

O DEFINICIJI POVRŠINE

BARBARA DRINOVEC DRNOVŠEK

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani
Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko

Math. Subj. Class. (2010): 26B15, 28A75, 51M25

V članku predstavimo primer, s katerim je H. A. Schwarz pokazal, da površine ukri-
vljene ploskve ne moremo definirati kot natančne zgornje meje površin vseh bližnjih po-
ligonálnih ploskev.

ON THE DEFINITION OF SURFACE AREA

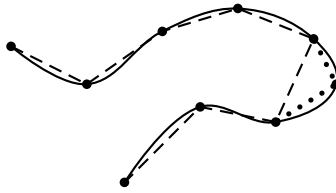
We present an example published by H. A. Schwarz which shows that the area of
a surface cannot be defined as the supremum of areas of all approximating polyhedral
surfaces.

V matematiki, fiziki in računalništvu pogosto obravnavamo gladke objek-
te, na primer gladke krivulje, ploskve ali telesa. Pri obravnavi geometrijskih
lastnosti se moramo pogosto zateči k aproksimaciji: če želimo oceniti dolžino
gladke krivulje, si lahko izberemo dovolj gosto posejano množico točk na kri-
vulji, izračunamo dolžino prirejene poligonálne krivulje in dobimo ustrezni
približek. S takimi in podobnimi problemi se srečujemo v diskretni diferen-
cialni geometriji in v računalniški grafiki.

V članku bomo obravnavali primer, ki ga je leta 1890 objavil H. A.
Schwarz [7] in ki pove, da moramo biti pri aproksimaciji površine, ki jo
dobimo na podoben način, zelo pazljivi.

O definiciji dolžine

Krivuljo v ravnini lahko aproksimiramo s poligonálno krivuljo: na krivulji
si izberemo nekaj točk, ki jih zaporedoma povežemo z daljicami. Dolžina
dobljene poligonálne krivulje aproksimira dolžino dane krivulje. Če dodamo
točko na krivulji in ustrezno daljico zamenjamo z dvema, je dolžina nove
poligonálne krivulje boljši približek za dolžino krivulje. Za poljubni dve taki
poligonálni krivulji dobimo natančnejšo aproksimacijo z unijo izbranih točk.
Ker z dodajanjem novih točk dolžino poligonálne aproksimacije povečamo,
je za definicijo dolžine krivulje smiselno vzeti natančno zgornjo mejo dolžin
opisanih poligonálnih krivulj.



Slika 1. Aproximacija gladke krivulje s poligonarno.

Prevedimo sedaj zgornji intuitivni zapis v matematični jezik. Naj bo krivulja K podana parametrično kot množica točk

$$K = \{(x(t), y(t)) : t \in [a, b]\},$$

kjer sta $x, y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dani zvezni funkciji. Pravimo, da je krivulja K *tir poti* $(x, y): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Poligonalna krivulja, ki aproksimira K , je določena z delitvijo $D = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ intervala $[a, b]$, pri čemer velja $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ in je sestavljena iz daljic od točke $(x(t_{j-1}), y(t_{j-1}))$ do točke $(x(t_j), y(t_j))$ za $j = 1, \dots, n$. Dolžina poligonalne poti, ki pripada delitvi D , je

$$l(D) = \sum_{j=1}^n \sqrt{(x(t_j) - x(t_{j-1}))^2 + (y(t_j) - y(t_{j-1}))^2}.$$

Dolžino krivulje K pa definiramo s predpisom

$$l(K) = \sup\{l(D) : D \text{ delitev intervala } [a, b]\}.$$

Pravimo, da je krivulja K *izmerljiva*, če je $l(K) < \infty$.

Navedimo izrek, ki pokaže, da je zgornja definicija smiselna [1, 8]:

Izrek 1. Naj bo K krivulja, ki je podana parametrično kot tir gladke injektivne poti $(x, y): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Potem je K izmerljiva in velja

$$l(K) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

Dolžina je neodvisna od izbire injektivne gladke parametrizacije.

O definiciji površine

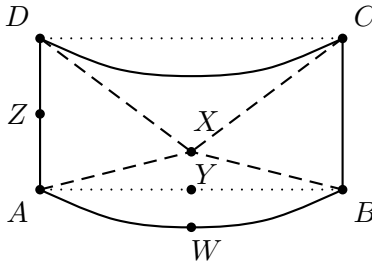
Idejo o aproksimaciji gladke krivulje s poligonalnimi posplošimo na ploskve takole: gladko ukrivljeno ploskev aproksimiramo s poliedrsko, ki je sestavljena iz trikotnikov z oglišči na dani ploskvi. Zanima nas, kako dobro se površina poliedrske aproksimacije približa površini dane ploskve.

Leta 1890 je H. A. Schwarz objavil primer, ki ga bomo spoznali v tem razdelku. S primerom bomo pokazali, da tudi pri zelo preprostih ukrivljenih ploskvah zgornja metoda brez kakšnih dodatnih zahtev popolnoma odpove.

Vzemimo pravokotnik s stranicama 1 in 2π ter stranici dolžine 1 zlepiamo, da dobimo plašč pokončnega krožnega valja s polmerom in višino 1. Površina plašča valja je 2π . Poliedrsko ploskev, ki aproksimira plašč valja, konstruiramo takole: v pravokotniku stranico dolžine 2π narežemo na n enakih delov, stranico dolžine 1 pa na m enakih delov ter tako pravokotnik razdelimo na nm skladnih pravokotnikov. Vsakega od majhnih pravokotnikov z diagonalama razdelimo na 4 trikotnike. Za oglišča poliedrske ploskve Σ vzamemo vsa oglišča trikotnikov na plašču valja. Trikotniki v Σ pa naj ustrezajo trikotnikom v opisanem razrezu majhnih pravokotnikov. Poliedrska ploskev je včrtana valju, omejuje jo $4mn$ trikotnikov. Njeno površino označimo s $P(m, n)$.

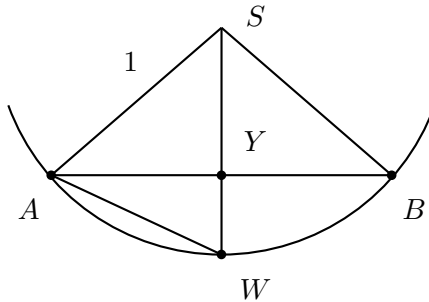
Brez računanja premislimo, da površina poliedrske ploskve Σ s povečevanjem m in n ne konvergira nujno proti površini plašča valja. Pokažimo, da površina Σ narašča čez vse meje, če m raste precej hitreje kot n . Če pri danem n povečujemo m , se število trikotnikov povečuje. Polovica vseh trikotnikov ima eno stranico vzporedno osnovni ploskvi valja. Ploščine teh trikotnikov so pri danem n navzdol omejene s pozitivnim številom, ki je neodvisno od m , kajti dolžina stranice, ki je vzporedna osnovni ploskvi valja, se ne spreminja, višina na to stranico pa je navzdol omejena z razdaljo središča te stranice do plašča valja. Če pri danem n vzamemo m dovolj velik, je površina poliedrske ploskve poljubno velika. Torej lahko izberemo zaporedje m_n , da je $\lim_{n \rightarrow \infty} P(m_n, n) = \infty$.

Izpeljimo sedaj formulo za izračun $P(m, n)$. Izberimo enega od mn pravokotnikov na plašču valja in njegova oglišča označimo z $ABCD$, presečišče njegovih diagonal pa z X . Naj bo W središče loka AB na plašču valja, Y središče daljice AB in Z središče daljice AD (glej sliko 2).



Slika 2. Element poliedrske aproksimacije.

Izračunajmo najprej ploščino trikotnika AXD . Dolžina stranice AD je $\frac{1}{m}$, višina na AD je daljica ZX , ki je skladna z AW . Pri računanju dolžine daljice AW prerežemo valj z ravnino skozi A vzporedno z osnovno ploskvijo valja (glej sliko 3).



Slika 3. Prerez valja.

Kot $\angle ASW$ je $\frac{\pi}{n}$, zato je $|AW| = 2 \sin \frac{\pi}{2n}$. Torej je

$$p_{\triangle AXD} = \frac{1}{2} |AD| |AW| = \frac{1}{m} \sin \frac{\pi}{2n}.$$

Za izračun ploščine trikotnika XAB , izračunajmo najprej dolžino daljice YW . Če upoštevamo, da je kot $\angle ASB$ enak $\frac{2\pi}{n}$, dobimo

$$|YW| = 1 - |SY| = 1 - \cos \frac{\pi}{n} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{2n}.$$

Ker sta daljici XW in WY pravokotni, z uporabo Pitagorovega izreka izpeljemo

$$|XY| = \sqrt{|XW|^2 + |WY|^2} = \sqrt{\frac{1}{4m^2} + 4 \sin^4 \frac{\pi}{2n}}.$$

Pri izračunu dolžine daljice AB še enkrat upoštevamo, da je $\angle ASB = \frac{2\pi}{n}$ in dobimo $|AB| = 2 \sin \frac{\pi}{n}$ (glej sliko 3). Zato je

$$p_{\Delta XAB} = \frac{1}{2}|AB||XY| = \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{1}{4m^2} + 4 \sin^4 \frac{\pi}{2n}}.$$

Ker sta trikotnika AXD in BXC ter trikotnika XAB in XCD skladna, je

$$\begin{aligned} P(m, n) &= 2mn \left(\frac{1}{m} \sin \frac{\pi}{2n} + \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{1}{4m^2} + 4 \sin^4 \frac{\pi}{2n}} \right) \\ &= 2n \sin \frac{\pi}{2n} \left(1 + \cos \frac{\pi}{2n} \sqrt{1 + 16m^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}} \right). \end{aligned}$$

Če vzamemo $m = n$, dobimo

$$P(n, n) = 2n \sin \frac{\pi}{2n} \left(1 + \cos \frac{\pi}{2n} \sqrt{1 + 16n^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\pi,$$

če vzamemo $m = n^3$, pa dobimo

$$P(n^3, n) = 2n \sin \frac{\pi}{2n} \left(1 + \cos \frac{\pi}{2n} \sqrt{1 + 16n^6 \sin^4 \frac{\pi}{2n}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

kjer smo pri računanju limit uporabili znano dejstvo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Drugi primer ustreza razmisleku zgoraj. Hitro lahko premislimo, da velja še več: če vzamemo neomejeni naraščajoči zaporedji naravnih števil m_k in n_k , za kateri velja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m_k}{n_k^2} = \lambda \in [0, \infty],$$

potem je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(m_k, n_k) = \pi \left(1 + \sqrt{1 + \lambda^2 \pi^4} \right).$$

Torej lahko v limiti dobimo poljubno število, ki je vsaj 2π . S tem je opis primera končan.

Kaj je šlo narobe? Če razmišljamo geometrijsko in preiščujemo o primeru, ko m narašča precej hitreje od n , opazimo, da poliedrska aproksimacija sicer leži v čedalje manjši okolici plašča valja, vendar so trikotniki nanj skoraj pravokotni. Kadar pa m in n rasteta enako hitro, so trikotniki skoraj tangenti na plašč valja. Pozitivni rezultat za take poliedrske aproksimacije so avtorji dokazali v [3].

V literaturi se pojavljata dve različici Schwarzevega primera. Opisani primer je povzet po [4, 6], v članku [9] pa je definirana poliedrska ploskev z istimi oglišči in drugače določenimi trikotniki. V obeh primerih pridemo do enakega zaključka. V raznih spletnih virih najdemo slike takih ploskev, ki jih avtorji različno poimenujejo, npr. Schwarzeva lanterna, Schwarzov škorenj [5, 10, 11, 12].

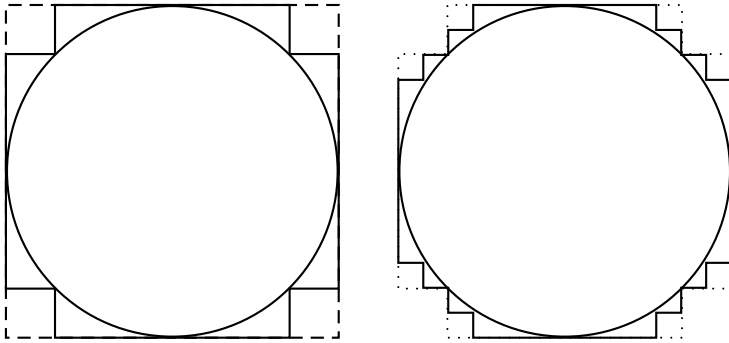
Zato površine ukrivljenih ploskev vsaj na enostaven način ne moremo definirati podobno kot dolžine krivulj, ampak se zatečemo k definiciji z integralom: naj bo ploskev $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ podana z regularno parametrizacijo $\vec{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, kjer je D odprta podmnožica v \mathbb{R}^2 [2]; torej je $\Pi = \{\vec{r}(u, v) : (u, v) \in D\}$. Potem je *površina ploskve* Σ definirana s

$$P(\Sigma) = \int \int_D \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv,$$

kjer \vec{r}_u in \vec{r}_v označujeta parcialna odvoda \vec{r} po u in v , $\|\cdot\|$ pa dolžino vektorja. Površina ploskve Π ni odvisna od izbire njene regularne parametrizacije. Intuitivno od tod lahko razberemo, kaj gre narobe pri poliedrski aproksimaciji: v integralu računamo s parcialnima odvodoma. Če sta si parametrizaciji dveh ploskev blizu v odvodih prvega reda, potem se površini malo razlikujeta, v nasprotnem primeru pa to ni nujno res.

Do podobnega fenomena pride že pri aproksimaciji dolžine, kar ponaazorimo z naslednjim primerom. Oglejmo si določanje približkov za obseg enotskega kroga. Za prvo aproksimacijo vzamemo obseg kvadrata, ki je očiřtan enotskemu krogu. Nato vsako oglišče projiciramo vzporedno z ustrezno diagonalo na enotsko krožnico in za naslednjo aproksimacijo vzamemo obseg poligonalne krivulje na sliki 4.

Postopek nadaljujemo. Vse poligonalne krivulje imajo obseg 8. Po dovolj velikem številu korakov poligonalna krivulja leži v poljubno majhni okolici enotske krožnice. Kaj je narobe?



Slika 4. Obseg kroga.

LITERATURA

- [1] J. Globevnik in M. Brojan, *Analiza 1*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2010.
- [2] J. Globevnik in M. Brojan, *Analiza 2*, dostopno na <http://www.fmf.uni-lj.si/~globevnik/skriptaII.pdf>, ogled 23. 1. 2015.
- [3] K. Hildebrandt, K. Polthier in M. Wardetzky, *On the convergence of metric and geometric properties of polyhedral surfaces*, *Geom. Dedicata* **123** (2006), 89–112.
- [4] T. W. Körner, *A companion to analysis, A second first and first second course in analysis*, Graduate Studies in Mathematics **62**, American Mathematical Society, Providence, 2004.
- [5] E. Lamb, *Counterexamples in Origami*, verzija 30. 11. 2013, dostopno na <http://blogs.scientificamerican.com/roots-of-unity/2013/11/30/counterexamples-in-origami/#respond>, ogled 2. 2. 2015.
- [6] T. Ramsey, *An 1890 Example From H. A. Schwarz of How Not To Define Surface Area*, dostopno na <http://www.math.hawaii.edu/~ramsey/SchwartzExample.pdf>, ogled 23. 1. 2015.
- [7] H. A. Schwarz, *Sur une définition erronée l'aire surface courbe*, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Berlin, 1890, II, 309–311.
- [8] S. Strle, *Krivulje v ravnini*, dostopno na http://ucilnica1314.fmf.uni-lj.si/pluginfile.php/16624/mod_resource/content/0/zapiski-krivulje.pdf, ogled 23. 1. 2015.
- [9] F. Zames, *Surface area and the cylinder area paradox*, *College Math. J.* **8** (1977), 207–211.
- [10] *Mathema Home Ausstellung*, dostopno na <http://www.mathema-ausstellung.de/de/ausstellung/grenzen/bilder0c37.html?image=0>, ogled 2. 2. 2015.
- [11] *Modell eines Schwarzschen Stiefels*, dostopno na <http://www.universitaetssammlungen.de/modell/1859>, ogled 2. 2. 2015.
- [12] *DGGS – Hans Havlicek: Visualisation – Schwarz lanterns*, dostopno na <http://www.geometrie.tuwien.ac.at/vis/vis069.html>, ogled 2. 2. 2015.