

# Izračun merilne negotovosti umerjanja referenčnega upora z metodo Monte Carlo

Vincencij Žužek

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko, Tržaška 25, 1000 Ljubljana, Slovenija  
E-pošta: vincencij.zuzek@fe.uni-lj.si

**Povzetek.** Metode Monte Carlo so numerični algoritmi, ki podajo rezultat na podlagi večjega števila izračunov z uporabo naključnih vrednosti. Pri merjenjih je mogoče takšno metodo uporabiti za določitev merilne negotovosti. V članku je predstavljen primer izračuna negotovosti pri umerjanju referenčnega upora z nazivno upornostjo 25  $\Omega$ , ki se hrani v oljni kopeli s stalno temperaturo 23  $^{\circ}\text{C}$ . Meritve so bile izvedene z uporabo avtomatskega uporovnega mostiča. Za izračun negotovosti je treba poznati matematični model procesa in vrednosti ter negotovosti oz. verjetnostne porazdelitve vhodnih veličin v modelu. Poleg izračuna negotovosti je predstavljen še vpliv negotovosti vhodnih veličin na končni rezultat. Dosežena je bila negotovost umerjanja 0,44 ppm.

**Ključne besede:** merilna negotovost, umerjanje, referenčni upor, metoda Monte Carlo

## Calculation of the measurement uncertainty for a reference-resistor calibration using a Monte Carlo method

The Monte Carlo methods are numerical algorithms that give the result based on a large number of computations by using random numbers. In the field of metrology, they can be used to calculate the measurement uncertainty. An example is presented of uncertainty calculation when calibrating a reference resistor. The nominal resistance of the resistor which is kept in an oil bath at a constant temperature of 23  $^{\circ}\text{C}$  is 25  $\Omega$ . The measurements are made with an automatic resistance bridge. The uncertainty is calculated with a mathematical model of the process and by knowing the uncertainty values (probability distribution) of the input quantities. The impact of the input-quantities uncertainty on the final result is discussed. The calibration uncertainty for the presented case is 0.44 ppm.

**Keywords:** measurement uncertainty, calibration, reference resistor, Monte Carlo method

## 1 UVOD

Ena izmed veličin, ki jo v Laboratoriju za metrologijo in kakovost na Fakulteti za elektrotehniko merimo z veliko točnostjo, je električna upornost  $R$ . Merilniki upornosti, s katerimi dosežemo najvišje točnosti, so avtomatski uporovni mostiči. Ti merijo razmerje dveh upornosti  $X$ : neznane upornosti  $R_X$  in znane upornosti umerjenega referenčnega upora  $R_S$ :

$$X = R_X / R_S. \quad (1)$$

Mostiči se ločijo glede na obliko merilnega električnega toka. Izmenični mostiči imajo sinusno obliko s frekvenco nekaj deset Hz, medtem ko je ta pri enosmernih mostičih pravokotna s frekvenco manj kot

1 Hz. Izmenični mostiči dosežajo točnost  $X$  do 20 ppb [1].

Uporabljeni referenčni upori so žični upori z  $R_S$  med 1  $\Omega$  in 300  $\Omega$ . Hranijo se v oljni kopeli z nastavljeno temperaturo 23  $^{\circ}\text{C}$ , kar je tudi temperatura, pri kateri se ti upori letno umerjajo. Upori imajo nizek temperaturni koeficient ( $<2$  ppm/ $^{\circ}\text{C}$ ) in zelo dobro stabilnost (znotraj 1 ppm v obdobju 10 let) [2].

V članku bosta predstavljena numerični izračun merilne negotovosti  $u(R_X)$  pri umerjanju referenčnega upora z nazivno upornostjo 25  $\Omega$  in vpliv posameznih prispevkov na končno negotovost. Ta način določanja negotovosti je znan kot metoda Monte Carlo. Metode Monte Carlo se uporabljajo na različnih področjih in označujejo numerične algoritme, ki s pomočjo večjega števila naključnih vhodnih vrednosti podajo številski rezultat. Smernice za uporabo metode Monte Carlo na področju merjenj so opisane v Dopolnilu 1 k dokumentu Vodilo za določanje merilne negotovosti (angl. Guide to the expression of uncertainty in measurement, GUM) iz leta 2008. Oba dokumenta je izdal Združeni komite za vodila v metrologiji (angl. Joint Committee for Guides in Metrology, JCGM), ki ga sestavlja več mednarodnih organizacij. Metodo Monte Carlo je mogoče uporabiti, kadar je poznan matematični model procesa, ki ima eno izhodno veličino in poljubno število vhodnih veličin, potrebno pa je tudi poznavanje njihovih verjetnostnih porazdelitev. Še posebej je metoda uporabna v primerih nelinearnih sistemov in kadar se verjetnostne porazdelitve občutno razlikujejo od normalne [3,4].

## 2 IZRAČUN NEGOTOVOSTI

### 2.1 Matematični model in vhodne veličine

Če v enačbo (1) dodamo še vpliv temperature na referenčni upor, dobimo naslednjo enačbo (2) za upornost upora, ki ga umerjamo:

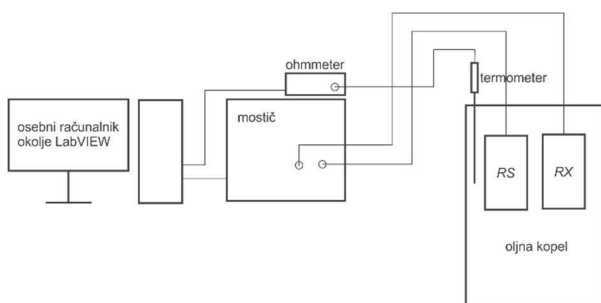
$$R_X = X \cdot R_S \cdot (1 + \beta \cdot (t_K - t_U)). \quad (2)$$

$\beta$  je temperaturni koeficient referenčnega upora,  $t_K$  je temperatura kopeli in  $t_U$  je temperatura, pri kateri je bil referenčni upor umerjen.

Zdaj si oglejmo posamezne vhodne veličine v enačbi (2). Vrednost  $X$  je bila izmerjena z enosmernim avtomatskim uporovnim mostičem s tokom 2 mA, kot je prikazano na sliki 1. Meritev je potekala 1 h s časom vzorčenja 10 s. Povprečna vrednost dobljenih 360 vzorcev je 1,0000027. Specificirana standardna negotovost mostiča v tem območju upornosti znaša 0,1 ppm. Prava vrednost  $X$  se torej s 95-odstotno verjetnostjo nahaja v intervalu med 1,0000025 in 1,0000029. Hkrati je bila merjena tudi temperatura kopeli  $t_K$  z umerjenim platinastim uporovnim termometrom Pt100 v kombinaciji z merilnikom upornosti. Vzorčni čas je bil ravno tako 10 s. Povprečna vrednost  $t_K$  znaša 23,002 °C, razširjena negotovost ( $k=2$ ) pa je 10 mK.

Uporabljeni referenčni upor nazivne upornosti 25 Ω je bil umerjen pri nosilcu nacionalnega etalona za električne veličine. Iz certifikata o umerjanju razberemo, da je upornost  $R_S$  pri (23±0,1) °C, kar je  $t_U$ , enaka 24,999932 Ω. Razširjena relativna merilna negotovost ( $k=2$ ) upornosti je 0,8 ppm.

Temperaturni koeficient  $\beta$  referenčnega upora je bil izmerjen v okviru neke druge študije [5]. Njegova vrednost pri 23 °C je -0,67 ppm/°C.  $\beta$  se preprosto izmeri tako, da se spreminja nastavljena vrednost temperature oljne kopeli  $t_K$  z uporom v določenem temperaturnem območju, hkrati pa se meri sprememba njegove upornosti. Poudariti je treba, da  $\beta$  ni konstanten, temveč je ravno tako odvisen od temperature. Ocenimo, da je negotovost izmerjenega koeficienta ±0,1 ppm/°C, čeprav je ta ocena zelo konservativna in je dejanska negotovost manjša.



Slika 1: Shema merilnega sistema

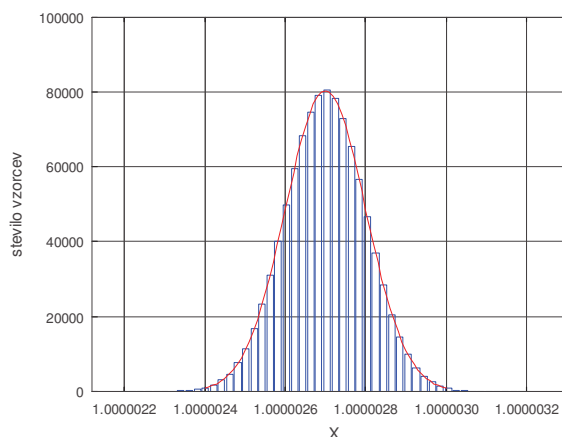
Tabela 1: Veličine, ki nastopajo v enačbi (2)

veličina	vrednost	negotovost
$X$	1,0000027	0,1 ppm
$R_S$	24,999932 Ω	0,8 ppm ( $k=2$ )
$\beta$	-0,67 ppm/°C	±0,1 ppm/°C
$t_K$	23,002 °C	0,01 °C ( $k=2$ )
$t_U$	23 °C	±0,1 °C

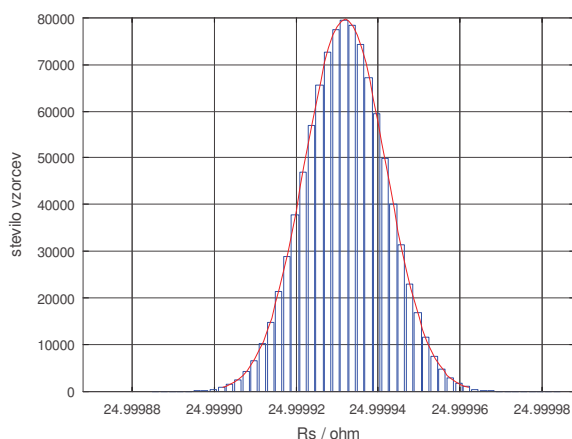
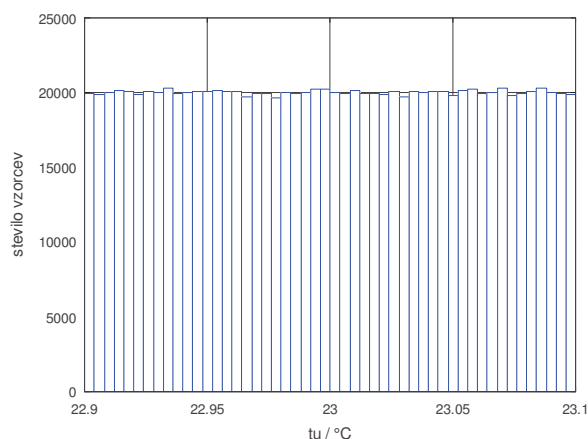
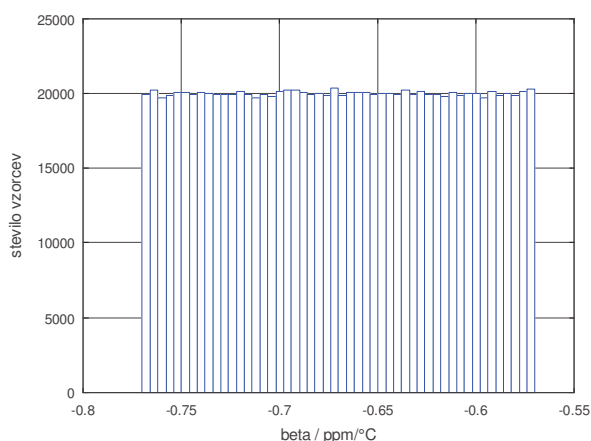
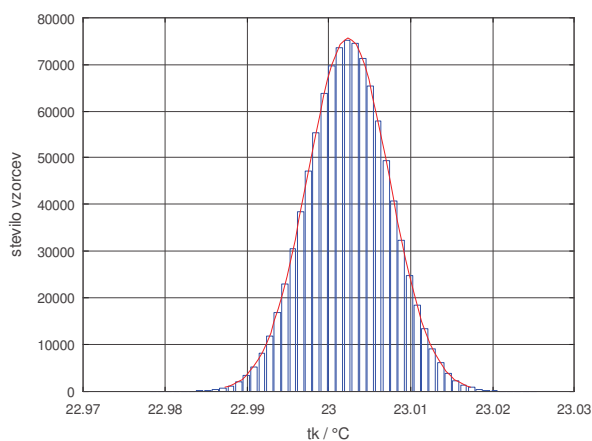
### 2.2 Verjetnostne porazdelitve vhodnih veličin

Glede na podatke v tabeli 1 določimo posameznim vhodnim veličinam ustrezne verjetnostne porazdelitve. Verjetnostna porazdelitev je matematična funkcija, ki opisuje verjetnost izida naključnega procesa. Za veličine  $X$ ,  $R_S$  in  $t_K$  je znana standardna oz. razširjena negotovost, zato jim pripišemo normalno verjetnostno porazdelitev. Ta je določena z dvema parametroma: povprečno vrednostjo in standardnim odklonom, ki je enak standardni negotovosti. Za veličini  $t_U$  in  $\beta$  pa sta podani spodnja in zgornja meja intervala, v katerem se nahaja prava vrednost. V takšnem primeru veličini pripišemo pravokotno verjetnostno porazdelitev, ki jo določata ti dve meji.

Za vse numerične izračune in grafične prikaze je bil uporabljen odprtokodni in prosto dostopni programski paket GNU Octave 4,2. Na slikah od 2 do 6 so prikazani histogrami  $10^6$  normalno ali pravokotno porazdeljenih naključnih vrednosti, ki ustrezajo porazdelitvam posameznih veličin. Izbrana vrednost števila vzorcev  $M = 10^6$  je dovolj velika, da je točnost izračunov zadostna in da hkrati ne povzroča težav povprečnemu osebnemu računalniku. Lahko bi bila uporabljena tudi katera druga vrednost  $M$ , obstaja pa še adaptivni postopek Monte Carlo. Ta sproti prilagaja  $M$ , da doseže optimalen računski čas ob zahtevani točnosti pri obsežnejših izračunih.



Slika 2: Histogram X

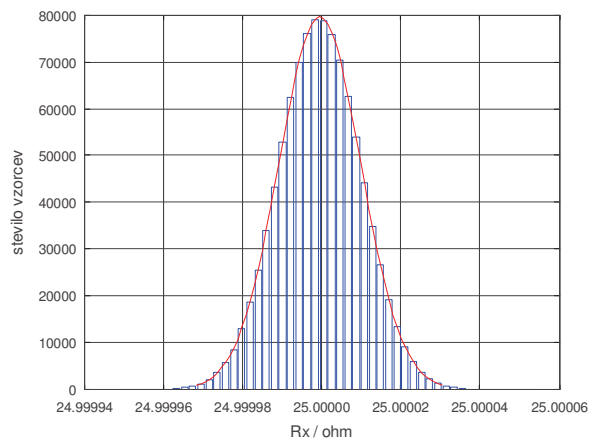
Slika 3: Histogram  $R_s$ Slika 6: Histogram  $t_u$ Slika 4: Histogram  $\beta$ Slika 5: Histogram  $t_k$ 

### 2.3 Izhodna veličina

Ko imamo pripravljene vse porazdelitve vhodnih veličin, le še po enačbi (2) izračunamo izhodno veličino  $R_X$ . Izračunana povprečna vrednost in standardni odklon sta:

- $R_X = 24,999999 \Omega$  pri temperaturi  $(23,002 \pm 0,01) ^\circ\text{C}$ ,
- $u(R_X) = 11 \mu\Omega$  oz. relativno 0,44 ppm.

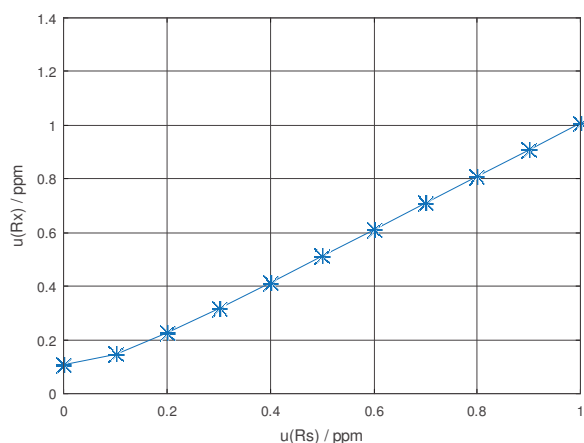
Negotovost tipično podajamo z največ dvema števčkama in zaokrožimo navzgor [6].

Slika 7: Histogram  $R_X$ 

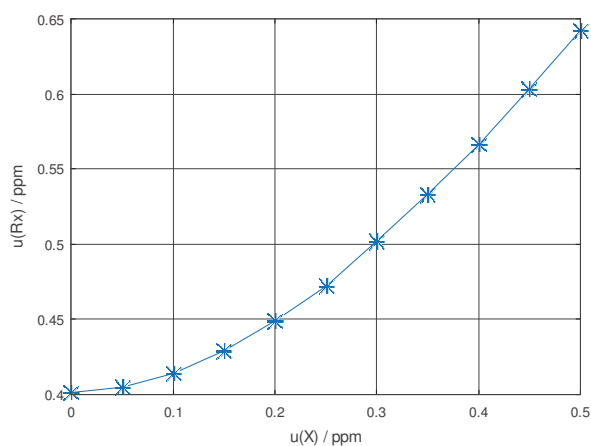
## 3 VPLIV VHODNIH VELIČIN NA NEGOTOVOST

Z znanim matematičnim modelom je mogoče teoretično preveriti, kako na končni rezultat  $u(R_X)$  vplivajo različne vrednosti vhodnih veličin in njihove negotovosti. V nadaljevanju so predstavljeni trije primeri:

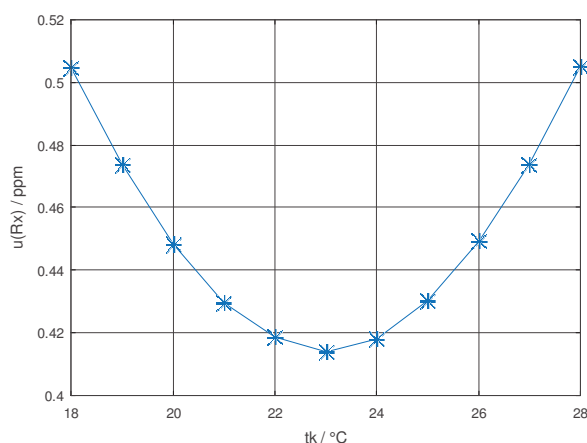
- vpliv negotovosti referenčnega upora v območju med 0 ppm in 1 ppm na negotovost umerjanja,
- vpliv negotovosti mostiča v območju med 0 ppm in 0,5 ppm na negotovost umerjanja,
- vpliv temperature referenčnega upora v območju med  $18 ^\circ\text{C}$  in  $28 ^\circ\text{C}$  na negotovost umerjanja.



Slika 8: Vpliv negotovosti referenčnega upora



Slika 9: Vpliv negotovosti mostiča



Slika 10: Vpliv temperature referenčnega upora

Na sliki 8 je prikazan vpliv negotovosti referenčnega upora na negotovost umerjanja. Ti dve vrednosti sta približno enaki v območju negotovosti referenčnega upora nad 0,2 ppm, pod to mejo pa je viden vpliv negotovosti mostiča, ki znaša 0,1 ppm.

Vpliv negotovosti mostiča je prikazan na sliki 9 in je manjši od vpliva negotovosti referenčnega upora.

Razvidno je, da tudi če bi imeli absolutno točen mostič, negotovost umerjanja seveda ne bi bila manjša od negotovosti referenčnega upora, ki znaša 0,4 ppm. Obe odvisnosti, prikazani na slikah 8 in 9, sta približno linearni.

Na zadnji sliki, sliki 10, je prikazan vpliv temperature kopeli na negotovost umerjanja. Ta je najmanjša, če je kopel nastavljena na temperaturo, pri kateri je bil umerjan referenčni upor, to je 23 °C. Vpliv temperature kopeli je dokaj majhen, saj bi se negotovost umerjanja povečala za manj kot 0,1 ppm v primerih, ko bi temperatura kopeli odstopala za največ  $\pm 5$  °C.

#### 4 SKLEP

V članku je predstavljeno določanje negotovosti umerjanja z uporabo metode Monte Carlo, ki temelji na velikem številu izračunov z naključnimi vrednostmi. Izbrani primer, na katerem je metoda uporabljena, je umerjanje upora z uporabo mostiča. Poleg samega izračuna negotovosti umerjanja je prikazan tudi vpliv nekaterih vhodnih veličin in njihovih negotovosti na končni rezultat. Metoda je dokaj preprosta za uporabo in dovolj točna tudi pri manjšem številu izračunov. Odvisna je seveda od vhodnih podatkov – zaželeno je čim boljše poznavanje vrednosti in negotovosti oz. verjetnostnih porazdelitev vhodnih veličin. Poleg predstavljenih normalne in pravokotne verjetnostne porazdelitve je mogoče uporabiti še druge: trapezno in trikotno porazdelitev, porazdelitev arcsin ter eksponentno in gama porazdelitev.

#### LITERATURA

- [1] Automatic Systems Laboratories »F900 Precision Thermometry Bridge Operator's Handbook Issue 2«.
- [2] Tinsley Precision Instruments »Model 5685 AC/DC Standard Resistors«, <http://www.tinsley.co.uk> (Nov. 2013).
- [3] Joint Committee for Guides in Metrology »Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the Guide to the expression of uncertainty in measurement – Propagation of distributions using a Monte Carlo method«, 2008.
- [4] Harris P. M., Cox M. G. »On a Monte Carlo method for measurement uncertainty evaluation and its implementation«, *Metrologia*, 51, S176-S182, 2014.
- [5] Bojkovski Jovan, Batagelj Valentin, Žužek Vincencij »Determining the Temperature Coefficient of Reference Resistors«, *International Journal of Thermophysics*, 38:50, 2017.
- [6] Joint Committee for Guides in Metrology »Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement«, 2008.

**Vincencij Žužek** je diplomiral leta 2009 in doktoriral leta 2013 na Fakulteti za elektrotehniko v Ljubljani. Od leta 2009 je zaposlen kot raziskovalec v Laboratoriju za metrologijo in kakovost na Fakulteti za elektrotehniko Univerze v Ljubljani. Njegovo raziskovalno področje so merjenja na splošno in merjenja temperature. Je avtor ali soavtor sedmih izvirnih znanstvenih člankov, objavljenih v SCI-revijah.