Uporaba in osmišljanje matematičnih vsebin v luči kompleksnosti: trije primeri prepogibanja papirja

mag. Mojca Suban
Zavod RS za šolstvo

Izvleček

Učenje in poučevanje matematike v velikem delu temelji na razumevanju in osmišljanju matematičnih vsebin, ki se jih učenci in dijaki učijo. Proces izgrajevanja razumevanja je dolgoročen in kompleksen, učinkovito pa ga lahko regulira učitelj s premišljeno pripravo nalog in dejavnosti v podporo izgradnji in uporabi matematičnih pojmov in konceptov. Rutar Ilc (Rutar Ilc v Suban Ambrož 2012) navaja, da učenje z razumevanjem »poteka s pomočjo miselnih aktivnosti, s katerimi gradimo odnos in povezave med dejstvom in idejami ter ustvarjamo mentalne modele«. Za matematiko je vzpostavljanje odnosov in povezav med matematičnimi pojmi in koncepti zelo pomembno, saj je narava matematičnega znanja kumulativna. Z uporabo različnih reprezentacij, aktivacijo notranjih povezav med pojmi, povezovanju z drugimi področji, aktivnostjo dijakov lahko vzpodbujamo razumevanje in omogočimo osmišljeno uporabo matematičnega znanja. Reševanje problemskih nalog, ki jih dijak rešuje na različne načine (npr. s konkretnimi pripomočki, s tehnologijo, analitično), je lahko učinkovit način za razvijanje razumevanja matematičnih vsebin in njihovo uporabo. Predstavljamo tri primere nalog s prepogibanjem papirja, ki omogočajo uporabo matematičnega znanja in preverjanje ter razvijanje razumevanja nekaterih pojmov iz geometrije.

Ključne besede: razumevanje matematičnih pojmov in konceptov, uporaba matematičnega znanja, različne reprezentacije

Using and Making Sense of Mathematical Content in the Light of Complexity: Three Paper Folding Examples

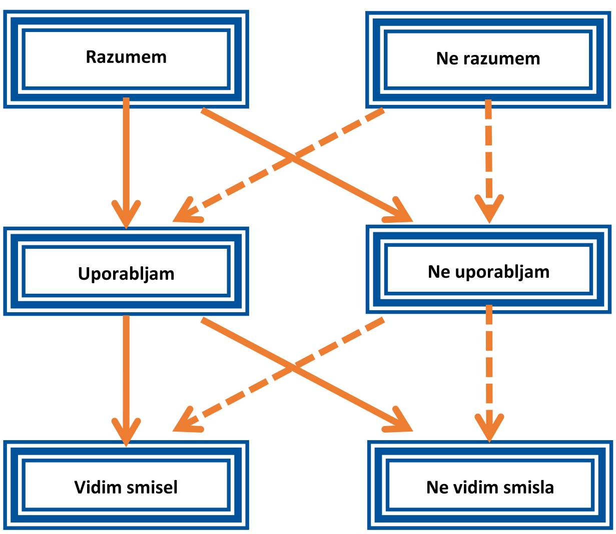
Abstract

Learning and teaching mathematics is based to a large extent on the understanding and making sense of mathematical content taught to primary and secondary school students. The process of developing this understanding is complex and takes time, while it can be effectively regulated by the teacher with a well-thought-out preparation of tasks and activities that supports the building and use of mathematical notions and concepts. Rutar Ilc (Rutar Ilc in Suban Ambrož 2012) states that learning by understanding is a process that »uses mental activities that help build the relationships and connections between facts and ideas, creating mental models.« Establishing relationships and connections between mathematical notions and concepts is very important in mathematics due to the cumulative nature of mathematical knowledge. Using various representations, activating inner connections between the concepts, linking other areas and engaging students can contribute to the understanding and logical use of mathematical knowledge. Various ways of problem solving (e.g. using practical tools, technology or analytics) can be an effective method to develop the understanding and use of mathematical content. The article introduces three paper folding examples as ways of using mathematical knowledge as well as testing and developing the understanding of certain geometric concepts.

Keywords: understanding mathematical notions and concepts, use of mathematical knowledge, various representations

Učenje in poučevanje matematike je tesno povezano s pojmi, kot so razumevanje, uporaba in osmišljanje matematičnih vsebin. Eden izmed ciljev pouka matematike, ki ga zasledujejo učitelji matematike (če ne kar osrednji), je, da bi dijaki razumeli, kaj se učijo in tudi zakaj se to učijo.

Šolska praksa kaže, da vzročno-posledične zveze med »*Razumem/Ne razumem*«, »*Uporabljam/Ne uporabljam*« in »*Vidim smisel/Ne vidim smisla*« optimalno delujejo v situaciji *Razumem → Uporabljam → Vidim smisel*. V fazi uporabe gre pričakovati, da dijak usvojene koncepte uporablja učinkovito in kritično. Shema 1 ponuja še druge situacije, od katerih šolska praksa zaznava tudi *Ne razumem → Uporabljam → ?*.



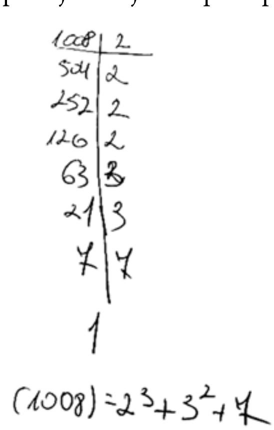
Shema 1: Vzročno-posledične zveze pri učenju matematike

Poenostavljeno rečeno gre v takih primerih lahko za uporabo rutinskih postopkov, ki jih dijak ne razume, pa vendarle izvaja, njegovo izvajanje pa je nekritično. Uporaba je tako dostikrat neučinkovita in je povezana tudi z vidikom motivacije za učenje. Oglejmo si naslednji primer.

Primer

Število 1008 zapiši kot produkt praštevil.

Razcep na prafaktorje števila 1008 je dijak izvedel po znanem in precej razširjenem postopku z navpično črto (Slika 1), vendar pa se je pri zapisu števila 1008 pokazalo, da postopka najverjetneje ne razume dobro, saj je potence praštevil seštel, kljub eksplicitnemu navodilu zapiši kot **produkt** praštevil. Lahko bi sklepali, da dijak ne razume, da je končni zapis števila kot produkta praštevil le uporaba dejstva, da sta množenje in deljenje nasprotni operaciji in da po izvedenih zaporednih deljenjih v shemi to uporabimo za zapis števila.



Slika 1: Reševanje dijaka.

Za poučevanje in učenje matematike je tako pomembno, da se fokus na razumevanju ohranja v vseh fazah učnega procesa in da se stopnja razumevanja pri dijakih tudi spremlja in preverja. Rutar Ilc (Rutar Ilc v Suban Ambrož, 2012) učenje z razumevanjem opredeli kot »izgrajevanje znanja s podeljevanjem pomena: poteka s pomočjo miselnih aktivnosti, s katerimi gradimo odnos in povezave med dejstvi in idejami ter ustvarjamo mentalne modele.«

Z vidika izvedbene perspektive razumevanja »pomeni neko temo razumeti, ko znaš to izkazati na različne, miselno zahtevne načine, kot denimo, da znaš razložiti, zbrati dokaze, se domisliti primerov, posplošiti, koncepte uporabiti v praksi, predočiti nove načine in podobno« (Perkins, 1993). K razvijanju in izkazovanju razumevanja pozitivno prispeva raba različnih reprezentacij, aktivacija notranjih povezav pri matematiki, povezovanje z drugimi področji in vzpodbujanje aktivnosti dijakov. Proces izgrajevanja razumevanja, ki je predpogoj za učinkovito uporabo matematičnega znanja in osmišljanja naučenega, je dolgoročen. S premišljeno pripravo nalog in dejavnosti ga regulira učitelj, skupaj z dijaki pa dopolnjuje, nadgrajuje in spremlja.

V nadaljevanju so predstavljeni trije primeri problemskih nalog prepogibanja papirja, kjer imajo dijaki možnost, da uporabijo svoje matematično znanje, prav tako pa lahko sami in njihov učitelj preverijo stopnjo razumevanja že obravnavanih vsebin.

1. Prepogibanje papirnatega modela kvadrata

Navodilo

Kvadraten list papirja prepogni po diagonali in ga razgrni v ravnino. Eno od stranic kvadrata prepogni do diagonale in papir spet razgrni v ravnino. Kolikšen del lista predstavlja pravokotni trikotnik, ki nastane na ta način?

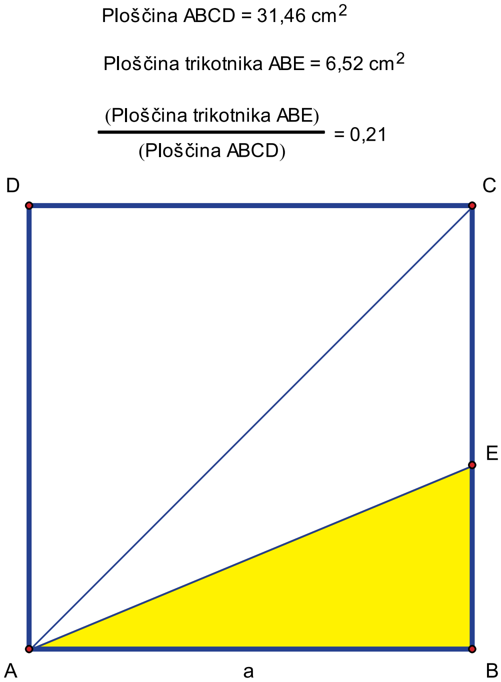
Faze pred reševanjem

- Dijak izvede konkretno dejavnost prepogibanja papirja. Papir razgrne v ravnino, opazuje nastale pregibe ter ugotavlja odnose med nastalimi liki in koti: katere dolžine so enake, kateri koti so skladni, koliko merijo posamezni koti.
- V zvezek nariše skico kvadratnega kosa papirja s pregibi (po razgrnitvi v ravnino).
- Dijak nariše sliko kvadratnega kosa papirja s podporo programov dinamične geometrije.

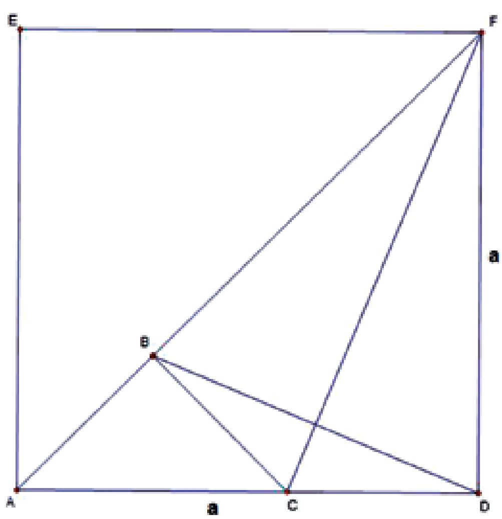
Dijaki naj najprej pridobijo konkretno izkušnjo s prepogibanjem papirja. Vnaprej naj ocenijo, kolikšen je delež papirja, ki ga zavzema trikotnik. Nalogo je glede na predznanje dijakov možno rešiti na več načinov.

Reševanje s tehnologijo

S programom GeoGebra izdelamo predlogo, kjer spreminjamo dolžino stranice kvadrata in opazujemo količnik med ploščinama trikotnika in kvadrata. Predloga **Kvadrat** v GeoGebri je na spletni strani revije: https://www.zrss.si/strokovne-resitve/revije/matematika-v-soli.



Reševanje brez uporabe kotnih funkcij



Zaradi načina konstruiranja je:

$|CD| = |CB|, \sphericalangle FBC = \sphericalangle CDF = 90°.$

Trikotnik je enakokrak, saj je:

$\sphericalangle FAD = 45°, \sphericalangle ACB = 90° - \sphericalangle FAD = 45°.$

Od tod:

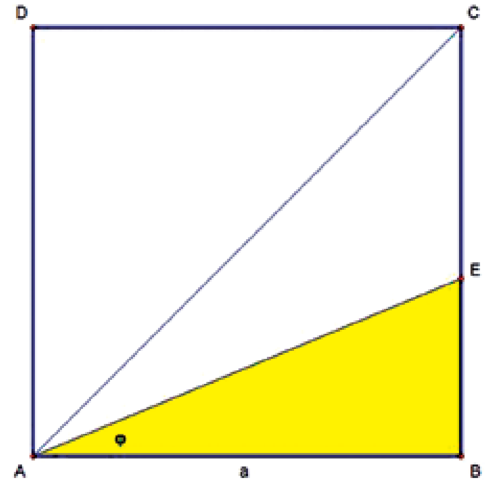
$|CD| = |BC| = |AB| = a\sqrt{2} - a.$

Naj bo S ploščina kvadrata $ABCD$, S_1 pa ploščina trikotnika CDF.

$$\frac{S_1}{S} = \frac{a \cdot |CD|}{2a^2} = \frac{a^2(\sqrt{2}-1)}{2a^2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

Dobljeni rezultat naj dijaki primerjajo s svojo napovedjo in ugotavljajo vzroke za morebitna odstopanja.

Reševanje z uporabo kotnih funkcij



$$\tan\alpha = \frac{|BE|}{a} \Longrightarrow |BE| = a \cdot \tan 22{,}5°$$

$$\tan 22{,}5° = \tan\frac{45°}{2} = \frac{\sin 45°}{1 + \cos 45°} = \sqrt{2} - 1$$

$$|BE| = a\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

Naj bo S ploščina kvadrata $ABCD$, S_1 pa ploščina trikotnika ABE.

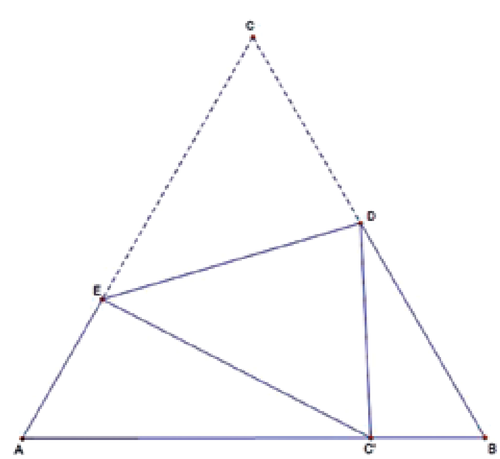
$$\frac{S_1}{S} = \frac{a \cdot |BE|}{2a^2} = \frac{a^2\left(\sqrt{2}-1\right)}{2a^2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

2. Prepogibanje papirnatega modela enakostraničnega trikotnika

Navodilo

Papirnati enakostranični trikotnik prepogni tako, da točka C 'pade' na daljico AB in dobljeno točko imenuj C'. Postopek ponovi. Razišči, kaj se spreminja pri različnih legah točke C'. Eno izmed količin, ki se spreminjajo, podrobneje razišči.

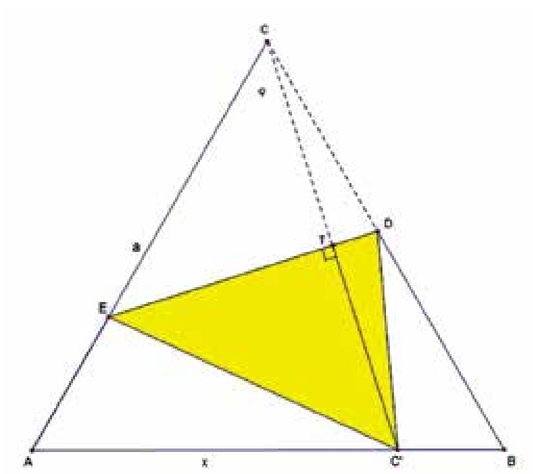
Predloga **Enakostranični trikotnik** v GeoGebri je na spletni strani revije: https://www.zrss.si/strokovne-resitve/revije/matematika-v-soli.



Pri različnih položajih točke C' na daljici AB se spreminjajo ploščine trikotnikov EDC', $AC'E$, $C'BD$, EDC, obsegi teh trikotnikov, dolžine daljic AC', $C'B$, BD, DC, AE, EC, ED, $C'D$, $C'E$.

Raziščimo, kako se spreminja dolžina daljice AE, ko točka C' potuje po daljici AB.

Dolžino daljice AC' označimo z x, pri čemer je $0 \leq x \leq a$.



V trikotniku $AC'C$ zapišemo kosinusni izrek za izračun dolžine CC':

$$|CC'| = a^2 + x^2 - 2ax \cdot \cos 60°$$

$$|CC'| = \sqrt{a^2 + x^2 - ax}\,.$$

Trikotnik ETC je pravokoten, uporabimo kotno funkcijo kosinus za kot $\varphi = \sphericalangle ECT$:

$$\cos \varphi = \frac{|CT|}{|EC|}$$

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{a^2 + x^2 - ax}}{2 \cdot |EC|}.$$

V trikotniku $AC'C$ zapišemo kosinusni izrek za kot φ in poenostavimo:

$$\cos \varphi = \frac{2a - x}{2\sqrt{a^2 + x^2 - ax}}.$$

Po izenačitvi izrazov na desni strani dobimo:

$$|EC| = \frac{a^2 + x^2 - bx}{2a - x}.$$

Oziroma

$$|AE| = a - |EC| = \frac{-x^2 - x + ax - a^2 + 2a}{2a - x}.$$

Za $a = 1$ dobimo:

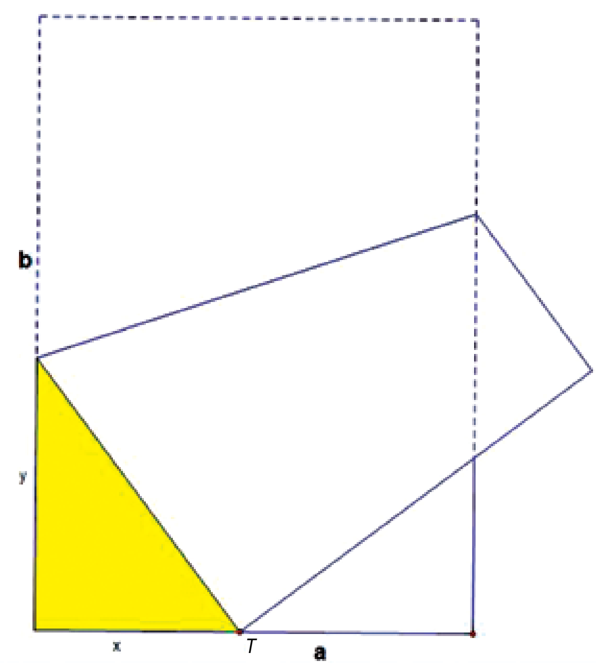
$$|AE| = \frac{x^2 - 1}{x - 2}.$$

3. Prepogibanje papirnatega modela pravokotnika

Navodilo

Pravokoten list papirja prepogni, kot kaže slika. Razišči, kako se spreminja ploščina osenčenega pravokotnega trikotnika, ko točka T potuje po stranici a.

Ideja primera je v *Zbirki situacij za ustni del poklicne mature iz matematike* (2011) razdelana kot situacija za ustni del poklicne mature. Predloga **Pravokotnik** v GeoGebri je na spletni strani revije: https://www.zrss.si/strokovne-resitve/revije/matematika-v-soli.



Velja, da je $0 \leq x \leq a$ in $0 \leq y \leq b$. V osenčenem trikotniku zapišemo Pitagorov izrek:

$$x^2 + y^2 = (b - y)^2 \rightarrow$$

$$y = \frac{b^2 - x^2}{2b}$$

$$S = \frac{xy}{2} = \frac{-x^3 + b^2 x}{4b}.$$

Pri kateri vrednosti spremenljivke je ploščina največja?

$$S' = \frac{-3x^2 + b^2}{4b}$$

$$S' = 0$$

$$x = \frac{b\sqrt{3}}{3}$$

Zaključek

Pri uspešnem učenju matematike je nujno razumevanje matematičnih pojmov, konceptov in postopkov. Učitelj lahko ustvarja primerno okolje za razvijanje in izkazovanje razumevanja s sistematično in premišljeno izbiro različnih dejavnosti, ki omogočajo, da dijak razmišlja v sebi ustreznem učnem okolju. Prikazani primeri s prepogibanjem papirja omogočajo dijakom izbiro med reprezentacijami, od konkretnih preko dinamičnih do formalno analitičnih, kar lahko pripomore k boljšemu razumevanju z vidika njihovega predznanja in motivacije. K temu prispeva tudi aktivacija notranjih povezav pri matematiki oz. povezovanje različnih matematičnih vsebin (npr. geometrije in algebre). Poudariti pa je treba še aktivno vlogo dijaka, ki z lastno konkretno in miselno dejavnostjo tke svojo mrežo znanja.

Viri

Perkins, D. (2012). Poučevanje za razumevanje. *Vzgoja in izobraževanje*, *18*(5), 15–23. Prevedla dr. Sonja Sentočnik. Prevod prispevka: Perkins, D. (1993). Teaching for understanding. V *American Educator: The professional Journal of the American Federation of Teachers, 17*(3), 28–35.

Suban Ambrož, M. (2011). Spremembe in novosti na poklicni maturi iz matematike. V *Matematika v šoli*, *XVII*(1-2).

Suban Ambrož, M. (2012). *Razumevanje pri poučevanju in učenju matematičnih vsebin*. V A. Žakelj in M. Borstner (ur.) Zbornik posveta *Razvijanje in vrednotenje znanja*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. Pridobljeno s http://www.zrss.si/pdf/razvijanje-vrednotenje-znanja-2012.pdf