$, weil es Fig. 80. ganz gewiß einen Winkel gibt, deſſen Tangente dieſer gegebenen Größe gleich iſt, da die Tangenten von 0 angefangen ohne Ende wachſen. Dabey iſt auch der Winkel q bekannt, weil man nur zu der in Zahlen ausgedrückten Tangente den entſprechenden Winkel aufſuchen darf.

Es iſt alſo $\text{tang } q \cdot \sin a + \cos a = \frac{\alpha}{\gamma}$

oder $\sin a \sin q + \cos a \cos q = \frac{\alpha \cos q}{\gamma}$

und $\cos(a-q) = \frac{\alpha \cos q}{\gamma}$.

Man berechne demnach zuerſt den Hülfswinkel q mittelſt der Gleichung $\text{tang } q = \frac{(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)}{2\beta\gamma}$,

dann den Winkel $a-q$ aus $\cos(a-q) = \frac{\alpha \cos q}{\gamma}$;

ſo gibt ihre Summe den geforderten Winkel a.

Setzt man aber $\frac{\alpha^2-\gamma^2}{2\beta\gamma} = \cot q$,

ſo wird $\sin a \cdot \cot q + \cos a = \frac{\alpha}{\gamma}$

und $\sin(a+q) = \frac{\alpha \sin q}{\gamma}$.

Man beſtimme daher vorerſt q nach der Gleichung

$$\text{tang } q = \frac{2\beta\gamma}{(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)}$$

nachher $a+q$ aus $\sin(a+q) = \frac{\alpha \sin q}{\gamma}$,

und endlich aus beyden den Winkel a.

Ueberhaupt läßt ſich aus einer jeden Gleichung von der Form

$$a \cdot \sin p + b \cdot \cos p = c,$$

in welcher die Coefficienten a und b poſitiv oder negativ ſeyn können, der unbekannte Winkel p entwickeln, wenn man in einem Gliede, entweder in $a \cdot \sin p$ oder in $b \cdot \cos p$, die unbekannte trigonometriſche Function von ihrem Coefficienten trennt,

Fig. nähmlich, wenn man die angeführte Gleichung in

$$\sin p + \frac{b}{a} \cdot \cos p = \frac{c}{a},$$

oder in

$$\frac{a}{b} \cdot \sin p + \cos p = \frac{c}{b}$$

verwandelt, dann den Coefficienten der im anderen Gliede vorkommenden Function entweder = tang q oder = cotq setzt, und die fernere Entwickelung so vornimmt, wie sie in dieser Aufgabe so eben gezeigt worden ist. Auf diese Art wird man immer den Sinus oder Cosinus der Summe oder Differenz der Winkel p und q durch bekannte Größen ausgedrückt erhalten, woraus sich dann der unbekannte Winkel bestimmen läßt.

Anmerkung. Ich halte es für überflüssig, diese Aufgabe durch numerische Beyspiele zu erläutern, da ein Anfänger dieses selbst leicht thun kann, und wirklich thun soll, um sich den Gebrauch der trigonometrischen Tafeln durch Uebung geläufig zu machen.

III. Abschnitt.

Von der Auflösung der sphärischen Dreyecke.

§. 565.

127. Zu jeder Seite eines sphärischen Dreyeckes ABC (Fig. 127) gehört, da sie ein Bogen von einem größten Kreise ist, nach §. 484. eine auf ihr senkrechte Achse mit zwey Polen. Denkt man sich eine solche Seite, etwa AB, zum Vollkreise erweitert, so theilt sie die ganze Kugelfläche in zwey Halbkugeln, von denen die eine das sphärische Dreyeck ABC ganz enthält. Der in dieser Halbkugel befindliche Pol F der Seite AB, von welchem demnach jeder Punct der beyden andern Seiten BC und CA, daher auch der der Seite AB entgegenliegende Winkelpunct C um weniger als um

90° abſteht, ſoll von uns der Hauptpol, der andere dagegen der Nebenpol der Seite AB genannt werden. Fig. 127.

Denken wir uns nun die Hauptpole D, E, F der Seiten BC, CA, AB des ſphäriſchen Dreyeckes ABC paarweiſe durch Bogen größter Kreiſe verbunden, ſo entſteht ein neues ſphäriſches Dreyeck DEF, von welchem jede Seite (nach §. 484. II.) auf denjenigen zwey Seiten des Dreyeckes ABC ſenkrecht ſteht, durch deren Pole ſie geht.

Es iſt demnach DE auf BC und CA,
ferner EF auf CA und AB,
endlich FD auf AB und BC ſenkrecht.

Hieraus folgt aber ſogleich (nach §. 484. IV.), daß der Durchſchnittspunct A der zwey auf EF ſenkrechten Seiten CA und AB ein Pol der Seite EF, alſo auch B ein Pol der Seite FD, und C ein Pol der Seite DE iſt.

Weil jedoch D, E, F die Hauptpole der Seiten BC, CA, AB des ſphäriſchen Dreyeckes ABC, folglich die Bogen AD, BE, CF kleiner als 90° ſind, ſo folgt vermöge der von dem Hauptpole einer Seite des ſphäriſchen Dreyeckes oben gegebenen Erklärung, daß die Spitzen A, B, C des Dreyeckes ABC die Hauptpole der Seiten EF, FD, DE ſeyn müſſen.

Von zwey ſolchen ſphäriſchen Dreyecken ABC und DEF, deren Winkelpuncte wechſelweiſe die Hauptpole der Seiten des andern Dreyeckes ſind, ſagt man: „jedes ſey das Polar-Dreyeck „oder (aus einem auf das nächſt Folgende geſtützten Grunde) das „Supplementar-Dreyeck des andern.“ Man erſieht überdieß aus dem Vorhergehenden leicht, daß die jedem ſphäriſchen Dreyecke ein Polar-Dreyeck zukomme.

Verlängern wir jetzt an einem dieſer Dreyecke, etwa an ABC, die Schenkel eines Winkels z. B. die Schenkel CA und AB des Winkels CAB, bis ſie die auf ſeinen beyden Schenkeln ſenkrechte Seite EF des Polar-Dreyeckes in R und J treffen. Da nun F der Hauptpol von ABR iſt, ſo muß nicht nur FR = 90° ſeyn, ſondern es muß auch dieſer Pol F mit dem Dreyecke ABC, folglich

Fig. 127. ebenfalls mit der Seite CA, sofort auch mit dem ihr und der Seite EF gemeinschaftlichen Puncte J in einer und der nähmlichen von jenen zwey Halbkugeln liegen, in welche die zum Vollkreise erweiterte Seite AB die Kugelfläche zerschneidet, woraus sogleich erhellet, daß J und F in dem Bogen EF auf einerley Seite von R liegen müssen.

Auf dieselbe Weise muß, da E der Hauptpol von CA ist, nicht nur $EJ = 90^o$ seyn, sondern es müssen in dem Bogen EF auch E und R auf derselben Seite von J liegen.

Daraus ergibt sich unmittelbar, daß entweder die Puncte J und R zwischen E und F oder diese zwischen jenen oder endlich diese auf jenen liegen, daß hingegen nie bloß einer der Puncte J und R zwischen, der andere aber außer E und F sich befinden könne.

Liegen nun, wie in der Figur 127., die Puncte J und R zwischen E und F; so haben wir

$$JR = FR - FJ = 90^o - FJ$$

und $$EF = EJ + FJ = 90^o + FJ.$$

Befinden sich aber die Puncte E und F zwischen J und R, so ist, wie leicht zu sehen,

$$JR = FR + FJ = 90^o + FJ$$

und $$EF = EJ - FJ = 90^o - FJ.$$

Fiele endlich F mit J und E mit R zusammen, so wäre

$$JR = FR = 90^o$$

und $$EF = EJ = 90^o.$$

In jedem Falle erhalten wir demnach

$$JR + EF = 180^o.$$

Bezeichnen wir jetzt die Winkel des Dreyeckes ABC mit a, b, c und die ihnen in derselben Ordnung entgegenliegenden Seiten mit A, B, C, und setzen wir in dem Dreyecke DEF die Seiten $EF = A'$, $FD = B'$, $DE = C'$ und die Winkel $FDE = a'$, $DEF = b'$, $EFD = c'$; so ist (nach §. 485.) der Bogen JR = dem Winkel CAB = a; folglich übergeht durch die Einführung dieser Werthe die letzte Gleichung in $a + A' = 180^o$, woraus erhellet, daß der Winkel a des Dreyeckes ABC mit der

auf seinen Schenkeln senkrecht stehenden Seite A′ seines Supplementar-Dreyeckes DEF zusammen 180° ausmacht. Fig. 127.

Weil sich nun alles Vorhergehende ohne Anstand ebenfalls auf die Winkel b und c des Dreyeckes ABC anwenden läßt, und weil, wie wir oben nachgewiesen haben, dieses Dreyeck das Polar-Dreyeck von DEF ist, so ergeben sich aus der Gleichung

$$A' + a = 180^\circ$$

auch die ähnlichen

$$B' + b = 180^\circ$$
$$C' + c = 180^\circ;$$

und

$$A + a' = 180^\circ$$
$$B + b' = 180^\circ$$
$$C + c' = 180^\circ.$$

Diese Gleichungen lehren die Wahrheit, daß jeder Winkel eines sphärischen Dreyeckes die auf seinen Schenkeln senkrechte Seite seines Polar-Dreyeckes, jede Seite aber den mit seinen Schenkeln auf ihr senkrecht stehenden Winkel des Polar-Dreyeckes zu 180° ergänzt.

Dieser Lehrsatz gewährt in der sphärischen Trigonometrie den nahmhaften Vortheil, daß man vermöge desselben in jeder zwischen den Seiten und Winkeln eines Kugeldreyeckes allgemein bestehenden Beziehung (Relation) von diesen auf jene, und umgekehrt sehr leicht übergehen kann. Denn ist irgend eine zwischen den Seiten A, B, C eines sphärischen Dreyeckes ABC und ihren Gegenwinkeln a, b, c statt findende Relation als allgemein gültig nachgewiesen, so muß sie nothwendig auch für sein Polar-Dreyeck A′B′C′, folglich auch dann noch gelten, wenn man jene Seiten durch die Seiten A′, B′, C′ und jene Winkel durch die Winkel a′, b′, c′ des Polar-Dreyeckes ersetzt. Weil jedoch dem obigen Satze zu Folge statt

a′, b′, c′, A′, B′, C′

auch $180^\circ - A, 180^\circ - B, 180^\circ - C, 180^\circ - a, 180^\circ - b, 180^\circ - c$

gesetzt werden darf, so leuchtet ein, daß aus gedachter Relation eine gleichfalls richtige hervorgehen muß, wenn man statt der in ihr vorkommenden Seiten A, B, C des Kugel-Dreyeckes die Supplemente ihrer Gegenwinkel $180^\circ - a$, $180^\circ - b$, $180^\circ - c$

Fig. und statt der Winkel a, b, c desselben die Supplemente $180^0 - A$, $180^0 - B$, $180^0 - C$ ihrer Gegenseiten setzt.

Dieß benützend werden wir im Folgenden in jeder, von den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreyeckes allgemein nachgewiesenen, Relation jede Seite durch das Supplement ihres Gegenwinkels, jeden Winkel aber durch das Supplement seiner Gegenseite, kurz jedes in dieser Relation erscheinende Stück durch das Supplement seines Gegenstückes ersetzen, um zu einer neuen ebenfalls gültigen Relation zu gelangen.

§. 566.

Schreiten wir nun sogleich zur Aufstellung der zwischen den Seiten und Winkeln des sphärischen Dreyeckes herrschenden Beziehungen.

128. I. Es seyen in dem sphärischen Dreyecke RNM. Fig. 128. die Seiten NR=A, RM=B, MN=C; die Winkel RMN=a, MNR=b, NRM=c; man verbinde die Spitzen desselben mit dem Mittelpuncte C der Kugelfläche durch die Radien CR, CN, CM und lege durch den einen Winkelpunct N die Ebene NGF senkrecht auf den Halbmesser CR; so ist (nach §. 485) der Winkel NGF=c. Die beyden geradlinigen Dreyecke NGF und NCF geben nun (nach §. 556.) die Gleichungen

$$FN^2 = GN^2 + FG^2 - 2\,GN.FG.\cos NGF$$
$$FN^2 = CN^2 + CF^2 - 2\,CN.CF.\cos NCF.$$

Nimmt man sofort den Kugelhalbmesser zur Längeneinheit, so ist

$$NG = \sin A,\quad CG = \cos A,$$

folglich in dem bey G rechtwinkeligen Dreyecke GCF

$$FG = CG.\tang GCF = \cos A.\tang B = \frac{\cos A.\sin B}{\cos B},$$

$$CF = \frac{CG}{\cos GCF} = \frac{\cos A}{\cos B}.$$

Setzt man diese Werthe in die obigen zwey Gleichungen, so wird Fig. 128.

$$FN^2 = \sin^2 A + \frac{\cos^2 A \cdot \sin^2 B}{\cos^2 B} - 2 \cdot \frac{\sin A \cos A \sin B}{\cos B} \cdot \cos c$$

und $$FN^2 = 1 + \frac{\cos^2 A}{\cos^2 B} - 2 \cdot \frac{\cos A}{\cos B} \cdot \cos C.$$

Subtrahirt man die erste Gleichung von der zweyten, so ergibt sich

$$0 = \cos^2 A + \cos^2 A - 2 \frac{\cos A}{\cos B} \cos C + 2 \frac{\sin A \cos A \sin B}{\cos B} \cdot \cos c,$$

oder wenn man durch $2 \frac{\cos A}{\cos B}$ dividirt,

$0 = \cos A \cos B - \cos C + \sin A \sin B \cdot \cos c$, woraus man endlich

(I.) $$\cos C = \cos c \cdot \sin A \sin B + \cos A \cos B$$

als Grundgleichung der ganzen sphärischen Trigonometrie erhält.

Nach ihr ist der Cosinus einer Seite des sphärischen Dreyeckes gleich dem Producte aus dem Cosinus des gegenüberliegenden Winkels in die Sinus seiner einschließenden Seiten, vermehrt um das Product der Cosinus dieser Seiten.

§. 567.

Aus dieser zwischen den drey Seiten und einem Winkel bestehenden Gleichung lassen sich noch drey andere, gleichfalls vier Stücke des sphärischen Dreyeckes enthaltende, Gleichungen auf folgende Weise herleiten.

II. Zunächst kann man eine Gleichung aufstellen, welche die drey Winkel des Kugeldreyeckes mit einer Seite verknüpft.

In dieser Absicht bilden wir nach der Gleichung (I.) durch Verwechslung von C mit B und von c mit b die analoge

(I'.) $$\cos B = \cos b \cdot \sin C \sin A + \cos C \cos A,$$

und substituiren diesen Werth von cos B in (I.); dadurch ergibt sich die Gleichung

$\cos C = \cos c \cdot \sin A \sin B + \cos b \sin A \sin C \cos A + \cos C \cos^2 A$,

aus der nach einer einfachen Reduction

$$\cos C \sin A = \cos c \sin B + \cos b \cos A \sin C \qquad (A)$$

folgt.

Fig. Vertauschen wir hierin A mit C, folglich a mit c, so erscheint

$$\cos A \sin C = \cos a \sin B + \cos b \cos C \sin A$$

Setzen wir nun den Werth von $\cos A \sin C$ aus dieser Gleichung in die nächst vorhergehende, so wird

$$\cos C . \sin A = \cos c . \sin B + \cos b . \cos a . \sin B + \cos^2 b . \cos C . \sin A$$

oder

$$\cos C \sin A . \sin^2 b = (\cos c + \cos a . \cos b) \sin B \qquad (\alpha)$$

woraus wir durch Vertauschung des Buchstaben B mit A und b mit a

$$\cos C \sin B . \sin^2 a = (\cos c + \cos a . \cos b) \sin A \qquad (\alpha')$$

erhalten.

Multiplicirt man diese Gleichungen (α) und (α') mit einander, so ergibt sich

$$\cos^2 C . \sin^2 a \sin^2 b = (\cos c + \cos a \cos b)^2$$

also auch

$$\cos c + \cos a . \cos b = \pm \cos C . \sin a . \sin b.$$

Da aber, wenn $a = b = 90^\circ$ ist, $C = c$ seyn muß, so kann hier nur das obere Zeichen statt finden, folglich ist

(II.) $$\cos c = \cos C . \sin a \sin b - \cos a \cos b.$$

Zu dieser Gleichung, welche lehrt, daß der Cosinus eines Winkels des sphärischen Dreyeckes gleich ist dem Producte aus dem Cosinus der ihm gegenüberstehenden Seite in die Sinus der an ihr liegenden Winkel, vermindert um das Product der Cosinus dieser Winkel, gelangt man unmittelbar, wenn man in der Gleichung (I.) für die Stücke

A, B, C, c

des sphärischen Dreyeckes die Supplemente ihrer Gegenstücke, nähmlich

$180^\circ - a$, $180^\circ - b$, $180^\circ - c$, $180^\circ - C$ setzt.

§. 568.

III. Eben so können zwey Seiten mit den ihnen entgegenliegenden Winkeln in eine Gleichung gebracht werden.

Denn dividirt man die Gleichung (α) durch (α'), so erfolgt

$$\frac{\sin^2 b \,.\, \sin A}{\sin^2 a \,.\, \sin B} = \frac{\sin B}{\sin A},$$ Fig.

oder

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 b},$$

woraus sich, wenn man beachtet, daß sowohl die Seiten als auch die Winkel des sphärischen Dreyeckes kleiner als 180°, daher ihre Sinus positiv seyn müssen,

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}$$

ergibt. Vertauscht man hierin noch B mit C und b mit c, so findet man

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}, \quad \text{oder}$$

(III.) $$\sin A : \sin a = \sin B : \sin b = \sin C : \sin c,$$

d. h. im sphärischen Dreyecke sind die Sinus der Seiten den Sinus der Winkel proportional.

Diese Gleichung kann man auch auf folgende Weise gewinnen.

Addirt und subtrahirt man die Gleichungen (I.) und (I'.), so erhält man die Gleichungen

$$(\cos C + \cos B)(1 - \cos A) = \sin A (\cos c \sin B + \cos b \sin C)$$
$$(\cos C - \cos B)(1 + \cos A) = \sin A (\cos c \sin B - \cos b \sin C),$$

deren Product

$$\cos^2 C - \cos^2 B = \cos^2 c \sin^2 B - \cos^2 b \sin^2 C$$

ist, woraus, wenn die Cosinus (nach §. 541. I.) durch die Sinus ausgedrückt werden,

$$\sin^2 B - \sin^2 C = \sin^2 B - \sin^2 B \sin^2 c - \sin^2 C + \sin^2 C \,.\, \sin^2 b$$

oder

$$\sin B \,.\, \sin c = \sin b \,.\, \sin C$$

folgt; daher ist wie früher

$$\sin B : \sin b = \sin C : \sin c.$$

§. 569.

IV. Endlich lassen sich auch noch zwey Seiten sammt dem von ihnen eingeschlossenen und einem ihnen entgegen liegenden Winkel, nähmlich vier neben einander liegende Stücke des Kugeldreyeckes durch eine Gleichung verbinden.

Fig. Zu diesem Zwecke werden wir bloß aus der oben (§. 567) entwickelten Gleichung (A) durch die Substitution des aus (III.) folgenden Werthes

$$\sin B = \frac{\sin b \,.\, \sin C}{\sin c}$$

die überflüssige Größe B beseitigen. Dadurch erhalten wir

$$\cos C \sin A = \frac{\sin b \cos c \,.\, \sin C}{\sin c} + \cos b \sin C \cos A,$$

oder wenn wir durch sin C dividiren,

(IV.) $$\sin A \,.\, \cot C = \sin b \cot c + \cos A \,.\, \cos b,$$

d. h. bey vier neben einander liegenden Stücken eines sphärischen Dreyeckes ist das Product des Sinus der eingeschlossenen Seite in die Cotangente der anderen gleich dem Producte des Sinus des eingeschlossenen Winkels in die Cotangente des anderen, vermehrt um das Product der Cosinus beyder eingeschlossenen Stücke.

§. 570.

Aus den hier aufgestellten vier Hauptgleichungen erhalten wir durch gleichmäßige Vertauschung der Buchstaben folgende vier Systeme von Gleichungen.

I. Zwischen den Seiten und einem Winkel.

(1) $$\cos A = \cos a \,.\, \sin B \,.\, \sin C + \cos B \,.\, \cos C,$$
$$\cos B = \cos b \,.\, \sin C \,.\, \sin A + \cos C \,.\, \cos A,$$
$$\cos C = \cos c \,.\, \sin A \,.\, \sin B + \cos A \,.\, \cos B.$$

II. Zwischen den Winkeln und einer Seite.

(2) $$\cos a = \cos A \,.\, \sin b \,.\, \sin c - \cos b \,.\, \cos c,$$
$$\cos b = \cos B \,.\, \sin c \,.\, \sin a - \cos c \,.\, \cos a,$$
$$\cos c = \cos C \,.\, \sin a \,.\, \sin b - \cos a \,.\, \cos b.$$

III. Zwischen zwey Seiten und ihren Gegenwinkeln.

(3) $$\sin b \,.\, \sin C = \sin c \,.\, \sin B,$$
$$\sin c \,.\, \sin A = \sin a \,.\, \sin C,$$
$$\sin a \,.\, \sin B = \sin b \,.\, \sin A.$$

IV. Zwischen vier neben einander liegenden Stücken. Fig.

(4) $\sin B . \cot C = \sin a . \cot c + \cos B . \cos a,$
$\sin C . \cot B = \sin a . \cot b + \cos C . \cos a,$
$\sin C . \cot A = \sin b . \cot a + \cos C . \cos b,$
$\sin A . \cot C = \sin b . \cot c + \cos A . \cos b,$
$\sin A . \cot B = \sin c . \cot b + \cos A . \cos c,$
$\sin B . \cot A = \sin c . \cot a + \cos B . \cos c.$

Aus diesen zwischen je vier Stücken des sphärischen Dreyeckes bestehenden Gleichungen ersieht man sogleich, daß jedes Kugeldreyeck im Allgemeinen durch drey seiner Bestandstücke gegeben ist, und daß sonach zwey sphärische Dreyecke im Allgemeinen vollkommen gleich sind, wenn sie drey Stücke wechselweise gleich haben.

§. 571.

Von der ungemein großen Zahl der für die sphärischen Dreyecke von den Geometern bisher gefundenen Gleichungen werden wir hier nur folgende aufnehmen, die sich dadurch vor vielen andern auszeichnen, daß sie zur logarithmischen Behandlung geeignet sind.

I. Der ersten der Gleichungen (1) kann man auch die Gestalt geben

$$\cos a = \frac{\cos A - \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

folglich ist

$$1 + \cos a = \frac{\cos A - \cos B \cos C + \sin B \sin C}{\sin B \sin C}$$
$$= \frac{\cos A - \cos (B + C)}{\sin B \sin C}$$
$$1 - \cos a = \frac{\sin B \sin C + \cos B \cos C - \cos A}{\sin B \sin C}$$
$$= \frac{\cos (B - C) - \cos A}{\sin B \sin C},$$

oder nach §. 543. II. und §. 549. IV.

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\sin \frac{1}{2} (A + B + C) \sin \frac{1}{2} (B + C - A)}{\sin B \sin C}$$
$$\sin^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\sin \frac{1}{2} (C + A - B) \sin \frac{1}{2} (A + B - C)}{\sin B \sin C}.$$

Fig. Setzen wir der Kürze wegen

(5) $\frac{1}{2}(A+B+C)=S$,

so übergehen diese Gleichungen in

(6) $\cos^2\frac{1}{2}a=\frac{\sin S\,.\,\sin(S-A)}{\sin B\,\sin C}$,

(7) $\sin^2\frac{1}{2}a=\frac{\sin(S-B)\,.\,\sin(S-C)}{\sin B\,.\,\sin C}$.

Dividirt man die Gleichung (7) durch (6), so wird

(8) $\tang^2\frac{1}{2}a=\frac{\sin(S-B)\,.\,\sin(S-C)}{\sin S\,.\,\sin(S-A)}$;

multiplicirt man aber diese Gleichungen mit einander, so erscheint

(9) $\sin a=\frac{2}{\sin B\,\sin C}\,.\,\sqrt{\sin S\sin(S-A)\sin(S-B)\sin(S-C)}$.

Zu diesen vier Gleichungen lassen sich durch bloße Verwechslung der Buchstaben auch die analogen für b und c finden.

II. Ersetzt man in den eben gefundenen Gleichungen die Stücke

A, B, C, a

des sphärischen Dreyeckes durch die Supplemente ihrer Gegenstücke d. i. durch

180^0-a, 180^0-b, 180^0-c, 180^0-A,

folglich, wenn man der Kürze willen

(10) $\frac{1}{2}(a+b+c)=s$

annimmt, die Größen

S, S—A, S—B, S—C

durch

270^0-s, $90^0-(s-a)$, $90^0-(s-b)$, $90^0-(s-c)$;

so ergeben sich nach höchst einfachen Reductionen die Gleichungen

(11) $\cos^2\frac{1}{2}A=\frac{\cos(s-b)\cos(s-c)}{\sin b\sin c}$,

(12) $\sin^2\frac{1}{2}A=-\frac{\cos s\,.\,\cos(s-a)}{\sin b\,.\,\sin c}$,

(13) $\tang^2\frac{1}{2}A=-\frac{\cos s\,.\,\cos(s-a)}{\cos(s-b)\,.\,\cos(s-c)}$,

(14) $\sin A=\frac{2}{\sin b\,.\,\sin c}\sqrt{-\cos s\cos(s-a)\cos(s-b)\cos(s-c)}$.

III. Da (nach §. 542.) Fig.

$\cos\frac{1}{2}(a\pm b)=\cos\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b\mp\sin\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b$,

$\sin\frac{1}{2}(a\pm b)=\sin\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b\pm\cos\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b$,

ferner den Gleichungen (6) und (7) gemäß

$$\cos\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\sin S.\sin(S-A)}{\sin B.\sin C}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\sin(S-B).\sin(S-C)}{\sin B.\sin C}},$$

so wie

$$\cos\tfrac{1}{2}b=\sqrt{\frac{\sin S.\sin(S-B)}{\sin C.\sin A}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}b=\sqrt{\frac{\sin(S-C).\sin(S-A)}{\sin C.\sin A}}$$

ist; so ergibt sich durch Substitution dieser Ausdrücke

$$\cos\tfrac{1}{2}(a\pm b)=\frac{\sin S\mp\sin(S-C)}{\sin C}\cdot\sqrt{\frac{\sin(S-A)\sin(S-B)}{\sin A\sin B}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(a\pm b)=\frac{\sin(S-B)\pm\sin(S-A)}{\sin C}\cdot\sqrt{\frac{\sin S\sin(S-C)}{\sin A\sin B}},$$

folglich, weil

$$\cos\tfrac{1}{2}c=\sqrt{\frac{\sin S\sin(S-C)}{\sin A\sin B}},\quad \sin\tfrac{1}{2}c=\sqrt{\frac{\sin(S-A)\sin(S-B)}{\sin A\sin B}}$$

ist,

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(a\pm b)}{\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\sin S\mp\sin(S-C)}{\sin C},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a\pm b)}{\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\sin(S-B)\pm\sin(S-A)}{\sin C}.$$

Ferner haben wir (nach §. 549.)

$$\sin p\pm\sin q=2\sin\tfrac{1}{2}(p\pm q).\cos\tfrac{1}{2}(p\mp q),$$

daher wird, wenn man noch die Gleichung

$$\sin C=2\sin\tfrac{1}{2}C.\cos\tfrac{1}{2}C$$

berücksichtiget,

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(a\pm b)}{\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(S\mp S\pm C).\cos\frac{1}{2}(S\pm S\mp C)}{\sin\frac{1}{2}C.\cos\frac{1}{2}C},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a\pm b)}{\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(S-B\pm S\mp A).\cos\frac{1}{2}(S-B\mp S\pm A)}{\sin\frac{1}{2}C.\cos\frac{1}{2}C}.$$

Wenn man endlich der Gleichung (5) gemäß für S seinen Werth $\frac{1}{2}(A+B+C)$ schreibt, so erhält man die Gleichungen

Fig.

(15) $$\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C},$$

(16) $$\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C},$$

(17) $$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C},$$

(18) $$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}.$$

Diese vier Gleichungen werden von einigen Geometern die Delambre'schen, von andern die Gaußischen Gleichungen genannt.

IV. Bestimmt man aus denselben (nach §. 541. II.) die Tangenten der halben Summe und Differenz der Winkel a, b und der Seiten A, B; so findet man die Gleichungen

(19) $$\tan\frac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\cot\frac{1}{2}c,$$

(20) $$\tan\frac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\cot\frac{1}{2}c,$$

(21) $$\tan\frac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\tan\frac{1}{2}C,$$

(22) $$\tan\frac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\tan\frac{1}{2}C,$$

welche von ihrem Erfinder die **Neper'schen Analogien** (Gleichungen) genannt werden.

§. 572.

Aus den eben gewonnenen Gleichungen lassen sich mehrere wichtige **Eigenschaften der sphärischen Dreyecke** folgern, von denen sich nachstehende auf die **Grenzwerthe der Summe der Seiten und Winkel** beziehen.

I. **Im sphärischen Dreyecke ist die Summe je zweyer Seiten größer als die dritte.** Man hat nähmlich in dem sphärischen Dreyecke ABC

$$B + C > A$$
$$C + A > B$$
$$A + B > C.$$

Man sieht auf den ersten Blick, daß der Beweis dieses Satzes nur für den Fall zu geben ist, in welchem die größte Seite,

wofür wir C annehmen wollen, mit der Summe der beyden Fig. anderen verglichen wird.

In dieser Absicht betrachten wir die Gleichung

$$(7)\quad \sin^2\tfrac{1}{2}a = \frac{\sin\frac{1}{2}(C+A-B)\,.\,\sin\frac{1}{2}(A+B-C)}{\sin B\,.\,\sin C},$$

welche, weil sin B und sin C (nach §. 486) positiv sind, nur bestehen kann, wenn die beyden Factoren des Zählers einerley Zeichen haben. Nun sind aber diese Factoren zugleich positiv; denn sollte einer von ihnen z. B. $\sin\frac{1}{2}(A+B-C)$ negativ werden, so müßte der Bogen $A+B-C$ entweder negativ oder über 360° ausfallen. Das letztere ist unstatthaft, weil A und B einzeln kleiner als 180°, also schon ihre Summe $A+B$, folglich um so mehr der kleinere Bogen $A+B-C$ geringer als 360° seyn muß. Könnte $A+B-C$ negativ seyn, so bedingte dieß, da A, B, C ihrer Natur nach (essentiell) positiv sind, daß $C>A+B$, folglich um so mehr $C>B$ werde, wodurch bewirkt würde, daß der andere Bogen $C+A-B$ positiv ausfalle. Wäre demnach der eine Factor negativ, so müßte der andere unbedingt positiv auftreten, was das Bestehen der Gleichung (7) vernichtet. Es kann also keiner von ihnen negativ seyn, sondern beyde sind positiv und sonach ist

$$A+B>C.$$

II. **Die Summe der Seiten des sphärischen Dreyeckes ist immer kleiner als eine größte Kreisperipherie, oder kleiner als 360°, nähmlich $A+B+C<360°$.**

Denn damit die Gleichung

$$(6)\quad \cos^2\tfrac{1}{2}a = \frac{\sin S\,.\,\sin(S-A)}{\sin B\,.\,\sin C}$$

für a einen möglichen Werth liefere, muß ihr zweyter Theil positiv seyn, welches, da sin (S − A), sin B und sin C, wie wir in I. zeigten, immer positive Größen sind, nur dann statt finden kann, wenn sin S positiv, folglich $S<180°$ ist, woraus

oder

$$2S<360°$$

$$A+B+C<360°$$ folgt.

Fig. III. Die Summe zweyer Winkel des sphärischen Dreyeckes übersteigt den dritten Winkel um weniger als 180°. Es ist nähmlich in dem sphärischen Dreyecke ABC

$$b + c - a < 180^\circ$$
$$c + a - b < 180^\circ$$
$$a + b - c < 180^\circ.$$

Denn setzen wir in I. für die Seiten die Supplemente ihrer Gegenwinkel, so ergibt sich

$$360^\circ - b - c > 180^\circ - a$$
$$360^\circ - c - a > 180^\circ - b$$
$$360^\circ - a - b > 180^\circ - c,$$

woraus die aufgestellten Ungleichungen unmittelbar folgen.

IV. Die Summe der Winkel eines sphärischen Dreyeckes liegt zwischen 2 und 6 rechten Winkeln oder zwischen 180° und 540°; es ist nähmlich

$$180^\circ < a + b + c < 540^\circ.$$

Denn da die Seiten A, B, C des sphärischen Dreyeckes, also auch ihre Summe essentiell positive Größen sind, so hat man deßwegen und der Vergleichung (II.) gemäß

$$0 < A + B + C < 360^\circ,$$

folglich, wenn man für die Seiten die Supplemente ihrer Gegenwinkel schreibt,

$$0 < 540^\circ - (a + b + c) < 360^\circ,$$

woraus sogleich

$$180^\circ < a + b + c < 540^\circ$$

folgt.

§. 573.

Zwischen den im sphärischen Dreyecke befindlichen Gegenstücken bestehen folgende allgemeine Beziehungen.

I. Im sphärischen Dreyecke liegen gleichen Seiten gleiche Winkel, den größeren Seiten aber die größeren Winkel, und umgekehrt gegenüber; nähmlich im sphärischen Dreyecke ABC besteht die Vergleichung

$$A = B \text{ mit } a = b,$$
$$A > B \text{ mit } a > b,$$
$$A < B \text{ mit } a < b.$$

Denn da in der Gleichung Fig.

$$(18) \qquad \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}$$

die Nenner $\cos\frac{1}{2}c$ und $\sin\frac{1}{2}C$ der beyden gleichen Brüche, weil c und C zwischen 0 und 180° liegen, absolut positiv sind; so müssen auch ihre Zähler $\sin\frac{1}{2}(a-b)$ und $\sin\frac{1}{2}(A-B)$, also auch die Bogen a—b und A—B, welche wegen §. 486 unter 180° liegen, gleichzeitig positiv oder negativ ausfallen, woraus erhellet, daß die Vergleichung

$$A > B \text{ mit } a > b$$

und $A < B$ mit $a < b$ zusammengehört.

Wird ferner einer der Zähler Null, so muß, weil keiner der Nenner Null werden kann, auch der andere Zähler in Null übergehen; folglich bedingen die Gleichungen

$$A = B \text{ und } a = b$$

einander gegenseitig.

II. In dem sphärischen Dreyecke ist die Summe zweyer Seiten mit der Summe ihrer Gegenwinkel gleichartig, d. h. zugleich entweder größer, oder eben so groß, oder kleiner als 180°; nähmlich es besteht die Vergleichung

$$A+B = 180^\circ \text{ mit } a+b = 180^\circ$$
$$A+B > 180^\circ \text{ mit } a+b > 180^\circ$$
$$A+B < 180^\circ \text{ mit } a+b < 180^\circ.$$

Denn in der Gleichung

$$(15) \qquad \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C}$$

sind die Nenner $\sin\frac{1}{2}c$ und $\cos\frac{1}{2}C$ der zwey gleichen Brüche positiv, folglich müssen ihre Zähler $\cos\frac{1}{2}(a+b)$ und $\cos\frac{1}{2}(A+B)$ stets gleiche Zeichen besitzen, daher auch die Bogen $\frac{1}{2}(a+b)$ und $\frac{1}{2}(A+B)$ gleichzeitig unter oder über 90°, mithin $a+b$ und $A+B$ zugleich kleiner oder größer als 180° seyn. Die Vergleichungen

$$A+B > 180^\circ \text{ und } a+b > 180^\circ$$
$$A+B < 180^\circ \text{ und } a+b > 180^\circ$$

folgen demnach wechselweise aus einander.

Fig. Ist endlich einer der Zähler Null, also einer der Bogen $a+b$ oder $A+B$ gleich 180°, so muß, weil kein Nenner Null werden kann, auch der andere Zähler in Null übergehen; es bestehen sonach die Gleichungen

$$A+B=180^\circ \text{ und } a+b=180^\circ$$

stets mit einander.

§. 574.

I. Die im Vorhergehenden ausgemittelten Gleichungen wollen wir nun zuvörderst zur Auflösung der rechtwinkeligen sphärischen Dreyecke benützen. Diese können entweder drey oder zwey oder einen rechten Winkel haben. Bey den ersteren sind auch alle Seiten Quadranten; in den zweyten sind die den rechten Winkeln entgegenstehenden Seiten Quadranten, und die dritte ist das Maß ihres Gegenwinkels; es bleibt demnach in beyden Arten von rechtwinkeligen Dreyecken nichts zu bestimmen übrig. Aus diesem Grunde werden wir hier nur jene Kugeldreyecke untersuchen, welche bloß einen rechten Winkel besitzen.

Bezeichnen wir zu diesem Zwecke den rechten Winkel mit c, die Hypothenuse mit H, die beyden Katheten mit A und B und die beyden schiefen Winkel mit a und b, so werden wir, um die Hauptgleichungen des rechtwinkeligen sphärischen Dreyeckes aufzustellen, in den fünfzehn für die sphärischen Dreyecke (§. 570.) aufgestellten Hauptgleichungen $c=90^\circ$ und $C=H$ setzen; dadurch erhalten wir die Gleichungen

(1.) $\cos H = \cos A . \cos B$

(2.) $\begin{cases} \cos a = \cos A . \sin b \\ \cos b = \cos B . \sin a \end{cases}$

(3.) $\cos H = \cot a . \cot b$

(4.) $\begin{cases} \sin A = \sin a . \sin H \\ \sin B = \sin b . \sin H \end{cases}$

(5.) $\begin{cases} \cos a = \tang B . \cot H \\ \cos b = \tang A . \cot H \end{cases}$

(6.) $\begin{cases} \sin A = \tang B . \cot b \\ \sin B = \tang A . \cot a. \end{cases}$

Dieſelben Gleichungen findet man aber auch unmittelbar aus Fig.
Fig. 128, wo das Kugeldreyeck MRN bey R rechtwinkelig 128.
iſt, indem man durch N auf die Gerade CM die Ebene NFG ſenkrecht legt, welche demnach (§. 468.) auf der Ebene MCR ſenkrecht ſteht und ſich mit der auf eben dieſer Ebene ſenkrechten Ebene NCR in der Geraden NG ſchneidet, die (471) mit CR und GF rechte Winkel bildet. Dadurch wird der Winkel NFG = a

$$CG = \cos A,\ NG = \sin A$$
$$CF = \cos H,\ NF = \sin H.$$

Sofort liefert das bey F rechtwinkelige Dreyeck CFG (§. 561) die Gleichungen

$$CF = CG.\cos B \text{ oder } \cos H = \cos A.\cos B \quad (1.)$$
$$FG = CG.\sin B = \cos A.\sin B$$
$$= CF.\tang B = \cos H.\tang B,$$

und das rechtwinkelige Dreyeck NGF

$$NG = NF.\sin a \text{ oder } \sin A = \sin H.\sin a \quad (4.)$$
$$FG = NF.\cos a \text{ oder } \cos a = \tang B.\cot H \quad (5.)$$
$$NG = FG.\tang a \text{ oder } \sin B = \tang A.\cot a \quad (6.)$$

Die noch fehlenden Gleichungen (2.) und (3.) laſſen ſich aus den bereits gefundenen ſehr leicht ableiten. Man kann ſich aber zu dieſem Behufe auch der in Fig. 132 angedeuteten Conſtruc- 132.
tion bedienen, nach welcher A′ und B′ die Pole der Katheten A und B, a und b aber jene der Quadranten B′F und A′G ſind, wodurch die Dreyecke A′Da und B′Ib bey D und I rechtwinkelig ausfallen. Wendet man auf eines derſelben, etwa auf das letztere, die Gleichungen (4.) und (6.) an, ſo geben ſie

$$\sin a' = \sin A'.\sin b, \quad \sin H' = \tang a'.\cot b,$$

folglich, weil

$$a' = 90^o - a,\ A' = 90^o - A,\ H' = 90^o - H$$

iſt,

$$\cos a = \cos A.\sin b \quad (2.),\ \cos H = \cot a.\cot b \quad (3.)$$

II. In dieſen einfachen, zwiſchen je drey Stücken des rechtwinkeligen ſphäriſchen Dreyeckes beſtehenden, zehn Gleichungen, welche überdieß zur logarithmiſchen Behandlung ge-

Fig. eignet sind, ist die ganze Auflösung der rechtwinkeligen sphärischen Dreyecke enthalten, da man mittelst derselben zu jeden zwey gegebenen Stücken dieser Dreyecke die drey anderen bestimmen kann. Diese Gleichungen lassen sich auch durch besondere und leicht aufzustellende Sätze ausdrücken, die jedoch das Gedächtniß zu sehr in Anspruch nehmen, als daß wir sie nicht nach Neper's Anleitung in einen einzigen Satz vereinigen sollten.

Läßt man nähmlich in dem bey R rechtwinkeligen Dreyecke
128. MRN, Fig. 128. den rechten Winkel R außer Acht, und nimmt von seinen fünf Stücken A, B, a, b, H was immer für drey Stücke, so liegen entweder alle drey unmittelbar neben einander, folglich eines zwischen den beyden andern, oder es befinden sich bloß zwey Stücke neben einander, während das dritte von ihnen getrennt ist. Nennen wir nun jenes mittlere, so wie dieses abgesonderte das Mittelstück, die im ersten Falle rechts und links an dasselbe anstoßenden Stücke aber die anliegenden, und die im zweyten Falle an einander grenzenden, die gegenüber liegenden Stücke; so zeigt sich, daß in den obigen Gleichungen, von dem Mittelstücke und den gegenüber liegenden Stücken durchgehends nur der Sinus und Cosinus, von den anliegenden Stücken aber bloß die Tangente und Cotangente vorkommen.

Diese Gleichungen können jedoch auch so gestaltet werden, daß von dem Mittelstücke nur der Sinus, von den anliegenden Stücken bloß die Tangente, und von den gegenüber liegenden nur der Cosinus in die Rechnung kommt. Man erhält nähmlich zwischen dem Mittelstücke und den anliegenden Stücken die Gleichungen

$$\sin A = \text{tang } B \,.\, \text{tang } (90^\circ - b)$$
$$\sin B = \text{tang } A \,.\, \text{tang } (90^\circ - a)$$
$$\sin (90^\circ - a) = \text{tang } B \,.\, \text{tang } (90^\circ - H)$$
$$\sin (90^\circ - b) = \text{tang } A \,.\, \text{tang } (90^\circ - H)$$
$$\sin (90^\circ - H) = \text{tang } (90^\circ - a) \,.\, \text{tang } (90^\circ - b);$$

ferner zwischen dem Mittelstücke und den gegenüber liegenden Stücken die Gleichungen

$$\sin A = \cos(90^\circ - a) . \cos(90^\circ - H)$$ Fig.

$$\sin B = \cos(90^\circ - b) . \cos(90^\circ - H)$$

$$\sin(90^\circ - a) = \cos A . \cos(90^\circ - b)$$

$$\sin(90^\circ - b) = \cos B . \cos(90^\circ - a)$$

$$\sin(90^\circ - H) = \cos A . \cos B.$$

Aus diesen Gleichungen erhellet klar, daß, wenn man die Katheten A, B, wie sie sind, von den übrigen drey Stücken a, b, H aber ihre Complemente $90^\circ - a$, $90^\circ - b$, $90^\circ - H$ in die Rechnung nimmt, folgender unter dem Nahmen „Neper'sche Regel" bekannte Satz gilt. Im rechtwinkeligen sphärischen Dreyecke gleicht der Sinus des Mittelstückes sowohl dem Producte der Tangenten der anliegenden, als auch dem Producte der Cosinus der gegenüberliegenden Stücke.

Um daher aus zwey bekannten Stücken eines rechtwinkeligen sphärischen Dreyeckes eines der anderen Stücke zu bestimmen, wird man dieses mit den beyden bekannten nach der Neper'schen Regel in eine Gleichung bringen, und hieraus das verlangte Stück berechnen.

§. 575.

Die Auflösung der Quadranten-Dreyecke, d. i. derjenigen, in welchen eine Seite ein Quadrant ist oder 90° hält, läßt sich auf die der rechtwinkeligen sphärischen Dreyecke zurückführen, da man bloß ihre rechtwinkeligen Polar-Dreyecke in die Rechnung zu nehmen hat.

Dasselbe gilt auch von den gleichschenkeligen und gleichseitigen sphärischen Dreyecken, da der, die Mitte der Grundlinie mit der entgegen liegenden Spitze verbindende, größte Kreisbogen, wie sich leicht nachweisen läßt, auf der Grundlinie senkrecht steht, den Winkel an der Spitze halbirt und das Dreyeck in zwey congruente rechtwinkelige Dreyecke zertheilet.

§. 576.

Eben so ließe sich die Auflösung der schiefwinkeligen sphärischen Dreyecke auf jene der rechtwinkeligen bringen, da man jedes schiefwinkelige sphärische Dreyeck durch einen auf die Grundlinie senkrecht gezogenen Bogen in zwey rechtwinke-

Fig. lige Dreyecke zertheilen kann, von denen das eine zwey der gegebenen Stücke des schiefwinkeligen Dreyeckes enthält. Allein die hiezu einzuleitenden Rechnungen erhalten in den meisten Fällen eine zu große Ausdehnung, wovon sich der wißbegierige Leser durch eigene Versuche überzeugen kann, weßwegen wir die schiefwinkeligen sphärischen Dreyecke unabhängig von den rechtwinkeligen auflösen werden.

Um solche Dreyecke aufzulösen, müssen, da die Grundgleichungen derselben zwischen vier Stücken bestehen, nothwendig drey Stücke gegeben seyn, aus denen die übrigen drey berechnet werden.

Die bey ihrer Auflösung vorkommenden Fälle lassen sich am einfachsten nach den bekannten Stücken ordnen, wodurch man folgende sechs Fälle erhält. Es können nähmlich gegeben seyn:

I. Drey Seiten;
II. Drey Winkel;
III. Zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel;
IV. Zwey Winkel und die eingeschlossene Seite;
V. Zwey Seiten und ein Gegenwinkel;
VI. Zwey Winkel und eine Gegenseite.

Diese Fälle wollen wir einzeln durchgehen, und dabey wo möglich jedes Stück aus den gegebenen unmittelbar berechnen.

I. Fall. Gegeben seyen: die drey Seiten A, B, C;
gesucht werden: die drey Winkel a, b, c.

Ohne Rücksicht auf Anwendung der Logarithmen hat man zur Bestimmung des Winkels a die Gleichung

$$\cos a = \frac{\cos A - \cos B \,.\, \cos C}{\sin B \,.\, \sin C}$$

Will man sich der Logarithmen bedienen, so berechne man zuvörderst S aus

$$S = \tfrac{1}{2}(A + B + C),$$

hierauf a aus einer der Gleichungen Fig.

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\sin (S-B) \cdot \sin (S-C)}{\sin B \cdot \sin C}}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\sin S \cdot \sin (S-A)}{\sin B \cdot \sin C}}$$

$$\tang \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\sin (S-B) \cdot \sin (S-C)}{\sin S \cdot \sin (S-A)}}$$

$$\sin a = \frac{2}{\sin B \cdot \sin C} \sqrt{\sin S \sin (S-A) \sin (S-B) \sin (S-C)}.$$

Was die Genauigkeit der Rechnung in besonderen Fällen anbelangt, so ist es besser den Sinus des halben Winkels zu berechnen, wenn der zu bestimmende Winkel sehr klein ausfällt, den Cosinus aber, wenn dieser Winkel nahe an 90° ist. Bey der Anwendung der Tangente ist diese Rücksicht überflüssig. Bestimmt man den Sinus des ganzen Winkels, so bleibt noch mit Hülfe der ersten Gleichung zu entscheiden, ob der Winkel spitzig oder stumpf ist.

II. Fall. Gegeben sind: die drey Winkel a, b, c;
gesucht werden: die drey Seiten A, B, C.

Für die Seite A hat man

$$\cos A = \frac{\cos a + \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c},$$

welchen Ausdruck man jedoch nur bey Substitutionen gebraucht.

Um die Logarithmen anzuwenden, bestimmt man zunächst s aus

$$s = \tfrac{1}{2} (a + b + c),$$

sofort A nach einer der Gleichungen

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{-\frac{\cos s \cdot \cos (s-a)}{\sin b \cdot \sin c}}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\cos (s-b) \cdot \cos (s-c)}{\sin b \cdot \sin c}}$$

$$\tang \tfrac{1}{2} A = \sqrt{-\frac{\cos s \cdot \cos (s-a)}{\cos (s-b) \cos (s-c)}}$$

$$\sin A = \frac{2}{\sin b \cdot \sin c} \sqrt{-\cos s \cos (s-a) \cos (s-b) \cos (s-c)}$$

Welcher von diesen Ausdrücken eine größere numerische Schärfe gewährt, wird nach den bey dem ersten Falle gegebenen Regeln entschieden.

Fig. III. Fall. Gegeben seyen: zwey Seiten A und B
mit dem eingeschlossenen Winkel c;
gesucht werden: die dritte Seite C
und die beyden andern Winkel a und b.

1. Die dritte Seite C findet man aus der Gleichung,

$$\cos C = \cos c \sin A \sin B + \cos A . \cos B.$$

Um diese Gleichung für die logarithmische Behandlung einzurichten, verwandelt man sie in

$$\cos c = \cos B \,(\cos c . \operatorname{tang} B . \sin A + \cos A)$$

und wählet einen Winkel x so, daß,

$$\cos c \operatorname{tang} B = \operatorname{tang} x$$

ist; dieß macht

$$\cos C = \frac{\cos B . \cos (A - x)}{\cos x};$$

Man bestimmt daher

zunächst x aus $\operatorname{tang} x = \cos c . \operatorname{tang} B,$

dann C aus $\cos C = \frac{\cos B . \cos (A - x)}{\cos x}.$

2. Die beyden Winkel a und b berechnet man am einfachsten mittelst der Neper'schen Analogien, man sucht nähmlich

$\frac{1}{2}(a+b)$ aus $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} . \cot \frac{1}{2} c,$

$\frac{1}{2}(a-b)$ aus $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)} . \cot \frac{1}{2} c.$

Die Summe dieser Werthe gibt sofort den Winkel a, ihre Differenz aber b.

IV. Fall. Gegeben seyen: zwey Winkel a und b
mit ihrer Zwischenseite C;
gesucht werden: der dritte Winkel c
und die beyden andern Seiten A und B.

1. Der dritte Winkel c wird mittelst der Gleichung

$$\cos c = \cos C . \sin a . \sin b - \cos a . \cos b$$

berechnet.

Will man sich der Logarithmen bedienen, so gebe man dieser Gleichung die Form

$$\cos c = \cos b \,(\cos C . \operatorname{tang} b . \sin a - \cos a),$$

und nehme Fig.

$$\cos C . \operatorname{tang} b = \operatorname{tang} x,$$

wodurch

$$\cos c = - \frac{\cos b . \cos (a+x)}{\cos x} \text{ wird.}$$

Man berechne demnach

zuerst x aus $\operatorname{tang} x = \cos C \operatorname{tang} b,$

dann c aus $\cos c = - \frac{\cos b . \cos (a+x)}{\cos x}$

2. Zur Bestimmung der beyden Seiten A und B berechne man

$\frac{1}{2}(A+B)$ aus $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} . \operatorname{tang} \frac{1}{2} C,$

$\frac{1}{2}(A-B)$ aus $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} . \operatorname{tang} \frac{1}{2} C,$

wornach man die Seite A durch Addition, und die Seite B durch Subtraction dieser Werthe findet.

V. Fall. Gegeben sind: zwey Seiten A und B
mit dem Gegenwinkel a;
gesucht werden: der andere Gegenwinkel b,
die dritte Seite C und ihr Gegenwinkel c.

1. Den Gegenwinkel b berechnet man aus

$$\sin b = \frac{\sin B . \sin a}{\sin A}.$$

Da jedoch der hier gefundene Sinus von b nicht zu entscheiden vermag, ob der Winkel b, wofern er kein rechter wird, über oder unter 90° ist; so erforsche man zuerst, ob die gegebene Seite B größer oder kleiner als A ist. Da nun (nach §. 573. I.) der größeren Seite der größere Winkel entgegen liegt, so muß auch der Winkel b im ersten Falle größer, im andern kleiner als a seyn. Man untersucht daher, welcher von den zwey für b annehmbaren Winkeln dieser Forderung entspricht. Leistet nur einer von ihnen Genüge, so ist sowohl dieser Winkel b als auch das Dreyeck selbst bestimmt; genügen aber beyde Werthe, so besitzt das Dreyeck zwey Gestalten, d. h. es gibt zwey verschiedene Dreyecke, welche die gegebenen Größen enthalten.

Fig. Mit dem gefundenen Winkel b berechnet man sofort

2. die dritte Seite C aus der Neper'schen Analogie

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}C=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}\cdot\text{tang}\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}\cdot\text{tg}\tfrac{1}{2}(A-B)$$

und

3. ihren Gegenwinkel c aus

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}c=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\cot\tfrac{1}{2}(a+b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\cot\tfrac{1}{2}(a-b)$$

VI. Fall. Gegeben seyen: zwey Winkel a und b mit der Gegenseite A;

gesucht werden: die Gegenseite B, der dritte Winkel c und seine Gegenseite C.

1. Die Gegenseite B findet man aus der Gleichung

$$\sin B=\frac{\sin b\,.\,\sin A}{\sin a}.$$

Auch hier untersucht man zuerst, ob b größer oder kleiner als a ist, und schließt (nach §. 573. I.), daß auch B im ersten Falle größer, im andern kleiner als A seyn muß. Genügt dieser Forderung nur einer der zwey für B annehmbaren Werthe, so ist das Dreyeck bestimmt; besitzen jedoch beyde diese Eigenschaft, so hat das Dreyeck zwey verschiedene Formen.

Kennt man die Seite B, so berechnet man

2. den dritten Winkel c aus

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}c=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\cot\tfrac{1}{2}(a+b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\cot\tfrac{1}{2}(a-b)$$

und

3. seine Gegenseite C aus

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}C=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}\cdot\text{tang}\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}\cdot\text{tg}\tfrac{1}{2}(A-B)$$

§. 577.

Es erübriget uns noch, die Richtigkeit der in den beyden letzten Fällen erwähnten Untersuchungsweise der Bestimmtheit oder Unbestimmtheit des sphärischen Dreyeckes darzulegen.

In dem fünften Falle wird der Winkel b entweder einen, oder zwey auf 180° sich ergänzende Werthe erhalten, je nachdem die dritte Seite C, folglich auch der dritte Winkel c einen

oder zwey Werthe anzunehmen vermag. Um zu erforschen, unter welchen Bedingungen dieses oder jenes statt finde, betrachten wir den Ausdruck dieser dritten Seite Fig.

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}C = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)} \cdot \text{tang}\tfrac{1}{2}(A+B).$$

Soll nun nicht bloß der Winkel b, sondern auch sein Supplement $180^\circ - b$ zulässig seyn, so sey C' der dieser Annahme entsprechende Werth der dritten Seite C; dadurch verwandelt sich dieser Ausdruck in

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}C' = \frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)} \cdot \text{tang}\tfrac{1}{2}(A+B),$$

folglich hat man

$$\frac{\text{tang}\frac{1}{2}C}{\text{tang}\frac{1}{2}C'} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(b-a)\cos\frac{1}{2}(b-a)} = \frac{\sin(b+a)}{\sin(b-a)}.$$

Da C und C', wenn sie Seiten des sphärischen Dreyeckes seyn sollen, nothwendig kleiner als 180°, also $\text{tang}\frac{1}{2}C$ und $\text{tang}\frac{1}{2}C'$ positiv seyn müssen; so zeigt sich, daß die Seite C entweder nur einen oder zwey Werthe erhalten kann, je nachdem der Quotient

$$\frac{\sin(b+a)}{\sin(b-a)}$$

negativ oder positiv ausfällt, folglich, je nachdem die Vergleichungen

$$b \gtrless a \text{ und } b+a \gtrless 180^\circ$$

oder

$$b \gtrless a \text{ und } b+a \lessgtr 180^\circ$$

zusammen bestehen.

Es ist demnach der Winkel b, also auch das sphärische Dreyeck selbst bestimmt, wenn

$$b \gtrless a \text{ und } 180^\circ - b \lessgtr a$$

ist, d. h. wenn von den beyden auf 180° sich ergänzenden Werthen des Winkels b nur der eine der (nach §. 573. I.) durch die Seiten B und A bedingten Forderung, größer oder kleiner als der Winkel a zu seyn, entspricht.

Fig. Dagegen nimmt der Winkel b zwey Werthe, folglich das sphärische Dreyeck zwey Formen an, wenn

$$b \gtrless a \text{ und } 180^\circ - b \gtrless a$$

ist, d. h. wenn beyde auf 180° sich ergänzende Werthe des Winkels b zugleich größer oder kleiner als a ausfallen.

Dadurch ist die für den fünften Fall vorgezeichnete Untersuchungsart gerechtfertiget.

Auf dieselbe Weise kann man auch die Richtigkeit der für den sechsten Fall angegebenen Untersuchungsmethode darthun, was wir jedoch dem Eifer des Lesers anheim stellen.

§. 578.

134. Zum Schlusse wollen wir noch den Flächeninhalt des sphärischen Dreyeckes ABC durch die dasselbe bestimmenden Stücke auszudrücken suchen. Zu diesem Zwecke betrachten wir zunächst

I. den Fall, wo die drey Winkel a, b, c gegeben sind.

Erweitern wir die Seiten des Dreyeckes ABC zu vollen Kreisen, so entsteht ein demselben diametral entgegen liegendes Dreyeck abc. Obgleich nun diese Dreyecke gleiche Winkel und Seiten haben, so lassen sie sich doch keineswegs durch schickliches Uebereinanderlegen zur wechselseitigen Deckung bringen. Dessen ungeachtet gleichen dieselben einander am Flächeninhalte oder sind gleich groß; denn vereiniget man die Pole der zwey unter sich parallelen und congruenten kleineren Kreise, von denen der eine durch die Spitzen des einen, der andere durch jene des anderen Dreyeckes geht, mittelst größter und (nach §. 104. I.) gleicher Kreisbogen mit diesen Spitzen; so wird jedes Dreyeck in drey gleichschenkelige Dreyecke zerschnitten. Da nun die dreyeckigen Bestandtheile des einen Dreyeckes mit jenen des anderen wegen der wechselweisen Gleichheit der Seiten congruiren, so sind auch die Flächen der ganzen Dreyecke gleich.

Nennen wir, zur Abkürzung der Rede, das von zwey halben größten Kreisen eingeschlossene Stück der Kugelfläche ein sphärisches Zweyeck, so sieht man leicht, daß die zu Vollkreisen

ausgeſtreckten Seiten des Dreyeckes ABC die Kugelfläche in 6 Zweyecke AdaeA, ADaEA; BdbFB, BDbfB; CecfC, CEcFC zerſchneiden, welche paarweiſe congruiren, diametral gegenüber liegen, die Winkel a, b, c enthalten, und von denen jedes eines der beyden gleich großen Dreyecke abc und ABC in ſich faßt. Fig. 134.

Daraus erhellet, daß von der Summe aller ſechs Zweyecke, in welcher das Dreyeck ABC ſechsmahl vorkommt, die Kugelfläche, auf der dieſes Dreyeck nur zweymahl liegt, um vier ſolche Dreyecke übertroffen wird. Bezeichnen wir nun mit a, b, c die Längen der die Winkel a, b, c des Kugeldreyeckes ABC meſſenden größten Kreisbogen, wenn der Halbmeſſer der Kugel = 1 angenommen wird; ſo ſind ar, br, cr die Längen derſelben Bogen, wenn der Kugelhalbmeſſer = r iſt. Sofort ſind die Inhalte der die Winkel a, b, c enthaltenden Zweyecke (nach §. 500.) beziehungsweiſe

$$2r.ar\ ,\ 2r.br\ ,\ 2r.cr;$$

demnach iſt die Summe aller ſechs Zweyecke

$$= 4r^2\,(a+b+c).$$

Weil ferner (nach §. 497. I.) die Kugelfläche $= 4\pi r^2$ iſt, ſo muß, wenn f den Inhalt des Dreyeckes ABC vorſtellt,

$$4r^2\,(a+b+c) - 4\pi r^2 = 4f,$$

alſo

$$f = (a+b+c-\pi)\,r^2$$

ſeyn.

Man findet daher den Flächeninhalt eines ſphäriſchen Dreyeckes, wenn man den in Bogenlänge für den Halbmeſſer 1 verwandelten Ueberſchuß der Summe aller drey Winkel über zwey rechte, — welcher gewöhnlich der ſphäriſche Excеß des Dreyeckes genannt wird — mit dem Quadrate des Kugelhalbmeſſers multiplicirt.

Nimmt man den Kugelhalbmeſſer zur Linien-Einheit, alſo $r = 1$, ſo wird

$$f = a+b+c-\pi$$

d. h. der in Quadrat-Kugelhalbmeſſern anzugebende Flächeninhalt eines ſphäriſchen Dreyeckes gleicht dem ſphäriſchen Excеſſe deſſelben.

Fig. 134. Sind nun die Winkel eines sphärischen Dreyeckes, wie es gewöhnlich geschieht, in Graden, Minuten und Secunden gegeben, so wird man entweder zu jedem einzelnen die für den Halbmesser 1 ihm angehörige Bogenlänge suchen, und die Summe dieser um $\pi = 3{,}1415926$ vermindern, oder man wird von der Summe der Winkel vorerst 180° abziehen, und zu dem erhaltenen Ueberschusse die Bogenlänge für den Halbmesser 1 bestimmen; die so gefundene Zahl ist der sphärische Exceß des Dreyeckes und gibt den Flächeninhalt desselben in Quadrat-Kugelhalbmessern an, daher man diesen Inhalt auch leicht in jeder andern quadrirten Linien-Einheit erhält, wenn man das Quadrat des mit dieser Einheit gemessenen Kugelhalbmessers mit dem sphärischen Excesse vervielfacht.

Z. B. Es sey

	a	=	49° 48′	12″
	b	=	96 13	15
	c	=	111 14	49;
so ist	$a + b + c$	=	257 16	16
hievon abgezogen			180	
bleibt der Ueberschuß		=	77 16	16

Nun ist nach der im Anhange befindlichen Tafel die Länge eines Bogens von

70	Graden	= 1,221730
7	»	= 0,122173
10	Minuten	= 0,002909
6	»	= 0,001745
10	Secunden	= 0,000048
6	»	= 0,000029,

daher von 77° 16′ 16″ = 1,348634,

mithin der sphärische Exceß oder der in Quadrat-Kugelhalbmessern ausgedrückte Inhalt des sphärischen Dreyeckes = 1,3486.

Wäre dieser Kugelhalbmesser = 3,14 Schuh, so wäre des Dreyeckes Inhalt = 1,3486. $(3{,}14)^2 = 13{,}297$ Quadratschuh.

II. Sind die Seiten A, B, C des sphärischen Dreyeckes gegeben, so kann der in quadrirten Kugelhalbmessern ausgedrückte Flächeninhalt f auf folgendem Wege gefunden werden. Fig.

Nach I. ist

$$a + b + c = \pi + f$$

und folglich auch, wenn die halbe Summe der Winkel mit s bezeichnet wird,

$$s = \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}f.$$

Ferner haben wir vermög §. 571. Gl. (14)

$$\sin^2 A = -\frac{4}{\sin^2 b \sin^2 c} \cos s . \cos(s-a) \cos(s-b) \cos(s-c);$$

woraus, weil

$$\cos s = -\sin \tfrac{1}{2}f \text{ ist,}$$

$$\sin \tfrac{1}{2}f = \frac{\sin^2 A}{4} \cdot \frac{\sin^2 b . \sin^2 c}{\cos(s-a) \cos(s-b) \cos(s-c)}$$

folgt.

Um nun den letzten Factor dieses Ausdruckes zu beseitigen, multipliciren wir diese Gleichung mit den aus der Gleichung (11) in §. 571 entspringenden drey analogen Gleichungen

$$\cos \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\cos(s-b) \cos(s-c)}{\sin b . \sin c}}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\cos(s-c) \cos(s-a)}{\sin c . \sin a}}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\cos(s-a) \cos(s-b)}{\sin a . \sin b}};$$

wodurch wir

$$\cos \tfrac{1}{2}A . \cos \tfrac{1}{2}B . \cos \tfrac{1}{2}C . \sin \tfrac{1}{2}f = \frac{\sin^2 A}{4} \cdot \frac{\sin b}{\sin a} \cdot \sin c$$

erhalten.

Nehmen wir endlich noch darauf Bedacht, daß nach §. 568 Gl. (III.) und §. 571. Gl. (9)

$$\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin A}$$

$$\sin c = \frac{2}{\sin A \sin B} \sqrt{\sin S . \sin(S-A) \sin(S-B) \sin(S-C)}$$

Fig. ist, so finden wir

$$\sin\tfrac{1}{2}f = \frac{\sqrt{\sin S \cdot \sin(S-A) \cdot \sin(S-B) \cdot \sin(S-C)}}{2\cos\tfrac{1}{2}A \cdot \cos\tfrac{1}{2}B \cdot \cos\tfrac{1}{2}C}.$$

III. Soll der Flächeninhalt des sphärischen Dreyeckes aus zwey Seiten A, B und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel c bestimmt werden, so berechne man a + b nach der ersten Neper'schen Analogie (§. 571)

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(A-B)}{\cos\tfrac{1}{2}(A+B)} \cdot \cot\tfrac{1}{2}c$$

und substituire in die Gleichung

$$f = a + b + c - \pi.$$

IV. Sind zwey Winkel a und b mit ihrer Zwischenseite C gegeben, so berechne man den dritten Winkel c (nach §. 576. IV.) und substituire in

$$f = a + b + c - \pi.$$

V. Soll aus zwey Seiten A, B und einem ihrer Gegenwinkel a der Flächeninhalt bestimmt werden, so suche man die beyden Winkel b und c nach den Gleichungen

$$\sin b = \frac{\sin a \cdot \sin B}{\sin A}, \quad \text{tang}\tfrac{1}{2}c = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(A-B)}{\cos\tfrac{1}{2}(A+B)}\cot\tfrac{1}{2}(a+b),$$

und setze ihre Werthe in die Gleichung

$$f = a + b + c - \pi.$$

VI. Ist der Inhalt aus zwey Winkeln a, b und einer Gegenseite A zu berechnen, so bestimme man den dritten Winkel c mittelst der Gleichungen

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}, \quad \text{tang}\tfrac{1}{2}c = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(A-B)}{\cos\tfrac{1}{2}(A+B)} \cdot \cot\tfrac{1}{2}(a+b),$$

und substituire denselben in die Gleichung

$$f = a + b + c - \pi.$$

Aus diesen in I. bis VI. gefundenen Gleichungen wird die Größe f zuerst in Graden, Minuten und Secunden berechnet, hierauf in Bogenlänge für den Halbmesser 1 verwandelt, wornach sie den Flächeninhalt des sphärischen Dreyeckes in quadrirten Kugelhalbmessern angibt.

Anmerkung. Es wird den Anfängern überlassen, zur Uebung über die in §. 574, 575, 576 und 578 allgemein aufgelösten Aufgaben sich numerische Beyspiele aufzusetzen.

§. 579. Fig.

Die Anwendung der sphärischen Trigonometrie erstreckt sich vorzüglich über die theoretische Astronomie, mathematische Geographie, Nautik und Gnomonik. Damit der nach höheren Kenntnissen strebende Schüler zum Theil einsehe, wie dieses geschehen könne, damit er einen Vorgeschmack von diesen eben so erhabenen als nützlichen Wissenschaften erhalte, und damit er endlich bey den einfacheren Aufgaben derselben seine Kräfte versuche, wollen wir einige der vorzüglichsten Kreise, Linien und Puncte, welche bey der scheinbaren Himmelskugel betrachtet werden, erklären und mit den eingeführten Benennungen derselben aufstellen, dann die Auflösung einiger der nützlichsten Aufgaben hierüber aus einander setzen, und damit dieses Hauptstück beschließen.

IV. Abschnitt.

Begriffe von der Erd- und Himmelskugel, nebst Anwendung derselben auf die Lösung einiger der nützlichsten Aufgaben.

§. 580.

Mathematische Eintheilung der Erd- und Himmelskugel.

I. Die Erde kommt in ihrer Gestalt einer Kugel sehr nahe, da selbst die größten Unebenheiten und Ausbiegungen ihrer Oberfläche, die höchsten Berge, wie die tiefsten Thäler in Vergleich mit ihrem (bey 6713223 Wiener Klafter großen) Durchmesser als höchst unbedeutend verschwinden.

Diese Erdkugel scheint uns in der Mitte einer anderen hohlen Kugel, die wir gewöhnlich den Himmel, das Firmament oder die Himmelskugel nennen, so zu schweben, daß beyde Kugeln einerley Mittelpunct haben.

Fig. An der innern Fläche dieser Himmelskugel sind ferner die Sonne, der Mond und die Sterne, welche insgesammt die Welt- oder Himmelskörper heißen, dem Anscheine nach befestiget.

II. Beobachtet man diese Himmelskugel durch einige Zeit ununterbrochen, so nimmt man bald wahr, daß sie sich scheinbar mit allen Weltkörpern höchst gleichförmig und stets nach einer bestimmten Gegend hin um einen unbeweglichen Durchmesser dreht.

Obgleich alle diese Erscheinungen nur Täuschungen unseres Auges sind, da es in der That keine Himmelskugel gibt, folglich auch die Weltkörper nicht auf der inneren Fläche derselben haften, sondern im Gegentheile diese Körper in dem unermeßlichen Weltraume nach verschiedenen Richtungen in eigenen Bahnen und mit mannigfaltiger Geschwindigkeit sich bewegen, während jener scheinbare Umschwung der Himmelskugel eigentlich durch die Drehung unserer Erde um einen ihrer Durchmesser hervorgebracht wird: so pflegt man doch in der Astronomie bey vielen, die gegenseitige Lage der Weltkörper betreffenden Betrachtungen und Berechnungen, die Erde für fest stehend und jene eingebildete Himmelskugel sammt ihrer scheinbaren Umdrehung als wirklich vorhanden anzunehmen, weil man auf diesem Wege leichter zu denselben End-Resultaten gelangt, welche man aus den wirklichen Stellungen und Bewegungen der Himmelskugel erhalten würde.

III. Derjenige fixe Durchmesser der Himmelskugel, um welchen sie sich scheinbar dreht, heißt die Weltachse, ihre Endpuncte werden die Weltpole, oder auch nur schlechthin die Pole, und zwar der bey uns sichtbare der Nordpol, der andere der Südpol genannt.

Jener Theil der Weltachse, welcher in der Erdkugel liegt, heißt die Erdachse, und die Puncte, in denen sie die Erdoberfläche trifft, heißen die Erdpole, und zwar übereinstimmend mit den Weltpolen, der Nord- und Südpol der Erde.

Der auf der Weltachse senkrechte größte Kreis heißt der Aequator, und wird ebenfalls in den Himmels- und Erd-Aequator abgetheilt. Er zerschneidet die Himmels- und Erdkugel in die nördliche und südliche Halbkugel (Hemisphäre). Jeder

auf der Weltachse senkrecht stehende kleinere Kreis heißt ein Parallelkreis. Fig.

In Fig. 119 bezeichnet 119.

AMBNA den Umring der Himmelskugel,
MN die Weltachse,
M den Nordpol,
N den Südpol;
der Kreis über AB den Aequator, und
der Kreis über DE oder GF einen Parallelkreis.

IV. Die Richtung der Schwere in dem Orte des Beobachters, d. i. diejenige Gerade, welche ein Punct eines an diesem Orte frey fallenden Körpers durchläuft, geht durch den Mittelpunct der Erde, und trifft mit ihrer Verlängerung die Himmelsfläche in zwey Puncten, von denen der über dem Haupte des Beobachters liegende der Scheitelpunct oder das Zenith, der andere der Fußpunct oder das Nadir heißt.

Diese Richtung der Schwere wird die Verticale oder die Verticallinie des Beobachtungsortes genannt. Der durch das Auge des Beobachters auf derselben senkrecht gedachte kleinere Kreis heißt der scheinbare, der auf ihr senkrechte größte Kreis aber der wahre oder astronomische Horizont. Er theilt die Himmelskugel in die (für den Beobachter) sichtbare und unsichtbare Halbkugel.

V. Der durch die Weltachse und die Verticallinie gezogene größte Kreis steht auf dem Aequator und Horizonte senkrecht, und heißt Mittagskreis oder Meridian. Er theilt die Himmelskugel in die östliche und westliche Halbkugel, und wird durch die Weltachse in zwey Halbkreise zerschnitten, von denen jener, welcher das Zenith enthält, der obere, der andere der untere Meridian genannt wird.

Der Durchschnitt des Meridians mit dem Horizonte ist die Mittagslinie, von deren Endpuncten der in der südlichen Hemisphäre liegende der Südpunct, der entgegengesetzte der Nordpunct heißt. Die Durchschnittslinie des Aequators mit dem Horizonte heißt die Ost-West-Linie, und endiget sich in zwey Puncten, von denen der eine der Ost-, der andere der Westpunct ge-

Fig. nannt wird. Diese vier Puncte heißen die Cardinal-Puncte, theilen den Horizont in vier Quadranten, und folgen dergestalt auf einander, daß, wenn man sein Angesicht dem Südpuncte zuwendet, der Ostpunct links, der Westpunct rechts, und der Nordpunct im Rücken liegt.

Die in der Nähe der Cardinal-Puncte liegenden Theile des Horizontes heißen die vier Himmelsgegenden: Osten oder Morgen, Süden oder Mittag, Westen oder Abend, Norden oder Mitternacht.

Der zwischen dem Horizonte und dem nächsten Pole liegende Theil des Meridians wird die Polhöhe des Beobachtungsortes, ihr Complement, nähmlich der Abstand dieses Poles von dem Zenith, die Zenith-Distanz des Poles genannt. Jener Theil des Meridians aber, welcher zwischen dem Horizonte und dem Aequator sich befindet, und den Neigungswinkel dieser zwey Hauptkreise mißt, heißt die Höhe des Aequators und gleicht der Zenith-Distanz des Poles.

133. Ist in Fig. 133

CZ die Verticale eines Punctes der Erde, und
P der Nordpol, also
GER der Aequator; so heißt
Z das Zenith,
MBNM der Horizont,
PZMP der Meridian,
MN die Mittagslinie,
M der Südpunct,
N der Nordpunct,
NP die Polhöhe,
ZP die Zenith-Distanz des Poles,
MG die Aequatorshöhe für diesen Punct der Erde.

VI. Nachdem wir die Himmelsgegenden kennen gelernt haben, ist es leicht die Richtung anzugeben, nach welcher die Himmelskugel sich zu bewegen scheint. Ihre Umdrehung geschieht nähmlich so, daß die zwischen dem Nordpole und dem südlichen Theile des Himmels befindlichen Sterne sich von Osten nach Westen bewegen, während die zwischen dem Nordpole und dem nördlichen

Theile des Himmels befindlichen Sterne in entgegengesetzter Rich- Fig.
tung von Westen nach Osten schreiten.

Bey dieser Umdrehung der Himmelskugel beschreibt jeder Punct derselben einen Parallelkreis, von welchem der über dem Horizonte liegende der Tagebogen, der andere der Nachtbogen heißt. Zugleich geht dieser Punct während einer vollen Umdrehung der Kugel zweymahl durch den Meridian, nähmlich das eine Mahl durch den obern, das andere Mahl durch den untern Meridian. Das Durchgehen eines Punctes durch den Meridian heißt sein Culminiren oder seine Culmination. Eben so geht jeder Punct der Himmelskugel während eines ganzen Umschwunges derselben zweymahl durch den Horizont, das eine Mahl in der östlichen, das andere Mahl in der westlichen Hälfte des Horizontes; jenes heißt das Aufgehen oder der Aufgang, dieses das Untergehen oder der Untergang des Punctes.

VII. Beobachtet man die Sterne des westlichen Himmels an mehreren nach einander folgenden Tagen, eine gleiche Zeit (z. B. eine Stunde) nach Sonnenuntergang, rücksichtlich ihrer Stellung gegen den Horizont; so wird man bald wahrnehmen, daß die Sterne, welche am ersten Tage ganz nahe am Horizonte standen, bereits untergegangen, andere anfänglich höher gestandene aber näher an den Horizont gerückt sind, so daß zu derselben Zeit nach Sonnenuntergang immer andere und andere mehr gegen Osten liegende Sterne im Untergehen begriffen sind. Diese Erscheinung veranlaßt uns zu dem Schlusse, daß die Sonne während unserer Beobachtungstage den östlicher gelegenen Sternen sich nähere, folglich allmählig von Westen nach Osten sich bewege.

Vielfältig wiederhohlte und mit Messungen verbundene Beobachtungen haben gezeigt, daß die Bahn, welche die Sonne während ihrer Bewegung von Westen nach Osten an der Himmelskugel dem Anscheine nach durchläuft, ein größter Kreis ist, den man die Ecliptik oder die scheinbare Sonnenbahn nennt, und der sich gegen den Aequator unter einem gewissen Winkel neigt, welcher die Schiefe der Ecliptik genannt wird, und gegenwärtig $23^{\circ}\ 28'$ beträgt.

Fig. Die Durchschnittslinie der Ecliptik mit dem Aequator nennt man die Linie der Nachtgleichen (Aequinoctien), und ihre Endpuncte die Aequinoctialpuncte, weil, wenn die Sonne sich in einem von diesen Puncten befindet, auf der ganzen Erde Tag und Nacht gleich ist. Von den Aequinoctialpuncten heißt derjenige, durch welchen die Sonne geht, wenn sie aus der südlichen Halbkugel in die nördliche übertritt, der Frühlingspunct, der andere der Herbstpunct.

Der auf der Ecliptik senkrecht stehende Durchmesser der Himmelskugel oder die Achse der Ecliptik bestimmt die Pole der Ecliptik, von denen der in der nördlichen Halbkugel befindliche der Nordpol, der andere der Südpol der Ecliptik genannt wird.

Der durch die Weltachse und die Aequinoctial-Linie gelegte größte Kreis heißt der Colur der Aequinoctien, so wie der durch die Pole der Ecliptik und des Aequators gehende Hauptkreis der Colur der Solstitien. Dieser durchschneidet die Ecliptik in der Linie der Solstitien, deren Endpuncte die beyden Solstitial- oder Sonnenstillstands-Puncte sind, von denen der in der nördlichen Halbkugel befindliche der Sommerpunct, der andere der Winterpunct genannt wird.

VIII. Die Ecliptik pflegt man in 12 gleiche Theile zu theilen, und jeden solchen Bogen von 30 Graden ein Zeichen zu nennen, welche von den in ihrer Nähe liegenden Sternbildern vom Frühlingspuncte aus gegen den Sommerpunct die Nahmen: Widder, Stier, Zwillinge, Krebs, Löwe, Jungfrau, Wage, Scorpion, Schütze, Steinbock, Wassermann, Fische erhalten.

IX. Bey der täglichen Umdrehung der Himmelskugel beschreibt die Achse der Ecliptik sowohl auf der Erd- als Himmelskugel die beyden Polarkreise, den nördlichen und südlichen, deren Umfänge von ihren benachbarten Weltpolen um die Schiefe der Ecliptik abstehen. Eben so beschreibt die Linie der Solstitien auf den beyden Kugeln die Wendekreise, von denen der in der nördlichen Halbkugel gelegene der Wendekreis des Krebses, der andere der Wendekreis des Steinbockes heißt.

Durch die Polar- und Wendekreise wird die Oberfläche der Erde in fünf Zonen zerschnitten, welche nach dem Grade der mittleren Wärme, die ihnen von der Sonne mitgetheilt wird, benannt werden, so daß die zwischen den Wendekreisen liegende die heiße, die beyden anschließenden die mittleren, und die äußersten die kalten Zonen heißen. Fig.

In Fig. 134 ist 134.

cFfc der Aequator,
cEec die Ecliptik,
Dd ihre Achse,
D der Nord-,
d „ Süd-Pol der Ecliptik,
EcF = ACB die Schiefe der Ecliptik,
c der Frühlingspunct,
A „ Sommerpunct,
C „ Herbstpunct,
a „ Winterpunct,
cC die Linie der Aequinoctien,
Aa „ „ „ Solstitien,
DAaD der Colur der Solstitien.

§. 581.

Bestimmung der Lage von Puncten auf einer Kugelfläche im Allgemeinen, und insbesondere auf der Erd- und Himmelskugel.

I. Von den verschiedenen Arten die Lage eines Punctes auf der Kugelfläche zu bestimmen, ist die folgende in der Astronomie und mathematischen Geographie am gebräuchlichsten. 104.

Man wählt (Fig. 104.) einen in seiner Lage unveränderlichen größten Kreis DMND dieser Kugelfläche, und legt durch seine Pole A, B und durch den zu bestimmenden Punct m einen größten Kreis BMNB, welcher sonach (vermöge §. 484. II.) auf dem ersten senkrecht steht. Zur Abkürzung der Rede mag der erstere der Abscissen-, der andere der Ordinaten-Kreis heißen. Nimmt man nun in dem Abscissen-Kreise einen festgesetzten Punct D an;

Fig. 104. so ist die Lage des Punctes m auf der Kugelfläche bestimmt, sobald die Bogen DM und Mm gegeben sind. Wir wollen DM die Abscisse, Mm die Ordinate, beyde Bestimmungsstücke des Punctes m vereint die Coordinaten dieses Punctes und den Punct D den Ursprung der Coordinaten oder den Anfang der Abscissen heißen.

Die Abscissen werden gewöhnlich vom Ursprunge der Coordinaten nach einer bestimmten Richtung z. B. von D gegen M bis 360° gezählt, und sind dann durchgehends positiv; oder man rechnet sie nur bis 180° nach entgegengesetzten Richtungen, von denen die eine positiv, die andere negativ ist.

Die Ordinate Mm wird in der einen Halbkugel für positiv, dagegen in der andern für negativ und bloß von 0 bis 90° gerechnet.

II. Zur Bestimmung der Lage von Puncten der Himmelskugel benützt man als Abscissen-Kreis einen der (in §. 580. III. IV. VII.) erklärten drey Hauptkreise, nähmlich entweder den Horizont, oder den Aequator, oder die Ecliptik.

1. Nimmt man den Horizont zum Abscissen-Kreise, so heißt der Ordinaten-Kreis, nähmlich der durch das Zenith gelegte größte Kreis der Verticalkreis des zu bestimmenden Punctes. Die Ordinate, d. i. der Bogen des Verticalkreises zwischen dem zu bestimmenden Puncte und dem Horizonte, wird die Höhe genannt. Puncte der sichtbaren Halbkugel haben eine positive, jene der unsichtbaren eine negative Höhe. Den Ursprung der Coordinaten verlegt man meistens in den Südpunct. Die Abscisse, d. i. die Entfernung des Südpunctes vom Verticalkreise, oder der zwischen dem Meridian und dem Verticalkreise befindliche Bogen des Horizonts wird das Azimut des zu bestimmenden Punctes genannt. Dieses wird gewöhnlich von Süd über West bis 360° gerechnet. Außer dem nennt man die Entfernung jedes Punctes von dem Zenith die Zenith-Distanz desselben.

Bezeichnet in Fig. 104. Fig.
DMND den Horizont, und 104.
B das Zenith,
E den Südpunct; so ist

BmAB der Verticalkreis
Mm die Höhe
Bm „ Zenith-Distanz
EM oder der Winkel EBM das Azimut

} des Punctes m.

2. Wird der Aequator als Abscissen-Kreis angenommen, so heißt der Ordinaten-Kreis, nähmlich der durch die Weltpole und den zu bestimmenden Punct geführte größte Kreis der Declinations-, Abweichungs- oder Stundenkreis dieses Punctes. Die Ordinate, nähmlich der zwischen dem zu bestimmenden Puncte und dem Aequator liegende Bogen des Declinations-Kreises wird die Declination oder Abweichung dieses Punctes genannt. Sie ist in der nördlichen Halbkugel positiv, in der südlichen negativ.

Den Anfang der Abscissen legt man theils in den Frühlingspunct, theils auch in den Durchschnittspunct des Aequators mit dem Meridiane, welcher von einigen die Mitte des Himmels genannt wird. Im ersten Falle heißt die Abscisse, nähmlich der Abstand des Frühlingspunctes vom Declinations-Kreise die gerade Aufsteigung (Rectascension) des zu bestimmenden Punctes, und wird vom Frühlingspuncte aus gegen den Colur des Sommer-Solstitiums bis 360° gezählt; im anderen Falle heißt die Abscisse, nähmlich der zwischen dem Meridiane und dem Stundenkreise liegende Theil des Aequators, oder der vom Meridiane und Stundenkreise gebildete Winkel der Stundenwinkel, welcher vom Meridiane aus über den Westpunct auf 360° gezählt wird.

Ueberdieß wird der Abstand jedes Punctes von dem nördlichen Weltpole die Pol-Distanz desselben genannt.

Fig. 104. Bedeutet in Fig. 104.

DMND den Aequator,
D den Frühlingspunct,
B den Nordpol; so ist
BANB der Declinations-Kreis
Mm die Declination
Bm „ Pol-Distanz
DM „ Rectascension
} des Punctes m.

Sehen wir aber den größten Kreis BEDB als den Meridian, folglich E als die Mitte des Himmels an; so ist der Bogen EM oder der Winkel EBM der Stundenwinkel desselben Punctes m.

3. Nimmt man die Ecliptik als Abscissen-Kreis an, so heißt der Ordinaten-Kreis d. i. der durch den zu bestimmenden Punct und den Nordpol der Ecliptik gelegte größte Kreis der **Breitenkreis** dieses Punctes. Die Ordinate ist hier der zwischen diesem Puncte und der Ecliptik liegende Bogen des Breitenkreises, und heißt seine Breite. Diese ist in derjenigen Halbkugel positiv, welche den Nordpol der Ecliptik enthält, in der andern also negativ.

Der Ursprung der Coordinaten wird in den Frühlingspunct verlegt, daher die Entfernung dieses Punctes von dem Breitenkreise die Abscisse ist und die **Länge** des zu bestimmenden Punctes genannt wird. Man zählt sie vom Frühlingspuncte gegen den Sommerpunct bis 360°. Ueberdieß heißt der Abstand jedes Punctes von dem Nordpole der Ecliptik die **Ecliptik-Poldistanz** dieses Punctes.

Stellt in Fig. 104
DMND die Ecliptik,
B ihren Nordpol,
D den Frühlingspunct vor; so ist
BMNB der Breitenkreis
Mm die Breite
DM die Länge
Bm die Ecliptik-Poldistanz
} des Punctes m.

III. Um endlich die Lage eines Punctes auf der Erdkugel zu bestimmen, nimmt man den Erd-Aequator zum Abscissen-Kreise an, wornach der Ordinaten-Kreis, welcher durch die beyden Erdpole und den zu bestimmenden Ort geht, der **Meridian** (bisweilen auch **Erd-Meridian**) dieses Ortes heißt. Der zwischen diesem Orte und dem Aequator befindliche Bogen des Meridians ist die Ordinate und heißt die **geographische Breite** des Ortes. Sie ist in der nördlichen Halbkugel positiv, in der südlichen negativ. Fig.

Den Ursprung der Coordinaten legt man in den Durchschnittspunct des Aequators mit dem Meridiane eines ausgezeichneten Ortes der Erde, welcher dann der erste **Meridian** genannt zu werden pflegt. Diesen ersten Meridian führen die meisten Geographen durch die Insel **Ferro**, die französischen aber durch **Paris** und die englischen durch **Greenwich**.

Die Abscisse ist der zwischen dem ersten Meridiane und jenem des zu bestimmenden Punctes liegende Bogen des Aequators, und wird die **geographische Länge** dieses Punctes genannt. Man zählt sie entweder vom ersten Meridiane aus gegen Osten bis 360°, oder rechnet sie östlich positiv und westlich negativ.

Lassen wir in Fig. 104. 104.

DMND den Erd-Aequator,

B seinen Nordpol,

BDEB den ersten Meridian vorstellen, so ist

Mm die geographische Breite } des Punctes m.
DM „ „ Länge }

§. 582.

Zeitmessung.

Die Zeit, welche zwischen zwey unmittelbar auf einander folgenden gleichnahmigen (z. B. oberen) Culminationen eines und desselben Punctes der Himmelskugel verfließt, wird in der Astronomie ein **Tag** genannt und in 24 Stunden, jede Stunde aber in 60 **Minuten**, jede Minute in 60 Secunden, und die Secunde in Zehntel, Hundertel u. s. w. abgetheilt. Während dieser 24 Stunden durchläuft jeder Punct des Declinations-Kreises des erwähnten

Fig. Punctes der Himmelskugel die ganze Peripherie seines Parallelkreises oder 360 Grad, folglich ändert sich auch der Stundenwinkel dieses Punctes der Himmelskugel in seiner Größe von 0 bis 360 Grad, indem der Declinations-Kreis desselben nach und nach mit den Meridianen aller von dem Beobachtungspuncte westlich liegenden Orte der Erde übereinfällt. Aus diesem Grunde pflegt man die Stundenwinkel und die Bogen der Parallelkreise, vorzüglich die Rectascension und die geographische Länge bald nach Gradmaß bald nach Zeit anzugeben.

Da nun 24 Stunden = 360 Graden,

folglich 1 Stunde = 15 Graden,

sonach 1 Zeitminute = 15 Bogenmin. = $\frac{1}{4}$ Grad,

und 1 Zeitsecunde = 15 Bogensec. = $\frac{1}{4}$ Bogenminute,

daher auch umgekehrt

1 Grad = $\frac{1}{15}$ Stunde = 4 Zeitminuten,

1 Bogenminute = $\frac{1}{15}$ Zeitminute = 4 Zeitsecunden,

1 Bogensecunde = $\frac{1}{15}$ Zeitsecunde

ist; so unterliegt die wechselweise Verwandlung der Zeit und der Bogen keiner Schwierigkeit.

Die Astronomie unterscheidet hauptsächlich dreyerley Zeiten, nähmlich die Sternzeit, die wahre und mittlere Sonnenzeit, deren Grundeinheiten der Sterntag, der wahre und mittlere Sonnentag ist.

Ein Sterntag ist die Zeit, welche zwischen zwey nach einander folgenden oberen Culminationen des Frühlingspunctes vergeht. Man sagt daher von einer Uhr, „sie gehe nach Sternzeit", wenn sie bey jeder oberen Culmination des Frühlingspunctes 0 oder 24 Uhr zeigt. Eine solche Uhr ist dem beobachtenden Astronomen sehr dienlich, da sie die Rectascension eines jeden culminirenden Gestirns angibt; allein sie eignet sich nicht für das bürgerliche Leben, weil die Sonne, nach deren Stand sich alle Geschäfte richten, stets ihre Rectascension ändert.

Aus diesem Grunde rechnet man im gewöhnlichen Leben nach Sonnenzeit. Man nennt nähmlich die, zwischen zwey nach einander folgenden gleichnahmigen Culminationen der Sonne, verfließende Zeit einen Sonnentag. Allein die Sonne bewegt sich in der gegen

den Aequator geneigten Ecliptik und zwar bald langsamer, bald Fig.
geschwinder; deßwegen ändert sich auch die Rectascension ungleichförmig, und die Sonnentage fallen von ungleicher Dauer aus.

Dieser Umstand bewog die Astronomen sich eine Sonne zu fingiren, welche mit der wahren Sonne einmahl zugleich im Frühlingspuncte sich befand und in dem Aequator mit der mittleren Geschwindigkeit derselben sich bewegt, wobey diese eingebildete Sonne, welche man die mittlere zu nennen pflegt, der wahren bald um etwas Weniges voreilt, bald um ein Geringes hinter ihr hergeht. Der zwischen zwey gleichnahmigen Culminationen dieser mittleren Sonne befindliche Zeitraum wird ein mittlerer Sonnentag, und die durch ihn gemessene Zeit die mittlere Zeit genannt, zum Unterschiede von dem wahren Sonnentage und der wahren Zeit, welche sich auf die wahre Sonne beziehen. Den wahren und mittleren Sonnentag läßt man in der bürgerlichen Zeitrechnung mit der unteren Culmination (der Mitternacht) der betreffenden Sonne beginnen, wogegen mehrere Astronomen den Anfang dieses Tages auf die obere Culmination (Mittag) verlegen. Die gewöhnlichen mechanischen Uhren geben die mittlere Zeit, und zeigen 12 Uhr bey dem mittleren Mittage, während die Sonnenuhren nach wahrer Zeit gehen und bey dem wahren Mittage 12 Uhr angeben.

§. 583.

Astronomische Aufgaben.

I. An einem Orte, dessen geographische Breite oder Polhöhe φ bekannt ist, habe man, etwa mittelst eines Theodoliten, d. i. mittelst eines Instrumentes, dessen vornehmste Bestandtheile ein horizontaler und verticaler Vollkreis sind, die Höhe h und das Azimut ω eines Gestirns für eine bestimmte Zeit t gemessen; man suche die Declination δ und die Rectascension α des Gestirns für dieselbe Zeit.

Fig. 133. Bezeichnet in Fig. 133.

P den Nordpol des Aequators,
Z das Zenith,
S das Gestirn: so ist

BS = h die Höhe
ES = δ die Declination des Gestirns,
NP = φ die Polhöhe von Z,
= GZ der Entfernung des Zeniths Z vom Aequator GR, folglich
= der geographischen Breite von Z;
und in dem Dreyecke PSZ

PZ = 90° − φ = der Aequatorshöhe von Z = Ψ,
PS = 90° − δ = der Poldistanz des Sterns = p,
ZS = 90° − h = der Zenith-Distanz desselben = z,
ZPS = s = dem Stundenwinkel,
PZS = 180° − ω = dem Supplemente des Azimuts.

Aus diesem Dreyecke findet man sofort (nach §. 576.) für die Declination δ oder für die Poldistanz p die Gleichung

$$\sin\delta = \cos p = \frac{\sin\varphi \sin(h-x)}{\cos x},$$

wenn $\operatorname{tang} x = \cos\omega \cot\varphi$ gesetzt wird.

Bezeichnet man den Winkel ZSP mit v, so berechne man mit Hülfe der Gleichungen

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(v+s) = \frac{\cos\frac{1}{2}(h-\varphi)}{\sin\frac{1}{2}(h+\varphi)} \cdot \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(v-s) = \frac{\sin\frac{1}{2}(h-\varphi)}{\cos\frac{1}{2}(h+\varphi)} \cdot \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega$$

zuvörderst den Stundenwinkel s in Graden und dann (nach §. 582.) in Zeit.

Ist nun t die vorgemerkte Sternzeit der Beobachtung, nähmlich die zwischen der Culmination des Frühlingspunctes und der angestellten Beobachtung verflossene Zeit; so hat man, weil das Gestirn zur Zeit α culminirte, und weil seit dieser Culmination die Zeit s verstrich,

$$t = \alpha + s.$$

Da nun s aus dem Vorhergehenden bekannt ist, so findet man die Rectascension des Sterns durch die Gleichung Fig. 133.

$$\alpha = t - s.$$

II. Die Polhöhe φ des Beobachtungsortes sey gegeben, und man habe die Höhe h eines Gestirns beobachtet, dessen Declination δ bekannt ist; man verlangt den Stundenwinkel s und das Azimut ω des Gestirns für den Augenblick der Beobachtung.

Da in dem Dreyecke PZS

$$PZ = 90^\circ - \varphi = \psi$$
$$PS = 90^\circ - \delta = p$$
$$ZS = 90^\circ - h = z$$

bekannt sind, so findet man s und ω (nach §. 576.) aus den Gleichungen

$$\sin\tfrac{1}{2}s = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(p+z-\psi)\,\sin\frac{1}{2}(z+\psi-p)}{\sin\psi\,\sin p}}$$
$$= \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(z+\varphi-\delta)\,\sin\frac{1}{2}(z+\delta-\varphi)}{\cos\delta\cos\varphi}}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\omega = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(\psi+p-z)\,\sin\frac{1}{2}(z+p-\psi)}{\sin z\,\sin\psi}}$$
$$= \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(p+h-\varphi)\,\sin\frac{1}{2}(p+\varphi-h)}{\cos\varphi\cos h}}.$$

Hat man zu dieser Beobachtung einen Theodoliten verwendet, und den Azimutal-Winkel des Gestirns abgelesen, welchen der Verticalkreis desselben im Augenblicke der Beobachtung mit dem durch den Nullpunct des horizontalen Kreises des Theodoliten gehenden Verticalkreise einschließt; hat man ferner bey unverändertem Aufstellungsorte des Instrumentes den Azimutal-Winkel eines entfernten Fixpunctes z. B. einer Thurmspitze ebenfalls abgelesen: so läßt sich leicht das Azimut dieses Fixpunctes, d. i. der Winkel, den der durch diesen Fixpunct gehende Verticalkreis mit dem Meridiane bildet, bestimmen, folglich auch das Fernrohr des Theodoliten in den Meridian bringen, oder die Richtung der Mittagslinie angeben.

Fig. 133. III. Aus der bekannten geographischen Breite φ eines Ortes und der gegebenen Declination δ eines Gestirns für einen bestimmten Zeitaugenblick d. i. für einen festgesetzten Stundenwinkel s sowohl das Azimut ω, als auch die Höhe h des Gestirns zu berechnen.

Für diesen Fall gibt das Dreyeck PSZ (nach §. 570.) die Gleichungen:

$$\cos\varphi \operatorname{tang}\delta = -\sin s \cot\omega + \sin\varphi \cos s,$$
$$\sin h = \cos s \cos\varphi \cos\delta + \sin\varphi \sin\delta,$$

oder

$$\cot\omega = \frac{\operatorname{tang}\delta}{\sin s}(\cos s \cot\delta . \sin\varphi - \cos\varphi),$$
$$\sin h = \sin\delta (\cos s \cot\delta . \cos\varphi + \sin\varphi).$$

Nimmt man sonach

$$\cos s \cot\delta = \cot x,$$

so wird

$$\cot\omega = \frac{\operatorname{tang}\delta \sin(\varphi - x)}{\sin x \sin s},$$
$$\sin h = \frac{\sin\delta \cos(\varphi - x)}{\sin x},$$

oder

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\cos x \operatorname{tang} s}{\sin(\varphi - x)},$$
$$\sin h = \frac{\cos s \cos\delta \cos(\varphi - x)}{\cos x}.$$

Zur Auflösung dieser Aufgabe wird man veranlaßt, wenn man mittelst eines Theodoliten am hellen Tage einen Stern beobachten will, der wegen des Sonnenlichtes mit freyem Auge nicht sichtbar ist. In diesem Falle wird man das Fernrohr des Theodoliten auf die berechnete Höhe und auf das gefundene Azimut stellen, und wenige Minuten vor dem der Rechnung zu Grunde gelegten Zeitmomente an das Fernrohr treten, um den Stern gleich bey seinem Eintritte in dasselbe erblicken zu können.

IV. Aus den geographischen Breiten zweyer Oerter der Erde und dem Unterschiede ihrer Längen die Entfernung derselben in geographischen Meilen anzugeben, von denen 15 auf einen Grad des Aequators gehen.

Die beyden Oerter seyen Q und S (Fig. 133.), so ist ihre Entfernung QS der zwischen ihnen liegende Bogen des durch sie und durch den Mittelpunct C der Erde gelegten größten Kreises,

weil die Entfernungen zweyer Puncte auf der Oberfläche einer Kugel durch Bogen größter Kreise gemessen werden. Es sey GER der Aequator, P der Pol, MGNM der erste Meridian; so ist Fig. 133.

$GL = l$ die geographische Länge von Q,

$GE = l'$ die Länge von S, daher

$EL = l' - l = \lambda$ der Längenunterschied beyder Oerter, welcher dem Neigungswinkel QPS der beyden Meridiane LQP und ESP gleich ist;

ferner sind die Bogen $QL = b$ und $ES = b'$ die Breiten der Oerter Q und S. Man hat demnach in dem Dreyecke PQS zwey Seiten $PQ = 90^\circ - b$ und $PS = 90^\circ - b'$ nebst dem eingeschlossenen Winkel $QPS = l' - l = \lambda$ bekannt, folglich kann die dritte Seite $QS = x$, nähmlich die gesuchte Entfernung (nach §. 576. III.) durch die Formeln

$$\text{tang}\, y = \cos\lambda \cot b'$$

$$\cos x = \frac{\sin b' \sin (b + y)}{\cos y}$$

gefunden werden.

Hat man sonach die Entfernung x in Graden berechnet, so wird man mit Hülfe der Gleichung

1 Grad = 15 geographischen Meilen
= 14,646 österreichischen Postmeilen

ihre rectificirte Länge in Meilen bestimmen.

Anmerkung. Diese Aufgaben mögen hinreichen den ausgebreiteten Nutzen zu beweisen, welchen die Anwendung der sphärischen Trigonometrie in verschiedenen Fällen darbiethet. Noch mehrere eben so nützliche Aufgaben aufzulösen, als z. B. die Bestimmung des Tagebogens für einen bestimmten Ort der Erde bey gegebener Lage der Sonne in der Ecliptik; die Berechnung der Länge und Breite eines Himmelskörpers aus dessen bekannter geraden Aufsteigung und Abweichung und aus der gegebenen Schiefe der Ecliptik, und umgekehrt; die Berechnung des wahren Distanz-Bogens zweyer Himmelskörper aus der Beobachtung der Höhenwinkel und der scheinbaren Distanz derselben in einem bestimmten Zeitpuncte, endlich die Berücksichtigung der unvermeidlichen Beobachtungsfehler, und mehr dergleichen verstattet die

Fig. Grenze dieses Lehrbuches nicht. Auch ist der fähigere Schüler durch das bisher Gesagte schon in den Stand gesetzt, für jede solche Aufgabe sich die gehörige Figur zu entwerfen, und dann die gegebenen Bedingnisse in Gleichungen zu ordnen. Die Theorie der Gnomonik oder die Lehre, auf einer gegebenen, gegen den Horizont wie immer geneigten Ebene die Schattenlinien zu bestimmen, welche ein zur Richtung der Weltachse parallel eingesteckter Stift, der Weiser, in den nach einander folgenden Stunden des Tages auf diese Ebene wirft, kann ebenfalls sehr leicht nach den Gründen der sphärischen Trigonometrie entwickelt werden, weil diese Schattenlinien in den Durchschnitten der durch den Pol gezogenen Stundenkreise mit der Ebene der Sonnenuhr liegen müssen. Die Verzeichnung dieser Schattenlinien ist eine Verbindung der geradlinigen und sphärischen Trigonometrie; sie ist in sehr vielen über diesen Gegenstand handelnden Schriften deutlich aus einander gesetzt. Deßwegen wollen wir uns nicht dabey aufhalten, sondern beschließen dieses Hauptstück, indem wir dem nach astronomischen Kenntnissen strebenden Leser die von Delambre, Littrow, Schubert verfaßten ausführlichen Lehrbücher der Astronomie vorzüglich empfehlen.

Fünftes Hauptstück.

Von den Anfangsgründen der practischen Meßkunst.

I. Abschnitt.

Von der Auflösung der nothwendigsten Aufgaben mittelst der gebräuchlichsten Meß-Instrumente.

§. 584.

Die practische Meßkunst lehrt die Entfernung zweyer in der Natur gegebenen Puncte unter verschiedenen Umständen ausmessen, die Lage und Länge mehrerer Linien erforschen, zu einem bestimmten Stücke der Erdoberfläche eine ähnliche Figur in einem gegebenen Verhältnisse verzeichnen, und den Flächeninhalt sowohl des Ganzen, als auch jedes einzelnen Theiles desselben richtig angeben. Folglich ist sie eine bloße Anwendung der vorhergehenden Lehrsätze und Schlüsse, und lehrt die Auflösung verschiedener hieher gehöriger Aufgaben mittelst eigener zu diesem Endzwecke verfertigter Instrumente. Damit man die practische Meßkunst gründlich erlerne, ist es nicht genug, daß man die mathematischen Auflösungsarten der verschiedenen dabey vorkommenden Aufgaben begreife; man muß auch die hiezu nöthigen Instrumente in allen ihren Theilen Fig.

Fig. kennen, und durch hinlängliche Uebung die geschickteste Behandlungsart derselben sich eigen machen. Eine noch so deutliche Beschreibung der Meßinstrumente würde doch nur unvollkommene Ideen erwecken. Es ist unumgänglich nothwendig, diese Instrumente selbst vor Augen zu haben, um sich eine vollständige Kenntniß derselben zu erwerben. Aus dieser Ursache übergehen wir ihre Beschreibung gänzlich. Wir werden übrigens in diesem Hauptstücke bloß die nothwendigsten Aufgaben vornehmen, und bey einer jeden insbesondere die Methode in gedrängter Kürze angeben, nach welcher sie mittelst der gebräuchlichsten Meßinstrumente aufgelöst wird.

§. 585.

Aufgabe. Einen geradlinigen Winkelmesser (Transporteur) zu verfertigen, um mit Hülfe desselben einen auf dem Papiere gegebenen Winkel zu messen, oder einen Winkel zu verzeichnen, der eine gegebene Anzahl Grade enthält.

Auflösung. 1.) Man nehme aus einer trigonometrischen Tafel die natürlichen Sinus von $\frac{1}{2}^0$, 1^0, $1\frac{1}{2}^0$, 2^0, $2\frac{1}{2}^0$, $3^0 \ldots 44\frac{1}{2}^0$, 45^0, und multiplicire jeden Sinus mit 2; so sind diese Producte die Sehnen der Bogen von 1^0, 2^0, 3^0, $4^0 \ldots 89^0$, 90^0 eines Kreises, dessen Halbmesser die Längeneinheit ist; denn es ist $\text{chord}\, b = 2 \sin \frac{1}{2} b$ (vermöge 541.).

Die Sehnen aller einzelnen Grade bis 90^0 eines Kreises, dessen Halbmesser $= 1$ ist, enthält nachstehende

Fig.

Sehnentafel

für die Verfertigung des geradlinigen Transporteurs oder Sehnenmaßstabes.

Grad	Sehne	Grad	Sehne	Grad	Sehne	Grad	Sehne	Grad	Sehne
1	0·0175	19	0·3301	37	0·6346	55	0·9235	73	1.1896
2	0·0349	20	0·3473	38	0·6511	56	0·9389	74	1·2036
3	0·0524	21	0·3645	39	0·6676	57	0·9543	75	1·2175
4	0·0698	22	0·3816	40	0·6840	58	0·9696	76	1·2313
5	0·0872	23	0·3987	41	0·7004	59	0·9848	77	1·2450
6	0·1047	24	0·4158	42	0·7167	60	1·0000	78	1·2586
7	0·1221	25	0·4329	43	0·7330	61	1·0151	79	1·2722
8	0·1395	26	0·4499	44	0·7492	62	1·0301	80	1·2856
9	0·1569	27	0·4669	45	0·7654	63	1·0450	81	1·2989
10	0·1743	28	0·4838	46	0·7815	64	1·0598	82	1·3121
11	0·1917	29	0·5008	47	0·7975	65	1·0746	83	1·3252
12	0·2091	30	0·5176	48	0·8135	66	1·0893	84	1·3383
13	0·2264	31	0·5345	49	0·8294	67	1·1039	85	1·3512
14	0·2437	32	0·5513	50	0·8452	68	1·1184	86	1·3640
15	0·2611	33	0·5680	51	0·8610	69	1·1328	87	1·3767
16	0·2783	34	0·5847	52	0·8767	70	1·1472	88	1·3893
17	0·2956	35	0·6014	53	0·8924	71	1·1614	89	1·4018
18	0·3129	36	0·6180	54	0·9080	72	1·1756	90	1·4142

2.) Man ziehe eine gerade Linie AB, errichte die Senkrechte AC, schneide von A bis C 12 gleiche Theile ab, und führe durch alle Theilungspuncte Parallelen zu AB. 135.

3.) Man trage ferner auf AB und CD nach einem geometrischen Maßstabe, bey welchem eine angemessene (2 bis 3 Zoll lange) Gerade als Einheit angenommen und in Zehntel, Hundertel und Tausendtel eingetheilt ist, aus der obigen Sehnentafel die Längen der Sehnen von 1°, 2°, 3°, .. bis 90°, und verbinde die Puncte durch Transversalen, wie es Fig. 135. ausweiset; so ist der geradlinige Transporteur fertig.

§. 586.

Fig. 136. Mit Hülfe eines solchen Transporteurs kann ein auf dem Papiere verzeichneter Winkel ABD gemessen, das ist, die Anzahl seiner Grade bestimmt werden, wenn man aus der Spitze B des Winkels zwischen seinen Schenkeln mit dem Halbmesser A60 = C60 Fig. 135. einen Kreisbogen AD (Fig. 136.) beschreibt, und die Sehne dieses Bogens AD auf den Transporteur überträgt, um zu sehen, wie viel Grade die Sehne abschneidet. Wenn z. B. die Oeffnung des Zirkels, welche die Sehne des Bogens AD vorstellt, auf der Parallelen 40 mit einer Spitze in 40 auf AC, und mit der andern auf der Transversalen 25 eintrifft, so enthält der Winkel ABD 25° 40′. Ist dagegen der stumpfe Winkel CBD zu messen, so wird man die Anzahl seiner Grade finden, wenn man jene seines Nebenwinkels ABD auf 180° ergänzt.

Mittelst desselben Transporteurs kann auf einer Geraden AB Fig. 136. aus dem Puncte B ein Winkel verzeichnet werden, der eine gegebene Anzahl Grade z. B. 25° 40′ enthält, wenn man aus B mit dem Halbmesser A60 oder C60 Fig. 135. einen unbestimmten Kreisbogen AD beschreibt (Fig. 136.), von dem Transporteur die Sehne des Bogens von 25° 40′ aus A bis D in den Kreisbogen einschreibt, und endlich durch B und D eine gerade Linie führt. Hingegen wird ein stumpfer Winkel CBD mittelst seines Nebenwinkels ABD verzeichnet.

Den Grund dieses Verfahrens wird jedermann leicht einsehen, wenn er sich erinnert, daß in jedem Kreise die Sehne von 60° dem Halbmesser gleich ist, und daß bey zwey Kreisbogen, die nur um einen Grad von einander unterschieden sind, die Differenzen der Bogen sich ziemlich genau gegen einander verhalten, wie die Differenzen der dazu gehörigen Sehnen.

Anmerkung. Es ist ohne meine Erinnerung leicht einzusehen, daß man mit Hülfe der vorigen Sehnentafel mittelst einer gehörig eingetheilten Schnur auf dem Felde jeden Winkel sowohl messen, als auch ausstecken könne, wenn man mit keinem Instrumente zum Winkelmessen versehen ist. Auch ist es ganz begreiflich, daß man bey den mit Diopter-Linealen oder

auch mit Fernröhren versehenen Winkelmessern statt der gewöhnlichen Eintheilung des Viertelkreises in 90 Grade den oben beschriebenen geradlinigen Transporteur anbringen könnte. Fig.

§. 587.

Aufgabe. Mit Hülfe der Meß-Instrumente eine gerade Linie AB auf dem Felde zu messen, die nur an ihren Endpuncten, jedoch nicht nach ihrer ganzen Länge sichtbar und zugängig ist. 137.

Auflösung. I. Mit Hülfe des Meßtisches. Man suche einen Ort C von der Beschaffenheit, daß man von C nach A und B sehen und messen könne, stelle den Meßtisch über demselben horizontal, und stecke in jenen Punct c der Meßtischplatte eine feine Nadel senkrecht ein, der mit dem Puncte C auf der Erde übereinstimmt *). Sodann visire man mittelst des Visirlineales von c nach A und B, ziehe die unbestimmten Visirlinien ca und cb, trage auf dieselben nach einem verjüngten Maßstabe die gemessenen Längen der Geraden CA und CB von c bis a und b, und untersuche, wie viel Theile die Gerade ab auf demselben verjüngten Maßstabe abschneidet; dadurch wird man

*) Um einen auf dem Meßtische bereits befindlichen Punct genau über den gleichnahmigen auf der Erdfläche zu bringen, stellt man erst den Meßtisch über den letzteren in gehöriger Orientirung nach dem Augenmaße, hält dann einen Faden mit einem daran hängenden schweren Körper, welche Vorrichtung ein Senkel oder Bleyloth genannt wird, unter das Tischblatt an die Stelle des darüber liegenden Punctes, und sieht nach, ob die Fadenlinie des Senkels durch den Standpunct auf der Erdfläche gehe: ist dieses nicht so muß der Meßtisch so lange gerückt werden, bis die Fadenlinie in dem bemerkten Puncte eintrifft. Zu diesem Endzwecke kann man sich einer hiezu eigens verfertigten Gabel bedienen. Ein im Aufnehmen geübter Geometer wird schon mittelst des bloßen Augenmaßes einen Punct auf dem Meßtische über den auf der Erdfläche gleichnahmigen ohne viele Mühe richtig stellen. Zur Prüfung kann man ein vorfindiges Steinchen an das Meßtischblatt unter dem erwähnten Puncte anhalten und dann frey fallen lassen; dadurch wird die Fadenlinie des Senkels ersetzt.

Fig. 137. wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke abc und ABC die Länge der Geraden AB erhalten.

II. Mit Hülfe eines Winkelmessers. Man messe den Winkel ACB und die Seiten CA und CB, so sind in dem Dreyecke ABC zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel bekannt; folglich kann man (nach §. 563.) die dritte Seite bestimmen.

III. Durch Verzeichnung. Man verzeichne den gemessenen Winkel ACB auf einem Papiere, und übertrage auf seine Schenkel nach einem verjüngten Maßstabe die gemessenen Längen der Geraden CA und CB von c bis a und b; so wird auf eben diesem Maßstabe die Gerade ab die wirkliche Länge von AB anzeigen.

§. 588.

138. Aufgabe. Eine Gerade AB, die nur an einem ihrer Endpuncte A zugängig ist, oder die Entfernung des Punctes A von B zu messen.

Auflösung. I. Mit Hülfe des Meßtisches. Man suche einen Ort C von der Beschaffenheit, daß man von C nach A und B sehen, und CA messen könne, stelle den Meßtisch über C, visire von c nach A und B, und übertrage die gemessene Gerade CA nach einem verjüngten Maßstabe von c bis a. Dann stelle man den Meßtisch dergestalt auf A, daß der Punct a gerade über A zu stehen komme, die Linie ac aber in der Richtung der Geraden AC liege, und visire von a nach B; so wird die gezogene Visirlinie ab die vorige cb in dem Puncte b durchschneiden, und die Linie ab auf demselben verjüngten Maßstabe die Länge der Geraden AB bestimmen, weil die Dreyecke abc und ABC einander ähnlich sind. Man kann auch den Meßtisch das erste Mahl über A und das zweyte Mahl über C stellen.

II. Mit Hülfe eines Winkelmessers. Man messe die Standlinie AC, und beobachte an ihren Endpuncten die Winkel A und C; so ist dadurch in dem Dreyecke ABC auch der dritte Winkel B bestimmt, und die Seite AB wird sodann (nach §. 563. I.) gefunden.

III. Durch Verzeichnung. Man ziehe eine Gerade ac, trage auf dieselbe nach einem verjüngten Maßstabe die gemessene AC, und verzeichne an ihren Endpuncten die Winkel a = CAB und c = ACB; so ist das Dreyeck abc ∽ ABC, und folglich kann die gesuchte Länge der Geraden AB auf demselben verjüngten Maßstabe mit Hülfe der Geraden ab bestimmt werden. Fig. 138.

§. 589.

Aufgabe. Eine gerade Linie AB zu messen, wenn ihre Endpuncte A und B unzugängig sind. 139.

Auflösung. I. Mit Hülfe des Meßtisches. Man messe eine Grundlinie CD von der Beschaffenheit, daß man von C nach A, B und D, und auch von D nach C, A und B sehen könne. Sonach stelle man den Meßtisch über C, visire von C nach A, B und D, und trage die gemessene Gerade von c bis d. Darauf stelle man den Meßtisch mit dem Puncte d über D dergestalt, daß dc genau in der Richtung von DC liege, und visire von d nach A und B; so werden die Visirlinien da und db die vorigen ca und cb in den Puncten a und b durchschneiden, und die Gerade ab wird wegen der Aehnlichkeit der hier entstehenden Dreyecke die gesuchte Länge von AB bestimmen.

II. Mit Hülfe eines Winkelmessers. Man messe die Stand- oder Grundlinie CD, und beobachte an ihren Endpuncten die Winkel ACD und BCD, ADC und BDC, so hat man in dem Dreyecke ACD die Seite CD mit den anliegenden Winkeln ACD und ADC bekannt, folglich kann die Seite AD (nach §. 563. I.) gefunden werden. Eben so kann man in dem Dreyecke CDB aus der Seite CD und den anliegenden Winkeln BCD und BDC die Seite BD berechnen. Dann sind in dem Dreyecke ADB zwey Seiten AD und BD sammt dem dazwischen liegenden Winkel ADB bekannt; folglich kann die dritte Seite desselben AB (nach §. 563. III.) berechnet werden.

III. Durch Verzeichnung. Man ziehe eine Gerade dc, trage auf dieselbe nach einem verjüngten Maßstabe die gemessene

Fig. 139. DC, und verzeichne an ihren Endpuncten die beobachteten Winkel acd = ACD, bcd = BCD, adc = ADC und bdc = BDC; so wird auf demselben Maßstabe mittelst der Geraden ab die gesuchte Länge von AB gefunden.

§. 590.

Aufgabe. Zu einer unzugängigen Geraden AB durch einen gegebenen Punct D auf dem Felde eine Parallele zu führen.

Auflösung. I. Mit Hülfe des Meßtisches. Man verfahre nach der ersten Art der vorigen Aufgabe (589.), ziehe dann auf dem Meßtische eine Parallele df zu ab, und stecke dieselbe auf dem Felde aus, z. B. von D bis F; so wird DF parallel zu AB seyn, wenn der Meßtisch richtig gestellt ist.

II. Mittelst eines Winkelmessers. Man bestimme nach der 2ten oder 3ten Art der vorigen Aufgabe (589.) den Winkel DAB, und verzeichne auf dem Felde in dem gegebenen Puncte D den Wechselwinkel ADF = DAB, so wird DF parallel zu AB seyn (363.).

§. 591.

Aufgabe. Aus einem auf dem Felde gegebenen Puncte D auf eine unzugängige Gerade AB eine Senkrechte zu fällen.

Auflösung. Man führe nach der vorigen Aufgabe (590.) durch den gegebenen Punct D zu AB eine Parallele DF, und errichte aus demselben Puncte eine Senkrechte auf DF entweder mit Hülfe des Meßtisches, oder mittelst eines Winkelmessers, oder auch nach §. 360. II.; so wird diese auch auf AB senkrecht seyn. Die Lage der Senkrechten wird auch gefunden, wenn man in D an DA einen Winkel ADG auf dem Felde ausstreckt, welcher den bereits gefundenen Winkel DAB zu 90° ergänzt.

§. 592.

Fig. 140. Aufgabe. Es sey PQ eine zugängige, MN aber eine unzugängige gerade Linie; man soll in der Linie PQ

einen Punct A von der Beschaffenheit finden, daß die Fig. von A nach einem in der MN befindlichen sichtbaren Merk- 140. mahle B gezogene Gerade AB mit derselben einen gegebenen Winkel MBA einschließe.

Auflösung. Man suche auf der Geraden MN noch ein anderes sichtbares Merkmahl C, messe auf der Geraden PQ eine Standlinie DE, und bestimme nach (589.) die Gerade BE und den Winkel EBC, so ist dadurch auch der Winkel EBA gefunden, und in dem Dreyecke AEB ist sodann die Seite EB mit den anliegenden Winkeln AEB und EBA bekannt; folglich läßt sich daraus die Seite EA bestimmen, deren gefundene Länge man von E bis A auftragen muß, um den verlangten Punct A in der Linie PQ zu finden.

§. 593.

Aufgabe. Einen unzugängigen Vollwerkswinkel CAB, 77. dessen Schenkel sich über den Scheitel hinaus verlängern lassen, in zwey gleiche Theile zu theilen, um die Verlängerung der Capitallinie AP sichtbar zu machen.

Auflösung. Man nehme in den Verlängerungen der Gesichtslinien CA und AB die Puncte D und E von der Beschaffenheit an, daß man von D nach E sehen könne, beobachte die Winkel AED und ADE; so ist dadurch in dem Dreyecke ADE auch der dritte Winkel EAD, und folglich auch $FAD = \frac{1}{2}EAD$ gegeben. Sodann messe man (nach 588.) die Seite AD, so ist in dem Dreyecke AFD die Seite AD mit den anliegenden Winkeln bekannt, folglich kann die Seite FD gefunden werden, deren Länge man von D gegen E bis F aufträgt, um den gesuchten Punct F zu bestimmen. Ist einmahl der Punct F gefunden, so kann die Richtung AF der Capitallinie rückwärts, so weit es erforderlich ist, verlängert werden.

§. 594.

Aufgabe. Die gerade Linie AB sey in ihrer Verlän- 141. gerung wegen dazwischen liegender Hinderniße unsichtbar, man soll zwey Puncte D und E auf dem Felde bestimmen, die in der Verlängerung von AB liegen.

Fig. 141. Auflösung. Man bestimme mittelst einer Grundlinie CF (nach 589.) die Gerade BC und den Winkel ABC; so ist dadurch auch sein Nebenwinkel CBE bekannt. Ferner stecke man aus C an der Linie CB einen Winkel BCD von einer beliebigen Größe aus; so ist in dem Dreyecke BCD die Seite BC mit den anliegenden Winkeln bekannt, folglich kann dadurch die Seite CD gefunden, und ihre Länge auf den Schenkel CD von C bis D getragen werden, um den ersten Punct D zu erhalten. Eben so wird der zweyte Punct E bestimmt, weil in dem Dreyecke EBC die Seite BC mit den anliegenden Winkeln bekannt ist, und folglich CE sich daraus finden läßt.

§. 595.

Aufgabe. Eine zugängige Höhe AB zu messen.

Auflösung. Man messe die horizontale Länge einer Standlinie BC von C bis an den unteren Punct B der auszumessenden lothrechten Höhe BA, nähmlich man bestimme BF = DE Fig. 142., oder FC = ED Fig. 143.; und beobachte mit einem über dem Puncte C in D vertical gestellten Winkelmesser den Höhenwinkel EDA, nachdem man das unbewegliche Visirlineal des Winkelmessers entweder mittelst einer genauen Schrotwage, oder mittelst einer Libelle (431.), oder endlich mittelst eines angebrachten Bleylothes in die horizontale Lage gebracht, und das bewegliche Lineal nach A gerichtet hat; ferner beobachte man auch den Höhen- oder Tiefenwinkel EDB. Nun ist in dem rechtwinkeligen Dreyecke EDA nebst dem rechten Winkel auch die Seite ED und der Winkel EDA bekannt; folglich kann die Seite EA entweder durch Rechnung, oder durch Verzeichnung gefunden werden. Ferner läßt sich in dem rechtwinkeligen Dreyecke BED aus der Seite ED und aus dem Winkel EDB die Seite EB bestimmen, welche man in Fig. 142. zu EA addiren, und in Fig. 143 von EA abziehen muß, um die gesuchte Höhe AB zu erhalten.

142. und 143.

§. 596.

Fig. 144.

Aufgabe. Eine unzugängige Höhe AB, nähmlich die Erhöhung des Punctes A über den Horizont des Punctes C zu messen.

Auflösung. Man messe die horizontale Länge einer Standlinie CD, und beobachte in ihren Endpuncten die horizontalen Winkel BCD und CDB; so kann man daraus CB berechnen. Ferner beobachte man auch den Höhenwinkel ACB; so ist in dem rechtwinkeligen Dreyecke ABC die Seite BC nebst dem Winkel ACB bekannt; folglich läßt sich daraus die Seite AB, nähmlich die Erhöhung des Punctes A über den Horizont des Ortes C bestimmen.

Wenn man bey der horizontalen Stellung des Winkelmessers die horizontalen Winkel BCD und BDC nicht beobachten kann, so muß man die Grundlinie CD auf einem ziemlich horizontalen Boden annehmen (wenn dieses nicht seyn kann, so mißt man die Länge der geneigten Linie CD) und an ihren Endpuncten die Fläche des Winkelmessers in die Ebene CAD stellen, um die schief geneigten Winkel ACD und ADC zu messen. Endlich beobachte man auch den Höhenwinkel ACB. Nun läßt sich in dem schief geneigten Dreyecke ACD aus der Seite CD und den anliegenden Winkeln die Seite CA berechnen. Sonach ist in dem rechtwinkeligen Dreyecke ACB die Hypothenuse AC nebst dem Winkel ACB bekannt; folglich läßt sich daraus die gesuchte Höhe AB bestimmen.

§. 597.

Fig. 145.

Aufgabe. Es sey ABCDEFGH eine Figur auf dem Felde; man soll auf dem Papiere nach einem verjüngten Maßstabe mittelst des Meßtisches eine Figur entwerfen, welche jener auf dem Felde ähnlich ist; das ist, man soll die Figur ABCDEFGH aufnehmen.

Auflösung. Man messe eine Grundlinie AB, stelle den Meßtisch über A, und visire aus einem Puncte a desselben, der gerade über A liegt, nach B, C, D, E, F, G, H, und trage nach einem verjüngten Maßstabe die Länge der gemesse-

Fig. 145. nen Grundlinie auf die Visirlinie aB von a bis b. Dann stelle man mittelst des Zurück-Visirens den Meßtisch dergestalt über B, daß der Punct b gerade über B zu liegen komme, und die gezogene Visirlinie ab genau in der Richtung von AB sich befinde. In dieser Stellung des Meßtisches visire man nun aus b nach C, D, E; so werden die Visirlinien bC, bD, bE die vorigen ac, ad, ae, in den Puncten c, d, e durchschneiden. Dadurch sind bereits die Puncte A, B, C, D, E auf dem Meßtische bestimmt, nähmlich wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke ist abcde ∽ ABCDE.

Bey der Auswahl der Grundlinie hat man jederzeit zu sehen, daß sie, so viel als es der Terrain zuläßt, in einer solchen Lage angenommen werde, daß sich alle von den zwey End- oder Standpuncten nach den übrigen zu bestimmenden Puncten gezogenen Visirlinien unter einem nicht zu spitzigen Winkel, etwa nicht unter 60° durchschneiden, damit die Durchschnitts- oder eigentlichen Bestimmungspuncte nicht zweifelhaft werden, und damit die Arbeit eine desto größere Sicherheit und Richtigkeit erhalte. Da jedoch dieses Begehren in der Ausübung nicht überall erfüllt werden kann, wie es in Fig. 145. bey den Puncten F, G, H der Fall ist, so stelle man den Meßtisch weiters über einen andern bestimmten Punct, z. B. mit e über E, und visire nach F, G, H; so werden diese Visirlinien ef, eg, eh die a s dem Standpuncte A gezogenen af, ag, ah in den Puncten f, g, h durchschneiden, und die Figur abcdefgh ist sodann der Figur ABCDEFGH ähnlich. Nun läßt sich die wirkliche Länge einer jeden Geraden GH, EF, AG, HE bestimmen, wenn man auf dem zu Grunde gelegten verjüngten Maßstabe die Länge der gleichnahmigen Geraden gh, ef, ag, he untersucht.

Die ähnliche Figur abcdefgh erhält man auch, wenn man die Geraden AB, AC, AD, AE... auf dem Felde ausmißt, ihre Längen nach einem verjüngten Maßstabe auf die gezogenen Visirlinien ab, ac, ad, ae, ... aufträgt, und die dadurch bestimmten Puncte gehörig mit einander verbindet.

Man pflegt gewöhnlich auf dem ersten Standpuncte die Magnetnadel auf das Meßtischblatt aufzusetzen und einspielen zu lassen, dann durch Ziehung einer Reißbleylinie an der einen oder auch an zwey gegenüber stehenden Seiten des Gehäuses derselben ihre Richtung zu bemerken, damit man dadurch die Lage der aufgenommenen Figur in Hinsicht auf die Mittagslinie eines gewissen Ortes beynahe erkenne, vorausgesetzt, daß an diesem Orte die Abweichung der Magnetnadel bekannt sey. Die in dem ersten Standpuncte auf dem Meßtische bemerkte Richtung der Magnetnadel hat auch den Nutzen, daß man dadurch in einem jeden anderen Standpuncte den Meßtisch, wenn man gar keine anderen Hülfsmittel hat, orientiren, nähmlich denselben so stellen kann, daß alle in den vorigen Standpuncten auf dem Meßtische gezogenen Visirlinien, und auch alle schon aufgenommenen Verbindungslinien mit den dazu gehörigen Linien auf dem Felde parallel laufen. Man bezweckt dieses dadurch, daß man den Meßtisch zuerst horizontal, dann die Magnetnadel an ihre auf dem Tischblatte bereits bemerkte Stellung auffetzt, und endlich das Meßtischblatt so lange herumdreht, bis die Nadel gehörig einspielt. Fig. 145.

Den Umfang der vorgelegten Figur kann man auch aufnehmen, wenn man bey dem zweyten Standpuncte B die Linie BC ausmißt, und ihre Länge auf die gezogene Visirlinie bc nach dem angenommenen verjüngten Maßstabe aufträgt, dann den Meßtisch mit dem bereits bestimmten Puncte c über C gehörig stellt, von c nach D visirt, die Linie CD mißt, und dieselbe gehörig aufträgt, um den Punct D auf dem Meßtische zu erhalten. Eben so verfährt man bey den übrigen Puncten D, E, F, u. s. w. Bey der Aufnahme der im Inneren der Waldungen befindlichen Gegenstände, z. B. der Straßen, Wege, Grenzen, u. d. gl., wo aus Mangel der freyen Aussicht die Puncte nicht mittelst der Durchschnitte der Visirlinien bestimmt werden können, ist man gezwungen auf diese Art vorzugehen. Der Gebrauch der Magnetnadel ist in solchen Fällen wirklich sehr vortheilhaft, um so mehr, da man mit ihrer Hülfe bey dem Messen und Auf-

Fig. tragen des Umfanges einer Figur, oder eines verschiedenartig gekrümmten Weges immer einen Standpunct mit dem Meßtische überspringen kann.

§. 598.

Bey dem Aufnehmen einer weit ausgedehnten Erdstrecke mittelst des Meßtisches und dem Auftragen aller vorkommenden erheblichen Gegenstände ist vorzüglich Folgendes zu bemerken.

I. Die Vorbereitung zum wirklichen Aufnehmen.

II. Das geometrische Trianguliren, nähmlich das Aufnehmen der Haupt- oder Fixpuncte der ganzen Strecke.

III. Das Figuriren und Aufnehmen des Details.

IV. Das Zusammenstoßen der angrenzenden Sectionen bey einer über mehrere Meßtischblätter ausgedehnten Aufnahme. Es soll hier jede dieser Operationen insbesondere erörtert werden.

I. Die Vorbereitung zum wirklichen Aufnehmen.

Bevor man zu der wirklichen Aufnahme einer ganzen Gegend schreitet, besonders wenn man voraus sieht, daß sie nach der erforderlichen oder angenommenen Größe des verjüngten Maßstabes nicht auf ein einziges Meßtischblatt verzeichnet werden könne, ist es nöthig durch Besichtigung derselben (wenn man nicht etwa schon mit einer Karte derselben versehen ist) sich eine so viel als möglich genaue Kenntniß von ihr zu verschaffen. Man erreicht dadurch folgende Vortheile.

1.) Kann man den schicksamsten Platz bestimmen, auf welchem die zu messende Grundlinie abzustecken ist.

2.) Wenn ein Meßtischblatt groß genug ist, um die ganze Gegend nach dem angenommenen verjüngten Maßstabe auf dasselbe zu bringen; so wird man gleich bey der ersten Stellung des Meßtisches mit Hülfe eines nur etwas geübten Augenmaßes das Blatt so zu orientiren, und den ersten Standpunct in einer solchen Stelle darauf anzunehmen wissen, daß alle Theile der ganzen Gegend sicher auf das Meßtischblatt, nicht aber über dasselbe hinaus fallen.

3.) Bey der Aufnahme einer größeren Gegend, wozu mehrere Tischblätter erfordert werden, wird man sich schon vor der Arbeit einen ziemlich richtigen Entwurf machen können, in welcher Ordnung und Lage man dieselben am schicksamsten an einander reihen und zusammenstoßen könne. Fig.

4.) Wird man gleich beurtheilen können, ob die ganze Gegend mit einer hinreichenden Anzahl fixer Puncte (von deren Nothwendigkeit und Gebrauch bey der Aufnahme gleich gehandelt werden wird) versehen ist oder nicht. Im letzteren Falle muß man sich die nöthigen an den schicksamsten Oertern selbst errichten *).

5.) Kann man dadurch bey der Bearbeitung des Details schon voraus beurtheilen, wie weit man aus einem Stande arbeiten könne, und wo ein nachfolgender am schicksamsten zu nehmen sey, ohne erst durch das jedesmahlige Aufsuchen eines schicksamen Standpunctes viel Zeit zu verlieren.

6.) Man wird mit allen Communicationen, besonders wo Bäche oder Flüsse, Moräste oder Sümpfe vorhanden sind, schon

---

*) Unter dem Nahmen Fixpuncte oder Leitpuncte versteht man bey der Aufnahme unbewegliche Gegenstände, welche sich durch ihre hervorragende Höhe oder durch ihr Freystehen vor anderen auszeichnen, und in der Ferne, besonders von mehreren Seiten gesehen werden können. Dergleichen sind Thurmspitzen, Marterſäulen, Kreuze, einzeln stehende oder hervorragende Bäume u. m. dgl. Letztere sind eben nicht die zuverlässigsten, weil man, besonders in kurzen Entfernungen beym Visiren nach denselben nicht jederzeit genau ihre Mitte treffen wird, und weil sie sich fast nach jeder Seite in einer anderen Figur zeigen, daher auch leicht verwechselt werden können, und zu Irrungen Anlaß geben. Wenn man wegen Mangel der fixen Puncte in einer Gegend sich selbst einige errichten muß: so geschieht dieß, indem man lange gerade Stangen nimmt, an ihrem oberen dünneren Ende Strohbündel oder sonstige Merkmahle anbindet, und selbe in den angemessenen Puncten besonders auf Anhöhen vertical aufrichtet und fest stellt. Man kann auch dergleichen Stangen, damit sie höher hervorragen, und um Bäumen größere Bestimmtheit zu geben, auf diese anbinden und über die Wipfel derselben hervorragend machen.

Fig. voraus bekannt, damit man, um irgend wohin zu gelangen, gleich den kürzesten Weg einschlagen könne; u. m. dgl.

Die auf eine gute Recognoscirung verwendete Zeit, wären es nach der Größe der Gegend auch mehrere Tage, wird durch die zweckmäßige Anordnung, und durch die daraus entstehende Erleichterung der ganzen Arbeit reichlich ersetzt.

Die Absicht, in welcher eine Gegend aufgenommen wird, bestimmt die Größe des verjüngten Maßstabes, nach welchem aufgenommen werden soll. Entweder geschieht die Aufnahme zum ökonomischen oder zum militärischen Gebrauche.

Im ersteren Falle gibt es auch noch verschiedene untergeordnete Zwecke, welche eine bald mehr, bald weniger genaue Aufnahme des Details der ganzen Gegend und jedes darin vorkommenden einzelnen Gegenstandes erfordern; mithin kann keine allgemein angenommene Größe des verjüngten Maßstabes statt finden. Doch muß derselbe in jedem Falle immer noch in einer ansehnlichen Größe gewählt werden, um auch Kleinigkeiten, welche in Beziehung auf den Endzweck nur von einigem Belange sind, gehörig ausdrücken zu können.

In der militärischen Aufnahme bemerkt man nicht das ganze Detail aller einzelnen Gegenstände, sondern man richtet nur auf diejenigen sein vorzügliches Augenmerk, welche eine Beziehung auf den militärischen Gebrauch, nähmlich zu Märschen und Bewegungen, zu Stellungen und Dislocationen einer Armee u. d. gl. haben. Hiezu ist kein so großer Maßstab nothwendig. Bey uns ist es meistens üblich in der militärischen Aufnahme zwey Wiener Zoll, manchmahl auch nur Einen für die Länge von tausend Schritten oder 400 Klaftern anzunehmen. In dem ersten Falle sagt man: die Gegend ist nach dem ganzen, im zweyten aber: die Gegend ist nach dem halben militärischen Maßstabe aufgenommen. Es wäre zu wünschen, daß für die militärische Aufnahme überall eine gleiche Größe zur Bestimmung des Maßstabes angenommen würde, weil diese Gleichförmigkeit den Gebrauch der Karten sehr erleichtern, und manchen anderen Nutzen verschaffen könnte.

II. Das geometrische Trianguliren, nähmlich das Aufnehmen der Haupt- oder Fixpuncte der ganzen Strecke. Fig.

Sobald man nun die Aufnahme mit dem Meßtische anfängt, so ist das Erste dafür zu sorgen, daß man ein Netz von Dreyecken durch eine richtige Bestimmung der Lage mehrerer Fixpuncte auf das ganze Tischblatt bringe, oder daß man das geometrische Trianguliren vornehme, bevor man sich noch in das Detail einläßt. Zu diesem Zwecke wird die Grundlinie AB von einer der Größe der aufzunehmenden Gegend angemessenen Länge abgesteckt, und mit der größten Aufmerksamkeit und Genauigkeit gemessen, endlich sowohl in dem einem Endpuncte B (Tab. XVI. Fig. 207), als auch in der Mitte C derselben eine 207,
Fahne eingesteckt. Ueber den anderen Endpunct A stellt man den Meßtisch, gibt dem Tischblatte, nachdem es horizontal gestellt ist, nach dem Augenmaße die erforderliche Orientirung, und steckt eine Anschlagnadel auf diejenige Stelle, wo auf dem Meßtischblatte der Punct A sich befindet, über welchen man sich gestellt hat. Nun legt man das, entweder mit gewöhnlichen Absehen (Dioptern), oder noch besser mit einem Fernrohre versehene Visirlineal an die Nadel, visirt auf die an der Grundlinie aufgestellten Fahnen, und zieht die Reißbleylinie AB längs des ganzen Lineals. Ferner visirt man auf alle von diesem Standpuncte aus sichtbaren fixen Puncte a, b, c, d, e, bemerkt die gezogenen Visirlinien mit Buchstaben oder Zeichen, und hält darüber ein eigenes Vormerkungs-Protocoll. Endlich trägt man die Länge der Grundlinie nach dem verjüngten Maßstabe auf die auf dem Meßtischblatte gezogene zugehörige Linie AB, und bemerkt zugleich auch den Punct C in der Mitte derselben. Um diese bereits aus A gezogenen Visirlinien zu durchschneiden, dadurch die Lage der anvisirten Fixpuncte zu bestimmen und andere anvisiren zu können, ferner um sich zugleich wegen der Richtigkeit sowohl in Hinsicht auf das Messen, als auch auf das Auftragen der Grundlinie nach dem verjüngten Maßstabe sicher zu stellen, wählt man einen zweyten Standpunct D in einer solchen Lage gegen die Grundlinie, daß die zwey aus den Endpuncten derselben gegen diesen Punct gezogenen Linien AD

Fig. 207. und BD sich unter einem nicht zu spitzigen Winkel, nicht viel unter 60 Grad, durchschneiden. In einem so gewählten Puncte D läßt man nun eine Fahne aufstellen. Nachdem man diese noch aus dem ersten Standpuncte A anvisirt, und die Bleylinie AD nach der ganzen Länge des Lineals gezogen hat; läßt man auch in A eine Fahne aufstellen und begibt sich mit dem Meßtische auf den zweyten Standpunct D *).

Nun stellt man den Meßtisch über den zweyten Standpunct D, und zwar so, daß wenn man demselben schon die beyläufige Orientirung mit freyem Auge nach der aus dem ersten Standpuncte hieher gezogenen Visirlinie gibt, diese genau über den auf der Erde bemerkten Punct zu liegen komme. Der Meßtisch wird sodann durch das Zurück-Visiren möglichst richtig orientirt, und endlich ganz fest gestellt. Hierauf nimmt man die Anschlagnadel aus dem Puncte A heraus, und steckt sie in das zweyte Ende der Grundlinie B ein, legt das Visirlineal an die Nadel an, und visirt nach B, zieht die Reißbleylinie von B rückwärts gegen D, welche AD durchschneidet. Durch dieses Verfahren, welches man das Rückwärtseinschneiden nennt, wird die Lage des Punctes D auf dem Meßtische bestimmt. Um zu untersuchen, ob man bey dieser Operation richtig vorgegangen sey, nähmlich die Grundlinie sowohl richtig gemessen, als auch richtig aufgetragen habe, steckt man die Nadel in den Punct C, und visirt gleichfalls nach dieser Fahne. Hat man überall richtig gearbeitet, so muß die dadurch entstehende Visirlinie genau durch den bereits bestimmten Durchschnittspunct D gehen.

---

*) Da die von einem Standpuncte gegen den andern gezogenen Visirlinien zur ferneren Orientirung des Meßtischblattes gebraucht werden; so ist es höchst nöthig, daß man bey dem Ziehen der Bleylinie die Schneide des scharf gespitzten Reißbleyes gleichförmig an die Kante anhalte, und die Linie so weit führe, als das Lineal oder das Tischblatt es zuläßt, um bey der vorzunehmenden Richtung das Visirlineal mit voller Sicherheit wieder anlegen zu können.

Da der Punct D vor diesem Verfahren noch nicht auf dem Meßtische sich befindet, und dieser bloß durch die Visirlinie AD seine Orientirung erhält; so ist es keineswegs nöthig, daß man sich mit dem Meßtische über denjenigen Ort stelle, wo die Fahne in D errichtet war. Man kann sich in jedem anderen Puncte der Linie AD entweder zwischen A und D, oder jenseits des Punctes D aufstellen, und das eben beschriebene Verfahren, das Rückwärtseinschneiden vornehmen. Um in diesem Falle den auf dem Meßtische bestimmten Punct auch auf der Erdfläche anzugeben, damit man daselbst eine Fahne errichten oder diesen Punct mittelst eines eingeschlagenen Pflockes bezeichnen könne; bedient man sich des Senkels oder eines Steinchens, wie bereits §. 587. erwähnt wurde. Nachdem man nun den Punct D auf dem Meßtischblatte bestimmt hat, steckt man die Nadel in denselben ein und visirt neuerdings alle dort sichtbaren fixen Puncte b, c, d, f, g, h, ... an, von denen b, c und d durch das Durchschneiden der aus A zu ihnen gezogenen Visirlinien bereits ihre bestimmte Stelle auf dem Meßtische erhalten haben. Fig. 207.

Um auch die Puncte f, g und h zu bestimmen, wähle man sich in E einen neuen Standpunct, visire ihn aus D zuvor an, und begebe sich, nachdem man in D eine Fahne hat aufrichten lassen, nach E. Hier wird der Meßtisch wieder, wie zuvor gesagt wurde, durch das Zurück-Visiren von E nach D gestellt oder orientirt. Dann schneidet man sich rückwärts ein, wozu der bereits bestimmte fixe Punct b dient, und die Stelle des beym vorigen Standorte D gebrauchten Punctes B vertritt *). Um die Arbeit sicher fortzusetzen, darf man bey jedem Rückwärtseinschneiden überhaupt, besonders aber bey dem Rückwärtseinschneiden auf einen Standpunct, aus welchem wieder andere fixe Puncte bestimmt werden sollen, mit einem einfachen Durchschnitte der Linien DE und bE sich nicht begnügen; sondern man muß noch wenigstens

*) Man muß bey der Auswahl sowohl des neuen Standortes, als auch des fixen Punctes, woher man sich rückwärts einschneiden will, besonders bedacht seyn, daß die durchschneidenden Linien nicht zu schief nicht beträchtlich unter 60°, auf einander treffen.

Fig. 207. einen zweyten fixen Punct c sehen können, um durch das Einstecken der Nadel in denselben und durch das Zurück-Visiren sich zu überzeugen, ob auch diese gezogene Visirlinie genau durch den Durchschnittspunct E gehe. Sind noch mehrere bereits bestimmte fixe Puncte sichtbar; so visire man auch noch aus dem bestimmten Standpuncte E auf dieselben. Treffen alle Visirlinien auf die gleichnahmigen fixen Puncte der Erdfläche ein, so ist man von der Richtigkeit seiner Arbeit überzeugt; und man durchschneidet nun auch f, g und h.

Bemerkt man, daß die Puncte a und c, welche man in A anvisirte, aus D nicht gesehen, mithin Aa und Ac nicht aus diesem Puncte D durchschnitten werden können; so wählt und bestimmt man einen neuen Standort F. Von hier aus werden nun endlich auch a und c durchschnitten und bestimmt. Sobald dieses geschehen ist, so ist das Netz für die auf ein Meßtischblatt zu verzeichnende Gegend fertig.

Die Bestimmung der Standpuncte durch das **Rückwärtseinschneiden** gewährt so viele Vortheile, daß sie von den geschicktesten Geometern als die vorzüglichste Art anerkannt und benützt wird. Man erhält zwar auch die Lage eines jeden neuen Standpunctes, wenn man die Entfernung desselben vom gegenwärtigen Standpuncte ausmißt, und dieses Maß nach dem zu Grunde gelegten verjüngten Maßstabe gehörig aufträgt. Aber es ist leicht einzusehen, daß diese Art wegen des vielfältigen Messens den meisten Abirrungen ausgesetzt, und nebst dem auch sonst noch mit vielen Beschwerlichkeiten verbunden ist. Bey dem Rückwärtseinschneiden hingegen hat man nur eine einzige Linie, nähmlich die Grundlinie zu messen, für welche man eine zum Messen schickſame Lage auswählen, und hiebey alle nur mögliche Sorgfalt anwenden kann. Man kann nach jeder Richtung und in jeder Gegend, wo man freye Aussicht hat, weitere Standpuncte wählen, ohne daß dazwischen liegende Hindernisse, als Flüsse, Moräste u. dgl. davon abhalten können. Man überzeugt sich in jedem neu gewählten Standpuncte von der Richtigkeit seiner Arbeit; es kann kein wesentlicher Fehler einschleichen, den man nicht gleich bemerkte,

daher auch keiner sich der ganzen Arbeit mittheilen kann, welches bey der andern Art der Fall nicht ist. Fig.

III. Das Figuriren und Aufnehmen des Details.

Hat man nun das Netz für die aufzunehmende Gegend auf das Meßtischblatt vollständig und richtig gebracht; so kommt es darauf an, auch das Detail des ganzen Terrains so hinein zu zeichnen, daß alle darin vorkommenden Gegenstände in ihrer verhältnißmäßigen Größe und Lage richtig erscheinen. Obwohl es nach verfertigtem Netze in Hinsicht auf die Richtigkeit gleichgültig ist, von welchem Orte aus man diese Arbeit beginnt; so gibt es doch Gegenden, bey welchen durch eine geschickte Auswahl des Anfanges die fernere Arbeit wesentlich erleichtert wird. Regeln lassen sich hiezu keine geben, nur eine durch mehreres Aufnehmen erlangte Erfahrung, geleitet durch reife Ueberlegung, wird dem Geometer diese Uebersicht in der Arbeit verschaffen. Der richtigste Anfang geschieht im Allgemeinen aus einem bereits bey Verfertigung des Netzes bestimmten Standpuncte.

Nachdem nun auf einem solchen Standpuncte der Meßtisch richtig gestellt und orientirt ist; wird das sogenannte Figuriren vorgenommen. Es geht nähmlich der Geometer mit einem vorläufig abgerichteten Gehülfen, welcher eine hinlängliche Menge numerirter Pflöcke (kleiner Pfähle) mit sich trägt, in der ganzen Gegend so weit herum, als der Gehülfe in der Folge von dem gewählten Standpuncte aus noch füglich gesehen werden kann, läßt in dem Puncte einer jeden besonderen Veränderung des Terrains einen numerirten Pflock, in der natürlichen Reihe der (ganzen) Zahlen, einschlagen, zeichnet sich in seine Schreibtafel von Pflock zu Pflock mit Beysetzung der gleichnahmigen Zahlen die ganze Gegend mit den in der Situations-Zeichnung für jeden Gegenstand gewählten Zeichen auf.

Die Absicht, wozu die Aufnahme geschieht, und die hiezu gewählte Größe des verjüngten Maßstabes, gibt dem Geometer an die Hand, wie viel Puncte er anzunehmen, und wie weit er sich in das Detail einzulassen habe.

Er kehrt sodann wieder zu seinem Meßtische zurück, sieht noch einmahl nach, ob dieser nicht etwa verrückt worden sey, läßt

Fig. seinen Gehülfen eine Meßfahne über einen jeden eingeschlagenen numerirten Pflock nach der Ordnung der Zahlen aufstellen, visirt die Fahne von dem Meßtische an, und bezeichnet die Visirlinie mit der Nummer des Pflockes. Diese Visirlinien werden ganz kurz nur in jener Gegend gezogen, wohin beyläufig nach einer oberflächlichen Schätzung der aufzunehmende Punct auf das Tischblatt fallen dürfte. Denn es ist höchst überflüssig, dieselben aus dem Standpuncte aus zu ziehen und dadurch gleichsam so viele Sonnen als Standpuncte auf dem Papiere zu bilden. Es wird durch das Verreiben des vielen Reißbleyes das Papier schmutzig gemacht, und man geräth der so vielen langen Linien wegen leicht in Verwirrung. Um, wenn mehrere Linien nahe an einander fallen, mit Sicherheit zu wissen, zu welcher jede aufgeschriebene Nummer eigentlich gehöre; stellt man dieselbe bestmöglichst auf die dazu gehörige Linie, und bezeichnet sie mittelst eines hinter der Nummer genau auf die Linie gemachten Tüpfchens, oder man schließt die Nummer mittelst eines Halbkreises an die dazu gehörige Linie ein. Damit der Gehülfe sich nicht eher mit der Meßfahne von einem Puncte entferne, als die Visirlinie gezogen worden, müssen zuvor bestimmte Zeichen zum Abdanken (Abfertigen) verabredet, und dieselben während der ganzen Arbeit ungeändert beybehalten werden. Da es dessen ungeachtet sich ereignen kann, daß bey großen Entfernungen entweder beym Meßtische oder beym Aufstellen der Meßfahne ein Verstoß geschehe; so verabredet man ein besonderes Zeichen, welches der Gehülfe gibt, wenn er auf einem Fünfer und Zehner abgedankt ist, wodurch der Geometer am Meßtische sich überzeugen kann, ob er mit dem Gehülfen einerley Nummer hat oder nicht. Wird nun dem Gehülfen das nähmliche verabredete Zeichen vom Meßtische her erwiedert, so geht er weiter fort; geschieht es nicht, so ist dieß ein Zeichen, daß von dem vorletzten Fünfer an ein Fehler unterlaufen ist. Daher geht der Gehülfe auf diesen zurück und stellt sich wiederhohlt über die letzten fünf Nummern auf, wo der Geometer zugleich am Meßtische durch wiederhohltes Anvisiren seine gezogenen Linien und Nummern revidirt, und alles wieder in Ordnung bringt. Durch dieses so einfache practische Hülfsmittel gewinnt man Sicherheit, und öfters auch

sehr viel Zeit. Denn bey Unterlassung dessen kann es sich fügen, daß hundert und mehrere Puncte beym Figuriren aufgenommen werden, und am Ende die Nummer der letzten Visirlinie nicht mit der Nummer des zuletzt eingeschlagenen Pflockes übereinstimmt; man weiß nun nicht, wo eigentlich der Fehler sich eingeschlichen hat. Daher muß der Gehülfe neuerdings mit der Meßfahne von Nummer Eins über alle Pflöcke sich aufstellen, und der Geometer allen Visirlinien durch neues Visiren nachsehen. Eben so ist dem Gehülfen gut einzuschärfen, daß er im Gehen jederzeit die Fahne so trage, daß die Leinwand derselben an der Erde hinschleife, und daß er sie über keinen Pflock eher aufstelle, als bis er die Nummer desselben angesehen, und sich überzeugt hat, daß er in der richtigen Ordnung ist *). Fig.

Es handelt sich nun um einen zweyten Standort zum Durchschneiden der vom ersteren nach allen Puncten gezogenen Visirlinien. Es ist nicht nothwendig, daß dieß von einem bereits bey Verfertigung des Netzes bestimmten Standpuncte geschehe. Denn diese würden zur Aufnahme des Details bey weitem nicht hinreichen, und man würde noch viele Zwischenstände nehmen müssen. Hiebey treten die bereits bestimmten fixen Puncte in ihre vortheilhafte Wirkung. Man erntet nun reichlich nebst der beständigen Sicherheit auch den Ersatz der auf die Verfertigung des Netzes verwendeten Zeit ein. Schon beym Figuriren wird der Geometer bemerken, an welchem Orte er am schicksamsten seinen zweyten Standort annehmen könne; nur muß er sich dabey umsehen, daß er zum Rückwärtseinschneiden die nöthigen fixen Puncte besitze. Auf einem so gewählten in der Folge zu nehmenden Standpuncte läßt er eine Fahne aufstellen, und visirt sie von seinem ersten Standpuncte an **).

*) Wer nicht selbst viel aufgenommen hat, wird dergleichen Bemerkungen für geringfügig halten; die Erfahrung aber lehrt, daß man nie zu viel auf Ordnung, Pünctlichkeit und Vorsicht halten kann, wenn man sowohl geschwind als richtig arbeiten will.

**) Bevor ein neuer Standort anvisirt wird, ist es immer gut der Stellung des Meßtisches wieder nachzusehen, ob er nicht etwa während der bereits vorgehabten Arbeit verrückt worden sey.

Fig. Nachdem dieß geschehen, und in dem ersten Standpuncte eine Fahne errichtet worden ist, begibt er sich auf den neuen Standort. Hier ist das Verfahren bey der Stellung und Richtung des Meßtisches, dann bey der Bestimmung des Standpunctes auf dem Meßtischblatte dasselbe, wie es bey Verfertigung des Netzes bereits beschrieben worden ist. Ist nun die Nadel in den neu bestimmten Standpunct eingesteckt, so stellt sich der Gehülfe mit der Meßfahne wieder über einen jeden mit einem numerirten Pflocke bezeichneten Punct. Dieß kann nun entweder nach derselben Ordnung wie zuvor, oder auch umgekehrt, jedoch auf Verabredung und mit Behutsamkeit im Aufstellen geschehen. Der Geometer am Meßtische durchschneidet alle zuvor gezogenen Visirlinien, und sticht die erhaltenen Durchschnittspuncte mit einer Nadel sogleich durch, wornach jeder mit einem Pflocke bezeichnete Punct auf dem Meßtische bestimmt ist. Sollten die zwey Visirlinien eines Punctes zu schief auf einander treffen, mithin ihr Durchschnittspunct zweifelhaft bleiben; so mißt man die Entfernung eines anderen sicher bestimmten nahe liegenden Punctes von dem zweifelhaften entweder nach Schritten (von denen fünf auf zwey Wiener Klaftern gerechnet werden), oder mit der Meßkette, oder auch mit dem Klafterstabe ab, nimmt diese Entfernung mit dem Zirkel auf dem verjüngten Maßstabe, setzt eine Zirkelspitze in den ersteren Punct ein, und durchschneidet die Visirlinie des zweyten Punctes, wodurch auch dieser seine richtige Bestimmung erhält. In der Nähe des Meßtisches befindliche Puncte können auch durch Ausmessen und Auftragen ihrer Entfernungen oder ihrer senkrechten Abstände von einer schon bekannten Linie bestimmt werden. So wie dem Gehülfen das Zeichen zum Abgehen von einem Puncte gegeben wird; zieht derselbe den daselbst eingeschlagenen Pflock wieder aus, und sammelt auf diese Art alle ein.

Sind nun alle anfangs ausgesuchten Puncte bestimmt; so kann aus diesem zweyten Standorte das weitere Figuriren vorgenommen werden; und man sucht wieder einen neuen Standort, um die hier anvisirten Puncte zu durchschneiden. Auf diese Art wird die Arbeit fortgesetzt, und die ganze Gegend aufgenommen. Befinden sich bey einem Meßtische zwey Geometer, welche in der

Situations-Zeichnung hinlänglich geübt sind, so wird die Arbeit Fig.
sehr befördert, wenn der eine bloß die Operation bey dem Meß-
tische, und der andere das Figuriren besorgt. Ist der Geometer
am Meßtische gut geübt, so kann zu gleicher Zeit auf einer Seite
durchschnitten, und auf der anderen figurirt werden; nur muß
für jede Parthey ein besonderes Zeichen zum Abdanken angenom-
men, und alle Aufmerksamkeit auf die Arbeit verwendet werden.

Das Einzeichnen des Terrains kann zwar gleich auf dem Meßtischblatte nach dem Durchschneiden vorgenommen werden; gewöhnlich aber geschieht es während der Ruhezeit, wo nicht auf dem Felde gearbeitet wird. Es ist immer nöthig, daß dasselbe nicht zu lange verschoben werde, weil sonst manche mit Reißbley bezeichnete Nummer auf dem Papiere des Meßtischblattes verwischt, und das Ganze zweifelhaft wird, auch das Bild des Terrains dem Figuranten entfällt, das er sonst mit Beyhülfe der in seiner Schreibtafel verfertigten Zeichnung auf dem Papiere vollkommen darstellen kann. Er nimmt nähmlich seine Schreibtafel zur Hand, zeichnet nach den in derselben und auf dem Tischblatte gleichnahmig numerirten Puncten die Situation auf das Tischblatt zuerst mit Reißbley vollkommen auf, und arbeitet sie dann auch gleich mit Tusche aus.

Zur vollkommenen Richtigkeit in der Arbeit gehört auch, daß das Papier auf dem Meßtischblatte ganz flach und eben aufliege. Dieses erzielt man jedoch nicht, wenn das Papier nur wie gewöhnlich an dem Rande befestigt wird, da es bey feuchter Luft sich erhebt und Blasen bildet, folglich die Arbeit unterbleiben muß. Will man nicht so viel Zeit verlieren, (besonders im Frühjahre und Herbste, wo die Luft des Morgens und Abends meistens feucht ist); so kann man sich gegen das Aufsteigen des Papiers auf folgende Art verwahren. Man nimmt das Weiße oder Klare eines Eyes, schlägt davon einen Schaum auf einem Teller, feuchtet den zum Aufspannen bestimmten Bogen Papier auf derjenigen Seite, welche auf das Tischbret zu liegen kommt, mit einem nassen Schwamme mäßig an, und bestreicht dieselbe Seite überall gut mit dem Eyerschaume. Man legt sonach das Papier auf das Meßtischblatt, und streicht es mit einem weißen leinenen Tuche

Fig. gut aus, damit es sich auf und an das Holz durchaus glatt anlege. Endlich werden die Ränder mit einem dünnen Schreinerleim oder mit Buchbinderpappe angeklebt. Ein auf diese Art aufgespanntes Papier erhebt sich selbst in der feuchtesten Luft nicht, zieht sich beym Abschneiden vom Tischblatte nicht zusammen, und ist leicht ohne Verletzung herab zu nehmen.

IV. Das Zusammenstoßen der angrenzenden Sectionen bey einer über mehrere Meßtischblätter ausgedehnten Aufnahme.

Ist die Gegend von einem so großen Umfange, daß sie nach dem, der Absicht gemäß, angenommenen verjüngten Maßstabe nicht auf ein einziges Meßtischblatt gebracht werden kann, also mehrere Meßtischblätter erfordert; so kommt es darauf an, auf welche Art man die Zusammenfügung mehrerer Blätter am sichersten und schicksamsten bewirken könne. Wenn man nur Einen Meßtisch hat, muß man wenigstens mit zwey Tischblättern versehen seyn, mit welchen die Aufnahme nach und nach bewirkt werden kann. Hat man mehrere Meßtische, und auch die hiezu erforderlichen Geometer; so kann mit allen Meßtischen zugleich das Detail ausgearbeitet, und dadurch die Aufnahme sehr beschleuniget werden.

Hier ist zuerst zu beobachten, daß man sich die Größe eines Rechteckes für jedes auf die Meßtischblätter aufgespannte weiße Papier bestimmt. Man kann etwa zur Grundlinie desselben 24 und zur Höhe 16 Zoll annehmen, welches Rechteck man sodann eine Section nennt *).

Um nun das Netz für sämmtliche Sectionen zu verfertigen, welche zu der Aufnahme einer bestimmten größeren Gegend erforderlich seyn dürften, kann man einen noch kleineren Maßstab annehmen, als derjenige ist, nach welchem aufgenommen werden

*) Die Verzeichnung dieser Rechtecke muß mit der größtmöglichsten Genauigkeit sowohl in Hinsicht auf die Längen, als auch auf die senkrechte Stellung der Einschließungslinien gemacht werden. Die im §. 387. II. bemerkte Verzeichnung eines Rechteckes kann hier mit Nutzen angewendet werden.

soll; und zwar einen Maßstab von einer solchen Größe, daß man Fig.
das Netz der ganzen Gegend auf ein einziges Meßtischblatt bringen kann. Man theilt das Papier dieses Tischblattes in kleine Rechtecke (Sectionen) ein, deren Seiten mit denjenigen, die zur wirklichen Aufnahme bestimmt sind, in eben dem Verhältnisse stehen, in welchem der zur Verfertigung des Netzes angenommene kleinere Maßstab zu dem zur Aufnahme bestimmten größeren Maßstabe steht. Um diese Eintheilung schicksam zu treffen, wird uns die vorläufig gemachte Recognoscirung am besten leiten können. Hierauf wird das Netz der ganzen Gegend nach der vorbeschriebenen Weise auf diesem Tischblatte verfertigt, wobey man vorzüglich noch darauf zu sehen hat, daß in eine jede solche kleine Section wenigstens ein Standpunct, und zwey aus demselben sichtbare fixe Puncte gebracht werden.

Wenn das ganze Netz fertig ist, so wird man gleich daraus ersehen, wie viel Sectionen man eigentlich zur Aufnahme der vorgelegten Gegend nöthig hat. Man kann bey Verfertigung desselben auch gleich den Hauptumfang der ganzen Gegend und die darin vorkommenden vorzüglicheren Gegenstände des Details aufnehmen. Dadurch erhält man zugleich das Gerippe (Squelette) der ganzen Gegend.

Nun werden von diesem Tischblatte die in jeder kleinen Section befindlichen Stand- und Fixpuncte in die großen Sectionen nach dem angenommenen Verhältnisse mit der größten Genauigkeit übertragen. Eben so kann die Richtung der Magnetnadel bemerkt werden. Soll nun die Bearbeitung des Details vorgenommen werden; so stellt sich jeder Geometer mit dem ihm auf seiner Section übergebenen Standpuncte über den gleichnahmigen auf der Erdfläche, und orientirt den Meßtisch nach einem ebenfalls übertragenen fixen Puncte, indem er das Visirlineal an den Stand- und Fixpunct anlegt, das Tischblatt so lange dreht, bis die Visirlinie auf den letzteren genau eintrifft. Man überzeugt sich von der Richtigkeit der Orientirung, wenn man auch den zweyten und etwa noch die übrigen fixen Puncte aus dem Standpuncte anvisirt, dann nachsieht, ob die Visirlinien genau durch die gleichnahmigen Puncte auf dem Meßtische gehen. Hiezu läßt sich auch die Magnet-

Fig. nadel benützen. Man kann nun noch mehrere fixe Puncte, und zwar so viele bestimmen, als ihrer für eine solche Section nöthig seyn dürften. Sodann wird die Bearbeitung des Details bis zur gänzlichen Ausfüllung einer solchen Section bewirkt. Es gehört mit zur Vorsicht der Arbeit, daß man das Papier, worauf das ganze Netz der Gegend sich befindet, nicht eher von dem Meßtischblatte abschneide, bis nicht die letzte Section für das Detail bereits ihre Puncte von demselben erhalten hat.

Dieses Verfahren (das Zusammenstoßen der angrenzenden Sectionen mittelst des verjüngten Triangulirens) kann statt finden, wenn die aufzunehmende Gegend nicht zu weit ausgedehnt, und der zur Aufnahme bestimmte verjüngte Maßstab nicht zu groß ist. Denn wäre dieses der Fall, so würde der zur Verfertigung des Netzes anzunehmende Maßstab nach Verhältniß des ersteren für das Detail bestimmten zu klein ausfallen, und das Netz auf den großen Sectionen zu viel vergrößert werden müssen, wobey, wie jedem Geometer bekannt ist, selbst bey der strengsten Aufmerksamkeit nicht immer eine vollkommene Genauigkeit und Richtigkeit sich erzielen läßt.

Man kann die Aufnahme und das Zusammenstoßen der Sectionen auch auf folgende Art bewirken, ohne daß vorher das Netz der ganzen Gegend nach einem kleineren Maßstabe auf ein einziges Tischblatt aufgenommen wird.

208. Nachdem man die Größe für die Sectionen zuvor bestimmt, und die Rechtecke auf die zwey vorhandenen Tischblätter verzeichnet hat; geht der Geometer mit einem derselben KL (Tab. XVI. Fig. 208.) in diejenige Gegend, wo er beym Recognosciren den schicksamsten Platz für die Standlinie gefunden hat, welche er absteckt und ausmessen läßt. Er stellt sich nun mit dem Meßtische über das eine Ende derselben, bestimmt sowohl diesen Punct auf dem Meßtische, als auch die Orientirung desselben so, wie er nach der erhaltenen Kenntniß der ganzen Gegend glaubt, daß die Lage und Aneinanderreihung der Sectionen am füglichsten und schicksamsten ausfallen dürfte.

Ferner verfertigt er sich nach II. das Netz für diese Section und sucht dann in der Nähe derjenigen Sections-Grenzlinie, an welche die folgende angestoßen werden soll, einige fixe Puncte

(Fig. 208.) E, F, G, H zu bestimmen, welche entweder dies- Fig.
oder jenseits der Sectionslinie, jedoch noch auf das Meß- 208.
tischblatt fallen. Zu diesem Ende wird auch ein Standpunct I in derselben Gegend angenommen und bestimmt, welcher desto zweckdienlicher ist, wenn er über die Sectionslinie hinaus liegt. Aus diesem Standpuncte ziehe man gegen einen der vorbesagten Fixpuncte E die Visirlinie IE in einer solchen Länge, als es das Lineal und Tischblatt zulassen.

Man nehme sodann das zweyte Tischblatt kl zur Hand, und übertrage die auf dem ersten Tischblatte gezogene Visirlinie IE, und die nahe an der Sections-Grenzlinie AD befindlichen Fixpuncte E, F, G, H, nebst dem Standpuncte I in eben derselben Lage, die sie gegen die Sectionsseite AD haben, auf das zweyte Tischblatt kl gegen diejenige Sections-Grenzlinie ad, an welcher diese folgende Section db mit der vorigen CA vereinigt werden soll. Man beschreibe zu dieser Absicht mittelst des Stangenzirkels aus dem Puncte A mit der Eröffnung AI einen Bogen IM, bis die Sectionslinie in dem Puncte M durchschnitten wird. Mit eben dieser Eröffnung des Zirkels beschreibe man auch auf kl aus dem Puncte a einen Bogen mi von der Sectionslinie einwärts von unbestimmter Länge, nehme die Sehne MI genau, setze die eine Zirkelspitze in m ein, und durchschneide den Bogen in i; so erhält man die Lage des Standpunctes i. Auf eben diese Art verfahre man bey dem Uebertragen der übrigen nahe an der Sectionslinie liegenden fixen Puncte E, F, G, H. Ferner übertrage man auch zur Ueberzeugung den Durchschnittspunct N in n, und sehe zu, ob die gezogene Linie ei auch genau durch n gehe. Nachdem alles dieses berichtiget ist, nehme man das Tischblatt kl auf das Stativ, stelle sich mit dem Puncte i über den gleichnahmigen auf der Erdfläche, und orientire den Meßtisch nach der Linie ei, wie vorher gezeigt worden ist. Endlich steckt man die Nadel in i, und überzeugt sich von der richtigen Stellung durch das Anvisiren der Puncte f, g, h. Auch hier kann man, wie bey dem ersten Verfahren gesagt wurde, die Richtung der Magnetnadel übertragen, und dieselbe durch das Aufsetzen und Einspielen der Nadel prüfen. Treffen die Visirlinien sämmtlich in den gleichnahmigen Puncten

Fig. 208. ein; so kann man nun die weitere Verfertigung des Netzes für die Section ac fortsetzen. Man hat hier nicht mehr nöthig eine Linie auszumessen, sondern man kann aus diesem ersten Standpuncte i einen weiter folgenden und mehrere neue Fixpuncte anvisiren, dann auf dem neu gewählten Standpuncte mittelst der übertragenen Fixpuncte sich rückwärts einschneiden, und von da aus die neuen Visirlinien durchschneiden; wornach die Arbeit für dieses Tischblatt, wie bereits bekannt ist, fortgesetzt wird.

So wie man an die Linie AD die Section ac angestoßen hat; eben so kann man an alle übrigen Sectionslinien sowohl von AC als von ac noch andere Sectionen anstoßen und zusammenreihen. Sind mehrere Geometer vorhanden; so arbeitet einer gleich, sobald an eine Section alle angrenzenden angestoßen worden sind, an dem Detail derselben. Auf diese Art wird bis zur Beendigung der ganzen Arbeit fortgefahren.

Durch das Verzeichnen gleich großer Sectionen auf die Tischblätter und durch das Zusammenstoßen derselben auf oben beschriebene beyde Arten erhält man die wesentlichen Vortheile, daß erstens bey der Bestimmung der Hauptpuncte, bey der geometrischen Triangulirung, in allen Sectionen nur ein einziges Maß, die gemessene Grundlinie, zum Grunde liegt; daß zweytens bey dem Zusammenstoßen der Sectionen dieselben genau zusammenpassen müssen, wenn anders die Ausfüllung einer jeden insbesondere richtig vorgenommen worden ist; drittens daß bey zwey Geometern, deren aufzunehmende Sectionen an einander grenzen, keine besondere Aussteckung und Uebergabe der Grenzlinie auf dem Terrain nöthig ist, und daß doch dabey jeder derselben bestimmt weiß, was von ihm aufgenommen werden muß; endlich viertens gewinnt die Karte ein besseres Ansehen, weil sie aus gleich großen Blättern mit geraden in eine Richtung fallenden Linien zusammen gesetzt wird. Das Zusammenstoßen nach einer Umfangslinie irgend einer Gegend ist das unsicherste und schlechteste Mittel.

Fig.

Anmerkungen.

1) Wenn sich der Fall ereignet, daß man die Aufnahme einer Erdstrecke in einer Gegend anfangen muß, wo das Terrain zu uneben ist, als daß man eine Grundlinie mit zureichender Genauigkeit messen könnte; so kann man auf folgende Art vorgehen.

Von dem Standpuncte, von welchem die Aufnahme beginnen soll, wähle man zur Grundlinie eine angemessene Entfernung gegen einen auf dem Terrain schon vorhandenen ausgezeichneten oder aber mit einer Fahne ausgesteckten Punct, und zwar eine Entfernung beyläufig von der Größe und Lage, wie sie zu der beabsichtigten Aufnahme beschaffen seyn soll. Für das Längenmaß dieser gewählten Grundlinie, ohne sie wirklich zu messen, nehme man eine nur nach dem Augenmaße abgeschätzte Zahl von Klaftern an.

Man stelle sich mit dem Meßtische über den einen Endpunct der angenommenen Grundlinie, und verfahre weiters ganz so wie in II. gesagt worden ist. Endlich trage man das abgeschätzte Längenmaß auf die gegen den anderen Endpunct der angenommenen Grundlinie gezogene Visirlinie nach dem zur Absicht der Aufnahme erforderlichen verjüngten Maßstabe auf.

Um sich auf dem zweyten Standpuncte rückwärts einzuschneiden, hat man bey diesem Verfahren nur einen einzigen Punct. Nähmlich der Meßtisch wird nach der aus dem einen Endpuncte der Grundlinie, worüber man sich zuerst gestellt hatte, gegen diesen zweyten Standpunct gezogenen Visirlinie orientirt, und dann dieser zweyte Standort aus dem zweyten Endpuncte der Grundlinie rückwärts eingeschnitten.

In diesem zweyten Standorte wird man noch in keiner vollen Ueberzeugung seyn, ob der durch das Rückwärtseinschneiden bestimmte Standpunct und auch die aus demselben bereits durchschnittenen fixen Puncte die volle Richtigkeit in der Bestimmung ihrer Lage haben oder nicht. Kommt man aber weiter auf den dritten Standort; so wird man sich daselbst von einem der bereits durchschnittenen fixen Puncte rückwärts einschneiden, und durch

Fig. das Anvisiren der übrigen von der Richtigkeit der Arbeit überzeugen können. Nun kann man die Arbeit mit Verfertigung des Netzes nöthigen Falls über mehrere Sectionen fortsetzen, und auch die Aufnahme des Details vornehmen, jedoch ohne Messen und Auftragen der Entfernungen der vorkommenden Puncte, sondern immer durch das Anvisiren und Durchschneiden derselben.

Kommt man endlich mit einer Section in eine Gegend, wo das Terrain die genaue Messung einer Linie zuläßt; so steckt man diese aus, bestimmt die Endpuncte derselben mittelst des Anvisirens und Durchschneidens auf dem Meßtische, und mißt sie auf der Erde genau ab. Man nehme dann die auf dem Meßtische so bestimmte Entfernung dieser zwey Puncte, trage dieselbe auf eine seitwärts gezogene Linie, und theile sie in so viel gleiche Theile, als man Klaftern bey der Messung für die Länge der Entfernung dieser zwey Puncte auf der Erde gefunden hat. Dadurch erhält man den Maßstab für die bereits geschehene Aufnahme. Damit die Theilung dieser Linie zur Verfertigung des Maßstabes leichter geschehen könne, so messe man auf der abgesteckten Linie eine runde Zahl von Klaftern ab, und stecke in diesen bestimmten Punct die zweyte Fahne als in einen Fixpunct ein.

Sollte nun eine auf diese Art aufgenommene Karte mit einer andern, nach einem andern verjüngten Maßstabe aufgenommenen zusammen gestoßen werden; so versteht es sich von selbst, daß jene erst nach diesem Maßstabe vergrößert oder verkleinert werden müßte.

2) Mehrere Vortheile, welche bey dem Aufnehmen einer Gegend angewendet werden können, lassen sich nicht wohl in einem Lehrbuche deutlich angeben, weil sie von den Veränderungen des Terrains abhängen, und deßwegen eben so wie diese mannigfaltig sind. Die verschiedenen Behelfe und Kunstgriffe wird man durch fleißige und aufmerksame Uebung, durch eigenes Nachdenken und durch eine geschickte Anwendung und Combinirung der erlernten theoretischen Gründe sich zu erwerben im Stande seyn. Man glaubt auch noch wiederhohlt anempfehlen zu müssen, daß an Pünctlichkeit und Ordnung ja nichts vernachlässigt werde,

weil oft eine kleine Vernachlässigung von sehr üblen Folgen seyn, Fig.
und den Verlust vieler Zeit und Arbeit nach sich ziehen kann.

3) Ein Gebäude, einen Garten, und andere dergleichen ökonomische Gegenstände im Grundrisse, im Querdurchschnitte und nach der äußeren Ansicht (Façade) aufzunehmen, und nach einem angenommenen verjüngten Maßstabe aufzuzeichnen, ist man im Stande, wenn man die ersten Aufgaben der practischen Meßkunst inne hat, und in der Zeichnungslehre unterrichtet ist. Eben dahin gehört auch das Abzeichnen eines vorgelegten Körpers nach einer gewählten Ansicht, wie auch die perspectivische Vorstellung desselben aus einem angenommenen Gesichtspuncte auf einer gegebenen Ebene, und mehr dergleichen, welches hier mit Stillschweigen übergangen wird.

4) Das Ausstecken einer auf dem Meßtische nach einem festgesetzten verjüngten Maßstabe verzeichneten Figur (z. B. des Grundrisses einer Festung) nach voraus gegangener Aufstellung und Orientirung des Meßtisches, wird jeder leicht ausführen können, der sich das bisher Vorgetragene eigen gemacht hat; daher man für überflüssig hält, darüber etwas insbesondere zu sagen.

5) Schließlich kommt noch zu bemerken, daß für den militärischen Gebrauch im Felde der Meßtisch und das Visirlineal, die wegen ihrer Größe und Schwere im Kriege von einzelnen Individuen nicht leicht mitgeführt werden können, bey Verfertigung des Netzes (bey dem geometrischen Trianguliren) und bey der Ausfüllung des Details einer militärisch aufzunehmenden Gegend mit zulänglicher Genauigkeit durch einen Spiegel-Sextanten oder catoptrischen Zirkel, ersetzt werden können. Einen solchen Spiegel-Sextanten oder catoptrischen Zirkel kann man leicht bey sich in der Rocktasche tragen, mit demselben jeden nöthigen Winkel ohne Beyhülfe eines Stativs beobachten, und ihn sodann auf ein Papier übertragen, welches auf irgend einem Reißbrete aufgespannt ist.

6) Die Aufnahme ohne alle Instrumente, bloß nach Schritten und nach dem Augenmaße, wenn man sich einige Hauptpuncte aus einer vorhandenen geographischen oder topographischen Karte zum vorläufigen Netze nach dem gewählten verjüngten Maßstabe

Fig. heraus genommen hat, wird nur derjenige mit einiger Zuverlässigkeit zu bewirken im Stande seyn, welcher sich im Aufnehmen mit dem Meßtische bereits mehr Uebung erworben hat, und um verschiedene practische Vortheile nicht verlegen ist.

§. 599.

Soll die in §. 597. vorgelegte Aufgabe trigonometrisch auf-
145. gelöst, d. h. die in Fig. 145. vorgestellte Gegend mit Hülfe eines Winkelmessers aufgenommen werden; so muß man dabey auf folgende Art verfahren. Man messe eine Grundlinie AB, und beobachte an dem einen Endpuncte derselben die Winkel HAG, GAF, FAE, EAD, DAC, CAB, und an dem anderen Endpuncte die Winkel CBD, DBE, EBA, und in E die Winkel FEG, GEH, HEA. Nun ziehe man auf dem Papiere eine Gerade ab, trage auf dieselbe die Länge der gemessenen Grundlinie nach einem verjüngten Maßstabe, und verzeichne an beyden Endpuncten derselben die bekannten Winkel; wodurch die Puncte a, b, c, d, e bestimmt werden. Ferner zeichne man in dem schon gefundenen Puncte e an der Linie ea die in E beobachteten Winkel; so werden dadurch auch die übrigen Puncte bestimmt.

Oder man berechne in den Dreyecken ACB, ADB, AEB aus der Seite AB und den daran liegenden Winkeln die Seiten AC, AD, AE. Ferner berechne man auch in den Dreyecken AFE, AGE, AHE aus der schon gefundenen Seite AE und den anliegenden Winkeln die Seiten AF, AG, AH. Sodann verzeichne man aus einem Puncte a die in A beobachteten Winkel, und trage auf die Schenkel derselben nach einem verjüngten Maßstabe die Längen der Geraden AB, AC, AD, AE, AF, AG, AH; so wird wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke die dadurch erhaltene Figur abcdefgh der Figur auf dem Felde ähnlich seyn. Man kann auch in den Dreyecken ACB, ADB, AEB u. s. w. alle Seiten berechnen, und dann die Puncte c, d, e über der angenommenen Grundlinie ab mittelst der Durchschnitte von Kreisbogen bestimmen, wenn man aus a und b mit den gehörigen Halbmessern Kreisbogen beschreibt u. s. w. Es ist gut, wenn man alle drey Winkel eines solchen Dreyeckes beobachtet, damit man sogleich sehen könne, ob die Beobachtung derselben richtig vorge-

nommen wurde. Sollte die Summe dieser Winkel nur um etwas Weniges von 180° entfernt seyn, so kann man den Unterschied verhältnißmäßig vertheilen, und dann die Seiten berechnen. Fig.

Bey großen trigonometrischen Vermessungen ist es nicht rathsam die berechneten Dreyecke nach der angeführten Art mittelst des Transporteurs oder mittelst der Durchschnitte der Seiten zu verzeichnen, weil jeder bey dem Auftragen begangene Fehler, so klein er auch ist, sich den übrigen Dreyecken mittheilen, und in der Folge beträchtlich werden kann. In solchen Fällen nimmt man eine Linie SN an, welche durch einen Standpunct A, und 146.
durch einen anderen Punct N gezogen ist, berechnet die darauf senkrechten Ordinaten Ee, Dd, Ff, Cc, Bb, Ii, Gg, Hh, wie auch die Abstände dieser Senkrechten von dem Puncte A oder die zugehörigen Abscissen, nähmlich Ae, Ad, Af, u. s. w. und verzeichnet mittelst dieser Abscissen und Ordinaten die berechnete Figur. Man zieht nähmlich auf dem Papiere eine Gerade SN, nimmt auf derselben A für den Standpunct A an, und trägt nach einem verjüngten Maßstabe von A bis b die berechnete Abscisse Ab, errichtet aus b eine Senkrechte bB, und trägt auf dieselbe die berechnete Länge der Ordinate bB, um den Punct B zu erhalten. Eben so werden die übrigen Puncte C, D, u. s. w. bestimmt. Diese Art der Verzeichnung hat den Vortheil, daß, wenn auch irgendwo bey der Bestimmung eines Punctes ein kleiner Fehler begangen wird, derselbe jederzeit für sich allein bleibt, und sich den übrigen Puncten nicht mittheilet.

Ist man mit den nöthigen Hülfsmitteln versehen, um in dem Puncte A (nach der in §. 583. Aufgabe II. gezeigten Methode) die Richtung der Mittagslinie genau ausstecken zu können; so nimmt man die Gerade SN in dieser Richtung an, damit dadurch die Lage des berechneten trigonometrischen Netzes in Hinsicht auf die Weltgegenden Ost, West, Süd und Nord festgesetzt werde. Hiebey erhält man den Vortheil, daß die geographische Länge und die Breite oder Polhöhe eines jeden durch die auf SN sich beziehenden Abscissen und Ordinaten bestimmten Punctes sehr leicht gefunden werden kann, wenn die geographische Länge und Breite des Punctes A bekannt ist. Denn in diesem

Fig. 146. Falle sind die Abscissen die Breitenunterschiede, und die Ordinaten die Längenunterschiede zwischen dem Puncte A und dem zugehörigen Puncte.

Sollte aber die Lage der Mittagslinie nicht genau gefunden werden können; so ist es besser, um allen Irrthümern auszuweichen, irgend eine andere bestimmte Richtung für die Abscissenlinie SN anzunehmen.

Die Ordinaten Ee, Dd, Cc, Gg, u. s. w. nebst ihren von dem Puncte A gerechneten Abscissen können aus den vorher berechneten Seiten und Winkeln der ganzen Figur auf folgende Art gefunden werden. Man beobachtet in A den Winkel, welchen eine aus A in was immer für einem bestimmten Puncte gezogene Gerade mit AN einschließt, z. B. den Winkel NAB; so können in dem rechtwinkeligen Dreyecke ABb aus der Hypothenuse AB und aus dem Winkel bAB die Seiten Ab und Bb berechnet werden, da $Ab = AB \cdot \cos bAB$ und $bB = AB \cdot \sin bAB$ ist. Ferner hat man in dem rechtwinkeligen Dreyecke CAc die Hypothenuse CA nebst dem Winkel $CAc = CAB - bAB$ bekannt; folglich können daraus die Seiten Cc und Ac gefunden werden. Man ziehe von 180° den Winkel $bAB + BAG$ ab; so ist der Ueberrest $= GAg$. Folglich ist in dem rechtwinkeligen Dreyecke GAg nebst der Hypothenuse auch der Winkel GAg bekannt, und Gg, Ag können sonach berechnet werden. Ferner ist $GAH - GAg = HAh$, und endlich $HAh + IAH = IAi$. Es können demnach in den zwey rechtwinkeligen Dreyecken HAh und IAi die Seiten Hh, Ah, und Ii, Ai gefunden werden. Um Af, fF und Ad, dD zu erhalten, denke man sich durch B eine Parallele BQ zu AN; so ist $ABQ = 180° - NAB$ (vermöge 362. III.) und $ABQ - ABC - CBD = DBQ$. Nun können in dem rechtwinkeligen Dreyecke DQB die Seiten BQ und DQ berechnet werden. Ferner ist $BQ + bA = bd + bA = Ad$; $bB - DQ = dQ - DQ = dD$ und $DBF - DBQ = PBF$. In dem rechtwinkeligen Dreyecke BPF können somit BP und PF gefunden werden, und es ist dann $BP + bA = Af$, und $PF + Bb = Ff$. Man denke sich auch durch F eine Parallele FR zu AN oder BQ, so ist $BFR = 180° - QBF$, und end-

lich EFR = BFR — BFD — DFE. In dem rechtwinkeligen Dreyecke EFR können sofort aus der Hypothenuse EF und aus dem Winkel EFR die Seiten FR, ER berechnet werden, und es ist dann Ae = Af + FR, und eE = fF — ER; u. s. w. Fig. 146.

Hat man die Abscissen und Ordinaten aller Puncte berechnet, so dient es zur schnelleren Uebersicht, dieselben in eine besondere Tafel zusammen zu schreiben, wobey man zugleich den Gegensatz ihrer Lage berücksichtiget, indem man z. B. die mit S auf derselben Seite von A liegenden Abscissen für positiv, daher die gegen N hin gelegenen für negativ, und die rechts von SN befindlichen Ordinaten für positiv, folglich die zur Linken dieser Linie liegenden für negativ erklärt und mit den entsprechenden Zeichen versieht.

Wenn sehr große Strecken, die schon einige Quadrat-Meilen enthalten, genau und richtig aufzunehmen sind; so muß man die Lage der Hauptpuncte nach der angeführten Art trigonometrisch bestimmen. Man muß nähmlich eine Tabelle nach der eben gegebenen Vorschrift verfertigen, worin die Hauptpuncte des trigonometrischen Netzes enthalten sind. Darauf werden diese Hauptpuncte aus der Tabelle auf die gleich großen Sectionen der Meßtische nach dem angenommenen verjüngten Maßstabe mittelst Abscissen und Ordinaten aufgetragen. Endlich muß man alle diejenigen bemerkenswerthen Gegenstände, die sich in einem Dreyecke befinden, mit dem Meßtische aufnehmen.

Diese Methode von einer großen Strecke den Grundriß zu verfertigen, führt den besonderen Vortheil mit sich, daß einige Fehler, die bey dem Gebrauche des Meßtisches in der Aufnahme des Details sich einschleichen, nur in einzelnen Dreyecken verbleiben, und sich den übrigen nicht mittheilen. Die Fehler, welche bey dem Gebrauche des Meßtisches unvermeidlich sind, haben ihren Ursprung theils in der veränderlichen Ausdehnung des Papiers und des Meßtischblattes bey verschiedener Temperatur der Atmosphäre, theils in der Dicke der Anschlagnadeln, theils in der Breite der gezogenen Visirlinien, theils auch einiger Maßen in der Gestalt der Erde. Man muß nähmlich einen

Fig. weit ausgedehnten Theil von der horizontalen Oberfläche der Erde, worauf man sich die Lage der aufzunehmenden Gegenstände im Grunde vorstellt, für eine krumme, nicht aber für eine ebene Fläche ansehen, welches letztere doch der Feldmesser mit seinem Meßtische voraussetzt.

§. 600.

Zeichnung eines geographischen Kugelnetzes.

Hat man ein geographisches Kugelnetz (Abbildung der Meridiane und Parallel-Kreise auf einer ebenen Fläche mit Beysetzung der geographischen Längen und Breiten) für ganze Länder zu entwerfen, um in dasselbe die Hauptpuncte nach ihren bestimmten geographischen Längen und Breiten sammt Detail einzutragen: so muß man sich vorstellen, daß von der Oberfläche einer nach dem angenommenen Maßstabe zu der Erde proportionirten, und eben so eingetheilten Kugel ein Stück ausgeschnitten, und über eine ebene Fläche ausgebreitet werde. Da sich nun alle Meridiane oder Breitenkreise in dem Pole vereinigen, und die Parallel-Kreise gegen die Pole hin mit immer kleineren Halbmessern beschrieben werden; so können die auf dem geographischen Netze gezogenen Meridiane keineswegs parallele gerade Linien seyn, sondern sie müssen gegen die Pole zusammen laufen. Auch die Parallel-Kreise können nicht durch parallele gerade Linien, sondern durch kreisähnliche Bogen vorgestellt werden. Damit man nun die Hauptpuncte eines bestimmten, von vier Bogen größter Kreise eingeschlossenen Stückes der Erdfläche mit den dazu gehörigen Meridianen und Parallel-Kreisen auf einer ebenen Fläche richtig abbilde; so kann die Berechnung und Verzeichnung desselben am füglichsten auf folgende Art vorgenommen werden.

1) Man verzeichne sich einen geradlinigen Maßstab, bey welchem eine beliebige Länge nach der Größe des aufzutragenden Stückes der Erdoberfläche für die Einheit angenommen, und mit dem Nahmen Grad bezeichnet wird, mit der Unterabtheilung in 60 Minuten zu 60 Secunden, oder nur zu Zehntel-Minuten.

2) In der Mitte A des angenommenen Rechteckes ziehe man zwey auf einander senkrechte Linien BE und LD; so wird EB ein Stück des Meridians des Punctes A, und LD ein Stück des auf BE senkrechten größten Kreises, welcher auch der erste Verticalkreis des Punctes A genannt wird, vorstellen. Fig. 209.

3) Aus dem Puncte A trage man nach B und E auf BE den halben Breitenunterschied, welchen die ganze Section enthalten soll, nach dem angenommenen Maßstabe auf. Die durch die abgeschnittenen Puncte B und E auf BE senkrecht gezogenen Bogen von größten Kreisen werden, und zwar der erste die obere oder nördliche, der zweyte aber die untere oder südliche Sections-Linie bestimmen.

4) Damit man nun diese Sectionslinien BC und EF erhalte; so müssen für eine angenommene Entfernung AD, im Bogenmaße des größten Kreises, die Durchschnittspuncte C und F dieser Sectionslinien mit einem in dem Puncte D auf AD senkrechten größten Kreise CDF gesucht werden. Es sey demnach, um die sphärischen senkrechten Abstände $BC = x$ und $DC = y$ des Punctes C von dem Meridiane und dem ersten Verticalkreise des Punctes A zu finden, die Entfernung $AD = a$ und der Breitenunterschied AB der Puncte A und $B = \beta$ in Graden, Minuten und Secunden ausgedrückt. Man verlängere die Bogen AD und BC der auf dem Meridiane BE senkrechten ersten Verticalkreise der Puncte A und B, bis sie sich in dem Pole O dieses Meridians d. i. in dem Ostpuncte vereinigen, folglich die Bogen AO und BO Quadranten werden. In dem durch diese Construction entstehenden bey D rechtwinkeligen Dreyecke CDO ist

der Winkel $COD = AB = \beta$

und $DO = AO - AD = 90^0 - a$

$OC = BO - BC = 90^0 - x$

$CD = y$;

daher erhalten wir (nach §. 574.)

$$\text{tang } x = \cos c \text{ tang } a, \quad \text{tang } y = \cos a \text{ tang } c.$$

Fig. 209. Daraus findet man sowohl BC als auch CD in Graden, Minuten und Secunden ausgedrückt. Diese Bogenmaße für BC und CD nehme man auf dem geradlinigen Maßstabe, beschreibe aus den Puncten B und E mit dem Halbmesser BC oben und unten einen Kreisbogen, und durchschneide beyde aus dem Puncte D mit dem Halbmesser CD; so sind die Puncte C und F gefunden, welche sowohl mit B und E als auch mit D verbunden werden müssen. Hat die Zeichnung gegen Osten und Westen, oder gegen Norden und Süden eine sehr große Ausdehnung über 10 Grade des größten Kreises; so müssen im ersteren Falle für die nördliche und südliche Sectionslinie, im zweyten Falle für die östliche und westliche mehrere Zwischenpuncte bestimmt werden, damit man durch die Verbindung dieser Puncte die Sectionslinien richtiger erhalte. z. B.

für

$AB = 10^0$, $AD = 20^0$ ist $BC = 19^0\,43'\,11''$, $DC = 9^0\,24'\,29''$;

für

$AB = 10^0$, $AD' = 10^0$ ist $BC' = 9^0\,51'\,4''$, $D'C' = 9^0\,51'\,4''$;

für

$AB' = 5^0$, $AD = 20^0$ ist $B'C'' = 19^0\,55'\,47''$, $DC'' = 4^0\,41'\,59''$.

5) Um die Lage der Meridian-Kreise für die von Grad zu Grad auf einander folgenden, von dem durch den Punct A gehenden Meridiane gerechneten Längenunterschiede zu erhalten; müssen die Durchschnitte derselben auf der oberen, mittleren und unteren Sectionslinie gesucht werden. Setzen wir allgemein den von dem mittleren Meridiane BE gerechneten Längenunterschied eines bestimmten Meridians, von welchem dd'd'' ein Stück ist, $= \lambda$; verlängern wir ferner die Bogen BAE und dd'd'' dieser Meridiane, bis sie sich in dem Nordpole P schneiden: so werden, wenn b,b',b'' die geographischen Breiten der Puncte B, A, E bezeichnen, folglich $b - b' = b' - b'' = \beta$ ist,

$$PB = 90^0 - b,$$
$$PA = 90^0 - b',$$
$$PE = 90^0 - b''$$

die Pol-Distanzen oder Aequatorshöhen dieser Puncte B, A, E. Setzen wir ferner

$Bd = l$, $Ad' = l'$, $Ed'' = l''$; Fig. 209.

so liefern die bey B, A, E rechtwinkeligen Dreyecke dBP, d'AP, d''EP, welche den Winkel $BPd = \lambda$ gemein haben, (nach §. 574.) die Gleichungen

$$\text{tang } l = \text{tang } \lambda \cos b$$
$$\text{tang } l' = \text{tang } \lambda \cos b'$$
$$\text{tang } l'' = \text{tang } \lambda \cos b''.$$

Man darf also nur diese Entfernungen für die auf einander folgenden Grade der Längenunterschiede berechnen, dann nach dem angenommenen Maßstabe von B, A und E aus gehörig auftragen, und die erhaltenen gleichnahmigen Puncte mit einander verbinden; so sind dadurch die von Grad zu Grad auf einander folgenden Meridiane gezogen. Für die zwey gegebenen Parallel-Kreise, zwischen welche die aufzutragenden Hauptpuncte fallen, kann man zur Beschleunigung der Arbeit allenfalls auch die Bogen l, l', l'' in eine Tafel zusammentragen.

Um das Netz möglichst richtig zu erhalten, kann man auch auf der Sectionslinie B'C'' und auf einer in der Mitte zwischen A und E auf AE nach 4) senkrecht gezogenen Sectionslinie die Durchschnittspuncte der Meridiane mittelst der angeführten Formeln bestimmen.

6) Damit endlich auch die Lage der Parallel-Kreise für die von Grad zu Grad fortlaufenden Polhöhen gefunden werde; bestimme man sich die Ausbiegung oder Abweichung der Parallel-Kreise von den drey Sectionslinien BC, AD, EF, nähmlich die Linien

$$dh = v,\ d'h' = v',\ d''h'' = v''.$$

Hiezu dienen die bereits in 5) betrachteten Kugeldreyecke dBP, d'AP, d''EP. Denn setzt man voraus, daß φ, φ', φ'' die geographischen Breiten der Puncte d, d', d'' sind, folglich

$$Pd = 90^\circ - \varphi\ ,\quad Pd' = 90^\circ - \varphi'\ ,\quad Pd'' = 90^\circ - \varphi''$$

ist; so findet man diese Größen (nach §. 574.) mittelst der Gleichungen

Fig. 209.

$$\text{tang } \varphi = \cos \lambda \text{ tang } b$$
$$\text{tang } \varphi' = \cos \lambda \text{ tang } b'$$
$$\text{tang } \varphi'' = \cos \lambda \text{ tang } b''.$$

Beachtet man ferner, daß b, b′, b″ die geographischen Breiten nicht bloß der Puncte B, A, E, sondern auch der Puncte d, d′, d″ sind; so ergeben sich die Abweichungen

$$v = b - \varphi,\ v' = b' - \varphi',\ v'' = b'' - \varphi''.$$

Die erhaltenen Maße müssen von dem Maßstabe gehörig abgenommen, dann von der oberen, mittleren und unteren Sectionslinie, auf jedem zugehörigen Meridiane aufgetragen, und jede drey neben einander erhaltenen Puncte mittelst eines Kreisbogens verbunden werden. Sobald dieses geschehen ist, lassen sich auch die übrigen Parallel-Kreise leicht ziehen. Auch die Abweichungen oder Ausbiegungen der Parallel-Kreise kann man zur Förderung der Arbeit in eine Tafel bringen.

Ueber eine nach einem gegebenen Maßstabe richtig und genau gezeichnete Karte kann man eben so leicht ein geographisches Kugelnetz spannen, wenn nur durch einen Punct derselben die Mittagslinie gezogen, und die Polhöhe für diesen Punct bekannt ist. In diesem Falle muß man sich aus dem Maßstabe der Karte nach dem bekannten Verhältnisse der angenomenen Längeneinheit zu einem Grade einen Grad-Maßstab verfertigen. Wenn z. B. bey der Aufnahme und Zeichnung der Karte entweder die Wiener Klafter, oder auch die österreichische Postmeile zu Grunde liegt, so muß man im ersten Falle 58583,93 Wiener Klafter, und im zweyten 14,646 österreichische Postmeilen für 1 Grad des geradlinigen Maßstabes annehmen. Ferner muß man in dem Puncte A, dessen Polhöhe bekannt ist, eine Senkrechte auf die bekannte Richtung der Mittagslinie errichten, und die Entfernung der beyden äußersten Puncte B und D von dem Puncte A auf diesem Grad-Maßstabe messen; so ist in den oben in 4) angeführten Formeln die Polhöhe in dem Puncte A = b′, der Breitenunterschied AB = β, und die Entfernung AD = a bekannt. Nun können die Durchschnitte C und F der Sectionslinien BC und EF, wie auch die Durchschnittspuncte der Meridiane und die Ausbiegun-

gen der Parallel-Kreise nach der oben gegebenen Methode gefunden werden. 209.

Uebrigens ist einleuchtend, daß bey der Eintheilung des geographischen Kugelnetzes dasselbe Verfahren auf der westlichen Hälfte beybehalten werden muß.

Anmerkung. Die hier aus einander gesetzte Zeichnungsart eines geographischen Kugelnetzes hat vor den bisher gewöhnlichen, selbst vor der beliebten Murdochischen Projection erhebliche Vorzüge, weil bey der hier vorgeschlagenen Zeichnung des geographischen Kugelnetzes die Umrisse der Länder, die Lage und die wechselseitigen Entfernungen der darin bemerkten Oerter weniger verunstaltet werden, als bey jeder anderen bisher gebrauchten Projection. Man vergleiche damit Tob. Mayer vollständige gründliche Anweisung zur Verzeichnung der Land-, See- und Himmels-Karten und der Netze zu Coniglobien und Kugeln. Erlangen. 1794.

§. 601.

Aufgabe. Die Entfernung zweyer Puncte A und B 137.
Fig. 137. nebst der Richtung der Magnetnadel ist auf dem Meßtische gegeben; man soll auf demselben die Lage des Standpunctes C bestimmen, wofern man von diesem nach A und B visiren kann.

Auflösung. Man stelle den Meßtisch mittelst der Magnetnadel dergestalt über C, daß ab mit der gleichnahmigen Linie AB parallel laufe, lege bey dieser Stellung des Meßtisches das Visirlineal zuerst an a, dann an b, und visire bey der ersten Anlage nach A, und bey der zweyten nach B; so werden sich auf dem Meßtische die bemerkten Visirlinien in dem Puncte c schneiden, und dadurch wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke acb und ACB die Lage des Punctes C in c bestimmen.

§. 602.

Aufgabe. Die Länge einer unzugängigen Geraden AB 147.
ist gegeben, man soll die Lage der Puncte C und D bestimmen, von denen man nach A und B sehen kann.

Fig. 147. Auflösung. I. Mit Hülfe des Meßtisches. Man stelle den Meßtisch in C, und visire nach A, B, D. Sodann stelle man den Meßtisch in D dergestalt, daß die Visirlinie c'd' genau in der Richtung CD liege, und visire aus einem beliebigen Puncte dieser Visirlinie d' nach A und B; so ist wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke die Figur d'c'a'b ∽ DCAB. Endlich trage man nach einem verjüngten Maßstabe die Länge AB auf die Gerade ba' von b bis a, und verzeichne (§. 426.) die Figur bacd ∽ ba'c'd'; so ist dadurch die Lage der Puncte C und D bestimmt.

II. Mittelst eines Winkelmessers. Man beobachte in C die Winkel ACB, BCD, und in D die Winkel CDA, ADB. Dann nehme man für CD eine willkührliche Länge an, z. B. man setze CD = 1, und berechne nach dieser Voraussetzung AC, AD, CB, DB und AB. Endlich schließe man wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke: die berechnete Länge AB verhält sich zu der wirklichen bekannten Länge AB, wie jede andere berechnete AC, AD, CD, ... sich zu der wirklichen Länge von AC, AD, CD, ... verhält. Man findet die Lage eben dieser zwey Puncte durch Verzeichnung, wenn man an einer Geraden von willkührlicher Länge c'd' die beobachteten Winkel verzeichnet, dann BA nach einem verjüngten Maßstabe auf ba' von b bis a aufträgt, und endlich (nach §. 426.) acdb ∽ a'c'd'b verzeichnet.

Es ist ohne meine Erinnerung klar, daß diese Aufgabe auf dieselbe Art aufgelöst werden kann, wenn einer der zwey Puncte D und C diesseits, der andere jenseits der bekannten Linie AB liegt.

§. 603.

148. bis 153. Aufgabe. A, B, C sind drey Oerter auf dem Felde, deren Lage gegen [einander] [bekannt ist, D ist ein vierter Ort, von dem man nach A, B, C sehen und die Winkel m, n beobachten kann; man soll daraus die Lage des Punctes D, nähmlich die Entfernungen DA, DB, DC bestimmen.

Auflösung. Wenn nebst der Lage der drey Puncte A, B, C auch noch die Richtung der Magnetnadel auf dem Meßtische gegeben ist; so kann der Standpunct D (nach §. 601.) gefunden werden, wobey zugleich die dritte Visirlinie, wenn sie sich mit den zwey ersteren genau in einem Puncte durchschneidet, zur Versicherung dient, daß der Meßtisch richtig orientirt ist. Wenn hingegen die Richtung der Magnetnadel nicht gegeben ist; so wird die Lage des Punctes D auf folgende Art bestimmt. Fig. 148. bis 153.

Erster Fall, wenn der Ort D entweder in einer Seite des bekannten Dreyeckes ABC, Fig. 148., oder auf der Verlängerung liegt. Fig. 149. 148. 149.

Auflösung. Man beobachte den Winkel m, so sind in dem Dreyecke ADC alle drey Winkel nebst der Seite AC bekannt. Folglich kann daraus DA und DC gefunden werden.

Ist das Dreyeck ABC Fig. 148, 149 auf dem Meßtische gegeben, so stelle man denselben dergestalt über D, daß die zu AB gleichnahmige Linie genau in der Richtung der AB und der Punct D beynahe unter seinem correspondirenden Puncte liege, lege dann das Visirlineal an den zu C gleichnahmigen Punct, und visire nach C; so wird diese Visirlinie die zu AB gleichnahmige Linie, welche man im erforderlichen Falle verlängern muß, durchschneiden, und dadurch die Lage des Punctes D auf dem Meßtische bestimmen.

Es ist gar nicht schwer zwischen zwey unzugängigen Puncten A und B Fig. 148. einen dritten Punct D auf dem Felde zu finden, der mit A und B in einer und derselben Geraden liegt. Zu diesem Zwecke stellt sich ein Mann in einen beliebigen Punct e und ein zweyter in d auf die Verlängerung von Ae. Nun geht der Mann e in die Gegend von AB mit dem Auge seitwärts nach d sehend, und der Mann d folgt ihm dergestalt nach, daß er beständig in der Verlängerung von Ae bleibt. Wenn nun e so weit vorgerückt ist, daß er den Mann d und den Punct B in einer und derselben geraden Linie erblickt; so bleibt er stehen, und beyde Männer e und d befinden sich sonach in der Geraden AB, der erste in E und der zweyte in D.

Fig. 150. 151. Zweyter Fall, wenn der Ort D außer dem bekannten Dreyecke ABC liegt. Fig. 150, 151.

Auflösung. Man stelle sich vor, daß durch die zwey äußersten Puncte A, C und durch den gesuchten Punct D ein Kreis geführt sey, und denke sich die Gerade BD und die Sehne AE und CE gezogen; so ist $m = m'$, $n = n'$ (§. 372. II.). Nun kann in dem Dreyecke AEC aus der bekannten Seite AC und aus den daran liegenden Winkeln die Seite EC berechnet werden. Dann sind in dem Dreyecke EBC die zwey Seiten EC und BC nebst dem eingeschlossenen Winkel ECB bekannt; folglich kann dadurch der Winkel CBE Fig. 150. und auch CBD Fig. 151. gefunden werden. Endlich sind in dem Dreyecke CBD alle drey Winkel nebst der Seite BC bekannt; folglich kann dadurch DC und DB und dann auch DA bestimmt werden.

Da in diesem Falle auch $p = p'$ und $q = q'$ ist (§. 372. II.); so kann der Standpunct D, wenn das Dreyeck auf dem Meßtische gegeben ist, auf folgende Art durch Verzeichnung gefunden werden. Man stellt den Meßtisch über D, Fig. 150., und visirt aus dem gerade darüber liegenden Puncte des Meßtisches nach A, B, C, um die Winkel m und n zu erhalten. Nun trägt man den links beobachteten Winkel m rechts, und den rechts beobachteten Winkel n links auf die Linie ac des gegebenen Dreyeckes, um den Punct e zu erhalten. Darauf zieht man durch e und b eine unbestimmte gerade Linie. Endlich verzeichnet man $acd = aed$, und $cad = dec$, nähmlich $p' = p$, und $q' = q$; so ist, wegen $dabc \sim DABC$, in dem Durchschnittspuncte d die gesuchte Lage des Punctes D gefunden.

Wenn es nun erforderlich ist, aus dem Standpuncte D nach anderen Gegenständen zu visiren, um entweder einige bereits gezogene Visirlinien zu durchschneiden, oder um Visirlinien zu erhalten, die man in folgenden Standpuncten durchschneiden muß; so ist es allerdings nothwendig den Meßtisch in D zu orientiren. Dieses geschieht, wenn man den Meßtisch mit dem bereits gefundenen Puncte d gerade über D stellt, das Visir- oder Meßlineal an d und e anlegt, und den Meßtisch so lange herumdreht, bis man durch die Dioptern des Meßlineals den Punct

C erblickt. Sodann legt man bey dieser Stellung des Meßtisches das Meßlineal an da und db, und untersucht, ob man auch die zwey Puncte A und B genau in dieser Richtung erblicke, welches eintreffen muß, wenn sich bey der Verzeichnung der Figur dabc kein Fehler eingeschlichen hat. Fig. 150. 151.

Aus Fig. 150. ist leicht zu ersehen, daß die Lage der Geraden BD und auch des Punctes D unbestimmt bleibt, wenn die beobachteten Winkel m, n den bekannten Winkeln BCA, BAC des gegebenen Dreyeckes ABC gleich sind, oder welches einerley ist, wenn $m+n+ABC=180^{o}$ wird, weil in diesem Falle die Puncte B und E über einander fallen.

Es ist schwer, nach der angeführten Art in Fig. 150. den Punct D auf dem Meßtische durch Verzeichnung vollkommen genau zu bestimmen. Man erhält seinen Endzweck leichter und richtiger, wenn man das gegebene Dreyeck auf dem Meßtische Fig. 151. mit einem dreyfüßigen Zirkel absticht, und dasselbe auf die gezogenen Visirlinien DA, DB, DC dergestalt durch bloßes Versuchen überträgt, daß der Punct a genau in der Visirlinie DA, b in DB, und c in DC liege. Sodann nimmt man mit dem dreyfüßigen Zirkel auch das Dreyeck a'Dc', und überträgt es auf die Linie ac, um die gesuchte Lage des Punctes D auf dem Meßtische in d zu erhalten.

Auch läßt sich die Lage des Punctes D auf dem Meßtische mittelst eines durchsichtigen Papiers bestimmen. Man zieht nähmlich auf einem Stücke durchsichtigen Papiers Fig. 150. die Visirlinien DA, DB, DC, und legt dann durch das Versuchen dieses durchsichtige Papier dergestalt auf das gegebene Dreyeck abc, daß die Visirlinie DA genau durch a, DB durch b, und DC durch c geht. Endlich bemerkt man in dieser Lage des durchsichtigen Papiers den gemeinschaftlichen Durchschnittspunct der drey gezogenen Visirlinien auf dem Meßtische; so ist dadurch die gesuchte Lage des Punctes D auf dem Meßtische in d gefunden.

Dritter Fall, wenn die drey gegebenen Puncte A, B, C in einer geraden Linie liegen. Fig. 152. 152.

Fig. 152. Auflösung. Man verfahre eben so, wie bey dem vorhergehenden zweyten Falle; so wird man die gesuchte Lage des Punctes D erhalten.

153. Vierter Fall, wenn der Ort D in dem bekannten Dreyecke ABC liegt. Fig. 153.

Auflösung. Man stelle sich vor, daß durch den Ort D, und durch A und C ein Kreis geführt, und die Sehnen AE und CE gezogen seyen; so ist $d' = d =$ der Ergänzung des gemessenen Winkels n zu 180°, und $c' = c =$ der Ergänzung von m. Nun kann in dem Dreyecke AEC aus der bekannten Seite AC, und aus den daran liegenden Winkeln die Seite EC gefunden werden. Ferner sind in dem Dreyecke ECB die zwey Seiten EC und CB sammt dem eingeschlossenen Winkel bekannt; folglich kann daraus der Winkel q und auch CBE bestimmt werden. Endlich sind in dem Dreyecke CDB alle drey Winkel sammt der Seite BC bekannt; folglich kann hieraus DC und DB, und dann auch DA gefunden werden.

Wenn die drey Puncte A, B, C (Fig. 153.) auf dem Meßtische gegeben sind, so kann man auf demselben die Lage des Punctes D mit Hülfe eines dreyfüßigen Zirkels, oder auch mittelst eines durchsichtigen Papiers eben so bestimmen, wie es bey dem zweyten Falle gezeigt worden ist.

§. 604.

154. 155. 156. 157. Aus Fig. 154, 155, 156, 157 ist deutlich zu ersehen, daß man die nach der vorigen Aufgabe (§. 603.) gesuchte Lage des Punctes D sehr leicht berechnen kann, wenn nur einmahl der Winkel $x = BAD$ bekannt ist. Dieser Winkel BAD kann aus dem gegebenen Dreyecke ABC und aus den zwey beobachteten Winkeln m, n auf folgende Art gefunden werden.

Es sey die bekannte Seite $AB = a$, $BC = b$, der eingeschlossene bekannte Winkel $ABC = p$, und der gesuchte Winkel $BAD = x$; so ist

in Fig. 154. und 157. Fig.

$$BCD = 360^0 - p - m - n - x = q - x,$$ 154.

in Fig. 155. ist 155.

$$BCD = p - m - n - x = q - x,$$ 156.

und in Fig. 156. ist 157.

$$BCD = 180^0 - m - n - x = q - x.$$

Nun ist

$$BD : \sin x = a : \sin m$$

und

$$\sin(q-x) : BD = \sin n : b,$$

folglich

$$\sin(q-x) : \sin x = a \sin n : b \sin m$$

oder

$$\sin q \cot x - \cos q : 1 = a \sin n : b \sin m,$$

woraus

$$\cot x = \cot q + \frac{a \sin n}{b \sin m \sin q}$$

gefunden wird. Setzt man endlich

$$\frac{a \sin n}{b \sin m \sin q} = \cot \varphi,$$

so wird

$$\cot x = \cot q + \cot \varphi$$
$$= \frac{\cos q \sin \varphi + \sin q \cos \varphi}{\sin q \sin \varphi}$$
$$= \frac{\sin(q+\varphi)}{\sin q \sin \varphi}.$$

Bestimmt man demnach φ aus

$$\cot \varphi = \frac{a \sin n}{b \sin m \sin q}$$

oder aus

$$\tang \varphi = \frac{b \sin m \sin q}{a \sin n},$$

so findet man x aus

$$\cot x = \frac{\sin(q+\varphi)}{\sin q \sin \varphi}$$

oder aus

$$\tang x = \frac{\sin q \sin \varphi}{\sin(q+\varphi)}.$$

Fig. 154. 155. 156. 157. Kennt man den Winkel x so ist

$BCD = q - x$, $ABD = 180^\circ - m - x$, $DBC = 180^\circ - n - q + x$

und man erhält die in den Dreyecken ABD und BCD liegenden Seiten AD, BD, CD (vermöge §. 563 I.) nach den Gleichungen

$$AD = \frac{a \sin(m+x)}{\sin m}, \quad BD = \frac{a \sin x}{\sin m}, \quad CD = \frac{b \sin(n+q-x)}{\sin n}$$

Beyspiel. Es sey Fig. 154.

$p = 126^\circ\ 40'$, $m = 25^\circ$, $n = 36^\circ$, $a = 621$ Kl., $b = 919$ Kl.;

so ist $q = 172^\circ\ 20'$.

Nun kann x mit Hülfe einer trigonometrischen Tafel auf folgende Art berechnet werden.

Es ist

$\log a = 2{,}7930916$	$\log \sin(q+\varphi) = 7{,}8573853^{n*})$
$\log \sin n = 9{,}7692187$	
$2{,}5623103$	$\log \sin q = 9{,}1251872$
$\log b = 2{,}9633155$	$\log \sin \varphi = 9{,}1478082$
$\log \sin m = 9{,}6259483$	
$\log \sin q = 9{,}1251872$	$\log \cot x = 9{,}5843899\,n$
$\log \cot \varphi = 0{,}8478593$	$x = 111^\circ\ 0'\ 34''$
$\varphi = 8^\circ\ 4'\ 45{,}3''$	$q - x = 61\ 19\ 26$
$q = 172\ 20\ 0$	$m + x = 136\ 0\ 34$
$q + \varphi = 180\ 24\ 45{,}3$	$n + q - x = 97\ 19\ 26$

$\log \frac{a}{\sin m} = 3{,}1671433$	$\log \frac{b}{\sin n} = 3{,}1940968$
$\log \sin(m+x) = 9{,}8417146$	$\log \sin(n+q-x) = 9{,}9964423$
$\log \sin x = 9{,}9701242$	
$\log AD = 3{,}0088579$	$\log CD = 3{,}1905391$
$\log BD = 3{,}1372675$	$CD = 1551$
$AD = 1021$	
$BD = 1372$	

*) Das dem Logarithmus angehängte n deutet an, daß die Zahl, welcher dieser Logarithme zugehört, negativ ist.

Fig.

II. Abschnitt.

Von dem Centriren der Winkel, von der Reduction der schiefgeneigten Winkel auf den Horizont, von der Verbesserung der Höhen- und Tiefenwinkel, und von dem Unterschiede des wahren und scheinbaren Horizontes.

I. Vom Centriren der Winkel.

§. 605.

Aufgabe. Bey den Dreyecken ABC Fig. 158. Nr. 1, 2, 158.
3, 4, 5, 6, konnte wegen einiger Hinderniße der Winkel ACB nicht gemeßen werden. Man hat daher den Winkelmeßer in D geßellt, und den Winkel ADB beobachtet. Nun soll daraus der Winkel ACB gefunden werden.

Auflösung. Bey dem Dreyecke Nr. 1. ist (vermöge §. 379.)

$$C = ADB - CAD = D - CAD;$$

bey Nr. 2. ist

$$C = D + CAD;$$

bey Nr. 3. ist

$$m + n = p + CAD + q + CBD,$$

und folglich

$$p + q = m + n - CAD - CBD,$$

nähmlich

$$C = D - CAD - CBD;$$

bey Nr. 4. ist

$$m + n = p + CAD + q + CBD,$$

nähmlich

$$C = D + CAD + CBD;$$

bey Nr. 5. ist

$$E = D + CAD \text{ und auch } E = C + CBD;$$

folglich ist

$$C + CBD = D + CAD,$$

Fig. nähmlich

158. $$C = D + CAD - CBD;$$

endlich ist bey dem 6ten Dreyecke

$$C = D - CAD + CBD.$$

Wenn man nun die Winkel CAD und CBD auf irgend eine Art bestimmen könnte, so wäre es sehr leicht aus dem gemessenen Winkel D den gesuchten Winkel C zu finden. Die Winkel CAD und CBD können nach einer von folgenden zwey Methoden am füglichsten bestimmt werden.

I. Man nehme in der Linie AC einen beliebigen Punct d von der Beschaffenheit an, daß man von d nach A und D sehen könne, messe dann die Winkel ADd und AdD, und ziehe ihre Summe von 180° ab, so gibt der Ueberrest den Winkel CAD. Eben so kann der Winkel CBD bestimmt werden.

II. Man fälle aus dem Puncte D die Senkrechte Dd auf AD, und Dd′ auf BD, und messe diese Senkrechten Dd, Dd′ auf das Genaueste. Sodann berechne man die Seite AD aus der Seite AB und aus dem Winkel ABD Fig. 158. Nr. 1, 2, welche schon nach einer vorausgegangenen Messung oder Berechnung für bekannt angenommen werden, indem man sagt:

$$\sin D : AB = \sin B : AD.$$

Endlich findet in dem rechtwinkeligen Dreyecke ADd folgende Gleichung statt:

$$Dd = AD \cdot \text{tang } dAD,$$

woraus man den Winkel dAD oder CAD bestimmt. Bey den Dreyecken 3, 4, 5, 6 werden die Seiten AD und BD aus folgenden Proportionen näherungsweise gefunden:

$$\sin D : AB = \sin ABC : AD,$$
$$\sin D : AB = \sin CAB : BD.$$

Sobald nun die Seiten AD, BD bekannt sind; so kann man die Winkel CAD und CBD, oder DAd und DBd′ bestimmen. Es ist nähmlich

$$\text{tang } DAd = \frac{Dd}{AD}, \quad \text{tang } DBd' = \frac{Dd'}{BD}.$$

Die Seiten AD und BD werden durch die angeführten Proportionen keineswegs genau erhalten. Jedoch hat dieser Fehler

keinen merklichen Einfluß auf die Bestimmung des Winkels CAD Fig.
oder CBD, wenn nur die Seiten AD und BD in Hinsicht auf die 158.
Senkrechten Dd und Dd′ sehr groß sind. Man setze z. B. die wirkliche Länge AD = 5000 Kl. und die Senkrechte Dd = 2 Kl.; so ist der wahre Winkel DAd = DAC = 0° 1′ 22,5″. Man nehme ferner an, daß man durch Rechnung AD = 5050 Kl. gefunden hätte; so findet man durch fernere Rechnung den Winkel DAd = DAC = 0° 1′ 21,7″; folglich nur um $\frac{8}{10}$″ zu klein.

II. Von der Reduction der Winkel auf den Horizont.

§. 606.

Aufgabe. Es seyen A, B, C drey Gegenstände, die in 159.
verschiedenen Horizonten liegen. Wenn man den Winkelmesser in A in eine horizontale Lage bringt, um den horizontalen Winkel EAD zu beobachten; so sollen die Puncte B und C so beschaffen seyn, daß man in dieser Lage nach denselben nicht visiren kann, weil die Fernröhre des Winkelmessers bey horizontaler Stellung desselben keine verticale Bewegung gestatten. Man ist daher genöthigt, den Winkelmesser in die schiefe Lage BAC zu bringen und den schief geneigten Winkel BAC zu beobachten, um aus ihm den horizontalen Winkel EAD zu bestimmen.

Auflösung. Nachdem man den schief geneigten Winkel BAC = a beobachtet hat; bringe man den Winkelmesser in die verticale Lage und messe den Höhenwinkel EAB, und den Tiefenwinkel DAC. Aus diesen Höhen- oder Tiefenwinkeln und aus dem schief geneigten Winkel kann der horizontale Winkel sehr leicht auf folgende Art berechnet werden.

Man denke sich die Verticallinie AZ, durch AZ und B die Vertical-Ebene AZS, ferner durch AZ und durch C die Vertical-Ebene AZT, durch A, B, C aber die schief geneigte Ebene AST. Man denke sich auch aus dem Mittelpuncte A eine Kugelfläche von einem beliebigen Halbmesser AZ; so werden auf dieser Kugelfläche die gemeinschaftlichen krummen Durchschnittslinien der angeführten drey Ebenen und der Kugelfläche die Bogen größter

Fig. 159. Kreise ZT, TS, SZ entstehen und das sphärische Dreyeck ZST bilden. Wenn man nun durch A die horizontale Ebene QAP legt; so ist ZP = 90°, ZQ = 90°, ST = dem gemessenen schief geneigten Winkel BAC = a, QS = dem gemessenen Höhenwinkel EAB = h, und PT = dem gemessenen Tiefenwinkel DAC = −h′, wenn wir Höhenwinkel für positiv, also Tiefenwinkel für negativ ansehen. Da nun

$$ZS = ZQ - QS = 90^\circ - h$$
$$ZT = ZP + PT = 90^\circ - h'$$

ist; so sind in dem sphärischen Dreyecke ZST alle drey Seiten bekannt. Folglich kann daraus der sphärische Winkel SZT, welcher dem zu suchenden horizontalen Winkel PAQ oder α gleich ist, (nach §. 576.) berechnet werden.

Es ist nähmlich

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+h-h')\,\sin\frac{1}{2}(a+h'-h)}{\cos h\cos h'}}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(a-h-h')\,\cos\frac{1}{2}(a+h+h')}{\cos h\cos h'}}$$

$$\tan\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+h-h')\,\sin\frac{1}{2}(a+h'-h)}{\cos\frac{1}{2}(a-h-h')\,\cos\frac{1}{2}(a+h+h')}}.$$

Es sey z. B.

a = 95° 48′
h = 4 50, ein Höhenwinkel
h′ = −11 30, ein Tiefenwinkel; so ist

	$\log\sin\frac{1}{2}(a+h-h') = 9{,}9189146$
	$\log\sin\frac{1}{2}(a+h'-h) = 9{,}8056472$
	9,7245618
	$\log\cos h = 9{,}9984529$
	$\log\cos h' = 9{,}9911927$
	19,7349162
$h-h' = 16\ 20$	
$a+h-h' = 112\ 8$	
$a+h'-h = 79\ 28$	
$\frac{1}{2}(a+h-h') = 56\ 4$	
$\frac{1}{2}(a+h'-h) = 39\ 44$	
	$\log\sin\frac{1}{2}\alpha = 9{,}8674581$
	$\frac{1}{2}\alpha = 47^\circ 28' 30''$
	$\alpha = 94\ 57\ 0.$

Bey der trigonometrischen Aufnahme einer Reihe von Dreyecken muß diese Reduction der Winkel auf den Horizont jederzeit vorgenommen werden, wenn man die horizontalen Winkel nicht unmittelbar messen kann, weil es erforderlich ist, die Längen der Seiten aller Dreyecke in demjenigen Horizonte zu berechnen, in welchem die Grundlinie gemessen worden ist. Fig.

III. Von der Verbesserung der Höhen- und Tiefenwinkel und von dem Unterschiede des wahren und scheinbaren Horizontes.

§. 607.

Es sey ACE ein Stück des Durchschnittes unserer Erdkugel; es seyen ferner AC, EC zwey Halbmesser und folglich die Richtungen der Schwerkraft oder die Richtungen frey fallender Körper in A und E; endlich sey AD senkrecht auf AC, und BF senkrecht auf BC: so ist AD eine durch den Punct A, und BF eine durch den Punct B (z. B. durch den Gipfel eines Berges) gezogene Horizontallinie. Eine solche Horizontallinie, nähmlich eine gerade Linie, welche auf der Richtung der Schwerkraft senkrecht steht, muß man eine scheinbare Horizontallinie nennen, um sie von der wahren Horizontallinie zu unterscheiden, weil nur diejenige Linie, deren alle Puncte von dem Mittelpuncte der Erde gleich weit entfernt sind, nähmlich der Bogen AE eine wahre Horizontallinie genannt wird. Eben so heißt eine durch den Punct A auf AC senkrecht gelegte ebene Fläche die scheinbare Horizontalfläche des Punctes A; hingegen wird eine durch den Punct A gelegte Fläche, deren alle Puncte gleich weit von C abstehen, nähmlich ein Stück der Kugelfläche, deren Halbmesser der Abstand des Punctes A von C dem Mittelpuncte der Erde ist, die wahre Horizontalfläche des Punctes A genannt. Nur dann kann man von zwey oder mehreren Puncten sagen, daß sie in einem und demselben wahren Horizonte liegen, wenn sie gleich weit von dem Mittelpuncte der Erde entfernt sind. Wenn man aus A nach B, oder 160.

Fig. 160. aus B nach A visirt, so heißt DAB der scheinbare Höhenwinkel, und FBA der scheinbare Tiefenwinkel; EAB und GBA hingegen heißen die wahren Höhen- und Tiefenwinkel, wenn man im zweyten Falle durch B den Kreisbogen oder wahren Horizont BG sich denkt. Eben so ist BD oder vielmehr die Senkrechte Bd die scheinbare Erhöhung des Punctes B über den Horizont des Punctes A. Das Stück ED des verlängerten Halbmessers zwischen dem wahren und scheinbaren Horizonte des Punctes A heißt der Unterschied oder vielmehr die Erhöhung des scheinbaren Horizontes für die Entfernung AE.

Wenn eine sehr weit entfernte Höhe (nach §. 592.) zu bestimmen ist, so ist es allerdings nothwendig aus dem beobachteten scheinbaren Höhenwinkel den wahren Höhenwinkel zu suchen, und dann aus diesem und aus der horizontalen Entfernung die verlangte Höhe zu berechnen. Wie aus einem scheinbaren Höhen- oder Tiefenwinkel der wahre zu finden sey, lehrt folgende Aufgabe.

§. 608.

Aufgabe. Aus dem gemessenen scheinbaren Höhen- oder Tiefenwinkel, aus der gegebenen horizontalen Entfernung AE zweyer Gegenstände A und B, und aus dem Halbmesser der Erde AC den wahren Höhen- oder Tiefenwinkel zu finden.

Auflösung. In Fig. 160. ist

$$EAB = DAB + EAD,$$

und

$$GBA = FBA - GBF,$$

hingegen ist in Fig. 161.

$$EAB = EAD - DAB.$$

Es ist aber $EAD = \frac{1}{2}C$, und auch $GBF = \frac{1}{2}C$ (vermöge §. 371.), weil DA und FB in A und B die Kreisbogen AE und BG berühren. Es ist demnach auch Fig. 160.

$$EAB = DAB + \tfrac{1}{2}C,$$

$$GBA = FBA - \tfrac{1}{2}C,$$

und Fig. 161.

$$EAB = \tfrac{1}{2}C - DAB.$$

Setzen wir nun den Halbmesser der Erde AC = a, Fig.
und die horizontale Entfernung AE = b, 160.
welche mit dem Bogen AE, und auch mit AD einerley ist, so 161.
lange der Winkel C noch sehr klein ist; so kann der Winkel C auf folgende Art gefunden werden. Es ist der ganze zu AC gehörige Umkreis $= 2a\pi$ (vermöge §. 452.); ferner verhält sich

$$2a\pi : 360^{\circ} = b : C^{\circ};$$

folglich ist

$$C = \frac{360b}{2a\pi} = \frac{180b}{a\pi} \text{ Grad} = \frac{10800}{a\pi} b \text{ Minuten.}$$

Nun ist der Halbmesser der Erdkugel a = 3356611 Wiener Klafter; folglich ist nach gehöriger Reduction C = 0,00102b Minuten, wofern die Entfernung AE = b in Wiener Klaftern ausgedrückt ist. Endlich ist (Fig. 160.)

EAB = DAB + 0,00051b Minuten,
GBA = FBA — 0,00051b Minuten,

und Fig. 161.

EAB = 0,00051b Minuten — DAB.

Es sey z. B. Fig. 160. der gemessene scheinbare Höhenwinkel DAB = 4°57′ und die horizontale Entfernung AE = b = 1960 Wiener Klafter, so ist der wahre Höhenwinkel

EAB = 4° 57′ + 0,00051 . 1960 Minuten
= 4° 57′ + 1′ = 4° 58′.

Da der Unterschied zwischen dem wahren und scheinbaren Höhenwinkel in einer Entfernung von 1960 oder beynahe 2000 Wiener Klaftern erst eine einzige Minute beträgt; so ist offenbar, daß man bey denjenigen Winkelmessern, mit denen aufs höchste einzelne Minuten beobachtet werden können, die angeführte Verbesserung in den meisten Fällen außer Acht lassen kann, weil man selten auf Gegenstände visirt, die über 2000 Wiener Klafter entfernt sind. Um so mehr kann diejenige Veränderung des scheinbaren Höhenwinkels außer Acht gelassen werden, die von der Brechung der Lichtstrahlen verursacht wird, weil sie nach der wahrscheinlichsten Meinung nur $\frac{1}{13}$ des Mittelpunctswinkels beträgt. Es ist nähmlich aus sicheren Erfahrungen bekannt, daß der Lichtstrahl

Fig. 162. von einem nahe am Horizonte befindlichen Gegenstande B (Fig. 162.) nach einer etwas in die Höhe gebogenen krummen Linie in das Auge des Beobachters in A gelangt. Da nun der Beobachter in A die Lage des Gegenstandes B nach der letzten Richtung des Lichtstrahles, nähmlich nach der Richtung der Tangente Ab beurtheilt; so wird dadurch der wirkliche scheinbare Höhenwinkel DAB um den Winkel BAb zu groß beobachtet. Dieser Refractionswinkel BAb aber ist nach der wahrscheinlichsten Meinung $= \frac{1}{18}$ ACE $= \frac{1}{9}$ EAD. Nach eben dieser Meinung ist Bb $= \frac{1}{9}$ ED.

§. 609.

163. Aufgabe. Für jede gegebene Entfernung AD, welche man noch ohne merklichen Fehler = AB setzen kann, die Erhöhung des scheinbaren Horizontes, nähmlich BD zu finden.

Auflösung. Es ist vermöge §. 411.

$$BD : AD = AD : DG;$$

folglich ist auch

$$BD = \frac{AD^2}{DG} \text{ oder } = \frac{AB^2}{DG},$$

weil wir AB nur so groß angenommen haben, daß man ohne merklichen Fehler AD = AB setzen kann. Ferner kann man auch in eben derselben Voraussetzung ohne merklichen Fehler

$$DG = BG = AF$$

annehmen. Es ist sodann

$$BD = \frac{AB^2}{AF}.$$

Es sey z. B. AB = 200 Wiener Klafter; so ist $BD = \frac{40000}{6713223}$, weil der Durchmesser der Erde AF = 6713223 Wiener Klafter ist, nähmlich es ist BD = 0,00595 Wiener Klafter = 5,148 Linien.

Diese Methode, die Erhöhung des scheinbaren Horizontes für eine gegebene Entfernung zu bestimmen, hat zwar keine vollkommene geometrische Schärfe; jedoch weicht sie bey nicht gar zu großen Entfernungen, die in der Ausübung am gewöhnlichsten vorkommen, nicht merklich von der Wahrheit ab, wovon man

ſich auf folgende Art überzeugen kann. Es iſt vollkommen genau Fig. 163.

$$BD = CD - CB = CD - AC.$$

Es iſt aber in dem rechtwinkeligen Dreyecke ACD die Hypothenuſe

$$CD = \sqrt{(AC^2 + AD^2)};$$

folglich iſt auch

$$BD = \sqrt{(AC^2 + AD^2)} - AC.$$

Setzen wir nun wie im vorigen Falle AD = 200, und AC = 3356611 Wiener Klafter; ſo iſt

$\sqrt{(AC^2 + AD^2)} = \sqrt{11266837445321} = 3356611{,}00596$,

und folglich

BD = 3356611,00596 − 3356611 = 0,00596 Klafter = 5,149 Linien; nähmlich es iſt die wahre Erhöhung des ſcheinbaren Horizontes für die Weite von 200 Kl. nur um $\frac{1}{1000}$ Linie größer, als ſie nach der vorigen Art gefunden wurde.

§. 610.

Da man nun für eine beſtimmte Entfernung z. B. für die Entfernung von 200 Kl. die Erhöhung des ſcheinbaren Horizontes = 5,15 Linien kennt, ſo kann für jede andere in Wiener Klaftern gegebene Entfernung b die zugehörige Erhöhung x in Linien auf folgende Weiſe berechnet werden. In Fig. 163. iſt (vermöge des Vorhergehenden)

$$BD = \frac{AB^2}{AF}, \text{ und } MN = \frac{AM^2}{AF};$$

folglich iſt auch

$$BD : MN = \frac{AB^2}{AF} : \frac{AM^2}{AF},$$

oder

$$AB^2 : AM^2 = BD : MN.$$

Setzen wir nun AB = 200 Wiener Kl.; ſo iſt BD = 5,15 Linien. Nehmen wir ferner AM = b Wiener Klafter und die zugehörige Erhöhung des ſcheinbaren Horizontes MN = x Linien an, und ſubſtituiren dieſe Werthe in der Proportion; ſo iſt

$200^2 : b^2 = 5{,}15 : x$, nähmlich $x = \frac{5{,}15\,b^2}{40000} = 0{,}00012875b^2$ Wiener Linien.

Fig. 163. So z. B. findet man nach dieser Formel in einer Entfernung von 1000 Wiener Klaftern die Erhöhung des scheinbaren Horizontes = 128,7 Linien = 10 Zoll $8\frac{2}{3}$ Linie; für die Entfernung 560 Wiener Klafter, die Erhöhung 40,4 Linien = 3 Zoll 4,4 Linien u. s. w. Nach dieser Formel sind die Erhöhungen des scheinbaren Horizontes für die von 10 zu 10 Klaftern auf einander folgenden Entfernungen von 50 Wiener Klaftern angefangen, in Linien berechnet, und in folgende Tafel eingetragen worden, bey deren Gebrauche man in der ersten verticalen Columne die Hunderte, in der ersten horizontalen Zeile aber die Zehner der in Klaftern angegebenen Entfernung aufsucht, und aus demjenigen Fache, welches sowohl zur Rechten der Hunderte als auch unter den Zehnern steht, die gesuchte Erhöhung des scheinbaren Horizontes entnimmt. Es ist einleuchtend, daß diese Tafel nöthigen Falls sehr leicht fortgesetzt werden kann.

Tafel

zur Bestimmung der Erhöhung des scheinbaren Horizontes.

Entfernung.	00	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0	.	.	.	.	.	0·3	0·5	0·6	0·8	1·0
1	1·3	1·6	1·9	2·2	2·5	2·9	3·3	3·7	4·2	4·6
2	5·1	5·7	6·2	6·8	7·4	8·0	8·7	9·4	10·1	10·8
3	11·6	12·4	13·2	14·0	14·9	15·8	16·7	17·6	18·6	19·6
4	20·6	21·6	22·7	23·8	24·9	26·1	27·2	28·4	29·7	30·9
5	32·2	33·5	34·8	36·2	37·5	38·9	40·4	41·8	43·3	44·8
6	46·3	47·9	49·5	51·1	52·7	54·4	56·1	57·8	59·5	61·3
7	63·1	64·9	66·7	68·6	70·5	72·4	74·3	76·3	78·3	80·3
8	82·4	84·5	86·6	88·7	90·9	93·0	95·2	97·4	99·7	102·0
9	104·3	106·6	109·0	111·4	113·8	116·2	118·7	121·1	123·7	126·2

Fig.

III. Abschnitt.

Vom Nivelliren.

§. 611.

Nivelliren (abwägen) heißt die Höhenunterschiede von mehreren gegebenen Puncten einer Linie oder einer Gegend mittelst horizontaler Visirstrahlen durch die wirkliche Ausmessung bestimmen. Wenn z. B. der Punct B in einer sehr großen Entfernung von A nur um etwas Weniges über den wahren Horizont des Punctes A erhöht wäre (Fig. 164.); so ist offenbar, daß man diese Erhöhung nach §. 595. nicht mit hinlänglicher Genauigkeit bestimmen könne. Es ist jedoch zuweilen erforderlich, diese Erhöhung LB oder den Höhenunterschied der zwey Puncte A und B, nähmlich den Unterschied ihrer Abstände von dem Mittelpuncte der Erde, auf das Genaueste zu bestimmen. Dieses geschieht durch das Nivelliren auf folgende Art. Aus einem in der Mitte zwischen A und L befindlichen Puncte P denke man sich die Verticallinie PC, und aus einem Puncte derselben C die Visirstrahlen CD und CE, welche durch irgend ein Hülfsmittel in den scheinbaren Horizont des Punctes C gebracht sind. In A und B bemerke man ferner auf vertical gestellten Latten die Puncte D und E, wo die Visirstrahlen CD und CE in einem und demselben scheinbaren Horizonte die Latten treffen, und messe die Höhen AD, BE; so ist AD — BE = BL = AH = dem Höhenunterschiede der zwey Puncte A und B. Denn man denke sich nur durch C den wahren Horizont FCG, durch B den wahren Horizont BH, und durch A den wahren Horizont AL; so ist FD = GE, weil der Punct P und auch C in der Mitte zwischen den Verticallinien AD und BE angenommen, und weil in gleichen Entfernungen von eben demselben Puncte die Erhöhungen des scheinbaren Horizontes gleich sind, welches leicht einzusehen ist, wenn man die Verticallinien AD, PC und LE so weit verlängert denkt, bis sie in dem Mittelpuncte der Erde zusammen stoßen. Ferner ist auch wegen der concentrischen Kreisbogen oder wahren Horizonte HF = BG, 164.

Fig. 164. AH=LB, und AF=LG; folglich ist auch AF+FD=LG+GE, nähmlich AD=LE. Es ist aber LE—BE=LB; folglich auch AD—BE=LB.

Wären die zu nivellirenden Puncte M und B von P nicht gleich weit entfernt; so müßte man für die Entfernungen PM und PL, oder CN und CE die Erhöhungen des scheinbaren Horizontes QN und GE (nach §. 610.) berechnen, jene QN von der gemessenen Höhe des Visirstrahles MN, und diese GE von BE abziehen, und dann die dadurch verbesserten Höhen MQ und BG von einander subtrahiren, um den Höhenunterschied BL zu erhalten.

Wenn der Punct P genau in der Mitte zwischen A und L sich befindet; so ist es nicht unumgänglich nothwendig, daß beyde Visirstrahlen CD und CE in einem und demselben scheinbaren Horizonte liegen, sondern es ist hinlänglich, wenn sie nur beyderseits mit der Verticallinie gleiche Winkel eCP=dCP einschließen. Denn es ist dann noch immer Ad—Be=LB, weil in den zwey vollkommen gleichen Dreyecken DCd und CEe die Seiten Dd und Ee einander gleich sind.

§. 612.

165. Das Instrument, wodurch man einen Visirstrahl in den scheinbaren Horizont bringt, wird ein Nivellir-Instrument, eine Nivellirwage oder eine Wasserwage genannt. Das einfachste Nivellir-Instrument ist die sogenannte Wasserwage im eigentlichen Sinne. Die Wasserwage besteht aus einer blechernen an beyden Enden aufwärts gekrümmten Röhre MN, bey der an beyden Enden gläserne hohle Cylinder P, Q eingekittet sind (Fig. 165.). Mit Hülfe dieser Wasserwage wird ein Visirstrahl in den scheinbaren Horizont gebracht, wenn man die Röhre mit Wasser füllt, und über die beyden Oberflächen desselben durch die gläsernen Cylinder P, Q visirt, weil das Wasser die Eigenschaft hat, daß die Oberfläche desselben in mittheilenden Röhren sich in einen und denselben Horizont stellt. Diese Wasserwage hat die vorzügliche Eigenschaft, daß sie beym Gebrauche nie einer Berichtigung bedarf; nur führt sie die beträchtliche Unbequemlichkeit

mit sich, daß man mit ihr auf größere Entfernungen, als etwa 20 Klafter, nicht mehr hinlänglich scharf visiren kann. Fig. 165.

Außer einem Nivellir-Instrumente sind auch noch zwey Nivellirlatten zur Ausübung erforderlich. Sie sind ungefähr 2 Klafter lang, nach ihrer ganzen Länge in Schuhe, Zolle und Linien eingetheilt, und so beschaffen, daß sich auf jeder derselben ein viereckiges Zielbret auf- und abwärts bewegen, und in jeder Stelle mit einer Schraube befestigen läßt. Die vordere Fläche des Zielbretes ist durch zwey senkrechte Linien in vier gleiche Theile getheilt, wovon zwey entgegen gesetzte Theile schwarz und die übrigen zwey Theile weiß überstrichen werden. Es ist für die Ausübung sehr bequem, wenn die Abmessungen des Zielbretes an beyden Nivellirlatten gleich sind.

§. 613.

Aufgabe. Den Höhenunterschied zweyer Puncte A und B durch das Nivelliren zu finden, wenn diese Puncte so beschaffen sind, daß man mit einer dazwischen gestellten Wasserwage C nach beyden visiren kann.

Auflösung. Man schicke einen Gehülfen mit einer Nivellirlatte nach A und einen anderen nach B, visire von P über die Oberflächen P, Q nach E, und lasse daselbst den Gehülfen bey vertical gestellter Latte das Zielbret nach verabredeten Zeichen in eine solche Lage bringen, daß der Visirstrahl genau den Zielpunct treffe. In dieser Lage wird nun das Zielbret befestigt, und die Anzahl Schuhe, Zolle und Linien von B bis an den unteren Rand des Zielbretes gezählt, wenn die Abmessungen des Zielbretes an beyden Nivellirlatten gleich sind, im Gegentheile muß man die ganze Entfernung von B bis auf den Zielpunct messen. Dasselbe geschieht in A, nachdem man auch von Q über die Oberflächen Q, P nach D visirt hat. Wird nun die Erhöhung des Zielbretes an der Nivellirlatte BE von der Erhöhung AD abgezogen, so gibt der Ueberrest den gesuchten Höhenunterschied $bB = aA$; denn es ist $bB = bE - BE$. Es ist aber $bE = AD$, wenn man zwischen den Senkrechten AD, bE die Parallelen aB, Ab zu dem Horizonte DE sich denkt; folglich ist auch $bB = AD - BE$.

Fig.

§. 614.

Außer der oben beschriebenen Wasserwage (Fig. 165.) gibt es noch sehr viele andere Einrichtungen der Nivellirwagen, mittelst deren man ebenfalls entweder durch die Oberfläche eines stillstehenden Wassers, oder durch einen frey hängenden Perpendikel (Senkel), oder endlich mittelst der Wasserwage mit der Luftblase (Fig. 78.) einen horizontalen Visirstrahl erhält. Damit man nun mit einem Nivellir-Instrumente auf große Entfernungen genau visiren könne, ist es erforderlich an demselben ein Fernrohr anzubringen, welches aus einem Ocular- und einem Objectivglase besteht, in deren gemeinschaftlichen Brennpuncte sich ein sehr feines Fadenkreuz befindet.

166. Für die Ausübung ist die Wasserwage mit der Luftblase und mit dem einfachen Fernrohre sehr bequem (Fig. 166.). Bey dieser ist AB das Fernrohr, bey A das Ocularglas, und bey B das Objectivglas; MN ist die gläserne Röhre mit der Luftblase in einem messingenen Gehäuse, welches auf das messingene Fernrohr dergestalt befestigt ist, daß es sich mittelst der Rectificir-Schraube y nach Erforderniß etwas höher oder niedriger stellen läßt; C ist ein Zirkelgewinde, ab ein Arm von Eisen oder Messing unter dem Zirkelgewinde an die Hülse D befestigt, x die Elevations-Schraube, wodurch sich das Fernrohr sammt der darauf befindlichen Röhre mit der Luftblase nach Belieben erhöhen oder erniedrigen läßt, nachdem man dieses Instrument auf ein dazu gehöriges Stativ gesetzt hat.

§. 615.

Dieses eben beschriebene Nivellir-Instrument muß bey jeder vorzunehmenden Nivellir-Operation berichtiget (rectificirt) werden, nähmlich man muß es so einrichten, daß man mittelst desselben an einem jeden beliebigen Orte einen horizontalen Visirstrahl erhalten kann, welches nach einer von folgenden drey Arten sehr leicht geschehen kann.

167. Erste Berichtigungsmethode. (Fig. 167.). Man messe auf einem ziemlich ebenen Boden die horizontale Länge einer Linie PQ, etwa von 200 Klaftern, und bemerke genau auf der Hälfte derselben den Punct C. Dann stelle man die Nivellirwage in C

dergestalt, daß das Zirkelgewinde derselben genau über C zu stehen komme, in P und Q aber lasse man Nivellirlatten vertical über die bemerkten Puncte P, Q aufstellen. Nun richte man das Objectivglas b des Nivellirrohres gegen QE, bringe mittelst der Elevations-Schraube x die Luftblase an ihre angewiesene mittlere Stelle, und lasse in dieser Stellung den Visirstrahl auf der Latte QE in N anmerken. Hierauf kehre man bey unverrücktem Stative das Nivellirrohr um, damit das Objectivglas b gegen PD gerichtet sey, bringe neuerdings mittelst der Elevations-Schraube die Luftblase an ihre angewiesene mittlere Stelle, und lasse in dieser Stellung den Visirstrahl auch an der Latte PD in M anmerken und zugleich PM abmessen; so stehen die zwey Puncte M und N in einem und demselben wahren Horizonte, weil die Entfernungen PC und CQ vermöge der Voraussetzung einander gleich sind, und weil beyde Visirstrahlen mit der Verticallinie in C gleiche Winkel einschließen. Nun übertrage man das Nivellir-Instrument nach P, stelle es daselbst dergestalt nieder, daß der Anfang des Fernrohres beym Ocularglase gerade über den bemerkten Punct P zu stehen komme, das Objectivglas aber gegen QN gerichtet sey, bringe in dieser Stellung das Fernrohr nach dem Augenmaße beynahe in eine horizontale Lage, und messe die Erhöhung der Achse des Fernrohres, nähmlich die Erhöhung des Fadenkreuzes über den bemerkten Punct P, das ist, man messe PD. Dann übertrage man den Unterschied zwischen PD und PM auf die Latte QE von dem bemerkten Puncte N bis E aufwärts, wenn D höher liegt als M, oder von N bis E abwärts, wenn D niedriger liegen sollte als M; so sind wegen MD = NE auch die Puncte D und E in einem und demselben wahren Horizonte. Ferner berechne man für die Entfernung pQ = DE (nach §. 609.) die Erhöhung des scheinbaren Horizontes, welche für pQ = 200 Wiener Klafter nur 5 Linien beträgt, und übertrage dieselbe von dem bereits gefundenen Puncte E jederzeit aufwärts bis e; so befinden sich dadurch die zwey Puncte D und e in einer durch D geführten scheinbaren Horizontallinie. Endlich richte man mittelst der Elevations-Schraube das Fernrohr auf den Punct e, so ist der Visirstrahl desselben im scheinbaren Horizonte. Steht nun bey

Fig. 167.

Fig. dieser Stellung des Fernrohres die Luftblase an ihrer angewiesenen mittleren Stelle, so war das Nivellir-Instrument schon zuvor berichtiget, und zu einer vorzunehmenden Nivellir-Operation vollkommen tauglich, wenn sich sonst kein Fehler daran befindet. Steht hingegen bey dieser letzten Richtung des Fernrohres die Luftblase nicht an ihrer angewiesenen mittleren Stelle; so muß man bey eben dieser Stellung des Fernrohres, ohne dasselbe aus seiner Lage zu verrücken, die Luftblase mittelst der Rectificir-Schraube y an ihre angewiesene mittlere Stelle bringen. Dadurch ist endlich das Nivellir-Instrument berichtiget. Man kann nähmlich dann mit Hülfe dieses berichtigten Nivellir-Instrumentes an jedem Orte einen horizontalen Visirstrahl erhalten, wenn man nur mittelst der Elevations-Schraube das Fernrohr in eine solche Lage bringt, daß die Luftblase ihre angewiesene mittlere Stelle einnimmt; doch gilt dieses nur in so lange, als an dem Fadenkreuze, an der Lage der Gläser, und an der Rectificir-Schraube keine Aenderung vorgegangen ist.

Wäre bey dem Nivellir-Instrumente statt der Luftblase ein Perpendikel angebracht; so müßte man eben so verfahren, und bey der letzten Richtung des Fernrohres die Lage des Perpendikels mit einem Merkmahle bezeichnen. Man erhält dann mittelst eines solchen Instrumentes jederzeit einen horizontalen Visirstrahl, wenn man das Fernrohr in eine solche Lage bringt, daß der Perpendikel seine bezeichnete Richtung einnimmt.

Es ist ohne meine Erinnerung klar, daß man die Winkelmesser, bey denen entweder eine Luftblase oder ein Perpendikel angebracht ist, um die Höhen- und Tiefenwinkel zu messen, auf eben diese Art berichtigen kann.

168. Zweyte Berichtigungsmethode (Fig. 168.). Man messe die horizontale Länge einer Linie PR, etwa von 400 Klaftern, theile PR in Q, und QR in S in zwey gleiche Theile; lasse in q und r Nivellirlatten aufrichten, über S aber stelle man das zu berichtigende Nivellir-Instrument, und visire von C einmahl nach a und einmahl nach b, nachdem man in beyden Fällen mittelst der Elevations-Schraube die Luftblase an ihre angewiesene Stelle gebracht hat; so stehen die zwey angemerkten Visirpuncte a und b

in einem und demselben Horizonte. Sodann stelle man das Instrument über den Punct P, visire ohne auf die Luftblase Acht zu haben, von D auf den bemerkten Punct b, und lasse bey dieser Richtung auf der Latte q den Punct m anmerken, auf welchen der Visirstrahl Db trifft. Ferner übertrage man am von m bis n jederzeit auf die entgegengesetzte Seite; so liegen auch die zwey Puncte D und n in einem und demselben Horizonte, weil wegen der gleichen Wechselwinkel mDn = mba die Linien Dn und ab parallel laufen. Denn in den zwey Dreyecken Dmn und bma, ist am = mn, mb = mD, und der Winkel Dmn = bma; folglich sind sie einander vollkommen gleich, und es ist der Winkel mDn = mba. Nun richte man das Fernrohr auf den Punct n, wenn für die Entfernung PQ die Erhöhung des scheinbaren Horizontes unmerklich ist (im Gegentheile übertrage man die zugehörige Erhöhung des scheinbaren Horizontes von dem Puncte n aufwärts, und richte das Fernrohr auf diesen gefundenen Punct); so ist dadurch der Visirstrahl in den scheinbaren Horizont gebracht. Endlich bringe man bey dieser letzten Richtung des Fernrohres die Luftblase mittelst der Rectificir-Schraube an ihre angewiesene mittlere Stelle; so ist dadurch das Nivellir-Instrument berichtiget. Fig. 168.

Dritte Berichtigungsmethode. Nebst den zwey angegebenen Berichtigungsmethoden der Nivellir-Instrumente gibt es noch eine, bey der man nicht nöthig hat, eine Entfernung genau zu messen. Man läßt nähmlich auf einem ziemlich ebenen Boden eine Nivellirlatte aufrichten, und stellt in einer mittleren Entfernung von beynahe 400 bis 500 Schritten, damit der Höhenunterschied des wahren und scheinbaren Horizontes außer Acht gelassen werden könne, das Nivellir-Instrument auf. Wenn dieses nun in eine solche Lage gebracht worden ist, daß die Luftblase in der Mitte einspielt; so lasse man auf der Latte die Höhe des Visirstrahles bemerken. Zieht man ferner von dieser Höhe die Höhe des Instrumentes ab, so erhält man den Höhenunterschied von dem Standpuncte des Instrumentes und von dem Standpuncte der Latte. Sodann übertrage man das Instrument auf den zweyten und die Latte auf den ersten Punct und gehe hier eben

Fig. 168. so wie bey dem ersten Puncte vor. Sind in beyden Fällen die Höhenunterschiede gleich, so war das Instrument schon berichtiget; sind sie aber ungleich, so trage man das arithmetische Mittel (d. i. die halbe Summe) der zwey gefundenen Höhenunterschiede auf die Latte, richte den Visirstrahl auf den dadurch bestimmten Punct, und bringe dann die Luftblase mittelst der Rectificir-Schraube in die Mitte. Dadurch ist nun das Nivellir-Instrument berichtiget; wovon man sich durch das Stellen auf den andern Punct überzeugen kann.

Anmerkung. Man muß bey der ersten Berichtigungs-Methode auf den Nivellirlatten jederzeit denjenigen Punct anmerken, welcher mit dem Zielpuncte des Bretes übereinstimmt, wenn man den Visirstrahl auf den Zielpunct gerichtet hat. Wollte man aber lieber den unteren Rand des Bretes an den Nivellirlatten anmerken; so müßten bey der ersten Berichtigungsmethode auch die Visirstrahlen an den unteren Rand des Bretes gerichtet werden. Hingegen bey der zweyten Berichtigungsmethode und bey wirklichen Nivellir-Operationen wird der Visirstrahl jederzeit auf den Zielpunct gerichtet, und die Erhöhung des unteren Randes des Zielbretes an jeder Latte bemerkt, wenn das Zielbret an beyden Nivellirlatten einerley Abmessungen hat.

Die oben beschriebene Nivellirwage wird ein Nivellir-Instrument mit einem einfachen Fernrohre genannt, um dasselbe von andern Nivellirwagen zu unterscheiden, welche entweder mit zwey parallelen Fernröhren, oder auch nur mit einem einzigen Fernrohre versehen sind, bey welchem aber zwey Objectivgläser dergestalt angebracht sind, daß man von beyden Seiten das Ocularglas einschieben kann. Da es nicht gar leicht ist, bey einer jeden vorzunehmenden Nivellir-Operation die richtige Uebereinstimmung der Achsen von beyden Objectivgläsern und der in beyden Brennpuncten angebrachten Kreuzfäden an solchen Nivellir-Instrumenten zu untersuchen; so wird derjenige am besten handeln, der mit einem solchen Instrumente eine Nivellir-Operation auszuführen hat, wenn er sich desselben nur wie eines Nivellir-Instrumentes mit einem einfachen Fernrohre bedienet, und dieses auf die oben beschriebene Art berichtiget.

Wenn man z. B. mit einem Nivellir-Instrumente, dessen Fern- Fig.
rohr mit zwey Objectivgläsern versehen ist, eine Nivellir-Ope-
ration auszuführen hat; so kann man sich vornehmen das Ocular-
glas immer an derjenigen Seite stehen zu lassen, wo die Eleva-
tions-Schraube angebracht ist, und man muß dann von dieser Sei-
te das Nivellir-Instrument eben so berichtigen, als ob es nur mit
einem gewöhnlichen einfachen Fernrohre versehen wäre.

Es gibt auch Nivellirwagen mit der Luftblase, bey denen
anstatt des Fernrohres doppelte horizontale Dioptern angebracht
sind. Dergleichen Nivellirwagen werden auf folgende Art be-
richtiget. Man läßt in einer Entfernung von 30 oder 40 Klaftern
(Fig. 169.) eine Nivellirlatte AB aufstellen, bringt mittelst 169.
der Elevations-Schraube die Luftblase an ihre angewiesene mitt-
lere Stelle, und läßt die Höhe des Visirstrahles Am anmerken.
Nun wendet man die Wasserwage so um, daß das Diopter a ge-
gen die Latte gekehrt sey, bringt neuerdings die Luftblase mit-
telst der Elevations-Schraube an ihre angewiesene mittlere
Stelle, und läßt wieder die Höhe des Visirstrahles An anmerken.
Sind nun beyde Visirhöhen vollkommen gleich; so war die
Wasserwage schon zuvor berichtiget. Sind hingegen die Visirhö-
hen ungleich; so weichen die zwey Visirstrahlen nach entgegenge-
setzten Richtungen von der Horizontallinie bp gleichviel ab.
Dann theile man den Unterschied mn auf der Latte in p in zwey
gleiche Theile, richte den Visirstrahl nach p, bringe bey dieser
Richtung des Dioptерlineals die Luftblase mittelst der Rectificir-
Schraube an ihre angewiesene mittlere Stelle; so ist dadurch ein
solches Nivellir-Instrument berichtiget.

§. 616.

Aufgabe. Den Höhenunterschied zweyer Puncte A und 170.
B zu finden, die so weit von einander entfernt sind, daß
man aus einem einzigen Zwischenstande nicht nach beyden
Puncten visiren kann. Fig. 170.

Auflösung. 1.) Man lasse eine Latte durch einen Gehülfen
in A, und in einer schicklichen Entfernung AC durch einen ande-
ren Gehülfen ebenfalls eine Latte in C aufrichten, das Nivellir-
Instrument aber stelle man nach dem Augenmaße beyläufig in die

Fig. 170. Mitte zwischen A und C in Nro. 1., damit man die Erhöhung des scheinbaren Horizontes außer Acht lassen kann. Sodann bringe man den Visirstrahl des berichtigten Nivellir-Instrumentes in den scheinbaren Horizont einmahl gegen F und einmahl gegen G, und lasse jeden Gehülfen seine Visirhöhe, nähmlich die Erhöhung des unteren Randes des Zielbretes über den Boden, aufschreiben.

2.) Man schicke den vorderen in C gestandenen Gehülfen mit seiner Latte weiter auf eine schickliche Entfernung nach D, den zweyten in A gestandenen Gehülfen aber lasse man seine Latte über den Punct C aufrichten, und stelle das Nivellir-Instrument beyläufig in die Mitte zwischen C und D in Nro. 2., visire sodann nach I und H, und lasse auch hier jeden Gehülfen seine Visirhöhe aufschreiben.

3.) Dasselbe beobachte man auch in den folgenden Standpuncten, nähmlich der vordere nun in D gestandene Gehülfe wird weiter nach E geschickt, der hintere in C gestandene Gehülfe stellt seine Latte auf den Punct D, das Instrument aber wird in Nro 3. aufgerichtet; u. s. w. bis endlich der vordere Gehülfe in B angelangt ist.

4.) Endlich lasse man jeden Gehülfen seine gefundenen Visirhöhen zusammen addiren, und ziehe die kleinere Summe von der größern ab; so ist der Ueberrest der gesuchte Höhenunterschied zwischen A und B. Ist nun die Summe der Visirhöhen des vorderen Gehülfen, der mit seiner Latte zuletzt auf B stand, kleiner als die Summe des hinteren Gehülfen, der zuerst auf A stand; so liegt B um den gefundenen Unterschied höher als A. Im Gegentheile liegt B um eben diesen Unterschied niedriger als A.

Denn es ist

$$\begin{aligned} AF - CG &= Cc \\ CH - DI &= Dd \\ DK - EL &= -Dm \\ EM - BN &= -Ee; \end{aligned}$$

folglich auch

$$AF + CH + DK + EM - (CG + DI + EL + BN)$$ Fig.
$$= (Cc + Dd) - (Dm + Ee)$$ 170.
$$= (dQ + Dd) - (Dm + mn)$$
$$= DQ - Dn = Qn = AP = Bb.$$

Anmerkung. Es ist nicht unumgänglich nothwendig, daß alle Standpuncte des Nivellir-Instrumentes und der Latten in einer und derselben Vertical-Ebene sich befinden. Man erhält den gesuchten Höhenunterschied der zwey Puncte A und B eben so richtig, wenn man auch wegen dazwischen liegender Hindernisse nach was immer für einem Umwege von A bis B zu nivelliren gezwungen ist.

§. 617.

Aufgabe. Die Abstände mehrerer Puncte von dem Horizonte eines angenommenen Punctes A (Fig. 171.) durch das Nivelliren zu finden, es mögen die zu nivellirenden Puncte entweder alle in einer und derselben Vertical-Ebene sich befinden, oder in einer Gegend zerstreut herumliegen. 171.

Auflösung. 1.) Man lasse an alle solche Oerter Pflöcke einschlagen, wo sich merkliche Veränderungen des Bodens zeigen, nähmlich man bemerke alle zu nivellirenden Puncte mit Pflöcken, und stelle das Nivellir-Instrument unweit A in Nro. 1., die Latte aber durch einen Gehülfen in A, und lasse die Visirhöhe Aa anmerken. Sodann stellt eben derselbe Gehülfe seine Latte in B, subtrahirt die Visirhöhe in B von der in A gefundenen Aa, und schreibt den Unterschied an den in die Erde eingeschlagenen Pflock mit dem Zeichen + an, wenn derselbe positiv ist. Wäre hingegen dieser Unterschied negativ und folglich B niedriger als A, so müßte er mit dem Zeichen — angeschrieben werden. Darauf stellt eben dieser Gehülfe seine Latte über C, subtrahirt abermahls die Visirhöhe Cp von der ersten in A beobachteten Aa, und verfährt übrigens wie in B. Auf diese Art können nun mehrere um Nro. 1. liegende Puncte aus diesem Standpuncte durch das Vergleichen mit der in A beobachteten und angemerkten Visirhöhe nivellirt werden.

Fig. 171. 2.) Sodann überträgt man das Nivellir-Instrument weiter in Nro. 2. Der erwähnte Gehülfe stellt seine Latte auf was immer für einen schon bestimmten Punct z. B. auf den Punct C, beobachtet die Visirhöhe Cc, und addirt zu derselben den auf dem Pflocke C aufgeschriebenen Höhenunterschied PC mit dem gehörigen Zeichen + oder —, um Pc, nähmlich den Abstand des Visirstrahles cs von dem Horizonte AZ zu erhalten. Mittelst dieser Höhe Pc, die wir die Vergleichungshöhe nennen wollen, werden nun die Abstände der Puncte D, E, F von dem Horizonte AZ gefunden, wenn der Gehülfe die Visirhöhen Dq, Er, Fs von der in C gefundenen Vergleichungshöhe Pc abzieht, und die Unterschiede mit den entsprechenden Zeichen + oder — an die Pflöcke bey D, E, F gehörig anschreibt. Auf diese Art können abermahls mehrere Puncte um Nro. 2. herum mittelst der Vergleichungshöhe Pc dieses Standpunctes nivellirt werden.

3.) Man übertrage das Nivellir-Instrument in Nro. 3., der Gehülfe stelle seine Latte auf irgend einen schon nivellirten Punct, z. B. auf F, und addire zu der Visirhöhe Ff den an dem Pflocke F angeschriebenen Höhenunterschied mit dem entsprechenden Zeichen + oder —, um für diesen neuen Standpunct Nro. 3. die Vergleichungshöhe Sf zu finden. Darauf stellt eben derselbe Gehülfe seine Latte in G und dann in H, subtrahirt die Visirhöhen Gt, Hx von der in F bestimmten Vergleichungshöhe Sf dieses Standpunctes, und schreibt die Unterschiede mit dem gehörigen Zeichen + oder — an die Pflöcke in G und H; u. s. w.

Es wird jedermann leicht einsehen, daß man die angeführte Subtraction der Visirhöhen von der Vergleichungshöhe vermeiden könne, wenn man bey jedem Standpuncte die gefundene Vergleichungshöhe auf die Nivellirlatte gehörig aufträgt, und mit einem Merkmahle bezeichnet, weil sich dann unmittelbar die Höhenunterschiede der nivellirten Puncte auf der Latte ergeben. Nähmlich der Abstand des Merkmahles von dem unteren Rande des Zielbretes gibt den gesuchten Höhenunterschied des nivellirten Punctes. Dieser Höhenunterschied ist positiv, wenn das Merk-

mahl höher steht, oder er ist negativ, nähmlich eine Vertiefung, wenn das Merkmahl der Vergleichungshöhe niedriger ist, als die Visirhöhe des nivellirten Punctes bis an den unteren Rand des Zielbretes. Wenn man mit mehreren Nivellirlatten und mit mehreren verläßlichen Gehülfen versehen ist; so kann, um die Arbeit zu beschleunigen, bey einem jeden Standpuncte die entsprechende Vergleichungshöhe auf jede Latte aufgetragen werden. Die Gehülfen schickt man sodann mit diesen Latten auf die um den Standpunct herumliegenden Puncte, und läßt sie die gefundenen Höhenunterschiede mit dem entsprechenden Zeichen + oder — auf die Pflöcke gehörig aufschreiben, womit die zu nivellirenden Puncte bemerkt sind. Fig. 171.

Wenn in einem besonderen Falle die Puncte A, B, C, D, u. s. w. sämmtlich in einer und derselben Vertical-Ebene liegen; so werden auch ihre horizontalen Abstände gemessen, um ihre Entfernungen von dem Puncte A zu erhalten, welche man sonach sammt den zugehörigen Höhenunterschieden in eine Tafel ordentlich einträgt.

Mittelst einer solchen Tafel läßt sich der Durchschnitt der nivellirten Strecke nach einem beliebigen verjüngten Maßstabe auf einer Geraden AZ verzeichnen. Auch kann man mittelst dieser Tafel den Höhenunterschied von jeden zwey nivellirten Puncten finden, wenn man ihre Abstände von der Horizontallinie AZ in der Tafel von einander abzieht.

Wenn hingegen die nivellirten Puncte auf einer Gegend zerstreut herumliegen, so müssen dieselben mit dem Meßtische ordentlich aufgenommen, und die entsprechenden Höhenunterschiede dazu aufgeschrieben werden. Will man nicht zu jedem nivellirten Puncte des aufgenommenen Planes den zugehörigen Höhenunterschied schreiben, um denselben nicht mit zu viel Ziffern zu überhäufen; so kann man die aufgenommenen Puncte auf dem Plane mit Buchstaben bezeichnen, und diese Buchstaben sammt den entsprechenden Höhenunterschieden in eine Tafel eintragen.

Man muß bey dieser Nivellir-Operation nicht auf zu große Entfernungen, etwa nicht über 100 Klaftern visiren, damit

Fig. man die Erhöhung des scheinbaren Horizontes außer Acht lassen könne.

§. 618.

172. Aufgabe. Es sey PQR eine Grube, die bis auf eine durch den Punct A gelegte horizontale Fläche auszufüllen ist; man soll den Cubikinhalt der Grube unter dieser Horizontalfläche berechnen, damit man die Menge der zur Ausfüllung erforderlichen Erde bestimmen könne.

Auflösung. 1.) Man suche an den Wänden der Grube mehrere Puncte B, C . . . . D, E . . . welche in der durch A gelegten Horizontalfläche liegen. Dieses geschieht, wenn man das Nivellir-Instrument etwa in c aufstellt, über den gegebenen Punct A eine Nivellirlatte aufrichten, auf derselben die Visirhöhe bemerken, und in dieser Höhe das Zielbret befestigen läßt. Mit dieser Latte schickt man sodann den Gehülfen gegen B, und läßt ihn daselbst so lange mit aufgerichteter Latte und unverrücktem Brete hin und hergehen, und einen Punct B suchen, bis der Visirstrahl genau auf das Zielbret eintrifft; dieser Punct B wird sodann mit einem Pflocke bezeichnet. Auf diese Art sucht man mehrere Puncte C, D, E . . . Wenn man nun aus diesem Standpuncte c nicht den ganzen Umfang der Grube übersehen kann, so muß man das Nivellir-Instrument weiter in f aufrichten, die Latte aber auf einen bereits gefundenen Punct z. B. auf C stellen. Von f visirt man auf C, und läßt in der Höhe des horizontalen Visirstrahles abermahls das Zielbret befestigen. Mit dieser Visirhöhe sucht nun der Gehülfe, eben so wie bey dem vorigen Standpuncte, mehrere Puncte F, G, H, welche mit C und folglich auch mit A in einem und demselben Horizonte liegen, und bemerkt diese gefundenen Puncte mit Pflöcken.

2.) Ist einmahl die horizontale Grenze ABCFGHEDA gefunden und jeder Winkelpunct derselben mit einem Pflocke bemerkt; so theilt man die ganze innere Oberfläche der Grube unter der bestimmten Horizontalfläche durch die Puncte

a, b, c, d, e . . . . dergestalt in Dreyecke ein, daß jedes Dreyeck für sich betrachtet nach dem Augenmaße eine ebene, wie immer schief geneigte Fläche ausmache. Sodann bestimmt man durch das Nivelliren (nach §. 617.) die Vertiefungen der Puncte a, b, c, d, . . . unter der Horizontalfläche ACH, schreibt die gefundenen Vertiefungen an die Pflöcke, womit die Puncte a, b, c, d, . . . bemerkt sind, und nimmt darauf die ganze Figur ordentlich mit dem Meßtische auf, um alle horizontalen Grundflächen AbD, Aba, abc, . . . zu erhalten, und schreibt zu einem jeden aufgenommenen Puncte seine entsprechende Vertiefung. Fig. 172.

3.) Endlich berechnet man den Flächeninhalt eines jeden aufgenommenen horizontalen Dreyeckes, stellt sich vor, daß der innere Raum der Grube unter der Horizontalfläche ACH aus so vielen dreyseitigen an dem untern Ende schief abgeschnittenen geraden Prismen zusammengesetzt sey, als Dreyecke vorfindig sind, berechnet den Cubikinhalt eines jeden Prisma aus seiner horizontalen Grundfläche, und aus seinen drey nivellirten Seiten oder Höhen (nach §. 523.), und addirt alle diese berechneten Prismen zusammen, so wird der gesuchte Cubikinhalt der Grube zum Vorschein kommen. Es sey zum Beyspiel der berechnete Flächeninhalt des Dreyeckes abc = 1500 □', und die Vertiefung des Punctes a = $5^1 6^{11} = 5\frac{1}{2}^1$, b = 7^1, c = $10\frac{1}{4}^1$; so ist der Inhalt des schief abgeschnittenen Prisma, welches abc zur Grundfläche hat = $1500 \times \frac{1}{3}(5\frac{1}{2} + 7 + 10\frac{1}{4}) = 11375$ Cub. Fuß. Die äußersten Körper, wie z. B. AaB und Aab können immer als dreyseitige schief abgeschnittene Prismen angesehen werden, wenn man nur beachtet, daß bey diesen Aab eine, und bey jenem AaB zwey Seiten = 0 sind. Es sey z. B. die horizontale Grundfläche Aab = 1000 □. Fuß; so ist der Cubikinhalt dieses Körpers = $1000.\left(\frac{5\frac{1}{2} + 7 + 0}{3}\right) = 4166\frac{2}{3}$ Cub. Fuß. u. s. w.

Wäre PQR nicht eine Grube, sondern ein Hügel, den man bis auf eine durch den Punct A gelegte horizontale Fläche ab-

Fig. zutragen hätte; so könnte man seinen Cubikinhalt auf eben dieselbe Art berechnen.

Eben so, wie man im gegenwärtigen Falle die Puncte B, C, ... D, E, ... bestimmt hat, die mit A in dem nähmlichen Horizonte liegen, kann auch auf einer zur Ueberschwemmung eingerichteten Gegend die Ueberschwemmungsgrenze gefunden werden, wenn bekannt ist, wie hoch das Wasser durch eine Schleuse oder durch ein sonst vorgelegtes Hinderniß aufgeschwellt wird.

Endlich bedient man sich auch der Nivellirwage, wenn in einer Linie oder in einer Gegend mehrere Pflöcke dergestalt einzuschlagen sind, daß ihre Köpfe sämmtlich in einem und demselben Horizonte sich befinden. Wenn die Abstände der Pflöcke sehr klein sind, so kann man dieses mittelst einer gemeinen Schrotwage oder auch mittelst einer Libelle mit der Luftblase erhalten. Der Schrotwage oder der Libelle bedient man sich auch, wenn eine ziemlich steile aber doch zugängige Anhöhe von einigen Klaftern durch horizontal und vertical gestellte Stäbe oder Latten auszumessen ist. Dieses Verfahren ist unter dem Nahmen Cultelliren bekannt.

IV. Abschnitt.

Von dem Gebrauche des Barometers bey Höhenmessungen.

§. 619.

Es ist zuweilen erforderlich den Höhenunterschied zweyer Oerter zu finden, die so weit von einander entfernt sind, daß man denselben weder mittelst des Nivellirens, noch auch mittelst einer trigonometrischen Operation füglich bestimmen kann. In einem solchen Falle nimmt man seine Zuflucht zu dem Barometer. Es ist nähmlich aus der Naturlehre bekannt, daß das Gewicht

der auf die Oeffnungen der Barometerröhre drückenden at- Fig.
mosphärischen Luftsäule das Queckſilber im Barometer in einer solchen Höhe erhalte, daß das Gewicht einer Queckſilberſäule, welche die offene Oberfläche des Queckſilbers zur Grundfläche und den Höhenunterſchied beyder Oberflächen des Queckſilbers zur Höhe hat, eben ſo viel beträgt, als das Gewicht der auf die offene Oberfläche des Queckſilbers drückenden Luftſäule, und daß folglich die Gewichte verſchiedener Luftſäulen von ungleichen Höhen und gleichen Grundflächen ſich gegen einander verhalten wie die Höhen, auf welchen ſie das Queckſilber im Barometer erhalten. Es ſey z. B. von einer Luftſäule, welche ſich von dem Fuße eines Berges bis auf die äußerſte Grenze der Atmoſphäre erſtreckt, und p Quadrat-Zolle zur Grundfläche hat, das wirkliche Gewicht = G, von einer anderen Luftſäule, welche dieſelbe Grundfläche hat und ſich von dem Gipfel des Berges bis auf die äußerſte Grenze der Atmoſphäre erſtreckt, ſey das wirkliche Gewicht = g, die erſte Luftſäule erhalte das Queckſilber in einer Höhe von a Zollen, und die zweyte nur in einer Höhe von b Zollen, ferner ſey das wirkliche Gewicht eines Cubik-Zolles Queckſilber = m Pf.; ſo iſt aus der Hydroſtatik bekannt, daß G = apm Pf. und g = bpm Pf. iſt; folglich iſt auch G : g = apm : bpm = a : b.

I. Damit man nun den Höhenunterſchied zweyer Oerter aus ihren mittleren Barometerhöhen beſtimmen könne, muß man zuerſt ausfindig machen, nach welchem Geſetze die Barometerhöhen von dem Horizonte gegen aufwärts abnehmen, wenn man die Erhöhungen über den Horizont in einer arithmetiſchen Reihe auf einander folgen läßt, oder (weil, vermöge des Vorhergehenden die Barometerhöhen an verſchiedenen Erhöhungen wie die Gewichte der auf die offene Oberfläche des Queckſilbers drückenden Luftſäulen von gleichen Grundflächen ſich verhalten), nach welchem Geſetze die Gewichte der Luftſäulen von gleichen Grundflächen in gleichen auf einander folgenden Erhöhungen über einen angenommenen Horizont abnehmen. Es ſey z. B. MPQN (Fig. 192.) eine verticale atmoſphäriſche Luftſäule, die ſich von 192.
der horizontalen Fläche MN bis auf die äußerſte Grenze der At-

Fig. 192. mosphäre erstreckt. In gleichen Abständen $Mm = mp = pr \ldots$. sey diese Luftsäule durch die horizontalen Flächen mn, pq, rs... durchschnitten. Man bezeichne ferner die Gewichte der auf einander folgenden Luftsäulen MQ, mQ, pQ . . ., welche auf die gleichen Flächen MN, mn, pq . . . . drücken, mit A, B C, D.., so wird verlangt, daß man auffinde, nach was für einem Gesetze die Gewichte A, B, C, D . . . . abnehmen. Um dieses Gesetz zu entdecken, müssen wir aus der Naturlehre den Satz für bekannt annehmen, daß die Dichtigkeiten der atmosphärischen Luft an verschiedenen noch zugängigen Höhen über einem angenommenen Horizonte sich gegen einander verhalten, wie die Kräfte oder wie die Gewichte, womit die Luft zusammen gepreßt wird; oder was dasselbe ist, daß die wirklichen Gewichte der atmosphärischen Luft in gleichen Räumen (unter demselben Cubikinhalte) sich gegen einander verhalten, wie die Kräfte, oder wie die Gewichte, womit die Luft in diesen gleichen Räumen zusammengepreßt erhalten wird.

II. Es sey nun in dem Raume Mn das Gewicht der Luft $= a'$, welche von dem Gewichte B der darauf drückenden Luftsäule mQ gepreßt wird. In dem eben so großen Raume mq sey das Gewicht der Luft $= b'$, welche von dem Gewichte C der darauf drückenden Luftsäule pQ gepreßt wird; u. s. w. die Barometerhöhen an den Stellen M, m, p, r . . . . . aber sollen $= a, b, c, d \ldots$ seyn; so finden vermöge des angeführten Satzes folgende Proportionen statt:

$$a' : B = b' : C = c' : D = d' : E = \text{u. s. w.}$$

Es ist aber offenbar

$$a' = A - B;\ b' = B - C;\ c' = C - D;\ \text{u. s. w.}$$

folglich

$$A - B : B = B - C : C = C - D : D = \text{u. s. w.}$$

und endlich durch die Zusammensetzung (componendo)

$$A : B = B : C = C : D = D : E = \text{u. s. w.},$$

nähmlich die Gewichte A, B, C, D, ... der in einer arithmetischen Reihe auf einander folgenden Luftsäulen nehmen gegen die Grenze der Atmosphäre in einer geometrischen Reihe ab.

Da nun auch Fig. 192.

$$A : a = B : b = C : c = D : d = \ldots \text{ u. s. w.}$$

statt findet (§. 619.), so nehmen auch die Barometerhöhen an den Stellen m, p, q, r . . in einer geometrischen Reihe ab, wenn die Erhöhungen dieser Stellen über den Horizont MN in einer arithmetischen Reihe auf einander folgen.

III. Nun sey die Erhöhung MR = k, die Erhöhung MS = x. und MR sey in MS genau n mahl enthalten, nähmlich x = nk; so ist $n = \frac{x}{k}$. Ferner sey die Barometerhöhe in M = a, in R = c, und in S = b; so sind die Barometerhöhen an den in einer arithmetischen Reihe auf einander folgenden Stellen,

0, 1, 2, 3, ... n,

weil sie in einer geometrischen Reihe abnehmen,

$$= a,\ c,\ \frac{c^2}{a},\ \frac{c^3}{a^2},\ \ldots\ \frac{c^n}{a^{n-1}} = a\left(\frac{c}{a}\right)^n.$$

Es ist aber an der Stelle n die Barometerhöhe = b gesetzt worden; folglich ist $b = a\left(\frac{c}{a}\right)^n$, oder endlich

$b = a\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{x}{k}}$, wenn man statt n seinen Werth setzt.

IV. Aus dieser letzten Gleichung folgt nun

$$x = k \cdot \frac{\log a - \log b}{\log a - \log c}.$$

Diese gefundene Gleichung zeigt uns an, daß man aus den bekannten mittleren Barometerhöhen a, b zweyer Oerter M, S ihren Höhenunterschied x = MS bestimmen kann, wenn man an einem dritten Orte R (dessen Erhöhung = k = MB über den Ort M sich füglich trigonometrisch ausmessen läßt) die Barometerhöhe c zu einer Zeit beobachtet, da der Barometer an dem Orte M auf seinen mittleren Stand weiset. Die Barometerhöhen können nach einem beliebigen, jedoch alle drey nach einem und demselben Maßstabe, z. B. in Wiener Duodecimallinien bestimmt werden. Der gemessene Höhenunterschied k kann in einem

Fig. anderen Maße, z. B. in Pariser Klaftern ausgedrückt werden, und der gesuchte Höhenunterschied x wird sodann nach gehöriger Reduction in eben demselben Maße zum Vorschein kommen, womit man den gemessenen Höhenunterschied k ausgedrückt hat.

Z. B. In Wien ist an dem Horizonte, der ungefähr durch den Fuß des St. Stephans-Thurmes durchgeht, die mittlere Barometerhöhe a = 336 Wiener Linien, und am Kahlenberge unweit von Wien sey an dem Horizonte der Kirche die mittlere Barometerhöhe b = 325,5 Wiener Linien. Um nun die Erhöhung x des Kirchen-Horizontes am Kahlenberge über den St. Stephans-Horizont zu bestimmen, messe man ein Stück von der Höhe des St. Stephans-Thurmes, z. B. das Stück vom Fuße des Thurmes bis zu der Achse, an welcher die Uhrzeiger befestigt sind. Diese Höhe beträgt nun ziemlich genau 37 Wiener Klafter. Ferner beobachte man an diesem Orte die Barometerhöhe c zu einer Zeit, da am Fuße des Thurmes die Barometerhöhe 336 Wiener Linien beträgt. Es sey zu dieser Zeit bey der Uhrachse die Barometerhöhe c = 333,15 Wiener Linien. Nun wird, um die Erhöhung des Kirchen-Horizontes am Kahlenberge über den St. Stephans-Horizont zu finden, die Rechnung auf folgende Art angelegt:

$$\begin{aligned}
\log a &= 2{,}5263393\\
\log b &= 2{,}5125510\\
\log c &= 2{,}5226398\\
\hline
\log a - \log b &= 0{,}0137883 = D\\
\log a - \log c &= 0{,}0036995 = d\\
\hline
\log D &= 0{,}1395108 - 2\\
\log d &= 0{,}5681430 - 3\\
\hline
& \quad 0{,}5713678\\
\log k &= 1{,}5682017\\
\hline
\log x &= 2{,}1395695
\end{aligned}$$

folglich $x = 137{,}9 = 138$ Wien. Kl.

Jeder wird ohne meine Erinnerung leicht einſehen, daß man Fig.
auch den Höhenunterſchied zwiſchen dem Kirchen-Horizonte am Kahlenberge und zwiſchen dem St. Stephans-Horizonte aus ihren für bekannt angenommenen mittleren Barometerhöhen finden kann, wenn man am Kahlenberge eine leicht auszumeſſende Höhe wirklich genau ausmißt, und an dieſer Höhe die Barometerhöhe zur gehörigen Zeit beobachtet. Es ſey z. B. an dem höchſten Thurmfenſter am Kahlenberge die Barometerhöhe = 324 Wiener Linien zu einer Zeit, da am Kirchen-Horizonte die Barometerhöhe 325,5 und am St. Stephans-Horizonte 336 Wiener Linien beträgt; die Erhöhung des angeführten Thurmfenſters über den Kirchen-Horizont ſey = 20,07 Wiener Klafter. Aus dieſen wird nun der geſuchte Höhenunterſchied beſtimmt, wenn man

$$a = 325{,}5,\quad b = 336,\quad c = 324,\quad k = 20{,}07$$

ſetzt, und dieſe Werthe in der gefundenen Gleichung

$$x = k\,\frac{\log a - \log b}{\log a - \log c}$$

ſubſtituirt.

Es iſt nähmlich

$$\begin{aligned}
\log a &= 2{,}5125510\\
\log b &= 2{,}5263393\\
\log c &= 2{,}5105450\\
\hline
\log a - \log b &= -0{,}0137883 = D\\
\log a - \log c &= 0{,}0020060 = d\\
\hline
\log D &= 0{,}1395108 - 2\,n\\
\log d &= 0{,}3023309 - 3\\
\hline
& 0{,}8371799\,n\\
\log k &= 1{,}3025474\\
\hline
\log x &= 2{,}1397273\,n
\end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned}
x &= -137{,}95\\
&= -138 \text{ Wien. Kl.}
\end{aligned}$$

Fig. Dieses Zeichen (—) zeigt an, daß der gesuchte Höhenunterschied in Hinsicht auf den Kirchen-Horizont am Kahlenberge negativ, nähmlich eine Vertiefung sey.

V. Der Höhenunterschied zweyer Oerter läßt sich aus ihren mittleren Barometerhöhen noch bequemer, jedoch minder genau, als nach der eben angeführten Art berechnen. Man kann nähmlich die Rechnung auf folgende Art abkürzen.

Wenn man mehrere mit dem Barometer angestellte Versuche mit einander vergleicht, so findet man erstens, daß an der Meeresfläche die mittlere Barometerhöhe 345 Wiener Linien beträgt; zweytens, daß in einer Erhöhung von $25\frac{1}{4}$ Wiener Klaftern über die Meeresfläche die Barometerhöhe um 2 Wiener Linien niedriger; nähmlich 343 Wiener Linien gleich ist. Setzen wir daher in der oben (IV.) gefundenen Gleichung,

$$a = 345,\ c = 343,\ k = 25\tfrac{1}{4} = 25{,}25,$$

und die Erhöhung eines beliebigen Ortes über die Meeresfläche, dessen mittlere Barometerhöhe b Wiener Linien beträgt, $= y$; so ist nach gehöriger Reduction

$$y = 10000.(\log 345 - \log b') \text{ Wien. Kl.}$$

Eben so ist die Erhöhung y' eines anderen Ortes über die Meeresfläche, dessen mittlere Barometerhöhe b' Wiener Linien beträgt,

$$y' = 10000.(\log 345 - \log b') \text{ Wien. Kl.}$$

Es ist also auch

$$\begin{aligned} y' - y &= 10000.(\log 345 - \log b') \\ &\quad -10000.(\log 345 - \log b) \\ &= 10000.(\log b - \log b') \text{ Wien. Kl.} \end{aligned}$$

oder wenn wir

$$y' - y = x$$

setzen,

$$x = 10000\,(\log b - \log b') \text{ Wien. Kl.}$$

Nähmlich man drücke die mittleren Barometerhöhen b und b' der zwey Oerter, deren Höhenunterschied gesucht wird, in Linien oder in Zollen aus, und multiplicire die Differenz der Logarithmen dieser Barometerhöhen mit 10000,

indem man den Decimal-Strich um vier Stellen weiter gegen die Rechte rückt; so wird der gesuchte Höhenunterschied in Wiener-Klaftern zum Vorschein kommen. Fig.

Z. B. der Höhenunterschied zwischen dem St. Stephans-Horizonte in Wien und zwischen dem Kirchen-Horizonte am Kahlenberge wird aus den angenommenen mittleren Barometerhöhen dieser zwey Oerter $b = 336$ und $b' = 325{,}5$ auf folgende Art gefunden.

$$\log b = 2{,}5263393$$
$$\log b' = 2{,}5125510$$

$$0{,}0137883$$
$$x = 138 \text{ Wien. Kl.}$$

Wir wollen diese Regel noch auf folgendes Beyspiel anwenden. Nach Bouguers Beobachtung (Figure de la Terre Paris 1749.) ist auf dem Gipfel des Berges Pichincha in Peru die Barometerhöhe $b = 191$, und zu Carabourou ist die Barometerhöhe $b' = 254{,}75$ Pariser Linien.

Nun ist $\log b = 2{,}4061142$
$\log b' = 2{,}2810334$

$$0{,}1250808$$
$$\text{also } x = 1251 \text{ Wien. Kl.};$$

folglich ist die Erhöhung des Pichincha über Carabourou gleich 1251 Wiener Klafter. Durch die genaueste trigonometrische Bestimmung fand Bouguer diese Erhöhung = 1209 Pariser Klafter, oder = 1242 Wiener Klafter. Die Berechnung nach der gegebenen Regel weicht demnach von der wirklichen Ausmessung ungefähr um 9 Klaftern ab. Es ist leicht einzusehen, daß es in diesem Falle gar nicht nothwendig ist, die in Pariser Linien ausgedrückten Barometerhöhen auf Wiener Linien zu reduciren.

Wenn man die Höhe eines Berges mittelst des Barometers bestimmen will; so muß man zwey übereinstimmende Barometer haben, welche nähmlich unter einerley Umständen gleich hohe Queckſilbersäulen zeigen. Man wird dann bey einer gelinden Witterung beynahe zu einer und derselben Zeit sowohl am Fuße als auch am Gipfel des Berges die Barometerhöhe beobachten lassen.

Fig. In einigen Fällen wird der Beobachter am Berge mit einem Feuer-Signale das Zeichen zur Beobachtung geben können; wornach sowohl am Gipfel als auch am Fuße des Berges in mehreren auf einander folgenden Zeittheilen die Barometerhöhe beobachtet, und dabey zugleich die Zeit der Beobachtung angemerkt wird.

Die Verfertigung solcher übereinstimmender Barometer ist eben so, wie die Erzeugung anderer Meßinstrumente die Sache des Mechanikers, und kann daher in einem gedrängten Lehrbuche der Geometrie nicht abgehandelt werden; weßwegen wir jenen Leser, welcher sie selbst anzufertigen wünscht, auf die Lehrbücher der Physik verweisen.

Um die Barometerhöhe geschwind übersehen zu können, muß an dem Gestelle, worauf die Barometerröhre befestigt ist, eine Eintheilung von Zollen und Linien angebracht seyn. Der Nullpunct (der Anfangspunct der Eintheilung) kann bey der Oeffnung des aufwärts gekrümmten Schenkels angenommen werden. Bey einem so eingerichteten Barometer wird die wirkliche Barometerhöhe gefunden, wenn man die Abstände der beyden Oberflächen des Queckſilbers von dem angenommenen Nullpuncte zusammen addirt. Die Decimaltheile der Linien können mit Hülfe eines Verniers
206. bestimmt werden, wie es aus Fig. 206. zu ersehen ist.

Anmerkung. Eine ausführlichere Abhandlung über die practische Meßkunst, über die Prüfung und Berichtigung verschiedener Instrumente, über die Bestimmung der davon abhängenden Zuverlässigkeit, u. m. dgl. kann in dieses Lehrbuch nicht aufgenommen werden, theils weil dadurch die Grenzen desselben zu weit ausgedehnt würden, theils auch, weil dazu noch andere Kenntnisse als Dioptrik, Catoptrik, Astronomie u. s. w. erfordert werden. Auch ist das bisher Gesagte hinreichend, jeden fähigeren Schüler in den Stand zu setzen, daß er vollständigere Abhandlungen hierüber einsehen, und im vorkommenden Falle benützen könne. Diese Gegenstände findet man unter andern in folgenden Schriften:

Haußer (Math. Oberst-Lieut.) analytische Abhandlung der Anfangsgründe der Mathematik zum Gebrauche der k. k. Ingenieurs-Academie. 2ter Theil, 2te Auflage. Wien 1819 in der k. k. Ingenieurs-Academie-Kanzley. Fig.

Tobias Mayer gründlicher und ausführlicher Unterricht zur practischen Geometrie. 5 Bände. Erlangen 1794.

Winkler (G. Professor der Mathem. am k. k. Forstlehrinstitute zu Maria-Brunn bey Wien) Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauche auf Forst-Academien. 2ter Theil 1te und 2te Abtheilung. Die practische Geometrie, angewandt auf die Vermessung der Wälder und ganzer Gegenden, enthaltend. Wien 1817; ferner seine
Practische Anleitung zum graphischen und geometrischen Trianguliren mit dem Meßtische. Zunächst für solche Individuen, welche sich mit der Catastral-Vermessung befassen, so wie überhaupt für jeden, der geometrische Vermessungen mit dem Meßtische zu leiten oder selbst auszuführen hat. Wien 1820; dann seine
Beschreibung eines verbesserten, bequemen und einfachen Reise-Barometers, nebst practischer Anleitung zum Gebrauche desselben, sowohl bey einzelnen Höhenmessungen als bey Nivellirungen ganzer Gegenden. Wien 1821.

Montanus (August Schulz) Systematisches Handbuch der gesammten Land- und Erd-Messung mit ebener und sphärischer Trigonometrie auch Beschreibung der neueren brauchbaren Meßinstrumente. Berlin 1819.

Crelle (A. L.) Handbuch des Feldmessens und Nivellirens in den gewöhnlichen Fällen. Berlin 1826.

Ulrich (Georg Carl Justus) Lehrbuch der practischen Geometrie. Göttingen 1832. 2 Bände.

Sechstes Hauptstück.

Von einigen krummen Linien.

I. Abschnitt.

Einleitung.

§. 620.

176. I. Um die Lage eines Punctes M in der Ebene festzusetzen, ziehen wir (Fig. 176.) wie bereits in §. 412. erklärt wurde, eine unveränderliche Gerade TL, fällen aus dem zu bestimmenden Puncte auf diese Gerade die Senkrechte MQ und fixiren in der TL einen Punct G. Sind nun GQ und MQ sowohl ihrer Größe als Lage nach gegeben; so ist durch sie der Punct M unzweydeutig bestimmt. Man nennt GQ die Abscisse und QM die Ordinate, beyde zusammen die Coordinaten (Bestimmungsstücke) des Punctes M, den Punct G den Anfang der Abscissen, oder den Ursprung der Coordinaten, die Gerade TL die Abscissenlinie oder Abscissenachse, die durch den Anfang der Abscissen zu den Ordinaten parallel laufende Gerade AD die Ordinatenlinie oder Ordinatenachse beyde zusammen die Coordinatenachsen. Die Abscissen werden auf der einen Seite des Anfangs der Abscissen, für positiv, folglich auf der entgegengesetzten für negativ erklärt. Eben so sind die auf der einen Seite der Abscissenlinie liegenden Ordinaten positiv, daher auf der andern negativ.

Diese Methode die Lage eines Punctes in einer Ebene zu bestimmen, ist in den meisten Fällen sehr vortheilhaft, weßwegen wir dieselbe, wenn nicht ausdrücklich eine Ausnahme angegeben wird, stets anwenden werden. Zuweilen ist es jedoch zweckdienlich, die Ordinaten nicht senkrecht, sondern unter einem bestimmten Winkel auf die Abscissen schief zu stellen. Solche Coordinaten werden schiefwinkelige und der unveränderliche Winkel, unter welchem sie sich treffen, der Coordinatenwinkel genannt; weßwegen die vorher betrachteten zur Unterscheidung rechtwinkelige Coordinaten heißen. So bestimmt man z. B. die Lage des Punctes M auch mittelst schiefwinkeliger Coordinaten, indem man die Gerade AC zur Abscissenlinie, den Punct A zum Anfang der Abscissen annimmt, und die Ordinate MP unter dem bestimmten Coordinatenwinkel MPC = TAC zur unveränderlichen Ordinatenachse AT parallel führt. Fig. 176.

Nebst diesen parallelen (schief- und rechtwinkeligen) Ordinaten gebraucht man auch bisweilen mit nicht geringem Vortheile die in einen Punct zusammen laufenden Ordinaten. Um nähmlich (Fig. 190.) die Lage eines Punctes M in der Ebene zu bestimmen, zieht man aus einem beliebigen Puncte C eine feste Gerade CD, und an den zu bestimmenden Punct M die Gerade CM. Ist nun der Winkel ACM oder die Länge des mit dem Halbmesser AC = 1 in denselben eingeschriebenen Bogens AP, und die Länge der Geraden CM gegeben, so ist auch der Punct M festgesetzt. Man heißt den Punct C den Pol, die unveränderliche Gerade CD die Polarachse, die Gerade CM den Radiusvector, den Winkel ACM den Polarwinkel, und die beyden letzten Stücke, weil sie den Punct M bestimmen, die Polar-Coordinaten des Punctes M. Dabey wird der Polarwinkel, so wie der zwischen seinen Schenkeln liegende Bogen, rücksichtlich der Polarachse, in der einen Lage ACM und AP für positiv, in der anderen ACm und AQ für negativ genommen. Der Radiusvector ist positiv, wenn er auf dem Schenkel des Polarwinkels liegt, negativ dagegen, wenn er auf der rückwärtigen Verlängerung dieses Schenkels sich befindet. 190.

Fig. II. Eine Linie ist (nach §. 341.) die Grenze einer Fläche und läßt sich daher als ein System oder als eine Reihe von Puncten ansehen, welche eine gemeinsame Eigenschaft besitzen, durch die sie von allen anderen Puncten dieser Fläche vollkommen unterschieden werden können. Jene Abtheilungen (Zweige oder Aeste) der Linien insbesondere, in denen die Puncte stetig neben und an einander liegen, kann man zur Erleichterung ihrer Untersuchung als Wege betrachten, welche ein bewegter Punct durchläuft.

Bey der Untersuchung der Eigenschaften einer Linie muß man zuerst sich bemühen, die allen ihren Puncten gemeinschaftlichen Merkmahle oder das Gesetz, welches der Punct bey seiner Bewegung beobachtet, kurz die Natur der krummen Linie durch eine zwischen den Coordinaten des beweglichen Punctes bestehende Gleichung auszudrücken, welche die Gleichung und insbesondere die Polargleichung dieser krummen Linie genannt wird, wenn sie Polar-Coordinaten

62. enthält. So besteht z. B. das Gesetz, welches der Punct M (Fig. 62.) bey der Beschreibung einer Kreislinie beobachtet, darin, daß er immer gleich weit von dem Puncte C entfernt bleibt. Dieses Gesetz oder die Natur der Kreislinie läßt sich nun auf folgende Art durch eine Gleichung ausdrücken. Man setze, indem man den Durchmesser AB zur Abscissenlinie und den Punct A zum Anfang derselben annimmt, die dem Puncte M zukommende Abscisse $AP = x$, seine Ordinate $PM = y$, und den Halbmesser $AC = MC = a$; so ist $PM^2 = MC^2 - PC^2$, oder

$$y^2 = a^2 - (a-x)^2, \text{ folglich } y = \pm\sqrt{(2ax - x^2)}.$$

Diese Gleichung zeigt uns an, daß man für jedes gegebene x das zugehörige y, daher auch den entsprechenden Punct in der krummen Linie finden kann. Daß aus dieser Gleichung alle übrigen Eigenschaften der Kreislinien sich ableiten lassen, ist aus §. 412. zu ersehen.

Nimmt man den Mittelpunct C der Kreislinie zum Pole und den Halbmesser CA zur Polarachse an, damit $MC = r$ der Radiusvector und $ACM = \varphi$ der Polarwinkel werde, so ist $r = a$ die Polargleichung der Kreislinie.

197. Bey der Erzeugung der geraden Linie M'CM (Fig. 197.) befolgt der bewegliche Punct M das Gesetz, daß die Zunahme

seiner Ordinate mit der Zunahme seiner Abscisse im geraden Ver- Fig.
hältnisse steht. Wählen wir BT zur Abscissenachse, B zu ih- 197.
rem Anfange, so daß $BP = x$, $PM = y$ ist, und setzen wir die der Abscisse Null entsprechende Ordinate $BC = b$. Wenn der Punct M in C sich befindet, ist seine Abscisse $x = 0$, seine Ordinate $y = BC = b$. Während seiner Bewegung von C nach M wächst seine Ordinate, da sie von BC in PM übergeht, um $PM - BC = PM - MQ = PQ$, nähmlich um $y - b$, die Abscisse aber schreitet von Null bis $BP = x$ vor, wächst also um $x - 0 = x$. Setzen wir ferner fest, daß, wenn die Abscisse um die Längeneinheit, d. i. um 1 wächst, die Ordinate um a zunehme, so muß, weil die Zunahmen der Ordinate, $y - b$ und a, mit ihren entsprechenden Zunahmen der Abscissen, x und 1, im geraden Verhältnisse stehen sollen, die Proportion

$$y - b : a = x : 1$$

statt finden, aus welcher wir

$$y = ax + b$$

als Gleichung der geraden Linie erhalten.

Um die Größe a für rechtwinkelige Coordinaten noch auf eine andere Weise auszudrücken, beachten wir, daß der obigen Proportion gemäß $\frac{y-b}{x} = a$ und wenn der Winkel $QBP = \alpha$ gesetzt wird, in dem rechtwinkeligen Dreyecke QPB, auch $\frac{QP}{BP} = \frac{y-b}{x} = \text{tang}\,\alpha$, folglich $a = \text{tang}\,\alpha$, und

$$y = x\,\text{tang}\,\alpha + b$$

ist. Geht die gerade Linie durch den Ursprung der Coordinaten, so ist $b = 0$, also $y = ax = x\,\text{tang}\,\alpha$ ihre Gleichung.

Läuft sie zur Abscissenachse parallel, so wird $\alpha = 0$, daher ist $y = b$ die Gleichung einer in dem Abstande b zur Abscissenachse parallelen geraden Linie; für $b = 0$, wird $y = 0$ die Gleichung der Abscissenachse selbst.

Diejenigen krummen Linien, deren Natur sich durch eine algebraische Gleichung zwischen x und y vorstellen läßt, heißen algebraische krumme Linien. Man nennt aber eine algebraische

Fig. Gleichung zwey endliche einander gleiche Ausdrücke von veränderlichen und beständigen Größen, die sich dergestalt ordnen lassen, daß darin kein veränderliches irrationales Glied, und in keinem Exponenten eine veränderliche Größe sich befinde. So z. B. ist $y = \pm\sqrt{(a^2 - x^2)}$ eine algebraische Gleichung, weil sich dieselbe auch in der Form $y^2 = a^2 - x^2$, oder $y^2 + x^2 - a^2 = 0$ darstellen läßt. Eben so ist $y = \pm\sqrt{\frac{a^2x}{a-x}}$ eine algebraische Gleichung, und folglich die krumme Linie, deren Natur durch diese Gleichung vorgestellt wird, eine algebraische krumme Linie. Hingegen heißen diejenigen krummen Linien transcendent, deren Natur sich durch keine algebraische Gleichung ausdrücken läßt, oder in deren Gleichungen sich Kreisbogen, Sinus oder andere trigonometrische Functionen, Logarithmen, unendliche Reihen, die sich nicht genau summiren lassen, u. s. w. befinden. So z. B. sind diejenigen krummen Linien transcendent, welche durch folgende Gleichungen vorgestellt werden:

$$y = \sqrt{(2 - x^2)} + \text{arc cos}\,(1 - x)\,;\quad y = a \log x;$$

$$y = b + bx + \frac{bx^2}{1.2} + \frac{bx^3}{1.2.3} + \frac{bx^4}{1.2.3.4} + \ldots \text{ u. s. w.}$$

§. 621.

Das Verfahren, durch welches man die Gleichung einer Linie findet, besteht im Allgemeinen darin, daß man das Gesetz, welches der beweglich gedachte Punct bey dem Beschreiben dieser Linie befolgt, oder den gemeinsamen Hauptkarakter aller Puncte, kurz die Natur der Linie in einer Gleichung zwischen jenen Raumgrößen (Längen, Flächen- und Körperinhalten), welche auf die Natur dieser Linie Einfluß nehmen, niederschreibt und diese Raumgrößen durch zweckmäßig gewählte Coordinaten ausdrückt. So folgt z. B. aus der Natur der Kreislinie unmittelbar die Gleichung $MC = a$, aus jener der geraden Linie die Gleichung $\frac{QP}{PB} = a$, worin nur noch die Längen MC, QP, PB durch recht- oder schiefwinkelige oder durch Polar-Coordinaten auszudrücken sind.

Dabey pflegt man einem ziemlich allgemein angenommenen Ge- Fig.
brauche zu Folge die Abſciſſe mit x, die Ordinate mit y, den Radius-vector mit r, den Polarwinkel mit φ, den Bogen, welcher zwiſchen dem beweglichen und einem feſtgeſetzten Puncte der krummen Linie liegt, mit s, und die unveränderlichen geraden Linien mit den Anfangsbuchſtaben a, b, c... zu bezeichnen.

Eine gerade Linie heißt ein Durchmeſſer der krummen Linie, wenn ſie alle parallelen Sehnen (Verbindungslinien zweyer Puncte der krummen Linie) in zwey gleiche Theile theilt. Insbeſondere heißt derjenige Durchmeſſer ein Hauptdurchmeſſer oder eine Achſe, welcher auf den von ihm halbirten parallelen Sehnen ſenkrecht ſteht. Wird der Durchmeſſer oder die Achſe von der krummen Linie geſchnitten, ſo heißt der Einſchnittspunct der Scheitel des Durchmeſſers oder der Achſe.

Daraus erhellet, daß, wenn die Abſciſſenlinie ein Durchmeſſer (oder bey rechtwinkeligen Coordinaten eine Achſe) ſeyn ſoll, zu jeder Abſciſſe zwey gleiche, aber in der Lage entgegengeſetzte Ordinaten + y und — y gehören müſſen, daher die Gleichung der krummen Linie keine Aenderung erleiden kann, wenn man y in — y verwandelt. Dieſe Eigenſchaft beſitzt eine ſolche Gleichung in dem beſonderen Falle, wo y nur mit geraden Exponenten behaftet, oder einer Wurzelgröße von geraden Wurzel-Exponenten gleich iſt.

Eben ſo muß, wenn die Ordinatenachſe ein Durchmeſſer, (oder bey rechtwinkeligen Coordinaten eine Achſe) ſeyn ſoll, jede Ordinate y zwey gleichen, in ihrer Lage aber entgegengeſetzten Abſciſſen + x und — x angehören; ſo daß die Gleichung der krummen Linie keine Aenderung erfährt, wenn man x mit — x vertauſcht. Dieſer Fall tritt ein, wenn in der Gleichung die Abſciſſe x nur gerade Exponenten trägt, oder einer Wurzelgröße von geraden Wurzel-Exponenten gleicht.

Fig. So z. B. ist in den Linien, deren Gleichungen

$$ax + by^2 = cx^3, \quad x + \cos y = a, \quad y = \sqrt[4]{a^3 x}$$

sind, die Abscissenachse, in den Linien

$$y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}, \quad x^4 + ayx^2 = b, \quad x = \sqrt[4]{a^4 + by^3}$$

die Ordinatenachse ein Durchmesser; und in den Linien

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \cos xy = x^2 y^2$$

ist sowohl die Abscissen- als Ordinatenachse ein Durchmesser.

Ein Punct, der alle durch ihn gehenden Sehnen einer Linie halbirt, heißt ein **Mittelpunct**. Solche Sehnen pflegt man ebenfalls **Durchmesser** und ihre Hälften **Halbmesser** der Linie zu nennen. Der Durchschnittspunct zweyer Durchmesser oder Achsen einer Linie muß demnach ein Mittelpunct derselben seyn. Soll der Ursprung der Coordinaten ein Mittelpunct seyn, so muß, wie man leicht einsieht, zu jedem Puncte, dessen Coordinaten x und y sind, noch ein anderer gefunden werden können, dessen Coordinaten $-x$ und $-y$ sind; folglich darf sich die Gleichung der Linie nicht ändern, wenn man x in $-x$ und zugleich y in $-y$ übergehen läßt. In den Linien

$$y = ax, \quad x^3 y^3 - xy = a, \quad \text{arc tang}\frac{x}{y} = \cos xy$$

ist demnach der Ursprung der Coordinaten ein Mittelpunct.

173. Eine Gerade TM in der Ebene der krummen Linie, welche dieser in einem einzigen Puncte M begegnet, ohne sie an diesem Orte zu schneiden, heißt die **Tangente** der Krummen an dem Puncte M. Das Stück PT der Abscissenlinie zwischen der Ordinate PM des Berührungspunctes und zwischen dem Durchschnittspuncte T heißt die **Subtangente**. Die Gerade MN aus dem Berührungspuncte M auf die Tangente senkrecht gezogen, und bis an die Abscissenlinie verlängert wird die **Normale**, und das Stück PN der Abscissenlinie zwischen der Ordinate PM des Punctes M und zwischen dem Durchschnittspuncte N wird die **Subnormale** genannt.

Eine Gerade CD, der sich eine krumme Linie AMG zwar ohne Ende nähert, dieselbe aber nie durchschneidet, wenn man beyde auch noch so weit ausdehnt, heißt eine Asymptote der krummen Linie. Daß es krumme Linien gibt, welche Asymptoten haben, erhellet aus Folgendem. Es sey z. B. AMG eine krumme Linie, deren Natur für senkrechte Ordinaten durch die Gleichung $y = \pm a\sqrt{\frac{x}{a-x}}$ vorgestellt ist, bey welcher AP = x, PM = y, und die unveränderliche Gerade AC = a gesetzt wird; so ist offenbar, daß die Gerade CD auf AC senkrecht gezogen eine Asymptote der krummen Linie AMG ist. Denn man setze Fig. 173.

$$x = a + z; \text{ so ist } y = \pm a\sqrt{-1 - \frac{a}{z}}$$

eine unmögliche Größe, es möge z wie immer groß oder klein angenommen werden. Folglich liegt kein einziger Punct der krummen Linie AMG diesseits der Geraden CD, nähmlich die Gerade CD wird von der krummen Linie nie durchschnitten. Dabey nähert sich die krumme Linie AMG der Geraden CD ohne Ende, nähmlich dergestalt, daß man einen Punct der krummen Linie finden kann, welcher von der Geraden CD um weniger absteht als um jede gegebene noch so kleine Größe. Um das Letztere zu begreifen, setze man nur

$$x = a - t, \text{ so ist } y = \pm a\sqrt{\left(\frac{a}{t} - 1\right)}.$$

Nun kann man in dieser Gleichung t so klein annehmen, und folglich einen Punct der krummen Linie so nahe an der Geraden CD bestimmen, als man nur immer will.

§. 622.

Ist die zwischen den Coordinaten x und y bestehende Gleichung einer krummen Linie so beschaffen, daß man die eine Coordinate durch die andere ausdrücken kann, so läßt sich die Linie mittelst der Bestimmung einzelner getrennter Puncte verzeichnen.

Wenn man z. B. die im vorigen Paragraphe betrachtete krumme Linie $y = \pm a\sqrt{\frac{x}{a-x}}$ verzeichnen will; so kann man

Fig. z. B. a = 100 setzen, nach einem verjüngten Maßstabe diese
173. 100 Theile von A bis C auftragen, und etwa nach jeden 5 Theilen Senkrechten auf AC errichten. Sodann setzt man in der Gleichung $y = \pm 100 \sqrt{\frac{x}{100 - x}}$ der Ordnung nach

$$x = 5,\quad x = 10,\quad x = 15 \text{ u. s. w.}$$

berechnet zu diesen Abscissen die entsprechenden Ordinaten, trägt dieselben auf den gezogenen Senkrechten rechts und links auf, und zieht die dadurch bestimmten Puncte durch eine ununterbrochene krumme Linie zusammen. Es ist bey der angenommenen Gleichung für

x = 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50; ...
y = 22,9; 33,3; 42; 50; 57,8; 65,5; 73,4; 81,6; 90,4; 100; ...

Nach derselben Methode könnte die krumme Linie beschrieben
174. werden, die durch $y = \pm x \sqrt{\frac{b + x}{a - x}}$ vorgestellt wird (Fig. 174.), wenn man CB für die Abscissenlinie, und A für den Anfangspunct der Abscissen annimmt, für a und b beliebige Werthe z. B. a = 100, und b = 40 setzt, die positiven Abscissen von A gegen B und die negativen Abscissen gegen C zählt, und dann für verschiedene Abscissen die entsprechenden Ordinaten berechnet.

Diese Verzeichnung ist bey allen krummen Linien anwendbar, deren Gesetz durch eine Gleichung gegeben ist. Sie ist das leichteste Mittel die Gestalt einer krummen Linie zu finden, wenn dieselbe aus der gegebenen Gleichung nicht leicht gefolgert werden kann. So z. B. findet man, wenn nach der Gleichung $a^2 y^2 = a^2 x^2 - x^4$ die zugehörige krumme Linie (die Lemniscate) verzeichnet wird, daß dieselbe in ihrer Gestalt mit der Ziffer 8 übereinstimmt.

Eine Linie läßt sich auch nach ihrer Polargleichung verzeichnen, wenn man aus dem gewählten Pole gerade Linien zieht, die mit der angenommenen Polarachse Winkel von bestimmter Größe z. B. von 5°, 10°, 15°, 20°, ... bilden, zu diesen Winkeln theils mit Hülfe trigonometrischer Tafeln ihre goniometrischen Functionen oder die Logarithmen derselben bestimmt, theils mit-

telſt der im Anhange befindlichen Tafel die Längen der zwiſchen Fig.
ihren Schenkeln mit dem Halbmeſſer 1 beſchriebenen Kreisbogen ſucht, und für die Polarwinkel φ in der gegebenen Gleichung ſubſtituirt, endlich die Längen der Radienvectoren berechnet und nach einem geometriſchen Maßſtabe auf die gezogenen Geraden vom Pole aus aufträgt. Um z. B. die der Gleichung $r = \sqrt{\varphi}$ angehörige Linie zu zeichnen, nehmen wir

den Polarwinkel = 5°, 10°, 15°, 20°, ...

und erhalten die Länge des ihn meſſenden Bogens

$\varphi = 0{,}087;\ 0{,}175;\ 0{,}262;\ 0{,}349;\ \ldots$

daher den Radiusvector

$r = 0{,}295;\ 0{,}418;\ 0{,}512;\ 0{,}591;\ \ldots$

§. 623.

Iſt einmahl für eine Abſciſſenlinie die Gleichung einer krummen Linie bekannt, ſo iſt es leicht für jede andere beliebige Abſciſſenlinie die Gleichung derſelben Linie zu finden. Es ſey z. B. (Fig. 173.) 173.
für die Abſciſſenlinie AC die Gleichung

$$PM^2 = Pm^2 = \frac{AC^2 \cdot AP}{AC - AP}.$$

Wenn man nun bey eben dieſer krummen Linie die Gerade CE für die Abſciſſenlinie annimmt, und $Cp = x$, $pm = y$ ſetzt; ſo läßt ſich y durch x auf folgende Art ausdrücken. Es iſt

$$Pm = Cp = x,\quad pm = PC = y,\quad AC = a,$$

und

$$AP = AC - PC = a - y.$$

Subſtituirt man nun dieſe Werthe in der Gleichung

$$Pm^2 = \frac{AC^2 \cdot AP}{AC - AP};\ \text{ſo iſt}\ x^2 = \frac{a^2.(a-y)}{a-(a-y)},$$

und folglich $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$. Wenn man bey eben dieſer krummen Linie die Gerade AC für die Abſciſſenlinie annimmt und den Anfangspunct der Abſciſſen in C ſetzt, ferner CP mit x, PM mit y, und CA mit a bezeichnet: ſo iſt

$$AP = AC - PC = a - x,\ PM = y,$$

folglich

$$y = \pm a\sqrt{\frac{a}{x} - 1}.$$

Fig.

§. 624.

Es ist aus dem bisher Gesagten leicht zu ersehen, daß die in gleichen Abständen gezogenen Ordinaten einer krummen Linie nichts anders vorstellen als eine gewisse Reihe, bey der die Stellen der Glieder durch die Abscissen bezeichnet werden. Die Gleichung der krummen Linie ist dabey das allgemeine Glied dieser Reihe. So wie man nun eine jede Function einer veränderlichen Größe x, z. B. die Function $\frac{x^2}{1+x^2}$ für das allgemeine Glied irgend einer Reihe annehmen kann, wenn man durch x die Stellen der Glieder bezeichnet; so kann man auch jede Function einer veränderlichen Größe z. B. $\frac{x^2}{1+x^2}$ für die Gleichung irgend einer krummen Linie annehmen, wenn man durch die veränderliche Größe x die Abscissen bezeichnet. Man kann in einem solchen Falle die angenommene Function dergestalt mit derjenigen unveränderlichen Größe verbinden, welche bey der Bestimmung der verschiedenen Werthe von x die Einheit ist, daß die angenommene Function ein lineärer Ausdruck wird (§. 533. Anmerkung.) und daß sie der Ordinate y einer krummen Linie gleich gesetzt werden kann. Z. B. die Function $\frac{x^2}{1+x^2}$ läßt sich mit einer unveränderlichen Größe a auf folgende Art verbinden $\frac{ax^2}{a^2+x^2}$, damit sie ein lineärer Ausdruck wird. Nun kann man $y = \frac{ax^2}{a^2+x^2}$ setzen, und die Eigenschaften der zugehörigen krummen Linie suchen. Man wird nach vorgenommener Untersuchung finden, daß die zu dieser Gleichung zugehörige krumme Linie dieselbe ist, von der wir schon (§. 621.) geredet haben.

§. 625.

Wenn der höchste Exponent einer veränderlichen Größe x oder y, oder die höchste Summe beyder Exponenten eines Gliedes in einer geordneten Gleichung einer algebraischen krummen Linie = 2 ist; so heißt die dazu gehörige krumme Linie eine

Linie der zweyten Ordnung, oder eine krumme Linie der ersten Ordnung. Ist der höchste Exponent oder die höchste Summe beyder Exponenten = 3; so heißt die zugehörige krumme Linie eine Linie der dritten Ordnung oder eine krumme Linie der zweyten Ordnung, u. s. w. Ueberdieß werden diejenigen algebraischen krummen Linien von verschiedenen Ordnungen zu einer und derselben Familie gezählt, deren Gleichungen einerley Glieder enthalten, die nur in den Exponenten verschieden sind. So z. B. sagt man, daß die krummen Linien, welche durch Fig.

$$y^2 = px,\ y^3 = p^2x,\ y^3 = px^2,$$
$$y^4 = p^3x,\ y^4 = p^2x^2,\ y^4 = px^3,\ y^{m+n} = p^mx^n$$

vorgestellt werden, zur Familie der Parabeln gehören.

Bey der Untersuchung der krummen Linien muß man trachten

1) aus der Natur der krummen Linie die Gleichung für dieselbe herzuleiten, oder wenn die Gleichung gegeben ist, die zugehörige krumme Linie zu verzeichnen, welches in Ermangelung anderer Hülfsmittel jederzeit nach §. 622. geschehen kann;

2) für jeden gegebenen Punct der krummen Linie die Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale zu bestimmen;

3) an jedem Orte der krummen Linie die Krümmung zu finden;

4) den Ort der größten oder kleinsten Ordinate zu bestimmen;

5) den Inhalt der Fläche zu berechnen, welche von einer Abscisse, ihren Ordinaten und dem zugehörigen Bogen eingeschlossen ist;

6) die wirkliche Länge eines Bogens zu finden; u. s. w.

II. Abschnitt.

Von den Kegelschnittslinien.

§. 626.

Unter dem Nahmen Kegelschnittslinien begreifen wir diejenigen krummen Linien, welche auf der Oberfläche eines geraden Kegels von kreisförmiger Basis entstehen, wenn ihn eine Ebene nach verschiedenen Richtungen schneidet. Es können auf diese

Fig. Weise nebst der geraden und der Kreislinie noch drey andere krumme Linien entstehen; nähmlich die Parabel, Ellipse, und Hyperbel. Sie werden in diesem Abschnitte nach der hier angeführten Ordnung einzeln aufgestellt; dann wird zu Ende desselben eine allgemeine Gleichung hergeleitet werden, welche zeigt, wie diese krummen Linien auf der Oberfläche eines Kegels durch ebene Schnitte entstehen.

I. Von der Parabel.

§. 627.

175. Es sey GD eine fixe gerade Linie (Fig. 175.), und F ein außerhalb derselben liegender unveränderlicher Punct. Man denke sich eine Linie M'AM von der Beschaffenheit, daß jeder ihrer Puncte von F eben so weit als von der Geraden GD entfernt, nähmlich daß überall die Senkrechte MD = MF sey; so heißt eine solche Linie eine Parabel. Die Gerade GD wird die Leitlinie (directrix), und der Punct F wird der Brennpunct (focus) der Parabel genannt.

Wenn man den unveränderlichen Abstand CF des Brennpunctes F von der Leitlinie GD in dem Puncte A in zwey gleiche Theile theilt; so ist A ein Punct der Parabel, weil er von F und der Leitlinie GD gleich weit entfernt ist. Will man mehrere Puncte der Parabel durch Verzeichnung suchen; so hat man mehrere Senkrechten M'M auf CN zu errichten, und den Abstand CP einer jeden derselben von der Leitlinie aus dem Brennpuncte F auf die Senkrechte M'M bis M' und M mittelst eines Zirkels zu übertragen. Hiezu eröffnet man den Zirkel von P bis C, setzt eine Spitze in F, und durchschneidet mit der anderen die in P errichtete Senkrechte in M und M'.

Man kann die Parabel auch durch eine ununterbrochene Bewegung beschreiben, wenn man an einem rechtwinkeligen Winkelhaken SDE einen Faden = SD anbringt, das eine Ende desselben in S, und das andere in F befestigt, dann den Winkelhaken längs der Leitlinie GD fortbewegt, und mit einem Stifte M den Faden während der Bewegung immer an den Winkelha-

ken andrückt. Denn der Stift M wird bey dieser Bewegung Fig.
eine Linie beschreiben, bey welcher jeder Punct eben so weit von F als von GD entfernt ist. Diese Linie wird demnach eine Parabel seyn, welche F zum Brennpuncte, und GD zur Leitlinie hat.

§. 628.

Aufgabe. Eine Gleichung für die Parabel zu finden.

Auflösung. Man nehme die aus dem Brennpuncte F auf die Directrix GD gefällte Senkrechte CN für die Abscissenlinie und A für den Anfangspunct der Abscissen an, setze $AP = x$, die senkrechte Ordinate $PM = y$, und den Abstand des Brennpunctes von dem Anfangspuncte $= FA = AC = c$. Da die Gleichung $MD = MF$ bereits die Natur der Parabel angibt, so kommt es bloß darauf an, die Längen MD und MF durch die gewählten rechtwinkeligen Coordinaten x, y und durch die constante Größe c auszudrücken. Nun ist

$$MD = CP = AP + AC = x + c\ ,\quad PF = AP - AF = x - c,$$
$$MF = \sqrt{(MP^2 + PF^2)} = \sqrt{y^2 + (x-c)^2}\ ;$$

daher ist

$$y^2 + (x-c)^2 = (x+c)^2$$

und

$$y^2 = 4cx\ ,$$

folglich

$$y = \pm\sqrt{4cx}.$$

Würde GD für die Abscissenlinie, C für den Anfangspunct der Abscissen angenommen, und $CD = x$, $DM = y$, und $CF = 2c$ gesetzt, so würde $y = \frac{x^2}{4c} + c$ gefunden. Wäre aber die in dem Scheitel A errichtete Tangente die Abscissenlinie, und A der Anfangspunct der Abscissen; so würden die darauf senkrechten Ordinaten durch die Gleichung $y = \frac{x^2}{4c}$ ausgedrückt werden.

Diese Gleichung $y = \pm\sqrt{4cx}$ gibt zu erkennen:

1. Daß die Abscissenlinie AN eine Achse der Parabel und A ihr Scheitel ist (§. 621.), weil wegen der Zeichen $\pm$ zu jeder positiven Abscisse zwey gleiche senkrechte nach entgegengesetzten Richtungen gehende Ordinaten gehören, und weil für $x = 0$ auch $y = 0$ wird.

Fig. 175. 2. Diesseits der Leitlinie von A angefangen wachsen die Abscissen und Ordinaten ohne Ende. Denn mit x wächst das Product 4cx, also auch $\sqrt{4cx}$ oder y, und für $x=\infty$ wird $y=\pm\infty$, das heißt: die zwey Schenkel der Parabel laufen diesseits der Leitlinie ohne Ende fort.

3. Nimmt man x negativ an, so ist $y=\pm\sqrt{(-4cx)}$ eine unmögliche Größe. Folglich liegt kein einziger Punct der Parabel über A hinaus nach der Gegend AT.

4. Setzt man $x=c=AF$, so ist $y=\pm 2c$, nähmlich $FB=2AF=FB'$, und folglich $B'B=4AF=4c$. Die in dem Brennpuncte F auf die Achse senkrecht errichtete Sehne BB' wird der Parameter der Parabel genannt, welcher jederzeit dem doppelten Abstande des Brennpunctes von der Leitlinie, folglich auch dem vierfachen Abstande des Brennpunctes von dem Scheitel gleich ist. Setzt man den halben Parameter oder die im Brennpuncte auf der Achse senkrechte Ordinate $BF=p=2c$; so ist

$$y=\pm\sqrt{2px}, \text{ oder } y^2=2px.$$

5. Da $y^2=2px$, und $Y^2=2pX$ ist (wenn man mit X eine andere Abscisse und mit Y die zugehörige Ordinate bezeichnet); so ist auch $y^2:Y^2=x:X$, nähmlich die Quadrate der Ordinaten der Parabel verhalten sich wie die zugehörigen Abscissen.

6. Eine Gerade FM aus dem Brennpuncte an irgend einen Punct M der Parabel gezogen heißt der Leitstrahl (radius vector) des Punctes M. Der Leitstrahl eines jeden Punctes der Parabel ist gleich der zugehörigen Abscisse mehr dem vierten Theile des Parameters, nähmlich es ist, wenn r diesen Leitstrahl vorstellt, $r=x+\frac{1}{2}p$.

Denn es ist

$$FM=MD=PC=AP+AC=AP+AF,$$

folglich $$r=x+\tfrac{1}{2}p.$$

§. 629.

Um die im vorhergehenden Paragraphe aufgestellte Grundgleichung der Parabel $MF=MD$ durch Polar-Coordinaten aus-

zudrücken, wählen wir (Fig. 175.) den Brennpunct F zum Pol, die Achse FA zur Polarachse, so daß $AFM = \varphi$ und $FM = r$ wird. Nun hat man aber Fig. 175.

$$MD = CP = CF + FP = p + FM \cdot \cos PFM = p - r\cos\varphi,$$

folglich

$$r = p - r\cos\varphi\ ;$$

daher ist

$$r = \frac{p}{1+\cos\varphi} = \frac{p}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi} = \frac{c}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}$$

die gesuchte Polargleichung der Parabel.

§. 630.

Wenn man aus einem Puncte M der Parabel zur Achse eine Parallele MD und die Gerade MF zu dem Brennpuncte zieht, endlich den Winkel FMD durch die Gerade TQ halbirt, so berührt diese Gerade die Parabel in dem Puncte M.

Denn jeder andere Punct Q der Geraden TQ dies- oder jenseits des Punctes M liegt außer der Parabel, welches man auf folgende Art erweisen kann. Man schneide $MD = MF$ ab, und führe durch D eine Senkrechte GD auf MD; so ist GD die Leitlinie. Ferner ziehe man die Gerade FD; so ist wegen der Gleichheit der Dreyecke FMK und DMK die Gerade TQ senkrecht auf FD, und $FK = KD$. Es ist also auch $QD = QF$ (§. 358.). Nun ist aber die Senkrechte $QE < QD$; folglich ist auch $QE < QF$. Der Punct Q liegt demnach außer der Parabel, weil im Gegentheile $QE = QF$ seyn müßte. Eben dieses läßt sich von jedem anderen Puncte der Geraden TQ außer M erweisen.

§. 631.

Wir ziehen hieraus folgende Schlüsse:

I. **Die Subtangente PT ist gleich der doppelten Abscisse.** Denn wegen der Gleichheit der Dreyecke FTK und DMK ist $FT = DM = CP$; also ist auch $FT - AF = CP - AC$, nähmlich $AT = AP$; endlich ist $AT + AP = AP + AP$, mithin $PT = 2AP = 2x$.

Fig. Es kann demnach an jeden Punct M der Parabel eine Tangente sehr leicht gezogen werden, ohne den Brennpunct in Erwägung zu ziehen, wenn man auf die Achse die senkrechte Ordinate PM führt, AT = AP abschneidet, und endlich M mit T durch eine Gerade verbindet.

Ist hingegen aus einem Puncte L, der außer der Parabel liegt, eine Tangente an die Parabel zu ziehen; so muß man aus L mit der Entfernung LF die Leitlinie in D durchschneiden, aus D zur Achse eine Parallele DS ziehen, und den Durchschnittspunct M mit dem gegebenen Puncte L durch eine Gerade LM verbinden. Denn diese Gerade LM wird die Parabel in dem Puncte M berühren, weil sie den Winkel FMD halbirt. Auch ist leicht einzusehen, wie man bey einer schon gezogenen Tangente den Berührungspunct finden könne.

II. **Die Subnormale ist gleich dem halben Parameter, und folglich bey einer und derselben Parabel unveränderlich.**

Denn in den ähnlichen Dreyecken TPM und PMN ist TP : PM = PM : PN, nähmlich $2x : \sqrt{2px} = \sqrt{2px} : PN$; folglich ist PN = p. Es kann demnach zu jeder Parabel, bey der die Lage der Achse gegeben ist, der zugehörige Parameter, Brennpunct und Abstand der Leitlinie gefunden werden, wenn man an einen beliebigen Punct M eine Tangente TM zieht, die Senkrechte MN auf TM errichtet, und dann $\frac{1}{2}$PN von A bis F und C überträgt.

III. Die Tangente TM ist

$$= \sqrt{(PT^2 + PM^2)} = \sqrt{4x^2 + 2px} = \sqrt{4x\,(x + \tfrac{1}{2}p)} = 2\sqrt{rx}$$

Die Normale MN findet man

$$= \sqrt{(PM^2 + PN^2)} = \sqrt{2px + p^2} = \sqrt{2p\,(x + \tfrac{1}{2}p)} = \sqrt{2pr}.$$

IV. Bezeichnen wir mit v den Abstand KF der Tangente MT von dem Brennpuncte F, so ist, weil wegen der Congruenz der Dreyecke DKM und TKF die Gerade $TK = MK = \frac{1}{2}TM$ ist und KF zur MN parallel läuft, $KF = \frac{1}{2}MN$, folglich

$$v = \sqrt{\tfrac{1}{2}pr} = \sqrt{cr}.$$

V. Da wegen der Congruenz der Dreyecke MKF und FKT, nicht bloß KT = KM, sondern auch TF = MF ist, so folgt aus dem Parallelismus der Linien MN und KF nach §. 397., daß FT = FN, also auch = MF ist. Wenn man demnach aus dem Brennpuncte F den Leitstrahl FM auf der Achse beyderseits nach T und N aufträgt, so wird MT die Tangente und MN die Normale. Fig. 175.

VI. In einem jedem Puncte der Parabel ist der Winkel SMQ = FMK, weil jeder derselben dem Winkel DMK gleich ist. Wenn demnach an eine hohle paraboliſche Fläche, welche durch die Umdrehung einer halben Parabel APM um ihre Achse erzeugt wird, mehrere Feuer-, Licht- oder Stimmstrahlen mit der Achse parallel einfallen; so werden sich dieselben nach dem Abprellen in dem Puncte F vereinigen, weil der Abprellwinkel FMK jederzeit dem Einfallwinkel SMQ gleich ist. Umgekehrt, wenn aus dem Brennpuncte einer hohlen paraboliſchen Fläche (eines paraboliſchen Hohlspiegels) mehrere Feuer-, Licht- oder Stimmstrahlen nach was immer für Richtungen ausgehen; so werden alle diejenigen, welche an die hohle paraboliſche Fläche anstoßen, nach dem Abprellen in einer zur Achse parallelen Richtung fortlaufen. Befestigt man nun an den entgegengesetzten Wänden eines Zimmers zwey paraboliſche Hohlspiegel dergestalt, daß ihre Achsen in einer und derselben geraden Linie liegen, und ihre Aushöhlungen gegen einander gekehrt sind; so werden die Strahlen, welche aus dem Brennpuncte des einen Hohlspiegels ausgehen, sich in dem Brennpuncte des entgegenstehenden Hohlspiegels vereinigen. Wenn man demnach in dem Brennpuncte des ersten Spiegels glühende Kohlen, und in dem Brennpuncte des zweyten Schießpulver anbringt, so wird das Schießpulver entzunden; oder, wenn jemand seinen Mund in den Brennpunct des ersten Spiegels, und ein anderer sein Ohr in den Brennpunct des zweyten hält; so wird der zweyte die Worte des ersten vernehmen, wenn sie auch so leise ausgesprochen werden, daß keiner von den Umstehenden dieselben vernehmen kann.

Fig. 176.

§. 632.

Aufgabe. Eine Gleichung für die Parabel zu finden, wenn man eine Gerade AC, die zu der Achse BG parallel läuft, für die Abscissenlinie und den Punct A zum Ursprung der Abscissen annimmt, und die Ordinaten zu der Tangente AT parallel zieht. (Fig. 176.)

Auflösung. Es sey A der Anfangspunct der Abscissen, $AP = x$, $PM = y$, der Leitstrahl $AF = c$, BL die Achse, AG und MQ senkrecht auf derselben, und $2p =$ dem Parameter der Achse. Da die Gleichung der Parabel, wenn die Abscissen auf der Achse gerechnet werden, (§. 628.) $MQ^2 = 2p.BQ$ ist; so wird man jene für die Abscissenlinie AC erhalten, wenn man sowohl MQ als auch BQ durch x, y und durch die unveränderliche Größe c ausdrückt. Dieses kann auf folgende Art geschehen. Man setze, weil die Lage des Punctes A unveränderlich ist,

$$BG = BT = a,$$

so ist

$$AG = \sqrt{2pa},$$
$$TG = 2a,$$
$$PS = AT = 2\sqrt{(FA.BG)} = 2\sqrt{ca},$$
$$MS = PS - PM = 2\sqrt{ca} - y.$$

In den zwey ähnlichen Dreyecken AGT und MQS ist

$$MQ = \frac{MS.AG}{AT} = \frac{(2\sqrt{ca} - y)\sqrt{2pa}}{2\sqrt{ca}}$$

$$= \left(\sqrt{a} - \frac{y}{2\sqrt{c}}\right)\sqrt{2p};$$

$$SQ = \frac{MS.TG}{AT} = \frac{(2\sqrt{ca} - y)\,2a}{2\sqrt{ca}}$$

$$= 2a - y\sqrt{\frac{a}{c}}.$$

Ferner ist

$$BQ = TQ - TB = TS + SQ - TB = AP + SQ - BG$$

$$= x + 2a - y\sqrt{\frac{a}{c}} - a = x + a - y\sqrt{\frac{a}{c}}.$$

Subſtituirt man in der oberen Hauptgleichung $MQ^2 = 2p.BQ$ für MQ und BQ die hier entwickelten Werthe; ſo iſt Fig. 176.

$$\left(a - y\sqrt{\frac{a}{c} + \frac{y^2}{4c}}\right) 2p = 2p\left(x + a - y\sqrt{\frac{a}{c}}\right),$$

folglich $y^2 = 4cx$,

oder wenn man $4c = 2q$ ſetzt,

$y^2 = 2qx$.

§. 633.

Dieſe Gleichung $y^2 = 2qx$ oder $y = \pm\sqrt{2qx}$ gibt uns zu erkennen:

I. Daß zu jeder poſitiven Abſciſſe zwey gleiche Ordinaten nach entgegengeſetzten Richtungen gehören, und daß folglich AC ein Durchmeſſer der Parabel iſt; A iſt der Scheitel des Durchmeſſers (vertex diametri). Eine Gerade $= 4AF = 4c = 2q$ wird der Parameter des Durchmeſſers genannt; er gleicht dem vierfachen Abſtande des Scheitels A von dem Brennpuncte. Auch iſt leicht einzuſehen, daß derjenigen Abſciſſe, die dem Abſtande TF, folglich dem Leitſtrahle AF oder c gleich iſt, die Ordinate $\sqrt{4c.c} = 2c = q$ zugehöre, die durch den Brennpunct geht, und nach beyden Richtungen zuſammen genommen den Parameter des Durchmeſſers gibt; woraus erhellet, daß der Parameter 2q des Durchmeſſers AC der durch den Brennpunct gehenden Doppel-Ordinate oder Sehne gleich iſt.

II. Die Quadrate der Ordinaten des Durchmeſſers verhalten ſich gegen einander, wie die zugehörigen Abſciſſen.

III. Da alles dieſes auch bey einer jeden anderen zur BG Parallelen ſtatt findet, ſo folgt, daß jede zur Achſe parallel gezogene Gerade ein Durchmeſſer der Parabel iſt. Auch iſt leicht einzuſehen, daß jeder Durchmeſſer die Parabel nur in einem einzigen Puncte durchſchneidet; denn nur für $x = 0$, iſt auch $y = 0$. Wenn man hingegen aus was immer für einem Puncte A der Parabel eine Gerade zieht, die nicht mit der Achſe parallel läuft;

Fig. 176. so wird dieselbe hinreichend verlängert, die Parabel noch einmahl durchschneiden.

IV. Da nun jeder Durchmesser der Parabel alle jene Sehnen halbirt, welche mit der Tangente des Scheitels des Durchmessers parallel laufen, so kann bey einer aufgezeichneten Parabel die Lage der Achse auf folgende Art gefunden werden. Man ziehe zwey parallele Sehnen, halbire jede derselben, führe durch diese zwey Puncte eine gerade Linie, nähmlich einen Durchmesser, errichte auf diesen Durchmesser eine Senkrechte, welche sich beyderseits in der Parabel endiget, und folglich eine doppelte Ordinate der Achse vorstellt. Endlich theile man noch diese letzte Doppel-Ordinate der Achse durch eine Senkrechte in zwey gleiche Theile; so wird man die Lage der Achse erhalten, und darauf den Scheitel, Parameter, Brennpunct, Leitlinie, u. s. w. bestimmen können.

V. Aus einer auf der Achse senkrechten Sehne $AD = b$, und aus dem Winkel $TAG = m$, welchen sie mit der Tangente AT ihres Anfangspunctes A bildet, läßt sich das Stück BG der Achse, und folglich auch der Parameter der Achse bestimmen. Denn im Dreyecke ATG ist

$$TG = \tfrac{1}{2} b \,.\, \text{tang } m,$$

folglich $$BG = \tfrac{1}{4} b \,.\, \text{tang } m.$$

Ueberdieß ist $$AG^2 = 2p \,.\, BG,$$

nähmlich $$2p = \frac{AG^2}{BG};$$

mithin ist der gesuchte Parameter der Achse

$$2p = \frac{\frac{1}{4} b^2}{\frac{1}{4} b \text{ tang } m} = b \cot m.$$

§. 634.

I. Der Inhalt einer paraboliſchen Fläche, welche von einer Abſciſſe, der zugehörigen Ordinate und dem dazwiſchen liegenden Bogen eingeſchloſſen wird, iſt gleich zwey Drittheilen des Productes aus der Abſciſſe in die Ordinate.

Nähmlich es ist Fig. 175.

$$AMP = \tfrac{2}{3} AP . PM = \tfrac{2}{3} xy,$$

und folglich

$$M'AM = \tfrac{2}{3} AP . M'M.$$

Denn nach §. 628. ist

$$MP = y = \sqrt{2px} = 2^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}},$$

daher vermöge §. 442. die Fläche

$$AMP = 2^{\frac{1}{2}} p . {}^{\frac{1}{2}} x . {}^{\frac{3}{2}} . \tfrac{2}{3} = \tfrac{2}{3} xy.$$

II. Der Cubikinhalt eines Paraboloids M'AM (eines Körpers, welcher durch die Umdrehung der halben Parabel um die Achse erzeugt wird) ist gleich dem halben Cylinder von derselben Grundfläche und Höhe; nähmlich es ist der Cubikinhalt von

$$M'AM = \tfrac{1}{2} AP . MP^2 \pi = \frac{\pi}{2} xy^2.$$

Denn die Grundfläche dieses Körpers ist der von der Ordinate $MP = y$ beschriebene Kreis, daher $= \pi y^2 = 2\pi px$; hieraus findet man nach §. 516. den Inhalt des Paraboloids

$$M'AM = \frac{2\pi px^2}{2} = \frac{\pi . 2px . x}{2} = \frac{\pi}{2} xy^2.$$

177. Um den letzteren Satz auf die Lösung eines interessanten Problems anzuwenden, gestatten wir, wie dieses gewöhnlich geschieht, die Voraussetzung, daß der von einer auf die vortheilhafteste Weise geladenen Mine ausgeworfene Minentrichter in einem gleichartigen Erdreiche ein Paraboloid sey, bey dem der Halbmesser AB der Grundfläche der kürzesten Widerstandslinie AF gleich ist, und daß der Mittelpunct des Minenofens F mit dem Brennpuncte des Paraboloids einerley sey; so kann man aus der kürzesten Widerstandslinie $AF = a = AB$ (aus der Vertiefung des Minenofens) den Cubikinhalt des Minentrichters auf folgende Art finden. Es ist

Fig. 177.

$$FB = \sqrt{(AB^2 + AF^2)}$$
$$= a\sqrt{2} = BE = AD,$$
$$FD = AD - AF = a(\sqrt{2} - 1),$$
$$FC = \tfrac{1}{2}FD = \tfrac{1}{2}a(\sqrt{2} - 1),$$

und

$$AC = AF + FC = \tfrac{1}{2}a(1 + \sqrt{2}).$$

Nun ist das Paraboloid

$$GCB = \tfrac{1}{2}AC \cdot AB^2\pi;$$

folglich ist der gesuchte Cubikinhalt des Minentrichters

$$= \tfrac{1}{4}a(1 + \sqrt{2}) \cdot a^2\pi$$
$$= \tfrac{1}{4}\pi(1 + \sqrt{2})\, a^3 = 1{,}896a^3.$$

Es sey z. B. $AF = 20$ Schuhen; so ist der Cubikinhalt des Minentrichters $= 15168$ Cubikschuhen.

II. Von der Ellipse.

§. 635.

178. Es sey AB eine gerade Linie, F, f zwey Puncte auf derselben. Man denke sich eine krumme Linie von der Beschaffenheit, daß die Summe der Abstände MF + Mf von den Puncten F, f, eines jeden Punctes M einer unveränderlichen Geraden $F'f' = 2a$ gleich, und zugleich $2a > Ff$ sey; so wird eine solche krumme Linie eine Ellipse genannt. Die Puncte F, f heißen Brennpuncte.

Der hier aufgestellten Erklärung zu Folge kann man aus der unveränderlichen Summe der Abstände

$$Mf + MF = F'f',$$

und aus dem gegebenen Abstande der Brennpuncte $= Ff$ eine Ellipse durch eine ununterbrochene Bewegung beschreiben, indem man in F und f die Endpuncte eines Fadens befestigt, dessen Länge

$$= MF + Mf = F'f'$$

ist, und einen Stift M dergestalt herumbewegt, daß er immer beyde Theile des Fadens in gehöriger Spannung erhält; denn der Stift M wird während dieser Bewegung eine Ellipse beschreiben.

Auch kann man mittelst des Zirkels mehrere Puncte der Ellipse bestimmen, wenn man eine gerade Linie $F'f' = 2a =$

Mf + MF zieht, diese in mehrere (gleiche oder ungleiche) Theile theilt, und dann mit jeden zwey zusammen gehörigen Theilen der Geraden F'f' als Halbmessern, aus F und f Durchschnittspuncte von Kreisbogen, also Puncte der Ellipse bestimmt. Wenn man z. B. mit dem Halbmesser FM = F'M' aus F, und mit dem Halbmesser M'f' aus f Kreisbogen beschreibt; so wird ihr Durchschnittspunct M ein Punct der Ellipse seyn. Auch m wird ein Punct derselben Ellipse seyn, wenn man aus F mit dem Halbmesser Fm = F'm' einen Kreisbogen beschreibt, und aus f mit dem Halbmesser fm = f'm' denselben durchschneidet. Auf diese Art können unzählige Puncte einer und derselben Ellipse bestimmt werden. Fig. 178.

§. 636.

Aufgabe. Eine Gleichung für die Ellipse zu finden.

Auflösung. Man nehme AB für die Abscissenlinie, und den von f und F gleich weit abstehenden Punct C für den Anfangspunct der Abscissen an; setze CP = x, die senkrechte Ordinate PM = y, die gegebene unveränderliche Summe der Abstände MF + Mf = 2a, den unveränderlichen Abstand Cf = CF = c, den Leitstrahl MF = r und Mf = ϱ; so ist

$$Pf = c - x, \quad PF = c + x.$$

Nun ist nach der Erklärung der Ellipse $r + \varrho = 2a$ ihre Grundgleichung; ferner hat man in den rechtwinkeligen Dreyecken MPf und MPF

$$Mf^2 = MP^2 + Pf^2 \quad \text{und} \quad MF^2 = MP^2 + PF^2,$$

nähmlich

$$\varrho^2 = y^2 + (c - x)^2, \qquad r^2 = y^2 + (c + x)^2.$$

Hieraus folgt $r^2 - \varrho^2 = 4cx$

und wenn man durch $r + \varrho = 2a$

dividirt, $r - \varrho = \frac{2cx}{a}$;

somit ist

$$r = a + \frac{cx}{a}, \qquad \varrho = a - \frac{cx}{a}.$$

Substituirt man diesen Werth von r in die Gleichung

Fig. $y^2 = r^2 - (c + x)^2$,

178. und nimmt darauf Bedacht, daß in dem Dreyecke FMf stets

$$fM + MF > Ff,$$

also $2a > 2c$ und $a > c$ ist;

so wird

$$y^2 = \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 - (c+x)^2 = a^2 - c^2 - \frac{x^2}{a^2}(a^2 - c^2)$$

oder

$$y^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

folglich

$$y = \pm \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}.$$

§. 637.

Diese gefundene Gleichung gibt uns zu erkennen:

I. Daß, weil sowohl x als auch y bloß mit geraden Exponenten vorkommen, nicht nur die Ordinaten-, sondern auch die Abscissenlinie eine Achse, daher der Ursprung der Coordinaten ein Mittelpunct der Ellipse ist; weßwegen man jede durch diesen Mittelpunct gehende und in ihm halbirte Sehne einen Durchmesser der Ellipse und seine Hälfte einen Halbmesser nennt.

II. Daß die Ellipse eine in sich zurückkehrende Linie ist. Denn für jede positive oder negative Abscisse, die kleiner als a ist, erhält man zwey gleiche Ordinaten nach entgegengesetzten Richtungen. Für $x = a$ und $x = -a$ hingegen ist $y = 0$, nähmlich in der Entfernung $CA = CB$ geht die krumme Linie durch die Achse. Endlich ist für jede positive oder negative Abscisse, wenn sie größer als a ist, die zugehörige Ordinate eine unmögliche Größe. Ueber A und über B hinaus gibt es demnach keine Ordinaten mehr, und A, B sind die zwey Scheitel der Ellipse.

III. Daß der Abscisse $x = 0$ die größte Ordinate entspricht, nähmlich daß $CD = CE$ die größte Ordinate ist, und daß sowohl von C gegen B als auch von C gegen A die Ordinaten immer abnehmen, bis sie endlich in A und B gänzlich ver-

schwinden. Auch ist leicht einzusehen, daß die größte Ordinate CD<CB ist, weil $CD^2 = a^2 - c^2$ und $CB^2 = a^2$ ist. Fig. 178.

IV. Daß beyde Brennpuncte von den anliegenden Scheiteln der Ellipse gleich weit entfernt sind. Denn es ist CF = Cf, und CA = CB; also ist auch FA = fB.

V. Der Leitstrahl fM ist (nach §. 636.) $= \varrho = a - \frac{cx}{a}$,

und $FM = r = a + \frac{cx}{a}$.

VI. Da nun CB = a, und auch CA = a gefunden wird, wenn man y = 0 setzt; so ist AB = 2a. Es ist aber vermöge der Annahme 2a die unveränderliche Summe der Abstände eines jeden Punctes M der Ellipse von ihren Brennpuncten; folglich ist in der Ellipse die Summe der Abstände eines jeden Punctes M von den Brennpuncten der Geraden AB gleich, welche die Scheitel verbindet.

§. 638.

Diese durch beyde Brennpuncte bis an die Scheitel der Ellipse gezogene Gerade AB wird die große Achse (axis major) genannt. Der von beyden Brennpuncten oder auch von beyden Scheiteln gleich weit abstehende Punct C der großen Achse heißt der **Mittelpunct**, und der Abstand des Mittelpunctes von dem einen Brennpuncte wird die **Excentricität** genannt. Die durch den Mittelpunt auf die große Achse senkrecht gezogene und beyderseits bis an den Umfang der Ellipse verlängerte Gerade DE heißt die **kleine oder vereinigte Achse** (axis minor, axis conjugatus).

Aus der großen Achse und der Excentricität der Ellipse kann jederzeit die kleine Achse gefunden werden, und umgekehrt. Denn es ist vermöge der gefundenen Gleichung, wenn man x = 0 setzt,

$$y = \sqrt{(a^2 - c^2)} = CD = \sqrt{(CB^2 - Cf^2)}.$$

Dieses läßt sich auch aus den rechtwinkeligen Dreyecken FCE und fCE ableiten. Denn da in diesen zwey vollkommen gleichen Dreyecken EF = Ef, und vermöge des Vorhergehenden

EF + Ef = AB ist;

Fig. 178. so ist auch $\frac{1}{2}(EF+Ef)=\frac{1}{2}AB$,
nähmlich $Ef=CB$.
Es ist aber $CE=\sqrt{(Ef^2-Cf^2)}$;
folglich ist auch $CE=\sqrt{(CB^2-Cf^2)}$
$=\sqrt{(a^2-c^2)}$.

Aus der Gleichung
$CE=\sqrt{(CB^2-Cf^2)}$
folgt $CE^2=(CB+Cf).(CB-Cf)$
$=(CA+Cf)(CB-Cf)=Af.fB$;
daher auch $Af:CE=CE:fB$.

Nähmlich die kleine Halbachse ist die mittlere Proportionale zwischen den Abständen eines Brennpunctes von den beyden Scheiteln der Ellipse.

Anmerkung. Mit Hülfe beyder Achsen $F'f'$ und $D'E'$ kann die Ellipse beschrieben werden, indem man dieselben dergestalt auf einander senkrecht stellt, daß sie sich wechselweise in C halbiren, und dann aus dem Endpuncte E der kleinen Achse mit einem Halbmesser $CB=\frac{1}{2}F'f'$ die große Achse AB in F und f durchschneidet, um die Excentricität $Cf=CF$ und die Brennpuncte F und f zu erhalten. Sind einmahl die Brennpuncte bestimmt, so wird die Ellipse nach §. 635 beschrieben. Auch kann aus der gegebenen kleinen Achse und aus dem Abstande der Brennpuncte die große Achse, oder aus der großen Achse und aus dem Abstande der Brennpuncte die kleine Achse gefunden werden.

§. 639.

Wenn wir die kleine Halbachse mit b bezeichnen, nähmlich wenn wir $a^2-c^2=b^2$ setzen, und diesen Werth in der gefundenen Gleichung für die Ellipse substituiren; so erhalten wir

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2), \text{ oder } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Setzen wir in dieser Gleichung $b=a$, oder in der vorigen $c=0$, so ist $y=\pm\sqrt{(a^2-x^2)}$ eine Gleichung für die senkrechten Ordinaten einer Kreislinie, in welcher die Abscissen auf dem Durchmesser von dem Mittelpuncte an gerechnet werden. Eine Ellipse

wird demnach in eine Kreislinie verwandelt, wenn man die zwey Achsen einander gleich setzt, oder die Excentricität verschwinden läßt. Fig. 178.

Aus dieser gefundenen Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$

folgt auch:

I. Daß sich das Quadrat einer jeden Ordinate zum Producte aus den beyden Abschnitten der großen Achse verhält, wie das Quadrat der kleinen Achse zum Quadrate der großen Achse, weil sich die gefundene Gleichung auch auf folgende Art darstellen läßt;

$$y^2 = \frac{4b^2}{4a^2}(a+x)(a-x),$$

nähmlich es ist

$$PM^2 = \frac{DE^2}{AB^2}.AP.PB,$$

und endlich

$$PM^2 : AP.PB = DE^2 : AB^2.$$

II. Daß sich die Quadrate der Ordinaten gegen einander verhalten, wie die Producte aus den zugehörigen Abschnitten der großen Achse. Denn da

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a+x)(a-x)$$

und $$Y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a+X)(a-X)$$

ist; so ist auch

$$y^2 : Y^2 = (a+x)(a-x) : (a+X)(a-X).$$

III. Daß sich bey gleichen Abscissen jede Ordinate der Ellipse auf der großen Achse zu der Ordinate des Kreises verhält, wie die kleine Halbachse zur großen oder wie die kleine Achse zu der großen: nähmlich daß (Fig. 179.) 179.

$$PM : PM' = CE : CB$$

ist. Denn in der Ellipse ist

$$PM^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

und im Kreise ist $PM'^2 = a^2 - x^2$

Fig. 179. für eben dieselbe Abscisse $CP = x$; folglich ist auch

$$PM^2 : PM'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) : a^2 - x^2,$$

nähmlich $$PM : PM' = b : a.$$

§. 640.

Für die Ellipse läßt sich auch eine Gleichung finden, wenn man den Anfangspunct der Abscissen an das eine Ende der großen Achse versetzt. Denn es sey

$AP = x$, $PM = y$, $AC = CB = a$, und $DC = CE = b$; so ist $CP = x - a$.

Nun ist vermöge des Vorhergehenden

$$PM^2 = \frac{CE^2}{CB^2}(CB^2 - CP^2);$$

folglich ist auch

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}[a^2 - (x - a)^2],$$

und endlich $$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

eine Gleichung, aus der sich ebenfalls alle bisher entwickelten Eigenschaften der Ellipse ableiten lassen, und welche für $b = a$, in die Gleichung $y^2 = 2ax - x^2$ der Kreislinie übergeht.

§. 641.

Eine dritte Proportionallinie zur großen und kleinen Achse, nähmlich $\frac{(2b)^2}{2a}$ oder $\frac{2b^2}{a}$ wird in der Ellipse der Parameter der großen Achse genannt. Eine dritte Proportionallinie zur kleinen und großen Achse aber, nähmlich $\frac{2a^2}{b}$ heißt der Parameter der kleinen Achse. Bezeichnen wir die Hälften dieser Parameter durch p und P, so ist

$$p = \frac{b^2}{a} \text{ und } P = \frac{a^2}{b}.$$

Da $b < a$, also $p < b$ ist; so muß es auf der großen Achse sowohl zwischen A und C als auch zwischen C und B einen Punct von der Beschaffenheit geben, daß die Ordinate FG dem

halben Parameter p, und folglich GG′ dem ganzen Parameter 2p der großen Achse gleich ist. Um diesen Punct F oder f, nähmlich CF = Cf zu finden, setze man (in der Gleichung §. 639.) Fig. 179.

$$y = p, \text{ nähmlich } y = \frac{b^2}{a}; \text{ so ist } \frac{b^4}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Daraus findet man $x = \pm\sqrt{(a^2 - b^2)} = \pm c$, nähmlich $x = Cf$, oder $x = CF$, wenn F, f die Brennpuncte sind. In der Ellipse ist demnach die durch den Brennpunct auf die große Achse senkrecht gezogene und beyderseits bis an den Umfang der Ellipse verlängerte Gerade dem Parameter der großen Achse gleich.

Der halbe Parameter der kleinen Achse läßt sich in der Ellipse durch keine Ordinate vorstellen, weil $a > b$, also $P > a$ ist; nähmlich weil der Parameter der kleinen Achse größer als die große Achse ist.

Wenn man (§. 640.) in die Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

den Parameter der großen Achse bringt, nähmlich $b^2 = ap$ setzt; so ist

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$$

wieder eine Gleichung für die Ellipse.

Setzen wir in dieser Gleichung $p = a$, so ist $y^2 = 2ax - x^2$ eine Gleichung für den Kreis.

Setzt man hingegen a in Hinsicht auf p so groß, daß der Quotient $\frac{p}{a}$ kleiner als jede angebbare Größe sey, läßt man nähmlich a in Hinsicht auf p unendlich groß werden; so verschwindet für jede endliche vom Scheitel an gerechnete Abscisse das zweyte Glied der Gleichung $y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$ in Hinsicht auf das erste Glied, und diese übergeht in $y^2 = 2px$, d. i. in die Gleichung der Parabel. Berücksichtigen wir zugleich den Abstand $AF = d$ des Scheitels A von dem nächsten Brennpuncte, so zeigt sich: daß, weil

Fig. 179.
$$d = a - c = a - \sqrt{a^2 - b^2} = a\left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right)$$
$$= a\left(1 - \sqrt{1 - \frac{p}{a}}\right) = \frac{p}{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{p}{a}\right)}}$$

ist, bey unendlicher Vergrößerung der Halbachse a der Abstand

$$d = \frac{p}{2} \quad \text{wird.}$$

Eine Ellipse also, deren große Achse in Hinsicht auf ihren Parameter unendlich groß ist, kann in jeder endlichen Entfernung von ihren Scheiteln als eine Parabel angesehen werden, die mit ihr einerley Parameter, Abscissenlinie und Scheitel hat. Da bey dieser Voraussetzung auch die Excentricität unendlich groß ist; so folgt, daß man sehr excentrische Ellipsen bey ihren Scheiteln (z. B. die Laufbahnen der Cometen bey ihren Sonnennähen) für paraboliſche Linien ansehen könne.

§. 642.

Auch läßt sich für die Ellipse eine Gleichung finden, wenn man die kleine Achse für die Abscissenlinie und den Mittelpunct C, oder auch den einen Scheitel der kleinen Achse für den Anfangs-
180. punct der Abscissen annimmt (Fig. 180.). Es sey z. B. $CP = x$, die senkrechte Ordinate $PM = y$, $CB = a$, und $CE = b$; so ist $GM = CP = x$, $CG = PM = y$.
Nun ist (vermöge §. 639.)

$$GM^2 = \frac{CE^2}{CB^2}(CB^2 - CG^2);$$

folglich ist auch

$$x^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - y^2).$$

Daraus findet man

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x^2).$$

Setzt man hingegen Fig. 180.

$$DP = x, \quad PM = y;$$

so ist

$$CP = x - b = GM,$$

folglich

$$(x-b)^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-y^2);$$

und endlich

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2}(2bx-x^2).$$

Jede dieser zwey Gleichungen gibt uns zu erkennen:

I. Daß die Abscissenlinie DE eine Achse der Ellipse ist.

II. Daß sich das Quadrat einer jeden Ordinate der kleinen Achse zum Producte aus den beyden Abschnitten eben dieser kleinen Achse verhält, wie das Quadrat der großen Halbachse zum Quadrate der kleinen Halbachse; wie auch, daß sich die Quadrate der Ordinaten der kleinen Achse gegen einander verhalten, wie die Producte aus den zugehörigen Abschnitten der kleinen Achse von ihren Scheiteln oder Endpuncten gezählt.

III. Daß sich jede elliptische Ordinate auf der kleinen Achse zur übereinstimmenden Kreis-Ordinate auf eben dieser Achse verhält, wie a zu b.

In der letzten Gleichung $y^2 = \frac{a^2}{b^2}(2bx - x^2)$ setze man $a^2 = bP$; so ist $y^2 = 2Px - \frac{Px^2}{b}$ wieder eine Gleichung für die Ellipse durch die kleine Halbachse und ihren Parameter ausgedrückt.

§. 643.

Aus dem Vorhergehenden sehen wir, daß, wenn man sich rechtwinkeliger Coordinaten bedient, bey der Ellipse folgende drey Gleichungen vorzüglich zu bemerken sind.

I. $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, oder $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, wenn man den Mittelpunct der Ellipse für den Anfangspunct der Abscissen annimmt, die eine Halbachse mit a, die andere mit b bezeichnet, und die Abscissen auf der Halbachse a zählt.

Fig. II. $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$, wenn man die eine Halbachse mit a, die andere mit b benennt, die Achse 2a für die Abscissenlinie, und ihren Scheitel für den Anfangspunct der Abscissen annimmt.

III. $y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$, wenn man eine der zwey Achsen mit 2a, und ihren Parameter mit 2p bezeichnet, die Achse 2a für die Abscissenlinie und ihren Scheitel für den Anfangspunct der Abscissen annimmt.

§. 644.

178. I. Nehmen wir (Fig. 178.), um eine Polargleichung der Ellipse zu finden, den Brennpunct F für den Pol und die Achse FA für die Polarachse an, wodurch $AFM = \varphi$ der Polarwinkel und $FM = r$ der Radiusvector wird; so haben wir in dem Dreyecke FMf,

$$Mf = 2a - MF = 2a - r, \quad Ff = 2c, \quad MFf = 180^0 - \varphi,$$

folglich (nach §. 556.) die Gleichung

$$4a^2 - 4ar + r^2 = r^2 + 4c^2 + 4cr\cos\varphi,$$

woraus die verlangte Polargleichung

$$r = \frac{a^2 - c^2}{a + c\cos\varphi} = \frac{b^2}{a + c\cos\varphi}$$

unmittelbar folgt.

II. Soll der Pol in dem Mittelpuncte C liegen, $ACG = \varphi$ und $CG = r$ seyn; so findet man die Polargleichung der Ellipse am schnellsten, wenn man in der Gleichung (§. 643. I.)

$$\frac{CI^2}{a^2} + \frac{IG^2}{b^2} = 1$$

nach der Angabe des rechtwinkeligen Dreyeckes CIG

$$CI = r\cos\varphi, \quad GI = r\sin\varphi$$

substituirt, wodurch man die gesuchte Polargleichung

$$\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2} = \frac{1}{r^2}$$

oder

$$r = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)}}$$

erhält.

§. 645. Fig.

Wenn man an irgend einen Punct M der Ellipse (Fig. 181.) aus beyden Brennpuncten die Leitstrahlen FM, fM zieht, einen derselben z. B. den größeren fM verlängert, und den Winkel GMF durch die Gerade MT halbirt; so berührt diese Gerade MT die Ellipse in dem Puncte M. 181.

Denn jeder andere Punct Q der Geraden MT liegt außer der Ellipse, was man auf folgende Art darthun kann. Man schneide MG = MF ab, und ziehe GF, so ist GE = EF und MT senkrecht auf GF. Ferner ziehe man aus was immer für einem Puncte Q die Geraden QG, QF, Qf, so ist QG = QF. Nun ist aber Qf + QG > fG; folglich auch Qf + QF > fG. Es ist jedoch fG = fM + MF = AB; daher auch Qf + QF > AB. Der Punct Q liegt demnach außer der Ellipse, weil sonst Qf + QF = AB seyn müßte. Eben dieses läßt sich von einem jeden anderen Puncte außer M erweisen.

Sonach ist es sehr leicht an einen gegebenen Punct M der Ellipse eine Tangente zu ziehen. Ist hingegen durch einen außer der Ellipse gegebenen Punct T (Fig. 180.) eine Tangente an die Ellipse zu führen; so beschreibe man aus diesem Puncte mit seiner Entfernung Tf von dem einen Brennpuncte einen Kreisbogen fR, durchschneide diesen aus dem anderen Brennpuncte mit dem Halbmesser FR = AB, verbinde R und F durch die Gerade RF, und ziehe von T zu dem Puncte Q die Gerade TQ, welche die Ellipse in Q berühren wird. Denn es ist TR = Tf, und auch Qf = QR; folglich ist fR senkrecht auf TQ, und der Winkel fQT = RQT. 180.

Es ist (Fig. 181.) der Winkel TMF = fMQ, weil jeder derselben dem Winkel GMT gleich ist; nähmlich die Leitstrahlen eines und desselben Punctes der Ellipse schließen mit der Tangente dieses Punctes gleiche Winkel ein. Wenn demnach mehrere Feuer-, Licht- oder Stimmstrahlen aus einem Brennpuncte eines elliptischen Hohlspiegels (der durch die Umdrehung der halben Ellipse AMB um die große Achse AB erzeugt wird) nach was immer für Richtungen ausfahren; so werden dieselben nach dem Abprellen sich wieder in dem anderen Brennpuncte vereinigen. 181.

Fig. 181.

§. 646.

Nun läßt sich in der Ellipse für jede gegebene Abscisse die zugehörige Subnormale PN, die Normale MN, die Subtangente PT und die Tangente MT bestimmen, wenn man aus dem Puncte M die Senkrechte MN auf MT errichtet. Es ist nähmlich

I. Die Subnormale $PN = \frac{b^2x}{a^2}$, wenn man die Abscissen auf der großen Achse von dem Mittelpuncte zählt. Denn da MN und FG senkrecht auf MT sind; so ist das Dreyeck $fMN \backsim fGF$; folglich ist auch $fG : fF = fM : fN$.

Es ist aber

$$fG = 2a, \quad fF = 2c, \quad fM = a + \frac{cx}{a};$$

daher ist

$$2a : 2c = a + \frac{cx}{a} : fN;$$

nähmlich

$$fN = c + \frac{c^2x}{a^2}.$$

Ferner hat man

$$PN = fP - fN, \text{ und } fP = c + x;$$

folglich ist

$$PN = x - \frac{c^2x}{a^2} = \frac{(a^2 - c^2)\,x}{a^2} = \frac{b^2x}{a^2}.$$

II. Die Subtangente PT findet man aus den ähnlichen Dreyecken NPM und PMT. Denn es ist

$$PT = \frac{PM^2}{PN} = \frac{a^2y^2}{b^2x} = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).\frac{a^2}{b^2x} = \frac{a^2 - x^2}{x} = \frac{a^2}{x} - x.$$

Setzt man $x = 0$, so ist $PT = \infty$; folglich läuft die Tangente an dem Scheitel der kleinen Achse mit der großen Achse parallel. Nimmt man aber $x = a$, so ist $PT = 0$; folglich steht die Tangente an dem Scheitel der großen Achse senkrecht auf derselben.

Aus der Subtangente PT findet man

$$CT = CP + PT = x + \frac{a^2}{x} - x, \text{ nähmlich } CT = \frac{a^2}{x}.$$

III. Die Normale MN und die Tangente MT findet man aus den rechtwinkeligen Dreyecken MPN und MPT. Denn es ist Fig. 181.

$$MN = \sqrt{MP^2+PN^2} = \sqrt{y^2+\frac{b^4x^2}{a^4}} = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{b^2x^2}{a^2}+\frac{a^2y^2}{b^2}},$$

$$MT = \sqrt{MP^2+PT^2} = \sqrt{y+\frac{a^4y^4}{b^4x^2}} = \frac{ay}{bx}\sqrt{\frac{b^2x^2}{a^2}+\frac{a^2y^2}{b^2}};$$

man findet aber auch

$$\sqrt{\frac{b^2x^2}{a^2}+\frac{a^2y^2}{b^2}} = \sqrt{\left(\frac{b^2x^2}{a^2}+a^2-x^2\right)}$$

$$= \sqrt{a^2-\frac{(a^2-b^2)x^2}{a^2}}$$

$$= \sqrt{\left(a^2-\frac{c^2x^2}{a^2}\right)} = \sqrt{\left(a+\frac{cx}{a}\right)\left(a-\frac{cx}{a}\right)}$$

oder $= \sqrt{r\varrho}$ (nach §. 636.);

daher ist die Normale $MN = \frac{b}{a}\sqrt{r\varrho}$

und die Tangente $MT = \frac{ay}{bx}\sqrt{r\varrho}$.

§. 647.

Führen wir (Fig. 182.) an den Endpunct A des Halbmes- 182.
sers CA der Ellipse die Tangente AT; so ist, wenn wir $CG = x$, $GA = y$ setzen, (§. 646.) die Subtangente

$$GT = \frac{a^2y^2}{b^2x}.$$

Bezeichnen wir ferner die Winkel ACT und ATC durch φ und ω, so finden wir

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{AG}{GC} = \frac{y}{x}, \quad \text{tang}\,\omega = \frac{AG}{GT} = \frac{b^2x}{a^2y}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\text{tang}\,\varphi\,\text{tang}\,\omega = \frac{b^2}{a^2}.$$

Wenn wir nun auf dieselbe Weise die Winkel, welche ein anderer Halbmesser CE und die an seinen Endpunct E gelegte

Fig. 182. Tangente IK mit der großen Achse bilden, mit φ' und ω' bezeichnen; so ist auch

$$\text{tang}\,\varphi'\,\text{tang}\,\omega' = \frac{b^2}{a^2},$$

folglich $$\text{tang}\,\varphi\,\text{tang}\,\omega = \text{tang}\,\varphi'\,\text{tang}\,\omega'.$$

Führen wir insbesondere den zweyten Halbmesser CE zur Tangente AT des ersteren AC parallel, so wird

$$\varphi' = \omega,$$

daher $$\text{tang}\,\omega' = \text{tang}\,\varphi$$

somit auch, da die Winkel φ und ω' unter 180^0 sind,

$$\omega' = \varphi,$$

woraus erhellet, daß der erstere Halbmesser AC der, durch den Endpunct E des anderen, gelegten Tangente IK parallel ist.

Solche zwey Halbmesser AC und CE oder Durchmesser AB und DE, von denen jeder mit der, durch den Endpunct des anderen, geführten Tangente parallel läuft, erhalten den Beynahmen conjugirte oder verbundene.

§. 648.

Zwischen zwey conjugirten Halbmessern $AC = A$, $CD = B$, den Halbachsen a, b, und den Winkeln

$ACT = \varphi$, $ATC = DCN = \omega$ und $ACD = CAT = \vartheta$,

welche diese Linien mit einander bilden, gibt es merkwürdige Beziehungen, welche wir aufzufinden uns bemühen wollen.

Nach §. 644. II. sind wir zur Aufstellung der Gleichungen

$$\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2} = \frac{1}{A^2}, \quad \frac{\cos^2\omega}{a^2} + \frac{\sin^2\omega}{b^2} = \frac{1}{B^2}$$

berechtiget.

Hieraus findet man ohne Schwierigkeit

$$\cos\varphi = \frac{a}{A}\sqrt{\frac{A^2-b^2}{a^2-b^2}}, \quad \cos\omega = \frac{a}{B}\sqrt{\frac{B^2-b^2}{a^2-b^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{A}\sqrt{\frac{a^2-A^2}{a^2-b^2}}, \quad \sin\omega = \frac{b}{B}\sqrt{\frac{a^2-B^2}{a^2-b^2}}$$

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2-A^2}{A^2-b^2}}, \quad \text{tang}\,\omega = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2-B^2}{B^2-b^2}}.$$

Da jedoch A und B conjugirte Halbmesser seyn sollen, so Fig. muß nach §. 647. die Gleichung 182.

$$\text{tang}\,\varphi\,\text{tang}\,\omega = \frac{b^2}{a^2}$$

bestehen, welche durch die Substitution der gefundenen Werthe in

$$\frac{a^2-A^2}{A^2-b^2}\cdot\frac{a^2-B^2}{B^2-b^2} = 1$$

oder

$$\frac{a^2-A^2}{A^2-b^2} = \frac{B^2-b^2}{a^2-B^2}$$

übergeht.

Hieraus findet man (nach §. 187. III.)

$$\frac{a^2-A^2}{a^2-b^2} = \frac{B^2-b^2}{a^2-b^2};$$

also $a^2-A^2 = B^2-b^2$

und $A^2-b^2 = a^2-B^2;$

sofort ist

(1) $a^2+b^2 = A^2+B^2$

eine der gesuchten Relationen.

Benützen wir die beyden vorletzten Gleichungen, so verwandeln sich obige Ausdrücke von $\cos\omega$ und $\sin\omega$ in

$$\cos\omega = \frac{a}{B}\sqrt{\frac{a^2-A^2}{a^2-b^2}}, \quad \sin\omega = \frac{b}{B}\sqrt{\frac{A^2-b^2}{a^2-b^2}}.$$

Mit diesen finden wir

$$\sin\varphi\cos\omega = \frac{ab}{AB}\cdot\frac{a^2-A^2}{a^2-b^2}, \quad \cos\varphi\sin\omega = \frac{ab}{AB}\cdot\frac{A^2-b^2}{a^2-b^2},$$

daher

$$\sin\varphi\cos\omega + \cos\varphi\sin\omega = \frac{ab}{AB}$$

oder

$$\sin(\varphi+\omega) = \frac{ab}{AB}.$$

Es ist jedoch

$$\varphi+\omega = ACT + DCN = 180^\circ - ACD = 180^\circ - \vartheta,$$

daher

(2) $$ab = AB\sin\vartheta$$

eine zweyte Relation.

Fig. 182. Aus obigen Gleichungen findet man ferner

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi = \frac{2ab}{A^2}\cdot\frac{\sqrt{(a^2+b^2)A^2 - a^2b^2 - A^4}}{a^2-b^2}$$

oder wegen der Gleichungen (1) und (2)

$$= \frac{2AB\sin\vartheta}{A^2}\cdot\frac{\sqrt{A^2B^2 - A^2B^2\sin^2\vartheta}}{c^2}$$

$$= \frac{B^2\,.\,2\sin\vartheta\cos\vartheta}{c^2}, \text{ nähmlich}$$

$$\sin 2\varphi = \frac{B^2\sin 2\vartheta}{c^2}, \text{ und}$$

$$\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi = \frac{A^2(a^2-b^2) - 2b^2(a^2-A^2)}{A^2(a^2-b^2)}$$

$$= \frac{A^2(a^2+b^2) - 2a^2b^2}{A^2c^2}; \text{ daher wegen Gl. (1) und (2)}$$

$$= \frac{A^2 + B^2 - 2B^2\sin^2\vartheta}{c^2}, \text{ nähmlich}$$

$$\cos 2\varphi = \frac{A^2 + B^2\cos 2\vartheta}{c^2}.$$

Hieraus folgt

$$(3) \qquad \text{tang}\,2\varphi = \frac{B^2\sin 2\vartheta}{A^2 + B^2\cos 2\vartheta}.$$

Mittelst der Gleichungen (1), (2), (3) lassen sich nun zu zwey conjugirten Durchmessern 2A, 2B und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel ϑ die Achsen 2a, 2b der Ellipse, welcher sie angehören, der Größe und Lage nach bestimmen.

Denn aus (1) und (2) findet man

$$a + b = \sqrt{(A^2 + B^2 + 2AB\sin\vartheta)},$$
$$a - b = \sqrt{(A^2 + B^2 - 2AB\sin\vartheta)};$$

daher

$$a = \tfrac{1}{2}\sqrt{(A^2+B^2+2AB\sin\vartheta)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(A^2+B^2-2AB\sin\vartheta)},$$
$$b = \tfrac{1}{2}\sqrt{(A^2+B^2+2AB\sin\vartheta)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(A^2+B^2-2AB\sin\vartheta)}.$$

Ueberdieß biethet die Gleichung Fig. 182.

$$(3) \qquad \tang 2\varphi = \frac{B^2 \sin 2\vartheta}{A^2 + B^2 \cos 2\vartheta}$$

ein Mittel zur Bestimmung des Winkels φ, welchen der Durchmesser 2A mit der großen Achse 2a der Ellipse einschließt.

§. 649.

Aufgabe. Man suche eine Gleichung für die Ellipse, wenn man einen Durchmesser AB für die Abscissenlinie annimmt, den Anfangspunct der Abscissen in den Mittelpunct setzt, und die Ordinaten zu dem vereinigten Durchmesser DE oder zur Tangente AT parallel zieht.

Auflösung. Es sey $CP = X$, $PM = Y$, $CA = A$, $CD = B$, die große Halbachse $= a$, die kleine $= b$, der Winkel $ACG = \varphi$, $ATC = DCN = \omega$.

Wenn nun, wie in §. 636., $CQ = x$, $QM = y$ angenommen wird, so gehört der Ellipse die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

zu; in welcher wir demnach statt der Coordinaten x und y die neu gewählten X und Y einzuführen haben. Zu diesem Zwecke ziehen wir PS zur großen Halbachse CF parallel und PV, AG, MQ auf dieselbe senkrecht. Dadurch wird

$$CQ = CV + PS, \quad QM = PV - SM$$

oder, da die rechtwinkeligen Dreyecke CPV und PSM

$CV = CP \cdot \cos PCV = X \cos\varphi$, $PV = CP \cdot \sin PCV = X \sin\varphi$

$PS = PM \cdot \cos MPS = Y \cos\omega$, $SM = PM \cdot \sin MPS = Y \sin\omega$

geben,

$$x = X\cos\varphi + Y\cos\omega, \quad y = X\sin\varphi - Y\sin\omega.$$

Durch die Substitution dieser Werthe übergeht obige Gleichung der Ellipse in

$$X^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) + Y^2\left(\frac{\cos^2\omega}{a^2} + \frac{\sin^2\omega}{b^2}\right)$$
$$+ 2XY\left(\frac{\cos\varphi\cos\omega}{a^2} - \frac{\sin\varphi\sin\omega}{b^2}\right) = 1.$$

Fig. 182. Beachtet man aber, daß nach §. 644.

$$\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2} = \frac{1}{A^2}, \quad \frac{\cos^2\omega}{a^2} + \frac{\sin^2\omega}{b^2} = \frac{1}{B^2}$$

und nach §. 647.

$$\text{tang}\,\varphi\,\text{tang}\,\omega = \frac{b^2}{a^2}, \text{ also auch } \frac{\sin\varphi\sin\omega}{b^2} = \frac{\cos\varphi\cos\omega}{a^2}$$

ist; so reducirt sich diese Gleichung in die einfache

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1,$$

welche mit jener für senkrechte Ordinaten auf der großen oder kleinen Achse vollkommen übereinstimmt. Dieß ist leicht einzusehen, wenn man bedenkt, daß diese Gleichung allgemein ist, jene aber nur einen besondern Fall ausdrückt.

Diese Gleichung gibt uns wie die in §. 636. erhaltene zu erkennen:

1) daß sowohl die Abscissen- als auch die Ordinatenlinie ein (parallele Sehnen halbirender) Durchmesser, folglich der Ursprung der Coordinaten der Mittelpunct der Ellipse ist.

2) Daß jeder Durchmesser in dem Mittelpuncte der Ellipse halbirt wird.

3) Daß sich das Quadrat einer jeden Ordinate zum Producte aus den beyden Abschnitten des ersten Durchmessers von seinen beyden Scheiteln gerechnet verhält, wie das Quadrat des vereinigten Durchmessers zum Quadrate des ersten Durchmessers, auf dem die Abscissen gezählt werden; u. s. w.

§. 650.

Nun ist es leicht zu einer verzeichneten Ellipse die Lage und Größe der großen und kleinen Achse nebst der Excentricität durch Verzeichnung zu finden. Man ziehe nähmlich zwey parallele Sehnen, theile dieselben in zwey gleiche Theile, und verbinde die

Theilungspuncte; so wird die Verbindungslinie ein Durchmesser, Fig.
folglich die Mitte desselben der Mittelpunct der Ellipse seyn. Aus diesem Mittelpuncte durchschneide man die Ellipse mittelst eines Kreisbogens von beliebigem Halbmesser oben und unten, oder auch rechts und links in zwey Puncten; so ist ihre Verbindungslinie eine doppelte Ordinate auf der großen oder auf der kleinen Achse. Theilt man diese in zwey gleiche Theile, und verbindet den Theilungspunct mit dem Mittelpuncte, so ist diese Verbindungslinie entweder die große oder die kleine Achse, und eine in dem Mittelpuncte auf ihr errichtete Senkrechte die andere Achse. Durchschneidet man ferner aus dem Endpuncte der kleinen Achse mit einem Halbmesser, welcher der großen Halbachse gleich ist, auf beyden Seiten die große Achse; so erhält man durch diese Durchschnittspuncte die Brennpuncte, also auch die Excentricität der Ellipse.

§. 651.

Um den Inhalt der elliptischen Fläche CFG′E und des ellip- 179.
tischen Sectors ECG′ zu bestimmen, stelle man sich vor, daß die Abscisse CF (Fig. 179.) in eine unendliche Anzahl gleicher Theile getheilt sey. Man denke sich ferner aus allen Theilungspuncten senkrechte Ordinaten bis an den Umfang der Ellipse gezogen, und verlängere dieselben bis an den Umkreis auf der großen Achse; so wird dadurch sowohl die Fläche CFG′E als auch die Fläche CFG″E′ in ihre Elemente aufgelöst. Nun verhält sich jedes elliptische Element zu dem übereinstimmenden Kreiselemente, wie die elliptische Ordinate zu der übereinstimmenden Kreisordinate, weil jede zwey solche Elemente für zwey Rechtecke auf einer und derselben Grundlinie angesehen werden können, deren Höhen die Ordinaten sind. Oder jedes elliptische Element verhält sich zu dem übereinstimmenden Kreiselemente, wie die kleine Halbachse b zu der großen a, weil sich jede elliptische Ordinate zu der übereinstimmenden Kreisordinate auf der großen Achse wie b zu a verhält. Es verhält sich demnach auch die Summe aller elliptischen Elemente zur Summe aller Kreiselemente wie b zu a (§. 191.); nähmlich die Fläche CFG′E

Fig. 179. verhält sich zur Fläche CFG′′E′ wie b zu a, oder es ist

$$CFG'E : CFG''E' = b : a,$$

folglich $$CFG'E = \frac{b}{a} . CFG''E'.$$

Ferner findet man nach §. 455. I. und §. 639. III. die Proportion

$$CFG' : CFG'' = FG' : FG'' = b : a,$$

daher $$CFG' = \frac{b}{a} . CFG''.$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der vorhergehenden, so ergibt sich

$$ECG' = \frac{b}{a} . E'CG''.$$

Nun ist aber (nach §. 449.)

$$E'CG'' = \tfrac{1}{2} . CE' . E'G'' = \tfrac{1}{2} a . E'G'',$$

folglich auch, weil (vermöge §. 540.)

$$E'G'' = CE' . \arcsin \frac{CF}{CE'} = a . \arcsin \frac{x}{a} \text{ ist,}$$

$$E'CG'' = \tfrac{1}{2} a^2 . \arcsin \frac{x}{a}$$

$$\text{und } ECG' = \tfrac{1}{2} ab . \arcsin \frac{x}{a}.$$

Zu demselben Ausdrucke gelangt man auch auf folgendem Wege.

Es ist $FG' = y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ oder (nach §. 451. 1)

$$y = b - \frac{b}{a^2} . \frac{x^2}{2} - \frac{b}{a^4} . \frac{1.x^4}{2.4} - \frac{b}{a^6} . \frac{1.3.x^6}{2.4.6} - \ldots;$$

folglich findet man nach §. 442. II. den Inhalt der Fläche

$$CFG'E = bx - \frac{b}{a^2} . \frac{x^3}{2.3} - \frac{b}{a^4} . \frac{1.x^5}{2.4.5} - \frac{b}{a^6} . \frac{1.3.x^7}{2.4.6.7} - \ldots$$

Ferner ist das Dreyeck

$$CFG' = \tfrac{1}{2} xy = \tfrac{1}{2} x . \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

oder (nach §. 451. 1)

$$CFG' = \frac{bx}{2} - \frac{b}{a^2} . \frac{x^3}{2.2} - \frac{b}{a^4} . \frac{1.x^5}{2.4.2} - \frac{b}{a^6} . \frac{1.3.x^7}{2.4.6.2} - \ldots$$

Wird diese Gleichung von der vorhergehenden abgezogen, so erscheint Fig. 179.

$$ECG' = \frac{bx}{2} + \frac{b}{a^2} \cdot \frac{1.x^3}{2.3.2} + \frac{b}{a^4} \cdot \frac{1.3.x^5}{2.4.5.2} + \frac{b}{a^6} \cdot \frac{1.3.5.x^7}{2.4.6.7.2} + \cdots$$

oder

$$ECG' = \tfrac{1}{2}ab\left(\frac{x}{a} + \frac{1}{2.3} \cdot \frac{x^3}{a^3} + \frac{1.3}{2.4.5} \cdot \frac{x^5}{a^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} \cdot \frac{x^7}{a^7} + \cdots\right)$$

Allein nach §. 553. V. ist die letzte Reihe nichts anderes als $\arcsin \frac{x}{a}$, folglich ist wie oben

$$ECG' = \tfrac{1}{2}ab \arcsin \frac{x}{a}.$$

Uebergeht nun der Punct G' in A, also x in a, und ECG' in ECA; so wird $\arcsin \frac{x}{a} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, folglich $ECA = \frac{\pi}{4}ab$, und der Inhalt der ganzen elliptischen Fläche $= \pi ab$.

Da $ab\pi = (\sqrt{ab})^2\pi$ ist; und $\sqrt{ab}$ die mittlere geometrische Proportionale oder das geometrische Mittel von a und b vorstellt; so ist **die ganze elliptische Fläche einem Kreise gleich, dessen Halbmesser das geometrische Mittel der Halbachsen der Ellipse ist.**

§. 652.

Um den Cubikinhalt eines ellipsoidischen Segmentes zu finden, welches durch Umdrehung der elliptischen Fläche BPM um die große Achse entsteht; so bemerken wir, daß die Grundfläche dieses Körpers der von der Ordinate y beschriebene Kreis, daher

$$= \pi y^2 = \pi \cdot \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2) = \frac{2\pi b^2}{a}x - \frac{\pi b^2}{a^2}x^2 \text{ ist.}$$

Hieraus findet man nach §. 516. den Inhalt des von BPM erzeugten ellipsoidischen Segmentes

$$= \frac{\pi b^2 x^2}{a} - \frac{\pi b^2 x^3}{3a^2} = \frac{\pi b^2 x^2}{3a^2}(3a - x).$$

Uebergeht x in 2a, so ergibt sich der Cubikinhalt des durch Umdrehung der halben Ellipse BEA um die große Achse entstehenden Ellipsoids $= \frac{4}{3} \cdot \pi ab^2$.

Fig. 179. Vertauscht man in diesen Ausdrücken a mit b; so erhält man den Cubikinhalt eines ellipsoidischen Segmentes, dessen Achse in der kleinen Achse der Ellipse liegt, $= \frac{\pi a^2 x^2}{3b^2}(3b - x)$; folglich jenen des um diese Achse liegenden Ellipsoids $= \frac{4}{3}\pi a^2 b$.

Es ist demnach, wie man leicht sieht, jedes Ellipsoid gleich zwey Drittheilen desjenigen geraden Cylinders, von welchem es eingehüllt wird.

III. Von der Hyperbel.

§. 653.

183. Es seyen F, f zwey Puncte von unveränderlicher Lage. Man denke sich eine krumme Linie AMN′ von der Beschaffenheit, daß die Differenz der Abstände fM — FM eines jeden Punctes M von den beyden Fixpuncten F und f einer unveränderlichen Geraden B′A′ = 2a gleich sey; so heißt eine solche krumme Linie eine Hyperbel. Die zwey Puncte f, F werden wie bey der Ellipse Brennpuncte genannt; und der von f und F gleich weit abstehende Punct C der Geraden fF heißt der Mittelpunct der Hyperbel.

Mittelst der gegebenen Geraden fF und B′A′ kann demnach eine Hyperbel beschrieben werden, wenn man die Gerade B′A′ verlängert, auf derselben mehrere Puncte G nach Belieben annimmt, sodann mit dem Halbmesser B′G aus f einen Kreisbogen beschreibt, und diesen mit dem Halbmesser GA′ aus F durchschneidet, um die Puncte M, m der Hyperbel zu erhalten. Auf diese Art kann man so viele Puncte der Hyperbel bestimmen, als erforderlich sind. — Auch läßt sich eine Hyperbel durch eine ununterbrochene Bewegung beschreiben, wenn man an ein Lineal fL einen Faden FML anbringt, der um B′A′ kürzer ist als fL. Sodann befestigt man das eine Ende des Fadens in F und das andere in L, dreht das Lineal fM mit dem Ende L um den unbeweglichen Punct f, und drückt bey dieser drehenden Bewegung den Faden ML mit einem Stifte M immer

an das Lineal fL; so wird der Weg, welchen der Punct M bey dieser Bewegung zurücklegt, eine Hyperbel seyn. Fig. 183.

§. 654.

Aufgabe. Eine Gleichung für die Hyperbel zu finden.

Auflösung. Bezeichnet man die Abstände MF und Mf des Punctes M von F und f durch r und ρ, so drückt die Gleichung

$$Mf - MF = A'B' \quad \text{oder} \quad \rho - r = 2a$$

die Natur der Hyperbel vollständig aus. Um rechtwinkelige Coordinaten in dieselbe einzuführen, nehme man die durch f, F gezogene Gerade für die Abscissenlinie und C für den Anfangspunct der Abscissen an, setze $CF = Cf = c$, $CP = x$, die senkrechte Ordinate $PM = y$.

Nun ist in den rechtwinkeligen Dreyecken fPM und FPM

$$\rho^2 = y^2 + (x+c)^2 = y^2 + x^2 + 2cx + c^2,$$
$$r^2 = y^2 + (x-c)^2 = y^2 + x^2 - 2cx + c^2;$$

daher findet man die Differenz

$$\rho^2 - r^2 = 4cx,$$

und wenn man durch

$$\rho - r = 2a$$

dividirt,

$$\rho + r = \frac{2cx}{a}.$$

Dadurch ergibt sich

$$\rho = \frac{cx}{a} + a, \quad r = \frac{cx}{a} - a.$$

Substituirt man diesen Werth in die Gleichung

$$y^2 = r^2 - x^2 + 2cx - c^2$$

und beachtet, daß in dem Dreyecke fMF (nach §. 356. I.)

$$fM - MF < fF, \text{ also } 2a < 2c \text{ und } a < c$$

ist, so erhält man

$$y^2 = \frac{c^2 - a^2}{a^2}(x^2 - a^2) \quad \text{oder} \quad y = \pm \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2}$$

als die gesuchte Gleichung der Hyperbel.

Fig. 183.

§. 655.

Diese gefundene Gleichung gibt uns zu erkennen:

1) daß sowohl die Abscissenlinie fF als auch die Ordinatenlinie DE eine Achse, also der Anfang C der Abscissen ein Mittelpunct der Hyperbel ist.

2) Daß für $x = CA = a$, und auch für $x = CB = -a$ die Ordinate $= 0$ ist. B und A sind demnach die Scheitel der Hyperbel. Die Gerade $BA = 2a = fM - FM$ heißt die erste Achse der Hyperbel.

3) So lange der absolute Werth von x kleiner als a ist, bleibt die Ordinate unmöglich. Zwischen A und B gibt es demnach keine Ordinaten, sondern erst jenseits der Puncte A und B.

4) Hingegen ist für $x = \infty$ und auch für $x = -\infty$ sowohl die positive als auch die negative Ordinate auf beyden Seiten unendlich groß. Die Hyperbel geht demnach mit vier Schenkeln, mit zweyen von A gegen die Gegend P, und mit zweyen gegen P′ ohne Ende fort. Auch ist leicht einzusehen, daß bey einer und derselben Hyperbel alle vier Schenkel einander vollkommen gleich sind.

§. 656.

Um die gefundene Gleichung abzukürzen, setze man

$$c^2 - a^2 = b^2 = (c + a)(c - a);$$

so ist $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, oder $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Diese Gerade b heißt die zweyte Halbachse. Sie ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen $c + a$ und $c - a$, nähmlich zwischen den Abständen eines Scheitels der Hyperbel von den beyden Brennpuncten. Will man nun aus dem Mittelpuncte C auf die erste Achse eine Senkrechte verzeichnen, die der zweyten Achse gleich ist; so durchschneide man die Senkrechte CD aus A mit einem Halbmesser $AD = CF = c$, so ist CD die zweyte Halbachse, und folglich DE die ganze zweyte Achse, wenn man $CE = CD$ abschneidet. Denn es ist

$$CD^2 = AD^2 - AC^2 = c^2 - a^2 = b^2.$$

Will man hingegen an dem einen Scheitel A der Hyperbel (Fig. 184.) eine Senkrechte ED verzeichnen, die der zweyten Achse gleich ist; so darf man nur die gezogene Senkrechte ED aus dem Mittelpuncte C mit dem Halbmesser CF in E und D durchschneiden. Denn es ist sodann Fig. 184.

$$AD^2 = CD^2 - CA^2 = c^2 - a^2 = b^2$$

und AD = der zweyten Halbachse. Hieraus ist nun auch leicht zu ersehen, wie man aus den gegebenen zwey Achsen einer Hyperbel die Brennpuncte bestimmen, und sodann die krumme Linie (nach §. 653.) beschreiben könne.

Die abgekürzte Gleichung der Hyperbel

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) = \frac{b^2}{a^2}(x+a)(x-a)$$

gibt uns zu erkennen, daß sich das Quadrat einer jeden Ordinate zum Producte aus den Abständen der Ordinaten von den beyden Scheiteln verhält, wie das Quadrat der zweyten Achse zum Quadrate der ersten Achse; ferner, daß sich die Quadrate der Ordinaten gegen einander verhalten, wie die Producte aus den Abständen der Ordinaten von den beyden Scheiteln der Hyperbel.

§. 657.

Wenn man die Senkrechte Cp (Fig. 183.) für die Abscissenlinie, und C für den Anfangspunct der Abscissen annimmt, und 183.

$$Cp = x,\ pm = y,\ CA = a,\ CD = b$$

setzt; so ist (nach §. 656.)

$$Pm^2 = \frac{b^2}{a^2}(CP^2 - a^2);$$

daher wird wegen

$$Pm = Cp = x \text{ und } CP = pm = y,$$

$$x^2 = \frac{b^2}{a^2}(y^2 - a^2)$$

oder

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2}(x^2 + b^2)$$

eine zweyte Gleichung der Hyperbel.

Fig. 183. Nimmt man hingegen CP für die Abscissenlinie und den Scheitel A der Hyperbel für den Anfangspunct der Abscissen an, und setzt

$$AP = x,\ PM = y;\ \text{so ist } y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$$

auch eine Gleichung für die Hyperbel. Denn es ist

$$PM^2 = \frac{b^2}{a^2}(CP^2 - a^2)$$

$$= \frac{b^2}{a^2}[(x+a)^2 - a^2]$$

$$= \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2).$$

§. 658.

Eine dritte Proportionallinie zur ersten und zweyten Achse heißt der Parameter der ersten Achse. Eine dritte Proportionallinie zur zweyten und ersten Achse aber heißt der Parameter der zweyten Achse; nähmlich es ist der Parameter der ersten Achse

$$2p = \frac{2b^2}{a},\ \text{also } p = \frac{b^2}{a}$$

und der Parameter der zweyten Achse

$$2P = \frac{2a^2}{b},\ \text{folglich } P = \frac{a^2}{b}.$$

Der Parameter der ersten Achse gleicht einer Geraden, die durch den Brennpunct auf die verlängerte erste Achse senkrecht gezogen ist, und sich beyderseits in der Hyperbel endet. Denn man setze nur in der im §. 654. gefundenen Gleichung

$$x = c;\ \text{so ist } y = \frac{c^2 - a^2}{a} = \frac{b^2}{a}.$$

Nähmlich die durch den Brennpunct gezogene Ordinate ist $= \frac{b^2}{a} = p$ oder der halbe Parameter der ersten Achse.

§. 659.

Wenn man aus dieser Gleichung $\frac{b^2}{a} = p$ den Werth $b^2 = ap$ in die Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 + 2ax)$

substituirt; so ist Fig. 183

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a} x^2$$

wieder eine Gleichung für die Hyperbel.

Die vier bisher entwickelten Hauptgleichungen für die senkrechten Ordinaten der Hyperbel in Hinsicht auf ihre Achsen sind wohl zu merken, weil sie öfters vorkommen. Nähmlich:

$$\text{I. } y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \text{ oder } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wenn man die Abscissen auf der ersten Achse 2a von dem Mittelpuncte zählt.

$$\text{II. } y^2 = \frac{a^2}{b^2}(x^2 + b^2),$$

wenn man die Abscissen auf der zweyten Achse 2b aus dem Mittelpuncte zählt.

$$\text{III. } y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 + 2ax),$$

wenn man die Abscissen auf der ersten Achse 2a von einem Scheitel zählt; oder

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - 2ax)$$

für negative Abscissen.

$$\text{IV. } y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2,$$

wenn man die Abscissen auf der ersten Achse 2a von dem einen Scheitel zählt, und durch p den halben Parameter $\frac{b^2}{a}$ der ersten Achse vorstellt.

§. 660.

Die zweyte Achse der Hyperbel kann kleiner oder auch größer seyn als die erste. Aus dieser Ursache nennt man AB die erste, nicht aber die große Achse, und DE die zweyte, jedoch nicht die kleine Achse. Auch können die zwey Achsen der Hyperbel einander, und folglich auch dem halben Parameter gleich seyn. Eine solche Hy-

Fig 183. perbel, bey der $a = b = p$ ist, wird gleichseitig (aequilatera) genannt. Die Gleichungen für die gleichseitige Hyperbel sind demnach

$$y^2 = x^2 - a^2,\quad y^2 = x^2 + a^2,\quad y^2 = x^2 + 2ax,\quad y^2 = 2px + x^2.$$

I. Vergleicht man die in §. 644. I. II. für die Ellipse und in §. 659. I. II. III. für die Hyperbel gefundenen Gleichungen, so zeigt sich, daß die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

und

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

der Ellipse oder Hyperbel zugehören, je nachdem b^2 positiv oder negativ ist, da jede derselben in die andere übergeht, wenn man b in $b\sqrt{-1}$ verwandelt.

II. Hält man aber die in §. 628. für die Parabel, in §. 644. III. für die Ellipse und in §. 659. IV. für die Hyperbel gefundenen Gleichungen an einander, so sieht man, daß die Gleichung

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

in welcher, wenn a und b die beyden Halbachsen der Ellipse oder Hyperbel vorstellen,

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad q = \frac{b^2}{a^2}$$

ist, der Hyperbel, Parabel oder Ellipse angehört, je nachdem q positiv, Null oder negativ ist; und daß sie in Rücksicht der Paragraphe 660. und 639. einer gleichseitigen Hyperbel oder einer Kreislinie (gleichseitigen Ellipse) zukommt, je nachdem q der positiven oder negativen Einheit gleicht.

§. 661.

I. Nehmen wir, indem wir für die Hyperbel eine Polargleichung aufzustellen beabsichtigen, in Fig. 183 den Brennpunct F zum Pol und die Gerade Ff zur Polarachse an, damit $fFM = \varphi$, $FM = r$ werde, so liefert das Dreyeck fFM, in welchem $Ff = 2c$ und der Natur der Hyperbel gemäß $fM = 2a + r$ ist, nach §. 556 die verlangte Polargleichung

$$4a^2 + 4ar + r^2 = 4c^2 + r^2 - 4cr\cos\varphi,$$

welcher noch die einfachere Form

$$r = \frac{c^2 - a^2}{a + c\cos\varphi} = \frac{b^2}{a + c\cos\varphi}$$

ertheilt werden kann.

Fig. 183.

II. Verlegt man aber den Pol in den Mittelpunct C, so daß $CM = r$, $FCM = \varphi$ wird, so wird man in der aus §. 656. folgenden Gleichung

$$\frac{CP^2}{a^2} - \frac{PM^2}{b^2} = 1$$

die Ausdrücke

$$CP = r\cos\varphi\ ,\quad PM = r\sin\varphi$$

substituiren, und dadurch zur gesuchten Polargleichung

$$\frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2} = \frac{1}{r^2}$$

gelangen, welche man auch in der Form

$$r = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)}}$$

schreiben kann.

§. 662.

Wenn man an einen Punct M der Hyperbel aus beyden Brennpuncten die Geraden fM und FM (die Leitstrahlen) zieht, und den Winkel FMf durch eine Gerade TM halbirt; so wird diese Gerade die Hyperbel in dem Puncte M berühren.

Denn jeder andere Punct N′ der Geraden TM liegt außer der Hyperbel, was man auf folgende Weise darthun kann. Man schneide $MQ = MF$ ab, ziehe N′F, N′f und N′Q, so ist

$$N'Q + Qf > N'f, \text{ oder } N'F + Qf > N'f;$$

folglich $Qf > N'f - N'F$, oder $N'f - N'F < AB$,

weil $Qf = AB$ ist. Der Punct N′ liegt demnach außer der Hyperbel, weil sonst $N'f - N'F = AB$ seyn müßte.

I. Zieht man die Gerade FQ, so steht sie senkrecht auf TM und läuft folglich mit der Normale MN parallel. Daher verhält

Fig. 183. sich $fQ : fM = fF : fN$;

nähmlich $2a : a + \frac{cx}{a} = 2c : fN$;

also ist $fN = c + \frac{c^2 x}{a^2}$,

und $PN = fN - fC - CP = c + \frac{c^2 x}{a^2} - c - x$

$= \frac{c^2 - a^2}{a^2} \cdot x = \frac{b^2 x}{a^2}$;

nähmlich bey der Hyperbel ist, wenn die Abscisse x auf der ersten Achse von dem Mittelpuncte gezählt wird, die Subnormale $= \frac{b^2 x}{a^2}$; folglich ist bey der gleichseitigen Hyperbel die Subnormale der (von dem Mittelpuncte gezählten) Abscisse gleich.

II. Da ferner $PN : PM = PM : PT$

statt findet, so ist die Subtangente

$$PT = \frac{a^2 y^2}{b^2 x} = \frac{x^2 - a^2}{x} = x - \frac{a^2}{x};$$

Der Unterschied zwischen CP und PT ist demnach $CT = \frac{a^2}{x}$; dieser Unterschied wird immer kleiner, je größer CP angenommen wird. Da nun $CT = \frac{a^2}{x}$ ist; so muß $AT = a - \frac{a^2}{x}$ seyn. Setzt man $x = \infty$, so wird $CT = 0$ und $AT = a$.

Auch AR läßt sich bestimmen; denn es ist

$$AR : PM = AT : PT$$

oder $AR : y = \frac{a}{x}(x - a) : \frac{a^2 y^2}{b^2 x}$,

folglich $AR = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{x - a}{y} = b\sqrt{\frac{x - a}{x + a}}$

$$= b\sqrt{\frac{1 - \frac{a}{x}}{1 + \frac{a}{x}}}.$$

Setzt man nun $x = \infty$; so wird $AR = b$. Dieses gibt uns zu erkennen, daß zwey gerade Linien GG′ und HH′, welche aus dem Mittelpuncte

der Hyperbel durch die Endpuncte D und E der an ihren Scheitel angelegten zweyten Achse gezogen werden, den Schenkeln der Hyperbel nie begegnen. Fig. 183.

III. Da wir bey der Hyperbel dieselben Ausdrücke $\frac{b^2x}{a^2}$ und $\frac{a^2y^2}{b^2x}$ der Subnormale und Subtangente, wie in §. 646. bey der Ellipse erhielten, so müssen auch

$$MN = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{a^2y^2}{b^2}},$$

$$MT = \frac{ay}{bx}\sqrt{\frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{a^2y^2}{b^2}}$$

die Normale und Tangente der Hyperbel ausdrücken.

Weil ferner

$$\sqrt{\frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{a^2y^2}{b^2}} = \sqrt{\left(\frac{b^2x^2}{a^2} + x^2 - a^2\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{x^2(a^2+b^2)}{a^2} - a^2} = \sqrt{\frac{c^2x^2}{a^2} - a^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{cx}{a} - a\right)\left(\frac{cx}{a} + a\right)} \text{ oder nach §. 654.}$$

$= \sqrt{r\rho}$ ist; so ergibt sich

die Normale $MN = \frac{b}{a}\sqrt{r\rho}$ und die Tangente $MT = \frac{ay}{bx}\sqrt{r\rho}$,

wie in §. 646. für die Ellipse.

§. 663.

Die durch den Mittelpunct der ersten Achse und durch die Endpuncte der an den Scheitel der Hyperbel angelegten zweyten Achse gezogenen geraden Linien GG′ und HH′ (Fig. 184.), denen sich die Hyperbel unaufhörlich nähert, ohne dieselben jemahls zu durchschneiden, heißen ihre Asymptoten. Um sich von der erwähnten Eigenschaft dieser Geraden zu überzeugen, ziehe man die Ordinate PM = y, und setze CP = x; so ist CB : D′B = CP : PN, nähmlich $PN = \frac{bx}{a}$, 184.

Fig. 184.

und $$PM^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) = \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2;$$

folglich ist auch $$PN^2 - PM^2 = b^2,$$

oder

$$(PN + PM)(PN - PM) = b^2 = (PN + PM).MN;$$

daher $$MN = \frac{b^2}{PN + PM}.$$

Dieses MN wird demnach immer kleiner, je größer PN + PM angenommen wird, weil der Zähler b^2 unveränderlich ist, PN + PM aber ohne Ende wächst; folglich nimmt MN unaufhörlich ab, nähmlich die Hyperbel nähert sich den Geraden CG und CH ohne Ende, erreicht dieselben jedoch nie, da MN nie Null wird.

Setzt man CP unendlich groß, so ist auch $PN + PM = \infty$, und folglich $MN = \frac{b^2}{\infty}$, nähmlich in einer unendlichen Entfernung wird der Unterschied der Ordinaten PN und PM unendlich klein, das ist kleiner als jede angebbare noch so kleine Größe. In diesem Sinne könnte man sagen, daß die Schenkel der Hyperbel in einer unendlichen Entfernung ihren Asymptoten begegnen. Aber daß die Hyperbel ihre Asymptoten in einer unendlichen Entfernung durchschneide, läßt sich nicht behaupten, weil auch in einer unendlichen Entfernung

$PN^2 - PM^2 = b^2$, folglich $PN > PM$ ist.

Da wir $(PM + PN)MN = b^2$ gefunden haben, und $PN = PN'$ ist; so ist auch $MN(PM + PN') = b^2$, folglich $MN.MN' = b^2$.

§. 664.

Wenn man aus dem Scheitel B die Gerade BR zu der Asymptote CG parallel zieht; so sind BRD', E'CD' ähnliche und gleichschenkelige Dreyecke. Folglich ist

$$D'R = RB = RC = \tfrac{1}{2}CD' = \tfrac{1}{2}\sqrt{(BC^2 + D'B^2)}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 + b^2)} = \tfrac{1}{2}c.$$

Dieses Quadrat

$$BR^2 = CR^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} = \left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

nähmlich das Quadrat der halben Excentricität wird die Potenz der Hyperbel genannt. Fig. 184.

§. 665.

Es sey $BR = \frac{c}{2} = k$, die Abscisse $CQ = x$, die zur Asymptote CG parallele Ordinate $QM = y$, und MK parallel zu CH;

so ist $MN : QM = D'B : BR$,

und $MN' : MK = D'B : BR$,

oder $MN : y = b : k$

$MN' : x = b : k$,

daher ist $MN . MN' : xy = b^2 : k^2$.

Es ist aber vermöge des Vorhergehenden $MN . MN' = b^2$; folglich ist auch

$$xy = k^2, \text{ und } y = \frac{k^2}{x}$$

eine Gleichung für die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten, welche, wenn man die halbe Excentricität k für die Längeneinheit, d. h. $= 1$ annimmt, in $xy = 1$ übergeht.

Setzen wir in dieser Gleichung $x = \infty$, so ist $y = \frac{k^2}{\infty}$ unendlich klein. Setzen wir hingegen $x = 0$, so ist $y = \frac{k^2}{0} = \infty$ das heißt, die Ordinate verwandelt sich in die Asymptote, wenn man die Abscisse $= 0$ setzt.

Nimmt man x negativ, so wird auch y negativ, und zwar in gleichen Abständen von C sind die negativen Ordinaten für die negativen Abscissen eben so groß, als die positiven Ordinaten für die positiven Abscissen; folglich ist C (§. 621.) der Mittelpunct der Hyperbel.

Da $xy = k^2$, und für eine andere Abscisse ebenfalls $XY = k^2$ ist; so hat man auch $xy = XY$, und folglich $y : Y = X : x$. Nähmlich die Ordinaten der Hyperbel an der Asymptote verhalten sich gegen einander umgekehrt wie ihre Abscissen.

Fig. 185.

§. 666.

Wenn man durch irgend einen Punct E der Hyperbel (Fig. 185.) nach was immer für einer Richtung eine Gerade AB zieht; so sind die Abschnitte dieser Geraden zwischen der Hyperbel und zwischen ihren Asymptoten jederzeit einander gleich, nähmlich es ist $AE = DB$.

Um diese Wahrheit einzusehen, ziehe man durch E und D auf die Achse die Senkrechten GH und QR;

so ist $AE : GE = AD : QD$,

und $EB : EH = BD : DR$,

also auch

$$AE.EB : GE.EH = AD.BD : QD.DR.$$

Es ist aber $GE.EH = b^2 = QD.DR$;

folglich auch $AE.EB = AD.BD$,

oder $AE(ED + BD) = (AE + ED)BD$,

nähmlich es ist $AE = BD$,

wenn man diese Gleichung gehörig reducirt.

§. 667.

Hieraus läßt sich leicht ersehen, daß eine Tangente Tt der Hyperbel zwischen den Asymptoten in dem Berührungspuncte M in zwey gleiche Theile $TM = Mt$ getheilt wird.

Zieht man nun die Ordinate MP zu der Asymptote CH parallel, so ist auch $PT = PC$, weil das Dreyeck $TMP \sim TtC$ ist. Nähmlich bey der Hyperbel ist die auf der Asymptote gezählte Subtangente der Abscisse gleich. Es ist demnach sehr leicht an einen gegebenen Punct der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten eine Tangente zu ziehen.

Anmerkung. Da stets $AE = BD$, $DR = pQ$ ist u. s. w.; so ist es auch sehr leicht zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels ACH eine Hyperbel zu beschreiben, die durch einen gegebenen Punct D geht. Denn man ziehe nur durch diesen Punct D mehrere Geraden AB, QR..... zwischen den Asymptoten, mache $AE = BD$, $Qp = DR$, u. s. w. Dann ziehe man abermahls durch die schon gefundenen Puncte E, p.... mehrere

Geraden wie GH, nach verschiedenen Richtungen, und schneide hH = GE ab; so ist h wieder ein Punct dieser Hyperbel. Auf diese Art kann man beliebig viele Puncte dieser krummen Linie bestimmen. Fig. 185.

§. 668.

Eine Gerade MM′, die durch den Mittelpunct der ersten Achse, oder durch die Spitze des Asymptoten-Winkels geht, und sich beyderseits an der Hyperbel endet, heißt ein Durchmesser der Hyperbel. Die Puncte M,M′ aber werden die Scheitel des Durchmessers genannt. Die Tangente Tt zwischen den Asymptoten an dem Scheitel M heißt der vereinigte Durchmesser von MM′.

Wenn wir CM = A, Mt = B, die Abscisse CF = x, und die zum vereinigten Durchmesser parallele Ordinate FD = y setzen, und überdieß ac, RQ senkrecht auf die verlängerte erste Achse ziehen; so ist

$$BD : RD = Mt : Ma$$

und

$$DA : DQ = MT : Mc;$$

also ist auch

$$BD \cdot DA : RD \cdot DQ = Mt \cdot MT : Ma \cdot Mc.$$

Es ist aber $RD \cdot DQ = b^2 = Ma \cdot Mc$;

folglich auch $BD \cdot DA = Mt \cdot MT = B^2$,

oder $(BF - FD)(AF + FD) = B^2$.

Ferner ist $AF : CF = MT : CM$

oder $$AF = \frac{Bx}{A} = BF$$

und

$$FD = y,$$

daher auch $$\left(\frac{Bx}{A} - y\right)\left(\frac{Bx}{A} + y\right) = B^2,$$

woraus man

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$$

oder $$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(x^2 - A^2)$$

erhält, welche Gleichung der Hyperbel zukommt, wenn die Coor-

Fig. dinaten-Achsen zu zwey vereinigten Durchmessern parallel laufen, und ihr Ursprung in dem Mittelpuncte der Hyperbel liegt.

Aus dieser Gleichung läßt sich ersehen, daß die Hyperbel in Hinsicht auf ihre vereinigten Durchmesser eben dieselben Eigenschaften besitzt, wie in Hinsicht auf ihre Achsen.

Anmerkung. Wie man bey einer verzeichneten Hyperbel die Lage und Größe der ersten Achse, die Brennpuncte, die Lage der Asymptoten u. s. w. durch Verzeichnung finden könne; ist aus den abgeleiteten Sätzen sehr leicht einzusehen, und wird dem eigenen Fleiße der Anfänger überlassen.

§. 669.

Wenn man

$$CA = AB = k,\ CP = x,\ PM = y,$$

186. und den Asymptoten-Winkel $= HCG = \alpha$ setzt (Fig. 186.); so ist

$$AP = x - k,\ BAG = \alpha$$

und der Winkel, den der (senkrechte) Abstand des Punctes A von der Geraden PM, welchen wir mit x' bezeichnen wollen, mit x bildet, $= BAG - 90^0 = \alpha - 90^0$,

wodurch man

$$x' = (x-k)\cos(\alpha - 90^0) = (x-k)\sin\alpha$$

erhält.

Nun ist (nach §. 665.) $y = \frac{k^2}{x}$, oder wenn man den aus der nächst vorhergehenden Gleichung folgenden Werth

$$x = k + \frac{x'}{\sin\alpha}$$

substituirt,

$$y = \frac{k^2}{k + \frac{x'}{\sin\alpha}} = k \cdot \frac{1}{1 + \frac{x'}{k\sin\alpha}} = k \cdot \frac{1}{1+u},$$

wenn man der Kürze wegen $\frac{x'}{k\sin\alpha} = u$ setzt.

Fig. 186.

Löst man den Bruch $\frac{1}{1+u}$ durch Division in eine Reihe auf, so findet man

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \ldots\ldots$$

daher $y = k - ku + ku^2 - ku^3 + \ldots\ldots$

oder, wenn man für u seinen Ausdruck zurückstellt,

$$y = k - \frac{1}{\sin\alpha}.x' + \frac{1}{k\sin^2\alpha}.x'^2 - \frac{1}{k^2\sin^3\alpha}.x'^3 + \ldots\ldots$$

Da hier die Grundlinie $PM = y$ der Fläche $ABMP = f$ durch ihren Abstand x' von der anderen Grundlinie AB ausgedrückt ist, so findet man nach §. 442.

$$f = kx' - \frac{1}{\sin\alpha}.\frac{x'^2}{2} + \frac{1}{k\sin^2\alpha}.\frac{x'^3}{3} - \frac{1}{k^2\sin^3\alpha}.\frac{x'^4}{4} + \ldots\ldots$$

oder wenn man für x' seinen Werth $ku\sin\alpha$ setzt, und $k^2\sin\alpha$ zum Factor heraus hebt,

$$f = k^2\sin\alpha\,(u - \tfrac{1}{2}.u^2 + \tfrac{1}{3}.u^3 - \tfrac{1}{4}.u^4 + \ldots).$$

Die hier vorkommende Reihe erkennt man (nach §. 293.) leicht als den natürlichen Logarithmen von $1+u$, oder als $L(1+u)$, wenn man der Kürze wegen die natürlichen Logarithmen durch den Buchstaben L andeutet; daher wird

$$f = k^2\sin\alpha.L(1+u);$$

Es ist aber

$$1 + u = 1 + \frac{x'}{k\sin\alpha} = 1 + \frac{x}{k} - 1 = \frac{x}{k},$$

daher $$f = k^2\sin\alpha.L\frac{x}{k}.$$

Legt man ferner denjenigen Logarithmen, deren Modul (§. 293.) der Größe $\sin\alpha$ gleicht, die Karakteristik 1 bey, so ist nach §. 293.

$$\sin\alpha.L\frac{x}{k} = l\frac{x}{k}$$

und somit $$f = k^2.l\frac{x}{k}.$$

Fig. 186. Nimmt man endlich die halbe Excentricität k der Hyperbel für die Längeneinheit, also ihr Quadrat k^2 oder die Potenz der Hyperbel für die Einheit der Flächen, nähmlich $k = 1$ an; so erfolgt

$$f = lx,$$

d. h. der durch die Potenz der Hyperbel ausgedrückte Inhalt des hyperbolischen Flächenraumes ABMP oder des ihm gleichen hyperbolischen Sectors BCM *) ist der Logarithme der auf der Asymptote CG gerechneten Abscisse CP seines entfernteren Eckpunctes M in jenem Logarithmen-Systeme, dessen Modul der Sinus des Asymptoten-Winkels α der Hyperbel ist.

Soll b die Grundzahl dieses Logarithmen-Systems seyn, so kann der Asymptoten-Winkel α der Hyperbel, deren Sectoren die aus demselben Systeme entnommenen Logarithmen werden sollen, nach §. 293. aus der Gleichung

$$\sin\alpha = \frac{1}{Lb}$$

berechnet werden.

Z. B. Sollen die Logarithmen natürliche werden, so muß b = der Grundzahl der natürlichen Logarithmen = h, also

$$\sin\alpha = \frac{1}{1} = 1, \text{ und } \alpha = 90^0,$$

daher in der gleichseitigen Hyperbel $f = Lx$ seyn.

Bey der gleichseitigen Hyperbel sind demnach die Flächenräume ABMP an der Asymptote oder die Sectoren CBM natürliche Logarithmen der Abscissen von dem Mittelpuncte gezählt, wenn man die Potenz der Hyperbel zur Flächeneinheit annimmt. Aus dieser Ursache werden die natürlichen Logarithmen zuweilen hyperbolische genannt. Diese Benennung ist jedoch nicht ganz schicklich, weil, wie wir gesehen haben, jede andere Gattung der Logarithmen

*) Denn es ist ABMP = BCM + MCP − ACB, ferner (§. 455. III.) MCP : ACB = CP . PM : AC . AB = xy : k^2; allein nach §. 665. ist $xy = k^2$, folglich auch MCP = ACB und ABMP = BCM.

ebenfalls durch hyperbolische Räume an der Asymptote vorgestellt Fig.
werden kann, wenn man den Sinus des Asymptoten-Winkels dem Modul der Logarithmen gleich setzt. Denn soll das Zeichen l z. B. briggische Logarithmen andeuten oder $f = \log x$ seyn, so muß $b = 10$, folglich $\sin\alpha = \frac{1}{L10} = \frac{1}{2{,}3025851} = 0{,}43429448$, und $\alpha = 25^\circ\ 44'\ 25{,}5''$ werden; d. h. die gemeinen oder briggischen Logarithmen können durch die Sectoren einer Hyperbel dargestellt werden, bey welcher der Asymptoten-Winkel $= 25^\circ\ 44'\ 25{,}5''$, und die unveränderliche Gerade $AB = 1$ ist.

Allgemeine Gleichung für die Kegelschnittslinien.

§. 670.

Aufgabe. Der senkrechte Kegel MBM′ werde durch eine Ebene NAN′ geschnitten: man untersuche diejenige Linie, 187.
welche durch diesen Schnitt auf der Kegelfläche entsteht.

Auflösung. Man lege die Ebene CBD durch die Achse des Kegels senkrecht auf die Ebene NAN′, mit welcher sie sich in der Geraden AQ schneidet. Diese Gerade AQ wählen wir zur Abscissenlinie und in ihr den Punct A zum Ursprung der Coordinaten. Ziehen wir nun aus einem beliebigen Puncte M der Kegelschnittslinie NAN′ die Ordinate MP auf AQ senkrecht, so befindet sie sich (nach §. 469.) auch gegen die Ebene CBD in senkrechter Stellung.

Zur Bestimmung des Kegels MBM′ nehmen wir den Winkel $GBA = \alpha$, folglich $CBD = 2\alpha$; zur Fixirung der Lage der schneidenden Ebene NAN′ diene die Entfernung $AB = h$, und der Winkel $PAD = \beta$; endlich zur Feststellung des Punctes M sey $AP = x$ die Abscisse, und $PM = y$ die auf ihr senkrechte Ordinate desselben.

Um die Gleichung der Kegelschnittslinie NAN′ zu erhalten, legen wir durch PM senkrecht auf die Achse des Kegels die Ebene MCM′DM, welche die Kegelfläche in einer Kreislinie und die Ebene CBD in einem ihrer Durchmesser CD schneidet, auf wel-

Fig. 187. chem (nach §. 465.) die Ordinate PM senkrecht steht; weßwegen (vermöge §. 412.)

(1) $MP^2 = DP \cdot PC$

eine Gleichung sowohl der Kreislinie als auch der Kegelschnittslinie vorstellt, in welcher nur noch die Linien MP, DP, PC durch die von uns gewählten Coordinaten auszudrücken sind.

Zu diesem Zwecke besehen wir das Dreyeck APD, in welchem wir

$PAD = \beta$

$ADP = BDC = \frac{1}{2}(180^\circ - CBD) = 90^\circ - \alpha$

$DPA = 180^\circ - PAD - ADP = 90^\circ - (\beta - \alpha)$

$AP = x$, folglich

$PD = AP \cdot \frac{\sin PAD}{\sin ADP} = x \frac{\sin \beta}{\cos \alpha}$

$DA = AP \cdot \frac{\sin DPA}{\sin ADP} = x \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\cos \alpha}$ finden, wodurch

$DB = BA + AD = h + x \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\cos \alpha}$ wird.

Ferner liefert das gleichschenkelige Dreyeck CBD nach §. 561.

$CD = 2 . DB . \cos BDC = 2h \sin\alpha + 2x \frac{\cos(\beta - \alpha)\sin\alpha}{\cos \alpha}$,

mithin ist

$$PC = CD - DP$$

$$= 2h \sin \alpha + x \frac{\cos\beta \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta(1 - 2\sin^2\alpha)}{\cos\alpha}$$

$$= 2h \sin\alpha + x \frac{\cos\beta \sin 2\alpha - \sin\beta \cos 2\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= 2h \sin\alpha + x \frac{\sin(2\alpha - \beta)}{\cos\alpha}.$$

Setzen wir diese Werthe statt DP, PC, und überdieß y an den Platz von MP in der Gleichung (1); so erscheint für die Kegelschnittslinie die Gleichung

(2) $y^2 = 2h \tan\alpha \sin\beta . x + \frac{\sin(2\alpha - \beta)\sin\beta}{\cos^2\alpha} . x^2$.

Da diese Gleichung, wenn wir Fig. 187.

(3) $h \operatorname{tang} \alpha \sin\beta = p$, $\frac{\sin(2\alpha-\beta)\sin\beta}{\cos^2\alpha} = q$

setzen, in die Gleichung

(4) $y^2 = 2px + qx^2$

übergeht, welche (nach §. 660. II.) der Hyperbel, Parabel oder Ellipse zukommt, je nachdem q positiv, Null oder negativ ist; so muß die Kegelschnittslinie unter denselben Bedingungen eine von diesen drey krummen Linien werden. Weil ferner die Winkel α und β zwischen 0 und 180° liegen, so wird der Winkel $2\alpha-\beta$ mit der Größe q gleichzeitig positiv, Null oder negativ. Folglich wird der Kegelschnitt eine Hyperbel, wenn der Winkel β kleiner als 2α ist, oder da in diesem Falle CBD + PAB > 180° ausfällt, wenn (§. 378. IV.) die schneidende Ebene die zwey Seiten BD und Bd des Kegels, folglich beyde Abtheilungen CBD und cBd der Kegelfläche trifft. Der Schnitt übergeht ferner in eine Parabel, wenn $\beta = 2\alpha$ wird, nähmlich (§. 363.) wenn die schneidende Ebene zur Seite BC des Kegels parallel läuft; er wird endlich eine Ellipse, wenn $\beta > 2\alpha$ ist, oder weil dann CBD + PAB < 180° wird, wenn (§. 378. IV.) die schneidende Ebene beyde Seiten BD und BC des Kegels, also bloß eine Abtheilung der Kegelfläche trifft. — Da die schneidende Ebene nur in einer einzigen Lage zur Seite des Kegels parallel laufen kann; so bildet der paraboliſche Schnitt gewiſſer Maßen die Scheidewand zwiſchen den hyperboliſchen und elliptiſchen Schnitten, und die Parabel läßt ſich als die Grenze anſehen, der ſich die Ellipſen und Hyperbeln nähern, wenn ſie mit ihr einerley Parameter beſitzen und ihre Achſen ohne Ende ſich vergrößern.

Mittelſt der Gleichungen (3) können zu einem bekannten Schnitte aus den Größen α, β, h der halbe Parameter p und die Größe q, d. i. das quadrirte Verhältniß der beyden Halbachſen berechnet werden.

Da ferner nach §. 660. II.

$$p = \frac{b^2}{a}, \text{ und } q = \frac{b^2}{a^2},$$

Fig. 187. folglich

$$a = \frac{p}{q}, \qquad b = \frac{p}{\sqrt{q}}$$

ist, so können mittelst der Gleichungen

$$(5)\quad a = \frac{h \sin 2\alpha}{2 \sin (2\alpha - \beta)}, \quad b = h \sin \alpha \sqrt{\frac{\sin \beta}{\sin (2\alpha - \beta)}}$$

die beyden halben Achsen a und b des Schnittes berechnet werden.

Eben so kann man umgekehrt in einem Kegel, der durch den Neigungswinkel α seiner Seiten gegen die Achse gegeben ist, einen Schnitt von bestimmter Art und festgesetzten Dimensionen führen, indem man die Größen β und h sucht.

Zur Bestimmung der ersteren dient uns die zweyte der Gleichungen (3), nähmlich

$$\sin (2\alpha - \beta) \sin \beta = q \cos^2 \alpha,$$

aus der wir nach §. 548. I.

$$\cos 2(\alpha - \beta) - \cos 2\alpha = 2q \cos^2 \alpha,$$

oder wenn der Neigungswinkel $\beta - \alpha$ der Achse des Kegels gegen die schneidende Ebene mit γ bezeichnet, nähmlich

$$\beta - \alpha = \gamma$$

gesetzt wird,

$$\cos 2\gamma = 2q \cos^2 \alpha + \cos 2\alpha = (1 + q) \cos 2\alpha + q$$

erhalten, woraus wir endlich (nach §. 550.)

$$\cos^2 \gamma = (1 + q) \cos^2 \alpha, \quad \sin^2 \gamma = \frac{1 - q}{2} - \frac{1 + q}{2} \cos 2\alpha,$$

folglich

$$(6)\quad \cos \gamma = \cos \alpha \sqrt{1 + q},$$

$$\sin \gamma = \sqrt{\left(\frac{1 - q}{2} - \frac{1 + q}{2} \cos 2\alpha\right)}$$

finden.

Mit dem auf diesem Wege gewonnenen Werthe von γ ergibt sich zu Folge der ersten der Gleichungen (3) die Länge

$$(7)\quad h = \frac{p \cot \alpha}{\sin (\alpha + \gamma)}.$$

Soll z. B. der Schnitt eine gleichseitige Hyperbel, folglich $q = 1$ werden, so findet man

$$\cos \gamma = \cos \alpha \sqrt{2}, \quad \sin \gamma = \sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

Damit hier γ möglich werde, darf $\cos 2\alpha$ nicht positiv ausfallen, folglich 2α nicht unter 90^0 liegen, d. h. der an der Spitze des Kegels liegende Winkel muß ein rechter oder stumpfer seyn, wenn sich in den Kegel eine gleichseitige Hyperbel einschneiden lassen soll. Fig. 187.

Damit der Schnitt eine Kreislinie werde, muß (nach §. 660.)

$$q = -1,$$

folglich $\cos\gamma = 0$, $\sin\gamma = 1$, nähmlich $\gamma = 90^0$ seyn, d. h. der Schnitt muß, wie wir bereits wissen, auf der Achse des Kegels senkrecht stehen.

Wird insbesondere

$$\beta = 0 \text{ oder } 180^0,$$

so wird $y = 0$, folglich verwandelt sich der Schnitt in eine gerade Linie, nähmlich in die Seite des Kegels.

Führt man den Schnitt durch die Spitze des Kegels, läßt man nähmlich $h = 0$ werden, so wird

$$(8) \qquad y = \pm \frac{x}{\cos\alpha} \cdot \sqrt{\sin(2\alpha - \beta)\sin\beta}.$$

Da diese Gleichung (nach §. 621.) zweyen durch den Ursprung der Coordinaten gehenden geraden Linien zugehört, so übergeht die Kegelschnittslinie in zwey Seiten des Kegels, so lange die Wurzelgröße $\sqrt{\sin(2\alpha-\beta)\sin\beta}$ reell ist. Wird aber $\beta = 0$, oder $= 2\alpha$ oder $= 180^0$, so ergibt sich $y = 0$, d. h. der Schnitt fällt in die Seite des Kegels. Fällt endlich $\beta > 2\alpha$, daher diese Wurzelgröße imaginär aus, so kann die Gleichung nur für $x = 0$ und $y = 0$ bestehen, woraus man ersieht, daß der Kegelschnitt in einen einzigen Punct, nähmlich in die Spitze des Kegels sich zusammenzieht.

Setzen wir endlich

$AG = r$, so ist aus dem Dreyecke AGB

$$AB = \frac{AG}{\sin ABG} \quad \text{oder} \quad h = \frac{r}{\sin\alpha};$$

dadurch übergeht die Gleichung (2) in

$$y^2 = 2r\frac{\sin\beta}{\cos\alpha} \cdot x + \frac{\sin(2\alpha-\beta)\sin\beta}{\cos^2\alpha} \cdot x^2.$$

Fig. 187. Lassen wir nun, indem wir den Punct A und seinen Abstand AG = r von der Achse fest halten, den Winkel ABG = α ohne Ende abnehmen, folglich den Kegel immer spitziger werden, und sich einem Cylinder unaufhörlich nähern; so wird sich der Kegel für α = 0 in einen Cylinder verwandeln, und

$$(9) \qquad y^2 = 2r \sin\beta \,.\, x - \sin^2\beta \,.\, x^2$$

die Gleichung des Schnittes eines Cylinders werden, aus welcher man ersieht, daß dieser Schnitt stets eine Ellipse ist, deren kleine Achse mit dem Durchmesser des Cylinders übereinkommt.

Zusatz. Der aufmerksame Leser wird mit uns die Erscheinung bewundern, daß das in der Gleichung

$$y^2 = 2px + qx^2$$

begriffene Geschlecht der Kegelschnittslinien durch die Modification der von den Coordinaten x und y unabhängigen oder constanten Größen p und q in drey in ihrer Form wesentlich verschiedene Species: Hyperbel, Parabel und Ellipse zerfällt, je nachdem q positiv, Null oder negativ ist; daß sich ferner, falls der Zahlwerth von q in die Einheit übergeht, in der Species der Hyperbeln als besondere Varietät die gleichseitige Hyperbel, in jener der Ellipsen aber die Kreislinie auszeichnet; und daß die Grenze, der die Hyperbeln zustreben, wenn der Parameter p ohne Ende abnimmt, ein Paar sich schneidender gerader Linien ist. Wir lernen hieraus, daß die Constanten, welche der Erzeugung der krummen Linien zum Grunde liegen, theils durch ihr Qualitätszeichen, theils durch ihr Streben gegen gewisse Grenzen die Art und Form derselben im Allgemeinen wesentlich abzuändern vermögen.

Man ersieht aber auch zugleich, daß manche krumme Linie als eine besondere Art eines ausgebreiteteren Geschlechtes krummer Linien sich darstellen läßt, welches man dadurch auffinden kann, daß man das Prinzip ihrer Erzeugung verallgemeinert. Um dieses an einem Beyspiele anschaulich zu machen, ertheilen wir dem die Entstehung der Parabel leitenden Gesetze, welchem zu Folge das Verhältniß der Abstände des beweglichen Punctes M (Fig. 175.) von einem fixen Puncte F und von einer fixen Geraden EG gleich 1 ist, dadurch eine größere Allgemeinheit, daß wir diesem Verhält-

niſſe eine willkührliche Größe n beylegen, ſo daß die Gleichung Fig. 175.

$$\frac{MF}{MD} = n$$

die zu erzeugende Krumme vollkommen karakteriſirt.

Wählen wir, um dieſe Gleichung durch rechtwinkelige Coordinaten auszudrücken, die durch den Fixpunct F auf die unveränderliche Gerade EG ſenkrecht geſtellte Linie CN zur Abſciſſenlinie, und in ihr zum Urſprunge der Coordinaten denjenigen Punct A, in welchem die krumme Linie die Abſciſſenlinie ſchneidet, für welchen alſo

$$\frac{AF}{AC} = n, \text{ oder } \frac{AF}{CF} = \frac{n}{n+1}, \text{ und } \frac{AC}{CF} = \frac{1}{n+1},$$

daher, wenn wir die beſtimmte Länge $FC = d$ ſetzen,

$$AF = \frac{n}{n+1} d, \quad AC = \frac{d}{n+1}$$

iſt; ſo daß $AP = x$ zur Abſciſſe und $PM = y$ zur Ordinate von M wird.

Um nun die Größen MD und MF durch x, y, d auszudrücken, bemerken wir, daß

$$MD = PC = PA + AC = x + \frac{d}{n+1},$$

und in dem rechtwinkeligen Dreyecke MPF

$$MF^2 = FP^2 + PM^2 = \left(x - \frac{nd}{n+1}\right)^2 + y^2 \text{ iſt.}$$

Tragen wir dieſe Werthe in die Gleichung

$$MF^2 = n^2 . MD^2,$$

ſo verwandelt ſie ſich in

$$x^2 - 2\frac{nd}{n+1}x + \frac{n^2d^2}{(n+1)^2} + y^2 = n^2x^2 + 2\frac{n^2d}{n+1}x + \frac{n^2d^2}{(n+1)^2};$$

woraus unmittelbar

$$y^2 = 2nd.x + (n^2 - 1)x^2$$

als die Gleichung der erzeugten krummen Linie folgt.

Halten wir dieſelbe, indem wir

$$nd = p, \quad n^2 - 1 = q$$

ſetzen, an die Gleichung

$$y^2 = 2px + qx^2;$$

Fig. 175. so liegt am Tage, daß die nach dem verallgemeinerten Gesetze der Entstehung der Parabel erzeugte krumme Linie eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse wird, je nachdem der Verhältniß-Exponent n größer, gleich oder kleiner als 1 angenommen wird. Zugleich erfahren wir durch diese Untersuchung, daß man nicht bloß der Parabel, sondern auch der Ellipse und Hyperbel eine Leitlinie (Directrix) zuweisen könne. Man findet nähmlich, wenn a, b, c, p, q ihre bisherige Bedeutung behalten, aus obigen Gleichungen die das Verhältniß $\frac{MF}{MD}$ messende Zahl

$$n = \sqrt{q+1} = \frac{c}{a}$$

und den Abstand der Leitlinie vom Brennpuncte

$$d = \frac{p}{\sqrt{q+1}} = \frac{b^2}{c}.$$

III. Abschnitt.

Von einigen transcendenten und höheren algebraischen krummen Linien.

§. 671.

Von der Logistik.

188. Eine krumme Linie M′DM, (Fig. 188.) bey welcher die in gleichen Abständen errichteten Ordinaten in einer geometrischen Reihe auf einander folgen, heißt eine logarithmische Linie oder eine Logistik. Wenn nähmlich AC = C2 = 23 = 34 u. s. w. angenommen wird, und man errichtet in diesen Puncten senkrechte Ordinaten, welche in den Proportionen

AB : CD = CD : 22′ = 22′ : 33′ = 33′ : 44′ u. s. w.

fortlaufen, so heißt die ununterbrochene krumme Linie, welche durch die Endpuncte dieser Ordinaten geht, eine Logistik.

Um für die Logistik eine Gleichung zu finden, nehme man Fig. einen willkührlichen Punct A der Geraden P'P für den Anfangs- 188. punct der Abscissen, setze die gegebene Ordinate dieses Punctes AB = c, die Abscisse AP = x und die Ordinate PM = y. Eine andere gegebene Ordinate CD sey = b, der gegebene Abstand dieser Ordinate von A sey AC = a. Ferner sey AP = n . AC, nähmlich x = na. Wenn man nun

$$AC = C2 = 23 = 34 = \ldots = a$$

setzt; so ist

$A2 = 2a$, $A3 = 3a$, u. s. w., folglich entsprechen

den Abscissen $0, a, 2a, 3a, \ldots\ldots na$

die Ordinaten $c, b, \frac{b^2}{c}, \frac{b^3}{c^2}, \ldots\ldots \frac{b^n}{c^{n-1}}$;

d. i. der Abscisse $na = x$

gehört die Ordinate $\frac{b^n}{c^{n-1}} = c\left(\frac{b}{c}\right)^n = y$

an. Eliminirt man die Größe n aus diesen zwey Gleichungen, so erhalten wir die Gleichung $y = c\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{x}{a}}$,

welche jedoch ihrer Herleitung gemäß, zunächst nur jenen Puncten der Logistik zukommt, deren Abscissen Vielfache der constanten Abscisse a sind. Um aber auch ihre Gültigkeit für alle Puncte dieser Linie darzulegen, sey x zwar nicht von a wohl aber von einem aliquoten Theile desselben, etwa von $\frac{a}{m}$, ein Vielfaches z. B. das nfache, nähmlich $x = n \cdot \frac{a}{m}$ oder $mx = na$.

Setzen wir nun $na = x'$, so entspricht dieser Abscisse dem Vorhergehenden gemäß die Ordinate $y' = c\left(\frac{b}{c}\right)^n$. Allein aus demselben Grunde entsprechen

den Abscissen $0, x, 2x, 3x, \ldots\ldots mx$

die Ordinaten $c, y, \frac{y^2}{c}, \frac{y^3}{c^2}, \ldots\ldots \frac{y^m}{c^{m-1}}$;

Fig. 188. folglich gehört, da $mx = na$ ist, der Abscisse $x' = mx = na$ die Ordinate

$$y' = \frac{y^m}{c^{m-1}} = c\left(\frac{y}{c}\right)^m = c\left(\frac{b}{c}\right)^n \text{ an.}$$

Hieraus findet man jedoch

$$y = c\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{n}{m}}, \quad \frac{n}{m} = \frac{x}{a} \text{ und } y = c\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{x}{a}};$$

daher gilt diese Gleichung auch für jene Puncte der Logistik, deren Abscissen zur constanten Abscisse a in irgend einem rationalen Verhältnisse $\frac{n}{m}$ stehen.

Ist jedoch dieses Verhältniß $\frac{x}{a}$ der beyden Abscissen x und a irrational, so läßt es sich als die Grenze ansehen, welcher das durch $\frac{n}{m}$ vorgestellte rationale Verhältniß derselben ohne Ende sich nähert; wodurch wir berechtiget werden, obige Gleichung auch für diese Grenze, d. h. für jedes irrationale Verhältniß $\frac{x}{a}$ gelten zu lassen.

Die Logistik besitzt demnach für jeden ihrer Puncte die Gleichung $y = c\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{x}{a}}$.

Um dieselbe einfacher darzustellen, schreiben wir a statt $\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{a}}$ und A für c, wodurch sie in

$$y = Aa^x$$

übergeht. Nehmen wir überdieß die der Abscisse 0 angehörige Ordinate A zur Längeneinheit an, so reducirt sich diese Gleichung ohne Beschränkung ihrer Allgemeinheit auf

$$y = a^x,$$

woraus man, wenn der Buchstabe l die Logarithmen desjenigen Systems karakterisirt, dessen Grundzahl a ist, die Gleichung

$$x = ly$$

findet, aus welcher wir ersehen, daß in der Logistik die Abscissen Fig.
Logarithmen ihrer Ordinaten sind. 188.

Da ferner, wenn h die Grundzahl und L die Bezeichnung der natürlichen Logarithmen vorstellt, dem Begriffe der Logarithmen gemäß

$$a = h^{La} \text{ oder } = h^{\frac{1}{\alpha}}$$

ist, wenn $La = \frac{1}{\alpha}$ gesetzt wird, so übergeht die Gleichung

$$y = a^{x} \text{ auch in } y = h^{\frac{x}{\alpha}},$$

der man auch die Form $x = \alpha . Ly$ ertheilen kann.

Aus der Gleichung $y = a^{x}$

ersieht man, daß, so lange a größer als 1 ist, die Ordinaten mit den positiven Abscissen ins Unendliche wachsen, wogegen bey der unendlichen Zunahme der negativen Abscisse die Ordinate unendlich abnimmt, ohne jedoch zu verschwinden oder negativ zu werden; was uns erkennen läßt, daß die Abscissenlinie PP′ eine Asymptote der Logistik ist.

§. 672.

Von der Cycloide.

Wenn ein Kreis NM (Fig. 189.) auf einer geraden Linie 189.
sich rollend oder wälzend fortbewegt; so beschreibt ein jeder Punct M des Umkreises eine krumme Linie MAE, welche eine Cycloide oder Radlinie genannt wird. Wenn wir die Cycloide DAE in Erwägung ziehen, welche der anfängliche Berührungspunct D während einer Umdrehung beschreibt; so heißt der Kreis AB der Erzeugungskreis, die Gerade DE die Grundlinie, und der Durchmesser BA des Erzeugungskreises, welcher die Grundlinie senkrecht halbirt, ist vermöge der Erzeugung der Cycloide eine Achse, und A ihr Scheitel.

Aus dieser Entstehungsart der Cycloide folgt:

1) Daß die Grundlinie DE dem ganzen, und DB dem halben Umfange des Erzeugungskreises gleich ist.

Fig. 189. 2) Daß auch jede Gerade QM, welche man aus einem Puncte Q des halben Umkreises AQB zu der Grundlinie BD parallel bis an die Cycloide führt, dem Bogen AQ des Erzeugungskreises gleich ist. Denn wenn wir die Sehnen NM und BQ ziehen, so ist wegen der Gleichheit der Dreyecke BPQ und NRM die Sehne BQ gleich und parallel der NM, folglich auch $BN = QM$ (386.). Nun ist DN = dem Bogen $MN = QB$, und $DB = AQB$; folglich ist $DB - DN = AQB - QB$, nähmlich $NB = AQ$, und endlich $QM = AQ$
die Grundgleichung der Cycloide.

Um nun rechtwinkelige Coordinaten in dieselbe einzuführen, setzen wir $AP = x$, $PM = y$, und den Halbmesser des Erzeugungskreises $AC = a$, dann ist

$$PQ = \sqrt{(2ax - x^2)},$$

und (nach §. 540.)

$$AQ = a \,.\, \text{arc sinv}\frac{x}{a} = a \,.\, \text{arc sin}\frac{\sqrt{2ax - x^2}}{a} = a \,.\, \text{arc cos}\frac{a-x}{a}.$$

Nun ist $QM = PM - PQ = y - \sqrt{2ax - x^2}$;

folglich auch $a \,.\, \text{arc cos}\frac{a-x}{a} = y - \sqrt{(2ax - x^2)}$,

und endlich
$$y = \sqrt{2ax - x^2} + a \,.\, \text{arc cos}\frac{a-x}{a}$$
$$= \sqrt{2ax - x^2} + a \,.\, \text{arc sin vers}\frac{x}{a}$$
$$= \sqrt{2ax - x^2} + a \,.\, \text{arc sin}\frac{\sqrt{2ax - x^2}}{a}$$

eine Gleichung der Cycloide.

Würden die Abscissen aus dem Puncte D auf der Grundlinie DE gerechnet und mit x', die Ordinaten aber mit y' bezeichnet, so wäre

$x = AB - BP = 2a - y'$, $y = BD - x' = \pi a - x'$

und die Gleichung

$$y = \sqrt{2ax - x^2} + a \,\text{arc sinv}\frac{x}{a},$$

verwandelte sich in Fig. 189.

$$\pi a - x' = \sqrt{2ay' - y'^2} + a \operatorname{arc\,sinv}\left(2 - \frac{y'}{a}\right)$$

$$= \sqrt{2ay' - y'^2} + \pi a - a \cdot \operatorname{arc\,sinv}\frac{y'}{a},$$

nähmlich in

$$x' = a \cdot \operatorname{arc\,sinv}\frac{y'}{a} - \sqrt{2ay' - y'^2}.$$

Anmerkung. Um den Ausdruck $\operatorname{arc\,cos}\frac{a-x}{a}$ mittelst der trigonometrischen Tafeln, denen der Halbmesser 1 zum Grunde liegt, in Zahlen zu entwickeln, muß man den in einen Decimalbruch verwandelten Bruch $\frac{a-x}{a}$ in der Spalte Cosinus oder seinen Logarithmen in der Columne log. cos. aufsuchen, die ihm entsprechenden Grade, Minuten und Secunden herausheben, und endlich zu dem gefundenen Gradmaße mittelst der im Anhange befindlichen Tafel der Kreisbogenlängen für den Halbmesser 1 die Länge des Bogens bestimmen.

Es sey z. B. $AC = a = 50$, $AP' = x = 80$; so ist $\frac{a-x}{a} = -\frac{30}{50} = -0{,}6000000$. Nun gehört zu dem Cosinus 0,6000000, so wie zu $\log\frac{30}{50} = 9{,}7781513$ der Bogen $53^0\,7'\,48''$, und folglich zu dem Cosinus $-0{,}6000000$ der Bogen

$$180^0 - 53^0\,7'\,48'' = 126^0\,52'\,12''.$$

Ferner ist die Länge eines Bogens von $126^0\,52'\,12''$, nähmlich

$$\operatorname{arc}\,126^0\,52'\,12'' = 2{,}214299 = \operatorname{arc\,cos}\frac{a-x}{a}.$$

Folglich ist

$$a \cdot \operatorname{arc\,cos}\frac{a-x}{a} = 110{,}71495.$$

Fig.

§. 673.

Von den Spirallinien.

188. und 191. Man denke sich (Fig. 188.) eine auf ein System von rechtwinkeligen Coordinatenachsen AP, AQ bezogene Linie M′M, ferner (Fig. 191.) einen unveränderlichen Punct C als den Pol und eine feste Gerade CD als die Polarachse von Polar-Coordinaten.

Um den Pol C beschreibe man mit einem zur Längeneinheit gewählten Halbmesser CA = 1 eine Kreislinie APQA; von allen senkrechten Ordinaten der krummen Linie M′M aber schneide man mittelst einer von der Abscissenlinie um die Längeneinheit AB = 1 entfernten, daher zu ihr parallelen Geraden die Längeneinheit ab. Nach diesen Vorbereitungen bringe man in Gedanken die 188ste Figur über die 191ste dergestalt, daß der Ursprung A der Abscissen auf den Pol C, die Ordinatenlinie AQ längs der Polarachse CD, daher der Einschnitt B der Ordinatenlinie in die um die Längeneinheit von der Abscissenlinie abstehende Parallele auf den Punct A der mit dem Halbmesser 1 verzeichneten Kreislinie zu liegen komme, folglich diese Parallele die Kreislinie berühre. Nun denke man sich die nach der Richtung der positiven Abscissen fortlaufende Hälfte derselben Parallelen nach der einen Seite von A gegen P, ihre auf der Seite der negativen Abscissen befindliche Hälfte aber nach der andern Seite von A gegen Q auf die Kreislinie so aufgelegt (oder einem biegsamen Faden gleich wie auf einem Reife aufgewunden), daß die mit dieser Parallelen unter rechten Winkeln unveränderlich verbundenen Ordinaten in die Richtungen der Halbmesser oder Normalen der Kreislinie, folglich sämmtliche Puncte der Abscissenlinie in den Pol C fallen.

Durch diesen Vorgang werden die Endpuncte aller Ordinaten, das ist die Linie M′M (Fig. 188.) in eine eigenthümliche Linie CAMM′ (Fig. 191.) zu liegen kommen, welche man eine Spirallinie oder Spirale der ursprünglich vorhandenen Linie M′M (Fig. 188.) nennt. Ist nähmlich M′M (Fig. 188.) eine

Kreislinie, eine Ellipse, eine Cycloide u. dgl. so wird CAMM′ (Fig. 191.) eine Spirale der Kreislinie, der Ellipse, der Cycloide u. s. w. genannt; insbesondere heißt die Spirale der geraden Linie die lineäre oder archimedische, jene der Parabel, Hyperbel, Logistik, die paraboliſche, hyperboliſche, logarithmiſche Spirale. Gewöhnlich wird der Begriff der Spirallinien in einem eingeſchränkteren Sinne genommen, indem man darunter nur jene krummen Linien begreift, welche in unzähligen Windungen einen Punct umkreiſen, wie in Fig. 190. und 191.; in unſerer Abhandlung aber wollen wir den ausgedehnteren Sinn durchgehends beybehalten. Fig. 188. und 191.

Aus der oben beſchriebenen Erzeugung der Spirale einer Linie ziehen wir folgende Schlüſſe:

1. Da ſowohl die Lage des rechtwinkeligen Coordinaten-Syſtems der gegebenen Linie, als auch die Einheit der Längen willkührlich angenommen werden kann; ſo laſſen ſich aus jeder Linie unzählig viele weſentlich von einander verſchiedene Spiralen ableiten.

2. Eben deßwegen kann umgekehrt jede Linie als die Spirale einer andern angeſehen werden.

3. Die Ordinatenachſe der urſprünglich vorhandenen Linie M′M (Fig. 188.) übergeht in die Polarachſe, jede Ordinate aber in einen Radiusvector der aus dieſer Linie erhaltenen Spirale CAMM′ (Fig. 191.); die den Abſciſſen gleichen Stücke der zur Abſciſſenlinie in dem Abſtande 1 parallelen Geraden, wenn ſelbe auf die mit dem Halbmeſſer 1 verzeichnete Kreislinie aufgelegt werden, verwandeln ſich in Kreisbogen, oder da dieſe das Maß ihrer entſprechenden Mittelpunctswinkel ſind, in Polarwinkel. Es verwandeln ſich demnach die Abſciſſen x und die Ordinaten y der gegebenen Linie in die Polarwinkel φ und in die Radienvectoren r ihrer Spirale, oder es wird

$$x = \varphi \text{ , und } y = r.$$

4. Beſitzt man demnach die auf das gewählte rechtwinkelige Coordinatenſyſtem gegründete Gleichung der gegebenen Linie M′M (Fig. 188.), ſo erhält man ſogleich die Polargleichung ihrer Spirale CAMM′ (Fig. 191.), indem man in obiger

Fig. Gleichung φ statt x und r statt y schreibt. So z. B. gehört die Gleichung

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{einer Kreislinie,}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{einer Ellipse,}$$

$$y = \sqrt{2ax - x^2} + a \cdot \operatorname{arc\,sinv} \frac{x}{a} \quad \text{einer Cycloide}$$

an; folglich entspricht die Polargleichung

$\varphi^2 + r^2 = a^2$ der Spirale der Kreislinie,

$\frac{\varphi^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = 1$ » » » Ellipse

$r = \sqrt{2a\varphi - \varphi^2} + a \cdot \operatorname{arc\,sinv} \frac{\varphi}{a}$ der Spirale der Cycloide.

Von der unermeßlich großen Anzahl von Spiralen wollen wir nur folgende, denen dieser Nahme in seinem engern Sinne zukommt, etwas näher besehen.

I. Da (nach §. 620.) $y = ax + b$ die allgemeine auf rechtwinkelige Coordinaten bezogene Gleichung der geraden Linie ist, so muß

$$r = a\varphi + b$$

die Polargleichung der von Archimed zuerst untersuchten lineären Spirale seyn.

Schreiben wir diese Gleichung in der Form

$$r = a\left(\varphi + \frac{b}{a}\right)$$

und wählen eine neue Polarachse dergestalt, daß sie mit der ursprünglichen auf der Seite der negativen Bogen oder Polarwinkel den Winkel $\frac{b}{a}$ bildet, folglich der neue Polarwinkel

$$\varphi' = \varphi + \frac{b}{a}$$

wird; so ergibt sich

$$r = a\varphi'.$$

Uebergeht φ' in 1, nähmlich in denjenigen Polarwinkel, Fig. dessen messender Bogen der Halbmesser, also $=1$ ist, so wird $r=a$; folglich ist a der dem Polarwinkel 1 entsprechende Radiusvector. Nehmen wir diesen zur Längeneinheit, folglich $a=1$ und beseitigen den jetzt entbehrlichen Accent von φ', so ergibt sich die höchst einfache und dennoch völlig allgemeine Polargleichung der lineären Spirale

$$r = \varphi.$$

Aus ihr ersehen wir, daß sie (Fig. 190.) von dem Pole C 190. aus nach beyden Seiten CM und Cm' in endlosen Windungen um ihren Pol C herumläuft, da der Polarwinkel φ, oder vielmehr der ihn messende Kreisbogen AP, daher auch der ihm gleiche Radiusvector r, sowohl im negativen als positiven Gebiethe von Null bis ins Unendliche wächst.

II. Wählen wir den Parameter einer Parabel zur Längeneinheit, so ist (§. 628.)

$$y = \sqrt{x}$$

ihre Gleichung, also

$$r = \sqrt{\varphi}$$

die Polargleichung der paraboliſchen Spirale, deren beyläufige Gestalt man erhält, wenn man (Fig. 190.) die punctirte Hälfte der lineären Spirale um DB herumdreht.

III. Wird die halbe Excentricität einer gleichseitigen Hyperbel zur Längeneinheit angenommen, so ist (nach §. 665.) ihre Gleichung

$$xy = 1,$$

folglich die Gleichung der hyperboliſchen Spirale

$$r\varphi = 1, \text{ oder } r = \frac{1}{\varphi}.$$

Diese Spirale besteht aus zwey congruenten Hälften, die bey dem unendlichen Wachsen der Polarwinkel ihren Pol ohne Ende umkreisen, ihn jedoch nie erreichen, andererseits aber bey der unendlichen Abnahme dieser Winkel (da der Abstand jedes Punctes von der Polarachse

$$r\sin\varphi = \frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1 - \frac{\varphi^2}{2.3} + \ldots..$$

(§. 545.) ist, folglich für unendlich kleine Werthe von φ an die

Fig. Grenze 1 rückt) an eine in dem Abstande 1 zur Polarachse pa-
rallel liegende Asymptote sich anschmiegen.

IV. Die Logistik besitzt (nach §. 671.) die Gleichung

$$y = a^x,$$

191. folglich die logarithmische Spirale (Fig. 191.) die Polargleichung

$$r = a^{\varphi}.$$

Diese Spirale läuft, wenn a positiv und größer als 1 ist, in unendlich vielen Windungen um ihren Pol C herum, indem sie sich auf der Seite der positiven Polarwinkel ohne Ende von ihm entfernt, auf der Seite der negativen aber unaufhörlich demselben sich nähert, ohne ihn je zu erreichen.

§. 674.

Um die von uns in der Folge einzuleitenden allgemeinen Untersuchungen der Linien durch besondere Beyspiele erläutern zu können, wollen wir in gedrängter Kürze noch von einigen andern krummen Linien sowohl ihre Natur, als auch ihre vornehmsten Gleichungen angeben, wobey wir jedoch dem Leser das Vergnügen überlassen, diese Linien entweder nach einer in ihrer Natur begründeten Verzeichnungsweise, oder mit Hülfe der gefundenen Gleichungen nach der im §. 622. ertheilten Anleitung zu construiren.

I. Eine krumme Linie, deren sämmtliche durch einen gegebenen fixen Punct gehende Sehnen gleich sind, und von einer unveränderlichen Geraden halbirt werden, heißt Muschellinie oder Conchoide (conchois).

Nehmen wir diesen fixen Punct, welcher der Pol der Muschellinie genannt zu werden pflegt, zum Ursprung rechtwinkeliger Coordinaten, die aus ihm auf jene feste Gerade errichtete Senkrechte zur Abscissenlinie, und bezeichnen wir mit a den Abstand des Poles von der festen Geraden, mit b die positive oder negative Hälfte der durch den Pol gehenden gleichen Sehnen; so ist die Ordinate des Mittelpunctes derjenigen Sehne, deren Endpunct die Coordinaten x und y besitzt, $= \frac{ay}{x}$, daher sein Abstand vom

Fig.

Pole $= \frac{a}{x}\sqrt{x^2+y^2}$, und die Entfernung des Endpunctes von demselben Pole $= \frac{a}{x}\sqrt{x^2+y^2} + b$; folglich findet man, da diese Entfernung auch $= \sqrt{x^2+y^2}$ seyn muß, für die Muschellinie die Gleichung

$$\frac{a}{x}\sqrt{x^2+y^2} + b = \sqrt{x^2+y^2},$$

oder $$y = x\sqrt{\left(\frac{b}{x-a}\right)^2 - 1}.$$

Wird aber die aus dem Pole auf die unveränderliche Gerade herabgelassene Senkrechte zur Polarachse angenommen, so drückt sowohl $r-b$, als auch $a\sec\varphi$ den Abstand der Mitte der Sehne vom Pole aus, daher ist

$$r - b = a\sec\varphi$$

oder $$r = a\sec\varphi + b$$

die Polargleichung der Conchois.

Manche Geometer nennen den Zweig der Muschellinie, worin b positiv ist, die obere, jenen aber, wo b negativ ist, die untere Muschellinie. In Fig. 173. ist eine obere und in Fig. 174. eine untere Conchois dargestellt. 173. und 174.

II. An den einen Endpunct eines unveränderlichen Durchmessers einer Kreislinie sey eine Tangente gezogen, eine durch seinen zweyten Endpunct geführte gerade Linie drehe sich um denselben und auf ihr bewege sich ein Punct dergestalt, daß er von jenem fixen Puncte um die Länge desjenigen Stückes der sich drehenden geraden Linie abstehe, welches zwischen der Tangente und der Kreislinie liegt; so beschreibt der bewegliche Punct eine Linie, welche die Cissois oder Cissoide heißt und der Linie BMC (Fig. 200.) ähnlich ist. 200.

Nehmen wir den fixen Punct der sich drehenden Geraden zum Pol, den unbeweglichen Durchmesser zur Polarachse an, und bezeichnen wir den Durchmesser mit a, so sind $a\cos\varphi$ und $a\sec\varphi$ die Abstände des Poles von den Einschnitten der beweglichen Geraden in die Kreislinie und Tangente.

Fig. Da nun der Radiusvector r des veränderlichen Punctes der Entfernung $a \sec\varphi - a\cos\varphi$ dieser zwey Puncte von einander gleich seyn soll, so ist

$$r = a(\sec\varphi - \cos\varphi) = \frac{a\sin^2\varphi}{\cos\varphi} = a\sin\varphi\tang\varphi$$

die Polargleichung der Cissois.

Würde man denselben Drehpunct der beweglichen Linie für den Anfang der Abscissen annehmen und diese auf dem Durchmesser rechnen, so fände man für rechtwinkelige Ordinaten die Gleichung

$$y = x\sqrt{\frac{x}{a-x}}.$$

III. Eine Linie, bey welcher der Abstand jedes Punctes von einer fixen Geraden dem Winkel proportional ist, den die Entfernung jenes Punctes von einem in dieser Geraden befindlichen fixen Puncte mit derselben Geraden einschließt, wird die Quadratrix oder Vierungslinie genannt.

Nimmt man die feste Gerade zur Polarachse und den fixen Punct zum Pole an, so ist der Abstand jedes Punctes von der Polarachse $= r\sin\varphi$, daher ist, wenn a das constante Verhältniß dieses Abstandes zu jenem Winkel φ vorstellt,

$$\frac{r\sin\varphi}{\varphi} = a \quad \text{oder} \quad r = \frac{a\varphi}{\sin\varphi}$$

die Polargleichung der Quadratrix.

Wird aber der fixe Punct zum Ursprung rechtwinkeliger Coordinaten und die feste Gerade zur Ordinatenlinie angenommen, so findet man die Gleichung

$$y = \frac{x}{\tang\frac{x}{a}} = x\cot\frac{x}{a}.$$

IV. Streckt man eine Kreislinie, indem man einen ihrer Puncte fest hält, nach der Richtung des durch diesen Punct laufenden Durchmessers aus, und errichtet in jedem Puncte dieser Geraden eine Senkrechte, die dem Abstande des auf ihn fallenden Punctes der Kreislinie von dem Durchmesser proportional ist, so bilden die Endpuncte dieser Senkrechten die Sinuslinie.

Nimmt man den festgehaltenen Punct zum Ursprung der Fig.
Coordinaten, den an ihn gezogenen Durchmesser zur Abscissenlinie, so werden die Abscissen den Kreisbogen gleich und die Ordinaten den Sinus derselben proportional, folglich wird jeder ausgestreckte Kreisbogen $= x$, und der Abstand seines Endpunctes von dem Durchmesser $= b \sin \frac{x}{b}$, wenn b den Halbmesser der Kreislinie bezeichnet.

Soll nun die senkrechte Ordinate y diesem Abstande proportional seyn, so wird

$$y = ab \sin \frac{x}{b},$$

oder wenn man $b = 1$

setzt, $y = a \sin x$

die Gleichung der Sinuslinie.

Diese Linie schlängelt sich zu beyden Seiten der Ordinatenlinie mit gleichen dies- und jenseits der Abscissenlinie liegenden Windungen ins Unendliche fort.

Siebentes Hauptstück.

Von der Differenzial-Rechnung.

I. Abschnitt.

Anfangsgründe der Differenzial-Rechnung.

§. 675.

Unter einer unendlich kleinen Größe verstehen wir, wie bereits in §. 306. erklärt wurde, eine solche, welche kleiner ist, als jede angebbare noch so kleine Größe derselben Art. Denkt man sich nun diese kleine angebbare Größe, mit welcher die unendlich kleine verglichen wird, immer kleiner und kleiner angenommen, so erhellet, daß eine Größe unendlich klein ist, wenn sie unter jede angebbare Größe hinabsinkt, mithin ohne Ende abnimmt und sich der Grenze Null nähert.

Die Vorstellung von unendlich kleinen Größen erzeugt sich in uns, wenn wir die nach einander folgenden Aenderungen stetiger Größen beobachten. So nimmt die Zeit in so geringen Abschnitten zu, daß man keinen Zwischenraum wahrzunehmen vermag, wie klein er auch angenommen werden möge. Eben so vergrößern sich die von den verschiedenen Puncten eines sich bewegenden Körpers durchlaufenen Wege, die nichts anders als Linien sind, um unendlich kleine Längen; denn kein Punct kann aus

einer Lage in eine andere kommen, ohne jede zwischen beyden befind- Fig.
liche durchzugehen; und von zwey nach einander folgenden Lagen jedes Punctes läßt sich schlechterdings kein Abstand angeben, wollte man ihn auch noch so klein annehmen. Auf dieselbe Weise erhalten auch Flächen und Körper unendlich kleine Vergrößerungen, wenn eine oder mehrere ihrer Dimensionen stetig zunehmen. Die unendlich kleinen Größen bestehen demnach wirklich in der Natur, und sind keineswegs ein bloß von den Mathematikern ersonnenes Erleichterungsmittel ihrer Untersuchungen.

Eine unendlich kleine Größe kann das Zwey-, Drey-, Vierfache u. s. w. einer anderen gleichfalls unendlich kleinen Größe seyn; es stehen demnach unendlich kleine Größen in bestimmten Verhältnissen zu einander, deren Ausmittelung ein Hauptgeschäft der Infinitesimal-Rechnung ausmacht.

Ist das Verhältniß zweyer unendlich kleiner Größen α und β endlich, so heißen sie unendlich kleine Größen derselben Ordnung. Ist aber das Verhältniß von β zu α selbst unendlich klein, d. h. ist β in Hinsicht auf α eine unendlich kleine Größe, so wird β ein unendlich Kleines der zweyten Ordnung genannt. So ist z. B. (Fig. 193.) wenn man die Sehne aB eines Kreisbogens 193.
für unendlich klein annimmt, der Sinusversus bB desselben Bogens eine unendlich kleine Größe der zweyten Ordnung; denn es ist

$$bB : aB = aB : AB$$

d. h. das Verhältniß des Sinusversus bB zur Sehne aB ist eben so unendlich klein, als jenes der unendlich kleinen Sehne aB zu dem endlichen Durchmesser AB; folglich ist der Sinusversus in Rücksicht des endlichen Durchmessers ein unendlich Kleines der zweyten Ordnung.

Ist ferner, wenn man β als eine unendlich kleine Größe der zweyten Ordnung anerkannt hat, das Verhältniß von einer dritten Größe γ zu β ebenfalls ein unendlich Kleines der ersten Ordnung; so nennt man γ eine unendlich kleine Größe der dritten Ordnung; u. s. w.

Fig. Daraus schließen wir, daß ein Product von n unendlich kleinen Zahlen der ersten Ordnung als eine unendlich kleine Größe der nten Ordnung angesehen werden muß.

Aus der aufgestellten Erklärung der unendlich kleinen Größen folgern wir als einen Hauptlehrsatz der Analysis, daß zwey endliche Größen, welche sich bloß um eine unendlich kleine unterscheiden, für gleich angesehen werden müssen, weil sich zwischen ihnen keine Verschiedenheit angeben läßt, wie klein man sie auch annehmen möchte. Dasselbe gilt auch bey unendlich kleinen Größen von einer und derselben Ordnung, welche nur um ein unendlich Kleines einer höhern Ordnung differiren. Man behandelt sie nähmlich als Größen, welche im strengsten Sinne gleich sind, oder deren Verhältniß zu einander die Einheit ist.

Man pflegt diese Sätze auch dadurch auszudrücken, daß man sagt: man könne ohne Beeinträchtigung der Richtigkeit einer Rechnung sowohl die unendlich kleinen Größen, wenn sie endlichen, als auch die unendlich kleinen Größen höherer Ordnungen, wenn sie unendlich kleinen von niedrigeren Ordnungen beyzugeben sind, vernachlässigen.

§. 676.

Wenn eine veränderliche Größe x um einen unendlich kleinen Theil vergrößert wird, so heißt dieser das Differenzial von x. Man pflegt diese unendlich kleine Zunahme der Veränderlichen x durch dx zu bezeichnen, indem man den Buchstaben d, nicht etwa als einen Factor von x, sondern als ein Symbol ansieht, womit man das Wachsthum der Variabeln x andeutet.

Das Differenzial einer Function von einer oder mehreren veränderlichen Größen ist der Unterschied, um welchen die Function zunimmt, wenn man jede in derselben vorkommende veränderliche Größe um einen unendlich kleinen Theil vermehrt, nähmlich wenn man in der Function jede veränderliche Größe um ihr Differenzial vergrößert. Daß man eine allenfallsige Abnahme oder Verminderung der veränderlichen Größen und Functionen

als eine negative Zunahme in die Rechnung aufzunehmen habe, Fig. bedarf wohl kaum einer Erinnerung.

Die Wissenschaft endlich, die Differenziale gegebener Functionen zu finden, heißt die Differenzial-Rechnung. Das Differenzial einer Function wird angezeigt, wenn man dieselbe in Klammern einschließt, und das Zeichen d vorsetzt, oder wenn man zwischen die zu differenzirende Function und das ihr vorgesetzte Differenziationszeichen d einen Punct stellt, oder endlich da, wo keine Zweydeutigkeit entstehen kann, wenn man vor der zu differenzirenden Function bloß das Zeichen d schreibt. z. B.

$$d\left(\frac{cx^2}{a^2}+b\right),\quad d.(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}},\quad d.x\sin x,\quad d\sqrt{x}$$

zeigt an, daß man die Functionen

$$\frac{cx^2}{a^2}+b,\qquad (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}},\qquad x\sin x,\qquad \sqrt{x}$$

differenziren, nähmlich finden soll, um was sich dieselben verändern, wenn man in ihnen nur die veränderliche Größe x um ihr Differenzial dx vermehrt.

Dabey ist jedoch wohl zu merken, daß man die Bezeichnung $d(x^2)$ von $(dx)^2$ zu unterscheiden habe. Die erste zeigt an, daß man x^2 differenziren soll, die zweyte bedeutet das Quadrat von dx, welches gewöhnlich durch dx^2 vorgestellt wird. Eben so wird die mte Potenz von dx durch dx^m bezeichnet; das Differenzial von x^m aber wird durch $d(x^m)$ oder $d.x^m$ angezeigt.

§. 677.

Aus der gegebenen Erklärung des Differenzials einer Function fließt folgende allgemeine Grundregel, nach der sich jede gegebene Function differenziren läßt.

Man vermehre in der gegebenen Function jede veränderliche Größe x, y, z . . . .
um ihr Differenzial dx, dy, dz . . . .,
und ziehe von der so veränderten Function die gegebene ab;
so ist der Ueberrest, nachdem man ihn durch Unterdrückung

Fig. der unendlich kleinen Größen der höheren Ordnungen mit den unendlich kleinen Zunahmen der veränderlichen Größen auf dieselbe Ordnung zurückgeführt hat, das gesuchte Differenzial.

Ist nähmlich u eine Function von x, y, z . . ., und übergeht sie, wenn diese Veränderlichen um ihre Differenziale wachsen, in $\overline{u}$, so hat man

$$du = \overline{u} - u,$$

daher auch

(1) $$\overline{u} = u + du;$$

d. h. die Function wächst um ihr Differenzial, wenn ihre Veränderlichen um ihre Differenziale zunehmen.

Stellen wir, um diese Grundregel der Differenziation in noch anschaulicheren Zeichen auszudrücken, die Functionen mehrerer veränderlicher Größen x, y, z...., dadurch dar, daß wir dieselben in einer beliebigen Ordnung durch Beystriche getrennt neben einander hinschreiben, mit Klammern umfassen, und zur Andeutung der Verschiedenheit der Verknüpfung dieser Veränderlichen den Anfangsbuchstaben f oder F des Wortes Function oder einen der griechischen Buchstaben φ, ψ, ω, χ vorsetzen, so daß

$$f(x, y, z), \varphi(x, y, z), \omega(x, y, z)$$

verschieden gestaltete, durch die Art der Verbindung der Variabeln unterschiedene, Functionen der Veränderlichen x, y, z, dagegen

$$f(x), f(y), f(xz), f(y + z)$$

gleich gestaltete oder ähnliche Functionen der Größen

$$x, \quad y, \quad xz, \quad y + z$$

vorstellen: so wird obige Grundregel für mehrere Veränderlichen durch die Gleichung

(2) $$d.f(x, y, z, \ldots) = f(x + dx, y + dy, z + dz, \ldots) - f(x, y, z \ldots.),$$

für Eine Veränderliche insbesondere aber durch

$$df(x) = f(x + dx) - f(x)$$

vollständig ausgedrückt.

Nach dieser Regel findet man z. B. wenn man die Function

$$u = 2a^2x - \tfrac{3}{4}b^2y + 5cz^2$$

differenziren soll,

$$du = 2a^2dx - \tfrac{3}{4}b^2dy + 10czdz;$$

vorausgesetzt, daß (nach §. 276.) a, b, c unveränderliche Grö- Fig.
ßen vorstellen. Es ist nähmlich

$$du = 2a^2(x+dx) - \tfrac{3}{4}b^2(y+dy) + 5c(z+dz)^2$$
$$= 2a^2x + 2a^2dx - \tfrac{3}{4}b^2y - \tfrac{3}{4}b^2dy + 5cz^2 + 10czdx$$
$$+ 5cdz^2 - 2a^2x + \tfrac{3}{4}b^2y - 5cz^2$$
$$= 2a^2dx - \tfrac{3}{4}b^2dy + 10czdz + 5cdz^2,$$

folglich, wenn man das letzte Glied als ein unendlich Kleines der zweyten Ordnung rücksichtlich der übrigen, welche sämmtlich von der ersten Ordnung sind, beseitiget,

$$du = 2a^2dx - \tfrac{3}{4}b^2dy + 10czdz.$$

Hieraus erhellet, daß, wenn man eine Function y von einer einzigen Veränderlichen x differenzirt, ihr Differenzial dy stets auf die Form y'dx reducirt werden könne, wo y' eine andere Function von x vorstellt. Der mit dx verbundene Factor y' wird der Differenzial-Coefficient, oder, weil er, wenn man die hier bestehende Gleichung $dy = y'dx$ in der Form $\frac{dy}{dx} = y'$ schreibt, das Verhältniß des Differenzials dy der Function y zum Differenzial dx der unabhängig oder absolut veränderlichen Größe x angibt, der Differenzial-Quotient der Function y genannt.

Ist nähmlich, um dieses auch durch die andere Bezeichnungsweise der Functionen auszudrücken, F(x) eine Function der veränderlichen Größe x, f(x) ihr Differenzial-Coefficient; so hat man die Gleichungen

$$(3) \qquad dF(x) = F(x+dx) - F(x) = f(x)dx$$

$$(4) \qquad \frac{dF(x)}{dx} = \frac{F(x+dx) - F(x)}{dx} = f(x).$$

§. 678.

Die im vorhergehenden Paragraphe erklärte Grundregel der Differenzial-Rechnung setzt uns in den Stand die Differenziale der vorzüglichsten Functionen aufzustellen, wobey wir die Buchstaben u, v, w, x, y, z eben sowohl absolut veränderliche Größen als auch Functionen einer oder mehrerer Variabeln vorstellen lassen, daher geradezu Functionen nennen wollen.

Fig. I. Ist $U = u - x + v - y + \ldots$.

eine Summe, deren sämmtliche Bestandtheile Functionen veränderlicher Größen sind; so hat man

$$dU = (u + du) - (x + dx) + (v + dv) - (y + dy) + \ldots$$
$$- u + x - v + y - \ldots,$$

folglich

(5) $d(u - x + v - y + \ldots) = du - dx + dv - dy + \ldots$,

woraus erhellet, daß das Differenzial einer algebraischen Summe von Functionen der Summe der Differenziale der einzelnen Glieder gleich ist.

II. Besteht die Function $a + x$ aus einem constanten Gliede a und einer Function x, so erhält man

$$d(a + x) = (a + x + dx) - (a + x)$$

oder $d(a + x) = dx$.

Wollten wir aber den Ausdruck $a + x$ nach der in I. aufgestellten Regel differenziren, indem wir auch a als eine Function behandeln, so fänden wir

$$d(a + x) = da + dx.$$

Um demnach diesen besonderen Fall unter den vorangehenden bringen zu können, sehen wir uns bemüssiget

(6) $da = 0$

anzunehmen, folglich das Differenzial einer constanten Größe für Null zu erklären.

III. Ist in dem Producte ax der Factor a constant, so ergibt sich $d(ax) = a(x + dx) - ax$,

nähmlich

(7) $d(ax) = adx$;

woraus wir lernen, daß man bey dem Differenziren einer Function die vorkommenden constanten Factoren vor das Differenzialzeichen stellen könne.

IV. Sind aber in dem Producte ux beyde Factoren Functionen, so finden wir

$$d.ux = (u + du)(x + dx) - ux$$
$$= xdu + udx + dudx$$

oder, weil wir (nach §. 675.) zur Beseitigung von dudx berechtiget sind,

(8) $d.ux = xdu + udx.$ Fig.

Hiernach erhalten wir

$$d.uxy = d(ux.y) = yd.ux + uxdy,$$

nähmlich

(9) $d.uxy = xydu + yudx + uxdy.$

Auf dieselbe Weise finden wir

(10) $d.uxyz = xyz\,du + yzu\,dx + zux\,dy + uxy\,dz,$

u. s. w.

Man erhält demnach das Differenzial eines Productes, wenn man das Differenzial jedes Factors mit allen übrigen Factoren multiplicirt und sämmtliche Partial-Producte addirt.

Die Gleichungen (8), (9), (10) kann man übrigens auch in der Form

$$\frac{d.xyz\ldots}{xyz\ldots} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \ldots.$$

anschreiben.

V. Von dem Bruche $\frac{x}{y}$ findet man das Differenzial

$$d.\frac{x}{y} = \frac{x+dx}{y+dy} - \frac{x}{y} = \frac{xy+ydx-xy-xdy}{y(y+dy)}$$

$$= \frac{ydx-xdy}{y(y+dy)}$$

oder, wenn man im Nenner dy in Bezug auf y vernachlässigt,

(11) $$d.\frac{x}{y} = \frac{ydx-xdy}{y^2}.$$

Das Differenzial eines Bruches wird demnach gefunden, wenn man von dem Producte aus dem Nenner in das Differenzial des Zählers das Product aus dem Zähler in das Differenzial des Nenners abzieht, und den Rest durch das Quadrat des Nenners dividirt.

Bemerkenswerth ist der Fall, wo der Zähler $x = 1$, also $dx = 0$ ist; man findet für denselben

(12) $$d.\frac{1}{y} = -\frac{dy}{y^2}.$$

Fig. Ertheilt man der Gleichung (11) die Form

(13) $$d(x.\frac{1}{y}) = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2};$$

so erhellet, daß man den Bruch $\frac{x}{y}$ auch nach IV. als ein Product differenziren könne, wenn man die eben gefundene Gleichung (12) berücksichtigt.

VI. Suchen wir das Differenzial der Potenz x^n unter der Voraussetzung, daß n eine reelle Constante vorstelle; so ist

$$d.x^n = (x+dx)^n - x^n \text{ oder nach §. 299.}$$

$$= x^n + nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}dx^2 + \ldots - x^n,$$

mithin

(14) $$d.x^n = nx^{n-1}dx.$$

Man findet demnach das Differenzial einer Potenz, indem man den Exponenten derselben mit der in ihrem Exponenten um eine Einheit verminderten Potenz und mit dem Differenzial der Wurzel multiplicirt.

Wegen seines häufigen Erscheinens ist der Fall, wo man $n = \frac{1}{2}$ hat, besonders merkwürdig; für ihn erhält man

(15) $$d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}},$$

daher man das Differenzial einer Quadratwurzel findet, wenn man das Differenzial der unter dem Wurzelzeichen stehenden Größe durch die doppelte Quadratwurzel dividirt.

Zu der höchst wichtigen Formel (14) gelangt man auch ohne Zuziehung des binomischen Lehrsatzes (§. 299.) auf folgendem Wege.

Setzen wir in IV. die n Factoren des Productes $xyz\ldots$ sämmtlich einander gleich, so wird offenbar

$$d.x^n = n.x^{n-1}dx,$$

wobey n eine ganze positive Zahl andeutet.

Fig.

Ist aber n ein positiver Bruch $\frac{p}{q}$, so setze man

$$x^{\frac{p}{q}} = u,$$

folglich $$x^p = u^q.$$

Von diesen zwey gleichen Functionen erhält man die nothwendig gleichen Differenziale

$$px^{p-1}dx = qu^{q-1}du = qx^{p-\frac{p}{q}}du,$$

daher ist $$du = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}dx,$$

nähmlich $$d.x^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}dx;$$

woraus man ersieht, daß obige Gleichung selbst dann noch besteht, wenn n ein rationaler positiver Bruch ist.

Da ferner die irrationalen Zahlen als die Grenzen ihrer rationalen Näherungswerthe angesehen werden können; so vermag die Irrationalität des Exponenten n das Bestehen dieser Gleichung nicht aufzuheben.

Hat endlich n einen negativen Werth, so ist (nach V.)

$$d.x^{-n} = d.\frac{1}{x^n} = -\frac{1}{x^{2n}}d.x^n = -\frac{1}{x^{2n}}.nx^{n-1}dx$$

$$= -nx^{-n-1}dx,$$

nähmlich

$$d.x^{-n} = -n.x^{-n-1}dx.$$

Die Gleichung (14) gilt demnach für jeden reellen Werth des Exponenten n.

Fig. VII. Soll $d.Lx$ bestimmt werden, wofern L das Symbol der natürlichen Logarithmen ist, deren Grundzahl wir (§. 293.) stets mit h bezeichnen; so hat man

$$d.Lx = L(x+dx) - Lx$$
$$= L\frac{x+dx}{x} = L\left(1+\frac{dx}{x}\right)$$

oder (nach §. 290.)

$$= \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{dx^2}{x^2} + \ldots,$$

folglich

(16) $$d.Lx = \frac{dx}{x},$$

d. h. das Differenzial des natürlichen Logarithmus einer Function wird erhalten, wenn man durch diese Function ihr Differenzial dividirt.

Schreibt man diese Gleichung in der Form

(17) $$dx = x\,d.Lx,$$

so gibt sie zu erkennen, daß das Differenzial einer jeden Function dem Producte aus ihr und dem Differenziale ihres natürlichen Logarithmen gleicht.

Ist nun l das Kennzeichen und m der Modul eines andern Logarithmen-Systems, so ist (nach §. 293.)

$$lx = m\,.\,Lx,$$

folglich

(18) $$d.lx = m\,.\,\frac{dx}{x}.$$

Insbesondere ist demnach für briggische Logarithmen

(19) $$d\log x = 0{,}43429448\,.\,\frac{dx}{x}.$$

Die Formeln (16) und (18) lassen sich auch ohne Benützung der logarithmischen Reihe (§. 290.) ableiten.

Bezeichnen wir in dieser Absicht (nach §. 677.) den unbekannten Differenzial-Coefficienten der Function $l(x)$ durch $f(x)$, so daß

$$dlx = f(x)\,dx$$

ist; und setzen wir, zur Bestimmung dieses Coefficienten, x^n an

den Platz von x: so übergeht die letzte Gleichung in Fig.

$$d.l(x^n) = f(x^n)\, d.x^n$$

oder in $$n.dlx = f(x^n)\, nx^{n-1}dx,$$

so daß $$f(x)dx = f(x^n)\, x^{n-1}dx$$

und hieraus $$xf(x) = x^n f(x^n)$$

gefunden wird.

Da nun x^n wegen der völlig willkührlichen Werthe des reellen Exponenten n jede Größe vorstellen kann, so ersehen wir aus der letzten Gleichung, daß die Function xf(x) keineswegs geändert werde, wenn wir an den Platz von x irgend eine andere Größe bringen; es muß demnach xf(x) von x völlig unabhängig oder eine constante Größe seyn. Bezeichnen wir dieselbe mit μ, so daß

$$xf(x) = \mu$$

ist, so finden wir den Differenzial-Coefficienten

$$f(x) = \frac{\mu}{x}$$

und daher

$$dlx = \mu . \frac{dx}{x}.$$

Zur Bestimmung der Constante μ, welche offenbar mit der Grundzahl a in Verbindung stehen muß, auf die sich die durch l bezeichneten Logarithmen beziehen, schlagen wir folgenden Weg ein. Bezeichnen u und v die Logarithmen einer und derselben Zahl x in zwey Systemen, welche wir durch l und L karakterisiren, und deren Grundzahlen a und b sind, so daß

$$a^u = x\,, \quad b^v = x$$
$$u = lx, \quad v = Lx$$

ist; so gibt die Gleichung $a^u = b^v$, wenn wir von ihr die Logarithmen des ersten Systems nehmen,

$$u = vlb$$

oder

$$lx = lb\,.\,Lx.$$

Fig. Lassen wir nun, was allerdings verstattet ist, b eine völlig bestimmte Zahl, z. B. 8, bedeuten, so zeigt sich, daß der Logarithme lx, der sich auf die Grundzahl a bezieht, als das Product zweyer Zahlen dargestellt werden kann, von denen die eine, lb, nur von der Grundzahl a, die andere, Lx, nur von der Zahl x abhängt, und daß man daher immer

$$lx = mF(x)$$

setzen kann; wofern der Factor m bloß von a, nicht aber von x abhängt. Nach §. 293. heißt nun der constante Factor m in dem Ausdrucke des Logarithmen lx der Modul des Logarithmen-Systems, und jene Logarithmen werden natürliche genannt, für welche der Modul $m = 1$ ist. Deuten wir demnach die natürlichen Logarithmen durch L an, so ist

$$Lx = F(x).$$

Wenn aber die Function $F(x)$ außer der Veränderlichen x keine andere allgemeine, sondern bloß besondere Zahlen enthält, so kann auch ihr Differenzial-Quotient $\varphi(x)$ keinen allgemeinen Factor mit sich führen, und daher muß, wenn μ für den gegenwärtigen Fall in μ' übergeht, aus der bestehenden Gleichung

$$\mu' \frac{dx}{x} = \varphi(x)dx$$

nothwendig

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{und } \mu' = 1$$

folgen.

Es ist demnach wie oben

$$dLx = \frac{dx}{x}.$$

Da aber $lx = mLx$,

also $\mu \frac{dx}{x} = m \frac{dx}{x}$

ist, so muß die Constante $\mu = m =$ dem Modul des logarithmischen Systems und

$$dlx = m \frac{dx}{x}$$

seyn.

VIII. Bedeutet a eine positive constante Größe, so ist Fig.

$$d.a^x = a^{x+dx} - a^x = a^x(a^{dx} - 1)$$

oder (nach §. 295.)

$$= a^x[La.dx + (La)^2 dx^2 + \ldots.],$$

nähmlich

(20) $$d.a^x = a^x . La . dx,$$

d. h. das Differenzial einer Exponentialgröße wird erhalten, wenn man dieselbe mit dem natürlichen Logarithmen ihrer Basis und dem Differenziale ihres Exponenten multiplicirt.

Man erhält diese Gleichung auch nach der Formel (17); denn dieser gemäß ist

$$d.a^x = a^x . dL(a^x) = a^x d(xLa) = a^x . La . dx.$$

Wird a = der Grundzahl der natürlichen Logarithmen = h, folglich La = Lh = 1, so erfolgt

(21) $$d.h^x = h^x dx.$$

IX. Die Differenziale der goniometrischen oder Kreisfunctionen lassen sich auf folgende Weise gewinnen.

Es ist

$$d\sin x = \sin(x + dx) - \sin x$$
$$= \sin x \cos dx + \cos x \sin dx - \sin x$$
$$d\cos x = \cos(x + dx) - \cos x$$
$$= \cos x \cos dx - \sin x \sin dx - \cos x.$$

Allein bey einem unendlich kleinen Kreisbogen läßt sich der Cosinus der Einheit und der Sinus dem Bogen gleich stellen.

Denn weil der Gleichung II. §. 543. gemäß

$$\cos x = 1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} x$$

ist, und da (nach Fig. 193.) einem unendlich kleinen Bogen eine 193.
noch kleinere Sehne, daher auch ein noch kleinerer Sinus zukommt; so kann für unendlich kleine Werthe von x

$$\cos x = 1$$

gesetzt werden.

Fig Da ferner, was man als einen geometrischen Lehrsatz zugestehen muß, der Bogen im ersten Quadranten einerseits größer als sein Sinus, andererseits aber kleiner als seine Tangente, nähmlich

$$\sin x < x < \text{tang } x$$

ist; so muß sich, wenn man $\sin x$ durch jede dieser Größen dividirt,

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

ergeben. Lassen wir nun x ohne Ende abnehmen, oder unendlich klein werden; so nähert sich $\cos x$, dem eben geführten Beweise gemäß, ohne Ende der Einheit; folglich muß auch stets der zwischen $\cos x$ und 1 liegende Quotient $\frac{\sin x}{x}$ ohne Ende der Grenze 1 sich nähern, d. h. es ist, für einen unendlich kleinen Bogen x,

$$\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \text{oder } \sin x = x.$$

Setzen wir demnach

$$\sin dx = dx, \quad \cos dx = 1,$$

so erfolgt

(22) $\quad d\sin x = \cos x\, dx$

(23) $\quad d\cos x = -\sin x\, dx.$

Ferner ist nach der Gleichung (11)

$$d\,\text{tang}\, x = d\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos x \,.\, d\sin x - \sin x \,.\, d\cos x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x\, dx + \sin^2 x\, dx}{\cos^2 x}$$

und $\quad d\cot x = d\frac{\cos x}{\sin x}$

$$= \frac{-\sin^2 x\, dx - \cos^2 x\, dx}{\sin^2 x}$$

Fig.

nähmlich

(24) $d\,\text{tang}\,x = \frac{dx}{\cos^2 x}$

(25) $d\cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$.

Eben so findet man nach Gleichung (12)

$$d\sec x = d.\frac{1}{\cos x} = -\frac{d\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}$$

$$d\,\text{cosec}\,x = d.\frac{1}{\sin x} = -\frac{d\sin x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x};$$

nähmlich

(26) $d\sec x = \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \frac{\text{tang}\,x}{\cos x}dx$

(27) $d\,\text{cosec}\,x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = -\frac{\cot x}{\sin x}dx.$

Endlich ist

$$d\,\text{sinv}\,x = d(1-\cos x) = -d\cos x = \sin x\,dx$$

$$d\,\text{cosv}\,x = d(1-\sin x) = -d\sin x = -\cos x\,dx;$$

nähmlich

(28) $d\,\text{sinv}\,x = \sin x\,dx$

(29) $d\,\text{cosv}\,x = -\cos x\,dx.$

X. Um endlich auch noch die Differenziale der durch ihre goniometrischen Functionen bestimmten Kreisbogen zu finden, bezeichnen wir die in IX. differenzirten trigonometrischen Functionen durch x', nähmlich wir setzen

in

(22) $\sin x = x'$, $x = \text{arc sin}\,x'$, $\cos x = \sqrt{1-x'^2}$

(23) $\cos x = x'$, $x = \text{arc cos}\,x'$, $\sin x = \sqrt{1-x'^2}$

(24) $\text{tang}\,x = x'$, $x = \text{arc tang}\,x'$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+x'^2}$

(25) $\cot x = x'$, $x = \text{arc cot}\,x'$, $\sin^2 x = \frac{1}{1+x'^2}$

(26) $\sec x = x'$, $x = \text{arc sec}\,x'$, $\text{tang}\,x = \sqrt{x'^2-1}$, $\cos x = \frac{1}{x'}$

(27) $\text{cosec}\,x = x'$, $x = \text{arc cosec}\,x'$, $\cot x = \sqrt{x'^2-1}$, $\sin x = \frac{1}{x'}$

(28) $\text{sinv}\,x = x'$, $x = \text{arc sinv}\,x'$, $\sin x = \sqrt{2x'-x'^2}$

(29) $\text{cosv}\,x = x'$, $x = \text{arc cosv}\,x'$, $\cos x = \sqrt{2x'-x'^2}$.

Fig. Dadurch erhalten wir, wenn wir der Größe x' den nach vollendeter Reduction überflüssigen Strich abnehmen,

(30) $d.\arc\sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (31) $d.\arc\cos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(32) $d.\arc\tang x = \frac{dx}{1+x^2}$ (33) $d.\arc\cot x = -\frac{dx}{1+x^2}$

(34) $d.\arc\sec x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ (35) $d.\arc\cosec x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

(36) $d.\arc\sinv x = \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ (37) $d.\arc\cosv x = -\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

§. 679.

Um uns die Anwendung der im vorangehenden Paragraphe für die Differenziation der Functionen erlernten speciellen Regeln geläufig zu machen, wollen wir folgende Beyspiele differenziren.

1.) Es sey $u = \frac{ax}{b} - \frac{py}{q} + f$,

so ist

$$du = d\left(\frac{ax}{b}\right) - d\left(\frac{p}{q}y\right)$$

$$= \frac{a}{b}dx - \frac{p}{q}dy.$$

2.) Hat man $u = \frac{axy}{b} - \frac{bxz}{c} + c^2$,

so findet man

$$du = \frac{a}{b}d.xy - \frac{b}{c}d.xz$$

$$= \frac{a}{b}(ydx + xdy) - \frac{b}{c}(zdx + xdz)$$

$$= \left(\frac{a}{b}y - \frac{b}{c}z\right)dx + \frac{ax}{b}dy - \frac{bx}{c}dz.$$

3.) $$d\frac{a^2+bx}{a-x} = \frac{(a-x)\,d(a^2+bx)-(a^2+bx)\,d(a-x)}{(a-x)^2}$$ Fig.

$$= \frac{(ab-bx)\,dx+(a^2+bx)\,dx}{(a-x)^2}$$

$$= \frac{a(a+b)\,dx}{(a-x)^2}.$$

4.) $$d.(a+bx^2)^3 = 3(a+bx^2)^2 d(a+bx^2)$$

$$= 3(a+bx^2)^2 . 2bxdx = 6bx(a+bx^2)^2 dx.$$

5.) Aus $$u = \left(ax^2+by^2-\frac{x^4}{y^2}\right)^3$$

erhält man

$$du = 3\left(ax^2+by^2-\frac{x^4}{y^2}\right)^2 d\left(ax^2+by^2-\frac{x^4}{y^2}\right)$$

$$= 3\left(ax^2+by^2-\frac{x^4}{y^2}\right)^2 \left(2axdx+2bydy-\frac{4x^3}{y^2}dx+\frac{2x^4}{y^3}dy\right).$$

6.) $$d\sqrt{\frac{x}{a-x}} = d.x^{\frac{1}{2}}(a-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(a-x)^{-\frac{1}{2}}dx + \tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}(a-x)^{-\frac{3}{2}}dx$$

$$= \frac{adx}{2x^{\frac{1}{2}}(a-x)^{-\frac{3}{2}}}.$$

7.) $$dL(a^3+bx^2) = \frac{2bxdx}{a^3+bx^2}.$$

8.) $$dL\sqrt{a^2+x^2} = \frac{d\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{xdx}{a^2+x^2}.$$

9.) $$dL(x+\sqrt{a^2+x^2}) = \frac{dx+d\sqrt{a^2+x^2}}{x+\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$= \left(dx+\frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}\right).\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$= \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Fig.

10.) $d\frac{h^{x\sqrt{-1}}+h^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \frac{h^{x\sqrt{-1}}-h^{-x\sqrt{-1}}}{2}.dx.\sqrt{-1}.$

11.) $d\frac{h^{x\sqrt{-1}}-h^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{h^{x\sqrt{-1}}+h^{-x\sqrt{-1}}}{2}.dx.$

12.) $d.\text{chord}\,x = d.2\sin\frac{1}{2}x = \cos\frac{1}{2}x.dx.$

13.) $$d.\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x.d\sin^2 x - \sin^2 x\,d.\cos x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x.2\sin x dx + \sin^3 x\,dx}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\sin x\,(2\cos^2 x + \sin^2 x)\,dx}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\sin x\,(1+\cos^2 x)}{\cos^2 x}dx.$$

14.) $$d.L\tang\tfrac{1}{2}x = \frac{d.\tang\frac{1}{2}x}{\tang\frac{1}{2}x} = \frac{\frac{1}{2}dx}{\cos^2\frac{1}{2}x}.\frac{1}{\tang\frac{1}{2}x}$$
$$= \frac{dx}{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x} = \frac{dx}{\sin x}.$$

15.) $$d.\arc\tang(3+x^2) = \frac{2xdx}{10+6x^2+x^4}.$$

16.) $$d.\tfrac{2}{3}\arc\cos\sqrt{x^3} = -\tfrac{2}{3}.\frac{d\sqrt{x^3}}{\sqrt{1-x^3}} = -\sqrt{\frac{x}{1-x^3}}.dx.$$

17.) $$dL\sin x = \frac{d.\sin x}{\sin x} = \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \cot x\,dx.$$

18.) Wenn $y = \frac{5}{2}(x-30)^2 + 298(x-30) + 4437L(x-30)$ ist, so hat man

$$dy = \frac{5x^2-2x-3}{x-30}dx.$$

19.) $$d\left(\sqrt{a+bx^2} - \sqrt{a}.L\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+bx^2}}{x}\right) = \frac{\sqrt{a+bx^2}}{x}dx.$$

20.) $$d.\cos x\left(\tfrac{1}{5}\sin^4 x - \tfrac{1}{15}\sin^2 x - \tfrac{2}{15}\right) = \sin^3 x\cos^2 x.dx.$$

§. 680. Fig.

Die im Vorhergehenden aufgestellten Differenziations-Regeln erstrecken sich wegen der Allgemeinheit ihrer Herleitung über alle Functionen, wie groß auch die Anzahl der auf sie einwirkenden Veränderlichen seyn möge.

Ist demnach u eine Function von x, y, z, ... so findet man das Differenzial von u, wenn man es mit den Differenzialen von x, y, z, ... auf dieselbe Ordnung unendlicher Kleinheit reducirt, in der Form

(38) $du = Pdx + Qdy + Rdz + \ldots.$

wo P, Q, R, ... im Allgemeinen Functionen der Veränderlichen x, y, z, ... sind.

Sieht man nun in der Function u ein Mahl bloß x, ein anderes Mahl bloß y, ein drittes Mahl nur z, u. s. w. für veränderlich, alle übrigen Größen aber für constant, folglich ihre Differenziale für Null an; so erhält man der Ordnung nach

(39) $du = Pdx$, $du = Qdy$, $du = Rdz$, ...

oder

(40) $\frac{du}{dx} = P$, $\frac{du}{dy} = Q$, $\frac{du}{dz} = R$, ...

Die in dem Ausdrucke $Pdx + Qdy + Rdz + \ldots.$
mit dx, dy, dz, ... verbundenen Factoren P, Q, R, ...
sind demnach die Differenzial-Quotienten der Function u, wenn man in ihr der Reihe nach x, y, z, ... als die einzige Veränderliche behandelt.

Die in (39) zusammengestellten Differenziale von u werden die partiellen und zwar beziehungsweise die nach x, y, z, ... genommenen partiellen Differenziale, daher P, Q, R, ... die nach x, y z, ... genommenen partiellen Differenzial-Quotienten der Function u genannt, während das in (38) enthaltene das vollständige (totale) Differenzial von u heißt.

Man bezeichnet die von der Function u nach x, y, z, .. genommenen partiellen Differenzial-Quotienten P, Q, R, ... nach Euler durch die Symbole

$$\left(\frac{du}{dx}\right), \left(\frac{du}{dy}\right), \left(\frac{du}{dz}\right), \ldots.$$

Fig. gewöhnlicher aber nach Fontaine bloß durch

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dy}, \quad \frac{du}{dz}, \ldots$$

so daß das vollständige Differenzial von u durch

$$(41) \qquad du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \ldots$$

vorgestellt wird. *)

Das vollständige Differenzial einer von mehreren Veränderlichen abhängigen Function ist demnach die Summe ihrer nach den einzelnen Veränderlichen genommenen partiellen Differenziale.

Ist z. B. $u = x^3 - y^3$,

so ist $\frac{du}{dx} = 3x^2$, $\frac{du}{dy} = -3y^2$,

daher $du = 3x^2dx - 3y^2dy$.

Hat man aber $u = x\cos y + y\cos z + z\cos x$,

so wird

$$\frac{du}{dx} = \cos y - z\sin x$$

$$\frac{du}{dy} = \cos z - x\sin y$$

$$\frac{du}{dz} = \cos x - y\sin z,$$

folglich

$$du = (\cos y - z\sin x)dx + (\cos z - x\sin y)dy + (\cos x - y\sin z)dz.$$

§. 681.

Von den höheren Differenzialen.

I. Nach §. 677. ist der Differenzial-Coefficient y' einer von einer einzigen Veränderlichen x abhängenden Function y wieder eine

*) Bey der Anwendung dieser sehr zweckmäßigen Bezeichnung der partiellen Differenzial-Quotienten darf man jedoch nie vergessen, daß sie nur Symbole, keineswegs aber durch wirkliche Theilung der Größe du durch dx, dy, dz, ... entstandene Quotienten sind, daher ihre Nenner oder Divisoren mit hinzutretenden Factoren schlechterdings nicht aufgehoben werden können.

Function derselben Veränderlichen x; daher kann auch er der Fig.
Differenziation unterworfen, folglich sein Differenzial-Coefficient y'' gefunden werden.

Wendet man nun auf diesen und auf alle nach einander hervortretenden Differenzial-Coefficienten y''', y^{IV}, y^{V}, ... die Differenziation an, so erzeugt man eine Reihe solcher Coefficienten, deren jeder der Differenzial-Coefficient der ursprünglichen Function y von der so vielten Ordnung oder der so vielte Differenzial-Coefficient heißt, als Differenziationen zu seiner Darstellung erforderlich sind.

So ist demnach

$$\frac{dy}{dx} = y', \frac{dy'}{dx} = y'', \frac{dy''}{dx} = y''', \frac{dy'''}{dx} = y^{IV}, \frac{dy^{IV}}{dx} = y^{V} \text{ u. s. w.}$$

und y', y'', y''', y^{IV}, y^{V} ....

werden beziehungsweise der Differenzial-Coefficient der ersten, zweyten, dritten, ... Ordnung, oder der erste, zweyte, dritte, ... Differenzial-Quotient der Function y genannt.

Diese Differenzial-Coefficienten y'', y''', y^{IV}, ... besitzen die bemerkenswerthe Eigenschaft, daß sie aus den successiven Differenzialen der ursprünglichen Function y abgeleitet werden können, wenn man den unendlich kleinen Zuwachs dx der absolut veränderlichen Größe x, (das Differenzial von x) für constant annimmt. Denn um den Coefficienten y'' darzustellen, ist es erforderlich dy' zu bestimmen, zu welchem Zwecke wir

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

differenziren, wodurch wir, da dx constant angenommen wird,

$$dy' = \frac{ddy}{dx}$$

erhalten. Bezeichnen wir einer allgemeinen Uebereinkunft gemäß das zweymahl von y genommene Differenzial ddy durch d^2y und halten wir uns stets gegenwärtig, daß die dem Buchstaben d beygeschriebene Zahl kein Exponent, sondern nur ein Wiederhohlungs-Zeiger der Differenziation ist, so ergibt sich

$$dy' = \frac{d^2y}{dx},$$

Fig. folglich $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$.

Eben so erhält man

$$dy'' = d.\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dd^2y}{dx^2}$$

oder wenn man $dd^2y = dddy$ durch d^3y vorstellt,

$$dy'' = \frac{d^3y}{dx^2};$$

folglich $$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

Auf diesem Wege fortschreitend findet man auch

$$dy''' = \frac{d^4y}{dx^3}, \quad y^{IV} = \frac{dy'''}{dx} = \frac{d^4y}{dx^4}$$

$$dy^{IV} = \frac{d^5y}{dx^4}, \quad y^V = \frac{dy^{IV}}{dx} = \frac{d^5y}{dx^5}$$

u. s. w.

Die nach einander folgenden sogenannten höheren Differenziale der Function y, nähmlich dy, d^2y, d^3y, ... welche beziehungsweise das erste, zweyte, dritte, ... Differenzial von y heißen, ergeben sich daher nach den Gleichungen

$$dy = y'.dx$$
$$d^2y = dy'.dx = y''dx^2$$
$$d^3y = dy''.dx = y'''dx^3$$
$$d^4y = dy'''.dx = y^{IV}dx^4$$

u. s. w.

folglich ihre Differenzial-Coefficienten nach den Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = y''$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dy''}{dx} = y'''$$

u. s. w.

indem man die gegebene Function wiederhohlt nach den in §. 678. Fig. aufgestellten Grundregeln differenzirt, und dabey dx wie eine constante Größe behandelt.

Zugleich erkennen wir hieraus, daß, da die Differenzial-Coefficienten

$$y'', \quad y''', \quad y^{IV}, \ldots .$$

die endlichen Verhältnisse

$$\text{von } d^2y, \quad d^3y, \quad d^4y, \ldots .$$
$$\text{zu } dx^2, \quad dx^3, \quad dx^4, \ldots .$$

angeben, (vermöge §. 675.) d^2y mit dx^2,

d^3y mit dx^3, u. s. w.

von derselben Ordnung unendlicher Kleinheit sind.

Bezeichnen wir endlich die Function y durch f(x), und ertheilen wir mit Lagrange ihren nach einander folgenden Differenzial-Quotienten die Zeichen

$$f'(x), \quad f''(x), \quad f'''(x), \ldots . \quad f^{(n)}(x);$$

so finden wir aus

$$y = f(x)$$

die Differenzial-Quotienten

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \frac{f'(x+dx) - f'(x)}{dx} = \frac{df'(x)}{dx} = f''(x)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = y''' = \frac{f''(x+dx) - f''(x)}{dx} = \frac{df''(x)}{dx} = f'''(x)$$

. . . . . .

$$\frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)} = \frac{f^{(n-1)}(x+dx) - f^{(n-1)}(x)}{dx} = \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx} = f^{(n)}(x).$$

Wenden wir das hier Erlernte auf einige Beyspiele an, indem wir uns, als

1. Beyspiel, die Bestimmung der höhern Differenziale der Function

$$y = f(x) = x^n$$

vorlegen;

Fig. so erhalten wir

$$y' = f'(x) = nx^{n-1}$$

$$y'' = f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$$

$$y''' = f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$$y^{IV} = f^{IV}(x) = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(r)} = f^{(r)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)x^{n-r}.$$

Wäre nun n eine ganze positive Zahl, so fänden wir endlich

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1,$$

welcher Ausdruck nichts Veränderliches enthält, weßwegen die noch höheren Differenziale dieser Function sämmtlich Null sind.

2. Beyspiel. Es sey unter der Voraussetzung, daß n eine ganze positive Zahl vorstellt,

$$f(x) = \underset{0}{A}x^{n} + \underset{1}{A}x^{n-1} + \underset{2}{A}x^{n-2} + \ldots + \underset{n-2}{A}x^{2} + \underset{n-1}{A}x + \underset{n}{A},$$

so ist

$$f'(x) = n\underset{0}{A}x^{n-1} + (n-1)\underset{1}{A}x^{n-2} + (n-2)\underset{2}{A}x^{n-3} + \ldots + 2\underset{n-2}{A}x + \underset{n-1}{A}$$

$$f''(x) = n(n-1)\underset{0}{A}x^{n-2} + (n-1)(n-2)\underset{1}{A}x^{n-3} + \ldots + 2\underset{n-2}{A}$$

$$f'''(x) = n(n-1)(n-2)A_0x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)\underset{1}{A}x^{n-4} + \ldots + 3.2A_{n-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(r)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)\underset{0}{A}x^{n-r} + \ldots + r(r-1)\ldots 2.\underset{n-r}{A}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1A_0$$

und

$$f^{(n+1)}(x) = 0,\quad f^{(n+2)}(x) = 0,\ \text{u. s. w.}$$

3. Beyspiel. Sucht man die nach einander folgenden Differenzial-Coefficienten von Fig.

$$y = f(x) = L(1+x),$$

so erhält man

$$y' = f'(x) = +\frac{1}{1+x}$$

$$y'' = f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$y''' = f'''(x) = +\frac{2}{(1+x)^3}$$

$$y^{IV} = f^{IV}(x) = -\frac{2.3}{(1+x)^4}.$$

. . . . . .

4. Beyspiel. Zu $f(x) = a^x$

findet man

$f'(x) = a^x.La$, $f''(x) = a^x.(La)^2$, $f'''(x) = a^x.(La)^3$, ...

folglich ist für $f(x) = h^x$

$f'(x) = h^x$, $f''(x) = h^x$, $f'''(x) = h^x$, ...

5. Beyspiel. Ist $f(x) = \sin x$,

so wird

$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{IV}(x) = \sin x$

u. s. w.

und für $f(x) = \cos x$,

$f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$, $f^{IV}(x) = \cos x$

u. s. w.

6. Beyspiel. Aus $y = f(x)\varphi(x)$

ergibt sich

$$y' = f'(x)\varphi(x) + f(x)\varphi'(x)$$

$$y'' = f''(x)\varphi(x) + 2f'(x)\varphi'(x) + f(x)\varphi''(x)$$

$$y''' = f'''(x)\varphi(x) + 3f''(x)\varphi'(x) + 3f'(x)\varphi''(x) + f(x)\varphi'''(x)$$

$$y^{IV} = f^{IV}(x)\varphi(x) + 4f'''(x)\varphi'(x) + 6f''(x)\varphi''(x) + 4f'(x)\varphi'''(x) + f(x)\varphi^{IV}(x)$$

und allgemein mit Rücksicht auf §. 299.

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x)\varphi(x) + nf^{(n-1)}(x)\varphi'(x) + \frac{n(n-1)}{1.2}f^{(n-2)}(x)\varphi''(x) + \ldots\ldots\ldots + nf'(x)\varphi^{(n-1)}(x) + f(x)\varphi^{(n)}(x).$$

Fig. II. Sollte gegen unsere obige Annahme dx sammt seinen höheren Differenzialen d^2x, d^3x, d^4x, ... veränderlich seyn, so wird man bey der Darstellung der höheren Differenziale der von x dependirenden Function y sich genau an die allgemeinen Differenziationsregeln (§. 678.) halten.

Z. B. Wenn $y = h^x$

ist, und dx für veränderlich angesehen werden soll; so hat man

$$dy = h^x dx$$
$$d^2y = h^x dx^2 + h^x d^2x = h^x(dx^2 + d^2x)$$
$$d^3y = h^x dx^3 + 2h^x dx d^2x + h^x dx d^2x + h^x d^3x$$
$$= h^x(dx^3 + 3dx d^2x + d^3x).$$

In manchen Fällen schließt sich an die angenommene Veränderlichkeit von dx auch noch die Bedingniß an, daß ein bestimmtes Differenzial einer gewissen Function von x constant, folglich das nächst höhere Differenzial Null sey. Unter diesen Umständen wird man aus der so ausgesprochenen Bedingungsgleichung das höchste in ihr vorkommende Differenzial von x durch alle niedrigeren ausdrücken, und in den Differenzialen der Function y substituiren. Sollte in unserem Beyspiele

$$d^2.x^4 = 0$$

seyn, so hätten wir

$$d.x^4 = 4x^3dx, \quad d^2.x^4 = 12x^2dx^2 + 4x^3d^2x = 0,$$

daher $$d^2x = -3\frac{dx^2}{x}$$

und $$d^3x = 21\frac{dx^3}{x^2};$$

somit würde

$$d^2y = h^x\left(1 - \frac{3}{x}\right)dx^2$$

$$d^3y = h^x\left(1 - \frac{9}{x} + \frac{21}{x^2}\right)dx^3.$$

§. 682.

Auch die höheren Differenziale der Functionen mehrerer Variabeln lassen sich nach den allgemeinen Regeln der Differenziation gewinnen.

So z. B. falls $u = xy$ Fig.

ist, findet man

$$du = ydx + xdy$$
$$d^2u = yd^2x + dxdy + dxdy + xd^2y$$
$$= yd^2x + 2dxdy + xd^2y$$
$$d^3u = yd^3x + d^2xdy + 2d^2xdy + 2dxd^2y + dxd^2y + xd^3y$$
$$= yd^3x + 3d^2xdy + 3dxd^2y + xd^3y$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$d^nu = yd^nx + nd^{n-1}xdy + \frac{n(n-1)}{1.2}d^{n-2}xd^2y$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}d^{n-3}xd^3y + \ldots + ndxd^{n-1}y + xd^ny.$$

Eben so ergibt sich

$$d \cdot \frac{ydx}{dy} = \frac{dy(dxdy + yd^2x) - ydxd^2y}{dy^2}$$
$$= \frac{dxdy^2 + yd^2xdy - ydxd^2y}{dy^2}.$$

II. Abschnitt.

Anwendung der Differenzial-Rechnung in der Analysis.

A. Taylor'sche und Maclaurin'sche Reihe.

§. 683.

In der Analysis handelt es sich oft um die Bestimmung des Werthes, welchen eine Function einer einzigen Veränderlichen empfängt, wenn diese um eine endliche Größe zunimmt. Wächst nähmlich in $f(x)$ die Variable x um a, so fragt es sich um den Werth von $f(x+a)$. Setzen wir demnach zur Entwickelung dieses Ausdruckes

(α) $$f(x+a) = f(x) + a\varphi(x),$$

Fig. indem wir uns $f(x+a)$ aus zwey Theilen bestehend denken, von denen der eine die ursprüngliche Function $f(x)$ selbst, der andere das Product von a und einer noch unbestimmten Function von x ist, damit, wie es seyn muß, bey dem Verschwinden von a der gewählte Ausdruck auf $f(x)$ sich reducire.

In der Absicht die Function $\varphi(x)$ aufzufinden, lassen wir x um sein Differenzial wachsen oder in $x+dx$, dagegen a in $a-dx$ übergehen; so ergibt sich

$$f(x+a) = f(x+dx) + (a-dx)\,\varphi(x+dx),$$

daher, wenn wir hievon die vorhergehende Gleichung subtrahiren und durch dx dividiren,

$$0 = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} + a\,\frac{\varphi(x+dx)-\varphi(x)}{dx} - \varphi(x+dx).$$

Sehen wir dabey auf die in §. 681. angenommene Bezeichnung der Differenzial-Quotienten, so erhalten wir

$$0 = f'(x) + a\varphi'(x) - \varphi(x),$$

folglich

$$(\beta) \qquad \varphi(x) = f'(x) + a\varphi'(x).$$

Lassen wir auch in dieser Gleichung x in $x+dx$ und a in $a-dx$ sich verwandeln, ziehen wir sie dann von der so erzeugten Gleichung

$$\varphi(x+dx) = f'(x+dx) + (a-dx)\,\varphi'(x+dx)$$

ab, und theilen den Rest durch dx, so erfolgt

$$\frac{\varphi(x+dx)-\varphi(x)}{dx} = \frac{f'(x+dx)-f'(x)}{dx} + a.\frac{\varphi'(x+dx)-\varphi'(x)}{dx} - \varphi'(x+dx),$$

und wenn wir auf die in §. 681. gewählte Bezeichnung Rücksicht nehmen,

$$\varphi'(x) = f''(x) + a\varphi''(x) - \varphi'(x),$$

daher ist

$$(\gamma) \qquad 2\varphi'(x) = f''(x) + a\varphi''(x).$$

Wiederhohlen wir dieſen Vorgang, ſo gelangen wir nach Fig. und nach zu den Gleichungen

$$(\delta) \qquad 3\varphi''(x) = f'''(x) + a\varphi'''(x),$$
$$(\varepsilon) \qquad 4\varphi'''(x) = f^{iv}(x) + a\varphi^{iv}(x),$$
$$(\zeta) \qquad 5\varphi^{iv}(x) = f^{v}(x) + a\varphi^{v}(x)$$

u. ſ. w.

Eliminiren wir nun mittelſt der ſucceſſiven Subſtitution die Functionen $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, ... aus den Gleichungen (α), (β), (γ), ...; ſo erhalten wir die geſuchte Größe $f(x+a)$ nach den natürlichen Potenzen des Zuwachſes a entwickelt, mittelſt der Gleichung

$$(1) \quad f(x+a) = f(x) + af'(x) + \frac{a^2}{1.2} f''(x) + \frac{a^3}{1.2.3} f'''(x) + \frac{a^4}{1.2.3.4} f^{iv}(x) + \ldots\ldots$$

oder

$$(2) \quad f(x+a) = f(x) + a\,\frac{df(x)}{dx} + \frac{a^2}{1.2}\,\frac{d^2f(x)}{dx^2} + \frac{a^3}{1.2.3}\,\frac{d^3f(x)}{dx^3} + \ldots.$$

oder auch, wenn $f(x) = y$, und $f(x+a) = \overline{y}$ geſetzt wird,

$$(3) \qquad \overline{y} = y + a.y' + \frac{a^2}{1.2}.y'' + \frac{a^3}{1.2.3}.y''' + \ldots$$

Dieſe Reihe, welche nur dann abbricht, wenn von einem beſtimmten Differenzial-Coefficienten der Function angefangen alle folgenden verſchwinden, ſonſt aber ohne Ende fortläuft, wird nach ihrem Erfinder Taylor die Taylor'ſche Reihe genannt.

Setzen wir in derſelben $x = 0$ und bezeichnen die Werthe, welche die Differenzial-Quotienten

$$f(x),\quad f'(x),\quad f''(x),\quad f'''(x)\ldots..$$

unter dieſer Vorausſetzung annehmen, durch

$$f(0),\quad f'(0),\quad f''(0),\quad f'''(0)\ldots..$$

und ſchreiben wir zugleich x ſtatt a, ſo ſtoßen wir auf die von Maclaurin erfundene Reihe

$$(4) \quad f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0) + \ldots$$

Fig. Diese Reihe läßt sich auch auf folgende Weise herleiten. Wenn die Function $f(x)$ durch eine nach der natürlichen Folge der Potenzen von x fortschreitende Reihe dargestellt, somit

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$

angenommen werden kann, so erfolgt

$$f'(x) = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots$$
$$f''(x) = 2C + 2.3Dx + 3.4Ex^2 + \ldots$$
$$f'''(x) = 2.3D + 2.3.4Ex + \ldots$$
u. s. w.

Wird hierin $x = 0$ gesetzt, so erhält man

$$A = f(0),\ B = f'(0),\ C = \frac{1}{1.2} f''(0),\ D = \frac{1}{1.2.3} f'''(0), \text{ u. s. w.}$$

daher

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0) + \ldots\ldots$$

§. 684.

I. Setzen wir zur Anwendung der Taylor'schen Reihe, als

1. Beyspiel, $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$,

so finden wir

$$f(x+a) = (x+a)^3 + 2(x+a)^2 + 3(x+a) + 1$$
$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$$
$$f''(x) = 6x + 4$$
$$f'''(x) = 6;$$

daher

$$(x+a)^3 + 2(x+a)^2 + 3(x+a) + 1 = x^3 + 2x^2 + 3x + 1 + a(3x^2 + 4x + 3) + a^2(3x + 2) + a^3.$$

2. Beyspiel. Wird $f(x) = x^n$ genommen, so ist

$$f(x+a) = (x+a)^n,$$

und wenn wir auf die in (§. 681. Beyspiel 1.) abgeleiteten Differenzial-Quotienten Rücksicht nehmen,

$$(5) \qquad (x+a)^n = x^n + nx^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} a^2 + \frac{n(n-1)(n-2}{1.2.3} x^{n-3} a^3 + \cdots$$

Diese Herleitung des binomischen Lehrsatzes ist folgerecht, Fig. wenn man ihn nicht zur Ableitung des Differenzials von x^n verwendet. (§. 678. VI.)

3. Beyspiel. Ist $f(x) = \sin x$,

so ist $f(x+a) = \sin(x+a)$,

daher (nach §. 681. Beyspiel 5.)

$$(6)\quad \sin(x+a) = \sin x + a\cos x - \frac{a^2}{1.2}\sin x - \frac{a^3}{1.2.3}\cos x + \frac{a^4}{1.2.3.4}\sin x \ldots\ldots$$

4. Beyspiel. Für $f(x) = \cos x$

hat man $f(x+a) = \cos(x+a)$,

daher (nach §. 681. Beyspiel 5.)

$$(7)\quad \cos(x+a) = \cos x - a\sin x - \frac{a^2}{1.2}\cos x + \frac{a^3}{1.2.3}\sin x + \ldots$$

II. Mittelst der Maclaurin'schen Reihe lassen sich folgende Functionen leicht entwickeln.

1. Beyspiel. Es sey $f(x) = L(1+x)$,

so ist (nach §. 681. Beyspiel 3.)

$f(0) = L1 = 0$

$f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 2$, $f^{IV}(0) = -2.3$, u. s. w.

daher

$$(8)\quad L(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots\ldots$$

2. Beyspiel. Nehmen wir $f(x) = a^x$,

so ergibt sich, weil (nach §. 681. Beyspiel 4.)

$f(0) = a^0 = 1$, $f'(0) = La$, $f''(0) = (La)^2$, $f'''(0) = (La)^3$, u. s. w. ist,

$$(9)\quad a^x = 1 + x\,La + \frac{x^2(La)^2}{1.2} + \frac{x^3(La)^3}{1.2.3} + \frac{x^4(La)^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$(10)\quad h^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$$

Diese Ableitung der Entwickelungen der Functionen $L(1+x)$, a^x und h^x ist consequent, wenn sie nicht zur Bestimmung ihrer Differenziale gebraucht wurden. (§. 678. VII. VIII.)

Fig 3. Beyspiel. Setzen wir $f(x) = \sin x$, so ist (nach §. 681. Beyspiel 5.)

$f(0) = \sin 0 = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{IV}(0) = 0$, u. s. w., daher

$$(11)\quad \sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

4. Beyspiel. Wird $f(x) = \cos x$ angenommen, so erfolgt (nach §. 681. Beysp. 5.)

$f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 0$, $f^{IV}(0) = 1$, u. s. w., also

$$(12)\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\ldots$$

5. Beyspiel. Soll $f(x) = \operatorname{arc}\sin x$ entwickelt werden, so ist

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Da die Darstellung der höheren Differenziale dieser Function einigen Schwierigkeiten unterliegt, so bedienen wir uns des folgenden Kunstgriffes. Bey nochmahliger Differenziation erfolgt

$$f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

daher ist

$$\frac{f'(x)}{f''(x)} = \frac{1-x^2}{x},$$

und

$$xf'(x) = (1-x^2)f''(x).$$

Sucht man von diesen zwey gleichen Functionen (nach §. 681. Beyspiel 6.) den Differenzial-Quotienten der nten Ordnung, so ergibt sich, weil

$d^2x = 0, d(1-x^2) = -2xdx, d^2(1-x^2) = -2dx^2, d^3(1-x^2) = 0$ ist,

$$x\overset{(n+1)}{f}(x) + n\overset{(n)}{f}(x) = (1-x^2)\overset{(n+2)}{f}(x) - 2nx\overset{(n+1)}{f}(x) - n(n-1)\overset{(n)}{f}(x)$$

daher, wenn man $x = 0$ setzt,

$$n\overset{(n)}{f}(0) = \overset{(n+2)}{f}(0) - n(n-1)\overset{(n)}{f}(0),$$

also

$$\overset{(n+2)}{f}(0) = n^2\overset{(n)}{f}(0)$$

Da nun $f(0) = \arcsin 0 = 0$ Fig.

und $f'(0) = 1$ ist,

so findet man nach dieser Formel

$f''(0) = f^{v}(0) = f^{vi}(0) = \ldots\ldots = 0$

$f'''(0) = 1^2$, $f^{v}(0) = 3^2$, $f^{vii}(0) = 3^2.5^2$, ...

Es ist demnach

$$(13)\quad \arcsin x = x + \frac{1^2.x^3}{1.2.3} + \frac{1^2.3^2.x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{1^2.3^2.5^2.x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots\ldots$$

6. Beyspiel. Damit $f(x) = \text{arc tang } x$ entwickelt werde, suchen wir

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Zur Bestimmung der höheren Differenziale geben wir dieser Gleichung die Form

$$(1+x^2)f'(x) = 1,$$

daher erhalten wir (nach §. 681. Beyspiel 6.)

$$(1+x^2)\overset{(n+1)}{f}(x) + 2nx\overset{(n)}{f}(x) + n(n-1)\overset{(n-1)}{f}(x) = 0,$$

und wenn $x = 0$ gesetzt wird,

$$\overset{(n+1)}{f}(0) + n(n-1)\overset{(n-1)}{f}(0) = 0,$$

nähmlich $\overset{(n+1)}{f}(0) = -n(n-1)\overset{(n-1)}{f}(0)$.

Da nun $f(0) = \text{arc tang } 0 = 0$ und $f'(0) = 1$ ist,

so hat man

$f''(0) = f^{v}(0) = f^{vii}(0) = \ldots. = 0$

und

$f'''(0) = -1.2$, $f^{v}(0) = 1.2.3.4$, $f^{vii}(0) = -1.2.3.4.5.6$.

Sonach ist

$$(14)\quad \text{arc tang } x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots.$$

III. In jenen Fällen, wo die Anwendung der Maclaurin'schen Reihe zur Entwickelung der Functionen Schwierigkeiten unterliegt, kann man die zu entwickelnde Function auch einer nach den natürlichen Potenzen der Veränderlichen fortlaufenden Reihe mit unbestimmten Coefficienten gleich setzen, und diese letzteren auf eine zweckdienliche Weise bestimmen, wie man aus folgenden Beyspielen ersehen kann.

Fig. 1. Beyspiel. Soll arc tang x mit Hülfe unbestimmter Coefficienten entwickelt werden, so setzen wir, da diese Function mit x zugleich verschwindet und mit derselben zwar das Zeichen nicht aber den Zahlwerth ändert,

$$\text{arc tang } x = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \ldots$$

Differenzirt man diese Gleichung, so erscheint

$$\frac{1}{1+x^2} = A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + \ldots,$$

folglich ist

$$1 = A + (A+3B)x^2 + (3B+5C)x^4 + (5C+7D)x^6 + \ldots,$$

woraus man

$$A = 1\,,\quad B = -\frac{1}{3}\,,\quad C = \frac{1}{5}\,,\quad D = -\frac{1}{7}\,,\quad \text{u. s. w.}$$

daher

$$(14)\quad \text{arc tang } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots$$

findet.

2. Beyspiel. Aus denselben Gründen setzen wir in der Absicht die Function arc sin x zu entwickeln,

$$\text{arc sin } x = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \ldots$$

Daraus gewinnen wir durch zweymahlige Differenziation die Gleichungen

$$\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + \ldots$$

$$\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = 2.3B + 4.5Cx^2 + 6.7Dx^4 + \ldots,$$

welche für $x = 0$ die Coefficienten $A = 1$, $B = \frac{1}{1.2.3}$ liefern, und durch einander getheilt die Gleichung

$$1 - x^2 = \frac{+3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + \ldots}{2.3B + 4.5Cx^2 + 6.7Dx^4 + \ldots}$$

darbiethen, aus welcher

$$A - 2.3B + (3^2B - 4.5C)x^2 + (5^2C - 6.7D)x^4 + \ldots = 0,$$

daher $C = \frac{3^2}{1.2.3.4.5}$, $D = \frac{3^2.5^2}{1.2.3.4.5.6.7}$, u. s. w.

mithin Fig.

$$(13)\quad \arcsin x = x + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{3^2.x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{3^2.5^2.x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

sich ergibt.

3. Beyspiel. Man suche $\cos nx$ durch $\sin x$, nähmlich wenn man $\sin x = u$ setzt, $\cos(n \arcsin u)$ durch u auszudrücken, wofern n eine ganze Zahl vorstellt.

Nehmen wir zu diesem Ende

$$\cos(n \arcsin u) = A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4 + \ldots,$$

so wird für $u = 0$, $\cos 0 = 1 = A$.

Differenzirt man nun diese Gleichung, so ergibt sich

$$-\frac{n \sin(n \arcsin u)}{\sqrt{1-u^2}} = B + 2Cu + 3Du^2 + 4Eu^3 + \ldots,$$

also auch

$$-n \sin(n \arcsin u) = (B + 2Cu + 3Du^2 + 4Eu^3 + \ldots)\sqrt{1-u^2},$$

woraus für $u = 0$, $B = 0$ gefunden wird.

Wird diese Gleichung neuerdings differenzirt, so erfolgt

$$-\frac{n^2 \cos(n \arcsin u)}{\sqrt{1-u^2}} = (2C + 2.3Du + 3.4Eu^2 + \ldots)\sqrt{1-u^2} - \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}(B + 2Cu + 3Du^2 + 4Eu^3 + \ldots),$$

daher

$$-n^2 \cos(n \arcsin u) = 2C + (2.3D - B)u + (3.4E - 2^2C)u^2 + (4.5F - 3^2D)u^3 + (5.6G - 4^2E)u^4 + \ldots$$

Setzt man hierin den für $\cos n(\arcsin u)$ angenommenen Werth, so erhält man

$$-n^2A - n^2Bu - n^2Cu^2 - n^2Du^3 - n^2Eu^4 - \ldots = 2C + (2.3D - B)u + (3.4E - 2^2C)u^2 + (4.5F - 3^2D)u^3 + (5.6G - 4^2E)u^4 + \ldots,$$

folglich

$$\begin{aligned} 2C &= -n^2A \\ 2.3D - B &= -n^2B \\ 3.4E - 2^2C &= -n^2C \\ 4.5F - 3^2D &= -n^2D \\ 5.6G - 4^2E &= -n^2E \end{aligned}$$

u. s. w.

Fig. Man findet demnach

$$A=1,\ B=0,\ C=-\frac{n^2}{1.2},\ D=0,\ E=\frac{n^2(n^2-2^2)}{1.2.3.4},$$

$$F=0,\ G=-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1.2.3.4.5.6}\text{ u. s. w.,}$$

daher ist, wenn man statt u wieder sinx einführt,

$$(15)\quad \cos nx = 1-\frac{n^2}{1.2}\sin^2 x+\frac{n^2(n^2-2^2)}{1.2.3.4}\sin^4 x - \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1.2.3.4.5.6}\sin^6 x+\ldots$$

Mit Hülfe desselben Kunstgriffes erhält man auch

$$(16)\quad \sin nx = n\sin x-\frac{n(n^2-1^2)}{1.2.3}\sin^3 x + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\sin^5 x-\ldots$$

B. Zusammenhang der Exponentialgrößen mit den Kreisfunctionen und der Kreisbogen mit den Logarithmen.

§. 685.

Die Vergleichung der (in §. 684. Gl. 10, 11, 12) für h^x, sinx und cosx gefundenen Reihen zeigt, daß die Glieder der erstern mit jenen der beyden andern in der Größe, wenn auch nicht immer im Zeichen übereinkommen, daß aber die Zeichen gleich werden, wenn man x in $x\sqrt{-1}$ verwandelt; denn hiedurch wird

$$h^{x\sqrt{-1}}=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\ldots$$
$$+\sqrt{-1}\left(x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots\right),$$

in welcher Gleichung die vorkommenden Reihen offenbar die Entwickelungen von cosx und sinx sind, durch deren Einführung dieselbe in

$$(17)\quad h^{x\sqrt{-1}}=\cos x+\sqrt{-1}\sin x$$

übergeht. Schreibt man hierin $-x$ für x, so wird

$$(18)\quad h^{-x\sqrt{-1}}=\cos x-\sqrt{-1}\sin x.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man durch Addition und Subtraction Fig

$$(19) \qquad \cos x = \frac{h^{x\sqrt{-1}} + h^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$(20) \qquad \sin x = \frac{h^{x\sqrt{-1}} - h^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

und durch Division

$$(21) \qquad h^{2x\sqrt{-1}} = \frac{1+\sqrt{-1}\tang x}{1-\sqrt{-1}\tang x}.$$

Nimmt man von den Gleichungen (17), (18), (21) die Logarithmen *), so findet man

$$x = \frac{1}{\sqrt{-1}}.L(\cos x+\sqrt{-1}\sin x) = \sqrt{-1}.L(\cos x-\sqrt{-1}\sin x)$$

$$x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} L\frac{1+\sqrt{-1}\tang x}{1-\sqrt{-1}\tang x}.$$

Setzen wir in diesen Gleichungen die vorkommenden goniometrischen Functionen des ganzen, halben oder doppelten Bogens x gleich x', z. B. $\sin x = x'$, $\sin\frac{1}{2}x = x'$, $\cos x = x'$, $\tang x = x'$, $\tang 2x = x'$ u. s. w., und werfen wir nach vollendeter Reduction den Accent hinweg, so erhalten wir die Gleichungen

$$(22) \qquad \arc\sin x = \frac{1}{\sqrt{-1}} L\,(x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2})$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}.L.(1-2x^2-2x\sqrt{x^2-1})$$

$$\arc\cos x = \frac{1}{\sqrt{-1}} L\,(x+\sqrt{x^2-1})$$

$$\arc\tang x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} L\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}$$

$$= \sqrt{-1}\,L\frac{x\sqrt{-1}+\sqrt{1+x^2}-1}{x\sqrt{-1}-\sqrt{1+x^2}+1}$$

$$\arc\sec x = \frac{1}{\sqrt{-1}} L\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\arc\sinv x = \frac{1}{\sqrt{-1}} L\,(1-x+\sqrt{x^2-2x}).$$

*) So oft in der Folge die Art der Logarithmen nicht näher bestimmt wird, sind jederzeit die natürlichen oder neper'schen gemeint.

Fig. Bezeichnen wir nun auch umgekehrt in den eben gefundenen Gleichungen die Zahl, von welcher der Logarithmus genommen wird, mit x', drücken x durch x' aus, und beseitigen am Ende den Strich des letztern; so finden wir

$$(23)\ Lx = \sqrt{-1}\ \text{arc sin}\left(\frac{1-x^2}{2x}\sqrt{-1}\right) = \sqrt{-1}\ \text{arc cos}\frac{1+x^2}{2x}$$

$$= 2\sqrt{-1}\ \text{arc tang}\left(\frac{1-x}{1+x}\sqrt{-1}\right) = \sqrt{-1}\ \text{arc sec}\frac{2x}{1+x^2}$$

$$= \sqrt{-1}\ \text{arc sinv}\frac{(1-x)^2}{-2x}.$$

§. 686.

Diese Gleichungen lehren uns eine höchst wichtige Eigenschaft der Logarithmen. Setzen wir nähmlich in einer von ihnen z. B. in der Gleichung

$$Lx = 2\sqrt{-1}\ \text{arc tang}\left(\frac{1-x}{1+x}\sqrt{-1}\right)$$

die Zahl $x = 1$, so wird $L1 = 2\sqrt{-1}\ \text{arc tang}\,0$.

Allein derjenige Bogen, dessen Tangente Null ist, muß (§. 538. V. und §. 539. I. II.) ein Vielfaches der halben Kreisperipherie, nähmlich da die Länge der mit dem Halbmesser 1 erzeugten Kreislinie 2π, also ihre Hälfte π ist, gleich $r\pi$ seyn, wofern r eine ganze positive oder negative Zahl vorstellt, d. h. man hat

$$\text{arc tang}\,0 = r\pi,$$

folglich

$$(24)\qquad L1 = 2r\pi\sqrt{-1}.$$

Nehmen wir aber in derselben Gleichung $x = -1$, so ergibt sich

$$L(-1) = 2\sqrt{-1}\ \text{arc tang}\,\infty.$$

Allein arc tang ∞ gleicht (§. 538 u. 539.) einem ungeraden Vielfachen des Quadranten, dessen Länge $\frac{\pi}{2}$ beträgt, nähmlich es ist

$$\text{arc tang}\,\infty = (2r+1)\frac{\pi}{2},$$

folglich

$$(25)\qquad L(-1) = (2r+1)\pi.\sqrt{-1}.$$

Da nun die unbestimmte Zahl r alle zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegenden ganzen Zahlen vorstellen kann; so hat der Logarithme der positiven und negativen Einheit unendlich viele imaginäre Werthe und bloß jener der positiven erhält für $r=0$ den einzigen reellen Werth Null. Fig.

Weil ferner, wenn a eine essentiell positive Zahl vorstellt,

$$a = a \cdot 1$$
$$-a = a\,(-1)$$

ist, so leuchtet ein, daß der Logarithme jeder Zahl unendlich viele imaginäre Werthe besitzt.

C. Moivre's Binomialformel.

§. 687.

Schreiben wir (§. 685.) in der Gleichung

$$h = \cos x + \sqrt{-1}\sin x \tag{17}$$

nx für x, so ergibt sich

$$h = \cos nx + \sqrt{-1}\sin nx. \tag{26}$$

Erheben wir aber dieselbe Gleichung zu der durch den beliebigen, jedoch reellen Exponenten n angezeigten Potenz, so erfolgt

$$h = (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n, \tag{27}$$

daher ist

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos nx + \sqrt{-1}\sin nx.$$

Wird endlich in dieser Gleichung $x + 2r\pi$ statt x geschrieben, wobey r eine beliebige ganze Zahl und π die Länge der halben Kreisperipherie vorstellt, so erhalten wir (mit Rücksicht auf §. 538. V.) die Gleichung

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos n(x+2r\pi) + \sqrt{-1}\sin n(x+2r\pi), \tag{28}$$

welche nach ihrem Erfinder die Moivre'sche Binomialformel genannt wird.

Fig.

D. Von der Vielfältigkeit und Bestimmung der Werthe der Potenzen.

§. 688.

I. Setzen wir in der eben gefundenen Gleichung (28) für x die zwey Werthe 0 und π, so gibt sie

(29) $1^n = \cos 2rn\pi + \sqrt{-1}\sin 2rn\pi$

(30) $(-1)^n = \cos(2r+1)n\pi + \sqrt{-1}\sin(2r+1)n\pi.$

Da nun für jeden ganzzahligen Werth von n

$$\sin 2rn\pi = 0, \quad \cos 2rn\pi = 1$$

und $\sin(2r+1)n\pi = 0$, $\cos(2r+1)n\pi = +1$ oder -1 ist, je nachdem n gerad oder ungerad ist, so hat man für jede ganze Zahl n

$$1^n = 1, \quad (-1)^{2n} = 1, \quad (-1)^{2n+1} = -1$$

wie wir ohnehin aus §. 118 und 119 wissen.

Allein wenn n keine ganze Zahl ist, so müssen diese Potenzen wegen der Willkührlichkeit der von $-\infty$ bis $+\infty$ sich ausbreitenden Werthe der ganzen Zahl r im Allgemeinen unendlich viele Werthe anzunehmen fähig seyn. Hiebey drängt sich uns jedoch die Frage auf, ob bey den Cosinus und Sinus der Bogen $2rn\pi$ und $(2r+1)n\pi$ nicht etwa eine periodische Wiederkehr eintreten, d. h. ob es nicht zwey Zahlen r und r' geben könne, für welche diese Kreisfunctionen, also auch 1^n und $(-1)^n$, gleiche Werthe erhalten. Da nun (nach §. 538. V.) zwey Kreisbogen nur dann durchaus gleiche Kreisfunctionen besitzen, wenn sie um ein Vielfaches der Kreisperipherie differiren; so hängt die Beantwortung obiger Frage von den Gleichungen

$$2rn\pi - 2r'n\pi = 2\rho\pi, \quad (2r+1)n\pi - (2r'+1)n\pi = 2\rho\pi$$

ab, in denen ρ eine willkührliche ganze Zahl andeutet.

Weil nun beyde Bedingungsgleichungen sich in die einzige

(31) $$(r-r')n = \rho$$

oder

$$n = \frac{\rho}{r-r'}$$

vereinigen, so ersehen wir, daß bey den Potenzen 1^n und $(-1)^n$ eine Wiederhohlung derselben Werthe nur in dem Falle, und zwar

nothwendig eintrete, wenn n ein rationaler Bruch ist. Folglich Fig. fällt die Anzahl der Werthe dieser Potenzen unendlich groß aus, wenn der Exponent n irrational ist.

II. Besehen wir nun noch den Fall, wo n einem auf seine kleinste Benennung herabgebrachten rationalen Bruche $\frac{k}{m}$ gleicht, folglich k und m ganze Zahlen sind, etwas näher; so zeigt sich zuvörderst

$$1^{\frac{k}{m}} = \sqrt[m]{1^k} = \sqrt[m]{1}$$

$$(-1)^{\frac{k}{m}} = \sqrt[m]{(-1)^k} = \sqrt[m]{1} \text{ falls k gerad, oder}$$

$$= \sqrt[m]{-1} \text{ wenn k ungerad ist;}$$

was uns folgern läßt, daß die Anzahl der Werthe der Potenzen $1^{\frac{k}{m}}$ und $(-1)^{\frac{k}{m}}$ lediglich von dem Nenner m abhänge, den wir stets für positiv ansehen wollen, und daß wir nur die Wurzeln $\sqrt[m]{1}$ und $\sqrt[m]{-1}$ zu untersuchen haben, deren Werthe uns durch die Gleichungen

$$(32) \quad 1^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{1} = \cos\frac{2r\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2r\pi}{m}$$

$$(33) \quad (-1)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{-1} = \cos\frac{2r+1}{m}\pi + \sqrt{-1}\sin\frac{2r+1}{m}\pi$$

dargebothen werden.

Bey diesen Werthen tritt demnach, wie man aus der Gleichung (31) ersieht, welche für den vorliegenden Fall in

$$(34) \quad r - r' = \rho m$$

übergeht, eine periodische Wiederkehr ein, wenn zwey Zahlen r und r' um ein Vielfaches des Wurzel-Exponenten m unterschieden sind. Die Anzahl der verschiedenen Werthe dieser Potenzen ist demnach = m, und man findet diese Werthe selbst, wenn man aus der Reihe der von $-\infty$ bis $+\infty$ fortlaufenden ganzen Zahlen m nach einander folgende, etwa die m kleinsten, positiven Zahlen 0, 1, 2, 3, ... m − 1 für r setzt. Sollen aber zugleich, was immer wünschenswerth bleibt, die Zahlwerthe der Bogen

Fig. $\frac{2r\pi}{m}$ und $\frac{(2r+1)\pi}{m}$ so klein als möglich ausfallen, so wird man die eine Hälfte der Werthe von r aus dem Gebiethe der positiven, die andere Hälfte dagegen aus jenem der negativen Zahlen herausheben, folglich alle zwischen $-\frac{m}{2}$, und $+\frac{m}{2}$ liegenden ganzen Zahlen, und wenn für ein gerades m die Zahlwerthe dieser Grenzen zusammenfallen, nach Belieben die eine oder die andere setzen.

Von diesen Werthen sind übrigens nur diejenigen reell, für welche $\sin\frac{2r\pi}{m}=0$, oder $\sin\frac{2r+1}{m}\pi=0$ wird; es ist nähmlich, für $r=0$, $\sqrt[m]{1}=1$, und wenn m eine gerade Zahl ist, für $r=\frac{m}{2}$, $\sqrt[m]{1}=-1$; endlich wenn m ungerad ist, für $r=\frac{m-1}{2}$, $\sqrt[m]{-1}=-1$.

So finden wir z. B.

für $\sqrt{1}$ die Werthe $\cos 0+\sqrt{-1}\sin 0=+1$

und $\cos\pi+\sqrt{-1}\sin\pi=-1$;

für $\sqrt[3]{1}$ die Werthe $\cos\frac{-2\pi}{3}+\sqrt{-1}\sin\frac{-2\pi}{3}=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

$\cos 0+\sqrt{-1}\sin 0=+1$

$\cos\frac{2\pi}{3}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$;

für $\sqrt[3]{-1}$ die Werthe $\cos\frac{-\pi}{3}+\sqrt{-1}\sin\frac{-\pi}{3}=\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$

$\cos\pi+\sqrt{-1}\sin\pi=-1$

$\cos\frac{\pi}{3}+\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$;

III. Die vorhergehenden Betrachtungen setzen uns in den Stand, nicht bloß sämmtliche Werthe der Potenzen 1^a und $(-1)^a$, sondern auch, da

$a=a.1$ und $-a=a.-1$

iſt, jene von a^n und $(-a)^n$ zu beſtimmen. Man wird nähmlich Fig. die reelle nte Potenz des Zahlwerthes von a mit allen Werthen von 1^n oder $(-1)^n$ multipliciren; je nachdem die Wurzel poſitiv oder negativ iſt.

E. Von der Auflöſung der reinen algebraiſchen Gleichungen.

§. 689.

Aus der reinen algebraiſchen Gleichung

(35) $$x^n \pm A = 0$$

des nten Grades, in welcher A eine eſſentiell poſitive Größe vorſtellt, finden wir

$$x = (\pm A)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{\pm 1} = a\sqrt[n]{\pm 1}$$

wenn $A = a^n$ angenommen, durch a alſo die mittelſt wirklicher Extraction beſtimmte nte Wurzel von A bezeichnet wird. Setzen wir nun für $\sqrt[n]{1}$ und $\sqrt[n]{-1}$ ihre im vorigen Paragraphe gefundenen Werthe, ſo erhalten wir

1. die Wurzeln der Gleichung $x^n + a^n = 0$

in der allgemeinen Form $x = a\left(\cos\frac{2r+1}{n}\pi + \sqrt{-1}\sin\frac{2r+1}{n}\pi\right)$

2. jene der Gleichung $x^n - a^n = 0$

in der Form $$x = a\left(\cos\frac{2r\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2r\pi}{n}\right);$$

vorausgeſetzt, daß r allen zwiſchen $-\frac{n}{2}$ und $+\frac{n}{2}$ liegenden ganzen Zahlen der Ordnung nach gleich geſetzt wird.

Hieraus folgt (nach §. 324.) der nach ſeinem Erfinder Cotes benannte Lehrſatz, daß

1. das Binom $x^n + a^n$

in n binomiſche Factoren von der Form

$$x - a\left(\cos\frac{2r+1}{n}\pi + \sqrt{-1}\sin\frac{2r+1}{n}\pi\right),$$

daher auch, wenn man die Factoren, welche gleichen, aber im Zeichen entgegengeſetzten Werthen von r entſprechen, mit einander

Fig. multiplicirt, in trinomische Factoren von der Form

$$x^2 - 2ax\cos\frac{2r+1}{n}\pi + a^2$$

und

2. das Binom $x^n - a^n$

in n binomische Factoren von der Form

$$x - a\left(\cos\frac{2r\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2r\pi}{n}\right),$$

folglich auch in trinomische Factoren von der Form

$$x^2 - 2ax\cos\frac{2r\pi}{n} + a^2$$

aufgelöst werden kann.

Daß man auch hier für r alle zwischen $-\frac{n}{2}$ und $+\frac{n}{2}$ befindlichen ganzen Zahlen setzen müsse, dürfte wohl kaum zu erinnern nothwendig seyn.

So ist z. B.

$$x^2 + a^2 = \left[x - a\left(\cos\frac{\pi}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2}\right)\right] \times \left[x - a\left(\cos\frac{\pi}{2} - \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$= (x - a\sqrt{-1})(x + a\sqrt{-1}).$$

Für das Binom $x^5 - a^5$

ergeben sich die zweytheiligen Factoren

$$x - a(\cos 0 + \sqrt{-1}\sin 0) = x - a$$

$$x - a\left(\cos\frac{2\pi}{5} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{5}\right) = x + \tfrac{1}{4}a\left[1 - \sqrt{5} - \sqrt{(10+2\sqrt{5})}\cdot\sqrt{-1}\right]$$

$$x - a\left(\cos\frac{2\pi}{5} - \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{5}\right) = x + \tfrac{1}{4}a\left[1 - \sqrt{5} + \sqrt{(10+2\sqrt{5})}\cdot\sqrt{-1}\right]$$

$$x - a\left(\cos\frac{4\pi}{5} + \sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{5}\right) = x + \tfrac{1}{4}a\left[1 + \sqrt{5} - \sqrt{(10-2\sqrt{5})}\cdot\sqrt{-1}\right]$$

$$x - a\left(\cos\frac{4\pi}{5} - \sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{5}\right) = x + \tfrac{1}{4}a\left[1 + \sqrt{5} + \sqrt{(10-2\sqrt{5})}\cdot\sqrt{-1}\right]$$

daher ist auch

$$x^5 - a^5 = (x-a)\left[x^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}ax + a^2\right]\left[x^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}ax + a^2\right).$$

Fig.

F. Entwickelung der Kreisfunctionen der vielfachen Bogen durch jene der einfachen Bogen.

§. 690.

Bezeichnet n eine positive ganze Zahl, so erhält man aus der Moivre'schen Binomialformel durch wirkliche Potenzirung die Gleichung

$$\cos nx + \sqrt{-1}\sin nx = \cos^n x - \frac{n(n-1)}{1.2}\cos^{n-2}x\sin^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cos^{n-4}x\sin^4 x - \ldots + \sqrt{-1}\left[n\cos^{n-1}x\sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos^{n-3}x\sin^3 x + \ldots\right],$$

welche, da sich reelle Größen mit imaginären in Rücksicht ihrer Größe nicht vergleichen lassen, nur dann bestehen kann, wenn die reellen Größen den reellen, die imaginären aber den imaginären gleich sind. Hieraus folgt sonach

$$(36)\quad \cos nx = \cos^n x - \frac{n(n-1)}{1.2}\cos^{n-2}x\sin^2 x + \ldots$$

$$(37)\quad \sin nx = n\cos^{n-1}x\sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos^{n-3}x\sin^3 x + \ldots;$$

daher auch

$$(38)\quad \operatorname{tang} nx = \frac{n\operatorname{tang} x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\operatorname{tang}^3 x + \ldots}{1 - \frac{n(n-1)}{1.2}\operatorname{tang}^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\operatorname{tang}^4 x - \ldots}$$

G. Entwickelung der Potenzen der Sinus und Cosinus der einfachen Bogen nach den Sinus und Cosinus der vielfachen Bogen.

§. 691.

Erhebt man die aus §. 685. Gl. (19) und (20) folgenden Gleichungen

$$(39)\quad 2\cos x = h^{x\sqrt{-1}} + h^{-x\sqrt{-1}};\quad 2\sqrt{-1}\sin x = h^{x\sqrt{-1}} - h^{-x\sqrt{-1}}$$

zur nten Potenz unter der Voraussetzung, daß n eine ganze positive Zahl vorstelle, so erhält man

$$(2\cos x)^n = h^{nx\sqrt{-1}} + nh^{(n-2)x\sqrt{-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}h^{(n-4)x\sqrt{-1}} + \ldots\ldots\ldots + nh^{-(n-2)x\sqrt{-1}} + h^{-nx\sqrt{-1}}$$

$$(2\sqrt{-1}\sin x)^n = h^{nx\sqrt{-1}} - nh^{(n-2)x\sqrt{-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}h^{(n-4)x\sqrt{-1}} + \ldots + (-1)^{n-1}nh^{-(n-2)x\sqrt{-1}} + (-1)^n h^{-nx\sqrt{-1}}.$$

Nimmt man nun in den zweyten Theilen dieser Gleichungen die vom Anfange und Ende gleich weit abstehenden Glieder zusammen, setzt ferner für den Exponenten n zuerst die gerade Zahl 2m, dann die ungerade Zahl 2m + 1 und beachtet, daß den Gleichungen (39) gemäß allgemein

$$h^{(n-2r)x\sqrt{-1}} + h^{-(n-2r)x\sqrt{-1}} = 2\cos(n-2r)x, \qquad h^{(n-2r)x\sqrt{-1}} - h^{-(n-2r)x\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\sin(n-2r)x$$

ist; so findet man nach gehörig vollbrachten Reductionen

(40)
$$\tfrac{1}{2}(2\cos x)^{2m} = \tfrac{1}{2} + \frac{2m(2m-1)..(m+1)}{1.2.3..m}\cos 2x + \frac{2m(2m-1)..(m+2)}{1.2.3..(m-1)}\cos 2x + \frac{2m(2m-1)..(m+3)}{1.2.3...(m-2)}\cos 4x + \ldots + \cos 2mx$$

$$\tfrac{1}{2}(2\sin x)^{2m} = \tfrac{1}{2} - \frac{2m(2m-1)..(m+1)}{1.2.3...m}\cos 2x + \frac{2m(2m-1)..(m+2)}{1.2.3..(m-1)}\cos 2x + \frac{2m(2m-1)..(m+3)}{1.2.3..(m-2)}\cos 4x - \ldots + (-1)^m\cos 2mx$$

$$\tfrac{1}{2}(2\cos x)^{2m+1} = \frac{(2m+1)(2m)..(m+2)}{1.2.3.....m}\cos x + \frac{(2m+1)(2m)..(m+3)}{1.2.3..(m-1)}\cos 3x + \frac{(2m+1)(2m)..(m+4)}{1.2.3...(m-2)}\cos 5x + \ldots + \cos(2m+1)x$$

$$\tfrac{1}{2}(2\sin x)^{2m+1} = \frac{(2m+1)(2m)..(m+2)}{1.2.3....m}\sin x - \frac{(2m+1)(2m)..(m+3)}{1.2.3...(m-1)}\sin 3x + \frac{(2m+1)(2m)..(m+4)}{1.2.3..(m-2)}\sin 5x - \ldots + (-1)^m\sin(2m+1)x.$$

H. Verwendung der Differenzial-Rechnung zur Zerlegung gebrochener rationaler Functionen in Partialbrüche. Fig.

§. 692.

I. Bey der in §. 287. erläuterten Zerlegung der echt gebrochenen rationalen Functionen in einzelne sogenannte Partialbrüche, kann man die Differenzial-Rechnung zuweilen mit sehr großem Vortheile benützen. Nachdem man nähmlich die zu zerlegende Function der Summe ihrer im Zähler mit unbestimmten Coefficienten behafteten Partialbrüche gleich gestellt, und durch eine bloß angezeigte Multiplication mit dem Nenner der Function alle Brüche aus der Gleichung beseitiget hat, differenzirt man beyde Theile der Gleichung wiederhohlt, und setzt in den so gewonnenen Gleichungen für die Veränderliche entweder Null oder solche Werthe, durch welche einzelne Factoren verschwinden. Auf diese Weise erhält man für die Berechnung der unbestimmten Coefficienten mehrere Bedingungsgleichungen, aus denen diese sofort nach den bekannten Regeln gesucht werden.

Z. B. Es sey der Bruch $\frac{1+x+x^2}{(1+x)(1+x^2)(1-x)^2}$ in Partialbrüche aufzulösen.

Man setze

$$\frac{1+x+x^2}{(1+x)(1+x^2)(1-x)^2} = \frac{A}{1+x} + \frac{B+Cx}{1+x^2} + \frac{D+Ex}{(1-x)^2},$$

so wird

$$1+x+x^2 = A(1+x^2)(1-x)^2 + (B+Cx)(1+x)(1-x)^2 + (D+Ex)(1+x)(1+x^2).$$

Setzt man hierin $x=0$ und $x=1$, so erfolgt

$$1 = A + B + D$$
$$\frac{3}{4} = D + E.$$

Differenzirt man ferner obige Gleichung, so erhält man

$$1+2x = 2Ax(1-x)^2 - 2A(1+x^2)(1-x) \cdot$$
$$+ C(1+x)(1-x)^2 + (B+Cx)(1-x)^2$$
$$- 2(B+Cx)(1+x)(1-x) + E(1+x)(1+x^2)$$
$$+ (D+Ex)(1+x^2) + 2x(D+Ex)(1+x).$$

Fig. Setzt man hierin $x=0$ und $x=1$, so ergibt sich

$$1=-2A+C-B+E+D$$
$$3=6D+10E.$$

Differenzirt man zum letzten Mahle und setzt sogleich $x=1$, so kann man alle jene Glieder übergehen, welche den Factor $x-1$ nach vollbrachter Differenziation behalten; dadurch ergibt sich

$$2=2A(1+x^2)+2(B+Cx)(1+x)+E(1+x^2)$$
$$+2Ex(1+x)+E(1+x^2)+2x(D+Ex)$$
$$+2(D+Ex)(1+x)+2Ex(1+x)+2x(D+Ex),$$

folglich für $x=1$

$$2=4A+4B+4C+8D+20E$$

oder $$\frac{1}{2}=A+B+C+2D+5E.$$

Man findet demnach

$$A=\frac{1}{8},\ B=-\frac{1}{4},\ C=\frac{1}{4},\ D=\frac{9}{8},\ E=-\frac{3}{8},$$

also

$$\frac{1+x+x^2}{(1+x)(1+x^2)(1-x)^2}=\frac{1}{8(1+x)}+\frac{x-1}{4(1+x^2)}+\frac{9-3x}{8(1-x)^2}.$$

II. Vermag man aber den Nenner der zu zerlegenden gebrochenen rationalen Function in lauter Factoren von der Form

$$(x-a)^n$$

zu zerlegen, in welcher n eine positive ganze Zahl vorstellt; was man dadurch erzielt, daß man jenen Nenner gleich Null setzt und diese Gleichung nach den in §. 320 bis 339, §. 554 und §. 689 ertheilten Vorschriften auflöst: so kann man sich folgender von Cauchy erfundenen Methode mit vielem Vortheile bedienen.

Es sey $F(x)$ die zu zerlegende gebrochene rationale Function, $(x-a)^n$ ein Factor ihres Nenners, $f(x)$ diejenige Function, in welche $F(x)$ übergeht, wenn man $(x-a)^n$ aus dem Nenner wegläßt, so daß

$$F(x)=\frac{f(x)}{(x-a)^n}$$

ist. Nun hat man nach dem Taylor'schen Lehrsatze (§. 683.)

$$f(x)=f[a+(x-a)]=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\text{etc.}$$

daher auch Fig.

$$F(x)=\frac{f(a)}{(x-a)^n}+\frac{f'(a)}{(x-a)^{n-1}}+\frac{\frac{1}{1.2}f''(a)}{(x-a)^{n-2}}+\frac{\frac{1}{1.2.3}f'''(a)}{(x-a)^{n-3}}+\ldots$$
$$+\frac{\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)}{x-a}+\text{etc.}$$

Man wird demnach, wenn man die successiven Differenzial-Quotienten von $f(x)=F(x).(x-a)^n$ bildet, und in ihnen $x=a$ setzt, sehr leicht die Zähler aller dem Factor $(x-a)^n$ entsprechenden Partialbrüche erhalten. Wendet man überdieß dasselbe Verfahren auf alle übrigen Factoren des Nenners an, indem man die jedesmahligen Ausdrücke von $f(x)$ eigens bestimmt, so wird man nach und nach den gegebenen Bruch vollständig zerlegen können.

Ist insbesondere $n=1$, so entspricht dem Factor $x-a$ der Partialbruch

$$\frac{f(a)}{x-a},$$

und für $n=2$ ergeben sich zu dem Factor $(x-a)^2$ die Partialbrüche

$$\frac{f(a)}{(x-a)^2}+\frac{f'(a)}{x-a}.$$

1. Beyspiel. Zerlegen wir den obigen Bruch

$$\frac{1+x+x^2}{(1+x)(1+x^2)(1-x)^2}$$

nach der eben beschriebenen Methode; so ist

$$F(x)=\frac{1+x+x^2}{(1+x)(x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1})(1-x)^2}.$$

Für den Factor $1+x$ ist $f(x)=\frac{1+x+x^2}{(1+x^2)(1-x)^2}$,

und wenn man $x+1=0$, also $x=-1$ setzt,

$$f(-1)=\frac{1-1+1}{2.2^2}=\frac{1}{8},$$

daher der ihm entsprechende Partialbruch $=\frac{1}{8(1+x)}$.

Fig. Eben so findet man für den zweyten Factor aus $x+\sqrt{-1}=0$ den Werth von $x=-\sqrt{-1}$,

und $$f(x)=\frac{1+x+x^2}{(1+x)(x-\sqrt{-1})(1-x)^2},$$

also $$f(-\sqrt{-1})=\frac{1-\sqrt{-1}-1}{(1-\sqrt{-1})(-2\sqrt{-1})(1+\sqrt{-1})^2}$$

$$=\frac{1}{4(1+\sqrt{-1})},$$

und den verlangten Partialbruch

$$=\frac{1}{4(1+\sqrt{-1})(x+\sqrt{-1})}.$$

Der dritte Partialbruch ergibt sich auf dieselbe Weise

$$=\frac{1}{4(1-\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1})}.$$

Endlich ist für den Factor $(1-x)^2$

$$f(x)=\frac{1+x+x^2}{(1+x)(1+x^2)}=(1+x+x^2)(1+x)^{-1}(1+x^2)^{-1},$$

daher

$$f'(x)=(1+2x)(1+x)^{-1}(1+x^2)^{-1}-(1+x+x^2)(1+x)^{-2}(1+x^2)^{-1}$$
$$-2x(1+x+x^2)(1+x)^{-1}(1+x^2)^{-2}.$$

Setzt man nun $x-1=0$, also $x=1$,

so erhält man

$$f(1)=\frac{3}{4},\quad f'(1)=\frac{3}{4}-\frac{3}{8}-\frac{6}{8}=-\frac{3}{8},$$

und die Partialbrüche $$\frac{3}{4(x-1)^2}-\frac{3}{8(x-1)}.$$

Es ist demnach

$$\frac{1+x+x^2}{(1+x)(1+x^2)(1-x)^2}=\frac{1}{8(1+x)}+\frac{1}{4(1+\sqrt{-1})(x+\sqrt{-1})}$$
$$+\frac{1}{4(1-\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1})}+\frac{3}{4(1-x)^2}+\frac{3}{8(1-x)}.$$

2. Beyspiel. Man zerlege $F(x) = \frac{x^3+2x^2+3x+1}{(x-2)^5}$. Fig.

Hier ist $f(x) = x^3+2x^2+3x+1$,

daher $f'(x) = 3x^2+4x+3$

$f''(x) = 6x+4$

$f'''(x) = 6$

$f^{IV}(x) = 0$,

und für $x = 2$,

$f(2)=23$, $f'(2)=23$, $\frac{1}{1.2} f''(2)=8$, $\frac{1}{1.2.3} f'''(2) = 1$,

$\frac{1}{1.2.3.4} f^{IV}(2) = 0$,

folglich

$$\frac{x^3+2x^2+3x+1}{(x-2)^5} = \frac{23}{(x-2)^5} + \frac{23}{(x-2)^4} + \frac{8}{(x-2)^3} + \frac{1}{(x-2)^2}.$$

3. Beyspiel. Zu zerlegen

$$F(x) = \frac{x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)^2}.$$

Hier hat man zuerst $x-1=0$, also $x=1$,

$$f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2}, \quad f'(x) = \frac{2x}{(x+1)^2} - \frac{2x^2}{(x+1)^3}$$

$$f(1) = \frac{1}{4}, \qquad f'(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

und dann $x+1=0$, mithin $x=-1$,

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}, \quad f'(x) = \frac{2x}{(x-1)^2} - \frac{2x^2}{(x-1)^3}$$

$$f(-1) = \frac{1}{4}, \qquad f'(-1) = -\frac{2}{4} + \frac{2}{8} = -\frac{1}{4};$$

folglich findet man

$$\frac{x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)^2} - \frac{1}{4(x+1)}.$$

Fig.

I. Bestimmung der eigentlichen Werthe des Bruches $\frac{0}{0}$.

§. 693.

I. Manche gebrochene Functionen einer einzigen veränderlichen Größe reduciren sich für gewisse Werthe dieser Veränderlichen auf die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, obgleich man ihnen aus anderweitigen Gründen einen bestimmten Werth zuzuschreiben berechtiget ist.

So z. B. ist die Summe der geometrischen Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^n$$

bekanntlich $$s = \frac{x^n - 1}{x - 1},$$

welcher Ausdruck für $x = 1$ in $s = \frac{0}{0}$ übergeht, daher unbestimmt wird; obschon, wie man leicht sieht,

$$s = 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1 = n$$

werden muß.

Eben so übergeht der Bruch $\frac{\sin x}{x}$ für $x = 0$ in den Ausdruck $\frac{0}{0}$, und doch fanden wir (§. 678. IX.), daß derselbe in diesem Falle $= 1$ ist.

II. Zur Ausmittelung der wahren Werthe solcher Brüche läßt sich die Differenzial-Rechnung in den meisten Fällen mit besonderem Vortheile benützen. Es sey nähmlich

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

ein Bruch, welcher für $x = a$ in den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ übergeht, weil sowohl der Zähler als auch der Nenner für diesen Werth von x verschwindet.

Setzen wir $x = a + u$ und behandeln wir sowohl $f(a+u)$ Fig. als $F(a+u)$ nach dem Taylor'schen Lehrsatze, so ergibt sich

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(a+u)}{F(a+u)} = \frac{f(a) + uf'(a) + \frac{1}{2}u^2 f''(a) + \ldots.}{F(a) + uF'(a) + \frac{1}{2}u^2 F''(a) + \ldots.}$$

oder, wenn wir bedenken, daß

$$f(a) = 0\,, \quad F(a) = 0 \text{ ist,}$$

$$\frac{f(a+u)}{F(a+u)} = \frac{f'(a) + \frac{1}{2}u f''(a) + \ldots.}{F'(a) + \frac{1}{2}uF''(a) + \ldots.}.$$

Nehmen wir nun $u = 0$, so erhalten wir

(41) $$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{0}{0} = \frac{f'(a)}{F'(a)},$$

woraus ersichtlich ist, daß man den wahren Werth einer für einen bestimmten Werth ihrer Veränderlichen in $\frac{0}{0}$ übergehenden gebrochenen Function findet, wenn man den Differenzial-Coefficienten des Zählers durch jenen des Nenners dividirt und in dem Quotienten für die Veränderliche denjenigen Werth setzt, bey welchem der Zähler und Nenner der ursprünglichen Function verschwindet.

1. Beyspiel. Behandelt man die Summe

$$s = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

der obigen geometrischen Progression auf diese Weise, so erhält man für $x = 1$

$$s = \frac{nx^{n-1}}{1} = n.$$

2. Beyspiel. Eben so findet man für $x = 0$ das Verhältniß

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$$

3. Beyspiel. Für $x = 0$ wird $\frac{L(1+x)}{x} = \frac{1}{1+x} = 1$,

und für $x = 1$ erhält man $\frac{Lx}{x-1} = \frac{1}{x} = 1$.

Fig. 4. Beyspiel. Sucht man den Werth von

$$y = \frac{b - \sqrt{b^2 - x^2}}{x^2} \text{ für } x = 0,$$

so ergibt sich

$$y = \frac{x}{2x\sqrt{b^2 - x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{b^2 - x^2}} = \frac{1}{2b}.$$

5. Beyspiel. Für $x = \frac{\pi}{2}$ wird der Werth des Bruches

$$\frac{\cos x - \sin x + 1}{\cos x + \sin x - 1} = \frac{-\sin x - \cos x}{-\sin x + \cos x} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

6. Beyspiel. Auf dieselbe Weise findet man für $x = 1$ den Bruch

$$\frac{(1+x)\,Lx}{(1-x)^2} = \frac{Lx + \frac{1+x}{x}}{-2(1-x)} = \frac{2}{0} = \infty.$$

III. Wenn sich der Fall ergibt, daß der durch obiges Verfahren gewonnene Bruch $\frac{f'(a)}{F'(a)}$ neuerdings die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt, so wird man dasselbe Verfahren wiederhohlt und so lange anwenden, bis man zu einem bestimmten Werthe des vorgelegten Bruches gelangt.

1. Beyspiel. So wird für $x = 1$ der Bruch

$$\frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(x-1)^2} = \frac{(n-1)nx^{n-1} - (n-1)nx^{n-2}}{2(x-1)} = \frac{0}{0}$$

$$= \frac{(n-1)n[(n-1)x^{n-2} - (n-2)x^{n-3}]}{2}$$

$$= \frac{(n-1)n}{2}.$$

2. Beyspiel. Für $x = 1$ erhält man

$$\frac{1 - 2x + 2x^3 - x^4}{(1-x)^3} = \frac{-2 + 6x^2 - 4x^3}{-3(1-x)^2} = \frac{0}{0}$$

$$= \frac{2(x - x^2)}{1 - x} = \frac{0}{0}$$

$$= \frac{2(1 - 2x)}{-1} = 2.$$

3. Beyspiel. Bestimmt man den Werth von Fig.

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^3 - x + 2 - 2x\sqrt{2x - x^2}}{x^2 - 3x + 1 + \sqrt{2x-1}}$$

für $x = 1$,
so findet man

$$f'(x) = 3x^2 - 1 - 2\sqrt{2x-x^2} - \frac{2x(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}} = 0$$

$$F'(x) = 2x - 3 + \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = 0$$

$$f''(x) = 6x + \frac{6x-4}{\sqrt{2x-x^2}} + \frac{2x(1-x)^2}{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}} = 8$$

$$F''(x) = 2 - \frac{1}{(2x-1)^{\frac{3}{2}}} = 1;$$

daher ist

$$\frac{f(1)}{F(1)} = \frac{f''(1)}{F''(1)} = 8.$$

IV. Es ereignet sich aber auch in einzelnen Fällen, daß sämmtliche auf vorbezeichnetem Wege nach und nach gefundenen Brüche für $x = a$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ erhalten. In einem solchen Falle muß man, wenn sonst kein Kunstgriff zum Ziele führt, $a + u$ für x in dem gegebenen Bruche $\frac{f(x)}{F(x)}$ substituiren, denselben so weit als möglich reduciren, und endlich $u = 0$ setzen; der so gewonnene Werth ist der eigentliche Werth des vorgelegten Bruches.

1. Beyspiel. Aus

$$y = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

erhält man für $x = 1$, $y = \frac{0}{0}$, und für $x = 1 + u$,

$$y = \frac{\sqrt[3]{u}}{\sqrt{2u+u^2}} = \frac{\sqrt[6]{u}}{\sqrt{2+u}},$$

Fig. daher ist, für $u = 0$,
der gesuchte Werth $y = 0$.

Zu demselben Resultate gelangt man auch, wenn man obiger Gleichung die Form

$$y^6 = \frac{(x-1)^3}{(x^2-1)^2}$$

ertheilt; denn für $x = 1$

wird $$y^6 = \frac{3(x-1)^2}{4x(x^2-1)} = \frac{0}{0}$$

$$= \frac{6(x-1)}{12x^2-4} = 0.$$

2. Beyspiel. Aus

$$y = \frac{\sqrt{(x^4+2x^3-3)}}{\sqrt{x^2-1}}$$

folgt für $x = 1$, $y = \frac{0}{0}$, und wenn man $x = 1+u$ setzt,

$$y = \frac{\sqrt{(10u+12u^2+6u^3+u^4)}}{\sqrt{2u+u^2}} = \frac{\sqrt{(10+12u+6u^2+u^3)}}{\sqrt{2+u}},$$

daher für $u = 0$, $y = \sqrt{5}$.

Dasselbe findet man, wenn man obige Gleichung in der Form $$y^2 = \frac{x^4+2x^3-3}{x^2-1}$$

schreibt, da man für $x = 1$ sogleich

$$y^2 = \frac{4x^3+6x^2}{2x} = 2x^2+3x = 5$$

erhält.

V. Von denjenigen Functionen, welche für einen gewissen Werth der Veränderlichen die unbestimmten Formen

$$\frac{\infty}{\infty},\ 0.\infty,\ \infty-\infty$$

annehmen, läßt sich manche auch auf eine gebrochene Function bringen, welche für denselben Werth der Veränderlichen in $\frac{0}{0}$ übergeht, und aus der man sofort den wahren Werth der vorgelegten Function bestimmen kann.

1. Beyspiel. So wird Fig.

$$y = \frac{\sec x}{\operatorname{tang} x}$$

für $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\infty}{\infty}$.

Setzt man aber

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{tang} x = \frac{1}{\cot x},$$

so erhält man

$$y = \frac{\cot x}{\cos x} = \frac{0}{0}.$$

Bestimmt man diesen Werth durch das obige Verfahren, so ergibt sich

$$y = \frac{\frac{-1}{\sin^2 x}}{-\sin x} = \frac{1}{\sin^3 x} = 1.$$

2. Beyspiel. Die Function

$$y = (1-x)\sec\frac{\pi x}{2},$$

verwandelt sich für $x = 1$ in $0.\infty$;

schreibt man aber $y = \frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}$,

so erscheint $y = \frac{0}{0}$.

Wendet man nun zur Bestimmung dieses Werthes die Differenziation an, so erhält man

$$y = \frac{-1}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

3. Beyspiel. Die Function

$$y = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{Lx}$$

übergeht für $x = 1$ in $\infty - \infty$;

Fig. wenn man ihr aber die Form

$$y = \frac{Lx - (x-1)}{(x-1)Lx}$$

anweist, in $\frac{0}{0}$. Bestimmt man diesen Werth, so wird

$$y = \frac{\frac{1}{x} - 1}{Lx + \frac{x-1}{x}} = \frac{1-x}{xLx+x-1} = \frac{0}{0}$$

$$= \frac{-1}{Lx+1+1} = -\frac{1}{2}.$$

4. Beyspiel. Für $x = 0$ wird die Function

$$f(x) = x(1 - Lx)$$

in $0.-\infty$ verwandelt.

Ertheilt man jedoch dieser Gleichung die Form

$$\frac{f(x)}{x} = 1 - Lx$$

und differenzirt, so entsteht

$$\frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2} = -\frac{1}{x},$$

oder $$xf'(x) - f(x) = -x.$$

Setzt man hierin $x = 0$, so findet man den verlangten Werth $$f(0) = 0.$$

K. Bestimmung der größten und kleinsten Werthe der Functionen.

§. 694.

I. Wächst in der Function $f(x)$ die Veränderliche x um ihr unendlich kleines Differenzial dx, das wir für eine essentiell positive Größe ansehen wollen, und ist ihr Differenzial

$$f(x+dx) - f(x) = df(x),$$

daher auch ihr Differenzial-Coefficient

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

positiv, so erfährt auch die Function selbst eine Vermehrung, Fig.
oder sie wächst; fällt aber dieses Differenzial negativ aus, so erleidet die Function eine Verminderung, oder sie nimmt ab. Die Function $f(x)$ wird demnach bey dem Wachsen ihrer Veränderlichen zu- oder abnehmen, steigen oder fallen, je nachdem ihr Differenzial-Coefficient $f'(x)$ eine positive oder negative Größe ist.

Soll nun bey ununterbrochener Zunahme der Veränderlichen x die Function $f(x)$ aus dem fortwährenden Steigen wieder in ein stetes Sinken versetzt werden, so muß ihr Differenzial-Coefficient $f'(x)$ aus dem positiven in den negativen Zustand, und umgekehrt, wenn dem Sinken ein beständiges Steigen folgen soll, aus dem negativen Zustande in den positiven übergehen, folglich für einen gewissen Werth von x entweder Null oder unendlich groß werden, weil ein solcher Uebergang aus dem Positiven in das Negative nur durch 0 oder ∞ geschehen kann; wie man dieß am deutlichsten an den Kreisfunctionen (§. 539.) ersieht.

Wenn nun der Werth der Function $f(x)$ für einen bestimmten Werth der Veränderlichen x alle seine benachbarten, nähmlich alle jene Werthe dieser Function übersteigt, welche man erhält, wenn man x um eine äußerst geringe Größe zu- oder abnehmen läßt: so heißt dieser besondere Werth der Function ein Größtes (Maximum). Fällt dieser Werth aber kleiner aus als alle seine benachbarten, so wird er ein Kleinstes (Minimum) genannt.

Daraus folgt, daß die Function $f(x)$ nur dann ein Größtes oder Kleinstes werden kann, wenn ihr Differenzial-Coefficient $f'(x)$ in 0 oder ∞ übergeht.

II. Um demnach diejenigen Werthe der Variabeln x zu finden, für welche $f(x)$ ein Größtes oder Kleinstes werden kann, wird man die Gleichungen

$$f'(x) = 0 \text{ und } f'(x) = \infty \quad \text{oder} \quad \frac{1}{f'(x)} = 0 \tag{42}$$

auflösen; man wird nähmlich, wenn der Differenzial-Quotient der zu untersuchenden Function auf die Form eines veränderlichen Bruches gebracht werden kann, sowohl seinen Zähler als auch seinen Nenner der Nulle gleich stellen, und sofort die Wurzeln der

Fig. so erhaltenen Gleichungen bestimmen. Die diesen Wurzeln entsprechenden Werthe der Function $f(x)$ ergeben sich dann, wenn man in derselben die Größe x durch diese Wurzeln ersetzt.

Um aber auch entscheiden zu können, ob der, einer bestimmten Wurzel $x=a$ entsprechende, Werth $f(a)$ der vorgelegten Function ein größter oder kleinster sey, muß man die Größe a um eine sehr kleine absolut positive Größe α sowohl vermehren als auch vermindern, und die den Werthen $a+\alpha$ und $a-\alpha$ der Veränderlichen x entsprechenden Werthe $f(a+\alpha)$ und $f(a-\alpha)$ der Function $f(x)$ mit dem zu untersuchenden Werthe $f(a)$ vergleichen. Je nachdem nun dieser Werth $f(a)$ für die kleinsten Werthe von α größer oder kleiner als die Werthe $f(a+\alpha)$ und $f(a-\alpha)$ ausfällt, wird man ihn auch entweder für ein Größtes oder für ein Kleinstes erklären.

Diese Untersuchung läßt sich aber in den Fällen, wo a eine Wurzel der Gleichung

$$f'(x) = 0$$

ist, auf folgende Weise vereinfachen.

Dem Taylor'schen Lehrsatze (§. 683) gemäß ist

$$f(a+\alpha) = f(a) + \alpha f'(a) + \frac{\alpha^2}{1.2} f''(a) + \frac{\alpha^3}{1.2.3} f'''(a) + \cdots$$

$$f(a-\alpha) = f(a) - \alpha f'(a) + \frac{\alpha^2}{1.2} f''(a) - \frac{\alpha^3}{1.2.3} f'''(a) + \cdots$$

daher, weil der an die Größe a gestellten Forderung gemäß

$$f'(a) = 0$$

ist,

$$f(a+\alpha) - f(a) = \frac{\alpha^2}{1.2} f''(a) + \frac{\alpha^3}{1.2.3} f'''(a) + \cdots$$

$$f(a-\alpha) - f(a) = \frac{\alpha^2}{1.2} f''(a) - \frac{\alpha^3}{1.2.3} f'''(a) + \cdots$$

Je kleiner nun die Größe α angenommen wird, desto mehr reducirt sich der Werth der zweyten Theile dieser Gleichungen bloß auf ihr gemeinschaftliches erstes Glied

$$\frac{\alpha^2}{1.2} f''(a);$$

das Qualitätszeichen dieſes Gliedes oder, da $\frac{\alpha^2}{1.2}$ ſtets poſitiv bleibt, jenes des Differenzial-Coefficienten $f''(a)$ übergeht demnach ſtets auf die Differenzen Fig.

$$f(a+\alpha) - f(a) \ , \quad f(a-\alpha) - f(a),$$

welche, je nachdem ſie gleichzeitig negativ oder poſitiv ausfallen, die Größe $f(a)$ unſerer Erklärung gemäß, zu einem Größten oder Kleinſten machen.

Um demnach in den Fällen, wo a eine Wurzel der Gleichung

$$f'(x) = 0$$

iſt, zu erforſchen, ob $f(a)$ ein Größtes oder Kleinſtes ſey, kann man die Wurzel $x = a$ in den zweyten Differenzial-Coefficienten $f''(x)$ der vorgelegten Function $f(x)$ ſetzen. Je nachdem dann ſein Werth $f''(a)$ negativ oder poſitiv ausfällt, wird man auch $f(a)$ für ein Maximum oder Minimum erklären.

In einzelnen Fällen kann man auch theils aus der Natur der Function $f(x)$, theils aus gewiſſen an ſie geſtellten Bedingungen in voraus beurtheilen, ob ſie einen größten oder kleinſten Werth zulaſſe. So z. B. wenn eine Function $f(x)$ bloß poſitiver Werthe fähig iſt, von denen zwey $f(a)$ und $f(b)$ für $x = a$ und $x = b$ gleich ſind, ſo muß ſie wenigſtens ein Größtes, oder ein Kleinſtes geſtatten, je nachdem ſie, während x von a gegen b zunimmt, über den Werth $f(a) = f(b)$ ſich erhebt, oder unter denſelben herabſinkt.

III. Ergeben ſich aus den Gleichungen (42) mehrere Wurzeln a, b, c, ...; ſo müſſen, wenn ihre Werthe in dieſer Aufeinanderfolge wachſen, die ihnen entſprechenden Werthe $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, ... der Function $f(x)$ abwechſelnd größte und kleinſte ſeyn, da offenbar jedem Eintritte eines Größten ein Steigen vorhergehen und ein Sinken folgen, dem Erſcheinen eines Kleinſten dagegen ein Abnehmen vorhergehen, und ein Zunehmen nachfolgen muß, ſofort nie zwey Größte oder zwey Kleinſte unmittelbar auf einander folgen können.

Man kann demnach, wenn man ſichere Ueberzeugung beſitzt, daß man keine der Wurzeln a, b, c, ... der Glei-

Fig. chungen (42) übergangen habe, die bisweilen beschwerliche Untersuchung der sämmtlichen Werthe f(a), f(b), f(c), ... bloß auf einen oder zwey derselben beschränken; denn hätte man z. B. gefunden, daß f(a) ein Größtes ist, so muß f(b) ein Kleinstes, dagegen f(c) wieder ein Größtes seyn, u. s. w.

Aus diesen sogenannten relativen Größten und Kleinsten f(a), f(b), f(c), ... ergibt sich sofort das absolute Maximum oder Minimum von selbst; nur muß man bey diesen Untersuchungen ein negatives Maximum als ein positives Minimum, folglich ein negatives Minimum als ein positives Maximum behandeln, indem man von zwey Größen diejenige für die kleinere erklärt, welche von der andern abgezogen eine positive Differenz läßt.

§. 695.

Zur Erläuterung dieser allgemeinen Untersuchungen mögen folgende Beyspiele dienen.

1. Beyspiel. Man untersuche, ob

$$f(x) = x^2 + 8x + 2$$

ein Größtes oder Kleinstes gestatte.

Hier ist

$$f'(x) = 2x + 8,$$

folglich muß für ein Größtes oder Kleinstes

$$2x + 8 = 0$$

nähmlich

$$x = -4$$

werden. Für diesen Werth $x = -4$ findet man

$$f(x) = f(-4) = 16 - 32 + 2 = -14.$$

Ferner ergibt sich

$$f''(x) = 2;$$

daher ist -14 ein Kleinstes von f(x). Daß dieser Werth ein kleinster, nicht aber ein größter sey, konnten wir übrigens schon aus dem Umstande folgern, daß für $x = 0$, $f(0) = 2$ größer als $f(-4) = -14$ ausfällt. Und in der That ist

$$f(-4+\alpha) = (-4+\alpha)^2 + 8(-4+\alpha) + 2 = -14 + \alpha^2 > -14$$
$$f(-4-\alpha) = (-4-\alpha)^2 + 8(-4-\alpha) + 2 = -14 + \alpha^2 > -14.$$

2. Beyspiel. Man untersuche, ob die Function Fig.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 18$$

ein Größtes oder Kleinstes zulasse.

Da hier

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0$$

oder

$$x^2 + 2x = 3,$$

folglich

$$x = -1 \pm 2,$$

nähmlich $x = -3$ und $x = +1$

ist; so hat man, weil

$$f''(x) = 6x + 6$$

wird, $f''(-3) = -12$ und $f''(1) = 12$.

Für $x = -3$ ist demnach

$f(-3) = -27 + 27 + 27 + 18 = 45$ ein Größtes,

dagegen wird für $x = 1$

$f(1) = 1 + 3 - 9 + 18 = 13$ ein Kleinstes

der vorgelegten Function.

3. Beyspiel. Man bestimme die Werthe von x, für welche die Function

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 60x^2 + 96x + 1350$$

ein Maximum oder Minimum wird.

Hier ist

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 120x + 96 = 0;$$

also

$$x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0,$$

woraus (nach §. 325.)

$$x = -4, \quad x = 1, \quad x = 2$$

gefunden wird.

Da ferner der Differenzial-Coefficient

$$f''(x) = 12(3x^2 + 2x - 10)$$

für

$x = -4$, $x = 1$, $x = 2$

positiv, negativ, positiv ausfällt,

so ist der entsprechende Werth von $f(x)$, nähmlich

518, 1393, 1382

ein Kleinstes, Größtes, Kleinstes,

und zwar ist 518 das absolute Minimum der Function.

Fig. 4. Beyspiel. Man untersuche, ob die Function

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

einen reellen größten oder kleinsten Werth besitze.

Hier ist

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0,$$

folglich $$x = \pm 1.$$

Um hier der Bestimmung des zweyten Differenzial-Coefficienten $f''(x)$ auszuweichen, machen wir die Bemerkung, daß sowohl für $x=0$ als auch für $x=\infty$ die Function $f(x)$ verschwindet, und für $x=1$ den positiven Werth $\frac{1}{2}$ liefert, was uns berechtiget, diesen für ein Größtes, folglich den zu $x=-1$ gehörigen Werth $-\frac{1}{2}$ für ein Kleinstes zu erklären.

5. Beyspiel. Die Zahl x soll so bestimmt werden, daß $\sqrt[x]{x}$ ein Größtes werde.

Wir erleichtern uns die Rechnung, indem wir erforschen, wann $L\sqrt[x]{x} = \frac{Lx}{x}$ ein Größtes wird. Setzen wir also

$$f(x) = \frac{Lx}{x},$$

so wird $$f'(x) = \frac{1-Lx}{x^2} = 0,$$

mithin $$1 - Lx = 0$$

und $$f''(x) = \frac{-1-2(1-Lx)}{x^3} = -\frac{1}{x^3};$$

folglich $$Lx = 1, \quad x = h, \quad f''(h) = -\frac{1}{h^3}.$$

Es ergibt sich demnach für $x=h$ der größte Werth

$$\sqrt[h]{h} = 1{,}4446678.$$

6. Beyspiel. Aus Fig.

$$y = \sin^2 x \cos x$$

findet man

$$y' = 2\sin x \cos^2 x - \sin^3 x = \sin x\,(2 - 3\sin^2 x) = 0$$
$$y'' = \cos x(2 - 3\sin^2 x) - 6\sin^2 x \cos x$$
$$= \cos x(2 - 9\sin^2 x).$$

Die Gleichung $y' = 0$
zerfällt aber in die Gleichungen

$$\sin x = 0 \quad \text{und} \quad \sin x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}},$$

von denen, wenn m, n, p ganze Zahlen bedeuten,
die erste $x = m.180^0$,
die andere $x = 2n.180^0 \pm 54^0\,44'$
und $x = (2p+1)\,180^0 \mp 54^0\,44'$
liefert, weil

$$\log \sin x = \tfrac{1}{2}(\log 2 - \log 3) = 9{,}9119543,$$

also $x = 54^0\,44'$ ist.

Ordnet man sämmtliche Werthe von x nach ihrer Größe, so findet man

$$x = ..-180^0, -125^0\,16', -54^0\,44', 0^0, 54^0\,44', 125^0\,16', 180^0, ..$$
$$y'' = .., -2, +\frac{4}{\sqrt{3}}, -\frac{4}{\sqrt{3}}, +2, -\frac{4}{\sqrt{3}}, +\frac{4}{\sqrt{3}}, -2, ..$$
$$y = .., 0, -\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}, 0, \frac{2}{3\sqrt{3}}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}, 0, ..$$

Hier können wir den Umstand nicht unbemerkt lassen, daß $y = 0$ nicht nur als ein relatives Maximum, sondern auch als ein relatives Minimum der Function erscheint, und daß

das absolute Maximum der Function $= \frac{2}{3\sqrt{3}}$,

das absolute Minimum hingegen $= -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ ist.

§. 696.

Die Untersuchung, ob eine Function u mehrerer Veränderlichen x, y, z, ... größte oder kleinste Werthe besitze, läßt sich auf die in §. 694 vorgetragene Bestimmung der Maxima und

Fig. Minima der von einer einzigen Veränderlichen abhängigen Functionen zurückführen. Denn soll die Function $u = f(x, y, z, \ldots)$ für gewisse Werthe der Veränderlichen $x, y, z \ldots$ in ein Größtes oder in ein Kleinstes übergehen; so muß, wenn man diese Variabeln um die äußerst kleinen Größen $p\omega, q\omega, r\omega, \ldots$ welche zu einer und derselben sehr kleinen positiven Größe ω in den endlichen positiven oder negativen Verhältnissen $p, q, r, \ldots$ stehen, sich ändern läßt, für die kleinsten Werthe von ω,

im ersten Falle

$$f(x + p\omega, y + q\omega, z + r\omega, \ldots) < f(x, y, z, \ldots),$$

im andern Falle aber

$$f(x + p\omega, y + q\omega, z + r\omega, \ldots) > f(x, y, z, \ldots)$$

erscheinen, oder es muß, wenn man

$$f(x + p\omega, y + q\omega, z + r\omega, \ldots) = F(\omega)$$

setzt, die nur von ω abhängende Function

$F(\omega) < F(0)$ im ersten, und

$F(\omega) > F(0)$ im zweyten Falle seyn, d. h. die Function $F(\omega)$ muß für $\omega = 0$ ein Maximum in jenem, oder ein Minimum in diesem Falle werden, was für Werthe auch die Größen $p, q, r, \ldots$ erhalten mögen. Es muß demnach (§. 694.) der Differenzial-Coefficient

$$F'(\omega) = \frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

für $\omega = 0$ entweder Null oder unendlich groß werden, nähmlich es muß, wenn wir nur den ersten Fall, weil er am häufigsten vorkommt, untersuchen,

$$F'(0) = 0$$

seyn.

Nun ist aber (§. 681.)

$$dF(\omega) = F'(\omega)d\omega = F(\omega + d\omega) - F(\omega)$$

oder

$$= f(x + p\omega + pd\omega, y + q\omega + qd\omega, \ldots) - f(x + p\omega, y + q\omega, \ldots),$$

folglich, wenn man $\omega = 0$ und $F'(\omega) = 0$ setzt,

$f(x+p\,d\omega, y+q\,d\omega, z+r\,d\omega, \ldots) - f(x, y, z, \ldots) = 0,$ Fig.

und wenn man, was nicht verwehrt werden kann,

$dx, dy, dz, \ldots$ für $p\,d\omega, q\,d\omega, r\,d\omega, \ldots$

schreibt,

$f(x+dx, y+dy, z+dz, \ldots) - f(x, y, z, \ldots) = 0.$

Beachtet man noch, daß der ursprünglichen Annahme gemäß $f(x, y, z, \ldots) = u$ ist, so stellt der erste Theil dieser Gleichung das vollständige Differenzial von u, nähmlich du vor, und man erhält sofort

$$du = 0$$

als Bedingungsgleichung der Möglichkeit eines Maximums oder Minimums von u.

Diese Gleichung übergeht aber nach §. 680. Gl. 41. in

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \ldots = 0$$

und kann, weil die unendlich kleinen Zunahmen dx, dy, dz, ... der Veränderlichen x, y, z, ... völlig willkührlich sind, nur dann bestehen, wenn

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0, \ldots \tag{43}$$

ist.

Um demnach diejenigen Werthe der Veränderlichen einer von mehreren Variabeln abhängigen Function zu bestimmen, für welche diese ein Größtes oder ein Kleinstes wird, muß man sämmtliche, nach den einzelnen Veränderlichen genommenen, partiellen Differenzial-Coefficienten der zu untersuchenden Function der Nulle gleich setzen, und aus diesen Gleichungen die Veränderlichen bestimmen. Ob aber diese Werthe der Veränderlichen die Function zu einem Größten oder Kleinsten machen, wird man, falls die Natur der Aufgabe nicht selbst hierüber entscheiden sollte, dadurch erforschen, daß man die gefundenen Werthe der Veränderlichen um sehr geringe Größen theils vermehrt, theils vermindert, und nachsieht, ob die Function im ersten Falle durchaus kleinere, im andern aber lauter größere Werthe annimmt.

Fig.

§. 697.

Zur Erläuterung dieser Theorie sey

1. Beyspiel, eine positive Zahl a in drey positive Theile so zu zertheilen, daß das Product aus der mten Potenz des ersten, aus der nten Potenz des zweyten und aus der pten Potenz des dritten ein Maximum werde.

Ist x der erste, und y der zweyte, folglich $a-x-y$ der dritte Theil; so soll der Bedingung der Aufgabe zu Folge das Product

$$u = x^m y^n (a-x-y)^p$$

ein Maximum werden, folglich hat man sich zunächst mit der Auflösung der Gleichungen

$$\frac{du}{dx} = mx^{m-1} y^n (a-x-y)^p - px^m y^n (a-x-y)^{p-1}$$
$$= x^{m-1} y^n (a-x-y)^{p-1} (ma - mx - my - px) = 0$$
$$\frac{du}{dy} = nx^m y^{n-1} (a-x-y)^p - px^m y^n (a-x-y)^{p-1}$$
$$= x^m y^{n-1} (a-x-y)^{p-1} (na - nx - ny - py) = 0$$

zu beschäftigen; aus denen man, da nach der Natur der Aufgabe weder $x=0$, noch $y=0$, noch auch $a-x-y=0$ zugelassen werden kann, durch Verbindung der Gleichungen

$$ma - my - (m+p)x = 0$$
$$na - nx - (n+p)y = 0$$

die Werthe

$$x = \frac{ma}{m+n+p}, \quad y = \frac{na}{m+n+p}, \quad a-x-y = \frac{pa}{m+n+p}$$

erhält. Das gesuchte Product, das den Bedingungen der Aufgabe gemäß nur ein Größtes seyn kann, ist demnach

$$u = \frac{m^m n^n p^p a^{m+n+p}}{(m+n+p)^{m+n+p}}.$$

Wir wollen die Lösung dieser Aufgabe noch auf eine andere Weise vornehmen, weil sie uns eine schickliche Gelegenheit darbiethet, zwey oft anwendbare analytische Kunstgriffe zu zeigen.

Bezeichnen x, y, z die drey Theile der Zahl a, so müssen den Forderungen der Aufgabe gemäß die beyden Gleichungen

$$x+y+z = a, \quad u = x^m y^n z^p$$

bestehen. Da u, folglich auch Fig.

$$Lu = mLx + nLy + pLz$$

ein Maximum und $du = 0$ seyn soll, so wird man diese Gleichungen differenziren und dadurch

$$dx + dy + dz = 0$$

$$dLu = \frac{m}{x}dx + \frac{n}{y}dy + \frac{p}{z}dz = 0$$

gewinnen.

Würden wir nun aus diesen zwey Gleichungen ein Differenzial, etwa dz eliminiren und zu diesem Zwecke die erste Gleichung mit dem unbestimmten Factor $-\lambda$ multipliciren, beyde Gleichungen addiren, in der so gewonnenen Gleichung

$$\left(\frac{m}{x} - \lambda\right)dx + \left(\frac{n}{y} - \lambda\right)dy + \left(\frac{p}{z} - \lambda\right)dz = 0$$

den Factor $\frac{p}{z} - \lambda = 0$ setzen, und den für λ daraus folgenden Werth $\frac{p}{z}$ in die mit dx und dy verknüpften Factoren substituiren: so könnte die auf diese Weise entstehende Gleichung

$$\left(\frac{m}{x} - \frac{p}{z}\right)dx + \left(\frac{n}{y} - \frac{p}{z}\right)dy = 0$$

wegen der völligen Willkühr der Differenziale dx, dy nur unter der Bedingung bestehen, daß die Factoren von dx und dy einzeln Null, nähmlich

$$\frac{m}{x} - \frac{p}{z} = 0, \quad \frac{n}{y} - \frac{p}{z} = 0,$$

folglich

$$\frac{m}{x} = \frac{n}{y} = \frac{p}{z}$$

werden.

Allein man sieht auf den ersten Blick, daß man zu demselben Ziele gelangen müsse, wenn man den unbestimmten Factor λ als eine unbekannte Größe behandelt, welche die mit dx, dy, dz verbundenen Factoren zugleich auf Null bringt. Man wird demnach alle diese Factoren gleich Null setzen, und aus den erhaltenen Gleichungen

$$\frac{m}{x} - \lambda = 0, \quad \frac{n}{y} - \lambda = 0, \quad \frac{p}{z} - \lambda = 0$$

Fig. mit Zuziehung der Gleichung

$$x + y + z = a$$

die Größen x, y, z suchen; wozu man folgenden Weg einschlagen kann. Aus diesen Gleichungen ergibt sich nähmlich

$$\frac{m}{x} = \frac{n}{y} = \frac{p}{z} = \lambda;$$

folglich findet man, da (nach §. 191., wenn man den daselbst ausgesprochenen Lehrsatz in der Form

$$\frac{aq}{a} = \frac{bq}{b} = \frac{cq}{c} = \frac{dq}{d} = \ldots = \frac{aq + bq + cq + dq + \ldots}{a + b + c + d + \ldots}$$

anschreibt,)

$$\frac{m}{x} = \frac{n}{y} = \frac{p}{z} = \frac{m+n+p}{x+y+z} = \frac{m+n+p}{a}$$

seyn muß,

$$x = \frac{ma}{m+n+p}, \quad y = \frac{na}{m+n+p}, \quad z = \frac{pa}{m+n+p}.$$

2. Beyspiel. Man bestimme diejenigen Werthe von x und y, für welche das Product xy ein Maximum wird, wenn zugleich die Bedingungsgleichung $x^3 + y^3 = axy$ statt findet.

Damit hier $u = xy$,

also auch $Lu = Lx + Ly$

ein Maximum werde, muß $du = 0$

oder $$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0,$$

und wegen der Bedingungsgleichung

$$x^3 + y^3 - axy = 0$$

auch noch

$$(3x^2 - ay)\,dx + (3y^2 - ax)\,dy = 0$$

bestehen. Vereinigt man beyde Differenzial Gleichungen mittelst des unbestimmten Multiplicators λ, so ergibt sich die Gleichung

$$(3x^2 - ay + \frac{\lambda}{x})\,dx + (3y^2 - ax + \frac{\lambda}{y})\,dy = 0;$$

aus der sofort

$$3x^2 - ay + \frac{\lambda}{x} = 0, \quad 3y^2 - ax + \frac{\lambda}{y} = 0,$$

folglich $$\lambda = axy - 3x^3 = axy - 3y^3$$

und $x = y$ Fig.

erhalten wird. Durch die Einführung dieses Werthes übergeht aber obige Bedingungsgleichung in

$$2x^3 - ax^2 = 0,$$

woraus man, da $x = 0$ unzulässig ist,

$$x = \frac{a}{2} = y, \quad \text{und} \quad u = \frac{a^2}{4}$$

findet.

III. Abschnitt.

Anwendung der Differenzial-Rechnung auf die Geometrie.

A. Untersuchung der ebenen krummen Linien.

Bestimmung der zu dieser Untersuchung dienlichen Hülfslinien und Hülfswinkel.

§. 698.

Es sey (Fig. 194.) BMC eine in einer Ebene gezogene krumme 194.
Linie (Curve), NS eine Abscissenlinie, A der Anfang der Abscissen, und für einen beliebigen Punct M der Curve BMC sey $AP = x$ die Abscisse, $PM = y$ die auf ihr senkrechte Ordinate, B der Anfang der Bogen, $BM = s$ ein Bogen der krummen Linie: so kann man

für das Differenzial oder Element ds des Bogens s,

für den Neigungswinkel $MTP = \omega$ der Curve, welchen nähmlich die an M geführte Tangente mit der Abscissenlinie bildet,

für die Subtangente $PT = t$, für die Subnormale $PN = n$,

für die Tangente $MT = T$, für die Normale $MN = N$,

für die Entfernungen $AT = -U$, und $AG = V$ des Anfangs der Abscissen von den Einschnitten der Tangente MT in die Abscissen- und Ordinatenlinie, endlich

für den senkrechten Abstand dieser Tangente von dem Ursprunge der Coordinaten, oder

für das Perpendikel P allgemeine Ausdrücke aufstellen; womit wir uns zunächst beschäftigen wollen.

Fig. 194.

§. 699.

Zu diesem Zwecke vermehren wir die Abscisse AP um ein endliches Stück Pp, ziehen die Ordinate pm, ferner die Gerade MR zur Abscisse parallel, und verbinden M und m mittelst der Sehne Mm, welche wir bis an die Abscissenlinie verlängern. Auf diese Weise wird die zweyte Ordinate pm um das Stück mR größer als die erste Ordinate PM werden, und der Bogen Bm den frühern Bogen BM um das Stück Mm übertreffen.

Lassen wir nun die Linie Pp ohne Ende abnehmen, so nähert sich der Punct m dem Puncte M, S dem Puncte T, also die Secante mMS der Tangente MT ohne Ende; folglich wird, wenn man die Zunahme der Abscisse unendlich klein, nähmlich $Pp = dx$ annimmt, mR die unendlich kleine Zunahme dy der Ordinate y, der Bogen Mm die unendlich kleine Vergrößerung ds des Bogens s; zugleich kann man annehmen, daß die Sehne Mm mit dem Bogen Mm übereinfalle und beyde in der Richtung der Tangente liegen. Dadurch wird der Winkel

$$mMR = MTP = \omega,$$

daher auch das von den unendlich kleinen Seiten

$$MR = dx\ ,\quad Rm = dy\ ,\quad mM = ds$$

eingeschlossene geradlinige Dreyeck MRm, welches einige Geometer das karakteristische Dreyeck der krummen Linie nennen, den rechtwinkeligen Dreyecken MTN, MPT und MPN (nach §. 378. IV.) ähnlich.

Bey diesen Voraussetzungen folgt aus dem rechtwinkeligen karakteristischen Dreyecke

$$Mm^2 = MR^2 + Rm^2$$

also

$$(1) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2$$

oder

$$(2) \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

folglich

$$(3) \qquad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

oder, wenn wir die Abscisse x, wie es gewöhnlich zu geschehen pflegt, als die absolut oder unabhängig veränderliche Größe ansehen, und die Differenzial-Coefficienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ds}{dx}$ von y und s nach §. 681. durch y′ und s′ bezeichnen, Fig. 194.

(4) $$s' = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Ferner ergeben sich aus demselben Dreyecke für den Neigungswinkel die Gleichungen

(5) $$\cos\omega = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{s'}$$

(6) $$\sin\omega = \frac{dy}{ds} = \frac{y'}{s'}$$

(7) $$\operatorname{tang}\omega = \frac{dy}{dx} = y'.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreyecke MRm und MPT erhalten wir

(8) die Subtangente $$t = y\frac{dx}{dy} = \frac{y}{y'}$$

(9) die Tangente $$T = y\frac{ds}{dy} = \frac{ys'}{y'},$$

und aus der Aehnlichkeit der Dreyecke MRm und MPN,

(10) die Subnormale $$n = y\frac{dy}{dx} = yy'$$

(11) die Normale $$N = y\frac{ds}{dx} = ys'.$$

Da ferner $$AT = PT - AP = t - x$$

und $$AG = AT \operatorname{tang} GTA = (t - x)\operatorname{tang}\omega$$

ist, so findet man die beyden Entfernungen U und V des Ursprunges der Coordinaten von den Einschnitten der Tangente in die Coordinatenachsen mittelst der Gleichungen

(12) $$U = x - y\frac{dx}{dy}$$

(13) $$V = y - x\frac{dy}{dx}.$$

Fig. 194. Endlich ist das aus A auf die Tangente herabgelassene Perpendikel

$$P = AT \sin GTA = (t - x) \sin \omega$$

oder

$$P = y\frac{dx}{ds} - x\frac{dy}{ds}. \tag{14}$$

§. 700.

Kennt man nun die zwischen den rechtwinkeligen Coordinaten x und y bestehende Gleichung der krummen Linie, so wird man dieselbe differenziren, daraus die Differenzial-Quotienten

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{ds}{dx}, \quad \frac{ds}{dy}, \quad \text{oder } y', \; s', \; \frac{s'}{y'}$$

bestimmen, und in obigen allgemeinen Ausdrücken substituiren, wie dieses durch folgende Beyspiele deutlich werden wird.

1. Beyspiel. Die Gleichung der Parabel ist (nach §. 628.)

$$y^2 = 2px,$$

daher ihr Differenzial

$$y\,dy = p\,dx,$$

folglich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{p^2 + y^2}}{y}.$$

Man hat demnach

$$\text{tang } \omega = \frac{p}{y},$$

woraus für $y = \infty$, $\omega = 0$ sich ergibt; folglich laufen die Aeste der Parabel in unendlicher Entfernung vom Scheitel parallel zur Achse.

Ferner ist $t = \frac{y^2}{p} = 2x$, $n = p$,

$$T = \frac{y}{p}\sqrt{p^2 + y^2}, \quad N = \sqrt{p^2 + y^2}.$$

2. Beyspiel. Für die Ellipse haben wir (§. 636.) Fig. 194.

die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

daher ist $\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{b^2} = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Hieraus folgt $\text{tang}\,\omega = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$,

woraus für $x = 0$ und $y = b$, $\omega = 0$,
und für $y = 0$ und $x = a$, $\omega = 90^0$
sich ergibt; daher laufen die an den Scheiteln einer jeden Achse geführten Tangenten mit der andern Achse parallel.

Ferner ist $t = \frac{a^2 y^2}{b^2 x}$, $n = \frac{b^2 x}{a^2}$,

wenn wir bloß die absolute Länge dieser Linien berücksichtigen.

Für die Kreislinie ist

$$b = a, \text{ also } \text{tang}\,\omega = -\frac{x}{y},$$

$$t = \frac{y^2}{x} = a - \frac{x}{a}, \quad n = x;$$

weßwegen alle ihre Normalen durch den Mittelpunct gehen.

Man erhält diese Größen sehr leicht für die Hyperbel, wenn man (nach §. 661.) in obigen Gleichungen $-b^2$ statt b^2 schreibt.

3. Beyspiel. Für die Kegelschnittslinien ist im Allgemeinen

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{p + qx}{y}$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{y}\sqrt{y^2 + (p + qx)^2}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\text{tang}\,\omega = \frac{p + qx}{y}$$

$$t = \frac{y^2}{p + qx}, \qquad n = p + qx,$$

$$T = y\,\frac{\sqrt{y^2 + (p+qx)^2}}{p + qx}, \qquad N = \sqrt{y^2 + (p + qx)^2}.$$

Fig. 194. Für $x = 0$, nähmlich am Scheitel des Kegelschnittes ist $t = 0$, $n = p$, $T = p$, $N = p$.

4. Beyspiel. Bey der Logistik, deren Gleichung (§. 671.)

$$y = h^{\frac{x}{a}}$$

ist, findet man $$\frac{dy}{dx} = \frac{h^{\frac{x}{a}}}{a} = \frac{y}{a},$$

daher ist $$\text{tang}\,\omega = \frac{h^{\frac{x}{a}}}{a} = \frac{y}{a}$$

$$t = a, \quad n = \frac{y^2}{a},$$

woraus wir ersehen, daß in der Logistik die Subtangente unveränderlich ist.

5. Beyspiel. Aus der Gleichung (§. 672.) der Cycloide

$$y = \sqrt{2ax - x^2} + a \cdot \text{arc sinv} \frac{x}{a}$$

folgt $$\frac{dy}{dx} = \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}} + \frac{a}{\sqrt{2ax - x^2}} = \frac{2a - x}{\sqrt{(2a - x)x}},$$

nähmlich $$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a - x}{x}};$$

somit ist $$\text{tang}\,\omega = \sqrt{\frac{2a - x}{x}}.$$

197. Zieht man nun (Fig. 197.) die Sehne AQ, so wird

$$\text{tang}\,PAQ = \frac{PQ}{AP} = \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x} = \sqrt{\frac{2a - x}{x}},$$

demnach ist

$$PAQ = \omega = MTP,$$

woraus erhellet, daß in der Cycloide die Tangente MT mit der entsprechenden Sehne AQ des über der Achse verzeichneten Erzeugungskreises parallel läuft.

Ferner ist Fig.

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{(1+\frac{2a-x}{x})} = \sqrt{\frac{2a}{x}},$$

$$t = y\sqrt{\frac{x}{2a-x}},\quad n = y\sqrt{\frac{2a-x}{x}},$$

$$T = y\sqrt{\frac{2a}{2a-x}},\quad N = y\sqrt{\frac{2a}{x}}.$$

6. Beyspiel. Die Gleichung (§. 674.)

$$y = a\sin x$$

der Sinuslinie gibt

$$\frac{dy}{dx} = a\cos x,$$

daher ist $\quad \text{tang}\,\omega = a\cos x,$

$$t = \text{tang}\,x,\quad n = a^2\sin x\cos x = \frac{1}{2}a^2\sin 2x.$$

Ist insbesondere $a = 1$, so hat man

$$y = \sin x,\quad \frac{dy}{dx} = \text{tang}\,\omega = \cos x,\quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\cos^2 x},$$

$$t = \text{tang}\,x,\quad T = \text{tang}\,x\sqrt{1+\cos^2 x},$$

$$n = \sin x\cos x,\quad N = \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}.$$

Von der Krümmung und dem Krümmungshalbmesser.

§. 701.

I. Unter allen krummen Linien ist die Kreislinie die einzige, welche in jedem ihrer Puncte gleich stark gekrümmt ist; zugleich ist die Krümmung an verschiedenen Kreislinien verschieden, und zwar nimmt sie ab, oder zu, je nachdem der Halbmesser größer oder kleiner wird, was man deutlich einsieht, wenn man in irgend einem Puncte einer Geraden eine Senkrechte errichtet und aus allen Puncten dieser Senkrechten mit ihren Abständen von der Geraden als Halbmessern Kreislinien beschreibt, welche die Gerade berühren, und sich desto enger an sie anschließen, folglich desto weniger gekrümmt oder desto flächer ausfallen, je mehr ihre Halbmesser sich vergrößern. Man kann demnach die Krümmung, welche

Fig. eine krumme Linie an einem ihrer Puncte besitzt, mit jener einer Kreislinie vergleichen, und gewisser Maßen die Krümmung der Kreislinie für den Maßstab der Krümmung der krummen Linien annehmen. Lassen wir nun — weil die Krümmung der Kreislinie zu- oder abnimmt, je nachdem ihr Halbmesser im Ab- oder Zunehmen begriffen ist — die willkührliche Annahme gelten, daß die Krümmungen der Kreislinien ihren Halbmessern umgekehrt (indirect) proportional seyen, und nehmen wir die Krümmung der mit der Längeneinheit als Halbmesser beschriebenen Kreislinie für die Einheit der Krümmung an; so kann die Krümmung der mit dem Halbmesser R verzeichneten Kreislinie durch $\frac{1}{R}$ ausgedrückt oder der Bruch $\frac{1}{R}$ geradezu die Krümmung dieser Kreislinie genannt werden. Da ferner die Kreislinie, folglich auch die Krümmung derselben durch die Größe des Halbmessers bestimmt wird, so ist auch die Krümmung einer krummen Linie an einem jeden Puncte bestimmt, sobald man den Halbmesser derjenigen Kreislinie kennt, welche eine eben so große Krümmung hat, als die Curve an diesem Puncte. Diese Kreislinie nun, deren Element mit jenem der krummen Linie zusammenfällt, nennt man den Krümmungskreis, ihren Halbmesser den Krümmungshalbmesser und ihren Mittelpunct den Krümmungsmittelpunct der krummen Linie an dem bezeichneten Puncte.

196. II. Aus diesen Erklärungen folgt, daß (Fig. 196.) die Krümmungsmittelpuncte der krummen Linie GAM an den Puncten M und m in den Normalen MC, mC dieser Puncte liegen; daher wird, wenn man den Punct m so unendlich nahe an M annimmt, daß man Mm für das Differenzial des Bogens ansehen kann, der Mittelpunct des Krümmungskreises an dem Puncte M in dem Durchschnitte C beyder Normalen liegen.

Soll nun mit dem Elemente Mm der krummen Linie GAM das Element der Kreislinie übereinfallen, folglich Mm als ein unendlich kleiner Kreisbogen von dem Halbmesser MC angesehen werden können, so muß es erlaubt seyn MC = mC zu setzen; wodurch wir in den Stand gesetzt werden, den Krümmungshalb-

messer jeder krummen Linie an jedem ihrer Puncte auf folgende Weise zu bestimmen. Fig. 196.

Es sey GM = s ein Bogen der krummen Linie GAM, AD die Abscissenlinie, A ihr Anfang, AP = x die Abscisse, und PM = y die senkrechte Ordinate des Punctes M, folglich Pp = dx, Rm = dy, Mm = ds; zugleich sey der Krümmungshalbmesser MC = R. Sehen wir nun Mm = ds als einen unendlich kleinen Kreisbogen von dem Halbmesser MC = R an, und bezeichnen wir die Länge des mit der Längeneinheit zwischen den Schenkeln des unendlich kleinen Winkels MCm beschriebenen Bogens mit ε, so muß, weil (nach §. 416.) ähnliche Kreisbogen ihren Halbmessern proportional sind,

$$R : 1 = ds : \varepsilon,$$

also

$$R = \frac{ds}{\varepsilon}$$

seyn; daher wir nur noch ε zu bestimmen haben. Dieser Winkel ε, welcher von den beyden an die Endpuncte M und m des Elementes Mm der krummen Linie gezogenen Normalen eingeschlossen ist, gleicht aber, wie man leicht sieht, dem Winkel, den die an dieselben Puncte M und m gelegten und auf jenen Normalen senkrecht stehenden Tangenten bilden, und welcher der Contingenz- oder Krümmungswinkel genannt wird.

Allein dieser Contingenzwinkel ist (nach §. 379.) dem Unterschiede der Winkel gleich, welche die Tangenten mit der Abscissenlinie bilden und die (nach §. 698.) die Neigungswinkel der Curve an den Puncten M und m sind. Bezeichnen wir aber, wie im §. 698 den Neigungswinkel an M mit ω, so muß derselbe, wenn man von M zu dem unendlich nahen Puncte m übergeht, eben so wie die Abscisse x, die Ordinate y und der Bogen s, welche dem Puncte M entsprechen, um sein Differenzial dω wachsen, folglich in ω + dω übergehen; demnach ist der Contingenzwinkel $= \omega - (\omega + d\omega) = -d\omega$, mithin auch $\varepsilon = -d\omega$. Führt man diesen Werth in obiger Gleichung ein, so wird der Krümmungshalbmesser

(15)

$$R = -\frac{ds}{d\omega},$$

Fig. und die Krümmung
196.

$$\frac{1}{R} = -\frac{d\omega}{ds}. \quad (16)$$

III. Dieser einfache Ausdruck des Krümmungshalbmessers läßt sich noch auf sehr verschiedene Weisen gestalten, von denen wir jedoch nur die brauchbarsten anführen wollen. Nach §. 699 ist

$$\text{tang}\,\omega = \frac{dy}{dx}, \quad \text{also} \quad \omega = \text{arc tang}\,\frac{dy}{dx}.$$

Sehen wir dx für constant an, so erhalten wir (nach §. 682.)

$$d\omega = \frac{dx\,d^2y}{dx^2 + dy^2},$$

oder weil (nach §. 699.) $dx^2 + dy^2 = ds^2$ ist,

$$d\omega = \frac{dx\,d^2y}{ds^2}, \quad (17)$$

folglich ist

$$R = -\frac{ds^3}{dx\,d^2y} = -\frac{s'^3}{y''}. \quad (18)$$

Nach §. 699 ist aber $s' = \frac{N}{y}$,

daher auch

$$R = -\frac{1}{y''}\left(\frac{N}{y}\right)^3. \quad (19)$$

§. 702.

Kennt man nun die Gleichung zwischen den rechtwinkeligen Coordinaten einer Linie, so unterliegt die Bestimmung ihres Krümmungshalbmessers keiner Schwierigkeit, wie dieses an folgenden Beyspielen zu ersehen ist.

1. Beyspiel. Die allgemeine Gleichung der Kegelschnittslinien ist (§. 661.)

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

daher ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p + qx}{y},$$

und wenn man neuerdings differenzirt, Fig.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qy - (p+qx)\cdot\frac{dy}{dx}}{y^2} = \frac{qy^2-(p+qx)^2}{y^3} = -\frac{p^2}{y^3},$$

also

$$y'' = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Somit ist für die Kegelschnittslinien

(20) $$R = \frac{N^3}{p^2},$$

und wenn wir den halben Parameter $p = 1$ setzen,

$$R = N^3.$$

Nehmen wir $x = 0$ an, so wird (nach §. 700. Beyspiel 3.) $N = p$, folglich $R = p$. An den Scheiteln der Kegelschnittslinien ist demnach der Krümmungshalbmesser dem halben Parameter gleich.

Insbesondere ist (§. 631.) in der Parabel

$$N = \sqrt{2pr}, \quad \text{daher } R = 2r\sqrt{\frac{2r}{p}};$$

in der Ellipse und Hyperbel aber (§. 646. und 662.) ist

$$N = \frac{b}{a}\sqrt{r\varrho} \text{ und } p = \frac{b^2}{a}, \text{ folglich } R = \frac{\sqrt{(r\varrho)^3}}{ab}.$$

2. Beyspiel. Aus der Gleichung der Cycloide

$$y = \sqrt{2ax-x^2} + a\cdot\operatorname{arc\,sinv}\frac{x}{a}$$

folgt $$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a-x}{x}} = \sqrt{\left(\frac{2a}{x}-1\right)}, \text{ und } s' = \frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{2a}{x}};$$

daher ist

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{x^2\sqrt{\left(\frac{2a}{x}-1\right)}} = -\frac{a}{x\sqrt{2ax-x^2}},$$

und $$R = 2\sqrt{2a(2a-x)}.$$

Da nun (Fig. 197.) 197.

$$AP = x,\ AB = 2a,\ BP = 2a-x,$$

und $$BP : BQ = BQ : AB,$$

folglich $$BQ = \sqrt{AB\cdot BP} = \sqrt{2a(2a-x)}$$

ist; so hat man

$$MM' = R = 2BQ = 2MC.$$

Fig. 3. Beyspiel. Bey der Sinuslinie

$$y = a \sin x$$

findet man $\frac{dy}{dx} = a \cos x$, $s' = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + a^2 \cos^2 x}$,

mithin $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -a \sin x$,

und den Krümmungshalbmesser

$$R = \frac{(1+a^2 \cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}{a \sin x}.$$

4. Beyspiel. Die logarithmische Linie

$$y = aLx$$

gibt $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{x^2}$, $\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$,

daher ist ihr Krümmungshalbmesser

$$R = \frac{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}{ax}.$$

Bestimmung der Lage der Asymptoten krummer Linien.

§. 703.

Soll eine krumme Linie (nach §. 621.) ihrer geradlinigen Asymptote unendlich sich nähern, dieselbe aber, wie weit man auch beyde verlängern möge, nie erreichen können; so muß die Tangente, welche den unendlich nahe an die Asymptote rückenden beweglichen Punct M stets begleitet, um so mehr der Asymptote sich nähern, je weiter dieser Punct von dem Ursprunge der Coordinaten sich entfernt. Folglich läßt sich die Asymptote als die Grenze ansehen, der sich die Tangente der krummen Linie bey dem unendlichen Entfernen des Berührungspunctes von dem Ursprunge der Coordinaten ohne Ende nähert. Um demnach auszumitteln, ob und wo eine durch ihre Gleichung gegebene krumme Linie Asymptoten besitze, wird man zwey die Lage der Tangente bestimmende Stücke (§. 699.)

(21) $U = x - y\frac{dx}{dy}$, $V = y - x\frac{dy}{dx}$, Fig.

$P = y\frac{dx}{ds} - x\frac{dy}{ds}$, $\text{tang}\,\omega = \frac{dy}{dx}$

suchen, hierauf eine der Coordinaten x oder y positiv oder negativ unendlich groß, folglich $\frac{1}{x}$ oder $\frac{1}{y}$ gleich Null setzen, die andere aber mit Hülfe der bekannten Gleichung der Curve bestimmen, und sonach beyde in obigen Ausdrücken substituiren. Erhält nun das Perpendikel P, oder wenigstens einer der beyden Abstände U und V einen endlichen Werth; so hat die krumme Linie eine Asymptote, und zwar wird ihre Lage entweder durch zwey dieser Längen, oder durch eine derselben und durch den Neigungswinkel ω, oder endlich, wenn diese drey Längen zugleich Null werden, folglich die Asymptote durch den Ursprung der Coordinaten geht, bloß durch den Winkel ω bestimmt.

Insbesondere läuft die Asymptote zur Abscissenlinie parallel, wenn U unendlich groß, dagegen $V = P$ und endlich ausfällt; sie läuft mit der Ordinatenlinie parallel, wenn V unendlich groß, hingegen $U = P$ und endlich wird.

Wird aber P, folglich auch jede der beyden Entfernungen U und V unendlich groß oder imaginär, so besitzt die krumme Linie keine Asymptote.

Die zur Abscissenlinie parallelen Asymptoten erhält man auch, wenn man in der Gleichung der krummen Linie $x = \pm\infty$ setzt, und zusieht, ob y einen endlichen Werth erhält. Eben so lassen sich die zur Ordinatenlinie parallel laufenden Asymptoten finden, wenn man in der Gleichung der krummen Linie $y = \pm\infty$ annimmt und untersucht, ob x endlich ausfällt.

Daß übrigens krumme Linien, bey denen keine der Coordinaten x und y unendlich große Werthe anzunehmen vermag, wie die Kreislinie, die Ellipse, die Lemniscate u. a. keine Asymptoten besitzen können, ist an sich klar.

Fig. 1. Beyspiel. Bey den Kegelschnittslinien ist (nach §. 700. Beyspiel 3.)

$$U = x - \frac{y^2}{p+qx} = -\frac{px}{p+qx} = -\frac{p}{\frac{p}{x}+q},$$

$$V = y - \frac{px+qx^2}{y} = \frac{px}{\sqrt{2px+qx^2}} = \frac{p}{\sqrt{(\frac{2p}{x}+q)}}.$$

Setzen wir hierin $\frac{1}{x} = 0$, so wird

$$U = -\frac{p}{q}, \quad V = \frac{p}{\sqrt{q}};$$

woraus erhellet, daß nur die Hyperbel, bey welcher q positiv und von der Nulle verschieden ist, Asymptoten und zwar deren zwey besitzt, welche, weil

$$U = -a$$

wird, im Mittelpuncte sich kreuzen, und von der im Scheitel errichteten Ordinate auf beyden Seiten der Abscissenlinie die Länge $\frac{p}{\sqrt{q}} = b$ abschneiden.

Die Parabel kann keine Asymptoten haben, weil bey ihr $q = 0$, folglich $U = -\infty$, und $V = \pm\infty$ ist. Endlich kann auch der Ellipse keine Asymptote zukommen, weil q negativ ist, also V imaginär ausfällt.

2. Beyspiel. Sucht man die Asymptoten der Hyperbel mittelst der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so findet man

$$U = x - \frac{a^2y^2}{b^2x} = \frac{a^2}{x},$$

$$V = y - \frac{b^2x^2}{a^2y} = -\frac{b^2}{y}.$$

Setzt man hierin $x = \infty$, so wird $y = \pm\infty$, folglich

$$U = 0, \quad V = 0,$$

weßwegen zwey Asymptoten durch den Mittelpunct der Hyperbel Fig. gehen. Zur Bestimmung ihrer Lage dient nun die Gleichung

$$\text{tang}\,\omega = \frac{b^2x}{a^2y} = \frac{b}{a\sqrt{(1-\frac{a^2}{x^2})}},$$

aus der man für $x = \infty$

$$\text{tang}\,\omega = \pm\frac{b}{a}$$

erhält.

3. Beyspiel. Aus der Gleichung der Logistik (§. 671.) folgt

$$U = x - a, \quad V = y(1 - Ly).$$

Setzt man hierin

$x = +\infty$, so wird $y = \infty$, $U = +\infty$, $V = -\infty$,

woraus man ersieht, daß der auf der Seite der positiven Abscissen liegende Theil der Logistik keine Asymptote besitzt. Nimmt man dagegen

$x = -\infty$, so wird $y = 0$, $U = -\infty$, $V = 0$. (§. 693. V.)

Die negative Hälfte der Abscissenlinie ist demnach eine Asymptote der Logistik.

4. Beyspiel. Die Gleichung der Muschellinie

$$y = x\sqrt{\left(\frac{b}{x-a}\right)^2 - 1} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{y} = \frac{x-a}{x\sqrt{b^2-(x-a)^2}}$$

zeigt, daß $y = \infty$ und $\frac{1}{y} = 0$ wird, wenn $x = a$ ist; folglich muß die fixe Gerade, welche alle durch den Pol laufenden Sehnen der Muschellinie halbirt, die Asymptote derselben seyn.

5. Beyspiel. Eben so wird bey der Cyssois, welcher die Gleichung

$$y = x\sqrt{\frac{x}{d-x}} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{d-x}{x}}$$

angehört, $y = \infty$ und $\frac{1}{y} = 0$, wenn $x = d$ ist; daher ist die Tangente des Grundkreises die Asymptote der Cyssoide.

6. Beyspiel. Bey der Quadratrix ist

$$\frac{1}{y} = \frac{\text{tang}\frac{x}{a}}{x},$$

Fig. folglich wird für $\frac{1}{y} = 0$

$$\text{tang}\frac{x}{a} = 0 \text{ und } x = a.\text{arc tang } 0 = ra\pi,$$

wenn r eine beliebige (positive oder negative) jedoch von Null verschiedene ganze Zahl andeutet. Die Quadratrix hat demnach unendlich viele Asymptoten, welche in den Abständen

$$\pm a\pi\ ,\ \pm 2a\pi\ ,\ \pm 3a\pi\ ,\ \ldots .$$

zur Ordinatenlinie auf beyden Seiten derselben parallel laufen.

Von dem Steigen und Fallen, der Concavität und Convexität der krummen Linien.

§. 704.

Eine krumme Linie steigt oder fällt, d. h. sie entfernt oder nähert sich der Abscissenlinie in einem Puncte, je nachdem ihre Ordinate y bey zunehmender Abscisse x größer oder kleiner wird, je nachdem also (§. 694.) für einen positiven Werth des Differenzials dx der Abscisse das Differenzial dy der Ordinate, folglich auch der Differenzial-Quotient $\frac{dy}{dx}$ der Ordinate, oder die Tangente der Neigung der krummen Linie positiv oder negativ aus-
194. fällt. Dieß bestätigt eine einfache Ansicht der Fig. 194., denn übergeht die Abscisse aus AP in Ap und die Ordinate PM in die größere pm, so schneidet die Tangente MT die Abscissenlinie NS in T auf derselben Seite von P, auf welcher A liegt, folglich wird der Neigungswinkel $\omega = MTP$ spitzig und tang ω positiv, während, wenn pm kleiner als PM wäre, die Tangente MT die Abscissenlinie auf der anderen Seite von P schneiden und einen stumpfen Neigungswinkel ω hervorbringen würde, dessen Tangente negativ wäre.

Man sagt von einer krummen Linie, daß sie an einem bestimmten Puncte concav oder convex gegen die Abscissenlinie liege, je nachdem an diesem Puncte das Differenzial des Bogens zwischen oder außerhalb der Tangente und der Abscissenlinie liegt.

So z. B. ist die krumme Linie bey M in Fig. 194 concav, in Fig. 188 aber convex gegen die Linie AP. Fig. 194. 188.

Aus dieser Erklärung erhellet, daß, wenn wir zu der Ordinate $PM = y$ dies- oder jenseits derselben in einer sehr geringen Entfernung $Pp = \alpha$ noch eine zweyte Ordinate pm parallel ziehen und sie bis an die Tangente in U verlängern, der Abschnitt mU positiv oder negativ ausfalle, je nachdem die Linie BM concav oder convex ist.

Es sey nun, wenn wir $AP = x$ annehmen, $y = f(x)$ die Gleichung der krummen Linie, so ist die Ordinate der Curve

$$y_{,} = f(x+\alpha) = f(x) + \alpha f'(x) + \frac{\alpha^2}{1.2} f''(x) + \frac{\alpha^3}{1.2.3} f'''(x) + \ldots$$

Zugleich wird, wenn die Gerade MT die Krumme in M berührt,

$$\text{tang MTP} = \text{tang}\,\omega = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

und die Ordinate der Tangente

$$= y_{,,} = Tp\,\text{tang}\,\omega = (y\frac{dx}{dy} + \alpha)\frac{dy}{dx} = y + \alpha f'(x),$$

folglich übersteigt die Ordinate der Tangente jene der Curve um

$$(22) \qquad y_{,,} - y_{,} = -\frac{\alpha^2}{1.2} f''(x) - \frac{\alpha^3}{1.2.3} f'''(x) \ldots.$$

Da nun die Länge $y_{,,} - y_{,}$ für die kleinsten Werthe von α mit dem ersten Gliede $-\frac{\alpha^2}{1.2} f''(x)$ einerley Zeichen annimmt, so fällt sie positiv oder negativ aus, und die Linie ist concav oder convex gegen die Abscissenlinie, je nachdem $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$ oder auch bloß das zweyte Differenzial d^2y der Ordinate negativ oder positiv ist.

Man kann sich von der Richtigkeit dieses Kennzeichens dadurch überzeugen, daß, wie man mit Hülfe einer einfachen Figur aus obiger Erklärung leicht folgern kann, die unendlich kleine Zunahme oder das Differenzial des Neigungswinkels ω der krummen Linie bey zunehmender Abscisse negativ oder positiv, bey

Fig. abnehmender Abscisse aber umgekehrt positiv oder negativ, folglich der Quotient $\frac{d\omega}{dx}$ negativ oder positiv ausfällt, je nachdem die Linie concav oder convex gegen die Abscissenlinie liegt.

Nun ist aber (Gl. 17.)

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

daher bewährt es sich auch hier, daß die Concavität der Linie aus dem negativen, ihre Convexität aber aus dem positiven Zeichen des Differenzials d^2y gefolgert werden könne.

Hieraus ersehen wir zugleich, daß dem für den Krümmungshalbmesser gefundenen Ausdrucke

$$R = -\left(\frac{ds}{dx}\right)^3 : \frac{d^2y}{dx^2}$$

gemäß bey concaver Stellung der Linie gegen die Abscisse der Krümmungshalbmesser positiv, bey convexer aber negativ sey, wenn der Bogen und die Abscisse zugleich wachsen.

So ist z. B. bey der Parabel $y^2 = 2px$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y^3},$$

bey der Cycloide

$$y = \sqrt{2x - x^2} + \text{arc sinv } x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x\sqrt{2x - x^2}};$$

folglich liegen diese Linien concav gegen ihre Abscisse.

Dagegen ist bey der gleichseitigen Hyperbel $xy = 1$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{x^3},$$

bey der Logistik

$$y = h^{\frac{x}{a}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{h^{\frac{x}{a}}}{a^2};$$

sonach zeigen diese Linien der Abscissenlinie ihren convexen Theil.

Fig.

Von den besonderen Puncten der krummen Linien.

§. 705.

Mit diesem Nahmen belegt man jene Puncte, in denen die krummen Linien einen bemerkenswerthen Umstand darbiethen. Dergleichen Puncte sind:

1.) Diejenigen, in denen die Ordinate der krummen Linie den größten oder kleinsten Werth erreicht; z. B. M, M′, N, Fig. 198. 198.

2.) Jene Puncte, in welcher die krumme Linie aus der concaven Stellung gegen die Abscissenlinie in die convexe oder umgekehrt übertritt: Wendungs- oder Biegungspuncte; z. B. B, C′, Fig. 198; M Fig. 201. 198. 201.

3.) Puncte, wo die krumme Linie plötzlich endigt und nach einer anderen Richtung zurückkehrt: Rückkehrpuncte, Spitzen oder Schnäbel; z. B. M Fig. 199 und 200. 199. 200.

4.) Puncte, durch welche die krumme Linie mehrere Mahle geht: vielfache Puncte: z. B. A Fig. 174. 174.

5.) Puncte endlich, welche zwar von der Linie ganz getrennt sind, aber doch die ihren übrigen Puncten gemeinsamen Eigenschaften besitzen: beygeordnete, conjugirte Puncte.

Wir wollen das Nothwendigste von diesen Puncten in Kürze erwähnen.

I. Puncte der größten und kleinsten Ordinaten.

Soll bey einer krummen Linie die Ordinate eines Punctes am größten oder kleinsten ausfallen, so kann dieses nur gedacht werden, wenn die an diesen Punct gelegte Tangente entweder zur Abscissenlinie parallel läuft, wie in M, M′, N, Fig. 198, oder auf ihr senkrecht steht, wie in Fig. 199 und 200. 198. 199. 200.

Es muß demnach die Neigung ω an diesen Puncten entweder Null oder 90°, folglich $\tang \omega$ oder $\frac{dy}{dx}$ entweder $= 0$ oder $= \infty$

Fig. seyn. Man wird daher jene Abscissen aufzusuchen haben, für welche die Gleichungen

$$(23) \qquad \frac{dy}{dx} = 0\,, \qquad \frac{dx}{dy} = 0$$

bestehen.

Allein nicht allen so gefundenen Abscissen gehört unbedingt
201. eine größte oder kleinste Ordinate an; denn so ist in Fig. 201 bey
200. M die Tangente zur Abscissenlinie AP, in Fig. 200 aber zur Abscissenlinie AB parallel, ohne daß die Ordinate des Punctes M
175. eine größte ist; eben so steht in Fig. 175 und 201 bey A und M
201. die Tangente auf der Abscissenlinie DS und AQ senkrecht, ohne daß an diesen Stellen größte Ordinaten vorhanden sind.

An den Stellen, wo die krumme Linie in der That eine größte Ordinate hat, und die Tangente zur Abscissenlinie parallel
198. läuft, (wie bey M und N Fig. 198.) muß die krumme Linie gegen die Abscissenachse concav liegen, folglich nach (§. 704.) $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ seyn, und umgekehrt muß da, wo die krumme Linie eine kleinste Ordinate besitzt, und die Tangente ebenfalls zur Abscissenachse parallel läuft, (wie bey M′ in Fig. 198.) die krumme Linie gegen die Abscissenlinie convex liegen, folglich $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv seyn. Steht aber an einem Orte, wo die krumme Linie eine größte oder kleinste Ordinate zuläßt, die Tangente auf der Abscissenlinie
199. senkrecht, wie in Fig. 199 und 200 bey M, so bildet die Linie
200. jederzeit eine Spitze, und man hat demnach die krumme Linie vor und hinter diesem Puncte rücksichtlich des Steigens oder Fallens insbesondere zu untersuchen.

Da jede Function einer einzigen Veränderlichen als die Ordinate einer krummen Linie angesehen werden kann, (§. 624.) so würden wir durch diese Betrachtungen allein schon nach dem Beyspiele älterer Mathematiker die Lehre von der Bestimmung der größten und kleinsten Werthe solcher Functionen begründen können, wenn dieses nicht bereits (§. 694.) auf rein analytischem Wege geschehen wäre.

So erhält die Ellipse Fig.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

für $x = 0$ ihre größte Ordinate b;
die Lemniscate $y^2 = x^2(1-x^2)$
für $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ die größte Ordinate $\frac{1}{2}$;
die Muschellinie (§. 623.) $y = \frac{1}{1+x^2}$
für $x = 0$ die größte Ordinate 1;
die Sinuslinie $y = a \sin x$

$$\text{für } x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm 3\frac{\pi}{2}, \pm 5.\frac{\pi}{2}, \ldots\ldots \pm n\frac{\pi}{2}$$

die größte Ordinate a.

II. Die Wendungspuncte. Soll eine krumme Linie bey einem Wendungspuncte die Concavität und Convexität gegen die Abscissenlinie verwechseln, so muß der zweyte Differenzial-Quotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ aus dem positiven in den negativen Zustand, oder umgekehrt, folglich durch 0 oder ∞ gehen.

Man wird demnach zur Bestimmung dieser Puncte aus der Gleichung der krummen Linie den Differenzial-Quotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$ ableiten und jene Werthe von x suchen, welche den Gleichungen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \qquad \frac{dx^2}{d^2y} = 0$$

genügen.

Hat man auf diese Weise $x = a$ und $y = b$ gefunden, so kann dieser Punct der Linie ein Wendungspunct seyn; man muß aber, um zu untersuchen, ob dieses wirklich statt finde, den Lauf der krummen Linie dadurch erforschen, daß man in dem gefundenen zweyten Differenzial-Quotienten für x die Werthe $a+\alpha$ und $a-\alpha$ setzt und nachsieht, ob bey den kleinsten Werthen von α dieser Differenzial-Quotient in der That entgegengesetzte Zeichen erhält, da bloß in diesem Falle ein wirklicher Uebertritt aus

Fig. der concaven Lage in die convexe oder umgekehrt statt findet, folglich der gefundene Punct ein Wendungspunct ist.

So gibt die Linie

$$y = b + c(x - a)^{\frac{3}{5}}$$

die Differenzial-Quotienten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{5} c(x-a)^{-\frac{2}{5}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6}{25} c(x-a)^{-\frac{7}{5}} = -\frac{6c}{25(x-a)^{\frac{7}{5}}}.$$

Nimmt man nun, was hier allein zulässig ist,

$$\frac{dx^2}{d^2y} = 0,$$

so wird $x = a.$

Zugleich erhält man für $x = a + \alpha$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6c}{25\alpha^{\frac{7}{5}}}$$

essentiell negativ, und für $x = a - \alpha$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6c}{25\alpha^{\frac{7}{5}}}$$

essentiell positiv, folglich ist der Punct, für welchen $x = a$ und $y = b$ ist, ein Wendungspunct.

Eben so findet man für den Wendungspunct der Linie

$$y = x + (x - a)^{\frac{5}{3}}$$

die Coordinaten $x = a, \quad y = a.$

III. Die Rückkehrpuncte oder Spitzen. Soll ein Punct eine Spitze seyn, so müssen in ihm wenigstens zwey Aeste sich vereinigen, eine gemeinschaftliche Tangente und Normale besitzen, und nur auf der einen Seite dieser Normale liegen. Verlegt man den Ursprung der Coordinaten in diesen Rückkehrpunct und die Abscissenachse in die Richtung der gemeinschaftlichen

Tangente, so können in der dadurch abgeänderten Gleichung der Fig
Linie die kleinsten Werthe der Abscisse x entweder bloß positiv oder bloß negativ seyn, und die Ordinate y, so wie der Neigungswinkel ω der krummen Linie muß für $x = 0$ bloß den einzigen Werth 0, für jeden andern zulässigen sehr kleinen Werth von x aber mehrere Werthe erhalten.

So ist z. B. bey der Cyssois die Gleichung

$$y = x\sqrt{\frac{x}{a-x}},$$

und diese zeigt, daß x nur positiv seyn kann, daher hat man

$$\text{tang}\,\omega = \frac{dy}{dx} = \frac{(3a-2x)x^{\frac{1}{2}}}{2(a-x)^{\frac{3}{2}}},$$

woraus man ersieht, daß für $x = 0$ auch $\omega = 0$ ist, und zu jedem äußerst geringen Werthe von x, zwey Winkel $+\omega$ und $-\omega$ gehören. Es ist also der Ursprung der Coordinaten eine Spitze der Cyssois.

Eben so findet man, daß dieser Punct auch in der Muschellinie eine Spitze ist, wenn $b = a$, folglich ihre Gleichung

$$y = x\sqrt{\frac{2ax-x^2}{a-x}}$$

wird; ferner daß die Cycloide, deren Gleichung

$$y = \sqrt{2x-x^2} + \text{arc sinv}\,x$$

für $x = 2$ die Ordinaten

$$y = \pm\pi\,,\quad \pm 3\pi\,,\quad \pm 5\pi\,,\ \ldots$$

darbiethet, in allen den unzähligen Puncten, wie D, E, ... in welchen sie die Grundlinie DE trifft, Spitzen bildet.

IV. Die vielfachen Puncte. Ein vielfacher und nahmentlich ein zwey- drey- oder vierfacher Punct befindet sich da, wo zwey, drey, vier, oder mehrere Aeste der krummen Linie sich vereinigen, ohne dieselbe Tangente zu besitzen. So ist der Ursprung der Coordinaten bey der Lemniscate

$$y^2 = x^2(1-x^2)\,,$$

Fig. deren einzelne Aeste die Gleichungen

$$y = +x\sqrt{1-x^2}, \quad y = -x\sqrt{1-x^2}$$

besitzen, und von zwey durch den Ursprung der Coordinaten gehenden Geraden

$$y = -x \text{ und } y = +x$$

berührt werden, ein zweyfacher Punct.

Eben so ist der Ursprung der Coordinaten auch in den Linien

$$(y - x \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{x})^2 = x^2 \cos x$$

$$(y^2 - x^2)^2 = x^4 \sin x$$

ein vielfacher Punct.

V. Die conjugirten Puncte. Da die Coordinaten dieser Puncte zwar auch der Gleichung der krummen Linie Genüge leisten, aber die Puncte selbst von der krummen Linie ganz getrennt sind, so muß, wenn die Abscisse eines solchen Punctes $x = a$ ist, seine Ordinate $y = b$ reell ausfallen; allein für jeden noch so nahe an a liegenden Werth von x muß y imaginär werden. So ist in

der Muschellinie $y = x\sqrt{\left(\frac{b}{x-a}\right)^2 - 1}$,

wenn $b < a$ ist, der Ursprung der Coordinaten,

in der Linie $y = (x+a)\sqrt{x}$,

der Punct $x = -a, \quad y = 0$,

in der Linie $y = b + (x-a)^3\sqrt{x-2a}$

der Punct $x = a, \quad y = b$,

ein conjugirter Punct.

Von den Evoluten der krummen Linien.

§. 706.

I. Aus der über die Bestimmung der Krümmung der krummen Linien gepflogenen Untersuchung ist deutlich zu ersehen, daß jedem Puncte der krummen Linie ein eigener Krümmungsmittelpunct zugehöre, und daß der Inbegriff aller Krümmungsmittelpuncte eine mit der gegebenen krummen Linie im engsten Zusam-

menhange stehende Linie seyn müsse. Diese Linie, welche die Mittelpunctscurve genannt zu werden pflegt, wollen wir nun etwas näher kennen lernen. Fig.

Es sey hiezu (Fig. 196.) AM irgend eine krumme Linie, AP = x die Abscisse, PM = y die Ordinate, AM = s der Bogen, MC = R der Krümmungshalbmesser und ω die Neigung an dem Puncte M. Für den correspondirenden Punct C ihrer Mittelpunctscurve BC sey BQ = x, die Abscisse, QC = y, die Ordinate, BC = s, der Bogen, und ω, die Neigung gegen BQ; zugleich werde AB = a gesetzt. Verlängern wir MP und CQ bis zu ihrem Vereinigungspuncte G, so ist in dem rechtwinkeligen Dreyecke MGC der Winkel GMC = ω, daher 196.

$$CG = R \sin\omega \ , \quad MG = R \cos\omega.$$

Es ist aber auch

$$CG = CQ + BP = CQ + AB - AP = y, + a - x$$
$$MG = MP + GP = MP + BQ = y + x,$$

folglich

(24) $$y, + a - x = R \sin\omega$$

(25) $$y + x, = R \cos\omega.$$

II. Diese Gleichungen lehren uns den merkwürdigen Zusammenhang zwischen der krummen Linie AM und ihrer Mittelpunctscurve BC.

Denn differenziren wir dieselben und beachten, daß (nach §. 701. Gl. 15.)

$$R d\omega = - ds$$

ist, so ergibt sich

$$dy, - dx = \sin\omega \, dR - \cos\omega \, ds$$
$$dx, + dy = \cos\omega \, dR + \sin\omega \, ds.$$

Allein nach §. 699. Gl. 5 und 6 ist

$$dx = \cos\omega \, ds \ , \quad dy = \sin\omega \, ds \ ,$$

daher auch

(26) $$dy, = \sin\omega \, dR$$

(27) $$dx, = \cos\omega \, dR.$$

Fig. 196. Dividirt man die erste dieser Gleichungen durch die zweyte, so wird

$$\frac{dy_{,}}{dx_{,}} = \text{tang}\,\omega \;; \tag{28}$$

woraus, da nach §. 699. Gl. (7)

$$\frac{dy_{,}}{dx_{,}} = \text{tang}\,\omega_{,},$$

ist, sogleich $\text{tang}\,\omega_{,} = \text{tang}\,\omega$,

und weil beyde Winkel unter 180^{0} liegen,

$$\omega_{,} = \omega \tag{29}$$

folgt.

Quadrirt man aber die Gleichungen (26), (27), und zieht aus ihrer Summe die zweyte Wurzel, so wird

$$dR = \pm\sqrt{dx_{,}^{2} + dy_{,}^{2}}$$

oder, weil (nach §. 699. Gl. 1.)

$$dx_{,}^{2} + dy_{,}^{2} = ds_{,}^{2} \;,$$

ist, auch

$$dR_{,} = \pm\, ds_{,}.$$

Bemerken wir überdieß, daß nach der Anlage unserer Zeichnung der Krümmungshalbmesser MC mit dem Bogen BC wächst, so muß in unserem Falle

$$dR = ds_{,} \tag{30}$$

seyn.

Aus der Gleichung (29) läßt sich nun deutlich entnehmen, daß der dem Puncte M angehörige Krümmungshalbmesser MC der gegebenen krummen Linie AM die Mittelpunctscurve BC in dem Krümmungsmittelpuncte C des Punctes M berühre; so wie man aus der Gleichung (30) erkennt, daß der Krümmungshalbmesser MC mit dem Bogen BC der Mittelpunctscurve um gleichviel zunimmt. Denkt man sich daher an dieser Linie BC, vorausgesetzt, daß sie weder unstetig ist, noch einen Wendungspunct oder eine Spitze hat, einen vollkommen biegsamen, unausdehnbaren und gleichförmig dicken Faden CBA angelegt, und diesen, indem man bey gleicher Spannung desselben sein Ende A fortbewegt, allmählig von der Linie BC abgewickelt, so wird sein geradliniger Theil in jeder seiner Lagen, wie etwa

in MC die Linie BC berühren und der Krümmungshalbmesser derjenigen Linie AM seyn, welche der Endpunct A des Fadens beschreibt. Weil man sich demnach die Linie AM durch Abwickelung ihrer Mittelpunctscurve BC erzeugt denken kann, so pflegt man auch die Linie AM die abwickelnde Linie oder die Evolvente, ihre Mittelpunctscurve BC aber die abgewickelte oder Evolute zu nennen. Fig. 196.

III. Aus der Gleichung der Evolvente, die wir durch

(31) $$f(x, y) = 0$$

vorstellen wollen, läßt sich mit Hülfe der Differenzial-Rechnung die Gleichung der Evolute im Allgemeinen ohne Schwierigkeit finden.

Setzen wir nähmlich in den gefundenen Gleichungen (24) und (25) die Werthe (§. 699. 701.)

$$R = -\frac{ds^3}{dx\,d^2y}, \quad \sin\omega = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\omega = \frac{dx}{ds},$$

so übergehen sie in

(32) $$y, + a - x + \frac{ds^2}{d^2y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

(33) $$x, + y + \frac{ds^2}{d^2y} = 0.$$

Man wird demnach zur Ausmittelung der Gleichung der Evolute aus der gegebenen Gleichung (31) der Evolvente die durch dx ausgedrückten Werthe von dy, d^2y, ds bestimmen, in die beyden andern Gleichungen (32) und (33) substituiren, aus den so erhaltenen von allen Differenzialen befreyten drey Gleichungen die Größen x und y eliminiren und so zu der, nur die Coordinaten x, und y, enthaltenden, Gleichung der Evolute gelangen; wie dieses durch folgende Beyspiele klar werden soll.

1.) Sucht man die Evolute der gemeinen oder Apollonischen Parabel

$$y^2 = 2px, \qquad (\alpha)$$

so findet man aus ihr

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y^3}, \quad \frac{ds^2}{dx^2} = 1 + \frac{p^2}{y^2},$$

Fig. 196. daher übergehen die Gleichungen (32) und (33) in

$$y_1 + a - x - \frac{y^2}{p} - p = 0 \qquad (\beta)$$

und

$$x_1 - \frac{y^3}{p^2} = 0. \qquad (\gamma)$$

Eliminirt man nun x aus (α) und (β), so wird

$$y_1 + a - p = \frac{3}{2}\frac{y^2}{p},$$

und wenn man hierin den aus (γ) folgenden Werth

$$y = p^{\frac{2}{3}} x_1^{\frac{1}{3}}$$

substituirt, so erscheint

$$y_1 + a - p = \frac{3}{2} p^{\frac{1}{3}} x_1^{\frac{2}{3}}$$

als Gleichung der Evolute der Parabel.

Setzen wir ferner die willkührliche Constante $a = p$, so nimmt diese Gleichung die einfache Form

$$y_1 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{px_1^2}, \quad \text{oder} \quad y_1^3 = \frac{27}{8} px_1^2$$

an.

Die Evolute der gemeinen Parabel ist also die von Neil zuerst untersuchte cubische Parabel

$$y^3 = \frac{27}{8} px^2.$$

2.) Bey der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

findet man die Hülfsgleichungen, falls man in ihnen die Constante $a = 0$ setzt,

$$y_1 = x\left(1 - \frac{b^4x^2 + a^4y^2}{a^4b^2}\right) = \frac{a^2 - b^2}{a^4} x^3$$

$$x_1 = -y\left(1 - \frac{b^4x^2 + a^4y^2}{a^2b^4}\right) = \frac{a^2 - b^2}{b^4} y^3,$$

folglich

$$\frac{x}{a} = \left(\frac{ay_1}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{y}{b} = \left(\frac{bx_1}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

und sonach die Gleichung der Evolute der Ellipse Fig.

$$\left(\frac{x_{,}}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y_{,}}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}},$$

oder wenn man die halben Parameter der großen und kleinen Achse mit p und P bezeichnet,

$$\left(\frac{x}{P-b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{a-p}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

3.) Für die Cycloide (Fig. 197. §. 672.) 197.

$$y=\sqrt{2x-x^2}+\text{arc sinv}\,x$$

ergeben sich die Hülfsgleichungen

$$y_{,}+a-4+x=0$$

$$x_{,}+y-2\sqrt{2x-x^2}=0.$$

Nehmen wir nun $a=4$, d. h. verlegen wir den Ursprung der Coordinaten der Evolute nach D′, so wird

$$x=-y_{,},$$

also auch

$$y=\sqrt{-2y_{,}-y_{,}^2}+\text{arc sinv}\,(-y_{,}),$$

und

$$x_{,}=\sqrt{-2y_{,}-y_{,}^2}-\text{arc sinv}\,(-y_{,}),$$

oder wenn wir die positiven Abscissen und Ordinaten auf die entgegengesetzte Seite verlegen, also $x_{,}$ in $-x_{,}$ und $y_{,}$ in $-y_{,}$ verwandeln,

$$x_{,}=\sqrt{2y_{,}-y_{,}^2}-\text{arc sinv}\,y_{,}.$$

Dieses Resultat läßt uns (nach §. 672.) folgern, daß die Evolute der Cycloide AMA′ eine andere ihr vollkommen gleiche Cycloide D′M′A′ ist, deren Scheitel A′ und Grundlinie B′D′ ist.

Von der Richtigkeit dieses Ergebnisses kann man sich durch die Betrachtung der Fig. 197 überzeugen. Denn ist M′M der Krümmungshalbmesser, so läuft er (§. 700.) zur Sehne BQ parallel und gleicht dem Doppelten derselben, daher ist

$$CM'=CM=BQ.$$

Fig. 197. Beschreibt man über der in A′ auf A′B errichteten Senkrechten A′B′ = AB den Halbkreis A′Q′B′, zieht A′Q′ zu BQ parallel, und die Gerade M′Q′P′; so ist der Winkel

$$Q'A'B = QBA',$$

also auch $\text{arc } A'Q' = \text{arc } BQ$

und die Sehne $A'Q' = BQ = MC = CM',$

daher ist (§. 386.) A′CM′Q′ ein Parallelogramm, folglich Q′M′ = A′C, und M′P′ auf A′B′ senkrecht. Es ist aber auch (§. 672.)

$$\text{arc } AQ = QM = BC,$$

$$\text{arc } AQB = BA',$$

also $\text{arc } BQ = A'C,$

folglich auch $\text{arc } A'Q' = Q'M'$ und sofort A′M′D′ (nach §. 672.) eine Cycloide.

Benützung der Polar-Coordinaten zur Untersuchung der krummen Linien.

§. 707.

I. Bedient man sich zur Untersuchung einer Linie AMm (Fig. 195.) der Polar-Coordinaten, so werden die Subtangente und die Subnormale auf der in dem Pole auf dem Radiusvector BM errichteten Senkrechten gezählt, nähmlich es ist

195.

BT = t die Subtangente,

MT = T die Tangente,

BN = n die Subnormale,

MN = N die Normale des Punctes M.

Um diese Linien durch die Polar-Coordinaten

$$ABM = \varphi, \quad BM = r$$

auszudrücken, übergehen wir von dem Puncte M der krummen Linie auf den unendlich nahen m, so daß der Polarwinkel φ um den unendlich kleinen Winkel MBm = dφ, der Radiusvector r um die unendlich kleine Länge Rm = dr, endlich der Bogen AM = s um sein Element Mm = ds zunimmt, und man den aus B mit BM beschriebenen Kreisbogen MR für eine aus M auf Bm gefällte senkrechte gerade Linie, das Differen-

zial Mm des Bogens aber in der Richtung der Tangente liegend annehmen kann. Fig. 195.

Bezeichnen wir mit λ den Winkel BTM, welchen die auf dem Radiusvector errichtete Senkrechte mit der Tangente bildet, so ist

$$TMB = 90^0 - \lambda;$$

liegt ferner Mm in der Richtung der Tangente, so kann auch der Winkel

$$MmR = TMB = 90^0 - \lambda$$

gesetzt werden, weil ihr Unterschied (nach §. 379.) nur der unendlich kleine Winkel $MBm = d\varphi$ ist; dann wird $RMm = \lambda$, folglich ist das karakteristische Dreyeck MRm den rechtwinkeligen Dreyecken MBT und MBN ähnlich.

II. Nun ist, wenn wir die Längen der mit dem Halbmesser $BP = 1$ beschriebenen Bogen statt der Polarwinkel in die Rechnung nehmen,

$$MR : Pp = BM : BP,$$

also

$$MR = r d\varphi;$$

daher in dem rechtwinkeligen Dreyecke MRm

$$Mm^2 = MR^2 + Rm^2,$$

nähmlich

$$ds^2 = r^2 d\varphi^2 + dr^2, \tag{34}$$

oder wenn wir den Polarwinkel φ als die absolut veränderliche Größe ansehen und

$$\frac{dr}{d\varphi} = r', \quad \frac{ds}{d\varphi} = s'$$

setzen,

$$s'^2 = r^2 + r'^2. \tag{35}$$

Ferner findet man aus demselben Dreyecke

$$\cos\lambda = \frac{r d\varphi}{ds} = \frac{r}{s'}, \tag{36}$$

$$\sin\lambda = \frac{dr}{ds} = \frac{r'}{s'}, \tag{37}$$

$$\operatorname{tang}\lambda = \frac{dr}{r d\varphi} = \frac{r'}{r}. \tag{38}$$

Fig. 195. Die Aehnlichkeit der Dreyecke MmR, MBT und MBN liefert ferner die Ausdrücke

$$(39) \qquad t = \frac{r^2 d\varphi}{dr} = \frac{r^2}{r'}, \qquad T = \frac{r ds}{dr} = \frac{r s'}{r'}$$

$$n = \frac{dr}{d\varphi} = r', \qquad N = \frac{ds}{d\varphi} = s'.$$

III. Bezeichnen wir nun noch mit ω den Winkel, welchen die Tangente MT mit der Polarachse AB bildet, so ist, wie man leicht sieht,

$$\omega = ABM + BMT = \varphi + 90^0 - \lambda,$$

also auch

$$(40) \qquad \omega = \varphi + \text{arc tang}\frac{r}{r'} = \varphi + \text{arc tang}\frac{r d\varphi}{dr}$$

und

$$(41) \qquad \text{tang}\,(\omega - \varphi) = \frac{r d\varphi}{dr} = \frac{r}{r'}.$$

Eben so findet man den (senkrechten) Abstand P der Tangente von dem Pole

$$P = BT \cdot \sin BTM = t \sin \lambda$$

nähmlich

$$(42) \qquad P = \frac{r^2 d\varphi}{ds} = \frac{r^2}{s'}.$$

Setzt man demnach in der Gleichung der krummen Linie $r = \infty$, sucht den zugehörigen Werth von φ, und substituirt beyde in den Ausdrücken

$$(41) \quad \text{tang}(\omega - \varphi) = \frac{r d\varphi}{dr} \quad \text{und} \quad (42) \quad P = \frac{r^2 d\varphi}{ds};$$

so wird die krumme Linie, wenn P und ω endlich und reell ausfallen, eine Asymptote besitzen, welche um die Größe P von B absteht, und gegen die Polarachse unter dem Winkel ω geneigt ist.

IV. Stellen wir ferner den Krümmungshalbmesser MC durch R und den Contingenzwinkel MCm durch ε vor, so ist, wie in §. 701.

$$R = \frac{ds}{\varepsilon}.$$

Allein eine einfache Betrachtung zeigt, daß hier Fig. 195.

$$\varepsilon = d\omega$$

ist; daher erhalten wir

$$R = \frac{ds}{d\omega}. \tag{43}$$

Differenziren wir nun die Gleichung

$$\omega = \varphi + \text{arc tang}\frac{r d\varphi}{dr}, \tag{40}$$

indem wir $d\varphi$ für constant ansehen, so wird

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = 1 + \frac{dr^2 - rd^2r}{dr^2 + r^2 d\varphi^2} = \frac{2dr^2 + r^2 d\varphi^2 - rd^2r}{ds^2},$$

folglich auch

$$R = \frac{ds^3}{r^2 d\varphi^3 + 2dr^2 d\varphi - rd^2r d\varphi} = \frac{s'^3}{r^2 + 2r'^2 - rr''}. \tag{44}$$ *)

---

*) Dieser Ausdruck des Krümmungshalbmessers kann auch durch folgende Betrachtung gewonnen werden. Fällen wir (Fig. 195.) aus dem Krümmungsmittelpuncte C die Gerade CG auf BM senkrecht und setzen $GM = u$, $CG = v$, so wird

$$CM = \frac{GM \cdot Mm}{RM} \text{ oder } R = u \cdot \frac{ds}{rd\varphi} \tag{1}$$

Allein wenn wir von dem Puncte M auf den unendlich nahen m übergehen, so dürfen wir den Krümmungshalbmesser für unveränderlich ansehen, folglich

$$dR = 0$$

oder

$$du \cdot \frac{ds}{rd\varphi} + u \cdot d\frac{ds}{rd\varphi} = 0 \tag{2}$$

setzen.

Ferner ist $CG = \frac{GM \cdot mR}{MR}$, oder $v = u\frac{dr}{rd\varphi}$,

daher

$$dv = du \cdot \frac{dr}{rd\varphi} + u \cdot d\frac{dr}{rd\varphi}.$$

Die Zunahme dv von $CG = v$ ist aber $= -Gg$, und da man den unendlich kleinen Kreisbogen Pp auch für eine auf BM senkrecht errichtete Gerade annehmen kann, so hat man

$$Gg = \frac{Pp \cdot BG}{BP} = (r - u)\,d\varphi,$$

folglich

$$dv = -(r - u)\,d\varphi,$$

und

$$du \cdot \frac{dr}{rd\varphi} + u\left(d\cdot\frac{dr}{rd\varphi} - d\varphi\right) = -rd\varphi. \tag{3}$$

Fig. V. Die krumme Linie wird sich von dem Pole entfernen, wenn bey zunehmendem Polarwinkel φ der Radiusvector r wächst, also dr positiv ist; die Linie wird dem Pole ihre concave oder convexe Seite zuwenden, je nachdem $d\omega$ oder

$$(45) \qquad r^2 + \frac{2dr^2}{d\varphi^2} - \frac{rd^2r}{d\varphi^2} \quad \text{oder} \quad r^2 + 2r'^2 - rr''$$

positiv oder negativ ausfällt.

VI. Endlich findet man den Ort des größten Abstandes der krummen Linie vom Pole mittelst der Gleichungen

$$(46) \qquad \frac{dr}{d\varphi} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dr} = 0,$$

und die Wendungspuncte mit Hülfe der Gleichungen

$$(47) \qquad r^2 + 2r'^2 - rr'' = 0, \quad \frac{1}{r^2 + 2r'^2 - rr''} = 0.$$

Wir wollen das hier Erlernte auf einige Beyspiele anwenden.

1.) Der Kreislinie gehört (§. 620.) die Polargleichung

$$r = a$$

zu, folglich ist

$$r' = \frac{dr}{d\varphi} = 0,$$

$$s' = r = a, \quad \sin\lambda = 0, \quad \cos\lambda = 1, \quad \lambda = 0,$$

$$t = \infty, \quad n = 0, \quad T = \infty, \quad N = a, \quad R = a.$$

Die Tangente steht demnach auf dem Halbmesser senkrecht, und die Normale endigt sich in dem Mittelpuncte.

2.) Bey der Parabel (§. 629.) ist

$$r = \frac{p}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi},$$

Eliminirt man nun aus den Gleichungen (1), (2), (3) die Größen u und du, so findet man

$$R = \frac{ds^2}{drd.\frac{ds}{rd\varphi} - ds\,d.\frac{dr}{rd\varphi} + d\varphi ds},$$

woraus man nach Vollendung aller Reductionen den obigen Ausdruck (44) von R erhält.

Fig.

also $r' = \frac{dr}{d\varphi} = r \tang \frac{1}{2}\varphi$, $s' = \frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{r^2 + r'^2} = \frac{r}{\cos \frac{1}{2}\varphi}$,

$$\tang \lambda = \tang \tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\varphi,$$

und $$\omega = 90^0 + \tfrac{1}{2}\varphi.$$

Hieraus finden wir $d\omega = \frac{1}{2} d\varphi$,

und $$R = \frac{ds}{d\omega} = 2\frac{ds}{d\varphi},$$

demnach $$R = 2s' = \frac{2r}{\cos \frac{1}{2}\varphi} = \frac{p}{\cos^3 \frac{1}{2}\varphi}.$$

3.) Für die lineäre Spirale (§. 673.)

$$r = \varphi$$

findet man

$$r' = 1, \quad r'' = 0, \quad s' = \sqrt{1 + \varphi^2},$$

$$\tang \lambda = \frac{1}{\varphi}, \quad \cot \lambda = \varphi = r,$$

$$R = \frac{(1 + \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{2 + \varphi^2}.$$

4.) Für die hyperbolische Spirale (§. 673.)

$$r\varphi = 1, \text{ oder } r = \frac{1}{\varphi}$$

ergibt sich

$$r' = -\frac{1}{\varphi^2} = -r^2, \quad s' = r\sqrt{1 + r^2};$$

daher ist

$$\tang (\omega - \varphi) = -\frac{1}{r}, \quad P = \frac{r}{\sqrt{1 + r^2}}.$$

Setzen wir nun $r = \infty$, so wird $\varphi = 0$,

also $$\tang \omega = 0, \quad \omega = 180^0 \text{ und } P = 1,$$

folglich besitzt diese Spirale eine in dem Abstande 1 zur Polarachse parallel laufende Asymptote.

Fig. 5.) Bey der logarithmischen Spirale ist §. 673.

$$r = h^{\frac{\varphi}{a}},$$

daher $$r' = \frac{h^{\frac{\varphi}{a}}}{a} = \frac{r}{a},$$

und $$\text{tang}\,\lambda = \frac{r'}{r} = \frac{1}{a}, \text{ somit } \cot\lambda = a.$$

Bey der logarithmischen Spirale ist demnach der Winkel, welchen der Radiusvector mit der Tangente bildet, unveränderlich.

B. Anwendung der Differenzial-Rechnung zur Bestimmung der größten und kleinsten Werthe von Raumgrößen.

§. 708.

In vielen interessanten geometrischen Aufgaben wird die Bestimmung des Größten oder Kleinsten von Linien, Flächen oder Körpern gefordert. Alle diese Aufgaben wird man leicht auflösen, wenn man diejenige Raumgröße, welche ein Maximum oder Minimum darbiethen soll, als Function der sie bestimmenden und als veränderlich betrachteten Größen darstellt, und von dieser Function nach §. 694 oder 696 die größten oder kleinsten Werthe bestimmt. Uebrigens wird hier oft schon eine einfache Untersuchung der Bedingungen der Aufgabe und der Natur der in Betrachtung zu ziehenden Raumgrößen entscheiden, ob man ein Maximum oder ein Minimum gefunden habe.

202. 1. Aufgabe. Man soll (Fig. 202.) aus einem Kreisausschnitte ACB den Mantel eines geraden Kegels bilden, und dabey die Länge des Bogens AB so wählen, daß der Inhalt des Kegels ein Größtes werde.

Es sey der Halbmesser AC = BC = 1, die Länge des Bogens AB = x, so ist der Umfang der Grundfläche des zu bilden-

den Kegels $= x$, daher ihr Halbmesser $= \frac{x}{2\pi}$, die Höhe des Kegels $= \sqrt{(1 - \frac{x^2}{4\pi^2})}$, und der Cubikinhalt Fig. 202.

$$K = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{4\pi} \sqrt{(1 - \frac{x^2}{4\pi^2})},$$

welcher Ausdruck ein Größtes werden soll.

Um dieses zu finden, ertheilen wir der letzten Gleichung die Form

$$(12\pi K)^2 = x^4 - \frac{x^6}{4\pi^2} = \varphi(x),$$

woraus, da K und $\varphi(x)$ zugleich wachsen oder abnehmen, folglich auch für denselben Werth von x ein Größtes oder Kleinstes werden müssen,

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \varphi'(x) = \frac{x^3}{2\pi^2}(8\pi^2 - 3x^2) = 0$$

sich ergibt.

Da hier $x = 0$ nicht statt finden kann, so muß

$$8\pi^2 - 3x^2 = 0,$$

folglich $$x^2 = \frac{8}{3}\pi^2,$$

und $$x = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\pi\sqrt{6},$$

oder in Graden $$x = 360^0 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 293^0\ 56'\ 20''$$

seyn. Hiezu findet man

$$K = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}},$$

welcher Werth nothwendig ein Größtes ist, weil K für $x = 0$ und $x = 2\pi$ verschwindet.

2. Aufgabe. In einem Kreise soll das größte Rechteck verzeichnet werden.

Es sey (Fig. 203.) der Durchmesser $AC = 1$, der Bogen $AB = x$, $ACB = \frac{1}{2}x$, $AB = \sin\frac{1}{2}x$, $BC = \cos\frac{1}{2}x$; so ist der Inhalt des Rechteckes 203.

$$ABCD = AB \cdot BC = \sin\tfrac{1}{2}x \cos\tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}\sin x,$$

Fig. 203. wornach für das größte Rechteck $x = 90^0$ sich ergibt, und dieses selbst ein Quadrat wird.

Daraus läßt sich schließen, daß unter allen vierkantigen Balken, die man aus einem kreisrunden Baume aushauen kann, derjenige das meiste Holz enthält, dessen Durchschnitt ein Quadrat ist. Ein solcher Balken wird aber nicht zugleich das größte Tragvermögen besitzen, da die Mechanik lehrt, daß die Stärke eines vierkantigen Balkens der Grundlinie AB und dem Quadrate der Höhe BC seines senkrechten Querdurchschnittes proportional ist.

Bestimmen wir unter dieser Bedingung die Abmessungen des stärksten vierkantigen Balkens, so sey der Durchmesser

$$AC = 1, \quad AE = x, \quad CE = 1 - x,$$

folglich

$$AB = \sqrt{x}, \quad CB = \sqrt{1-x}.$$

Nehmen wir nun die Stärke desjenigen Balkens für 1 an, dessen Querdurchschnitt ein Quadrat von der Seite 1 ist, so können wir die Stärke des zu untersuchenden Balkens, wenn er mit der Seite AB aufliegen soll,

$$S = AB \cdot CB^2 = (1-x)\sqrt{x}$$

setzen. Soll diese ein Größtes werden, so muß

$$\frac{dS}{dx} = -\sqrt{x} + \frac{1-x}{2\sqrt{x}} = \frac{1-3x}{2\sqrt{x}} = 0,$$

also $1 - 3x = 0, \quad x = \frac{1}{3}$ seyn.

Daraus folgt $AB = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad BC = \sqrt{\frac{2}{3}},$

und $AB : BC = 1 : \sqrt{2}.$

3. Aufgabe. In eine Kugelfläche soll ein gerader Kegel eingeschrieben werden, dessen Achse durch den Mittelpunct geht, und welcher die größte mögliche Oberfläche besitzt.

Es sey (Fig. 203.) der halbe Durchschnitt des Kegels das Dreyeck CEB, der Durchmesser der Kugel $AC = 1$, und die Höhe des Kegels $CE = x$, so ist

$$CB = \sqrt{x}, \quad EB = \sqrt{x - x^2};$$

daher die Oberfläche des Kegels Fig.

$$O = \pi\sqrt{x - x^2}\,.\sqrt{x},$$

folglich

$$\left(\frac{O}{\pi}\right)^2 = x^2 - x^3 = \varphi(x).$$

Hieraus findet man für die größte Oberfläche

$$\varphi'(x) = 2x - 3x^2 = x\,(2 - 3x) = 0,$$

also $$x = \frac{2}{3}\,, \quad \text{und } O = \frac{2\pi}{9}\sqrt{3}.$$

4. Aufgabe. Man suche denjenigen vollen geraden Cylinder, welcher einen gegebenen Cubikinhalt bey der möglich kleinsten Oberfläche enthält.

Der gegebene Inhalt des Cylinders sey $= a$, sein unbekannter Halbmesser $= x$; so ist seine Grundfläche $= \pi x^2$, seine Höhe $= \frac{a}{\pi x^2}$, der Umfang seiner Grundfläche $= 2\pi x$, seine Mantelfläche $= 2\pi x\,.\,\frac{a}{\pi x^2} = \frac{2a}{x}$, daher seine ganze Oberfläche

$$O = \frac{2a}{x} + 2\pi x^2,$$

folglich

$$\frac{O}{2} = \frac{a}{x} + \pi x^2 = \varphi(x),$$

und $$\varphi'(x) = -\frac{a}{x^2} + 2\pi x = 0.$$

Hieraus ergibt sich

$$x^3 = \frac{a}{2\pi},$$

und $$x = \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}};$$

daher die Höhe

$$= \frac{a}{\pi}\,.\,\sqrt[3]{\frac{4\pi^2}{a^2}} = 2\sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}} = 2x$$

$=$ dem Durchmesser.

Der gesuchte Cylinder ist demnach gleichseitig.

Fig. 194. 5. Aufgabe. Zwischen den Schenkeln pm und pS (Fig. 194.) eines rechten Winkels Spm ist ein Punct M gegeben; man soll durch ihn die kürzeste Gerade Sm ziehen, welche von den Schenkeln begrenzt wird.

Setzen wir zur Bestimmung der Lage des gegebenen Punctes $pP = a$, $PM = b$, und zur Fixirung der zu suchenden Geraden Sm den Winkel $mSp = x$, so ist

$$PS = MP \cdot \cot MSP = b \cot x,$$

daher $$pS = pP + PS = a + b \cot x,$$

und $$Sm = \frac{pS}{\cos mSp} = \frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x} = y.$$

Soll y ein Kleinstes werden, so muß

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin x}{\cos^2 x} - \frac{b \cos x}{\sin^2 x} = 0,$$

folglich

$$\tang^3 x = \frac{b}{a} \quad \text{und} \quad \tang x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

seyn.

Setzen wir ferner

$$Rm = u, \quad PS = v,$$

so ist $$u = a \tang x, \quad v = b \cot x,$$

daher auch $$u = \sqrt[3]{a^2 b}, \quad v = \sqrt[3]{ab^2},$$

woraus man $$a : u = u : v = v : b = \sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b},$$

und die kürzeste Gerade

$$y = \sqrt{a^2 + u^2} + \sqrt{b^2 + v^2} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

erhält.

Folglich sind für die kürzeste Gerade

$$\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

die Abschnitte u und v die beyden mittleren geometrischen Proportionalen zwischen a und b.

178. 6. Aufgabe. Aus einem (Fig. 178.) in der Achse AB befindlichen Puncte H an die Ellipse die längste Gerade HG zu ziehen.

Es sey die Achse AB, in welcher sich der Punct H befindet, Fig. =2a, die andere Achse DE = 2b und der Abstand CH = g; 178. ferner setze man

$$CI = x\ ,\quad IG = y\ ,\quad HG = u\ ,$$

so ist $u^2 = (x-g)^2 + y^2$,

oder (§. 639.) wegen

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

auch $$u^2 = (x-g)^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{d.u^2}{2dx} = x - g - \frac{b^2}{a^2}x = 0,$$

$$\frac{d^2.u^2}{2dx^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2},$$

daher ist $$x = \frac{a^2g}{a^2-b^2},$$

und die Linie $$u = b\sqrt{1 - \frac{g^2}{a^2-b^2}}$$

wird ein Größtes oder Kleinstes, je nachdem der Punct H in der kleinen oder großen Achse liegt.

7. Aufgabe. **Um einen gegebenen Kreis soll das kleinste Dreyeck beschrieben werden.**

Es sey der Halbmesser des Kreises = 1, ferner seyen x, y, z die halben Winkel dieses Dreyeckes, folglich

$$x + y + z = 90^0.$$

Fällt man aus dem Mittelpuncte des Kreises auf die ihn berührenden Seiten des Dreyeckes Senkrechten, so theilen diese das Dreyeck in drey Vierecke, welche durch die Abstände des Mittelpunctes von den Spitzen des Dreyeckes in zwey congruente rechtwinkelige Dreyecke zerschnitten werden, und deren Inhalte beziehungsweise cot x, cot y, cot z sind; weßwegen der Inhalt des gesuchten Dreyeckes

$$f = \cot x + \cot y + \cot z$$

seyn muß.

Fig. Aus diesen beyden Gleichungen findet man

$$dx + dy + dz = 0$$

$$\frac{dx}{\sin^2 x} + \frac{dy}{\sin^2 y} + \frac{dz}{\sin^2 z} = 0,$$

und wenn λ einen unbestimmten Multiplicator bezeichnet,

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\sin^2 x}\right)dx + \left(1 - \frac{\lambda}{\sin^2 y}\right)dy + \left(1 - \frac{\lambda}{\sin^2 z}\right)dz = 0,$$

woraus man

$$\lambda = \sin^2 x = \sin^2 y = \sin^2 z$$

erhält. Da nun die Winkel x, y, z zwischen 0 und 90° liegen müssen, so ist

$$x = y = z = 30^\circ,$$

also das Dreyeck gleichseitig, und sein Inhalt $f = 3\sqrt{3}$.

8. Aufgabe. Man soll unter allen Dreyecken von einem bestimmten Umfange das größte suchen.

Bezeichnen x, y, z die Seiten, a den halben Umfang und f den Inhalt des Dreyeckes, so muß

$$x + y + z = 2a$$

$$f^2 = a(a-x)(a-y)(a-z)$$

seyn. Daraus folgt

$$dx + dy + dz = 0$$

$$\frac{dx}{a-x} + \frac{dy}{a-y} + \frac{dz}{a-z} = 0,$$

ferner

$$\left(1 - \frac{\lambda}{a-x}\right)dx + \left(1 - \frac{\lambda}{a-y}\right)dy + \left(1 - \frac{\lambda}{a-z}\right)dz = 0,$$

und $$\lambda = a-x = a-y = a-z.$$

Sofort ist $$x = y = z = \frac{2a}{3},$$

und $$f = \frac{a^2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Fig.

Aufgaben,

deren Auflösung dem eigenen Fleiße des Lesers überlassen bleibt.

1. Eine Zahl x von der Beschaffenheit zu finden, daß $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ ein Größtes oder Kleinstes wird.

2. Eine Zahl zu finden, die ihre nte Potenz (z. B. ihr Quadrat) um die möglich größte Differenz übersteigt.

3. Man soll bestimmen, für welche Werthe von x und y die Function $x^2 + y^2 - 6xy + 32y$ ein Größtes oder Kleinstes wird.

4. Die Werthe der Bogen x und y im ersten Quadranten zu finden, für welche $4 \sin x = 3 \cos y$ ist, und $5x + 3y$ ein Maximum oder Minimum wird.

5. Man suche die Werthe von x, y, z, für welche die Function $xy + yz + zx - x^2 - y^2 - z^2$ ihren größten oder kleinsten Werth erhält.

6. Die Zahl a soll in zwey Theile so zerfällt werden, daß das Product aus der mten Potenz des ersten, und aus der nten Potenz des zweyten ein Größtes sey.

7. In eine Kugel den größten Kegel, und in den Kegel den größten Cylinder einzuschreiben.

8. Den innern Durchmesser und die Höhe eines cylindrischen Hohlgefäßes (z. B. eines Pulver-Ciments) anzugeben, welches bey der möglich kleinsten innern Oberfläche einen gegebenen Cubikinhalt enthält.

9. In einem gegebenen geraden Kegel den größten paraboli-schen Schnitt zu führen.

10. Den Ort der stärksten Krümmung bey der Logistik zu bestimmen.

11. Einen Kugelabschnitt zu finden, der einen bestimmten Raum bey der kleinsten Oberfläche einnimmt.

12. Die Pulverkammer AEB eines Mörsers (Fig. 204.), bey 204.
dem der Durchmesser der Bombe AG = a Schuh hält, soll aus

Fig. 204. einer halben Kugel DEF und aus einem Cylinder ADFB bestehen; diese Kammer soll bis auf die Berührungsebene pmq angefüllt b Pf. Pulver enthalten, wovon 1 Cubikschuh c Pf. wiegt. Wie groß muß der Durchmesser DF und wie groß die Höhe AD des Cylinders seyn, damit die ganze innere Oberfläche der Kammer $mA + AD + DEF + FB + Bm$ ein Kleinstes sey? Wie groß ist hingegen der Durchmesser und die Höhe des Cylinders, wenn sich daran keine Halbkugel befindet? Wie werden die Abmessungen des Cylinders gefunden, wenn in dem zweyten oder in dem ersten Falle die Kammer nur bis auf eine Ebene, welche um eine gegebene Größe von dem untersten Puncte m der Bombe absteht, angefüllt auch b Pf. Pulver enthalten soll? Wie groß muß bey eben dieser Bedingung der Durchmesser, wie groß die Höhe des Cylinders seyn, wenn der ganze innere Raum

$$Amp + Bmq + Dq + DEF$$

angefüllt b Pf. Pulver enthalten soll?

Fig.

Achtes Hauptstück.

Von der Integral-Rechnung.

I. Abschnitt.

Anfangsgründe der Integral-Rechnung, und die Entwickelung der Grundregeln derselben.

§. 689.

Eine Function von einer oder von mehreren veränderlichen Größen, welche durch die Differenziale derselben ausgedrückt oder mit diesen Differenzialen verbunden ist, heißt eine Differenzialgröße oder Differenzialformel; und eine Gleichung zwischen Differenzialgrößen wird eine Differenzialgleichung genannt. Das Integral einer Differenzialgröße oder Differenzialgleichung aber nennt man diejenige Function oder Gleichung, durch deren Differenzirung jene Differenzialgröße oder diese Differenzialgleichung entstanden ist. Den Vorgang endlich, durch welchen man aus der Differenzialgröße die ihr zugehörige Function findet, heißt man Integriren oder auch Summiren; weil man das Differenzial einer Function auch als das allgemeine Glied einer unendlichen Reihe ansehen kann, deren Summe die Function selbst ist, wenn man mit Leibnitz, dem Schöpfer der Infinitesimal-Rechnung, jede veränderliche Größe als den Inbegriff aller jener unendlich vielen und unendlich kleinen Zusätze (Differenziale) betrachtet, welche diese vom Entstehen an bis

Fig. zu dem Augenblicke, wo man sie ins Auge faßt, empfing. Aus dieser Ursache wird die Forderung, zu einer gegebenen Differenzialgröße die zugehörige Function zu finden, durch den Anfangsbuchstaben $\int$ des Wortes *summa* angezeigt, welchen man der gegebenen Differenzialgröße vorsetzt. Es wird nähmlich z. B. das Integral von $2a^2dx - \frac{1}{4}b^2dy$ durch $\int(2a^2dx - \frac{1}{4}b^2dy)$ angedeutet.

§. 710.

Aus dieser Erklärung des Integrals einer Differenzialgröße folgt klar, daß man das Integral einer gegebenen Differenzialgröße leicht hinschreiben könne, sobald man aus den Gründen des vorhergehenden Hauptstückes die Function kennt, durch deren Differenzirung die gegebene Differenzialgröße entstanden ist; und daß man die Richtigkeit eines gefundenen Integrals dadurch prüfe, daß man dasselbe differenzirt und nachsieht, ob der erhaltene Differenzialausdruck mit der gegebenen Differenzialgröße übereinstimmt. So z. B. ist

$$\int(2a^2dx - \tfrac{1}{4}b^2dy) = 2a^2x - \tfrac{1}{4}b^2y,$$

weil durch die Differenzirung dieses Ausdruckes genau die gegebene Differenzial-Größe erhalten wird. Allgemein, wenn $\varphi(x)dx$ das Differenzial der Function $f(x)$ ist, so wird $\int\varphi(x)dx = f(x)$ das Integral dieser Differenzialformel $\varphi(x)dx$; und wenn

$$Pdx + Qdy + Rdz + \ldots$$

das Differenzial der von x, y, z . . . abhängigen Function u ist, so kommt dieser Differenzialformel das Integral

$$\int(Pdx + Qdy + Rdz + \ldots)$$

oder u zu.

§. 711.

Das eben Gesagte läßt sich auch durch die Gleichung

(1) $$\int dx = x$$

vollständig ausdrücken, wofern x entweder eine einzelne veränderliche Größe, oder eine Function anderer veränderlicher Größen vorstellt; zugleich ersieht man aus derselben, daß die beyden entgegengesetzten Operationen des Differenzirens und Integrirens, daher auch

ihre Zeichen d und $\int$, sich geradezu aufheben, wenn sie bey einer und Fig.
der nähmlichen Function nach einander angewendet werden sollen.

Ueberdieß läßt sich leicht einsehen, daß man das Integral $\int dx$ nicht bloß $= x$, sondern auch $= x \pm b$, oder auch $= x \pm a^2$ oder auch $= x + 2ab - c^2$ u. dgl. setzen könne, nähmlich daß es erlaubt sey, das gefundene Integral x einer Differenzialgröße dx nach Gefallen um eine willkührliche unveränderliche Größe zu vermehren oder zu vermindern, um ein anderes gleichfalls richtiges Integral dieser Differenzialgröße zu erhalten. Denn jedes dieser Integrale bringt durch die Differenzirung wieder dx zum Vorschein, weil (§. 678. II.) die unveränderlichen Glieder einer Function kein Differenzial besitzen, daher in der Differenzialformel gar nicht erscheinen.

Ob zu einem gefundenen Integrale, welches bereits die Eigenschaft hat, daß es durch Differenzirung die gegebene Differenzialgröße wieder herstellt, noch eine unveränderliche Größe hinzuzusetzen sey, läßt sich nicht anders als aus den Umständen und Bedingungen derjenigen Aufgabe entscheiden, welche durch die Integral-Rechnung aufgelöst wird, wie es weiter unten (im VII. Abschnitte) zu ersehen seyn wird. Indessen pflegt man zu einem jeden gefundenen Integrale + Constans, oder + Const., oder auch nur + C hinzuzusetzen, um das vollständige Integral der vorgelegten Differenzialformel zu erhalten, wobey C diejenige unveränderliche positive oder negative Größe bedeutet, welche man aus den Umständen der Aufgabe zu bestimmen hat, die jedoch zuweilen auch $= 0$ wird. Auf diese Weise erhalten wir ganz allgemein

(2) $$\int dx = x + \text{Const.} = x + C.$$

Bey der Aufstellung der allgemeinen Integralformeln werden wir zwar, theils um sie übersichtlicher zu erhalten, theils zur Ersparung des Raumes, bloß die veränderlichen Bestandtheile des Integrals mit Weglassung der willkührlichen Constante anschreiben; doch müssen wir den Lernenden erinnern, bey der wirklichen Auflösung von Problemen das Ansetzen dieser Constante nie zu vergessen.

Fig.

§. 712.

Die unveränderliche oder beständige Größe C läßt sich bey einem gefundenen Integrale auf folgende Art bestimmen. Man erwäge, was für eine Größe durch das gesuchte Integral vorgestellt werde, und untersuche, bey welchem aus den Umständen der Aufgabe schon bekannten Werthe des gesuchten Integrals auch der Werth der dazu gehörigen veränderlichen Größe bekannt sey. Diese zwey bekannten Werthe substituire man nun in die gefundene Integralgleichung; so wird sich daraus die gesuchte unveränderliche Größe C bestimmen lassen. Wenn nähmlich aus der gegebenen Differenzialgleichung

$$dy = dx$$

$$y = \int dx = x + C$$

folgt, und dabey bekannt ist, daß für den Werth $x = B$ die Function in $y = A$ übergeht, oder umgekehrt; so ist

$$A = B + C \text{ und } C = A - B.$$

Oder findet man aus $dy = \varphi(x)dx$

das Integral $y = \int \varphi(x)dx = f(x) + C$,

und kennt man für $x = a$ den Werth A von y; so wird

$$A = f(a) + C, \text{ folglich } C = A - f(a)$$

und

$$(3) \qquad y = \int \varphi(x)dx = f(x) + A - f(a).$$

Es sey z. B. bey der Integralgleichung

$$y = \int adx = ax + C,$$

welche aus der Differenzialgleichung

$$dy = adx,$$

abgeleitet wird, aus den Umständen der Aufgabe bekannt, daß bey dem Werthe a^2 des gesuchten Integrals $\int adx$, die veränderliche Größe x den Werth $\frac{3}{2}a$ hat, nähmlich daß für $y = a^2$ die dazu gehörige veränderliche Größe $x = \frac{3}{2}a$ ist,

so folgt $a^2 = a \cdot \frac{3}{2}a + C$,

daher $C = -\frac{1}{2}a^2$,

und somit das gesuchte vollständige Integral

$$y = ax - \frac{1}{2}a^2.$$

Ist hingegen für $y = 0$ vermöge der Umstände $x = -b$, so ist $0 = a \cdot -b + C$,

nähmlich $C = ab$, und folglich für einen solchen Fall Fig

$$y = ax + ab.$$

Wäre also für $y=0$, auch $x=0$, so wäre $0 = a \cdot 0 + C$, nähmlich $C = 0$, und folglich $y = \int adx = ax$. Gewöhnlich sind die Umstände der Aufgabe so beschaffen, daß bey dem Werthe 0 des gesuchten Integrals auch der Werth der dazu gehörigen veränderlichen Größe bekannt ist, nähmlich, daß man denjenigen Werth der veränderlichen kennt, für welchen die Function selbst verschwindet. In diesem Falle wird für $x = a$ die Größe $A = 0$, daher die Function

$$(4) \qquad y = f(x) - f(a).$$

Es verdient auch noch bemerkt zu werden, daß man, so lange die dem Integral einer Differenzialformel beyzuschreibende Constante noch unbestimmt ist, wenn man es für zweckmäßig findet, dieselbe um jede beliebige constante Größe vermehren oder vermindern, durch jede willkührliche Zahl multipliciren oder dividiren, nach jedem beliebigen constanten Exponenten potenziren, aus ihr jede durch einen unveränderlichen Wurzel-Exponenten angedeutete Wurzel ziehen, oder von ihr den Logarithmen aus einem Systeme nehmen könne, dessen Grundzahl unveränderlich ist. Es ist demnach erlaubt, statt der unbestimmten Constante C auch

$$C + a,\ C - 3,\ C^3,\ \sqrt[5]{C},\ LC$$

u. dgl. zu schreiben. Allein auch für jeden veränderlichen Bestandtheil des Integrals kann ein jeder andere veränderliche Ausdruck geschrieben werden, der sich bloß um eine constante Größe von dem ersteren unterscheidet. So kann z. B. für arc tang x auch $-$ arc cot x gesetzt werden, weil

$$\text{arc tang } x = \frac{\pi}{2} - \text{arc cot } x$$

ist; denn durch alle diese Veränderungen erleidet das Differenzial des erhaltenen Integrals keine Störung, sondern gleicht stets der zur Integration vorgelegten Differenzialformel.

Bey der Anwendung der Integral-Rechnung wird jederzeit aus einer Differenzialgleichung zwischen veränderlichen Größen, die Gleichung in endlichen Gliedern zwischen eben diesen veränder-

Fig. lichen Größen gesucht werden. Es ist leicht einzusehen, daß man in solchen Fällen die anfänglich noch unbekannte, aber dabey noch unveränderliche Größe C nach Belieben auf einer oder auf der andern Seite des Gleichheitszeichens bey der integrirten Gleichung hinzusetzen könne. Z. B. Aus der Differenzialgleichung $dy = adx$, folgt $y = ax + C$, oder auch $y + C = ax$ Wir werden in der Folge um Weitläufigkeit zu vermeiden, gewöhnlich die Differenzialgrößen für sich allein betrachtet integriren, ohne dieselben als Differenzialgleichungen ausdrücklich anzusetzen.

§. 713.

Indem wir uns zunächst an die Bestimmung der in der allgemeinen Form $\int \varphi(x)dx$ begriffenen Integrale einer einzigen Veränderlichen x wenden, bemerken wir, daß die in §. 678. aufgestellten Fundamentalformeln der Differenzial-Rechnung vermöge §. 710, wenn man sie der Integration unterzieht, auch die einfachsten Integrale unmittelbar darbiethen, *) und die Grundregeln der Integration lehren.

---

*) Von diesen einfachsten Integralen, welche geradezu aus den Differenziationsregeln (§. 678) fließen, verdienen vorzüglich folgende gekannt zu werden.

(1) $\int nx^{n-1}dx = x^n$, (2) $\int \frac{dx}{x} = Lx$,

(3) $\int a^x . La . dx = a^x$, (4) $\int h^x dx = h^x$,

(5) $\int \cos x\, dx = \sin x$, (6) $\int \sin x\, dx = -\cos x$,

(7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x$, (8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$,

(9) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$, (10) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} x$,

(11) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc\,sec} x$, (12) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \operatorname{arc\,sinv} x$.

So folgt z. B. (§. 678. I.) aus Fig.

$$du - dx + dv - dy + \ldots = d(u - x + v - y + \ldots)$$

sogleich

$$\int(du - dx + dv - dy + \ldots) = u - x + v - y + \ldots,$$

oder weil (§. 711.)

$$u = \int du,\ x = \int dx,\ v = \int dv,\ y = \int dy, \ldots.$$

ist,

$$(5)\quad \int(du - dx + dv - dy + \ldots) = \int du - \int dx + \int dv - \int dy + \ldots,$$

woraus wir ersehen, daß das Integral einer aus mehreren Differenzialgrößen zusammengesetzten algebraischen Summe der Summe der Integrale ihrer einzelnen Glieder gleicht, oder daß man das Integral einer algebraischen Summe findet, wenn man jedes einzelne Glied für sich integrirt.

Eben so fließt (§. 678. III.) aus

$$adx = d(ax)$$

umgekehrt

$$\int adx = ax,$$

oder da (§. 711.)

$$x = \int dx$$

ist,

$$(6)\quad \int adx = a\int dx;$$

welche Gleichung lehrt, daß man die unveränderlichen Factoren der zu integrirenden Differenzialformeln stets sogleich vor das Integralzeichen schreiben dürfe.

Auf dieselbe Weise liefert auch (§. 678. IV.) die Gleichung

$$udv + vdu = d(uv)$$

die Integralformel

$$(7)\quad \int(udv + vdu) = uv,$$

oder nach Gleichung (5)

$$\int udv + \int vdu = uv;$$

woraus wir die sogenannte Zertheilungsformel

$$(8)\quad \int udv = uv - \int vdu$$

gewinnen, welche die Grundlage der theilweisen Integration ist.

Fig.

§. 714.

Vermöge §. 678. VII. ist $d(Lx) = \frac{dx}{x}$,

und auch $dL(-x) = \frac{d(-x)}{-x} = \frac{dx}{x}$,

folglich ist

(9) $\int \frac{dx}{x} = Lx$, oder $= L(-x)$,

es möge x eine einfache oder zusammengesetzte Größe bedeuten.

Wenn demnach bey einer gebrochenen Differenzialgröße in dem Zähler das Differenzial des Nenners sich befindet, so ist ihr Integral dem natürlichen Logarithmen des positiv oder negativ genommenen Nenners gleich.

Uebergeht aber der Zähler in das Differenzial des Nenners dadurch, daß man ihn mit einem constanten Factor multiplicirt, so wird man zuvörderst diese Multiplication vornehmen, zugleich aber auch vor dem Integralzeichen durch denselben Factor dividiren und dann erst die wirkliche Integration nach obiger Regel ausführen. Auch kann man sich durch die Substitution, d. i. durch die Einführung einer neuen Veränderlichen, (welcher Kunstgriff zur einfacheren Darstellung und Verwandlung der Integrale, wie die Folge zeigen wird, sehr oft mit bedeutendem Vortheile sich gebrauchen läßt), diese Integration ungemein erleichtern. Zu diesem Ende wird man den Nenner der zu integrirenden Differenzialformel einer neuen Veränderlichen gleich setzen, durch diese den Zähler ausdrücken, und nach vollbrachter Integration die ursprüngliche Veränderliche wieder zurückstellen.

So ist z. B.

$$\int \frac{mx^{n-1}dx}{a^n + x^n} = \int \frac{m}{n} \cdot \frac{nx^{n-1}dx}{a^n + x^n} = \frac{m}{n} \cdot L(a^n + x^n)$$

$$= L(a^n + x^n)^{\frac{m}{n}}.$$

Man wird die Richtigkeit deſſen leicht einſehen, wenn man Fig. $a^n + x^n = u$, folglich

$$nx^{n-1}dx = du \text{ , und } x^{n-1}dx = \frac{du}{n}$$

ſetzt, weil dadurch

$$\int \frac{mx^{n-1}dx}{a^n + x^n} = \int \frac{m}{n}\frac{du}{u} = \frac{m}{n}\int \frac{du}{u} = \frac{m}{n} \cdot Lu \text{ ,}$$

oder $$= \frac{m}{n} L(a^n + x^n)$$

wird, wenn man für u ſeinen Werth $a^n + x^n$ zurückſtellt.

Ingleichen iſt

$$y = \int \frac{xdx - \frac{1}{2}adx}{ax - x^2 + a^2} = \int -\frac{1}{2}\left(\frac{adx - 2xdx}{ax - x^2 + a^2}\right)$$
$$= -\frac{1}{2} L(ax - x^2 + a^2)$$
$$= -L\sqrt{(ax - x^2 + a^2)} ;$$

was man noch leichter überblickt, wenn man

$$ax - x^2 + a^2 = u \text{ ,}$$

folglich $$adx - 2xdx = du$$

annimmt, da man dadurch

$$y = \int -\frac{1}{2}\frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \cdot Lu$$
$$= -\frac{1}{2} L(ax - x^2 + a^2)$$

erhält.

Anmerkung. Bey ſolchen logarithmiſchen Integralen pflegt man öfters die unveränderliche Größe mit LC zu bezeichnen. In dem letzten Beyſpiele kann man nähmlich

$$\int \frac{xdx - \frac{1}{2}adx}{ax - x^2 + a^2} = -L\sqrt{(ax - x^2 + a^2)} + LC$$

ſetzen. Wäre nun bey dem Werthe 0 des geſuchten Integrals auch $x = 0$, ſo müßte

$$0 = -L\sqrt{(a \cdot 0 - 0^2 + a^2)} + LC$$

ſeyn, woraus $$LC = La \text{ ,}$$

Fig. und folglich

$$\int \frac{x dx - \frac{1}{2} a dx}{ax - x^2 + a^2} = -L\sqrt{(ax - x^2 + a^2)} + La,$$

$$= L\left(\frac{a^2}{ax - x^2 + a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

fließt. Wenn man nach der vorigen Bezeichnung

$$\int \frac{x dx - \frac{1}{2} a dx}{ax - x^2 + a^2} = -L\sqrt{(ax - x^2 + a^2)} + C$$

bey dem Werthe 0 des gesuchten Integrals, auch $x = 0$ setzt, so ist $0 = -La + C$,

nähmlich $C = La$,

und folglich wieder

$$\int \frac{x dx - \frac{1}{2} a dx}{ax - x^2 + a^2} = -L\sqrt{(ax - x^2 + a^2)} + La$$

$$= L\left(\frac{a^2}{ax - x^2 + a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

wie oben.

§. 715.

Nach §. 678. VIII. ist

$$d \cdot a^x = a^x \cdot La\, dx;$$

daraus folgt

(10) $$\int a^x dx = \frac{a^x}{La}.$$

Nähmlich das Integral einer Differenzialgröße, in welcher eine veränderliche Größe als Exponent erscheint, ist gleich der gegebenen Differenzialgröße getheilt durch das Product aus dem Differenziale des veränderlichen Exponenten in den Logarithmus der Größe, welche auf den veränderlichen Exponenten zu erheben ist.

Diesen Ausdruck findet man auch durch die Substitution, wenn man $a^x = y$

setzt. In diesem Falle ist

$$a^x dx La = dy,$$

und $$dx = \frac{dy}{y \cdot La};$$

folglich auch Fig.

$$\int a^x dx = \int \frac{y\,dy}{y \cdot La} = \frac{\int dy}{La} = \frac{y}{La} = \frac{a^x}{La},$$

wenn man endlich für y wieder a^x substituirt.

Ist nun a = h = der Grundzahl der natürlichen Logarithmen, so wird

(11) $$\int h^x dx = h^x.$$

Besitzt die Exponentialgröße einen zusammengesetzten Exponenten, und verwandelt sich der mit ihr verbundene Factor in das Differenzial ihres Exponenten bloß durch die Multipication mit einem constanten Factor; so kann man wie im vorigen Paragraphe, durch Multiplication nach, und durch Division vor dem Integralzeichen es dahin bringen, daß die Exponentialgröße bloß mit dem Differenziale ihres Exponenten multiplicirt erscheint, wornach das Integral sich nach obigen Regeln leicht darstellen läßt. Anfänger mögen sich die Rechnung auch mit Hülfe der Substitution erleichtern, indem sie den Exponenten durch eine neue Variable ersetzen. So ist z. B.

$$y = \int \frac{3}{5} b^2 a^{x^3+\frac{1}{4}x^2} (6x^2 + x)\,dx = \frac{3}{5} b^2 \int a^{x^3+\frac{1}{4}x^2} (6x^2 + x)\,dx$$

$$= \frac{6}{5} b^2 \int a^{x^3+\frac{1}{4}x^2} (3x^2 + \tfrac{1}{2}x)\,dx = \frac{6}{5} b^2 \frac{a^{x^3+\frac{1}{4}x^2}}{La}.$$

Setzt man aber $x^3 + \frac{1}{4}x^2 = u$,

so wird $3x^2 + \frac{1}{2}x = du$, $6x^2 + x = 2du$,

daher

$$y = \int \frac{6}{5} b^2 a^u\,du = \frac{6}{5} b^2 \int a^u du = \frac{6}{5} b^2 \frac{a^u}{La} = \frac{6b^2 a^{x^3+\frac{1}{4}x^2}}{5La}.$$

§. 716.

Endlich ist (vermöge §. 678. VI.)

$$\frac{d.x^n}{n} = x^{n-1}dx;$$

daher

$$\int x^{n-1} dx = \frac{x^n}{n}.$$

Fig. Setzt man nun $n-1=m$,

so ist

(12) $$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

Diese Gleichung kann man auf folgende Art mit Worten ausdrücken. Das Integral eines einnahmigen Differenzials, worin sich eine Potenz der veränderlichen Größe befindet, wird gefunden, wenn man nach Beseitigung des Differenzials der Variabeln in ihrer Potenz den constanten Exponenten um 1 vermehrt, und diese durch ihren neuen Exponenten dividirt. Z. B.

$$\int dx = \int x^0 dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} = x,$$

$$\int ax^{\frac{2}{3}} dx = a\int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{ax^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} = \tfrac{3}{5}\, ax^{\frac{5}{3}},$$

$$\int -ax^{-\frac{3}{2}} dx = -a\int x^{-\frac{3}{2}} dx = -\frac{ax^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} = 2ax^{-\frac{1}{2}}.$$

Auch hier kann man jene Differenzialformeln, in denen der Multiplicator der veränderlichen Potenz dem Differenziale ihrer Wurzel proportional ist, durch Multiplication nach, und durch Division vor dem Integralzeichen mit einem unveränderlichen Factor, oder dadurch, daß man für diese Wurzel eine neue Variable schreibt, nach obiger Regel integriren.

So ist z. B.

$$\int ax(b+cx^2)^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{a}{2c}\int 2cx\,dx.\,(b+cx^2)^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{a}{2c}(b+cx^2)^{\frac{1}{3}} : \frac{1}{3}$$

$$= \frac{3a}{2c}(b+cx^2)^{\frac{1}{3}},$$

$$\int (\tfrac{1}{2}a^2+bx)\sqrt{(a^2x+bx^2)}\,dx = \tfrac{1}{2}\int (a^2+2bx)\,dx.\,(a^2x+bx^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}(a^2x+bx^2)^{\frac{3}{2}} : \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{3}(a^2x+bx^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Fig.

$$\int x^{n-1}(a+bx^n)^p dx = \frac{1}{nb}\int nbx^{n-1}dx.(a+bx^n)^p$$

$$= \frac{1}{nb}(a+bx^n)^{p+1} : (p+1)$$

$$= \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{n(p+1)b}.$$

$$\int \frac{(a+bx^n)^p}{x^{np+n+1}} dx = \int x^{-n-1}(b+ax^{-n})^p dx$$

$$= -\frac{1}{na}\int -nax^{-n-1}dx(b+ax^{-n})^p$$

$$= -\frac{1}{na}(b+ax^{-n})^{p+1} : (p+1)$$

$$= -\frac{(b+ax^{-n})^{p+1}}{n(p+1)a}$$

$$= -\frac{1}{n(p+1)a}\left(\frac{a+bx^n}{x^n}\right)^{p+1}.$$

Anmerkung. Wenn in der Formel $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$,

$$m = -1$$

seyn sollte; so würde

$$\int x^{-1} dx = \frac{x^0}{0}$$

zum Vorschein kommen. Es ist aber einem völlig richtigen Beweise (§. 714.) zu Folge

$$\int x^{-1} dx = Lx;$$

folglich muß in allen Fällen, wo in der Integral-Rechnung ein Glied von der Form $\frac{X^0}{0}$ erhalten wird, an dessen Stelle LX gesetzt werden. Hier zeigt der unbestimmte Ausdruck $\frac{X^0}{0}$ an, daß das Integral des Differenzials $X^{-1}dX$ keine Potenz werden kann, weil es keine Potenz von X gibt, welche das Differenzial $X^{-1}dX$ hervor bringt.

Fig. Daß das Integral $\int x^m dx$ für $m = -1$ wirklich in Lx übergehe, läßt sich auch durch folgende Betrachtung rechtfertigen. Es ist

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C,$$

und wenn man annimmt, daß dieses Integral für $x = a$ verschwinde, nähmlich

$$0 = \frac{a^{m+1}}{m+1} + C$$

sey, $$\int x^m dx = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}.$$

Würden wir nun in diesem Bruche $m = -1$ setzen, so erhielte er die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$; daher ist, wenn wir (nach §. 693.) m für veränderlich ansehen, und den Differenzial-Coefficienten des Zählers durch jenen des Nenners theilen, sein eigentlicher Werth

$$= \frac{x^{m+1} Lx - a^{m+1} La}{1} = Lx - La,$$

und sofort hat man

$$\int x^{-1} dx = Lx - La$$

oder, wenn man die Constante $-La$ durch $+C$ vorstellt,

$$\int x^{-1} dx = Lx + C.$$

§. 717.

Nach den Formeln

(9) $$\int \frac{dx}{x} = Lx \quad \text{und} \quad (12) \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

können nun auch alle jene mehrgliedrigen Differenziale integrirt werden, welche in der allgemeinen Form

(13) $$(Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots\ldots)\, dx$$

begriffen sind, deren Exponenten a, b, c, ... reelle Constanten vorstellen. Man findet nähmlich (nach §. 713. Gl. 5 und 6)

$$\int (Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots) dx = \int Ax^a dx + \int Bx^b dx + \int Cx^c dx + \ldots$$
$$= A\int x^a dx + B\int x^b dx + C\int x^c dx + \ldots$$

Fig.

daher nach Gleichung (12)

$$(14)\quad \int(Ax^a+Bx^b+Cx^c+\ldots)\,dx=\frac{Ax^{a+1}}{a+1}+\frac{Bx^{b+1}}{b+1}+\frac{Cx^{c+1}}{c+1}+\ldots$$

Diese Formel begreift zugleich die Integrale der ganzen rationalen Differenzialformeln, für welche a, b, c, ... ganze positive Zahlen sind, als einen besonderen Fall in sich.

So ist z. B.

$$\int(ax^2-bx^{-3}+2cx^{-\frac{1}{3}})\,dx=a\int x^2dx-b\int x^{-3}\,dx+2c\int x^{-\frac{1}{3}}\,dx$$

$$=\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^{-2}}{2}+3cx^{\frac{2}{3}}.$$

$$\int(x^6+5x^4-3x^{-3}+\frac{8}{x})\,dx=\int x^6dx+5\int x^4dx-3\int x^{-3}dx+8\int\frac{dx}{x}$$

$$=\frac{x^7}{7}+x^5+\frac{3x^{-2}}{2}+8\,\mathrm{L}x.$$

$$\int(ax^{\frac{1}{2}}-bx^{-\frac{1}{4}}-x^{-1})\,dx=a\int x^{\frac{1}{2}}dx-b\int x^{-\frac{1}{4}}\,dx-\int x^{-1}dx$$

$$=\frac{2ax^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{4bx^{\frac{3}{4}}}{3}-\mathrm{L}x.$$

$$\int(1+3x+9x^2+27x^3)\,dx=\int dx+3\int xdx+9\int x^2dx+27\int x^3dx$$

$$=x+\frac{3x^2}{2}+3x^3+\frac{27x^4}{4}.$$

§. 718.

So wie wir nun mittelst der Gleichung (12) alle ganzen rationalen Differenzialformeln zu integriren vermögen, eben so werden wir durch die Gleichung (9) in den Stand gesetzt, auch alle gebrochenen rationalen Differenziale, welche in der allgemeinen Form

$$(15)\quad \frac{a+bx+cx^2+\ldots.}{A+Bx+Cx^2+\ldots.}\,dx$$

enthalten sind, zu integriren. Denn die mit dx verbundene gebrochene rationale Function läßt sich (nach §. 287. und §. 692.) jeder-

Fig. zeit als Summe einer ganzen rationalen Function und mehrerer Partialbrüche darstellen, welche die Formen

$$(16)\qquad \frac{A}{a+bx}\,,\quad \frac{A}{(a+bx)^n}$$

besitzen, wofern n eine ganze positive Zahl andeutet; somit läßt sich auch jede gebrochene rationale Differenzialformel in Theile zerfällen, von denen einige ganz und rational, daher nach der Gleichung (12) integrabel sind, andere aber in den gebrochenen Formen

$$\frac{Adx}{a+bx}\,,\quad \frac{Adx}{(a+bx)^n}$$

erscheinen. Da nun

$$\int\frac{Adx}{a+bx}=A\int\frac{dx}{a+bx}=\frac{A}{b}\int\frac{bdx}{a+bx}\,,$$

$$\int\frac{Adx}{(a+bx)^n}=A\int(a+bx)^{-n}dx=\frac{A}{b}\int(a+bx)^{-n}bdx,$$

folglich

$$(17)\qquad \int\frac{Adx}{a+bx}=\frac{A}{b}\,L(a+bx)\,,$$

$$(18)\qquad \int\frac{Adx}{(a+bx)^n}=\frac{A}{b}\cdot\frac{(a+bx)^{-n+1}}{-n+1}=-\frac{A}{b(n-1)(a+bx)^{n-1}}$$

ist: so lassen sich auch die Integrale aller gebrochenen rationalen Differenzialformeln nach bestimmten Regeln darstellen.

1. Beyspiel. Es sey $\int\frac{2x^2dx}{x^2-1}$

zu bestimmen. Zerlegt man den Bruch $\frac{2x^2}{x^2-1}$ in Partialbrüche, so findet man

$$\frac{2x^2}{x^2-1}=2+\frac{2}{x^2-1}=2+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\,;$$

folglich

$$\int\frac{2x^2dx}{x^2-1}=\int\left(2dx+\frac{dx}{x-1}-\frac{dx}{x+1}\right)$$

$$=2\int dx+\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x+1}$$

$$=2x+L(x-1)-L(x+1)\,,$$

oder Fig.

$$\int \frac{2x^2\,dx}{x^2-1} = 2x + L\frac{x-1}{x+1}.$$

2. Beyspiel. Wenn das Integral

$$\int \frac{1-x+x^2}{(1+x)(1+x^2)}\,dx$$

zu suchen ist, so bestimmt man zuerst

$$\frac{1-x+x^2}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{1-x+x^2}{(1+x)(x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1})}$$

$$= \frac{3}{2(1+x)} - \frac{1}{2(x+\sqrt{-1})(1-\sqrt{-1})} - \frac{1}{2(x-\sqrt{-1})(1+\sqrt{-1})},$$

daher ist

$$\int \frac{1-x+x^2}{(1+x)(1+x^2)}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{dx}{1+x} - \frac{1}{2(1-\sqrt{-1})}\int \frac{dx}{x+\sqrt{-1}} - \frac{1}{2(1+\sqrt{-1})}\int \frac{dx}{x-\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{3}{2}L(1+x) - \frac{1}{2(1-\sqrt{-1})}L(x+\sqrt{-1}) - \frac{1}{2(1+\sqrt{-1})}L(x-\sqrt{-1})$$

$$= \frac{3}{2}L(1+x) - \frac{1+\sqrt{-1}}{4}L(x+\sqrt{-1}) - \frac{1-\sqrt{-1}}{4}L(x-\sqrt{-1})$$

$$= \frac{3}{2}L(1+x) - \frac{1}{4}L(x^2+1) - \frac{1}{4}\sqrt{-1}\,L\frac{x+\sqrt{-1}}{x-\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{3}{2}L(1+x) - \frac{1}{4}L(x^2+1) - \frac{1}{2}\text{arc tang } x,$$

wenn man auf §. 685 Rücksicht nimmt.

3. Beyspiel. Sucht man das Integral

$$\int \frac{84-54x}{8-4x+x^2}\,dx,$$

so ist

$$\frac{84-54x}{8-4x+x^2} = \frac{84-54x}{(x-2-2\sqrt{-1})(x-2+2\sqrt{-1})}$$

$$= \frac{-27+6\sqrt{-1}}{x-2-2\sqrt{-1}} - \frac{27+6\sqrt{-1}}{x-2+2\sqrt{-1}};$$

Fig. folglich findet man

$$\int \frac{84-54x}{8-4x+x^2}\,dx =$$

$$= -(27-6\sqrt{-1})\int \frac{dx}{x-2-2\sqrt{-1}} - (27+6\sqrt{-1})\int \frac{dx}{x-2+2\sqrt{-1}}$$

$$= -(27-6\sqrt{-1})\,L(x-2-2\sqrt{-1}) - (27+6\sqrt{-1})\,L(x-2+2\sqrt{-1})$$

$$= -27\,L(x^2-4x+8) - 6\sqrt{-1}\,.\,L\frac{x-2+2\sqrt{-1}}{x-2-2\sqrt{-1}}$$

$$= -27\,L(x^2-4x+8) - 12\,\text{arc tang}\left(\frac{1}{2}x-1\right).$$

§. 719.

Aus den beyden vorhergehenden Paragraphen läßt sich klar ersehen, daß jede algebraische Differenzialformel einer einzigen Veränderlichen integrirt werden kann, sobald sie rational ist. Man wird zu diesem Zwecke bloß nöthig haben, die in ihr etwa angezeigten Multiplicationen und Potenzirungen wirklich auszuführen, die Zerlegung in Partialbrüche vorzunehmen, und endlich die einzelnen Glieder nach den Formeln (9) und (12) zu integriren. So bestimmt und umfassend dieses Integrationsverfahren bey rationalen algebraischen Differenzialformeln ist, so wenig vermag man eine allgemeine Vorschrift für die Integration irrationaler algebraischer Differenzialformeln aufzustellen. Zwar könnte man sie, so wie überhaupt jedes in der allgemeinsten Form

$$\int \varphi(x)\,dx$$

begriffene, auf eine einzige Veränderliche x sich beziehende Integral dadurch darstellen, daß man die mit dem Differenzial dx der Variabeln x verbundene Function $\varphi(x)$ in eine nach den Potenzen dieser Variabeln fortschreitende unendliche Reihe auflöst, und die so erhaltene Differenzialformel (nach §. 716. Gl. 12) integrirt. Allein theils die stets wünschenswerthe Einfachheit des Calculs, theils der Umstand, daß die durch diese Rechnungsoperationen gewonnenen Reihen entweder nicht für alle Werthe der Veränderlichen, oder zu wenig zusammenlaufen (convergiren), veranlaßte die Analysten, Mittel auszusinnen, auch die Integrale irrationaler Differenzialformeln in geschlossenen Ausdrücken dar-

zustellen, was ihnen allerdings, für die freylich sehr mäßige An- Fig.
zahl solcher Differenzialformeln vollständig gelang, auf welche sich unser Lehrcurs wegen der ihm angewiesenen Grenzen beschränken wird. Diese Mittel bezwecken im Allgemeinen die Reduction des darzustellenden Integrals auf ein einfacheres oder schon bekanntes und bestehen hauptsächlich in zweckdienlicher Einführung neuer Veränderlichen, und in der theilweisen Integration.

II. Abschnitt.

Integration binomischer Differenzialformeln.

§. 720.

Sehr viele derjenigen Integrale, auf welche man bey der Auflösung geometrischer und mechanischer Aufgaben stößt, sind in der allgemeinen Formel

(1) $$\int (ax^{\alpha} + bx^{\beta})^{\gamma} dx$$

enthalten, in welchen die Coefficienten a, b beliebige, die Exponenten α, β, γ aber rationale Constanten sind. Da man dieser Formel dadurch, daß man x^{α} oder x^{β} aus dem Binom als Factor heraushebt, auch die Gestalten

(2) $$\int x^{\alpha\gamma} (a+bx^{\beta-\alpha})^{\gamma} dx \;,\; \int x^{\beta\gamma} (b+ax^{\alpha-\beta})^{\gamma} dx$$

ertheilen, folglich dieselbe auf die Formel

(3) $$\int x^{m} (a + bx^{n})^{p} dx$$

bringen kann; so wird es zweckmäßig seyn, nur die letztere einer genauen Untersuchung zu unterwerfen.

In dieser Absicht bemerken wir, daß dieses Integral (3) dem §. 719 zu Folge durch einen geschlossenen Ausdruck sich darstellen läßt, wenn es entweder selbst rational ist, oder wenigstens auf ein rationales Integral zurückgeführt werden kann.

Soll es an sich rational seyn, so müssen die Exponenten m, n, p ganze Zahlen seyn. Besteht aber seine Irrationalität bloß

Fig. darin, daß die Exponenten m und n gebrochen sind, so wird man, wenn g ihren gemeinschaftlichen Nenner vorstellt,

$$(4) \qquad \sqrt[g]{x} = u\,, \quad x = u^g\,, \quad \text{und} \quad dx = g u^{g-1}\,du$$

setzen, daher mittelst dieser Substitution auf das rationale Integral

$$g \int u^{mg+g-1}(a + bu^{ng})^p\,du$$

übergehen, in welchem man nach vollbrachter Integration nur noch für u den Werth $\sqrt[g]{x}$ zurück zu stellen hat.

Die Integration der Differenzialformel

$$x^m (a + bx^n)^p\,dx$$

läßt sich demnach gewiß ausführen, wenn p eine ganze Zahl ist; und zwar wird man, wenn p eine positive ganze Zahl ist, die Potenz $(a + bx^n)^p$ nach dem binomischen Lehrsatze (§. 299.) entwickeln und, wie auch die Exponenten m und n beschaffen seyn mögen, die Glieder einzeln integriren; dagegen wird man, wenn p eine negative ganze Zahl ist, zuerst die Zerlegung in Partialbrüche vornehmen, und dann diese der Ordnung nach integriren.

Wäre aber p ein Bruch und zwar q sein Nenner, so setze man

$$(5) \qquad \sqrt[q]{a + bx^n} = u;$$

dadurch wird

$$x = \left(\frac{u^q - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$dx = \frac{1}{n}\left(\frac{u^q - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot \frac{q}{b} u^{q-1}\,du = \frac{q}{bn}\left(\frac{u^q - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} u^{q-1}\,du,$$

folglich auch

$$\int x^m (a + bx^n)^p\,dx = \frac{q}{nb^{\frac{m+1}{n}}} \int u^{pq+q-1}(u^q - a)^{\frac{m+1}{n}-1}\,du.$$

Ist nun $\frac{m+1}{n} = i$ eine ganze Zahl, so ist

$$u^{pq+q-1}(u^q - a)^{i-1}\,du$$

rational, folglich läßt sich die vorgelegte Differenzialformel integriren, und zwar entweder, wenn $\frac{m+1}{n} = i$ eine ganze positive

die Null übersteigende Zahl ist, nach der Anwendung des binomi- Fig.
schen Lehrsatzes, wie eine ganze rationale Differenzialformel nach Gl. (12) oder, wenn i eine ganze negative Zahl mit Einschluß der Nulle ist, nach vorgenommener Zerlegung in Partialbrüche, wie die gebrochenen rationalen Differenzialformeln.

Noch mag hier bemerkt werden, daß, wenn i eine positive ganze Zahl ist, die Exponenten von u nicht unbedingt ganze Zahlen seyn müssen, folglich q sogar beliebig, daher wohl am einfachsten $= 1$ angenommen werden könne, weßwegen man in diesem Falle bloß der Substitution

(6) $$a + bx^n = u$$

sich bedienen wird.

Wenden wir die eben gefundene Bedingung auf das vorgelegte Integral

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx$$

an, nachdem wir ihm dadurch, daß wir aus dem Binom $a+bx^n$ den Factor x^n herausheben, die Form

$$\int x^{m+np} (b + ax^{-n})^p \, dx$$

ertheilt haben; so sehen wir, daß es sich mit Hülfe der Substitution

(7) $$\sqrt[q]{b + ax^{-n}} = u$$

auf ein rationales Integral zurückführen läßt, wenn

$$\frac{m + np + 1}{-n}, \quad \text{also auch} \quad -\left(\frac{m+1}{n} + p\right) = k$$

eine ganze Zahl ist; und zwar kann es, wenn k eine positive ganze von Null verschiedene Zahl wird, nach vorgenommener Auflösung mittelst des binomischen Lehrsatzes nach Gl. (12), dagegen wenn k eine ganze negative Zahl mit Einschluß der Nulle wird, nach ausgeführter Zerlegung in Partialbrüche nach §. 718 dargestellt werden.

Auch hier kann man, wenn k eine positive ganze Zahl ist, $q = 1$ annehmen, folglich bloß

(8) $$b + ax^{-n} = u$$

setzen.

Da außer den angeführten drey Fällen keiner mehr bekannt ist, wo die Irrationalität der Differenzialformel (3) aufgehoben

Fig. werden könnte; so sind wir zu dem Schlusse berechtiget, daß die Differenzialformel

$$x^m (a + bx^n)^p dx$$

integrabel ist, wenn entweder p

$$\text{oder } i = \frac{m+1}{n},$$

$$\text{oder endlich } k = -\left(\frac{m+1}{n} + p\right) = -(i+p)$$

eine ganze Zahl ist; und zwar kann dasselbe nach Gleichung (12) integrirt werden, wenn p im ersten Falle eine ganze positive Zahl mit Einschluß der Nulle, und i im zweyten Falle eine ganze positive von Null verschiedene, im dritten aber k eine positive ganze von Null unterschiedene Zahl ist; dagegen wird es nach Art der gebrochenen rationalen Functionen integrirt, wenn p im ersten Falle eine negative ganze Zahl mit Ausschluß der Nulle, im zweyten i eine negative ganze Zahl, die Null mit einbegriffen, und im dritten k eine negative ganze Zahl mit Einschluß der Nulle vorstellt.

§. 721.

Wir wollen die eben erklärten Integrations-Methoden durch folgende Beyspiele erläutern.

1. Beyspiel. Man bestimme das Integral der Differenzialformel $x^m (a + bx^n)^p dx$ unter der Voraussetzung, daß p eine positive ganze Zahl sey.

Entwickelt man die Potenz $(a+bx^n)^p$ nach dem binomischen Lehrsatze (§. 299.), so ist ihr allgemeines Glied

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-r+1)}{1.2.3.4 \ldots r} a^{p-r} b^r . x^{rn},$$

daher das allgemeine Glied der Differenzialformel

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-r+1)}{1.2.3.4 \ldots r} a^{p-r} b^r x^{m+rn} dx,$$

und jenes ihres Integrals

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-r+1)}{1.2.3.4 \ldots r} a^{p-r} b^r . \frac{x^{m+rn+1}}{m+rn+1}.$$

Setzt man hierin für r die Zahlen 0, 1, 2, ... p—1, p Fig. und der Kürze wegen $a+bx^n=X$; so ist

$$(9)\quad \int x^m X^p\,dx = a^p\cdot\frac{x^{m+1}}{m+1}+\frac{pa^{p-1}b}{1}\cdot\frac{x^{m+1+n}}{m+1+n}$$
$$+\frac{p(p-1)a^{p-2}b^2}{1\,.\,2}\cdot\frac{x^{m+1+2n}}{m+1+2n}+\ldots\ldots,$$
$$+\frac{p(p-1)a^2b^{p-2}}{1\,.\,2}\cdot\frac{x^{m+1+np-2n}}{m+1+np-2n}$$
$$+\frac{pab^{p-1}}{1}\cdot\frac{x^{m+1+np-n}}{m+1+np-n}+\frac{b^p x^{m+1+np}}{m+1+np}.$$

Exempel.

$$\int x^4(1-x)^3\,dx = \int x^4(1-3x+3x^2-x^3)\,dx$$
$$= \int(x^4-3x^5+3x^6-x^7)\,dx$$
$$= \frac{x^5}{5}-\frac{1}{2}x^6+\frac{3}{7}x^7-\frac{1}{8}x^8.$$

$$\int\frac{(1+x^2)^2dx}{x^3} = \int\frac{1+2x^2+x^4}{x^3}\,dx$$
$$= \int\frac{dx}{x^3}+2\int\frac{dx}{x}+\int x\,dx$$
$$= -\frac{1}{2x^2}+2\,Lx+\frac{1}{2}x^2.$$

$$\int x^{\frac{2}{3}}(1-\sqrt{x})^4dx = \int x^{\frac{2}{3}}(1-4x^{\frac{1}{2}}+6x-4x^{\frac{3}{2}}+x^2)\,dx$$
$$= \int(x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{7}{6}}+6x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{13}{6}}+x^{\frac{8}{3}})\,dx$$
$$= \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{24}{13}x^{\frac{13}{6}}+\frac{9}{4}x^{\frac{8}{3}}-\frac{24}{19}x^{\frac{19}{6}}+\frac{3}{11}x^{\frac{11}{3}}.$$

2. Beyspiel. Das Integral $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ werde bestimmt, wenn $\frac{m+1}{n}=i$ eine ganze positive von Null verschiedene Zahl ist.

Setzt man hier

$$a+bx^n=u,$$

Fig.

so ist $x = \left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{b^{\frac{1}{n}}}(u-a)^{\frac{1}{n}}$,

$$dx = \frac{1}{nb^{\frac{1}{n}}}(u-a)^{\frac{1}{n}-1}\,du,$$

daher

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{1}{nb^{\frac{m+1}{n}}}\int u^p(u-a)^{\frac{m+1}{n}-1}\,du, \text{ oder}$$

$$= \frac{1}{nb^i}\int u^p(u-a)^{i-1}\,du,$$

wenn $\frac{m+1}{n} = i$ angenommen wird.

Das allgemeine Glied dieses Integrals findet man aber nach dem im vorhergehenden Beyspiele angewendeten Verfahren

$$= \frac{(i-1)(i-2)\ldots(i-r)}{1.2.3\ldots\ldots r}\cdot(-a)^r\frac{u^{p+i-r}}{p+i-r},$$

daher das allgemeine Glied des Integrals $\int x^m(a+bx^n)^p dx$

$$= \frac{(i-1)(i-2)\ldots(i-r)}{1.2.3\ldots\ldots r}\cdot\frac{(-a)^r}{nb^i}\cdot\frac{(a+bx^n)^{p+i-r}}{p+i-r};$$

demnach ist, wenn man für r die Zahlen 0, 1, 2, … i−1, und X für $a+bx^n$ schreibt,

(10) $$\int x^m X^p\,dx =$$

$$= \frac{1}{nb^i}\left\{\frac{X^{p+i}}{p+i} - \frac{(i-1)}{1}\frac{aX^{p+i-1}}{p+i-1} + \frac{(i-1)(i-2)}{1.2}\frac{a^2X^{p+i-2}}{p+i-2} + \ldots\right.$$

$$\left. + \frac{(i-1)}{1}(-a)^{i-2}\frac{X^{p+2}}{p+2} + (-a)^{i-1}\frac{X^{p+1}}{p+1}\right\}.$$

Für $i=1$ wird insbesondere

$$\int x^{n-1}(a+bx^n)^p\,dx = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{n(p+1)b}, \text{ (wie §. 716.)}.$$

Exempel. Fig

Für $y = \int x\,(1+x)^{\frac{5}{2}}\,dx$

setzt man

$$1+x=u\ ,\quad x=u-1\ ,\quad dx=du;$$

dadurch wird

$$y=\int u^{\frac{5}{2}}(u-1)\,du=\int(u^{\frac{7}{2}}-u^{\frac{5}{2}})\,du$$
$$=\frac{2}{9}u^{\frac{9}{2}}-\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}}=\frac{2}{9}(1+x)^{\frac{9}{2}}-\frac{2}{7}(1+x)^{\frac{7}{2}}.$$

Zu $$y=\int\frac{x^3dx}{(1+x^2)^3}$$

nimmt man

$$1+x^2=u\ ,\quad x=(u-1)^{\frac{1}{2}}\ ,\quad dx=\frac{1}{2}(u-1)^{-\frac{1}{2}}du;$$

somit ist

$$y=\frac{1}{2}\int\frac{u-1}{u^3}\,du=\frac{1}{2}\int\left(\frac{du}{u^2}-\frac{du}{u^3}\right)$$
$$=-\frac{1}{2u}+\frac{1}{4u^2}=-\frac{1}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4(1+x^2)^2}.$$

3. Beyspiel. Man entwickle das Integral

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx\ ,$$

wenn $-\left(\frac{m+1}{n}+p\right)=k$ eine positive ganze von Null verschiedene Zahl ist.

Setzt man hier

$$b+ax^{-n}=u,$$

so ist

$$x=\left(\frac{u-b}{a}\right)^{-\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}(u-b)^{-\frac{1}{n}}$$

$$dx=-\frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}}(u-b)^{-\frac{1}{n}-1}du,$$

Fig. folglich

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx = \int x^{m+np}(b+ax^{-n})^p\,dx$$

$$= -\frac{a}{n}^{\frac{m+1}{n}+p} \int u^p (u-b)^{-\frac{m+1}{n}-p-1}\,du$$

$$= -\frac{1}{na^k}\int u^p (u-b)^{k-1}\,du.$$

Das allgemeine Glied des letzten Integrals ist aber

$$\frac{(k-1)(k-2)\ldots.(k-r)}{1.2.3\ldots.r}(-b)^r\frac{u^{p+k-r}}{p+k-r},$$

mithin jenes des zu bestimmenden Integrals

$$-\frac{1}{na^k}\cdot\frac{(k-1)(k-2)\ldots.(k-r)}{1.2.3\ldots.r}\cdot\frac{(-b)^r}{p+k-r}\left(\frac{a+bx^n}{x^n}\right)^{p+k-r}.$$

Man hat daher, wenn der Ordnung nach 0, 1, 2, ... $k-2$, $k-1$, für r, und um abzukürzen, X statt $a+bx^n$ gesetzt wird,

(11) $$\int x^m X^p\,dx = \frac{1}{na^k}\left\{-\frac{1}{p+k}\left(\frac{X}{x^n}\right)^{p+k}+\frac{(k-1)b}{p+k-1}\cdot\left(\frac{X}{x^n}\right)^{p+k-1}\right.$$

$$-\frac{(k-1)(k-2)b^2}{1.2.(p+k-2)}\left(\frac{X}{x^n}\right)^{p+k-2}+\ldots.$$

$$\left.-(-b)^{k-2}\frac{(k-1)}{p+2}\cdot\left(\frac{X}{x^n}\right)^{p+2}-\frac{(-b)^{k-1}}{p+1}\left(\frac{X}{x^n}\right)^{p+1}\right\}.$$

Für $k=1$ findet man insbesondere

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx = \int\frac{(a+bx^n)^p}{x^{np+n+1}}\,dx$$

$$= -\frac{1}{n(p+1)a}\cdot\left(\frac{a+bx^n}{x^n}\right)^{p+1}$$

wie in §. 716.

Z. E. Für $y=\int x^{-8}(3-5x^2)^{\frac{3}{2}}dx=\int x^{-5}(3x^{-2}-5)^{\frac{3}{2}}dx$ nimmt man

$$3x^{-2}-5=u,\ x=\left(\frac{u+5}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}(u+5)^{-\frac{1}{2}},$$

$$dx=-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,(u+5)^{-\frac{3}{2}}du;$$

folglich ist Fig.

$$y = -\frac{1}{18}\int u^{\frac{3}{2}}(u+5)\,du = -\frac{1}{18}\int (u^{\frac{5}{2}} + 5u^{\frac{3}{2}})\,du$$

$$= -\frac{1}{18}\left(\frac{2}{7}\,u^{\frac{7}{2}} + 2u^{\frac{5}{2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{63}\left(\frac{3-5x^2}{x^2}\right)^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{9}\left(\frac{3-5x^2}{x^2}\right)^{\frac{5}{2}}.$$

Zu $y = a^3\int \frac{dx}{x^2(ax+x^2)^{\frac{1}{2}}} = a^3\int x^{-2}(ax+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$$= a^3\int x^{-3}(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

setzt man

$$ax^{-1}+1 = u\,,\quad x = \left(\frac{u-1}{a}\right)^{-1} = a\,(u-1)^{-1},$$

$$dx = -a\,(u-1)^{-2}\,du,$$

daher ist

$$y = -a\int u^{-\frac{1}{2}}(u-1)\,du = -a\int (u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}})\,du$$

$$= -a\left(\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} - 2u^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= -a\left\{\frac{2}{3}\left(\frac{a+x}{x}\right)^{\frac{3}{2}} - 2\left(\frac{a+x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

4. Beyspiel. Man suche das Integral

$$y = \int \frac{dx}{a+bx^2}\,,$$

welches sich angeben läßt, weil p eine negative ganze Zahl ist.

Da

$$a+bx^2 = b\left(x^2+\frac{a}{b}\right) = b\left(x+\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$$

$$= b\,(x+\alpha)\,(x-\alpha)$$

ist, wenn man der Kürze wegen $\sqrt{\frac{a}{b}} = \alpha$ setzt; so hat man

$$y = \frac{1}{b}\int \frac{dx}{(x+\alpha)(x-\alpha)} = \frac{1}{2b\alpha}\int\left(\frac{dx}{x-\alpha} - \frac{dx}{x+\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{2b\alpha}\left[L\,(\alpha-x) - L\,(\alpha+x)\right] = \frac{1}{2b\alpha}\,L\,\frac{\alpha-x}{\alpha+x}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{ab}}\,L\,\frac{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}\,,$$

Fig. oder nach §. 685

$$= \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tang}\, x\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Es ist demnach

$$(12)\quad \int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{-ab}} L \frac{\sqrt{a}+x\sqrt{-b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{-b}} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg}\, x\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Bey diesem und bey allen folgenden Integralen nimmt man für bestimmte gegebene Werthe von a und b entweder den Logarithmen oder den Kreisbogen, je nachdem dieser oder jener reell ausfällt. So ist z. B.

$$(13)\quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang}\, x$$

$$(14)\quad \int \frac{dx}{1-x^2} = L\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Man findet dieses Integral viel leichter auf folgendem Wege. Es ist

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{1+\frac{b}{a}x^2}.$$

Setzt man nun $\frac{b}{a}x^2 = u^2$, so wird

$$x = u\sqrt{\frac{a}{b}},\quad dx = \sqrt{\frac{a}{b}}\, du,$$

daher

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \int \frac{du}{1+u^2}.$$

Allein (nach §. 678. und §. 713. Note.) ist

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arc\,tang}\, u;$$

daher ist, wenn für u sein Werth zurückgestellt wird,

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tang}\, x\sqrt{\frac{b}{a}},$$

oder nach §. 685.

$$= \frac{1}{2\sqrt{-ab}} L \frac{\sqrt{a}+x\sqrt{-b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{-b}}.$$

5. Beyspiel. Suchen wir das Integral Fig.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx^2}},$$

welches, da hier $\frac{m+1}{n} = \frac{-1+1}{n} = 0$ ist, sich durch einen geschlossenen Ausdruck angeben läßt, so setzen wir

$$\sqrt{a+bx^2} = u, \quad x = \left(\frac{u^2-a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad dx = \frac{udu}{\sqrt{b}\sqrt{u^2-a}};$$

dadurch wird

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx^2}} = \int \frac{du}{u^2-a} = \int \frac{du}{(u+\sqrt{a})(u-\sqrt{a})}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}} \int \left(\frac{du}{u-\sqrt{a}} - \frac{du}{u+\sqrt{a}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{a}} L\frac{u-\sqrt{a}}{u+\sqrt{a}},$$

nähmlich

(15) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}} L\frac{\sqrt{a+bx^2}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx^2}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} L\frac{\sqrt{a+bx^2}-\sqrt{a}}{x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-a}} \text{arc tang } \sqrt{\frac{a+bx^2}{-a}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \text{arc sec } x\sqrt{\frac{b}{-a}}.$$

Insbesondere ist

(16) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2} L\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1} = L\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$$

(17) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} L\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1} = L\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$$

(18) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{arc sec } x.$$

Auch dieses Integral läßt sich einfacher bestimmen, wenn man ihm die Gestalt

$$\frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dx}{x\sqrt{\left(\frac{-bx^2}{a}-1\right)}}$$

ertheilt, und $-\frac{bx^2}{a} = u^2$, $x = u\sqrt{-\frac{a}{b}}$, $dx = du\sqrt{\frac{-a}{b}}$ setzt.

Fig. Denn dadurch ergibt sich

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}},$$

oder weil (nach §. 678. und §. 713. Note)

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \text{arc sec } u$$

ist,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \text{arc sec } x\sqrt{\frac{b}{-a}},$$

oder nach §. 685.

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} L \frac{\sqrt{a+bx^2} - \sqrt{a}}{x}.$$

6. Beyspiel. Um das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}$$

aufzufinden, welches wegen

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{0+1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

angebbar ist, ertheilen wir ihm die Form

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(b+ax^{-2})}},$$

und setzen $\sqrt{(b+ax^{-2})} = u$,

wodurch wir

$$x = \left(\frac{u^2-b}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad dx = -a^{\frac{1}{2}} u (u^2-b)^{-\frac{3}{2}} du,$$

folglich

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{(b+ax^{-2})}} = -\int \frac{du}{u^2-b} = \int \frac{du}{(\sqrt{b}+u)(\sqrt{b}-u)},$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{b}} \int \left(\frac{du}{\sqrt{b}+u} + \frac{du}{\sqrt{b}-u}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{b}} L \frac{\sqrt{b}+u}{\sqrt{b}-u} = \frac{1}{2\sqrt{b}} L \frac{\sqrt{b}+\sqrt{(b+ax^{-2})}}{\sqrt{b}-\sqrt{(b+ax^{-2})}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} L(x\sqrt{b} + \sqrt{a+bx^2}),$$

erhalten. Sonach ist Fig.

$$(19)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} L(x\sqrt{b} + \sqrt{a+bx^2}) = \frac{1}{\sqrt{-b}} \arcsin x\sqrt{\frac{-b}{a}}.$$

Insbesondere findet man

$$(20)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = L(x + \sqrt{1+x^2}),$$

$$(21)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$$

Setzen wir, was uns (nach §. 678. und 713. Note) gestattet ist, diese letzte Gleichung als bekannt voraus, so können wir bey der Bestimmung des obigen Integrals auch so vorgehen. Es ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{b}{a}x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(x\sqrt{\frac{-b}{a}}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\frac{a}{-b}} \int \frac{d \cdot x\sqrt{\frac{-b}{a}}}{\sqrt{1-\left(x\sqrt{\frac{-b}{a}}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-b}} \arcsin x\sqrt{\frac{-b}{a}},$$

oder nach §. 685,

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} L(x\sqrt{b} + \sqrt{a+bx^2}).$$

7. Beyspiel. Eben so findet man, wenn man um der Kürze willen $a+bx = X$ setzt:

$$(22)\quad \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}X} = \frac{1}{\sqrt{-ab}} L\frac{\sqrt{a}+\sqrt{-bx}}{\sqrt{a}-\sqrt{-bx}} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{bx}{a}}$$

$$(23)\quad \int \frac{dx}{xX^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{a}} L\frac{\sqrt{X}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,sec}\sqrt{\frac{bx}{-a}}$$

$$(24)\quad \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{b}} L(\sqrt{bx}+\sqrt{X}) = \frac{2}{\sqrt{-b}} \arcsin\sqrt{\frac{-bx}{a}};$$

Fig.

(25) $$\int \frac{dx}{x X^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \left\{ \frac{3}{2} L \frac{\sqrt[3]{X} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt{3} . \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{3} . \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{X} + 2\sqrt[3]{a}} \right\}$$

(26) $$\int \frac{dx}{x X^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} \left\{ \frac{3}{2} L \frac{\sqrt[3]{X} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{X}} - \sqrt{3} . \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{3} . \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{X} + 2\sqrt[3]{a}} \right\}.$$

§. 722.

So bestimmt und erschöpfend auch die in §. 720 erörterte Integrationsmethode des binomischen Differenzials

$$x^m (a + bx^n)^p dx$$

ist: so bleibt es doch wünschenswerth, der bisweilen sehr beschwerlichen Zerlegung der gebrochenen rationalen Functionen in Partialbrüche ausweichen zu können. Dieß veranlaßt uns zu erforschen, ob wir nicht mit Hülfe der theilweisen Integration, welche, wie (§. 713.) die Zertheilungsformel

(8) $$\int u dv = uv - \int v du$$

zeigt, ein bestimmtes Integral $\int u dv$ auf ein anderes $\int v du$ zurückführt, von dem zu suchenden Integrale

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx$$

zu einem ähnlich gebauten

$$\int x^\mu (a + bx^n)^\pi dx ,$$

welches mit geringerer Mühe sich darstellen ließe, übergehen könnten.

In dieser Absicht setzen wir in der Zertheilungsformel (8)

(27) $$u dv = x^m X^p dx , \quad v du = M x^\mu X^\pi dx ,$$

indem wir, um abzukürzen, X für $a + bx^n$ schreiben und M, μ, π unbestimmte Constanten andeuten lassen. Da jedoch diese Annahmen nicht bestehen können, wofern nicht, sowohl u und v, als auch du und dv, Producte eines constanten Multiplicators mit einer Potenz von x und einer Potenz von X sind: so haben wir das Recht

(28) $$u = Q x^q X^s , \quad v = R x^r X^t$$

zu setzen, indem wir die Constanten Q, R, q, r, s, t sogleich zu bestimmen uns vornehmen.

Differenziren wir zu diesem Ende die Gleichungen (28), Fig. so erfolgt

$$(29) \qquad du = Qx^{q-} X^{s-1}[qX + nsbx^n]dx$$
$$dv = Rx^{r-1} X^{t-1}[rX + ntbx^n]dx.$$

Wenn wir nun aus diesen sechs Gleichungen die Größen u, x, du, dv eliminiren, so erhalten wir:

$$(30) \qquad x^{m+1-q-r} X^{p+1-s-t} = QR[rX + ntbx^n],$$

$$(31) \qquad Mx^{\mu+1-q-r} X^{\pi+1-s-t} = QR[qX + nsbx^n],$$

und wenn wir die Gleichung (31) durch (30) dividiren,

$$(32) \qquad Mx^{\mu-m} X^{\pi-p} = \frac{qX + nsbx^n}{rX + ntbx^n} = \frac{qa + (q+ns)bx^n}{ra + (r+nt)bx^n}.$$

Da in diesen drey Gleichungen vor dem Gleichheitszeichen bloß Producte aus Potenzen von x und X mit constanten Multiplicatoren stehen; so müssen, damit auch hinter dem Gleichheitszeichen solche Producte auftreten können, die am Schlusse der Gleichungen stehenden zweygliedrigen Ausdrücke sämmtlich eingliedrig werden. Dieß kann jedoch, da a und b von der Nulle verschieden vorausgesetzt werden, nur dann geschehen, wenn in der Gleichung (30) eine der Größen

$$r, \quad t, \quad r + nt,$$

in der Gleichung (31) aber eine der Größen

$$q, \quad s, \quad q + sn;$$

jedoch wegen der Gleichung (32) weder q mit r, noch s mit t, noch auch q + sn mit r+nt zugleich verschwindet. Es kann demnach nur einer der folgenden sechs Fälle statt finden:

$$(33) \qquad \begin{aligned} r &= 0, \quad q + sn = 0, \\ q &= 0, \quad r + nt = 0, \\ t &= 0, \quad q + sn = 0, \\ s &= 0, \quad r + nt = 0, \\ r &= 0, \quad s = 0, \\ q &= 0, \quad t = 0. \end{aligned}$$

Läßt man nun diese 6 Fälle der Reihe nach in den Gleichungen (30), (31) eintreten, und erwägt man, daß die Gleichheit der vorkommenden Producte der Potenzen von x und X unbe-

Fig. dingte Gleichheit sowohl ihrer Coefficienten als der zu einerley Wurzel gehörigen Exponenten erheischt: so findet man leicht die zur Bestimmung der zu suchenden Constanten

$$M,\ Q,\ R,\ q,\ r,\ s,\ t$$

nöthigen Gleichungen.

Wir werden diesen Vorgang hinreichend erläutern, wenn wir bloß den ersten Fall vollständig ausführen. Bey diesem ist $r=0$, daher vermöge der Gleichung (30)

$$m+1-q=n\ ,\quad p+1-s-t=0\ ,\quad QR^{ntb}=1\ ;$$

ferner ist $q+sn=0$, folglich fließt aus (31)

$$\mu+1-q=0\ ,\quad \pi+1-s-t=0\ ,\quad QR^{qa}=M.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen findet man nun

$$\mu=m-n,\ \pi=p,\ q=m+1-n,\ s=-\frac{q}{n}=-\frac{m+1}{n}+1$$

$$t=p+1-s=p+\frac{m+1}{n}\ ,$$

$$QR=\frac{1}{ntb}=\frac{1}{(np+m+1)b},\ M=\frac{qa}{ntb}=\frac{(m+1-n)a}{(np+m+1)b}\ .$$

Substituirt man diese Werthe in die, den obigen Annahmen gemäß, aus (8) sich ergebende Gleichung

$$\int x^m X^p dx = QR\,.\,x^{q+r}X^{s+t}-M\int x^{\mu}X^{\pi}dx\,;$$

so erscheint

$$\int x^m X^p dx=\frac{x^{m+1-n}X^{p+1}}{(m+1+np)b}-\frac{(m+1-n)a}{(m+1+np)b}\int x^{m-n}X^p dx.$$

Geht man alle sechs Fälle auf diese Weise durch, so erhält man folgende sechs Reductionsformeln:

$$\int x^m X^p dx=$$

$$(34)\quad =\frac{x^{m+1-n}X^{p+1}}{(m+1+np)b}-\frac{(m+1-n)a}{(m+1+np)b}\int x^{m-n}X^p dx$$

$$(35)\quad =\frac{x^{m+1}X^{p+1}}{(m+1)a}-\frac{(m+1+n+np)b}{(m+1)a}\int x^{m+n}X^p dx$$

$$(36)\quad =\frac{x^{m+1}X^p}{m+1+np}+\frac{npa}{m+1+np}\int x^m X^{p-1}dx$$

$$(37)\quad =-\frac{x^{m+1}X^{p+1}}{(p+1)na}+\frac{m+1+n+np}{(p+1)na}\int x^m X^{p+1}dx$$

Fig.

$$\int x^m X^p dx =$$

(38) $$= \frac{x^{m+1-n} X^{p+1}}{(p+1)nb} - \frac{m+1-n}{(p+1)nb} \int x^{m-n} X^{p+} dx$$

(39) $$= \frac{x^{m+1} X^p}{m+1} - \frac{npb}{m+1} \int x^{m+n} X^{p-1} dx .$$

§. 723.

Nachdem wir nun factisch nachgewiesen haben, daß es möglich ist, das Integral $\int x^m X^p dx$ auf das ähnliche $\int x^\mu X^\pi dx$ zurückzuführen, so können wir uns in den Besitz der eben gefundenen Reductionsformeln auch auf folgende Weise setzen, welche uns zugleich Gelegenheit darbiethet, den Vorgang bey der theilweisen Integration an einem Beyspiele zu erörtern.

Soll die Differenzialformel

$$x^m X^p dx$$

nach Anleitung der Gleichung (§. 713.)

(8) $$\int u dv = uv - \int v du$$

theilweise integrirt werden, so zerlegen wir dieselbe in zwey Factoren u und dv dergestalt, daß der letztere das Differenzial einer vollständig angebbaren Function v ist. Kennt man sonach die Größen u und v, so bedarf es bloß der Substitution derselben in dem zweyten Theile dieser Zertheilungsformel. Da wir nun im vorliegenden Falle ohne Mühe erkennen, daß $x^m dx$ ein leicht integrables Differenzial ist, so setzen wir

$$dv = x^m dx , \quad \text{daher} \quad u' = X^p ,$$

und erhalten

$$v = \frac{x^{m+1}}{m+1} , \qquad du = pX^{p-1} dX = bnpx^{n-1} X^{p-1} dx.$$

Substituiren wir diese Werthe, so ergibt sich

(39) $$\int x^m X^p dx = \frac{x^{m+1} X^p}{m+1} - \frac{npb}{m+1} \int x^{m+n} X^{p-1} dx.$$

Fig. Suchen wir hieraus das letzte Integral, und setzen sowohl m — n statt m, als auch p + 1 statt p; so finden wir

$$(38)\ \int x^m X^p dx = \frac{x^{m+1-n} X^{p+1}}{(p+1)nb} - \frac{m+1-n}{(p+1)nb} \int x^{m-n} X^{p+1} dx.$$

Zur Auffindung der übrigen Formeln zerlegen wir in dem letzten Integrale die Potenz X^{p+1} oder $(a+bx^n)^{p+1}$ in die Factoren $(a+bx^n)^p$ und $a+bx^n$; dadurch übergeht diese Gleichung, wenn wir zugleich den Nenner beseitigen, in

$$(p+1)nb \int x^m X^p dx =$$
$$= x^{m+1-n} X^{p+1} - (m+1-n)a \int x^{m-n} X^p dx - (m+1-n)b \int x^m X^p dx$$

und wir erhalten

$$(34)\qquad \int x^m X^p dx =$$
$$= \frac{x^{m+1-n} X^{p+1}}{(m+1+np)b} - \frac{(m+1-n)a}{(m+1+np)b} \int x^{m-n} X^p dx.$$

Bestimmen wir auch hier das letzte Integral, indem wir zugleich m + n statt m setzen, so ergibt sich

$$(35)\qquad \int x^m X^p dx =$$
$$= \frac{x^{m+1} X^{p+1}}{(m+1)a} - \frac{(m+1+n+np)b}{(m+1)a} \int x^{m+n} X^p dx.$$

Schreiben wir endlich das vorgelegte Integral

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx$$

in der Form $\int x^{m+np} (b+ax^{-n})^p dx$,

und wenden wir auf dasselbe das erste oder das letzte Paar der eben gewonnenen Gleichungen an, so erscheinen, nach vollbrachten Reductionen die Formeln

$$(36)\quad \int x^m X^p dx = \frac{x^{m+1} X^p}{m+1+np} + \frac{npa}{m+1+np} \int x^m X^{p-1} dx$$

$$(37)\qquad \int x^m X^p dx =$$
$$= -\frac{x^{m+1} X^{p+1}}{(p+1)na} + \frac{m+1+n+np}{(p+1)na} \int x^m X^{p+1} dx.$$

Fig.

§. 724.

Behandeln wir das gesuchte Integral $\int x^m (a+bx^n)^p dx$ nach jeder der obigen Reductionsformeln mehrmahl, indem wir z. B. bey der ersten wiederhohlt $m-n$ für m setzen, und jedes der hervortretenden Integrale in den Ausdruck des vorhergehenden substituiren, so erhalten wir folgende Gleichungen, in denen X für $a+bx^n$ steht.

$$\int x^m X^p dx =$$

$$(40) = \frac{X^{p+1}}{m+1+np}\left[\frac{x^{m+1-n}}{b} - \frac{(m+1-n)ax^{m+1-2n}}{(m+1+np-n)b^2} + \cdots\right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{r-1}(m+1-n)(m+1-2n)\ldots(m+1-(r-1)n)a^{r-1}x^{m+1-rn}}{(m+1+np-n)\cdots(m+1+np-(r-1)n)b^r}\right]$$

$$+ \frac{(-1)^r(m+1-n)(m+1-2n)\ldots(m+1-rn)a^r}{(m+1+np)(m+1+np-n)\ldots(m+1+np-(r-1)n)b^r}\int x^{m-rn}X^p dx,$$

$$(41) = \frac{X^{p+1}}{m+1}\left[\frac{x^{m+1}}{a} - \frac{(m+1+np+n)bx^{m+1+n}}{(m+1+n)a^2} + \cdots\right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{r-1}(m+1+np+n)(m+1+np+2n)\ldots(m+1+np+(r-1)n)b^{r-1}x^{m+1+(r-1)n}}{(m+1+n)\cdots(m+1+(r-1)n)a^r}\right]$$

$$+ \frac{(-1)^r(m+1+np+n)(m+1+np+2n)\ldots(m+1+np+rn)b^r}{(m+1)(m+1+n)(m+1+2n)\ldots(m+1+(r-1)n)a^r}\int x^{m+rn}X^p dx,$$

$$(42) = \frac{x^{m+1}}{m+1+np}\left[X^p + \frac{pnaX^{p-1}}{(m+1+np-n)} + \cdots\right.$$

$$\left. + \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-r+2)n^{r-1}a^{r-1}X^{p-r+1}}{(m+1+np-n)\cdots(m+1+np-(r-1)n)}\right]$$

$$+ \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-r+1)n^r a^r}{(m+1+np)(m+1+np-n)\ldots(m+1+np-(r-1)n)}\int x^m X^{p-r}dx,$$

$$(43) = -\frac{x^{m+1}}{p+1}\left[\frac{X^{p+1}}{na} + \frac{(m+1+np+n)X^{p+2}}{(p+2)n^2a^2} + \cdots\right.$$

$$\left. + \frac{(m+1+np+n)(m+1+np+2n)\ldots(m+1+np+(r-1)n)X^{p+r}}{(p+2)\cdots(p+r)n^r a^r}\right]$$

$$+ \frac{(m+1+np+n)(m+1+np+2n)\cdots(m+1+np+rn)}{(p+1)(p+2)\cdots(p+r)n^r a^r}\int x^m X^{p+r}dx,$$

Fig.

$$\int x^m X^p dx =$$

$$(44) = \frac{X^{p+1}}{p+1}\left[\frac{x^{m+1-n}}{nb} - \frac{(m+1-n)x^{2+1-2n}\cdot X}{(p+2)n^2b^2} + \cdots\cdots\right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{r-1}(m+1-n)(m+1-2n)..(m+1-(r-1)n)x^{m+1-rn}X^{r-1}}{(p+2)\cdots\cdots(p+r)n^r b^r}\right]$$

$$+ \frac{(-1)^r(m+1-n)(m+1-2n)\cdots(m+1-rn)}{(p+1)(p+2)(p+3)\cdots\cdots(p+r)n^r b^r}\int x^{m-rn}X^{p+r}dx,$$

$$(45) = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left[X^p - \frac{pnbx^nX^{p-1}}{m+1+n} + \cdots\cdots\right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{r-1}p(p-1)..(p-r+2)n^{r-1}b^{r-1}x^{(r-1)n}X^{p-r+1}}{(m+1+n)\cdots\cdots(m+1+(r-1)n)}\right]$$

$$+ \frac{(-1)^r p(p-1)\cdots\cdots(p-r+1)n^r b^r}{(m+1)(m+1+n)\cdots(m+1+(r-1)n)}\int x^{m+rn}X^{p-r}dx.$$

§. 725.

Untersuchen wir nun, was wir mittelst dieser Reductionsformeln zu leisten vermögen, so zeigt sich, daß wir durch dieselben, mögen sie auch in was immer für einer Ordnung angewendet werden, das Integral $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ bloß auf ein ähnlich gebautes $\int x^\mu(a+bx^n)^\pi dx$ zu bringen im Stande sind, dessen Exponent μ von dem Exponenten m des gegebenen um ein Vielfaches von n sich unterscheidet, während sein Exponent π von dem Exponenten p des vorgelegten um eine ganze Zahl differirt. Daraus folgt, daß die Zahlen

$$p \text{ und } \pi$$

$$\frac{m+1}{n} \text{ und } \frac{\mu+1}{n}$$

$$\frac{m+1}{n}+p \text{ und } \frac{\mu+1}{n}+\pi$$

stets zugleich entweder ganz oder gebrochen, mithin beyde Integrale $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ und $\int x^\mu(a+bx^n)^\pi dx$ aus demselben Grunde in geschlossenen Ausdrücken sich darstellen lassen.

Wir bemerken jedoch ferner noch, daß die genannten Zahlen auch stets gleiche Vorzeichen (+ und —) besitzen. Denn

I. Wenn p eine positive ganze Zahl mit Einschluß der Nulle, Fig.
also $p > -1$ ist, so muß in den Formeln (42) und (45) der kleinste Factor $p-r+1$ des Zählers im Schlußgliede wenigstens $+1$, folglich $p-r+1>0$ seyn, weil, wenn er verschwände, keine Reduction des gegebenen Integrals auf ein ähnliches statt fände. Soll aber dann $p-r=\pi$ werden, so muß $\pi+1>0$, mithin auch $\pi>-1$ seyn.

II. Wenn $\frac{m+1}{n}$ eine positive von Null verschiedene ganze Zahl, mithin $\frac{m+1}{n}>0$ ist, so muß in den Formeln (40) und (44) in dem Endgliede der kleinste Factor $\frac{m+1-rn}{n}$ oder $\frac{m+1}{n}-r$ des Zählers, wenigstens $+1$, daher $\frac{m+1}{n}-r>0$ seyn. Es ist aber $m-rn=\mu$, folglich auch $\frac{\mu+1}{n}>0$.

III. Ist $-(\frac{m+1}{n}+p)$ eine positive ganze von Null verschiedene Zahl, oder $-(\frac{m+1}{n}+p)>0$, so ist auch in den Formeln (41) und (43) der kleinste Factor $-(\frac{m+1+np+rn}{n})$ oder $-(\frac{m+1}{n}+p+r)$ des Zählers im letzten Gliede wenigstens $+1$, folglich $-(\frac{m+1}{n}+p+r)>0$. Damit nun $m+rn=\mu$ und $p=\pi$ werde, muß auch $-(\frac{\mu+1}{n}+\pi)>0$ seyn.

IV. Ist p eine negative von Null verschiedene Zahl, sofort $p<0$; so kann in den Formeln (43) und (44) im letzten Gliede der größte Factor $p+r$ des Nenners höchstens -1, daher $p+r<0$, nicht aber Null selbst seyn, weil dieses Glied sonst unendlich groß würde. Da nun in diesem Falle $p+r=\pi$ wird, so ist auch $\pi<0$.

Fig.

V. Ist $\frac{m+1}{n}$ eine negative ganze Zahl mit Einschluß der Nulle, folglich $\frac{m+1}{n} < 1$; so kann in den Formeln (41) und (45) in dem Schlußgliede der größte Factor $\frac{m+1+(r-1)n}{n}$ oder $\frac{m+1}{n} + r - 1$ des Nenners höchstens $= 1$, folglich $\frac{m+1}{n} + r - 1 < 0$ werden. Soll nun $m + rn = \mu$ werden, so muß auch $\frac{\mu+1}{n} < 1$ seyn.

VI. Wenn endlich $-(\frac{m+1}{n} + p)$ eine negative ganze Zahl mit Inbegriff der Nulle, oder $-(\frac{m+1}{n} + p) < 1$ ist; so darf in den Formeln (40) und (42) der größte Factor $-\frac{m+1+np-rn+n}{n}$ oder $-(\frac{m+1}{n} + p - r + 1)$ des Nenners im Schlußgliede höchstens $= 1$, folglich

$$-(\frac{m+1}{n} + p - r + 1) < 0$$

seyn. Soll nun $m - rn = \mu$ und $p = \pi$ werden, so muß auch $-(\frac{\mu+1}{n} + \pi + 1) < 0$ oder $-(\frac{\mu+1}{n} + \pi) < 1$ seyn.

Man kann demnach das Integral $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ nur auf ein anderes gleich gestaltetes $\int x^\mu (a + bx^n)^\pi dx$ bringen, welches nach derselben Regel (§. 720.), wie das gegebene sich integriren läßt, oder welches mit dem gegebenen von einerley Art ist, wenn wir zur Vereinfachung der Rede, je nachdem

$$p\ ,\ \frac{m+1}{n}\ ,\ -(\frac{m+1}{n} + p)$$

positive oder negative ganze Zahlen sind, sechs Arten solcher bi-

nomischen Integrale unterscheiden. Folglich ist es geradezu un- Fig.
möglich Integrale der 1sten und 4ten Art
der 2ten und 5ten Art
der 3ten und 6ten Art
wechselweise auf einander zurückzuführen.

Obgleich wir sonach in obigen Reductionsformeln, gegen unsern Wunsch, keineswegs das Mittel finden, eine Differenzialformel, welche den im § 720 aufgestellten Bedingungen der Integrabilität nicht Genüge leistet, auf eine integrable zurückzuführen: so leisten sie uns doch dadurch schon sehr wesentliche Dienste, daß wir mit ihrer Hülfe jedes in der Form $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ begriffene Integral auf das einfachste seiner Art zu reduciren vermögen, bey welchem nähmlich die Zahlwerthe der Exponenten m und n so klein als möglich sind, und das zugleich den einfachsten Ausdruck verstattet. Es wird demnach unsere nächste Sorge seyn, die einfachsten Integrale der angeführten sechs Arten auszumitteln, auf welche sich das vorliegende Integral mittelst der gefundenen sechs Reductionsformeln bringen läßt.

§. 726.

Zu diesem Ende gehen wir die hier möglichen Fälle einzeln durch, indem wir zur Erleichterung unserer Forschungen den Exponenten n als eine ganze positive Zahl voraussetzen, da dieses, wenn er negativ wäre, durch die Substitution $x = \frac{1}{u}$, oder durch das Herausheben des Factors x^n aus dem Binom $a + bx^n$, falls er aber in der Bruchform $\frac{i}{k}$ erschiene, durch die Substitution $x = u^k$ leicht bewirkt werden könnte.

I. Ist p eine positive ganze Zahl, so wird man bey der Anwendung der Reductionsformeln (42) oder (45) stets die positive ganze Zahl r dergestalt wählen können, damit der Factor $p - r + 1$ und mit ihm das Schlußglied der Gleichung gänzlich verschwinde.

Fig.

II. Eben so wird man, wenn $\frac{m+1}{n}$ eine positive ganze von Null verschiedene Zahl ist, in den Formeln (40) und (44) die positive ganze Zahl r so annehmen können, daß der Factor

$$m+1-rn=n\left(\frac{m+1}{n}-r\right)$$

und mit ihm das letzte Glied verschwinde.

III. Endlich wird man, wenn $-\left(\frac{m+1}{n}+p\right)$ eine positive ganze von Null verschiedene Zahl ist, eine solche positive ganze Zahl r finden können, daß in den Formeln (41) und (43) der Factor $m+1+np+rn=n\left(\frac{m+1}{n}+p+r\right)$, und durch ihn das Schlußglied aufgehoben werde.

In diesen drey Fällen kann man demnach mit Hülfe einer dergestalt gewählten Reductionsformel, daß in ihr dasjenige Integral, auf welches man das gegebene zu bringen beabsichtiget, gar nicht erscheint, die Integration vollständig bewirken.

IV. Ist p eine negative und m erstens eine ganze Zahl, so kann man mit Hülfe der Formel (43) oder (44) den Exponenten p höchstens auf -1 herabbringen, weil, wenn man ihn auf Null reduciren wollte, der Nenner des letzten Gliedes verschwände. Ferner läßt sich der Exponent m, wenn er positiv ist, mittelst der Reductionsformeln (40) und (44), und wenn er negativ ist, mittelst (41) und (45) auf einen positiven Exponenten k reduciren, welcher kleiner als n ist, und gefunden wird, wenn man m durch n so dividirt, daß der Rest k positiv ausfällt. Sofort ist das einfachste Integral dieser Art

(46) $$\int \frac{x^k\,dx}{a+bx^n}.$$

Man könnte zwar dieses Integral, wenn $k>\frac{n}{2}$ ist, mittelst der Reductionsformel (40) auf

$$\int \frac{dx}{x^{n-k}(a+bx^n)}$$

bringen, wo der Exponent $n-k$ von x kleiner als $\frac{n}{2}$, daher auch kleiner als k ist; allein dann würde der Bruch $\frac{1}{x^{n-k}(a+bx^n)}$ in $2n-k$ Partialbrüche zerlegt, folglich das Integral selbst aus $2n-k$ Gliedern bestehen, während das Integral (46) deren nur n, also um $n-k$ weniger enthält. Fig.

So lassen sich z. B. die Integrale

$$\int \frac{x^{16}dx}{(a+bx^5)^6}, \quad \int \frac{dx}{x^{12}(a+bx^5)^7}, \quad \int \frac{dx}{x^4(a+bx^4)^5}$$

auf die einfachsten Integrale

$$\int \frac{x\,dx}{a+bx^5}, \quad \int \frac{x^3dx}{a+bx^5}, \quad \int \frac{dx}{a+bx^4}$$

zurückführen.

Ist aber zweytens m eine gebrochene Zahl und t ihr Nenner, so setzen wir

$$x^{\frac{1}{t}} = u, \quad x = u^t, \quad dx = tu^{t-1}du,$$

wodurch wir

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = t\int u^{mt+t-1}(a+bu^{nt})^p du$$

erhalten. Da nun $mt+t-1$ eine ganze Zahl ist, so läßt sich das letzte Integral auf die einfachste Form

$$\int \frac{u^k du}{a+bu^{nt}}$$

bringen, wenn $mt+t-1$ durch nt getheilt den positiven Rest k gibt.

Setzen wir hierin wieder

$$u = x^{\frac{1}{t}}, \quad du = \frac{1}{t}x^{\frac{1}{t}-1}dx,$$

so wird

$$\int \frac{u^k du}{a+bu^{nt}} = \frac{1}{t}\int \frac{x^{\frac{k+1}{t}-1}dx}{a+bx^n};$$

Fig. daher ist

$$\int \frac{x^{\frac{k+1}{t}-1}\,dx}{a+bx^n} \tag{47}$$

das einfachste Integral, auf welches das Integral

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx$$

unter diesen Umständen reducirt werden kann.

Z. B. Die einfachsten Formen, auf welche man die Integrale

$$\int \frac{x^{\frac{3}{4}}dx}{(a+bx^5)^3}, \quad \int \frac{dx}{x^{\frac{3}{4}}(a+bx^5)^2}, \quad \int \frac{dx}{x^{\frac{15}{2}}(a+bx^4)},$$

bringen kann, sind demnach

$$\int \frac{x^{\frac{3}{4}}dx}{a+bx^5}, \quad \int \frac{dx}{x^{\frac{3}{4}}(a+bx^5)}, \quad \int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{a+bx^4}.$$

V. Wenn $\frac{m+1}{n}$ eine negative ganze Zahl (mit Einschluß der Nulle) und die positive Zahl q der Nenner des gebrochenen Exponenten p ist, so reducirt sich das Integral

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx$$

durch die Substitution

$$\sqrt[q]{a+bx^n} = u$$

auf das Integral

$$\int u^{pq+q-1}(u^q-a)^{\frac{m+1}{n}-1}\,du,$$

welches, weil $pq+q-1$ eine ganze Zahl ist, auf die einfachste Form

$$\int \frac{u^k\,du}{u^q-a}$$

gebracht werden kann, in welcher k den positiven Rest vorstellt, den die Theilung von $pq+q-1$ durch q liefert.

Stellt man nun für u seinen Werth zurück, so ist Fig.

(48) $$\int \frac{dx}{x(a+bx^n)^{1-\frac{k+1}{q}}}$$

die einfachste Gestalt, auf die das Integral $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ in dem gegenwärtigen Falle reducirt werden kann.

Z. B. So lassen sich die Integrale

$$\int \frac{(a+bx^3)^{\frac{15}{4}}dx}{x^{10}}, \quad \int \frac{dx}{x^{13}(a+bx^4)^{\frac{11}{3}}}, \quad \int \frac{dx}{x^{11}(a+bx^5)^{\frac{11}{2}}}$$

auf die einfachsten Formen

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{a+bx^3}}, \quad \int \frac{dx}{x(a+bx^4)^{\frac{2}{3}}}, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx^5}}$$

zurückführen.

VI. Ist endlich $-(\frac{m+1}{n}+p)$ eine ganze negative Zahl mit Einschluß der Nulle und q der positive Nenner des gebrochenen Exponenten p, so reducirt sich das Integral

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx$$

durch die Substitution

$$\sqrt[q]{b+ax^{-n}} = u$$

auf das Integral

$$\int u^{pq+q-1}(u^q-b)^{-\frac{m+1}{n}-p-1}du,$$

welches, da $pq+q-1$ eine ganze Zahl ist, auf die einfachste Form

$$\int \frac{u^k du}{u^q-b}$$

gebracht werden kann, wofern k den aus der Division von $pq+q-1$ durch q zurückbleibenden positiven Rest vorstellt.

Setzt man hierin für u seinen Werth zurück, so wird

(49) $$\int \frac{dx}{x(b+ax^{-n})^{1-\frac{k+1}{q}}}$$

Fig. das einfachste Integral, auf welches das gegebene Integral

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx$$

bey diesen Voraussetzungen sich bringen läßt.

So z. B. können die Integrale

$$\int x^6 (a+bx^3)^{\frac{17}{3}} dx, \quad \int x^{10} (a+bx^4)^{\frac{13}{4}} dx, \quad \int \frac{x^8 dx}{(a+bx^5)^{\frac{6}{5}}}$$

auf die einfachsten Integrale

$$\int \frac{dx}{x(b+ax^{-3})^{\frac{1}{3}}}, \quad \int \frac{dx}{x(b+ax^{-4})^{\frac{3}{4}}}, \quad \int \frac{dx}{x(b+ax^{-5})^{\frac{1}{5}}},$$

oder

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{a+bx^3}}, \quad \int \frac{x^2 dx}{(a+bx^4)^{\frac{3}{4}}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt[5]{a+bx^5}}$$

reducirt werden.

§. 727.

I. Um demnach eine gegebene binomische Differenzialformel zu integriren, wird man zuerst untersuchen, ob und weßwegen sie integrabel ist, oder zu welcher Art sie gehöre. Tritt einer der Fälle ein, daß p oder $\frac{m+1}{n}$ oder $-(\frac{m+1}{n}+p)$ eine ganze positive Zahl ist, nähmlich daß das Integral zu einer der drey ersten Arten gehört, so wird man entweder geradezu oder wenigstens nach einer zweckmäßigen Substitution die Auflösung nach dem binomischen Lehrsatze vollbringen, und dann gliederweise integriren, oder nach dem im vorigen Paragraphe I. II. III. angegebenen Reductionsformeln die Integration ausführen.

Ist aber entweder p oder $\frac{m+1}{n}$ oder $-(\frac{m+1}{n}+p)$ eine negative ganze Zahl, gehört nähmlich das gegebene Integral zu einer der drey letzten Arten, so wird man dasselbe (nach §. 726. IV. V. VI.) auf das einfachste seiner Art herabbringen, und dieses nach §. 720 bestimmen.

Zu dieser Reduction wird man entweder die im §. 723 gefundenen Formeln wiederhohlt anwenden, oder die im §. 724 aufge-

stellten Reductionsformeln gebrauchen, wobey man jedoch die zu Fig. benützenden Formeln stets den Umständen gemäß auszuwählen hat.

Wir wollen dieses Rechnungsverfahren durch einige Beyspiele erläutern.

1. Beyspiel. Man suche $\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Da hier $m = 6$, $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$, $a = 1$, $b = 1$ ist, so hat man

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{7-1}{2} = 3,$$

folglich kann das Integral nach §. 726. VI. auf das einfachste $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ zurückgebracht werden. Nun erhalten wir nach Gleichung (40)

$$\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}\left(\frac{x^5}{6} - \frac{5x^3}{6.4} + \frac{5.3x}{6.4.2}\right) - \frac{5.3.1}{6.4.2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Es ist aber (§. 721. Gl. 20.)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = L\,(x + \sqrt{1+x^2});$$

daher ist

$$\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left(\frac{x^5}{6} - \frac{5x^3}{6.4} + \frac{5.3x}{6.4.2}\right)\sqrt{1+x^2} - \frac{5}{16} L(x+\sqrt{1+x^2}).$$

2. Beyspiel. Zu bestimmen sey $\int \frac{dx}{x(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$.

Hier ist

$$m = -1,\ n = 2,\ p = -\frac{5}{2},\ a = 1,\ b = -1,\ \frac{m+1}{n} = 0;$$

daher wird man das Integral nach §. 726. V. auf das einfachste $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ bringen können.

Hiezu gibt die Gleichung (43)

$$\int \frac{dx}{x(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{3(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}},$$

Fig. ferner ist nach §. 721. Gl. 71.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = L\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x};$$

folglich hat man

$$\int \frac{dx}{x(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{3(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} + L\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}.$$

3. Beyspiel. Man bestimme das Integral

$$\int \frac{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}\,dx}{x^5}.$$

Da hier $m=-5$, $n=2$, $p=\frac{3}{2}$, $a=-1$, $b=1$, folglich $\frac{m+1}{n}=-2$ ist, so kann dieses Integral (§. 726. V.) auf $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ gebracht werden.

Nun liefert die Formel (45)

$$\int \frac{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}\,dx}{x^5} = \frac{1}{x^4}\left\{\frac{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}{-4} - \frac{3}{8}x^2(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\right\} + \frac{3}{8}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}},$$

und die Gleichung (18) in §. 721

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{arc sec } x,$$

daher ist

$$\int \frac{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}\,dx}{x^5} = \left(\frac{1}{4x^4} - \frac{5}{8x^2}\right)\sqrt{x^2-1} + \frac{3}{8}\,\text{arc sec } x.$$

II. Ereignet sich bey der Reduction eines binomischen Integrals auf ein anderes derselben Art der Fall, daß ein Nenner Null wird; so kann man, wenn auch der Zähler 0 wird, diesem Uebelstande dadurch am leichtesten begegnen, daß man die Werthe von m und p nicht auf ein Mahl, sondern theilweise, und zwar zuerst den Werth derjenigen Größe substituirt, welche nicht in den Factoren des Zählers und Nenners zugleich erscheint, weil

sich dann die gleichen Factoren schon nach der ersten Substitution Fig. aufheben. Wird der Nenner $=0$ und erhält im Zähler entweder x oder $a+bx^n$ den Exponenten 0, so hat man für die Ausdrücke $\frac{x^0}{0}$ und $\frac{(a+bx^n)^0}{0}$ (nach §. 716) Lx und $L(a+bx^n)$ zu setzen. Wird endlich ein Nenner Null, ohne daß im Zähler ein Factor oder ein Exponent verschwindet, so ist dieses ein Zeichen, daß man das gegebene Integral mit Hülfe der gewählten Reductionsformel auf ein Integral einer andern Art zu bringen strebt, was jedoch diese Formel nach §. 725 durchaus nicht zu leisten vermag.

1. Beyspiel. Wenn man das Integral $\int \frac{dx}{x^4(1-x^3)}$ sucht, so ist $m=-4$, $n=3$, $p=-1$, folglich läßt sich dieses Integral auf das einfachste $\int \frac{x^2dx}{1-x^3}$ zurückführen. Zu diesem Zwecke benützen wir die Formel (41), in welcher wir aber, da $m+1+pn+rn=0$ und $m+1+n=0$ wird, zuerst $p=-1$ und $r=2$ setzen, wodurch wir

$$\int \frac{x^m dx}{a+bx^n} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)a} - \frac{bx^{m+1+n}}{(m+1+n)a^2} + \frac{b^2}{a^2}\int \frac{x^{m+2n}dx}{a+bx^n}$$

erhalten.

Setzen wir nun $m=-4$, $n=3$, $a=1$, $b=-1$, so wird

$$\int \frac{dx}{x^4(1-x^3)} = -\frac{1}{3x^3} + \frac{x^0}{0} + \int \frac{x^2dx}{1-x^3}.$$

Es ist aber nach §. 714

$$\int \frac{x^2dx}{1-x^3} = -\frac{1}{3}L(1-x^3),$$

daher hat man

$$\int \frac{dx}{x^4(1-x^3)} = -\frac{1}{3x^3} + Lx - \frac{1}{3}L(1-x^3)$$

$$= -\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{3}L\frac{1-x^3}{x^3}.$$

Fig.

2. Beyspiel. Eben so kann man das Integral $\int \frac{dx}{x(a+bx)}$ auf das einfachste Integral $\int \frac{dx}{a+bx}$ seiner Art zurückführen. Denn nach Gleichung (35) ist, wenn man, weil $m+1+n+np=0$ und $m+1=0$ wird, zuerst $p=-1$ und $n=1$ setzt,

$$\int \frac{x^m dx}{a+bx} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)a} - \frac{b}{a}\int \frac{x^{m+1} dx}{a+bx};$$

folglich ist für $m=-1$

$$\int \frac{dx}{x(a+bx)} = \frac{x^0}{0.a} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{a+bx}$$
$$= \frac{1}{a} Lx - \frac{1}{a} L(a+bx)$$
$$= \frac{1}{a} L \frac{x}{a+bx}.$$

§. 728.

Von den in der Form $x^m(a+bx^n)dx$ begriffenen Differenzialen kommen bey den Anwendungen der Integralrechnung auf Geometrie und Mechanik vorzüglich diejenigen vor, in welchen $n=1$ oder $n=2$ ist. Dieser Umstand hat uns bewogen, die am häufigsten erscheinenden Integrale dieser Form in folgenden zwey Verzeichnissen zusammenzustellen. Dabey haben wir zum schnellern Auffinden eines gesuchten Integrals die Anordnung dieser Verzeichnisse so getroffen, daß diese Integrale nach ihren sechs Arten zusammengestellt wurden, daher sich in der mit

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.

überschriebenen Abtheilung diejenigen Integrale befinden, bey denen

I.	II.	III.
p, $\frac{m+1}{n}$, $-(\frac{m+1}{n}+p)$	p, $\frac{m+1}{n}$, $-(\frac{m+1}{n}+p)$	
eine positive ganze	eine negative ganze	

Zahl ist.

§. 729.

Fig.

Verzeichniß der brauchbarſten binomiſchen Integrale von der Form

$$\int x^{\frac{m}{2}} (a + bx)^{\frac{p}{2}} dx,$$

in welcher m und p ganze Zahlen bedeuten.

$$a + bx = X.$$

I.

$$\int x^m X^p dx =$$

$$= \frac{a^p x^{m+1}}{m+1} + pa^{p-1} b \frac{x^{m+2}}{m+2} + \frac{p(p-1)}{1.2} a^{p-2} b^2 \frac{x^{m+3}}{m+3} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{p(p-1)}{1.2} a^2 b^{p-2} \frac{x^{m+p-1}}{m+p-1} + pab^{p-1} \frac{x^{m+p}}{m+p} + b^p \frac{x^{m+p+1}}{m+p+1}.$$

Dabey ſtellt p eine poſitive von Null verſchiedene ganze, m aber eine beliebige reelle Zahl vor.

Für $p = 0$ iſt $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$.

II.

$$\int x^m X^p dx =$$

$$= \frac{1}{b^{m+1}} \left\{ \frac{X^{p+m+1}}{p+m+1} - ma \cdot \frac{X^{p+m}}{p+m} + \frac{m(m-1)}{1.2} a^2 \frac{X^{p+m-1}}{p+m-1} + \ldots\ldots \right.$$

$$\left. + (-1)^m \cdot \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} \frac{X^{p+3}}{p+3} + (-1)^{m-1} ma^{m-2} \frac{X^{p+2}}{p+2} + (-1)^m a^m \frac{X^{p+1}}{p+1} \right\}.$$

Hier iſt p eine beliebige reelle, m aber eine poſitive ganze Zahl mit Einſchluß der Nulle.

$$\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{b} LX$$

$$\int \frac{dx}{X^2} = -\frac{1}{bX}$$

$$\int \frac{dx}{X^3} = -\frac{1}{2bX^2}$$

$$\int \frac{xdx}{X} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2} LX$$

$$\int \frac{xdx}{X^2} = \frac{a}{b^2 X} + \frac{1}{b^2} LX$$

$$\int \frac{xdx}{X^3} = -\left(\frac{x}{b} + \frac{a}{2b^2}\right) \cdot \frac{1}{X^2}$$

Fig. $a + bx = X.$

$$\int \frac{x^2 dx}{X} = \frac{x^2}{2b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{a^2}{b^3} LX$$

$$\int \frac{x^2 dx}{X^2} = \left(\frac{x^2}{b} - \frac{2a^2}{b^3}\right)\frac{1}{X} - \frac{2a}{b^3} LX$$

$$\int \frac{x^2 dx}{X^3} = \left(\frac{2ax}{b^2} + \frac{3a^2}{2b^3}\right)\frac{1}{X^2} + \frac{1}{b^3} LX$$

$$\int X^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3b} X^{\frac{3}{2}}$$

$$\int X^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5b} X^{\frac{5}{2}}$$

$$\int x X^{\frac{1}{2}} dx = \left(\frac{1}{5} X - \frac{1}{3} a\right)\frac{2}{b^2} X^{\frac{3}{2}}$$

$$\int x X^{\frac{3}{2}} dx = \left(\frac{1}{7} X - \frac{1}{5} a\right)\frac{2}{b^2} X^{\frac{5}{2}}$$

$$\int x^2 X^{\frac{1}{2}} dx = \left(\frac{1}{7} X^2 - \frac{2}{5} aX + \frac{1}{3} a^2\right)\frac{2X^{\frac{3}{2}}}{b^3}$$

$$\int x^2 X^{\frac{3}{2}} dx = \left(\frac{1}{9} X^2 - \frac{2}{7} aX + \frac{1}{5} a^2\right)\frac{2X^{\frac{5}{2}}}{b^3}$$

$$\int \frac{dx}{X^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{b} X^{\frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{dx}{X^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2}{bX^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{x dx}{X^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1}{3} X - a\right)\frac{2X^{\frac{1}{2}}}{b^2}$$

$$\int \frac{x dx}{X^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{b^2} \cdot \frac{2a + bx}{X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{X^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1}{5} X^2 - \frac{2}{3} aX + a^2\right)\frac{2X^{\frac{1}{2}}}{b^3}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{X^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{1}{3} X^2 - 2aX - a^2\right)\frac{2}{b^3 X^{\frac{1}{2}}}.$$

$a + bx = X.$ Fig.

III.

$$\int x^m X^p \, dx =$$

$$= -\frac{1}{a^{k-1}}\left\{\frac{1}{p+k-1}\left(\frac{X}{x}\right)^{p+k-1} - \frac{(k-2)b}{p+k-2}\left(\frac{X}{x}\right)^{p+k-2} + \frac{(k-2)(k-3)b^2}{1.2(p+k-3)}\left(\frac{X}{x}\right)^{p+k-3} - \ldots\right.$$

$$\ldots + \frac{(-1)^k (k-2)(k-3) b^{k-4}}{1.2.(p+3)}\left(\frac{X}{x}\right)^{p+3} + \frac{(-1)^{k-1}(k-2)b^{k-3}}{p+2}\left(\frac{X}{x}\right)^{p+2}$$

$$\left. + \frac{(-1)^k b^{k-2}}{p+1}\left(\frac{X}{x}\right)^{p+1}\right\}.$$

Hier ist die Summe $-(m+p) = k$ eine positive die Einheit übersteigende ganze Zahl.

$$\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{a} L \frac{x}{X}$$

$$\int \frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{aX} + \frac{1}{a^2} L \frac{x}{X}$$

$$\int \frac{dx}{xX^3} = \left(\frac{3}{2a} + \frac{bx}{a^2}\right)\frac{1}{X^2} + \frac{1}{a^3} L \frac{x}{X}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 X} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a^2} L \frac{x}{X}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 X^2} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{2b}{a^2}\right)\frac{1}{X} - \frac{2b}{a^3} L \frac{x}{X}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 X^3} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{9b}{2a^2} - \frac{3b^2 x}{a^3}\right)\frac{1}{X^2} - \frac{3b}{a^4} L \frac{x}{X}$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} X^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{a}\left(\frac{x}{X}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} X^{\frac{5}{2}}} = \left(\frac{1}{X} + \frac{2}{a}\right)\frac{2}{3a}\left(\frac{x}{X}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}} X^{\frac{1}{2}}} = -\frac{2}{a}\left(\frac{X}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}} X^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2}{a^2} \cdot \frac{a+2bx}{x^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}} X^{\frac{5}{2}}} = \left(\frac{1}{X} - \frac{4(a+2bx)}{a^2}\right)\frac{2}{3ax^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}}}$$

Fig. $a + bx = X.$

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{X^{\frac{5}{2}}} = \frac{2}{3a}\left(\frac{x}{X}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{X^{\frac{7}{2}}} = \left(\frac{x^2}{X^2} + \frac{2x}{3a}\cdot\frac{x}{X}\right)\frac{2}{5ax^{\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{X^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{5}{2}}} = -\frac{2}{3a}\left(\frac{X}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\int \frac{X^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{7}{2}}} = \left(-\frac{2}{5ax} + \frac{4b}{15a^2}\right)\left(\frac{X}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$$

IV.

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}X} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-ab}} L\frac{\sqrt{a}+\sqrt{-bx}}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{-ab}} L\frac{\sqrt{a}+\sqrt{-bx}}{\sqrt{a}-\sqrt{-bx}} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{ arc tang } \sqrt{\frac{bx}{a}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{ arc sin } \sqrt{\frac{bx}{X}} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \text{ arc tang } \frac{2\sqrt{abx}}{a-bx} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \text{ arc sin } \frac{2\sqrt{abx}}{X}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{ab}} \text{ arc cos } \sqrt{\frac{a}{X}} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \text{ arc cos } \frac{a-bx}{X} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \text{ arc sinv } \frac{2bx}{X}.$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}X^2} = \frac{\sqrt{x}}{aX} + \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}X}$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}X^3} = \left(\frac{1}{X} + \frac{3}{2a}\right)\frac{\sqrt{x}}{2aX} + \frac{3}{8a^2}\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}X}$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}X} = -\frac{2}{a\sqrt{x}} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}X}$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}X^2} = -\left(\frac{2}{xX} + \frac{3b}{a}\right)\frac{\sqrt{x}}{aX} - \frac{3b}{2a^2}\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}X}$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}X^3} = -\left(\frac{2}{xX} + \frac{5b}{2aX} + \frac{15b}{4a^2}\right)\frac{\sqrt{x}}{aX} - \frac{15b}{8a^3}\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}X}$$

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{X} = \frac{2\sqrt{x}}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}X}$$

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{X^2} = -\frac{\sqrt{x}}{bX} + \frac{1}{2b}\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}X}$$

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{X^3} = \left(-\frac{1}{X} + \frac{1}{2a}\right)\frac{\sqrt{x}}{2bX} + \frac{1}{8ab}\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}X}$$

$$a + bx = X.$$ Fig.

$$\int \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{X} = \left(\frac{x}{3b} - \frac{a}{b^2}\right) 2\sqrt{x} + \frac{a^2}{b^2}\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}X}$$

$$\int \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{X^2} = \left(\frac{3a}{b^2} + \frac{2x}{b}\right)\frac{\sqrt{x}}{X} - \frac{3a}{2b^2}\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}X}$$

$$\int \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{X^3} = \left(-\frac{2x}{bX} - \frac{3a}{2b^2X} + \frac{3}{4b^2}\right)\frac{\sqrt{x}}{X} + \frac{3}{8b^2}\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}X}$$

V.

$$\int \frac{dx}{xX^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} L\frac{\sqrt{X}-\sqrt{a}}{\sqrt{X}+\sqrt{a}} = \frac{2}{\sqrt{a}} L\frac{\sqrt{X}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,sec} \sqrt{\frac{bx}{-a}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,cos} \sqrt{\frac{-a}{bx}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,cos} \frac{2a+bx}{bx} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,sin} \sqrt{\frac{X}{bx}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{X}{-a}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,sinv} \frac{2X}{bx} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2a+bx}{2\sqrt{X}.\sqrt{-a}}$$

$$\int \frac{dx}{xX^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{aX^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{a}\int \frac{dx}{xX^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{dx}{xX^{\frac{5}{2}}} = \left(\frac{8}{3a} + \frac{2bx}{a^2}\right)\frac{1}{X^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{xX^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2X^{\frac{1}{2}}} = -\frac{X^{\frac{1}{2}}}{ax} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{xX^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2X^{\frac{3}{2}}} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{3b}{a^2}\right)\frac{1}{X^{\frac{1}{2}}} - \frac{3b}{2a^2}\int \frac{dx}{xX^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2X^{\frac{5}{2}}} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{20b}{3a^2} - \frac{5b^2x}{a^3}\right)\frac{1}{X^{\frac{3}{2}}} - \frac{5b}{2a^3}\int \frac{dx}{xX^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{X^{\frac{1}{2}}dx}{x} = 2X^{\frac{1}{2}} + a\int \frac{dx}{xX^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{X^{\frac{3}{2}}}{x}dx = \left(\frac{1}{3}X + a\right) 2X^{\frac{1}{2}} + a^2\int \frac{dx}{xX^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{X^{\frac{5}{2}}}{x}dx = \left(\frac{1}{5}X^2 + \frac{1}{3}aX + a^2\right)2X^{\frac{1}{2}} + a^3\int \frac{dx}{xX^{\frac{1}{2}}}$$

Fig. $a + bx = X.$

$$\int \frac{X^{\frac{1}{2}}}{x^2}\,dx = -\frac{X^{\frac{1}{2}}}{x} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{xX^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{X^{\frac{3}{2}}}{x^2}\,dx = \left(-\frac{X^2}{x} + bX + 3ab\right)\frac{X^{\frac{1}{2}}}{a} + \frac{3ab}{2}\int \frac{dx}{xX^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{X^{\frac{5}{2}}}{x^2}\,dx = \left(-\frac{X^3}{x} + bX^2 + \frac{5}{3}abX + 5a^2b\right)\frac{X^{\frac{1}{2}}}{a} + \frac{5a^2b}{2}\int \frac{dx}{xX^{\frac{1}{2}}}$$

VI.

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \pm\frac{2}{\sqrt{b}} L(\pm\sqrt{bx} + \sqrt{X}) = \pm\frac{1}{\sqrt{b}} L\frac{\sqrt{X} \pm \sqrt{bx}}{\sqrt{X} \mp \sqrt{bx}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-b}} \text{arc sin } \sqrt{\frac{-bx}{a}} = \frac{2}{\sqrt{-b}} \text{arc tang} \sqrt{\frac{-bx}{X}} = \frac{2}{\sqrt{-b}} \text{arc cos} \sqrt{\frac{X}{a}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-b}} \text{arc sinv } \frac{-2bx}{a} = \frac{1}{\sqrt{-b}} \text{arc cos } \frac{a + 2bx}{a}.$$

$$\int \frac{X^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = x^{\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{X^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \left(\frac{5ax}{4} + \frac{bx^2}{2}\right)\left(\frac{X}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{3a^2}{8}\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{X^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx = -2\left(\frac{X}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + b\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{X^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx = (bx - 2a)\left(\frac{X}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{3ab}{2}\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{X^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx = \left(-2a^2 + \frac{9abx}{4} + \frac{b^2x^2}{2}\right)\left(\frac{X}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{15a^2b}{8}\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{X^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{5}{2}}}\,dx = -\left(\frac{2a}{3x} + \frac{8b}{3}\right)\left(\frac{X}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + b^2\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}}}$$

$$a + bx = X.$$ Fig.

$$\int x^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}} dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{ax}{4b}\right)\left(\frac{X}{x}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{a^2}{8b} \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int x^{\frac{1}{2}} X^{\frac{3}{2}} dx = \left(\frac{x^2 X}{3} + \frac{ax^2}{4} + \frac{a^2 x}{8b}\right)\left(\frac{X}{x}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{a^3}{16b} \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int x^{\frac{3}{2}} X^{\frac{1}{2}} dx = \left(\frac{x^2 X}{3b} - \frac{ax^2}{4b} - \frac{a^2 x}{8b^2}\right)\left(\frac{X}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{a^3}{16b^2} \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int x^{\frac{3}{2}} X^{\frac{3}{2}} dx = \left(\frac{xX}{b} - \frac{3a^2}{8b^2}\right)\frac{a + 2bx}{8} x^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}} + \frac{3a^4}{128b^2} \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}}}.$$

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{X^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}}}{b} - \frac{a}{2b} \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{X^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2}{b}\left(\frac{x}{X}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{b} \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{X^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{x}{2b} - \frac{3a}{4b^2}\right) x^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}} + \frac{3a^2}{8b^2} \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{X^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{x}{b} + \frac{3a}{b^2}\right)\left(\frac{x}{X}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{3a}{2b^2} \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{X^{\frac{5}{2}}} = \left(-\frac{8}{3b} - \frac{2a}{b^2 x}\right)\left(\frac{x}{X}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{b^2} \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}}}.$$

Fig.

§. 730.

Verzeichniß der vorzüglichsten binomischen Integrale von der Form

$$\int x^m (a + bx^2)^{\frac{p}{2}} dx,$$

in welcher m und p beliebige ganze Zahlen vorstellen.

$$a + bx^2 = X.$$

I.

$$\int x^m X^p dx =$$

$$= \frac{a^p x^{m+1}}{m+1} + pa^{p-1}b\frac{x^{m+3}}{m+3} + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2} a^{p-2}b^2 \frac{x^{m+5}}{m+5} + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2} a^2 b^{p-2} \frac{x^{m+2p-3}}{m+2p-3} + pab^{p-1} \frac{x^{m+2p-1}}{m+2p-1} + b^p \frac{x^{m+2p+1}}{m+2p+1},$$

wenn p eine ganze positive, m eine beliebige ganze oder gebrochene Zahl vorstellt.

II.

$$\int x^m X\, dx =$$

$$= \frac{1}{2b^{\frac{m+1}{2}}} \left\{ \frac{2X^{\frac{m+1}{2}+p}}{m+1+2p} - (m-1)a \frac{X^{\frac{m-1}{2}+p}}{m-1+2p} + \frac{(m-1)(m-3)}{1\cdot 2^2} a^2 \frac{X^{\frac{m-3}{2}+p}}{m-3+2p} + \ldots \right.$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{(m-1)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 2^2} a^{\frac{m-5}{2}} \frac{X^{p+3}}{p+3} + (-1)^{\frac{m-3}{2}} \frac{m-1}{2} a^{\frac{m-3}{2}} \frac{X^{p+2}}{p+2}$$

$$\left. + (-1)^{\frac{m-1}{2}} a^{\frac{m-1}{2}} \frac{X^{p+1}}{p+1} \right\},$$

wenn $\frac{m+1}{2}$ eine positive ganze (von Null verschiedene) Zahl, also m eine ungerade ganze Zahl, p dagegen beliebig ist.

$$\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{2b} L X$$

$$\int \frac{x\,dx}{X^2} = -\frac{1}{2bX}$$

$$\int \frac{x\,dx}{X^3} = -\frac{1}{4bX^2}$$

$a + bx^2 = X.$ Fig.

$$\int \frac{x^3 dx}{X} = \frac{x^2}{2b} - \frac{a}{2b^2} L X$$

$$\int \frac{x^3 dx}{X^2} = \frac{a}{2b^2 X} + \frac{1}{2b^2} L X$$

$$\int \frac{x^3 dx}{X^3} = \left(-\frac{x^2}{2b} - \frac{a}{4b^2}\right) \frac{1}{X^2}$$

$$\int x X^{\frac{1}{2}} dx = \frac{X^{\frac{3}{2}}}{3b}$$

$$\int x X^{\frac{3}{2}} dx = \frac{X^{\frac{5}{2}}}{5b}$$

$$\int x X^{\frac{5}{2}} dx = \frac{X^{\frac{7}{2}}}{7b}$$

$$\int x^3 X^{\frac{1}{2}} dx = \left(\frac{x^2}{5b} - \frac{2a}{15b^2}\right) X^{\frac{3}{2}}$$

$$\int x^3 X^{\frac{3}{2}} dx = \left(\frac{x^2}{7b} - \frac{2a}{35b^2}\right) X^{\frac{5}{2}}$$

$$\int x^3 X^{\frac{5}{2}} dx = \left(\frac{x^2}{9b} - \frac{2a}{63b^2}\right) X^{\frac{7}{2}}$$

$$\int \frac{x dx}{X^{\frac{1}{2}}} = \frac{X^{\frac{1}{2}}}{b}$$

$$\int \frac{x dx}{X^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{b X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{x dx}{X^{\frac{5}{2}}} = -\frac{1}{3b X^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int \frac{x^3 dx}{X^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{x^2}{3b} - \frac{2a}{3b^2}\right) X^{\frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{x^3 dx}{X^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{x^2}{b} + \frac{2a}{b^2}\right) \frac{1}{X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{x^3 dx}{X^{\frac{5}{2}}} = \left(-\frac{x^2}{b} - \frac{2a}{3b^2}\right) \frac{1}{X^{\frac{3}{2}}}$$

Fig. $a + bx^2 = X.$

III.

$$\int x^m X^p dx =$$

$$= -\frac{1}{2a^k}\left\{\frac{1}{p+k}\left(\frac{X}{x^2}\right)^{p+k} - \frac{(k-1)b}{p+k-1}\left(\frac{X}{x^2}\right)^{p+k-1} + \frac{(k-1)(k-2)b^2}{1.2.(p+k-2)}\left(\frac{X}{x^2}\right)^{p+k-2} + \ldots\right.$$

$$\ldots + \frac{(-1)^k (k-1)(k-2) b^{k-3}}{1.2(p+3)}\left(\frac{X}{x^2}\right)^{p+3} + \frac{(-1)^{k-1}(k-1)b^{k-1}}{p+2}\left(\frac{X}{x^2}\right)^{p+2}$$

$$\left. + \frac{(-1)^k b^{k-1}}{p+1}\left(\frac{X}{x^2}\right)^{p+1}\right\},$$

wo $-\left(\frac{m+1}{2} + p\right) = k$ eine negative ganze (von Null verschiedene) Zahl, folglich m gerad ist.

$$\int \frac{dx}{x X} = \frac{1}{2a} L \frac{x^2}{X}$$

$$\int \frac{dx}{x X^2} = \frac{1}{2a X} + \frac{1}{2a^2} L \frac{x^2}{X}$$

$$\int \frac{dx}{x X^3} = \left(\frac{3}{4a} + \frac{bx^2}{2a^2}\right)\frac{1}{X^2} + \frac{1}{2a^3} L \frac{x^2}{X}$$

$$\int \frac{dx}{x^3 X} = -\frac{1}{2ax^2} - \frac{b}{2a^2} L \frac{x^2}{X}$$

$$\int \frac{dx}{x^3 X^2} = \left(-\frac{1}{2ax^2} - \frac{b}{a^2}\right)\frac{1}{X} - \frac{b}{a^3} L \frac{x^2}{X}$$

$$\int \frac{dx}{x^3 X^3} = \left(-\frac{1}{2ax^2} - \frac{9b}{4a^2} - \frac{3b^2x^2}{2a^3}\right)\frac{1}{X^2} - \frac{3b}{2a^4} L \frac{x^2}{X}$$

$$\int \frac{dx}{X^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{dx}{X^{\frac{5}{2}}} = \left(\frac{1}{3aX} + \frac{2}{3a^2}\right)\frac{x}{X^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \left(\frac{2bx^3}{3a^2} + \frac{x}{a}\right)\frac{1}{X^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{X^{\frac{5}{2}}} = \frac{x^3}{3a X^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{X^{\frac{7}{2}}} = \left(\frac{2bx^5}{15a^2} + \frac{x^3}{3a}\right)\frac{1}{X^{\frac{5}{2}}}$$

$a + bx^2 = X.$ Fig.

$$\int \frac{dx}{x^2 X^{\frac{1}{2}}} = -\frac{X^{\frac{1}{2}}}{ax}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 X^{\frac{3}{2}}} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{2bx}{a^2}\right) \frac{1}{X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 X^{\frac{5}{2}}} = \left(-\frac{1}{x} - \frac{4bx}{a} - \frac{8b^2x^3}{3a^2}\right) \frac{1}{aX^{\frac{3}{2}}}$$

IV.

$$\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{2\sqrt{-ab}} L \frac{\sqrt{a}+x\sqrt{-b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{-b}} = \frac{1}{\sqrt{-ab}} L \frac{\sqrt{a}+x\sqrt{-b}}{\sqrt{X}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg} x\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,sin} \sqrt{\frac{bx^2}{X}} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,sin} \frac{2x\sqrt{ab}}{X}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,cos} \sqrt{\frac{a}{X}} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,cos} \frac{a-bx^2}{X} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,sinv} \frac{2bx^2}{X}$$

$$\int \frac{dx}{X^2} = \frac{x}{2aX} + \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{X}$$

$$\int \frac{dx}{X^3} = \left(\frac{1}{X} + \frac{3}{2a}\right) \frac{x}{4aX} + \frac{3}{8a^2} \int \frac{dx}{X}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{X} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{X}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{X^2} = -\frac{x}{2bX} + \frac{1}{2b} \int \frac{dx}{X}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{X^3} = \left(\frac{x^2}{8a} - \frac{1}{8b}\right) \frac{x}{X^2} + \frac{1}{8ab} \int \frac{dx}{X}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 X} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{X}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 X^2} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{3bx}{2a^2}\right) \frac{1}{X} - \frac{3b}{2a^2} \int \frac{dx}{X}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 X^3} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{25bx}{8a^2} - \frac{15b^2x^3}{8a^3}\right) \frac{1}{X^2} - \frac{15b}{8a^3} \int \frac{dx}{X}$$

Fig.

$$a + bx^2 = X.$$

V.

$$\int \frac{dx}{x X^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} L \frac{\sqrt{X}-\sqrt{a}}{\sqrt{X}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} L \frac{\sqrt{X}-\sqrt{a}}{x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,sec} x\sqrt{\frac{b}{-a}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{X}{-a}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,cosec} \frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,cos} \frac{\sqrt{-a}}{x\sqrt{b}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,sin} \frac{\sqrt{X}}{x\sqrt{b}} = \frac{1}{2\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,sinv} \frac{2X}{bx^2}$$

$$\int \frac{dx}{x X^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a X^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{dx}{x X^{\frac{5}{2}}} = \left(\frac{4}{3a} + \frac{bx^2}{a^2}\right) \frac{1}{X^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{dx}{x^3 X^{\frac{1}{2}}} = -\frac{X^{\frac{1}{2}}}{2ax^2} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{x X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{dx}{x^3 X^{\frac{3}{2}}} = \left(-\frac{1}{2ax^2} - \frac{3b}{2a^2}\right) \frac{1}{X^{\frac{1}{2}}} - \frac{3b}{2a^2} \int \frac{dx}{x X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{dx}{x^3 X^{\frac{5}{2}}} = \left(-\frac{1}{2ax^2} - \frac{10b}{3a^2} - \frac{5b^2x^2}{2a^3}\right) \frac{1}{X^{\frac{1}{2}}} - \frac{5b}{2a^3} \int \frac{dx}{x X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{X^{\frac{1}{2}}}{x} dx = X^{\frac{1}{2}} + a \int \frac{dx}{x X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{X^{\frac{3}{2}}}{x} dx = \left(\frac{X}{3} + a\right) X^{\frac{1}{2}} + a^2 \int \frac{dx}{x X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{X^{\frac{5}{2}}}{x} dx = \left(\frac{X^2}{5} + \frac{aX}{3} + a^2\right) X^{\frac{1}{2}} + a^3 \int \frac{dx}{x X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{X^{\frac{1}{2}}}{x^3} dx = -\frac{X^{\frac{1}{2}}}{2x^2} + \frac{b}{2} \int \frac{dx}{x X^{\frac{1}{2}}}$$

$$a + bx^2 = X.$$ Fig.

$$\int \frac{X^{\frac{3}{2}}}{x^3}\,dx = \left(-\frac{X^2}{x^2} + bX + 3ab\right)\frac{X^{\frac{1}{2}}}{2a} + \frac{3ab}{2}\int \frac{dx}{xX^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{X^{\frac{5}{2}}}{x^3}\,dx = \left(-\frac{X^3}{x^2} + bX^2 + \frac{5abX}{3} + 5a^2b\right)\frac{X^{\frac{1}{2}}}{2a} + \frac{5a^2b}{2}\int \frac{dx}{xX^{\frac{1}{2}}}$$

VI.

$$\int \frac{dx}{X^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} L(x\sqrt{b} + \sqrt{X}) = \frac{1}{\sqrt{-b}} \text{arc sin } x\sqrt{\frac{-b}{a}} = \frac{1}{\sqrt{-b}} \text{arc cos } \sqrt{\frac{X}{a}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-b}} \text{arc cos } \frac{a+2bx^2}{a} = \frac{1}{\sqrt{-b}} \text{arc tang } \frac{x\sqrt{-b}}{\sqrt{X}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-b}} \text{ arc sinv } \frac{-2bx^2}{a}$$

$$\int X^{\frac{1}{2}}dx = \frac{xX^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int X^{\frac{3}{2}}dx = \left(\frac{X}{4} + \frac{3a}{8}\right)xX^{\frac{1}{2}} + \frac{3a^2}{8}\int \frac{dx}{X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int X^{\frac{5}{2}}dx = \left(\frac{X^2}{6} + \frac{5aX}{24} + \frac{5a^2}{16}\right)xX^{\frac{1}{2}} + \frac{5a^3}{16}\int \frac{dx}{X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{x^2dx}{X^{\frac{1}{2}}} = \frac{xX^{\frac{1}{2}}}{2b} - \frac{a}{2b}\int \frac{dx}{X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{x^2dx}{X^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{bX^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{b}\int \frac{dx}{X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int x^2 X^{\frac{1}{2}}dx = \left(\frac{X}{4b} - \frac{a}{8b}\right)xX^{\frac{1}{2}} - \frac{a^2}{8b}\int \frac{dx}{X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int x^2 X^{\frac{3}{2}}dx = \left(X^2 - \frac{aX}{4} - \frac{3a^2}{8}\right)\frac{xX^{\frac{1}{2}}}{6b} - \frac{a^3}{16b}\int \frac{dx}{X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int x^2 X^{\frac{5}{2}}dx = \left(X^3 - \frac{aX^2}{6} - \frac{5a^2X}{24} - \frac{5a^3}{16}\right)\frac{xX^{\frac{1}{2}}}{8b} - \frac{5a^4}{128b}\int \frac{dx}{X^{\frac{1}{2}}}$$

Fig.

$$a + bx^2 = X.$$

$$\int \frac{X^{\frac{1}{2}}}{x^2}\,dx = -\frac{X^{\frac{1}{2}}}{x} + b\int \frac{dx}{X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{X^{\frac{3}{2}}}{x^2}\,dx = \left(-\frac{X^2}{x} + bx\,X + \frac{3abx}{2}\right)\frac{X^{\frac{1}{2}}}{a} + \frac{3ab}{2}\int \frac{dx}{X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{X^{\frac{5}{2}}}{x^2}\,dx = \left(-\frac{X^3}{x} + bx\,X^2 + \frac{5}{4}abx\,X + \frac{15a^2bx}{8}\right)\frac{X^{\frac{1}{2}}}{a} + \frac{15a^2b}{8}\int \frac{dx}{X^{\frac{1}{2}}}.$$

III. Abschnitt.

Von der Integration der trinomischen Differenzialformeln.

§. 731.

Die bey manchen Anwendungen der Integral-Rechnung auf Gegenstände der Geometrie und Mechanik in der Form

$$x^m(a + bx + cx^2)^p dx$$

sich darbiethenden trinomischen Differenziale lassen sich, wenn m und p ganze Zahlen sind, nach §. 720 vollständig integriren. Sie können jedoch auch dann noch integrirt werden, wenn m eine ganze Zahl und p ein Bruch von dem Nenner 2 ist, weil sie sich unter diesen Bedingungen auf integrable binomische Differenziale von der Form

$$\int x^m(a + bx^2)^{\frac{p}{2}} dx$$

zurückführen lassen.

Denn es ist

$$a + bx + cx^2 = c\left(x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c}\right);$$

folglich kann das zweyte Glied des letzten Factors nach §. 329

beseitiget werden, wenn man $x = u - \frac{b}{2c}$ substituirt. Bey Fig. dieser Substitution wird, wenn man $\frac{4ac - b^2}{4c} = k$ setzt,

$$a + bx + cx^2 = k + cu^2 , \quad dx = du$$

und

$$y = \int x^m (a + bx + cx^2)^p dx = \int \left(u - \frac{b}{2c} \right)^m (k + cu^2)^p du.$$

Ist nun m eine ganze positive Zahl mit Einschluß der Nulle, so läßt sich $\left(u - \frac{b}{2c} \right)^m$ mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes in Glieder von der Form Au^n, daher das Integral selbst in Bestandtheile von der Form

$$A \int u^n (k + cu^2)^p du$$

auflösen, welche sich, da n eine ganze positive Zahl ist, nach §. 720 integriren lassen, wenn $\frac{n+1}{2}$ oder $\frac{n+1}{2} + p$ ganze Zahlen sind, wozu erfordert wird, daß p ein rationaler Bruch vom Nenner 2 sey.

Ist aber m eine negative ganze Zahl, so kann das Trinom

$$a + bx + cx^2,$$

wenn ihm die Gestalt

$$ax^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{x} + \frac{c}{a} \right)$$

ertheilt wird, nach §. 329 durch die Substitution

$$\frac{1}{x} = u - \frac{b}{2a}$$

auf ein Binom zurückgebracht werden. Durch diese Substitution ergibt sich

$$x = \frac{2a}{2au - b}, \quad dx = -\frac{(2a)^2 du}{(2au - b)^2} = -\left(\frac{2a}{2au - b} \right)^2 du,$$

$$a + bx + cx^2 = \left(\frac{2a}{2au - b} \right)^2 (au^2 + g),$$

Fig. wenn man $\frac{4ac-b^2}{4a} = g$ setzt; mithin ist

$$y = \int x^m (a+bx+cx^2)^p dx$$
$$= -(2a)^{m+2p+2} \int (2au-b)^{-m-2p-2} (au^2+g)^p du.$$

So lange demnach $-(m+2p+2)$ eine positive ganze Zahl mit Einschluß der Nulle, folglich $-(m+2p+2) > -1$ und daher $-\left(\frac{m+1}{2}+p\right) > 0$, nähmlich $-(\frac{m+1}{2}+p)$ eine positive ganze die Null übertreffende Zahl ist, kann das gegebene trinomische Differenzial mit Hülfe der Substitution $\frac{1}{x} = u - \frac{b}{2a}$ auf eine integrable binomische Differenzialformel zurückgebracht werden.

Dieser Fall tritt aber gewiß ein, wenn m eine negative ganze Zahl und p ein negativer rationaler Bruch vom Nenner 2 ist. Wäre jedoch dieser Bruch p positiv, so hälfe diese Substitution nur so lange, als $p < \frac{-m-1}{2}$ ist.

Allein in diesem Falle hat man, da nur

$$p = \frac{2n-1}{2} = n - \frac{1}{2}$$

seyn kann,

$$\int x^m (a+bx+cx^2)^p dx = \int \frac{x^m (a+bx+cx^2)^n}{\sqrt{a+bx+cx^2}} dx.$$

Löst man nun die Potenz $(a+bx+cx^2)^n$ nach dem binomischen Lehrsatze auf, so hat man nur noch Integrale von den Formen

$$\int \frac{x^q dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}, \quad \int \frac{dx}{x^q \sqrt{a+bx+cx^2}}$$

zu bestimmen, von denen dem eben Erwiesenen zu Folge die beyden ersten Arten mittelst der Substitution $x = u - \frac{b}{2c}$,

die letzte aber durch die Substitution $\frac{1}{x} = u - \frac{b}{2a}$ sich darstellen lassen. Fig.

Das folgende Verzeichniß, welches die am gewöhnlichsten vorkommenden trinomischen Integrale enthält, bietet dem Leser eine reichliche Auswahl an Beyspielen dar.

§. 732.

Verzeichniß der vorzüglichsten trinomischen Integrale von der Form

$$\int x^m (a + bx + cx^2)^{\frac{n}{2}} dx,$$

in welcher m und n ganze Zahlen vorstellen.

Der Kürze wegen sey

$$a + bx + cx^2 = X, \quad 4ac - b^2 = k.$$

I.

Integrale rationaler Differenziale.

$$\int \frac{dx}{X} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ arc sin } \frac{(2cx+b)\sqrt{k}}{2eX} = \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ arc cos} \left(\frac{k}{2cX} - 1\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{k}} \text{ arc tang } \frac{2cx+b}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k}} \text{ arc sin} \frac{2cx+b}{2\sqrt{cX}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{k}} \text{ arc cos } \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{cX}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ arc sinv} \frac{(2cx+b)^2}{2cX}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-k}} L \frac{2cx+b-\sqrt{-k}}{2cx+b+\sqrt{-k}} = \frac{2}{\sqrt{-k}} L \frac{2cx+b-\sqrt{-k}}{2\sqrt{cX}},$$

$$\int \frac{dx}{X^2} = \frac{2cx+b}{kX} + \frac{2c}{k} \int \frac{dx}{X}$$

$$\int \frac{dx}{X^3} = \left(\frac{1}{2kX^2} + \frac{3c}{k^2X}\right)(2cx+b) + \frac{6c^2}{k^2} \int \frac{dx}{X}$$

$$\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{2c} LX - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X}$$

$$\int \frac{x\,dx}{X^2} = -\frac{1}{2cX} - \frac{b}{2c}\left(\frac{2cx+b}{kX}\right) - \frac{b}{k} \int \frac{dx}{X}$$

$$\int \frac{x\,dx}{X^3} = -\frac{1}{4cX^2} - \frac{b}{2c}(2cx+b)\left(\frac{1}{2kX^2} + \frac{3c}{k^2X}\right) - \frac{3bc}{k^2} \int \frac{dx}{X}$$

Fig.

$$a+bx+cx^2=X,\quad 4ac-b^2=k.$$

$$\int\frac{x^2dx}{X}=\frac{x}{c}-\frac{b}{2c^2}LX+\left(\frac{b^2}{2c^2}-\frac{a}{c}\right)\int\frac{dx}{X}$$

$$\int\frac{x^2dx}{X^2}=-\frac{x}{cX}+\frac{a}{c}\cdot\frac{2cx+b}{kX}+\frac{2a}{k}\int\frac{dx}{X}$$

$$\int\frac{x^2dx}{X^3}=$$

$$=\left(-\frac{x}{3c}+\frac{b}{12c^2}\right)\frac{1}{X^2}+\left(\frac{b^2}{6c^2}+\frac{a}{3c}\right)(2cx+b)\left(\frac{1}{2kX^2}+\frac{3c}{k^2X}\right)$$
$$+\frac{6c^2}{k^2}\left(\frac{b^2}{6c^2}+\frac{a}{3c}\right)\int\frac{dx}{X}$$

$$\int\frac{dx}{xX}=\frac{1}{2a}L\frac{x^2}{X}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{X}$$

$$\int\frac{dx}{xX^2}=\frac{1}{2aX}-\frac{b}{2a}\cdot\frac{2cx+b}{kX}+\frac{1}{2a^2}L\frac{x^2}{X}-\frac{b}{a}\left(\frac{c}{k}+\frac{1}{2a}\right)\int\frac{dx}{X}$$

$$\int\frac{dx}{xX^3}=$$

$$=\frac{1}{4aX^2}+\frac{1}{2a^2X}+\frac{1}{2a^3}L\frac{x^2}{X}-\frac{b}{2a}(2cx+b)\left(\frac{1}{2kX^2}+\frac{3c}{k^2X}\right)$$
$$-\frac{b}{2a^2}\cdot\frac{2cx+b}{kX}-\frac{b}{a}\left(\frac{3c^2}{k^2}+\frac{c}{ak}+\frac{1}{2a^2}\right)\int\frac{dx}{X}$$

$$\int\frac{dx}{x^2X}=-\frac{1}{ax}-\frac{b}{2a^2}L\frac{x^2}{X}+\left(\frac{b^2}{2a^2}-\frac{c}{a}\right)\int\frac{dx}{X}$$

$$\int\frac{dx}{x^2X^2}=$$

$$=\left(-\frac{1}{ax}-\frac{b}{a^2}\right)\frac{1}{X}-\frac{b}{a^3}L\frac{x^2}{X}+\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{3c}{a}\right)\frac{2cx+b}{kX}$$
$$+\left\{\frac{2c}{k}\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{3c}{a}\right)+\frac{b^2}{a^3}\right\}\int\frac{dx}{X}$$

II.

Fig.

Integrale irrationaler Differenziale.

$$a + bx + cx^2 = X, \quad 4ac - b^2 = k.$$

$$\int \frac{dx}{X^{\frac{3}{2}}} = \frac{2(2cx+b)}{k\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{dx}{X^{\frac{5}{2}}} = \left(\frac{1}{3kX} + \frac{8c}{3k^2}\right)\frac{2(2cx+b)}{\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{xdx}{X^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2(2a+bx)}{k\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} L(2cx + b + 2\sqrt{c}X) = \frac{1}{\sqrt{-c}} \text{ arc sin } \frac{-2cx-b}{\sqrt{-k}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-c}} \text{ arc cos } \frac{2\sqrt{-c}X}{\sqrt{-k}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \text{ arc tang } \frac{-2cx-b}{2\sqrt{-c}X}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-c}} \text{ arc sinv } \frac{2(2cx+b)^2}{-k} = \frac{2}{\sqrt{-c}} \text{ arc tang } \frac{x\sqrt{-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{X}}$$

$$\int X^{\frac{1}{2}} dx = \left(\frac{x}{2} + \frac{b}{4c}\right)\sqrt{X} + \frac{k}{8c}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$\int X^{\frac{3}{2}} dx = \left(\frac{X}{8c} + \frac{3k}{64c^2}\right)(2cx+b)\sqrt{X} + \frac{3k^2}{128c^2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{xdx}{X^{\frac{1}{2}}} = \frac{X^{\frac{1}{2}}}{c} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{x^2dx}{X^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{x}{2c} - \frac{3b}{4c^2}\right)X^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{3b^2}{8c^2} - \frac{a}{2c}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{x^3dx}{X^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \left(\frac{x^2}{3c} - \frac{5bx}{12c^2} + \frac{5b^2}{8c^3} - \frac{2a}{3c^2}\right)X^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{5b^3}{16c^3} - \frac{3ab}{4c^2}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{x^2dx}{X^{\frac{3}{2}}} = -\frac{(4ac-2b^2)x - 2ab}{ckX^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{c}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{x^3dx}{X^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{x^2}{c\sqrt{X}} + \frac{4a}{c} \cdot \frac{2a+bx}{k\sqrt{X}} + \frac{3b}{2c^2} \cdot \frac{(4ac-2b^2)x - 2ab}{k\sqrt{X}} - \frac{3b}{2c^2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

Fig. $a + bx + cx^2 = X$, $4ac - b^2 = k$.

$$\int x X^{\frac{1}{2}} dx = \frac{X^{\frac{3}{2}}}{3c} - \frac{b}{2c}\left(\frac{x}{2} + \frac{b}{4c}\right) X^{\frac{1}{2}} - \frac{bk}{16c^2} \int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$\int x X^{\frac{3}{2}} dx = \frac{X^{\frac{5}{2}}}{5c} - \frac{b}{16c}\left(\frac{X}{c} + \frac{3k}{8c^2}\right)(2cx + b)\, X^{\frac{1}{2}} - \frac{3bk^2}{256c^3} \int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$\int x^2 X^{\frac{1}{2}} dx = \left(\frac{x}{4c} - \frac{5b}{24c^2}\right) X^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{5b^2}{16c^2} - \frac{a}{4c}\right) \cdot \frac{2cx + b}{4c} \sqrt{X} + \frac{k}{8c}\left(\frac{5b^2}{16c^2} - \frac{a}{4c}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$\int x^2 X^{\frac{3}{2}} dx = \left(\frac{x}{6c} - \frac{7b}{60c^2}\right) X^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{7b^2}{24c^2} - \frac{a}{6c}\right)\left(\frac{X}{8c} + \frac{3k}{64c^2}\right)(2cx + b)\sqrt{X} + \frac{3k^2}{128c^2}\left(\frac{7b^2}{24c^2} - \frac{a}{6c}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \mathrm{L} \frac{2a + bx - 2\sqrt{aX}}{x} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,tang} \frac{2a + bx}{2\sqrt{-aX}}$$

$$\int \frac{dx}{x X^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a\sqrt{X}} - \frac{b}{a} \cdot \frac{2cx + b}{k\sqrt{X}} + \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 X^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{X}}{ax} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 X^{\frac{3}{2}}} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{3b}{2a^2}\right) \frac{1}{\sqrt{X}} + \left(\frac{3b^2}{2a^2} - \frac{4c}{a}\right) \frac{2cx + b}{k\sqrt{X}} - \frac{3b}{2a^2} \int \frac{dx}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{dx}{x^3 X^{\frac{1}{2}}} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{3b}{4a^2 x}\right)\sqrt{X} + \left(\frac{3b^2}{8a^2} - \frac{c}{2a}\right) \int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{dx}{x^3 X^{\frac{3}{2}}} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{5b}{4a^2 x} + \frac{15b^2}{8a^3} - \frac{3c}{2a^2}\right) \frac{1}{\sqrt{X}} - \left(\frac{15b^3}{8a^3} - \frac{13bc}{2a^2}\right) \frac{2cx + b}{k\sqrt{X}} + \left(\frac{15b^2}{8a^3} - \frac{3c}{2a^2}\right) \int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{X^{\frac{1}{2}} dx}{x^3} = -\left(\frac{1}{2x^2} + \frac{b}{4ax}\right)\sqrt{X} - \left(\frac{b^2}{8a} - \frac{c}{2}\right) \int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$$

$a + bx + cx^2 = X$, $4ac - b^2 = k$. Fig.

$$\int \frac{X^{\frac{1}{2}}dx}{x} = \sqrt{X} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}} + a\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{X^{\frac{1}{2}}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} + c\int \frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{X^{\frac{3}{2}}}{x}dx = \left(\frac{X}{3} + a\right)\sqrt{X} + \frac{b(2cx+b)}{8c}\sqrt{X} + \frac{b}{2}\left(a + \frac{k}{8c}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{X}} + a^2\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}.$$

IV. Abschnitt.

Verwandlung einiger sehr merkwürdigen irrationalen Differenziale in eine rationale Gestalt.

§. 733.

Wenn keine Methode und kein Kunstgriff bekannt ist, um ein vorgelegtes irrationales Differenzial zu integriren; so muß man noch untersuchen, ob sich dasselbe nicht auf eine rationale Gestalt bringen lasse, wodurch das ganze Integrations-Geschäft auf die im I. Abschnitte erläuterte Integration der rationalen Differenziale beschränkt wird. Allgemeine Regeln, wodurch wir im Stande wären, jedes irrationale Differenzial auf eine rationale Gestalt zu bringen, gibt es gar keine. Aus dieser Ursache wollen wir bloß die merkwürdigsten irrationalen Differenzial-Größen anführen, und die Substitutionen, wodurch dieselben eine rationale Form erhalten, nur kurz berühren.

§. 734.

Das Differenzial Xdx, in welchem X irgend eine Function der veränderlichen Größe x bedeutet und dabey die Eigenschaft

Fig. hat, daß sie außer rationalen (d. i. durch ganzzahlige Exponenten angegebenen) Potenzen von $\sqrt{a+bx^2}$, wie $(\sqrt{a+bx^2})^g$, wenn g eine ganze Zahl vorstellt, keine andere irrationale und auch keine transcendente Function der Größe x enthält, wird eine rationale Gestalt erhalten, wenn man

$$\sqrt{a+bx^2} = z - x\sqrt{b}$$

setzt; denn dadurch wird

$$a + bx^2 = z^2 - 2zx\sqrt{b} + bx^2,$$

folglich $x = \frac{z^2-a}{2z\sqrt{b}}$, $dx = \frac{z^2+a}{2z^2\sqrt{b}}\,dz$

und $$\sqrt{a+bx^2} = \frac{z^2+a}{2z};$$

daher das irrationale Differenzial Xdx in eine rationale Differenzialformel von z übergeht, nach deren Integration man wieder

$$z = x\sqrt{b} + \sqrt{a+bx^2}$$

setzen wird.

Z. B. Das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}$

übergeht durch diese Substitution in

$$\frac{1}{\sqrt{b}} \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{\sqrt{b}} \mathrm{L}z,$$

daher ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \mathrm{L}(x\sqrt{b} + \sqrt{a+bx^2}).$$

Aus der Gleichung $y = \int \frac{x^3 - \sqrt{(x^2-1)^3}}{x+\sqrt{x^2-1}}\,dx$

folgt, wenn man

$$\sqrt{x^2-1} = z - x$$

setzt,

$$y = \frac{1}{16}\int \frac{(1+z^2)^3(z^2-1)}{z^6}\,dz - \frac{1}{16}\int \frac{(z^2-1)^4}{z^6}\,dz,$$

welches sich sehr leicht nach §. 720 integriren läßt.

Mittelst derselben Substitution findet man auch Fig.

$$\int (x+\sqrt{a+x^2})^n\,dx = \frac{1}{2}\int z^n\,dz + \frac{1}{2}a\int z^{n-2}\,dz,$$

$$\int (bx+c\sqrt{a+x^2})(x+\sqrt{a+x^2})^n\,dx = \frac{1}{4}(b+c)\int z^{n+1}\,dz + \frac{1}{2}ac\int z^{n-1}\,dz + \frac{1}{4}a^2(c-b)\int z^{n-3}\,dz,$$

wenn man $\sqrt{a+x^2} = z-x$ setzt.

§. 735.

Ertheilt man, um die imaginäre Form der Wurzelgrößen zu vermeiden, dem obigen Radical $\sqrt{a+bx^2}$ die Gestalt $\sqrt{a-bx^2}$; so wird das Differenzial Xdx auch eine rationale Form annehmen, wenn man

$\sqrt{a-bx^2}$ oder $\sqrt{(\sqrt{a}+x\sqrt{b})(\sqrt{a}-x\sqrt{b})} = z(\sqrt{a}+x\sqrt{b})$

setzt, damit $\sqrt{a}-x\sqrt{b} = z^2(\sqrt{a}+x\sqrt{b})$,

folglich

$$x = \frac{(1-z^2)\sqrt{a}}{(1+z^2)\sqrt{b}}, \qquad dx = -\frac{4z\sqrt{a}}{(1+z^2)^2\sqrt{b}}\,dz,$$

und $z = \dfrac{\sqrt{a-bx^2}}{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}$

werde.

Es ist z. B.

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{1-x^2}} = 4\int \frac{z\,dz}{(1+z^2)(z^2+2z-1)}$$

wenn man $\sqrt{1-x^2} = z(1+x)$ setzt.

§. 736.

Wenn in dem Differenziale $X\frac{dx}{x}$ die Function X keine andern irrationalen Functionen der veränderlichen Größe x enthält, als

$$(\sqrt[p]{a+bx^n})^s, \quad (\sqrt[q]{a+bx^n})^t, \quad (\sqrt[r]{a+bx^n})^u, \ \ldots$$

Fig. in denen die Exponenten

$$p, q, r, s, t, u, \ldots$$

ganze Zahlen vorstellen, und diese irrationalen Functionen mit andern rationalen Functionen der Potenz x^n, z. B. mit gx^n, hx^{mn}, auf was immer für eine Art verbunden sind; so kann man diese irrationalen Functionen, wenn die Wurzel-Exponenten p, q, r, s, ... verschieden sind, vorerst in die Functionen

$$(\sqrt[\mu]{a+bx^n})^\alpha, \quad (\sqrt[\mu]{a+bx^n})^\beta, \quad \text{u. s. w.}$$

eines und desselben Wurzel-Exponenten μ verwandeln. Dann wird ein solches Differenzial $X\frac{dx}{x}$ eine rationale Gestalt annehmen, wenn man

$$\sqrt[\mu]{a+bx^n} = z$$

setzt, damit

$$x^n = \frac{z^\mu - a}{b}, \quad \text{und} \quad \frac{dx}{x} = \frac{\mu z^{\mu-1}dz}{n(z^\mu - a)}$$

sey.

Z. B. Es ist

$$\int \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}dx}{x^3-x\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{x^2-\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{dx}{x} = \int \frac{z^4dz}{(z^2-1)(z^2-z-1)}$$

$$= z + \int \frac{z^3+2z^2-z-1}{(z^2-1)(z^2-z-1)}dz,$$

wenn man $\sqrt{1+x^2} = z$ setzt.

§. 737.

Wenn bey dem Differenziale Xdx die Function X außer den irrationalen Functionen

$$(\sqrt[\mu]{a+bx})^\alpha, \quad (\sqrt[\mu]{a+bx})^\beta, \quad \text{u. s. w.}$$

oder andern

$$(\sqrt[p]{a+bx})^s, \quad (\sqrt[q]{a+bx})^t, \quad \text{u. s. w.,}$$

welche alle auf einen gemeinschaftlichen Wurzel-Exponenten k zu bringen sind, keine andern irrationalen Functionen der verän-

derlichen Größe x enthält; so wird ein solches Differenzial Xdx, Fig. da der vorige Fall für $n = 1$ in diesen übergeht, eine rationale Gestalt annehmen, wenn

$$\sqrt[k]{a+bx} = z$$

gesetzt wird, damit

$$x = \frac{z^k - a}{b}, \text{ und } dx = \frac{kz^{k-1}dz}{b}$$

sey.

§. 738.

Jedes gegebene Differenzial $X\frac{dx}{x}$, welches außer

$$\left(\frac{a+bx^n}{f+gx^n}\right)^{\frac{\alpha}{\mu}}, \quad \left(\frac{a+bx^n}{f+gx^n}\right)^{\frac{\beta}{\mu}}, \text{ u. s. w.}$$

keine andern irrationalen Functionen enthält, diese Wurzelgrößen mögen mit rationalen Functionen der Potenz x^n wie immer verbunden seyn, wird in ein Differenzial von einer rationalen Gestalt verwandelt, wenn man

$$\sqrt[\mu]{\frac{a+bx^n}{f+gx^n}} = z$$

setzt, damit dann

$$x^n = \frac{fz^\mu - a}{b - gz^\mu}, \quad \frac{dx}{x} = \frac{\mu(bf-ag)z^{\mu-1}\cdot dz}{n(fz^\mu - a)(b-gz^\mu)}$$

werde.

Z. B. Aus der Differenzial-Gleichung

$$dy = x\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}dx = x^2\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\cdot\frac{dx}{x},$$

folgt, wenn man $z = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$ setzt,

$$y = 2\int\frac{z^2dz}{(1+z^2)^2} = -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + \text{arc tang}\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}.$$

Fig.

§. 739.

Wenn das Differenzial Xdx außer

$$\left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{\frac{\alpha}{\mu}}, \quad \left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{\frac{\beta}{\mu}} \text{ u. s. w.}$$

keine andere irrationale Function enthält, so kann dasselbe, weil es in der vorhergehenden Art von Differenzialen für $n=1$ enthalten ist, durch nachstehende Substitution in ein rationales verwandelt werden:

$$\sqrt[\mu]{\frac{a+bx}{f+gx}} = z, \text{ nähmlich } x = \frac{fz^{\mu}-a}{b-gz^{\mu}},$$

$$dx = \frac{\mu(bf-ag)z^{\mu-1}dz}{(b-gz^{\mu})^2}.$$

§. 740.

Jedes gegebene Differenzial $X.\frac{dx}{x}$ von der Beschaffenheit, daß es irrationale Functionen zweyer verschiedenen Binomien

$$(\sqrt{a+bx^n})^p, \quad (\sqrt{a+bx^n})^q \text{ u. s. w., und}$$

$$(\sqrt{f+gx^n})^{\alpha}, \quad (\sqrt{f+gx^n})^{\beta} \text{ u. s. f.}$$

enthält, welche mit rationalen Functionen der Potenz x^n wie immer verbunden seyn mögen, kann durch folgende Substitution in ein Differenzial verwandelt werden, welches nur eine einzige irrationale Function $\sqrt{b-gz^2}$ enthält, sofort nach §. 734 oder nach §. 735, zuweilen auch nach §. 736 eine rationale Gestalt annehmen wird.

Wenn man nähmlich im §. 738 $\mu=2$ setzt; so ist

$$x^n = \frac{fz^2-a}{b-gz^2}, \qquad \frac{dx}{x} = \frac{2(bf-ag)zdz}{n(fz^2-a)(b-gz^2)},$$

$$\sqrt{a+bx^n} = \frac{z\sqrt{bf-ag}}{\sqrt{b-gz^2}}, \quad \sqrt{f+gx^n} = \sqrt{\frac{bf-ag}{b-gz^2}},$$

$$z = \sqrt{\frac{a+bx^n}{f+gx^n}}.$$

Setzt man nun $n = 1$, so erhält man dadurch folgende Fig. Ausdrücke:

$$x = \frac{fz^2 - a}{b - gz^2}, \qquad dx = \frac{2(bf - ag)zdz}{(b - gz^2)^2},$$

$$\sqrt{a + bx} = \frac{z\sqrt{bf - ag}}{\sqrt{b - gz^2}}, \qquad \sqrt{f + gx} = \frac{\sqrt{bf - ag}}{\sqrt{b - gz^2}}$$

und $$z = \sqrt{\frac{a + bx}{f + gx}}.$$

Wenn daher irgend ein Differenzial Xdx irrationale Functionen zweyer verschiedenen Binomien von der Gestalt $\sqrt{(a+bx)}^m$ und $\sqrt{(f+gx)}^p$ enthält, welche mit rationalen Functionen der veränderlichen Größe x wie immer verbunden seyn mögen; so kann dieses durch Anwendung vorstehender Substitution in ein anderes Differenzial verwandelt werden, welches bloß eine einzige irrationale Function $\sqrt{b - gz^2}$ enthält, folglich nach §. 734 oder nach §. 735, zuweilen auch nach §. 736 rational gemacht werden kann.

§. 741.

Das Differenzial Xdx, worin X außer

$\sqrt{(a + bx + cx^2)}^m$, $\sqrt{(a + bx + cx^2)}^p$, u. s. w.

keine andere irrationale Function enthält, es mögen diese Wurzelgrößen mit rationalen Functionen von x wie immer verbunden seyn, wird in ein rationales Differenzial verwandelt, wenn man

folglich
$$\sqrt{(a + bx + cx^2)} = z - x\sqrt{c},$$
$$a + bx + cx^2 = z^2 - 2zx\sqrt{c} + cx^2,$$

nähmlich $$x = \frac{z^2 - a}{b + 2z\sqrt{c}}, \qquad dx = \frac{2(a\sqrt{c} + bz + z^2\sqrt{c})dz}{(b + 2z\sqrt{c})^2},$$

$$\sqrt{(a + bx + cx^2)} = \frac{a\sqrt{c} + bz + z^2\sqrt{c}}{b + 2z\sqrt{c}},$$

endlich setzt.
$$z = x\sqrt{c} + \sqrt{(a + bx + cx^2)}$$

Fig.

§. 742.

Schreibt man, um die imaginäre Form der Wurzelgrößen zu vermeiden, das Radical $\sqrt{a+bx+cx^2}$ in der Gestalt $\sqrt{(a+bx-cx^2)}$; so ergeben sich aus der Gleichung

$$a + bx - cx^2 = 0$$

die Wurzeln $x = \frac{b+\sqrt{b^2+4ac}}{2c}$ und $x = \frac{b-\sqrt{b^2+4ac}}{2c}$; daher ist

$$a+bx-cx^2 = -c(x-\frac{b+\sqrt{b^2+4ac}}{2c})(x-\frac{b-\sqrt{b^2+4ac}}{2c}).$$

Das Differenzial Xdx wird demnach eine rationale Gestalt erhalten, wenn man

$$\sqrt{(a+bx-cx^2)} = z(x-\frac{b-\sqrt{b^2+4ac}}{2c})\sqrt{c},$$

folglich

$$-(x-\frac{b+\sqrt{b^2+4ac}}{2c}) = z^2(x-\frac{b-\sqrt{b^2+4ac}}{2c}),$$

nähmlich

$$x = \frac{b(1+z^2)+(1-z^2)\sqrt{b^2+4ac}}{2c(1+z^2)},$$

$$dx = -\frac{2z\sqrt{b^2+4ac}}{c(1+z^2)^2}\cdot dz,$$

$$\sqrt{a+bx-cx^2} = \frac{z\sqrt{b^2+4ac}}{(1+z^2)\sqrt{c}},$$

$$z = \frac{2\sqrt{c(a+bx-cx^2)}}{2cx-b+\sqrt{b^2+4ac}}$$

setzt.

§. 743.

Jedes Differenzial Xdx, welches außer den einnahmigen Wurzelgrößen

$$\sqrt[m]{x^n},\quad \sqrt[p]{x^q},\quad \sqrt[r]{x^s},\text{ u. s. w.}$$

mögen diese übrigens unter einander und mit rationalen Functionen von x wie immer verbunden seyn, keine andere irrationale Function enthält, wird eine rationale Gestalt annehmen, wenn

man alle einzelnen Wurzelgrößen auf einen gemeinschaftlichen Fig. Wurzel-Exponenten μ bringt, und sodann

$$\sqrt[\mu]{x} = z\ ,\quad x = z^{\mu}\ ,\quad dx = \mu z^{\mu-1} dz$$

setzt.

Z. B. Es ist

$$\int \frac{(a+\sqrt[3]{x^2})\,dx}{x^2-x+\sqrt{x}} = \int \frac{(a+\sqrt[6]{x^4})\,dx}{x^2-x+\sqrt[6]{x^3}} = \int \frac{6(az^2+z^6)\,dz}{z^9-z^3+1}$$

für $z = \sqrt[6]{x}$.

V. Abschnitt.

Integration der merkwürdigsten exponentiellen, logarithmischen und trigonometrischen Differenziale. Entwickelung der Integrale in Reihen.

§. 744.

I. Die Integration der in der Form

$$\varphi(x)\,dx$$

begriffenen Differenziale läßt sich, wenn die Function $\varphi(x)$ Exponentialgrößen enthält, in vielen Fällen mittelst der Zertheilungsformel (§. 713.)

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

von den Integralen

(1) $\int a^x dx = \frac{a^x}{La}$, (2) $\int h^x dx = h^x$

abhängig machen. Dieser Fall findet bey der Differenzialformel

(3) $Xa^x dx$

statt, wenn X irgend eine Function von x bezeichnet. Denn setzt man hier

$$dv = a^x dx\ ,\ \text{folglich}\ u = X\ ,$$

Fig. so findet man

$$v = \int a^x dx, \quad \text{und} \quad du = X' dx,$$

wenn man den Differenzial-Coeffizienten $\frac{dX}{dx}$ durch X' bezeichnet.

Folglich ist

$$\int X a^x dx = \frac{X a^x}{La} - \frac{1}{La} \int X' a^x dx.$$

Wiederhohlen wir diese Operation und setzen wir

$$\frac{dX'}{dx} = X'', \quad \frac{dX''}{dx} = X''', \quad \frac{dX'''}{dx} = X^{IV}, \quad \text{u. s. w.},$$

so erhalten wir nach einander die Gleichungen

$$\int X' . a^x dx = \frac{X' a^x}{La} - \frac{1}{La} \int X'' a^x dx$$

$$\int X'' a^x dx = \frac{X'' a^x}{La} - \frac{1}{La} \int X''' a^x dx$$

$$\int X''' a^x dx = \frac{X''' a^x}{La} - \frac{1}{La} \int X^{IV} a^x dx$$

. . . . . .

$$\int X^{(n)} a^x dx = \frac{X^{(n)} a^x}{La} - \frac{1}{La} \int X^{(n+1)} a^x dx.$$

Substituiren wir nun jeden dieser Ausdrücke in dem vorhergehenden, so finden wir

$$(4) \quad \int X a^x dx = \frac{a^x}{La} \left(X - \frac{X'}{La} + \frac{X''}{(La)^2} - \frac{X'''}{(La)^3} + .. + \frac{X^{(n)}}{(-La)^n} \right) + \frac{1}{(-La)^{n+1}} \int X^{(n+1)} a^x dx.$$

Eine besondere Würdigung verdient das Integral, in welchem $X = x^m$ ist; für dasselbe hat man (nach §. 681.)

$$X^{(n)} = \frac{d^n X}{dx^n} = m(m-1)(m-2) \ldots (m-n+1) x^{m-n};$$

daher übergeht die Formel (4) in Fig.

$$(5)\quad \int x^m a^x dx = \frac{a^x}{La}\left\{x^m - \frac{mx^{m-1}}{La} + \frac{m(m-1)x^{m-2}}{(La)^2} \ldots . \right.$$
$$\left. + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}}{(-La)^n}\right\}$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(-La)^{n+1}} \int x^{m-n-1} a^x dx.$$

Diese Reihe bricht ab, wenn m eine positive ganze Zahl ist; man erhält dann

$$(6)\quad \int x^m a^x dx = \frac{a^x}{La}\left\{x^m - \frac{mx^{m-1}}{La} + \frac{m(m-1)}{(La)^2} x^{m-2} \ldots . \right.$$
$$\left. + \frac{m(m-1)\ldots 3.2.1}{(-La)^m}\right\}.$$

So ist z. B.

$$\int x.a^x dx = \frac{a}{La}\left(x - \frac{1}{La}\right)$$

$$\int x^2 a^x dx = \frac{a^x}{La}\left(x^2 - \frac{2x}{La} + \frac{2}{(La)^2}\right)$$

$$\int x^3 a\, dx = \frac{a^x}{La}\left(x^3 - \frac{3x^2}{La} + \frac{6x}{(La)^2} - \frac{6}{(La)^3}\right).$$

II. Die Differenzialformel (3) gestattet noch eine andere Integration in dem Falle, wo Xdx integrabel ist. Denn setzen wir

$$dv = Xdx\ ,\quad \text{also}\quad u = a^x\ ,$$

und ist $v = \int Xdx = X_1$; so gibt die theilweise Integration

$$\int Xa^x dx = X_1 a^x - La \int X_1 a^x dx.$$

Auf dieselbe Weise findet man, wenn

$$\int X_1 dx = X_2\ ,\quad \int X_2 dx = X_3\ ,\quad \int X_3 dx = X_4\ ,\quad \text{u. s. w.}$$

ist, die nach einander folgenden Gleichungen

$$\int X_1 a^x dx = X_2 a^x - La \int X_2 a^x dx$$
$$\int X_2 a^x dx = X_3 a^x - La \int X_3 a^x dx$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\int X_{n-1} a^x dx = X_n a^x - La \int X_n a^x dx,$$

Fig. mit deren Hülfe man

$$(7)\quad \int X a^x dx = a^x[X_1 - La\,X_2 + (La)^2 X_3 \ldots + (-La)^{n-1} X_n] + (-La)^n \int X_n a^x dx$$

erhält.

Setzt man auch hier $X = x^m$,

so findet man nach §. 716

$$X_1 = \int X dx = \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

$$X_2 = \int X_1 dx = \frac{1}{m+1}\int x^{m+1} dx = \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)}$$

$$X_3 = \int X_2 dx = \frac{1}{(m+1)(m+2)}\int x^{m+2} dx = \frac{x^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)}$$

. . . . . .

$$X_n = \frac{x^{m+n}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)},$$

daher ist

$$(8)\quad \int x^m a^x dx =$$

$$= a^x\left\{\frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{La \cdot x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + \frac{(La)^2 \cdot x^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} \ldots + \frac{(-La)^{n-1} x^{m+n}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}\right\} + \frac{(-La)^n}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)} \int x^{m+n} a^x dx.$$

Ist m eine negative ganze Zahl, so wird, weil der größte im Nenner des Schlußgliedes befindliche Factor m + n höchstens −1 werden kann, $\int \frac{a^x dx}{x}$ das einfachste Integral, auf welches das gegebene sich zurückführen läßt; man findet daher

$$(9)\quad \int \frac{a^x dx}{x^m} =$$

$$= -a^x\left\{\frac{1}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{La}{(m-1)(m-2)x^{m-2}} + \frac{(La)^2}{(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-3}} + \ldots + \frac{(La)^{m-2}}{(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1.x}\right\} + \frac{(La)^{m-1}}{(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1}\int \frac{a^x dx}{x}.$$

Das Integral $\int \frac{a^x dx}{x}$ kann noch auf die Form $\int \frac{h^{x\,La} dx}{x}$, Fig.

oder wenn man hierin x für xLa schreibt, auf die Form $\int \frac{h^x dx}{x}$ gebracht werden. Dieses Integral aber läßt sich bloß mittelst Reihen bestimmen, wie wir am Schluße dieses Abschnittes zeigen werden.

§. 745.

I. Die theilweise Integration kann man auch zur Bestimmung des Integrals $\int X (Lx)^n dx$ zuweilen mit Vortheil anwenden.

Denn setzt man in der Zertheilungsformel (§. 713)

$$dv = Xdx, \quad u = (Lx)^n,$$

folglich $v = \int Xdx$, $du = \frac{n\,(Lx)^{n-1}}{x}\,dx$;

so findet man

$$(10)\quad \int X(Lx)^n dx = (Lx)^n \int Xdx - n\int \frac{(Lx)^{n-1} \int Xdx}{x} . dx.$$

Läßt sich nun $\int Xdx$ wirklich angeben, so kann diese Formel, bey wiederhohlter Anwendung, den Exponenten n nach und nach um 1, 2, 3, ... Einheiten vermindern; wobey am Ende, wenn n eine ganze und positive Zahl ist, nur noch die Integration einer algebraischen Differenzialformel vorzunehmen bleibt.

Diese theilweise Integration der Differenzialformel $X(Lx)^n dx$ kann auch auf folgende Weise ausgeführt werden. Es ist

$$X(Lx)^n dx = Xx.(Lx)^n \frac{dx}{x} = Xx.(Lx)^n d(Lx).$$

Fig. Setzt man nun in (8) §. 713

$$dv = (Lx)^n d(Lx) \ , \quad u = Xx \ ;$$

so ist

$$v = \frac{(Lx)^{n+1}}{n+1} \ , \quad du = \frac{d(Xx)}{dx} \cdot dx \ ,$$

folglich findet man

$$(11) \quad \int X(Lx)^n dx = \frac{Xx.(Lx)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int (Lx)^{n+1} \frac{d(Xx)}{dx} . dx,$$

eine Formel, welche dient, einen negativen Exponenten n schrittweise um eine Einheit zu vermindern.

II. Setzt man zur Entwickelung des Integrals

$$\int x^m (Lx)^n dx$$

in der Gleichung (10)

$$X = x^m \ , \text{ folglich } \int X dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \ ,$$

so übergeht sie in

$$\int x^m (Lx)^n dx = \frac{x^{m+1}(Lx)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m (Lx)^{n-1} dx.$$

Schreibt man nun in dieser Gleichung für n der Ordnung nach $n-1$, $n-2$, $n-3$, u. s. w. so ergibt sich

$$\int x^m (Lx)^{n-1} dx = \frac{x^{m+1}(Lx)^{n-1}}{m+1} - \frac{n-1}{m+1} \int x^m (Lx)^{n-2} dx$$

$$\int x^m (Lx)^{n-2} dx = \frac{x^{m+1}(Lx)^{n-2}}{m+1} - \frac{n-2}{m+1} \int x^m (Lx)^{n-3} dx$$

u. s. w.

folglich ist

$$(12) \quad \int x^m (Lx)^n dx =$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} \Big\{ (Lx)^n - \frac{n}{m+1} (Lx)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2} (Lx)^{n-2} + \ldots$$

$$+ \frac{(-1)^{r-1} n(n-1)\ldots(n-r+2)}{(m+1)^{r-1}} (Lx)^{n-r+1} \Big\} + (-1)^r \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{(m+1)^r} \int x^m (Lx)^{n-r} dx.$$

Ist n eine positive ganze Zahl, so bricht diese Reihe ab, und man erhält Fig.

$$(13)\quad \int x^m (Lx)^n dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left\{(Lx)^n - \frac{n}{m+1}(Lx)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2}(Lx)^{n-2} .. + \frac{(-1)^n n(n-1)..3.2.1}{(m+1)^n}\right\}.$$

Die Formel wird unbrauchbar, wenn $m = -1$ ist; für diesen Fall hat man jedoch

$$(14)\quad \int \frac{(Lx)^n dx}{x} = \int (Lx)^n d(Lx) = \frac{(Lx)^{n+1}}{n+1}.$$

III. Nehmen wir ferner zur Bestimmung des Integrals

$$\int \frac{x^m}{(Lx)^n} dx$$

in der Gleichung (11)

$$X = x^m, \text{ somit } \frac{d(Xx)}{dx} = \frac{d.x^{m+1}}{dx} = (m+1)x^m$$

an, so verwandelt sich diese in

$$\int \frac{x^m dx}{(Lx)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(Lx)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{x^m dx}{(Lx)^{n-1}}.$$

Wird nun hierin der Exponent n nach und nach um 1, 2, 3, ... Einheiten vermindert, und die successive Substitution der entfallenden Ausdrücke vorgenommen; so erscheint

$$(15)\quad \int \frac{x^m dx}{(Lx)^n} =$$

$$= -x^{m+1}\left\{\frac{1}{(n-1)(Lx)^{n-1}} + \frac{m+1}{(n-1)(n-2)(Lx)^{n-2}} + ... + \frac{(m+1)^{r-1}}{(n-1)(n-2)..(n-r)(Lx)^{n-r}}\right\} + \frac{(m+1)^r}{(n-1)(n-2)..(n-r)}\int \frac{x^m dx}{(Lx)^{n-r}};$$

folglich ergibt sich, wenn n eine positive ganze Zahl ist,

Fig.

(16) $$\int \frac{x^m dx}{(Lx)^n} =$$

$$= -x^{m+1}\left\{\frac{1}{(n-1)(Lx)^{n-1}} + \frac{m+1}{(n-1)(n-2)(Lx)^{n-2}} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{(m+1)^{n-2}}{(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1.(Lx)}\right\} + \frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}\int \frac{x^m dx}{Lx}.$$

Dem Integral $\int \frac{x^m dx}{Lx}$ läßt sich dadurch eine einfachere Gestalt geben, daß man

$$x^{m+1} = z,$$

folglich $(m+1)x^m dx = dz$, $(m+1)\,Lx = Lz$ setzt; denn so übergeht

$$\int \frac{x^m dx}{Lx} \text{ in das Integral } \int \frac{dz}{Lz},$$

welches der Integral-Logarithmus von z genannt zu werden pflegt, und dadurch, daß man $Lz = u$, also $z = h^u$, $dz = h^u du$ setzt, auf das im vorigen Paragraphe betrachtete Integral

$$\int \frac{h^u du}{u}$$

zurückgeführt werden kann.

§. 746.

Wendet man die theilweise Integration auf die Differenzialformeln

$\text{arc sin}\,x \,.\, X\,dx$, $\text{arc cos}\,x \,.\, X\,dx$, $\text{arc tang}\,x \,.\, X\,dx$

u. dgl. an, so erhält man daraus folgende Formeln

(17) $$\int X dx \,.\, \text{arc sin}\,x = \text{arc sin}\,x \,.\, \int X dx - \int \frac{\int X dx}{\sqrt{1-x^2}} \,.\, dx$$

(18) $$\int X dx \,.\, \text{arc cos}\,x = \text{arc cos}\,x \,.\, \int X dx + \int \frac{\int X dx}{\sqrt{1-x^2}} \,.\, dx$$

(19) $$\int X dx \,.\, \text{arc tang}\,x = \text{arc tang}\,x \,.\, \int X dx - \int \frac{\int X dx}{1+x^2} \,.\, dx.$$

u. s. w.

Es ist einleuchtend, daß hier die Bestimmung der Integrale Fig.
von $\int X dx$ abhängt. Ist dieses gefunden, so wird man leicht entscheiden, ob die Integrale

$$\int \frac{\int X dx}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx \,, \quad \int \frac{\int X dx}{1+x^2} \cdot dx \,,$$

u. dgl. nach den angeführten Regeln sich angeben lassen.

Es sey z. B. $X = x^m$, so ist $\int X dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$.

In diesem Falle lassen sich demnach aus den vorhergehenden folgende merkwürdige Formeln ableiten.

(20) $\int x^m dx \,.\, \arcsin x = \frac{x^{m+1} \arcsin x}{m+1} - \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(21) $\int x^m dx \,.\, \arccos x = \frac{x^{m+1} \arccos x}{m+1} + \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(22) $\int x^m dx \,.\, \arctang x = \frac{x^{m+1} \arctang x}{m+1} - \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1} dx}{1+x^2}$

u. s. w.

Es ist nach §. 720 klar, daß diese Integrale für jede ganze Zahl m, sie möge positiv oder negativ seyn, vollständig angegeben werden können, den einzigen Fall $m = -1$ ausgenommen, weil in diesem der Nenner $m + 1 = 0$ wird.

§. 747.

Vermöge §. 710 ist, wie in der Note zu §. 713,

(23) $\int \cos x \, dx = \sin x$ (24) $\int \sin x \, dx = -\cos x$,

(25) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tang x$ (26) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$

(27) $\int \frac{\sin x \, dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\tang x}{\cos x} dx = \sec x$

(28) $\int \frac{\cos x \, dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\cot x}{\sin x} dx = -\operatorname{cosec} x$

Fig.

(29) $$\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = L\sin x$$

(30) $$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = \int \frac{-d.\cos x}{\cos x} = -L\cos x$$

(31) $$\int \sin x\cos x\,dx = \int \sin x.\,d(\sin x) = \frac{1}{2}\sin^2 x$$

(32) $$\int \frac{dx}{\sin x\cos x} = \int \frac{dx:\cos^2 x}{\tang x} = \int \frac{d.\tang x}{\tang x} = L\tang x$$

oder

$$\int \frac{dx}{\sin x\cos x} = \int \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x\cos x}\,dx$$

$$= \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx + \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$= L\sin x - L\cos x = L\tang x$$

(33) $$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x} = L\tang\frac{1}{2}x$$

(34) $$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d(\frac{\pi}{2}+x)}{\sin(\frac{\pi}{2}+x)} = L\tang(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}x).$$

Diese Formeln erhält man auch, wenn man $\sin x$ oder $\cos x = u$ setzt, und dann die gehörige Substitution und Reduction in den trigonometrischen Ausdrücken vornimmt. Um z. B. die Formel (33) zu finden, setze man $\cos x = u$, nähmlich $x = \arc\cos u$; so ist

$$\sin x = \sqrt{1-u^2},\quad dx = -d(\arc\sin u) = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Daraus folgt

$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\int \frac{du}{1-u^2}.$$

Fig.

Nun ist aber (§. 721. Gl. 14)

$$\int \frac{du}{1-u^2} = L\,\frac{1+u}{\sqrt{1-u^2}};$$

folglich ist

$$\int \frac{dx}{\sin x} = L\,\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{1+\cos x} = L\,\frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

Es ist aber

$$\sin x = 2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x \quad \text{und} \quad 1+\cos x = 2\cos^2\tfrac{1}{2}x;$$

folglich ist auch

$$\int \frac{dx}{\sin x} = L\,\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} = L\tang\tfrac{1}{2}x.$$

Ein ähnlicher Weg muß bey der Herleitung der übrigen Formeln betreten werden.

§. 748.

I. Die Integrale

$\int \cos mx\cos nx\,dx$, $\int \sin mx\cos nx\,dx$, $\int \sin mx\sin nx\,dx$

findet man, wenn man die mit dx verbundenen Producte nach §. 548 in Summen verwandelt, und die einzelnen Glieder nach den Formeln (23) und (24) integrirt. So ergibt sich

$$\int \cos mx\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos(m-n)x\,dx + \frac{1}{2}\int \cos(m+n)x\,dx$$

$$= \frac{1}{2(m-n)}\int \cos(m-n)x\,.\,d(m-n)x + \frac{1}{2(m+n)}\int \cos(m+n)x\,.\,d(m+n)x,$$

nähmlich

$$(35)\quad \int \cos mx\cos nx\,dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}.$$

Auf dieselbe Weise erhält man

$$(36)\quad \int \sin mx\cos nx\,dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)}$$

$$(37)\quad \int \sin mx\sin nx\,dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}.$$

Fig.

II. Die Integrale $\int \sin^n x\,dx$ und $\int \cos^n x\,dx$ lassen sich, wenn n eine ganze positive Zahl vorstellt, dadurch bestimmen, daß man nach §. 691 die Potenzen $\sin^n x$ und $\cos^n x$ in die Functionen der vielfachen Bogen auflöst, und dann gliederweise nach §. 747 integrirt. So ist z. B.

$$\int \sin^4 x\,dx = \frac{1}{8}\int(\cos 4x - 4\cos 2x + 3)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin 4x - 2\sin 2x + 3x\right)$$

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{8}\int(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin 4x + 2\sin 2x + 3x\right).$$

III. Eben so wird man zur Bestimmung des Integrals

$$\int \cos^m x \sin^n x\,dx$$

zuerst die Potenzen von cos x und sin x nach §. 691 auflösen und dann nach den Formeln (35), (36) und (37) die Integration der einzelnen Glieder bewirken.

Z. B. Um $\int \cos^2 x \sin^3 x\,dx$ zu finden, hat man

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(-\sin 3x + 3\sin x),$$

folglich

$$\int \cos^2 x \sin^3 x\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int(-\sin 3x + 3\sin x - \cos 2x \sin 3x + 3\cos 2x \sin x)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}\cos 3x - 3\cos x + \frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos 3x + \frac{3}{2}\cos x\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{6}\cos 3x - \cos x\right).$$

Anmerkung. Die in II. und III. behandelten Integrale Fig. lassen sich auch dadurch, daß man für sin x und cos x eine neue Veränderliche einführt, auf die in §. 730 bestimmten Integrale

$$\int x^m (1-x^2)^{\frac{n}{2}} dx$$

zurückführen.

IV. Zur Bestimmung der Integrale

(38) $$\int \frac{\cos^m x\, dx}{(a+b\cos x)^n} \quad \text{und} \quad \int \frac{\sin^m x\, dx}{(a+b\cos x)^n}$$

setzt man

$$a+b\cos x = u\,, \quad \cos x = \frac{u-a}{b}\,,$$

$$\sin x = \frac{1}{b}\sqrt{b^2-a^2+2au-u^2}\,,$$

$$dx = \frac{-du}{b\sin x} = -\frac{du}{\sqrt{(b^2-a^2+2au-u^2)}}\,.$$

Auf diese Weise ergibt sich

(39) $$\int \frac{\cos^m x\, dx}{(a+b\cos x)^n} = -\frac{1}{b^m}\int \frac{(u-a)^m du}{u^n \sqrt{(b^2-a^2+2au-u^2)}}$$

(40) $$\int \frac{\sin^m x\, dx}{(a+b\cos x)^n} = -\frac{1}{b^m}\int \frac{(b^2-a^2+2au-u^2)^{\frac{m-1}{2}}}{u^n} du,$$

wodurch man auf die trinomischen Integrale §. 731 verwiesen wird.

V. Um die Integrale

$$\int x^m \sin x\, dx\,, \quad \int x^m \cos x\, dx$$

zu finden, wenn m ganz und positiv ist, wird man die theilweise Integration vornehmen, indem man in der Formel (8) §. 713

$$u = x^m$$

setzt, dadurch erhält man

$$\int x^m \sin x\, dx = -x^m \cos x + mx^{m-1}\sin x + m(m-1)x^{m-2}\cos x \ldots$$

$$\int x^m \cos x\, dx = x^m \sin x + mx^{m-1}\cos x - m(m-1)x^{m-2}\sin x \ldots .$$

Fig.

§. 749.

Bernoulliſche Reihe.

Wendet man auf das Integral

$$\int \varphi(x)\,dx$$

die theilweiſe Integration an, indem man in der Formel

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$dv = dx\,,\quad u = \varphi(x)\,,$$

folglich $$v = x\,,\quad du = d\varphi(x) = \varphi'(x)\,dx$$

ſetzt, ſo erhält man

$$\int \varphi(x)\,dx = x\,\varphi(x) - \int \varphi'(x)\,.\,x\,dx.$$

Nimmt man zur Reduction des letztern Integrals

$$dv = x\,dx\,,\quad u = \varphi'(x)\,,$$

ſomit $$v = \frac{1}{2}x^2,\quad du = d\varphi'(x) = \varphi''(x)\,dx;$$

ſo ergibt ſich

$$\int \varphi'(x).x\,dx = \frac{x^2}{2}\,\varphi'(x) - \frac{1}{2}\int \varphi''(x).x^2dx.$$

Auf dieſelbe Weiſe findet man

$$\int \varphi''(x).x^2dx = \frac{x^3}{3}\,\varphi''(x) - \frac{1}{3}\int \varphi'''(x).x^3dx$$

$$\int \varphi'''(x).x^3dx = \frac{x^4}{4}\,\varphi'''(x) - \frac{1}{4}\int \varphi^{iv}(x).x^4dx$$

u. ſ. w.

Werden dieſe Gleichungen mit einander verbunden, ſo erſcheint die von Johann Bernoulli zuerſt gefundene Reihe

$$(41)\quad \int \varphi(x)\,dx = x\,\varphi(x) - \frac{x^2}{2}\varphi'(x) + \frac{x^3}{2.3}\varphi''(x) - \frac{x^4}{2.3.4}\varphi'''(x) + \cdots$$

§. 750.

Integration mit Hülfe der Reihen.

Mit Hülfe der Bernoulliſchen Reihe, oder auch dadurch, daß man die Function $\varphi(x)$ in eine Reihe auflöſt, läßt ſich, wenn ſonſt kein anderes Mittel zu Gebothe ſteht, die allgemeine Diffe-

renzialformel $\varphi(x)\,dx$ jederzeit integriren; nur führt diese Methode oft den Nachtheil mit sich, daß die durch sie gewonnenen Reihen entweder nicht für jeden Werth von x oder zu wenig rasch convergiren: daher sie selten mit besonderem Vortheile angewendet werden kann. Fig.

So z. B. findet man das Integral $\int \frac{dx}{1+x}$ mittelst der Bernoulli'schen Reihe, indem man

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x},$$

daher

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},\quad \varphi''(x) = +\frac{2}{(1+x)^3},\quad \varphi'''(x) = -\frac{2.3}{(1+x)^4}$$

u. s. w. setzt. Es ist nähmlich

$$\int \frac{dx}{1+x} = \frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{2(1+x)^2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} + \ldots.$$

Um das Integral $\int \frac{a^x dx}{x}$

zu bestimmen, auf welches sich, wie wir in §. 744 gesehen haben, die Integrale

$$\int \frac{x^m}{(Lx)^n}\,dx \quad \text{und} \quad \int \frac{a^x dx}{x^m}$$

zurückführen lassen, lösen wir a^x nach §. 684. Gl. (9) in eine Reihe auf, wodurch wir

$$a^x = 1 + (xLa) + \frac{(xLa)^2}{1.2} + \frac{(xLa)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

folglich

$$\int \frac{a^x dx}{x} = \int \frac{dx}{x} + La \int dx + \frac{(La)^2}{1.2} \int x\,dx + \frac{(La)^3}{1.2.3} \int x^2 dx + \ldots,$$

nähmlich

$$\int \frac{a^x dx}{x} = Lx + (xLa) + \frac{(xLa)^2}{1.2.2} + \frac{(xLa)^3}{1.2.3.3} + \ldots.$$

erhalten.

Fig. 1) Soll z. B. x^2dx^3 integrirt werden, so ist

$$\int\int\int x^2dx^3 = \int dx \int dx \int x^2dx.$$

Es ist jedoch

$$\int x^2dx = \frac{x^3}{3} + C,$$

daher

$$\int dx \int x^2\,dx = \int \left(\frac{x^3dx}{3} + Cdx\right) = \frac{x^4}{3.4} + Cx + C'$$

und

$$\int dx \int dx \int x^2dx = \int \left(\frac{x^4dx}{3.4} + Cx\,dx + C'dx\right),$$

oder

$$\int\int\int x^2dx^3 = \frac{x^5}{3.4.5} + \frac{Cx^2}{2} + C'x + C''.$$

2) Hat man die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3x}{(1+x^2)^3}$$

zu integriren, so ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\int \frac{3x\,dx}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} + C,$$

daher

$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \int C dx$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + Cx + C',$$

und endlich

$$y = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int Cx\,dx + \int C'dx$$

$$= \sqrt{1+x^2} + \frac{Cx^2}{2} + C'x + C''.$$

§. 752. Fig.

Integration der Differenzialformeln mit mehreren Veränderlichen.

Wir werden hier, da wir es in der Folge nur mit diesen allein zu thun haben werden, bloß diejenigen Differenzialformeln mit zwey Veränderlichen vornehmen, in denen nur die Differenziale der ersten Ordnung in der ersten Potenz erscheinen, und welche demnach stets auf die Form

(5) $$Pdx + Qdy$$

gebracht werden können, in welcher P und Q im Allgemeinen Functionen der beyden Veränderlichen x und y vorstellen. Soll u diejenige Function der beyden Veränderlichen x und y seyn, durch deren Differenziation die gegebene Differenzialformel $Pdx + Qdy$ erhalten wird, soll nähmlich

$$du = Pdx + Qdy$$

seyn; so hat man (nach §. 680.)

$$\frac{du}{dx} = P \quad \text{und} \quad \frac{du}{dy} = Q.$$

Nun wirken auf die Bestimmung des partiellen Differenzial-Quotienten P von u in Bezug auf eine der Veränderlichen x und y bloß diejenigen Glieder von u ein, welche diese Veränderliche enthalten. Wenn wir demnach das Differenzial Pdx so integriren, daß wir bloß x für veränderlich, y dagegen als constant ansehen, so erhalten wir sicher alle jene Glieder von u, in welchen die Variable x erscheint; daher ist, wenn wir der Kürze wegen

$$\int Pdx = U$$

setzen,

$$u = U + \varphi(y),$$

wo die noch zu bestimmende Function $\varphi(y)$ der Inbegriff aller jener Glieder von u ist, in denen bloß y allein erscheint. Zur Ausmittelung der Function $\varphi(y)$ differenziren wir die letzte Gleichung in Bezug auf y, wodurch wir

$$\frac{du}{dy} = \frac{dU}{dy} + \frac{d\varphi(y)}{dy},$$

Fig. folglich, wenn wir die Gleichung $\frac{du}{dy} = Q$ berücksichtigen, und den Differenzial-Quotienten $\frac{dU}{dy} = R$ setzen, die Gleichung

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} = Q - R,$$

sofort $$\varphi(y) = \int (Q - R)\,dy$$

erhalten.

Soll nun in der Function $\varphi(y)$, wie bedungen wurde, bloß die Variable y erscheinen, so darf in dem Integral $\int (Q-R)\,dy$ der Factor $Q-R$ kein x enthalten, folglich muß

$$\frac{d(Q-R)}{dx} = 0,$$

oder

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{dR}{dx}$$

seyn.

Um diese Bedingungsgleichung weiter umzuformen, erwägen wir, daß der obigen Annahme gemäß

$$R = \frac{dU}{dy} = \frac{d\int P\,dx}{dy}$$

ist. Nehmen wir nun an, P sey eine von x und y abhängige Function $\psi(x, y)$, die wir der Kürze wegen nur durch $\psi(y)$ andeuten wollen, so wird

$$R = \frac{d\int P\,dx}{dy} = \frac{d\int \psi(y)\,dx}{dy},$$

folglich nach §. 677

$$= \frac{\int \psi(y + dy)\,dx - \int \psi(y)\,dx}{dy},$$

oder da dy, in sofern die Integration nur nach x ausgeführt wird, als constant behandelt werden kann,

$$= \int \frac{\psi(y + dy) - \psi(y)}{dy}\,dx,$$

somit vermöge §. 677 Fig.

$$= \int \frac{d\psi(y)}{dy} dx ,$$

oder

$$= \int \frac{dP}{dy} dx \text{ *) .}$$

Hieraus folgt aber

$$\frac{dR}{dx} = \frac{dP}{dy} ,$$

wodurch obige Bedingungsgleichung in

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} \tag{6}$$

übergeht, welche stets erfüllt werden muß, wenn $Pdx + Qdy$ ein vollständiges Differenzial einer Function zweyer Veränderlichen seyn soll.

Unter dieser Voraussetzung ist demnach

$$\int (Pdx + Qdy) = U + \int (Q - R) dy , \tag{7}$$

wenn

$$U = \int P dx , \quad R = \frac{dU}{dy} \tag{8}$$

angenommen wird; oder wenn wir diese Werthe selbst setzen,

$$\int (Pdx + Qdy) = \int P dx + \int (Q - \frac{d \int P dx}{dy}) dy . \tag{9}$$

Nach vollbrachten Integrationen hat man dem Endresultate noch eine willkührliche Constante beyzuschreiben.

In dem besondern Falle, wo P nur von x, und Q nur von y abhängt, folglich $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} = 0$ ist, wird $R = 0$, daher

$$\int (Pdx + Qdy) = \int P dx + \int Q dy ;$$

---

*) Da wir durch diese Folge von Transformationen auch die Gleichung

$$\frac{d \int P dx}{dy} = \int \frac{dP}{dy} dx .$$

finden, so lernen wir zugleich, wie man den Differenzial-Quotienten eines Integrals in Bezug auf eine andere Veränderliche findet, als auf welche das Integral sich bezieht.

Fig. weßwegen wir im Einklange mit der in §. 713 Gl. (5) ertheilten Regel die einzelnen Glieder der gegebenen Differenzialformel integriren.

Um diese Lehre durch Beyspiele zu erläutern, sey die Formel

$$du = \left(\frac{1}{x+y} + 2x - 16xy\right) dx + \left(\frac{1}{x+y} + 3y^2 - 8x^2\right) dy$$

zu integriren. Hier ist

$$P = \frac{1}{x+y} + 2x - 16xy\,, \quad Q = \frac{1}{x+y} + 3y^2 - 8x^2,$$

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} = -\frac{1}{(x+y)^2} - 16x\,,$$

folglich

$$U = \int P dx = \int \frac{dx}{x+y} + 2\int x dx - 16y \int x dx$$

$$= L(x+y) + x^2 - 8x^2y\,,$$

$$R = \frac{dU}{dy} = \frac{1}{x+y} - 8x^2\,, \quad Q - R = 3y^2\,,$$

$$\int (Q-R)\, dy = \int 3y^2 dy = y^3.$$

Das gesuchte Integral ist demnach

$$u = L(x+y) + x^2 - 8x^2y + y^3 + C.$$

Eben so wird man das Integral $\int \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$ finden. Denn hier hat man

$$P = \frac{y}{x^2+y^2}\,, \quad Q = -\frac{x}{x^2+y^2}\,,$$

folglich

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Nun erhält man

$$U = \int P dx = \int \frac{ydx}{x^2+y^2} = \text{arc tang}\,\frac{x}{y}\,,$$

daher

$$R = \frac{dU}{dy} = -\frac{x}{x^2+y^2}\,,$$

und

$$Q - R = 0 ;$$

Fig.

folglich ist

$$\int \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} = \text{arc tang} \frac{x}{y} + C.$$

§. 753.

Integration der vollständigen Differenzialgleichungen.

Enthält eine Differenzialgleichung von zwey Veränderlichen x und y die Differenziale dx und dy der ersten Ordnung in der ersten Potenz, so läßt sie sich jederzeit auf die Form

(10) $$Pdx + Qdy = 0$$

bringen, in welcher P und Q im Allgemeinen Functionen von x und y andeuten.

Falls nun diese Functionen P und Q so beschaffen sind, daß sie der Bedingungsgleichung

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$$

genügen; so ist Pdx + Qdy das vollständige Differenzial einer Function u der Veränderlichen x und y, daher wird

(11) $$u = \text{Const.}$$

das Integral der vorgelegten Differenzialgleichung (10).

So z. B. wenn

$$(6xy + 2x)\,dx + (3x^2 + 1)\,dy = 0$$

zu integriren ist, so hat man

$$P = 6xy + 2x , \quad Q = 3x^2 + 1,$$

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} = 6x,$$

$$U = \int P dx = 3x^2y + x^2 , \quad R = \frac{dU}{dy} = 3x^2 ,$$

$$\int (Q - R)\,dy = \int dy = y ;$$

folglich ist

$$3x^2y + x^2 + y = C$$

das verlangte Integral der gegebenen Differenzialgleichung.

Fig. Dieser günstige Fall tritt offenbar auch dann ein, wenn P bloß x, und Q bloß y enthält, oder wenn die Differenzialgleichung, wie man zu sagen pflegt, abgesondert ist, weil auch hier die Formel $Pdx + Qdy$ schon an sich vollständig integrirt werden kann.

So z. B. wenn

$$3x^2dx + 8y^3dy = 0$$

ist, so findet man sogleich die Integralgleichung

$$x^3 + 2y^4 = C.$$

§. 754.

Absonderung der Differenzialgleichungen.

I. Da sich die abgesonderten Differenzialgleichungen, deren allgemeine Form

$$F(x)\,dx + f(y)\,dy = 0$$

ist, leicht integriren lassen, so wird man da, wo es thunlich ist, diese Absonderung zu bewirken suchen.

Ein solcher Fall tritt ein, wenn in der Differenzialgleichung

$$Pdx + Qdy = 0$$

sowohl P, als auch Q ein Product von Functionen ist, deren jede nur eine der beyden Veränderlichen enthält. Denn befreyt man durch Division das Differenzial jeder Veränderlichen von jenen Factoren, welche diese Veränderliche nicht enthalten, so gelangt man ohne Anstand zu einer abgesonderten Differenzialgleichung.

Z. B. So erhält man aus

$$(y^2 - 1)\,dx + \frac{dy}{x} = 0,$$

wenn man durch $y^2 - 1$ und $\frac{1}{x}$ theilt, die abgesonderte Gleichung

$$xdx + \frac{dy}{y^2 - 1} = 0,$$

deren Integral

$$\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} L \frac{y-1}{y+1} = C$$

ist.

Aus $dx\sqrt{1-y^2} = dy\sqrt{1-x^2}$ Fig.

findet man, wenn man durch $\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-y^2}$ dividirt, die abgesonderte Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

deren Integral

$$\arcsin x = \arcsin y + C$$

ist. Diese Gleichung kann auch auf eine algebraische Form gebracht werden; denn aus ihr folgt

$$C = \arcsin x - \arcsin y$$
$$= \arcsin (x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2});$$

sofort ist $\sin C = x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}$,

oder endlich, wenn wir für die unbestimmte Constante $\sin C$ bloß C schreiben

$$x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} = C.$$

Eine ähnliche Vereinfachung gestattet das Integral der Gleichung

$$(a+by^2)\,dx = (a+bx^2)\,dy,$$

welche durch Absonderung in

$$\frac{dx}{a+bx^2} = \frac{dy}{a+by^2},$$

und durch Integration in

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} \arctang x\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctang y\sqrt{\frac{b}{a}} + C$$

übergeht. Hieraus folgt

$$C\sqrt{ab} = \arctang x\sqrt{\frac{b}{a}} - \arctang y\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$= \arctang \frac{(x-y)\sqrt{\frac{b}{a}}}{1+\frac{b}{a}xy}$$

$$= \arctang \frac{(x-y)\sqrt{ab}}{a+bxy},$$

somit auch $$\frac{\tang C\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} = \frac{x-y}{a+bxy},$$

Fig. und endlich $x - y = C(a + bxy)$,

wenn man wieder für die unbestimmte Constante $\frac{\text{tang } C\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$ bloß C schreibt.

II. Daß aber auch bey andern Differenzialgleichungen die Absonderung der Veränderlichen erzielt werden könne, läßt sich aus folgendem Falle ersehen. Soll die Differenzialgleichung

$$dy + y\varphi(x)\,dx + \psi(x)\,dx = 0$$

integrirt werden, so setze man

$$y = uv,$$

folglich $dy = v\,du + u\,dv$,

indem man u und v beliebige Veränderliche vorstellen läßt. Dadurch verwandelt sich die vorgelegte Gleichung in

$$v\,du + u\,dv + uv\varphi(x)\,dx + \psi(x)\,dx = 0,$$

oder $v[du + u\varphi(x)\,dx] + u\,dv + \psi(x)\,dx = 0.$

Da nun u und v beliebig sind, so können wir u so wählen, daß

$$du + u\varphi(x)\,dx = 0,$$

folglich auch $u\,dv + \psi(x)\,dx = 0$

wird.

Die erste dieser Bedingungsgleichungen gibt

$$du = -u\varphi(x)\,dx,$$

daher $Lu = -\int \varphi(x)\,dx$

und $u = h^{-\int \varphi(x)\,dx}$

Aus der zweyten Gleichung aber folgt nach der Substitution dieses Werthes

$$dv = -h^{\int \varphi(x)\,dx} \cdot \psi(x)\,dx$$

und $v = -\int h^{\int \varphi(x)\,dx} \cdot \psi(x)\,dx,$

daher ist

$$y = -h^{-\int \varphi(x)\,dx} \int h^{\int \varphi(x)\,dx} \cdot \psi(x)\,dx$$

das verlangte Integral der gegebenen Differenzialgleichung.

Ist z. B. $x^2dy + 3xydx + dx = 0$, Fig.

so hat man auch

$$dy + y.\frac{3}{x}dx + \frac{dx}{x^2} = 0;$$

folglich ist hier

$$\varphi(x) = \frac{3}{x}, \quad \psi(x) = \frac{1}{x^2},$$

$$\int \varphi(x)dx = 3\int \frac{dx}{x} = 3Lx = Lx^3,$$

$$h^{\int \varphi(x)dx} = x^3,$$

und $$y = x^{-3}.\int xdx = \frac{x^{-3}.x^2}{2} + C = \frac{1}{2x} + C.$$

§. 755.

Integration der gleichartigen Differenzialgleichungen.

I. Gleichartige oder homogene Differenzialgleichungen nennt man diejenigen, deren sämmtliche Glieder einerley Summe der Exponenten der Veränderlichen besitzen. Die Differenzialgleichung

$$Pdx + Qdy = 0$$

ist demnach gleichartig, wenn in allen Gliedern von P und Q die Summe der Exponenten der Variablen x und y dieselbe ist. Solche homogene Differenzialgleichungen, welche nur zwey Veränderliche x und y enthalten, können stets dadurch abgesondert werden, daß man für eines der Verhältnisse $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{x}$ eine neue Veränderliche einführt.

Denn setzt man

$$\frac{y}{x} = u,$$

so wird

$$y = ux,$$

und

$$dy = xdu + udx;$$

folglich übergeht obige Gleichung durch Einführung dieser Werthe in

$$(P + Qu)dx + Qxdu = 0.$$

Fig. Da P und Q gleichartige Functionen sind, deren Dimension $=n$ seyn mag; so gestaltet sich jede derselben durch die Substitution $y=ux$ zu einem Producte, dessen ein Factor x^n, der andere hingegen eine bloß von u abhängige Function ist, so daß

$$P=x^n\varphi(u)\ ,\quad Q=x^n\psi(u)$$

wird. Sofort verwandelt sich obige Gleichung, wenn man P und Q durch diese Werthe ersetzt, und durch den gemeinsamen Factor x^n abkürzt, in

$$[\varphi(u)+u\psi(u)]dx+\psi(u)xdu=0,$$

woraus man, wenn durch $x[\varphi(u)+u\psi(u)]$ getheilt wird, die abgesonderte Gleichung

$$\frac{dx}{x}+\frac{\psi(u)du}{\varphi(u)+u\psi(u)}=0$$

erhält, deren Integral

$$Lx+\int\frac{\psi(u)du}{\varphi(u)+u\psi(u)}=\text{Const.}$$

ist. Nach wirklich vollbrachter Integration wird man endlich an den Platz von u wieder das Verhältniß $\frac{y}{x}$ zurückstellen, um das Integral der gegebenen Differenzialgleichung bloß durch x und y ausgedrückt zu erhalten.

Zur Erläuterung dieses Verfahrens mögen folgende zwey Beyspiele dienen.

1. Beyspiel. Die homogene Differenzialgleichung

$$(y+x)dx+(y-x)dy=0$$

übergeht durch die Substitution

$$\frac{y}{x}=u\ ,\quad y=ux\ ,\quad dy=xdu+udx$$

in $$x(1+u)dx+x^2(u-1)du+x(u-1)udx=0,$$

woraus man, wenn durch x abgekürzt wird,

$$(1+u^2)dx+(u-1)xdu=0,$$

folglich auch $$\frac{dx}{x}+\frac{(u-1)du}{1+u^2}=0$$

erhält. Integrirt man, so erscheint Fig.

$$Lx + \frac{1}{2}L(1+u^2) - \text{arc tang } u = C,$$

daher, wenn man den Werth von u zurückstellt,

$$Lx + \frac{1}{2}L\frac{x^2+y^2}{x^2} - \text{arc tang } \frac{y}{x} = C$$

oder

$$L(x^2+y^2) - \text{arc tang } \frac{y}{x} = C.$$

2. Beyspiel. Zur Integration der Gleichung

$$ydx - dy\sqrt{x^2+y^2} = 0$$

setzen wir

$$\frac{x}{y} = u, \quad x = uy, \quad dx = ydu + udy,$$

folglich erhalten wir

$$ydu + udy - dy\sqrt{1+u^2} = 0,$$

oder

$$\frac{dy}{y} - \frac{du}{\sqrt{1+u^2} - u} = 0,$$

oder endlich

$$\frac{dy}{y} - (\sqrt{1+u^2} + u)\,du = 0,$$

woraus durch Integration

$$Ly - \frac{1}{2}u\sqrt{1+u^2} - \frac{1}{2}L(u+\sqrt{1+u^2}) - \frac{1}{2}u^2 = C,$$

oder

$$L\frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{(x+\sqrt{x^2+y^2})}} - \frac{x}{2y^2}(x+\sqrt{x^2+y^2}) = C$$

gefunden wird.

II. Da gleichartige Differenzialgleichungen stets abgesondert werden können; so ist es wichtig zu untersuchen, ob nicht auch ungleichartige Differenzialgleichungen durch gut gewählte Substitutionen in gleichartige sich verwandeln lassen. Daß dieses wenigstens in einzelnen Fällen möglich ist, kann aus folgenden Beyspielen abgenommen werden.

Setzt man in die Differenzialgleichung

$$(a+bx+cy)\,dx + (\alpha+\beta x+\gamma y)\,dy = 0,$$

welche, da die Dimension einiger Glieder $= 0$, anderer aber $= 1$ ist, zu den ungleichartigen gehört,

$$x = p + u, \quad y = q + v,$$

daher $dx = du, \quad dy = dv;$

so verwandelt sie sich in

$$(a+bp+cq+bu+cv)\,du + (\alpha+\beta p+\gamma q+\beta u+\gamma v)\,dv = 0.$$

Wählen wir nun die unbestimmten Constanten p und q dergestalt, daß sie den Gleichungen

$$a + bp + cq = 0, \quad \alpha + \beta p + \gamma q = 0$$

Genüge leisten, folglich daß

$$p = \frac{a\gamma - \alpha c}{\beta c - b\gamma}, \quad q = \frac{\alpha b - a\beta}{\beta c - b\gamma}$$

wird; so erscheint die gleichartige Differenzialgleichung

$$(bu + cv)\,du + (\beta u + \gamma v)\,dv = 0,$$

deren Integration nach den vorhergehenden Regeln bewirkt werden kann.

Die angewendete Substitution ist jedoch unbrauchbar, wenn in den Ausdrücken von p und q der Nenner $\beta c - b\gamma = 0$, folglich $\beta = \frac{b}{c}\gamma$ wird. Allein für diesen Fall übergeht die gegebene Gleichung

$$(a + bx + cy)\,dx + (\alpha + \beta x + \gamma y)\,dy = 0$$

in $$a\,dx + \alpha\,dy + (bx + cy)\left(dx + \frac{\gamma}{c}\,dy\right) = 0,$$

und man erhält, wenn $bx + cy = u$, folglich $dy = \frac{du - b\,dx}{c}$ gesetzt wird,

$$[ac^2 - \alpha bc + (c^2 - b\gamma)u]\,dx + (\alpha c + \gamma u)\,du = 0,$$

und hieraus die abgesonderte Gleichung

$$dx + \frac{\alpha c + \gamma u}{ac^2 - \alpha bc + (c^2 - b\gamma)u}\,du = 0,$$

deren Integration keiner weiteren Schwierigkeit unterliegt.

Eben so können die ungleichartigen Differenzialgleichungen Fig. von der Form

$$(Ax^a y^\alpha + Bx^b y^\beta)\,dx + (Mx^m y^\mu + Nx^n y^\nu)\,dy = 0,$$

welche durch die Substitution

$$y = u^p, \quad dy = pu^{p-1}\,du$$

in $$(Ax^a u^{\alpha p} + Bx^b u^{\beta p})\,dx$$
$$+ (Mpx^m u^{\mu p+p-1} + Npx^n u^{\nu p+p-1})\,du = 0$$

übergeht, gleichartig werden, wenn die Gleichungen

$$a+\alpha p = b+\beta p = m+(\mu+1)\,p-1 = n+(\nu+1)\,p-1,$$

oder $$p = \frac{a-b}{\alpha-\beta} = \frac{a-m+1}{\mu-\alpha+1} = \frac{a-n+1}{\nu-\alpha+1}$$

statt finden. So verwandelt sich z. B. die Gleichung

$$(xy^3 + x^2y^4)\,dx - dy = 0$$

durch obige Substitution in

$$(xu^{3p} + x^2u^{4p})\,dx - pu^{p-1}\,du = 0.$$

Soll diese Gleichung gleichartig werden, so müssen die Gleichungen $1+3p = 2+4p = p-1$ nur einen einzigen Werth für p liefern. Da dieses in der That statt findet, indem $p = -1$ wird; so läßt sich die aus der obigen hervorgehende gleichartige Differenzialgleichung

$$\left(\frac{x}{u^3} + \frac{x^2}{u^4}\right)dx + \frac{du}{u^2} = 0$$

nach den in I. aufgestellten Regeln integriren.

§. 756.

Um eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung, in welcher höhere Potenzen von dx und dy vorkommen, zu integriren, wird man zuvörderst alle Werthe des Differenzial-Quotienten $\frac{dy}{dx}$ aus derselben bestimmen, und dann jede der entfallenden Gleichungen, da sie die Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

Fig. oder $$dy - f(x,y)\,dx = 0$$

besitzen muß, nach den für die Integration der Gleichung

$$Pdx + Qdy = 0$$

ertheilten Vorschriften integriren, wodurch man Integralgleichungen von der Form

$$\varphi(x,y) - \text{Const.} = 0$$

erhält. Jede dieser Integralgleichungen sowohl, als auch jedes Product aus einer beliebigen Anzahl derselben ist sofort ein Integral der ursprünglichen Differenzialgleichung.

Wird z. B. die Differenzialgleichung des zweyten Grades

$$dy^2 - a^2dx^2 = 0$$

zur Integration vorgelegt, so findet man

$$\frac{dy^2}{dx^2} = a^2,$$

folglich $$\frac{dy}{dx} = a \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = -a,$$

daher auch $$dy = adx \text{ und } dy = -adx.$$

Hieraus ergibt sich durch Integration

$$y = ax + C \quad \text{und} \quad y = -ax + C';$$

mithin sind sowohl die Gleichungen

$$y - ax - C = 0, \quad y + ax - C' = 0,$$

als auch die Gleichung

$$(y - ax - C)(y + ax - C') = 0$$

Integrale der vorgelegten Differenzialgleichung. Von den beyden ersteren ist dieses an sich klar; die letztere aber gibt, wenn man differenzirt

$$(y - ax - C)(dy + adx) + (y + ax - C')(dy - adx) = 0.$$

Eliminirt man nun aus diesen Gleichungen mit Hülfe der vorhergehenden einmahl C, dann C', so erhält man beziehungsweise die Gleichungen

$$dy + adx = 0, \quad \text{und} \quad dy - adx = 0,$$

von denen jede der ursprünglichen Differenzialgleichung Genüge leistet.

Fig.

§. 757.

Integration der Differenzialgleichungen höherer Ordnungen.

Von denjenigen Gleichungen, welche höhere Differenziale der in ihnen vorkommenden Veränderlichen enthalten, können wir wegen der unserem Lehrbuche vorgezeichneten Grenzen nur einzelne Differenzialgleichungen der zweyten Ordnung mit zwey Veränderlichen x und y behandeln, von denen eine, etwa x, die Rolle der absolut Veränderlichen spielt. Eine Gleichung dieser Art sieht man als integrirt an, wenn man im Stande ist, sie auf eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung zurückzuführen. Dieses wird in den gewöhnlichsten Fällen gelingen, wenn man

$$\frac{dy}{dx} = p\,, \quad \text{folglich} \quad dy = pdx \quad \text{und} \quad d^2y = dpdx$$

setzt. Vermag man nähmlich mit Hülfe dieser Substitution eine der Veränderlichen x oder y aus der gegebenen Differenzialgleichung ganz zu verdrängen, sofort die gewonnene Gleichung zu integriren und den Werth von p zu bestimmen, so reducirt sich dadurch, daß man für p den Differenzial-Quotienten $\frac{dy}{dx}$ wieder zurückstellt, das weitere Geschäft bloß auf die Integration einer Differenzialgleichung der ersten Ordnung, wie dieses aus folgenden Beyspielen zu entnehmen ist.

1. Beyspiel. Es sey $d^2y + adxdy + bdy^2 = 0$ zu integriren. Wendet man hier die erwähnte Substitution an, so übergeht diese Gleichung in

$$dp + (ap + bp^2)\,dx = 0\,,$$

woraus man die abgesonderte Differenzialgleichung

$$dx + \frac{dp}{ap + bp^2} = 0$$

erhält, deren Integral

$$x + \frac{1}{a}Lp - \frac{1}{a}L(a + bp) + \frac{1}{a}LC = 0$$

Fig. ist. Hieraus folgt

$$L\frac{Cp}{a+bp} = -ax,$$

daher

$$\frac{Cp}{a+bp} = h^{-ax}$$

und

$$p = \frac{a}{Ch^{ax} - b}.$$

Da nun $p = \frac{dy}{dx}$ ist, so ist auch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{Ch^{ax} - b},$$

folglich

$$y = a\int \frac{dx}{Ch^{ax} - b} = \int \frac{h^{-ax}\, d.ax}{C - bh^{-ax}} = -\int \frac{d.h^{-ax}}{C - bh^{-ax}}$$

$$= \frac{1}{b} L(C - bh^{-ax}) - \frac{1}{b} L C'$$

$$= \frac{1}{b} L \frac{C - bh^{-ax}}{C'}.$$

Setzt man nun

$$\frac{C}{C'} = A, \quad -\frac{b}{C'} = B,$$

so ergibt sich die Gleichung

$$y = \frac{1}{b} L(A + Bh^{-ax}),$$

als das gesuchte Integral der gegebenen Differenzialgleichung.

2. Beyspiel. Aus $d^2y + Xdxdy = 0$

erhält man, wofern X eine Function von x vorstellt, mittelst derselben Substitution

$$dp + pXdx = 0, \quad \text{daher } \frac{dp}{p} + Xdx = 0,$$

und

$$Lp + \int Xdx = C;$$

folglich $p = h^{C - \int X dx}$. Fig.

Da nun $dy = p dx$

ist, so ergibt sich $y = \int h^{C - \int X dx} . dx$.

3. Beyspiel. Wendet man obige Substitution bey der Differenzialgleichung

$$x^2 d^2y - (x^3 - 1) dx^2 = 0$$

an, so erhält man

$$x^2 dp - (x^3 - 1) dx = 0;$$

folglich $dp = (x - \frac{1}{x^2}) dx$

und $p = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{x} + C;$

daher ist $dy = \frac{1}{2} x^2 dx + \frac{dx}{x} + C dx$

und $y = \frac{x^3}{6} + Lx + Cx + C'.$

VII. Abschnitt.

Anwendung der Integral-Rechnung auf die Bestimmung des Flächeninhaltes krummliniger Figuren, auf die Rectification der krummen Linien und auf die Berechnung der Oberfläche und des Cubikinhaltes der Körper.

§. 758.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel für den Flächeninhalt einer jeden, auf rechtwinkelige Coordinaten bezogenen, krummen Linie zu finden.

Fig. 205. Auflösung. Es sey die krumme Linie AMD (Fig. 205.), AP = x, PM = y, und der gesuchte Flächeninhalt APMA = F. Man denke sich pm unendlich nahe bey PM; so ist Pp = dx, RM = dy und PpmM = dF. Es ist aber, weil man den unendlich kleinen Bogen Mm von einer geraden Linie nicht unterscheiden kann,

$$\begin{aligned} PpmM &= \frac{1}{2}(PM + pm)Pp \\ &= \frac{1}{2}(y+y-dy)\,dx = \frac{1}{2}(2y-dy)\,dx \\ &= y\,dx\,, \end{aligned}$$

weil dy in Hinsicht auf 2y für 0 anzusehen ist. Folglich ist

$$dF = y\,dx$$

und endlich $F = \int y\,dx$.

Nach dieser Formel läßt sich der Flächenraum bey einer jeder krummen Linie von senkrechten Ordinaten finden, wenn man aus der Gleichung der krummen Linie statt y den Werth durch x ausgedrückt, oder auch statt dx seinen Werth durch y und durch dy ausgedrückt substituirt, hierauf das Integral nach den gegebenen Regeln entwickelt und die Constante der Integration bestimmt.

1. Beyspiel. Es sey AMD eine Parabel, so ist

$$y = \sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}};$$

folglich $$F = \int p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C.$$

Nun ist für F = 0, auch x = 0, also auch C = 0 und

$$F = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}xy\,,$$

(wie §. 634.)

176. Wollte man aber die Fläche AGQM (Fig. 176.) berechnen, bey welcher BQ = a ist, so würde die Fläche für x = a verschwinden, und es böthe sich zur Bestimmung der Constante

die Gleichung Fig. 176.

$$0 = \frac{2}{3} p a^{\frac{1}{2}\frac{3}{2}} + C$$

dar, wornach man

$$F = \frac{2}{3} p x^{\frac{1}{2}\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} p a^{\frac{1}{2}\frac{3}{2}}$$

erhielte.

Würde nun noch $QM = b$ gesetzt, so ergäbe sich der Ausdruck

$$F = \frac{2}{3}(xy - ab)$$

für die Fläche AGQM.

2. Beyspiel. Bey der Logistik (Fig. 188.) ist, wenn man 188.

$AP = x$, $PM = y$ und $ABMP = F$

setzt,

$$F = \int y dx = \int h^{\frac{x}{a}} dx = a h^{\frac{x}{a}} + C.$$

Nun ist für $F = 0$, auch $x = 0$, nähmlich

$$0 = a h^0 + C = a + C;$$

also $C = -a$, und $F = a h^{\frac{x}{a}} - a$,

oder $F = ay - a = a(y - 1)$.

Setzt man in dieser Gleichung $y = 0$, oder unendlich klein, und nimmt F negativ, so ist $F = a$ der Flächenraum längs der ganzen Asymptote von AB aus gerechnet.

3. Beyspiel. Es sey (Fig. 205.) AMD eine gleichseitige 205. Hyperbel, bey der jede Halbachse a ist; so ist

$$y = \sqrt{x^2 - a^2},$$

wenn man den Anfangspunct der Abscissen in dem Mittelpuncte B annimmt, und

$$F = \int dx \sqrt{x^2 - a^2} = C + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2} a^2 L(x + \sqrt{x^2 - a^2}).$$

Fig. 205. Es ist aber in diesem Falle für $F = 0$, die Abscisse

$$x = AB = a;$$

also ist

$$C = \frac{1}{2} a^2 . La$$

und

$$F = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2} a^2 . L \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

Wie man diesen Flächenraum für ein in Zahlen gegebenes a und x zu berechnen habe, ist für sich klar.

4. Beyspiel. Bey der Sinuslinie ist

$$y = a \sin x ,$$

daher die Fläche

$$F = \int y dx = a \int \sin x \, dx = C - a \cos x.$$

Es ist jedoch

$$F = 0 \text{ für } x = 0 , \text{ daher } 0 = C - a$$

und

$$F = a(1 - \cos x) = 2a \sin^2 \frac{1}{2} x.$$

Für

$$x = \pi \text{ ist } F = 2a.$$

176. 5. Beyspiel. Ist bey einer krummen Linie AM (Fig. 176.)

$$QG = x , \quad GA = y$$

und

$$y = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots ,$$

so findet man die Fläche AGQM

$$F = \int (Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots) dx ,$$

nähmlich

$$F = \frac{Ax^{a+1}}{a+1} + \frac{Bx^{b+1}}{b+1} + \frac{Cx^{c+1}}{c+1} + \ldots ,$$

wenn F mit x zugleich verschwindet.

Man erhält demnach für den Flächenraum AGQM denselben Ausdruck, welcher (§. 442.) durch die Summirung der Elemente zum Vorschein kam.

In der That ist die Anwendung der Integral-Rechnung auf die Bestimmung des Flächenraums und auf die Rectification der Bogen bey den krummen Linien, auf die Berechnung der

Oberflächen und Cubikinhalte der Körper, und auf verschiedene andere Gegenstände, nichts anders als eine abgekürzte Summirung der Elemente, wie schon in §. 709 bemerkt wurde. Wenn man sich nähmlich vorstellt, daß (Fig. 205.) die Abscisse $AP = x$ in unendlich viele gleiche Theile getheilt werde, deren jeder $= dx$ ist, und daß aus allen Theilungspuncten senkrechte Ordinaten bis an die krumme Linie geführt werden; so wird dadurch der Flächenraum APM in seine Elemente (in die eingeschriebenen oder auch umgeschriebenen Rechtecke) aufgelöst; $pm\,MP = y\,dx$ ist das letzte oder allgemeine Glied in der Reihe der Elemente, und $\int y\,dx$ ist die Summe aller Elemente, welche zusammen genommen den Flächenraum APM geben, nähmlich $\int ydx$ ist der Flächenraum APM selbst. Fig. 205.

Anmerkung. Bey schiefwinkeligen Coordinaten läßt sich die Fläche einer krummlinigen Figur ebenfalls leicht bestimmen. Denn ist in (Fig. 186.) $AP = x$, $PM = y$, der Coordinaten-Winkel $BAP = \alpha$, die Fläche 186.

$$ABMP = F\,,\quad pP = dx\,,\quad pm = y - dy;$$

so findet man zur Berechnung des trapezoidalen Elementes $MPpm = dF$ dieser Fläche den Abstand der parallelen Seiten pm und PM von einander $= dx.\sin\alpha$, daher

$$dF = \frac{1}{2}(y + y - dy)\,dx.\sin\alpha = y\,dx.\sin\alpha;$$

woraus endlich

$$F = \sin\alpha \int ydx$$

folgt. So ist z. B. für die Hyperbel, wenn die Coordinaten-Achsen in die Asymptoten verlegt werden, und

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2} = \frac{c}{2} = k$$

angenommen wird, (nach §. 665.)

$$y = \frac{k^2}{x}\,,$$

daher

$$F = k^2 x \sin\alpha \int \frac{dx}{x} = k^2 \sin\alpha\,.\,Lx + C\,.$$

Fig. 186. Verschwindet die Fläche für $x = k$, ist nähmlich

$$0 = k^2 \sin\alpha \, Lk + C,$$

so ergibt sich

$$F = k^2 \sin\alpha \, L\frac{x}{k},$$

wie in §. 669.

§. 759.

Bezieht man eine krumme Linie auf Polar-Coordinaten, so läßt sich eine allgemeine Formel für den zwischen zwey Radienvectoren liegenden Flächenraum auf folgende Art finden. Man

195. setze (Fig. 195.) den Polarwinkel $ABM = \varphi$, den Radiusvector $BM = r$ und den Flächenraum $ABM = F$. Ferner sey an den Punct m, der unendlich nahe an M liegt, der Radiusvector Bm geführt, und aus B mit dem Halbmesser BM der Kreisbogen MR gezogen; so ist

$$MR = r\,d\varphi \quad \text{und} \quad BMR = dF,$$

weil MmR in Hinsicht auf BMR für 0 anzusehen ist.

Nun ist $$BMR = \frac{1}{2} MR \,.\, BM$$

nach §. 449, nähmlich

$$dF = \frac{1}{2} r^2 \, d\varphi,$$

folglich $$F = \frac{1}{2} \int r^2 \, d\varphi.$$

So ist z. B. bey der archimedischen Spirale

$$r = \varphi,$$

daher die Fläche

$$F = \frac{1}{2} \int \varphi^2 d\varphi = \frac{1}{6} \varphi^3 + C.$$

Verschwindet F mit φ, so ergibt sich

$$F = \frac{1}{6} \varphi^3 = \frac{1}{6} r^3.$$

Bey der logarithmischen Spirale $r = h^{\frac{\varphi}{a}}$ findet man

$$F = \frac{1}{2} \int h^{\frac{2\varphi}{a}} d\varphi = \frac{a}{4} \int h^{\frac{2\varphi}{a}} d.\frac{2\varphi}{a} = \frac{a}{4} h^{\frac{2\varphi}{a}} + C.$$

Ist $F=0$ für $\varphi=0$, folglich $0=\frac{a}{4}+C$, Fig. 195.

so erhält man

$$F=\frac{a}{4}(h^{\frac{2\varphi}{a}}-1)=\frac{a}{4}(r^2-1).$$

Setzt man hierin $\varphi=-\infty$, also $r=0$ und $-F$ für F, so wird

$$F=\frac{a}{4}.$$

§. 760.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel für die Länge des Bogens bey einer krummen Linie von senkrechten Ordinaten zu finden.

Auflösung. In Fig. 205 sey $AP=x$, $PM=y$, $AM=s$; 205. so ist nach §. 699

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2},$$

folglich hat man

$$s=\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\int dx\sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})}=\int dy\sqrt{(1+\frac{dx^2}{dy^2})}.$$

1. Beyspiel. Aus der Gleichung der Cycloide ergibt sich

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{2a-x}{x}},$$

folglich ist

$$s=\int dx\sqrt{(1+\frac{2a-x}{x})}=\sqrt{2a}\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$=2\sqrt{2ax}+C;$$

und wenn s mit x verschwindet,

$$s=2\sqrt{2ax}.$$

2. Beyspiel. Aus der Gleichung für die Parabel

$$y=\sqrt{2px}$$

folgt

$$dy=\sqrt{\frac{p}{2}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}};$$

Fig. 205. daher ist

$$s = \int dx \sqrt{(1 + \frac{p}{2x})} = \int x^{-\frac{1}{2}} \sqrt{(\frac{p}{2} + x)} \, . \, dx.$$

Führt man die hier angedeutete Integration (nach §. 729. VI.) aus, so ist

$$s = \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{2}px} + \frac{1}{4} p \, L(x + \frac{1}{4}p + \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{2}px}) + C.$$

Soll nun s mit x verschwinden, so wird

$$0 = \frac{1}{4} p \, L \frac{1}{4} p + C \, ,$$

daher

$$s = \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{2}px} + \frac{1}{4} p \, L \frac{4x + p + 2\sqrt{4x^2 + 2px}}{p} \, .$$

Setzen wir

$$x = \frac{1}{2} p \, ,$$

so ist

$$s = \frac{1}{2} p \sqrt{2} + \frac{1}{4} p L(3 + 2\sqrt{2})$$

$$= \frac{1}{2} p \sqrt{2} + \frac{1}{2} p L \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2} p [\sqrt{2} + L(1 + \sqrt{2})] \, ,$$

weil

$$(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

ist.

Wenn man bey eben dieser Parabel AMD (Fig. 205.) den Bogen AM = s durch die Ordinate y ausgedrückt haben will, so wird man in die Formel

$$s = \int dy \sqrt{(1 + \frac{dx^2}{dy^2})}$$

für $\frac{dx}{dy}$ seinen Werth setzen.

Aus der Gleichung für die Parabel $\frac{y^2}{2p} = x$

findet man nun

$$dx = \frac{y \, dy}{p} \, ;$$

folglich ist Fig. 205.

$$s = \int dy \sqrt{(1+\frac{y^2}{p^2})} = C + \frac{y}{2p}\sqrt{y^2+p^2} + \frac{1}{2}\,p\,L(y+\sqrt{y^2+p^2}).$$

Nun ist für $s=0$, auch $y=0$, nähmlich

$$0 = C + \frac{1}{2}\,p\,L\,p\,,$$

also ist

$$s = \frac{y}{2p}\sqrt{y^2+p^2} + \frac{1}{2}\,p\,L\,\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}\,.$$

Es sey $y=p$, so ist

$$s = \frac{1}{2}\,p\left\{\sqrt{2} + L(1+\sqrt{2})\right\},$$

wie oben. Die gemeine Parabel läßt sich demnach mittelst der Logarithmen rectificiren.

3. Beyspiel. Es sey (Fig. 87.) $CM=x$, $CA=a$ und $AB=s$; so ist 87.

$$MB = y = \sqrt{a^2-x^2}\,,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\,;$$

folglich ist

$$s = \int dx \sqrt{(1+\frac{x^2}{y^2})} = a\int \frac{dx}{y}$$

$$= a\int (a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = a\,.\,\text{arc sin}\frac{x}{a} + C,$$

daher

$$s = a\,.\,\text{arc sin}\,\frac{x}{a}\,;$$

wenn s mit x zugleich verschwindet. Dieses Ergebniß wird durch die Figur 87 bestätiget, denn in ihr ist vermöge §. 540

$$\frac{BA}{AC} = \text{arc sin}\,\frac{BE}{AC}\,,$$

folglich

$$\frac{s}{a} = \text{arc sin}\,\frac{x}{a}\,.$$

4. Beyspiel. Bey der Ellipse ist für die Abscissen, auf der großen Achse vom Mittelpuncte gerechnet,

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,.$$

Fig. Daraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}},$$

also

$$s = \int dx \left(1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \int dx \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^4 - a^2x^2}}.$$

Dieses Integral läßt sich durch keinen bisher bekannten Kunstgriff weder algebraisch, noch mittelst der Kreisbogen, noch auch mittelst der Logarithmen entwickeln. Wäre es nun unumgänglich nothwendig die Länge eines elliptischen Bogens durch Rechnung zu finden, so müßte man die Zuflucht zu einer unendlichen Reihe nehmen.

§. 761.

Für Polar-Coordinaten ist (nach §. 707. Gl. 34.) die Bogenlänge

$$s = \int \sqrt{r^2 d\varphi^2 + dr^2} = \int d\varphi \sqrt{(r^2 + \frac{dr^2}{d\varphi^2})} = \int dr \sqrt{(1 + \frac{r^2 d\varphi^2}{dr^2})},$$

195. wenn man (Fig. 195.)

$$ABM = \varphi, \quad BM = r, \quad \text{und} \quad AM = s$$

setzt.

Aus der Gleichung für die logistische Spirallinie

$$r = h^{\frac{\varphi}{a}}$$

folgt

$$\varphi = aLr, \quad d\varphi = \frac{adr}{r},$$

also ist

$$s = \int dr \sqrt{1 + a^2} = r\sqrt{1 + a^2} + C.$$

Nun ist für $s = 0$, der Winkel $\varphi = 0$ und $r = 1$, daher

$$0 = \sqrt{1 + a^2} + C,$$

und sonach findet man

$$s = (r - 1)\sqrt{1 + a^2}.$$

Setzt man $r = 0$, so ist $\sqrt{1+a^2}$ der Zahlwerth der Länge der logistischen Spirallinie von dem Anfange der Polarwinkel bis in den Pol. Fig.

Bey der lineären Spirale ist

$$r = \varphi \quad \text{und} \quad \frac{dr}{d\varphi} = 1,$$

daher

$$s = \int dr \sqrt{1+r^2} = \frac{1}{2} r \sqrt{1+r^2} + \frac{1}{2} L(r + \sqrt{1+r^2}) + C$$

oder weil s mit r verschwindet,

$$s = \frac{1}{2} r \sqrt{1+r^2} + \frac{1}{2} L(r + \sqrt{1+r^2}).$$

§. 762.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel für die krumme Oberfläche jener Körper zu finden, welche durch die Umdrehung der krummen Linien von senkrechten Ordinaten erzeugt werden.

Auflösung. Es sey (Fig. 205.) CAD ein solcher Körper, 205.
der durch die Umdrehung der krummen Linie AMD um die Abscissenlinie AE erzeugt wird; $AP = x$, $PM = y$, und die krumme Oberfläche, welche bey der Umdrehung durch den Bogen AM erzeugt wird, sey $= O$, so ist das Differenzial (oder das letzte Element) dieser Oberfläche nichts anders, als die Oberfläche des abgekürzten Kegels, welcher bey der Umdrehung durch das Trapez MPpm erzeugt wird, weil man mM für eine gerade Linie ansehen kann. Vermöge §. 494 aber ist die Oberfläche dieses abgekürzten Kegels

$$= (PM + pm)\pi . Mm = (y + y - dy)\pi . ds$$
$$= 2\pi y\, ds ;$$

folglich ist

$$dO = 2\pi y\, ds$$

und

$$O = \int 2\pi y\, ds = 2\pi \int y\, ds.$$

Fig. 205. 1. Beyspiel. Es sey z. B. AM eine Parabel, so ist

$$dx = \frac{y\,dy}{p} \quad \text{und} \quad ds = dy\sqrt{(1+\frac{y^2}{p^2})},$$

folglich findet man

$$O = \frac{2\pi}{p}\int y\,dy\,(p^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{3p}(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Nun ist für $O = 0$ auch $y = 0$; also ist

$C = -\frac{2}{3}p^2\pi$, und die Oberfläche des Paraboloids

$$O = \frac{2\pi}{3p}(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}p^2\pi = \frac{2\pi}{3}p^2\left[(1+\frac{y^2}{p^2})^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

2. Beyspiel. Um die Oberfläche eines Ellipsoids zu berechnen, benützen wir die Gleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

zu Folge deren

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y},$$

mithin

$$ds = dx\sqrt{(1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2})}$$

ist. Bringen wir diesen Ausdruck in die Gleichung

$$O = 2\pi\int y\,ds,$$

so erscheint

$$O = \frac{2\pi}{a^2}\int dx\sqrt{a^4y^2+b^4x^2};$$

woraus, wenn wir den von der ersten Gleichung für y^2 dargebothenen Werth $\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ substituiren,

$$O = \frac{2\pi b}{a^2}\int dx\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}$$

gefunden wird.

Integrirt man nach §. 730. VI., so ergibt sich

$$O = \frac{\pi b}{a^2}\left\{x\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2} + \frac{a^4}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{x\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}\right\} + C,$$

oder

$$O = \frac{\pi b}{a^2}\left\{x\sqrt{a^4+(b^2-a^2)x^2}\right.$$
$$\left. + \frac{a^4}{\sqrt{b^2-a^2}}L\left(x\sqrt{b^2-a^2} + \sqrt{a^4+(b^2-a^2)x^2}\right)\right\} + C,$$

je nachdem 2a die große oder kleine Achse der Ellipse vorstellt. Fig.

Soll die Oberfläche O für $x=0$ verschwinden, so findet man im ersten Falle $C=0$, im andern

$$o=\frac{\pi b}{a^2}\cdot\frac{a^4}{\sqrt{b^2-a^2}}La^2+C.$$

Es ist daher die Oberfläche eines Abschnittes des länglichen Ellipsoids, welches durch die Umdrehung einer Ellipse um die große Achse 2a erzeugt wird,

$$O=\frac{\pi b}{a^2}x\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}+\frac{\pi a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{x\sqrt{a^2-b^2}}{a^2},$$

während bey einem abgeplatteten Ellipsoide, dessen Umdrehungsachse die kleine Achse 2b der Ellipse ist,

$$O=\frac{\pi bx}{a^2}\sqrt{a^4+(b^2-a^2)x^2}$$
$$+\frac{\pi a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}}L\frac{x\sqrt{b^2-a^2}+\sqrt{a^4+(b^2-a^2)x^2}}{a^2}$$

wird.

Nimmt man in diesen Ausdrücken $x=a$ an, so erhält man die Oberfläche des halben, und wenn man den Ausdruck verdoppelt, die Oberfläche des ganzen Ellipsoids. Es ist nähmlich die Oberfläche des länglichen Ellipsoids

$$=2\pi b^2+\frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\sqrt{\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)},$$

und jene des abgeplatteten Ellipsoids

$$=2\pi b^2+\frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}}L\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)}\right).$$

Setzen wir endlich $b=a$, so liefern beyde Formeln die Oberfläche der Kugel, in welche das Ellipsoid übergeht,

$$=2\pi a^2+2\pi a^2=4\pi a^2;$$

weil die Ausdrücke

$$\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\sqrt{\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)}\text{ und }\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}L\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)}\right),$$

Fig. welche für $b = a$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen, nach §. 693 in 1 übergehen.

§. 763.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel für den Cubikinhalt derjenigen Körper zu finden, welche durch die Umdrehung krummer Linien von senkrechten Ordinaten entstehen.

205. Auflösung. Es sey bey der krummen Linie AMD (Fig. 205.), AE die Umdrehungsachse, $AP = x$, $PM = y$ und der Cubikinhalt des Konoids $MAM' = K$; so ist der abgekürzte Kegel zwischen den Ebenen M'M und m'm das Differenzial von K. Diesen abgekürzten Kegel kann man für einen Cylinder ansehen, weil die Halbmesser der zwey Grundflächen nur um eine unendlich kleine Größe, nähmlich um $RM = dy$ von einander verschieden sind. Es ist demnach dK ein Cylinder, dessen Grundfläche = dem Kreise auf M'M, und dessen Höhe $= Pp$ ist; nähmlich es ist

$$dK = PM^2\pi . Pp = \pi y^2 dx,$$

und folglich

$$K = \pi \int y^2 dx.$$

1. Beyspiel. Es sey AMD eine Parabel, so ist

$$y^2 = 2px;$$

also $$K = 2\pi p \int x dx = \pi p x^2,$$

weil K mit x verschwindet, also $C = 0$ wird; daher auch

$$K = \frac{1}{2} y^2 \pi . x = \text{dem halben Producte}$$

aus der Grundfläche in die Höhe (wie §. 634.).

2. Beyspiel. Dreht sich eine Kegelschnittslinie um die durch ihren Scheitel laufende Achse, so ist

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

daher der Inhalt des entstehenden Konoids

$$K = \pi \int y^2 dx = \pi \int (2px + qx^2)\, dx,$$

und wenn K mit x verschwindet,

$$K = \pi x^2 (p + \frac{1}{3} qx).$$

3. Beyspiel. Bey der Sinuslinie $y = a \sin x$ Fig. ist der Inhalt des durch Umdrehung um die Abscissenlinie entstandenen Konoids

$$K = \pi a^2 \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \pi a^2 \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{4} \pi a^2 (2x - \sin 2x),$$

wenn für $K = 0$ auch $x = 0$ ist.

Setzt man hierin $x = \pi$, so wird

$$K = \frac{1}{2} \pi^2 a^2.$$

4. Beyspiel. Bey der gleichseitigen Hyperbel $xy = k^2$ findet man, wenn sie sich um eine Asymptote dreht, den Inhalt des erzeugten Konoids

$$K = \pi k^4 \int \frac{dx}{x^2} = C - \frac{\pi k^4}{x}.$$

Soll der Körper bey $x = k$ anfangen, also $0 = C - \pi k^3$ werden, so muß

$$K = \pi k^3 (1 - \frac{k}{x})$$

seyn. Setzt man hierin $x = \infty$, so wird $K = \pi k^3$. Bey dem Konoid, welches durch die Umdrehung einer gleichseitigen Hyperbel um eine Asymptote entsteht, wird demnach der besondere Umstand wahrgenommen, daß der Cubikinhalt eines solchen Körpers von AB (Fig. 186.) längs der ganzen Asymptote ins Un- 186. endliche angebbar ist, obschon der Flächeninhalt des durch die Umdrehungsachse gelegten Durchschnittes eines solchen Körpers unendlich groß ist; was sehr leicht zu begreifen ist, wenn man sich daran erinnert, daß bey einem solchen Konoid in einer unendlichen Entfernung vom Mittelpuncte die Körper-Elemente unendlich kleine Größen der zweyten Ordnung, die Flächen-Elemente des Durchschnittes längs der Umdrehungsachse aber in eben dieser Entfernung unendlich kleine Größen der ersten Ordnung sind.

§. 764.

Wenn die krummlinige Fläche APM (Fig. 205.) sich um die 205. Gerade BG herumdreht, welche mit APM in einerley Ebene

Fig. 205. liegt, und mit der senkrechten Ordinate parallel läuft; so entsteht ein ringförmiger Körper, dessen Cubikinhalt sich auf folgende Art berechnen läßt.

Bey dieser Umdrehung beschreibt jedes Flächen-Element pmMP eine cylindrische Röhre, welche das Differenzial des ringförmigen Körpers ist, zum äußeren Durchmesser BP, zum inneren Bp, und zur Höhe pm = PM besitzt. Setzen wir nun diesen Körper = K, den Abstand AB = c, AP = x, und PM = y; so ist die erwähnte cylindrische Röhre

$$dK = BP^2\pi . PM - Bp^2\pi . PM = \pi . PM\,(BP^2 - Bp^2)$$
$$= \pi y\,(BP+Bp)\,(BP-Bp) = \pi y\,(c+x+c+x-dx)\,dx$$
$$= 2\pi y\,(c+x)\,dx;$$

und folglich

$$K = 2\pi \int y\,(c+x)\,dx.$$

Soll man z. B. den Inhalt eines kreisförmigen Ringes bestimmen, so hat man

$$y = \sqrt{a^2-x^2},$$

daher

$$K = 2\pi \int (c+x)\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$
$$= 2\pi\,(c\int dx\sqrt{a^2-x^2} + \int x dx\sqrt{a^2-x^2})$$
$$= \pi cx\sqrt{a^2-x^2} - \pi ca^2 \arcsin\sqrt{(1-\frac{x^2}{a^2})} - \frac{2}{3}\pi(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Fängt der Körper bey $x = -a$ an, so ist $C = 0$, folglich hat man

$$K = \pi\left\{cx\sqrt{a^2-x^2} - \frac{2}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} - ca^2 \arcsin\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right\},$$

oder

$$K = \pi\,(cxy - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - ca^2 \arcsin\frac{y}{a}).$$

Setzt man nun $x = a$, folglich $y = 0$; so erhält man den Inhalt des ganzen Ringes $= 2ca^2\pi^2$, wenn man $\arcsin 0 = -2\pi$ annimmt.

§. 765. Fig.

Auch die Cubikinhalte der pyramidalen Körper lassen sich mittelst der Integral-Rechnung berechnen. Man stelle sich nähmlich vor, daß die Höhe eines pyramidalen Körpers in unendlich viele gleiche Theile getheilt sey; man denke sich durch alle diese Theilungspuncte zur Grundfläche parallele Ebenen; der Inhalt der Durchschnittsfläche, welche in der Entfernung x von dem Anfange des Körpers zur Grundfläche parallel ist, sey $= y$; so ist ydx das Differenzial oder das allgemeine Glied in der Reihe der Elemente eines solchen Körpers. Folglich ist der Cubikinhalt des Stückes vom Anfange bis zur parallelen Durchschnittsfläche y gerechnet

$$K = \int ydx.$$

Kann man nun y nach der Eigenschaft des Körpers durch x ausdrücken, so läßt sich ydx im Allgemeinen integriren, und sofort der Cubikinhalt des gegebenen pyramidalen Körpers bestimmen.

Es sey z. B. DQA ein Konoid (Fig. 120.), dessen Höhe 120.
$QP = a$ ist, seine Grundfläche, die ein beliebiges Vieleck seyn mag, sey $= b$. Dieses Konoid sey so beschaffen, daß alle seine Seitenlinien aus Quadranten von Kreislinien bestehen, welche aus dem Mittelpuncte P mit dem Halbmesser $PA = PQ$ beschrieben sind. Setzen wir nun $QR = x$, und die Durchschnittsfläche $EF = y$; so ist vermöge der Eigenschaft des Kreises die Gerade

$$RF = \sqrt{2ax - x^2}.$$

Ferner verhält sich die Grundfläche DA zur Fläche EF, wie PA^2 zu RF^2; nähmlich

$$b : y = a^2 : 2ax - x^2;$$

also ist

$$y = \frac{2abx - bx^2}{a^2},$$

und

$$K = \int\left(\frac{2bxdx}{a} - \frac{bx^2dx}{a^2}\right)$$

$$= \frac{bx^2}{a} - \frac{bx^3}{3a^2},$$

Fig. 120. weil $C = 0$ ist. Man setze $x = a$, so ist der Cubikinhalt des ganzen Konoids $= \frac{2}{3} ab$ = zwey Drittheilen des Productes aus der Grundfläche in die Höhe wie in §. 534.

Ist allgemein

$$y = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots,$$

so findet man

$$K = \int (Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots)\, dx,$$

nähmlich wie in §. 516,

$$K = A\frac{x^{a+1}}{a+1} + B\frac{x^{b+1}}{b+1} + C\frac{x^{c+1}}{c+1} + \ldots,$$

wenn K mit x verschwindet.

VIII. Abschnitt.

Auflösung einiger Aufgaben, welche auf Differenzialgleichungen mit zwey Veränderlichen führen.

§. 766.

Viele interessante analytische und geometrische Untersuchungen führen zu Differenzialgleichungen mit zwey Veränderlichen; weßwegen wir einige hieher gehörige Probleme behandeln wollen.

1. Aufgabe. Man suche die Summe y der unendlichen Reihe

$$x - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$$

Aus

$$y = x - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$$

erhält man

$$\frac{dy}{dx} = 1 - x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots,$$

daher ist Fig.

$$y + \frac{dy}{dx} = 1 ,$$

oder

$$dy + y\,dx - dx = 0.$$

Integrirt man diese Gleichung nach §. 754. II. so ist

$$\varphi(x) = 1 , \quad \psi(x) = -1 ,$$

folglich $$y = h^{-x} \int h^{x} dx = h^{-x} (h^{x} + C) ,$$

oder $$y = 1 + Ch^{-x} .$$

Es ist aber für $x = 0$ auch $y = 0$, sofort

$$0 = 1 + C , \quad C = -1$$

und $$y = 1 - h^{-x} .$$

2. Aufgabe. Man bestimme die Summe

$$y = \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{3.4} + \frac{x^4}{4.5} + \ldots\ldots$$

Da hier

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{5} + \ldots\ldots ,$$

folglich

$$x . \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + \ldots\ldots$$

ist, so hat man

$$y + x\frac{dy}{dx} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots$$

Setzen wir der Kürze wegen $y + x\frac{dy}{dx} = z$,

so daß

$$z = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots$$

wird; so ist

$$\frac{dz}{dx} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots ,$$

und

$$x\frac{dz}{dx} = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\ldots$$

Fig. folglich auch $(1-x)\frac{dz}{dx}=1.$

Hieraus ergibt sich nun $dz=\frac{dx}{1-x}$,

mithin $z=\int\frac{dx}{1-x}=C-L(1-x)$,

oder da für $x=0$ auch $z=0$ und $C=0$ seyn muß,

$$z=-L(1-x).$$

Es ist demnach

$$y+x\frac{dy}{dx}+L(1-x)=0,$$

oder $$dy+y\frac{dx}{x}+\frac{L(1-x)}{x}dx=0.$$

Integrirt man diese Gleichung nach §. 754. II. so hat man

$$\varphi(x)=\frac{1}{x},\quad \psi(x)=\frac{L(1-x)}{x},$$

daher $$\int\varphi(x)dx=\int\frac{dx}{x}=Lx,$$

$$y=-h^{-Lx}\int h^{Lx}\frac{L(1-x)}{x}dx=-\frac{1}{x}\int L(1-x)dx$$

$$=\frac{1}{x}\left\{C+x+(1-x)L(1-x)\right\}\text{(§.745.II).}$$

Allein für $x=0$ ist $y=0$, daher auch $C=0$ und sonach

$$y=1+\frac{(1-x)L(1-x)}{x}.$$

Für $x=1$ wird (§. 693.)

$$(1-x)L(1-x)=0,$$

und wie in (§. 313.),

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots\ldots=1.$$

3. Aufgabe. Die Curve zu finden, deren Subnormale einer gegebenen Function $\varphi(y)$ von y gleicht.

Nach §. 699 ist die Subnormale $=y\frac{dy}{dx}$,

Fig.

folglich ist $y\frac{dy}{dx} = \varphi(y)$

die Differenzialgleichung der gesuchten Curve.

Aus ihr ergibt sich

$$dx = \frac{y\,dy}{\varphi(y)}$$

und $$x = \int \frac{y\,dy}{\varphi(y)} .$$

Soll $\varphi(y) = \frac{a}{y^n}$ seyn, so wird

$$x = \frac{1}{a}\int y^{n+1} dy = \frac{y^{n+2}}{(n+2)a} + C ,$$

daher, wenn y mit x verschwinden, und $n+2$ nicht negativ seyn soll,

$$x = \frac{y^{n+2}}{(n+2)a} .$$

Damit z. B. $n = 0$, mithin die Subnormale constant ausfalle, muß

$$x = \frac{y^2}{2a} ,$$

oder $$y^2 = 2ax ,$$

demnach ist die gesuchte Linie eine gemeine Parabel.

Soll $n = -2$, folglich die Subnormale $= ay^2$, nähmlich dem Quadrate der Ordinate proportional seyn, so muß

$$x = \frac{y^0}{0.a} = \frac{Ly}{a} ,$$

also $$y = h^{ax} ,$$

mithin die gesuchte Linie eine Logistik seyn.

4. Aufgabe. Man suche die vortheilhafteste Gestalt der innern Höhlung der Petardenglocken.

Bey der Petarde hat man die Absicht durch die Expansivkraft des Gases, in welches das im Innern der Glocke entzündete Pulver aufgelöst wird, einen heftigen Stoß auf das mit ihr verbundene Madrilbret hervorzubringen. Soll nun dieser Stoß die größte mögliche Intensität erhalten, so muß er sich über die

Fig. Grundfläche gleichförmig verbreiten, folglich müssen alle von dem Mittelpuncte der Grundfläche der Glocke gleich weit abstehenden Puncte gleich starke Stöße erleiden, und die Richtungen aller Stöße auf der Grundfläche senkrecht seyn. Das Erste kann nur erreicht werden, wenn die innere Wölbung der Glocke eine durch Um-
175. drehung einer Linie MA (Fig. 175.) um eine mit ihr in derselben Ebene liegende fixe Gerade AN entstandene Fläche ist, die von der Umdrehungsachse AN getroffen wird. Das Zweyte erheischt, daß die kleinsten Theilchen des Pulvergases, welche aus dem Entzündungspuncte F des Pulvers gegen die innere Wand der Petardenglocke geschleudert werden, von da parallel zur Achse abprellen, und daß diese auf die Grundfläche senkrecht stehe.

Um nun die Gestalt der Linie AM aufzufinden, nehmen wir den Entzündungspunct F des Pulvers zum Pol und FA zur Polarachse an, so daß für den Punct M dieser Linie $AFM = \varphi$, $FM = r$ wird. Ist FM die Richtung des Radiusvectors, nach welcher ein Atom des Pulvergases aus F an den Punct M der innern Fläche der Petardenglocke getrieben wird, so ist der von ihr und der Normale MN des Punctes M gebildete Winkel $FMN = \lambda$ der Einfallwinkel, und wenn dieses Atom nach der Richtung MS von der innern Wand abspringt, der Winkel NMS der Abprellwinkel, daher dem Einfallwinkel λ gleich. Soll nun MS zur AN parallel laufen, so muß (nach §. 363.)

$$SMN = MNF = \lambda$$

seyn. Es ist aber

$$AFM = FMN + MNF,$$

also $$\varphi = \lambda + \lambda = 2\lambda,$$

und $$\lambda = \tfrac{1}{2}\varphi.$$

Allein im §. 707 fanden wir

$$\text{tang}\,\lambda = \frac{dr}{rd\varphi},$$

daher ist die auf Polar-Coordinaten sich beziehende Differenzialgleichung der gesuchten Curve

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{dr}{rd\varphi}.$$

Aus dieser ergibt sich Fig. 175.

$$\frac{dr}{r} = \tang \tfrac{1}{2}\varphi . d\varphi ,$$

folglich wenn man integrirt,

$$Lr = \int \frac{\sin \frac{1}{2}\varphi \, d\varphi}{\cos \frac{1}{2}\varphi} = -2 \int \frac{d . \cos \frac{1}{2}\varphi}{\cos \frac{1}{2}\varphi}$$

$$= LC - 2L\cos \tfrac{1}{2}\varphi = L\frac{C}{\cos^2 \frac{1}{2}\varphi} ,$$

und

$$r = \frac{C}{\cos^2 \frac{1}{2}\varphi} .$$

Bezeichnen wir mit c den dem Polarwinkel $\varphi = 0$ entsprechenden Radiusvector, so wird $c = C$, also ist

$$r = \frac{c}{\cos^2 \frac{1}{2}\varphi} = \frac{2c}{1 + \cos \varphi}$$

die Gleichung der gesuchten Linie, welche nach §. 629 eine Parabel seyn muß.

Man wird daher zur innern Fläche einer Petardenglocke mit besonderem Vortheile ein Paraboloid wählen. Dabey erreicht man nothwendig noch den Vortheil, daß die Wege, welche die Atome des Pulvergases von dem Entzündungspuncte F des Pulvers aus bis zu ihrem Anlangen an der Grundfläche zurücklegen, durchgehends gleich sind, mithin alle von ihnen bewirkten Stöße auf diese Fläche zugleich erfolgen. Denn ist dieser Weg

$$FM + MS = z ,$$

und der Abstand des Punctes F von der Grundfläche $= a$, so ist

$$FM = r , \quad MS = a - FP = a + r\cos\varphi ,$$

daher

$$z = a + r(1 + \cos\varphi) = a + 2c$$

eine unveränderliche Größe.

5. Aufgabe. Man suche diejenige Curve, bey welcher der von einem bestimmten Puncte aus gerechnete Bogen der trigonometrischen Tangente des Neigungswinkels der Curve an dem Endpuncte dieses Bogens proportional ist.

Fig. Bezeichnet s die Länge dieses Bogens, x die Abscisse, y die Ordinate, so ist $\frac{dy}{dx}$ die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der Curve gegen die Abscissenlinie, folglich der Bedingung der Aufgabe gemäß

$$s = a\frac{dy}{dx}.$$

Differenziren wir diese Gleichung, indem wir x als absolut veränderlich behandeln, so wird

$$\frac{ds}{dx} = a\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Allein nach §. 699 ist

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})},$$

daher hat man

$$a\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{(1+\frac{dy^2}{dx^2})}$$

als Differenzialgleichung der zu suchenden Linie. Setzen wir nun

$$\frac{dy}{dx} = p, \text{ folglich } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx};$$

so verwandelt sie sich in

$$a\frac{dp}{dx} = \sqrt{1+p^2},$$

woraus sogleich

$$dx = \frac{adp}{\sqrt{1+p^2}},$$

und

$$x = a\int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}},$$

nähmlich

$$C + x = aL(\sqrt{1+p^2} + p)$$

gefunden wird.

Soll nun der Neigungswinkel, also auch seine Tangente $\frac{dy}{dx} = p$ mit x verschwinden, so muß $C = 0$ werden. Sofort erhalten wir

$$\sqrt{1+p^2} + p = h^{\frac{x}{a}}.$$

und wenn wir durch beyde Theile der Gleichung die Einheit dividiren Fig.

$$\sqrt{1+p^2} - p = h^{-\frac{x}{a}},$$

folglich aus beyden Gleichungen

$$p = \frac{h^{\frac{x}{a}} - h^{-\frac{x}{a}}}{2}.$$

Da nun $dy = pdx$ ist, so findet man

$$y = \int \frac{h^{\frac{x}{a}} - h^{-\frac{x}{a}}}{2} . dx,$$

oder

$$y = a . \frac{h^{\frac{x}{a}} + h^{-\frac{x}{a}}}{2} + C.$$

Soll nun für $x = 0$, $y = a$ seyn, so muß $C = 0$ werden, und man findet

$$y = a . \frac{h^{\frac{x}{a}} + h^{-\frac{x}{a}}}{2},$$

oder wenn man die Gleichung (19) §. 685 berücksichtiget,

$$y = a \cos(\tfrac{x}{a}\sqrt{-1}).$$

Die gefundene Linie ist die **Kettenlinie**, welche ein gleichförmig beschwerter, vollkommen biegsamer und durchgehends gleich dicker Faden bildet. Man sehe hierüber **Eytelwein's** Handbuch der Statik, 2. Aufl. Berlin 1833.

6. Aufgabe. Die Curve zu finden, bey welcher der Krümmungshalbmesser der dritten Potenz der Normale proportional ist.

Da der Krümmungshalbmesser (nach §. 701.) für rechtwinkelige Coordinaten $= -\frac{ds^3}{dx d^2y}$,

Fig. die Normale aber (nach §. 699.) $= y\frac{ds}{dx}$

ist; so muß

$$-a^2\frac{ds^3}{dx\,d^2y} = \left(\frac{yds}{dx}\right)^3,$$

folglich

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a^2}{y^3}$$

seyn. Um diese Gleichung zu integriren, multipliciren wir sie mit $2dy$, wornach die Integration, weil dx für constant angesehen wird,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = C + \frac{a^2}{y^2}$$

liefert. Hieraus folgt nun

$$dx = \frac{ydy}{\sqrt{Cy^2+a^2}},$$

und

$$x = \frac{1}{C}\sqrt{a^2+Cy^2} + C'.$$

Sollen die Constanten C und C′ so bestimmt werden, daß x und y zugleich verschwinden; so muß

$$\frac{a}{C} + C' = 0,$$

daher

$$Cx + a = \sqrt{a^2+Cy^2}$$

werden, woraus man durch die weitere Reduction die Gleichung

$$y^2 = 2ax + Cx^2$$

findet, welche (nach §. 660.) einem Kegelschnitte zugehört.

Anhang.

I.

Verzeichniß der merkwürdigsten goniometrischen Formeln für den Halbmesser 1.

$\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \pi = 0$, $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$, $\sin 2\pi = 0$,

$\cos 0 = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\cos \pi = -1$, $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$, $\cos 2\pi = 1$,

$\tang 0 = 0$, $\tang \frac{\pi}{2} = \infty$, $\tang \pi = 0$, $\tang \frac{3\pi}{2} = -\infty$, $\tang 2\pi = 0$,

$\cot 0 = \infty$, $\cot \frac{\pi}{2} = 0$, $\cot \pi = -\infty$, $\cot \frac{3\pi}{2} = 0$, $\cot 2\pi = \infty$,

---

$\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$,

$\tang(-x) = -\tang x$, $\cot(-x) = -\cot x$.

$\sin(x + 2n\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2n\pi) = \cos x$

$\sin[x + (2n + \frac{1}{2})\pi] = \cos x$, $\cos[x + (2n + \frac{1}{2})\pi] = -\sin x$

$\sin[x + (2n + 1)\pi] = -\sin x$, $\cos[x + (2n + 1)\pi] = -\cos x$

$\sin[x + (2n + \frac{3}{2})\pi] = -\cos x$, $\cos[x + (2n + \frac{3}{2})\pi] = \sin x$

$\tang(x + n\pi) = \tang x$, $\cot(x + n\pi) = \cot x$

$\tang[x + (2n + \frac{1}{2})\pi] = -\cot x$, $\cot[x + (2n + \frac{1}{2})\pi] = -\tg x$.

Relationen zwiſchen den Functionen eines und desſelben Bogens.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tang} x \cdot \cot x = 1$$

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tang}^2 x\,, \quad \operatorname{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x$$

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \frac{\operatorname{tang} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 x}} = \frac{\cot x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$$

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cot x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tang} x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 x}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \sqrt{1 + \cot^2 x}$$

$$\operatorname{sinv} x = 1 - \cos x$$

$$\operatorname{cosv} x = 1 - \sin x$$

Relationen zwiſchen den Functionen des ganzen und halben oder doppelten Bogens.

$$\operatorname{chord} x = 2 \sin \frac{1}{2} x$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} \operatorname{chord} 2x = \frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} x}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} x}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin 2x} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin 2x}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{1}{2} x - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} x = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} x}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} x}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin 2x} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin 2x}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\tan x = \frac{2\tan\frac{1}{2}x}{1-\tan^2\frac{1}{2}x} = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\operatorname{sinv} x = 2\sin^2\frac{1}{2}x$$

$$\sin\frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin x} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin x}$$

$$\cos\frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin x} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin x}$$

$$\tan\frac{1}{2}x = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

$$\cot\frac{1}{2}x = \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1-\cos x} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}.$$

Zusammensetzung eines Bogens von 30, 45 und 60 Graden mit einem andern.

$$1+\sin x = 2\sin^2(45^0+\tfrac{1}{2}x)$$

$$1-\sin x = 2\sin^2(45^0-\tfrac{1}{2}x)$$

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x} = \frac{\tan(45^0+\frac{1}{2}x)}{\tan(45^0-\frac{1}{2}x)} = \tan^2(45^0+\tfrac{1}{2}x) = \cot^2(45^0-\tfrac{1}{2}x)$$

$$\frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1-\sin x} = \tan(45^0+\tfrac{1}{2}x) = \cot(45^0-\tfrac{1}{2}x)$$

$$\frac{1+\tan x}{1-\tan x} = \sqrt{\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}} = \frac{\sin(45^0+x)}{\sin(45^0-x)} = \tan(45^0+x)$$

$$\frac{1-\tan x}{1+\tan x} = \tan(45^0-x) = \cot(45^0+x).$$

$$\sin(30^0+x) = \cos x - \sin(30^0-x)$$
$$\cos(30^0+x) = \cos(30^0-x) - \sin x$$
$$\sin(60^0+x) = \sin(60^0-x) + \sin x.$$

Formeln für die Functionen der Summe und Differenz zweyer Bögen.

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\operatorname{tang}(x+y) = \frac{\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} y}{1 - \operatorname{tang} x \operatorname{tang} y} = \frac{\cot x + \cot y}{\cot x \cot y - 1}$$

$$\operatorname{tang}(x-y) = \frac{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} y}{1 + \operatorname{tang} x \operatorname{tang} y} = \frac{\cot y - \cot x}{\cot x \cot y + 1}$$

$$\cot(x+y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y} = \frac{1 - \operatorname{tang} x \operatorname{tang} y}{\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} y}$$

$$\cot(x-y) = \frac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x} = \frac{1 + \operatorname{tang} x \operatorname{tang} y}{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} y}$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\cos(x-y) - \frac{1}{2}\cos(x+y)$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\cos(x-y) + \frac{1}{2}\cos(x+y)$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\sin(x+y) + \frac{1}{2}\sin(x-y)$$

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2}\sin(x+y) - \frac{1}{2}\sin(x-y)$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)$$

$$\cos y + \cos x = 2\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)$$

$$\cos y - \cos x = 2\sin\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)$$

$$\sin x + \cos y = 2\sin\frac{1}{2}(90^0 + x - y)\cos\frac{1}{2}(x + y - 90^0)$$

$$= 2\cos\frac{1}{2}(90^0 + y - x)\cos\frac{1}{2}(90^0 - x - y)$$

$$\sin x - \cos y = 2\cos\frac{1}{2}(90^0 + x - y)\sin\frac{1}{2}(x + y - 90^0)$$

$$= 2\sin\frac{1}{2}(90^0 + y - x)\sin\frac{1}{2}(x + y - 90^0)$$

$$\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$$

$$\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$$

$$\cot x + \cot y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y}$$

$$\cot x - \cot y = \frac{\sin(y-x)}{\sin x \sin y}$$

$$\cot x + \operatorname{tang} y = \frac{\cos(x-y)}{\sin x \cos y}$$

$$\cot x - \operatorname{tang} y = \frac{\cos(x+y)}{\sin x \cdot \cos y}$$

$$1 + \operatorname{tang} x \cdot \operatorname{tang} y = \frac{\cos(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

$$1 - \operatorname{tang} x \cdot \operatorname{tang} y = \frac{\cos(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

$$\sin(x+y)\cdot\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y = \frac{1}{2}\cos 2y - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\cos(x+y)\cdot\cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y = \frac{1}{2}\cos 2y + \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\sin(x-y)\cdot\cos(x-y) = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 2y$$

$$\sin(x-y)\cdot\cos(x+y) = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\sin 2y$$

Potenzen der Sinus.

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(-\cos 2x + 1)$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(-\sin 3x + 3\sin x)$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3)$$

$$\sin^5 x = \frac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)$$

$$\sin^6 x = \frac{1}{32}(-\cos 6x + 6\cos 4x - 15\cos 2x + 10)$$

Potenzen der Cosinus.

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)$$

$$\cos^5 x = \frac{1}{16}(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x)$$

$$\cos^6 x = \frac{1}{32}(\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10)$$

Potenzen der Tangenten und Cotangenten.

$$\tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}; \quad \tan^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{3\cos x + \cos 3x}$$

$$\cot^2 x = \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}; \quad \cot^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{3\sin x - \sin 3x}.$$

Sinus der vielfachen Bogen.

$$\sin 2x = 2\cos x \cdot \sin x$$

$$\sin 3x = (4\cos^2 x - 1)\sin x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$\sin 4x = (8\cos^3 x - 4\cos x)\sin x = (4\sin x - 8\sin^3 x)\cdot\cos x$$

$$\sin 5x = (16\cos^4 x - 12\cos^2 x + 1)\sin x = 5\sin x - 20\sin^3 x + 16\sin^5 x.$$

Cosinus der vielfachen Bogen.

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x = (1 - 4\sin^2 x)\cos x$

$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 = 8\sin^4 x - 8\sin^2 x + 1$

$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x = (16\sin^4 x - 12\sin^2 x + 1)\cos x.$

Tangenten der vielfachen Bogen.

$$\text{tang}2x = \frac{2\text{tang}x}{1 - \text{tang}^2 x} = \frac{2}{\text{cot}x - \text{tang}x}$$

$$\text{tang}3x = \frac{3\text{tang}x - \text{tang}^3 x}{1 - 3\text{tang}^2 x}.$$

Cotangenten der vielfachen Bogen.

$$\text{cot}2x = \frac{\text{cot}x - \text{tang}x}{2} = \frac{\text{cot}^2 x - 1}{2\text{cot}x}$$

$$\text{cot}3x = \frac{\text{cot}x - 3\text{tang}x}{3 - \text{tang}^2 x}.$$

Andere Ausdrücke für die Sinus und Cosinus der vielfachen Bogen.

$\sin 2x = 2\sin x.\cos x$

$\sin 3x = 3\sin x.\cos^2 x - \sin^3 x$

$\sin 4x = 4\sin x.\cos^3 x - 4\sin^3 x \cos x$

$\sin 5x = 5\sin x.\cos^4 x - 10\sin^3 x.\cos^2 x + \sin^5 x.$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos 3x = \cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x$

$\cos 4x = \cos^4 x - 6\sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x$

$\cos 5x = \cos^5 x - 10\sin^2 x \cos^3 x + 5\sin^4 x \cos x.$

Ausdrücke für die Kreisbogen.

$$\text{arc sin}\, x = \text{arc cos}\sqrt{1 - x^2} = \text{arc tang}\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \text{arc cosec}\frac{1}{x} = \text{arc cosv}\,(1 - x)$$

$$= 2\,\text{arc tang}\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} = \frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,\frac{2x\sqrt{1 - x^2}}{1 - 2x^2}$$

$$\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$= \operatorname{arc\,sec}\frac{1}{x} = \operatorname{arc\,sinv}(1-x)$$

$$= 2\arccos\sqrt{\frac{1+x}{2}} = \frac{1}{2}\arccos(2x^2-1)$$

$$= 2\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{2x^2-1}$$

$$\operatorname{arc\,tang} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \operatorname{arc\,cot}\frac{1}{x} = 2\operatorname{arc\,tang}\frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\frac{2x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{1-x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\operatorname{arc\,cot} x = \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{x}$$

$$\operatorname{arc\,sec} x = \arccos\frac{1}{x}, \quad \operatorname{arc\,cosec} x = \arcsin\frac{1}{x},$$

$$\operatorname{arc\,sinv} x = \arccos(1-x), \quad \operatorname{arc\,cosv} x = \arcsin(1-x)$$

$$\arcsin x \pm \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2})$$

$$\arcsin x \pm \arccos y = \arcsin(xy \pm \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2})$$

$$\arccos x \pm \arccos y = \arccos(xy \mp \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2})$$

$$\operatorname{arc\,tang} x \pm \operatorname{arc\,tang} y = \operatorname{arc\,tang}\frac{x \pm y}{1 \mp xy}$$

$$\operatorname{arc\,cot} x \pm \operatorname{arc\,cot} y = \operatorname{arc\,cot}\frac{xy \mp 1}{y \pm x}$$

$$\operatorname{arc\,tang} x \pm \operatorname{arc\,cot} y = \operatorname{arc\,tang}\frac{xy \pm 1}{y \mp x}$$

Verſchiedene goniometriſche Reihen.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2..5} - \frac{x^7}{1.2...7} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2...4} - \frac{x^6}{1.2..6} + \ldots$$

$$\text{tang}\, x = x + \frac{x^3}{1.3} + \frac{2x^5}{1.3.5} + \frac{17x^7}{1.3.5.7.9.3} + \ldots,$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{1.3} - \frac{x^3}{1.3.5.3} - \frac{2x^5}{1.3.5.7.3^2} + \ldots$$

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \frac{277x^8}{8064} + \ldots$$

$$\text{cosec}\, x = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + \frac{31x^5}{15120} + \frac{127x^7}{604800} + \ldots$$

$$\text{arc sin}\, x = x + \frac{1.x^3}{1.2.3} + \frac{3^2.x^5}{1.2..5} + \frac{3^2.5^2.x^7}{1.2...7} + \frac{3^2.5^2.7^2.x^9}{1.2...9} + \ldots$$

$$\text{arc tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

$\pi = 3{,}14159265358979323846$

$\log \pi = 0{,}4971499$

$\text{L}\pi = 1{,}1447299$

$$\sin 15^0 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right), \qquad \cos 15^0 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\sin 18^0 = \frac{1}{4}\left(-1 + \sqrt{5}\right), \qquad \cos 18^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

$$\sin 30^0 = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\sin 36^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \qquad \cos 36^0 = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$$

$$\sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \qquad \cos 60^0 = \frac{1}{2}.$$

II.

Tafel zur Bestimmung der Länge der Kreisbogen für den Halbmesser 1.

Grad.	Bogenlänge.	Minuten.	Bogenlänge.	Secund.	Bogenlänge.
1	0·01745329	1	0·00029089	1	0·00000485
2	0·03490659	2	0·00058178	2	0·00000970
3	0·05235988	3	0·00087266	3	0·00001454
4	0·06981317	4	0·00116355	4	0·00001939
5	0·08726646	5	0·00145444	5	0·00002424
6	0·10471976	6	0·00174533	6	0·00002909
7	0·12217305	7	0·00203622	7	0·00003394
8	0·13962634	8	0·00232711	8	0·00003879
9	0·15707963	9	0·00261799	9	0·00004363

Berichtigungen.

Seite	9	Zeile	14	von unten	statt < setze man >
—	9	—	10	v. u.	st. Seien s. m. Seiten
—	14	—	16	v. oben	st. zehen s. m. zehn
—	19	—	3	v. u.	tilge man +
—	34	—	2	v. o.	t. m. 42.
—	43	—	5	v. u.	st. BC: CD s. m. BC: CE
—	44	—	19	v. o.	st. II. s. m. IV.
—	56	—	7	v. o.	st. in s. m. und
—	80	—	4	v. o.	st. des ersten n s. m. m
—	88	—	8 u. 3	v. u.	st. größer s. m. kleiner
—	89	—	7	v. u.	st. die s. m. den
—	90	—	2	v. o.	t. m. 84.
—	93	—	15	v. u.	st. f s. m. f′
—	93	—	10	v. u.	st. f′ s. m. f‴
—	94	—	6	v. o.	st. AC s. m. AB
—	100	—	3	v. o.	st. x^7 s. m. $3x^7$
—	105	—	9	v. u.	st. $2 = \sqrt{}$ s. m. $2\sqrt{}$
—	107	—	4	v. u.	st. ACB s. m. (ACB
—	109	—	5	v. u.	st. E s. m. C
—	110	—	6	v. o.	st. E s. m. G
—	112	—	9	v. u.	t. m. nähmlich
—	113	—	4	v. u.	st. 32: s. m. 3: 2
—	121	—	9	v. u.	st. B s. m. M
—	122	—	19	v. o.	t. m. =
—	135	—	7	v. o.	st. allein s. m. alle in
—	137	—	5	v. o.	st. Grundfläche s. m. Grundflächen
—	149	—	1	v. o.	st. 482 s. m. 432
—	149	—	7	v. u.	st. des ersten Gb‴ s. m. Gb‴
—	199	—	16 u. 18	v. o.	st. d s. m. p
—	235	—	8	v. u.	t. m. die
—	256	—	9	v. o.	st. cos c = s. m. cos C =
—	299	—	8	v. u.	st. diese s. m. die
—	317	—	12	v. u.	st. Pnncten s. m. Puncten
—	321	—	1	v. u.	st. c s. m. β
—	350	—	2	v. o.	t. m. 168.
—	364	—	19	v. o.	st. b′ s. m. b
—	420	—	1	v. u.	an den Rand s. m. 184.
—	430	—	7	v. u.	st. $\sin 2\alpha$ s. m. $\sin^2\alpha$
—	455	—	3	v. o.	fehlt $-2^2ax + \frac{3}{4}b^2y - 5cz^2$
—	493	—	8	v. o.	st. Gieichung s. m. Gleichung
—	496	—	5	v. u.	st. $(-1)m$ s. m. $(-1)^m$
—	524	—	5	v. u.	st. bit s. m. die
—	525	—	12	v. u.	st. $a - \frac{x}{a}$ s. m. $\frac{a^2}{x} - x$
—	565	—	6	v. o.	st. 689 s. m. 709.
—	571	—	14	v. o.	st. fließt s. m. fließt
—	579	—	8	v. o.	st. $\frac{2}{8}$ s. m. $\frac{2}{3}$
—	597	—	3	v. o.	st. q — s. m. q − 1
—	599	—	2	v. o.	st. p + s. m. p + 1
—	602	—	2	v. o.	st. 2 + 1 − 2n s. m. m + 1 − n 2
—	615	—	16	v. o.	st. ma^{m-2} s. m. ma^{m-1}

Seite 624 Zeile 5 von oben statt b^{k-1} f. m. b^{k-2}

— 626 — 3 v. u. st. $X^{\frac{3}{2}}$ f. m. $X^{\frac{3}{2}}$

— 627 — 10 v. o. st. $X^{\frac{3}{2}}$ f. m. $X^{\frac{3}{2}}$

— 634 — 4 v. o. nach $\frac{x}{4c}$ f. m. —

— 634 — 5 v. o. über $16c^2$ f. m. $5b^2$

— 645 — 9. u. 2. v. u. st. a_x f. m. a^x

— 652 — 9. v. o. st. $\cos\frac{1}{2}$ f. m. $\cos\frac{1}{2}x$.

Abänderungen

der im dritten Bande vorkommenden Citaten des zweyten Bandes.

In dem dritten Bande	wird von den älteren Auflagen des zweyten Bandes citirt:	dafür nehme man in der 7. Auflage:
§. 58.	§. 722. Formel A	§. 729. VI.
§. 58.	§. 723. VI.	
§. 66.	§. 561.	§. 556.
§. 70.	§. 581. I.	§. 576. I.
§. 70.	§. 581. II.	§. 576. III.
§. 103 und 106.	§. 721. IV.	§. 729. VI.
§. 107.	§. 722.	
§. 146.	§. 561. I.	§. 556.
§. 193.	§. 705. IV.	§. 708. 2.
§. 207.	§. 723. IV.	§. 730. VI.
§. 207.	§. 722. A	
§. 229.	§. 561. I.	§. 556.
§. 229.	§. 721. V.	§. 730. V.
§. 229.	§. 554.	§. 684. (6).
§. 230.	§. 723. V.	§. 729. VI.

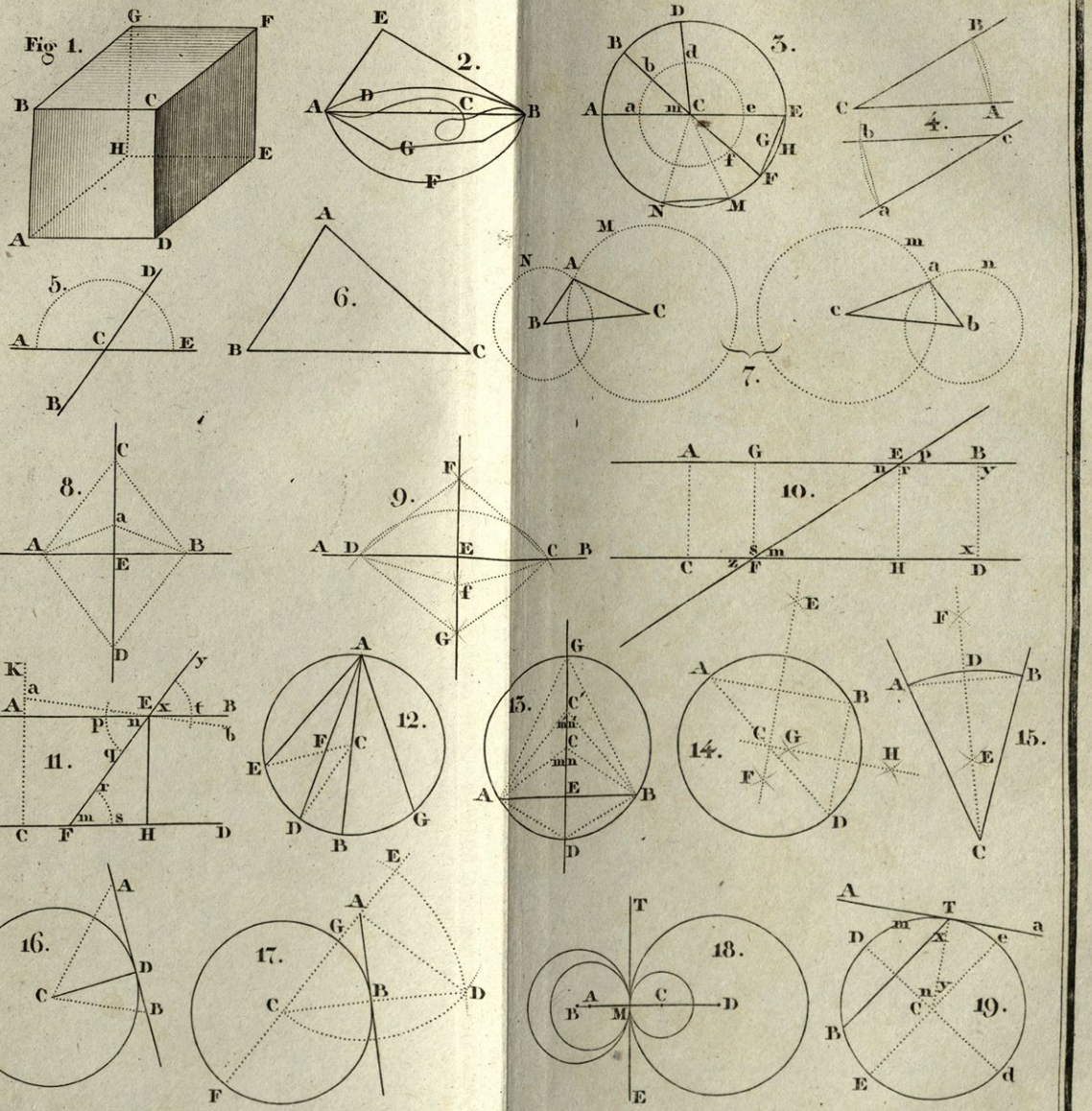


Fig 1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.

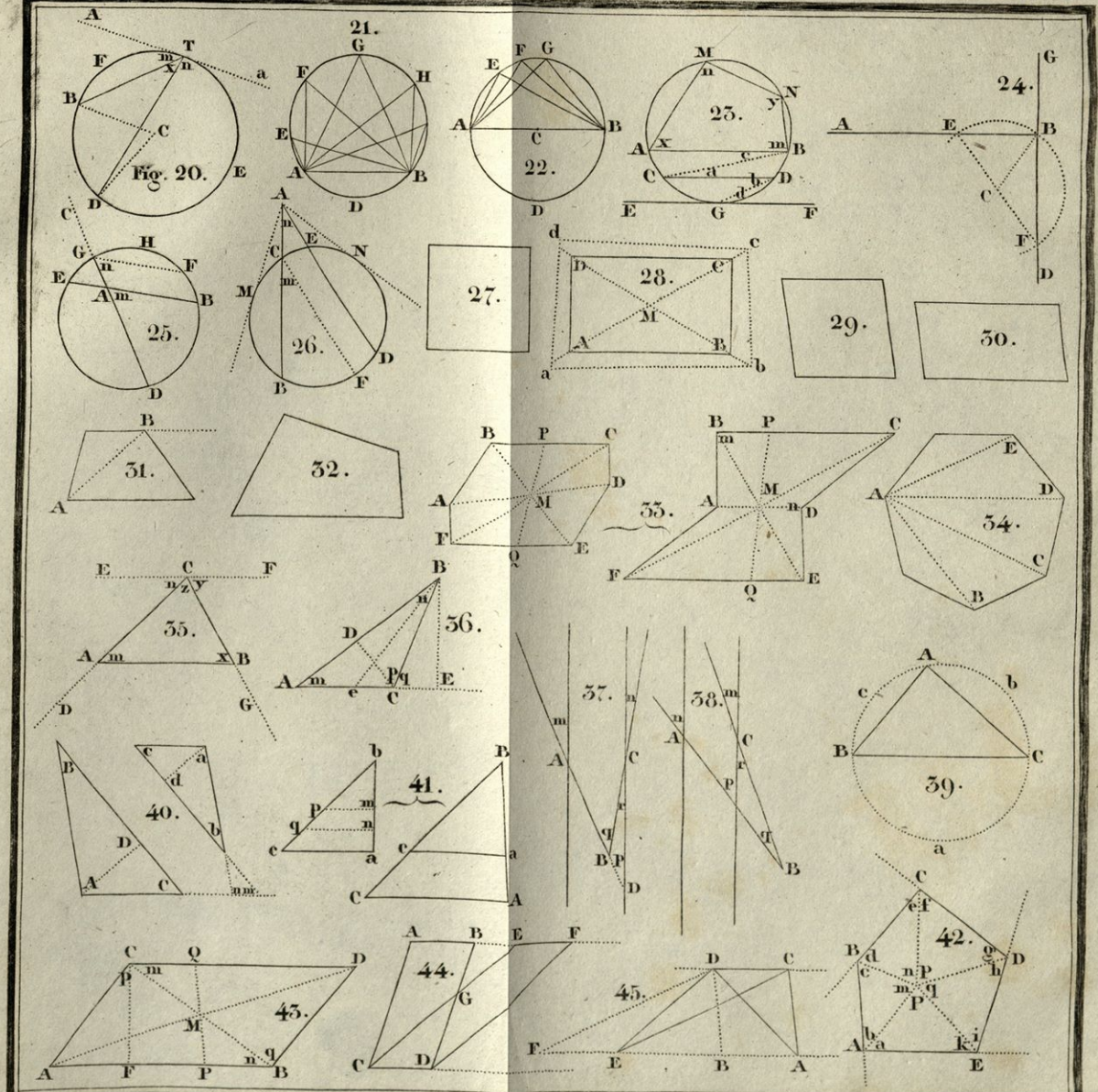
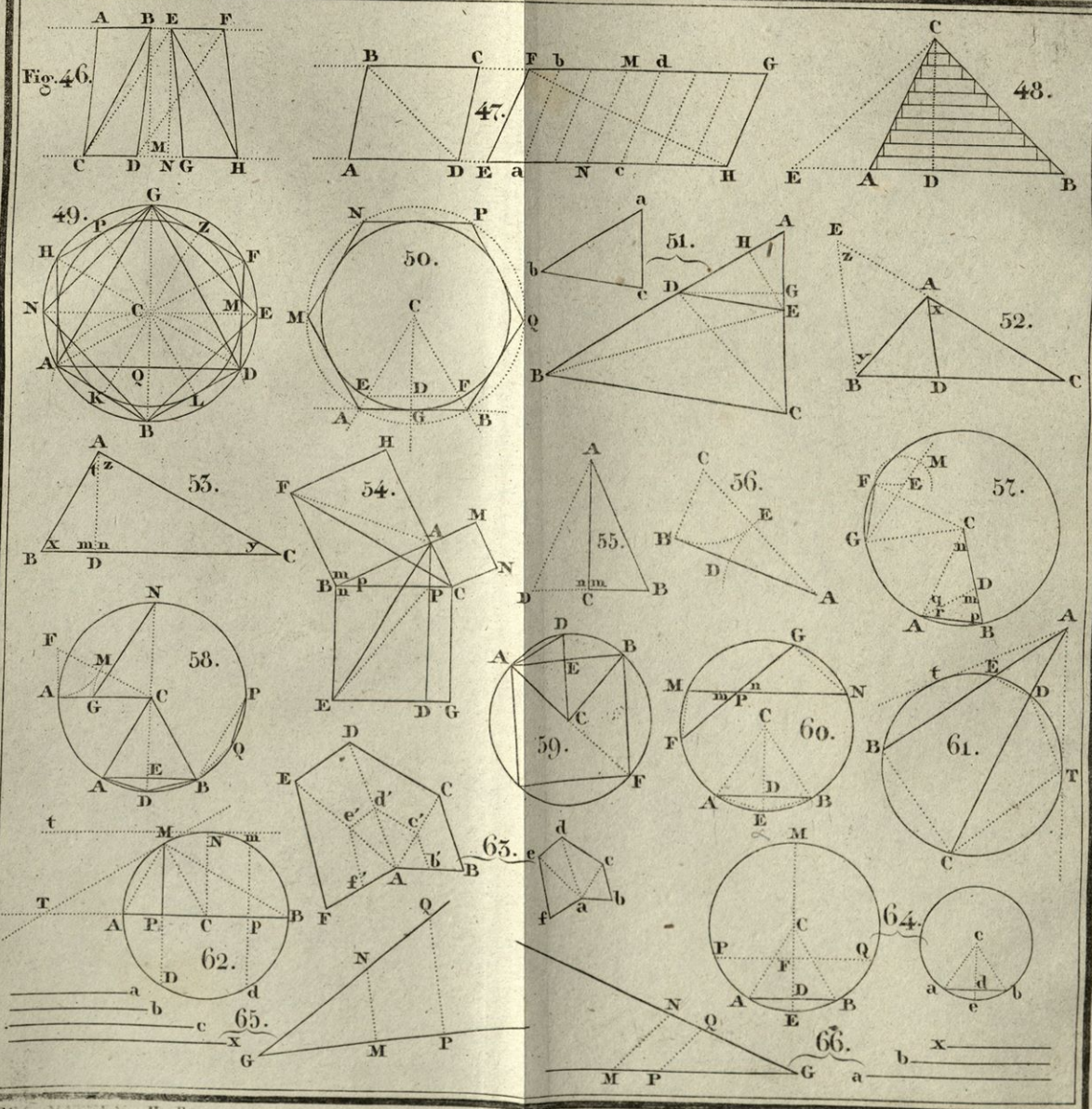


Fig. 20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.
33.
34.
35.
36.
37.
38.
39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.

C.Stein sc.

FIG. 46.



C. Stein sc.

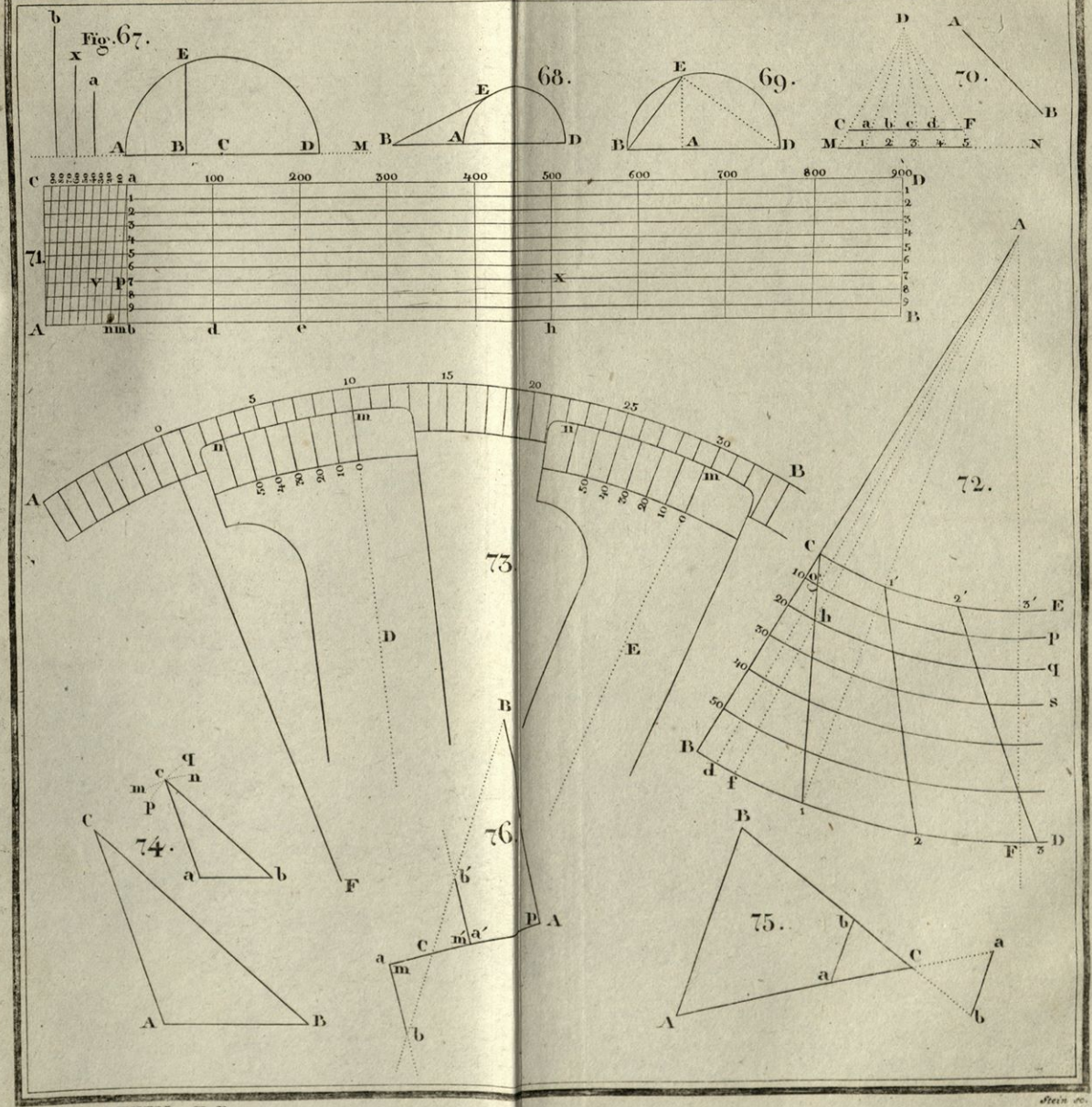


Fig. 67.
68.
69.
70.
71.
72.
73
74.
75.
76.

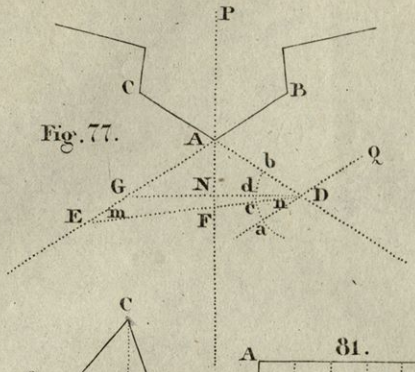
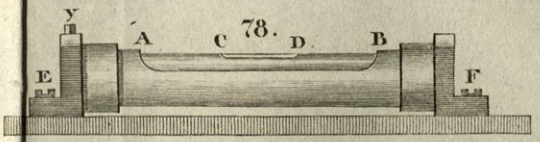
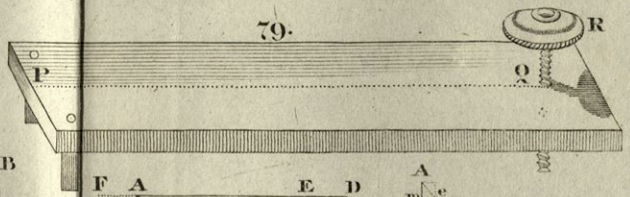
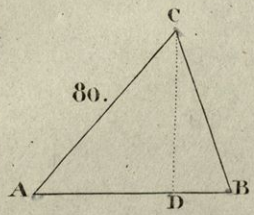
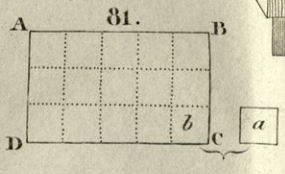


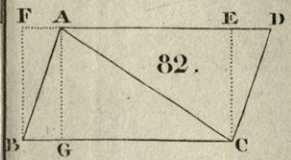
Fig. 77.

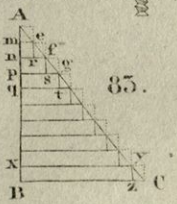


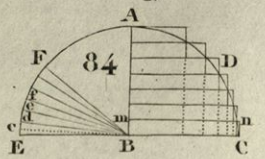


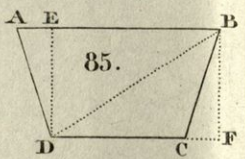


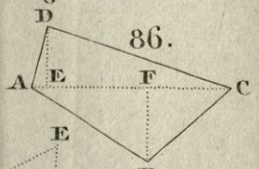


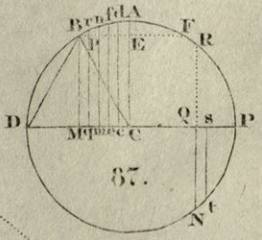


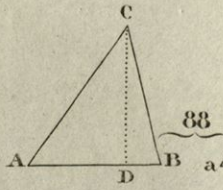




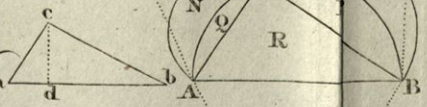


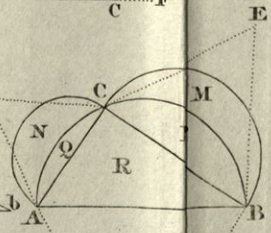




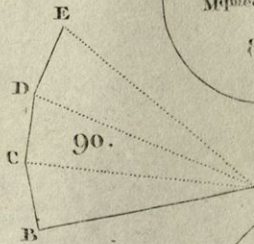


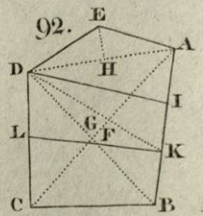
88

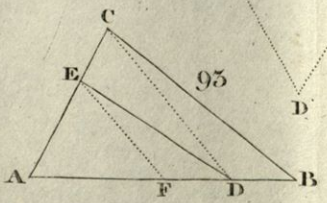


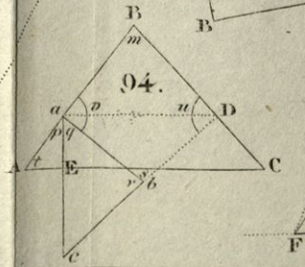


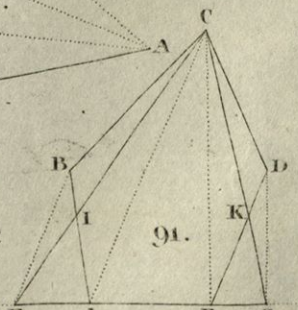
89.











C. Stein sc.

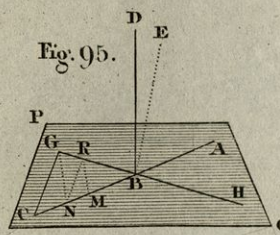
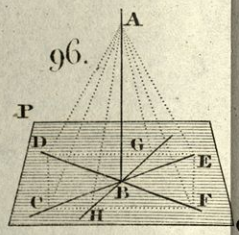
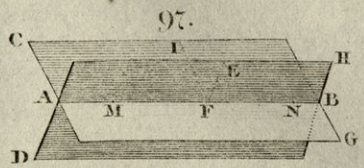
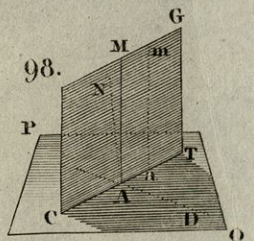
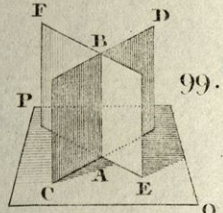


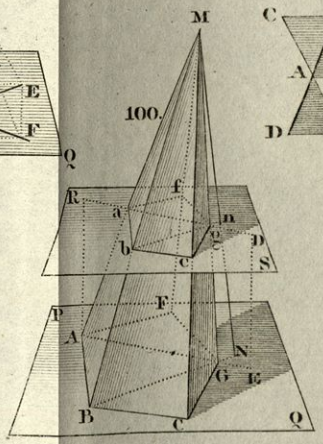
Fig. 95.
D
E
P
G
R
A
B
H
C
N
M
Q

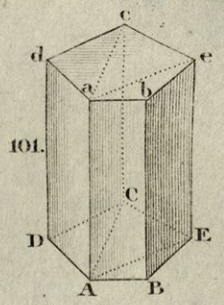

96.
A
P
D
G
E
C
B
F
H
Q

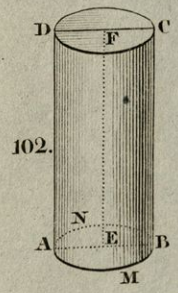

97.
C
I
E
H
A
M
F
N
B
D
G

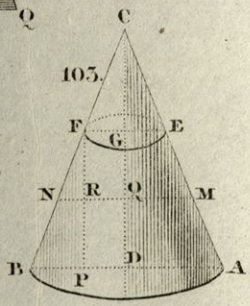

98.
G
M
m
N
P
T
n
A
C
D
Q

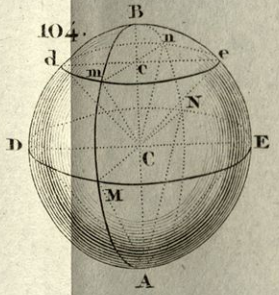

F
B
D
P
99.
C
A
E
Q

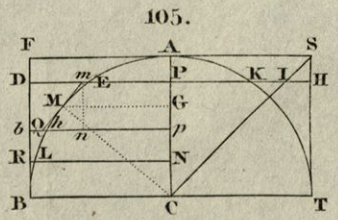

100.
M
R
a
f
n
b
c
D
S
P
F
A
N
G
E
B
C
Q

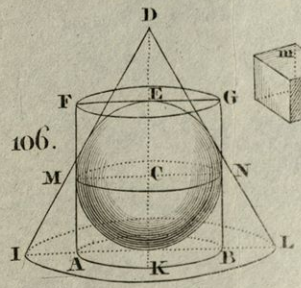

101.
c
d
e
a
b
C
D
E
A
B

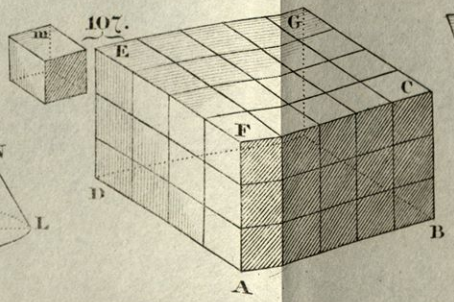

D
F
C
102.
N
A
E
B
M

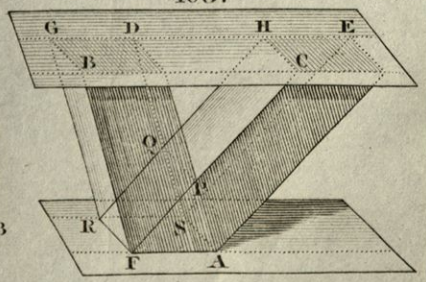

103.
C
F
E
G
N
R
Q
M
D
B
P
A


104.
B
n
d
e
m
c
N
D
E
C
M
A

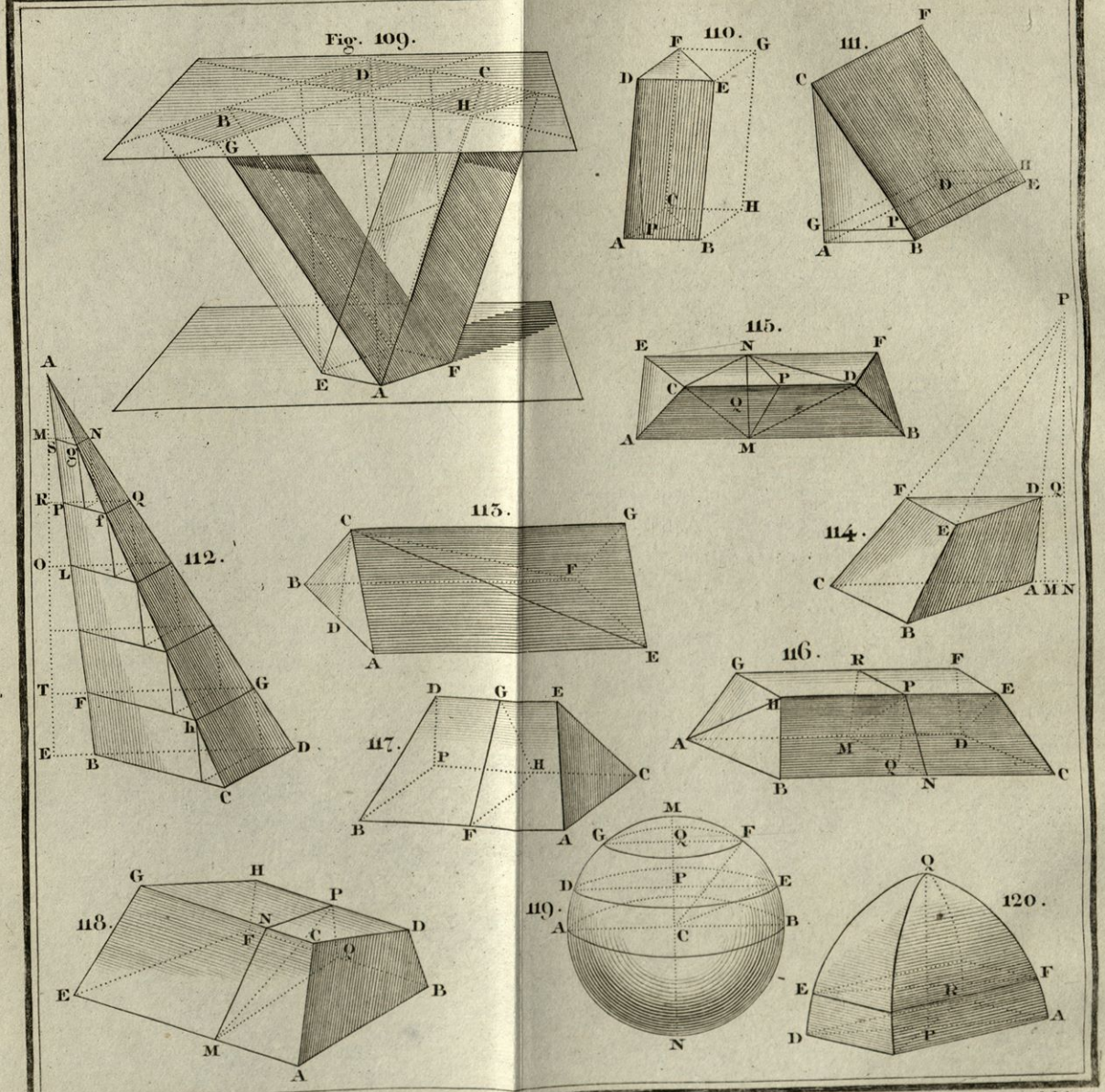

105.
F
A
S
D
m
E
P
K
I
H
M
G
b
O
h
p
n
R
L
N
B
C
T


D
F
E
G
106.
M
C
N
I
A
K
B
L


107.
m
E
G
C
F
D
B
A


108.
G
D
H
E
B
C
Q
P
R
S
F
A

C. Stein sc.



C. Stein sc.

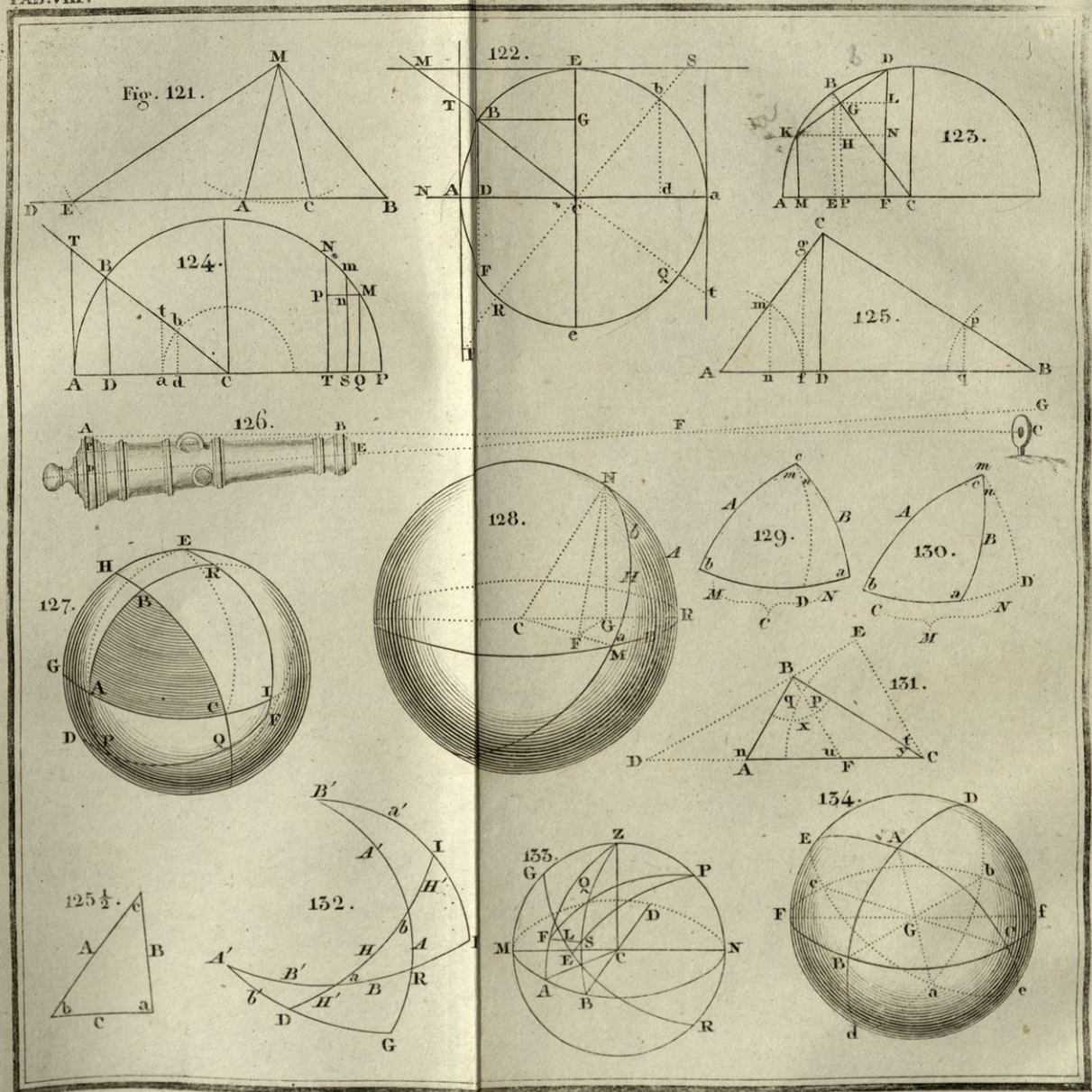
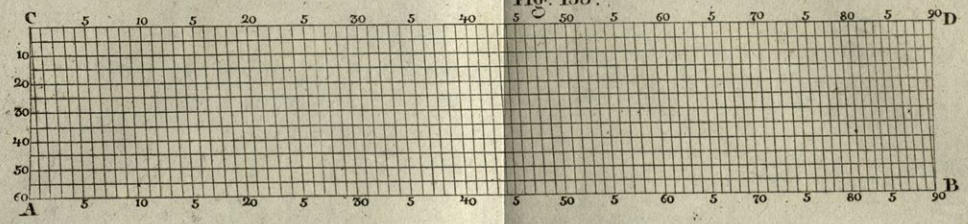
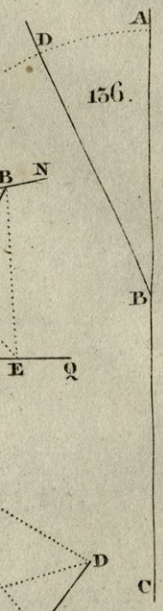


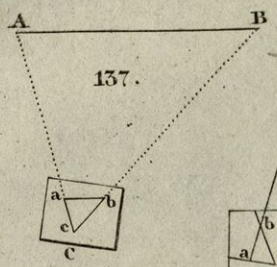
Fig. 121.
122.
123.
124.
125.
126.
127.
128.
129.
130.
131.
132.
133.
134.
125 1/2.

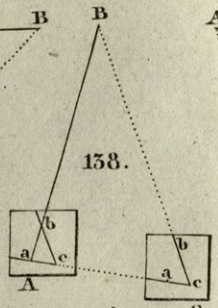
C. STEIN sc.

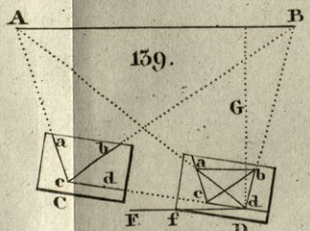
Fig. 135.

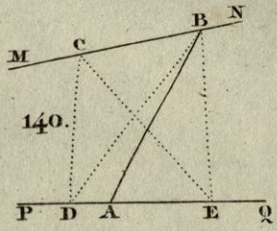


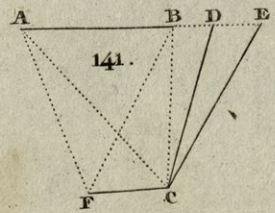


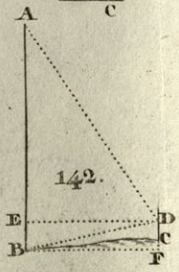


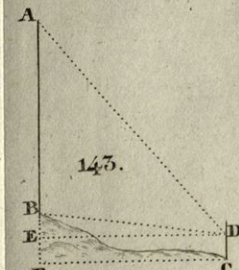


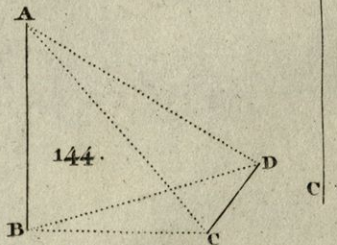


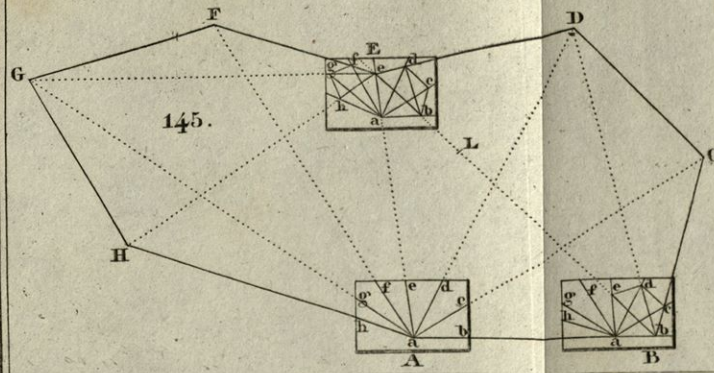


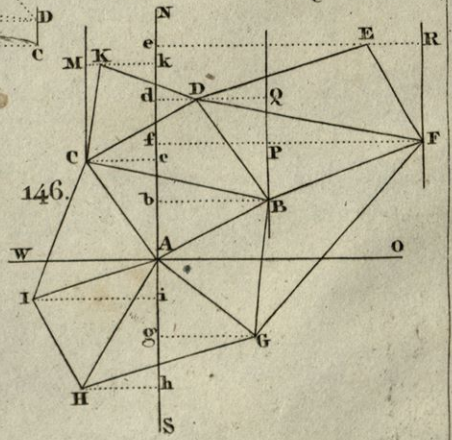












C. STEIN SC.

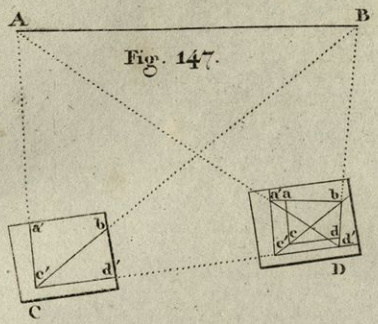
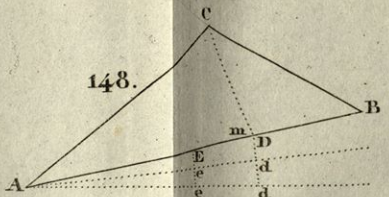
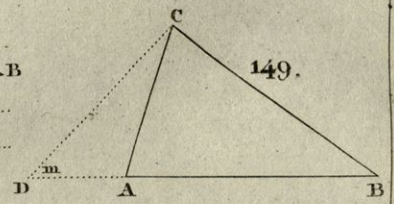


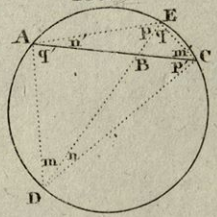
Fig. 147.



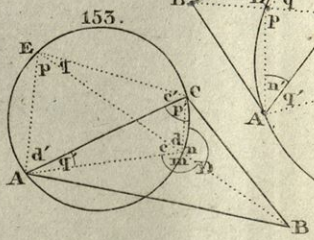
148.



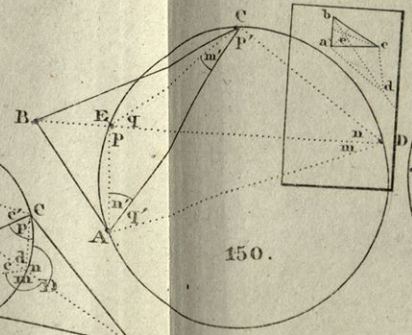
149.



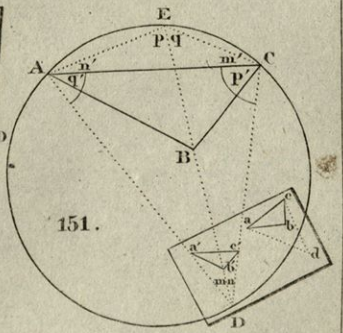
152.



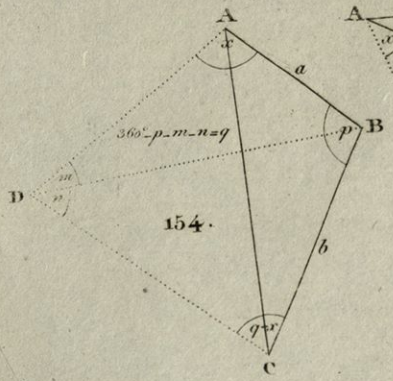
153.

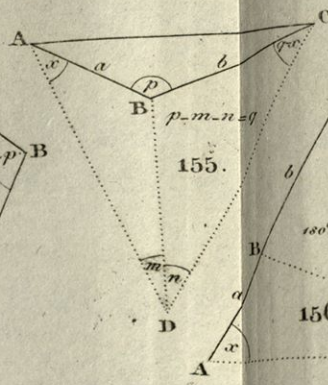


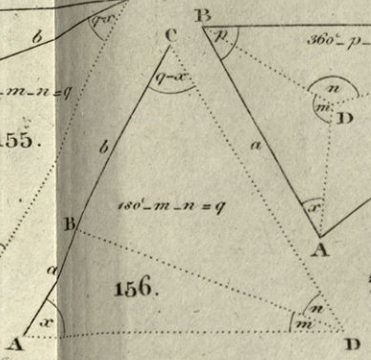
150.

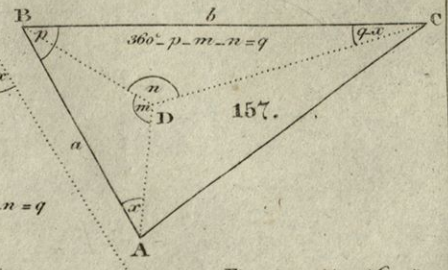


151.









zu Fig. 154, 155, 156, 157.

$$\cot x = \frac{a \cdot r^2 \sin n}{b \cdot \sin m \sin q} + \cot q$$

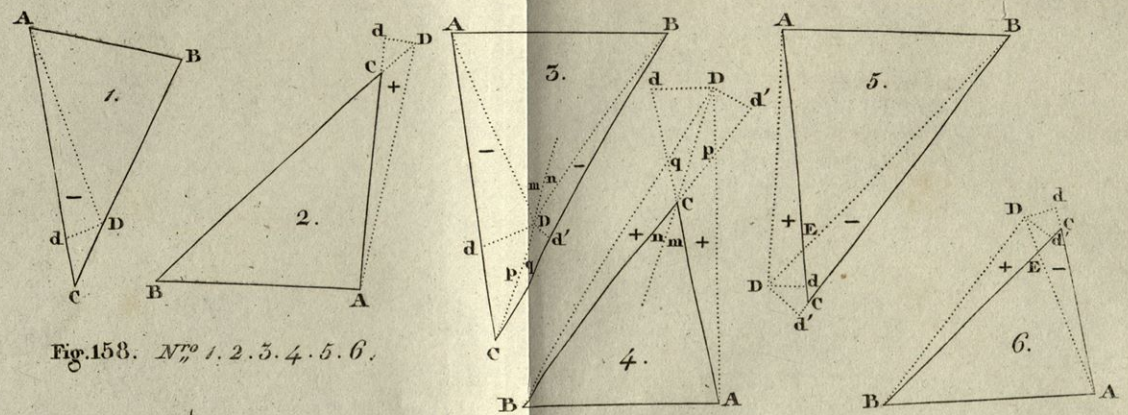


Fig. 158. *N^ro 1. 2. 3. 4. 5. 6.*

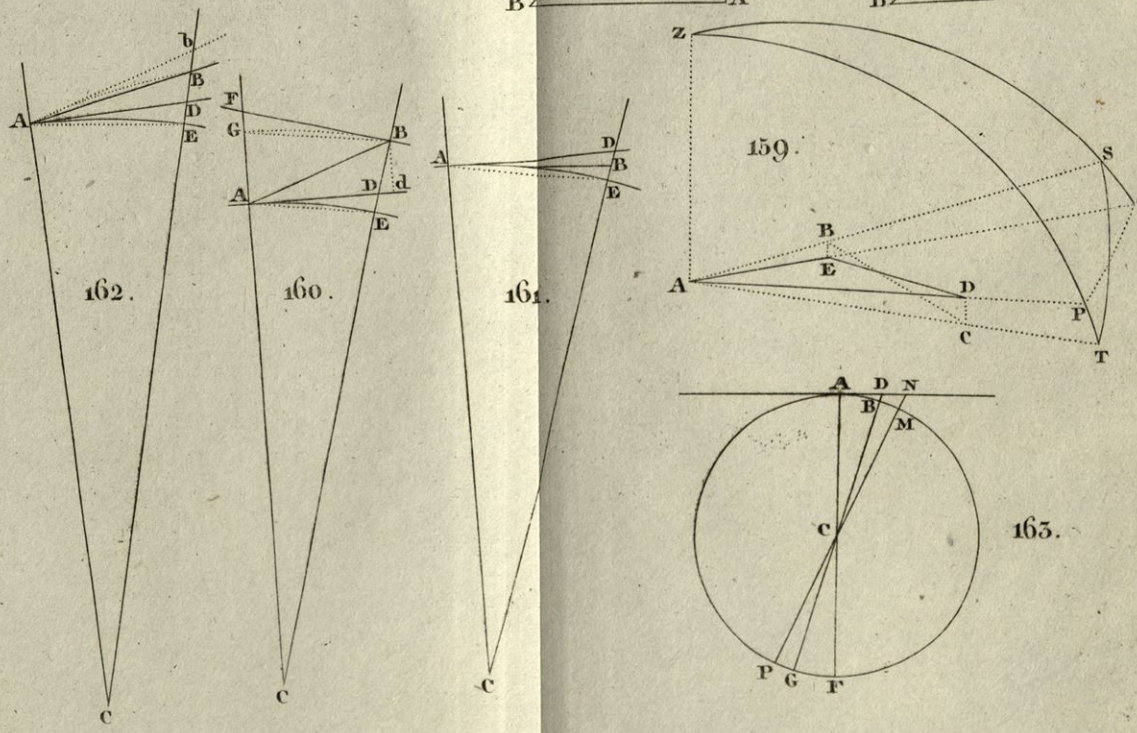
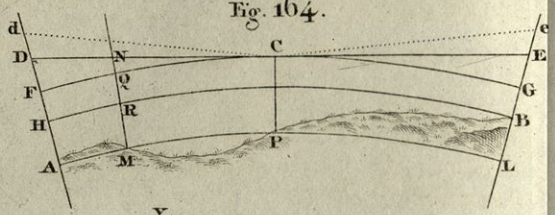
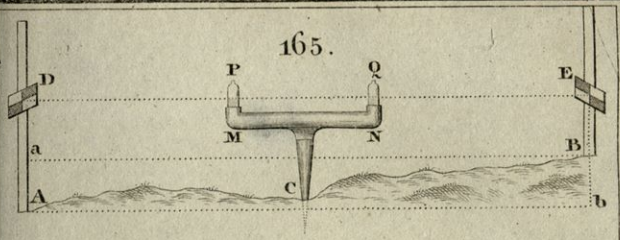


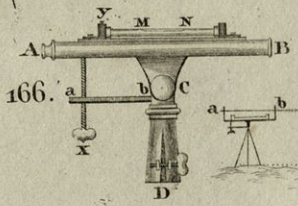
Fig. 164.



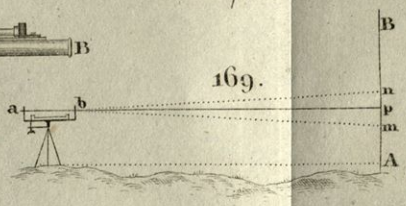
165.



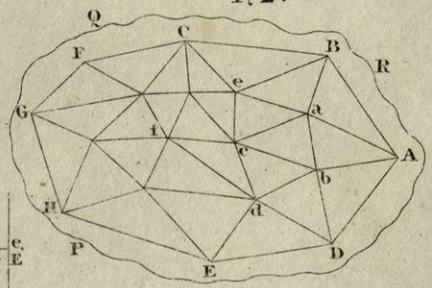
166.



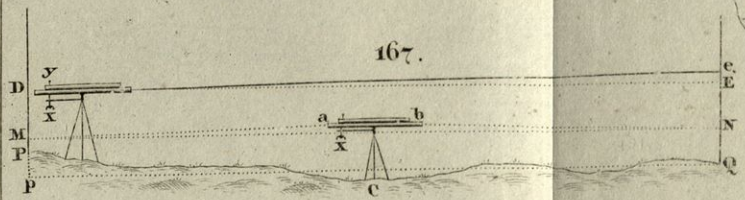
169.



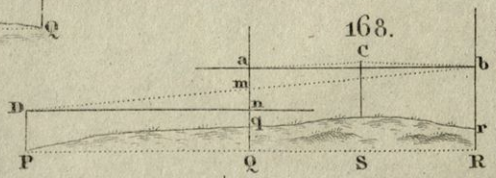
172.



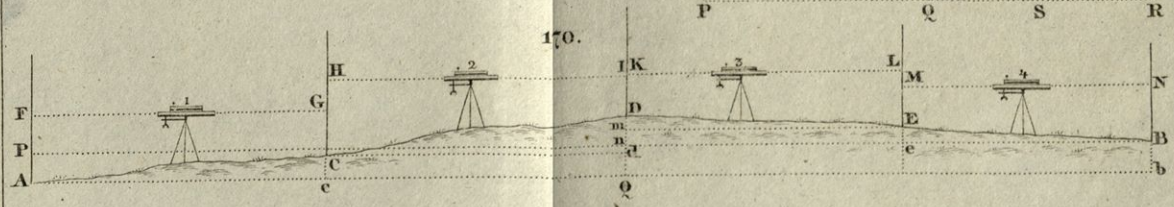
167.



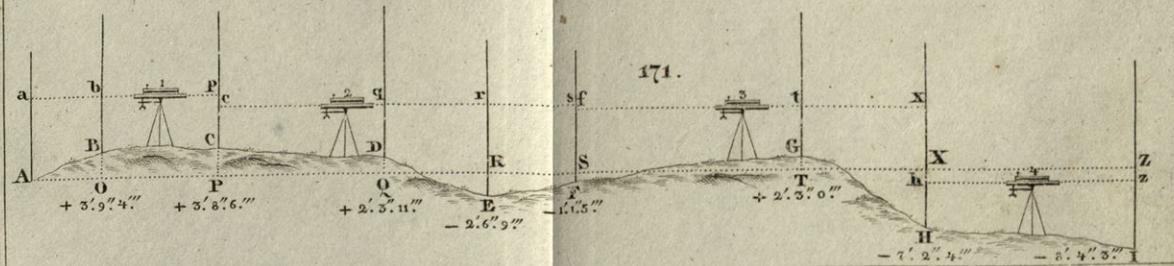
168.



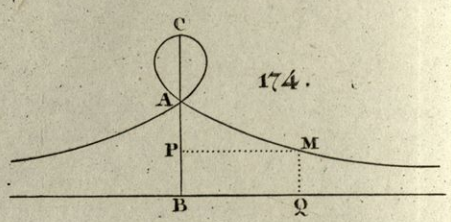
170.



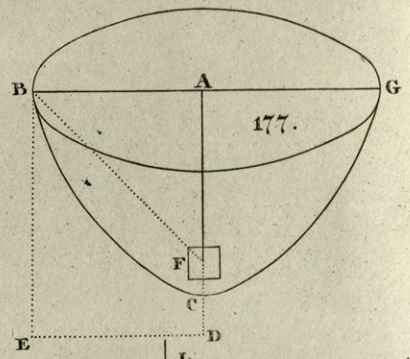
171.



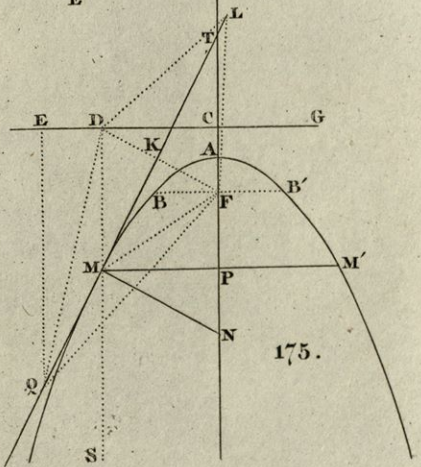
STEIN &c.



174.



177.



175.

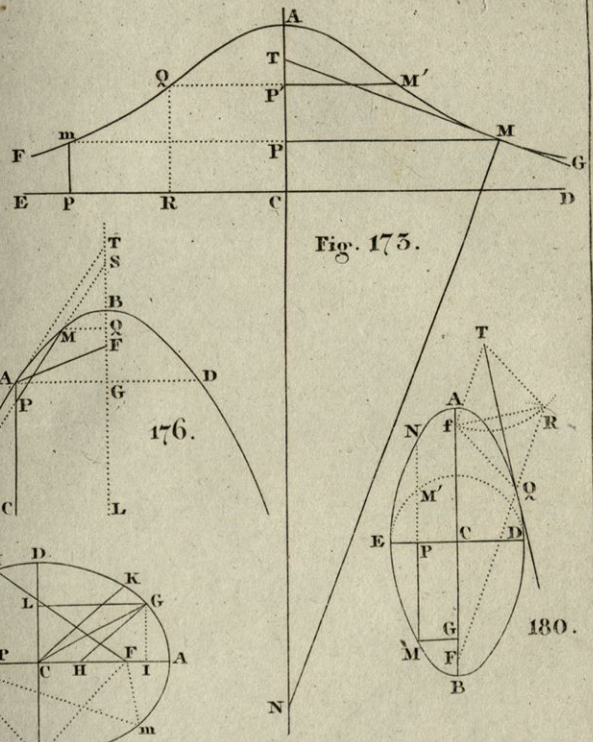
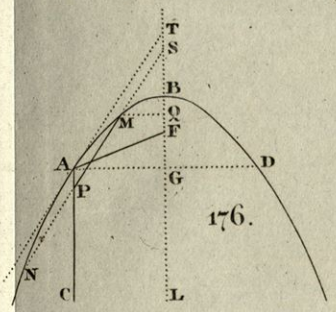
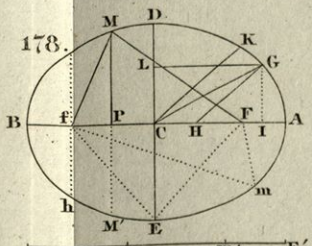


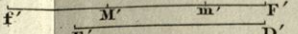
Fig. 173.

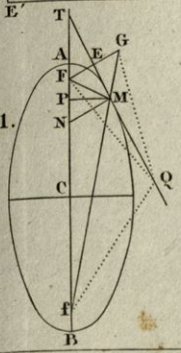


176.



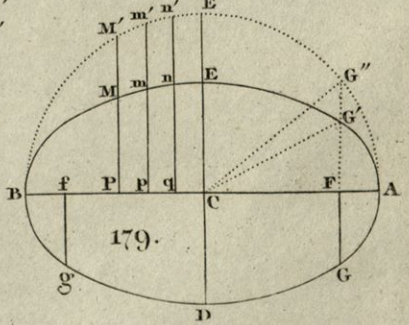
178.





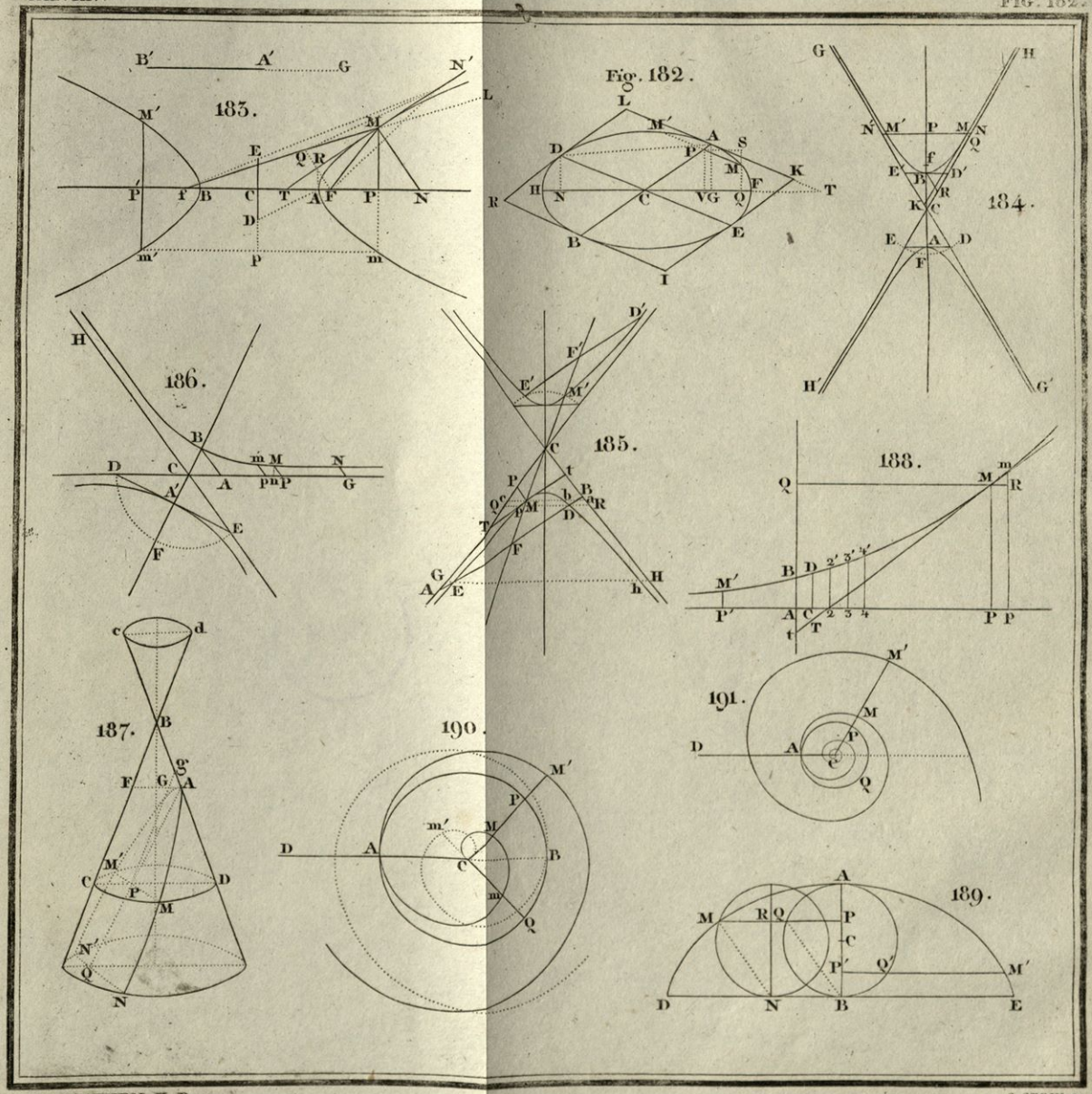
181.

180.



179.

C. STEIN sc.


183.
Fig. 182.
184.
185.
186.
187.
188.
189.
190.
191.

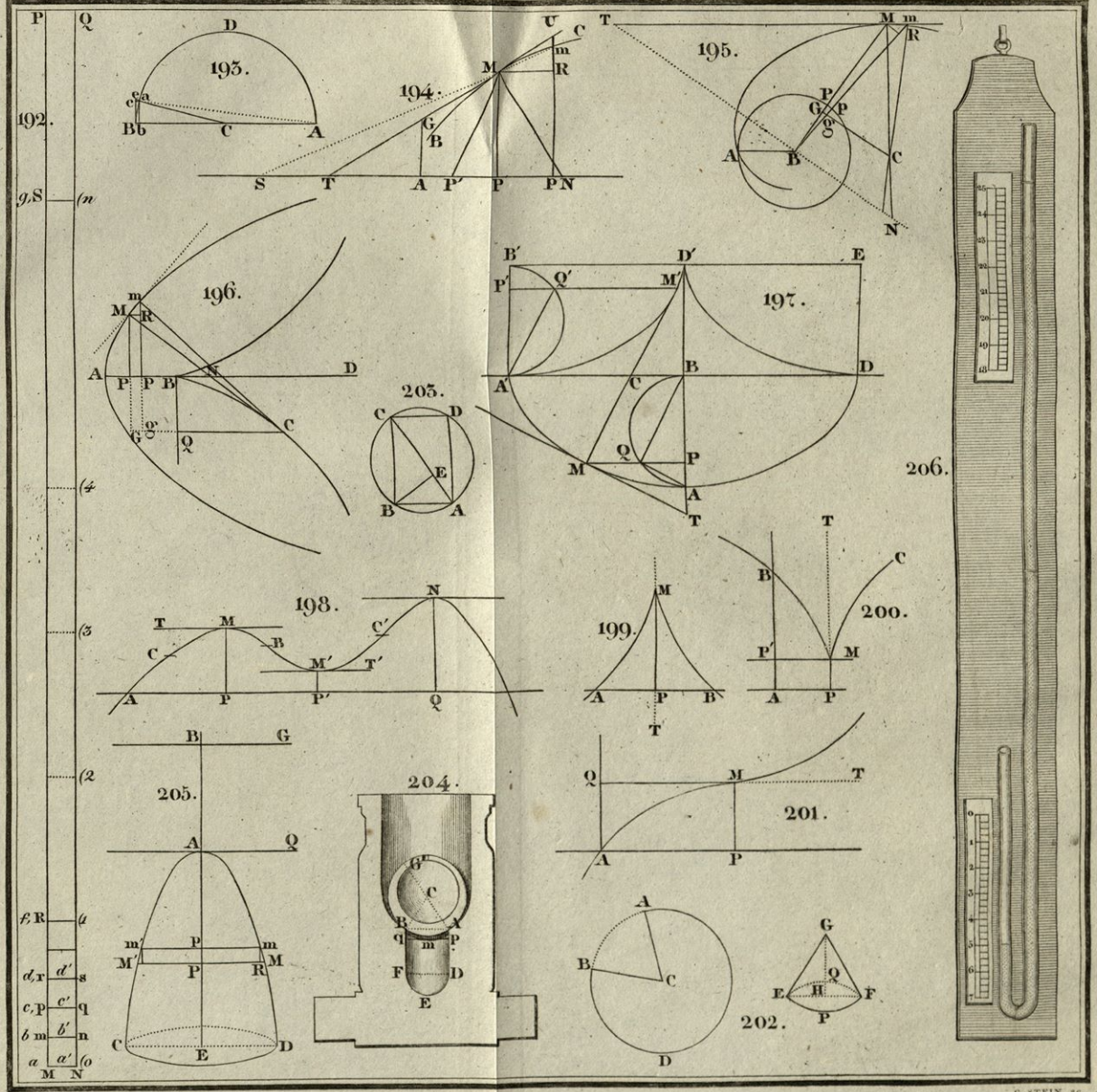
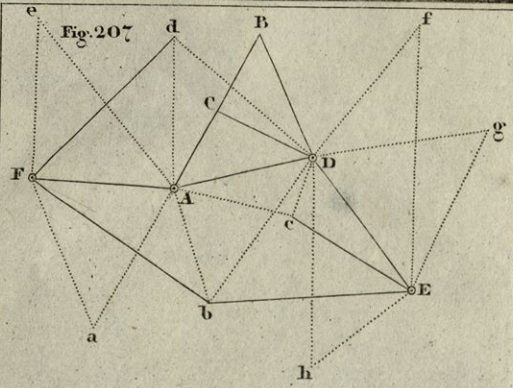
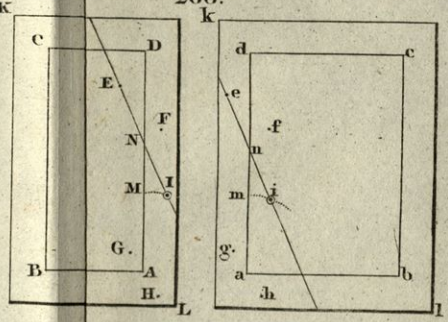

192.
193.
194.
195.
196.
197.
198.
199.
200.
201.
202.
203.
204.
205.
206.

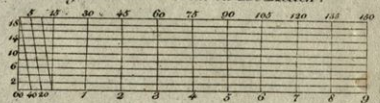
Fig. 207



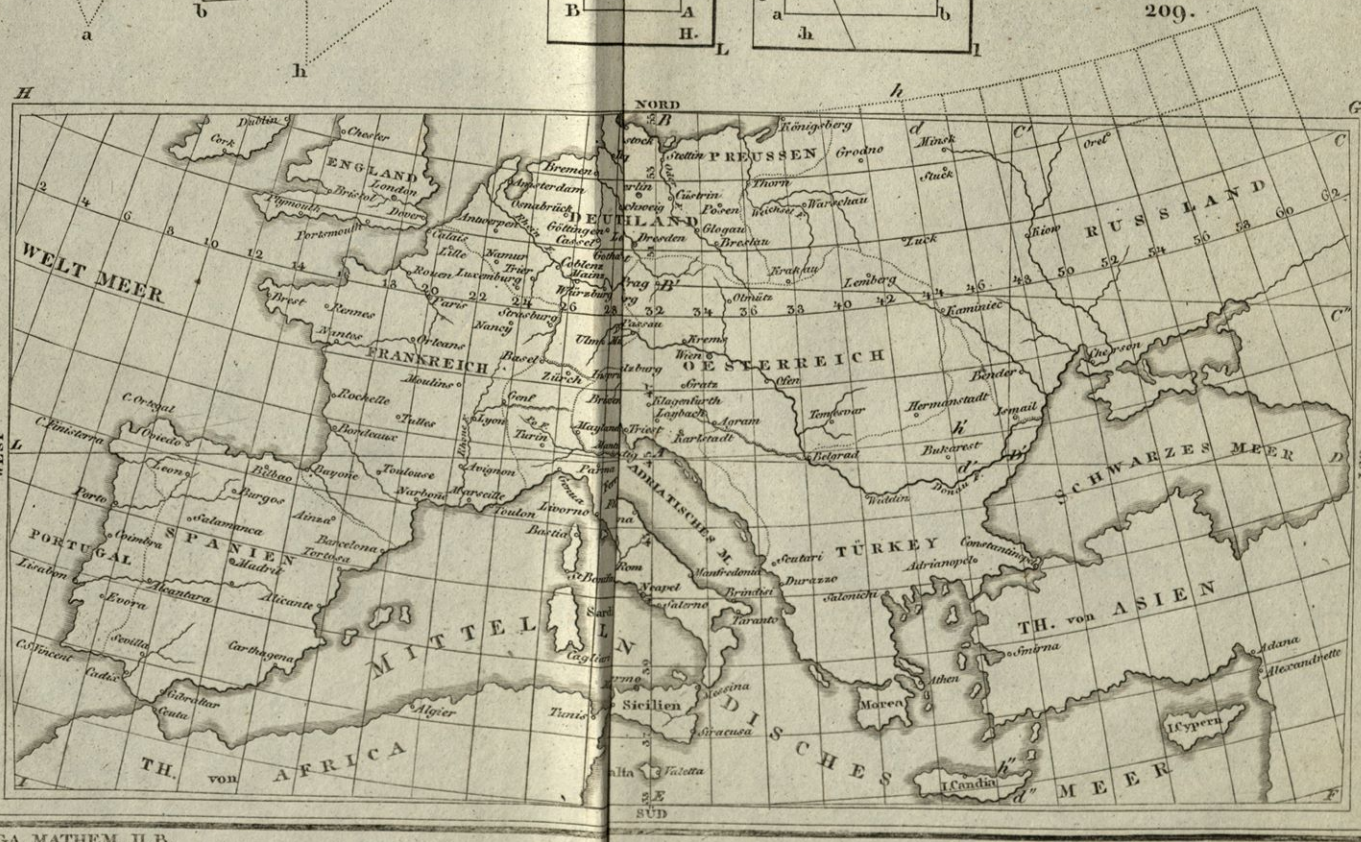
208.



Maßstab von 10 Grad od. 150 Meilen.



209.



in Kupfer gest. von C. STEIN

NARODNA IN UNIVERZITETNA KNJIŽNICA
COBISS
00000320933