Narodna in univerzitetna knjižnica
v Ljubljani

110268

Peter Grasselli

Schüler III. Gymn. Cl.

1852/53

Lehrbuch

der

Geometrie.

Zum Gebrauche

der Unter-Realschulen.

Verfaßt von

Dr. Franz Močnik,

Professor an der k. k. technischen Akademie in Lemberg.

K.K. SCHULBÜCHER VERSCHL. ADMINISTRAT.

Mit 6 Kupfertafeln.

Kostet ungebunden	22 Kr. C. M.
Gebund. in ledern. Rücken	28 Kr. C. M.

Wien, 1850.

Im Verlage der k. k. Schulbücher-Verschleiß-Administration bei St. Anna in der Johannes-Gasse.

110268

110268

In den öffentlichen Schulen sind, besondere Ermächtigungen des Ministeriums des Kultus und Unterrichtes ausgenommen, nur die **vorgeschriebenen**, mit dem Stämpel des Schulbücher-Verlages versehenen Bücher zu verwenden, auch dürfen diese Bücher nicht gegen **höhere als die auf dem Titelblatte angegebenen Preise** verkauft werden.

Narodna in univerzitetna knjižnica Ljubljana

DFZL 6210/1952

Einleitung.

§. 1.

Körper.

Alles, was einen Raum einnimmt, heißt **Körper**. Ein Buch z. B. nimmt einen Raum ein, ist also ein Körper; eben so sind ein Kasten, eine Tafel, ein Zimmer, ein Würfel, eine Kugel, Körper, weil sie alle einen Raum einnehmen.

Jeder Körper nimmt den Raum nach **drei Richtungen** ein, oder er hat **drei Ausdehnungen**, nach der **Länge**, nach der **Breite** und nach der **Höhe**. Von einem Kasten kann man sagen, daß er sich von der Rechten gegen die Linke d. i. in die Länge, von der Vorderseite gegen die Rückseite d. i. in die Breite, und von unten nach oben d. i. in die Höhe ausdehnt; so ist auch ein Zimmer lang, breit und hoch; eben so eine Kirche.

Statt der Höhe wird bei vielen Körpern auch **Tiefe** oder **Dicke** gesagt. Ein Graben ist lang, breit und tief; so auch ein Keller, ein Brunnen. Ein Buch ist lang, breit und dick; eben so eine Tafel, ein Lineal.

Ein Körper dehnt sich nach seinen drei Richtungen nicht immer weiter aus, er hört nach allen Seiten irgendwo auf; so hört ein Zimmer an den Wänden, an der Decke und am Fußboden auf. Da, wo ein Körper aufhört, sind seine Gränzen. — Ein Körper ist also ein nach allen Seiten begränzter Raum.

§. 2.

Flächen.

Die Gränzen der Körper heißen Flächen. Die vier Wände eines Zimmers, der Fußboden, die Decke desselben sind Flächen, weil sie einen Körper, nämlich das Zimmer, begränzen. Flächen sieht man ferner an der Außenseite eines Kastens, eines Buches, einer Walze, eines Eies u. s. w.

Wie viele Flächen kommen an einem Kasten vor? — wie viele an einem Buche, an einer Tafel, an einem Würfel, an einer Walze, an einem Zuckerhute, an einer Kugel?

Bei einer Fläche darf man sich nur die Länge und die Breite, aber keine Dicke denken, weil man sonst einen Körper hätte, während die Fläche nur die Gränze eines Körpers ist, nur der Ort, wo der Körper aufhört. So ist z. B. die Wand eines Zimmers, wenn auch ihre Dicke betrachtet wird, keine Fläche, sondern ein Körper; als Fläche, als Gränze des Zimmers, darf man sich nicht die ganze Wand denken, sondern nur das Äußere, was man daran sieht, und dieses Äußere der Wand hat keine Dicke. Ein Blatt Papier ist ein Körper, weil es lang, breit und dick ist; betrachtet man aber nur die eine Seite als Gränze des Blattes, als Fläche, so darf man dabei auf die Dicke keine Rücksicht nehmen, sondern nur auf die Länge und die Breite. — Eine Fläche hat also nur zwei Ausdehnungen, die Länge und die Breite.

Jede Fläche hört sowohl nach der Länge als nach der Breite irgendwo auf. Wo eine Fläche aufhört, da sind ihre Gränzen. Jede Fläche ist also begränzt.

§. 3.

Linien.

Die Gränzen der Flächen heißen Linien. Wo z. B. eine Wand aufhört, da sind Linien; jede Wand hört nach vier Seiten auf, und wird daher von vier Linien begränzt.

Wie viele Gränzlinien kommen in einem gewöhnlichen Zimmer vor? — wie viele an einem Buche, an einem Würfel, an einer Walze, an einer Kugel?

Von einer Linie kann man nur sagen, daß sie lang ist, nicht aber, daß sie lang und breit ist, da sie keine Fläche, sondern nur die Gränze einer Fläche ist; eben so wenig kann man sagen, daß eine Linie lang, breit und dick ist, da sie sonst ein Körper seyn müßte. — Eine Linie hat daher nur Eine Ausdehnung, nämlich die Länge.

Eine Linie kann man, da sie nur Länge besitzt, gar nicht zeichnen. Die Linien, die wir auf der Tafel oder auf dem Papiere zeichnen, haben immer etwas Breite und Dicke, sind also keine eigentlichen Linien, sondern Körper; sie sind aber auch nur Zeichen der Linien, und müssen als solche so viel Breite und Dicke haben, als nöthig ist, um sie dem Auge

sicht=

sichtbar zu machen. Auf dem Papiere, das dem Auge nahe ist, zieht man die Linie nur mit einer geringen Breite und Dicke; an der Tafel, wo sie auch in der Entfernung noch gesehen werden soll, erhält sie darum auch mehr Breite und Dicke.

Jede Linie hört auf zwei Seiten auf, oder, sie wird auf zwei Seiten begränzt.

§. 4.

Punkte.

Die Gränzen der Linien heißen Punkte. Betrachtet man z. B. eine Linie an dem Buche, so sieht man, daß sie auf zwei Seiten aufhört; die Orte, wo sie aufhört, sind Punkte.

Wie viele Gränzpunkte sind an dem Buche, in dem Zimmer, an der Tafel, an einem Zuckerhute, an einer Kugel?

Von einem Punkte können wir nicht sagen, daß er lang oder breit oder dick ist. Wäre der Punkt nur etwas lang, so wäre er eine Linie; hätte er Länge und Breite, so wäre er eine Fläche; hätte er Länge, Breite und Dicke, so müßte er ein Körper seyn. Ein Punkt ist aber weder ein Körper, noch eine Fläche, noch auch eine Linie, sondern nur die Gränze einer Linie. — Ein Punkt hat also keine Ausdehnung.

Einen Punkt kann man, da er keine Ausdehnung hat, gar nicht sehen, und daher auch nicht zeichnen. Der Punkt, den man mit Bleistift, Feder oder Kreide macht, hat, wenn er auch noch so klein gemacht wird, doch immer etwas Länge, Breite und Dicke, ist also ein Körper und nicht ein Punkt; er ist nur das Zeichen des Punktes, und muß als solches so viel Länge,

Brei-

Breite und Dicke bekommen, daß er von dem Auge gesehen werden kann.

§. 5.

Entstehung der Linien, Flächen und Körper.

Bewegt man z. B. einen Bleistift immer fort, so wird sich auch die Spitze desselben, der Endpunkt, immer fort bewegen; nimmt man nun an, daß dieser Endpunkt während der ganzen Bewegung seine Spur zurückläßt, so entsteht dadurch eine Linie. — Durch die Bewegung eines Punktes entsteht also eine Linie.

Läßt der ganze Bleistift, während er in einer andern Richtung, als er sie selbst hat, fortbewegt wird, auch überall seine Spur zurück, so bildete diese eine Fläche. — Durch die Bewegung einer Linie entsteht also eine Fläche.

Bewegt man nun auch eine Fläche, z. B. ein Blatt Papier, in einer andern Richtung, als sie die Fläche selbst hat, so bildet ihr Weg einen Körper. — Durch die Bewegung einer Fläche entsteht also ein Körper.

§. 6.

Eintheilung der Linien.

Die Linien werden in gerade und krumme eingetheilt.

Eine gerade Linie, auch bloß Gerade, heißt diejenige Linie, deren alle Punkte in derselben Richtung liegen. Ein gespannter Faden stellt eine gerade Linie vor.

Ei=

Eine krumme Linie ist diejenige, deren Richtung sich immerfort ändert. An einer Walze sieht man krumme Linien.

Figur 1 stellt eine Gerade, Fig. 2 und 3 aber stellen krumme Linien dar.

Eine Gerade entsteht, wenn sich ein Punkt immer in derselben Richtung fortbewegt; eine krumme Linie, wenn der sich bewegende Punkt ununterbrochen seine Richtung ändert.

§. 7.

Die gerade Linie.

Die Gerade hat folgende Eigenschaften:

1. Durch einen Punkt lassen sich unzählig viele gerade Linien ziehen; durch zwei Punkte aber kann nur Eine Gerade gezogen werden, die zwischen jenen zwei Punkten eine bestimmte Größe haben muß. Durch zwei Punkte ist daher sowohl die Richtung als die Größe einer geraden Linie vollkommen bestimmt. — Zur Benennung eines Punktes setzt man neben das Zeichen desselben einen Buchstaben; um daher eine Gerade zu benennen, braucht man nur deren Endpunkte mit Buchstaben zu bezeichnen und diese zusammen zu stellen. In Fig. 1 heißt die gerade Linie, welche zwischen den Punkten A und B liegt, die Gerade AB.

2. Die Gerade ist die kürzeste Linie, welche von einem Punkte zu einem andern gezogen werden kann. Die Gerade dient daher auch dazu, um die Entfernung oder den Abstand zweier Punkte von einander darzustellen. So zeigt AB (Fig. 1) die Entfernung der zwei Punkte von A und B an.

Um

Um eine gerade Linie auf dem Papiere zu ziehen, bedienet man sich des Lineals.

Wie prüft man die Richtigkeit eines Lineals?

§. 8.

Die Kreislinie.

Unter allen krummen Linien ist die Kreislinie die beachtungswürdigste. Sie ist diejenige krumme Linie, deren alle Punkte von einem innerhalb liegenden Punkte gleich weit entfernt sind.

Der Punkt, von welchem alle Punkte der Kreislinie gleich weit abstehen, heißt der Mittelpunkt oder das Zentrum; die ganze Kreislinie selbst wird auch Umfang oder Peripherie des Kreises genannt.

Fig. 4 stellt eine Kreislinie vor, wovon **O** der Mittelpunkt und **ABCDEA** der Umfang ist.

Man kann sich die Kreislinie auf folgende Art entstanden denken. Es bewege sich die Gerade **OA** so um den festen Punkt **O** herum, daß sie wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt; der Punkt **A** beschreibt während dieser Bewegung die Kreislinie **ABCDEA**.

Zur Zeichnung der Kreislinie bedient man sich des Zirkels.

Eine Gerade, welche vom Mittelpunkte zu irgend einem Punkte des Umfanges gezogen wird, heißt ein Halbmesser (Radius) des Kreises; z. B. **OA**, **OB**, **OC**. Der Halbmesser zeigt also den Abstand der Punkte der Peripherie vom Mittelpunkte an. Da alle Punkte der Peripherie vom Mittelpunkte gleich weit abstestehen, so folgt, daß alle Halbmesser in einem Kreise gleich sind.

Eine Gerade **AD**, welche von einem Punkte des Umfanges durch den Mittelpunkt bis an die entgegengesetzte Seite des Umfanges gezogen wird, heißt ein Durchmesser (Diameter). Jeder Durchmesser besteht aus zwei Halbmessern, und ist daher doppelt so groß als ein Halbmesser.

Die Gerade **AE**, welche von einem Punkte des Umfanges zu einem andern Punkte desselben gezogen wird, heißt Sehne.

Jeder Theil des Umfanges, wie **AB**, wird ein Kreisbogen genannt; die Hälfte des Umfanges heißt insbesondere ein Halbkreis, und der vierte Theil ein Quadrant.

Der Umfang eines jeden Kreises wird in 360 gleiche Bogen, welche man Grade nennt, eingetheilt. Es kommen daher auf den Halbkreis 180, auf den Quadranten 90 Grade. Die Eintheilung des Halbkreises in Grade sieht man an dem Transporteur (Fig. 5), bei welchem die scharfe Kante **AB** den Durchmesser, und der Einschnitt **C** den Mittelpunkt vorstellt. Jeder Grad wird wieder in 60 gleiche Theile, Minuten; und jede Minute in 60 Secunden eingetheilt.

Man bezeichnet die Grade, Minuten und Secunden durch die Zeichen °, ′, ″; um z. B. einen Bogen von 17 Graden, 28 Minuten und 58 Secunden auszudrücken, schreibt man: 17° 28′ 58″.

+

§. 9.

§. 9.

Eintheilung der Flächen.

Man unterscheidet ebene und gekrümmte Flächen.

Eine ebene Fläche, auch bloß Ebene, ist eine solche Fläche, in welcher sich nach allen Richtungen hin gerade Linien ziehen lassen; z. B. die Wand eines Zimmers, die Fläche eines Tisches.

Wie prüft man mit dem Lineale, ob eine Fläche eben ist?

Eine gekrümmte Fläche ist diejenige, in welcher sich nicht nach allen Richtungen gerade Linien ziehen lassen; z. B. die äußere Fläche eines Baumes, bei der man nur nach einer Richtung, nämlich nach der Länge, die Fläche einer Kugel, bei der man in keiner Richtung gerade Linien ziehen kann.

Die Lage einer Ebene ist durch drei Punkte, welche nicht in einer geraden Linie liegen, vollkommen bestimmt. Um dieses einzusehen, nehme man erstlich nur Einen Punkt als gegeben an; durch diesen lassen sich unendlich viele Ebenen in allen denkbaren Richtungen legen. Auch durch zwei Punkte ist die Richtung der Ebene noch nicht bestimmt; denkt man sich nämlich durch die zwei Punkte eine gerade Linie gezogen, und durch diese Gerade eine Ebene gelegt, welche sich rings um die Gerade drehet, so kann diese Ebene dabei noch unzählig viele Lagen annehmen, und geht doch in jeder dieser Lagen durch die zwei gegebenen Punkte. Wird aber noch ein dritter Punkt außer jener Geraden angenommen, durch welchen die Ebene

bei

bei ihrer Umdrehung durchgehen muß, so wird unter allen frühern Lagen der Ebene nur Eine einzige seyn, in welcher die Ebene sowohl durch die zwei Punkte in der Geraden, als auch durch den dritten außer ihr liegenden Punkt geht. Durch drei Punkte, welche nicht in einer geraden Linie liegen, läßt sich also nur Eine einzige Ebene gelegt denken; oder, was gleichviel ist, eine Ebene ist durch drei nicht in Einer Geraden liegende Punkte ihrer Lage nach vollkommen bestimmt.

Zur Benennung einer Ebene braucht man nur die drei Punkte, durch welche sie gelegt ist, mit Buchstaben zu bezeichnen, und diese zusammen zu stellen. In Fig. 8 heißt die ebene Fläche, welche durch die Punkte **A**, **B** und **C** geht, die Ebene **ABC**.

§. 10.

Eintheilung der Körper.

Es gibt eckige und runde Körper.

Eckige Körper heißen diejenigen, welche lauter Ebenen zu Gränzen haben; z. B. ein Kasten, ein Würfel.

Runde Körper sind solche, welche nicht bloß von Ebenen begränzt werden; z. B. eine Walze, welche von zwei ebenen und einer gekrümmten Fläche, eine Kugel, welche von Einer einzigen gekrümmten Fläche begränzt wird.

§. 11.

Winkel.

Bisher ist an den Körpern, Flächen und Linien nur das Ausgedehntseyn betrachtet worden; ein

zwei=

zweiter Gegenstand, der dabei zu berücksichtigen kommt, ist die Abweichung in der Richtung, welche Winkel genannt wird.

Wenn zwei verschiedene Linien von demselben Punkte ausgehen, so heißt die Abweichung in ihren Richtungen ein Linienwinkel, ebener Winkel, gewöhnlich auch geradezu Winkel. Je zwei Linien, die an den Enden der Tafel zusammenstoßen, bilden mit einander einen ebenen Winkel.

Ein Winkel, der von zwei Flächen gebildet wird, heißt ein Flächenwinkel; z. B. der Winkel zwischen der Decke eines Zimmers und einer Wand.

Wenn sich mehr als zwei Flächen in einem Punkte vereinigen, so haben sie gegenseitig verschiedene Richtungen, und bilden also auch einen Winkel, welcher ein körperlicher Winkel oder eine körperliche Ecke heißt. Eine körperliche Ecke ist also die gegenseitige Neigung von drei oder mehrern Flächen, welche in Einem Punkte zusammentreffen. Körperecken sieht man im Zimmer, am Kasten, am Buche u. s. w.

Ein Winkel wird um so größer, je mehr die Linien oder Flächen, von denen er begränzt wird, in ihren Richtungen von einander abweichen.

Zur Wiederholung des bisher Vorgenommenen soll man hier die verschiedenartigsten Körper durch wirkliche Anschauung betrachten, und bei jedem derselben angeben, wie viele Punkte, wie viele und was für Linien, wie viele und was für Flächen daran vorkommen, ob daher der Körper ein eckiger oder ein runder ist; ferner, wie viele ebene, wie viele Flächen-, und wie viele Körperwinkel derselbe enthält.

§. 12.

Messen der Raumgrößen.

Alles, was durch Zusetzung gleichartiger Theile vermehrt, und durch Hinwegnahme derselben vermindert werden kann, heißt Größe. Da die Linien, Flächen und Körper, so wie die Linien-, Flächen- und Körperwinkel einer Vergrößerung und einer Verminderung fähig sind, so sind sie auch Größen; sie werden, weil sie im Raume vorkommen, Raumgrößen genannt.

Da der Punkt keine Ausdehnung hat, also weder vergrößert noch verkleinert werden kann, so ist er keine Raumgröße.

Bei jedem Dinge nimmt man insbesondere auf zwei Sachen Rücksicht, auf die Größe des Ganzen, und auf die Lage seiner Theile d. i. auf die Form.

Die Größe eines Dinges bestimmen, heißt dasselbe messen.

Um eine Raumgröße zu messen, muß man irgend eine Raumgröße derselben Art als Einheit annehmen, und untersuchen, wie oft diese als Einheit angenommene Größe in der Andern enthalten ist. Jede Größe kann daher nur durch eine Größe derselben Art gemessen werden, also eine Linie nur durch eine Linie, eine Fläche nur durch eine Fläche, ein Körper nur durch einen Körper, ein Winkel nur durch einen Winkel.

§. 13.

Gleiche, ähnliche und congruente Raumgrößen.

Zwei Raumgrößen können zwar verschiedene Form, aber dabei doch gleiche Größe haben. So kann eine

rund

rund begränzte Wiese eben so viel Raum einschließen, als eine viereckige; hier ist also die Form verschieden, die Größe gleich. Ein Stück erweichtes Wachs kann bald zu einer Kugel, bald zu einem Würfel verarbeitet werden; die Größe bleibt immer dieselbe, die Form ist verschieden. — Raumgrößen nun, welche einerlei Größe haben, sie mögen dann in der Form übereinstimmen oder nicht, heißen gleich. Das Zeichen der Gleichheit ist =.

Umgekehrt können zwei Raumgrößen dieselbe Form haben, während sie sich in der Größe unterscheiden; z. B. zwei Kreise, oder zwei Würfel, welche verschiedene Größe haben. — Raumgrößen, welche einerlei Form haben, sie mögen in der Größe übereinstimmen oder nicht, heißen ähnlich. Das Zeichen der Ähnlichkeit $\sim$ ist.

Raumgrößen, welche einerlei Größe und einerlei Form haben, heißen congruent. Zwischen zwei congruenten Größen wird, da sie gleich und ähnlich sind, das Zeichen $\cong$ gesetzt. Zwei congruente Raumgrößen müssen, wenn die eine an die Stelle der andern gelegt wird, in allen ihren Ausdehnungen zusammenfallen, und sich daher vollkommen decken.

§. 14.

Geometrie.

Die Lehre von den Raumgrößen wird Geometrie genannt.

Sie zerfällt in zwei Haupttheile: in die Planimetrie und die Stereometrie.

Die Planimetrie oder ebene Geometrie handelt von jenen Raumgrößen, welche in einer und der-

derselben Ebene liegen; die Stereometrie aber beschäftigt sich mit jenen Raumgrößen, welche sich nicht in einer einzigen Ebene liegend vorstellen lassen.

So liegen zwei Gerade, welche von einem und demselben Punkte ausgehen, in einerlei Ebene; die Kreislinie liegt in einer einzigen Ebene; die Betrachtungen darüber gehören daher in die Planimetrie. Wenn man hingegen von verschiedenen Punkten, außerhalb einer Ebene, Linien nach derselben zieht, wenn man zwei Ebenen auf einander gestellt denkt, so befinden sich diese Raumgrößen nicht in Einer einzigen Ebene, sondern nehmen noch einen Raum außerhalb dieser Ebene ein; dieses gilt auch von allen Körpern, welche, wenn man sie auf irgend einer Ebene liegend denkt, nicht mit allen ihren Gränzen in diese Ebene fallen, sondern auch noch einen Raum außerhalb derselben einnehmen; von solchen Raumgrößen handelt die Stereometrie.

Die Geometrie wird auch in die theoretische und die praktische eingetheilt.

Die theoretische Geometrie beschäftiget sich mit den Eigenschaften und der Ausmessung der Raumgrößen an und für sich selbst; die praktische lehret die Anwendung der theoretischen Lehren, sowohl im Allgemeinen, als insbesondere dazu, um einzelne Theile der Erdoberfläche zu messen, und auf dem Papiere zu verzeichnen.

Er=

Erster Theil.

Die Planimetrie.

Erstes Hauptstück.

Gerade Linien in Beziehung auf einander.

---

§. 15.

Bei den geraden Linien hat man vor Allem auf zwei Sachen Rücksicht zu nehmen, auf die Richtung und auf die Größe derselben.

Bei einer einzigen Geraden kann weder von deren Richtung noch von deren Größe die Rede seyn; man kann von einer Geraden nur sagen, welche Richtung sie in Beziehung auf eine andere Gerade hat, und eben so kann man von ihr nur angeben, welche Länge sie im Vergleiche mit einer andern geraden Linie hat. Richtung und Größe sind also Eigenschaften, welche eine Vergleichung voraussetzen, und weil zu jeder Vergleichung wenigstens zwei Dinge erfordert werden, so müssen auch bei der Betrachtung der Richtung und Größe wenigstens zwei gerade Linien vorausgesetzt werden.

I. Richtung der Geraden.

§. 16.

Parallele und nicht parallele Linien.

Wenn man zwei Gerade, welche in einer Ebene liegen, in Hinsicht ihrer Richtung mit einander vergleicht, so findet man, daß sie entweder dieselbe oder eine verschiedene Richtung haben. Wenn zwei gerade Linien dieselbe Richtung haben, so daß sie überall gleich weit von einander abstehen, so heißen sie parallel; wenn aber ihre Richtungen von einander abweichen, so daß sie sich auf einer Seite nähern, auf der andern entfernen, so heißen sie nicht parallel. Die nicht parallelen Linien werden nach jener Richtung hin, wo sie sich nähern, konvergirend, nach der andern Richtung divergirend genannt. So sind (Fig. 6) **AB** und **CD** parallele Linien, (Fig. 7) **MN** und **OP** konvergirend, **NM** und **PO** divergirend. Daß **AB** mit **CD** parallel ist, drückt man so aus: **AB || CD.**

Zwei parallele Linien können, weil sie durchaus gleich weit von einander entfernt bleiben, nie zusammentreffen, wenn man sie auch noch so weit verlängert; zwei nicht parallele Linien aber müssen, hinlänglich verlängert, sich in einem Punkte durchschneiden, und zwar auf derjenigen Seite, nach welcher sie konvergiren.

Parallele Linien bemerkt man an Häusern, Thüren, Fenstern u. dgl. Man pflegt in der Ausübung häufig auch solche Linien, welche nicht parallel sind, aber in ihrer Richtung so wenig abweichen, daß sie sich erst in einer sehr großen Entfernung schneiden, als parallel anzunehmen. Die Sonnenstrahlen fahren divergirend aus, aber wegen der ungeheuern Entfernung

der

der Sonne von der Erde kann man Sonnenstrahlen, welche auf zwei nahe liegende Orte der Erde auffallen, fast ohne Fehler als parallel betrachten. Wenn man einen Körper fallen läßt, bewegt er sich in der Richtung gegen die Mitte unserer Erde; die Linien, in welchen zwei frei fallende Körper sich bewegen, würden also, wenn man sie verlängern könnte, im Mittelpunkte der Erde zusammenkommen; weil jedoch die Entfernung bis zur Mitte der Erde sehr groß ist, so ist für eine kleine Strecke der Erde die Abweichung in den Richtungen jener beiden Geraden so gering, daß man sie füglich als parallel annehmen darf.

§. 17.

Begriff des Winkels.

Die Abweichung der Richtungen zweier Geraden, die in einem Punkte zusammentreffen, heißt ein Winkel; die Geraden, welche den Winkel einschließen, nennet man die Schenkel, und ihren Durchschnittspunkt den Scheitel des Winkels.

Man bezeichnet einen Winkel entweder durch den Buchstaben am Scheitel, oder durch einen kleinen Buchstaben, den man in die Öffnung des Winkels setzt, oder durch drei Buchstaben, wovon zuerst der Buchstabe an dem einen Schenkel, dann der Buchstabe am Scheitel und zuletzt der Buchstabe am andern Schenkel ausgesprochen wird.

In dem Winkel (Fig. 8) ist **A** der Scheitel, **AB** und **AC** sind die Schenkel; der Winkel heißt daher: Winkel **A**, oder Winkel m, oder Winkel **BAC** oder **CAB**.

Ein Winkel wird desto größer, je mehr seine Schenkel von einander abweichen. Die Länge der Schenkel hat keinen Einfluß auf die Größe eines Winkels, denn wenn die Schenkel noch so weit verlängert werden, so behalten sie doch dieselben Richtungen, also bleibt auch die Abweichung ihrer Richtungen d. i. der von ihnen gebildete Winkel unverändert.

§. 18.

Vergleichung zweier Winkel.

Um zwei Winkel hinsichtlich ihrer Größe mit einander zu vergleichen, denke man sich dieselben so über einander gelegt, daß der Scheitel des einen Winkels auf den Scheitel des andern fällt, und daß ein Schenkel des einen längs einem Schenkel des andern zu liegen kommt. Sodann sehe man auf die Lage der beiden andern Schenkel. Fallen diese nicht zusammen, so sind die beiden Winkel ungleich, und zwar ist derjenige aus ihnen der kleinere, dessen zweiter Schenkel zwischen den Schenkeln des andern Winkels liegt. Wenn aber die Schenkel der beiden Winkel in einander fallen, so sind diese Winkel einander gleich; und umgekehrt: wenn zwei Winkel einander gleich sind, so müssen sie sich so über einander legen lassen, daß ihre Schenkel in einander fallen.

Winkel, deren Schenkel nach derselben Seite parallel laufen, sind einander gleich; denn die Schenkel haben gleiche Richtungen, also ist auch die Abweichung der Richtungen in beiden Winkeln dieselbe. Ist (Fig. 9) $AB \parallel DE$, und $AC \parallel DF$, so ist der W. $BAC = EDF$.

§. 19.

Entstehung der Winkel durch die drehende Bewegung.

Einen Winkel kann man sich auch durch die dre-

hen-

hende Bewegung einer Geraden entstanden denken.

Dreht sich die Gerade **AB** (Fig. 10) um den einen ihrer Endpunkte **A**, bis sie nach und nach in die Lagen **AC**, **AD**, **AE**, . . . zu stehen kommt, so sieht man, daß sie von ihrer ursprünglichen Lage **AB** immer mehr abweicht; die Größe dieser Abweichung ist nun der Winkel.

Die drehende Bewegung ist von der fortschreitenden wesentlich verschieden; während man durch die fortschreitende Bewegung einer Geraden ohne Ende zu immer neuen Lagen kommt, führt die drehende Bewegung nur so lange auf neue Lagen, bis eine volle Umdrehung vollendet ist, d. h. bis die Gerade wieder in ihre ursprüngliche Lage gekommen ist; durch weitere drehende Bewegung wiederholen sich die Lagen, welche schon bei der ersten Umdrehung durchlaufen wurden. Die ganze Umdrehung gibt also den größten an einem Scheitel möglichen Winkel; bei ihm fällt der zweite Schenkel mit dem ersten zusammen.

§. 20.

Gerade, hohle, erhabene Winkel.

Betrachtet man die verschiedenen Lagen, in welche die Gerade **AB** während einer ganzen Umdrehung kommt, so bemerkt man sehr verschiedene Winkel, denen man auch verschiedene Namen beilegt.

Hat die Gerade die Hälfte von der ganzen Umdrehung gemacht, wo sie also in die Lage **AF** gekommen ist, so haben die beiden Schenkel **AB** und **AF** gerade entgegengesetzte Richtung, und liegen in einer geraden Linie; ein solcher Winkel **BAF** heißt darum ein gerader. Ein gerader Winkel ist also derjenige, dessen beide Schenkel gerade entgegengesetzte Richtung haben, und daher in einer geraden Linie liegen.

Ein Winkel, zu dessen Entstehung weniger als die halbe Umdrehung nöthig ist, heißt ein hohler, z. B. **BAC**, **BAD**, **BAE**. Ein hohler Winkel ist also kleiner als ein gerader.

Ein Winkel, zu dessen Beschreibung mehr als eine halbe Umdrehung erforderlich ist, heißt ein erhabener, z. B. **BAG**. Ein erhabener Winkel ist also größer als ein gerader.

§. 21.

Rechte, spitzige, stumpfe Winkel.

Da in der Geometrie meistens nur hohle Winkel vorkommen, so werden dieselben wieder besonders untergetheilt.

Ein hohler Winkel, zu dessen Erzeugung genau der vierte Theil einer Umdrehung nöthig ist, heißt ein rechter, wie **BAD**. Ein rechter Winkel ist also die Hälfte eines geraden.

Um einen rechten Winkel zu erhalten, braucht man nur irgend ein Stück Papier zweimal so zusammen zu legen, daß die Buglinien genau auf einander fallen.

Ein hohler Winkel, zu dessen Entstehung weniger als der vierte Theil einer Umdrehung nöthig ist, heißt ein spitziger, z. B. **BAC**. Ein spitziger Winkel ist daher kleiner als ein rechter.

Ein hohler Winkel **BAE**, zu dessen Erzeugung mehr als der vierte Theil einer Umdrehung erfordert wird, heißt ein stumpfer. Ein stumpfer Winkel ist

als

also größer als ein rechter, aber kleiner als ein gerader.

Statt des geraden Winkels pflegt man gewöhnlich **zwei Rechte**, statt des durch die ganze Umdrehung erzeugten **vier Rechte** zu sagen.

Aus dieser Erklärung folgt:

1. Alle Winkel, welche auf einer Seite einer Geraden um denselben Scheitel herum neben einander liegen, betragen zusammen immer zwei Rechte.

2. Alle Winkel, welche um einen Punkt herum neben einander liegen, betragen zusammen genommen immer vier Rechte.

§. 22.

Senkrechte und schiefe Gerade.

Wenn eine Gerade auf einer andern Geraden so aufsteht, daß sie sich weder auf der einen noch auf der andern Seite zu ihr hinneigt, so sagt man, sie steht auf ihr **senkrecht**. Man kann auch sagen: eine Gerade steht auf einer andern senkrecht, wenn sie mit ihr zwei gleiche Winkel bildet.

Wenn eine Gerade mit einer andern zwei ungleiche Winkel bildet, so steht sie auf ihr **schief**.

Wenn (Fig. 11) der Winkel $AOC = BOC$ ist, so ist CO senkrecht auf AB, was man so bezeichnet: $CO \perp AB$; dagegen steht DO auf AB schief.

Eine Senkrechte bildet also mit der Geraden, worauf sie senkrecht steht, zwei rechte Winkel; eine Schiefe bildet mit der andern Geraden einen spitzigen und einen stumpfen Winkel.

Die Senkrechte wird auch **Loth** oder **Perpendikel** genannt.

Be=

Besonders merkwürdig sind solche zwei Senkrechte, deren eine vertikal, die andere horizontal ist. Eine vertikale Linie ist nämlich diejenige, die ein unten mit einem kleinen Gewichte beschwerter Faden anzeigt; jede darauf senkrechte Gerade heißt horizontal.

An was für Gegenständen bemerkt man vertikale und horizontale Linien?

§. 23.

Messen der Winkel.

Bei der Messung der Winkel wird irgend ein bekannter Winkel als Einheit angenommen, und dann untersucht, wie oft dieser als Einheit angenommene Winkel in dem zu messenden enthalten ist.

Die Einheit des Winkelmaßes ist der rechte Winkel. Um jedoch auch kleinere Winkel messen zu können, nimmt man gewöhnlich den neunzigsten Theil eines rechten Winkels, nämlich einen Grad, als Maß an. Zur Vorstellung eines Winkelgrades gelangt man am leichtesten durch die Eintheilung des Kreises. Wenn man den Umfang eines Kreises in 360 gleiche Bogen theilt, so wird jeder solche Theil ein Grad seyn. Denkt man sich nun zu jedem Theilungspunkte einen Halbmesser gezogen, so entstehen um den Mittelpunkt herum 360 kleine Winkel, welche alle unter einander gleich sind, weil bei je zweien, wenn sie über einander gelegt werden, die Schenkel zusammen fallen. Jeder solche Winkel, der einem Bogengrade entspricht, wird nun auch ein Grad, und zwar ein Winkelgrad genannt. Jeder Winkelgrad wird in 60 kleinere Winkel, welche man

Mi-

Minuten nennt; und jede Minute wieder in 60 Winkelchen, welche Sekunden heißen, eingetheilt. Die Bezeichnung der Grade, Minuten, Sekunden bei den Winkeln ist dieselbe, wie bei den Bogen.

Die Größe eines Winkels ist vollkommen bestimmt, wenn man angibt, wie viel Grade und Gradtheile er enthält.

Aus dem Vorhergehenden folgt:

1. Ein hohler Winkel enthält immer weniger als 180°, und zwar insbesondere ein spitziger weniger als 90°, ein rechter 90°, ein stumpfer mehr als 90°.

2. Ein gerader Winkel hat 180°.

3. Ein erhabener Winkel enthält mehr als 180°.

§. 24.

Gebrauch des Transporteurs.

Der Transporteur (Fig. 5) dient, um Winkel auf dem Papiere zu messen, und um Winkel auf das Papier aufzutragen; jedoch beides nur dann, wenn es sich dabei um keine große Genauigkeit handelt.

1. Um einen Winkel auf dem Papiere zu messen, d. h. um zu bestimmen, wie viel Grade ein auf dem Papiere verzeichneter Winkel enthält, setzt man den Mittelpunkt des Transporteurs so über den Scheitel des Winkels, daß der Halbmesser über den einen Schenkel zu stehen kommt; dann zählt man von diesem Halbmesser angefangen die Grade bis zu jenem Theilstriche, durch welchen der zweite Schenkel durchgeht; die daselbst stehende Zahl zeigt an, wie viel Grade jener Winkel enthält. — Ist der zu messende Winkel ein erhabener, so mißt man mit dem Transporteur nur den Überschuß über 180°; man legt nämlich den einen Halbmesser so auf den einen Schenkel

des

des Winkels, daß der andere Schenkel in die Fläche des Transporteurs fällt; dann zählt man die Grade von dem andern Halbmesser angefangen bis zu dem Theilpunkte, den der zweite Schenkel abschneidet; addirt man diese Grade zu 180°, so hat man die gesuchte Größe des Winkels.

2. Um einen Winkel aufs Papier aufzutragen, d. i. um einen Winkel zu verzeichnen, welcher eine gegebene Anzahl Grade enthält, lege man den Mittelpunkt des Transporteurs über jenen Punkt, wohin der Scheitel, und den Halbmesser über jene Gerade, in welche ein Schenkel des Winkels fallen soll; dann bemerke man den Theilstrich, bei welchem die gegebene Anzahl Grade, von jenem Halbmesser an gezählt, stehet; zieht man durch den Scheitel und diesen Theilstrich eine Gerade, so ist der verlangte Winkel verzeichnet. — Enthält der zu verzeichnende Winkel mehr als 180°, so ziehe man zuerst 180° davon ab, dann lege man den einen Halbmesser des Transporteurs gehörig über die Gerade, in welche ein Schenkel fallen soll, bemerke den Ort, wo die übrig gebliebene Anzahl Grade, von dem zweiten Halbmesser an gerechnet, zu lesen ist, durch einen Punkt, und ziehe dadurch den andern Schenkel.

§. 25.

Nebenwinkel.

Zwei Winkel, welche denselben Scheitel und einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, und deren beide andern Schenkel in Einer geraden Linie liegen, heißen Nebenwinkel; sie entstehen, wenn ein Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus verlängert wird. So ist (Fig. 11) **AOC** ein Nebenwinkel von **BOC**, und **AOD** ein Nebenwinkel von **BOD**.

Da

Da alle Winkel, welche auf einer Seite einer Geraden um denselben Scheitel herum neben einander liegen, zusammen zwei Rechte oder 180° betragen, so gilt von den Nebenwinkeln der Satz:

Je zwei Nebenwinkel betragen zusammen genommen zwei Rechte oder 180°.

Aus diesem Satze folgt:

1. Ein rechter Winkel hat einen rechten Nebenwinkel, ein spitziger Winkel einen stumpfen, und ein stumpfer einen spitzigen; was sich auch schon aus der bloßen Anschauung ergibt.

2. Wenn ein Winkel bekannt ist, so findet man seinen Nebenwinkel, wenn man den bekannten Winkel von 180° abzieht. Ist z. B. der Winkel **BAC** (Fig. 12) gleich 58°, so ist der Nebenwinkel **CAD** = 180° — 58° = 122°.

3. Gleiche Winkel haben auch gleiche Nebenwinkel.

§. 26.

Scheitelwinkel.

Zwei Winkel, welche von denselben zwei geraden Linien auf entgegengesetzten Seiten ihres Durchschnittspunktes gebildet werden, heißen Scheitelwinkel; sie entstehen, wenn beide Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus verlängert werden.

So ist (Fig. 13) a der Scheitelwinkel von c, und b der Scheitelwinkel von d.

Da zwei Scheitelwinkel von denselben zwei Geraden gebildet werden, und diese auf der einen Seite ihres Durchschnittspunktes eben so von einander abweichen, als auf der andern, so ergibt sich hinsichtlich der Scheitelwinkel folgender Satz:

Je zwei Scheitelwinkel sind einander gleich.

Dieser Satz kommt häufig in Anwendung, wenn man die Größe eines Winkels a, dessen Inneres unzugänglich ist, z. B. den Winkel, den zwei Mauern eines Gartens oder eines Hauses bilden, von Außen messen will. Man legt zu diesem Ende längs der beiden Mauern zwei Latten, die über den Scheitel des Winkels a hervorragen, und auf der Außenseite einen Scheitelwinkel von a, nämlich den Winkel c bilden; diesen Winkel kann man nun wirklich messen, und seine Größe ist zugleich die gesuchte Größe von a.

Könnte die Größe von a nicht auch mit Hülfe des Satzes von den Nebenwinkeln bestimmt werden?

§. 27.

Gegen- und Wechselwinkel.

Wenn zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten werden, so entstehen um die beiden Durchschnittspunkte acht Winkel. Die vier Winkel, welche zwischen den beiden geschnittenen Geraden liegen, heißen innere, die andern vier aber äußere Winkel. So sind (Fig. 14) **AB** und **CD** die beiden geschnittenen Geraden, **EF** ist die Schneidende; **c**, **d**, **m** und **n** sind innere, **a**, **b**, **o** und **p** sind äußere Winkel.

Ein äußerer und ein innerer Winkel, welche verschiedene Scheitel haben, und auf derselben Seite der Schneidenden liegen, heißen Gegenwinkel. Zwei äußere Winkel aber, oder zwei innere Winkel, welche verschiedene Scheitel haben, und auf verschiedenen Seiten der Schneidenden liegen, werden Wechselwinkel genannt. In der frühern Figur sind

$$\left.\begin{array}{ccc} a & \text{und} & m \\ b & '' & n \\ c & '' & o \\ d & '' & p \end{array}\right\} \text{Gegenwinkel,}$$

dagegen

a	und	p	Wechselwinkel.
b	"	o	
c	"	n	
d	"	m	

Besonders merkwürdig ist die Beschaffenheit der Gegen- und Wechselwinkel, wenn die beiden durchschnittenen Geraden parallel sind.

Wenn nämlich zwei parallele Gerade von einer dritten geschnitten werden, so sind

1. je zwei Gegenwinkel gleich,
2. je zwei Wechselwinkel gleich.

Der hier angeführte Satz ist ein Lehrsatz. Da solche Sätze den größern Theil des Lehrinhaltes der Geometrie bilden, so soll hier in Kürze über deren Wesen und Behandlung Einiges bemerkt werden.

Ein Lehrsatz ist ein Satz, dessen Richtigkeit nicht an und für sich selbst einleuchtet, sondern erst bewiesen werden muß. Ein Lehrsatz besteht im Allgemeinen aus zwei Theilen. Der erste heißt die Voraussetzung, Annahme oder Bedingung, und fängt gewöhnlich mit dem Bindeworte wenn an; der zweite heißt Schluß oder Folgerung, und beginnt gemeiniglich mit dem Bindeworte so. In dem vorigen Lehrsatze lautet die Voraussetzung: „wenn zwei parallele Gerade von einer dritten geschnitten werden;" die Folgerung heißt: „so sind erstlich je zwei Gegenwinkel gleich, und zweitens auch je zwei Wechselwinkel gleich.

Jeder Lehrsatz erfordert einen Beweis. Durch diesen muß gezeigt werden, daß, wenn die Voraussetzung Statt findet, nothwendig auch die Folgerung Statt finden müsse. Der Beweis kann manchmal unmittelbar aus der Erklärung der Voraussetzung geführt werden, indem man zeigt, daß schon in der Voraussetzung, wenn man die darin vorkommenden

Begriffe zergliedert, auch die Folgerung enthalten ist; meistens jedoch muß man sich dabei auf andere bereits als wahr anerkannte Sätze berufen.

Beim Vornehmen der Lehrsätze soll man nicht in der Art verfahren, daß man dieselben geradezu vorsagt, und darauf ganz einfach die Beweise folgen läßt; man soll vielmehr schon den Lehrsatz selbst, wo möglich, aus der Anschauung herleiten, immer aber den Beweis durch zweckmäßige Fragen von den Schülern selbst auffinden lassen. Nur eine solche Methode ist für die Jugend wahrhaft bildend und geistanregend; daher auch in diesem Lehrbuche darauf durchgängig besondere Rücksicht genommen wird.

Bei dem vorliegenden Satze, auf welchen man durch eine einfache Anschauung, oder durch die Messung der Winkel mit dem Transporteur geleitet wird, verfährt man bei der Beweisführung auf folgende Art.

Die Voraussetzung ist: es seien die beiden Geraden **AB** und **CD** (Fig. 14) parallel, und von einer dritten Geraden **EF** durchschnitten.

Die erste Folgerung, die man beweisen soll, ist: daß je zwei Gegenwinkel gleich seyn müssen. Die Richtigkeit dieser Folgerung ergibt sich unmittelbar aus der Voraussetzung, nämlich aus dem Begriffe der Parallellinien. Wenn nämlich die beiden Geraden **AB** und **CD** mit einander parallel sind, so haben sie dieselbe Richtung, folglich weichen sie von der dritten sie schneidenden Geraden **EF** nach derselben Seite hin auch gleich stark ab; diese Abweichungen aber bilden eben die Gegenwinkel; es ist daher $a = m$, $b = n$, $c = o$ und $d = p$. — Wenn also zwei parallele Linien von einer dritten geschnitten werden, so sind je zwei Gegenwinkel gleich.

Die zweite Folgerung ist: daß je zwei Wechselwinkel gleich sind. Untersuchen wir, wie diese Folgerung

mit

mit der ersten bereits als richtig erwiesenen zusammenhängt. Bei der ersten Folgerung ist bewiesen worden, daß z. B. **a** so groß ist als sein Gegenwinkel **m**; bei der zweiten ist zu zeigen, daß **a** so groß seyn müsse als sein Wechselwinkel **p**; wenn nun nachgewiesen werden kann, daß die Winkel **m** und **p** gleich sind, so ergibt sich aus der ersten Folgerung von selbst auch die zweite. Was sind nun **m** und **p** für Winkel? Offenbar Scheitelwinkel. Von diesen gilt nun der bereits als wahr erkannte Satz: je zwei Scheitelwinkel sind einander gleich; die zwei Winkel **m** und **p** sind also als Scheitelwinkel gleich. Wenn daher nach der ersten Folgerung **a** so groß als **m** ist, wenn ferner **m** und **p** gleich groß sind, so ist gewiß, daß **a** auch so groß ist als **p**; die zwei Wechselwinkel **a** und **p** sind also gleich. — Auf dieselbe Art, nämlich mit Berufung auf die bereits als wahr anerkannten Sätze von den Gegen- und Scheitelwinkeln kann man auch beweisen, daß **b = o**, **c = n** und **d = m** ist. — Wenn also zwei parallele Linien von einer dritten geschnitten werden, so sind wirklich auch je zwei Wechselwinkel einander gleich.

§. 28.

Aus der bloßen Anschauung der frühern Figur wird man auch die umgekehrten Lehrsätze ableiten:

Wenn zwei Gerade von einer dritten so geschnitten werden, daß sie mit ihr gleiche Gegenwinkel bilden, so müssen sie parallel seyn.

Die Voraussetzung ist hier: es seien die Geraden **AB** und **CD** von einer dritten **EF** so geschnitten, daß gleiche Gegenwinkel entstehen.

Zu beweisen ist, daß unter dieser Voraussetzung die Geraden **AB** und **CD** parallel seyn müssen. Zu diesem

Ende braucht man nur zu zeigen, daß das Gegentheil unmöglich ist. Bei zwei Geraden können nämlich in Hinsicht der Richtung nur zwei Fälle eintreten, entweder sind sie parallel, oder sie sind nicht parallel. Wären nun **AB** und **CD** nicht parallel, so hätten sie verschiedene Richtung, und müßten daher auch von der dritten sie schneidenden Geraden **EF** nach derselben Seite hin verschieden abweichen, d. h. die Gegenwinkel müßten ungleich seyn; was jedoch der Voraussetzung entgegen ist. Unter der obigen Voraussetzung ist es daher nicht möglich, daß die Geraden **AB** und **CD** nicht parallel wären; folglich müssen sie parallel seyn.

Aus diesem Lehrsatze lassen sich noch folgende Sätze herleiten:

1. Wenn zwei Gerade mit einer dritten sie schneidenden Geraden gleiche Wechselwinkel bilden, so sind sie parallel.

Sind nämlich die Wechselwinkel gleich, so müssen auch die Gegenwinkel gleich seyn; ist z. B. a gleich dem Wechselwinkel p, so muß a auch dem Gegenwinkel m gleich seyn, weil m und p als Scheitelwinkel gleich groß sind. Wenn aber die Gegenwinkel gleich sind, so müssen die zwei geschnittenen Geraden parallel seyn.

2. Gerade Linien, welche in einer Ebene auf dieselbe Gerade senkrecht stehen, sind parallel.

Ist (Fig. 15.) **AB** $\perp$ **EF** und **CD** $\perp$ **EF**, so muß **AB** $||$ **CD** seyn; denn die Gegenwinkel **a** und **b** sind als rechte Winkel einander gleich, folglich die geschnittenen Geraden **AB** und **CD** parallel.

II.

II. Größe der Geraden.

§. 29.

Vergleichung zweier Geraden.

Um zwei gerade Linien hinsichtlich ihrer Größe zu vergleichen, denke man sich dieselben so über einander gelegt, daß sie einen Endpunkt gemeinschaftlich haben. Sodann sehe man auf die andern zwei Endpunkte; fallen sie nicht zusammen, so sind die beiden Geraden ungleich, und zwar ist diejenige kleiner, deren zweiter Endpunkt zwischen den Endpunkten der andern Geraden liegt. Wenn aber die Endpunkte der beiden Geraden zusammen fallen, so sind diese Geraden einander gleich; und umgekehrt: wenn zwei Gerade einander gleich sind, muß man sich dieselben auch so vorstellen können, daß ihre Endpunkte in einander fallen.

§. 30.

Messen der Geraden.

Um eine Gerade zu messen, d. i. um ihre Länge zu bestimmen, nimmt man irgend eine Gerade, deren Länge man kennt, als Einheit an, und untersucht, wie oft diese als Einheit angenommene Linie in der zu messenden enthalten ist.

Als Einheit des Linienmaßes nimmt man einen Fuß oder Schuh an, und theilt ihn, um auch kleinere Linien ausmessen zu können, im gemeinen Leben in 12 Zolle, und jeden Zoll wieder in 12 Linien ein. Bei Feldmessern wird häufig wegen der bequemern Rechnung ein Fuß in 10 Zoll, ein Zoll in 10 Li-

Linien eingetheilt. Diese zweite Eintheilung gibt das **Dezimalmaß**, zum Unterschiede von dem **Duodezimalmaße**, welchem die erstere Eintheilung zum Grunde liegt.

Um größere Linien zu messen, bedient man sich der **Klafter**, welche 6 Fuß enthält.

Die Klafter, Fuß, Zoll und Linien werden mit °, ′, ″, ‴ bezeichnet; die Länge einer Geraden, welche 28 Klafter, 4 Fuß, 8 Zoll und 5 Linien enthält, drückt man daher so aus: 28° 4′ 8″ 5‴.

Zur richtigen Vorstellung dieser Grundmaße müssen Anfänger durch wirkliches Vorzeigen derselben geführt werden.

Sehr lange Linien, z. B. Entfernungen der Ortschaften von einander, werden nach Meilen gemessen. Eine österreichische Postmeile wird zu 4000 Klafter gerechnet.

Durch die Ausmessung einer Linie findet man demnach, wie viel sie Klafter, Fuß, Zoll, . . ., und bei einer sehr langen Linie, wie viel sie Meilen enthält.

Die Längenmaße sind nach Verschiedenheit der Länder verschieden. Wie man die Längenmaße eines Landes in jene eines andern Landes verwandelt, lehret die Rechenkunst.

Stäbe von Holz oder Metall, auf welchen die Länge eines oder mehrerer Fuße, Zoll und Linien angegeben ist, heißen **Maßstäbe**.

Zur Übung des Augenmaßes ist es sehr gut, wenn man verschiedene Längen auf dem Papier oder anderswo zuerst beiläufig mit dem Auge abschätzt, und dann mit dem Maßstabe genau mißt.

Zwei=

Zweites Hauptstück.

Geradlinige Figuren.

§. 31.

Jede allseitig begrenzte Fläche wird eine Figur genannt. Die Grenzlinien zusammen genommen nennt man den Umfang, und den Raum, den sie einschließen, den Flächenraum oder Flächeninhalt der Figur.

Eine ebene Figur, welche bloß von geraden Linien eingeschlossen wird, heißt geradlinig; die einzelnen geraden Linien, welche die Grenzen der Figur bilden, werden Seiten genannt.

Zwei gerade Linien können nicht eine Figur einschließen; die einfachste geradlinige Figur ist daher diejenige, die von drei geraden Linien begrenzt wird.

I. Das Dreieck.

§. 32.

Bestandtheile des Dreieckes.

Ein Dreieck ist eine von drei geraden Linien eingeschlossene Figur.

Bei jedem Dreiecke muß man sechs Stücke berücksichtigen, drei Seiten und drei Winkel. Im Dreiecke ABC (Fig. 16) sind AB, AC und BC die Seiten, A, B und C die Winkel.

Jede Seite hat zwei anliegende und einen gegenüberliegenden Winkel; z. B. die Seite AB hat die beiden anliegenden Winkel A und B, und den gegenüberliegenden Winkel C. Eben so wird jeder Winkel von zwei Seiten eingeschlossen, und die dritte liegt ihm gegenüber; z. B. der Winkel B wird von den Seiten AB und BC eingeschlossen, die Seite AC liegt ihm gegenüber.

§. 33.

Seiten des Dreieckes.

In jedem Dreiecke sind zwei Seiten zusammen genommen immer größer als die dritte.

Dieser Satz ist von selbst klar; denn der Umweg über AC und CB um von A nach B zu kommen, (Fig. 16) ist gewiß länger als der gerade Weg über AB.

In Hinsicht der Seiten eines Dreieckes unterscheidet man drei Fälle: es können alle Seiten unter einander ungleich, — oder zwei Seiten gleich, und die dritte verschieden, — oder alle drei Seiten gleich seyn.

Ein Dreieck, worin jede Seite von jeder andern verschieden ist, heißt ungleichseitig (Fig. 16); ein Dreieck, worin nur zwei Seiten einander gleich sind, heißt gleichschenklig (Fig. 17); ein Dreieck endlich, worin alle Seiten gleich sind, wird gleichseitig genannt (Fig. 18).

Wie verzeichnet man ein gleichschenkliges Dreieck? Kann die Zirkelöffnung, mit der man dabei die Bogen beschreibt, jede beliebige Größe haben? — Wie beschreibt man ein gleichseitiges Dreieck?

In einem Dreiecke kann man was immer für eine seiner Seiten als Grundlinie annehmen; der Scheitel des Winkels, welcher der Grundlinie gegenüber liegt, wird die Spitze oder der Scheitel, und die Senkrechte, die von der Spitze auf die Grundlinie gefällt wird, die Höhe des Dreieckes genannt. Nimmt

man

man im Dreiecke ABC (Fig. 16) AB als Grundlinie an, so ist C der Scheitel und CD die Höhe; für die Grundlinie AC ist B der Scheitel und BE die Höhe; für die Grundlinie BC endlich ist A der Scheitel und AF die Höhe. —

Im gleichschenkligen Dreiecke wird immer die dritte verschiedene Seite als Grundlinie angenommen.

§. 34.

Winkel des Dreieckes.

Wenn man irgend ein Dreieck verzeichnet, die Winkel desselben mit dem Transporteur mißt, und sie addirt; so bekommt man, kleine Fehler abgerechnet, 180^0 zur Summe. Dadurch wird man auf folgenden Lehrsatz hingeleitet:

In einem Dreiecke betragen alle drei Winkel zusammen genommen 180^0, oder zwei Rechte.

Wir wollen nun beweisen, daß dieser Satz für jedes Dreieck ABC (Fig. 19) seine Richtigkeit hat. — Die Summe der Dreieckswinkel a, b, c werden wir am sichersten erhalten, wenn wir alle drei neben einander um denselben Scheitel herum anbringen. Es sei C dieser gemeinschaftliche Scheitel; der Winkel c liegt schon an demselben, man braucht also am Scheitel C nur noch zwei Winkel anzubringen, die so groß sind als a und b. Zu diesem Ende zieht man durch den Punkt C die DE || AB, wo dann d so groß als sein Wechselwinkel a, und e so groß als sein Wechselwinkel b ist. Die Summe der Winkel a, b, c wird offenbar eben so groß seyn, als die Summe der Winkel d, c, e; die Winkel d, c, e betragen nun zusammen 180^0; also müssen auch a, b, c zusammen 180^0 betragen.

Die

Die Summe aller Winkel eines Dreieckes ist also 180° oder zwei Rechte.

Aus diesem Lehrsatze folgt:

1. In einem Dreiecke kann nur Ein Winkel ein rechter, und nur Ein Winkel ein stumpfer seyn; jedes Dreieck hat daher wenigstens zwei spitzige Winkel.

2. Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel bekannt sind, so findet man den dritten, wenn man die beiden gegebenen Winkel addirt, und ihre Summe von 180° abzieht. Ist z. B. ein Winkel 65°, der andere 87°, so ist ihre Summe 152°, daher der dritte Winkel $180° - 152° = 28°$.

3. Sind zwei Winkel eines Dreieckes gleich zwei Winkeln eines andern Dreieckes, so müssen auch die dritten Winkel in beiden Dreiecken gleich seyn.

4. Winkel, deren Schenkel auf einander senkrecht stehen, sind einander gleich, sobald beide spitzig oder beide stumpf sind.

Es sei (Fig. 20) $MN \perp AB$ und $MO \perp AC$; so ist zu beweisen, daß die spitzigen Winkel **M** und **A** gleich sind. Zu diesem Ende betrachtet man die zwei Dreiecke **MOP** und **ANP**; es sind in demselben die Winkel an **P** als Scheitelwinkel gleich, die Winkel **O** und **N** sind als rechte gleich; daher müssen auch die dritten Winkel gleich seyn, nämlich $M = A$.

In Hinsicht der Winkel werden die Dreiecke in spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige eingetheilt. Spitzwinklig heißt ein Dreieck **ABC**, wenn alle Winkel spitzig sind (Fig. 21); rechtwinklig, wenn Ein Winkel **A** ein rechter ist (Fig. 22); stumpfwinklig, wenn Ein Winkel **A** ein stumpfer ist (Fig 23). — Im rechtwinkligen Dreiecke heißt die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite **BC** die Hypothenuse; die

bei=

beiden Seiten **AB** und **AC**, welche den rechten Winkel einschließen, werden Katheten genannt.

Um ein beliebiges recht- oder stumpfwinkliges Dreieck zu verzeichnen, braucht man nur einen rechten oder stumpfen Winkel zu bilden, und durch zwei Punkte seiner Schenkel eine gerade Linie zu ziehen.

Wenn man in einem rechtwinkligen Dreiecke eine Kathete als Grundlinie annimmt, so stellt die andere Kathete selbst die Höhe vor.

Wird in einem stumpfwinkligen Dreiecke eine der Seiten, welche den stumpfen Winkel einschließen, z. B. **AB** als Grundlinie angenommen, so kann die von der Spitze auf die Grundlinie gezogene Senkrechte nicht innerhalb des Dreieckes hineinfallen, weil man sonst ein Dreieck mit einem stumpfen und einem rechten Winkel erhielte, was nicht möglich ist; die Höhe **CD** wird also außerhalb des Dreieckes liegen, und es muß die Grundlinie **AB** über **A** hinaus verlängert werden.

II. Das Viereck.

§. 35.

Allgemeine Eigenschaften.

Ein Viereck ist eine von vier geraden Linien eingeschlossene Figur.

Die Gerade **BD** (Fig. 24), welche zwei gegenüberstehende Endpunkte verbindet, heißt eine Diagonale.

Wie viele Diagonalen können in einem Vierecke gezogen werden?

Wenn man die Winkel eines vorgezeichneten Viereckes mißt und addirt, so bekommt man, kleine Fehler abgerechnet, 360° zur Summe. Dieses führt auf folgenden Lehrsatz.

In

In einem Vierecke beträgt die Summe aller Winkel 360°, oder vier Rechte.

Daß dieser Satz allgemein giltig ist, läßt sich aus dem in Bezug auf die Winkel eines Dreieckes erwiesenen Satze herleiten. Zieht man in dem Vierecke **ABCD** (Fig. 24) eine Diagonale **BD**, so zerfällt dasselbe in zwei Dreiecke, und es betragen alle Winkel des Viereckes eben so viel als die Winkel beider Dreiecke zusammen genommen; die Winkel in jeder der zwei Dreiecke betragen nun 180° oder zwei Rechte, also die Winkel des Viereckes 360° oder vier Rechte.

Wenn in einem Vierecke alle vier Winkel gleich sind, so ist jeder von ihnen 90° oder ein Rechter.

§. 36.

Eintheilung der Vierecke.

Wenn man bei den Vierecken auf die wechselseitige Lage der Seiten Rücksicht nimmt, so kommt man auf drei verschiedene Fälle: es ist möglich, daß keine Seite mit einer andern parallel ist; daß zwei gegenüberstehende Seiten parallel sind, die zwei andern aber nicht; oder daß jede zwei gegenüberstehende Seiten parallel sind.

Ein Viereck, worin keine Seite mit einer andern parallel ist, heißt ein Trapezoid (Fig. 24); ein Viereck, worin nur zwei gegenüberstehende Seiten parallel sind, die zwei andern aber nicht, heißt ein Trapez (Fig. 25); ein Viereck endlich, in welchem je zwei gegenüberstehende Seiten parallel sind, wird ein Parallelogramm genannt (Fig. 26).

Die Parallelogramme werden mit Rücksicht auf die Größe der Seiten und der Winkel in mehrere Arten untergetheilt.

Ein

Ein Parallelogramm **ABCD**, in welchem weder alle Seiten noch alle Winkel gleich sind, heißt ein Rhomboid (Fig. 24); ein Parallelogramm, worin alle Seiten gleich sind, ein Rhombus (Fig. 27); ein Parallelogramm, worin alle Winkel gleich sind, ein Rechteck (Fig. 28); ein Parallelogramm endlich, in welchem alle Seiten und alle Winkel gleich sind, ein Quadrat (Fig. 29).

In einem Rechtecke ist jeder Winkel ein Rechter; im Rhomboid und Rhombus kommen nur spitzige und stumpfe Winkel vor, darum werden diese zwei Figuren auch schiefwinklige Parallelogramme genannt.

In einem Trapeze stellt der Abstand der beiden parallelen Seiten **DE** (Fig. 25) die Höhe vor.

In einem schiefwinkligen Parallelogramme kann man was immer für eine Seite als Grundlinie annehmen; die Senkrechte, die darauf von der gegenüberstehenden Seite gefällt wird, ist dann die Höhe. Nimmt man im Rhomboid **ABCD** (Fig. 26) die Seite **AB** als Grundlinie an, so ist **CE** die Höhe.

In einem Rechtecke wird von zwei zusammenstoßenden Seiten die eine als Grundlinie angenommen, die andere ist die Höhe.

III. Das Vieleck.

§. 37.

Allgemeine Eigenschaften.

Jede geradlinige Figur wird auch ein Vieleck oder Polygon genannt.

Die Vielecke werden nach der Anzahl ihrer Seiten in dreiseitige oder Dreiecke, vierseitige oder Vierecke, fünfseitige oder Fünfecke u. s. w. eingetheilt.

Je=

Jede gerade Linie, welche zwei nicht unmittelbar auf einander folgende Eckpunkte des Vieleckes verbindet, heißt Diagonale.

Wie viele Diagonalen kann man in einem Dreiecke ziehen, wie viele in einem Vier-, Fünf-, Sechsecke u. s. w.?

Wie groß das Maß aller Winkel eines Vieleckes **ABCDEF** (Fig. 30) zusammen ist, wird man am sichersten finden, wenn man dasselbe in Dreiecke zerlegt. Zu diesem Ende nehme man irgendwo im Innern des Vieleckes einen Punkt O an, und ziehe von diesem zu allen Eckpunkten gerade Linien. Dadurch erhält man so viele Dreiecke, als das Vieleck Seiten hat; die Winkel eines solchen Dreieckes betragen 2 Rechte, daher die Winkel aller Dreiecke 2mal so viel Rechte, als Dreiecke da sind, also 2mal so viel Rechte als das Vieleck Seiten hat. Unter diesen Winkeln der Dreiecke kommen nun alle Vieleckswinkel vor, aber überdies auch noch die Winkel um den Punkt O herum, die nicht zum Vielecke gehören, und die zusammen 4 Rechte betragen. Um daher bloß die Summe der Vieleckswinkel zu bekommen, muß man von der Winkelsumme aller Dreiecke noch 4 Rechte abziehen. Daraus folgt:

In jedem Vielecke betragen alle Winkel zusammen zweimal so viel Rechte, als das Vieleck Seiten hat, weniger vier Rechte.

In einem Fünfecke betragen alle Winkel 2mal 5 Rechte weniger 4 Rechte, d. i. 6 Rechte oder 540°; in einem Sechsecke betragen sie zweimal 6 Rechte weniger 4 Rechte, d. i. 8 Rechte oder 720°; u. s. w.

§. 38.

Besondere Arten der Vielecke.

Ein Vieleck, dessen alle Seiten gleich sind, heißt gleichseitig; hat das Vieleck alle Winkel gleich, so heißt

heißt es gleichwinklig; sind alle Seiten untereinander, und auch alle Winkel untereinander gleich, so wird das Vieleck ein regelmäßiges oder reguläres genannt. So ist z. B. der Rhombus ein gleichseitiges, das Rechteck ein gleichwinkliges, das Quadrat ein reguläres Viereck. irregulares

Wie man regelmäßige Vielecke am leichtesten verzeichnet, wird bei der Lehre vom Kreise angeführt werden.

Weil in einem regelmäßigen Vielecke alle Winkel gleich sind, so findet man die Größe eines derselben, wenn man zuerst die Summe aller Winkel bestimmt, und diese Summe durch die Anzahl der Winkel dividirt. So beträgt ein Winkel

des regulären Dreieckes . . $\frac{180^0}{3} = 60^0$,
" " Viereckes . . $\frac{360^0}{4} = 90^0$,
" " Fünfeckes . . $\frac{540^0}{5} = 108^0$,
" " Sechseckes . . $\frac{720^0}{6} = 120^0$,

u. s. w.

Drittes Hauptstück.

Kongruenz der geradlinigen Figuren.

I. Kongruenz der Dreiecke.

§. 39.

18 Kongruenz.

Kongruenzfälle.

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie dieselbe Größe und dieselbe Form haben. Da zwei kongruente Dreiecke, wenn sie über einander gelegt werden, in allen ihren Grenzen zusammenfallen und einander vollkommen decken müssen; so müssen die gleichliegenden Seiten und

Win=

Winkel in beiden Dreiecken gleich seyn. In kongruenten Dreiecken müssen also die Seiten, welche den gleichen Winkeln gegenüberliegen, gleich seyn; und eben so müssen die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüberliegen, gleich seyn.

Es ist nicht nöthig, daß man von allen sechs Stücken zweier Dreiecke wisse, daß sie gleich sind, um auf die Kongruenz der Dreiecke schließen zu können; es gibt Fälle, wo man schon daraus, daß beide Dreiecke nur einige Stücke gleich haben, auf ihre Kongruenz und somit auf die Gleichheit der noch übrigen Stücke schließen kann. Diese Fälle heißen Kongruenzfälle. Es sind vorzüglich folgende:

1. Wenn in zwei Dreiecken eine Seite und die ihr anliegenden Winkel wechselseitig gleich sind, so sind die beiden Dreiecke kongruent.

Um dieses zu beweisen, nehmen wir an, daß (Fig. 31.) die Seite $AB = DE$, der Winkel $A = D$ und $B = E$ ist (die gleichen Seiten sollen in der Figur durch Striche, die gleichen Winkel durch Bögen angedeutet werden). Es ist zu zeigen, daß das Dreieck ABC mit dem Dreiecke DEF kongruent ist, oder, daß die beiden Dreiecke über einander gelegt sich vollkommen decken. — Man denke sich das Dreieck ABC so auf das Dreieck DEF gelegt, daß die Punkte A und B genau in die Punkte D und E fallen, was möglich ist, da $AB = DE$ ist. Weil der Winkel $A = D$, so muß dann auch die Seite AC längs der Seite DF fallen; und weil der Winkel $B = E$ ist, muß auch die Seite BC längs der Seite EF fallen. Wenn aber die Seiten AC und BC genau längs der Seiten DF und EF zu liegen kommen, so muß gewiß

auch

auch der Durchschnittspunkt C der erstern in den Durchschnittspunkt F der letztern fallen. Die beiden Dreiecke lassen sich also so über einander legen, daß sie in allen ihren Grenzen zusammenfallen, folglich sind sie kongruent, oder es ist das Dreieck ABC $\cong$ DEF.

§. 40.

2. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel wechselseitig gleich sind, so sind die beiden Dreiecke kongruent.

Es sei (Fig. 32) die Seite AC = DF, die Seite BC = EF, und der Winkel C = F; so ist zu beweisen, daß das Dreieck ABC $\cong$ DEF ist. — Man denke sich das Dreieck ABC so über das Dreieck DEF gelegt, daß der Punkt C in den Punkt F, und die Seiten CA und CB längs den Seiten FD und FE fallen, was möglich ist, da nach der Voraussetzung der Winkel C = F ist. Da ferner die Seite CA = FD ist, so muß auch der Punkt A in den Punkt D fallen; und da eben so die Seite CB = FE ist, muß auch der Punkt B in E fallen; daher muß auch die Seite AB auf die Seite DE zu liegen kommen.

Die beiden Dreiecke decken sich also vollkommen, und sind daher kongruent.

§. 41.

3. Wenn in zwei Dreiecken alle drei Seiten wechselseitig gleich sind, so sind die beiden Dreiecke kongruent.

Die Voraussetzung ist hier: es sei (Fig. 33) die Seite AB = DE, die Seite AC = DF, und die Seite BC = EF; zu beweisen ist, daß unter dieser Voraussetzung das Dreieck ABC $\cong$ DEF ist. — Man be-

beschreibe aus A mit dem Halbmesser AC den Kreisbogen mn, und aus B mit dem Halbmesser BC den Bogen pq, so durchschneiden sich diese beiden Bogen im Punkte C. Ferner beschreibe man aus D mit dem Halbmesser DF den Bogen rs, und aus E mit dem Halbmesser EF den Bogen tu, so durchschneiden sich diese zwei Bogen im Punkte F. Nun denke man sich das Dreieck ABC mit seinen Kreisbogen so auf DEF gelegt, daß die Punkte A und B in die Punkte D und E fallen, was möglich ist, da nach der Voraussetzung die Seite AB = DE ist. Weil ferner die Seite AC = DF ist, so muß auch der Bogen mn in den Bogen rs, und wegen BC = EF, auch der Bogen pq in den Bogen tu fallen. Wenn aber die Bogen mn und pq genau auf die Bogen rs und tu zu liegen kommen, so muß auch der Durchschnittspunkt der erstern, nämlich C, in den Durchschnittspunkt F der letztern fallen. Die beiden Dreiecke fallen also in allen ihren Grenzen zusammen, und sind somit kongruent.

§. 42.

In Hinsicht der rechtwinkligen Dreiecke findet noch folgender Kongruenzfall Statt:

Wenn in zwei rechtwinkligen Dreiecken die Hypothenuse und eine Kathete gleich sind, so sind die beiden Dreiecke kongruent.

Es sei (Fig. 34) die Hypothenuse BC = EF, und die Kathete AB = DE. Man beschreibe aus B mit dem Halbmesser BC den Bogen mn, welcher die Kathete AC im Punkte C durchschneidet; eben so beschreibe man aus E mit dem Halbmesser EF den Bogen pq, welcher die Kathete DF im Punkte F durchschneidet. Nun lege man das Dreieck ABC mit seinem Bogen so auf das Dreieck DEF, daß die Punkte

A

A und B in die Punkte D und E fallen, was möglich ist, weil nach der Voraussetzung AB = DE seyn soll. Da die Winkel A und D als rechte einander gleich sind, so muß die Kathete AC längs der DF, und weil BC = EF ist, auch der Bogen mn in den Bogen pq fallen; es muß daher auch der Durchschnittspunkt von AC und mn, nämlich C, in den Durchschnittspunkt F von DF und pq fallen. Die beiden Dreiecke werden sich also vollkommen decken, und sind demnach kongruent.

§. 43.

Bestimmende Stücke eines Dreieckes.

Da kongruente Dreiecke gleiche Größe und gleiche Form haben müssen, so folgt, daß durch die Stücke, aus deren Gleichheit man auf die Kongruenz zweier Dreiecke schließen kann, die Größe und die Form eines Dreieckes vollkommen bestimmt wird. Die Stücke, welche ein Dreieck vollkommen bestimmen, werden **bestimmende Stücke** genannt.

Die bestimmenden Stücke eines Dreieckes sind daher:

1) eine Seite und die beiden anliegenden Winkel;
2) zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel;
3) alle drei Seiten.

Ein rechtwinkliges Dreieck ist überdies noch vollkommen bestimmt, wenn die Hypothenuse und eine Kathete gegeben sind.

Aus den bestimmenden Stücken läßt sich **nur ein** Dreieck von bestimmter Form und Größe verzeichnen.

§. 44.

Aufgaben.

1. Mit einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln ein Dreieck zu verzeichnen.

Da die Aufgaben einen so wichtigen Bestandtheil der geometrischen Lehren bilden, so wird es hier am rechten Orte seyn, einige allgemeine Bemerkungen darüber anzubringen.

Eine Aufgabe ist ein Satz, wodurch man verlangt, daß etwas geschehen soll. Jede Aufgabe erfordert eine Auflösung, d. i. die Angabe des Verfahrens, wodurch das in der Aufgabe Verlangte ausgeführt wird. Die Auflösungen geometrischer Aufgaben bestehen meistens in Zeichnungen oder Constructionen. Geschieht die Auflösung nur mittelst des Zirkels und Lineals, und gründet sie sich auf die Sätze der Geometrie, so heißt sie eine geometrische Auflösung; gebraucht man aber andere Mittel, z. B. den Transporteur, oder beruhet die Zeichnung auf bloßen Versuchen, so geschieht die Auflösung mechanisch.

Die geometrische Auflösung der Aufgaben wird entweder unmittelbar aus dem Begriffe der Bedingungen, welche in der Aufgabe vorkommen, hergeleitet, oder sie wird auf bereits bewiesene Lehrsätze gestützt. Im zweiten Falle muß überlegt werden, ob nicht Lehrsätze vorgekommen sind, in denen das in der Aufgabe Verlangte als Folgerung erscheint; die Voraussetzung eines solchen Lehrsatzes zeigt sodann den Weg zur Auflösung.

Bei der vorliegenden Aufgabe ergibt sich die Auflösung aus dem Sinne der Aufgabe selbst. Man ziehe nämlich eine Gerade AB (Fig. 31), welche der gegebenen Seite MN gleich ist, und trage in ihren

End=

Endpunkten die beiden bekannten anliegenden Winkel, hier 73° und 60°, auf; ihre Schenkel **AC** und **BC** werden sich in einem Punkte **C** schneiden, und das verlangte Dreieck ist verzeichnet.

Können die zwei gegebenen Winkel jede beliebige Größe haben?

2. Mit zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel ein Dreieck zu verzeichnen.

Man verzeichne einen Winkel **ACB** (Fig. 32), welcher dem gegebenen Winkel, hier 46° gleich ist, dann schneide man von den Schenkeln Stücke ab, welche den gegebenen Seiten **MN** und **PQ** gleich sind, und verbinde die Endpunkte **A** und **B** durch eine Gerade.

3. Mit drei Seiten ein Dreieck zu verzeichnen.

Man ziehe eine Gerade **AB** (Fig. 33), welche der einen Seite **MN** gleich ist, beschreibe aus einem Endpunkte **A** mit der zweiten Seite **PQ** als Halbmesser einen Bogen pq, und aus dem andern Endpunkte **B** mit der dritten Seite **RS** ebenfalls einen Bogen **mn**, welcher den frühern in einem Punkte **C** durchschneidet; zieht man nun von diesem Durchschnittspunkte gerade Linien an die beiden Endpunkte der gezogenen Geraden, so erhält man das verlangte Dreieck.

Können hier die drei Seiten jede beliebige Größe haben?

4. Ein rechtwinkliges Dreieck zu verzeichnen, wenn die Hypothenuse und eine Kathete bekannt sind.

Man zeichnet zuerst einen rechten Winkel **A** (Fig. 34), schneidet dann von dem einen Schenkel ein Stück **AB** ab, welches der gegebenen Kathete **PQ** gleich ist, und beschreibe aus dem Endpunkte **B** mit der Hypothenuse **BC** = **MN** als Halbmesser einen Bogen, welcher den andern Schenkel in **C** durchschneidet; zieht man nun von diesem Durchschnittspunkte zu dem Endpunkte des erstern Schenkels die Gerade **CB**, so ist das rechtwinklige Dreieck verzeichnet.

§. 45.

5. Ein Dreieck zu bilden, das mit einem gegebenen Dreiecke kongruent ist.

Dieses geschieht offenbar dadurch, daß man entweder eine Seite und die ihr anliegenden Winkel, oder zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel, oder alle drei Seiten in dem zu verzeichnenden Dreiecke so groß macht als in dem gegebenen. Das letzte ist am einfachsten. Man trägt also zuerst eine Seite des gegebenen Dreieckes auf, und beschreibt aus ihren Endpunkten mit den beiden andern Seiten Bogen, welche sich schneiden; der Durchschnitt ist der dritte Winkelpunkt des gesuchten Dreieckes.

6. Einen Winkel zu verzeichnen, der einem gegebenen Winkel gleich ist.

Man könnte den gegebenen Winkel messen, und dann einen Winkel verzeichnen, der die gefundene Anzahl Grade und Gradtheile enthält.

Einfacher und richtiger läßt sich diese Aufgabe mit Hilfe der Kongruenzsätze auflösen.

Wir wissen, daß in kongruenten Dreiecken die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüberliegen, gleich sind. Um daher einen Winkel zu erhalten, der einem verzeichneten Winkel **BAC** (Fig. 35) gleich ist, braucht man nur die Schenkel dieses Winkels durch

eine

eine Gerade **MN** zu schneiden, so daß ein Dreieck **AMN** entstehet, und aus den drei Seiten dieses Dreieckes ein anderes Dreieck **DFE** zu bilden; der Winkel **D** muß dann dem Winkel **A** gleich seyn. Kürze halber nimmt man zwei Seiten des ersten Dreieckes gleich an, und die ganze Auflösung gestaltet sich auf folgende Art:

Man ziehe eine Gerade **DE**; dann beschreibe man aus **A** mit einem beliebigen Halbmesser einen Bogen, welcher die Schenkel des gegebenen Winkels in **M** und **N** schneidet; mit demselben Halbmesser beschreibe man auch aus **D** einen Bogen, welcher die Gerade **DE** in **E** durchschneidet; endlich fasse man mit dem Zirkel den Abstand **MN**, und durchschneide damit aus **E** den von **D** aus beschriebenen Bogen in **F**; zieht man nun **DF**, so ist **FDE** der verlangte Winkel.

II. Anwendung der vorgetragenen Kongruenzfälle auf das gleichschenklige Dreieck.

§. 46.

In Beziehung auf die gleichschenkligen Dreiecke lassen sich folgende Sätze erweisen:

1. Wenn man über einer geraden Linie zwei gleichschenklige Dreiecke, auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten verzeichnet, und durch die Scheitel eine Gerade zieht; so halbirt diese erstlich die Winkel an den Scheiteln, sie halbirt zweitens die gemeinschaftliche Grundlinie, und steht endlich auf der Grundlinie senkrecht.

Um sich von der Richtigkeit dieses Satzes, dessen Bedeutung aus einer einfachen Anschauung klar wird, zu überzeugen, nehmen wir an, daß (Fig. 36) das Dreieck ABC gleichschenklig, daß nämlich AC = BC ist; ferner, daß auch das Dreieck ABD gleichschenklig, daß nämlich AD = BD ist; und ziehen durch die Scheitel C und D die Gerade CD.

Hier ist erstlich zu beweisen, daß die Verbindungslinie CD die Winkel an den Scheiteln halbirt, d. h. daß der Winkel a = b, und c = d ist. Zu diesem Ende müssen wir zeigen, daß diese Winkel in kongruenten Dreiecken den gleichen Seiten gegenüberliegen.

Die vier genannten Winkel liegen in den zwei Dreiecken ACD und BCD; in diesen ist die Seite CD gemeinschaftlich, ferner vermöge der Voraussetzung AC = BC, und AD = BD; in den beiden Dreiecken sind also alle drei Seiten wechselseitig gleich, folglich sind sie kongruent. In kongruenten Dreiecken sind die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüberliegen, gleich; den gleichen Seiten AD und BD liegen die Winkel a und b gegenüber, also ist a = b; den gleichen Seiten AC und BC liegen die Winkel c und d gegenüber, also ist c = d. Durch die Gerade CD wird also wirklich jeder Winkel am Scheitel in zwei gleiche Winkel getheilt, d. i. halbirt.

Zweitens ist zu beweisen, daß durch die Gerade CD die Grundlinie AB halbirt wird, daß nämlich AE = BE ist. Wir müssen zu diesem Ende zeigen, daß diese Seiten in kongruenten Dreiecken den gleichen Winkeln gegenüberliegen; die Geraden AE und BE liegen in den Dreiecken ACE und BCE; in diesen ist die Seite CE gemeinschaftlich, ferner AC = BC vermöge der Annahme, und der Winkel a = b, wie wir eben bewiesen haben; die zwei Dreiecke ACE und BCE haben also zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel wechselweise gleich, folglich sind sie kongruent. In kongruenten Dreiecken sind die Seiten, welche den gleichen Winkeln gegenüberliegen, gleich; den gleichen Winkeln a und b liegen die Seiten **AE** und **BE** gegenüber, also ist **AE** = **BE**. Die Grundlinie **AB** ist also wirklich durch die Gerade **CD** im Punkte **E** halbirt worden.

Endlich ist noch zu beweisen, daß die Gerade **CD** auf der Grundlinie **AB** senkrecht steht, oder, was dasselbe ist, daß der Winkel m = n ist. Die Winkel m und n liegen in den Dreiecken **ACE** und **BCE**, deren Kongruenz bereits bewiesen wurde; sie liegen darin den gleichen Seiten **AC** und **BC** gegenüber, mithin sind sie einander gleich; **CE** steht also senkrecht auf **AB**.

Auf ähnliche Art wird der ganze Beweis geführt, wenn die beiden Dreiecke auf derselben Seite der Grundlinie liegen, wie in Figur **37**.

§. 47.

2. Wenn man in einem gleichschenkligen Dreiecke die Grundlinie halbirt, und den Halbirungspunkt mit der Spitze verbindet, so steht die Verbindungslinie auf der Grundlinie senkrecht.

Voraussetzung: es sei (Fig. 38) **AC** = **BC**, nämlich das Dreieck **ABC** gleichschenklig die Grundlinie im Punkte **D** halbirt, also **AD** = **BD**, und man ziehe die Gerade **CD**. Zu beweisen ist, daß unter dieser Voraussetzung **CD** ⊥ **AB**, oder daß der Winkel m = n ist. — Die Winkel m und n liegen in den Dreiecken **ACD** und **BCD** den gleichen Seiten **AC** und **BC** gegenüber; die beiden Dreiecke sind aber kongruent, weil sie alle drei Seiten wechselseitig gleich

ha=

haben; also sind die Winkel m und n einander gleich, oder CD ⊥ AB.

Umgekehrt:

3. Wenn man in einem gleichschenkligen Dreiecke von der Spitze eine Senkrechte auf die Grundlinie fällt, so wird diese dadurch halbirt.

Es sei (Fig. 38) AC = BC, und CD ⊥ AB. Die rechtwinkligen Dreiecke ACD und BCD haben die Hypothenuse gleich, und eine Kathete gemeinschaftlich, folglich sind sie kongruent, und es müssen auch die zweiten Katheten darin gleich seyn, nämlich AD = BD. Die Grundlinie AB ist also wirklich im Punkte D halbirt worden.

Dieser Beweis ist auch noch giltig, wenn AB = AC = BC d. i. wenn das Dreieck ABC gleichseitig ist.

Im gleichschenkligen, so wie im gleichseitigen Dreiecke wird also die Grundlinie von der Höhe halbirt.

§. 48.

4. Wenn in einem Dreiecke zwei Seiten gleich sind, so sind auch die ihnen gegenüberliegenden Winkel gleich.

Es sei (Fig. 39) die Seite AC = BC; so ist zu beweisen, daß die Winkel B und A gleich groß sind. — Man muß zeigen, daß A und B in kongruenten Dreiecken den gleichen Seiten gegenüberliegen. Um zwei kongruente Dreiecke zu erhalten, halbirt man die Seite AB in D, so daß AD = BD wird; die beiden Dreiecke ACD und BCD haben nun alle Seiten wechselseitig gleich, sind demnach kongruent; die Winkel A und B liegen darin der gemeinschaftlichen Seite CD gegenüber, folglich sind sie gleich.

Hätte

Hätte man nicht auch auf andere Arten zwei kongruente Dreiecke erhalten können?

Aus diesem Lehrsatze folgt, daß in einem gleichschenkligen Dreiecke die Winkel an der Grundlinie gleich sind. In einem gleichseitigen Dreiecke müssen alle drei Winkel gleich seyn; ein gleichseitiges Dreieck ist also auch rechtwinklig, mithin regelmäßig.

5. **Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel gleich sind, so sind auch die ihnen gegenüberliegenden Seiten gleich.**

Es sei (Fig. 39) der Winkel **A** = **B**, so muß auch **BC** = **AC** seyn. Denn fällt man von **C** auf **AB** die Senkrechte **CD**, so erhält man zwei Dreiecke, welche alle drei Winkel paarweise gleich, und überdies die Seite **CD** gemeinschaftlich haben, die also kongruent sind; in diesen Dreiecken liegen den gleichen Winkeln **m** und **n** die Seiten **AC** und **BC** gegenüber, also ist **AC** = **BC**.

§. 49.

6. **Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel ungleich sind, so sind auch die ihnen gegenüberliegenden Seiten ungleich, und zwar liegt dem größern Winkel auch eine größere Seite gegenüber.**

Es sei im Dreiecke **ABC** (Fig. 40) der Winkel **BAC** größer als der Winkel **ABC**; so ist zu zeigen, daß auch **BC** größer seyn müsse als **AC**. — Nach dem vorhergehenden Satze können wir aus der Gleichheit der Winkel auf die Gleichheit der gegenüberstehenden Seiten schließen.

Schneiden wir daher von dem größern Winkel bei **A** durch die Gerade **AD** einen Theil ab, so daß

der

der Rest BAD = ABD sei; im Dreiecke ABD muß dann auch AD = BD seyn.

Es ist nun im Dreiecke ACD die Summe von AD und DC gewiß größer als AC; AD und DC ist aber so viel als BD und DC, folglich so viel als BC; also ist wirklich BC größer als AC.

In einem rechtwinkligen Dreiecke ist also die Hypothenuse, im stumpfwinkligen aber die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite die größte Seite.

7. Die Senkrechte ist die kürzeste Gerade, die von einem Punkte zu einer geraden Linie gezogen werden kann.

Man ziehe vom Punkte C (Fig. 41) zu der Geraden AB die Senkrechte CD, und irgend eine andere Gerade z. B. CE. Das Dreieck CDE ist nun rechtwinklig, daher die Hypothenuse CE größer als die Senkrechte CD.

Die Senkrechte von einem Punkte auf eine gerade Linie dient daher dazu, um die Entfernung jenes Punktes von der Geraden zu messen.

§. 50.

Die Schrottwage.

Auf den Sätzen von dem gleichschenkligen Dreiecke beruhet die Einrichtung und der Gebrauch der Schrottwage (Fig. 42). Diese ist ein hölzernes gleichschenkliges Dreieck, in dessen Spitze ein unten mit einer Kugel beschwerter Faden befestiget wird, und an dessen Grundlinie, oder einer damit parallelen Seite, die Mitte durch einen Theilstrich bemerkt ist. Dieses Werkzeug dient dazu, um zu untersuchen, ob eine Gerade horizontal ist. Stellt man nämlich das Instrument mit

der

der Grundlinie auf die zu prüfende Gerade, und spielt der beschwerte Faden genau in die Mitte der Grundlinie ein, so ist die Gerade horizontal, sonst steht sie gegen den Horizont geneigt, denn der beschwerte Faden ist allezeit vertikal; soll die Grundlinie und die darunter befindliche Gerade horizontal seyn, so muß sie auf den vertikalen Faden senkrecht stehen; dies ist aber der Fall, wenn der Faden genau in die Mitte fällt.

Häufig ist die Schrottwage mit einem, von der Mitte aus in Gerade eingetheilten messingenen Bogen versehen; in diesem Falle kann man damit auch die Neigung einer schiefen Geraden gegen den Horizont messen; die Gradzahl, an welcher der Faden am Bogen durchgeht, zeigt den Neigungswinkel an, den die nicht horizontale Linie **AB** (Fig. 43) mit der horizontalen **AC** bildet. Eigentlich liest man an dem Werkzeuge den Winkel **m** d. i. die Abweichung des Fadens von der auf die Grundlinie senkrechten Geraden; allein dieser Winkel ist so groß als der Neigungswinkel **a**, den die Gerade **AB** mit der Horizontalen **AC** bildet, weil die Schenkel beider Winkel auf einander senkrecht stehen.

§. 51.

Aufgaben.

1. Einen Winkel **BAC** (Fig. 44) zu halbiren.

Man denke nach, ob nicht ein Lehrsatz vorkam, bei welchem bewiesen wird, daß eine Gerade einen Winkel halbirt; man wird sich sogleich an den Satz erinnern: wenn man über einer Geraden zwei gleichschenklige Dreiecke verzeichnet, und durch ihre Scheitel eine gerade Linie zieht, so halbirt diese die Winkel an den Scheiteln. Die Voraussetzung dieses Lehrsatzes zeigt den Weg zur Auflösung der vorgelegten Aufgabe. Es handelt sich nämlich zuerst darum, ein gleichschenkliges Dreieck zu verzeichnen, worin der gegebene Winkel **BAC** als Winkel an der Spitze vorkommt; dieses geschieht, indem man von den Schenkeln des Winkels **BAC** gleiche Stücke abschneidet, und die Endpunkte **M** und **N** verbindet; dann braucht man nur noch über dieser Grundlinie **MN** ein zweites gleichschenkliges Dreieck **MND** zu beschreiben, und durch die Scheitel die Gerade **AD** zu ziehen. — Man hat daher folgende Auflösung:

Um einen Winkel zu halbiren, beschreibe man aus dem Scheitel einen Bogen, welcher die beiden Schenkel durchschneidet; aus den Durchschnittspunkten beschreibe man wieder mit einem gleich großen Halbmesser Bogen, die sich in einem Punkte schneiden; zieht man von diesem letzten Punkte zu dem Scheitel des Winkels eine Gerade, so wird dadurch der Winkel halbirt.

2. Eine Gerade **AB** (Fig. 45) zu halbiren.

Die Auflösung dieser Aufgabe wird aus folgendem Lehrsatze abgeleitet: wenn man über derselben Grundlinie zwei gleichschenklige Dreiecke verzeichnet, und durch ihre Scheitel eine Gerade zieht, so halbirt diese die Grundlinie. Es kommt also nur darauf an, über **AB** zwei gleichschenklige Dreiecke zu beschreiben, und die Scheitel derselben durch eine Gerade zu verbinden. Die Auflösung ist also:

Um eine Gerade zu halbiren, beschreibe man aus ihren Endpunkten nach oben und unten Bogen, welche sich in zwei Punkten schneiden; die Gerade, welche durch diese zwei Durchschnittspunkte geht, halbirt die gegebene Gerade.

Um

Um eine gerade Linie versuchsweise zu halbiren, nehme man die beiläufige Hälfte als Halbmesser, und beschreibe damit aus den Endpunkten gegen die Mitte hin Bogen; durchschneiden beide Bogen die Gerade in demselben Punkte, so ist dieser genau der Halbirungspunkt der gegebenen Geraden; sonst wird der Abstand der beiden Durchschnittspunkte, der ohnehin gewöhnlich sehr klein ausfällt, nach dem Augenmaße halbirt; die Mitte dieses Abstandes ist zugleich die Mitte der Geraden.

3. Von einem Punkte **A** (Fig. 46) außerhalb einer Geraden **BC** auf diese Gerade eine Senkrechte zu fällen.

Die Auflösung beruht auf dem Satze: wenn man über derselben Grundlinie zwei gleichschenklige Dreiecke verzeichnet, und die Scheitel durch eine Gerade verbindet, so steht diese auf der Grundlinie senkrecht. Es handelt sich also zuerst darum, ein gleichschenkliges Dreieck zu bilden, dessen Spitze der gegebene Punkt **A** ist, und dessen Grundlinie in die gegebene Gerade **BC** fällt; ein solches Dreieck erhält man, wenn man aus **A** mit einem hinlänglich großen Halbmesser Bogen beschreibt, welche die gegebene Gerade in zwei Punkten **M** und **N** durchschneiden, wodurch die Grundlinie **MN** bestimmt ist. Beschreibt man nun über diese Grundlinie noch ein zweites gleichschenkliges Dreieck **MND**, und zieht **AD**, so muß **AD** $\perp$ **BC** seyn.

Um daher aus einem Punkte auf eine Gerade eine Senkrechte zu fällen, beschreibe man aus jenem Punkte zwei Bogen, welche die Gerade in zwei Punkten schneiden, aus diesen beschreibe man wieder zwei Bogen, die sich in einem Punkte durchschneiden; die Gerade, welche durch diesen letzten Durchschnittspunkt und durch den gegebenen Punkt geht, ist die gesuchte Senkrechte.

Wie

Wie kann man mittelst rechtwinkliger hölzerner Dreiecke von einem Punkte auf eine Gerade eine Senkrechte fällen?

§. 52.

4. In einem gegebenen Punkte **A** (Fig. 47) einer Geraden **BC** auf diese eine Senkrechte zu errichten.

Da die Gerade, welche die Mitte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes mit der Spitze verbindet, auf der Grundlinie senkrecht steht; so braucht man, um die vorliegende Aufgabe aufzulösen, nur ein gleichschenkliges Dreieck **MND** zu bilden, dessen Grundlinie **MN** in die gegebene Gerade **BC** so hineinfällt, daß der gegebene Punkt **A** als Mittelpunkt der Grundlinie erscheint, und dann die Spitze **D** mit dem Punkte **A** durch eine Gerade zu verbinden.

Um daher in einem Punkte einer Geraden auf dieser eine Senkrechte zu errichten, schneide man, von jenem Punkte aus, an der Geraden zu beiden Seiten gleiche Stücke ab, beschreibe aus den Durchschnittspunkten mit demselben Halbmesser zwei Bogen, welche sich in einem Punkte durchschneiden, und verbinde diesen letzten Durchschnittspunkt mit dem gegebenen Punkte durch eine Gerade: diese steht auf der gegebenen Geraden senkrecht.

Wie kann man mittelst der Winkelbretter eine Senkrechte errichten? — Wie geschieht dieses mit dem Transporteur?

Wenn der gegebene Punkt **A** der Endpunkt der gegebenen Geraden **AB** ist, wie in Figur 48, so darf man nur die Gerade über diesen Endpunkt hinaus verlängern, wo sodann die Auflösung wie vorhin geschieht.

Läßt

Läßt sich aber die Linie nicht über den Endpunkt hinaus verlängern, so kann man am einfachsten folgendes Verfahren anwenden. Man nehme über der Geraden **AB** einen Punkt **C** an, beschreibe daraus mit dem Halbmesser **CA** einen Kreisbogen **DAM**, und ziehe durch **M** und **C** eine Gerade, welche jenen Bogen in **D** durchschneidet; verbindet man nun diesen Punkt **D** mit dem gegebenen Punkte **A** durch eine Gerade, so ist diese die verlangte Senkrechte.

Der Grund dieses Verfahrens ist leicht einzusehen. Im gleichschenkligen Dreiecke **ACM** ist der Winkel $m = p$, im gleichschenkligen Dreiecke **ADC** ist eben so $n = q$, daher auch die Summe $m + n$ gleich der Summe $p + q$; die Winkel m, n, q und p bilden nun die Winkel eines Dreieckes, also ist die Summe von m, n, q und p, oder was dasselbe ist, die doppelte Summe von m und n gleich zwei Rechten, daher die einfache Summe von m und n, nämlich der Winkel **BAD**, gleich einem Rechten, mithin ist $AD \perp AB$.

III. Anwendung der Kongruenzfälle auf die Parallellinien und das Parallelogramm.

§. 53.

1. Wenn zwei Punkte einer Geraden von einer andern Geraden auf einerlei Seite gleich weit entfernt sind, so müssen die beiden Geraden parallel seyn.

Es seien (Fig. 49) die Punkte **M** und **N**, welche in der Geraden **AB** liegen, von der Geraden **CD** gleich weit entfernt, oder was dasselbe ist, es seien die Senkrechten **MP** und **NQ** gleich groß. Um zu beweisen, daß unter dieser Voraussetzung $AB \parallel CD$ sei,

muß

muß man zeigen, daß diese zwei Geraden von einer dritten unter gleichen Gegen- oder Wechselwinkeln geschnitten werden. Schneiden wir sie durch die Gerade NP, so kommt es nur darauf an, die Gleichheit der zwei Wechselwinkel a und b nachzuweisen, oder zu zeigen, daß a und b in kongruenten Dreiecken den gleichen Seiten gegenüberliegen. In den Dreiecken MNP und NPQ ist MP = NQ, die Seite NP ist gemeinschaftlich, und der eingeschlossene Winkel x = y als Wechselwinkel, weil die Senkrechten MP und NQ auch parallel seyn müssen; die beiden Dreiecke sind daher kongruent, folglich die den gleichen Seiten MP und NQ gegenüberliegenden Winkel a und b gleich. Die Gerade NP bildet also mit den beiden Geraden AB und CD gleiche Wechselwinkel, somit sind AB und CD parallel.

2. Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich.

Um dieses zu beweisen, sei (Fig. 50) AB || CD und AC || BD. Man ziehe die Hilfslinie BC, so sind die Wechselwinkel a und b, und eben so die Wechselwinkel c und d einander gleich; in den Dreiecken ABC und BCD ist demnach eine Seite BC mit den beiden anliegenden Winkeln gleich, daher sind die zwei Dreiecke kongruent; es müssen also auch die den gleichen Winkeln a und b gegenüberstehenden Seiten AC und BD, und eben so die den gleichen Winkeln c und d gegenüberstehenden Seiten AB und CD unter einander gleich seyn. Parallele Linien zwischen parallelen Linien sind also einander gleich.

Daraus folgt, daß in jedem Parallelogramm die gegenüberstehenden Seiten gleich sind. Auch sieht man, daß ein Parallelogramm durch die Diagonale in zwei kongruente Dreiecke getheilt wird.

3. **Wenn in einem Vierecke jede zwei gegenüberstehenden Seiten gleich sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm.**

Es sei (Fig. 51) AB = CD und AC = BD. Hier ist eigentlich nur zu beweisen, daß die gegenüberstehenden Seiten parallel sind, oder was dasselbe ist, daß sie mit einer dritten, sie schneidenden Geraden gleiche Wechselwinkel bilden. Man ziehe die Hilfslinie BC, so erhält man die Dreiecke ABC und BCD, welche kongruent sind, weil sie alle drei Seiten wechselweise gleich haben; es müssen daher die den gleichen Seiten AC und BD gegenüberliegenden Winkel a und b gleich, daher, weil diese Winkel Wechselwinkel sind, die Linien AB und CD parallel seyn; wegen AB = CD folgt eben so c = d, und weil diese Winkel Wechselwinkel sind, AC || BD. Es ist also AB || CD, und AC || BD, mithin das Viereck ABDC ein Parallelogramm.

4. **Wenn zwei gegenüberstehende Seiten eines Viereckes gleich und parallel sind, so ist dieses ein Parallelogramm.**

Es seien (Fig. 51) die Seiten AB und CD gleich und parallel, was man so ausdrückt: AB ⋕ CD; so ist zu beweisen, daß ABDC ein Parallelogramm ist. Man braucht eigentlich nur zu zeigen, daß AC = BD ist. Zu diesem Ende zieht man die Hilfslinie BC; in den Dreiecken ABC und BCD ist nun AB = CD, BC = BC, und a = b als Wechselwinkel; die beiden Dreiecke sind daher kongruent, folglich müssen auch die dritten Seiten AC und BD gleich, und somit ABDC ein Parallelogramm seyn.

§. 54.

5. **Wenn in einem Dreiecke eine Seite in mehrere gleiche Theile getheilt ist, und**

man zieht durch jeden Theilungspunkt eine Parallele mit einer zweiten Seite, so wird dadurch auch die dritte Seite in eben so viele unter einander gleiche Theile getheilt.

Die Voraussetzung ist: die Seite AC (Fig. 52) sei in mehrere z. B. 4 gleiche Theile getheilt, also CD = DE = EF = FA; und man ziehe DG, EH und FI sämmtlich parallel mit der Seite AB; so ist zu beweisen, daß dadurch auch CB in 4 gleiche Theile getheilt wird. Man muß hier zeigen, daß die Geraden CG, GH, HI und IB in kongruenten Dreiecken gleichen Winkeln gegenüberliegen. Man zieht daher die Linien GK, HL und IM parallel mit AC. Weil Parallele zwischen Parallelen gleich sind, so ist GK = DE, HL = EF und IM = FA. Nach der Voraussetzung sind die Linien CD, DE, EF und FA gleich, daher müssen auch die Linien CD, GK, HL und IM gleich seyn; in den Dreiecken CDG, GKH, HLI und IMB sind überdies die Winkel a, b, c und d als Gegenwinkel gleich, ferner die Winkel e, f, g und h gleich, weil ihre Schenkel parallel sind. Die genannten vier Dreiecke haben also eine Seite mit den beiden anliegenden Winkeln gleich, also sind sie kongruent; den gleichen Winkeln e, f, g und h stehen in diesen Dreiecken die Seiten CG, GH, HI und IB gegenüber, also ist CG = GH = HI = IB. Die dritte Seite CB ist somit wirklich in 4 gleiche Theile getheilt worden.

§. 55.

Aufgaben.

1. Durch einen Punkt C außerhalb einer Geraden AB (Fig. 53) mit dieser eine Parallele zu ziehen.

Hier

Hier handelt es sich nur darum, einen zweiten Punkt **F** zu bestimmen, der von der **AB** so weit absteht als **C**. Zu diesem Ende fälle man von **C** die Senkrechte **CD** auf **AB**, errichte in irgend einem Punkte **E** die Senkrechte **EF**, und mache diese der **CD** gleich. Zieht man nun durch **C** und **F** eine gerade Linie, so ist diese mit **AB** parallel.

Man kann auch so verfahren. Man fälle von **C** die Senkrechte **CD** auf **AB**, und errichte in **C** über **CD** die Senkrechte **CF**, so ist diese die gesuchte Parallele. Denn die Winkel **a** und **b** sind als rechte gleich; die Gerade **CD** bildet also mit den Geraden **AB** und **CF** gleiche Wechselwinkel, mithin ist **AB** || **CF**.

Um Parallele zu ziehen, bedient man sich auch der sogenannten Parallel-Lineale.

Wie kann mit Hilfe der Winkelbreter mit einer Geraden eine Parallele gezogen werden?

§. 56.

2. Ein Parallelogramm zu verzeichnen.

Man bilde einen Winkel **BAD** (Fig. 26), schneide von den Schenkeln die Stücke **AB** und **AD** ab; sodann beschreibe man aus **B** mit dem Halbmesser **AD** einen Bogen, und durchschneide ihn aus **D** mit dem Halbmesser **AB**; in dem Vierecke **ABCD** sind nun je zwei gegenüberstehende Seiten gleich, also ist es ein Parallelogramm. Wenn der Winkel **BAD** kein rechter ist, und die Seiten **AB** und **AD** ungleich angenommen werden, so erhält man ein Rhomboid.

Nimmt man **AB** = **AD** (Fig. 27) an, so bekommt man den Rhombus.

Um ein Rechteck zu erhalten, verzeichnet man einen rechten Winkel **A** (Fig. 28), und verfährt dann wie beim Rhomboid.

Um endlich ein Quadrat zu bilden, verzeichnet man wieder einen rechten Winkel **A** (Fig. 29), schneidet von den Schenkeln gleiche Stücke **AB** und **AD** ab, und verfährt übrigens wie vorhin.

§. 57.

3. Eine gegebene Gerade **AB** (Fig. 54) in mehrere gleiche Theile zu theilen.

Die Gerade sei z. B. in 5 gleiche Theile zu theilen. Man zieht durch den einen Endpunkt **A** unter einem beliebigen Winkel eine Gerade **AX** von unbestimmter Länge, trägt darauf 5 gleiche Theile auf, und verbindet den letzten Theilungspunkt **C** mit dem zweiten Endpunkte **B**. Dadurch erhält man ein Dreieck **ACB**, worin die Seite **AC** in 5 gleiche Theile getheilt ist; damit auch die Seite **AB** in 5 gleiche Theile getheilt werde, braucht man daher nur durch jeden Theilungspunkt der **AC** mit **BC** eine parallele Linie zu ziehen.

IV. Kongruenz der Vielecke.

§. 58.

Zwei Vielecke sind kongruent, wenn sie alle Seiten und alle Winkel nach der Ordnung gleich haben. Wenn (Fig. 55) die Seite **AB** = **GH**, **BC** = **HI**, **CD** = **IK**, **DE** = **KL**, **EF** = **LM**, **FA** = **MG**; wenn ferner der Winkel **A** = **G**, **B** = **H**, **C** = **I**, **D** = **K**, **E** = **L**, **F** = **M** ist: so ist das Vieleck **ABCDEF** ≅ **GHIKLM**.

Ein

Ein anderes Kennzeichen, woraus man auf die Kongruenz zweier Vielecke schließen kann, bestehet darin, daß kongruente Vielecke aus gleich vielen der Ordnung nach kongruenten Dreiecken zusammengesetzt sind, oder durch gleichliegende Diagonalien in solche zerlegt werden können. Denn, wenn man beide Vielecke so aufeinandergelegt denkt, daß zwei entsprechende Dreiecke auf einander fallen, z. B. **ABC** auf **GHI**, so wird gewiß auch das zweite Paar Dreiecke sich decken, folglich auch das dritte Paar, . . .; daher werden sich auch die ganzen Vielecke decken, oder sie sind kongruent.

§. 59.

Aufgabe.

Ein Vieleck zu verzeichnen, welches mit einem gegebenen Vielecke **ABCDEF** (Fig. 55) kongruent ist.

Man zerlege das gegebene Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke, beschreibe mittelst der Durchschnitte von Kreisbogen eben so viele in derselben Ordnung liegende Dreiecke, welche mit denen des gegebenen Vieleckes kongruent sind. Die dadurch entstehende Figur **GHIKLM** ist mit der gegebenen kongruent. — Es ist hier nicht nöthig, die Diagonalen wirklich zu ziehen; dieselben können in dem gegebenen wie in dem neu entstehenden Vielecke bloß gedacht werden.

Viertes Hauptstück.

Ähnlichkeit der geradlinigen Figuren.

I. Geometrische Verhältnisse der Proportionen.

§. 60.

Verhältnisse.

Die Vergleichung zweier gleichartigen Größen, um zu erfahren, wie oft die eine in der andern enthalten ist, wird ein geometrisches Verhältniß genannt. Die erste der zwei Größen heißt das Vorderglied, die zweite das Hinterglied; zwischen beide wird das Divisionszeichen gesetzt.

Vergleiche man die zwei Geraden **AB** und **CD** (Fig. **56**) mit einander, so sieht man, daß **CD** in **AB** 3mal enthalten ist; diese Vergleichung gibt das Verhältniß von **AB** zu **CD**, welches man so anschreibt: **AB : CD.** Hier ist **AB** das Vorderglied, **CD** das Hinterglied.

Um das Verhältniß zweier Geraden in Zahlen auszudrücken, fasse man die kürzere Linie mit dem Zirkel, und trage dieselbe auf der größern so oftmal auf, als es angeht. Dabei können nun zwei Fälle eintreten: entweder ist die kleinere Gerade in der Größern ohne Rest mehrmal enthalten, so, daß beim Auftragen kein Stück übrig bleibt; oder es ist dieses nicht der Fall.

Wenn die kleinere Gerade **CD** (Fig. **56**) in der größern **AB** ohne Rest enthalteu ist, so heißt die kleinenere

nere **CD** das Maß der größern **AB**; dieses Maß ist in **AB** 3mal, in **CD** 1mal enthalten; also verhalten sich die zwei Geraden **AB** und **CD** gerade so wie die Zahlen 3 und 1, oder sie haben das Verhältniß 3 : 1. Eben so haben die Geraden

AB	und	**AM**	das Verhältniß	3 : 1,
AM	„	**AB**	„	1 : 3,
AN	„	**AM**	„	2 : 1,
AM	„	**AN**	„	1 : 2.

Wäre aber die kleinere Linie **CD** in der größern **AB** nicht genau 3mal enthalten, sondern es bliebe noch ein Rest **EB** (Fig. 57), so muß man, um das Verhältniß zwischen **AB** und **CD** in Zahlen zu bestimmen, eine dritte Linie ausmitteln, welche ein Maß von **AB** und von **CD** zugleich ist. Dabei verfährt man auf folgende Art. Nachdem man die kleinere Linie **CD** auf der größern **AB** 3mal aufgetragen hat, fasse man mit dem Zirkel den Rest **EB**, und trage diesen auf **CD** auf, so oft es angeht; es sei **EB** in **CD** 2mal enthalten, und es bleibt noch ein Stück **FD** übrig. Dieses Stück **FD** wird wieder auf dem frühern Reste **EB** aufgetragen, was sich hier 4mal thun läßt. Auf diese Art wird man nun so lange fortfahren, den letzten Rest auf dem nächst vorhergehenden Reste aufzutragen, bis man zuletzt auf einen Rest kommt, nach dessen Auftragen kein Stück mehr übrig bleibt; ein solcher Rest sei hier **GB**, der sich auf **FD** genau 3mal auftragen läßt. **GB** ist nun das gemeinschaftliche Maß von **AB** und **CD**; denn man hat

$$\begin{aligned} FD &= 3GB, \\ EB &= 4FD + GB = 13\ GB, \\ CD &= 2EB + FD = 29\ GB, \\ AB &= 3CD + FB = 100\ GB. \end{aligned}$$

Aus

Aus dieser Darstellung ersieht man, daß die Gerade **AB** das Maß **GB** 100mal, und die Gerade **CD** dasselbe Maß **GB** nur 29mal enthält; die Längen dieser beiden Geraden verhalten sich also wie die Zahlen 100 und 29, oder, das Verhältniß von **AB** zu **CD** ist 100 : 29.

§. 61.

Proportionen.

Die Gleichheit zweier Verhältnisse heißt eine Proportion. Z. B. die Geraden **AB** und **CD** (Fig. 56) haben das Verhältniß 3 : 1, die zwei Geraden **EF** und **GH** haben ebenfalls das Verhältniß 3 : 1; die zwei Verhältnisse **AB : CD** und **EF : GH** sind demnach gleich, und geben die Proportion **AB : CD = EF : GH**, welche so gelesen wird: **AB** verhält sich zu **CD**, wie sich **EF** zu **GH** verhält.

Man sagt in diesem Falle auch: die Geraden **AB** und **EF** sind den Geraden **CD** und **GH** proportionirt.

Jede Proportion bestehet aus zwei gleichen Verhältnissen, mithin aus vier Gliedern, welche nach der Ordnung von der Linken gegen die Rechte benannt werden, nämlich das erste, zweite, dritte, vierte Glied. Das erste und vierte Glied werden auch die äußern, das zweite und dritte die innern Glieder der Proportion genannt.

Eine Proportion, in welcher die beiden innern Glieder gleich sind, heißt eine stetige Proportion und das innere Glied heißt die mittlere geome-

tri-

trische Proportionale zwischen den beiden äußern.

In Bezug auf die Proportionen wollen wir hier nur folgende, aus der Arithmetik bekannten Sätze anführen:

1. In jeder Proportion ist das Produkt der äußern Glieder gleich dem Produkte der innern.

2. In jeder stetigen Proportion ist das Quadrat der mittlern Proportionale gleich dem Produkte der äußern Glieder; also ist die mittlere Proportionale selbst gleich der Quadratwurzel auf dem Produkte der beiden andern Glieder.

3. In jeder Proportion verhält sich die Summe der ersten zwei Glieder zur Summe der letzten zwei Glieder, wie das erste Glied zum dritten, oder wie das zweite zum vierten.

4. In jeder Proportion verhält sich der Unterschied der ersten zwei Glieder zum Unterschiede der letztern zwei Glieder, wie sich das erste Glied zum dritten, oder wie sich das zweite Glied zum vierten verhält.

5. Wenn in zwei Proportionen drei gleichnamige Glieder wechselseitig gleich sind, so muß auch das vierte Glied in beiden Proportionen gleich seyn.

Von der Richtigkeit dieser Sätze überzeugt man sich am besten an Zahlenproportionen.

Aus einer Proportion, in welcher drei Glieder bekannt sind, das noch unbekannte Glied finden, heißt die Proportion auflösen.

Um ein äußeres Glied der Proportion zu finden, multiplicirt man die beiden innern Glieder, und dividirt ihr Produkt durch das bekannte äußere.

Um

Um ein inneres Glied der Proportion zu finden, muß man die beiden äußern Glieder multipliciren, und ihr Produkt durch das bekannte innere Glied dividiren.

(Alle diese Wahrheiten sind in der Arithmetik angegeben.)

II. Ähnlichkeit der Dreiecke.

§. 62.

Erklärungen.

Zwei Dreiecke sind ähnlich d. h. sie haben dieselbe Form, wenn sie alle drei Winkel gleich haben, und wenn je zwei Seiten, welche den gleichen Winkeln gegenüberliegen, in demselben Verhältnisse zu einander stehen.

Die zwei Dreiecke **ABC** und **DEF** (Fig. 58) sind demnach ähnlich, wenn **A = D**, **B = E**, **C = F**, und wenn **AB : DE = AC : DF**, so wie **AB : DE = BC : EF** ist.

Die Seiten, welche in ähnlichen Dreiecken den gleichen Winkeln gegenüberliegen, heißen gleichnamige Seiten; als **AB** und **DE**, **AC** und **DF**, **BC** und **EF**.

In ähnlichen Dreiecken müssen also alle drei Winkel wechselweise gleich, und die gleichnamigen Seiten proportionirt seyn.

§. 63.

Lehrsätze.

1. Wenn man in einem Dreiecke mit einer Seite eine parallele Linie zieht, so

ist

ist das gegebene Dreieck mit dem neu entstandenen kleinen Dreiecke ähnlich.

Es sei (Fig. 59) **DE** || **BC**; so hat man zu beweisen, daß das Dreieck **ABC** $\sim$ **ADE** ist. — Die beiden Dreiecke **ABC** und **ADE** haben erstlich gleiche Winkel; denn der Winkel **A** ist in beiden Dreiecken gemeinschaftlich, und die Winkel **B** und **C** sind ihren Gegenwinkeln **D** und **E** gleich. Nun ist noch zu beweisen, daß auch je zwei Seiten, welche den gleichen Winkeln gegenüberliegen, dasselbe Verhältniß zu einander haben. Zu diesem Ende suche man zuerst das Verhältniß zwischen den Seiten **AB** und **AD**, **Aa** sei ihr gemeinschaftliches Maß, und zwar in **AB** 5mal, in **AD** 2mal enthalten, daher **AB** : **AD** = 5 : 2. Man ziehe nun durch jeden Theilungspunkt der **AB** eine Parallele mit **BC**, so wird dadurch auch **AC** in 5 gleiche Theile getheilt, von denen **AE** 2 enthält, mithin ist **AC** : **AE** = 5 : 2. Zieht man endlich durch jeden Theilungspunkt der **AB** auch eine Parallele mit **AC**, so wird dadurch auch **BC** in 5 gleiche Theile, und **DE** in 2 gleiche Theile getheilt, und zwar sind die Theile der **BC** eben so groß als jene der **DE**, weil Parallele zwischen Parallelen gleich sind; man hat also auch **BC** : **DE** = 5 : 2. Es haben demnach je zwei gleichnamige Seiten dasselbe Verhältniß wie 5 : 2 zu einander. Weil nun die beiden Dreiecke **ABC** und **ADE** gleiche Winkel und proportionirte Seiten haben, so sind sie ähnlich.

§. 64.

2. Wenn in zwei Dreiecken alle drei Winkel wechselseitig gleich sind, so sind die beiden Dreiecke ähnlich.

Es

Es sei in den Dreiecken ABC und DEF (Fig. 58) der Winkel A = D, B = E, und C = F. Wäre AB = DE, so müßten die beiden Dreiecke kongruent seyn, was wir hier nicht annehmen wollen. Es sei also AB größer als DE. Man schneide von der AB ein Stück AG ab, welches der DE gleich ist, und ziehe GH || BC, so ist das Dreieck ABC ∾ AGH. Das letztere Dreieck AGH ist nun mit DEF kongruent; denn die Seite AG = DE, der Winkel G = E, weil beide dem Winkel B gleich sind, und der Winkel A = D. Wenn aber das Dreieck ABC mit AGH ähnlich, und AGH mit DEF kongruent ist, so muß auch ABC ∾ DEF seyn.

Da in zwei Dreiecken, welche zwei Winkel wechselseitig gleich haben, auch die dritten Winkel gleich seyn müssen; so folgt, daß man schon aus der Gleichheit zweier Winkel in zwei Dreiecken auf die Ähnlichkeit derselben schließen kann.

§. 65.

3. Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel gegenseitig gleich ist, und die ihn einschließenden Seiten dasselbe Verhältniß zu einander haben, so sind die beiden Dreiecke ähnlich.

Es sei (Fig. 58) A = D, und AB : DE = AC : DF. Man mache AG = DE, und ziehe GH || BC, so ist das Dreieck ABC ∾ AGH. Man braucht nur noch zu zeigen, daß das Dreieck AGH ≅ DEF ist. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und AGH folgt AB : AG = AC : AH. Diese und die in der Voraussetzung enthaltene Proportion haben die ersten drei Glieder gleich, also müssen sie auch das vierte Glied gleich

ha-

haben, folglich AH = DF. Weil nun die zwei Dreiecke AGH und DEF zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel wechselseitig gleich haben, so sind sie kongruent. Das Dreieck ABC, welches mit AGH ähnlich ist, muß daher auch mit DEF ähnlich seyn.

§. 66.

4. Wenn in zwei Dreiecken je zwei Seiten dasselbe Verhältniß zu einander haben, so sind die beiden Dreiecke ähnlich.

Es sei (Fig. 58) $AB : DE = AC : DF$,
und $AB : DE = BC : EF$.

Man mache $AG = DE$, und ziehe $GH \parallel BC$, so ist das Dreieck $ABC \sim AGH$, daher
$AB : AG = AC : AH$,
und $AB : AG = BC : GH$.

In der dritten und ersten der hier vorkommenden Proportionen sind die drei ersten Glieder gleich, also muß darin auch das vierte Glied gleich seyn, nämlich $AH = DF$; eben so haben die vierte und zweite Proportion drei Glieder gleich, also muß in denselben auch das vierte Glied gleich seyn, nämlich $GH = EF$. Die beiden Dreiecke AGH und DEF haben also alle drei Seiten gleich, folglich sind sie kongruent. Weil nun das Dreieck ABC mit AGH ähnlich ist, so muß es auch mit dem Dreiecke DEF ähnlich seyn.

§. 67.

5. Wenn in zwei Dreiecken alle drei Seiten wechselseitig parallel sind, so sind die beiden Dreiecke ähnlich.

Es

Es sei (Fig. 60) **AB** $\parallel$ **DE**, **AC** $\parallel$ **DF** und **BC** $\parallel$ **EF**. — Winkel, deren Schenkel parallel laufen, sind einander gleich; also ist der Winkel **A = D**, **B = E** und **C = F**; mithin sind die Dreiecke **ABC** und **DEF** ähnlich.

6. Wenn in zwei Dreiecken alle drei Seiten wechselseitig auf einander senkrecht stehen, so sind die beiden Dreiecke ähnlich.

Es sei (Fig. 61) **AB** $\perp$ **DE**, **AC** $\perp$ **DF** und **BG** $\perp$ **EF**. — Winkel, deren Schenkel auf einander senkrecht stehen, sind einander gleich, sobald beide spitzig oder beide stumpf sind; daher ist der Winkel **A = D**, **B = E** und **C = F**; folglich das Dreieck **ABC** mit **DEF** ähnlich.

§. 68.

Aufgaben.

1. Zu drei gegebenen Geraden **AB**, **CD** und **EF** (Fig. 62) die vierte Proportionirte zu finden.

Man verzeichne einen beliebigen Winkel **G**, schneide auf dessen Schenkeln **GH = AB**, **GI = CD**, und **GK = EF** ab, ziehe **HK**, und damit parallel die **IL**, so ist **GL** die vierte Proportionirte zu **AB**, **CD** und **EF**. Denn das Dreieck **GHK** ist mit **GIL** ähnlich, daher ist **GH : GI = GK : GL**, oder **AB : CD = EF : GL**.

2. Mehrere gerade Linien, **AB**, **CD**, **EF**, . . . (Fig. 63) nach einem gegebenen

Ver=

Verhältnisse zu vergrößern oder zu verkleinern.

a. Die Aufgabe kann in den meisten Fällen sehr einfach mittelst des Proportional= oder Reduktionswinkels gelöset werden. Die gegebenen Linien seien z. B. in dem Verhältnisse **GH** : **IK** zu vergrößern. Man ziehe eine Gerade **OX** von unbestimmter Länge, und beschreibe von **O** aus mit dem Halbmesser **GH** einen Bogen, welcher die **OX** in **M** schneidet; aus **M** beschreibt man wieder mit **IK** als Halbmesser einen Bogen, welcher den frühern in **N** durchschneidet; zieht man nun durch **O** und **N** die Gerade **OY** von unbestimmter Länge, so ist **XOY** der Reduktionswinkel für die verlangte Vergrößerung. Trägt man auf beiden Schenkeln **AB** auf, indem man **OA′ = OB′ = AB** macht, so ist **A′B′** die für **AB** gesuchte vergrößerte Gerade; denn die Dreiecke **OA′B′** und **OMN** sind ähnlich, daher **OA′ : A′B′ = OM : MN** oder **AB : A′B′ = GH : IK**. Macht man eben so **OC′ = OD′ = CD, OE′ = OF′ = EF**, . . . so sind **C′D′** und **E′F′**, . . . die zu den Linien **CD**, **EF**, . . . gehörigen verhältnißmäßig vergrößerten Geraden.

Wäre das Verhältniß nicht in Linien, sondern in Zahlen angegeben, so würde man auf einer Geraden so viel gleiche Theile auftragen, als die größere Verhältnißzahl anzeigt; von diesen würde man mit dem Zirkel zuerst so viele abfassen, als die erste Verhältnißzahl anzeigt, und mit diesem Halbmesser aus **O** einen Bogen **MN** beschreiben; dann würde man mit dem Zirkel so viele Theile abnehmen, als die zweite Verhältnißzahl anzeigt, und damit aus **M** den frühern Bogen durchschneiden; durch die Schenkel **OM** und **ON** ist nun der Reduktionswinkel bestimmt.

Der

Der Reduktionswinkel ist für jede Verkleinerung anwendbar, für Vergrößerungen aber nur dann, wenn die Linien nicht über das zweifache vergrößert werden sollen.

b. Eine andere Auflösung dieser Aufgabe, welche in jedem Falle zum Zwecke führt, bestehet in Folgendem:

Um die gegebenen Linien **OA**, **OB**, **OC**, ... (Fig. 64) z. B. in dem Verhältnisse 4 : 3 zu verkleinern, ziehe man eine Gerade **PQ**, trage von **P** aus drei, und eben so von **P** aus vier gleiche Theile auf; in den Endpunkten **R** und **S** errichte man die Senkrechten **RT** und **SV**, trage auf die entferntern Senkrechten **SV** die gegebenen Linien von **S** bis **A′**, **B′**, **C′**, ... auf, und ziehe durch den Punkt **P** und die Punkte **A′**, **B′**, **C′**, ... gerade Linien, welche die nähere Senkrechte in den Punkten **A″**, **B″**, **C″**, ... treffen; die Geraden **RA″**, **RB″**, **RC″**, ... sind dann die gesuchten verhältnißmäßig verkleinerten Linien. — Die Richtigkeit dieser Auflösung folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke **PRA″** und **PSA′**, **PRB″** und **PSB′**, u. s. w.

Wären aber die gegebenen Linien in dem Verhältnisse 3 : 4 zu vergrößern, so würde man sie auf der nähern Senkrechten **RT** auftragen; auf der Senkrechten **SV** erhielte man dann die verhältnißmäßig vergrößerten Geraden.

Ist das Verhältniß der Vergrößerung oder Verkleinerung nicht in Zahlen, sondern durch Linien ausgedrückt, so trägt man auf der Geraden **PQ** von **P** aus statt der gleichen Theile, welche die Verhältnißzahlen

an=

angeben, die Verhältnißlinien auf, und verfährt übrigens wie vorhin.

3. Über einer Geraden **EF** (Fig. 58) ein Dreieck zu verzeichnen, welches mit einem gegebenen Dreiecke **ABC** ähnlich ist.

a. Man trage in **E** einen Winkel **DEF** = **ABC**, und in **F** einen Winkel **EFD** = **BCA** auf; ihre Schenkel schneiden sich im Punkte **D**, und es ist das Dreieck **DEF** ∼ **ABC**.

b. Man suche zu **AB** und **AC** die nach dem Verhältnisse **BC : EF** veränderten Geraden; beschreibe mit der erstern aus **E**, und mit der andern aus **F** einen Kreisbogen; den Durchschnitt **D** der beiden Kreisbogen verbindet man mit **E** und **F** durch gerade Linien, so ist das Dreieck **DEF** ∼ **ABC**.

§. 69.

Einrichtung und Gebrauch der verjüngten Maßstäbe.

Wenn man eine in der Natur gemessene Linie auf dem Papiere verzeichnen will, so geschieht dieses gewöhnlich nicht in der wahren Größe, sondern in einem kleinern, verjüngten Maße. Es wird nämlich angenommen, daß eine bestimmte Länge z. B. ein Zoll auf dem Papiere, eine bestimmte Länge z. B. eine Klafter, oder 20 Klafter in der Wirklichkeit vorstellen soll.

Ein Maßstab, auf welchem die in der Wirklichkeit üblichen Maße sammt ihren Unterabtheilungen verkleinert aufgetragen sind, heißt ein verjüngter Maßstab.

Um

Um einen verjüngten Maßstab für die Klafter und Fuß zu zeichnen, ziehe man (Fig. 65) eine Gerade, trage darauf mehrere gleiche Theile auf, deren einer eine Klafter vorstellen soll; und einen dieser Theile theile man wieder in 6 kleinere gleiche Theile, welche die Fuß bedeuten. — Auf eine ähnliche Art kann man einen verjüngten Maßstab für die Fuß und Zoll anfertigen.

Das hier angegebene Verfahren ist anwendbar, wenn die Klafter oder der Fuß groß genug angenommen wird. Wäre aber schon die Klafter durch eine sehr kleine Linie ausgedrückt, so möchte die weitere Eintheilung in Fuß undeutlich, und jene in Zoll gar unausführbar erscheinen. In diesem Falle nimmt man zu den Transversal-Maßstäben Zuflucht, die in dem Folgenden beschrieben werden sollen.

§. 70.

Um einen verjüngten Maßstab für das zehntheilige Maß, d. i. um den tausendtheiligen Maßstab zu verfertigen, verfahre man auf folgende Art:

Man trage auf einer Geraden **AB** (Fig. 66) **10** gleiche Theile auf, deren jeder **100** Einheiten vorstellen soll, so daß auf die ganze Linie **AB 1000** Einheiten kommen. In den Endpunkten **A** und **B** errichte man zwei Senkrechte, trage darauf wieder **10** beliebig große, jedoch gleiche Theile auf, und ziehe durch die Endpunkte **C** und **D** eine Gerade, welche der **AB** gleich sein muß, und ebenfalls in **10** gleiche Theile getheilt wird. Sodann ziehe man durch die gegenüberstehenden Theilungspunkte gerade Linien, welche alle entweder

auf

auf AB senkrecht stehen oder mit AB parallel sind. Um nur einen Theil AE wieder in 10 gleiche Theile zu theilen, braucht man nur in irgend einer Abtheilung eine Diagonale DF zu ziehen; wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke Dab und DFB muß das Verhältniß ab : FB dem Verhältnisse Db : DB gleich seyn; nun ist Db der 10te Theil von DB, also muß auch ab der 10te Theil von FB, folglich auch von AE seyn; eben so enthält cd 2 solche Theile, ef 3 Theile u. s. w. Diese Theile werden nun sowohl auf AE als Co aufgetragen, und zwar am besten in der Art, daß man zuerst 9 Theile, nämlich kl, von o bis 90, und von C bis 10 aufträgt, und eben so auf der AE verfährt; dann werden nach der Reihe auf dieselbe Weise 8, 7, 6, 5 Theile abgeschnitten. Endlich zieht man noch durch o und G, so wie durch je zwei folgende Theilungspunkte Querlinien oder Transversalen, und schreibt an die Theilungspunkte die Zahlen so hin, wie man sie in der Figur sieht.

Die Gerade AB enthält 1000 Theile; AE ist der 10te Theil von AB, und enthält somit 100 Theile, EG ist der 10te Theil von AE, enthält demnach 10 solche Theile; m1 endlich ist wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke om1 und oGE der 10te Theil von EG, enthält also einen solchen Theil, wie deren auf AB 1000 kommen, m1 ist also der 1000ste Theil von AB; n2 enthält 2 solche Theile, u. s. w.

Um einen verjüngten Maßstab für Klafter, Fuß, Zoll zu konstruiren, werden auf jeder senkrechten 12 gleiche Theile aufgetragen, und ein Theil der untern Linie, welcher eine Klafter vorstellt, nur in 6 gleiche Theile getheilt; im Übrigen verfährt man wie bei dem tausendtheiligen Maßstabe. — Auf ähnliche Art kann auch ein Transversal-Maßstab für Fuß, Zoll und Linien gemacht werden.

§. 71.

Die verjüngten Maßstäbe dienen sowohl dazu, um eine auf dem Papiere verzeichnete Linie zu messen, als auch, um eine Linie von bestimmter Länge aufzutragen oder zu verzeichnen.

1. Um mittelst eines Transversalmaßstabes zu bestimmen, wie lang eine auf dem Papier verzeichnete Linie ist, fasse man sie mit dem Zirkel, setze dann die beiden Zirkelspitzen auf eine und dieselbe Parallellinie des Maßstabes, und zwar auf diejenige, wo die eine Zirkelspitze in eine Senkrechte, die andere in eine Transversale hineinfällt, und lese die zu dieser Länge gehörige Zahl. Wenn z. B. auf einem tausendtheiligen Maßstabe die eine Zirkelspitze in der Senkrechten 300 stehet, und die andere genau in o eintrifft, so enthält die gegebene Linie 300 solcher Theile, deren **AB** 1000 enthält; würde die zweite Zirkelspitze auf 40 fallen, so hätte man 340 Theile; würde sie zwischen 40 und 50 fallen, so müßte man mit dem Zirkel so weit herabrücken, bis die zweite Spitze genau auf eine Transversale trifft, während die andere Spitze auf derselben Parallellinie in der Senkrechten 300 steht; wäre diese Parallellinie mit 6 bezeichnet, so enthält die gemessene Gerade 346 solcher Theile, deren auf **AB** 1000 kommen.

2. Um auf dem tausendtheiligen Maßstabe eine Länge, z. B. 400 abzufassen, setze man die eine Zirkel-

spitze in 400, die andere in o ein; um 470 abzufassen, setze man die eine Zirkelspitze in 400, die andere in 70 ein; um 478 abzunehmen, suche man die durch 8 gehende Parallellinie auf, setze auf derselben die eine Zirkelspitze in die Senkrechte 400, und die andere in die Transversale 70. — Auf ähnliche Weise geschieht das Abnehmen der Längen auf andern Transversal-Maßstäben.

III. Ähnlichkeit der Vielecke.

§. 72.

Zwei Vielecke sind ähnlich, wenn ihre Winkel folgeweise gleich, und die gleichliegenden Seiten proportionirt sind. So sind (Fig. 67) die Vielecke **ABCDE** und **FGHIK** ähnlich, wenn **A = F**, **B = G**, **C = H**, **D = I**, **E = K**, und **AB : FG = BC : GH = CD : HI = DE : IK = EA : KF** ist.

Zwei Vielecke sind ähnlich, wenn sie sich durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen lassen, welche einzeln nach der Ordnung einander ähnlich sind.

Um sich von der Richtigkeit dieses Satzes zu überzeugen, sei (Fig. 67) das Dreieck **ABC** $\sim$ **FGH**, **ACD** $\sim$ **FHI**, **ADE** $\sim$ **FIK**. Nach dieser Voraussetzung sind je zwei gleichliegende Dreieckswinkel gleich, und je zwei gleichliegende Seiten haben dasselbe Verhältniß zu einander. — Es ist zuerst zu beweisen, daß auch je zwei gleichliegende Vieleckswinkel einander gleich sind. Weil die Winkel a, b, c, einzeln den Winkeln m, n, p gleich sind, so müssen auch ihre Summen gleich seyn, nämlich **A = F**. Die Winkel **B** und **G** sind nach der Annahme gleich. Ferner ist der Winkel **C = H**, weil beide aus gleich großen Winkeln zusammengesetzt sind; und aus demselben Grunde D = I. Endlich ist nach der Annahme auch E = K. — Nun ist noch zu zeigen, daß die gleichliegenden Seiten der beiden Vielecke proportionirt sind. Nach der Voraussetzung ist **AB : FG = BC : GH.** Ferner sind die Verhältnisse **BC : GH** und **CD : HI** gleich, weil sie beide einem dritten Verhältnisse **AC : FH** gleich sind. Wegen **CD : HI = AD : FI,** und **DE : IK = AD : FI** folgt eben so **CD : HI = DE : IK.** Endlich ist nach der Annahme auch **DE : IK = EA : KF.** Es ist also **AB : FG = BC : GH = CD : HI = DE : KI = EA : KF.** Die beiden Vielecke **ABCDE** und **FGHIK** haben also in der Ordnung gleiche Winkel und proportionirte Seiten; sie sind demnach ähnlich.

§. 73.

Aufgabe.

Über einer gegebenen Geraden **FG** (Fig. 67) ein Vieleck zu beschreiben, welches einem gegebenen Vielecke **ABCDE** ähnlich ist.

Diese Aufgabe läßt mehrere Auflösungsarten zu, worunter folgende die einfachsten seyn dürften.

1. Man zerlegt das gegebene Vieleck mittelst Diagonalen in Dreiecke, beschreibe über **FG** ein dem Dreiecke **ABC** ähnliches Dreieck **FGH,** über der Seite **FH** ein dem Dreiecke **ACD** ähnliches Dreieck, und über **FI** das Dreieck **FIK,** welches mit **ADE** ähnlich ist. Das Vieleck **FGHIK** bestehet nun aus drei Dreiecken, welche der Ordnung nach mit den Dreiecken

des

des Vieleckes ABCDE ähnlich sind; die beiden Vielecke sind demnach ähnlich.

2. Man ziehe von A (Fig. 68) aus zu allem Eckpunkten Diagonalen, mache AM = FG, und ziehe MN ‖ BC, NP ‖ CD, PQ ‖ DE; so ist das Vieleck ABCDE mit AMNPQ ähnlich. Verzeichnet man nun über FG ein Vieleck FGHIK, welches mit AMNPQ kongruent ist, so ist dieses das verlangte Vieleck.

Die Punkte M, N, P, Q könnte man auch dadurch finden, daß man die Geraden AB, AC, AD, AE in dem Verhältnisse AB : FG verkleinert, und die so verjüngten Geraden von A bis M, N, P, Q aufträgt.

Fünftes Hauptstück.

Krumme Linien und die von ihnen begrenzten Figuren.

§. 74.

Es gibt unzählig viele Arten von krummen Linien und krummlinigen Figuren, von denen einige regelmäßig, andere unregelmäßig sind. Für das praktische Leben sind besonders drei sehr wichtig, nämlich der Kreis, die Ellipse und die Parabel.

I. Die Kreislinie.

§. 75.

Die Kreislinie oder der Kreis ist jene in sich selbst zurückkehrende krumme Linie, in welcher jeder

Punkt

Punkt von einem gegebenen Punkte, den man **Mittelpunkt** oder **Zentrum** nennt, dieselbe Entfernung hat. Diese Entfernung ist der **Halbmesser**.

Alle Punkte, deren Entfernung vom Zentrum kleiner ist als der Halbmesser, liegen innerhalb der Kreislinie; und alle Punkte, deren Entfernung vom Zentrum größer ist als der Halbmesser, außerhalb der Kreislinie.

Damit ein Kreis vollkommen bestimmt sei, muß man den Mittelpunkt und die Länge des Halbmessers kennen. Zwei Kreise, welche aus demselben Mittelpunkte mit demselben Halbmesser beschrieben werden, müssen ganz in einander fallen.

a. Gerade Linien, die in Beziehung auf den Kreis vorkommen.

§. 76.

Erklärungen.

Eine Gerade **AB** (Fig. 69), welche zwei Punkte des Umfanges verbindet, heißt eine **Sehne**.

Eine Sehne ist um so größer, je näher sie dem Mittelpunkte liegt; die längste Sehne ist daher diejenige, welche durch den Mittelpunkt selbst geht, nämlich der **Durchmesser**.

Eine Gerade **CD**, welche durch den Kreis geht und den Umfang in zwei Punkten durchschneidet, heißt eine **Durchschneidungslinie** (**Secante**).

Eine Gerade **EF**, welche mit der Kreislinie nur in einem Punkte **A** zusammentrifft, so daß alle andern Punk-

Punkte außerhalb des Kreises liegen, heißt eine Berührungslinie (Tangente).

Durch den Schnitt des Kreises mit der Geraden entstehen folgende Figuren:

1. Der Kreisabschnitt (Segment) d. i. jener Theil der Kreisfläche, welcher zwischen einer Sehne und dem dazu gehörigen Bogen liegt, wie **ABMA**;

2. der Kreisausschnitt (Sector) d. i. jenes Stück der Kreisfläche, welches von zwei Halbmessern und dem dazwischen liegenden Bogen begrenzt wird, wie **AOGA**.

§. 77.

Lehrsätze.

1. Zu gleichen Sehnen gehören auch gleiche Bogen; und umgekehrt: zu gleichen Bogen gehören auch gleiche Sehnen.

Von der Richtigkeit dieser zwei Sätze kann man sich überzeugen, indem man die betreffenden Kreisabschnitte über einander legt; man wird nämlich finden, daß unter jeder der zwei obigen Voraussetzungen die beiden Kreisabschnitte vollkommen über einander fallen, folglich im ersten Falle auch die Bogen, im zweiten auch die Sehnen sich vollkommen decken.

2. Die Gerade, welche das Zentrum eines Kreises mit der Mitte einer Sehne verbindet, steht auf der Sehne senkrecht.

Es sei (Fig. 70) die Sehne **AB** im Punkte **D** halbirt, also **AD** = **BD**, so ist zu beweisen, daß **CD** auf **AB** senkrecht steht, oder mit andern Worten, daß die Winkel **m** und **n** gleich sind. Zu diesem Ende muß

man

man zeigen, daß m und n in kongruenten Dreiecken gleichen Seiten gegenüberliegen; man ziehe daher die Halbmesser **AC** und **BC**; die dadurch entstehenden Dreiecke **ACD** und **BCD** haben alle drei Seiten wechselseitig gleich, folglich sind sie kongruent; die Winkel m und n liegen darin den gleichen Seiten **AC** und **BC** gegenüber, also sind sie einander gleich, oder **CD** $\perp$ **AB**.

3. **Wenn man in einem Kreise vom Mittelpunkte auf eine Sehne eine Senkrechte zieht, so wird dadurch die Sehne halbirt.**

Es sei (Fig. 70) **CD** $\perp$ **AB**, so ist zu beweisen, daß die Sehne **AB** im Punkte **D** halbirt, daß nämlich **AD** = **BD** ist. Man ziehe die Halbmesser **AC** und **BC**, wodurch zwei rechtwinklige Dreiecke **ACD** und **BCD** entstehen; in diesen ist die Hypothenuse **AC** = **BC**, und eine Kathete **CD** gemeinschaftlich; die beiden Dreiecke sind demnach kongruent, und es müssen auch die dritten Seiten **AD** und **BD** gleich seyn. Die Sehne **AB** ist also wirklich im Punkte **D** halbirt worden.

4. **Wenn man in einem Kreise eine Sehne halbirt, und im Halbirungspunkte darauf eine Senkrechte errichtet, so muß diese durch den Mittelpunkt des Kreises gehen.**

Es sei (Fig 71) **AD** = **BD**, und **DE** $\perp$ **AB**; so ist zu zeigen, daß die Senkrechte **DE** durch den Mittelpunkt des Kreises geht. Würde **DE** nicht durch den Mittelpunkt des Kreises gehen, so müßte dieser Mittelpunkt außerhalb der Senkrechten **DE** z. B. in **F** liegen; daraus aber würde etwas Unmögliches folgen. Man ziehe nämlich **FD**, so müßte diese Gerade, da

sie

sie das angenommene Zentrum F mit der Mitte der Sehne verbindet, auf dieser Sehne AB senkrecht stehen, was jedoch nicht seyn kann, da durch einen Punkt D auf eine Gerade AB nur eine Senkrechte gezogen werden kann. Da aus der Annahme, daß der Mittelpunkt nicht in der DE läge, ein offenbarer Widerspruch hervorgehet, so ist die Annahme selbst falsch, d. h. es ist falsch, daß DE nicht durch den Mittelpunkt geht; folglich ist das Gegentheil wahr: DE geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

5. Wenn man in dem Endpunkte eines Halbmessers darauf eine Senkrechte errichtet, so ist diese eine Tangente des Kreises.

Es sei (Fig. 72) AB $\perp$ CD. Jede schiefe Gerade, wie CE, CF, . . ist länger als die Senkrechte CD; also liegen die Punkte E, F, . . außerhalb der Kreislinie. Die Gerade AB hat also mit der Kreislinie nur den Punkt D gemeinschaftlich, alle andern Punkte liegen außerhalb des Kreises; AB ist also eine Berührungslinie des Kreises.

§. 78.

Aufgaben.

1. Den Mittelpunkt eines Kreises zu finden.

a. Wenn der Halbmesser des Kreises d. i. die Zirkelöffnung bekannt ist, so ist es sehr leicht, den Mittelpunkt zu finden. Man weiß, daß der Mittelpunkt von allen Punkten des Umfanges so weit absteht, als die Zirkelöffnung beträgt; man braucht daher nur aus zwei Punkten des Umfanges, z. B. aus

A und B (Fig. 70) mit dem bekannten Halbmesser Bogen zu beschreiben; ihr Durchschnitt C ist der gesuchte Mittelpunkt.

b. Ist der Halbmesser nicht bekannt, so kann das frühere Verfahren nicht angewendet werden. Da kommt der Satz zu Hilfe, daß die in der Mitte einer Sehne errichtete Senkrechte durch den Mittelpunkt des Kreises gehen müsse. Man ziehe daher irgend eine Sehne AB (Fig. 73), halbire sie, und errichte im Halbirungspunkte C darauf eine Senkrechte CD. — Ist nun der ganze Kreis verzeichnet, so ist diese Senkrechte, beiderseits bis an den Umfang gezogen, ein Durchmesser; man braucht sie nur noch zu halbiren, so erhält man den Mittelpunkt des Kreises. — Ist aber nicht der ganze Kreis, sondern nur ein Kreisbogen beschrieben, so ziehe man noch eine zweite Sehne BE, halbire sie, und ziehe darauf durch den Halbirungspunkt F die Senkrechte FG. Da nun sowohl die Senkrechte CD, als auch die FG durch den Mittelpunkt des Kreises gehen muß, so muß dieser in ihrem Durchschnitte O liegen.

c. Wenn endlich (Fig. 73) der Mittelpunkt eines Kreises zu finden ist, welcher durch drei gegebene Punkte A, B und E, die nicht in einer geraden Linie liegen, gehen soll; so denke man sich den Kreis durch die drei Punkte schon beschrieben, und ziehe zwischen den gegebenen Punkten die Geraden AB und BE; so muß offenbar der Mittelpunkt O in den beiden Senkrechten liegen, die man in den Halbirungspunkten der Sehnen AB und BE auf dieselben errichtet. — Man findet also den Mittelpunkt auf folgende Art: Man zieht zwischen den gegebenen Punkten zwei gerade Linien AB und BE, und errichtet in der Mitte derselben Senkrechte CD und

FG; der Durchschnittspunkt **O** derselben ist der gesuchte Mittelpunkt.

2. Durch einen Punkt **D** (Fig. 72) im Umfange eine Tangente an den Kreis zu ziehen.

Man ziehe zu dem gegebenen Punkt einen Halbmesser **CD**, und errichte darauf durch **D** eine Senkrechte **BA**, so ist diese die verlangte Tangente.

b. Winkel, die in Beziehung auf den Kreis vorkommen.

§. 79.

Lehrsätze.

In Hinsicht des Kreises und der darin vorkommenden Winkel sind besonders folgende Sätze zu beachten.

1. Zu gleichen Winkeln am Zentrum gehören auch gleiche Sehnen und Bogen; umgekehrt: zu gleichen Sehnen gehören gleiche Zentriwinkel, und: zu gleichen Bogen gehören auch gleiche Zentriwinkel.

Von der Richtigkeit dieser drei Sätze überzeugt man sich, wenn man entweder zwei gleiche Winkel am Mittelpunkte, oder zwei gleiche Sehnen, oder im dritten Satze zwei gleiche Bogen annimmt, und dann die betreffenden Kreisausschnitte über einander gelegt denkt; man wird dadurch finden, daß sich unter jeder dieser Voraussetzungen die beiden Kreisausschnitte vollkommen decken, daß also bei jeder Annahme auch die übrigen Bedingungen eintreffen müssen.

2. Wenn man in einem Kreise mit dem Halbmesser als Sehne einen Bogen abschneidet, so beträgt der dazu gehörige Winkel am Mittelpunkte 60°.

Es sei (Fig. 74) **AB** = **AO**. Das Dreieck **ABO** ist gleichseitig, daher enthält darin jeder Winkel 60°; also ist der Zentriwinkel **AOB** wirklich gleich 60°.

3. Wenn man in einem Kreise zwei auf einander senkrechte Halbmesser zieht, und den Halbirungspunkt des einen mit dem Endpunkte des andern durch eine gerade Linie verbindet; wenn man dann auf dieser Geraden die Hälfte des Halbmessers aufträgt, und mit dem Reste einen Bogen abschneidet; so beträgt der zu diesem Bogen gehörige Zentriwinkel 36°.

Es sei (Fig. 75) **BC** ⊥ **AC**, und **D** die Mitte von **BC**; man ziehe **DA**, schneide **DE** = **DC** ab, und beschreibe mit dem Reste **EA** den Bogen **AF**. Trägt man die Sehne **AF** im Kreise herum auf, so findet man, daß sie darin genau 10mal enthalten ist; es ist daher der Winkel **ACF** der 10te Theil von der Summe aller Winkel um den Mittelpunkt, also der 10te Theil von 360° d. i. 36°.

§. 80.

Aufgaben.

1. Einen Bogen zu halbiren.

Um einen Bogen **AB** (Fig. 76) zu halbiren, braucht man nur den dazu gehörigen Zentriwinkel **ACB** zu halbiren. Man beschreibe nämlich aus **A** und **B**

mit

mit dem nämlichen Halbmesser zwei Bogen, welche sich schneiden, und ziehe durch ihren Durchschnittspunkt **D** und durch das Zentrum **C** eine Gerade **DC**; so ist dadurch der Zentriwinkel **ACB**, und folglich auch der Bogen **AB** im Durchschnittspunkte **E** halbirt.

§. 81.

2. Den Umfang eines Kreises in mehrere gleiche Theile zu theilen.

Mechanisch, nämlich mit Hilfe des Transporteurs, kann man die Theilung der Kreislinie in beliebig viele gleiche Theile vornehmen. — Man trägt nämlich um den Mittelpunkt so viele gleiche Winkel herum auf, als die Kreislinie Theile enthalten soll; durch ihre Schenkel wird die Peripherie in die verlangte Anzahl gleicher Theile getheilt. Die Größe eines solchen Winkels findet man, wenn man die Summe aller Winkel um den Mittelpunkt d. i. 360° durch die Anzahl der Winkel dividirt. Es ist übrigens hinreichend, nur einen solchen Winkel am Mittelpunkte wirklich zu verzeichnen, und den durch seine Schenkel abgeschnittenen Bogen in der Peripherie aufzutragen. — Um z. B. den Umfang in 5 gleiche Theile zu theilen, braucht man nur fünf gleiche Zentriwinkel zu bilden; einer davon wird daher $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ betragen; man mache also (Fig. 75) den Winkel **BCF** = 72°, und trage den Bogen **BF** im Umfange auf.

Geometrisch lassen sich nur einige Theilungen ausführen, diejenigen nämlich, bei denen der entsprechende Zentriwinkel geometrisch konstruirt werden kann.

Fürs erste ist die geometrische Theilung in zwei gleiche Theile möglich, indem man nur zwei Mittel-

punkts-

punktswinkel von $\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$ zu vergleichen, d. i. einen Durchmesser zu ziehen braucht. — Durchs Halbiren eines jeden der zwei Theile erhält man 4, und durch fortgesetztes Halbiren 8, 16, 32, 64, . . . gleiche Theile.

Steigt man nun stufenweise in der Anzahl der Theile, und bestimmt die Größe der entsprechenden Mittelpunktswinkel, so findet man, daß dann zunächst der Kreis in sechs gleiche Theile geometrisch getheilt werden kann; denn der Zentriwinkel $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ läßt sich verzeichnen, wenn man mit dem Halbmesser selbst einen Bogen abschneidet. Um daher die Peripherie in 6 gleiche Theile zu theilen, braucht man nur den Halbmesser als Sehne im Kreise herum aufzutragen. — Nimmt man zwei solche Theile für einen einzigen, so ist der Kreis in 3 gleiche Theile getheilt. — Durch allmähliges Halbiren kann dann der Umfang in 12, 24, 48, 96, . . . gleiche Theile getheilt werden.

Ferner läßt sich die geometrische Theilung des Kreisumfanges in zehn gleiche Theile vornehmen. Der Zentriwinkel $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ läßt sich nämlich geometrisch konstruiren, wenn man (Fig. 75) zwei auf einander senkrechte Halbmesser zieht, die Mitte des einen mit dem Endpunkte des andern durch eine Gerade verbindet, dann von dieser Geraden den halben Halbmesser abschneidet, und mit dem Reste einen Bogen beschreibt. Dieser Bogen läßt sich in den Peripherien 10mal herum auftragen. — Betrachtet man zwei Theile zusammen für einen, so ist die Kreislinie in 5 gleiche Theile getheilt. — Durch fortgesetztes Halbiren kann man den Umfang auch in 20, 40, 80, 160, . . gleiche Theile theilen.

Die

Die Theilungen des Kreisumfanges finden im Leben häufige Anwendung; besonders wichtig sind sie in dem Maschinenbau bei der Anfertigung der gezähnten Räder.

§. 82.

3. Einen Halbkreis in Grade zu theilen, oder einen Transporteur anzufertigen.

Damit der Halbkreis (Fig. 5) von Grad zu Grad getheilt erscheine, muß er 180 gleiche Theile erhalten. Zu diesem Ende trage man zuerst den Halbmesser als Sehne im Halbkreise herum auf, wodurch man drei gleiche Theile erhält; durch zweimaliges Halbiren entstehen 12 gleiche Bogen. Theilt man ferner durch Versuche jeden solchen Bogen in 3 gleiche Theile, so erhält man 36 gleiche Bogen; und wenn man jeden derselben ebenfalls durch Versuche noch in 5 gleiche Theile theilt, so hat man 180 gleiche Theile, deren jeder einen Grad enthält.

Was gibt es noch für andere Arten, den Halbkreis nach und nach in 180 gleiche Theile zu theilen?

c. Vieleck und Kreis.

§. 83.

Lehrsätze.

1. Wenn man den Umfang eines Kreises in mehrere gleiche Theile theilt, und durch je zwei auf einander folgende Theilungspunkte eine Sehne zieht; so ist das von diesen Sehnen gebildete Vieleck ein regelmäßiges.

Es sei z. B. die Kreislinie in 6 gleiche Theile getheilt (Fig. 77); man ziehe die Sehnen **AB**, **BC**,

CD,

CD, DE, EF, FA; es ist nun zu beweisen, daß das Vieleck **ABCDEF** regelmäßig ist, daß es nämlich sowohl gleiche Seiten als gleiche Winkel enthält. — Die Seiten des Vieleckes sind als Sehnen des Kreises, welche zu gleichen Bogen gehören, einander gleich. Um zu zeigen, daß auch die Winkel gleich sind, ziehe man die Geraden **AC** und **BF**; die Dreiecke **ABF** und **ABC** sind nun kongruent; weil sie alle drei Seiten wechselseitig gleich haben; daher sind die gleichliegenden Winkel **A** und **B** gleich; eben so läßt sich die Gleichheit der übrigen Winkel beweisen. Das Vieleck ist daher gleichseitig und gleichwinklig, also regelmäßig.

Ein solches Vieleck, dessen alle Eckpunkte in der Peripherie eines Kreises liegen, dessen Seiten also Sehnen des Kreises sind, heißt dem Kreise eingeschrieben oder in den Kreis beschrieben.

2. Wenn man zu den Eckpunkten eines regelmäßigen, dem Kreise eingeschriebenen Vieleckes Halbmesser zieht, so werden dadurch alle Umfangswinkel des Vieleckes halbirt.

Es sei (Fig 74) **AB** = **BC** = **CD** = **DE** = **EF** = **FA**, also **ABCDEF** ein regelmäßiges, dem Kreise eingeschriebenes Vieleck; man ziehe die Halbmesser **AO, BO, CO** . . . , so ist zu beweisen, daß dadurch die Vieleckswinkel bei **A, B, C,** . . halbirt werden. — Die Dreiecke **AOB, BOC, COD,** . . sind gleichschenklig, also in jedem derselben die Winkel an der Grundlinie gleich; jene Dreiecke sind aber zugleich kongruent, weil sie alle drei Seiten wechselseitig gleich haben, daher sind die Winkel an der Grundlinie des einen Dreieckes, welche unter einander gleich sind, auch den Winkeln an der Grundlinie in jedem

an=

andern Dreiecke gleich; die Winkel a, b, c, d, e, f, . . sind also unter einander gleich, folglich ist wirklich jeder Umfangswinkel halbirt worden.

§. 84.

Aufgaben.

1. **Ein regelmäßiges Vieleck zu beschreiben, wo die Länge einer Seite unbestimmt ist.**

Man beschreibe einen Kreis, theile den Umfang in so viele gleiche Theile, als das Vieleck Seiten haben soll, und ziehe durch je zwei auf einander folgende Theilungspunkte eine Gerade.

2. **Ein regelmäßiges Vieleck zu verzeichnen, wo jede Seite eine bestimmte Länge haben muß.**

Hier kommt es nur darauf an, die Größe des Kreises zu finden, welchem das verlangte Vieleck eingeschrieben erscheint. Zu diesem Ende braucht man nur das Dreieck **ABO** (Fig. 74) zu konstruiren, indem man für **AB** die gegebene Seite und für b und c die halben Vieleckswinkel annimmt. Man berechne daher zuerst die Größe eines Vieleckswinkels, ziehe eine Gerade, welche der gegebenen Seite gleich ist, trage in jedem Endpunkte den halben Vieleckswinkel auf, aus dem Durchschnittspunkte der beiden neuen Schenkel beschreibe man durch die Endpunkte der gezogenen Geraden einen Kreis und trage darin die gegebene Seite herum auf.

Man könnte ein regelmäßiges Vieleck auch auf folgende Art verzeichnen: man ziehe zuerst eine Seite **AB**, trage in **B** den Vieleckswinkel auf, so gibt der Schenkel **BC** die Richtung der nächsten Seite; man nehme BC = AB, trage in C wieder den Vielecks-winkel auf, so gibt CD die Richtung der folgenden Vielecksseite; auf diese Art fahre man fort, bis man zum Punkte A zurückkommt. Allein dieses Verfahren kann bei vielseitigen Vielecken bedeutende Fehler geben, indem der geringste beim Auftragen eines Winkels begangene Fehler sich auf alle folgenden Winkel fortpflanzt.

d. Lage zweier Kreise gegen einander.

§. 85.

Bei der Vergleichung zweier Kreise hinsichtlich ihrer Lage sehe man zuerst darauf, ob sie denselben Mittelpunkt haben oder nicht.

Haben die Kreise denselben Mittelpunkt, wie Fig. 78, so heißen sie konzentrisch; der zwischen ihren Peripherien befindliche Raum wird ein Ring genannt.

Haben die Kreise nicht denselben Mittelpunkt, so können sie sich entweder berühren oder schneiden, oder es ist keines von beiden der Fall.

Zwei Kreise berühren sich, wenn ihre Umfänge nur einen Punkt gemeinschaftlich haben. Die Berührung geschieht von innen (Fig. 79) oder von außen (Fig. 80), je nachdem der eine Kreis innerhalb oder außerhalb des andern liegt.

Wenn sich zwei Kreise durchschneiden, so haben ihre Peripherien zwei Punkte gemeinschaftlich. Das gemeinschaftliche Stück ABCD (Fig. 81) der beiden Kreisflächen heißt eine Linse, jedes der nicht ge-

mein-

meinschaftlichen Stücke, wie ACBE und ADBF ein Mond.

Wenn sich endlich Kreise, die aus verschiedenen Mittelpunkten beschrieben werden, weder berühren noch schneiden, so können sie entweder in einander oder außer einander liegen.

e. Länge des Kreisumfanges.

§. 86.

Da der Bogen immer größer ist als die Sehne, die durch dessen Endpunkte geht, so ist der Umfang des Kreises gewiß größer, als der Umfang des eingeschriebenen regelmäßigen Sechseckes, also größer als der 6fache Halbmesser, oder größer als der 3fache Durchmesser. Ferner ist gewiß, daß der Umfang des regelmäßigen Zwölfeckes sich schon mehr dem Umfange des Kreises nähern würde als der Umfang des Sechseckes; überhaupt, je größer die Zahl der Seiten des einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Vieleckes ist, desto näher kommt sein Umfang dem Umfange des Kreises; desto kleiner wird also der Fehler, den man begehet, wenn man den Umfang des Vieleckes für den Umfang des Kreises annimmt. Auf diese Weise hat man näherungsweise die Länge des Kreisumfanges bestimmt, und gefunden, daß der Umfang eines Kreises $3\frac{1}{7}$mal, oder genauer 3,1416mal so groß ist als der Durchmesser. Daraus ergeben sich folgende zwei Sätze.

1. Um den Umfang eines Kreises zu finden, muß man den Durchmesser mit $3\frac{1}{7}$ oder genauer mit 3,1416 multiplizieren.

2. Um aus dem Umfange eines Kreises den Durchmesser zu bestimmen, muß man den Umfang durch $3\frac{1}{7}$ oder genauer durch 3,1416 dividiren.

Beispiele.

1. Der Durchmesser eines Kreises beträgt 6″; wie groß ist der Umfang?

$6'' \times 3\frac{1}{7}$ oder $6'' \times 3{,}14$ genauer $6'' \times 3{,}1416$

$18\frac{6''}{7}$ $\qquad$ $18{,}84''$ $\qquad$ $18{,}8496''$

2. Wie groß ist der Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser 3′ 5″ ist?

Halbm. $= 3'\ 5'' = 41''$ $\qquad 82 \times 3\frac{1}{7}$

Durchm. $= 82''$ $\qquad 246$

$11\frac{5}{7}$

Umfang $= 257\frac{5}{7}'' = 21'\ 5\frac{5}{7}''$.

3. Wie groß ist der Durchmesser eines Kreises, dessen Umfang 20′ beträgt?

$20' : 3\frac{1}{7} = 20 \times \frac{7}{22} = \frac{140}{22} = \frac{70}{11} = 6\frac{4}{11}'$;

oder

$20'_{00} : 3'14 = 6{,}37'$ Durchmesser.

1160

2180

4. Der Umfang eines Baumes ist 2′ 6″; wie groß ist der Durchmesser? — 9,55″.

5. Ein Grad des Erdäquators hat 15 geographische Meilen; wie groß ist der Halbmesser des Äquators? — Der ganze Äquator beträgt 360mal 15 d. i. 5400 geogr. Meilen; daher sein Durchmesser $5400 : 3\frac{1}{7} = 1718\frac{2}{11}$, folglich der Halbmesser $859\frac{1}{11}$ geogr. Meilen.

6. Ein Wagenrad hat 3′ 2″ im Durchmesser, wie viele Umdrehungen wird es machen müssen, um eine Postmeile von 4000° zurückzulegen? — Der Umfang des Rades ist $38'' \times 3{,}1416 = 119{,}3808''$; um die Anzahl der Umdrehungen zu erhalten, muß man die

Länge

Länge des ganzen Weges durch den Umfang des Rades dividiren, wodurch man nahe 2412 bekommt; das Rad muß also 2412 Umläufe machen.

7. Ein kreisrundes Wasserbecken (Bassin) hat im Umfange 42 Steine, deren jeder an der innern Seite 11″ lang ist; wie lang muß ein Balken seyn, damit er genau über die Mitte reiche, und auf jeder Seite noch 1′ hervorstehe? — Der Umfang des Beckens ist 42mal 11″ = 462″, daher der Durchmesser 462″ : $3\frac{1}{7}$ = 147″ = 2° 3″; folglich die Länge des Balkens 2° 2′ 3″.

II. Die Ellipse.

§. 87.

Erklärungen.

Die Ellipse ist jene in sich selbst zurückkehrende krumme Linie, in welcher die Entfernungen eines jeden Punktes von zwei gegebenen Punkten zusammen genommen gleich sind einer gegebenen Geraden.

Sind (Fig. 82) **A** und **B** die zwei gegebenen Punkte, und **RS** die gegebene Gerade, so liegt der Punkt **M** in der Ellipse, wenn **AM** + **BM** = **RS** ist.

Die zwei gegebenen Punkte **A** und **B** heißen Brennpunkte; die Entfernungen eines Punktes **M** von den beiden Brennpunkten, nämlich die Geraden **AM** und **BM**, werden die Leitstrahlen oder Vektoren jenes Punktes genannt.

Die Gerade **DE**, welche durch die beiden Brennpunkte geht, ist die längste Gerade, welche in der Ellipse gezogen werden kann, und heißt die große

Axe

Axe; sie ist der gegebenen Geraden **RS** gleich. Darum kann die Eigenschaft der Ellipse auch so ausgedrückt werden: Für jeden Punkt der Ellipse muß die Summe der beiden Leitstrahlen der großen Axe gleich seyn.

Die Endpunkte **D** und **E** der großen Axe heißen die Scheitel, und der Halbirungspunkt **C** der Mittelpunkt der Ellipse.

Die Entfernung eines Brennpunktes vom Mittelpunkte, wie **AC** oder **BC**, nennt man die Exzentrizität der Ellipse. Je kleiner die Exzentrizität ist, desto weniger unterscheidet sich die Ellipse von dem Kreise.

Die Gerade **FG**, welche im Mittelpunkte auf die große Axe senkrecht steht, ist die kleinste Linie, welche in der Ellipse gezogen werden kann, weßhalb sie auch die kleine Axe der Ellipse genannt wird.

Zur vollkommenen Bestimmung der Ellipse muß die Lage der beiden Brennpunkte und die Länge der großen Axe bekannt seyn.

Die Ellipse ist in der Anwendung von großer Wichtigkeit; man baut z. B. Gewölbe, Wasserbehälter, Rasenplätze, Blumenbeete u. d. gl. von elliptischer Form; am merkwürdigsten aber ist diese Linie in der Astronomie, indem unsere Erde und alle Planeten unseres Sonnensystems in mehr oder weniger länglichten Ellipsen sich um die Sonne bewegen, die sich in einem der Brennpunkte aller jener elliptischen Bahnen befindet.

§. 88.

Aufgaben.

1. Beliebig viele Punkte der Ellipse geometrisch zu bestimmen.

Es

Es seien (Fig. 82) **A** und **B** die beiden Brennpunkte, und **RS** sei die Länge der großen Axe. Man ziehe durch die Brennpunkte eine Gerade, halbire den Abstand **AB** in **C**, halbire auch **RS** in **T**, und trage die Hälfte **RT** von **C** aus bis **D** und **E** auf; **DE** ist nun die große Axe der Ellipse, **D** und **E** ihre Scheitel. Beschreibt man ferner mit der halben großen Axe aus beiden Brennpunkten nach oben und unten Bogen, so liegen die Durchschnittspunkte **F** und **G** in der Ellipse, weil bei jedem die Summe der beiden Leitstrahlen der großen Axe gleich ist; zieht man durch **F** und **G** eine Gerade, so muß dieselbe, weil über **AB** als Grundlinie nach oben und unten ein gleichschenkliges Dreieck gedacht werden kann, durch den Punkt **C** gehen und auf **AB** senkrecht stehen; **FG** ist also die kleine Axe der Ellipse.

Nun nehme man zwischen den Brennpunkten irgend einen Punkt **V** an, so wird dadurch die große Axe in zwei Abschnitte getheilt; beschreibt man zuerst mit dem kleinern **DV** aus beiden Brennpunkten nach oben und unten Bogen, und dann eben so mit dem größern Abschnitte **EV**, so sind die vier Durchschnittspunkte **M**, **N**, **P** und **Q** Punkte der Ellipse, weil für jeden derselben der eine Leitstrahl dem kleinern Abschnitte **DV** der großen Axe, und der andere Leitstrahl dem größern Abschnitte **EV**, also ihre Summe der ganzen großen Axe gleich ist. Auf diese Art werden, wenn man in der Linie **AB** verschiedene Punkte annimmt, beliebig viele Punkte der Ellipse bestimmt werden. Liegen diese sehr nahe an einander, so kann man sie durch eine stetige Linie verbinden, und erhält dadurch die Ellipse.

§. 89.

2. Eine Ellipse mittelst eines Fadens in einem Zuge zu beschreiben.

Man

Man setze in die Brennpunkte **F** und **G** (Fig. 83) die Spitzen eines Zirkels oder zwei Nadeln; um dieselben lege man einen Faden, welcher so lang ist als der Abstand der beiden Brennpunkte und die große Axe zusammen genommen, also von der Länge **FG** + **NP**, und dessen Enden zusammengebunden sind. Nimmt man nun einen Zeichenstift, legt ihn in das Innere des Fadens, und fährt damit um die beiden Punkte so herum, daß der Faden immer straff gespannt bleibt; so beschreibt dieser Stift eine Ellipse. Denn es ist bei dieser Bewegung in jeder Lage des Stiftes **M** die Summe der Fadenstücke **FM** und **GM**, welche die Leitstrahlen vorstellen, der Länge der großen Axe **NP** gleich.

3. In ein Rechteck **ABCD** (Fig. 83) ein Blumenbeet von elliptischer Form aufzureißen.

Man halbire die Seiten in den Punkten **N**, **O**, **P** und **Q**, und ziehe **NP** und **OQ**, so ist **NP** die große, und **OQ** die kleine Axe der zu beschreibenden Ellipse. Nun nehme man die halbe große Axe, und beschreibe damit aus **O** Bogen, welche die große Axe in den Punkten **F** und **G** durchschneiden; diese stellen die beiden Brennpunkte vor. Schlägt man nun in den Brennpunkten zwei Pflöcke ein, und nimmt eine Schnur, welche so lang ist als der Abstand der Brennpunkte und die große Axe zusammen genommen; so kann man, wenn in der gespannten Schnur ein unten zugespitzter Pflock herumgeführt wird, die verlangte Ellipse aufreißen.

§. 90.

4. Eine angenäherte Ellipse durch Zusammensetzung mehrerer Kreisbogen zu beschreiben.

Man

Man schneide an einer Geraden (Fig. 84) drei gleiche Theile ab, nämlich AB = BC = CD, und beschreibe aus B und C die Bogen EAF und GDH; welche sich erweitert in I und K durchschneiden. Durch diese Punkte I und K und durch die Mittelpunkte B und C ziehe man vier Gerade, welche die vorhin beschriebenen Bogen in vier Punkten E, F, G und H schneiden. Beschreibt man nun aus K den Bogen FG, und aus I den Bogen EH, so erhält man die krumme Linie AEHDGF, deren Gestalt einer Ellipse ähnlich ist.

III. Die Parabel.

§. 91.

Erklärungen.

Die Parabel ist jene krumme Linie, in welcher jeder Punkt von einer gegebenen Geraden eben so weit entfernt ist als von einem gegebenen Punkte.

Wenn (Fig. 85) AB die gegebene Gerade, und C der gegebene Punkt ist, so ist die Linie NEDFM eine Parabel, wenn jeder Punkt M von der Geraden AB so weit absteht, als vom Punkte C, wenn nämlich die Senkrechte MP der Geraden MC gleich ist.

Die gegebene Gerade AB heißt die Richtungslinie, der gegebene Punkt C der Brennpunkt der Parabel. Die Gerade MC, welche man von einem Punkte M der Parabel zum Brennpunkte zieht, wird der Leitstrahl jenes Punktes genannt. Der Punkt D der Parabel, welcher in der Mitte zwischen der Richtungslinie und dem Brennpunkte liegt, heißt der Scheitel; und die Gerade DX, welche vom Scheitel durch den Brennpunkt hinaus gezogen wird, die Axe der Parabel.

Die Gerade **EF**, welche im Brennpunkte auf die Axe senkrecht steht, heißt der Parameter der Parabel.

Die Parabel ist nicht, wie der Kreis oder die Ellipse, eine in sich selbst zurückkehrende krumme Linie; ihre beiden Äste gehen immer weiter auseinander, je weiter sie sich vom Scheitel entfernen. Je kleiner der Parameter ist, desto spitziger wird die Parabel am Scheitel seyn.

Damit die Parabel vollkommen bestimmt sei, muß die Lage der Richtungslinie und jene des Brennpunktes bekannt seyn.

Die Parabel findet häufige Anwendung. Eine schief gegen den Horizont oder auch horizontal abgeschossene Kugel beschreibt eine Parabel; ein aus einer Röhre horizontal hervorschießender Wasserstrahl beschreibt einen parabolischen Bogen.

Die Parabel wird selbst in den Künsten und Gewerben mannigfaltig angewendet; auf den Eigenschaften dieser krummen Linie beruhen die Reverberen bei Lampen, der Gebrauch der Hohlspiegel, der Hör- und Sprachröhre u. d. gl.

§. 92.

Aufgaben.

1. Beliebig viele Punkte der Parabel geometrisch zu bestimmen.

Es sei (Fig. 85) **AB** die Richtungslinie, und **C** der Brennpunkt. Man ziehe vom Brennpunkte auf die Richtungslinie eine Senkrechte **CG**, und verlängere diese über den Brennpunkt hinaus. Halbirt man nun den Abstand **CG** im Punkte **D**, so ist **D** der Scheitel und **DX** die Axe der Parabel. Nimmt man in der großen Axe irgend einen Punkt **V** an, errichtet in diesem auf die Axe eine Senkrechte, mißt den Abstand dieser Senkrechten von der Richtungslinie, d. i. die Gerade **VG** und beschreibt damit aus dem Brennpunkte nach oben und unten Bogen, welche jene Senkrechte in den Punkten **M** und **N** durchschneiden; so sind **M** und **N** Punkte der Parabel, weil sie von der Richtungslinie eben so weit abstehen als vom Brennpunkte. Wenn man auf diese Weise sehr viele Senkrechte auf der großen Axe errichtet und sie gehörig durchschneidet, so erhält man beliebig viele Punkte der Parabel. Wenn diese sehr nahe an einander liegen, so gibt ihre Verbindung mit einem freien Zuge den Weg der Parabel an.

§. 93.

2. Die Parabel in einem Zuge zu beschreiben.

Man nehme einen rechtwinkligen Winkelhaken, **ABC** (Fig. 86), und einen Faden von der Länge **AB**, befestige das eine Ende des Fadens im Brennpunkte **D**, und das andere in **B**. Dann läßt man den Winkelhaken mit der Kathete **AC** längs der Richtungslinie **EF** fortgleiten, und führt zugleich den Zeichenstift **M** längs der Kathete **AB** so fort, daß dabei der Faden immer straff gespannt bleibt; der Stift **M** beschreibt dadurch den obern Ast der Parabel. Denn es wird bei jeder Lage des Winkelhakens die Fadenlänge **DM** dem abgewickelten Stücke **AM** des Winkelhakens gleich seyn, d. h. es wird in jeder Lage der Punkt **M** vom Brennpunkte eben so weit abstehen als von der Richtungslinie.

Um

Um eben so den untern Ast der Parabel zu erhalten, wird man den Winkelhaken so umdrehen, daß die Kante AC in die Richtung GF fällt.

Sechstes Hauptstück.

Kopiren der Figuren.

§. 94.

Eine Figur kopiren heißt eine Figur verzeichnen, welche einer andern vorgelegten Figur gleich oder ähnlich ist. Die vorgelegte Figur, nach deren Muster man zeichnet, heißt das Original, die Nachahmung davon die Kopie.

Die Kopie hat mit dem Original entweder gleiche Größe, oder sie erscheint nach einem bestimmten Verhältnisse vergrößert oder verkleinert.

Um eine geradlinige Figur zu kopiren, überträgt man alle Eckpunkte des Originals in gehöriger Entfernung auf das für die Kopie bestimmte Papier, und verbindet sie durch gerade Linien. Hat man eine krummlinige Figur zu kopiren, so überträgt man die vorzüglichsten Brenn- und Krümmungspunkte des Originals auf das Kopirblatt, und zieht die krummen Linien dazwischen nach dem Augenmaße mit freier Hand.

Beim Kopiren der Figuren kommt es also hauptsächlich darauf an, daß man die Eck-, Brech- und Krümmungspunkte des Originals entweder in derselben oder in einer andern verhältnißmäßigen Entfernung auf die Kopie übertragen kann.

I. Kopiren in gleicher Größe.

§. 95.

a. Durch geometrische Bestimmung der Punkte.

Das geometrische Kopiren in gleicher Größe gründet sich auf das Verzeichnen kongruenter Figuren.

1. Bestimmung der Hauptpunkte aus dem Durchschnitte von Kreisbogen.

Man überträgt auf das Kopirblatt zwei Punkte **A** und **B** (Fig. 87) des Originals in einer solchen Lage, daß darauf die ganze Figur eine schickliche Stellung erhalten kann. Um aus den dadurch erhaltenen zwei Punkten a und b einen dritten Punkt c zu bestimmen, nehme man vom Original den Abstand **CA** und beschreibe damit aus dem Punkte a in der Kopie einen Bogen nach der Gegend, wo der Punkt c beiläufig hinfallen soll; dann nehme man vom Original die Entfernung **CB**, und durchschneide mit diesem Halbmesser aus b den früher gezogenen Bogen; der Durchschnittspunkt ist der gesuchte Punkt c. So kann man jeden Punkt der Kopie aus zwei andern bereits erhaltenen Punkten bestimmen, und dadurch die Kopie ausführen. — Damit sich die Fehler, die man allenfalls bei Bestimmung einzelner Punkte begehet, nicht auch auf die neuen Punkte fortpflanzen, soll man alle oder doch die meisten Punkte aus denselben zwei Punkten a und b bestimmen.

§. 96.

2. Bestimmung der Hauptpunkte durch Koordinaten.

Wenn

Wenn man in einer Ebene von einem bestimmten Punkte **A** (Fig. 88) eine Gerade **AX** zieht, und von irgend einem Punkte **M** auf diese Gerade eine Senkrechte **MP** fällt, so heißt das dadurch abgeschnittene Stück **AP** der Geraden die Abscisse, die Senkrechte **MP** selbst aber die Ordinate, und beide zusammen die Koordinaten jenes Punktes **M**. Die Gerade **AX** heißt die Abscissenlinie.

Wenn der Anfangspunkt **A** und die Richtung der Abscissenlinie **AX** gegeben sind, so ist die Lage eines jeden Punktes **M** vollkommen bestimmt, wenn dessen Koordinaten **AP** und **MP** bekannt sind; denn man braucht nur von **A** aus an der Abscissenlinie ein Stück abzuschneiden, welches der Abscisse **AP** gleich ist, dann im Punkte **P** eine Senkrechte zu errichten, und die Ordinate **PM** darauf aufzutragen; der Endpunkt ist der gesuchte Punkt **M**.

Um mittelst der Koordinaten eine Figur **ABCDE FGHI** (Fig. 89) zu kopiren, nehme man im Originale irgend eine Gerade **AE** als Abscissenlinie und **A** als Anfangspunkt derselben an, und fälle von allen Hauptpunkten Senkrechte auf die Abscissenlinie. Sodann ziehe man auf dem Kopirblatte die Abscissenlinie ae in schicklicher Lage, trage darauf in der Ordnung alle Abscissen von a bis k, l, m, n. . . . auf, errichte in diesen Punkten Senkrechte, und trage auf ihnen die entsprechenden Ordinaten von k bis b, von l bis i, von m bis c, . . . auf; so ist dadurch die Lage aller Punkte in der Kopie bestimmt; man braucht sie dann nur gehörig durch Linien zu verbinden.

§. 97.

b. Andere Kopirmethoden.

1. Durch Quadratnetze.

Man

Man überziehe das Original mit einer hinreichenden Menge kleinerer Quadrate. Dieselbe Quadrateintheilung wird auch auf dem zur Kopie bestimmten Papiere so genau als möglich mit feinen Bleilinien ausgeführt. Nun beginnt das Kopiren, indem man von Quadrat zu Quadrat die einzelnen Linien entweder durch bloße Abschätzung oder der größern Genauigkeit wegen mit Hilfe eines Zirkels so auf die Kopie überträgt, wie sie im Original vorliegen. Man fängt gewöhnlich in der linken obern Ecke zu zeichnen an. — Wenn das Original nicht mit Quadraten überzogen werden darf, so bedient man sich eines Rahmens von Messing oder Kartenpapier, worüber dünne Seidenfäden ausgespannt sind, um die Quadrate darzustellen; oder noch besser einer Glastafel, worin die Quadraten eingravirt sind.

2. Durch das Pikiren.

Um eine Figur zu pikiren, legt man das Original über das Kopirblatt, und befestiget beide an einander, nachdem sie vollkommen glatt ausgestrichen wurden. Hierauf durchsticht man die Hauptpunkte des Originals mit einer feinen Nadel, so daß sie sich auf dem Kopirblatte wieder darstellen, wo man sie dann nur gehörig durch Linien zu verbinden braucht. — Dieses Verfahren ist einfach und leicht, und besonders dann anzuwenden, wenn das Original von geringem Werthe ist.

§. 98.

3. Mit der Kopirscheibe.

Sie ist eine in Holz eingefaßte Glastafel, welche die Vorrichtung hat, in jeder Stellung pultförmig aufgestellt zu werden. Auf dieses Glas wird das Original, darüber das Papier gelegt und gehörig befestiget,

und

und die Kopirscheibe gegen das Licht gestellt. Nun zeichnet man die durchschimmernden Linien nach.

4. Durch ein Transparent-Papier.

Man befestiget ein solches Papier auf das Original, zeichnet die Figur durch, und überträgt diese Zeichnung durch das Pikiren, oder mittelst des Durchpausens auf das Kopirblatt. Das Durchpausen besteht darin, daß man die Rückseite des Transparent-Papieres mit geschabenem Blei bestreicht, und dieses mit einem Papierstücke gleichmäßig darauf verreibt, dann diese Seite des Transparent-Papieres auf das Kopirblatt legt, und die Figur, ohne sie durchzuschneiden, mit einem gespitzten Stifte überzieht, wodurch sich dieselbe auf dem Kopirblatte in Blei gezeichnet abdrücken wird.

II. Kopiren nach einem vergrößerten oder verkleinerten Maßstabe.

§. 99.

Das Kopiren nach einem geänderten Maßstabe beruhet auf der Verzeichnung ähnlicher Figuren. Es kann, so wie das Kopiren in gleicher Größe, entweder durch den Durchschnitt von Kreisbogen, oder mit Hilfe der Koordinaten ausgeführt werden; nur ist zu bemerken, daß im ersten Falle die Entfernungen des Originals, mit denen die Kreisbogen beschrieben werden, im zweiten die Abscissen und Ordinaten früher nach dem gegebenen Verhältnisse vergrößert oder verkleinert werden müssen, und dann erst mit diesen verhältnißmäßig veränderten Linien die Kopie auszuführen ist.

Auch

Auch beim Kopiren nach einem gegebenen Verhältnisse können die Quadratnetze mit Vortheil angewendet werden; nur müssen die Quadratseiten der Kopie verhältnißmäßig größer oder kleiner seyn, als die Quadratseiten des Originals.

Siebentes Hauptstück.

Flächeninhalt der Figuren.

§. 100.

Erklärungen.

Die Größe einer Figur, oder der Raum, den ihre Grenzlinien einschließen, heißt ihr Flächenraum oder Flächeninhalt.

Um den Flächeninhalt einer Figur zu bestimmen, muß man irgend eine bekannte Fläche als Maß oder Einheit annehmen, und untersuchen, wie oft diese als Einheit angenommene Fläche in der gegebenen Figur enthalten ist.

Als Einheit des Flächenmaßes nimmt man ein Quadrat an, dessen jede Seite der Einheit des Linienmaßes gleich ist, wovon sodann das Quadrat den Namen erhält. Ein Quadrat, dessen jede Seite eine Klafter beträgt, heißt nämlich eine Quadratklafter (□°); ist die Seite des Quadrates ein Fuß, ein Zoll, ... eine Meile, so heißt es ein Quadratfuß (□'), ein Quadratzoll (□"), ... eine Quadratmeile (□ Meile).

Um nun eine Fläche, die z. B. auch Quadratklafter enthält, auszumessen, sollte man eigentlich so verfahren. Man nimmt eine Quadratklafter, und trägt sie auf der Fläche auf, so oft es angeht; gesetzt, dieses lasse sich 105mal bewerkstelligen, und es bleibe ein Rest, welcher kleiner ist als eine Quadratklafter; die Fläche enthält also erstlich 105 □°. Auf dem übriggebliebenen Theile trägt man einen Quadratfuß auf; dieser sei darin 17mal enthalten, und es bleibe noch ein kleiner Rest; die bisher ausgemessene Fläche beträgt also schon 105 □° 17 □'. Den Rest wird man mit Quadratzoll ausmessen; man trägt also einen Quadratzoll auf, und er sei genau 78mal darin enthalten, ohne daß ein Rest übrig bleibt. Der Inhalt der ganzen gemessenen Fläche ist daher 105 □°, 17 □', 78 □''.

Durch die Bestimmung des Flächeninhaltes findet man also, wie viel Quadratklafter, Quadratfuß, Quadratzoll, . . . und bei Ausmessung sehr großer Flächen, z. B. ganzer Länder, wie viel Quadratmeilen die Fläche enthält.

Das früher angegebene Verfahren, eine Fläche zu messen, wäre, obwol es unmittelbar aus dem Begriffe des Messens hergeleitet ist, zu schwierig und oft gar nicht ausführbar; daher soll in dem Folgenden gezeigt werden, wie der Flächeninhalt ohne wirkliches Auftragen der Flächenmaße, durch bloßes Messen derjenigen Linien, von denen die Größe der Figur abhängt, bestimmt werden kann.

§. 101.

Flächeninhalt eines Rechteckes.

Es sei (Fig. 90) ABCD ein Rechteck, dessen Grundlinie AB = 5', und die Höhe AD = 3' ist. —

Um

Um den Flächenraum dieses Rechteckes zu finden, sollte man, dem Begriffe des Messens zu Folge, einen Quadratfuß nehmen, und bestimmen, wie oft derselbe in dem Rechtecke enthalten ist. Längs der Grundlinie **AB** läßt sich ein Quadratfuß 5mal umlegen, diese Reihe von 5 Quadratfuß gehört zur Höhe **AF**; zur Höhe **FG** gehört eine zweite Reihe, in welcher ein Quadratfuß auch 5mal vorkommt; eine eben solche Reihe von 5 Quadratfuß gehört zur Höhe **GD**. Man erhält also 3 Reihen von Quadraten, in jeder Reihe kommen 5 Quadratfuß vor; man hat daher zusammen 3mal 5 = 15 □′. — Es folgt aus der bloßen Anschauung, daß, wie groß auch die Grundlinie und die Höhe seyn mögen, doch immer so viele Reihen von Quadratfuß vorhanden sind, als die Höhe Fuß enthält, und daß in einer Reihe so viele Quadratfuß vorkommen, als die Grundlinie Fuß enthält; daß man also in jedem Falle die ganze Anzahl Quadratfuß findet, wenn man die beiden Zahlen, welche die Grundlinie und die Höhe des Rechteckes in Fuß angeben, mit einander multiplizirt.

Beim Ausmessen eines Rechteckes braucht man daher nicht erst wirklich das Flächenmaß selbst darauf aufzutragen; man darf nur mit dem Linienmaße die Grundlinie und die Höhe messen, und die dabei erhaltenen Zahlen mit einander multiplizirent. Man hat also den Satz:

Der Flächeninhalt eines Rechteckes wird gefunden, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplizirt.

Die Benennung des Flächeninhaltes hängt von der Benennung der Seiten ab; sind z. B. die Seiten in

Fuß ausgedrückt, so wird die Zahl, welche man als Flächeninhalt bekommt, Quadratfuß anzeigen; sind die Seiten in Zoll gegeben, so erhält man im Flächeninhalte Quadratzoll.

§. 102.

Da jedes Quadrat als ein Rechteck betrachtet werden kann, worin die Grundlinie gleich der Höhe ist, so hat man folgenden Satz:

Der Flächeninhalt eines Quadrates wird gefunden, wenn man eine Seite mit sich selbst multiplizirt.

Ist 1° die Seite, so ist $1 \times 1 = 1\square^\circ$ die Fläche,
″ 2° ″ ″ ″ ″ $2 \times 2 = 4\square^\circ$ ″ ″
″ 3° ″ ″ ″ ″ $3 \times 3 = 9\square^\circ$ ″ ″
u. s. w.

Daher kommt auch im Rechnen die Redensart: eine Zahl mit sich selbst multiplizieren, heißt diese Zahl zum Quadrate erheben.

Aus dem vorhergehenden Satze über den Flächeninhalt eines Quadrates folgt:

$$\left.\begin{array}{l} 1\square^\circ = 6 \times 6 = 36\square', \\ 1\square' = 12 \times 12 = 144\square'', \\ 1\square'' = 12 \times 12 = 144\square''' \end{array}\right\}\text{für das Duodezimalmaß,}$$

und

$$\left.\begin{array}{l} 1\square' = 10 \times 10 = 100\square'', \\ 1\square'' = 10 \times 10 = 100\square''', \end{array}\right\}\text{für das Dezimalmaß.}$$

$$1\square\text{ Meile} = 4000 \times 4000 = 16000000\square^\circ.$$

Eine Fläche, welche $1600\square^\circ$ enthält, heißt ein Joch; ein Joch ist also gleich einem Quadrate, dessen jede Seite 40° beträgt.

Wenn

Wenn der Flächeninhalt eines Quadrates bekannt ist, und man eine Seite finden will, so braucht man nur eine Zahl zu suchen, welche mit sich selbst multiplizirt, den gegebenen Flächeninhalt gibt, d. h. man darf nur aus dem bekannten Flächeninhalte die Quadratwurzel ausziehen.

§. 103.

Beispiele und Aufgaben.

1. Wie groß ist die Fläche eines Rechteckes, dessen Grundlinie 18°, und die Höhe 12° ist?

$$18 \times 12 = 216\square°.$$

2. Die Länge eines Rechteckes ist 4′ 3″, die Breite 1′ 6″; wie groß ist der Flächenraum?

Länge = 4′ 3″ = 51″
Breite = 1′ 6″ = 18″

$$\begin{array}{r|r|l} & 51 \times 18 & \\ & 408 & \\ 144 & 918 & 6 \\ & 54 & \end{array}$$

Also ist der Flächenraum = 6 □′ 54 □″.

3. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Quadrates, dessen jede Seite 3° 5′ 6″ beträgt?

$$\begin{array}{r} 3° \; 5' \; 6'' \\ \hline 23' \\ 46 \\ \hline 282'' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 282 \times 282 \\ \hline 564 \\ 2256 \\ 564 \\ \hline 79524\square'' \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 36 \\ 144 \mid 79524\,\square'' \mid 552\,\square' \mid 15\,\square^{0} \\ \quad\quad\quad 752 \quad\quad\quad\quad 192 \\ \quad\quad\quad 324 \quad\quad\quad\quad 12\,\square' \\ \quad\quad\quad\quad 36\,\square'' \end{array}$$

Flächeninhalt $= 15\,\square^{0}\ 12\,\square'\ 36\,\square''$.

4. Der Flächenraum eines Quadrates beträgt $20\,\square^{0}\ 27\,\square'\ 16\,\square''$; wie groß ist eine Seite?

$$\begin{array}{ll} 20\,\square^{0}\ 27\,\square'\ 16\,\square''. & \sqrt{10|75|84} = 328 \\ 747\,\square' & \quad 175 : 62 \\ 2988 & \quad 5184 : 648 \\ \ \ 2988 & \quad '''''' \\ 107584\,\square'' & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \quad\quad\quad 6 \\ 12 \mid 328'' \mid 27' \mid 4^{0} \\ \quad\quad 88 \quad\ \ 3' \\ \quad\quad\ 4'' \end{array}$$

Eine Seite beträgt also $4^{0}\ 3'\ 4''$.

5. Jemand kauft einen Bauplatz von der Form eines Rechteckes, $14^{0}\ 4'$ lang und $9^{0}\ 2'$ breit, und bezahlt die Quadratklafter zu $5\frac{1}{2}$ fl.; wie viel kostet ihn der Grund?

Flächenraum $= 136, 887\,\square^{0}$;
Betrag zu $5\frac{1}{2}$ fl. pr. $\square^{0}$ . . . fl. 752 „ 53.

6. Ein Acker ist 58^{0} lang und $5^{0}\ 3'$ breit; wie viel Weizen wird zur Aussaat erfordert, wenn man auf ein Joch 3 Metzen Weizen aussäet?

Ackerfläche $= 319\,\square^{0}$.
Fläche eines Joches $= 1600\,\square^{0}$.
$1600 : 319 = 3 : x$,
woraus x gleich nahe $\frac{5}{8}$ Metzen.

7. Ein Saal ist $9^0\ 4'$ lang und $5^0\ 5'$ breit; wie viele Breter braucht man, um den Fußboden dieses Saales zu dielen, wenn jedes Bret $1^0\ 5'$ lang und $11''$ breit ist?

Fläche des Fußbodens $= 2030\,\square' = 292320\,\square''$.
Fläche eines Bretes . . . . . $= 1452\,\square''$.
$292320 : 1452 = 201\frac{468}{1452}$,
also nahe 202 Breter.

8. Jemand besitzt einen Garten in Form eines Rechteckes, welcher 340^0 lang und 210^0 breit ist. Er will denselben mit einer $2\frac{1}{2}'$ breiten Mauer umfassen; wie viel Raum wird diese Mauer wegnehmen?

Die Seiten des Rechteckes innerhalb der Mauern sind um 2mal $2\frac{1}{2}'$ d. i. um $5'$ kleiner als jene des ganzen Rechteckes; man hat also

Fläche des ganzen Rechteckes $= 340 \times 210 = 71400\,\square^0$,
„ „ innern „ $= 339\frac{1}{6} \times 209\frac{1}{6} = 70942\frac{13}{36}\,\square^0$,
also Grundfläche der Mauer $= 457\frac{23}{36}\,\square^0$.

§. 104.

Flächeninhalt eines schiefwinkligen Parallelogramms.

Jedes schiefe Parallelogramm ABDC (Fig. 91) kann in ein Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe verwandelt werden, indem man nur auf einer Seite das rechtwinklige Dreieck BDE abschneidet, und es auf die entgegengesetzte Seite an die Stelle von ACF überträgt. Um nun den Flächeninhalt des Rechteckes zu finden, muß man die Grundlinie mit der Höhe multipliziren; daher ist auch der Flächeninhalt eines

schie-

schiefen Parallelogramms gleich der Grundlinie multiplizirt mit der Höhe.

Ist z. B. die Grundlinie $AB = 10^{0}$, die Höhe $CG = 4^{0}$, so ist $10 \times 4 = 40 \square^{0}$ der Flächeninhalt des Parallelogramms.

§. 105.

Flächeninhalt eines Dreieckes.

Jedes Dreieck ABC (Fig. 91) kann als die Hälfte eines Parallelogramms dargestellt werden, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat; man braucht nur durch zwei Scheitelpunkte B und C mit den gegenüberliegenden Seiten parallele Linien zu ziehen. Um nun den Flächeninhalt des Parallelogramms zu erhalten, muß man die Grundlinie mit der Höhe multipliziren; beim Dreiecke wird man daher auch die Grundlinie mit der Höhe multipliziren, aber von diesem Produkte nur die Hälfte nehmen.

Der Flächeninhalt eines Dreieckes wird also gefunden, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplizirt, und das Produkt durch 2 dividirt.

Es ist gleichviel, ob man die ganze Grundlinie mit der ganzen Höhe multiplizirt, und von diesem Produkte die Hälfte nimmt; oder ob man sogleich von der Grundlinie die Hälfte nimmt, und die halbe Grundlinie mit der ganzen Höhe multiplizirt; oder ob man die ganze Grundlinie mit der halben Höhe multiplizirt.

In einem rechtwinkligen Dreiecke wird gewöhnlich eine Kathete als Grundlinie angenommen, wo wo sodann die andere Kathete die Höhe vorstellt. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes ist daher gleich dem halben Produkte der beiden Katheten.

Beispiele.

1. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Dreieckes, worin die Grundlinie 10′ und die Höhe 6′ beträgt?

Grundl. 10′ oder halbe Grundl. 5′ oder Grundl. 10′
Höhe 6′ | Höhe 6′ | halbe Höhe 3′

$$\begin{array}{r} 60 \\ \hline : 2 \\ 30\square' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 30\square' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 30\square' \end{array}$$

2. Man berechne die Fläche eines Dreieckes, dessen Grundlinie 2° 4′, und die Höhe 1° 3′ ist.

Grundl. $2^{\circ}\ 4' = 16'$ $\qquad 8 \times 9$
Höhe $1^{\circ}\ 3' = \ \ 9'$ $\qquad 72\square' = 2\square^{\circ}$.

3. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die eine Kathete 29° 3′, die andere 18° 4′; wie groß ist der Flächenraum?

$$\left.\begin{array}{l} 29^{\circ}\ 3' = 177' \\ 18^{\circ}\ 4' = 112' \end{array}\right\} \text{ Katheten } \begin{array}{l} 177 \times 56 \\ \hline 1239 \\ 9912\square' : 36 = 275\square^{\circ} \\ 271 \\ \ \ 192 \\ \ \ \ 12\square' \end{array}$$

Flächeninhalt $= 275\square^{\circ}\ 12\square'$

§. 106.

§. 106.

Flächeninhalt eines Trapezes.

Um den Flächenraum des Trapezes ABCD (Fig. 92) zu erhalten, braucht man es nur durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zu zerlegen, dieselben zu berechnen und zu addiren. Nimmt man in diesen Dreiecken die parallelen Seiten des Trapezes als Grundlinien an, so haben sie beide dieselbe Höhe wie das Trapez. Man findet nun die Fläche eines Dreieckes, wenn man die Grundlinie mit der halben Höhe multiplizirt; man wird also jede der beiden Grundlinien d. i. jede der parallelen Seiten mit der halben gemeinschaftlichen Höhe multiplizíren, und diese Produkte addiren; oder, was kürzer ist, man wird sogleich die beiden parallelen Seiten addiren, und ihre Summe mit der halben Höhe multiplizíren.

Der Flächeninhalt eines Trapezes wird daher gefunden, wenn man die beiden parallelen Seiten addirt, und ihre Summe mit der halben Höhe multiplizirt.

Man kann übrigens auch von der Summe der parallelen Seiten die Hälfte nehmen, und diese halbe Summe mit der ganzen Höhe multiplizíren; oder man kann die ganze Summe der parallelen Seiten mit der ganzen Höhe multiplizíren, und erst vom Produkte die Hälfte nehmen.

Beispiele und Aufgaben.

1. In einem Trapeze betragen die parallelen Seiten 36^0 und 27^0, die Höhe ist 18^0; wie groß ist der Flächeninhalt?

Sum-

Summe der parall. Seiten 63°
halbe Höhe 9°
Fläche $567\square^{\circ}$

2. Ein Walmdach soll mit Blech bedeckt werden. Die obere Länge des Daches beträgt $15^{\circ}\,4'$, die untere $17^{\circ}\,2'$, die Breite $5^{\circ}\,2'$, die Höhe einer Dachfläche $5^{\circ}\,2'$. Wie viel Blechtafeln braucht man zur Deckung dieses Daches, wenn eine solche Tafel $1'$ lang und $10''$ breit ist; und wie hoch kommt das ganze Blech zu stehen, wenn eine Blechtafel 5 Kr. kostet?

Zwei Dachflächen sind Trapeze, die beiden andern Dreiecke.

$$\text{Ein Trapez} = \frac{15^{\circ}\,4' + 17^{\circ}\,2'}{2} \times 5^{\circ}\,2' = 3168\square'$$

$$\text{Ein Dreieck} = \frac{5^{\circ}\,3' \times 5^{\circ}\,2'}{2} = 528\square'$$

Beide Trapeze = $6336\square'$
Beide Dreiecke = 1056 „
Ganze Dachfl. = $7392\square' = 1064448\square''$
Eine Blechtafel = $12 \times 10 = 120\square''$
1064448 : 120 = 8870,4 Tafeln.
8870,4 Blechtafeln zu 5 Kr. = fl. 739 „ 12.

§. 107.

Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes.

Die Fläche eines regulären Vieleckes ABCDEF (Fig. 74) wird man sicher finden, wenn man von der Mitte zu allen Endpunkten gerade Linien zieht, und die dadurch entstehenden Dreiecke berechnet; da aber diese Dreiecke kongruent sind, so braucht man nur eines zu bestimmen, und die gefundene Fläche mit der

Anzahl der Dreiecke zu multiplizieren. Der Flächeninhalt eines Dreieckes AOB ist gleich der Grundlinie AB multiplizirt mit der halben Höhe OH; daher die Fläche aller 6 Dreiecke gleich 6mal AB multiplizirt mit der halben Höhe OH; 6mal AB ist der Umfang des Vieleckes, OH ist der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite des Vieleckes. Daher gilt der Satz:

Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes wird gefunden, wenn man den Umfang desselben mit dem halben Abstande des Mittelpunktes von einer Seite multiplizirt.

Um den Mittelpunkt eines regulären Vieleckes zu erhalten, braucht man nur zwei Umfangswinkel zu halbiren; der Durchschnitt der Halbirungslinien ist die gesuchte Mitte. — Warum?

Beispiel.

In einem regelmäßigen Zehnecke beträgt eine Seite 4° 2′ 6″, und der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite 6° 2′ 6″; wie groß ist der Flächeninhalt?

Seite 4° 2′ 6″ = 318″   Abstand 6° 2′ 6″ = 462″

Umfang = 3180″   halber Abstand = 231″

$$\begin{array}{r} 3180 \times 231 \\ 954 \\ 636 \\ \hline 734580 \end{array}$$

Inhalt 141 □° 25 □′ 36 □″

§. 108.

Flächeninhalt irgend einer geradlinigen Figur.

Den Flächeninhalt einer geradlinigen Figur kann man vorzüglich auf folgende Arten bestimmen:

1.

1. Man zerlege die Figur durch Diagonalen in lauter Dreiecke, berechne jedes dieser Dreiecke, und addire alle Dreiecksflächen.

Beispiel.

Es sei die Fläche des Vieleckes **ABCDEFG** (Fig. 93) auszurechnen. Man zerlege das Vieleck in lauter Dreiecke; und es sei $BG = 39^\circ$, $BE = 42{,}5^\circ$, $CD = 31{,}5^\circ$, $GE = 39{,}5^\circ$, $Aa = 11{,}6^\circ$, $Cc = 19{,}7^\circ$, $Ee = 12{,}1^\circ$, $Bb = 35{,}4^\circ$, $Ff = 16{,}4^\circ$.

Man hat nun

$$\text{Dreieck } ABG = \frac{BG \times Aa}{2} = \frac{39 \times 11{,}6}{2} = 226{,}2 \;\square^\circ$$

$$\text{〃 } BEG = \frac{GE \times Bb}{2} = \frac{39{,}5 \times 35{,}4}{2} = 699{,}15 \;\square^\circ$$

$$\text{〃 } BCE = \frac{BE \times Cc}{2} = \frac{42{,}5 \times 19{,}7}{2} = 418{,}62 \;\square^\circ$$

$$\text{〃 } CDE = \frac{CD \times Ee}{2} = \frac{31{,}5 \times 12{,}1}{2} = 190{,}58 \;\square^\circ$$

$$\text{〃 } EFG = \frac{GE \times Ff}{2} = \frac{39{,}5 \times 16{,}4}{2} = 323{,}9 \;\square^\circ$$

$$\text{Vieleck } ABCDEFG \;\; 1858{,}45 \;\square^\circ$$

2. Man ziehe durch zwei Endpunkte eine Gerade als Abscissenlinie, und fälle darauf von allen übrigen Eckpunkten Senkrechte, so zerfällt die Figur in lauter rechtwinklige Dreiecke und Trapeze, welche einzeln berechnet und addirt werden. Dabei werden die Ordinaten als Grundlinien der Dreiecke oder als parallele Seiten der Trapeze, die Abscissentheile aber als Höhen betrachtet.

Bei-

Beispiel.

Es sei (Fig. 94) Bb = 60,5°, Cc = 57,2°, Dd = 46°, Ff = 52,3°, Gg = 12,1°, Hh = 17,1°, Ii = 63,4°; ferner Ai = 9,1°, ih = 29,2°, hb = 22,1°, bg = 3,1°, gc = 19,2°, cf = 15,4°, fd = 16,8°, dE = 34,8°.

Die Rechnung kann in folgender Tabelle zusammengestellt werden.

Bestandtheile der Figur.		Faktoren.		Produkte.	Flächenräume.
		Grundlinien oder Summen der Parallelseiten.	Höhen.		
Dreieck	ABb	Bb = 60,5°	Ab = 60,4°	3654,20	1827,10 □°
Trapez	BbcC	Bb + Cc = 117,7°	bc = 22,3°	2624,71	1312,35 "
"	CcdD	Cc + Dd = 103,2°	cd = 32,2°	3323,04	1661,52 "
Dreieck	DdE	Dd = 46°	dE = 34,8°	1600,80	800,40 "
"	FfE	Ff = 52,3°	Ef = 51,6°	2698,68	1349,34 "
Trapez	FfgG	Ff + Gg = 64,4°	fg = 34,6°	2228,24	1114,12 "
"	GghH	Gg + Hh = 29,2°	gh = 25,2°	735,84	367,92 "
"	HhIi	Hh + Ii = 80,5°	hi = 29,2°	2350,60	1175,30 "
Dreieck	IiA	Ii = 63,4°	Ai = 9,1°	576,94	288,47 "
			Figur ABC . . . HI		9896,52 □°.

§. 109.

Flächeninhalt eines Kreises.

Denkt man sich in einem Kreise unzählig viele Halbmesser gezogen, so zerfällt die Kreisfläche in unzählig viele Kreisausschnitte; diese kann man als Dreiecke ansehen, deren gemeinschaftliche Höhe der Halbmesser ist, und deren Grundlinien zusammen den Umfang geben. Um also die Fläche des Kreises zu erhalten, wird man alle Dreiecksflächen berechnen und addiren; den Flächeninhalt eines Dreieckes findet man, wenn man die Grundlinie mit der halben Höhe multiplizirt: man wird also ihre Grundlinien addiren, und ihre Summe d. i. den Kreisumfang mit der halben gemeinschaftlichen Höhe, d. i. mit dem halben Halbmesser multiplizîren. Der Flächeninhalt eines Kreises ist also gleich dem Umfange multiplizirt mit dem halben Halbmesser.

Dieser Satz läßt sich noch auf eine andere Art darstellen. — Der Umfang eines Kreises ist nämlich das Produkt aus dem doppelten Halbmesser und aus 3,1416; der Flächeninhalt ist daher das Produkt aus drei Faktoren: aus dem doppelten Halbmesser, dem halben Halbmesser und 3,1416; allein der doppelte Halbmesser mit dem halben Halbmesser multiplizirt, gibt das Quadrat des Halbmessers. Man kann also auch sagen: Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem Quadrate des Halbmessers multiplizirt mit 3,1416. Daraus folgt:

Die Flächen zweier Kreise verhalten sich so zu einander, wie die Quadrate ihrer Halb-

Halbmesser, oder, was gleichviel ist, wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

Wenn umgekehrt der Flächeninhalt eines Kreises bekannt ist, und man die Länge des Halbmessers finden will, so braucht man nur den Flächeninhalt durch 3,1416 zu dividiren; der Quotient stellt das Quadrat des Halbmessers vor; zieht man daraus die Quadratwurzel, so hat man den Halbmesser selbst.

Weil die ganze Kreisfläche gleich ist dem ganzen Umfange multiplizirt mit dem halben Halbmesser, so ist offenbar der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes gleich der Länge des dazu gehörigen Bogens multiplizirt mit dem halben Halbmesser.

Den Flächeninhalt eines Kreisringes findet man, wenn man die Flächen der beiden Kreise, deren Unterschied der Ring ist, berechnet und von einander subtrahirt. — Man kann übrigens den Kreisring auch in sehr viele Vierecke zerlegt denken, die man als Trapeze berechnet, und addirt, woraus dann folgt: Der Flächeninhalt eines Kreisringes ist gleich der Summe der beiden Peripherien multiplizirt mit ihrem halben Abstande d. i. mit dem halben Unterschiede der beiden Halbmesser.

Beispiele.

1. Der Halbmesser eines Kreises ist 10″; wie groß ist der Flächenraum?

Halbm = 10″
Durchm. = 20″
Umfang = 62,832″
halb Halbm. = 5″
Flächeninh. = 314,160 □″.

10 × 10
100 × 3,1416
314,16 □″.

2.

2. Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, dessen Flächeninhalt 5 □′ 56 □″ beträgt?

5□′ 56□″ = 776□″ 776 : 3,,1,4 = 247,14
1480
2240
42
$\sqrt{2|47,14}$ = 15,7″ = 1′3,7″. 11
14,7 : 25
22 1,4 : 307
65

3. Ein kreisrunder Saal hat 4° 4′ im Durchmesser, wie groß ist der Flächeninhalt?

Durchm. = 4° 4′ = 28′ 14 × 14 = 196
Halbm. = 14′ 196 × 3,14 = 615,44
615,44 □′ = 17 □° 3,44 □′.

4. Ein Garten ist 38° 2′ lang, 21° 3′ breit; in der Mitte desselben befindet sich ein kreisrunder Teich, welcher sammt der ihn einschließenden Mauer 5° 4′ im Durchmesser hat; wie groß ist die Landfläche des Gartens?

Länge des Gartens = 38° 2′ = 230′
Breite „ „ = 21° 3′ = 129′
Fläche des Gartens = 29670 □′
Durchm. 5° 4′ = 34′
Halbm. des Teiches = 17′
17 × 17 = 289
289 × 3,14 = 907,46
Fläche des Teiches = 907,46 □′
Landfläche = 28762,54 □′
= 798 □° 34,54 □′

5. Ein kreisrunder Rasen von 42′ Durchmesser

ist mit einem 8′ breiten Wege umzogen; wie viel Flächenraum nimmt dieser Weg ein?

Fläche des Rasens und Weges $= 2640{,}74\ \square'$
Fläche des Rasens allein $= 1384{,}74\ \square'$
also Fläche des Weges $= 1256\ \square'$
$= 34\square^0 32\square'$.

oder:

äußerer Umfang des Weges $= 182{,}12'$
innerer " " " $= 131{,}88'$
Summe $= 314'$
halber Abstand $= 4'$
Fläche des Weges $= 1256\ \square'$

§. 110.

Flächeninhalt einer Ellipse.

Man hat gefunden, daß eine Ellipse eben so viel Raum einschließt, als ein Kreis, dessen Halbmesser die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden halben Axen der Ellipse ist. Das Quadrat des Halbmessers dieses Kreises ist also gleich dem Produkte aus den beiden Halbaxen der Ellipse. Da nun der Flächeninhalt eines Kreises gleich ist dem Quadrate des Halbmessers multiplizirt mit 3,1416, so folgt:

Der Flächeninhalt einer Ellipse wird gefunden, wenn man das Produkt der beiden halben Axen mit 3,1416 multiplizirt.

Beispiel.

Wie groß ist der Flächeninhalt einer Ellipse, deren Axen 11′ und 7′ sind?

Produkt der Halbaxen $= \frac{11}{2} \times \frac{7}{2} = 19\frac{1}{4}$

Flächeninhalt $= 19\frac{1}{4} \times 3{,}1416 = 60{,}47\ \square'$.

§. 111.

§. 111.

Flächeninhalt irgend einer krummlinigen Figur.

Um den Flächeninhalt jeder beliebigen krummlinigen Figur zu finden, ziehe man nach ihrer größten Länge eine Gerade, und fälle darauf von allen Brech- und Krümmungspunkten Senkrechte; dadurch zerfällt die gegebene Figur in eine Menge kleiner Figuren, die man als rechtwinklige Dreiecke und Trapeze betrachten kann, dann als solche berechnet und addirt.

§. 112.

Pythagoräischer Lehrsatz.

Zum Schlusse dieses Abschnittes wollen wir noch einen besonders merkwürdigen Satz entwickeln.

Verzeichnet man einen rechten Winkel ABC (Fig. 95), trägt dann auf dem einen Schenkel 3, auf dem andern 4 gleiche Theile z. B. Fuß auf, und verbindet die Endpunkte durch eine Gerade AC, so findet man, daß die Hypothenuse des dadurch entstehenden Dreieckes genau 5 Fuß enthalten wird. Das Quadrat von 3 ist 9, das Quadrat von 4 ist 16, und die Summe der Quadrate 25; das Quadrat der Hypothenuse 5 ist auch 25. Es ist also das Quadrat der Hypothenuse so groß als die Summe aus den Quadraten der beiden Katheten.

Dieses läßt sich auch geometrisch ableiten. Beschreibt man nämlich sowohl über der Hypothenuse als über den Katheten Quadrate, und zerlegt jedes derselben in Quadratfuß; so sieht man, daß in dem Quadrate der Hypothenuse eben so viele Quadratfuß vorkommen, als in den Quadraten der beiden Katheten zusammen genommen.

Durch diese Betrachtungen wird man auf den Satz geführt:

In einem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypothenuse gleich der Summe aus den Quadraten der beiden Katheten. Dieser Lehrsatz heißt nach seinem Erfinder Pythagoras der Pythagoräische.

Um zu zeigen, daß dieser Satz für irgend ein rechtwinkliges Dreieck ABC (Fig. 96) giltig ist, errichtet man über der Hypothenuse AC das Quadrat ACDE, verlängere BC, und fälle darauf die Senkrechten DF und EG; eben so fälle man auf EG die Senkrechten AH und DI. Die rechtwinkligen Dreiecke ABC, CDF, DEI und EAH, die wir kürzer durch m, n, p und q bezeichnen wollen, haben nun eine Seite, nämlich die Hypothenuse, gleich; ferner haben sie außer dem rechten Winkel auch die spitzigen Winkel wechselseitig gleich, weil ihre Schenkel beziehungsweise entweder parallel oder auf einander senkrecht sind; jene vier Dreiecke sind demnach kongruent. Aus der Kongruenz dieser Dreiecke folgt, daß AH = AB, daß also ABGH das Quadrat über der Kathete AB ist; ferner, daß DF = DI = BC, daß also DFGJ das Quadrat der Kathete BC ist. — Betrachtet man nun die Figur ABFDIH, so sieht man, daß sie die Quadrate der beiden Katheten enthält; man erhält aber offenbar denselben Flächenraum, wenn man von dieser Figur die zwei Dreiecke m und n unten wegnimmt, und sie oben an die Stelle der Dreiecke p und q anlegt; die Figur ACDE, die dadurch entstehet, ist das Quadrat der Hypothenuse AC.

Da

Da nun diese neu entstandene Figur mit der frühern gleichen Flächenraum enthält; so ist wirklich das Quadrat der Hypothenuse gleich der Summe aus den Quadraten der beiden Katheten.

Dieser Beweis kann recht anschaulich gemacht werden, wenn man eine starke Pappe mit Papier überzieht, darauf die ganze vorhergehende Figur verzeichnet, und den Theil **ABFDIH** herausschneidet; dann das Quadrat **ABGH** mit irgend einer, und das Quadrat **DFGI** mit einer andern Farbe anstreicht, und endlich die Figur nach den Linien **AC** und **CD** durchschneidet, so daß die Dreiecke **m** und **n** unten weggenommen und oben an die Stelle der Dreiecke **q** und **p** angelegt werden können.

§. 113.

Mit Hilfe des Pythagoräischen Lehrsatzes kann man, wenn zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes bekannt sind, durch eine leichte Rechnung die dritte Seite finden.

1. Wenn die beiden Katheten bekannt sind, so erhebt man jede Kathete zum Quadrate, addirt die Quadrate, diese Summe gibt das Quadrat der Hypothenuse; um daher die Hypothenuse selbst zu bekommen, braucht man nur aus jener Summe die Quadratwurzel auszuziehen.

Es sei z. B. die eine Kathete 36″, die andere 160″; wie groß ist die Hypothenuse?

36	160	1296
36	160	25600
216	96	$\sqrt{2\vert 68\vert 96}$ = 164″ Hypoth.
108	16	16‚8 :26
1296	25600	129‚6 :324
		= = = =

2.

2. Wenn die Hypothenuse und eine Kathete bekannt sind, so erhebe man beide zum Quadrate, ziehe vom Quadrate der Hypothenuse das Quadrat der bekannten Kathete ab, der Rest gibt das Quadrat der andern noch unbekannten Kathete; will man diese Kathete selbst finden, so darf man nur aus jenem Reste die Quadratwurzel ausziehen.

Es sei z. B. die Hypothenuse 2° 5′ 4″, eine Kathete 1° 8″; wie groß ist die andere Kathete?

Hyp. $= 2^0\,5'\,4'' = 208''$ $\quad$ 208×208 $\quad$ 80×80

Kath. $= 1^0\quad 8'' = 80''$ $\quad$ 1664 $\quad$ 6400

416

43264

$$\begin{array}{l} 43264 \\ \underline{\ \ 6400} \\ \sqrt{3,6\,8|64} = 192'' = 2^0\,4' \text{ die zweite Kathete.} \\ 2\,6,8 \quad :29 \\ \quad 76,4 \quad :382 \end{array}$$

§. 114.

Aufgaben.

1. Es soll eine Leiter gemacht werden, welche, wenn sie unten 7′ weit von dem Hause an dasselbe angelegt wird, daran 16′ hoch reicht; wie lang wird die Leiter seyn müssen?

Die Leiter kann als Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes angesehen werden, der Abstand vom Hause 7′ bildet die eine Kathete, die Höhe 16′ die andere.

$$\begin{array}{l} 7^2 = 49 \\ 16^2 = 256 \\ \sqrt{305} = 17,46' \text{ die Länge der Leiter.} \end{array}$$

2. Bei einem gewöhnlichen Hausdache ist der Dachstuhl 41′ breit; wie lang müssen die Dachsparren werden, wenn der Dachstuhl 18′ hoch werden soll?

Die Länge eines Dachsparrens bildet die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten die Höhe und die halbe Breite des Dachstuhles sind.

Höhe $= 18'$ $\quad 18^2 = 324$
halbe Br. $= 20{,}5'$ $\quad 20{,}5^2 = 420{,}25$
Länge des Sparrens $= \sqrt{744{,}25} = 27{,}28'$.

3. In einem gleichseitigen Dreiecke beträgt jede Seite 8′; wie groß ist die Höhe?

Die Höhe eines gleichseitigen Dreieckes bildet die Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes, worin als Hypothenuse die ganze Seite, und als zweite Kathete die halbe Seite des gleichseitigen Dreieckes vorkommt.

$8^2 = 64$
$4^2 = 16$
$\sqrt{48} = 6{,}93'$ Höhe des gleichseit. Dreieckes.

4. Wie groß ist der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Seite $4^0\ 3'\ 6''$ beträgt?

Seite $= 4^0 3' 6'' = 330''$ $\quad 330^2 = 108900$
halbe Seite $= 165''$ $\quad 165^2 = 27225$
Höhe $= \sqrt{81675} = 285{,}78''$
Grundlinie $= 330''$
halbe Höhe $= 142{,}89''$
Flächeninhalt $= 47153{,}7 \square'' = 9 \square^0\ 3 \square'\ 65{,}7 \square''$.

5. In einem gleichschenkligen Dreiecke beträgt die Grundlinie 4′ 8″ und jede der gleichen Seiten 5′ 2″; wie groß ist die Höhe, und wie groß der Flächenraum?

raum? — Die Höhe beträgt 4′ 7,31″, der Flächenraum 10 □′ 108,68 □″.

6. Es soll eine sechsseitige regelmäßige Laube ausgesteckt werden, deren jede Seite 6′ lang seyn soll; wie groß ist der dazu erforderliche Raum?

Der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite kann als Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes betrachtet werden, dessen Hypothenuse 6′ und die andere Kathete 3′ ist.

Abstand der Mitte von einer Seite 5,19′
Umfang des Sechseckes 36′
Flächenraum 2 □° 21,44 □′.

Anhang.

Einige Grundlehren der praktischen Geometrie.

§. 115.

Die praktische Geometrie, auch Geodäsie genannt, lehret die Entfernungen der Örter zu messen, und die auf der Oberfläche unserer Erde vorkommenden Figuren auf dem Papiere ähnlich zu verzeichnen.

Die Figuren, die der Feldmesser entwirft, werden immer auf die Horizontalebene d. i. jene Ebene, welche die Oberfläche des stillstehenden Wassers anzeigt,

re=

reduzirt. Man denkt sich nämlich unter der wirklichen Figur der Erdoberfläche eine Horizontalebene, und vertikal unter jedem Punkte der wirklichen Fläche einen Punkt auf der Horizontalebene; verbindet man diese letztern Punkte gehörig durch Linien, so ist die dadurch entstehende Figur die auf den Horizont reduzirte Fläche.

Die Reduzirung der gemessenen Fläche auf die Horizontalebene geschieht darum, weil sich die Richtung dieser Ebene viel leichter bestimmen läßt als die Richtung jeder andern Fläche; wie auch darum, weil der Werth eines Grundstückes von der Ausdehnung abhängt, welche dieses auf der Horizontalfläche einnimmt; da nämlich fast alle Gewächse in vertikaler Richtung wachsen, so können (Fig. 97) von solchen Gewächsen auf der schiefen Richtung von **A** nach **C** nicht mehr stehen, als auf der horizontalen Fläche **AB**.

Die Bestandtheile der Figuren sind Linien und Winkel; daher muß vor Allem gelehret werden, wie man die Linien und die Winkel auf dem Felde mißt.

I. Messen der Linien auf dem Felde.

§. 116.

Werkzeuge.

Beim Ausmessen einer geraden Linie auf dem Felde kommt ein dreifaches Geschäft vor: das Bezeichnen der Endpunkte, das Bestimmen mehrerer Zwischenpunkte oder das Abstecken, und das wirkliche Messen.

Dabei braucht man folgende Werkzeuge:

1.

1. Zum Bezeichnen der Endpunkte, wenn diese nicht schon von Natur aus kenntlich sind, dienen Pflöcke (Fig. 98) und Meßfahnen (Fig. 99), und zwar von verschiedener Größe.

2. Zum Abstecken der Geraden bedient man sich der Absteckstäbe; diese sind (Fig. 100) gerade 5 bis 8 Fuß hohe Stangen, welche unten eine eiserne Spitze haben.

3. Zum wirklichen Messen braucht man entweder die Maß- oder Klafterstäbe, oder die Meßkette (Fig. 101) mit zwei Kettenstäben (Fig. 102) und zehn Kettennägeln (Fig. 103). Die Meßkette hat eine Länge von 10 Wiener-Klaftern, und bestehet aus eisernen Gliedern, welche mit Ringen verbunden sind. Die einzelnen Klaftern macht man durch größere messingene Ringe bemerkbar; und an beiden Enden befinden sich auch zwei weitere Ringe, durch welche die Kettenstäbe durchgeschoben werden.

§. 117.

Verfahren beim Abstecken.

Wenn die Endpunkte der zu messenden Geraden **AB** (Fig. 104) sehr weit von einander abstehen, so daß man von dem einen zum andern nicht sicher genug in gerader Richtung messen kann, so muß man die Gerade abstecken, d. i. mehrere Zwischenpunkte bestimmen, welche mit den Endpunkten in gerader Linie liegen.

Um zwischen zwei Stäben **A** und **B** einen dritten **C** in gerade Linien zu bringen, trete man ein Paar Schritte hinter den einen Stab **B** zurück, lasse durch ei-

einen Gehilfen den einzurichtenden Stab zwischen zwei Fingern frei halten, so daß er vertikal hängt, und gebe ihm durch Zeichen mit der Hand zu verstehen, daß er seinen Stab so lange rechts oder links bewege, bis man ihn in der Richtung der beiden Stäbe **B** und **A** erblickt, indem man dabei immer an derselben Seite der Stäbe vorbeivisirt; ist dieses der Fall, so gibt man dem Gehilfen ein Zeichen, worauf er den Stab frei fallen läßt, und vertikal in die Erde steckt. — Beim Abstecken einer langen Linie werden immer die entfernteren Stäbe früher eingerichtet als die nähern.

Um in der Verlängerung einer Geraden **AB** (Fig. 105) einen Stab **C** einzurichten, stelle man sich nach dem Augenmaße daselbst auf, visire an der Seite des Stabes, den man zwischen zwei Fingern frei hält, nach den beiden Stäben, wodurch die zu verlängernde Gerade bezeichnet ist, und bewege sich mit seinem Stabe so lange rechts oder links, bis sich alle drei Stäbe decken; dann wird der Stab vertikal eingesetzt.

§. 118.

Verfahren beim wirklichen Messen.

1. Mit den Klafterstäben.

Man spanne, um beim Anlegen der Maßstäbe nicht aus der Richtung der zu messenden Geraden heraus zu kommen, in derselben eine Schnur aus, lege daran, wenn der Boden eben ist, den einen Maßstab, an diesen den zweiten; sodann hebe man den ersten auf, und lege ihn an das Ende des zweiten, und verfahre so bis an das Ende der Linie;

die

die gemessenen Längen müssen genau angemerkt und zuletzt addirt werden. — Ist der Boden uneben, so legt man die Klafterstäbe nicht auf den Boden, sondern hält dieselben in der Luft möglichst horizontal.

2. Mit der Meßkette.

Man schiebt die Endringe der Kette an die Kettenstäbe, womit die Kette von zwei Gehilfen, welche Kettenzieher heißen, getragen wird. Der hintere Kettenzieher setzt seinen Stab in den Anfangspunkt A (Fig. 106) der zu messenden Linie, während der vordere die Kette locker weiter zieht, dann seinen Kettenstab in den Boden steckt, und längs der Kette bis A zurückgehet, um zu sehen, ob nicht eine Verschlingung der Ringe in der Kette vorkommt, welche er in diesem Falle auflöst. Dann gehet er zu seinem Kettenstabe zurück, läßt sich von dem hintern Kettenzieher genau in die Gerade einrichten, und spannt dann seine Kette, indem er den Ring in die Mitte des Stabes zieht, den Stab horizontal hält, die Kette in die Höhe schleudert, und sogleich wieder anzieht. Die so gespannte Kette wird über den Punkt, wo früher der Stab eingesetzt war, hinüber gezogen, und in dem Ende ein Kettennagel eingesteckt. Dann verlassen beide Kettenzieher ihre Punkte, und ziehen die Kette so lange in der Linie fort, bis der hintere Kettenzieher zu dem Punkte C kommt, wo sich der Kettennagel befindet; diesen zieht er heraus, setzt an dessen Stelle seinen Kettenstab, richtet von da den vordern Kettenzieher ein, worauf sich das frühere Verfahren so lange wiederholt, bis sie an das Ende der zu messenden Geraden gelangen. Vom letzten Nagel D wird die Kette über B hinaus gespannt, und die Anzahl Klafter und Klaftertheile an der Kette

selbst

selbst abgezählt. Zuletzt zählt der hintere Kettenzieher die gesammelten Nägel; die Anzahl derselben wird mit 10 multiplizirt, und zu den dadurch erhaltenen Klaftern noch die Länge vom letzten Nagel bis zum Endpunkte der Geraden addirt.

3. Durch Schritte.

Man suche zuerst, wie viele Schritte auf eine gewisse Anzahl Klafter gehen. Zu diesem Ende messe man eine Länge von etwa 100 Klaftern, schreite dieselben mehrmals ab, und suche, wie viel Schritte man im Durchschnitte gemacht hat. Aus diesem Verhältnisse kann man dann jede durch das Abschreiten gefundene Länge sogleich in Klafter verwandeln. Z. B. Man findet, daß auf 100 Klafter im Durchschnitte 250 Schritte gehen, und man will wissen, wie viel Klafter 150 Schritte machen: so hat man die Proportion $250 : 150 = 100 : x$, woraus $x = 60$ Klafter.

Die Messung einer Linie durch Schritte darf nur dann angewendet werden, wenn man nur die beiläufige Länge derselben bestimmen will.

§. 119.

Messen krummer Linien.

Sehr häufig sollen auch krumme Linien oder krummlinige Begrenzungen von Wäldern, Teichen, Wegen, Flüssen u. dgl. mit der Kette oder mit Maßstäben aufgenommen werden. Da sich die geradlinigen Maße an die krummen Linien nicht anlegen lassen; so muß man eine solche Linie in kleinere und zwar solche Theile zerlegen, daß man sie für gerade Linien ansehen kann; sodann mißt man die einzelnen Theile als gerade Linien, und addirt die gefundenen Längen.

Um

Um die krumme Linie ABCDEF . . . (Fig. 107) ihrer Länge nach zu bestimmen, schlägt man in den Enden und Hauptkrümmungspunkten Pflöcke ein, betrachtet dann die krumme Linie als eine zerbrochene, und mißt von A nach B, von B nach C, u. s. w. in gerader Linie; die Summe der gefundenen Maße gibt die angenäherte Länge der zu messenden krummen Linie.

II. Messen der Winkel auf dem Felde.

§. 120.

Werkzeuge.

Die Aufnahme der Winkel auf dem Felde besteht darin, daß man entweder die Winkel bloß auf dem Papiere in derselben Größe verzeichnet, wie sie auf dem Felde vorkommen; oder daß man findet, wie viel Grade und Gradtheile der zu messende Winkel enthält.

Die Werkzeuge, welche zur Aufnahme der Winkel angewendet werden, sind daher von zweierlei Art.

1. Um die Winkel auf dem Papiere so zu verzeichnen, wie sie von den Linien auf dem Felde gebildet werden, bedient man sich des Meßtisches (Fig. 108). Er ist ein Reißbret oder Tischblatt, welches mittelst eines Verschiebungskreuzes auf einem dreifüßigen Stative so befestiget wird, daß es horizontal gestellt, und in dieser Lage beliebig herum bewegt werden kann. Das Verschiebungskreuz läßt sich nach zwei auf einander senkrechten Richtungen verschieben, und durch die Stellschrauben aa feststellen. Zum Horizontalstellen des Meßtischblattes die-

dienen die Horizontalschrauben bb; zur Verbindung des Schiebungskreuzes mit dem Fußgestell ist die Herzschraube c, welche erst am Ende der Aufstellung angezogen wird. Noch ist die Wendeschraube d zu bemerken, welche dazu dient, um dem Tischblatte eine sehr sanfte Bewegung um den Mittelpunkt zu geben.

Zum Meßtische gehören noch folgende Werkzeuge:

a. Die Wasserwage (Fig. 109), eine Glasröhre, welche an ihrer obersten Seite kreisförmig gebogen ist. Sie befindet sich in einem messingenen Gehäuse, und ist mit Wasser nicht ganz gefüllt, so daß die noch bleibende Luftblase immer den höchsten Punkt der kreisförmigen Höhlung einnimmt. Die Wasserwage dient zum Horizontalstellen des Meßtischblattes.

b. Die Einlothgabel (Fig. 110); sie ist ein Winkelhaken, an welchem ein Gewicht aufgehängt ist, und dienet dazu, um einen Punkt auf der Oberfläche des Tisches über einen Punkt auf dem Felde vertikal zu stellen.

c. Die Anschlag- oder Pikirnadeln sind feine englische Nähnadeln, deren Öhre man mit einem Knöpfchen von Siegellack versieht; sie dienen, um auf dem Meßtischblatte die Standpunkte zu bezeichnen.

d. Das Diopterlineal (Fig. 111). Dieses ist ein messingenes Lineal, welches an beiden Enden senkrechte Absehen oder Dioptern hat, die mit Gelenken versehen sind, und, wenn das Lineal nicht gebraucht wird, auf die Fläche desselben niedergelegt werden können. Die Mitte der Dioptern und die scharfe Kante des Lineals müssen in gerader Richtung liegen. Um höher oder tiefer liegende Gegenstände

an-

anvisiren zu können, sind an einem Diopter wieder zwei kleinere Diopteru angebracht, welche mit den größern gleiche Einrichtung haben, und Bergdioptern heißen.

e. Die Orientier-Boussole (Fig. 112) ist eine in einem länglichten Gehäuse von Messing verschlossene Magnetnadel, welche auf einem Stifte frei schwebt. Auf der untern Platte der Gehäuses ist eine Linie gezogen, um den Stand der Nadel darnach zu beurtheilen. Beim Übertragen muß man die Nadel mittelst des Hebels a und der messingenen Feder b aufheben und sperren.

2. Die Werkzeuge, welche die Größe des zu messenden Winkels nach Graden und Gradtheilen angeben, heißen vorzugsweise Winkelmesser, und haben sehr verschiedene Einrichtung. Der einfachste Winkelmesser ist das Astrolabium (Fig. 113). Es bestehet aus einem vor- und rückwärts in Grade und Gradtheile eingetheilten Halbkreise von Messing; an dem Ende des Durchmessers befinden sich zwei unbewegliche Diopteru, und um den Mittelpunkt ist ein Lineal, an welchem ebenfalls zwei Diopteru angebracht sind, sanft beweglich. Das ganze Instrument ruhet auf einem dreifüßigen Stative.

Hier kann auch das Diopterkreuz (Fig. 114) angeführt werden, welches dazu dient, um auf dem Felde senkrechte Linien zu bestimmen. Es ist ein rechtwinkliges Kreuz, welches auf einem Stative horizontal befestiget wird, und vier lange Arme hat, die am Ende mit senkrechten Stiften oder mit Diopteru versehen sind.

§. 121.

§. 121.

Aufnahme eines Winkels.

a. Mit dem Meßtische.

Man setze den Meßtisch über den Scheitel **A** des aufzunehmenden Winkels **BAC** (Fig. 115) und stelle ihn horizontal, indem man die einzelnen Horizontalschrauben so lange erhöhet oder erniedriget, bis, bei jeder Stellung der auf dem Tischblatte befindlichen Wasserwage, die Luftblase in der Mitte einspielt. Hierauf bestimmt man mit der Einlothgabel den Punkt **a** auf dem Tischblatte, welcher vertikal über den Scheitel **A** des zu messenden Winkels liegt, und steckt darin eine Pikirnadel ein. Sodann legt man an diese Nadel das Diopterlineal, visirt durch die enge Spalte der einen, und durch den Faden der entgegengesetzten Diopter, und drehet das Lineal so lange, bis man den einen Richtpunkt **B** genau hinter dem Diopterfaden erblickt; dann zieht man längs der scharfen Kante eine gerade Linie ab, welche Visirlinie oder Rayon genannt wird. Hierauf richtet man, ohne den Meßtisch zu verrücken, das Diopterlineal eben so auf den zweiten Richtpunkt **C**, und zieht wieder die entsprechende Visirlinie **ac**. Der Winkel **bac**, den die beiden Visirlinien bilden, ist nun dem Horizontalwinkel **BAC** auf dem Felde gleich.

b. Mit dem Astrolabium.

Man stellt (Fig. 113) das Astrolabium mit seinem Mittelpunkte über den Scheitel **A** des zu messenden Winkels **BAC** so auf, daß der Halbkreis horizontal liegt, richtet die festen Dioptern auf den einen Richtpunkt **B**, und drehet dann die beweglichen Dioptern, bis man dadurch den zweiten Richtpunkt C erblickt. Hierauf liest man an der Eintheilung, wie viel Grade und Gradtheile der gemessene Winkel enthält.

Um mit dem Astrolabium einen Vertikalwinkel d. i. einen Winkel, dessen beide Schenkel in einer vertikalen Ebene liegen, zu messen, darf man nur die Scheibe in diese Vertikalebene hineinbringen, und dann wie vorhin verfahren.

III. Auflösung verschiedener Aufgaben, welche bei der Aufnahme ganzer Flächen vorkommen.

§. 122.

1. In einem Punkte einer Geraden auf dem Felde auf diese eine Senkrechte zu errichten.

a. Mit einer Schnur.

Die Errichtung einer Senkrechten auf dem Felde kann auf dieselbe Art wie auf dem Papiere (§. 52) ausgeführt werden, nur daß man sich statt des Zirkels einer Schnur bedient; man trägt nämlich damit von A (Fig. 47) ein willkürliches Maß bis M und N auf, und beschreibt aus diesen mit Pflöcken oder Strichen bezeichneten Punkten mit einer andern größern Schnur zwei gleiche Bogen auf dem Boden; die Gerade, welche durch deren Durchschnittspunkt D und durch den gegebenen Punkt A geht, ist nun die verlangte Senkrechte.

b. Mit der Meßkette.

Wenn

Wenn die Meßkette in Fuß oder Zehntelklafter getheilt ist, so stecke man drei Pflöcke dergestalt durch die Kettenringe, daß zwischen den Pflöcken **A** und **D** (Fig. 116) 15, zwischen **A** und **E** 20, und zwischen **D** und **E** 25 solche gleiche Kettentheile liegen, schlage bei beiderseitig gut gespannter Kette diese Pflöcke in die Erde, so wird **AE** $\perp$ **BC** seyn; denn es ist $15^2 + 20^2 = 25^2$.

c. Mit dem Diopterkreuz.

Man stelle (Fig. 117) über den gegebenen Punkt **A** den Mittelpunkt des Diopterkreuzes, und bringe zwei Dioptern in die Richtung der Geraden; dann visire man durch die beiden andern Dioptern, und lasse in ihrer Richtung einen Stab einsetzen; dieser gibt den Punkt an, durch welchen die gesuchte Senkrechte gehen soll.

§. 123.

2. Aus einem Punkte außerhalb einer Geraden auf dem Felde auf dieselbe eine Senkrechte zu fällen.

a. Mit der Schnur.

Hier kann die für das Papier gegebene Auflösung (§. 51) angewendet werden; nur bedient man sich zum Beschreiben der Kreisbogen der Schnur anstatt des Zirkels.

b. Mit dem Diopterkreuze.

Man lasse in dem gegebenen Punkte **D** (Fig. 117) einen Stab einstecken, und stellt sich mit dem Diopterkreuze in der Geraden **BC** dort auf, wo beiläufig die Senkrechte hinfallen dürfte; bringe zwei Dioptern in die Richtung der Geraden **BC**, und visire durch die beiden andern Dioptern. Trifft die Visirlinie gerade auf den gegebenen Punkt **D**, so ist der Punkt unter der Mitte des Werkzeuges der Ort, wo die Senkrechte eintrifft; erscheint aber der gegebene Punkt **D** rechts oder links von der Visirlinie, so rücke man das Diopterkreuz nach der Seite desselben so lange, bis man ihn in der Richtung der Dioptern erblickt; die zwei andern Dioptern müssen übrigens beständig in der Richtung der Geraden **BC** bleiben.

§. 124.

3. Einen Winkel **EDF** (Fig. 35) auf dem Felde abzustecken, der einem gegebenen **CAB** gleich ist.

Dabei wird dasselbe Verfahren angewendet, wie beim Verzeichnen gleicher Winkel auf dem Papiere (§. 45); nur wird statt des Zirkels eine Schnur angewendet.

Auf dieselbe Weise kann aus den gemessenen Schenkeln eines Winkels auf dem Felde und aus der gemessenen Entfernung ihrer Endpunkte mit Hilfe eines verjüngten Maßstabes auch auf dem Papiere ein Winkel von gleicher Größe verzeichnet werden.

4. Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden auf dem Felde mit dieser eine Parallele zu führen.

a. Mit der Schnur.

Wenn der Punkt **C** (Fig. 53) von der Geraden **AB** nicht weit abstehet, so kann das für das Papier in §. 55 angegebene Verfahren mittelst der Schnur statt des Zirkels angewendet werden.

b. Mit dem Diopterkreuze.

Ist der Punkt **C** (Fig. 118) von der Geraden **AB** weit entfernt, so kann die verlangte Parallele am leichtesten mittelst des Diopterkreuzes gefunden werden. Man fällt nämlich von **C** eine Senkrechte **CD** auf die gegebene Gerade **AB**, und errichtet in **C** auf **CD** eine Senkrechte **CE**; diese ist die gesuchte mit **AB** parallele Gerade.

§. 125.

5. Die Entfernung zweier Punkte auf dem Felde zu bestimmen, wenn sich dieselbe wegen eines dazwischen befindlichen Hindernisses nicht gerade zu messen läßt, wenn man aber von einem dritten Punkte aus zu beiden hin messen kann.

a. Mit Stäben.

Es seien **A** und **B** (Fig. 119) die beiden Punkte, deren Entfernung man wissen will, zwischen welchen aber ein Teich liegt, so daß eine unmittelbare Messung nicht statt finden kann. Man wähle einen solchen Standpunkt **C**, daß man von ihm aus nach den beiden andern Punkten in gerader Linie messen kann, messe die Geraden **CA** und **CB** mit den Maßstäben oder mit der Meßkette, und trage dann einen bestimmten, z. B. den 4ten Theil der erhaltenen Länge **CA** von **C** bis **a**, und eben so den 4ten Theil der **CB** von **C** bis **b** auf; in **a** und **b** schlage man Pflöcke ein. Mißt man nun die Entfernung **ab**, so ist diese wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke **Cab** und **CAB** der 4te Theil der gesuchten Entfernung **AB**; man braucht daher die gefundene Länge **ab** nur noch mit 4 zu multipliciren.

b.

b. Mit dem Meßtische.

Man stelle den Meßtisch über den gewählten dritten Standpunkt C (Fig. 120) horizontal auf, stecke in jenem Punkte c, welcher vertikal über C liegt, eine Pikirnadel ein, visire durch das daran gelegte Diopterlineal nach den beiden Punkten A und B, und ziehe auf dem Meßtische die entsprechenden Visirlinien; dann lasse man die Geraden CA und CB messen, trage die gefundenen Längen nach einem verjüngten Maßstabe auf den Visirlinien von c bis a und b auf, ziehe die Gerade ab, und untersuche, wie viel sie nach demselben verjüngten Maßstabe beträgt; dieses gibt den gesuchten Abstand AB im wirklichen Maße.

c. Mit dem Winkelmesser.

Man messe ebenfalls von einem dritten Standpunkte C (Fig. 121) die Geraden CA und CB, messe aber mit dem Winkelmesser auch den Winkel ACB; dadurch werden im Dreiecke ACB zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt, und es läßt sich daraus das Dreieck selbst im verjüngten Maße konstruiren. Man verzeichnet nämlich mit dem Transporteur auf dem Papiere den gemessenen Winkel acb, und trägt auf dessen Schenkeln mit Hilfe eines verjüngten Maßstabes die gemessenen Längen CA und CB von c bis a und b auf; mißt man nun nach demselben Maßstabe die Entfernung ab auf dem Papiere; so hat man den gesuchten Abstand AB auf dem Felde.

§. 126.

6. Die Entfernung zweier Punkte auf

dem

dem Felde zu bestimmen, wenn man nur zu einem derselben kommen kann.

a. Mit Stäben.

Man wähle zuerst einen dritten Standpunkt **C** (Fig. 122), von dem man zu einem der beiden Punkte **A** und **B** hin messen kann; messe wirklich zu dem zugänglichen Punkte **A** hin, und trage von der gefundenen Länge z. B. den 5ten Theil von **C** bis **a** auf. In **a** wird ein Winkel **Cab** abgesteckt, welcher so groß ist als der Winkel **CAB**, und in dessen Schenkel **ab** derjenige Punkt **b** bestimmt, welcher zugleich in der **CB** liegt. Mißt man dann die Entfernung **ab**, so darf man nur dieselbe mit 5 multipliziren, um die verlangte Länge **AB** zu finden.

b. Mit dem Meßtische.

Man stellt den Meßtisch über einen dritten Punkt **C** (Fig. 123) gehörig auf, und zieht Visirlinien nach den beiden gegebenen Punkten **A** und **B**; indessen läßt man die Gerade **CA** wirklich messen, und trägt die erhaltene Länge nach einem verjüngten Maße von **c** bis **a** auf. Sodann überträgt man den Meßtisch auf den zugänglichen Punkt **A**, und stellt ihn daselbst so auf, daß **a** über **A**, und die Linie **ac** in die Richtung **AC** falle; letzteres, indem man das Diopterlineal an **ac** anlegt, und das Meßtischblatt so lange herumdrehet, bis man durch die Diopter den Punkt **C** erblickt. Ist der Meßtisch richtig gestellt, so visirt man von **a** nach dem unzugänglichen Punkte **B**, und zieht die entsprechende Visirlinie, welche die von **c** dahin gezogene Linie in **b** durchschneidet; die Gerade **ab** zeigt nun im verjüngten Maße die verlangte Entfernung an.

Den

Den Meßtisch so richten, daß die darauf gezogenen Linien mit dem entsprechenden auf dem Felde parallel laufen, heißt ihn **orientiren**. Dieses geschieht häufig mittelst der **Orientir-Boussole**. Nachdem man in einem frühern Standpunkte den Meßtisch gehörig aufgestellt hat, wird die Boussole in einer Ecke des Tischblattes so lange herumgedreht, bis die Nadel in das Nordzeichen einspielt und ruht; hierauf ziehe man an einer, oder besser an allen vier Seiten des Gehäuses Linien, und schreibe nach der Nordseite hin den Buchstaben **N**. Wird nun in einem andern Standpunkte das Gehäuse genau an die früher gezogenen Linien gesetzt, so braucht man nur das Meßtischblatt so lange zu drehen, bis die Magnetnadel gehörig einspielt und ruht; ist dieses der Fall, so ist der Meßtisch orientirt.

c. **Mit dem Winkelmesser.**

Man messe die Gerade zwischen dem gewählten Standpunkte **C**, (Fig. 124) und dem zugänglichen Punkte **B**, nämlich die **CB**, so wie auch die daran liegenden Winkel in **C** und **B**. Hierauf trägt man auf dem Papiere nach einem verjüngten Maßstabe die gemessene Länge auf, und verzeichnet in ihren Endpunkten **b** und **c** die beiden gemessenen Winkel; so werden sich die Schenkel derselben in **a** durchschneiden, und es wird mittelst der Geraden **ab** auf demselben verjüngten Maßstabe die gesuchte Entfernung **AB** gefunden.

§. 127.

7. **Die Entfernung zweier Punkte auf dem Felde zu bestimmen, wenn man zu keinem derselben kommen kann.**

a. Mit Stäben.

Es sei z. B. die Entfernung der beiden Bäume A und B (Fig. 125), welche sich jenseits eines Flusses befinden, zu bestimmen. Man wähle sich zwei solche Standpunkte C und D, daß man zwischen ihnen unmittelbar messen, und von ihnen aus nach den beiden gegebenen Punkten A und B sehen kann. Man messe die Standlinie CD, und trage darauf von C aus z. B. ihren 5ten Theil bis d auf. In dem Punkte d steckt man einen Winkel Cda aus, welcher dem Winkel CDA gleich ist, und geht auf dem Schenkel da so weit fort, bis man in die Richtung CA nach a kommt. Eben so steckt man in d einen Winkel Cdb ab, welcher eben so groß ist als der Winkel CDB, und geht an dem Schenkel db so weit, bis man in die Richtung CB nach b kommt. Endlich messe man ab, und multiplizire die erhaltene Länge mit 5, so hat man den gesuchten Abstand AB.

b. Mit dem Meßtische.

Man stelle den Meßtisch über den einen Standpunkt C (Fig. 126) auf, visire von c aus nach A, B und D, und ziehe die entsprechenden Visirlinien. Indessen läßt man die Standlinie CD messen, und trägt die gefundene Länge verjüngt von c bis d auf. Nun überträgt man den Meßtisch nach D, stellt ihn daselbst so auf, daß d auf D, und dc in die Richtung DC zu stehen kommt; visirt von d aus nach A und B, und zieht die zugehörigen Visirlinien, welche die früher von c aus gezogenen in den Punkten a und b schneiden; der Abstand ab zeigt nun, nach demselben verjüngten Maße, die wirkliche Entfernung AB an.

c. Mit dem Winkelmesser.

Man

Man messe die Standlinie **CD** (Fig. 127) und an ihren Endpunkten die Winkel, die sie mit den Visirlinien nach **A** und **B** bildet, nämlich in **C** die Winkel **m** und **n**, in **D** die Winkel p und q. Sodann ziehe man auf dem Papiere eine Gerade, trage darauf nach einem verjüngten Maßstabe die gemessene Standlinie von c bis d auf, und verzeichne an ihren Endpunkten zuerst die gemessenen Winkel m und p, der Durchschnitt ihrer Schenkel gibt den Punkt a; eben so verzeichne man in c und d auch die Winkel n und q, so bekommt man b als Durchschnittspunkt ihrer Schenkel. Die Gerade ab gibt nun an demselben verjüngten Maßstabe die gesuchte Entfernung **AB** an.

§. 128.

8. Die Höhe eines zugänglichen Gegenstandes zu bestimmen.

a. Mit Stäben.

Es sei z. B. die Höhe eines Baumes **AB** (Fig. 128) zu finden. Man wählt einen Punkt **C**, von dem man in gerader Linie zu **A** hin messen kann, steckt in **C** einen Stab **CD** vertikal ein, und legt sich hinter demselben in so einer Lage auf den Rücken, daß man die Spitze **D** des Stabes mit der Spitze **B** des Baumes in gerader Richtung erblickt; den Ort **F**, wo sich das Auge befunden hat, und wo die Verlängerung der Geraden **BD** hinfällt, bezeichnet man mit einem Pflocke, und mißt die Entfernungen **FC** und **FA**, so wie die Länge des Stabes **CD**. Nun hat man zwei ähnliche Dreiecke **ABF** und **CDF**, daher ist **AB** : **CD** = **AF** : **CF**, woraus man das unbekannte Glied **AB** finden kann.

Auch

Auch aus dem Schatten eines Gegenstandes kann dessen Höhe gefunden werden. Man mißt nämlich die Länge des Schattens, welchen der Gegenstand wirft, und auch die Länge des Schattens, den zu derselben Zeit ein vertikal stehender Stab wirft; hierauf mißt man noch die Höhe des Stabes und schließt: die Höhe des Gegenstandes verhält sich zur Höhe des Stabes wie sich der Schatten des Gegenstandes zum Schatten des Stabes verhält. Aus dieser Proportion wird dann die verlangte Höhe gefunden.

b. Mit dem Winkelmesser.

Man stelle in C (Fig. 129) das Astrolabium so auf, daß der Halbkreis nach oben gekehrt ist und die festen Diopteru eine Horizontallinie **DE** angeben; man messe nun den Höhenwinkel **BDE**, und hierauf auch die Entfernung **CA**. Sodann verzeichne man auf dem Papiere nach einem verjüngten Maßstabe die gemessene Gerade von e bis d, und trage in dem einen Endpunkte d den gemessenen Winkel **EDB**, in dem andern e aber errichte man eine Senkrechte, welche den Schenkel des früher verzeichneten Winkels in b durchschneidet. Die Gerade eb gibt nun auf demselben verjüngten Maßstabe die Höhe **EB**, wozu noch die Höhe des Astrolabiums zu addiren ist, um die vollständige verlangte Höhe zu erhalten.

§. 129.

9. Die Höhe eines unzugänglichen Gegenstandes zu bestimmen.

a. Mit Stäben.

Man soll z. B. die Höhe eines Thurmes **AB** (Fig. 130), welcher jenseits eines Flusses liegt, finden. Die Auflösung geschieht auf dieselbe Art wie bei der

Be-

Bestimmung der Höhe eines zugänglichen Gegenstandes; nur muß die Entfernung **FA**, weil man sie nicht unmittelbar messen kann, nach der ersten Auflösung der 6ten Aufgabe mittelbar bestimmt werden.

b. Mit dem Winkelmesser.

Man wähle zwei Standpunkte **C** und **D** (Fig. 131), welche mit **AB** in einerlei Ebene liegen, und zwischen welchen man unmittelbar messen kann. Man messe die Standlinie **CD** wirklich, und bestimme an ihren Endpunkten die Höhenwinkel **EFB** = m und **EGB** = n. Sodann ziehe man auf dem Papiere eine Gerade, trage darauf die gemessene Länge **CD** nach einem verjüngten Maßstabe von f bis g auf, und verzeichne in diesen Endpunkten beziehungsweise die Winkel m und n, deren Schenkel sich in b schneiden; fällt man nun von b auf die Verlängerung der gf eine Senkrechte be, so gibt diese nach demselben verjüngten Maßstabe die Höhe **BE**, wozu noch die Höhe des Instrumentes addirt wird.

IV. Aufnahme von kleinen Flächen.

§. 130.

Eine Figur aufnehmen oder in den Grund legen heißt, auf dem Papiere mittelst eines verjüngten Maßes eine Figur verzeichnen, welche derjenigen auf dem Felde ähnlich ist.

Bevor man zur Aufnahme einer Fläche schreitet, geht man um dieselbe an ihrem Umfange herum, schlägt in allen Eck- und Krümmungspunkten Pflöcke ein, welche mit fortlaufenden Nummern oder Buchstaben bezeichnet sind, und entwirft sich zugleich von dem Umfange der Figur sammt der Bezeichnung der

ein-

eingeschlagenen Pflöcke eine Zeichnung mit Bleistift bloß nach dem Augenmaße. Ein solcher roher Entwurf heißt eine Handskizze, ein Brouillon. In diesem wird dann an jede wirklich gemessene Linie, so wie in jedem gemessenen Winkel, das gefundene Maß geschrieben, und zuletzt nach demselben die Verzeichnung vorgenommen, wenn diese nicht schon während der Aufnahme selbst geschehen ist.

§. 131.

1. Aufnahme einer Figur mit Stäben.

a. Durch Zerlegung in Dreiecke.

Man verfertige sich zuerst ein Brouillon, denke sich durch je drei Punkte ein Dreieck gelegt, und messe dessen drei Seiten. Hierauf verzeichne man die Dreiecke in der gehörigen Ordnung auf dem Papiere, indem man die gemessenen Seiten nach einem verjüngten Maßstabe aufträgt. Die dadurch erhaltenen Punkte haben dieselbe Lage gegen einander, wie die entsprechenden Punkte auf dem Felde; man braucht sie nur noch gehörig durch Linien zu verbinden. — In Fig. 93. würde man mit dem Dreiecke **ABG** beginnen, und dann folgeweise die Dreiecke **BGE**, **GEF**, **BEC**, **CED** konstruiren.

b. Mittelst Abscissen und Ordinaten.

Man pflöcke zuerst die Figur aus, und stecke durch die entferntesten Endpunkte **A** und **E** (Fig. 94) eine Gerade als Abscissenlinie ab. Auf diese fälle man von allen bezeichneten Umfangspunkten Senkrechte, und messe die einzelnen Stücke der Abscissenlinie und alle Ordinaten. Auf dem Papiere trägt man nun an einer Geraden nach einem verjüngten Maßstabe zuerst die

Ab-

Abscissen von **A** bis i, h, b, . . . auf; in diesen Punkten errichtet man Senkrechte, und trägt darauf die Ordinaten gehörig auf. Endlich braucht man nur zwischen den dadurch erhaltenen Punkten die entsprechenden Linien zu ziehen.

Wenn sich im Innern der aufzunehmenden Figur Hindernisse der Messung befinden, so sind die zwei eben angegebenen Methoden nicht anwendbar. In diesem Falle führt folgendes Verfahren zum Ziele. — Es sei z. B. ein Teich (Fig. 132) aufzunehmen. Man umgebe die Figur mit mehrern gegen einander geneigten Abscissenlinien, die zusammen ein Vieleck **ABCDE** bilden, und fälle darauf von allen Biegungspunkten Senkrechte; man messe die Abscissentheile und die Ordinaten, und nehme zugleich die Winkel, welche die einzelnen Abscissenlinien mit einander bilden, nach §. 124, 3. auf. Dann zieht man auf dem Papiere eine Gerade, und trägt darauf die Theile der Abscissenlinie **AB** verjüngt auf; im Endpunkte **B** konstruirt man einen Winkel, welcher so groß ist als der Winkel **B** auf dem Felde, und trägt auf dem neuen Schenkel die Stücke der Abscissenlinie **BC** auf, u. s. w. Hierauf errichtet man in den einzelnen Punkten der Abscissenlinien Senkrechte, und trägt darauf die entsprechenden Ordinaten auf. Werden nun die dadurch erhaltenen Punkte mit freier Hand gehörig verbunden, so hat man die verlangte Zeichnung des Teiches.

§. 132.

2. Aufnahme einer Figur mit dem Meßtische.

a. Aus der Mitte.

Es soll die Figur **ABCDEF** (Fig. 133), in wel-

welcher man nach allen Seiten hin messen kann, aufgenommen werden. Man stellt den Meßtisch beiläufig in der Mitte der Figur horizontal auf, steckt ungefähr in der Mitte m des Tischblattes eine Pikirnadel ein, visirt nach allen Eckpunkten, und zieht die entsprechenden Rayons. Dann schlage man auf dem Felde vertikal unter der Pikirnadel in **M** einen Pflock ein, messe von da zu allen Eckpunkten hin, trage die gefundenen Längen nach einem verjüngten Maßstabe an den gleichnamigen Visirlinien von m bis a, b, c, . . auf, und verbinde diese Punkte a, b, c, . . gehörig mit einander. Die Figur abcdef, die man dadurch auf dem Tischblatte erhält, ist derjenigen auf dem Felde ähnlich; denn je zwei gleichnamige Dreiecke, wie abm und **ABM**, haben einen Winkel gleich und die beiden ihn einschließenden Seiten proportionirt, sind demnach ähnlich; wenn aber die einzelnen Dreiecke, aus denen die beiden Vielecke bestehen, nach der Ordnung ähnlich sind, so sind die Vielecke selbst ähnlich.

b. Aus zwei Standpunkten.

Man wählt zwei solche Standpunkte **M** und **N** (Fig. 134), daß man zwischen ihnen unmittelbar messen, und aus denselben nach allen oder den meisten Eckpunkten hin sehen kann. Dann stellt man den Meßtisch über einen Standpunkt **M** auf, sticht vertikal darüber in m eine Anschlagnadel ein, visirt nach dem andern Standpunkte **N**, und nach allen sichtbaren Eckpunkten der Figur, und zieht die zugehörigen Visirlinien; hierauf läßt man die Standlinie **MN** wirklich messen, und trägt ihre Länge verjüngt auf der gleichnamigen Visirlinie von m bis n auf. Sodann begibt man sich nach dem andern Standpunkte **N**,

stellt

stellt daselbst den Tisch so auf, daß n über **N**, und nm über **NM** zu liegen kommt; visirt aus n nach allen Eckpunkten, und zieht in dieser Richtung Rayons, so werden diese die vorigen von m aus gezogenen schneiden, und dadurch die Punkte a, b, c, d, . . auf dem Tischblatte bestimmen.

Man könnte nach Umständen auch zwei Punkte des Umfanges als Standpunkte annehmen.

Sollte man von einem Standpunkte aus irgend einen Eckpunkt nicht sehen, oder würden sich die Visirlinien dahin unter einem zu spitzigen oder zu stumpfen Winkel schneiden, so daß sich der Durchschnittspunkt nur ungenau bestimmen ließe; so stellt man den Meßtisch über einen andern bereits bestimmten Punkt gehörig auf, visirt nach dem zu bestimmenden Punkte, und durchschneidet den schon von einem andern Standpunkte dahin gezogenen Visirstrahl.

c. Aus dem Umfange.

Es sei **ABCDE** (Fig. 135) ein Wald, so daß man im Innern desselben weder messen noch anvisiren kann. Man stellt den Meßtisch über **A** auf, steckt in a eine Anschlagnadel ein, visirt nach **B** und **E**, und zieht die entsprechenden Visirlinien; dann messe man **AB** und **AE**, und trage sie verjüngt von a bis b und e auf. Hierauf überträgt man den Meßtisch nach **B**, stellt ihn dort so auf, daß b über **B**, und ba in die Richtung **BA** fällt, visirt nach **C**, und zieht einen Rayon dahin; nun messe man **BC**, und trage die Länge verjüngt von b bis c auf. Eben so verfährt man in den folgenden Standpunkten. In **C** wird, nachdem die Länge **CD** von c bis d aufgetragen wurde, der Punkt d mit dem schon früher bestimmten

Punk=

Punkte e verbunden. Die Figur abcde, die man dadurch bekommt, ist der Figur ABCDE auf dem Felde ähnlich.

§. 133.

3. Aufnahme einer Figur mit dem Winkelmesser.

a. Aus der Mitte.

Es soll die Figur ABCDEF (Fig. 133), in deren Innern man überall nach geraden Linien gehen kann, aufgenommen werden. Man stellt den Winkelmesser beiläufig in der Mitte M der Figur auf, und mißt die Winkel AMB, BMC, CMD, DME, . . . ; dann mißt man auch die Geraden MA, MB, MC, MD, ... Verzeichnet man sodann auf dem Papiere um einen Punkt m die gemessenen Winkel, und trägt auf ihren Schenkeln die gemessenen Geraden nach einem verjüngten Maßstabe von m bis a, b, c, d, . . auf, so haben diese Punkte auf dem Papiere dieselbe Lage gegen einander, wie die gleichnamigen Punkte A, B, C, D, . . . auf dem Felde.

b. Aus zwei Standpunkten.

Man wähle zwei Standpunkte M und N (Fig. 134), zwischen welchen man unmittelbar messen, und von welchen aus man nach allen Endpunkten der Figur sehen kann. Man mißt nun zuerst die Standlinie MN; hierauf stellt man den Winkelmesser über den einen Standpunkt M auf, und bestimmt die Winkel NMA, NMB, NMC, ... Hierauf überträgt man den Winkelmesser auf den andern Standpunkt N, und mißt daselbst die Winkel MNA, MNB, MNC, ... Nun verzeichnet man auf dem Papiere die Standlinie nach ein-

einem verjüngten Maßstabe, und trägt in ihren Endpunkten m und n die gemessenen Winkel in der Ordnung auf; so werden sich je zwei zusammengehörige Schenkel, z. B. **MA** und **NA** in einem Punkte schneiden. Verbindet man diese Durchschnittspunkte gehörig durch Linien, so erhält man die Figur abcdef, welche derjenigen **ABCDEF** auf dem Felde ähnlich ist.

Als Standpunkte können auch zwei Eckpunkte der Figur gewählt werden.

c. Aus dem Umfange.

Man mißt auf dem Felde alle Umfangslinien **AB, BC, CD,** . . . (Fig. 135) und alle Umfangswinkel **A, B, C,** . . . Hierauf trägt man auf dem Papiere zuerst **AB** verjüngt von a bis b auf, im Endpunkte b konstruirt man den Winkel b = **B**; auf dem neuen Schenkel trägt man **BC** von b bis c auf, in c wird der Winkel c = C verzeichnet, u. s. w. Die dadurch erhaltene Figur ist derjenigen auf dem Felde ähnlich.

Diese Messung wird besonders dann angewendet, wenn man im Innern der Figur nicht unmittelbar messen kann, wie bei Teichen, Waldungen, u. dgl.

V. Das Nivelliren.

§. 134.

Erklärungen und Instrumente.

Nivelliren heißt untersuchen, um wie viel ein Punkt der Erdoberfläche höher oder tiefer liegt, als ein anderer; oder untersuchen, um wie viel ein Punkt mehr oder weniger vom Mittelpunkte der Erde entfernt ist, als ein anderer.

Das

Das Nivelliren wird zur Ausmittlung der Gefälle fließender Gewässer, zur Anlage von Wasserabzugsgräben, schiffbaren Kanälen, Wasserleitungen, Wehren, Schleußen, Dämmen, Mühlen, Straßen, Eisenbahnen, und zu andern derlei Zwecken angewendet.

Um den Höhenunterschied AC (Fig. 136) zweier Punkte A und B zu finden, müßte man eigentlich von jedem derselben eine Gerade bis zum Mittelpunkte O der Erde ziehen, und die kleinere AO von der größern BO subtrahiren, was jedoch nicht ausführbar ist. Derselbe Höhenunterschied BC käme übrigens auch dadurch zum Vorschein, daß man in den beiden Punkten A und B zwei vertikale Linien AD und BE errichtet, sie beide durch einen horizontalen Bogen DE durchschneidet, und die Höhen der dadurch abgeschnittenen Stücke BE und AD von einander abzieht; denn dadurch erhält man auch DA — BE = AF = BC d. i. den Höhenunterschied der beiden Punkte A und B. Der horizontale Bogen DE kann für kleine Entfernungen wegen der geringen Krümmung der Erdoberfläche als eine horizontale Gerade angenommen werden.

Beim Nivelliren kommt es also auf zwei Sachen an; auf die Errichtung von vertikalen Linien in den beiden gegebenen Punkten, und auf das Durchschneiden derselben durch eine horizontale Gerade.

§. 135.

Zur Errichtung der Vertikalen braucht man Pflöcke, oder gewöhnlich die Nivellirlatten, an denen auch die Höhe gemessen wird. Diese Latten (Fig. 137) haben eine Länge von beiläufig 8 Fuß und sind in Fuß, Zoll und Viertelzoll eingetheilt. An jeder Nivellirlatte befindet sich ein verschiebbares Zielbretchen, welches sich mittelst einer Schraube in jeder Stelle befestigen läßt. Das Zielbret hat in der Mitte eine viereckige Öffnung, wodurch man die anvisirte Höhe lesen kann; durch die Mitte dieser Öffnung gehet eine Querlinie, an deren einer Seite das Bret mit zinnoberrother, an der andern mit weißer Ölfarbe angestrichen wird.

§. 136.

Um durch die beiden Vertikalen eine horizontale Linie zu legen, kann man sich verschiedener Instrumente bedienen; die einfachsten sind die Schrottwage, die Kanalwage, und das Nivellir-Diopter.

1. Die Schrottwage ist bereits §. 50. beschrieben und erklärt worden. Bei derselben braucht man zwei vollkommen gerade Richtscheite von beiläufig 2 Klafter Länge.

2. Die Kanalwage (Fig 138) ist eine blecherne Röhre, deren Enden senkrecht aufwärts gebogen sind; in diese werden zwei hohle Glasröhren **AC** und **BD** eingekittet. Wird die ganze Röhre mit Wasser gefüllt, so daß dieses bei **C** und **D** zum Vorschein kommt, so ist, das Instrument mag wie immer gestellt seyn, die Gerade, welche über die beiden Oberflächen **C** und **D** geht, stets horizontal, weil in zusammenhängenden Röhren Flüssigkeiten gleich hoch oder in einerlei Horizontalebene stehen. Das ganze Instrument ruhet auf einem dreifüßigen Stative.

Dieses Instrument hat den Vorzug, daß es beim Gebrauche keiner Berichtigung bedarf.

3.

3. Am häufigsten wird das Nivellirinstrument mit der Wasserwage und einem einfachen Fernrohre, oder statt des letztern mit einem Lineale, woran horizontale Diоptern angebracht sind, angewendet. Hier wollen wir nur das Nivellir-Diopter (Fig. 139) betrachten. Es bestehet aus einem Lineale **AB** mit doppelten horizontalen Dioptern; **CD** stellt die Wasserwage vor, deren Gehäuse mit dem Lineale so in Verbindung steht, daß es sich mittelst der Rektifizirschraube **E** etwas höher oder niedriger stellen läßt. Das Lineal kann innerhalb eines bestimmten Raumes um ein Gewinde **F** gedrehet werden, unter welchem sich ein Arm **FG** befindet, durch welchen die Elevationsschraube **L** durchgeht; diese dient dazu, das Lineal beliebig zu erhöhen oder zu erniedrigen.

Dieses Instrument, welches sich auf einem dreifüßigen Stative befindet, muß vor dem Gebrauche berichtiget oder rektifizirt werden, was auf folgende Art geschieht. Man läßt in einer Entfernung von etwa 30 Klafter eine Nivellirlatte **AB** (Fig. 140) aufstellen, bringt mittelst der Elevationsschraube die Luftblase der Wasserwage an ihre angewiesene mittlere Stelle, und läßt die Höhe der Visirlinie **AC** anmerken. Nun wendet man das Diopterlineal sammt der Wasserwage, so daß die Diopter **M** gegen die Latte gekehrt sei, drehet wieder die Elevationsschraube, bis die Luftblase in der Mitte einspielt, und läßt die Höhe der Visirlinie **AD** anmerken. Sind nun die beiden angemerkten Höhen gleich, so war die Wasserwage schon zuvor berichtiget; sind sie aber ungleich, so weichen die zwei Visirlinien nach entgegengesetzten Richtungen von der Horizontallinie **NP** gleichviel ab.

Man

Man theilt daher den Unterschied CD an der Latte in P in zwei gleiche Theile, richtet mit Hilfe der Elevationsschraube die Visirlinie nach P, und bringt mittelst der Rektifizirschraube, ohne die Richtung des Lineals zu ändern, die Luftblase an ihre angewiesene mittlere Stelle, so ist dadurch das Instrument rektifizirt.

Beim Gebrauche muß bei einem so rektifizirten Nivellirinstrumente jedesmal das Lineal mittelst der Elevationsschraube so lange erhöhet oder erniedrigt werden, bis die Luftblase genau in die Mitte einspielt.

§. 137.

Verfahren beim Nivelliren.

Wenn die Punkte, deren Höhenunterschied man sucht, nicht weit von einander entfernt sind, so ist nur eine einzige Station zu nivelliren nöthig, und das Nivelliren pflegt man in diesem Falle ein einfaches zu nennen; wenn aber die beiden Punkte sehr weit von einander abstehen, muß man die ganze Entfernung in mehrere Stationen abtheilen, welche einzeln nivellirt werd.n, und das Nivelliren heißt dann ein zusammengesetztes.

I. Einfaches Nivelliren.

a. Mit Hilfe der Schrottwage.

Dieses kann nur angehen, wenn die beiden Endpunkte nicht über 12 Fuß von einander entfernt sind. Man schlägt in den beiden Punkten Pflöcke in den Boden, setzt darüber ein Richtscheit, und in dessen Mitte die Schrottwage. Spielt der Faden nicht in der Mitte ein, so wird derjenige Pflock, welcher höher

liegt,

liegt, nach und nach so tief eingeschlagen, bis der Faden der Schrottwage auf die Mitte weiset. Nun mißt man mit einem Maßstabe die Höhen der beiden Pflöcke, und zieht sie von einander ab; die Differenz ist der gesuchte Höhenunterschied der zwei Punkte.

b. Mit Hilfe der Kanalwage oder des Nivellirdiopters.

Dabei gibt es zwei Hauptmethoden: das Nivelliren aus den Endpunkten, und das Nivelliren aus der Mitte.

Beim Nivelliren aus den Endpunkten stelle man das Instrument über den einen höhern Punkt **A** (Fig. 141) der zu nivellirenden Weite **AB** auf, und richte es hier so ein, daß man dadurch eine horizontale Visirlinie auf den andern Punkt **B** erhält. In diesem zweiten Punkte **B** läßt man durch einen unterrichteten Gehilfen die Nivellirlatte vertikal aufstellen, und das Zielbret daran so lange verschieben, bis die horizontale Visirlinie **MN** genau die Mitte des Zielbretes schneidet. Dann liest man die Höhe an der Nivellirlatte, und subtrahirt davon die Höhe der Visirlinie; der gesuchte Höhenunterschied **BD** ist nämlich gleich **BN** — **AC**.

Wäre z. B. **BN** = 5′ 6″ 8‴, und **AC** = 3′ 1″ 4‴; so würde der Höhenunterschied 2′ 5″ 4‴ betragen.

Beim Nivelliren aus der Mitte stellt man das Instrument beiläufig in der Mitte **M** (Fig. 142) der zu nivellirenden Weite **AB** gehörig auf, und läßt in den beiden Endpunkten Nivellirlatten vertikal aufstellen; man visirt nun nach **A**, richtet dort das

Ziel=

Zielbret ein, und läßt die Höhe AC ablesen; hierauf visirt man nach B, richtet dort das Zielbret ein, und läßt auch die Höhe BD ablesen; wird nun die kleinere Höhe von der größern abgezogen, so erhält man den Höhenunterschied, oder das Gefälle zwischen den zwei Punkten A und B; es ist nämlich AC — BD = AE.

Diese Art des Nivellirens wird häufiger angewendet, als jene aus den Endpunkten, weil dabei die Endpunkte so weit von einander entfernt seyn können, als bei der andern Art; ferner auch, weil selbst bei einer Abweichung der Visirlinie von der horizontalen Lage der Höhenunterschied vollkommen genau gefunden wird, sobald man das Instrument beim Anvisiren nach dem zweiten Punkte umkehrt, da das Werkzeug in den beiden Endpunkten einen gleich großen Fehler hervorbringt, der beim Abziehen sich aufhebt.

§. 138.

II. Zusammengesetztes Nivelliren.

Wenn die beiden Punkte A und E (Fig. 143), deren Gefälle man wissen will, so weit von einander abstehen, daß man aus einem einzigen Zwischenstande nicht nach beiden Punkten visiren kann, so wird das zusammengesetzte Nivelliren angewendet.

Man wählt nämlich zwischen A und E mehrere Stationspunkte, B, C, D; diese brauchen nicht in einer geraden Linie zu liegen, sondern können so gewählt werden, wie es die Bodenbeschaffenheit nöthig macht. Man braucht dann nur die einzelnen Stationsweiten zu nivelliren, und die gefundenen Gefälle, wenn der Boden immerfort steigt oder immerfort

fällt,

fällt, zu addiren. Wenn aber das Terrain abwechselnd steigt und fällt, so sammelt man die Steigungen in eine Reihe, und die Gefälle in eine zweite, und zieht die Summe der einen Reihe von der Summe der andern ab; der Rest gibt an, um wie viel der eine Endpunkt höher oder tiefer liegt als der andere.

Am zweckmäßigsten verfährt man dabei auf folgende Art:

Man schickt den einen Gehilfen, welcher der vordere heißen soll, mit der Nivellirlatte nach **B**, während der hintere Gehilfe in **A** zurückbleibt; stellt das Nivellirinstrument beiläufig in der Mitte **M** zwischen **A** und **B** gehörig auf, visirt nach den beiden Nivellirlatten, und läßt jeden Gehilfen seine Visirhöhe anschreiben. Dann begibt sich der vordere Gehilfe auf einen weitern schicklichen Punkt **C**, der hintere aber nach **B**; von der Mitte **N** der Station **BC** werden wieder die Zielbreter der beiden Gehilfen in den horizontalen Visirstrahl gebracht, und von diesen die betreffenden Visirhöhen aufgeschrieben. Auf dieselbe Art verfährt man weiter, bis der vordere Gehilfe in **E** angelangt ist. Zuletzt addirt man die von jedem Gehilfen aufgeschriebenen Visirhöhen insbesondere, und zieht die kleinere Summe von der größern ab; der Rest ist der gesuchte Höhenunterschied zwischen **A** und **E**. Ist dabei die Summe der Visirhöhen des vordern Gehilfen kleiner, als die Summe der Visirhöhen des hintern Gehilfen, so liegt **E** um den gefundenen Unterschied höher als **A**; im Gegentheile liegt **E** um eben diesen Unterschied tiefer als **A**.

Es seien z. B. folgende Visirhöhen gefunden worden:

beim

beim hintern,	vordern Gehilfen
$AA' = 3'4''5'''$;	$BB' = 0'7''2'''$:
$BB'' = 0'8''2'''$;	$CC' = 2'7''6'''$;
$CC'' = 2'9''4'''$;	$DD' = 1'0''9'''$;
$DD'' = 4'6''6'''$;	$EE' = 1'0''5'''$.
Summe $= 11'4''5'''$.	Summe $= 5'3''10'''$.

Der Punkt E liegt also um

$$11'4''5''' - 5'3''10''' = 6'0''7'''$$

höher als der Punkt A.

§. 139.

Die nivellirten Linien werden gewöhnlich in Zeichnungen dargestellt, welche Profilzeichnungen oder Profilrisse heißen. Dabei werden die gemessenen horizontalen Entfernungen der einzelnen Stationspunkte als Abscissen, die einzelnen Lattenhöhen aber als Ordinaten betrachtet. Je nachdem das Profil in der Richtung der Hauptlinie selbst liegt, oder schräg durch dieselbe gelegt ist; wird es ein Längen- oder ein Querprofil genannt.

Das Verfahren, Profilrisse anzufertigen, gehört zunächst nicht in den Wirkungskreis des Feldmessers, sondern in jenen des Bauingenieurs, kann somit hier übergangen werden.

§. 140.

Aufgaben.

1. Einen oder mehrere Punkte zu bestimmen, welche mit einem gegebenen Punkte A (Fig. 144) gleich hoch liegen.

Man stelle das Nivellirinstrument in einem solchen Punkte M auf, daß der auf A gerichtete horizon-

tale

tale Visirstrahl nicht darunter, sondern darüber hinaus gehe. Dann lasse man in A eine Latte aufstellen, daselbst das Zielbret in den horizontalen Visirstrahl einrichten und feststellen. Mit dieser Latte schicke man nun den Gehilfen nach der Gegend von B, lasse ihn daselbst mit aufgerichteter Latte und unverrücktem Zielbrete so lange hin und her gehen, und den Punkt B suchen, bis der Visirstrahl von M aus genau in den Zielpunkt trifft. Auf dieselbe Art kann man dann auch andere Punkte C, D, . . finden, welche mit A in einerlei Horizontalebene liegen.

Diese Aufgabe kommt sehr häufig vor, insbesondere, wenn es bekannt ist, daß das austretende Wasser eines Flusses einen Punkt A noch nie bedeckt habe, und man bestimmen will, welche Punkte am Ufer, bei einer ähnlichen Ergießung des Wassers, davon frei bleiben, um den rückwärts dieser Punkte liegenden Boden ohne Besorgniß einer Überschwemmung verwenden zu können; oder wenn man eine Grube horizontal ausfüllen will, wo zuerst die horizontale Grenze an der Wand bestimmt werden muß.

Die vorhergehende Aufgabe wird manchmal dahin abgeändert, daß man verlangt, einen oder mehrere Punkte ausfindig zu machen, welche um eine gewisse Länge höher oder tiefer liegen als ein gegebener Punkt A. In diesem Falle braucht man nur, nachdem das Zielbret in A in den horizontalen Visirstrahl gebracht wurde, dasselbe um die gegebene Länge höher oder tiefer festzustellen, und weiter wie vorhin zu verfahren.

2. Einen Platz zu planiren, oder denselben zu einer horizontalen Ebene durch einen gegebenen Punkt A (Fig. 145) zu ebenen.

Man stelle das Nivellirinstrument beiläufig in die

Mit-

Mitte **M** des Platzes, schlage in der Linie **AB** Pflöcke **C**, **D**, . . ein, welche mit **A** horizontal liegen; dann läßt man eben so in **P**, **Q**, **R**, **S**, . . Pflöcke in gleicher Höhe mit **A** einschlagen.

Durch diese Pflöcke oder vielmehr durch ihre obern Flächen erhält man beliebig viele Punkte, die mit **A** gleich hoch liegen. Endlich werden die Erhöhungen der Erde abgetragen, tiefe Stellen damit ausgefüllt, und die überflüssige Erde hinweggeschafft, oder die fehlende herbeigeführt, so daß die Köpfe aller Pflöcke und die darüber gespannten Schnüre gerade bedeckt werden.

Zweiter Theil.

Die Stereometrie.

Erstes Hauptstück.

Gerade Linien und Ebenen im Raume.

I. Lage der Geraden gegen einander.

§. 141.

Zwei Gerade im Raume können eine dreifache Lage gegen einander haben: entweder sind sie parallel, oder sie schneiden sich in einem Punkte, oder es ist keines von beiden der Fall, die Linien gehen nämlich an einander vorbei. In den zwei ersten Fällen liegen die beiden Geraden in einerlei Ebene, im dritten Falle lassen sie sich nicht in einer und derselben Ebene vorstellen.

Winkel im Raume, deren Schenkel nach derselben Seite hin parallel liegen, sind einander gleich, wenn sie auch in verschiedenen Ebenen vorkommen; denn je zwei Schenkel haben gleiche Richtung, daher müssen auch die Abweichungen ihrer Richtungen d. i. die von ihnen gebildeten Winkel einander gleich seyn.

II.

II. Lage der Geraden gegen die Ebenen.

§. 142.

Erklärungen.

Wenn man die gerade Linie mit der Ebene vergleicht, so unterscheidet man in Hinsicht ihrer Lage gegen einander zwei Fälle: entweder ist die Gerade mit der Ebene parallel, wenn alle ihre Punkte von der Ebene gleichweit abstehen, so daß die Gerade nach beiden Seiten beliebig verlängert mit der ebenfalls nach allen Richtungen erweiterten Ebene nicht zusammentrifft; oder die Gerade ist gegen die Ebene geneigt, und schneidet dieselbe, wenn beide erweitert werden, in einem Punkte.

Der Punkt, in welchem eine Gerade mit einer Ebene zusammentrifft, wird der Fußpunkt der Geraden genannt.

Eine gegen die Ebene geneigte Gerade kann auf derselben senkrecht oder schief aufstehen. Eine Gerade heißt auf einer Ebene senkrecht, wenn sie auf allen Geraden, welche durch ihren Fußpunkt in dieser Ebene gezogen werden, senkrecht steht; jede andere Gerade steht auf der Ebene schief.

Wenn von einem Punkte **O** (Fig. 146) zu einer Ebene eine Senkrechte **OA**, und irgend eine Schiefe **OB** gezogen wird, so ist die Senkrechte kürzer als die Schiefe. Denn, verbindet man die Fußpunkte **A** und **B** durch eine Gerade, so erhält man das rechtwinklige Dreieck **ABO**, worin **OA** als Kathete kürzer ist, als die Hypothenuse **OB**.

Die

Die Entfernung eines Punktes von einer Ebene mißt man daher durch die Senkrechte, welche von jenem Punkte auf die Ebene herabgelassen wird.

Wenn man von dem Endpunkte einer Geraden, welche auf einer Ebene schief aufstehet, auf diese eine Senkrechte herabläßt, und den Fußpunkt dieser Senkrechten mit dem Fußpunkte der Geraden verbindet, so ist die Verbindungslinie die Projektion der Geraden auf die Ebene. Ist in der frühern Figur die Gerade **OA** senkrecht auf die Ebene **MN**, so ist **AB** die Projektion der Geraden **OB** auf die Ebene **MN.**

§. 143.

Lehrsätze.

1. Wenn zwei Punkte einer Geraden von einer Ebene auf derselben Seite gleich weit abstehen, so ist die Gerade mit der Ebene parallel.

Es seien (Fig. 147) die Punkte **A** und **B** von der Ebene **MN** gleich weit entfernt, nämlich die Senkrechten **AC** und **BD** gleich; so ist zu beweisen, daß **AB** parallel mit der Ebene **MN** ist. — Zieht man **CD**, so müssen **AC** und **BD**, weil sie auf der Ebene **MN** senkrecht stehen, auch auf der Geraden **CD** senkrecht, folglich unter einander parallel seyn. Da nun auch **AC** $\#$ **BD**, so ist **ABCD** ein Parallelogramm, also **AB** $\parallel$ **CD.** Ist aber **AB** parallel mit der Geraden **CD**, so muß sie auch mit der Ebene **MN** parallel seyn, denn würde **AB** die Ebene **MN** irgendwo erreichen, so müßte dieses in irgend einem Punkte der **CD** oder ihrer Verlängerung geschehen, aber **AB** kann mit der Geraden **CD** nie zusammentreffen, weil

sie

sie mit ihr parallel ist; also kann sie auch die Ebene **MN** nicht erreichen; sie ist daher mit ihr parallel.

§. 144.

2. Wenn man von einem Punkte einer Geraden, welche auf einer Ebene senkrecht steht, zu dieser drei gleich lange gerade Linien zieht, und durch ihre Fußpunkte in der Ebene einen Kreis beschreibt, so ist der Fußpunkt der Senkrechten zugleich der Mittelpunkt dieses Kreises.

Um dieses zu erweisen, sei (Fig 148) **OP** $\perp$ **MN**, und **AO** $=$ **BO** $=$ **CO**. Damit **P** der Mittelpunkt des durch **A**, **B** und **C** beschriebenen Kreises sei, muß **AP** $=$ **BP** $=$ **CP** seyn, was sich leicht nachweisen läßt. Die rechtwinkligen Dreiecke **AOP**, **BOP**, **COP** sind nämlich kongruent, weil sie gleiche Hypothenusen und eine gemeinschaftliche Kathete haben, daher müssen sie auch die zweite Kathete gleich haben; es ist demnach wirklich **AP** $=$ **BP** $=$ **CP**, d. i. der Fußpunkt **P** der Senkrechten fällt mit dem Mittelpunkte des durch **A**, **B**, **C**, beschriebenen Kreises zusammen.

§. 145.

3. Wenn eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht, so ist auch jede mit ihr parallele Gerade auf derselben Ebene senkrecht.

Voraussetzung: es sei (Fig. 149) **AB** $\perp$ **MN** und **CD** $\parallel$ **AB**. Zu beweisen ist, daß unter dieser Voraussetzung auch **CD** $\perp$ **MN** ist, d. h. daß **CD** mit

je-

jeder Geraden, welche in der Ebene MN durch den Punkt D gezogen wird, einen rechten Winkel bildet. — Man ziehe in der Ebene MN durch D irgend eine Gerade DE, und zugleich die damit Parallele BF, so ist der Winkel $CDE = ABF$, weil die Schenkel dieser Winkel parallel sind; aber $ABF = 90°$, weil nach der Annahme $AB \perp MN$ ist; also ist auch $CDE = 90°$, oder $CD \perp DE$. Die Gerade DE ist eine beliebige durch D in der Ebene MN gezogene Gerade; was daher von dieser Geraden bewiesen wurde, gilt auch von jeder andern so gezogenen; also steht CD auf jeder Geraden senkrecht, welche durch ihren Fußpunkt D in der Ebene MN gezogen wird, daher senkrecht auf dieser Ebene selbst.

Umgekehrt:

4. Wenn auf einer Ebene zwei Gerade senkrecht stehen, so müssen sie parallel seyn.

Es seien AB und CD auf der Ebene MN senkrecht. Wäre nun CD mit AB nicht parallel, so müßte sich durch D eine andere mit AB parallele Linie DG ziehen lassen; dann aber müßte nach dem vorhergehenden Satze auch $DG \perp MN$ seyn, was nicht möglich ist, da durch einen Punkt auf eine Ebene nur eine einzige Senkrechte gezogen werden kann. DG kann also mit AB nicht parallel seyn. Das, was hier von GD bewiesen wurde, gilt von jeder Geraden außer DC; also kann keine durch D gezogene Gerade mit AB parallel seyn, außer CD.

§. 146.

5. Unter allen Winkeln, welche eine auf einer Ebene schief stehende Gerade

mit den durch ihren Fußpunkt in dieser Ebene gezogenen Geraden bildet, ist derjenige der kleinste, den sie mit ihrer Projektion in dieser Ebene bildet.

Es sei (Fig. 150) **BC**⊥**MN**, also **AC** die Projektion der Geraden **AB** auf **MN**, und **AD** irgend eine in der Ebene **MN** durch A gezogene Gerade; so ist zu beweisen, daß der Winkel **BAC** kleiner ist, als der Winkel **BAD**. — Man mache **AE**=**AC**, und ziehe **BE**. Betrachtet man die beiden Winkel **BAC** und **BAE**, so sieht man, daß sie gleich lange Schenkel haben, daß aber die Endpunkte der Schenkel im Winkel **BAC** näher an einander liegen als im Winkel **BAE**, weil die Senkrechte **BC** kürzer seyn muß als die Schiefe **BE**. Wenn aber die Schenkel eines Winkels dieselbe Länge beibehalten, so ist gewiß, daß der Winkel um so kleiner wird, je weniger die Schenkel, folglich auch ihre Endpunkte, von einander abweichen; oder: von zwei Winkeln, welche gleich lange Schenkel haben, ist derjenige der kleinere, bei dem die Endpunkte näher an einander liegen. Demnach ist wirklich der Winkel **BAC** kleiner als der Winkel **BAE** oder **BAD**.

Da der Winkel, den eine Gerade mit ihrer Projektion in einer Ebene bildet, kleiner ist als jeder andere Winkel, den sie mit einer in derselben Ebene gezogenen Geraden bildet, so dient jener Winkel dazu, die Neigung der Geraden gegen die Ebene anzugeben. Der Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene ist also der Winkel, den diese Gerade mit ihrer Projektion in dieser Ebene bildet; so ist **BAC** der Neigungswinkel der Geraden **AB** gegen die Ebene **MN**.

§. 147.

§. 147.

Aufgaben.

1. Auf eine Ebene **MN** (Fig. 148) von einem außer ihr liegenden Punkte **O** eine Senkrechte zu fällen.

Man ziehe von dem Punkte **O** (vermittelst einer gespannten Schnur) zu der Ebene **MN** drei gleich lange Gerade, suche den Mittelpunkt des Kreises, der durch ihre Fußpunkte gezogen werden kann; dieser Mittelpunkt **P** ist zugleich der Fußpunkt der gesuchten Senkrechten; verbindet man ihn daher mit dem gegebenen Punkte **O**, so ist **OP** die verlangte Senkrechte.

2. Auf einer Ebene **MN** (Fig. 149) in einem Punkte **D** eine Senkrechte zu errichten.

Man fällt von einem beliebigen Punkte **A** außer der Ebene auf diese eine Senkrechte **AB**, lege durch die Punkte **A**, **B** und **D** eine Ebene, und ziehe in dieser **DC** parallel mit **BA**, so ist **DC** die gesuchte Senkrechte. Denn weil die Geraden **DC** und **BA** parallel sind, und eine von ihnen **BA** auf der Ebene **MN** senkrecht steht, so muß auch die andere **DC** auf **MN** senkrecht seyn.

Die Errichtung einer Senkrechten auf einer Ebene kann sehr zweckmäßig auch mit Hilfe eines rechtwinkligen Winkelhakens geschehen, wenn man diesen an den gegebenen Punkt in der Ebene anlegt.

3. Mit einer Ebene **MN** (Fig. 147) durch einen außer ihr liegenden Punkt **A** eine parallele Linie zu ziehen.

Hier handelt es sich nur darum, noch einen zweiten Punkt B zu bestimmen, der von der Ebene MN eben so weit absteht als A. Zu diesem Ende fällt man von A auf MN die Senkrechte AC, errichtet in irgend einem Punkte D auf MN die Senkrechte DB, und schneidet DB=CA ab. Die Gerade AB muß nun mit der Ebene MN parallel seyn.

III. Lage der Ebenen gegen einander.

§. 148.

Erklärungen.

Vergleicht man die Lage zweier Ebenen gegen einander, so findet man, daß die beiden Ebenen entweder parallel sind, wenn sie nämlich überall gleich weit von einander abstehen, so daß sie auch, noch so weit erweitert, nie zusammentreffen; oder daß sie gegen einander geneigt sind, wenn sie hinlänglich erweitert sich begegnen.

Der Abstand zweier parallelen Ebenen ist die Senkrechte, welche von einem Punkte der einen auf die andere gefällt wird.

Zwei nicht parallele Ebenen schneiden sich, hinlänglich erweitert, in einer geraden Linie. Errichtet man in einem Punkte der Durchschnittslinie zweier Ebenen auf dieselbe zuerst eine Senkrechte, welche in der einen Ebene liegt, und dann eine Senkrechte, welche in der zweiten Ebene liegt, so ist der von diesen Senkrechten gebildete Winkel das Maß für die Neigung der beiden Ebenen gegen einander. Der Neigungswinkel zweier Ebenen ist also der Winkel, den

die

die Senkrechten bilden, die man in irgend einem Punkte der Durchschnittslinie auf dieselbe in den beiden Ebenen errichtet. Wenn (Fig. 151) $AO \perp MN$, und $BO \perp MN$ ist; so ist **AOB** der Neigungswinkel der Ebenen **MR** und **MS**.

Wenn der Neigungswinkel zweier Ebenen ein rechter ist, so stehen sie auf einander senkrecht; sonst schief.

§. 149.

Lehrsätze.

1. Wenn drei Punkte einer Ebene von einer andern Ebene auf einerlei Seite derselben gleich weit entfernt sind; so sind die beiden Ebenen parallel.

Es seien (Fig. 152) die in der Ebene **MN** liegenden Punkte **A**, **B**, **C** von der Ebene **PQ** gleich weit entfernt, also die auf **PQ** senkrechten Geraden **AD**, **BE** und **CF** gleich lang; so ist zu beweisen, daß auch jeder andere Punkt **G** der Ebene **MN** von der Ebene **PQ** dieselbe Entfernung hat. — Man ziehe **AB**, **BC**, **CA**, so sind diese Geraden mit der Ebene **PQ** parallel, weil in jeder zwei Punkte gleich weit von der Ebene **PQ** abstehen. Man ziehe ferner in der Ebene **MN** durch **G** eine Gerade, welche den Umfang des Dreieckes **ABC** in zwei Punkten **H** und **I** schneidet. Den Abstand, den die Geraden **AB**, **BC**, **CA** von der Ebene **PQ** haben, haben auch die zwei Punkte **H** und **I**, folglich, weil dann $HI \parallel PQ$ seyn muß, auch die übrigen Punkte der **HI**, somit auch der Punkt **G**. Es hat also wirklich jeder Punkt

G der Ebene **MN** von der Ebene **PQ** denselben Abstand wie die Punkte A, B, C; also ist die Ebene **MN** mit der Ebene **PQ** parallel.

2. Wenn eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht, so muß auch jede durch diese Gerade gelegte Ebene auf jener Ebene senkrecht stehen.

Es sei (Fig. 153) AB ⊥ MN, und man lege durch AB die Ebene ABC, welche die Ebene **MN** in die Geraden AC schneidet. — Um zu beweisen, daß die Ebene ABC auf MN senkrecht steht, muß man zeigen, daß ihr Neigungswinkel ein rechter ist. Den Neigungswinkel der beiden Ebenen erhält man, wenn man in einem Punkte ihrer Durchschnittslinie AC darauf zwei Senkrechte in den beiden Ebenen errichtet. Auf der Durchschnittslinie steht im Punkte A bereits die AB in der Ebene ABC senkrecht; errichten wir darauf noch in der Ebene **MN** die Senkrechte AD, so ist BAD der Neigungswinkel der zwei Ebenen BAC und **MN**. Dieser Winkel ist aber ein rechter, weil nach der Annahme AB auf der Ebene MN, folglich auch auf der Geraden AD, senkrecht ist, also steht die Ebene BAC auf der Ebene MN senkrecht.

§. 150.

Aufgaben.

1. Mit einer Ebene PQ (Fig. 152) durch einen Punkt A eine parallele Ebene zu legen.

Bei der Auflösung dieser Aufgabe kommt es nur darauf an, zwei Punkte B und C zu bestimmen, welche

von

von der Ebene **PQ** so weit abstehen, als der Punkt **A**. Zu diesem Ende fälle man von **A** auf **PQ** die Senkrechte **AD**, errichte in irgend zwei Punkten **E** und **F** auf **PQ** die Senkrechten **EB** und **FC**, und mache diese der **DA** gleich. Wird nun durch die drei Punkte **A**, **B** und **C** eine Ebene gelegt, so muß diese mit der Ebene **PQ** parallel seyn.

2. Durch einen Punkt eine Ebene zu legen, welche auf einer gegebenen Ebene senkrecht steht.

Man ziehet durch den gegebenen Punkt eine senkrechte Gerade auf die gegebene Ebene, und lege durch diese Gerade eine Ebene; so ist diese auf der andern Ebene senkrecht.

IV. Körperliche Winkel.

§. 151.

Erklärungen.

Die gegenseitige Neigung mehrerer Ebenen, welche in einem Punkte zusammentreffen, heißt ein körperlicher Winkel oder eine Körperecke; z. B. die Ecke eines Zimmers, eines Kastens.

Die Geraden, in denen sich je zwei auf einander folgende Ebenen durchschneiden, nennet man die Kanten, und den Punkt, in welchem alle Ebenen zusammenstoßen, die Spitze oder den Scheitel des Körperwinkels. Ein Winkel, welcher von zwei auf einander folgenden Kanten gebildet wird, heißt ein Kantenwinkel.

Um einen Körperwinkel zu benennen, gibt man entweder bloß den Buchstaben am Scheitel an, oder

man

man nennt auch die Buchstaben an allen Kanten so, jedoch, daß der Buchstabe an der Spitze zuerst gesetzt wird. Die körperliche Ecke Fig. 154 heißt die Ecke **O**, oder die Ecke **OABC**; **O** ist die Spitze; **OA**, **OB**, **OC** sind die Kanten, **AOB**, **BOC**, **COA** die Kantenwinkel.

Von zwei Ebenen kann kein körperlicher Winkel gebildet werden, weil solche in einer geraden Linie, und nicht bloß in einem Punkte zusammenstoßen; zur Entstehung eines Körperwinkels sind also wenigstens drei Ebenen erforderlich. Ein Körperwinkel heißt dreiseitig, vierseitig, . . ., je nachdem er von drei, vier, . . Ebenen gebildet wird.

§. 152.

Lehrsätze.

1. In einem dreiseitigen Körperwinkel müssen immer zwei Kantenwinkel zusammengenommen größer seyn, als der dritte.

Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus der Art der Entstehung einer Körperecke. Um aus den Kantenwinkeln a, b, c, (Fig. 155) einen Körperwinkel zu bilden, drehet man die Ebenen **AOB** und **DOC** so lange um die Geraden **OB** und **OC**, bis die Schenkel **OA** und **OD** in einander fallen. Damit ein Körperwinkel entstehen könne, müssen **OA** und **OD** außerhalb der Ebene **BOC** zusammenfallen, was nur dann möglich ist, wenn die Winkel a und c zusammengenommen größer sind als b. Eben so läßt sich zeigen, daß $a+b$ größer als c, und $b+c$ größer als a seyn müssen. In jeder dreiseitigen Ecke ist also die Summe zweier Kantenwinkel größer als die dritte.

2.

2. In jedem Körperwinkel ist die Summe aller Kantenwinkel immer kleiner als vier Rechte.

Es sei der Körperwinkel O (Fig. 156) unten durch die Ebene ABC geschnitten, so sind

an der Ecke A die Kantenwinkel $a+b$ größer als n,
" " " B " " $c+d$ " " p,
" " " C " " $e+f$ " " q;

daher auch die Summe $a+b+c+d+e+f$ größer als $n+p+q$,
oder " " $a+b+c+d+e+f$ größer als 2 Rechte
weil $n+p+q$ gleich 2 Rechte ist.

Die Summe $a+b+c+d+e+f$ aber bildet mit den Kantenwinkeln x, y, z die Summe aller Winkel von drei Dreiecken, welche 3mal 2 Rechte = 6 Rechte betragen. Wenn nun auf die Summe $a+b+c$ $d+e+f$ mehr als 2 Rechte kommt, so müssen die drei Kantenwinkel x, y, z zusammengenommen nothwendig weniger als 4 Rechte betragen.

Auf dieselbe Art kann der Beweis auch für mehrseitige Körperwinkel geführt werden.

Wenn mehrere ebene Winkel zusammen 4 Rechte d. i. 360°, oder mehr als 360°, betragen, so können sie keine körperliche Ecke bilden. So ist z. B. aus vier Winkeln, deren jeder 90° oder 100° beträgt, keine Ecke möglich, weil im erstern Falle die Summe aller Winkel 360°, im zweiten mehr als 360° beträgt.

§. 153.

Regelmäßige Ecken.

Eine Ecke, an welcher jeder Kantenwinkel gleich ist dem Winkel eines regelmäßigen Vieleckes von be-

stimm-

stimmter Seitenanzahl, heißt eine regelmäßige Ecke. Z. B. 60° ist der Winkel eines regulären Dreieckes, eine Ecke nun, die z. B. vier solche Winkel zu Kantenwinkeln hat, ist regelmäßig.

Es gibt nur fünf regelmäßige Ecken, wie wir sogleich beweisen wollen.

In einem regelmäßigen Dreiecke ist jeder Winkel gleich 60°. Drei solche Winkel geben 180°, also bilden sie eine Ecke; vier solche Winkel betragen 240°, können also auch in einer Ecke zusammenstoßen; so auch fünf derlei Winkel, die zusammen 300° ausmachen; sechs oder mehr solcher Winkel können keinen Körperwinkel bilden, da ihre Summe 360° oder darüber beträgt. Es gibt daher nur drei regelmäßige Ecken, deren Kantenwinkel gleich sind dem Winkel eines regelmäßigen Dreieckes, nämlich eine drei-, eine vier- und eine fünfseitige.

In einem regelmäßigen Vierecke ist jeder Winkel ein Rechter. Von solchen Winkeln können nur drei in einer Ecke zusammenstoßen; vier solche Winkel geben schon vier Rechte. Es gibt daher eine einzige, nämlich eine dreiseitige regelmäßige Ecke, deren Kantenwinkel gleich sind dem Winkel eines Quadrates.

In einem regelmäßigen Fünfecke beträgt jeder Winkel 108°, so daß ihrer nur drei zusammen einen Körperwinkel bilden können. Es gibt daher nur eine dreiseitige Ecke, deren jeder Kantenwinkel gleich ist dem Winkel eines regelmäßigen Fünfeckes.

Der Winkel eines regulären Sechseckes ist 120°. Von solchen Winkeln kann keine Ecke gebildet werden, weil schon drei derselben 360° betragen. Dasselbe

gilt

gilt um so mehr von den Winkeln eines regelmäßigen Siebeneckes oder mehrseitigen Polygons.

Es kann also nur fünf regelmäßige Ecken geben.

Zweites Hauptstück.

Körper.

I. Eintheilung und Erklärung der Körper.

§. 154.

Allgemeine Begriffe.

Jeder nach allen Seiten begrenzte Raum wird ein Körper genannt.

Die Grenzen eines Körpers sind Flächen. Weil die Anzahl, Gestalt und Lage dieser Grenzflächen sehr verschieden seyn können, so sind unzählig viele verschiedene Körper denkbar.

Man unterscheidet im Allgemeinen eckige und runde Körper; erstere werden von lauter Ebenen eingeschlossen, letztere entweder von ebenen und gekrümmten Flächen, oder von einer einzigen gekrümmten Fläche. So ist der Würfel ein eckiger Körper; eine Walze, eine Kugel sind runde Körper.

Wenn ein Körper auf einer Ebene aufliegt, so heißt diese die Grundfläche oder Basis; und wenn mit dieser als Grundfläche betrachteten Ebene eine zweite Ebene parallel läuft, so sagt man: der Körper hat zwei parallele Grundflächen. Bei dem Würfel z. B. kann jede Fläche als Grundfläche betrachtrachtet werden; eine Walze hat zwei Grundflächen, nämlich die beiden Kreisflächen.

Die übrigen Grenzflächen eines Körpers werden Seitenflächen, und ihre Summe die Seitenoberfläche genannt. Alle Grenzflächen eines Körpers zusammengenommen nennt man die Oberfläche, und den Raum, welchen diese Grenzflächen einschließen, den körperlichen oder kubischen Inhalt.

1. Eckige Körper.

§. 155.

Drei Ebenen bilden eine körperliche Ecke, schließen aber noch keinen Raum ein. Damit ein Raum nach allen Seiten abgeschlossen, d. i. damit ein Körper gebildet werde, sind daher wenigstens vier Ebenen erforderlich. Die Durchschnittslinie je zweier Grenzebenen wird eine Kante des Körpers genannt.

Man pflegt die eckigen Körper in regelmäßige und unregelmäßige einzutheilen. Regelmäßige oder reguläre Körper heißen diejenigen, bei denen alle Grenzebenen und Ecken regelmäßig und kongruent sind; alle übrigen Körper sind unregelmäßig.

Unter den unregelmäßigen Körpern kommen besonders zwei Arten sehr häufig vor; solche, welche sich über der Grundfläche durchaus gleich weit ausdehnen, bei denen daher die Seitenkanten parallel sind, sie heißen Prismen; und solche, welche über der Grundfläche in eine Spitze zusammenlaufen, bei denen nämlich alle Seitenkanten in einem und demselben Punkte zusammentreffen, sie heißen Pyramiden.

§.

§. 156.

Regelmäßige Körper.

Da es nur fünf regelmäßige Ecken gibt, so kann es auch nur fünf regelmäßige Körper geben. Diese sind:

1) das Tetraeder (Fig. 157), welches von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt ist, von denen immer drei in einer Ecke zusammenstoßen; es hat 4 Ecken und 6 Kanten;

2) das Oktaeder (Fig. 158), welches von acht gleichseitigen Dreiecken eingeschlossen wird, von denen je vier eine Ecke bilden; es hat 6 solche Ecken und 12 Kanten;

3) das Ikosaeder (Fig. 159); es wird von zwanzig gleichseitigen Dreiecken begrenzt, deren je fünf einen Körperwinkel bilden, hat 12 Ecken und 30 Kanten;

4) das Hexaeder (Kubus, Würfel), das von sechs Quadraten eingeschlossen ist; es hat 8 dreiseitige Ecken und 12 Kanten (Fig. 160);

5) das Dodekaeder (Fig. 161), welches von zwölf regelmäßigen Fünfecken begrenzt ist, deren je drei in einer Ecke zusammenstoßen; es hat 20 Ecken und 30 Kanten.

§. 157.

Prismen.

Ein Prisma (Ecksäule) ist ein Körper, welcher von zwei kongruenten und parallel gestellten Vielecken und von so vielen Parallelogrammen, als eines der Vielecke Seiten hat, begrenzt wird.

Man

Man kann sich ein Prisma ABCDEFGH (Fig. 162) dadurch entstanden denken, daß sich die Ebene ABCD längs der Kante AE immer in paralleler Richtung gleichförmig fortbewegt.

Die Grundflächen eines Prisma sind kongruente und parallel liegende Vielecke, die Seitenflächen sind Parallelogramme.

Die Seitenkanten eines Prisma sind unter einander gleich und parallel.

Der Abstand der beiden Grundflächen heißt die Höhe des Prisma.

Wenn man auf die Lage der Seitenkanten gegen die Grundfläche Rücksicht nimmt, so ist das Prisma ein gerades oder ein schiefes, je nachdem die Seitenkanten auf der Grundfläche senkrecht oder schief aufliegen. In einem geraden Prisma ist die Höhe einer Seitenkante gleich; die Seitenkanten sind Rechtecke.

Sieht man auf die Anzahl der Seitenkanten, so heißt das Prisma drei-, vier-, oder mehrseitig, je nachdem es drei, vier oder mehrere Seitenkanten hat.

Fig. 162 stellt ein gerades vierseitiges, Fig. 163 ein schiefes dreiseitiges Prisma vor.

Ein Prisma, dessen alle Grenzfläche'n Parallelogramme sind, heißt ein Parallelopiped. Dieses ist, wie jedes Prisma, entweder gerade oder schief.

Ein Prisma, dessen alle Grenzflächen Rechtecke sind, heißt ein rechtwinkliges Parallelopiped. Ein rechtwinkliges Parallelopiped muß immer auch gerade seyn.

Ein Prisma, das von lauter Quadraten eingeschlossen wird, heißt ein Würfel, Kubus. Jeder

Wür-

Würfel ist ein rechtwinkliges Parallelopiped; es hat lauter gleiche Kanten und kongruente Grenzflächen.

§. 158.

Pyramiden.

Eine Pyramide (Spitzsäule) ist ein Körper, der von irgend einem Vielecke und von so vielen Dreiecken, als das Vieleck Seiten hat, begrenzt wird.

Man kann sich eine Pyramide SABCDE (Fig. 164) dadurch entstanden denken, daß sich eine Ebene ABCDE längs der Kante AS mit sich selbst parallel bewegt, und während dieser Bewegung sich ähnlich bleibend, gleichförmig abnimmt, bis sie endlich in einem Punkte S verschwindet.

Die Grundfläche einer Pyramide ist irgend ein Vieleck, die Seitenflächen sind immer Dreiecke. Der Punkt, in welchem alle Seitenflächen zusammenstoßen, heißt der Scheitel oder die Spitze. Eine Senkrechte von der Spitze auf die Grundfläche wird die Höhe genannt.

Eine Pyramide, in welcher die Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist, und wo die Höhe genau in den Mittelpunkt der Grundfläche eintrifft, heißt eine gerade oder aufrechtstehende Pyramide; jede andere ist schief. In einer geraden Pyramide sind alle Seitenkanten gleich, und alle Seitenflächen kongruent.

Eine Pyramide ist drei-, vier- oder mehrseitig, je nachdem sie drei, vier oder mehrere Seitenkanten hat.

2. Runde Körper.

§. 159.

Cylinder.

Ein Cylinder (Rundsäule, Walze) ist ein Körper, welcher von zwei gleichen parallelen Kreisen und von einer gekrümmten Fläche begrenzt wird.

Ein Cylinder (Fig. 165) kann als ein Prisma betrachtet werden, dessen Grundflächen Kreise sind. Die gekrümmte Seitenfläche heißt der Mantel des Cylinders.

Die Gerade, welche die Mittelpunkte der beiden Kreisflächen verbindet, wird die Axe, und der Abstand der beiden Kreisflächen die Höhe des Cylinders genannt.

Wenn die Axe auf der Grundfläche senkrecht stehet, so heißt der Cylinder ein gerader, sonst ein schiefer. Einen geraden Cylinder kann man sich dadurch entstanden denken, daß sich ein Rechteck um eine seiner Seiten herumdrehet. In einem geraden Cylinder stellt die Axe zugleich die Höhe vor.

Wenn in einem geraden Cylinder die Axe dem Durchmesser der Grundfläche gleich ist, so heißt er ein gleichseitiger Cylinder.

§. 160.

Kegel.

Ein Kegel ist ein Körper, der von einem Kreise und von einer in einen Punkt auslaufenden gekrümmten Fläche begrenzt wird. Ein Kegel (Fig. 166) kann als eine

eine Pyramide betrachtet werden, deren Grundfläche ein Kreis ist. Die gekrümmte Seitenfläche nennet man den Mantel, und den Punkt, in welchem sie zusammenläuft, den Scheitel oder die Spitze des Kegels.

Die Mantelfläche eines Kegels ist so beschaffen, daß jede Gerade, welche von der Spitze zum Umfange der Grundfläche gezogen wird, ganz in diese gekrümmte Fläche fällt. Eine solche Gerade heißt eine Seite des Kegels.

Die Gerade, welche die Spitze mit dem Mittelpunkte der Grundfläche verbindet, heißt die Axe, und die Senkrechte von der Spitze auf die Grundfläche die Höhe des Kegels.

Ein Kegel, dessen Axe auf der Grundfläche senkrecht steht, heißt ein gerader; jeder andere ein schiefer. Einen geraden Kegel kann man sich dadurch entstanden denken, daß sich ein rechtwinkliges Dreieck um eine seiner Katheten herumdrehet. In einem geraden Kegel ist die Axe zugleich die Höhe und alle Seiten sind unter einander gleich.

Wenn im geraden Kegel die Axe dem Durchmesser der Grundfläche gleich ist, so heißt er ein gleichseitiger Kegel.

§. 161.

Kugel.

Eine Kugel (Fig. 167) ist ein Körper, welcher von einer einzigen gekrümmten Fläche so begrenzt wird, daß jeder Punkt der Oberfläche von einem innerhalb liegenden Punkte gleich weit abstehet.

Dieser innerhalb der Kugel liegende Punkt heißt der Mittelpunkt oder das Zentrum.

Eine Gerade, welche vom Mittelpunkte bis an die Oberfläche gezogen wird, heißt ein Halbmesser; eine Gerade, welche von einem Punkte der Oberfläche durch das Zentrum bis zu dem entgegengesetzten Punkte der Oberfläche geht, wird ein Durchmesser der Kugel genannt.

Man kann sich jede Kugel durch Umdrehung eines Halbkreises um den Durchmesser entstanden denken. Dieser Durchmesser heißt dann die Axe, und dessen Endpunkte sind die Pole der Kugel.

II. Netze der Körper.

§. 162.

Die Darstellung der Grenzflächen eines Körpers auf einer einzigen Ebene, so daß sie gehörig ausgeschnitten und zusammengefügt jenen Körper bilden, heißen ein Körpernetz.

Die Körpernetze können zu mannigfaltigen Zwecken angewendet werden. Sie dienen, um die Oberfläche der Körper zu bestimmen, um verschiedene hohle Körper zusammenzufügen, andere gegebene Körper mit Papier zu überziehen, und so verschiedene Zeichnungen auf ihre Oberflächen zu bringen; endlich sind die Netze auch bei der Verfertigung der Modelle von großer Wichtigkeit.

Anfänger sollen die Netze nicht nur verzeichnen lernen, sondern aus denselben auch die Körper selbst zusammenstellen.

§. 163.

Netze der eckigen Körper.

1. Um das Netz eines Tetraeders zu erhalten,

ten, verzeichne man (Fig. 168) ein gleichseitiges Dreieck, halbire dessen Seiten, und verbinde die Halbirungspunkte durch gerade Linien.

2. Das Netz eines Oktaeders wird erhalten, wenn man zuerst das Netz eines Tetraeders verzeichnet, und dann an dieses ein zweites ganz gleiches Netz so anlegt, daß beide Netze eine Seite gemeinschaftlich haben, wie aus Fig. 169 zu sehen.

3. Das Netz eines Ikosaeders erhält man, wenn man (Fig. 170) eine gerade Linie in fünf gleiche Theile theilt, über diesen nach oben und unten gleichseitige Dreiecke konstruirt, dann alle Scheitel auf einer Seite durch eine Gerade verbindet, und längs derselben, nachdem sie verlängert wird, wieder gleichseitige Dreiecke verzeichnet, so daß ihrer auf jeder Seite fünf erscheinen.

4. Das Würfelnetz (Fig. 171) entstehet, wenn man zwischen zwei Geraden vier Quadrate verzeichnet, und überdies noch zwei Quadrate an den entgegengesetzten Seiten eines jener erstern Quadrate konstruirt.

5. Um das Netz des Dodekaeders zu konstruiren, beschreibe man (Fig. 172) über den Seiten eines regelmäßigen Fünfeckes wieder regelmäßige Fünfecke (wobei man sich mit Vortheil der Verlängerung der Diagonalen bedient), und lege an dieses Netz ein zweites ihm vollkommen gleiches so an, daß beide in einer Seite zusammenstoßen.

6. Um das Netz eines Prisma zu erhalten, verzeichne man (Fig. 173 und 174) neben einander die Parallelogramme, welche die Seitenoberfläche bilden, und setze an eines dieser Parallelogramme oben und unten die Grundfläche zu.

7. Das Netz einer Pyramide erhält man, wenn man zuerst die Seitendreiecke neben einander so konstruirt, daß sie die Spitze gemeinschaftlich haben (Fig. 175), und an eines dieser Dreiecke unten die Grundfläche anlegt.

§. 164.

Netze der runden Körper.

1. Netz eines Cylinders.

Die Mantelfläche eines geraden Cylinders bildet, wenn man sich dieselbe abgewickelt denkt, ein Rechteck, dessen Grundlinie gleich ist dem Umfange der Grundfläche. Man erhält demnach das Netz eines Cylinders, wenn man (Fig. 176) zuerst einen Kreis beschreibt, daran eine Tangente zieht, und dieselbe $3\frac{1}{7}$mal so groß macht als der Durchmesser des Kreises ist, dann über dieser Geraden ein Rechteck konstruirt und an der Gegenseite wieder einen mit dem frühern gleich großen Kreis anbringt.

2. Netz eines Kegels.

Die Mantelfläche eines geraden Kegels bildet, wenn man sich dieselbe abgewickelt denkt, einen Kreisausschnitt, dessen Bogen gleich ist dem Umfange der Grundfläche.

Um daher das Netz eines geraden Kegels zu erhalten, verzeichne man (Fig. 177) zuerst einen Kreis, beschreibe dann außerhalb desselben einen ihn berührenden Kreisbogen, trage auf diesem den Durchmesser des ersten Kreises $3\frac{1}{7}$mal auf, und vollende den Kreisausschnitt.

3. Netz einer Kugel.

Die Oberfläche der Kugel kann nicht auf einer ein=

einzigen Ebene dargestellt werden, daher läßt sich davon auch kein vollkommen genaues Netz konstruiren. Ein angenähertes Netz läßt sich auf folgende Art anfertigen: Man theile eine Gerade **AB** (Fig. 180) in 30 gleiche Theile, deren 12 auf den Umfang der Kugel gehen sollen, und beschreibe mit einem Halbmesser von 10 solchen Theilen aus den Punkten **A**, 1, 2, 3, . . . 11, und eben so aus den Punkten **B**, 29, 28, 27, . . . 19 Kreisbogen, welche die Gerade **AB** durchschneiden; dadurch erhält man 12 gleiche erhabenseitige Zweiecke, welche sorgfältig zusammengebogen beinahe eine Kugeloberfläche geben.

III. Körperschnitte.

§. 165.

Prismenschnitte.

Wenn ein Prisma durch eine Ebene durchschnitten wird, welche mit der Grundfläche parallel ist, so ist die Durchschnittsfigur, da das Prisma durchaus dieselbe Weite hat, mit der Grundfläche kongruent; was auch aus der Entstehungsweise des Prisma durch die Bewegung eines Vieleckes hervorgehet. Durch jeden solchen Durchschnitt zerfällt das Prisma in zwei andere Prismen, welche unter einander gleich oder ungleich sind, je nachdem der Schnitt durch die Mitte einer Seitenkante, oder außerhalb derselben angebracht wird. abc $\cong$ **ABCD**, Fig. 162.

Legt man durch zwei gegenüberstehende Kanten **BC** und **EH** (Fig. 185) eine Ebene, so heißt der dadurch entstehende Schnitt **BEHC** ein Diagonalschnitt des Prisma. Ein Parallelopiped wird durch jeden

Dia-

Diagonalschnitt in zwei kongruente dreiseitige Prismen getheilt.

§. 166.

Pyramidalschnitte.

Wenn man eine Pyramide parallel mit der Grundfläche durch eine Ebene durchschneidet, so erhält man, da die Pyramide nach oben gleichförmig abnimmt, eine Figur, welche der Basis ähnlich ist. Die Pyramide zerfällt dadurch in zwei Theile, eine kleine Pyramide, und einen zwischen zwei parallelen Ebenen erhaltenen Körper, den man eine abgekürzte Pyramide oder einen Pyramidalstutz nennt.

Ein Pyramidalstutz **ABCabc** (Fig. 179) ist daher der Unterschied zwischen zwei Pyramiden **SABC** und **Sabc**, deren Grundflächen die untere und die obere Grundfläche der abgekürzten Pyramide sind, und deren gemeinschaftliche Spitze **S** in dem Durchschnitte der verlängerten Seitenkanten des Stutzes liegt.

Die Entfernung der beiden Grundflächen ist die Höhe des Pyramidalstutzes.

Wenn die Höhe einer abgekürzten Pyramide und zwei parallele Kanten der untern und der obern Grundfläche bekannt sind, so lassen sich daraus die Höhen der beiden Pyramiden finden, deren Unterschied der Pyramidalstutz ist.

Es sei nämlich das Dreieck abc (Fig. 179) ähnlich und parallelgestellt mit dem Dreiecke **ABC**, so ist **ABCabc** ein Pyramidalstutz; es sei ferner **S** der Punkt, in dem die verlängerten Seitenkanten des Stutzes zusammentreffen, und **SH** die Höhe der

Py-

Pyramide SABC, so ist Sh die Höhe der Pyramide Sabc, und hH die Höhe des Pyramidalstutzes. Man ziehe AH und ah, so ist

$$\begin{array}{ll} \text{wegen } AH \parallel ah & \ldots\ SH : Sh = SA : Sa, \\ \text{und wegen } AB \parallel ab & \ldots\ AB : ab = SA : Sa, \\ \hline \text{daher auch} & SH : Sh = AB : ab, \end{array}$$

weil zwei Verhältnisse, welche beide einem dritten Verhältnisse gleich sind, gewiß auch unter einander gleich seyn müssen.

Da sich nun in jeder Proportion der Unterschied der ersten zwei Glieder zum Unterschiede der letzten zwei Glieder verhält wie das erste Glied zum dritten, oder wie das zweite zum vierten, so hat man

$$SH - Sh : AB - ab = SH : AB,$$
$$SH - Sh : AB - ab = Sh : ab;$$

oder wegen $SH - Sh = hH$

$$hH : AB - ab = SH : AB,$$
$$hH : AB - ab = Sh : ab;$$

woraus

$$SH = \frac{hH \times AB}{AB - ab};$$
$$Sh = \frac{hH \times ab}{AB - ab}$$

folgt, was sich mit Worten so ausdrücken läßt:

Nimmt man irgend zwei parallele Kanten in den beiden Grundflächen des Stutzes, so findet man die Höhe SH der größern Pyramide, wenn man die Höhe hH des Stutzes mit der größern jener zwei Kanten AB multiplizirt, und das Produkt durch deren Unterschied AB — ab dividirt; die Höhe Sh der kleinern Pyramide aber findet man, wenn man die Höhe hH des Stutzes mit der kleinern Kante ab multiplizirt,

und

und das Produkt durch den Unterschied beider Kanten **AB** — ab dividirt.

Sind z. B. 6′ und 4′ zwei parallele Kanten der beiden Grundflächen, und 5′ die Höhe des Stutzes, so ist

die Höhe der großen Pyram. $\frac{5 \times 6}{6 - 4} = 15'$,

" " " kleinen " $\frac{5 \times 4}{6 - 4} = 10'$.

Es reicht übrigens hin, die Höhe der größern Pyramide zu berechnen; die Höhe der kleinern findet man dann, wenn die Höhe des Stutzes von der Höhe der größern Pyramide abgezogen wird.

§. 167.

Cylinderschnitte.

Die Beschaffenheit des Schnittes eines Cylinders durch eine Ebene hängt von der Lage dieser Ebene ab. Durchschneidet man Fig. 180 einen Cylinder parallel mit der Axe, so ist die Durchschnittsfigur ein Rechteck **ABCD**, oder ein schiefes Parallelogramm, je nachdem der Cylinder gerade oder schief ist. Wird der gerade Cylinder durch eine auf die Axe senkrechte Ebene geschnitten, so ist der Schnitt **EF** ein Kreis; ist aber die Axe gegen die schneidende Ebene schief, so ist die Durchschnittsfigur eine Ellipse **GH**.

§. 168.

Kegelschnitte.

Am wichtigsten sind die Figuren, welche entstehen,

hen, wenn ein senkrechter Kegel (Fig. 181) von einer Ebene durchschnitten wird. Geht der Schnitt durch die Axe, so ist er ein gleichschenkliges Dreieck **ABC**; steht er auf der Axe senkrecht, oder was dasselbe ist, geht er parallel mit der Basis, so ist er ein Kreis **DE**. Steht aber die Ebene auf der schneidenden Ebene schief, so sind drei Fälle möglich. Ist die schneidende Ebene mit der Seite des Kegels parallel, so entstehet, Fig. 182, die Parabel **BDC**; neigt sich die schneidende Ebene zu der gegenüberliegenden Seite hin, so ist die Durchschnittsfigur eine Ellipse **EF**; neigt sie sich von derselben weg, so ist der Schnitt von einer krummen Linie begrenzt, welche man H y p e r b e l nennt **GHI**. Man kann sich diese Schnitte sehr gut versinnlichen, wenn man ein kegelförmiges zugespitztes Trinkglas nimmt, und dasselbe etwa bis zur Hälfte mit Wasser füllt. Wenn die Axe des Glases vertikal steht, so wird der Schnitt der horizontalen Wasseroberfläche mit der Fläche des Glases ein Kreis seyn; wird das Glas oben geschlossen, damit das Wasser nicht herausfließen kann, und dann so weit geneigt, bis die schneidende Wasseroberfläche mit der Seite des Kegels parallel wird, so ist der Schnitt eine Parabel; neigt man das Glas weniger, so sieht man die Ellipse; neigt man es mehr, so ist die Durchschnittsfigur eine Hyperbel.

Wenn Fig. 183 ein Kegel durch eine Ebene **CD** geschnitten wird, welche mit der Basis parallel ist, so zerfällt er in zwei Körper, einen kleineren Kegel und einen zwischen zwei parallelen Kreisflächen enthaltenen Körper, welcher letztere ein a b g e k ü r z t e r oder a b g e s t u t z t e r K e g e l genannt wird. Ein solcher Kegelstutz

(Fig.

Fig. **CDEF** ist daher der Unterschied zweier Kegel, welche die Grundfläche des Stutzes zu ihren Grundflächen haben, und deren Scheitel der Punkt ist, in welchem die erweiterte Mantelfläche des Stutzes zusammenläuft. Die Entfernung **BG** der beiden Kreisflächen ist die Höhe des Kegelstutzes. Eine Gerade, welche von dem Umfange der obern Grundfläche längs der Mantelfläche bis zum Umfange der untern Grundfläche gezogen wird, nennt man eine Seite des abgekürzten Kegels, z. B. **DE**. Der Kegelstutz steht mit dem Pyramidalstutze in demselben Zusammenhange, wie der Kegel mit der Pyramide. Wie sich bei der abgekürzten Pyramide zwei gleichliegende Seiten der beiden Grundflächen zu einander verhalten, so verhalten sich beim abgekürzten Kegel die Halbmesser der beiden Kreisflächen.

Wenn daher die Höhe des Kegelstutzes und die Halbmesser der beiden Grundflächen bekannt sind, so kann man daraus die Höhen der beiden Kegel berechnen, deren Unterschied die des abgekürzten Kegels ist.

Die Höhe des größern Kegels findet man, wenn man die Höhe des Stutzes mit dem größern Halbmesser multiplizirt; und das Produkt durch den Unterschied der beiden Halbmesser dividirt; die Höhe des kleinern Kegels wird gefunden, wenn man die Höhe des Stutzes mit dem kleinern Halbmesser multiplizirt, und das Produkt durch den Unterschied beider Halbmesser dividirt.

Sind z. B. 5′ und 4′ die Halbmesser der beiden Grundflächen, und 3′ 6″ die Höhe des Kegelstutzes, so ist

die Höhe des größern Kegels $\frac{42'' \times 5}{5 - 4} = 210'' = 17'6''$,

″ ″ ″ kleinern ″ $\frac{42'' \times 4}{5 - 4} = 168'' = 14'$.

§. 169.

§. 169.

Kugelschnitte.

Schneidet man eine Kugel durch eine Ebene, so ist die Durchschnittsfigur ein Kreis, welcher um so größer ist, je näher am Mittelpunkte der Schnitt gemacht wird. Am größten wird er, wenn man die Kugel durch den Mittelpunkt schneidet; ein solcher Kreis, dessen Mittelpunkt im Zentrum der Kugel liegt, dessen Halbmesser also so groß ist als der Halbmesser der Kugel, heißt ein größter Kreis der Kugel.

Durch den Schnitt einer Kugel durch eine Ebene zerfällt die Kugel in zwei Theile, welche man Kugelabschnitte nennt, und welche unter einander gleich oder ungleich sind, je nachdem die schneidende Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel oder außerhalb desselben geht; im ersten Falle heißt jeder der beiden Kugelabschnitte eine Halbkugel. Die gekrümmte Oberfläche eines Kugelabschnittes heißt eine Kugelmütze oder Kalotte.

Wird eine Kugel durch zwei parallele Ebenen durchschnitten, so heißt der zwischen ihnen befindliche Theil der Kugel eine Kugelzone oder ein Kugelgürtel; und die gekrümmte Oberfläche davon eine Zone der Kugeloberfläche, oder auch bloß Zone, Gürtel.

IV. Bestimmung der Oberfläche der Körper.

a. Oberfläche der eckigen Körper.

§. 170.

Um die Oberfläche eines eckigen Körpers zu finden,

den, braucht man nur den Flächeninhalt jeder Grenzebene für sich zu bestimmen, und alle gefundenen Flächen zu addiren.

Bei den einzelnen Körpern ist insbesondere Folgendes zu berücksichtigen:

1. Beim Prisma berechnet man zuerst die Seitenflächen als Parallelogramme; ihre Summe gibt die Seitenoberfläche; dazu addirt man noch die doppelte Grundfläche.

Bei dem geraden Prisma bildet die Seitenoberfläche, wenn man sich dieselbe auf eine Ebene abgewickelt denkt, ein Rechteck, dessen Grundlinie dem Umfange der Basis, und dessen Höhe der Seitenkante des Prisma gleich ist. Man kann daher die Seitenoberfläche eines geraden Prisma finden, wenn man den Umfang der Basis mit einer Seitenkante multiplizirt.

2. Bei der Pyramide bestimmt man zuerst die Seitenflächen als Dreiecke, und addirt zu ihrer Summe die Grundfläche.

Ist die Pyramide eine gerade, so braucht man nur ein Seitendreieck zu berechnen und dessen Fläche mit der Anzahl der Seitenkanten zu multipliziren; dazu wird noch die Basis addirt.

3. Bei der abgekürzten Pyramide werden die Seitenflächen als Trapeze bestimmt; dann berechnet man die beiden Grundflächen, und addirt sie zu der Summe der Seitenflächen.

4. Bei den regelmäßigen Körpern wird nur eine Grenzebene berechnet, und ihre Fläche mit der Anzahl der Grenzebenen multiplizirt.

§. 171.

§. 171.

Beispiele und Aufgaben.

1. Wie groß ist die Seitenoberfläche eines fünfseitigen Prisma, in welchem die Grundlinien der einzelnen Seitenparallelogramme 5″, 6″, 7″, 8″, 9″, und die bezüglichen Höhen 13″, 14″, 15″, 16″, 17″ sind?

Parallelogramm	I	=	5 × 13	=	65	□″
„	II	=	6 × 14	=	84	„
„	III	=	7 × 15	=	105	„
„	IV	=	8 × 16	=	128	„
„	V	=	9 × 17	=	153	„
			Seitenoberfläche	=	535	□″.

2. Eine vierseitige Schachtel, welche 1′ lang, 6″ breit und 8″ hoch ist, soll mit buntem Papier überzogen werden; wie viel □′ Papier gehört dazu?

Seitenfläche I = 12 × 8 = 96 □″
Seitenfläche II = 6 × 8 = 48 „
Basis = 12 × 6 = 72 „
daher

Seitenflächen I + III = 192 □″
„ II + IV = 96 „
doppelte Basis = 144 „
Ganze Oberfläche = 432 □″ = 3 □′.

3. Ein viereckiges blechernes Gefäß ist 2′ 2″ lang, 1′ 8″ breit und 1′ 6″ hoch; wie viel Blech ist dabei, wenn das Gefäß oben unbedeckt ist?

zwei gegenüberstehende Seitenflächen = 936 □″
die andern „ „ = 720 „
Basis = 520 „
Flächeninhalt des Bleches = 2176 □″.

4. Wie

4. Wie groß ist die Oberfläche einer Pyramide, deren Basis ein Quadrat ist, worin jede Seite 5″ beträgt, und deren Seitendreiecke 8″, 10″, 11″, 9″ zu ihren Höhen haben?

$$\text{Dreieck I} = \frac{5 \times 8}{2} = 20\ \square''$$

$$\text{„ II} = \frac{5 \times 10}{2} = 25\ \text{„}$$

$$\text{„ III} = \frac{5 \times 11}{2} = 27\tfrac{1}{2}\ \text{„}$$

$$\text{„ IV} = \frac{5 \times 9}{2} = 22\tfrac{1}{2}\ \text{„}$$

$$\text{Basis} = 5 \times 5 = 25\ \text{„}$$

$$\text{Oberfläche} = 120\ \square''$$

5. Die große Pyramide bei Gizè in Ägypten hat 463′ Höhe, ihre Grundfläche ist ein Quadrat, dessen Seite 736′ beträgt? wie groß ist ihre ganze Oberfläche?

In einem Seitendreiecke ist

die Grundlinie $= 736'$

die Höhe $= \sqrt{463^2 + 368^2} = \sqrt{349793} = 591{,}4'$

daher der Flächeninhalt $= 217635{,}2\ \square'$

und die ganze Seitenoberfläche $= 870540{,}8\ \square'$

ferner die Basis $= 736 \times 736 = 541696$ „

folglich die ganze Oberfläche $= 1412236{,}8\ \square'$

6. In einer geraden dreiseitigen abgekürzten Pyramide beträgt jede Seite der untern Grundfläche 4′ 2″, und jede Seite der obern Grundfläche 3′ 6″; die Höhe jeder Seitenfläche ist 1° 5′ 2″. Wie groß ist die Seitenoberfläche?

Eine Seitenfläche $= \frac{50 + 42}{2} \times 134 = 6164\,\square''$, also

ganze Seitenoberfläche $= 18492\,\square'' = 3\,\square^{\circ}\,20\,\square'\,60\,\square''$

7. Wie groß ist die Oberfläche eines Würfels, dessen jede Seite 2′ 4″ beträgt?

Eine

Eine Grenzebene = 28 × 28 = 784□″,
also ganze Oberfläche = 4704□″ = 32□′ 96□″.

8. Man bestimme die Oberfläche eines Oktaeders, dessen jede Seite 8″ ist.

Ein gleichseitiges Dreieck, dessen jede Seite 8″ ist, beträgt 27,72 □″; die ganze Oberfläche des Oktaeders ist daher gleich 8mal 27,72 □″ = 221,76 □″ = 1 □′ 77,76 □″.

b. Oberfläche der runden Körper.

§. 172.

Oberfläche des Cylinders.

Um die Oberfläche eines Cylinders zu finden, berechnet man zuerst die beiden Grundflächen als Kreise, dann die krumme Mantelfläche, und bringt diese Flächen in eine Summe.

In einem geraden Cylinder findet man die Mantelfläche, wenn man den Umfang der Basis mit der Höhe multiplizirt. Denn die Mantelfläche läßt sich in ein Rechteck abwickeln, welches mit dem Cylinder einerlei Höhe hat, und dessen Grundlinie dem Umfange der Basis des Cylinders gleich ist.

Beispiele und Aufgaben.

1. Die Höhe eines geraden Cylinders ist 8′, der Durchmesser der Basis 4′; wie groß ist die Oberfläche?

Umfang der Basis	12,56′
Flächeninhalt der Basis	12,56 □′
doppelte Basis	25,12 □′
Mantelfläche = 12,56 × 8 =	100,48 „
ganze Oberfläche =	125, 6 □′.

2. Wie groß ist die Oberfläche eines gleichseitigen Cylinders, dessen Weite 1′ 2″ beträgt?

Umfang der Basis = 44″
Basis = 44 × $\frac{14}{4}$ = 154 □″
beide Grundflächen = 308 □″
Mantelfläche = 44 × 14 = 616 „
Oberfläche = 924 □″

Hieraus sieht man zugleich, daß der Mantel eines gleichseitigen Cylinders viermal so groß ist als eine Grundfläche.

3. Ein cylindrisches oben offenes Gefäß ist von außen anzustreichen; der Halbmesser der Grundfläche ist 9″, die Höhe 1′3″; wie viel □′ muß man anstreichen?

Umfang der Basis = 56,52″
Flächeninhalt der Basis = 254,34 □″
Mantelfläche 56,52 × 15 = 847,80 „
anzustreichende Fläche = 1102,14 □″ = 7,65 □′

§. 173.

Oberfläche des Kegels und des Kegelstutzes.

Die Oberfläche eines Kegels findet man, wenn man zuerst die Basis, dann die Mantelfläche berechnet, und beide addirt.

Bei einem geraden Kegel wird die Mantelfläche gefunden, wenn man den Umfang der Basis mit der halben Seite des Kegels multiplizirt. Denn, wenn man sich die Mantelfläche des geraden Kegels abgewickelt denkt, so erscheint sie als ein Kreisausschnitt, dessen Bogen dem Umfange der Basis, und des-

dessen Halbmesser der Seite des Kegels gleich ist; nun ist der Flächeninhalt eines Kreissektors gleich der Länge des Bogens multiplizirt mit dem halben Halbmesser; folglich ist die Mantelfläche eines geraden Kegels gleich dem Umfange der Basis, multiplizirt mit der halben Seite.

Um die Mantelfläche eines geraden abgekürzten Kegels zu erhalten, braucht man nur die Umfänge der beiden Grundflächen zu addiren, und ihre Summe mit der halben Seite des Kegelstutzes zu multipliziren. Den Grund davon sieht man am leichtesten ein, wenn man sich die abgewickelte Mantelfläche als trapezartigen Theil eines Kreisringes vorstellt, die Umfänge der Grundflächen als dessen parallele Seiten, und die Seite des Kegelstutzes als dessen Höhe betrachtet.

Beispiele und Aufgaben.

1. In einem geraden Kegel ist der Durchmesser der Basis 4′, eine Seite 6′; wie groß ist der Mantel, und wie groß die ganze Oberfläche?

Umfang der Basis = 12,56′

Mantel = 12,56 × 3 = 37,68 □′

Basis = 12,56 × 1 = 12,56 „

ganze Oberfläche = 50,24 □′.

2. Ein ganz zugespitzter Trichter hat 12″ Durchmesser und 15″ Länge; wie viel Blech ist dabei?

Umfang der Basis 12 × 3,14 = 37,68″

Mantelfläche = 37,68 × $7\frac{1}{2}$ = 282,6 □″.

3. Man suche die Mantelfläche eines Kegels, dessen Höhe 3′ 9″ ist, und dessen Basis 8″ zum Halbmesser hat.

Durchmesser der Basis = 16″
Umfang der Basis = 50,24″
Seite des Kegels = $\sqrt{45^2 + 8^2}$ = 45,7″
Mantelfläche = 50,24 × 22,85 = 1148 □″.

4. Ein gleichseitiger Kegel hat 8″ Durchmesser; wie groß ist seine Oberfläche?

Umfang der Basis = 25,12″
Mantel = 25,12 × 4 = 100,48 □″
Basis = 25,12 × 2 = 50,24 „
Oberfläche = 150,72 □″.

Man sieht, daß in einem gleichseitigen Kegel die Mantelfläche doppelt so groß ist als die Basis.

5. Wie groß ist die Mantelfläche eines geraden Kegelstutzes, dessen Seite 5′ ist, und dessen Grundflächen 6′ und 4′ zu Halbmessern haben?

Umfang der untern Basis = 37,68′
„ „ obern „ = 25,12′
Summe = 62,8′
Mantelfläche = 62,8 × $\frac{5}{2}$ = 157 □′.

§. 174.

Oberfläche der Kugel.

Denkt man sich in eine Kugel einen eckigen Körper so beschrieben, daß alle seine Eckpunkte in der Kugeloberfläche liegen, so wird die Oberfläche des eckigen Körpers immer kleiner seyn als die Oberfläche der Kugel, sich aber derselben um so mehr nähern, je mehr Grenzflächen der eckige Körper hat, so daß man ohne bedeutende Fehler die Oberfläche der Kugel der Oberfläche eines in sie beschriebenen Kör-

Körpers von sehr vielen Grenzflächen gleich setzen kann. Indem man diesem gemäß die Anzahl der Grenzflächen eines in die Kugel beschriebenen Körpers fort und fort vermehrte, hat man aus den dafür berechneten Oberflächen gefunden, daß die Oberfläche einer Kugel genau viermal so groß ist, als die ebene Fläche ihres größten Kreises.

Die Oberfläche einer Kugel ist also gleich dem vierfachen Flächeninhalte ihres größten Kreises.

Beispiele und Aufgaben.

1. Wie groß ist die Oberfläche einer Kugel, deren Halbmesser 5″ beträgt?
Fläche eines größten Kreises = 5 × 5 × 3,14 = 78,5 □″
Oberfläche der Kugel = 4 × 78,5 = 314 □″.

2. Der Halbmesser der Erde sei 859,0909 geogr. Meilen; wie groß ist die Oberfläche?
Inhalt des größten Kreises = $859{,}0909^2$ × 3,141593
= 2318634,16 □ Meilen,
also Erdoberfläche = 9274537 □ Meilen.

Hier hat man abgekürzt in 2 Dezimalen multiplizirt, und zuletzt nur die Ganzen des Produktes beibehalten.

3. Eine Kugel, welche 3′ 6″ im Durchmesser hat, soll vergoldet werden; wie groß ist ihre Oberfläche?
Größter Kreis = 21^2 × 3,16 = 1384,74 □″
Kugeloberfläche = 5538,96 □″ = 1 □° 2 □′ 66,74 □″.

4. Man will einen Luftball machen, dessen Durchmesser 4′ beträgt; wie viel Ellen Taffet, dessen Breite 5 Viertel ist, wird man dazu brauchen, wenn 1 Elle 2,464′ enthält?

Größter Kreis $= 12,56 \square'$,
Oberfläche des Balls $= 50,24 \square'$.
Fläche einer Elle Taffet $= 2,464 \times 3,08 = 7,59 \square'$
$50,24 : 7,59 = 6,62 = 6\frac{5}{8}$ Ellen.

5. Eine Kuppel, welche die Form einer Halbkugel hat, soll mit Kupferblech gedeckt werden; wie viel Blech ist dazu erforderlich, wenn der Durchmesser der Kugel $4^0\ 3'$ ist, und wie viel kostet diese Bedeckung, wenn ein Quadratfuß zu 36 Kr. gerechnet wird?

Größter Kreis $= 572,265 \square'$
Halbkugelfläche $= 1144,63 \square'$.

1144,53 □′ Kupferblech zu	36	Kr.
fl. 572,265	30	„
„ 114,453	6	„
fl. 686,718 = fl. 686 „ 43 Kr.		

c. Oberfläche gemischtflächiger Körper.

§. 175.

Wenn die Oberfläche eines Körpers aus verschiedenen Flächen zusammengesetzt ist, so suche man sie in solche Theile zu theilen, die man einzeln zu berechnen im Stande ist; diese einzelnen Flächen werden dann addirt.

Beispiele.

1). Ein Kuppelgewölbe ruhet auf einem cylindrischen Mauerwerke; der innere Durchmesser der Kuppel, welche eine Halbkugel vorstellt, ist 6^0, die Höhe der Kuppel vom Boden an gerechnet 15^0, folglich die Höhe der cylindrischen Mauer 9^0. Wie viel Kalk wird man brauchen, um das Innere dieses ganzen Mauerwerkes

auszu-

auszuweißen, wenn man 3 Loth Kalk braucht, um einen Quadratfuß Fläche anzuweißen?

Umfang der Mauer $6 \times 3{,}14 = 18{,}84^\circ$
Cylindrische Mantelfläche $= 18{,}84 \times 9 = 169{,}56\,\square^\circ$
Oberfläche der Kuppel $= 28{,}26 \times 2 = 56{,}52$ „
Anzuweißende Fläche $= 226{,}08\,\square^\circ$
$226{,}08\,\square^\circ = 8138{,}88\,\square'$
$8139\,\square'$ zu 3 Loth = 24417 Loth = 7 Ztr. 63 ℔ 1 Loth.

2) Ein Kuppelgewölbe ruht auf vier großen Säulen, die Höhe der Säule ist $12^\circ\ 6'$; der Durchmesser der untern Fläche der Säulen sei $3'\ 4''$, der obern Fläche $2'\ 9''$; der Durchmesser des Kuppelgewölbes, das eine Halbkugel vorstellt, ist 5°. Man fragt, wie viel Farbe zum Anstreichen des Gebäudes nöthig sei, wenn man 4 Loth braucht, um einen Quadratfuß Fläche damit anzustreichen?

Oberfläche einer Säule (Kegelstutz) $= 745{,}44\,\square'$
Mantelfläche aller vier Säulen $= 2981{,}76\,\square'$
Innere Fläche der Kuppel $= 1413{,}72$ „
Anzustreichende Fläche $= 4395{,}48\,\square'$
$4395{,}5\,\square'$ zu 4 Loth = 17582 Lth. = 5 Ztr. 49 ℔ 14 Lth.

3) Eine Ehrenpforte, die mit vollem Bogen geschlossen ist, soll mit einer gefärbten Leinwand überzogen werden; die Weite im Lichten ist $10'$, die ganze Weite $15'$, die Höhe bis zum Schlußsteine $= 16'$, und die Breite der Pforte $6'$. Wie viele Ellen Leinwand von 5 Viertel Breite wird man zum Überziehen brauchen, wenn eine Elle $= 2{,}464'$ ist? Antwort. 98,3 Ellen.

Hier berechnet man zuerst die Seitenoberfläche einer Widerlage als die eines geraden Prisma, dessen Basis die Seiten $2\frac{1}{2}'$ und $6'$ hat, und dessen Höhe $11'$.

ist

ist; die gefundene Fläche wird doppelt genommen. Dann berechnet man die Oberfläche des Bogens, indem man ihn als den Unterschied zweier halben Cylinder betrachtet, deren gemeinschaftliche Höhe 6′ ist, und deren Grundflächen $7\frac{1}{2}'$ und 5′ zu Halbmessern haben. Hierauf sucht man die Fläche einer Elle Leinwand in Quadratfuß. Endlich wird die ganze Oberfläche des Thores durch die Fläche einer Elle Leinwand dividirt.

V. Bestimmung des kubischen Inhaltes der Körper.

§. 176.

Erklärungen.

Der kubische Inhalt eines Körpers ist der Raum, den seine Grenzflächen einschließen.

Da jede Größe nur durch eine Größe derselben Art gemessen werden kann, so kann auch ein Körper nur durch einen Körper gemessen werden. Um daher den kubischen Inhalt eines Körpers zu bestimmen, nimmt man irgend einen bekannten Körper als Maß, als Einheit an, und untersucht, wie oft dieser als Einheit angenommene Körper in dem gegebenen enthalten ist.

Als Einheit des Körpermaßes wird ein Würfel (Kubus) angenommen, dessen jede Seite einen Zoll, oder einen Fuß, eine Klafter, zuweilen auch eine Meile beträgt, und der dann beziehungsweise Kubikzoll, Kubikfuß, Kubikklafter, Kubikmeile heißt.

Wenn man den Raum eines Körpers, z. B. eines Schulzimmers, ausmessen wollte, so sollte man eigentlich so verfahren. Man legt eine Kubikklafter so oft neben und über einander als es möglich ist, z. B.

32mal,

32mal, so enthält das Schulzimmer 32 Kubikklafter und vielleicht noch etwas, das jedoch kleiner ist als eine Kubikklafter. Diesen Rest mißt man mit Kubikfuß; man legt also einen Kubikfuß so oft neben einander, als es angehet, z. B. genau 25mal; das Schulzimmer enthält also 32 Kubikklafter, 25 Kubikfuß. Wenn ein Rest übrig bliebe, so würde man weiter untersuchen, wie oft ein Kubikzoll darin enthalten ist.

Durch die Bestimmung des kubischen Inhaltes findet man also, wie viel Kubikklafter, Kubikfuß, Kubikzoll, und bei Ausmessung sehr großer Körper, wie viel Kubikmeilen der Körper enthält.

Das frühere weitläufige und in den seltensten Fällen ausführbare Verfahren, einen Körper auszumessen, wird übrigens in der Wirklichkeit so wenig angewendet, als man den Flächeninhalt durch wirkliches Umlegen der Flächenmaße sucht; es lassen sich nämlich Sätze ableiten, nach denen der kubische Inhalt aus dem Maße der Linien oder Flächen, von denen die Größe des Körpers abhängt, berechnet werden kann.

§. 177.

Kubischer Inhalt eines rechtwinkligen Parallelopipeds.

Es soll der Kubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelopipeds (Fig. 184.), worin die Länge $AB = 4'$, die Breite $AC = 2'$ und die Höhe $AD = 3'$ ist, bestimmt werden. Weil die Grundfläche $4 \times 2 = 8\square'$ enthält, so läßt sich darauf ein Kubikfuß 8mal auflegen; das Parallelopiped enthält also bis zu einer Höhe von $1'$ eine Schichte von 8 Kubikfuß; zu der Höhe EF gehört eine

neue

neue Schichte von 8 Kubikfuß, und zu der Höhe FD wieder eine Schichte von 8 Kubikfuß. Das ganze Parallelopiped hat daher 3mal 8 oder $4 \times 2 \times 3 = 24$ Kubikfuß. — Allgemein lassen sich auf der Grundfläche jedesmal so viele Würfel aufstellen, als dieselbe Quadrate enthält, oder als das Produkt aus der Länge und Breite Einheiten enthält; und es erscheinen so viele solcher Schichten von Würfeln über einander, als die Höhe Einheiten enthält. Man muß daher, um den Körperinhalt eines rechtwinkligen Parallelopipeds zu erhalten, die Länge, Breite und Höhe mit einander, oder was gleich viel ist, die Grundfläche mit der Höhe multipliziren. Daraus folgt:

Der kubische Inhalt eines rechtwinkligen Parallelopipeds ist gleich dem Produkte aus der Länge, Breite und Höhe, oder dem Produkte aus der Grundfläche und Höhe.

Die Benennung des kubischen Inhaltes hängt von der Benennung der Seiten ab; sind diese in Klafter ausgedrückt, so bedeutet die Zahl, welche man als Körperinhalt bekommt, Kubikklafter, u. s. w.

§. 178.

Da ein Würfel nichts anderes ist als ein rechtwinkliges Parallelopiped von gleicher Länge, Breite und Höhe; so findet man den Körperinhalt eines Würfels, wenn man eine Seite dreimal als Faktor setzt. Hat z. B. ein Würfel jede Seite 4′ lang, so ist der kubische Inhalt $4 \times 4 \times 4 = 64$ Kubikfuß.

Darauf gründet sich die im Rechnen vorkommende Redensart: eine Zahl dreimal als Faktor setzen, heißt diese Zahl zum Kubus erheben.

Aus

Aus dem Satze über den Körperinhalt eines Würfels folgt:

1 Kub.° = 6 × 6 × 6 = 216 Kub.',

$$\left.\begin{array}{l}\text{1 Kub.}' = 12 \times 12 \times 12 = 1728 \text{ Kub.}'' \\ \text{1 Kub.}'' = 12 \times 12 \times 12 = 1728 \text{ Kub.}'''\end{array}\right\} \text{für das zwölftheilige Maß.}$$

und

$$\left.\begin{array}{l}\text{1 Kub.}' = 10 \times 10 \times 10 = 1000 \text{ Kub.}'' \\ \text{1 Kub.}'' = 10 \times 10 \times 10 = 1000 \text{ Kub.}'''\end{array}\right\} \text{für das zehntheilige Maß.}$$

1 Kub. M. = 4000 × 4000 × 4000 = 64,000,000,000 K.°.

Wenn man umgekehrt aus dem kubischen Inhalte eines Würfels die Länge einer Kante finden wollte, so braucht man nur jene Zahl zu suchen, welche dreimal als Faktor gesetzt den kubischen Inhalt gibt, d. h. man braucht nur aus dem gegebenen kubischen Inhalte die Kubikwurzel auszuziehen.

§. 179.

Beispiele und Aufgaben.

1. Wie groß ist der kubische Inhalt eines rechtwinkligen Parallelopipeds, bei dem die Länge 1' 6'', die Breite 1' 3'', und die Höhe 2' 8'' beträgt?

Länge = 1' 6'' = 18''
Breite = 1' 3'' = 15''
Höhe = 2' 8'' = 32''

32 × 18
256
576 × 15
2880
8640 Kub.'' = 5 Kub.'

2. Die Seite eines Würfels ist 2' 4''; wie groß ist sein Körperinhalt?

2' 4'' = 28''; 28^3 = 21952 Kub.'' = 12 Kub.' 1215 Kub.''

3. An einem Würfel von Granit beträgt jede Seite 4' 8''; wie schwer ist der Würfel, wenn ein Kubikfuß Granit 161 ℔ schwer angenommen wird?

4'

$4' \, 8'' = 4\frac{2}{3}'$; $(\frac{14}{3})^3 = \frac{2744}{27} = 101\frac{17}{27}$ Kub.'
$101\frac{17}{27}$ Kub.' Granit zu 161 ℔ gibt $16362\frac{10}{27}$ ℔.

4. Wie groß ist der Körperinhalt eines Getreidekastens, bei welchem die Länge 1°, die Breite 4' 3", und die Höhe 4' 6" ist; und wie viel Getreide kann er aufnehmen, wenn ein Metzen 3365 Kub." enthält?
Länge $= 1^0 = 72''$ $\quad 72 \times 51 \times 54 = 198288$ Kub."
Breite $= 4'3'' = 51''$ $\quad 198288 : 3365 = 58\frac{3118}{3365}$, also
Höhe $= 4'6'' = 54''$ $\quad$ nahe 59 Metzen.

5. Ein viereckiger Wasserbehälter ist 2° 4' lang, 5' breit, 1° tief; wie viel Eimer faßt er, wenn ein Eimer 1,792 Kub.' enthält? Antwort 267,8 Eimer.

6. Um einen Keller anzubringen, muß die Erde in einer Länge von 6° 4' durchaus 4° 4' breit, und 1° 5' tief ausgegraben werden; wie viel Wägen Erde gibt dieses, wenn die Wagentruhe 4' lang, 3' breit und $1\frac{1}{4}'$ tief ist?
Auszuhebende Erdmasse 12320 Kub.'
Inhalt der Wagentruhe 15 Kub.';
$12320 : 15 = 821\frac{1}{3}$ Wägen.

7. Die Länge einer Mauer ist 13°, die Höhe 1° 2', die Dicke 2' 3". Wie viel Ziegel braucht man, um diese Mauer aufzuführen, wenn ein Ziegel $2\frac{1}{2}''$ dick, 5" breit und 11" lang, und die Dicke des verbindenden Kalkes bereits einberechnet ist?
Kubikinhalt der Mauer = 2426112 Kub."
" eines Ziegels = $137\frac{1}{2}$ Kub."
$2426112 : 137\frac{1}{2} = 17644$ Ziegel.

8. Ein Haus soll 42' lang, 24' breit und 28' hoch seyn. Die Mauer wird 2' dick mit Ziegeln aufgeführt, deren jeder mit Inbegriff des verbindenden

Kal=

Kalkes 11″ lang, 5″ breit und 3″ dick ist. In den Mauern befinden sich 36 Fenster, jedes 6′ hoch und 4′ breit, und zwei Thüren von 8′ Höhe und 5′ Breite. Wie viele Ziegel sind zum Aufführen dieses Mauerwerkes nöthig?

Längere Mauer = 42 × 2 × 28 = 2352 Kub.′
Kürzere Mauer = 24 × 2 × 28 = 1344 Kub.′
die beiden längern Mauern = 4704 Kub.′
" " kürzern " = 2688 "
ganze Mauer = 7392 Kub.′

Ein Fenster = 6 × 4 × 2 = 48 Kub.′
Eine Thür = 8 × 5 × 2 = 80 Kub.′

36 Fenster = 1728 Kub.′
2 Thüren = 160 "
Fenster und Thüren = 1888 Kub.′

Es bleibt also 5504 Kub.′ festes Mauerwerk.
Inhalt eines Ziegels = 165 Kub.″
5504 Kub.′ : 165 Kub.″ = 57641.
Man braucht also 57641 Ziegel.

9. Wie groß ist die Kante eines Würfels, dessen kubischer Inhalt 542 Kub.″ beträgt?

$\sqrt[3]{542}$ = 8,148″ Länge einer Kante.

10. Der österreichische Kaiserstaat erzeugt jährlich 2505000 Zentner Roheisen; wenn man sich daraus einen Würfel gebildet denkt, wie groß wäre eine Seite desselben, wenn das spezifische Gewicht des Roheisens zu 7 angenommen wird, und 1 Kub.′ reines Wasser $56\frac{1}{2}$ ℔ wiegt?

Zuerst wird der Kubikinhalt des Würfels nach der Kette berechnet.

x Kub.°	2505000 Ztr. Eisen
1	100 ℔ Eisen
1	7 ℔ Wasser
$56\frac{1}{2}$	1 Kub.′
216	1 Kub.°

woraus x = 287366 Kub.° ungefähr

$\sqrt[3]{287.366} = 65, 9.$

Eine Seite des Würfels würde also nahe 66° betragen.

§. 180.

Körperinhalt eines Prisma überhaupt.

1. Jedes gerade nicht rechtwinklige Parallelopiped ABCDEFGH (Fig. 185) kann in ein rechwinkliges Parallelopiped ABIKEFLM verwandelt werden, welches mit ihm dieselbe Höhe und gleich große Grundfläche hat; man braucht nur durch eine Seitenkante BF auf die gegenüberstehende Seitenfläche eine senkrechte Ebene zu führen, und den dadurch auf einer Seite abgeschnittenen Theil auf der entgegengesetzten Seite hinzu zu setzen. Der Inhalt des rechtwinkligen Parallelopipeds aber ist gleich dem Produkte aus der gegebenen Grundfläche und der gegebenen Höhe; also ist auch der Körperinhalt des geraden nicht rechtwinkligen Parallelopipeds gleich dem Flächeninhalte der Basis multiplizirt mit der Höhe.

2. Jedes schiefe Parallelopiped ABCDEFGH (Fig. 186.) kann in ein gerades verwandelt werden. Man errichte nämlich über der Basis ABCD ein gerades Parallelopiped ABCDIKLM, welches mit dem schiefen dieselbe Höhe hat. Diese zwei Körper müssen, weil sie die nämliche Höhe, und wegen der gleichen

Grund-

Grundfläche in jeder Höhe auch dieselbe Weite besitzen, auch gleichen kubischen Inhalt haben. Nun ist der kubische Inhalt des geraden Parallelopipeds gleich der Grundfläche multiplizirt mit der Höhe; folglich ist auch der Körperinhalt des schiefen Parallelopipeds dem Produkte aus der Grundfläche und Höhe gleich.

3. Zu jedem dreiseitigen Prisma ABCDEF (Fig. 187.) läßt sich ein Parallelopiped konstruiren, welches doppelt so groß ist als das dreiseitige Prisma, und mit ihm einerlei Höhe hat; man braucht nur durch die Seitenkanten BC und CF Ebenen zu legen, welche mit den gegenüberstehenden Seitenflächen parallel sind, und die beiden Grundflächen zu erweitern. Nun ist der Körperinhalt des Parallelopipeds gleich der Basis multiplizirt mit der Höhe, also der Körperinhalt des halben Parallelopipeds gleich der halben Basis multiplizirt mit der Höhe. Das halbe Parallelopiped aber ist das dreiseitige Prisma, die halbe Basis des Parallelopipeds ist die Basis des dreiseitigen Prisma; daher ist der kubische Inhalt eines jeden dreiseitigen Prisma gleich der Basis multiplizirt mit der Höhe.

4. Jedes mehrseitige Prisma ABCDEFGHIK (Fig. 188) läßt sich durch Diagonaldurchschnitte in lauter dreiseitige Prismen zerlegen. Nun ist der Körperinhalt jedes dreiseitigen Prisma gleich seiner Grundfläche multiplizirt mit der Höhe; also die Summe der Körperinhalte aller dieser dreiseitigen Prismen gleich der Summe aller Grundflächen multiplizirt mit der gemeinschaftlichen Höhe. Die Summe aller jener Körperinhalte aber gibt den Körperinhalt des ganzen mehrseitigen Prisma, die Summe jener Grundflächen gibt

die

die Basis des ganzen Prisma; somit ist der Körperinhalt eines jeden mehrseitigen Prisma gleich der Basis multiplizirt mit der Höhe.

Aus allen diesen Betrachtungen ergibt sich der Satz: Der Kubikinhalt eines jeden wie immer geformten Prisma wird gefunden, wenn man den Flächeninhalt der Basis mit der Höhe multiplizirt.

Beispiele.

1. Wie groß ist der Kubikinhalt eines Prisma, dessen Grundfläche 5□′ 46□″, und dessen Höhe 2′ 9″ ist?

Basis = 5□′ 46□″ = 766□″
Höhe = 2′ 9″ = 33″
Kubikinhalt = 766 × 33 = 25278 Kub.″
= 14 Kub.′ 1086 Kub.″

2. Die Basis eines 6″ hohen Prisma ist ein Quadrat, dessen jede Seite 5″ 4‴ beträgt; wie groß ist der kubische Inhalt?

Basis = 64^2 = 4096 □‴
Höhe = 6″ = 72‴
Körperinhalt = 4096 × 72 = 294912 Kub.‴
= 170 Kub.″ 1152 Kub.‴.

3. Ein sechsseitig behauener Baumstamm von durchaus gleicher Dicke ist 3° lang, jede Seite an der Grundfläche beträgt 8″; wie groß ist der kubische Inhalt?

Die Basis ist ein reguläres Sechseck, dessen jede Seite 8″ ist; dieses läßt sich in 6 kongruente Dreiecke zerlegen, in deren jedem die Grundlinie 8″, und die Höhe $\sqrt{8^2 - 4^2} = 6{,}93''$ ist. Als Flächeninhalt der Basis findet man sonach 166,32□″, und folglich als

Ku-

Kubikinhalt des Baumstammes 166,32 × 216 = 35925 K.″ = 20 Kub.′ 1365 Kub.″

§. 181.

Körperinhalt einer Pyramide und eines Pyramidalstutzes.

1. Jede dreiseitige Pyramide kann als der dritte Theil eines Prisma betrachtet werden, welches mit der Pyramide gleiche Basis und gleiche Höhe hat. — Man nehme in der dreiseitigen Pyramide DABC (Fig. 189) B als die Spitze, somit das Dreieck ACD als Basis an, und lege an dieselbe eine zweite Pyramide BCDF hinzu, welche die nämliche Spitze B hat, und deren Grundfläche CDF die frühere ACD zu einem Parallelogramme ergänzt; diese zwei Pyramiden haben offenbar dieselbe Höhe, und müssen, weil sie auch gleiche Grundflächen haben, gegen die Spitze hin gleichmäßig abnehmen, also denselben Raum einschließen; die beiden Pyramiden sind also gleich groß. Die zwei betrachteten Pyramiden bilden zusammen eine vierseitige Pyramide BACFD, deren Spitze in B liegt und deren Basis ACFD ist. Legt man an diese wieder noch eine dreiseitige Pyramide BDEF, deren Spitze in B liegt und deren Basis das mit ABC kongruente und parallel gestellte Dreieck DEF ist, und vergleicht dieselbe mit der gegebenen Pyramide DABC, worin man D als Scheitel und ABC als Grundfläche annimmt; so sieht man sogleich, daß die beiden Pyramiden gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, daß sie demnach denselben Raum einschließen. Es sind daher alle drei dreiseitigen Pyramiden gleich groß; sie bilden zusammen das dreiseitige Prisma ABCDEF, wel-

welches mit der Pyramide DABC gleiche Basis und gleiche Höhe hat; die gegebene dreiseitige Pyramide ist somit wirklich der dritte Theil eines dreiseitigen Prisma von derselben Basis und Höhe. — Da der Körperinhalt eines Prisma gleich ist dem Produkte aus der Grundfläche und der Höhe, so wird man, um den kubischen Inhalt einer dreiseitigen Pyramide zu finden, auch die Grundfläche mit der Höhe multipliziren, aber von diesem Produkte nur den dritten Theil nehmen; oder was gleich viel ist, man wird die Grundfläche mit dem dritten Theil der Höhe multiplizìren.

2. Jede mehrseitige Pyramide SABCDE (Fig. 190) läßt sich in lauter dreiseitige Pyramiden zerlegen, welche mit ihr einerlei Höhe haben. Der körperliche Inhalt einer dreiseitigen Pyramide aber ist gleich der Basis multiplizirt mit dem dritten Theile der Höhe; daher ist der Körperinhalt aller dreiseitigen Pyramiden d. i. der Körperinhalt der mehrseitigen Pyramide gleich der Summe der Grundflächen aller dreiseitigen Pyramiden d. i. der Basis der mehrseitigen Pyramide, multiplizirt mit dem dritten Theile der gemeinschaftlichen Höhe.

Es gilt also allgemein der Satz:

Der kubische Inhalt einer Pyramide wird gefunden, wenn man den Flächeninhalt der Basis mit dem dritten Theile der Höhe multiplizirt.

Um den kubischen Inhalt einer abgestutzten Pyramide zu finden, bestimme man die Körperinhalte der beiden Pyramiden, deren Unterschied der Pyramidenstutz ist, und ziehe den Inhalt der kleinern Pyramide von jenem der größern ab.

Der

Der Körperinhalt eines Pyramidalstutzes kann auch noch auf eine andere kürzere Art berechnet werden. Es läßt sich nämlich beweisen, daß eine abgekürzte Pyramide gleich ist dreien Pyramiden, welche die beiden parallelen Grundflächen und die mittlere Proportionale zwischen diesen zu Grundflächen, und mit dem Stutz einerlei Höhe haben. Um daher den kubischen Inhalt eines Pyramidalstutzes zu finden, bestimme man die beiden Grundflächen, und die Quadratwurzel aus ihrem Produkte, addire diese drei Größen, und multiplizire die Summe mit dem dritten Theile der Höhe.

Beispiele und Aufgaben.

1. Wie groß ist der körperliche Inhalt einer Pyramide, deren Basis 2□′ 28□″, und deren Höhe 8′ 5″ ist?

Basis = 2□′ 28□″ = 316□″

Höhe = 8′ 5″ = 101″

Kubikinhalt = 31916 Kub.″ = 6 Kub.′ 271 Kub.″

2. In einer geraden vierseitigen Pyramide beträgt jede Seite der Grundfläche 1′ 4″, und jede Seitenkante 5′; wie groß ist der Kubikinhalt?

Basis = 256□″

Diagonale der Basis $= \sqrt{16^2 + 16^2} = 22{,}627''$

Höhe der Pyramide $= \sqrt{60^2 - 11{,}313^2} = 58{,}925''$

Körperinhalt = 1 Kub.′ 1300 Kub.″

3. In einer geraden sechsseitigen Pyramide ist eine Seite der Basis 2′, und eine Seitenkante 3′ 4″; man bestimme die Oberfläche und den kubischen Inhalt.

Umfang der Basis $= 144''$

Abstand der Mitte von der Seite $= \sqrt{24^2 - 12^2} = 20{,}785''$

Flächeninhalt der Basis $= 1496{,}52\square''$

Grundlinie eines Seitendreieckes $= 24''$

Höhe " " $= \sqrt{40^2 - 12^2} = 38{,}159''$

Fläche " " $= 457{,}90\,\square''$,

Seitenoberfläche " $= 2747{,}448\square''$

Ganze Oberfläche " $= 4243{,}968\square''$.

Höhe der Pyramide $= \sqrt{40^2 - 24^2} = 32''$

Kubikinhalt $= 1496{,}52 \times \frac{32}{3} = 15962{,}88$ Kub.''

$= 9$ Kub.' 411 Kub.''

4. Wie groß ist das Gewicht einer geraden vierseitigen Pyramide aus Marmor, wenn die Höhe 10' und die Basis ein Quadrat ist, dessen Seite 1' 6'' beträgt; wenn ferner das spezifische Gewicht des Marmors, woraus die Pyramide besteht, $2\frac{7}{10}$ ist, und das Gewicht eines Kubikfußes Wasser zu $56\frac{1}{2}$ ℔ angenommen wird.

Basis $= 18^2 = 324\square''$

Höhe $= 10' = 120''$

Kubikinhalt $= 12960$ Kubik.''

Man hat nun

$$\begin{array}{r|l} x \text{ ℔} & 12960 \text{ Kub.'' Marmor} \\ 1 & 2\frac{7}{10} \text{ Kub.'' Wasser} \\ 1728 & 56\frac{1}{2} \text{ ℔,} \end{array}$$

woraus $x = 1144\frac{1}{8}$ ℔.

5. Bei einem Pyramidalstutze, dessen Grundflächen Quadrate sind, beträgt eine Seite der untern Grundfläche 2' 5'', eine Seite der obern Grundfläche 1' 9'', die Höhe 2'; wie groß ist der Körperinhalt?

Basis

Basis der großen Pyramide = 841□″
Höhe „ „ „ = 87„
Kubikinhalt „ „ = 24389 Kub.″
Basis der kleinen Pyramide = 441□″
Höhe „ „ „ = 63″
Kubikinhalt „ „ = 9261 Kub.″
Körperinhalt des Pyramidalstutzes = 15128 Kub.″
= 8 Kub.′ 1304 Kub.″

Oder kürzer:
Untere Basis des Stutzes = 841□″
Obere „ „ „ = 441 „
Mittlere Proportionale $= \sqrt{841 \times 441} = 608$ „
Summe = 1891□″
Höhe des Stutzes = 24″
Kubikinhalt „ „ = 15128 Kub.″

6. Es soll ein dreiseitiger gerader Pyramidalstutz aus Eisen gegossen werden; die Höhe desselben ist 5′, die Seiten der Grundflächen sind 1′ 6″ und 1′ 2″; wie viel ℔ Eisen wird man dazu brauchen, wenn 7 das spezifische Gewicht des Eisens ist?

Untere Basis = 140,22□″
Obere „ = 84,84 „
Mittl. Proportionale $= \sqrt{140,22 \times 84,84} = 109,07$ „
Summe = 334,13□″
Höhe des Stutzes = 60″
Körperinhalt „ „ = 6682,6 Kb.″,

Man hat nun

x ℔ | 6683 Kub.″ Eisen
1 | 7 Kub.″ Wasser
1728 | $56\frac{1}{2}$ ℔

woraus x = 1529 ℔ folgt.

§. 182.

Kubikinhalt der eckigen Körper überhaupt.

Jeden eckigen Körper kann man sich in lauter Pyramiden zerlegt denken, deren Grundflächen die Grenzebenen des Körpers sind, und die ihre gemeinschaftliche Spitze innerhalb dieses Körpers haben. Um daher den Kubikinhalt irgend eines eckigen Körpers zu finden, zerlege man denselben in Pyramiden, berechne die Inhalte derselben, und addire sie.

Was insbesondere die regelmäßigen Körper anbelangt, so ist, da das Tetraeder eine Pyramide und das Heraeder ein Prisma ist, nur nöthig anzugeben, wie der Kubikinhalt des Oktaeders, Ikosaeders und Dodekaeders gefunden wird. Jeder dieser drei Körper läßt sich in lauter kongruente Pyramiden zerlegen; die Grundfläche einer solchen Pyramide ist eine Grenzfläche, und die Höhe ist der halbe Abstand von zwei gegenüberliegenden Grenzflächen.

Beispiel.

Wie groß ist der Kubikinhalt eines Oktaeders, dessen jede Seite 6″ ist, und worin je zwei gegenüberstehende Grundflächen 4,9″ von einander entfernt sind?

Eine Grenzfläche	=	15,58□″
Höhe einer Theilpyramide	=	2,45″
Inhalt „ „	=	12,72 Kub.″
Kubikinhalt des Oktaeders	=	101,76 Kub.″

§. 183.

§. 183.

Körperinhalt eines Cylinders.

Da jeder Cylinder als ein Prisma, worin die Grundflächen Kreise sind, betrachtet werden kann, so gilt der Satz:

Der körperliche Inhalt eines Cylinders wird gefunden, wenn man den Flächeninhalt der Basis mit der Höhe multiplizirt.

Häufig kommt der Kubikinhalt einer cylindrischen Röhre zu berechnen vor. So nennt man einen Körper, welcher zwischen den Mantelflächen zweier Cylinder liegt, die eine gemeinschaftliche Are haben. Um den Kubikinhalt einer cylindrischen Röhre zu finden, braucht man nur den Körperinhalt der beiden Cylinder, von welchen der kleinere dem größern ausgeschnitten ist, zu berechnen, und den Inhalt des kleinern Cylinders von jenem des größern abzuziehen.

Beispiele und Aufgaben.

1. Die Höhe eines Cylinders ist 8′, der Halbmesser der Basis 3′; wie groß ist der kubische Inhalt?
Flächeninhalt der Basis $= 3^2 \times 3{,}14 = 28{,}26$ □′.
Kubikinhalt des Cylinders $= 226{,}08$ Kub.′.

2. Eine eiserne Walze ist 1′ 4″ lang, und hat 5″ im Durchmesser; wie viel Raum nimmt sie ein?
Fläche der Basis = 19,625 □″
Inhalt der Walze = 314 Kub.″

3. Der Durchmesser eines gleichseitigen Cylinders ist 2′ 4″; wie groß ist der Kubikinhalt?

Flä-

Fläche der Basis = $14 \times 14 \times 3\frac{1}{7} = 616\square''$
Kubikinhalt des Cylinders = 17248 Kub.″
= 9 Kub.′ 1696 Kub.″.

4. Ein Brunnen hat eine genaue cylindrische Form mit 4′ 2″ im Durchmesser; wenn nun das Wasser 8′ hoch steht, wie viel Kubikfuß sind es?

Basis = $25^2 \times 3{,}1416 = 1963\square''$
Inhalt des Wassers = 188448 Kub.″
= 109 Kub.′ 96 Kub.″.

5. Es soll ein runder Brunnen gegraben werden, dessen Weite 5′ und die Tiefe 4° 4′ beträgt. Wie hoch belaufen sich die Kosten, wenn für das Ausheben und Wegführen von 1 Kub.′ Erde 4 Kreuzer bezahlt werden?

Basis des Brunnens = $19{,}625\square'$
Inhalt „ „ = 549,5 Kub.′
549,5 Kub.′ zu 4 Kr. = 36 fl. 38 Kr.

6. Ein runder Thurm hat im Durchmesser 4° 5′. Wie viel Sprengpulver braucht man, um das 1° 2′ tiefe Grundmauerwerk dieses Thurmes herauszuheben, wenn man für das Ausheben von 1 Kub.° Mauerwerk 25 ℔ Pulver rechnet?

Basis des Mauerwerkes = $660{,}5\square'$
Kubikinhalt „ „ = 5284 Kub.′
= 24,46 Kub.°.
24,46 Kub.° zu 25 ℔ = $611\frac{1}{2}$ ℔ Pulver.

7. Der innere Durchmesser eines runden Thurmes ist 2° 2′, die Mauer ist 4′ dick; wie viel Kubikfuß enthält die Mauer, wenn die Höhe des Thurmes 7° 4′ beträgt?

Die Mauer des Thurmes ist eine cylindrische Röhre.

Ba-

Basis des größeren Cylinders $= 11^2 \times 3{,}14 = 379{,}9\ \square'$
Kubikinhalt „ „ $= 17477{,}24$ Kub.'
Basis des kleinern Cylinders $= 7^2 \times 3{,}14 = 153{,}86\ \square'$
Kubikinhalt „ „ $= 7077{,}56$ Kub.'
Inhalt der Mauer $= 10399{,}68$ Kub.'
also nahe 10400 Kub.'

8. Es soll eine hohle metallene Walze gegossen werden, deren Länge 3' ist. Die Weite im Lichten ist 1', die Stärke des Metalls 1'', und 1 Kubikzoll desselben wiegt $\frac{1}{4}$ ℔. Wenn nun das Pfund zu 8 Kr. gerechnet wird, was kostet die ganze Walze?

Die ganze Walze sammt der Höhlung hat
zur Basis $7^2 \times 3{,}14 = 153{,}86\ \square''$
zum Kubikinhalte 5538,96 Kub.''

Die innere Höhlung hat
zur Basis $6^2 \times 3{,}14 = 113{,}04\ \square''$
zum Kubikinhalte 4069,44 Kub.''

Der Metallinhalt der Walze ist demnach 1469,52 Kub.''

Man hat also

x fl.	1470 Kub.''
1	$\frac{1}{4}$ ℔
1	8 Kr.
60	1 fl.

woraus x = 49 fl. folgt.

9. Zu einer Wasserleitung braucht man in einer Länge von 840° Röhren von Blei, welche $\frac{1}{2}''$ dick sind, und deren Weite im Lichten 3'' beträgt. Wie viel kostet das Blei, wenn dessen spezifisches Gewicht $11\frac{1}{3}$ ist, und man den Zentner Blei mit $13\frac{1}{2}$ fl. bezahlt?

Ba-

Basis des ganzen Cylinders	=	12,5664□″
Inhalt „ „ „	=	760013 Kub.″
Basis der Höhlung	=	7,0686□″
Inhalt „ „ „	=	427507 Kub.″
Kubikinhalt der Röhre	=	332506 Kub.″

Man hat daher

x fl.	332506 Kub.″ Blei
1	$11\frac{1}{3}$ Kub.″ Wasser
1728	$56\frac{1}{2}$ ℔
100	$13\frac{1}{2}$ fl.,

also x = 16634 fl.

10. Eine Feuerspritze hat zwei Cylinder oder Stiefel, deren innerer Durchmesser $\frac{1}{2}$′ beträgt; die Hubhöhe des Kolbens ist in jedem 9″, und jeder Kolben steigt während einer Minute 25mal auf und ab; wie viel Eimer Wasser wird diese Feuerspritze während einer Stunde unausgesetzter Wirksamkeit verspritzen, wenn 2 Eimer = 1,792 Kub.′ enthält?

Bei dem jedesmaligen Heben eines Kolbens steigt ein Wassercylinder in den Stiefel, wovon die Basis 3 × 3 × 3,14 = 28,26□″ und die Höhe 9″, also der Inhalt 254,34 Kub.″ beträgt. In beiden Stiefeln zusammen steigt auf einmal 508,67 Kub.″ Wasser in die Höhe. Es ist also

x Eimer	60 Minuten
1	25 Steigungen
1	508,68 Kub.″
1728	1 Kub.′
1,792	1 Eimer

daher x = 246,4 Eimer.

§. 184.

§. 184.

Inhalt eines Fasses.

Ein Faß ist bekanntlich kein Cylinder, denn in der Mitte ist es bauchig, und sein Durchmesser daselbst größer als der Durchmesser einer Grund- oder Bodenfläche. Man begehet übrigens keinen erheblichen Fehler, wenn man den Inhalt eines Fasses gleichsetzt dem Inhalte eines Cylinders, dessen Höhe gleich ist der Länge des Fasses, und dessen Basis den Durchschnitt, oder das arithmetische Mittel zwischen dem Bauch- und dem Bodendurchmesser zum Durchmesser hat. Offenbar sind hier die innern Maßlängen des Fasses zu nehmen. Den Bauchdurchmesser findet man mittelst eines Zollstabes, der durch das Spundloch senkrecht in das Faß gesteckt wird; der innere Bodendurchmesser ist meistens dem äußern gleich, die innere Faßlänge bekommt man, wenn man von der äußern Länge die doppelte Bodenweite abzieht.

Beispiele.

1. Wie groß ist der Inhalt eines Fasses, dessen Durchmesser am Bauche 2′ 8″, am Boden 2′ 2″, und dessen Länge 3′ 4″ beträgt?

Durchmesser des mittleren Cylinders $= \frac{32'' + 26''}{2} = 29''$

Basis " " " $= 660{,}5\ \square''$

Inhalt des Fasses $= 26420$ Kub.″

2. Ein Faß hat 3′ 5″ Bauchdurchmesser, 2′ 11″ Bodendurchmesser, und 4′ Länge. Wie viele Wiener Maß hält es, wenn 1 Wiener Maß 77,414 Kub.″ hat.

Mitt-

Mittlerer Durchmesser $= \frac{41'' + 35''}{2} = 38''$
Mittlere Basis $= 1134{,}1176 \square''$
Inhalt des Fasses $= 54438$ Kub.''
$54438 : 77{,}4 = 703{,}33$ Wien. Maß.

§. 185.

Visirstäbe.

Um den Inhalt eines Fasses in einem bestimmten Flüssigkeitsmaße leichter und schneller als durch die vorhergehende Rechnung zu finden, hat man eigene Maßstäbe, welche Visirstäbe heißen.

Für cylindrische Gefäße haben die Visirstäbe folgende Einrichtung.

Man läßt sich das Flüssigkeitsmaß z. B. eine Wiener Maß in Cylinderform verfertigen, mißt den Durchmesser der Grundfläche, und trägt die Länge desselben auf den beiden Schenkeln eines rechten Winkels (Fig. 191) von **A** nach **B** und **1** auf; zieht man die Hypothenuse **B1**, so ist das Quadrat von **B1** gleich der Summe der Quadrate von **AB** und **A1**, oder das Quadrat von **B1** ist doppelt so groß als das Quadrat von **A1**. Da sich nun die Kreisflächen so verhalten wie die Quadrate ihrer Durchmesser, so ist ein Kreis vom Durchmesser **B1** doppelt so groß als ein Kreis vom Durchmesser **A1**. Ein cylindrisches Gefäß, das mit dem Cylinder, welcher eine Wiener Maß hält, gleiche Höhe hat, und dessen Basis **B1** zum Durchmesser hat, wird daher doppelt so viel als jener Cylinder, also 2 Wiener Maß halten. — Man trage ferner **B1** von **A** bis **2** auf, und ziehe **B2**, so ist das Quadrat von **B2** gleich der Summe der Quadrate

drate von **AB** und **A2**, oder es ist 3mal so groß, als das Quadrat von **A1**. Ein Kreis vom Durchmesser **B2** ist also 3mal so groß als ein Kreis vom Durchmesser **A1**; folglich enthält ein cylindrisches Gefäß vom Durchmesser **B2**, und von gleicher Höhe mit dem Gefäße von **1** Wiener Maß, 3mal so viel als dieses Gefäß, also 3 Wiener Maß. — Trägt man eben so **B2** von **A** nach 3 auf, und zieht **B3**, so ist **B3** der Durchmesser eines gleich hohen Gefäßes von 4 Wiener Maß; u. s. w. — Auf diese Weise bestimmt man in der Geraden **AC** noch mehrere Punkte, an welche man die Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, 5, . . . setzt, und die man dann auf die eine Seite eines zum Visirstabe bestimmten Stäbchens trägt; auf die andere Seite trägt man die Höhe des Gefäßes, das eine Wiener Maß hält, so oft auf, als es nöthig scheint.

Der Gebrauch eines so eingetheilten Visirstabes ist folgender. Zuerst mißt man den Durchmesser des Cylinders, welcher mit dem Fasse gleichen Inhalt hat, indem man mit der ersten Seite des Visirstabes den Bauch- und den Bodendurchmesser mißt, und davon das arithmetische Mittel nimmt; dadurch findet man, wie viel Maß jenes Faß enthalten würde, wenn es mit dem eine Maß haltenden Cylinder gleiche Höhe hätte. Gesetzt, man würde beim Bauchdurchmesser die Zahl 40, und beim Bodendurchmesser die Zahl 34 erhalten, so wäre $\frac{40+34}{2} = 37$ jene Zahl, welche anzeigt, wie viel Maß ein Faß, welches mit der Wiener Maß in Cylinderform gleiche Höhe hat, halten würde. Ein 2, 3, 4mal so hohes oder langes Faß wird gewiß auch 2, 3, 4mal so oft jene 37 Maß enthalten. Deßwegen untersucht man noch mit der

zwei-

zweiten Seite des Visirstabes, worauf die Höhen aufgetragen sind, wie oft die Höhe der cylinderförmigen Wiener Maß in der Länge des Fasses enthalten ist. Diese Zahl mit der früher gefundenen multiplizirt gibt den Inhalt des Fasses in Wiener Maß; wäre die zweite Zahl z. B. 8, so enthielte das Faß 8 × 37 = 296 Wiener Maß.

Um einen Visirstab zum Ausmessen prismatischer Gefäße anzufertigen, nehme man ein Gefäß mit quadratischem Boden, und gieße in dasselbe eine Wiener Maß Wasser; trage dann die Seite des Quadrates im Boden des Gefäßes auf den zum Visiren bestimmten Stab so oft auf, als es zum Ausmessen nöthig scheint, wende hierauf den Stab um, und trage auf die zweite Seite desselben ebenso die Höhe des Wassers im Gefäße mehrmal auf. Mißt man nun mit der ersten Seite des Visirstabes die Länge und die Breite an der Grundfläche des auszumessenden prismatischen Gefäßes, und mit der zweiten Seite die Höhe desselben, so gibt das Produkt dieser drei Zahlen die Anzahl Maß, welche in dem Gefäße enthalten sind. Würde man z. B. an der Grundfläche die Maße 6 und 3, und bei der Höhe das Maß 8 bekommen, so enthielte das Gefäß 6 × 3 × 8 = 144 Wiener Maß.

§. 186.

Kubikinhalt eines Kegels und eines Kegelstutzes.

Ein Kegel ist eine Pyramide, deren Grundfläche ein Kreis ist.

Der Körperinhalt eines Kegels wird daher gefunden, wenn man den Flächeninhalt

halt

halt der Basis mit dem dritten Theile der Höhe multiplizirt.

Auch der Kubikinhalt eines abgekürzten Kegels wird auf dieselbe Weise berechnet, wie der Körperinhalt einer abgekürzten Pyramide, indem man nämlich entweder die Inhalte der beiden Kegel, deren Unterschied der Kegelstutz ist, bestimmt und von einander abzieht; oder indem man die beiden Grundflächen und zugleich die Quadratwurzel aus ihrem Produkte bestimmt, diese drei Größen addirt, und ihre Summe mit dem dritten Theile der Höhe multiplizirt.

Beispiele und Aufgaben.

1. Wie groß ist der Körperinhalt eines Kegels, dessen Basis 127□″, und dessen Höhe 9″ beträgt?

$127 \times \frac{9}{3} = 381$ Kub.″

2. Die Grundfläche eines Kegels hat 1′ 6″ im Durchmesser, die Höhe ist 2′ 2″; wie groß ist der Kubikinhalt?

Basis = 254,34□″

Kubikinhalt = $154{,}34 \times \frac{26}{3} = 2204{,}28$ Kub.′

3. Die Höhe eines Kegels ist 1′ 3″, der Umfang der Basis 3′ 8″; man suche den kubischen Inhalt.

Durchmesser der Basis = 44 : 3,14 = 14″

Fläche „ „ = $44 \times \frac{7}{2} = 154$□″

Inhalt des Kegels = $154 \times 5 = 770$ Kub.″

4. Wie groß ist der Kubikinhalt eines senkrechten Kegels, dessen Seite 2′ 5″ beträgt, und dessen Basis 6″ zum Halbmesser hat?

Basis = 113,04□″

Höhe = $\sqrt{29^2 - 6^2} = 28{,}37$″

Körperinhalt = 1068,98 Kub.″

5. Bei

5. Bei einem kegelförmigen Getreidehaufen beträgt der Umfang der Grundfläche 1° 5', und eine Seite 3'; wie viel Getreide enthält der Haufen, wenn 1 Metzen 1.947 Kub.' hat?

Durchmesser der Grundfläche $= 11 : 3{,}14 = 3{,}5'$
Flächeninhalt „ „ $= 11 \times \frac{3{,}5}{4} = 9{,}125\square'$
Höhe des Kegels $= \sqrt{3^2 - 1{,}75^2} = 2.437'$
Körperinhalt $= 7{,}409$ Kub.'
$7{,}409 : 1{,}947 = 3{,}8$ Metzen.

6. Ein Filtrirtrichter soll gerade eine Maß ($77\frac{1}{2}$ Kub.") halten, und 6" Durchmesser haben; wie groß muß dessen Höhe seyn?

Inhalt $= 77{,}5$ Kub."
Basis $= 28{,}26\square''$

der dritte Theil der Höhe $= 77{,}5 : 28{,}26 = 2{,}74''$
Höhe $= 8{,}22''$.

7. Man suche den Körperinhalt eines Kegelstutzes, dessen Grundflächen 5' und 4' zu Durchmessern haben, und 3' 6" von einander abstehen.

Basis des größern Kegels $= 2827{,}44\square''$
Höhe „ „ „ $= \frac{42 \times 60}{12} = 210''$
Inhalt „ „ „ $= 197920{,}8$ Kub."
Basis des kleinern Kegels $= 1809{,}56\square''$
Höhe „ „ „ $= \frac{42 \times 48}{12} = 168''$
Inhalt „ „ „ $= 101335{,}45$ Kub."
Körperinhalt des Kegelstutzes $= 96585{,}35$ Kub."
$= 55$ Kub.' 1545 Kub.".

Oder:

Oder

Untere Basis = 2827,44 □″
Obere „ = 1809,56 „
Mittlere Proportionale = 2261,95 „
Summe = 6898,95 □″
Höhe = 42″
Kubikinhalt = 96585,3 Kub.″

8. Eine Bütte hat die Form eines abgekürzten Kegels, die untere Grundfläche hat 2′ 4″, die obere 2′ zum Durchmesser, die Höhe beträgt 1′ 5″; wie groß ist der Kubikinhalt?

Untere Grundfläche = 615,44 □″
Obere „ = 314,16 „
Mittlere Proportionale = 439,71 „
Summe = 1369,31 □″
Höhe = 17″
Kubikinhalt = 7759 Kub.″ = 4 Kub′. 847 Kub.″

9. Ein Butterkübel hat unten 1′ 5″, oben 1′ 2″ im Durchmesser, die Höhe beträgt 2′ 3″; wie viel Butter enthält das Behältniß, wenn 1 Kub.″ Butter $1\frac{1}{8}$ Loth wiegt?

Untere Grundfläche = 226,98 □″
Obere „ = 153,94 „
Mittlere Proportionale = 187,53 „
Summe = 568,45 □″
Höhe = 27″
Kubikinhalt = 5116,05 Kub.″
5116 Kub.″ zu $1\frac{1}{8}$ Loth
639 „ „ $\frac{1}{8}$ „
5755 Loth = 179 ℔ 27 Loth.

10.

10. Man hat durch Beobachtung gefunden, daß das Stammholz, wenn es gespalten und in Scheitern zusammen gelegt wird, dem Rauminhalte nach sich so vermehrt, daß 2 Kub.′ Stammholz 3 Kub.′ Scheiterholz geben. Ein Baumstamm ist nun am untern Ende 3′, am obern 2′ dick, und hat 3° 3′ Länge. Wie viel Scheiterholz gibt dieser Stamm, wenn die Scheiterlänge 3′ ist, d. h. wenn eine Klafter Holz zu 6′ Breite, 6′ Höhe und 3′ Dicke angenommen wird?

Untere Grundfläche	=	7,06□′
Obere "	=	3,14 "
Mittlere Proportionale	=	4,71 "
Summe	=	14,91□′
Länge	=	21′
Kubikinhalt	=	104,37 Kub.′

Man hat nun

$2 : 3 = 104{,}37 : x$

woraus $x = 156{,}55$ Kub.′

= 0,72 Kub.° Scheiterholz,

welche bei einer Scheiterlänge von 3′ doppelt so viel, also 1,44 oder nahe $1\frac{1}{2}$ Klafter Holz geben.

§. 187.

Kubikinhalt einer Kugel.

Legt man durch den Durchmesser **AB** (Fig. 192) sehr viele größte Kreise, und senkrecht darauf mehrere Parallelkreise **CD, EF, GH**, . . ., so zerfällt die Oberfläche der Kugel in lauter Vierecke und Dreiecke, welche man für eben und geradlinig ansehen kann, wenn die Anzahl jener Kreise sehr groß angenommen wird. Zieht man nun von allen Durchschnittspunkten der Oberfläche gerade Linien zum Mittelpunkte der Kugel,

und

und denkt sich durch je zwei solche Gerade eine Ebene gelegt, so erscheint die Kugel aus lauter Pyramiden zusammengesetzt, welche also ihre Grundfläche an der Kugeloberfläche, und ihre Spitze im Mittelpunkte haben; ihre gemeinschaftliche Höhe ist daher der Halbmesser der Kugel. Der Kubikinhalt einer Pyramide aber wird gefunden, wenn man die Grundfläche mit dem dritten Theile der Höhe multiplizirt. Daher ist der körperliche Inhalt aller jener Pyramiden zusammen genommen, d. i. der Inhalt der ganzen Kugel, gleich der Summe aller Grundflächen, d. i. der Kugeloberfläche, multiplizirt mit dem dritten Theile des Halbmessers.

Der Kubikinhalt einer Kugel wird also gefunden, wenn man die Oberfläche mit dem dritten Theile des Halbmessers multiplizirt.

Der Kubikinhalt einer Kugel läßt sich auch unmittelbar aus dem Halbmesser berechnen. Die Fläche eines größten Kreises ist nämlich das Produkt aus dem Quadrate des Halbmessers und 3,1416, folglich die 4mal so große Oberfläche der Kugel, das Produkt aus dem Quadrate des Halbmessers und 12,5664. Multiplizirt man die Oberfläche mit dem Halbmesser, so erhält man das Produkt aus der dritten Potenz des Halbmessers, und aus 12,5664; multiplizirt man die Kugeloberfläche nur mit dem dritten Theile des Halbmessers, was eben den Kubikinhalt gibt, so bekommt man das Produkt aus der dritten Potenz des Halbmessers und aus 4,1888. Der Kubikinhalt einer Kugel wird daher auch gefunden, wenn man den Halbmesser zum Kubus erhebt, und diesen mit 4,1888 multiplizirt.

Daraus folgt, daß sich die Kubikinhalte zweier

Kugeln so zu einander verhalten, wie die dritten Potenzen ihrer Halbmesser.

Wenn man umgekehrt aus dem bekannten kubischen Inhalte einer Kugel die Länge des Halbmessers finden will, darf man nur den kubischen Inhalt durch 4,1888 dividiren; der Quotient ist der Kubus des Halbmessers; zieht man daraus die Kubikwurzel, so hat man den Kugelhalbmesser selbst.

Beispiele und Aufgaben.

1. Wie groß ist der Kubikinhalt einer Kugel, deren Halbmesser 2′ beträgt?

2×2 oder $2^3 = 8$

$4 \times 3{,}1416$ — $4{,}1888 \times 8$

12,5664 □′ größter Kreis — 33,5104 Kub.′

50,2656 □′ Oberfläche

$\times \frac{2}{3}$

33,5104 Kub.′ Inhalt.

2. Der Durchmesser einer Kugel ist 3′ 4″; man suche den kubischen Inhalt.

$20^3 = 8000$; $4{,}1888 \times 8000$

33510,4 Kub.′

3. Ein kugelförmiger Dampfkessel hat 3′ 8″ Durchmesser; wie viel Eimer Wasser hält er, wenn 1,792 Kub.′ auf einen Eimer gehen?

$22^3 = 10648$; $10648 \times 4{,}1888 = 44602{,}34$ Kub.′

x Eimer	44602,34 Kub. Zoll
1728	1 Kub. Fuß
1,792	1 Eimer

woraus x = 14,4 Eimer folgt.

4. Auf einen Grad des Äquators gehen 15 geographische Meilen. Wenn nun die Erde überall so weit wäre, als am Äquator, wie groß wäre ihr Kubikinhalt?

Um-

Umfang des Äquators = 5400 Meilen
Durchmesser „ „ = 1718,87319 Meilen
Halbmesser „ „ = 859,43659 „

$(859{,}43659)^3 = 634806724{,}692583$;

$634806724{,}69258 \times 4{,}1888 = 2659078408{,}4$ Kub. Meil.

5. Wie groß ist der Halbmesser einer Kugel, deren kubischer Inhalt 48 Kub.″ beträgt?

$48 : 4{,}1888 = 11{,}459153$

$\sqrt[3]{11{,}459153} = 2{,}26''$ Halbmesser.

6. Wie groß ist der Durchmesser einer 24pfündigen Kanonenkugel, wenn das spezifische Gewicht des Eisens zu $7\frac{1}{2}$ angenommen wird?

1728 Kub.″ Eisen wiegen $7\frac{1}{2} \times 56\frac{1}{2} = 423\frac{3}{4}$ ℔.

Man hat also den Ansatz

$423\frac{3}{4} : 24 = 1728 : x$

woraus $x = 97{,}87$ Kub.″ Inhalt der Kugel.

$97{,}87 : 4{,}1888 = 23{,}364687.$

Hieraus folgt $\sqrt[3]{23{,}364687} = 2{,}86''$ als Halbmesser, also 5,72″ Durchmesser der Kanonenkugel.

7. Man will aus zwei Stücken Metall, deren eines 6 ℔, das andere 10 ℔ wiegt, eine Kugel gießen; wie groß wird der Durchmesser derselben seyn, wenn 20 Loth des Metalls einen Kubikzoll geben?

16 ℔ = 512 Loth

$512 : 20 = 25{,}6$ Kub.″

$25{,}6 : 4{,}1888 = 6{,}111535$

$\sqrt[3]{6{,}111535} = 183''$ Halbmesser.

Der Durchmesser der Kugel wird also 3,66″ seyn.

§. 188.

Kubikinhalt zusammengesetzter Körper.

Um den kubischen Inhalt eines zusammengesetzten Körpers zu finden, braucht man ihn nur durch die Addition oder Subtraktion in solche Bestandtheile zu zerlegen, die

man

man einzeln berechnen kann und die dafür erhaltenen Inhalte beziehungsweise zu addiren, oder zu subtrahiren.

Beispiele.

1. Wie viele Ziegel braucht man, um ein Thor zu verlegen, welches mit vollem Bogen geschlossen ist, wenn die Weite im Lichten 8′, die Höhe bis zum Schlußsteine 12′, die Dicke der Mauer 2′ ist, und wenn auf eine Kubikklafter Mauerwerk 1800 Ziegel gerechnet werden?

Der zu verlegende Raum enthält ein rechtwinkliges Parallelopiped, das 8′ lang, 2′ breit und 8′ hoch ist, und daher 128 Kub.′ enthält; und aus einem halben Cylinder, worin der Halbmesser der Grundfläche 4′ und die Höhe 2′ ist, der also 50,24 Kub.′ enthält. Der ganze Raum enthält daher 178,24 Kub.′ und man hat die Proportion

$$216 : 178\tfrac{1}{4} = 1800 : x$$

woraus $x = 1485$ Ziegel folgt.

2. Auf einer Landstraße ist jeder Schotterhaufen unten 7′, oben 4′ lang, seine Breite beträgt 3′, und die Höhe 2′; wie groß ist sein kubischer Inhalt?

Ein Körper, der die Form eines Schotterhaufens (Fig. 193) hat, der nämlich ein Rechteck zur Basis hat, und oben in eine Schneide ausläuft, wird eine falsche Pyramide genannt. Diese läßt sich geometrisch bestimmen. Man darf nur von den obern Endpunkten auf die Grundfläche zwei senkrechte Schnitte führen, so erscheint der Mitteltheil als ein dreiseitiges Prisma, und die beiden Seitentheile geben zusammen eine vierseitige Pyramide.

Basis des Mitteltheiles $= \frac{3 \times 2}{2} = 3\ \square'$

Höhe $= 4'$

Kubikinhalt $= 3 \times 4 = 12$ Kub.′

Ba-

Basis der aus den Seitentheilen
  bestehenden Pyramide $= 3 \times 3 = 9 \square'$
Höhe $= 2'$
Kubikinhalt $= \frac{9 \times 2}{3} = 6$ Kub.'

Der ganze Schotterhaufen enthält also 18 Kub.'

3. Ein Mühlstein hat 5' im Durchmesser und ist 1' dick; die innere vierseitige Öffnung ist 4" weit; wie viel Kubikfuß Stein enthält derselbe?

Hier muß der Inhalt der Öffnung von dem Inhalte des ganzen Cylinders abgezogen werden.

Kubikinhalt des ganzen Cylinders = 33929,28 Kub."
„ des inneren Parallelopipedes = 192 „
Inhalt des Mühlsteines = 33737,28 Kub."
= 19 Kub.' 905 Kub."

§. 189.

Besondere Bestimmungsarten des kubischen Inhaltes.

Bei ganz unregelmäßigen Körpern, die sich nicht in geometrisch bestimmbare Körper zerlegen lassen, kann der Kubikinhalt auf eine der folgenden Arten gefunden werden.

1. Man nimmt ein Gefäß, welches etwa die Form eines rechtwinkligen Parallelopipedes hat, und dessen kubischen Inhalt man genau kennt; legt in dasselbe den zu bestimmenden Körper, und füllt dann den Behälter mit Wasser, oder wenn der zu messende Körper das Wasser einsaugt, mit Sand an. Sodann nimmt man den Körper wieder heraus, und bestimmt den Inhalt des im Gefäße befindlichen Wassers oder Sandes; der Unterschied zwischen diesem und dem Inhalte des ganzen Gefäßes gibt den Kubikinhalt des gegebenen Körpers.

Um-

Um zu finden, wie viel Kubikfuß oder Kubikzoll irgend ein unregelmäßiges Gefäß enthält, fülle man es mit Wasser, und schütte dann dieses in ein zu diesem Zwecke eingerichtetes Gefäß, z. B. in ein quadratisches Prisma von etwa 12″ innerer Weite, an dessen Seitenwand sich ein in Zoll und Linien eingetheilter Maßstab befindet. An diesem liest man den gesuchten Kubikinhalt des Gefäßes ab.

2. Der kubische Inhalt eines Körpers läßt sich auch durch das **Gewicht** bestimmen.

Man bestimme zuerst, wie viel ein kleiner Körper von derselben Materie, der genau einen Kubikzoll oder einen Kubikfuß enthält, wiegt; dann suche man auch das Gewicht des gegebenen Körpers, und dividire dieses Gewicht durch das erstere. Z. B. ein Kubikzoll Eisen wiegt 4 Loth; wie viel Kubikzoll enthält eine Eisenstange von 13 ℔ Gewicht? Offenbar so viel Kubikzoll, als wie oft 4 Loth in 13 ℔ enthalten sind; man muß also 13 ℔ durch 4 Loth dividiren, wodurch man 104 bekommt. Die Eisenstange hat also 104 Kub.″

Nach dieser Methode läßt sich auch der Inhalt irgend eines hohlen Gefäßes bestimmen. Man weiß, daß ein Kubikfuß Wasser $56\frac{1}{2}$ ℔ wiegt; füllt man daher das hohle Gefäß mit Wasser, bestimmt das Gewicht dieses Wassers, und dividirt dasselbe durch $56\frac{1}{2}$, so erhält man, wie viel Kubikfuß das Gefäß enthält. Gesetzt, das Gewicht des Wassers im Gefäße beträgt 122 ℔, so ist der Inhalt des Gefäßes

$122 : 56\frac{1}{2} = 2{,}1592$ Kubikfuß.

Inhalts-Verzeichniß.

Sechstes Hauptstück.

Siebentes Hauptstück.

Anhang.

Zweiter Theil.

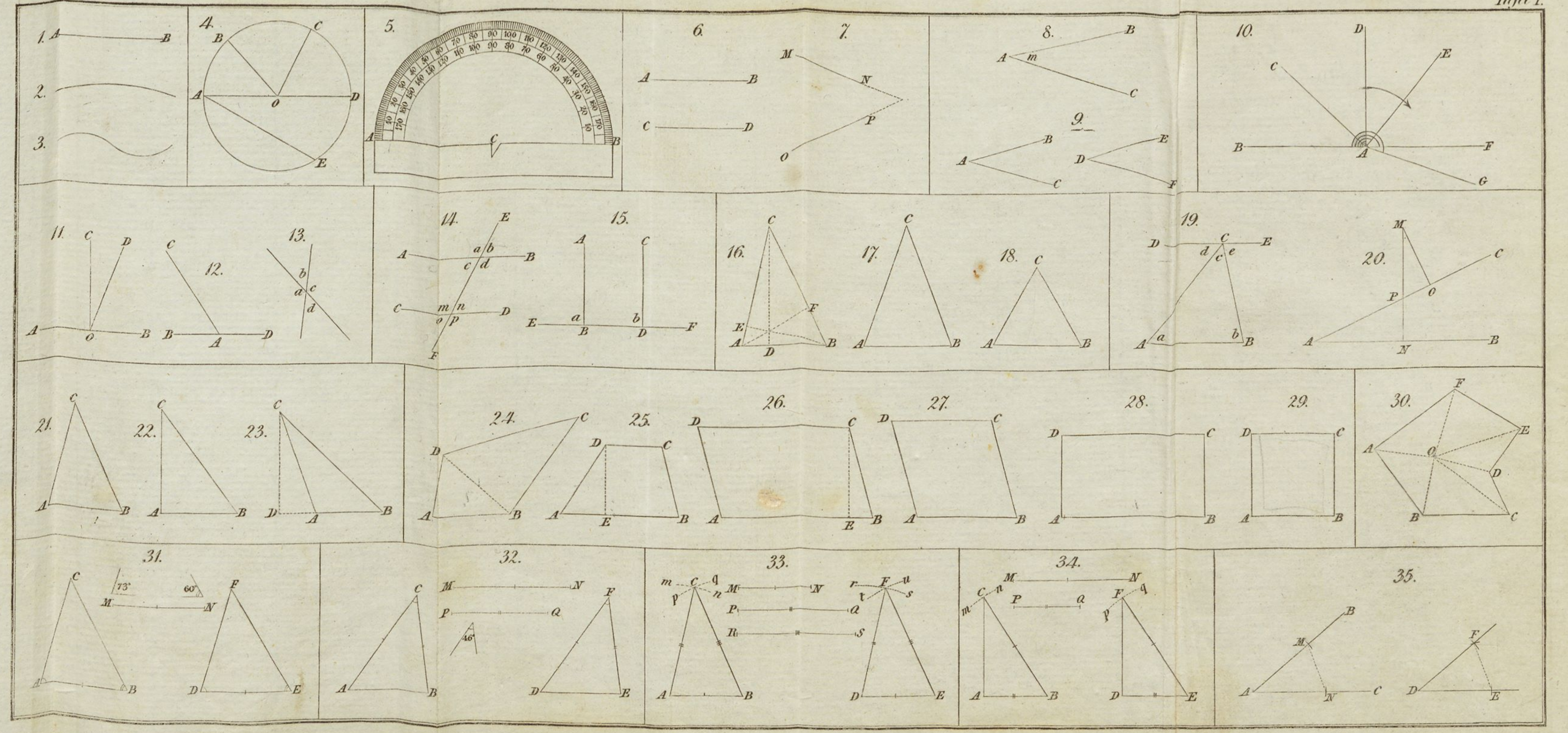
Die Stereometrie.

Erstes Hauptstück.

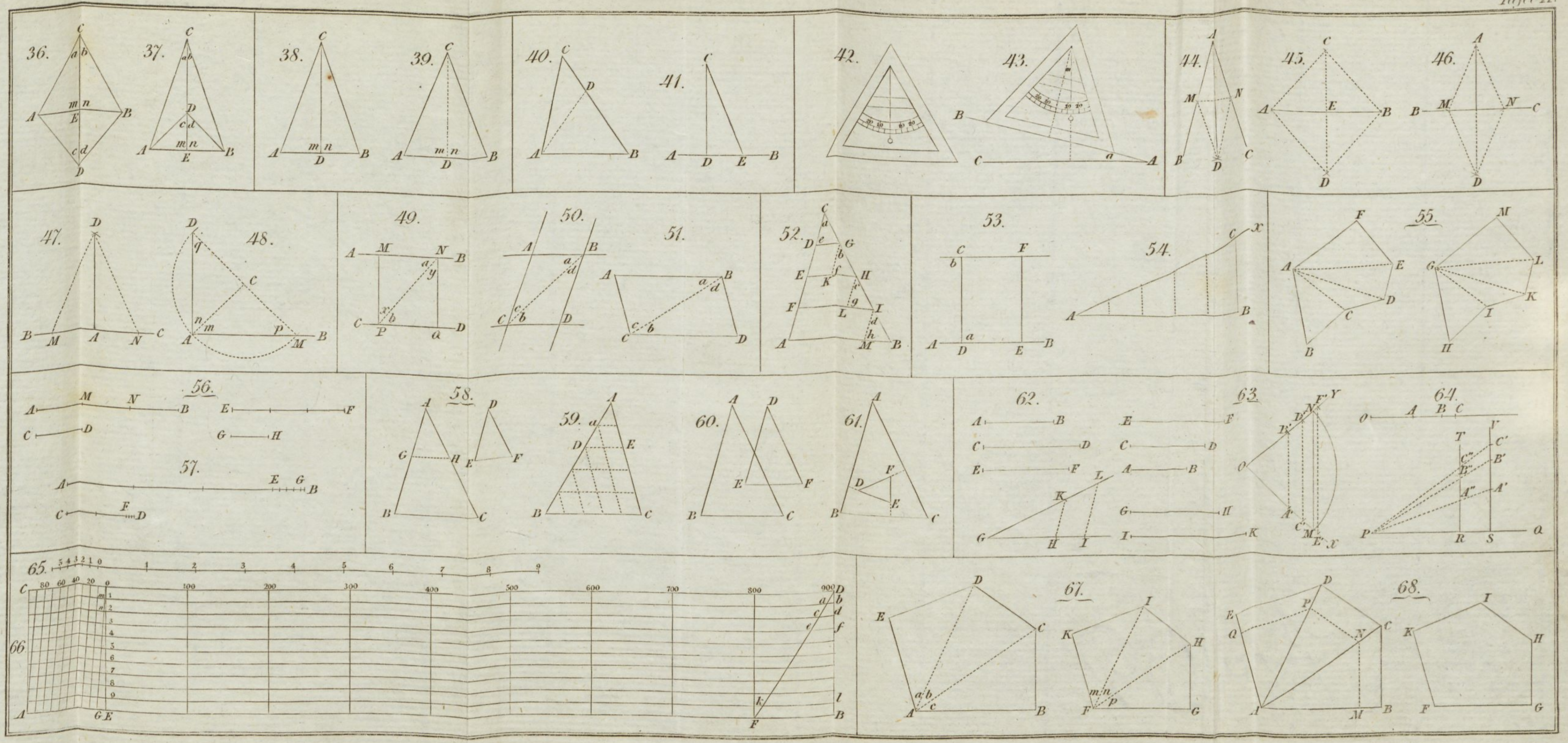
Zweites Hauptstück.

Narodna in univerzitetna knjižnica Ljubljana

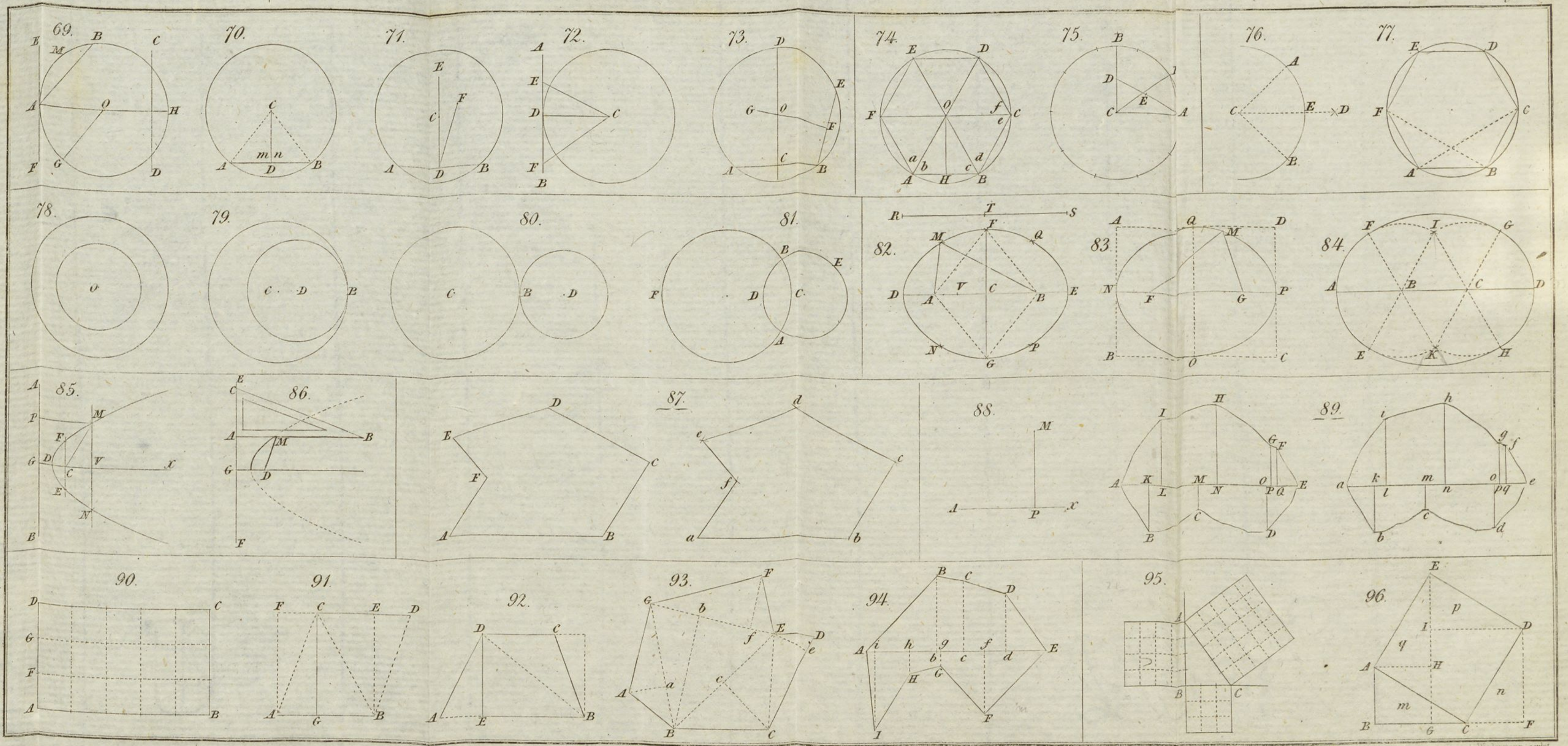
Gedruckt bei Leopold Grund.


1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
73°
60°
32.
46°
33.
34.
35.

Narodna in univerzitetna knjižnica
Ljubljana

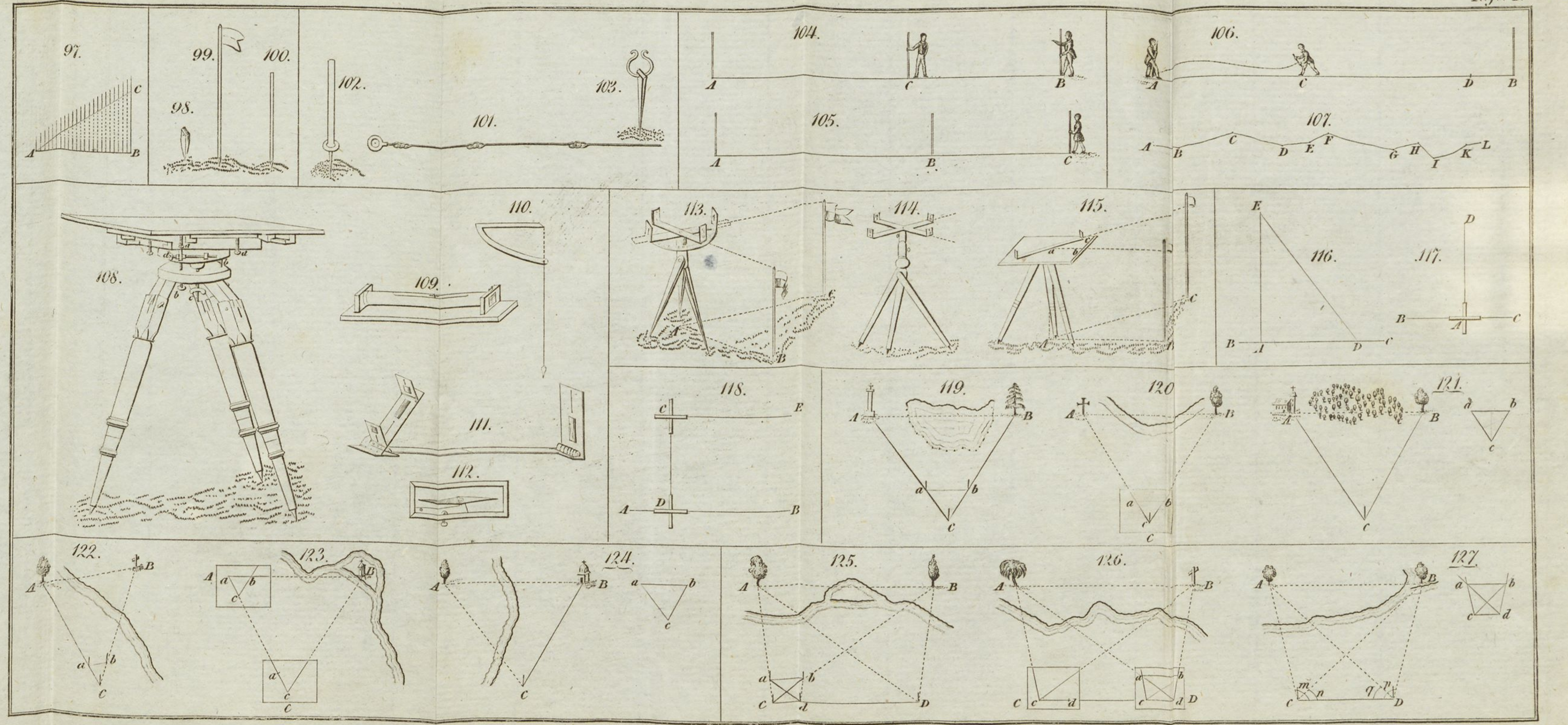

36.
37.
38.
39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.
52.
53.
54.
55.
56.
57.
58.
59.
60.
61.
62.
63.
64.
65.
66.
67.
68.

Narodna in univerzitetna knjižnica * Ljubljana



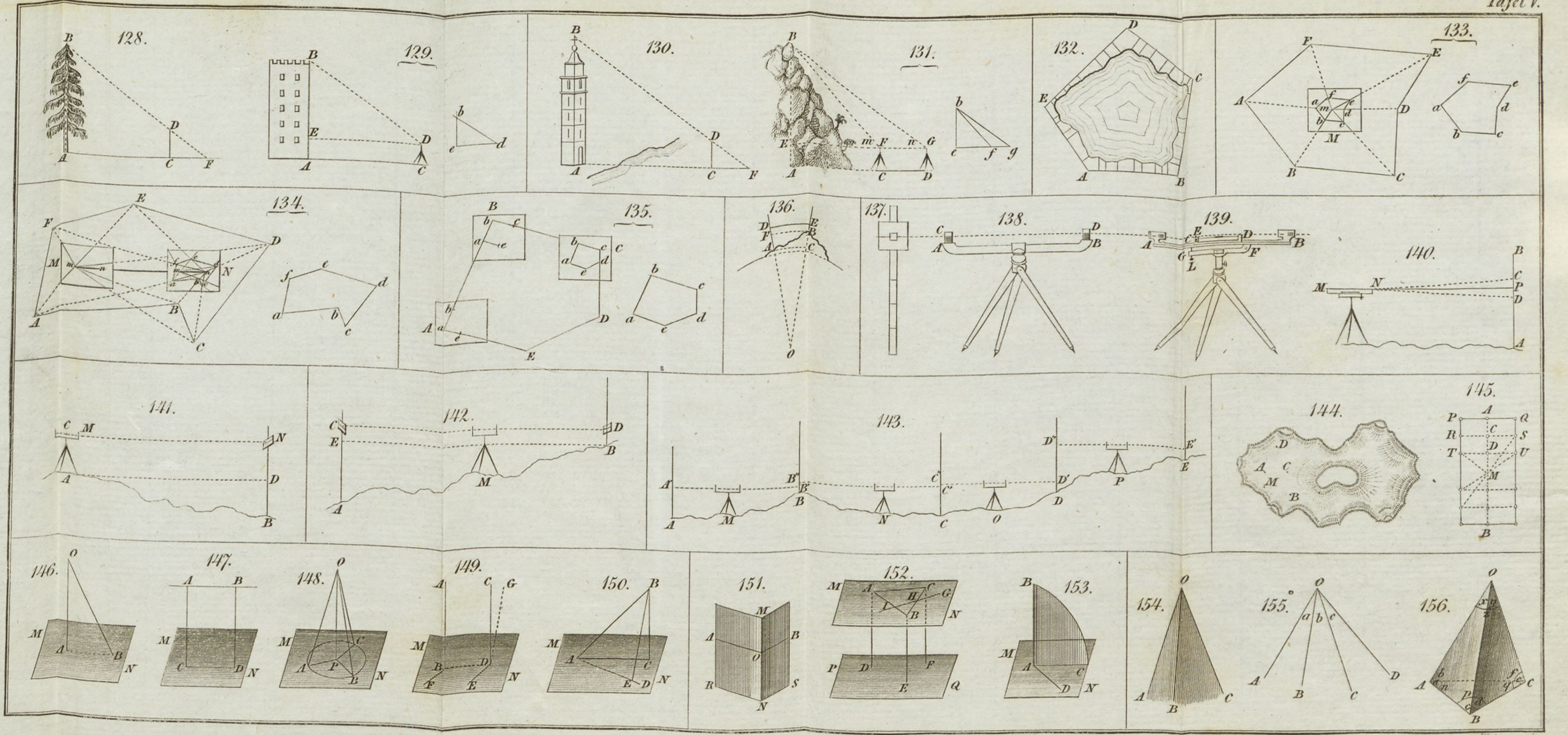
Wiedermann sculpt.

Narodna in univerzitetna knjižnica
Ljubljana


97.
98.
99.
100.
101.
102.
103.
104.
105.
106.
107.
108.
109.
110.
111.
112.
113.
114.
115.
116.
117.
118.
119.
120.
121.
122.
123.
124.
125.
126.
127.

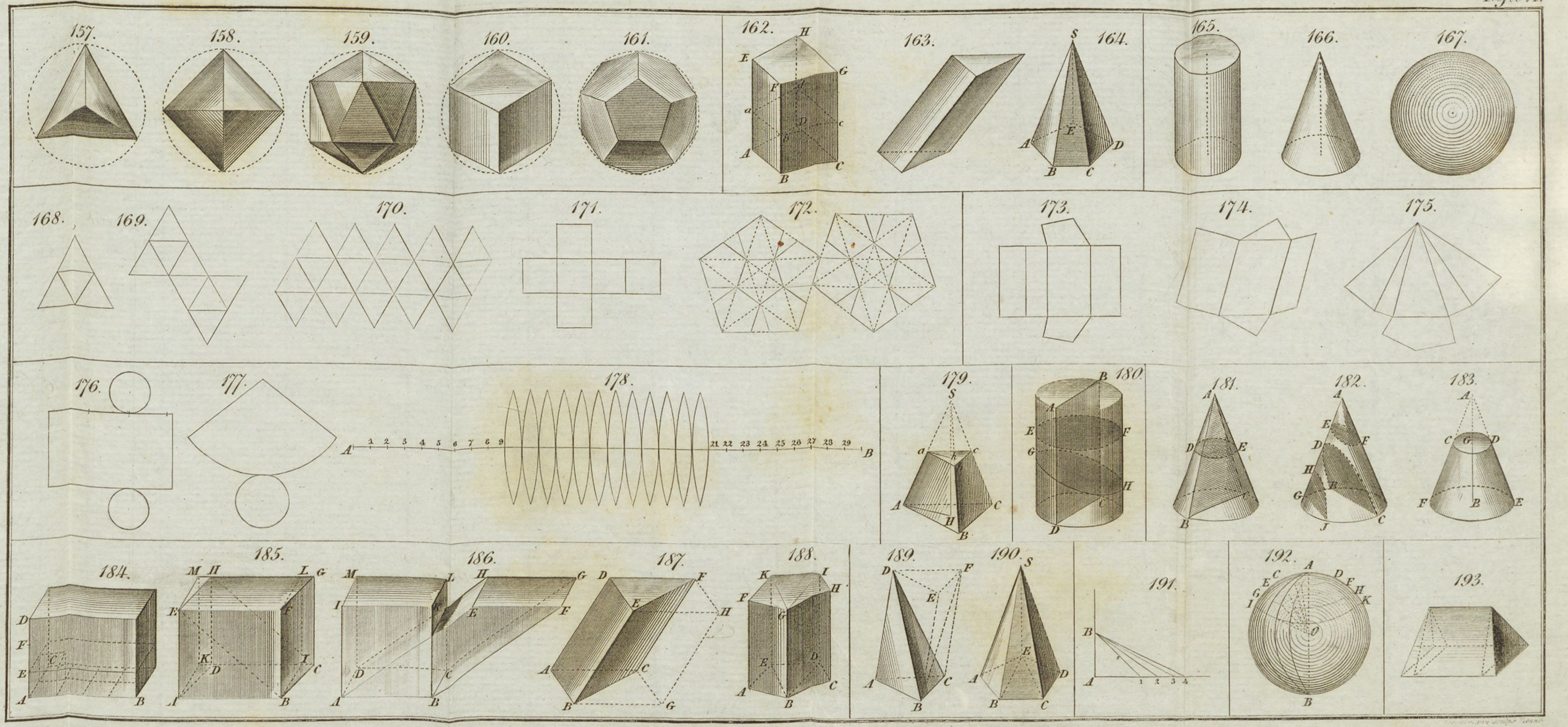
Narodna in univerzitetna knjižnica * Ljubljana

Tafel V.



128.
129.
130.
131.
132.
133.
134.
135.
136.
137.
138.
139.
140.
141.
142.
143.
144.
145.
146.
147.
148.
149.
150.
151.
152.
153.
154.
155.
156.

Narodna in univerzitetna knjižnica * Ljubljana


157.
158.
159.
160.
161.
162. H E G F a D c b A B C
163.
164. S A E D B C
165.
166.
167.
168.
169.
170.
171.
172.
173.
174.
175.
176.
177.
178.
A 1 2 3 4 5 6 7 8 9 21 22 23 24 25 26 27 28 29 B
179. S a h c A H C B
180. B A E F G H C D
181. A D E B
182. A E F D H B G J C
183. A C G D F B E
184. D F C E A B
185. M H L G E F K D I C A B
186. M L H G I K E F D C A B
187. D F E H A C B G
188. K I F H G E D A B C
189. D F E A C B
190. S E A D B C
191. B A 1 2 3 4
192. A C D E F G H I K O B
193.

Narodna in univerzitetna knjižnica
Ljubljana

NARODNA IN UNIVERZITETNA
KNJIŽNICA
COBISS ®
00000498170