

UNIVERZA V MARIBORU
FAKULTETA ZA GRADBENIŠTVO

STANISLAV ŠKRABL, BORUT MACUH

STATIKA I

Maribor, 2012

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Univerzitetna knjižnica Maribor

624.131(075.8)

ŠKRABL, Stanislav

Statika I [Elektronski vir] / Stanislav Škrabl,
Borut Macuh. - 1. izd. - El. učbenik. - Maribor :
Fakulteta za gradbeništvo, 2012

Način dostopa (URL): <http://dkum.uni-mb.si>

ISBN 978-961-248-367-8

1. Macuh, Borut

COBISS.SI-ID 72597505

ISBN 978-961-248-367-8



Naslov:	Statika I
Avtorja:	Stanislav Škrabl, Borut Macuh
Oblikovanje slik:	Edi Šketelj, Borut Macuh
Tipologija publikacije:	2.05 – Drugo učno gradivo
Vrsta publikacije:	Zapiski predavanj
Različica (e-izdaja):	[26.12.2012]
URL (e-izdaja):	http://dkum.uni-mb.si
Sistemske zahteve (e-izdaja):	MS Windows, Mac OSX, Linux, internetni dostop
Programske zahteve (e-izdaja):	Čitalec za PDF
Založnik:	Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, Maribor, 2012

PREDGOVOR

Pred Vami so zapiski predavanj pri predmetu Statika I na prvi Bolonjski stopnji univerzitetnega študija Gradbeništva in Gospodarskega inženirstva na Fakulteti za gradbeništvo Univerze v Mariboru. Avtorja zapiskov predavanj sva skušala zahtevnost vsebine prilagoditi pričakovanemu nivoju znanja matematike in fizike slušateljev drugega semestra prvega letnika univerzitetnega študija na FG, kjer sva predpostavila poznavanje osnov diferencialnega in integralnega računa ter osnovnih zakonitosti Newton-ove mehanike. V kakšni meri nama je to uspelo naj presodi bralec.

Zapiski predavanj ob predstavitvi teoretičnih osnov obsegajo še številne rešene praktične primere katerih zahtevnost je podobna zahtevnosti nalog pri pisnem delu izpita pri predmetu Statika I.

V prvem poglavju so obravnavani osnovni Newton-ovi zakoni ter pojmi: koordinatni sistem, sile in navori v ravnini in prostoru, model togega telesa ter njegove značilnosti.

Drugo poglavje obravnava sisteme sil v ravnini in prostoru, ravnotežne pogoje ter sestavljanje, razstavljanje in uravnoteženje poljubnih sistemov sil.

Tretje poglavje je namenjeno spoznavanju pojma vezanega in prostega telesa, spoznavanju tipov podpor in vezi v statiki, podpornih in veznih sil ter statične določenosti in kinematične stabilnosti sistemov togih teles.

Četrto poglavje obravnava notranje statične količine, diferencialne zveze med obtežbami in notranjimi statičnimi količinami ter določanje poteka notranjih statičnih količin po metodi prereza za ravne in ukrivljene statično določene linijske konstrukcije v ravnini in prostoru.

V petem poglavju so prikazane osnovne zakonitosti najenostavnejših vrvnih in ločnih konstrukcij v ravnini.

Šesto poglavje obravnava statične metode izrednotenja vplivnic za ravninske statično določene linijske konstrukcije.

Sedmo poglavje obravnava primere trenja in lepenja v statiki.

V osmem poglavju pa so podane osnove statike površin.

Vsebina predmeta Statika I predstavlja le osnovna znanja iz gradbene mehanike, ki so nujna za uspešno nadaljevanje študija gradbene mehanike pri predmetih v višjih letnikih univerzitetnega študija na Fakulteti za gradbeništvo Univerze v Mariboru.

Avtorja želiva slušateljem obilo zadovoljstva in uspehov pri študiju.

VSEBINA

1	OSNOVNI POJMI.....	1
1.1	Newton-ova mehanika	1
1.2	Mehanske količine	3
1.3	Koordinatni sistem	4
1.4	Navor – vrtilni moment sile	7
1.5	Sistem delcev, notranje in zunanje sile, trdno in togo telo	11
1.6	Inženirsko modeliranje.....	12
1.7	Značilnosti modela togih teles	15
1.8	Nosilne konstrukcije	18
1.8.1	Prostorske konstrukcije	19
1.8.2	Ploskovne konstrukcije	19
1.8.3	Linijske konstrukcije	22
2	SISTEMI SIL V RAVNINI IN PROSTORU.....	25
2.1	Splošni sistem sil.....	25
2.2	Sestavljanje sil in momentov	26
2.2.1	Vpliv translatornega premika (redukcije) sile	28
2.2.2	Sistemi sil v ravnini.....	29
2.2.3	Sistemi vzporednih sil	33
2.3	Ravnotežje sil in momentov.....	34
2.3.1	Ravnotežje realnih teles v mehaniki	34
2.3.2	Alternativne oblike ravnotežnih enačb	36
2.3.3	Ravnotežni pogoji za različne sisteme sil v ravnini in prostoru	39
2.4	Uravnoveženje sistemov sil	42
2.4.1	Sistemi sil v prostoru.....	42
3	VEZANO IN PROSTO TOGO TELO	49
3.1	Pomiki togih teles v ravnini	50
3.2	Podpore togih teles v ravnini	51
3.3	Dejansko število prostostnih stopenj in kinematična stabilnost	52
3.4	Statična določenost in prosto telo v ravnini.....	54
3.5	Sistemi togih teles v ravnini.....	56
3.5.1	Relativni premiki in kinematična stabilnost.....	57
3.5.2	Vezne sile in statična določenost sistemov togih teles.....	60
3.6	Sistemi togih teles v prostoru.....	67
3.6.1	Pomiki togih teles v prostoru	67
3.6.2	Podpore togih teles v prostoru in kinematična stabilnost.....	69
3.6.3	Statična določenost in prosto telo v prostoru.....	71
3.6.4	Vezi in kinematična stabilnost sistemov teles v prostoru.....	74
3.6.5	Vezne sile in statična določenost prostorskih sistemov	77
4	NOTRANJE STATIČNE KOLIČINE	80
4.1	Naravni lokalni koordinatni sistem in prerezne sile	80

4.2	Ekvivalentne notranje sile.....	83
4.3	Metoda prereza in notranja statična nedoločenost.....	84
4.4	Palične konstrukcije	93
4.4.1	Statična določenost in kinematična stabilnost.....	94
4.4.2	Statična analiza paličnih konstrukcij.....	95
4.4.3	Metoda vozliščnega ravnotežja	95
4.4.4	Reševanje ravninskih primerov po grafostatični metodi	99
4.4.5	Metoda prereza (Ritterjev postopek)	101
4.5	Diferencialne zveze med notranjimi statičnimi in zunanji obtežbami	102
4.6	Integracija diferencialnih enačb notranjih statičnih količin	107
4.7	Sistemi linijskih konstrukcij	112
4.7.1	Gerber-jeve konstrukcije	112
4.7.2	Okvirne konstrukcije	113
4.7.3	Branaste konstrukcije	117
4.7.4	Sestavljene konstrukcije	120
5	VRVNE KONSTRUKCIJE	131
5.1	Analiza vrvi po metodi vrvnega poligona	131
5.2	Aanaliza vrvi obteženih z lastno težo	134
5.3	Analiza vrvi z majhnim povesom	140
6	VPLIVNICE	145
6.1	Lastnosti vplivnic (vplivnih črt) pri statično določenih konstrukcijah	145
6.2	Statična metoda določanja vplivnic	148
6.2.1	Konzolni nosilec	148
6.2.2	Prostoležeči nosilec.....	149
6.2.3	Previsni nosilec	151
6.2.4	Gerberjev nosilec	152
6.2.5	Predalčni nosilci.....	153
7	TRENJE IN LEPENJE	162
7.1	Coulombovo trenje.....	162
8	STATIKA POVRŠIN	170
8.1	Težišče in statični momenti	170
8.2	Vrtenje in vstrajnostni momenti togih teles.....	174
8.3	Vztrajnostni momenti ravnih površin	177
8.4	Glavni vztrajnostni momenti in glavne vztrajnostne osi.....	180
9	Literatura	186

Seznam slik

Slika 1.1:	Akcijske in reakcijske sile	2
Slika 1.2:	Medsebojna privlačnost mas (Newton-ov zakon gravitacije)	2
Slika 1.3:	Desnosučni koordinatni sistem	5
Slika 1.4:	(a) Krajevni vektor \vec{r}_i in (b) Sila \vec{F} v koordinatnem sistemu \vec{e}_x, \vec{e}_y in \vec{e}_z	5
Slika 1.5:	(a) Načrt sil s silnim paralelogramom in (b) Trikotnik sil	6
Slika 1.6:	Definicija momenta sile s prijemaščem v točki A na izbrano točko B v prostoru	7
Slika 1.7:	(a) Moment sile \vec{F} na točko B, ki se nahaja na učinkovalnici sile; (b) Moment sile \vec{F} na točki A in B, ki se nahajata na skupni premici, ki je vzporedna učinkovalnici sile in (c) Moment dveh vzporednih sil \vec{F}_1 in \vec{F}_2 , ki se nahajata na skupni učinkovalnici na poljubno točko B v prostoru	8
Slika 1.8:	Moment sile na poljubno os (t) v prostoru	8
Slika 1.9:	Sile in momenti v prostoru; (a) Moment na izbrano os t, ki sovpada s koordinatno osjo $\vec{e}_t = \vec{e}_z$, (b) Moment na koordinatne osi x, y in z ter (c) Moment sile na poljubno os t v prostoru	9
Slika 1.10:	Sistem masnih točk (delcev) ter pripadajoče zunanje sile \vec{F}_i ter pari notranjih sil sistema $\vec{S}_{ij} = -\vec{S}_{ji}$	11
Slika 1.11:	(a) AB prekladni 3D nosilec, ki prenaša obtežbo z AB stebrom preko preklade na obe podpori – opečna zidova; (b) 3D model prekladnega nosilca ter model obtežbe (stebra) in reakcijskih si v podporah (opečna zidova) v obliki enakomernih površinskih obremenitev ter (c) različna modela linijskega prekladnega nosilca (togo in deformabilno telo) z računskima modeloma obtežbe in podpor v obliki koncentriranih sil	14
Slika 1.12:	(a) Mehanski model in (b) Računski model prostoležečega nosilca	14
Slika 1.13:	Vzdolžni prerez kompleksnega premostitvenega objekta; (a) Prerez realnega objekta in (b) Mehanski model za analizo konstrukcije	15
Slika 1.14:	Sistem dveh členkasto povezanih togih teles (tričlenska ločna konstrukcija)	15
Slika 1.15:	Neodvisni načini gibanja togega telesa v ravnini x-y	16
Slika 1.16:	Lega masne točke; (a) v prostoru, (b) v ravnini in (c) na premici t	17
Slika 1.17:	(a) Togo telo v ravnini in (b) Togo telo v prostoru	18
Slika 1.18:	Število neodvisnih načinov gibanja togega telesa; (a) Preprečeno gibanje točke A (preprečene tri prostostne stopnje, omogočen poljubni zasuk okrog pola A); (b) Preprečeno gibanje točk A in B (preprečenih pet prostostnih stopenj, omogočen je le še zasuk okrog premice \overline{AB}) in (c) Preprečeno gibanje v treh nekolinearnih točkah A, B in C (preprečenih je vseh šest neodvisnih načinov gibanja togega telesa)	18
Slika 1.19:	Primer 3D konstrukcije podpore viadukta Rebernice pri Vipavi	19
Slika 1.20:	Lupine in mehanska modela; (a) Primer tunelske cevi in (b) Primer AB konstrukcije krajne podpore viadukta	20
Slika 1.21:	Lupinasta konstrukcija dvopasovnega pokritega vkopa Rebernice 1	20
Slika 1.22:	Plošče in stene; (a) Primer AB plošče na prepustu in (b) Primer stene pri objektih visokih gradenj	21
Slika 1.23:	Prekladna konstrukcija (plošča spremenljive debeline) viadukta Šumljak	21

Slika 1.24:	Elementi linijskih konstrukcij; (a) Idealna vrv – natezni element (b) Palica – tlačno natezni element, (c) Gredni element – natezno tlačni in upogibni element ter (d) Ločni – tlačni element.....	22
Slika 1.25:	Primer prostorskega paličja, ki je predstavljalo nosilno konstrukcijo opaža pri gradnji viadukta Boršt 1 pri Vipavi.....	23
Slika 1.26:	Realna konstrukcija sestavljena iz linijskih elementov – pilotna stena OZ 10 na AC Razdrto - Vipava.....	24
Slika 2.1:	Sistemi sil: (a) Poljubni sistem sil, ki deluje na telo in (b) Dvojica sil.....	25
Slika 2.2:	Rezultantna sila in rezultatni moment; (a) Rezultanta poljubnega sistema sil na točko 0 in (b) Rezultanta poljubnega sistema sil na poljubno točko A v prostoru	26
Slika 2.3:	Vzporedna premaknitev sile: (a) Redukcija sile \vec{F} iz točke A v točko B telesa in (b) Redukcija (nadomestitev) sistema sil v eno samo silo	28
Slika 2.4:	Sistemi sil: (a) Sistemi sil v ravnini x-y ter (b) Generalizirana sila \vec{F}_R^A , ki nadomešča obe komponenti glavne sile \vec{F}_R in \vec{M}_R^0	29
Slika 2.5:	Rezultantna sila \vec{F}_R in moment \vec{M}_R^0 ter pripadajoča prijemališča A, pri redukciji sistema sil v eno samo silo $\vec{F}_R^A = \vec{F}_R$	30
Slika 2.6:	Seštevanje sil s skupnim prijemališčem; (a) Načrt sil in (b) Mnogokotnik sil.....	31
Slika 2.7:	Seštevanje poljubnega sistema sil v ravnini; (a) Načrt sil in (b) Mnogokotnik sil.....	32
Slika 2.8:	Sistem vzporednih sil	33
Slika 2.9:	Sistem masnih točk z notranjimi \vec{S}_i in zunanji silami \vec{F}_i	34
Slika 2.10:	Nadomestitev osnovnih ravnotežnih pogojev z momentnimi na izbrani točki A in B togega telesa.....	37
Slika 2.11:	Točke A, B in C, ki ne ležijo na isti premici.....	38
Slika 2.12:	Posebni sistemi sil; (a) Sistem sil s skupnim prijemališčem v prostoru; (b) Sistem sil, ki sekajo skupno premico v prostoru in (c) Sistem vzporednih sil v prostoru	39
Slika 2.13:	Poljubni sistem sil v ravnini x-y	40
Slika 2.14:	(a) Kolinearni sistem sil, (b) Sistem sil s skupnim prijemališčem v ravnini x-y in (c) Sistem vzporednih sil v ravnini	41
Slika 2.15:	Uravnoteženje sistema sil, kjer sta glavni sili med sabo pravokotni ($\vec{M}_R^A \bullet \vec{F}_R = 0$)	43
Slika 2.16:	Nadomestitev sistema sil z dinamom	44
Slika 2.17:	Nadomestitev vplivov poljubnega sistema sil v prostoru z dvema silama	46
Slika 2.18:	Uravnoteženje sistema sil v prostoru z dvema silama.....	47
Slika 2.19:	Grafično uravnoteženje sistema sil v ravnini s tremi silami	47
Slika 3.1:	Stabilno podprto togo telo v ravnini (podpori preprečujeta premike telesa v točkah, kjer prekladna konstrukcija nalega na krajni podpori objekta).....	49
Slika 3.2:	Sistem dveh povezanih togih teles (podpori preprečujeta relativne premike med temeljema in togimi telesi 1 in 2, vez v kroni konstrukcije preprečuje relativne premike obeh togih teles v skupni točki)	49
Slika 3.3:	Pomik togega telesa v ravnini x-y	50
Slika 3.4:	Togo telo podprto s tremi podporami.....	52
Slika 3.5:	Togo telo v ravnini x - y podprto z dvema podporama; (a) kinematično stabilno ($\alpha \neq -\gamma + k\pi$) in (b) kinematično nestabilno ($\alpha = -\gamma + k\pi$)	53
Slika 3.6:	Prostoležeči nosilec v ravnini: (a) podprto (vezano) telo in (b) pripadajoče prosto telo obremenjeno z zunanjo obtežbo	55

Slika 3.7:	Sistem povezanih togih teles; (a) tri telesa v ravnini, (b) premična in nevtljljiva zveza dveh teles v ravnini in (c) členkasta (vrtljljiva) zveza treh togih teles	57
Slika 3.8:	Sistem dveh podprtih togih teles (1) in (2), ki sta med sabo členkasto povezani; (a) kinematično stabilni sistem (b) kinematično nestabilni sistem (točke A, B in C so kolinearne)	58
Slika 3.9:	Sistem štirih podprtih togih teles (1), (2), (3) in (4), ki so med sabo členkasto povezana; (a) kinematično stabilni sistem ($h_2 \neq h_1$) in (b) kinematično nestabilni sistem ($h_2 = h_1$).....	59
Slika 3.10:	Tročlenska okvirna konstrukcija: (a) vezani sistem togih teles in (b) sistem prostih togih teles.....	62
Slika 3.11:	(a) Sproščeni sistem togih teles in (b) sovisnost vrednosti vezne sile X_C in razmerja (h / ℓ)	63
Slika 3.12:	Sistem dveh členkasto povezanih togih teles; (a) Sistem podprtih in povezanih teles ter (b) Pripadajoči sistem prostih teles s podpornimi in veznimi silami.....	64
Slika 3.13:	(a) Načrt sil in (b) Mnogokotnik sil.....	65
Slika 3.14:	Sistem štirih podprtih togih teles (1), (2), (3) in (4), ki so med sabo členkasto povezana; (a) sistem členkasto povezanih teles in (b) Prosta toga telesa s podpornimi in veznimi silami	66
Slika 3.15:	Pomik togega telesa v prostoru x-y-z	68
Slika 3.16:	Toga plošča podprta s šestimi nihajnimi palicami: (a) Shema konstrukcije in podpor in (b) Računski model prostega togega telesa v prostoru.....	70
Slika 3.17:	Toga plošča podprta s šestimi nihajnimi palicami; (a) podprto telo in (b) prosto telo v prostoru.....	73
Slika 3.18:	Deformirano ležišče tipa "Mageba" na viaduktu Barnica, HC, Razdrto – Vipava.....	75
Slika 3.19:	V vzdolžni smeri premično ležišče "Mageba" na viaduktu Rebernice, HC Razdrto - Vipava	76
Slika 3.20:	Montaža ležišča.....	76
Slika 3.21:	Sistem dveh podprtih in povezanih togih teles v prostoru Sistem dveh podprtih togih teles (1) in (2), ki sta med sabo členkasto povezani; (a) kinematično stabilni sistem (b) kinematično nestabilni sistem (točke A, B in C so kolinearne)	77
Slika 3.22:	Primer branaste konstrukcije: (a) Sistem dveh povezanih togih teles v prostoru in (b) Računski model s pripadajočimi podpornimi in veznimi silami	79
Slika 4.1:	Togo telo v prostoru; (a) Podprto telo A obteženo z zunanji obtežbami in (b) Podprti telesi A_1 in A_2 z zunanji obtežbami ter povezani z veznimi silami	80
Slika 4.2:	Prerez telesa z naravnim lokalnim koordinatnim sistemom ($\vec{e}_T, \vec{e}_N, \vec{e}_B$).....	82
Slika 4.3:	Napetosti in notranje sile v analiziranem prerezu obremenjene konstrukcije	84
Slika 4.4:	Model prostoležečega nosilca v ravnini x-y; (a) Stabilno podprto togo telo, ki ga z r prerezi razdelimo v (r+1) togo telo ter (b) Prerezne sile na i tem elementu nosilca	85
Slika 4.5:	Določanje notranjih statičnih količin po metodi prereza.....	86
Slika 4.6:	Ločni nosilec v prostoru; (a) Podprto telo, (b) Uravnoteženo prosto telo in (c) Prerezani telesi z notranji in zunanji silami	87
Slika 4.7:	Prostoležeči nosilec v ravnini x-y, podporne sile, lokalni koordinatni sistem in diagrami notranjih statičnih količin	90
Slika 4.8:	Dispozicija prostoležečega nosilca s podporami in podpornimi silami, mnogokotnik (poligon) sil, reducirani diagram upogibnih momentov ter pripadajoči diagram prečnih sil.....	92
Slika 4.9:	Zunanje in notranje sile v ravnih paličnih elementih.....	94

Slika 4.10:	Primer ravninske palične konstrukcije	94
Slika 4.11:	Osnovna stabilna oblika paličja; (a) Štiri in večkotne oblike (celice) predalčja so praviloma nestabilne in (b) Trikotna šipa (tri členkasto povezane palice) predstavlja osnovno stabilno obliko paličja v ravnini	95
Slika 4.12:	2D primer palične konstrukcije; (a) Palična konstrukcija s podporami in zunanji silami in (b) Vozlišča konstrukcije s pripadajočimi zunanji in notranji silami.....	96
Slika 4.13:	Prostorsko paličje: (a) Skica prostorske konstrukcije in (b) Izrez vozlišča D s pripadajočimi zunanji in notranji silami.....	98
Slika 4.14:	Prerez palične konstrukcije, poligoni sil in rezultati statične analize paličja po grafostatični metodi po Cremoni.....	100
Slika 4.15:	Palična konstrukcija: (a) Zunanje in notranje statično določena konstrukcija ter (b) Levi in desni del uravnovežene palične konstrukcije ter sile v prerezanih palicah.....	101
Slika 4.16:	Infinitezimalno majhen del konstrukcije: (a) Zunanje obtežbe ter (b) Notranje sile in enotni vektorji lokalnega koordinatnega sistema na delcu konstrukcije dolžine Δs	102
Slika 4.17:	Fleksijska in torzijska ukrivljenost osi nosilca; (a) Fleksijsko ukrivljenost ponazarja rotacija koordinatnega sistema okrog binormale in parcialno (b) Torzijska ukrivljenost prikazana kot rotacija koordinatnega sistema okrog tangente na težiščno os nosilca.....	104
Slika 4.18:	Ukrivljeni nosilec v ravnini x-y.....	105
Slika 4.19:	Nosilec z ravno osjo v ravnini x-y.....	105
Slika 4.20:	Izsek ravnega nosilca na odseku med $x - x_0$	107
Slika 4.21:	Prerezana dela konstrukcije in delovna shema (pozitivni predznak) za določanje notranjih statičnih količin na osnovi integracije diferencialnih enačb notranjih statičnih količin	108
Slika 4.22:	Dispozicija prostoležečega nosilca obteženega s trikotno zvezno obtežbo, uravnoveženo prosto telo ter pripadajoča diagrama notranjih sil.....	110
Slika 4.23:	Gerber-jev nosilec sestavljen iz treh členkasto povezanih elementov; (a) Gerber-jeva konstrukcija, (b) Primarni nosilec \overline{AE} , (c) Sekundarni nosilec \overline{FD} in (d) Sekundarni nosilec \overline{EF}	113
Slika 4.24:	Enoetažne ravninske okvirne konstrukcije; (a) Obojestransko vpeta, (b) Obojestransko nepremično podprta in (c) Prostoležeča enoetažna okvirna konstrukcija.....	114
Slika 4.25:	Enoetažni ravninski prostoležeči okvir obtežen z enakomerno zvezno obtežbo; (a) Dispozicija podpor, obtežbe in konstrukcije s pozitivnimi predznaki notranjih statičnih količin, (b) Uravnoveženo prosto telo, (c) Diagram upogibnih momentov, (d) Prečne in (e) Osne sile na konstrukciji	114
Slika 4.26:	Branasta konstrukcija v ravnini x-y; (a) Dispozicija konstrukcijskih elementov, podpore, obtežba in podporne sile, (b) Prerez 1-1 na vzdolžnem nosilcu z enotnimi vektorji in prereznimi silami za levi del konstrukcije, (c) Prerez 2-2 na vertikalnem nosilcu za desni (zgornji) del konstrukcije, (d) Diagram poteka upogibnih in (e) Torzijskih momentov ter (f) Diagram poteka prečnih sil.....	118
Slika 4.27:	Sestavljeni konstrukcijski sistemi; (a) Tročlenski lok, (b) Upogibni nosilec podprt s tlačno palico, (c) Mostni nosilec ojačan z nateznimi kabli zgoraj (harfa) ter (d) Upogibni nosilec ojačan z nateznimi kabli spodaj (zatega)	120
Slika 4.28:	Tročlenski okvir; (a) Dispozicija konstrukcije s podporami in obtežbo, (b) Uravnoveženi togi telesi z reakcijskimi in veznimi silami, (c) Diagram upogibnih momentov, (d) Prečne in (e) Osne sile na konstrukciji	121

Slika 4.29:	Gerber-jev nosilec; (a) Sistem treh togih nosilcev, (b) Primarni nosilec \overline{AE} , (c) Sekundarni nosilec \overline{FD} , (d) Pozitivni predznak za določanje notranjih statičnih količin, (e) Sekundarni nosilec \overline{EF} , (f) Diagram upogibnih momentov in (g) Diagram prečnih sil.....	124
Slika 4.30:	Tročlenski okvir; (a) Obtežbe in reakcijske sile; (b) Levi del okvirja z veznima silama; (c) Diagram osnih sil; (d) Prerez polkrožnega loka z notranjimi silami ($\varphi < 45^\circ$); (e) Prečne sile na konstrukciji; (f) Prerez polkrožnega loka z notranjimi silami ($\varphi > 45^\circ$) in (g) Diagram upogibnih momentov	127
Slika 4.31:	Diagrami poteka prečnih sil, upogibnih momentov in prečne obtežbe	129
Slika 5.1:	Breztežna in neraztegljiva vrвна konstrukcija obtežena z dvema koncentriranima silama.....	131
Slika 5.2:	Levi del vrvene konstrukcije po prerezu v polju na razdalji ℓ_2	132
Slika 5.3:	Izrez vozlišča ob vertikalni koncentrirani sili F_i	132
Slika 5.4:	Vrvna konstrukcija obtežena z eno samo koncentrirano silo	133
Slika 5.5:	Vrvna konstrukcija za prečkanje reke širine $\ell = 200\text{m}$	134
Slika 5.6:	Model idealne vrvi obtežene z lastno težo med dvema podporama.....	135
Slika 5.7:	Splošni primer idealne vrvi obtežene z lastno težo	136
Slika 5.8:	Verižnica z razpetino $\ell = 100\text{m}$	138
Slika 5.9:	Vrvna konstrukcija obremenjena z lastno težo in koncentrirano silo	139
Slika 5.10:	Zveza med vertikalno obtežbo na enoto dolžine vrvi $q_{(s)}$ in pripadajočo obtežbo na enoto horizontalne projekcije vrvi na x os	140
Slika 5.11:	Vrvna konstrukcija obremenjena z enakomerno zvezno obtežbo q_0 na enoto pripadajoče dolžine x osi.....	140
Slika 5.12:	Ločni nosilec obtežen s trikotno zvezno obtežbo	142
Slika 5.13:	Ločni nosilec obtežen z zvezno obtežbo in s koncentrirano silo.....	144
Slika 6.1:	Vplivnice za vplive vertikalne obtežbe na prostoležečem nosilcu: (a) Vplivnici za reakciji Y_A in Y_B in (b) Skupni vpliv skupine vertikalnih sil na podporno silo Y_B	146
Slika 6.2:	Vplivi sestavljenih obtežb na vertikalno reakcijo Y_B : (a) Enakomerne zvezne obtežbe in (b) Koncentriranega momenta (dvojice sil).....	147
Slika 6.3:	Vpliv statično enakovredne obtežbe na podporno silo Y_B	148
Slika 6.4:	Konzolni nosilec; (a) Vplivnici za reakciji Y_A in M_A ter (b) Vplivnici za prečno silo V_a in upogibni moment M_a v prerezu a-a konzolnega nosilca.....	149
Slika 6.5:	Prosto ležeči nosilec: (a) vplivnici za reakciji Y_A in Y_B ter (b) Vplivnici za prečno silo V_a in upogibni moment M_a v prerezu a-a nosilca.....	150
Slika 6.6:	Vplivnice za podporne sile ter za notranje statične količine za previsni nosilec v ravnini.....	151
Slika 6.7:	Gerber-jeva konstrukcija preko treh polj z obojestranskima previsoma.....	153
Slika 6.8:	Vplivnice za reakciji in za osne sile v treh izbranih palicah.....	155
Slika 6.9:	Palična mostna konstrukcija, projektna premična prometna obtežba na železnicah ter vplivnici za podporno silo Y_A ter osno silo S_1 v palici 1	157
Slika 6.10:	Vplivnici za osni sili S_2 in S_3 na palični konstrukciji.....	160

Slika 7.1:	Sila lepenja in sila trenja.....	162
Slika 7.2:	Sile trenja in lepenja: (a) Tangencialna sila pri mirovanju in premikanju telesa ter (b) Stožca trenja in lepenja v prostoru	163
Slika 7.3:	Lestev oprta v tla ter naslonjena na zid po kateri se bo povzpel krovce.....	165
Slika 7.4:	Trenje in lepenje pri vijakih.....	166
Slika 7.5:	Trenje in lepenje na stabilnih kolutih.....	167
Slika 7.6:	Kotalno trenje	168
Slika 7.7:	Kotalno trenje pri valjanju igrišča	168
Slika 8.1:	Težiščna točka C in težiščne osi x' , y' in z' telesa	170
Slika 8.2:	(a) Ravna površina s ploščino A ; (b) Ravnine simetrije pri ravnem prerezu ter (c) Primer enodimenzionalnega telesa (žice oz. črte) v statiki površin.....	172
Slika 8.3:	Vrtenje telesa mase m s kotno hitrostjo $\vec{\omega}$ okrog stalne osi $A - A$	174
Slika 8.4:	Homogeni kvader.....	176
Slika 8.5:	Homogeni valj.....	177
Slika 8.6:	Ravna površina A v ravnini $x-y$	178
Slika 8.7:	Trikotna površina A s pripadajočimi koordinatnimi osmi	178
Slika 8.8:	Rotacija koordinatnega sistema	181
Slika 8.9:	Mohrov-a vztrajnostna krožnica in kot rotacije φ	184
Slika 8.10:	Trikotni prerez telesa in glavne vztrajnostne osi	184

Seznam preglednic

Preglednica 1.1: Delitev Newton-ove mehanike	3
Preglednica 1.2: Nekatero pomembnejše mehanske količine	3
Preglednica 1.3: Nekatero izpeljane mehanske enote	4
Preglednica 1.4: Nekatero predpone za številčno izvednotenje.....	4
Preglednica 3.1: 2D podpore v inženirski praksi	51
Preglednica 3.2: 2D podpore s podpornimi silami	54
Preglednica 3.3: 2D vezi v inženirski praksi	57
Preglednica 3.4: 2D vezi in pripadajoče vezne sile	61
Preglednica 3.5: 3D podpore v inženirski praksi	69
Preglednica 3.6: 3D podpore s podpornimi silami	71
Preglednica 3.7: Nekatero 3D vezi v inženirski praksi.....	74
Preglednica 3.8: 3D vezi in pripadajoče vezne sile	78

1 OSNOVNI POJMI

1.1 Newton-ova mehanika

Sir Isaac Newton je v svojem zgodovinskem delu (Sir Isaac Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica, »The Principia«, 1687) prikazal osnovne zakone mehanike, ki predstavljajo temelje mehanske analizi inženirskih problemov in jo zato imenujemo inženirska mehanika.

Osnovni mehanski zakoni (Newton-ovi zakoni) opisujejo gibanje idealiziranega telesa (materialnega delca oz. masne točke), ki v nekaterih primerih lahko ponazarja gibanje togega telesa. Pojem delec označuje idealizirano telo neskončno majhne prostornine s končno veliko maso m ter ga imenujemo tudi točkasto telo.

Pri reševanju nekaterih problemov mehanike večkrat uporabljamo približni mehanski model, kjer maso končno velikega realnega telesa združimo v značilno točko telesa (največkrat v težiščno točko) in nato pri mehanskih analizah telo obravnavamo kot brezdimenzijski delec – točkasto telo, ki mu pravimo tudi masna točka.

1. Newton-ov zakon

V kolikor na masno točko ne delujejo zunanje sile ali kadar so sile, ki nanjo delujejo v ravnotežju, se lahko masna točka giblje le premočrtno s konstantno hitrostjo ali pa miruje.

1. Newtonov zakon velja tudi v obratni smeri: kadar delec miruje ali se giblje premočrtno s konstantno hitrostjo, je vsota vseh zunanjih sil, ki nanj delujejo enaka 0. Ta zakon mehanike izraža pogoj ravnotežja sil, ki predstavlja osnovo statike, ki ga zapišemo v matematični obliki:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \quad (1.1)$$

kjer $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ označuje vsoto n zunanjih sil, ki na obravnavani materialni delec delujejo.

2. Newton-ov zakon

Kadar na delec (masno točko) delujejo zunanje sile, ki niso v ravnotežju, se delec giblje s pospeškom, ki je po velikosti sorazmeren z velikostjo vsote (rezultante) sil in ima smer rezultante vseh sil. Zakon zapišemo z vektorsko enačbo:

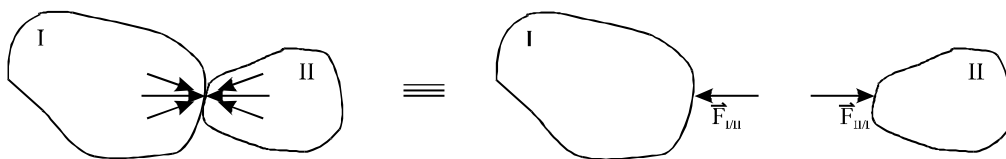
$$m \vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad [N = \text{kgm} / \text{s}^2] \quad (1.2)$$

Vektor \vec{a} označuje pospešek masne točke in m maso delca. 2. Newton-ov zakon lahko uporabimo tudi pri sklepanju v obratni smeri: kadar se delec giblje s pospeškom delujejo nanj sile, katerih vsota je po velikosti premo sorazmerna pospešku ter deluje v njegovi smeri.

3. Newton-ov zakon

Sila s katero deluje delec na sosednjega, je nasprotno enaka sili s katero drugi delec deluje na prvega.

To pomeni, da se pri vsaki sili, ki na prvo telo deluje, pojavi enaka in nasprotno usmerjena reakcijska sila, ki deluje na drugo telo (Slika 1.1). Ta mehanski zakon je osnova za analizo prenašanja vplivov med posameznimi konstrukcijskimi elementi.

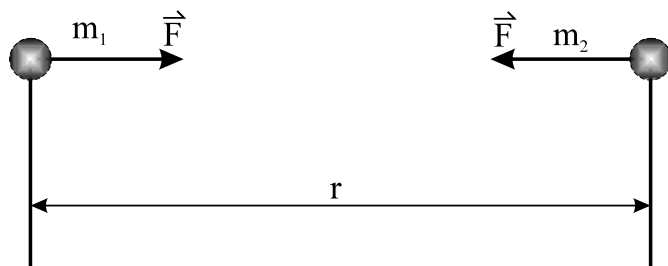


Slika 1.1: Akcijske in reakcijske sile

Medsebojno delovanje dveh teles se odraža z delovanjem dveh sil enakih po velikosti, delujočih na isti učinkovalnici ter nasprotno usmerjenih.

$$\vec{F}_{II/I} = -\vec{F}_{I/II} \quad (1.3)$$

Newton je utemeljil tudi **zakon o gravitacijski sili** (Newton-ov zakon gravitacije). Po tem mehanskem zakonu se dve materialni točki privlačita ena proti drugi, v smeri premice na kateri se nahajata, s silo, ki je proporcionalna produktu obeh mas in obratno sorazmerna kvadratu njune medsebojna razdalje (Slika 1.2).



Slika 1.2: Medsebojna privlačnost mas (Newton-ov zakon gravitacije)

$$\vec{F} = \kappa (m_1 m_2) / r^2 \quad (1.4)$$

kjer je κ gravitacijska konstanta in r razdalja med delcema. Gravitacijska konstanta je neodvisna od mase delcev, lege delcev v vesolju in razdalje med njimi. Določena je z rezultati natančnih meritev ter približno znaša $\kappa \approx 6.67 \cdot 10^{-11} (\text{m}^3 / \text{kg} \cdot \text{s}^2)$.

Če upoštevamo maso Zemlje $M = 5.976 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ in njen polmer $r = 6.371 \cdot 10^6 \text{ m}$, znaša teža mase 1 kg na njeni površini:

$$F = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nkg}^{-2} \text{ m}^2 \cdot (5.976 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 1 \text{ kg}) / (6.371^2 \cdot 10^{12} \text{ m}^2) = 9.82 \text{ N}$$

Kasneje je bilo ugotovljeno, da pri mehaniki gibanja zelo majhnih delcev (atomi, elektroni itd.) oz. tudi pri zelo velikih hitrostih gibanja (primerljivih s svetlobno hitrostjo), Newton-ove rešitve ne dajejo povsem natančnih rezultatov. Zato gibanja zelo majhnih delcev natančneje obravnava KVANTNA ter gibanja z zelo velikimi (svetlobnimi) hitrostmi RELATIVISTIČNA mehanika.

V okviru realnih razmer ločimo različna področja Newton-ove mehanike (Preglednica 1.1).

Preglednica 1.1: Delitev Newton-ove mehanike

MEHANIKA			
TRDNIH TELES		FLUIDOV	
Toga telesa	Deformabilna telesa	Tekočine	Pline
Statika	Trdnost	Hidrostatika	Aerostatika
Kinematika	Teorija elastičnosti	Hidrodinamika	Aerodinamika
Dinamika	Mehanika kontinuumov		

1.2 Mehanske količine

Količine v mehaniki delimo z ozirom na njihove lastnosti v VEKTORSKE in SKALARNE. Skalarni količine so določene le z numerično vrednostjo (dolžina, površina, prostornina, masa itd.). Vektorske količine določa numerična vrednost (velikost), smer delovanja (učinkovalnica) in prijemališče (točka na učinkovalnici). V mehaniki so najpomembnejše vektorske količine sile, momenti, premiki, hitrosti itd. Pri mehanskih analizah smemo uporabljati le dogovorjene enote posameznih mehanskih količin. V Republiki Sloveniji se obvezno uporablja **Mednarodni sistem enot (SI)** že od 1. januarja 1980. Enote osnovnih mehanskih količin so: dolžina L (m), masa M (kg) in čas T (s).

DOLŽINA: je merilo oddaljenosti dveh točk. Enota je meter (m).

MASA: je kvantitativna mera količine materije. Enota je kilogram (kg). Po definiciji je 1 kg mase tista količina materije, ki jo sila 1 N pospeši s pospeškom 1 m/s^2 .

ČAS: je merilo časovnega poteka posameznih procesov. Enota je sekunda (s). Čas je vedno pozitivna in enakomerno naraščajoča količina.

SILA: je merilo delovanja (učinka) enega telesa na drugo telo. Prenaša se z direktnim kontaktom dveh teles ali na večjo medsebojno razdaljo (gravitacija, magnetne sile itd.). Sila je povsem določena kadar poznamo njeno velikost, smer in prijemališče. Merska enota je NEWTON (N). Po definiciji je 1N sila, ki pospeši telo mase 1 kg s pospeškom 1 m/s^2 .

Nekatere pomembnejše mehanske količine prikazuje Preglednica 1.2.

Preglednica 1.2: Nekateri pomembnejše mehanske količine

Mehanska količina	Definicija	Enota
MOMENT	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$	(Nm)
HITROST	$v = d\vec{r}/dt$	(ms^{-1})
POSPEŠEK	$\vec{a} = d^2\vec{r}/dt^2$	(ms^{-2})
GIBALNA KOLIČINA	$\vec{B} = m\vec{v}$	(Ns) (masna točka)
	$\vec{B} = \iiint_v \vec{v} dm$	(Ns) (porazdeljena masa)
	$\vec{B} = M\vec{v}_c$	(Ns) (togo telo)
IMPULZ SILE	$\vec{S}_{12} = \int_1^2 \vec{F} dt$	(Ns)

VRTILNA KOLIČINA	$\vec{b} = \vec{r} \times m\vec{v}$ $\vec{b} = \iiint_v \vec{r} \times \vec{v} dm$ $\vec{b} = \vec{r}_c \times M\vec{v}_c$	(Nms) (masna točka) (Nms) (porazdeljena masa) (Nms) (togo telo)
DELO	$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r}$	(Nm)
MOČ	$P = dW/dt$	(Nms ⁻¹)
KINETIČNA ENERGIJA	$E_k = mv^2 / 2$	(Nm)
POTENCIALNA ENERGIJA	$E_p = Gy$	(Nm)
PROŽNOSTNA ENERGIJA	$E_e = kx^2/2$	(Nm)

Nekatere pomembnejše izpeljane mehanske enote prikazuje Preglednica 1.3 ter dopustne predpone za okrajšano izražanje vrednosti Preglednica 1.4.

Preglednica 1.3: Nekateri izpeljane mehanske enote

SILA	F	(kgms ⁻²) = 1N (Newton)
DELO	W	(Nm) = 1J (Joule)
ENERGIJA	E	(Nm) = 1J
MOČ	P	(Nms ⁻¹) = 1W (Wat)
PRITISK	p	(Nm ⁻²) = 1Pa (Pascal)
FREKVENCA	f	(s ⁻¹) = 1Hz (Hertz)

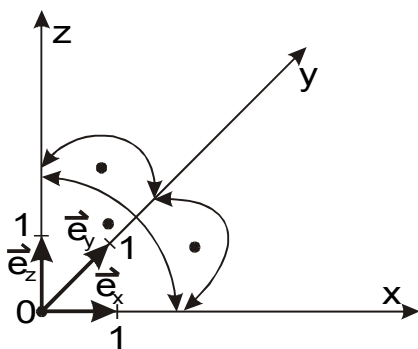
Preglednica 1.4: Nekateri predpone za številčno izrednotenje

deka	da	10¹	deci	d	10⁻¹
hekto	h	10²	centi	c	10⁻²
kilo	k	10³	mili	m	10⁻³
mega	M	10⁶	mikro	u	10⁻⁶
giga	G	10⁹	nano	n	10⁻⁹
tera	T	10¹²	piko	p	10⁻¹²
peta	P	10¹⁵	femto	f	10⁻¹⁵
eksa	E	10¹⁸	ato	a	10⁻¹⁸

1.3 Koordinatni sistem

Za zapis vektorskih količin uporabljamo kartezični **desnosučni koordinatni sistem**. Določen je s koordinatnim izhodiščem (0) in s tremi med sabo pravokotnimi koordinatnimi osmi (x, y, z). Smeri izbranih koordinatnih osi so določene z **enotskimi vektorji** (\vec{e}_x , \vec{e}_y in \vec{e}_z), ki predstavljajo ortonormirano bazo.

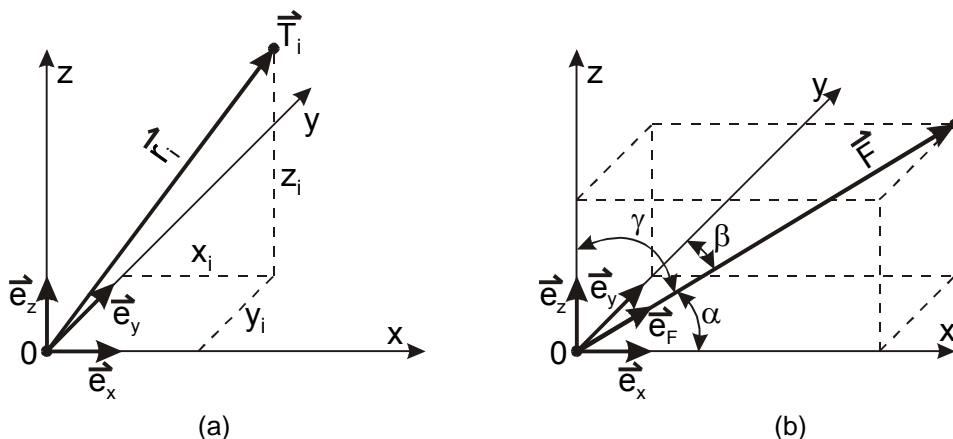
Izbrani koordinatni sistem je desnosučni, ker pri rotaciji vektorja \vec{e}_x proti vektorju \vec{e}_y v smeri štirih prstov desne roke kaže palec smer enotskega vektorja \vec{e}_z (Slika 1.3).



Slika 1.3: Desnosučni koordinatni sistem

Krajevni vektor \vec{r}_i je vektor, ki povezuje izhodišče koordinatnega sistema 0 s poljubno točko T_i v prostoru. Razstavimo, ga lahko na vektorje $\vec{r}_{ix} = x_i \vec{e}_x$, $\vec{r}_{iy} = y_i \vec{e}_y$ in $\vec{r}_{iz} = z_i \vec{e}_z$ vzdolž posameznih koordinatnih osi. Koordinate x_i , y_i in z_i določajo lego točke T_i v prostoru (Slika 1.4):

$$\vec{r}_i = x_i \vec{e}_x + y_i \vec{e}_y + z_i \vec{e}_z \quad (1.5)$$



Slika 1.4: (a) Krajevni vektor \vec{r}_i in (b) Sila \vec{F} v koordinatnem sistemu \vec{e}_x , \vec{e}_y in \vec{e}_z

kjer α , β in γ označujejo pripadajoče kote med koordinatnimi osmi x , y in z ter smerjo sile \vec{F} oz. kote med enotnimi baznimi vektorji \vec{e}_x , \vec{e}_y in \vec{e}_z ter enotnim vektorjem \vec{e}_F , ki ima smer delovanja sile \vec{F} .

Tudi poljubno silo \vec{F} lahko vedno razstavimo na komponente $\vec{F}_x = F_x \vec{e}_x$, $\vec{F}_y = F_y \vec{e}_y$ in $\vec{F}_z = F_z \vec{e}_z$ v smereh baznih vektorjev \vec{e}_x , \vec{e}_y in \vec{e}_z .

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z = F \vec{e}_F \quad (1.6)$$

kjer F označuje velikost oz. jakost sile ter \vec{e}_F enotni vektor v smeri delovanja sile \vec{F} . Komponente F_x , F_y in F_z ter jakost oz. intenziteto sile \vec{F} določimo:

$$F_x = F \cos \alpha, \quad F_y = F \cos \beta, \quad F_z = F \cos \gamma, \quad F = |\vec{F}| = \sqrt{\vec{F} \cdot \vec{F}} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (1.7)$$

Kosinusom kotov α , β in γ pravimo tudi smerni kosinusi, ki jih določimo:

$$\cos \alpha = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_F, \quad \cos \beta = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_F, \quad \cos \gamma = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_F \quad (1.8)$$

Ker so posamezne komponente sile \vec{F} med sabo pravokotne velja:

$$|\vec{F}| = \sqrt{\vec{F} \cdot \vec{F}} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{F^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)} = F \quad (1.9)$$

Poljubna sila \vec{F} je v prostoru enolično določena kadar poznamo:

- 1.) Smer \vec{e}_F , jakost sile F in prijemališče sile s koordinatami x , y in z ;
- 2.) Dva smerna kosinusa npr. $\cos \alpha$ in $\cos \beta$ ter predznak preostalega smernega kosinusa npr. $\cos \gamma$ (pri določanju tretjega smernega kosinusa upoštevamo še znano zvezo $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$), jakost sile F in prijemališče sile x , y in z ;
- 3.) Dve komponenti sile npr. F_x in F_y ter predznak preostale npr. F_z (upoštevamo znano zvezo $|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = F$), jakost sile F ter prijemališče podano s koordinatami x , y in z .

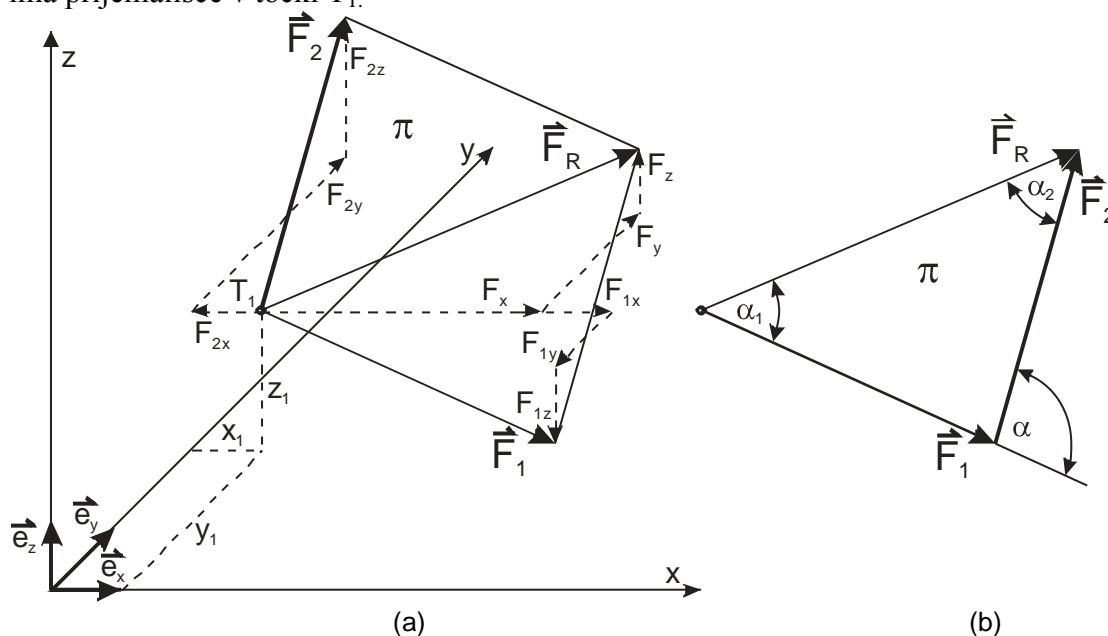
Primer 1.1

Določi vsoto sil $\vec{F}_1 = \{5, -1, -1\}$ in $\vec{F}_2 = \{-1, 3, 2\}$, ki delujeta v točki $T_1 = \{1, 2, 2\}$.

Sile so vektorske količine ter jih lahko seštevamo po pravilih vektorskega računa (zaviti oklepaj označuje vektorsko količino).

$$\begin{aligned} \vec{F}_R &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = F_{1x}\vec{e}_x + F_{1y}\vec{e}_y + F_{1z}\vec{e}_z + F_{2x}\vec{e}_x + F_{2y}\vec{e}_y + F_{2z}\vec{e}_z = (F_{1x} + F_{2x})\vec{e}_x + (F_{1y} + F_{2y})\vec{e}_y \\ &+ (F_{1z} + F_{2z})\vec{e}_z = F_{Rx}\vec{e}_x + F_{Ry}\vec{e}_y + F_{Rz}\vec{e}_z = \{4, 2, 1\} \end{aligned}$$

Nedvomno se rezultantna sila \vec{F}_R nahaja v ravnini π v kateri se nahajata tudi sili \vec{F}_1 in \vec{F}_2 ter ima prijemališče v točki T_1 .



Slika 1.5: (a) Načrt sil s silnim paralelogramom in (b) Trikotnik sil

Vsoto oz. rezultanto dveh sil \vec{F}_1 in \vec{F}_2 , ki imata skupno prijemališče v točki T_1 lahko prikažemo grafično kot diagonalo paralelograma (Slika 1.5a), ki ga določata sili \vec{F}_1 in \vec{F}_2 ter se nahaja v ravnini π , ki jo določata učinkovalnici obeh sil. Paralelogram lahko nadomestimo

tudi z ekvivalentnim trikotnikom sil (Slika 1.5b), ki se prav tako nahaja v ravnini π . Velikost rezultante lahko določimo z uporabo kosinusovega ali sinusnega izreka:

$$F_R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha, \quad F_1 / \sin \alpha_2 = F_2 / \sin \alpha_1 = F_R / \sin \alpha$$

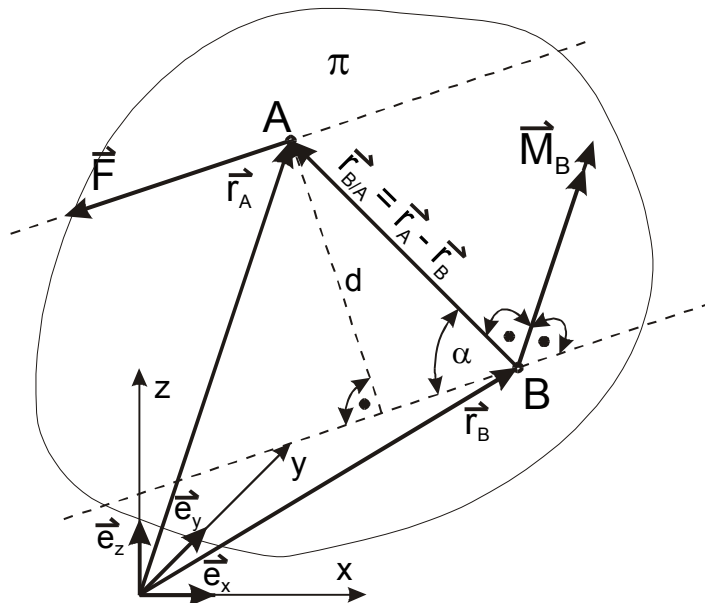
1.4 Navor – vrtilni moment sile

Ločimo pojem vrtilnega momenta na izbrano točko B ter pojem momenta okrog poljubno izbrane osi npr. t v prostoru, ki jo določa enotni vektor \vec{e}_t .

Sila \vec{F} deluje na telo v točki A, radij vektor med izbrano točko B ter prijemališčem sile A označimo z $\vec{r}_{B/A} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$ (Slika 1.6).

Moment sile na izbrano točko je vektorska količina, ki jo določa vektorski produkt radij vektorja \vec{r} in sile \vec{F} :

$$\vec{M}^B = \vec{r}_{B/A} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ r_{Ax} - r_{Bx} & r_{Ay} - r_{By} & r_{Az} - r_{Bz} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} (y_A - y_B)F_z - (z_A - z_B)F_y \\ (z_A - z_B)F_x - (x_A - x_B)F_z \\ (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x \end{Bmatrix} \quad (1.10)$$



Slika 1.6: Definicija momenta sile s prijemališčem v točki A na izbrano točko B v prostoru

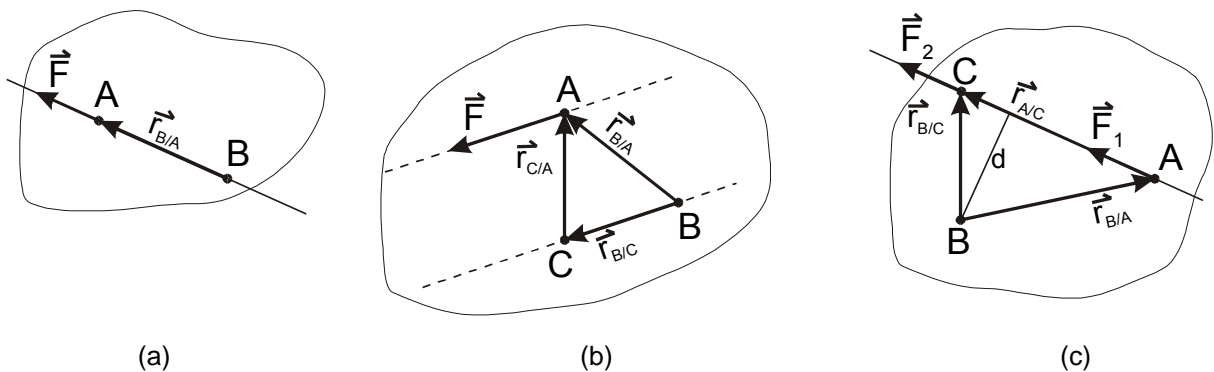
Z ozirom na lastnosti vektorskega produkta lahko zaključimo, da je momentni vektor pravokoten na ravnino, ki jo določata vektorja $\vec{r}_{B/A}$ in \vec{F} .

Velikost momentnega vektorja lahko določimo:

$$M^B = |\vec{M}^B| = |\vec{F}| |\vec{r}_{B/A}| \sin(\vec{r}_{B/A}, \vec{F}) = F r_{B/A} \sin \alpha = Fd \quad (1.11)$$

Absolutna velikost vektorja \vec{M}^B je enaka produktu velikosti sile \vec{F} in pravokotne oddaljenosti med točko B in učinkovalnico sile (produkt sile in ročice).

Kadar se točka B nahaja na učinkovalnici sile \vec{F} (Slika 1.7a) je moment te sile \vec{M}^B enak 0.



Slika 1.7: (a) Moment sile \vec{F} na točko B, ki se nahaja na učinkovalnici sile; (b) Moment sile \vec{F} na točki A in B, ki se nahajata na skupni premici, ki je vzporedna učinkovalnici sile in (c) Moment dveh vzporednih sil \vec{F}_1 in \vec{F}_2 , ki se nahajata na skupni učinkovalnici na poljubno točko B v prostoru

Momenta sile \vec{F} na dve poljubni točki B in C (Slika 1.7b), ki se nahajata na premici vzporedni učinkovalnici sile sta enaka.

$$\vec{M}^B = \vec{r}_{B/A} \times \vec{F} = (\vec{r}_{B/C} + \vec{r}_{C/A}) \times \vec{F} = \vec{r}_{B/C} \times \vec{F} + \vec{r}_{C/A} \times \vec{F} = \vec{r}_{C/A} \times \vec{F} \quad (1.12)$$

V zgornjem izrazu smo upoštevali, da je vektorski produkt dveh vzporednih vektorjev enak 0.

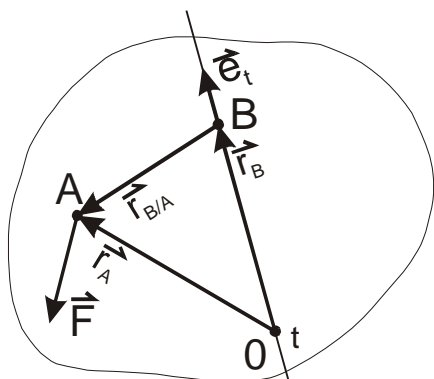
Dve sili \vec{F}_1 oz. \vec{F}_2 delujeta na skupni učinkovalnici s prijemališčem v točki A oz. C (Slika 1.7c), njun navor na točko B je neodvisen od prijemališča posamezne sile na skupni učinkovalnici.

$$\vec{M}^B = \vec{r}_{B/A} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{B/C} \times \vec{F}_2 = \vec{r}_{B/A} \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_{B/A} + \vec{r}_{A/C}) \times \vec{F}_2 = \vec{r}_{B/A} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \quad (1.13)$$

Moment poljubnega števila sil $\vec{F}_i, i=1, \dots, n$ na izbrano točko 0 je nedvomno enak vektorski vsoti momentov posameznih sil na to točko ter jo imenujemo rezultanta momentov ali tudi rezultatni moment \vec{M}_R^0 na izbrano točko 0.

$$\vec{M}_R^0 = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i^0 = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (1.14)$$

Na telo deluje sila \vec{F} v točki A, hkrati pa je na telesu podana še os t, ki poteka skozi točko 0 ter je določena z enotskim vektorjem tudi \vec{e}_t (Slika 1.8).



Slika 1.8: Moment sile na poljubno os (t) v prostoru

Položaj izbrane osi oz. premice (t) v prostoru določa točka 0 oz. B ter izbrana smer, ki jo določa enotski vektor $\vec{e}_t = e_{tx} \vec{e}_x + e_{ty} \vec{e}_y + e_{tz} \vec{e}_z$. Moment sile glede na točko 0 je pravokoten na ravnino, ki jo določata vektorja \vec{r}_A in \vec{F} ter ga lahko izvednotimo:

$$\vec{M}^0 = \vec{r}_A \times \vec{F} \quad (1.15)$$

Moment, ki vrta okrog izbrane osi (t) ima vektorsko smer izbrane osi ter ga predstavlja skalarni produkt momenta \vec{M}^0 in enotskega vektorja \vec{e}_t :

$$M_t^0 = \vec{e}_t \cdot \vec{M}^0 = \vec{e}_t \cdot (\vec{r}_A \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} e_{tx} & e_{ty} & e_{tz} \\ x_A & y_A & z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = M^0 \cos(\vec{e}_t, \vec{M}^0) \quad (1.16)$$

Zgoraj prikazani skalarni produkt predstavlja pravokotno projekcijo momentnega vektorja \vec{M}^0 na učinkovalnico enotnega vektorja \vec{e}_t . Enaki rezultat lahko dobimo z izračunom momenta na točko B (Slika 1.8).

$$M_t^B = \vec{e}_t \cdot \vec{M}^B = \vec{e}_t \cdot (\vec{r}_{B/A} \times \vec{F}) = \vec{e}_t \cdot ((\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}) \quad (1.17)$$

Moment $\vec{r}_B \times \vec{F}$ je pravokoten na enotski vektor \vec{e}_t in zato je njena pravokotna projekcija na os t enaka 0. Izraz $\vec{e}_t \cdot (\vec{r}_A \times \vec{F})$ predstavlja mešani produkt treh vektorjev.

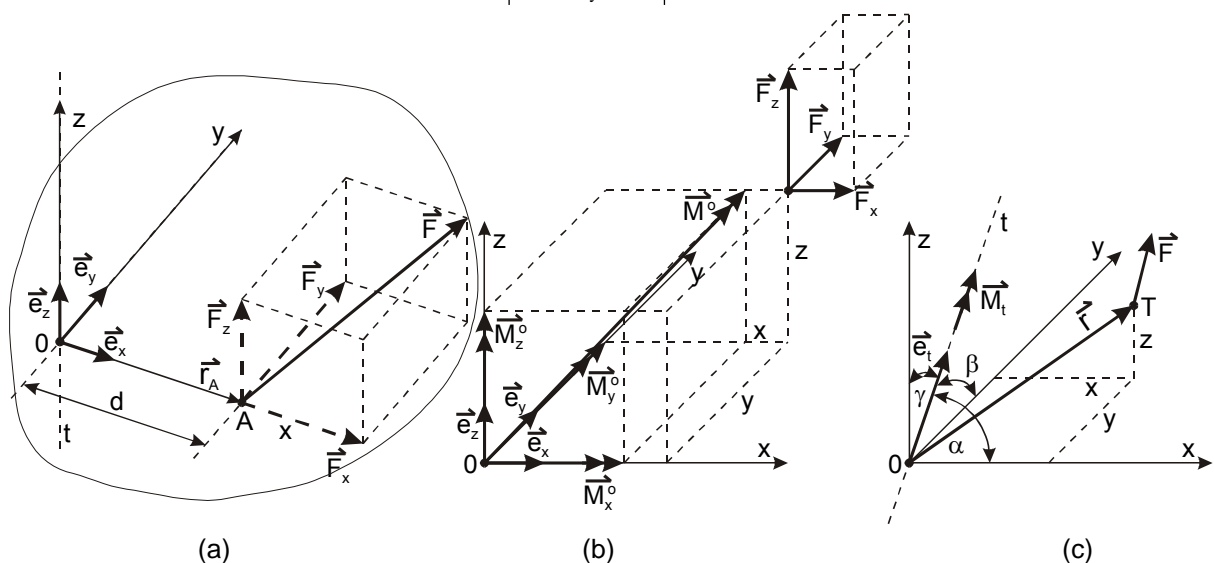
Zato je moment sile na izbrano os zagotovo neodvisen od izbire točke na osi na katero ga računamo.

$$M_t^B = M_t^0 = M_t = \vec{e}_t \cdot (\vec{r}_A \times \vec{F}) \quad (1.18)$$

V kolikor os t sovpada s koordinatno osjo z (Slika 1.9a) in sila \vec{F} deluje v točki A na osi x , ki je za razdaljo d odmaknjena od koordinatnega izhodišča lahko navor na točko 0 izvednotimo:

$$\vec{M}^0 = \vec{r}_A \times \vec{F} = d \vec{e}_x \times \vec{F} \quad (1.19)$$

$$M_t = \vec{e}_t \cdot (d \vec{e}_x \times \vec{F}) = \vec{e}_z \cdot (d \vec{e}_x \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = d F_y \quad (1.20)$$



Slika 1.9: Sile in momenti v prostoru; (a) Moment na izbrano os t , ki sovpada s koordinatno osjo $\vec{e}_t = \vec{e}_z$, (b) Moment na koordinatne osi x , y in z ter (c) Moment sile na poljubno os t v prostoru

Ugotovimo lahko, da je moment na izbrano os t v prostoru enak produktu razdalje od prijemališča sile od osi t ter velikosti projekcije sile \vec{F} v normalo na ravnino, ki jo določata os t ter prijemališče sile oz. tč. A (Slika 1.9a). Prav tako lahko ugotovimo, da je moment sile na poljubno os v prostoru, ki je vzporedna sili enak 0.

Moment na poljubno os je definiran z mešanim produktom $\vec{e}_t \bullet (\vec{r} \times \vec{F})$ ter zato lahko za osi t izberemo tudi posamezne koordinatne osi (Slika 1.9b) ter momente na tri med sabo pravokotne koordinatne osi izvednotimo:

$$M_x = \vec{e}_x \bullet (\vec{r} \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = yF_z - zF_y \quad (1.21)$$

$$M_y = \vec{e}_y \bullet (\vec{r} \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = zF_x - xF_z \quad (1.22)$$

$$M_z = \vec{e}_z \bullet (\vec{r} \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = xF_y - yF_x \quad (1.23)$$

Slika 1.9c prikazuje poljubno smer osi t v prostoru, ki poteka skozi koordinatno izhodišče 0, smer premice določa enotski vektor \vec{e}_t , določamo moment sile \vec{F} s prijemališčem v točki T s koordinatami (x, y, z) na os t oz. moment, ki vrtili okrog izbrane osi.

$$M_t = \vec{e}_t \bullet (\vec{r} \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \cos \alpha (yF_z - zF_y) + \cos \beta (zF_x - xF_z) + \cos \gamma (xF_y - yF_x) \quad (1.24)$$

Moment sile \vec{F} na koordinatno izhodišče (Slika 1.9b) izvednotimo:

$$\vec{M}^0 = (\vec{r} \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x (yF_z - zF_y) + \vec{e}_y (zF_x - xF_z) + \vec{e}_z (xF_y - yF_x) = \quad (1.25)$$

$$M_x^0 \vec{e}_x + M_y^0 \vec{e}_y + M_z^0 \vec{e}_z = \begin{Bmatrix} M_x^0 \\ M_y^0 \\ M_z^0 \end{Bmatrix}$$

Vidimo, da lahko moment sile na poljubno os t določimo tudi z izrazom:

$$M_t = M_x^0 \cos \alpha + M_y^0 \cos \beta + M_z^0 \cos \gamma \quad (1.26)$$

Predznaki momentov na poljubne osi v prostoru so po definiciji pozitivni v kolikor so usmerjeni v smereh pozitivnih enotskih vektorjev na izbrane osi.

1.5 Sistem delcev, notranje in zunanje sile, trdno in togo telo

Pojem sistem masnih točk (delcev) označuje množico gibajočih se ali mirujočih delcev z masami m_1, m_2, \dots, m_n . Delci so lahko prosti ali pa so med sabo povezani z breztežnimi vezmi [2]. Med posameznimi delci sistema lahko delujejo le pari enako velikih in nasprotno usmerjenih sil (Slika 1.10).

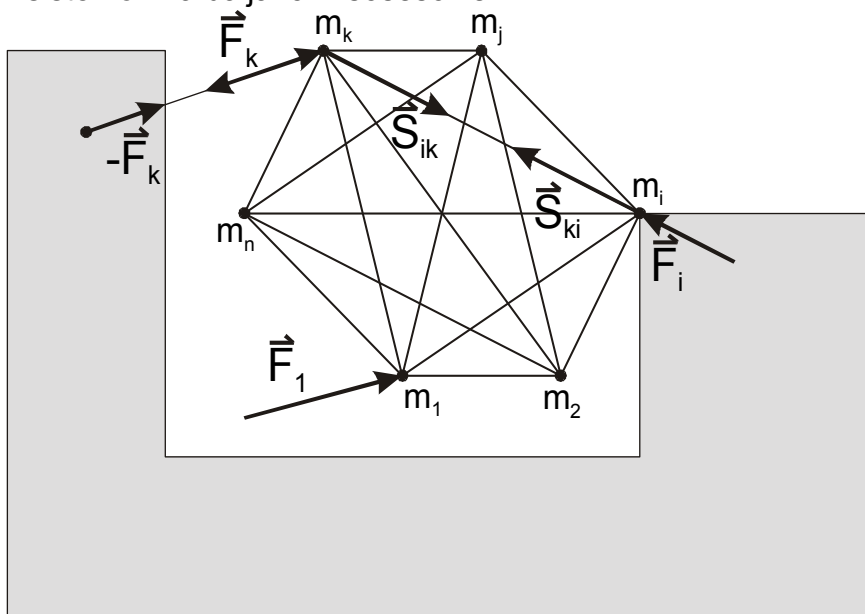
$$\vec{S}_{ij} = -\vec{S}_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.27)$$

ki jih imenujemo notranje sile sistema. Notranje sile sistema lahko predstavljajo privlačne sile med posameznimi masnimi točkami (3. Newton-ov zakon) ter tudi notranje obremenitve elementov nosilnih konstrukcij, ki jih povzročajo zunanje obtežbe (sile teže – gravitacijska sila Zemlje, koristne obtežbe, potresne sile itd.).

Notranja sila obravnavanega sistema \vec{S}_{ki} je sila s katero delec z maso m_k deluje na delec z maso m_i . Posamezni delci (npr. delec m_i) sam nase ne deluje in zato velja

$$\vec{S}_{ii} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.28)$$

Hkrati z notranjimi silami lahko na posamezne delce sistema delujejo tudi zunanje sile \vec{F}_i , ($i = 1, 2, \dots, n$). To so rezultatne sile vseh zunanjih vplivov na posamezne delce, ki so lahko posledica vplivov neposrednega kontakta delcev iz okolice ter tudi posledice vpliva drugih sistemov na daljavo iz soseščine.



Slika 1.10: Sistem masnih točk (delcev) ter pripadajoče zunanje sile \vec{F}_i ter pari notranjih sil sistema

$$\vec{S}_{ij} = -\vec{S}_{ji}$$

Kadar ima sistem masnih točk (Slika 1.10) neskončno število delcev in med dvema poljubnima delcema vedno obstaja še vsaj eden dodatni delec lahko sklepamo, da so masni delci v sistemu zvezno porazdeljeni [2]. V takšnem primeru je masa posameznega delca zagotovo neskončno majhna.

Sistem z zvezno porazdeljenimi masnimi delci je računski model telesa, ki mu pravimo kontinuum. Gradbene konstrukcije praviloma obravnavamo kot trdna telesa z zvezno (kontinuirano) porazdeljeno maso oz. materijo.

Kadar se v trdnem telesu razdalje med posameznimi delci pri delovanju obtežb spreminjajo, govorimo o modelu **deformabilnega telesa**.

Model nedeformabilnega ali togega telesa je model pri katerem so vezi med poljubnima delcema telesa povsem toge. Zato model togega telesa ne dovoljuje sprememb oblike in velikosti telesa. Oddaljenosti med poljubnimi (vsemi) delci togega telesa ostanejo pri delovanju poljubnih obremenitev sistema stalne oz. nespremenjene.

V statiki preučujemo pogoje ravnotežja ter medsebojne vplive posameznih teles, ki se odražajo s kontaktnimi silami ali pa z učinki, ki se prenašajo na telesa na daljavo. Primer takšnih sil so gravitacijske in seizmične sile. Ker so notranje sile v telesih med sabo v ravnotežju zagotovo ne morejo vplivati na ravnotežje telesa oz. sistema teles.

Delovanje nekega telesa na drugo telo se odraža z različnimi silami, ki so lahko:

- **Točkovni vpliv** oz. koncentrirana obtežba \vec{F} , ki nastane kadar se dve telesi dotikata v eni sami točki. Takemu vplivu pravimo sila, njena merska enota je Newton (N).

- **Linjska obtežba** \bar{q} nastane kadar se dve telesi dotikata vzdolž neke krivulje. Intenziteto takšno zvezne obtežbe izražamo z enoto Newton na meter dolžine kontaktne krivulje (N/m).

- **Površinska obtežba** \bar{p} , ki lahko nastane kadar se dve telesi stikata vzdolž dela svojih zunanjih površin. Merska enota takšne obtežbe je Newton na kvadratni meter kontaktne površine (N/m²).

- **Prostorninska oz. volumenska obtežba** $\bar{\sigma}$ označuje silo, ki pripada enoti prostornine telesa ter deluje v težišču obravnavanega dela prostornine V telesa z mersko enoto Newton na kubični meter (N/m³).

Točkovne, linjske, površinske in prostorninske obtežbe so namreč samo računski modeli za opisovanje medsebojnih vplivov posameznih teles. Točko v kateri sila deluje na telo imenujemo **prijemališče sile**. **Smernica sile** je premica, ki poteka skozi prijemališče sile in vzdolž katere sila deluje na telo.

Sistem sil je množica vseh sil, ki delujejo na telo. Kadar imata dva sistema sil enaki vpliv na gibanje togega telesa pravimo, da sta mehansko oz. **statično enakovredna**.

Rezultanto sistema sil predstavlja novi sistem sil z resultantno silo in resultantnim momentom, ki je statično enakovreden celotnemu sistemu sil, ki dejansko deluje na obravnavano telo. Določanju resultantnega sistema sil pravimo **sestavljanje sil**.

Razstavljanje sile pomeni določanje novega sistema sil, ki je statično enakovreden prvotni sili.

1.6 Inženirsko modeliranje

Standardni postopek pri analizi inženirskih problemov vključuje naslednje faze:

- Vsaki problem skušamo idealizirati s pripadajočim enostavnim mehanskim in pripadajočim računskim modelom. V modelu skušamo upoštevati le tiste parametre, ki pomembno vplivajo na rezultate mehanskih izračunov (za obravnavani primer upoštevamo le najpomembnejše parametre realnega problema).
- Na osnovi sistemov enačb ali poznanih analitičnih rešitev opišemo zveze med najpomembnejšimi parametri problema. Tako mehanski problem prevedemo v matematičnega.

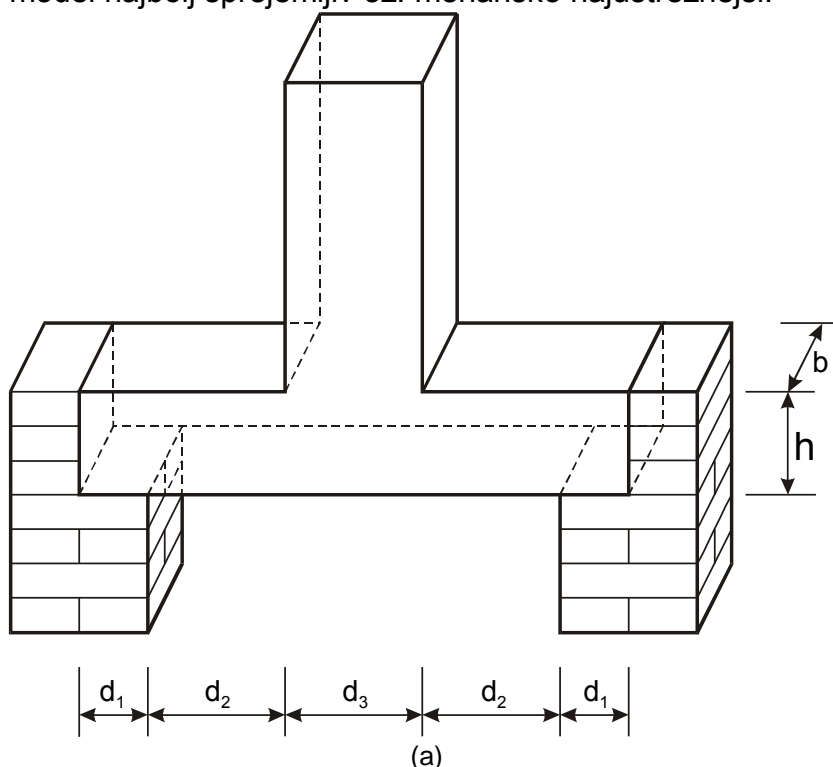
- c) Z upoštevanjem robnih in začetnih pogojev z matematičnimi sredstvi določimo rešitve problema z določitvijo neznanih parametrov bodisi v analitični ali v numerični obliki.
- d) Dobljene rešitve je nato potrebno kritično preveriti in oceniti predvsem z vidika ali smo v izbranem računskem modelu upoštevali vse bistvene prvine obravnavanega mehanskega problema kot tudi iz vidika pravilnosti matematičnih rešitev ter natančnosti dobljenih rezultatov. Zavedati se moramo, da je pomembna le tolikšna natančnost numeričnih rešitev kot so natančni podatki, ki jih v izračunih upoštevamo. Z vidika potrjevanja ustreznosti uporabljenega modela je potrebno pridobljene rezultate primerjati z rezultati eksperimentalnih raziskav in preizkusov ali z rezultati pridobljenimi z izračuni na drugih že uveljavljenih računskih modelih oz. tudi z različnimi računalniškimi programi.

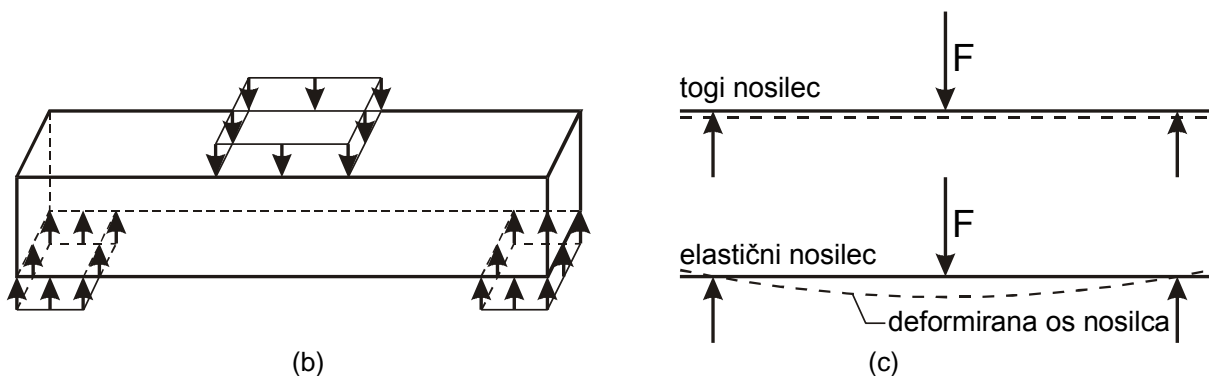
Pri izbiri računskih modelov so zlasti pri kompleksnih objektih potrebne bogate izkušnje projektantov ter upoštevanje znanstvenih spoznanj in izkušenj pridobljenih pri načrtovanju podobnih objektov.

Tako v praksi realno deformabilno telo v nekaterih primerih obravnavamo kot sistem masnih točk, lahko tudi z modelom togega telesa, čeprav je še najustreznejši realni prostorski model deformabilnih teles.

Slika 1.11 prikazuje primer AB stebra vpetega v AB preklado nad odprtino v opečnem zidu.

Nedvoumno je v tem primeru najbolj realni 3D model deformabilnega telesa, kjer lahko upoštevamo triosni sistem morebitnih obtežb ter napetosti in deformacij v konstrukciji in podporah. Prav tako je zlasti v primerih $h \gg d_2$ in/ali $d_3 \gg d_2$ prej navedeni 3D model najbolj sprejemljiv oz. mehansko najustreznejši.



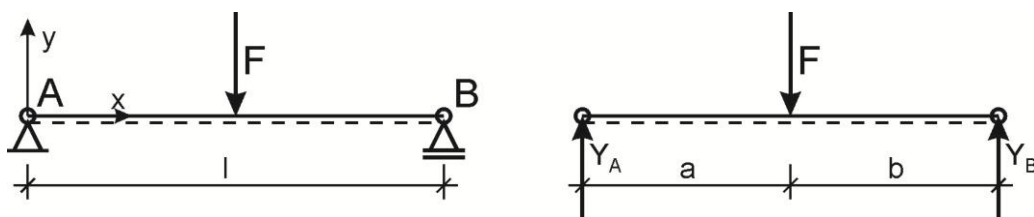


Slika 1.11: (a) AB prekladni 3D nosilec, ki prenaša obtežbo z AB stebrom preko preklade na obe podpori – opečna zidova; (b) 3D model prekladnega nosilca ter model obtežbe (stebra) in reakcijskih sil v podporah (opečna zidova) v obliki enakomernih površinskih obremenitev ter (c) različna modela linijskega prekladnega nosilca (togo in deformabilno telo) z računskima modeloma obtežbe in podpor v obliki koncentriranih sil

Slika 1.11b prikazuje 3D model AB prekladnega nosilca, vpliv vertikalnega stebra in vpliv podpor je v računskem modelu upoštevan s pripadajočimi gibkimi površinskimi obtežbami. Takšen model je vsekakor precej približen vendar sprejemljiv, saj so tako določene obremenitve 3D nosilca približno realne oz. celo večje od realnih oz. določenih na 3D modelu deformabilnega telesa.

Slika 1.11c prikazuje še bolj poenostavljena računskata modela prekladnega nosilca s togim in elastičnim modelom linijskega nosilca ter s poenostavitvijo računskega modela obtežbe in obeh podpor s koncentriranimi silami. Takšna poenostavitev je realna v kolikor je $h \ll d_3$ in $d_2 \ll d_3$. V praksi je takšna poenostavitev mnogokrat dopustna, ker izkušenemu projektantu rezultati analiz na obravnavanem modelu omogočajo načrtovanje dovolj zanesljivih konstrukcijskih rešitev.

Računski model lahko opišemo z enačbami v matematični obliki. Primer linijskega modela togega prekladnega nosilca je mehanski model s podporami in obtežbo, ki ga prikazuje Slika 1.12a. Pri računskem modelu (Slika 1.12b) podpore odstranimo ter njihov vpliv nadomestimo s podpornimi silami (računskemu modelu pravimo tudi prosto telo [3]).



Slika 1.12: (a) Mehanski model in (b) Računski model prostoležečega nosilca

Velikost reakcijskih sil izračunamo z upoštevanjem ravnotežnih enačb:

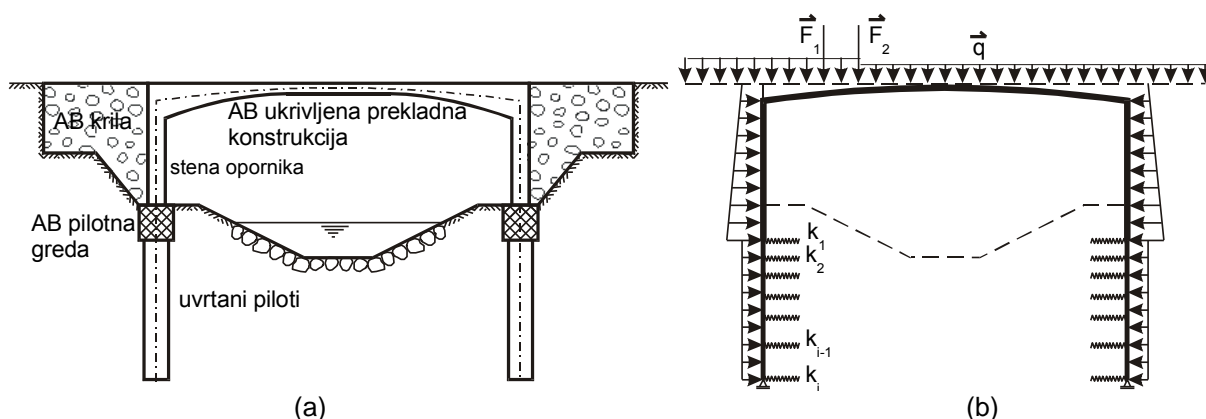
$$\sum M^A = Fa - Y_B (a + b) = 0, \quad Y_B = Fa / (a + b) = Fa / \ell$$

$$\sum F_y = Y_A + Y_B - F = 0, \quad Y_A = F - Y_B = F(1 - a / \ell) = F(b / \ell)$$

Vrednosti Y_A in Y_B predstavljata rezultantni sili s katerima deluje opečni zid na AB nosilec in obratno.

Kot drugi primer tukaj obravnavamo še konstrukcijo mostu vpetega v AB krajni podpori (opornika) z vzdolžnimi AB krili temeljenega na uvrtnih AB pilotih. Prezr obravnavanega objekta prikazuje Slika 1.13a. Najpomembnejša značilnost takšnega kompleksnega objekta je dejstvo, da je obremenjen z lastno težo konstrukcije,

koristno obtežbo na vozišču in na zalednih nasipih ter še z vplivi priključnih zemeljskih nasipov.



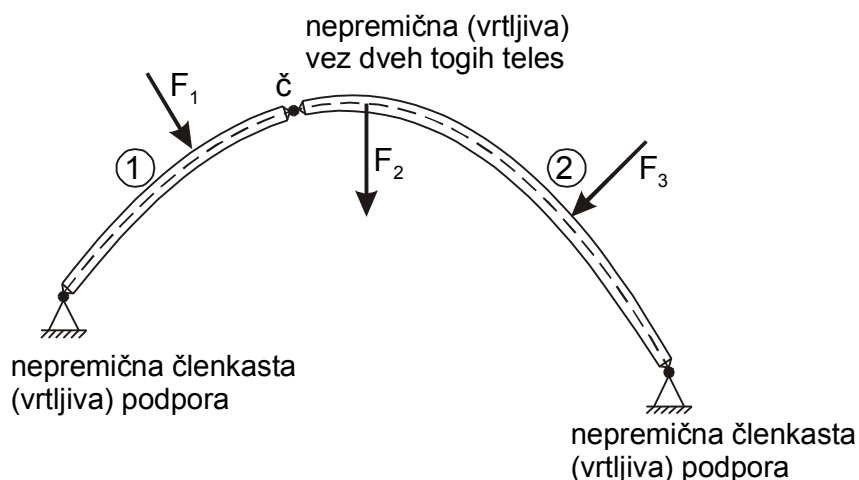
Slika 1.13: Vzдолžni prerez kompleksnega premostitvenega objekta; (a) Prerez realnega objekta in (b) Mehanski model za analizo konstrukcije

Hkrati z zapletenimi pogoji zunanjih obremenitev so tudi podpore objekta prostorsko zasnovane (AB krila) ter hkrati tudi premične zaradi možnih premikov v horizontalni in vertikalni smeri. Ker je prekladna konstrukcija vpeta v premične podpore so obremenitve posameznih konstrukcijskih elementov odvisne tudi od premikov podpor in zato uporaba modela togega telesa ni več sprejemljiva. Zato za vse konstrukcijske elemente tokrat uporabimo model deformabilnega trdnega telesa, podajnost temeljnih tal pa v modelu upoštevamo s sistemom elastičnih vzmeti katerih togost je odvisna od geometrijskih pogojev in lastnosti tal v katerih bomo temeljili objekt.

1.7 Značilnosti modela togih teles

Model togega telesa se pogosto uporablja v inženirski mehaniki vendar je uporaba tega sicer najbolj preprostega modela dopustna le v primerih kadar deformacije posameznih elementov sistema togih teles pomembno ne vplivajo na rezultate mehanskih izračunov.

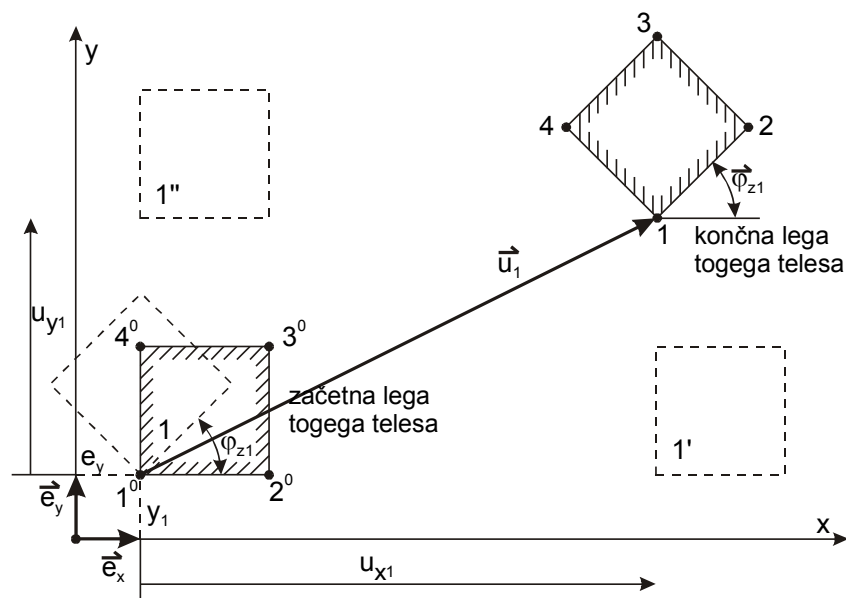
Telo je prosto v kolikor ga pri premikanju ne ovirajo sosednja telesa. Posebnim konstrukcijskim elementom, ki ovirajo oz. preprečujejo gibanje teles pravimo podpore. Sistem predstavlja več med sabo povezanih togih teles. Telesa sistema so med sabo povezana z vezmi, ki preprečujejo relativne premike posameznih elementov sistema v izbranih točkah. Primer dveh členkasto povezanih togih teles prikazuje Slika 1.14.



Slika 1.14: Sistem dveh členkasto povezanih togih teles (tričlenska ločna konstrukcija)

Prostostne stopnje posameznega telesa označujejo mogoče neodvisne načine gibanja teles v ravnini ali prostoru. Nepodprto telo v ravnini ima tri neodvisne načine gibanja, ki jih običajno izrazimo z dvema translacijama in eno rotacijo okrog poljubne točke v prostoru.

Nedvomno se lahko prosto nevezano telo v ravnini premakne za premika u_x oz. u_y vzdolž x oz. y osi ter zarotira za kot φ_z okrog z osi v ravnini x - y . Premik togega telesa prikazuje Slika 1.15.



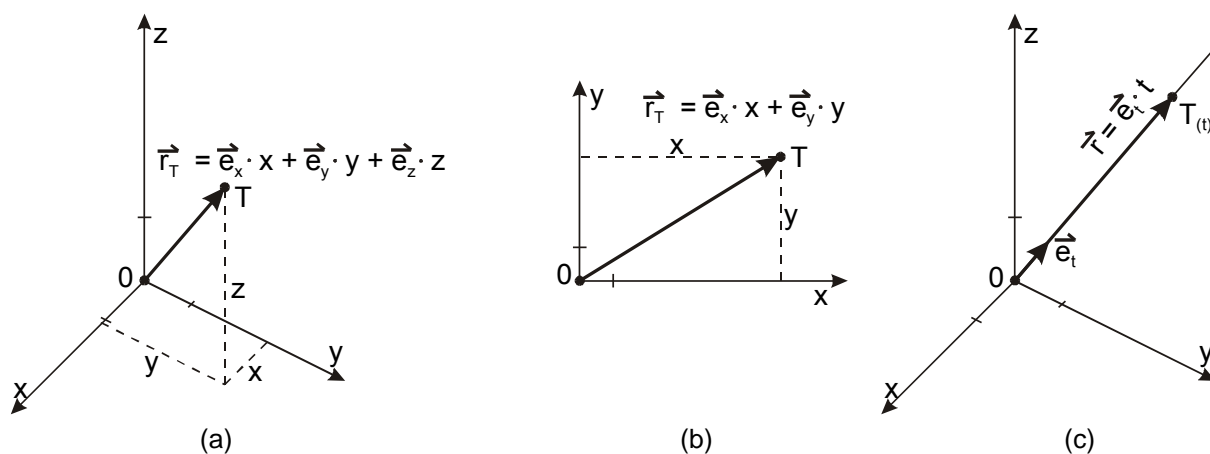
Slika 1.15: Neodvisni načini gibanja togega telesa v ravnini x - y

Navedeni trije različni načini gibanja (u_x , u_y in φ_z) v ravnini x - y so po definiciji neodvisni, ker npr. rotacije telesa φ_z ni v nobenem primeru mogoče izraziti z kombinacijo ostalih dveh načinov gibanja t.j. s translatorskima premikoma u_x in u_y . Prav zato velja tudi, da lahko poljubni premik prostega togega telesa v ravnini x - y vedno izrazimo kot linearno kombinacijo prej navedenih neodvisnih načinov gibanja (u_x , u_y in φ_z).

Za podprta toga telesa in za sisteme vezanih togih teles pa hkrati velja, da so vsi možni premiki teles preprečeni v kolikor so preprečeni vsi neodvisni načini gibanja posameznih teles.

Število vseh prostostnih stopenj telesa je hkrati tudi enako številu skalarnih spremenljivk (neodvisnih načinov gibanja), ki enolično določajo lego telesa oz. lego sistema teles v prostoru.

Masna točka v prostoru ima tri prostostne stopnje. Lego točke v prostoru določajo tri koordinate (x , y in z) oz. krajše njen krajevni vektor \vec{r}_T (Slika 1.16a). Masna točka katere gibanje je omejeno na ravnino (x - y) ima le dve prostostni stopnji, ker je položaj točke enolično določen z x in y koordinato točke T v ravnini (Slika 1.16b). Masna točka, ki se lahko giblje le po premici t (Slika 1.16c) pa ima po definiciji eno samo prostostno stopnjo. (Ker je po definiciji vsa masa skoncentrirana v brezdimenzionalni točki, rotacija takšnega elementa nima mehanskega pomena).



Slika 1.16: Lega masne točke; (a) v prostoru, (b) v ravnini in (c) na premici t

Kot smo že spoznali ima togo telo katerega gibanje je vezano na ravnino le tri prostorske stopnje. Lega togega telesa v ravnini je določena z lego dveh točk (s štirimi koordinatami), katere so dodatno povezane s pogojem, da se medsebojna razdalja teh dveh točk ne more spremeniti (Slika 1.17).

Položaj dveh točk v ravnini je sicer določen s štirimi koordinatami (x_A, y_A, x_B, y_B) vendar jih povezuje tudi dodatni pogoj (1.29) tako, da preostanejo le tri neodvisne koordinate.

$$\overline{AB} = |\vec{r}_{A/B}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \text{konst.} \quad (1.29)$$

Lega togega telesa v prostoru je natančno določena s koordinatami treh točk telesa, ki se ne smejo nahajati na isti premici (v kolikor bi se nahajale na skupni premici bi lahko telo še vedno zarotiralo okrog te točke in lega telesa zato še ni natančno določena). Ker pa so pri togem telesu medsebojne razdalje posameznih točk konstantne so tudi koordinate posameznih točk A, B in C na telesu (Slika 1.17b) med sabo povezane oz. odvisne.

$$\overline{AB} = |\vec{r}_{A/B}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \text{konst.} \quad (1.30)$$

$$\overline{AC} = |\vec{r}_{A/C}| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2} = \text{konst.} \quad (1.31)$$

$$\overline{BC} = |\vec{r}_{B/C}| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2} = \text{konst.} \quad (1.32)$$

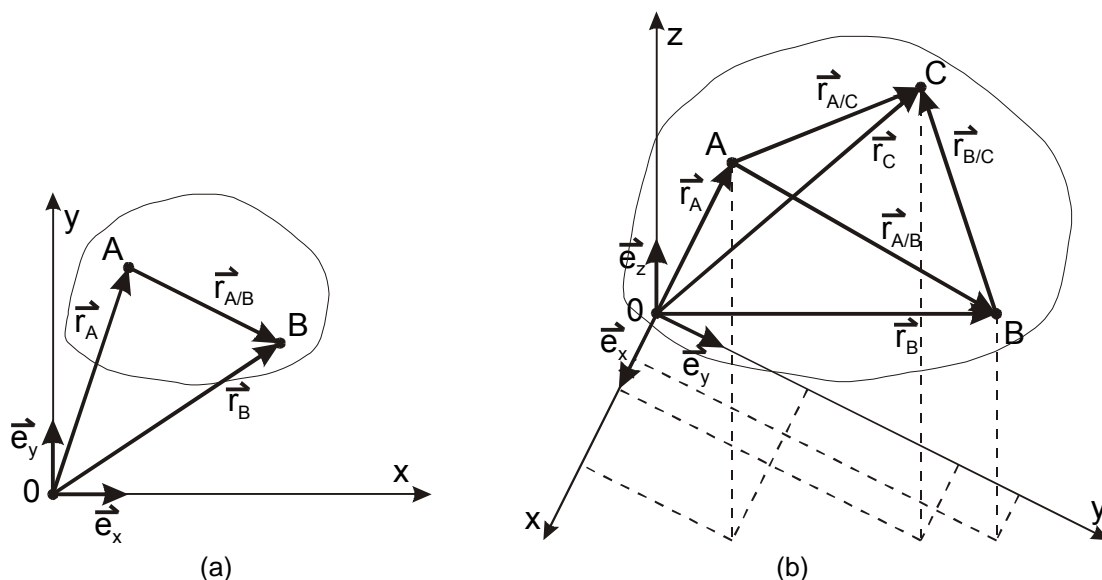
Z izrazi (1.30), (1.31) in (1.32) smo dokazali, da med devetimi koordinatami ($x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C$) obstajajo še tri dodatne zveze zaradi lastnosti togega telesa. Zato pravimo, da ima togo telo v prostoru šest ($9-3=6$) prostostnih stopenj gibanja.

Gibanje telesa v prostoru običajno opišemo z vektorjem premika (1.33) in z vektorjem rotacije (1.34) izbrane točke telesa, ki običajno predstavlja težiščno točko C telesa.

$$\vec{u}_C = \vec{u}_{xC} + \vec{u}_{yC} + \vec{u}_{zC} = u_{xC} \vec{e}_x + u_{yC} \vec{e}_y + u_{zC} \vec{e}_z \quad (1.33)$$

$$\vec{\varphi}_C = \vec{\varphi}_{xC} + \vec{\varphi}_{yC} + \vec{\varphi}_{zC} = \varphi_{xC} \vec{e}_x + \varphi_{yC} \vec{e}_y + \varphi_{zC} \vec{e}_z \quad (1.34)$$

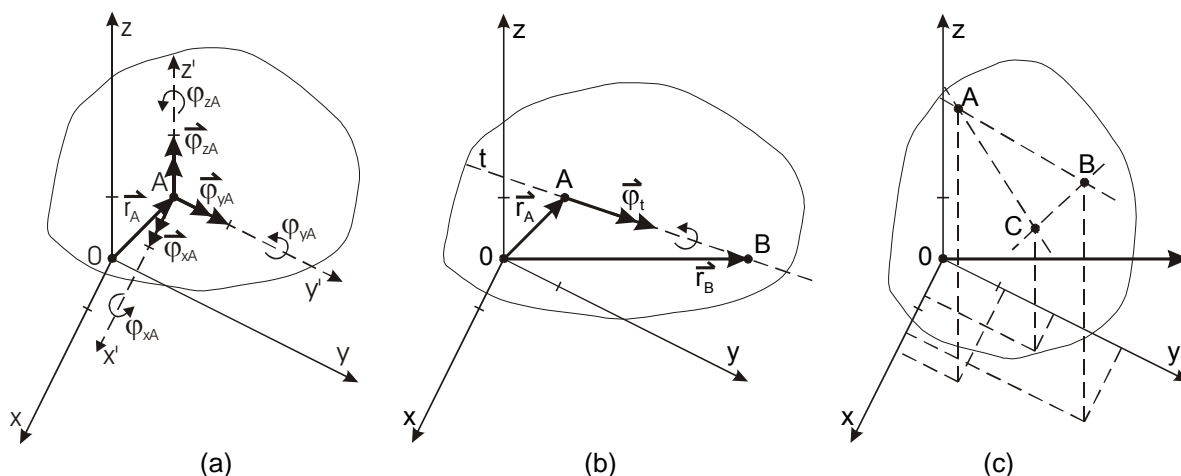
Ker vektorja \vec{u}_C in $\vec{\varphi}_C$ označujeta premik težiščne točke in rotacijo togega telesa okrog težiščne točke togega telesa C v prostoru.



Slika 1.17: (a) Togo telo v ravnini in (b) Togo telo v prostoru

S podporami lahko omejimo število možnih neodvisnih načinov gibanja togega telesa. V kolikor preprečimo gibanje telesa v točki A (Slika 1.18a) preprečimo telesu tri neodvisne načine gibanja ($6-3=3$) in telo lahko le še rotira okrog točke A. Preostali so še trije neodvisni načini gibanja in to so tri rotacije $\bar{\varphi}_{xA}$, $\bar{\varphi}_{yA}$ in $\bar{\varphi}_{zA}$.

V kolikor s podporami preprečimo premike dveh točk telesa A in B (Slika 1.18b) smo preprečili ($6-5=1$) pet neodvisnih načinov gibanja togega telesa in preostala je le še rotacija togega telesa okrog osi t, ki predstavlja zveznico točk A in B.



Slika 1.18: Število neodvisnih načinov gibanja togega telesa; (a) Preprečeno gibanje točke A (preprečene tri prostostne stopnje, omogočen poljubni zasuk okrog pola A); (b) Preprečeno gibanje točk A in B (preprečenih pet prostostnih stopenj, omogočen je le še zasuk okrog premice AB) in (c) Preprečeno gibanje v treh nekolinearnih točkah A, B in C (preprečenih je vseh šest neodvisnih načinov gibanja togega telesa)

V kolikor s podporami preprečimo premike treh nekolinearnih točk telesa A, B in C (Slika 1.18c) smo preprečili ($6-6=0$) vse neodvisne načine gibanja in takšno telo miruje, ker so preprečeni vsi možni načini gibanja telesa.

1.8 Nosilne konstrukcije

Med nosilne konstrukcije prištevamo vse vrste sistemov teles, ki lahko prenašajo različne vrste obremenitev na podpore ali na temeljna tla. V kolikor deformacije

posameznih konstrukcijskih elementov nimajo pomembnega vpliva na rezultate mehanskih analiz lahko za mehanski model realnih konstrukcij uporabimo model togih teles. V tem primeru predpostavimo, da se konstrukcije ob prevzemanju in prenašanju dodatnih obremenitev ne deformirajo ter, da so stabilno podprte in se ob obremenjevanju ne morejo premikati. Model togih teles mora biti zasnovan tako, da so vsi neodvisni načini gibanja vseh elementov sistema preprečeni. Torej mora biti vedno preprečena možnost premikanja sistema oz. vseh elementov sistema kot togih teles.

V gradbeni praksi so vse konstrukcije dejansko prostorske (tridimenzionalne, 3D). Glede na geometrijske razmere, pogoje podpiranja in zunanje obremenitve posameznih konstrukcij pa razlikujemo:

1.8.1 Prostorske konstrukcije

Med prostorske konstrukcije prištevamo vse gradbene konstrukcije, kjer so dimenzije (dolžina, širina in debelina konstrukcijskih elementov) enakega velikostnega razreda. Primer izgradnje 3D konstrukcije povezanih temeljev in stebrov viadukta prikazuje Slika 1.19.



Slika 1.19: Primer 3D konstrukcije podpore viadukta Rebernice pri Vipavi

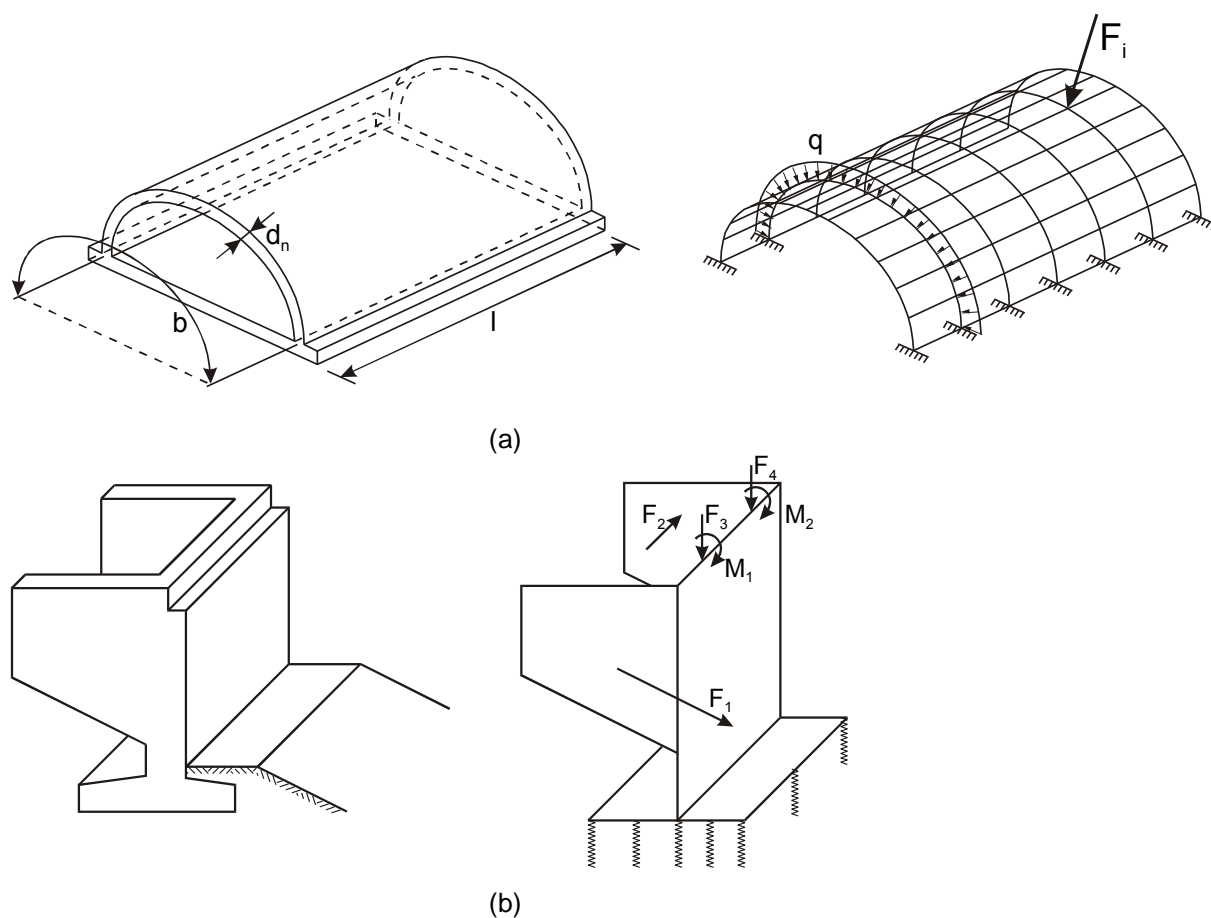
1.8.2 Ploskovne konstrukcije

Značilnost ploskovnih konstrukcij je, da imajo eno izmed dimenzij (debelino) bistveno manjšo od dolžine in širine konstrukcije. Zato jih pri geomehanskih analizah modeliramo s ploskovnimi elementi v središčni ploskvi konstrukcije. V kolikor d označuje debelino konstrukcije v smeri normale na središčno ploskev ter ℓ in b dolžino in širino konstrukcije mora biti izpolnjen pogoj:

$$d \ll \ell, \quad d \ll b \quad (1.35)$$

Središčna ploskev s pripadajočimi podporami predstavlja mehanski model konstrukcije. Kadar je središčna ploskev ukrivljena in vedno kadar je obremenjena v poljubni smeri takšno konstrukcijo imenujemo lupina (Slika 1.20).

Primer lupinaste konstrukcije pokritega vkopa med gradnjo HC Razdrto – Vipava prikazuje Slika 1.21.



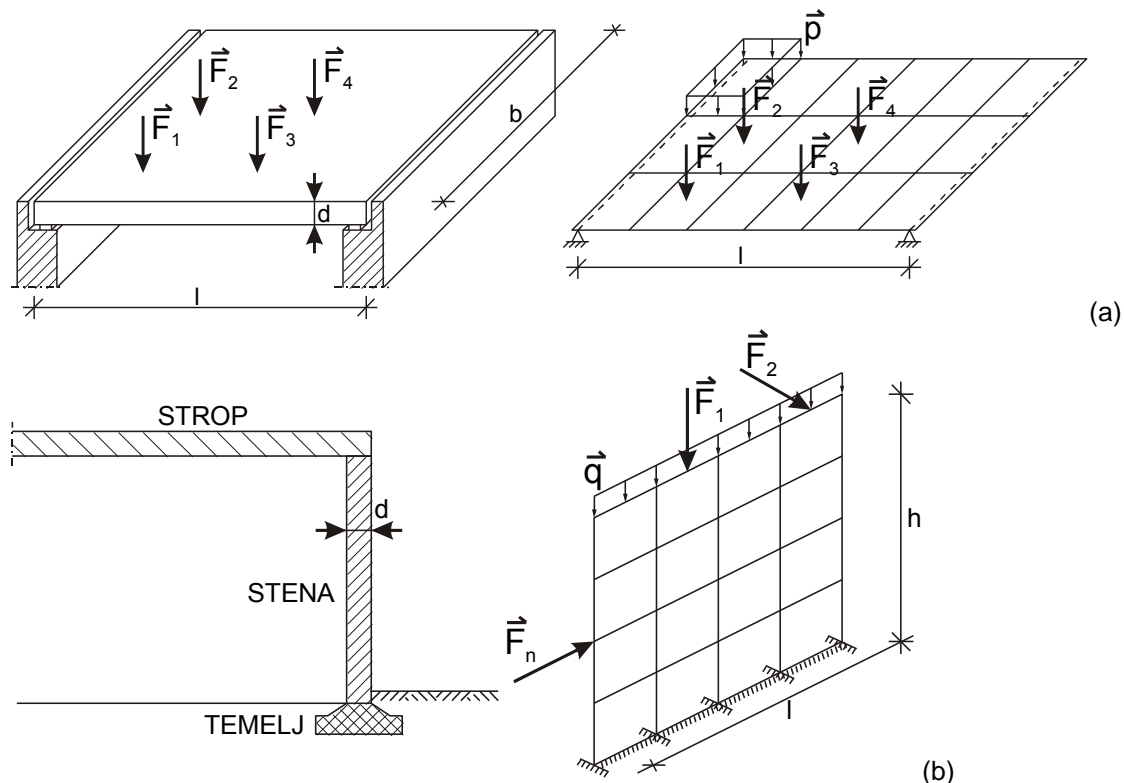
Slika 1.20: Lupine in mehanska modela; (a) Primer tunnelske cevi in (b) Primer AB konstrukcije krajne podpore viadukta



Slika 1.21: Lupinasta konstrukcija dvopasovnega pokritega vkopa Rebernice 1

Kadar je obravnavana konstrukcija obremenjena le v smeri pravokotno na osrednjo ravnino jo imenujemo plošča (Slika 1.22a) ter kadar se obtežba nahaja le v osrednji ravnini konstrukcije imamo opravka s stenasto konstrukcijo (Slika 1.22b).

Slika 1.23 prikazuje primer voziščne plošče na viaduktu Šumljak pri Razdrtem.



Slika 1.22: Plošče in stene; (a) Primer AB plošče na prepustu in (b) Primer stene pri objektih visokih gradenj



Slika 1.23: Prekladna konstrukcija (plošča spremenljive debeline) viadukta Šumljak

1.8.3 Linijske konstrukcije

K linijskim konstrukcijam prištevamo vse gradbene konstrukcije sestavljene iz linijskih elementov. Linijski elementi imajo eno dimenzijo t.j. dolžino l bistveno večjo od širine b in debeline d .

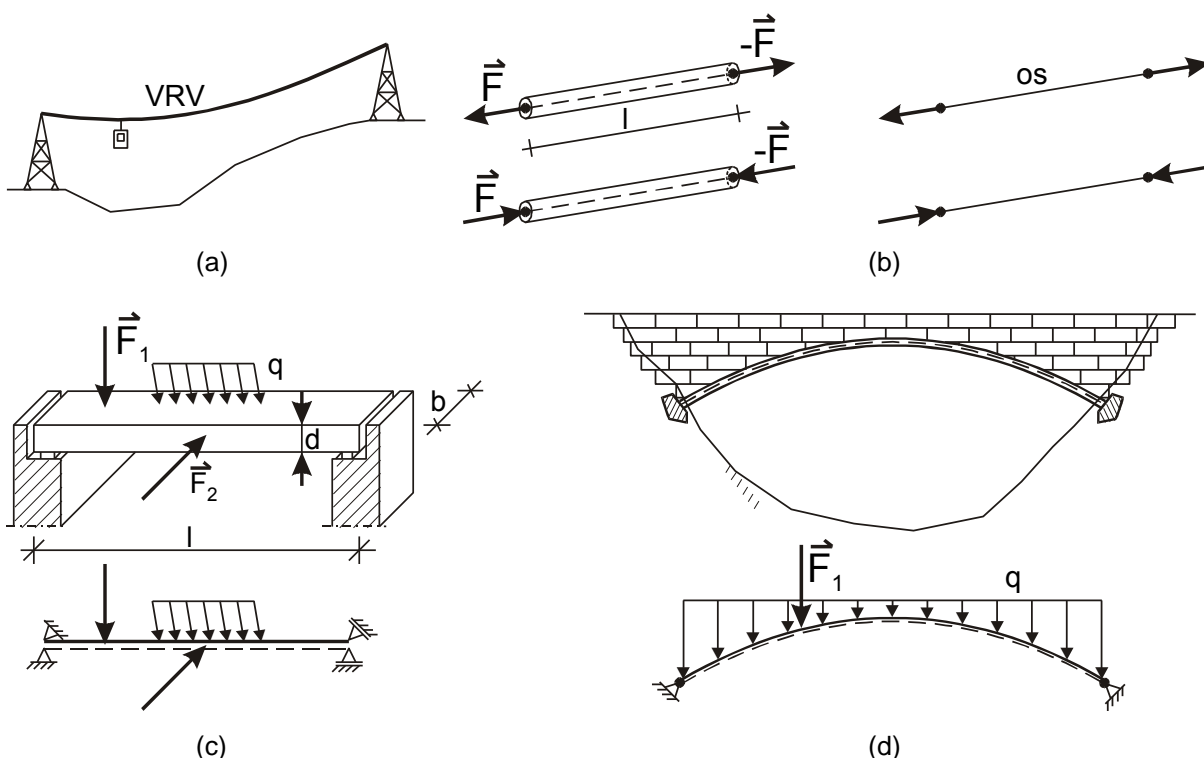
$$d \ll l, \quad b \ll l \quad (1.36)$$

Mehanski model linijskih konstrukcij je enodimenzionalen v smeri dolžine konstrukcije l . Os linijskih elementov je lahko ravna ali ukrivljena. Obremenitve elementov so lahko v eni, dveh ali v vseh treh dimenzijah (prostorski problemi). Glavni linijski elementi so vrvi, palice, nosilci, ločni elementi itd.

Najpreprostejši mehanski model je model idealne vrvi (Slika 1.24a). Idealna vrv je lahko obremenjena le z natezno silo ter je v smeri svoje osi za natezne sile povsem toga (neraztegljiva) ter ne more prevzemati tlačnih obremenitev, ker je za tlačne osne sile povsem podajna (model žice oz. vrvi). Tudi v obeh prečnih smereh je povsem gibka.

Palica je mehanski model realnega trdnega telesa, ki lahko prevzame tlačne in natezne osne sile v vzdolžni smeri konstrukcijskega elementa (Slika 1.24b). Nosilec je bolj splošni konstrukcijski element (greda), ki prenaša poljubne osne in prečne sile ter upogibne obremenitve. Lahko ga obravnavamo v dveh (2D) ali treh (3D) dimenzijah (Slika 1.24c).

Lok je posebni konstrukcijski element, ki je oblikovan tako, da dejanska obtežba v ločni konstrukciji povzroča le tlačne osne sile (v svojem bistvu je to le inverzni model idealne vrvi, Slika 1.24d).



Slika 1.24: Elementi linijskih konstrukcij; (a) Idealna vrv – natezni element (b) Palica – tlačno natezni element, (c) Gredni element – natezno tlačni in upogibni element ter (d) Ločni – tlačni element

Posebna vrsta gradbenih konstrukcij so paličja (predalčja), ki so sestavljena iz samih palic, ki so med sabo členkasto povezane. Primer prostorskega paličja prikazuje Slika 1.25.



Slika 1.25: Primer prostorskega paličja, ki je predstavljalo nosilno konstrukcijo opaža pri gradnji viadukta Boršt 1 pri Vipavi

Vezi in podpore so pri paličjih praviloma členkaste, ki preprečujejo medsebojne premike posameznih elementov, dovoljujejo pa povsem neovirane zasuke posameznih palic tako, da so v palicah praviloma (kot prevladujoče obtežbe) le osne sile. Na čista (osnovna) paličja lahko obtežbe delujejo le preko vozlišč na konstrukcijo.

Posebni primer so branaste konstrukcije. Pri takšnih konstrukcijah se sistem povezanih grednih elementov (nosilcev) nahaja v eni ravnini obtežbe pa delujejo le v pravokotni smeri na posamezne konstrukcijske elemente.

Slika 1.26 prikazuje realno konstrukcijo sestavljeno iz upogibnih elementov (vertikalni piloti in horizontalne AB grede) ter iz vrvnih elementov (geotehnična prednapeta sidra).

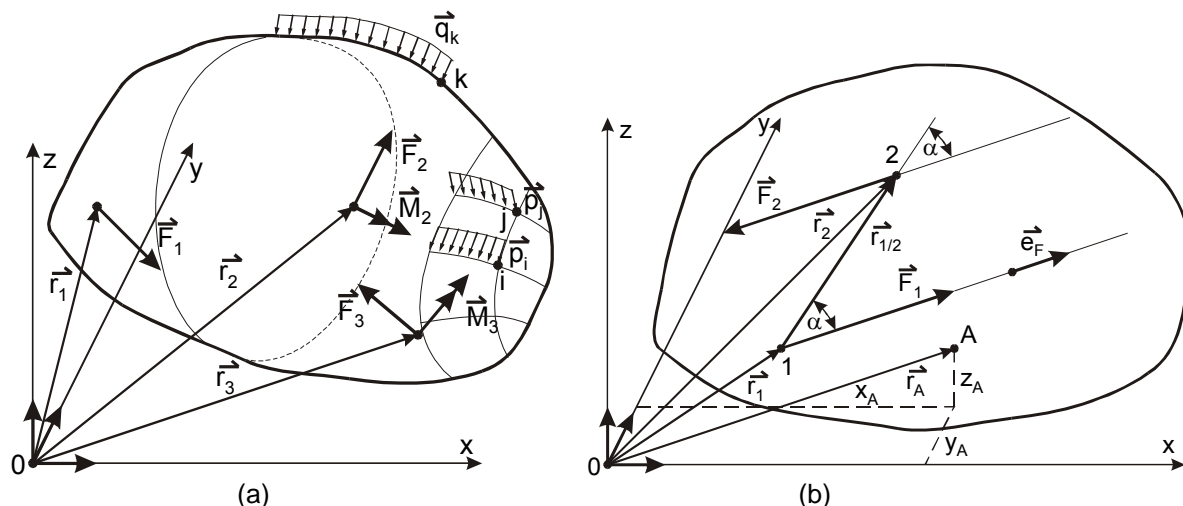


Slika 1.26: Realna konstrukcija sestavljena iz linijskih elementov – pilotna stena OZ 10 na AC Razdrto - Vipava

2 SISTEMI SIL V RAVNINI IN PROSTORU

2.1 Splošni sistem sil

Množici vseh sil \vec{F}_i ($i = 1, 2, \dots, n$), ki delujejo na telo pravimo sistem sil (Slika 2.1a). V splošnem primeru je lahko telo obteženo z različnimi silami, ki so lahko koncentrirane sile v ožjem pomenu, črtno, površinsko in prostorninsko zvezno porazdeljene sile ter koncentrirani momenti.



Slika 2.1: Sistemi sil: (a) Poljubni sistem sil, ki deluje na telo in (b) Dvojica sil

Za stanje mirovanja, ravnotežja in gibanja togega telesa je porazdelitev sil v telesu manj pomembna, ker je stanje gibanja oz. mirovanja telesa odvisno le od skupnega (rezultantnega) vpliva vseh sil, ki delujejo na telo. Določanju rezultantnega vpliva vseh sil na telo pravimo **sestavljanje sil**.

Koncentrirani vrtilni moment (navor) je rezultantni vpliv dveh vzporednih, enako velikih ter nasprotno usmerjenih sil (\vec{F}_1 in $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$), ki delujeta na obravnavano telo (Slika 2.1b). Takšnemu sistemu sil v mehaniki pravimo **dvojica sil**.

Vsoto obeh sil izrazimo z njunima velikostima ter enotskim vektorjem \vec{e}_F , ki določa smer delovanja obeh sil.

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = F_1 \vec{e}_F + F_2 \vec{e}_F = (F_1 - F_1) \vec{e}_F = 0 \quad (2.1)$$

Ugotovili smo, da je vsota vseh sil, ki delujejo na telo enaka 0. Preostalo je le še navor obeh sil na poljubno točko v prostoru, ki ga določimo na izhodišče koordinatnega sistema 0 ter na poljubno točko v prostoru A.

$$\vec{M}_R^0 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}_1) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = -\vec{r}_{1/2} \times \vec{F}_1 = -F \vec{r}_{1/2} \times \vec{e}_F \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_R^A &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_A) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_A) \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_A) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_A) \times (-\vec{F}_1) = \\ &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_A - \vec{r}_2 + \vec{r}_A) \times \vec{F}_1 = -\vec{r}_{1/2} \times \vec{F}_1 = -F \vec{r}_{1/2} \times \vec{e}_F \end{aligned} \quad (2.3)$$

Dokazali smo, da je rezultantni vpliv dvojice sil vrtilni moment \vec{M}_R^i , ki je neodvisen od točke v prostoru na katero ga izračunamo ($\vec{M}_R^0 = \vec{M}_R^A = \vec{M}_R^i$). Smer koncentriranega

momenta \vec{M}_R^i je vedno pravokotna na skupno ravnino, ki jo določata vzporedni učinkovalnici sil \vec{F}_1 in \vec{F}_2 .

2.2 Sestavljanje sil in momentov

V kolikor na poljubno telo v prostoru deluje množica sil in momentov vizualno ni vedno mogoče oceniti skupnega vpliva vseh teh količin na stanje gibanja oz. mirovanja telesa, ki ga v mehaniki analiziramo (Slika 2.1). Pri sestavljanju (seštevanju) sil neki poljubni splošni sistem sil in momentov nadomestimo z bolj pregledno (nazorno in enostavno) toda **statično enakovredno mehansko količino**.

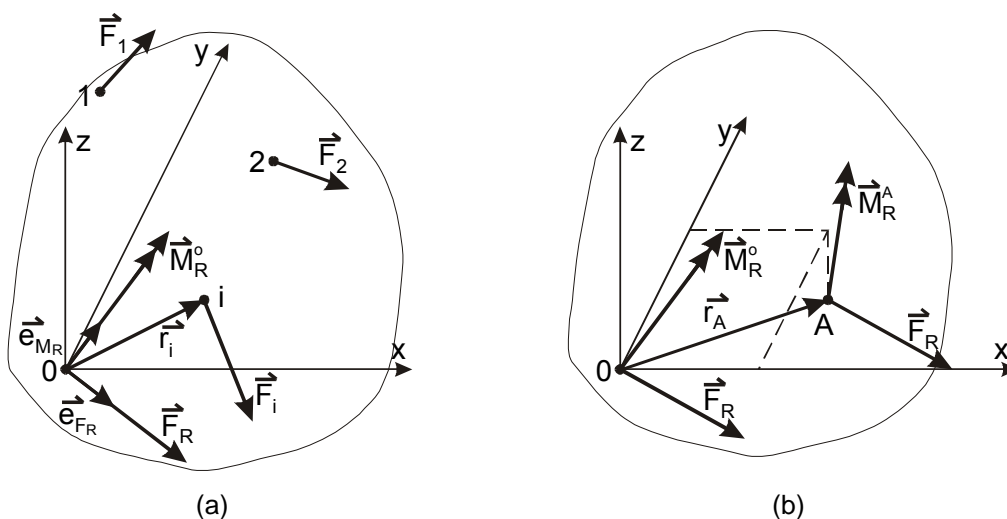
Vsoto vseh n sil v ožjem pomenu $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i$, ki delujejo na telo, imenujemo rezultanta oz. rezultantna sila ter jo označimo z \vec{F}_R .

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (2.4)$$

Vsoto vseh momentov (navorov) $\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ izračunanih na koordinatno izhodišče 0 imenujemo rezultanto momentov ali tudi **rezultantni vrtilni moment**, ki ga označimo \vec{M}_R^0 (v izrazu 2.5 je upoštevano, da so koncentrirani navori podani z dvojicami sil).

$$\vec{M}_R^0 = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i^0 \quad (2.5)$$

kjer oznaka \vec{M}_i^0 označuje vrtilni moment sile \vec{F}_i na točko 0 telesa. **Vplivi vseh sil F_i ($i = 1, 2, \dots, n$) in skupne rezultante \vec{F}_R in \vec{M}_R^0 na telo so statično enakovredni kadar smernica rezultantne sile \vec{F}_R poteka skozi točko 0 na katero smo mehanski vpliv rezultante momentov \vec{M}_R^0 izračunali oz. določili.** Mehanski učinek rezultantnega momenta \vec{M}_R^0 na gibanje telesa sicer ni odvisen od točke prijema momenta (lahko ga poljubno vzporedno premaknemo) vendar bomo pri vseh analizah upoštevali, da smernica rezultantnega momenta \vec{M}_R^0 poteka skozi točko 0 oz. tudi skozi točko A na katero smo momentni vektor izračunali (Slika 2.2).



Slika 2.2: Rezultantna sila in rezultantni moment; (a) Rezultanta poljubnega sistema sil na točko 0 in (b) Rezultanta poljubnega sistema sil na poljubno točko A v prostoru

V kolikor rezultanto \vec{F}_R premaknemo iz koordinatnega izhodišča v točko A moramo za ohranitev enakih mehanskih vplivov v točki A dodati moment \vec{M}_R^A , ki se po velikosti in/ali smeri lahko povsem razlikuje od momenta \vec{M}_R^0 .

$$\vec{M}_R^A = \vec{M}_R^0 + \vec{r}_{A/0} \times \vec{R} = \vec{M}_R^0 - \vec{r}_A \times \vec{R} \quad (2.6)$$

Izraz (2.6) kaže, da je rezultatni moment \vec{M}_R^A poljubnega sistema sil odvisen od izbrane točke A na katero ga določamo.

Rezultantno silo \vec{F}_R in rezultatni moment \vec{M}_R^A s skupnim imenom imenujemo posplošena sila oz. posplošena (generalizirana) rezultanta sistema sil za izhodiščno točko A na katero smo rezultatni moment izračunali. Posplošena rezultantna sila \vec{F}_R^A je generalizirani vektor s tremi silnimi in tremi momentnimi komponentami.

$$\vec{F}_R^A = \begin{Bmatrix} \vec{F}_R \\ \vec{M}_R^A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \\ \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{F}_i \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

S silo \vec{F}_R in momentom \vec{M}_R^0 nadomestimo mehanski vpliv množice poljubnih sil, ki delujejo na togo telo. Za oba sistema sil pravimo, da sta statično oz. mehansko enakovredna. Rezultantni sili lahko določimo na poljubno točko togega telesa.

Rezultantni sili (rezultanto sil in rezultatni vrtilni moment) določimo v pravokotnem koordinatnem sistemu:

$$\vec{F}_R = F_{Rx} \vec{e}_x + F_{Ry} \vec{e}_y + F_{Rz} \vec{e}_z = \vec{e}_x \sum_{i=1}^n F_{ix} + \vec{e}_y \sum_{i=1}^n F_{iy} + \vec{e}_z \sum_{i=1}^n F_{iz} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^n F_{ix} \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} \\ \sum_{i=1}^n F_{iz} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\vec{M}_R^0 = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_i & y_i & z_i \\ F_{ix} & F_{iy} & F_{iz} \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^n (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) \\ \sum_{i=1}^n (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) \\ \sum_{i=1}^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{Rx}^0 \\ M_{Ry}^0 \\ M_{Rz}^0 \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Rezultantno silo \vec{F}_R oz. rezultatni moment \vec{M}_R^0 lahko predstavimo tudi kot produkt intenzitete sile oz. momenta s pripadajočima enotskima vektorjema vzdolž učinkovalnic posameznih rezultatnih sil \vec{e}_{F_R} oz. \vec{e}_{M_R} (Slika 2.2a).

$$\vec{F}_R = F_R \vec{e}_{F_R} \quad (2.10)$$

$$\vec{M}_R^0 = M_R \vec{e}_{M_R} \quad (2.11)$$

Pripadajoča enotska vektorja \vec{e}_{F_R} oz. \vec{e}_{M_R} določimo z izrazoma (2.12) in (2.13).

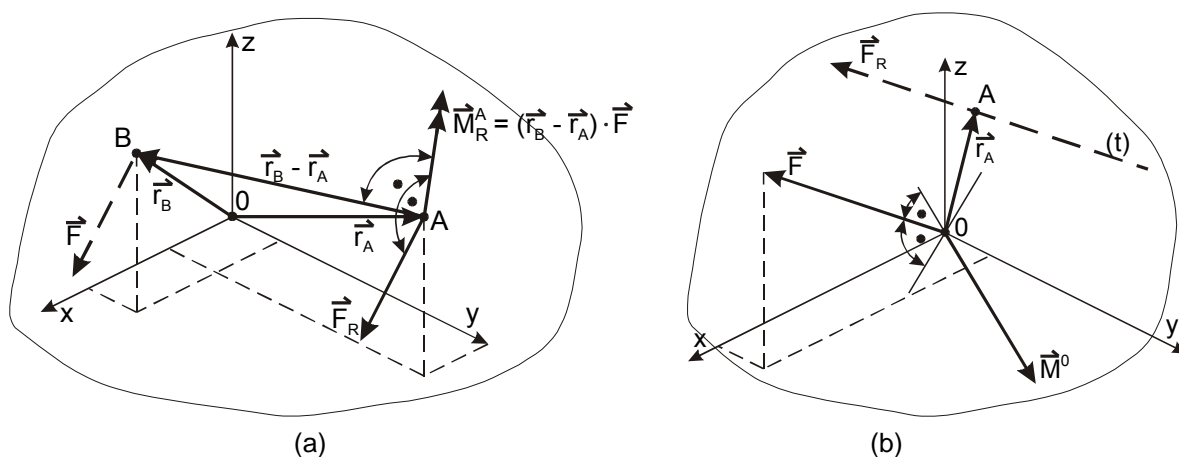
$$\vec{e}_{F_R} = \frac{\vec{F}_R}{F_R} = \frac{F_{Rx} \vec{e}_x + F_{Ry} \vec{e}_y + F_{Rz} \vec{e}_z}{F_R} = \cos \alpha_R \vec{e}_x + \cos \beta_R \vec{e}_y + \cos \gamma_R \vec{e}_z \quad (2.12)$$

$$\vec{e}_{M_R} = \frac{\vec{M}_R^0}{M_R^0} = \frac{M_{Rx}^0 \vec{e}_x + M_{Ry}^0 \vec{e}_y + M_{Rz}^0 \vec{e}_z}{M_R^0} = \cos \alpha_M \vec{e}_x + \cos \beta_M \vec{e}_y + \cos \gamma_M \vec{e}_z \quad (2.13)$$

kjer α_R , β_R in γ_R oz. α_M , β_M in γ_M pomenijo kote med rezultantno silo \vec{F}_R oz. rezultantnim momentom \vec{M}_R^0 ter x, y in z osjo kartezijevega koordinatnega sistema. Kosinusi zgoraj navedenih kotov označujejo posamezne komponente enotskih vektorjev \vec{e}_{F_R} oz. \vec{e}_{M_R} (Slika 2.2a).

2.2.1 Vpliv translatornega premika (redukcije) sile

V kolikor poljubno silo \vec{F} s prijemaščem v točki B vzporedno premaknemo (reduciramo) v točko A moramo za ohranitev enakih mehanskih učinkov dodati moment, ki ga prvotna sila \vec{F} povzroča na novo prijemašče A na togem telesu (Slika 2.3).



Slika 2.3: Vzporedna premaknitev sile: (a) Redukcija sile \vec{F} iz točke A v točko B telesa in (b) Redukcija (nadomestitev) sistema sil v eno samo silo

Osnovni sistem sil \vec{F} in novi sistem \vec{F}_R in \vec{M}_R^A morata biti mehansko enakovredna:

$$\vec{F} = \vec{F}_R, \quad \vec{r}_B \times \vec{F} = \vec{r}_A \times \vec{F}_R + \vec{M}_R^A \quad (2.14)$$

V kolikor silo \vec{F} vzporedno premaknemo iz točke B v točko A telesa moramo za zagotovitev enakih učinkov dodati moment, ki ga sila \vec{F} s prijemaščem v točki B povzroča na točko A telesa $\vec{M}_R^A = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{F}$ (Slika 2.3a).

V nadaljevanju bomo obravnavali obratni primer, kjer na telo v točki 0 deluje sila \vec{F} in koncentrirani navor \vec{M}^0 (učinek dvojice sil). Določiti je potrebno lego točke A v prostoru, kjer se sistem sil \vec{F} in \vec{M}^0 reducira v eno samo silo \vec{F}_R (Slika 2.3b). Predpostavimo, da sta vektorja \vec{F} in \vec{M}^0 med sabo pravokotna ($\vec{F} \bullet \vec{M}^0 = 0$).

$$\vec{F} = \vec{F}_R, \quad \vec{M}_R^A = \vec{M}^0 + (-\vec{r}_A) \times \vec{F} = 0 \quad (2.15)$$

Izraz (2.15) zapišemo v poenostavljeni obliki:

$$\vec{M}^0 = \vec{M}_x^0 \vec{e}_x + \vec{M}_y^0 \vec{e}_y + \vec{M}_z^0 \vec{e}_z = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_A & y_A & z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (2.16)$$

Rešitev predstavljajo tri enačbe s tremi neznankami (x_A, y_A, z_A):

$$M_x^0 = y_A F_z - z_A F_y, \quad M_y^0 = z_A F_x - x_A F_z, \quad M_z^0 = x_A F_y - y_A F_x \quad (2.17)$$

Vendar enačbe (2.17) med sabo niso neodvisne, ker jih povezuje pogoj, da sta vektorja \vec{F} in \vec{M}^0 med sabo pravokotna:

$$\vec{F} \cdot \vec{M}^0 = F_x M_x^0 + F_y M_y^0 + F_z M_z^0 = 0 \quad (2.18)$$

Zato si lahko v splošnem primeru eno izmed koordinat točke A poljubno izberemo ter preostali neznani koordinati določimo z rešitvijo sistema enačb (2.17).

Primer 2.1:

Podan je sistem sil $\vec{F} = \{4, 1, 4\}$, $\vec{M}^0 = \{1, 4, -2\}$, določi prijemališče sile $\vec{F}_R = \vec{F} = \{4, 1, 4\}$, da bo rezultantna sila $\vec{F}_R = \vec{F}_R^A$, ki deluje v točki A mehansko enakovredna zadanemu sistemu sil.

Preverimo ali sta silni in momentni vektor med sabo pravokotna; $\vec{F} \cdot \vec{M}^0 = 4 + 4 - 8 = 0$. Z uporabo izrazov (2.17) dobimo:

$$1 = 4y_A - z_A, \quad 4 = 4z_A - 4x_A, \quad -2 = x_A - 4y_A$$

V kolikor določamo prijemališče sile A v ravnini y-z najprej lahko izberemo koordinato $x_A = 0$ ter dobimo preostali koordinati $z_A = 1$, $y_A = 1/2$. Zlahka ugotovimo, da rešitev ustreza vsem trem zgoraj navedenim enačbam (2.17).

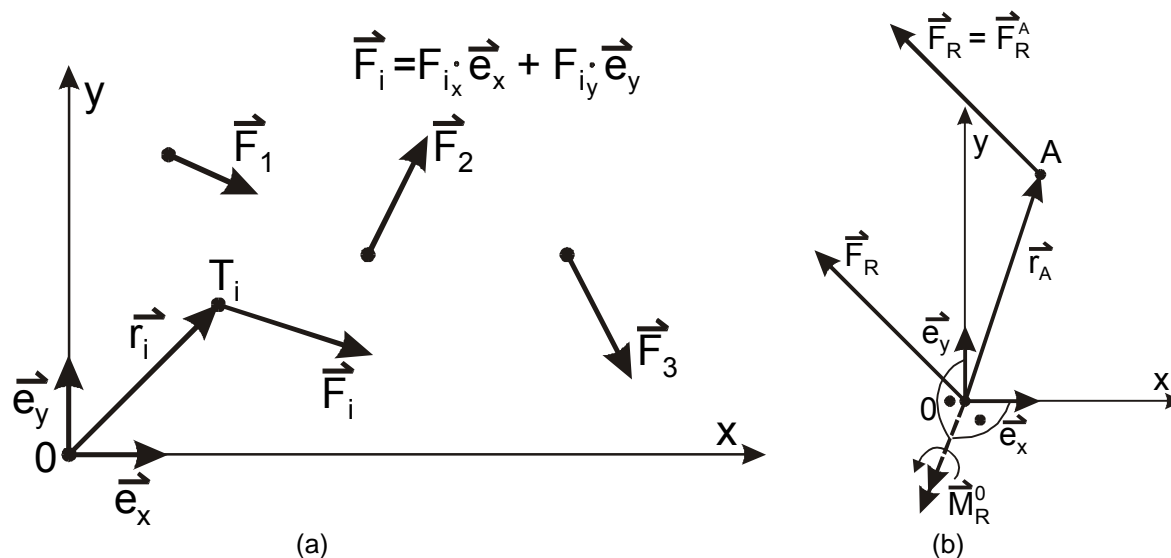
Za posebne primere glavne sile lahko določimo tudi smernico sile \vec{F}_R^A .

$$F_x = 0, \quad x = M_z^0 / F_y = -M_y^0 / F_z, \quad M_x^0 = yF_z - zF_y \quad (2.19)$$

ki v tem primeru določa enačbo premice t (smernico sile \vec{F}_R^A) v ravnini pravokotni na os x.

2.2.2 Sistemi sil v ravnini

Kadar vse sile sistema F_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ležijo v eni ravnini se izraza (2.4) in (2.5) za seštevanje sil bistveno poenostavita. Koordinatni sistem v takšnih primerih izberemo tako, da vse smernice sil ležijo v ravnini x-y (Slika 2.4). V takšnih primerih velja, da so komponente vseh sil F_z in koordinate z_i vseh prijemališč sil enake 0.



Slika 2.4: Sistemi sil: (a) Sistemi sil v ravnini x-y ter (b) Generalizirana sila \vec{F}_R^A , ki nadomešča obe komponenti glavne sile \vec{F}_R in \vec{M}_R^0

Rezultantno silo \vec{F}_R in rezultantni moment na izhodišče koordinatnega sistema \vec{M}_R^0 določimo tako, da v izrazih (2.8) in (2.9) upoštevamo posamezne, le od nič različne, komponente sil in momentov.

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= \sum_{i=1}^n F_{ix} \\ F_{Ry} &= \sum_{i=1}^n F_{iy} \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} M_{Rz}^0 &= \sum_{i=1}^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) \\ F_{Rz} &= M_{Rx}^0 = M_{Ry}^0 = 0 \end{aligned}$$

Zlahka ugotovimo, da se rezultantna sila \vec{F}_R prav tako nahaja v ravnini x-y, smer rezultantnega momenta \vec{M}_R^0 je pri ravninskih sistemih sil vedno pravokotna na ravnino x-y.

Ker sta pri ravninskem sistemu sil rezultantna sila \vec{F}_R in \vec{M}_R^0 vedno med sabo pravokotna ju je mogoče vedno nadomestiti samo z rezultantno silo \vec{F}_R^A , katere prijemališče določimo z izrazom:

$$\vec{M}_{Rz}^A = \vec{M}_{Rz}^0 + (-\vec{r}_A) \times \vec{F}_R = 0, \quad \vec{M}_{Rz}^0 = \vec{r}_A \times \vec{F}_R = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_A & y_A & 0 \\ F_{Rx} & F_{Ry} & 0 \end{vmatrix} = (x_A F_{Ry} - y_A F_{Rx}) \vec{e}_z \quad (2.21)$$

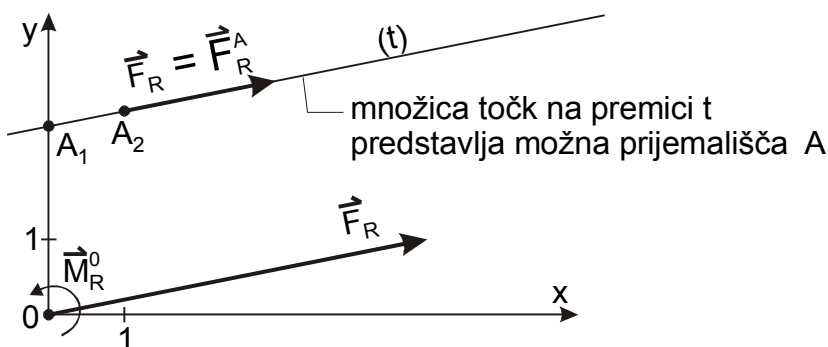
Izraz (2.21) določa enačbo premice t na kateri deluje rezultantna sila \vec{F}_R , ki nadomešča celotni sistem sil v ravnini (Slika 2.4b). Kadar je komponenta sile $F_{Ry} \neq 0$, lahko učinkovalnico sile določimo $x_A = (M_{Rz}^0 + y_A F_{Rx}) / F_{Ry}$, kadar pa je komponenta $F_{Ry} = 0$ ima y koordinata točke A konstantno vrednost $y_A = -M_{Rz}^0 / F_{Rx}$.

Primer 2.2:

Podan je sistem sil $\vec{F} = \{4, 1, 0\}$, $\vec{M}^0 = \{0, 0, -10\}$ (Slika 2.5), določi prijemališče sile $\vec{F}_R = \vec{F} = \vec{F}_R^A = \{4, 1, 0\}$, da bo rezultantna sila \vec{F}_R , ki deluje v točki A mehansko enakovredna zadanemu sistemu sil.

Učinkovalnico sile \vec{F}_R^A določa izraz (2.21):

$$-10 = x_A \cdot 1 - y_A \cdot 4, \quad y_A(x) = x_A / 4 + 2.5$$



Slika 2.5: Rezultantna sila \vec{F}_R in moment \vec{M}_R^0 ter pripadajoča prijemališča A, pri redukciji sistema sil v eno samo silo $\vec{F}_R^A = \vec{F}_R$

Rezultanto poljubnega sistema sil v ravnini lahko določimo tudi grafično z upoštevanjem doslednega matematičnega pravila seštevanja vektorjev. V preteklosti so graditelji mnogih pomembnih zgradb celotne statične presoje opravili po grafo – analitičnih metodah s kombinacijo grafičnih in analitičnih rešitev.

Danes v dobi računalništva se te metode v stroki skoraj več ne uporabljajo, vendar so iz akademskega vidika zelo koristne za razumevanje različnih mehanskih problemov. Pomanjkljivost grafičnih metod je predvsem v natančnosti dobljenih rezultatov, ki so odvisni od natančnosti risanja, velikosti slik in natančnosti odčitkov iz grafičnih podlag.

Primer 2.3:

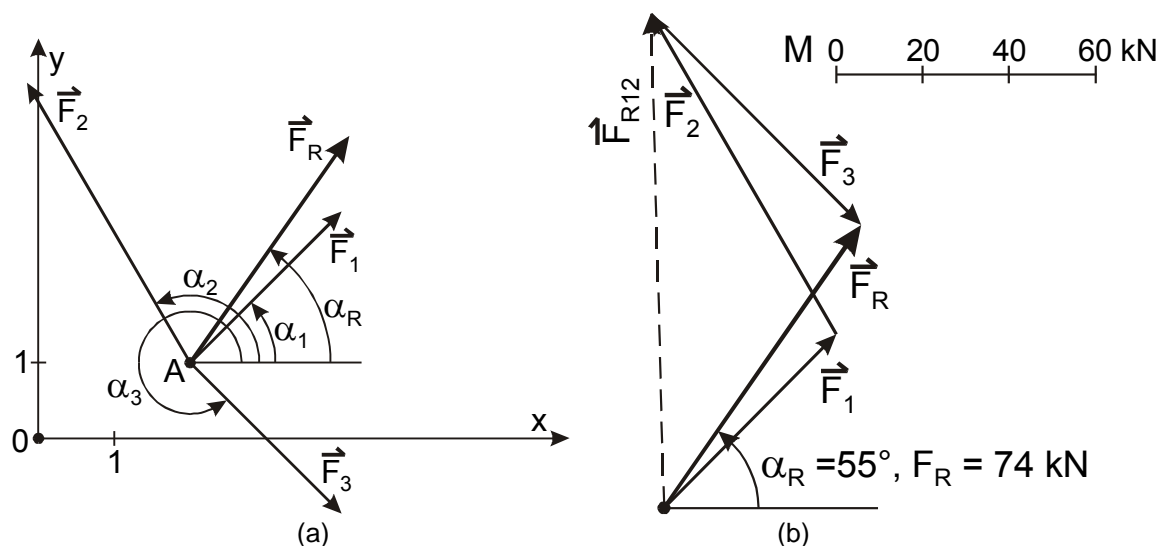
Določi rezultanto treh sil, ki delujejo v skupnem prijemališču A ter so podane z njihovo intenziteto in koti med učinkovalnico posameznih sil ter x osjo.

$$F_1 = 50 \text{ kN}, \quad \alpha_1 = 45^\circ$$

$$F_2 = 90 \text{ kN}, \quad \alpha_2 = 120^\circ$$

$$F_3 = 75 \text{ kN}, \quad \alpha_3 = 315^\circ$$

Vsoto sil določimo grafično tako, da izdelamo načrt sil ter mnogokotnik (poligon) sil v ustreznem merilu (Slika 2.6).



Slika 2.6: Seštevanje sil s skupnim prijemališčem; (a) Načrt sil in (b) Mnogokotnik sil

Vsoto dveh sil $\vec{F}_{R12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ določimo po že znanem pravilu seštevanja sil s paralelogramom ali trikotnikom sil (sile v mnogokotniku morajo biti načrtane v enakem merilu) nato pa določimo novo rezultanto dveh sil $\vec{F}_R = \vec{F}_{R12} + \vec{F}_3$. Intenziteto in smer resultantne sile odmerimo iz mnogokotnika sil ter dobimo: $F_R = 74 \text{ kN}$ in smer $\alpha_R = 55^\circ$.

Ker je moment vseh podanih sil ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$) na prijemališče sil A enak 0 je tudi prijemališče resultantne sile F_R nedvomno v enaki točki A (Slika 2.6a).

Za potrditev prej podanih rezultatov določimo rezultanto podanih sil še numerično:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + F_3 \cos \alpha_3) \vec{e}_x + (F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2 + F_3 \sin \alpha_3) \vec{e}_y = \begin{Bmatrix} 43.388 \\ 60.265 \end{Bmatrix}$$

$$F_R = 74.259 \text{ kN}, \quad \alpha_R = 54.248^\circ$$

(Opomba: natančnost predstavljene grafične rešitve je še sprejemljiva oz. v inženirskem smislu ustrezna)

Primer 2.4:

Določi rezultanto štirih sil ter momentov, ki delujejo v točkah T_1 , T_2 , T_3 in T_4 v ravnini togega telesa grafično in analitično.

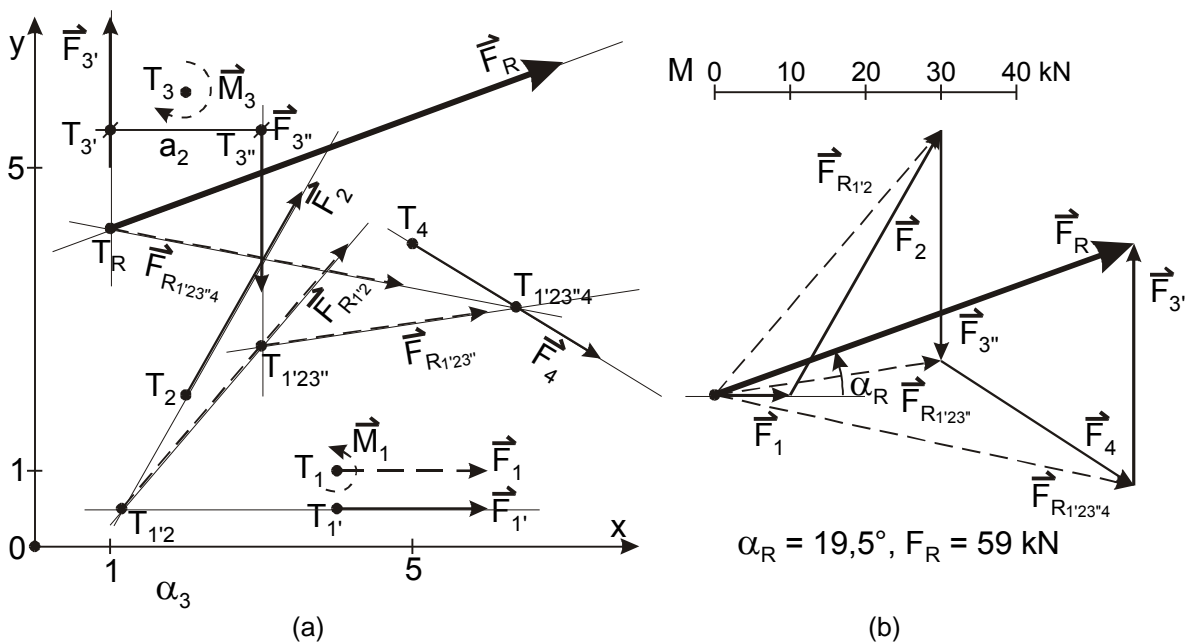
$$F_1 = 10 \text{ kN}, \quad M_1 = 5 \text{ kNm}, \quad \alpha_1 = 0^\circ, \quad T_1(4, 1)$$

$$F_2 = 40 \text{ kN}, \quad M_2 = 0 \text{ kNm}, \quad \alpha_2 = 60^\circ, \quad T_2(2, 2)$$

$$F_3 = 0 \text{ kN}, \quad M_3 = -60 \text{ kNm}, \quad \alpha_3 = 270^\circ, \quad T_3(2, 6)$$

$$F_4 = 30 \text{ kN}, \quad M_4 = 0 \text{ kNm}, \quad \alpha_4 = 330^\circ, \quad T_4(5, 4)$$

Ker vrtilnih momentov \vec{M}_1 in \vec{M}_3 in posameznih sil grafično ni mogoče vektorsko seštevati ju moramo nadomestiti s statično enakovrednimi sistemi sil. Moment \vec{M}_1 nadomestimo s premikom sile \vec{F}_1 v točko T_1' s koordinatama (4, 0.5) ter silo v premaknjeni legi označimo z \vec{F}_1' . Statični vpliv momenta \vec{M}_3 na togo telo nadomestimo z dvojico sil \vec{F}_3' in \vec{F}_3'' , katerih intenziteto določimo z izrazom $a_3 F_3' = M_3$ ter delujeta v nasprotnih smereh ($\alpha_{3'} = 90^\circ$ in $\alpha_{3''} = 270^\circ$). V kolikor za sili \vec{F}_3' in \vec{F}_3'' upoštevamo intenziteto $F_3' = F_3'' = 30 \text{ kN}$ morata za ohranitev enakega vpliva delovati na medsebojni razdalji $a_3 = 2.0 \text{ m}$ (Slika 2.7).



Slika 2.7: Seštevanje poljubnega sistema sil v ravnini; (a) Načrt sil in (b) Mnogokotnik sil

Nalogo lahko rešimo po postopku zaporednega seštevanja posameznih sil. Najprej določimo prvo delno rezultanto $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_{R1'2}$, ki deluje v presečišču učinkovalnic sil \vec{F}_1 in \vec{F}_2 (točka $T_{1'2}$, Slika 2.7a). Nato v mnogokotniku sil k prvi delni rezultanti prištejemo naslednjo silo $\vec{F}_{R1'2} + \vec{F}_3'' = \vec{F}_{R1'23''}$. Delna vsota $\vec{F}_{R1'23''}$ deluje v točki $T_{1'23''}$ (v presečišču sil $\vec{F}_{R1'2}$ in \vec{F}_3''). K drugi delni vsoti v mnogokotniku sil vektorsko prištejemo naslednjo silo $\vec{F}_{R1'23''} + \vec{F}_4 = \vec{F}_{R1'23''4}$. Tretja delna vsota deluje v točki $T_{1'23''4}$, ki je določena s presečiščem učinkovalnic sil $\vec{F}_{R1'23''}$ in \vec{F}_4 . K

tretji delni vsoti vektorsko prištejemo še zadnjo preostalo silo $\vec{F}_{R1'23'4} + \vec{F}_3 = \vec{F}_R$, ki predstavlja skupno vsoto (rezultanto) zadanega sistema sil.

Kot prijemališče rezultante upoštevamo točko T_R , ki jo v načrtu sil določa presečišče učinkovalnic sil $\vec{F}_{R1'23'4}$ in \vec{F}_3 (Slika 2.7).

Rezultati grafičnega postopka so podani v mnogokotniku sil ter so naslednji:

$$F_R = 59\text{kN}, \alpha_R = 19.5^\circ, T_R = (1, 4.25).$$

Analitična rešitev:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_4 = (F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + F_4 \cos \alpha_4) \vec{e}_x + (F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2 + F_4 \sin \alpha_4) \vec{e}_y = \begin{cases} 55.981 \\ 19.641 \end{cases}$$

$$F_R = 59.327\text{kN}, \alpha_R = 19.333^\circ$$

Vsoto vseh vrtilnih momentov določimo z vsoto vplivov koncentriranih momentov in vplivov sil na koordinatno izhodišče:

$$\vec{M}_0^R = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i + \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = 5\vec{e}_z - 60\vec{e}_z + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 4 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 2 & 0 \\ 20 & 34.641 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 5 & 4 & 0 \\ 25.981 & -15 & 0 \end{vmatrix} = -214.642\vec{e}_z$$

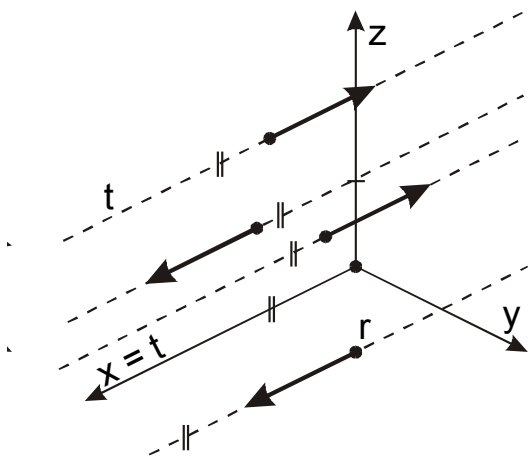
Za koordinato prijemališča lahko izberemo točko $x_{T_R} = 1.0\text{m}$, preostalo koordinato določimo z izrazom enakih mehanskih učinkov:

$$-214.642 = -55.981y_{T_R} + 19.641x_{T_R} \text{ in rezultat } y_{T_R} = 4.185\text{m}$$

2.2.3 Sistemi vzporednih sil

Kadar so vse sile obravnavanega sistema vzporedne (ležijo na vzporednih smernicah) se enačbe za določitev rezultante in redukcijo sistema sil bistveno poenostavijo.

V takšnem primeru koordinatni sistem izberemo običajno tako, da so smernice vseh sil vzporedne z x osjo (Slika 2.8).



Slika 2.8: Sistem vzporednih sil

Takšen sistem sil je podoben sistemu sil v ravnini in zato so momentni vektorji vedno pravokotni na smer sil in se vedno nahajajo v ravnini y-z.

Rezultanto sil in morebitnih koncentriranih momentov določimo:

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{e}_x \sum_{i=1}^n F_i$$

$$\vec{M}_R^0 = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n (M_{iy} \vec{e}_y + M_{iz} \vec{e}_z) + \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_i & y_i & z_i \\ F_i & 0 & 0 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} 0 \\ M_{iy} + z_i F_i \\ M_{iz} - y_i F_i \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

$$F_{Ry} = F_{Rz} = M_{Rx}^0 = 0$$

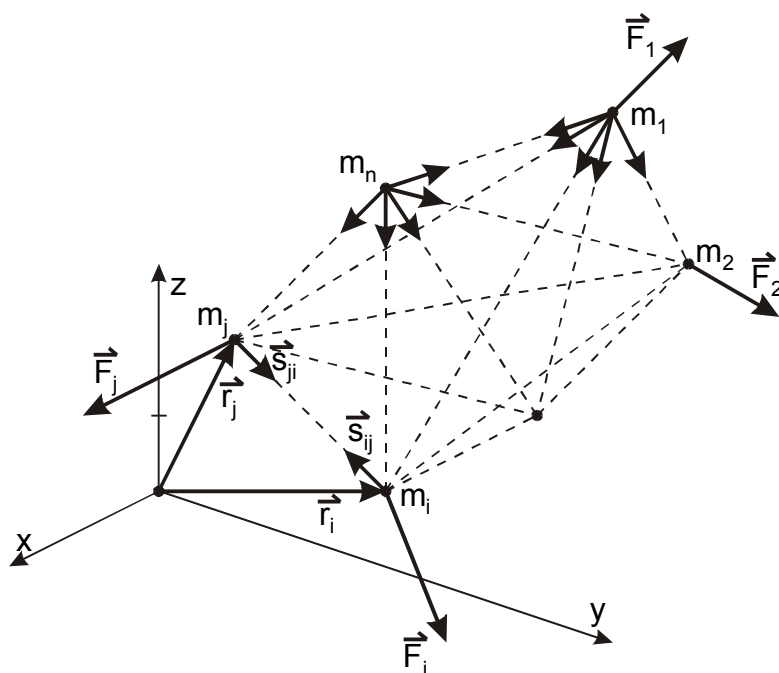
2.3 Ravnotežje sil in momentov

2.3.1 Ravnotežje realnih teles v mehaniki

Kadar realno telo obravnavamo z modelom sistema masnih točk [2] v prostoru (Slika 2.9) mora biti celotno telo (vse masne točke) v ravnotežju. **Zadostni pogoj za ravnotežje takšnega telesa je, da je vsaka masna točka sistema sama zase v ravnotežju.**

Pri analizi ravnotežja posameznih točk moramo upoštevati zunanje in notranje sile, ki na posamezno točko delujejo. Za notranje sile sistema velja:

$$\vec{S}_{ij} = -\vec{S}_{ji}, \quad \vec{S}_{ii} = 0; \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (2.23)$$



Slika 2.9: Sistem masnih točk z notranjimi \vec{S}_i in zunanjimi silami \vec{F}_i

Z upoštevanjem 1. Newton-ovega zakona velja za vsako masno točko zase pogoj ravnotežja sil:

$$\begin{aligned}
\vec{S}_{12} + \vec{S}_{13} + \dots + \vec{S}_{1n} + \vec{F}_1 &= 0 \\
\vec{S}_{21} + \vec{S}_{23} + \dots + \vec{S}_{2n} + \vec{F}_2 &= 0 \\
&\vdots \\
\vec{S}_{j1} + \vec{S}_{j2} + \dots + \vec{S}_{jn} + \vec{F}_j &= 0 \\
\vec{S}_{n1} + \vec{S}_{n2} + \dots + \vec{S}_{nj} + \vec{F}_n &= 0
\end{aligned} \tag{2.24}$$

S seštevanjem vseh n enačb sistema (2.24), dobimo:

$$(\vec{S}_{12} + \vec{S}_{21}) + (\vec{S}_{13} + \vec{S}_{31}) + \dots + (\vec{S}_{jn} + \vec{S}_{nj}) + \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_j + \vec{F}_n = 0.$$

V kolikor upoštevamo dodatni pogoj ($\vec{S}_{ij} = -\vec{S}_{ji}$) dobimo ravnotežni pogoj za sistem masnih točk (2.25).

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \tag{2.25}$$

Podobno kot pogoje za ravnotežje vseh sil lahko izrazimo tudi momentne ravnotežne pogoje vseh masnih točk na koordinatno izhodišče 0. Sistem masnih točk je v momentnem ravnotežju v kolikor so v ravnotežju vse masne točke sistema (2.26):

$$\begin{aligned}
\vec{r}_1 \times \vec{S}_{12} + \vec{r}_1 \times \vec{S}_{13} + \dots + \vec{r}_1 \times \vec{S}_{1n} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 &= 0 \\
\vec{r}_2 \times \vec{S}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{S}_{23} + \dots + \vec{r}_2 \times \vec{S}_{2n} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 &= 0 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
\vec{r}_j \times \vec{S}_{j1} + \vec{r}_j \times \vec{S}_{j2} + \dots + \vec{r}_j \times \vec{S}_{jn} + \vec{r}_j \times \vec{F}_j &= 0 \\
\vec{r}_n \times \vec{S}_{n1} + \vec{r}_n \times \vec{S}_{n2} + \dots + \vec{r}_n \times \vec{S}_{nj} + \vec{r}_n \times \vec{F}_n &= 0
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Zaradi pogoja ($\vec{S}_{ij} = -\vec{S}_{ji}$) velja:

$$\vec{r}_i \times \vec{S}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{S}_{ji} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{S}_{ij} = \vec{r}_{j/i} \times \vec{S}_{ij} = 0, \quad (i, j = 1, \dots, n) \tag{2.27}$$

V izrazu (2.27) smo upoštevali, da sta vektorja ($\vec{r}_i - \vec{r}_j$) in \vec{S}_{ij} vzporedna. Zato so momenti posameznih parov notranjih sil sistema na poljubno točko v prostoru enaki 0. Ker je vsota momentov posameznih masnih točk sistema enaki vsoti momentov za celotno telo, lahko pogoj ravnotežja telesa podamo:

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_{n-1} \times \vec{F}_{n-1} + \vec{r}_n \times \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0} \tag{2.28}$$

Izraz (2.25) predstavlja silni ravnotežni pogoj ter izraz (2.28) momentni ravnotežni pogoj za sistem masnih točk. Oba izraza hkrati (2.29) pa predstavljata **potrebna in zadostna** pogoja za ravnotežje splošnega sistema sil v prostoru.

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0} \tag{2.29}$$

Potrebno momentnega ravnotežnega pogoja (2.29) dokažemo z dvojico sil, ki predstavlja sistem dveh enako velikih sil, ki delujeta na vzporednih učinkovalnicah ter

sta nasprotno usmerjeni. Brez dvoma je pri takšnem sistemu sil izpolnjen silni ravnotežni pogoj $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_1 + (-\vec{F}_1) = \vec{0}$, vendar momentni ravnotežni pogoj v tem primeru ni izpolnjen, ker je rezultantni vpliv dvojice sil že poznani vrtilni moment $M = |\vec{F}_1|d$, kjer d označuje pravokotno razdaljo med vzporednima učinkovalnicama.

V realnih telesih je masa telesa zvezno porazdeljena in jih zato lahko obravnavamo s sistemom neskončnega števila med sabo povezanih masnih točk. Ugotovimo lahko, da je pri takšnem modelu masa posamezne točke m_i neskončno majhna. Ravnotežni pogoji za telesa z zvezno porazdeljeno maso imajo enako obliko kot v primeru teles s končnim številom masnih točk (v izrazih 2.24 in 2.26 je potrebno upoštevati število masnih točk $n = \infty$) ter jih zato prav tako podamo z vektorskima enačbama (2.29).

V kolikor sile \vec{F}_i in pripadajoče krajevne vektorje \vec{r}_i izrazimo v komponentni obliki z enotskimi vektorji $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ (2.30), ki predstavljajo ortonormirano bazo koordinatnega sistema z osmi x, y in z lahko vektorski enačbi (2.29) zapišemo v skalarni obliki z izrazom (2.31).

$$\vec{F}_i = F_{ix}\vec{e}_x + F_{iy}\vec{e}_y + F_{iz}\vec{e}_z, \quad \vec{r}_i = x_i\vec{e}_x + y_i\vec{e}_y + z_i\vec{e}_z \quad (2.30)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0, \quad (2.31)$$

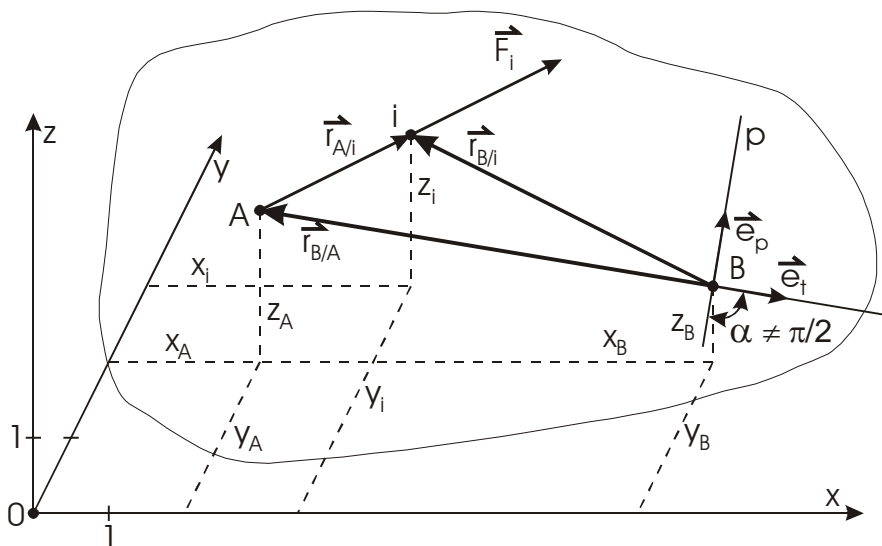
$$\sum_{i=1}^n (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) = 0, \quad \sum_{i=1}^n (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) = 0, \quad \sum_{i=1}^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = 0,$$

Enačbam (2.31) pravimo **osnovne enačbe statike togega telesa** v komponentni (skalarni) obliki. Imenujemo jih tudi **ravnotežne enačbe**.

Poljubni sistem sil v prostoru, ki ustreza ravnotežnim enačbam je statičen, ker ne povzroča gibanja togega telesa (takšno telo miruje oz. se lahko giblje premočrtno brez pospeška).

2.3.2 Alternativne oblike ravnotežnih enačb

Pri statiki togih teles je mnogokrat mogoče statične izračune precej poenostaviti z izbiro momentnih ravnotežnih pogojev (2.31) na različne točke telesa. Obravnavamo splošni sistem sil in dvojic sil v prostoru (Slika 2.10).



Slika 2.10: Nadomestitev osnovnih ravnotežnih pogojev z momentnimi na izbrani točki A in B tega telesa

Osnovno obliko ravnotežnih enačb $\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}$, $\vec{M}_R^0 = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0}$ zamenjamo z dvema momentnima enačbama na izbrani točki A in B v prostoru.

Z izračunom rezultante navorov na obe izbrani točki dobimo:

$$\vec{M}_R^A = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_{A/i} \times \vec{F}_i = \vec{0} \quad (2.32)$$

ter za točko B:

$$\vec{M}_R^B = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i - \vec{r}_B) \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n ((\vec{r}_i - \vec{r}_A) + (\vec{r}_A - \vec{r}_B)) \times \vec{F}_i = \vec{M}_R^A + \vec{r}_{B/A} \times \vec{F}_R = \vec{0} \quad (2.33)$$

S primerjavo izrazov (2.32) in (2.33) lahko ugotovimo, da je ob izpolnjenem pogoju $\vec{M}_R^A = \vec{0}$ z izrazom (2.33) na prvi pogled izpolnjen tudi prvotni pogoj $\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}$, kar bi pomenilo, da je z izrazom (2.33) hkrati zagotovljen tudi pogoj silnega ravnotežja.

Vendar izpolnjeni pogoj (2.33) ne zagotavlja vedno silnega ravnotežja sistema sil. Izraz (2.33) je vedno izpolnjen kadar velja $\vec{F}_R = \vec{0}$ in tudi v posebnem primeru $\vec{F}_R \neq \vec{0}$ in $\vec{r}_{B/A} \parallel \vec{F}_R$, ker je vektorski produkt dveh vzporednih vektorjev vedno enak $\vec{0}$.

Zato moramo v primeru zagotavljanja ravnotežja sistemov sil z uporabo ravnotežnih momentnih pogojev na dve poljubni točki v prostoru $\vec{M}_R^A = \vec{0}$ in $\vec{M}_R^B = \vec{0}$ izpolniti še dodatni pogoj silnega ravnotežja v smeri premice p, ki ne sme biti pravokotna na premico t ($\vec{e}_p \cdot \vec{e}_t \neq 0$, Slika 2.10).

$$F_{Rp} = \vec{F}_R \cdot \vec{e}_p = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{e}_p = 0, \quad \vec{e}_p \cdot \vec{e}_t \neq 0 \quad (2.34)$$

V kolikor bi za dodatni pogoj silnega ravnotežja upoštevali vsoto vseh sil v smeri premice, ki bi bila pravokotna na zveznico A-B ravnotežni pogoji niso vedno in brezpogojno izpolnjeni, ker je vsota vseh sil v primeru $\vec{r}_{B/A} \parallel \vec{F}_R$ v smeri pravokotno na

premico t (Slika 2.10) lahko identično enaka 0 ter je v tem primeru pogoj (2.34) trivialen in nima praktičnega pomena za rezultate mehanskih analiz.

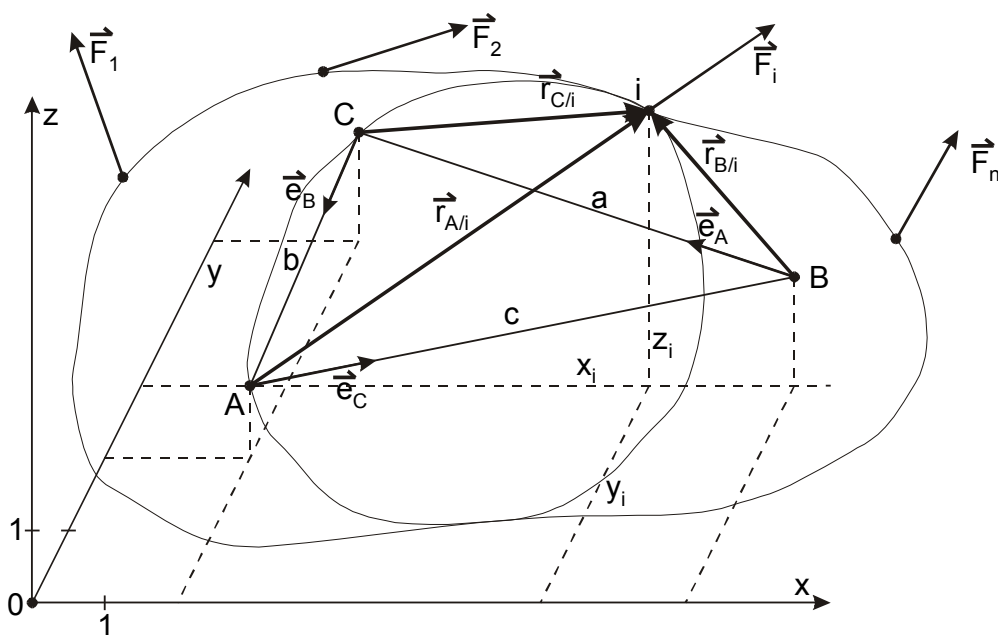
Dodatnemu silnemu ravnotežnemu pogoju se zagotovo izognemo v kolikor upoštevamo tri ravnotežne momentne pogoje na tri točke A, B in C, ki se ne nahajajo na skupni premici (Slika 2.11).

$$\vec{M}_R^A = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{F}_i = \vec{0}, \vec{M}_R^B = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i - \vec{r}_B) \times \vec{F}_i = \vec{0}, \vec{M}_R^C = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i - \vec{r}_C) \times \vec{F}_i = \vec{0}, \quad (2.35)$$

Trije momentni pogoji (2.35) povsem nadomeščajo osnovne ravnotežne pogoje (2.31).

Prej je že bilo dokazano, da momentna ravnotežna pogoja na točki A in B zagotavljata ravnotežje sistema v vseh primerih razen v kolikor je rezultantna sila \vec{F}_R vzporedna vektorju $\vec{r}_{A/B}$, ker v takšnem posebnem primeru ni izpolnjen osnovni ravnotežni pogoj $\vec{F}_R = \vec{0}$.

V kolikor smernica sile \vec{F}_R sovpada s točkama A in B je z momentnim ravnotežnim pogojem na točko C zagotovljena izpolnitev pogoja $\vec{F}_R = \vec{0}$. Podobni zaključki veljajo tudi v primerih kadar smernica sile \vec{F}_R sovpada z vektorjema $\vec{r}_{B/C}$ in $\vec{r}_{C/A}$.



Slika 2.11: Točke A, B in C, ki ne ležijo na isti premici

Vse tri vektorske oz. vseh devet pripadajočih skalarnih enačb (2.35) med sabo niso neodvisne. Povezujejo jih komponente momentnih vektorjev v smeri enotnih vektorjev $\vec{e}_c, \vec{e}_b, \vec{e}_a$, kjer z momentnimi enačbami (2.35) paroma za točki A in B, B in C ter C in A izvednotimo enake komponente momentnih vektorjev okrog izbranih osi s prej navedenimi enotskimi vektorji.

Ravnotežne enačbe na tri nekolinearne točke so povezane z naslednjimi izrazi:

$$\begin{aligned} M_c^{AB} &= \vec{M}_R^A \cdot \vec{e}_c = \vec{M}_R^B \cdot \vec{e}_c \\ M_a^{BC} &= \vec{M}_R^B \cdot \vec{e}_a = \vec{M}_R^C \cdot \vec{e}_a \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\vec{M}_b^{CA} = \vec{M}_R^C \bullet \vec{e}_b = \vec{M}_R^A \bullet \vec{e}_b$$

ki izražajo oz. določajo odvisnost med posameznimi vektorji momentov \vec{M}_R^A , \vec{M}_R^B in \vec{M}_R^C . Zato je v tem primeru od skupaj devetih skalarnih enačb (2.35) le šest neodvisnih, ki v celoti ustrezajo pogojem ravnotežja togega telesa v prostoru.

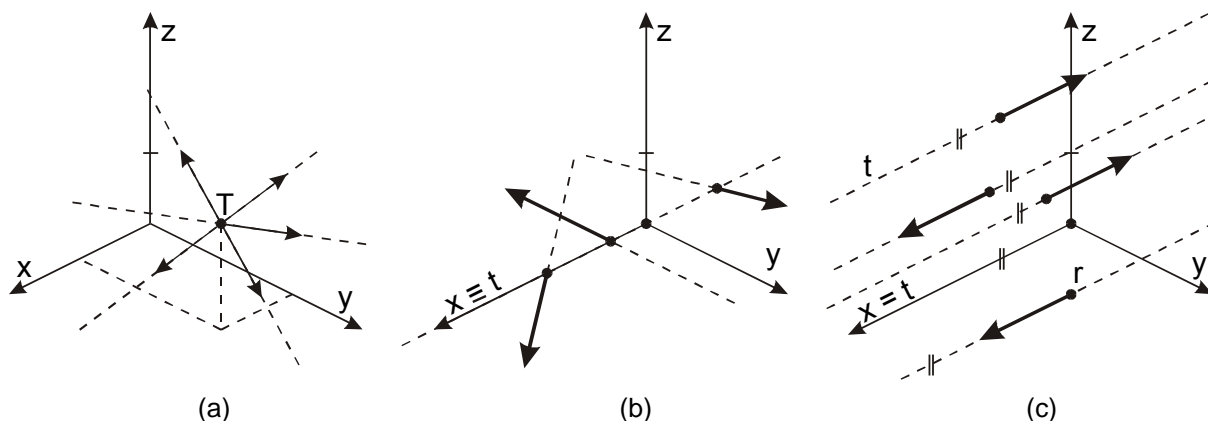
2.3.3 Ravnotežni pogoji za različne sisteme sil v ravnini in prostoru

Pri posebnih sistemih sil v prostoru se lahko ravnotežni pogoji (2.31) poenostavijo. Pogoji ravnotežja sil in vrtilnih momentov za splošni prostorski sistem sil (6 enačb) morajo biti načeloma vedno izpolnjeni. Vendar pri posebnih sistemih sil povsem zadostuje analiza omejenega števila enačb, ker so preostale enačbe v posebnih primerih identično izpolnjene.

2.3.3.1 Sistem sil s skupnim prijemaščem v prostoru (Slika 2.12a).

V tem posebnem primeru za ravnotežje zadošča izpolnitev treh silnih ravnotežnih pogojev, ker so momentni pogoji na točko A (prijemališče sile) identično vedno izpolnjeni.

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0, \quad (2.37)$$



Slika 2.12: Posebni sistemi sil; (a) Sistem sil s skupnim prijemaščem v prostoru; (b) Sistem sil, ki sekajo skupno premico v prostoru in (c) Sistem vzporednih sil v prostoru

2.3.3.2 Sistem sil, ki sekajo skupno premico v prostoru (Slika 2.12b).

V tem primeru moramo upoštevati tri silne ravnotežne pogoje v prostoru ter dva momentna ravnotežna pogoja v ravnini, katere normala je premica t. V kolikor premica t sovpada z x-osjo je momentni ravnotežni pogoj glede na x-os identično vedno izpolnjen.

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0, \quad (2.38)$$

2.3.3.3 Sistem vzporednih sil v prostoru (Slika 2.12c).

Vse sile sistema se morajo nahajati na vzporednih smernicah (t). Pri takšnem sistemu sil je od nič različna komponenta sil le v smeri sil, od 0 različni momentni komponenti pa se nahajata v ravnini, ki je pravokotna na smernice sil. V kolikor koordinatni sistem izberemo tako, da smernice sil sovpadajo z x osjo so zadostni naslednji ravnotežni pogoji.

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0, \quad (2.39)$$

2.3.3.4 Sistem sil v ravnini x-y (Slika 2.13).

V mehaniki ravnotežne pogoje mnogih realnih ravninskih konstrukcij obravnavamo z 2D modelom togega telesa, ki so obremenjene z različnimi sistemi obtežb, ki skupaj predstavljajo poljubni sistem sil v ravnini oz. v karakterističnem prerezu togega telesa.

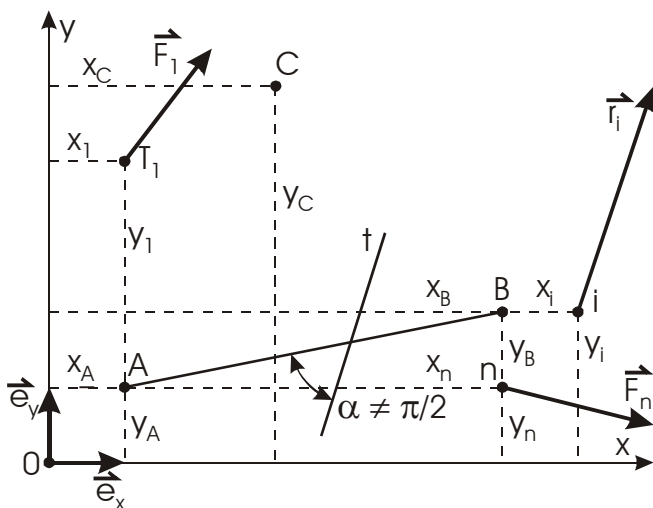
V to skupino prištevamo 2D ravninske konstrukcije, stene in tudi mnogo prostorskih konstrukcij, ki se v vzdolžni smeri ne spreminjajo ter so v vzdolžni smeri enakomerno obremenjene (podporni zidovi, stene objektov, temelji, cestni nasipi itd.).

Sistem sil v ravnini (Slika 2.13) ter lahko vključuje tudi koncentrirane momente, ki jih upoštevamo z modeli ekvivalentnih dvojic sil. Ker se vse sile nahajajo v ravnini x-y so

tri ravnotežne enačbe $\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0, \sum_{i=1}^n M_{ix}^0 = 0, \sum_{i=1}^n M_{iy}^0 = 0$ identično izpolnjene za vsaki

oz. poljubni sistem sil v ravnini. Za zagotovitev ravnotežja morajo biti izpolnjene preostale tri ravnotežne enačbe:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iz}^0 = 0 \quad (2.40)$$



Slika 2.13: Poljubni sistem sil v ravnini x-y

Momentno ravnotežno enačbo lahko izvednotimo na poljubno točko v ravnini x-y.

$$\sum_{i=1}^n M_{iz}^0 = \sum_{i=1}^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix})$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iz}^A = \sum_{i=1}^n ((x_i - x_A) F_{iy} - (y_i - y_A) F_{ix}) = \sum_{i=1}^n M_{iz}^0 - x_A \sum_{i=1}^n F_{iy} + y_A \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad (2.41)$$

Izraz (2.40) potrjuje, da se vrednosti momentov izračunane na različne točke v ravnini x-y za poljubni sistem sil, ki je v silnem ravnotežju med sabo ne razlikujejo.

Sistem ravnotežnih enačb (2.41) lahko nadomestimo z eno enačbo za ravnotežje sil ter z dvema momentnima enačbama na dve poljubni točki A in B v ravnini x-y. Podobno kot v izrazu (2.41) lahko podamo momentni pogoj na točko B.

$$\sum_{i=1}^n M_{iz}^B = \sum_{i=1}^n M_{iz}^A - (x_B - x_A) \sum_{i=1}^n F_{iy} + (y_B - y_A) \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad (2.42)$$

Enačba (2.42) kaže, da je lahko ob že zgoraj navedenem pogoju $\sum_{i=1}^n M_{iz}^A = 0$ izpolnjena tudi v primeru kadar pogoj ravnotežja vseh sil v celoti ni povsem izpolnjen. Ta primer se lahko pojavi v kolikor je rezultantna sila sistema \vec{F}_R vzporedna premici na kateri se nahajata točki A in B. Zato je potrebno k obema momentnima pogojema dodati še pogoj silnega ravnotežja v smeri premice t, ki ne sme biti pravokotna na zveznico \overline{AB} (Slika 2.13). Zato lahko osnovne ravnotežne pogoje (2.40) v celoti ekvivalentno nadomestimo s pogoji (2.43).

$$\sum_{i=1}^n F_{it} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iz}^A = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iz}^B = 0 \quad (2.43)$$

Poljubni sistem v ravnini je vedno v ravnotežju kadar so vsote vseh momentov na tri poljubne točke v prostoru enake nič.

V kolikor imamo izpolnjena pogoja $\sum_{i=1}^n M_{iz}^A = 0, \sum_{i=1}^n M_{iz}^B = 0$ še vedno obstaja možnost, da silni ravnotežni pogoji niso izpolnjeni le v primeru, kadar je rezultantna sila \vec{F}_R vzporedna zveznici \overline{AB} . Z izbiro nekolinearne točke C je z izpolnitvijo momentnega pogoja na to točko zagotovo zagotovljeno tudi silno ravnotežje sistema sil v ravnini.

$$\sum_{i=1}^n M_{iz}^C = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iz}^A = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iz}^B = 0 \quad (2.44)$$

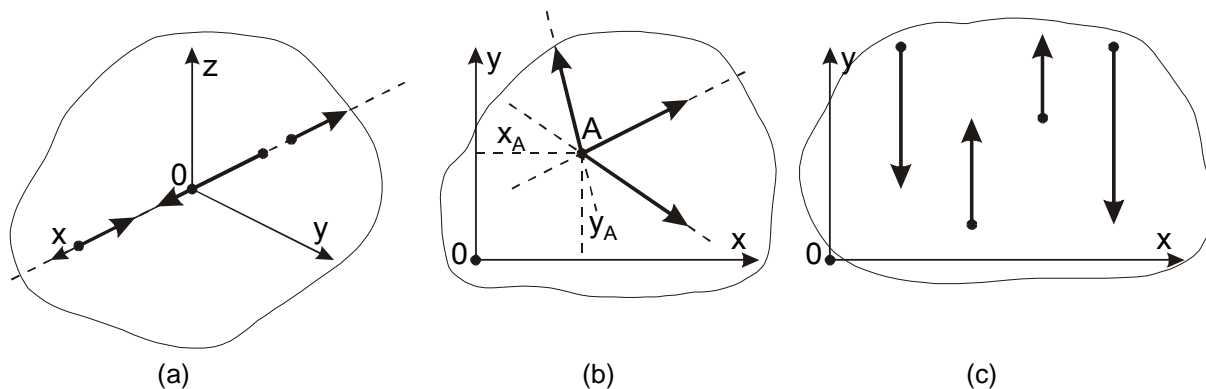
Pri ravninskem sistemu sil je označba momentne komponente M_{iz}^0 , ki jo povzroča posamezna sila na koordinatno izhodišče nepotrebna, ker obstaja le ena komponenta navora (sicer v smeri osi z) ter jo bomo zato v nadaljevanju zapisali M_i^0 .

2.3.3.5 Sistem sil, ki se nahajajo na skupni premici (Slika 2.14a).

Kolinearni sistem sil je v bistvu najenostavnejši, kjer za zagotovitev ravnotežja sistema zadošča le pogoj silnega ravnotežja v smeri skupne premice. V kolikor učinkovalnica vseh sil sovpada z x osjo ga lahko zapišemo:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad (2.45)$$

V primeru kolinearnih sil pogoj (2.45) zagotavlja identično izpolnjevanje vseh ostalih pet ravnotežnih pogojev za sistem sil v prostoru.



Slika 2.14: (a) Kolinearni sistem sil, (b) Sistem sil s skupnim prijemaščem v ravnini x-y in (c) Sistem vzporednih sil v ravnini

2.3.3.6 Sistem sil s skupnim prijemašiščem v ravnini x-y (Slika 2.14b).

Za ravnotežje sistema sil s skupnim prijemašiščem v ravnini zadostujeta le dva osnovna silna ravnotežna pogoja. V kolikor sta izpolnjena oba silna pogoja je vedno hkrati oz. identično izpolnjen tudi momentni ravnotežni pogoj na os, ki je pravokotna na ravnino v kateri sistem sil deluje.

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad (2.46)$$

2.3.3.7 Sistem vzporednih sil v ravnini x-y (Slika 2.14c).

Za ravnotežje sistema vzporednih sil v ravnini zadostujeta le dva ravnotežna pogoja in sicer pogoj ravnotežja sil v smeri delovanja vzporednih sil in pogoj ravnotežja momentov na os, ki je pravokotna na ravnino v kateri sistem sil deluje. Za primer na (Slika 2.14c) velja:

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0 \quad (2.47)$$

2.4 Uravnoteženje sistemov sil

Poljuben sistem sil v prostoru, katerega mehanske vplive na togo telo v celoti določa posplošena (generalizirana) sila $\vec{F}_R^A = \{\vec{F}_R, \vec{M}_R^A\}^T$ lahko vedno uravnotežimo z drugim sistemom sil, ki ima v primerjavi s prvotnim sistemom enake a nasprotno usmerjene učinke (2.48).

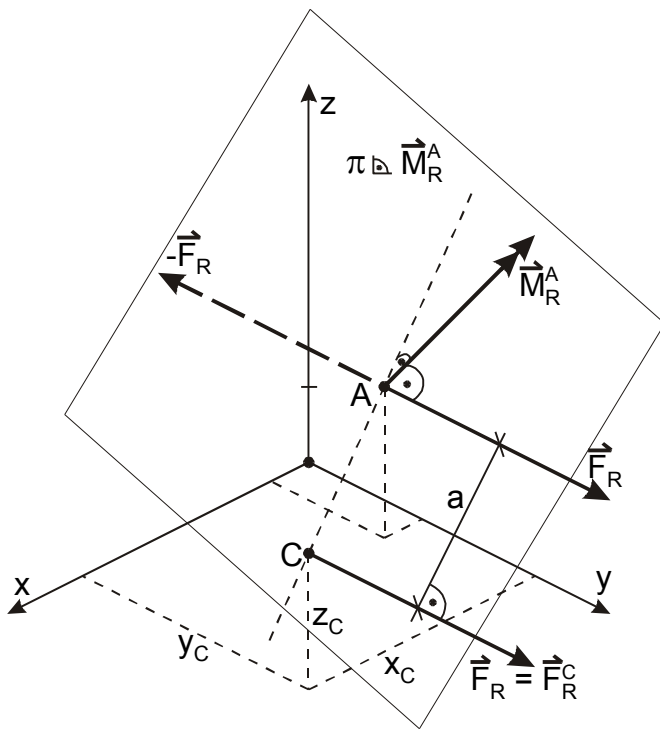
$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_R \\ \vec{M}_R^A \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \sum_{k=1}^m \vec{F}_k \\ \sum_{k=1}^m \vec{M}_k + \sum_{k=1}^m (\vec{r}_k - \vec{r}_A) \times \vec{F}_k \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad (2.48)$$

V izrazu (2.48) vektorja \vec{F}_R, \vec{M}_R^A označujeta rezultatno silo in rezultatni vrtilni moment določen na točko A prvotnega sistema sil, ki ga uravnotežimo z novim sistemom sil, ki ga lahko predstavlja m koncentriranih sil \vec{F}_k s prijemašišči \vec{r}_k ter m koncentriranih momentov \vec{M}_k (dvojic sil).

Rezultatni sili \vec{F}_R in rezultatnemu momentu \vec{M}_R^A pravimo tudi glavna sila in glavni moment podanega sistema sil [1].

2.4.1 Sistemi sil v prostoru

1. Kadar sta glavna sila in glavni moment med sabo pravokotna ju lahko vedno nadomestimo z eno samo silo, ki deluje v točki C, ki je za razdaljo a odmaknjena od točke A v ravnini π (Slika 2.15).



Slika 2.15: Uravnoteženje sistema sil, kjer sta glavni sili med sabo pravokotni ($\vec{M}_R^A \bullet \vec{F}_R = 0$)

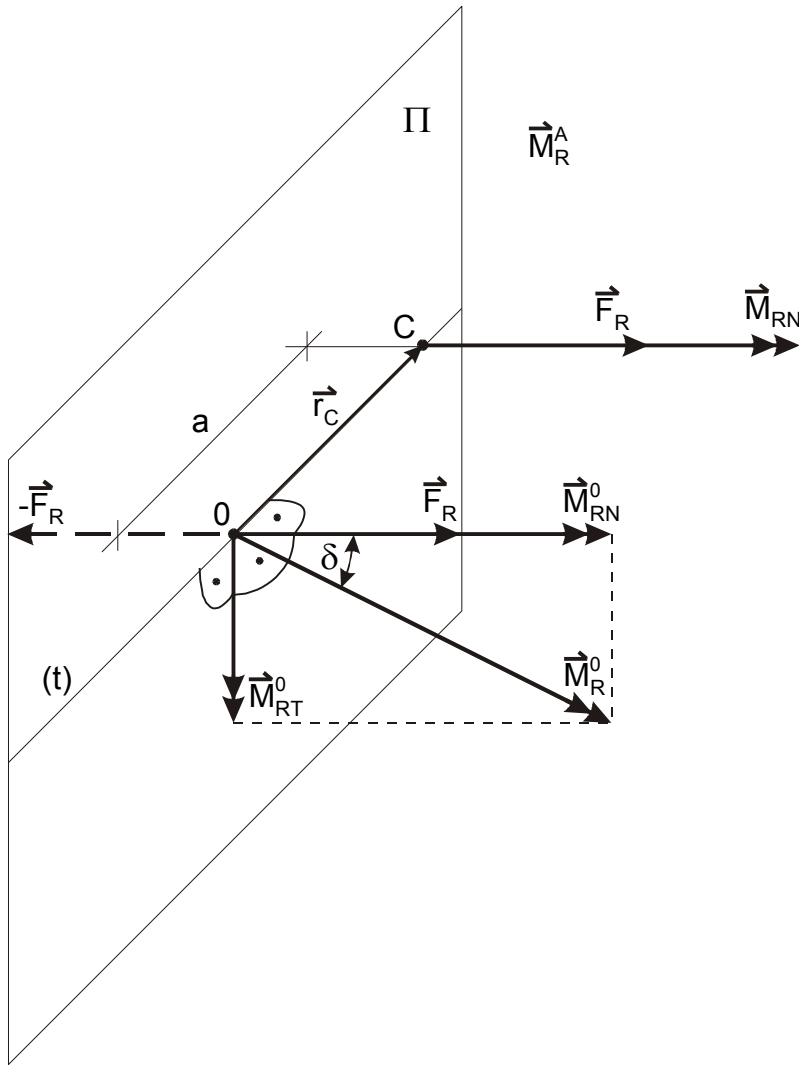
Skozi prijemališče resultantne sile A položimo ravnino π , katere normalo predstavlja glavni moment \vec{M}_R^A , glavna sila \vec{F}_R pa se nahaja v ravnini π . Učinek glavnega momenta nadomestimo z dvojico sil ($-\vec{F}_R, \vec{F}_R$), ki se nahaja v ravnini π . Vsota vseh sil s prijemališčem v točki A je z dodano dvojico sil identično enaka 0, sila $\vec{F}_R = \vec{F}_R^C$, ki deluje v točki C pa hkrati nadomešča mehanske vplive glavne sile in glavnega momenta [1].

Točka C se nahaja v ravnini π ter je za razdaljo $a = \frac{|\vec{M}_R^A|}{|\vec{F}_R|}$ oddaljena od točke A v smeri pravokotno na smer resultantne sile (Slika 2.15).

Ker resultantna sila $\vec{F}_R = \vec{F}_R^C$, ki deluje v točki C predstavlja skupne učinke prvotnega sistema sil lahko takšen sistem sil vedno uravnotežimo le z eno silo npr. $\vec{F}_1 = -\vec{F}_R$ s prijemališčem v točki C (Slika 2.15).

2. Druga skrajna lega glavne sile in glavnega momenta nastopi kadar sta glavna sila in glavni moment med sabo vzporedna. Znano je, da takšnega sistema sil ni več mogoče poenostaviti ter ga imenujemo tudi **dinamo** [1]. V nadaljevanju bomo dokazali, da je mogoče mehanske vplive poljubnega sistema sil vedno nadomestiti z dinamom.

Mehanske vplive poljubnega sistema sil najprej nadomestimo z resultantno silo \vec{F}_R in resultantnim momentom \vec{M}_R^0 , ki ga določimo na točko 0 (Slika 2.16).



Slika 2.16: Nadomestitev sistema sil z dinamom

Rezultantni moment \vec{M}_R^0 razstavimo v komponenti in sicer na komponento \vec{M}_{RN}^0 , ki je vzporedna rezultantni sili \vec{F}_R ter \vec{M}_{RT}^0 , ki je pravokotna na glavno silo, ter se nahaja v ravnini π , ki je prav tako pravokotna na glavno silo \vec{F}_R (Slika 2.16).

$$M_{RN}^0 = M_R^0 \cos \delta = M_R^0 (\vec{F}_R \cdot \vec{M}_R^0) / (|\vec{F}_R| |\vec{M}_R^0|) = \vec{F}_R \cdot \vec{M}_R^0 / |\vec{F}_R| \quad (2.49)$$

$$M_{RT}^0 = M_R^0 \sin \delta = \sqrt{|\vec{M}_R^0|^2 - |\vec{M}_{RN}^0|^2} \quad (2.50)$$

Sedaj lahko moment \vec{M}_{RT}^0 nadomestimo z dvojico sil $(-\vec{F}_R, \vec{F}_R)$ katere prijemališče se nahaja v točki C v ravnini π na premici t (Slika 2.16), ki je pravokotna na momentni vektor \vec{M}_{RT}^0 . Točka C je za razdaljo $a = |\vec{M}_{RT}^0| / |\vec{F}_R|$ odmaknjena od točke 0 v smeri premice t v ravnini π .

Koordinate točke C, ki predstavlja prijemališče dinamoma $(\vec{F}_R, \vec{M}_{RN}^0)$ določimo na osnovi pogoja ekvivalentnih momentnih učinkov.

$$\vec{M}_R^0 = \vec{r}_C \times \vec{F}_R + \vec{M}_{RN}^0 = \vec{r}_C \times \vec{F}_R + (\vec{F}_R \cdot \vec{M}_R^0) \vec{F}_R / |\vec{F}_R|^2 \quad (2.51)$$

Izraz 2.51 lahko zapišemo še v bolj nazorni obliki:

$$\vec{M}_R^0 - \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_C & y_C & z_C \\ F_{Rx} & F_{Ry} & F_{Rz} \end{vmatrix} = (\vec{F}_R \bullet \vec{M}_R^0 / |\vec{F}_R|^2) \begin{Bmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \\ F_{Rz} \end{Bmatrix}$$

Koordinate točke C določimo z rešitvijo treh skalarnih enačb (2.52).

$$\begin{aligned} M_{Rx}^0 - (y_C F_{Rz} - z_C F_{Ry}) &= \frac{\vec{F}_R \bullet \vec{M}_R^0}{|\vec{F}_R|^2} F_{Rx} \\ M_{Ry}^0 - (z_C F_{Rx} - x_C F_{Rz}) &= \frac{\vec{F}_R \bullet \vec{M}_R^0}{|\vec{F}_R|^2} F_{Ry} \\ M_{Rz}^0 - (x_C F_{Ry} - y_C F_{Rx}) &= \frac{\vec{F}_R \bullet \vec{M}_R^0}{|\vec{F}_R|^2} F_{Rz} \end{aligned} \quad (2.52)$$

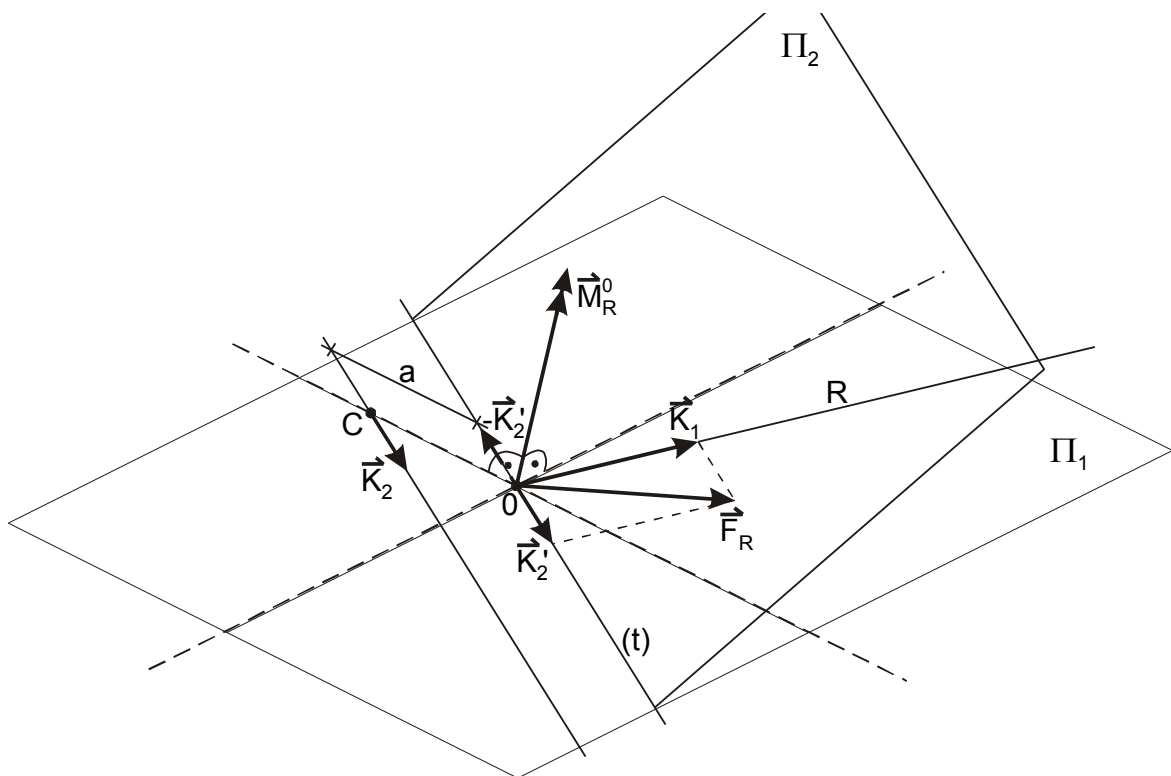
Poljubni sistem sil v prostoru lahko vedno uravnotežimo z eno silo in enim koncentriranim navorom, ki sta po velikosti enaka komponentama dinama, delujeta na isti učinkovalnici ter sta z ozirom na vektorja $(\vec{F}_R, \vec{M}_{RN}^0)$ nasprotno usmerjena.

3. Poljubni sistem sil v prostoru katerega mehanske učinke lahko iz vrednotimo na izhodišče koordinatnega sistema ter jih predstavimo z generalizirano silo $\vec{F}_R^0 = \{\vec{F}_R, \vec{M}_R^0\}$ lahko vedno nadomestimo z dvema koncentriranimi silama npr. \vec{K}_1 in \vec{K}_2 , ki v celoti nadomeščata učinke podanega poljubnega sistema sil.

V tem primeru lahko smer in prijemališče ene izmed sil (npr. \vec{K}_1) poljubno izberemo, ter nato prijemališče in učinkovalnico druge sile (npr. \vec{K}_2) ter velikosti obeh sil določimo z upoštevanjem ravnotežnih pogojev.

Trditev dokažimo grafo-analitično. Slika 2.17 prikazuje: v točki 0 delujeta vektorja \vec{F}_R in \vec{M}_R^0 . Ravnina π_1 je pravokotna na momentni vektor \vec{M}_R^0 . Sila \vec{K}_1 deluje na premici p, ki poteka skozi koordinatno izhodišče. Premica p in učinkovalnica rezultantne sile \vec{F}_R določata ravnino π_2 , ki seka ravnino π_1 v premici t.

Rezultantno silo \vec{F}_R najprej v ravnini π_2 razstavimo (nadomestimo) s silama \vec{K}_1 in s pomožno silo \vec{K}_2' , ki deluje vzdolž premice t, ki je skupna obema ravninama in zato sila \vec{K}_2' deluje hkrati v obeh ravninah π_2 in π_1 .



Slika 2.17: Nadomestitev vplivov poljubnega sistema sil v prostoru z dvema silama

Sili \vec{K}_1 in \vec{K}_2' v celoti nadomeščata rezultantno silo \vec{F}_R . Preostali vpliv prvotnega sistema sil t.j. moment \vec{M}_R^0 nato nadomestimo z dvojico sil ($-\vec{K}_2', \vec{K}_2' = \vec{K}_2$) na medsebojni razdalji $a = |\vec{M}_R^0|/|\vec{K}_2|$ v ravnini π_1 . Tako poljubno izbrana sila \vec{K}_1 in sila \vec{K}_2 , ki deluje v točki C v celoti nadomeščata vplive podanega splošnega sistema sil v prostoru (Slika 2.17).

Takšen sistem sil lahko vedno uravnotežimo z dvema silama npr. $\vec{F}_1 = -\vec{K}_1$ in $\vec{F}_2 = -\vec{K}_2$, ki delujeta v enakih prijemališčih kot osnovni sili.

Primer 2.5:

Splošni sistem sil z rezultantnimi vplivi $\vec{F}_R = \{2 \ -1 \ 2\}$ in $\vec{M}_R^0 = \{2 \ 5 \ 4\}$ uravnotežimo z dvema silama \vec{K}_1 in \vec{K}_2 . Sila \vec{K}_1 naj deluje v točki A (1, 3, 2) ter ima smer x osi (Slika 2.18). Sila \vec{K}_2 naj deluje v točki C.

Določiti je potrebno jakost sile \vec{K}_1 , tri komponente sile \vec{K}_2 in prijemališče sile \vec{K}_2 .

Ravnotežne pogoje tokrat podamo v skalarni obliki:

$$\sum F_{ix} = K_1 + K_{2x} + 2 = 0$$

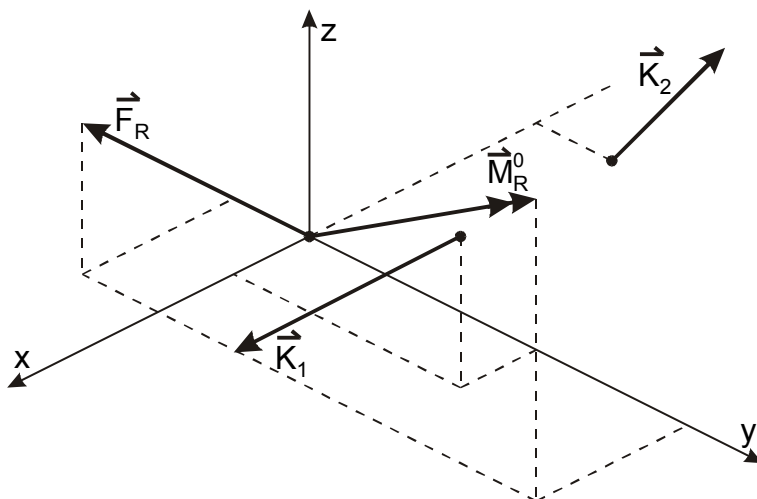
$$\sum F_{iy} = K_{2y} - 1 = 0$$

$$\sum F_{iz} = K_{2z} + 2 = 0;$$

$$\sum M_x = y_C K_{2z} - z_C K_{2y} + 2 = 0$$

$$\sum M_y = 2K_1 + z_C K_{2x} - x_C K_{2z} + 5 = 0$$

$$\sum M_z = -3K_1 + x_C K_{2y} - y_C K_{2x} + 4 = 0$$



Slika 2.18: Uravnoteženje sistema sil v prostoru z dvema silama

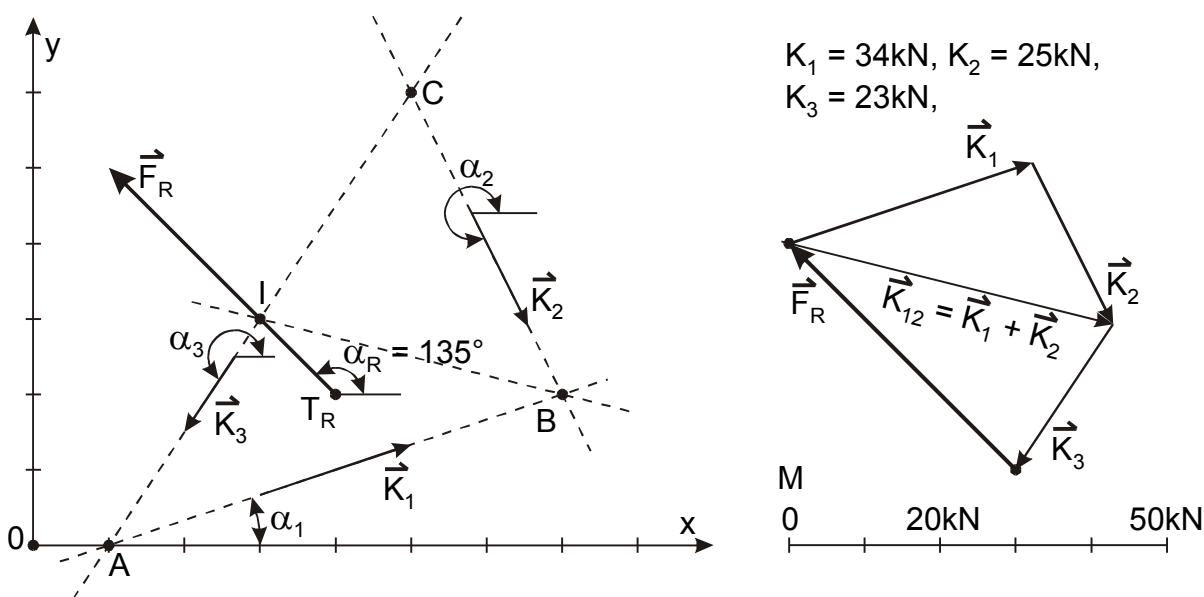
V ravnotežnih enačbah simbol $\sum M_i$ označuje vsoto momentov vseh sil na os i , ($i=x,y,z$) koordinatnega sistema. Opravka imamo s šestimi ravnotežnimi enačbami ter sedmimi neznankami. Sistem rešimo tako, da si eno izmed neznank (to je lahko le ena izmed koordinat prijemališča sile \vec{K}_2) poljubno izberemo. V kolikor je komponenta $K_{2z} \neq 0$ (sila \vec{K}_2 v tem primeru ni vzporedna z ravnino $x-y$) lahko izberemo koordinato $z_c = 0$ ter dobimo naslednjo rešitev:

$$K_{2x} = -19/6, K_{2y} = 1, K_{2z} = -2, K_1 = 7/6;$$

$$x_c = -22/6, y_c = 1$$

Primer 2.6:

Rezultantni vpliv sistema sil v ravnini $x-y$ je določen z rezultantno silo $\vec{F}_R = \{-30, 30, 0\}$ s prijemališčem v točki $T_R(3,3,0)$. Sistem je potrebno uravnotežiti s tremi silami ($\vec{K}_1, \vec{K}_2, \vec{K}_3$), ki delujejo na premicah $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ (Slika 2.19), ki jih določajo koordinate točk: $A(1,0,0), B(7,2,0), C(5,6,0)$.



Slika 2.19: Grafično uravnoteženje sistema sil v ravnini s tremi silami

Točki I v kateri rezultantna sila \vec{F}_R seka učinkovalnico sile \vec{K}_3 pravimo Ritter-jeva točka. Ker mora biti celotni sistem sil v ravnotežju mora biti izpolnjen tudi momentni ravnotežni pogoj na točko I. Na to točko lahko povzročata moment le sili \vec{K}_1 in \vec{K}_2 katerih vsota $\vec{K}_{12} = \vec{K}_1 + \vec{K}_2$ ima prijemališče v točki B (Slika 2.19). Moment sile \vec{K}_{12} na točko I je lahko nič le v primeru kadar ta sila deluje na zveznici točk \overline{IB} .

Premici, ki jo določata točki I in B pravimo Ritter-jeva premica ter predstavlja učinkovalnico sile $\vec{K}_{12} = \vec{K}_1 + \vec{K}_2$. Rezultantno silo \vec{F}_R najprej v mnogokotniku sil uravnotežimo s silama \vec{K}_3 in vsoto sil $\vec{K}_1 + \vec{K}_2$. Sili \vec{K}_1 in \vec{K}_2 še nato določimo tako, da že znano silo \vec{K}_{12} razstavimo v dve komponenti po pravilu trikotnika sil (Slika 2.19).

Analitično podani sistem sil v ravnini uravnotežimo z upoštevanjem treh momentnih ravnotežnih pogojev na tri nekolinearne točke npr. A, B in C.

$$\sum M_z^A = (x_c - x_A)K_2 \sin \alpha_2 - (y_c - y_A)K_2 \cos \alpha_2 + (x_R - x_A)F_{Ry} - (y_R - y_A)F_{Rx} = 0$$

$$K_2 = (3 \cdot 30 - 2 \cdot -30) / (-4 \sin 296.565^\circ + 6 \cos 296.565^\circ) = 23.958 \text{ kN}$$

$$\sum M_z^B = (x_c - x_B)K_3 \sin \alpha_3 - (y_c - y_B)K_3 \cos \alpha_3 + (x_R - x_B)F_{Ry} - (y_R - y_B)F_{Rx} = 0$$

$$K_3 = (-3 \cdot 30 - 0 \cdot -30) / (2 \sin 236.31^\circ + 4 \cos 236.31^\circ) = 23.179 \text{ kN}$$

$$\sum M_z^C = (x_A - x_C)K_1 \sin \alpha_1 - (y_A - y_C)K_1 \cos \alpha_1 + (x_R - x_C)F_{Ry} - (y_R - y_C)F_{Rx} = 0$$

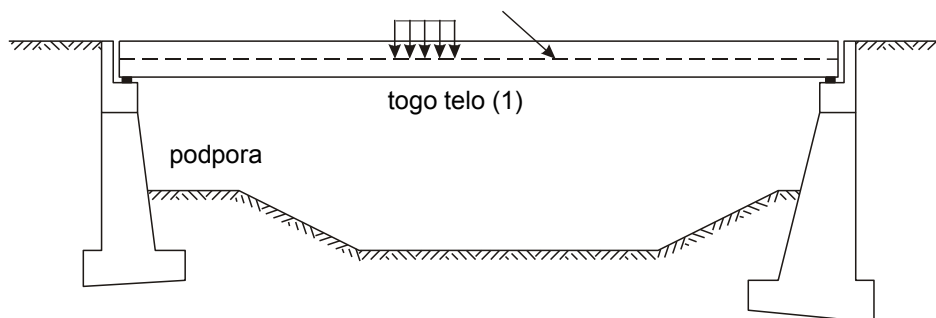
$$K_1 = (-1 \cdot 30 + 4 \cdot -30) / (4 \sin 18.435^\circ - 6 \cos 18.435^\circ) = 33.882 \text{ kN}$$

3 VEZANO IN PROSTO TOGO TELO

Pri statiki gradbenih konstrukcij preučujemo pogoje gibanja in mirovanja ter dejanskih zunanjih in notranjih obremenitev realnih trdnih teles. Posamezni elementi gradbenih konstrukcij prevzemajo zunanje obtežbe ter jih prenašajo na podpore, sosednje konstrukcijske elemente ali na temeljna tla. Pri statiki togih teles obravnavamo le takšne gradbene konstrukcije, ki so stabilno podprte ter se pri obtežitvah s poljubnimi obtežbami ne morejo premikati. Za takšna telesa in za mirujoče sisteme povezanih togih teles pravimo, da so kinematično stabilni.

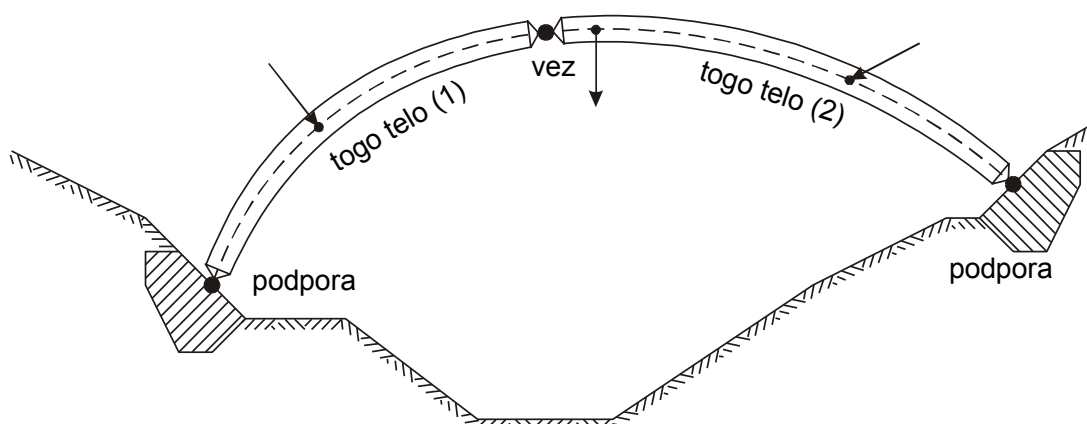
Pogoje kinematične stabilnosti togih teles izpolnimo tako, da posamezna toga telesa podpremo s podporami ali pa z vezmi povežemo z drugimi togimi telesi tako, da se sistem togih teles v celoti ne more premikati. Pogoj, da so vsa toga telesa v sistemu nepremična je zadosten ter zagotavlja kinematično stabilnost celotnega sistema togih teles.

Podpore so posebni konstrukcijski elementi, ki preprečujejo premike togega telesa v izbrani točki. Takšnim podporam pravimo točkovne podpore ter v obravnavani točki preprečujejo premike telesa v določeni smeri. Slika 3.1 prikazuje obteženo tego telo v ravnini. Telo je podprto s podporama, ki preprečujeta absolutne premike togega telesa v izbranih podpornih točkah.



Slika 3.1: Stabilno podprto tego telo v ravnini (podpore preprečujeta premike telesa v točkah, kjer prekladna konstrukcija nalega na krajni podpori objekta)

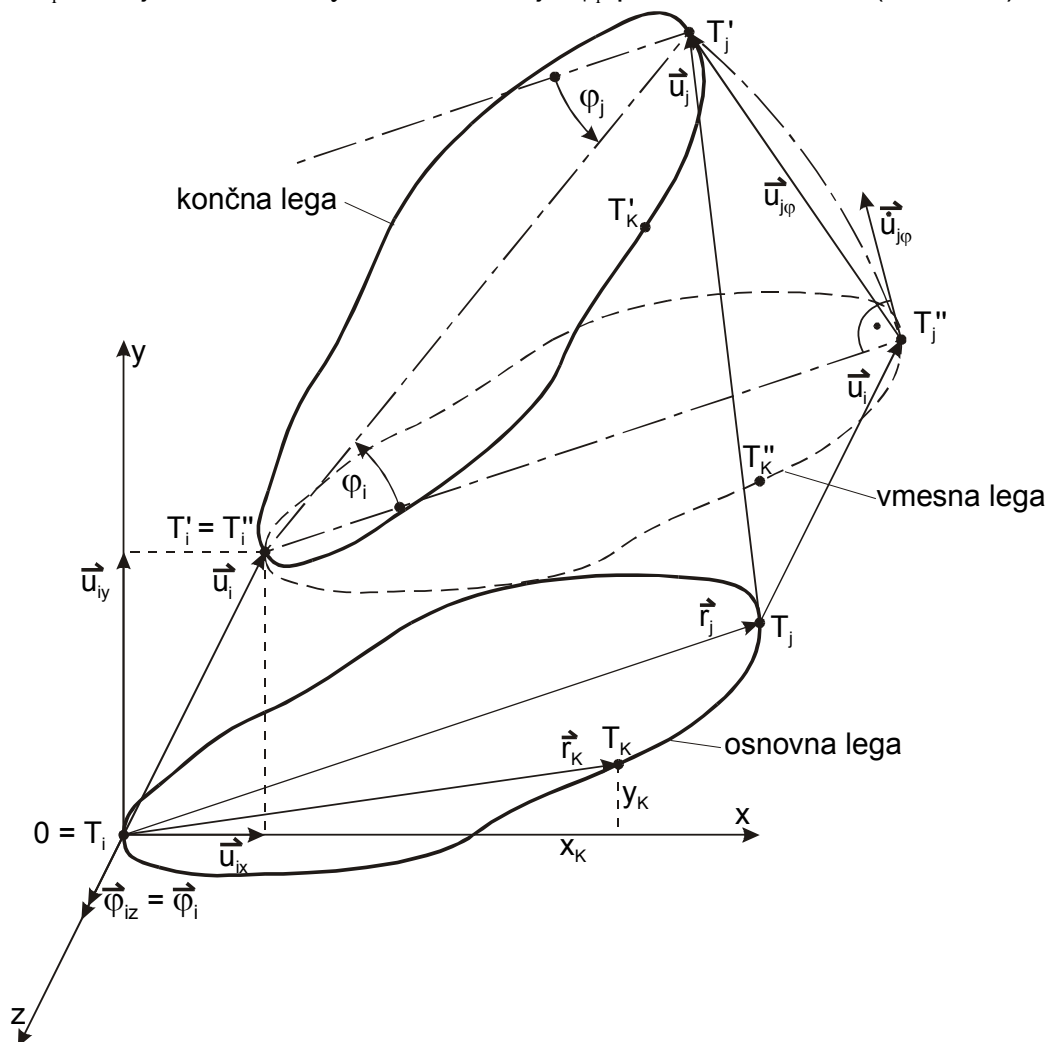
Kadar obravnavamo hkrati več togih teles, ki so med sabo povezana imamo opravka s sistemom togih teles. Posebnim elementom, ki povezujejo posamezna toga telesa v določenih točkah pravimo **vezi**. **Vezi so posebni konstrukcijski elementi, ki v izbranih točkah preprečujejo relativne premike dveh ali več togih teles v določeni smeri.** Slika 3.2 prikazuje dve togi telesi povezani z vezjo, ki zagotavlja, da je obravnavani sistem togih teles stabilen.



Slika 3.2: Sistem dveh povezanih togih teles (podpore preprečujeta relativne premike med temeljema in togimi telesi 1 in 2, vez v kroni konstrukcije preprečuje relativne premike obeh togih teles v skupni točki)

3.1 Pomiki togih teles v ravnini

Zato moramo za prenašanje obtežb togo telo podpreti s podporami, ki omejujejo in preprečujejo pomike togih teles. Gibanje oz. spremembo lege togega telesa v prostoru lahko vedno izrazimo s premikom (translacijo) \vec{u}_i poljubne točke (i) ter rotacijo telesa $\vec{\varphi}_i$ okrog izbrane točke (i). Pri togih telesih v ravnini se translatorsni premik \vec{u}_i nahaja v ravnini x-y, vektor rotacije $\vec{\varphi}_i$ pa ima smer osi z (Slika 3.3).



Slika 3.3: Pomik togega telesa v ravnini x-y

Pomik poljubne točke telesa lahko izrazimo (Slika 3.3):

$$\vec{u} = \vec{u}_i + \vec{u}_\varphi \quad (3.1)$$

V kolikor je vektor rotacije telesa okrog točke i majhen ($|\vec{\varphi}_i| \Rightarrow 0$) ima komponenta pomika $\vec{u}_{j\varphi}$ v točki T_j smer, ki je pravokotna na vektor \vec{r}_j ter velikost, ki je sorazmerna velikosti zasuka $|\vec{\varphi}_i|$ in dolžini vektorja $|\vec{r}_j|$ (pri majhnih zasukih smer premikov sovpada s smerjo trenutne hitrosti). Pomik poljubne točke telesa izvednotimo:

$$\vec{u} = \vec{u}_i + \vec{\varphi}_i \times \vec{r} \quad (3.2)$$

kjer \vec{r} označuje vektor med poljubno točko T na telesu in točko T_i katere premik \vec{u}_i že poznamo. Podobno lahko določimo tudi lego točke T_i v kolikor poznamo lego točke T_j .

$$\vec{u}_i = \vec{u}_j + \vec{\varphi}_j \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \vec{u}_j + \vec{\varphi}_j \times (-\vec{r}_j) \quad (3.3)$$

V izrazu (3.3) upoštevamo enakost (3.2) v obliki $\vec{u}_j = \vec{u}_i + \vec{\varphi}_i \times \vec{r}_j$ ter dobimo:

$$\vec{u}_i = \vec{u}_i + \vec{\varphi}_i \times \vec{r}_j + \vec{\varphi}_j \times (-\vec{r}_j) = \vec{u}_i + (\vec{\varphi}_i - \vec{\varphi}_j) \times \vec{r}_j \quad (3.4)$$

Enačba (3.4) je lahko izpolnjena le v kolikor sta oba zasuka enaka oz. izjemoma v kolikor bi bila vektorja zasukov $\vec{\varphi}_i$ in $\vec{\varphi}_j$ vzporedna vektorju \vec{r}_j , kar pa ni mogoče, ker se vektorji zasukov in razdalj nahajajo v dveh različnih ortogonalnih ravninah.

Z enačbo (3.4) smo nedvoumno dokazali, da sta vektorja $\vec{\varphi}_i$ in $\vec{\varphi}_j$ enaka ter, da je zasuk togega telesa okrog poljubnih točk vedno enak.

Pomik poljubne točke togega telesa je zato povsem določen v kolikor poznamo translatorsni pomik poljubne točke ter vektor rotacije togega telesa.

Komponente premikov poljubne točke vzdolž izbranih koordinatnih osi (Slika 3.3) določimo:

$$\vec{u}_k = \begin{Bmatrix} u_{kx} \\ u_{ky} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \varphi_i \\ x_k & y_k & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{ix} - y_k \varphi_i \\ u_{iy} + x_k \varphi_i \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

3.2 Podpore togih teles v ravnini

Vpeta podpora v ravnini povsem preprečuje vse tri komponente premikov v točki i podprte konstrukcije ($\vec{u}_i = \vec{0}$). Takšno telo je v celoti nepomično, število prostostnih stopenj je enako 0.

Členkasta podpora preprečuje oba premika ($u_{ix} = u_{iy} = 0$), dopušča pa zasuk telesa v obravnavani točki tako, da se togo telo lahko pomakne $\vec{u} = \varphi_i ((x - x_i)\vec{e}_y - (y - y_i)\vec{e}_x)$. Takšno telo lahko le zarotira okrog točke i v ravnini x-y.

Preglednica 3.1: 2D podpore v inženirski praksi

Vrsta podpore	Dovoljeni premiki		Število preprečenih prem. n_{ip}	Shema premikov	Simbol podpore (i)
Vpeta			3		
Členkasta		φ_i	2		
Premična nevtljljiva	u_{iy}		2		
	u_{ix}		2		
Premična vrtljljiva	u_{ix}	φ_i	1		
	u_{iy}	φ_i	1		

Premična nevtljljiva podpora dopušča premik v smeri osi y ali x ter preprečuje rotacijo togega telesa. V kolikor dopušča premik v smeri osi y lahko pomik izrazimo

$\bar{u} = u_{iy} \bar{e}_y$ ter kadar dopušča premik v smeri x osi $\bar{u} = u_{ix} \bar{e}_x$. Takšni telesi imata po eno prostostno stopnjo s konstantnim premikom v smeri koordinatnih osi y oz. x .

Premična vrtljiva podpora dopušča premik v smeri osi y ali x in rotacijo togega telesa v ravnini $x - y$. V primeru dopustnega premika v smeri osi y pomik izrazimo $\bar{u} = u_{iy} \bar{e}_y + \varphi_i ((x - x_i) \bar{e}_y - (y - y_i) \bar{e}_x)$ ter kadar je omogočen premik v smeri x osi z izrazom $\bar{u} = u_{ix} \bar{e}_x + \varphi_i ((x - x_i) \bar{e}_y - (y - y_i) \bar{e}_x)$. Takšni telesi imata po dve prostostni stopnji.

3.3 Dejansko število prostostnih stopenj in kinematična stabilnost

Računsko število prostostnih stopenj togega telesa n_r določimo tako, da od števila vseh možnih prostostnih stopenj odštejemo število preprečenih prostostnih stopenj, ki ji telesu odvzamejo vse podpore. Število vseh možnih prostostnih stopenj togega telesa v ravnini je enako številu neodvisnih načinov gibanja (dva premika in ena rotacija, torej skupaj 3). Za telo v ravnini z n podporami velja:

$$n_r = 3 - \sum_{i=1}^n n_{ip} \quad (3.6)$$

Računsko število prostostnih stopenj pa žal ni vedno enako dejanskemu številu prostostnih stopenj togega telesa. Prostostne stopnje, ki jih podpore odvzamejo togegu telesu so lahko med sabo odvisne kar pomeni, da dve ali več podpor telesu odvzamejo (skušajo preprečiti) isto prostostno stopnjo. Zato velja, da je dejansko število prostostnih stopenj vedno večje ali enako računskemu številu prostostnih stopenj.

$$n_d \geq n_r \quad (3.7)$$

Računsko število prostostnih stopenj je lahko tudi negativno, vendar negativno število prostostnih stopenj nima fizikalnega pomena, ker telesu ni mogoče večkrat odvzeti iste prostostne stopnje. Dejansko število prostostnih stopenj je zato vedno večje ali enako 0.

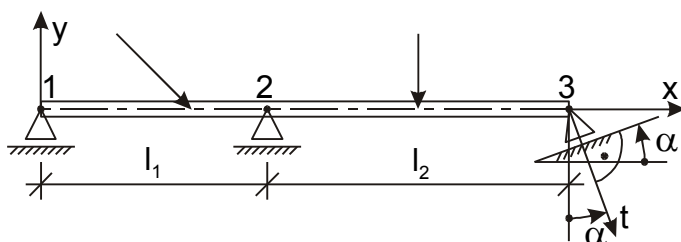
$$n_d \geq 0 \quad (3.8)$$

Togo telo zagotovo miruje kadar so premiki vseh točk telesa pri poljubni obtežbi preprečeni. Togeemu telesu pri katerem so preprečene vse prostostne stopnje (vsi možni neodvisni načini gibanja) pravimo, da je **kinematično stabilno**.

Zato je pogoj $n_r \leq 0$ le potrební pogoj za kinematično stabilnost telesa, medtem ko se zadostni pogoj nanaša na dejansko število prostostnih stopenj, ki mora biti enako 0.

Primer 3.1:

Za togo telo (Slika 3.4) podprto s tremi premičnimi in nevtljljivimi podporami preverite za katere nagibe podpore α je telo kinematično stabilno.



Slika 3.4: Togo telo podprto s tremi podporami

V obravnavanem primeru ima telo tri podpore in vsaka izmed teh podpor preprečuje posamezni premik telesa (podpori 1 in 2 preprečujeta premika v smeri y osi ter podpora 3 v smeri osi t, ki je za kot α odklonjena od y osi).

Računsko število prostostnih stopenj določimo:

$$n_r = 3 - \sum_{i=1}^3 n_{ip} = 3 - (1 + 1 + 1) = 0$$

Za tri neodvisne načine gibanja izberemo: premika u_{1x} , u_{1y} in zasuk φ_1 .

Rešitev mora ustrezati naslednjim kinematičnim pogojem:

$$u_{1y} = u_{2y} = 0$$

$$u_{3t} = u_{3x} \sin \alpha - u_{3y} \cos \alpha = 0$$

Izpolnjene pa morajo biti naslednje kinematične enačbe:

$$u_{2x} = u_{3x} = u_{1x}$$

$$u_{2y} = u_{1y} + \varphi_1 \cdot l_1 = 0 + \varphi_1 \cdot l_1 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = 0;$$

$$u_{3y} = u_{1y} + \varphi_1 \cdot (l_1 + l_2) = 0$$

Ker sta pri obravnavanem podprtem togem telesu premik u_{3y} in zasuk φ_1 zagotovo preprečena (identično enaka 0) nam za analizo preostane le izraz za premik telesa v podpori 3, ki ga zapišemo:

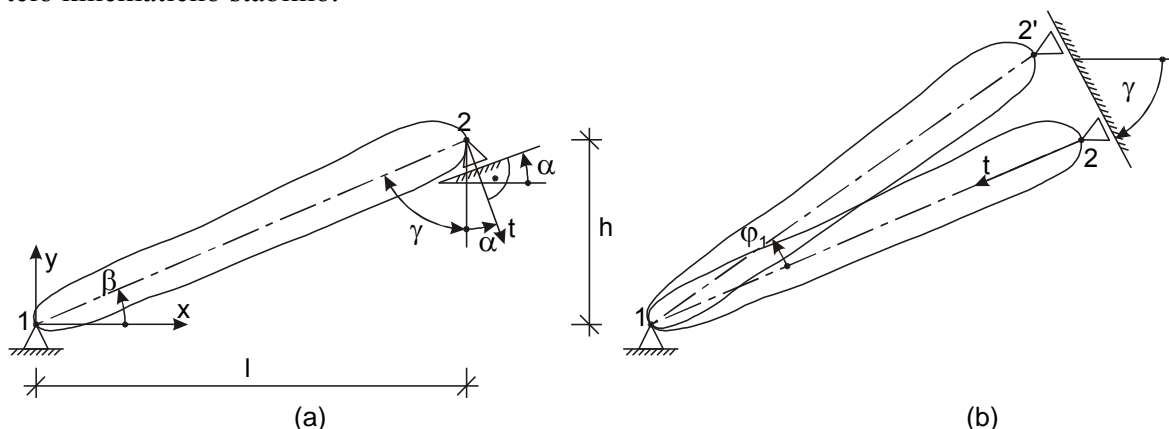
$$u_{3t} = u_{3x} \sin \alpha = 0$$

Premik telesa $u_{3x} = 0$ oz. je zagotovo preprečen v kolikor je izpolnjen pogoj $\sin \alpha \neq 0$.

Zato je obravnavano togo telo kinematično stabilno v primerih $\alpha \neq 0 + k\pi$ (v teh primerih je dejansko število prostostnih stopenj $n_d = 0$). Le v primerih $\alpha = 0$ in $\alpha = \pi$ je togo telo kinematično nestabilno. V teh primerih se lahko togo telo translatorsno premakne v smeri x osi (dejansko število prostostnih stopenj ni enako računskemu $n_d = 1$).

Primer 3.2:

Za togo telo (Slika 3.5) podprto z dvema podporama preverite za katere nagibe podpore α je telo kinematično stabilno.



Slika 3.5: Togo telo v ravnini x - y podprto z dvema podporama; (a) kinematično stabilno ($\alpha \neq -\gamma + k\pi$) in (b) kinematično nestabilno ($\alpha = -\gamma + k\pi$)

Računsko število prostostnih stopenj določimo:

$$n_r = 3 - \sum_{i=1}^2 n_{ip} = 3 - (2 + 1) = 0$$

Za tri neodvisne načine gibanja izberemo: premika u_{1x} , u_{1y} in zasuk φ_1 .

Kinematični pogoji:

$$u_{1x} = u_{1y} = 0$$

$$u_{2t} = u_{2x} \sin \alpha - u_{2y} \cos \alpha = 0$$

Kinematične enačbe:

$$u_{2x} = u_{1x} - \varphi_1 h = -\varphi_1 h$$

$$u_{2y} = u_{1y} + \varphi_1 \cdot l_1 = \varphi_1 \cdot l_1;$$

Pogoj preprečenega premika v smeri t podpore 2 podamo:

$$u_{2t} = -\varphi_1 h \sin \alpha - \varphi_1 \cdot l_1 \cos \alpha = 0$$

ali

$$\varphi_1 (\tan \alpha + l/h) = \varphi_1 (\tan \alpha + \tan \gamma) = 0$$

Zgornji izraz ima samo trivialno rešitev ($\varphi_1 = 0$) kadar velja pogoj ($\tan \alpha + \tan \gamma \neq 0$) in za vse takšne primere je togo telo kinematično stabilno ($n_d = 0$) - Slika 3.5a.


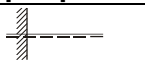


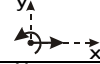
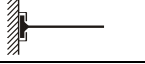
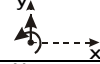


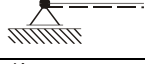
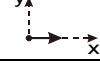
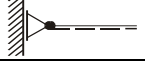
Le v primerih ($\tan \alpha + \tan \gamma = 0$) obstaja tudi netrivialna rešitev ($\varphi_1 \neq 0$) in s tem povezana kinematična nestabilnost togega telesa ($n_d = 1$).

Telo je kinematično nestabilno pri nagibu podpore $\alpha = -\gamma + k\pi$ (Slika 3.5b). Nedvomno je v tem primeru preostala rotacija telesa okrog podpore 1, kot edini možni neodvisni način gibanja (Slika 3.5b).

3.4 Statična določenost in prosto telo v ravnini

Pojem statične določenosti podprtih teles je vezan na število podpornih sil in število ravnotežnih pogojev togega telesa. Zaradi preprečenih premikov telesa v izbrani točki se v podporah v smereh preprečenih premikov pojavijo podporne (reakcijske) sile. Pri preprečenih premikih so to koncentrirane sile (reakcije) ter pri preprečenih zasukih koncentrirani vrtilni momenti (navori) oz. dvojice sil, ki se pojavijo v posameznih konstrukcijskih elementih. Število podpornih sil (reakcij in vpetostnih momentov) je enako številu preprečenih premikov. Za nekatere podpore v ravnini reakcijske sile in momenti prikazuje Preglednica 3.2.

Preglednica 3.2: 2D podpore s podpornimi silami

Vrsta podpore	Reakcijske sile			Št. podp. sil N_{ip}	Shema reakcij	Simbol podpore A
Vpeta	X_A	Y_A	M_A	3		
Členkasta	X_A	Y_A		2		
Premična nevrtiljiva	X_A		M_A	2		
		Y_A	M_A	2		
Premična vrtiljiva		Y_A		1		
	X_A			1		

Stopnjo statične nedoločenosti togega telesa v ravnini N_s določimo tako, da od števila vseh ravnotežnih pogojev odštejemo število reakcijskih sil, ki je enako številu

preprečenih premikov v podporah. Število vseh ravnotežnih pogojev tega telesa v ravnini je enako številu neodvisnih načinov gibanja (torej skupaj 3). Za telo v ravnini z n podporami velja:

$$N_s = 3 - \sum_{i=1}^n N_{ip} \quad (3.9)$$

Z ozirom na stopnjo statične nedoločenosti razlikujemo:

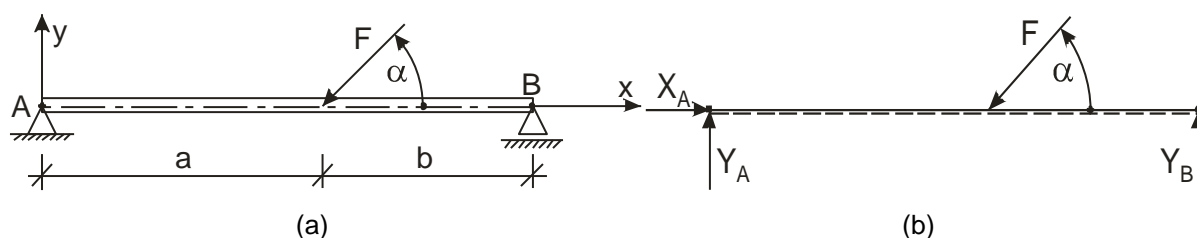
- (i) $N_s > 0$ Število podpornih sil je manjše od števila ravnotežnih pogojev. Takšno togo telo je zunanje statično predoločeno. Zunanje statično predoločeni konstrukcijski sistemi so vedno tudi kinematično nestabilni.
- (ii) $N_s < 0$ Število podpornih sil je večje od števila ravnotežnih pogojev. Takšno togo telo je zunanje statično nedoločeno.
- (iii) $N_s = 0$ Število podpornih sil je enako številu ravnotežnih pogojev. Za takšno togo telo pravimo, da je zunanje statično določeno. Ker pa je število ravnotežnih pogojev tega telesa enako številu neodvisnih načinov gibanja je pri statično določenih togih telesih tudi računsko število prostostnih stopenj $n_r = 0$. Hkrati pa je tudi število neznanih podpornih sil enako številu ravnotežnih enačb.

V kolikor so podprta statično določena toga telesa ($N_s = 0$) hkrati tudi kinematično stabilna ($n_r = n_d = 0$) lahko podporne (reakcijske) sile določimo z uporabo ravnotežnih pogojev.

Pri statično določenih in kinematično stabilnih vezanih (podprtih) telesih lahko vplive podpor (ležišč) nadomestimo s podpornimi (reakcijskimi) silami ter pri nadaljnjih statičnih analizah takšno vezano togo telo obremenjeno z obtežbami in reakcijskimi silami obravnavamo kot prosto telo v ravnini oz. v prostoru.

Ker je pri statično določenih in kinematično stabilnih togih telesih število podpornih sil enako številu preprečenih prostostnih stopenj (skupaj 3 za telesa v ravnini) je pogoj kinematične stabilnosti takšnega tega telesa identično izpolnjen v kolikor so vse tri ravnotežne enačbe tega telesa med sabo neodvisne. Za takšno telo tudi pravimo, da ostane tudi ob obremenitvi s poljubno obtežbo v ravnotežju.

V nadaljevanju bomo za prostoležeči nosilec na sliki 3.6 preverili statično določenost, kinematično stabilnost ter določili reakcijske sile v podporah.



Slika 3.6: Prostoležeči nosilec v ravnini: (a) podprto (vezano) telo in (b) pripadajoče prosto telo obremenjeno z zunanjo obtežbo

Statična določenost: $N_s = 3 - \sum_{i=1}^2 N_{ip} = 3 - (2 + 1) = 0$

Računsko število prostostnih stopenj: $n_r = 3 - \sum_{i=1}^2 n_{ip} = 3 - (2 + 1) = 0$

Dejansko število prostostnih stopenj določimo z upoštevanjem kinematičnih pogojev v podporah A in B ter s kinematičnimi enačbami togega telesa v ravnini. Za neodvisne prostostne stopnje togega telesa (glej nosilca, Slika 3.6) privzamemo premika u_{xA} in u_{yA} ter zasuk φ_A .

$$u_{xA} = u_{yA} = 0$$

$$u_{xB} = u_{xA} = 0$$

$$u_{yB} = u_{yA} + \varphi_A (a + b) = 0$$

Ker je razpetina nosilca $a + b \neq 0$ obstaja le trivialna rešitev za vse tri prostostne stopnje $u_{xA} = u_{yA} = \varphi_A = 0$. Dejansko število prostostnih stopenj je zato enako računskemu številu $n_d = n_r = 0$, podprto telo je zato zagotovo kinematično stabilno.

Reakcijske sile na prostem telesu (Slika 3.6b) določimo z upoštevanjem ravnotežnih pogojev:

$$\sum F_{ix} = X_A - F \cdot \cos \alpha = 0, \quad X_A = F \cdot \cos \alpha$$

$$\sum M^A = Y_B (a + b) - a F \cdot \sin \alpha = 0, \quad Y_B = F \cdot \sin \alpha \left(\frac{a}{a + b} \right)$$

$$\sum F_{iy} = Y_A + Y_B - F \cdot \sin \alpha = 0, \quad Y_A = F \cdot \sin \alpha \left(\frac{b}{a + b} \right)$$

Ravnotežne enačbe lahko zapišemo v matrični obliki.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a + b) \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Y_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \cdot \cos \alpha \\ a \cdot F \cdot \sin \alpha \\ F \cdot \sin \alpha \end{Bmatrix} \text{ oz. splošno } [A]\{R\} = \{F\} \quad (3.10)$$

kjer $[A]$ označuje matriko koeficientov ravnotežnih enačb, $\{R\}$ vektor reakcijskih sil in $\{F\}$ vektor aktivne obtežbe na konstrukcijo.

Vse tri ravnotežne enačbe so po definiciji med sabo neodvisne v kolikor je determinanta matrike $\text{Det}[A] \neq 0$. V obravnavanem primeru determinanta matrike koeficientov ravnotežnih enačb znaša $\text{Det}[A] = -(a + b) \neq 0$. Zato lahko zagotovo trdimo, da prostoležeči nosilec ostane v ravnotežju v kolikor ga obremenimo s kakršnokoli (tudi poljubno) obtežbo in zato je brez dvoma tudi kinematično stabilen.

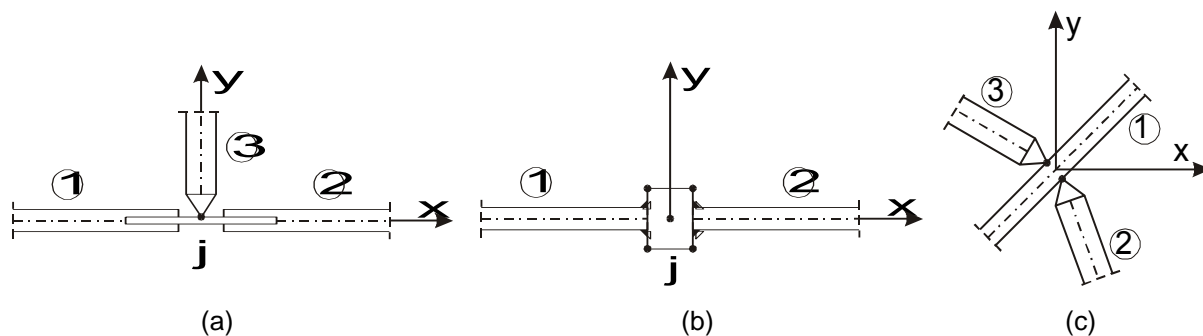
3.5 Sistemi togih teles v ravnini

Kadar gradbeno konstrukcijo sestavlja več različnih med sabo povezanih elementov ter v primerih kadar rezultati analiz niso odvisni od deformacij konstrukcije lahko za mehanske analize uporabimo mehanski model večjega števila povezanih in podprtih togih teles. Skupini togih teles, ki so med sabo povezana pravimo sistem togih teles.

3.5.1 Relativni premiki in kinematična stabilnost

Posamezna toga telesa so med sabo povezana z vezmi, ki preprečujejo relativne premike posameznih teles v določeni smeri. Zato vezi zmanjšujejo število prostostnih stopenj sistemom togih teles.

Slika 3.7a prikazuje zvezo treh togih teles, ki imajo v točki j naslednje skupne prostostne stopnje: $u_{jy}^1 = u_{jy}^2 = u_{jy}^3$ in $\varphi_j^1 = \varphi_j^2$ (indeks zgoraj označuje posamezno togo telo). Tri toga telesa imajo skupaj 9 prostostnih stopenj z zvezo pa so jim odvzete skupaj 3 prostostne stopnje. Zato je tako povezanemu sistemu treh togih teles preostalo le še 6 neodvisnih načinov gibanja.



Slika 3.7: Sistem povezanih togih teles; (a) tri telesa v ravlini, (b) premična in nevtljljiva zveza dveh teles v ravlini in (c) členkasta (vrtljljiva) zveza treh togih teles

Slika 3.7b prikazuje zvezo dveh togih teles, ki imata v točki j skupna premika in zasuka: $u_{jx}^1 = u_{jx}^2$ in $\varphi_j^1 = \varphi_j^2$. Nepovezani telesi imata skupaj 6 prostostnih stopenj z zvezo pa sta jima odvzeti skupaj 2 prostostni stopnji. Zato so tako povezanemu sistemu dveh togih teles preostali le še 4 neodvisni načini gibanja.

Slika 3.7c prikazuje zvezo treh togih teles, ki imajo v točki j skupne premike: $u_{jx}^1 = u_{jx}^2 = u_{jx}^3$ in $u_{jy}^1 = u_{jy}^2 = u_{jy}^3$. Nepovezana telesa imajo skupaj 9 prostostnih stopenj z zvezo pa so jim odvzete skupaj 4 prostostne stopnje oz. jim je preostalo še skupaj pet neodvisnih načinov gibanja.

Nekatere vezi med posameznimi konstrukcijskimi elementi prikazuje Preglednica 3.3.

Preglednica 3.3: 2D vezi v inženirski praksi

Naziv vezi v točki (j)	Relativni premiki $\Delta u_j = u_j^2 - u_j^1$			Št. prep. rel. p. n_{jv}	Shema dov. rel.prem.	Simbol vezi
	Δu_{jx}	Δu_{jy}	$\Delta \varphi_j$			
Členkasta			$\Delta \varphi_j$	2		
Premična nevtljljiva	Δu_{jx}	Δu_{jy}		1		
		Δu_{jy}		2		
	Δu_{jx}			2		
Premična vrtljljiva	Δu_{jx}		$\Delta \varphi_j$	1		
		Δu_{jy}	$\Delta \varphi_j$	1		

Računsko število prostostnih stopenj sistema k togih teles podprtih z n podporami in med sabo povezanih z m različnimi vezmi določimo:

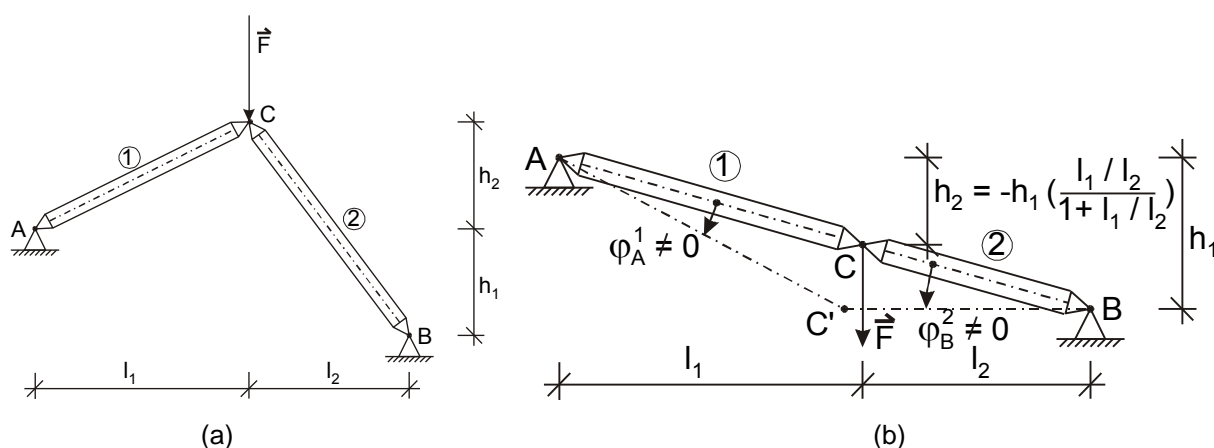
$$n_r = 3k - \sum_{i=1}^n n_{ip} - \sum_{j=1}^m n_{jv} \quad (3.11)$$

Dejansko število prostostnih stopenj sistema je vedno večje ali enako računskemu številu ($n_d \geq n_r$) ter je hkrati lahko le večje ali enako 0 ($n_d \geq 0$).

Sistem poljubnega števila povezanih togih teles je kinematično stabilen v kolikor so vse prostostne stopnje gibanja sistema kot celote in tudi vseh posameznih teles sistema preprečene. Pogoj $n_d = 0$ je vedno potreben in hkrati zadosten pogoj za kinematično stabilnost sistema togih teles.

Primer 3.3:

Za togi telesi (Slika 3.8) podprti z dvema nepremičnima vrtljivima podporama A in B ter členkasto povezanimi v točki C preverite pogoje kinematične stabilnosti sistema togih teles.



Slika 3.8: Sistem dveh podprtih togih teles (1) in (2), ki sta med sabo členkasto povezani; (a) kinematično stabilni sistem (b) kinematično nestabilni sistem (točke A, B in C so kolinearne)

Računsko število prostostnih stopenj določimo:

$$n_r = 3k - \sum_{i=1}^2 n_{ip} - \sum_j^1 n_{iv} = 3 \cdot 2 - (2 + 2) - (2) = 0$$

Za tri neodvisne načine gibanja posameznih teles izberemo:

- togo telo 1: premika u_{xA}^1, u_{yA}^1 in zasuk ϕ_A^1 ;
- togo telo 2: premika u_{xB}^2, u_{yB}^2 in zasuk ϕ_B^2 .

Kinematični pogoji:

$$u_{xA}^1 = u_{yA}^1 = 0$$

$$u_{xC}^1 = -h_2 \cdot \phi_A^1$$

$$u_{yC}^1 = l_1 \cdot \phi_A^1$$

$$u_{Bx}^2 = u_{By}^2 = 0$$

$$u_{xC}^2 = -(h_1 + h_2) \cdot \phi_B^2$$

$$u_{yC}^2 = -l_2 \cdot \phi_B^2$$

Kinematične enačbe:

Členkasta zveza preprečuje relativna premika obeh togih teles v točki C.

$$u_{xC}^2 - u_{xC}^1 = -(h_1 + h_2)\phi_B^2 + h_2\phi_A^1 = 0$$

$$u_{yC}^2 - u_{yC}^1 = -l_2 \varphi_B^2 - l_1 \varphi_A^1 = 0$$

Enačbi lahko izrazimo tudi v naslednji obliki:

$$\varphi_B^2 = -(l_1 / l_2) \varphi_A^1$$

$$\varphi_A^1 (h_2 + (h_1 + h_2)(l_1 / l_2)) = 0$$

Za realne vrednosti ob pogojih $l_1 > 0$ in $l_2 > 0$ je zasuk φ_B^2 enak 0 le v primeru kadar je zasuk φ_A^1 enak 0.

Zasuk φ_A^1 pa je lahko od 0 različen le v kolikor je izpolnjen pogoj:

$$h_2 + (h_1 + h_2)(l_1 / l_2) = 0 \text{ oz. } h_2 = -h_1 \left(\frac{l_1 / l_2}{1 + l_1 / l_2} \right)$$

ki določa položaj točke C na zveznici točk \overline{AB} (Slika 3.8b). Zaključimo lahko, da je obravnavani sistem nestabilen le v kolikor se točka C nahaja na zveznici točk A in B.

Primer 3.4:

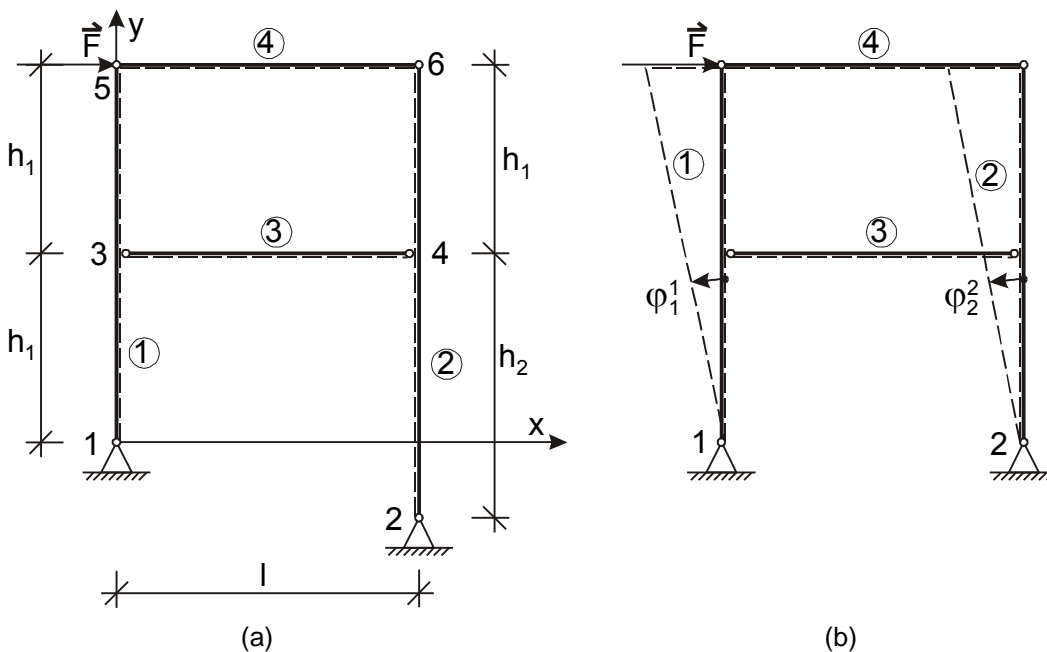
Za sistem štirih povezanih in podprtih togih teles (Slika 3.9) analizirajte pogoje kinematične stabilnosti sistema.

Računsko število prostostnih stopenj določimo:

$$n_r = 3k - \sum_{i=1}^2 n_{ip} - \sum_j n_{iv} = 3 \cdot 4 - (2 + 2) - (2 + 2 + 2 + 2) = 0$$

Za tri neodvisne načine gibanja posameznih teles izberemo:

- za telo 1: premika u_{x1}^1, u_{y1}^1 in zasuk φ_1^1 ;
- za telo 2: premika u_{x2}^2, u_{y2}^2 in zasuk φ_2^2 ;
- za telo 3: premika u_{3x}^3, u_{3y}^3 in zasuk φ_3^3 ;
- za telo 4: premika u_{x5}^4, u_{y5}^4 in zasuk φ_5^4 .



Slika 3.9: Sistem štirih podprtih togih teles (1), (2), (3) in (4), ki so med sabo členkasto povezana; (a) kinematično stabilni sistem ($h_2 \neq h_1$) in (b) kinematično nestabilni sistem ($h_2 = h_1$)

Kinematični pogoji podpor in kinematične enačbe:

$$\begin{aligned} u_{x1}^1 &= u_{y1}^1 = 0 & u_{x2}^2 &= u_{y2}^2 = 0 & u_{x4}^3 &= u_{x3}^3 & u_{x6}^4 &= u_{x5}^4 \\ u_{x3}^1 &= -h_1\varphi_1^1 & u_{x4}^2 &= -h_2\varphi_2^2 & u_{y4}^3 &= l\varphi_3^3 & u_{y6}^4 &= l\varphi_5^4 \\ u_{3y}^1 &= 0 & u_{4y}^2 &= 0 & & & & \\ u_{x5}^1 &= -2h_1\varphi_1^1 & u_{x6}^2 &= -(h_2 + h_1)\varphi_2^2 & & & & \\ u_{y5}^1 &= 0 & u_{y6}^2 &= 0 & & & & \end{aligned}$$

Kinematični pogoji vezi:

Členkaste zveze preprečujejo relativne premike posameznih togih teles v točkah 3, 4, 5 in 6.

$$\begin{aligned} u_{x3}^3 - u_{x3}^1 &= u_{x3}^3 + h_1\varphi_1^1 = 0 & u_{x5}^4 - u_{x5}^1 &= u_{x5}^4 + 2h_1\varphi_1^1 = 0 \\ u_{y3}^3 - u_{y3}^1 &= u_{y3}^3 = 0 & u_{y5}^4 - u_{y5}^1 &= u_{y5}^4 = 0 \\ u_{x3}^3 &= -h_1\varphi_1^1 & u_{x5}^4 &= -2h_1\varphi_1^1 \\ u_{x4}^2 - u_{x4}^3 &= -h_2\varphi_2^2 + h_1\varphi_1^1 = 0 & u_{x6}^2 - u_{x6}^4 &= -(h_2 + h_1)\varphi_2^2 + 2h_1\varphi_1^1 = 0 \\ u_{y4}^2 - u_{y4}^3 &= l\varphi_3^3 = 0 & u_{y6}^2 - u_{y6}^4 &= l\varphi_5^4 = 0 \end{aligned}$$

Za obravnavani sistem togih teles kinematični pogoji določajo, da je od 12 neodvisnih premikov vedno 8 izbranih neodvisnih premikov identično enakih 0.

$$u_{x1}^1 = u_{y1}^1 = u_{x2}^2 = u_{y2}^2 = u_{y3}^3 = u_{y5}^4 = \varphi_3^3 = \varphi_5^4 = 0$$

Preostale štiri določajo izrazi:

$$\begin{aligned} u_{x3}^3 &= -h_1\varphi_1^1 & u_{x5}^4 &= -2h_1\varphi_1^1 \\ -h_2\varphi_2^2 + h_1\varphi_1^1 &= 0 & -(h_2 + h_1)\varphi_2^2 + 2h_1\varphi_1^1 &= 0 \end{aligned}$$

Neznana zasuka določimo:

$$\varphi_1^1 = (h_2 / h_1)\varphi_2^2 \quad \text{in} \quad \varphi_2^2(2h_2 - (h_1 + h_2)) = 0$$

Netrivialna rešitev kinematičnega problema ($\varphi_2^2 \neq 0$) je mogoča samo v primeru, kadar je izpolnjen pogoj $2h_2 = h_1 + h_2$ oz. kadar sta etažni višini enaki $h_1 = h_2$. V takšnem primeru je sistem štirih togih teles kinematično nestabilen, ker je omogočena rotacija sistema ($\varphi_2^2 = \varphi_1^1 \neq 0$). Deformirani sistem togih teles - Slika 3.9b (uporaba takšnega tipa konstrukcij (Slika 3.9a) v inženirski praksi ni običajna, ker je njihova stabilnost manj zanesljiva ter za konstrukcije - Slika 3.9b - praktično nedopustna).

3.5.2 Vezne sile in statična določenost sistemov togih teles

V veznih elementih med posameznimi togimi telesi se v smereh preprečenih relativnih premikov pojavijo vezne sile. Število veznih sil oz. dvojic sil (vrtilnih momentov) je enako številu preprečenih premikov oz. zasukov med posameznimi elementi sistema.

Z ozirom na skupni sistem togih teles predstavljajo vezne sile notranje sile sistema, zato mora biti vsota vseh veznih sil sistema v ravnotežju oz. identično enaka 0. Kadar pa posamezna toga telesa sistema obravnavamo ločeno, vezne sile prištevamo k zunanji silam ter delujejo v kontaktnih točkah med posameznimi togimi telesi.

Število in pripadajoče sheme veznih sil pri nekaterih vrstah vezi za 2D sisteme togih teles prikazuje Preglednica 3.4.

Preglednica 3.4: 2D vezi in pripadajoče vezne sile

Naziv vezi v točki (j)	Vezne sile: $X_j^1 = -X_j^2, Y_j^1 = -Y_j^2, M_j^1 = -M_j^2$			Št. veznih sil: N_{jv}	Shema veznih sil	Simbol vezi
	Vezne sile					
Členkasta	X_j	Y_j		2		
Premična nevtljljiva			M_j	1		
	X_j		M_j	2		
		Y_j	M_j	2		
Premična vrtljljiva		Y_j		1		
	X_j			1		

Stopnjo statične nedoločenosti sistema k togih teles podprtih z n podporami in med sabo povezanih z m različnimi vezmi določimo:

$$N_s = 3k - \sum_{i=1}^n N_{ip} - \sum_{j=1}^m N_{jv} \quad (3.12)$$

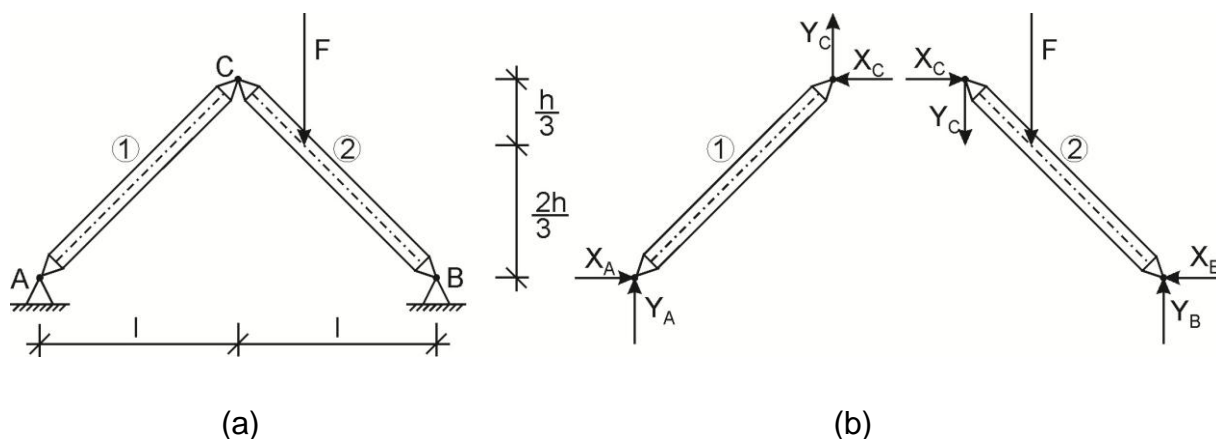
Tudi pri sistemih togih teles ločimo: statično nedoločene ($N_s < 0$), statično določene ($N_s = 0$) in statično predoločene ($N_s > 0$).

V kolikor so podprti statično določeni sistemi togih teles ($N_s = 0$) hkrati tudi kinematično stabilni ($n_r = n_d = 0$) lahko podporne (reakcijske) vezne sile med posameznimi elementi sistema določimo le z uporabo ravnotežnih pogojev.

Pri statično določenih in kinematično stabilnih sistemih togih teles lahko učinke podpor in vezi med posameznimi telesi nadomestimo s podpornimi (reakcijskimi) in z veznimi silami ter pri nadaljnjih statičnih analizah posamezna toga telesa obremenjena z obtežbami in reakcijskimi ter veznimi silami obravnavamo kot posamezna **prosta telesa** v ravnini oz. v prostoru.

Ker je pri statično določenih in kinematično stabilnih sistemih togih teles skupna vsota števila podpornih in veznih sil enaka številu preprečenih prostostnih stopenj (3 za posamezno togo telo v ravnini) je pogoj kinematične stabilnosti takšnega sistema togih teles identično izpolnjen v kolikor so vse ravnotežne enačbe sistema (po 3 enačbe za vsako telo) med sabo neodvisne. Za takšen sistem togih teles tudi pravimo, da ostane ob obtežitvi s poljubno obtežbo v ravnotežju.

V nadaljevanju bomo za sistem dveh členkasto povezanih togih teles (Slika 3.10) preverili statično določenost, kinematično stabilnost ter določili reakcijske in vezne sile.



Slika 3.10: Tročlenska okvirna konstrukcija: (a) vezani sistem togih teles in (b) sistem prostih togih teles

V poglavju 3.5.1 je že dokazano, da je obravnavana tročlenska konstrukcija kinematično stabilna v vseh primerih kadar je $h \neq 0$. Stopnjo statične nedoločenosti izračunamo z izrazom (3.10). Pri izračunu upoštevamo: $k=2$ (število togih teles sistema), $n=2$ (število podpor) in $m=1$ (število vezi).

$$N_s = 3k - \sum_{i=1}^n N_{ip} - \sum_{j=1}^m N_{jv} = 3 \cdot 2 - (2 + 2) - 2 = 0$$

Torej je obravnavani sistem togih teles statično določen in kinematično stabilen. Kinematično stabilnost lahko dodatno preverimo tudi z ravnotežnimi enačbami.

Za sistem dveh togih teles v ravnini s šestimi kinematičnimi prostostnimi stopnjami je mogoče zagotoviti stabilnost s skupaj šestimi podpornimi in veznimi silami. V obravnavanem primeru je primerno za vsako togo telo upoštevati po tri ravnotežne enačbe (Slika 3.10b).

$$\sum F_{ix}^1 = X_A - X_C = 0$$

$$\sum F_{ix}^2 = X_C - X_B = 0$$

$$\sum F_{iy}^1 = Y_A + Y_C = 0$$

$$\sum F_{iy}^2 = Y_B - Y_C - F = 0$$

$$\sum M_A^1 = Y_C \cdot l + X_C \cdot h = 0$$

$$\sum M_B^2 = X_C \cdot h - Y_C \cdot l - 2F \ell / 3 = 0$$

Ravnotežne enačbe zapišemo v matrični obliki.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h/\ell & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h/\ell & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_A \\ Y_A \\ X_B \\ Y_B \\ X_C \\ Y_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \\ 0 \\ 2F/3 \end{Bmatrix}$$

Rang matrike $[A]$ (sistem enačb splošno zapišemo $[A]\{X\} = \{F\}$) določimo z determinanto matrike. Rezultati izračuna so naslednji:

$$h/\ell = 0.1, \quad \text{Det}|A| = -2$$

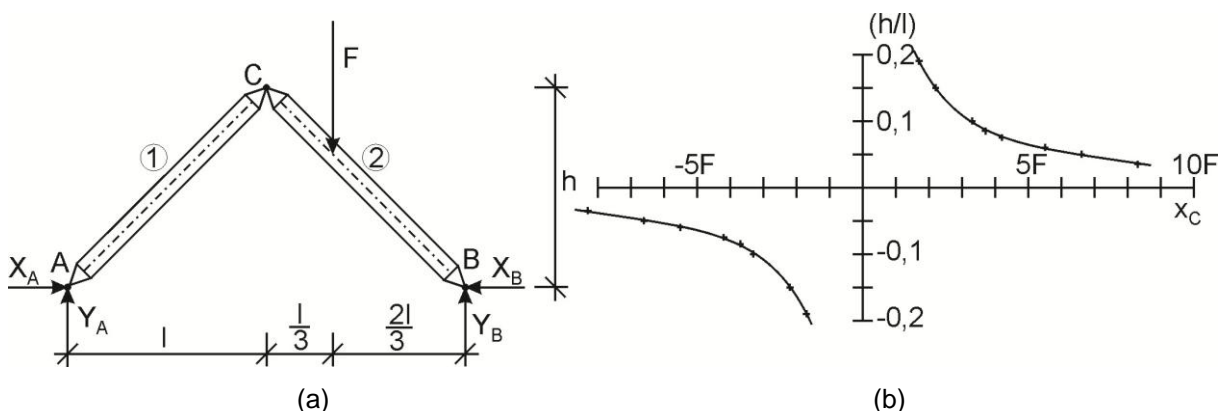
$$h/\ell = 0, \quad \text{Det}|A| = 0$$

Z več izračuni je mogoče dokazati, da je determinanta matrike $[A]$ različna od nič za vse primere $h/\ell \neq 0$ ter samo v primeru $h/\ell = 0$ je determinanta enaka 0. Zato je vseh šest enačb sistema neodvisnih v kolikor je $h/\ell \neq 0$.

Z rešitvijo sistema šestih enačb lahko vedno enolično določimo vrednosti reakcijskih in veznih sil sistema. **V kolikor je determinanta matrike $[A]$ različna od 0 lahko sistem togih teles obremenimo s poljubno obtežbo ter sistem hkrati ostane v ravnotežju. Zato pravimo, da je takšen sistem tudi kinematično stabilen.**

Neznane vrednosti reakcijskih in veznih sil lahko določimo z rešitvijo prej podanega sistema šestih enačb s šestimi neznankami.

V mnogih primerih je mogoče s smiselno kombinacijo momentnih in silnih ravnotežnih enačb reševanje sistema še dodatno poenostaviti. V kolikor so vsa toga telesa sistema v ravnotežju je zagotovo tudi celotni sistem v ravnotežju. Zato lahko uporabimo tudi ravnotežne pogoje za celotni sproščeni sistem povezanih togih teles (v tem primeru le vplive podpor nadomestimo s podpornimi silami, Slika 3.11a).



Slika 3.11: (a) Sproščeni sistem togih teles in (b) sovisnost vrednosti vezne sile X_C in razmerja (h/ℓ)

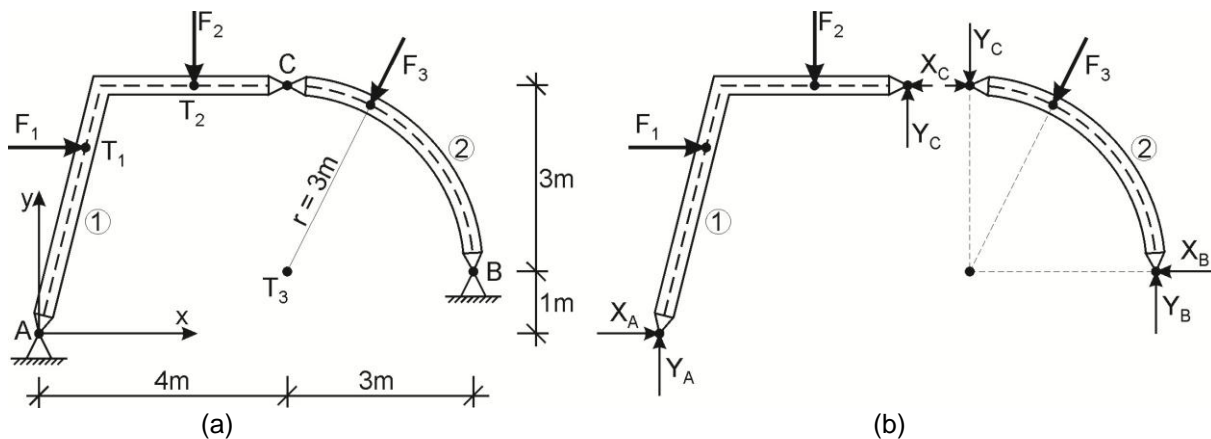
$$\begin{aligned} \sum M_A^{1+2} = Y_B \cdot 2\ell - F \cdot 4\ell/3 = 0 & \quad Y_B = 2F/3 \\ \sum F_{iy}^{1+2} = Y_A + Y_B - F = 0 & \quad Y_A = F/3 \\ \sum M_C^1 = Y_A \cdot \ell - X_A h = 0 & \quad X_A = F\ell/(3h) \\ \sum F_{iy}^1 = Y_A + Y_C = 0 & \quad Y_C = -F/3 \\ \sum F_{ix}^1 = X_A - X_C = 0 & \quad X_C = F\ell/(3h) \\ \sum F_{ix}^{1+2} = X_A - X_B = 0 & \quad X_B = F\ell/(3h) \end{aligned}$$

Rešitev sistema šestih enačb s šestimi neznankami smo tako prevedli v rešitev šest enačb z eno neznanko. Slika 3.11b prikazuje sovisnico vezne sile X_C ter razmerja (h/ℓ) , ki kaže da je sistem stabilen v primerih $h > 0$ in $h < 0$ le pri $h = 0$ horizontalnih reakcij in veznih sil ni mogoče določiti, ker vrednosti horizontalnih sil pri vrednosti $(h \rightarrow 0$ oz. pri $h \rightarrow -0)$ nimajo skupne limite.

Pri tročlenskih statično določenih in kinematično stabilnih konstrukcijah je mogoče reakcijske in vezne sile določiti tudi grafično z doslednim upoštevanjem pogojev ravnotežja sil v ravnini.

Primer 3.4:

Za sistem dveh členkasto povezanih togih teles (Slika 3.12) obteženih s silami $\vec{F}_1 = \{10\text{kN}, 0\}$, $T_1(3/4, 3)$, $\vec{F}_2 = \{0, -30\text{kN}\}$, $T_2(2.5, 4)$ in $F_3 = 30\text{kN}$, $\alpha_3 = 243.435^\circ$ katere učinkovalnica poteka skozi točko $T_3(4, 1)$ je potrebno določiti reakcijske in vezne sile. Podpori in členkasta zveza obeh togih so določene s koordinatami $A(0, 0)$, $B(7, 1)$ in $C(4, 4)$.



Slika 3.12: Sistem dveh členkasto povezanih togih teles; (a) Sistem podprtih in povezanih teles ter (b) Pripadajoči sistem prostih teles s podpornimi in veznimi silami

ANALITIČNA REŠITEV

Reakcijske in vezne sile določimo s smiselnim upoštevanjem šestih ravnotežnih pogojev. Reševanje je praviloma najbolj učinkovito v kolikor najprej upoštevamo momentna ravnotežna pogoja na točko A za prosti sistem togih teles (le podpori A in B nadomestimo s podpornimi silami) in momentni ravnotežni pogoj na točko C za pristo togo telo 2.

$$\sum M_A^{1+2} = Y_B \cdot 7 + X_B \cdot 1 - 10 \cdot 3 - 30 \cdot 2.5 - 30 \cdot \cos 243.435^\circ \cdot 1 + 30 \cdot \sin 243.435^\circ \cdot 4 = 0$$

$$\sum M_C^2 = Y_B \cdot 3 - X_B \cdot 3 + 30 \cdot \cos 243.435^\circ \cdot 3 = 0$$

Najprej rešimo sistem dveh enačb z dvema neznanima ter nato izračunamo preostale zunanje statične količine:

$$7 \cdot Y_B + X_B = 198.915$$

$$3 \cdot Y_B - 3 \cdot X_B = 40.249$$

$$Y_B = 26.541\text{ kN}, X_B = 13.125\text{ kN}, Y_A = 30.292\text{ kN}, X_A = 16.541\text{ kN}$$

$$X_C = 26.541\text{ kN}, Y_C = -0.292\text{ kN}$$

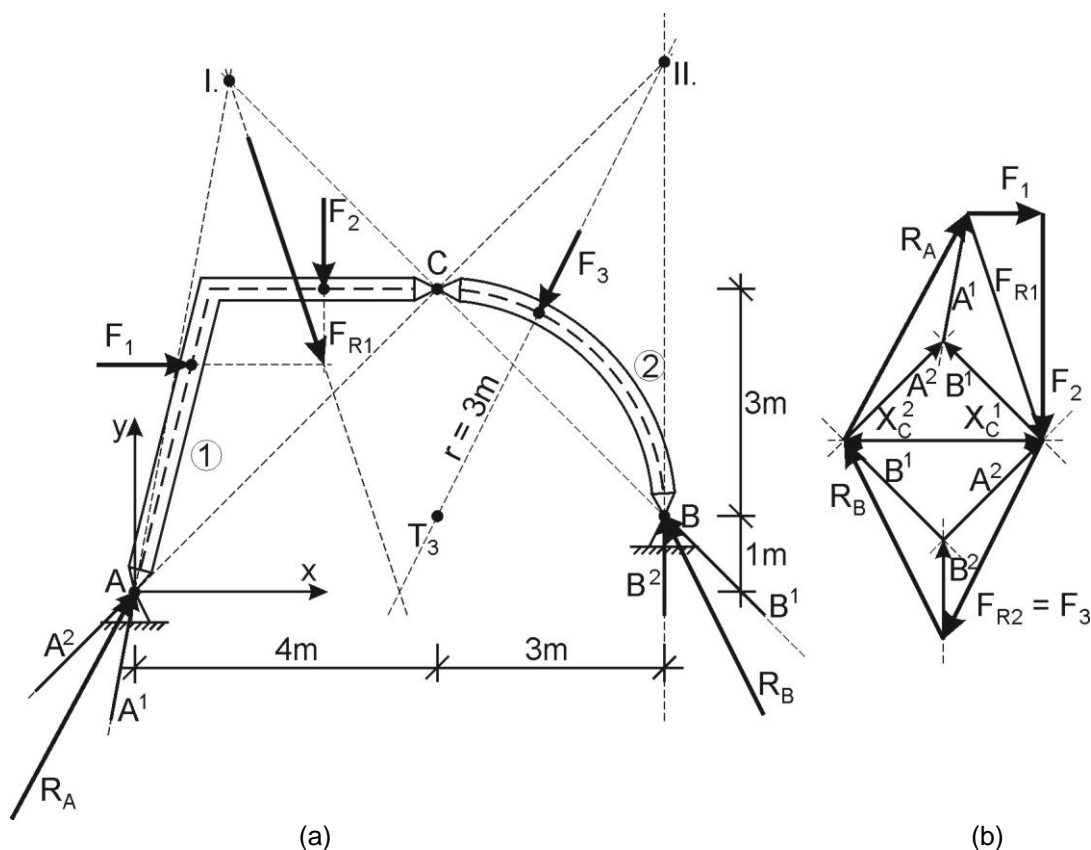
$$R_A = 34.514\text{ kN}, \alpha_{R_A} = 61.363^\circ$$

$$R_B = 29.609\text{ kN}, \alpha_{R_B} = 116.313^\circ$$

$$R_C = 26.543\text{ kN}, \alpha_{R_C} = 0.630^\circ \text{ (za vezno silo } R_C^{2/1} \text{ s katero telo 1 deluje na telo 2)}$$

GRAFIČNA REŠITEV

Pri grafičnem uravnoteženju sil moramo ločeno obravnavati podsistema sil, ki delujeta na togo telo 1 oz. 2. Zato najprej v mnogokotniku sil določimo njune rezultantne vrednosti: $\vec{F}_{R1} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ in $\vec{F}_{R2} = \vec{F}_3$ ter ju načrtamo v načrtu sil (Slika 3.13).



Slika 3.13: (a) Načrt sil in (b) Mnogokotnik sil

Najprej uravnotežimo podsistem sil \vec{F}_{R1} z reakcijskima silama \vec{A}^1 in \vec{B}^1 , ki imata prijemališči v točkah A in B. V kolikor bi bil celotni sistem obremenjen le s podsistemom sil \vec{F}_{R1} mora biti telo 2 v ravnotežju, kar izrazimo z vsoto momentov na točko C za telo 2, ki mora biti identično enaka 0. Ta pogoj je izpolnjen le v kolikor reakcijska sila \vec{B}^1 deluje na premici \overline{BC} . Točko kjer učinkovalnica sile \vec{B}^1 seka učinkovalnico sile \vec{F}_{R1} označimo z I (Slika 3.13a). Ker pa mora biti celotni sistem dveh povezanih togih teles tudi v momentnem ravnotežju mora nedvoumno sila \vec{A}^1 delovati na učinkovalnici, ki poteka skozi točko I. Zato učinkovalnico sile \vec{A}^1 določa premica \overline{AI} . Ker tako poznamo učinkovalnici \vec{A}^1 in \vec{B}^1 lahko rezultantno silo prvega podsistema \vec{F}_{R1} v mnogokotniku sil uravnotežimo s silama \vec{A}^1 in \vec{B}^1 . Ugotovimo lahko, da so lahko tri sile v ravnini v ravnotežju le kadar je trikotnik sil zaključen (silna ravnotežna pogoja) in v kolikor se sekajo v skupni točki (samo v tem primeru je izpolnjen tudi momentni ravnotežni pogoj).

Po podobnem postopku uravnotežimo tudi sistem sil \vec{F}_{R2} s silama \vec{A}^2 in \vec{B}^2 , ki imata prav tako prijemališči v točkah A in B. Ugotovimo, da učinkovalnico sile \vec{A}^2 določa premica \overline{AC} , določimo točko II ter, da učinkovalnico sile \vec{B}^2 določa premica \overline{BII} . Nato v mnogokotniku sil rezultantno silo \vec{F}_{R2} uravnotežimo s silama \vec{A}^2 in \vec{B}^2 (Slika 3.13b).

Reakcijski sili določimo s seštevanjem posameznih komponent, ki pripadajo posameznim podsistemom sil ($\vec{R}_A = \vec{A}^1 + \vec{A}^2$ ter $\vec{R}_B = \vec{B}^1 + \vec{B}^2$) ter ju prikažemo v načrtu sil. Velikosti in smeri posameznih sil nato odmerimo v mnogokotniku sil, ki ga je potrebno načrtati v primernem merilu.

Primer 3.5:

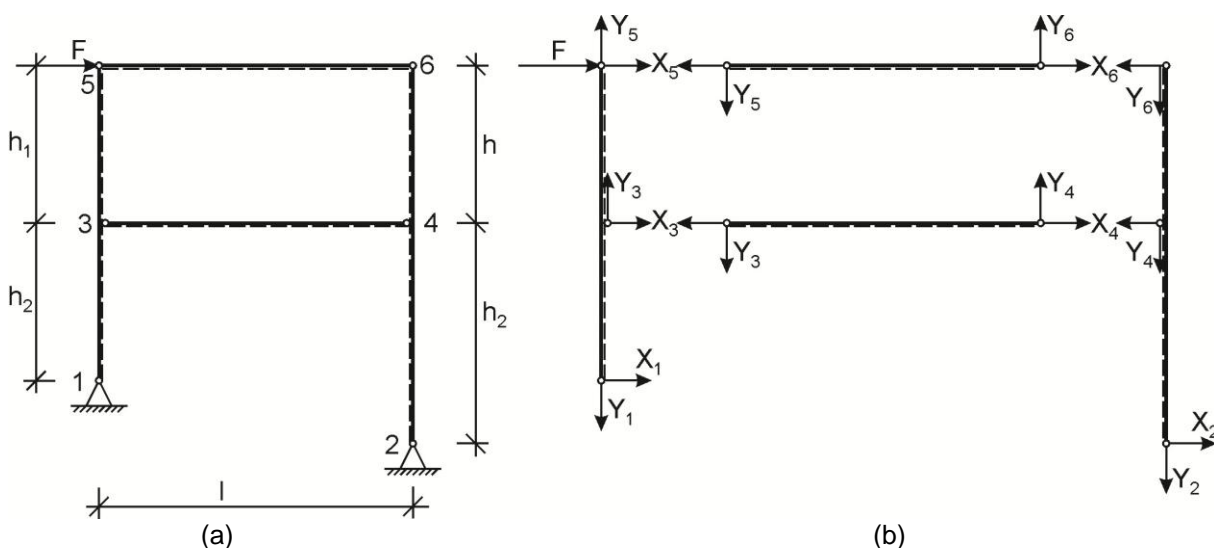
Za sistem štirih povezanih in podprtih togih teles (dvoetažni okvir, Slika 3.14) analizirajte pogoje statične določenosti, kinematične stabilnosti ter določiti reakcije in vezne sile med posameznimi togimi telesi.

Računsko število prostostnih stopenj določimo:

$$n_r = 3k - \sum_{i=1}^2 n_{ip} - \sum_{j=1}^4 n_{iv} = 3 \cdot 4 - (2 + 2) - (2 + 2 + 2 + 2) = 0$$

V poglavju 3.5.1 je že dokazano, da je obravnavana tročlenska konstrukcija kinematično stabilna v vseh primerih kadar je $h_1 \neq h_2$. Stopnjo statične nedoločenosti izračunamo z izrazom (3.10). Pri izračunu upoštevamo: $k = 4$ (število togih teles sistema), $n = 2$ (število členkastih podpor) in $m = 4$ (število enojnih členkastih vezi).

$$N_s = 3k - \sum_{i=1}^n N_{ip} - \sum_{j=1}^m N_{jv} = 3 \cdot 4 - (2 + 2) - 4 \cdot 2 = 0$$



Slika 3.14: Sistem štirih podprtih togih teles (1), (2), (3) in (4), ki so med sabo členkasto povezana; (a) sistem členkasto povezanih teles in (b) Prosta toga telesa s podpornimi in veznimi silami

Ker je obravnavani sistem statično določen ter ima tudi računsko število prostostnih stopenj $n_r = 0$ lahko tudi kinematično stabilnost sistema ocenimo na osnovi števila neodvisnih ravnotežnih enačb. Za vsako togo telo (Slika 3.14b) upoštevamo po tri ravnotežne enačbe:

$$\begin{array}{lll} X_1 + X_3 + X_5 + F = 0 & -Y_1 + Y_3 + Y_5 = 0 & X_5 \cdot h_1 - X_1 \cdot h_1 + F \cdot h_1 = 0 \\ -X_5 + X_6 = 0 & -Y_5 + Y_6 = 0 & Y_6 \cdot l = 0 \\ -X_3 + X_4 = 0 & -Y_3 + Y_4 = 0 & Y_4 \cdot l = 0 \\ X_2 - X_4 - X_6 = 0 & Y_2 + Y_4 + Y_6 = 0 & X_6 \cdot h_1 + X_2 \cdot h_2 = 0 \end{array}$$

Sistem enačb zapišemo v matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ell \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ell & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & h_2/h_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \\ -F_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Sistem enačb oblike $[A]\{X\} = \{F\}$ ima netrivialno rešitev le v primeru determinante $\text{Det}[A] \neq 0$, ki zagotavlja tudi kinematično stabilnost sistema.

V primerih $h_1/h_2 \neq 1$ je sistem stabilen (npr. $h_1/h_2 = 0.9$, $\text{Det}[A] = -1$) ter le v primeru $h_1/h_2 = 1$ postane sistem členkasto povezanih togih teles (Slika 3.14) nestabilen z determinanto $\text{Det}[A] = 0$, ker vseh dvanajst ravnotežnih enačb sistema ni neodvisnih ter zato sistema ni mogoče obremeniti s poljubno obtežbo.

Reakcijske in vezne sile določimo z rešitvijo zgornjega sistema ravnotežnih enačb ter so naslednje:

$$Y_3 = Y_4 = Y_5 = Y_6 = Y_2 = Y_1 = 0$$

$$X_2 = 2F \cdot h_1 / (h_2 - h_1)$$

$$X_6 = X_5 = -2F \cdot h_2 / (h_2 - h_1)$$

$$X_4 = X_3 = 2F \cdot (h_1 + h_2) / (h_2 - h_1)$$

$$X_1 = -F \cdot (h_1 + h_2) / (h_2 - h_1)$$

Tudi rezultati izračuna reakcij in veznih sil kažejo, da je pri vrednosti etažne višine ($h_2 \rightarrow h_1$) stabilnost sistema ogrožena.

3.6 Sistemi togih teles v prostoru

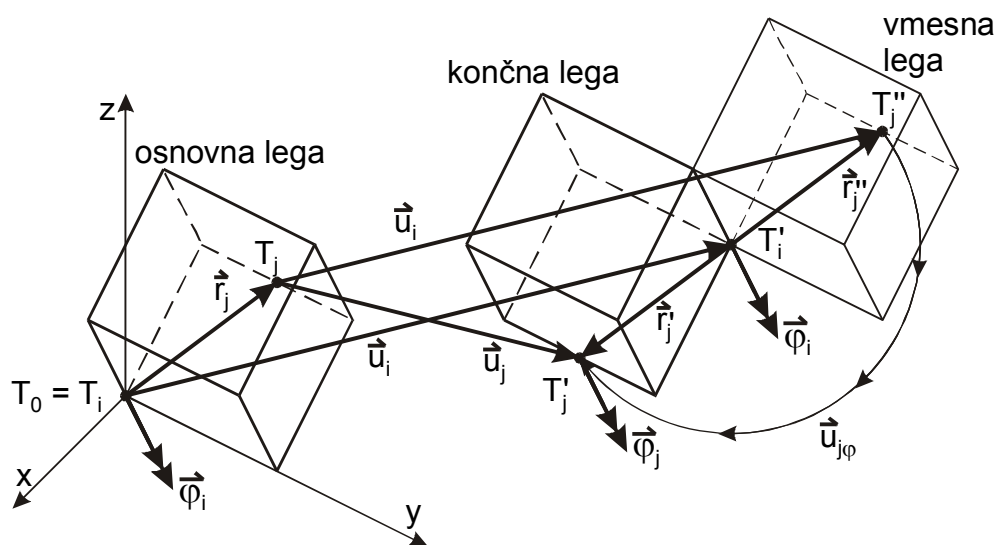
Toga telesa in povezani sistemi teles v ravnini predstavljajo le omejeni model realnih gradbenih konstrukcij, ki so vedno tri-dimenzionalne oz. prostorske. Uporaba 2D modelov za nekatere mehanske analize je dopustna le v primerih kadar se vse obtežbe in vsi konstrukcijski elementi nahajajo v skupni ravnini.

3.6.1 Pomiki togih teles v prostoru

Gibanje oz. spremembo lege togega telesa v prostoru lahko vedno izrazimo s premikom (translacijo) \vec{u}_i poljubne točke (i) ter rotacijo telesa $\vec{\varphi}_i$ okrog izbrane točke (i). Pri togih telesih v prostoru imata vektorja translatornega premika \vec{u}_i in vektor rotacije $\vec{\varphi}_i$ poljubno smer v prostoru x-y-z.

Ker imata oba vektorja premikov togih teles po tri poljubne komponente vzdolž izbranih koordinatnih osi ima togo telo v prostoru šest prostostnih stopenj oz. šest

neodvisnih načinov gibanja, ki predstavljajo tri translatorne premike in tri rotacije okrog izbranih koordinatnih osi (Slika 3.15).



Slika 3.15: Pomik togega telesa v prostoru x-y-z

Pomik poljubne točke telesa \bar{u}_j lahko izrazimo (Slika 3.15):

$$\bar{u}_j = \bar{u}_i + \bar{u}_{j\varphi} \quad (3.13)$$

V kolikor je vektor rotacije telesa okrog točke i majhen ($|\bar{\varphi}_i| \Rightarrow 0$) ima komponenta pomika $\bar{u}_{j\varphi}$ v točki T_j smer, ki je pravokotna na ravnino, ki jo določata vektorja $\bar{\varphi}_i$ in \bar{r}_j ter velikost, ki je prenosorazmerna velikosti zasuka $|\bar{\varphi}_i|$ in dolžini vektorja $|\bar{r}_j|$ ter sinusa kota med njima (pri majhnih zasukih smer premikov sovpada s smerjo trenutne hitrosti). Ker ima vektorski produkt vektorjev $\bar{\varphi}_i$ in \bar{r}_j smer normale na ravnino obeh vektorjev, njegova velikost pa je enaka produktu absolutne vrednosti obeh vektorjev in sinusa kota med njima, lahko skupni pomik poljubne točke telesa \bar{u} izvednotimo:

$$\bar{u} = \bar{u}_i + \bar{\varphi}_i \times \bar{r} \quad (3.14)$$

kjer \bar{r} označuje vektor med poljubno točko T na telesu in točko T_i katere pomik \bar{u}_i že poznamo. Podobno lahko določimo tudi lego točke T_i v kolikor poznamo lego točke T_j .

$$\bar{u}_i = \bar{u}_j + \bar{\varphi}_j \times (\bar{r}_i - \bar{r}_j) = \bar{u}_j + \bar{\varphi}_j \times (-\bar{r}_j) \quad (3.15)$$

V izrazu (3.3) upoštevamo enakost (3.2) v obliki $\bar{u}_j = \bar{u}_i + \bar{\varphi}_i \times \bar{r}_j$ ter dobimo:

$$\bar{u}_i = \bar{u}_i + \bar{\varphi}_i \times \bar{r}_j + \bar{\varphi}_j \times (-\bar{r}_j) = \bar{u}_i + (\bar{\varphi}_i - \bar{\varphi}_j) \times \bar{r}_j \quad (3.16)$$

Enačba (3.16) je lahko izpolnjena le v kolikor sta oba zasuka enaka oz. izjemoma v kolikor bi bila vektorja zasukov $\bar{\varphi}_i$ in $\bar{\varphi}_j$ vzporedna vektorju \bar{r}_j , kar pa ne vpliva na rezultate analiz, ker se v tem primeru obe točki nahajata na skupni premici, ki sovpada z osjo rotacije togega telesa, kjer so vsi premiki zaradi rotacije identično enaki 0.

Z enačbo (3.16) smo nedvoumno dokazali, da sta vektorja $\bar{\varphi}_i$ in $\bar{\varphi}_j$ enaka ter, da je zasuk togega telesa okrog poljubnih točk vedno enak. Pomik poljubne točke

togega telesa je zato povsem določen v kolikor poznamo vektor translatorsnega premika poljubne točke ter vektor rotacije togega telesa.

Komponente premikov poljubne točke k vzdolž izbranih koordinatnih osi (Slika 3.15) določimo:

$$\bar{u}_k = \begin{Bmatrix} u_{kx} \\ u_{ky} \\ u_{kz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{iz} \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \varphi_{ix} & \varphi_{iy} & \varphi_{iz} \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{ix} + \varphi_{iy}z_k - y_k\varphi_{iz} \\ u_{iy} + x_k\varphi_{iz} - z_k\varphi_{ix} \\ u_{iz} + y_k\varphi_{ix} - x_k\varphi_{iy} \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

kjer \bar{r}_k označuje radij vektor med točkama k in i v prostoru.

3.6.2 Podpore togih teles v prostoru in kinematična stabilnost

Pri vseh realnih gradbenih konstrukcijah je gibanje le teh omejeno oz. celo v celoti preprečeno s podporami, ki preprečujejo premike in rotacije telesa v določenih točkah in v izbranih smereh. V konstrukterski praksi se uporabljajo različne podpore v prostoru, nekatere izmed njih pa prikazuje Preglednica 3.5.

Preglednica 3.5: 3D podpore v inženirski praksi

Vrsta podpore	Dovoljeni premiki	Št. prep. prem. n_{ip}	Shema premikov	Simbol podpore (i)
Vpeta		6		
Členkasta	$\varphi_{ix}, \varphi_{iy}, \varphi_{iz}$	3		
Elastomerna	$u_{ix}, u_{iy}, \varphi_{ix}, \varphi_{iy}, \varphi_{iz}$	1		
Nepr. delno vrtljiva	$\varphi_{ix}, \varphi_{iz}$	4		
Valjčna podpora	u_{ix}, φ_{iy}	4		
Nihajna podpora	$u_{ix}, u_{iy}, \varphi_{ix}, \varphi_{iy}, \varphi_{iz}$	1		
Del. prem. in vrtljiva	$u_{iy}, \varphi_{ix}, \varphi_{iy}, \varphi_{iz}$	2		

Elastomerna in nihajna podpora sta si podobni le, da pri prvi premike telesa omogočajo deformacije teflonskih blokov, pri drugi pa nihajna členkasto priključena podporna toga palica. Pomike poljubne točke s takšno podporo podprtega togega telesa določimo: $\bar{u} = (u_{ix} + \varphi_{iy}(z - z_i) - \varphi_{iz}(y - y_i))\bar{e}_x + (u_{iy} + \varphi_{iz}(x - x_i) - \varphi_{ix}(z - z_i))\bar{e}_y + (\varphi_{ix}(y - y_i) - \varphi_{iy}(x - x_i))\bar{e}_z$.

Računsko število prostostnih stopenj togega telesa n_r določimo tako, da od števila vseh možnih prostostnih stopenj (6 za telo v prostoru) odštejemo število preprečenih prostostnih stopenj, ki ji telesu odvzamejo vseh n podpor.

$$n_r = 6 - \sum_{i=1}^n n_{ip} \quad (3.18)$$

Tudi v primeru 3D konstrukcij je dejansko število prostostnih stopenj vedno večje ali enako računskemu številu prostostnih stopenj.

$$n_d \geq n_r \quad (3.19)$$

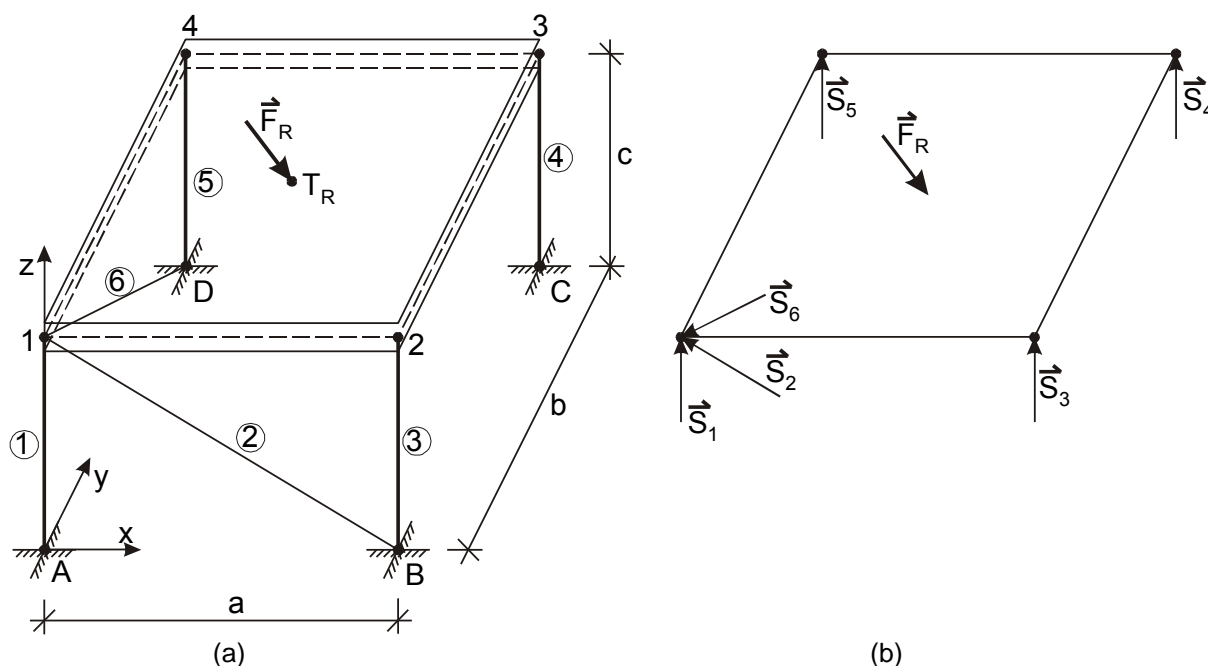
Dejansko število prostostnih stopenj je vedno večje ali enako 0.

$$n_d \geq 0 \quad (3.20)$$

Togo telo zagotovo miruje kadar so premiki vseh točk telesa pri poljubni obtežbi preprečeni. Togemu telesu pri katerem so preprečene vse prostostne stopnje (vsi možni neodvisni načini gibanja) pravimo, da je **kinematično stabilno**.

Primer 3.6:

Za togo telo v prostoru (Slika 3.16) podprto s šestimi osno nedeformabilnimi palicami bomo preverili ali ga je mogoče obremeniti s poljubno obtežbo.



Slika 3.16: Toga plošča podprta s šestimi nihajnimi palicami: (a) Shema konstrukcije in podpor in (b) Računski model prostega togega telesa v prostoru

Členkasto priključene toge palice preprečujejo premike togega telesa v smeri osi posameznih nihajk. Palice 1, 3, 4 in 5 preprečujejo premike togega telesa v točkah 1, 2, 3 in 4 v smeri osi z . Palici 2 in 3 preprečujeta premik v točki 1 togega telesa v smeri premice $\overline{B1}$ in $\overline{D1}$. Najprej določimo smerne kosinuse za smeri preprečenih premikov:

$$\cos \alpha_2 = (x_1 - x_B) / \overline{B1} = -a / \sqrt{a^2 + c^2}, \quad \cos \beta_2 = 0, \quad \cos \gamma_2 = (z_1 - z_B) / \overline{B1} = c / \sqrt{a^2 + c^2}$$

$$\cos \alpha_6 = 0, \quad \cos \beta_6 = (y_1 - y_B) / \overline{D1} = -b / \sqrt{b^2 + c^2}, \quad \cos \gamma_6 = (z_1 - z_D) / \overline{D1} = c / \sqrt{b^2 + c^2}$$

Premik točke 1 lahko izrazimo v komponentni obliki $\bar{u}_1 = \{u_{x1}, u_{y1}, u_{z1}\}$ ter upoštevamo kinematične pogoje podpore s preprečenimi premiki v smereh osi vseh treh nihajnih palic:

$$u_{x1} = u_{z1} = 0$$

$$u_{y1} \cos\alpha_2 + u_{z1} \cos\beta_2 + u_{z1} \cos\gamma_2 = 0$$

$$u_{y1} \cos\alpha_6 + u_{z1} \cos\beta_6 + u_{z1} \cos\gamma_6 = 0$$

Preostali enačbi $u_{x1} \cos\alpha_2 = 0$ in $u_{y1} \cos\beta_6 = 0$ imata samo trivialni rešitvi v kolikor sta razdalji a in b različni od 0. **Zato lahko zagotovo trdimo, da je premik poljubne točke togega telesa v celoti preprečen v kolikor so v obravnavani točki preprečeni premiki v treh različnih smereh v prostoru.**

Za neodvisne načine gibanja toge plošče privzamemo: $u_{x1}, u_{y1}, u_{z1}, \varphi_{1x}, \varphi_{1y}$ in φ_{1z} .

Kinematični pogoji v podporah:

$$u_{x1} = u_{y1} = u_{z1} = u_{z2} = u_{z3} = u_{z4} = 0$$

Kinematične enačbe:

$$u_{z2} = u_{z1} - a\varphi_{1y} = 0, \quad u_{z3} = u_{z1} + b\varphi_{1x} - a\varphi_{1y} = 0, \quad u_{z4} = u_{z1} + b\varphi_{1x} = 0$$

Vse tri kinematične enačbe so zagotovo izpolnjene saj v primeru $a \neq 0$ in $b \neq 0$ obstaja le trivialna rešitev $\varphi_{1x} = \varphi_{1y} = 0$. Pogoji kinematične stabilnosti obravnavane toge plošče pa niso izpolnjeni, ker obstaja možnost rotacije plošče okrog osi z saj šesti neodvisni način gibanja φ_{1z} v kinematičnih izrazih ne nastopa ter je zato lahko poljuben. **Tako podprtega telesa ni mogoče obremeniti s poljubno obtežbo.**

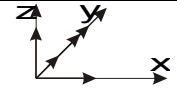
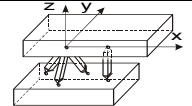
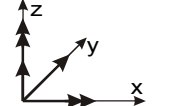
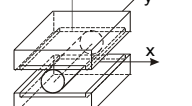
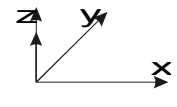
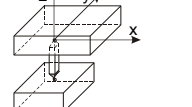
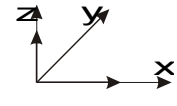
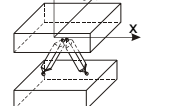
3.6.3 Statična določenost in prosto telo v prostoru

Stopnja statične nedoločenosti togega telesa v prostoru je enaka številu ravnotežnih pogojev togega telesa (skupaj 6) zmanjšanim za število neznanih reakcijskih sil, ki se pojavijo v podporah v smereh preprečenih premikov.

Število neznanih podpornih sil (reakcij in vpetostnih momentov) je enako številu preprečenih premikov. Za nekatere podpore v prostoru reakcijske sile in momente prikazuje Preglednica 3.6.

Preglednica 3.6: 3D podpore s podpornimi silami

Vrsta podpore	Reakcijske sile	Št. reak. sil. N_{ip}	Shema reakcij	Simbol podpore (A)
Vpeta	$X_A, Y_A, Z_A, M_{Ax}, M_{Ay}, M_{Az}$	6		
Členkasta	X_A, Y_A, Z_A	3		
Elastomerna	Z_A	1		

Nepr. delno vrtljiva	X_A, Y_A, Z_A, M_{Ay}	4		
Valjčna podpora	Y_A, Z_A, M_{Ax}, M_{Az}	4		
Nihajna podpora	Z_A	1		
Del. prem. in vrtljiva	X_A, Z_A	2		

(N_{ip} označuje število reakcijskih sil v i-ti podpori)

Stopnjo statične nedoločenosti tega telesa v prostoru N_s določimo tako, da od števila vseh ravnotežnih pogojev odštejemo število reakcijskih sil, ki je enako številu preprečenih premikov v podporah. Število vseh ravnotežnih pogojev tega telesa v ravnini je enako številu neodvisnih načinov gibanja (torej skupaj 6). Za telo v prostoru z n podporami velja:

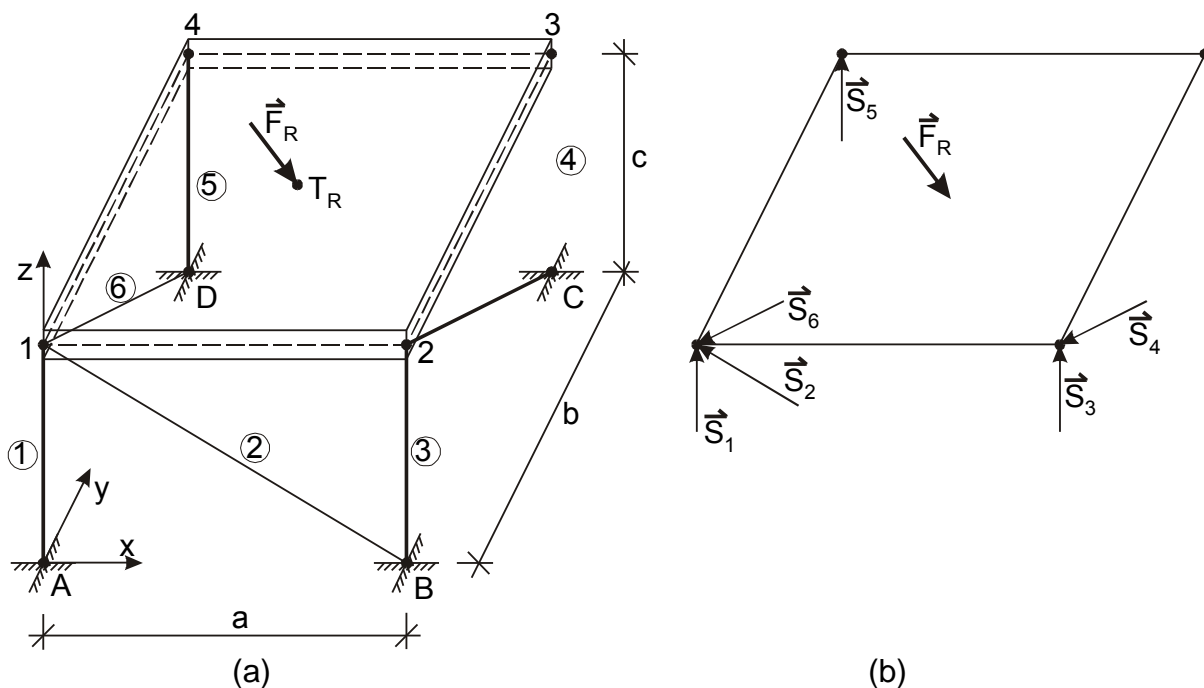
$$N_s = 6 - \sum_{i=1}^n N_{ip} \quad (3.21)$$

Z ozirom na stopnjo statične nedoločenosti razlikujemo: $N_s > 0$ - telo je zunanje statično predoločeno, $N_s < 0$ - telo je zunanje statično nedoločeno in $N_s = 0$ **togo telo je zunanje statično določeno, računsko število prostostnih stopenj $n_r = 0$, hkrati pa je tudi število neznanih podpornih sil enako številu ravnotežnih enačb.**

Pri statično določenih in kinematično stabilno podprtih telesih v prostoru lahko vedno vplive podpor nadomestimo s podpornimi (reakcijskimi) silami ter pri nadaljnjih statičnih analizah takšno vezano togo telo obremenjeno z obtežbami in reakcijskimi silami obravnavamo kot prosto telo v prostoru.

Primer 3.7:

Za podobni primer toge plošče v prostoru, ki smo jo obravnavali v primeru 3.6 določimo reakcijske sile. Ker prej obravnavana toga plošča ni kinematično stabilna, moramo spremeniti lego vsaj ene izmed podpornih palic (toga nihajna palica 4 tokrat poteka vzdolž daljice $\overline{2C}$). Slika 3.17 prikazuje ploščo, ki je obremenjena s poljubno rezultantno obtežbo $\vec{F}_R = \{F_{Rx}, F_{Ry}, F_{Rz}\}$, ki deluje v točki $T_R = (a/2, b/2, c)$.



Slika 3.17: Toga plošča podprta s šestimi nihajnimi palicami; (a) podprto telo in (b) prosto telo v prostoru

Vplive osno nedeformabilnih členkasto povezanih podpornih palic (nihajk) nadomestimo z njihovimi osnimi silami:

$$\vec{S}_1 = S_1 \{0, 0, 1\}, \vec{S}_2 = S_2 \left\{ -a/\sqrt{a^2 + c^2}, 0, c/\sqrt{a^2 + c^2} \right\}, \vec{S}_3 = S_3 \{0, 0, 1\}$$

$$\vec{S}_4 = S_4 \left\{ 0, -b/\sqrt{b^2 + c^2}, c/\sqrt{b^2 + c^2} \right\}, \vec{S}_5 = S_5 \{0, 0, 1\}, \vec{S}_6 = S_6 \left\{ 0, -b/\sqrt{b^2 + c^2}, c/\sqrt{b^2 + c^2} \right\}$$

S smiselnim izborom ravnotežnih enačb (silne in momentne oz. samo momentne) je mogoče ravnotežne enačbe togega telesa podati v enostavni obliki:

$$\sum \vec{M}^1 = \vec{r}_{1/2} \times \vec{S}_3 + \vec{r}_{1/2} \times \vec{S}_4 + \vec{r}_{1/4} \times \vec{S}_5 + \vec{r}_{1/T_R} \times \vec{F}_R = S_3 \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + S_4 \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a & 0 & 0 \\ 1 & -b/\sqrt{b^2 + c^2} & c/\sqrt{b^2 + c^2} \end{vmatrix}$$

$$+ S_5 \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a/2 & b/2 & 0 \\ F_{Rx} & F_{Ry} & F_{Rz} \end{vmatrix} = \begin{cases} S_5 b + F_{Rz} b/2 \\ -S_3 a - S_4 a c/\sqrt{b^2 + c^2} - F_{Rz} a/2 \\ -S_4 a b/\sqrt{b^2 + c^2} + F_{Ry} a/2 - F_{Rx} b/2 \end{cases} = \vec{0}$$

$$S_5 = -F_{Rz} / 2$$

$$S_4 = 0.5 \cdot F_{Ry} \sqrt{b^2 + c^2} / b - 0.5 \cdot F_{Rx} \sqrt{b^2 + c^2} / a$$

$$S_3 = 0.5 \cdot F_{Rx} c / a - 0.5 \cdot F_{Ry} c / b - 0.5 \cdot F_{Rz}$$

$$\sum F_i = \begin{cases} -S_2 a / \sqrt{a^2 + c^2} + F_{Rx} \\ -S_4 b / \sqrt{b^2 + c^2} - S_6 b / \sqrt{b^2 + c^2} + F_{Ry} \\ S_1 + S_2 c / \sqrt{a^2 + c^2} + S_3 + S_4 c / \sqrt{b^2 + c^2} + S_5 + S_6 c / \sqrt{b^2 + c^2} + F_{Rz} \end{cases} = \vec{0}$$

$$S_2 = F_{Rx} \sqrt{a^2 + c^2} / a$$

$$S_6 = 0.5 \cdot F_{Rx} \sqrt{b^2 + c^2} / a + 0.5 \cdot F_{Ry} \sqrt{b^2 + c^2} / b$$

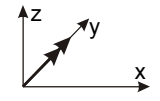
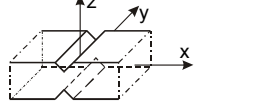
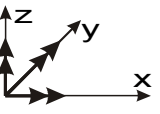
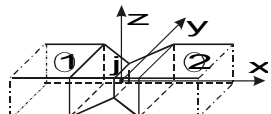
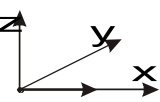

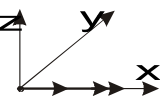
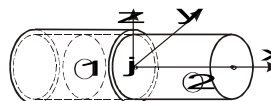
$$S_1 = -(3/2)F_{Rx}(c/a) - (1/2)F_{Ry}(c/b)$$

3.6.4 Vezi in kinematična stabilnost sistemov teles v prostoru

Posamezna toga telesa v prostoru so lahko med sabo povezana z vezmi, ki preprečujejo relativne premike posameznih teles v določeni smeri. Ker ima telo v prostoru šest prostostnih stopenj je z različnimi vezmi mogoče preprečiti največ šest relativnih premikov posameznih togih teles (v takšnem skrajnem primeru, pravimo da sta konstrukciji kontinuirani ter ju lahko obravnavamo kot eno samo tego telo).

Zato vezi zmanjšujejo število prostostnih stopenj sistemom togih teles. Preglednica 3.7 prikazuje nekatere možne vezi konstrukcijskih sistemov v prostoru.

Preglednica 3.7: Nekateri 3D vezi v inženirski praksi

Naziv vezi v točki (j)	Relativni premiki $\Delta u_j = u_j^2 - u_j^1$			Simbol vezi
	Dovoljeni rel. pr.	Št. prep. rel. p. n_{jv}	Shema dov. rel.prem.	
Enojni členek	$\Delta\varphi_{jy}$	5		
Popolni členek	$\Delta\varphi_{jx}, \Delta\varphi_{jy}, \Delta\varphi_{jz}$	3		
Premična nevrtiljiva	Δu_{xj}	5		
Premična vrtiljiva	$\Delta u_{xj}, \Delta\varphi_{jx}$	4		

Računsko število prostostnih stopenj sistema k togih teles podprtih z n podporami in med sabo povezanih z m različnimi vezmi določimo:

$$n_r = 6k - \sum_{i=1}^n n_{ip} - \sum_{j=1}^m n_{jv} \quad (3.22)$$

kjer n_{ip} označuje število preprečenih premikov v i - ti podpori, n_{jv} število preprečenih relativnih premikov v vezi j , n število podpor in m število vezi.

Dejansko število prostostnih stopenj sistema je vedno večje ali enako računskemu številu ($n_d \geq n_r$) ter je hkrati lahko le večje ali enako 0 ($n_d \geq 0$).

Pogoj $n_d = 0$ je vedno potreben in hkrati zadosten pogoj za kinematično stabilnost sistema togih teles.

V praksi so si posebni konstrukcijski elementi tako za podpore kot tudi za vezi med sabo podobni. V kolikor je eden izmed elementov (npr. stebler viadukta povsem nepremičen) vezni element med stebrom in prekladno konstrukcijo predstavlja podporo, v kolikor pa se med eksploatacijo objekta lahko oba premikata mu pravimo vezni element med konstrukcijskimi elementi.

Slika 3.18 prikazuje deformirano elastomerno ležišče tipa "Mageba". Takšna ležišča uporabljamo pri objektih s pričakovanimi velikimi relativnimi premiki zaradi temperaturnih vplivov ter zlasti še pri nestabilnih oz. manj zanesljivih podporah, kjer relativne premike podpor zaradi premikov temeljnih tal in stebrov viaduktov ni mogoče v naprej zanesljivo napovedati. Slika 3.18 prikazuje ležišče, ki ga bo potrebno sprostiti, ker sicer pri premikih večjih od 100 mm ne bo več sposobno opravljati svoje s projektom predvidene funkcije.

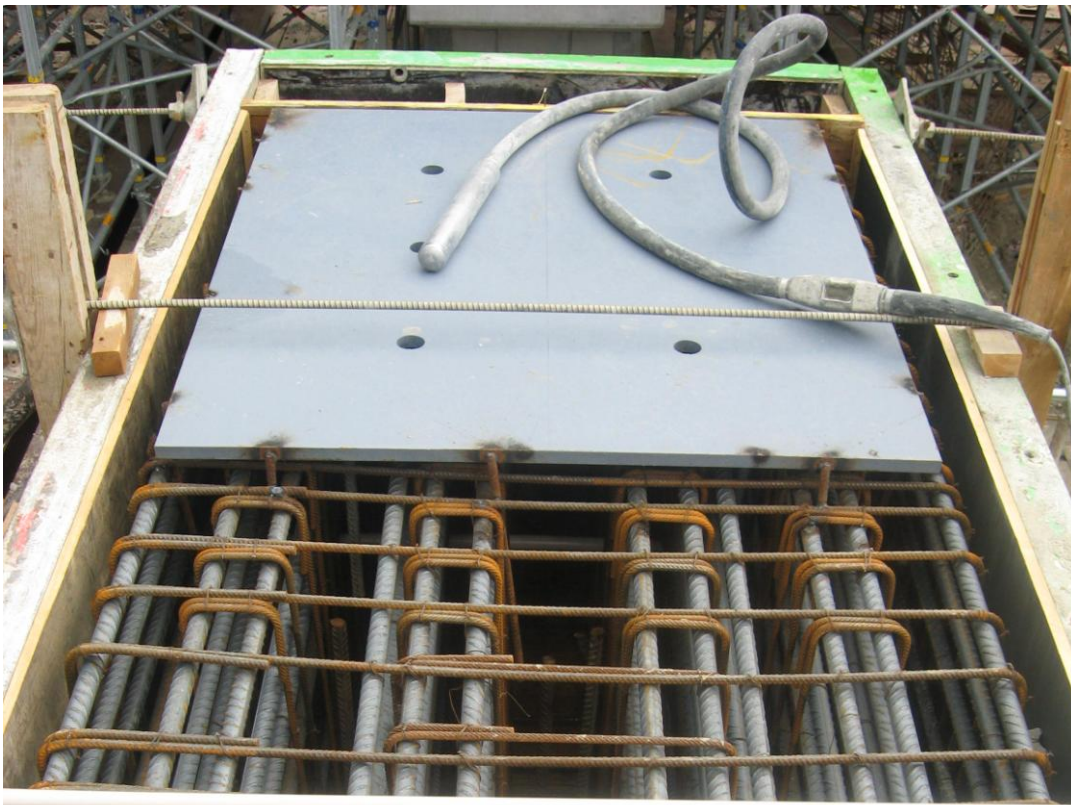


Slika 3.18: Deformirano ležišče tipa "Mageba" na viaduktu Barnica, HC, Razdrto – Vipava

V praksi obstaja mnogo vrst ležišč katerih kakovost je pogojena predvsem z njihovo nabavno ceno. V Sloveniji jih največ uvažamo iz Nemčije in Švice. Slika 3.19 prikazuje v vzdolžni smeri prečno ležišče ter Slika 3.20 montažo ležišča v inženirski praksi.



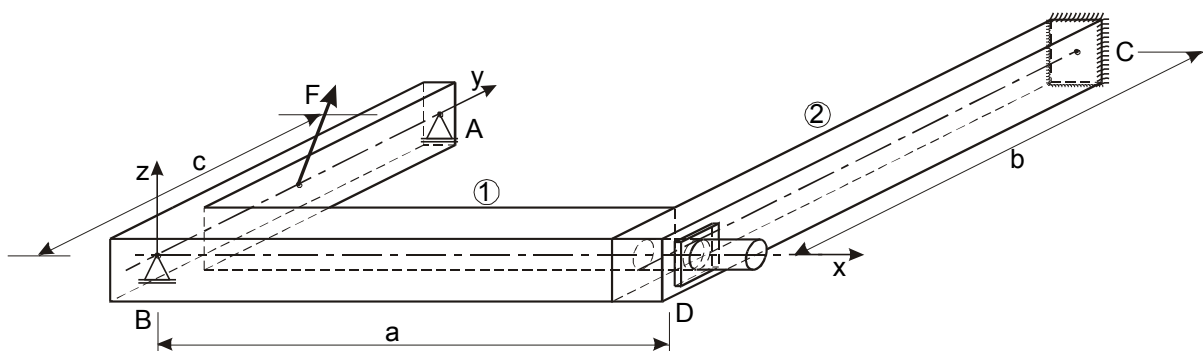
Slika 3.19: V vzdolžni smeri prečno ležišče "Mageba" na viaduktu Rebernice, HC Razdrto - Vipava



Slika 3.20: Montaža ležišča

Primer 3.8:

Za model branaste konstrukcije (Slika 3.21) preverite pogoje kinematične stabilnosti sistema togih teles. V podporah A in B je preprečen premik telesa 1 v smeri osi z, v točki C so preprečeni vsi premiki togega telesa 2, delno vrtljiva zveza obeh teles v točki D preprečuje tri relativne premike ter dva relativna zasuka obeh teles.



Slika 3.21: Sistem dveh podprtih in povezanih togih teles v prostoru Sistem dveh podprtih togih teles (1) in (2), ki sta med sabo členkasto povezani; (a) kinematično stabilni sistem (b) kinematično nestabilni sistem (točke A, B in C so kolinearne)

Za neodvisne načine gibanja togih teles upoštevamo: $u_{xB}^1, u_{yB}^1, u_{zB}^1, \varphi_{Bx}^1, \varphi_{By}^1$ in φ_{Bz}^1 ter $u_{xC}^2, u_{Cy}^2, u_{zC}^2, \varphi_{Cx}^2, \varphi_{Cy}^2$ in φ_{Cz}^2 .

Kinematični pogoji v podporah:

$$u_{zB}^1 = 0, u_{zA}^1 = 0, u_{xC}^2 = u_{yC}^2 = u_{zC}^2 = \varphi_{Cx}^2 = \varphi_{Cy}^2 = \varphi_{Cz}^2 = 0$$

Kinematične enačbe:

$$u_{zA}^1 = u_{zB}^1 + c\varphi_{Bx}^1 = c\varphi_{Bx}^1 = 0$$

$$u_{xD}^1 - u_{xD}^2 = u_{xB}^1 = 0$$

$$u_{yD}^1 - u_{yD}^2 = u_{yB}^1 + a\varphi_{Bz}^1 = 0$$

$$u_{zD}^1 - u_{zD}^2 = u_{zB}^1 + a\varphi_{By}^1 = 0$$

$$\varphi_{Dy}^1 - \varphi_{Dy}^2 = \varphi_{By}^1 - \varphi_{Cy}^2 = \varphi_{By}^1 = 0$$

$$\varphi_{Dz}^1 - \varphi_{Dz}^2 = \varphi_{Bz}^1 - \varphi_{Cy}^2 = \varphi_{Bz}^1 = 0$$

Z rešitvijo sistema enačb zlahka ugotovimo, da so tudi vsi preostali neodvisni načini gibanja preprečeni $u_{yB}^1 = u_{zB}^1 = \varphi_{By}^1 = \varphi_{Bz}^1 = 0$. Obravnavani sistem togih teles je kinematično stabilen ($n_d = 0$).

3.6.5 Vezne sile in statična določenost prostorskih sistemov

V veznih elementih med posameznimi togimi telesi se v smereh preprečenih relativnih premikov pojavijo vezne sile. Število veznih sil oz. dvojic sil (vrtljnih momentov) je enako številu preprečenih premikov oz. zasukov med posameznimi elementi sistema. V gradbeniški praksi so vezi zelo občutljivi gradbeni elementi, ker svojo funkcijo opravljajo le v naprej poznanih oz. določenih pogojih kot so: omejeni oz. v naprej določeni največji dopustni premiki, ki so določeni v specifikaciji polizdelka, občasni pregledi in redno vzdrževanje.

V kolikor vsi pogoji za delovanje ležišč niso izpolnjeni jih ni dovoljeno vgraditi, ker lahko odpoved delovanja ležišč povzroči katastrofalne poškodbe na objektu in privede celo do porušitve.

Z ozirom na skupni sistem togih teles predstavljajo vezne sile notranje sile sistema in zato mora biti vsota vseh veznih sil sistema v ravnotežju oz. identično enaka 0.

Število in pripadajoče sheme veznih sil pri nekaterih vrstah vezi za 3D sisteme togih teles prikazuje Preglednica 3.8.

Preglednica 3.8: 3D vezi in pripadajoče vezne sile

Naziv vezi v točki (j)	Vezne sile: $X_j^1 = -X_j^2, Y_j^1 = -Y_j^2, M_j^1 = -M_j^2$			Simbol vezi
	Vezne sile	Št. veznih sil: N_{jv}	Shema veznih sil	
Enojni členek	$X_j, Y_j, Z_j, M_{jx}, M_{jz}$	5		
Popolni členek	X_j, Y_j, Z_j	3		
Premična nevrtiljiva	$Y_j, Z_j, M_{jx}, M_{jy}, M_{jz}$	5		
Premična vrtiljiva	Y_j, Z_j, M_{jy}, M_{jz}	4		

Stopnjo statične določenosti sistema k togih teles podprtih z n podporami in med sabo povezanih z m različnimi vezmi določimo:

$$N_s = 6k - \sum_{i=1}^n N_{ip} - \sum_{j=1}^m N_{jv} \quad (3.23)$$

kjer N_{ip} označuje število preprečenih premikov v podpori i , N_{jv} število preprečenih relativnih premikov za vez j , n število podpor in m število vezi.

Tudi pri sistemih togih teles v prostoru razlikujemo: statično nedoločene ($N_s < 0$), statično določene ($N_s = 0$) in statično predoločene ($N_s > 0$).

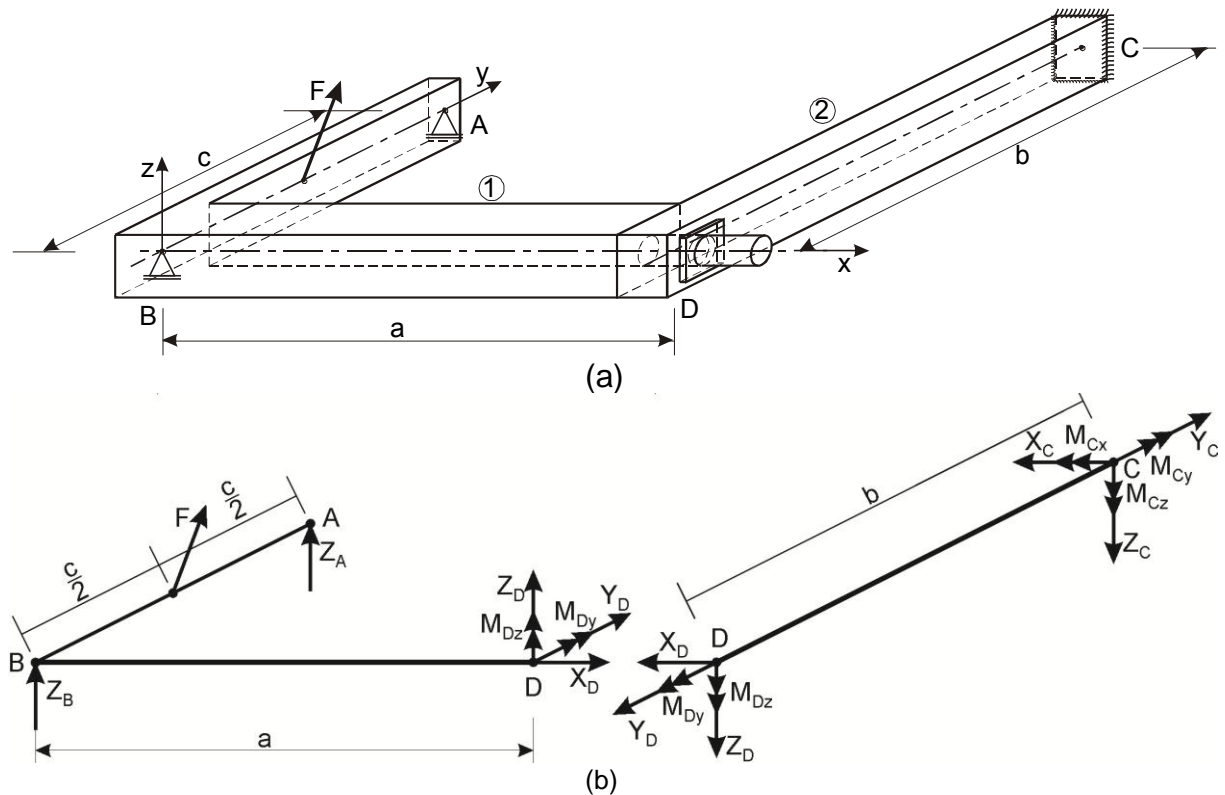
V kolikor so podprti statično določeni sistemi togih teles ($N_s = 0$) hkrati tudi kinematično stabilni ($n_r = n_d = 0$) lahko podporne (reakcijske) in vezne sile med posameznimi elementi sistema določimo le z uporabo ravnotežnih pogojev.

Pri statično določenih in kinematično stabilnih sistemih togih teles lahko učinke podpor in vezi med posameznimi telesi nadomestimo s podpornimi (reakcijskimi) in z veznimi silami ter pri nadaljnjih statičnih analizah posamezna toga telesa obremenjena z obtežbami in reakcijskimi ter veznimi silami obravnavamo kot posamezna **prosta telesa** v prostoru.

Primer 3.9:

Za sistem togih teles (branasto konstrukcijo, Slika 3.17), določite stopnjo statične nedoločnosti.

Sistem lahko obravnavamo kot dve prosti telesi, ki sta med sabo povezani s petimi veznimi silami ter podprti z osmimi podpornimi silami (Slika 3.22).



Slika 3.22: Primer branaste konstrukcije: (a) Sistem dveh povezanih togih teles v prostoru in (b) Računski model s pripadajočimi podpornimi in veznimi silami

Pri analizi stopnje statične nedoločnosti upoštevamo: $k=2$ (12 ravnotežnih enačb), $n=3$ (tri podpore s skupaj osmimi podpornimi silami) in $m=1$ (ena vez s petimi veznimi silami).

$$N_s = 6k - \sum_{i=1}^n N_{ip} - \sum_{j=1}^m N_{jv} = 6 \cdot 2 - (1 + 1 + 6) - (5) = -1$$

Obravnavani sistem togih teles je 1x statično nedoločen.

Pri statično nedoločenih konstrukcijskih sistemih uporaba modela togih teles ni dopustna, ker brez upoštevanja deformacijskih pogojev ni mogoče določiti reakcijskih in veznih sil.

4 NOTRANJE STATIČNE KOLIČINE

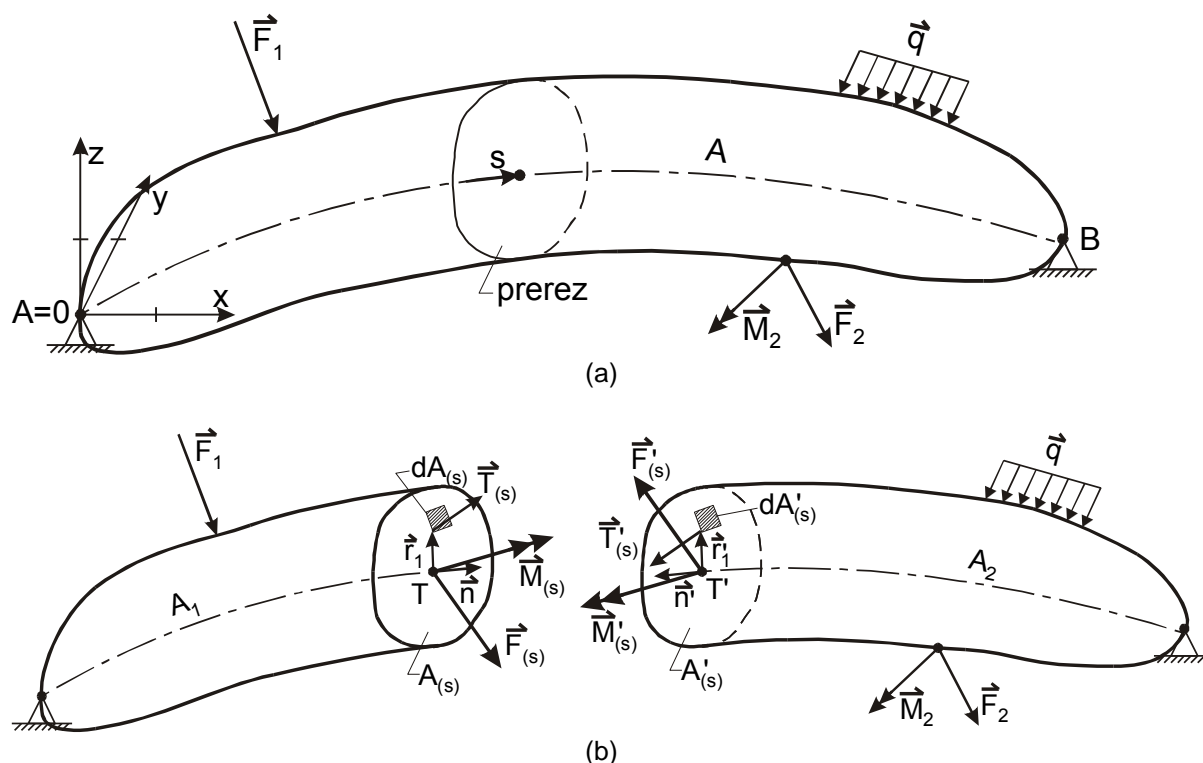
Pojem statična analiza konstrukcijskih elementov obsega analizo pričakovanih obtežb, zasnovo konstrukcije, izbor računskega modela, reševanje pripadajočega matematičnega modela, oceno dobljenih rezultatov ter predstavitev pričakovanih deformacij, reakcijskih in veznih sil ter notranjih obremenitev posameznih elementov v vseh karakterističnih prerezih, ki so osnova za dimenzioniranje.

Analiziranje posameznih konstrukcijskih sistemov z **modelom togih teles** je mogoče in dopustno samo v primerih **statično določenih in kinematično stabilnih konstrukcijskih sistemov** kadar **deformacije posameznih elementov niso pomembne** ter **ne vplivajo na rezultate statičnih analiz**.

4.1 Naravni lokalni koordinatni sistem in prerezne sile

Konstrukcijski elementi s svojo togostjo prenašajo zunanje obremenitve na podpore, sosednje konstrukcije ali na temeljna tla. Zato se zaradi dodatne obtežitve v samih konstrukcijah spremenijo medsebojne povezovalne sile ($\vec{S}_{ij} = -\vec{S}_{ji}$) med posameznimi delci telesa (realno telo sestavlja neskončno število med sabo povezanih delcev materije).

Notranje statične količine (sile in vrtilni momenti) se nahajajo v notranjosti posameznih konstrukcijskih elementov ter jih lahko določimo le tako, da element v analiziranem prerezu namišljeno (fiktivno) prerežemo na dva dela (Slika 4.1).



Slika 4.1: Togo telo v prostoru; (a) Podprto telo A obteženo z zunanjimi obtežbami in (b) Podprti telesi A_1 in A_2 z zunanjimi obtežbami ter povezani z veznimi silami

Koordinata "s" označuje dolžino težiščne osi telesa, $A_{(s)}$ označuje prečni prerez telesa A_1 in $dA_{(s)}$ diferencial površine prečnega prereza, lego diferenciala površine $dA_{(s)}$ v prerezu $A_{(s)}$ z ozirom na težiščno točko prereza T določa vektor \vec{r}_1 , ki se nahaja v

ravnini prereza $A_{(s)}$ (zapis $A_{(s)}$ označuje prerez telesa pri izbrani vrednosti parametra s oz. pripadajočo funkcijsko sovisnost).

Vsoto vseh notranjih sil na enoto površine na območju $dA_{(s)}$, ki jih s fiktivnim prerezom s - s sprostimo na telesu A_I označuje napetostni vektor $\vec{T}_{(s)}$, ki lahko deluje v poljubni smeri v prostoru ter je odvisen od prereza, položaja $dA_{(s)}$ v prerezu in od zunanje obtežbe, ki na telo deluje. Prerez v točki s je določen z zunanjo normalo $\vec{n}_{(s)} = \vec{n}$, ki je pravokotna na prerez $A_{(s)}$.

Telesu A_2 pripada prerez $A'_{(s)}$, ki ima v primerjavi s prerezom $A_{(s)}$ nasprotno usmerjeno zunanjo normalo $\vec{n}' = -\vec{n}$ ter zato nasprotno usmerjene pripadajoče napetostne vektorje. Vsota notranjih sil v obeh prerezih $A_{(s)}$ in $A'_{(s)}$ je identično enaka 0 kar izhaja iz pogoja ravnotežja vseh notranjih sil v telesu ($\vec{S}_{ij} = -\vec{S}_{ji}$).

Zaključimo lahko:

1. Prereznim ploskvam z nasprotno orientiranimi zunanjimi normalami pripadajo nasprotno orientirani napetostni vektorji.

$$\vec{T}'_{(s)} = -\vec{T}_{(s)} \quad (4.1)$$

2. Vsota vseh napetostnih vektorjev $\vec{T}_{(s)}$ v prerezu $A_{(s)}$ predstavlja notranjo rezultantno silo v prerezu $\vec{F}_{(s)}$, ki je določena:

$$\vec{F}_{(s)} = \iint_{A_{(s)}} \vec{T}_{(s)} dA_{(s)} \quad (4.2)$$

3. Vsota vrtilnih momentov vseh napetostnih vektorjev $\vec{T}_{(s)}$ na težiščno točko T v prerezu $A_{(s)}$ predstavlja notranji vrtilni moment (navor) $\vec{M}_{(s)}$ v prerezu $A_{(s)}$ telesa, ki ga določimo:

$$\vec{M}_{(s)} = \iint_{A_{(s)}} \vec{r}_1 \times \vec{T}_{(s)} dA_{(s)} \quad (4.3)$$

4. Smeri notranjih sil $\vec{F}_{(s)}$ in $\vec{M}_{(s)}$, ki pripadata prerezu $A_{(s)}$ ter $\vec{F}'_{(s)}$ in $\vec{M}'_{(s)}$, ki pripadata prerezu $A'_{(s)}$ so vezane na smeri zunanjih normal. K ploskvam (ravnim prerezom) z nasprotno orientirano normalo $\vec{n}' = -\vec{n}$ pripadajo nasprotno usmerjeni vektorji notranjih sil.

$$\vec{F}_{(s)} = -\vec{F}'_{(s)}, \quad \vec{M}_{(s)} = -\vec{M}'_{(s)} \quad (4.4)$$

5. Prerezne sile $\vec{F}_{(s)}$ in $\vec{M}_{(s)}$ oz. $\vec{F}'_{(s)}$ in $\vec{M}'_{(s)}$ predstavljajo vplive telesa A_2 na telo A_I oz. obratno.
6. Ker je telo A v ravnotežju, morata biti tudi telesi A_I oz. A_2 z upoštevanjem njunih medsebojnih vplivov $\vec{F}'_{(s)}$ in $\vec{M}'_{(s)}$ oz. $\vec{F}_{(s)}$ in $\vec{M}_{(s)}$ vsako zase v ravnotežju.

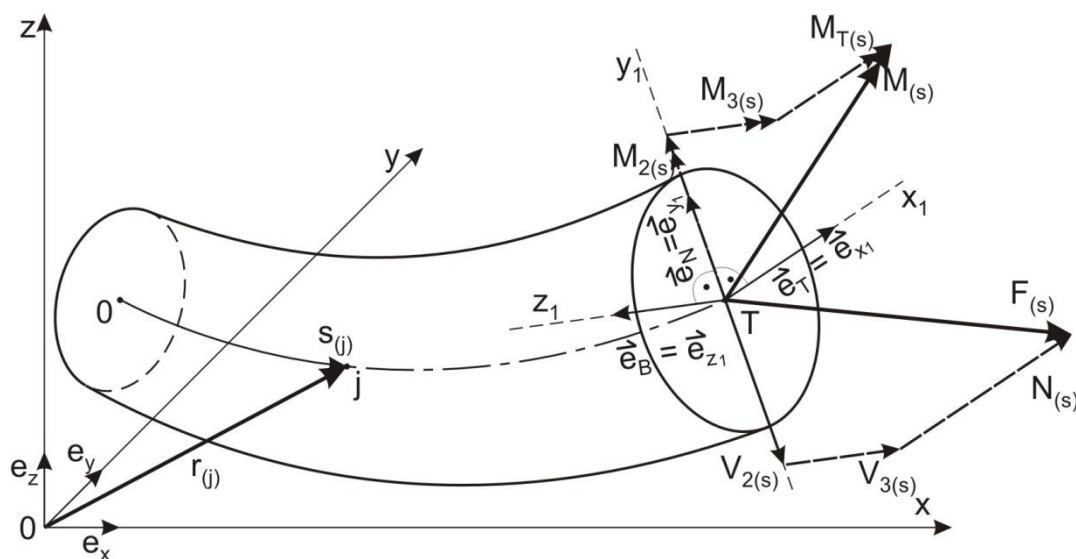
7. Ker morata biti za katerikoli prečni prerez s - s uravnoveženega skupnega telesa A oba dobljena dela telesa A_1 in A_2 z upoštevanjem njihovih medsebojnih vplivov v ravnotežju, lahko notranji sili $\vec{F}'_{(s)}$ in $\vec{M}'_{(s)}$ oz. $\vec{F}_{(s)}$ in $\vec{M}_{(s)}$ določimo kot sili, ki sta potrebni za zagotovitev ravnotežja obeh delov telesa A_1 in A_2 .
8. Prerezne sile so razporejene po celotni površini prereza $A_{(s)}$ oz. $A'_{(s)}$, vendar lahko njihov celotni vpliv na togi telesu A_1 oz. A_2 nadomestimo z eno samo generalizirano silo $\vec{F}_{(s)}^T = \{\vec{F}_{(s)}, \vec{M}_{(s)}\}$ oz. $\vec{F}_{(s)} = -\vec{F}_{(s)}^T$, ki jo vedno iz vrednotimo na težiščno točko T analiziranega prereza.

Za potrebe dimenzioniranja posameznih konstrukcijskih elementov moramo določiti intenzitete notranjih sil v naravnem (lokalnem) koordinatnem sistemu, ki ga določajo enotni vektorji vzdolž tangente (\vec{e}_T), normale (\vec{e}_N) in binormale (\vec{e}_B) na os nosilca s koordinatnim izhodiščem v težišču prereza.

Težiščno os tega telesa lahko podamo v parametrični obliki (Slika 4.2).

$$\vec{r}_{(s)} = x_{(s)}\vec{e}_x + y_{(s)}\vec{e}_y + z_{(s)}\vec{e}_z \quad (4.5)$$

kjer so $x_{(s)}$, $y_{(s)}$ in $z_{(s)}$ koordinate težiščne osi konstrukcije v odvisnosti od parametra s , ki predstavlja dolžino težiščne osi ter jo običajno merimo od podpore oz. vezi elementa, ki ga analiziramo (Slika 4.2).



Slika 4.2: Prerez telesa z naravnim lokalnim koordinatnim sistemom (\vec{e}_T , \vec{e}_N , \vec{e}_B)

Enotne vektorje naravnega lokalnega koordinatnega sistema s koordinatnimi osmi (x_1 , y_1 , z_1) v smeri tangente, normale in binormale na težiščno os obravnavanega tega telesa določimo v parametrični obliki:

$$\vec{e}_T = d\vec{r}_{(s)} / ds = \vec{r}'_{(s)}, \quad |\vec{e}_T| = 1 \text{ (tangenti vektor na os nosilca, } \vec{e}_T = \vec{e}_{x_1}) \quad (4.6)$$

$$\vec{e}_N = \frac{\vec{e}'_T}{|\vec{e}'_T|} = \frac{\vec{r}''_{(s)}}{|\vec{r}''_{(s)}|}, \quad |\vec{e}_N| = 1 \text{ (normalni vektor na os nosilca, } \vec{e}_N = \vec{e}_{y_1}) \quad (4.7)$$

$$\vec{e}_B = \vec{e}_T \times \vec{e}_N, \quad |\vec{e}_B| = 1 \text{ (binormalni vektor, } \vec{e}_B = \vec{e}_{z_1}) \quad (4.8)$$

Pozitivni predznaki osi x_1 , y_1 in z_1 so vedno vezani na smer zunanje normale \bar{n} na prerez $A_{(s)}$. Na prerezu $A'_{(s)}$ z nasprotno normalo $\bar{n}'_{(s)} = -\bar{n}_{(s)}$ (Slika 4.1) so tudi smeri x'_1 , y'_1 in z'_1 in pripadajoči enotni vektorji nasprotno usmerjeni ($\bar{e}'_T = -\bar{e}_T$, $\bar{e}'_N = -\bar{e}_N$ in $\bar{e}'_B = -\bar{e}_B$).

Za prostorsko ukrivljene konstrukcije lahko definiramo še radij fleksijske ukrivljenosti $R_{(s)}$ in radij torzijske ukrivljenosti ali zvitosti $B_{(s)}$ težiščne osi v točki T analiziranega prereza.

$$R_{(s)} = 1/|\bar{r}''_{(s)}| = 1/\sqrt{(x''_{(s)})^2 + (y''_{(s)})^2 + (z''_{(s)})^2} \quad (4.9)$$

$$B_{(s)} = ((x''_{(s)})^2 + (y''_{(s)})^2 + (z''_{(s)})^2) / \begin{vmatrix} x'_{(s)} & y'_{(s)} & z'_{(s)} \\ x''_{(s)} & y''_{(s)} & z''_{(s)} \\ x'''_{(s)} & y'''_{(s)} & z'''_{(s)} \end{vmatrix} \quad (4.10)$$

Posplošeno prerezno silo $\bar{F}^T_{(s)}$ lahko razstavimo v šest komponent v smereh treh osi lokalnega koordinatnega sistema (x_1, y_1, z_1) , ki ga določajo enotni vektorji $(\bar{e}_T, \bar{e}_N, \bar{e}_B)$ z izhodiščem v težišču analiziranega prereza.

$$\bar{F}_{(s)} = N_{(s)}\bar{e}_T + V_{2(s)}\bar{e}_N + V_{3(s)}\bar{e}_B \quad (4.11)$$

$$\bar{M}_{(s)} = M_{T(s)}\bar{e}_T + M_{2(s)}\bar{e}_N + M_{3(s)}\bar{e}_B \quad (4.12)$$

Za posamezne komponente notranjih sil (v stroki jim pravimo tudi notranje statične količine) imamo v naprej določena oz. dogovorjena imena:

$N_{(s)}$ **osna sila, ki deluje v smeri tangente na os nosilca ($\bar{e}_T = \bar{e}_{x_1}$);**

$V_{2(s)}$ **prečna sila v smeri glavne normale ($\bar{e}_N = \bar{e}_{y_1}$);**

$V_{3(s)}$ **prečna sila v smeri binormale ($\bar{e}_B = \bar{e}_{z_1}$);**

$M_{T(s)}$ **torzijski moment, ki deluje v smeri tangente na os nosilca ($\bar{e}_T = \bar{e}_{x_1}$);**

$M_{2(s)}$ **upogibni moment okrog osi y_1 , ki deluje v smeri glavne normale v prerezu ($\bar{e}_N = \bar{e}_{y_1}$);**

$M_{3(s)}$ **upogibni moment okrog osi z_1 , ki deluje v smeri binormale v prerezu telesa ($\bar{e}_B = \bar{e}_{z_1}$).**

4.2 Ekvivalentne notranje sile

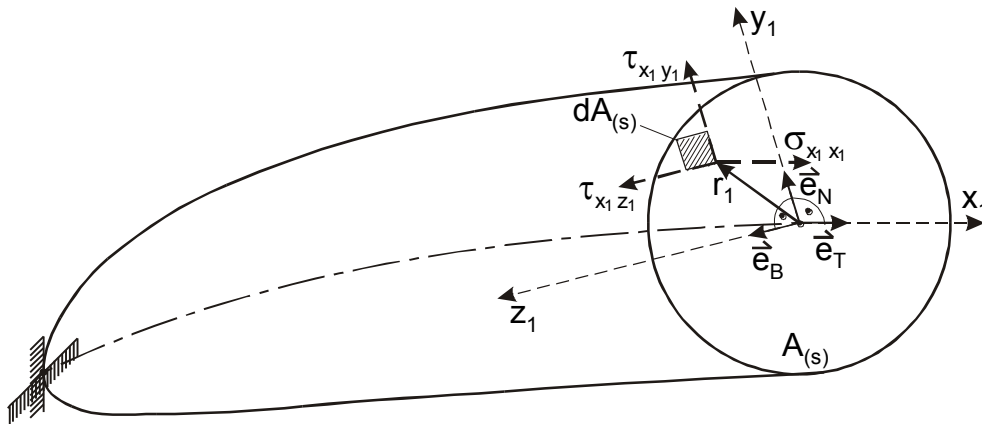
Prerezne sile (notranje statične količine) so rezultatne sile in rezultatni momenti, ki jih v analiziranih prečnih prerezi povzročajo notranje napetosti, ki so razporejene po celotnem prerezu $A_{(s)}$ obremenjene konstrukcije.

Slika 4.3 prikazuje prerez $A_{(s)}$ obremenjene konstrukcije z naravnim koordinatnim sistemom (x_1, y_1, z_1) z izhodiščem v težiščni točki T analiziranega prereza.

Na delcu površine prereza $dA_{(s)}$ deluje napetostni vektor $\bar{T}_{(s)}$, ki ga lahko razstavimo v tri komponente (površinske koordinatne napetosti) vzdolž koordinatnih osi naravnega lokalnega koordinatnega sistema:

$$\vec{T}_{(s)} = \sigma_{x_1x_1} \vec{e}_{x_1} + \tau_{x_1y_1} \vec{e}_{y_1} + \tau_{x_1z_1} \vec{e}_{z_1} \quad (4.13)$$

kjer $\sigma_{x_1x_1}$ označuje normalno napetost v smeri tangente na težiščno os konstrukcije oz. v smeri zunanje normale \vec{n} na prerez $A_{(s)}$ ter $\tau_{x_1y_1}$ oz. $\tau_{x_1z_1}$ komponenti strižne napetosti na delcu prereza $dA_{(s)}$ v smeri lokalne koordinatne osi y_1 oz. z_1 (Slika 4.3).



Slika 4.3: Napetosti in notranje sile v analiziranem prerezu obremenjene konstrukcije

Zveze med notranjimi silami in površinskimi napetostmi na prerezu $A_{(s)}$ določata izraza (4.14) in (4.15):

$$\vec{F}_{(s)} = N_{(s)} \vec{e}_T + V_{2(s)} \vec{e}_N + V_{3(s)} \vec{e}_B = \iint_{A_s} (\sigma_{x_1x_1} \vec{e}_{x_1} + \tau_{x_1y_1} \vec{e}_{y_1} + \tau_{x_1z_1} \vec{e}_{z_1}) dA_s \quad (4.14)$$

$$\vec{M}_{(s)} = M_{T(s)} \vec{e}_T + M_{2(s)} \vec{e}_N + M_{3(s)} \vec{e}_B = \iint_{A_s} \begin{vmatrix} \vec{e}_{x_1} & \vec{e}_{y_1} & \vec{e}_{z_1} \\ 0 & y_1 & z_1 \\ \sigma_{x_1x_1} & \tau_{x_1y_1} & \tau_{x_1z_1} \end{vmatrix} dA_s \quad (4.15)$$

S primerjavo leve in desne strani v izrazu (4.14) oz. (4.15) lahko določimo posamezne komponente notranje sile oz. notranjega momenta v analiziranem prerezu.

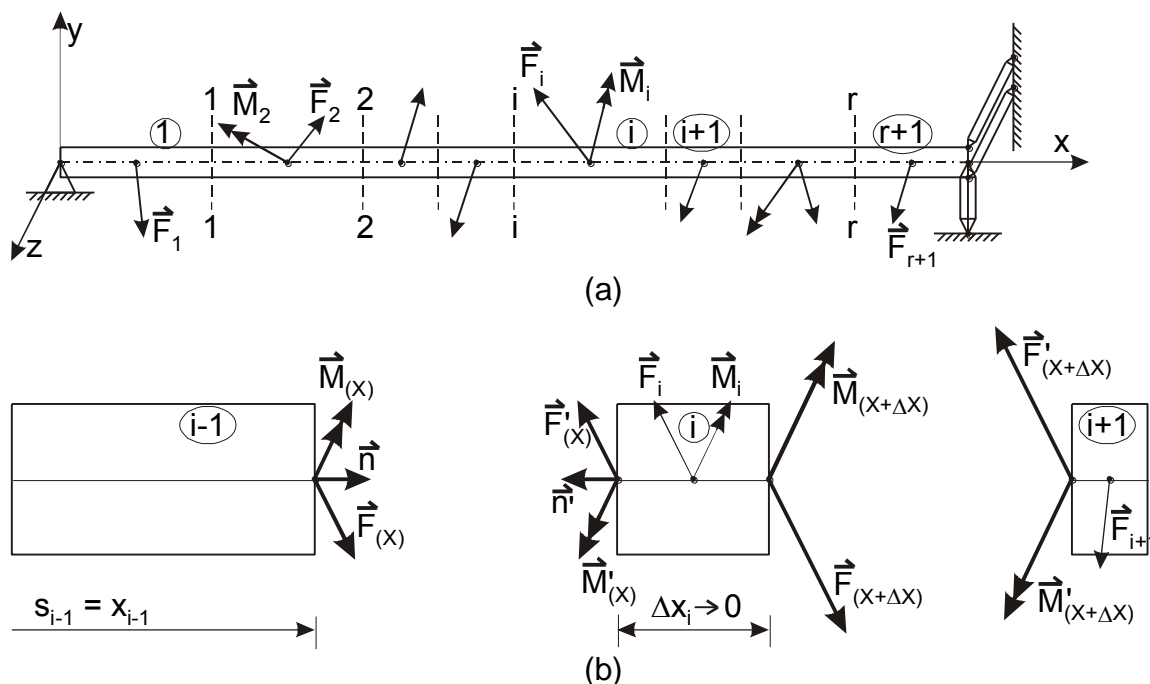
$$N_{(s)} = \iint_{A_s} \sigma_{x_1x_1} dA_s, \quad V_{2(s)} = \iint_{A_s} \tau_{x_1y_1} dA_s, \quad V_{3(s)} = \iint_{A_s} \tau_{x_1z_1} dA_s \quad (4.16)$$

$$M_{T(s)} = \iint_{A_s} (y_1 \tau_{x_1z_1} - z_1 \tau_{x_1y_1}) dA_s, \quad M_{2(s)} = \iint_{A_s} z_1 \sigma_{x_1x_1} dA_s, \quad M_{3(s)} = -\iint_{A_s} y_1 \sigma_{x_1x_1} dA_s \quad (4.17)$$

Izrazi (4.16) in (4.17) podajajo zveze med rezultatnimi vrednostmi notranjih sil ter tremi komponentami površinskih napetosti v prerezu analizirane konstrukcije. Zveze med rezultatnimi vrednostmi notranjih sil in napetostmi v prerezi obteženih konstrukcij bodo v mehaniki podrobno obravnavane pri trdnosti.

4.3 Metoda prereza in notranja statična nedoločenost

Najprej obravnavamo model prostoležečega nosilca v prostoru (Slika 4.4). Nosilec je stabilno podprt z nepremično členkasto podporo v točki A ter s tremi nihajnimi palicami v točki B, ki preprečujejo premike v smeri y in z osi ter rotacijo telesa okrog x osi. Nosilec naj bo obtežen s poljubnim sistemom sil v prostoru.



Slika 4.4: Model prostoležečega nosilca v ravnini x-y; (a) Stabilno podprto togo telo, ki ga z r prerezi razdelimo v (r+1) togo telo ter (b) Prerezne sile na i tem elementu nosilca

Z r prerezi obravnavamo konstrukcijo razdelimo na (r+1) togih elementov. V vseh r prerezi moramo zato sprostiti $6r$ različnih komponent neznanih notranjih sil med posameznimi elementi.

Stopnja statične nedoločenosti je tokrat vezana na notranje sile med posameznimi elementi in je enaka razliki med številom ravnotežnih pogojev za vsa toga telesa in številom neznanih sil, ki delujejo na vsa telesa sistema. Stopnjo statične nedoločenosti sistema ocenimo z izrazom (3.10), kjer moramo upoštevati:

število togih teles $k = r + 1$;

število podpor $n = 2$ vsaka s po $N_{ip} = 3$ neznanimi podpornimi silami;

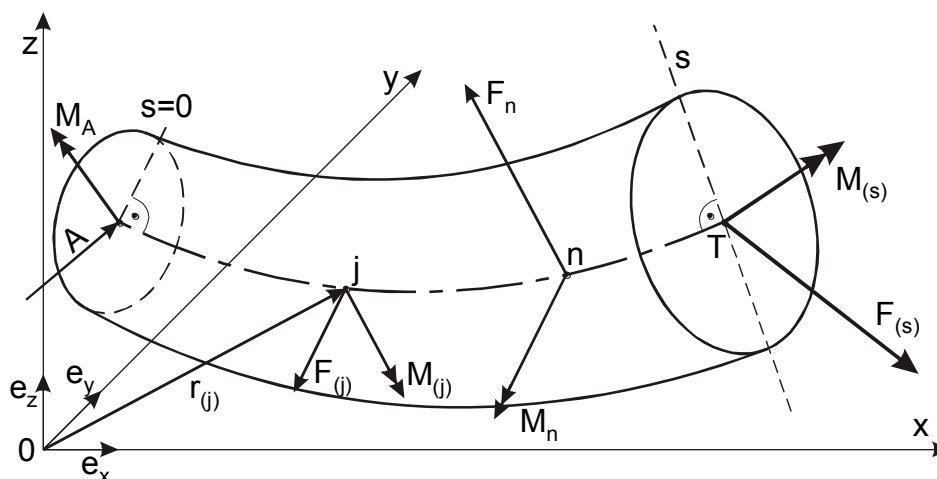
število vezi $m = r$ vsaka s po $N_{jv} = 6$ neznanimi komponentami notranjih sil.

$$N_s = 6k - \sum_{i=1}^n N_{ip} - \sum_{j=1}^m N_{jv} = 6 \cdot (r + 1) - (3 + 3) - r \cdot 6 = 0$$

Ugotovimo lahko, da je fiktivni sistem togih teles (Slika 4.4) statično določen ter zato lahko notranje sile med posameznimi togimi elementi sistema določimo na osnovi ravnotežnih enačb.

Konstrukcijam, ki z enim prerezom razpadejo na dva povsem ločena dela pravimo, da so enkrat povezane ter lahko zaključimo:

- 1. Za zunanje statično določene nosilne sisteme (število neznanih sil je enako številu ravnotežnih enačb) pravimo, da so tudi notranje statično določeni v kolikor so le enkrat povezani. V kolikor so takšni nosilni sistemi tudi kinematično stabilni je za takšne sisteme na osnovi ravnotežnih enačb vedno mogoče določiti vse komponente notranjih sil (Slika 4.5). (Pri poljubnem prerezu zunanje uravnotežene konstrukcije se v prerezu pojavi 6 komponent notranjih sil (3 silne in 3 momentne komponente), ki jih je mogoče določiti z uporabo 6 ravnotežnih pogojev).**



Slika 4.5: Določanje notranjih statičnih količin po metodi prereza

Komponente notranjih sil določamo z izpolnitvijo silnega in momentnega ravnotežnega pogoja, ki ga običajno izvednotimo na težiščno točko T analiziranega prereza (Slika 4.5).

$$\vec{A} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \vec{F}_{(s)} = 0 \quad (4.18)$$

$$\vec{M}_A + (\vec{r}_A - \vec{r}_T) \times \vec{A} + \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i - \vec{r}_T) \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \vec{M}_i + \vec{M}_{(s)} = 0 \quad (4.19)$$

Pri obravnavani ravni konstrukciji (Slika 4.4) težiščna os prereza sovpada z x osjo izbranega koordinatnega sistema in koordinata x hkrati označuje vrednost parametra s.

Za togo telo (i) mora biti izpolnjen pogoj silnega in momentnega ravnotežja na prijemališče sile \vec{F}_i (Slika 4.4b).

$$\vec{F}'_{(x)} + \vec{F}_{(x+\Delta x)} + \vec{F}_i = -\vec{F}_{(x)} + \vec{F}_{(x)} + \Delta \vec{F}_{(x)} + \vec{F}_i = \vec{0} \quad (4.20)$$

$$\vec{M}'_{(x)} + \vec{M}_{(x+\Delta x)} + \vec{M}_i = -\vec{M}_{(x)} + \vec{M}_{(x)} + \Delta \vec{M}_{(x)} + \vec{M}_i = \vec{0} \quad (4.21)$$

Z rešitvijo enačb (4.20) in (4.21) določimo spremembi notranje sile in notranjega momenta v prijemališču sile \vec{F}_i .

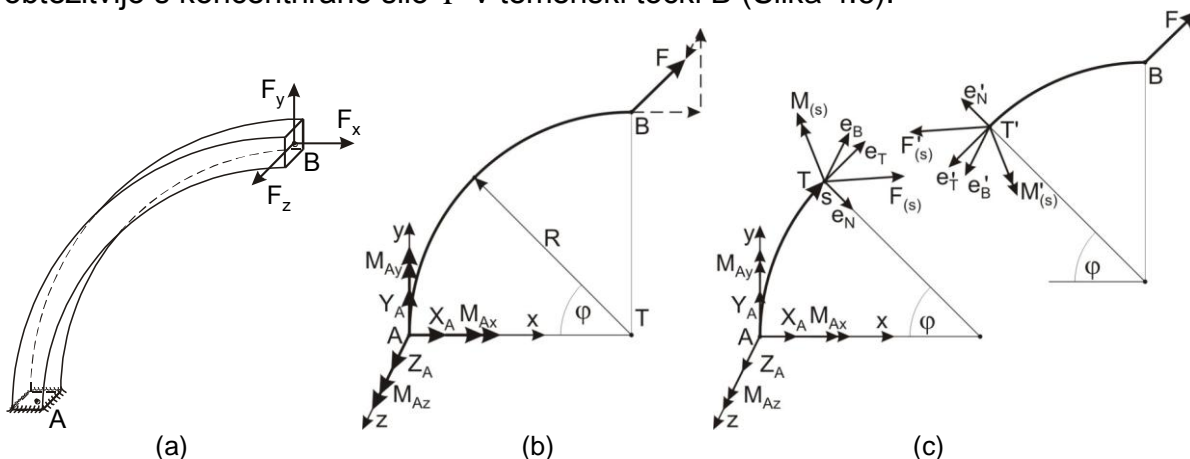
$$\begin{aligned} \Delta \vec{F}_{(x)} = -\vec{F}_i \quad \text{oz.} \quad \Delta V_{2(x)} = -F_{iz} \quad \Delta \vec{M}_{(x)} = -\vec{M}_i \quad \text{oz.} \quad \Delta M_{2(x)} = -M_{iz} \\ \Delta N_{(x)} = -F_{ix} \quad \Delta M_{T(x)} = -M_{ix} \\ \Delta V_{3(x)} = F_{iy} \quad \Delta M_{3(x)} = M_{iy} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Ker pri nosilcih z ravno osjo glavna normala ni definirana (vse normale na os nosilca so namreč hkrati tudi glavne normale) je za smer glavne normale v izrazih (4.22) upoštevana smer osi z ($\vec{e}_N = \vec{e}_z$) ter za smer binormale na os nosilca smer nasprotna osi y ($\vec{e}_B = -\vec{e}_y$). Na osnovi izrazov (4.20) in (4.21) lahko zaključimo:

2. V prerezu $x = x_i$, kjer na telo deluje koncentrirana sila \vec{F}_i ima notranja sila $\vec{F}_{(x)}$ preskok, ki je enak negativni vrednosti sile $-\vec{F}_i$.

3. V prerezu $x = x_i$, kjer na telo deluje koncentrirani moment \vec{M}_i ima notranji moment $\vec{M}_{(x)}$ preskok, ki je enak negativni vrednosti v tej točki delujočega momenta $-\vec{M}_i$.

V nadaljevanju bomo določili naravni koordinatni sistem ter zunanje in notranje statične količine ukrivljenega nosilca obteženega s prostorskim sistemom sil. Obravnavamo ločni nosilec krožne oblike z radijem R z vpeto podporo v točki A ter z obtežitvijo s koncentrirano silo \vec{F} v temenski točki B (Slika 4.6).



Slika 4.6: Ločni nosilec v prostoru; (a) Podprto telo, (b) Uravnoteženo prosto telo in (c) Prerezani telesi z notranjimi in zunanjimi silami

V obravnavanem primeru se težiščna os konstrukcije nahaja v ravnini x - y vendar v konstrukciji zaradi izven ravninske obtežbe nastane prostorsko napetostno stanje.

Reakcijske sile v podpori A določimo v glavnem koordinatnem sistemu na osnovi ravnotežnih pogojev za prostorske konstrukcije.

$$\vec{M}_A + \vec{r}_B \times \vec{F} = 0, \quad \vec{A} + \vec{F} = 0$$

$$\vec{A} = \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_x \\ -F_y \\ -F_z \end{Bmatrix}$$

$$\vec{M}_A = \begin{Bmatrix} M_{Ax} \\ M_{Ay} \\ M_{Az} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -R & -R & 0 \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -RF_z \\ RF_z \\ -RF_y + RF_x \end{Bmatrix}$$

Notranje statične količine vedno določamo v naravnem lokalnem koordinatnem sistemu. Koordinate težiščne osi določimo v odvisnosti od parametra s , ki izraža dolžino težiščne osi, ki jo merimo od točke A na konstrukciji ter jo izrazimo s kotom φ (Slika 4.6c), ki določa poljubno točko T na ločni konstrukcije.

$$s = R\varphi, \quad \varphi = s/R \quad \vec{r}_{(s)} = x_{(s)}\vec{e}_x + y_{(s)}\vec{e}_y$$

$$x_{(s)} = R(1 - \cos \varphi) = R(1 - \cos(s/R)) \quad y_{(s)} = R \sin \varphi = R \sin(s/R)$$

$$\vec{e}_T = d\vec{r}_{(s)} / ds = \sin(s/R)\vec{e}_x + \cos(s/R)\vec{e}_y$$

$$\vec{e}_N = (d\vec{e}_T / ds) / |d\vec{e}_T / ds| = \cos(s/R)\vec{e}_x - \sin(s/R)\vec{e}_y$$

$$\vec{e}_B = \vec{e}_T \times \vec{e}_N = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \sin(s/R) & \cos(s/R) & 0 \\ \cos(s/R) & -\sin(s/R) & 0 \end{vmatrix} = -\vec{e}_z$$

Ker so notranje statične količine definirane v lokalnem koordinatnem sistemu je potrebno najprej opraviti transformacijo obtežb in radij vektorjev v naravni koordinatni sistem, dopustno pa je tudi določiti prerezne sile v osnovnem koordinatnem sistemu in nato rezultate transformirati v naravni koordinatni sistem.

Za levi (spodnji) del nosilca (Slika 4.6c) lahko zapišemo ravnotežna pogoja v glavnem koordinatnem sistemu (označba * pomeni notranje sile v glavnem koordinatnem sistemu):

$$\vec{A} + \vec{F}_{(s)}^* = \vec{0} \quad \vec{M}_{(s)}^* + \vec{M}_A + \vec{r}_{T/A} \times \vec{A} = \vec{0}$$

$$\vec{F}_{(s)}^* = -\vec{A} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix}$$

$$\vec{M}_{(s)}^* = -\vec{M}_A - \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -R(1-\cos\varphi) & -R\sin\varphi & 0 \\ -F_x & -F_y & -F_z \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_z R - F_z R \sin\varphi \\ -F_z R + F_z R(1-\cos\varphi) \\ F_y R - F_x R - F_y R(1-\cos\varphi) + F_x R \sin\varphi \end{Bmatrix}$$

Notranje statične količine transformiramo v naravni koordinatni sistem tako, da vektorje podane v glavnem koordinatnem sistemu pomnožimo z matriko smernih kosinusov, ki jih določajo koti med enotnimi vektorji naravnega in glavnega koordinatnega sistema.

$$\vec{F}_{(s)} = \begin{Bmatrix} N_{(s)} \\ V_{2(s)} \\ V_{3(s)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \sin\varphi + F_y \cos\varphi \\ F_x \cos\varphi - F_y \sin\varphi \\ -F_z \end{Bmatrix}$$

$$\vec{M}_{(s)} = \begin{Bmatrix} M_{T(s)} \\ M_{2(s)} \\ M_{3(s)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_z R(1-\sin\varphi) \\ -F_z R \cos\varphi \\ -F_x R(1-\sin\varphi) + F_y R \cos\varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_z R(1-\sin\varphi) \\ F_z R \cos\varphi \\ F_x R(1-\sin\varphi) - F_y R \cos\varphi \end{Bmatrix}$$

Enako rešitev dobimo za desni (zgornji del nosilca) le, da moramo v tem primeru upoštevati nasprotno usmerjene notranje sile ter nasprotno usmerjeni naravni koordinatni sistem.

$$\vec{F}_{(s)}^* + \vec{F} = 0 \quad \vec{M}_{(s)}^* + \vec{r}_{T/B} \times \vec{F} = 0$$

$$\vec{F}_{(s)}^* = -\vec{F} = \begin{Bmatrix} -F_x \\ -F_y \\ -F_z \end{Bmatrix}$$

$$\vec{M}_{(s)}^* = - \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ R\cos\varphi & R(1-\sin\varphi) & 0 \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_z R(1-\sin\varphi) \\ +F_z R \cos\varphi \\ -F_y R \cos\varphi + F_x R(1-\sin\varphi) \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F}'_{(s)} = \begin{Bmatrix} N'_{(s)} \\ V'_{2(s)} \\ V'_{3(s)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ -\cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -F_x \\ -F_y \\ -F_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \sin \varphi + F_y \cos \varphi \\ F_x \cos \varphi - F_y \sin \varphi \\ -F_z \end{Bmatrix}$$

$$\vec{M}'_{(s)} = \begin{Bmatrix} M'_{T(s)} \\ M'_{2(s)} \\ M'_{3(s)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ -\cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -F_z R(1 - \sin \varphi) \\ F_z R \cos \varphi \\ F_x R(1 - \sin \varphi) - F_y R \cos \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_z R(1 - \sin \varphi) \\ F_z R \cos \varphi \\ F_x R(1 - \sin \varphi) - F_y R \cos \varphi \end{Bmatrix}$$

Vidimo, da sta za zagotovitev ravnotežja obeh delov konstrukcije potrebni enaki notranji sili.

Primer 4.1:

Obravnavamo prostoležeči nosilec v ravnini x-y. Os nosilca in obtežba ter reakcijske sile se nahajajo v eni oz. skupni ravnini (Slika 4.7) in zato lahko konstrukcijo obravnavamo kot ravninski 2D primer.

Konstrukcija je zagotovo kinematično stabilna ter zato togo telo najprej zunanje uravnotežimo (izračunamo reakcijske sile) ter ga v nadaljnjih izračunih obravnavamo kot prosto telo v ravnini.

Za določitev reakcij togega telesa v ravnini razpolagamo s tremi ravnotežnimi pogoji (Slika 4.7):

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= X_A - F \cos \alpha = 0 & X_A &= F \cos \alpha \\ \sum M^A &= Y_B(a + b) - F \sin \alpha a = 0 & Y_B &= F \sin \alpha (a / (a + b)) \\ \sum F_{iy} &= Y_A + Y_B - F \sin \alpha = 0 & Y_A &= F \sin \alpha (b / (a + b)) \end{aligned}$$

Težiščno os nosilca podamo parametrično z izrazom:

$$\vec{r}'_{(s)} = s \vec{e}_x = x \vec{e}_x \quad \vec{e}_T = d\vec{r}' / ds = d\vec{r}' / dx = \vec{e}_x \quad \vec{e}_N = (d\vec{e}_T / dx) / |d\vec{e}_T / dx| = 0 / 0$$

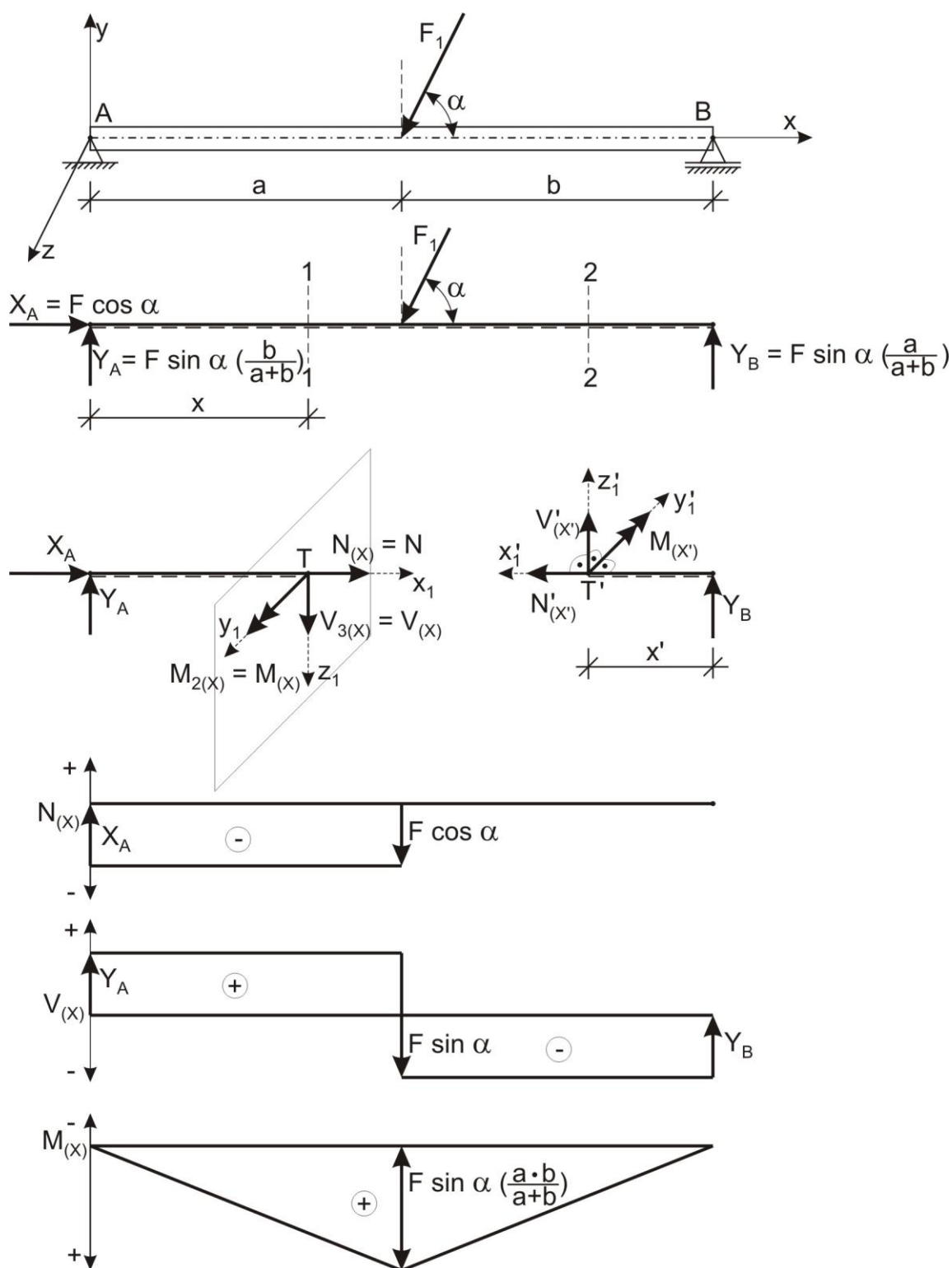
Pri nosilcih z ravno osjo normala \vec{e}_N in binormala \vec{e}_B na težiščno os nista natančno definirani (vse normale na os nosilca so v bistvu hkrati glavne normale) ter ju zato lahko definiramo po dogovoru.

Izbrati ju moramo vedno tako, da enotni vektorji na levem delu nosilca tvorijo desnosučni koordinatni sistem. Ker ima tangenti vektor $\vec{e}_T = \vec{e}_{x_1}$ smer x osi izberemo normalo $\vec{e}_N = \vec{e}_{y_1}$ v smeri osi z ter binormalo $\vec{e}_B = \vec{e}_{z_1}$ v smeri, ki je nasprotna y osi glavnega koordinatnega sistema.

Ker morajo biti pri vseh ravninskih primerih vsi silni vektorji v ravnini težiščne osi telesa ter momentni vektorji pravokotni na to ravnino se pri 2D primerih pojavijo le tri notranje statične količine (tri komponente notranjih sil):

$$\begin{aligned} N_{(s)} &= N_{(x)} = N \\ M_{2(s)} &= M_{(x)} = M \\ V_{3(s)} &= V_{(x)} = V \\ V_{2(s)} &= M_{T(s)} = M_{3(s)} = 0 \end{aligned}$$

Notranjim statičnim količinam N , V in M pri 2D primerih v stroki krajše pravimo osna sila, prečna sila in upogibni moment.



Slika 4.7: Prostoležeči nosilec v ravnini x-y, podporne sile, lokalni koordinatni sistem in diagrami notranjih statičnih količin

Izbor lokalnega koordinatnega sistema pri 2D primerih nosilcev z ravno osjo prikažemo z izbiro pozitivne strani nosilca, ki je po definiciji tista stran na kateri pozitivni moment $M_{2(s)} = M_{(x)} = M$ povzroča natezne napetosti (na obravnavanem primeru je to spodnja stran nosilca, ki je zato označena s črtkano črto, Slika 4.7).

Vse tri komponente notranjih statičnih količin za zunanje in notranje statično določene in kinematično stabilne konstrukcije lahko določimo z upoštevanjem ravnotežnih pogojev za poljubne izrezane dele konstrukcije.

Levi del (Slika 4.7): $0 < x < a$

$$\sum F_{ix} = X_A - N_{(x)} = 0 \quad N_{(x)} = -X_A = -F \cos \alpha = \text{konst. } (0 < x < a)$$

$$\sum F_{iy} = Y_A - V_{(x)} = 0 \quad V_{(x)} = Y_A = F \sin \alpha (b/(a+b)) = \text{konst. } (0 < x < a)$$

$$\sum M^T = M_{(x)} - Y_A x = 0 \quad M_{(x)} = F \sin \alpha \cdot b \cdot x / (a+b)$$

Upogibni moment $M_{(x)}$ na območju $0 \leq x \leq a$ poteka po linearni funkciji (premici) z mejnima vrednostma (Slika 4.7).

$$M_{(x=0)} = 0 \quad M_{(x=a)} = F \sin \alpha \cdot a \cdot b / (a+b)$$

Desni del (Slika 4.7): $0 < x' < b$

$$\sum F_{ix} = N_{(x')} = 0$$

$$\sum F_{iy} = V_{(x')} + Y_B = 0 \quad V_{(x')} = -Y_B = -F \sin \alpha \cdot (a/(a+b)) = \text{konst. } (0 < x' < b)$$

$$\sum M^T = M_{(x')} - Y_B \cdot x' = 0 \quad M_{(x')} = F \sin \alpha \cdot a \cdot x' / (a+b)$$

Upogibni moment $M_{(x')}$ na območju $0 \leq x' \leq b$ poteka po linearni funkciji (premici).

$$M_{(x'=b)} = F \sin \alpha \cdot a \cdot b / (a+b) \quad M_{(x'=0)} = 0$$

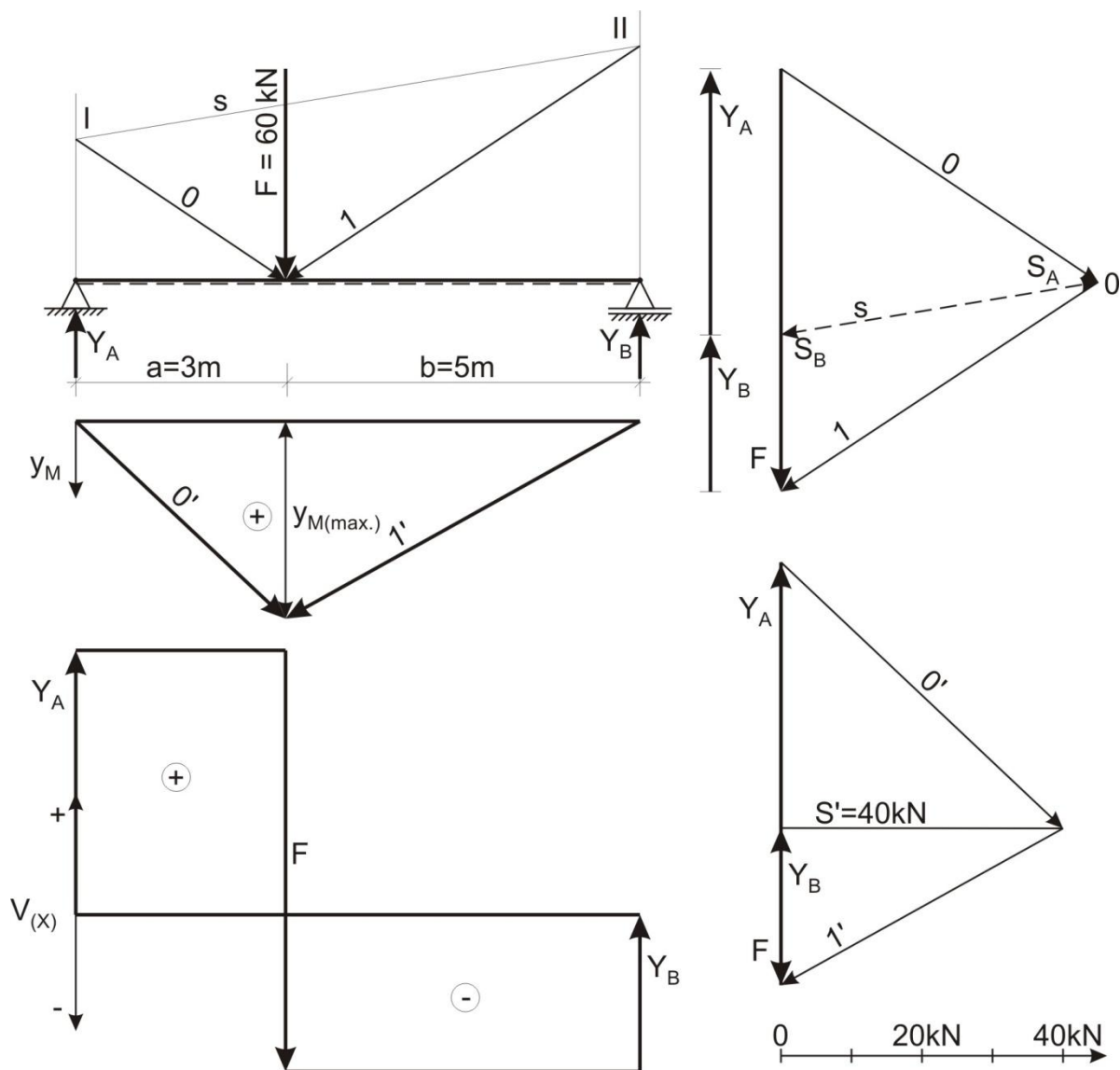
Potek notranjih statičnih količin ($N_{(x)}$, $V_{(x)}$ in $M_{(x)}$) po dolžini težiščne osi nosilca vedno prikažemo z diagrami, kjer praviloma izračunane vrednosti nanašamo pravokotno na os nosilca v primerno izbranem merilu.

Na osnovi prikazanih rezultatov (Slika 4.7) lahko za nosilce z ravno osjo zaključimo:

1. Pri nosilcih z ravno osjo obteženih s koncentriranimi silami potekata diagrama osnih sil $N_{(x)}$ in prečnih sil $V_{(x)}$ v obliki stopničaste funkcije.
2. V prerezu $x=0$ oz. $x'=0$ (v prijemališču podpornih sil) se pojavi preskok v vrednostih notranjih sil $\Delta N_{(x=0)} = -F \cos \alpha$ oz. $\Delta V_{(x=0)} = A_y$ ter $\Delta V_{(x'=0)} = B_y$.
3. V prerezu $x=a$ oz. $x'=b$ (v prijemališču aktivne sile F) se pojavi preskok v vrednostih notranjih sil $\Delta N_{(x=a)} = F \cos \alpha$ in $\Delta V_{(x=a)} = -F \sin \alpha$.
4. Upogibni momenti $M_{(x)}$ potekajo po zvezni vendar ne zvezno odvedljivi funkciji. Ob vrtljivih podporah so upogibni momenti identično enaki 0, momentna krivulja ob vrtljivih podporah ni zvezno odvedljiva.
5. Upogibni momenti $M_{(x)}$ potekajo linearno in so linearna funkcija razpetine nosilca in intenzitete prečne obtežbe.
6. Na posameznih odsekih ravnih nosilcev, kjer nanje ne delujejo prečne oz. vzdolžne obtežbe, potekajo prečne sile $V_{(x)}$ oz. osne sile $N_{(x)}$ po premici s konstantno ordinato (imajo konstantne vrednosti).

Primer 4.2:

Obravnavamo ravninski primer prostoležečega nosilca razpetine 7.0 m v ravnini x-y, ki je obtežen le z vertikalno koncentrirano silo $F = 60 \text{ kN}$ (Slika 4.8). Po pravilih grafostatike je potrebno določiti reakcijske sile in diagrame notranjih statičnih količin.



Slika 4.8: Dispozicija prostoležečega nosilca s podporami in podpornimi silami, mnogokotnik (poligon) sil, reducirani diagram upogibnih momentov ter pripadajoči diagram prečnih sil

Pri prostoležečem nosilcu obteženem z vertikalno obtežbo se aktivirata le vertikalni komponenti reakcij Y_A in Y_B . Ker je obtežba z vertikalno silo F vzporedna z reakcijama jo moramo nadomestiti z ekvivalentnim sistemom sil (silo F v poligonu nadomestimo z vsoto sil 0 in 1, ki predstavljata nadomestni sistem sil v kolikor se vse tri sile F in 0 ter 1 v načrtu sil sekajo v skupni točki).

Reakciji določimo z upoštevanjem ravnotežnega pogoja, da mora biti skupni sistem sil Y_A , Y_B , 0 in 1 v ravnotežju.

Pogoji ravnotežja sistemov sil v ravnini so vedno izpolnjeni v kolikor je poligon sil zaključen ter je hkrati izpolnjen še momentni ravnotežni pogoj na poljubno točko v ravnini x-y.

V točki II (Slika 4.8) se sekata sili Y_B in 1. Za vzpostavitev momentnega ravnotežja na točko II je potreben in zadostni pogoj za ravnotežje sistema sil v kolikor rezultanta sil $\vec{Y}_A + \vec{0} = \vec{S}_A$

deluje na premici s , ki leži na zveznici točk I (presečišče sil Y_A in 0) in II. Vzorednica premice s v načrtu sil oz. na dispoziciji nosilca določa v poligonu sil intenziteto reakcij Y_A in Y_B (Slika 4.8).

Za določanje notranjih statičnih količin načrtamo novi poligon sil s horizontalno lego nadomestne sile S' v ustreznem merilo (na sliki 4.8 je izbrana vrednost $S' = 40\text{kN}$).

V kolikor ponovno silo F v poligonu sil in na načrtu sil nadomestimo z vsoto sil $0'$ in $1'$ ter upoštevamo momentni ravnotežni pogoj, ki ga izpolnimo tako, da vzorednico sili S' načrtamo skozi presečišči sil Y_A in $0'$ ter Y_B in $1'$. Tako smo načrtali z vrednostjo $S' = 40\text{kN}$ reducirani diagram upogibnih momentov katerega ordinato označimo z y_M (Slika 4.8).

Pri načrtovanju diagrama v dispoziciji konstrukcije (pravimo tudi v načrtu sil) moramo upoštevati pravilo, da se poljubne tri sile, ki v poligonu sil predstavljajo trikotnik sil, v načrtu sil sekajo v skupni točki, ker poteka rezultanta dveh poljubnih sil s skupnim prijemališčem vedno skozi njuno skupno točko (prijemališče rezultante sistemov sil s skupnim prijemališčem).

Upogibne momente v izbranem prerezu določimo tako, da iz diagrama odmerimo pripadajočo vrednost y_M ter jo pomnožimo z vrednostjo sile $S' = 40\text{kN}$.

Nedvomno največji moment nastopi v prerezu $x = a$ s pripadajočo vrednostjo $y_{M(\max.)} = 2.83\text{m}$ (Slika 4.8).

Največji moment v obravnavanem primeru znaša $M_{\max.} = 2.83\text{m} \cdot 40\text{kN} = 113.2\text{kNm}$.

Prečno silo $V_{(x)}$ na odseku ($0 < x < a$) predstavlja negativna vrednost vertikalne komponente sile $0'$, ki je v tem primeru enaka sili Y_A ter na odseku ($a < x < a + b$) vertikalna komponenta sile $1'$, ki je enaka vrednosti $-Y_B$ (Slika 4.8). Prečna sila $V_{(x)}$ v prerezih $x = 0$, a , $a + b$ ni natančno določljiva, ker ima obravnavana funkcijska sovisnost v točkah, kjer na konstrukcijo delujejo koncentrirane prečne obtežbe preskok (limitni vrednosti z desne in leve strani nista enaki).

4.4 Palične konstrukcije

Konstrukcije sestavljene iz samih členkasto povezanih paličnih elementov imenujemo palične ali predalčne konstrukcije. V kolikor so vse palice ravne, med seboj povezane z brezmomentnimi členki in kadar še vse obtežbe delujejo preko vozlišč (členkov) na konstrukcijo imamo opravka s popolnimi predalčnimi sistemi (paličnimi konstrukcijami).

Za moment v členu i mora biti izpolnjen naslednji pogoj (Slika 4.9):

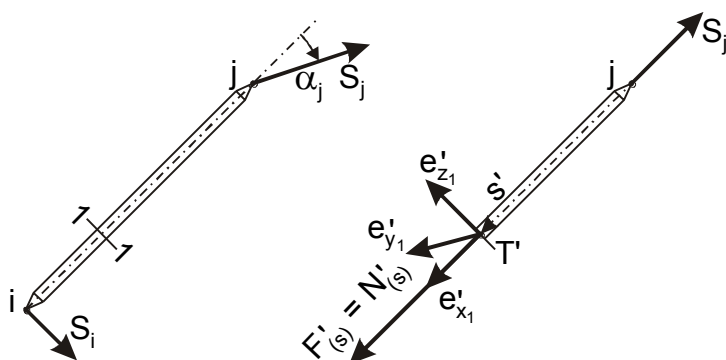
$$\vec{M}^i = \vec{r}_{i/j} \times \vec{S}_j = |\vec{r}_{i/j}| |\vec{S}_j| \sin \alpha_j = 0 \quad (4.23)$$

Pogoj (4.24) je izpolnjen le v primeru $\alpha_j = 0 + k\pi$, kjer je k poljubno celo število. Notranje statične količine v palici določimo:

$$\vec{F}'_{(s)} = N'_{(s)} \vec{e}'_{x_1} + V'_{2(s)} \vec{e}'_{y_1} + V'_{3(s)} \vec{e}'_{z_1} = S_j \vec{e}'_{x_1} \quad (4.24)$$

$$\vec{M}'_{(s)} = M'_{T(s)} \vec{e}'_{x_1} + M'_{2(s)} \vec{e}'_{y_1} + M'_{3(s)} \vec{e}'_{z_1} = -s \vec{e}'_{x_1} \times S_j \vec{e}'_{x_1} = \vec{0} \quad (4.25)$$

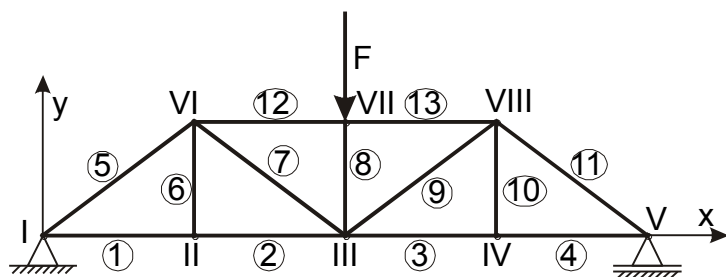
V posameznih palicah pri popolnih (čistih) paličnih konstrukcijah se pojavijo samo osne sile $N_{(s)} = N$, ki so lahko natezne oz. tlačne pri $\alpha_j = 0$ oz. $\alpha_j = \pi$.



Slika 4.9: Zunanje in notranje sile v ravnih paličnih elementih

4.4.1 Statična določenost in kinematična stabilnost

Obravnavamo stabilno podprto palično konstrukcijo, kjer se lahko pri poljubni obtežbi pri ravninskih konstrukcijah aktivira najmanj 3 ter pri paličnih konstrukcijah v prostoru najmanj 6 reakcijskih sil. Slika 4.10 prikazuje primer kinematično stabilne in statično določene ravninske palične konstrukcije.



Slika 4.10: Primer ravninske palične konstrukcije

Slika 4.10 prikazuje palično konstrukcijo, ki jo sestavlja $N_e = 13$ ravnih palic povezanih preko $N_k = 8$ brezmomentnih vozlišč.

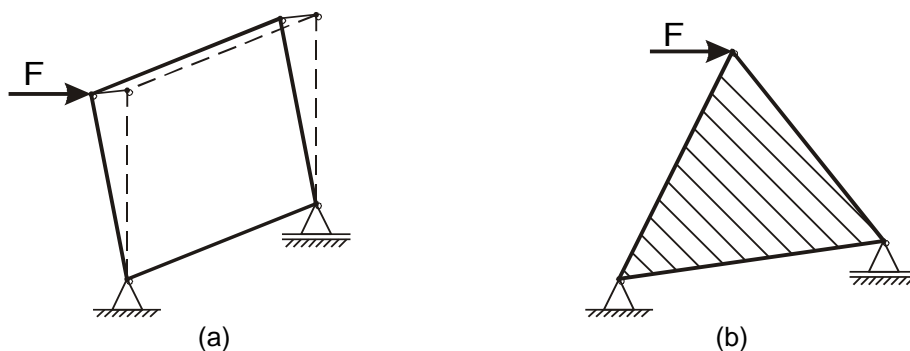
Vsaka palična konstrukcija je v ravnotežju v kolikor so v ravnotežju vsa njena vozlišča. V kolikor vplive posameznih palic nadomestimo z njihovimi osnimi silami, je ravnotežje 2D paličnih konstrukcij zagotovljeno v kolikor sta v vsakem izmed vozlišč konstrukcije izpolnjena po dva silna ravnotežna pogoja.

Stopnjo statične nedoločenosti določa razlika med številom neznanih zunanjih in notranjih sil v konstrukciji ter številom ravnotežnih enačb, ki jo za 2D palične konstrukcije določimo:

$$N_s = 2N_k - (N_e + N_p) \quad (4.26)$$

kjer $2N_k$ označuje število ravnotežnih pogojev v vseh vozliščih konstrukcije, N_e število neznanih sil v palicah ter N_p število neznanih reakcijskih sil.

V kolikor je poljubna 2D palična konstrukcija stabilno podprta je tudi kinematično stabilna v kolikor je sestavljena iz samih trikotnih celic (Slika 4.10 in Slika 4.11).



Slika 4.11: Osnovna stabilna oblika paličja; (a) Štiri in večkotne oblike (celice) predalčja so praviloma nestabilne in (b) Trikotna šipa (tri členkasto povezane palice) predstavlja osnovno stabilno obliko paličja v ravnini

Za statično določene in kinematično stabilne palične konstrukcije pravimo, da so tudi notranje statično določene v kolikor z enimi namišljenim prerezom treh palic razpadejo na dva povsem ločena dela

Pri statično določenih in stabilno podprtih 3D paličnih konstrukcijah v prostoru se v podporah pojavi N_p reakcijskih sil (najmanj 6), v posameznih vozliščih pa moramo izpolniti po 3 silne ravnotežne pogoje. Za 3D palične konstrukcije stopnjo statične nedoločenosti ocenimo:

$$N_s = 3N_k - (N_e + N_p) \quad (4.27)$$

Stabilno podprte prostorske palične konstrukcije pa so zagotovo kinematično stabilne v kolikor so sestavljene iz posameznih celic v obliki tristraničnih piramid.

4.4.2 Statična analiza paličnih konstrukcij

Statična analiza paličnih konstrukcij obsega določitev reakcij ter osnih sil v posameznih palicah. V kolikor so predalčne konstrukcije kinematično stabilne in statično določene lahko reakcije in sile v posameznih palicah (predalkah) določimo na osnovi ravnotežnih pogojev. Pogoj statične določenosti za palične konstrukcije v ravnini podamo z izrazom (4.28) ter za konstrukcije v prostoru z izrazom (4.29).

$$N_e = 2N_k - N_p \quad (4.28)$$

$$N_e = 3N_k - N_p \quad (4.29)$$

kjer N_e pomeni število palic, N_k število vozlišč ter N_p število podpornih sil na konstrukciji.

4.4.3 Metoda vozliščnega ravnotežja

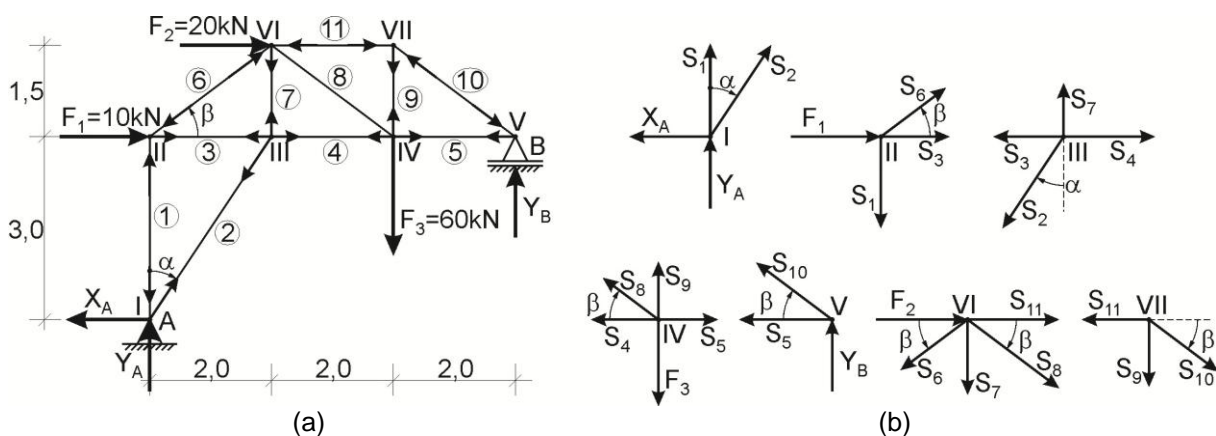
Pri statično določenih in kinematično stabilnih paličnih konstrukcijah najprej pri 2D oz. 3D konstrukcijah vplive podpor nadomestimo z najmanj tremi oz. najmanj šestimi podpornimi silami. Pri določanju osnih sil v posameznih palicah nato palično konstrukcijo obravnavamo kot togo telo obteženo z aktivnimi in reaktivnimi silami.

Posamezno vozlišče nato izrežemo iz konstrukcije, vplive posameznih palic v obravnavanem vozlišču nadomestimo z njihovimi osnimi silami ter na osnovi ravnotežnih pogojev za sistem sil s skupnim prijemališčem določimo sile v palicah katerih osnih sil še ne poznamo.

Pri 2D primerih lahko v obravnavanem vozlišču delujeta največ dve palici katerih osnih sil ne poznamo ter pri 3D primerih največ tri palice z neznanimi osnimi silami. V kolikor pri 3D konstrukcijah v enem vozlišču delujejo tri palice z neznanimi osnimi silami mora biti izpolnjen dodatni pogoj saj se vse tri neznane sile ne smejo nahajati v skupni ravnini.

Primer 4.3:

Obravnavamo ravninski primer palične konstrukcije, ki je v podpori A podprta z nepremično vrtljivo ter v podpori B s horizontalno premično in vrtljivo podporo ter je obtežena s tremi koncentriranimi silami v vozliščih konstrukcije (Slika 4.12).



Slika 4.12: 2D primer palične konstrukcije; (a) Palična konstrukcija s podporami in zunanjimi silami in (b) Vozlišča konstrukcije s pripadajočimi zunanjimi in notranjimi silami

Slika 4.12a prikazuje stabilno podprto ter kinematično stabilno konstrukcijo, ker jo sestavljajo same trikotne celice. Celotna konstrukcija je eno samo togo telo (šipa), ki se pod vplivi poljubnih obtežb (ob predpostavki togih paličnih elementov) ne more deformirati.

Konstrukcijo sestavlja $N_e = 11$ elementov, $N_k = 7$ vozlišč ter ima preprečene tri neodvisne premike oz. se lahko aktivirajo tri reakcijske (podporne) sile $N_p = 3$. Konstrukcija je statično določena:

$$N_s = 2N_k - (N_e + N_p) = 2 \cdot 7 - (11 + 3) = 0$$

Konstrukcijo najprej zunanje statično uravnotežimo:

$$\sum F_{ix} = -X_A + F_1 + F_2 = 0 \quad X_A = F_1 + F_2 = 30\text{kN}$$

$$\sum M^A = Y_B \cdot 6 - F_1 \cdot 3 - F_2 \cdot 4.5 - F_3 \cdot 4 = 0 \quad Y_B = 360/6 = 60\text{kN}$$

$$\sum F_{iy} = Y_A + Y_B - F_3 = 0 \quad Y_A = 0$$

Na zunanje uravnoteženi palični konstrukciji posamezna vozlišča izrežemo iz konstrukcije. Osne sile v palicah katerih osnih sil ne poznamo predpostavimo kot natezne, ki delujejo v osi posameznih palic v smeri od analiziranega vozlišča (Slika 4.11b). S postopkom uravnoteženja posameznih vozlišč pričnemo vedno v vozlišču, kjer se sekata dve palici z neznanimi osnimi silami.

Vozlišče I (Slika 4.12b)

$$\sum F_{ix} = S_2 \sin \alpha - X_A = 0$$

$$S_2 = X_A / \sin \alpha = 30 / (2 / \sqrt{13}) = 15 \cdot \sqrt{13} = 54.083\text{kN (natezna sila)}$$

$$\sum F_{iy} = S_1 + S_2 \cos \alpha = 0$$

$$S_1 = -S_2 \cos \alpha = -X_A \cot \alpha = -30 \cdot 3/2 = -45.000 \text{ kN (tlačna sila)}$$

Vozlišče II

$$\sum F_{iy} = -S_1 + S_6 \sin \beta = 0$$

$$S_6 = S_1 / \sin \beta = -45 \cdot \sqrt{6.25} / 1.5 = -75.000 \text{ kN (tlak)}$$

$$\sum F_{ix} = F_1 + S_3 + S_6 \cos \beta = 0$$

$$S_3 = -F_1 - S_6 \cos \beta = -10 + 75 \cdot 2 / \sqrt{6.25} = 50.000 \text{ kN (natezna sila)}$$

Vozlišče III

$$\sum F_{iy} = -S_2 \cos \alpha + S_7 = 0$$

$$S_7 = S_2 \cos \alpha = 15 \cdot \sqrt{13} \cdot 3 / \sqrt{13} = 45.000 \text{ kN (natezna sila)}$$

$$\sum F_{ix} = -S_2 \sin \alpha - S_3 + S_4 = 0$$

$$S_4 = S_2 \sin \alpha + S_3 = 15 \cdot \sqrt{13} \cdot 2 / \sqrt{13} + 50 = 80.000 \text{ kN (natezna sila)}$$

Vozlišče VI

$$\sum F_{iy} = -S_6 \sin \beta - S_7 - S_8 \sin \beta = 0$$

$$S_8 = -S_6 - S_7 / \sin \beta = 75 - 45 \cdot \sqrt{6.25} / 1.5 = 0.000 \text{ kN}$$

$$\sum F_{ix} = F_2 - S_6 \sin \beta + S_{11} = 0$$

$$S_{11} = S_6 \cos \beta - F_2 = -75 \cdot 2 / \sqrt{6.25} - 20 = -80.000 \text{ kN (tlak)}$$

Vozlišče IV

$$\sum F_{iy} = S_9 - F_3 = 0$$

$$S_9 = F_3 = 60.000 \text{ kN (natezna sila)}$$

$$\sum F_{ix} = -S_4 + S_5 = 0$$

$$S_5 = S_4 = 80.000 \text{ kN (natezna sila)}$$

Vozlišče V

$$\sum F_{iy} = Y_B + S_{10} \sin \beta = 0$$

$$S_{10} = -Y_B / \sin \beta = -60 \cdot \sqrt{6.25} / 1.5 = -100.000 \text{ kN (tlak)}$$

$$\sum F_{ix} = -S_5 - S_{10} \cos \beta = -80 + 100 \cdot 2 / \sqrt{6.25} = 0 \text{ (verifikacija izračuna)}$$

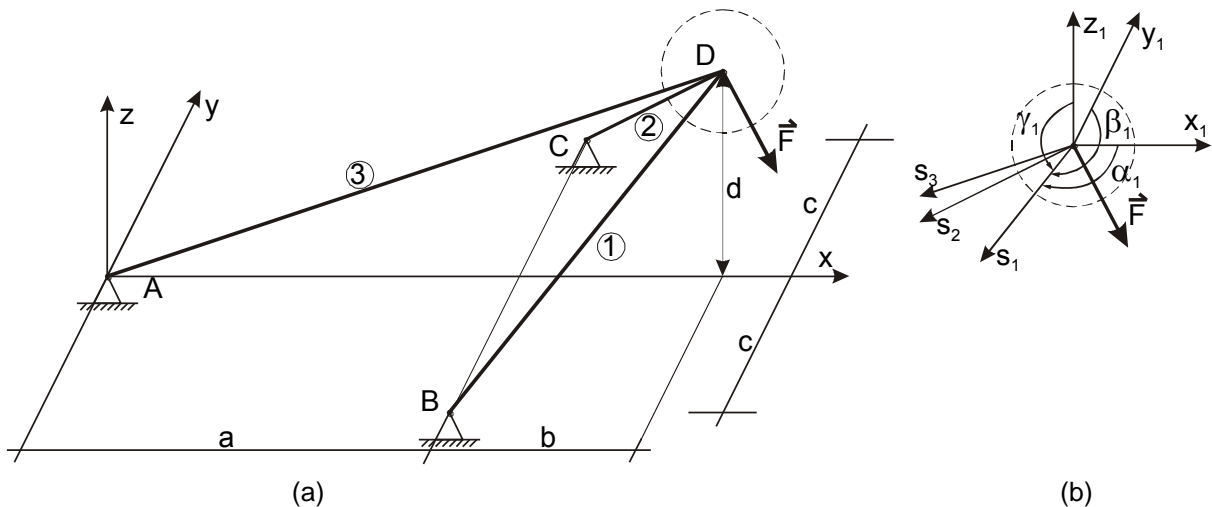
Primer 4.4:

Obravnavamo prostorski primer palične konstrukcije, ki je v podporah A, B in C podprta z nepremičnimi vrtljivimi prostorskimi podporami ter v točki D obtežena s poljubno koncentrirano silo, ki se preko vozlišča prenaša na konstrukcijo (Slika 4.13). Palična konstrukcija je kinematično stabilna, ker jo sestavlja ena sama prostorska celica v obliki tristranične piramide (podpore v točkah A, B in C so nepremične ter zato nadomeščajo povezovalne palice vzdolž premic \overline{AB} , \overline{BC} in \overline{AC}).

Pri obravnavani konstrukciji upoštevamo 9 komponent reakcijskih sil, tri členkasto povezane palice $N_e = 3$ ter štiri vozlišča $N_k = 4$. Stopnjo statične določenosti ocenimo:

$$N_s = 3N_k - (N_e + N_p) = 3 \cdot 4 - (3 + 9) = 0$$

Obravnavana prostorska palična konstrukcija je kinematično stabilna in statično določena.



Slika 4.13: Prostorsko paličje: (a) Skica prostorske konstrukcije in (b) Izrez vozlišča D s pripadajočimi zunanjimi in notranjimi silami

V vozlišču D se sekajo tri palice katerih osnih sil ne poznamo. Ker se vse tri palice ne nahajajo v skupni ravnini lahko vozlišče D izrežemo iz konstrukcije (Slika 4.13b) ter z uravnoteženjem določimo osne sile v vseh treh palicah prostorske konstrukcije. Določitev podpornih sil pred določanjem notranjih sil v tem primeru ni nujno potrebno. Za predpostavljene natezne osne sile S_1 , S_2 in S_3 , ki v izrezanem vozlišču delujejo vzdolž osi posameznih palic (v smeri od vozlišča) najprej v lokalnem koordinatnem sistemu x_1 , y_1 , z_1 (Slika 4.13b) določimo koordinate posameznih točk, dolžine posameznih palic ter smerne kosinuse posameznih osnih sil v palicah.

$$\ell_1 = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} \quad x_{1B} = -b \quad y_{1B} = -c \quad z_{1B} = -d$$

$$\cos \alpha_1 = -b/\ell_1 \quad \cos \beta_1 = -c/\ell_1 \quad \cos \gamma_1 = -d/\ell_1$$

$$\ell_2 = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} \quad x_{1C} = -b \quad y_{1C} = c \quad z_{1C} = -d$$

$$\cos \alpha_2 = -b/\ell_2 \quad \cos \beta_2 = c/\ell_2 \quad \cos \gamma_2 = -d/\ell_2$$

$$\ell_3 = \sqrt{(a+b)^2 + d^2} \quad x_{1A} = -(a+b) \quad y_{1A} = 0 \quad z_{1A} = -d$$

$$\cos \alpha_3 = -(a+b)/\ell_3 \quad \cos \beta_3 = 0 \quad \cos \gamma_3 = -d/\ell_3$$

Vozlišče D mora biti v ravnotežju (Slika 4.13b), pogoj zapišemo v vektorski in matrični obliki:

$$\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 + \vec{F} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -b/\ell_1 & -b/\ell_2 & -(a+b)/\ell_3 \\ -c/\ell_1 & c/\ell_2 & 0 \\ -d/\ell_1 & -d/\ell_2 & -d/\ell_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_x \\ -F_y \\ -F_z \end{Bmatrix}$$

Sistem treh enačb s tremi neznankami rešimo po Cramer-ju.

$$\text{Det}[A] = \text{Det} \begin{bmatrix} -b/\ell_1 & -b/\ell_2 & -(a+b)/\ell_3 \\ -c/\ell_1 & c/\ell_2 & 0 \\ -d/\ell_1 & -d/\ell_2 & -d/\ell_3 \end{bmatrix} = -2acd/(\ell_1\ell_2\ell_3)$$

Konstrukcija je kinematično stabilna v kolikor so razdalje a, c in d različne od 0.

Sile v posameznih palicah določimo s poddeterminantami:

$$S_1 = \text{Det}[A_1]/\text{Det}[A] = \text{Det} \begin{bmatrix} -F_x & -b/\ell_2 & -(a+b)/\ell_3 \\ -F_y & c/\ell_2 & 0 \\ -F_z & -d/\ell_2 & -d/\ell_3 \end{bmatrix} / \text{Det}[A] = -F_x \frac{\ell_1}{2a} + F_y \frac{\ell_1}{2c} + F_z \frac{\ell_1(a+b)}{2ad}$$

$$S_2 = \text{Det}[A_2]/\text{Det}[A] = \text{Det} \begin{bmatrix} -b/\ell_1 & -F_x & -(a+b)/\ell_3 \\ -c/\ell_1 & -F_y & 0 \\ -d/\ell_1 & -F_z & -d/\ell_3 \end{bmatrix} / \text{Det}[A] = -F_x \frac{\ell_2}{2a} - F_y \frac{\ell_2}{2c} + F_z \frac{\ell_2(a+b)}{2ad}$$

$$S_3 = \text{Det}[A_3]/\text{Det}[A] = \text{Det} \begin{bmatrix} -b/\ell_1 & -b/\ell_2 & -F_x \\ -c/\ell_1 & c/\ell_2 & -F_y \\ -d/\ell_1 & -d/\ell_2 & -F_z \end{bmatrix} / \text{Det}[A] = F_x \frac{\ell_3}{a} - F_z \frac{\ell_3 b}{ad}$$

Reakcijske sile v podporah A, B in C morajo biti v ravnotežju z osnimi silami v posameznih palicah, ki so členkasto povezane s posameznimi podporami. Izvrednoti jih lahko bralec sam.

4.4.4 Reševanje ravninskih primerov po grafostatični metodi

Iz zgodovine mehanike je poznano, da je mogoče vrsto problemov s področja gradbene statike rešiti po grafostatičnih metodah. Pri paličnih konstrukcijah je mnogokrat vsaj za razumevanje problematike uporabna ter zelo koristna grafična metoda vozliščnega ravnotežja, ki ji pravimo tudi postopek po Cremoni.

Primer 4.5:

S postopkom po Cremoni bomo določili reakcije ter osne sile v palicah za palično konstrukcijo, ki je že analizirana (primer 4.3).

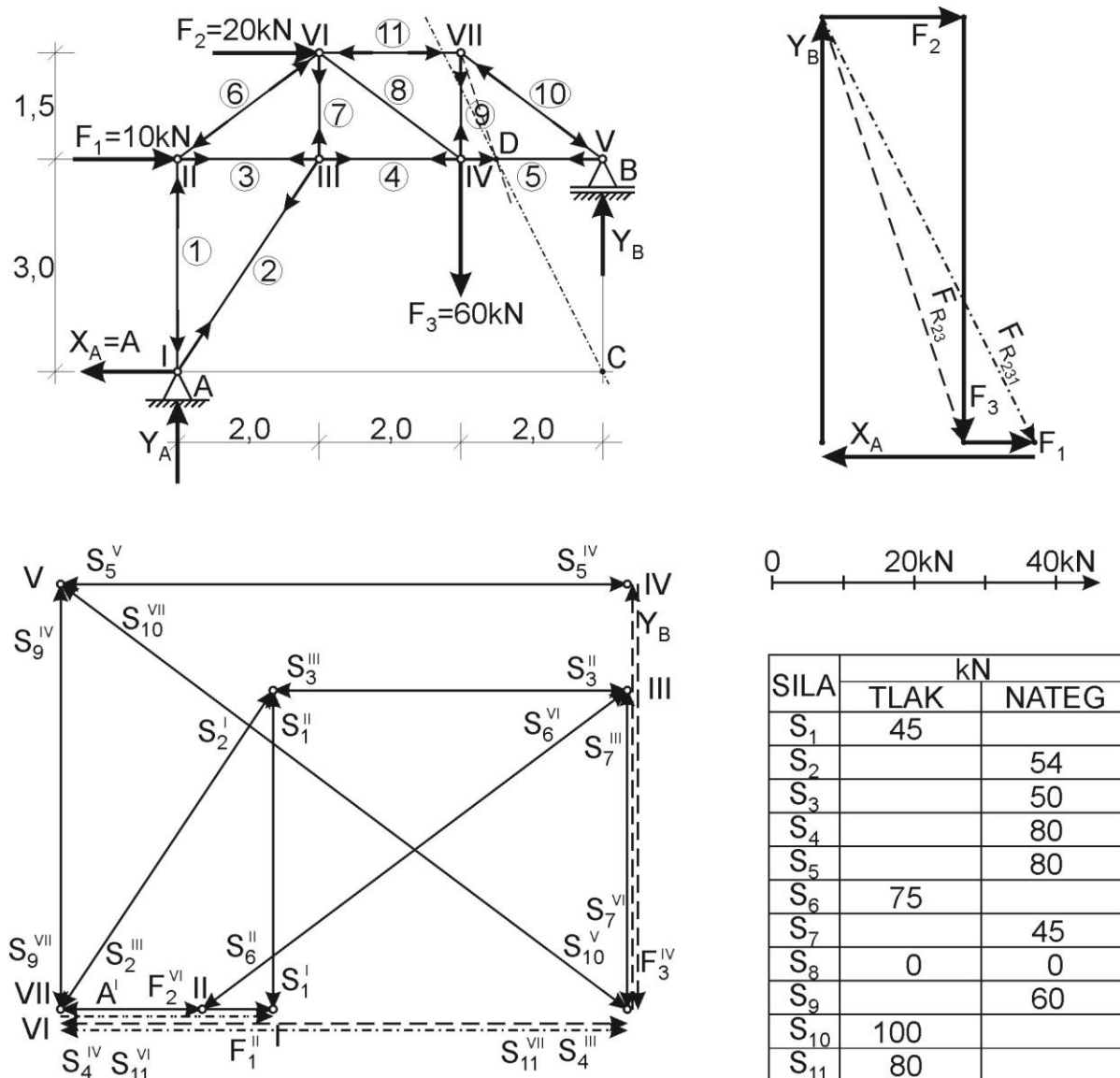
Najprej načrtamo palično konstrukcijo s podporami v primernem merilu ter označimo podpore, posamezne palice in vozlišča konstrukcije (Slika 4.14).

Palično konstrukcijo najprej uravnotežimo z reakcijskimi silami. V poligonu sil določimo rezultanto vseh znanih sil, ki delujejo na konstrukcijo. Določimo delno vsoto sil $\vec{F}_{R_{23}} = \vec{F}_2 + \vec{F}_3$, ki deluje v vozlišču VII ter v točki D seka učinkovalnico sile \vec{F}_1 . Rezultanto vseh znanih sil določimo $\vec{F}_{R_{231}} = \vec{F}_{R_{23}} + \vec{F}_1$, ki deluje v že omenjeni točki D.

S premico vzporedno rezultanti vseh znanih sil $\vec{F}_{R_{231}}$, ki poteka skozi točko D, določimo točko C v kateri deluje vsota sil $\vec{F}_{R_{231}} + \vec{Y}_B$. Ker je preostala le še reakcijska sila $\vec{A} = \vec{X}_A + \vec{Y}_A$ mora tudi ta potekati skozi točko C ter deluje na premici \overline{AC} . Z uravnoteženjem vsote vseh znanih sil $\vec{F}_{R_{231}}$ s silama \vec{A} in \vec{Y}_B , katerih učinkovalnice poznamo, določimo v poligonu sil velikosti obeh reakcijskih sil (Slika 4.14).

Pri paličnih konstrukcijah v ravnini določamo osne sile v palicah tako, da postopoma uravnotežimo vsa vozlišča konstrukcije. S postopkom pričnemo v vozlišču v katerem se sekata največ dve palici katerih osnih sil ne poznamo. Najprej vse znane sile v obravnavanem vozlišču grafično seštejemo ter dobljeno rezultanto uravnotežimo (zaključimo poligon) z dvema preostalima silama katerih učinkovalnice poznamo. Dobljene smeri neznanih sil začrtamo v načrt sil. Osne sile so natezne oz. tlačne v kolikor delujejo od oz. k obravnavanemu vozlišču konstrukcije.

Velikosti neznanih sil odmerimo iz poligona sil ter jih prikažemo v tabeli (Slika 4.14).



Slika 4.14: Prerez palične konstrukcije, poligoni sil in rezultati statične analize paličja po grafostatični metodi po Cremonii

Postopek po Cremonii pričnemo v vozlišču I (poligon sil, Slika 4.14). Začrtamo znano reakcijsko silo A^I ter jo uravnotežimo s silama S_2^I in S_1^I . Sila S_2^I deluje od vozlišča (zato je natezna) ter sila S_1^I k vozlišču (tlačna). Intenziteti obeh sil odmerimo iz poligona sil ter sta prikazani v priloženi tabeli.

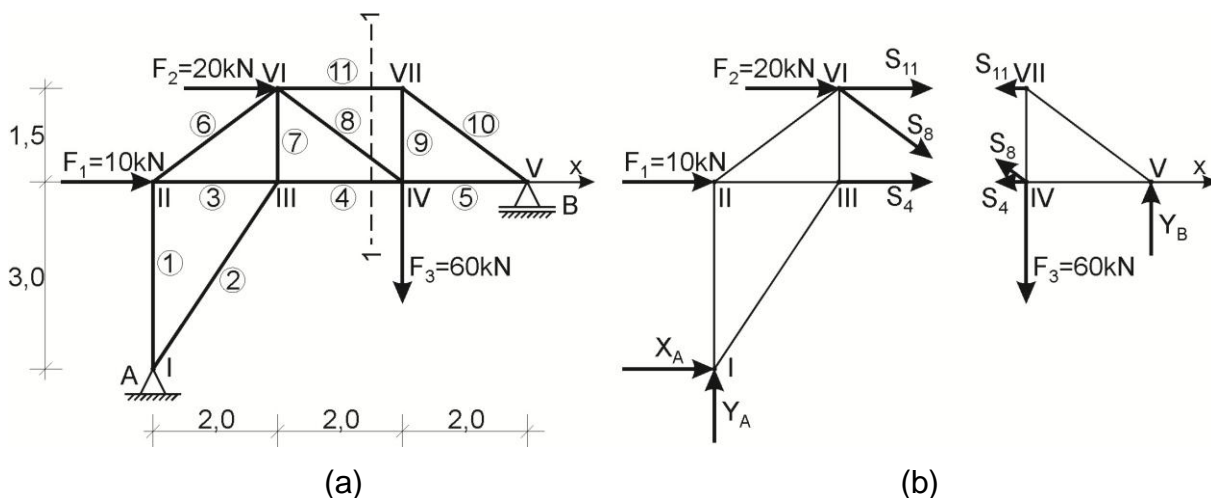
Postopek nadaljujemo za vozlišče II. V točki II v poligonu sil najprej seštejemo znani sili F_1^{II} in S_1^{II} ter ju uravnotežimo z natezno silo S_3^{II} ter tlačno silo S_6^{II} .

Za uravnoteženje vozlišča III v poligonu sil v točki III nanesemo znano silo S_3^{III} , k njej prištejemo silo S_2^{III} ter njuno vsoto uravnotežimo z nateznima silama S_4^{III} ter S_7^{III} .

Za vozlišče VI najprej v poligonu sil seštejemo sile F_2^{VI} , S_6^{VI} in S_7^{VI} ter njihovo vsoto uravnotežimo s tlačno silo S_{11}^{VI} in ugotovimo, da je osna sila S_8^{VI} identično enaka 0. Postopek nato ponavljamo za preostala vozlišča dokler niso izpolnjeni ravnotežni pogoji vseh vozlišč na konstrukciji.

4.4.5 Metoda prereza (Ritter-jev postopek)

V kolikor poljubno palično konstrukcijo z enim prerezom razdelimo v dva ločena dela ter medsebojne učinke povezanih palic nadomestimo z njihovimi osnimi silami (Slika 4.15) morata biti oba prerezana dela konstrukcije v ravnotežju.



Slika 4.15: Palična konstrukcija: (a) Zunanje in notranje statično določena konstrukcija ter (b) Levi in desni del uravnotežene palične konstrukcije ter sile v prerezanih palicah

V kolikor je obravnavana palična konstrukcija kinematično stabilna ter zunanje in notranje statično določena lahko sile v prerezanih palicah določimo na osnovi ravnotežnih pogojev za levi in/ali za desni del prerezane konstrukcije.

Pri 2D primerih lahko sile v prerezih določimo kadar hkrati prerežemo le tri palice katerih osnih sil ne poznamo ter v kolikor se največ dve neznanili sekata v skupni točki.

Pri prostorskih 3D primerih je sistem rešljiv samo kadar hkrati prerežemo največ šest palic katerih osnih sil ne poznamo ter od katerih lahko največ tri sile delujejo v skupni točki.

Metoda prereza je uporabna zlasti v primerih kadar določamo osne sile samo v nekaterih (kritičnih) palicah konstrukcije. Postopek za reševanje 2D primerov je bil v zgodovini mehanike imenovan tudi Ritter-jev, ker je temeljil na grafičnem postopku uravnoteženja rezultante poljubnega sistema sil v ravnini s tremi nekolinearnimi silami po metodi s Culmann-ovo premico.

Za prikazani primer so že v poglavju 4.3.3. določene reakcijske sile, ki so z ozirom na oznake na sliki Slika 4.15b naslednje:

$$X_A = -30\text{kN} \quad Y_A = 0 \quad Y_B = 60\text{kN}$$

Za levi in desni del prerezane konstrukcije (Slika 4.15) lahko uporabimo po tri poljubne ravnotežne pogoje, za levi del so lahko naslednji:

$$\sum F_{iy} = S_8 = 0$$

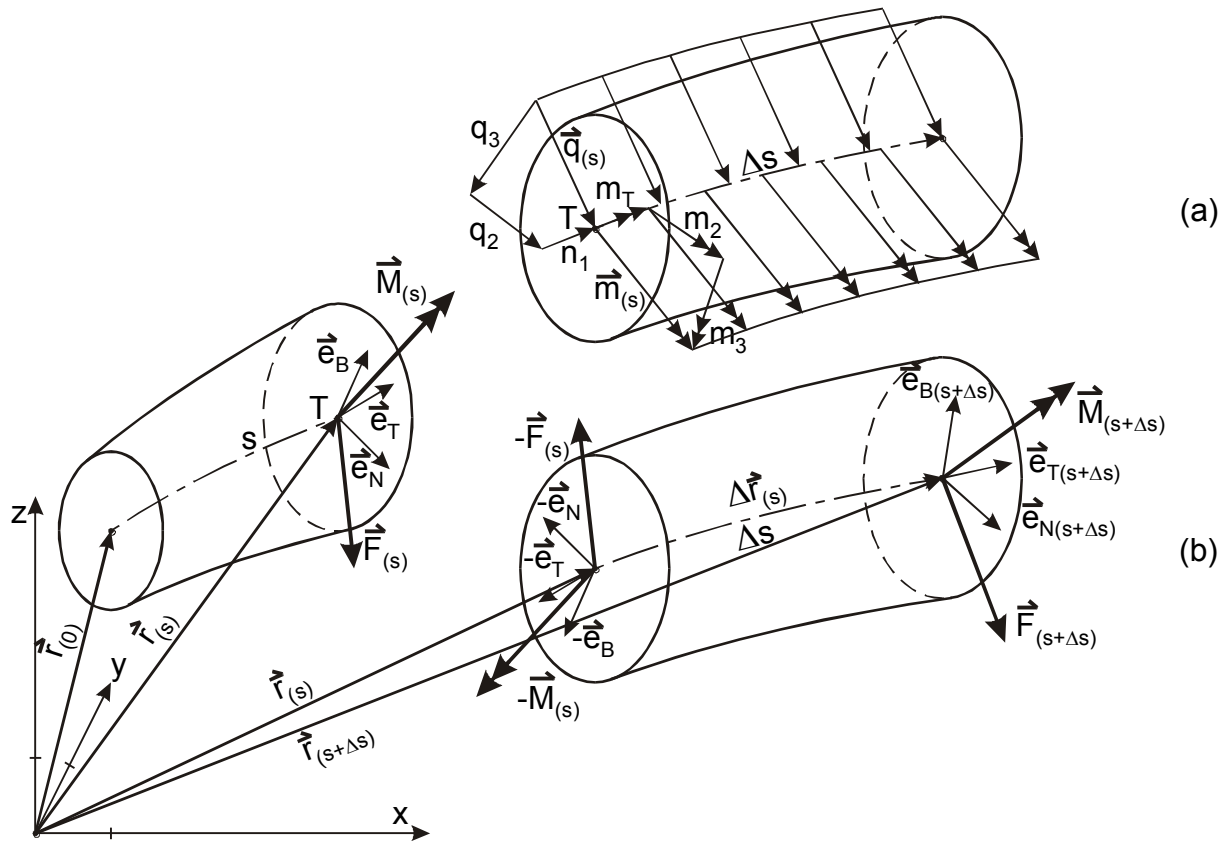
$$\sum M^{VI} = X_A \cdot 4.5 + F_1 \cdot 1.5 + S_4 \cdot 1.5 = 0 \quad S_4 = -(F_1 \cdot 1.5 + X_A \cdot 4.5) / 1.5 = 80.000 \text{ kN}$$

$$\sum F_{ix} = F_1 + F_2 + X_A + S_4 + S_{11} = 0 \quad S_{11} = -F_1 - F_2 - X_A - S_4 = -80.000 \text{ kN}$$

Preostale osne sile v posameznih palicah lahko določimo z novimi oz. dodatnimi prerezi konstrukcije.

4.5 Diferencialne zveze med notranjimi statičnimi in zunanji obtežbami

Obravnavamo infinitezimalno majhen del konstrukcije dolžine Δs na katerega delujeta vektorja notranjih sil $(-\vec{F}_{(s)}, -\vec{M}_{(s)})$ in $(\vec{F}_{(s+\Delta s)}, \vec{M}_{(s+\Delta s)})$ ter zunanja zvezno razporejena obtežba $\vec{q}_{(s)}$ in zvezno razporejeni momenti $\vec{m}_{(s)}$ (Slika 4.16)



Slika 4.16: Infinitezimalno majhen del konstrukcije: (a) Zunanje obtežbe ter (b) Notranje sile in enotni vektorji lokalnega koordinatnega sistema na delcu konstrukcije dolžine Δs

Obtežbene vektorje, ki delujejo na težiščno os (Slika 4.16a) na delu konstrukcije dolžine Δs izrazimo v naravnem lokalnem koordinatnem sistemu:

$$\vec{q}_{(s)} = n_1 \vec{e}_{x_1} + q_2 \vec{e}_{y_1} + q_3 \vec{e}_{z_1} \text{ (kN/m)} \quad (4.30)$$

$$\vec{m}_{(s)} = m_T \vec{e}_{x_1} + m_2 \vec{e}_{y_1} + m_3 \vec{e}_{z_1} \text{ (kNm/m)} \quad (4.31)$$

Kadar je Δs dovolj majhen ($\Delta s \rightarrow ds$) lahko posamezne vektorje (Slika 4.16) nadomestimo s prvima členoma Taylor-jeve vrste:

$$\vec{F}_{(s+ds)} = \vec{F}_{(s)} + (d\vec{F}_{(s)} / ds) ds \quad \vec{M}_{(s+ds)} = \vec{M}_{(s)} + (d\vec{M}_{(s)} / ds) ds \quad (4.32)$$

$$\vec{q}_{(s+ds)} = \vec{q}_{(s)} + (d\vec{q}_{(s)} / ds) ds \quad \vec{m}_{(s+ds)} = \vec{m}_{(s)} + (d\vec{m}_{(s)} / ds) ds \quad (4.33)$$

$$\vec{r}_{(s+ds)} = \vec{r}_{(s)} + (d\vec{r}_{(s)} / ds)ds \quad (4.34)$$

Ker mora biti vsaki del konstrukcije v ravnotežju ta pogoj velja tudi za del konstrukcije dolžine Δs .

$$\sum \vec{F}_i = \vec{F}_{(s+ds)} - \vec{F}_{(s)} + (1/2)(2\vec{q}_{(s)} + d\vec{q}_{(s)} / ds)ds = \vec{0}$$

$$(d\vec{F}_{(s)} / ds)ds + \vec{q}_{(s)}ds + (1/2)(d\vec{q}_{(s)} / ds)dsds = \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{F}_{(s)}}{ds} = -\vec{q}_{(s)} \quad (4.35)$$

Odvod prerezne sile po dolžini težiščne osi nosilca je enak negativni vrednosti prečne obtežbe (vpliv produkta odvoda in diferenciala dolžine elementa je zanemarljivo majhen).

$$\sum \vec{M}^0 = -\vec{M}_{(s)} + \vec{M}_{(s)} + (d\vec{M}_{(s)} / ds)ds - \vec{r}_{(s)} \times \vec{F}_{(s)} + (\vec{r}_{(s)} + (d\vec{r}_{(s)} / ds)ds) \times (\vec{F}_{(s)} + (d\vec{F}_{(s)} / ds)ds) +$$

$$(\vec{r}_{(s)} + (1/2)(d\vec{r}_{(s)} / ds)ds) \times (\vec{q}_{(s)} + (1/2)(d\vec{q}_{(s)} / ds)ds)ds + \vec{m}_{(s)}ds + (1/2)(d\vec{m}_{(s)} / ds)dsds = \vec{0}$$

V momentni enačbi opustimo poljubno majhne vrednosti produktov diferencialov ter dobimo:

$$(d\vec{M}_{(s)} / ds)ds + (d\vec{r}_{(s)} / ds)ds \times \vec{F}_{(s)} + \vec{r}_{(s)} \times (d\vec{F}_{(s)} / ds)ds + \vec{r}_{(s)} \times \vec{q}_{(s)}ds + \vec{m}_{(s)}ds = \vec{0} \quad (4.36)$$

V izrazu (4.36) upoštevamo enakost (4.35) ter tako dobljeno sovisnost nato krajšamo z ds :

$$\frac{d\vec{M}_{(s)}}{ds} = -\vec{m}_{(s)} - \frac{d\vec{r}_{(s)}}{ds} \times \vec{F}_{(s)} = -\vec{m}_{(s)} - \vec{e}_T \times \vec{F}_{(s)} \quad (4.37)$$

Izraz (4.36) zapišemo z upoštevanjem izraza (4.12):

$$\frac{d\vec{F}_{(s)}}{ds} = \frac{d}{ds} (N_{(s)} \vec{e}_T + V_{2(s)} \vec{e}_N + \bar{T}_{3(s)} \vec{e}_B) = (dN_{(s)} / ds) \vec{e}_T + N_{(s)} (d\vec{e}_T / ds) + \quad (4.38)$$

$$(dV_{2(s)} / ds) \vec{e}_N + V_{2(s)} (d\vec{e}_N / ds) + (d\bar{T}_{3(s)} / ds) \vec{e}_B + \bar{T}_{3(s)} (d\vec{e}_B / ds) = -n_1 \vec{e}_T - q_2 \vec{e}_N - q_3 \vec{e}_B$$

Odvide enotnih vektorjev po dolžini težiščne osi izrazimo v odvisnosti od radijev fleksijske in torzijske ukrivljenosti (Slika 4.17).

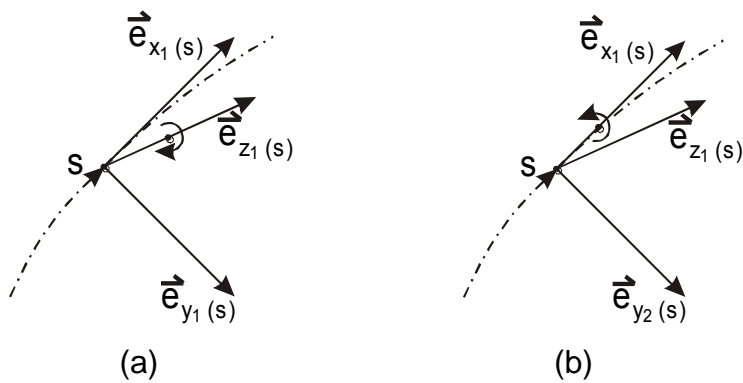
Z ozirom na prikazani rotaciji koordinatnega sistema (Slika 4.17) odvide enotnih vektorjev definiramo:

$$d\vec{e}_T / ds = \frac{\vec{e}_N}{R} \quad (4.39)$$

$$d\vec{e}_N / ds = -\frac{\vec{e}_T}{R} + \frac{\vec{e}_B}{B} \quad (4.40)$$

$$d\vec{e}_B / ds = -\frac{\vec{e}_N}{B} \quad (4.41)$$

kjer R oz. B označujeta radij fleksijske oz. torzijske ukrivljenosti težiščne osi nosilca, ki sta definirana z izrazoma (4.9) oz. (4.10). Izrazi (4.39), (4.40) in (4.41) so v literaturi poznani kot Frenet-ove formule.



Slika 4.17: Fleksijska in torzijska ukrivljenost osi nosilca; (a) Fleksijsko ukrivljenost ponazarja rotacija koordinatnega sistema okrog binormale in parcialno (b) Torzijska ukrivljenost prikazana kot rotacija koordinatnega sistema okrog tangente na težiščno os nosilca

Vektorsko enačbo (4.38) z upoštevanjem izrazov (4.39), (4.40) in (4.41) zapišemo s tremi skalarnimi izrazi:

$$\frac{dN_{(s)}}{ds} = -n_1 + \frac{V_{2(s)}}{R} \quad (4.42)$$

$$\frac{dV_{2(s)}}{ds} = -q_2 - \frac{N_{(s)}}{R} + \frac{V_{3(s)}}{B} \quad (4.43)$$

$$\frac{dV_{3(s)}}{ds} = -q_3 - \frac{V_{2(s)}}{B} \quad (4.44)$$

Tudi izraz (4.37) lahko prikažemo v razširjeni obliki z upoštevanjem izraza (4.12):

$$\frac{d\vec{M}_{(s)}}{ds} = \frac{d}{ds} (M_{T(s)}\vec{e}_T + M_{2(s)}\vec{e}_N + M_{3(s)}\vec{e}_B) = \frac{dM_{T(s)}}{ds}\vec{e}_T + M_{T(s)}\frac{d\vec{e}_T}{ds} + \frac{dM_{2(s)}}{ds}\vec{e}_N + M_{2(s)}\frac{d\vec{e}_N}{ds} + \frac{dM_{3(s)}}{ds}\vec{e}_B + M_{3(s)}\frac{d\vec{e}_B}{ds} = -m_T\vec{e}_T - m_2\vec{e}_N - m_3\vec{e}_B - \begin{vmatrix} \vec{e}_T & \vec{e}_N & \vec{e}_B \\ 1 & 0 & 0 \\ N_{(s)} & V_{2(s)} & V_{3(s)} \end{vmatrix} \quad (4.45)$$

Vektorsko enačbo (4.45) z upoštevanjem izrazov (4.42), (4.43) in (4.44) podamo v bolj pregledni skalarni obliki.

$$\frac{dM_{T(s)}}{ds} = -m_T + \frac{M_{2(s)}}{R} \quad (4.46)$$

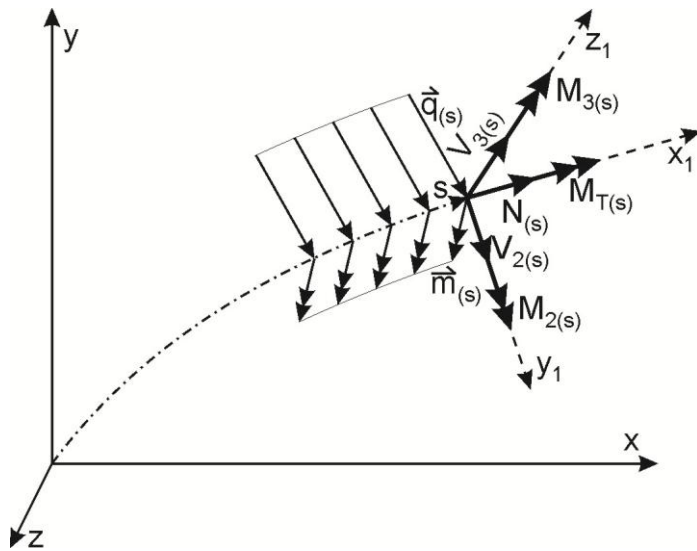
$$\frac{dM_{2(s)}}{ds} = -m_2 + V_{3(s)} - \frac{M_{T(s)}}{R} + \frac{M_{3(s)}}{B} \quad (4.47)$$

$$\frac{dM_{3(s)}}{ds} = -m_3 - V_{2(s)} - \frac{M_{2(s)}}{B} \quad (4.48)$$

Skalarni izrazi (4.42), (4.43) in (4.44) ter (4.46), (4.47) in (4.48) določajo diferencialne zveze med notranjimi statičnimi količinami za ukrivljene prostorske konstrukcije. V stroki jim pravimo diferencialne enačbe notranjih statičnih količin.

Diferencialne enačbe se poenostavijo pri ravninskih ukrivljenih nosilcih (Slika 4.18).

Pri takšnih konstrukcijah se težiščna os, obtežbe, reakcijske sile ter enotna vektorja \$\vec{e}_T\$ in \$\vec{e}_N\$ nahajajo v ravnini x-y, torzijska ukrivljenost težiščne osi je pri nosilcih v ravnini enaka 0 (\$1/B = 0\$).



Slika 4.18: Ukrivljeni nosilec v ravnini x-y

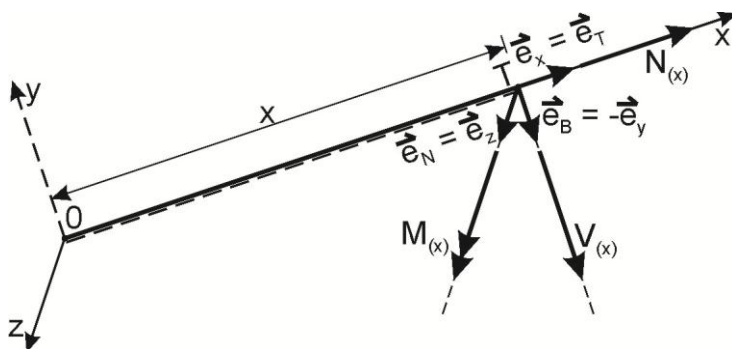
Zlahka lahko ugotovimo, da se tudi izrazi za obtežbe in notranje sile poenostavijo: $\vec{q} = n_1 \vec{e}_T + q_2 \vec{e}_N$, $\vec{m} = m_3 \vec{e}_B$ in $\vec{F}_{(s)} = \{N_{(s)}, V_{2(s)}, 0\}$ ter $\vec{M}_{(s)} = \{0, 0, M_{3(s)}\}$. Zlahka ugotovimo, da imamo pri ravninskih primerih le tri diferencialne enačbe notranjih statičnih količin;

$$\frac{dN_{(s)}}{ds} = -n_1 + \frac{V_{2(s)}}{R} \quad (4.49)$$

$$\frac{dV_{2(s)}}{ds} = -q_2 - \frac{N_{(s)}}{R} \quad (4.50)$$

$$\frac{dM_{3(s)}}{ds} = -m_3 - V_{2(s)} \quad (4.51)$$

Pri konstrukcijah z ravno osjo v ravnini x-y (Slika 4.19) je ob torzijski hkrati tudi fleksijska ukrivljenost enaka 0 ($1/R = 0$).



Slika 4.19: Nosilec z ravno osjo v ravnini x-y

Pri nosilcih z ravno osjo definiramo glavno normalo po dogovoru. Lokalni koordinatni sistem (x, y, z) izberemo tako, da os x sovpada s težiščno osjo nosilca, smer glavne normale \vec{e}_N pa določa pozitivna stran ravnega nosilca, ki jo izberemo tako, da pozitivni upogibni moment, ki deluje v smeri glavne normale, povzroča v vlaknih konstrukcije na pozitivni strani natezne napetosti.

V kolikor je pozitivna stran spodaj (črtkana črta, Slika 4.19), smer glavne normale sovpada s smerjo z osi lokalnega koordinatnega sistema. V takšnih primerih je tudi

parameter s , ki določa dolžino težiščne osi nosilca enak x koordinati lokalnega koordinatnega sistema.

V takšnem najenostavnejšem primeru so obtežbe in notranje sile odvisne le od koordinate x : $\vec{q} = \vec{q}_{(x)} = n_{(x)}\vec{e}_T + q_{(x)}\vec{e}_B$, $\vec{m} = \vec{m}_{(x)} = m_{(x)}\vec{e}_N$ in $\vec{F}_{(x)} = \{N_{(x)}, 0, V_{(x)}\}$ ter $\vec{M}_{(x)} = \{0, M_{(x)}, 0\}$. Tako pri konstrukcijah z ravno osjo preostanejo le naslednje tri bistveno poenostavljene diferencialne zveze (enačbe):

$$\frac{dN_{(x)}}{dx} = -n_{(x)} \quad (4.52)$$

$$\frac{dV_{(x)}}{dx} = -q_{(x)} \quad (4.53)$$

$$\frac{dM_{(x)}}{dx} = -m_{(x)} + V_{(x)} \quad (4.54)$$

V kolikor izraz 4.55 še dodatno odvajamo po dolžini ravnega nosilca dobimo:

$$\frac{d^2M_{(x)}}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-m_{(x)} + V_{(x)}) = -m'_{(x)} + \frac{dV_{(x)}}{dx} = -m'_{(x)} - q_{(x)} \quad (4.55)$$

V strokovni praksi je največkrat tudi zvezno razporejeni upogibni moment $m_{(x)} = 0$ in za takšne najpreprostejše primere lahko za konstrukcije oz. nosilce z vsaj odsekovno ravnimi osmi zaključimo:

- 1. Prvi odvod osne sile $N_{(x)}$ po dolžini težiščne osi ravnega nosilca je enak negativni vrednosti obtežbe $n_{(x)}$ v smeri tangente na os nosilca:**

$$\frac{dN_{(x)}}{dx} = -n_{(x)}$$

- 2. Prvi odvod prečne sile $V_{(x)}$ po dolžini težiščne osi ravnega nosilca je enak negativni vrednosti prečne obtežbe $q_{(x)}$ v smeri binormale na os nosilca:**

$$\frac{dV_{(x)}}{dx} = -q_{(x)}$$

- 3. Prvi odvod upogibnega momenta $M_{(x)}$ po dolžini težiščne osi ravnega nosilca je enak vrednosti prečne sile $V_{(x)}$:**

$$\frac{dM_{(x)}}{dx} = V_{(x)}$$

- 4. Drugi odvod upogibnega momenta $M_{(x)}$ po dolžini težiščne osi ravnega nosilca je enak negativni vrednosti prečne obtežbe $q_{(x)}$:**

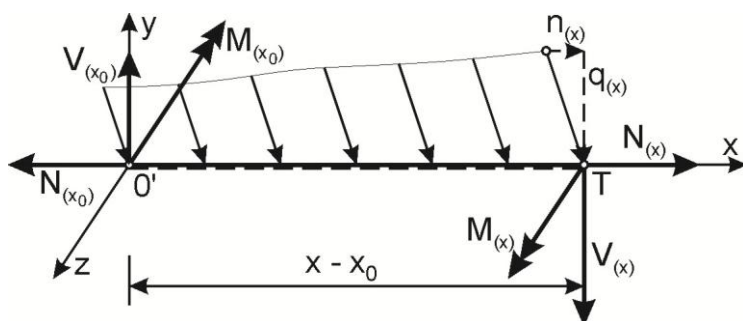
$$\frac{d^2M_{(x)}}{dx^2} = -q_{(x)}$$

- 5. V točki $x = x_i$, kjer sta prečna obtežba $q_{(x)}$ oz. vzdolžna obtežba $n_{(x)}$ enaka 0 imata prečna sila $V_{(x)}$ oz. osna sila $N_{(x)}$ ekstremni vrednosti.**

6. V točki $x = x_j$, kjer imata prečna obtežba $q_{(x)}$ oz. vzdolžna obtežba $n_{(x)}$ preskok imata diagrama prečnih sil $V_{(x)}$ oz. osnih sil $N_{(x)}$ lom oz. obe funkciji v točki $x = x_j$ nista zvezno odvedljivi.
7. V točki $x = x_k$, kjer sta prečna obtežba $q_{(x)}$ oz. vzdolžna obtežba $n_{(x)}$ singularni (delujeta koncentrirani sili) imata diagrama prečnih sil $V_{(x)}$ oz. osnih sil $N_{(x)}$ preskok (levi in desni vrednosti funkcij notranjih statičnih količin v točki $x = x_j$ nista enaki).
8. V točki $x = x_l$, kjer je prečna sila $V_{(x)}$ enaka 0 ima upogibni moment $M_{(x)}$ ekstrem (maksimum oz. minimum).
9. V točki $x = x_m$, kjer ima prečna sila $V_{(x)}$ preskok ima upogibni moment $M_{(x)}$ lom (funkcija $M_{(x)}$ ni zvezno odvedljiva).
10. V točki $x = x_n$, kjer je prečna sila $V_{(x)}$ singularna (deluje koncentrirani moment) ima upogibni moment $M_{(x)}$ preskok (leva in desna vrednost funkcije upogibnega momenta $M_{(x)}$ v točki $x = x_n$ nista enaki).

4.6 Integracija diferencialnih enačb notranjih statičnih količin

Diferencialne enačbe notranjih statičnih količin lahko za nosilce z ravno oz. vsaj odsekovno ravno težiščno osjo brez večjega napora integriramo. Slika 4.20 prikazuje izsek ravnega nosilca dolžine $x - x_0$ obtežen s prečno obtežbo $q_{(x)}$ s pripadajočimi prereznimi silami.



Slika 4.20: Izsek ravnega nosilca na odseku med $x - x_0$

Izraz 4.53 uporabimo v obliki $dN_{(x)} = -n_{(x)} dx$ ter na odseku $x - x_0$ integriramo.

$$\int_{x_0}^x dN_{(x)} = - \int_{x_0}^x n_{(x)} dx \quad N_{(x)} - N_{(x_0)} = - \int_{x_0}^x n_{(x)} dx \quad (4.56)$$

Sprememba osne sile na odseku $x - x_0$ je enaka negativni vrednosti vsote projekcij vseh sil, ki delujejo na odseku $x - x_0$ v smeri tangente na težiščno os nosilca.

Na podoben način integriramo izraza (4.54) in (4.55).

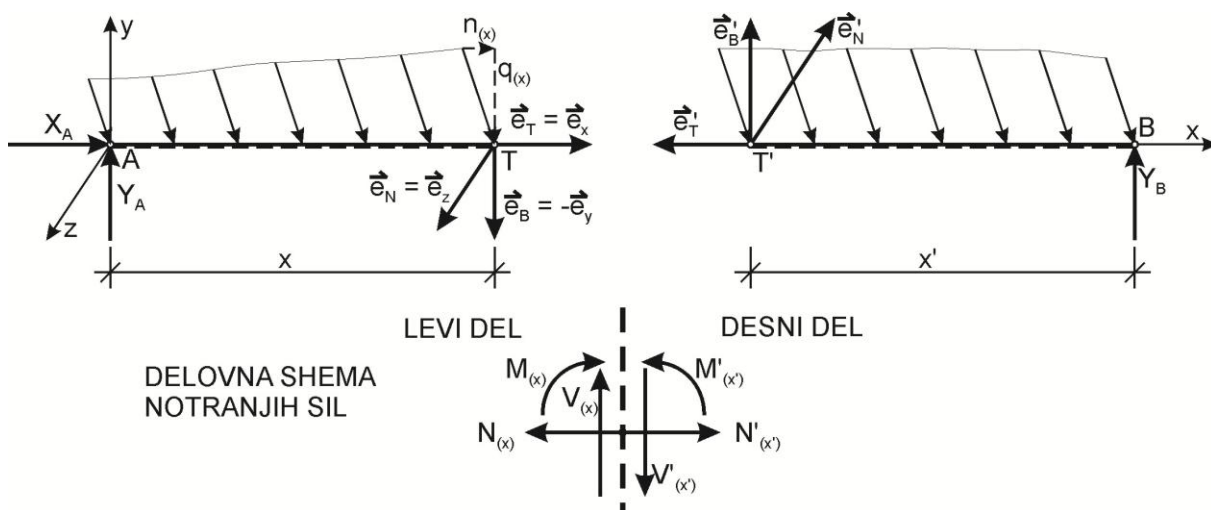
$$\int_{x_0}^x dV_{(x)} = - \int_{x_0}^x q_{(x)} dx \quad V_{(x)} - V_{(x_0)} = - \int_{x_0}^x q_{(x)} dx \quad (4.57)$$

Sprememba prečne sile na odseku $x - x_0$ je enaka negativni vrednosti vsote projekcij vseh sil, ki delujejo na odseku $x - x_0$ v smeri binormale na težiščno os nosilca.

$$\int_{x_0}^x dM_{(x)} = \int_{x_0}^x V_{(x)} dx \quad M_{(x)} - M_{(x_0)} = \int_{x_0}^x (V_{(x_0)} - \int_{x_0}^x q_{(x)} dx) dx \quad (4.58)$$

Sprememba upogibnega momenta na odseku $x - x_0$ je enaka vsoti upogibnih momentov zaradi vplivov prečne sile v točki x_0 in prečne obtežbe, ki deluje na odseku $x - x_0$ v smeri binormale na težiščno os nosilca.

V kolikor v izrazih (4.56), (4.57) in (4.58) za območje integracije upoštevamo celotno dolžino težiščne osi (Slika 4.21) lahko na osnovi integralnih izrazov določimo notranje statične količine v poljubnem prerezu obravnavane konstrukcije.



Slika 4.21: Prerezana dela konstrukcije in delovna shema (pozitivni predznak) za določanje notranjih statičnih količin na osnovi integracije diferencialnih enačb notranjih statičnih količin

V kolikor v izrazu (4.56) upoštevamo območje integracije $x_0 = 0 - \Delta x$ je vrednost osne sile na spodnji meji integracijskega intervala $N_{(x_0)} = 0$, ker se točka $x_0 = 0 - \Delta x$ nahaja izven konstrukcije, ter ga lahko podamo v skrajšani obliki.

$$N_{(x)} = - \int_{x_0}^x n_{(x)} dx \quad (4.59)$$

Na osnovi izraza (4.59) zaključimo:

Oсна sila $N_{(x)}$ v obravnavanem prerezu x konstrukcije je enaka negativni vrednosti vsote projekcije vseh sil v smeri tangente na os nosilca, ki delujejo na levi ali desni del obravnavanega nosilca. V kolikor pa upoštevamo pozitivni predznak (delovna shema notranjih sil, Slika 4.21) lahko definicijo še poenostavimo:

Oсна sila $N_{(x)}$ v obravnavanem prerezu x konstrukcije je enaka vsoti projekcij vseh sil, ki delujejo na levi del nosilca v smeri pozitivnega predznaka $N_{(x)}$, oz. vsoti projekcij vseh sil, ki delujejo na desni del nosilca v smeri predznaka $N'_{(x)}$ (Slika 4.21).

Podobna praktična definicija velja tudi za prečno silo in upogibni moment. V kolikor za spodnjo mejo integracijskega območja upoštevamo $x_0 = 0 - \Delta x$ (spodnja meja

integracijskega območja se nahaja izven težiščne osi nosilca) izraz (4.57) podamo v enostavnejši obliki:

$$V_{(x)} = - \int_{x_0}^x q_{(x)} dx \quad (4.60)$$

(V prečni obtežbi $q_{(x)}$ je potrebno upoštevati tudi komponente koncentriranih sil v smeri binormale na os nosilca).

Prečna sila $V_{(x)}$ v obravnavanem prerezu x konstrukcije je enaka vsoti projekcij vseh sil, ki delujejo na levi del nosilca v smeri pozitivnega predznaka prečne sile $V_{(x)}$, oz. vsoti projekcij vseh sil, ki delujejo na desni del nosilca v smeri pozitivnega predznaka prečne sile $V'_{(x)}$ (Slika 4.21).

Podobno lahko z izbiro spodnje meje integracijskega intervala poenostavimo tudi izraz (4.58) za upogibne momente:

$$M_{(x)} = \int_{x_0}^x \left(- \int_{x_0}^x q_{(x)} dx \right) dx \quad (4.61)$$

Izraz (4.61) tudi določa, da je upogibni moment v poljubnem prerezu x nosilca enak površini diagrama prečnih sil na izbranem intervalu med koordinatama $x_0 = 0 - \Delta x$ ter x . (Pri določanju površine diagrama prečnih sil je potrebno tudi dosledno upoštevati vplive koncentriranih momentov, ki so enaki intenziteti koncentriranih momentov).

Zato lahko tudi ugotovimo, da zvezna porazdelitev prečne obtežbe $q_{(x)}$ vpliva na intenziteto upogibnih momentov le na območju porazdelitve, medtem, ko je njen vpliv v robnih točkah integracijskega območja odvisen le od skupne vsote prečne obtežbe in njenega prijemališča na območju porazdelitve.

Upogibni moment $M_{(x)}$ v obravnavanem prerezu x konstrukcije je enak vsoti momentov na glavno normalo prereza \vec{e}_N vseh sil, ki delujejo na levi del nosilca v smeri pozitivnega predznaka $M_{(x)}$, oz. vsoti momentov na glavno normalo \vec{e}'_N prereza vseh sil, ki delujejo na desni del nosilca v smeri pozitivnega predznaka momenta $M'_{(x)}$ (Slika 4.21).

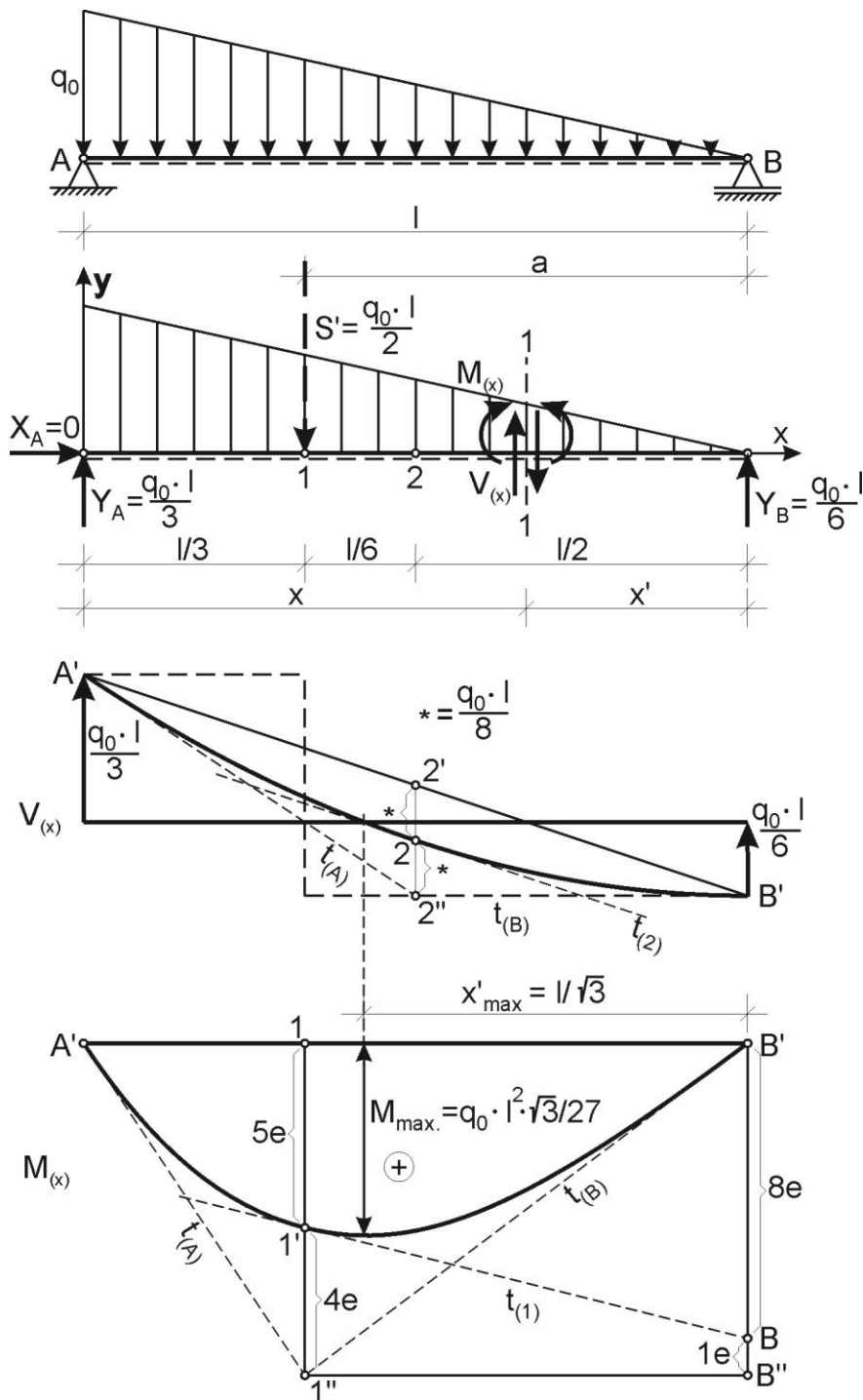
Primer 4.6:

Za prostoležeči nosilec z razpetino ℓ obremenjen z vertikalno trikotno zvezno razporejeno obtežbo (Slika 4.22) je potrebno določiti reakcije ter diagrame poteka notranjih statičnih količin. Posamezne zvezno porazdeljene obtežbe največkrat nadomestimo z ekvivalentno nadomestno obtežbo S' , ki deluje v težišču zvezno razporejene obtežbe. Intenziteto nadomestne sile določimo:

$$S' = \int_{x'=0}^{x'=\ell} (q_0 / \ell) x' dx' = (q_0 / \ell) \ell^2 / 2 = q_0 \ell / 2$$

Prijemališče sile S' je za razdaljo a oddaljeno od točke B (Slika 4.22). Razdaljo a določimo na osnovi pogoja enakih momentov dveh statično ekvivalentnih sistemov sil.

$$S' \cdot a = \int_{x'=0}^{x'=\ell} (q_0 / \ell) x' x' dx' = q_0 \ell^2 / 3 \quad a = 2\ell / 3$$



Slika 4.22: Dispozicija prostoležečega nosilca obteženega s trikotno zvezno obtežbo, uravnoteženo prosto telo ter pripadajoča diagrama notranjih sil

Ker porazdelitev obtežbe na dolžini l ne vpliva na vrednosti notranjih sil v točkah A in B (robni točki porazdeljene obtežbe) lahko reakcijske sile določimo z upoštevanjem nadomestne sile S' .

$$\sum M^A = Y_B \cdot l - S' l / 3 = 0$$

$$Y_B = S' / 3 = q_0 l / 6$$

$$\sum F_{iy} = Y_A - S' + Y_B = 0$$

$$Y_A = S' - Y_B = q_0 l / 3$$

$$\sum F_{ix} = X_A = 0$$

$$X_A = 0$$

Diagram poteka notranjih sil vzdolž težiščne osi določimo z upoštevanjem nadomestne obtežbe in pozitivnega predznaka (Slika 4.22).

$$V_{(x=0+\Delta x)} = V_{A_D} = Y_A = q_0 \ell / 3 \qquad V_{(x=\ell/3-\Delta x)} = V_{I_L} = Y_A = q_0 \ell / 3$$

$$V_{(x=\ell/3+\Delta x)} = V_{I_D} = Y_A - S' = -q_0 \ell / 6 = V_{(x=\ell-\Delta x)} = V_{B_D}$$

Potek prečnih sil $V_{(x)}$ prikažemo z diagramom (Slika 4.22), ki je na območju porazdeljene trikotne prečne obtežbe načrtan s tanko črtkano črto, ker prečne sile na območju porazdeljene obtežbe še niso dokončne (pravilne), ker je v izračunu upoštevana nadomestna obtežba s koncentrirano silo. Pravilni potek prečnih sil lahko določimo numerično z upoštevanjem pozitivnega simbola za desni del nosilca v prerezu 1-1:

$$V'_{(x')} = -Y_B + (q_0 / \ell) x' x' / 2$$

Ugotovimo, da prečna sila na območju trikotne zvezne obtežbe poteka po zakonu kvadratne parabole. V obeh robnih točkah A in B ima prečna sila že pravi vrednosti. Smerna koeficienta tangent na graf prečne sile v točkah A' in B' določimo na osnovi diferencialnih zvez:

$$\left. \frac{dV_{(x)}}{dx} \right|_{x=0+\Delta x} = -q_{(x)} \Big|_{x=0+\Delta x} = -q_0 \qquad \left. \frac{dV_{(x)}}{dx} \right|_{x=\ell-\Delta x} = -q_{(x)} \Big|_{x=\ell-\Delta x} = 0$$

Tangenti $t_{(0+\Delta x)} = t_{(0)} = t_{(A_D)} = t_{(A)}$ in $t_{(\ell-\Delta x)} = t_{(\ell)} = t_{(B_L)} = t_{(B)}$ načrtamo v diagramu prečnih sil ter ugotovimo, da se obe tangenti sekata v točki 2'', ki se nahaja na polovici območja trikotne zvezne obtežbe. Hkrati načrtamo še zveznico točk $\overline{A'B'}$ za katero lahko dokažemo, da ima enaki smerni koeficient kot tangenta na graf prečnih sil v točki 2, ki se nahaja pri $x = \ell / 2$.

$$\left. \frac{dV_{(x)}}{dx} \right|_{x=\ell/2} = -q_0 / 2$$

Tangenti $t_{(0)}$, $t_{(\ell)}$ in zveznica točk $\overline{A'B'}$ predstavljajo karakteristični trikotnik diagrama prečnih sil pod trikotno zvezno obtežbo v katerem potekajo prečne sile po zakonu kvadratne parabole. Ker poznamo vrednosti prečnih sil v točkah A in B ter tudi obe tangenti v teh točkah lahko kvadratno parabolo povsem določimo. Določimo si še vrednost prečne sile v točki 2:

$$V'_{(x'=\ell/2)} = -Y_B + (q_0 / \ell) \ell^2 / 8 = -q_0 \ell / 6 + q_0 \ell / 8 = -q_0 \ell / 24$$

Točka 2 v diagramu prečnih sil, ki določa velikost prečne sile v tem prerezu se nahaja na simetrali zveznice točk $\overline{2'2''}$ oz. na simetrali težiščnice karakterističnega trikotnika. Vzporednica premici $\overline{A'B'}$ v diagramu prečnih sil določa tangento na graf prečne sile v točki 2 (z vrednostmi prečnih sil v treh točkah ter s tremi tangentami lahko že načrtamo dovolj natančen graf prečnih sil).

Tudi graf upogibnih momentov najprej načrtamo za primer prostega telesa (Slika 4.22) obteženega z nadomestno koncentrirano silo. Z upoštevanjem pozitivnega predznaka ugotovimo:

$$M_{(x=0)} = M_{(A)} = 0 \qquad M'_{(x'=0)} = M_{(B)} = 0 \qquad M'_{(x'=2\ell/3)} = M_{(1)} = Y_B 2\ell / 3 = q_0 \ell^2 / 9 (p)$$

Oznaka (p) pomeni, da tako izračunani upogibni moment pod razporejeno obtežbo ne predstavlja prave vrednosti upogibnega momenta temveč le pomožno vrednost pri

načrtovanju grafa upogibnih momentov vzdolž težiščne osi nosilca. Za nadomestno obtežbo nosilca s koncentrirano silo S' graf upogibnih momentov poteka po zakonu premice:

$$M'_{(x')} = Y_B x' = q_0 \ell x' / 6 \quad (0 \leq x' \leq 2\ell/3) \quad M'_{(x)} = Y_A x = q_0 \ell x / 3 \quad (0 \leq x \leq \ell/3)$$

Ker že poznamo vrednosti treh točkah (A, $1''$ in B) graf načrtamo ter ga predstavimo s karakterističnim trikotnikom (Slika 4.21). V točki 1 z upoštevanjem pozitivnega predznaka določimo pravo vrednost upogibnih momentov:

$$M'_{(x')} = Y_B x' - (q_0 / \ell) x' x' x' / 6 \quad M'_{(x'=2\ell/3)} = q_0 \ell^2 / 9 - q_0 4\ell^2 / 81 = 5q_0 \ell^2 / 81$$

V grafu določa pravo vrednost upogibnega momenta točka $1'$, ki jo dobimo tako, da razdaljo $11''$ razdelimo v razmerju 5/4 ter razdalja $11'$ predstavlja 5 ter $11''$ 4 enote. Prava vrednost upogibnega momenta predstavlja namreč 5/9 pomožne vrednosti.

4.7 Sistemi linijskih konstrukcij

Med sisteme linijskih konstrukcij prištevamo vse tipe konstrukcijskih rešitev sestavljenih iz več med sabo povezanih relativno togih elementov. To so praviloma zahtevnejše gradbene konstrukcije, ki so največkrat tudi zunanje in/ali notranje statično nedoločene. V okviru mehanike togih teles bomo obravnavali le kinematično stabilne ter zunanje in notranje statično določene konstrukcijske sisteme. Nekateri tipi standardnih konstrukcijskih sistemov imajo v stroki posebna imena.

4.7.1 Gerber-jeve konstrukcije

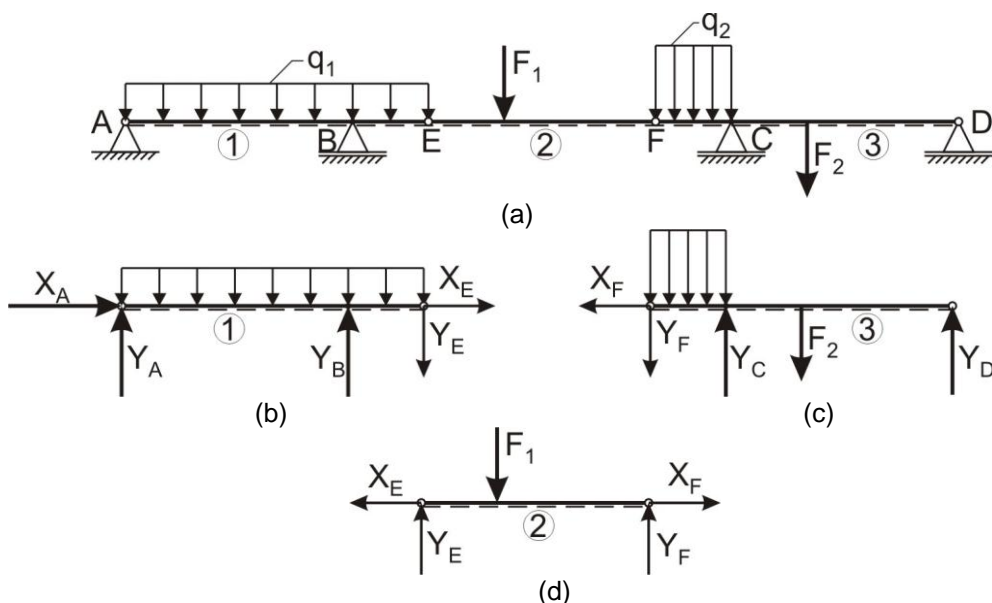
V praksi se v zgodovini inženirstva pogosto uporabljale pri gradnji premostitvenih objektov na področjih slabo nosilnih temeljnih tal, kjer geološko-geomehanski pogoji niso omogočali izgradnje togih – nepremičnih podpor. Z vidika statike so to statično določene in kinematično stabilne konstrukcije z ravno osjo sestavljene iz več ravnih ter med sabo členkasto povezanih grednih (upogibnih) konstrukcijskih elementov (Slika 4.23).

Prednosti statično določenih konstrukcij se odražajo predvsem v dejstvu, da manjši neenakomerni premiki podpor ne vplivajo na obremenitve oz. na notranje statične količine v nosilnih konstrukcijskih elementih. Hkrati pa vsaka členkasta zveza pomeni kritično točko konstrukcije z vidika povečanih stroškov vzdrževanja ter lahko posledično vpliva tudi na trajnost zgrajene konstrukcije (vpliv soli, korozija, zamakanje itd.).

Ker so Gerberjeve konstrukcije statično določene jih lahko vedno analiziramo z uporabo modela togega telesa. Pri takšnih konstrukcijah najprej določimo podporne in vezne sile.

Slika 4.23 prikazuje primer, za katerega najprej določimo stopnjo statične nedoločenosti. Upoštevamo število togih teles $k=3$, število podpor $n=4$, število podpornih sil $N_{Ap} = 2$, $N_{Bp} = 1$, $N_{Cp} = 1$ in $N_{Dp} = 1$ ter število vezi $m = 2$, število veznih sil $N_{Ev} = 2$ in $N_{Fv} = 2$.

$$N_s = 3k - \sum_{i=1}^4 N_{ip} - \sum_{j=1}^2 N_{jv} = 3 \cdot 3 - (2 + 1 + 1 + 1) - (2 + 2) = 0$$



Slika 4.23: Gerber-jev nosilec sestavljen iz treh členkasto povezanih elementov; (a) Gerber-jeva konstrukcija, (b) Primarni nosilec \overline{AE} , (c) Sekundarni nosilec \overline{FD} in (d) Sekundarni nosilec \overline{EF}

Vsak togo telo pri analizi obravnavamo ločeno, vplive podpor in vezi nadomestimo s podpornimi in veznimi silami. Tako konstrukcijo razstavimo na več previsnih in prostoležečih nosilcev (Slika 4.23) ter reakcijske in vezne sile določimo na osnovi treh ravnotežnih pogojev za toga telesa v ravnini. Posamezna toga telesa razdelimo na primarne in sekundarne nosilce. Primarni so tisti, ki so stabilno podprti s podporami ter bi lahko prevzemali obtežbe tudi v kolikor posamezni nosilci ne bi bili povezani med sabo (Slika 4.23 prikazuje primarni nosilec \overline{AE} ter za vertikalno obtežbo tudi nosilec \overline{FD}). Togi element \overline{EF} predstavlja sekundarni nosilec, ker mu stabilnost zagotavljata primarna nosilca. Z določanjem reakcij in veznih sil pričnemo vedno na sekundarnih nosilcih iz katerih se obtežbe prenašajo na primarne nosilce.

Pri takšnih konstrukcijskih sistemih se obtežbe ne morejo prenašati iz primarnih na sekundarne nosilce konstrukcijskega sistema.

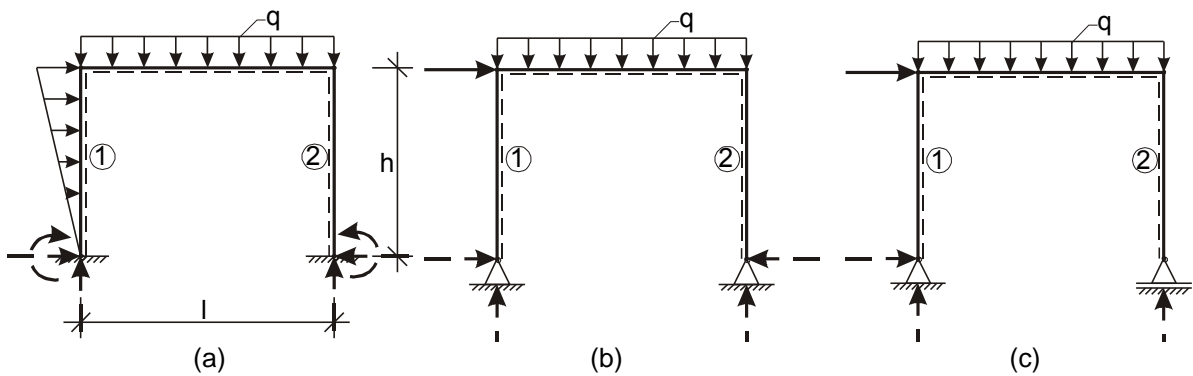
4.7.2 Okvirne konstrukcije

V to skupino konstrukcijskih sistemov uvrščamo vse vrste konstrukcij z lomljeno, vendar po krajših odsekih (odsekovno) ravno osjo. Takšne konstrukcije so lahko bodisi ravninske ali prostorske ter statično določene ali nedoločene. Slika 4.24 prikazuje tri osnovne tipe enoetažne okvirne konstrukcije.

Za vse tri prikazane okvirne konstrukcije je značilno eno togo telo podprto z različnimi podporami. Nedvomno so vse tri konstrukcije kinematično stabilne, ker imajo preprečene vse tri neodvisne načine gibanje. Pri obojestransko vpeti okvirni konstrukciji (Slika 4.24a) imamo v podporah preprečenih šest premikov, ki povzročajo aktiviranje šestih podpornih sil. Stopnjo statične nedoločenosti določimo:

$$N_s = 3k - \sum_{i=1}^n N_{ip} = 3 \cdot 1 - (3 + 3) = -3$$

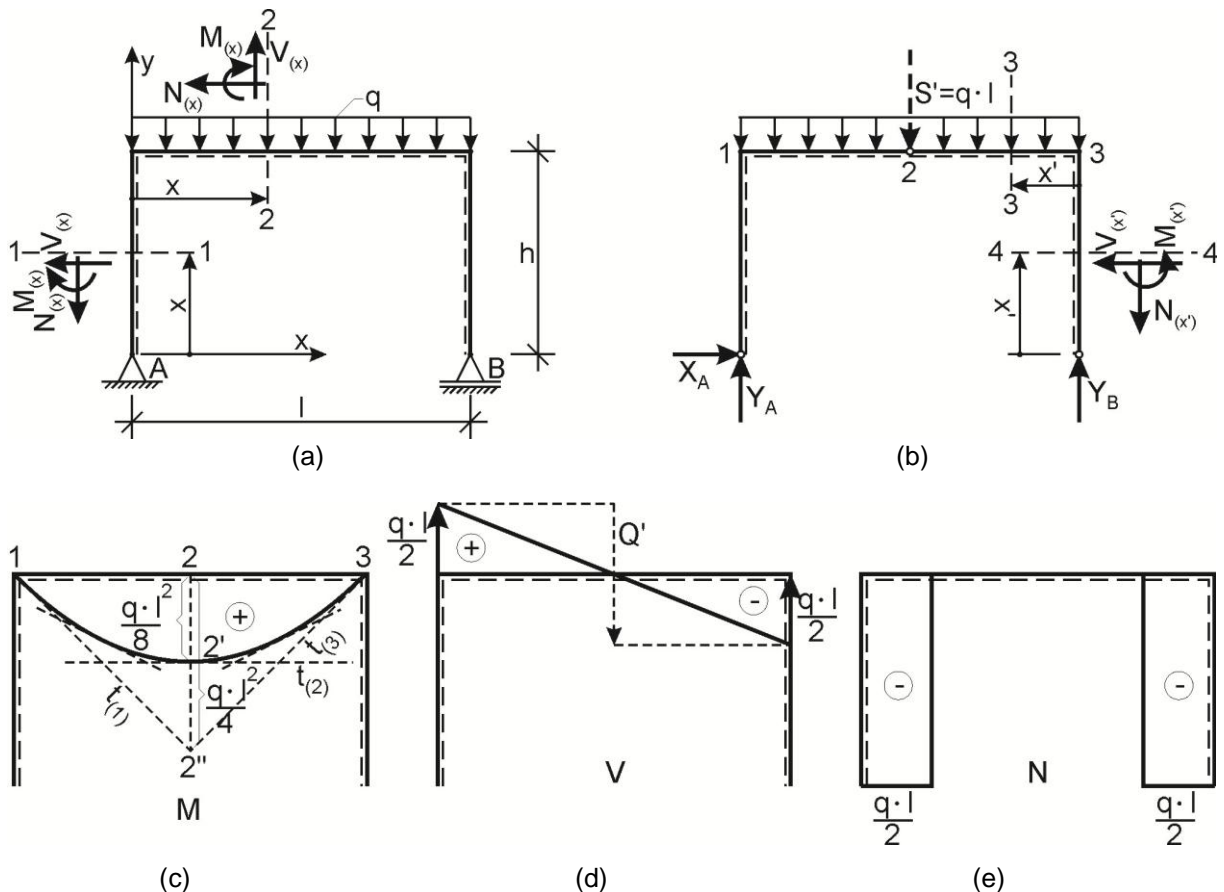
Okvirna konstrukcija je 3 krat statično nedoločena ter zato na osnovi ravnotežnih pogojev ni mogoče določiti vrednosti podpornih sil. Pri statično nedoločenih konstrukcijah uporaba modela togega telesa ni dopustna.



Slika 4.24: Enoetažne ravninske okvirne konstrukcije; (a) Obojestransko vpeta, (b) Obojestransko nepremično podprta in (c) Prostoležeča enoetažna okvirna konstrukcija

Pri obojestransko nepremično podprti okvirni konstrukciji (Slika 4.24b) se lahko aktivirajo štiri reakcijske sile in zato je ta konstrukcija $N_s = 3 \cdot 1 - (2 + 2) = -1$ enkrat statično nedoločena.

Pri prostoležečem okvirju (Slika 4.24c) se lahko aktivirajo le tri podporne sile in zato je prikazana konstrukcija statično določena. V nadaljevanju bomo obravnavali enoetažni prostoležeči okvir razpetine ℓ in višine h , ki je obtežen le z enakomerno zvezno obtežbo q vzdolž celotne dolžine konstrukcije (Slika 4.25).



Slika 4.25: Enoetažni ravninski prostoležeči okvir obtežen z enakomerno zvezno obtežbo; (a) Dispozicija podpor, obtežbe in konstrukcije s pozitivnimi predznaki notranjih statičnih količin, (b) Uravnoteženo prosto telo, (c) Diagram upogibnih momentov, (d) Prečne in (e) Osne sile na konstrukciji

Smeri notranjih statičnih količin v prerezih na konstrukciji prikazujejo delovanje sil, ki imajo pozitivni prispevek k obravnavani notranji statični količini.

Enakomerno zvezno obtežbo nadomestimo z ekvivalentno koncentrirano silo $S' = q\ell$, ki deluje v težišču enakomerne zvezne obtežbe t.j. na razdalji $\ell/2$ od podpore A v točki 2 na konstrukciji (Slika 4.25b). Najprej določimo reakcijske sile.

$$\sum M^A = Y_B \cdot \ell - S' \ell / 2 = 0 \qquad Y_B = S' / 2 = q\ell / 2$$

$$\sum F_{iy} = Y_A - S' + Y_B = 0 \qquad Y_A = S' - Y_B = q\ell / 2$$

$$\sum F_{ix} = X_A = 0 \qquad X_A = 0$$

Diagram poteka notranjih sil vzdolž težiščne osi (odsekovno ravne) okvirne konstrukcije določimo z upoštevanjem nadomestne obtežbe. Notranje statične količine na levem stebru $\overline{A1}$ določimo na osnovi sheme in pozitivnega predznaka za prerez 1-1 (Slika 4.25a), ($0 < x < h$):

$$N_{(x)} = -Y_A = -q\ell / 2 = N_A = N_{1S} = \text{konst.}$$

$$V_{(x)} = -X_A = 0 = V_A = V_{1S} = \text{konst.}$$

$$M_{(x)} = -X_A \cdot x = 0 = M_A = M_{1S} - q_0 = \text{konst.}$$

Potek notranjih sil na gredi $\overline{13}$ določimo po direktni metodi za prereza 2-2 in 3-3.

Prerez 2-2, ($0 < x < \ell/2$):

$$N_{(x)} = -X_A = 0 = N_{1D} = N_{2L} = 0 = \text{konst.}$$

$$V_{(x)} = Y_A = V_{1D} = q\ell / 2 \qquad V_{2L} = q\ell / 2 \text{ (p)}$$

$$M_{(x)} = Y_A \cdot x \qquad M_1 = 0 \qquad M_2 = q\ell^2 / 4 \text{ (p)}$$

Prerez 3-3, ($0 < x' < \ell/2$):

$$N_{(x')} = 0 = N_{2D} = N_{3L} = 0 = \text{konst.}$$

$$V_{(x')} = -Y_B = V_{3L} = -q\ell / 2 \qquad V_{2D} = -q\ell / 2 \text{ (p)}$$

$$M_{(x')} = Y_B \cdot x' \qquad M_3 = 0 \qquad M_2 = q\ell^2 / 4 \text{ (p)}$$

Notranje statične količine na desnem stebru $\overline{3B}$ določimo z upoštevanjem pozitivnega predznaka v prerezu 4-4 za desni oz. spodnji del stebra (Slika 4.25b), ($0 < x' < h$):

$$N_{(x')} = -Y_B = -q\ell / 2 = N_B = N_{3S} = \text{konst.}$$

$$V_{(x')} = 0 = V_B = V_{3S} = \text{konst.}$$

$$M_{(x')} = 0 = M_B = M_{3S} = \text{konst.}$$

Diagram upogibnih momentov je od 0 različen le na vzdolžnem nosilcu. Najprej načrtamo potek upogibnih momentov za primer obtežitve konstrukcije z ekvivalentno koncentrirano silo $S' = q\ell$. Upogibni momenti za primer obtežbe s koncentriranimi silami (nadomestna obtežba) potekajo linearno v obliki trikotnega diagrama 1-2"-3. Vrednost upogibnega momenta v točki M_2 je označena s simbolom (p), ker še ni dokončna, saj se dejansko nahaja v območju enakomerne zvezne obtežbe.

Dejanski upogibni moment v prerezu 2-2 določimo z izrazom:

$$M_{(x)} = Y_A x - qx^2 / 2 = q\ell x / 2 - qx^2 / 2 \quad M_{(x=\ell/2)} = M_2 = q\ell^2 / 8$$

Dokazali smo, da upogibni momenti pod enakomerno zvezno obtežbo potekajo po zakonu kvadratne funkcije. Dejanski upogibni moment pri enakomerni zvezni obtežbi pod nadomestno ekvivalentno obtežbo pa je v tem primeru enak $\frac{1}{2}$ vrednosti momenta pod nadomestno silo. Razdalja 2-2', ki določa pravo vrednost upogibnega momenta je enaka $\frac{1}{2}$ razdalje 2-2''.

Nagib tangente na graf upogibnih momentov pod nadomestno silo določa prava vrednost prečne sile v točki 2, ki jo določimo:

$$V_{(x)} \Big|_{x=\ell/2} = (dM_{(x)} / dx) \Big|_{x=\ell/2} = (Y_A - qx) \Big|_{x=\ell/2} = 0$$

Tangenta na graf upogibnih momentov $t_{(2)}$ v točki 2 je horizontalna (premica s konstantno ordinato, Slika 4.25c), diagram prečnih sil pod enakomerno zvezno obtežbo poteka linearno (po enačbi premice).

Premici $t_{(1)}$ in $t_{(3)}$, ki določata potek upogibnih momentov v primeru nadomestne obtežbe potekata skozi robni točki enakomerne zvezne obtežbe ter zato hkrati določata tangenti na dejanski graf funkcije upogibnih momentov v točkah 1 in 3 (Slika 4.25c).

Ker je tangenta upogibnih momentov v točki 2 horizontalna (odvod momentov je enak 0), ima upogibni moment v točki 2 ekstrem (maksimum oz. v tem primeru največjo vrednost), ki znaša:

$$M_{(x=\ell/2)} = M_{\text{Max.}} = q\ell^2 / 8$$

Graf prečnih sil na nosilcu 1-2-3, ki je obtežen z nadomestno koncentrirano silo poteka po stopničasti funkciji. Vrednosti prečnih sil v točkah 1L in 3D, ki se nahajata na robovih enakomerne zvezne obtežbe sta že dokončni (pravi vrednosti). Prečni sili v točka 2L in 2D pa nista pravi vrednosti (označeni sta s simbolom (p)), ker se nahajata v območju zvezno razporejene obtežbe. Ker je graf prečnih sil premica določimo potek dejanskih prečnih sil tako, da v grafu prečnih sil (Slika 4.25d) med pravimi vrednostmi prečnih sil v točkah 1D in 3L načrtamo linearno funkcijo.

Osne sile se pojavijo le na stebrih, kjer potekajo po premici s konstantno ordinato, ker na stebra v našem primeru ne deluje zvezno razporejena obtežba v smeri osi posameznega stebra (lastna teža stebra v našem primeru ni upoštevana, Slika 4.25e).

Na osnovi rezultatov statične analize notranjih sil v nosilcih z ravno osjo in diferencialnih zvez med notranjimi statičnimi količinami (izrazi 4.56, 4.57 in 4.58) lahko v naprej določimo matematične zakonitosti, ki jim morajo ustrezati grafi funkcijskih sovisnosti, ki določajo notranje statične količine:

Osne sile; $N_{(x)} = N_{(x_0)} - \int_{x_0}^x n_{(x)} dx$

Obtežba v smeri osi nosilca $n_{(x)}$

Potek osnih sil $N_{(x)}$

0

Premica s konstantno ordinato (c)

Premica s konst. ordinato (c)

Linearna funkcija (premica v nagibu)

Premica (linearni potek)

Kvadratna funkcija (parabola)

Kvadratna funkcija

Kubična parabola

Prečne sile in upogibni momenti;

$$V_{(x)} = V_{(x_0)} - \int_{x_0}^x q_{(x)} dx$$

$$M_{(x)} = M_{(x_0)} + \int_{x_0}^x (V_{(x_0)} - \int_{x_0}^x q_{(x)} dx) dx$$

Prečna obtežba $q_{(x)}$	Potek prečnih sil $V_{(x)}$	Upogibni momenti $M_{(x)}$
0	Premica s konst. ordinato (c)	Premica
Premica s konst. ordinato (c)	Linearna funkcija (premica)	Kvadratna parabola
Premica (linearni potek)	Kvadratna funkcija (parabola)	Kubična parabola
Kvadratna funkcija	Kubična parabola	Polinom 4. stopnje

4.7.3 Branaste konstrukcije

V to skupino praviloma uvrščamo tiste gradbene konstrukcije pri katerih se težiščna os vseh upogibnih konstrukcijskih elementov nahaja v skupni ravnini (npr. v ravnini $x-y$) ter so obtežene s sistemom koncentriranih in zvezno razporejenih obtežb, ki delujejo pravokotno na ravnino konstrukcije. Koncentrirani momenti (dvojice sil) se pri branastih konstrukcijah nahajajo v ravnini konstrukcije.

V praksi se takšni konstrukcijski sistemi pogosto pojavljajo pri temeljenju skeletnih in zidanih zgradb ter pri etažnih nosilnih konstrukcijah (v ravninah etažnih površin oz. v ravninah temeljenja objektov).

Kljub ravninskemu značaju takšnih konstrukcijskih sistemov jih največkrat obravnavamo prostorsko, čeprav se v posameznih konstrukcijskih elementih v primerih obtežitve z obtežbami pravokotno na ravnino konstrukcije pojavijo le tri notranje sile in sicer prečna sila pravokotno na ravnino konstrukcije ter torzijski in upogibni momenti na posameznih elementih, ki se nahajata v ravnini konstrukcije.

Primer 4.7:

Obravnavamo branasto konstrukcijo dolžine ℓ in širine $\ell/2$, ki je podprta v točkah A, B in C (Slika 4.26) ter je obtežena z enakomerno zvezno obtežbo intenzitete q v smeri pravokotno na ravnino konstrukcije. Potrebno je preveriti statično določenost, kinematično stabilnost, določiti podporne sile ter določiti potek notranjih statičnih količin na vseh nosilnih elementih branaste konstrukcije.

V podpori A sta preprečena premika konstrukcije v smeri y in z osi, v podpori B so preprečeni premiki v smereh vseh treh koordinatnih osi ter v podpori C le premik v smeri z osi. Za neodvisne premike branaste konstrukcije privzamemo vseh šest premikov tega telesa v točki A (v izhodišču koordinatnega sistema): u_{xA} , u_{yA} , u_{zA} ter zasuke φ_{Ax} , φ_{Ay} in φ_{Az} .

Kinematični pogoji:

$$u_{yA} = u_{xA} = 0$$

$$u_{xB} = u_{yB} = u_{zB} = 0$$

$$u_{zC} = 0$$

Kinematične enačbe:

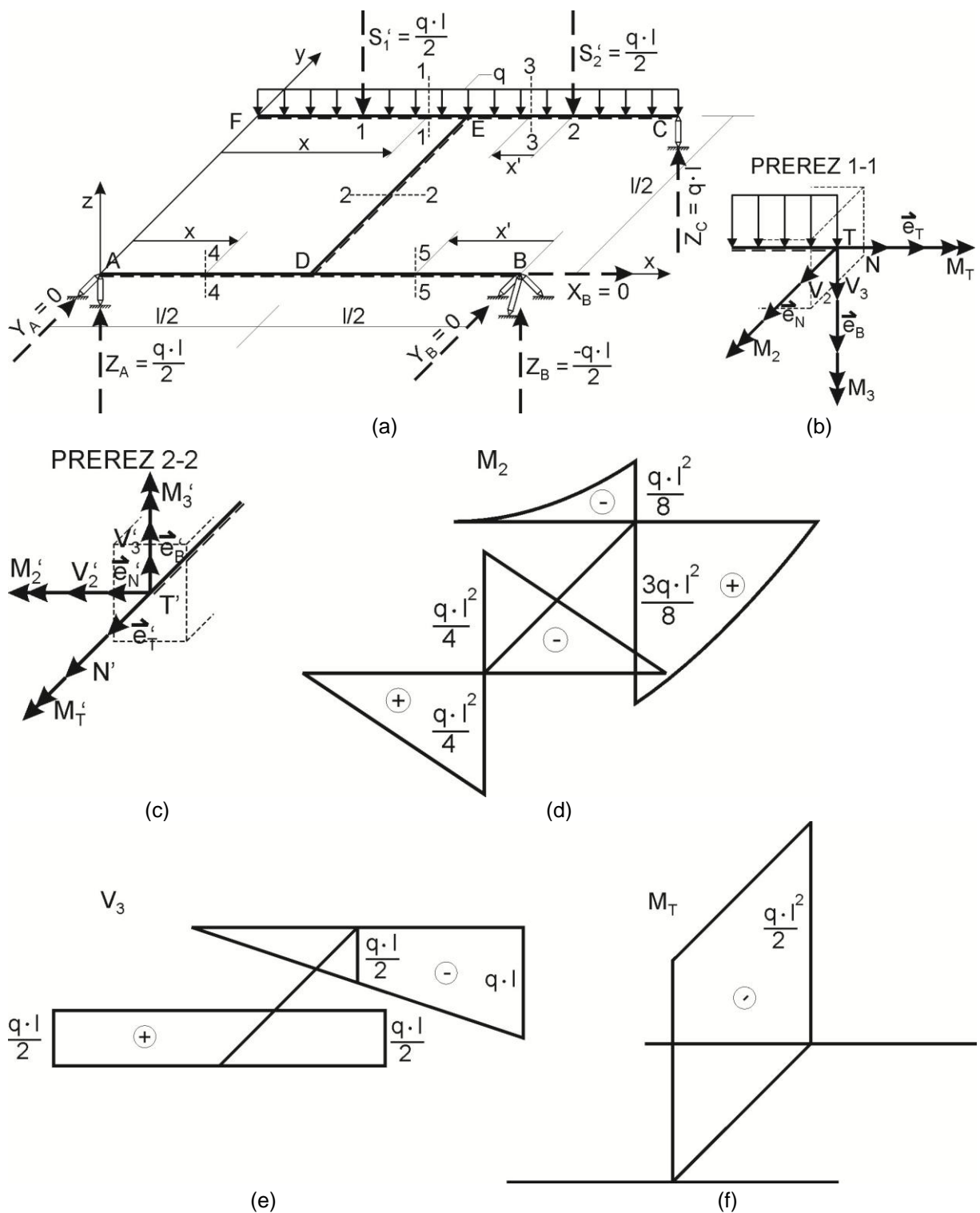
$$u_{zB} = u_{zA} - x_B \varphi_{Ay} + y_B \varphi_{Ax} = 0 - \ell \cdot \varphi_{Ay} + 0 \cdot \varphi_{Ax} = 0 \quad \varphi_{Ay} = 0$$

$$u_{xB} = u_{xA} - y_B \varphi_{Az} + z_B \varphi_{Ay} = u_{xA} - 0 \cdot \varphi_{Az} + 0 \cdot \varphi_{Ay} = 0 \quad u_{xA} = 0$$

$$u_{yB} = u_{yA} + x_B \varphi_{Az} - z_B \varphi_{Ax} = 0 + \ell \cdot \varphi_{Az} - 0 \cdot \varphi_{Ax} = 0 \quad \varphi_{Az} = 0$$

$$u_{zC} = u_{zA} - x_C \varphi_{Ay} + y_C \varphi_{Ax} = 0 - \ell \cdot 0 + (\ell/2) \cdot \varphi_{Ax} = 0 \quad \varphi_{Ax} = 0$$

Ker je vseh šest izbranih neodvisnih načinov gibanja tege branaste konstrukcije identično enakih 0, je konstrukcija zagotovo kinematično stabilna.



Slika 4.26: Branasta konstrukcija v ravnini x-y; (a) Dispozicija konstrukcijskih elementov, podpore, obtežba in podpirne sile, (b) Prerez 1-1 na vzdolžnem nosilcu z notnimi vektorji in prereznimi silami za levi del konstrukcije, (c) Prerez 2-2 na vertikalnem nosilcu za desni (zgornji) del konstrukcije, (d) Diagram poteka upogibnih in (e) Torzijskih momentov ter (f) Diagram poteka prečnih sil

Pri oceni stopnje statične nedoločeniosti upoštevamo (št. togih teles $k=1$, število podpor $n=3$ ter število podpornih sil: $N_{ip} = 3$ za podporo A, $N_{ip} = 2$ za B in $N_{3p} = 1$ za podporo C.

$$N_s = 6k - \sum_{i=1}^n N_{ip} = 6 \cdot 1 - (3 + 2 + 1) = 0$$

Ker je branasta konstrukcija statično določena lahko podporne sile določimo na osnovi šestih ravnotežnih pogojev za prostorske sisteme sil.

Zvezno obtežbo na nosilcu F-C nadomestimo z dvema koncentriranimi silama, ki delujeta na odsekih F-E in E-C v težiščih enakomerne zvezne obtežbe $S'_1 = S'_2 = q\ell/2$ (Slika 4.7).

Pri določanju podpornih sil lahko postopek bistveno skrajšamo s smiselno izbiro ravnotežnih pogojev. Najprej uporabimo ravnotežni pogoj za vrtilni moment na os x ter nato še na os y.

$$\sum M_x^A = Z_C \cdot \ell/2 - (S'_1 + S'_2) \cdot \ell/2 = 0 \quad Z_C = q\ell$$

$$\sum M_y^A = (Z_C + Z_B) \cdot \ell - S'_1 \cdot \ell/4 - S'_2 \cdot 3\ell/4 = 0 \quad Z_B = -Z_C + S'_1/4 + 3 \cdot S'_2/4 = -q\ell/2$$

$$\sum F_{iz} = Z_C + Z_B + Z_A - S'_1 - S'_2 = 0 \quad Z_A = q\ell/2$$

Vse reakcijske sile na branasti konstrukciji v ravnini x-y so identično enake 0, ker nanjo deluje le obtežba v smeri pravokotno na ravnino konstrukcije.

Obravnavana branasta konstrukcija je le enkrat povezana, ker s prerezom poljubnega konstrukcijskega elementa razpade v dva povsem ločena dela. Zato je konstrukcija tudi notranje statično določena. Pri vseh treh ravnih upogibnih konstrukcijskih elementih tangenta na os posameznih nosilcev poteka v smeri težiščne osi ravnega nosilca. Zato za glavno normalo izberemo pravokotni enotni vektor na os nosilca v ravnini x-y. Kot pozitivno stran izberemo spodnjo stran vseh treh nosilcev (črtkana črta), kjer pozitivni upogibni moment v smeri glavne normale povzroča natezne napetosti.

Notranje statične količine določimo na osnovi ravnotežja notranjih in zunanjih sil na posameznih odsekih za nadomestni obtežitvi s koncentriranimi silami (notranje statične količine pri 3D konstrukcijskih sistemih določamo vedno po metodi prereza z uravnoteženjem levega oz. desnega dela celotne konstrukcije, direktna metoda z upoštevanjem pozitivnih predznakov notranjih statičnih količin je pri 3D konstrukcijah običajno nepregledna in zato tudi nezanesljiva).

Odsek F-1:

$$\begin{array}{lll} V_3 = 0 & V_{3FD} = 0 & V_{3IL} = 0 \text{ (p)} \\ M_2 = 0 & M_{2FD} = 0 & M_{2IL} = 0 \text{ (p)} \\ M_T = M_3 = N = V_2 = 0 \end{array}$$

Odsek 1-E:

$$\begin{array}{lll} V_3 + S'_1 = 0 & V_{31D} = -S'_1 = -q \cdot \ell/2 \text{ (p)} & V_{3EL} = -q \cdot \ell/2 \\ M_2 + S'_1 \cdot x = 0 & M_{21D} = 0 \text{ (p)} & M_{2EL} = -S'_1 \cdot \ell/4 = -q \cdot \ell^2/8 \\ M_T = M_3 = N = V_2 = 0 \end{array}$$

Odsek E-2:

$$\begin{array}{lll} V_3 - S'_2 + Z_C = 0 & V_{3ED} = -q \cdot \ell/2 & V_{32L} = -q \cdot \ell/2 \text{ (p)} \\ M_2 + S'_2 \cdot x' - Z_C(x'+\ell/2) = 0 & M_{2ED} = 3q\ell^2/8 & M_{22L} = q \cdot \ell^2/4 \text{ (p)} \\ M_T = M_3 = N = V_2 = 0 \end{array}$$

Odsek 2-C:

$$\begin{array}{lll} V_3 + Z_C = 0 & V_{32D} = -q \cdot \ell \text{ (p)} & V_{3CL} = -q \cdot \ell \\ M_2 - Z_C \cdot x' = 0 & M_{22D} = q\ell^2/4 \text{ (p)} & M_{2C} = 0 \\ M_T = M_3 = N = V_2 = 0 \end{array}$$

Odsek E-D:

$$M_T + Z_C \cdot \ell/2 = 0 \quad M_{TES} = -q\ell^2/2 \quad M_{TDZ} = -q\ell^2/2$$

$$M_2 = M_3 = N = V_2 = V_3 = 0$$

Odsek A-D:

$$V_3 - Z_A = 0 \quad V_{3AD} = q \cdot \ell/2 \quad V_{3DL} = q \cdot \ell/2$$

$$M_2 - Z_A \cdot x = 0 \quad M_{2AD} = 0 \quad M_{2DL} = q\ell^2/4$$

$$M_T = M_3 = N = V_2 = 0$$

Odsek D-B:

$$V_3 + Z_B = 0 \quad V_{3DD} = q \cdot \ell/2 \quad V_{3CL} = q \cdot \ell/2$$

$$M_2 - Z_B \cdot x' = 0 \quad M_{2DD} = -q\ell^2/4 \quad M_{2CL} = 0$$

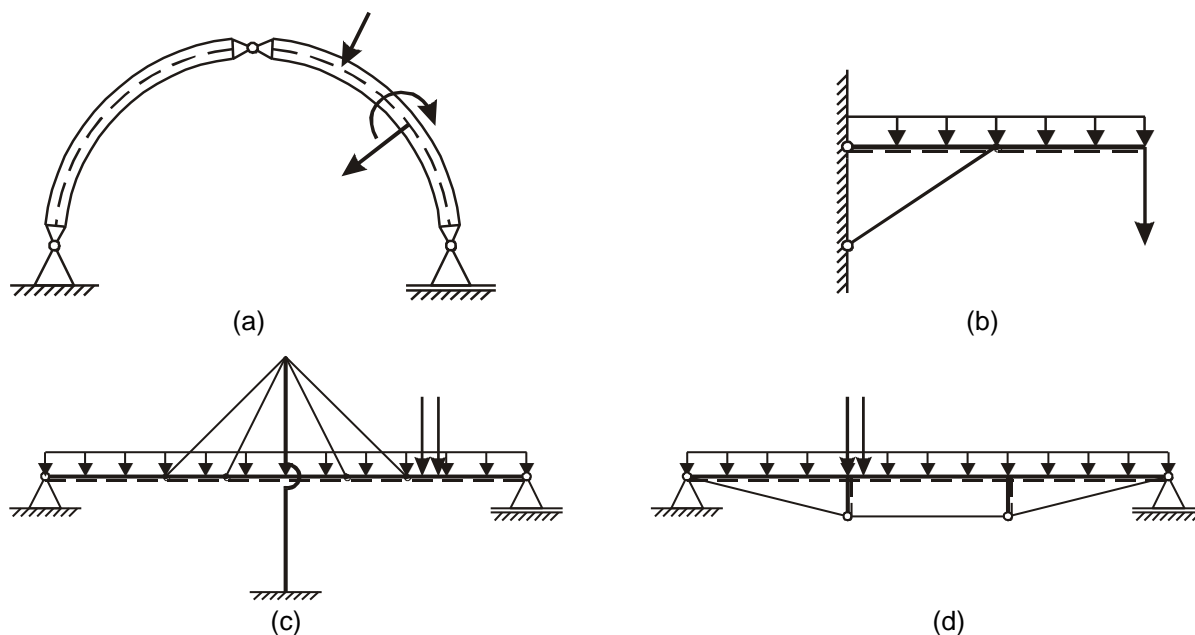
$$M_T = M_3 = N = V_2 = 0$$

Za upoštevanje nadomestno obtežbo na območjih F-E in E-C poteka graf prečnih sil v obliki stopničaste funkcije, ki jo na območjih pod enakomerno zvezno obtežbo korigiramo, ker mora potekati po premici (linearni funkciji). Podobno korigiramo tudi grafično predstavitev upogibnih momentov, ki potekajo po kvadratni funkciji (paraboli). Na preostalih območjih branaste konstrukcije brez zvezno razporejene vertikalne obtežbe so izračunane vrednosti notranjih statičnih količin za ekvivalentno nadomestno obtežbo s koncentriranimi silami že dokončne vrednosti.

Diagrami notranjih statičnih količin prikazuje Slika 4.26: (d), (e) in (f).

4.7.4 Sestavljene konstrukcije

Med sestavljene konstrukcije prištevamo vse vrste gradbenih konstrukcij sestavljenih iz več ravnih ali ukrivljenih ter medsebojno povezanih konstrukcijskih elementov. V to skupino prištevamo tudi paličja v katerih se pojavljajo ob osnih še prečne sile in upogibni momenti ter kompleksnejše konstrukcije sestavljene iz upogibnih, paličnih, vravnih in tudi stenskih ter lupinastih elementov. Slika 4.27 prikazuje nekatere najenostavnejše primere sestavljenih konstrukcij.



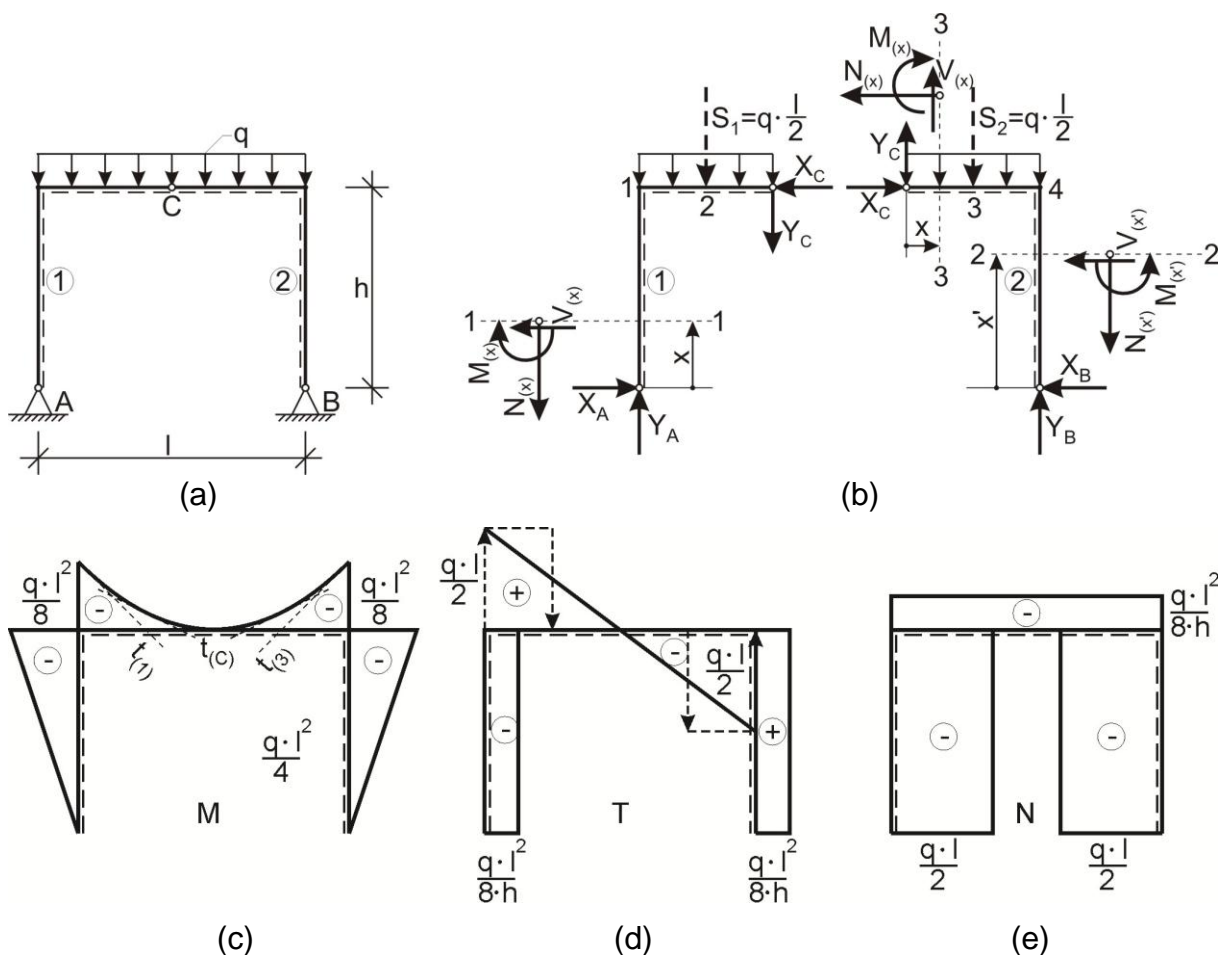
Slika 4.27: Sestavljeni konstrukcijski sistemi; (a) Tročlenski lok, (b) Upogibni nosilec podprt s tlačno palico, (c) Mostni nosilec ojačen z nateznimi kabli zgoraj (harfa) ter (d) Upogibni nosilec ojačen z nateznimi kabli spodaj (zatega)

Kompleksnejše sestavljene konstrukcije so največkrat zunanje in/ali notranje statično nedoločene ter jih zato le z modelom togih teles ni mogoče analizirati. Najprej bomo obravnavali tročlenski okvir obtežen z enakomerno zvezno obtežbo (Slika 4.28).

Tročlenski okvir je nepremično in vrtljivo podprt s podporama A in B, obe togi telesi A-C in B-C sta v točki C členkasto povezani. Za obravnavani primer smo že v predhodnih poglavjih dokazali statično določenost in kinematično stabilnost.

S smiselno uporabo kombinacije ravnotežnih pogojev za celotni sistem teles in za posamezna toga telesa najprej določimo reakcije in vezne sile.

$$\begin{aligned} \sum M^{A(1+2)} &= Y_B \ell - q \cdot \ell \cdot \ell / 2 = 0 & Y_B &= q \cdot \ell / 2 \\ \sum F_{iy}^{(1+2)} &= Y_A + Y_B - q\ell = 0 & Y_A &= q \cdot \ell / 2 \\ \sum M^{C(2)} &= X_B h + q \cdot \ell^2 / 8 - q\ell^2 / 4 = 0 & X_B &= q \cdot \ell^2 / (8h) \\ \sum F_{ix}^{(1+2)} &= -X_B + X_A = 0 & X_A &= X_B = q \cdot \ell^2 / (8h) \\ \sum F_{ix}^{(1)} &= X_A - X_C = 0 & X_C &= X_A = q \cdot \ell^2 / (8h) \\ \sum F_{iy}^{(1)} &= Y_A - Y_C - q \cdot \ell / 2 = 0 & Y_C &= 0 \end{aligned}$$



Slika 4.28: Tročlenski okvir; (a) Dispozicija konstrukcije s podporami in obtežbo, (b) Uravnoteženi togi telesi z reakcijskimi in veznimi silami, (c) Diagram upogibnih momentov, (d) Prečne in (e) Osne sile na konstrukciji

Pozitivno stran za vse nosilce privzamemo v notranjosti tročlenskega okvirja. Notranje statične količine najprej določimo z upoštevanjem nadomestnih sil na območju enakomerne zvezne obtežbe $S_1 = S_2 = q \cdot \ell / 2$ (Slika 4.28b).

Element A-1 (upoštevamo pozitivni predznak v prerezu 1-1):

$$V_{(x)} = -X_A = -q \cdot \ell^2 / (8h) = V_{AZ} = V_{IS} = \text{konst.}$$

$$M_{(x)} = -X_A x = -q \cdot \ell^2 x / (8h) \quad M_A = 0 \quad M_{IS} = -q \cdot \ell^2 / 8$$

$$N_{(x)} = -Y_A = -q \cdot \ell / 2 = N_{AZ} = N_{IS} = \text{konst.}$$

Odsek 1-2 (upoštevamo pozitivni predznak v prerezu 3-3 na gredi):

$$V_{(x)} = Y_A = q \cdot \ell / 2 = \text{konst.} \quad V_{1D} = -q\ell / 2 \quad V_{2L} = -q\ell / 2 \text{ (p)}$$

$$M_{(x)} = Y_A x - X_A h = q \cdot \ell x / 2 - q \cdot \ell^2 / 8 \quad M_{1D} = -q \cdot \ell^2 / 8 \quad M_{2L} = 0 \text{ (p)}$$

$$N_{(x)} = -X_A = -q \cdot \ell^2 / (8h) = N_{1D} = N_{2L} = \text{konst.}$$

Odsek 2-C:

$$V_{(x')} = Y_C = 0 = \text{konst.} \quad V_{2D} = 0 \text{ (p)} \quad V_{CL} = 0$$

$$M_{(x')} = -Y_C x' = 0 = \text{konst.} \quad M_{2D} = 0 \text{ (p)} \quad M_{CL} = 0$$

$$N_{(x')} = -X_C = -q \cdot \ell^2 / (8h) = N_{2D} = N_{CL} = \text{konst.}$$

Odsek C-3:

$$V_{(x)} = Y_C = 0 = \text{konst.} \quad V_{CD} = 0 \quad V_{3L} = 0 \text{ (p)}$$

$$M_{(x)} = Y_C x = 0 = \text{konst.} \quad M_{CD} = 0 \quad M_{3L} = 0 \text{ (p)}$$

$$N_{(x)} = -X_C = -q \cdot \ell^2 / (8h) = N_{CD} = N_{3L} = \text{konst.}$$

Odsek 3-4:

$$V_{(x)} = -S_2 = -q \cdot \ell / 2 = \text{konst.} \quad V_{3D} = -q \cdot \ell / 2 \text{ (p)} \quad V_{4L} = -q \cdot \ell / 2$$

$$M_{(x)} = Y_C x - S_2 (x - \ell / 4) \quad M_{3D} = 0 \text{ (p)} \quad M_{4L} = -q \ell^2 / 8$$

$$N_{(x)} = -X_C = -q \cdot \ell^2 / (8h) = N_{3D} = N_{4L} = \text{konst.}$$

Odsek 4-B (upoštevamo pozitivni predznak v prerezu 2-2 za spodnji del stebra):

$$V_{(x')} = X_B = q \cdot \ell^2 / (8h) = \text{konst.} = V_{4S} = V_{BZ}$$

$$M_{(x')} = -X_B \cdot x' = -q \cdot \ell^2 \cdot x' / (8h) \quad M_{4S} = -q \cdot \ell^2 / 8 \quad M_B = 0$$

$$N_{(x')} = -Y_B = -q \cdot \ell / 2 = N_{4S} = N_B = \text{konst.}$$

Najprej načrtamo diagrame notranjih statičnih količin na okvirni konstrukciji z upoštevanjem obtežitve konstrukcije s sistemom nadomestnih koncentriranih sil (Slika 4.28c, d in e).

Ker dejanske prečne sile na nosilcu 1-4 pod enakomerno zvezno obtežbo potekajo po zakonu premice prikažemo diagram prečnih sil tako, da povežemo vrednosti prečnih

sil v točki 1D in 4L s premico, ki že predstavlja potek prečnih sil na tem območju (Slika 4.28b).

Diagram upogibnih momentov pod enakomerno zvezno obtežbo na gredi 1-4 poteka po zakonu kvadratne parabole. Potek momentov z upoštevanjem nadomestne obtežbe na odsekih 1-2 in 3-4 nam že določa tangenti $t_{(1)}$ in $t_{(C)}$ na graf funkcije upogibnih momentov v točkah 1 in 4 (Slika 4.28c). Prečna sila v točki C je enaka 0, kar pomeni, da je tangenta $t_{(C)}$ na graf upogibnih momentov v točki C horizontalna. Dodatni tangenti na graf funkcije upogibnih momentov dobimo tako, da na odsekih 1–C oz. C–4 razpolovimo dolžini tangent $t_{(1)}$ in $t_{(C)}$ oz. $t_{(C)}$ in $t_{(4)}$. S povezavo tako dobljenih točk na tangentah $t_{(1)}$ in $t_{(C)}$ oz. $t_{(C)}$ in $t_{(4)}$ načrtamo dodatni tangenti (Slika 4.28c), vseh pet tangent na graf funkcije upogibnih momentov na odseku 1-4 že tako dovolj natančno določa graf funkcije.

Primer 4.8:

Obravnavamo standardni Gerber-jev nosilec preko treh polj skupne dolžine 28 m (Slika 4.29). Podpora A je nepremična vrtljiva, podpore B, C in D so prav tako vrtljive ter horizontalno premične s preprečenimi premiki v vertikalni smeri. Konstrukcijo predstavljajo tri toga telesa, ki so v točkah E in F med sabo členkasto povezana.

Gerberjeve konstrukcije so po svoji definiciji statično določeni in kinematično stabilni sistemi členkasto povezanih nosilcev z ravno osjo, ki so v statičnem smislu neobčutljivi na relativne posedke posameznih podpor. Pri statični analizi sistem povezanih nosilcev obravnavamo ločeno z modelom treh togih teles, ki jih povezujejo vezne sile v členkastih zvezah E in F (Slika 4.29).

Z določanjem reakcij in veznih sil pričnemo na sekundarnem nosilcu F-D (Slika 4.29).

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= -X_F = 0 & X_F &= 0 \\ \sum M^D &= F \cdot 6 - Y_F \cdot 8 = 0 & Y_F &= 40 \cdot 6 / 8 = 30 \text{ kN} \\ \sum F_{iy} &= Y_F + Y_D - F = 0 & Y_D &= 40 - 30 = 10 \text{ kN}\end{aligned}$$

Postopek nadaljujemo na sekundarnem nosilcu E-F (Slika 4.29e).

$$\begin{aligned}\sum M^C &= Y_E \cdot 4 + Y_F \cdot 4 - S' \cdot 2 = 0 & Y_E &= (80 \cdot 2 - 30 \cdot 4) / 4 = 10 \text{ kN} \\ \sum F_{ix} &= X_F - X_E = 0 & X_E &= X_F = 0 \\ \sum F_{iy} &= Y_E + Y_C - S' - Y_F = 0 & Y_C &= 80 + 30 - 10 = 100 \text{ kN}\end{aligned}$$

Z upoštevanjem veznih sil X_E in Y_E določimo še reakcije v podporah A in B z upoštevanjem ravnotežnih pogojev za primarni nosilec A-E.

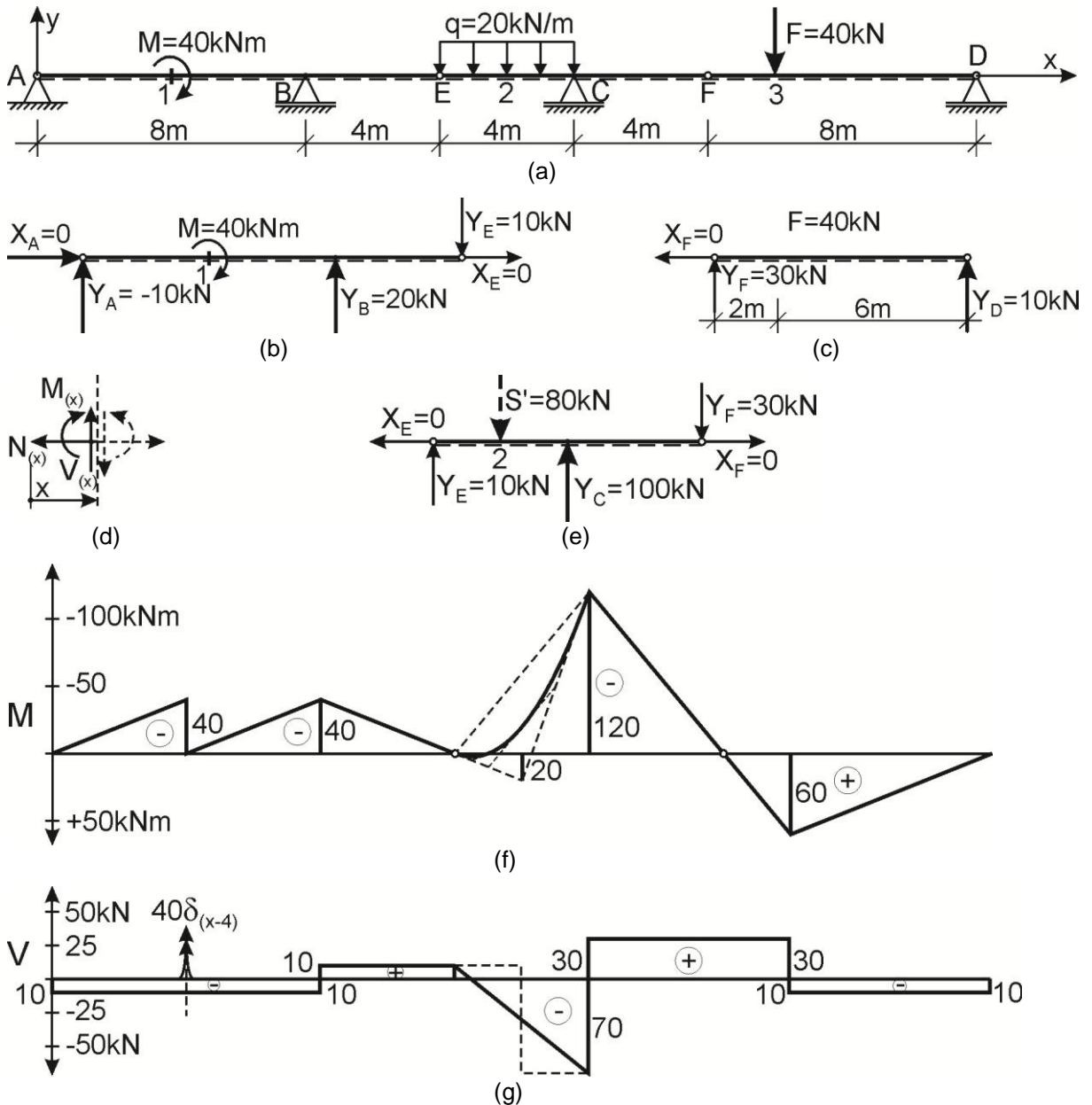
$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= X_A - X_E = 0 & X_A &= -X_E = 0 \\ \sum M^A &= M + Y_E \cdot 12 - Y_B \cdot 8 = 0 & Y_B &= (40 + 12 \cdot 10) / 8 = 20 \text{ kN} \\ \sum F_{iy} &= Y_A + Y_B - Y_E = 0 & Y_A &= -20 + 10 = -10 \text{ kN}\end{aligned}$$

Najprej določimo upogibne momente na nosilcu z upoštevanjem nadomestne koncentrirane sile S' in pozitivnega predznaka za levi in desni del posameznih nosilcev.

$$\begin{aligned}M_A &= 0 & M_{1L} &= Y_A \cdot 4 = -40 \text{ kNm} & M_{1D} &= Y_A \cdot 4 + M = 0 \\ M_B &= -Y_E \cdot 4 = -40 \text{ kNm} & M_E &= 0 & M_2 &= Y_E \cdot 2 = 20 \text{ kNm (p)}\end{aligned}$$

$$M_C = -Y_F \cdot 4 = -120\text{kNm} \quad M_F = 0 \quad M_3 = Y_F \cdot 2 = 60\text{kNm} \quad M_D = 0$$

Ker smo že dokazali, da diagram poteka upogibnih momentov pri ravninskih nosilcih obteženih s koncentriranimi silami določa linearna funkcija (premica) ga na osnovi zgornjih podatkov zlahka načrtamo (na območju pod zvezno obtežbo ga načrtamo s tanko črtkano črto, ker izračunane vrednosti veljajo za nadomestno obtežbo s koncentrirano silo). Na območju enakomerne zvezne obtežbe načrtamo karakteristični trikotnik (določa kvadratno parabolo), ki ga določajo tangenti v točkah EL, CD ter zveznica (premica), ki jo načrtamo skozi točki na diagramu upogibnih momentov v začetni in končni točki enakomerno razporejene zvezne obtežbe.



Slika 4.29: Gerber-jev nosilec; (a) Sistem treh togih nosilcev, (b) Primarni nosilec \overline{AE} , (c) Sekundarni nosilec \overline{FD} , (d) Pozitivni predznak za določanje notranjih statičnih količin, (e) Sekundarni nosilec \overline{EF} , (f) Diagram upogibnih momentov in (g) Diagram prečnih sil

Potek prečnih sil določimo z upoštevanjem pozitivnega predznaka (Slika 4.29d).

$$V_{AD} = Y_A = -10\text{kN} \quad V_{1L} = V_{AD} = -10\text{kN} \quad V_{1D} = -Y_A = -10\text{kN}$$

V kolikor obravnavamo koncentrirani moment ($M = a \cdot F$, $a \rightarrow 0 \wedge F \rightarrow \infty$) kot dvojico sil ($\vec{F}, -\vec{F}$), ki delujeta v smeri prečne obtežbe, je diagram prečnih sil znotraj intervala ($4 - \Delta x < x < 4 + \Delta x$, $\Delta x \rightarrow 0$) neregularen, vrednost prečnih sil v točki $x = 4\text{m}$ ni določena, zato pravimo tudi da je singularna oz. ima vrednost $V_1 = V_{(x=4\text{m})} = +\infty$.

Površina diagram prečnih sil ($\int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} V_{(x)} dx = M$) mora biti enaka vrednosti

koncentriranega momenta, ki v obravnavani točki deluje na nosilec. Zato lahko potek diagrama prečnih sil prikažemo kot produkt intenzitete koncentriranega momenta M in Diracove delta funkcije $\delta(x - x_0)$, ki jo je utemeljil angleški fizik Paul Dirac, 1902-1984 ter ima naslednji funkcijski zapis:

$$\delta_{(x-x_0)} = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ \infty, & x = x_0 \end{cases} \quad \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \delta_{(x-x_0)} dx = 1 \quad (4.62)$$

Vrednost prečne sile v prijemališču koncentriranega momenta znaša $V_1 = M\delta_{(x-4\text{m})} = 40\delta_{(x-4)}$. Grafično si produkt funkcije delta in navora lahko predstavljamo s pravokotnikom širine nič, višino ∞ in enotno ploščino ter jo predstavljamo z navpično daljico z dvojno puščico (v diagramu prečnih sil ponazarja navor) zgoraj oz. spodaj (odvisno od vrednosti oz. predznaka navora).

$$\begin{array}{lll} V_{BL} = Y_A = -10\text{kN} & V_{BD} = V_{BL} + Y_B = 10\text{kN} & V_{EL} = 10\text{kN} \\ V_{ED} = Y_E = 10\text{kN} & V_{2L} = Y_E = 10\text{kN(p)} & V_{2D} = Y_E - S' = -70\text{kN(p)} \\ V_{CL} = Y_E - S' = -70\text{kN} & V_{CD} = Y_F = 30\text{kN} & V_{FL} = Y_F = 30\text{kN} \\ V_{FD} = Y_F = 30\text{kN} & V_{CD} = Y_F = 30\text{kN} & V_{3D} = V_{DL} = Y_D = -10\text{kN} \end{array}$$

Diagram prečnih sil na območjih koncentriranih sil poteka po premici s konstantno ordinato ter na območju enakomerne zvezne obtežbe po premici, ki povezuje vrednosti prečnih sil v robnih točkah enakomerne zvezne obtežbe.

Primer 4.10:

Za tročlenski okvir sestavljen iz ukrivljenega ločnega segmenta in štirih odsekovno ravnih upogibnih nosilcev je potrebno določiti reakcije, vezni sili in diagrame notranjih statičnih količin. Ločni del nosilca (Slika 4.30) je obtežen s koncentrirano silo $F = 50\text{kN}$ v smeri simetrale loka, na horizontalni zgornji del konstrukcije deluje enakomerna zveza obtežba $q_1 = 10\text{kN/m}$ ter na levo vertikalno gredo obtežba $q_2 = 5\text{kN/m}$.

Za statično analizo obravnavane konstrukcije bomo uporabili mehanski model dveh togih teles (A-10-C in C-13-B), ki sta v točki C konstrukcije med sabo členkasto povezani. Najprej zvezno razporejene obtežbe nadomestimo z ekvivalentnimi koncentriranimi silami. Reakciji v podpori B določimo z upoštevanjem dveh momentnih pogojev, ki sta izbrana tako, da dobljeni enačbi zahtevata reševanje le dveh enačb z dvema neznankama.

$$\sum M_A^{A-C-B} = 8 \cdot Y_B - X_B \cdot 1 - S_1 \cdot 4 - S_2 \cdot 6.5 - S_3 \cdot 9 - S_4 \cdot 1 + F_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot 3 = 0$$

$$\sum M_C^{C-B} = 3 \cdot Y_B - X_B \cdot 4 - S_2 \cdot 1.5 - S_3 \cdot 4 + S_4 \cdot 2 = 0$$

Z ureditvijo dobimo sistem dveh enačb z dvema neznankama:

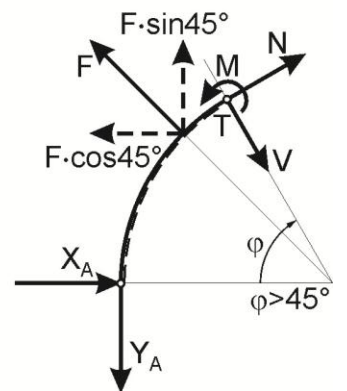
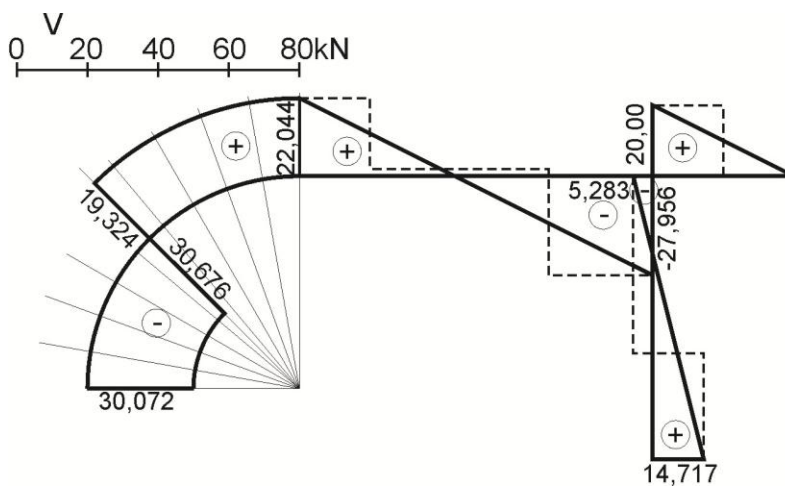
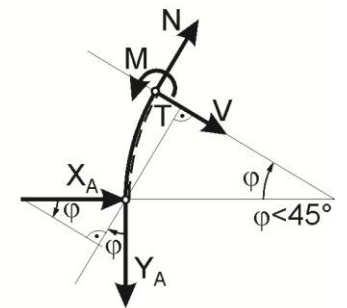
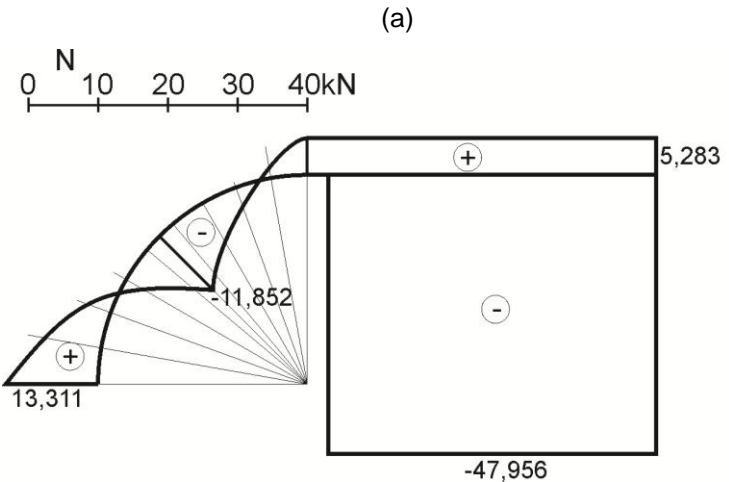
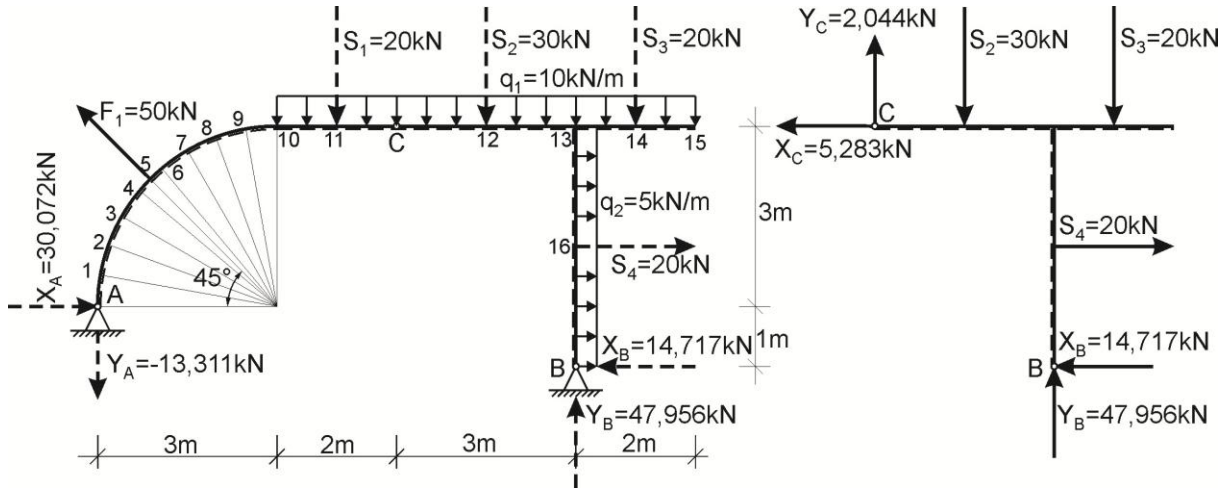
$$8Y_B - X_B = 368.934$$

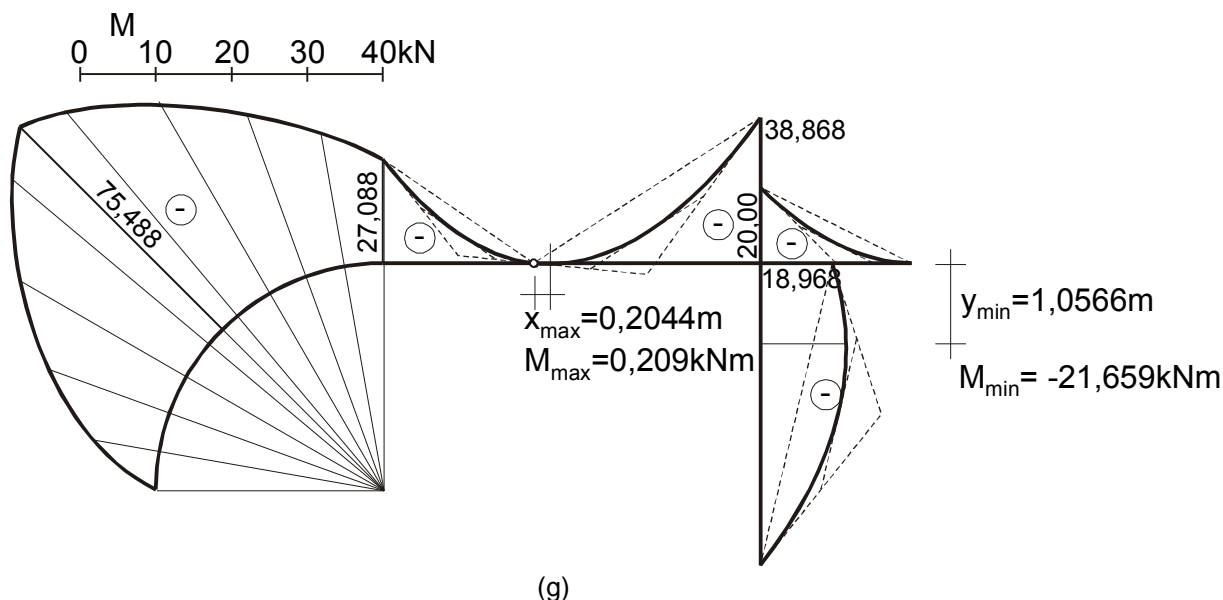
$$3Y_B - 4X_B = 85$$

$$Y_B = 47.956 \text{ kN}, X_B = 14.717 \text{ kN}$$

Z upoštevanjem silnih ravnotežnih pogojev za obe togi telesi hkrati določimo reakcije v podpori A ter nato s pogoji ravnotežja levega ali desnega togega telesa še vezni sili.

$$Y_A = 13.311 \text{ kN}, X_A = 30.072 \text{ kN}, X_C = 5.283 \text{ kN}, Y_C = 2.044 \text{ kN}$$





(g)
Slika 4.30: Tročlenski okvir; (a) Obtežbe in reakcijske sile; (b) Levi del okvirja z veznima silama; (c) Diagram osnih sil; (d) Prerez polkrožnega loka z notranjimi silami ($\varphi < 45^\circ$); (e) Prečne sile na konstrukciji; (f) Prerez polkrožnega loka z notranjimi silami ($\varphi > 45^\circ$) in (g) Diagram upogibnih momentov

Notranje statične količine na krožnem loku določimo po metodi prereza notranje statično določenih konstrukcij s pogoji ravnotežja za levi oz. desni del konstrukcije. Z upoštevanjem prereza (Slika 4.30d), ki velja za območje $\varphi < 45^\circ$ dobimo:

$$\begin{aligned}\sum M^T &= M + X_A R \sin \varphi + Y_A R(1 - \cos \varphi) = 0 & M &= -X_A R \sin \varphi - Y_A R(1 - \cos \varphi) \\ \sum F_{ie_T} &= N - Y_A \cos \varphi + X_A \sin \varphi = 0 & N &= Y_A \cos \varphi - X_A \sin \varphi \\ \sum F_{ie_B} &= V + X_A \cos \varphi + Y_A \sin \varphi = 0 & V &= -X_A \cos \varphi - Y_A \sin \varphi\end{aligned}$$

Vrednost notranjih statičnih količin izračunamo v nekaj točkah na polkrožnem loku (v našem primeru za vsakih 10° notranjega kota na krožnem loku (Slika 4.30c, e in g).

$\varphi(^{\circ})$	M(kNm)	N(kN)	V(kN)
0	0	13.311	-30.072
10	-16.273	7.887	-31.927
20	-33.264	2.223	-32.811
30	-50.458	-3.508	-32.698
40	-67.332	-9.133	-31.593
45 - $\Delta\varphi$	-75.488	-11.852	-30.676

Z upoštevanjem prereza (Slika 4.30f), ki velja za območje $\varphi > 45^\circ$ dobimo:

$$\begin{aligned}\sum M^T &= M + X_A R \sin \varphi + Y_A R(1 - \cos \varphi) - FR \cos 45^\circ(\sin \varphi - \sin 45^\circ) - \\ &FR \sin 45^\circ(\cos 45^\circ - \cos \varphi) = 0 \\ M &= -X_A R \sin \varphi - Y_A R(1 - \cos \varphi) + FR \cos 45^\circ(\sin \varphi - \sin 45^\circ) + FR \sin 45^\circ(\cos 45^\circ - \cos \varphi) \\ \sum F_{ie_T} &= N - Y_A \cos \varphi + F \sin 45^\circ \cos \varphi + X_A \sin \varphi - F \cos 45^\circ \sin \varphi = 0 \\ N &= (Y_A - F \sin 45^\circ) \cos \varphi - (X_A - F \cos 45^\circ) \sin \varphi \\ \sum F_{ie_B} &= V + X_A \cos \varphi - F \cos 45^\circ \cos \varphi + Y_A \sin \varphi - F \sin 45^\circ \sin \varphi = 0 \\ V &= -(X_A - F \cos 45^\circ) \cos \varphi - (Y_A - F \sin 45^\circ) \sin \varphi\end{aligned}$$

Preostale vrednosti notranjih statičnih količin na krožnem loku so naslednje;

$\varphi(^{\circ})$	M(kNm)	N(kN)	V(kN)
45 + $\Delta\varphi$	-75.488	-11.852	19.324
50	-70,301	-10.123	20.283
60	-59.273	-6.447	21.736
70	-47.658	-2.575	22.794
80	-35.808	1.375	22.627
90	-24.088	5.283	22.044

Notranje statične količine na nosilcih z ravno osjo določimo po direktni metodi z upoštevanjem pozitivnega predznaka za levi oz. desni del konstrukcije.

$$M_{11} = -1.5 \cdot Y_C = -2.044 \text{ kNm (p)} \quad M_C = 0 \quad M_{12} = 3.066 \text{ kNm (p)}$$

$$M_{13L} = -38.868 \text{ kNm (p)} \quad M_{13D} = -20.000 \text{ kNm} \quad M_{14} = 0 \text{ (p)}$$

$$M_{15} = 0 \quad M_{13S} = -18.868 \text{ kNm} \quad M_{16} = -29.434 \text{ (p)}$$

$$M_B = 0$$

$$V_{10} = S_1 + Y_C = 22.044 \text{ kN} \quad V_{11L} = 22.044 \text{ kN (p)} \quad V_{11D} = 2.044 \text{ kN (p)}$$

$$V_{CL} = V_{CD} = 2.044 \text{ kN} \quad V_{12L} = 2.044 \text{ kN (p)} \quad V_{13L} = -27.956 \text{ kN}$$

$$V_{13D} = 20.000 \text{ kN} \quad V_{14L} = 20.000 \text{ kN (p)} \quad V_{14D} = 0 \text{ (p)}$$

$$V_{13S} = -5.283 \text{ kN} \quad V_{16Z} = -5.283 \text{ kN (p)} \quad V_{16S} = 14.717 \text{ kN (p)}$$

$$V_B = 14.717 \text{ kN}$$

$$N_{10} = X_C = 5.283 \text{ kN} = N_{11} = N_C = N_{12} = N_{13L} \quad N_{13D} = N_{14} = N_{15} = 0$$

$$N_{13S} = N_{16} = N_B = -47.956 \text{ kN}$$

Diagrame notranjih statičnih količin na ločnem delu konstrukcije načrtamo ob predpostavki linearnega poteka le teh med posameznimi točkami v katerih smo vrednosti numerično izvrednotili.

Na preostalih odsekih nosilcev z odsekovno ravnimi težiščnimi osmi najprej načrtamo diagrame notranjih statičnih količin z upoštevanjem obtežb konstrukcije z enakovrednimi koncentriranimi obtežbami, ki ponazarjajo resultantne vrednosti obtežb z enakomerno zvezno razporejeno obtežbo na posameznih odsekih konstrukcije.

Na posameznih odsekih enakomernih zveznih obtežb nato opravimo korekcije diagramov poteka upogibnih momentov in prečnih sil saj vemo, da pod enakomerno zvezno obtežbo diagram upogibnih momentov poteka po zakonitostih kvadratne ter diagram prečnih sil po zakonitostih linearne funkcije.

Na območjih C-12 in 13-B nastopita ekstremni vrednosti upogibnih momentov. Položaj ekstrema določa pogoj $dM_{(x)} / dx = V_{(x)} = 0$.

$$\text{Odsek C - 13: } V_{(x)} = Y_C - q_1 x = 0 \quad x_{\text{Max.}} = Y_C / q_1 = 2.044 / 10 = 0.2044 \text{ m}$$

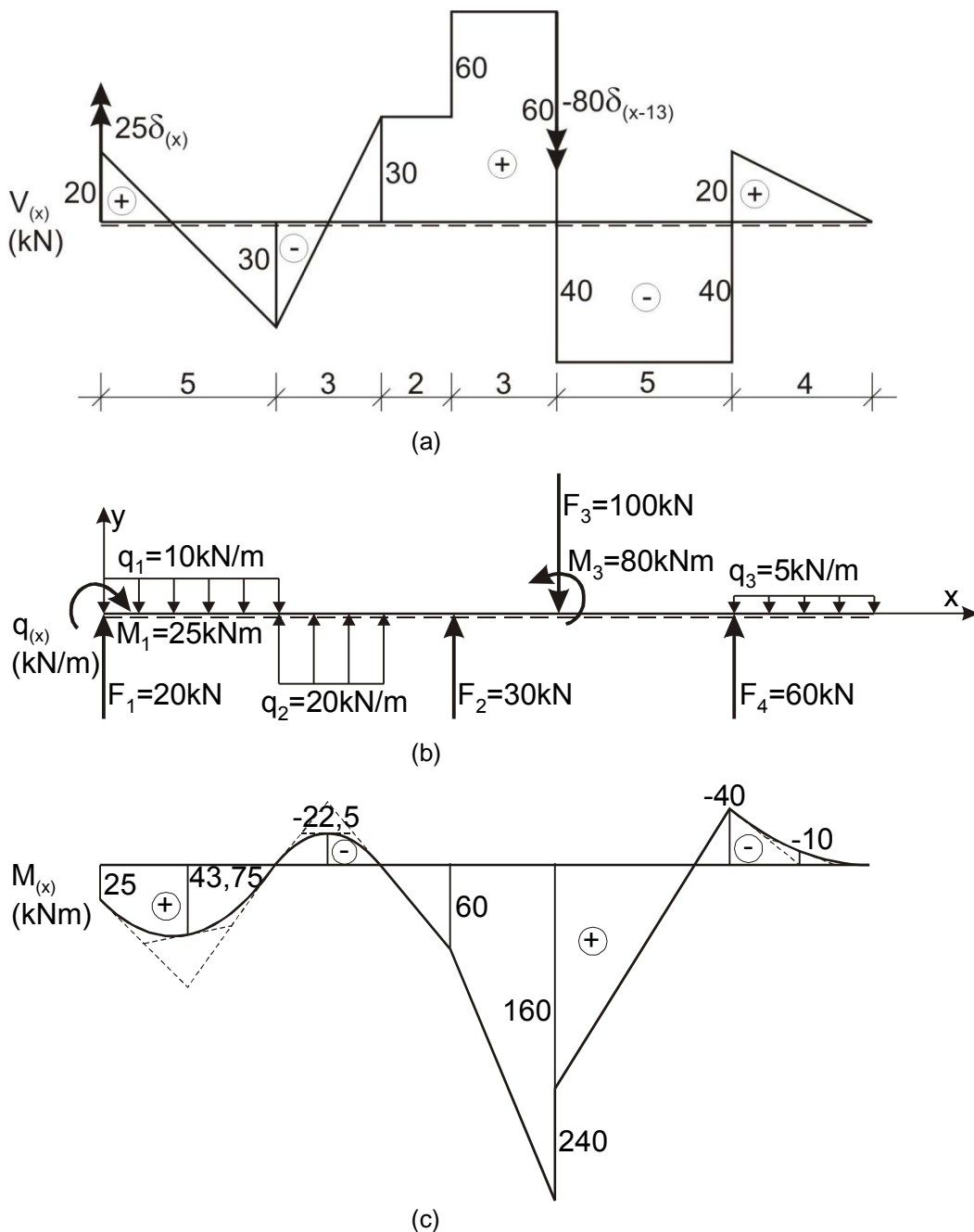
$$M_{\text{Max.}} = 2.044 \cdot 0.2044 - 10 \cdot 0.2044^2 / 2 = 0.209 \text{ kNm}$$

$$\text{Odsek 13-B: } V_{(x')} = X_B - q_2 x' = 0 \quad x'_{\text{Min.}} = X_B / q_2 = 14.717 / 5 = 2.943 \text{ m}$$

$$M_{\text{Min.}} = -14.717 \cdot 2.943 + 5 \cdot 2.943^2 / 2 = -21.659 \text{ kNm}$$

Primer 4.11:

Za ravninsko konstrukcijo z ravno osjo poznamo diagram poteka prečnih sil (Slika 4.31a). Na osnovi diferencialnih zvez med notranjimi statičnimi količinami in prečno obtežbo je potrebno določiti diagram poteka upogibnih momentov in celotno prečno obtežbo na nosilcu.



Slika 4.31: Diagrami poteka prečnih sil, upogibnih momentov in prečne obtežbe

Za poznani potek prečnih sil na nosilcu z ravno težiščno osjo določimo potek upogibnih momentov z integracijo diferencialne enačbe $dM_{(x)} = V_{(x)} dx$, ki jo uporabimo v obliki:

$$M_{(x)} = M_{(x_0)} + \int_{x_0}^x V_{(x)} dx$$

Integracijo opravimo po odsekih (korakih) z upoštevanjem začetnih pogojev:

$$x_{(0)} = 0 - \Delta x \quad M_{(0+\Delta x)} = 0 + \int_{0-\Delta x}^{0+\Delta x} 25\delta_{(x)} dx = 25 \text{ kNm}$$

$$\begin{aligned}
x_{(0)} &= 0 + \Delta x & M_{(0+\Delta x \leq x < 5)} &= 25 + \int_{0+\Delta x}^x (20 - (50/5)x) dx = 25 + 20x - 5x^2 \\
M_{(2,5)} &= 43.75 \text{ kNm} & M_{(5)} &= 0 \\
x_{(0)} &= 5 & M_{(5 \leq x < 8)} &= 0 + \int_5^x (-130 + 20) dx = -130x + 10x^2 + 400 \\
M_{(6,5)} &= -22.5 \text{ kNm} & M_{(8)} &= 0 \\
x_{(0)} &= 8 & M_{(8 \leq x < 10)} &= 0 + \int_8^x 30 dx = 30x - 240 & M_{(10)} &= 60 \text{ kNm} \\
x_{(0)} &= 10 & M_{(10 \leq x < 13)} &= 60 + \int_{10}^x 60 dx = 60x - 540 & M_{(13-\Delta x)} &= 240 \text{ kNm} \\
x_{(0)} &= 13 - \Delta x & M_{(x=13+\Delta x)} &= 240 - 80 \int_{13-\Delta x}^{13+\Delta x} \delta_{(x-13)} dx = 160 \\
x_{(0)} &= 13 + \Delta x & M_{(13+\Delta x \leq 18)} &= 160 + \int_{13+\Delta x}^x -40 dx = 680 - 40x & M_{(18)} &= -40 \text{ kNm} \\
x_{(0)} &= 18 & M_{(13+\Delta x \leq 18)} &= -40 + \int_{18}^x (110 - 5x) dx = -1210 + 110x - 2.5x^2 \\
M_{(20)} &= -10 \text{ kNm} & M_{(22)} &= 0
\end{aligned}$$

Na osnovi izračunanih vrednosti upogibnih momentov v karakterističnih točkah ravnega nosilca načrtamo diagram poteka po tangentni metodi. Nagib tangent na graf poteka upogibnih momentov določajo vrednosti prečne sile v izbranih točkah, ki so v naprej poznane (Slika 4.31).

Prečno obtežbo določimo na osnovi že znanih zakonitosti oz. diferencialnih zvez med obtežbo in notranjimi statičnimi količinami. V koordinatnem izhodišču na konstrukcijo deluje dvojica sil (koncentrirani navor $M_1 = 25 \text{ kNm}$), ki ga označuje v diagramu prečnih sil delta funkcija z dvojno puščico. Na območju ($0 < x \leq 1$) potekajo prečne sile po zakonu premice, kar pomeni, da na konstrukcijo deluje enakomerna zvezna obtežba ($dV_{(x)}/dx = -10 = -q_1$) ter podobno na odseku ($5 < x < 8$), kjer intenziteto in smer prečne obtežbe določimo z izrazom ($dV_{(x)}/dx = 20 = -q_2$). Na intervalu ($8 < x < 10$) je prečna sila konstantna in zato na tem intervalu na konstrukcijo ne deluje prečna obtežba. V točki ($x = 10$) ima prečna sila preskok ter zato na konstrukcijo deluje koncentrirana sila intenzitete $F_2 = 30 \text{ kN}$.

Tudi na intervalu ($10 < x < 13$) so prečne sile konstantne ter zato na konstrukcijo ne deluje prečna obtežba. V točki ($x = 13$) imata diagrama prečnih sil in upogibnih momentov preskoka ter zato v točki ($x = 13$) na konstrukcijo delujeta v prečni smeri koncentrirana sila $F_3 = 100 \text{ kN}$ in koncentrirani moment $M_3 = 80 \text{ kN}$ (Slika 4.31).

Na intervalu ($13 < x < 18$) na konstrukcijo ne deluje prečna obtežba. V točki ($x = 18$) ima diagram prečnih sil preskok ter zato v točki ($x = 18$) na konstrukcijo v prečni smeri deluje koncentrirana sila $F_4 = 60 \text{ kN}$. Na območju ($18 < x < 22$) diagram prečnih sil poteka po linearni funkciji ter zato na konstrukcijo na tem območju deluje prečna obtežba ($dV_{(x)}/dx = -5 \text{ kN} = -q_3$).

Diagram poteka upogibnih momentov je v večini primerov najbolj enostavno določiti na osnovi poznane prečne obtežbe po že znani direktni metodi.

5 VRVNE KONSTRUKCIJE

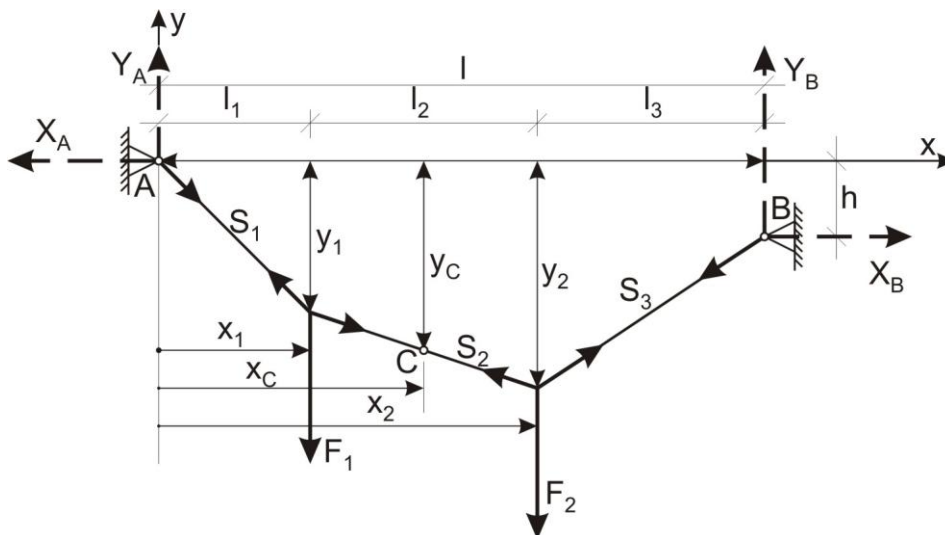
V inženirski praksi se z vravnimi konstrukcijami srečujemo pri visečih mostovih, žičnicah, telefonskih in elektro napeljavah, kablskih žerjavih itd.

Osnovna mehanska značilnost vrvi (vrvnih nosilnih elementov) je izredno majhna upogibna togost vrvi ($M_{(x)} \rightarrow 0$ in $V_{(x)} \rightarrow 0$) ter so zato sposobne prenašati le natezne osne sile ($N_{(x)} \geq 0$). V okviru mehanike togih teles bomo zato obravnavali neraztegljive (toge) vrvi izpostavljene nateznim osnim silam ter tudi nekatere primere ločnih konstrukcij, kjer so konstrukcijski elementi izpostavljeni le tlačnim osnim silam.

5.1 Analiza vrvi po metodi vrnega poligona

Analiza vrvi z metodo vrnega poligona je najenostavnejša, vendar je uporabna le v primerih kadar so koncentrirane vertikalne sile, ki na vrvi delujejo, tako velike, da lahko v primerjavi z njimi vplive lastne teže vrvi zanemarimo (opustimo). Zato v takšnih primerih predpostavimo, da so vrvi breztežne ter nanje delujejo samo koncentrirane vertikalne sile.

V takšnih primerih se po obremenitvi vrvi vzpostavi takšno geometrijsko stanje vrvi, ki mu pravimo vrvni poligon (Slika 5.1).



Slika 5.1: Breztežna in neraztegljiva vrvna konstrukcija obtežena z dvema koncentriranima silama prijemališča in velikosti obtežb ter skupne dolžine vrvi.

Pri statični analizi obravnavanega primera razpolagamo s tremi ravnotežnimi enačbami (pogoji) ter štirimi neznankami X_A , Y_A , X_B in Y_B , zato je obravnavani problem 1x statično nedoločen. Statični problem lahko zato rešimo le v kolikor imamo na razpolago še dopolnilni podatek, ki je lahko položaj točke C (x_C, y_C), sila v poljubnem prerezu vrvi ali skupna dolžina vrvi L.

a) Poznamo lego točke C (x_C, y_C)

V tem primeru morajo biti izpolnjeni naslednji ravnotežni pogoji:

$$\sum F_{ix} = -X_A + X_B = 0$$

$$\sum M^B = -X_A h + Y_A l - F_1(l - x_1) - F_2(l - x_2) = 0$$

$$\sum M^A = -X_B h - Y_B l + F_1 x_1 + F_2 x_2 = 0$$

$$\sum M^{C(L)} = -X_A y_C + Y_A x_C - F_1(x_C - x_1) = 0 \quad (5.1)$$

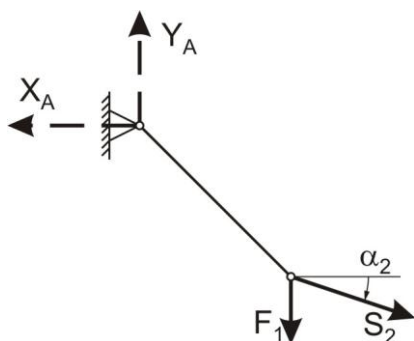
$$\sum M^{(D)} = X_B(y_C - h) - Y_B(\ell - x_C) + F_2(x_2 - x_C) = 0$$

$$\sum F_{iy} = Y_A + Y_B - F_1 - F_2 = 0$$

V sistemu šestih enačb (5.1) s štirimi neznankami so vedno le štiri enačbe med sabo neodvisne. Zato lahko vedno štiri neznane reakcijske sile določimo npr. z rešitvijo prvih štirih enačb, preostali dve enačbi pa sta vedno izpolnjeni ter ju lahko uporabimo za kontrolo dobljenih rešitev.

b) Poznamo osno silo v poljubnem prerezu vrvi

Kadar poznamo silo v vrvi (npr. S_2 , Slika 5.2) lahko tri neznane količine (X_A , Y_A in α_2) določimo z rešitvijo sistema enačb (5.2).



Slika 5.2: Levi del vrvne konstrukcije po prerezu v polju na razdalji ℓ_2

$$\sum F_{ix} = -X_A + S_2 \cos \alpha_2 = 0$$

$$\sum F_{iy} = Y_A - F_1 - S_2 \sin \alpha_2 = 0 \quad (5.2)$$

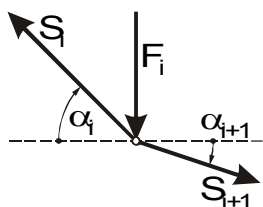
$$\sum M^B = -X_A h + Y_A \ell - F_1(\ell - x_1) - F_2(\ell - x_2) = 0$$

c) Poznamo skupno dolžino vrvi L

V tem primeru za vsako točko v kateri na vrv delujejo vertikalne koncentrirane sile (Slika 5.3) zapišemo po dve ravnotežni enačbi:

$$\sum F_{ix} = S_{i+1} \cos \alpha_{i+1} - S_i \cos \alpha_i = 0 \quad \sum F_{iy} = -S_{i+1} \sin \alpha_{i+1} - F_i + S_i \sin \alpha_i = 0 \quad (5.3)$$

V kolikor na vrv deluje n vertikalnih koncentriranih sil tako dobimo $2n$ ravnotežnih enačb.



Slika 5.3: Izrez vozlišča ob vertikalni koncentrirani sili F_i

Za rešitev statičnega problema moramo določiti $n+1$ neznanih sil na posameznih odsekih vrvi ter $n+1$ neznanih kotov, kjer n označuje število vertikalnih sil.

Za določitev $2n+2$ neznanih količin potrebujemo še dva dodatna pogoja (5.4), ki povežeta dolžino vrvi L in geometrijske podatke vrvne konstrukcije.

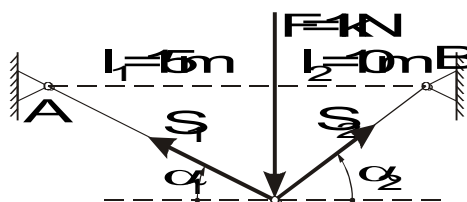
$$L = \sum_{j=1}^{n+1} \ell_j / \cos \alpha_j \qquad h = \sum_{j=1}^{n+1} \ell_j \operatorname{tg} \alpha_j \qquad (5.4)$$

Z rešitvijo sistema $2n+2$ enačb z $2n+2$ neznankami določimo neznane sile in neznane kote na vseh odsekih vrvene konstrukcije.

Tako so hkrati določene tudi vse podporne sile in geometrijski podatki celotne vrvene konstrukcije.

Primer 5.1:

Jeklena breztežna in neraztegljiva jeklena vrv dolžine $L=30\text{m}$ je obtežena z vertikalno silo $F=1\text{kN}$ (Slika 5.4). Določiti je potrebno sili S_1 in S_2 v vrvi ter kota α_1 in α_2 (Slika 5.4).



Slika 5.4: Vrvna konstrukcija obtežena z eno samo koncentrirano silo

Vozlišče, kjer sila F deluje na vrv fiktivno izrežemo iz konstrukcije ter izpolnimo osnovna ravnotežna pogoja (5.3).

$$\sum F_{ix} = S_2 \cos \alpha_2 - S_1 \cos \alpha_1 = 0 \qquad \sum F_{iy} = S_2 \sin \alpha_2 - F + S_1 \sin \alpha_1 = 0$$

Dolžina vrvi L je določena z izrazom:

$$L = \ell_1 / \cos \alpha_1 + \ell_2 / \cos \alpha_2$$

Podpori A in B sta na enaki višinski koti (Slika 5.4).

$$\ell_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 - \ell_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = 0$$

Način reševanja štirih enačb s štirimi neznankami je lahko poljuben. Najbolj enostavno je najprej rešiti zadnji dve enačbi, ki imata le dve neznanki, ki jo lahko zapišemo v enostavnejši obliki (upoštevamo enakost $1/\cos \alpha = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$).

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = 1.5 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1$$

$$30 = 15\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1} + 10\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2}$$

$$(3 - 1.5 \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1})^2 = (\sqrt{1 + 2.25 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha_1})^2$$

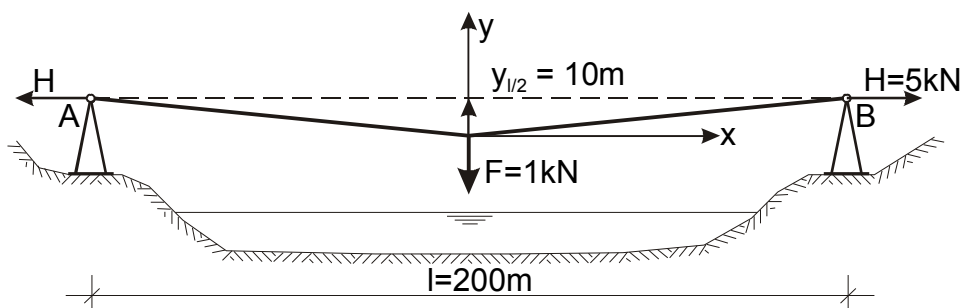
$$9 - 9 \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1} + 2.25 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2) = 1 + 2.25 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha_1$$

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1} = 10.25/9$$

Po izračunu neznanega kota $\alpha_1 = 28.592^\circ$ je določitev preostalih neznank sorazmerno enostavna ter so naslednje: $\alpha_2 = 39.268^\circ$, $S_1 = 0.836\text{kN}$ in $S_2 = 0.948\text{kN}$.

Primer 5.2:

Alpinisti želijo prečkati reko z jekleno neraztegljivo vrvjo in škripcem. Na razpolago imajo dve podporni točki na levem in desnem bregu reke na enaki višinski koti, ki lahko preneseta horizontalno silo intenzitete $H=5\text{kN}$. Podporni točki A in B sta na medsebojni oddaljenosti $\ell = 200\text{m}$ (Slika 5.5). V kolikor je teža alpinista z vso opremo 1kN , določi največji povos ter potrebno dolžino breztežne vrvi, da bo največja horizontalna sila dosegla vrednost $H=5\text{kN}$.



Slika 5.5: Vrvna konstrukcija za prečkanje reke širine $\ell = 200\text{m}$

Največja horizontalna sila bo delovala na obe podporni točki, ko bo vertikalna obtežba delovala na konstrukcijo na $\frac{1}{2}$ razpetine. Ker na vrv deluje le vertikalna obtežba je horizontalna komponenta osne sile v celotni vrvi konstantna. Obliko vrvi določimo z izrazom:

$$y' = dy/dx = 0.5F/H = 0.1 = \text{konst.} \quad y_{(\ell/2)} = \int_{x=0}^{\ell/2} y' dx = \left| 0.1x \right|_{x=0}^{x=100} = 10\text{m}$$

$$L = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx = \left| 1.0049875 \cdot x \right|_{-100}^{100} = 200.9975\text{m}$$

5.2 Analiza vrvi obteženih z lastno težo

Vrvi obtežene z lastno težo obravnavamo z modelom neraztegljive vrvi, sestavljene iz neskončnega števila med sabo členkasto povezanih togih elementov. Pri takšnih vrveh je zagotovljena popolna gibkost vrvi ($M_{(x)} = V_{(x)} = 0$) ter lahko prevzame le natezne osne sile. Obravnavani model idealne vrvi s podporama, vertikalno obtežbo in silami v izbranem prerezu vrvi prikazuje Slika 5.6.

Pri analizi bomo upoštevali diferencialni zvezi (4.50) in (4.51) za ukrivljene ravninske konstrukcije ($1/R_{(s)} \neq 0, 1/B_{(s)} = 0$). Z upoštevanjem označb (Slika 5.6) in idealne gibkosti vrvi lahko diferencialni zvezi podamo v naslednji obliki.

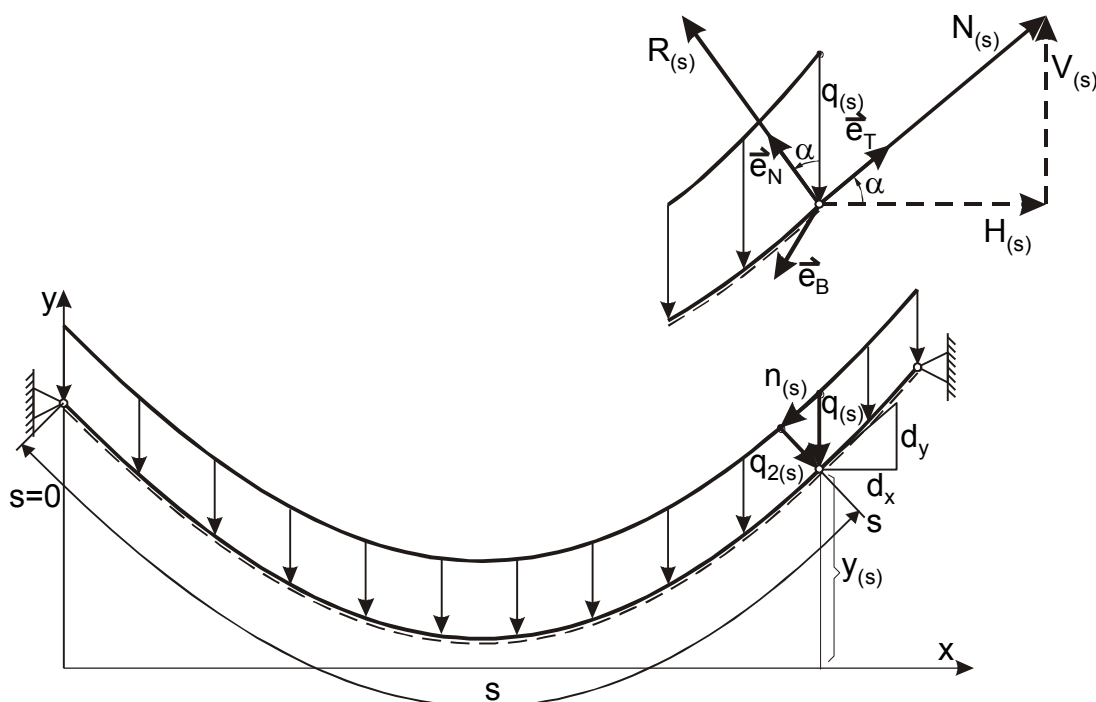
$$\frac{dN_{(s)}}{ds} = -n_1 + \frac{T_{2(s)}}{R} = q_{(s)} \sin \alpha + \frac{T_{2(s)}}{R} \quad (5.5)$$

$$\frac{dT_{2(s)}}{ds} = -q_2 - \frac{N_{(s)}}{R} = q_{(s)} \cos \alpha - \frac{N_{(s)}}{R} = 0 \quad (5.6)$$

kjer $q_{(s)}$ označuje lastno težo vrvi v kN na enoto dolžine vrvi.

Oсно silo ($N_{(s)}$) v poljubnem prerezu vrvi lahko izrazimo v odvisnosti od horizontalne sile $H_{(s)}$ in nagiba vrvi $y'_{(x)}$.

$$N_{(s)} = \sqrt{H_{(s)}^2 + V_{(s)}^2} = H_{(s)} \sqrt{1 + (V_{(s)} / H_{(s)})^2} = H_{(s)} \sqrt{1 + (y'_{(x)})^2} \quad (5.7)$$



Slika 5.6: Model idealne vrvi obtežene z lastno težo med dvema podporama

Nagib vrvi lahko izrazimo tudi z razmerjem vzdolžne in prečne obtežbe:

$$\operatorname{tg} \alpha = V_{(s)} / H_{(s)} = n_{(s)} / q_{2(s)} = y'_{(x)} \quad (5.8)$$

Radij upognjenosti vrvi (fleksijske ukrivljenosti) lahko izrazimo s prvim in drugim odvodom ordinate osi vrvi po osi x.

$$R_{(s)} = (1 + (y'_{(x)})^2)^{3/2} / y''_{(x)} \quad (5.9)$$

Izraz (5.6) lahko z upoštevanjem definicije fleksijske ukrivljenosti (5.9) in zveze med osno silo in njeno horizontalno komponento (projekcijo) (5.7) preoblikujemo v izraz (5.10).

$$\frac{N_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{N_{(s)} \cdot y''_{(x)}}{(1 + (y'_{(x)})^2)^{3/2}} = \frac{H_{(s)} \sqrt{1 + (y'_{(x)})^2} \cdot y''_{(x)}}{(1 + (y'_{(x)})^2)^{3/2}} = \frac{H_{(s)} \cdot y''_{(x)}}{(1 + (y'_{(x)})^2)} = q_{(s)} \cdot \cos \alpha \quad (5.10)$$

V kolikor v izrazu (5.10) upoštevamo še izraz $\cos \alpha = dx / \sqrt{dx^2 + dy^2} = 1 / \sqrt{1 + (y'_{(x)})^2}$ dobimo diferencialno enačbo idealne vrvi obtežene z lastno težo (5.11).

$$y''_{(x)} = \frac{q_{(s)} \cdot \cos \alpha}{H_{(s)}} (1 + (y'_{(x)})^2) = \frac{q_{(s)}}{H_{(s)}} \sqrt{1 + (y'_{(x)})^2} \quad (5.11)$$

Hkrati mora biti celotna verižnica (Slika 5.6) v ravnotežju ($\sum F_{ix} = X_A - X_B = 0$) kar pomeni, da mora biti pri vseh verižnicah obteženih le z vertikalnimi obtežbami horizontalna projekcija osne sile vzdolž celotne verižnice konstantna $H_{(s)} = H_{(x)} = H = \text{konst.}$ Diferencialno enačbo verižnice lahko zato podamo v nekoliko enostavnejši obliki:

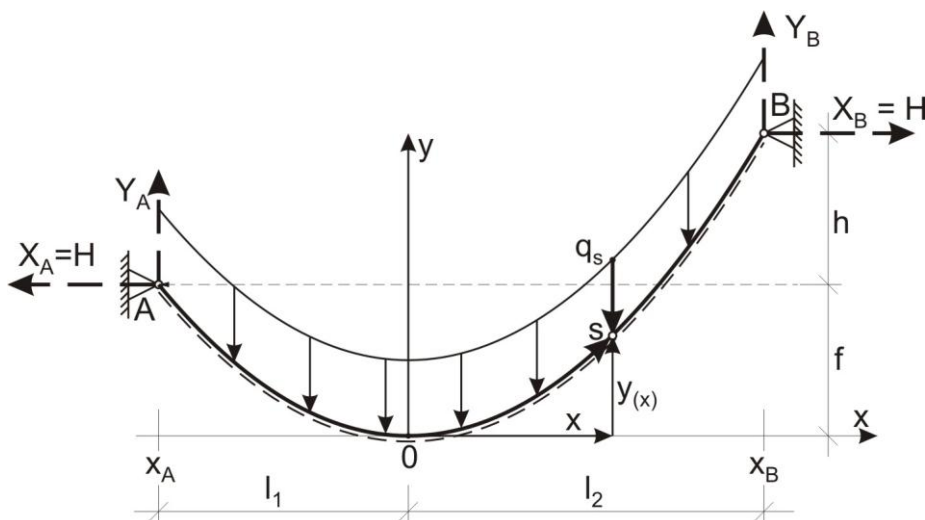
$$y''_{(x)} = \frac{q_{(s)}}{H} \sqrt{1 + (y'_{(x)})^2} \quad (5.12)$$

$$V_{(x)} = H \cdot y'_{(x)} \quad (5.13)$$

$$N_{(s)} = H_{(s)} \sqrt{1 + (y'_{(x)})^2} = N_{(x)} = H \sqrt{1 + (y'_{(x)})^2} \quad (5.14)$$

Slika 5.7 prikazuje splošni primer vrvi obtežene le z lastno težo, ki je konstantna na enoto dolžine. Vrv je pritrjena v točkah A in B, ki se nahajata na različnih višinah.

Koordinatno izhodišče se nahaja na najnižji točki vrvi ter v analizah upoštevamo, da je teža vrvi na enoto dolžine konstantna ($q_{(s)} = q = \text{konst.}$).



Slika 5.7: Splošni primer idealne vrvi obtežene z lastno težo

Za integracijo enačbe (5.12) uvedemo novo spremenljivko:

$$p_{(x)} = y'_{(x)} \quad (5.15)$$

Diferencialno enačbo lahko sedaj podamo v enostavnejši obliki:

$$\frac{dp_{(x)}}{dx} = p'_{(x)} = \frac{q}{H} \sqrt{1 + (p_{(x)})^2} \quad \text{oz.} \quad \frac{dp_{(x)}}{\sqrt{1 + (p_{(x)})^2}} = \frac{q}{H} dx \quad (5.16)$$

Enačbo (5.16) rešimo z nastavkom:

$$y'_{(x)} = p(x) = \text{sh}(u) \quad dp_{(x)} = \text{ch}(u) \cdot du \quad (5.17)$$

$$\frac{\text{ch}(u) du}{\sqrt{1 + \text{sh}^2 u}} = du = \frac{q}{H} dx \quad \int du = u = \frac{q}{H} x + C = \frac{q}{H} (x - C_1) \quad (5.18)$$

kjer C_1 označuje integracijsko konstanto. Enačbo težiščne osi vrvne konstrukcije določimo:

$$y_{(x)} = \int y'_{(x)} dx + C_2 = \int \text{sh}\left(\frac{q}{H} (x - C_1)\right) dx + C_2 = \frac{H}{q} \text{ch}\left(\frac{q}{H} (x - C_1)\right) + C_2 \quad (5.19)$$

Integracijski konstanti določimo z upoštevanjem robnih pogojev:

$$x = 0; \quad y'_{(x=0)} = \operatorname{sh}\left(\frac{q}{H}(0 - C_1)\right) = 0 \quad C_1 = 0$$

$$x = 0; \quad y_{(x=0)} = \frac{H}{q} \operatorname{ch}(0) + C_2 = 0 \quad C_2 = -\frac{H}{q}$$

Rešitev diferencialne enačbe težiščne osi je naslednja:

$$y_{(x)} = \frac{H}{q} \left[\operatorname{ch}\left(\frac{qx}{H}\right) - 1 \right] \quad y'_{(x)} = \operatorname{sh}\left(\frac{qx}{H}\right) \quad (5.20)$$

Oсно sile v vrvi ter njeno vertikalno komponento določimo:

$$V_{(x)} = H \operatorname{sh}\left(\frac{qx}{H}\right) \quad N_{(x)} = H \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\left(\frac{qx}{H}\right)} = H \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{qx}{H}\right) \quad (5.21)$$

Dolžino vrvi iz vrednotimo s seštevanjem posameznih neskončno majhnih in členkasto povezanih členov:

$$\begin{aligned} L &= \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (y'_{(x)})^2} dx = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\left(\frac{qx}{H}\right)} dx = \int_{x_A}^{x_B} \operatorname{ch}\left(\frac{qx}{H}\right) dx = \frac{H}{q} \left[\operatorname{sh}\left(\frac{qx}{H}\right) \right]_{-\ell_1}^{\ell_2} = \\ &= \frac{H}{q} \left[\operatorname{sh}\left(\frac{q\ell_2}{H}\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{q\ell_1}{H}\right) \right] \end{aligned} \quad (5.22)$$

Določimo še višinsko razliko točk A in B:

$$h = y_{(\ell_2)} - y_{(-\ell_1)} = \frac{H}{q} \left[\operatorname{ch}\left(\frac{q\ell_2}{H}\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{q\ell_1}{H}\right) \right] \quad (5.23)$$

Z upoštevanjem adicijskih izrekov določimo razmerje h/L :

$$\frac{h}{L} = \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{q\ell_2}{H}\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{q\ell_1}{H}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{q\ell_2}{H}\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{q\ell_1}{H}\right)} = \frac{2 \cdot \operatorname{sh}\left[\frac{q(\ell_2 + \ell_1)}{2H}\right] \cdot \operatorname{sh}\left[\frac{q(\ell_2 - \ell_1)}{2H}\right]}{2 \cdot \operatorname{sh}\left[\frac{q(\ell_2 + \ell_1)}{2H}\right] \cdot \operatorname{ch}\left[\frac{q(\ell_2 - \ell_1)}{2H}\right]} = \operatorname{th}\left[\frac{q(\ell_2 - \ell_1)}{2H}\right] \quad (5.24)$$

Z upoštevanjem izraza (5.24) podamo izraza za dolžino vrvi L ter za dolžino ℓ_2 v naslednji uporabni obliki:

$$L = \frac{2H}{q} \cdot \operatorname{sh}\left[\frac{q \cdot (\ell_2 + \ell_1)}{2H}\right] \cdot \operatorname{ch}\left[\frac{q \cdot (\ell_2 - \ell_1)}{H}\right] = \frac{2H}{q} \cdot \operatorname{sh}\left[\frac{q \cdot \ell}{2H}\right] \cdot \operatorname{ch}\left[\operatorname{Ath}\left(\frac{h}{L}\right)\right] \quad (5.25)$$

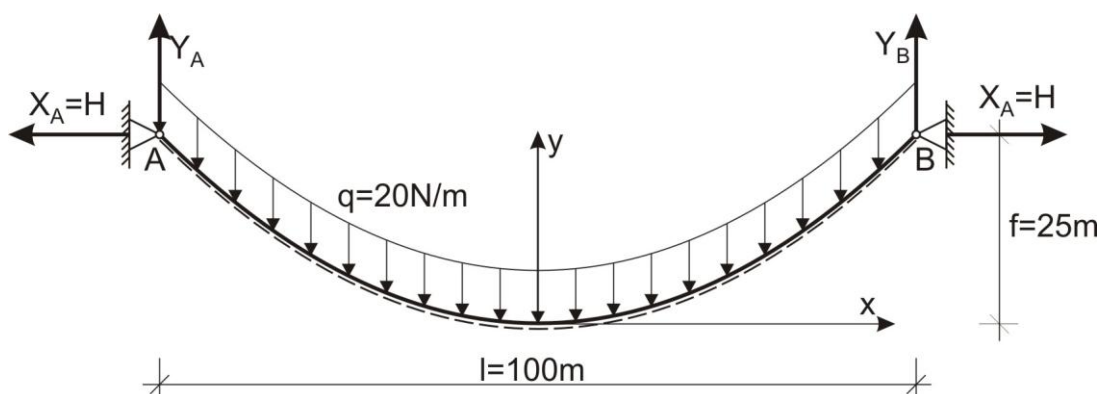
$$\ell_2 = \frac{\ell}{2} + \frac{H}{q} \cdot \operatorname{Ath}\left(\frac{h}{L}\right) \quad (5.26)$$

Izraza (5.25) in (5.26) se poenostavita v primerih enakih višin podpor A in B:

$$h = 0, \quad \ell_1 = \ell_2 = \frac{\ell}{2}, \quad L = \frac{2H}{q} \operatorname{sh}\left(\frac{q\ell}{2H}\right) \quad \text{in} \quad \ell = \ell_1 + \ell_2.$$

Primer 5.3:

Jeklena vrv je pritrjena na podpori A in B v enaki višini (Slika 5.8) z razpetino $\ell = 100\text{m}$. Za primer povesa $f = 25\text{m}$ je potrebno določiti dolžino vrvi L , reakcijske sile ter največjo silo v vrvi.



Slika 5.8: Verižnica z razpetino $\ell = 100\text{m}$

Potek težiščne osi vrvne konstrukcije določa izraz (5.20).

$$y_{(x)} = \frac{H}{q} \left[\text{ch}\left(\frac{qx}{H}\right) - 1 \right] = \frac{H}{20} \left[\text{ch}\left(\frac{20x}{H}\right) - 1 \right]$$

Nedvoumno je verižnica simetrična z največjim povесom pri $\ell/2 = 50\text{m}$, kjer izberemo tudi izhodišče koordinatnega sistema. Upoštevamo zahtevani povес vrvi:

$$y_{(x=\ell/2)} = \frac{H}{20} \left[\text{ch}\left(\frac{20 \cdot 50}{H}\right) - 1 \right] = 25\text{m}$$

Nelinearno enačbo lahko z zadovoljivo natančnostjo rešimo s poskušanjem. Kot začetni približek k iskani rešitvi upoštevamo začetno vrednost horizontalne sile v vrvi $H_0 = (q \cdot \ell) / 2 = 1000\text{N}$.

Za izbrane vrednosti horizontalne sile iz zgornje enačbe postopoma določamo povese verižnice vse dokler ne dosežemo zelene oz. zahtevane vrednosti povesa ($f = 25.0\text{m}$). V kolikor pravilno izberemo začetno vrednost sile H_0 dokaj hitro dosežemo rešitev s poljubno natančnostjo.

$$H = 1000\text{N} \quad f = 27.154\text{m}$$

$$H = 1100\text{N} \quad f = 24.333\text{m}$$

$$H = 1075\text{N} \quad f = 24.982\text{m}$$

$$H = 1074\text{N} \quad f = 25.008\text{m}$$

$$\underline{H = 1074.3} \quad \underline{f = 25.00054}$$

$$N_{\text{Max.}} = N_{(x=\ell/2)} = 1074.3 \cdot \text{ch}\left(\frac{20 \cdot 50}{1074.3}\right) = 1574.311\text{N}$$

$$V_{\text{Max.}} = V_{(x=\ell/2)} = 1074.3 \cdot \text{sh}\left(\frac{20 \cdot 50}{1074.3}\right) = 1150.797\text{N}$$

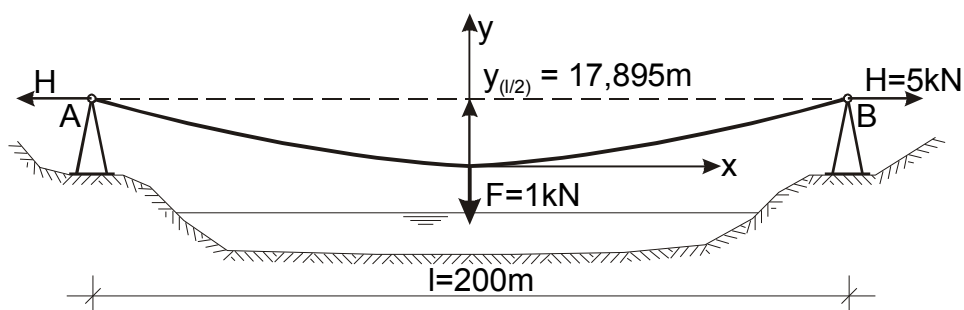
$$L = \frac{2 \cdot 1074.3}{20} \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{20 \cdot 100}{2 \cdot 1074.3}\right) = 115.08 \text{m}$$

Sili, ki delujeta na obe podpori sta enaki največji sili v vrvi. Njuni komponenti sta naslednji:

$$Y_A = Y_B = V_{\text{Max.}} = 1150.797 \text{m} \quad X_A = X_B = H = 1074.3 \text{N}$$

Primer 5.4:

Alpinisti želijo prečkati reko z jekleno neraztegljivo vrvjo prereza $A = 1.0 \text{cm}^2$ in škripcem. Na razpolago imajo dve podporni točki na levem in desnem bregu reke na enaki višinski koti, ki lahko preneseta horizontalno silo intenzitete $H=5 \text{kN}$. Podporni točki A in B sta na medsebojni oddaljenosti $\ell = 200 \text{m}$ (Slika 5.9). V kolikor je teža alpinista z vso opremo 1kN , določi največji povos ter potrebno dolžino vrvi, da bo največja horizontalna sila dosegla vrednost $H=5 \text{kN}$ (upoštevajte lastno težo vrvi $q = 0.0001 \cdot 1.0 \cdot 78000 = 7.8 \text{N/m}$ in koristno obtežbo s koncentrirano silo $F=1.0 \text{kN}$).



Slika 5.9: Vrvna konstrukcija obremenjena z lastno težo in koncentrirano silo

Največji povos verižnice se bo pojavil, ko se bo alpinist nahajal na $\frac{1}{2}$ razpona vrvne konstrukcije oz. v koordinatnem izhodišču. Kot osnovno enačbo za določitev enačbe verižnice na posameznih odseki npr. (A do $\ell/2$) oz. ($\ell/2$ do B) uporabimo izraz (5.19).

$$\text{robni pogoj: } x=0 \quad y'_{(x=0)} = \operatorname{sh}\left[\frac{-q \cdot C_1}{H}\right] = 0.1 \quad C_1 = -63.9962$$

$$\text{robni pogoj: } x=\ell \quad y_{(x=\ell)} = \frac{H}{q} \operatorname{ch}\left[\frac{q \cdot 63.9962}{H}\right] + C_2 = 0 \quad C_2 = -644.223$$

$$y_{(x)} = \frac{H}{q} \operatorname{ch}\left[\frac{q \cdot (x + 63.9962)}{H}\right] - 644.223 = 641.0256 \cdot \operatorname{ch}\left[\frac{7.8 \cdot (x + 63.9962)}{5000}\right] - 644.223$$

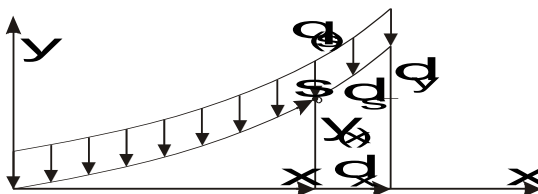
$$y_{(\ell/2)} = f = 17.895 \text{m}$$

$$L = \int_{-l/2}^{l/2} \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx = 2 \int_{x=0}^{x=100} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\left[\frac{7.8(x + 63.9962)}{5000}\right]} dx = 2 \int_{x=0}^{x=100} \operatorname{ch}\left[\frac{7.8(x + 63.9962)}{5000}\right] dx =$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{5000}{7.8} \operatorname{sh}\left[\frac{7.8(x + 63.9962)}{5000}\right] \right]_0^{100} = 2 \cdot (165.791 - 64.102) = 203.378 \text{m}$$

5.3 Analiza vrvi z majhnim povесom

Kadar je povес verižnice z ozirom na razpétino relativno majhen lahko za približne izračune predpostavimo, da je obtežba vrvi neodvisna od njene dolžine $q_{(s)} \approx q_{(x)}$. Prav tako se rešitve bistveno poenostavijo v kolikor poznamo prečno (vertikalno) obtežbo, ki pripada enoti horizontalne projekcije težiščne osi vrvi na os x (Slika 5.10).



Slika 5.10: Zveza med vertikalno obtežbo na enoto dolžine vrvi $q_{(s)}$ in pripadajočo obtežbo na enoto horizontalne projekcije vrvi na x os

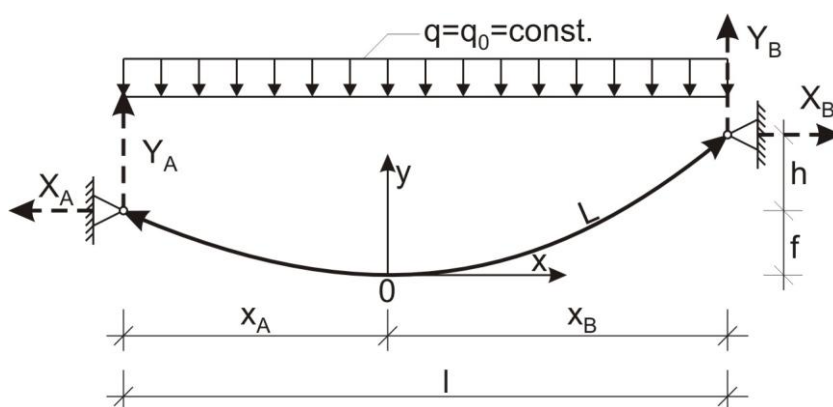
Zvezo med vertikalno obtežbo na enoto dolžine osi ter obtežbo na pripadajočo enoto dolžine x -osi določa pogoj ekvivalentnosti vertikalne obtežbe na dolžini ds (Slika 5.10).

$$q_{(s)} ds = q_{(x)} dx \quad q_{(x)} = q_{(s)} \frac{ds}{dx} = q_{(s)} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = q_{(s)} \sqrt{1 + (y'_{(x)})^2} \quad (5.27)$$

Z upoštevanjem izraza (5.27) lahko diferencialno enačbo (5.12) zapišemo v bistveno bolj enostavni obliki.

$$y''_{(x)} = \frac{q_{(s)}}{H} \sqrt{1 + (y'_{(x)})^2} = \frac{q_{(x)}}{H} \quad (5.28)$$

Slika 5.11 je prikazan splošni primer vrvi obtežene z enakomerno zvezno obtežbo q_0 , ki je tokrat konstantna po celotni dolžini ℓ obravnavane vrvne konstrukcije. Vrv je pritrjena v točkah A in B, ki se nahajata na različnih višinah. Koordinatno izhodišče se nahaja oz. ga izberemo na najnižji točki vrvi.



Slika 5.11: Vrvna konstrukcija obremenjena z enakomerno zvezno obtežbo q_0 na enoto pripadajoče dolžine x osi

Enačbo težiščne osi določimo z integracijo diferencialne enačbe (5.28):

$$y''_{(x)} = \frac{q_{(x)}}{H} = \frac{q_0}{H} = \text{konst.} \quad (5.29)$$

Z ozirom na konstantno vrednost drugega odvoda težiščne osi vrvne konstrukcije zlahka ugotovimo, da le ta v primeru enakomerne zvezne obtežbe vedno poteka po zakonu kvadratne parabole. Z integracijo izraza (5.29) dobimo:

$$y'_{(x)} = \int_{x_0}^x \frac{q_0}{H} dx = \frac{q_0}{H} x + C_1, \quad y_{(x)} = \int_{x_0}^x y'_{(x)} dx = \frac{q_0 x^2}{2H} + C_1 \cdot x + C_2 \quad (5.30)$$

Neznani integracijski konstanti določimo z upoštevanjem robnih pogojev.

$$x = 0; \quad y_{(x=0)} = C_2 = 0$$

$$x = 0; \quad y'_{(x=0)} = C_1 = 0$$

Rešitev diferencialne enačbe (5.29) je v takšnih primerih za izbrano izhodišče koordinatnega sistema kvadratna funkcija (parabola) z ničlo v koordinatnem izhodišču:

$$y_{(x)} = \frac{q_0 x^2}{2H} \quad (5.31)$$

kjer sta neznani vrednosti horizontalna sila v vrvi H ter koordinata x_A , ki določa lokacijo koordinatnega izhodišča. Obe neznanki povezujeta pogoja:

$$y_{(x=x_A)} = \frac{q_0 x_A^2}{2H} = f \quad \frac{q_0}{2H} = \frac{f}{x_A^2}$$

$$y_{(x=x_B)} = \frac{q_0 x_B^2}{2H} = \frac{q_0 (x_A + \ell)^2}{2H} = f + h \quad \frac{q_0}{2H} = \frac{f + h}{(x_A + \ell)^2}$$

Z eliminacijo neznanke H dobimo kvadratno enačbo z eno neznanke.

$$x_A^2 (f + h) - (x_A + \ell)^2 f = 0$$

$$h \cdot x_A^2 - 2 \cdot f \cdot \ell \cdot x_A - f \cdot \ell^2 = 0$$

$$x_A = \frac{f \cdot \ell}{h} \pm \sqrt{\left(\frac{f \cdot \ell}{h}\right)^2 + \left(\frac{f \cdot \ell^2}{h}\right)} \quad (5.32)$$

Določimo še horizontalno silo v vrvi, enačbo težiščne osi in osno silo ter potrebno dolžino vrvi.

$$H = \frac{q_0 x_A^2}{2f} \quad y_{(x)} = \frac{q_0 x^2}{2H} = f \cdot \left(\frac{x}{x_A}\right)^2 \quad (5.33)$$

$$N_{(x)} = H\sqrt{1+(y'_{(x)})^2} = \frac{q_0 x_A^2}{2f} \sqrt{1+\left(\frac{q_0 x}{H}\right)^2} = \frac{q_0 x_A^2}{2f} \sqrt{1+\left(\frac{2 \cdot x \cdot f}{x_A^2}\right)^2}$$

$$N_{(x_A)} = \frac{q_0 x_A^2}{2f} \sqrt{1+\frac{4 \cdot f^2}{x_A^2}} \quad (5.34)$$

$$L = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1+(y'_{(x)})^2} dx = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1+\frac{q_0^2 \cdot x^2}{H^2}} dx = \frac{q_0}{H} \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{H^2}{q_0^2} + x^2} \cdot dx = \frac{q_0}{2H} \left[x \sqrt{\frac{H^2}{q_0^2} + x^2} + \frac{H^2}{q_0^2} \operatorname{ash}\left(\frac{q_0 x}{H}\right) \right]_{x_A}^{x_B} =$$

$$= \frac{q_0}{2H} \left\{ x_B \sqrt{\frac{H^2}{q_0^2} + x_B^2} - x_A \sqrt{\frac{H^2}{q_0^2} + x_A^2} + \frac{H^2}{q_0^2} \left[\operatorname{ash}\left(\frac{q_0 x_B}{H}\right) - \operatorname{ash}\left(\frac{q_0 x_A}{H}\right) \right] \right\} \quad (5.35)$$

Rešitve se še poenostavijo za primer $h = 0$.

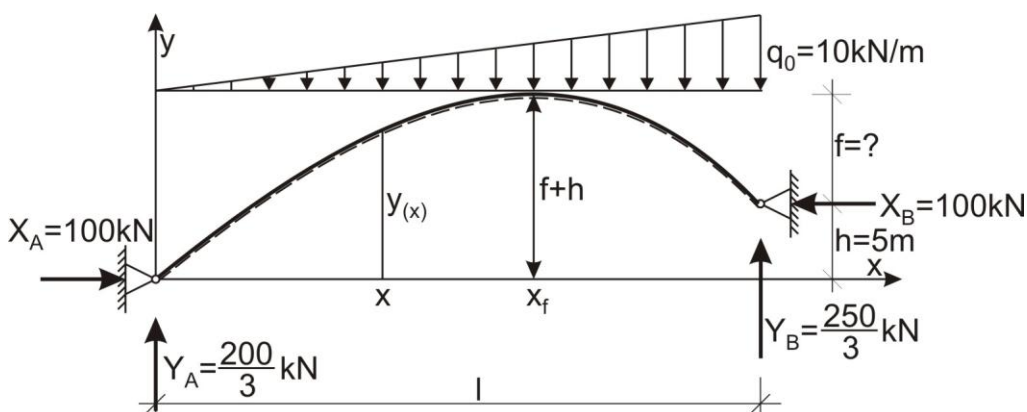
$$x_A = -\frac{\ell}{2} \quad x_B = \frac{\ell}{2} \quad H = \frac{q_0 \ell^2}{8f}$$

$$y_{(x)} = f \cdot \left(\frac{x}{x_A}\right)^2 = 4 \cdot f \cdot \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \quad y'_{(x)} = 8 \cdot f \cdot \left(\frac{x}{\ell^2}\right) \quad V_{(x)} = H \cdot y'_{(x)} = q_0 \cdot x$$

$$V_{\text{Max.}} = \frac{q_0 \cdot \ell}{2} \quad N_{\text{Max.}} = N_{(\ell/2)} = \sqrt{H^2 + V_{(\ell/2)}^2} = \frac{q_0 \ell}{2} \sqrt{1 + \frac{\ell^2}{16 \cdot f^2}}$$

Primer 5.5:

Za ločni nosilec obtežen s trikotno zvezno obtežbo določite takšno obliko težiščne osi, da se bodo v loku aktivirale samo tlačne osne sile (Slika 5.12). V analizi upoštevajte horizontalno silo v podporah $H = 100\text{kN}$, razpetino ločnega nosilca $\ell = 30\text{m}$ ter višinsko razliko med podporama A in B, ki znaša $h = 5.0\text{m}$. Določiti je potrebno višino puščice loka f , položaj temenske točke ločne konstrukcije x_f ter vertikalni komponenti podpornih sil v podporah A in B.



Slika 5.12: Ločni nosilec obtežen s trikotno zvezno obtežbo

Za ločne nosilce so diferencialne enačbe težiščne osi podobne kot pri verižnicah le, da je ukrivljenost težiščne osi negativna.

$$y''_{(x)} = -\frac{q_{(x)}}{H} = -\frac{q_0 \cdot x}{\ell \cdot H}$$

$$y'_{(x)} = -\frac{q_0 \cdot x^2}{2\ell \cdot H} + C_1$$

$$y_{(x)} = -\frac{q_0 \cdot x^3}{6\ell \cdot H} + C_1 x + C_2$$

Integracijski konstanti C_1 in C_2 določimo z upoštevanjem robnih pogojev v podpori A in B ločnega nosilca.

$$x = 0 \qquad y_{(x=0)} = C_2 = 0$$

$$x = \ell \qquad y_{(x=\ell)} = -\frac{q_0 \ell^2}{6H} + C_1 \ell = h \qquad C_1 = \frac{h}{\ell} + \frac{q_0 \ell}{6H}$$

Temensko točko ločnega nosilca določimo z upoštevanjem geometrijskih pogojev:

$$y_{(x_f)} = h + f = -\frac{q_0 x_f^3}{6\ell H} + \left(\frac{h}{\ell} + \frac{q_0 \ell}{6H}\right) x_f$$

$$y'_{(x_f)} = -\frac{q_0 x_f^2}{2\ell H} + \frac{h}{\ell} + \frac{q_0 \ell}{6H} = 0$$

$$x_f = \sqrt{\left(\frac{h}{\ell} + \frac{q_0 \ell}{6H}\right) \frac{2\ell H}{q_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 100}{10} + \frac{2 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 100}{6 \cdot 100}} = \sqrt{100 + 300} = 20\text{m}$$

$$f = -\frac{10 \cdot 20^3}{6 \cdot 30 \cdot 100} + \frac{5 \cdot 20}{30} + \frac{10 \cdot 30 \cdot 20}{6 \cdot 100} - 5 = \frac{35}{9} \text{m}$$

$$V_{(x=0)} = Y_A = H \cdot y'_{(x=0)} = 100 \cdot \left(\frac{h}{\ell} + \frac{q_0 \ell}{6H}\right) = 100 \cdot \left(\frac{5}{30} + \frac{10 \cdot 30}{6 \cdot 100}\right) = \frac{50}{3} + \frac{10 \cdot 30}{6} = \frac{200}{3}$$

$$V_{(x=\ell)} = Y_B = -H \cdot y'_{(x=\ell)} = -100 \cdot \left(\frac{-q_0 \cdot \ell}{2 \cdot H} + \frac{h}{\ell} + \frac{q_0 \ell}{6H}\right) = 100 \cdot \left(\frac{10 \cdot 30}{2 \cdot 10} - \frac{5}{30} - \frac{10 \cdot 30}{6 \cdot 100}\right) = \frac{250}{3}$$

Primer 5.6:

Ločni nosilec z razpetino $\ell = 100\text{m}$ (Slika 5.13) je obtežen na odseku $x = 0$ do $x = 40\text{m}$ z enakomerno zvezno obtežbo $q_1 = 10\text{kN/m}$, v točki $x = 40\text{m}$ nanj deluje koncentrirana vertikalna obtežba $F = 1000\text{kN}$ ter na odseku $x = 40$ do $x = 100\text{m}$ enakomerna zvezna obtežba $q_2 = 20\text{kN/m}$. V prijemališču koncentrirane sile je poznana višinska kota težiščne osi nosilca $y_{(x=40\text{m})} = 20\text{m}$, podpora B je locirana za višino $h = 10\text{m}$ nad podporo A (Slika 5.13).

Določiti je potrebno sile v podporah, potek težiščne osi nosilca ter najvišjo višino nosilca f ob pogoju, da bodo v nosilcu nastale le tlačne osne sile.

V obravnavanem primeru najprej iz vrednotimo podporne sile. Ločno konstrukcijo katere potek težiščne osi še ne poznamo lahko obravnavamo kot tročlensko konstrukcijo saj mora biti upogibni moment v vseh točkah osi konstrukcije ter zato tudi v točki prijemališča koncentrirane sile enak 0.

$$\sum M^A = 100 \cdot Y_B + 10 \cdot H - 400 \cdot 20 - 1000 \cdot 40 - 1200 \cdot 70 = 0$$

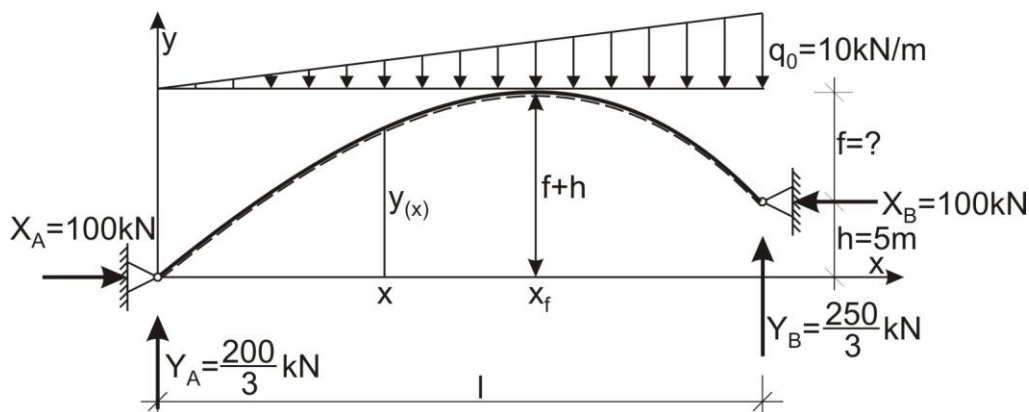
$$\sum M^{T_F} = 60 \cdot Y_B - 10 \cdot H - 1200 \cdot 30 = 0$$

Reakciji Y_B in H določimo z rešitvijo zgornjega sistema dveh enačb z dvema neznankama. Reakcijsko silo Y_A nato določimo z upoštevanjem ravnotežnega pogoja v vertikalni smeri za celotno ločno konstrukcijo.

$$100 \cdot Y_B + 10 \cdot H = 132000$$

$$60 \cdot Y_B - 10 \cdot H = 36000$$

$$160Y_B = 168000 \quad Y_B = 1050.00\text{kN} \quad H = 2700.00\text{kN} \quad Y_A = 1550.00\text{kN}$$



Slika 5.13: Ločni nosilec obtežen z zvezno obtežbo in s koncentrirano silo

Na odseku ($0 \leq x \leq 40\text{m}$) mora potek težiščne osi ločnega nosilca ustrezati naslednjim pogojem:

$$y''_{(x)} = \frac{-10}{H} \quad y'_{(x)} = \frac{-10 \cdot x}{H} + C_1 \quad y_{(x)} = \frac{-5 \cdot x^2}{H} + C_1 \cdot x + C_2$$

$$y'_{(x=0)} = \frac{A_y}{H} = \frac{1550}{2700} = C_1 \quad y_{(x=0)} = 0 = C_2$$

Potek težiščne osi na območju ($0 \leq x \leq 40\text{m}$) določa izraz:

$$y_{(x)} = \frac{-5 \cdot x^2}{H} + C_1 \cdot x = -\frac{x^2}{540} + \frac{31}{54} \cdot x$$

Na odseku ($40 \leq x \leq 100\text{m}$) pa mora potek težiščne osi ločnega nosilca ustrezati naslednjim pogojem:

$$y''_{(x)} = \frac{-20}{H} \quad y'_{(x)} = \frac{-20 \cdot x}{H} + C_3 \quad y_{(x)} = \frac{-10 \cdot x^2}{H} + C_3 \cdot x + C_4$$

$$y'_{(x=100)} = -\frac{B_y}{H} = -\frac{1050}{2700} = -\frac{20 \cdot x}{H} + C_3 = -\frac{20 \cdot 100}{2700} + C_3 \quad C_3 = \frac{950}{2700} = \frac{19}{54}$$

$$y_{(x=100\text{m})} = 10 = -\frac{10 \cdot x^2}{H} + C_3 x + C_4 = -\frac{100^2}{270} + \frac{19 \cdot 100}{54} + C_4 \quad C_4 = \frac{320}{27}$$

Potek težiščne osi na območju ($40 \leq x \leq 100\text{m}$) določa izraz:

$$y_{(x)} = \frac{-10 \cdot x^2}{H} + C_3 \cdot x + C_4 = -\frac{x^2}{270} + \frac{19}{54} \cdot x + \frac{320}{27}$$

Položaj najvišje točke nosilca določa izraz:

$$y'_{(x)} = \frac{-20 \cdot x}{H} + C_3 = 0 \quad x_f = \frac{C_3 \cdot H}{20} = \frac{19 \cdot 2700}{54 \cdot 20} = 47.5\text{m}$$

$$y_{(x=47.5)} = -\frac{10 \cdot 47.5^2}{2700} + \frac{19}{54} \cdot 47.5 + \frac{320}{27} = 20.208\text{m} \quad f = y_{(x=47.5)} - 10 = 10.208\text{m}$$

6 VPLIVNICE

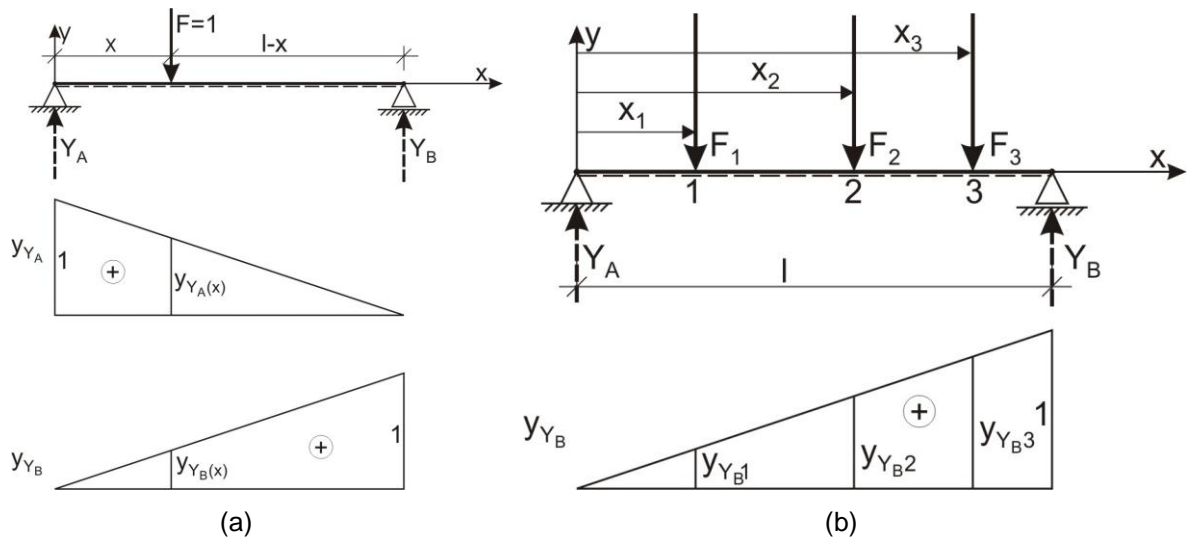
Pri stalnih obtežbah lahko zunanje in notranje obremenitve konstrukcijskih elementov (podporne sile, vezne sile ter notranje sile in momente) določamo neposredno za predvidene projektne obtežbe za katere poznamo smeri, velikosti in prijemališča preko katerih se njihovi vplivi prenašajo na konstrukcije.

Pri premičnih obtežbah (prometni vplivi, obtežbe pri žerjavnih progah, veter, valovanje itd.) je potrebno najprej analizirati vse realno mogoče položaje premičnih obtežb ter določiti kritično lego oz. realno mogočo kritično kombinacijo vseh premičnih obtežb, pri kateri je njihov vpliv na opazovano komponento podpornih sil, veznih sil ter notranjih obremenitev analizirane konstrukcije najbolj neugoden oz. najbolj kritičen. V praksi praviloma vedno določamo največje (maksimalne) in najmanjše (minimalne) vrednosti posameznih zunanjih in notranjih statičnih količin. Hkratni grafični predstavitvi poteka največjih in najmanjših vrednosti po dolžini težiščne osi posameznih konstrukcijskih elementov pravimo ovojnice statičnih količin na konstrukciji.

Črto oz. funkcijsko sovisnost, ki pove kolikšen je vpliv obtežbe na poljubnem mestu (x) obravnavane konstrukcije na opazovano zunanjo ali notranjo statično količino imenujemo vplivnico. V okviru Statike 1 bomo obravnavali le vplivnice za vertikalne obtežbe statično določenih gradbenih konstrukcij. Ordinata vplivnice na poljubnem mestu (x) konstrukcije določa velikost vpliva na analizirano statično količino kadar se premična obtežba ($F=1$) nahaja v obravnavani točki (x) na analizirani konstrukciji.

6.1 Lastnosti vplivnic (vplivnih črt) pri statično določenih konstrukcijah

Obravnavamo vplive premične vertikalne koncentrirane sile $F=1$ na vertikalni reakciji Y_A in Y_B , ki deluje na prostoležeči nosilec z razpetino ℓ . Realno so mogoči vsi položaji premikajoče se vertikalne obtežbe ($0 \leq x \leq \ell$), ki jih lahko zavzame premikajoča se obtežba, kadar vozilo prečka obravnavani objekt (Slika 6.1a).



Slika 6.1: Vplivnice za vplive vertikalne obtežbe na prostoležečem nosilcu: (a) Vplivnici za reakciji Y_A in Y_B in (b) Skupni vpliv skupine vertikalnih sil na podporno silo Y_B

Vplivnico za podporno silo Y_A določimo z upoštevanjem ravnotežnega pogoja:

$$\sum M^B = Y_A \cdot l - F \cdot (l - x) = 0 \quad Y_A = \frac{F \cdot (l - x)}{l}$$

V kolikor upoštevamo $F = 1$, dobimo :

$$Y_A = y_{Y_A(x)} = \frac{(l - x)}{l} \quad (6.1)$$

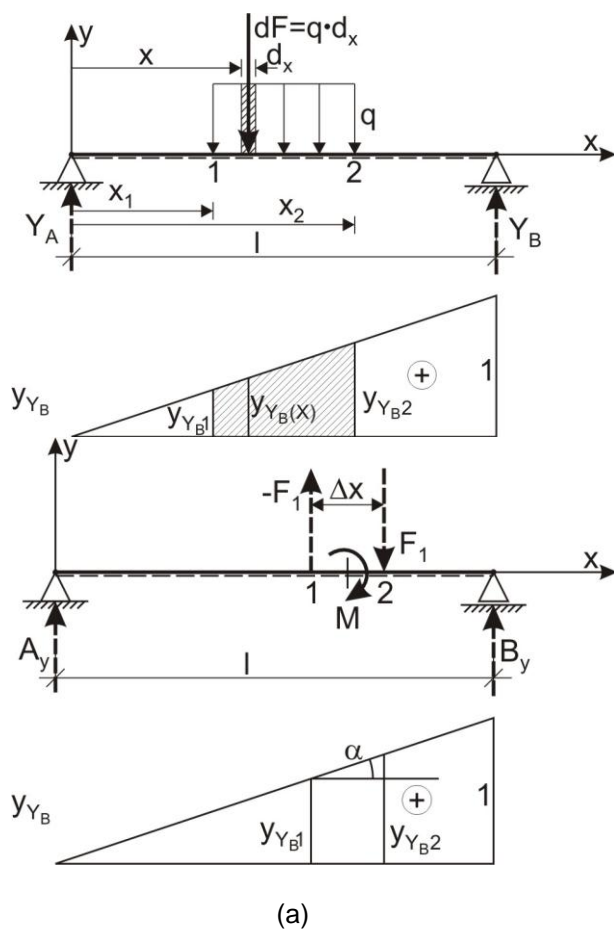
Funkcijo $y_{Y_A(x)}$ imenujemo vplivnico za reakcijo Y_A ter podaja vrednost reakcijske sile za poljubni položaj sile $F = 1$ na obravnavani konstrukciji (velikost vpliva za podporne sile $y_{Y_A(x)}$ izražamo z brezdimenzijskimi vrednostmi). Na podoben način še določimo tudi vplivnico za podporno silo Y_B .

$$\sum M^A = Y_B \cdot l - F \cdot x = 0 \quad Y_B = y_{Y_B(x)} = \frac{x}{l} \quad (6.2)$$

Vplive skupine vertikalnih koncentriranih obtežb lahko seštevamo (Slika 6.1b).

$$Y_B = \sum_{i=1}^3 y_{Y_Bi} \cdot F_i = y_{Y_B1} \cdot F_1 + y_{Y_B2} \cdot F_2 + y_{Y_B3} \cdot F_3 \quad (6.3)$$

V nadaljevanju bomo analizirali vpliv enakomerne zvezne obtežbe in dvojice sil (koncentriranega momenta) na izbrano statično količino (Slika 6.2).



Slika 6.2: Vplivi sestavljenih obtežb na vertikalno reakcijo Y_B : (a) Enakomerne zvezne obtežbe in (b) Koncentriranega momenta (dvojice sil)

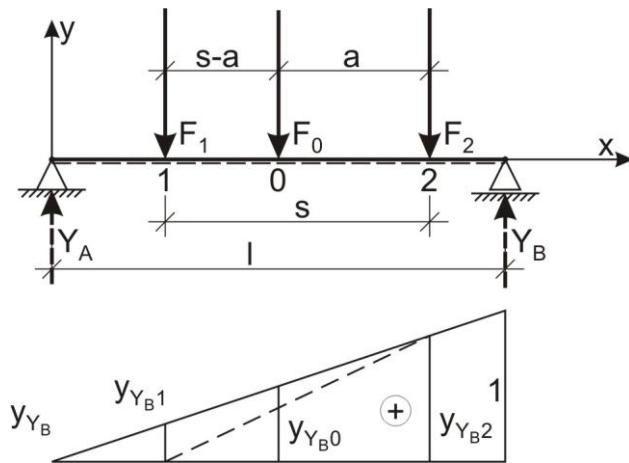
Vpliv enakomerne zvezne obtežbe q na izbrano statično količino je enak produktu intenzitete enakomerne zvezne obtežbe in površine vplivnice za obravnavano statično količino na območju zvezne obtežbe.

$$Y_B = \int_{x_1}^{x_2} y_{Y_B(x)} \cdot dF = q \int_{x_1}^{x_2} y_{Y_B(x)} \cdot dx = q \cdot A_{vp1} \quad (6.4)$$

Vpliv dvojice sil (koncentriranega momenta) je enak produktu intenzitete navora in tangensa naklonskega kota vplivnice na mestu delovanja dvojice sil na nosilec.

$$Y_B = -F_1 \cdot y_{Y_{B1}} + F_2 \cdot y_{Y_{B2}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{M}{\Delta x} (y_{Y_{B2}} - y_{Y_{B1}}) \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{M}{\Delta x} (y_{Y_{B1}} + \Delta x \cdot \text{tg}\alpha - y_{Y_{B1}}) \right] = M \cdot \text{tg}\alpha \quad (6.5)$$

Pri statično določenih gradbenih konstrukcijah so vplivnice vedno premice. Trditev lahko dokažemo z vplivom statično ekvivalentne obtežbe na vrednost reakcijske sile Y_B na prosto ležečem nosilcu (Slika 6.3).



Slika 6.3: Vpliv statično enakovredne obtežbe na podporno silo Y_B

Na prostoležeči nosilec deluje v točki 0 vertikalna koncentrirana sila F_0 , ki jo nadomestimo z ekvivalentnim sistemom dveh vertikalnih sil F_1 in F_2 , ki delujeta na medsebojni razdalji s oz. v točkah 1 in 2 (Slika 6.3). Oba sistema sil sta statično ekvivalentna v kolikor imata enaki rezultantni sili ter enaka rezultantna momenta na poljubno točko v prostoru (v ravnini nosilca pri 2D primerih).

$$F_0 = F_1 + F_2$$

$$F_0 \cdot (s - a) = F_2 \cdot s \quad F_2 = F_0 \cdot \frac{(s - a)}{s}$$

$$F_0 \cdot a = F_1 \cdot s \quad F_1 = F_0 \cdot \frac{a}{s}$$

Vpliva obeh statično ekvivalentnih sistemov sil na reakcijo Y_B morata biti enaka:

$$F_0 \cdot y_{Y_B0} = F_1 \cdot y_{Y_B1} + F_2 \cdot y_{Y_B2} = F_0 \cdot \frac{a}{s} \cdot y_{Y_B1} + F_0 \frac{(s - a)}{s} \cdot y_{Y_B2}$$

$$y_{Y_B0} = \frac{a}{s} \cdot y_{Y_B1} + \frac{(s - a)}{s} \cdot y_{Y_B2} \quad (6.6)$$

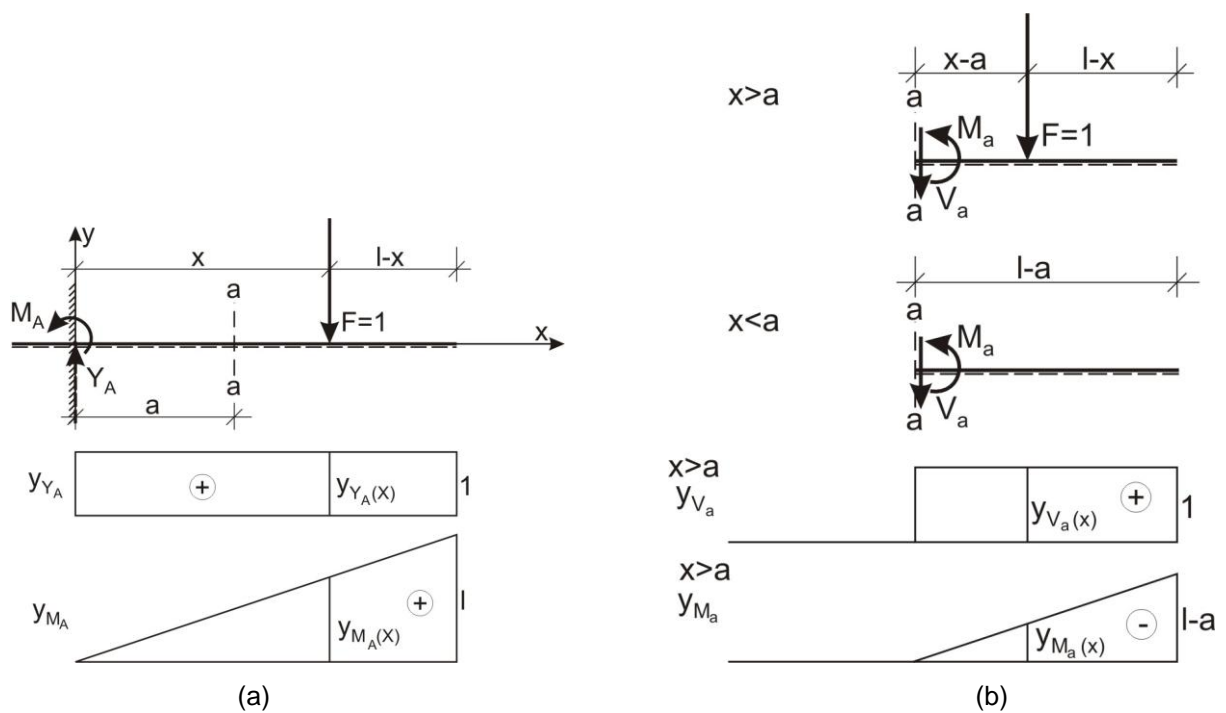
Izraz (6.6) predstavlja enačbo vplivnice med točkama 1 in 2, ki je nedvomno premica.

6.2 Statična metoda določanja vplivnic

Po statični metodi določamo vplivnice tako, da določimo vrednosti iskane statične količine (podporne sile, vezne sile in notranje statične količine) za vse realne (mogoče) položaje premične vertikalne obtežbe $F = 1$.

6.2.1 Konzolni nosilec

Vplivnice za zunanje in notranje statične količine določamo na osnovi ravnotežnih pogojev, ki veljajo za ravnotežje ravninskih sistemov sil.



Slika 6.4: Konzolni nosilec; (a) Vplivnici za reakciji Y_A in M_A ter (b) Vplivnici za prečno silo V_a in upogibni moment M_a v prerezu a-a konzolnega nosilca

Vplivnici za podporni sili (Y_A in M_A) :

$$\sum F_{iy} = Y_A - F = 0 \quad Y_A = F = 1 = y_{Y_A} = \text{const.} \quad (6.7)$$

$$\sum M^A = M_A - F \cdot x = 0 \quad M_A = F \cdot x = x = y_{M_A} \quad (6.8)$$

Ordinate vplivnic za vpetostne momente (dvojice sil) izražamo v metrih.

Vplivnici za notranje statične količine v prerezu a-a (za prečno silo V_a in upogibni moment M_a):

$$\begin{array}{ll} (x > a) & (x < a) \\ V_a = F = 1 = y_{V_a} & V_a = 0 = y_{V_a} \end{array} \quad (6.9)$$

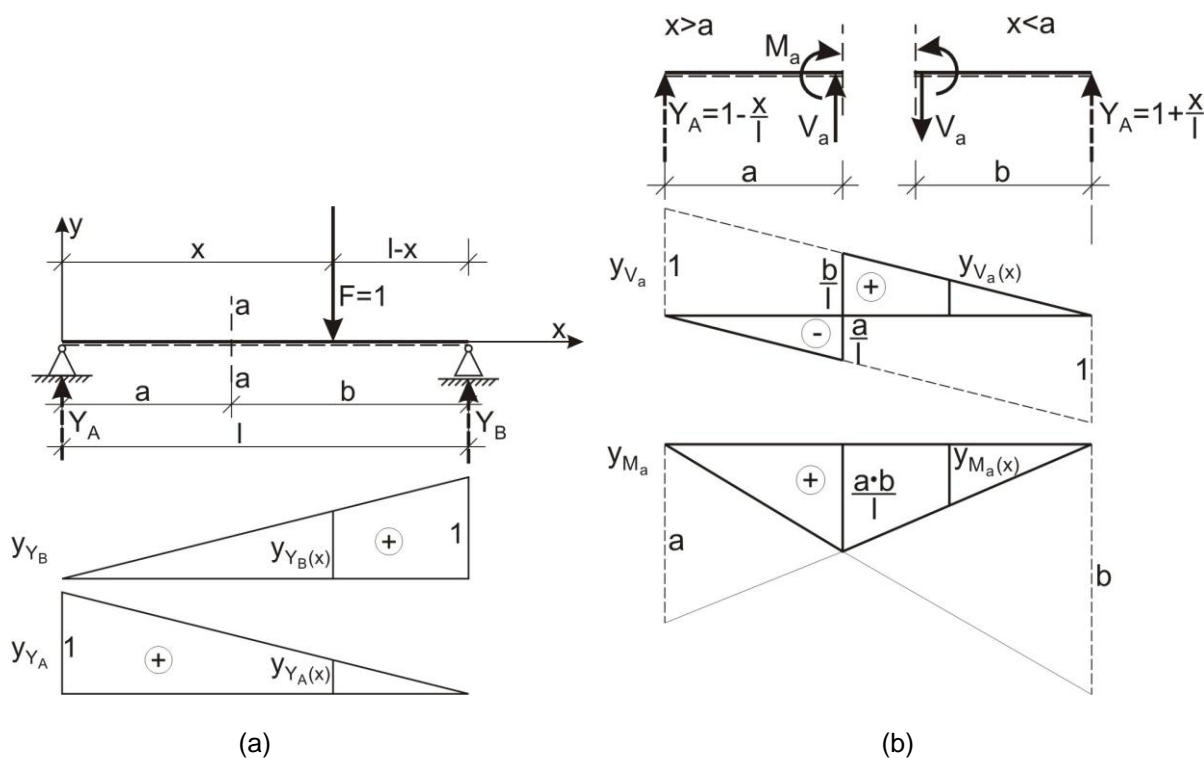
$$\begin{array}{ll} M_a = -F \cdot (x - a) = x - a = y_{M_a} & M_a = 0 = y_{M_a} \end{array} \quad (6.10)$$

6.2.2 Prostoležeči nosilec

Vplivnici za podporni sili (Y_A in Y_B , Slika 6.5a) :

$$\sum M^A = Y_B \cdot \ell - F \cdot x = 0 \quad Y_B = F \cdot \frac{x}{\ell} = \frac{x}{\ell} = y_{Y_B} \quad (6.11)$$

$$\sum F_{iy} = Y_A + Y_B - F = 0 \quad Y_A = F - Y_B = 1 - \frac{x}{\ell} = y_{Y_A} \quad (6.12)$$



Slika 6.5: Prosto ležeči nosilec: (a) vplivnici za reakciji Y_A in Y_B ter (b) Vplivnici za prečno silo V_a in upogibni moment M_a v prerezu a-a nosilca

Vplivnici za notranje statične količine v prerezu a-a (za prečno silo V_a in upogibni moment M_a) določimo na osnovi ravnotežnih pogojev za levi ali desni del nosilca, ki ga s prerezom a-a razdelimo na dva dela:

($x > a$)

$$V_a = Y_A = 1 - \frac{x}{\ell} = y_{V_a}$$

$$x = \ell \quad y_{V_a} = 0$$

$$x = a + \Delta x \quad y_{V_a} = 1 - \frac{a}{\ell} = \frac{b}{\ell}$$

$$M_a = Y_A \cdot a = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \cdot a = y_{M_a}$$

$$x = \ell \quad y_{M_a} = 0$$

$$x = a \quad y_{M_a} = \left(1 - \frac{a}{\ell}\right) \cdot a = \frac{a \cdot b}{\ell}$$

($x < a$)

$$V_a = -Y_B = -\frac{x}{\ell} = y_{V_a} \quad (6.13)$$

$$x = 0 \quad y_{V_a} = 0$$

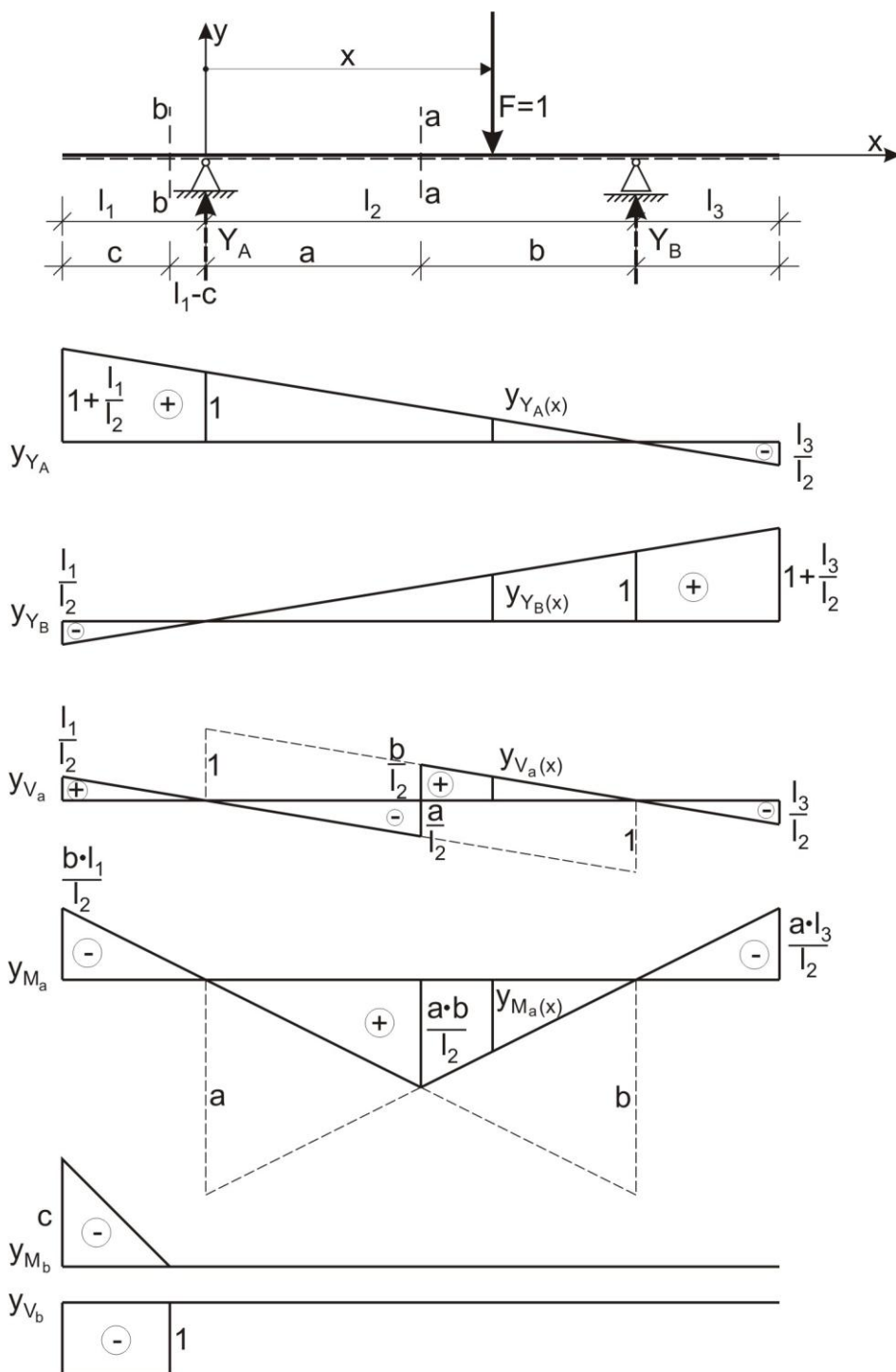
$$x = a - \Delta x \quad y_{V_a} = -\frac{a}{\ell}$$

$$M_a = Y_B \cdot b = \frac{b \cdot x}{\ell} = y_{M_a} \quad (6.14)$$

$$x = 0 \quad y_{M_a} = 0$$

$$x = a \quad y_{M_a} = \frac{a \cdot b}{\ell}$$

6.2.3 Previsni nosilec



Slika 6.6: Vplivnice za podporne sile ter za notranje statične količine za previsni nosilec v ravnini

Vplivnici za podporne sili (Y_A in Y_B , Slika 6.6):

Na območju med podporama na dolžini l_2 sta vplivnici za vertikalni reakciji Y_A in Y_B enaki kot pri prostoležečem nosilcu (Slika 6.5a). Ker pa vemo, da so pri statično določenih ravninskih nosilcih vplivnice vedno premice (izraz 6.6, Slika 6.3) ju načrtamo tako, da ju enostavno podaljšamo preko obeh previsnih polj.

Vplivnici za prečne sile V_a in upogibni moment M_a v prerezu a-a ter za V_b in M_b v prerezu b-b (Slika 6.6):

Za prečne sile V_a in upogibne momente M_a v vseh prerezih med obema podporama sta na območju ℓ_2 vplivnici povsem enaki kot pri prostoležečem nosilcu (Slika 6.5b). Za primer obtežbe na območju med obema podporama je previsni nosilec statično enakovreden prostoležečemu nosilcu. Ker pa vemo, da so pri statično določenih ravninskih nosilcih vplivnice vedno premice (izraz 6.6, Slika 6.3) ju na območju previsnih polj določimo tako, da ju enostavno podaljšamo preko previsnih območij.

Vplivnici za prečne sile V_b in upogibne momente M_b v vseh prerezih na območjih obeh previsnih polj ℓ_1 in ℓ_3 so enake vplivnicam za notranje statične količine na konzolnih nosilcih (Slika 6.4).

6.2.4 Gerber-jev nosilec

Gerber-jevi nosilci so sestavljeni iz posameznih prostoležečih, previsnih in tudi konzolno vpetih nosilcev.

Konstruiranje vplivnic na Gerber-jevih konstrukcijah pričnemo vedno na tistem nosilcu, kjer vplivnico iščemo oz. določamo ter upoštevamo pravilo, da so pri vseh statično določenih gradbenih konstrukcijah vplivnice vedno premice.

Upoštevati je potrebno tudi pomembno lastnost Gerber-jevih konstrukcij, za katere je znano, da se statični vplivi ne morejo prenašati iz primarnih na sekundarne elemente (nosilce) analizirane konstrukcije.

Slika 6.7 prikazuje najenostavnejši primer Gerber-jevega nosilca, ki ga sestavljata primarni in sekundarni nosilec.

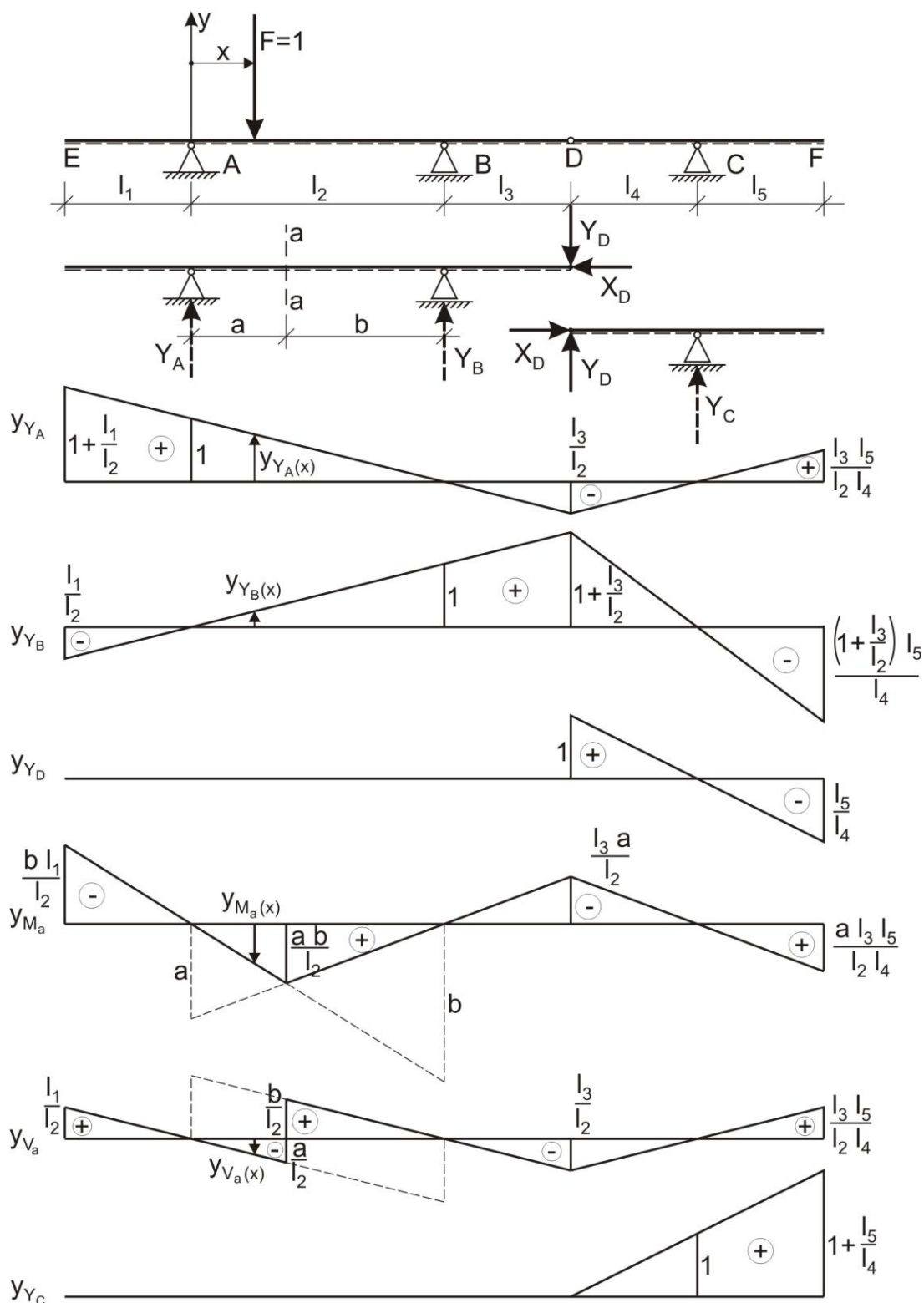
Vplivnici za reakciji Y_A in Y_B sta na celotnem območju primarnega nosilca enaki vplivnicam za obojestransko previsne nosilce (Slika 6.6). Potek obeh vplivnic za reakciji Y_A in Y_B na območju sekundarnega nosilca določimo z upoštevanjem pogoja, da sta obe reakcijski sili identično enaki 0 v kolikor koncentrirana sila $F=1$ deluje na nosilec nad podporo C (Slika 6.7), zato je ordinata obeh vplivnic y_{Y_A} in y_{Y_B} v podpori C enaka 0. Vplivnici za reakciji Y_A in Y_B na sekundarnem nosilcu načrtamo tako, da povežemo že znani vrednosti obeh vplivnic v točkah D in C, saj smo že dokazali, da so vplivnice vedno premice.

Vplivnico za vezno silo Y_D določimo z upoštevanjem ugotovitve, da je sekundarni nosilec konstrukcije nepremično podprt s primarnim nosilcem v točki D ter s premično podporo v točki C. Zato je statično povsem enak prostoležečemu nosilcu s previsom. Vplivnica za vezno silo Y_D pa je zato enaka vplivnici za reakcijo na prostoležečem nosilcu.

Ker se obtežbe iz primarnih nosilcev nikoli ne prenašajo na sekundarne je pripadajoča ordinata vplivnice y_{Y_D} na celotnem območju primarnega nosilca identično enaka 0.

Vplivnica za upogibni moment y_{M_a} v prerezu a-a (Slika 6.7) je na celotnem območju primarnega nosilca E-A-B-D enaka vplivnici za upogibni moment na previsnem nosilcu (Slika 6.6). Ker pa je ordinata vplivnice y_{M_a} v točki C na sekundarnem nosilcu identično enaka 0, jo lahko načrtamo tako, da povežemo znani vrednosti vplivnice v točkah D in C. Na podobni način določimo tudi vplivnico za prečno silo y_{V_a} . Vplivnica za reakcijo y_{Y_C} na odseku D-C-F je enaka vplivnici za reakcijo na prostoležečem

nosilcu s previsom (Slika 6.6). Na primarnem nosilcu je vplivnica za podporno silo y_{Y_C} enaka 0.



Slika 6.7: Gerber-jeva konstrukcija preko treh polj z obojestranskima previsoma

6.2.5 Predalčni nosilci

Vplivnice za paličja konstruiramo na osnovi treh ravnotežnih pogojev: $\sum F_{ix} = 0$, $\sum F_{iy} = 0$ in $\sum M^T = 0$ za ravninske ter z upoštevanjem 6-tih ravnotežnih pogojev za prostorske palične konstrukcije. Pri paličnih konstrukcijah razlikujemo vplivnice za

reakcije in vezne sile ter vplivnice za osne sile v posameznih palicah konstrukcije, ki jih določamo po metodi prereza nosilnih konstrukcij. Pri načrtovanju vplivnic moramo upoštevati vse realno mogoče kritične položaje premične obtežbe ter že poznano pravilo, da so vplivnice pri vseh statično določenih konstrukcijah sestavljene iz več linearnih funkcij (imajo obliko poligona). Tudi v tem primeru nam vplivnice predstavljajo velikosti zunanjih in notranjih statičnih količin za obtežitev konstrukcije z vertikalno silo $F = 1$.

Za palično konstrukcijo (Slika 6.8) najprej določimo vplivnici za reakciji Y_A in Y_B , ki sta enaki kot pri prostoležečih upogibnih nosilcih.

$$y_{Y_A(x)} = 1 - \frac{x}{\ell} \qquad y_{Y_B(x)} = \frac{x}{\ell}$$

Vplivnice za osne sile določamo po prerezni metodi. Vplivnico za osno silo S_1 določimo z upoštevanjem ravnotežnih pogojev za levi ali desni del prerezanega nosilca (Slika 6.8).

Vplivnica za osno silo S_1 :

$$(3a \leq x \leq 5a) \qquad \sum M^{(LD)} = S_1 \cdot h - Y_A \cdot 2a = 0 \qquad S_1 = Y_A \cdot \frac{2a}{h}$$

$$y_{S_1} = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \cdot \frac{2a}{h}$$

$$x = 3a \qquad y_{S_1} = \left(1 - \frac{3a}{5a}\right) \cdot \frac{2a}{h} = \frac{4a}{5h}$$

$$x = 5a \qquad y_{S_1} = 0$$

$$(0 \leq x \leq 2a) \qquad \sum M^{(DD)} = Y_B \cdot 3a - S_1 \cdot h = 0 \qquad S_1 = Y_B \cdot \frac{3a}{h}$$

$$y_{S_1} = \frac{3x}{5h}$$

$$x = 2a \qquad y_{S_1} = \frac{6a}{5h}$$

$$x = 0 \qquad y_{S_1} = 0$$

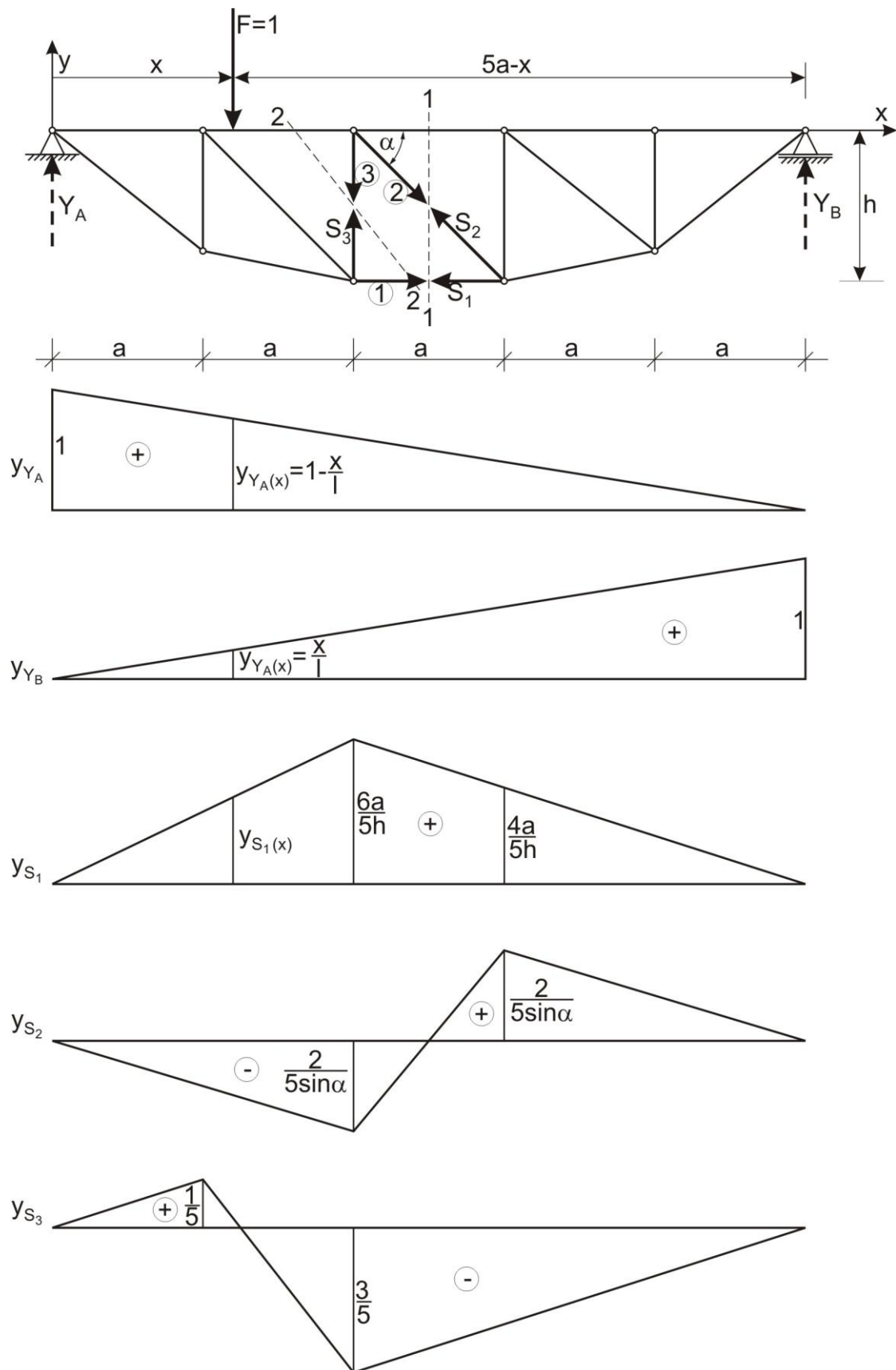
Vplivnica za osno silo S_2 :

$$(3a \leq x \leq 5a) \qquad \sum F_{iy}^{(LD)} = Y_A - S_2 \sin \alpha = 0 \qquad S_2 = \frac{Y_A}{\sin \alpha}$$

$$y_{S_1} = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \cdot \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$x = 3a \qquad y_{S_2} = \left(1 - \frac{3a}{5a}\right) \cdot \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{2}{5 \cdot \sin \alpha}$$

$$x = 5a \qquad y_{S_2} = 0$$



Slika 6.8: Vplivnice za reakciji in za osne sile v treh izbranih palicah

$$(0 \leq x \leq 2a) \quad \sum F_{iy}^{(DD)} = Y_B + S_2 \cdot \sin \alpha = 0 \quad S_2 = -\frac{Y_B}{\sin \alpha}$$

$$y_{S_2} = -\frac{x}{5a \cdot \sin \alpha}$$

$$x = 2a$$

$$y_{S_2} = -\frac{2}{5 \cdot \sin \alpha}$$

$$x = 0$$

$$y_{S_2} = 0$$

Vplivnica za osno silo S_3 :

Vplivnico določimo z upoštevanjem ravnotežnih pogojev za levi oz. desni del paličnega nosilca v prerezu 2-2 nosilne konstrukcije (Slika 6.8).

$$(2a \leq x \leq 5a) \quad \sum F_{iy}^{(LD)} = Y_A + S_3 = 0 \quad S_3 = -Y_A$$

$$y_{S_3} = -\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$$

$$x = 2a$$

$$y_{S_3} = -\left(1 - \frac{2a}{5a}\right) = -\frac{3}{5}$$

$$x = 5a$$

$$y_{S_3} = 0$$

$$(0 \leq x \leq a) \quad \sum F_{iy}^{(DD)} = Y_B - S_3 = 0 \quad S_3 = Y_B$$

$$y_{S_3} = \frac{x}{5a}$$

$$x = a$$

$$y_{S_3} = \frac{1}{5}$$

$$x = 0$$

$$y_{S_3} = 0$$

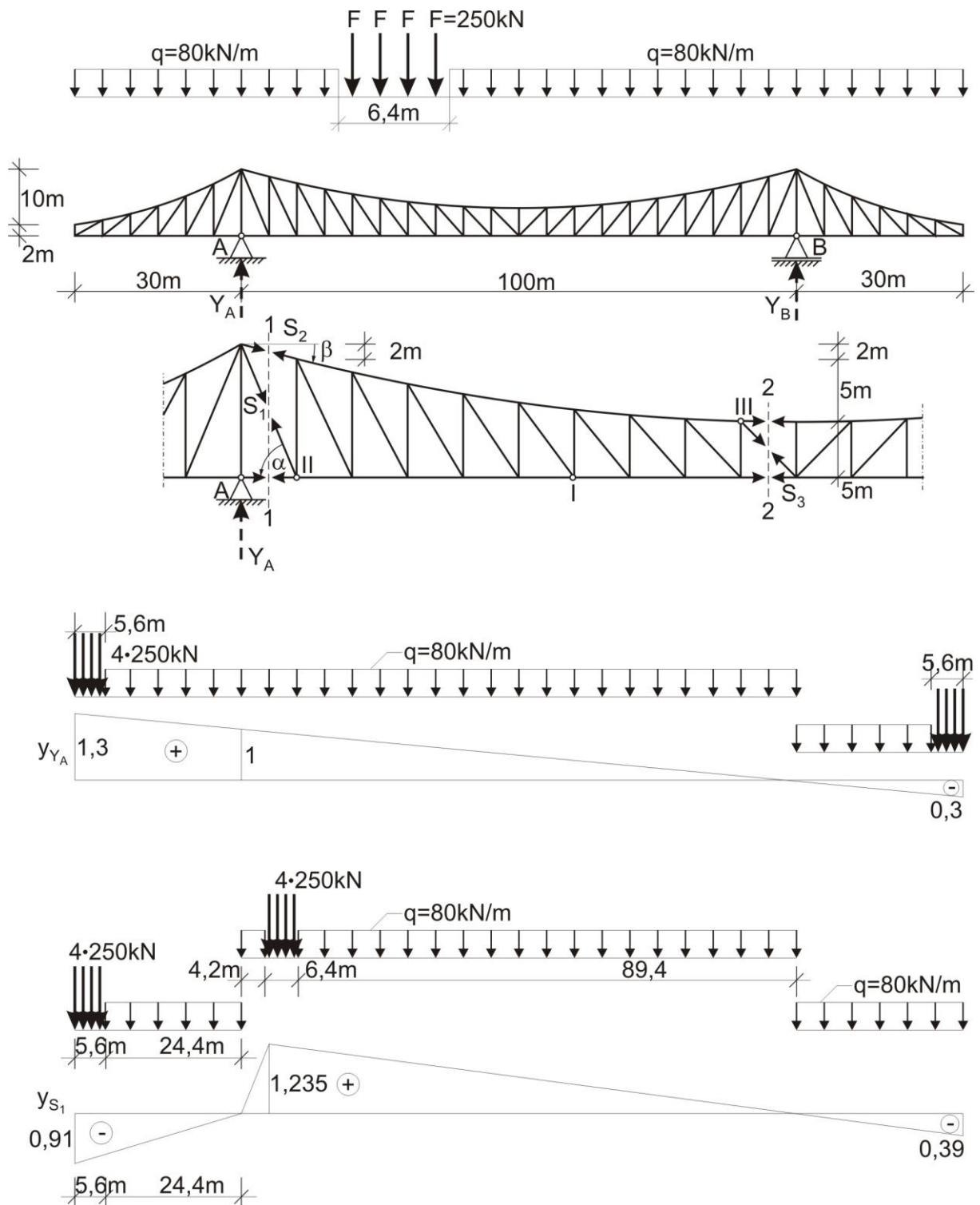
Vse tri vplivnice načrtamo tako, da izračunane vrednosti v posameznih točkah povežemo s premicami, ker že vemo, da so vplivnice zagotovo linearne funkcije (Slika 6.8).

Primer 6.1

Za previsno, palično mostno konstrukcijo na železniški progi dolžine $\ell = 160\text{m}$ je potrebno določiti ekstremne vrednosti (minimalne in maksimalno možne vrednosti) podpornih sil (reakcij) ter osnih sil S_1 , S_2 in S_3 , Slika 6.9 in Slika 6.10.

Slika 6.9 prikazuje projektno shemo prometne obtežbe za tirna vozila za obtežitev nosilne konstrukcije s štirimi koncentriranimi silami $F = 250\text{kN}$ na dolžini konstrukcije 6.4 m ter z enakomerno zvezno obtežbo intenzitete $q = 80\text{kN/m}$ na konstrukciji pred in za prej navedenimi koncentriranimi silami.

V skladnosti z veljavnimi tehničnimi predpisi določimo karakteristično projektno obtežbo objektov na železniških progah tako, da sile na prikazani obtežni shemi pomnožimo s korelacijskim količnikom ψ , ki je odvisen od dejanske prometne obtežbe proge in vrste oz. skupne teže dejanskih vozil na železniški progi in lahko znaša $0.67 \leq \psi \leq 1.5$. Za mednarodne železniške proge je potrebno upoštevati ($\psi \geq 1$). V naši statični analizi bomo tokrat upoštevali $\psi = 1$.



Slika 6.9: Palična mostna konstrukcija, projektna premična prometna obtežba na železnicah ter vplivnici za podporno silo Y_A ter osno silo S_1 v palici 1

Reakcijska sila Y_A :

Vplivnica za reakcijsko silo Y_A na previsnem nosilcu nam je že poznana ter jo določimo z izrazom ($y_{Y_A} = 1 - x/\ell$) ter določimo njene vrednosti v karakterističnih točkah.

$x = 0$	$y_{Y_A(0)} = 1$	$x = 100\text{m}$	$y_{Y_A(100)} = 0$
$x = 130\text{m}$	$y_{Y_A(130)} = -0.3$	$x = -30\text{m}$	$y_{Y_A(-30)} = 1.3$

Vplivnico za podporno silo Y_A prikazuje Slika 6.9.

Z ozirom na prikazani potek vplivnice y_{Y_A} lahko ugotovimo, da bo podporna sila Y_A za upoštevano prometno obtežbo največja v primeru, ko se bodo koncentrirane sile in zvezna obtežba nahajale na srednjem polju konstrukcije (Slika 6.9). Vpliv na reakcijsko silo v podpori A bo največji kadar se bo prva koncentrirana sila nahajala na mestu, kjer je ordinata vplivnice največja.

Za določitev največje možne vrednosti reakcijske sile si določimo vrednosti vplivnice pod vsemi koncentriranimi silami ter ordinate vplivnice na začetku in kraju posameznih odsekov enakomerne zvezne obtežbe.

$$\begin{array}{ll} x = -30\text{m} & y_{Y_A(-30)} = 1.3 \\ x = -26.8\text{m} & y_{Y_A(-26.8)} = 1.268 \\ x = -24.4\text{m} & y_{Y_A(-24.4)} = 1.244 \\ A_{vp.} = 1.244 \cdot 124.4 \cdot 0.5 = 77.3768\text{m} & \end{array} \quad \begin{array}{ll} x = -28.4\text{m} & y_{Y_A(-28.4)} = 1.284 \\ x = -25.2\text{m} & y_{Y_A(-25.2)} = 1.252 \\ x = 100\text{m} & y_{Y_A(100)} = 0 \\ \text{(Površina vplivnice pod obtežbo } q) & \end{array}$$

Največjo možno podporno silo določimo:

$$Y_{A(\text{Max.})} = 250 \cdot (1.3 + 1.284 + 1.268 + 1.252) + 80 \cdot 77.3768 = 7466.144\text{kN}$$

Najmanjša možna reakcijska sila Y_A deluje v podpori A kadar se prometna obtežba s koncentriranimi silami in delom zvezne obtežbe nahaja na levem ter hkrati še enakomerna zvezna obtežba na desnem previsnem polju obravnavane konstrukcije.

$$\begin{array}{ll} x = 130\text{m} & y_{Y_A(130)} = -0.3 \\ x = 126.8\text{m} & y_{Y_A(126.8)} = -0.268 \\ x = 124.4\text{m} & y_{Y_A(124.4)} = -0.244 \\ A_{vp.} = -0.244 \cdot 24.4 \cdot 0.5 = -2.9768\text{m} & \end{array} \quad \begin{array}{ll} x = 128.4\text{m} & y_{Y_A(128.4)} = -0.284 \\ x = 125.2\text{m} & y_{Y_A(125.2)} = -0.252 \\ x = 100\text{m} & y_{Y_A(100)} = 0 \\ \text{(Površina vplivnice pod obtežbo } q) & \end{array}$$

$$Y_{A(\text{Min.})} = 250 \cdot (-0.3 - 0.284 - 0.268 - 0.252) + 80 \cdot (-2.9768) = -514.144\text{kN}$$

Ekstremni vrednosti podporne (reakcijske) sile Y_B sta zaradi simetrije enaki vrednostim podporne sile Y_A .

Oсна sila S_1 v palici 1 (diagonala v točki II):

Vplivnico za osno silo S_1 določimo s prerezom 1-1 konstrukcije (Slika 6.9).

$$(-30 \leq x \leq 0)$$

$$\begin{array}{ll} \sum M^{(DD)} = Y_B \cdot 70 - S_1 \cdot \sin \alpha \cdot 25 = 0 & S_1 = \frac{70 \cdot Y_B}{25 \cdot \sin \alpha} \quad y_{S_1} = 0.03033 \cdot x \\ x = -30\text{m} & y_{S_1(-30)} = -0.91 \\ x = 0\text{m} & y_{S_1(0)} = 0 \end{array}$$

$$(5 \leq x \leq 130)$$

$$\begin{array}{ll} \sum M^{(LD)} = Y_A \cdot 30 - S_1 \cdot \sin \alpha \cdot 25 = 0 & S_1 = \frac{30 \cdot Y_A}{25 \cdot \sin \alpha} \quad y_{S_1} = 1.3 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) \\ x = 5\text{m} & y_{S_1(5)} = 1.235 \\ x = 130\text{m} & y_{S_1(130)} = -0.39 \end{array}$$

Vplivnica za osno silo S_1 je prikazana na sliki 6.9.

Oсна sila S_1 doseže največjo vrednost v kolikor se prometna obtežba nahaja na srednjem polju obravnavane konstrukcije.

$$\begin{array}{ll} x = 5\text{m} & y_{S_1(5)} = 1.235 \\ x = 6.6\text{m} & y_{S_1(6.6)} = 1.2142 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
x = 8.2\text{m} & y_{S_1(8.2)} = 1.1934 & x = 9.8\text{m} & y_{S_1(9.8)} = 1.1726 \\
x = 4.2\text{m} & y_{S_1(4.2)} = 1.0374 & x = 10.6\text{m} & y_{S_1(10.6)} = 1.1622 \\
A_{vp.} = 1.0374 \cdot 4.2 \cdot 0.5 + 1.1622 \cdot 89.4 \cdot 0.5 = 54.1289\text{m}
\end{array}$$

$$S_{1(\text{Max.})} = 250 \cdot (1.235 + 1.2142 + 1.1934 + 1.1726) + 80 \cdot 54.1289 = 5534.112\text{kN}$$

Oсна sila S_1 doseže najmanjšo možno vrednost kadar se prometna obtežba nahaja na obeh previsnih poljih konstrukcije.

$$\begin{array}{llll}
x = -30\text{m} & y_{S_1(-30)} = -0.91 & x = -28.4\text{m} & y_{S_1(-28.4)} = -0.8615 \\
x = -26.8\text{m} & y_{S_1(-26.8)} = -0.8129 & x = -25.2\text{m} & y_{S_1(-25.2)} = -0.7644 \\
x = -24.4 & y_{S_1(-24.4)} = -0.7401 & x = 130\text{m} & y_{S_1(130)} = -0.39
\end{array}$$

$$A_{vp.} = -0.7401 \cdot 24.4 \cdot 0.5 - 0.39 \cdot 30 \cdot 0.5 = 14.8796\text{m}$$

$$S_{1(\text{Min.})} = 250 \cdot (-0.91 - 0.8615 - 0.8129 - 0.7644) + 80 \cdot (-14.8796) = -2027.568\text{kN}$$

Oсна sila S_2 v palici 2:

$$(-30 \leq x \leq 0)$$

$$\sum M^{\text{II(DD)}} = Y_B \cdot 95 + S_2 \cdot \cos \beta \cdot 10 = 0 \quad S_2 = -\frac{95 \cdot Y_B}{10 \cdot \cos \beta} \quad y_{S_1} = -0.10232 \cdot x$$

$$x = -30\text{m} \quad y_{S_2(-30)} = 3.0695 \quad x = 0\text{m} \quad y_{S_2(0)} = 0$$

$$(5 \leq x \leq 130)$$

$$\sum M^{\text{II(LD)}} = Y_A \cdot 5 + S_2 \cdot \cos \beta \cdot 10 = 0 \quad S_2 = -\frac{5 \cdot Y_A}{10 \cdot \cos \beta} \quad y_{S_1} = -0.5385 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)$$

$$x = 5\text{m} \quad y_{S_2(5)} = -0.5116 \quad x = 130\text{m} \quad y_{S_2(130)} = 0.16155$$

Vplivnico za osno silo S_2 prikazuje Slika 6.10.

Oсна sila S_2 doseže največjo možno vrednost kadar se prometna obtežba nahaja na obeh previsnih poljih konstrukcije.

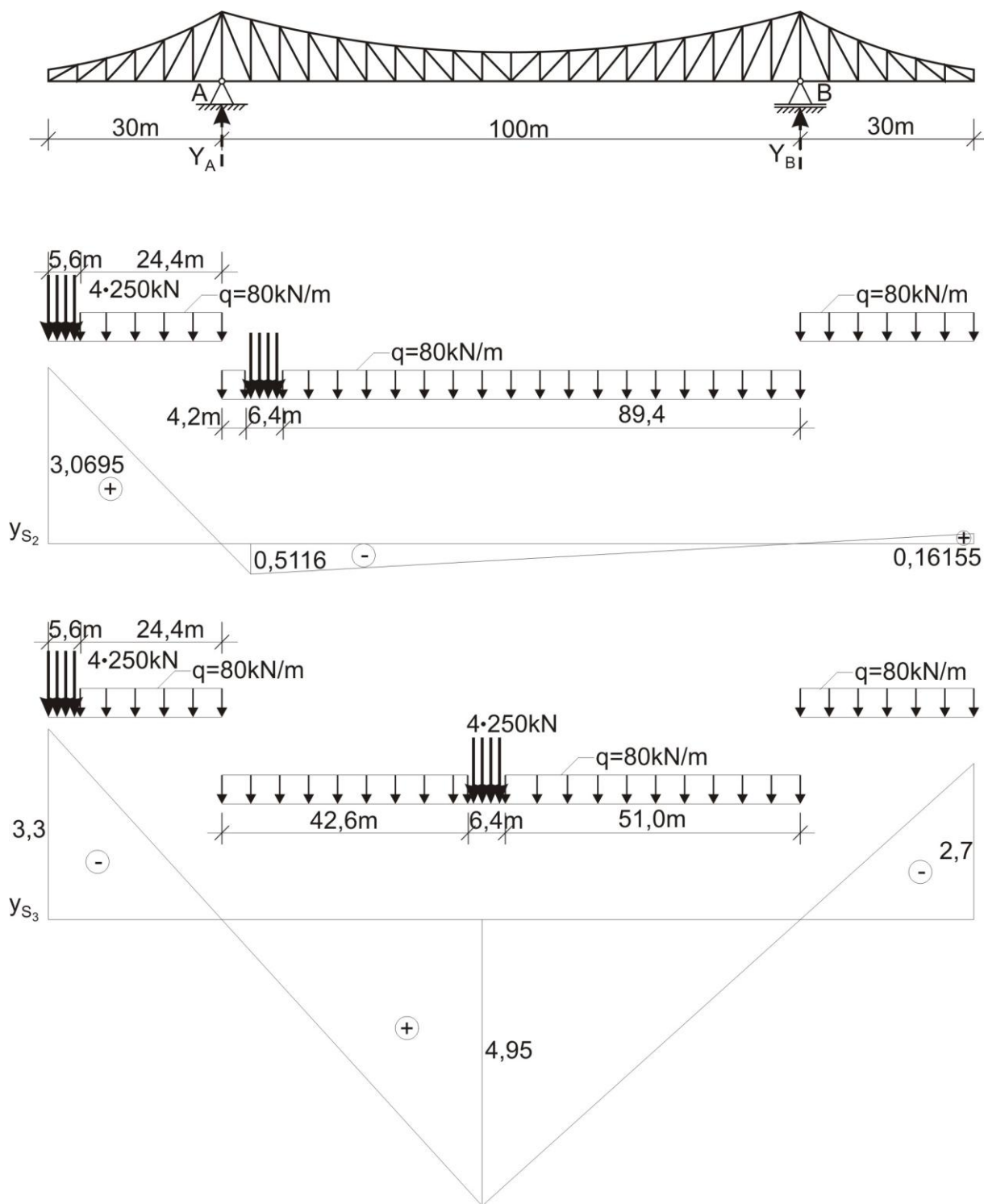
$$x = -30\text{m} \quad y_{S_2(-30)} = 3.0695 \quad x = -28.4\text{m} \quad y_{S_2(-28.4)} = 2.9058$$

$$x = -26.8\text{m} \quad y_{S_2(-26.8)} = 2.7421 \quad x = -25.2\text{m} \quad y_{S_2(-25.2)} = 2.5784$$

$$x = -24.4 \quad y_{S_2(-24.4)} = 2.4966$$

$$A_{vp.} = 2.4966 \cdot 24.4 \cdot 0.5 + 0.16155 \cdot 30 \cdot 0.5 = 32.8818\text{m}$$

$$S_{1(\text{Max.})} = 250 \cdot (3.0695 + 2.9058 + 2.7421 + 2.5784) + 80 \cdot 32.8818 = 5454.494\text{kN}$$



Slika 6.10: Vplivnici za osni sili S_2 in S_3 na palični konstrukciji

Osna sila S_2 doseže najmanjšo vrednost v kolikor se prometna obtežba nahaja na srednjem polju konstrukcije.

$$\begin{aligned}
 x = 5\text{m} & \quad y_{S_2(5)} = -0.5116 & x = 6.6\text{m} & \quad y_{S_2(6.6)} = -0.503 \\
 x = 8.2\text{m} & \quad y_{S_2(8.2)} = -0.4944 & x = 9.8\text{m} & \quad y_{S_2(9.8)} = -0.4858 \\
 x = 4.2\text{m} & \quad y_{S_2(4.2)} = -0.4297 & x = 10.6\text{m} & \quad y_{S_2(10.6)} = -0.4814 \\
 A_{vp} & = -0.4279 \cdot 4.2 \cdot 0.5 - 0.4814 \cdot 89.4 \cdot 0.5 = -22.4172\text{m}
 \end{aligned}$$

$$S_{1(\text{Max.})} = 250 \cdot (-0.5116 - 0.503 - 0.4944 - 0.4858) + 80 \cdot (-22.4172) = -2292.074 \text{ kN}$$

Osna sila S_3 v palici 3:

Vplivnico za osno silo S_3 določimo s prerezom 2-2 konstrukcije (Slika 6.9).

$$(-30 \leq x \leq 45)$$

$$\sum M^{\text{III(DD)}} = Y_B \cdot 55 - S_3 \cdot 5 = 0 \quad S_3 = 11 \cdot Y_B \quad y_{S_3} = 0.11 \cdot x$$

$$x = -30 \text{ m} \quad y_{S_3(-30)} = -3.3 \quad x = 45 \text{ m} \quad y_{S_3(45)} = 4.95$$

$$(50 \leq x \leq 130)$$

$$\sum M^{\text{III(LD)}} = Y_A \cdot 45 - S_3 \cdot 5 = 0 \quad S_3 = 9 \cdot Y_A \quad y_{S_3} = 9 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)$$

$$x = 50 \text{ m} \quad y_{S_3(50)} = 4.5 \quad x = 130 \text{ m} \quad y_{S_3(130)} = -2.7$$

Osna sila S_3 doseže največjo možno vrednost kadar se prometna obtežba nahaja v srednjem polju konstrukcije.

$$x = 43.4 \text{ m} \quad y_{S_3(43.4)} = 4.774 \quad x = 45 \text{ m} \quad y_{S_3(45)} = 4.95$$

$$x = 46.6 \text{ m} \quad y_{S_3(46.6)} = 4.806 \quad x = 48.2 \text{ m} \quad y_{S_3(48.2)} = 4.662$$

$$x = 42.6 \text{ m} \quad y_{S_3(42.6)} = 4.686 \quad x = 49 \text{ m} \quad y_{S_3(49)} = 4.59$$

$$A_{\text{vp.}} = 4.686 \cdot 42.6 \cdot 0.5 + 4.59 \cdot 51 \cdot 0.5 = 216.8568 \text{ m}$$

$$S_{1(\text{Max.})} = 250 \cdot (4.774 + 4.95 + 4.806 + 4.662) + 80 \cdot 216.8568 = 22146.544 \text{ kN}$$

Osna sila S_3 doseže najmanjšo možno vrednost kadar se prometna obtežba nahaja na obeh previsnih poljih konstrukcije.

$$x = -30 \text{ m} \quad y_{S_3(-30)} = -3.3 \quad x = -28.4 \text{ m} \quad y_{S_3(-28.4)} = -3.124$$

$$x = -26.8 \text{ m} \quad y_{S_3(-26.8)} = -2.948 \quad x = -25.2 \text{ m} \quad y_{S_3(-25.2)} = -2.772$$

$$x = -24.4 \quad y_{S_3(-24.4)} = -2.684$$

$$A_{\text{vp.}} = -2.684 \cdot 24.4 \cdot 0.5 - 2.7 \cdot 30 \cdot 0.5 = -73.2448 \text{ m}$$

$$S_{1(\text{Min.})} = 250 \cdot (-3.3 - 3.124 - 2.948 - 2.772) + 80 \cdot (-73.2448) = -8895.584 \text{ kN}$$

7 TRENJE IN LEPENJE

Pri relativnem gibanju dveh teles se v njihovi medsebojni kontaktni površini pojavi sila, ki otežuje oz. preprečuje njune relativne premike. Ta sila je pasivna, ker je odvisna od delovanja drugih oz. aktivnih sil ter ji pravimo tudi sila trenja.

Kadar neko telo drsi po površini drugega telesa tedaj sili, ki gibanju nasprotuje pravimo sila suhega ali sila drsnega trenja.

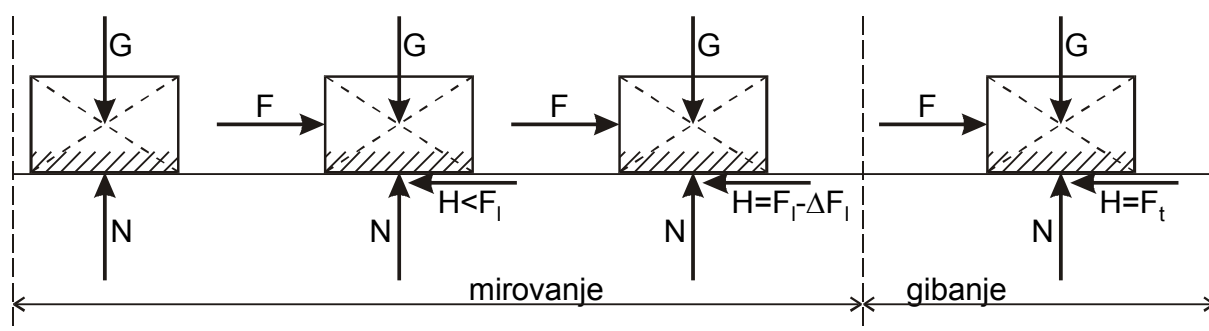
Kadar se valjasto telo kotali po površini drugega telesa brez drsenja imamo opravka s silo kotalnega trenja.

Pri gibajočih se telesih v tekočinah imamo opravka s silo viskoznega trenja.

Trenjske sile se pojavljajo tako pri uravnoveženih kot tudi pri neuravnoveženih sistemih togih teles. Sile trenja so ponekod koristne (zaviranje, vzpostavitev ravnotežja), mnogokrat pa tudi škodljive, ker povečujejo porabo energije.

7.1 Coulombovo trenje

Coulombovo trenje se pojavlja pri relativnem gibanju dveh teles v njihovi medsebojni kontaktni površini brez maziva (Slika 7.1).



Slika 7.1: Sila lepenja in sila trenja

Opazujemo togo telo teže G na katerega deluje le gravitacijsko polje sil ter sila podlage N , ki je v ravnotežju z delujočo silo teže G , ki deluje v težišču telesa. V kolikor na mirujoče telo delujemo še s horizontalno silo F tako, da togo telo ne zarotira oz. kako drugače ne izgubi ravnotežja, se na hrapavi kontaktni površini med telesom in podlago pojavi horizontalna sila H , ki je v ravnotežju s horizontalno aktivno silo F .

Pri postopnem naraščanju aktivne sile F tudi horizontalna sila H v kontaktni površini postopoma narašča ter doseže največjo vrednost tik preden se telo premakne. Največji horizontalni (tangencialni) sili v kontaktni površini pravimo sila lepenja F_{ℓ} in razmerju med silo lepenja in normalno silo v kontaktni površini količnik lepenja k_{ℓ} .

$$F_{\ell} = k_{\ell} \cdot N \quad k_{\ell} = \frac{F_{\ell}}{N} = \frac{F_{\text{Max.}}}{N} \quad (7.1)$$

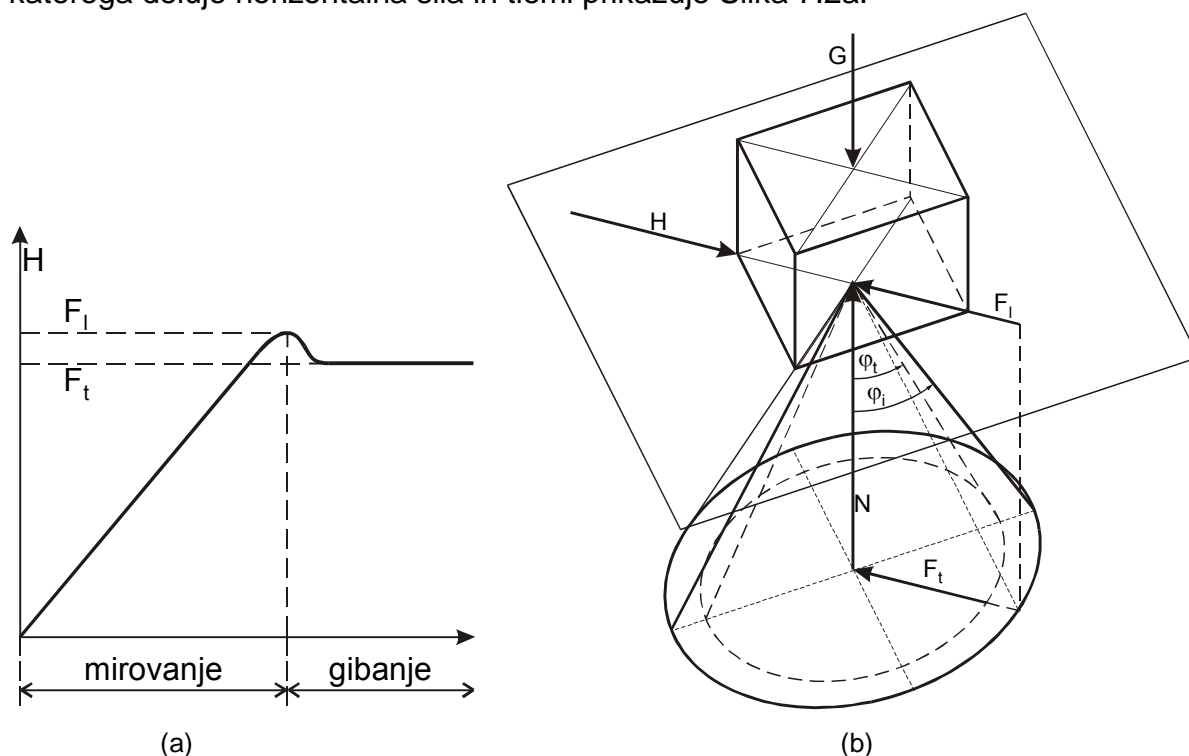
Pri nadaljnjem premikanju potrebna horizontalna sila F nekoliko upade (Slika 7.2a) ter preostalo tangencialno silo imenujemo silo drsnega (kinetičnega) trenja F_t ter razmerju med silo trenja in normalno silo v kontaktni površini količnik trenja k_t .

$$F_t = k_t \cdot N \quad k_t = \frac{F_t}{N} \quad (7.2)$$

S preizkusi je mogoče dokazati naslednje lastnosti trenjskih sil:

1. Sila trenja deluje v smeri tangente na kontaktno površino v nasprotni smeri gibanja, ki bi nastalo v kolikor v kontaktni površini ne bi bilo sile trenja oz. lepenja.
2. Tangencialna sila v kontaktni površini med telesoma, ki se relativno ne premikata se imenuje sila lepenja. Največja sila lepenja nastane v kontaktni površini med dvema telesoma tik preden se telesi premakneta ter je po velikosti približno proporcionalna normalni sili.
3. Sila lepenja (pravimo ji tudi sila statičnega trenja) ni odvisna od velikosti kontaktne površine v kolikor se ne spremeni oblika oz. hrapavost kontaktne površine.
4. Sila trenja (kinetičnega trenja) se pojavi v kontaktni površini med dvema telesoma kadar se telesi relativno premikata.
5. Sila lepenja je vedno večja od sile trenja (izjeme so specialni materiali npr. teflon).
6. Količnik lepenja in količnik trenja sta odvisna le od stopnje gladkosti in vrste obeh materialov v njuni medsebojni kontaktni površini.

Postopno naraščanje horizontalne sile v kontaktni površini med togim telesom na katerega deluje horizontalna sila in tlemi prikazuje Slika 7.2a.



Slika 7.2: Sile trenja in lepenja: (a) Tangencialna sila pri mirovanju in premikanju telesa ter (b) Stožca trenja in lepenja v prostoru

Mejne vrednosti sile trenja oz. lepenja lahko ponazorimo tudi s stožcem trenja oz. lepenja (Slika 7.2b). Rezultantna sila podlage pri lepenju $\vec{Q}_\ell = \vec{N} + \vec{F}_\ell$ se ob poljubni obtežbi togega telesa (Slika 7.2b) ob mejnem stanju (tik predno se togo telo premakne) vedno nahaja na plašču stožca lepenja. Podobna ugotovitev velja tudi za silo in pripadajoči trenjski stožec.

$$k_{\ell} = \frac{F_{\ell}}{N} = \operatorname{tg}\varphi_{\ell} \qquad \varphi_{\ell} = \operatorname{atg}(k_{\ell}) \qquad (7.3)$$

$$k_t = \frac{F_t}{N} = \operatorname{tg}\varphi_t \qquad \varphi_t = \operatorname{atg}(k_t) \qquad (7.4)$$

Pri mehanskih analizah lahko upoštevamo naslednje izkustvene vrednosti količnikov trenja in lepenja:

Materiali	Količnik lepenja k_{ℓ}	Količnik trenja k_t
Jeklo - led	0.03	0.015
Jeklo - jeklo	0.15 - 0.5	0.1 - 0.4
Jeklo - teflon	0.04	0.04
Usnje – jeklo	0.4	0.3
Les – les	0.51	0.5
Pnevmatika – asfalt	0.7 – 0.9	0.5 – 0.8
Smuči – sneg	0.1 – 0.3	0.04 – 0.2

Primer 1:

Najprej bomo obravnavali lestev dolžine L s težo G_1 po kateri se bo povzpel krovec teže G_2 . Določiti je potrebno najmanjši možni nagib lestve α pri katerem se bo krovec še lahko povzpel po lestvi, če je količnik lepenja med lestvijo in tlemi ter steno $k_{\ell} = 0.5$ in razmerje med težo lestve in težo krovca $G_1 = G_2 / 5$ (Slika 7.3).

Lestev je oprta ob tla v točki 1 ter naslonjena na steno v točki 2 (Slika 7.3). Nedvoumno bo za stabilnost lestve najbolj kritično, ko se bo krovec nahajal na vrhu lestve in bo sila G_2 delovala na lestev v točki 2. Tik pred zdrsom lestve navzdol se bosta v točkah 1 oz. 2 aktivirali sili lepenja $F_{\ell_1} = k_{\ell_1} \cdot N_1$ oz. $F_{\ell_2} = k_{\ell_2} \cdot N_2$, ki vedno delujeta v nasprotni smeri potencialnega (možnega) premika lestve.

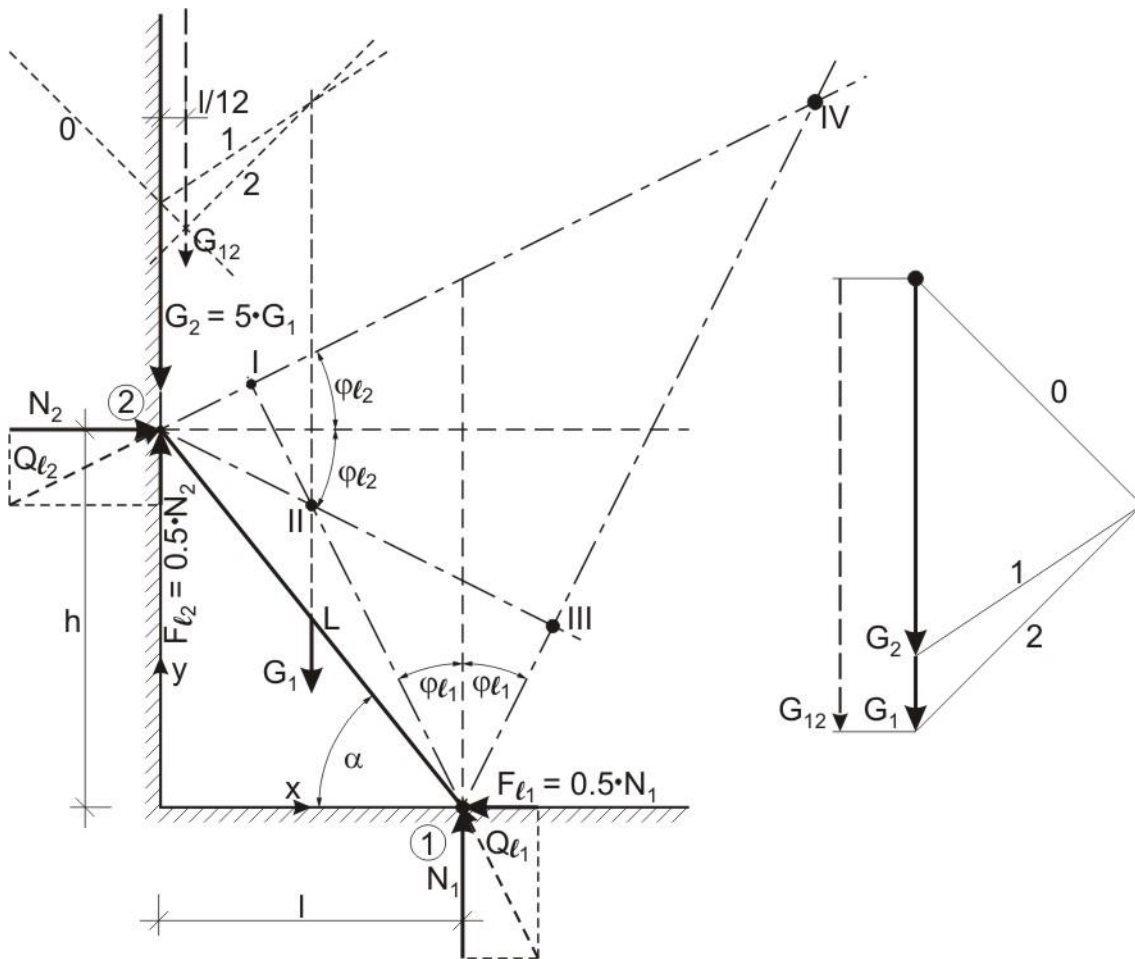
Ob mejnem stanju (tik pred zdrsom) lestve se tako v točkah 1 in 2 aktivirata sili podlage, ki delujeta na lestev $\vec{Q}_{\ell_1} = \vec{F}_{\ell_1} + \vec{N}_1$ oz. $\vec{Q}_{\ell_2} = \vec{F}_{\ell_2} + \vec{N}_2$, ki sta za kot lepenja $\varphi_{\ell_1} = \operatorname{atg}(k_{\ell_1}) = 26.565^{\circ}$ oz. $\varphi_{\ell_2} = \operatorname{atg}(k_{\ell_2}) = 26.565^{\circ}$ odklonjeni od normale na tla oz. od normale na steno v točkah 1 oz. 2.

Na lestev delujeta aktivni sili G_1 in G_2 katerih vsota $\vec{G}_{12} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2$ deluje v tem primeru na razdalji $\ell/12$ od vertikalnega roba stene (Slika 7.3).

Nalogo rešimo s pogojem ravnotežja vseh sil, ki na lestev delujejo $Q_{\ell_1} + Q_{\ell_2} + G_{12} = 0$ ob izpolnjevanju hkratnega pogoja, da morajo biti momenti vseh sil na poljubno točko v ravnini x-y identično enaki 0.

Lestev doseže najmanjši dopustni nagib lestve $\alpha = \alpha_{\text{Min}}$ v primeru kadar se v točkah 1 in 2 hkrati aktivirata celotni razpoložljivi sili lepenja.

Ker nam je iz statike sil že poznano, da je za tri sile v ravnini Q_{ℓ_1} , Q_{ℓ_2} in G_{12} , ki so v silnem ravnovesju, hkrati izpolnjen tudi momentni ravnotežni pogoj v kolikor se sekajo v skupni točki, lahko zaključimo, da se morajo ob mejnem stanju vse tri sile sekati v točki I (Slika 7.3), da pogoj največjih dopustnih sil lepenja ne bo presežen.



Slika 7.3: Lestev oprta v tla ter naslonjena na zid po kateri se bo povzpel krovec

Nalogo rešimo s pogojem ravnotežja vseh sil, ki na lestev delujejo $Q_{\ell_1} + Q_{\ell_2} + G_{12} = 0$ ob izpolnjevanju hkratnega pogoja, da morajo biti momenti vseh sil na poljubno točko v ravnini x-y identično enaki 0.

Pogoj zapišemo v obliki:

$$L \cdot \sin \alpha + \frac{L \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi_{\ell_2}}{12} = \frac{11 \cdot L \cos \alpha}{12 \cdot \operatorname{tg} \varphi_{\ell_1}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{11}{12 \cdot k_{\ell_1}} - \frac{k_{\ell_1}}{12} = 1.7917 \quad \alpha_{\min.} = 60.832^\circ$$

Enako rešitev lahko dokažemo analitično z uporabo že običajnih treh ravnotežnih pogojev ravnotežja sistemov sil v ravnini.

$$\sum F_{ix} = N_2 - k_{\ell_1} \cdot N_1 = 0 \quad N_2 = 0.5 \cdot N_1$$

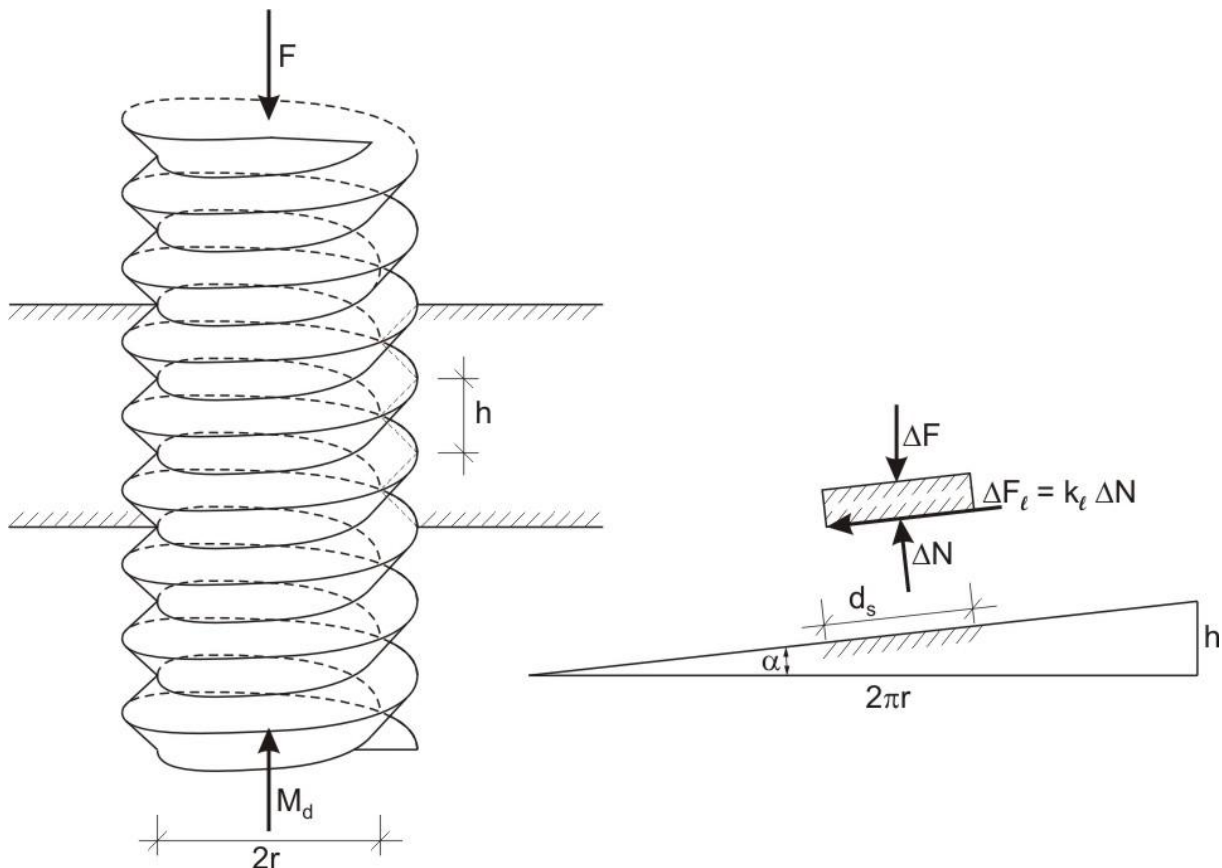
$$\sum F_{iy} = N_1 + k_{\ell_2} \cdot N_2 - 6 \cdot G_1 = 0 \quad N_1 = \frac{6 \cdot G_1}{1 + k_{\ell_1} \cdot k_{\ell_2}} \quad N_2 = \frac{k_{\ell_1} \cdot 6 \cdot G_1}{1 + k_{\ell_1} \cdot k_{\ell_2}}$$

$$\sum M^0 = N_2 \cdot L \cdot \sin \alpha + G_1 \cdot L \cdot \cos \alpha / 2 - N_1 \cdot L \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{N_1 - G_1 / 2}{N_2} = \frac{6 \cdot G_1 - G_1 \cdot (1 + k_{\ell_1} \cdot k_{\ell_2}) / 2}{k_{\ell_1} \cdot 6 \cdot G_1} = \frac{1 - (1 + k_{\ell_1} \cdot k_{\ell_2}) / 2}{k_{\ell_1}} = 1.7917$$

Primer 2:

Obravnavamo vijajčno dvigalko oz. lahko tudi stiskalnico, kjer z vrtenjem vijaka nazivnega premera $2r$ z momentom M_d delujemo s silo F na poljubno telo v prostoru. Vijak je s svojim navojem gostote h na dolžini s vpet v jekleno ploščo, ki je oprta ob tla (Slika 7.4). Določiti je potrebno velikost navora M_d , ki je potreben za dviganje oz. spuščanje tovora teže $G = F$.



Slika 7.4: Trenje in lepenje pri vijakih

Analiziramo ravnotežje vijaka obremenjenega s silo F , navorom M_d ter z normalno silo N in tangencialno silo F_ℓ , ki se iz jeklene plošče preko navoja prenaša na vijak. Tik pred premikom vijaka navzgor na navoj deluje sila lepenja ter ravnotežni enačbi podamo v naslednji obliki:

$$\sum F_{iy} = F + \int_s dF_\ell \cdot \sin \alpha - \int_s dN \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\sum M_y = M_d - r \cdot \int_s dN \cdot \sin \alpha - r \cdot \int_s dF_\ell \cdot \cos \alpha = 0$$

Napetosti po celotni dolžini navoja so neenakomerno porazdeljene, vendar lahko vsoti vseh napetosti, ki delujejo na navoj določimo z izrazoma $\int_s dN = N$ in $\int_s dF_\ell = F_\ell = k_\ell \cdot N$.

$$F = N \cdot \cos \alpha - k_\ell \cdot N \cdot \sin \alpha$$

$$M_d = r \cdot N \cdot \sin \alpha - r \cdot k_\ell \cdot N \cdot \cos \alpha$$

$$N = \frac{F}{\cos \alpha - k_\ell \cdot \sin \alpha}$$

$$M_d = \frac{r \cdot F \cdot (\sin \alpha + k_\ell \cdot \cos \alpha)}{\cos \alpha - k_\ell \cdot \sin \alpha} = r \cdot F \cdot \frac{(\operatorname{tg} \alpha + k_\ell)}{(1 - k_\ell \cdot \operatorname{tg} \alpha)} = F \cdot r \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi_\ell)$$

Podobno določimo potrebni moment ob spuščanju tovora:

$$M_d = F \cdot r \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \varphi_\ell)$$

Z ozirom, da je kot lepenja večji od kota trenja predstavlja izračunani moment M_d največjo potrebno vrednost pri dviganju oz. najmanjšo vrednost momenta pri spuščanju tovora.

Primer 3:

Obravnavamo neraztegljivo vrv, ki drsi na stabilnem kolutu (Slika 7.5). Pri drsenju vrvi na stabilnem kolutu je sila na prosti strani G vedno manjša od sile na vlečni strani F , ki deluje v smeri premikanja vrvi. Razliko obeh sil predstavlja sila lepenja (tik pred zdrsom vrvi) oz. sila trenja, ko prične vrv drseti po stabilnem kolutu.

Infinitezimalno majhni del vrvi dolžine ds (Slika 7.5) mora biti v ravnotežju, ker upoštevamo gibanje vrvi brez pospeška (statično trenje):

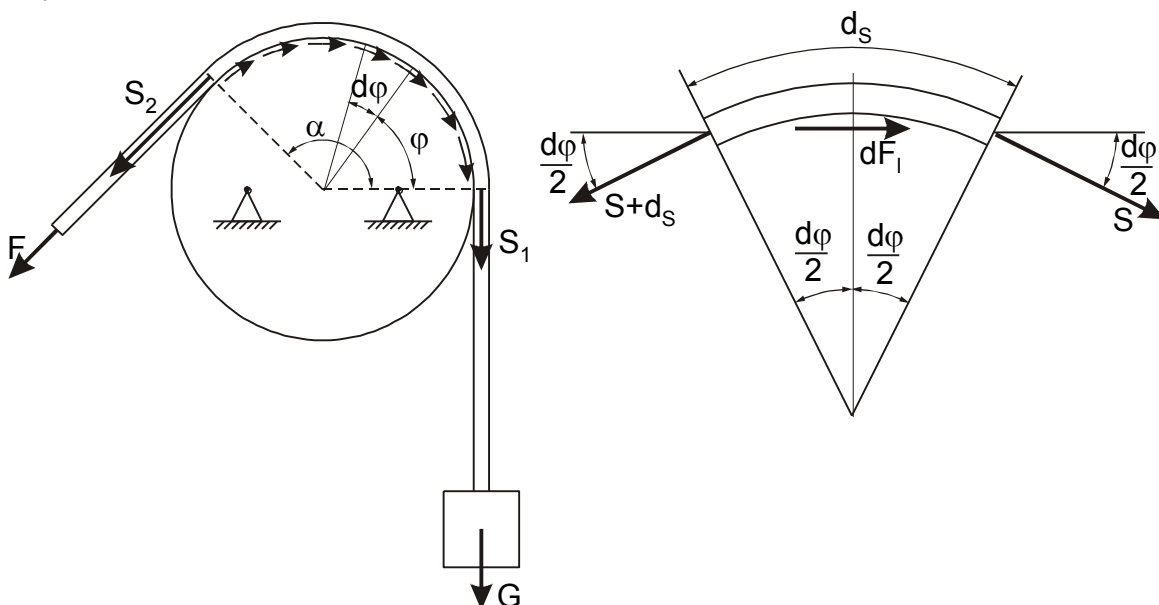
$$\sum F_{ix} = S \cdot \cos(d\varphi/2) + dF_\ell - (S + dS) \cdot \cos(d\varphi/2) = 0$$

$$\sum F_{iy} = dN - (S + dS + S) \cdot \sin(d\varphi/2) = 0$$

Ker je $d\varphi$ lahko poljubno majhen lahko upoštevamo: $\sin(d\varphi/2) \approx \operatorname{tg}(d\varphi/2) \approx d\varphi/2$ in $\cos(d\varphi/2) = 1$ ter dobimo:

$$dF_\ell = dS$$

$$dN = 2 \cdot S \cdot d\varphi/2$$



Slika 7.5: Trenje in lepenja na stabilnih kolutih

Upoštevamo še znano lastnost Coulombovega trenja $dF_\ell = k_\ell \cdot dN$.

$$\frac{dS}{k_\ell} = S \cdot d\varphi$$

$$dS = S \cdot k_\ell \cdot d\varphi$$

Dobljeno diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama nato integriramo:

$$\int_{S_1}^{S_2} \frac{dS}{S} = \int_0^{\alpha} k_{\ell} \cdot d\varphi \qquad \ln S_2 - \ln S_1 = k_{\ell} \cdot \alpha \qquad S_2 = S_1 \cdot e^{k_{\ell} \cdot \alpha}$$

Vlečno silo pri drsenju določimo tako, da količnik lepenja k_{ℓ} zamenjamo z običajno (odvisno od materialov) nekaj manjšim količnikom trenja k_t .

Primer 4:

Obravnavamo kotaljenje togega valja premera $2r$ po ravni podlagi. Zaradi podajnosti podlage normalna sila N ne poteka skozi središče (težišče) valja temveč je premaknjena v smeri gibanja (Slika 7.6). Odmik je tem večji čim večja je podajnost podlage.

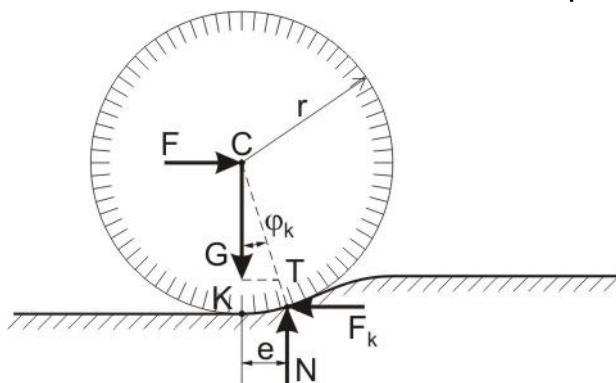
Odmiku sile N od središča telesa (e) pravimo koeficient kotalnega trenja. Merimo ga v cm ter je empirično določena vrednost.

Kotalno trenje lahko izrazimo tudi z momentom kotalnega trenja.

$$M_k = e \cdot G = e \cdot N$$

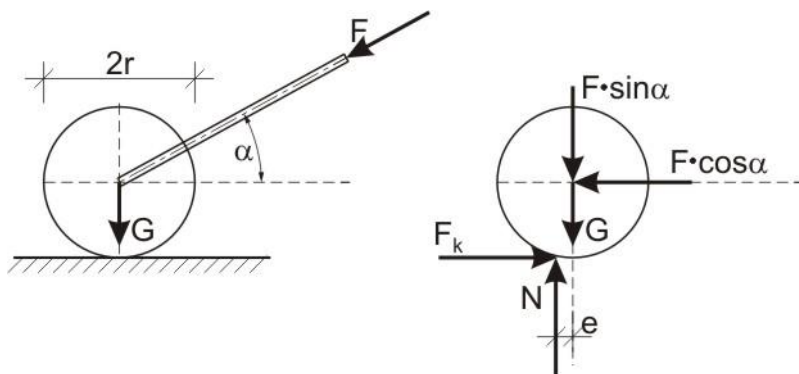
Pri kotaljenju na zelo podajnih tleh pa lahko za bolj natančne preračune uporabimo izraz za izračun potrebne horizontalne sile za kotaljenje valja:

$$F_k \cdot r \cdot \cos\varphi_k = F_k \sqrt{r^2 - e^2} = G \cdot e \qquad F_k = \frac{G}{\sqrt{(r/e)^2 - 1}}$$



Slika 7.6: Kotalno trenje

Za primer valjanja igrišča s konstantno hitrostjo z valjem premera $2r=60\text{cm}$, teže $G=800\text{N}$ na katerega delujemo s stalno silo $F=400\text{N}$ (Slika 7.7) določimo količnik kotalnega trenja.



Slika 7.7: Kotalno trenje pri valjanju igrišča

Pri valjanju igrišča s konstantno hitrostjo mora biti valj v ravnotežju.

$$(F \cdot \sin \alpha + G) \cdot e = F \cdot \cos \alpha \cdot r$$

$$e = \frac{F \cdot \cos \alpha \cdot 30}{F \cdot \sin \alpha + G} = \frac{400 \cdot \cos 25^\circ \cdot 30}{400 \cdot \sin 25^\circ + 800} = 11.22 \text{ cm}$$

Za primerjavo izračunamo še bolj natančno potrebno horizontalno silo, ki dejansko znaša $F_k = 400 \cdot \cos 25^\circ = 362.523 \text{ kN}$:

$$F_k = \frac{G}{\sqrt{(r/e)^2 - 1}} = \frac{800 + 400 \cdot \sin 25^\circ}{\sqrt{(30/11.22)^2 - 1}} = \frac{969.047}{2.4798} = 390.776 \text{ kN}$$

Vidimo lahko, da so pri velikih kotalnih odporih (e znaša ca. 37% premera valja) poenostavitve nedopustne. Bolj natančno lahko momentni ravnotežni pogoj podamo z enačbo:

$$(F \cdot \sin \alpha + G) \cdot e = F \cdot \cos \alpha \cdot \sqrt{r^2 - e^2}$$

$$\frac{e}{\sqrt{r^2 - e^2}} = \frac{400 \cdot \cos 25^\circ}{400 \cdot \sin 25^\circ + 800} = 0.3741$$

$e = 10.5115 \text{ cm}$ (ugotovimo lahko, da bi zaradi poenostavitev nastala ca. 6.74% napaka)

8 STATIKA POVRŠIN

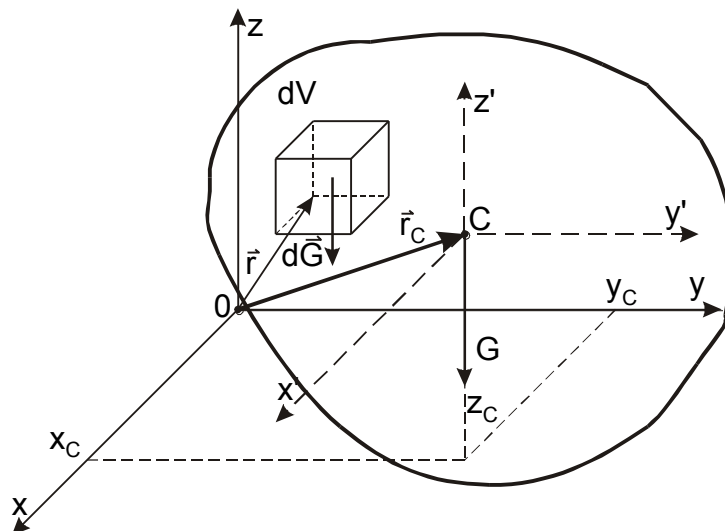
Pri statiki površin prerezov posameznih konstrukcijskih elementov razlikujemo naslednje pojme: ploščina prereza, težišče, težiščne osi, statični momenti površin, vztrajnostni momenti, deviacijski momenti, glavni vztrajnostni momenti, glavne vztrajnostne osi, vztrajnostni radij in jedro prereza.

8.1 Težišče in statični momenti

Smer delovanja sile teže poljubnega telesa \vec{G} vedno poteka skozi težišče (masno središče) planeta Zemlja.

$$\vec{G} = \int_V \vec{g} \cdot dm \quad (8.1)$$

kjer \vec{g} označuje gravitacijski (težnostni) pospešek. Teža poljubnega telesa je rezultanta privlačnih sil med maso Zemlje in vseh masnih delcev telesa. Smer rezultante sile teže \vec{G} telesa poteka vedno skozi točko C ne glede na to kako je telo orientirano. Ta točka je temeljnega pomena za vsako telo in ji pravimo tudi težišče ali masno težišče telesa (Slika 8.1).



Slika 8.1: Težiščna točka C in težiščne osi x' , y' in z' telesa

Ker je sila teže \vec{G} telesa rezultantna sila, velja pri določanju težišča momentno pravilo rezultante, ki določa, da je navor (statični moment) rezultantne sile enak vsoti navorov vseh komponent, ki rezultantno silo sestavljajo.

$$\vec{r}_c \times \vec{G} = \int_V \vec{r} \times d\vec{G} = \int_V \vec{r} \times \rho \cdot \vec{g} \cdot dV \quad (8.2)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_c & y_c & z_c \\ 0 & 0 & G \end{vmatrix} = \int_V \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ 0 & 0 & \rho \cdot g \end{vmatrix} dV$$

Momentno pravilo rezultante (8.2) lahko prikažemo v skalarni obliki.

$$y_c \cdot G = \int_V y \cdot \rho \cdot g \cdot dV \quad x_c \cdot G = \int_V x \cdot \rho \cdot g \cdot dV \quad (8.3)$$

Enačbi 8.2 določata koordinati težišča telesa:

$$x_c = \frac{\int x \cdot \rho \cdot g \cdot dV}{G} \quad y_c = \frac{\int y \cdot \rho \cdot g \cdot dV}{G} \quad (8.4)$$

V kolikor telo (Slika 8.1) zarotiramo za kot $\alpha = \pi/2 + n \cdot \pi$ okrog x ali y osi lahko določimo še preostalo koordinato težišča telesa.

$$z_c = \frac{\int z \cdot \rho \cdot g \cdot dV}{G} \quad (8.5)$$

V kolikor še upoštevamo, da je težnostni pospešek \bar{g} konstanta, ter tudi masa telesa $\int_V \rho \cdot dV = \int dm = m$ lahko enačbe (8.3) in (8.4) podamo v preglednejši obliki.

$$x_c = \frac{\int x \cdot dm}{m} \quad y_c = \frac{\int y \cdot dm}{m} \quad z_c = \frac{\int z \cdot dm}{m} \quad (8.6)$$

Koordinatam težišča x_c , y_c in z_c pravimo tudi koordinate masnega središča obravnavanega telesa. Mehanske količine v števcu izrazov (8.6) so masni statični momenti telesa na ravnine $y-z$, $x-z$ in $x-y$.

$$S_{yz}^m = \int_V x \cdot dm \quad S_{xz}^m = \int_V y \cdot dm \quad S_{xy}^m = \int_V z \cdot dm \quad (8.7)$$

Masne statične momente na ravnine, ki potekajo skozi masno središče (težišče) telesa določimo s transformacijo koordinatnega sistema.

$$x' = x - x_c \quad S_{y'z'}^m = \int_V x' \cdot dm = \int_V x \cdot dm - \int_V x_c \cdot dm = S_{yz}^m - x_c \cdot m = 0 \quad (8.8)$$

$$y' = y - y_c \quad S_{x'z'}^m = \int_V y' \cdot dm = \int_V y \cdot dm - \int_V y_c \cdot dm = S_{xz}^m - y_c \cdot m = 0 \quad (8.9)$$

$$z' = z - z_c \quad S_{x'y'}^m = \int_V z' \cdot dm = \int_V z \cdot dm - \int_V z_c \cdot dm = S_{xy}^m - z_c \cdot m = 0 \quad (8.10)$$

Z izrazi (8.8), (8.9) in (8.10) smo dokazali, da je težišče (masno središče) telesa tista točka C v prostoru v kateri se sekajo tri med sabo pravokotne ravnine na katere so masni statični momenti telesa identično enaki 0.

Pri vseh telesih z enakomerno porazdeljeno gostoto mase ($\rho = \text{konst.}$) težišča, masna središča in središča prostornine telesa vedno sovpadajo.

$$x_c = \frac{\int x \cdot \rho \cdot g \cdot dV}{G} = \frac{\int x \cdot \rho \cdot g \cdot dV}{\int_V \rho \cdot g \cdot dV} = \frac{\int x \cdot dV}{V} = \frac{S_{yz}^V}{V} \quad (8.11)$$

$$y_c = \frac{\int y \cdot \rho \cdot g \cdot dV}{G} = \frac{\int y \cdot \rho \cdot g \cdot dV}{\int_V \rho \cdot g \cdot dV} = \frac{\int y \cdot dV}{V} = \frac{S_{xz}^V}{V} \quad (8.12)$$

$$z_c = \frac{\int_V z \cdot \rho \cdot g \cdot dV}{G} = \frac{\int_V z \cdot \rho \cdot g \cdot dV}{\int_V \rho \cdot g \cdot dV} = \frac{\int_V z \cdot dV}{V} = \frac{S_{xy}^V}{V} \quad (8.13)$$

kjer S_{yz}^V , S_{xz}^V in S_{xy}^V označujejo statične momente prostornine telesa na posamezne koordinatne ravnine.

Poljubno površino S v statiki površin obravnavamo kot telo katerega dimenzijo v smeri pravokotno na površino imenujemo debelina (t) telesa ter upoštevamo $t \rightarrow 0$ in hkrati $\rho \cdot g \cdot t = \text{konst.} = 1$.

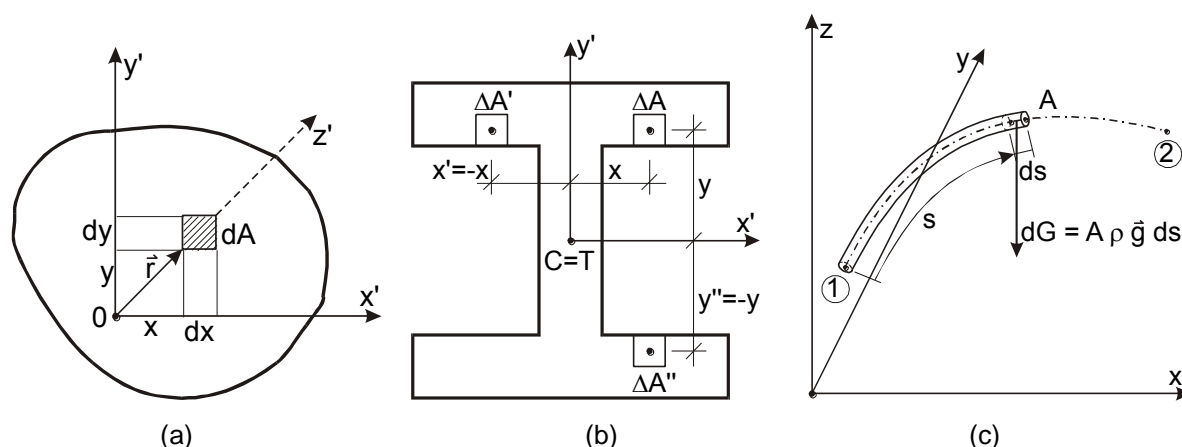
$$x_c = \frac{\int_S x \cdot \rho \cdot g \cdot t \cdot dS}{\int_S \rho \cdot g \cdot t \cdot dS} = \frac{\int_S x \cdot dS}{S} = \frac{S_{yz}^S}{S} \quad (8.14)$$

$$y_c = \frac{\int_S y \cdot \rho \cdot g \cdot t \cdot dS}{\int_S \rho \cdot g \cdot t \cdot dS} = \frac{\int_S y \cdot dS}{S} = \frac{S_{xz}^S}{S} \quad (8.15)$$

$$z_c = \frac{\int_S z \cdot \rho \cdot g \cdot t \cdot dS}{\int_S \rho \cdot g \cdot t \cdot dS} = \frac{\int_S z \cdot dS}{S} = \frac{S_{xy}^S}{S} \quad (8.16)$$

kjer S označuje površino poljubno ukrivljene ploskve v prostoru ter S_{yz}^S , S_{xz}^S in S_{xy}^S statične momente površine na posamezne koordinatne ravnine.

Posebni primer predstavljajo ravne površine s katerimi ponazorimo v statiki ravne prereze poljubnih konstrukcijskih elementov. Pri takšnih površinah se vse točke nahajajo v eni skupni ravnini. Takšne površine s ploščino A lahko obravnavamo ravninsko v koordinatnem sistemu, kjer se osi x in y nahajajo v površini prereza oz. z pa ima smer normale na ravnino prereza (Slika 8.2a).



Slika 8.2: (a) Ravna površina s ploščino A ; (b) Ravnine simetrije pri ravnem prerezu ter (c) Primer enodimenzionalnega telesa (žice oz. črte) v statiki površin

Tudi ravno ploskev A v statiki površin obravnavamo kot telo katerega dimenzijo v smeri osi z imenujemo debelina (t), kjer upoštevamo $t \rightarrow 0$ in $\rho \cdot g \cdot t = \text{konst.} = 1$. Koordinati težišča ravnega prereza določata izraza (8.17) in (8.18).

$$x_c = \frac{\int_A x \cdot \rho \cdot g \cdot t \cdot dA}{\int_A \rho \cdot g \cdot t \cdot dA} = \frac{\int_A x \cdot dA}{A} = \frac{S_{yz}^A}{A} = \frac{S_{yz}}{A} \quad (8.17)$$

$$y_c = \frac{\int_A y \cdot \rho \cdot g \cdot t \cdot dA}{\int_A \rho \cdot g \cdot t \cdot dA} = \frac{\int_A y \cdot dA}{A} = \frac{S_{xz}^A}{A} = \frac{S_{xz}}{A} \quad (8.18)$$

kjer A označuje ploščino ravne ploskve v prostoru ter S_{yz}^A in S_{xz}^A statična momenta ploščine prereza na koordinatni ravnini $y-z$ in $x-z$, statični moment ploščine na koordinatno ravnino $x-y$ je identično enak 0 saj ploščino ravnega prereza obravnavamo kot dvodimenzionalno telo. V statiki statične momente površin imenujemo »statični moment« brez oznake na kakšno telo se nanaša.

Prav tako med posebne primere prištevamo telesa, ki imajo dve dimenziji (ploščino normalnega prereza) bistveno manjši od tretje dimenzije (dolžine) telesa (Slika 8.2c). V praksi so takšna telesa žice, palice in črtovja (ponazarjajo težiščno os žice) pri katerih predpostavljamo enakomerno porazdelitev gostote mase ρ ter enakomerni prerez A po celotni dolžini elementa ($s_{1/2}$).

$$x_c = \frac{\int_s x \cdot \rho \cdot g \cdot A \cdot ds}{\int_s \rho \cdot g \cdot A \cdot ds} = \frac{\int_s x \cdot ds}{s_{1/2}} = \frac{S_{yz}^s}{s_{1/2}} \quad (8.19)$$

$$y_c = \frac{\int_s y \cdot \rho \cdot g \cdot A \cdot ds}{\int_s \rho \cdot g \cdot A \cdot ds} = \frac{\int_s y \cdot ds}{s_{1/2}} = \frac{S_{xz}^s}{s_{1/2}} \quad (8.20)$$

$$z_c = \frac{\int_s z \cdot \rho \cdot g \cdot A \cdot ds}{\int_s \rho \cdot g \cdot A \cdot ds} = \frac{\int_s z \cdot ds}{s_{1/2}} = \frac{S_{xy}^s}{s_{1/2}} \quad (8.21)$$

kjer $s_{1/2}$ označuje dolžino enodimenzionalnega elementa med točkama 1 in 2 (Slika 8.2c) ter S_{yz}^s , S_{xz}^s in S_{xy}^s statični momenti črtovja na izbrane koordinatne ravnine.

Težišča sestavljenih teles, površin, črtovja in ploščin določamo tako, da najprej določimo težiščne osi posameznih elementov (teles, površin, ploščin itd.), kjer so za pripadajoče koordinatne ravnine vsi statični momenti identično enaki 0. Težišča sestavljenih površin pa nato določimo s seštevanjem statičnih momentov vseh elementov ter skupne mase, prostornine, površine oz. ploščine vseh elementov, ki obravnavani sistem sestavljajo.

Za primer ravne površine, ki jo sestavlja n različnih likov (kvadratov, trikotnikov, krožnih prereзов itd.) koordinati težišča določata izraza (8.22).

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (8.22)$$

kjer x_i oz. y_i označuje oddaljenost težišča elementa s ploščino A_i od koordinatne ravnine $y-z$ oz. $x-z$.

Posebni primer predstavljajo tudi telesa, ploščine oz. črtovja z eno ali več simetralnimi ravninami oz. osmi pri dvodimenzionalnih primerih.

Ker ima vsaki element ΔA na desni strani simetralne ravnine oz. osi y' (Slika 8.2b) svoj simetrični par $\Delta A'$ na levi strani simetralne osi je s tem dokazano, da je statični moment telesa oz. površine na simetralno ravnino oz. simetralno os vedno enak 0.

Zato je brez dvoma dokazana tudi naslednja splošna trditev: **»vsaka simetralna ravnina oz. simetralna os je hkrati tudi težiščna ravnina oz. težiščna os obravnavanega telesa, črtovja površine ali ploščine ravnega prereza«.**

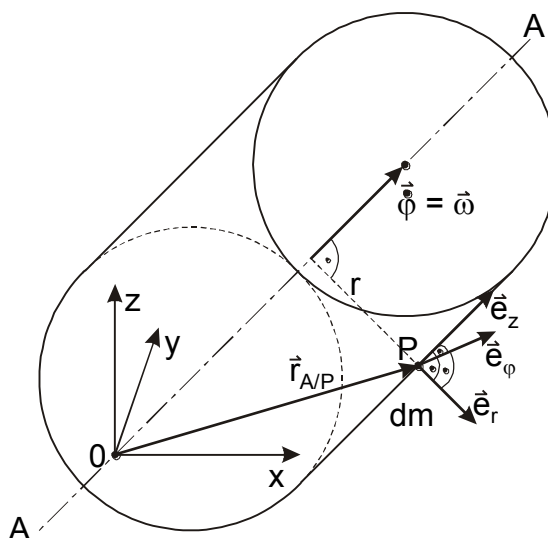
8.2 Vrtenje in vztrajnostni momenti togih teles

Pojem vztrajnosti je vezan na gibanje togih teles. Pri gibanju vsakega telesa se pojavi gibalna količina (\vec{B}), ki je določena s produktom mase in hitrosti.

$$\vec{B} = \int_V \vec{v} \cdot dm \quad (\text{ter pri konstantni hitrosti } \vec{v} = \text{konst.}) \quad \vec{B} = \vec{v} \cdot \int_V dm = m \cdot \vec{v} \quad (8.23)$$

Gibalna količina je premo sorazmerna masi telesa (m) in hitrosti (\vec{v}). Zato pravimo tudi, da je masa telesa merilo vztrajnosti.

Pojem vztrajnostnega momenta je vezan na vztrajnost telesa pri vrtenju okrog poljubne stalne osi. Obravnavamo telo mase m , ki ga zavrtimo okrog osi $A-A$ s kotno hitrostjo $\vec{\omega}$ (Slika 8.3).



Slika 8.3: Vrtenje telesa mase m s kotno hitrostjo $\vec{\omega}$ okrog stalne osi $A-A$

Pri vrtenju telesa je hitrost poljubne točke telesa P premo sorazmerna kotni hitrosti $\vec{\omega}$ in oddaljenosti od osi $A-A$ vrtenja (r) ter ima smer pravokotno na ravnino, ki jo določata os $A-A$ ter točka P na telesu mase (m).

$$\vec{v}_P = v_{P\phi} \cdot \vec{e}_\phi = r \cdot \omega \cdot \vec{e}_\phi = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/P} \quad (8.24)$$

Vrtilno količino telesa določa izraz (8.25).

$$\vec{b}^A = \int_V \vec{r} \times \vec{v} \cdot dm = \int_V \vec{r}_{A/P} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{A/P}) \cdot dm = [J]^A \cdot \vec{\omega} \quad (8.25)$$

kjer $[J]^A$ označuje matriko vztrajnostnih momentov telesa na os vrtenja $A-A$, ki jo določimo z izrazom (8.25).

$$\bar{b}^A = \int_V \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \times \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \cdot dm = \int_V \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ x & y & z \\ z\omega_y - y\omega_z & x\omega_z - z\omega_x & y\omega_x - x\omega_y \end{vmatrix} \cdot dm = \quad (8.26)$$

$$\int_V \begin{Bmatrix} (y^2 + z^2) \cdot \omega_x - xy \cdot \omega_y - xz \cdot \omega_z \\ -xy \cdot \omega_x + (x^2 + z^2) \cdot \omega_y - zy \cdot \omega_z \\ -xz \cdot \omega_x - yz \cdot \omega_y + (x^2 + y^2) \cdot \omega_z \end{Bmatrix} dm = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = [J]^A \cdot \vec{\omega}$$

Matrika vztrajnostnih momentov $[J]^A$ je kvadratna forma 2. reda ter ji pravimo tudi masni vztrajnostni tenzor.

Posamezne komponente masnega vztrajnostnega tenzorja imenujemo masne vztrajnostne momente.

$$J_{xx} = J_x = \int_V (y^2 + z^2) dm \quad J_{yy} = J_y = \int_V (x^2 + z^2) dm \quad J_{zz} = J_z = \int_V (x^2 + y^2) dm \quad (8.27)$$

Vztrajnostne momente (J_x , J_y in J_z) imenujemo masne vztrajnostne momente telesa na x , y in z os ter predstavljajo vsoto produktov diferencialov mase telesa dm in kvadratov razdalje posameznih delcev od izbrane koordinatne osi.

Preostalih šestih komponentam vztrajnostnega tenzorja pravimo centrifugalni (deviatorični ali tudi deviacijski) masni vztrajnostni momenti telesa.

$$J_{xy} = J_{yx} = -\int_V xy \cdot dm \quad J_{xz} = J_{zx} = -\int_V xz \cdot dm \quad J_{yz} = J_{zy} = -\int_V yz \cdot dm \quad (8.28)$$

Izrazi 8.28 dokazujejo, da je vztrajnostni tenzor vedno simetričen. Pri vsakem telesu vedno obstajajo tri med seboj pravokotne osi v prostoru (1), (2) in (3) pri katerih vztrajnostni tenzor preide v diagonalno obliko.

$$[J] = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \quad (8.29)$$

Komponente vztrajnostnega tenzorja v diagonalni obliki J_1 , J_2 in J_3 imenujemo tudi glavne vztrajnostne momente ter pripadajoče osi (1), (2) in (3) glavne vztrajnostne osi telesa.

Najprej obravnavamo homogeni kvader dimenzij a , b in c gostote ρ ter mase m . Določiti je potrebno vztrajnostne in centrifugalne (deviatorične) vztrajnostne momente na osi koordinatnega sistema x , y in z , ki poteka skozi vogalno točko kvadra ter na težiščne osi kvadra x' , y' in z' (Slika 8.4).

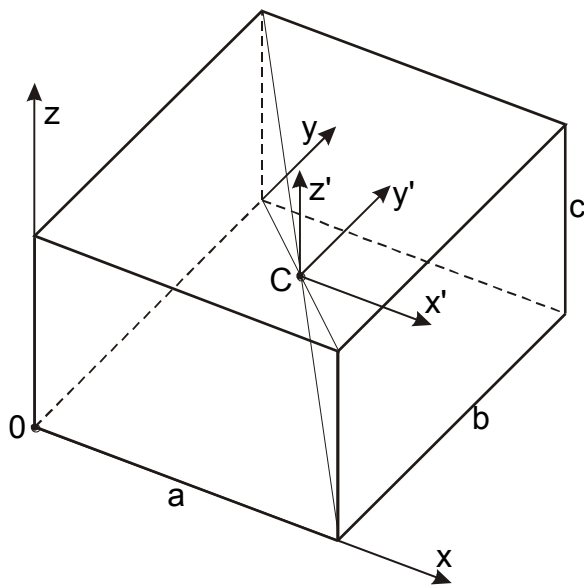
$$J_x = \int_V (y^2 + z^2) \cdot dm = \rho \cdot \int_V (y^2 + z^2) \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \rho \int_0^a \int_0^b \int_0^c (y^2 + z^2) dx dy dz = \rho \int_0^a \int_0^b \left[y^2 z + z^3 / 3 \right]_0^c dx dy =$$

$$\rho \int_0^a \int_0^b (y^2 c + c^3 / 3) dx dy = \rho \int_0^a \left[b^3 c / 3 + c^3 b / 3 \right] dx = \rho a (b^3 c + c^3 b) / 3 = m \cdot (b^2 + c^2) / 3$$

Na podoben način določimo preostala vztrajnostna momenta (J_y in J_z).

$$J_y = m \cdot (a^2 + c^2) / 3$$

$$J_z = m \cdot (a^2 + b^2) / 3$$



Slika 8.4: Homogeni kvader

Centrifugalni vztrajnostni momenti so definirani z izrazi (8.28) ter so za obravnavani kvader naslednji.

$$J_{xy} = -\int_V xy \cdot dm = -\rho \cdot \int_V xy \cdot dx \cdot dy \cdot dz = -\rho \int_0^a \int_0^b xyc dx dy = -\rho \int_0^a cb^2 x dx / 2 = -\rho a^2 b^2 c / 4 = -m \cdot ab / 4$$

$$J_{xz} = -m \cdot ac / 4$$

$$J_{yz} = -m \cdot bc / 4$$

Izbrane težiščne osi kvadra (Slika 8.4) so hkrati tudi simetralne osi (obravnavani kvader je povsem simetričen na koordinatne ravnine $x'-y'$, $x'-z'$ in $y'-z'$) ter so zato vsi centrifugalni momenti na izbrane težiščne osi identično enaki 0. Pripadajoči vztrajnostni momenti na težiščne osi pa so zato hkrati tudi glavni vztrajnostni momenti kvadra.

$$J_{x'} = J_1 = \int_V (y'^2 + z'^2) \cdot dm = \rho \cdot \int_V (y'^2 + z'^2) \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 8 \cdot \rho \cdot \int_0^{a/2} \int_0^{b/2} \int_0^{c/2} (y^2 + z^2) \cdot dx \cdot dy \cdot dz =$$

$$8 \cdot \rho \int_0^{a/2} \int_0^{b/2} \left[y^2 z + z^3 / 3 \right]_0^{c/2} dx dy = 8 \cdot \rho \int_0^{a/2} \int_0^{b/2} (y^2 c / 2 + c^3 / 24) dx dy = 8 \cdot \rho \int_0^{a/2} (b^3 c / 48 + c^3 b / 48) dx =$$

$$\rho \cdot (b^3 ca + c^3 ba) / 12 = m \cdot (b^2 + c^2) / 12$$

$$J_{y'} = J_2 = m \cdot (a^2 + c^2) / 12$$

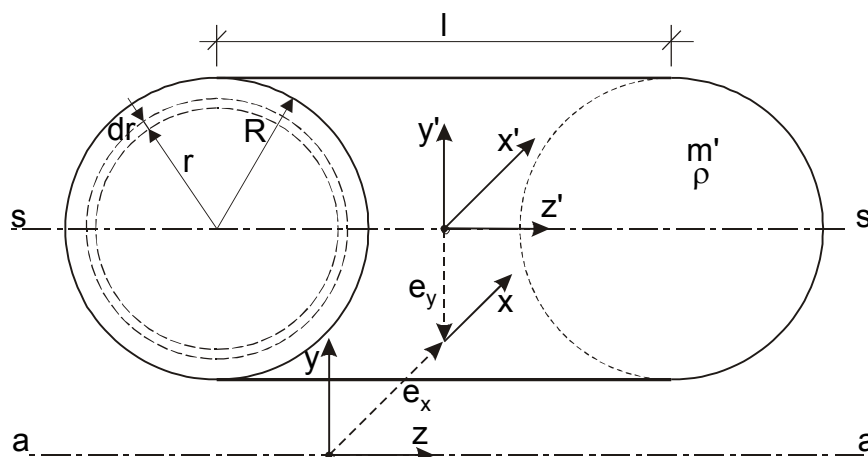
$$J_{z'} = J_3 = m \cdot (a^2 + b^2) / 12$$

V nadaljevanju bomo obravnavali vztrajnostni moment homogenega valja dolžine ℓ , premera $2R$ ter gostote ρ (Slika 8.5). Najprej bomo določili vztrajnostni moment na vzdolžno simetralno in hkrati tudi težiščno os valja $s-s$ ter nato še na os $a-a$, ki je vzporedna osi $s-s$ ter od nje odmaknjena za razdalji e_x oz. e_y v smeri izbrane x oz. y osi.

$$J_{s-s} = J_s = \int_V (x^2 + y^2) \cdot dm = \rho \cdot \int_V r^2 \cdot dV = \rho \cdot \int_0^R r^2 \cdot 2\pi \cdot r \cdot \ell \cdot dr = \rho \cdot 2\pi \cdot \ell \cdot R^4 / 4 = m \cdot R^2 / 2 \quad (8.30)$$

Koordinate valja v novem koordinatnem sistemu (x, y, z) lahko določimo s transformacijskima enačbama:

$$x = x' + e_x \qquad y = y' + e_y \quad (8.31)$$



Slika 8.5: Homogeni valj

$$J_{a-a} = J_a = \int_V (x^2 + y^2) \cdot dm = \rho \cdot \int_V (x'^2 + 2e_x x' + e_x^2 + y'^2 + 2e_y y' + e_y^2) \cdot dV = \rho \cdot \int_V (x'^2 + y'^2) dV + \quad (8.32)$$

$$\rho \cdot 2e_x \int_V x' dV + \rho \cdot 2e_y \int_V y' dV + \rho \cdot (e_x^2 + e_y^2) \int_V dV = J_s + e^2 \cdot m$$

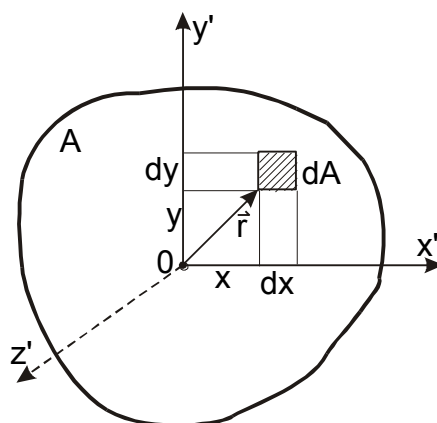
Integrala v izrazih $(\rho \cdot 2e_x \int_V x' dV)$ in $(\rho \cdot 2e_y \int_V y' dV)$ predstavljata statična momenta valja na težiščno os $s-s$ telesa in sta zato identično enaka 0 ter $e^2 = e_x^2 + e_y^2$ kvadrat razdalje med obema vzporednima osema (Slika 8.5) in zato lahko zaključimo:

Masni vztrajnostni moment telesa na poljubno os, ki je vzporedna težiščni osi telesa, je enak vsoti vztrajnostnega momenta na težiščno os (J_s) in produkta mase telesa (m) s kvadratom razdalje (e) med obema vzporednima osema. Tej trditvi v mehaniki pravimo Steiner-jev stavek.

$$J_a = J_s + e^2 \cdot m \quad (8.33)$$

8.3 Vztrajnostni momenti ravnih površin

Ravne površine v statiki ponazorimo z 2D kvazi telesi katerih debelina $t \rightarrow 0$ ob hkratnem pogoju $\rho \cdot g \cdot t = \text{konst.} = 1$. Telo obravnavamo v ravnini $x-y$ (Slika 8.6).



Slika 8.6: Ravna površina A v ravnini x-y

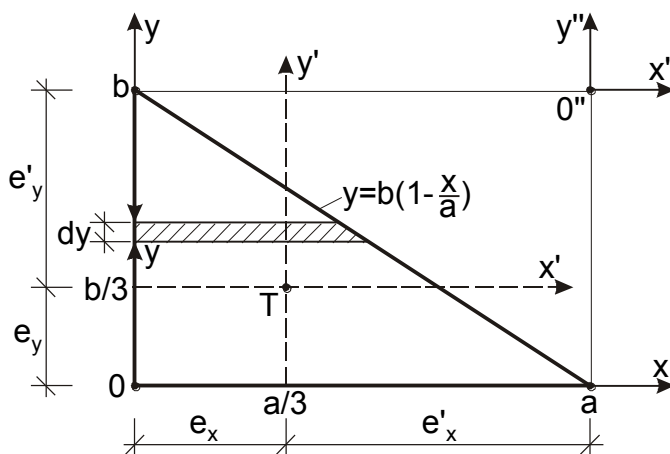
Podobno kot pri togih telesih so z izrazoma (8.27) in (8.28) definirani tudi vztrajnostni momenti površine A na os x oz. y, izražamo jih v m^4 .

$$J_{xx} = J_x = \int_A y^2 \cdot dA \qquad J_{yy} = J_y = \int_A x^2 \cdot dA \qquad (8.34)$$

kjer vztrajnostni moment J_x oz. J_y pomeni vztrajnostni moment površine prereza A na izbrano x oz. y os koordinatnega sistema. Podobno sta določena še polarni vztrajnostni moment površine A na koordinatno izhodišče J_0 in centrifugalni (deviacijski) vztrajnostni moment površine A v ravnini x, y.

$$J_0 = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A r^2 \cdot dA = J_x + J_y \qquad J_{xy} = J_{yx} = - \int_A xy \cdot dA \qquad (8.35)$$

Najprej obravnavamo površino A oblike pravokotnega trikotnika s stranicama a in b (Slika 8.7).



Slika 8.7: Trikotna površina A s pripadajočimi koordinatnimi osmi

$$J_x = \int_A y^2 dA = \int_0^b y^2 \frac{a(b-y)}{b} dy = \frac{a}{b} \int_0^b (by^2 - y^3) dy = \frac{a}{b} \left(by^3/3 - y^4/4 \right) \Big|_0^b = \frac{ab^3}{12}$$

$$J_y = \int_A x^2 dA = \int_0^b x^2 \frac{b(a-x)}{a} dx = \frac{a^3 b}{12}$$

$$J_{xy} = -\int_A xy \cdot dA = -\int_0^a \int_0^{b(1-x/a)} xy \cdot dx dy = -\frac{b^2}{2a^2} \int_0^a (a^2 x - 2ax^2 + x^3) dx = -\frac{a^2 b^2}{24}$$

$$J_0 = J_x + J_y = \frac{ab}{3}(a^2 + b^2)$$

Ter pripadajoči vztrajnostni tenzor:

$$[J^0] = \begin{bmatrix} J_x & J_{xy} \\ J_{xy} & J_y \end{bmatrix} = \frac{ab}{12} \cdot \begin{bmatrix} b^2 & -ab/2 \\ -ab/2 & a^2 \end{bmatrix}$$

Ker že poznamo vztrajnostne momente na osi x, y lahko pripadajoče vztrajnostne momente na težiščni osi x', y' , ki sta vzporedni osema osnovnega koordinatnega sistema, določimo z ustreznimi translatorskim premikom koordinatnega sistema. Upoštevamo naslednji transformacijski enačbi:

$$x' = x - e_x = x - a/3 \quad y' = y - e_y = y - b/3$$

$$J_{x'} = \int_A y'^2 dA = \int_A (y^2 - 2e_y y + e_y^2) dA = \int_A y^2 dA - 2e_y \int_A y dA + e_y^2 \int_A dA = J_x - 2e_y S_{xz} + e_y^2 A =$$

$$\frac{ab^3}{12} - \frac{2 \cdot b}{3} \cdot \frac{a \cdot b}{2} \cdot \frac{b}{3} + \frac{b^2}{9} \cdot \frac{a \cdot b}{2} = ab^3 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{9} + \frac{1}{18} \right) = \frac{ab^3}{36}$$

$$J_{y'} = \int_A x'^2 dA = \int_A (x^2 - 2e_x x + e_x^2) dA = \int_A x^2 dA - 2e_x \int_A x dA + e_x^2 \int_A dA = J_y - 2e_x S_{yz} + e_x^2 A =$$

$$\frac{a^3 b}{12} - \frac{2 \cdot a}{3} \cdot \frac{a \cdot b}{2} \cdot \frac{a}{3} + \frac{a^2}{9} \cdot \frac{a \cdot b}{2} = a^3 b \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{9} + \frac{1}{18} \right) = \frac{a^3 b}{36}$$

$$J_{x'y'} = -\int_A x' y' dA = \int_A (-xy + e_x y + e_y x - e_x e_y) dA = -\int_A xy dA + e_x \int_A y dA + e_y \int_A x dA - e_x e_y \int_A dA =$$

$$J_{xy} + e_x S_{xz} + e_y S_{yz} - e_x e_y A = -\frac{a^2 b^2}{24} + \frac{a}{3} \cdot \frac{a \cdot b}{2} \cdot \frac{b}{3} + \frac{b}{3} \cdot \frac{a \cdot b}{2} \cdot \frac{a}{3} - \frac{a}{3} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{a \cdot b}{2} = \frac{a^2 b^2}{72}$$

Pripadajoči vztrajnostni tenzor za težiščne osi trikotnika zapišemo:

$$[J^{0'}] = \begin{bmatrix} J_{x'} & J_{x'y'} \\ J_{x'y'} & J_{y'} \end{bmatrix} = \frac{ab}{36} \cdot \begin{bmatrix} b^2 & ab/2 \\ ab/2 & a^2 \end{bmatrix}$$

Na podoben način lahko s transformacijo koordinatnega sistema določimo tudi vztrajnostne momente na koordinatne osi x'', y'' (Slika 8.7), pri tem upoštevamo, da že poznamo vztrajnostne momente na težiščne osi.

$$x'' = x' - e'_x = x' - 2a/3 \quad y'' = y' - e'_y = y' - 2b/3$$

$$J_{x''} = \int_A y''^2 dA = \int_A (y'^2 - 2e'_y y' + e'^2_y) dA = \int_A y'^2 dA - 2e'_y \int_A y' dA + e'^2_y \int_A dA = J_{x'} - 2e'_y S_{x'z'} +$$

$$e'^2_y A = \frac{ab^3}{36} + \frac{4b^2}{9} \cdot \frac{a \cdot b}{2} = ab^3 \left(\frac{1}{36} + \frac{2}{9} \right) = \frac{ab^3}{4}$$

$$J_{y''} = \int_A x''^2 dA = \int_A (x'^2 - 2e'_x x' + e'^2_x) dA = \int_A x'^2 dA - 2e'_x \int_A x' dA + e'^2_x \int_A dA = J_{y'} - 2e'_x S_{x'z'} +$$

$$e'^2_x A = \frac{a^3 b}{36} + \frac{4a^2}{9} \cdot \frac{a \cdot b}{2} = ab^3 \left(\frac{1}{36} + \frac{2}{9} \right) = \frac{a^3 b}{4}$$

$$J_{x''y''} = - \int_A x'' y'' dA = - \int_A (x' y' - e'_x y' - e'_y x' + e'_x e'_y) dA = - \int_A x' y' dA + e'_x \int_A y' dA + e'_y \int_A x' dA$$

$$- e'_x e'_y \int_A dA = J_{x'y'} + e'_x S_{x'z'} + e'_y S_{y'z'} - e'_x e'_y A = \frac{a^2 b^2}{72} - \frac{2a}{3} \cdot \frac{2b}{3} \cdot \frac{a \cdot b}{2} = - \frac{5 \cdot a^2 b^2}{24}$$

Vztrajnostni tenzor zapišemo:

$$[J^{0''}] = \frac{ab}{4} \cdot \begin{bmatrix} b^2 & -5ab/6 \\ -5ab/6 & a^2 \end{bmatrix}$$

8.4 Glavni vztrajnostni momenti in glavne vztrajnostne osi

Že v prejšnjem poglavju smo ugotovili, da vztrajnostni tenzor $[J]$ predstavlja kvadratno formo za katero obstaja novi koordinatni sistem (x_1, y_1) pri kateri vztrajnostni tenzor preide v diagonalno obliko.

Predpostavimo, da poznamo vztrajnostni tenzor oz. vztrajnostna in centrifugalni moment na koordinatni osi (x, y) ter določimo kot φ za katerega moramo novi koordinatni sistem (x_1, y_1) zarotirati v protiurni smeri, da bo vztrajnostni tenzor prešel v diagonalno obliko (Slika 8.8).

Pri rotaciji koordinatnega sistema moramo upoštevati naslednji transformacijski enačbi:

$$x_1 = x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi \quad y_1 = y \cdot \cos \varphi - x \cdot \sin \varphi \quad (8.36)$$

Vztrajnostne momente v novem (zarotiranem) koordinatnem sistemu določimo:

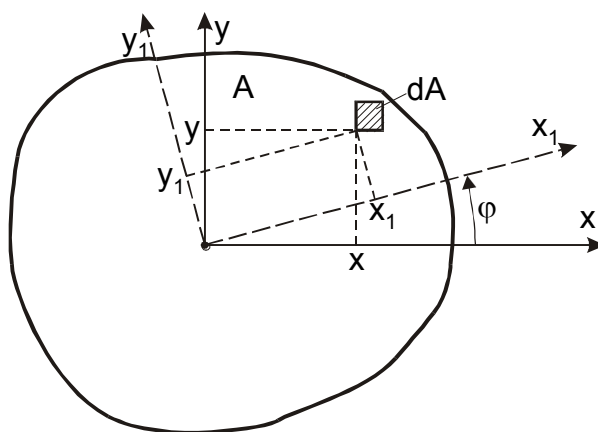
$$J_{x_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y^2 \cos^2 \varphi - 2xy \sin \varphi \cos \varphi + x^2 \sin^2 \varphi) dA = \quad (8.37)$$

$$J_x \cos^2 \varphi + J_y \sin^2 \varphi + J_{xy} \sin 2\varphi$$

Izraz (8.37) lahko tudi zapišemo v bolj nazorni obliki:

$$J_{x_1} = \left[\frac{(J_x + J_y)}{2} + \frac{(J_x - J_y)}{2} \right] \cos^2 \varphi + \left[\frac{(J_x + J_y)}{2} - \frac{(J_x - J_y)}{2} \right] \sin^2 \varphi + J_{xy} \sin 2\varphi = \quad (8.38)$$

$$\frac{(J_x + J_y)}{2} + \frac{(J_x - J_y)}{2} \cos 2\varphi + J_{xy} \sin 2\varphi$$



Slika 8.8: Rotacija koordinatnega sistema

$$J_{y_1} = \int_A x_1^2 dA = \int_A (x^2 \cos^2 \varphi + 2xy \sin \varphi \cos \varphi + y^2 \sin^2 \varphi) dA = \quad (8.39)$$

$$J_x \sin^2 \varphi + J_y \cos^2 \varphi - J_{xy} \sin 2\varphi$$

Ter v preglednejši obliki:

$$J_{y_1} = \left[\frac{(J_x + J_y)}{2} + \frac{(J_x - J_y)}{2} \right] \sin^2 \varphi + \left[\frac{(J_x + J_y)}{2} - \frac{(J_x - J_y)}{2} \right] \cos^2 \varphi - J_{xy} \sin 2\varphi = \quad (8.40)$$

$$\frac{(J_x + J_y)}{2} - \frac{(J_x - J_y)}{2} \cos 2\varphi - J_{xy} \sin 2\varphi$$

Ter za centrifugalni (deviatorični moment):

$$J_{x_1 y_1} = - \int_A x_1 y_1 dA = - \int_A (xy \cdot (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + (y^2 - x^2) \sin \varphi \cos \varphi) dA = \quad (8.41)$$

$$- (J_x - J_y) \sin \varphi \cos \varphi + J_{xy} \cos 2\varphi = - \frac{(J_x - J_y)}{2} \sin 2\varphi + J_{xy} \cos 2\varphi$$

Vztrajnosti tenzor preide v diagonalno obliko pri tistem kotu rotacije koordinatnega sistema φ , kjer je centrifugalni vztrajnostni moment prereza enak 0. Pogoje zapišemo v naslednji obliki:

$$\frac{J_x - J_y}{2} \cdot \sin 2\varphi - J_{xy} \cdot \cos 2\varphi = 0 \quad (8.42)$$

$$\operatorname{tg}(2\varphi) = \frac{2J_{xy}}{J_x - J_y} \quad (8.43)$$

Obstajata dve rešitvi enačbe (8.41), ki sta med sabo zarotirani za $\pi/2$ ter sta naslednji:

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{atg}\left(\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}\right) \pm \frac{n\pi}{2} \quad (8.44)$$

V kolikor upoštevamo zveze med trigonometričnimi funkcijami za kot rotacije pri katerem vztrajnostni tenzor preide v diagonalno obliko $\sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$ in $\cos \varphi = 1 / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$ dobimo:

$$\sin 2\varphi = \frac{2J_{xy} / (J_x - J_y)}{\sqrt{1 + 4J_{xy}^2 / (J_x - J_y)^2}} = \frac{J_{xy}}{\sqrt{(J_x - J_y)^2 / 4 + J_{xy}^2}} \quad (8.45)$$

$$\cos 2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + 4J_{xy}^2 / (J_x - J_y)^2}} = \frac{(J_x - J_y) / 2}{\sqrt{(J_x - J_y)^2 / 4 + J_{xy}^2}} \quad (8.46)$$

Lahko glavna vztrajnostna momenta prereza določimo v naslednji obliki:

$$J_{x_1} = J_1 = (J_x + J_y) / 2 + [(J_x - J_y) / 2] \cos 2\varphi + J_{xy} \sin 2\varphi = (J_x + J_y) / 2 + \frac{[(J_x - J_y) / 2]^2}{\sqrt{(J_x - J_y)^2 / 4 + J_{xy}^2}} + \frac{J_{xy}^2}{\sqrt{(J_x - J_y)^2 / 4 + J_{xy}^2}} = (J_x + J_y) / 2 + \sqrt{(J_x - J_y)^2 / 4 + J_{xy}^2} \quad (8.47)$$

$$J_{y_1} = J_2 = (J_x + J_y) / 2 - [(J_x - J_y) / 2] \cos 2\varphi - J_{xy} \sin 2\varphi = (J_x + J_y) / 2 - \frac{(J_x - J_y)^2 / 4}{\sqrt{(J_x - J_y)^2 / 4 + J_{xy}^2}} - \frac{J_{xy}^2}{\sqrt{(J_x - J_y)^2 / 4 + J_{xy}^2}} = (J_x + J_y) / 2 - \sqrt{(J_x - J_y)^2 / 4 + J_{xy}^2} \quad (8.48)$$

$$J_{x_1 y_1} = J_{12} = -[(J_x - J_y) / 2] \sin 2\varphi + J_{xy} \cos 2\varphi = \frac{-[(J_x - J_y) / 2] J_{xy}}{\sqrt{(J_x - J_y)^2 / 4 + J_{xy}^2}} + \frac{[(J_x - J_y) / 2] J_{xy}}{\sqrt{(J_x - J_y)^2 / 4 + J_{xy}^2}} = 0 \quad (8.49)$$

Ker je centrifugalni (deviatorični) moment enak 0, vztrajnostni tenzor pri rotaciji koordinatnega sistema za kota $\varphi_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{atg} \left(\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y} \right) \pm \frac{n\pi}{2}$ zagotovo preide v diagonalno obliko. V nadaljevanju bomo obravnavali izraze za vztrajnostne momente v preglednejši obliki:

$$J_{x_1} = \frac{(J_x + J_y)}{2} + \frac{(J_x - J_y)}{2} \cos 2\varphi + J_{xy} \sin 2\varphi$$

$$J_{y_1} = \frac{(J_x + J_y)}{2} - \frac{(J_x - J_y)}{2} \cos 2\varphi - J_{xy} \sin 2\varphi$$

$$J_{x_1 y_1} = -\frac{(J_x - J_y)}{2} \sin 2\varphi + J_{xy} \cos 2\varphi$$

Ekstremno vrednost obeh vztrajnostnih momentov J_{x_1} in J_{y_1} določata pogoja:

$$dJ_{x_1} / d\varphi = -\frac{(J_x - J_y)}{2} 2 \sin 2\varphi + J_{xy} 2 \cos 2\varphi = 0 \quad (8.50)$$

$$dJ_{y_1} / d\varphi = \frac{(J_x - J_y)}{2} 2 \sin 2\varphi - J_{xy} 2 \cos 2\varphi = 0 \quad (8.51)$$

Ugotovimo lahko, da sta odvoda vztrajnostnih momentov proporcionalna pozitivni oz. negativni vrednosti centrifugalnega momenta prereza in zato imata ekstremni vrednosti (Max. in Min.) pri tistem kotu rotacije, kjer je centrifugalni moment enak 0.

Prav tako lahko ugotovimo, da je srednja vrednost obeh vztrajnostnih momentov J_{x_1} in J_{y_1} neodvisna od kota rotacije φ ter znaša:

$$J_C = \frac{(J_x + J_y)}{2} = \text{konst.} \quad (8.52)$$

Izrazi za vztrajnostne momente predstavljajo enačbo krožnice v koordinatnem sistemu, kjer na x os nanašamo vrednosti vztrajnostnih momentov J_{x_1} in J_{y_1} ter na y os vrednosti centrifugalnega momenta $J_{x_1 y_1}$. Enačbo krožnice v premaknjeni legi s središčem na y osi zapišemo:

$$(x - p)^2 + y^2 - R^2 = 0 \quad (8.53)$$

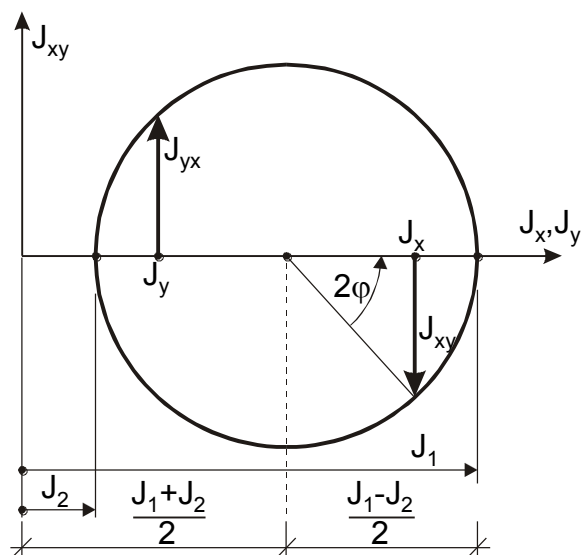
kjer je R polmer krožnice, ki ga določata glavna vztrajnostna momenta $R = (J_1 - J_2)/2$, p pa predstavlja absciso središča krožnice $p = (J_1 + J_2)/2$.

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(J_x - J_y)}{2} \cos 2\varphi + J_{xy} \sin 2\varphi \right]^2 + \left[-\frac{(J_x - J_y)}{2} \sin 2\varphi + J_{xy} \cos 2\varphi \right]^2 - \left[\frac{(J_x - J_y)}{2} \right]^2 - J_{xy}^2 = \\ & \left[\frac{(J_x - J_y)}{2} \right]^2 (\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi) + J_{xy}^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)_{xy} + (J_x - J_y) \cdot J_{xy} \cos 2\varphi \sin 2\varphi - \\ & (J_x - J_y) \cdot J_{xy} \cos 2\varphi \sin 2\varphi - \left[\frac{(J_x - J_y)}{2} \right]^2 - J_{xy}^2 = 0 \end{aligned}$$

Torej smo dokazali, da lahko oba vztrajnostna in centrifugalni moment pregledno prikažemo z vztrajnostno krožnico v koordinatnem sistemu, kjer na x os nanašamo vrednosti vztrajnostnih momentov J_{x_1} in J_{y_1} ter na y os vrednosti centrifugalnih momentov $J_{x_1 y_1}$.

Zakovitosti vztrajnostne krožnice je prvi ugotovil Otto Mohr (1835-1918), ki se zato po avtorju imenuje Mohr-ova vztrajnostna krožnica. Otto Mohr je svoje ugotovitve zapisal: »v kolikor v ravnini izberemo takšen pravokotni koordinatni sistem pri katerem na ordinato nanašamo centrifugalne vztrajnostne momente ter na absciso vztrajnostne momente, lahko za poljubno ravno površino načrtamo vztrajnostno krožnico«.

Primer Mohr-ove vztrajnostne krožnice prikazuje Slika 8.9.

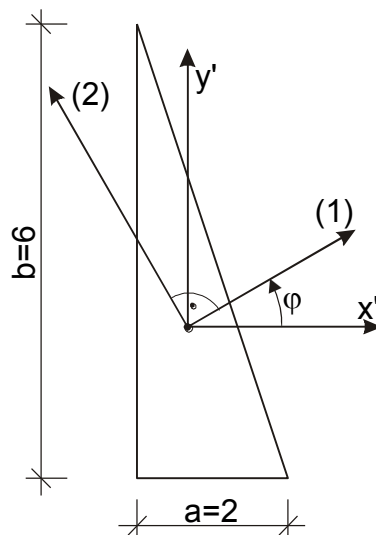


Slika 8.9: Mohrov-a vztrajnostna krožnica in kot rotacije φ

Osi prereza za katere so centrifugalni momenti identično enaki 0 imenujemo glavne vztrajnostne osi. Za obe glavni vztrajnostni osi imata vztrajnostna momenta ekstremni vrednosti. V kolikor glavni vztrajnostni osi potekata skozi težišče prereza jim pravimo glavni centralni vztrajnostni osi prereza.

Primer 8.1

Za trikotni prerez $a = 6.0\text{m}$ in $b = 2.0\text{m}$ določimo glavna vztrajnostna momenta in glavni vztrajnostni osi za težiščni osi prereza (Slika 8.10).



Slika 8.10: Trikotni prerez telesa in glavne vztrajnostne osi

Vztrajnostni tenzor za obravnavani primer zapišemo:

$$[J^{0'}] = \begin{bmatrix} J_{x'} & J_{x'y'} \\ J_{x'y'} & J_{y'} \end{bmatrix} = \frac{ab}{36} \cdot \begin{bmatrix} b^2 & ab/2 \\ ab/2 & a^2 \end{bmatrix} = \frac{12}{36} \begin{bmatrix} 36 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 4/3 \end{bmatrix}$$

Kot rotacije glavnih vztrajnostnih osi od ravnine $x - z$ določimo:

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{atg}\left(\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}\right) \pm \frac{n\pi}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{atg}\left(\frac{2 \cdot 2}{12 - 4/3}\right) \pm \frac{n\pi}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{atg}\left(\frac{3}{8}\right) \pm \frac{n\pi}{2}$$

$$\varphi_1 = 0.17939^{\text{rd}} \quad (10.278^\circ) \qquad \varphi_2 = 1.75018^{\text{rd}} \quad (100.278^\circ)$$

Glavna vztrajnostna momenta določimo:

$$J_1 = (J_x + J_y)/2 + \sqrt{(J_x - J_y)^2/4 + J_{xy}^2} = (12 + 4/3)/2 + \sqrt{(16/3)^2 + 2^2} = 12.3626\text{m}^4$$

$$J_2 = (J_x + J_y)/2 - \sqrt{(J_x - J_y)^2/4 + J_{xy}^2} = (12 + 4/3)/2 - \sqrt{(16/3)^2 + 2^2} = 0.9707\text{m}^4$$

Za potrditev smeri glavnih vztrajnostnih osi določimo še drugi odvod vztrajnostnih momentov:

$$d^2 J_{x_1} / d\varphi^2 \Big|_{\varphi_1} = -(J_x - J_y) \cdot 2 \cdot \cos(2\varphi) - 4 \cdot J_{xy} \sin(2\varphi) =$$

$$-(32/3) \cdot \cos(2 \cdot 0.17939) - 8 \cdot \sin(2 \cdot 0.17939) = -12.797$$

$$d^2 J_{x_1} / d\varphi^2 \Big|_{\varphi_2} = -(32/3) \cdot \cos(2 \cdot 1.75018) - 8 \cdot \sin(2 \cdot 1.75018) = 12.797$$

Vidimo, da vztrajnostni moment pri rotaciji koordinatnega sistema $\varphi_1 = 0.17939^{\text{rd}}$ (10.278°) doseže maksimum ter pri rotaciji $\varphi_2 = 1.75018^{\text{rd}}$ (100.278°) svoj minimum.

Vztrajnostni radij ravnega prereza (površine) predstavlja razdalja od težiščne točke prereza i_x oz. i_y v kateri bi morala biti koncentrirana celotna površina prereza, da bi bil vztrajnostni moment J_{x_1} oz. J_{y_1} zaradi koncentrirane površine enak vztrajnostnemu momentu celotnega prereza. Vztrajnostna radija določimo;

$$i_x = \sqrt{\frac{J_{x_1}}{A}} \qquad i_y = \sqrt{\frac{J_{y_1}}{A}} \qquad (8.54)$$

Za pravokotni prerez ($a \cdot b$) sta za težiščni osi poznana vztrajnostna momenta:

$$J_{x_1} = \frac{ab^3}{12} \qquad J_{y_1} = \frac{a^3b}{12} \qquad i_x = \sqrt{\frac{J_{x_1}}{A}} = \frac{b}{\sqrt{12}} \qquad i_y = \sqrt{\frac{J_{y_1}}{A}} = \frac{a}{\sqrt{12}} \qquad (8.55)$$

Za prereze krožne oblike obstaja le eden vztrajnostni radij:

$$J_{x_1} = J_{y_1} = \frac{\pi \cdot r^4}{4} \qquad i_x = i_y = \sqrt{\frac{J_{x_1}}{A}} = \frac{r}{2} \qquad (8.56)$$

9 Literatura

- [1] Kiričenko, A.: *Tehnička mehanika I dio - Statika*, Građevinski institut, Zagreb, 1990
- [2] Stanek, M., Turk, G.: *Statika I*, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, 1996
- [3] Bedenik, B. S.: *Statika konstrukcij*, Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, Maribor, 1998