



# Kuhljevi dnevi 2023

## Zbornik del

*Zbornik del*

***Kuhljevi dnevi 2023***

Bled, 21. – 22. september 2023

*Uredila:*

**Janko Slavič  
Martin Česnik**





## ***Kuhljevi dnevi 2023***

Bled, 21. – 22. september 2023

### **ZBORNİK DEL**

#### **Uredila:**

Janko Slavič  
Martin Česnik

#### **Recenzije:**

Tibor Barši Palmić	Tomaž Hozjan
Milan Batista	Marko Kegl
Boštjan Brank	Nikolaj Mole
Miha Brojan	Matjaž Ramšak
Gregor Čepon	Jure Ravnik
Martin Česnik	Zlatko Rek
Matevž Dular	Matej Vesenjāk
Nenad Gubeljāk	Klemen Zaletelj
Miroslav Halilovič	Dejan Zupan

#### **Izdalo in založilo:**

SLOVENSKO DRUŠTVO ZA MEHANIKO

Jamova 2, 1000 Ljubljana

september, 2023

#### **Grafično oblikovanje naslovnice:**

Žan Brezec

#### **Cena:**

Knjiga je prosto dostopna na spletni strani  
Slovenskega društva za mehaniko

## **Kazalo**

<b>T. Barši Palmić, J. Slavič</b> <i>3D tisk individualiziranih zloženih dielektričnih aktuatorjev</i> .....	1 – 12
<b>M. Batista</b> <i>Splošna analitična rešitev za linearno elastičen Reissnerjev ravninski nosilec</i> ..	13 – 20
<b>U. Bohinc, T. Franković, B. Brank</b> <i>Obratovalna modalna analiza kolesarskega mostu</i> .....	21 – 28
<b>M. Brojan, J. Zavodnik</b> <i>Stabilnost tankih slojevitih krožnih plošč z aktivnimi plastmi</i> .....	29 – 36
<b>S. K. Chandrashekhara, D. Zupan</b> <i>Strain localization using embedded discontinuities within velocity-based beam formulation</i> .....	37 – 44
<b>Ž. Donik, S. Sankary, L. Počivavšek, J. Kramberger</b> <i>Računalniška simulacija vstavljanja kovinske žilne opornice za zdravljenje disekcije v aortnem loku</i> .....	45 – 54
<b>U. Gradišar Centa, K. Kreft, L. Slemenik Perše</b> <i>Reološke lastnosti polimernih zmesi s farmacevtsko učinkovino za pripravo filamentov in izdelavo 3D tiskanih tablet</i> .....	55 – 62
<b>M. Halilovič, A. Maček, N. Mole, P. Koc, F. Plešnik, P. Rus, M. Žnidaršič, A. Kralj</b> <i>Izračun povosov in napetosti štirislojnih izolacijskih stekel</i> .....	63 – 74

**I. D. Horvat, J. Iljaž**

*Časovno odvisna osnovna rešitev pri numeričnem reševanju Fourierjevega in ne-Fourierjevega bioprenosa toplote* ..... 75 – 82

**D. Hranjec, M. Halilović, N. Mole, B. Starman**

*Izračun napetostnega stanja iz izmerjenega polja deformacij z uporabo metode končnih elementov* ..... 83 – 90

**B. Kamenik, M. Hriberšek, M. Zadavec**

*Sklopljen RDT-1D model za izračun kinetike sušenja znotraj vial v liofilizatorju* ..... 91 – 98

**M. Kegl, B. Harl, N. Gubelj, J. Predan**

*Implementacija in uporaba giroidne celice pri optimizaciji topologije* ..... 99 – 108

**P. Kočman, J. Korelc**

*Topološka optimizacija domene z upoštevanjem povezanega toplotno mehanskega odziva* ..... 109 – 118

**J. Korbar, D. Ocepek, G. Čepon, M. Boltežar**

*Identifikacija dinamskih lastnosti spojev z uporabo nevronske mreže* ..... 119 – 126

**Ž. Krvina, M. Plos, B. Fortuna, G. Turk**

*Vpliv hrupa na meritve dinamičnega modula elastičnosti* ..... 127 – 136

**A. Mauko, M. Borovinšek, M. Vesenj, Z. Ren**

*Numerična karakterizacija aluminijeve pene M-pore®* ..... 137 – 144

**M. Mihelčič, L. Slemenik Perše**

*Vpliv dodatka za obnovitev mehanskih lastnosti recikliranega polipropilena* ..... 145 – 152

<b>B. Nečemer, J. Fakin, G. Fajdiga, M. Šraml, S. Glodež</b> <i>Inverzna določitev materialnih parametrov ortotropnega materialnega modela smrekovega lesa</i> .....	153 – 160
<b>D. Ocepek, G. Čepon, M. Boltežar</b> <i>Eksperimentalno sklapljanje zveznih kontaktov v frekvenčnem prostoru</i> .....	161 – 168
<b>A. Oseli, L. Slemenik Perše</b> <i>Vpliv nastanka in konfiguracije omrežja iz ogljikovih nanocevk na mehanske in električne lastnosti polimernih nanokompozitov</i> .....	169 – 176
<b>M. Ramšak</b> <i>Numerična in eksperimentalna analiza aeracije v mali biološki čistilni napravi</i> .....	177 – 184
<b>Z. Rek, A. Bergant, K. Urbanowicz</b> <i>Numerična simulacija vodnega udara</i> .....	185 – 193
<b>S. Serafimoski, M. Mihelčič, M. Sadaf, L. Slemenik Perše</b> <i>Vpliv različnih aditivov na reologijo talin LDPE/PP mešanic</i> .....	194 – 201
<b>I. Tomac, D. Gorjup, J. Slavič</b> <i>High-speed camera based experimental modal analysis based on pixel intensities</i> .....	202 – 210
<b>G. Udovč, I. Planinc, T. Hozjan, A. Ogrin</b> <i>Vpliv izbire veznih enačb na prostorski odziv dvoslojnih kompozitnih nosilcev</i> .....	211 – 218
<b>J. Wedel, P. Steinmann, M. Hriberšek, J. Ravnik</b> <i>Model za simulacijo obnašanja mehkih deformabilnih mikrodolcev v razredčenem toku</i> .....	219 – 226

<b>Y. E. Yilmaz, N. Novak, U. Yaman, Z. Ren</b> <i>Investigating the strain rate sensitivity and mechanical behavior of photopolymer base cellular structures: Focus on base material and cell-graded gyroid structures</i> .....	227 – 236
<b>J. Zavodnik, M. Brojan</b> <i>Koncept kirigamija za izboljšanje stabilnosti aktivnih slojevitih kompozitov</i> .....	237 – 244
<b>M. Anko</b> <i>Večnivojski nadomestni model za spremljanje strukturnega stanja na podlagi reducirane modela in nevronskih mrež</i> .....	245
<b>G. Bizjan, J. Slavič, T. Košir</b> <i>3D-natisnjena termoaktivna vibroizolacija temelječa na kvazi-ničelni togosti</i> .....	246
<b>T. Mušič, M. Česnik, M. Boltežar</b> <i>Vpliv kontaktne nelinearnosti na dobo trajanja strukture pri vibracijskem utrujanju</i> ..	247
<b>G. Stanovnik</b> <i>Merjenje obremenitev vilic gorskega kolesa z zaznavalom osnih in prečnih sil</i> .....	248
<b>N. Vovk, J. Ravnik</b> <i>Numerično modeliranje dvofaznega toka v rezervoarju mokrega pralnika dimnih plinov</i> .....	249



## *3D tisk individualiziranih zloženih dielektričnih aktuatorjev*

Tibor Barši Palmić<sup>1</sup>, Janko Slavič<sup>1</sup>

### *3D-printing of individualized stacked dielectric actuators*

**Povzetek.** Popolnoma 3D-natisnjene pametne strukture so pritegnile veliko raziskovalnega zanimanja. Raziskujejo se nove tehnologije, materiali in metode za 3D-natisnjene funkcionalne strukture, kot so senzorji, aktuatorji, generatorji in baterije. Pred kratkim je bil predstavljen popolnoma 3D-natisnjen dinamičen dielektričen aktuator, izdelan v enem samem procesu z ekstruzijo termoplastičnega filameta. Vpliv konstrukcijskih parametrov na dinamične elektromehanske lastnosti tiskanega aktuatorja še niso bili raziskani. Da bi dosegli zahtevano zmogljivost in dinamične lastnosti individualiziranega, 3D-natisnjenega aktuatorja, morajo biti elektromehanske lastnosti povezane s teoretičnimi konstrukcijskimi parametri. To zahteva raziskavo lastnosti 3D-natisnjenih materialov in elektromehansko modeliranje 3D-natisnjenega aktuatorja. V tej raziskavi je predstavljen analitičen, elektromehanski model, sestavljen iz električnega in mehanskega modela ter elektromehanskega sklopa. Model je sestavljen iz osnovnih električnih in dinamskih elementov, kar omogoča ponovljivost in razširljivost modela. Električni in elektromehanski model sta bila eksperimentalno potrjena v robnem pogoju prostega pomika.

**Abstract.** Fully 3D-printed smart structures have attracted a lot of research interest; new technologies, materials, and methods for 3D-printed functional structures such as sensors, actuators, generators, and batteries are being researched. Recently, a fully 3D-printed, dynamic dielectric actuator fabricated in a single process with multi-material thermoplastic filament extrusion was presented. However, the effects of design parameters on the dynamic electromechanical properties of the printed actuator were not yet researched. To achieve the required performance and dynamic properties of an individualized, 3D-printed actuator, the electromechanical properties must be related to the theoretical design parameters. This requires research into the properties of 3D-printed materials and the electromechanical modeling of the 3D-printed actuator. In this research, an analytical, electromechanical model is introduced, consisting of electrical and mechanical models, and electromechanical coupling. The model consists of basic electrical and dynamic lumped elements, which facilitates the reproducibility and extensibility of the model. The electrical and electromechanical model have been experimentally validated in a free-displacement boundary condition.

---

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

## 1 Uvod

Pametne strukture so strukture, ki izkazujejo več povezanih funkcij, kot *npr.* zaznavanje zunanjih dražljajev in sprememb v strukturi, spreminjanje oblike in aktuacijo, generiranje in akumulacijo energije ter prilagajanje mehanskih lastnosti [12, 13]. 3D tisk predstavlja potencial za izdelavo multifunkcionalnih struktur v enem izdelovalnem procesu.

V zadnjih letih je že bilo predstavljenih več 3D-natisnjenih zaznaval, ki merijo pospešek [3, 2], silo [18], tlak [32] in deformacijo [21]. Da bi lahko natisnili dinamsko pametno strukturo, pa je potrebna raziskava fizikalnih mehanizmov, ki bi jih lahko izkoristili za aktuacijo 3D-natisnjene strukture. Dinamični aktuatorji brez relativno gibajočih se komponent (v nadaljevanju trdninski aktuatorji, ang. *solid-state actuators*), predstavljeni v zadnjih letih, omogočajo različne naprave z različnimi zmogljivostmi. Nekateri fizikalni mehanizmi, kot so elektrostatični [23], piezoelektrični [26], elektromagnetni [6] in dielektrični [16], so znani po svojih hitrih odzivnih časih in so bili uporabljeni pri izdelavi membranskih resonatorjev [15], zvočnikov [11] in hitro preklopnih bistabilnih aktuatorjev [22]. Drugi fizikalni mehanizmi, kot so pnevmatski [29], termomehanski [14] in pojav spomina oblike [33], imajo počasnejše odzivne čase in so bili uporabljeni pri razvoju biomimetičnih robotov [28], mehkih prijemal [34], umetnih mišic [31] in samozlozljivih struktur [9].

Dodajalne tehnologije so postale pomembne za izdelavo trdninskih aktuatorjev zaradi svojih prednosti, kot so nizko cenovna izdelava v enem samem procesu, zmožnost izdelave kompleksnih oblik, hitro prototipiranje in integrirano zaznavanje natisnjenih struktur [12]. Nedavno predstavljeni 3D-natisnjeni aktuatorji temeljijo na elektromagnetnem [4], dielektričnem [7] in piezoelektričnem efektu [17] ter na pojavu spomina oblike [30]. Omejitve obstoječih raziskav izvirajo predvsem iz izdelovalnih postopkov, ki sicer vključujejo dodajalne tehnologije, a zahtevajo izdelavo posebnih materialov za 3D tisk in dodatne procese med in po 3D tisku, da se doseže aktuatorsko funkcijo.

Težnja je po metodi, s katero bi lahko natisnili dinamski aktuator s komercialno dostopno tehnologijo in materiali brez potreb po dodatnih posegih in izdelovalnih procesih. Osredotočamo se na dodajalno tehnologijo, ki bazira na ekstruziji termoplastičnega filameta skozi segreto šobo (ang. *fused filament fabrication - FFF*) [27]. Želena oblika izdelka razrežemo v vodoravne plasti (ang. *slicing*), ki se zaporedno tiskajo ena na drugo. Vsaka plast je sestavljena iz posamezno ekstrudiranih sledi polimerne taline (ang. *traces*), ki se strdijo in tvorijo trdno osnovo za naslednje plasti. Glavne prednosti so dostopnost 3D tiskalnikov, obsežen izbor polimerov [8] in funkcionalnih polimernih kompozitov [1] ter možnost 3D tiska z več materiali [10], zaradi česar je to ena od najbolj razširjenih tehnologij 3D tiska.

V tem delu predstavljamo v celoti 3D-natisnjen dielektrični aktuator (DEA), ki ga izdelamo na komercialno dostopnem FFF 3D tiskalniku in s komercialno dostopnimi termoplastičnimi polimeri in polimernimi kompoziti. Poleg tega predstavljamo validiran analitičen elektromehanski model.

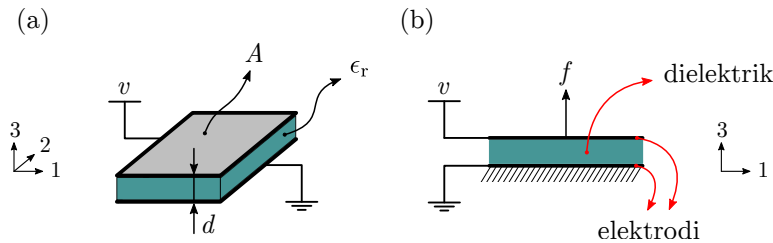
## 2 Teoretične osnove

Dielektrični elektromehanski sklop je v tem delu definiran s pomočjo Maxwell-ovega napeto-stnega tenzorja, iz katerega zanemarimo vpliv magnetnega polja [5]:

$$T_{ij} = \epsilon E_i E_j - \frac{1}{2} \epsilon |\mathbf{E}|^2 \delta_{ij}. \quad (1)$$

$T_{ij}$  je  $ij$ -ta komponenta mehanskega napetostnega tenzorja,  $\epsilon$  predstavlja električno permitivnost,  $E_i$  in  $E_j$  sta komponenti vektorja električne poljske jakosti in  $\delta_{ij}$  je Kronecker-jeva delta funkcija.

V primeru, ki je prikazan na sliki 1, je električno polje posledica aplicirane napetosti  $v$  na zgornjo in spodnjo elektrodo, kar pomeni, da je električno polje usmerjeno navpično ( $\mathbf{E} = \{0, 0, E_3\}^T$ ). Predpostavljamo, da so robni efekti električnega in mehanskega stanja zanemarljivi. Mehanska napetost med elektrodama je v tem primeru:



Slika 1: Primer aktivne dielektrične enote: (a) izometrični pogled, (b) stranski pogled.

$$T_{33} = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E_3^2, \quad (2)$$

kjer je  $\epsilon_r$  relativna permitivnost dielektrika in  $\epsilon_0$  permitivnost vakuumu. Če predpostavimo homogeno električno polje ( $E = -\frac{v}{d}$ ), lahko iz en. (2) izrazimo silo ( $f = T_{33}A$ ), ki se vzpostavi med elektrodama:

$$f = -\frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 A \frac{v^2}{d^2}, \quad (3)$$

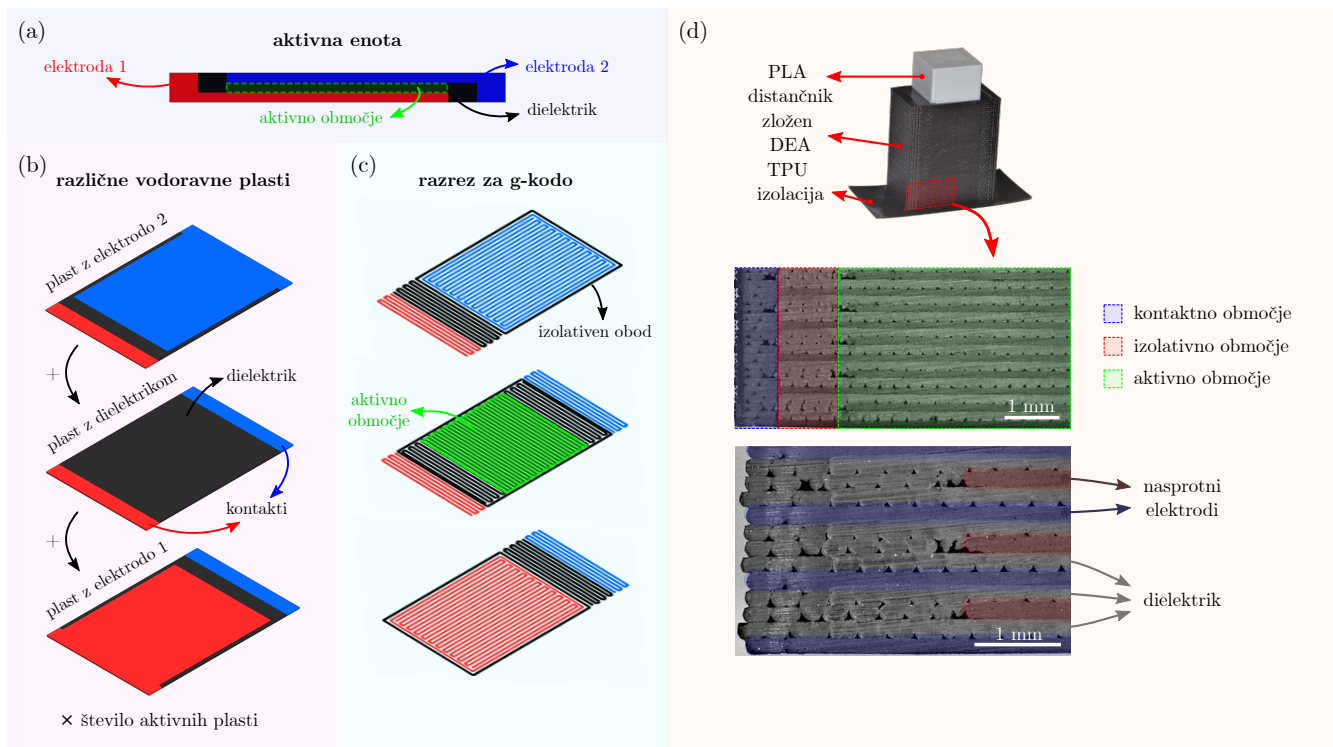
kjer nova spremenljivka  $A$  predstavlja površino dielektrika/elektrode. Električna napetost  $v$  predstavlja vhodno veličino in sila  $f$  izhodno veličino aktuatorja.

Iz en. (3) je očitno, da gre za kvadratičen efekt, kar pomeni, da je sila vedno negativna (tlak na dielektrično plast), ne glede na predznak napetosti na elektrodah. V primeru izmenične napetosti se sila odzove z dvojno frekvenco napetosti in statično komponento.

## 3 Metoda 3D tiska

Na sliki 2 je predstavljena konstrukcija aktuatorja in strategija ekstruzije in nanašanja materiala med 3D tiskom. Zložen DEA je sestavljen iz treh različnih plasti, prikazanih na sliki 2b, ki so bile natisnjene izmenično, da bi dosegli želeno konfiguracijo z izmenično zloženimi elektrodami





**Slika 2:** Konstrukcija aktuatorja in razrez za 3D tisk ter 3D natisnjen aktuator. (a) Ena aktivna enota. (b) Tri različne plasti aktivne enote. (c) Razrezane plasti za ekstruzijsko 3D tiskanje. (d) 3D natisnjen aktuator in povečava prereza aktivnih plasti aktuatorja.

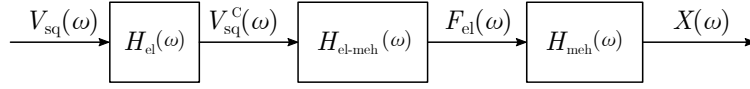
in dielektrikom med njimi. Dielektrična plast je sestavljena iz dielektrika v sredini s kontakti na levi in desni strani za levo oziroma desno elektrodo.

Slika 2d prikazuje 3D natisnjen aktuator in prerez aktivnih plasti, kjer so obarvana posamezna območja aktuatorja: območje za električno kontaktiranje, območje izolacije med nasprotnimi elektrodami in aktivno območje, ki izvaja pretvorbo električne v mehansko energijo in omogoča aktucijski učinek.

Dielektrične regije so bile 3D-natisnjene s Trček TPU filamentom, prevodne regije pa z Ninja-Tek Eel filamentom. Metoda 3D-tiska je natančno predstavljena v [24].

#### 4 Analitičen elektromehanski model

Dielektrični aktuatorji so gnani z visokonapetostnim električnim virom. Električna napetost na elektrodah napolni dielektrična področja aktuatorja z nabojem. Elektromehanski sklop dielektričnega materiala (glejte teoretično ozadje v poglavju 2) pretvori energijo električnega polja v mehansko napetost, ki deformira dielektrik. Elektromehanski model mora torej upoštevati (di)električne lastnosti prevodnih in dielektričnih materialov, elektromehanski sklop dielektrika in mehanske (dinamske) lastnosti celotne strukture.



**Slika 3:** Elektromehanski model, ki pretvori kvadrat vhodne napetosti  $V_{sq}(\omega)$  v pomik  $X(\omega)$  aktuatorja.

Koncept elektromehanskega modela je prikazan na sliki 3. Aktuator je gnan z AC napetostjo brez DC komponente. Ker je dielektrični učinek, nelinearen, kvadraten, elektromehanski sklop, je model lineariziran z definiranjem vhoda kot kvadrata napetosti:

$$V_{sq}(\omega) = \mathcal{F} \{v^2(t)\}, \quad (4)$$

kjer  $\mathcal{F}$  predstavlja operacijo Fourierove transformacije (FT); prehoda iz časovne v frekvenčno domeno.

Električni model  $H_{el}(\omega)$  (Pog. 4.1) pretvori napetost na elektrodah  $V_{sq}(\omega)$  v napetost preko kapacitivnih elementov (dielektričnih plasti)  $V_{sq}^C(\omega)$ :

$$V_{sq}^C(\omega) = H_{el}(\omega) \cdot V_{sq}(\omega). \quad (5)$$

Elektromehanski sklop  $H_{el-meh}(\omega)$  (Pog. 4.3) pretvarja električno napetost preko kapacitivnih elementov  $V_{sq}^C(\omega)$  v silo  $F_{el}(\omega)$ , ki jo ustvarjajo dielektrične plasti:

$$F_{el}(\omega) = H_{el-meh}(\omega) \cdot V_{sq}^C(\omega). \quad (6)$$

Sila  $F_{el}(\omega)$  se v mehanski domeni (Pog. 4.2) pretvori v pomik aktuatorja pod robnim pogojem prostega pomika:

$$X(\omega) = H_{meh}(\omega) \cdot F_{el}(\omega). \quad (7)$$

Odziv aktuatorja na električno vzbujanje je mogoče izračunati za delovanje s prostim pomikom, kot sledi:

$$X(\omega) = H_{meh}(\omega) \cdot H_{el-meh}(\omega) \cdot H_{el}(\omega) \cdot V_{sq}(\omega). \quad (8)$$

#### 4.1 Električen model

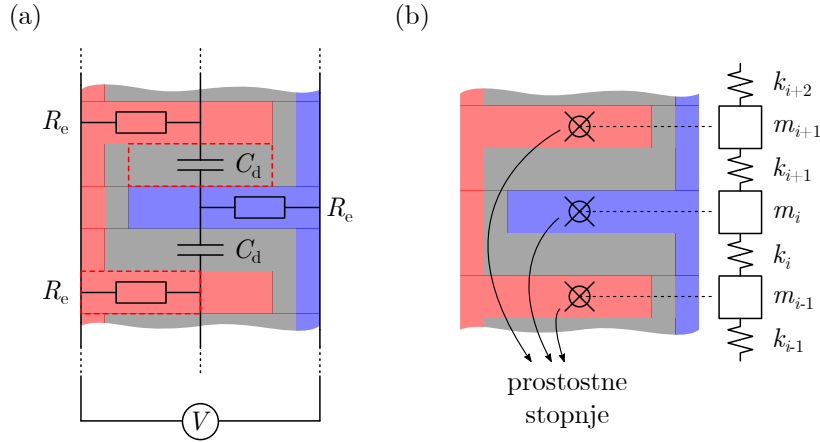
Model z diskretnimi električnimi elementi (upori in kondenzatorji) je prikazan na sliki 4a. Upornost in kapacitivnost se izračunata iz dimenzij in lastnosti materialov (prevodnost in dielektrična permitivnost).

Električna impedanca ene aktivne plasti je:

$$Z_i(\omega) = 4R_e + \frac{1}{j\omega C_d}, \quad (9)$$

sestavljena iz upornosti elektrod  $R_e$  in kapacitivnosti dielektrika  $C_d$ . Električna impedanca celotnega aktuatorja je enaka vzporedno vezanim  $N$  aktivnim plastem (9):

$$Z_{el}(\omega) = \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{Z_i(\omega)} \right)^{-1}, \quad (10)$$



**Slika 4:** Modeli zloženega aktuatorja. (a) Električen model. (b) Dinamski model.

kar je poenostavljeno:

$$Z_{el}(\omega) = \left( N \frac{1}{Z_i(\omega)} \right)^{-1} = \frac{4j\omega R_e C_d + 1}{4Nj\omega R_e C_d} \quad (11)$$

Izpeljana električna impedanca  $Z_{el}(\omega)$  zloženega aktuatorja omogoča izračun prenosne funkcije  $H_C(\omega)$ :

$$H_C(\omega) = \frac{1}{j\omega C_\Sigma \cdot Z_{el}(\omega)}, \quad (12)$$

kjer je  $C_\Sigma$  skupna kapacitivnost zloženega aktuatorja:

$$C_\Sigma = N \cdot C_d. \quad (13)$$

Električni model je definiran z električno prenosno funkcijo  $H_C(\omega)$  (12):

$$H_{el}(\omega) = \frac{V_{sq}^C(\omega)}{V_{sq}(\omega)} = H_C^2 \left( \frac{\omega}{2} \right). \quad (14)$$

## 4.2 Dinamski model

Dinamski sistem z več prostostnimi stopnjami (PS) je modeliran z uporabo diskretnih dinamskih elementov, glej sliko 4b. Diskretne PS so definirane v središču plasti elektrod.

Diferencialno enačbo dinamskega sistema z več PS lahko izpeljemo kot:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}^*(\omega)\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t). \quad (15)$$

Matriki  $\mathbf{M}$  in  $\mathbf{K}^*(\omega)$  sta masna in togostna matrika sistema.  $\mathbf{x}(t)$  je vektor pomikov vsake PS in  $\mathbf{f}(t)$  je vektor zunanjih sil, ki delujejo na vsako PS. V našem primeru se togost izračuna s kompleksnim, frekvenčno odvisnim modulom elastičnosti  $E^*(\omega)$ , kar pomeni, da je togostna matrika matrika kompleksnih, frekvenčno odvisnih togosti.

### 4.3 Elektromehanski sklop

Elektromehanski sklop temelji na enačbi (3). Sila dielektričnih plasti  $f(t)$  je sorazmerna s kvadratom električne napetosti na kapacitivnih elementih aktuatorja  $v_C^2(t)$ :

$$f(t) = f_{\text{koef}} \cdot v_C^2(t), \quad (16)$$

kjer:

$$f_{\text{koef}} = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d_d^2}. \quad (17)$$

Predpostavlja se, da sta debelina dielektrika  $d_d$  in aktivno območje  $A$  med aktuacijo konstantna, ker je izmerjena deformacija zloženega aktuatorja  $< 1\%$ .

Sila se aplicira na vsako PS dinamskega modela. Ker se predpostavlja, da so debeline  $d_d$  konstantne in da je na vse elektrode aplicirana enaka električna napetost (elektrode so povezane vzporedno), so vse aplicirane sile enake. To pomeni, da se sile izničijo za vse elektrode, razen za spodnjo in zgornjo. Zato vektor sile  $\mathbf{f}(t)$  vsebuje samo ne-niželne sile za prvo in zadnjo PS modela:

$$\mathbf{f}(t) = \{+f_{\text{koef}}, 0, \dots, 0, -f_{\text{koef}}\}^T \cdot v_C^2(t). \quad (18)$$

Sestavljeno matrično diferencialno enačbo (15) je zdaj mogoče pretvoriti v frekvenčno domeno z uporabo FT. FT vektorja sile  $\mathbf{f}(t)$  je:

$$\mathcal{F}\{\mathbf{f}(t)\} = \mathbf{f}_{\text{koef}} \mathcal{F}\{v_C^2(t)\} = \mathbf{f}_{\text{koef}} V_{\text{sq}}^C(\omega), \quad (19)$$

kjer je  $\mathbf{f}_{\text{coeff}}$  vektor koeficientov sile v en. (18) in  $V_{\text{sq}}^C(\omega)$  FT kvadrata električne napetosti na kapacitivnih delih aktuatorja. FT vodi do elektromehansko sklopljene matrične enačbe v frekvenčni domeni:

$$-\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{X}(\omega) + \mathbf{K}^*(\omega) \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{f}_{\text{koef}} V_{\text{sq}}^C(\omega), \quad (20)$$

kjer je  $\mathbf{X}(\omega)$  vektor pomikov v frekvenčni domeni. Prenosna funkcija med pomiki  $\mathbf{X}(\omega)$  in električno napetostjo med dielektričnimi plastmi  $V_{\text{sq}}^C(\omega)$  je:

$$\frac{\mathbf{X}(\omega)}{V_{\text{sq}}^C(\omega)} = \frac{\mathbf{f}_{\text{koef}}}{-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}^*(\omega)}. \quad (21)$$

Elektromehanska karakteristika prostega pomika aktuatorja je definirana, kot pomik  $\mathbf{X}(\omega)$  deljen z napetostjo na kontaktih aktuatorja  $V_{\text{sq}}(\omega)$ . To je mogoče izračunati na podlagi (21) in definicije električne prenosne funkcije  $H_{\text{el}}(\omega)$  (14):

$$\mathbf{H}_{x,v}(\omega) = \frac{\mathbf{X}(\omega)}{V_{\text{sq}}(\omega)} = H_{\text{el}}(\omega) \cdot \frac{\mathbf{X}(\omega)}{V_{\text{sq}}^C(\omega)} = H_{\text{el}}(\omega) \cdot \frac{\mathbf{f}_{\text{koef}}}{-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}^*(\omega)}, \quad (22)$$

kjer je  $\mathbf{H}_{x,v}(\omega)$  vektor frekvenčnih karakteristik za vsake PS. PS, ki nas zanima, je zadnja PS, ki predstavlja zgornjo (prosto) elektrodo.

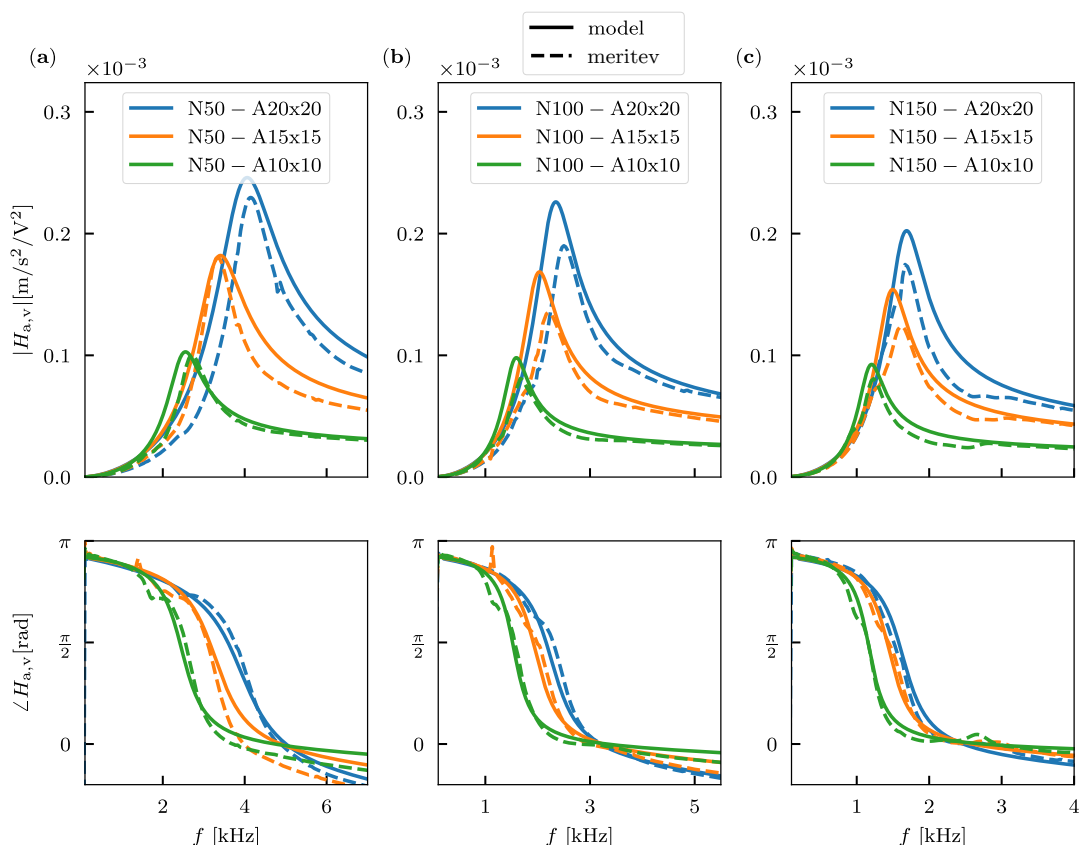
Karakteristika pospeška, definirana kot pospešek  $\mathbf{A}(\omega)$  deljen z napetostjo  $V_{\text{sq}}(\omega)$ , je izračunana iz karakteristike pomika  $\mathbf{H}_{x,v}(\omega)$ :

$$\mathbf{A}(\omega) = -\omega^2 \mathbf{X}(\omega), \quad (23)$$

$$\mathbf{H}_{a,v}(\omega) = \frac{\mathbf{A}(\omega)}{V_{\text{sq}}(\omega)} = -\omega^2 \cdot \mathbf{H}_{x,v}(\omega). \quad (24)$$

## 5 Rezultati

Tukaj predstavljamo validacijo elektromehanskega modela s pomočjo eksperimentalne karakterizacije 3D natisnjenih aktuatorjev [24, 25].



**Slika 5:** Dinamska karakteristika prostega pomika v obliki pospešenosti aktuatorjev s: **(a)** 50, **(b)** 100 in **(c)** 150 plastmi.

Slika 5 prikazuje dinamsko karakteristiko prostega pomika v obliki karakteristike pospeška (24). Model natančno napove prvo lastno frekvenco in magnitudo pospeška. Model preceni obseg odziva za približno 5-10 %. Razliko lahko pripišemo trdim mehanskim kontaktom na spodnji in zgornji površini aktuatorja, ki omejujejo deformacijo [20, 19], in izolacijskim območjem, ki shranjujejo električno energijo, vendar ne povzročajo navpične vzbujevalne sile. Elektrostatična analiza končnih elementov je pokazala, da izolacijska območja v aktuatorju shranijo 1-3% dovedene električne energije.

## 6 Zaključek

Zaključimo lahko, da je dodajalna tehnologija FFF s komercialnimi materiali primerna za izdelavo aktivnih struktur s pomembnimi prednostmi pred klasičnimi pristopi, *npr.* individualizacija

oblike, dimenzij in elektromehanskih lastnosti, tisk več različnih aktuatorjev v enem procesu in tisk aktuatorjev s pasivnimi in aktivnimi komponentami (npr. s 3D-natisnjenimi zaznavali) v istem izdelovalnem procesu.

Glavne izzive v zanesljivosti, natančnosti in ponovljivosti ekstruzije in nanašanja termoplastičnega elastomera je mogoče preiti s primerno konstrukcijo aktuatorja in strategijo generiranja g-kode ter 3D tiska.

Predstavljen elektromehanski model temelji na konstrukcijskih parametrih zloženega dielektričnega aktuatorja in materialnih lastnostih komercialnih termoplastičnih elastomerov. Model je bil validiran na devetih 3D-natisnjenih aktuatorjih z različnimi konstrukcijskimi parametri. Standardni električni in dinamski elementi in struktura modela omogočajo zanesljivo napoved dinamskih karakteristik 3D-natisnjenega aktuatorja v širokem frekvenčnem območju.

3D-natisnjeni aktuatorji izkazujejo funkcionalno ponovljivo dinamično delovanje. Frekvenčne karakteristike prostega pomika kažejo široka frekvenčna območja s konstantno amplitudo. Aktuatorji so torej uporabni v vibro-akustičnih aplikacijah, kjer je potrebno nadzorovano in ponovljivo dinamično delovanje. Da bi dosegli višje amplitude odziva, je mogoče vzbuditi ozko resonančno območje, kar je obetavno v aplikacijah, ki zahtevajo resonančno delovanje oz. obratovanje pri konstantni frekvenci.

## Literatura

- [1] P. M. Angelopoulos, M. Samouhos, and M. Taxiarchou. Functional fillers in composite filaments for fused filament fabrication; a review. *Materials Today: Proceedings*, 37:4031–4043, 2021.
- [2] M. Arh and J. Slavič. Single-Process 3D-Printed Triaxial Accelerometer. *Advanced Materials Technologies*, page 2101321, dec 2021.
- [3] M. Arh, J. Slavič, and M. Boltežar. Design principles for a single-process 3d-printed accelerometer – theory and experiment. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 152:107475, may 2021.
- [4] X. Cao, S. Xuan, Y. Gao, C. Lou, H. Deng, and X. Gong. 3D Printing Ultraflexible Magnetic Actuators via Screw Extrusion Method. *Advanced Science*, 9(16):2200898, may 2022.
- [5] J. S. Chang, A. J. Kelly, and J. M. Crowley. *Handbook of Electrostatic Processes*. Taylor & Francis, 1995.
- [6] A. D. Charles, A. N. Rider, S. A. Brown, and C. H. Wang. Multifunctional magneto-polymer matrix composites for electromagnetic interference suppression, sensors and actuators, jan 2021.
- [7] A. Chortos, E. Hajiesmaili, J. Morales, D. R. Clarke, and J. A. Lewis. 3D Printing of Interdigitated Dielectric Elastomer Actuators. *Advanced Functional Materials*, 30(1):1907375, jan 2020.

- [8] D. Fico, D. Rizzo, R. Casciaro, and C. Esposito Corcione. A Review of Polymer-Based Materials for Fused Filament Fabrication (FFF): Focus on Sustainability and Recycled Materials. *Polymers*, 14(3):465, jan 2022.
- [9] L. M. Fonseca, G. V. Rodrigues, and M. A. Savi. An overview of the mechanical description of origami-inspired systems and structures. *International Journal of Mechanical Sciences*, 223:107316, jun 2022.
- [10] A. García-Collado, J. M. Blanco, M. K. Gupta, and R. Dorado-Vicente. Advances in polymers based Multi-Material Additive-Manufacturing Techniques: State-of-art review on properties and applications, feb 2022.
- [11] E. Garnell, C. Rouby, and O. Doaré. Dynamics and sound radiation of a dielectric elastomer membrane. *Journal of Sound and Vibration*, 459:114836, oct 2019.
- [12] A. Georgopoulou, L. Egloff, B. Vanderborght, and F. Clemens. A Soft Pneumatic Actuator with Integrated Deformation Sensing Elements Produced Exclusively with Extrusion Based Additive Manufacturing. In *The 8th International Symposium on Sensor Science*, page 11, Basel Switzerland, may 2021. MDPI.
- [13] T. Hainsworth, L. Smith, S. Alexander, and R. MacCurdy. A Fabrication Free, 3D Printed, Multi-Material, Self-Sensing Soft Actuator. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 5(3):4118–4125, jul 2020.
- [14] T. Hanuhov and N. Cohen. Thermally induced deformations in multi-layered polymeric struts. *International Journal of Mechanical Sciences*, 215:106959, feb 2022.
- [15] T. Hiruta, N. Hosoya, S. Maeda, and I. Kajiwara. Experimental validation of vibration control in membrane structures using dielectric elastomer actuators in a vacuum environment. *International Journal of Mechanical Sciences*, 191:106049, feb 2021.
- [16] Y. Jang, H. Nabaee, G. Endo, and K. Suzumori. Analysis of the multi-balloon dielectric elastomer actuator for traveling wave motion. *Sensors and Actuators A: Physical*, 333:113243, jan 2022.
- [17] I. Kierzewski, S. S. Bedair, B. Hanrahan, H. Tsang, L. Hu, and N. Lazarus. Adding an electroactive response to 3D printed materials: Printing a piezoelectret. *Additive Manufacturing*, 31:100963, jan 2020.
- [18] T. Košir and J. Slavič. Single-process fused filament fabrication 3D-printed high-sensitivity dynamic piezoelectric sensor. *Additive Manufacturing*, 49:102482, jan 2022.
- [19] G. Kovacs, L. Düring, S. Michel, and G. Terrasi. Stacked dielectric elastomer actuator for tensile force transmission. *Sensors and Actuators, A: Physical*, 155(2):299–307, oct 2009.
- [20] S. Kuhring, D. Uhlenbusch, T. Hoffstadt, and J. Maas. Finite element analysis of multi-layer DEAP stack-actuators. In *Electroactive Polymer Actuators and Devices (EAPAD) 2015*, volume 9430, page 94301L. SPIE, apr 2015.

- [21] M. Maurizi, J. Slavič, F. Cianetti, M. Jerman, J. Valentinčič, A. Lebar, and M. Boltežar. Dynamic measurements using FDM 3D-printed embedded strain sensors. *Sensors (Switzerland)*, 19(12), 2019.
- [22] L. Medina and A. A. Seshia. Tristable properties and limit point behaviour in electrostatically actuated initially curved coupled micro beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 204:106543, aug 2021.
- [23] M. Osada, G. Zhang, F. Carneiro, M. Muromachi, S. Yoshimoto, and A. Yamamoto. Effect of insulating liquid viscosity on output force of a high-power synchronous electrostatic motor. *International Journal of Mechanical Sciences*, 220:107149, apr 2022.
- [24] T. B. Palmić and J. Slavič. Single-process 3D-printed stacked dielectric actuator. *International Journal of Mechanical Sciences*, 230:107555, sep 2022.
- [25] T. B. Palmić and J. Slavič. Design principles for a single-process 3d-printed stacked dielectric actuators — theory and experiment. *International Journal of Mechanical Sciences*, 246:108128, 2023.
- [26] R. S. Reddy, S. Panda, and A. Gupta. Nonlinear dynamics and active control of smart beams using shear/extensional mode piezoelectric actuators. *International Journal of Mechanical Sciences*, 204:106495, aug 2021.
- [27] B. Shaqour, M. Abuabiah, S. Abdel-Fattah, A. Juaidi, R. Abdallah, W. Abuzaina, M. Qarout, B. Verleije, and P. Cos. Gaining a better understanding of the extrusion process in fused filament fabrication 3D printing: a review. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 114(5-6):1279–1291, may 2021.
- [28] A. M. Soomro, F. H. Memon, J.-W. Lee, F. Ahmed, K. H. Kim, Y. S. Kim, and K. H. Choi. Fully 3D printed multi-material soft bio-inspired frog for underwater synchronous swimming. *International Journal of Mechanical Sciences*, 210:106725, nov 2021.
- [29] B. Sparrman, C. du Pasquier, C. Thomsen, S. Darbari, R. Rustom, J. Laucks, K. Shea, and S. Tibbits. Printed silicone pneumatic actuators for soft robotics. *Additive Manufacturing*, 40:101860, apr 2021.
- [30] X. Wei, H. Li, X. He, Z. Li, H. Ye, W. Xue, and Q. Ge. Shape Memory Polymer-based Stiffness Variable Soft Actuator Via Digital Light Processing-based 3D Printing. In *2021 27th International Conference on Mechatronics and Machine Vision in Practice (M2VIP)*, pages 612–616. IEEE, nov 2021.
- [31] W. Xiao, X. Du, W. Chen, G. Yang, D. Hu, and X. Han. Cooperative collapse of helical structure enables the actuation of twisting pneumatic artificial muscle. *International Journal of Mechanical Sciences*, 201:106483, jul 2021.
- [32] Q. Yi, S. Najafikhoshnoo, P. Das, S. Noh, E. Hoang, T. Kim, and R. Esfandyarpour. All-3D-Printed, Flexible, and Hybrid Wearable Bioelectronic Tactile Sensors Using Biocompatible Nanocomposites for Health Monitoring. *Advanced Materials Technologies*, 7(5):2101034, may 2022.



- [33] Z. Zhao, K. Wang, L. Zhang, L.-C. Wang, W.-L. Song, and D. Fang. Stiff reconfigurable polygons for smart connectors and deployable structures. *International Journal of Mechanical Sciences*, 161-162:105052, oct 2019.
- [34] G. Zhong, W. Dou, X. Zhang, and H. Yi. Bending analysis and contact force modeling of soft pneumatic actuators with pleated structures. *International Journal of Mechanical Sciences*, 193:106150, mar 2021.



## *Splošna analitična rešitev za linearno elastičen Reissnerjev ravninski nosilec*

*Milan Batista<sup>1</sup>*

### *General analytical solution for linear-elastic planar Reissner's beam*

**Povzetek.** V članku je podana splošna analitično rešitve sistema navadnih diferencialnih enačb prvega reda, ki popisujejo deformacijo Reissnerjevega ravninskega nosilca pod vplivom obremenitev v njegovih končnih točkah. Rešitev enačb je podana v zaključeni obliki z uporabo Jacobijevih eliptičnih funkcij. Kot primer uporabe je obravnavan problem najdaljšega dosega prostega konca previsnega nosilca.

**Abstract.** This paper presents a general analytical solution of the system of the first order ordinary differential equations describing the deformation of the Reissner's plane beam subject to loads applied in its endpoints. The solution of the equations is given in closed form using Jacobi elliptic functions. As an application example the solution to the problem of the longest reach of the free end of a cantilever beam is given.

## **1 Uvod**

V tem prispevku bomo podali analitično rešitve sistema enačb, ki jih je za opis končnih premikov in deformacij ravninskega nosilca podal Reissner [1]. Teorija, na osnovi katere so te enačbe izpeljane, je razširitev znane Euler-Bernoullijeve teorije končnih upogibnih premikov nosilca (elastike) z vključitvijo končne osne in strižne deformacija. V nadaljevanju bomo predpostavili, da je nosilec obremenjen le v svojih končnih točkah in da so konstitutivne enačbe linearne. Naj omenimo, da Reissnerjeva teorija, ki vodi do enakih enačb kot teorija ravninskega Cosseratovega nosilca [2], teh predpostavk ne vključuje.

Razpoložljiva literatura o tej temi je razmeroma redka. Rešitev za preprosto podprt raztegljivega nosilec, na katerega deluje osna tlačna sila, so v obliki eliptičnih integralov podali Pflüger [3], Stoker [4] ter Magnusson s soavtorji [5]. Za Reissnerjev nosilec so v obliki eliptičnih integralov podali Goto s sodelavci [6] in Humer [7].

---

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za pomorstvo in promet

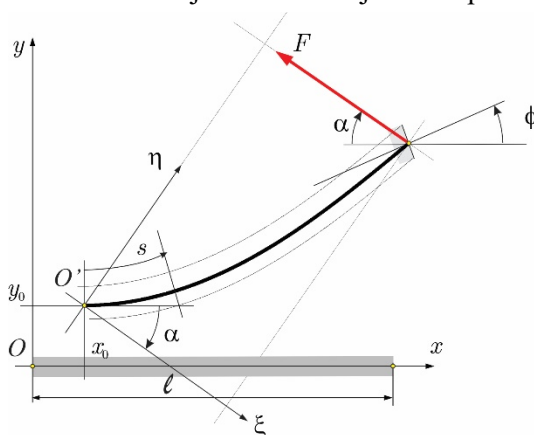
Kot kaže so do sedaj znane analitične rešitve za raztegljive in strižno deformabilne nosilce podane v obliki eliptičnih integralov. Pomanjkljivost rešitve z eliptičnimi integrali je, da je ta rešitev implicitna; v formulah, ki opisujejo koordinate nosilca, je namreč neodvisna spremenljivka kot naklon preseka nosilca in ne ločna dolžina osi nosilca.

Namen tega prispevka je predstaviti rešitev za Reissnerjev nosilec v obliki Jacobijevih eliptičnih funkcij kot jo je podal avtor tega prispevka [8]. Nekatere prednost Jacobijevih eliptičnih funkcij pred eliptičnimi integrali so, da so definirane za poljubno vrednost argumenta, da so med seboj so povezane z enostavnimi zvezani in imajo enostavna pravila za računanje odvodov [9], [10]. Poleg tega je za njihovo numerično izračunavanje na voljo kopica računalniških programov. Ti so navedeni npr. v [11].

V tem prispevku bo omenjena avtorjeva rešitev nekoliko dodelana in sicer tako, da bodo eliptične funkcije namesto eliptičnega modula  $k$  izražene prek parametra  $m$  [10]. Na ta način rešitev vsebuje vse možne realne vrednosti  $m$ , in zato primerov  $k = 1$ ,  $k > 1$ , in primera, ko je  $k$  čisto imaginarno število ni treba obravnavati posebej. Kot zgled uporabe je na koncu podana rešitev problema najdaljšega dosega konca previsnega nosilca.

## 2 Temeljne enačbe

Obravnavamo izotropen in homogen ravninski elastični nosilec dolžine  $\ell$ . V neobremenjenem stanju je os nosilca ravna ali pa ima obliko krožnega loka. Predpostavljamo, da os nosilca leži v ravnini  $Oxy$  in da je nosilec simetričen glede na ravnino  $Oxy$  (slika 1). Nadalje predpostavljamo, da nosilec ni obremenjen vzdolž svoje osi ampak le v svojih krajiščih.



Slika 1. Geometrija in obremenitev nosilca.

Diferencialne enačbe, ki določajo obliko in notranje obremenitve deformiranega nosilca so [1]:

- kinematične enačbe

$$\frac{dx}{ds} = (1 + \varepsilon) \cos \phi - \gamma \sin \phi, \quad \frac{dy}{ds} = (1 + \varepsilon) \sin \phi + \gamma \cos \phi, \quad (1)$$

$$\frac{d\phi}{ds} = \kappa \quad (2)$$

- ravnotežne enačbe

$$\frac{dN}{ds} - \kappa Q = 0, \quad \frac{dQ}{ds} + \kappa N = 0, \quad (3)$$

$$\frac{dM}{ds} + (1 + \varepsilon)Q - \gamma N = 0. \quad (4)$$

V navedenih enačbah sta  $x$  in  $y$  sta koordinati osi nosilca,  $\phi$  je kot normale deformiranega normalnega prereza nosilca glede na  $x$ -os,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\kappa$ , so osna, strižna in upogibna deformacije,  $N$ ,  $Q$  in  $M$  pa so notranja normalna sila, strižna sila in upogibni moment. Vse te količine so funkcije ločne dolžine  $s \in [0, \ell]$  osi nosilca v neobremenjenem stanju (materialna koordinata). Enačbe dopolnimo z linearnimi konstitutivnimi zvezami

$$N = EA\varepsilon, \quad Q = GA_s\gamma, \quad (5)$$

$$M = EI\kappa. \quad (6)$$

Materialne lastnosti  $EA$ ,  $GA_s$ ,  $EI$  so osna, strižna in upogibna togost so po predpostavki pozitivne konstante. K temu je potrebno dodati še pogoj

$$1 + \varepsilon > 0, \quad (7)$$

ki pove, da se nosilec ne more stisniti v točko [2].

Za rešitev problema moramo torej iz devet enačb (1)–(6) določiti devet neznanih funkcij:  $x$ ,  $y$ ,  $\phi$ ,  $N$ ,  $Q$ ,  $M$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\kappa$ . Ker imamo šest diferencialnih enačb, mora rešitev vsebovati šest konstant, katerih vrednosti določimo iz predpisanih geometrijskih in/ali obremenitvenih robnih pogojev.

### 3 Rešitev

#### 3.1 Integracija ravnotežnih enačb za notranji sili

Ravnotežni enačbi (3) rešimo tako, da materialno koordinato  $s$  zamenjamo z  $\phi$ . Če pišemo

$$\frac{dN}{ds} = \frac{dN}{d\phi} \frac{d\phi}{ds} = \kappa \frac{dN}{d\phi}, \quad \text{in} \quad \frac{dQ}{ds} = \kappa \frac{dQ}{d\phi} \quad (8)$$

in upoštevamo robni pogoj, da ima sila na koncu nosilca v koordinatnih smereh  $x$  in  $y$  komponenti  $-F \cos \alpha$  in  $F \sin \alpha$ , se rešitev glasi

$$N = -F \cos(\phi + \alpha), \quad Q = F \sin(\phi + \alpha). \quad (9)$$

Pri tem sta  $F$  velikost sile in  $\alpha$  pa njen kot naklona v smeri urinega kazalca glede na negativni del  $x$ -osi (slika 1). Ti vrednosti za  $N$  in  $Q$  vstavimo v konstitutivni zvezi (5). Tako dobimo izraza za osno in strižno deformacijo

$$\varepsilon = -\frac{F}{EA} \cos(\phi + \alpha), \quad \gamma = \frac{F}{GA_s} \sin(\phi + \alpha). \quad (10)$$

#### 3.2 Integracija ravnotežne enačbe za upogibni moment

V ravnotežno enačbo (4) namesto  $M$  vstavimo izraz (6),  $\kappa$  izrazimo prek  $\phi$  s pomočjo enačbe

(2). za deformaciji  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  pa uporabimo izraza (10). Tako dobimo nelinearno diferencialno enačbo drugega reda za neznan kot  $\phi$

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{F}{EI} \left[ \sin(\phi + \alpha) - \frac{F}{2} \left( \frac{1}{EA} - \frac{1}{GA_s} \right) \sin 2(\phi + \alpha) \right] = 0. \quad (11)$$

Zaradi krajših zapisov uvedemo brezdimenzijske parametre

$$\omega^2 \equiv \frac{F\ell^2}{EI} > 0, \quad \beta \equiv \frac{\omega^2}{\lambda^2} = F \left( \frac{1}{GA_s} + \frac{1}{EA} \right) > 0, \quad \mu \equiv \frac{GA_s - EA}{GA_s + EA} \in [-1, 1]. \quad (12)$$

$\lambda$  je posplošena vitkost nosilca. Za  $\mu = -1$  dobimo osno tog (neraztegljiv) nosilec, za  $\mu = 1$  pa strižno tog nosilec. Eulerjevo elastiko dobimo za  $\mu = 0$  in  $\beta = 0$  oz.  $\lambda = \infty$ .

S pomočjo navedenih parametrov lahko rešitev enačbe (11) zapišemo v obliki (postopek integracije je podrobno opisan v članku [8])

$$\phi = -\alpha + 2 \sin^{-1} \left[ k \frac{\operatorname{sn}(\Omega\sigma + C | m)}{\sqrt{1 + p \operatorname{cn}^2(\Omega\sigma + C | m)}} \right], \quad \sigma \equiv \frac{s}{\ell} \in [0, 1] \quad (13)$$

kjer so

$$\Omega^2 = \omega^2 [1 + \mu\beta(2k^2 - 1)], \quad p = \frac{\mu\beta k^2}{1 + \mu\beta(k^2 - 1)}, \quad m = \frac{k^2 + p}{1 + p}. \quad (14)$$

$C$  in  $k$  sta integracijski konstanti,  $\operatorname{sn}$  in  $\operatorname{cn}$  pa sta Jacobijeve eliptični funkciji [9], kjer kot parameter nastopa  $m$  [10]. Le v primeru, ko je  $p = 0$ , je  $m = k^2$  tj.  $k$  dobi vlogo eliptičnega modula [11].

Upogibno deformacijo lahko sedaj enostavno izračunamo tako, da odvajamo (13)

$$\ell\kappa = 2\Omega k \sqrt{1+p} \frac{\operatorname{cn}(\Omega\sigma + C | m)}{1 + p \operatorname{cn}^2(\Omega\sigma + C | m)}. \quad (15)$$

Ker iščemo le realne rešitve morajo biti vsi izrazi, ki nastopajo pod koreni v (13) in (15) nenegativni. Za  $\kappa \neq 0$  mora torej veljati  $\Omega > 0$  in  $1 + p > 0$ . V primeru, ko je  $m \neq 1$  sta  $\phi$  in  $\kappa$  periodični funkciji. Za  $m > 1$  mora  $\kappa$  ohraniti predznak, zato mora imeti v tem primeru  $k$  isti predznak kot  $\kappa$ .

### 3.3 Integracija kinematičnih enačb

Če v kinematični enačbi (1) vstavimo deformaciji  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  podani z izrazoma (10) dobimo

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{d\xi}{ds} \cos \alpha + \frac{d\eta}{ds} \sin \alpha \\ \frac{dy}{ds} &= -\frac{d\xi}{ds} \sin \alpha + \frac{d\eta}{ds} \cos \alpha \end{aligned} \right\}, \quad (16)$$

kjer sta

$$\frac{d\xi}{ds} = \cos\psi - \frac{F}{2EA} \left[ 1 + \frac{EA}{GA_s} + \left( 1 - \frac{EA}{GA_s} \right) \cos 2\psi \right], \quad (17)$$

$$\frac{d\eta}{ds} = \sin\psi - \frac{F}{2} \left( \frac{1}{EA} - \frac{1}{GA_s} \right) \sin 2\psi = -\frac{EI}{F} \frac{d\kappa}{ds}, \quad (18)$$

Integracija (16) nam da

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + [\xi - \xi(0)] \cos \alpha + [\eta - \eta(0)] \sin \alpha \\ y &= y_0 - [\xi - \xi(0)] \sin \alpha + [\eta - \eta(0)] \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

kjer sta

$$\frac{\xi}{\ell} = - \left[ 1 + \frac{1}{2} \beta + \mu \beta \left( 2k^2 - \frac{3}{2} \right) \right] \sigma + \frac{2\Omega}{\omega^2} \left[ \operatorname{en}(\Omega\sigma + C | m) - p \frac{\operatorname{sn}(\Omega\sigma + C | m) \operatorname{cn}(\Omega\sigma + C | m) \operatorname{dn}(\Omega\sigma + C | m)}{1 + p \operatorname{cn}^2(\Omega\sigma + C | m)} \right], \quad (20)$$

$$\frac{\eta}{\ell} = -\frac{\ell\kappa}{\omega^2}. \quad (21)$$

$\operatorname{dn}$  je Jacobijeva funkcija,  $\operatorname{en}(x|m) \equiv \int_0^x \operatorname{dn}^2(t|m) dt$  pa Jacobijeva epsilon funkcija [9]. Začetek nosilca se nahaja v točki s koordinatama  $x(0) = x_0$  in  $y(0) = y_0$ .

Rešitev enačb (1) v obliki (19) je torej izražena z zasukom koordinatnega sistema  $O'\xi\eta$  okoli začetne točke nosilca za kot  $\alpha$  v smeri urinega kazalca (slika 1). V tem sistemu je sila  $F$  vodoravna. Da smo dobili rešitev je bila potrebna le ena integracija; za določitev  $\xi$  je bilo potrebno integrirati (17),  $\eta$  pa se neposredno izraža z upogibno deformacijo  $\kappa$ , ki je podana z (15). Podrobnosti integracije so podane v [8].

### 3.4 Nekatere lastnosti rešitve

Rešitev enačb (1)–(4) vsebuje šest integracijskih konstant:  $F, \alpha$  iz rešitve ravnotežnih enačb (9),  $k$  in  $C$ , ki ju dobimo z integriranjem enačbe (11), ter  $x_0$  in  $y_0$  ki določata legero nosilca in ne vplivata na rešitev tj. obliko nosilca.

Konstanti  $\alpha$  in  $C$  v rešitvi nastopata neposredno,  $k$  in  $F$  oz.  $\omega^2$ , če je dolžina  $\ell$  znana, pa sta povezana prek parametrov rešitve (12)–(14) tj.

$$\Omega = f(k, \omega^2, \lambda, \mu), \quad (p, m) = f_1(k, \lambda, \mu). \quad (22)$$

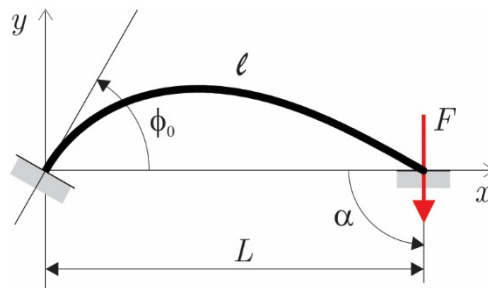
Za rešitev danega problema potrebujemo torej štiri obremenitvene in/ali geometrijske pogoje. Ti pogoji vodijo k reševanju ene ali sistema transcendentnih algebrskih enačb.

V posebnem primeru, ko sta  $\beta = 0$  in  $\mu = 0$ , dobimo iz (14)  $\Omega^2 = \omega^2$ ,  $p = 0$ ,  $m = k^2$ . Enačbe (13), (15), (20), (21) se v tem primeru reducirajo na znano rešitve problema elastike.

Predstavljena rešitev je implementirana v programu *rod2d* napisanem za reševanje v okolju MATLAB [12].

#### 4 Primer

Kot primer si oglejmo problem najdaljšega dosega konca previsnega nosilca, ki ga je za Eulerjevo elastiko postavil Wang [13]. Vprašanje je, do kam seže konec nosilca? (slika 2) Wang je podal numerično rešitev, avtor tega članka pa analitično [14]. Plaut in Virgin [15] navajata nekaj eksperimentalnih podatkov. Za osno raztegljivo konzolo sta numerično rešitev podala Abdalla in Casagrande [16].



Slika 2. Problem najdaljše razdalje.

Naj bo previsni nosilec na prostem koncu obremenjena s silo velikosti  $F$ , ki ima stalno smer  $\alpha = -\pi/2$ . Pri tem brez vpliva na splošnost rešitve predpostavljamo da je dolžina konzole  $\ell = 1$ , in da je začetek nosilca v koordinatnem izhodišču,  $x(0) = y(0) = 0$ . Ker sta sila in njena smer podana za rešitev problema potrebujemo še dve enačbi, iz katerih izračunamo  $k$  in  $C$ .

Konec nosilca je prost, zato tam velja  $\kappa(1) = 0$ . Iz tega pogoja in izraza (15) za  $\kappa$  dobimo enačbo

$$\text{cn}(\Omega + C | m) = 0. \quad (23)$$

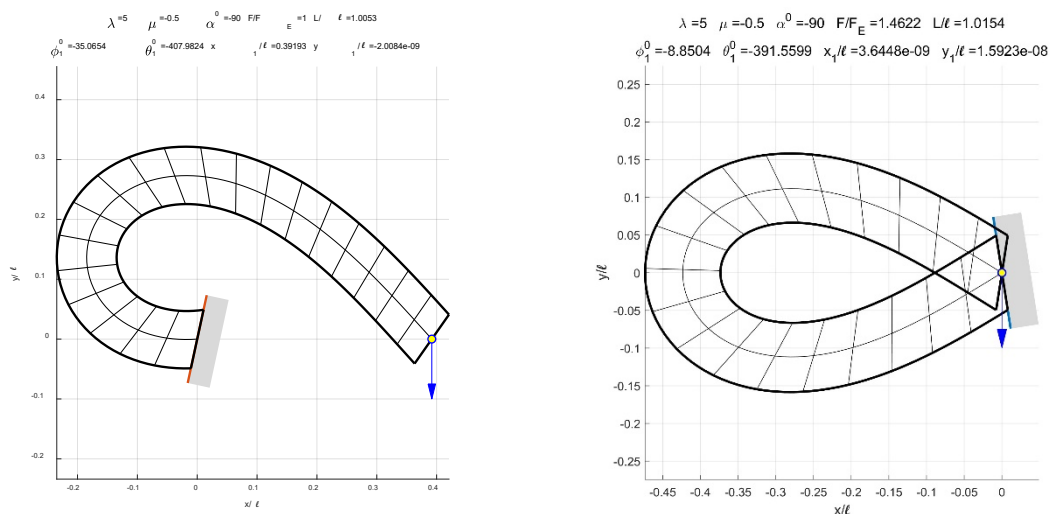
Ta enačba ima zaradi periodičnosti funkcije  $\text{cn}$  pri  $m < 1$  neskončno rešitev. Če izberemo prvo, ki je najverjetneje edina stabilna, dobimo

$$C = -\Omega + \mathbf{K}(m), \quad (24)$$

kjer je  $\mathbf{K}(m)$  popolni eliptični integral prvega reda. Na prostem koncu je  $y(1) = 0$ . Iz tega pogoja in izraza (19) za  $y$  dobimo, z upoštevanjem (24) za  $C$ , enačbo

$$\xi(1) - \xi(0) = 0 \quad (25)$$

iz katere izračunamo neznano vrednost  $k$ . Enačba je transcendentna in nima analitične rešitve, zato jo rešujemo numerično.



**Slika 3.** Najdaljšega dosega previsnega nosilca (levo) in previsni nosilec obremenjen z največjo silo (desno).  $F_E = \pi^2 EI / \ell^2$  je Eulerjeva kritična sila.

Ko poznamo  $\alpha$ ,  $F$ ,  $C$ ,  $k$  lahko neznani kot naklona v izhodišču  $\phi_0 = \phi(0)$  in doseg nosilca  $L = x(1)$  dobimo iz (13) in (21). Iskana izraza sta

$$\phi_0 = \frac{\pi}{2} + 2 \sin^{-1} \left[ k \frac{\text{cd}(\Omega | m)}{\sqrt{1 + p(1-m)\text{sd}^2(\Omega | m)}} \right] \quad (26)$$

$$L = \frac{2k\Omega}{\omega^2} \sqrt{1-k^2} \frac{\text{sd}(\Omega | m)}{\sqrt{1 + p(1-m)\text{sd}^2(\Omega | m)}} \quad (27)$$

kjer sta  $\text{sd}(z | m) = \text{sn}(z | m) / \text{dn}(z | m)$  in  $\text{cd}(z | m) = \text{cn}(z | m) / \text{dn}(z | m)$ .

Iz izraza (27) za  $L$  izhaja, da je rešitev možna za  $|k| < 1$ , rešitvi za  $k < 0$  in  $k > 0$  pa sta simetrični. V tem zadnjem primeru so rešitve smiselne za  $L \geq 0$ . Za ta pogoj dobimo iz (27) pogoj  $\text{sn}(\Omega | m) \geq 0$ , torej  $0 \leq \Omega \leq 2\mathbf{K}(m)$ . Primer  $\Omega = 0$  ni zanimiv, saj pomeni vertikalni neobremenjen nosilec. Pogoj  $\Omega = 2\mathbf{K}(m)$  pa skupaj z enačbo (25) pa tvori sistem enačb za neznanki  $k$  in  $\omega_{\max}$  tj. največjo silo  $F_{\max}$  potrebno, da sklenemo konca nosilca.

Rezultati izračuna za različne nosilce so podani v Tabeli 1, primera oblike deformiranega nosilec pa sta prikazan na sliki 2.

Za primerjavo navajamo rezultate numeričnega izračuna iz [16] za strižno tog nosilec. Za primeru  $\omega^2 = 5$ ,  $\beta = 0.1$  in  $\mu = 1$  je v [16] navedena vrednost  $L = 0.8078$ , po formuli (27) pa dobimo  $L = 0.7969$ , kar je 1.4% relativna razlika. Za  $\omega^2 = 10$  je v [16] navedena vrednost  $L = 0.5523$ , z opisano rešitvijo pa dobimo vrednost  $L = 0.5020$  kar je 10% relativna razlika.



**Table 1.** Problem najdaljšega dosega previsnega nosilca. Izračunane vrednosti  $L$ ,  $\phi_0$  in  $F_{\max}$ .

$\lambda$	$\mu$	$F\ell^2/EI$	$L/\ell$	$\phi_0/\pi$	$F_{\max}\ell^2/EI$
10	-1	10	0.498829	0.836154	18.722140
10	0	10	0.500584	0.846311	19.176700
10	1	10	0.501974	0.858050	19.322350
<i>elastika</i>		10	0.528392	0.805862	21.549087

## Literatura

- [1] E. Reissner, *One-Dimensional Finite-Strain Beam Theory - Plane Problem*, Z Angew Math Phys, 23 (1972) 795-804.
- [2] S.S. Antman, *Nonlinear problems of elasticity*, 2nd ed., Springer, New York, 2005.
- [3] A. Pflüger, *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*, Springer, Berlin, 1950.
- [4] J.J. Stoker, *Nonlinear elasticity*, Gordon and Breach, New York, 1968.
- [5] A. Magnusson, M. Ristinmaa, C. Ljung, *Behaviour of the extensible elastica solution*, Int J Solids Struct, 38 (2001) 8441-8457.
- [6] Y. Goto, T. Yoshimitsu, M. Obata, *Elliptic integral solutions of plane elastica with axial and shear deformations*, Int J Solids Struct, 26 (1990) 375-390.
- [7] A. Humer, *Exact solutions for the buckling and postbuckling of shear-deformable beams*, Acta Mech, 224 (2013) 1493-1525.
- [8] M. Batista, *A Closed Form Solution for Reissner's Planar Finite-Strain Beam Using Jacobi Elliptical Functions*, Int J Solids Struct, 87 (2015) 153-166.
- [9] W.P. Reinhardt, P.L. Walker, *Jacobian Elliptic Functions*, in: F.W.J. Olver (Ed.) NIST handbook of mathematical functions, Cambridge University Press : NIST, Cambridge ; New York, 2010.
- [10] L.M. Milne-Thomson, *Jacobian Elliptic Functions and Theta Functions*, in: M. Abramowitz, I.A. Stegun (Eds.) Handbook of Mathematical Functions : With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Dover, Mineola, New York, 1972.
- [11] M. Batista, *Elfun 18 - A collection of MATLAB functions for the computation of elliptic integrals and Jacobian elliptic functions of real arguments*, SoftwareX, 10 (2019).
- [12] M. Batista, *rod2d*, MATLAB Central File Exchange, 2019.
- [13] C.Y. Wang, *Longest reach of a cantilever with a tip load*, Eur. J. Phys., 37 (2015) 012001.
- [14] M. Batista, *Longest reach of a cantilever with a tip load*, Eur. J. Phys., 37 (2016).
- [15] R.H. Plaut, L.N. Virgin, *Furthest reach of a uniform cantilevered elastica*, Mech. Res. Comm., 83 (2017) 18-21.
- [16] H.M.A. Abdalla, D. Casagrande, *On the longest reach problem in large deflection elastic rods*, Int. J. Non-Linear Mech., (2019) 103310.



## *Obratovalna modalna analiza kolesarskega mostu*

Uroš Bohinc<sup>1</sup>, Tomislav Franković<sup>2</sup>, Boštjan Brank<sup>2</sup>

### *Operational modal analysis of a cycling/footbridge*

#### **Povzetek.**

V prispevku je predstavljena operacijska modalna analiza kolesarskega mostu, ki je bila izvedena zlasti z namenom preverjanja projektnih predpostavk. Identificirani parametri lastnih nihajnih načinov kažejo na razlike med dejanskim stanjem in projektiranim odzivom, zlasti na neustrezno lego lastne frekvence osnovnega nihajnega načina, ki se nanaša na navpična nihanja. Rezultati služijo tudi kot vhodni podatki za izvedbo modelnega posodabljanja numeričnega modela konstrukcije, s čimer se izboljšuje zanesljivost napovedi.

**Abstract.** The paper presents an operational modal analysis of a bicycle bridge, primarily conducted to verify the design assumptions. The identified parameters of the natural oscillation modes indicate differences between the actual state and the projected response, particularly concerning the inadequate value of the natural frequency of the fundamental oscillation mode related to vertical vibrations. The results also serve as input data for updating the numerical model of the structure, thereby enhancing the reliability of its predictions.

## **1 Uvod**

Pri projektiranju želimo z uporabo numeričnega modela vnaprej napovedati odziv konstrukcije na različne predpostavljene obremenilne sheme in tako zagotoviti njeno varnost v vseh pogojih uporabe. Uspešnost modeliranja konstrukcijskega odziva je odvisna od več dejavnikov: od geometrije, natančnosti opisa posameznih konstrukcijskih elementov in stikov med njimi, materialnih lastnosti, natančnosti izračuna ipd. Nekatere predpostavke modela je mogoče preprosto preveriti ali celo izmeriti, nekaterih pa nikakor ne zaradi nedosegljivosti ali njihove naključne narave. Zato se uveljavlja koncept t.i. "posodabljanja modela", kjer numerični model konstrukcije popravljamo tako, da je razlika med napovedanimi in izmerjenimi lastnostmi čim manjša. Postopek je računsko in konceptualno zahteven, vendar uveljavljen in je že v široki uporabi.

---

<sup>1</sup> Zavod za gradbeništvo Slovenije, Ljubljana

<sup>2</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana

Pri determinističnem posodabljanju gre za klasičen optimizacijski problem, opisan v [2], ali za uporabo Bayesove verjetnostne formule [4]. Za izvedbo posodabljanja je potrebno zagotoviti relevantne meritve, ki čim celoviteje zajemajo različne vidike konstrukcijskega odziva. Med meritvami, ki v tem smislu ponujajo največ, so meritve dinamičnega odziva konstrukcije, s katerimi izmerimo osnovne lastne nihajne načine konstrukcije (in jim določimo nihajni čas, dušenje in nihajno obliko). Tovrstne meritve je mogoče izvajati na obstoječih konstrukcijah brez dodatnih posegov in so zato sorazmerno preproste za izvedbo.

V okviru projekta DataBridge, kjer med drugimi raziskujemo različne vidike modelnega posodabljanja, je bil raziskan dinamični odziv kolesarskega mostu v Šenčurju. Jekleni most sorazmerno preproste zasnove, ki je bil zgrajen pred nedavnim, predstavlja v tem smislu optimalno konstrukcijo, saj je mogoče zanj dobiti natančne načrte in posledično je mogoča izdelava dobrega numeričnega modela konstrukcije. Zaradi dostopnosti mostu je bilo mogoče izvesti kakovostne meritve.

## 2 Most

Kolesarski most v Šenčurju je enorazpnska jeklena ločna konstrukcija. Daljša nosilca, ukrivljena v radiju 200.0 m sta izvedena iz zaprtega škatlastega profila RH 450x250x8.0 mm. Povezana sta s sistemom sekundarnih škatlastih nosilcev Q 150x150x10 mm ter zavetrovalnih palic D=16.0 mm. Razpon konstrukcije teh dveh nosilcev je 60.4 m, pri čemer sistem vpenjanja omogoča horizontalne pomike. Sovprežna prekladna plošča izdelana s pomočjo jeklene trapezne pločevine, je izvedena preko sekundarnih nosilcev in je z jekleno konstrukcijo povezana preko deformabilnih moznikov, strižnih trnov z glavo (tip Nelson). Loka sta ukrivljena v radiju 40.0 m in sta izvedena iz cevi KH 508x20 mm in sicer tako, da preko diagonalnih veznih gredi TRON 101 x 5.0 mm v temenskem delu tvorita prostorsko nosilno konstrukcijo. Spodnja ločna nosilca prekladne konstrukcije sta preko sistema nateg obešena na loka, kot je prikazano na sliki 1.



Slika 1: Vzdolžni in prečni pogled na kolesarski most z merilno postajo.

### 3 Metodologija

#### 3.1 Operacijska modalna analiza

Operacijska oz. obratovalna modalna analiza (OMA) je tehnika, s katero je mogoče določiti modalne parametre preiskovane konstrukcije izključno na podlagi meritev odziva - brez poznavanja vzbujanja. Prav tako ni potrebno aktivno vzbujanje, saj je to vedno prisotno v okolju v različnih oblikah. Med primeri ambientalnega vzbujanja so veter, promet, mikro seizmika, strojne vibracije ipd.

Vhodni podatki za operacijsko modalno analizo so sinhronizirane meritve pospeškov (ali pomikov) v več točkah konstrukcije. Meritve zapišemo v vektor  $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_k(t)]$ , kjer meritve v točki  $k$  označimo s  $y_k(t)$ . Diskretno Fourierovo transformiranko signala  $y_k(t)$  dolžine  $T$ , ki ga vzorčimo s frekvenco  $f_s = 1/\Delta t$ , označimo z  $Y_k$

$$Y_k(\omega_m) = \sum_n y_k(t_n) e^{-i\omega_m t_n},$$

pri čemer je  $\omega_m = m \frac{2\pi}{T}$  in  $t_n = n \Delta t$ . Odtod za vsak  $\omega_m$  izračunamo spektralno gostoto moči  $\mathbf{S}(\omega_m)$ :

$$S_{ij}(\omega_m) = \frac{1}{T} Y_i^*(\omega_m) Y_j(\omega_m),$$

ter njeno enostransko različico  $\mathbf{G}$ :

$$G_{ij}(\omega) = \begin{cases} 2S_{ij}(\omega), & \omega > 0 \\ S_{ij}(\omega), & \omega = 0 \\ 0, & \omega < 0. \end{cases}$$

Iz spektralne gostote moči  $\mathbf{G}$  je mogoče s sorazmerno nezahtevnim numeričnim postopkom izluščiti ključne modalne parametre. Med bolj pogostimi načini za določanje modalnih parametrov je tehnika razcepa v frekvenčni domeni (FDD - frequency domain decomposition), ki izrablja prednosti singularnega razcepa spektralne gostote moči v obliko

$$\mathbf{G}(\omega_m) = \mathbf{U}(\omega_m) \boldsymbol{\Sigma}(\omega_m) \mathbf{U}^T(\omega_m),$$

kjer je matrika  $\mathbf{U}$  ortogonalna singularnih vektorjev in  $\boldsymbol{\Sigma}$  diagonalna matrika po velikosti urejenih singularnih vrednosti. Oceno za dušenje nihajnih načinov dobimo s pomočjo modificirane FDD metode (EFDD). Postopek je podrobneje opisan v literaturi [1], [5], [6], v nadaljevanju so le kratko povzeti bistveni koraki.

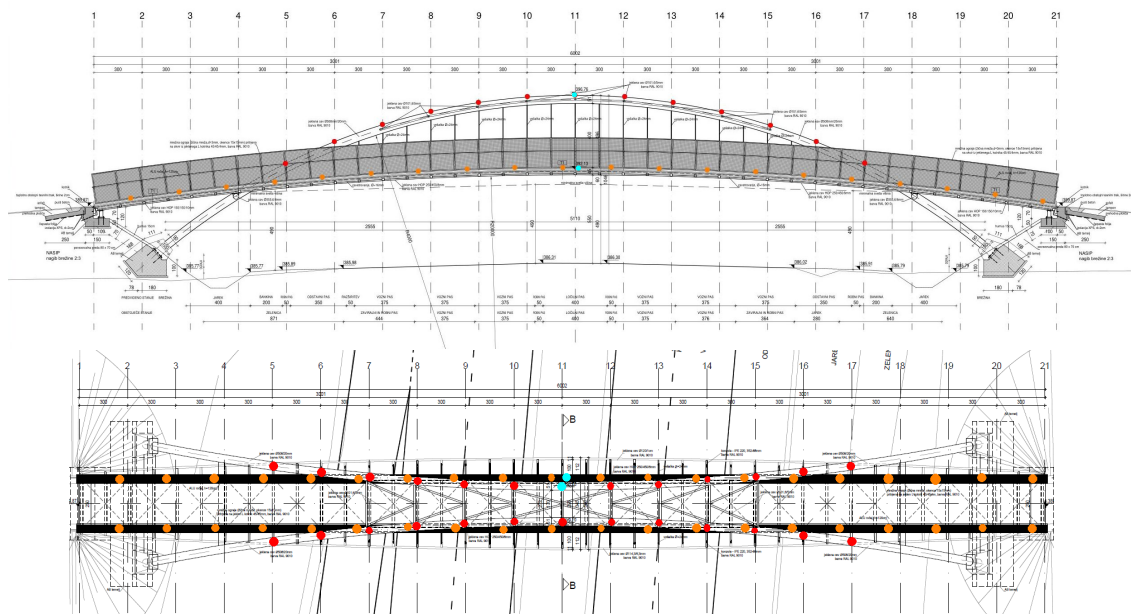
Če izrišemo diagram singularnih vrednosti v odvisnosti od frekvence, v njem prepoznamo več izrazitih vrhov, ki so potencialno povezani z lastnimi nihanji. Iz položajev najizrazitejših vrhov določimo vrednosti lastnih frekvenc  $\omega_m$  in iz pripadajoče matrike singularnih vektorjev  $\mathbf{U}(\omega_m)$  preberemo prvi stolpec, ki ustreza največji singularni vrednosti. Glede na [1] je prvi stolpec vektor, ki ga lahko interpretiramo kot nihajno obliko izbrane lastne frekvence. Dušenje  $\zeta$  ocenimo iz logaritemskega dekrementa signala  $\delta$ , ki ga s pomočjo inverzne Fourierove transformacije izračunamo iz oblike vrha največje singularne vrednosti. Pri tem uporabimo znano zvezo  $\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$ .

Meritve dinamičnega odziva izvajamo s pospeškometri, katerih signale sinhronizirano zajemamo. Pospeškometri so lahko bodisi eno ali triosni. Običajno je potrebno zaradi omejene razpoložljivosti opreme meritve večkrat ponavljati v različnih konfiguracijah na način, da nekaj merilnih mest ohranimo in jih ne premikamo (referenčna merilna mesta), ostale pospeškometre pa premikamo med vnaprej določenimi merilnimi mesti. Na ta način zajamemo relacije med odzivi posameznih merilnih mest, kar kasneje omogoča sintezo globalnega odziva konstrukcije. Vsako meritev zajemamo dovolj dolgo, da zajamemo dovolj period osnovnega nihajnega načina. Groba ocena za potrebno trajanje meritve je vsaj 1000 nihajnih dob osnovnega nihajnega načina. Zajemanje se izvaja preko osrednjega merilnega ojačevalnika, ki zagotavlja sinhroniziran zajem vseh priključenih merskih mest.

Na zbranih meritvah se pred končnim korakom izračuna običajno izvedejo koraki predobdelave, s katerimi signale očistimo morebitnih napačnih odčitkov, filtriramo v izbrano frekvenčno območje, izločimo morebitna lezenja in izvedemo ponovno vzorčenje v primerno redkem časovnem koraku.

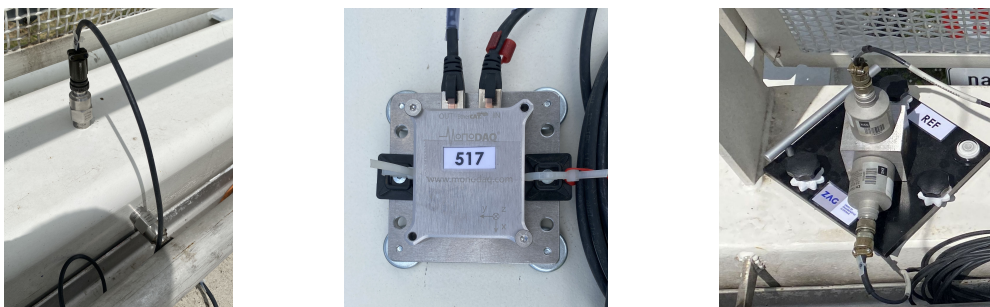
### 3.2 Instrumentacija in izvedba meritev

Merilna kampanja, v kateri je bilo izvršenih skupaj 13 meritev v trajanju 30 minut, je bila zaključena v dveh dneh 23. in 24. 6. 2022.



**Slika 2:** Merilna mesta, vzdolžni pogled in tloris. Oranžno - premična merska mesta, rdeče - nepremična merska mesta, cian - referenčna merska mesta.

Zbiranje podatkov je potekalo s pomočjo specializirane programske opreme Dewesoft X, z dvema 8-kanalnima ojačevalnikoma Dewesoft Sirius ACC. Ti ojačevalniki so bili uporabljeni za pridobivanje signalov iz 8 enosnih pospeškometrov, Dytran 3192A, in treh visoko občutljivih



**Slika 3:** Premično mersko mesto - dva enoosna pospeškometera na vzdolžnem nosilcu (levo), triosni MEMS pospeškometer (sredina), referenčno mersko mesto z visoko občutljivimi enoosnima pospeškometeroma nameščenima na namensko izdelan podstavek (desno).

Meritev	Nosilec	Mersko mesto							
		Smer		ROV1	ROV2	ROV3	ROV4		
		Y	Z	Y	Z	Y	Z	Y	Z
1	SEVER			1	3	5	7		
2	SEVER			9	11	13	15		
3	SEVER			17	19	21	23		
4	SEVER			25	27	29	31		
5	SEVER			33	35	37	39		
6	SEVER			33	35	37	39		
7	SEVER			25	27	29	31		
8	SEVER			17	19	21	23		
9	SEVER			9	11	13	15		
10	JUG			1	3	5	7		
11	JUG			1	3	5	7		
12	JUG			9	11	13	15		
13	JUG			17	19	21	23		

**Tabela 1:** Položaj in oznake premičnih merskih mest na vzdolžnih nosilcih prekladne konstrukcije. Oznake se na našajo na segmente označene na sliki 2.

pospeškometerov, Dytran 3191A. Frekvenca zajemanja je znašala 2000 odčitkov na sekundo.

Referenčna merilna točka je bila vzpostavljena na severnem nosilcu prekladne konstrukcije, na sredini razpona od zgoraj, z uporabo visoko občutljivih pospeškometerov, pritrjenih pravokotno na posebej izdelano jekleno platformo, kot je prikazano na sliki 3. Druga referenčna točka je bila opremljena s triosnim visoko občutljivim MEMS pospeškometerom in nameščena na vrhu ločnega nosilca neposredno nad prvo referenčno merilno točko. 8 enoosnih pospeškometerov je bilo razdeljenih v 4 premične skupine, pri čemer je bil en pospeškometer nameščen navpično in drugi vodoravno pravokotno na vzdolžno os mostu. Ti pospeškometeri so bili pritrjeni na stranski nosilec z magnetnimi nastavki, kot je prikazano na sliki 3. Poleg tega je bilo 12 triosnih MEMS pospeškometerov, Dewesoft MonoDAQ, nameščenih na ločna nosilca, kot je prikazano na sliki 3. Ti pospeškometeri so bili povezani zaporedno preko digitalne povezave, ki temelji

na industrijskem protokolu EtherCAT in uskladili z ojačevalniki za merjenje Dewesoft Sirius. Položaji merilnih točk so prikazani na sliki 2.

Referenčno merilno mesto s pospeškometeroma Dytran 3191A je bilo postavljeno na severni sekundarni nosilec na sredino razpetine z zgornje strani. Pospeškometri so bili montirani na stojalo, ki omogoča medsebojno pravokotnost pospeškometerov in je bilo prosto postavljeno na nosilec. Dodatno referenčno merilno mesto opremljeno z visokoobčutljivim triosnim pospeškometerom je bilo na temenu ločnega nosilca neposredno nad prvim referenčnim merilnim mestom. Razporeditev merilnih mest po posameznih meritvah je prikazana v tabeli 1.

#### **4 Rezultati**

Prvi vtis o potencialnih nihajnih načinih je mogoče dobiti s pomočjo diagrama singularnih vrednosti za posamezne meritve, pri čemer ločeno prikažemo odziv v navpični in prečni smeri. Iz slike 4 je razvidno, da je odziv v navpični smeri izrazitejši, hkrati je mogoče razbrati, da so nekateri nihajni načini izključno v navpični smeri, nihajni načini pa, ki aktivirajo tudi prečna nihanja, po drugi strani vedno vključujejo tudi navpično gibanje. Opazimo, da so med izmerjenimi odzivi posameznih meritev odstopanja, kar je posledica razlik v vzbujanju. Vsi označeni vrhovi na sliki 4 ne ustrezajo nujno lastnim nihajnim načinom, zato je potrebno rezultate dodatno validirati, pri čemer si pomagamo s kompleksno indikatorsko funkcijo (CMIF), koherenco ter izračunom MAC vrednosti.

Na sliki 2 je prikazanih nekaj izbranih nihajnih načinov v vertikalni smeri. Ker posamezne meritve ne obsegajo vseh merilnih mest, je potrebno rezultate združiti preko primerjave z referenčnimi merilnimi mesti, ki jih med posameznimi meritvami ne premikamo. Na ta način lahko s sorazmerno majhnim številom meril dobimo gosto prostorsko sliko nihajnih načinov.

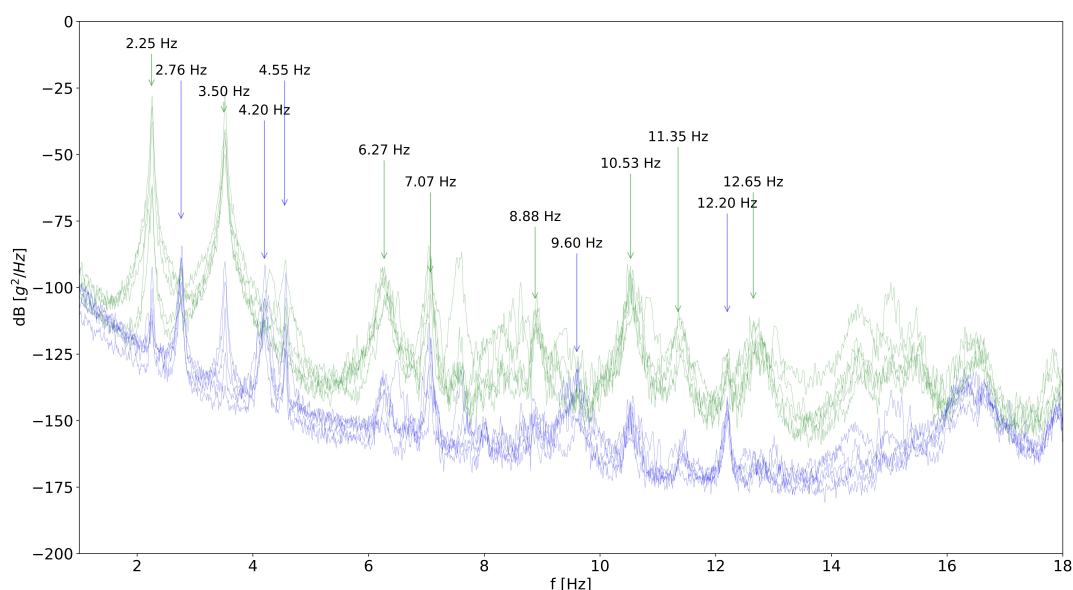
Nihajni načini v vertikalni smeri so sorazmerno izraziti in kažejo na značilnost konstrukcijske zasnove, kjer prekladna konstrukcija, ker je obešena na nosilna loka, sledi nihanju ločne konstrukcije. Nekaj najnižjih nihajnih načinov je povsem upogibnih, prvi torzijski nihajni način je identificiran pri 7.07 Hz. Zanimivo je, da je prvi nihajni način v navpični smeri pri frekvenci 2.25 Hz, ki je v kritičnem območju za mostove za pešce, ki je v [3] definirano med 1.25 Hz ter 2.3 Hz. Izmerjene vrednosti dušenja za izbrane nihajne načine v navpični smeri presegajo priporočene vrednosti, ki za jeklene konstrukcije znašajo 0.2 - 0.4 %.

#### **5 Zaključek**

Prispevek prikazuje rezultate operacijske modalne analize kolesarskega mostu. Rezultati kažejo, da najnižja lastna nihajna frekvenca nihanja v navpični smeri leži v kritičnem območju, kjer lahko pride do resonančnih učinkov zaradi hoje, pri čemer je izmerjeno dušenje večje od predpisanega.

Kljub preprosti zasnovi uporabljena metoda izračuna modalnih parametrov daje uporabne rezultate, primerne za nadaljnjo uporabo v procesu modelnega prilagajanja. Rezultate je mogoče z uporabo naprednejših tehnik še izboljšati, prav tako je obdelavo mogoče razširiti na odziv v prečni smeri.





**Slika 4:** SVD diagram posameznih meritev z označenimi vrhovi. Zeleno so označena merska mesta, ki se nanašajo na vertikalna nihanja in modro tista, ki označujejo prečna nihanja.

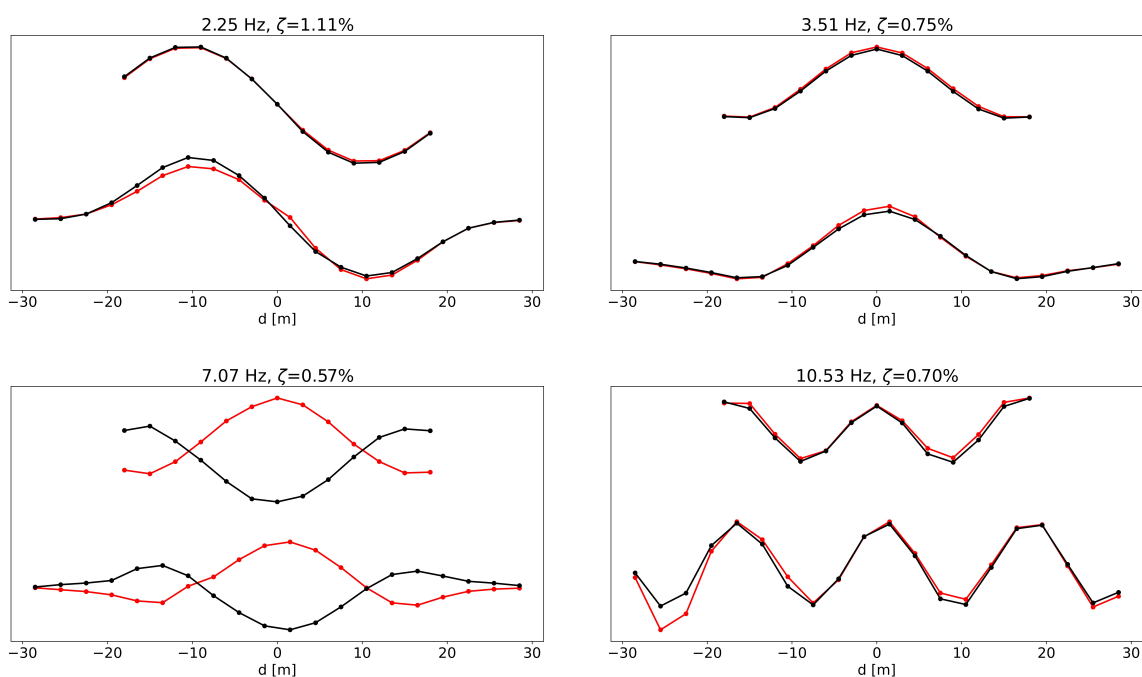
## Zahvala

Avtorji prispevka se zahvaljujejo podpori Javne agencije za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ARRS za financiranje projekta J2-2490, v okviru katerega je bilo narejeno to delo.

## Literatura

- [1] R. Brincker and C. Ventura. *Introduction to operational modal analysis*.
- [2] S. Ereiz, I. Duvnjak, and J. Fernando Jiménez-Alonso. Review of finite element model updating methods for structural applications. *Structures*, 41:684–723, 2022.
- [3] C. Heinemeyer, C. Butza, A. Keil, M. Schlaich, A. Goldack, S. Trometer, M. Lukić, B. Chabrolin, A. Lemaire, P.-O. Martin, Álvaro Cunha, and E. Caetano. Design of lightweight footbridges for human induced vibrations. European Commission, Joint Research Centre, 2011.
- [4] B. Kurent, N. Friedman, W. K. Ao, and B. Brank. Bayesian updating of tall timber building model using modal data. *Engineering Structures*, 266, 9 2022.
- [5] C. Rainieri and G. Fabbrocino. Operational modal analysis of civil engineering structures an introduction and guide for applications.
- [6] J. Slavič, M. Mršnik, M. Česnik, J. Javh, and M. Boltežar. *Structural dynamics*. Elsevier, 2021.





**Tabela 2:** Izbrani nihajni načini. Prikazana je navpična komponenta, zgornji krivulji se nanašata na ločna nosilca, spodnji dve na vzdolžna nosilca prekladne konstrukcije. Črno je označen severni, rdeče južni nosilec.



## *Stabilnost tankih slojevitih krožnih plošč z aktivnimi plastmi*

Miha Brojan<sup>1</sup>, Jan Zavodnik<sup>1</sup>

### *Stability of thin layered circular plates with active layers*

**Povzetek.** V primeru slojevitih kompozitov je potrebna previdnost med procesom izdelave, saj lahko krčenje med strjevanjem (polimerizacijo) matričnega veziva ali higroskopski učinki vodijo v velika dimenzijska odstopanja. V posebnih primerih, ko so stene struktur dovolj tanke, lahko omejena pojava privedeta tudi do izgube stabilnosti in posledično izgube nosilnosti. V tem prispevku obravnavamo izgubo stabilnosti in nad-kritične deformacijske oblike tanke okrogle dvoslojne plošče, ki ima zaostale deformacije v eni plasti zaradi začetnega raztega. Pokazali smo, da ima problem pri večjih zaostalih deformacijah več rešitev, energijsko najbolj ugodna deformacijska oblika pa je odvisna od začetnega raztega.

**Abstract.** In the case of layered composites, great care is required during the fabrication process, since shrinkage during curing (polymerization) of the matrix binder or hygroscopic effects can lead to large dimensional deviations. In special cases, when the structures have walls that are sufficiently thin, the aforementioned phenomenon can also lead to a loss of stability and eventually to a loss of load-bearing capacity. In this contribution, we consider the loss of stability and the supercritical deformation modes of a thin, circular, two-layer plate that has residual deformations in one layer due to the initial stretching. We have shown that the problem with larger residual deformations has several solutions and that the most energetically favorable deformation mode depends on the initial stretching.

## 1 Uvod

Slojeviti kompozitni elementi so postali praktično nepogrešljivi v mnogih inženirskih aplikacijah, predvsem v letalski in vesoljski tehniki. Uporabljajo se zaradi zelo visokih specifičnih togosti (glede na maso), odličnih možnosti za konstruiranje, saj jim je mogoče po celotni prostornini krogiti lastnosti (npr. mehanske in toplotne), tehnološki postopki izdelave pa so relativno enostavni. Po drugi strani pa imajo lahko slojeviti kompoziti oz. kompozitne strukture na splošno zelo zapletene porušitvene mehanizme, zaradi česar je potrebno še posebno paziti

---

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Laboratorij za nelinearno mehaniko (LANEM)

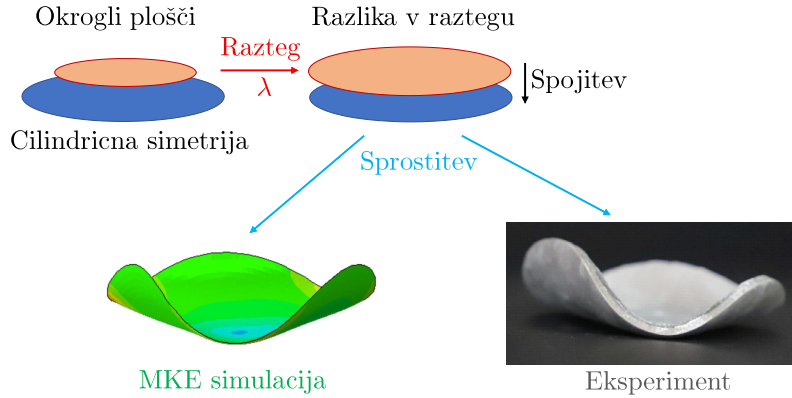
na nepopolnosti v izdelovalnih postopkih, kot so npr. pretrgana vlakna, razpoke in praznine v matričnem vezivu, delaminirana območja in neželeni vključki. Poleg tega je potrebno paziti še, da med izdelavo ne pride do prevelikih deformacij zaradi krčenja med strjevanjem (polimerizacijo) matričnega veziva ali higroskopskih učinkov, ki vodijo v velika dimenzijska odstopanja – v posebnih primerih, ko so stene struktur dovolj tanke, pa privede tudi do izgube stabilnosti in posledično izgube nosilnosti. Ravno izguba stabilnosti in nad-kritične deformacijske oblike tanke okrogle dvoslojne plošče, ki ima zaostale deformacije v eni plasti, bo glavna tema tega prispevka.

Že enoosni razteg enoplastne tanke membrane povzroči 3D deformacije zaradi izgube stabilnosti v obliki gubanja površine, [2]. Grason idr. [4] so pokazali, da ukrivljanje ravnih elastičnih plošč do oblike z neničelno Gaussovo ukrivljenostjo,  $K \neq 0$ , vodi do različnih vrst strukturnih nestabilnosti zaradi nekompatibilnosti topologij. Preprost primer tega koncepta je ovijanje ovijalnega papirja okrog sferičnega predmeta, npr. žoge. Če je polmer sfere veliko večji od velikosti ovijalnega papirja, lahko raven papir zaradi svoje (sicer majne elastičnosti) prevzame vsiljeno 3D topografijo. Če pa sta velikosti papirja in sfere primerljivi, nastanejo pri ovijanju gube in zmečkanine. Geometrijske frustracije, ki vodijo do mehanskih nestabilnosti v ploščah, se kažejo v geometrijsko nekompatibilni omejitvi elastičnih struktur. Davidovitch idr. [3] ter Pezzulla idr. [6] so preučevali vrsto takšnih problemov, pri katerih je topografija, ki je vsiljena tanki elastični strukturi, nezdružljiva z njegovo notranjo metriko in so se kot posledica pojavile gube. Še več, interakcija med nekompatibilnostjo topologij in elastičnostjo, ki je v realnih inženirskih konstrukcijah (ali bioloških sistemih) vnešena v katerikoli del tanke strukture, npr. zaradi segrevanja, rasti ali nabrekanja, lahko drastično vpliva na morfologijo celotnega objekta in povzroči mehanske nestabilnosti. Takšne morfološke spremembe prevladujejo v bioloških strukturah in so pogosto (v skladu z mehanističnim opisom) potrebne za njihovo funkcionalnost. Takšni primeri vključujejo Venerino muholovko, rastoče liste in ovijanje plezalk z viticami pri rastlinah ter nastanek možganov, pljuč in črevesja pri živalih, pri že omenjenih umetnih kompozitnih strukturah, pa vodijo do neželenih oblik.

V nadaljevanju bomo najprej predstavili matematični model tega problema in postopek reševanja, čemur bodo sledili še rezultati in zaključne misli.

## 2 Matematični model

Vpliv zaostalih napetosti oz. deformacij, ki se pojavijo med izdelovalnim procesom, bomo modelirali z namenoma ustvarjenim raztegom  $\lambda$  v natanko eni od plasti, ki jo bomo nato spojili z nedeformirano, slika 1. Po sprostitvi tako zgrajenega kompozita bomo opazovali interakcijo med obema plastema, ki je v primeru tankih plošč še toliko bolj intenzivna, saj sistem privede do izgube stabilnosti in gubanja po obodu. Na sliki 1 je prikazan primer s tremi gubami po obodu.



**Slika 1:** Koncept izdelave okrogle kompozitne plošče z zaostalimi napetostmi v plasteh.

Za reševanje problemov tankih plošč lahko uporabimo Kirchhoffovo predpostavko o pravokotnih prerezih in zapišemo izraz za vektor pomika

$$\mathbf{u}(r, \theta, z) = \mathbf{u}^0(r, \theta) - z\nabla w(r, \theta), \quad (1)$$

kjer so  $r, \theta, z$  cilindrične koordinate v radialni in obodni smeri ter debelini,  $\mathbf{u}^0$  je vektor tangentnega pomika točke na nevtralni ploskvi,  $w$  je prečni pomik te točke,  $\nabla$  pa je diferencialni operator v (lokalni) ravnini. S pomočjo Green-Lagrange-evega (GL) tenzorja  $\mathbf{E}_{\text{FvK}}$  deformacij in Föppl-von Karmanovih (FvK) kinematičnih predpostavk zapišemo

$$\mathbf{E}_{\text{FvK}} = \mathbf{E}_{\text{FvK}}^0 - z\boldsymbol{\kappa}, \quad (2)$$

kjer je  $\mathbf{E}_{\text{FvK}}^0 = (\nabla \mathbf{u}^0 + (\nabla \mathbf{u}^0)^T + \nabla w \otimes \nabla w)/2$  GL deformacijski tenzor nevtralne ploskve glede na FvK predpostavke, [5]. V teh izrazih so  $\boldsymbol{\kappa} = \nabla \otimes \nabla w$  tenzor ukrivljenosti,  $\nabla w \otimes \nabla w$  pa predstavlja edini nelinearni člen, ki še ostane. V tem modelu bomo zaradi enostavnosti uporabili St. Venant-Kirchhoff-ov materialni model:

$$\boldsymbol{\sigma}_K = \frac{Y_K}{1 - \nu_K^2} ((1 - \nu_K)(\mathbf{E}_{\text{FvK}} - \mathbf{S}_K) + \nu_K \text{sl}(\mathbf{E}_{\text{FvK}} - \mathbf{S}_K)\mathbf{I}), \quad (3)$$

kjer so  $Y_K, \nu_K, \mathbf{S}_K$  so Youngov modul, Poissonov količnik in tenzor napetosti zaradi prednapetja, vse v  $K$ -ti plasti kompozitne položče. Pri tem je  $\mathbf{S}_K = -\mathbf{I}(\lambda - 1)$ , kjer sta  $\lambda$  in  $\mathbf{I}$  razteg plošče in enotski tenzor. Kot ponavadi, definiramo tenzorja membranskih sil in upogibnih momentov (na enoto dolžine) takole:  $\mathbf{N} = \int_h \boldsymbol{\sigma} dz$  in  $\mathbf{M} = \int_h \boldsymbol{\sigma} z dz$ , kjer je  $h$  skupna debelina kompozitne plošče. Pokažemo lahko, da so  $\mathbf{N}, \mathbf{M}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{E}_{\text{FvK}}^0$  in  $\lambda$  povezane takole:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \bar{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{E}_{\text{FvK}}^0 + \bar{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\kappa} + \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\lambda), \\ \mathbf{M} &= \tilde{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{E}_{\text{FvK}}^0 + \tilde{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\kappa} + \tilde{\boldsymbol{\gamma}}(\lambda). \end{aligned} \quad (4)$$

Če izrazimo  $\mathbf{E}_{\text{FvK}}^0$  iz en. (4)<sub>1</sub> in ga vstavimo v en. (4)<sub>2</sub>, dobimo

$$\mathbf{M} = e\mathbf{N} - \bar{\mathbf{D}}\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\gamma}_0. \quad (5)$$

V zadnjih matematičnih izrazih  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\gamma}$ ,  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\gamma}$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $\bar{\mathbf{D}}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}_0$  pomožni (dolgi) izrazi, ki vsebujejo geometrijske in snovne konstante ter razteg. Definirajmo sedaj Airy-jevo napetostno funkcijo  $\mathcal{F}$ ,

$$\tilde{\nabla}\tilde{\nabla}\mathcal{F} := \Delta\mathcal{F}\mathbf{I} - \nabla \otimes \nabla\mathcal{F} = \mathbf{N}, \quad (6)$$

ki zadosti ravnovesnim enačbam v ravnini  $\nabla \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0}$ , [1]. Vstavimo en. (5) in (6) v ravnovesno enačbo v prečni smeri, da dobimo  $\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{M}) + \nabla \cdot (\mathbf{N} \cdot \nabla w) = 0$  oz. alternativno

$$\bar{D}\Delta^2 w - \nabla \cdot (\tilde{\nabla}\tilde{\nabla}\mathcal{F}\nabla w) = 0. \quad (7)$$

Podobno lahko zapišemo tudi kompatibilnostno enačbo deformacij  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_{\text{FVK}}^0)^T = \mathbf{0}$ , ki dobi naslednjo obliko

$$\Delta^2 \mathcal{F} + \frac{\bar{\alpha}(1 - \bar{v}_A^2)}{2} [w, w] = 0, \quad (8)$$

kjer je  $[ , ]$  t.i. Monge-Ampere-ov operator, [1].

## 2.1 Rotacijsko simetrična rešitev

Najprej bomo poiskali rešitev, ko je začetni (vnešeni) razteg v eni od plasti majhen. Tedaj predvidevamo, da se bo kompozitna plošča deformirala v rotacijsko-simetrično obliko, ki je podobna paraboloidu. S pomočjo substitucije  $\varphi = w, r$  in  $\phi = \mathcal{F}, r$  in dejstva, da je rob plošče prost, lahko izraza (7) and (8) preoblikujemo v

$$\bar{D}r \left( \Delta\varphi - \frac{\varphi}{r^2} \right) = \phi\varphi \quad \text{in} \quad \frac{r}{\bar{\alpha}_0} \left( \frac{\phi}{r^2} - \Delta\phi \right) = \frac{\varphi^2}{2}, \quad (9)$$

kjer so  $\bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}(1 - \bar{v}_A^2)$ ,  $\bar{D}$ ,  $\bar{\alpha}$  in  $\bar{v}_A$  pomožni izrazi, v katerih nastopajo snovne in geometrijske konstante. Funkcijo  $\phi$  bomo aproksimirali z izrazom  $\phi(r) = C_1 r^n$  in upoštevali še en. (9)<sub>2</sub>, iz česar dobimo

$$\phi(r) = C_1^2 r/a(1 - (r/a)^{2n})/(8\Lambda n(n+1)). \quad (10)$$

Iz robnih pogojev  $M_{rr} = 0$  in  $N_{rr} = 0$ , sledi  $C_1 = \gamma_0 a / (\bar{D}(\bar{v} + n))$ . Brez izgube fizikalne smiselnosti lahko nalogo poenostavimo in privzamemo  $\bar{v} = \bar{v}_A \doteq \bar{v}_B \doteq \bar{v}_A \doteq \bar{v}_B$ . Eksponent  $n$  izračunamo iz pogoja ortogonalnosti, [7], iz en. (9)<sub>1</sub>,

$$\int_0^a (\bar{D}r (\Delta\varphi - \varphi/r^2) - \phi\varphi) \partial\varphi/\partial n dr = 0. \quad (11)$$

Ta pogoj nam omogoči zapis implicitne zveze med  $n$ , brezdimenzijskim parametrom  $\chi$  in  $\bar{v}$  v naslednji obliki

$$3(2n+1)^2 \chi - 4(n^2 - 1)(8n^2 + 18n + 9)^2 (\bar{v} + n)^2 = 0, \quad (12)$$

kjer so  $\chi = B^2 a / (\Lambda \bar{D})$ ,  $B = \gamma_0 a / \bar{D}$  in  $\Lambda = 1 / ((1 - \bar{v}_A^2) \bar{\alpha} a)$ . Izraz za  $n(\chi(\lambda))$  je potem rešen numerično.

Iz fizičnih eksperimentov, ki sicer niso podrobno predstavljeni v tem prispevku, smo ugotovili, da je pri nadaljnjem povečanju raztega rotacijsko-simetrično rešitev zamenja energijsko bolj ugodna rešitev s t.i.  $k$ -kratno simetrijo, v kateri se po obodu kompozitne plošče pojavijo gube.

## 2.2 $k$ -kratno simetrična rešitev

Tovrstno simetrično rešitev bomo poiskali s pomočjo naslednjih nastavkov

$$\begin{aligned} w(r, \theta) &= \bar{w}(r) + \tilde{w}(r, \theta) \\ \mathcal{F}(r, \theta) &= \overline{\mathcal{F}}(r) + \tilde{\mathcal{F}}(r, \theta), \end{aligned} \quad (13)$$

kjer sta  $\bar{w}(r) = \int \varphi(r) dr$  in  $\overline{\mathcal{F}}(r) = \int \phi(r) dr$  vzeti iz prejšnjega podpoglavja, ki opisuje rotacijsko simetrično rešitev, medtem ko  $\tilde{w}(r, \theta) = f(r) \cos k\theta$  in  $\tilde{\mathcal{F}}(r, \theta) = g(r) \cos k\theta$  opišeta  $k$ -kratno simetrijo. Oba izraza,  $w(r, \theta)$  in  $\mathcal{F}(r, \theta)$ , vstavimo v en. (7) in (8), od koder sledi

$$\begin{aligned} \bar{D}\Delta^2 \tilde{w} - \boldsymbol{\kappa}_0 : (\nabla \otimes \nabla \tilde{\mathcal{F}}) - \mathbf{N}_0 : (\nabla \otimes \nabla \tilde{w}) - [\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{w}] &= 0, \\ \frac{\Delta^2 \tilde{\mathcal{F}}}{\bar{\alpha}(1 - \bar{v}_A^2)} + \boldsymbol{\kappa}_0 : (\nabla \otimes \nabla \tilde{w}) + \frac{1}{2} [\tilde{w}, \tilde{w}] &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

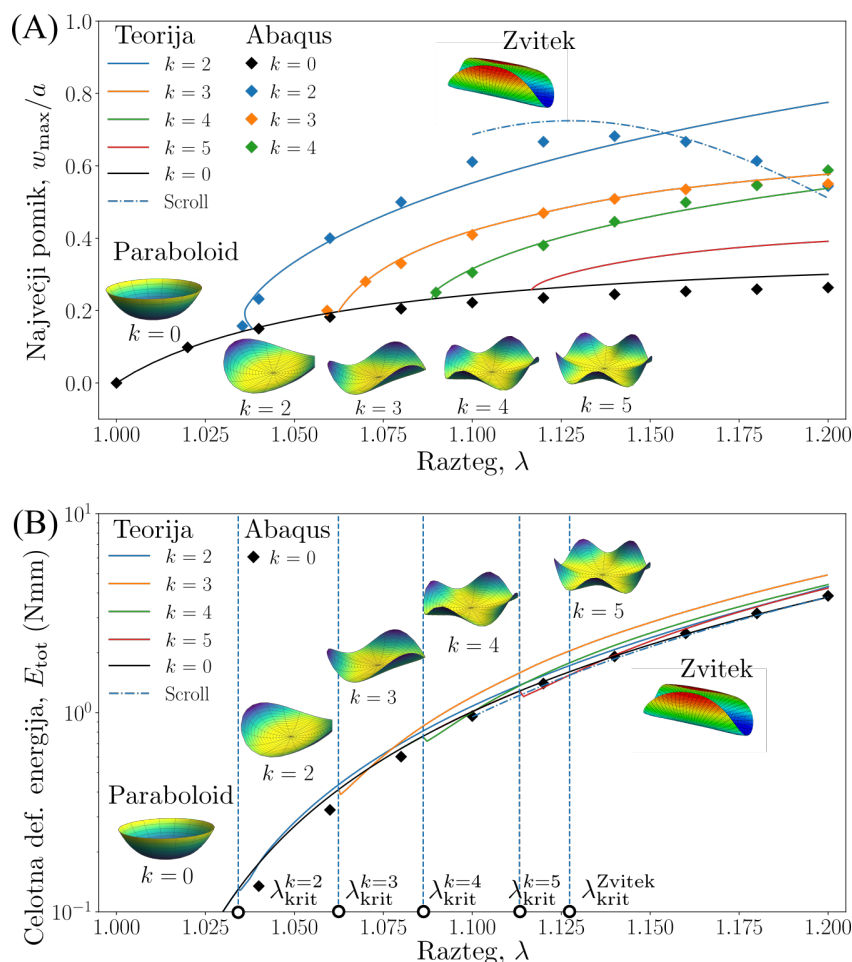
V tem primeru sta  $\boldsymbol{\kappa}_0 = \Delta \bar{w} \mathbf{I} - \nabla \otimes \nabla \bar{w}$  in  $\mathbf{N}_0 = \text{diag}(\phi/r, \phi, r)$  modificirana ukrivljenost in tenzor membranskih sil simetrične rešitve. Nastavka  $w(r, \theta)$  in  $\mathcal{F}(r, \theta)$  rešita linearizirane izraze (14), kar pomeni, da jih lahko uporabimo tudi v začetnem nad-kritičnem območju. V nadaljevanju bomo en. (14) rešili tako, da bomo zahtevali, da je ostanek en. (14) ortogonalen na rešitve. Od tod sledi

$$\begin{aligned} \langle F_1(f, g) \cos k\theta + F_2(f, g) \cos^2 k\theta + F_3(f, g) \sin^2 k\theta, \cos k\theta \rangle &= 0, \\ \langle G_1(f, g) \cos k\theta + G_2(f, g) \cos^2 k\theta + G_3(f, g) \sin^2 k\theta, \cos k\theta \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

kjer sta  $F_i$  in  $G_i$  pomožna izraza, ki vsebuje konstante iz en. (14) in  $\langle a, b \rangle := 2k \int_{-\pi/(2k)}^{\pi/(2k)} abd\theta$ . Dobljene izraze za  $f(r)$  in  $g(r)$  rešimo numerično za različne raztege  $\lambda$ .

## 2.3 Rešitve in diskusija

Slika 2(A) in (B) prikazujeta  $w_{\max}/a$ , ki predstavlja največji pomik roba plošče od njenega središča (temena) in celotno deformacijsko energijsko  $E_{\text{tot}}$  v odvisnosti od raztega  $\lambda$ . Pri tem je debelina raztegnjene plasti  $h_{\text{sub}} = 1,0$  mm, Youngov elastični modul  $E_{\text{sub}} = 115,5$  MPa in Poissonov količnik  $\nu_{\text{sub}} = 0,490$ . Neraztegnjena plast je debela  $h_{\text{kir}} = 1,1$  mm, Youngov elastični modul in Poissonov količnik pa sta  $E_{\text{kir}} = 234,58$  MPa in  $\nu_{\text{kir}} = 0,489$ . Raztegnjen polmer obeh plošč, preden ju zlepimo in razbremenimo, je  $a = 40$  mm. Po pričakovanjih je pri majhnem raztegu (do prbl.  $\lambda = 1.03$ ) paraboloid rešitev, ki ustreza energijskemu minimumu. Iz diagrama na sliki 2(A) je razvidno, da je to edina rešitev, ki pa ne predstavlja izgube stabilnosti, saj je za prehod iz ravne do ukrivljene površine zaslužen samo upogib. Bolj zanimive deformacijske oblike pa sledijo pri večjih raztegih, tj.  $\lambda \gtrsim 1.03$ , ko ima problem več rešitev, ki jih je čedalje več z večanjem  $\lambda$ .

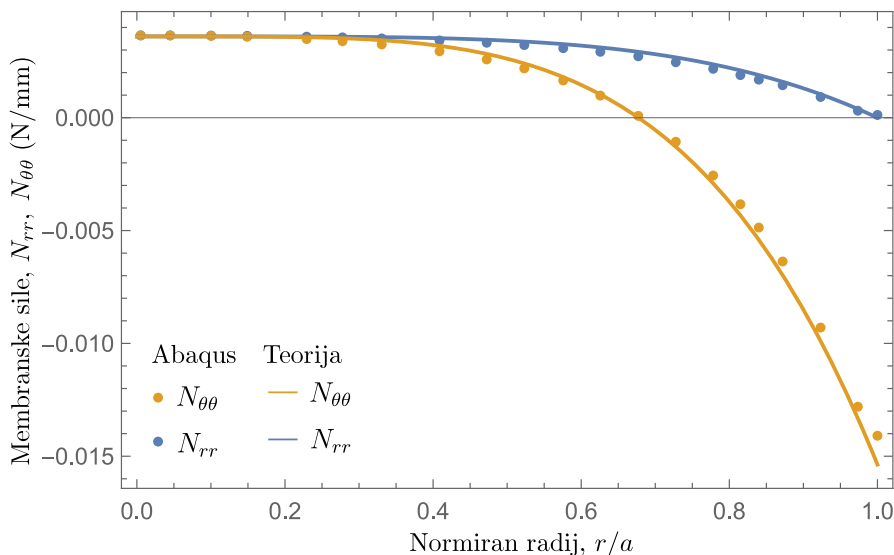


**Slika 2:** (A) Največji pomik roba plošče od njenega središča (temena)  $w_{\max}/a$  v odvisnosti od raztega  $\lambda$ , (B) Celotna deformacijska energija  $E_{\text{tot}}$  v odvisnosti od raztega  $\lambda$ .

Pri večjih  $\lambda$  najprej opazimo obliko 2-kratne simetrije, ki ji po vrsti sledijo 2, 3, 4, 5, ...-kratno simetrične oblike. Takšno zaporedje rešitev nakazuje, da je deformacijska oblika tako zgubane kompozitne plošče neposredno odvisna od raztega, kar je nekoliko neobičajno, saj npr. na nosilcih in pravokotnih ploščah povečanje obremenitve največkrat le poveča amplitudo nadkritične deformacije. Podoben odziv strukture v odvisnosti od velikosti obremenitve so opazili Stein-Montalvo idr. [8] pri prostorsko omenjenem uklonu lupin.

Razlog za favoriziranje načinov z višjimi valovnimi števili pri višjih raztegih je učinkovitejšo sproščanje (nižanje) membranske deformacijske energije z lokalizacijo upogiba na robu plošče, medtem ko se upogibna deformacijska energija okoli središča plošče ne poveča. Z drugimi besedami, če bi bila na plošči pri večjem raztegu vsiljena nižja stopnja simetrije, bi se napetosti uravnovežile le s povečanjem amplitude deformacij, kar bi vplivalo tudi na radialne napetosti v notranjem delu plošče, kjer pa so membranske sile le natezne. Slika 3 prikazuje notranje membranske sile v radialni  $N_{rr}$  in obodni smeri  $N_{\theta\theta}$ , ki jih lahko napovemo z zgoraj predstavljenim

teoretičnim postopkom in numeričnimi simulacijami v Abaqusu.



**Slika 3:** Primerjava teoretične napovedi in rezultatov numeričnih simulacij v Abaqusu za notranje membranske sile v radialni  $N_{rr}$  in obodni smeri  $N_{\theta\theta}$  v odvisnosti od radija  $r$ .

Rezultati obeh načinov preračuna kažejo na to, da so radialne napetosti po celotnem radiju natezne, obodne napetosti pa v območju okrog temena natezne, proti robu pa postanejo čedalje bolj negativne, torej tlačne.

Omeniti pa je potrebno še eno rešitev, ki je na slikah 2(A) in (B) prikazana v obliki zvitka, ki je zvit cilindrično. Ta se pojavi pri zelo velikem raztegu ene od plasti. Tako se en. (7) znatno poenostavi do  $\kappa_{11,11} = 0$ , saj je edino  $\kappa_{11} \neq 0$ , medtem ko sta  $\kappa_{22} = \kappa_{12} = 0$ , en. (8) pa je avtomatično izpolnjena. Če predpostavimo prosti rob plošče, dobimo  $\mathbf{N} = \mathbf{0}$  in  $\kappa_{11} = \gamma_0/\bar{D}$ , kjer sta  $\gamma_0$  in  $\bar{D}$  zopet pomožna izraza, za efektivni upogibni moment zaradi prednapetja in upogibno togost plošče. V tej deformacijski obliki so membranske napetosti v popolnosti sproščene na račun povečanega upogiba. V celoti pa je deformacijska energija še vedno manjša. V poenostavljeni obliki jo lahko zapišemo takole  $\mathcal{E} = \pi a^2 \gamma_0^2 / (2\bar{D})$ .

### 3 Zaključki

V prispevku smo obravnavali izgubo stabilnosti in nad-kritične deformacijske oblike tanke okrogle dvoslojne plošče zaradi zaostalih deformacij. Te smo modelirali tako, da smo eno od plasti pred spojitvijo z nedeformirano plastjo raztegnili. Po sprostitvi tako sestavljenega kompozita so se pojavile deformacijske oblike, odvisne od začetnega raztega. Za majhen razteg smo dobili obliko paraboloida, ki je nastala zaradi ukrivljanja kompozitne plošče. Pri tem je v tej fazi elastičnost sistema uspela kompenzirati razliko v deformacijskih stanjih obeh plasti pred spojitvijo oz. pred sprostitvijo plošče. Za večje raztege pa smo pokazali, da ima sistem čedalje več rešitev, ki izkazujejo  $k$ -kratno simetrijo. Energijsko najbolj ugodne deformacijske oblike si



namreč z večanjem raztega sledijo v naravnem zaporedju, in sicer po vrsti v 2, 3, 4, 5, ...-kratni simetriji, kar je nekoliko neobičajno, saj npr. na nosilcih in pravokotnih ploščah povečanje obremenitve največkrat le poveča amplitudo nadkritične deformacije.

Problem smo reševali na dva načina, v skladu s predstavljenim teoretičnim modelom in numeričnimi simulacijami v Abaqusu. Slednji preračun je potekal zelo gladko za manjše raztege, pri povečanju le-tega pa nismo uspeli izračunati deformacijskih oblik za probleme s  $k$ -kratno simetrijo večjo od 4. Diagram največjih pomikov roba plošče, glede na njeno središče, in predvsem diagram celotne deformacijske energije v odvisnosti od raztega  $\lambda$ , kažeta na kompleksno nadkritično pot, s številnimi točkami razvejišča in energijami, med katerimi je numerično zelo majhna razlika.

Rezultati obeh načinov preračuna kažejo zelo dobro medsebojno ujemanje in potrjujeta pričakovano dejstvo, da so radialne napetosti po celotnem radiju natezne, obodne napetosti pa v območju okrog temena natezne, proti robu pa postanejo čedalje bolj negativne, torej tlačne. Pri zelo velikem začetnem raztegu pa opazimo, da se membranske napetosti praktično v celoti sprostijo na račun upogibnih napetosti, ki deformirajo okroglo kompozitno ploščo v cilindrično obliko, podobno zvitku.

## Literatura

- [1] C. D. Coman. On the compatibility relation for the föppl–von kármán plate equations. *Applied Mathematics Letters*, 25(12):2407–2410, 2012.
- [2] B. Davidovitch, R. D. Schroll, D. Vella, M. Adda-Bedia, and E. A. Cerda. Prototypical model for tensional wrinkling in thin sheets. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 108(45):18227–18232, 2011.
- [3] B. Davidovitch, Y. Sun, and G. M. Grason. Geometrically incompatible confinement of solids. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 116(5):1483–1488, 2019.
- [4] G. M. Grason and B. Davidovitch. Universal collapse of stress and wrinkle-to-scar transition in spherically confined crystalline sheets. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 110(32):12893–12898, 2013.
- [5] L. D. Landau, L. P. Pitaevskii, E. M. Lifshitz, and A. M. Kosevich. *Theory of Elasticity*. Butterworth-Heinemann, 3 edition, 1986.
- [6] M. Pezulla, N. Stoop, M. P. Steranka, A. J. Bade, and D. P. Holmes. Curvature-induced instabilities of shells. *Physical review letters*, 120(4):048002, 2018.
- [7] J. Reddy. *An Introduction To The Finite Element Method*. McGraw-Hill series in mechanical engineering. Tmh, 1984.
- [8] L. Stein-Montalvo, P. Costa, M. Pezulla, and D. P. Holmes. Buckling of geometrically confined shells. *Soft Matter*, 15(6):1215–1222, 2019.



## *Strain localization using embedded discontinuities within velocity-based beam formulation*

Sudhanva Kusuma Chandrashekhara<sup>1</sup>, Dejan Zupan<sup>1</sup>

### *Lokalizacija deformacij z vgrajenimi nezveznostmi v formulaciji nosicev z interpolacijo hitrosti*

**Abstract.** In the present work, we address the problem of strain softening in spatial frame like structures which is often observed with brittle heterogeneous materials. We use the principle of embedded strong discontinuity approach within the novel velocity based finite element framework to describe the phenomenon of strain localization. The original velocity based framework is upgraded with the detection of critical load level and critical cross-section and introduction of jump like variables at the level of velocities and angular velocities. A modified consistency condition is derived using the method of weighted residuals. The computational advantages of the formulation are preserved after the efficient detection of cross-sectional singularity and post-critical treatment of localized strains introduced. The numerical example demonstrates the advantageous performance of the proposed method

**Povzetek.** V delu obravnavamo mehčanje v prostorskih okvirjih, ki se pogosto pojavlja pri krhkih heterogenih materialih. Za opis pojava lokalizacije uporabimo pristop vgrajene nezveznosti, ki ga vključimo v novo družino končnih elementov, ki temeljo na hitrostih. Izvirna formulacija je nadgrajena z zaznavanjem kritične ravni obremenitve in kritičnega prereza ter uvedbo skokov pri opisu poteka hitrosti in kotnih hitrosti. Za opis obnašanja v kritičnem prerezu uporabimo metodo uteženih ostankov. Računske prednosti formulacije se ohranijo zaradi učinkovitega zaznavanja singularnosti prečnih prerezov in primerne obravnave lokaliziranih deformacij v postkritičnem območju. Numerični primer prikazuje prednosti predlagane metode.

## 1 Introduction

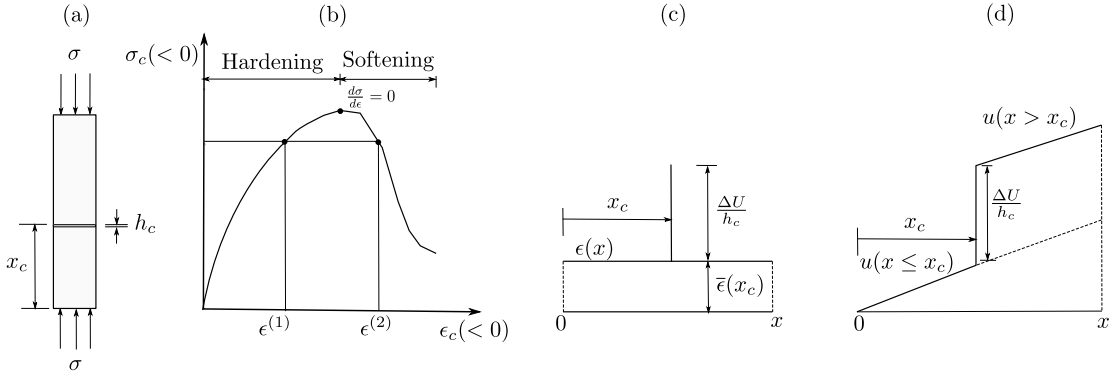
In recent years, the method of embedded discontinuities has been a subject of increasing study and development as its popularity comes from the fact that a displacement/strain discontinuity model can be introduced discretely within the element to describe the phenomena of strain

---

<sup>1</sup> University of Ljubljana, Faculty of Civil and Geodetic Engineering

localization and failure without facing the problem of mesh dependency. Still the choice of the primary interpolated unknowns is crucial for the overall performance of the numerical model. In this work we combine the advantages of velocity-based formulation with the approach of embedded discontinuities, which is in contrast to other authors described at the level of time derivatives of configuration variables.

The phenomena of strain softening and the localization of strains can be understood using an example of uniaxial compression as shown in figure 1(a). The onset of softening or the critical



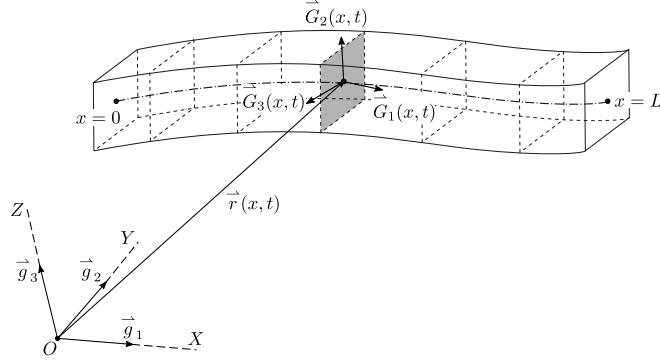
**Figure 1:** Strain softening in an axially loaded bar.

load level where the constitutive tangent modulus becomes singular is represented in the figure 1(b). This results in non-homogeneous deformation at the critical cross-section  $x_c$  within a small width  $h_c$ . Within the localized zone, the constitutive behaviour beyond the critical load level follows the softening regime while the neighbouring cross-sections experience elastic unloading. The resulting non-homogeneous strain and displacement field at the post-critical regime shows localized strains, figure 1(c), and jumps (discontinuities) in axial displacements figure 1(d).

In the present work, we propose a novel embedded strong discontinuity approach where the jumps in displacements and rotations resulting from the localization of strains are consistently described at the level of velocities and angular velocities. The jump-like variables introduced together with the enhanced shape functions are supplemented with a modified consistency condition introduced at the localized element. Such finite elements are then able to describe the localized strain and displacement fields at the element level while preserving the chosen degree of interpolation for the continuous part of strains or displacement fields. The numerical example demonstrates the efficiency, accuracy and robustness of the proposed approach.

## 2 Cosserat beam model

The geometry of a three-dimensional beam is represented by a line of centroids and a family of cross sections, see Figure 2. The line of centroids is a spatial curve at an arbitrary time  $t \geq 0$  defined by a position vector  $\vec{r}(x, t)$  and parametrized by an arc-length parameter  $x \in [0, L]$  at any fixed time  $t$ . Two orthogonal reference frames are introduced for the description of the quantities of the beam: (i) a fixed orthogonal basis represented by  $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$  at the reference



**Figure 2:** Configuration of a three dimensional beam at an arbitrary time  $t$ .

point  $O$  and (ii) local orthogonal base vectors  $\{\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3\}$ . A transformation from the local basis to the fixed one is described in terms of quaternion algebra as:

$$\vec{G}_i(x, t) = \hat{q}(x, t) \circ \vec{g}_i \circ \hat{q}^*(x, t), \quad (1)$$

where  $\hat{q}$  is a rotational quaternion,  $\hat{q}^*$  is its conjugate, and  $(\circ)$  denotes the quaternion product. The equations of a quaternion-based three dimensional beam within the framework of velocity-based formulation together with the discretization procedure are presented in [6] while for the formulation consistent post-critical analysis using path-following approach, the reader is addressed to [4] and the discussion therein. In the present paper, we focus on modelling of embedded discontinuities and related enhancement of the interpolated variables for the better and more robust description of the phenomena of strain localization.

## 2.1 Equations of a three dimensional beam with embedded discontinuities

The system of governing equations of the Cosserat beam is a set of nonlinear partial differential equations that needs to be discretized in time and space. The time discretization is in accordance with midpoint rule while the spatial discretization is based on Galerkin finite element method. For a given external distributed forces and moments,  $(\vec{n}, \vec{m})$ , the balance of linear and angular momentum can be expressed as:

$$\int_0^L \left[ \frac{\rho A}{h} (\mathbf{v}^{[n+1]} - \mathbf{v}^{[n]}) P_i + \mathbf{n}^{[n+1/2]} P_i' - \vec{n}^{[n+1/2]} P_i \right] dx - \mathbf{f}_e = \mathbf{0}, \quad (2)$$

$$\int_0^L \left[ \frac{\mathbf{J}_\rho}{h} (\boldsymbol{\Omega}^{[n+1]} - \boldsymbol{\Omega}^{[n]}) P_i + \boldsymbol{\Omega}^{[n+1/2]} \times \mathbf{J}_\rho \boldsymbol{\Omega}^{[n+1/2]} P_i - \mathbf{K}^{[n+1/2]} \times \mathbf{M}^{[n+1/2]} P_i + \mathbf{M}^{[n+1/2]} P_i' - P_i \left( \boldsymbol{\Gamma}^{[n+1/2]} - \boldsymbol{\Gamma}_0 \right) \times \mathbf{N}^{[n+1/2]} - \left( \hat{q}^{*[n+1/2]} \circ \vec{m}^{[n+1/2]} \circ \hat{q}^{[n+1/2]} \right) P_i \right] dx - \mathbf{M}_e = \mathbf{0}, \quad (3)$$

where  $\mathbf{f}_e$  and  $\mathbf{M}_e$  are the vector of external point forces and moments, respectively,  $h = t_{n+1} - t_n$  is the step size, upper index  $[n + 1/2]$  denotes the quantities at midtime  $t_{n+1/2}$ ,  $\rho$  is the material density,  $\mathbf{J}_\rho$  is the mass moment of inertia of the cross-section,  $A$  is the cross-sectional area,  $\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega}$

are the velocity and angular velocity,  $\mathbf{N}, \mathbf{M}$  are the stress-resultant force and moment,  $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{K}$  are the translational and rotational strain. One of the crucial advantages of the present approach is the approximation of the nonlinear configuration space using only the additive quantities.

The interpolated variables and the primary unknowns in the present approach are the mid-time velocities and angular velocities ( $\mathbf{v}^{[n+1/2]}, \mathbf{\Omega}^{[n+1/2]}$ ) and are interpolated through  $p$  discrete points. The assumed form of these primary unknowns is given by:

$$\mathbf{v}^{[n+1/2]}(x, t) = \bar{\mathbf{v}}(x, t) = \sum_{i=1}^p P_i(x) \bar{\mathbf{v}}_i(t), \quad (4)$$

$$\mathbf{\Omega}^{[n+1/2]}(x, t) = \bar{\mathbf{\Omega}}(x, t) = \sum_{i=1}^p P_i(x) \bar{\mathbf{\Omega}}_i(t). \quad (5)$$

We exploit the additive nature of the components of angular velocities in local frame and thus the standard interpolation functions in Euclidean vector spaces can be used without any inconsistencies. The midtime velocities and angular velocities at the discrete points become the discrete unknowns of the problem. We choose Lagrange interpolation functions with the nodes taken equidistantly from the interval  $[0, L]$ . At the onset of localization at the critical cross-section  $x_c$ , the above velocity and angular velocity fields (4)-(5) are enriched with a unit step function at the critical cross-section  $x_c$  multiplied by velocity and angular velocity jumps  $\Delta \mathbf{v}$  and  $\Delta \mathbf{\Omega}$ :

$$\mathbf{v}^{[n+1/2]}(x, t) = \sum_{i=1}^p P_i(x) \bar{\mathbf{v}}_i(t) + \left( H(x - x_c) - \sum_j P_j(x) \right) \Delta \mathbf{v}(t), \quad (6)$$

$$\mathbf{\Omega}^{[n+1/2]}(x, t) = \sum_{i=1}^p P_i(x) \bar{\mathbf{\Omega}}_i(t) + \left( H(x - x_c) - \sum_j P_j(x) \right) \Delta \mathbf{\Omega}(t). \quad (7)$$

Here,  $H(x - x_c)$  is the Heaviside step function defined as:

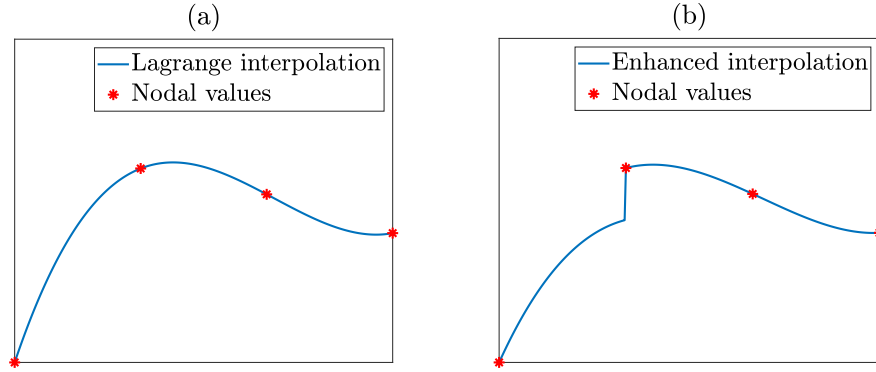
$$H_c = H(x - x_c) = \begin{cases} 0, & x \leq x_c, \\ 1, & x > x_c. \end{cases}$$

Such a modification in the shape function allows for the jumps in velocity and angular velocity field at an arbitrary section  $x_c$  at the element level and the preservation of the field variables at the element boundaries as shown in figure 3. The translational and rotational strains require spatial derivative of primary interpolated quantities which reads:

$$\mathbf{v}^{[n+1/2]} = \sum_{i=1}^p P'_i(x) \bar{\mathbf{v}}_i(t) + \left( \delta(x - x_c) - \sum_j P'_j(x) \right) \Delta \mathbf{v}(t), \quad (8)$$

$$\mathbf{\Omega}^{[n+1/2]} = \sum_{i=1}^p P'_i(x) \bar{\mathbf{\Omega}}_i(t) + \left( \delta(x - x_c) - \sum_j P'_j(x) \right) \Delta \mathbf{\Omega}(t), \quad (9)$$

where the derivative of Heaviside step function results in a Dirac delta function ( $\delta(x - x_c)$ ). The discretized kinematic relations remain the same as given in [6] while additional attention



**Figure 3:** Graphical representation of interpolated variables with Lagrange and enhanced interpolation functions with preserved boundary values.

is needed in the evaluation of the integrals. Note that from the elementary theory of distributions [2],  $\int_0^L \delta(x - x_c) f(x) dx = f(x_c)$ . With the introduction of new unknowns  $\Delta \mathbf{v}, \Delta \mathbf{\Omega}$ , the set of governing equations needs to be extended accordingly. Following the method of weighted residuals, the additional equations can be introduced by using the additional shape function as weight:

$$\int_0^L \left[ \mathbf{n}'^{[n+1/2]} + \tilde{\mathbf{n}}^{[n+1/2]} - \frac{\rho A}{h} (\mathbf{v}^{[n+1]} - \mathbf{v}^{[n]}) \right] \left( H(x - x_c) - \sum_j P_j(x) \right) dx = \mathbf{0}, \quad (10)$$

$$\int_0^L \left[ \mathbf{M}'^{[n+1/2]} + \mathbf{K}^{[n+1/2]} \times \mathbf{M}^{[n+1/2]} + (\mathbf{\Gamma}^{[n+1/2]} - \mathbf{\Gamma}_0) \times \mathbf{N}^{[n+1/2]} - \mathbf{\Omega}^{[n+1/2]} \times \mathbf{J}_\rho \mathbf{\Omega}^{[n+1/2]} \right. \\ \left. + \hat{\mathbf{q}}^{*[n+1/2]} \circ \tilde{\mathbf{m}}^{[n+1/2]} \circ \hat{\mathbf{q}}^{[n+1/2]} - \frac{\mathbf{J}_\rho}{h} (\mathbf{\Omega}^{[n+1]} - \mathbf{\Omega}^{[n]}) \right] \left( H(x - x_c) - \sum_j P_j(x) \right) dx = \mathbf{0}. \quad (11)$$

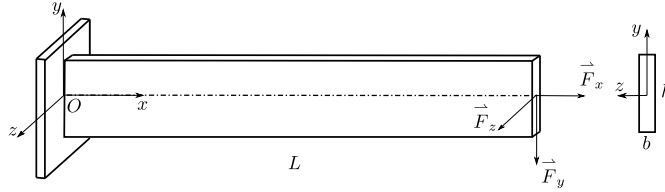
After some reorganization of the terms and integrating by parts the terms with  $\mathbf{n}'$  and  $\mathbf{M}'$ , we get,

$$\int_{x_c}^L \left[ \frac{\rho A}{h} (\mathbf{v}^{[n+1]} - \mathbf{v}^{[n]}) - \tilde{\mathbf{n}}^{[n+1/2]} \right] dx + \mathbf{n}(x_c)^{[n+1/2]} - \mathbf{n}(L)^{[n+1/2]} - \left\{ \sum_j P_j(L) \mathbf{n}(L)^{[n+1/2]} \right. \\ \left. - \sum_j P_j(0) \mathbf{n}(0)^{[n+1/2]} + \int_0^L \left[ \left( \frac{\rho A}{h} (\mathbf{v}^{[n+1]} - \mathbf{v}^{[n]}) - \tilde{\mathbf{n}}^{[n+1/2]} \right) \sum_j P_j + \sum_j P_j' \mathbf{n}^{[n+1/2]} \right] dx \right\} = \mathbf{0}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{x_c}^L \left[ \frac{\mathbf{J}_\rho}{h} \left( \boldsymbol{\Omega}^{[n+1]} - \boldsymbol{\Omega}^{[n]} \right) - \left( \boldsymbol{\Gamma}^{[n+1/2]} - \boldsymbol{\Gamma}_0 \right) \times \mathbf{N}^{[n+1/2]} - \hat{\mathbf{q}}^{*[n+1/2]} \circ \hat{\mathbf{m}}^{[n+1/2]} \circ \hat{\mathbf{q}}^{[n+1/2]} \right. \\
 & \left. + \boldsymbol{\Omega}^{[n+1/2]} \times \mathbf{J}_\rho \boldsymbol{\Omega}^{[n+1/2]} - \mathbf{K}^{[n+1/2]} \times \mathbf{M}^{[n+1/2]} \right] dx - \left\{ \sum_j P_j(L) \mathbf{M}(L)^{[n+1/2]} - \sum_j P_j(0) \mathbf{M}(0)^{[n+1/2]} \right. \\
 & \left. + \int_0^L \left[ \left( \frac{\mathbf{J}_\rho}{h} \left( \boldsymbol{\Omega}^{[n+1]} - \boldsymbol{\Omega}^{[n]} \right) - \left( \boldsymbol{\Gamma}^{[n+1/2]} - \boldsymbol{\Gamma}_0 \right) \times \mathbf{N}^{[n+1/2]} - \hat{\mathbf{q}}^{*[n+1/2]} \circ \hat{\mathbf{m}}^{[n+1/2]} \circ \hat{\mathbf{q}}^{[n+1/2]} \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \boldsymbol{\Omega}^{[n+1/2]} \times \mathbf{J}_\rho \boldsymbol{\Omega}^{[n+1/2]} - \mathbf{K}^{[n+1/2]} \times \mathbf{M}^{[n+1/2]} \right) \sum_j P_j + \mathbf{M}^{[n+1/2]} \sum_j P'_j \right] dx \left. \right\} \\
 & + \mathbf{M}(x_c)^{[n+1/2]} - \mathbf{M}(L)^{[n+1/2]} = \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Equations (12)-(13) represent an extension of the weighted-residual based discrete set of velocity-based formulation using the newly introduced supplementary shape function. In the above equations the stress resultant forces and moments at the critical cross-section  $x_c$  and at the boundaries  $(0, L)$  are evaluated using the constitutive law.

### 3 Numerical example



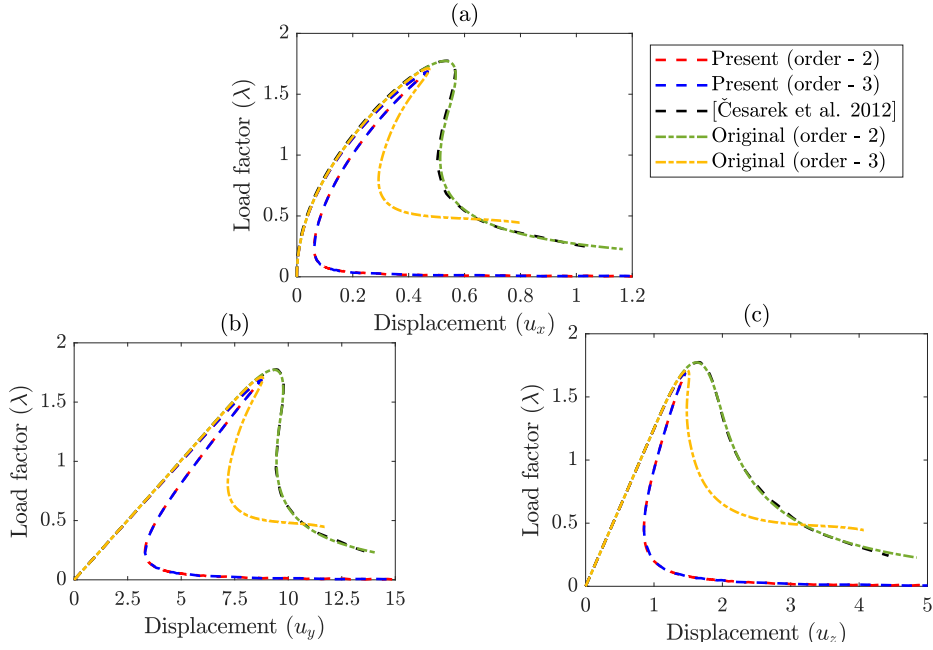
**Figure 4:** Cantilever beam made of nonlinear softening material

In this example we consider a cantilever beam having initial length  $L = 100$  and a rectangular cross-section ( $b = 2$ ,  $h = 5$ ) as shown in Figure 4. A hyper-elastic material with softening is assumed and the following stress-strain law is used [1, 5]:

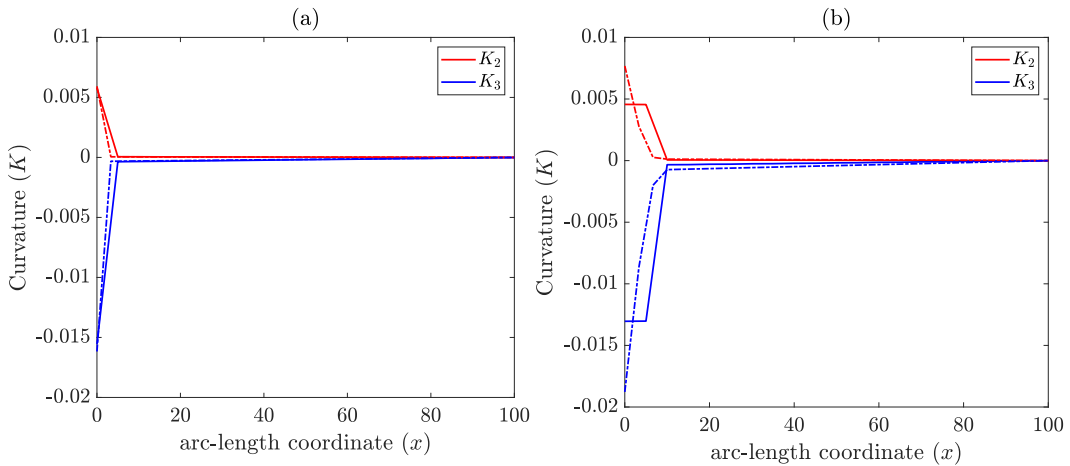
$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{cases} \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y} \boldsymbol{\varepsilon}, & 0 \leq |\boldsymbol{\varepsilon}| \leq \varepsilon_y \text{ (hardening)} \\ \frac{\sigma_y}{\varepsilon_u - \varepsilon_y} (\varepsilon_u - \boldsymbol{\varepsilon}) \text{sign}(\boldsymbol{\varepsilon}), & \varepsilon_y < |\boldsymbol{\varepsilon}| < \varepsilon_u \text{ (softening)} \\ 0, & |\boldsymbol{\varepsilon}| \geq \varepsilon_u \end{cases} \tag{14}$$

Note that the hyper-elastic material does not produce any irreversible strain and strictly follows the function  $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$ . The rest of the geometrical and material parameters are: effective shear areas  $A_2 = A_3 = 8.3333$ , torsional moment of inertia  $J_t = 20.8333$ , shear modulus  $G = 7692$ , maximum yield stress  $\sigma_y = 50$ , yield strain  $\varepsilon_y = 0.0025$ , ultimate strain  $\varepsilon_u = 0.0075$ . The load is applied incrementally at the tip of the beam up to  $\mathbf{f}_e = [0.1, -1, -1]^T$ . The present analysis is carried out quasi-statically thus the inertial effects are neglected ( $\rho = 0$ ,  $\mathbf{J}_\rho = \mathbf{0}$ ). The beam

was modelled with 10 elements of order 2 and 3 with an initial step-size of  $h = 0.1$ . Gauss-Lobatto integration was used for the evaluation of the integrals in equations (2)-(3) and (12)-(13). The cross-sectional stress resultant forces and moments and the tangent modulus were evaluated using 2D Gaussian integration with  $40 \times 40$  Gaussian points. In the present example, the localization of strain occurs at the clamped end of the cantilever beam and the results of the load-displacement responses are shown in figure 5.



**Figure 5:** Load-displacement diagram: (a)  $\lambda$  vs.  $u_x$ , (b)  $\lambda$  vs.  $u_y$ , (c)  $\lambda$  vs.  $u_z$



**Figure 6:** Variation of curvature along the length of the beam at  $\lambda = 0.23$  (Solid - order 2, dashed - order 3), (a) Embedded discontinuities (b) Original formulation.



The results obtained using the embedded discontinuity approach are compared with the ones obtained using constant strain-based elements [1] and the original velocity-based elements [3]. Despite the original formulation and the constant strain based elements are simple, efficient and robust in predicting the softening response, the results are mesh dependent. In contrast to the other two approaches, the present formulation shows mesh independent response and the curves match perfectly. Figures 6 (a-b) shows the variation of curvature along the length of the beam obtained using the present formulation and the original velocity-based formulation. While both results indicate the localization of strains close to the clamped end of the cantilever beam, the localised response of the strains is evident from figure 6(a).

#### 4 Conclusion

The solution approach proposed in the present work facilitates in capturing strong discontinuities with the assumed enhanced interpolation. The proposed enhancement also enables to choose any reasonable degree of polynomials for the interpolation of the continuous part. The performance of the proposed formulation is demonstrated through the numerical example which shows the advantages of the embedded strong discontinuity.

#### 5 Acknowledgements

This work was supported by the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme under the Marie Skłodowska-Curie grant agreement No. 860124. The support is gratefully acknowledged. This work reflects only the author's view and the Research Executive Agency is not responsible for any use that may be made of the information it contains.

#### Bibliography

- [1] Češarek, P., Saje, M., Zupan, D. Kinematically exact curved and twisted strain-based beam. *International Journal of Solids and Structures*, 49(13):1802–1817, 2012.
- [2] Estrada, R., Kanwal, R. P. *Introduction to the Theory of Distributions*, pages 53–105. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2002.
- [3] Kusuma Chandrashekhara, S., Zupan, D. Modeling strain softening in spatial frames using velocity-based formulation. In *Kuhljevi dnevi 2022*, pages 34–41, 2022.
- [4] Kusuma Chandrashekhara, S., Zupan, D. Path following using velocity-based approach in quasi-static analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 275:112292, 2023.
- [5] K. Pirmanšek, P. Češarek, D. Zupan, and M. Saje. Material softening and strain localization in spatial geometrically exact beam finite element method with embedded discontinuity. *Computers and Structures*, 182:267–283, 2017.
- [6] Zupan, E., Zupan, D. On conservation of energy and kinematic compatibility in dynamics of nonlinear velocity-based three-dimensional beams. *Nonlinear Dynamics*, 95:1379–1394, 2019.



## *Računalniška simulacija vstavljanja kovinske žilne opornice za zdravljenje disekcije v aornem loku*

*Žiga Donik<sup>1</sup>, Seth Sankary<sup>2</sup>, Luka Pocivavsek<sup>2</sup>, Janez Kramberger<sup>1</sup>*

## *Computational simulation of bare metal stent deployment for aortic arch dissection treatment*

**Povzetek.** Disekcija aorte je življenjsko nevarno stanje, pri katerem pride do ločevanja plasti aortne stene, z visoko stopnjo smrtnosti, če ga ne zdravimo. Študija predstavlja računalniško simulacijo vstavitve nepokrite kovinske žilne opornice za zdravljenje disekcije v aornem loku. S segmentacijo slik računalniške tomografije je bil ustvarjen numerični model pacientove aorte z disekcijsko membrano. Za izdelavo numeričnega modela žilne opornice je bilo uporabljeno odprtokodno orodje Gmsh. S pomočjo programskega jezika Python je bil razvit algoritem za ustrezno postavitve žilne opornice in prilagoditev obliki aorte. Deformacija opornice po vstavitvi v aortni lok se je izkazala za primerljivo s fluoroskopskimi slikami žilne opornice, posnetimi med posegom na pacientu. Nepokrite žilne opornice imajo potencial za zdravljenje disekcije v aornem loku, pri čemer lahko računalniške simulacije pomagajo med pripravo na kirurški poseg in kot orodje za konstruiranje pacientu prilagojenih žilnih opornic.

**Abstract.** Aortic dissection is a life-threatening condition characterized by the separation of the layers in the aortic wall, with high mortality rates if left untreated. The study presents a computational simulation of the deployment of a bare metal stent for treating aortic dissection in the aortic arch. A numerical model of the patient's aorta with a dissection membrane was created through CT image segmentation. The open-source tool Gmsh was used to generate the numerical model of the stent. An algorithm was developed in Python to accurately position the stent and adapt its shape to the aorta. The deformation of the stent after deployment in the aortic arch showed comparability with fluoroscopic images taken during the procedure on the patient. Bare metal stents hold potential for treating aortic dissection in the aortic arch, and computational simulations can aid in surgical preparation and the design of personalized stents.

### **1 Uvod**

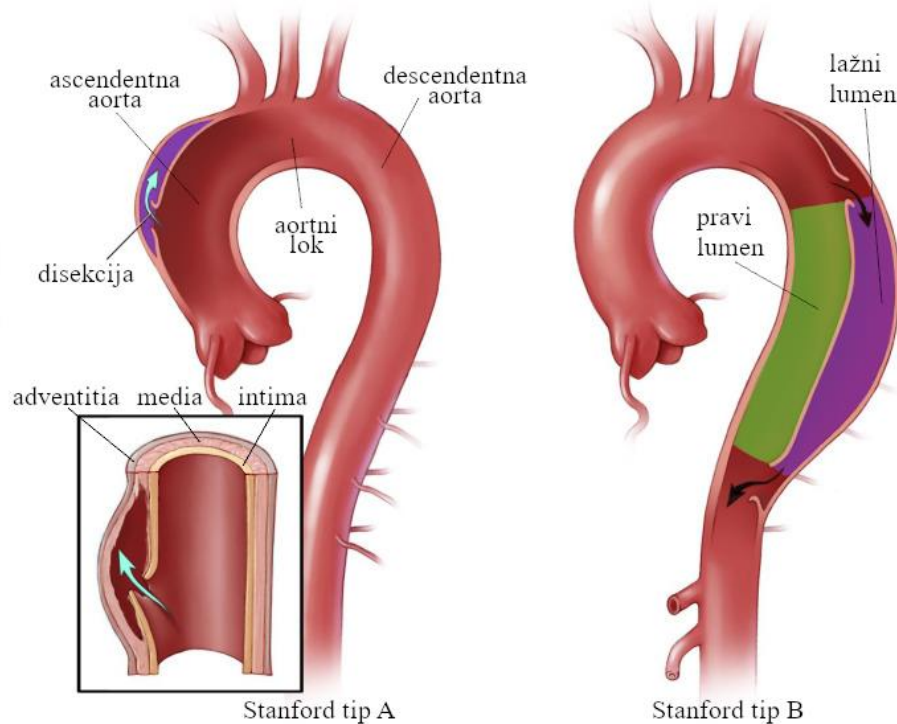
Disekcija aorte je življenjsko nevarno stanje, za katerega je značilna raztrganina in ločitev notranje plasti (intime) od srednje plasti (medie) v steni aorte, kar povzroči delitev svetline aorte na pravi in lažni lumen, kot je prikazano na sliki 1. Delitev svetline pogosto ovira pretok

---

<sup>1</sup> Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

<sup>2</sup> University of Chicago, Department of Surgery

krvi do vitalnih organov in lahko povzroči anevrizmo ali celo pretrganje aorte zaradi zmanjšane nosilnosti aortne stene.



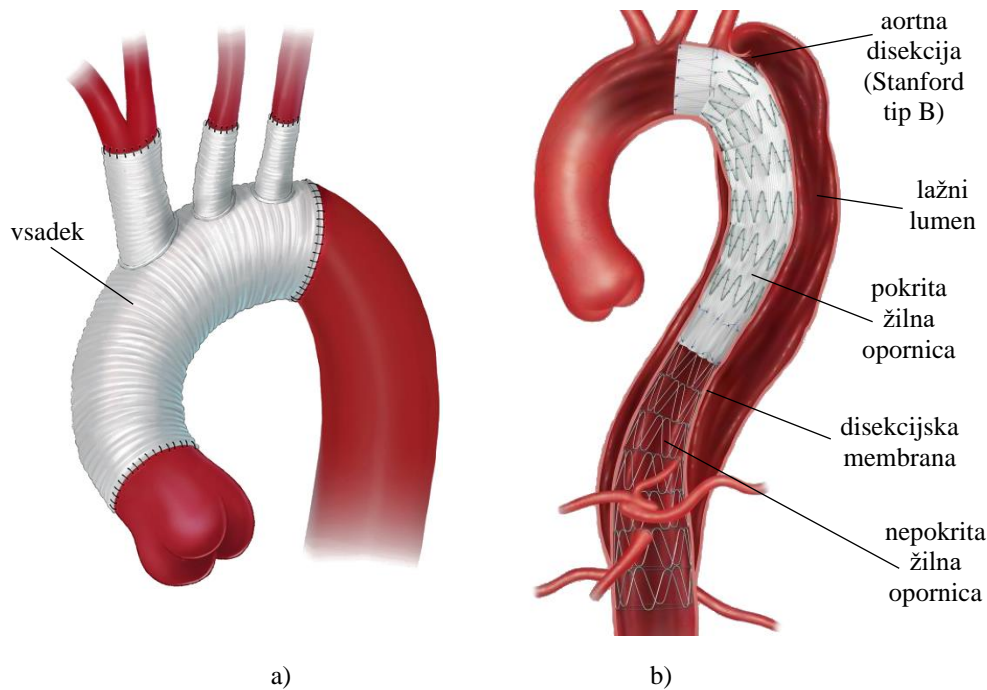
**Slika 1:** Sestava aorte, nastanek aortne disekcije in tip disekcije po Stanford klasifikaciji.

Možnosti kirurškega zdravljenja disekcije aorte so odvisne od vrste in obsega disekcije, pa tudi od bolnikove anatomije in fiziologije. Pri odprtem kirurškem posegu lahko z vsadkom izvedemo popolno rekonstrukcijo obolelega dela aorte [6]. Ta pristop vključuje zamenjavo prizadetega segmenta aorte s sintetično cevko za ponovno vzpostavitev normalnega pretoka krvi, vendar je odprta operacija invazivna in zahtevna ter predstavlja veliko tveganje za preživetje bolnika.

V zadnjih letih so se pojavile znotraj žilne (endovaskularne) tehnike kot manj invazivne alternative za zdravljenje disekcij aorte [8]. Eden takšnih pristopov vključuje uporabo pokritih žilnih opornic (stentov) v postopku, znanem kot torakalno endovaskularno popravilo aorte (ang. *thoracic endovascular aortic repair* - TEVAR). Pokrite žilne opornice se vstavijo skozi majhne zareze v dimljah in s pomočjo katetra vodijo do mesta disekcije. Nameščene so tako, da okrepijo oslABLJENO steno aorte, zaprejo lažni lumen in obnovijo pretok krvi skozi pravi lumen.

Pri disekciji tipa B, ki je omejena na descendentno aorto za aortnim lokom, je postopek TEVAR pogosto prva izbira kirurške intervencije [5]. Disekcije tipa A, ki vključujejo disekcije v aortnem loku, so bolj zapletene. Te disekcije so bližje srcu in vključujejo kritične žile v aortnem loku, ki s krvjo oskrbujejo možgane, vrat in zgornje okončine. Namestitev pokritih žilnih opornic v aortnem loku lahko blokira te oskrbovalne žile, zato je za vzdrževanje pretoka krvi v ta vitalna področja potreben obvodni (ang. *bypass*) postopek. Posledično je pogostejša kirurška odločitev za obravnavo disekcije tipa A popolna rekonstrukcija obolelega dela aorte

z uporabo presadka [2]. Na sliki 2 sta prikazani pogosti kirurški intervenciji za zdravljenje disekcije tipa A (slika 2a) in B (slika 2b).



**Slika 2:** Kirurški posegi za zdravljenje disekcije aorte. a) rekonstrukcija oziroma zamenjava ascendentnega dela aorte in aortnega loka; b) endovaskularna vstavitev pokrite žilne opornice v descendentnem delu aorte.

V tej študiji je predstavljena alternativna možnost endovaskularnega zdravljenja disekcije aortnega loka z uporabo nepokrite kovinske žilne opornice (ang. *Bare Metal Stent – BMS*). Žilna opornica naj bi okrepila pravo svetlino (lumen) in potisnila disekcijsko membrano proti steni aorte ter na ta način zaprla lažno svetlino (lumen). S spodbujanjem ponovnega zlepljanja plasti intime in medie je cilj tega pristopa olajšati celjenje raztrganine stene aorte. Prednost uporabe nepokrite kovinske žilne opornice je, da ne blokira vej aortnega loka, kar odpravlja potrebo po postopkih obvođa. Poleg tega se izognemo tveganju zrušitve žilne opornice in zatekanja (t.i. *endoleak-a*), kar je običajno povezano s pokritimi opornicami, ker BMS ne ovira ali preusmerja pretoka krvi [2]. Primarna funkcija nepokrite žilne opornice je torej obnovitev pretoka skozi pravi lumen in zapiranje lažnega lumna.

Da bi ocenili izvedljivost in učinkovitost opisanega pristopa, smo uporabili komercialno žilno opornico *Zenith® Dissection Endovascular Stent* podjetja *Cook Medical®* [9] na pacientki s kompleksno anatomijo aorte. Pacientka je imela predhodno že rekonstruiran ascendentni del aorte, dodatno pa je bila diagnosticirana še z disekcijo tipa A v aortnem loku, ki je segala v bližnji (proksimalni) del descendentne aorte. Glede na svojo starost in krhkost, ni bila primerna kandidatka za popolno rekonstrukcijo aortnega loka. Posledično je bila sprejeta kirurška odločitev za vsadek nepokrite žilne opornice. BMS opornica je bila vstavljena v predhodno zamenjan del ascendentne aorte in je segala skozi aortni lok v proksimalni del descendentne aorte, da bi razširila pravi lumen.

Za oceno učinkovitosti namestitve žilne opornice smo izvedli računalniške simulacije z uporabo metode končnih elementov. Rezultate simulacij smo nato primerjali s slikami, pridobljenimi med kirurškim posegom, kar je omogočilo oceno učinkovitosti uporabe nepokrite žilne opornice pri zdravljenju disekcije aortnega loka.

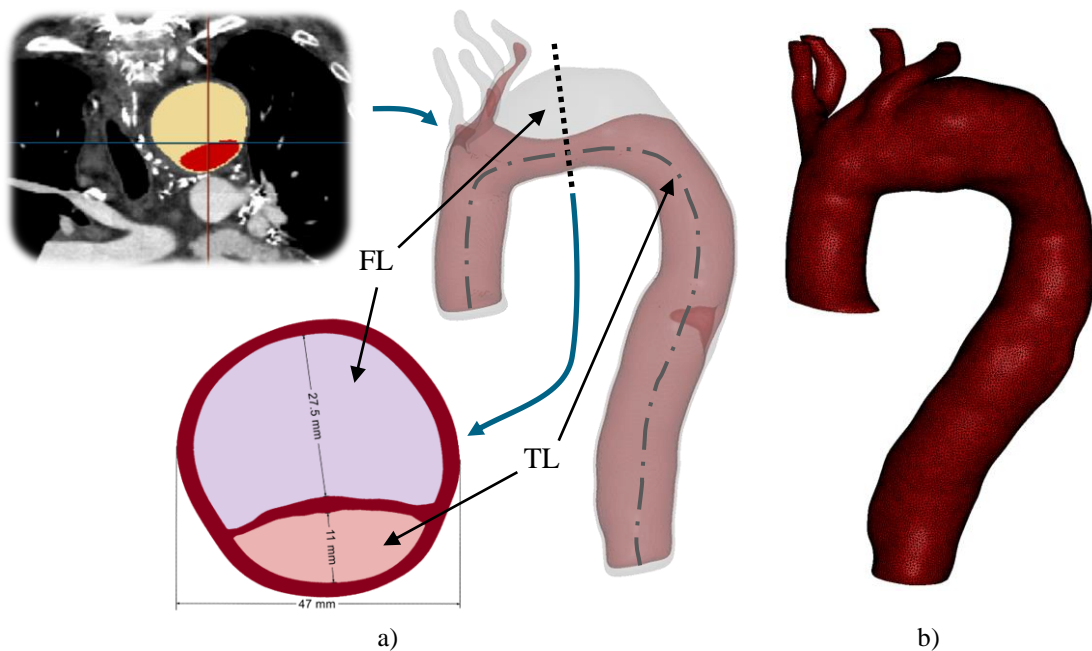
## 2 Metode

Računalniška simulacija vstavljanja žilne opornice, na podlagi metode končnih elementov (MKE), je bila izvedena v programu LS-DYNA z uporabo implicitne metode reševanja. V nadaljevanju so predstavljeni posamezni deli priprave numeričnega modela za simulacijo.

### 2.1 Geometrijski model in mreža končnih elementov

#### 2.1.1 Aorta

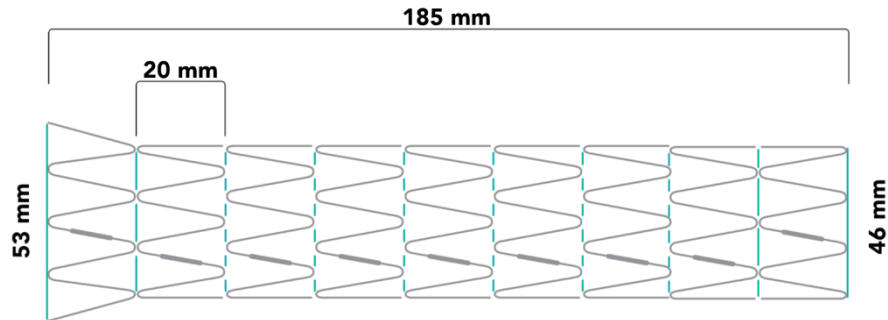
Model aorte je bil pridobljen s segmentacijo medicinskih slik iz računalniške tomografije (ang. computed tomography - CT) s pomočjo programa Simpleware ScanIP, kjer je bila identificirana disekcijska membrana, ki ločuje pravi in lažni lumen. Potrebna je bila tudi določitev srednjice prave svetline za kasnejše nameščanje žilne opornice. Postopek je prikazan na sliki 3a. Ustvarjena je bila mreža linearnih končnih elementov, ki je bila sestavljena iz 214.658 tetraedrov in 67.201 vozlišč ter je prikazana na sliki 3b.



**Slika 3:** Postopek pridobivanja 3D modela in mreže končnih elementov pacientkine aorte: a) ustvarjanje 3D modela aorte iz slik CT, ločitev na pravi (TL) in lažni lumen (FL) ter določitev srednjice pravega lumna; b) mreža končnih elementov aorte.

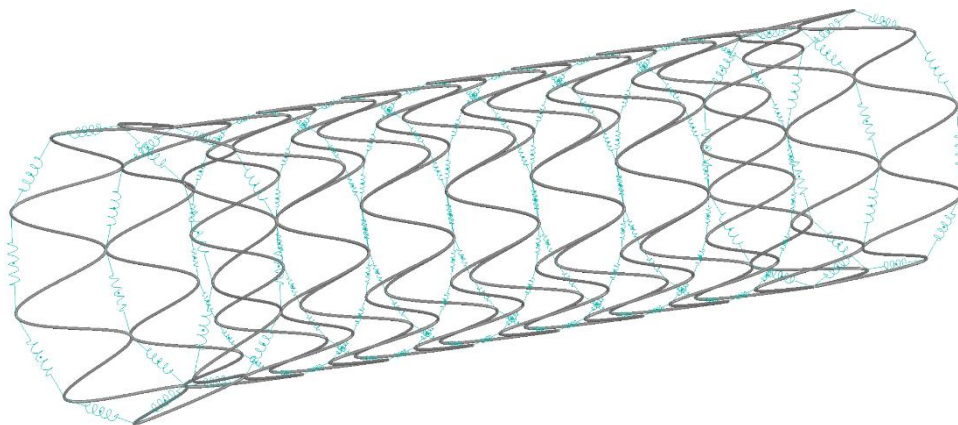
### 2.1.2 Žilna opornica

Uporabljena žilna opornica *Zenith® Dissection Endovascular Stent* podjetja *Cook Medical®* je sestavljena iz 9 kovinskih podpornih obročev, ki so med seboj povezani s kirurškimi šivi. Vsako navitje obroča ima 9 vrhov. Prikazana je na sliki 4, kjer so obroči obarvani sivo, šivi pa turkizno. Šivi zagotavljajo zadostno fleksibilnost opornice, kar omogoča vstavljanje v ukrivljen aortni lok, hkrati pa povezujejo podporne obroče in omejujejo prosto gibanje posameznih obročev.



**Slika 4:** Mere in struktura uporabljene žilne opornice. [9]

Model žilne opornice je bil ustvarjen s pomočjo odprtokodnega programa za ustvarjanje mreže Gmsh [4] in programskega jezika Python. Podporni obroči so bili ustvarjeni z uporabo sinusne funkcije v ravnini in potem oviti v cevasto obliko. Proksimalni del opornice je bil transformiran v konično obliko, ki zagotavlja boljše sidranje opornice znotraj žile. Uporabljeni končni elementi so bili linijski (1D) nosilci, zato so bile zamrežene zgolj narisane krivulje. Nosilci so krožnega preseka s premerom 0,5 mm. Za pare vozlišč na vrhovih obročev, kjer se podporne obroče stikajo, smo definirali povezavo vseh translacijskih prostostnih stopenj, saj so ta mesta na opornici zvezana s šivi. Šivi, ki povezujejo podporne obroče so bili zamenjani z diskretnimi vzmetnimi elementi, katerim je bila določena visoka togost pri natezni obremenitvi in zanemarljiva togost pri tlačni obremenitvi, saj je njihova osnovna funkcija le omejevanje gibanja. Model žilne opornice je prikazan na sliki 5.



**Slika 5:** Model žilne opornice sestavljen iz 1D nosilcev in vzmetnih elementov.



## 2.2 Materialni model

Numerično modeliranje žil predstavlja več izzivov, zaradi njihove kompleksne sestave in dinamičnega delovanja. Nelinearnosti, anizotropija in viskoelastičnost bioloških tkiv otežujejo natančno zajemanje njihovega mehanskega odziva. Za modeliranje odziva žil se uporabljajo različni materialni modeli. Najpogosteje se uporabljajo hiperelastični modeli (neo-Hooke, Mooney-Rivlin, Ogden, ipd.), ki so primerni za modeliranje večjih deformacij in temeljijo na funkciji deformacijske energije. Izbran je bil Vorp-Raghavan[7] hiperelastični model, ki je pogosto uporabljen za modeliranje aortnih anevrizem in disekcij [1]. Funkcija deformacijske energije,  $W$ , je zapisana z enačbo (1)[7].

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 \quad (1)$$

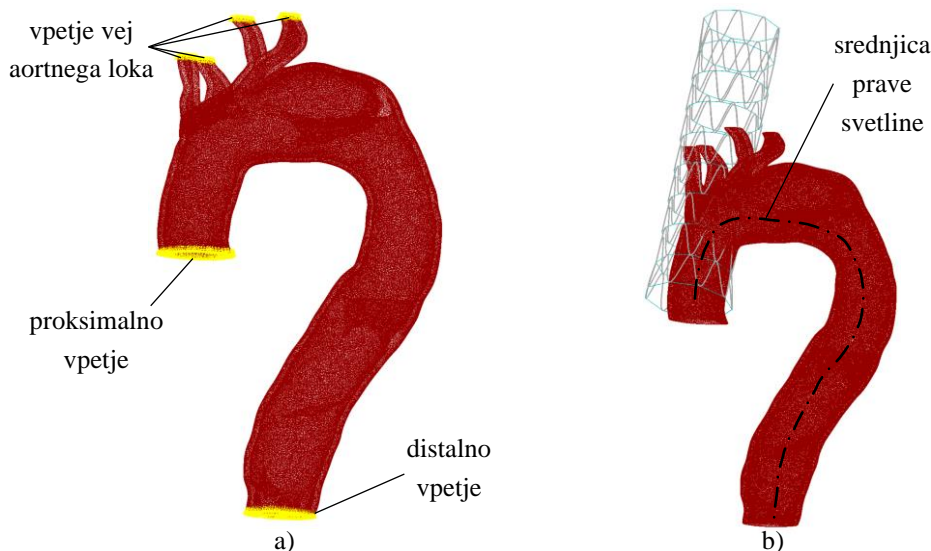
$I_1$  je prva invarianta levega Cauchy-Green deformacijskega tenzorja,  $C_{10}$  in  $C_{20}$  pa sta konstanti, za kateri so bile izbrane vrednosti iz literature[3]:  $C_{10} = 0,174$  MPa;  $C_{20} = 1,881$  MPa. Skoraj nestisljiv odziv je bil upoštevan z izbiro Poissonovega količnika 0,49, specifična gostota materiala pa je bila  $1000 \text{ kg/m}^3$ .

Podporni obroči žilne opornice so izdelani iz spominske zlitine niklja in titana (Nitinol). Spominski učinek materiala je bil v prvi fazi zanemarjen, zato je bil za modeliranje izbran linearno elastični materialni model z modulom elastičnosti  $83.000 \text{ MPa}$ , Poissonovim količnikom  $0,33$  in gostoto  $4560 \text{ kg/m}^3$ .

## 2.3 Robni pogoji in obremenitve

Aorta je bila vpeta na proksimalnem in distalnem koncu ter na vejah aortnega loka kot je prikazano na sliki 6a. Omejene so bile vse translacijske prostostne stopnje.

Žilna opornica je bila postavljena na začetek srednjice prave svetline, njena os pa je bila poravnana s smerjo odvoda v prvi točki srednjice. Postavitev žilne opornice je prikazana na sliki 6b.

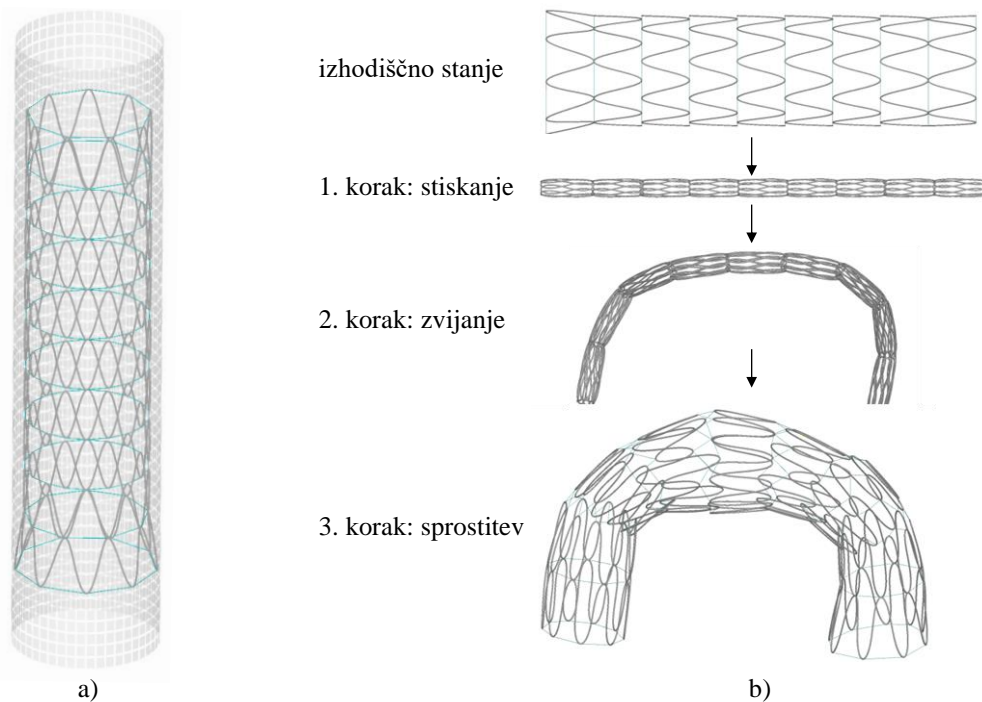


**Slika 6:** Postavitev in vpetje: a) vpetje aorte; b) začetna postavitev žilne opornice.

Vstavljanje žilne opornice je bilo simulirano s postopkom, ki sestoji iz treh korakov. Najprej je bilo potrebno žilno opornico stisniti v radialni smeri na dovolj majhen premer, da jo kasneje lahko vstavimo v pravi lumen (premera 7,9 mm). V naslednjem koraku je potrebno opornico zviti, da teče po srednjici pravega lumna. Zadnji korak predstavlja razširjanje žilne opornice, ki se samodejno razširi zaradi zaostalih elastičnih deformacij iz prejšnjih korakov.

Za oblikovanje žilne opornice je bilo uporabljeno orodje za stiskanje (ang. *crimper*), ki je bilo modelirano s površinskimi končnimi elementi debeline 1 mm v obliki cevke okoli žilne opornice, kot je prikazano na sliki 7a. Za orodje za stiskanje je bil izbran linearno elastični material s parametri  $E = 21.000.000 \text{ MPa}$ ;  $\nu = 0,3$  in  $\rho = 7890 \text{ kg/m}^3$ . Med orodjem za stiskanje in opornico je bil definiran drsni kontakt s koeficientom trenja 0,1. Drsni kontakt med opornico in aorto s koeficientom trenja 0,1 je bil aktiviran v tretjem koraku, med razširjanjem žilne opornice.

S pomočjo programskega jezika Python je bila za vsako vozlišče orodja za stiskanje definirana pot po času kot obremenitvena krivulja za vse tri korake analize. Deformacija žilne opornice skozi posamezne korake analize je prikazana na sliki 7b.

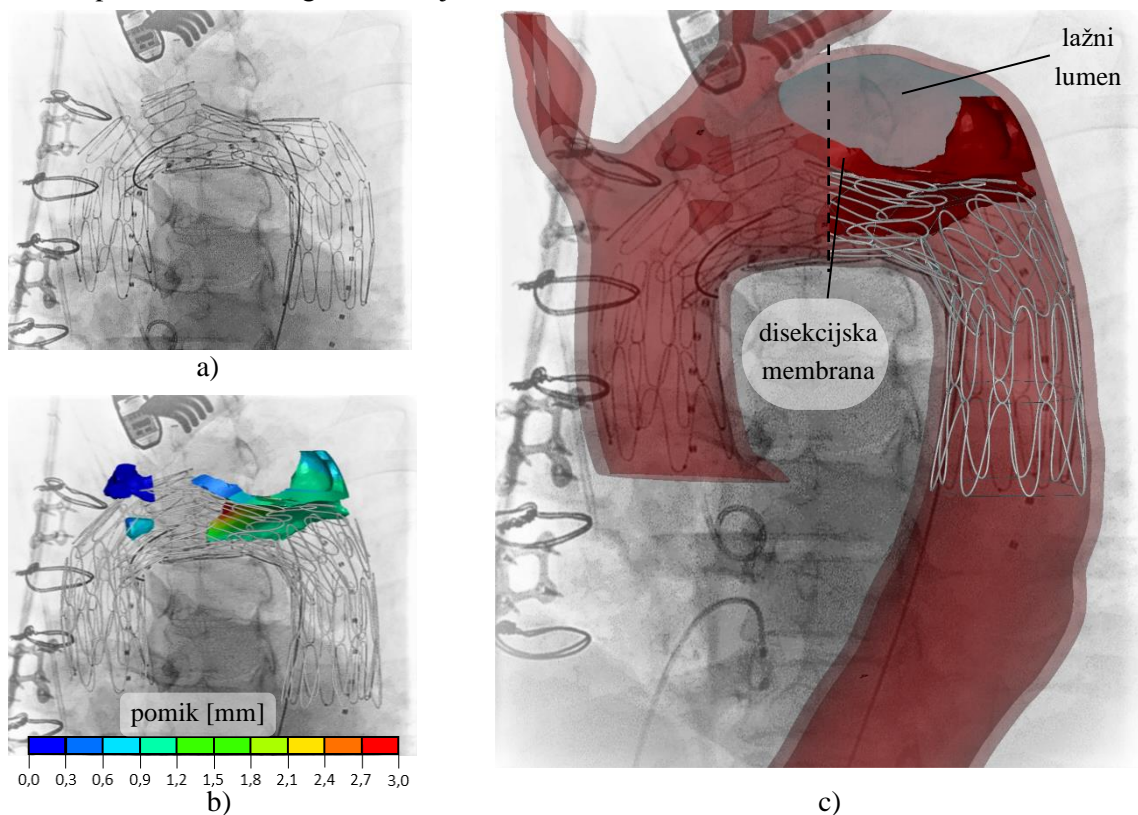


**Slika 7:** Preoblikovanje žilne opornice: a) orodje za stiskanje žilne opornice in žilna opornica; b) deformacija žilne opornice skozi posamezne korake simulacije.



### 3 Rezultati

Rezultati računalniške simulacije so bili primerjani s slikami, posnetimi med kirurškim posegom s pomočjo radiološkega postopka fluoroskopije (slika 8). Slike CT po operaciji niso na voljo, zato ni mogoča primerjava rezultatov simulacije s 3D modelom aorte in žilne opornice, ki bi jih pridobili s segmentacijo posnetkov CT. Modela aorte in žilne opornice po zadnjem koraku simulacije sta bila ustrezno poravnana in postavljena tako, da je bilo doseženo čim boljše prilaganje obliki lumna, kot lahko razberemo iz vstavljenega žilne opornice na sliki 8a. Na slikah 8b in 8c je prikazano prilaganje rezultatov simulacije z dejanskim stanjem, posnetim med operacijo. Računalniška simulacija odlično opiše dejansko obnašanje žilne opornice, primerljive so lokacije posameznih podpornih obročev, ter njihova usmeritev in končni premer, do katerega se razširijo.



**Slika 8:** Primerjava simulacije s slikami posnetimi med operacijo: a) vstavljena žilna opornica (slika posneta med operacijo); b) žilna opornica iz računalniške simulacije prekrita preko fluoroskopske slike in pomiki disekcijske membrane; c) prekrivanje aorte in žilne opornice iz računalniške simulacije s flurosopsko sliko iz operacije z označeno lažno svetlino.

Do razlike pride pri četrtem podpornem obroču (gledano iz proksimalnega konca). Na posnetku iz operacije sega distalni del obroča v začetek lažnega lumna, v računalniški simulaciji pa se dotika disekcijske membrane (slika 8b). Razlog je najverjetneje v osnovni

postavitvi žilne opornice v simulaciji pred razširjanjem, saj je zelo težko zadeti pravo mesto vstavitve. Že majhen zamik po srednjici lahko povzroči, da pride obroč v kontakt z disekcijsko membrano, namesto, da bi se razširil mimo nje do žilne stene v aortnem loku. Kljub temu lahko vidimo, da simulacija zelo dobro opiše dejansko stanje in nam je lahko v pomoč pri načrtovanju kirurških posegov in pri razvoju boljših žilnih opornic.

Iz slik 8b in 8c, kjer je stanje iz računalniške simulacije prekrito preko fluoroskopskega posnetka, lahko vidimo, da se disekcijska membrana ni pomaknila popolnoma do žilne stene, kot bi bilo zaželeno, zato lažna svetlina ni zaprta. Žilna opornica ima premajhno radialno togost, zato ne uspe dovolj obremeniti disekcijske membrane, da bi se le-ta pomaknila do aortne stene. Zadostno obremenitev disekcijske membrane bi lahko dosegli z izdelavo pacientu prilagojene žilne opornice, ki bi imela na mestu zožitve prave svetline višjo radialno togost in bi bila zmožna potisniti disekcijsko membrano do aortne stene.

#### **4 Zaključek**

V delu je predstavljena računalniška simulacija vstavljanja nepokrite kovinske žilne opornice v aortni lok za zdravljenje disekcije aortnega loka. Disekcija aorte je življenjsko nevarno stanje, ki je še posebej zahtevno za zdravljenje, če se pojavi v aortnem loku. Na podlagi segmentacije slik iz CT preiskave je bil izdelan numerični model pacientkine aorte. Numerični model žilne opornice je bil ustvarjen z uporabo odprtokodnega orodja Gmsh in programskega jezika Python, ki je bil uporabljen tudi za definicijo kompleksnejših robnih pogojev pri postavitvi žilne opornice. Rezultati simulacije so bili primerjani s slikami flouroskopije, posnetimi med operacijo.

Prikazano je bilo dobro ujemanje postavitve žilne opornice in posameznih podpornih obročev. Opornica ni uspela popolnoma razširiti prave svetline zaradi premajhne radialne togosti v področju zožitve. V prihodnosti bi lahko to popravili s konstruiranjem in izdelavo pacientu prilagojenih opornic s spremenljivo radialno togostjo vzdolž osi opornice oz. srednjice pravega lumna aorte. Uporaba nepokritih žilnih opornic predstavlja obetavno alternativo obstoječim postopkom za zdravljenje disekcije aortnega loka, saj se lahko izognemo dodatnim operativnim posegom, ki so potrebni pri TEVAR postopku. Imajo tudi velik potencial za enostavno prilagoditev geometrije, saj so sestavljene iz posameznih podpornih obročev, ki so med seboj preprosto povezani s kirurškimi šivi. Ugotovili smo tudi, da lahko z računalniško simulacijo dobro opišemo obnašanje žilne opornice med vstavljanjem, zato predstavljajo tovrstne simulacije pomembno orodje pri nadaljnjem razvoju žilnih opornic.

#### **Zahvala**

Avtorji se zahvaljujejo Javni agenciji za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije za sofinanciranje raziskovalnega programa št. P2-0063.

#### **Literatura**

- [1] E. Abbott *idr.*, *Computational analysis of endovascular aortic repair proximal seal zone preservation with endoanchors: A case study in cylindrical neck anatomy*, *JVS Vasc Sci*, 2, 170–178, 2021.
- [2] F. C. Brunicardi *idr.*, *Schwartz's principles of surgery*, 11. izd. McGraw Hill, 2019.

- [3] B. J. Doyle, A. Callanan, T. M. Mcgloughlin, *A comparison of modelling techniques for computing wall stress in abdominal aortic aneurysms*, Biomed Eng Online, 6, 2007.
- [4] C. Geuzaine, J.-F. Remacle, *Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities*, Int. J. Numer. Meth. Engng, 0, 1–24, 2009.
- [5] L. F. Hiratzka *idr.*, *2010 ACCF/AHA/AATS/ACR/ASA/SCA/SCAI/SIR/STS/SVM Guidelines for the Diagnosis and Management of Patients With Thoracic Aortic Disease*, J Am Coll Cardiol, 55, 2010.
- [6] G. N. Levine, *Cardiology secrets*, 6. izd. Elsevier, 2022.
- [7] M. L. Raghavan, D. A. Vorp, *Toward a biomechanical tool to evaluate rupture potential of abdominal aortic aneurysm: identification of a finite strain constitutive model and evaluation of its applicability*, J Biomech, 33, 475–482, 2000.
- [8] I. C. Țintoiu, A. Ursulescu, J. A. Elefteriades, M. J. Underwood, I. Droc, *New Approaches to Aortic Diseases from Valve to Abdominal Bifurcation*. Elsevier, 2018.
- [9] Cook Medical, *Zenith® Dissection Endovascular Stent | Cook Medical*. <https://www.cookmedical.com/products/8e6006da-f9f8-4bb7-997e-4bbb1f26cefc/> (30. junij 2023).



## ***Reološke lastnosti polimernih zmesi s farmacevtsko učinkovino za pripravo filamentov in izdelavo 3D tiskanih tablet***

*Urška Gradišar Centa<sup>1</sup>, Klemen Kreft<sup>2</sup> in Lidija Slemenik Perše<sup>1</sup>*

## ***Rheological properties of polymeric composites with pharmaceutical substance for the preparation of filaments for 3D printed tablets***

**Povzetek.** V prispevku je predstavljeno reološko vedenje polimernih zmesi s farmacevtsko učinkovino, iz katerih se izdelujejo filament za 3D tisk personaliziranih tablet. Pri zmesih z enako polimerno osnovo je bilo ugotovljeno, da imajo zmesi s plastifikatorjem Polyglykol®3350P bistveno nižjo viskoznost prvega newtonskega območja, kot zmesi s plastifikatorjem Pardeck®M200. Pri zmesih s plastifikatorjem Polyglykol®3350P je opaziti višje vrednosti razmerja med viskoznim in elastičnim modulom v celotnem območju strižnih deformacij ter kritične vrednosti strižne deformacije. Točka izenačenja dinamičnih modulov na zmesih z enako polimerno osnovo se pojavi pri nižji frekvenci ob uporabi plastifikatorja Pardeck®M200, medtem ko je pri drugem paru zmesi na osnovi Soluplus polimera opaziti nižje vrednosti dinamičnih modulov pri uporabi plastifikatorja PEG 3350; točka izenačenja modulov pa v tem primeru ni bila prisotna. V prispevku so prikazane reološke lastnosti dveh skupin polimernih zmesi z različnima komercialno dostopnima plastifikatorjema in različnimi polimernimi osnovami. Primerjane so lastnosti in parametri, ki vplivajo na uspešnost 3D tiska tablet glede na polimerno osnovo in vrsto plastifikatorja. Izkazalo se je, da imata zmesi na enaki polimerni osnovi in pri enaki temperaturi za eno dekada nižje vrednosti dinamičnih modulov (temperaturni test) ob uporabi plastifikatorja Polyglykol®3350P.

**Abstract.** In this paper, we present the rheological behaviour of polymeric composites with pharmaceutical substance, for the preparation of filaments for 3D printed personalized tablets. When comparing composites with the same polymer base, it was found that the samples with Polyglykol®3350P plasticizer exhibit significantly lower zero-shear viscosity compared to the samples with Pardeck®M200 plasticizer. For the samples with Polyglykol®3350P plasticizer, higher values of phase shift (the ratio of viscous to elastic modulus, were observed in the entire range of shear deformations, and critical shear strain. The yield point of the composites with the same polymer base occurred at lower frequencies when using the Pardeck®M200 plasticizer, while for the second

---

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana

<sup>2</sup> Lek d.d., Verovškova ulica 57, 1000 Ljubljana

pair of mixtures, based on Soluplus polymer, lower dynamic modulus was observed when the Polyglykol®3350P plasticizer was used; the yield point was not observed in this case. In this paper, the rheological properties of two groups of polymeric composites with different plasticizers and different polymeric bases was studied. The comparison of properties and parameters, which influence the performance of 3D printing tablets depending on the used plasticizer or polymeric base, is presented. It has been shown that the polymeric composites, based on the same polymer and at the same temperature, exhibit approximately one-decade lower values of the dynamic moduli (temperature tests) when using the Polyglykol®3350P plasticizer.

## **1 Uvod**

Velik napredek na področju personalizirane medicine, ki želi zdravila prilagoditi vsakemu posamezniku posebej, predstavlja izdelava tablet s pomočjo tehnologije 3D tiskanja. Tehnologija 3D-tiskanja, ki omogoča popoln nadzor oblike, bi v kliničnem okolju omogočila izdelavo tablet na podlagi individualnih potreb posameznika, z različnimi načini sproščanja in različnimi kombinacijami učinkovin ter v ustreznih količinah. Za zagotavljanje farmacevtskih standardov za izdelavo tablet pa so zelo pomembne reološke lastnosti zmesi, iz katerih se v prvi fazi oblikujejo filamenti, nato pa se iz njih natisnejo 3D tablete. V te namene se oblikujejo številne polimerne zmesi z različnimi farmacevtskimi biokompatibilnimi polimeri, ki izkazujejo temperaturno odvisno viskoelastično vedenje. Poleg tega pa se v zmesi dodajajo tudi različni plastifikatorji ter drugi aditivi, ki vplivajo na končne reološke in mehanske lastnosti tablet ter tudi na sproščanje farmacevtske učinkovine [3].

Termoplastični polimeri, kot so polivinil alkohol (PVA), polivinil pirolidon (PVP), derivati celuloze (HPMC) in polietilen glikol (PEG) se uporabljajo za izdelavo filamentov s pomočjo ekstruzije zaradi njihove visoke temperaturne stabilnosti, biokompatibilnosti, dobre topnosti ter ustrezne viskoznosti. Omenjeni polimeri so že znani nosilci farmacevtskih učinkovin, vendar pa vsi niso primerni za uporabo v tehnologiji 3D tiska, saj so nekateri preveč krhki, drugi pa preveč fleksibilni oziroma upogljivi. Filamenti so v podajalni glavi 3D tiskalnika izpostavljeni visokim strižnim hitrostim, kar lahko vodi v različne deformacije oziroma poškodbe filameta [1], ter mašenje glave 3D tiskalnika [2,4]. Primerno upogibanje filamentov je mogoče doseči s spremljanjem kritičnega razmerja med elastičnim modulom in viskoznostjo zmesi za izdelavo polimernega filameta [5]. Za enostavno in uspešno 3D tiskanje mora imeti filament torej primerne reološke in mehanske lastnosti.

## **2 Materiali in karakterizacijske metode**

Modelna zdravilna učinkovina ketoprofen in vse ostale pomožne snovi so bile pridobljene s strani podjetja Lek d.d. Za analizo so bile uporabljene polimerne zmesi z enakim deležem farmacevtske učinkovine ketoprofen, enakim deležem plastifikatorja (Parateck®M200 ali Polyglykol®3350 P) in drsila Syloid®244 FP ter 69.5 % deležem polimera. Podrobnejša kemijska sestava vzorcev ter povprečna molekulska masa uporabljenega polimera je navedena v tabeli 1. Za izdelavo filamentov je bil uporabljen enovijačni ekstrudor Noztex Xcalibur (Združeno kraljestvo), s tremi temperaturnimi območji in šobo s premerom 1,75 mm. Za reološke meritve so bili filamenti predhodno mleti v prašno zmes ali granulato z mlinčkom ali kladivarjem.

**Tabela 1:** Kemijska sestava polimernih vzorcev (polimer, plastifikator) ter povprečna molekulska masa polimera v posamezni zmesi.

VZOREC	POLIMER	M <sub>w</sub> [g/mol]	PLASTIFIKATOR
zmes 1	PVP K30	50 000	PARTECK®M200
zmes 2	HPMC AS LG	18 000	PARTECK®M200
zmes 3	HPMC 15 LV	90 000	PARTECK®M200
zmes 4	PARTECK MXP (PVA)	47 000	PARTECK®M200
zmes 5	SOLUPLUS	118 000	PARTECK®M200
zmes 6	PVP K25	34 000	Polyglykol®3350P
zmes 7	HPMC AS LG	18 000	Polyglykol®3350P
zmes 8	KOLLIDON VA 64	45 000	Polyglykol®3350P
zmes 9	SOLUPLUS	118 000	Polyglykol®3350P

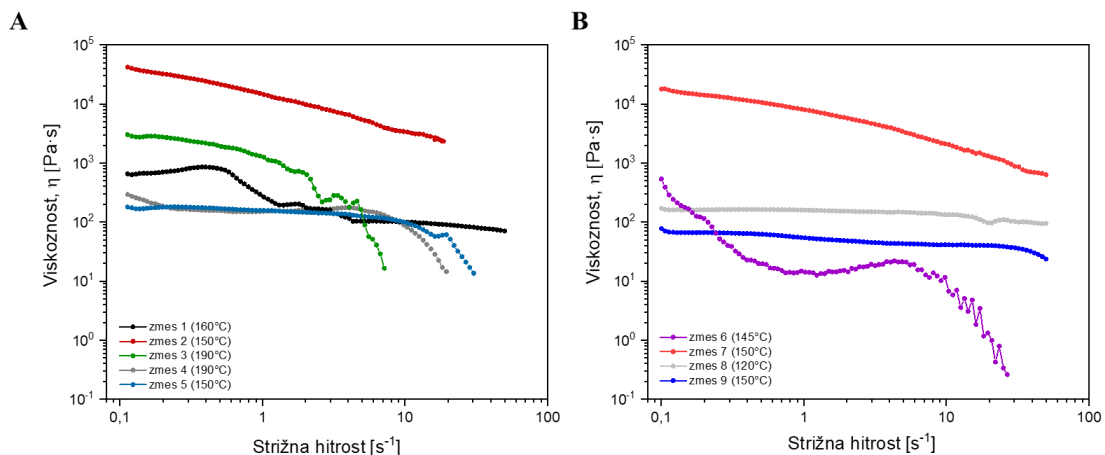
Reološke meritve so bile izvedene z rotacijskim reometrom MCR 302 (Anton Paar) v inertni dušikovi atmosferi, ki je preprečevala oksidacijo polimera. Uporabljen je bil senzorski sistem plošča-plošča s premerom 25 mm, med meritvijo pa je bila konstantna medploščna razdalja 1 mm (PP25/1 mm). Granule oziroma prašna zmes vzorca je bila z manjšo žličko nasuta na spodnjo ploščo predhodno segretega senzorskega sistema, na temperaturo, pri kateri je bil vzorec 3D tiskan. Ko se je vzorec stalil, je bila zgornja senzorska plošča spuščena na merilno pozicijo z medploščno razdaljo 1 mm. Meritve viskoznosti so bile izvedene pri temperaturi tiska za vsak vzorec posebej, ob logaritemskem naraščanju strižne hitrosti v območju med 0,1 in 50 s<sup>-1</sup>. Izvedeni so bili tudi amplitudni, frekvenčni in temperaturni testi za vsak vzorec. Dinamična modula G' in G'' sta bila pri amplitudnem testu merjena v območju strižne deformacije od 0,001 do 100 % in frekvenci 1 Hz, pri frekvenčnem testu pa v območju frekvenc med 0,1 in 100 Hz pri konstantni strižni deformaciji 0,1 % ter temperaturi tiska za vsak vzorec. Temperaturni testi so bili izvedeni pri konstantni frekvenci 1 Hz in konstantni strižni deformaciji 0,1 %, normalni sili 0 N, ter s temperaturnim gradientom 2 °C/min v temperaturnem območju med 70 °C in 250 °C oziroma prilagojeno glede na temperaturo tiska vzorca in polimerno sestavo. Testi stabilnosti so bili izvedeni pri temperaturi tiska posameznega vzorca, konstantni deformaciji 0,5 % in frekvenci 1 Hz v trajanju 40 minut.

### 3 Rezultati

#### 3.1 Viskoznost

Dinamike viskoznosti vzorcev, merjene pri temperaturi tiska in v območju strižnih hitrosti med 0,1 in 80 s<sup>-1</sup>, so prikazane na sliki 1. Na sliki 1A so prikazani rezultati vzorcev, pri katerih je bil uporabljen plastifikator Parateck®M200 z molsko maso 182,17 g/mol, na sliki 1B pa rezultati vzorcev, pri katerih je bil uporabljen plastifikator Polyglykol®3350P z molekulsko maso 3350 g/mol, v kombinaciji z različnimi polimernimi matricami. Na sliki 1A lahko vidimo, da ima zmes 1 pri višjih vrednostih strižnih hitrosti, ki ustrezajo običajnim strižnim hitrostim pri 3D tisku, najbolj konstantno vrednost viskoznosti. Najvišjo viskoznost izkazuje vzorec 2, katerega polimerna osnova je polimer hidroksipropil metilceluloza acetat sukcinat (HPMC AS LG), ki ima v izbrani skupini vzorcev najnižjo povprečno molekulsko maso.

Izrazito zmanjšanje viskoznosti, ki je posledica zdrsa vzorca, je pri zmesi 3 opaziti že pri strižnih hitrostih, nekoliko večjih od  $1 \text{ s}^{-1}$ . Zdrs vzorca v senzorskem sistemu se pri zmesih 4 in 5 pojavi pri nekoliko višjih strižnih hitrostih, pri čemer sta polimerni bazi vzorcev različni; polimer v zmesi 5 ima precej višjo molekulsko maso. Zmes 6 ima zelo nizke vrednosti viskoznosti, še zlasti pri nekoliko višjih strižnih hitrostih, t.j. nad  $10 \text{ s}^{-1}$ , kjer pride do zdrsa vzorca v senzorskem sistemu. Padec viskoznosti za eno dekadno v celotnem območju strižnih hitrosti pri temperaturi tiska ( $150 \text{ °C}$ ) je opaziti pri zmesi 7, ki ima enako polimerno osnovo kot vzorec 2. Vzorca 8 in 9 pa imata razmeroma konstantno viskoznost in primerljive vrednosti viskoznosti v celotnem merilnem območju, čeprav sta temperaturi tiska različni ( $120 \text{ °C}$  in  $150 \text{ °C}$ ). Zmes 5 in 9 sta bili tiskani pri enaki temperaturi ( $150 \text{ °C}$ ), pri čemer je bila viskoznost zmesi 9 v primerjavi z zmesjo 5 nekoliko nižja, kar nakazuje, da plastifikator Polyglykol®3350P učinkoviteje zniža viskoznost polimerne osnove Soluplus, ki ima sicer najvišjo povprečno molekulsko maso. Pri vseh vzorcih smo iz rezultatov določili viskoznosti prvega newtonskega območja (v območju nizkih strižnih hitrostih -  $\eta_0$ ), ki so podane v tabeli 2. Pri temperaturi  $150 \text{ °C}$  ( $T_{\text{tisk}}$ ) je bila določena najnižja vrednost ničelne viskoznosti za zmes 9, najvišja pa za zmes 2. Pri temperaturi  $190 \text{ °C}$  sta bili tiskani zmesi 3 in 4, pri čemer je nižjo viskoznost izkazovala zmes 4, saj je bila polimerna osnova zmesi 4 polimer PVA, ki ima nižjo molekulsko maso.

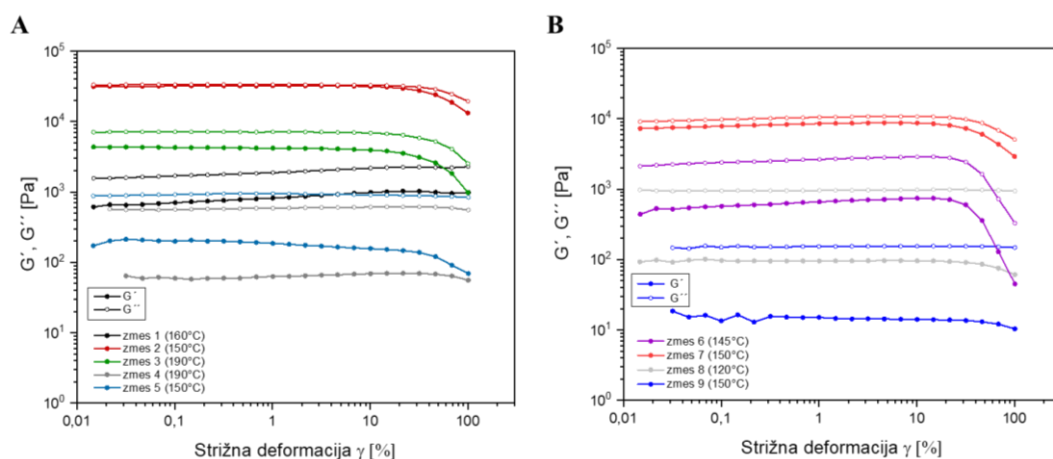


**Slika 1:** Viskoznost kot funkcija strižne hitrosti pri temperaturi tiska posameznega vzorca s plastifikatorjem A) Parateck®M200, B) Polyglykol®3350P.

### 3.2 Amplitudni in frekvenčni testi

Tudi amplitudne teste smo izvedli pri temperaturi tiska posameznega vzorca. Na sliki 2A je prikazana dinamika elastičnega  $G'$  in viskoznega  $G''$  modula pri različnih vrednostih strižnih deformacij za zmesi s plastifikatorjem Parateck®M200. Na podlagi amplitudnih meritev so bile določene vrednosti kritične strižne deformacije  $\gamma_c$ , ki so podane v tabeli 2. Pri vseh analiziranih zmesih je razvidno, da so vrednosti viskoznega modula ( $G''$ ) višje kot vrednosti elastičnega modula ( $G'$ ). Pri zmesih 3 in 4, ki sta bili tiskani pri  $190 \text{ °C}$ , v celotnem proučevanem območju prevladuje viskozni modul nad elastičnim, pri čemer je razmerje med moduloma (fazni zamik,  $\tan \delta$ , tabela 2) višje pri zmesi 4. Pri temperaturi  $150 \text{ °C}$  - temperatura tiska za zmesi 2 in 5, opazimo, da ima zmes 2 najvišji vrednosti elastičnega in viskoznega modula, ki v celotnem

proučevanju območju izkazujeta zelo podobne vrednosti in posledično najnižjo vrednost  $\tan \delta$ . Viskozni modul najbolj prevladuje nad elastičnim pri zmesi 5, ki zato izkazuje kar šestkrat večji fazni zamik ( $\tan \delta = 6,53$ ). Prav tako sta bili pri isti temperaturi (150 °C) tiskani zmesi 7 in 9, ki pa vsebujeta plastifikator Polyglykol@3350P. Zmes 7, ki ima enako polimerno osnovo kot zmes 2, izkazuje nižje vrednosti dinamičnih modulov in nekoliko višjo vrednost  $\tan \delta$  ( $\tan \delta = 1,21$ ), kar nakazuje da plastifikator Parateck®M200 v primeru uporabe polimera HPMC AS LG izkazuje ugodnejše reološke lastnosti za 3D tisk tablet. Primerjava vrednosti dinamičnih modulov zmesi 2 in 7 na osnovi HPMC AS LG polimera kaže, da je pri zmesi 2 s plastifikatorjem Polyglykol@3350P razmerje med viskoznim in elastičnim modulom ( $\tan \delta$ ) višje v celotnem območju strižnih deformacij. Pri primerjavi zmesi 5 in 9 na osnovi Soloplus polimera opazimo, da zmes 9, ki vsebuje plastifikator Polyglykol@3350P, izkazuje nižje vrednosti dinamičnih modulov, zato lahko pri uporabi te zmesi pričakujemo manj težav pri tisku.



**Slika 2:** Elastični  $G'$  in viskozni  $G''$  modul kot funkcija strižne deformacije pri temperaturi tiska zmesi s plastifikatorjem A) Parateck®M200, B) Polyglykol@3350P.

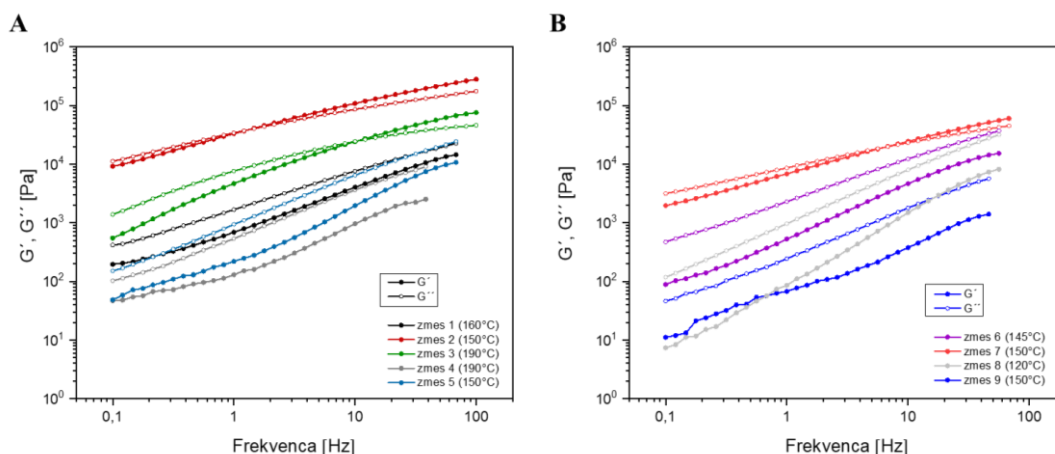
**Tabela 2:** Viskoznost pri nizkih strižnih hitrostih  $\eta_0$  (prvo newtonsko območje)-slika 1, kritična strižna deformacija  $\gamma_c$ -slika 2, ter vrednosti razmerja med viskoznim in elastičnim modulom  $\tan \delta$  pri temperaturi tiska, frekvenci 1 Hz in strižni deformaciji 0,1 %-slika 4.

VZOREC	$T_{\text{tisk}} [^{\circ}\text{C}]$	Viskoznost $\eta_0$ [ $\text{Pa}\cdot\text{s}$ ]	$\gamma_c$ [%]	$\tan \delta$ pri $T_{\text{tisk}}$
<b>zmes 1</b>	160	634,8	0,09	1,96
<b>zmes 2</b>	150	42 066	10,02	1,04
<b>zmes 3</b>	190	3017,9	6,83	1,55
<b>zmes 4</b>	190	292,7	2,17	2,37
<b>zmes 5</b>	150	180	0,67	6,53
<b>zmes 6</b>	145	288,3	0,47	3,37
<b>zmes 7</b>	150	17 144	14,61	1,21
<b>zmes 8</b>	120	160,7	31,06	7,98
<b>zmes 9</b>	150	67,9	21,28	3,16



Na podlagi amplitudnih meritev so bile določene vrednosti kritične strižne deformacije  $\gamma_C$ , ki so predstavljene v tabeli 2. Najvišji fazni zamik  $\tan \delta$  (pri temperaturi tiska) izkazuje zmes 8, pri kateri je linearen odziv prisoten vse do 31 % strižne deformacije. Najozžje območje linearnega viskoelastičnega odziva pa je opaziti pri zmesi 1.

Viskoelastične lastnosti polimernih zmesi smo opazovali pri konstantni strižni deformaciji 0,1 % v frekvenčnem območju med 0,1 in 100 Hz. Slika 3A prikazuje rezultate za polimerne zmesi s plastifikatorjem Parateck®M200, slika 3B pa za zmesi s plastifikatorjem Polyglykol®3350P. Pri večini zmesi v celotnem frekvenčnem območju prevladuje viskozni modul  $G''$  nad elastičnim modulom  $G'$ , kar nakazuje na tekočinski karakter zmesi, razen pri zmesih 2, 3 in 7, kjer smo v območju višjih frekvenc opazili točko izenačenja dinamičnih modulov. Točka izenačenja modulov se je pojavila pri frekvenci 1,35 Hz za zmes 2, pri 10,44 Hz za zmes 3 ter pri 6,62 Hz za zmes 7. Pri zmesih na osnovi HPMC AS LG polimera, ki sta bili tiskani pri temperaturi 150 °C (zmes 2 in 7) opazimo, da pride do točke izenačenja dinamičnih modulov pri nižji frekvenci v primeru uporabe plastifikatorja Parateck®M200, medtem ko pri zmesih 5 in 9, na osnovi Soluplus polimera, ki sta bili tiskani pri temperaturi 150 °C, opazimo nižje vrednosti dinamičnih modulov pri uporabi plastifikatorja Polyglykol®3350P.

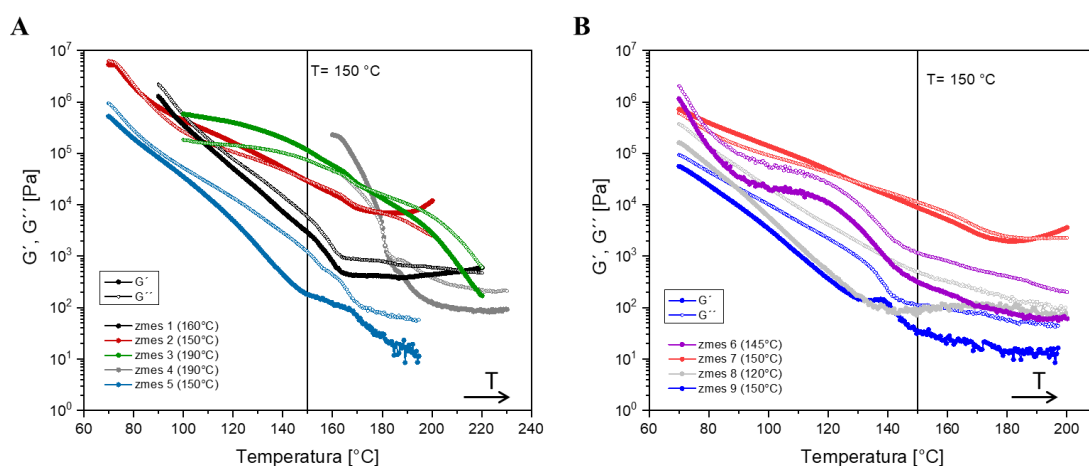


**Slika 3:** Elastični  $G'$  in viskozni  $G''$  modul kot funkcija frekvence pri temperaturi tiska posameznega vzorca s plastifikatorjem A) Parateck®M200, B) Polyglykol®3350P.

### 3.3 Temperaturni testi

Za uspešno in ponovljivo 3D tiskanje tablet je zelo pomembna temperaturna odvisnost dinamičnih modulov zmesi. Na podlagi rezultatov temperaturnih testov lahko določimo optimalno temperaturo za 3D tisk tablet. Točka prehoda, ko dinamična modula dosežeta enaki vrednosti se za zmes 1 pojavi pri temperaturi 212 °C, za zmes 2 pri 147 °C, za zmes 3 pri 172 °C, za zmes 4 pri 181 °C ter za zmes 7 pri temperaturi 128 °C. Temperaturna odvisnost dinamičnih modulov kaže, da elastični modul pri zmesih 2, 3, 4 in 7 pred pojavom točke izenačitve prevladuje nad viskoznim modulom. Pri zmesih 1, 5, 6, 8 in 9 pa v celotnem temperaturnem območju prevladuje viskozni modul  $G''$  nad elastičnim modulom  $G'$ , zato točka izenačenja dinamičnih modulov v proučevanem temperaturnem območju ni prisotna. Opazili smo, da plastifikator Polyglykol®3350P (zmes 2) premakne točko prehoda polimerne zmesi

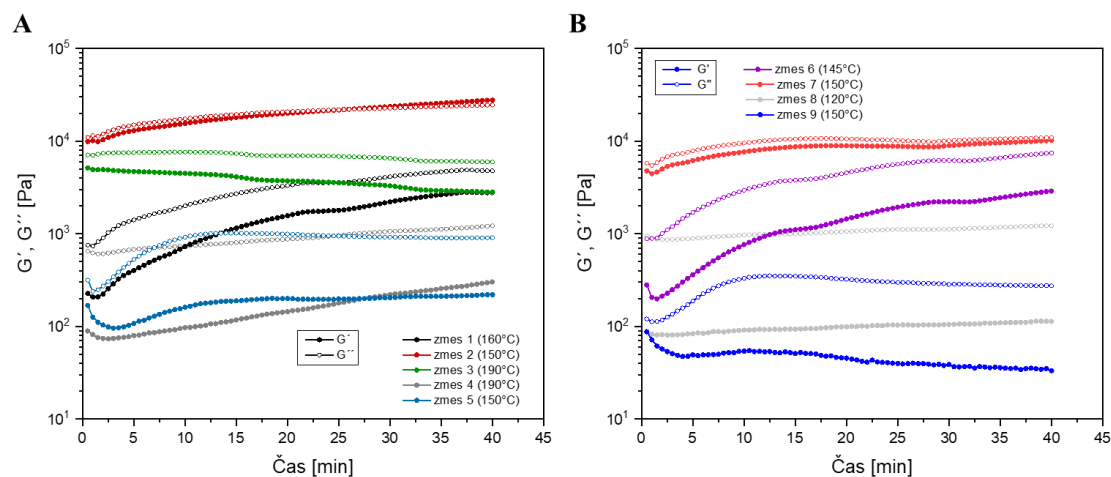
na osnovi HPMC AS LG polimera za 20 °C k nižji temperaturi glede na plastifikator Parteck®M200 (zmes 7), vrednosti dinamičnih modulov pa zmanjša za eno dekada skozi celotno temperaturno območje. Podoben trend smo opazili tudi pri primerjavi zmesi 5 in 9, katerih polimerna osnova je Soluplus polimer. V tem primeru točke prehoda ne opazimo v merjenem temperaturnem območju, ima pa zmes 9 s plastifikatorjem Polyglykol®3350P prav tako za dekada nižje vrednosti dinamičnih modulov kot zmes 5. Razmerje med elastičnim  $G'$  in viskoznim  $G''$  modulom ( $\tan \delta$ ) pri temperaturi tiska je podano v tabeli 2.



**Slika 4:** Temperaturna odvisnost elastičnega  $G'$  in viskoznega  $G''$  modula zmesi z različnimi plastifikatorjema: A) Parteck®M200, B) Polyglykol®3350P.

### 3.4 Test stabilnosti

Na sliki 5 so prikazane časovne odvisnosti elastičnega  $G'$  in viskoznega  $G''$  modula znotraj časovnega okvirja 40 minut pri konstantnih pogojih deformacije.



**Slika 5:** Časovna odvisnost elastičnega  $G'$  in viskoznega  $G''$  modula zmesi z različnimi plastifikatorjema: A) Parteck®M200, B) Polyglykol®3350P.

Iz slike 5A je razvidno, da se viskoelastične lastnosti s časom najbolj spreminjajo pri zmesi 1, kjer dinamična modula skozi celotno časovno območje naraščata, pri zmesi 4 se elastični modul počasi približuje viskozemu, pri zmesi 5 pa se modula po začetnem naraščanju ustalita po približno 20 minutah. Dinamična modula zmesi 2 imata pri temperaturi tiska najvišje, a hkrati medsebojno primerljive vrednosti modulov, kar nakazuje na najvišjo povprečno molekulsko maso polimera v zmesi in najvišjo stopnjo prepletenosti molekul. Zmes 7 vsebuje isti polimer kot zmes 2, razlika med njima je le v plastifikatorju. Iz primerjave dobljenih rezultatov (pri isti temperaturi tiska) lahko vidimo, da plastifikator Polyglykol®3350P zmanjša vrednosti dinamičnih modulov v celotnem časovnem okviru meritve. Viskozni modul  $G''$  zmesi 6 vseskozi narašča in prevladuje nad elastičnim modulom tekom celotne meritve, vrednosti modulov pa sta konstantni pri zmesi 8, kjer ima viskozni modul višje vrednosti za eno dekada v celotnem časovnem intervalu. Zmes 9 pa preide v ustaljeno stanje po približno 25 minutah.

#### 4 Zaključki

Izbira plastifikatorja vpliva na izkazovanje reoloških lastnosti polimernih zmesi s farmacevtsko učinkovino glede na različno polimerno osnovo filamenta za 3D tisk tablet. Plastifikatorja v različni meri spreminjata viskoznost, frekvenčno in temperaturno dinamiko elastičnega  $G'$  in viskoznega  $G''$  modula, vplivata na najvišjo strižno hitrost v območju linearnega viskoelastičnega odziva ter na časovni interval, v katerem zmes doseže stacionarne lastnosti. Vpliv plastifikatorja na reološke lastnosti polimernih zmesi je odvisen tudi od povprečne molekulske mase polimera.

#### 5 Zahvala

Raziskavo je finančno podprla Javna agencija za raziskovalno dejavnost (ARRS) v okviru programa P2-0264.

#### Literatura

- [1] Go, J. in sod., *Rate limits of additive manufacturing by fused filament fabrication and guidelines for high-throughput system design*, Additive Manufacturing, 16, 1–11, 2017.
- [2] Ilyés, K. in sod., *The applicability of pharmaceutical polymeric blends for the fused deposition modelling (FDM) 3D technique: Material considerations–printability–process modulation, with consecutive effects on in vitro release, stability and degradation*. European Journal of Pharmaceutical Sciences, 129, 110–123, 2019.
- [3] Kreft, K. in sod., *Influence of the Binder Jetting Process Parameters and Binder Liquid Composition on the Relevant Attributes of 3D-Printed Tablets*, Pharmaceutics, 14, 1568, 2022.
- [4] Solanki, N. G. in sod., *Formulation of 3D Printed Tablet for Rapid Drug Release by Fused Deposition Modeling: Screening Polymers for Drug Release, Drug-Polymer Miscibility and Printability*, Journal of Pharmaceutical Sciences, 107(1), 390–401, 2018.
- [5] Venkataraman, N. in sod., *Feedstock material property ± process relationships in fused deposition of ceramics (FDC)*, [http://www.mcbsp.com/research\\_registers/aa.asp](http://www.mcbsp.com/research_registers/aa.asp)



## *Izračun povesov in napetosti štirislojnih izolacijskih stekel*

*Miroslav Halilovič<sup>1</sup>, Andraž Maček<sup>1</sup>, Nikolaj Mole<sup>1</sup>, Pino Koc<sup>2</sup>, Filip Plešnik<sup>1</sup>,  
Primož Rus<sup>1</sup>, Matjaž Žnidaršič<sup>3</sup>, Aleš Kralj<sup>3</sup>*

## *Calculation of deflection and stress in quadruple glass units*

**Povzetek.** Odpornost na mehanske obremenitve dvojnih in trojnih steklenih enot se izračunava v skladu s standardi, kot sta EN 16612 ali ASTM 1300-12. Izračun pa zaradi linearizacije plinskega zakona ni natančen in tako ni uporaben za štirislojno zasteklitev. V tem delu predstavljamo novo metodologijo, ki natančno upošteva plinski zakon in enačbo statičnega ravnotežja. Za razliko od obstoječih metod zagotavlja splošno rešitev za večslojna stekla, sestavljena iz poljubnega števila steklenih plošč. Čeprav je metoda splošna, njena rešitev v zaprti obliki ohranja računsko učinkovitost, preprostost in uporabnost pri osnovnem konstruiranju.

**Abstract.** Mechanical load resistance of double and triple glass units is calculated in accordance with the standards like EN 16612 or ASTM 1300-12. However, the calculation is not exact due to linearization of the gas law and is not applicable for quadruple glazing. In this work we present a new methodology that accounts the gas law and static equilibrium equation exactly. Unlike existing methods, it provides a general solution for multi-pane glass units consisting of an arbitrary number of glass panes. Although general, its closed-form solution preserves computational efficiency, simplicity, and applicability to basic engineering design.

### 1 Uvod

Večslojno izolacijsko steklo je sestavljeno iz več steklenih plošč, ki so ločene z distančniki, in tako oblikujejo hermetično zatesnjene komore, v katerih je običajno inertni plin. Danes so najbolj uveljavljena dvo- in trislojna stekla, čeprav se na trgu že pojavljajo štiri- in večslojna stekla. Primer šestslojne zasteklitve predstavlja izdelek "Q-Air-5", ki je bil med drugim uporabljen za prenovo poslovne stavbe na Norveškem [7].

Okoljski vplivi, kot so obremenitve vetra, temperaturne spremembe in nihanja zračnega tlaka, ključno vplivajo na trajnost večslojnega stekla [8, 9]. Večje število komor izboljša izolativne lastnosti, a posledično privede do težavnejšega termomehanskega vedenja. Z večanjem števila komor postane dominantna termalna obremenitev. Zaradi absorpcije svetlobnega sevanja se grejejo vmesna stekla in posledično tudi zrak v komorah, ki se skladno s plinskim zakonom

---

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

<sup>2</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

<sup>3</sup> Reflex Gornja Radgona d.o.o.

razširi in deformira steklene plošče. Štirislojno steklo ima dve vmesni stekli, ki lahko močno povečata temperaturo osrednje komore, ki škodljivo vpliva na tesnila. Za preprečitev takšnega scenarija moramo večslojna stekla z večjim številom komor premišljeno načrtovati.

Povišane temperature v komorah neposredno vplivajo na prečne obremenitve steklenih plošč. Sprememba temperature povzroči spremembo tlaka in prostornine komor, slednja pa je odvisna tudi od togosti posameznih steklenih plošč in tlaka v sosednjih komorah. Statično ravnotežje steklenih plošč je torej pogojeno tudi z izpolnjevanjem plinskega zakona, ki velja za plin v komorah. Delitev obremenitev na posamezne steklene plošče je torej ena od osrednjih nalog vseh metod za izračun povesov in napetosti v večslojnih steklih.

V osnovi je ideja za zagotovitev statičnega ravnotežja enostavna: ravnotežne enačbe za vsako stekleno ploščo združimo s plinskimi enačbami za vsako komoro, a to vodi do nelinearnega sistema enačb. Slabost tega pristopa je slaba konvergenca, še posebej zato, ker je pri realnih dimenzijah stekel potrebno povesi stekel računati po teoriji velikih pomikov. Raziskovalci so zato v preteklosti iskali enostavnejše, aproksimativne rešitve.

Zgodnje študije so se osredotočile na dvoslojno steklo in le delno na trislojno. Leta 1983 je Vallabhan [10] predstavil numerično rešitev upogiba steklenih plošč z metodo končnih razlik, ki temelji na Karmanovi teoriji upogiba plošč. Ta poleg upogiba upošteva še membranski vpliv pri večjih povesih [11]. Ameriški standard ASTM E-1300-12 [2], ki omenja izključno metodo izračuna za dvo- in trislojno steklo, predpisuje delitev obremenitve med posamezne steklene plošče kar v razmerju njihovih togosti. Ker gre za grobo aproksimacijo, standard alternativno dopušča iterativni izračun prej omenjenega sistema nelinearnih enačb [9]. Delitev obremenitev v razmerju togosti predvideva tudi evropski standard EN 16612 [3] za dvoslojna stekla.

Feldmeier [4, 5] je objavil pomembna dela o delitvi obremenitve, ki so danes osnova za izračun trislojnih stekel po standardu EN 16612 [3]. Feldmeierjeva metodologija je vključena tudi v nemški standard DIN 18008 [6]. Standard razdeli nelinearnost na dva vpliva in ju obravnava posebej: Dodatek B v standardu obravnava upogib posamezne prostoležeče steklene plošče, kjer so povesi, napetosti in očrtani volumen izračunljivi z enostavnimi inženirskimi enačbami, pri čemer tabelirani koeficienti  $k_1$ ,  $k_4$  and  $k_5$  zajemajo nelinearnost. Dodatek C standarda pa vsebuje omenjeno Feldmeierjevo metodo za izračun ravnovesja.

Bao idr. [1] so opozorili na to, da evropski standard predvideva poenostavljeno linearno metodo za določevanje spremembe volumna zaradi povesa stekel. Leta 2019 so standard EN 16612 posodobili in upoštevali nelinearno spreminjanje volumna z odvisnostjo koeficienta  $k_5$  od obremenitve. A takšna sprememba je privedla do tega, da je potrebno postopek izračuna iterativno ponavljati: z Dodatkom B izračunamo približno spremembo volumnov, nato z Dodatkom C izračunamo tlake, a ker so volumni odvisni od tlakov, moramo cel postopek ponavljati. Kljub iterativnemu postopku pa izračunana rešitev ne vodi do točne rešitve zaradi linearizacije plinske enačbe v sami formulaciji.

V tem prispevku predstavljamo novo metodologijo, ki eksaktno izpolnjuje plinsko enačbo za vsako komoro in ravnotežno enačbo za vsako stekleno ploščo. Za razliko od splošnega reševanja sistema nelinearnih enačb, ki tudi vodi do eksaktne rešitve, je predlagana rešitev iz praktičnih razlogov zapisana v podobni obliki, kot je trenutno predpisana s standardom EN 16612. Postopek je rekurziven, a za razliko od standarda vodi do točne rešitve za večslojno steklo s poljubnim številom steklenih plošč in ne samo za dvo- ali trislojno steklo. V prispevku je posebej izpostavljena rešitev za štirislojno steklo, ki je predstavljena v kondenzirani obliki.

## 2 Nova metodologija za izračun ravnotežja večslojnih izolacijskih stekel

Izračuni v področnih standardih za stekla ne zagotavljajo rešitev, ki bi natančno izpolnjevale ravnotežje posameznih stekel večslojnega zasteklitvenega sistema, kar vpliva na ne povsem točno določitev povsesov in napetosti v steklih. Pri dvoslojni zasteklitvi je odstopanje od točne rešitve majhno, z večanjem števila stekel v sistemu, pa se možnost za odstopanja povečuje. Kot bomo videli v nadaljevanju, je prikazana metodologija primerna za večslojne zasteklitve s poljubnim številom stekel.

Stanje plina lahko definiramo z njegovim tlakom  $P$ , volumnom  $V$  in temperaturo  $T$ . Zvezo med veličinami pri dveh različnih stanjih podajajo Charlesov, Boylov and Gay-Lussacov zakon, ki jih lahko združimo v splošni plinski zakon

$$\frac{P V}{T} = konst. \quad (1)$$

Če opazujemo dve stanji v  $i$ -ti izolacijski komori, ki se razlikujeta za tlačno razliko  $\Delta P_i$ , temperaturno razliko  $\Delta T_i$ , plin pa zavzame volumen, ki se razlikuje za  $\Delta V_i$ , so vse tri spremenljivke stanja povezane z nelinearno enačbo

$$\frac{P_i V_i}{T_i} = \frac{(P_i + \Delta P_i)(V_i + \Delta V_i)}{(T_i + \Delta T_i)}. \quad (2)$$

Spremenljivke stanja lahko za vse komore večslojnih stekel dobimo z rešitvijo sistema nelinearnih enačb, ki vsebuje enačbo (2) za vse komore in ravnotežne enačbe za vsako posamično stekleno ploščo. A takšen sistem je nelinearen, kar pomeni, da ima mnogotere rešitve, iskanje prave pa je pogojeno z izbiro začetnega približka. V izogib temu lahko alternativno definiramo funkcijo  $f(P, V, T)$ , ki mora biti konstantna

$$f(P, V, T) = \frac{P V}{T} = konst. \quad (3)$$

Začetni pogoji  $(P, V, T)$  in temperaturna obremenitev  $\Delta T$  je znana vnaprej, torej lahko vrednost te funkcije pri spremenjenem stanju  $f(P + \Delta P, V + \Delta V, T + \Delta T)$  izrazimo z razvojem v Taylorjevo vrsto okoli točke tlaka  $P$  in volumna  $V$

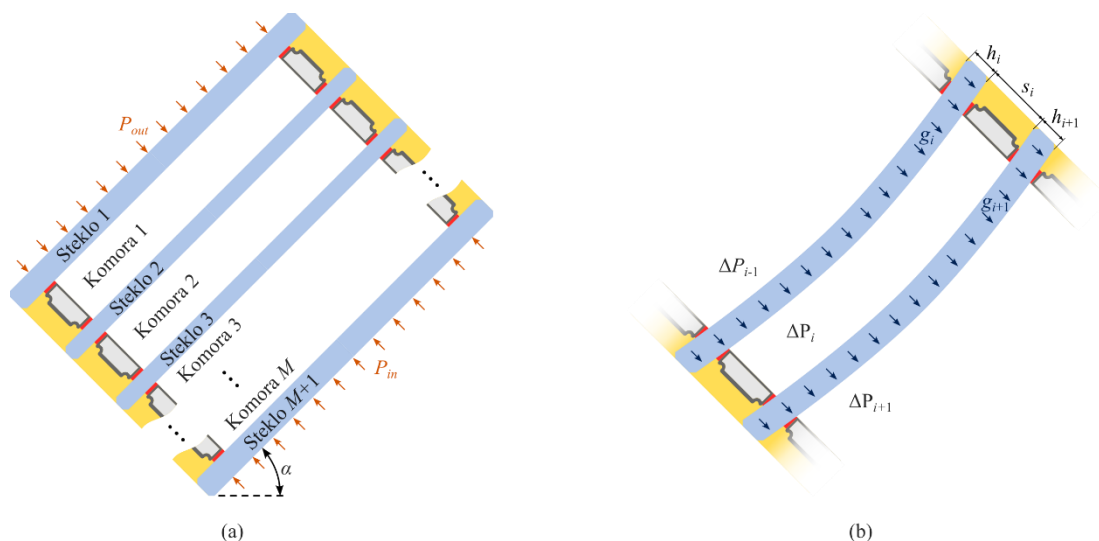
$$f(P + \Delta P, V + \Delta V, T + \Delta T) = f(P, V, T + \Delta T) + \frac{\partial f(P, V, T + \Delta T)}{\partial P} \Delta P + \frac{\partial f(P, V, T + \Delta T)}{\partial V} \Delta V + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(P, V, T + \Delta T)}{\partial P^2} \Delta P^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(P, V, T + \Delta T)}{\partial V^2} \Delta V^2 + \frac{\partial^2 f(P, V, T + \Delta T)}{\partial P \partial V} \Delta P \Delta V + \mathcal{R}_2(P, V, T + \Delta T). \quad (4)$$

Ker skladno z enačbo (3) velja  $f(P + \Delta P, V + \Delta V, T + \Delta T) = f(P, V, T)$ , lahko levo stran enačbe (4) nadomestimo z  $f(P, V, T)$ . Z enostavno matematično manipulacijo enačbo (4) spremenimo v

$$\frac{P V \Delta T}{T} = V \Delta P + P \Delta V + \Delta P \Delta V. \quad (5)$$

Naj poudarimo, da obravnavana funkcija po razvoju v Taylorjevo vrsto nima nobenega člena, višjega od drugega reda, torej je ostanek v enačbi (4) enak nič,  $\mathcal{R}_2 = 0$ . Posledično to pomeni, da je enačba (5) še vedno eksaktno izpolnjena in je torej enakovredna enačbi (2). Linearizacija enačbe (5) bi pomenila izpustitev zadnjega člena na desni strani, s čimer bi dobili rešitev, ki je ekvivalentna rešitvi v standardu EN 16612. V našem postopku bomo ohranili vse člene enačbe (5), zato lahko za  $i$ -to izolacijsko komoro zapišemo

$$\frac{P_i V_i \Delta T_i}{T_i} = V_i \Delta P_i + P_i \Delta V_i + \Delta P_i \Delta V_i. \quad (6)$$



**Slika 1:** Večslojno steklo: (a) splošna zgradba, (b)  $i$ -ta izolacijska komora.

Začetni volumen  $V_i = A s_i$ , tlak  $P_i$  in temperaturo  $T_i$  predstavljajo razmere v trenutku proizvodnje večslojnega izolacijskega sistema. Vse tri veličine se kasneje spreminjajo s spremembo zunanje temperature in tlaka ter zaradi vetra, ki z deformiranjem steklenih plošč neposredno spreminja prostornino izolacijskih komor. Sprememba prostornine  $i$ -te izolacijske komore  $\Delta V_i$  je odvisna od upogibkov obeh steklenih plošč, ki posamezno komoro ograjujeta ( $i$ -ta in  $i + 1$ -ta steklena plošča, gl. sliko 1). Na te upogibke vpliva tlačna razlika med opazovano in sosednjima komorama ter pravokotna komponenta lastne teže obeh steklenih plošč  $g_i$  and  $g_{i+1}$

$$\Delta V_i = v_{i+1}(\Delta P_i - \Delta P_{i+1} + g_{i+1}) - v_i(\Delta P_{i-1} - \Delta P_i + g_i); \quad v_i = k_{5,i} A \frac{a^4}{h_i^3 E} \quad (7)$$

Pri označevanju smo za  $g_i$  in  $v_i$  ohranili enak pomen, kot ga imata v standardu EN 16612:  $g_i = \rho g_0 h_i \cos(\alpha)$  predstavlja lastno težo  $i$ -te steklene plošče, kjer je  $\rho$  gostota stekla,  $g_0$  je težnostni pospešek in  $\alpha$  je nagnjenost konstrukcijskega elementa. Člen  $v_i$  predstavlja spremembo prostornine, ki nastane zaradi upogibanja  $i$ -te steklene plošče zaradi enotskega tlaka,  $A$  je ploščina steklene plošče ( $a \times b$ ),  $h_i$  je debelina  $i$ -te steklene plošče (oziroma efektivna debelina v primeru laminiranega stekla),  $E$  je modul elastičnosti stekla,  $k_{5,i}$  pa je koeficient spremembe prostornine  $i$ -te steklene plošče, podan v EN 16612, Tabela B.1. Ta koeficient izvira iz izračuna povesa plošč po nelinearni teoriji upogiba, pri čemer je plošča na robovih členkasto vpeta na togo podlago.

Poudarimo naj, da je  $\Delta P_i$  tlačna razlika v  $i$ -ti komori glede na tlak v trenutku proizvodnje  $P_i$  (in ne glede na trenutni tlak okolice). To pomeni, da so začetni pogoji  $P_i$  in  $T_i$  tudi definirani kot pogoji v času proizvodnje in predstavljajo referenco za vse razlike  $\Delta P_i$  in  $\Delta T_i$ .

Če vstavimo enačbo (7) v enačbo (6), to preoblikujemo v obliko, v kateri nastopajo kot neznanke samo tlačne razlike  $\Delta P_{i-1}$ ,  $\Delta P_i$  and  $\Delta P_{i+1}$ . Enačbo (6) torej lahko preuredimo v

$$v_{i+1} g_{i+1} - v_i g_i - V_i \frac{\Delta T_i}{T_i} = v_i \Delta P_{i-1} + v_{i+1} \Delta P_{i+1} - \frac{\Delta P_i}{P_i} (V_i + v_i(P_i + \Delta P_i - \Delta P_{i-1} - g_i) + v_{i+1}(P_i + \Delta P_i - \Delta P_{i+1} + g_i)). \quad (8)$$

Enačba (8) vsebuje nekatere kvadratne člene na desni strani enačbe, npr.  $\Delta P_i^2$ ,  $\Delta P_i \Delta P_{i-1}$  in  $\Delta P_i \Delta P_{i+1}$ . Poleg tega vsebuje tudi spremembe prostornin  $v_i$  in  $v_{i+1}$ , ki vsebujeta koeficient  $k_{5,i}$ . Glede na standard EN 16112 je  $k_{5,i}$  odvisen od brezdimenzijskega zvezno porazdeljenega tlaka  $p_i^* = \left(\frac{A}{4h_i^2}\right)^2 \frac{p_i}{E}$ , kjer je  $p_i = \Delta P_{i-1} - \Delta P_i + g_i$  zvezno porazdeljena obremenitev na  $i$ -to stekleno ploščo. Ker so vrednosti  $p_i$  za vse steklene plošče neznane dokler niso vse plošče v statičnem ravnotežju,  $v_i$  in  $v_{i+1}$  ne moremo izračunati vnaprej.

Enačba je torej nelinearna zaradi nelinearnosti splošnega plinskega zakona in zaradi upoštevanja velikih pomikov pri izračunu koeficientov  $k_{5,i}$ . Enačbo (8) zato rešimo iterativno, pri čemer pa jo lineariziramo na način, da nekatere vrednosti v enačbi privzamemo iz zadnjega znanega stanja. Te spremenljivke označimo z indeksom "old".

$$v_{i+1} g_{i+1} - v_i g_i - V_i \frac{\Delta T_i}{T_i} = v_i \Delta P_{i-1} + v_{i+1} \Delta P_{i+1} - \frac{\Delta P_i}{P_i} \left( V_i + v_i (P_i + \Delta P_i^{\text{old}} - \Delta P_{i-1}^{\text{old}} - g_i) + v_{i+1} (P_i + \Delta P_i^{\text{old}} - \Delta P_{i+1}^{\text{old}} + g_i) \right). \quad (9)$$

Zadnjo enačbo lahko strnjeno zapišemo v obliki

$$v_i \Delta P_{i-1} + D_i \Delta P_i + v_{i+1} \Delta P_{i+1} = B_i, \quad (10)$$

kjer sta

$$D_i = -\frac{1}{P_i} \left( V_i + v_i (P_i + \Delta P_i^{\text{old}} - \Delta P_{i-1}^{\text{old}} - g_i) + v_{i+1} (P_i + \Delta P_i^{\text{old}} - \Delta P_{i+1}^{\text{old}} + g_i) \right), \quad (11)$$

$$B_i = v_{i+1} g_{i+1} - v_i g_i - V_i \frac{\Delta T_i}{T_i}.$$

Linearna enačba (10) velja za poljubno  $i$ -to izolacijsko komoro, zato jo lahko uporabimo za izgradnjo sistema enačb, ki velja za splošno večslojno steklo, ki je sestavljeno iz  $M$  komor (oz.  $M + 1$  steklenih plošč). Na osnovi enačbe (10) torej zapišemo sistem  $M$  linearnih enačb v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} D_1 & v_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & D_2 & v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & v_i & D_i & v_{i+1} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_{M-1} & D_{M-1} & v_M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_M & D_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \vdots \\ \Delta P_i \\ \vdots \\ \Delta P_{M-1} \\ \Delta P_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 - v_1 \Delta P_{\text{out}} \\ B_2 \\ \vdots \\ B_i \\ \vdots \\ B_{M-1} \\ B_M - v_{M+1} \Delta P_{\text{in}} \end{bmatrix} \quad (12)$$

oziroma v strnjeni obliki

$$\mathbf{D} \cdot \Delta \mathbf{P} = \mathbf{B}. \quad (13)$$

Zunanje obremenitve na zunanjo in notranjo stekleno ploščo so vnesene preko členov  $\Delta P_{\text{out}}$  in  $\Delta P_{\text{in}}$ . Ta dva člena predstavljata tlačno razliko med tlakom obremenitve na posamezno stekleno ploščo ( $P_{\text{out}}$  ali  $P_{\text{in}}$ ) in tlakov v času izdelave  $P$ , torej  $\Delta P_{\text{out}} = P_{\text{out}} - P$ ,  $\Delta P_{\text{in}} = P_{\text{in}} - P$ . Tlačni obremenitvi  $P_{\text{out}}$  in  $P_{\text{in}}$  vsebujeta absolutni zračni tlak, nadmorsko višino montaže, obremenitev vetra, teže snega ipd., ne vsebujeta pa teže steklenih plošč. Vrednosti izven območja indeksiranja  $\Delta P_0^{\text{old}}$  and  $\Delta P_{M+1}^{\text{old}}$ , ki se v enačbah pojavita pri  $i = 1$  in  $i = M$ , vedno privzamemo kot  $\Delta P_0^{\text{old}} = \Delta P_{\text{out}}$  in  $\Delta P_{M+1}^{\text{old}} = \Delta P_{\text{in}}$ , in ju v računskem postopku ne posodabljam.

Vse neznane tlačne razlike  $\Delta P_i$  poiščemo kot rešitev sistema enačb (13)



$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{B}. \quad (14)$$

Predlagana metodologija za natančen izračun statičnega ravnotežja stekel je splošna za poljubno število steklenih plošč v večslojnem steklu. Ta metodologija predvideva reševanje linearnega sistema enačb, a ker iz enačbe (12) opazimo, da je matrika na levi strani pasovna, lahko relativno preprosto pridemo do eksplicitnih rešitev. Rešitve za dvo- in trislojno steklo so še posebej preproste, na tem mestu pa naj predstavimo eksplicitne rešitve za štirislojno steklo. Eksplicitni izrazi so vključeni v zgoraj predstavljeni algoritem, ki ga v končni obliki predstavljamo v tabeli 1.

**Tabela 1:** Metodologija izračuna za štirislojno steklo.

1	<p>Definiraj geometrijske in materialne podatke: <math>a, b, A, h_1, h_2, h_3, h_4, V_1, V_2, V_3, E</math></p> <p>Definiraj pogoje v trenutku izdelave: <math>P_1, T_1, P_2, T_2, P_3, T_3</math></p> <p>Definiraj obremenitve: <math>\Delta T_1, \Delta T_2, \Delta T_3, \Delta P_{\text{out}}, \Delta P_{\text{in}}, g_1, g_2, g_3, g_4</math></p> <p>Začetni približki:</p> $\Delta P_0^{\text{old}} = \Delta P_1^{\text{old}} = \Delta P_2^{\text{old}} = \Delta P_3^{\text{old}} = \Delta P_4^{\text{old}} = 0, p_1^* = p_2^* = p_3^* = p_4^* = 0$
2	<p>Odčitaj <math>k_{5,1}, k_{5,2}, k_{5,3}, k_{5,4}</math> iz EN 16612, tabela B.3 [3]</p> $v_1 = k_{5,1} A \frac{a^4}{h_1^3 E}, v_2 = k_{5,2} A \frac{a^4}{h_2^3 E}, v_3 = k_{5,3} A \frac{a^4}{h_3^3 E}, v_4 = k_{5,4} A \frac{a^4}{h_4^3 E}$ $D_1 = -P_1^{-1} \left( V_1 + v_1 (P_1 + \Delta P_1^{\text{old}} - \Delta P_0^{\text{old}} - g_1) + v_2 (P_1 + \Delta P_1^{\text{old}} - \Delta P_2^{\text{old}} + g_1) \right)$ $D_2 = -P_2^{-1} \left( V_2 + v_2 (P_2 + \Delta P_2^{\text{old}} - \Delta P_1^{\text{old}} - g_2) + v_3 (P_2 + \Delta P_2^{\text{old}} - \Delta P_3^{\text{old}} + g_2) \right)$ $D_3 = -P_3^{-1} \left( V_3 + v_3 (P_3 + \Delta P_3^{\text{old}} - \Delta P_2^{\text{old}} - g_3) + v_4 (P_3 + \Delta P_3^{\text{old}} - \Delta P_4^{\text{old}} + g_3) \right)$ $B_1 = v_2 g_2 - v_1 g_1 - V_1 \Delta T_1 / T_1$ $B_2 = v_3 g_3 - v_2 g_2 - V_2 \Delta T_2 / T_2$ $B_3 = v_4 g_4 - v_3 g_3 - V_3 \Delta T_3 / T_3$ $K_4 = (D_1 D_2 D_3 - D_3 v_2^2 - D_1 v_3^2)^{-1}$ $\Delta P_1 = K_4 (B_1 D_2 D_3 - B_2 D_3 v_2 + B_3 v_2 v_3 - B_1 v_3^2 - v_2 v_3 v_4 \Delta P_{\text{in}} - (D_2 D_3 - v_3^2) v_1 \Delta P_{\text{out}})$ $\Delta P_2 = K_4 (B_2 D_1 D_3 - B_1 D_3 v_2 - B_3 D_1 v_3 + D_1 v_3 v_4 \Delta P_{\text{in}} + D_3 v_1 v_2 \Delta P_{\text{out}})$ $\Delta P_3 = K_4 (B_3 D_1 D_2 - B_3 v_2^2 - B_2 D_1 v_3 + B_1 v_2 v_3 - (D_1 D_2 - v_2^2) v_4 \Delta P_{\text{in}} - v_1 v_2 v_3 \Delta P_{\text{out}})$ $p_1^* = \left( \frac{A}{4h_1^2} \right)^2 \frac{\Delta P_{\text{out}} - \Delta P_1 + g_1}{E}, p_2^* = \left( \frac{A}{4h_2^2} \right)^2 \frac{\Delta P_1 - \Delta P_2 + g_2}{E},$ $p_3^* = \left( \frac{A}{4h_3^2} \right)^2 \frac{\Delta P_2 - \Delta P_3 + g_3}{E}, p_4^* = \left( \frac{A}{4h_4^2} \right)^2 \frac{\Delta P_3 - \Delta P_{\text{in}} + g_4}{E}$
3	<p>Test konvergence:</p> <p>Če je <math> \Delta P_1 - \Delta P_1^{\text{old}}  &lt; TOL</math> in <math> \Delta P_2 - \Delta P_2^{\text{old}}  &lt; TOL</math> in <math> \Delta P_3 - \Delta P_3^{\text{old}}  &lt; TOL</math></p> <p><math>P_1^{\text{equil}} := P_1 + \Delta P_1, P_2^{\text{equil}} := P_2 + \Delta P_2, P_3^{\text{equil}} := P_3 + \Delta P_3</math>, nadaljuj na Korak 4</p> <p>sicer <math>\Delta P_1^{\text{old}} := \Delta P_1, \Delta P_2^{\text{old}} := \Delta P_2, \Delta P_3^{\text{old}} := \Delta P_3</math>, ponovi Korak 2</p>

4	<p>Izračun napetosti in povosov</p> $F_{d,1} = P_{\text{out}} - P_1^{\text{equil}} + g_1$ $F_{d,2} = P_1^{\text{equil}} - P_2^{\text{equil}} + g_2$ $F_{d,3} = P_2^{\text{equil}} - P_3^{\text{equil}} + g_3$ $F_{d,4} = P_3^{\text{equil}} - P_{\text{in}} + g_4$ <p>Odčitaj <math>k_{1,1}, k_{1,2}, k_{1,3}, k_{1,4}</math> iz EN 16612, tabela B.1</p> <p>Odčitaj <math>k_{4,1}, k_{4,2}, k_{4,3}, k_{4,4}</math> iz EN 16612, tabela B.2</p> $\sigma_{\text{max},1} = k_{1,1} \frac{a^2}{h_1^2} F_{d,1}, w_{\text{max},1} = k_{4,1} \frac{a^4}{h_1^3 E} F_{d,1}$ $\sigma_{\text{max},2} = k_{1,2} \frac{a^2}{h_2^2} F_{d,2}, w_{\text{max},2} = k_{4,2} \frac{a^4}{h_2^3 E} F_{d,2}$ $\sigma_{\text{max},3} = k_{1,3} \frac{a^2}{h_3^2} F_{d,3}, w_{\text{max},3} = k_{4,3} \frac{a^4}{h_3^3 E} F_{d,3}$ $\sigma_{\text{max},4} = k_{1,4} \frac{a^2}{h_4^2} F_{d,4}, w_{\text{max},4} = k_{4,4} \frac{a^4}{h_4^3 E} F_{d,4}$
---	--

### 3 Verifikacija

Prikazana metodologija teoretično daje eksaktne rezultate, zato jo lahko verificiramo tako, da rezultate analiz primerjamo z rezultati, ki jih dobimo kot rešitve sistema nelinearnih enačb, sestavljenih iz enačb (2). Poleg tega bomo pokazali, da je izračun po standardu EN 16612 identičen izračunu s predstavljenom metodologijo, le da v njej izpustimo nelinearni člen na desni strani enačbe (6).

V nadaljevanju so prikazani rezultati analiz, ki so bili izvedeni po štirih postopkih:

1. Eksaktno: Cilj tega izračuna je izračunati referenčne vrednosti. Rešitve ni možno dobiti analitično, ampak so dobljene z reševanjem sistema nelinearnih enačb, ki ga sestavljajo enačbe splošnega plinskega zakona (2) za vse komore ter ravnotežne enačbe za vse steklene plošče.
2. Novo: Izračun je izveden po novi predlagani metodologiji, predstavljeni v prejšnjem poglavju. Cilj je pokazati, da so rezultati identični rezultatom izračuna »eksaktno«.
3. EN 16612: Izračun je izveden po standardu EN 16612.
4. Novo-lin: Izračun v celoti sledi novo predstavljeni metodologiji, opisani v prejšnjem poglavju, le da v sami formulaciji zanemarimo kvadratični člen v enačbi (6). To vodi do rahle poenostavitve izraza za  $D_i$  v enačbi (11), tj.  $D_i = -\frac{V_i}{P_i} - v_i - v_{i+1}$ , medtem ko so vsi ostali izrazi in koraki izračuna nespremenjeni. Cilj je pokazati, da so na tak način pridobljeni rezultati identični izračunu po standardu EN 16612.

Rezultati nove metode so najprej verificirani z analizo trislojnega stekla, saj zanj lahko izračun izvedemo po vseh štirih omenjenih postopkih. Nato pa bodo prikazani še rezultati izračuna za štirislojno steklo po vseh treh postopkih razen po standardu EN 16612, saj ta ne predpisuje izračuna za štirislojna stekla. V izračunih je upoštevano, da sta tlak in temperatura ob izdelavi

100 kPa in 20 °C, stekla so široka 0,3 m in visoka 3,0 m, gravitacijski pospešek je 9,81 m/s<sup>2</sup>, gostota stekla 2500 kg/m<sup>3</sup>, modul elastičnosti stekla pa 70 GPa. Analizirani konfiguraciji sta nameščeni vertikalno in sta podvrženi obremenitvi vetra, ki povzroči tlak 0,5 kPa na zunanje steklo. Geometrijske podrobnosti posamezne konfiguracije in temperature v komorah so podane v tabeli 2. Toplotna obremenitev, ki je podana preko temperature v komorah, je določena na osnovi Reflexovega internega standarda, ki temelji na [12], pri čemer je upoštevano 880 W/m<sup>2</sup> sončnega obsevanja, 90 % argona v komorah, stekla pa imajo enostranski nizkoemisijski nanos.

**Tabela 2:** Konfiguracija tri- in štirislojnega stekla, uporabljenega za verifikacijski primer.

		Trislojno steklo	Štirislojno steklo
Sestava zasteklitve	Steklo 1, debelina (mm)	8	8
	Komora 1, širina (mm)	16	18
	Steklo 2, debelina (mm)	3	3
	Komora 2, širina (mm)	18	20
	Steklo 3, debelina (mm)	4	3
	Komora 3, širina (mm)		20
	Steklo 4, debelina (mm)		4
Temp. v komori	Komora 1, temperatura (°C)	57,5	58,5
	Komora 2, temperatura (°C)	64,5	78,5
	Komora 3, temperatura (°C)		74,0

Rezultati izračunov so prikazani v tabelah 3 in 4. Odstopanje od referenčnih (eksaktnih) vrednosti so izračunane kot  $\delta P_i = \left| \frac{\Delta P_i - \Delta P_{i,ref}}{\Delta P_{i,ref}} \right| \times 100\%$ ;  $\Delta P_i = P_i - P_0$  za tlak,  $\delta w_i = \left| \frac{w_i - w_{i,ref}}{w_{i,ref}} \right| \times 100\%$  za poves in  $\delta \sigma_i = \left| \frac{\sigma_i - \sigma_{i,ref}}{\sigma_{i,ref}} \right| \times 100\%$  za napetost. V obeh primerih daje nova metoda enake rezultate kot referenčni izračun, pri katerem je rešitev dobljena z reševanjem nelinearnega sistema enačb (označeno z zeleno). S tem smo potrdili natančnost nove metodologije, ki v celoti upošteva nelinearnost plinskega zakona.

Rezultati analize trislojnega stekla tudi prikažejo, da izračun po standardu EN 16612 ne vodi do eksaktnega rezultata, ampak je ta enak rezultatom po metodologiji »Novo-lin« (v tabeli 3 označeno z rumeno). Slednja z zanemaritvijo kvadratičnega člana v enačbi (6) linearizira splošni plinski zakon, kar vodi do odstopanja od točne rešitve. Omeniti velja, da standard EN 16612 kljub linearizaciji enačb plinskega zakona ne omogoča metode reševanja brez iteriranja. Vzrok je v upoštevanju nelinearnosti zaradi upogiba steklenih plošč, ki se odraža v faktorju  $k_5$  (volumen kot funkcija tlaka), ki je naveden v tabelah standarda EN 16612. To pomeni, da s standardom predpisana metoda ni zaradi omenjene zanemaritve v ničemer preprostejša od novo predlagane metodologije.

**Tabela 3:** Rezultati izračunov po različnih postopkih za trislojno steklo

Pristop		$w_i$ (mm)	$\sigma_i$ (MPa)	$\delta w_i$ (%)	$\delta \sigma_i$ (%)		$P_i$ (kPa)	$\delta P_i$ (%)
Eksaktno	Steklo 1	-0,303	9,566	/	/	Komora 1	109,570	/
Novo		-0,303	9,566	0	0		109,570	0
EN 16612		-0,312	9,844	2,92	2,92		109,834	2,76
Novo-lin		-0,312	9,844	2,92	2,92		109,834	2,76
Eksaktno	Steklo 2	0,510	6,029	/	/	Komora 2	108,766	/
Novo		0,510	6,029	0	0		108,766	0
EN 16612		0,506	5,980	0,81	0,81		109,037	3,09
Novo-lin		0,506	5,980	0,81	0,81		109,037	3,09
Eksaktno	Steklo 3	2,346	36,981	/	/			
Novo		2,346	36,981	0	0			
EN 16612		2,418	38,124	3,09	3,09			
Novo-lin		2,418	38,124	3,09	3,09			

**Tabela 4:** Rezultati izračunov po različnih postopkih za štirislojno steklo

Pristop		$w_i$ (mm)	$\sigma_i$ (MPa)	$\delta w_i$ (%)	$\delta \sigma_i$ (%)		$P_i$ (kPa)	$\delta P_i$ (%)
Eksaktno	Steklo 1	-0,430	13,547	/	/	Komora 1	113,344	/
Novo		-0,430	13,547	0	0		113,344	0
EN 16612		/	/	/	/		/	/
Novo-lin		-0,438	13,822	2,03	2,03		113,605	1,95
Eksaktno	Steklo 2	-0,488	5,772	/	/	Komora 2	114,114	/
Novo		-0,488	5,772	0	0		114,114	0
EN 16612		/	/	/	/		/	/
Novo-lin		-0,586	6,925	19,98	19,98		114,528	2,94
Eksaktno	Steklo 3	1,282	15,159	/	/	Komora 3	112,093	/
Novo		1,282	15,159	0	0		112,093	0
EN 16612		/	/	/	/		/	/
Novo-lin		1,291	15,266	0,71	0,71		112,493	3,31
Eksaktno	Steklo 4	3,236	51,016	/	/			
Novo		3,236	51,016	0	0			
EN 16612		/	/	/	/		/	/
Novo-lin		3,343	52,704	3,31	3,31			

Rezultati v tabelah 3 in 4 kažejo, da daje nova metodologija natančne rezultate, kar je bolj pomembno za srednja stekla v sestavu večslojnega stekla. Tabela 4 kaže, da v obravnavanem primeru odstopanje zaradi linearizacije doseže tudi 20 %. Nova metodologija je računsko enako zahtevna kot standardna, a je zaradi točnega upoštevanja nelinearnosti plinskega zakona natančnejša. Poleg tega je tudi splošnejša, saj je za razliko od standardne metode uporabna za večslojna stekla s poljubnim številom stekel v sestavu.

#### **4 Primer uporabe štirislojnega stekla: Dronning Eufemias gate 8, Oslo**

Dandanes večina zasteklitvenih sistemov vsebuje dvo- ali trislojna stekla. Njihovo ustreznost z mehanskega vidika predpisujejo standardi, kot sta EN 16612 in ASTM 1300-12. Pred kratkim so se na trgu pojavile zasteklitve z več kot tremi steklenimi ploščami, za katere standardi ne navajajo postopkov mehanskega preračuna. Uvodoma smo že omenili šeststojno zasteklitev, ki je bila vgrajena v stavbi na Norveškem [7], a ta ni edina. Izkazalo se je, da premišljeno konstruiranje večslojnih stekel prinese razne prednosti, prilagojene potrebam kupca. Štirislojne zasteklitve izboljšajo termalno udobje z zmanjšanjem konvekcijskih tokov ob oknu in omejevanjem poletnega toplotnega sevanja. Hkrati tudi zmanjšujejo izpuste toplogrednih plinov z zmanjševanjem potrebe po ogrevanju in hlajenju. V štirislojnih steklih je z optimiranjem konstrukcije mogoče uporabiti za vmesna pregradna stekla tanka stekla namesto kaljenih, kar tudi zmanjšuje vgrajeno utelešeno energijo stavbe. Štirislojne zasteklitve tudi premaknejo potrebo po energiji od zime proti poletju, kar je ugodno, saj bo v prihodnje več možnosti sezonskega pridobivanja energije s fotovoltaičnimi sistemi, kar na globalnem nivoju zmanjšuje potrebo po zimski (sezonski) hrampi energije.



**Slika 2:** Fasada s štirislojno zasteklitvijo: Dronning Eufemias gate 8, Oslo, Norveška

Stavba, prikazana na sliki 2, je znana stavba Dronning Eufemias gate 8 v Oslu, Norveška. Zgrajena je bila leta 2007 za globalno revizijsko in svetovalno podjetje PricewaterhouseCoopers. Prvotna dvoslojna zasteklitev je bila zelo neudobna in energijsko potratna. Lastniki so se odločili prenoviti fasado po le 12 letih uporabe. Zahteve za novo stekleno fasado so bile stroge: izpolnjevati je morala norveški energetski standard TEK17, zmanjšati je morala termalno neudobje in teža nove fasade ni smela presegati teže prejšnje z dvoslojno zasteklitvijo. Nobena ponujena trislojna zasteklitev pri 100 % zastekljeni fasadi zahtevnih energetskih pogojev TEK17 ni izpolnjevala, zato se je investitor odločil za štirislojno.

Obnova, ki se je končala leta 2021, je bila izvedena s štirislojno zasteklitvijo Q-Air3K ( $U_g = 0,29 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ ) proizvajalca Reflex, Slovenija. Stekljeni fasadni elementi so tipično 1,2 m široki in 4,0 m visoki, a konfiguracija večslojnega stekla ni enaka po celi stavbi. Najpogosteje je uporabljena konfiguracija 6TVG/3/3/44.2, kar pomeni, da jo sestavlja 6 mm debelo delno kaljeno TVG zunanje steklo, laminirano notranje steklo iz dveh 4 mm debelih steklenih plošč, ki sta spojeni s 0,76 mm debelo PVB folijo ( $\omega = 0,1$ ), ter dveh 3 mm debelih vmesnih stekel. V zgornjem nadstropju je restavracija, ki je zastekljena s konfiguracijo 44.2TVG:XS/3/3/33.2XS, kar pomeni, da sta zunanje in notranje steklo laminirani z bolj togo XS PVB folijo ( $\omega = 0,3$ ), dodatno pa zasteklitev vsebuje še protikondenzacijski nanos na zunanji strani z namenom preprečevanja zaledenitve. Ena od alternativ je bila v fazi konstruiranja tudi konfiguracija 5TVG/3/3/33.2XS, ki predstavlja najlažjo in najtanjšo možno strukturo. V vseh konfiguracijah je bil uporabljen 12 mm ali 14 mm širok distančnik TGI-M s 6 mm silikonskim sekundarnim tesnilom, komore pa so bile polnjene s kriptonom.

Nenavadno tanka stekla – vse Q-Air zasteklitve imajo 3mm vmesna stekla – zahtevajo izračun z natančnim upoštevanjem nelinearnosti, kar je tematika tega prispevka. Kot primer si oglejmo rezultate izračuna za konfiguracijo 5TVG/3/3/33.2XS, kjer je ena od najbolj kritičnih obremenitev sunek vetra, saj je zunanje steklo v tej konfiguraciji najtanjšo v primerjavi z vsemi drugimi konfiguracijami na tej stavbi. Zunanje steklo je obremenjeno z enakomerno porazdeljeno obremenitvijo -2 kPa zaradi sunka vetra (srk) v trajanju med 5 s in 10 s (glede na standard EN 1991 za 50 m višine).

**Tabela 5:** Rezultati izračuna po novi metodologiji za steklo 5TVG/3/3/33.2XS

	$w_i$ (mm)	$\sigma_i$ (MPa)		$P_i$ (kPa)
Steklo 1	-21,1	27,1	Komora 1	98,803
Steklo 2	-19,2	15,2	Komora 2	99,005
Steklo 3	-18,9	14,9	Komora 3	99,204
Steklo 4	-20,3	21,9		

Rezultati izračuna so predstavljeni v tabeli 5. Zunanje in notranje steklo, v katerih se pojavljajo največje napetosti, izpolnjujeta pogoje za mejno stanje nosilnosti, za katero je dopustna napetost 41 MPa glede na standard EN 16612. Vmesna stekla so navadna, zato je njihova dopustna napetost nižja, a ker njihova morebitna porušitev ne vpliva na zagotavljanje strukturne integritete, izpolnjujejo blažje pogoje mejnega stanja uporabnosti. Skratka, vsako steklo posebej je bilo preverjeno na izpolnjevanje zahtev. Poleg tega pa je bil z dodatnimi izračuni celotnega sestava preverjen še vpliv togosti distančnikov ter nosilnost ostalih komponent sestava, kot so distančniki in tesnila.

## 5 Zaključek

V prispevku smo prikazali novo metodo za natančno delitev obremenitev med posamezne steklene plošče v večslojnih steklih. Izpeljane eksplicitne rekurzivne enačbe vodijo do rešitve, ki natančno zadosti statičnemu ravnotežju vseh steklenih plošč v sestavi in plinskim enačbam v vseh komorah. Metoda je primerna za večslojno steklo s poljubnim številom steklenih plošč, enostavna za uporabo in je prilagojena trenutnemu načinu izračuna po standardu EN 16612, zato lahko postane tudi njen nadomestek. Standarda EN 16612 in ASTM E-1300-12 sta namreč namenjena preračunu dvo- in trislojnih stekel, a tudi ta izračun ni povsem natančen. Nova metoda je splošnejša in natančnejša, a obenem je njena formulacija preprostejša od standardne. Verifikacijski primer kaže, da standardni izračun zaradi linearizacije plinskega zakona odstopa tudi za 20 %, nova metoda pa daje točen rezultat. Slabost metode je le v tem, da ohranja predpostavko iz standarda o členkastem vpetju steklenih plošč na ravno podlago, s čimer v rezultatih ni zajet vpliv deformacije distančnikov in upogiba samega robu stekel.

## Zahvala

Za finančno podporo se avtorji zahvaljujemo Javni agenciji za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije (ARRS) za financiranje projekta L2-3172 "Razvoj tehničnih smernic za štirislojne zasteklitve" in raziskovalnega programa P2-0263 "Mehanika v tehniki".

## Literatura

- [1] M. Bao, S. Gregson, *Sensitivity study on climate induced internal pressure within cylindrical curved IGUs*, Glass Struct. Eng. (2019) 4:29–44
- [2] E06 Committee. *ASTM E 1300 - Standard Practice for Determining Load Resistance of Glass in Buildings*. ASTM International
- [3] EN 16612:2019, *Glass in building - Determination of the lateral load resistance of glass panes by calculation*. Beuth Verlag GmbH
- [4] F. Feldmeier, *Insulating units exposed to wind and weather-load sharing and internal loads*. vol. 8th edition, 2003, p. 633–6.
- [5] F. Feldmeier, *Klimabelastung und Lastverteilung bei Mehrscheiben-Isolierglas*. Stahlbau 2006;75:467–78.
- [6] A. Haese, G. Siebert, *DIN 18008 – Experience after one year of applying the new German glass design standard*. Challenging Glass Conf. Proc. 2016:633–640
- [7] A. Kralj, M. Drev, M. Žnidaršič, B. Černe, J. Hafner, BP Jelle, *Investigations of 6-pane glazing: Properties and possibilities*. Energy and Buildings 2019;190:61–8.
- [8] B. Starman, A. Maček, P. Rus, Š. Obid, A. Kralj, M. Halilović, *Primary Seal Deformation in Multipane Glazing Units*. Applied Sciences 2020;10:1390.
- [9] S. Van Den Bergh, R. Hart, BP Jelle, A. Gustavsen, *Window spacers and edge seals in insulating glass units: A state-of-the-art review and future perspectives*. Energy and Buildings 2013;58:263–80.
- [10] CVG. Vallabhan, *Iterative Analysis of Nonlinear Glass Plates*. J Struct Eng 1983;109:489–502.
- [11] CVG Vallabhan, GD Chou, *Interactive Nonlinear Analysis of Insulating Glass Units*. J Struct Eng 1986;112:1313–26.
- [12] Window 7.4 Manual. Berkeley, CA, USA: Lawrence Berkeley National Lab.; 2016.



## *Časovno odvisna osnovna rešitev pri numeričnem reševanju Fourierjevega in ne-Fourierjevega bioprenosa toplote*

Ivan Dominik Horvat<sup>1</sup>, Jurij Iljaž<sup>1</sup>

### *Time-dependent fundamental solution for numerical modeling of Fourier and non-Fourier bioheat transfer*

**Povzetek.** Numerično modeliranje bioprenosa toplote se je izkazalo na različnih medicinskih področjih kot močno orodje za napovedovanje toplotnega obnašanja biološkega tkiva. V zadnjem času se je pojavilo stališče da enačbe, ki vsebujejo časovni zamik med toplotnim tokom in temperaturnim gradientom, nekoliko boljše opišejo dejansko obnašanje bioprenosa toplote. V tem prispevku je prikazan algoritem na osnovi podobmočne metode robnih elementov za numerično reševanje problemov bioprenosa toplote z upoštevanjem Fourierjevega in ne-Fourierjevega modela prevoda toplote, pri čemer je novost implementacija časovno odvisne (parabolične) formulacije, kar v primerjavi z eliptično formulacijo poveča natančnost rešitve. Algoritem je bil pri tem analitično validiran na testnih primerih. Iz rezultatov lahko zaključimo da razviti algoritem uspešno reši probleme tako Fourierjev kot ne-Fourierjev prenos toplote.

**Abstract.** Numerical modeling of bioheat transfer has proven itself in various medical fields as a powerful tool for predicting the thermal behavior of biological tissue. Recently, the opinion has emerged that, taking into account the specific internal structure of the tissue, the equations containing the temporal lag between the heat flow and the temperature gradient somewhat better describe the actual behavior of bioheat transfer. This paper presents an algorithm based on the subdomain boundary element method for the numerical solving of bioheat transfer in biological tissue by taking into account the Fourier and non-Fourier models of heat transfer, where the novelty is the implementation of the time-dependent (parabolic) formulation, which, compared to the elliptic formulation, increases accuracy of the solution. The algorithm was analytically validated on test examples. From the results, we can conclude that the developed algorithm successfully solves both Fourier and non-Fourier heat transfer problems.

---

<sup>1</sup> Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo



## 1 Uvod

Numerično modeliranje prenosa toplote v biološkemu tkivu lahko pomembno prispeva pri nadaljnjem razvoju termografije, zlasti dinamične termografije, in sicer z numerično simulacijo procesa in s tem izboljšanjem procesnih parametrov ali pa kot orodje za reševanje inverznih problemov in s tem določitvijo termo-fizikalnih lastnosti tkiva ali kožnih lezij (velikost, invazivnost, perfuzijski pretok) na osnovi merjenega temperaturnega kontrasta in numeričnega modela. Pri modeliranju prenosa toplote v tkivu oziroma bioprenosa toplote je trenutno najpogosteje uporabljen Pennesov model [1], ki predpostavlja neskončno hitrost širjenja toplotnega vala. V novejših raziskavah pa so nekateri avtorji ugotovili, da se toplota v tkivih širi s končno hitrostjo [2], oziroma kot val. Valovno obnašanje bioprenosa toplote v biološkemu tkivu temelji na raziskavah Maxwella [3], Cattanea [4] in Vernottea [5] – Maxwell-Cattaneo-Vernotteova (MCV) enačba. Numerična metoda za reševanje parcialnih diferencialnih enačb v tem prispevku je podobmočna metoda robnih elementov. Pri tem časovno odvisna osnovna rešitev ponuja večjo natančnost numeričnih rezultatov, kar je izjemnega pomena, še zlasti pri reševanju inverznih problemov bioprenosa toplote.

## 2 Modeliranje bioprenosa toplote

Pri modeliranju prenosa toplote v tkivu oziroma bioprenosa toplote je trenutno najpogosteje uporabljen Pennesov model [1], ki predpostavlja, da izmenjava energije med virom toplote oziroma perfuzijskim pretokom krvi in tkivom oziroma območjem poteka predvsem na mikroskopskem nivoju. V novejših raziskavah pa se je pojavilo stališče, da se toplota v snoveh, ki ima celično ali nehomogeno strukturo na mikro-nivoju, širi s končno hitrostjo [2].

### 2.1 Pennesov model

Parabolična Pennesova enačba vsebuje volumske notranje izvore toplote, ki so povezani s perfuzijskim pretokom krvi in metabolizmom. Model temelji na Fourierovi teoriji, ki predpostavlja neskončno hitrost prevoda toplote [1]:

$$\vec{q}(\vec{s}, t) = -k_t \nabla T_t(\vec{s}, t) \quad \rightarrow \quad \rho_t c_t \frac{\partial T_t}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (k_t \vec{\nabla} T_t) + Q. \quad (1)$$

pri čemer je  $\vec{q}$  vektor toplotnega toka,  $\vec{s}$  poljuben vektor pozicije,  $t$  čas,  $k_t$  toplotna prevodnost,  $T_t$  temperatura tkiva,  $\rho_t$  efektivna gostota tkiva,  $c_t$  specifična toplota tkiva.  $\rho_b$  efektivna gostota krvi,  $\omega_b$  perfuzijski pretok krvi skozi tkivo,  $c_b$  specifična toplota krvi,  $T_b$  temperatura arterijske krvi ter  $q_m$  metabolični izvor toplote, pri čemer  $Q = \rho_b \omega_b c_b (T_b - T_t) + q_m$  predstavlja izvor toplote.

### 2.2 Enofazni model

Maxwell, Cattaneo in Vernotte [3, 4, 5] so podali enofazni, ne-Fourierov model prevoda toplote, pri katerem je upoštevan relaksacijski čas  $\tau_q$  med toplotnim tokom in temperaturnim gradientom. Do takšnega toplotnega obnašanja pride v snoveh, ki imajo celično ali nehomogeno struk-

turo na mikro-nivoju, ali v primeru velikih vnosov toplotne energije v relativno kratkemu času, kot na primer pri laserskem obsevanju tkiva [6, 7, 8].

$$\vec{q}(\vec{s}, t + \tau_q) = -k_t \nabla T_t(\vec{s}, t) \rightarrow \rho_t c_t \left( \tau_q \frac{\partial^2 T_t}{\partial t^2} + \frac{\partial T_t}{\partial t} \right) = \vec{\nabla} \cdot (k_t \vec{\nabla} T_t) + Q + \tau_q \frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (2)$$

### 3 Metoda robnih elementov

Podobmočna metoda robnih elementov (MRE) je numerična metoda za reševanje parcialnih diferencialnih enačb, pri kateri razdelimo celotno območje reševanja  $\Omega$  na več podobmočij  $\Omega_s$ , s čimer je sistemska matrika bolj prazna, kar močno pohitri reševanja sistema linearnih enačb in s tem numerično simulacijo [9, 10, 11]. Reševanje problema prevedemo na iskanje neznanih veličin na robu območja  $\Gamma$ , oziroma na robu območja vsake celice  $\Gamma_s$ . Parabolična formulacija Poissonove enačbe [12] je:

$$\Delta T_t(\vec{s}, t) + b(\vec{s}, t) = \frac{1}{a} \frac{\partial T_t}{\partial t}, \quad (3)$$

pri čemer je  $a = k/\rho c_p$  toplotna difuzivnost,  $\vec{s}$  je vektor poljubnih točk znotraj roba območja,  $t$  je čas,  $b$  je nehomogeni izvor toplote. Pri parabolični formulaciji sta osnovna rešitev  $T^*$  ter normalni odvod osnovne rešitve  $q^*$  časovno odvisna:

$$T^*(\vec{\xi}, \vec{s}, t_F, t) = \frac{1}{4\pi k \tau} \exp\left(-\frac{\|\vec{d}(\vec{\xi}, \vec{s})\|^2}{4k\tau}\right), q^*(\vec{\xi}, \vec{s}, t_F, t) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{d}(\vec{\xi}, \vec{s})}{8\pi(k\tau)^2} \exp\left(-\frac{\|\vec{d}(\vec{\xi}, \vec{s})\|^2}{4k\tau}\right), \quad (4)$$

pri čemer je  $\tau = t_F - t_{F-1}$ ,  $t_F$  je konec časovnega koraka,  $t_{F-1}$  je začetek časovnega koraka. Za konstantno vrednost  $dt$  je  $\tau = dt$ , pri čemer je  $dt$  velikost časovnega koraka. Pri tem je  $\vec{n}$  normala na rob podobmočja,  $\vec{d}(\vec{\xi}, \vec{s})$  je vektor razdalje med izvorno in poljubno točko v prostoru. Prednost časovno odvisne osnovne rešitve je da časovni odvod temperature ni aproksimiran – je del osnovne rešitve, kar povečuje natančnost rezultatov [12]. Eliptično osnovno rešitev sta avtorja pri reševanju Fourierovega in ne-Fourierovega prenosa toplote že obravnavala [13]. Integralno obliko za parabolično formulacijo pri metodi robnih elementov pišemo lahko za vsako podobmočje  $\Omega_s$  kot:

$$c(\vec{\xi}) T_t(\vec{\xi}, t_F) + a \int_{t_{F-1}}^{t_F} \int_{\Gamma_s} T_t(\vec{S}, t) q^*(\vec{\xi}, \vec{S}, t_F, t) d\Gamma_s dt = a \int_{t_{F-1}}^{t_F} \int_{\Gamma_s} q(\vec{S}, t) T_t^*(\vec{\xi}, \vec{S}, t_F, t) d\Gamma_s dt + a \int_{t_{F-1}}^{t_F} \int_{\Omega_s} b(\vec{s}, t) T^*(\vec{\xi}, \vec{s}, t_F, t) d\Omega_s dt + \int_{\Omega_s} T_{t,0}(\vec{s}, t_0) T^*(\vec{\xi}, \vec{s}, t_F, t) d\Omega_s, \quad (5)$$

kjer je  $\vec{\xi}$  kolokacijski vektor izvorne točke,  $\vec{S}$  je vektor poljubne točke na robu podobmočja,  $\vec{s}$  je vektor poljubne točke znotraj podobmočja,  $c$  je prosti koeficient odvisen od položaja izvorne

točke,  $T_t(\vec{S}, t)$  je vektor temperatur,  $q(\vec{S}, t)$  je vektor normalnega odvoda temperature,  $T_{t,0}(\vec{S}, t_0)$  je vektor začetne temperature. Uporabljena je linearna časovna interpolacija za temperaturo in normalni odvod temperature, oziroma:

$$T_t(\vec{S}, t) = \frac{t_F - t}{dt} \cdot T_t(\vec{S}, t_0) + \frac{t - t_0}{dt} \cdot T_t(\vec{S}, t_F), \quad q(\vec{S}, t) = \frac{t_F - t}{dt} \cdot q(\vec{S}, t_0) + \frac{t - t_0}{dt} \cdot q(\vec{S}, t_F). \quad (6)$$

S pomočjo naslednjih izrazov analitično ovrednotimo integrale [12]:

$$Q_{t,1}^* = \frac{a}{dt} \int_{t_{F-1}}^{t_F} (t_F - t) q^* dt = \frac{\vec{n} \cdot \vec{d}(\vec{\xi}, \vec{S})}{8\pi a dt} \cdot E_1(a_{F-1}), \quad (7)$$

$$Q_{t,2}^* = \frac{a}{dt} \int_{t_{F-1}}^{t_F} (t - t_{F-1}) q^* dt = \frac{\vec{n} \cdot \vec{d}(\vec{\xi}, \vec{S})}{8\pi a dt} \cdot \left\{ \frac{\exp(-a_{F-1})}{a_{F-1}} - E_1(a_{F-1}) \right\}, \quad (8)$$

$$U_{t,1}^* = \frac{a}{dt} \int_{t_{F-1}}^{t_F} (t_F - t) q^* dt = \frac{1}{4\pi} \cdot \left\{ E_1(a_{F-1}) \cdot a_{F-1} - \exp(-a_{F-1}) \right\}, \quad (9)$$

$$U_{t,2}^* = \frac{a}{dt} \int_{t_{F-1}}^{t_F} (t - t_{F-1}) q^* dt = \frac{1}{4\pi} \cdot \left\{ E_1(a_{F-1}) \cdot (1 + a_{F-1}) - \exp(-a_{F-1}) \right\}, \quad (10)$$

$$U_{t,0}^* = \frac{1}{4\pi a dt} \cdot \exp(-a_{F-1}), \quad U_t^* = \frac{1}{4\pi} \cdot E_1(-a_{F-1}), \quad (11)$$

pri čemer je  $a_{F-1} = r^2/(4kdt)$ ,  $E_1$  eksponencialna integralna funkcija [14]. S pomočjo enačb (5-11) pridemo do enačbe:

$$\begin{aligned} c(\vec{\xi})T_t(\vec{\xi}, t_F) + \int_{\Gamma_s} T_t(\vec{S}, t_0)Q_{t,1}^*(\vec{\xi}, \vec{S}) d\Gamma_s + \int_{\Gamma_s} T_t(\vec{S}, t_F)Q_{t,2}^*(\vec{\xi}, \vec{S}) d\Gamma_s = \\ \int_{\Gamma_s} q(\vec{S}, t_0)U_{t,1}^*(\vec{\xi}, \vec{S}) d\Gamma_s + \int_{\Gamma_s} q(\vec{S}, t_F)U_{t,2}^*(\vec{\xi}, \vec{S}) d\Gamma_s + \int_{\Omega_s} b(\vec{S}, t_F)U_t^*(\vec{\xi}, \vec{S}) d\Omega_s + \\ \int_{\Omega_s} T_{t,0}(\vec{S}, t_0)U_{t,0}^*(\vec{\xi}, \vec{S}) d\Omega_s. \end{aligned} \quad (12)$$

Po prostorski integraciji pridemo do sistema linearnih enačb, ki ga rešujemo:

$$[H_{p,2}]\{T_t(t_F)\} + [H_{p,1}]\{T_t(t_{F-1})\} = [G_p]\{q(t_F)\} + [S_p]\{b(t_F)\} + [S_{p,F-1}]\{T(t_{F-1})\}, \quad (13)$$

pri čemer so  $[H_{p,2}]$ ,  $[H_{p,1}]$ ,  $[G_p]$ ,  $[S_p]$  ter  $[S_{p,0}]$  matrike vplivnih koeficientov, pridobljene po integraciji [15]. V primeru MCV enačbe (2) je nehomogeni izvor  $b$  enak:

$$b = -\frac{1}{k_t} \left[ c_t \rho_t \tau_q \frac{\partial^2 T_t}{\partial t^2} + \rho_b \omega_b c_b (T_b - T_t) + q_m \right]. \quad (14)$$

Pri tem je drugi odvod temperature po času diskretiziran z shemo končnih razlik prvega reda. Pri obeh primerih smo za temperaturo uporabili linearne elemente z kvadratno interpolacijo pri prostorski diskretizaciji. Za normalni odvod temperature smo uporabili konstantne elemente za prostorsko diskretizacijo.

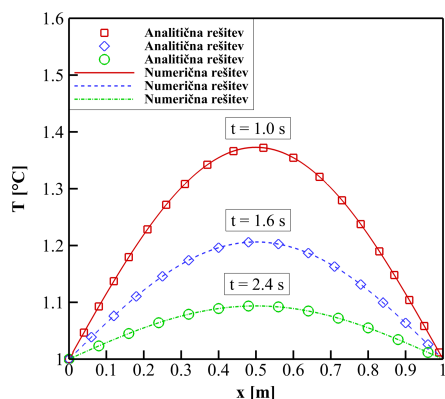
## 4 Validacija numeričnega algoritma

### 4.1 Prvi primer

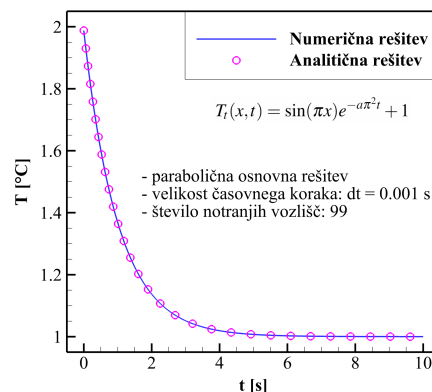
Temperaturno polje je podano z enačbo:

$$T_i(x, t) = \sin(\pi x) e^{-a\pi^2 t} + 1. \quad (15)$$

Vrednost difuzijskega koeficienta je  $a = 10^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . Robna pogoja sta  $T_i(0, t) = 1^\circ\text{C}$ ;  $T_i(1, t) = 1^\circ\text{C}$ . Začetni pogoj je  $T_i(x, 0) = \sin(\pi x) + 1$ . Numerične rezultate smo v vsakem časovnem koraku, za vsa vozlišča, primerjali z enačbo (15), pri čemer smo merili vrednost relativne napake RMS, na način kot so merili Iljaž in sodelavci [15]. Profili spremembe temperature po kraju so prikazani na sliki 4, krivulje spremembe relativne napake po času so prikazane na sliki 3.

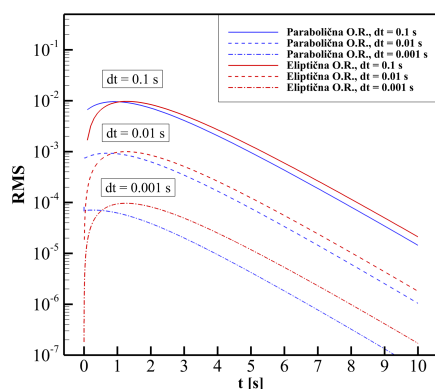


**Slika 1:** Profili spremembe temperature  $T$  po kraju  $x$  za čase  $t = 1.0, 1.6$  in  $2.4$  sekunde za časovno odvisno (parabolično) osnovno rešitev.

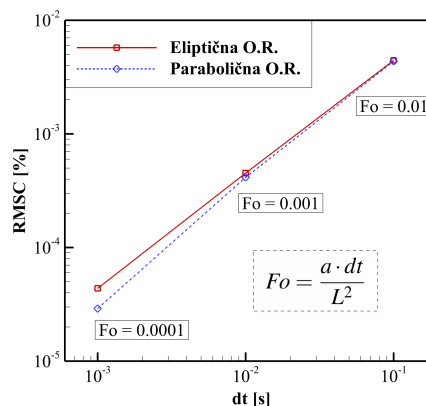


**Slika 2:** Profila spremembe temperature  $T$  po času  $t$  za vrednosti za numerično in analitično rešitev, in sicer za  $dt = 0.001$  in 99 notranjih vozlišč.

Lahko na podlagi slike 3 sklepamo, da časovno odvisna, oziroma parabolična, osnovna rešitev, ponuja večjo natančnost rezultatov numerične simulacije Fourierovega prenosa toplote, kot v primeru eliptične osnovne rešitve. Izkaže se tudi, da se relativna napaka RMS skozi čas manjša, v primeru eliptične in tudi parabolične osnovne rešitve. Izbira vrednosti difuzijskega koeficienta, oziroma hitrost pojava, močno vplivata na natančnost rešitve v primerih eliptične in parabolične osnovne rešitve, pri čemer manjša vrednost difuzijskega koeficienta ponavadi pomeni manjšo vrednost relativne napake RMS.



**Slika 3:** Krivulje spremembe relativne napake RMS po času  $t$  za vrednosti  $dt = 10^{-1}$ ,  $10^{-2}$  ter  $10^{-3}$  s za različne formulacije.



**Slika 4:** Profili spremembe kumulativne relativne napake RMS za različne velikosti časovnega koraka  $dt$  za eliptično in parabolično osnovno rešitev (O.R.).

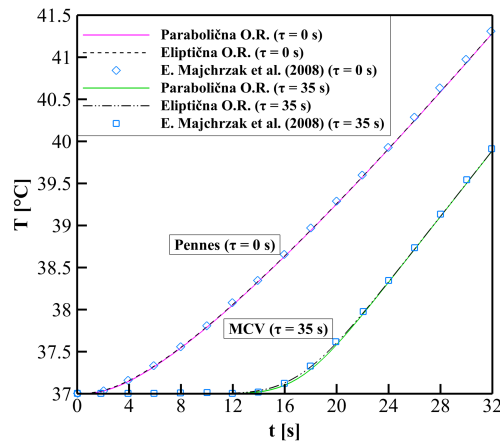
## 4.2 Drugi primer

V drugemu primeru smo primerjali rezultate numerične simulacije bioprenosa toplote z numeričnimi rezultati E. Majchrzak in sodelavcev [16]. Rešujemo 1-D ( $\rightarrow x$ ) Pennesovo in Maxwell-Cattaneo-Vernotte enačbo. Merimo temperaturo na  $x = 1$  mm. Obravnavamo plast tkiva debeline  $L = 10$  mm, Termofizikalne lastnosti:  $k_t = 0,5$  W/(mK),  $c_t = 4,2$  MJ/(m<sup>3</sup>K),  $c_b = 3,9962$  MJ/(m<sup>3</sup>K),  $\omega_b = 0,002$  1/s,  $T_b = 37$  °C,  $Q_m = 420$  W/m<sup>3</sup>,  $\tau_q = 35$  s. Začetni pogoj:  $T_t(x, 0)$ . Robna pogoja sta:  $T_t(0, t) = 0,25t + 37$ °C;  $T_t(1, t) = 37$ °C. Rezultati simulacije so prikazani na sliki 5. Uporabljena je velikost časovnega koraka kot v referenci, oziroma  $dt = 0.5$  s ter 99 notranjih vozlišč za numerično mrežo.

Iz slike 5 lahko zaključimo da implementirani algoritem v primeru Pennesove in MCV enačbe ustrezno opiše toplotno obnašanje za podane začetne in robne pogoje ter podane fizikalne lastnosti. Prisotna je zamuditev dviga temperature, kot napoveduje enačba 2. Numerični rezultati razvitega algoritma se ujemajo z rezultati E. Majchrzak in sodelavcev [16].

## 5 Zaključek

V tem prispevku smo podali teoretične osnove modeliranja bioprenosa toplote ter metode robnih elementov. Iz rezultatov obeh testnih primerov lahko zaključimo, da je razviti algoritem, pri čemer je novost implementacija časovno odvisne osnovne rešitve, ustrezen za reševanje tako Fourierovega kot ne-Fourierovega prenosa toplote. Pri analizi rezultatov smo sklepali, da parabolična osnovna rešitev pomeni tudi večjo natančnost rezultatov, da je prisotno zmanjševanje relativne napake pri obeh formulacij ter da hitrost pojava vpliva na natančnost numeričnih rezultatov. Delo za prihodnost vsebuje nadgradnjo linearne časovne interpolacije na kvadratno časovno interpolacije za časovno odvisno osnovno rešitev ter nadgradnja algoritma na hiperbolično osnovno rešitev s čimer se bomo izognili diskretizaciji drugega odvoda temperature po



**Slika 5:** Krivulje spremembe temperature po času Pennesovega ( $\tau = 0$  s) ter MCV ( $\tau = 35$  s) modela za podan problem [16], za eliptično in parabolično osnovno rešitev.

času z metodo končnih razlik, saj bo le-ta del osnovne rešitve. S tem bomo pridobili večjo natančnost rezultatov.

## 6 Literatura

- [1] H. H. Pennes, "Analysis of tissue and arterial blood temperatures in the resting human forearm. 1948.," *Journal of applied physiology*, vol. 85 1, pp. 5–34, 1998.
- [2] Q. Zhang, Y. Sun, and J. Yang, "Bio-heat response of skin tissue based on three-phase-lag model," *Scientific Reports*, vol. 10, 10 2020.
- [3] J. C. Maxwell, "On the dynamical theory of gases," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 157, pp. 49–88, 1867.
- [4] C. Cattaneo, "Sur une Forme de l'equation de la Chaleur Eliminant le Paradoxe d'une Propagation Instantanee'," *Compt. Rendu*, vol. 247, pp. 431–433, 1958.
- [5] P. Vernotte, "Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur," *Compt. Rendu*, vol. 246, pp. 3154–3155, 1958.
- [6] W. Kaminski, "Hyperbolic Heat Conduction Equation for Materials With a Nonhomogeneous Inner Structure," *Journal of Heat Transfer*, vol. 112, pp. 555–560, 08 1990.
- [7] K. Mitra, S. Kumar, A. Veddevarz, and M. K. Moallemi, "Experimental Evidence of Hyperbolic Heat Conduction in Processed Meat," *Journal of Heat Transfer*, vol. 117, pp. 568–573, 08 1995.

- [8] W. Roetzel, N. Putra, and S. K. Das, "Experiment and analysis for non-Fourier conduction in materials with non-homogeneous inner structure," *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 42, no. 6, pp. 541–552, 2003.
- [9] M. Ramšak and L. Škerget, "A highly efficient multidomain BEM for multimillion subdomains," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 43, pp. 76–85, 2014.
- [10] M. Ramšak and L. Škerget, "Heat diffusion in fractal geometry cooling surface," *Thermal Science*, vol. 16, pp. 955–968, 01 2012.
- [11] J. Iljaž, L. Wrobel, M. Hriberšek, and J. Marn, "Numerical modelling of skin tumour tissue with temperature-dependent properties for dynamic thermography," *Computers in Biology and Medicine*, vol. 112, p. 103367, 2019.
- [12] L. Wrobel and A. Kassab, "Boundary element method, volume 1: Applications in thermo-fluids and acoustics," *Applied Mechanics Reviews*, vol. 56, 03 2003.
- [13] J. Slavič, M. Česnik, N. Gubeljak, M. Hriberšek, M. Kegl, J. Ravnik, and M. Vesenjajk, *Kuhljevi dnevi 2022: zbornik del : Portorož, 22.-23. september 2022: Numerično reševanje Fourierjevega in ne-Fourierjevega prevoda toplote v biološkemu tkivu*. Slovensko društvo za mehaniko, 2022.
- [14] D. Barry, J.-Y. Parlange, and L. Li, "Approximation for the exponential integral (theis well function)," *Journal of Hydrology*, vol. 227, no. 1, pp. 287–291, 2000.
- [15] J. Iljaž, L. Wrobel, M. Hriberšek, and J. Marn, "Subdomain bem formulations for the solution of bio-heat problems in biological tissue with melanoma lesions," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 83, pp. 25–42, 2017.
- [16] E. Majchrzak, G. Kałuša, and J. Poteralska, "Application of the DRBEM for numerical solution of Cattaneo-Vernotte bioheat transfer equation," 03 2008.



## *Izračun napetostnega stanja iz izmerjenega polja deformacij z uporabo metode končnih elementov*

Dalibor Hranjec<sup>1</sup>, Miroslav Halilovič<sup>1</sup>, Nikolaj Mole<sup>1</sup>, Bojan Starman<sup>1,2</sup>

### *Stress reconstruction from strain fields under alignment assumption using finite element method*

**Povzetek.** Metoda korelacije digitalnih slik (DIC) dandanes predstavlja revolucionarno metodo za merjenje polja pomikov in deformacij. V nasprotju s konvencionalnimi metodami merjenja, kot so npr. merilni lističi, potenciometri in LVDT zaznavali, DIC omogoča lokalno merjenje polja pomikov in deformacij s pomočjo optičnega sistema visokoločljivostnih kamer. Nedavne študije kažejo, da je poleg polja pomikov in deformacij preko DIC možno direktno izračunati tudi polje napetosti brez upoštavanja konstitutivnih zvez. Edina potrebna predpostavka je, da so smeri glavnih napetosti in deformacij enake. Zgornja predpostavka rezultira v sistem hiperboličnih parcialni diferencialnih enačb, ki pa jih v tej študiji prvič rešujemo z metodo končnih elementov.

**Abstract.** Digital image correlation (DIC) represents a groundbreaking approach for measuring displacements and strain fields. Unlike conventional measurement methods like strain gauges, potentiometers, and LVDT sensors, DIC allows for local full-field measurement of kinematic fields using a high-resolution optical camera system. Recent studies indicate that this approach not only enables the measurement of displacement and strain fields but also paves the way for the direct calculation of stress fields without constitutive relations. The only necessary assumption is the alignment of principal directions of stress and strain tensor. This assumption leads to a set of hyperbolic partial differential equations, which are, for the first time, solved using the finite element method.

## 1 Uvod

Današnje stanje tehnike na področju materialnega testiranja in karakterizacije stremi k razvoju novih tehnologij. Preboj na področju je omogočila metoda korelacije digitalnih slik (DIC), kjer

---

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana, Slovenija

<sup>2</sup> KU Leuven, Department of Materials Engineering, Ghent Technology Campus, 9000 Ghent, Belgija



na podlagi digitalnih slik naključnega vzorca črno-belih pik na preizkušancu merimo heterogeno polje pomikov in deformacij tekom obremenjevanja vzorca. Takšno izmerjeno polje pomikov in deformacij predstavlja bogato podatkovno strukturo za karakterizacijo materialnega vedenja, saj celotno polje zajema informacije o različnih obremenitvenih stanjih materialne točke na podlagi enega samega mehanskega preizkusa. Tovrsten način materialnega preizkušanja in nadalje materialne karakterizacije, kjer izkoriščamo heterogenost deformacijskega stanja je v literaturi sprožil razvoj področja, ki je znan kot materialno testiranje 2.0 (ang.: “*Material Testing 2.0 - MT 2.0*”) [7]. V nasprotju s MT 1.0, kjer se za materialno karakterizacijo uporablja statično določene enoosne, upogibne, strižne in večosne preizkuse, preizkušanci pa so zasnovani za uporabo klasičnih merilnikov pomika, pri MT 2.0 uporabljamo izmerjeno heterogeno polje deformacij običajno enega preizkusa[6]. Bistvena razlika je, da s klasičnimi preizkusi z uporabo analitičnih zvez okarakteriziramo samo eno obremenitveno stanje, torej je za popolno materialno karakterizacijo potrebno izvesti množico materialnih preizkusov pri različnih obremenitvenih stanjih. Celotna izvedba je eksperimentalno enostavna, ne izkorišča pa novodobnih računalniških in računskih tehnologij in ne omogoča karakterizacije heterogenih struktur (npr. 3D natisnjeni materiali) in lokalnega vedenja materialov (npr. lokalizacije plastične deformacije).

Razumljivo je, da razvoj novih tehnologij merjenja polja pomikov in deformacij pomeni tudi razvoj in uporabo popolnoma drugačnih računalniško podprtih pristopov na področju materialne karakterizacije. Uveljavljena pristopa na področju inverzne identifikacije materialnih parametrov sta Metoda posodabljanja modela končnih elementov (ang.: “*Finite Element Method Updating - FEMU*”)[5] in metoda virtualnih polj (ang.: “*Virtual Fields Method - VFM*”)[4]. Prva sloni na intuitivni uporabi metode končnih elementov (MKE) za posodabljanje izračunanega polja deformacij. Samo posodabljanje materialnih parametrov temelji na izbranem optimizacijskem algoritmu in postopek optimizacije oz. posodabljanja se zaključi, ko je razlika med izračunanim in izmerjenim poljem pomikov ali deformacij najmanjša. Za takšno proceduro materialne identifikacije je znano, da je izjemno računsko intenzivna in časovno potratna. Za vsako materialno točko, v vsakem časovnem trenutku, za vsako ravnotežno iteracijo in za vsako iteracijo optimizacijskega algoritma (ki običajno obsega (št. parametrov + 1) izračunov), je potrebno izračunati napetostno stanje. Materialna identifikacija lahko tako traja od nekaj ur do nekaj dni. Alternativa takšnemu pristopu je VFM, kjer na podlagi izmerjenega polja deformacij posodabljam napetostno stanje glede na trenutne parametre. Enako kot pri FEMU je v ozadju izračuna optimizacijska zanka in pripadajoč algoritem, sama cenilna funkcija pa je razlika med notranjim in zunanjim virtualnim delom. Za metodo je znano, da je računsko manj intenzivna, njena učinkovitost pa je močno odvisna od izbire virtualnih polj.

Značilno za večino inverznih metod za identifikacijo materialnih parametrov iz izmerjenega polja deformacij je, da v svojem bistvu rešujejo robni problem pri znanem polju deformacij. V svoji formulaciji torej upoštevajo ravnotežne enačbe in konstitutivni zakon, FEMU pa tudi zveze med pomiki in deformacijami. Celoten izračun je sklopljen z identifikacijskim algoritmom. Vsebina tega prispevka je alternativa takšnemu pristopu identifikacije materialnih parametrov, kjer je možno reševanje ravnotežnih enačb na podlagi izmerjenega polja pomikov obravnavati ločeno od reševanja enačb konstitutivnega modela in materialne identifikacije. Takšen pristop v svojem bistvu močno poenostavi in pohitri postopek materialne identifikacije, saj je napetostno

stanje že enolično določeno iz analize, kjer rešujemo samo ravnotežne enačbe. Takšen pristop pa v svojem bistvu podaja tudi odgovor na vprašanje same primernosti izbire materialnega modela v identifikacijskem algoritmu. Kjer pa materialni model ni bistven (na primer trdnostna analiza), pa izračun napetostnega stanja neposredno iz izmerjenega polja deformacij brez upoštevanja materialnih zvez le ob predpostavki so-usmerjenosti glavnih smeri tenzorja napetosti in deformacij, ponuja direktno rešitev.

Medtem, ko je sam koncept izračuna napetostnega stanja iz podanega polja pomikov na podlagi predpostavke so-usmerjenosti glavnih smeri tenzorja napetosti in deformacij, ni nov, njegova zgodovina sega v obdobje 19. in 20. stoletja in močno posega v Airyevu teorijo sten, je ponovno pozornost dobil ob razvoju DIC tehnologij. V seriji nedavnih študij sta Cameron in Tasan predstavila osnovni koncept reševanja ravnotežnih enačb ob predpostavki so-usmerjenosti glavnih smeri napetosti in deformacij na osnovi Airyve funkcije in metode končnih razlik (MKR)[1]. Kasneje sta metodologijo razširila na metodo končnih volumnov (MKV) [2], vendar v okrnjeni obliki na pravokotnih in enkrat povezanih območjih reševanja. V najnovejši študiji [3] je teoretično ozadje problema razširjeno na teorijo veliki deformacij, kot samo problematiko pa obravnavata identifikacijo krivulje utrjevanja iz rezultatov virtualnega enoosnega preizkusa v področju nastanka lokalne zožitve preizkušanca.

Namen te študije je razširiti predlagano metodologijo izračuna polja napetosti iz izmerjenega polja deformacij brez upoštevanja konstitutivnih zvez na metodo končnih elementov (MKE). Prednost takega pristopa je predvsem v obravnavi območij nepravilnih oblik in večkrat povezanih domen. Priložnost pa se ponuja tudi v študiji vpliva dejanskih meritev polja deformacij na izračunano polje napetosti in pohitritvi identifikacije materialnih parametrov iz predhodno izračunanega polja napetosti.

Predstavljena študija je organizirana na teoretične osnove, ki so predstavljene v 2. poglavju, na samo izpeljavo in reševanje obravnavanega problema po MKE, ki je v predhodno predstavljenem pogledu novost. Sama validacija metodologije je predstavljena v 4. poglavju študije in obravnava reševanje natezno obremenjenega območja, katerega rešitev je heterogeno napetostno-deformacijsko stanje.

## 2 Enačbe robnega problema za izračun napetostnega stanja iz znanega polja deformacij

Osnova predpostavka, ki omogoča izračun napetostnega stanja iz znanega polja deformacij, je so-usmerjenost glavnih smeri tenzorja napetosti in tenzorja hitrosti deformacij. Poleg tega se zaradi same enostavnosti izpeljav v tem delu omejimo na teorijo majhnih deformacij. Za izpeljavo enačb robnega problema ob predpostavki velikih deformacij vabimo bralca, naj si ogleda, npr. [3].

Za obravnavani primer predpostavljamo, da so smeri glavnih vrednosti Cauchy-evega napetostnega tenzorja  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q}_\sigma \boldsymbol{\Lambda}_\sigma \mathbf{Q}_\sigma^T$  in tenzorja hitrosti deformacij  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{Q}_\epsilon \boldsymbol{\Lambda}_\epsilon \mathbf{Q}_\epsilon^T$  enake:

$$\mathbf{Q}_\epsilon = \mathbf{Q}_\sigma. \quad (1)$$

Ker velja, da je  $\mathbf{Q}_\epsilon^T \mathbf{Q}_\epsilon = \mathbf{1}$ , lahko napetostni tenzor zapišemo v sledeči obliki:

$$\boldsymbol{\Lambda}_\sigma = \mathbf{Q}_\epsilon^T \mathbf{Q}_\epsilon \boldsymbol{\Lambda}_\sigma \mathbf{Q}_\epsilon^T \mathbf{Q}_\epsilon = \mathbf{Q}_\epsilon^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q}_\epsilon. \quad (2)$$

Ker mora biti  $\mathbf{A}_\sigma$  diagonalen tenzor, mora veljati, da so izven diagonalni členi enaki 0, kar v splošnem vodi do 3 linearnih enačb. V kolikor upoštevamo še ravnotežne enačbe, lahko zapišemo sistem 6 enačb, ki opredeljujejo napetostno stanje v materialnem delcu:

$$[\mathbf{Q}_\varepsilon^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q}_\varepsilon]_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad (3)$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (4)$$

kjer  $\mathbf{b}$  predstavlja vektor volumskih sil,  $\rho$  gostoto materiala in  $\mathbf{u}$  vektor pomika materialne točke. V posebnem primeru kvazi-statičnega ravninskega napetostnega stanja brez upoštevanja volumskih sil lahko zgornji sistem poenostavimo v sistem 3 algebrajsko-diferencialnih enačb s tremi neznankami:

$$\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{\sigma_{xy}} = \frac{\dot{\varepsilon}_{xx} - \dot{\varepsilon}_{yy}}{\dot{\varepsilon}_{xy}}, \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

V zgornjem sistemu enačb so  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  in  $\sigma_{xy}$  komponente napetostnega tenzorja,  $\dot{\varepsilon}_{xx}$ ,  $\dot{\varepsilon}_{yy}$  in  $\dot{\varepsilon}_{xy}$  pa komponente tenzorja hitrosti deformacij. Pri tem velja ponovno izpostaviti, da so komponente tenzorja hitrosti deformacij znane iz meritev polja deformacij s pomočjo metode korelacije digitalnih slik. Enačbe (5) ob znanih vrednostih napetostnega vektorja  $\mathbf{p}$  na robu območja  $\Gamma$  predstavljajo enačbe robnega problema za izračun napetostnega stanja iz izmerjenega polja deformacij brez poznavanja konstitutivnih zvez.

### 3 Reševanje robnega problema z metodo končnih elementov

#### 3.1 Enačba končnega elementa

Novost predstavljene študije je reševanje enačb robnega problema (5) po MKE. V ta namen je potrebno izpeljati enačbo končnega elementa, katero izpeljemo iz ravnotežne enačbe (4), ki jo množimo s poljubno vektorsko funkcijo  $\mathbf{v}$  in integriramo po poljubnem območju  $A$  ter jo z uporabo Green-Gaussovega teorema prevedemo v:

$$\int_A (\tilde{\nabla} \mathbf{v})^T \boldsymbol{\sigma} dA = \int_\Gamma \mathbf{v}^T \mathbf{p} d\Gamma + \int_A \mathbf{v}^T \mathbf{b} dA. \quad (6)$$

V enačbi smo upoštevali, da je napetostno stanje ravninsko in kvazi-statično. Pri tem je:

$$\tilde{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Pri reševanju robnega problema po metodi končnih elementov je ključnega pomena izbira aproksimacijske funkcije. Preden pa preidemo v ta korak, je smiselno vpeljati funkciji  $f_x(x, y)$  in  $f_y(x, y)$ , ki ju definiramo preko naslednjih zvez:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial f_x}{\partial y} \quad \text{in} \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial f_y}{\partial x}, \quad (8)$$

strižno komponento napetostnega tenzorja, pa izrazimo iz enačbe (5a) kot:

$$\sigma_{xy} = \frac{\dot{\epsilon}_{xy}}{\dot{\epsilon}_{xx} - \dot{\epsilon}_{yy}} \left( \frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x} \right), \quad (9)$$

Na takšen način lahko komponente napetostnega tenzorja izrazimo preko matričnega operatorja kot  $\boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbf{V}}\mathbf{f}$ , pri tem pa operator vsebuje tudi glavne smeri tenzorja deformacij. Aproksimacijo  $\mathbf{f}$  po območju končnega elementa zapišemo kot:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{F}, \quad (10)$$

kjer je  $\mathbf{F}$  vektor vozliščnih vrednosti  $\mathbf{f}$  in  $\mathbf{N}$  matrika oblikovnih funkcij:

$$\mathbf{F}^T = [ F_1^1 \quad F_2^1 \quad F_1^2 \quad F_2^2 \quad \dots \quad F_1^{N_v} \quad F_2^{N_v} ], \quad (11)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \psi_1(x,y) & 0 & \psi_2(x,y) & 0 & \dots & \psi_{N_v}(x,y) & 0 \\ 0 & \psi_1(x,y) & 0 & \psi_2(x,y) & \dots & 0 & \psi_{N_v}(x,y) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Skladno s Galerkinovim pristopom, lahko podobno relacijo zapišemo tudi za vektorsko funkcijo  $\mathbf{v} = \mathbf{N} \mathbf{c}$ , kjer je  $\mathbf{c}$  vektor neničelnih konstant,  $\mathbf{c}^T = [ c_1^1 \quad c_2^1 \quad c_1^2 \quad c_2^2 \quad \dots \quad c_1^{N_v} \quad c_2^{N_v} ]$ . Z uporabo zgornjih relacij lahko zapišemo:

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbf{V}}\mathbf{f} = \hat{\mathbf{V}}\mathbf{N} \mathbf{F} = \mathbf{G} \mathbf{F} \quad \text{in} \quad \tilde{\mathbf{V}}\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{V}}\mathbf{N} \mathbf{c} = \mathbf{B} \mathbf{c}, \quad (13)$$

kjer sta  $\mathbf{G}$  in  $\mathbf{B}$  matriki odvodov oblikovnih funkcij. V kolikor relacije uporabimo v integralški enačbi (6), dobimo enačbo končnega elementa:

$$\int_A \mathbf{B}^T \mathbf{G} \, dA \mathbf{F} = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{p} \, d\Gamma + \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, dA, \quad (14)$$

ki predstavlja osnovo za reševanje zastavljenega robnega problema. V kolikor enačbo zapišemo na klasičen način kot  $\mathbf{K} \mathbf{F} = \mathbf{f}_{\Gamma} + \mathbf{f}_A$ , potem integrali v enačbi (14) predstavljajo togostno matriko  $\mathbf{K} = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{G} \, dA$ , vektor ekvivalentnih vozliščnih obremenitev po robu  $\mathbf{f}_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{p} \, d\Gamma$  in vektor ekvivalentnih volumskih obremenitev  $\mathbf{f}_A = \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, dA$ .

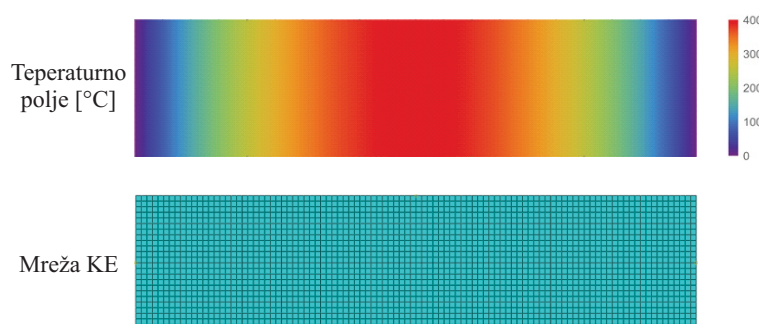
### 3.2 Metodologija reševanja robnega problema

Osnovni koncept reševanja obravnavanega robnega problema sledi klasični proceduri MKE. Edina razlika s klasično MKE analizo je, da je za vsako integracijsko točko končnega elementa potrebno definirati smer glavnih deformacij, ki jih bodisi izmerimo ali pa za potrebe numerične validacije privzamemo iz referenčne MKE analize problema ravninskega napetostnega stanja. V primeru obravnavanega problema robni pogoji nastopajo v obliki znanih vozliščnih vrednostih  $\mathbf{F}$  ali pa napetostnega vektorja  $\mathbf{p}$  na robu območja. Rešitev obravnavanega problema so vrednosti funkcije  $\mathbf{f}$  v vozliščih, preko katerih pa lahko naknadno z uporabo relacije  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{G} \mathbf{F}$  izračunamo napetostno stanje v integracijskih točkah posameznega elementa.

## 4 Validacija

Za namen validacije razvitega MKE pristopa obravnavamo problem pravokotne stene  $100 \times 25$  mm, ki je na levem in desnem robu obremenjena zgolj v vodoravni smeri s 120 MPa. Zgornji in spodnji rob sta neobremenjena. Ker za potrebe validacije želimo, da je referenčno napetostno stanje v steni heterogeno, predpostavljamo, da se mehanske lastnosti spreminjajo po območju reševanja. Znale mehanske lastnosti so seveda potrebne zgolj za izračun polja deformacij in referenčnih vrednosti polja komponentnih napetosti. V ta namen privzamemo, da je material linearno elasto-plastičen ( $E = 200$  GPa,  $\nu = 0.3$ ) s temperaturno odvisnim linearnim zakonom utrjevanja  $\sigma_y = \sigma_y(\epsilon_{eq}^{pl}, T) = 100 - T/20 + 500 \epsilon_{eq}^{pl}$ , temperaturno polje pa se spreminja po območju reševanja med  $0^\circ\text{C}$  in  $400^\circ\text{C}$  po enačbi  $T(x, y) = 100(-0.0016x^2 + 0.16x)$ . Temperaturno polje je prikazano na sliki 1.

Za namen izračuna referenčne rešitve smo obravnavani problem rešili s komercialnim MKE programskim paketom ABAQUS/Standard. Mreža štiri vozliščnih končnih elementov je prikazana na sliki 1 spodaj. Ključni rezultat te analize je napetostno-deformacijsko stanje, s katerim validiramo predlagano metodologijo.

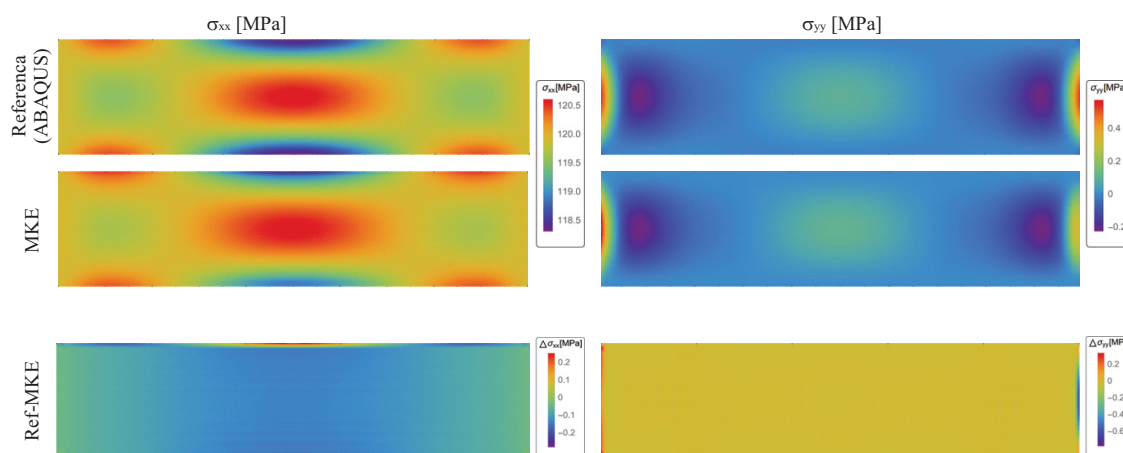


**Slika 1:** Temperaturno polje in diskretizacija območja reševanja po MKE.

### 4.1 Validacija metodologije

Izhodišče za reševanje robnega problema 5 po MKE predstavlja izračunano polje deformacij (direktni problem ali meritev). Za ta namen iz referenčne analize privzamemo deformacijsko stanje, privzamemo pa tudi napetostne robne pogoje. Za potrebe numeričnega izračuna pa privzamemo tudi topologijo končnih elementov. Samo numerično reševanje problema je izvedeno v programskem okolju *Wolfram Mathematica*.

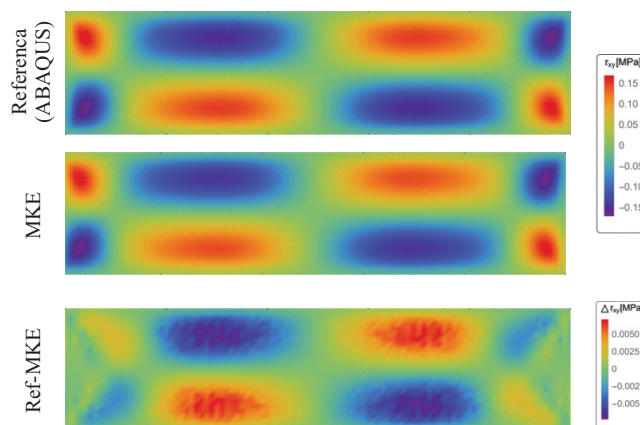
Vrednosti referenčnega in rekonstruiranega polja komponentnih napetosti so prikazane na sliki 2 in 3. Konture napetosti v levem stolpcu slike 2 se nanašajo na komponento  $\sigma_{xx}$ , medtem ko se prikazana polja na desni strani nanašajo na komponento  $\sigma_{yy}$ . Zgornja vrstica predstavlja rešitev iz programskega paketa ABAQUS, medtem ko srednja vrstica predstavlja rešitev polja napetosti po predlagani metodologiji. Iz primerjave komponent napetosti v tretji vrstici lahko opazimo, da se rezultat izračuna po predlagani metodologiji dobro ujema z referenčnimi vrednostmi. Največja razlika med obema rešitvama znaša 0.2 MPa, kar v grobem predstavlja 0.2%



**Slika 2:** Grafični prikaz in primerjava polja komponentnih napetosti  $\sigma_{xx}$  (levo) in  $\sigma_{yy}$  (desno). Prva vrstica predstavlja rezultat referenčne analize, medtem ko druga vrstica predstavlja rešitev po predlagani metodi. V zadnji vrstici je predstavljena razlika med obema izračunoma.

napake v primerjavi s povprečno primerjalno napetostjo 120 MPa. Podobno velja tudi za komponento strižne napetosti (slika 3), le da je relativna napaka znatno manjša, saj ta komponenta v obravnavanem primeru ni dominantna.

Iz obravnavanega primera lahko zaključimo, da je na podlagi izmerjenega polja deformacij ob poznavanju napetostnih robnih pogojev možno na učinkovit način izračunati polje napetosti z zadostno natančnostjo. Omejitev pri izračunu je le predpostavka o sousmerjenosti glavnih smeri napetosti in deformacij.



**Slika 3:** Grafični prikaz polja komponentne napetosti  $\sigma_{xy}$ . Primerjava med referenčno rešitvijo (ABAQUS) in rešitvijo po predlagani metodologiji (MKE).

## 5 Zaključki

V prispevku je predstavljen nov koncept reševanja ravnotežnih enačb ob predpostavki sousmerjenosti smeri glavnih napetosti in deformacij z metodo končnih elementov. Ključna prednost takega pristopa je, da za rekonstrukcijo ravninskega napetostnega stanja iz izmerjenega polja deformacij ne potrebujemo konstitutivnih zvez oz. umerjenega materialnega modela. Takšen pristop ima bistveno prednost pred obstoječimi inverznimi pristopi, pri katerih sam izračun napetosti zahteva izbiro, numerično implementacijo in kalibracijo materialnih parametrov modela. Omejitev obravnavanega pristopa je seveda sousmerjenost glavnih smeri (npr. izotropni materialni odziv), potrebno pa je poznati tudi napetostni robni pogoj, kar izvajanju preizkusov, katerih mehansko stanje je heterogeno, običajno ne predstavlja ovire. Bistvena prednost pristopa je neposreden in hiter izračun napetostnega stanja, ki je ključnega pomena za nadaljnjo materialno karakterizacijo.

## Zahvala

Za finančno podporo se avtorji zahvaljujemo Javni agenciji za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije (ARRS) za financiranje raziskovalnega programa P2-0263.

## Literatura

- [1] B. C. Cameron and C. C. Tasan. Full-field stress computation from measured deformation fields: A hyperbolic formulation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 147:104186, 2021.
- [2] B. C. Cameron and C. C. Tasan. On discontinuities when computing the stress-field from the strain: A finite volume discretization. *International Journal of Solids and Structures*, 254-255:111912, Nov. 2022.
- [3] B. C. Cameron and C. C. Tasan. Partial differential equations to determine elasto-plastic stress-strain behavior from measured kinematic fields. *International Journal of Plasticity*, 162:103512, Mar. 2023.
- [4] J. M. P. Martins, A. Andrade-Campos, and S. Thuillier. Comparison of inverse identification strategies for constitutive mechanical models using full-field measurements. *International Journal of Mechanical Sciences*, 145:330–345, Sept. 2018.
- [5] A. Maček, B. Starman, N. Mole, and M. Halilović. Calibration of Advanced Yield Criteria Using Uniaxial and Heterogeneous Tensile Test Data. *Metals*, 10(4):542, Apr. 2020. Number: 4 Publisher: Multidisciplinary Digital Publishing Institute.
- [6] F. Pierron. Material Testing 2.0: A brief review. *Strain*, 59(3):e12434, 2023. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/str.12434>.
- [7] F. Pierron and M. Grédiac. Towards Material Testing 2.0. A review of test design for identification of constitutive parameters from full-field measurements. *Strain*, n/a(n/a):e12370, 2020.



## *Sklopljen RDT-1D model za izračun kinetike sušenja znotraj vial v liofilizatorju*

Blaž Kamenik<sup>1</sup>, Matjaž Hriberšek<sup>1</sup> in Matej Zadravec<sup>1</sup>

### *Coupled CFD-1D model for calculation of drying kinetics inside a vials in a lyophilizer*

**Povzetek.** V tem prispevku je predstavljen sklopljen model, pri čemer je za opis sušenja znotraj vial uporabljen 1D-model, medtem ko je model RDT uporabljen za izračun tokovnega polja skozi celotno sušilno komoro. Posebnost modela je, da se v tem primeru računa kinetika sušenja vseh vial znotraj sistema, izračunani masni tokovi in temperatura plina se nato uporabijo kot robni pogoji za model RDT. Na ta način pridobimo vpogled v kinetiko sušenja vseh vial znotraj sistema, in ne samo ene (osrednje), ki je običajen način modeliranja. Predstavljeni model se namreč osredotoča na interakcijo med lokalnimi hidrodinamičnimi pogoji v sušilni komori in kinetiko sušenja produkta v viali. Računski rezultati kažejo, da je model sposoben razrešiti variacije v lokalnih pogojih tlaka v komori in lokalni kinetiki sušenja vial, zato predstavlja obetavno računalniško orodje za optimizacijo procesa.

**Abstract.** In this contribution, a coupled model is presented in which a 1D model is used to describe the drying inside the vial, while the CFD model is used to calculate the flow field through the entire drying chamber. The special feature of the model is that, in this case, the drying kinetics of all vials within the system is calculated, the calculated mass flow rates and gas temperature are then used as boundary conditions for the CFD model. In this way, we gain insight into the kinetic drying of all vials within the system, and not just one (the central one), which is the usual way of modeling. The presented model focuses on the interaction with the local hydrodynamic conditions in the drying chamber and the drying kinetics of the product in the vial. Computational results show that the model is able to resolve variations in local chamber pressure conditions and local vial drying kinetics, and therefore represents a promising computational tool for process optimization.

## 1 Uvod

Največje ovira pri širitvi uporabe procesa sublimacijskega sušenja so visoki naložbeni stroški pri nakupu naprave, drago vzdrževanje, potreben je tudi usposobljen kader. Sušenje poteka tudi

---

<sup>1</sup> Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo



veliko počasneje kot konvencionalno sušenje, kar vodi do višje porabe energije in posledično višje cene produkta. Zato se v praksi teži k optimizaciji sušilnih ciklov (z uporabo agresivnejših ciklov, pri višjih temperaturah), kar vodi do večje proizvodnje produkta v istem časovnem obdobju oziroma do manjše porabe energije za osušitev enake količine produkta. V tem primeru lahko zaradi povišanja masnega toka sublimata in tlaka znotraj komore pride do kolapsa produkta, ki ga nato ni mogoče uporabiti. Iz vseh navedenih razlogov se raziskovalne skupine že nekaj časa osredotočajo na optimizacijo procesa sublimacijskega sušenja. Pionir s področja raziskav na temo sublimacijskega sušenja je Pikal [8], ki je že v 80. letih prejšnjega stoletja postavil prve matematične modele za izračun prenosa toplote in snovi med procesom. V zadnjih desetletjih je bilo vzpostavljenih veliko raziskovalnih skupin [8, 3, 1], ki se ukvarjajo z eksperimentalno karakterizacijo kinetike sušenja posameznega farmacevtskega produkta, ali numeričnim modeliranjem procesa sušenja, kar omogoča hitrejšo optimizacijo procesa in nam omogoči dodaten vpogled v fizikalno dogajanje znotraj sistema (v kombinaciji z eksperimentalnimi meritvami). Do sedaj, v literaturi ne zasledimo modela, ki bi bil sposoben modelirati kinetiko sušenja znotraj vseh vial v liofilizatorju. Primer modela, ki načinja to temo je delo Barresija s sodelavci [2], [10], pri čemer sta bila za proizvodne in laboratorijske naprave proučena vpliv geometrije sistema in vpliv lokalnih tlačnih razmer. V tem primeru se ne simulira kinetike sušenja za vse viale, vendar samo za centralno, kjer se za izračun dovoda toplote na viale uporabi povprečna vrednost tlaka nad vsemi vialami na polici (prenos toplote je odvisen od tlaka). Nov masni tok sublimata se pomnoži s številom vial na polici, in ta vrednost se predpiše kot robni pogoj na vstopu (vrh zamaškov). Simulacije so bile izvedene v komercialni računski kodi za dinamiko tekočin ANSYS Fluent. V tem delu so pokazali tudi vpliv uniformnosti/neuniformnosti sušenja znotraj komore zaradi lokalnih variacij tlaka. Napoved, ki je bila pridobljena z modelom RDT, sovпада tudi z eksperimentalnimi rezultati Saneja s sodelavci [12], pri čemer se potrdi, da nad polico obstajajo občutni tlačni gradienti. Ideja predstavljenega modela je ta, da se v tem primeru računa kinetika sušenja vseh vial znotraj sistema, izračunani masni tokovi in temperature plina se nato uporabijo kot robni pogoji na lokalnih vstopih (posamična viala) v RDT modelu.

## 2 Numerični model in robni pogoji

### 2.1 Numerične metode in snovske lastnosti

Za opis transporta vodne pare skozi sistem je bila uporabljena koda ANSYS Fluent [4] z algoritmom SIMPLE [4]. Ker je plin sestavljen iz dveh komponent ( $H_2O$  par in  $N_2$ ), je uporabljen model za večkomponentni sistem (ang. species transport). Snovske lastnosti so iste, kot v prispevku lanskega leta [5]. Za diskretizacijo tlaka je uporabljen algoritem PRESTO! (Pressure Staggering Option), s sovetrovno shemo drugega reda za gostoto, gibalno količino, masni delež komponent in energijo. Zaradi nizkih sistemskih tlakov, je tudi v tem primeru uporabljen Maxwellov model zdrsa na steni.

Za izračun gostote večkomponentnega stisljivega plina je bil uporabljen model idealnega plina. Za izračun lastnosti zmesi so bili uporabljeni različni zakoni. Za specifično toploto je bil uporabljen zakon mešanja, za toplotno prevodnost in viskoznost zakon idealnega mešanja plinov in kinetična teorija za izračun difuzivnosti med komponentami.

## 2.2 Model za opis kinetike sušenja znotraj vial

Za kinetiko sušenja produkta v viali je uporabljen model Ravnika s sodelavci [11]. Enačbe za opis prenosa toplote in snovi veljajo za prostornino vial, ki jo zaseda zamrznjena raztopina, v našem primeru raztopina manitola in vode. Zamrznjeno območje obravnavamo kot homogeno zmes s prostorsko neodvisnimi materialnimi lastnostmi, plinska faza je modelirana kot binarna zmes plinov (pod predpostavko idealnega plina), ki je v toplotnem ravnovesju s porozno pogačo. Na sublimacijski fronti je predpostavljeno ravnovesje med tlakom vodne pare in parnim tlakom ledu. Sprva je prostornina sestavljena le iz ledu (zamrznjene snovi), pri čemer med sušenjem nastaja porozna pogača. Da bi se izognili težavam, povezanim s premikajočo se mrežo, je predpisana začetna debelina osušenega območja 2 % skupne višine pogače [7, 13]. Enačbe za ohranitev energije in snovi za enodimenzionalni opis sušenja znotraj vial so bile diskretizirane z uporabo metode končnih razlik. Za prostorninske odvode je uporabljena centralna diferenčna shema in Eulerjeva shema za časovne odvode. Numerične simulacije liofilizacije raztopine manitola so bile izvedene z mrežo s 50 točkami, enakomerno porazdeljenimi med trdnim in poroznim delom domene, in s časovnim korakom 1 s, kar je bilo ugotovljeno v prejšnjem delu [11]. Začetna višina pogače je  $L = 0,0115\text{ m}$  in začetna višina enodimenzionalnega modela je  $z_{intf, start} = 0,98L$ . Na dnu, ko model doseže 2 % skupne višine, se nadaljnja simulacija primarne faze sušenja računa z uporabo preprostega linearnega algebraičnega modela [7] (za izračun odstranitve zadnjih 2 % ledu), kjer se simulacija kinetike sušenja nadaljuje z ekstrapolacijo iz zadnje izračunane hitrosti sušenja.

### 2.2.1 Robni pogoji

Na medfazni površini pogača-vodna para je parcialni tlak vodne pare enak parcialnemu tlaku vodne pare znotraj komore kot:

$$p_v = p_{x_v}, \quad (1)$$

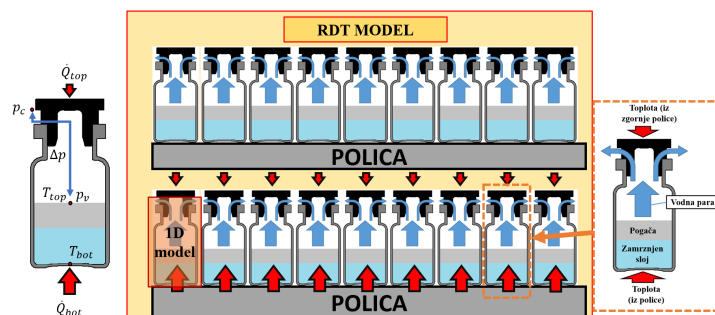
kjer je  $p$  skupen tlak in  $x_v$  molski delež vodne pare. Za lokalno povišanje tlaka znotraj vial se uporablja korelacija, ki jo je predlagal Pikal [8]

$$\Delta p = \dot{m}R_s \quad ; R_s^{-1} = a + b\bar{p} \quad (2)$$

kjer je  $\bar{p}$  srednji tlak čez oviro  $\bar{p} = (p_c x_v + p_v)/2$ , ter  $a$  in  $b$  sta konstanti. Ker ima viala 15R enako širino vratu in geometrijo gumijastega zamaška kot viala 6R, so vrednosti za  $a = 0,0658\text{ g}/(\text{Pa}h)$   $b = 0,015\text{ g}/(\text{Pa}^2 h)$ , vzete iz [6]. Za lažjo predstavbo je dodana shema obravnavanega sistema, kar je prikazano na sliki 1. Model Ravnika [11] v osnovni obliki zahteva predpis koeficienta  $K_v$ , vendar v tem primeru želimo, da se le ta koeficient posodablja glede na lokalno vrednost tlaka nad vialo. Toplotni tok na dno vial  $\dot{Q}$  je sorazmeren s skupnim koeficientom toplotnega prehoda  $K_v$  in temperaturno razliko med temperaturo police  $T_{sh}$  in temperaturo na dnu vial  $T_{bot}$ :

$$\dot{Q} = K_v A_{bot} (T_{sh} - T_{bot}), \quad (3)$$

kjer se koeficient prehoda toplote računa v odvisnosti od lokalnega tlaka (na temelju skupnega tlaka nad vialo), ki ga za vsak časovni korak računa RDT-model. Izračun koeficienta prehoda



Slika 1: Shema obravnavanega sistema.

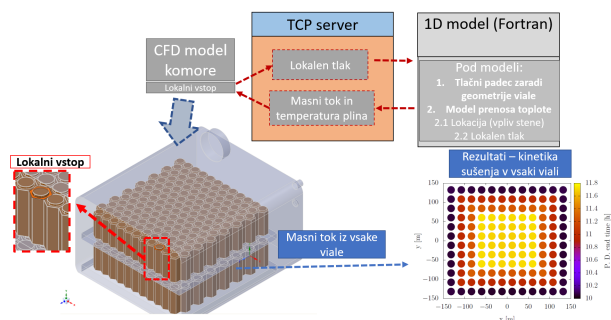
toplote  $K_v$  temelji na modelu prenosa toplote, predstavljenem v delu [9], kjer je sestavljen iz več vnosov toplote skozi različne površine vial. Toplota se dodaja s prevodom (skozi kontaktno površino med vialo in polico), s toplotnim sevanjem iz gretih polic in s prevodom skozi plin znotraj sušilne komore.

### 2.3 Sklapanje modelov prek TCP-strežnikov

V tem primeru imamo dva ločena programa, od katerih vsak opisuje del transportnih pojavov med procesom liofilizacije. Kot smo že omenili, je kinetika sušenja produkta znotraj viale diskretizirana z uporabo metode končnih razlik, napisane v programskem jeziku Fortran, tokovno polje skozi sušilno komoro je modelirano s komercialno RDT-kodo ANSYS Fluent. V tem primeru morata programa med seboj izmenjevati vrednosti, saj se programa izvajata ločeno. RDT-koda potrebuje vrednosti za robne pogoje na lokalnih vstopih (vstopna površina, ki je vrh vsake vial), le-te ima program Fortran (masni pretok sublimata in temperatura plina), ta potrebuje lokalne vrednosti tlakov nad vsako vialo (iz RDT-kode). Komunikacija med obema programoma poteka prek strežnika, ki temelji na komunikacijskem protokolu TCP, ki je eden izmed glavnih protokolov internetnih protokolov. V vsakem programu (programa Fortran in RDT) je dodan del kode, ki nam omogoča povezavo samostojnega programa s TCP-strežnikom, prek katerega poteka izmenjava podatkov. Ko se oba programa povežeta s strežnikom TCP, se začetni podatki (začetna temperatura police) pošljejo iz programa Fortran v RDT-model. Sledi RDT-izračun tokovnega polja skozi sušilno komoro. Na koncu časovnega koraka se zažene makro DEFINE\_EXECUTE\_AT\_END, ki najprej izračuna površinsko utežen povprečni tlak nad vsako vialo (na vsakem vstopu). Vrednosti tlaka za vse vstope in velikost časovnega koraka se nato pošljejo programu Fortran, ki jih uporabi za izračun kinetike sušenja za vsako vialo, ter pošlje nove temperature plina in masnih tokov sublimata nazaj v RDT kodo, kjer se uporabijo kot nov robni pogoj za vsak vstop (v naslednjem časovnem koraku). Izmenjava se nadaljuje, dokler ni doseženo določeno število časovnih korakov, nakar se komunikacija prekine. Shema sklapanja je prikazana na sliki 2.

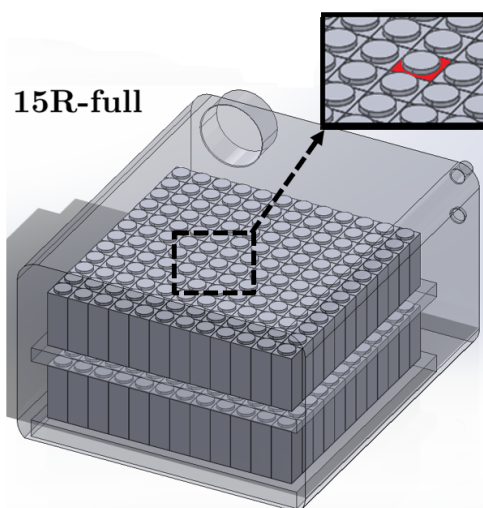
### 2.4 Geometrijski model in robni pogoji

Končni geometrijski model vključuje geometrijo sušilne komore in del geometrije gumijastega zamaška. Sušilna komora je višine 0.21 m, širine 0.34 m, ter globine 0.39 m, v kateri sta



Slika 2: Shema sklopljenega modela in izmenjava podatkov.

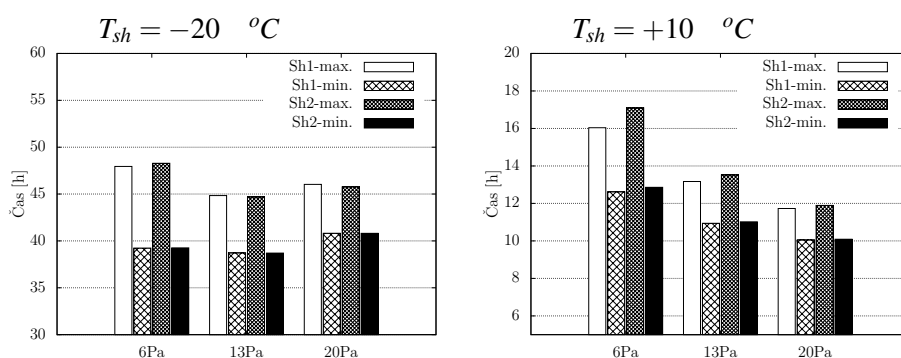
dve polici dimenzij 0.3x0.3 m. Uporabljene so bile 15R viale kjer je višina reže med vrhom zamaška in zgornjo polico nad vialami 4,5 mm. Pri vsakem lokalnem dovodu (prikazan z rdečo na sliki 3) sta podana masni tok plina in temperatura, ki ju zagotovi zunanji program (Fortran), medtem ko izračuna nov masni tok plina in temperaturo za vsak časovni korak. Na izhodu, ki je znotraj kanala, ki vodi do kondenzatorja, je bil predpisan statični tlak 0 Pa, ki skupaj s specifikacijo referenčnega tlaka znotraj računske domene zagotavlja pravilne tlačne pogoje sistema. Za površine police je bila predpisana časovno odvisna temperatura police. To je uporabljeno za modeliranje vpliva ogrevanih polic na lastnosti plina v sušilni komori. Na ta način modeliramo mešanje hladne vodne pare, ki nastane med sublimacijo, s toplejšim plinom v komori. Za zunanje stene, ki so v stiku z okoljem, je bila določena temperatura 10°C. Na stranskih stenah vial je predpisan adiabatni robni pogoj. Toplota, dovedena v vialo skozi polico, je modelirana z zunanjim 1D-modelom.



Slika 3: Aproksimacije vial v polno naloženem liofilizatorju za 15R-viale.

### 3 Rezultati

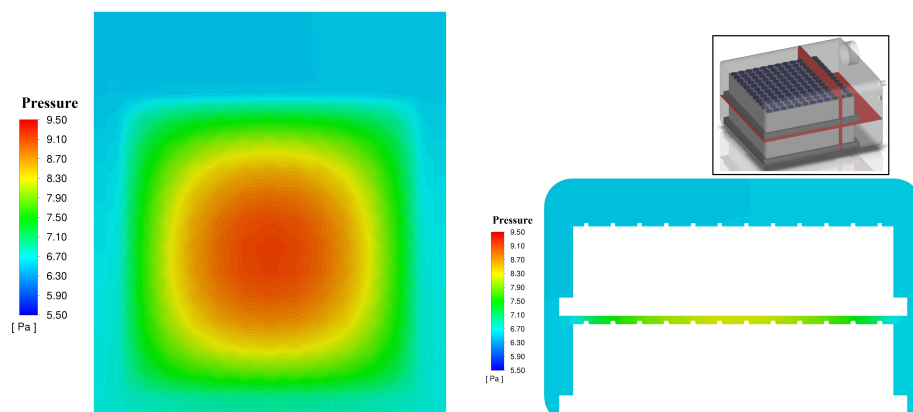
Predstavljeni so rezultati simulacije kinetike sušenja vial v liofilizatorju pri polni obremenitvi (obe polici sta polni z vialami) za primer 15R-vial, saj v tem primeru pride do tlačnega gradienta nad vialami, ki so na spodnji polici. Te viale so bile izbrane zaradi dejstva, da je v tem primeru razmik med vrhovi zamaškov in zgornjo polico najmanjši, kar pomeni, da bo prišlo do tlačnega gradienta nad spodnjo polico. Simulirano je bilo sušenje pri treh različnih tlakih znotraj komore, in sicer 6, 13 in 20 Pa ter dveh različnih temperaturah police ( $-20$  in  $10$  °C), z namenom, da se preuči vpliv teh dveh obratovalnih pogojev na potek sušenja. Vse simulacije so časovno odvisne - simulira se celotna kinetika sušenja vial, sklopljena na RDT-model, ki posreduje lokalne vrednosti tlakov nad vsako vialo (v RDT-modelu so to vtoki), medtem ko FORTRAN vrne nov masni tok in temperaturo sublimata, ki se uporabijo kot robni pogoji v naslednjem časovnem koraku. Na tak način dobimo kinetiko sušenja vseh vial v liofilizatorju v odvisnosti od lokalnih hidrodinamskih razmer, prav tako se lahko prouči vzajemen vpliv kinetike sušenja znotraj vial na potek sušenja ostalih vial v liofilizatorju.



**Slika 4:** Maksimalen in minimalen čas sušenja vseh vial pri različnih tlakih za različne police in za različne temperature (*Sh1* je spodnja polica in *Sh2* zgornja).

#### 3.1 Povprečen, maksimalen in minimalen čas sušenja v odvisnosti od tlakov znotraj komore in temperatur polic

Na sliki 4 so prikazani histogrami s časom primarnega sušenja za različne sistemske tlake. Kot vidimo, so časi sušenja pri nižji temperaturi police relativno podobni, medtem ko se pri višji temperaturi police čas sušenja s povečevanjem sistemskega tlaka znižuje. S povečevanjem sistemskega tlaka se tudi zmanjšuje razlika med minimalnim in maksimalnim časom sušenja na posamezni polici. Nad vialami, ki so na spodnji polici, je polica, ki skupaj z vrhovi zamaškov, ki so delno vstavljeni v viale, tvori ozek kanal. Tako vodna para, ki se generira med procesom, skozi ta kanal potuje proti stranem in nato proti povezovalni cevi v kondenzator. Zaradi sublimacijskih tokov se tlak nad osrednjimi vialami poviša, nakar sledi enakomeren tlačni padec v smeri proti stranem police, kar je za različne sistemske tlake prikazano na sliki 5. Kot vidimo, je tlak nad središčem spodnje police pri sistemskega tlaku 6 Pa za okoli 3 Pa višji kot nad vialami na zgornji polici.



**Slika 5:** Tlačna polja (absolutni tlak) po prereznih ravninah pri temperaturi police  $10\text{ }^{\circ}\text{C}$  za poln model pri sistemskem tlaku 6 Pa. Prerezne ravnine so prikazane na desnem vrhu slike.

#### 4 Zaključki

Rezultati sklopljenega RDT-1D modela so pokazali, da se najhitreje sušijo vialo, ki so na straneh (zaradi višjega dovoda toplote), medtem ko se najpočasneje ne sušijo vialo, ki so v čistem središču spodnje police, ampak vialo, ki so nekoliko izven središču. Do tega pride zaradi lokalnega povišanja tlaka nad vialami v čistem središču, kar vodi do višjega dovoda toplote. Na zgornji polici, kjer nad njo ni police, do povišanja tlaka nad temi vialami ne pride, zato se najpočasneje sušijo vialo v čistem središču. Razvito orodje omogoča vpogled v hidrodinamske razmere znotraj sušilne komore, prav tako pa omogoča vpogled v kinetiko sušenja znotraj vsake vialo, ki se nahaja v liofilizatorju.

- [1] A. A. Alexeenko, A. Ganguly, and S. L. Nail. Computational analysis of fluid dynamics in pharmaceutical freeze-drying. *Journal of Pharmaceutical Sciences*, 98(9):3483–3494, 2009.
- [2] A. A. Barresi, V. Rasetto, and D. L. Marchisio. Use of computational fluid dynamics for improving freeze-dryers design and process understanding. Part 1: Modelling the lyophilisation chamber. *European Journal of Pharmaceutics and Biopharmaceutics*, 129(January):30–44, 2018.
- [3] D. Fissore, R. Pisano, and A. A. Barresi. Advanced approach to build the design space for the primary drying of a pharmaceutical freeze-drying process. *Journal of Pharmaceutical Sciences*, 100(11):4922–4933, 2011.
- [4] A. Inc. ANSYS® Academic Research, Release 17.2, Help System, Solver Theory, Multi-phase Flow Theory. ANSYS, Inc., 2016.
- [5] B. Kamenik, M. Hriberšek, and M. Zadavec. Modeliranje procesa depozicije ledu v kondenzatorju liofilizatorja = modeling of ice deposition in lyophilizer condenser. page 71–78. Slovensko društvo za mehaniko, 2021. Nasl. z nasl. zaslona.

- [6] B. Kamenik, M. Hriberšek, and M. Zadavec. Determination of pressure resistance of a partially stoppered vial by using a coupled cfd-0d model of lyophilization. *European Journal of Pharmaceutics and Biopharmaceutics*, 175:53–64, 2022.
- [7] W. Mascarenhas, H. Akay, and M. Pikal. A computational model for finite element analysis of the freeze-drying process. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 148(1):105–124, 1997.
- [8] M. Pikal, M. Roy, and S. Shah. Mass and heat transfer in vial freeze-drying of pharmaceuticals: Role of the vial. *Journal of Pharmaceutical Sciences*, 73(9):1224–1237, 1984.
- [9] M. Ramšak, M. Zadavec, J. Ravnik, J. Iljaž, M. Avanzo, K. Kočevar, Š. Irman, M. Cegnar, I. Golobič, A. Sitar, and M. Hribersek. Numerical and experimental modeling of lyophilization of lactose and mannitol water solutions in vials. *Computational Thermal Sciences: An International Journal*, 12(5):401–415, 2020.
- [10] V. Rasetto, D. L. Marchisio, D. Fissore, and A. A. Barresi. On the use of a dual-scale model to improve understanding of a pharmaceutical freeze-drying process. *Journal of Pharmaceutical Sciences*, 99(10):4337–4350, 2010.
- [11] J. Ravnik, I. Golobič, A. Sitar, M. Avanzo, Š. Irman, K. Kočevar, M. Cegnar, M. Zadavec, M. Ramšak, and M. Hriberšek. Lyophilization model of mannitol water solution in a laboratory scale lyophilizer. *Journal of Drug Delivery Science and Technology*, 45:28–38, 2018.
- [12] P. Sane, N. Varma, A. Ganguly, M. Pikal, A. Alexeenko, and R. H. Bogner. Spatial Variation of Pressure in the Lyophilization Product Chamber Part 2: Experimental Measurements and Implications for Scale-up and Batch Uniformity. *AAPS PharmSciTech*, 18(2):369–380, 2017.
- [13] C. Song and J. Nam. A numerical study on freeze drying characteristics of cylindrical products with and without container. *International Journal of Transport Phenomena*, 7(3):241, 2005.



## *Implementacija in uporaba giroidne celice pri optimizaciji topologije*

*M. Keg<sup>1</sup>, B. Harl<sup>1</sup>, N. Gubelj<sup>1</sup> in J. Predan<sup>1</sup>*

## *Implementation and usage of a gyroid cell in topology optimization*

**Povzetek.** Pri optimizaciji topologije nosilnih konstrukcijskih delov je včasih koristno, da razporeditev materiala do neke mere predpišemo vnaprej. To lahko naredimo z uporabo tako imenovanih konfiguratorjev, s katerimi največkrat predpisujemo rešetkasto strukturo na osnovi izbranega tipa celice. V prispevku obravnavamo numerično implementacijo in uporabo celice ploskovnega tipa, ki temelji na giroidni ploskvi. Pri tem je poudarek na učinkovitosti procesiranja topološkega dopustnega prostora na velikih mrežah končnih elementov. Razen tega so obravnavane potencialne koristi uporabe takšne celice v okviru klasične optimizacije topologije, ki temelji na linearnem elastičnem modelu in minimizaciji deformacijske energije. Numerični rezultati nakazujejo, da je klasična optimizacija topologije lahko koristna tudi pri takšnih problemih, kot je na primer maksimizacija plastične disipacije pri velikih deformacijah.

**Abstract.** In optimizing the topology of load-carrying structural parts, it is sometimes useful to prescribe the material distribution to some extent in advance. This can be done by using the so-called configurators, which are most often used to prescribe a lattice structure based on a selected cell type. In this paper, we consider the numerical implementation and usage of a cell of a surface type, which is based on a gyroid surface. The focus is on the efficiency of topological domain space processing on large finite element meshes. Furthermore, the potential benefits of using such a cell in the context of classical topology optimization, which is based on a linear elastic model and strain energy minimization, are discussed. Numerical results suggest that classical topology optimization can also be useful for problems such as maximization of plastic dissipation under large deformations.

### **1 Uvod**

Optimizacija topologije (OT) mehansko obremenjenih konstrukcijskih delov je numerični postopek, kjer znotraj optimizacijske domene material razporejamo tako, da dosežemo čim boljše mehanske lastnosti končnega konstrukcijskega dela. Pri tem razporejanje materiala praviloma temelji na polju gostote deformacijske energije. V običajnih okoliščinah se razporejanje materiala vrši pri povsem odprtem topološkem dopustnem prostoru, kar pomeni, da lahko imamo ali material ali pa praznino v vsaki točki optimizacijske domene. Vendar pa v

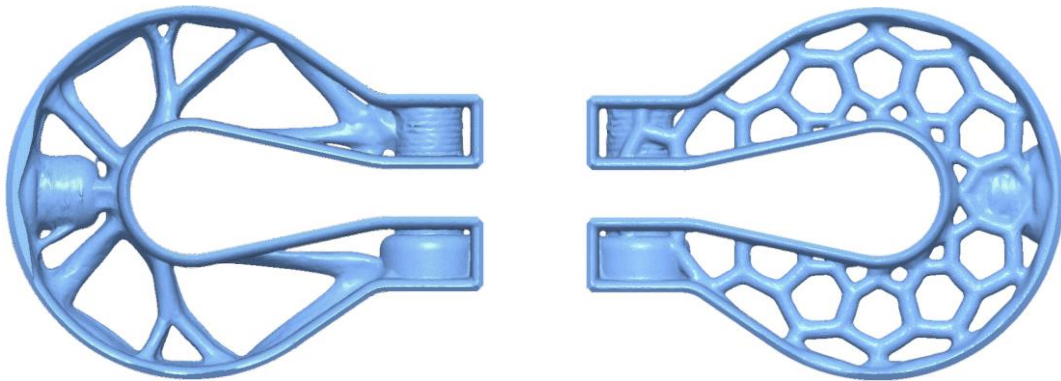
---

<sup>1</sup> Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo



praksi obstajajo okoliščine, zaradi katerih je smiselno topološki dopustni prostor omejiti in konstrukcijskemu delu vsiliti neko določeno strukturo.

Eden izmed načinov omejevanja topološkega dopustnega prostora je uporaba tako imenovanih topoloških konfiguratorjev [1]. Gre za numerična orodja, ki v bistvu vsilijo določeno strukturo razporeditve materiala na optimizacijski domeni. Najpogosteje je to celična struktura, najbolj učinkovite celice pa so običajno linijskega tipa, pri katerih je material znotraj ene celice razporejen v obliki ravnih linij. Primer rezultatov topološke optimizacije brez in z uporabo konfiguratorjev je ilustriran na sliki 1.



**Slika 1:** Rezultata topološke optimizacije: brez omejitev (levo) in z omejitvami (desno; celična struktura) topološkega dopustnega prostora

Celice linijskega tipa so praviloma definirane na osnovi končnega nabora daljic, ki predstavljajo srednjice materialnih povezav znotraj ene celice. Priljubljenost takšnih celic izvira iz preprostega dejstva, da optimizacija na topološko neomejeni domeni zelo pogosto generira ravne linijske materialne povezave. Takšne povezave so pretežno osno obremenjene in izjemno učinkovito prenašajo obremenitve konstrukcijskega dela.

V tem kontekstu se je zdela pobuda za implementacijo giroidne celice ploskovnega tipa, ki smo jo dobili s strani industrije, nekoliko nenavadna. Zato smo bili pri tehnični izvedbi zahtevka pozorni na stvari, ki bi bile lahko zanimive iz širšega vidika numerične mehanike. V tem prispevku bomo predstavili dve takšni zanimivosti. Prva se nanaša na učinkovitost procesiranja topološkega dopustnega prostora, ki ga konfiguriramo z giroidno celico. Druga zanimivost pa se nanaša na uporabo giroidne celice v okviru klasične optimizacije topologije, ki temelji na linearno elastičnem modelu in minimizaciji deformacijske energije konstrukcijskega dela.

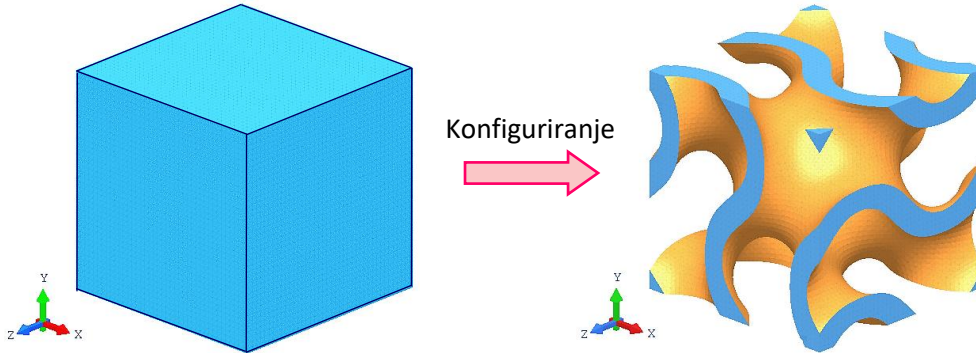
## 2 Giroidna celica

Giroid je neskončna, povezana in trikratno periodična minimalna ploskev [3]. Enačbo ploskve v implicitni obliki lahko zapišemo kot  $f = 0$ , kjer lahko dober približek funkcije  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definiramo kot

$$f = \cos c\xi \sin c\eta + \cos c\eta \sin c\zeta + \cos c\zeta \sin c\xi \quad (1)$$

Pri tem je  $c = 2\pi$ , eno polno periodo ploskve pa dobimo za  $\xi, \eta, \zeta \in [0,1]$ . Na tej osnovi lahko giroidno celico definiramo z eno polno periodo te ploskve, ki predstavlja srednjo ploskev

celice. Tej srednji ploskvi nato še predpišemo debelino  $t \in [t_{min}, t_{max}]$  v smeri normale na srednjo ploskev, slika 2. Predpisana debelina se pri tem lahko zvezno spreminja med minimalno vrednostjo  $t_{min}$  in maksimalno vrednostjo  $t_{max}$ .



**Slika 2:** Kocka konfigurirana z eno giroidno celico; kocka je diskretizirana s  $40 \times 40 \times 40 = 64000$  končnimi elementi

Giroidno celico lahko torej interpretiramo kot domeno z giroidno srednjo ploskvijo, katere debelina se lahko zvezno spreminja med neko minimalno in maksimalno vrednostjo. Možnost zveznega spreminjanja debeline v podanih mejah za potrebe optimizacije zagotovimo z ustreznim procesiranjem topološkega dopustnega prostora.

### 3 Procesiranje topološkega dopustnega prostora

Označimo s simbolom  $\mathbf{r}_p$  krajevni vektor generičnega vozlišča P mreže končnih elementov (KE); vozlišče P naj leži znotraj domene generične celice C. Označimo nadalje s simbolom  $\mathbf{r}_q$  krajevni vektor točke Q, za katero velja, da: (i) leži na skeletu celice C in (ii) je njena oddaljenost od P minimalna. Pomen pojma *skelet celice* je odvisen od tipa celice: pri linijski celici so to njene srednje linije, pri ploskovni celici pa je to njena srednja ploskev.

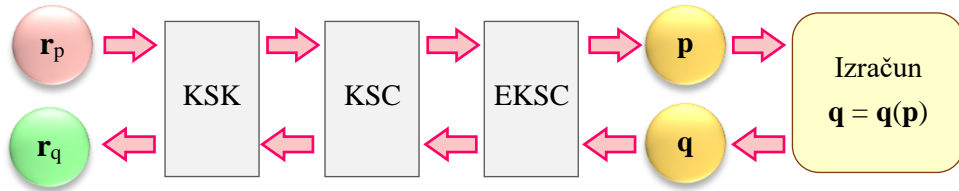
Procesiranje topološkega prostora opravi konfigurator, ki mora v ta namen za vsako vozlišče P mreže KE izračunati njegovo oddaljenost  $a$  od pripadajoče točke Q oziroma

$$a = \|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q\|, \quad \forall P \quad (2)$$

Izračun same oddaljenosti je pri tem zanemarljiv v primerjavi s količino računanja, ki je potrebna za določitev lege točke Q oziroma vektorja  $\mathbf{r}_q$ . Ta postopek je shematsko prikazan na sliki 3. Podan krajevni vektor  $\mathbf{r}_p$  najprej transformiramo iz globalnega koordinatnega sistema (KS) preko KS konfiguratorja (KSK), KS celice (KSC) in enotskega KS celice (EKSC). Na osnovi dobljene točke  $\mathbf{p} \in [0,1]^3$  nato opravimo izračun točke

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{p}) \quad (3)$$

ki predstavlja koordinate točke Q v enotskem koordinatnem sistemu celice. Izračun zaključimo s povratnimi transformacijami točke  $\mathbf{q} \in [0,1]^3$  v točko  $\mathbf{r}_q$  globalnega KS.



Slika 3: Veriga operacij potrebnih za izračun lege točke Q iz podane točke P

Izračun  $q = q(p)$  je za celice linijskega tipa trivialen in ga opravimo na osnovi enostavne formule. Pri ploskovni celici pa je situacija nekoliko drugačna. Postopek je neizogibno iterativen, kar pomeni, da ga je treba skrbno formulirati, da zagotovimo brezpogojno stabilnost, pravilnost rešitve in hkrati dovolj visoko hitrost računanja. Ne smemo namreč pozabiti, da bo moral konfigurator procesiranje pogosto opravljati na zelo velikih mrežah KE z več deset milijoni vozlišč.

Z namenom iskanja čim bolj ustreznega algoritma za izračun  $q$  smo si najprej ogledali lastnosti funkcije  $f$ . Izkazalo se je, da se njen gradient predvsem v bližini ploskve  $f = 0$  relativno malo (in v nekem smislu tudi monotono) spreminja, velikost njegove norme pa je v celotni domeni omejena z  $|\nabla f| = g \in [0, g_{max}]$ , kjer je  $g_{max} = 2\pi\sqrt{3}$ . Od tod sledi, da bi lahko v primeru, ko je  $p$  v bližini ploskve  $f = 0$ , približek  $q^*$  točke  $q$  izračunali kot

$$q^* = p + s \quad (4)$$

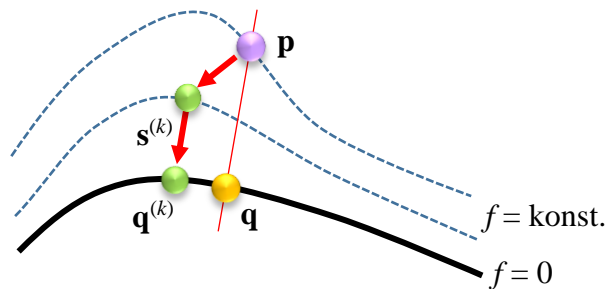
kjer je popravek  $s = \alpha d$ ,  $d = \nabla f / g$  pa je enotski smerni vektor v smeri gradienta. Izračun velikosti in predznaka faktorja  $\alpha$  opravimo na osnovi razvoja  $f(p)$  v Taylorjevo vrsto. Če pri tem člene drugega in višjega reda zanemarimo in zahtevamo, da je  $f(p + s) = 0$ , dobimo  $\alpha = -f/g$ . Od tod sledi

$$s = -\frac{f}{g} d \quad (5)$$

Ta formula nam da zadovoljivo natančen rezultat v primeru, ko je  $p$  v bližini srednje ploskve  $f = 0$ . Z oddaljevanjem  $p$  od srednje ploskve pa se napaka v izračunu točke  $q$  povečuje in gre preko vseh meja, ko gre  $g \rightarrow 0$ . Da bi ta problem odpravili, smo poskusili kar z naslednjo enostavno rešitvijo: zaporedne približke  $q^{(k)}$  točke  $q$  računamo s postopnim dodajanjem iterativnih popravkov

$$s^{(k+1)} = -\frac{f^{(k)}}{g_{max}} d^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2 \dots \quad (6)$$

točki  $q^{(k)}$ , kjer vzamemo  $q^{(0)} = p$ ,  $f^{(k)}$  in  $d^{(k)}$  pa sta izračunana v  $q^{(k)}$ . Pri tem je namesto količine  $g$  v imenovalcu uporabljena količina  $g_{max}$ . S to zamenjavo smo zagotovili brezpogojno stabilnost postopka, v katerem se srednji ploskvi  $f = 0$  vedno in zagotovo približujemo samo z ene strani, slika 4. Pri takšni izbiri se število iteracij, potrebnih za doseganje dovolj dobre natančnosti, tipično giblje nekje med 5 in 10, kar ni veliko.



**Slika 4:** Iterativno računanje približka  $\mathbf{q}^{(k)}$  točke  $\mathbf{q}$  iz startne točke  $\mathbf{p}$

Težava pri uporabi opisanega postopka bi lahko nastopila le izjemoma, če bi točka  $\mathbf{p}$  natanko sovpadala z eno izmed redkih izoliranih točk domene celice, v katerih imamo  $g = 0$ . V tem primeru se namreč ne da izračunati smernega vektorja  $\mathbf{d}$ . V takšnih primerih je dovolj, da točko  $\mathbf{p}$  malenkost premaknemo v smeri središča domene celice, kjer je  $g \neq 0$ . Po tem premiku lahko opisan postopek izvedemo brez težav.

#### 4 Uporaba giroidne celice pri klasični optimizaciji topologije

Klasična optimizacija topologije temelji na minimizaciji deformacijske energije linearno elastičnega modela. Rezultat optimizacije je konstrukcijski del, ki izkazuje maksimalno togost in minimalne napetosti (vsaj na rezanih površinah) pri nekem izbranem volumnu materiala. Pri tem najboljšo rešitev zagotovo dosežemo v primeru, ko topološki dopustni prostor ne vsebuje nobenih omejitev. Kljub temu topološki prostor pogosto omejujemo z uporabo konfiguratorjev. Razlogi za to so lahko mehanski, toplotni (hlajenje) ali še kakšni drugi, vendar pa je vsem skupno to, da z njimi izpolnjujemo zahteve, ki jih je sicer praktično nemogoče vključiti v matematični opis optimizacijske naloge.

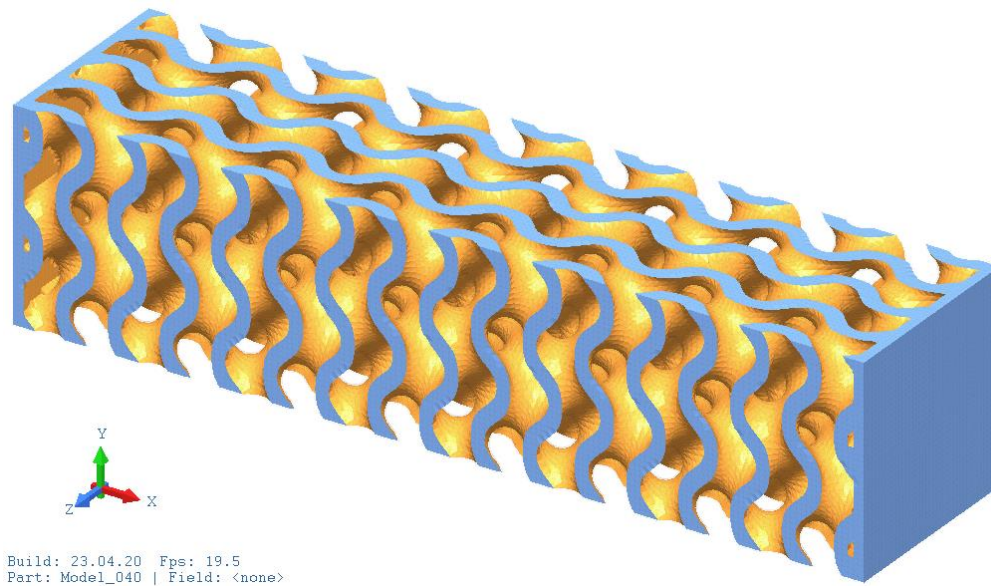
Z namenom upoštevanja raznih mehanskih razlogov konfiguriranje praviloma opravimo z uporabo celice linijskega tipa z ravnimi materialnimi povezavami. V tem kontekstu je uporaba giroida, ki ne vsebuje niti ene ravne linije, na prvi pogled nekoliko nenavadna. Posledično se lahko upravičeno vprašamo, v kakšnem kontekstu bi bila uporaba giroidne celice zanimiva. V ta namen si bomo ogledali dva primera: A in B.

##### 4.1 Primer A: izboljšanje robustnosti konstrukcijskega dela

Optimizacija na neomejenem topološkem prostoru končno obliko konstrukcijskega dela popolnoma prilagodi zahtevam, ki jih odraža optimizacijska naloga. Zahteve, ki jih nismo uspeli vgraditi v nalogo, lahko v nekaterih okoliščinah vzamemo v obzir z uporabo konfiguratorjev in celičnih struktur. Na ta način lahko včasih izboljšamo odziv sistema v primeru nepredvidene obremenitve, pojava razpoke zaradi utrujanja materiala ali v kakšnih drugih situacijah. S tem lahko izboljšamo robustnost konstrukcijskega dela v primeru posebnih in neobičajnih okoliščin.

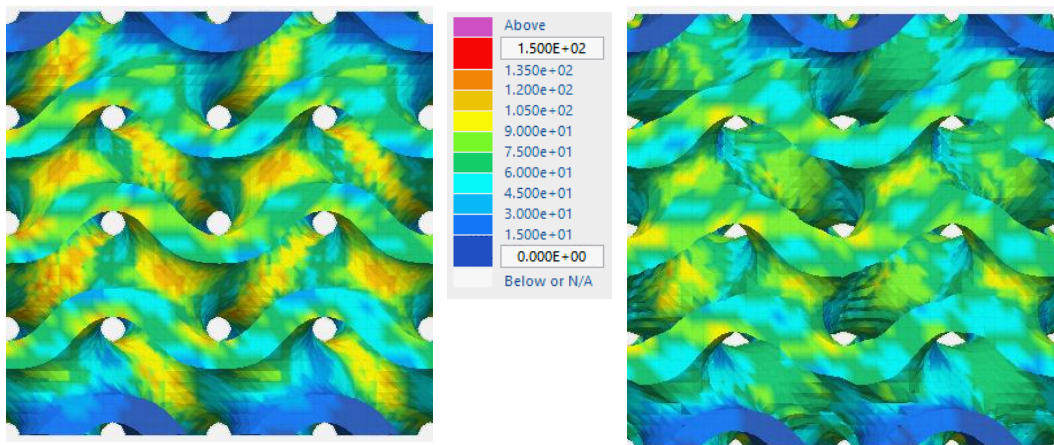
Celična struktura lahko torej prinese neke koristi, seveda pa ni nobenega razloga za to, da bi morala biti vsaka celica natanko enaka ostalim. Optimizacija topologije lahko tu opravi zelo koristno nalogo finega prilagajanja končne oblike vsake celice posebej. Na ta način lahko mnogokrat precej zmanjšamo napetosti v celični strukturi.





**Slika 5:** Model konzole konfigurirane z  $8 \times 2 \times 2$  celicami (1.5 milijona KE)

Za ilustracijo takšne uporabe optimizerja pri giroidni celici smo izbrali primer konfigurirane konzole, slika 5. Pri tem celična struktura ni obdana z lupino, ki je sicer v takšnih primerih običajna; to smo naredili namenoma, da bi bile napetostne razmere lepše vidne. Na enem koncu je konzola fiksno podprta, na drugem koncu pa je obremenjena s tremi ločenimi obremenitvenimi primeri: (i) nateg v smeri  $x$ , (ii) upogib okrog osi  $z$  ter (iii) torzija okrog  $x$ . Obremenitve so skalirane tako, da dobimo pri vsaki obremenitvi približno enake maksimalne napetosti.



**Slika 6:** Misesove napetosti v izhodiščni (levo) in optimirani (desno) konzoli; prikazan je segment konzole v bližini podprtja konzole

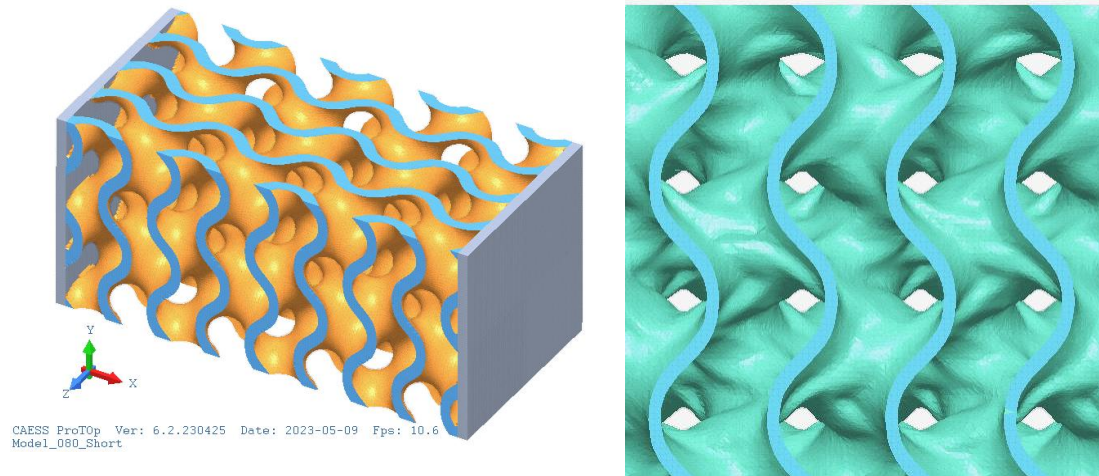
Izhodiščni model konzole ima celične stene konstantne debeline. Ta model smo nato optimirali (CAESS ProTOP) tako, da se je volumen uporabljenega materiala ohranil, debelina stene pa

se je lahko spreminjala v mejah  $\pm 28\%$ . Napetostne razmere pri izhodiščnem in optimiranem delu prikazuje slika 6. Opazno je precejšnje zmanjšanje velikosti napetosti. Referenčna napetost, ki meri razmere na rezanih površinah [2], se je od izhodiščne vrednosti  $\sigma_R = 75.4$  MPa po optimizaciji zmanjšala na  $\sigma_R = 59.3$  MPa.

#### 4.2 Primer B: maksimizacija plastične disipacije konstrukcijskega dela

Za optimizacijo topologije že zaradi računske zahtevnosti največkrat uporabljamo linearno elastični model konstrukcijskega dela. Tak pristop pa je lahko koristen tudi v primeru, ko bo dejanski odziv obravnavanega dela v realnih okoliščinah visoko nelinearen. Ena od takšnih okoliščin bi lahko bila uporaba rešetkaste strukture za namen absorpcije energije pri velikih deformacijah in plastifikaciji materiala. Giroidna celica je verjetno kar dobra osnova za izdelavo takšne strukture.

Pri giroidni celici lahko na količino absorbirane energije pri velikih deformacijah in plastifikaciji vplivamo preko parametrov, kot sta velikost celice in (konstantna) debelina njene stene. Seveda pa tudi tukaj ni nobenih ovir za to, da nebi sposobnosti disipacije energije prilagajali tudi preko nastavljanja zvezno spremenljive debeline stene celice. Zdi se, da lahko v tem kontekstu koristno delo opravi tudi optimizacija topologije na linearno elastičnem modelu. Optimizacija topologije ima namreč za posledico napetostna polja, ki so bolj enakomerna kot tista pred optimizacijo. Enakomernejša napetostna polja pa bi morala rezultirati v večjih in bolj enakomernih področjih plastifikacije materiala. Domnevamo, da bi se s tem morala spreminjati tudi plastična disipacija – energija, porabljena za plastifikacijo materiala.



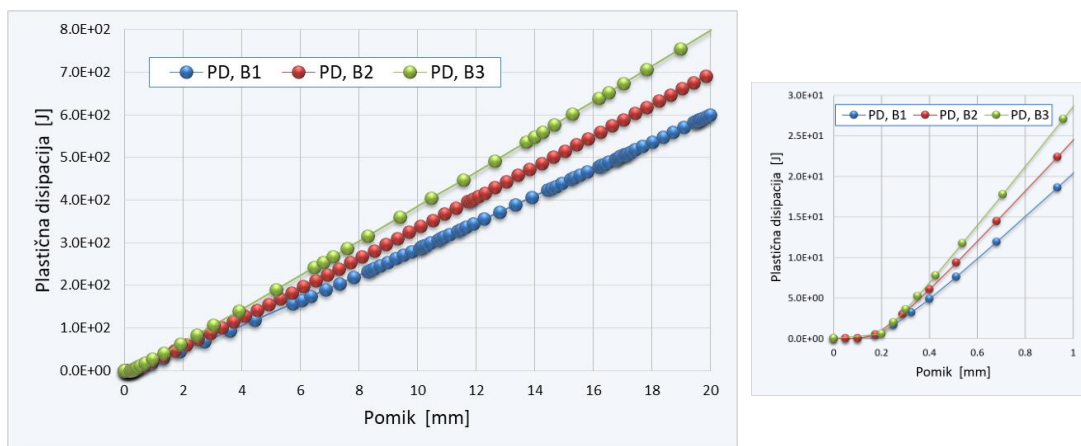
**Slika 7:** Model kratke konzole konfiguriran z  $2 \times 2 \times 4$  celicami (levo; 6 milijonov KE) in segment optimirane konzole (desno; primer B3)

Da bi takšno razmišljanje potrdili ali ovrgli, smo si zamislili model kratke konzole, slika 7, ki bo konfigurirana z uporabo giroidne celice. Ena stranica konzole je fiksno podprta, druga stranica pa je obremenjena preko predpisanega pomika. Pomik je predpisan v negativni smeri  $x$ , kar za konzolo predstavlja tlačno obremenitev. Na tej osnovi smo z ustreznim konfiguriranjem in optimizacijo (CAESS ProTOP) pripravili 3 primere, in sicer:

- B1: debelina sten celic je konstantna
- B2: debelina sten celic je optimirana v mejah  $\pm 26\%$
- B3: debelina sten celic je optimirana v mejah  $\pm 50\%$ , slika 7 (desno)

Volumski delež oziroma količina uporabljenega materiala sta pri vseh treh primerih enaka.

Mehanski odziv vseh treh primerov pri velikih pomikih in plastifikaciji smo nato preizkusili numerično (SIMULIA Abaqus). Model konzole med stranicama vsebuje segment celične strukture dolžine  $L = 80$  mm. Kot obremenitev je bil predpisan pomik  $u = 20$  mm proste stranice, kar predstavlja 25% začetne dolžine celične strukture med stranicama. Predpisali smo elasto-plastičen (trilinearen) materialni model. Uporabljena je bila predpostavka velikih pomikov, pri čemer so deformacije merjene s hitrostrnim tenzorjem deformacij; za merjenje napetosti se pri tem uporablja Cauchyev tenzor kot dovolj dober približek Kirchhoffovega napetostnega tenzorja. Možnost kontakta oziroma nasedanja med posameznimi stenami celične strukture ni bila upoštevana.

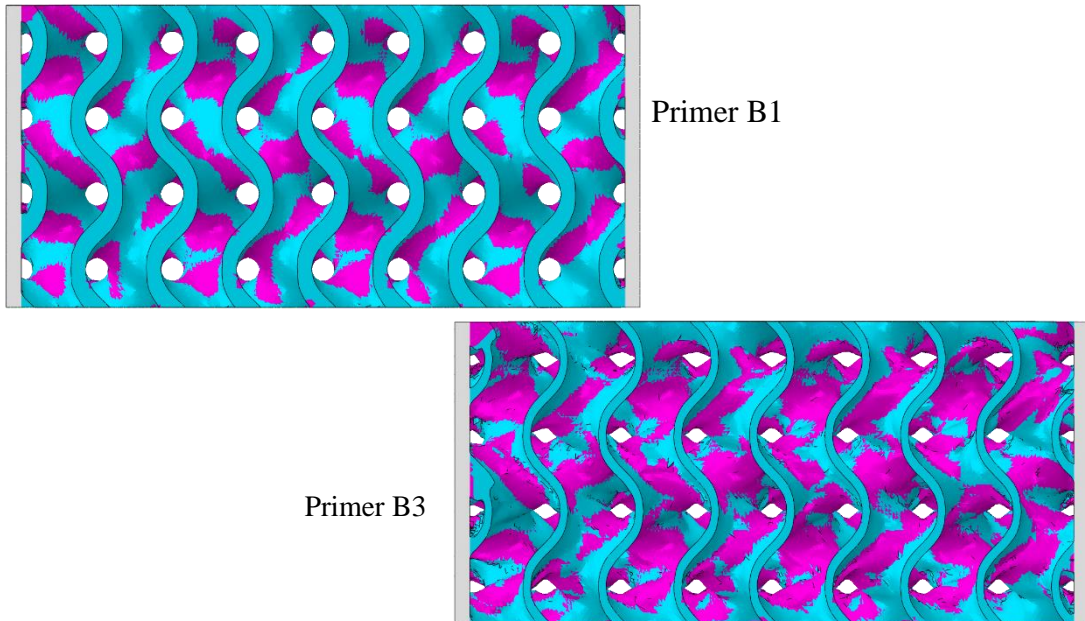


**Slika 8:** Plastična disipacija: v celotnem območju obremenjevanja (levo) in detajl na začetku obremenjevanja (desno)

Diagrami plastične disipacije za vse tri primere so prikazani na sliki 8. Vidimo lahko, da plastična disipacija z uporabo optimizacije naraste. Natančneje, bolj kot je imel optimizirane proste roke oziroma bolj kot smo odprli topološki dopustni prostor, večja je bila plastična disipacija.

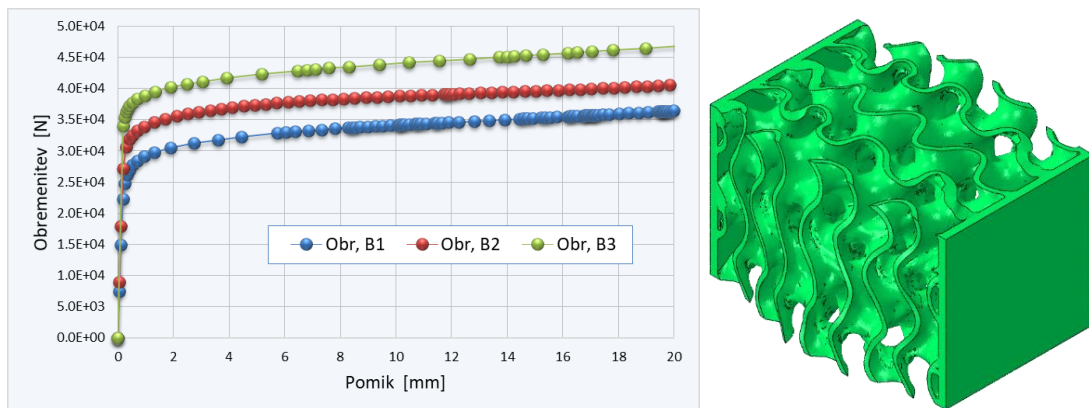
Izhodiščna predpostavka za primer B je bila, da bi plastična disipacija zaradi optimizacije lahko narastla, ker bodo pri optimirani konfiguraciji napetostna polja bolj enakomerna. Posledično se bi naj proces plastifikacije odvijal na večjih področjih strukture. Numerična analiza je ta pričakovanja lepo potrdila. Na sliki 9 je prikazano stanje plastifikacije v relativno zgodnji fazi obremenjevanja, in sicer za primera B1 in B3. Vidimo lahko, da so področja plastificiranega materiala v primeru B3 precej večja kot v primeru B1, kar je očitno posledica drugače razporejenega materiala zaradi optimizacije.





**Slika 9:** Plastificirana območja (rdeča barva) pri trenutnem pomiku  $u = 0.25$  mm

Za konec je morda vredno pogledati še potek obremenitvenih sil. Če se plastifikacija odvija na širšem območju, bi se moralo to poznati tudi na silah, s katerimi je bil del obremenjen. Potek slednjih prikazuje slika 10 (levo).



**Slika 10:** Obremenitvena sila za vse tri primere (levo) in polno deformirana struktura za primer B3 (desno)

Po pričakovanih velikost obremenitve narašča od primera B1 proti B3. Na sliki (desno) je prikazana tudi polno deformirana (pomik 20 mm) struktura, kjer se da videti, da pri tem predpisanem pomiku še ni prišlo do medsebojnega kontakta oziroma nasadanja med posameznimi segmenti celične strukture.



## 5 Zaključek

Glede na numerične izsledke lahko zaključimo, da lahko s predlaganim algoritmom topološki dopustni prostor na osnovi giroidne celice procesiramo relativno zelo hitro in zanesljivo. Numerična stabilnost postopka je zagotovljena, dobljene geometrije pa so več kot dovolj natančne za namen optimizacije. Glede uporabe giroidne celice v okviru optimizacije topologije lahko potrdimo, da optimizacija na osnovi linearnega modela lahko opravi koristne fine korekcije osnovne oblike celičnih struktur. Koristi lahko pričakujemo v vseh primerih, kjer je pomembna čim enakomernejša razporeditev napetostnih polj.

## Zahvala

Raziskavo je finančno podprla Javna agencija za raziskovalno dejavnost (ARRS) v okviru programa P2-0137 Numerična in eksperimentalna analiza nelinearnih mehanskih sistemov.

## Literatura

- [1] B. Harl, J. Predan, N. Gubelj N in M. Kegl, *On configuration-based optimal design of load-carrying lightweight parts*. Int. Journal of Simulation Modelling 16(2), 219--228, 2017.
- [2] B. Harl, J. Predan, N. Gubelj N in M. Kegl, *Influence of Variable Support Conditions on Topology Optimization of Load-Carrying Parts*, Technical Gazette 27(5), 1501--1508, 2020.
- [3] Schoen, A. H., *Infinite periodic minimal surfaces without self-intersections*, NASA Technical Note, NASA TN D-5541, 1970.



## *Topološka optimizacija domene z upoštevanjem povezanega toplotno mehanskega odziva*

Peter Kočman<sup>1</sup>, Jože Korelc<sup>1</sup>

### *Topological optimization of the domain with considering the coupled thermo-mechanical response*

**Povzetek.** V besedilu je predstavljen koncept topološke optimizacije za mehansko, toplotno in povezano optimizacijo. Pri tem je prvi del besedila posvečen formulaciji topološke optimizacije in drugi del besedila računskim primerom. Vsi računski primeri predstavljajo topološko optimizacijo na relativno nezahtevni geometriji, ki se v literaturi pogosto uporablja za primerjavo različnih topološko optimizacijskih algoritmov.

**Abstract.** This text introduces the concept of topological optimization for mechanical, thermal and coupled optimization. The first part of the text is devoted to the formulation of topological optimization and the second part to computational examples. All the computational examples represent topological optimization on a relatively uncomplicated geometry, which is often used in the literature to compare different algorithms.

## 1 Uvod

Topološka optimizacija je matematična metoda, ki omogoča optimizacijo postavitve materiala v domeni za dani niz obremenitev in robnih pogojev s ciljem povečati zmogljivost sistema. Optimizacija topologije se razlikuje od klasične optimizacije struktur v smislu, da lahko načrt doseže katerokoli obliko znotraj opazovanega prostora, brez da bi se vnaprej ukvarjali s konfiguracijo. Običajna formulacija optimizacije topologije uporablja metodo končnih elementov za oceno učinkovitosti načrtovanja. Vhodno zasnovo optimiziramo z uporabo tehnik matematičnega modeliranja, ki temeljijo na gradientu, kot so algoritem meril optimalnosti in metoda premikanja asimptot, ali algoritmov, ki ne temeljijo na gradientih, kot so genetski algoritmi. Topološka optimizacija ima široko paleto aplikacij v vesoljskem, strojnem in gradbenem inženirstvu. Trenutno inženirji večinoma uporabljajo topološko optimizacijo na ravni

---

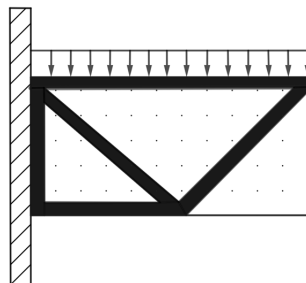
<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

konceptualnega načrtovanja. Topološka optimizacija se lahko uporablja za optimizacijo večjih in manjših struktur, kot so mostovi in zgradbe ter za oblikovanje materialov na mikro in nano ravneh. Zaradi poljubnih oblik, ki so rezultat topološke optimizacije, je dano obliko pogosto težko izdelati. Zaradi tega je rezultat, ki izhaja iz samega procesa topološke optimizacije, pogosto potrebno nekoliko prilagoditi glede na zmogljivost proizvodnje. Nove priložnosti izdelave pridobljenih kompleksnih oblik predstavljajo inovativne tehnologije 3D printanja, ki so danes že uporabne za vrsto gradbenih materialov. V primerjavi z drugimi vrstami strukturne optimizacije je topološka optimizacija kontinuuma strukture tehnično daleč najzahtevnejša in hkrati ekonomsko najbolj donosna. Namesto omejevanja sprememb na ravni strukturnih komponent, topološka optimizacija zagotavlja veliko več svobode oblikovalcu in omogoča, da ustvari popolnoma nove in visoko učinkovite idejne zasnove za strukture kontinuuma. Podobno kot lahko optimiziramo strukture na podlagi mehanskih pogojev, lahko ekstrapoliramo metodo topološke optimizacije na optimizacijo struktur s toplotnimi robnimi pogoji. Visoka temperatura in mehanska obremenitev imata obe velik vpliv na zmogljivost konstrukcije, zaradi česar je pomembno upoštevati hkratni termo mehanski učinek pri optimizaciji topologije.

## 2 Mehanska topološka optimizacija

### 2.1 SIMP metoda

Najbolj priljubljena metoda za optimizacijo topologije je tako imenovana "Solid Isotropic Material with Penalization method" (SIMP). [1] ter [7] so med prvimi predlagali metodo SIMP. Metoda podobno kot evolucijski pristop predvidi optimalno porazdelitev materiala znotraj danega načrtovalnega prostora za dane primere obremenitve, mejne pogoje, proizvodne omejitve in zahteve glede zmogljivosti. Po Bendsoeju [1]: "Optimizacija oblike bi morala v svoji najbolj splošni postavitvi vsebovati informacijo za vsako točko v prostoru, ali je v tej točki material ali ne." Tradicionalni pristop k optimizaciji topologije je diskretizacija domene v mrežo končnih elementov, imenovanih izotropne trdne mikrostrukture. Porazdelitev gostote materiala v domeni načrtovanja,  $\rho$ , je diskretna in vsakemu elementu se dodeli binarna vrednost:  $\rho_{(e)} = 1$ , če element vsebuje material in  $\rho_{(e)} = 0$ , če element ne vsebuje materiala. Na primer, slika 1. prikazuje optimizirano postavitev materiala linijsko obremenjenega vpetega nosilca.



**Figure 1:** S črno barvo so označeni preostali vključeni elementi, medtem ko z belo barvo izključeni elementi znotraj domene nosilca.

Z uvedbo neprekinjene porazdelitve funkcije gostote se izognemo binarni, vklopno-izklopni naravi problema. Za vsak element se lahko dodeljena relativna gostota giblje med minimalno vrednostjo  $\rho_{min}$  in 1, kar omogoča dodelitev vmesnih gostot za elemente (označene kot porozne elemente):  $\rho_{min}$  je najmanjša dovoljena vrednost relativne gostote za prazne elemente, ki so večji od nič. Ta vrednost gostote zagotavlja numerično stabilnost analize končnih elementov. Ker se lahko relativna gostota materiala nenehno spreminja, se lahko tudi Youngov modul materiala pri vsakem elementu nenehno spreminja. Za vsak element  $e$  je razmerje med faktorjem relativne gostote materiala  $\rho_{(e)}$  in Youngovim modulom elastičnosti dodeljenega modela izotropnega materiala  $E_0$  izračunano s potenčnim zakonom:

$$E(\rho_{(e)}) = \rho_e^p E_0.$$

Parameter izključitve  $p$  zmanjša prispevek elementov z vmesnimi gostotami (sivi elementi) k skupni togosti. Parameter izključitve tako usmerja optimizacijsko rešitev za elemente, ki so bodisi črni  $\rho_{(e)} = 1$  bodisi prazni beli  $\rho_{(e)} = \rho_{min}$ . Numerični poskusi kažejo, da je vrednost faktorja kazni  $p = 3$  primerna. Zmanjšanje modula elastičnosti materiala elementa vodi do zmanjšanja togosti elementa. Po metodi SIMP se globalna togost modulira glede na:

$$K_{SIMP} = \sum_{e=1}^N [\rho_{min} + (1 - \rho_{min})\rho_e^p] K_e.$$

Priljubljen cilj topološke optimizacije je maksimirati celotno togost konstrukcije ali zmanjšati njeno skladnost pri dani odstranitve mase. Skladnost je merilo splošne prožnosti ali mehкости strukture in je vzajemna togost. Globalna skladnost je enaka vsoti energij elastičnosti ali deformacije elementa. Zmanjšanje globalne skladnosti,  $C$ , je enakovredno povečanju globalne togosti. Optimizacijski algoritem z iterativnim postopkom poskuša pridobiti gostoto elementov (ki so spremenljivke optimizacijskega načrta) in s tem doseči globalno skladnost strukture:

$$\min(C(\rho)) = \sum_{e=1}^N (\rho_e)^p u_e^T [K_e] u_e.$$

kjer je  $[u_e]$  vektor vozličnega premika elementa  $e$ ,  $[K_e]$  je tangenta matrika elementa  $e$ , vektor  $\rho$  pa vsebuje relativno gostoto elementov  $\rho_e$ . Med vsako iteracijo topološke optimizacije morajo biti izpolnjene ciljna omejitev mase, globalno ravnovesje sila-togost in zahtevane funkcionalne omejitve:

$$\sum_{e=1}^N (V_e)^T \rho_e \leq f_r.$$

kjer je  $V_e$  prostornina elementa in  $f_r$  predpisan prostorninski delež. Med vsako ponovitvijo algoritma optimizacije izvede analizo občutljivosti, da oceni vpliv, ki ga ima variacija gostote materiala na ciljno funkcijo za čim večjo togost. Matematično je analiza občutljivosti izražena kot izpeljanka ciljne funkcije glede na gostoto materiala:

$$\frac{dC}{d\rho_e} = -p(\rho_e)^{p-1} u_e^T [K_e] u_e.$$

Med analizo občutljivosti elementi, obteženi z nizkimi faktorji gostote materiala, sčasoma izgubijo svoj strukturni pomen in v nadaljnjih ponovitvah izločijo. Če izračunamo občutljivost za vsak element neodvisno in ne upoštevamo povezanosti med elementi, lahko to privede do prekinitve materiala v domeni. To je znano kot pojav šahovnice. Za zmanjšanje učinka šahovnice uporabljamo shemo filtra, polmer vpliva elementa in izračun povprečja občutljivosti vsakega elementa znotraj njegovega območja vpliva. Iteracije optimizacije se nadaljujejo, dokler se variacije ciljne funkcije ne zblížajo in ponovitve ne dosežejo konvergence.

## 2.2 Formulacija mehanske topološke optimizacije

Cilj klasične topološke optimizacije je skratka najti optimalno porazdelitev materiala znotraj dane domene, tako da minimiziramo ciljno funkcijo. Namen ciljne funkcije je običajno najti strukturo z največjo togostjo ali enakovredno minimalno energijo deformacije:

$$c(u) = \Pi^{int}(u) = \sum_{e=1}^N \int_{\Omega} \bar{W}(u_e) d\Omega_e.$$

kjer  $\bar{W}$  predstavlja specifično energijo deformacije na enoto prostornine. Glede na pristop gostote je topološka optimizacija rešena z diskretizacijo domene  $\Omega$  na elemente, kjer je gostota vsakega elementa  $x_e$  spremenljivka načrtovanja. Naj bo  $x = Ux_e$  vektor oblikovnih spremenljivk. Problem lahko posledično zapišemo kot:

$$\begin{aligned} \min(C(u(x), x)) &= \sum_{e=1}^N \int_{\Omega} \bar{W}(u_e(x), x_e) d\Omega_e, \\ 0 &< x_e < 1, \\ \frac{V(x)}{V_0} &= f_r, \end{aligned}$$

kjer polje pomika  $u$  izpolnjujejo ravnotežne enačbe,  $V_0 = \sum_e \Omega_e$  je prvotni volumen,  $V(x) = \sum_e x_e \Omega_e$  je načrtovalni volumen in  $f_r$  predpisan prostorninski delež. V primeru pristopa SIMP definiramo funkcijo energije deformacije  $\bar{W}$  kot:

$$\bar{W}(u_e(x), x_e) = x_e^p W(u_e),$$

kjer je  $p$  parameter izključitve ( $p \geq \max(\frac{2}{(1-V)}, \frac{4}{(1+V)})$ ),  $p = 3$  zagotavlja dobro stopnjo konvergence) in  $W$  funkcija energije deformacije trdnega materiala. Problem se običajno rešuje z optimizacijskim algoritmom, ki temelji na gradientu, volumetrična omejitev pa je opisana z metodo Lagrangeevega množitelja  $\lambda$ . Gradient ciljne funkcije in prostornine za linearne elastične probleme nas pripelje do precej enostavnih izrazov:

$$\begin{aligned} S_e &= \frac{D_e}{D_{x_e}} = -p \frac{\Pi_e}{x_e}, \\ \Omega_e &= \frac{dV(x)}{dx_e}. \end{aligned}$$

Problem omejene optimizacije je rešen s pomočjo metode standardnih kriterijev optimalnosti z naslednjo iteracijsko shemo:

$$x_e^{new} = \begin{cases} \max(x_{min}, x_e - m), & \{ x_e B_e^\eta \leq \max(x_{min}, x_e - m) \\ x_e B_e^\eta, & \{ \min(1, x_e + m) < x_e B_e^\eta < \max(x_{min}, x_e - m) \\ \min(1, x_e + m), & \{ \min(1, x_e + m \leq x_e B_e^\eta) \end{cases}$$

kjer je  $m$  pozitivna meja pomika,  $\eta$  konstanta dušenja in  $B_e = \left(-\frac{dc}{\lambda \frac{d(x_e)}{dx_e}}\right) = \frac{-S_e}{\lambda} \Omega_e$ . Lagrangeev množitelj  $\lambda$  izračunamo z metodo bisekcije na način, da zadostimo pogoju  $\frac{V(x)}{V_0} = f_r$ . Da bi se izognili vzorcem šahovnice, se dodatno uporabi filter občutljivosti ciljne funkcije, kot je to opredelil Sigmund [8].

### 2.3 Toplotna topološka optimizacija

Za toplotne probleme podobno kot pri mehanski topološki optimizaciji definiramo optimizacijsko funkcijo, ki je v tem primeru notranja toplotna energija sistema:

$$C = \sum_{e=1}^N \int_{\Omega} \nabla T (k \nabla T) d\Omega_e = \sum_{e=1}^N \Pi_e.$$

V primeru pristopa SIMP definiramo funkcijo energije deformacije  $\bar{W}$  kot:

$$\bar{W}(u_e(x), x_e) = x_e,$$

kjer za toplotno optimizacijski primer uporabimo vrednost parametra izključitve  $p=2$ . Gradient ciljne funkcije in prostornine za linearni prenos toplote nas pripelje do precej enostavnih izrazov:

$$S_e = \frac{dV_e}{dx_e} = -p \frac{\Pi_e}{x_e},$$

$$\Omega = \frac{dV(x)}{dx_e}.$$

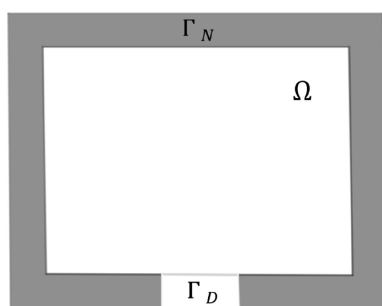
Problem omejene optimizacije je rešen s pomočjo metode standardnih kriterijev optimalnosti, kot je to že opisano za mehansko topološko optimizacijo. Za delovanje SIMP metode moramo poskrbeti, da v dani domeni  $\Omega$  ustrezno definiramo problem z ustreznimi robnimi pogoji. Stacionarni prenos toplote po vsej domeni je mogoče predstaviti z naslednjimi enačbami:

$$\nabla T (k \nabla T) + f = 0 \text{ na } \Omega, \quad (1)$$

$$T = 0 \text{ na } \Gamma_D, \quad (2)$$

$$(k \nabla T) n = 0 \text{ na } \Gamma_N, \quad (3)$$

kjer je  $T$  spremenljivka temperaturnega stanja,  $f$  je ustvarjena toplota in  $k$  je toplotna prevodnost materiala v domeni  $\Omega$ . Na Dirchletovi meji,  $\Gamma_D$ , ki jo imenujemo esencialni robni pogoj, je temperatura nastavljena na 0. Adiabatiski Neumannov mejni pogoj,  $\Gamma_N$ , pa smatramo kot naravni robni pogoj, kot je to razvidno na sliki 2.



**Figure 2:** Robni pogoji za opis optimizacijskega problema.

### 3 Povezana toplotno mehanska topološka optimizacija

Delovno območje, statična trdnost in toplotna prevodnost so trije pomembni vidiki, ki jih je treba upoštevati pri načrtovanju mehanskih struktur. Temperatura številnih naprav bi se morala biti vzdrževati v razumnem temperaturnem območju. Ko se temperatura določene komponente naprave dvigne nad določeno temperaturo in struktura naprave ne odvaja toplote učinkovito, se lahko naprava poškoduje in s tem predstavlja tveganje. Istočasno pa mora zasnovana struktura prenašati določene obtežbe. Optimizacija topologije za termo-mehansko povezane probleme predstavlja velik izziv, ker spada v vrsto problemov, odvisnih od konstrukcije, pri katerih se obremenitev toplotne napetosti spreminja z prostorsko razporeditvijo materiala. Trenutno obstaja veliko rezultatov raziskav o načrtovanju optimizacije topologije za termo-mehanske sklopljene probleme ([4], [3], [5], [2]). Rodrigues [6] je prvič predstavil računalniški model za problem optimizacije topologije z uporabo materiala porazdelitveni pristop linearno-elastične trdne snovi, izpostavljene toplotnim obremenitvam, s ciljno funkcijo skladnosti in izoparametrično omejitvijo prostornine. Kljub velikem številu obstoječih raziskav, optimizacija temperaturno omejene topologije za termo-elastične strukture pod temperaturnim poljem, odvisnim od konstrukcije, ob upoštevanju toplotnega raztezanja učinek ostaja odprt problem, saj se pogosto srečujemo z numeričnimi izzivi in matematično pravilnostjo formulacije problema.

#### 3.1 Formulacija termo-mehanske topološke optimizacije

V tem razdelku je predstavljen problem linearne elastičnosti, ki povezuje problem prevodnosti toplote s toplotnim. Oglejmo si domeno s fiksno zamaknjeno mejo  $\Gamma_{u_0}$  in fiksno temperaturno mejo  $\Gamma_{T_0}$ . Kot je prikazano na sliki 3., na površino deluje površinska sila  $F$  Neumannova meja in površinski toplotni tok  $h$  leži na meji  $\Gamma_h$ . V tem članku samo obravnava se problem enakomerne toplotne prevodnosti. Poleg tega privzamemo, da je material izotropen. Osnovne enačbe za problem termo elastičnega povezanega problema so:

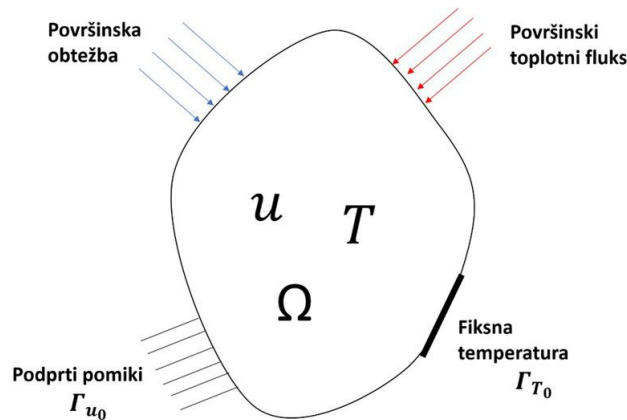
$$-\nabla(k\nabla T) = 0 \quad \text{na } \Gamma_{T_0}, \text{ pri tem je } T = T_0, \quad (4)$$

$$-\nabla\sigma(u(\Delta T)) = f \quad \text{na } \Gamma_{u_0}, \text{ pri tem je } u = 0 \quad (5)$$

Za topološko optimizacijo uporabimo SIMP pristop, kjer v prvem koraku določimo optimizacijsko funkcijo, podobno kot v prejšnjih dveh primerih (mehanska in toplotna optimizacija). Pri povezanem problemu za optimizacijsko funkcijo izberemo utežen seštevek energij mehanskega  $W_{SE}$  in toplotnega  $W_{TH}$  dela na naslednji način:

$$W = \alpha W_{SE} + \beta W_{TH},$$

pri tem sta  $\alpha$  in  $\beta$  uteži.



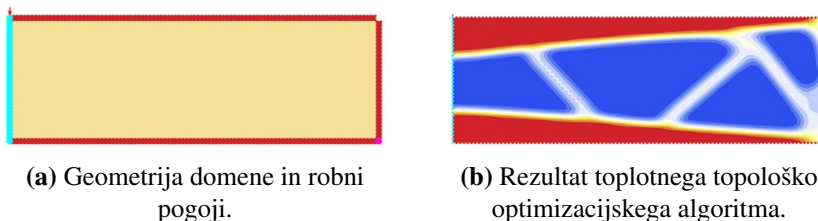
**Figure 3:** Linearno elastična domena z apliciranim površinskim toplotnim fluksom in površinsko obtežbo.

## 4 Računski primeri

### 4.1 Ravni primer povezanega termo mehanskega problema

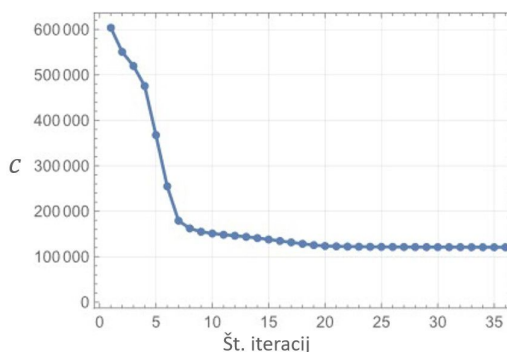
Kot najenostavnejši primer vzemimo pravokotnik, dimenzij 40x120. Z rdečo barvo je označen naravni robni pogoj in z turkizno modro, esencialni robni pogoj. Material, ki zapolnjuje domeno ima predpisano toplotno prevodnost  $k = 45$ , debelino  $t = 1$ , gostoto  $\rho = 7500$ , elastičnim modulum  $E = 210000$  in Poissonovim količnikom  $\nu = 0,3$ . Skrajno leva stranica predstavlja podprte prostostne stopnje in fiksno temperaturo, ki je nastavljena na  $T = 0^\circ\text{C}$ . Pravokotnik je prav tako podprt v skrajno desni spodnji točki, kjer se preprečeni horizontalni pomiki. V skrajno levi točki zgoraj pravokotnik obremenimo z silo  $F = 10$  in na vseh stranicah, ki niso podprte predpišemo robno temperaturo  $T = 1^\circ\text{C}$ , kot je to prikazano na sliki 4a.





**Figure 4:** Prikaz domene, robnih pogojev in rezultata topološke optimizacije.

Na sliki 4b. je razvidna optimalna oblika domene, ki je rezultat optimizacijskega algoritma. Optimum dosežemo v območju 20-30 iteracij, kot je to razvidno na sliki 5. Izrednega pomena je prav tako, da predpišemo težo določenemu delu energije, ki jo uporabimo pri optimizaciji. S tem določimo kateri izmed pojavov je za nas ključnega pomena, saj je rezultat izredno občutljiv na omenjeno predpostavko. Na sliki 4b. lahko vidimo, da smo pri dani konfiguraciji dobili obliko, ki je predvsem značilna za mehansko optimizacijo.



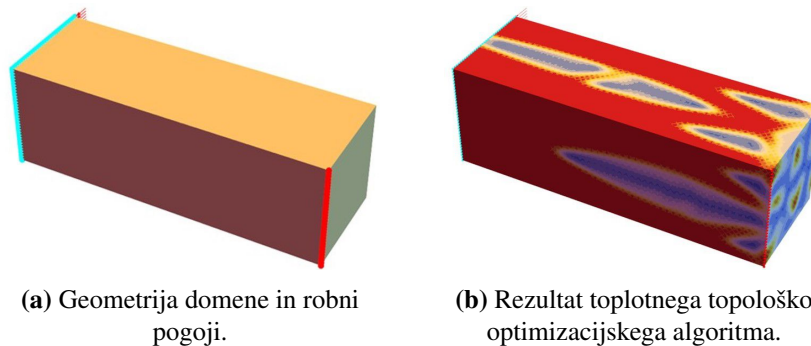
**Figure 5:** Vrednost ciljne funkcije v odvisnosti od števila iteracij.

## 4.2 3D primer povezanega termo mehanskega problema

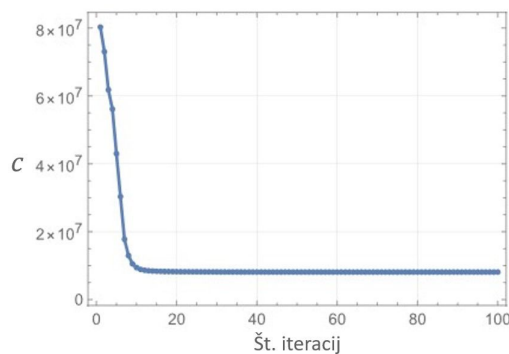
Kot najenostavnejši primer vzemimo kvader, dimenzij  $40 \times 40 \times 120$ . Z rdečo barvo je označen naravni robni pogoj in z turkizno modro, esencialni robni pogoj. Material, ki zapolnjuje domeno ima predpisano toplotno prevodnost  $k = 45$ , gostoto  $\rho = 7500$ , elastičnim modulom  $E = 210000$  in Poissonovim količnikom  $\nu = 0,3$ . Skrajno leva stranica predstavlja podprte prostostne stopnje in fiksno temperaturo, ki je nastavlje na na  $T = 0^\circ C$ . Pravokotnik je prav tako podprt v skrajno desni spodnji točki, kjer se preprečeni horizontalni pomiki. V skrajno levi točki zgoraj pravokotnik obremenimo z silo  $F = 10$  in na vseh stranicah, ki niso podprte predpišemo robno temperaturo  $T = 10^\circ C$ .

Na sliki 6b. je razvidna optimalna oblika domene, ki je rezultat optimizacijskega algoritma. Optimum dosežemo v območju 20-30 iteracij, kot je to razvidno na sliki 7. V grobem lahko rečemo, da dobljena oblika izgleda kot nekakšna združitev optimalnih oblik mehanske in termične

topološke optimizacije. Na določenih mestih opazimo izrast drevesnih struktur, ki omejujejo prenos toplote medtem ko v notranjosti domene še vedno prevladuje oblika optimalnega nosilca.



**Figure 6:** Prikaz domene, robnih pogojev in rezultata topološke optimizacije.



**Figure 7:** Odvisnost optimizacijske funkcije v odvisnosti od števila iteracij.

## 5 Zaključek

Medtem ko smo bili v zadnjih letih priča uspehu industrijske uporabe topološke optimizacije kot učinkovite tehnike za ustvarjanje konceptov pri projektiranju konstrukcij, je prevladujoča SIMP ali metoda gostote za povezane probleme, omejena na linearno elastično stanje. Omejitev koncepta na linearno elastičnost vodi do prvega izziva, povezanega s strukturno funkcionalno zmogljivostjo. Pravzaprav so konstrukcije zapletene strukture, katerih obnašanje je lahko odvisno od različnih obremenitev, različnih virov nelinearnosti, toplotnih in kontaktnih pojavov. Optimalna rešitev topološko optimizacijskega problema je po navadi lokalni minimum optimizacijske funkcije in je lahko občutljiva na parametre problema. To vodi do drugega izziva, racionalnega preverjanja edinstvenosti topološko optimizirane zasnove. Na drugi strani pa zahteva razvoj praktične strategije določitve občutljivosti problema topološke optimizacije na spremembe parametrov problema. Kljub izzivom, koncept topološke optimizacije ponuja nov pristop

k zasnovi različnih oblik, ki so del konstrukcij in naprav, kar odpira nova vrata razvoju in raziskavam na različnih področjih.

## Literatura

- [1] M. Bendsøe and N. Kikuchi. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 71(2):197–224, 1988.
- [2] S. Cho and J.-Y. Choi. Efficient topology optimization of thermo-elasticity problems using coupled field adjoint sensitivity analysis method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 41(15):1481–1495, 2005.
- [3] Q. Li, G. Steven, O. Querin, and Y. Xie. Structural topology design with multiple thermal criteria. *Engineering Computations*, 17(6):715–734, 2000.
- [4] Q. Li, G. Steven, O. Querin, and Y. Xie. Evolutionary topology optimization for temperature reduction of heat conducting fields. *International journal of heat and mass transfer*, 47(23):5071–5083, 2004.
- [5] Q. Li, O. Steven, and Y. Xie. Displacement minimization of thermoelastic structures by evolutionary thickness design. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 179(3-4):361–378, 1999.
- [6] H. Rodrigues and P. Fernandes. A material based model for topology optimization of thermoelastic structures. *Engineering Structures*, 38(12):1951–1965, 1995.
- [7] G. Rozvany. A critical review of established methods of structural topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 37(3):217–237, 2009.
- [8] O. Sigmund. A 99 line topology optimization code written in matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 21:120–127, 2001.



## *Identifikacija dinamskih lastnosti spojev z uporabo nevronske mreže*

Jure Korbar<sup>1</sup>, Domen Ocepek<sup>1</sup>, Gregor Čepon<sup>1</sup>, Miha Boltežar<sup>1</sup>

### *Identification of dynamic properties of joints using artificial neural networks*

**Povzetek.** Zaradi naraščajočih potreb po zagotavljanju ustreznosti izdelkov v zgodnji fazi razvoja vedno bolj posegamo po metodah virtualnega prototipiranja. Čeprav so slednje z vidika stroškov razvoja bistveno bolj ugodne kot izdelava realnih prototipov, je njihova zanesljivost nižja, saj pri virtualnih prototipih pogosto ne poznamo realnih materialnih parametrov in robnih pogojev. Sodobni izdelki so pogosto sestavljeni iz številnih podsuklopov oz. komponent, dinamske lastnosti sestava pa so pogojene tako z lastnostmi komponent, kot tudi s povezavami oz. spoji med posameznimi komponentami. S tega vidika lahko preko poznavanja realnih parametrov spojev bistveno povečamo zanesljivost virtualnega prototipa. Ker so lastnosti spojev pogosto odvisne od prednapetja, temperature itd., je karakterizacija spojev predmet eksperimentalnega testiranja. Obstoječe metode za karakterizacijo spojev pogosto zanemarijo vpliv mase spoja ter v večini primerov temeljijo na ocenjevanju kontaktnih frekvenčno-prenosnih funkcij (FPF) ali pa zahtevajo veliko število meritev. V tem delu je predstavljena nova metodologija, ki z uporabo nevronske mreže na podlagi FPF-jev omogoča karakterizacijo spojev z manjšim naborom meritev, kot jih zahtevajo obstoječe metode.

**Abstract.** Due to increasing needs for ensuring product adequacy in the early stages of development, the virtual prototyping approach is being used extensively. Although virtual prototyping is significantly more cost-effective than creating physical prototypes, its reliability is typically lower due to the lack of realistic parameters and boundary conditions. Modern products are often composed of several substructures or components, therefore, the dynamic properties of the assembly are influenced by both the substructure properties and the connections or joints between individual substructures. Therefore, by considering the properties of joints, we can significantly increase the reliability of the virtual prototype. Since the properties of joints often change with the preload, temperature, etc., the characterization of joints is subject to experimental testing. Existing methods for joint characterization often assume negligible mass of the joint, rely on the estimation of frequency response functions (FRFs) at the interface, or require a large number of measurements. This paper presents a new methodology that uses neural networks for joint identification based on FRFs with a smaller set of measurements than what the existing methods require.

---

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

## 1 Uvod

Dinamske lastnosti tipičnih konstrukcijskih elementov, kot so nosilci, palice, plošče itd. lahko modeliramo z uporabo analitičnih metod oz. posodobljenih modelov končnih elementov. Po drugi strani pa je modeliranje dinamskih lastnosti sestavljenih struktur bistveno težje, saj so le-te podvržene tudi lastnostim spojev, ki povezujejo posamezne podstrukture. Analitično modeliranje spojev zahteva realistične kontaktne robne pogoje, ki pa jih je zahtevno pridobiti. Pri obravnavi dinamskih modelov v frekvenčni domeni zato pogosto uporabljamo odklapljanje v okviru metod dinamskega podstrukturiranja [2], s katerim odstranimo vpliv podstruktur na dinamske lastnosti sklopa in tako pridobimo dinamski model spoja. Kljub razširjenosti uporabe pa imajo metode odklapljanja še vedno omejeno uporabnost. Odklapljanje zahteva veliko število meritev tako v sklopljeni konfiguraciji, kot tudi meritve posamičnih podstruktur. Eksperimentalni napor za karakterizacijo spoja tako ni zanemarljiv. Poleg tega klasično odklapljanje zahteva dva nabora meritev v območju spoja na sklopljeni strukturi, po en nabor za vsako podstrukturo. Nenazadnje pa so pri rekonstruiranem dinamskem modelu sklopljene strukture lahko prisotni lažni vrhovi, ki izhajajo iz slabe pogojenosti admitančnih matrik v procesu odklapljanja [5]. Slednji problem je običajno mogoče omiliti z odklapljanjem prostostnih stopenj izven kontakta, kar zahteva še toliko večji nabor meritev [6]. V tem prispevku je predstavljen pristop za karakterizacijo dinamskega modela spoja z uporabo vnaprej izbranega fizikalnega modela. Pristop temelji na uporabi nevronske mreže, zato po izvedbi procesa učenja nevronske mreže lahko direktno pridobimo dinamske lastnosti spoja brez uporabe iterativnih metod, kar predstavlja veliko prednost v primeru potrebe po karakterizaciji velikega števila spojev pri enakem naboru podstruktur. Ker v osnovi izberemo fizikalni model spoja, katerega lastnosti želimo določiti, pa je prednost pristopa tudi v tem, da identificirani dinamski model lahko enostavno uporabimo za nadaljnje simulacije v programskih paketih za reševanje problemov z metodo končnih elementov.

## 2 Teoretične osnove

V okviru teoretičnih osnov bodo predstavljene metode frekvenčnega podstrukturiranja za sklapljanje in odklapljanje dinamskih modelov. Predstavljena metodologija za identifikacijo spojev vključuje sklapljanje, odklapljanje pa je uporabljeno v klasičnem pristopu identifikacije za primerjavo s predlagano metodo. Sledi predstavitev analitičnega modela spoja in nevronske mreže, ki omogoča napoved parametrov modela spoja na podlagi dinamskega modela sklopljene strukture.

### 2.1 Metode frekvenčnega podstrukturiranja

V nadaljevanju je povzeto frekvenčno podstrukturiranje na podlagi Lagrangevih množiteljev [2]. Zvezo med vzbujevalnimi silami  $f$  in odzivi  $u$  v frekvenčni domeni podaja enačba (1):

$$u(\omega) = Y(\omega)f(\omega), \quad (1)$$

kjer je  $\omega$  vzbujevalna frekvenca,  $Y$  pa predstavlja admitančno matriko, katere členi predstavljajo odzive prostostnih stopenj na enotsko silo. Za boljše razumevanje v nadaljevanju opustimo eksplicitni zapis odvisnosti od vzbujevalne frekvence. Čeprav uporabljena metodologija temelji

na sklapljanju treh podstruktur se pri izpeljavi omejimo na dve podstrukturi, označeni kot A in B. V sklopljeni konfiguraciji na obe podstrukturi delujejo kontaktne sile  $\mathbf{g}$ , ki zagotavljajo stik med podstrukturama. Zapišimo enačbo (1) za sistem obeh podstruktur, pri čemer poleg vzbujevalnih sil  $\mathbf{f}$  upoštevamo tudi prisotnost kontaktnih sil  $\mathbf{g}$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{Y}^{(A|B)} (\mathbf{f} + \mathbf{g}) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(A)} \\ \mathbf{u}^{(B)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^{(A)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y}^{(B)} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{(A)} \\ \mathbf{f}^{(B)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}^{(A)} \\ \mathbf{g}^{(B)} \end{bmatrix} \right), \quad (2)$$

pri čemer upoštevamo, da se kontaktne sile pojavijo le v kontaktnih prostostnih stopnjah. Neznane sile v enačbi (2) eliminiramo z zapisom dveh dodatnih enačb, ki opisujeta kompatibilnost kontaktnih odzivov in ravnovesje kontaktnih sil. Kompatibilnost podaja enačba (3):

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (3)$$

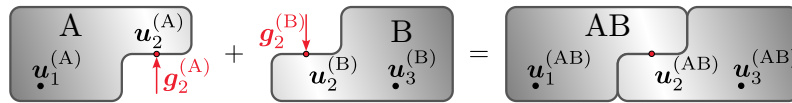
kjer posamezna vrstica Boolove predznačene matrike  $\mathbf{B}$  izbere soležna odziva tako, da na levi strani enačbe dobimo razliko med odzivoma. Kompatibilnost zagotovimo tako, da je razlika med soležnimi odzivi enaka nič. Ravnovesje kontaktnih sil pa podaja enačba (4):

$$\mathbf{g} = -\mathbf{B}^\top \boldsymbol{\lambda}, \quad (4)$$

kjer je ravnovesje upoštevano implicitno preko matrike  $-\mathbf{B}^\top$ , ki vektor enoličnih kontaktnih sil oz. Lagrangevih množiteljev  $\boldsymbol{\lambda}$  razširi na prostostne stopnje obeh podstruktur. Izpeljava sklopljene admitančne matrike temelji na zamenjavi kontaktnih sil  $\mathbf{g}$  z Lagrangevimi množitelji z vstavljanjem enačbe (4) v enačbo (2). Z upoštevanjem kompatibilnosti odzivov v enačbi (3) izrazimo Lagrangeve množitelje  $\boldsymbol{\lambda}$  v odvisnosti od vzbujevalnih sil  $\mathbf{f}$ , kar vstavimo v enačbo (2) in dobimo zvezo med odzivi in vzbujevalnimi silami sklopljene strukture:

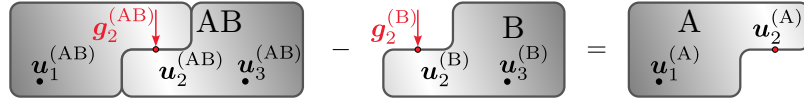
$$\mathbf{u} = \mathbf{Y}^{(AB)} \mathbf{f}, \quad \text{kjer je} \quad \mathbf{Y}^{(AB)} = \mathbf{Y}^{(A|B)} - \mathbf{Y}^{(A|B)} \mathbf{B}^\top \left( \mathbf{B} \mathbf{Y}^{(A|B)} \mathbf{B}^\top \right)^{-1} \mathbf{B} \mathbf{Y}^{(A|B)}. \quad (5)$$

V primeru sklapljanja poljubnega števila podstruktur razširimo enačbo (5) tako, da blok-diagonalno zložimo admitančne matrike posameznih podstruktur in matriko  $\mathbf{B}$  razširimo tako, da paroma zagotovi kompatibilnost vseh kontaktnih prostostnih stopenj oz. Lagrangeve množitelje za vsak kontakt razširi na prostostne stopnje obeh podstruktur v stiku. Sklapljanje podstruktur A in B ter delovanje kontaktnih sil shematsko prikazuje slika 1.



**Slika 1:** Shematski prikaz sklapljanja podstruktur A in B.

Poleg sklapljanja metode podstrukturiranja omogočajo tudi odklapljanje. Če sklapljanje ponazorimo z enačbo  $A + B = AB$ , potem odklapljanje predstavlja enačba  $AB - B = A$ . Teoretična izpeljava odklapljanja podobno kot sklapljanje temelji na zapisu kompatibilnosti odzivov in ravnovesja kontaktnih sil, pri čemer kontaktne sile odklopljene podstrukture apliciramo na sestav, s čimer odstranimo vpliv te podstrukture. Enak učinek dosežemo s sklopitvijo admitančne matrike sestava in negativnih admitančnih matrik tistih podstruktur, ki jih želimo odklopiti. Odklapljanje podstrukture B od sklopa AB z apliciranjem kontaktnih sil podstrukture B na sklop AB shematsko prikazuje slika 2.



**Slika 2:** Shematski prikaz odklapanja podstrukture B od sklopa AB.

V primeru identifikacije spoja J v sestavu AJB bi to pomenilo, da odklapijamo podstrukturi A in B kot  $AJB - A - B = J$ . Podrobnosti glede izpeljave odklapanja se nahajajo v [6].

## 2.2 Analitični model spoja

Poleg linearnosti, ki je predpostavljena že v izhodiščni enačbi (1), dodatno predpostavko predstavlja uporaba analitičnega modela spoja. Tu predpostavimo, da lahko vpliv spoja na dinamske lastnosti sestava dovolj dobro opišemo z analitičnim modelom. V tem delu analitični model spoja definiramo z masno in togostno matriko  $\mathbf{M}^{(J)}$  in  $\mathbf{K}^{(J)}$ . Predpostavljamo najbolj osnovno formulacijo spoja, ki sklopi le prostostne stopnje v posamezni smeri, torej sila v dani smeri povzroči odziv v tej isti smeri brez odziva v preostalih smereh. Podmatriki, s katerima tvorimo masno in togostno matriko, podaja enačba (6):

$$\mathbf{M}_s^{(J)} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_s^{(J)} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{\theta_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\theta_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\theta_z} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

enačba (7) pa definira masno in togostno matriko spoja:

$$\mathbf{M}^{(J)} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s^{(J)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_s^{(J)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^{(J)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s^{(J)} & -\mathbf{K}_s^{(J)} \\ -\mathbf{K}_s^{(J)} & \mathbf{K}_s^{(J)} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Zvezo med pomiki in silami, ki delujejo na spoj, podaja enačba (8):

$$\left(-\omega^2 \mathbf{M}^{(J)} + \mathbf{K}^{(J)}\right) \mathbf{u}^{(J)} = \mathbf{f}^{(J)} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}^{(J)} = \left(-\omega^2 \mathbf{M}^{(J)} + \mathbf{K}^{(J)}\right)^{-1} \mathbf{f}^{(J)} = \mathbf{Y}^{(J)} \mathbf{f}^{(J)}. \quad (8)$$

V eksperimentalnem primeru dušenje ni zanemarljivo, v model spoja pa ga lahko vključimo preko modalne superpozicije v enačbi (9):

$$\mathbf{Y}^{(J)} \approx -\frac{1}{\omega^2} \sum_{r=1}^{n_{RB}} \phi_r \phi_r^\top + \sum_{r=n_{RB}+1}^n \frac{\phi_r \phi_r^\top}{-\omega^2 + 2j\omega\zeta_r\omega_r + \omega_r^2}, \quad (9)$$

kjer je  $\phi_r$   $r$ -ti masno normirani lastni vektor,  $n_{RB}$  je število togih lastnih vektorjev,  $n$  število vseh lastnih vektorjev,  $\omega_r$  in  $\zeta_r$  pa predstavljata  $r$ -to lastno frekvenco in pripadajoči razmernik viskozne dušenja. Soležnost kontaktnih prostostnih stopenj s prostostnimi stopnjami spoja je bila zagotovljena s transformacijo virtualne točke [7].

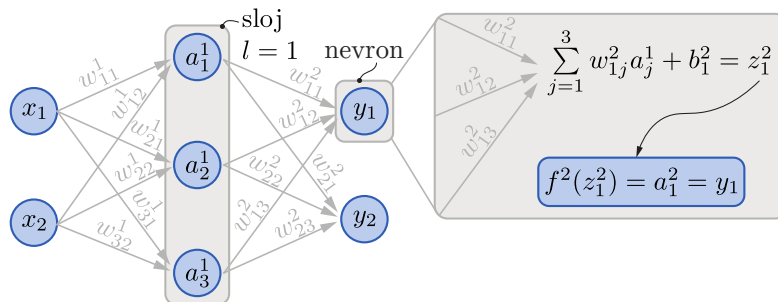
### 2.3 Nevronske mreže

Nevronske mreže predstavljajo metodo strojnega učenja, ki omogoča aproksimacijo zveze med vhodnimi in izhodnimi spremenljivkami v zvezni obliki [1]. Osnovna enota nevronske mreže je t. i. nevron, ki so zloženi v slojih. Posamezen ( $i$ -ti) nevron  $l$ -tega sloja izračuna uteženo vsoto izhodnih spremenljivk predhodnega sloja  $\sum_{j=1}^{n_{l-1}} w_{ij}^l a_j^{l-1}$ , prišteje odmik  $b_i^l$  in na podlagi aktivacijske  $f^l$  funkcije izračuna vrednost izhodne spremenljivke oz. aktivacije  $a_i^l$ . Matematično nevronska mrežo popišemo z enačbama (10):

$$z_i^l = \sum_{j=1}^{n_{l-1}} w_{ij}^l a_j^{l-1} + b_i^l, \quad (10a)$$

$$a_i^l = f^l(z_i^l), \quad (10b)$$

kjer je  $n_l$  število nevronov v  $l$ -tem sloju nevronske mreže. Vhodni sloj nevronske mreže predstavlja sloj  $l = 0$ , katerega izhodne vrednosti predstavljajo vhodne spremenljivke, sloj  $l = L$  pa predstavlja izhodni sloj, katerega izhodne vrednosti  $a_i^L = y_i$  predstavljajo aproksimacijo izhodnih spremenljivk. Preprosta nevronska mreža z enim prikritim slojem je shematsko prikazana na sliki 3.



Slika 3: Shematski prikaz strukture nevronske mreže.

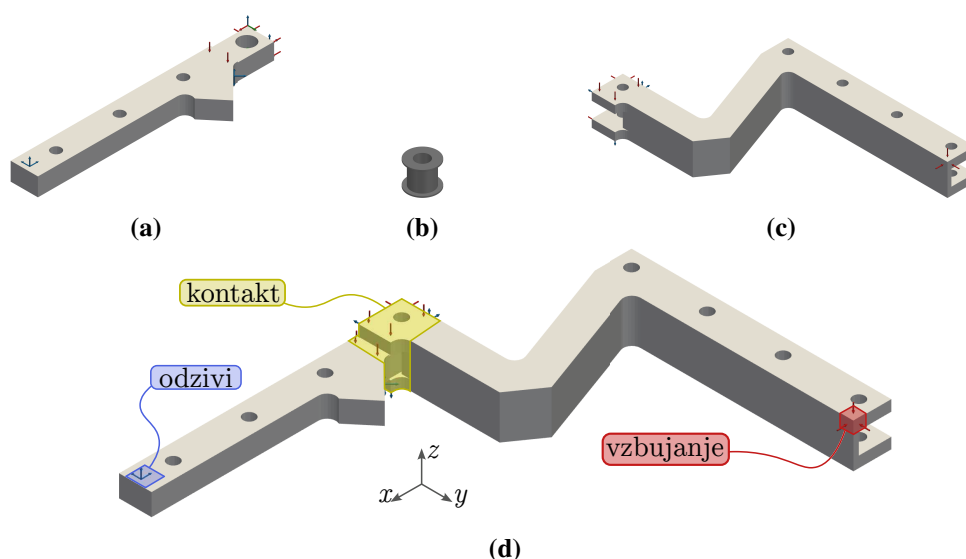
Nevronske mreže zahtevajo tudi definiranje cenilne funkcije  $C$ , ki kvantitativno ovrednoti zmogljivost nevronske mreže, najpogosteje v obliki vsote kvadratov odstopanja med aproksimiranimi in praviimi vrednostmi izhodnih spremenljivk  $\hat{y}_i$  in  $y_i$ . V procesu učenja nevronske mreže prilagajamo vrednosti uteži  $w_{ij}^l$  in odmikov  $b_i^l$  z namenom minimizacije cenilne funkcije, kar dosežemo z gradientnim spustom po parametrih nevronske mreže, torej izračunamo vse parcialne odvode cenilne funkcije glede na uteži  $\partial C / \partial w_{ij}^l$  in odmike  $\partial C / \partial b_i^l$  ter vrednosti parametrov prilagodimo v negativni smeri skaliranega gradienta. Vse parcialne odvode pred posodobitvijo uteži množimo z  $-\eta$ , kjer  $\eta > 0$  predstavlja hitrost učenja. Veliko število parametrov lahko privede prekomerno prileganje nevronske mreže, zato moramo njeno zmogljivost preveriti na testnih podatkih, ki niso bili uporabljeni za učenje. Verjetnost prekomernega prileganja zmanjšamo z uporabo regularizacijskih metod ( $L_1$  in  $L_2$  regularizacija), tehnik *dropout* in paketne normalizacije (ang. *batch normalization*) ter zaustavitve učenja, ko vrednost cenilne funkcije na testni množici doseže minimum (ang. *early stopping*).



Zaradi velikega števila vhodnih spremenljivk v primeru identifikacije spoja na podlagi FPF-jev sklopljene strukture smo z analizo glavnih komponent [4] (ang. *principal component analysis*) določili okrnjen nabor glavnih komponent učnih podatkov, ki najbolj prispevajo k skupni varianci vhodnih podatkov.

### 3 Metodologija

Za učenje in validacijo nevronske mreže smo generirali 12 500 vzorcev, pri čemer je bilo za učenje uporabljenih 10 000 (80%) vzorcev in preostalih 2500 (20%) vzorcev za validacijo nevronske mreže. Pri tem smo v numeričnem eksperimentu naključno generirali šest parametrov, ki določajo togostno matriko ( $k_x, k_y, k_z, k_{\theta_x}, k_{\theta_y}, k_{\theta_z}$ ) in parameter  $m$  v masni matriki, pri čemer so bile vrednosti  $J_x, J_y, J_z$  izbrane kot majhne pozitivne vrednosti. Predhodno je bilo namreč ugotovljeno, da je vpliv masnih vztrajnostnih momentov spoja zanemarljiv na dinamski odziv sklopljene strukture. V primeru laboratorijskega eksperimenta smo poleg zgornjih parametrov generirali še razmernika viskoznega dušenja  $\zeta^{\text{tr}}$  in  $\zeta^{\text{rot}}$ , ki se nanašata na translacijske oz. rotacijske lastne oblike spoja. Na podlagi generiranih parametrov smo izračunali vzorce admitančnih matrik spojev  $\mathbf{Y}^{(J)}$  po enačbi (8) v primeru numeričnega oz. po enačbi (9) v primeru laboratorijskega eksperimenta. Pripadajoče vzorce sklopljenih admitančnih matrik smo izračunali z enačbo sklapljanja (5). Geometrijski modeli podstruktur A in B, spoja J ter sklopljene strukture AJB so prikazani na sliki 4.



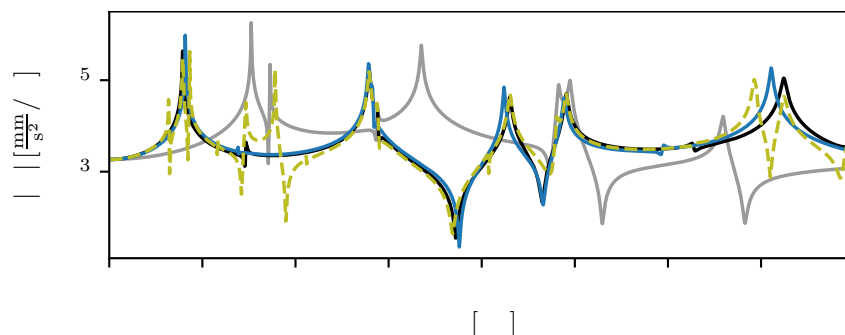
**Slika 4:** Posamezne podstrukture in sklopljena struktura; (a) A, (b) J, (c) B, (d) AJB.

Za identifikacijo spojev smo upoštevali le štiri FPF-je izven kontaktnega območja, število vhodnih spremenljivk pa smo reducirali z upoštevanjem prvih 200 glavnih komponent amplitud FPF-jev. V obeh primerih je imel prikriti sloj nevronske mreže 200 nevronov v prikritem sloju in sedem oz. devet nevronov v izhodnem sloju, odvisno od števila izhodnih spremenljivk. Obe

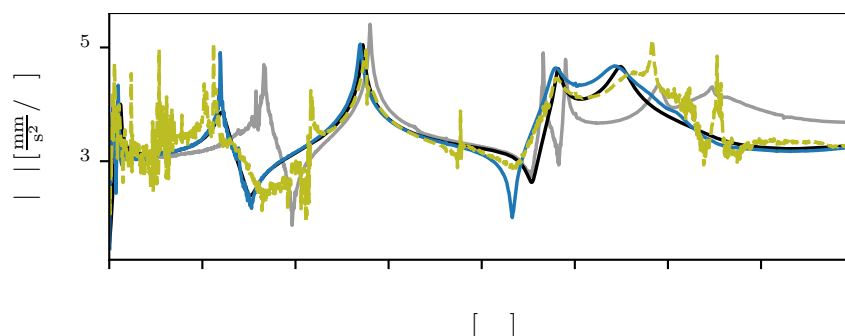
nevronski mreži sta vsebovali nekaj več kot 40 000 parametrov. Najnatančnejšo napoved smo dosegli z uporabo  $L_2$  regularizacije v kombinaciji s paketno normalizacijo.

#### 4 Rezultati

V okviru rezultatov so prikazani amplitudni spektri rekonstruiranega FPF-ja sklopljene strukture za numerični in laboratorijski eksperiment, pri čemer smo FPF-je rekonstruirali s sklapljanjem identificiranega spoja in podstruktur A in B. V obeh primerih je bila najprej izvedena verifikacija modela na testni množici. Tako pri numeričnem kot pri laboratorijskem eksperimentu smo v celotnem frekvenčnem območju dosegli dobro ujemanje testnih in rekonstruiranih FPF-jev sklopljene strukture AJB. Validacija pa je bila v primeru numeričnega spoja izvedena na FPF-jih sklopljene strukture, kjer je bil kot model spoja upoštevan model na sliki 4b, v primeru realnega spoja pa sta bili strukturi povezani z gumijastim elementom enake geometrije. Rekonstruirane FPF-je sklopljene strukture v primeru numeričnega eksperimenta prikazuje slika 5, v primeru laboratorijskega eksperimenta pa slika 6.



**Slika 5:** Amplitudni spektri sklopljene strukture pri numeričnem eksperimentu: togo sklopljena AB (—), referenca AJB (—), AJB z identificiranim spojem (—), AJB s spojem na podlagi odklapanja (- - -).



**Slika 6:** Amplitudni spektri sklopljene strukture pri laboratorijskem eksperimentu: togo sklopljena AB (—), referenca AJB (—), AJB z identificiranim spojem (—), AJB s spojem na podlagi odklapanja (- - -).

Sliki 5 in 6 prikazujeta tudi rekonstruirane FPF-je pri identifikaciji spoja z odklapljanjem [3]. V obeh primerih smo za odklopljen spoj potrebovali bistveno večji nabor meritev, poleg tega pa je bilo potrebno izvesti meritve v bližini kontaktnega območja na obeh straneh spoja. V primeru realnih struktur to lahko predstavlja veliko omejitev, saj merilna mesta v kontaktnem območju pogosto niso dostopna. Rekonstrukcija dinamskega modela sklopljene strukture vsebuje lažne vrhove zaradi slabe pogojenosti v določenih frekvenčnih območjih. To se v primeru identifikacije spojev z nevronske mreže ne pojavi, saj metoda zaobide problem invertiranja slabo pogojenih matrik. V kolikor je analitični model spoja ustrezno izbran in lahko opiše dinamske lastnosti obravnavanega spoja, predstavljen pristop z nevronske mreže omogoča bolj natančno rekonstrukcijo dinamskega modela sklopljene strukture.

## 5 Zaključek

V delu je bil predstavljen pristop za identifikacijo spojev, ki temelji na uporabi nevronske mreže. V primerjavi z ustaljenim pristopom identifikacije spojev z odklapljanjem lahko z ustreznimi izbranim analitičnim modelom spoja zagotovimo boljše ujemanje rekonstruiranega dinamskega modela sklopljene strukture, saj v procesu identifikacije zaobidemo problem invertiranja slabo pogojenih admitančnih matrik. Z vidika eksperimentalnega napora je predstavljen pristop bolj ugoden, saj zahteva bistveno manjši nabor meritev, le-ta pa prostorsko ni omejen na kontaktno območje.

## Literatura

- [1] C. M. Bishop and N. M. Nasrabadi. *Pattern recognition and machine learning*, volume 4. Springer, 2006.
- [2] D. de Klerk, D. J. Rixen, and S. N. Voormeeren. General framework for dynamic substructuring: history, review and classification of techniques. *AIAA journal*, 46(5):1169–1181, 2008.
- [3] M. Haeussler, S. W. B. Klaassen, and D. J. Rixen. Experimental twelve degree of freedom rubber isolator models for use in substructuring assemblies. *Journal of Sound and Vibration*, 474:115253, 2020.
- [4] I. T. Jolliffe. *Principal Component Analysis*. Springer Series in Statistics. Springer, 2nd ed. edition, 2002.
- [5] D. J. Rixen. How measurement inaccuracies induce spurious peaks in frequency based substructuring. In *International modal analysis conference IMAC-XXVI*, pages 1–15, 2008.
- [6] M. van der Seijs. *Experimental dynamic substructuring: Analysis and design strategies for vehicle development*. PhD thesis, Delft University of Technology, 2016.
- [7] M. van der Seijs, D. van den Bosch, D. J. Rixen, and D. de Klerk. An improved methodology for the virtual point transformation of measured frequency response functions in dynamic substructuring. *COMPADYN*, 2013.



## *Vpliv hrupa na meritve dinamičnega modula elastičnosti*

*Žiga Krvina<sup>1</sup>, Mitja Plos<sup>2</sup>, Barbara Fortuna<sup>1</sup>, Goran Turk<sup>1</sup>*

### *Influence of noise on the measurement of the dynamic modulus of elasticity*

**Povzetek.** V prispevku je obravnavan vpliv hrupa na meritev dinamičnega modula elastičnosti lesa z napravo za strojno razvrščanje lesa STIG. Primerjani so rezultati, pridobljeni z laserskim digitalnim vibrometrom in mikrofonom v različnih pogojih okolja in jakostih zunanega hrupa. Izkazalo se je, da lahko napravo STIG uporabimo tudi v pogojih zmernega hrupa.

**Abstract.** The article discusses the influence of noise on the measurement of the dynamic modulus of elasticity using the timber grading device STIG. The results obtained with a laser digital vibrometer and a microphone are compared under different circumstances and intensities of external noise. It turned out that the STIG device can also be used in conditions of moderate noise.

## **1 Uvod**

Človek je od nekdaj gradil različne objekte, na začetku zelo preproste konstrukcije, danes pa so to lahko nekaj 100 m visoke zgradbe, nekaj kilometrov dolgi mostovi in podobno. Vsem tem konstrukcijam je skupno, da jih lahko gradimo iz materiala, ki nam je na voljo. Tradicionalno je bil to material v bližnji okolici objekta, danes smo omejeni na območje planeta Zemlja. V luči trajnostnega razvoja in tudi trajnostne gradnje bomo v prihodnosti ponovno uporabljali čim več materiala, ki je dostopen v lokalnih virih. V Sloveniji to pomeni kamen, beton in les. Gradnja z lesom je bila vedno zelo pomemben del graditeljstva. Glede na naravne danosti Slovenije lahko predvidevamo, da bomo v prihodnje še bolj pogosto gradili prav z lesom.

Les je naraven material, ki ga ne moremo projektirati tako kot beton, jeklo, umetne mase in druge umetno narejene materiale. Po tem, ko drevo posekamo, iz debla naredimo lesene elemente, moramo pred uporabo oceniti njihove mehanske lastnosti. Temu postopku pravimo razvrščanje lesa po trdnosti. Rezultat razvrščanja je razred lesa, za iglavce so to C24, C30, C40..., kjer črka C pomeni iglavci (angl. coniferous), število pa nazivno upogibno trdnost v

---

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

<sup>2</sup> Ringer, opaži in odri d.o.o.

MPa. Za listavce pa so D24, D30, D40..., kjer črka D predstavlja listavce (angl. deciduous), število pa nazivno upogibno trdnost v MPa. Ker lesene elemente pogosto sestavljamo v lepljene nosilce, križno lepljene plošče in druge inženirsko obdelane lesene elemente, je pomembna lastnost tudi natezna trdnost lesa. V tem primeru lahko določimo tudi posebne razrede za nateg, to so T24, T30, T40..., kjer črka T pomeni nateg (angl. tension), število pa nazivno natezno trdnost lesa v MPa.

Na uporabo lesa v konstrukcijah poleg trdnosti vplivata tudi elastični modul in gostota, trdnostni razred tako določajo tri količine. Če želimo smrekovo desko razvrstiti v razred C30, mora veljati, da je 5. centil trdnosti večji od 30 MPa, da je povprečje elastičnega modula večje od 12 000 MPa in 5. centil gostote večji od 380 kg/m<sup>3</sup>. Zahteve za vse trdnostne razrede (C, D in T) so zapisane v standardu SIST EN338:2016 [4]. Vidimo torej, da dobi trdnostni razred pravi pomen šele za večjo skupino lesenih elementov.

Poznamo dva pristopa za razvrščanje lesa: vizualni in strojni. Pri vizualnem načinu razvrščamo glede na lastnosti, ki jih lahko opazimo s površinskim pregledom elementa, te lastnosti so na primer velikost in lega grč, naklon vlaken, širina branik, ukrivljenost, zvitost, poškodovanost in drugo. Na osnovi kriterijev, povezanih z zgoraj naštetimi lastnostmi, se lahko določi razvrstitev v vizualne razrede, ki jih potem na osnovi obsežnih preiskav preslikamo v trdnostne razrede (C, D in T). V Sloveniji za vizualno razvrščanje uporabljamo nemški standard DIN 4074-1:2012 [2].

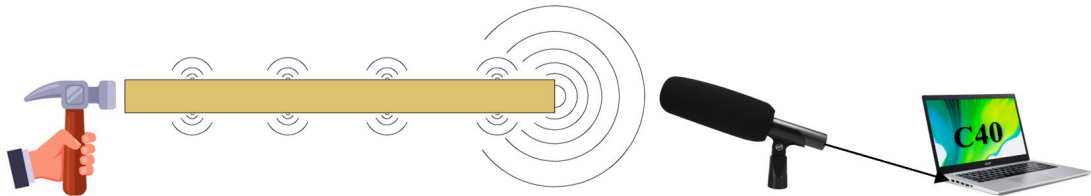
Strojno razvrščanje lesa temelji na različnih neporušnih meritvah, kot so merjenje vibracij, ultrazvočne, rentgenske meritve, tehtanje, statično upogibanje in drugo. Iste elemente se po zaključku neporušnih meritev porušno testira in določi trdnost, elastični modul in gostoto, ki predstavljajo parametre za določitev trdnostnih razredov. S primerjavo rezultatov porušnih in neporušnih preizkusov in z uporabo statističnih metod določimo nastavitve naprave za razvrščanje lesa, ki veljajo le za določen les z določenega območja, določenih dimenzij in načina obremenjevanja. Seznam vseh nastavitvev akreditiranih naprav upravlja delovna skupina TG1 pri CEN TC124 WG2.

Ena izmed devetintridesetih naprav, ki so akreditirane v Evropi, je tudi naprava STIG, ki je bila razvita v sodelovanju UL FGG in podjetjem ILKON d.o.o. Naprava je certificirana za razvrščanje slovenske smreke in navadne jelke (*Picea abies* in *Abies alba*) v trdnostne razrede po SIST EN338 [4]. Nastavitve naprave so bile določene na podlagi SIST EN 14081-2 [3], razvoj naprave pa je opisan v prispevku, objavljenem v zborniku del Kuhljevih dnevov 2018 [6].

## **2 STIG**

STIG je naprava za strojno razvrščanje lesa. Deluje na osnovi določitve frekvence valovanja zvoka v preizkušancu zaradi vzdolžnega nihanja, katerega vzbudimo z udarcem kladiva (z udarcem na prosti rob, vzporedno z vlakni). Preizkušane je pri tem prosto položen na dve podpori, ki morata biti čim ožji ter ne smeta ovirati prostega nihanja preizkušanca.

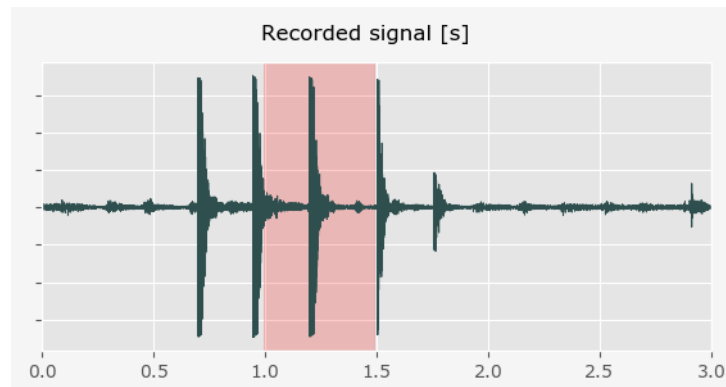
Z mikrofonom zajamemo zvok vibrirajoče deske in s programom določimo prvo lastno frekvenco deske. Z lastno frekvenco, izmerjeno vlažnostjo in podano gostoto program nato določi dinamični modul elastičnosti (IP – indikativno lastnost) ter desko glede na to razvrsti v trdnostni razred.



Slika 1: Konfiguracija merilne naprave STIG.

## 2.1 Določitev lastne frekvence v STIG-u

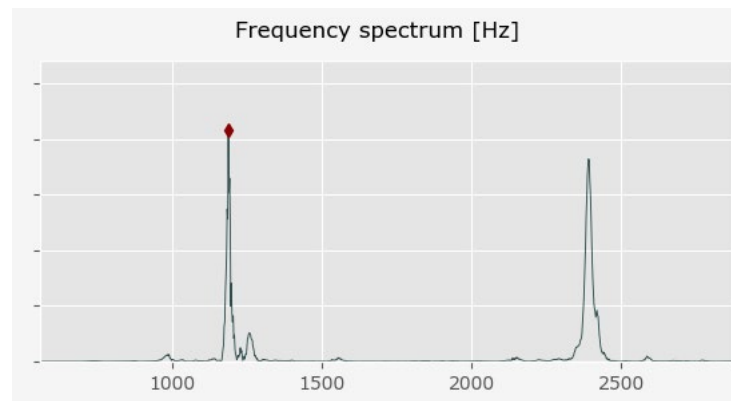
Z zvočnim posnetkom pridobimo v programu prikazan signal v časovni domeni. Če želimo s temi podatki (Slika 2) določiti lastno frekvenco preizkušanca, je potrebno zvočni signal pretvoriti v frekvenčno domeno.



Slika 2: Prikazan signal v časovni domeni.

Zvočni signal je sestavljen iz množice eno-frekvenčnih zvočnih valov. Fourierova transformacija (FT) je matematično orodje, ki sestavljen zvočni signal razstavi na posamezne eno-frekvenčne zvočne valove. Posamezne zvočne valove lahko nato predstavimo glede na njihove amplitude v frekvenčni domeni (Slika 3).

Program STIG-a za pretvorbo signalov uporablja hitro Fourierovo transformacijo (FFT), ki se razlikuje od FT v tem, da namesto neprekinjenega zvočnega signala obravnava le posamezne diskretne točke signala [1].



Slika 3: Prikazan signal v frekvenčni domeni po FFT.

### 3 Meritve

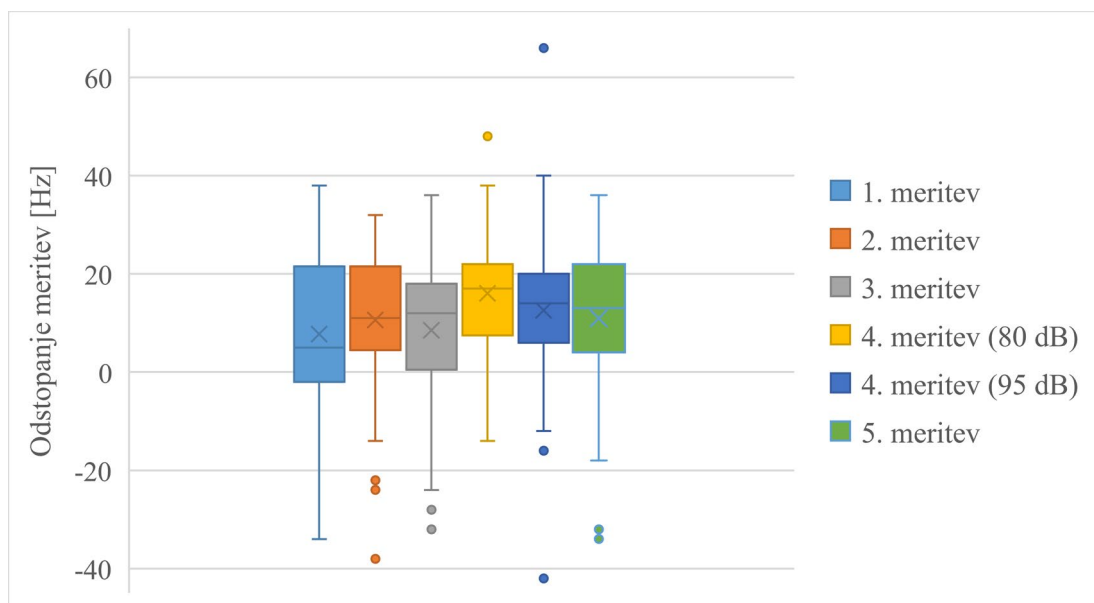
Meritve so bile izvedene na 48 preizkušancih, od tega jih je bilo 20 smrekovih in 28 bukovih. Opravljene so bile meritve v zaprtem in tihem prostoru (meritev 1 → 40 dB), nato smo se premaknili v zunanje okolje, kjer so bile izvedene meritve ob cesti (meritev 2 → 40 – 60 dB), ob glasbi (meritev 3 → 70 dB), ob prižgani krožni žagi (meritev 4 → 80 dB in 95 dB) ter ob manjšem žagarskem obratu (meritev 5 → 90 dB).

Za meritev lastne frekvence deske se je pri vsakih meritvah izvajal poleg testa z mikrofonom tudi test z digitalnim laserski vibrometrom. Prednost digitalnega vibrometra je, da na rezultate meritev hrup v okolici ne vpliva, zato smo rezultate digitalnega vibrometra upoštevali kot referenčne vrednosti v primerjavi z meritvami z mikrofonom.

Meritve so bile izvedene z mikrofonom RODE VideoMic in prenosnim digitalnim laserskim vibrometrom PDV-100 proizvajalca Polytec.

### 4 Analiza rezultatov meritev

Analiza primerjave meritev z mikrofonom in meritev z digitalnim vibrometrom kaže, da vsi rezultati merjenja lastnih frekvenc z mikrofonom nekoliko odstopajo od meritev z digitalnim vibrometrom. V vseh primerih je bila z mikrofonom izmerjena frekvenca v povprečju manjša za približno 10 Hz. Opazimo tudi (Slika 4), da različne stopnje hrupa nimajo statistično značilnega vpliva. Opravili smo analizo variance (ANOVA) za vpliv hrupa na odstopanje in ugotovili, da je tveganje za zavrnitev ničelne domneve oziroma stopnja značilnosti (angl. p-value) enako 10.5 %.



**Slika 4:** Primerjava meritev izvedenih z mikrofonom z referenčno vrednostjo.

Za smrekove in bukove preizkušance so bile izdelane tudi frekvenčne matrice (angl. size matrix po standardu SIST EN 14081-2:2018 [3]). V njih smo primerjali uvrščanje preizkušancev v posamezne kombinacije trdnostnih razredov z digitalnim laserskim vibrometrom in z mikrofonom RODE VideoMic. Glede na izračunan dinamični modul elastičnosti smo v skladu z nastavitvami STIG (poročilo nastavitvev za napravo STIG [8]) kose lesa razvrstili v trdnostne razrede glede na izbrano kombinacijo trdnostnih razredov. Vrednosti na diagonali matrice predstavljajo število elementov, ki so bili razvrščeni pravilno, skladno z referenčno metodo, ki je v našem primeru meritev z vibrometrom. Vrednost pod diagonalo je število elementov, ki smo jih z mikrofonom uvrstili v nižji razred kot z vibrometrom, nad diagonalo pa število elementov, ki smo jih razvrstili v višji razred kot z vibrometrom. Vrednosti nad diagonalo predstavljajo večjo nevarnost, saj v teh primerih meritev z mikrofonom precenjuje referenčno vrednost, kar lahko negativno vpliva na varnost konstrukcije.

Ugotovili smo, da so vrednosti na diagonali zelo dominantne, večinoma z obema metodama preizkušance razvrstimo v isti razred. To sicer potrjuje že sama korelacija med lastnimi frekvencami, pridobljenimi z laserskim vibrometrom, in lastnimi frekvencami, pridobljenimi z mikrofonom v različnih pogojih okolja, ki je za vse primere večja od 0,99.

Vsi smrekovi preizkušanci, ki niso nastopali v diagonali oziroma so bili napačno razvrščeni v kombinacijo trdnostnih razredov, so bili uvrščeni v nižji trdnostni razred pri meritvah z mikrofonom kot pri meritvah z digitalnim laserskim vibrometrom (Tabela 1). To pomeni, da so v povprečju rezultati pridobljeni z mikrofonom tudi v hrupu bolj konzervativni kot tisti, ki so pridobljeni z digitalnim vibrometrom.



Za preizkušance iz slovenskega bukovega lesa (*Fagus sylvatica*) naprava STIG trenutno še ni certificirana. Vsi potrebni preizkusi so že bili opravljeni na vzorcu bukovega lesa, v pripravi pa je tudi osnutek dokumenta za akreditacijo naprave, v katerem so opredeljene nastavitve za kombinacije trdnostnih razredov. Trdnostni razredi v tem primeru temeljijo na porušnem nateznem preizkusu in ne na upogibnem. Namesto s črko D so zato označeni s črko T (angl. tension) [7].

Pri frekvenčnih matrikah za bukov les (kombinacija trdnostnih razredov T40-T24) ponovno opazimo večinoma pravilno razporejene preizkušance po trdnostnih razredih, opazimo pa tudi odstopanje razvrščanja na nevarno (zgornjo) stran tabele (Tabela 2).

**Tabela 1:** Frekvenčne matrice za trdnostne razrede C35-C24 za smrekove preizkušance.

1. meritev v tišini				2. meritev ob cesti			
mikrofon RODE VideoMic	Digitalni laserski vibrometer			mikrofon RODE VideoMic	Digitalni laserski vibrometer		
	C35	C24	ostanek		C35	C24	ostanek
C35	7	0	0	C35	7	0	0
C24	0	7	0	C24	1	6	0
ostanek	0	0	6	ostanek	0	1	5
3. meritev ob glasbi				4. meritev ob delovanju krožne žage (80 dB)			
mikrofon RODE VideoMic	Digitalni laserski vibrometer			mikrofon RODE VideoMic	Digitalni laserski vibrometer		
	C35	C24	ostanek		C35	C24	ostanek
C35	7	0	0	C35	7	0	0
C24	1	6	0	C24	0	7	0
ostanek	0	1	5	ostanek	0	1	5
4. meritev ob delovanju krožne žage (95 dB)				5. meritev ob delovanju listnate žage			
mikrofon RODE VideoMic	Digitalni laserski vibrometer			mikrofon RODE VideoMic	Digitalni laserski vibrometer		
	C35	C24	ostanek		C35	C24	ostanek
C35	7	0	0	C35	8	0	0
C24	0	6	0	C24	0	6	0
ostanek	0	2	5	ostanek	0	0	6

**Tabela 2:** Frekvenčne matrike za trdnostne razrede T40-T24 za bukove preizkušance.

1. meritev v tišini			
mikrofon RODE VideoMic	Digitalni laserski vibrometer		
	T40	T24	ostanek
T40	6	2	0
T24	1	8	0
ostanek	0	1	10

2. meritev ob cesti			
mikrofon RODE VideoMic	Digitalni laserski vibrometer		
	T40	T24	ostanek
T40	6	1	0
T24	1	9	0
ostanek	0	0	11

3. meritev ob glasbi			
mikrofon RODE VideoMic	Digitalni laserski vibrometer		
	T40	T24	ostanek
T40	7	1	0
T24	0	9	0
ostanek	0	0	11

4. meritev ob delovanju krožne žage (80 dB)			
mikrofon RODE VideoMic	Digitalni laserski vibrometer		
	T40	T24	ostanek
T40	4	0	0
T24	2	9	0
ostanek	1	1	11

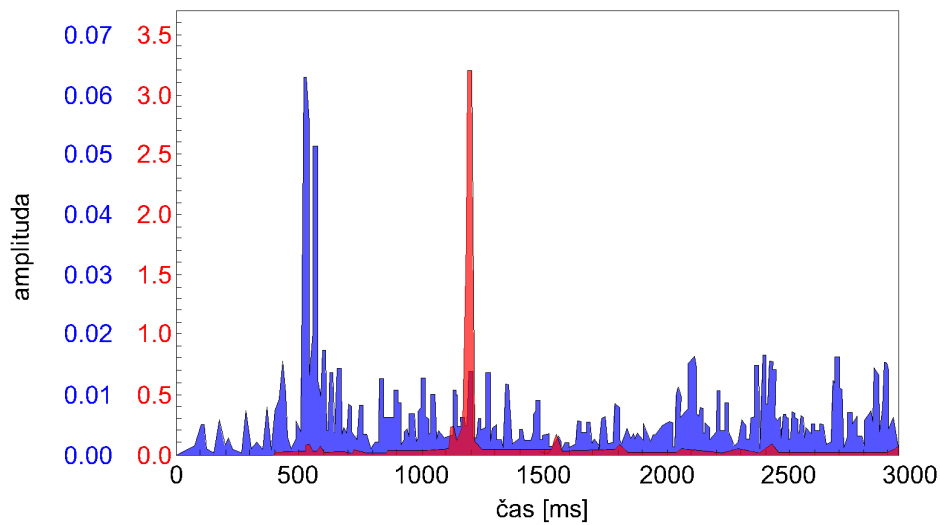
  

4. meritev ob delovanju krožne žage (95 dB)			
mikrofon RODE VideoMic	Digitalni laserski vibrometer		
	T40	T24	ostanek
T40	6	1	0
T24	1	9	0
ostanek	0	0	11

5. meritev ob delovanju listnate žage			
mikrofon RODE VideoMic	Digitalni laserski vibrometer		
	T40	T24	ostanek
T40	7	0	0
T24	2	8	1
ostanek	0	1	9

V programu Wolfram Mathematica je bil analiziran hrup krožne žage in listnate žage v žagarskem obratu. Lastna frekvenca obeh žag se giblje med 400 Hz in 600 Hz. Če merimo krajše elemente, dolžine okoli 2 m, kot smo to delali v tej raziskavi, bi v analizi lahko izločili te nižje frekvence žage, zato ta hrup sploh ne bi vplival na rezultate. Pri daljših preizkušancih, kjer so lastne frekvence nižje in se gibljejo med 400 Hz in 600 Hz, pa moramo večjo pozornost posvetiti ujemanju prve lastne frekvence preizkušanca ali meritev izvesti izven obrata oziroma ko žage niso v obratovanju. Amplituda prve lastne frekvence vzdolžnega nihanja je precej večja od amplitude hrupa žage, zato hrup tudi pri daljših nosilcih nima odločilnega vpliva (Slika 5).

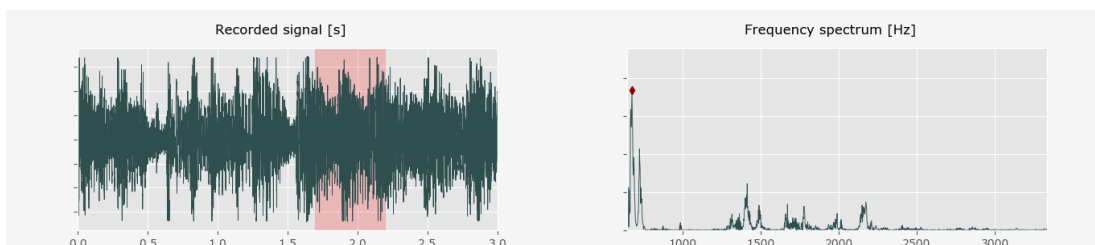


Slika 5: Primerjava frekvenčnih spektrov zaradi šuma žage in zaradi vzdolžnega nihanja deske ob šumu.

## 5 Ugotovitve med meritvami

Največji problem na začetku meritev z napravo STIG predstavlja pravilno vzbujanje nihanja desk, saj je pri nekaterih deskah z mikrofonom težko ujeti prvo lastno frekvenco vzdolžne oblike nihanja. S preizkušanjem različnih kladiv smo ugotovili, da na zaznavo prve lastne frekvence vpliva teža kladiva, ki mora biti obratno sorazmerna z vitkostjo deske.

Mikrofon sem med meritvami približeval in oddaljeval od preizkušanca. Ugotovil sem, da tudi pri visoki hrupni obremenitvi (95 dB) mikrofon do 20 cm stran od roba deske zazna pravilno lastno frekvenco deske. Pri večjih razdaljah mikrofona od roba deske je v zvočnem signalu premajhna intenziteta zvoka nihanja deske ter večja intenziteta hrupa, zato program zazna napačne frekvence kot lastne (Slika 6). Z močnejšim udarjanjem po deski oziroma težjim kladivom se vpliv razdalje med mikrofonom in desko sicer zmanjša, pri tem pa so pogosto potrebne ponovitve meritev.



Slika 6: Rezultat iz programa STIG pri prevelikem okoliškem hrupu.

Pri daljših deskah vzbujanje nihanja z enega konca ali z drugega ne povzroča razlik v meritvah. Opazili smo, da pri razdalji med 5 in 10 cm od konca deske program najhitreje zazna lastno frekvenco. Ugotovitve nam omogočajo, da določimo optimalno postavitev za merjenje, in sicer na en konec preizkušanca postavimo mikrofona, z druge strani pa izvajamo vzbujanje nihanja.

Mikrofon tudi pri hrupu nad 100 dB zazna lastno frekvenco deske, vendar je potrebno za rezultat nekajkrat meritev ponoviti ter desko udariti močneje, rezultat pa se lahko izkaže tudi kot nepravilen.

Ugotovili smo, da meritve izvedene z mikrofonom povprečno kažejo manjše vrednosti lastnih frekvenc kot digitalni vibrometer (Slika 4). To odstopanje se za obravnavane preizkušance giblje okoli 10 Hz, kar pomeni razliko v elastičnem modulu med 176 MPa in 309 MPa za naš vzorec preizkušancev. Razlike v elastičnem modulu so za isto spremembo frekvence različne v odvisnosti od vrste lesa, vsebnosti vlage v lesu in vrednosti lastne frekvence. Ob uporabi digitalnega laserskega vibrometra bi zaradi tega odstopanja blizu meje trdnostnih razredov nekaj preizkušancev uvrstili v višji trdnostni razred kot ob uporabi mikrofona. To nam potrjuje tudi izdelane frekvenčne matrike (Tabela 1, Tabela 2).

### 5.1 Vpliv teže kladiva na rezultate

Pri prvih meritvah v zaprtem prostoru brez hrupa je program STIG naletel na problem, kjer pri manj vitkih deskah iz bukovega lesa ni določil prve lastne frekvence, vendar je ves čas kot rezultat prikazoval drugo. Problem smo rešili z uporabo težjega kladiva.

Vpliv teže kladiva na moč zaznavanja lastne frekvence je bil že raziskan v literaturi [5], kjer so bile meritve izvedene na stoječih drevesih. Rezultati članka so pokazali, da se je s povečevanjem teže kladiva, s katerim vzbujamo nihanje drevesa, moč zaznavanja lastne frekvence povečala. Drevo predstavlja širši in krajši preizkušanelec, ki se v okviru našega vzorca nanaša na preizkušanelec dimenzij 5 cm × 10 cm × 200 cm.

Problem opazimo v prvih meritvah v tistem okolju pri krajših deskah bukovega lesa z večjim prečnim prerezom (dimenzije: 5 × 10 × 200 cm), kjer je bilo nihanje vzbujeno z lažjim kladivom (200 g). V Tabela 3 opazimo, da je bilo potrebno za pravi rezultat pri prvi seriji meritev na 28 bukavih preizkušancih te ponoviti kar 287-krat. Pri uporabi težjega kladiva (1000 g) se je povprečno število meritev znatno zmanjšalo (Tabela 3).

**Tabela 3:** Število meritev, izvedenih z mikrofonom RODE VideoMic na bukavih preizkušancih.

Meritev št.	Uporabljeno kladivo	Število potrebnih meritev
1	200 g	287
2 – 5	1000 g	49

Teža kladiva predstavlja problem le pri merjenju zvoka z mikrofonom. Pri merjenju nihanja z digitalnim vibrometrom prečnega nihanja ne zaznavamo in program pravilno prikaže prvo lastno frekvenco z enim in drugim kladivom.

## 6 Zaključek

Ugotovili smo, da meritve, izvedene z mikrofonom, ne glede na hrup nekoliko odstopajo glede na meritve opravljene z vibrometrom. Hrup nam oteži zaznavo prve lastne frekvence preizkušanca in tako lahko močno vpliva na rezultat. Zato je pomembno, da je pri delovanju sistema v hrupnem okolju zagotovljena ustrezna oddaljenost mikrofona od deske, dovolj glasen udarec ter pravilno izbrano kladivo.

Meritve z mikrofonom je torej mogoče izvajati v skoraj vseh hrupnih pogojih, pri čemer je potrebno:

- udariti dovolj močno, da jakost zvoka deske preglasi jakost hrupa,
- preizkus ponoviti tolikokrat, da opazimo ponavljajočo se meritev v pravem frekvenčnem območju.

Ugotovljeno je bilo tudi, da teža kladiva vpliva na zaznavanje prve lastne frekvence preizkušanca, kar je pomemben podatek pri zajemanju zvoka z mikrofonom. Pravilno izbrana teža kladiva nam lahko prihrani veliko časa pri določevanju prve lastne frekvence in s tem prave vrednosti dinamičnega modula elastičnosti.

## Literatura

- [1] K. Chaudary (2023). *Understanding Audio data, Fourier Transform, FFT and Spectrogram features for a Speech Recognition System*. <https://towardsdatascience.com/understanding-audio-data-fourier-transform-fft-spectrogram-and-speech-recognition-a4072d228520> [Dostopano 20. 5. 2023]
- [2] DIN 4074-1: 2012 *Razvrščanje lesa po trdnosti – 1. del: Žagani les iglavcev*, 2012.
- [3] SIST EN 14081-2:2018 *Lesene konstrukcije – Razvrščanje konstrukcijskega lesa pravokotneega prečnega prereza po trdnosti – 2. del: Strojno razvrščanje – Dodatne zahteve za preskušanje tipa*, Evropski komite za standardizacijo, Bruselj, 2018.
- [4] SIST EN 338:2016 *Konstrukcijski les – Trdnostni razredi*, Evropski komite za standardizacijo, Bruselj, 2016.
- [5] H. Suyama, R. Kirita, H. Monobe (2013). *Effect of Weight of Hammers on Detection of Resonance Frequency by the Lateral Impact Vibration Method for Large Living Trees of 9 Species*. Mokuza Gakkaishi. 59. 105-111. 10.2488/jwrs.59.105. [Dostopano 21. 5. 2023]
- [6] T. Šuligoj, B. Fortuna, M. Plos, G. Turk, *Razvoj naprave za razvrščanje lesa po trdnosti*. Kuhljevi dnevi, Slovensko društvo za mehaniko, 2018.
- [7] G. Turk, B. Fortuna, *Settings for the STIG timber grader for tension strength grades for Slovenian beech wood*. Report on machine grading of structural timber from Slovenian rectangular cross section beech, 2019.
- [8] G. Turk, B. Fortuna, *Settings for the STIG strength timber grading machine for Slovenian spruce*. Report on machine grading of structural spruce timber of rectangular cross section from Slovenia, 2018.



## *Numerična karakterizacija aluminijeve pene M-pore®*

*Anja Mauko<sup>1</sup>, Matej Borovinšek<sup>1</sup>, Matej Vesenjāk<sup>1</sup> in Zoran Ren<sup>1</sup>*

## *Numerical characterization of M-pore® aluminum foam*

**Povzetek.** Članek opisuje izvedeno mehansko karakterizacijo odprto-celične aluminijeve pene M-pore® s pomočjo računalniškega modela, ki je uspešno simuliral odziv materiala v različnih deformacijskih režimih. Računalniški model temelji na predhodno pridobljenih eksperimentalnih rezultatih aluminijeve pene v kvazi-statičnem in dinamičnem režimu. Za analizo notranje strukture vzorcev je bila uporabljena metoda računalniške tomografije, ki je omogočila natančno geometrijsko rekonstrukcijo strukture, na osnovi katere je bil izdelan računalniški model za napoved odziva testiranega materiala. Računalniški model je bil potrjen z dobrim ujemanjem numeričnih rezultatov z eksperimentalnimi rezultati. Računalniški model je bil uporabljen za simulacije obnašanja aluminijeve pene pri višjih deformacijskih hitrostih. Simulacije so pokazale izboljššan dinamičen odziv aluminijeve pene, saj je sposobnost absorpcije energije pri najvišji deformacijskih hitrosti v primerjavi s kvazi-statično hitrostjo višja za kar 78%.

**Abstract.** The article describes a conducted mechanical characterization of open-cell aluminum foam M-pore® using a computer model that successfully simulated the material's response under various deformation regimes. The computer model is based on previously obtained experimental results of aluminum foam in quasi-static and dynamic regimes. Computer tomography was used for the analysis of the internal structure of the samples, enabling an accurate geometric reconstruction of the structure, upon which the computer model for predicting the response of the tested material was built. The computer model was validated with a good agreement between numerical and experimental results. The computer model was used for simulations of the aluminum foam behavior at higher deformation rates. The simulations demonstrated an improved dynamic response of aluminum foam, as the energy absorption capability at the highest deformation rate was 78% higher compared to the quasi-static rate.

### **1 Uvod**

Hitrost obremenitve lahko izrazito vpliva na mehanski odziv materialov [4]. Pri celičnih strukturah razlikujemo tri obremenitvene režime, in sicer: kvazi-statični, prehodno dinamični in visokohitrostni režim [10], ter pripadajoči načini deformiranja: homogeni način, prehodni način in visokohitrostni način. Slednja, prehodno dinamični in visokohitrostni režim, sta

---

<sup>1</sup> Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

dinamični obremenitvi. Bistveno razliko med statičnim in dinamičnima režimoma predstavlja mesto nastanka deformacije ter povečanje specifične togosti celičnega materiala zaradi vpliva vztrajnosti osnovnega materiala. V kvazi-statičnem obremenitvenem režimu se prva deformacija pojavi na najšibkejšem delu celične strukture. V primeru visokohitrostnega režima pa se pojavi izrazita lokalizirana deformacija na deformacijski fronti, ki se širi od udarne površine proti prostemu koncu testiranega vzorca. Prehodno dinamičen režim je specifičen, saj vsebuje tako lastnosti visokohitrostnega režima na začetku deformiranja, ki se kasneje spremeni v kvazi-statični režim deformiranja. S konstitutivnimi materialnimi modeli je mogoče za posamezni celični material napovedati kritični hitrosti, ki razmejujeta vse tri obremenitvene režime, kot je prikazano v delih [4, 9].

Računalniške simulacije so dandanes zelo priljubljena metoda za reševanje inženirskih problemov, saj ponujajo hitro in cenovno ugodno alternativo zahtevnim eksperimentalnim preizkusom. Za zajemanje rezultatov v realnih preizkusih je pogosto zahtevana napredna merilna oprema z omejenimi merilnimi sposobnostmi. V nasprotnem primeru pa računalniške simulacije omogočajo skoraj neomejeno analizo in interpretacijo celotnega problema z dokaj nizkimi stroški. Pri tem je treba upoštevati, da so rešitve računalniških simulacij zgolj približek zaradi poenostavitve in predpostavk računalniških modelov. Večina obstoječih konstitutivnih modelov homogenih materialov ne zagotavlja natančnega opisa obnašanja celičnih struktur, saj ne zajemajo vplivov njihove topologije in deformacijskih hitrosti. Zaradi pomanjkljivosti obstoječih konstitutivnih modelov celičnih gradiv je bil razvit računski model neurejene odprto-celične aluminijeve pene.

Namen raziskave je izgradnja računalniškega modela za uspešno napovedovanje odziva odprto-celične aluminijeve pene M-pore® v vseh obremenitvenih režimih. Računalniški model je bil zasnovan s pomočjo računalniške tomografije in je temeljil na osnovi dejanskih eksperimentov. Ustreznost računalniškega modela je bila potrjena z eksperimentalnim rezultati pri različnih hitrostih obremenjevanja.

## **2 Metode**

### **2.1 Izdelava vzorcev**

Izdelava vzorcev aluminijeve pene iz osnovnega materiala EN AW 1070 (DIN Al99.7) je temeljila na metodi litja z iztaljenimi jedri [3]. Izdelana je bila plošča aluminijeve pene z odprto-celično strukturo M-pore®, iz katere je bilo z uporabo žične erozije izrezanih 20 vzorcev preizkušancev valjaste oblike velikosti  $\varnothing 19 \text{ mm} \times 20,5 \text{ mm}$  (slika 1a).

### **2.2 Rekonstrukcija aluminijeve pene**

Za analizo strukture aluminijeve pene M-pore® je bila uporabljena metoda računalniške tomografije (CT), ki omogoča natančno rekonstrukcijo notranje strukture vzorcev. Zaradi naključnosti notranje strukture je slednja ključnega pomena za ustrezno izdelavo računalniškega modela, opisanega v nadaljevanju. Rekonstrukcija je bila izvedena z rentgenskim računalniškim tomografom SkyScan 1275 in naslednjimi nastavitvami: 50 kV in 200  $\mu\text{A}$ , ločljivostjo 14  $\mu\text{m}$ , časom izpostavljenost 75 ms, povprečjem 5 slik, korakom rotacije 0,30°, aluminijevim filtrom debeline 1 mm in 360°. Rekonstrukcija slik posameznih plasti vzorcev iz pridobljenih 2D projekcij, 3D-rekonstrukcija in morfometrična analiza strukture so bili izvedeni z uporabo programov NRecon [8], CTVox in CTAn [7].

### **2.3 Mehanska karakterizacija**

Obširna karakterizacija mehanskih lastnosti aluminijeve pene M-pore® je bila izvedena z uporabo dveh različnih eksperimentalnih metod. Osnovne mehanske lastnosti aluminijeve pene so bile določene z enoosnimi kvazi-statičnimi tlačnimi preizkusi (QS) na preizkuševalnem stroju INSTRON 8801 z največjo obremenitvijo 50 kN. Pomik spodnje čeljusti je bil izveden s hitrostjo 0,1 mm/s s frekvenco zajemanja podatkov 10 Hz. Izvedba kvazi-statičnih preizkusov je potekala na Fakulteti za elektrotehniko, strojništvo in ladjedelništvo v Splitu.

Dinamična mehanska karakterizacija je bila izvedena z metodo direktnega udarca na DIHB preizkuševališču (angl.: Direct Impact Hopkinson Bar) na Tehnološkem inštitutu v Izmirju, Turčija [6]. Preizkuševališče omogoča visokohitrostno karakterizacijo novodobnih celičnih materialov s porozno strukturo. Uporabljeno DIHB preizkuševališče je imelo udarna telesa dolžine 200 mm in vstopno palico dolžine 3110 mm, izdelana iz niklove zlitine Inconel 718. Za testiranje pri nižjih udarnih hitrosti so bila uporabljena udarna telesa iz Inconela 718, med tem ko je bilo testiranje pri višjih hitrostih doseženo z uporabo udarnih teles iz lesa. Meritve eksperimentalnih testov so bile izvedene s pomočjo merilnih lističev, pritrjenih na vstopno palico, in visokohitrostne digitalne kamere Photron Fastcam SA-Z za slikovno zajemanje postopka deformiranja vzorcev. Opis uporabljenega DIHB preizkuševališča in zajemanje rezultatov je podrobneje predstavljeno v delih [1,2].

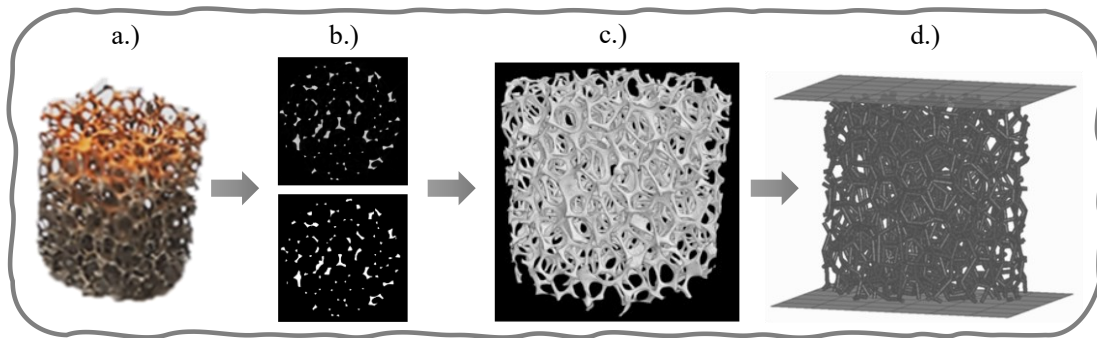
DIHB preizkusi so bili izvedeni pri petih različnih udarnih hitrostih: 14 m/s, 25 m/s, 50 m/s, 75 m/s in 95 m/s. Širok razpon udarnih hitrosti je bil izbran na podlagi računalniškega konstitutivnega modela R-PLH (angl.: rigid power law hardening) obravnavane aluminijeve pene, ki je napovedal kritični deformacijski hitrosti 16 m/ in 29 m/s [9].

### **3 Računalniški model**

Numerične računalniške simulacije so pogosto uporabljena metoda za določanje odziva materiala. V študiji je bila uporabljen numerična metoda končnih elementov (angl.: Finite Element Method - FEM). Validacija računalniških modelov je temeljila na QS in DIHB eksperimentalnih rezultatih, ki je omogočila uporabo potrjenih numeričnih modelov za preučevanje vpliva različnih dejavnikov.

Numerični model odprto-celične aluminijeve pene je bil zgrajen v programu LS-DYNA [5]. Nehomogena notranja struktura vzorcev aluminijeve pene je bila določena s pomočjo rekonstrukcije CT slik, prikazane na sliki 1. S CT skeniranjem so bile zajete posamezne plasti vzorcev v obliki 2D slik, ki so bile nato rekonstruirane v 3D CAD model preizkušancev, slika 1b in c. Sledila je izdelava topološkega modela, v katerem so bili definirani položaji gradnikov posameznih celic in določitev geometrijskih značilnosti. Topološki model je bil pretvorjen v poenostavljen rešetkasti model, ki natančno opisuje vozlišča in robove celic. Z diskretizacijo topološkega modela je bil zgrajen računalniški model, v katerem so bile stranice celic diskretizirane s 3 do 5 linijskimi končnimi elementi drugega reda (ELEMENT\_BEAM) s Hughes Liu formulacijo. V modelu je bil uporabljen poenostavljen enakomeren premer okroglih linijskih nosilcev premera 0,398 mm, ki je bil določen z izenačenjem teže računalniškega modela in realnih vzorcev. V računalniškem modelu sta bili dodani vpenjalni plošči, slika 1d, s pomočjo katerih je bila simulirana obremenitev modela aluminijeve pene. Vpenjalni plošči sta bili diskretizirani s togimi ploščinskimi končnimi elementi (ELEMENT\_SHELL) z Belytschko-Tsay formulacijo.





**Slika 1:** Rekonstrukcija aluminijeve pene M-pore® (a.) s CT metodo (b. in c.) in izgradnja računalniškega modela (d.)

**Preglednica 1:** Materialni parametri osnovnega materiala vzorcev aluminijeve pene EN AW 1070 (DIN A199.7)

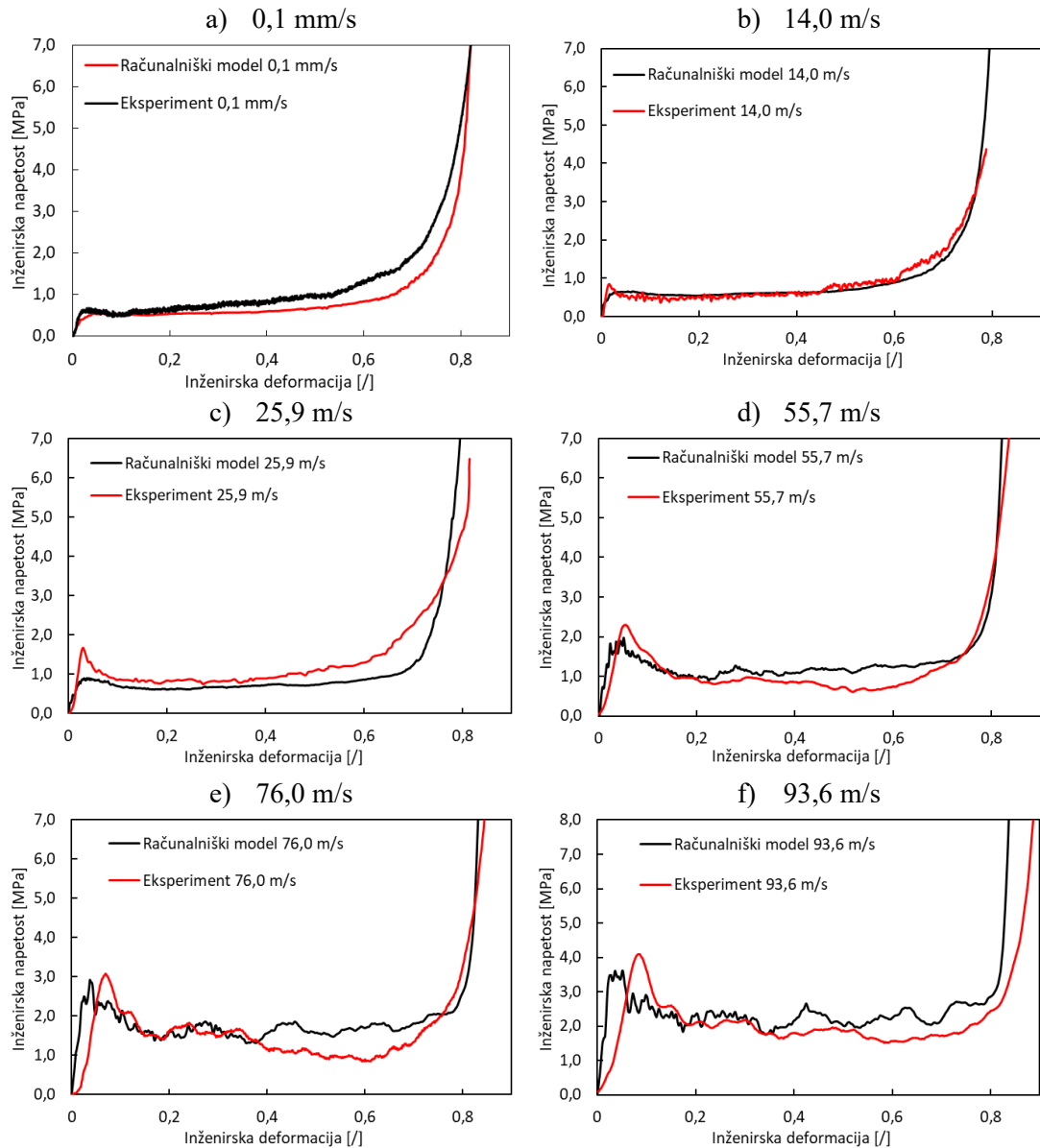
	<b>E</b> [MPa]	<b>v</b> [-]	<b>ρ</b> [kg/m <sup>3</sup> ]	<b>σ<sub>y,sta</sub></b> [MPa]	<b>E<sub>t</sub></b> [MPa]	<b>C</b> [s <sup>-1</sup> ]	<b>P</b> [-]
<b>EN AW-1070</b>	<b>70</b>	<b>0,35</b>	<b>2700</b>	<b>60</b>	<b>84</b>	<b>6500</b>	<b>4</b>

Konstitutivni model osnovnega materiala aluminijeve pene je bil opisan s plastično-kinematičnim materialnim modelom (MAT\_PLASTIC\_KINEMATIC\_003) z materialnimi parametri osnovnega materiala, podanimi v preglednici 1. V preglednici so v zaporedju podani modul elastičnosti, Poissonovo razmerje, gostota, meja tečenja, tangenti modul in Cowper-Symondsova parametra. Cowper-Symondsov konstitutivni model, katerega enačba je podana (1), upošteva vpliv deformacijske hitrosti na odziv materiala je bil dodan v dinamičnih simulacijah pri udarnih hitrostih višjih od 14 m/s. V enačbi (1) predstavljajo  $\sigma_y$  meja tečenja,  $\sigma_{y,sta}$  statično meja tečenja,  $\dot{\epsilon}$  specifično deformacijsko hitrost in Cowper-Symondsova parametra  $C$  in  $p$ . Njihove vrednosti so podane v preglednici 1. Kontakti med modelom aluminijeve pene in vpenjalnimi ploščami so bili modelirani z uporabo AUTOMATIC\_NODLE\_TO\_SURFACE kontakta. Medsebojni kontakti stranic znotraj modela aluminijeve pene so bili simulirani s AUTOMATIC\_GENERAL kontaktom. V računalniškem modelu je bila tlačna obremenitev simulirana z vertikalnim premikom zgornje vpenjale plošče. Hitrosti pomika zgornje plošče so bile enake eksperimentalnim udarnim hitrostim: 0,1 mm/s, 14,0 m/s, 25,9 m/s, 55,7 m/s, 76,0 m/s in 93,6 m/s. Spodnja plošča je bila nepomično vpeta. Na spodnji plošči so bile opazovane reakcijske sile, medtem ko so bili na zgornji plošči merjeni pomiki.

$$\sigma_y = \sigma_{y,sta} \left[ 1 + \left( \frac{\dot{\epsilon}}{C} \right)^{\frac{1}{p}} \right], \quad (1)$$

## 4 Rezultati

Neposredna primerjava numeričnih in eksperimentalnih rezultatov je omogočila potrditev računalniškega modela in njegovo nadaljnjo uporabo za dinamično karakterizacijo vzorcev aluminijeve pene. Prav tako so numerične simulacije omogočile podrobnejši vpogled v postopek deformiranja vzorcev pri hitrostih, ki jih zaradi omejitev merilne opreme v realnih eksperimentih ni bilo mogoče doseči. Slika 2 prikazuje primerjavo računalniških in

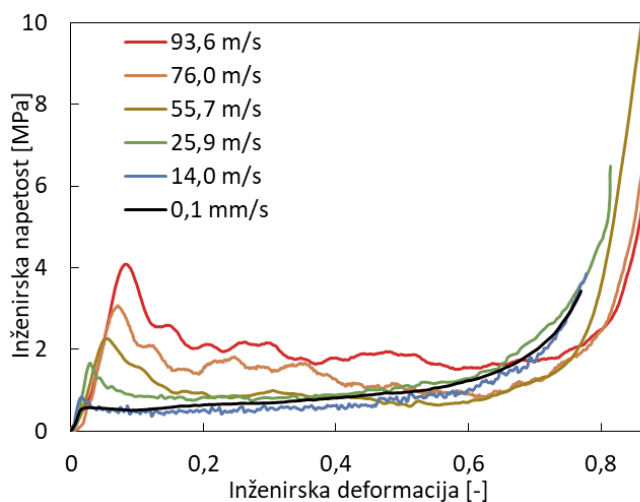


**Slika 2:** Primerjava numeričnih in eksperimentalnih krivulj inženirske napetosti v odvisnosti od inženirske deformacije

eksperimentalnih rezultatov za vse izbrane hitrosti. Na grafih so prikazani poteki inženirskih deformacij v odvisnosti od inženirskih napetosti. V vseh primerih je bila zabeležena specifična oblika razmerja inženirske napetosti od specifične deformacije, značilna za celične materiale.

Iz slike 2 je razvidno zelo dobro ujemanje rezultatov. Pri vseh hitrostih je bila opažena nekoliko manjša togost numeričnih modelov v plato območju. Odstopanja so posledica poenostavitve računalniškega modela. Glavna poenostavitev v računalniškem modelu je bila predpostavka konstantnega prereza stranic strukture, ki je v realnih vzorcih spremenljiva. Prav tako je potrebno upoštevati, da grafi prikazujejo povprečne vrednosti več preizkusov, kar lahko prav tako povzroči manjše odstopanje med primerjavo rezultatov.

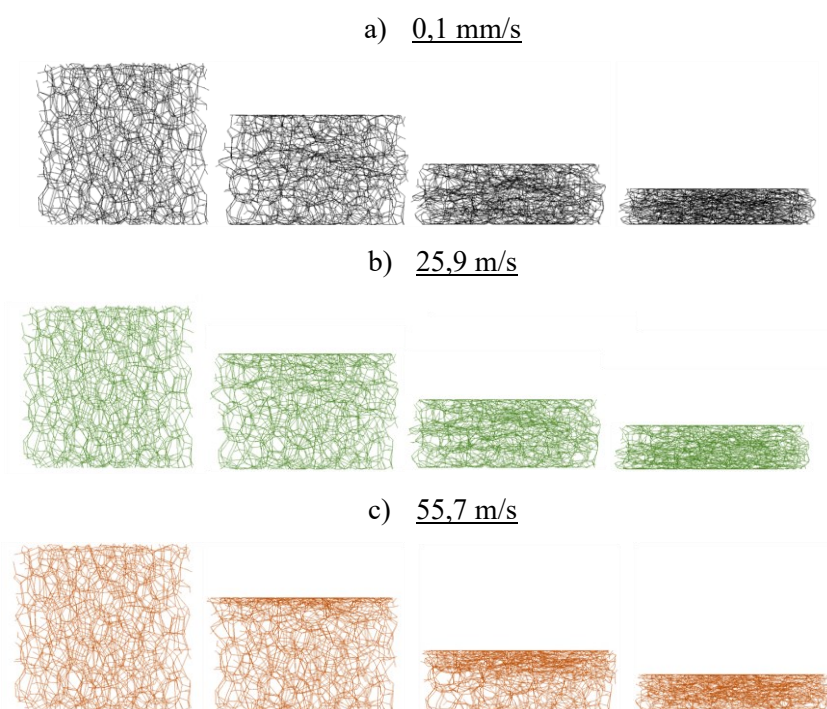
Na sliki 3 je prikazana primerjava inženirskih krivulj pri vseh izbranih hitrostih obremenitve. Povečanje hitrosti obremenjevanja oz. deformacijske hitrosti povzroči povečanja največje napetosti na prehodu v plastično območje, napetosti v plato območju, in deformacije zgoščevanja. S povečanjem največje napetosti, plato napetosti in deformacije zgoščevanja celični material učinkoviteje absorbirajo udarno energijo, kar prispeva k večji učinkovitosti materiala pri povišanju deformacijske hitrosti. Kvantitativno je bila sposobnost absorpcije udarne energije pri najvišji hitrosti 93,6 m/s za 78% večja, kot v primeru najnižje hitrosti 0,1 mm/s.



**Slika 3:** Primerjava povprečnih vrednosti eksperimentalnih rezultatov pri različnih hitrostih deformiranja

Slika 4 prikazuje zaporedje deformiranja računalniških modelov aluminijeve pene pri hitrostih 0,1 mm/s, 25,9 m/s in 55,7 m/s. Glede na določeni kritični hitrosti deformiranja je bil pri hitrostih 0,1 mm/s in 14 m/s pričakovan kvazi-statični režim deformiranja, pri hitrosti 25,9 m/s prehodno dinamičen režim in pri hitrostih 55,7 m/s, 76,0 m/s in 93,6 m/s visokohitrostni režim deformiranja. Prisotnost predvidenih režimov deformiranja je bila potrjena tako v eksperimentalnih preizkusih kot tudi v numeričnih simulacijah. Z vizualno določitvijo deformacijskih mehanizmov in porušitvenih mest je bilo ugotovljeno, da se v primeru kvazi-statičnega režima prva deformacija pojavi na najšibkejšem mestu v celični strukturi in formira strižno fronto, ki naključno potuje po strukturi vzorca. Nasprotno opisanemu režimu se v visokohitrostnem režimu pojavi lokalna deformacijska fronta na mestu udarca, ki se

postopoma širi po posameznih plasteh strukture na nasprotnost stran. V prehodno dinamičnem režimu prevladuje deformacijski model, ki je kombinacija kvazi-statičnega in visokohitrostnega režima, saj so prisotne tako naključne porušitve strukture, kakor tvorjenje deformacijske fronte, ki se širi po plasteh.



**Slika 4:** Postopek deformiranja numeričnega modela vzorca aluminijeve pene pri hitrostih obremenjevanja a) 0,1 mm/s, b) 25,9 m/s in c) 55,7 m/s

## 5 Zaključek

V prispevku je opisana izvedena karakterizacija mehanskih lastnosti aluminijeve pene M-pore® s pomočjo računalniškega modela, ki je uspešno simuliral odziv materiala v različnih deformacijskih režimih. Raziskava je temeljila na predhodno pridobljenih eksperimentalnih rezultatih kvazi-statičnih preizkusov in preizkusov direktnega udarca na DIHB preizkuševališču. Za analizo strukture vzorcev je bila uporabljena metoda računalniške tomografije, ki je omogočila natančno rekonstrukcijo notranje strukture vzorcev. Rekonstrukcija vzorcev je omogočila izdelavo topološkega modela, ki je bil nadalje uporaben za izgradnjo računalniškega modela v programu LS-DYNA. Računalniški model aluminijeve pene je bil uspešno potrjen s primerjavo eksperimentalnih in numeričnih rezultatov. Dobro ujemanje numeričnimi in eksperimentalnimi rezultati je dokazalo ustreznost računalniškega modela in njegovo nadaljnjo uporabo za podrobnejši vpogled v proces deformacije vzorcev. Računalniški model je bil uporabljen za simulacije obnašanja aluminijeve pene pri višjih deformacijskih hitrostih. Simulacije so pokazale izboljššan dinamičen odziv aluminijeve pene,

saj je sposobnost absorpcije energije pri najvišji deformacijskih hitrosti v primerjavi s kvazi-statično hitrostjo višja za kar 78%.

## Literatura

- [1] A. Mauko, M. Vesenjaka, M. Sarıkaya, M. Güden, and Z. Ren, “Visokohitrostno testiranje odprto-celične aluminijeve pene,” in *Kuhljevi dnevi 2020, Zbornik del*, 2020, str. 86–93.
- [2] A. Mauko, Y. E. Yilmaz, and Z. Ren, “High-speed impact testing on DIHB with implementation of wave separation technique,” in *Kuhljevi dnevi 2021, Zbornik del*, 2021, str. 135–142.
- [3] D. Lehmhus *et al.*, “From Stochastic Foam to Designed Structure: Balancing Cost and Performance of Cellular Metals,” *Materials (Basel)*, let. 10, št. 8, str. 922, 2017.
- [4] L. J. Gibson, “Modelling the mechanical behavior of cellular materials,” *Mater. Sci. Eng. A*, let. 110, str. 1–36, 1989.
- [5] *LS-DYNA, Ansys LS-DYNA multiphysics solver*, <https://www.ansys.com/products/structures/ansys-ls-dyna>
- [6] M. Sarıkaya, A. Taşdemirci, and M. Güden, “Dynamic crushing behavior of a multilayer thin-walled aluminum corrugated core: The effect of velocity and imperfection,” *Thin-Walled Struct.*, let. 132, str. 332–349, 2018.
- [7] *MicroCT, 3D.Suite software*, <https://www.bruker.com/en/products-and-solutions/preclinical-imaging/micro-ct/3d-suite-software.html>
- [8] *NRecon, Reconstruction Software*, <https://www.microphotonics.com/micro-ct-systems/nrecon-reconstruction-software/>
- [9] Y. Sun and Q. M. Li, “Dynamic compressive behaviour of cellular materials: A review of phenomenon, mechanism and modelling,” *Int. J. Impact Eng.*, let. 112, str. 74–115, 2018.
- [10] Z. Zheng, J. Yu, C. Wang, S. Liao, and Y. Liu, “Dynamic crushing of cellular materials: A unified framework of plastic shock wave models,” *Int. J. Impact Eng.*, let. 53, str. 29–43, 2013.



## ***Vpliv dodatka za obnovitev mehanskih lastnosti recikliranega polipropilena***

*Mohor Mihelčič<sup>1</sup> in Lidija Slemenik Perše<sup>1</sup>*

### ***The influence of stabilization additive on mechanical properties of recycled polypropylene***

**Povzetek.** V tej študiji smo z različnimi tehnikami proučevali vpliv večkratnega mehanskega recikliranja polipropilena ter izboljšanje njegovih lastnosti z vključitvijo aditiva za stabilizacijo v 10-krat recikliran polipropilen. Rezultati so pokazali, da sta po 20-kratnem recikliranju čistega polipropilena glavna procesa degradacije polipropilena verižni razcep polimernih verig in oksidacija, kar pa dodatek stabilizacijskega aditiva izboljša. Pokazali smo, da se zaradi interakcije med aditivom in polimerom degradacija mehansko recikliranega polipropilena upočasni.

**Abstract.** In this study, we used different techniques to investigate the effects of repeated mechanical recycling of polypropylene and the improvement of the properties by adding a stabilizing additive to 10-times recycled polypropylene. The results showed that after recycling of pure polypropylene for 20-times, the main degradation processes are chain scission and oxidation, which can be improved by adding a stabilizing additive. Due to the interactions between the additive and the polymer, the degradation of mechanically recycled polypropylene is reduced.

## **1 Uvod**

Polipropilen (PP) je eden najbolj uporabljenih termoplastičnih polimerov na svetu, ob enem pa je tudi polimer, ki ga je enostavno mehansko reciklirati. Zaradi dobrih mehanskih lastnosti se široko uporablja v širokem spektru različnih aplikacij [8] in prav zato je PP ohranil pomemben tržni delež v primerjavi z drugimi polimeri. Slaba lastnost PP ter večine termoplastičnih polimerov pri mehanskem recikliranju je predvsem poslabšanje njihovih mehanskih lastnosti, ki so posledica razpada polimernih verig.

Degradacijo poliolefinov na splošno razdelimo na tri vrste: mehansko, termično in termično-oksidativno degradacijo [10][12]. Spremembe ki nastanejo zaradi recikliranja, prepoznamo v nenehnem slabšanju fizikalnih lastnosti, kot so: molekulska struktura, viskoznost, stopnja kristaliničnosti, itd. [4]. Znano je, da termo-mehanska predelava povzroči cepljenje verig – razpad in krajšanje verig PP molekul, kar povzroči znižanje temperature tališča, viskoznosti in viskoelastičnih lastnosti z naraščajočimi cikli predelave [5]. Ena od rešitev za ohranjanje

---

<sup>1</sup> Fakulteta za strojništvo, Univerza v Ljubljani, Aškerčeva ulica 6, 1000 Ljubljana, Slovenija

ali izboljšanje mehanskih lastnosti pri recikliranju je dodajanje različnih aditivov že recikliranemu polimeru.

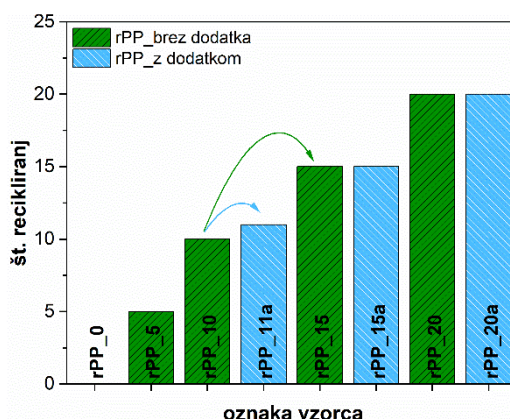
Zaradi velike uporabnosti PP so tudi raziskave o izboljšanju lastnosti osnovnega in večkratno recikliranega PP zelo obsežne. Večina študij o izbiri dodatkov za izboljšanje njihovih lastnosti je bila osredotočena na mineralna (ojačitvena) polnila, tj.  $\text{CaCO}_3$ , smukec, kaolin, [1], kot tudi antioksidativne stabilizatorje [13] in druge. Eden izmed uporabnih dodatkov je tudi CaO, saj absorbira vlago in nevtralizira kislost [14]. V literaturi obstaja kar nekaj raziskav, ki kažejo na to, da dodatek antioksidantov štiti polimer pred degradacijo predvsem v prvem reciklu, medtem ko se dolgoročni vplivi teh dodatkov po večkratnem mehanskem recikliranju polimera le redko proučujejo. Znano je, da nekateri sterično ovirani amini (HALS - *Hindered amine light stabilizers*) ter fenolne in fosforne spojine (Tinuvin, Irganox ali Irgafos), izboljšajo antioksidativne lastnosti PP [13]. Večina študij je osredotočenih predvsem na reološke in mehanske lastnosti čistih ali recikliranih polimernih materialov, a je še vedno premalo raziskav o učinkih degradacije stabiliziranega, večkrat recikliranega polipropilena.

Predstavljen raziskava se osredotoča na vpliv mehanskega recikliranja PP polimera na podlagi reoloških (strukturne spremembe v talini polimera), termičnih (faznimi prehodi in kristaliničnost) in mehanskih lastnosti (praktična uporaba trdnih polimernih izdelkov). Poleg tega smo primerjali lastnosti že 10-krat recikliranega PP, ki smo mu dodali stabilizacijski aditiv ter spremljali spremembo omenjenih lastnosti še nadaljnjih deset reciklov.

### 1.1 Materiali

Za določitev lastnosti recikliranega polimera smo uporabili polipropilen Buplen 6331 (Lukoil, MFI 8–16 g/10 min pri 230 °C in 2,16 kg), ki smo ga večkratno mehansko reciklirali pri enakih pogojih. Pred samo predelavo smo polimer predhodno sušili 4 ure pri temperaturi 90 °C z namenom odstranitve vlage iz polimera, saj bi le-ta lahko spremenila mehanske lastnosti predelanega polimera. Sušen PP (rPP\_0) smo mehansko reciklirali z uporabo dvopolžnega ekstruderja, Polylab PTW 16/40 OS (Thermo Scientific, Nemčija), pri hitrosti vrtenja polžev z 90 obr/min. Temperature na desetih grelcih ekstruderja so naraščale od 150 °C do 205 °C. Po peletiziranju materiala smo del materiala odvzeli za meritve, preostanek pa ponovno uporabili za nov cikel reciklaže. Po 10. reciklu (rPP\_10) smo granulato razdelili na dva dela (Slika 1). Prvo polovico smo označili kot PP brez dodatka (označeno kot rPP), ter smo ga nadaljnje reciklirali še 10-krat (rPP\_20). Drugi polovici smo dodali komercialno dostopen aditiv Recyclobyk 4371 (BYK-Chemie GmbH, Nemčija) v masnem razmerju 0,75 % in ga prav tako reciklirali še nadaljnjih 10 ciklov (označen kot rPP\_a). Aditiv smo uporabili z namenom stabilizacije in izboljšanja mehanskih lastnosti recikliranega PP polimera. Za nadaljnje teste smo z odvzetim polimerom različnih reciklaž s pomočjo injekcijskega brizganja (Haake MiniJet II, Thermo Scientific, Nemčija) izdelali DMA ploščice (L = 60 mm, w = 10 mm, h = 1 mm). Vsi vzorci so bili izdelani pri enakih pogojih injekcijskega brizganja:  $T_{taline} = 190$  °C,  $T_{orodje} = 50$  °C,  $P_1 = 500$  bar, 10 s ter  $P_2 = 100$  bar, 10 s.





Slika 1: Shematski prikaz izdelave vzorcev

## 1.2 Karakterizacijske metode

Reološke lastnosti polimernih talin PP in rPP smo določili pri konstantni temperaturi 190 °C z uporabo rotacijskega reometra MCR 302 (Anton Paar, Avstrija). Za meritve smo uporabili senzorski sistem plošča-plošča s premerom 25 mm (PP25) pri konstantni medploščni razdalji 1 mm v inertni atmosferi. Viskoelastične lastnosti (elastični modul –  $G'$  in viskozni modul –  $G''$ ) proučevanih polimernih talin smo določili z uporabo frekvenčnih oscilacijskih testov. Le-ti so bili izvedeni od 100 do 0,01 Hz z uporabo konstantne deformacije  $\gamma = 5\%$ , ki je bila izbrana znotraj območja linearnega viskoelastičnega odziva, predhodno določenega z amplitudnim testom. Povprečno molekulsko maso ( $M_w$ ) in indeks polidisperznosti ( $PDI = M_w/M_n$ ) smo določili iz reoloških frekvenčnih testov z uporabo programske opreme *Rheocompass* (v.1.30).

Termične lastnosti smo določili z uporabo diferenčne dinamične kalorimetrije (DSC) na TA Q2500 (TA Instruments, USA). Masa zatehtanih vzorcev je bila  $\sim 6 \pm 1$  mg. Pretok dušika kot inertnega plina je bil 50 ml/min. Meritve so bile izvedene v temperaturnem območju od -50 °C do 250 °C, s hitrostjo segrevanja in ohlajanja 10 °C/min. Vzorec smo najprej ohladili na -50 °C ter ga pri tej temperaturi zadrževali 5 minut, nato pa smo ga segreli na 250 °C, kjer smo ponovno vzdrževali konstantno temperaturo 5 minut in nato z enako hitrostjo ohladili na -50 °C. Drugi cikel segrevanja do 250 °C smo ponovili za določitev termičnih prehodov PP in rPP polimerov. Stopnjo kristaliničnosti ( $X_c$ ) smo določili po enačbi 1:

$$X_c (\%) = \frac{\Delta H_c}{\Delta H_m^0}, \quad (1)$$

kjer je  $\Delta H_m$  entalpija transformacije, teoretična entalpija transformacije pri taljenju 100 % kristaliničnega materiala ( $\Delta H_m^0$ ) za 100 % kristalinični PP znaša 207 J/g [7].

Trdoto in modul elastičnosti površine injekcijsko brizganih vzorcev smo določili z Nanoindenterjem G200 XP proizvajalca Agilent (Santa Clara, ZDA). Za meritve smo uporabili standardno Berkovich konico, ki ima obliko tristrane piramide. Mehanske lastnosti smo določili z uporabo metode CSM (*Continuous Stiffness Measurement*) s frekvenco nihanja konice 45 Hz in harmonično amplitudo 2 nm. Na čistem in recikliranem PP polimeru smo napravili 36 vtiskov do globine 2000 nm z 100  $\mu$ m razmakom med vsakim vtiskom. V predstavljenih rezultatih so bile uporabljene povprečne vrednosti globine vtiska med 800 in 1800 nm. Vse meritve so bile izvedene pri sobni temperaturi.

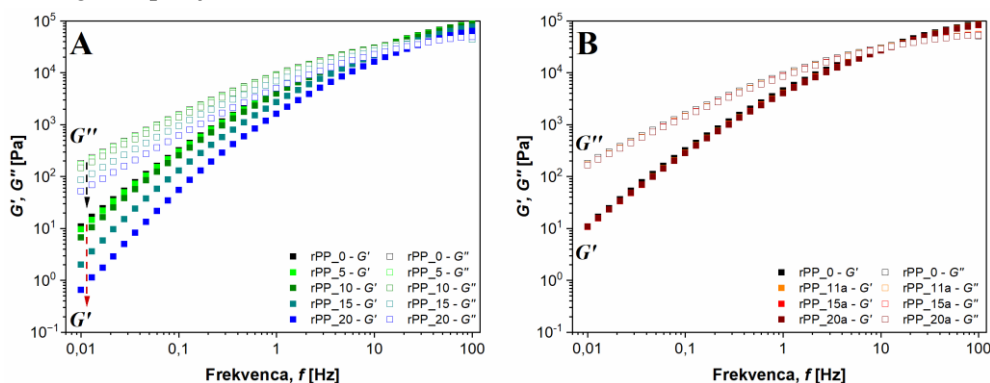


## 2 Rezultati in diskusija

### 2.1 Reološke lastnosti

Viskoelastične meritve so dobro uveljavljene in predstavljajo praktično eksperimentalno metodo za karakterizacijo polimernih talin. V našem delu smo določili reološko vedenje čistega in recikliranega PP z dodatkom oziroma brez njega. Rezultati viskoelastičnih (elastični modul –  $G'$  in viskozni modul –  $G''$ ) lastnosti v območju linearnega viskoelastičnega odziva v odvisnosti od frekvence oscilacije (Slika 2A,B) kažejo, da pri vseh vzorcih vrednosti obeh modulov ( $G'$  in  $G''$ ) naraščajo z naraščajočo frekvenco oscilacije, pri čemer viskozni modul –  $G''$  prevladuje v območju nizkih frekvenc. Moduli recikliranega PP brez dodatka so se z naraščajočim številom reciklov zmanjševali, kar kaže na degradacijo strukture PP. Večje kot je število recikliranj, bolj tekoč značaj izkazuje rPP zaradi cepjenja verig in posledično zmanjšanja molekulske mase polimera.

Viskoelastične lastnosti 10-krat recikliranega PP so se ob dodatku aditiva obnovile, saj se vrednosti dinamičnih modulov  $G'$  in  $G''$  v celotnem frekvenčnem območju niso spremenile kljub nadaljnjemu večkratnemu recikliranju (Slika 2B). Aditiv je tako tvoril povezave med razcepljenimi polimernimi verigami, kar je vodilo do izboljšanja viskoelastičnih lastnosti. Ob dodatku aditiva je tako mobilnost polimernih verig omejena, notranja mrežna struktura recikliranega PP pa ojačana.

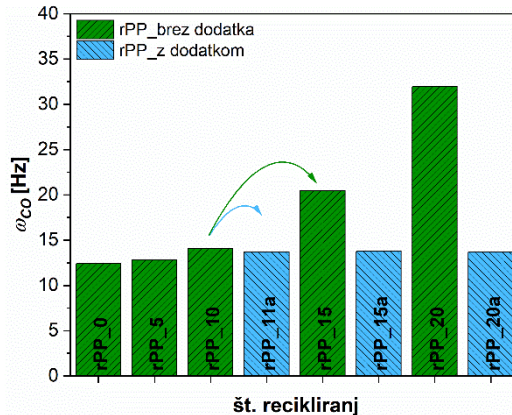


**Slika 2:** Frekvenčna odvisnost elastičnega modula  $G'$  in viskoznega modula  $G''$  (A) čistega PP, recikliranega PP brez in (B) recikliranega PP z dodatkom v odvisnosti od števila recikliranj.

Če primerjamo frekvenčno odvisnost modulov  $G'$  in  $G''$ , lahko določimo točko, v kateri modula izkazujeta enake vrednosti ( $G = G' = G''$ ). Frekvenco, pri kateri sta modula enaka, imenujemo frekvenca prehoda ( $\omega_{co}$ ). Na tej točki se vedenje materiala spremeni, in sicer, v našem primeru od tekočega karakterja v nizkofrekvenčnem območju do vedenja, podobnega trdnemu telesu pri višjih frekvencah.

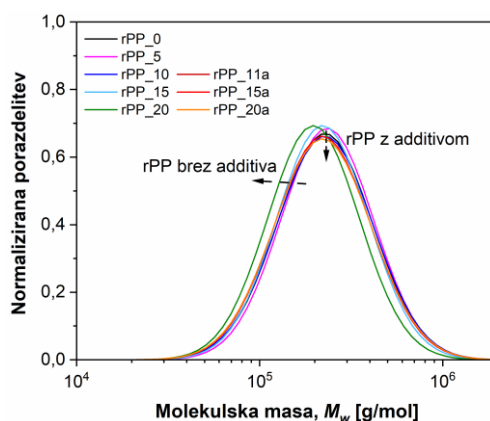
Rezultati, prikazani na sliki 3, kažejo na to, da se pri vzorcih rPP brez dodatka točka prehoda z večanjem ciklov recikliranja premakne proti višjim frekvencam, kjer so relaksacijski časi molekul nižji. To je značilno za krajše molekule in odraža cepitev polimernih verig med večkratnim procesom recikliranja. Po drugi strani, ko PP polimeru, ki je bil že 10-krat recikliran dodamo aditiv, frekvenca prehoda ostane enaka, ne glede na število nadaljnjih reciklov. Do podobnih zaključkov so prišli tudi Pušnik Črešnar s sodelavci [11], ki so

uporabili komercialno dostopni čisti in reciklirani PP pri izdelavi različno polnjenih PP kompozitov z lesnimi vlakni.



**Slika 3:** Točka prehoda ( $\omega_{co}$ ) čistega PP, recikliranega PP brez in recikliranega PP z dodatkom v odvisnosti od števila reciklov.

Spremembe povprečne molekulske mase ( $M_w$ ) in indeksa polidisperznosti (PDI) z naraščajočim številom recikliranj za PP brez in z dodatkom (Slika 4, Tabela 1) smo določili iz frekvenčnih reoloških meritev. Vrh  $M_w$  se pri PP brez dodatka z naraščajočim številom reciklov premakne proti nižjim vrednostim, kar lahko pripišemo cepitvi in trganju polimernih verig [2]. Opazno zmanjšanje  $M_w$  se pojavi po 10. reciklu pri vzorcu brez dodatka aditiva. Poleg tega rezultati tudi kažejo, da se po dodatku aditiva  $M_w$  ne zmanjša, ne glede na število nadaljnjih reciklov. Rezultati se zelo dobro ujemajo s predhodnimi, že objavljenimi rezultati, ki kažejo, da se tudi kompleksna viskoznost po 10. reciklu za rPP brez dodatka znatno zmanjša [9]. Znižanje vrednosti PDI kaže na zoženje porazdelitve molekulske mase in nastanek krajših verig, ki so posledica cepitve polimernih verig (Tabela 1).



**Slika 4:** Molekulska masna porazdelitev  $M_w$  čistega PP in recikliranega PP brez in z dodatkom v odvisnosti od števila recikliranj.

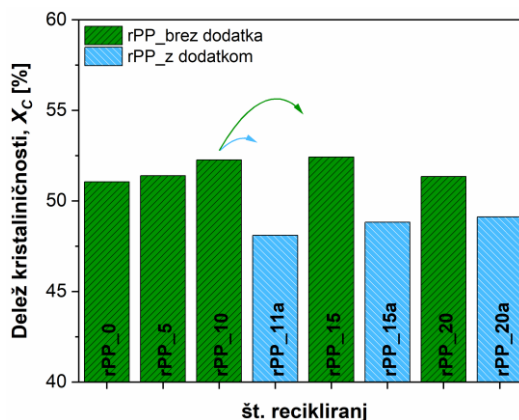
**Tabela 1:** Molekulska masa porazdelitev  $M_w$  in indeks polidisperznosti (PDI) čistega PP in recikliranega PP brez in z dodatkom v odvisnosti od števila recikliranj.

vzorec	$M_w$ (g/mol)	PDI
rPP_0	$3,89 \cdot 10^5$	1,44
rPP_5	$3,94 \cdot 10^5$	1,43
rPP_10	$3,88 \cdot 10^5$	1,43
rPP_15	$3,63 \cdot 10^5$	1,41
rPP_20	$3,22 \cdot 10^5$	1,39
rPP_11a	$3,84 \cdot 10^5$	1,45
rPP_15a	$3,83 \cdot 10^5$	1,45
rPP_20a	$3,83 \cdot 10^5$	1,44

## 2.2 Termične lastnosti

DSC je pomembna karakterizacijska metoda za določanje vpliva recikliranja na termično vedenje delno-kristaliničnega čistega in recikliranega PP. Poleg tega rezultati omogočajo tudi določitev sprememb, ki nastanejo zaradi dodatka aditiva recikliranemu PP.

Rezultati so pokazali, da se z naraščajočim številom recikliranj se delež kristaliničnosti rPP brez aditiva nekoliko povečuje, dočim se ob dodatku aditiva, le-ta zmanjša za ~8 % in sicer iz 52,2 % na 48,1 % (Slika 5). Povečanje deleža kristaliničnosti lahko razložimo z dejstvom, da makromolekule z nižjo molekularno maso delujejo kot nukleatorji, ki pospešijo kristalizacijo delno-kristaliničnega PP tako, da omogočajo zvijanje oziroma urejanje verig in nastanek večjih kristalnih struktur.

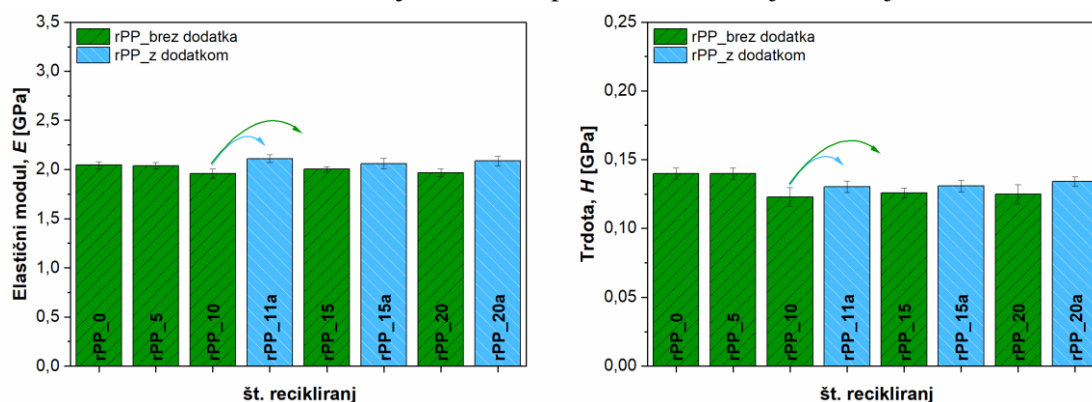
**Slika 5:** Delež kristaliničnosti čistega PP in recikliranega PP brez in z dodatkom v odvisnosti od števila recikliranj.

## 2.3 Mehanske lastnosti

Nanoindentacija je metoda, ki se uporablja za določanje površinskih mehanskih lastnosti, kot sta modul elastičnosti ( $E$ ) in trdota ( $H$ ). Razpon vrednosti trdote na mikro nivoju, ki jo izkazuje vsak polimer, je v glavnem določen z naravo molekularnih verig, t.j. s strukturo, dolžino in polidisperznostjo. Mehansko recikliranje vpliva na strukturo polimera, t.j. dolžino

polimernih verig, zato smo z nanoindentacijo določili vpliv večkratnega recikliranja PP na njegove mikromehanske lastnosti.

Vrednosti modula elastičnosti ( $E$ ) za vzorce recikliranega PP brez in z dodatkom so prikazane na sliki 6A, medtem ko so vrednosti površinske trdote ( $H$ ) prikazane na sliki 6B. Rezultati kažejo, da po prvih petih reciklih vrednosti  $E$  in  $H$  ostanejo enake. Z nadaljnjim recikliranjem pa se vrednosti  $E$  in  $H$  zmanjšajo, kar kaže na to, da površina večkrat recikliranega PP postaja bolj mehka. Do podobnih ugotovitev sta prišla tudi Zdiri et al. [15] in Bourmaud et al. [3], ki sta prav tako opazila rahlo zmanjšanje modula elastičnosti po večkratnem recikliranju PP polimera. To je lahko posledica fizikalnega staranja in termooksidativnega razpada polimernih molekul [6]. Po drugi strani pa dodatek aditiva povrne elastične lastnosti in trdoto na višje vrednosti, podobne tistim, ki jih izkazuje čisti PP.



**Slika 6:** Povprečne vrednosti (A) modula elastičnosti in (B) trdote čistega PP ter recikliranega PP brez in z dodatkom.

### 3 Zaključek

Dejstvo je, da večkratno recikliranje termoplastnih polimerov vodi do degradacije polimerne verige, kar je opazno v spremembi reoloških, morfoloških, mehanskih, termičnih in drugih lastnostih predelanega polimera.

Viskoelastična analiza je pokazala, da se pri večkratnem recikliranju PP brez dodatka opazi zvišanje frekvence, pri kateri se struktura polimera ( $G' = G''$ ) spremeni iz tekoče v trdno (točka prehoda,  $\omega_{co}$ ). Ta točka ( $\omega_{co}$ ) se pri vzorcih z dodatkom aditiva (rPP\_a) kljub nadaljnjemu recikliranju le malo spremeni. Povečanje  $\omega_{co}$  nakazuje, da se je molekulska masa recikliranega polimera brez dodatka zmanjšala, kar pomeni, da so nastale krajše molekule, ki so bolj mobilne in imajo zato višjo frekvenco prehoda. Po drugi strani pa daljše molekule potrebujejo več časa, da se razpletejo in za terminalno vedenje s tekočim karakterjem potrebujejo več časa, torej nižje frekvence. Rezultati so pokazali, da so se ob dodajanju aditiva recikliranemu PP reološke lastnosti izboljšale že po prvem recikliranju (rPP\_11a) in ostale nespremenjene še nadaljnjih desetih recikliranih ciklov (rPP\_20a).

Termična analiza je pokazala, da je glavni mehanizem degradacije recikliranja PP cepljenje polimerne verige, saj termogrami ne kažejo sprememb v mikrostrukturi. Ožjo porazdelitev polimernih molekul po dodatku aditiva lahko povežemo tudi z izboljšanimi mehanskimi lastnostmi površine. Rezultati, pridobljeni iz nanoindentacijskih meritev, so pokazali, da imajo vzorci rPP brez aditiva nekoliko nižji modul elastičnosti in trdoto kot vzorci rPP z

dodatkom. To pomeni, da aditiv deluje kot ojačevalec in dodatno poveže cepljene polimerne verige.

Če povzamemo, sta glavna procesa degradacije polipropilena, ki se pojavita po večkratnem mehanskem recikliranju, cepitev polimernih verig in oksidacija, kar pa lahko izboljšamo z dodatkom stabilizacijskega aditiva.

## Zahvala

To delo je finančno podprla Javna agencija za raziskovalno dejavnost (ARRS) v okviru programa št. P2-0264.

## Literatura

- [1] L. Altay, M. Sarikanat, M. Sağlam, T. Uysalman, and Y. Seki, *Res. Eng. Struct. Mater.*, 7, 361-373, 2021.
- [2] M. Bek, A. Aulova, K. P. Črešnar, S. Matkovič, M. Kalin, and L. Slemenik Perše, *Polymers*, 14, 2539, 2022.
- [3] A. Bourmaud, A. Le Duigou, and C. Baley, *Polym. Degrad. Stab.*, 96, 1732–1739, 2011.
- [4] H. M. da Costa, V. D. Ramos, and M. G. de Oliveira, *Polym. Test.*, 26, 676–684, (2007).
- [5] V. A. González-González, G. Neira-Velázquez, and J. L. Angulo-Sánchez, *Polym. Degrad. Stab.*, 60, 33–42, 1998.
- [6] K. Hamad, M. Kaseem, and F. Deri, *Polym. Degrad. Stab.*, 98, 2801–2812, 2013.
- [7] J. Karger-Kocsis, *Polypropylene structure, blends and composites: Volume 3 composites*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [8] M.-J. Khalaj, H. Ahmadi, R. Lesankhosh, and G. Khalaj, *Trends Food Sci. Technol.*, 51, 41–48, 2016.
- [9] M. Mihelčič, A. Oseli, M. Huskić, and L. Slemenik Perše, *Polymers*, 14, 5438, 2022.
- [10] J. D. Peterson, S. Vyazovkin, and C. A. Wight, *Macromol. Chem. Phys.*, 202, 775–784, 2001.
- [11] K. Pušnik Črešnar, L. Fras Zemljič, L. Slemenik Perše, and M. Bek, *Applied Sciences*, 10, 8863, 2020.
- [12] K. Ragaert, L. Delva, and K. Van Geem, *Waste Manag.*, 69, 24–58, 2017.
- [13] Z. O. G. Schyns and M. P. Shaver, *Macromol. Rapid Commun.*, 42, 2000415, 2021.K.
- [14] M. Ton-That and J. Denault, The Institute of Textile Science Ottawa, 2007.
- [15] Zdiri, A. Elamri, M. Hamdaoui, O. Harzallah, N. Khenoussi, and J. Brendlé, *Green Chem. Lett. Rev.*, 11, 296–311, 2018.



## *Inverzna določitev materialnih parametrov ortotropnega materialnega modela smrekovega lesa*

*Branko Nečemer<sup>1</sup>, Jure Fakin<sup>1</sup>, Gorazd Fajdiga<sup>2</sup>, Matjaž Šraml<sup>3</sup> in Srečko Glodež<sup>1</sup>*

### *Inverse Determination of Material Parameters for the Orthotropic Material Model of Spruce Wood*

**Povzetek.** Cilj raziskave je predstavitev eksperimentalnih rezultatov tritočkovnih upogibnih preizkusov radialno in tangencialno usmerjenih smrekovih lesnih vlaken. Poleg tega je v raziskavi predlagan numerični model tritočkovnega upogibnega preizkusa. Glavni cilj opravljenega raziskovalnega dela je inverzna določitev materialnih parametrov ortotropnega materialnega modela smrekovega lesa. Na koncu je izvedena potrditev numeričnega modela, ki temelji na primerjavi eksperimentalnih in numeričnih odzivov. Zgrajen in potrjen numerični model bo v nadaljevanju uporabljen za določanje vzdržljivostne dobe vzorcev iz smrekovega lesa.

**Abstract.** The objective of this paper is to present an experimental investigation of a three-point bending test for radial and tangential-orientated spruce wood fibres. Furthermore, a numerical model of the three-point bending test is proposed. The main goal of the performed research work is the inverse determination of the material parameters of the orthotropic material model of spruce wood. Finally, validation of the numerical model, based on a comparison of experimental and numerical responses, is analysed. The presented numerical model will further serve to determine the fatigue life of specimens made of spruce wood.

## **1 Uvod**

Smrekov les je široko uporabljen material na različnih področjih, vključno z gradbeništvom, izdelovanjem pohištva in izdelovanjem glasbil [10]. Mehansko obnašanje smrekovega lesa kot naravnega materiala igra ključno vlogo pri določanju njegove učinkovitosti in primernosti za različne uporabe [11],[4]. Les je material z mehanskimi lastnostmi, ki se močno razlikujejo tako znotraj drevesa, kot med samimi drevesi. Izdelki iz bioloških materialov, kot je les, imajo pogosto zapleteno mehansko obnašanje. Čeprav se takšni materiali uporabljajo že tisočletja, še vedno ni doseženo popolno poznavanje njihovega mehanskega obnašanja. Njihove lastnosti se pogosto razlikujejo od vzorca do vzorca in kažejo nelinearno mehansko obnašanje pri višjih

---

<sup>1</sup> Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

<sup>2</sup> Univerza v Ljubljani, Biotehniška Fakulteta

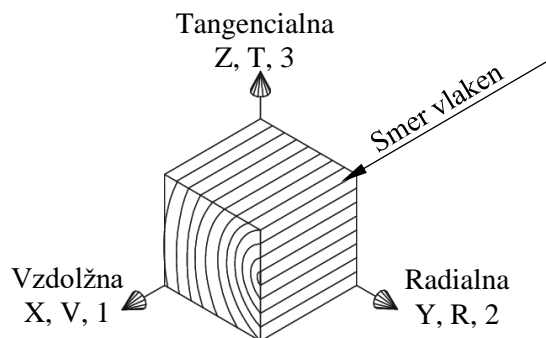
<sup>3</sup> Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo

obremenitvah. Spremembe vlage povzročijo krčenje ali nabrekanje in spremenijo mehanske lastnosti. Smrekov les je zaradi svojih zaželenih lastnosti, kot so trdnost, togost in lahkotnost, privlačen za različne namene. V gradbeništvu se smrekov les običajno uporablja za konstrukcijske namene, kot so strešne konstrukcije, tramovi in okvirji. Cenjen je zaradi svoje estetske privlačnosti in uporabnosti pri izdelavi pohištva, zaradi česar je priljubljen material za izdelavo predmetov, kot so stoli, mize in omare [9].

To delo se osredotoča na tritočkovno upogibno obnašanje lesenih vzorcev iz norveške smreke. Eksperimentalni preizkusi so bili izvedeni po standardnih postopkih, predpisanih v [5]–[7]. Numerični model je bil validiran s primerjavo numeričnih in eksperimentalnih statičnih odzivov. Na podlagi pridobljenih eksperimentalnih podatkov iz upogibnih testov je bil razvit numerični model, ki upošteva anizotropnost lesa. Predlagani numerični model bo v nadaljevanju mogoče razširiti in izboljšati ob upoštevanju eksperimentalnih rezultatov, povezanih z nadaljnjimi raziskavami utrujenostnega obnašanja lesa [8]. Glavni cilj raziskave je tako razviti ustrezen numeričen model, ki ga bo v nadaljevanju mogoče uporabiti za napovedovanje mehanskega obnašanja lesa v različnih aplikacijah, kar vodi k boljšemu oblikovanju in optimizaciji izdelkov na osnovi lesa. S povečano uporabo lesa, kot trajnostnega materiala v gradbeništvu, bodo nadaljnje raziskave mehanskega obnašanja lesa ključnega pomena za zagotovitev njegove pravilne in varne uporabe.

## 2 Material in metode

Ker je les zelo anizotropen material, so njegove mehanske lastnosti močno odvisne od orientacije lesnih vlaken. Po mnenju avtorjev [12] je mogoče materialna vlakna in njihovo orientacijo v celoti definirati z enim koordinatnim sistemom, kot je prikazano na sliki 1. Glede na orientacijo lesnih vlaken so vlakna pozicionirana vzdolžno (x-os), radialno (y-os) in tangencialno (z-os). Ista orientacija vlaken in orientacija koordinatnega sistema bosta uporabljena tudi v predstavljenem raziskovalnem delu.

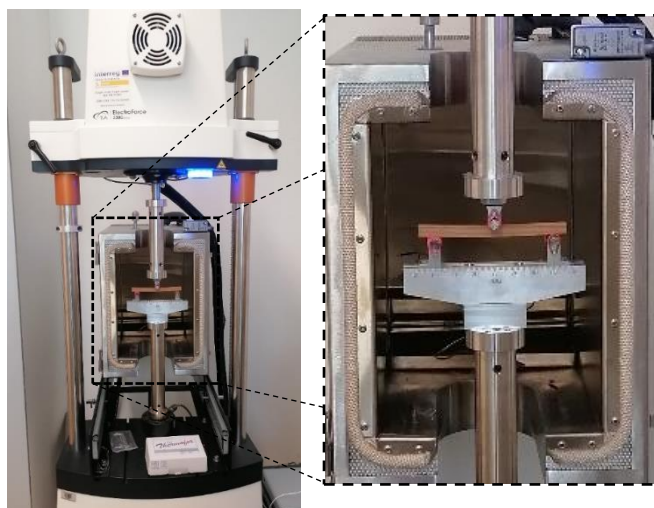


**Slika 1:** Usmeritve lesnih vlaken in določitev njihove koordinatne osi

Za testiranje ter ugotavljanje mehanskih lastnosti smrekovega lesa so bili pripravljene vzorci velikosti 150 mm × 10 mm × 10 mm (dolžina × širina × višina). Da bi dosegli najboljše eksperimentalne rezultate, so bili vzorci izdelani vzdolž lesnih vlaken in rastni lesnih obročev. Za določitev gostota  $\rho$  lesa je bil vsak vzorec pred testiranjem stehšan ter natančno izmerjen. Tritočkovni upogibni testi so bili izvedeni v tangencialni in radialni smeri z uporabo elektronskega preskusnega stroja ElectroForce serije 3300 (glej sliko 2). Vsi testi so bili



izvedeni v skladu s standardi [5]–[7]. Vzorci so bili podprti z jeklenimi cilindričnimi valji premera 8 mm, pri čemer je bila razdalja med spodnjima valjema 120 mm. Eksperimentalni preizkusi so bili izvedeni pri nadzoru pomika s konstantno hitrostjo 10 mm/min. Obremenitev je bila izvedena z navpičnim premikom zgornjega valja, nameščenega na sredini vzorca. Pri testiranju v tangencialni smeri je bila obremenitev obremenjena normalno na ravnino XY, v radialni smeri pa je bila obremenitev obremenjena normalno na ravnino XZ.



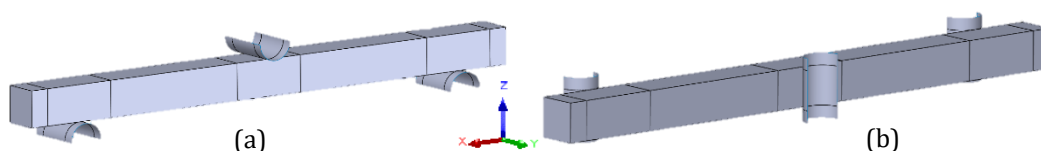
Slika 2: Testni stroj ElectroForce serije 3300

### 3 Numerični model

Priprava numeričnega modela, vključno z definiranjem materialnega modela, robnih pogojev in diskretizacije geometrije modela je bila pripravljena in izvedena v programskem paketu ANSYS 2022 R2 [1].

#### 3.1 Geometrija

Geometrija tritočkovnega upogibnega vzorca, uporabljenega v simulacijah z metodo končnih elementov (MKE), je bila pripravljena v programu Solidworks. Kot je navedeno zgoraj, je bila dimenzija vzorca 150 mm v dolžino in je imel kvadratni prerez s stranico 10 mm. V numeričnem modelu so bili podporni valji s premerom 8 mm modelirani kot togo lupinasto telo definirani z oddaljeno referenčno točko. Razdalja med spodnjima cilindričnima valjema je bila 120 mm (slika 3). Ker so bili vzorci smrekovega lesa simulirani pri upogibanju za tangencialno in radialno orientacijo, sta bila na začetku pripravljena dva ločena modela za obe orientaciji (slika 3a, obremenitev v osi z – tangencialna orientacija; slika 3b, obremenitev v osi y – radialna orientacija).



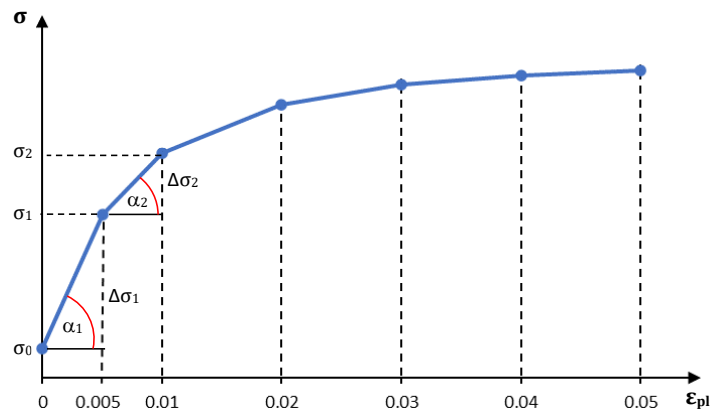
Slika 3: CAD modeli za upogibne preizkuse za tangencialno (a) in radialno (b) orientacijo lesnih vlaken



V predlaganem numeričnem modelu so bili geometrija, obremenitev in robni pogoji simetrični v obeh ravninah XZ in YZ (slika 3, za tangencialno orientacijo). Oba modela sta bila dodatno poenostavljena z uporabo dveh nizov simetrijskih robnih pogojev; zato so bili izdelani tudi polovični in četrtinski modeli tritočkovnih upogibnih vzorcev. S tem se je velikost numeričnega modela bistveno zmanjšala, kar je posledično privedlo tudi do krajših računskih časov.

### 3.2 Materialni model

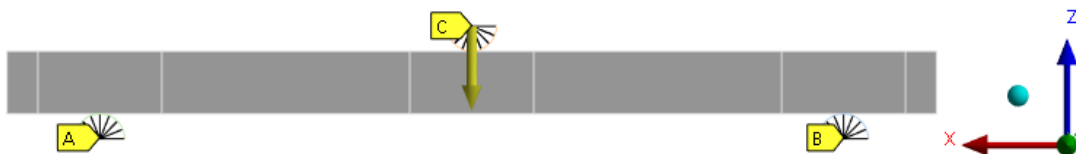
Ker sta bila pripravljena dva modela z različnimi smermi obremenjevanja, je bil potreben samo en materialni model za opredelitev materialnih lastnosti smrekovega lesa za obe usmeritvi vlaken. Kot je omenjeno zgoraj, lahko materialne lastnosti lesa v celoti definiramo s tremi različnimi usmeritvami lesnih vlaken (slika 1). Posledično smo za opredelitev elastičnega obnašanja smrekovega lesa uporabili linearno elastični ortotropni materialni model. Linearno elastični ortotropni materialni model je v celoti definiran s tremi nizi materialnih parametrov za vsako os: modul elastičnosti (MOE):  $E_1, E_2, E_3$ , Poissonovo razmerje:  $\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{13}$  in strižni modul:  $G_{12}, G_{23}, G_{13}$ . Po predhodnih avtorjevih raziskavah [3] ima testirani smrekov les pred prelomom običajno manjšo obliko nelinearnega dela s padajočo togostjo. Zato je bilo nelinearno obnašanje definirano s 6-segmentno multilinearano izotropno krivuljo utrjevanja, kot je prikazano na sliki 4.



Slika 4: Definirana šest segmentna multilinearana plastičnost

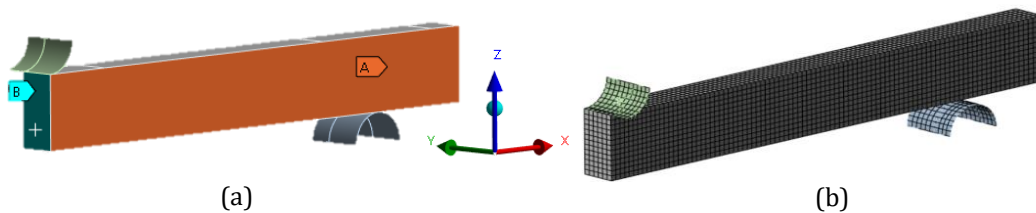
### 3.3 Robni pogoji in diskretizacija geometrije modela

Robni pogoji, prikazani na sliki 5, so bili predpisani v referenčnih točkah cilindričnih valjev. Robni pogoji vpetja (vseh 6 prostostnih stopenj) so bili predpisani na obeh spodnjih cilindričnih valjih (slika 5, oznaka A in B), medtem ko je bil v zgornji valj (slika 5, oznaka C) predpisan pomik.



Slika 5: Robni pogoji vpetja in obremenitve

Kontakt med preizkušancem in jeklenimi valji smo v normalni in prečni smeri modelirali s trenjem ob upoštevanju statičnega koeficienta trenja 0,4. Kot je bilo omenjeno v prejšnjem poglavju, sta bila za poenostavitev celotnega modela predpisana dva niza robnih pogojev simetrije. Prvi niz simetrije je bil predpisan na ravnini XZ (slika 6, oznaka A) z omejenimi pomiki v smeri y-osi in omejenimi rotacijami okoli x- in y-osi. Drugi niz simetrije je bil predpisan samo v četrtinskem modelu na ravnini YZ (slika 6, oznaka B) z omejenimi pomiki v smeri x-osi in omejenimi rotacijami okoli y- in z-osi. Za mreženje geometrije so bili uporabljeni kvadratni volumski končni elementi z globalno velikostjo elementa 0,8 mm. Mreža geometrije je prikazana na sliki 6 (b).



**Slika 6:** Četrtnski model: (a) definirani nizi simetrijskih robnih pogojev, (b) mreža končnih elementov četrtinskega modela

### 3.4 Vpliv robnih pogojev na odziv modela

Primerjava med celotnim, polovičnim in četrtinskim modelom je bila opravljena s primerjavo izračunanih odzivov sila-premik za vsak model. Geometrija vsakega modela je bila diskretizirana z uporabo kvadratnih končnih elementov velikosti 0,8 mm. Razlika med velikostmi modelov in pretečenimi računskimi časi je predstavljena v tabeli 1.

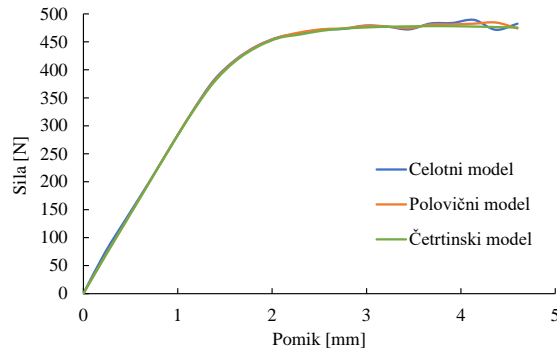
**Tabela 1:** Primerjava med celotnim, polovičnim in četrtinskim modelom

Model	Št. elementov	Št. vozlišč	Računski čas [s]
Celotni model	32614	37973	694
Polovični model	15069	18988	103
Četrtnski model	7574	9598	56

\*Računano na AMD Ryzen 5 3600 na 6-Jedrnem procesorju s 16 GB Ram-a

Za primerjavo odzivov celotnega, polovičnega in četrtinskega modela je bila v vsakem računskem koraku izpisana vrednost reakcijske sile spodnjih cilindričnih valjev ter vrednost pomika zgornjega cilindričnega valja. Grafični prikaz numeričnih odzivov modelov je prikazana na sliki 7. S slike je razvidno, da so izračunani odzivi praktično identični z manjšimi

razlikami. Glede na računski čas (glej tabelo 1) je bil v optimizacijskem postopku uporabljen četrtnski model.

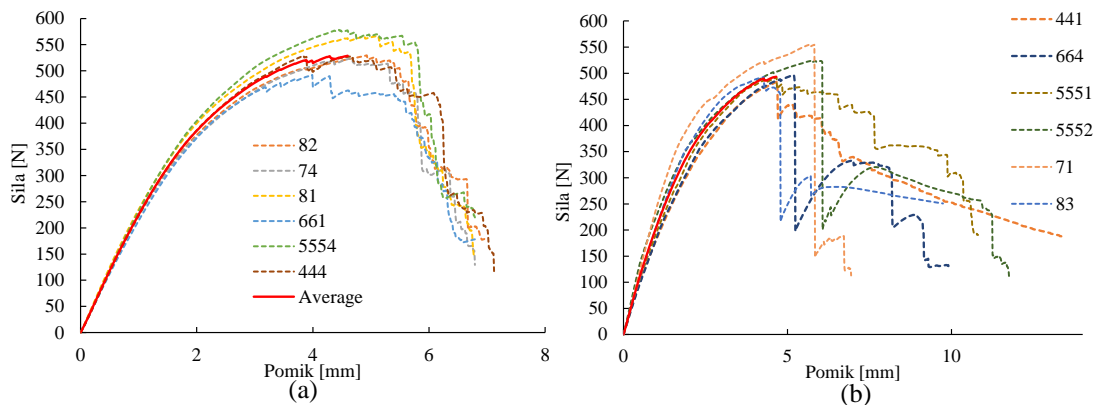


Slika 7: Primerjava krivulj sila-odmik, izračunanih s celotnim, polovičnim in četrtnim modelom

## 4 Rezultati in diskusija

### 4.1 Eksperimentalni rezultati

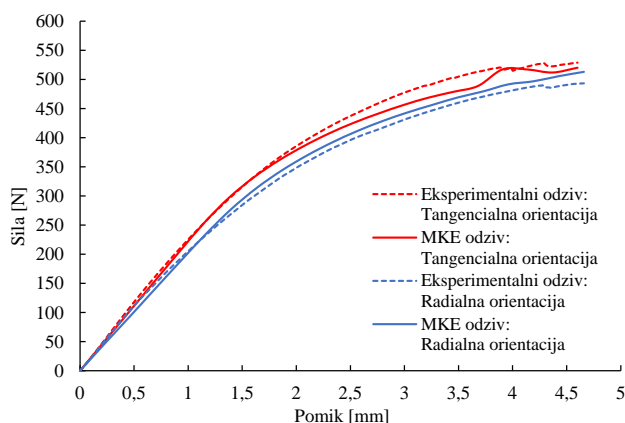
Za doseganje primerljivih rezultatov so bili leseni vzorci statistično razvrščeni glede na gostoto materiala  $\rho$ . Izbrani so bili vzorci z gostoto  $0,44 - 0,46 \text{ g/cm}^3$ , ter kasneje testirani do preloma. Po pregledu eksperimentalnih rezultatov in po odstranitvi neuspešnih tritočkovnih upogibnih preizkusov je bilo izbranih šest vzorcev za vsako orientacijo vlaken. Za primerjavo eksperimentalnih in numeričnih rezultatov je bila povprečna krivulja sila-odmik izračunana s povprečenjem eksperimentalnih podatkov vseh šestih vzorcev za vsako orientacijo vlaken (slika 8 (a) za tangencialno orientacijo; slika 8 (b) za radialno orientacijo). Razlika med obema diagramoma je opazna in pričakovana zaradi ortotropne narave lesa. Ker je les naraven materialni vir, kjer številni dejavniki vplivajo na njegove mehanske lastnosti, je bilo precejšnje odstopanje med posameznimi vzorci tudi pričakovano, kar so naša opazovanja potrdila. Vzrok odstopanja je tudi odvisnost anizotropije materiala od velikosti preizkušanca, kjer manjši vzorci izkazujejo manjšo ukrivljenost lesenih obročev.



Slika 8: Eksperimentalne krivulje sila-premik: (a) tangencialna in (b) radialna orientacija

## 4.2 Primerjava med numeričnimi in eksperimentalnimi rezultati

Numerični model je bil potrjen na podlagi eksperimentalnih rezultatov tritočkovnih upogibnih testov. Potrditev je bila izvedena z inverznim postopkom za določitev konstitutivnih materialnih parametrov na podlagi povprečnega odziva tritočkovnih upogibnih preskusov z radialno in tangencialno orientacijo lesnih vlaken. Inverzni postopek določanja je bil izveden hkrati za obe orientaciji vlaken. Za numerične simulacije je bil uporabljen MKE model v okviru kode ANSYS MAPDL [1]. Celotni proces optimizacije (primerjava med eksperimentalnimi rezultati tritočkovnih upogibnih testov in računskimi podatki) je bila izvedena v odprtokodnem programu Optimax [2]. V postopku inverzne optimizacije je bil kot optimizacijska metoda uporabljen genetski algoritem za določitev materialnih parametrov, ki so bili nato uporabljeni v numeričnih izračunih. Odstopanje med eksperimentalno in numerično pridobljenimi tangencialnimi in radialnimi odzivi/krivuljami sila-pomik je bilo uporabljeno kot optimizacijska ciljna funkcija. V postopku optimizacije smo za vsako orientacijo (Z in Y) lesnih vlaken uporabili povprečni eksperimentalni odziv za inverzno določitev ustreznih materialnih parametrov. Inverzna določitev konstitutivnih materialnih parametrov je bila izvedena znotraj 1200 računskih simulacij. Primerjava med numeričnimi in eksperimentalnimi rezultati je prikazana na sliki 9.



**Slika 9:** Eksperimentalne krivulje sila-pomik: (a) tangencialna in (b) radialna orientacija

Primerjava med eksperimentalnim in računskim odzivom sila-pomik (slika 9) kaže dobro korelacijo med rezultati za vzorce smrekovega lesa pri tritočkovnih upogibnih testih. Na podlagi tega se lahko predlagan numerični model v nadaljevanju uporablja za napovedovanje mehanskega obnašanja lesa v različnih aplikacijah, kar vodi k boljšemu oblikovanju in optimizaciji izdelkov na osnovi lesa.

## 5 Zaključki

Glavni cilj predstavljenega raziskovalnega dela je bila eksperimentalna in numerična študija lomnega obnašanja smrekovega lesa pri kvazi-statičnih obremenitvenih pogojih. Najprej je bila izvedena eksperimentalna študija mehanskega obnašanja za tangencialno in radialno obremenjene vzorce s pomočjo preizkuševalnega stroja ElectroForce serije 3300. Da smo dosegli reprezentativen rezultat mehanskega odziva, je bilo za vsako orientacijo izvedenih šest tritočkovnih upogibnih preskusov. Iz eksperimentalnih mehanskih odzivov je bil izračunan povprečni odziv sila-pomik, ki je bil v nadaljevanju uporabljen v optimizacijskem postopku

inverznega določanja materialnih parametrov. Numerični model po metodi končnih elementov je bil izdelan in potrjen s primerjavo mehanskih odzivov, pridobljenih za dve smeri (radialno in tangencialno) orientacije lesnih vlaken. Numerični model je bil potrjen z inverznim optimizacijskim postopkom določitve konstitutivnih materialnih parametrov. Primerjava med eksperimentalnimi in računskimi odzivi sila-pomik kaže dobro korelacijo med rezultati. Predlagani numerični model se lahko v nadaljevanju uporablja za numerične simulacije mehanskega obnašanja lesenih vzorcev v različnih aplikacijah, kar vodi k boljšemu oblikovanju in optimizaciji izdelkov na osnovi smrekovega lesa. Po predstavljenem raziskovalnem delu se bo raziskava osredotočila na utrujenostno obnašanje smrekovega lesa, kjer bo v predlaganem numeričnem modelu uporabljena napetostna metoda za izračun kritičnega števila obremenitvenih ciklov do porušitve.

## Zahvala

Avtorji se zahvaljujejo Javni agenciji za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije za sofinanciranje raziskovalnega programa št. P2-0063 in raziskovalnega projekta št. P2-0182.

## Literatura

- [1] ANSYS Inc., *ANSYS Theory Reference - Release 5.6, Theory Reference*. 1–1286, 1999. [Online]. Available: <http://research.me.udel.edu/~lwang/teaching/MEx81/ansys56manual.pdf>
- [2] M. Borovinšek, *OptiMax-Online Users Manual*. Version 0.6.4. [Online]. Available: <http://lace.fs.uni-mb.si/wordpress/borovinsek/wp-content/uploads/sites/6/2017/02/Optimax-USERS-MANUAL-v0.6.4.pdf>
- [3] G. Fajdiga, D. Rajh, B. Nečemer, S. Glodež, M. Šraml, *Experimental and numerical determination of the mechanical properties of spruce wood*, *Forests*, 10, 2019.
- [4] G. Fajdiga, B. Šubic, A. Kovačič, *Bending stiffness of hybrid wood-metal composite beams: An experimentally validated numerical model*, *Forests*, 12, 2021.
- [5] ISO 13061-1:2014, *In Physical and mechanical properties of wood — Test methods for small clear wood specimens — Part 1: Determination of moisture content for physical and mechanical tests*. 4, 2014.
- [6] ISO 13061-3:2014, *In Physical and mechanical properties of wood — Test methods for small clear wood specimens — Part 3: Determination of ultimate strength in static bending*. 5, 2014.
- [7] ISO 13061-4:2014, *In Physical and mechanical properties of wood — Test methods for small clear wood specimens — Part 4: Determination of modulus of elasticity in static bending*. 6, 2014.
- [8] J. Klemenc, G. Fajdiga, *Statistical Modelling of the Fatigue Bending Strength of Norway Spruce Wood*, *Materials (Basel)*, 15, 2022.
- [9] C. Lin, *The Application of Wood in Modern Interior Design*, *Open Constr. Build. Technol. J.*, 9, 103–107, 2015.
- [10] K. Mahapatra, L. Gustavsson, *General conditions for construction of multi-storey wooden buildings in Western Europe*, 2009.
- [11] M. H. Ramage *et al.*, *The wood from the trees: The use of timber in construction*, *Renew. Sustain. Energy Rev.*, 68, 333–359, 2017.
- [12] C. Simulation, *Material Model for wood*, 58, 179–200, 2015.



## *Eksperimentalno sklapljanje zveznih kontaktov v frekvenčnem prostoru*

Domen Ocepek<sup>1</sup>, Gregor Čepon<sup>1</sup>, Miha Boltežar<sup>1</sup>

### *On the experimental coupling with continuous interfaces using frequency based substructuring*

**Povzetek.** V eksperimentalnem dinamskem podstrukturiranju sklapljanje podstruktur, ki si delijo kvazi-zvezen kontakt, običajno vodi v nekonsistentno napovedan dinamski odziv sestava. Modeliranje kontakta v širokem naboru prostostnih stopenj pogosto izkazuje redundanco povezovalnih enačb, kar povzroča slabo pogojenost problema. Za omilitev predoločenosti povezovalnih pogojev in ojačanja eksperimentalnih pogojev povezovalne pogoje zapišemo v šibki obliki. To delo preučuje različne definicije redukcijskih podprostorov za namen zapisa šibkih povezovalnih pogojev med podstrukturami.

**Abstract.** In experimental dynamic substructuring, coupling of substructures sharing a line- or surface-like interface proves to be a challenge due to the difficulties in interface modelling. Modelling a high number of degrees of freedom at the common interface can be too stringent when imposing compatibility and equilibrium conditions, thereby causing redundancy and ill-conditioning. To mitigate the effects of overdetermination and experimental errors, several techniques have been developed, proposing different reduction spaces to weaken the interface conditions. This work investigates reduction spaces in dynamic substructuring for coupling continuous interfaces.

## 1 Uvod

V kontekstu eksperimentalnega sklapljanja podstruktur v frekvenčni domeni [2] glavni izziv predstavlja modeliranje kontakta med podstrukturami. Uspešna sklopitev podstruktur zahteva izpolnjevanje kompatibilnosti pomikov kontaktnih prostostnih stopenj (PS) in ravnotežje povezovalnih sil v le-teh. Težavna je predvsem izbira signifikantnega števila PS, v katerih vsilimo kontaktne pogoje. Sklopitev v preobširnem številu PS namreč vodi v redundanco povezovalnih enačb in posledično slabo pogojenost problema. Kombinacija slabe pogojenosti in prisotnost (naključnih in sistematskih) merilnih pogojev pogosto povzroči nekonsistentno napoved

---

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

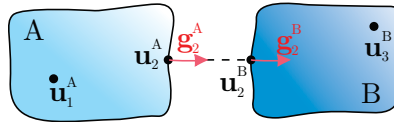
sklopljenega odzivnega modela [5]. Tej težavi se lahko izognemo z vsiljevanjem šibkih povezovalnih enačb v naboru zgolj nekaj PS, kar pa lahko zaradi nepopolnega dinamskega modela kontakta ponovno povzroča nekonsistentnost sklopljenega odziva.

Rešitev zgoraj opisanih težav je projekcija izmerjenega dinamskega odziva posamezne podstrukture v njej reprezentativni dinamski podprostor [2]. Povezovalni pogoji med podstrukturami so tako vsiljeni v reduciranem prostoru in jih obravnavamo kot šibke. Redundantne in nepomembne dinamske lastnosti kontaktov podstruktur, ki jih v reprezentativnem podprostoru ni (saj so dominirane s strani eksperimentalnih pogreškov, slabo nadzorovane ali slabo opazovane), ostanejo nesklapljene in ne propagirajo v dinamski odziv sklopa.

V tem delu preučujemo primernost različnih projekcijskih metod (in njim pripadajočim reprezentativnih podprostorov) za sklapljanje podstruktur, ki si delijo kvazi-zvezen kontakt. To vključuje frekvenčno različico modalnih povezovalnih pogojev (ang. *Modal Constraints for Fixture and Subsystems*, MCFS) [1], ki v postopek sklapljanje vključi dodatno podstrukturo in njene fizikalne nihajne načine. Sledi metoda projekcije singularnih vektorjev (ang. *Singular Vector Transformation*, SVT), ki poleg dodatne podstrukture za definicijo reduciranega prostora uporabi njene singularne nihajne načine. Zadnja obravnavana metoda je projekcija virtualne točke (ang. *Virtual Point Transformation*, VPT) [6] za neposredno sklopitev dveh podstruktur.

## 2 Teoretični koncepti in notacija

Sklapljanje v frekvenčni domeni na osnovi Langrangeovih multiplikatorjev (ang. *Lagrange Multiplier Frequency Based Substructuring*, LM-FBS) napove odziv sklopa na osnovi admitančnih matrik posameznih podstruktur, kjer kot neznanke problema smatramo povezovalne sile med njimi. Obravnavamo dve podstrukturama A in B, sklopljeni v naboru kontaktnih PS  $(\star)_2^A$  in  $(\star)_2^B$  (slika 1).



Slika 1: Podstrukturama A in B, sklopljeni preko medsebojnega kontakta.

Z znanimi admitančnimi matrikami podstruktur ( $\mathbf{Y}^A$  in  $\mathbf{Y}^B$ ) zapisani z ozirom na notranje  $((\star)_1^A$  in  $(\star)_3^B$ ) in kontaktne PS lahko gibalno enačbo problema zapišemo v obliki<sup>2</sup>:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Y}^{A|B} (\mathbf{f} + \mathbf{g}),$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^A \\ \mathbf{u}_2^A \\ \mathbf{u}_2^B \\ \mathbf{u}_3^B \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}^{A|B} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11}^A & \mathbf{Y}_{12}^A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_{21}^A & \mathbf{Y}_{22}^A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{22}^B & \mathbf{Y}_{23}^B \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{32}^B & \mathbf{Y}_{33}^B \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^A \\ \mathbf{f}_2^A \\ \mathbf{f}_2^B \\ \mathbf{f}_3^B \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_2^A \\ \mathbf{g}_2^B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

<sup>2</sup> Za voljo preglednosti zapisa je v nadaljevanju izpuščena odvisnost od spremenljivke frekvence.

Vektor  $\mathbf{u}$  predstavlja pomik podstruktur kot posledica delovanja zunanjih sil  $\mathbf{f}$ , medtem ko  $\mathbf{g}$  predstavlja vektor povezovalnih sil, ki obstajajo zgolj v kontaktnih PS in preprečujejo nastanek reže med podstrukturami.

Obravnavane podstrukture sklopimo z vsilitvijo povezovalnih pogojev. Kompatibilnost pomikov na skupnih mejah podstruktur splošno zapišemo kot:

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{kjer je} \quad \mathbf{B} = [\mathbf{0} \quad -\mathbf{I} \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{0}]. \quad (2)$$

Ravnotežne pogoje vsilimo preko zamenjave povezovalnih sil z vektorjem Lagrangeovih multiplikatorjev  $\boldsymbol{\lambda}$ <sup>3</sup> na način:

$$\mathbf{g} = -\mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}. \quad (3)$$

Iz nabora enačb (1 - 3) z eliminacijo  $\boldsymbol{\lambda}$  dobimo:

$$\mathbf{u} = \underbrace{\left[ \mathbf{I} - \mathbf{Y}^{A|B} \mathbf{B}^T \left( \mathbf{B} \mathbf{Y}^{A|B} \mathbf{B}^T \right)^{-1} \mathbf{B} \right]}_{\mathbf{Y}^{AB}} \mathbf{Y}^{A|B} \mathbf{f}, \quad (4)$$

kjer je  $\mathbf{Y}^{AB}$  admitanca sklopljenega sistema. Za vzpostavitev povezovalnih pogojev lahko uporabimo različni Boolovi matriki za zapis kompatibilnostnih ( $\mathbf{B}_u$ ) in ravnotežnih ( $\mathbf{B}_f$ ) pogojev.

## 2.1 Povezovalni pogoji v reduciranem prostoru

Uspeh enačbe (4) je v veliki meri odvisen od eksperimentalnih pogreškov, ki so prisotni med zajemom odzivnih modelov podstruktur (npr. nivo šuma merilnih zaznaval, raztros lokacije in orientacije vzbujanja strukture, ...). Neposredna aplikacija povezovalnih pogojev z enačbama (2) in (3) lahko vodi v nekonsistentno napoved dinamskega odziva sklopa, še posebej v primeru, ko je člen  $\mathbf{B} \mathbf{Y}^{A|B} \mathbf{B}^T$  v enačbi (4) slabo pogojen.

Rešitev, ki ublaži vpliv eksperimentalnih pogreškov, je zapis kompatibilnostnih in ravnotežnih pogojev v reduciranem prostoru. Redukcijo pomikov  $\mathbf{u}$  izrazimo z matriko  $\mathbf{R}_u$ :

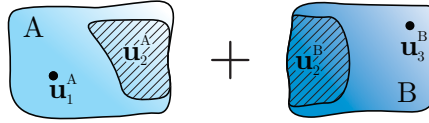
$$\mathbf{u} \approx \mathbf{R}_u \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & \\ & \mathbf{R}_u^A & & \\ & & \mathbf{R}_u^B & \\ & & & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^A \\ \mathbf{q}_2^A \\ \mathbf{q}_2^B \\ \mathbf{u}_3^B \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Opisan pristop omogoča razširitev kontakta, ki lahko vključuje tudi PS ki niso striktno locirane na skupni meji med podstrukturami (slika 2). To velja pod pogojem, da zagotovimo solednost generaliziranih pomikov  $\mathbf{q}$ , ki predstavljajo odziv kontakta v reduciranem prostoru, z enačbo (5). Pristop izboljša tudi nadzorovanost in opazovanost dinamskega modela kontakta<sup>4</sup>.

<sup>3</sup> Zapis povezovalnih sil v tej obliki zagotovi, da so le-te enake v magnitudi in različne v smeri za vsak par kontaktnih PS v skladu s III. Newtonovim zakonom.

<sup>4</sup> Z širokim naborom izvedenih vzbujanj in meritev odzivov v območju razširjenega kontakta izboljšamo opazovanost in nadzorovanost kontaktnih PS in tako zagotovimo reprezentativni odzivni model v izbranem dinamskem prostoru  $\mathbf{R}_u$ .





**Slika 2:** Koncept razširjenega kontakta, prikazanega s šrafiranim vzorcem.

Generalizirane pomike izračunamo s psevdo-invertiranjem, kar nakazuje nadpis  $(\star)^+$ :

$$\mathbf{q} = \mathbf{R}_u^+ \mathbf{u} = \mathbf{T}_u \mathbf{u}. \quad (6)$$

Kompatibilnost vsilimo v soležnih PS v reduciranem prostoru, kar rezultira v šibkih kompatibilnostnih pogojih:

$$\mathbf{q}_2^B - \mathbf{q}_2^A = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} \mathbf{q} = \mathbf{B} \mathbf{T}_u \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Podobno apliciramo redukcijsko matriko  $\mathbf{R}_f$  za zapis ravnotežnih pogojev v reduciranem prostoru:

$$\mathbf{m} = \mathbf{R}_f^H \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & \\ & (\mathbf{R}_f^A)^H & & \\ & & (\mathbf{R}_f^B)^H & \\ & & & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{g}, \quad (8)$$

kjer nadpis  $(\star)^H$  pomeni operator konjugiranega transponiranja, saj so v splošnem projekcijski prostori kompleksni. Vsilitvev ravnotežnih pogojev v reduciranem prostoru izvedemo z:

$$\mathbf{m} = -\mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{g} = -\mathbf{T}_f^H \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} \quad \text{kjer je} \quad \mathbf{T}_f = \mathbf{R}_f^+. \quad (9)$$

Z aplikacijo šibkih povezovalnih pogojev LM-FBS dobi sledečo obliko:

$$\mathbf{u} = \underbrace{\left[ \mathbf{I} - \mathbf{Y}^{A|B} \mathbf{T}_f^H \mathbf{B}^T \left( \mathbf{B} \mathbf{T}_u \mathbf{Y}^{A|B} \mathbf{T}_f^H \mathbf{B}^T \right)^{-1} \mathbf{B} \mathbf{T}_u \right]}_{\mathbf{Y}^{AB}} \mathbf{Y}^{A|B} \mathbf{f}, \quad (10)$$

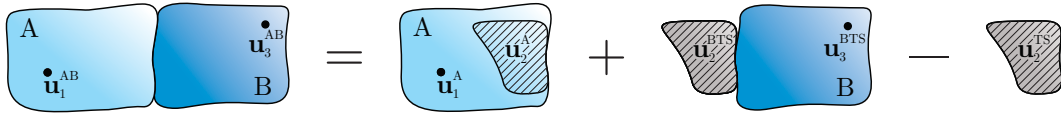
Uspeh sklapljanja z enačbo (10) zavisi od definicije reduciranega prostora z  $\mathbf{R}_u$  in  $\mathbf{R}_f$ , ki mora vključevati zgolj dominantno dinamsko obnašanje kontakta, relevantno za sklopljeno konfiguracijo.

### 3 Strategije za sklapljanje zveznih kontaktov

#### 3.1 Modalni povezovalni pogoji

V proces sklapljanja podstruktur lahko dodamo dodatno podstrukturo, imenovano simulator prenosnosti (ang. *Transmission Simulator*, TS), ki jo namestimo na podstrukturo B (slika 3). Kombinirana (pod)struktura je v nadaljevanju označena kot BTS. Za zagotovitev soležnosti PS

v skupnem kontaktu med TS, A in BTS<sup>5</sup> mora struktura TS posnemati geometrijo podstrukture A, na katero pripravimo podstrukturo B da dobimo odzivni model AB<sup>6</sup>. BTS sklopimo z A, odklopimo TS, in dobimo odzivni model AB (slika 3). Kontakt med podstrukturami tako razširimo na celotno podstrukturo TS.



**Slika 3:** Sklopitev A in B s pomočjo simulatorja prenosnosti. Razširjen skupen kontakt med podstrukturami je prikazan s šrafiranim vzorcem.

Odzivni model sklopa (z upoštevanimi šibkimi povezovalnimi pogoji) dobi obliko:

$$\mathbf{u} = \underbrace{\left[ \mathbf{I} - \mathbf{Y}^{A|BTS|TS} \mathbf{T}_f^H \mathbf{B}^T \left( \mathbf{B} \mathbf{T}_u \mathbf{Y}^{A|BTS|TS} \mathbf{T}_f^H \mathbf{B}^T \right)^{-1} \mathbf{B} \mathbf{T}_u \right]}_{\mathbf{Y}^{AB}} \mathbf{Y}^{A|BTS|TS} \mathbf{f}. \quad (11)$$

Na osnovi izvorne ideje MCFS [1] reducirani prostor sestavimo iz  $m$  fizikalnih nihajnih načinov podstrukture TS. Predpostavimo, da ima matrika  $\mathbf{Y}_{22}^{TS} \in \mathbb{C}^{N_o \times N_i}$  vsaj eno soležno PS vzbujanja in merjenja odziva (ang. *driving point*, dp). Z uporabo več-referenčne metode modalne identifikacije lahko za TS identificiramo  $m$  fizikalnim nihajnih načinov za vse PS vzbujanja ( $\phi_i^{TS}$ ) in merjenja odziva ( $\phi_o^{TS}$ ) podstrukture TS ( $r = 1, \dots, m$ ) iz matrike modalnih konstant  $r\mathbf{A}$  (slika 4). Identificirane nihajne načine v nadaljevanju zložimo v matriki:

$$\Phi_{o,m}^{TS} = [1\phi_o^{TS} \quad 2\phi_o^{TS} \quad \dots \quad m\phi_o^{TS}] \in \mathbb{R}^{N_o \times m}, \quad \Phi_{i,m}^{TS} = [1\phi_i^{TS} \quad 2\phi_i^{TS} \quad \dots \quad m\phi_i^{TS}] \in \mathbb{R}^{N_i \times m}. \quad (12)$$

Transformacijski matriki za vzpostavitev modalnih povezovalnih pogojev v frekvenčnem prostoru definiramo kot:

$$\mathbf{T}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & \\ & (\Phi_{o,m}^{TS})^+ & & \\ & & (\Phi_{o,m}^{TS})^+ & \\ & & & \mathbf{I} \\ & & & & (\Phi_{o,m}^{TS})^+ \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{T}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & & \\ & (\Phi_{i,m}^{TS})^+ & & & \\ & & (\Phi_{i,m}^{TS})^+ & & \\ & & & \mathbf{I} & \\ & & & & (\Phi_{i,m}^{TS})^+ \end{bmatrix} \quad (13)$$

nakar podstrukture sklopimo z enačbo (11). Z uporabo identične redukcijske baze na kontaktnih PS vseh obravnavanih podstruktur zagotovimo soležnost PS v reduciranem prostoru pod pogojem, da so meritve odzivnih modelov podstruktur izvedene na medsebojno soležnih PS. Pristop omogoča sklapljanje kvazi-zveznih kontaktov pod pogojem, da v koraku redukcije obdržimo ustrezno opazovane in nadzorovane prožne nihajne načine.

<sup>5</sup>Zavoljo enostavnosti predpostavimo geometrijsko soležnost odzivnih in vzbujevalnih PS na posameznih podstrukturah. Kljub temu ni potrebe po soležnosti vzbujanj in odzivov, v kolikor oboji opazujejo in nadzorujejo podoben dinamski model.

<sup>6</sup>Več podrobnosti o oblikovanju podstrukture TS zainteresirani bralec najde v [1].



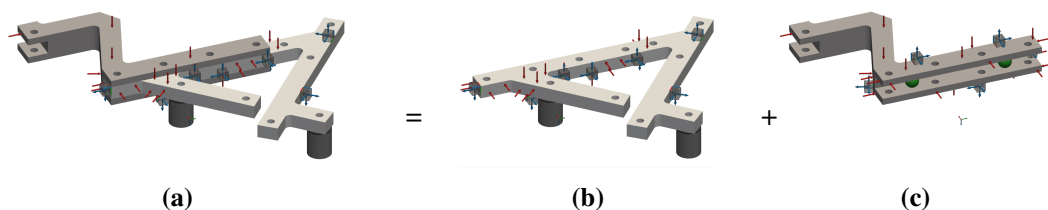
dodajanje podstrukture TS v postopek sklapljanja ni potrebno, kar zmanjša zahtevano količino izvedenih meritev. Direktno sklopitev podstruktur izvedemo z enačbo (4).

Običajno reprezentativni prostor transformacije sestavimo zgolj iz togih kontaktnih nihajnih načinov podstruktur. To pomeni, da prožno obnašanje kontakta ne nastopa v sklopljeni napovedi odziva strukture. Slednje je težavno v primeru sklapljanja kvazi-zveznih kontaktov, kar lahko obidemo z enim od spodnjih dveh pristopov:

- Uporaba večjega števila virtualnih točk, ki prožno obnašanje kontakta aproksimirajo z posameznimi togimi kontaktnimi (pod)regijami.
- Uporaba prožnih kontaktnih nihajnih načinov v redukcijskih bazah  $\mathbf{R}_u$  in  $\mathbf{R}_f$ , definiranih glede na relativno lokacijo merjenih PS z ozirom na virtualno točko.

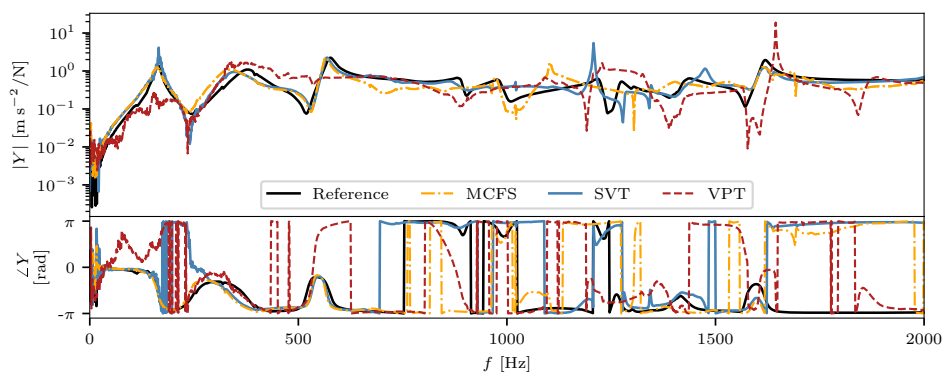
## 4 Rezultati

Slika 5 predstavlja sklop dveh aluminijastih podstruktur, ki ga preučujemo v nadaljevanju.



**Slika 5:** Eksperimentalni primer sklapljanja podstruktur; a) končen sestav AB, b) podstruktura A, c) podstruktura B.

Slika 6 prikazuje primerjavo sklopljenega odziva na osnovi vseh treh predlaganih pristopov z referenčno meritvijo. Opazimo, da pristopa MCFS in SVT podobno napovesta dinamski



**Slika 6:** Amplitudna in fazna značilnica frekvenčne prenosne funkcije  $\mathbf{Y}^{AB}$ .

odziv sklopa. SVT napram MCFS v celotnem opazovanem frekvenčnem območju izkazuje

nekoliko boljše konsistentnost, kar nakazuje na ustreznost definicije redukcijske baze s pomočjo razcepa singularnih vrednosti. Reprezentativni podprostor tako vsebuje ustrezno nadzorovano in opazovano dinamiko kontakta. Ker MCFS temelji na konstantni redukcijski bazi, napoved odziva v višjem frekvenčnem območju, kjer je modalna gostota obravnavanih struktur visoka, odstopa od reference. VPT pristop v splošnem vodi v slabšo konsistenco napovedanega odziva sklopa. Prisotnost šuma v rezultatu, posebno v nizkem frekvenčnem območju, pripisujemo visokemu številu PS (12) virtualnih točk, kar vodi v slabo pogojenost admitance kontakta.

## 5 Zaključki

MCFS in SVT primerljivo napove odziva sklopa v celotnem obravnavanem frekvenčnem območju. Slabost obeh pristopov je zahteva po uporabi dodatne podstrukture (simulatorja prenosnosti) v postopku sklapljanja in posledično povečana količina izvedenih meritev. Ta korak je nujen zaradi zahteve po skupni redukcijski bazi podstruktur. VPT zaradi geometrijske redukcijske baze za sklopitev ne potrebuje simulatorja prenosnosti. Slabosti VPT so posledica inženirske presoje pri izbiri PS kontakta, kar hitro vodi v slabo pogojenost admitance kontakta in posledično nekonsistentnosti v napovedi dinamskega odziva strukture.

Vse obravnavane metode so implementirane in prosto dostopne v odprtokodni *python* knjižnici *pyFBS* [3].

## Literatura

- [1] M. S. Allen, R. L. Mayes, and E. J. Bergman. Experimental modal substructuring to couple and uncouple substructures with flexible fixtures and multi-point connections. *Journal of Sound and Vibration*, 329(23):4891–4906, 2010.
- [2] M. S. Allen, D. Rixen, M. Van der Seijs, P. Tiso, T. Abrahamsson, and R. L. Mayes. *Substructuring in Engineering Dynamics: Emerging Numerical and Experimental Techniques*, volume 594. Springer, 2019.
- [3] T. Bregar, A. El Mahmoudi, M. Kodrič, D. Ocepek, F. Trainotti, M. Pogačar, M. Göldeli, G. Čepon, M. Boltežar, and D. J. Rixen. *pyfbs: A python package for frequency based substructuring*. *Journal of Open Source Software*, 7(69):3399, 2022.
- [4] F. Trainotti, T. Bregar, S. Klaassen, and D. Rixen. Experimental decoupling of substructures by singular vector transformation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 163:108092, 2022.
- [5] F. Trainotti, M. Haeussler, and D. Rixen. A practical handling of measurement uncertainties in frequency based substructuring. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 144:106846, 2020.
- [6] M. V. van der Seijs, D. D. van den Bosch, D. J. Rixen, and D. de Klerk. An improved methodology for the virtual point transformation of measured frequency response functions in dynamic substructuring. In *4th ECCOMAS thematic conference on computational methods in structural dynamics and earthquake engineering*, volume 4, 2013.



## ***Vpliv nastanka in konfiguracije omrežja iz ogljikovih nanocevk na mehanske in električne lastnosti polimernih nanokompozitov***

*Alen Oseli<sup>1</sup> in Lidija Slemenik Perše<sup>1</sup>*

### ***Effect of carbon nanotube network formation and configuration on mechanical and electrical properties of polymer-based nanocomposites***

**Povzetek.** V okviru raziskave smo obravnavali vpliv konfiguracije omrežja iz ogljikovih nanocevk na mehanske in električne lastnosti polimernih nanokompozitov. Rezultati raziskave so pokazali, da je omrežje v večini sestavljeno iz snopov ogljikovih nanocevk, ki jih lahko obravnavamo kot toge paličaste delce, ki se geometrijsko prepletejo pri kritičnem volumskem deležu  $\phi_{v,crit}$  (geometrijski perkolacijski prag). Izkaže se, da mehanske lastnosti (modul elastičnosti) močno dependirajo od nastanka omrežja, ne glede na njegovo konfiguracijo. Po drugi strani pa električne lastnosti (električna prevodnost) močno dependirajo od konfiguracije omrežja, četudi omrežje še ni popolnoma vzpostavljeno (pod  $\phi_{v,crit}$ ). Pokazalo se je namreč, da naključna konfiguracija omrežja bistveno premakne prehod iz izolatorja v prevodnik  $\phi_{cv}^e$  (električni perkolacijski prag) k nižjim koncentracijam nanocevk, t.j. za  $\sim 1$  dekada ( $\phi_{cv}^e \ll \phi_{cv}$ ), ter s tem močno izboljša električno prevodnost nanokompozita.

**Abstract.** Within the scope of the present research work, the effect of carbon nanotube network configuration on mechanical and electrical properties of polymer-based nanocomposites was evaluated. Results showed that the formed network is in majority constructed from nanotube bundles, considered as stiff rod-like particles that geometrically entangle at the critical volume fraction  $\phi_{v,crit}$  (geometrical percolation threshold). Furthermore, while mechanical properties (elastic modulus) are primarily governed by network formation, regardless of its configuration, the electrical properties (electrical conductivity) of such materials are mainly governed by network configuration, even if the network is not yet fully established (below  $\phi_{v,crit}$ ). It was shown that random network configuration moves the transition from isolator to conductor  $\phi_{cv}^e$  (electrical percolation threshold) to much lower nanotube concentrations, i.e., for  $\sim 1$  decade ( $\phi_{cv}^e \ll \phi_{cv}$ ), and significantly improves electrical conductivity of nanocomposites.

---

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

## 1 Uvod

Ogljikove nanocevice, *ang. carbon nanotubes* - v nadaljevanju CNT-ji, so splošno sprejete kot izjemna nanopolnila z vrhunsko trdnostjo, učinkovitim prenosom elektronov itd., ki jih lahko uporabimo za izboljšanje, ali pa kreiranje novih funkcionalnosti osnovnega materiala [8]. CNT-ji namreč v polimerni matrici vzpostavijo naključno povezano omrežje, ki lahko služi kot mehanska ojačitev ali pa prevodna pot, kar lahko uporabimo v različnih, tudi najbolj naprednih tehnologijah [9]. Ne glede na to, pa funkcionalna zmogljivost takšnih materialov močno zavisi od nastanka CNT-omrežja in njegove konfiguracije v tako imenovanih polimernih nanokompozitih.

V tej raziskavi smo se osredotočili na mehansko ojačitev in električno prevodnost, kot dve glavni funkciji nanokompozitov. Številne raziskave so že poročale o izboljšanju mehanskih lastnosti (Youngov modul, natezna trdnost itd.) v različnih vrstah polimernih materialov z dodatkom CNT-jev [13]. Nekateri avtorji raziskav na tem področju so določili perkolacijske dogodke v mehanskih lastnostih, kar je pojasnilo, da interakcije delcev tudi dodatno ojačajo material [4]. Poleg tega obstajajo številni teoretični pristopi za ocenjevanje in napovedovanje mehanskih lastnosti nanokompozitov CNT; od zelo preprostih, tj. pol-empiričnih eksponentnih modelov, ki obravnavajo adhezijo [2], do bolj zapletenih, kot so model Halpin-Tsai [6], model Ouali [11] in njihove modifikacije, ki upoštevajo medfazno adhezijo, valovitost CNT-jev, predvsem pa geometrijsko perkolacijo, ki opredeljuje geometrijski preplet CNT-jev pri nekem kritičnem volumskem deležu  $\Phi_{cv}$ . Kljub temu pa nobena od teh študij še ni eksplicitno povezala izboljšav mehanskih lastnosti z nastankom omrežja in njegove konfiguracije.

Poleg omenjenega pa so že bile izvedene tudi obsežne raziskave na področju električne prevodnosti CNT-nanokompozitov, saj CNT-ji služijo kot nosilci električnega naboja v matričnem materialu. Material preide iz izolatorja v prevodnik, ko CNT-ji dosežejo kritični volumski delež, znan tudi kot prag električne perkolacije  $\phi_{cv}^e$  [5]. Medtem ko so nekateri poročali, da je geometrijski prag ključni dejavnik za vzpostavitev prevodnega omrežja ( $\phi_{cv}^e = \Phi_{cv}$ ) [12], so drugi pokazali, da različni dejavniki, npr. medfazna adhezija, valovitost CNT-jev in kvantno tuneliranje, povečajo verjetnost prenosa elektronov v izotropnih omrežjih ( $\phi_{cv}^e \leq \Phi_{cv}$ ) [14]. Poleg tega je bilo teoretično prikazano in eksperimentalno potrjeno, da je lahko konfiguracija CNT prevladujoč dejavnik za predhodni prenos elektronov ( $\phi_{cv}^e \ll \Phi_{cv}$ ) [3]. Slednje je pomembno, saj lahko omogoči izdelavo neojačanih (fleksibilnih) in prevodnih nanokompozitov za fleksibilne naprave in senzorje [10], vendar pa nobena od omenjenih raziskav teh ugotovitev ne povezuje z mehanskimi lastnostmi.

Glede na zgornje ugotovitve je bil glavni cilj te raziskave opredeliti vpliv nastanka CNT-omrežja in njegove konfiguracije na mehansko ojačitev in električno prevodnost polimernih nanokompozitov.

## 2 Eksperimentalni del

### 2.1 Matrični material in nanopolnilo

V okviru raziskave smo za pripravo nanokompozitov uporabili komercialno dostopen polietilen visoke gostote, *ang. -High Density PolyEthylene* - v nadaljevanju HDPE, (HDI2061 NATURAL, Braskem Idesa, Mehika) z gostoto  $\rho_{HDPE} = 0,955 \text{ g/cm}^3$ . Kot nanopolnilo smo uporabili enostenske ogljikove nanocevice, *ang. Single-Walled Carbon NanoTubes* - v nadaljevanju SWCNT, v obliki zmesi (Tuball matrix 801, OCSiAl, Luksemburg), ki je

vsebovala 10 mas. % SWCNT-jev in 90 mas. % polietilena nizke molekulske mase PENMM z gostoto  $\rho_{\text{PENMM}} = 0,941 \text{ g/cm}^3$ . Po specifikacijah proizvajalca je bil srednji premer SWCNT-nanopolnila  $\langle d \rangle_{\text{SWCNT}} = 1,6 \text{ nm}$ , srednja dolžina  $\langle l \rangle_{\text{SWCNT}} > 5 \mu\text{m}$  ter razmerje med njima  $\langle \alpha \rangle_{\text{SWCNT}} = \langle l \rangle_{\text{SWCNT}} / \langle d \rangle_{\text{SWCNT}} > 3125$ . Z uporabo vrstične elektronske mikroskopije, v nadaljevanju SEM, smo ugotovili, da SWCNT-ji tvorijo večje enote, tako imenovane snope, kar upravičuje uporabo gostote SWCNT snopa  $\rho_{\text{bundle}} = 1,3 \text{ g/cm}^3$  za preračun volumskega deleža nanopolnila  $\Phi_v$ .

## 2.2 Priprava nanokompozitov

Postopek priprave nanokompozitov je bil izveden v treh fazah. Prva faza je bila osredotočena na pripravo mešanic SWCNT/PE z enakomerno razpršenim nanopolnilom v matričnem materialu, kar je bilo doseženo z dvo-polžno ekstruzijo (Haake MiniLab, Thermoscientific, ZDA). Drugi dve fazi postopka priprave sta bili povezani s pripravo končnih vzorcev z različnimi konfiguracijami omrežja, kjer smo s pomočjo injekcijskega brizganja (Haake MiniJet, Thermoscientific, ZDA) poravnali nanocevke v smeri toka taline (usmerjena konfiguracija SWCNT-omrežja), medtem ko smo s pomočjo tlačnega stiskanja (BP- 8170 B, Dongguan Baopin Percision Instruments, Kitajska) naključno razporedili cevke po materialu (naključna konfiguracija SWCNT-omrežja).

V prvi fazi smo pripravili različne mešanice iz matričnega materiala HDPE in Tuball 801 zmesi, ki so vsebovale od  $\Phi_m = 0,00\%$  do  $\Phi_m = 5,00\%$  masnega deleža SWCNT-jev. Maksimalno maso  $m_{\text{cel}} = 6 \text{ g}$  mešanice smo vstavili v ekstruder ter mešali  $t_{\text{meš}} = 10 \text{ min}$  pri temperaturi  $T_{\text{meš}} = 220 \text{ }^\circ\text{C}$ . Med doziranjem, ki je trajalo  $t_{1,\text{meš}} = 1 \text{ min}$ , smo hitrost polžev nastavili na  $n_{1,\text{meš}} = 100 \text{ min}^{-1}$ . Kasneje, pri samem mešanju, ki je trajalo  $t_{2,\text{meš}} = 9 \text{ min}$ , pa smo hitrost povišali na  $n_{2,\text{meš}} = 200 \text{ min}^{-1}$ . Glede na navodila proizvajalca smo pri mešanju uporabili visoko temperaturo, ki je pri predelavi zagotavljala boljšo disperzijo nanopolnila v matričnem materialu, ter visoko hitrost mešanja, kar je zagotovilo boljše razbijanje (trganje) oziroma erozijo primarnih aglomeratov. Izkazalo se je, da pri izbrani hitrosti število nerazbitih primarnih aglomeratov pade na  $\leq 2\%$  površinskega razmerja (določeno s pomočjo optične mikroskopije), kar predstavlja dober raztros tovrstnega nanopolnila v materialu [1].

V drugi fazi smo homogenizirano talino SWCNT/HDPE mešanic transportirali v napravo za injekcijsko brizganje, ki je omogočila pripravo končnih vzorcev z usmerjeno konfiguracijo omrežja. Pri brizganju je bil grelnik nastavljen na temperaturo  $T_{\text{inj}} = 180 \text{ }^\circ\text{C}$ , orodje pa na  $T_{\text{orod}} = 45 \text{ }^\circ\text{C}$ . Talino smo  $t_{\text{inj}} = 10 \text{ s}$  brizgali v orodje pri tlaku  $p_{\text{inj}} = 50 \text{ MPa}$ , nato pa smo za dodatnih  $t_{\text{nak}} = 10 \text{ s}$  material popuščali pri tlaku  $p_{\text{nak}} = 15 \text{ MPa}$ . Pri procesu brizganja smo temperaturo zmanjšali s  $T_{\text{meš}}$  na  $T_{\text{inj}}$  ter s tem onemogočili reagregacijo oziroma formacijo sekundarnih aglomeratov, tj. grozdov, med cikli brizganja [1]. V sklopu druge faze smo za reološko analizo izdelali standardne vzorce v obliki diskov z usmerjeno konfiguracijo omrežja s premerom  $d_{\text{inj}} = 25 \text{ mm}$  in debelino  $h_{\text{inj}} = 1,5 \text{ mm}$ .

V tretji fazi smo talino SWCNT/HDPE mešanic transportirali v napravo za stiskanje, ki je omogočila pripravo končnih vzorcev z naključno konfiguracijo omrežja. Tukaj je potrebno poudariti, da smo uporabili enake procesne pogoje kot pri injekcijskem brizganju. Temperatura naprave (temperatura stiskalnih plošč) je bila  $T_{\text{com}} = 180 \text{ }^\circ\text{C}$ , pri čemer je bila talina stisnjena pri tlaku  $p_{\text{com}} = 50 \text{ MPa}$  za  $t_{\text{com}} = 10 \text{ s}$  ter nato zadržana pri tlaku  $p_{\text{nak}} = 15 \text{ MPa}$  za dodatnih  $t_{\text{nak}} = 10 \text{ s}$ . Ponovno smo uporabili nižje temperature predelave ter s tem



onemogočili reagracijo nanopolnila. Tekom stiskanja smo izdelali vzorce v obliki diskov z naključno konfiguracijo omrežja s premerom  $d_{inj} = 25$  mm in debelino  $h_{inj} = 0,25$  mm.

## 2.3 Eksperimentalne metode

### 2.3.1 Plazemsko jedkanje in SEM (določitev osnovnih gradnikov omrežja in njegove konfiguracije)

Morfološko analizo SWCNT-omrežja nanokompozitov, ki opredeljuje osnovne gradnike omrežja, ter njegovo konfiguracijo smo izvedli z uporabo plazemskega jedkanja in SEM. Vzorce nanokompozitov smo izpostavili kisikovi plazmi v namensko izdelanem plazemskem reaktorju. Reaktor je bil sestavljen iz steklene razelektivitvene cevi s tuljavo, ki je bila povezana z radiofrekvenčnim generatorjem. Generator je deloval z močjo vzbujanja  $P_{plasma} = 150$  W pri tlaku  $p_{plasma} = 35$  Pa. Da bi preprečili pregrevanje vzorcev, tj. lokalno taljenje matričnega materiala, smo vzorce namestili 7 cm od tuljave ter jih izpostavili cikličnim obremenitvam, kjer je bil vsak cikel sestavljen iz plazemskega pulza s trajanjem  $t_{p. pulz} = 30$  s in zamika (zakasnitve) s trajanjem  $t_{p. zamik} = 10$  s (ohlajanje vzorca). Formirano omrežje je bilo v celoti izpostavljeno po 20 ciklih plazemskega jedkanja. Pri tem je bila hitrost jedkanja ocenjena na  $v_{plazma} \approx 25$  nm/s, torej je bila globina plazemskega jedkanja približno  $h_{plazma} \approx 15$   $\mu$ m. V nadaljevanju smo jedkane vzorce opazovali s pomočjo elektronskega mikroskopa (JSM-7600F, Jeol, Japonska), kjer smo z uporabo zgornjih (SEI) in spodnjih (LEI) detektorjev sekundarnih elektronov pri nizki vzbujevalni napetosti  $U_{exc} < 5$  kV in delovni razdalji  $WD < 8$  mm pridobili visoko ločljive mikrofote izpostavljenega SWCNT omrežja.

### 2.3.2 Nanoindentacija (vpliv nastanka in konfiguracije na mehanske lastnosti)

Študijo vpliva konfiguracije SWCNT-omrežja na mehanske lastnosti nanokompozitov smo izvedli z uporabo nanoindenterja (Nanoindenter G200, KLA instruments, ZDA) z XP glavo in Berkovičevo tristrano piramido. Naredili smo standardne indentacijske teste, t.j. 6 indentov na 6 različnih lokacijah; skupaj 36 indentov, pri sobni temperaturi z razmakom med indenti  $\Delta u = 200$   $\mu$ m, da smo se izognili motnjam napetostnega polja sosednjega indenta. Elastični modul  $E$  smo določili iz krivulje razbremenjevanja obremenitve in pomika oziroma  $F - h$  krivulje (predstavlja elastični odziv materiala tekom razbremenjevanja), kot sta to podala W.C Oliver and G.M. Pharr [7]. Čeprav so bili testi izvedeni do globine  $h_{indent} = 2000$  nm, je bil  $E$  določen med globinama  $h_{E,min} = 500$  nm in  $h_{E,max} = 1500$  nm, kar je izničilo vpliv lupine in podlage. Rezultati meritev  $E$  tako predstavljajo povprečno vrednost 36 meritev (indentov), medtem ko je napaka predstavljena kot maksimalno odstopanje od povprečne vrednosti.

### 2.3.3 Meritve upornosti (vpliv nastanka in konfiguracije na električne lastnosti)

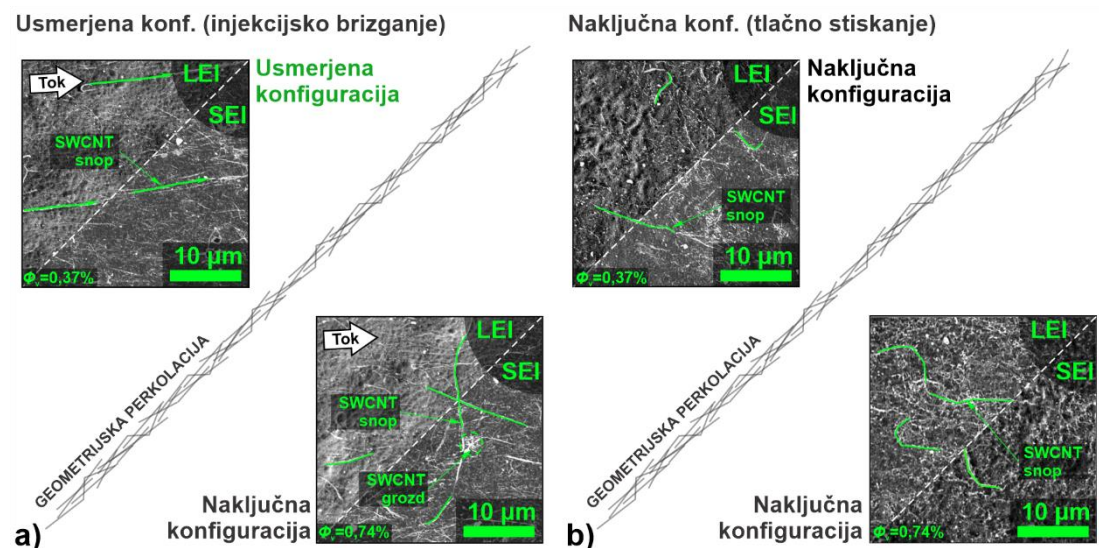
Nazadnje smo analizirali tudi vpliv konfiguracije SWCNT-omrežja na električne lastnosti nanokompozitov z uporabo prilagojene 4-žične in 2-žične merilne naprave enosmernega toka, sestavljene z visokonapetostnim virom in merilno enoto (Keithley 237, Keithley instruments, ZDA) za 4-žične meritve in elektrometrom (Keysight B2985B, Keysight technologies, ZDA) za 2-žične meritve. 4-žične meritve so bile uporabljene samo za vzorce z maksimalnim signalom električnega toka pod  $\sim 20$  pA. Vsi testi so bili izvedeni pri sobni temperaturi. Specifično upornost  $\rho$  oziroma prevodnost  $\sigma = 1/\rho$  nanokompozitov smo določili preko meritev električnega toka  $I$  na dano vzbujalno napetost  $U$  v območju od  $U_{min} = -800$  V do

$U_{\text{maks}} = +800$  V. V območju izmerjenih napetosti so vsi vzorci izkazovali ohmsko vedenje, zato je bila specifična prevodnost določena iz linearnega naklona  $I - U$  krivulj. Rezultati meritev  $\sigma$  predstavljajo povprečno vrednost od 2 do 3 meritev, medtem ko je napaka predstavljena kot maksimalno odstopanje od povprečne vrednosti.

### 3 Rezultati in diskusija

#### 3.1 Osnovni gradniki SWCNT-omrežja in njegova konfiguracija

S pomočjo tehnike plazemskega jedkanja nam je uspelo odkriti SWCNT-omrežje, kjer smo z uporabo SEM-mikrografov določili osnovne gradnike SWCNT-omrežja ter njegovo konfiguracijo v izdelanih nanokompozitih, slika 1. Na sliki 1 so prikazani le izbrani SEM-mikrografi, in sicer za brizgane in stiskane vzorce, ki predstavljajo vsebnost SWCNT-jev tik pred in po nastanku omrežja, označeno kot  $\Phi_{cv}$ . Iz mikrografov je razvidno, da je omrežje sestavljeno iz snopov (sekundarni aglomeratov), ki predstavljajo glavne gradnike omrežja in so posledica močnega geometrijskega prepleta ter van der Waalsovih privlakov med posamičnimi SWCNT-ji, ki jih ni mogoče popolnoma razdreti s konvencionalnimi postopki predelave, ne da bi pri tem uničili glavne komponente (degradacija matričnega materiala, napake na površini SWCNT-jev, itd.) [1].



**Slika 1:** SEM-mikrografi za a) injekcijsko brizgane in b) stiskane vzorce, ki razkrivajo osnovne gradnike SWCNT-omrežja, nastanek omrežja ter njegovo konfiguracijo (usmerjena/naključna) v izdelanih nanokompozitih.

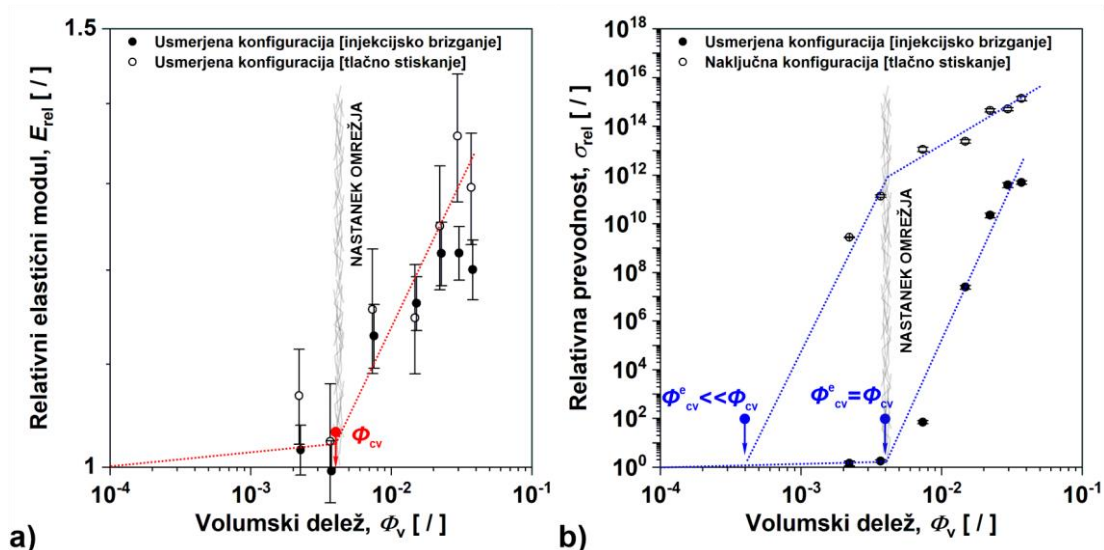
Poleg omenjenega, mikrografi razkrivajo tudi večje entitete znotraj omrežja, tako imenovane SWCNT-grozde, ki prav tako spadajo v skupino sekundarnih aglomeratov. Grozdi običajno nastanejo pri višjih koncentracijah (običajno nad  $\Phi_{cv}$ ) in so rezultat termo- in hidrodinamskih mehanizmov združevanja snopov, ki jih poganjata Brownovo gibanje ali aplicirano strižno polje tekom predelave [1].

Poleg tega SEM-mikrografi razkrivajo tudi konfiguracijo SWCNT-omrežja v izdelanih nanokompozitih. Na SEM-mikrografih brizganih vzorcev je mogoče opaziti spremembo usmerjenosti SWCNT-jev; od visoko usmerjene konfiguracije pod  $\Phi_{cv}$ , do naključne konfiguracije nad  $\Phi_{cv}$ . Pri nizki vsebnosti SWCNT-jev (pod  $\Phi_{cv}$ ) se snopi prosto vrtijo in poravnajo v smeri toka taline, slika 1a, medtem ko pri visoki vsebnosti SWCNT (nad  $\Phi_{cv}$ ) rotacijo snopa in njegovo usmerjenost ovirajo sosednji delci, kar povzroči naključno konfiguracijo. Po drugi strani pa stiskani vzorci izkazujejo popolnoma naključno konfiguracijo snopov SWCNT pod in nad  $\Phi_{cv}$ , slika 1b. Medtem ko je naključna konfiguracija SWCNT-jev jasna pri visoki vsebnosti koncentraciji SWCNT-jev (nad  $\Phi_{cv}$ ), je naključnost SWCNT-jev pri nizki vsebnosti SWCNT (pod  $\Phi_{cv}$ ) povezana predvsem z naključno razporeditvijo SWCNT-jev v SWCNT/HDPE mešanici in odsotnostjo napetostnega gradienta tekom stiskanja.

### 3.2 Vpliv SWCNT-omrežja na mehanske in električne lastnosti

Iz rezultatov nanoindentacije smo v prvem koraku določili modul elastičnosti  $E$  ter ga v nadaljevanju normalizirali v relativni modul kot  $E_{rel} = E/E_m$ , kjer  $E_m$  predstavlja modul elastičnosti matričnega materiala, slika 2a. Iz slike 2a je mogoče opaziti dva režima, tj. razredčeni in pol-razredčeni režim, ločena s kritičnim volumskim deležem  $\Phi_{cv}$ , ki kaže na razvoj SWCNT-omrežja. Pod  $\Phi_{cv}$  (v razredčenem režimu) lahko mehansko ojačitev razumemo kot prenos zunanje obremenitve iz matričnega materiala na nanopolnilo. Nad  $\Phi_{cv}$  (v polrazredčenem režimu) pa SWCNT-snopi tvorijo naključno povezano omrežje, kjer so interakcije sosednjih delcev pomembne. Tako oblikovano omrežje izkazuje interakcije delcev dolgega dosega, kar dodatno ojača material za  $\sim 0,35 \times$ . S presekom dveh regresijskih črt preko razredčenega in pol-razredčenega režima (črtkane črte na sliki 2a) smo ugotovili, da se omrežje vzpostavi pri  $\Phi_{cv} \approx 0.4\%$ . Poleg omenjenega, pod  $\Phi_{cv}$ , omrežje izkazuje dve konfiguraciji, in sicer - usmerjena konfiguracija v brizganih vzorcih in naključna konfiguracija v stiskanih vzorcih. Izkazuje se, ti dve konfiguraciji ne zagotavljata nobene bistvene spremembe pri mehanski ojačitvi, saj je koncentracija SWCNT-jev izredno nizka. Kakor koli že, pa se nad  $\Phi_{cv}$  vzpostavi naključno povezano omrežje tako v brizganih, kot tudi v stiskanih vzorcih, kar ponovno vodi do približno enake mehanske ojačitve vzorcev.

Iz meritev upornosti smo določili električno prevodnost  $\sigma$  nanokompozitov ter jo nato normalizirali v relativno električno prevodnost kot  $\sigma_{rel} = \sigma/\sigma_m$ , kjer  $\sigma_m$  označuje električno prevodnost matričnega materiala, slika 2b. Ena najbolj zanimivih in pomembnih ugotovitev tega dela je, da je prag električne perkolacije  $\phi_{cv}^e$  izrazito drugačen in ni povezan z geometrijsko perkolacijo  $\phi_{cv}$ . Izkazalo se je da se  $\phi_{cv}^e$  lahko pojavi pri precej nižjih koncentracijah (t.j.  $\phi_{cv}^e \ll \phi_{cv}$ ). Pod  $\phi_{cv}$  poravnana konfiguracija, oblikovana v brizganih vzorcih za brizganje, ne omogoča prenosa naboja. Po drugi strani pa naključna konfiguracija, oblikovana v stiskanih vzorcih, omogoča prenos naboja, čeprav geometrijsko omrežje še ni vzpostavljeno, kar opazimo z drastičnim porastom  $\sigma_{rel}$  za  $\sim 10^{10} \times$ . Nad  $\phi_{cv}$  je v obeh primerih možna le ena konfiguracija, t.j. naključna, zato tudi brizgani vzorci postanejo prevodni.



**Slika 2:** Vpliv nastanka SWCNT omrežja in njegove konfiguracije na a) elastični modul in b) električno prevodnost izdelanih nanokompozitov.

#### 4 Povzetek in zaključki

Ogljikove nanocevke so splošno sprejete kot izjemna nanopolnila z vrhunsko trdnostjo in učinkovitim prenosom elektronov, zato jih je mogoče uporabiti za izboljšanje mehanske ojačitve in električne prevodnosti različnih matričnih materialov. V tem delu smo pokazali, da mehanska in prevodna funkcija takšnih nanokompozitov močno zavisi od nastanka CNT-omrežja in njegove konfiguracije. Pokazali smo, da je SWCNT omrežje v HDPE matrici večinoma zgrajeno iz snopov, ki se geometrijsko prepletejo pri kritičnem volumskem deležu  $\phi_{cv}$  (geometrični perkolacijski prag). Izaže se, da so mehanske lastnosti močno odvisne od nastanka omrežja, ne glede na njegovo konfiguracijo, medtem ko so električne lastnosti tovrstnih materialov presenetljivo drugačne, močno odvisne od konfiguracije omrežja (usmerjena proti naključni), kjer naključna konfiguracija znatno zniža prehod materiala iz izolatorja v prevodnik, določenega z  $\phi_{cv}^e$  (električni perkolacijski prag).

Najbolj zanimiv in pomemben prispevek tega dela je, da lahko električno perkolacijo v nanokompozitih vsaj za en red velikosti znižamo glede na geometrijsko perkolacijo ( $\phi_{cv}^e \ll \phi_{cv}$ ), če zagotovimo naključno konfiguracije CNT-omrežja. Te presenetljive rezultate je mogoče uporabiti pri izdelavi ne le visoko ojačanih in prevodnih elementov, temveč tudi pri izdelavi visoko prevodnih in fleksibilnih elementov z minimalnim dodatkom nanopolnila.

#### Zahvala

Avtorja se zahvaljujeta Agenciji za raziskovalno dejavnost Republike Slovenija za finančno podporo (ARRS raziskovalni program P2-0264). Poleg tega se avtorja zahvaljujeta dr. Alenki Vesel iz Inštituta Jožef Stefan za opravljene meritve elektronske mikroskopije ter Matiji Arzenšku in Tadeju Rojacu iz Inštituta Jožef Stefan za opravljene meritve električne prevodnosti.

## Literatura

- [1] I. Alig, et al., *Establishment, morphology and properties of carbon nanotube networks in polymer melts*, Polymer. 53, 4--28, 2012.
- [2] S. Chopra, K.A. Deshmukh, D. Peshwe, *Theoretical prediction of interfacial properties of PBT/CNT nanocomposites and its experimental evaluation*, Mech. Mater. 109, 1--16, 2017.
- [3] M. Haghgoo, et al., *Prediction of electrical conductivity of carbon fiber-carbon nanotube-reinforced polymer hybrid composites*, Compos. Part B Eng. 167, 728--735, 2019.
- [4] Y. Li, et al., *A review of the electrical and mechanical properties of carbon nanofiller-reinforced polymer composites*, J. Mater. Sci. 54, 1036--1076, 2019.
- [5] N.A. Mohd Radzuan, A.B. Sulong, J. Sahari, *A review of electrical conductivity models for conductive polymer composite*, Int. J. Hydrogen Energy. 42, 9262--9273, 2017.
- [6] N. Nikfar, Y. Zare, K.Y. Rhee, *Dependence of mechanical performances of polymer/carbon nanotubes nanocomposites on percolation threshold*, Phys. B Condens. Matter. 533, 69--75, 2019.
- [7] W.C. Oliver, G.M. Pharr, *Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology*, J. Mater. Res. 19, 3--20, 2004.
- [8] A. Oseli, A. Vesel, M. Mozetič, E. Žagar, M. Huskić, L. Slemenik Perše, *Nano-mesh superstructure in single-walled carbon nanotube/polyethylene nanocomposites, and its impact on rheological, thermal and mechanical properties*, Compos. Part A Appl. Sci. Manuf., 136, 105972, 2020.
- [9] A. Oseli, A. Vesel, E. Žagar, L. Slemenik Perše, *Mechanisms of Single-Walled Carbon Nanotube Network Formation and Its Configuration in Polymer-Based Nanocomposites*, Macromolecules. 57, 3334--3346, 2021.
- [10] A. Oseli, T. Tomković, S.G. Hatzikiriakos, A. Vesel, M. Arzenšek, T. Rojac, M. Mihelčič, L. Slemenik Perše, *Carbon nanotube network formation and configuration/morphology on reinforcing and conductive performance of polymer-based nanocomposites*, Compos. Sci. Technol., 237, 110010, 2023.
- [11] A. Peterson, et al., *A Combined Theoretical and Experimental Study of the Polymer Matrix-Mediated Stress Transfer in a Cellulose Nanocomposite*, Macromolecules. 54, 3507--3516, 2021.
- [12] P. Pötschke, et al., *Rheological and dielectrical characterization of melt mixed polycarbonate-multiwalled carbon nanotube composites*, Polymer. 45, 8863--8870, 2004.
- [13] Z. Spitalsky, D. Tasis, K. Papagelis, C. Galiotis, *Carbon nanotube-polymer composites: Chemistry, processing, mechanical and electrical properties*, Prog. Polym. Sci. 35, 357--401, 2010.
- [14] Y. Zare, et al., *A power model to predict the electrical conductivity of CNT reinforced nanocomposites by considering interphase, networks and tunneling condition*, Compos. Part B Eng. 155, 11--18, 2018.



## *Numerična in eksperimentalna analiza aeracije v mali biološki čistilni napravi*

Matjaž Ramšak<sup>1</sup>

### *Numerical and experimental analysis of aeration in a small biological treatment plant*

**Povzetek.** Eksperimentalni način zajema vizualizacijo tokovnih razmer mehurčkov in fotogrametrična meritev njihovega premera. Numerično simulacijo smo izvedli s pomočjo računalniške dinamike tekočin in sicer ANSYS FLUENT. Simulacija zajema tok dvofazne tekočine: vode in zraka. Uporabili smo najenostavnejši pristop po metodi Euler – Euler. Numerično smo analizirali tudi idejo nesimetrične postavitve razpršilnika zraka in dobili tudi do 10 % večje vrednosti volumskega deleža in faktorja enakomernosti porazdelitve zraka.

**Abstract.** The experimental method includes air bubble flow visualization and the photogrammetric measurement of their diameter. Numerical simulation was carried out using ANSYS FLUENT computational fluid dynamics. The simulation covers the flow of a two-phase fluid: water and air. The simplest Euler-Euler modelling approach is used. The idea of an asymmetric layout of the air diffuser is numerically tested. Up to 10 % higher values of the volume fraction and the air distribution uniformity factor is obtained.

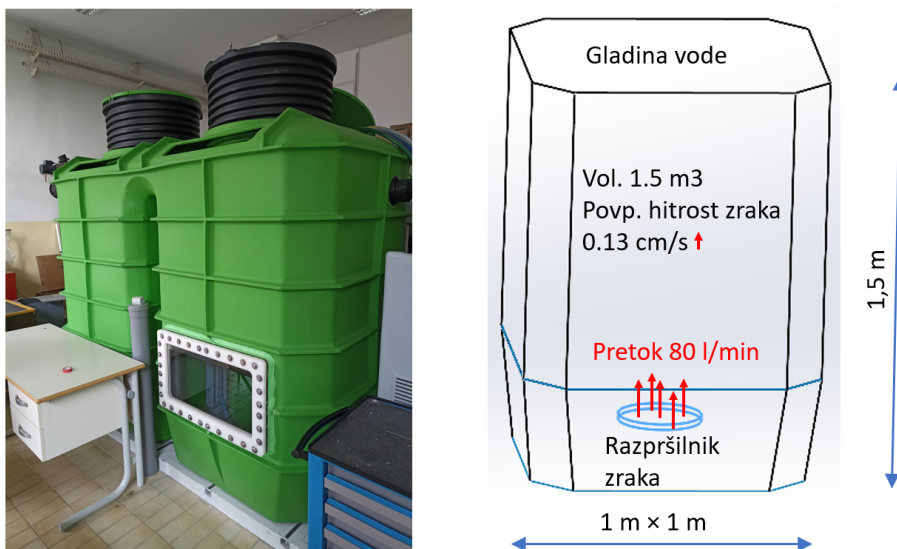
## 1 Uvod

Delo je nastalo v okviru projektne naloge Študentski izzivi ŠI:UM v pilotnem projektu Enotna vstopna točka za delodajalce in inovativne oblike sodelovanja s študenti. V projektu je sodelovalo 8 študentov VS različnih smeri: strojništvo, kemija in gradbeništvo. Večinoma 1. letnik. Partner iz gospodarstva je bil ROTO d.o.o. iz Murske Sobote. Projekt je financirala EU. Trajal je 3 mesece.

Predstavljamo eksperimentalno analizo in numerično simulacijo tokovnih razmer v mali biološki čistilni napravi (MiČNA). Odpadne vode v malih čistilnih napravah običajno očistimo v primarni in sekundarni fazi. Pri primarni fazi ali mehanski fazi čiščenja se trdne snovi posedajo,

---

<sup>1</sup> Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo



**Slika 1:** Mala biološka čistilna naprava ROTO v laboratoriju FS UM in poenostavljena geometrija sekundarne zadrževalne komore z robnimi pogoji na desni strani fotografije.

tekoča faza pa splava na površje. V sekundarni fazi poteka biološko čiščenje vode s pomočjo mikroorganizmov. Za uspešno življenje mikroorganizmov je potrebno dovajati dovolj zračnih mehurčkov, ki morajo biti čim bolj enakomerno porazdeljeni. Ta postopek se imenuje aeracija. Intenzivnost aeracije je odvisna predvsem od velikosti skupne medfazne površine. Le ta pa je predvsem odvisna od volumskega deleža zraka in velikosti mehurčkov. Dovajanje komprimiranega zraka je najdražja postavka obratovalnih stroškov, zato je pomembno optimizirati njene parametre: velikost mehurčkov, pretok zraka in postavitev zračnega razpršilnika. Če v našem primeru fiksiramo dejanski pretok zraka in obstoječi razpršilnik zraka ostane predmet raziskave le porazdelitev zračnih mehurčkov.

Namen naloge je torej čim bolj povečati povprečno vsebnost zraka in enakomernost njegove porazdelitve. Povprečni volumski delež zraka ( $\bar{\varepsilon}$ ) je rezultat numerične simulacije in tudi meritve. S pomočjo  $\bar{\varepsilon}$  izračunamo tudi oceno povprečnega zadrževalnega časa zraka v posodi  $\bar{t}_g$  kot

$$\bar{t}_g = \frac{V_g}{\dot{V}_g} = \frac{\bar{\varepsilon} \cdot V}{\dot{V}_g}, \quad (1)$$

kjer je  $V_g$  volumen vsebovanega zraka,  $\dot{V}_g$  pretok komprimiranega zraka in  $V$  prostornina zadrževalne posode.

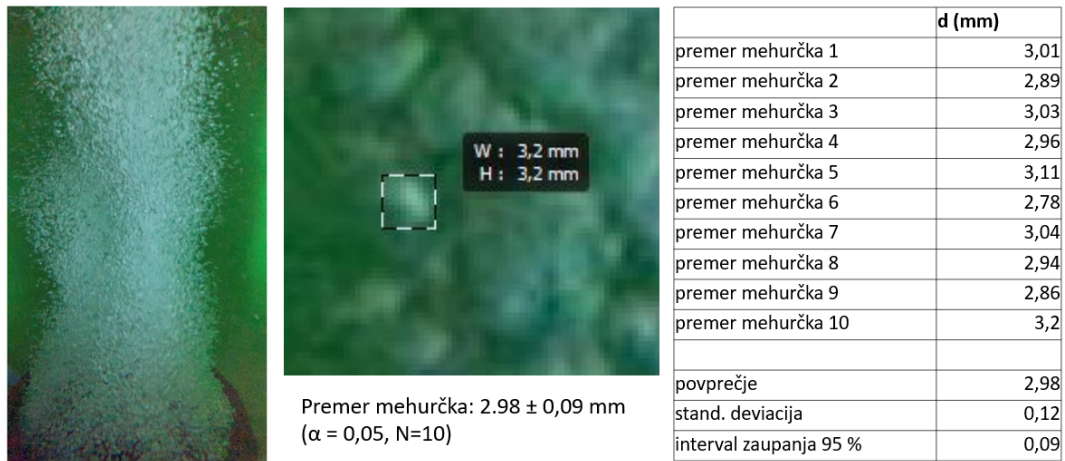
Enakomernost porazdelitve zraka ocenjujemo z indeksom uniformnosti porazdelitve volumskega deleža zraka (UIV), ki ga definiramo kot [3]

$$UIV = 1 - 0.5 \sum_{i=1}^N \left| \frac{\varepsilon_i}{\bar{\varepsilon}} - 1 \right| \frac{V_i}{V_{tot}}, \quad (2)$$

kjer je seštevek absolutne vrednosti deleža lokalne vsebnosti zraka ( $|\frac{\varepsilon_i}{\bar{\varepsilon}} - 1|$ ) izveden po vseh



končnih volumnih ( $N$ ) in utežen z njihovim prostorninskim deležem ( $V_i/V_{tot}$ ). V primeru popolnoma konstantne porazdelitve je maksimalna vrednost UIV 1. Očitno je UIV rezultat le numerične simulacije.



**Slika 2:** Fotografija za izračun premera mehurčkov, primer odčitka velikosti mehurčka in statistična analiza rezultatov s pomembnostjo testa  $\alpha = 0.05$ .

## 2 Meritve

Iz fotografije mehurčastega toka na sliki 2 smo odčitali dimenzijo 10 mehurčkov v pikslah in preračunali njihovo dimenzijo v mm s pomočjo znanih dimenzij okenskega okvirja na sliki 1. V vodoravni in vertikalni smeri je bila dimenzija piksla 0.35 mm. Določevanje velikosti mehurčka s pomočjo kontrolnega kvadrata je bilo subjektivne narave in v natančnosti manj od piksla. Rezultat meritve je  $2.98 \pm 0.09$  mm kjer je interval zaupanja srednje vrednosti izračunan s 95 % zaupanjem, slika 2.

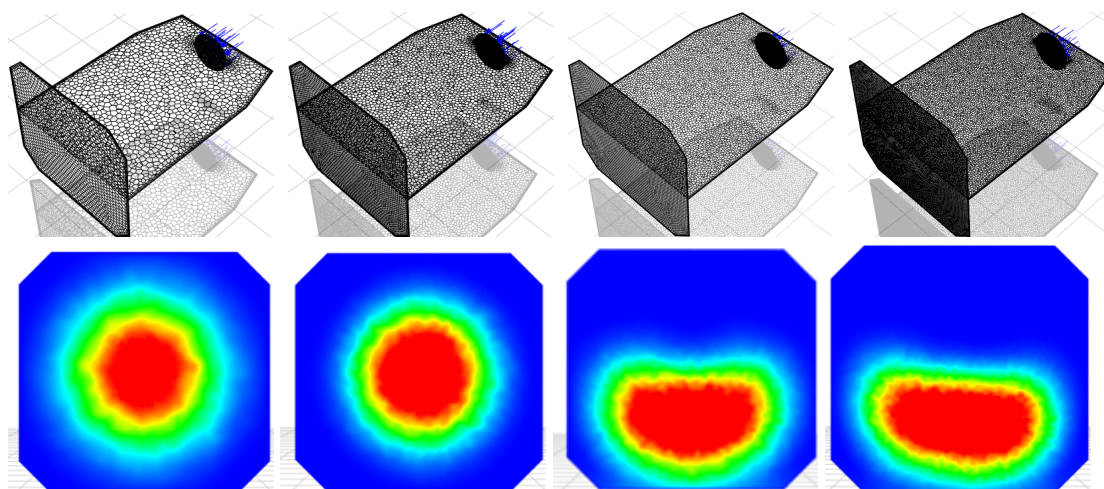
Prvotni namen meritev je bil tudi izmeriti volumski delež zraka s principom dviga plovca pri vklopu kompresorja. Žal je med obratovanjem plovec zelo kaotično nihal v območju nekaj centimetrov in kakršnokoli enostavno odčitavanje povišanja gladine ni bilo mogoče.

## 3 Numerična simulacija

Numerična simulacija je bila izvedena s programskim orodjem ANSYS Fluent [1]. Poenostavljena geometrija sekundarne komore MiČNA je prikazana na sliki 1. Najpomembnejše lastnosti simulacije in robne pogoje strnemo v naslednjih točkah.

- Ustajene razmere.
- Euler - Euler model dvofaznega toka voda – zrak.
  - Premer mehurčkov 3 mm.
- SST turbulentni model (privzeti model).





**Slika 3:** Testirane mreže z 332 tisoč, 1, 2 in 4 milijoni vozlišč. Značilna velikost elementov je 30, 20, 15 in 12 mm po prostornini zadrževalnika in 10, 7, 5 in 4 mm na površini razpršilnika zraka. V spodnji vrstici so rezultati porazdelitve volumnskega deleža zraka na skupni skali do 1.0 % na prosti gladini pri ustrezni mreži.

- Predpisan pretok zraka na razpršilniku 80 l/min.
- Odzračevalni robni pogoj na gladini.
- Vse ostale nastavitve smo pustili na privzete vrednosti.

### 3.1 Občutljivost rezultatov na gostoto mreže in konvergenčni kriterij.

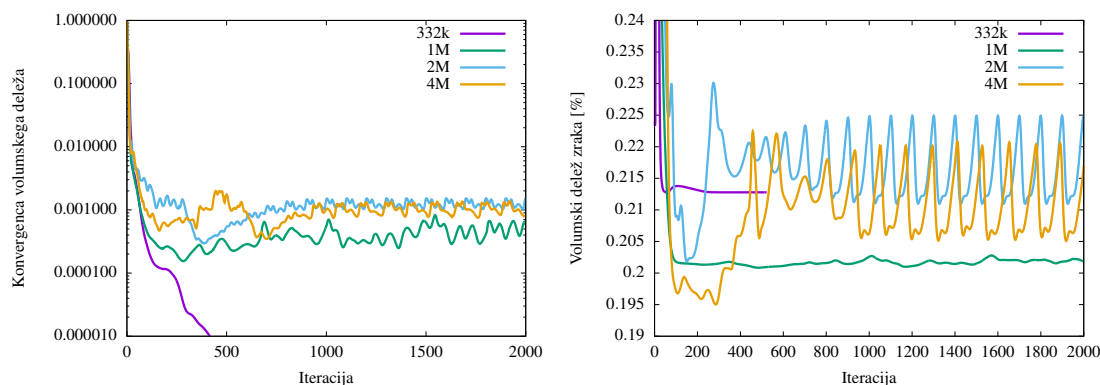
Testirali smo 4 gostote mrež, slika 3. Najredkejša mreža ima gladko in monotono konvergenco vse do testiranega konvergenčnega kriterija  $1e-5$ , slika 4. Pri vseh gostejših mrežah se konvergenco ustali pri približni vrednosti  $1e-3$ , zato smo za povprečni volumnski delež in interval nihanja izračunali pri zadnjih 1000 iteracijah od skupnih 2000, tabela 1.

Najpomembnejši rezultat simulacije je volumnski delež zraka, ki je prikazan tudi na stolpičnem diagramu, slika 5. Glede na namen naloge in lepo konvergenco najredkejše mreže izberemo le to. Na roke nam gre tudi lepo ujemanje volumnskega deleža zraka z mrežama 2M in 4M.

Za izbrano najredkejšo mrežo 338k izvedemo tudi test konvergenčnega kriterija. Privzeta vrednost FLUENT-a je  $1e-3$ . Konvergenčni kriterij zaostriamo na  $1e-4$  in  $1e-5$ . Rezultati so podani v tabeli 5. Izberemo konvergenčni kriterij  $1e-4$ , saj se pri nadaljnjem zaostrovanju rezultati praktično ne spremenijo (manj od 0.01 %).

### 3.2 Rezultati

Posamezne slike rezultatov na najredkejši mreži in konvergenčni kriterij  $1e-4$  so prikazani na sliki 8. Zračni mehurčki iz razpršilnika zaradi vzgona potujejo navzgor in izstopijo na gladini vode. Zaradi upora na svoji poti poganjajo tudi vodni tok. Le ta ob gladini spremeni smer od središča navzven in ob stenah posode potuje navzdol. V posodi se izpostavi približno osno



**Slika 4:** Konvergenca računskega postopka volumskega deleža zraka v odvisnosti od gostote mreže (slika levo). Potek povprečnega volumskega deleža zraka tekom konvergence.

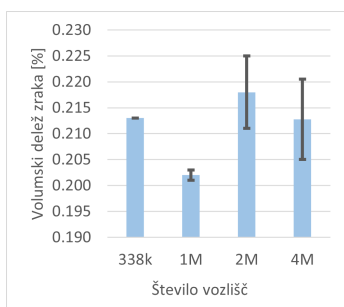
Ime mreže	338k	1M	2M	4M	
Št. vozlišč	338k	1.0M	2.2M	3.8M	
Št. celic	81k	220k	468k	785k	
Min index ortogonalnosti		0.73	0.74	0.65	0.68
Max razmerje stranic (aspect ratio)		28	22	28	17
Konvergenca do kon. kriterija 1e-4	konvergira	ne konvergira	ne konvergira	ne konvergira	
Št. Iteracij	263	2000	2000	2000	
CPU serijski zagon [ure]	0.78	24	53	98	
CPU na 250 iter [ure]	0.7	3.0	6.6	12.3	
<b>Rezultati</b>					
Uni. porazdelitve [-]		0.21	0.16	0.17	0.15
Volumski delež [%]		0.213	0.202	0.218	0.213
Interval nihanja [%]		0.000	0.001	0.007	0.008
Čas zadrževanja [s]		2.48	2.35	2.53	2.48
Tlak zraka na difuzorju [Pa]		0.0427	0.0466	0.0672	0.0639
Bilanca tokov [kg/s]		2.0E-07	5.0E-05	4.0E-05	6.0E-05

**Tabela 1:** Odvisnost rezultatov od gostote mreže.

simetrični vodni krog. Največje hitrosti navzgor se pojavijo nad razpršilnikom zraka. Več o tem v naslednjem razdelku.

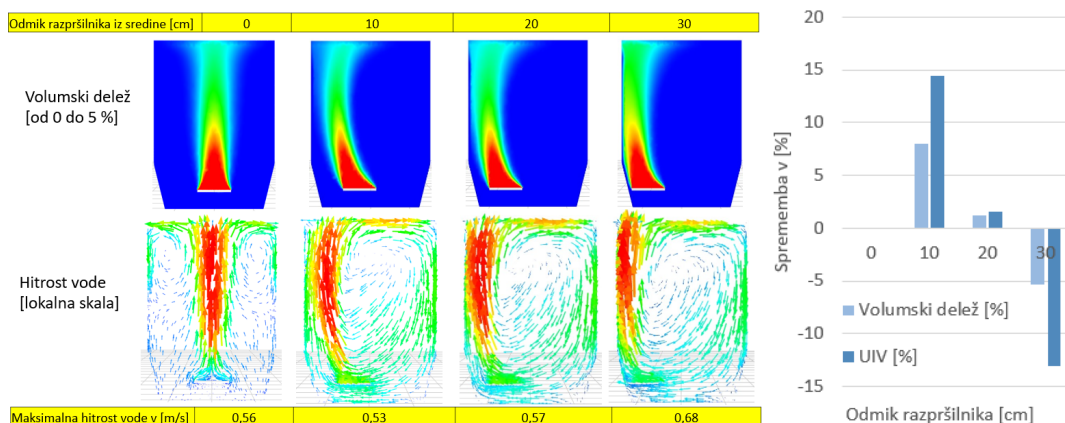
### 3.3 Terminalna hitrost mehurčkov

Terminalna hitrost osamljenega mehurčka v vodi v odvisnosti od premera je dobro raziskani elementarni problem mehanike tekočin na primer v uveljavljeni literaturi iz leta 1978 [2]. Iz grafa vertikalne hitrosti po vertikalni srednjici prikazano na sliki 7 opazimo, da je relativna hitrost med zrakom in vodo praktično ustaljena po celotni višini iz česar smemo sklepati, da mehurčki dosežejo terminalno hitrost kmalu po izstopu iz razpršilnika zraka. Iz grafa odčitamo hitrost dviganja zraka 0.80 in vode 0.55 m/s. Njuna razlika je relativna hitrost mehurčka ki znaša 0.25 m/s. Dobljeno relativno hitrost in premer mehurčka 3 mm vnesemo v graf terminalne hitrosti osamljenega mehurčka [2] in opazimo, da se naša rešitev odlično ujema z meritvami iz



Konvergenčni kriterij	1.0E-03	1.0E-04	1.0E-05
Število iteracij	78	263	520
CPU [min]	13	47	84
Uni. porazdelitve [-]	0.2083	0.2055	0.2055
Volumski delež [%]	0.2134	0.2128	0.2128
Čas zadrževanja [s]	2.482	2.475	2.475
tlak zraka na difuzorju [Pa]	0.04285	0.04274	0.04275
bilanca tokov [kg/s]	4.2E-07	2.2E-07	3.4E-08

**Slika 5:** Odvisnost povprečne vsebnosti zraka od gostote mreže (levo) in vpliv konvergenčnega kriterija (desno).



**Slika 6:** Nesimetrična postavitev razpršilnika zraka. Na desni strani graf predstavlja spremembo vrednosti glede na simetrično postavitev.

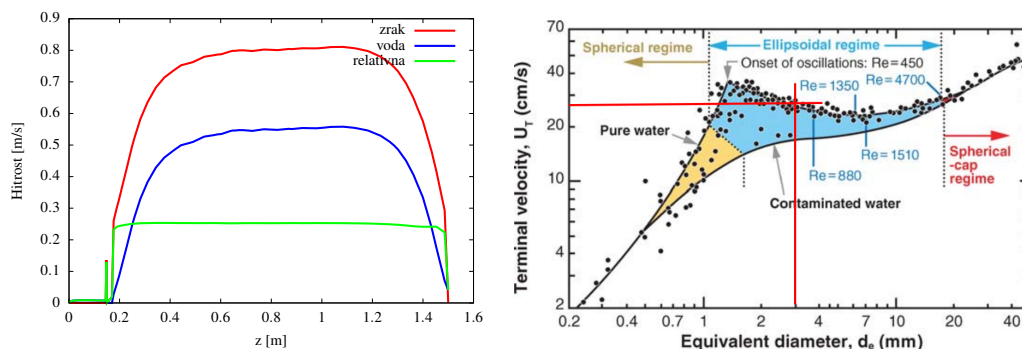
[2]. Izračunamo še Reynoldsovo število za posamezni mehurček

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{0.25 \text{ m/s} \cdot 0.003 \text{ m}}{10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 750 \quad (3)$$

ki se tudi lepo ujema z [2], slika 7.

### 3.4 Analiza nesimetričnosti postavitve razpršilnika zraka

Razpršilnik zraka smo prestavili iz centra komore za 10, 20 in 30 centimetrov. Rezultati so prikazani na sliki 6. Zanimivo je, da pri odmikih iz centra namesto simetrične tokovne strukture nastane nesimetrična s prevladujočim primarnim vrtincem. Pomembni in praktični podatek je, da smo pri 10 cm odmiku dobili približno 10 % večjo vsebnost zraka in enakomernost njegove porazdelitve v primerjavi s simetrično postavitvijo 0 cm, pri 20 cm približno enako kot pri 0 cm ter ponovno -10 % manjše vrednosti pri 30 cm odmiku, stolpcični diagram na desni strani slike 6.



**Slika 7:** Hitrost dvigovanja zraka in vode po vertikalni srednjici (levo) in primerjava relativne hitrosti med njima s terminalno hitrostjo iz literature [2] (rdeči črti za 3 mm in 26 cm/s na desni sliki, vir [2]).

#### 4 Zaključki

Predstavili smo eksperimentalno in numerično analizo male biološke čistilne naprave ROTO.

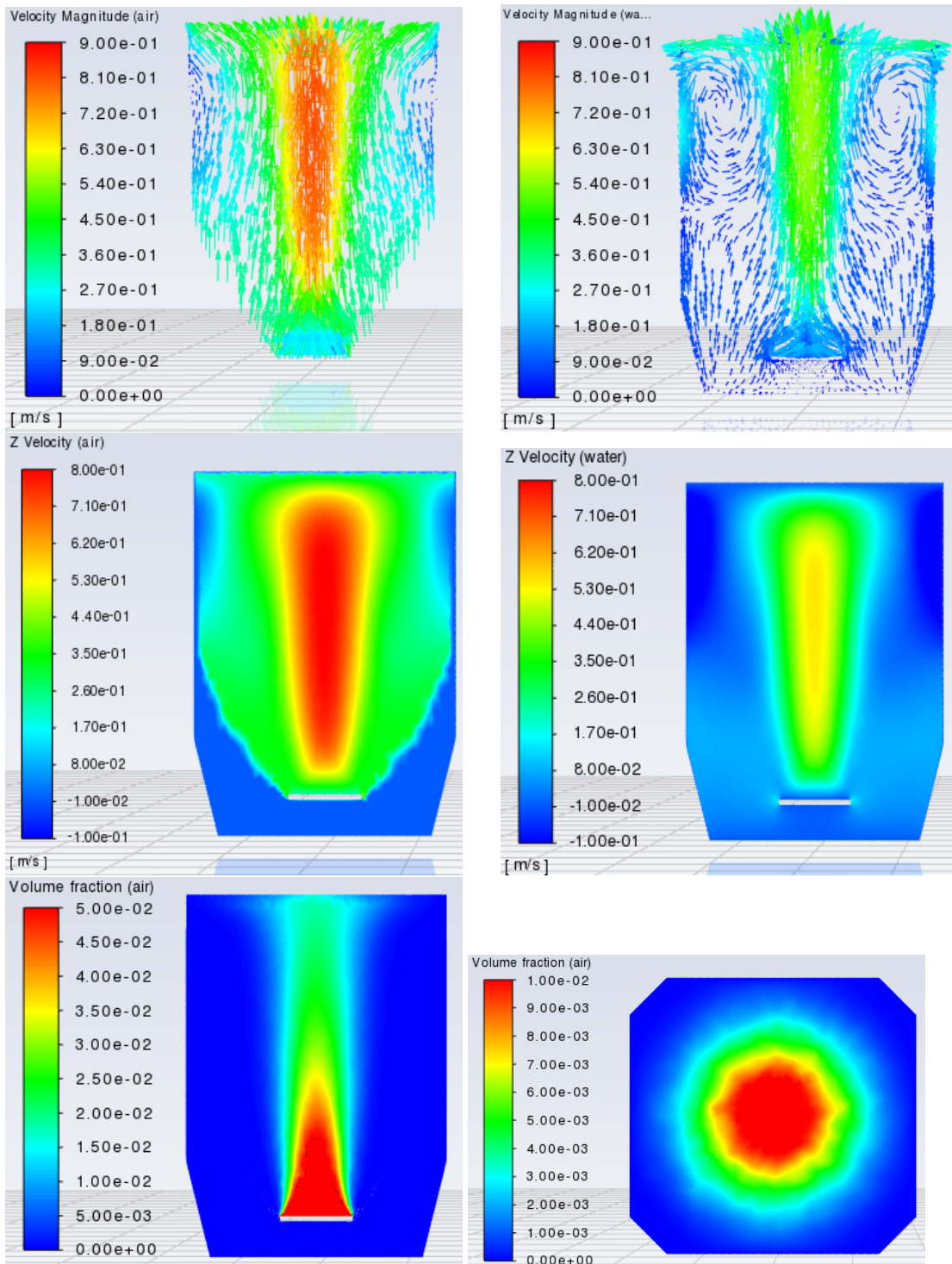
- S preprostimi merilnimi pripomočki so tudi izmerjeni rezultati zelo omejeni. V tem primeru le značilni premer mehurčkov, slika 2.
- Preprosta Euler-Euler numerična simulacija povsem zadošča za vpogled v tokovna polja zraka in vode, slika 8.
- Pri gostejših mrežah rezultati postanejo nesimetrični in neustaljeni, slika 3 in tabela 1.
- Numerična analiza premika razpršilnika zraka iz centra komore kaže na povečanje vsebnosti zraka in njegov enakomernjšo porazdelitev tudi do približno 10 % v primerjavi s centrično postavitvijo, slika 6.
- V prihodnosti bi bile možne hitre dodatne analize geometrijskih in obratovalnih sprememb in vpeljava kompleksnejših numeričnih modelov dvofaznega toka.

#### Zahvala

Delo je nastalo tudi s financiranjem EU v okviru projekta študentskih izivov ŠI:UM. Za pomoč se zahvaljujem naslednjim študentom: Martin Bač, Luka Denša, Staš Goubar, Žan Jezovšek, Anja Krautič, Blaž Morel, Martin Rauter in Žan Resner. Zahvala gre tudi podjetju ROTO še posebej delovnemu mentorju Alešu Žekšu.

#### Literatura

- [1] ANSYS®. Academic Research CFD, Release 2021R1.
- [2] C. R. *Bubbles, Drops and Particles*, volume 38. 1978.
- [3] H. Weltens, H. Bressler, F. Terres, H. Neumaier, and D. Rammoser. Optimisation of catalytic converter gas flow distribution by cfd prediction. In *International Congress & Exposition*. SAE International, mar 1993.



**Slika 8:** Vektorji hitrosti za zrak (1. vrstica levo) in vodo (1. vrstica desno). Vertikalna komponenta hitrosti za zrak (2. vrstica levo) in vodo (2. vrstica desno). Volumski delež zraka v vertikalnem (3. vrstica levo) in horizontalnem prerezu (3. vrstica, desno).



## *Numerična simulacija vodnega udara*

Zlatko Rek<sup>1</sup>, Anton Bergant<sup>1,2</sup>, Kamil Urbanowicz<sup>3</sup>

## *Numerical simulation of water hammer*

### **Povzetek.**

Prispevek obravnava numerično simulacijo vodnega udara v sistemu rezervoar–cegovod–ventil. Izkaže se, da je 1D model računsko bolj učinkovit v primerjavi s 3D modelom. Natančnost 1D modela povečamo z vpeljavo členov, ki upoštevajo 3D efekte (primer neustaljenega stenskega trenja). 3D model te vplive napove direktno in predstavlja odlično orodje za raziskave večrazsežnih lastnosti tekočin (numerični laboratorij). Rezultati izračuna po 1D in 3D numeričnih modelih se dobro ujemajo z meritvami ob pravilni napovedi in modeliranju vplivnih fizikalnih veličin med vodnim udarom.

### **Abstract.**

This paper deals with the numerical simulation of water hammer in the reservoir-pipeline-valve system. It turns out that the 1D model is computationally more efficient compared to the 3D model. The accuracy of the 1D model is increased by introducing terms that take into account 3D effects (example of unsteady skin friction). The 3D model predicts these influences directly and represents an excellent tool for researching multidimensional properties of fluids (numerical laboratory). Calculation results based on 1D and 3D numerical models are in good agreement with measurements with correct prediction and modeling of influential physical quantities during water hammer.

## **1 Uvod**

Hidravlični cevni sistemi (črpalne postaje, hidroelektrarne) delujejo pri različnih pretočnih razmerah. Sprememba pretočne hitrosti povzroči narastek in padec tlaka v sistemu. Hidravlični prehodni pojavi v cevnih sistemih (vodni udar, hidravlične vibracije) lahko vzbudijo ekstremne tlake, stvaritev lokalnih kavitacij in področij kavitacijskega toka, vibracije kapljevine in strukture ter masne oscilacije [13]. V tem prispevku se omejimo na vodni udar, ki je vzbujen z aperiodično spremembo pretočne hitrosti v cevi. Teoretična analiza tlačnih sprememb v sistemih z reševanjem klasičnih 1D enačb vodnega udara daje zanesljive rezultate vse dokler veljajo postavke pri izpeljavi teh enačb. V praksi so lahko razmere v cevnem sistemu daleč od idealiziranega položaja, ki ga opisujejo klasične enačbe vodnega udara. Trenje v klasičnem

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana

<sup>1,2</sup> Litostroj Power d.o.o., Ljubljana

<sup>3</sup> Tehnološka univerza Zahodne Pomeranije, Fakulteta za strojništvo in mehatroniko, Ščečcin



pomenu lahko povzroči večje dušenje kot ga da 1D ustaljeni model [3], [11]. Takrat uporabimo naprednejše modele nastaljenega stenskega trenja, ki zajemajo vpliv 2D in 3D efektov.

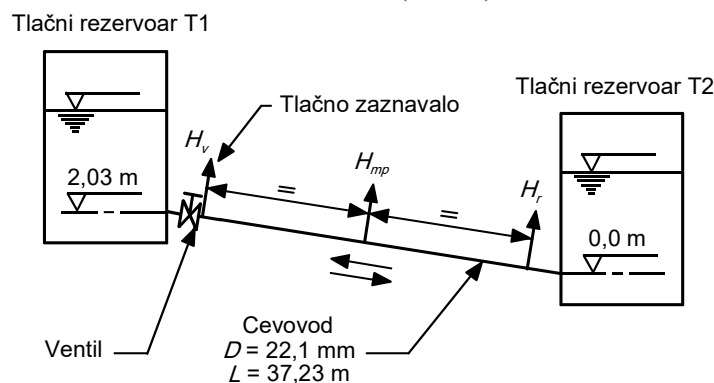
V inženirski praksi lahko pride do številnih drugih odstopanj, kot so: zrak (prost in raztopljen) v tekočini, prehodna kavitacija, interakcija med tekočino in strukturo (če cevi niso vpete), viskoelastično obnašanje stene cevi (polimerne cevi ali če se jeklene cevi plastično deformirajo), ter neopažena puščanja in zoženja cevi v sistemu. Modeliranje teh pojavov je predmet prvega dela prispevka, medtem ko se drugi del osredotoča na učinke na tlačne signale. V prispevku bomo obravnavali vpliv neustaljenega stenskega trenja s pomočjo konvolucijskega 1D modela in direktno s 3D numeričnimi izračuni. Numerični 1D model bazira na metodi karakteristik, ki je najbolj prikladna za reševanje enačb vodnega udara [13].

Računalniška dinamika tekočin (RDT) je danes ob vedno bolj zmogljivih računalnikih zelo uporabno orodje tudi pri analizi tokov in pojavov v hidravličnih cevnih sistemih. Tako so npr. Saemi in soavtorji v [8] preučevali pojav vodnega udara ter analizirali vpliv izstopnega robnega pogoja (krivulje zmanjšanja pretoka in modeliranje ventila). Prav tako so analizirali 3D učinke, ki jih povzroči zaprtje ventila in strukturo turbulence med pojavom vodnega udara. Cao in soavtorji so v [4] predstavili alternativni 3D RDT model za sistematično raziskavo dinamičnih značilnosti toka v prehodnih pogojih v hidravlični cevi. Podrobno so analizirali značilnosti krogličnega ventila v statičnih in dinamičnih pogojih in natančno raziskali učinek časa zapiranja na koeficient izgube tlaka in koeficient izpusta. V našem prispevku smo za 3D numerično simulacijo vodnega udara uporabili RDT paket ANSYS Fluent [1].

V nadaljevanju je v poglavju 2 predstavljena eksperimentalna postaja, v poglavju 3 enodimenzionalni (1D) model vodnega udara, v poglavju 4 tridimenzionalna (3D) numerična simulacija vodnega udara in v poglavju 5 zaključki. Rezultate izračuna z 1D in 3D numeričnimi modeli smo primerjali z rezultati meritev vodnega udara na eksperimentalni postaji.

## 2 Eksperiment

Eksperimentalna postaja za raziskave vodnega udara in prehodnega kavitacijskega toka v ceveh je postavljena v hidravličnem laboratoriju Univerze v Adelaidi, Avstralija [2]. Merilna postaja je sestavljena iz ravnega bakrenega cevovoda z nagnjeno strmino dolžine 37,23 m, notranjega premera 22,1 mm in debeline stene cevi 1,63 mm. Cevovod je priključen na tlačni rezervoar z leve in tlačni rezervoar z desne strani (slika 1). Naklon cevovoda je 5,45%.



**Slika 1:** Eksperimentalna postaja Univerze v Adelaidi, Avstralija.

Tlak v tlačnih rezervoarjih krmilimo s pomočjo računalnika. Koristna prostornina vode v obeh tlačnih rezervoarjih in zmogljivost kompresorja omejujeta maksimalno ustaljeno hitrost na

1,5 m/s in maksimalni delovni tlak (tlačno višino) v obeh rezervoarjih na 400 kPa (40 m). Prehodni pojav na postaji je induciran s hitrim zapiranjem kroglastega zasuna. Hitro zaprtje ventila se lahko izvede s pomočjo zapiralnega mehanizma na torzijsko vzmet (čas zapiranja ventila  $t_c$  je nastavljiv od 5 do 10 milisekund) ali pa ročno. Vsak preizkus je izveden v dveh fazah. V prvi fazi dosežemo stalno pretočno hitrost. V drugi fazi hitro zapiranje ventila vzbudi prehodni pojav. Na gorvodnem in dolvodnem koncu cevovoda ter na polovici dolžine cevovoda so na notranji premer cevi vgrajena piezoelektrična tlačna zaznavala ( $H_v$ ,  $H_{mp}$  in  $H_r$ ). Temperatura vode je merjena v rezervoarju T1. Položaj ventila med zapiranjem je merjen s pomočjo optičnih zaznaval. Meritev je registrirana in analizirana z merilnim računalnikom Concurrent 6655 v okolju UNIX.

### 3 1D numerični model

Vodni udar popisuje potovanje tlačnih valov v ceveh s kapljevino. Postavimo, da je prečna dimenzija preseka cevi zanemarljiva v primerjavi z dolžino cevi. Nestalni 1D tok v cevi popišemo s kontinuitetno in gibalno enačbo [13]:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + V \frac{\partial H}{\partial x} - V \sin \theta_p + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\lambda V |V|}{2D} = 0 \quad (2)$$

kjer so  $H$  = piezometrična višina (višina),  $t$  = čas,  $V$  = povprečna pretočna hitrost v cevi,  $x$  = koordinata,  $\theta_p$  = naklon cevovoda,  $a$  = hitrost zvoka,  $g$  = zemeljski pospešek,  $\lambda$  = Darcy-Weisbachov koeficient trenja in  $D$  = premer cevi. Standardna rešitev enačb (1) in (2) je metoda karakteristik [13]. Transformacija po metodi karakteristik da kompatibilitetne enačbe vodnega udara, ki veljajo vzdolž karakterističnih krivulj. Na robu cevi enačba robnega pogoja (tlačni rezervoar, ventil) nadomesti eno od kompatibilitetnih enačb vodnega udara. V enačbi (2) uporabimo konstantno vrednost Darcy-Weisbachovega koeficienta trenja  $\lambda$ . V primeru hitrih prehodnih pojavov to postavko korigiramo z vpeljavo nestacionarnega člena trenja. V tem primeru koeficient trenja  $\lambda$  izrazimo kot vsoto navidezno stalnega dela  $\lambda_q$  in nestalnega dela  $\lambda_u$ . V prispevku bomo uporabili konvolucijski model nestalnega trenja [2], [11], [14].

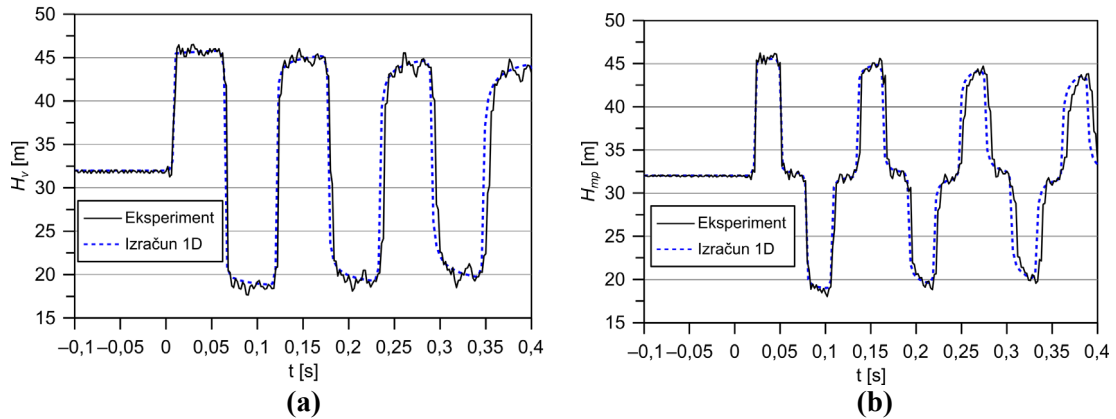
#### 3.1 Primerjava 1D numeričnih in eksperimentalnih rezultatov

Primerjamo numerične in izmerjene rezultate dveh karakterističnih primerov vodnega udara z začetnima hitrostima toka  $V_0 = \{0,1; 0,3\}$  m/s (laminaren in turbulenten tok z nizkim Reynoldsovom številom). Cilj analize je validacija 1D modela po metodi karakteristik z upoštevanjem konvolucijskega modela neustaljenega stenskega trenja in v nadaljevanju izluščiti razlike v načinu obravnave prehodnega toka po 1D in 3D metodah.

Primerjamo računske in eksperimentalne rezultate za hitro zapiranje ventila, nameščenega dolvodno v cevi (slika 1). Pretočni pogoji za oba primera so enaki: a) statična višina v gorvodnem tlačnem rezervoarju  $H_{T,2} = 32$  m, b) čas zapiranja ventila  $t_c = 0,009$  s, c) hitrost zvoka  $a = 1319$  m/s in d) število cevni odsekov v numeričnem modelu  $N = 16$ . Rezultate primerjamo pri ventilu ( $H_v$ ) in na sredini cevovoda ( $H_{mp}$ ).

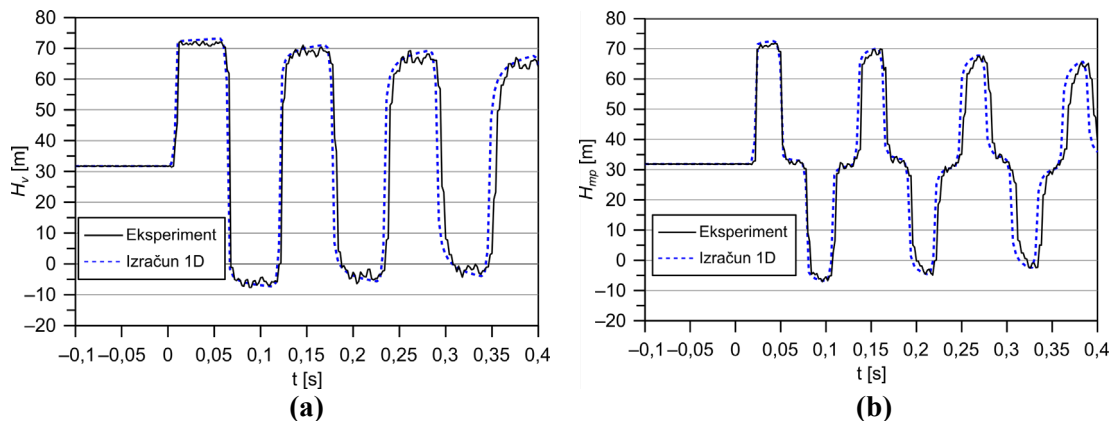
Preizkus s pretočno hitrostjo  $V_0 = 0,1$  m/s je primer laminarnega toka z Reynoldsovom številom  $Re = 1960$  (temperature vode  $T_w = 15,4$  °C). Rezultati so primerjani na sliki 2. Računski rezultati, dobljeni z modelom konvolucijskega modela nestalnega trenja se dobro ujemajo z rezultati meritev tako po dušenju, obliki in časovnem poteku tlačnih pulzov.





**Slika 2:** Tlačna višina pri 1D laminarnem toku; a) pozicija ventila, b) sredinska točka.

Preizkus s pretočno hitrostjo  $V_0 = 0,3$  m/s je primer turbulentnega toka z Reynoldsovim številom  $Re = 5880$  (temperature vode  $T_w = 15,5$  °C). Rezultati so primerjani na sliki 3. Vključitev uteži za pretekle spremembe hitrosti, razvite v konvolucijskem modelu za prehodni laminarni tok, doprinese k dodatni izgubi energije za prehodni turbulentni tok z nizkim Reynoldsovim številom ( $Re < 10^4$ ) [10]. Velikost odstopanj med izračunanimi in izmerjenimi rezultati za turbulentni tok z nizkim Reynoldsovim številom (slika 3) je podobna kot za laminarni tok (slika 2).



**Slika 3:** Tlačna višina pri 1D turbulentnem toku; a) pozicija ventila, b) sredinska točka.

## 4 3D numerični model

Vodni udar numerično obravnavamo kot časovno odvisen tok viskozne stisljive kapljevine pri izotermnih pogojih. V laminarnem režimu ga opišemo z ohranitvenima zakonoma za maso in gibalno količino. V primeru turbulentnega toka uporabimo model Reynoldsovo povprečenih neustaljenih Navier–Stokesovih enačb (URANS), tako da dodatno rešujemo še transportne enačbe turbulentnih veličin, kot so: turbulentna kinetična energija ( $k$ ), stopnja disipacije turbulentne kinetične energije ( $\epsilon$ ), specifična stopnja disipacije turbulence ( $\omega$ ) in intermitenca ( $\gamma$ ). Podrobnosti o numeričnem modeliranju turbulence so navedene npr. v [12].

### 4.1 Zapiranje ventila

Vodni udar sprožimo tako, da ustaljeni tok v cevi nenadoma prekinemo s hitrim zaprtjem ventila. V numerični simulaciji lahko to izvedemo kot trenutno zaprtje, kar pomeni, da ob času začetka zapiranja  $t_0$  spremenimo robni pogoj na izstopu v robni pogoj stene. Vendar to ne

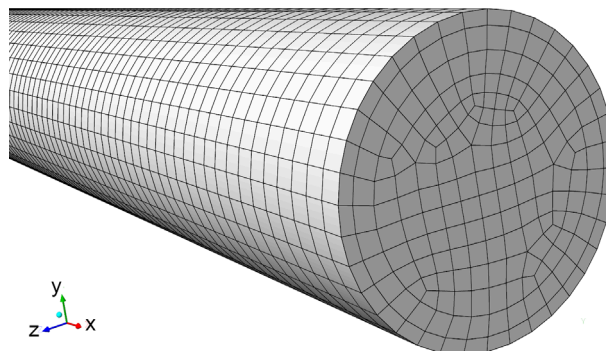
ustreza dejanskim razmeram in tako dobljene rezultate ne moremo primerjati z eksperimentom, kjer se pretok na ventilu zvezno zmanjša na nič v času zapiranja  $t_c$ . V našem primeru smo konstruirali funkcijo, s katero predpišemo časovno odvisnost pretoka na lokaciji ventila. Tako se hitrost zvezno spreminja od ustaljene povprečne vrednosti  $V_0$  do vrednosti nič:

$$v_x(t) = \begin{cases} V_0 & ; t < t_0 \\ V_0 \left(1 + \cos(\pi(t-t_0)/t_c)\right) / 2 & ; t_0 \leq t \leq t_0 + t_c \\ 0 & ; t > t_0 + t_c \end{cases} \quad (3)$$

pri čemer sta:  $t_0 = 0,2$  s in  $t_c = 0,009$  s. Drugi avtorji so za zapiranje ventila uporabili podoben pristop s potenčno funkcijo [7].

#### 4.2 Geometrijski model in parametri simulacije

Računsko območje predstavlja ravna okrogla cev dolžine  $L = 37,23$  m in notranjega premera  $D = 22,1$  mm. Domena je diskretizirana s heksaedrično mrežo z velikostjo celic  $\Delta_c \approx 2$  mm, slika 4. Število celic je  $N_c = 3\,788\,484$ . Martins in soavtorji v [6] kot optimalno računsko mrežo, za geometrijsko in hidrodinamično našemu podoben primer, predlagajo  $\approx 150$  tisoč celic za laminarni režim in  $\approx 270$  tisoč celic za turbulentni režim. Ker sta numerična modela primerljiva, analize odvisnosti rezultatov od mreže nismo izvedli.



Slika 4: 3D računsko mreža.

#### 4.3 Parametri simulacije

Izračuni so bili narejeni z naslednjimi podatki iz eksperimenta: temperatura vode  $T_w = 15,4$  °C, referenčni tlak  $p_0 = 313,92$  kPa, gostota vode pri referenčnem tlaku  $\rho_0 = 999,14$  kg/m<sup>3</sup> in hitrost zvoka  $a = 1319$  m/s. Dinamična viskoznost vode pri tej temperaturi je  $\mu = 1,12546 \times 10^{-3}$  Pa·s.

Zaradi visokega tlaka, ki se pojavi pri vodnem udaru, moramo vodo obravnavati kot stisljiv medij. Uporabljen je bil model stisljive kapljevine, ki vzpostavlja nelinearno razmerje med gostoto in tlakom v izotermnih pogojih. Izhaja iz poenostavljene Taitove enačbe stanja [9]

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n = \frac{1 + n(p - p_0)}{K_0} \quad (4)$$

kjer sta:  $K_0 = \rho_0 a^2 = 1,7383 \times 10^9$  Pa »bulk« modul pri referenčnem tlaku in  $n = 7,15$  eksponent gostote.

Za numerično reševanje smo uporabili »Pressure-based« tranzientni tip solverja z laminarnim oziroma turbulentnim modelom viskoznosti. Turbulentni režim toka smo obravnavali s tremi

modeli turbulence: a) Realizable  $k-\varepsilon$  model s standardnimi stenskim funkcijami, b) Shear-Stress Transport (SST)  $k-\omega$  model in c) Transition SST model.

Robni pogoji so bili naslednji: a) na vstopu pri  $x = 0$  je bil predpisan totalni tlak  $p_0$ , b) na izstopu pri  $x = L$  je bila uporabljena funkcija zapiranja ventila  $v_x(t)$  iz podpoglavja 4.1 in c) na stenah cevi je bila predpisana hitrost  $v = 0$ . Začetni pogoj za tlak je bil  $p = p_0$ . Začetne vrednosti hitrosti v laminarnem režimu so bile predpisane kot  $v = (2V_0[1-4r^2/D^2], 0)$ , v turbulentnem režimu pa z  $v = (V_0, 0)$ .

V solverju je bila izbrana metoda SIMPLE za sklopitev hitrost-tlak. Prostorska diskretizacija je bila: a) »least squares cell based« za gradient, b) »second order« za tlak in c) »second order upwind« za gostoto, hitrost in turbulentne veličine. Kot tranzientna shema je bila uporabljena »first order implicit« formulacija. Podrelaksacijski faktorji so bili: 0,3 za tlak, 1 za gostoto in turbulentno viskoznost, 0,7 za hitrost ter 0,8 za turbulentne veličine.

V modelu smo izbrali dve opazovani lokaciji, kjer smo v vsakem časovnem koraku shranili vrednost tlaka, in sicer v točki na sredini cevi pri  $x = 18,615$  m (indeks *mp* v grafih) ter na lokaciji ventila pri  $x = 37,21$  m (indeks *v* v grafih).

Numerična simulacija vodnega udara je potekala v treh korakih:

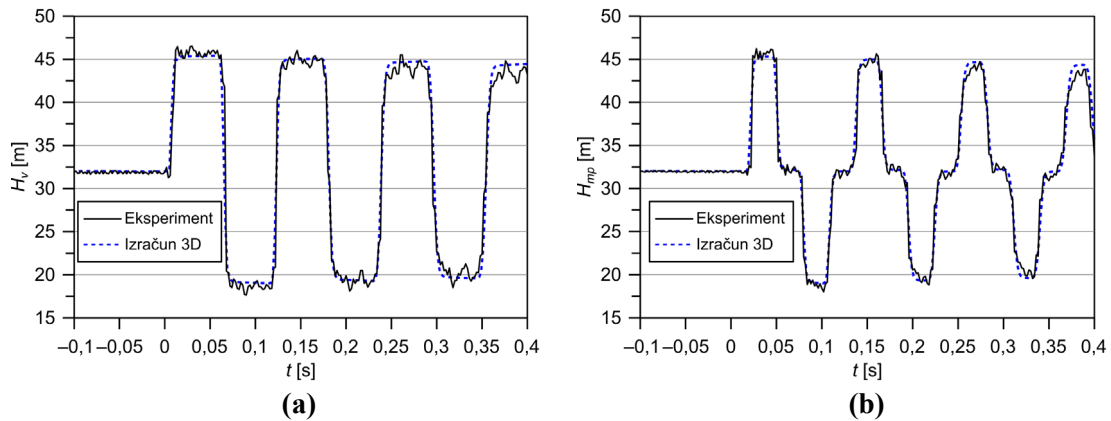
1. Najprej je bil narejen izračun za stacionarne razmere, da se je razvil ustaljen hitrostni profil v cevi.
2. Narejen je bil preklop na tranzientni izračun s časovnim korakom  $\Delta t = 10^{-3}$  s za trajanje  $t = 1$  s.
3. Sledila je ponastavitev časa na nič, vklop izpisa tlaka v opazovanih točkah in izračun do časa  $t = 0,196$  s, ko se je zmanjšal časovni korak na  $\Delta t = 10^{-5}$  s. Ob času  $t = t_0$  s se je začel zapirati ventil. Ob času  $t = t_0 + t_c$  je bila cev popolnoma zaprta.

Po zaprtju ventila je izračun trajal še 0,4 s, kar pomeni, da so bili v tem času zajeti trije polni nihaji tlaka med maksimalno in minimalno vrednostjo. Tok vode je bil v tem času štirikrat v pozitivni smeri in trikrat v negativni smeri. Tako majhen časovni korak je bil potreben, saj je porast tlaka pri vodnem udaru zelo hiter pojav.

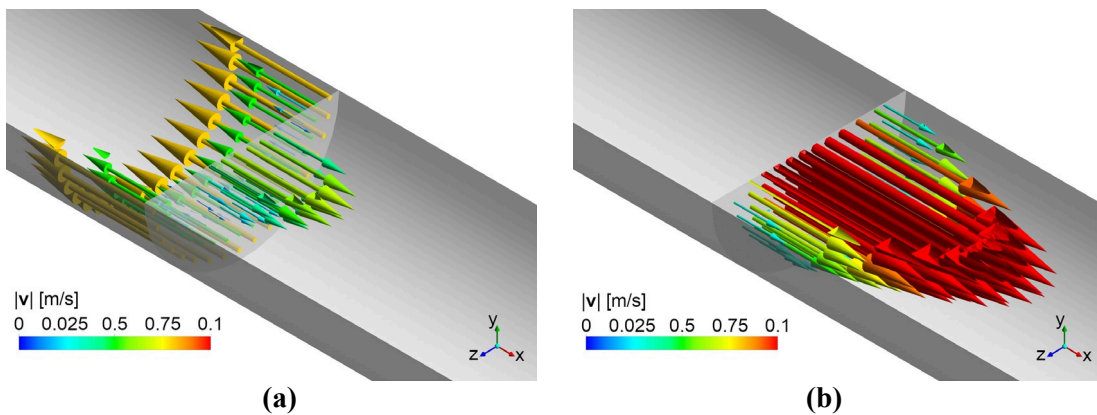
#### 4.4 Laminarni tok

Najprej smo izvedli numerično simuliracijo vodnega udara za primer laminarnega toka pri Reynoldsovem številu  $Re = 1960$ . Povprečna hitrost ustaljenega vodnega toka v cevi je bila  $V_0 = 0,1$  m/s. Paralelni izračun je trajal 5,67 dneva na 23 jedrih Supermicro delovne postaje s štirimi procesorji AMD Opteron® 8439 SE pri frekvenci 2,8 GHz. Naj omenimo, da izračun z 1D modelom traja le nekaj minut.

Slika 5 kaže časovni potek tlaka v opazovanih točkah. Vidimo zelo dobro ujemanje med eksperimentom in numeričnim izračunom. Ob času  $t = 0$  pride do zaprtja ventila. Ker je voda stisljiva, se zaradi vztrajnosti zgosti ob zapori in tlak skokovito naraste. Ta visoki tlak, ki je veliko večji kot tlak v rezervoarju, povzroči, da se smer vodnega toka obrne. Najprej začne teči nazaj ob steni, slika 6a, kmalu zatem se vzpostavi povratni tok po celotnem preseku cevi. Ko tlačni val prispe do začetka cevi, se odbije in smer toka se ponovno obrne, slika 6b. Ta proces se periodično ponavlja s frekvenco 8,7 Hz, le amplituda tlačnega skoka se zmanjšuje in po določenem času izzveni. Čas zadušitve nihanja tlaka je odvisen od dolžine cevi, pri krajši cevi je umirjanje hitrejše.



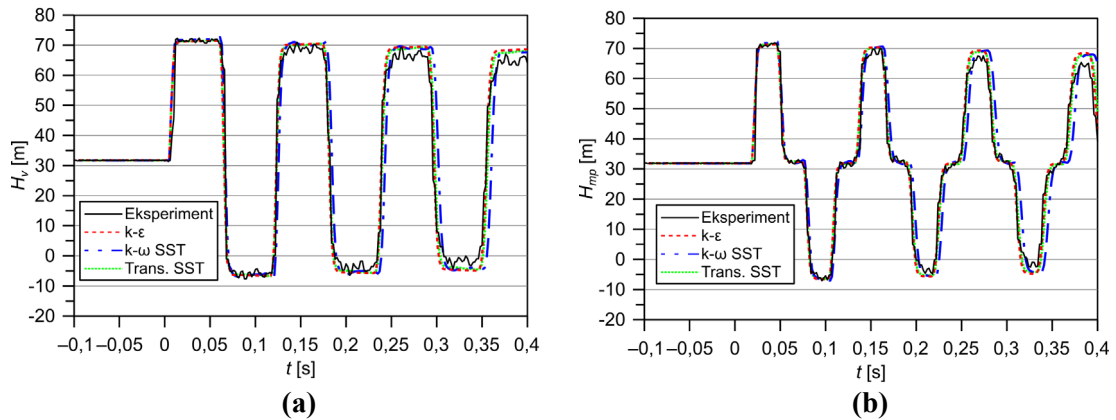
Slika 5: Tlačna višina pri 3D laminarnem toku; a) pozicija ventila, b) sredinska točka.



Slika 6: Hitrost v ravni  $y$ - $z$  skozi sredinsko točko; a)  $t = 0,104$  s, b)  $t = 0,16$  s.

#### 4.5 Turbulentni tok

Izvedli smo še numerično simulacijo vodnega udara za primer turbulentnega toka pri  $Re = 5880$ . Povprečna hitrost ustaljenega vodnega toka v cevi je bila  $V_0 = 0,3$  m/s. Za naše izračune smo izbrali tri najbolj pogosto uporabljane RANS modele: dvoenačbena  $k-\epsilon$  in  $k-\omega$  modela, ter štirienačbeni Transition SST model. Paralelni izračuni na isti delovni postaji kot pri laminarnem toku so trajali: 6,86 dneva za  $k-\epsilon$  model, 3,71 dneva za  $k-\omega$  model in 5,53 dneva za Transition SST model.



Slika 7: Tlačna višina pri 3D turbulentnem toku; a) pozicija ventila, b) sredinska točka.

Slika 7 kaže časovni potek tlaka v opazovanih točkah za vse tri modele turbulence. Tudi v tem primeru je ujemanje med eksperimentom in numeričnimi izračuni dobro. Za odtenek boljše kot dvoenačbena modela se eksperimentu približa Transition SST model. V prvi periodi se izračunani tlak zelo malo razlikuje od izmerjenega, v naslednjih periodah pa počasi prihaja do razhajanja. Amplituda tlačnega skoka se ne zmanjšuje tako hitro kot pri eksperimentu, pa tudi frekvenca nihanja tlaka se manjša glede na izmerjene vrednosti. Sklepamo, da do razhajanja pride, ker je  $Re$  število nizko. To pomeni, da se tokovni režim nahaja na področju prehoda iz laminarnega v turbulentni tok in tako ni na voljo turbulentnega modela, ki bi imel izrazito prednost.

#### 4.6 Skok tlaka

Zaradi nenadnega padca pretoka vode v cevi na nič, na ventilu skoraj v trenutku naraste tlak do maksimalne vrednosti. Razlika med najvišjim tlakom in referenčnim tlakom predstavlja skok tlaka  $\Delta p = p_{max} - p_0$ . Tabela 1 kaže primerjavo izračunanih vrednosti porasta tlaka z eksperimentom za oba tokovna režima. Prikazani sta tudi vrednosti Joukowskega [5], ki sta izračunani po enačbi  $\Delta p = \rho_0 a V_0$ .

**Tabela 1:** Skok tlaka v kPa.

	Izračun	Eksperiment	Joukowsky
Laminar	132,8	132,2±1,1	131,9
$k-\varepsilon$	387,4		
$k-\omega$ SST	398,8	395,7±0,5	395,4
Transient SST	388,7		

Vidimo, da je v primeru turbulentnega toka najbližje izmerjeni vrednosti rezultat, dobljen s  $k-\omega$  SST turbulentnim modelom, ki je za 0,8 % previsok. Nekoliko bolj odstopata modela  $k-\varepsilon$  z 2,1 % in Transition SST z 1,8 % prenizkim skokom tlaka. Pri laminarnem toku je razlika med izračunanim in izmerjenim porastom tlaka 0,5 %.

## 5 Zaključki

V 1D modelu smo z vpeljavo konvolucijskega modela neustaljenega stenskega trenja pravilno napovedali dodatno dušenje tlačnih valov med vodnim udarom. Konvolucijski model zajema večrazsežno obliko profila pretočne hitrosti, ki je v 1D modelu nominalno enakomeren profil po prerezu. Da predstavlja računalniška dinamika tekočin (RTD) zelo učinkovito in natančno orodje za analizo tokovnih in tlačnih razmer pri realnih inženirskih problemih je potrdila prikazana 3D numerična simulacija vodnega udara. Uporabljeni numerični model je možno še razširiti z dvosmerno interakcijo med tekočino in trdnino (ITT). Visoke tlačne obremenitve vodnega toka na steni cevi povzročijo velike napetosti in s tem elastično deformacijo cevi, zaradi katere pride do povratne spremembe toka. Tako dobimo na voljo orodje, ki omogoča natančen vpogled v 3D tokovne razmere. Rezultati izračuna po 1D in 3D numeričnih modelih se dobro ujemajo z meritvami ob pravilni napovedi in modeliranju vplivnih fizikalnih količin med prehodnimi pojavi v cevni sistemih (vodni udar). 1D model je računsko bolj učinkovit v primerjavi s 3D modelom.

**Zahvala:** Avtorji se zahvaljujemo podpori Javne agencije za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije (ARRS) v okviru projekta L2–1825 Modeliranje zračnih mehurjev ujetih v hidravličnih cevni sistemih in programa P2–0162 Tranzientni dvofazni tokovi.

## Literatura

- [1] ANSYS®. Academic Research CFD, Release 18.2.
- [2] A. Bergant, A. R. Simpson. *Water hammer and column separation measurements in an experimental apparatus*. Research Report No. R128. Department of Civil and Environmental Engineering, University of Adelaide, 1995.
- [3] A. Bergant, A. R. Simpson, J. Vítkovský. Developments in unsteady pipe flow friction modelling. *Journal of Hydraulic Research*, 39(3): 249–257, 2001.
- [4] Y. Cao, L. Zhou, C. Qu, H. Fang, D. Liu. 3D CFD simulation and analysis of transient flow in a water pipeline. *AQUA — Water Infrastructure, Ecosystems and Society*, 71(6): 751–767, 2022.
- [5] N. E. Joukowsky. *Über den hydraulischen Stoss in Wasserleitungsröhren*. Memoirs of the Imperial Academy Society of St. Petersburg, 9(5), 1898.
- [6] N. M. C. Martins, N. J. G. Carriço, H. M. Ramos, D. I. C. Covas. Velocity-distribution in pressurized pipe flow using CFD: Accuracy and mesh analysis. *Computers and Fluids*, 105: 218–230, 2014.
- [7] N. M. C. Martins, E. M. Wahba. On the hierarchy of models for pipe transients: From quasi-two-dimensional water hammer models to full three-dimensional computational fluid dynamics models. *Journal of Pressure Vessel Technology*. 144(2): 021402, 2022.
- [8] S. Saemi, M. Raisee, M. J. Cervantes, A. Nourbakhsh. Computation of two- and three-dimensional water hammer flows. *Journal of Hydraulic Research*. 57(3): 386–404, 2019.
- [9] P. G. Tait. Report on some of the physical properties of fresh water and of sea water. *Physics and Chemistry of the Voyage of H.M.S. Challenger*. Vol. II, part IV, 1888.
- [10] A. K. Trikha. An efficient method for simulating frequency-dependent friction in transient liquid flow. *Journal of Fluids Engineering*. 97(1): 97–105, 1975.
- [11] K. Urbanowicz. Fast and accurate modelling of frictional transient pipe flow. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 98(5): 802–823, 2018.
- [12] D. C. Wilcox. *Turbulence modeling for CFD*. DCW Industries, 2010.
- [13] E. B. Wylie, V. L. Streeter. *Fluid transients in systems*. Prentice Hall, 1993.
- [14] W. Zielke. Frequency-dependent friction in transient pipe flow. *Journal of Basic Engineering*. 90(1): 109–115, 1968.



## ***Vpliv različnih aditivov na reologijo talin LDPE/PP mešanic***

***Stefan Serafimoski<sup>1</sup>, Mohor Mihelčič<sup>1</sup>, Mahrukh Sadaf<sup>1</sup>, Lidija Slemenik Perše<sup>1</sup>***

### ***The influence of multiple additives on the rheology of LDPE/PP blends***

**Povzetek.** Glavni cilj raziskave, predstavljene v tem članku, je oceniti vpliv dveh različnih dodatkov za termoplastične smole, stabilizatorja in nukleatorja, na reološko vedenje polimernih talin, ki temeljijo na mešanicah LDPE/PP. Ugotovljeno je bilo, da eden od aditivov, Recyclobyk 4371, znatno poveča vrednost strižnega modula in strižne viskoznosti polimernih mešanic, poleg tega pa se te lastnosti povečajo tudi z naraščanjem koncentracije PP, saj je sam aditiv bolj aktiven pri višjih vsebnostih PP. Po drugi strani pa je bilo ugotovljeno, da dodatek BYK-MAX NU 4232 nima bistvenega vpliva na reološke lastnosti polimernih mešanic.

**Abstract.** The main goal of the present research is to evaluate the effects of two different additives for thermoplastic resins, a stabilizer and a nucleator, on the rheological behavior of the polymer melts, which are based on LDPE/PP blends. It was discovered that one of the additives, Recyclobyk 4371, significantly elevates the value of the shear moduli, as well as the shear viscosity of the systems; moreover, those characteristics are elevated with the increase of PP, as the effect of the additive is more pronounced at higher contents of PP. The other additive, BYK-MAX NU 4232, did not affect the rheological properties of the polymer blends.

## **1 Uvod**

Polimerni materiali so eni izmed najbolj uporabnih materialov za hitro izdelavo izdelkov, delov s specifično geometrijo ali delov za medicinsko tehnologijo. Izdelujemo jih lahko na različne načine [9], vendar se v industriji najpogosteje uporabljata ekstrudiranje talin, pri katerem se izdelujejo izdelki dolgih oblik [10], in injekcijsko brizganje, pri katerem se lahko s talino polimera in kalupom, primernim za določeno obliko, izdelujejo izdelki praktično vseh oblik in velikosti [14]. Poleg tega je injekcijsko brizganje najpogosteje uporabljen industrijski postopek za proizvodnjo plastičnih delov in celo za izdelavo prototipov novih izdelkov zaradi relativne hitrosti postopka in enostavnega prilagajanja [4,5], saj je izdelava kalupa preprosta. Uporabno podpodročje postopkov brizganja predstavljajo postopki mikro injekcijskega brizganja (ang. *MIM – micro injection molding*) [9], pri katerih se za oblikovanje izdelka z zelo majhnim odtisom uporabljajo manjše količine taline polimerov in bistveno nižji tlaki, ki

---

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

se uporabljajo za izdelavo manjših delov v avtomobilski in elektronski industriji ter za laboratorijske raziskave.

Podobno kot čiste polimere in polimerne kompozite, je mogoče tudi mešanice dveh ali več polimerov obdelati z brizganjem. Prednosti so naslednje: ustvarjanje materialov z naprednimi lastnostmi, prihranki pri stroških, oblikovanje materialov s prilagojenimi lastnostmi in dejstvo, da je mešanje polimerov rešitev za recikliranje [2,8,12]. Z mešanjem dveh ali več polimerov lahko nastane material z izboljšanimi lastnostmi v primerjavi s posameznimi polimeri. Z mešanjem togega in krhkega polimera z duktilnim in žilavim polimerom lahko na primer dobimo material z izboljšano odpornostjo proti udarcem [6]. Poleg tega je lahko mešanje polimerov cenovno učinkovit način za ustvarjanje materialov s posebnimi lastnostmi, saj je mešanje dveh poceni polimerov lahko cenejše kot uporaba dražjega polimera s podobnimi lastnostmi. Še več, mešanje polimerov omogoča ustvarjanje materialov s prilagojenimi lastnostmi, ki ustrezajo posebnim zahtevam uporabe. Z izbiro ustreznih polimerov in razmerij mešanice lahko lastnosti materiala prilagodimo tako, da izpolnjuje zelena merila učinkovitosti [1]. Nazadnje, mešanje polimerov je lahko uporabna tehnika za recikliranje plastike z mešanjem različnih vrst že uporabljene plastike za ustvarjanje novega materiala z zelenimi lastnostmi [10].

Mešanje različnih polimerov pa lahko privede tudi do težav, na primer z združljivostjo polimerov in težav pri obdelavi. Nezdružljivi polimeri lahko povzročijo fazno ločevanje ali slabo medfazno adhezijo, kar ima za posledico slabše lastnosti končne mešanice [1]. Poleg tega je pomembno, da imajo polimeri združljive pogoje predelave, saj lahko mešanje polimerov povzroči težave pri predelavi zaradi razlik v viskoznosti in temperaturah predelave posameznih polimerov, kar lahko vodi v slabo mešanje in slabše lastnosti končne mešanice [2].

V literaturi je na temo polimernih mešanic mešanica polietilena nizke gostote (LDPE) in polipropilena (PP) navedena kot eden največjih primerov polimernih mešanic, ki se ne mešajo v celoti [3,11]. Dejansko je mešanje z mešanicami LDPE/PP v skladu z literaturo mogoče doseči le, če je v mešanici eden od polimerov v prebitku (več kot 90 % LDPE ali več kot 90 % PP) [11]. Ista raziskava je predstavila tudi, da struktura mešanic, v katerih je vsebnost PP in LDPE med 20 % in 80 %, kaže jasno fazno ločitev, ki je razen nekaj nišnih uporab, kot so prevodni polimeri z ločeno strukturo, kjer se polnilo nahaja v medfaznem območju polimerne matrice, sicer neprimerna za obdelavo materiala (temperatura taline, viskoznost taline) in za končne mehanske lastnosti materiala [3].

Da bi preprečili omenjene težave, je potrebno mešanicam v fazi predelave dodajati razne aditive, ki spodbujajo interakcije med sestavinami mešanice (kompatibilizatorji), stabilizirajo polimerni sistem tako, da vežejo verige (stabilizatorji), ali spodbujajo nukleacijo in kristalizacijo, kar vodi do boljše temperaturne obdelave (nukleatorji) [3].

Glavni poudarek tega prispevka je na učinku dveh dodatkov - stabilizatorja in nukleatorja - na reološke lastnosti materialov na osnovi talin LDPE/PP, izdelanih z mikro injekcijskim brizganjem.



## 2 Materiali in metode dela

### 2.1 Materiali

Po specifikaciji proizvajalca je gostota polietilena z nizko gostoto (LDPE) (780E NATURAL, od Dow Chemical Company, Midland, Minesota, ZDA) znašala  $\rho_{LDPE} = 0,923 \text{ g/cm}^3$ , srednji indeks taline (MFR) pa 20 g/10 min pri 190 °C, 2,16 kg. Gostota homopolimera propilena (PP) (PP H 605, Braskem Europe GmbH, Werk Schkopau, Nemčija) je znašala  $\rho_{PP} = 0,905 \text{ g/cm}^3$ , njegova srednja tokovna hitrost (MFR) pa 2,1 g/10 min pri 230 °C, 2,16 kg.

V raziskavi sta bila uporabljena komercialno dostopna aditiva, oba iz podjetja BYK-Chemie GmbH, Wesel, Nemčija. Recyclobyk 4371 je po podatkih proizvajalca mešanica različnih antioksidantov in ko-stabilizatorjev in se običajno uporablja kot stabilizator poliolefinских mešanic in reciklatov različnih izdelkov z namenom izboljšanja mehanskih lastnosti mešanice in tokovnih lastnosti talin. Pri imenovanju vzorcev smo pri dodatku tega aditiva uporabljali okrajšavo 1% REC.

Drugi uporabljeni aditiv je bil BYK-MAX NU 4232, ki se uporablja kot nukleator z visoko stopnjo dizperzije in sposobnostjo vzpostavitve ravnotežja med optimalnimi produkcijskimi hitrostmi in izboljšanimi mehanskimi lastnostmi. Pogosto se uporablja pri injekcijskem brizganju z namenom zmanjšati potencialne napake, ki nastanejo pri hlajenju taline v kalupu. Pri imenovanju vzorcev, pri katerih je bil dodan ta aditiv, smo uporabljali okrajšavo 1% NU. Oba aditiva sta dodana mešanici po sušenju polimerov v koncentraciji 1 ut. %.

### 2.2 Izdelava vzorcev

Pred izdelavo vzorcev smo LDPE in PP 24 ur sušili pri 60 °C v dušikovi atmosferi. Izdelava vzorcev je potekala po dveh stopnjah: (i) mešanje talin in (ii) in mikro injekcijsko brizganje. Talini polimerov smo v dvopolžnem mikromešalniku (MC 15-HT, Xplore Instruments, Nizozemska) mešali 5 minut s hitrostjo vrtenja polžev 100 obr./min pri temperaturi 210 °C. Mikroinjekcijsko brizganje je bilo izvedeno z mikro-injekcijskim brizgalnikom (IM 12, Xplore Instruments, Nizozemska) pri temperaturi taline 210 °C, temperaturi kalupa 50 °C, tlaku brizganja 7 MPa, 10 s in zadrževalni tlak 10 MPa, 10 s. Na ta način so bili pripravljene standardni diski za reološke teste s premerom 252 mm in debelino 1,5 mm.

### 2.3 Karakterizacija materialov

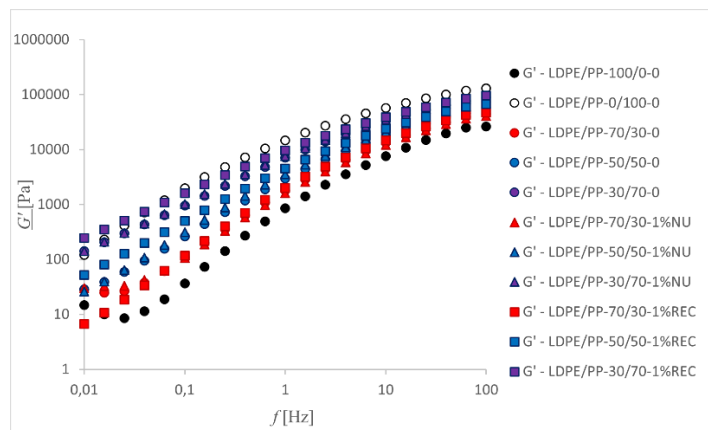
#### 2.3.1 Reološke meritve

Reološke lastnosti talin so bile določene s pomočjo rotacijskega reometra (MCR302, Anton Paar GmbH, Gradec, Avstrija). Vse meritve so bile opravljene s pomočjo senzorskega sistema dveh vzporednih plošč premera 25 mm in medploščnim razmakom 1 mm (PP25/1mm) v dušikovi atmosferi pri temperaturi 200 °C. Za vsako polimerno mešanico smo izvedli tri različne reološke teste – amplitudni test, frekvenčni test in tokovni test. Amplitudni test, s katerim smo določili območje linearnega viskoelastičnega odziva (LVO), se je izvajal pri konstantni frekvenci 1 Hz in pri spreminjajoči strižni deformaciji med 0,01 in 100%. Frekvenčni test smo izvedli pri konstantni deformaciji 2% (znotraj območja LVO), in frekvenci oscilacije med 100 in 0,01 Hz. Tokovni test se je izvajal pri nastavljeni strižni napetosti (4 do 4000 Pa). Kot rezultat smo dobili odvisnost dinamične viskoznosti od strižne

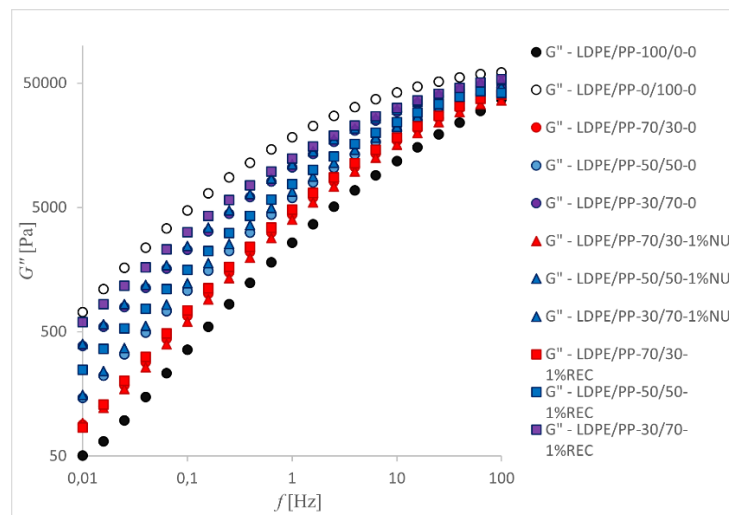
napetosti – tokovni profil materiala. Vsi testi so bili ponovljeni trikrat, torej smo za vsak material uporabili po tri vzorce.

### 3 Rezultati in diskusija

Rezultati amplitudnih testov so pokazali, da so vse mešanice izkazovale linearen viskoelastičen odziv v območju amplitud do 10 % deformacije. Posledično so bili frekvenčni testi pri vseh vzorcih opravljeni pri amplitudi 2 % deformacije, ki je zagotavljala odziv vseh vzorcev v linearnem viskoelastičnem območju.



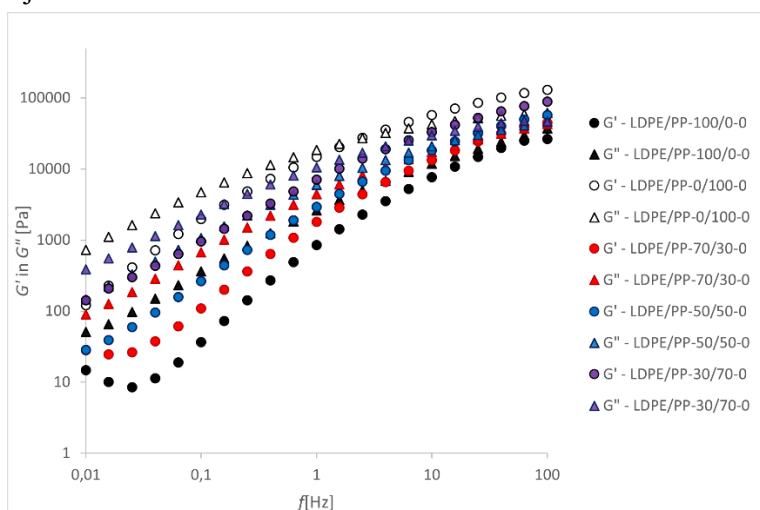
Slika 1: Odvisnost strižnega elastičnega modula ( $G'$ ) od frekvence ( $f$ ) v LVO.



Slika 2: Odvisnost strižnega viskozne modula ( $G''$ ) od frekvence ( $f$ ) v LVO.

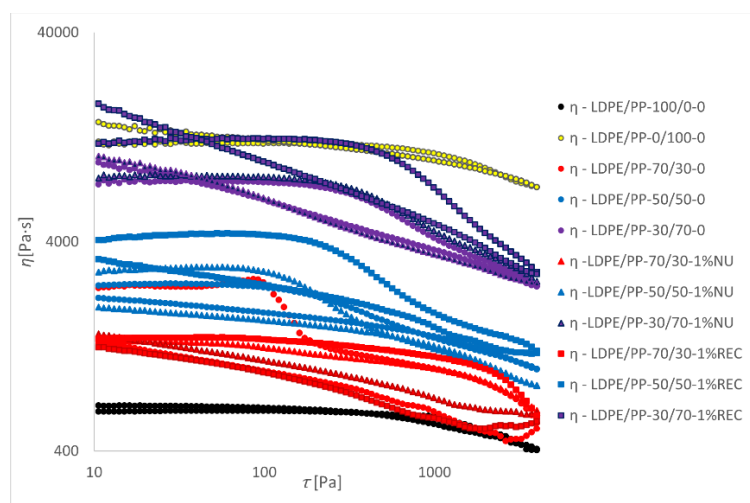
Viskoelastični spektri frekvenčnih testov za vse pripravljene vzorce so prikazani na slikah 1 in 2. Na sliki 1 je razvidno, da je bil pri enaki temperaturi elastični modul čistega LDPE skoraj eno dekadno nižji od elastičnega modula čistega PP, kar pomeni, da čisti PP izkazuje manj toga

strukturo kot čisti LDPE[13]. Elastični moduli ostalih mešanic, brez uporabe aditiva, se, pričakovano, nahajajo med moduli čistih polimerov, kar v literaturi pripisujejo nezdržljivosti mešanic oziroma elastičnosti medfaznih površin v domenah polimerov v mešanicah [7]. Isti vir zaključi, da se pri zvišanju koncentracije PP v sistemu pojavi t.i. koleno v sredini frekvenčnega območja, ki razdeli vplive elastičnosti v dva dela – vpliv medfazne površine, ki opredeljuje elastičnost taline pri nižjih frekvencah in vpliv materiala na makro nivoju, ki določa elastičnost pri višjih frekvencah. To koleno je razvidno tudi v viskoelastičnih spektrih vzorcev, ki so del te raziskave. Še več, na sliki 3, kjer sta prikazana viskozni in elastični modul za čista polimera in za mešanice brez aditivov, je razvidno, da pri čistem LDPE ni opazne točke prehoda ( $G' = G''$ ) v proučevanem frekvenčnem območju, medtem ko je pri čistem PP ta prehod jasno razviden pri frekvenci  $\sim 2$  Hz. Iz rezultatov je razvidno tudi, da se točka prehoda nahaja pri nižjih frekvencah, ko se koncentracija PP viša, kar pomeni, da je za prehod med viskoznim ( $G'' > G'$ ) in elastičnim ( $G' > G''$ ) vedenjem materiala potrebno več časa, ko mešanica vsebuje več PP.



**Slika 3:** Odvisnost strižnega elastičnega modula ( $G'$ ) in strižnega viskoznega modula ( $G''$ ) od frekvence ( $f$ ) za vzorce čistih polimerov in mešanic brez aditivov

Na slikah 1 in 2 lahko določimo tudi vpliv dodatka različnih aditivov. Viskoelastični spektri mešanic z aditivom BYK-MAX NU 4232 se skoraj ne razlikujejo od spektrov mešanic brez aditivov, kar pomeni, da ta aditiv nima večjih vplivov na viskoelastične lastnosti talin mešanic v območju linearnega viskoelastičnega odziva. Po drugi strani pa je vpliv aditiva Recyclobyk 4371 na viskoelastične lastnosti večji, saj se, v primerjavi z mešanicami brez aditivov, spektri mešanic z dodanim aditivom razlikujejo, še posebej pri mešanicah s 50 vol. % PP in 70 vol. % PP, ki izkazujejo višji elastični in viskozni modul. To lahko pripišemo delovanju aditiva na linearne polipropilenske verige matrike, ki jih ta dodatek poveže, pri čemer deluje kot "most" in strukturno spoji posamezne verige. Mešanica s 70 vol. % PP izkazuje višje vrednosti  $G'$  in  $G''$  kot čisti PP. To pomeni, da je možno, da aditiv vpliva tudi na združitve posameznih komponent mešanice ter da se LDPE delno združuje v PP matriki na podoben način kot mešanica z 90 vol. % PP brez aditivov [11].



**Slika 4:** Odvisnost dinamične viskoznosti ( $\eta$ ) od strižne napetosti ( $\tau$ ).

Na sliki 4 so prikazane tokovne lastnosti proučevanih vzorcev, ki so bile določene s pomočjo strižnega tokovnega testa v območju strižnih napetostih, med 4 in 4000 Pa. Podobno kot pri nedestruktivnih oscilacijskih testih, so tudi rezultati tokovnih testov pokazali, da je najvišjo konsistenco izkazoval čisti PP, pri čemer so viskoznosti mešanic brez aditivov z naraščajočim deležem PP naraščale v celotnem proučevanem območju strižnih napetostih. Oblika tokovnega profila kaže, da z naraščajočo strižno napetostjo viskoznost pada pri vseh vzorcih, medtem ko lahko pri nižjih strižnih napetostih določimo ničelno viskoznost oziroma viskoznost v 1. Newtonskem platoju. Zaključimo lahko, da so vsi vzorci izkazovali strižno upadanje viskoznosti, kar je značilno tudi za ostale polimerne taline termoplastov v literaturi [7]. Poleg tega lahko tudi iz tokovnih testov zaključimo, da aditiv BYK-MAX NU 4232 nima večjega vpliva na viskoznosti talin mešanic, medtem ko ima aditiv Recyclobyk 4371 večji vpliv na viskoznost mešanic, predvsem pri mešanicah s 50 in 70 vol. % PP, pri čemer vrednosti viskoznosti pri nižjih strižnih napetostih presegajo vrednosti čistega PP. To potrjuje dejstvo, da ta aditiv močno veže linearne verige PP in da se te verige ne pretrgajo popolnoma pod pogojem visokega striga. Na molekularni ravni, močnejše vezi med verigami nakazujejo na nastanek dodatne kemijske povezave med verigami, ki so močnejše in bolj obstojne pri delovanju zunanjih sil.

#### 4 Zaključek

Cilj te raziskave je bil raziskati vpliv dodajanja dveh komercialno dostopnih aditivov na reološke lastnosti polimernih mešanic na osnovi LDPE/PP polimerov. Vpliv je bil ocenjen preko spremljanja reološkega vedenja talin materialov z naraščajočim volumskim deležem PP. V tej raziskavi smo ugotovili, da PP izkazuje višjo dinamično viskoznost kot LDPE ter višja strižna frekvenčna modula. Dodatno smo ugotovili, da vrednost vseh reoloških lastnosti

narašča kot posledica dodajanja naraščajoče količine PP v polimerni mešanici. Dodatek aditivov spreminja reološko vedenje materiala na naslednji način: dodajanja aditiva Recyclobyk 4731 dodatno poveča vrednost elastičnega modula, viskoznega modula in dinamične viskoznosti v mešanicah, ki vsebujejo 50 vol. % ali več PP. Sklepamo lahko, da aditiv deluje tako, da ustvari vezi med posamičnimi polimernimi verigami, ki so v PP linearne narave in na ta način zadrži verige, ki se tako upirajo strigu. Narava vezi še ni dokončno znana, se pa lahko predpostavlja na podlagi reološkega vedenja. Za natančno opredelitev bi bilo potrebno raziskati naravo vezi s pomočjo spektroskopskih tehnik. Dodatno so rezultati raziskave pokazali, da aditiv izboljša združitev polimerov v mešanici z večjo vsebnostjo PP, saj vrednosti viskoznosti, elastičnega in viskoznega modula presegajo vrednosti čistega PP. Za aditiv BYK-MAX NU 4232 smo ugotovili, da nima večjega vpliva na reološko vedenje proučevanih polimernih talin.

V prihodnje bi bilo smiselno raziskavo razširiti, da bi določili še vpliv mešalnega razmerja polimernih mešanic ter vpliv uporabljenih aditivov na njihovo mehansko in termično vedenje.

## **Literatura**

- [1] A. Alhamidi, A. Anis, S.M. Al-Zahrani, Z. Bashir, M.M. Alrashed, Conductive Plastics from Al Platelets in a PBT-PET Polyester Blend Having Co-Continuous Morphology, *Polymers*. 14 (2022).
- [2] L.R. Bocayuva, A.S. Gomes, C.M.F. Oliveira, M.C.V. Amorim, Rheological properties of blends of polycarbonate with poly(ethylene oxide), 2000.
- [3] E. Carmeli, S.E. Fenni, M.R. Caputo, A.J. Müller, D. Tranchida, D. Cavallo, Surface Nucleation of Dispersed Polyethylene Droplets in Immiscible Blends Revealed by Polypropylene Matrix Self-Nucleation, *Macromolecules*. 54 (2021) 9100–9112.
- [4] A.M. Gohn, D. Brown, G. Mendis, S. Forster, N. Rudd, M. Giles, Mold inserts for injection molding prototype applications fabricated via material extrusion additive manufacturing, *Additive Manufacturing*. 51 (2022).
- [5] S. Krizsma, N.K. Kovács, J.G. Kovács, A. Suplicz, In-situ monitoring of deformation in rapid prototyped injection molds, *Additive Manufacturing*. 42 (2021).
- [6] M. Król, J.C. Viana, L.A. Dobrzański, M. Król, M. Bilewicz, J.C. Viana, Microstructure and mechanical properties of Polypropylene/Polycarbonate blends Microstructure and mechanical properties of Polypropylene/ Polycarbonate blends, 2008.
- [7] H. Liao, R. Liao, S. Li, C. Liu, G. Tao, Rheology of a polypropylene/low-density polyethylene blending melt: Fitting dynamic rheological data by Palierne model and Lee and Park model, *Polym. Bull.* 79 (2022) 4957–4970.
- [8] N.K. Madi, Thermal and mechanical properties of injection molded recycled high density polyethylene blends with virgin isotactic polypropylene, *Materials and Design*. 46 (2013) 435–441.
- [9] D. Masato, M. Sorgato, G. Lucchetta, A new approach to the evaluation of ejection friction in micro injection molding, *Journal of Manufacturing Processes*. 62 (2021) 28–36.
- [10] S. Micalizzi, A. Díaz Lantada, C. De Maria, Shape-memory actuators manufactured by dual extrusion multimaterial 3d printing of conductive and non-conductive filaments, *Smart Materials and Structures*. 28 (2019).

- [11] T.G. Mofokeng, V. Ojijo, S.S. Ray, The Influence of Blend Ratio on the Morphology, Mechanical, Thermal, and Rheological Properties of PP/LDPE Blends, *Macromol. Mater. Eng.* 301 (2016) 1191–1201.
- [12] G. Nasti, G. Gentile, P. Cerruti, C. Carfagna, V. Ambrogi, Double percolation of multiwalled carbon nanotubes in polystyrene/polylactic acid blends, *Polymer*. 99 (2016) 193–203.
- [13] D. Tang, F.H. Marchesini, L. Cardon, D.R. D'hooge, Evaluating the exit pressure method for measurements of normal stress difference at high shear rates, *Journal of Rheology*. 64 (2020) 739–750.
- [14] K. Wilczyński, K.J. Wilczyński, K. Buziak, Modeling and Experimental Studies on Polymer Melting and Flow in Injection Molding, *Polymers*. 14 (2022).



SLOVENSKO DRUŠTVO ZA MEHANIKO  
SREČANJE KUHLJEVI DNEVI 2023

## *High-Speed Camera Based Experimental Modal Analysis Based on Pixel Intensities*

Ivan Tomac<sup>1,2</sup>, Domen Gorjup<sup>1</sup>, Janko Slavič<sup>1</sup>

### *Eksperimentalna modalna analiza s hitro kamero na podlagi intenzitete slikovnih točk*

**Abstract.** Modal identification with high-speed cameras is a challenging task. The displacements measured in this way are in the range of one hundredth or even one thousandth of a pixel. Such displacements are at the level of the camera-sensor noise and are also affected by the low dynamic range of the sensor AD converter. Nowadays, a typical approach is to first obtain full-field displacements from the high-speed video recording using the digital image correlation (DIC) method, which is computationally intensive. Then in the next step perform modal identification based on the identified displacements. Optical flow is a method based on the change in intensity in each pixel due to the change in reflection from a moving surface. To detect displacement, knowledge of the spatial gradient is required. If the movement is in the sub-pixel range, a linear relationship can be assumed between the change in pixel intensity and the displacement. This opens the possibility to perform the modal identification directly based on the pixel intensities. Since pixel intensities are usually highly noisy, a method is needed that can identify modal parameters from such signals. A recently introduced method based on the Morlet-wave integral is used here to identify modal parameters. The method has good time-frequency separation which enables identification from just a fraction of the signal in time-frequency domain. Such an approach opens up possibility to transform the pixel intensities directly into the modal domain, where further processing can be done with a much smaller amount of data. The presented method was successfully applied to the experimental test case, where a pixel-based, full-field modal analysis was performed. The influence of averaging the results from several pixels in the modal domain is investigated.

---

<sup>1</sup> University of Ljubljana, Faculty of mechanical engineering

<sup>2</sup> University of Split, Faculty of electrical engineering, mechanical engineering and naval architecture

**Povzetek.** Modalna identifikacija s hitrimi kamerami je zahtevna naloga. Tako izmerjeni pomiki se gibljejo v območju stotinke ali celo tisočinke slikovne točke (piksla). Takšni premiki so na ravni šuma slikovnega zaznavala in nanje vpliva tudi nizek dinamični razpon analogno-digitalnega pretvornika. Dandanes je tipičen pristop, da najprej pridobimo pomike polnega polja iz video posnetka hitre kamere z uporabo metode korelacije digitalnih slik (DIC) in nato izvedemo modalno identifikacijo na podlagi ugotovljenih pomikov. Ta postopek je računsko intenziven, saj izvede splošno identifikacijo pomikov z zmanjšanjem razlike med dvema zaporednima interesnima področjema slike (ROI) v časovni domeni. Optični tok je metoda, ki temelji na spremembi intenzitete v vsaki slikovni piki zaradi spremembe odboja od premikajoče se površine. Za zaznavanje premika je potrebno poznavanje prostorskega gradienta. Če je amplituda pomikov nižja od enega piksla, se lahko domneva linearna povezava med spremembo intenzivnosti slikovnih točk in premikom. To odpira možnost izvedbe modalne identifikacije neposredno na podlagi intenzivnosti slikovnih točk. Ker so intenzivnosti slikovnih točk običajno zelo šumne, je potrebna metoda, ki lahko identificira modalne parametre iz takih signalov. Za identifikacijo modalnih parametrov se v tem prispevku uporablja nedavno uvedena metoda, ki temelji na integralu Morletovega valčka. Metoda ima dobro časovno-frekvenčno ločljivost, ki omogoča samo tisti del signala v časovno-frekvenčni domeni, kjer se nahaja informacija o posameznem načinu, s čimer se izognemo velikemu delu šuma v signalu. Takšen pristop omogoča transformacijo intenzitete slikovnih točk neposredno v modalno domeno, kjer je nadaljnja obdelava mogoča z veliko manjšo količino podatkov. Predstavljena metoda je bila uspešno uporabljena na eksperimentalnem testnem primeru, kjer je bila izvedena modalna analiza na polnem polju, ki temelji na slikovnih točkah. Raziskuje se vpliv povprečenja rezultatov iz več slikovnih točk v modalni domeni.

## 1 Introduction

The main advantage of using high-speed cameras in structural dynamics analyses is the non-contact and relatively simple measurement of the full-field structural response [1], typically providing several thousand measurement points. Typically, to identify displacements from the high-speed video recordings digital image correlation method is used [5]. It is a robust method based on an optimisation procedure performed on selected regions of interest (ROI) between two consecutive images [6], which is computationally intensive.

This manuscript represents the shorter version of research published by Tomac *et al.* [10], where the possibility of considering each pixel a sensor for modal identification is researched [3]. Modal identification is performed using the, recently published method based on the Morlet-wave integral [9]. In this way the modal parameters are identified directly from the pixel intensities without the need to first retrieve the displacement response, which is due to the fact that, assuming a small displacement, the displacement of the object is linearly related to the change in intensity. The modal identification is demonstrated with an experimental laboratory test where the modal identification is performed up to 2.6 kHz.

## 2 Modal identification from intensities

A theoretical background on how to perform optical-flow-based [3] modal identification using Morlet-wave integral [9] is explained.



## 2.1 Optical flow method

To register object motion from time series of images  $I(x, y, t)$ , it is important that object has distinct features that will produce high spatial gradient in the direction of motion. Next, illumination of object in time must be constant  $dI(x, y, t)/dt = 0$ , then if the motion is in the subpixel range, a linear approximation between the change of light intensities and the displacement can be assumed [2]. Displacement from optical from line image (1D case) can be obtained with:

$$q(x, t) = \frac{I_0(x) - I(x, t)}{I'_0(x)} \quad (1)$$

where  $I_0(x)$  is reference image,  $I'_0(x) = dI_0(x)/dx$  is the gradient image and  $I(x, t)$  are the pixel intensities of the line image. If the object is excited using an ideal impact, the light reflected from the object will harmonically oscillate around the static light intensity. Assuming a free, linear, viscously damped response, the oscillation of the reflected light can be represented by the sum of several SDOF systems, where the  $i$ -th mode is:

$$I_i(x, t) = A_{j,i}(x) e^{-\omega_{n,i} \delta_i t} \cos(\omega_{d,i} t - \phi_i(x)) \quad (2)$$

where  $A_{j,i}$  is the amplitude of intensity and  $\phi_i$  is the phase angle (both at location  $x$  and both depend on the initial conditions),  $\delta_i$  is the damping ratio,  $\omega_{n,i}$  is the undamped angular natural frequency and  $\omega_{d,i} = \omega_{n,i} \sqrt{1 - \delta_i^2}$  is a damped angular natural frequency.

## 2.2 Morlet wave integral

The Morlet-wave integral [7] is defined with:

$$\tilde{W}(n, k, \omega) = \int_0^T f_m(t) \psi^*(n, k, \omega, t) dt, \quad (3)$$

where  $f_m(t)$  is the measured signal,  $\psi(t)$  is a Morlet-wave basis function and  $\psi^*$  is a complex conjugate function. The MW function is expressed with the parameters  $n, k, \omega$ , where  $n$  is a time-spread parameter,  $k$  is the integer number of cycles of the wavelet function and  $\omega$  is the frequency corresponding to the damped natural frequency  $\omega_d$  of the selected mode [7]. The time length of the MW function is expressed by the number of cycles at the selected frequency  $T = 2\pi k/\omega$ . The theory of the continuous wavelet transform requires that the basic wavelet function must satisfy the admissibility condition [4]:  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$ . The basis function of the Morlet wave is defined on the finite interval  $t \in [0, T]$ ; it is a symmetric function that translates for  $T/2$  (for details see [7]) and for  $k > 5$  and  $n \geq 5$ :

$$\int_0^T \psi(n, k, \omega, t) dt \approx 0. \quad (4)$$

The MW method inherits the linear property of the continuous wavelet transform  $\mathscr{W}\{\cdot\}$ , which allows separate analyses of the harmonic components of signals with multiple harmonic components:

$$\mathscr{W}_{n, k_i, \omega_i} \left\{ \sum_{i=1}^N a_i f_{m,i} \right\} = \sum_{i=1}^N a_i \mathscr{W}_{n, k_i, \omega_i} \{f_{m,i}\} \quad (5)$$

where  $a$  is a constant, the index  $i$  marks the frequency component and  $k_i = T \omega_i / (2\pi)$ . If the analysed signals have closely spaced harmonic components, more attention is needed in the selection of the MW function parameters  $n$  and  $k$  [9].

### 3 Modal identification from pixel intensities

To identify the modal parameters, a free response is required. When the response of the object  $q(x, t)$  is obtained by hitting the modal hammer, the amplitudes at the beginning of the signal may exceed the 1 px assumption. Mitigation involves shifting the integration in Eq. (3) by  $t_0$ :

$$\tilde{W}(n, k, \omega) = \int_{t_0}^{t_0+T} q(x, t) \psi^*(n, k, \omega, t) dt. \quad (6)$$

Then Eq. (1) is inserted into Eq. (6), where the reference image  $I_0$  is time invariant for the subpixel motion and goes out of the integral, which is now applied to the conjugated Morlet-wave function  $\psi^*$ . This leads to the admissibility condition, which is approximately equal to zero (4), obtaining the following expression:

$$\tilde{W}(n, k, \omega) = -\frac{1}{I'_0(x)} \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T} I(x, t) \psi^*(n, k, \omega, t) dt}_{\tilde{W}_j(n, k, \omega)} \quad (7)$$

In Eq. (7) we can observe that the Morlet wavelet can be applied directly to the pixel intensities to obtain the MW integral  $\tilde{W}_j(n, k, \omega)$ . The spatial gradient  $I'_0(x)$  can be used to scale them to pixel units:

$$\tilde{W}(n, k, \omega) = -\frac{1}{I'_0(x)} \tilde{W}_j(n, k, \omega) \quad (8)$$

The response of the structures contains several modes, and due to the linear property of the Morlet wave (5), each mode can be analysed separately.

#### 3.1 The exact identification of the natural frequency

The natural frequency is identified directly from the MW integral by numerically searching for the maximum of the MW integral around the initial natural frequency [9]. The operator  $\partial/\partial\omega$  is applied on Eq. (8), which leads to:

$$-\frac{1}{I'_0(x)} \frac{\partial}{\partial\omega} \left| \tilde{W}_j(n, k, \omega) \right| = 0 \quad (9)$$

where it directly acts on the MW integral obtained from the pixel intensities.

#### 3.2 Identification of the damping ratio

Damping is identified from the ratio of two MW integrals, obtained with different time spread parameters Eq. (8) [7]:

$$\tilde{M}(n_1, n_2, k, \omega_d) = \frac{\left| \tilde{W}_j(n_1, k, \omega_d) \right|}{\left| \tilde{W}_j(n_2, k, \omega_d) \right|} \quad (10)$$

where the spatial gradient is cancelled and the identification of the damping ratio is made directly from the pixel intensities, using the procedure described in [9].

### 3.3 Identification of the amplitude and phase

After the identification of the natural frequency and the damping ratio, the amplitude and the phase angle can be identified following the procedure described in [9]. Identification is performed on the MW integral obtained from pixel intensities (8), establishing the cost functions for amplitude and phase angle as follows:

$$F_{\text{cost}}(X) = \left| W_j(n_1, k, \omega_d, \delta, A_j) \right| - \left| \widetilde{W}_j(n_1, k, \omega_d) \right| \quad (11)$$

$$F_{\text{cost}}(\phi) = \phi - \tilde{\phi}(k) = \phi + \arctan \left( \frac{\Im \left[ -\text{sgn}(I'_0) (-1)^k \widetilde{W}_j(n_1, k, \omega_d) \right]}{\Re \left[ -\text{sgn}(I'_0) (-1)^k \widetilde{W}_j(n_1, k, \omega_d) \right]} \right) \quad (12)$$

An absolute value of the spatial gradient is required for the scaling intensity based amplitude to pixel units:

$$A(x) = \frac{A_j(x)}{|I'_0(x)|} \quad (13)$$

which can be further scaled to engineering units and sign of the gradient  $-\text{sgn}(I'_0)$  is required to properly identify phase angle [10]. Using the identified amplitude and phase angle, residues can be obtained for the  $i$ th mode with:

$$R_i(x) = A_i(x) e^{i\phi_i(x)} \quad (14)$$

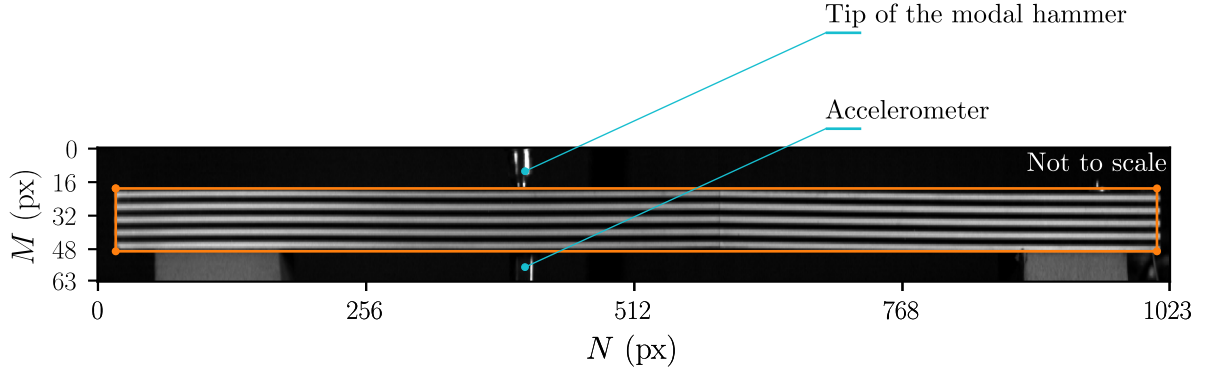
## 4 Experimental results

The laboratory, freely supported, steel beam ( $w \times h \times d = 500 \times 15 \times 30$  mm) was used to perform the experiment. The beam has a notch ( $w \times h \times d \approx 2 \times 8 \times 30$  mm) in the middle on the underside. Excitation involved a single hit with a modal hammer (KISTLER 9726A20000) and the response was recorded simultaneously with the accelerometer (PCB J320C03) and the high-speed camera (FASTCAM SA-Z type 2100K-M-64GB, 12 bit greyscale sensor).

The modal identification was performed directly on the pixel intensities in a time frame of  $T_f = 0.5$  s, which was shifted for  $t_0 = 75$  ms to avoid rigid-body and low-frequency oscillations of more than 1 px at the beginning of the recording caused by relatively soft supports (polyurethane foam blocks). Fig. 1 shows the first image taken by the high-speed camera, which also shows the positions of the hammer impact and the accelerometer.

To perform the modal identification along the beam, the reference image  $I_0$  is divided into 994 subsets, where each subset represents 28 pixels in each column  $N$  of the reference image  $I_0(x, y)$ . Not all pixels in each column, are suitable for identification, therefore selection is performed as:

- The best pixel - a single pixel with the highest spatial gradient in the subset is selected



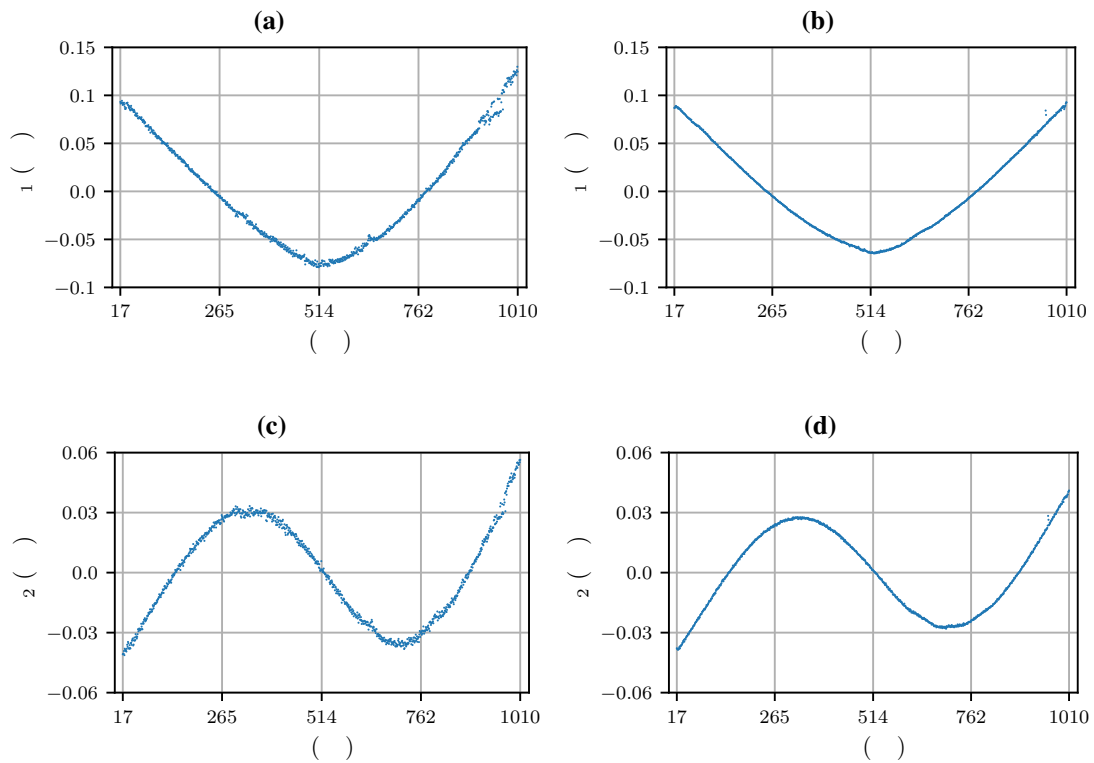
**Figure 1:** Full frame, taken with a high-speed camera. The orange rectangle ( $30 \times 994$  px) marks the range of pixels used for modal identification of the whole model.

- Average pixel - 14 pixels with the highest gradient in the subset are selected and the results are averaged

Modal identification is performed using the methodology based on the Morlet-wave integral [9] as implemented in Python package MorletWaveModal [8] which is applied directly on the pixel intensities as it is described in [10]. The comparative results between two cases for natural frequencies and damping ratios are shown in Tab. 1. The mode shapes are obtained from the identified amplitude  $A_i$  and phase angle  $\phi_i$  using Eq. (14), which are collapsed on the imaginary axis with  $r_i = \Im [R_i e^{-i\theta_i}]$  for simplification, where  $\theta_i = [67^\circ, 44^\circ, -3^\circ, -35^\circ]$ . Mode-shapes are compared for the first and second cases, in Fig. 2 for the first two modes and in Fig. 3 for the remaining modes.

**Table 1:** Results of identification of natural frequencies and damping ratios for the best pixel and averaged pixel approach, including a comparison with results obtained from the accelerometer data.

Mode:	1 <sup>st</sup>		2 <sup>nd</sup>		3 <sup>rd</sup>		4 <sup>th</sup>	
	best pixel	averg. pixel	best pixel	averg. pixel	best pixel	averg. pixel	best pixel	averg. pixel
$f_{d,acc}$ (Hz)	272.9		843.1		1508.9		2676.4	
$f_d$ (Hz)	272.9	272.9	843.1	843.1	1508.7	1508.8	2676.9	2677.2
Error: (%)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.01	0.01	-0.02	-0.03
$\delta_{acc}$ (%)	0.519		0.112		(0.062)		0.079	
$\delta$ (%)	0.519	0.52	0.112	0.112	(0.121)	(0.084)	0.117	0.085
Error: (%)	0.2	-0.1	0.1	0.2	(-113.2)	(-36.6)	-58.7	-7.7

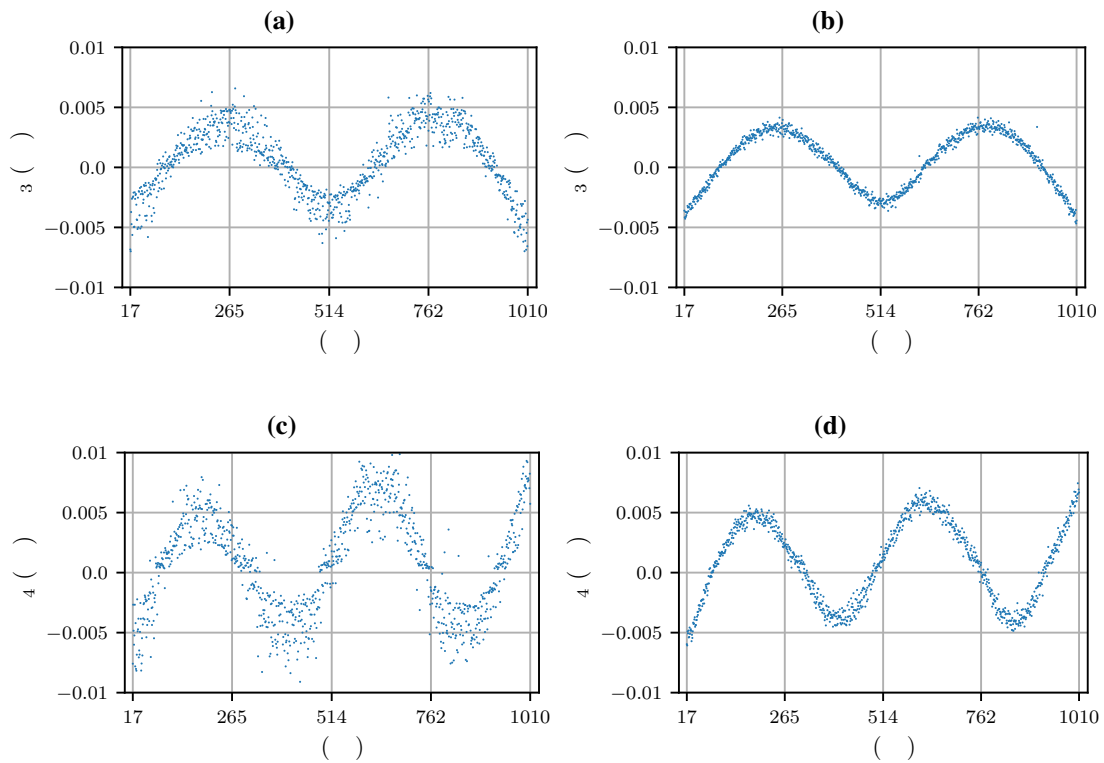


**Figure 2:** Mode shapes for the first and second natural frequencies based on: (a), (c) the best pixel and (b), (d) the average pixel.

#### 4.1 Discussion

The results in Tab. 1 show that the natural frequencies can be accurately identified from the response data of a single pixel with a small error (up to 0.02 %) and that adding more pixels does not improve the result significantly. The damping, on the other hand, is accurately identified in both cases with an error of  $\pm 0.2\%$  for the first and second modes of vibration, and adding more pixels does not significantly improve the result. The third and fourth modes are at relatively high frequencies and are masked by noise. However, when the data from more pixels were used, they become distinguishable from the noise. The damping result of the third mode improved by 68 % (from 113 % to 37 %) and 87 % (from 59 % to 8 %) for the fourth mode when results from more pixels were used. The relatively poor accuracy of the third mode compared to the fourth mode is due to the fact that the third mode was excited near the node, resulting in a higher uncertainty in the accelerometer result.

The identification of mode shapes was similar to that of the damping ratio. In the case of the best pixel, the mode shapes for the first mode (Fig. 2a) and the second mode (Fig. 2c) were clearly identified. The average pixel approach improves the a mean square error (MSE) of both mode shapes by about 5 %, as can be seen in Figs. 2b and Fig. 2d. The third (Fig. 3a) and fourth



**Figure 3:** Mode shapes for the third and fourth natural frequencies based on: (a), (c) the best pixel and (b), (d) the average pixel.

(Fig. 3c) mode shapes are more noisy, based on the best-pixel approach. The average-pixel approach improves the results by approx. 25 %, as can be seen in Figs. 3b and 3d. From Figs. 2 and 3 the amplitude of the displacement is approx.  $\pm 0.1$  px for the first mode and approx.  $\pm 0.04$  px for the second mode, while it is approx.  $\pm 0.004$  px for the third mode and approx.  $\pm 0.005$  px for the fourth mode.

## 5 Conclusion

The identification of modal parameters based on pixel intensities from high-speed video recordings using the Morlet-wave modal method is explored. Identification requires a sub-pixel level response of the camera-recorded surface with high gradient features. For mode shapes to be identified in physical units, the gradient image is required. In contrast, the gradient is not required for the identification of the damping ratio and natural frequencies. The experimental example showed that the response of a single pixel can be used for a modal identification up to 0.04 px, while for displacements down to 0.004 px, the addition of results from more pixels in the selected subset in the modal domain is required to improve identification. With this study it is shown that the Morlet-wave modal method enables modal identification from high-

speed video recordings in the same way as it is classically performed with high-dynamic-range sensors.

### Acknowledgement

The authors gratefully acknowledge partial financial support from the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme under Marie Skłodowska-Curie Grant Agreement No. 101027829 and the Slovenian Research Agency (N2-0144).

### References

- [1] J. Baqersad, P. Poozesh, C. Niezrecki, and P. Avitabile. Photogrammetry and optical methods in structural dynamics – a review. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 86:17–34, 2017.
- [2] B. K. Horn and B. G. Schunck. Determining optical flow. *Artificial Intelligence*, 17:185–203, 8 1981.
- [3] J. Javh, J. Slavič, and M. Boltežar. The subpixel resolution of optical-flow-based modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 88:89–99, 5 2017.
- [4] S. Mallat. *A Wavelet Tour Of Signal Processing*. Academic Press, 2nd edition, 1999.
- [5] B. Pan. Digital image correlation for surface deformation measurement: historical developments, recent advances and future goals. *Measurement Science and Technology*, 29:082001, 8 2018.
- [6] H. Schreier, J.-J. Orteu, and M. A. Sutton. *Image Correlation for Shape, Motion and Deformation Measurements*. Springer US, 2009.
- [7] J. Slavič and M. Boltežar. Damping identification with the morlet-wave. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25:1632–1645, 7 2011.
- [8] I. Tomac and J. Slavič. Iadisk/morletwavemodal: Mwmodal v0.6.3, 4 2023.
- [9] I. Tomac and J. Slavič. Morlet-wave-based modal identification in the time domain. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 192:110243, 6 2023.
- [10] I. Tomac, J. Slavič, and D. Gojrup. Single-pixel optical-flow-based experimental modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing - under review*.



## *Vpliv izbire veznih enačb na prostorski odziv dvoslojnih kompozitnih nosilcev*

*G. Udovč<sup>1</sup>, I. Planinc<sup>1</sup>, T. Hozjan<sup>1</sup>, A. Ogrin<sup>1</sup>*

### *Influence of choice of constraint equations on the spatial response of two-layer composite beams*

**Povzetek.** Članek prikazuje vpliv izbire kinematičnih veznih enačb med slojema na prostorski odziv dvoslojnih kompozitnih nosilcev. Analizirani in primerjani so trije tipi veznih enačb na stiku med slojema (trije modeli), ki so označeni z A, B in C. V modelu A sta sloja med seboj zelo povezana, saj se lahko zamakneta le v vzdolžni smeri, v modelu B, ki je nekoliko bolj podajen, se lahko sloja poljubno zamakneta v ravnini stika. Zasuki slojev v obeh modelih so enaki. Model C, kjer so poleg različnih pomikov v ravnini stika omogočeni tudi različni upogibni zasuki slojev, opisuje najbolj podajen stik med slojema kompozitnega nosilca in implementacija le tega prinaša dodatno novost predstavljenega članka. Tako vezne enačbe tega najbolj podajnega modela povezujejo zgolj vertikalne pomike in torzijske zasuke slojev nosilca. S parametrično študijo je bilo ugotovljeno, da ima izbira veznih enačb velik vpliv na napetostno in deformacijsko stanje dvoslojnih nosilcev in jih je treba v analizi dvoslojnih kompozitnih nosilcev smiselno izbrati. Tako je za torzijsko obremenjen dvoslojni kompozitni nosilec najprimernejši model tipa C.

**Abstract.** The article presents the influence of the choice of kinematic constraint equations between layers on the spatial response of two-layer composite beams. Three types of constraint equations at the contact of the layers are analysed and compared (three models). They are named as model A, B and C. In model A, the two layers are closely connected to each other, as only longitudinal inter-layer slip is possible, whereas in model B, where the contact is slightly more flexible, the inter-layer slip is possible in the plane of the contact. Rotations of the layers are the same in both models. Model C, where in addition to different displacements on the contact plane, different bending rotations of the layers are also possible, describes the most flexible contact between the layers of the composite beam and its implementation brings an additional novelty of the presented article. Thus, the constraint equations of this most flexible model connect only vertical displacements and torsional rotations of the layers of the beam. A parametric study established that the choice of constraint equations has a great influence on the stress and deformation state of the two-layer beams and in analysis of two-layer composite beams it is necessary to choose them wisely. Thus, for a torsionally loaded two-layer composite beam, the type C model is the most suitable.

---

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo



## **1 Uvod**

Kompozitne konstrukcije oziroma kompozitni konstrukcijski elementi se v gradbeništvu uporabljajo zelo pogosto, največkrat kot kompozitne plošče ali kompozitni nosilci. Največja prednost teh konstrukcij je dobra izkoriščenost ugodnih lastnosti materialov posameznih slojev. Posledično s kompozitnimi konstrukcijami dosegamo pri enakih velikostih prereзов bistveno večje nosilnosti in s tem tudi razpone. Obnašanje kompozitnih konstrukcij je v veliki meri odvisno od stopnje povezanosti slojev in s tem od izbranih veznih sredstev, ki povezujejo sloje v kompozitno celoto. Zato je dobro poznavanje lastnosti veznih sredstev bistveno za oceno mehanskega odziva kompozitnih konstrukcij.

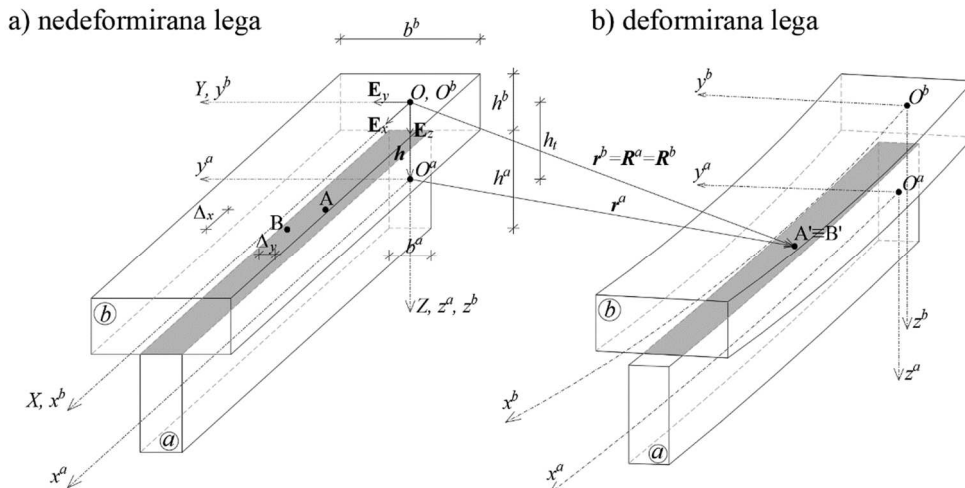
Z raziskovanjem obnašanja dvoslojnih kompozitnih nosilcev so se med prvimi ukvarjali Newmark [9] ter Goodman in Popov [6], z razvojem računalniške tehnologije pa so se jim skozi čas pridružili še številni drugi (Čas [3], Hozjan [7], Fabbrocino [4], Girhammar & Gopu [5], Kroflič [8]). Kljub temu pa je raziskav o prostorskem obnašanju kompozitnih nosilcev precej malo, saj se je večina izmed naštetih avtorjev ukvarjala zgolj z njihovim ravninskim obnašanjem. S prostorskim obnašanjem kompozitnih konstrukcij sta se med prvimi ukvarjala Challamel in Girhammar [1], sledil pa jima je Čas s sodelavci [2]. Nedavno pa je nekaj raziskav na to temo prikazal tudi Udovč s sodelavci ([10] in [11])

Prostorsko obnašanje kompozitnega nosilca je, podobno kot ravninsko, v veliki meri odvisno od mehanskih lastnosti veznih sredstev na stiku med sloji. V numeričnem modelu za analizo kompozitnih nosilcev sta zato ključnega pomena odločitve o predpostavkah modela in posledično izbira kinematičnih veznih enačb. V članku predstavimo tri različne matematične modele za analizo prostorskih kompozitnih dvoslojnih nosilcev. Ti se med seboj razlikujejo zgolj v uporabljenih kinematičnih veznih enačbah in posledično v stopnji povezanosti slojev kompozitnega nosilca. Implementacijo prvega in drugega modela (model A in model B) so že predstavili Udovč in sodelavci ([10] in [11]). Tretji model, ki je označen s črko C, je nadgradnja modelov A in B. Posebnost modela C je v tem, da na stiku med slojema s kinematičnimi veznimi enačbami zagotavlja enake navpične pomike med slojema in enake torzijske zasuke. Tako kot pri prvih dveh modelih smo tudi osnovne enačbe modela C rešili z deformacijsko metodo končnih elementov.

Članek je sestavljen iz štirih poglavji. Uvodu sledi poglavje, kjer predstavimo kinematične vezne enačbe predstavljenih modelov. V tretjem poglavju na primeru dvoslojnega lesenega kompozitnega nosilca primerjamo odziv nosilca glede na izbiro kinematičnih veznih enačb med slojema. Na koncu v zaključku še povzamemo rezultate.

## 2 Osnovne enačbe in predpostavke

V evklidskem prostoru z globalnim desnosučnim kartezijevim koordinatnim sistemom opazujemo dvoslojni prostorski nosilec, ki ga sestavljata spodnji sloja  $a$  in zgornji sloj  $b$ . Globalni koordinatni sistem označimo z  $X, Y$  in  $Z$ , pripadajoče bazne vektorje pa z  $\mathbf{E}_X, \mathbf{E}_Y$  in  $\mathbf{E}_Z$ . Na sliki 1 označimo tudi lokalna koordinatna sistema sloja  $a$  z  $x^a, y^a, z^a$  in sloja  $b$  z  $x^b, y^b, z^b$ . Izhodišče globalnega koordinatnega sistema označimo z  $O$ , izhodišča lokalnih koordinatnih sistemov pa z  $O^a$  in  $O^b$ .



Slika 1: Nedeformirana in deformirana lega dvoslojnega prostorskega nosilca s podajnim stikom.

Deformirano lego obravnavanega nosilca v točkovnem geometrijskem prostoru določata krajevna vektorja sloja  $a$  in sloja  $b$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^a &= X^a \mathbf{E}_X + Y^a \mathbf{E}_Y + Z^a \mathbf{E}_Z = h_t \mathbf{E}_Z + \mathbf{r}^a(x^a, y^a, z^a), \\ \mathbf{R}^b &= X^b \mathbf{E}_X + Y^b \mathbf{E}_Y + Z^b \mathbf{E}_Z = \mathbf{r}^b(x^b, y^b, z^b). \end{aligned} \quad (1)$$

Osnovne predpostavke za izpeljavo enačb so že opisali Udovč in sodelavci [11] in jih tu ne zapisujemo ponovno. Osnovne enačbe so sestavljene iz lineariziranih ravnotežnih, kinematičnih in konstitucijskih enačb, ki jih skupaj s pripadajočimi robnimi pogoji rešujemo za vsak sloj ločeno. Ker pa sta sloja povezana, definiramo tudi vezne enačbe, ki narekujejo način povezave med slojema. Slednje so zelo pomembne, saj z njihovo izbiro zelo vplivamo na prostorski odziv nosilca. V tem članku se osredotočimo na vpliv različnih veznih enačb na odziv prostorskega kompozitnega nosilca, samih enačb kompozitnega nosilca in postopek reševanja pa ne prikazujemo, saj so ga detajlno že prikazali Udovč in sodelavci ([10] in [11]). Kinematične vezne enačbe izpeljemo s pomočjo zahteve o soležnosti delcev slojev nosilca na stiku v deformirani legi

$$\mathbf{r}^a\left(x, y, -\frac{h^a}{2}\right) = \mathbf{r}^b\left(x^*, y^*, \frac{h^b}{2}\right) - \mathbf{h}, \quad (2)$$

kjer sta  $x^*$  in  $y^*$  lokalni koordinati v nedeformirani legi tistih delcev sloja  $b$  na stiku nosilca, ki so v deformirani legi soležni z delci sloja  $a$  z lokalnimi koordinatami  $x$  in  $y$ . V nadaljevanju

zapišemo tri različne skupine veznih enačb, ki jih dobimo z linearizacijo okoli začetne nedeformirane lege in z upoštevanjem različnih predpostavk. Prva skupina velja za matematični modela A, druga za matematični model B, tretja pa za matematični model C.

### 2.1 Matematični model A

Matematični model A so že predstavili Udovč in sodelavci [10] in opisuje dvoslojni kompozitni nosilec z zdrsom samo v vzdolžni smeri. Število prostostnih stopenj v vsakem vozlišču je pri tem modelu 7 ( $u^a, u^b, v, w, \varphi_x, \varphi_y$  in  $\varphi_z$ ), vezne enačbe pa so:

$$\begin{aligned} x + u^a &= x^* + u^b + h_t \varphi_y, \\ v &= v^a = v^b - h_t \varphi_x, \\ w &= w^a = w^b, \\ \varphi_x &= \varphi_x^a = \varphi_x^b, \\ \varphi_y &= \varphi_y^a = \varphi_y^b, \\ \varphi_z &= \varphi_z^a = \varphi_z^b. \end{aligned} \tag{3}$$

### 2.2 Matematični model B

Tudi matematični model B, ki opisuje dvoslojni kompozitni nosilec z zdrsom v vzdolžni in prečni smeri, so že predstavili Udovč in sodelavci [11]. Pri tem modelu ima vsako vozlišče 8 prostostnih stopenj ( $u^a, u^b, v^a, v^b, w, \varphi_x, \varphi_y$  in  $\varphi_z$ ), vezne enačbe pa so:

$$\begin{aligned} x + u^a &= x^* + u^b + h_t \varphi_y, \\ y + v^a &= y^* + v^b - h_t \varphi_x, \\ w &= w^a = w^b, \\ \varphi_x &= \varphi_x^a = \varphi_x^b, \\ \varphi_y &= \varphi_y^a = \varphi_y^b, \\ \varphi_z &= \varphi_z^a = \varphi_z^b. \end{aligned} \tag{4}$$

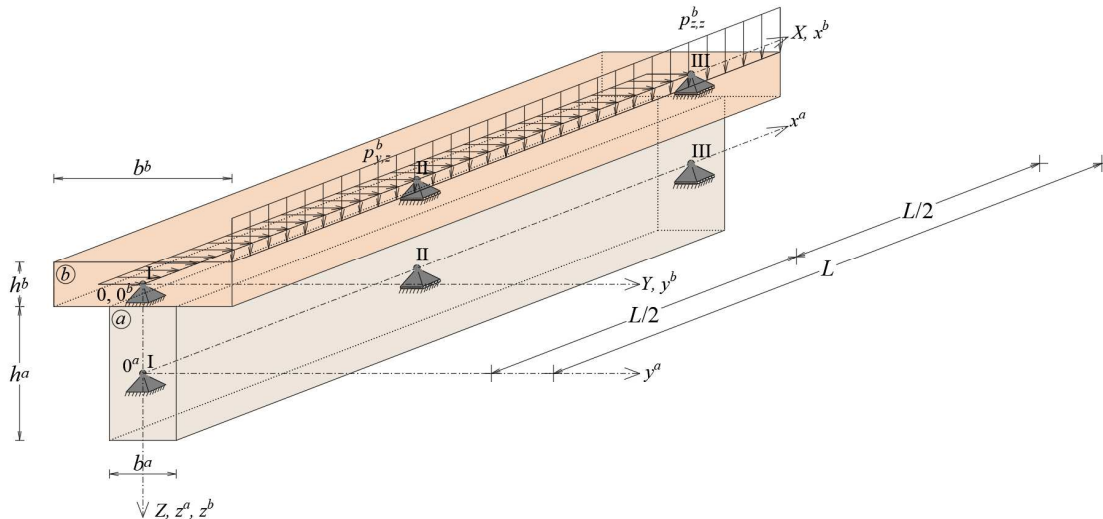
### 2.3 Matematični model C

Matematični model C pa je novost, saj z veznimi enačbami povezujemo zgolj vertikalne pomike in torzijske zasuke slojev. Model ima v vsakem vozlišču 10 prostostnih stopenj ( $u^a, u^b, v^a, v^b, w, \varphi_x, \varphi_y^a, \varphi_y^b, \varphi_z^a$  in  $\varphi_z^b$ ), pripadajoče vezne enačbe pa so:

$$\begin{aligned} x + u^a &= x^* + u^b + \frac{h^a}{2} \varphi_y^a + \frac{h^b}{2} \varphi_y^b, \\ y + v^a &= y^* + v^b - h_t \varphi_x, \\ w &= w^a = w^b, \\ \varphi_x &= \varphi_x^a = \varphi_x^b, \\ \varphi_y^a &\neq \varphi_y^b, \\ \varphi_z^a &\neq \varphi_z^b. \end{aligned} \tag{5}$$

### 3 Računski primer

V računskem primeru primerjamo tri različne modele, pri čemer je dva izmed njih že predstavil Udovč s sodelavci ([10] in [11]), tretji pa je nov in je nadgradnja drugega. Razlika med modeli je predvsem v uporabi različnih veznih enačb s katerimi sloja povežemo skupaj, kar smo že opisali v poglavju 2. Vpliv uporabe različnih modelov za izračun prostorskih dvoslojnih kompozitnih nosilcev prikažemo na preprostem primeru iz slike 2.



Slika 2: Geometrijski podatki dvoslojnega lesenega nosilca ter podatki o obtežbah.

Kompozitni nosilec iz slike 2 je grajen iz dveh lesenih slojev, ki ju poimenujemo sloj  $a$  in sloj  $b$ . Izvede se v dolžini  $L = 1000$  cm in je podprt v točkah I, II in III. Upoštevani kinematični robni pogoji za računске modele A, B in C v točkah I, II in III so prikazani v tabeli 1.

Tabela 1: Prikaz upoštevanih kinematičnih robnih pogojev.

podpora I:			podpora II:			podpora III:		
$u^a = 0$	$u^b = 0$		$u^a \neq 0$	$u^b \neq 0$		$u^a \neq 0$	$u^b \neq 0$	
$v = 0$	$v^a = 0$	$v^b = 0$	$v = 0$	$v^a = 0$	$v^b = 0$	$v = 0$	$v^a = 0$	$v^b = 0$
$w = 0$		$\varphi_x = 0$	$w = 0$		$\varphi_x = 0$	$w = 0$		$\varphi_x = 0$
$\varphi_y \neq 0$	$\varphi_y^a \neq 0$	$\varphi_y^b \neq 0$	$\varphi_y \neq 0$	$\varphi_y^a \neq 0$	$\varphi_y^b \neq 0$	$\varphi_y \neq 0$	$\varphi_y^a \neq 0$	$\varphi_y^b \neq 0$
$\varphi_z \neq 0$	$\varphi_z^a \neq 0$	$\varphi_z^b \neq 0$	$\varphi_z \neq 0$	$\varphi_z^a \neq 0$	$\varphi_z^b \neq 0$	$\varphi_z \neq 0$	$\varphi_z^a \neq 0$	$\varphi_z^b \neq 0$

Nosilec je na zgornjem sloju  $b$  obremenjen z dvema enakomernima linijskima obremenitvama  $p_{z,z}^b = 10$  kN/m in  $p_{y,z}^b = 2$  kN/m. Zunanja obremenitev  $p_{y,z}^b$  deluje v težišču sloja  $b$ , medtem ko obremenitev  $p_{z,z}^b$  deluje na skrajnem desnem robu sloja  $b$  in poleg vertikalne obremenitve, v težišču sloja  $b$  povzroča še dodaten linijski torzijski moment z vrednostjo  $m_{x,z}^b = 1,5$  kNm/m. Dimenzije prečnega prereza sloja  $a$  so  $b^a/h^a = 10/30$  cm, sloja  $b$  pa  $b^b/h^b = 30/10$  cm. Medsebojno linearno zvezo slojev  $a$  in  $b$  upoštevamo s togostjo na kontaktu, ki

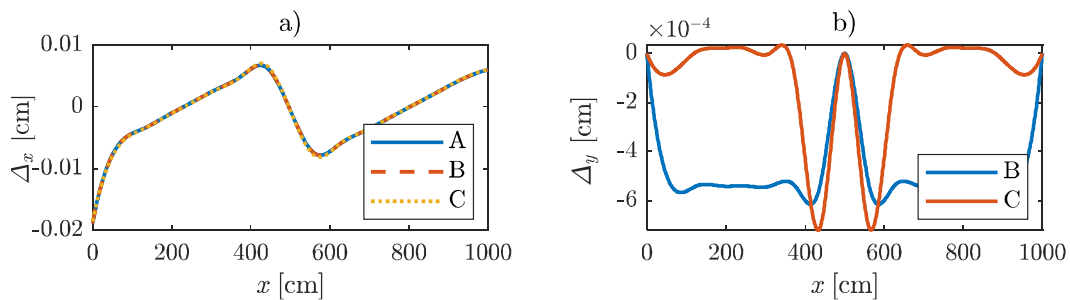
znaša  $K_x = K_y = 100 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$ . Upoštevane materialne parametre linearnega konstitucijskega modela obeh slojev nosilca prikazujemo v tabeli 2.

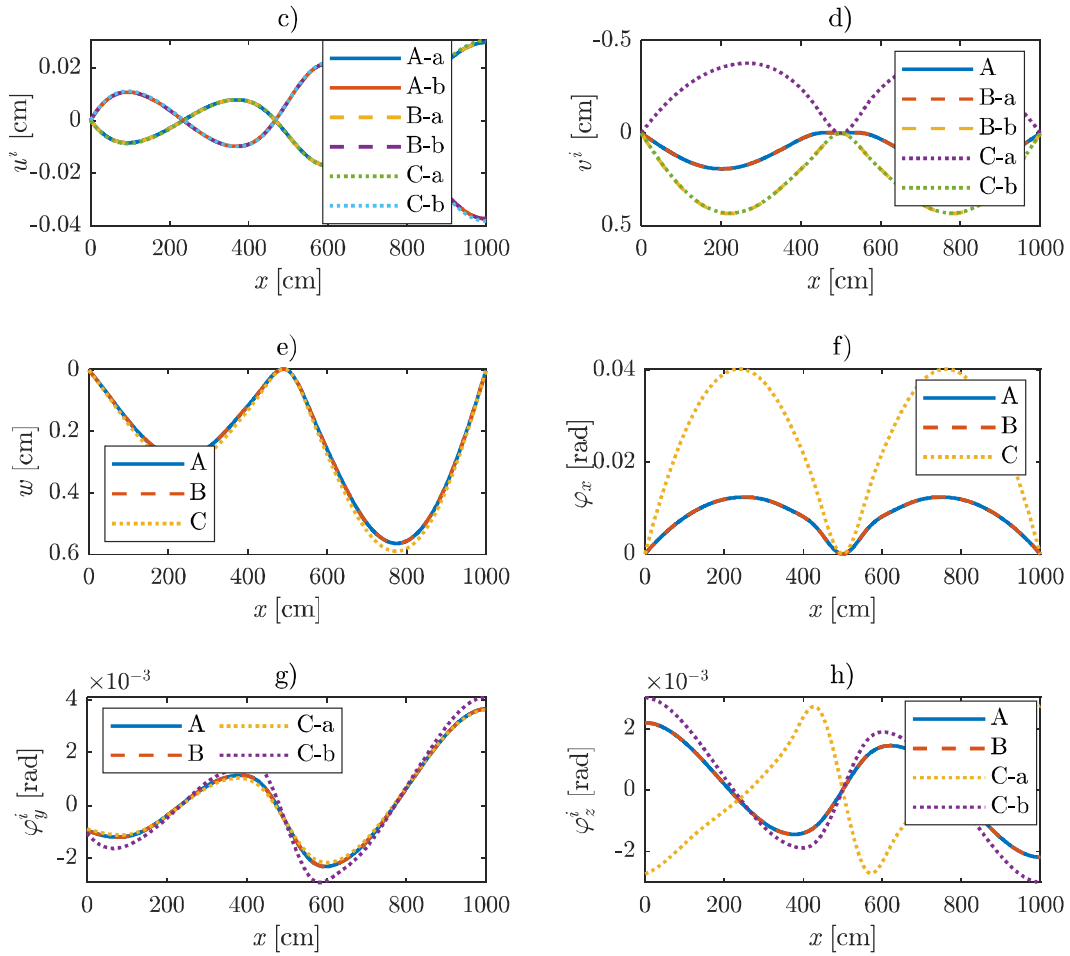
**Tabela 2:** Materialni parametri slojev  $a$  in  $b$ .

	$E^i$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	$G^i$ [kN/cm <sup>2</sup> ]
sloj $a$	1200	75
sloj $b$	950	59

Pri vseh treh modelih za analizo uporabimo šestnajst deformacijskih končnih elementov, pri katerih se deformacijske količine interpolira z Lagrangeovimi polinomi četrte stopnje, integrale v enačbah pa se izvednoti s pet točkovno Gaussovo integracijsko shemo. Konvergenčne študije ne prikazujemo, saj sta natančnost in uporabnost podobnih končnih elementov že prikazala Čas [3] in Udovč s sodelavci [10].

Na sliki 3 prikazujemo poteke značilnih kinematičnih količin v vzdolžni osi nosilca. Prikazujemo rezultate za tri različne matematične modele A, B in C ter za oba sloja  $i = a, b$ . Primerjavo med računskima modeloma A in B je že prikazal in podrobneje opisal Udovč s sodelavci [11], računski model C in njegove razlike v obnašanju od modela A in B pa so novost, zato se osredotočimo zgolj na njih. Glavna razlika med računskima modeloma B in C je v tem, da se pri modelu C za vsak sloj upošteva različna upogibna zasuka  $\varphi_y^i$  in  $\varphi_z^i$ , s čimer pridobimo dve dodatni prostostni stopnji. Če pogledamo rezultate na sliki 3, opazimo bistvene razlike med modeloma pri poteku prečnega zdrsa  $\Delta_y$ , prečnih pomikov  $v^i$ , torzijskega zasuka  $\varphi_x$  in upogibnega zasuka  $\varphi_z^i$ . Do manjših razlik pride tudi pri poteku vertikalnih povsesov  $w$  in upogibnega zasuka  $\varphi_y^i$ , sam potek osnih pomikov  $u^i$  in vzdolžnega zdrsa  $\Delta_x$  pa je med modeloma praktično identičen. Ker pri modelu C nismo zahtevali enakosti upogibnih zasukov  $\varphi_y^i$ , se sloja  $a$  in  $b$  različno zasučeta in posledično ima nosilec manjšo upogibno togost, kar se odraža pri malce večjem vertikalnem povsesu  $w$  v primerjavi z modelom B. Ključne razlike med modeloma pa se odražajo pri prostorskem obnašanju, saj se pri modelu C ne zahteva enakosti upogibnih zasukov  $\varphi_z^i$  in posledično se odstrani povezavo med slojema v prečni smeri, s čimer dobimo torzijsko bolj podajen nosilec. Posledično je torzijski zasuk bistveno večji in sloj  $b$  se premakne v smeri osi  $Y$ , med tem ko se sloj  $a$  premakne v nasprotno smer, kar se odraža tudi pri predznaki upogibnih zasukov  $\varphi_z^i$ . Ker je prostorsko obnašanje modela C v primerjavi z modelom B povsem drugačno, so različni tudi prečni zdrsi  $\Delta_y$ .





**Slika 3:** Potek značilnih kinematičnih količin za matematični model A, B in C: a) vzdolžni zdrs, b) prečni zdrs, c) osni pomik, d) prečni pomik, e) vertikalni pomik, f) zasuk okoli osi  $x$ , g) zasuk okoli osi  $y$ , h) zasuk okoli osi  $z$

#### 4 Zaključek

V članku smo analizirali vpliv izbire različnih kinematičnih veznih enačb med slojema dvoslojnih kompozitnih nosilcev na njihov mehanski odziv. Med seboj smo primerjali fizikalne količine kompozitnih nosilcev, ki smo jih izračunali za tri tipe kinematičnih veznih enačb, označenih z A, B in C. Pri tem smo z modelom A označili vezne enačbe, ki najbolj povežejo sloja, z modelom C pa vezne enačbe, kjer sta sloja najmanj povezana. Pri modelu C so enaki zgolj vertikalni pomiki in torzijski zasuki obeh slojev kompozitnega nosilca.

Z analizo dvoslojnega lesenega kompozitnega nosilca, kjer smo uporabili različne kinematične vezne enačbe, smo ugotovili, da je vpliv le teh na mehanski odziv kompozitnega nosilca izredno velik. Zato je izbira veznih enačb bistvena za natančno mehansko analizo tovrstnih konstrukcij. Sama izbira veznih enačb pa je pogojena s fizikalnim problemom, ki ga analiziramo. S parametrično študijo smo tudi ugotovili, da je za torzijsko obremenjene

dvoslojne kompozitne nosilce najprimernejši model C, saj v njem ne zahtevamo enakosti upogibnih zasukov  $\varphi_z^i$ , s čimer omogočimo, da se sloja zaradi torzije premakneta vsak v svojo smer.

## Zahvala

Zahvaljujemo se Javni agenciji za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije, ki je s projektoma P2-0260 in Z2-3203 finančno podprla to delo.

## Literatura

- [1] N. Challamel in U. A. Girhammar, „Lateral-torsional buckling of partially composite horizontally layered or sandwich-type beams under uniform moment,“ *Journal of Engineering Mechanics*, Izv. 139, pp. 1047-1064, 2013.
- [2] B. Čas, I. Planinc in S. Schnabl, „Analytical solution of three-dimensional two-layer composite beam with interlayer slips,“ *Engineering Structures*, Izv. 173, pp. 269-282, 2018.
- [3] B. Čas, Nelinearna analiza kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med sloji. Doktorska disertacija, Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2004.
- [4] G. Fabbrocino, G. Manfredi in E. Cosenza, „Non-linear analysis of composite beams under positive bending,“ *Computers and Structures*, Izv. 70, pp. 77-89, 1999.
- [5] U. A. Girhammar and V. K. A. Gopu, “Composite beam-columns with inter-layer slip-exact analysis,” *Journal of Structural Engineering, ASCE*, vol. 199(4), pp. 1265-1282, 1993.
- [6] J. R. Goodman and E. P. Popov, “Layered wood systems with inter-layer slip,” *Wood Science*, vol. 1(3), pp. 148-158, 1969.
- [7] T. Hozjan, Nelinearna analiza vpliva požara na sovprežne linijske konstrukcije. Doktorska disertacija, Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Oddelek za gradbeništvo, Konstrukcijska smer, 2009, p. 117.
- [8] A. Kroflič, Nelinearna analiza večslojnih kompozitnih linijskih konstrukcij. Doktorska disertacija, Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2012.
- [9] N. M. Newmark, C. P. Siest and C. P. Viest, “Test and analysis of composite beams with incomplete interaction,” *Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis*, vol. 1, pp. 75-92, 1951.
- [10] G. Udovč, I. Planinc in T. Hozjan, „Analiza dvoslojnih prostorskih kompozitnih nosilcev z upoštevanjem strižnih deformacij in vzdolžnih zamikov med slojema,“ v *Srečanje kuhljevi dnevi 2021.*, Ljubljana, 2021.
- [11] G. Udovč, I. Planinc, T. Hozjan in A. Ogrin, „Vpliv podajnosti stika na mehanski odziv dvoslojnih prostorskih nosilcev,“ v *Srečanje kuhljevi dnevi 2022.*, Ljubljana, 2022.



## *Towards modeling of soft deformable micro particles in dilute multiphase flow*

Jana Wedel<sup>1</sup>, Paul Steinmann,<sup>12</sup> Matjaž Hriberšek,<sup>3</sup> Jure Ravnik<sup>3</sup>

### *Model za simulacijo obnašanja mehkih deformabilnih mikrodelcev v razredčenem toku*

**Abstract.** Humans are constantly in contact with particles. However, the transport of particles in flows remains one of the challenging problems in science and engineering, especially for micron-sized particles and below in the form of vesicles or bacteria, since these particles not only may be spherical, but also have the ability to deform, i.e., are soft particles. In this work, we present our novel model for simulating soft, deformable microparticles in dilute flow, which uses Lagrangian particle tracking assuming hyperelastic, initially spherical particles under affine transformations. We apply this novel numerical approach to demonstrative velocity gradients to mimic pure rotational flow and a pure shear flow.

**Povzetek.** Ljudje dihamo, in s tem smo nenehno v stiku z delci, ki so razpršeni v zraku. Obnašanje in prenos delcev v različnih tokovih predstavlja zahteven izziv v znanosti in inženirstvu. To še posebej velja za zelo majhne delce, ki so zaradi razmer v toku podvrženi deformacijam. V prispevku predstavljamo naš model za simulacijo obnašanja mehkih deformabilnih mikrodelcev v razredčenem toku. Uporabljamo Lagrangeovo sledenje ob predpostavki hiperelastičnih, sprva sferičnih delcev pod afinimi transformacijami. Delovanje modela demonstriramo na primerih čistih rotacijskih in strižnih tokov.

## 1 Introduction

Particles in flows are widespread both in nature (blood platelets, asbestos fibres, microplastics) and in various industries (pharmaceutical field, petrochemical field, wastewater treatment), [10]. To control these systems, the physics of the particle system must be well understood. However, knowledge of the motion of various particles suspended in flows is still sparse, [10] so they remain one of the challenging problems in science and engineering. These systems

---

<sup>1</sup> Universität Erlangen-Nürnberg, Institute of Applied Mechanics

<sup>2</sup> University of Glasgow, Glasgow Computational Engineering Center

<sup>3</sup> University of Maribor, Faculty of Mechanical Engineering



become complex for soft deformable particles, especially at the micron-scale or smaller, where experimental techniques are often not applicable and the cost of computational models is high. Although surface tension in microscopic droplets and bubbles leads predominantly to a spherical shape, there are several types of soft microparticles that are not spherical and can be deformed under hydrodynamic and direct mechanical loading, [11]. Examples in this context include liquid capsules and biological cells with structured interfaces that possess elastic and viscoelastic properties. These particles are becoming increasingly important in the pharmaceuticals and medical field, as they can be used as flexible microparticles as drug carriers, [6].

Since there are no general models for such soft particles, in this work we focus on developing dedicated computational models for tracking soft, deformable micro- and submicron particles suspended in general Newtonian fluid flows. Particles with rheological properties that allow changes in their particle geometry are considered. This results in the need to develop advanced force and torque models for calculating the translational and angular momentum exchange between particles and fluid.

This paper is organised as follows: First, we introduce the notation used, see Sect. 2. The mathematical model of soft deformable particles in multiphase flows is briefly discussed in Sect. 3. In addition, in Sect. 4, illustrative examples are presented, followed by the main conclusions of the study in Sect. 5.

## 2 Notation

In this work tensors of different orders are represented by bold italics. First-order tensors are denoted by bold italic lowercase letters such as  $\mathbf{a}$ , while second-order tensors are denoted by bold italic uppercase letters such as  $\mathbf{A}$ . Using Einstein's summation convention, we write the coordinate representation in Cartesian coordinate systems with basis vectors  $\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) as:  $\mathbf{a} = a'_i \mathbf{e}'_i = a_i \mathbf{e}_i$  and  $\mathbf{A} = A'_{ij} \mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{e}'_j = A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ , where  $a'_i, a_i$  and  $A'_{ij}, A_{ij}$  are respectively the corresponding coefficients in the coordinate system  $\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_i$ . The tensor coefficients  $a'_i, a_i$  and  $A'_{ij}, A_{ij}$  can be arranged in coefficient matrices denoted by underlined italic letters ( $\underline{a}', \underline{A}'$ ), see our previous work, [13]. The rotation matrix  $\underline{R}$ , which transforms coefficients with respect to the basis vectors  $\mathbf{e}_i$  into coefficients with respect to the basis vectors  $\mathbf{e}'_i$ , follows as  $R_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j$ . Taken together, coefficient matrices transform as  $\underline{a}' = \underline{R} \underline{a}$  and  $\underline{A}' = \underline{R} \underline{A} \underline{R}^T$ .

## 3 Mathematical model

To assess the dynamics of particle motion in fluids, we use Lagrangian particle tracking in combination with state-of-the-art Computational Fluid Dynamics (CFD) solution of the Navier-Stokes equations. In the case of microparticles, the *point-particle approach* is predominantly used due to the comparatively low computational cost, especially when tracking a large number of particles, [8] since the shape of a particle is not directly resolved. In the case of microparticles, the particle Reynolds numbers are typically well below one, and the local flow around the particle is assumed to be in the viscous regime and thus can be described by Stokes flow, [2].

### 3.1 Motion of particles in flows

In this work, we describe particle transport in an Euler-Lagrangian framework. Particle geometry can be described by using the superellipsoidal surface equation as introduced by Barr, [1], which is an extension of ellipsoids to cubic and diamond-like shapes. Superellipsoids are parametrized by their particle half axis  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ( $a \leq b \leq c$ ) as well as two shape factors  $\epsilon_1$  and  $\epsilon_2$ , where ellipsoids are obtained by  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$  and spheres by  $a = b = c$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ . Each particle  $i$  obeys Newton's second law and is tracked individually by explicitly solving its trajectory:

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{F}_i, \quad (1)$$

where  $m_i$  and  $\mathbf{v}_i$  are the mass and velocity of particle  $i$  and  $d/dt$  denotes the total time derivative. Furthermore,  $\mathbf{F}_i$  denotes the total force acting on the particle  $i$ , [10]. We describe particle transport in an Euler-Lagrangian framework using the Maxey-Riley-Gatignol equation of motion, [9], for small rigid particles in combination with the drag expression for arbitrarily shaped particles as proposed by Brenner, [2]. Thus, the drag force  $\mathbf{F}_D$  exerted on a superellipsoidal particle moving in a fluid renders: [12]

$$\mathbf{F}_D = \pi \rho_f \nu_f c \mathbf{K} \cdot [\mathbf{u} - \mathbf{v}], \quad (2)$$

where  $\mathbf{K}$  labels the translational resistance tensor,  $c$  the semi-minor axis of the superellipsoidal particle,  $\rho_f$  the fluid density,  $\nu_f$  its kinematic viscosity, and  $\mathbf{u}$  the velocity of the fluid at the position of the particle center. The coefficient matrix of the resistance tensor in the particle reference frame (pFoR)  $\underline{K}'$  is related to its counterpart  $\underline{K}$  in the inertial frame of reference (iFoR) via the rotation matrix  $\underline{R}$  as  $\underline{K}' = \underline{R} \underline{K} \underline{R}^T$ . Using  $L_0$  and  $u_0$  to denote the characteristic scales of the problem and the fluid velocity, respectively (i.e Reynolds number  $\text{Re} = u_0 L_0 / \nu_f$ ), [3], we obtain the dimensionless parameters  $\mathbf{v}^* = \mathbf{v} / u_0$ ,  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u} / u_0$ ,  $t^* = t u_0 / L_0$ . It follows that we can write Eq. (1) as: [9, 2]

$$\frac{d\mathbf{v}^*}{dt^*} = \frac{A}{St} \left[ \mathbf{v}_s^* + \frac{c}{3d_{eq}} \mathbf{K} \cdot [\mathbf{u}^* - \mathbf{v}^*] \right] + \frac{3}{2} R \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + R \left[ \left[ \mathbf{u}^* + \frac{1}{2} \mathbf{v}^* \right] \cdot \nabla \right] \mathbf{u}^*, \quad (3)$$

using the superellipsoidal surrogate approach as presented in Štrakl et al., [12]. In Eq. (3), we considers gravity, buoyancy, pressure gradient, added mass and drag force, whereas time history effects, aerodynamic lift as well as higher order terms are neglected, [3]. In Eq. (3)  $\mathbf{v}_s^*$  denotes the dimensionless settling velocity,  $d_{eq}$  the volume equivalent diameter of a sphere, and  $A$  and  $R$  dimensionless parameters depending on the fluid-particle density ratio and  $St$  labels the Stokes number evaluated with the volume equivalent sphere diameter  $d_{eq}$ , [3]:

$$R = \frac{\rho_f}{\rho_p + 0.5\rho_f}, \quad A = \frac{\rho_p}{\rho_p + 0.5\rho_f}, \quad St = \frac{\tau_p}{\tau_f} = \frac{\rho_p}{\rho_f} \frac{d_{eq}^2 u_0}{18\nu_f L_0}. \quad (4)$$

We note that  $A/St$  scales the gravity and the drag force, while  $R$  scales the pressure gradient and the added mass term, [3]. Thus, the latter forces can be considered negligible compared to the gravity and buoyancy force  $\mathbf{F}_{GB}$  and the drag force  $\mathbf{F}_D$  when  $\rho_p \gg \rho_f$  as  $R \ll 1$ , see Eq. (4), [3]. To obtain the angular velocity of a particle, an accurate determination of the particle

orientations is crucial, [10]. Moreover, the point of contact between nonspherical particles (or a nonspherical particle and a wall) depends on the particle orientation. In general, the orientation of an arbitrarily shaped particle is described by quaternions  $\underline{e} = [e_0, e_1, e_2, e_3]^T$ , [5], and describe a rotation of the iFoR  $\underline{r} = [x, y, z]^T$  with respect to the pFoR  $\underline{r}' = [x', y', z']^T$ , [10], i.e.  $\underline{r}' = \underline{R}\underline{r}$  and under the constraint  $e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$ , [4]. Following, the rotation matrix  $\underline{R}$  is can be constructed from the quaternions as described in Wedel et al.,[13]. Futhermore, the evolution of the quaternions is related to the angular particle velocity in the particle frame  $\underline{\omega}' = [\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'}]^T$ , see Wedel et al.,[13]. The rotational motion of an arbitrarily shaped particle moving in a fluid can be described in the pFoR as follows:

$$T_{x'} = I_{x'} \frac{d\omega_{x'}}{dt} - \omega_{y'}\omega_{z'} [I_{y'} - I_{z'}], \quad T_{y'} = I_{y'} \frac{d\omega_{y'}}{dt} - \omega_{z'}\omega_{x'} [I_{z'} - I_{x'}], \quad T_{z'} = I_{z'} \frac{d\omega_{z'}}{dt} - \omega_{x'}\omega_{y'} [I_{x'} - I_{y'}], \quad (5)$$

where  $I_{x'}, I_{y'}, I_{z'}$  denote the principal values of the inertia tensor of the particle. In addition,  $T_{x'}, T_{y'}, T_{z'}$  label the hydrodynamic torques on the particle with respect to the principal axes. Considering both rotational and shear flow contributions, the resultant torque  $\mathbf{T}$  is obtained using: [12]

$$\mathbf{T} = \int_{\Gamma} \mathbf{r} \times t d\Gamma \hat{=} \pi \mu c^3 \left[ \underline{\Pi}' \begin{bmatrix} f' \\ g' \\ h' \end{bmatrix} + \underline{\Omega}' \begin{bmatrix} \xi' - \omega_{x'} \\ \eta' - \omega_{y'} \\ \chi' - \omega_{z'} \end{bmatrix} \right], \quad (6)$$

where  $\underline{\Omega}'$  and  $\underline{\Pi}'$  denote the rotation and deformation resistance coefficient matrix, respectively. Moreover,  $f, g, h$  are the off-diagonal elements of the deformation rate tensor and  $\xi, \eta$  and  $\chi$  label the spin tensor components, which are determined using:

$$\begin{aligned} f' &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_{z'}}{\partial y} + \frac{\partial u_{y'}}{\partial z} \right], & g' &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_{x'}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z'}}{\partial x} \right], & h' &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_{x'}}{\partial y} + \frac{\partial u_{y'}}{\partial x} \right], & (7) \\ \xi' &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_{z'}}{\partial y} - \frac{\partial u_{y'}}{\partial z} \right], & \eta' &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_{x'}}{\partial z} - \frac{\partial u_{z'}}{\partial x} \right], & \chi' &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_{y'}}{\partial x} - \frac{\partial u_{x'}}{\partial y} \right]. & (8) \end{aligned}$$

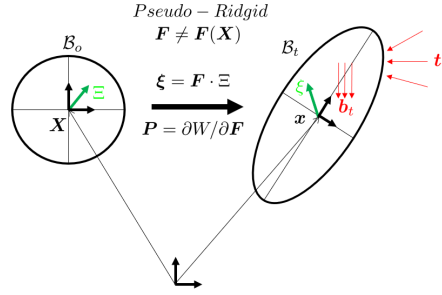
### 3.2 Particle deformation under the action of hydrodynamic forces

To describe the particle deformation from its initial undeformed state, affine deformations are used. The affine deformation assumption is especially attractive due to its low computational cost, as it is described by an affine transformation (superposed to a rigid body motion), with only nine degrees of freedom.

$$\ddot{\mathbf{F}} \cdot \boldsymbol{\Theta} + \mathbf{P} \text{vol}(\mathcal{B}_0) = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{b}_0 \otimes \boldsymbol{\Xi} dV + \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \otimes \boldsymbol{\Xi} dA. \quad (9)$$

In Eq. (9)  $\mathbf{F}$  denotes the deformation gradient,  $\boldsymbol{\Theta}$  the Euler tensor,  $\mathbf{P}$  the first Piola–Kirchhoff stress tensor,  $\text{vol}(\mathcal{B}_0)$  the volume of the undeformed particle shape, i.e. spherical shape,  $\mathbf{b}_0$  the body forces and  $\mathbf{t}_0$  the tractions exerted from the fluid on the particle. Fig. 1 illustrates the affine deformation of an initially spherical to an ellipsoidal shape. Using  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Xi}$  and the velocity of the deformation gradient tensor  $\mathbf{G} = \dot{\mathbf{F}}$  we can obtain the expression of  $\dot{\mathbf{G}}$  as

$$\dot{\mathbf{G}} = \left[ \left[ \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{b}_t \otimes \boldsymbol{\xi} dv + \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{t}_t \otimes \boldsymbol{\xi} da \right] \cdot \mathbf{F}^{-t} - \mathbf{P} \text{vol}(\mathcal{B}_0) \right] \cdot \boldsymbol{\Theta}^{-1}. \quad (10)$$



**Figure 1:** Affine deformation of an initially spherical to an ellipsoidal shape under the tractions exerted from the fluid on the particle

As we employ spatially constant body forces, in Eq. (9) and thus in Eq. (10), the first integral on the right hand side (RHS) vanishes. Using the expressions of tractions provided by Jeffrey, [7], we can evaluate the second term on the RHS of Eq. (9) analytically for ellipsoidal particles. Note that in the following, we assume a hyperelastic material, for sake of demonstration we employ the Neo-Hooke constitutive law ( $\mathbf{P} = \partial W_0 / \partial \mathbf{F}$ ). As we assume elastic particles, our initial shape at each time step is assumed to be a sphere. Thus we can compute  $\Theta$  as well as  $vol(\mathcal{B}_0)$  once at the beginning of the procedure. The Euler tensor of a sphere is obtained using

$$[\Theta]_{KJ} = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \Xi \otimes \Xi dV = \Theta \mathbf{I} = \frac{1}{5} m R^2 \mathbf{I} \quad (11)$$

and the corresponding volume is obtained by  $vol(\mathcal{B}_0) = d_p^3 \pi / 6$ . Furthermore, we need to express the term  $\int_{\delta \mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0^{n-1} \otimes \Xi dA$  using Jeffrey's equations for  $\tilde{\sigma}$ . Note that we can write the traction on an ellipsoid surface in Stokes flow as  $\mathbf{t}_t = \tilde{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  with  $\tilde{\sigma} = const$ . Thus we can write:

$$\int_{\delta \mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0^{n-1} \otimes \Xi dA = [\tilde{\sigma} vol(\mathcal{B}_t)] \mathbf{F}^{-t}. \quad (12)$$

From Jeffrey's equation we obtain:

$$[\tilde{\sigma}_{ij}] = - [p_0 + 4\mu [\alpha_0 A + \beta_0 B + \gamma_0 C]] \delta_{ij} + \frac{8\mu}{abc} \begin{bmatrix} A & H & G' \\ H' & B & F \\ G & F' & C \end{bmatrix}, \quad (13)$$

where the parameters  $A, B, C, G, F, H, G', F', H'$  as well as  $\alpha_0, \beta_0$  and  $\gamma_0$  are readily provided by Jeffrey, [7]. To summarize, we employ the following algorithm to model hyperelastic deformable particles in flows:

---

**Algorithm 1** Explicit Time Integration

---

```

1:  $[\Theta]_{KJ} = 1/5 mR^2 \mathbf{I}, \quad Vol = vol(\mathcal{B}_0)$ 
2:  $\mathbf{F} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{Zero}$ 
3: while  $t < t_{end}$ 
4:    $\mathbf{F}^{n+1} = \mathbf{F}^n + \Delta t \mathbf{G}^n$ 
5:    $\mathbf{S}^{n+1} = f(\mathbf{F}^{n+1})$ 
6:    $\mathbf{P}^{n+1} = f(\mathbf{F}^{n+1})$ 
7:    $\mathbf{G}^{n+1} = \mathbf{G}^n + \Delta t [\mathbf{S}^{n+1} - \mathbf{P}^{n+1} Vol] \cdot \Theta^{-1}$ 
8:    $n = n + 1; \quad t = t + \Delta t$ 
9: end

```

---

### 3.3 Velocity gradient

In fluid mechanics the velocity gradient is a measure of how the velocity of a fluid changes between different points within the fluid. The velocity gradient tensor  $\mathbf{L}$  is given as:

$$\mathbf{L} = \nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \partial v_x / \partial x & \partial v_x / \partial y & \partial v_x / \partial z \\ \partial v_y / \partial x & \partial v_y / \partial y & \partial v_y / \partial z \\ \partial v_z / \partial x & \partial v_z / \partial y & \partial v_z / \partial z \end{bmatrix} \quad (14)$$

and can be expressed as the sum of a skew-symmetric tensor (vorticity tensor  $\mathbf{W}$ ) and a symmetric tensor (deformation tensor  $\mathbf{E}$ ):

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} [\mathbf{L} - \mathbf{L}^T], \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2} [\mathbf{L} + \mathbf{L}^T]. \quad (15)$$

It was shown that the spin tensor  $\mathbf{W}$  is solely related to the rotation tensor  $\mathbf{R}$ . Thus,  $\mathbf{W}$  is the representative of the contribution of rotary deformation and  $\mathbf{E}$  is the contribution of stretching to the velocity gradient tensor. The rate-of-strain tensor  $\mathbf{E}$  (symmetric term) can be expressed further as the sum of a gradual isotropic expansion (or contraction)  $\mathbf{S}$  (scalar times the unit tensor  $I_{ij}$ ) and a gradual shearing deformation, with no change in volume  $\mathbf{D}$  (traceless symmetric tensor):

$$E_{ij} = \underbrace{\frac{1}{3} \left[ \sum_k \partial_k v_k \right]}_{S_{ij}} I_{ij} + \underbrace{\frac{1}{2} [\partial_i v_j + \partial_j v_i]}_{D_{ij}} - S_{ij}. \quad (16)$$

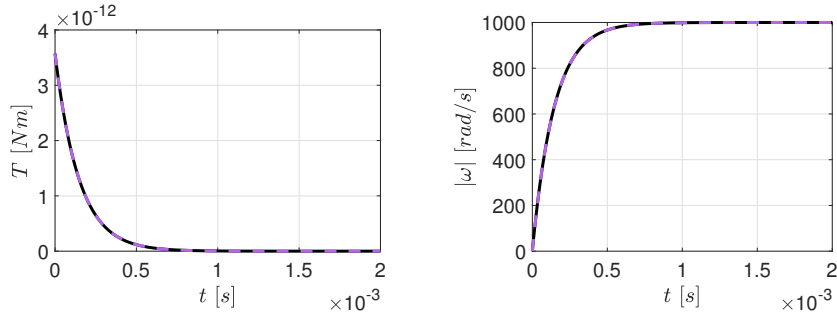
We can exploit these additive contributions to the velocity gradient for setting up exemplatroy test cases, where only one contribution of the velocity gradient is active.

## 4 Examples

For the demonstrative examples, we employ an initially spherical particle of size  $d_{eq} = 100 \mu m$  and density  $\rho_p = 1000 kg/m^3$ .

#### 4.1 Pure rotational flow

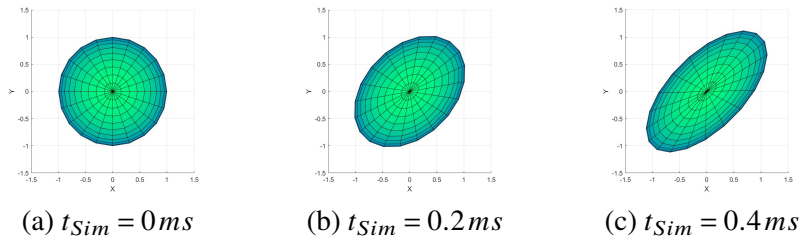
For the case of pure rotation, the strain rates vanishes, hence the velocity gradient tensor becomes  $L = W$ . For validation, we compare a rigid body to a quasi rigid body ( $E \rightarrow \infty, \nu \rightarrow 0$ ) in a pure rotational flow with  $L_{12} = -1000 s^{-1} = -L_{21}$  describing a rotation of  $\omega_z = -1000 s^{-1}$ . For the chosen material parameters, the quasi rigid body achieves good agreement in torque and angular velocity to the rigid body in pure rotational flow, see Fig. 2 and thus validates the presented model in the limit of rigid body motion.



**Figure 2:** Comparison of torque and angular velocity of a rigid particle (—) and quasi rigid particle (---), i.e  $E \rightarrow \infty, \nu \rightarrow 0$ , in pure rotational flow ( $\omega_z = -1000 s^{-1}$ ).

#### 4.2 Pure shear flow

For the case of pure shearing flow, normal strain rates and rotation vanish, hence the velocity gradient tensor becomes  $L_{ij} = E_{ij} - Diag(E_{ij})$ . Thus, for a stretching in the particle  $x - y$  plain we can set  $L_{12} = L_{21} = 1000 s^{-1}$ . In this context, we assume a deformable body ( $E = 50 Pa, \nu \rightarrow 0.5$ ). We employ a time step of  $\Delta t = 5e-08$ . As displayed in Fig. 3, the model is able to accurately replicate the particle stretch in the  $x$ - $y$ -plane.



**Figure 3:** Stretching of deformable particle in pure shear flow

### 5 Conclusions

In this study, we present a novel model for tracking soft deformable particles in flows using Lagrangian particle tracking. In this context, we assume hyperelastic, initially spherical particles

subject to affine transformations. The main achievement of the present work is the implementation and validation of a general approach to soft particle tracking. To validate the developed model for Lagrangian tracking of soft particles, we subjected the deformable particles to specific velocity gradients, i.e. pure rotational and pure shear flow, and obtained good agreement in the limiting case of rigid body motion as well as qualitatively good results for pure shear flow.

### Acknowledgements

The authors thank the Deutsche Forschungsgemeinschaft for the financial support in the framework of the project STE 544/58-2 and the Slovenian Research Agency (research core funding No. P2-0196).

### Literature

- [1] A. H. Barr. Superquadrics and Angle-Preserving Transformations. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 1(1):11–23, 1981.
- [2] H. Brenner. The Stokes resistance of an arbitrary particle-IV Arbitrary fields of flow. *Chemical Engineering Science*, 19(10):703–727, 1964.
- [3] Y. Cui, J. Ravnik, M. Hriberšek, and P. Steinmann. On constitutive models for the momentum transfer to particles in fluid-dominated two-phase flows. *Advanced Structured Materials*, 80:1–25, 2018.
- [4] Goldstein, H. *Classical mechanics*. 2 edition, 1980.
- [5] W. R. Hamilton. XXVII. On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 35(235):200–204, 1847.
- [6] T. Jeewandara. Using flexible microparticles as drug carriers to shuttle nanoparticles to the vascular wall. Technical report, 2021.
- [7] G. Jeffery. The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 102(715):161–179, nov 1922.
- [8] J. G. M. Kuerten. Point-Particle DNS and LES of Particle-Laden Turbulent flow - a state-of-the-art review. *Flow, Turbulence and Combustion*, 97(3):689–713, 2016.
- [9] M. R. Maxey and J. J. Riley. Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow. *The Physics of Fluids*, 26(4):883–889, 1983.
- [10] A. Podlozhnyuk, S. Pirker, and C. Kloss. Efficient implementation of superquadric particles in discrete element method within an open-source framework. *CPM*, 4, 09 2016.
- [11] C. Pozrikidis, editor. *Modeling and simulation of capsules and biological cells*. Chapman & Hall, CRC mathematical biology & medicine series ; v. 2, 2003.
- [12] M. Štrakl, M. Hriberšek, J. Wedel, P. Steinmann, and J. Ravnik. A Model for Translation and Rotation Resistance Tensors for Superellipsoidal Particles in Stokes Flow. *J. Mar. Sci. Eng.*, 10(3):369, 3 2022.
- [13] J. Wedel, P. Steinmann, M. Štrakl, M. Hriberšek, and J. Ravnik. Shape matters: Lagrangian tracking of complex nonspherical microparticles in superellipsoidal approximation. *International Journal of Multiphase Flow*, 158:104283, 2023.



## Investigating the Strain Rate Sensitivity and Mechanical Behavior of Photopolymer Base Cellular Structures: Focus on Base Material and Cell-Graded Gyroid Structures

*Yunus Emre Yilmaz<sup>1</sup>, Nejc Novak<sup>1</sup>, Ulaş Yaman<sup>2</sup> in Zoran Ren<sup>1</sup>*

### Raziskava mehanskega obnašanja fotopolimernih osnovnih celičnih struktur in njihove občutljivosti na hitrost deformiranja: Poudarek na osnovnem materialu in celično gradiranih giroidnih strukturah

**Abstract.** This study aims to enhance the understanding of the mechanical behavior of cellular structures, with a particular focus on the strain rate sensitivity of the base material. Cellular structures are known for their exceptional mechanical properties, presenting challenges in comprehending their complex behavior influenced by factors such as strain rate sensitivity, inertia, and morphology. To address these challenges, a comprehensive investigation combining experimental and computational approaches was conducted. Experimental analysis revealed a critical strain rate range, indicating that the material displayed ductile behavior below  $0.8 \text{ s}^{-1}$ , transitioning to a highly brittle state above  $1.67 \text{ s}^{-1}$ . Experimental analysis and computational simulations demonstrated that the response of the base material was predominantly governed by its strain rate dependency rather than inertial effects. In addition to investigating the behavior of the base material, the study also explored the mechanical characteristics of cell-graded gyroid structures using experimental analysis exclusively. These unique structures exhibited distinct properties attributed to their porous morphology, specifically their "long plateau" configuration. Remarkably, the structures demonstrated a hardening effect when subjected to rapid deformations. This observed hardening phenomenon can be attributed to the strain rate sensitivity of the base material, highlighting its significant role in shaping the overall mechanical behavior.

**Povzetek.** Ta študija si prizadeva izboljšati razumevanje mehanskega obnašanja celičnih struktur, pri čemer je poseben poudarek na občutljivosti na hitrost deformiranja osnovnega materiala. Celične strukture so znane po izjemnih mehanskih lastnostih, kar predstavlja izzive pri razumevanju njihovega kompleksnega obnašanja, na katerega vplivajo dejavniki, kot so občutljivost na hitrost deformiranja, vztrajnost in morfologija. Za reševanje teh izzivov smo izvedli celovito raziskavo, ki je združevala eksperimentalne in računalniške pristope. Eksperimentalna analiza je razkrila kritično območje hitrosti deformiranja, pri čemer se je fotopolimerni osnovni material obnašal duktilno pri hitrostih deformiranja pod  $0,8 \text{ s}^{-1}$  in prešel v visoko krhkost nad  $1,67 \text{ s}^{-1}$ . Eksperimentalna analiza in računalniške simulacije so pokazali, da je odziv osnovnega materiala predvsem odvisen od njegove občutljivosti na hitrost deformiranja in ne od inercialnih učinkov. Poleg preučevanja obnašanja osnovnega materiala je študija ekskluzivno raziskovala tudi mehanske značilnosti celično gradiranih giroidnih struktur s pomočjo eksperimentalne analize. Te edinstvene strukture kažejo

---

<sup>1</sup> University of Maribor Faculty of Mechanical Engineering

<sup>2</sup> Middle East Technical University, Mechanical Engineering Department



različne lastnosti, ki so posledica njihove porozne morfologije, zlasti njihove konfiguracije "dolgega platoja". Izjemno je, da strukture kažejo utrjevalni učinek ob hitrih deformacijah. Omenjen pojav utrjevanja pripisujemo občutljivosti osnovnega materiala na hitrost deformiranja, kar poudarja njegovo pomembno vlogo pri oblikovanju celotnega mehanskega obnašanja.

## **1 Introduction**

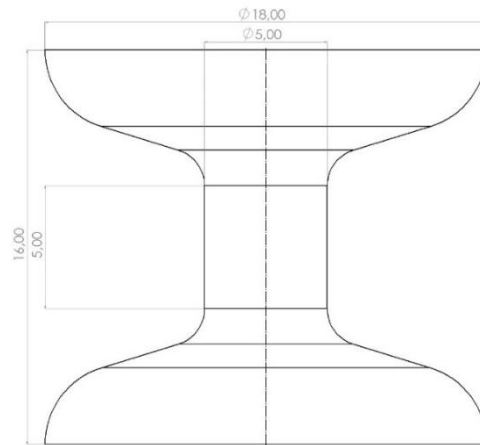
Extensive research has been dedicated to investigating the mechanical behavior of novel metamaterials with cellular structures [4]. Quasi-static compression testing has traditionally been employed to characterize fundamental material properties [1,3]. However, to gain a comprehensive understanding of advanced cellular metamaterials, it is essential to perform mechanical characterizations at higher strain rates [2]. Advanced additive manufacturing techniques have facilitated the fabrication of intricate geometries and tailored internal architectures, resulting in improved mechanical performance and functional capabilities [5]. Despite the availability of high-accuracy sensors and high-frequency data acquisition systems for measuring boundary forces, the extraction of specific influences from factors such as strain rate sensitivity, inertia, cell grading, and morphology poses significant challenges.

This study presents a comprehensive methodology to distinguish between the strain rate effects of the base material, inertia effects, and morphology effects in cellular structures. Both computational and experimental investigations are conducted on solid bulk materials free of pores to isolate the influence of morphology. The computer simulations involve varying deformation rates and eliminating the strain rate parameters of the base material to specifically analyze the inertial effects. By understanding the combined effects of inertia and strain rate dependency of the base material, the focus of the study shifts to cell-graded gyroid structures, where the arrangement and shape of the pores play a significant role. The mechanical properties of gyroid structures, specifically TPMS structures utilizing the photopolymer base "Grey Pro," are thoroughly characterized at different deformation rates. The separation of various parameters allows for a deeper understanding of gyroid structures and their mechanical behavior, facilitating their design and optimization for diverse applications.

## **2 Methodology**

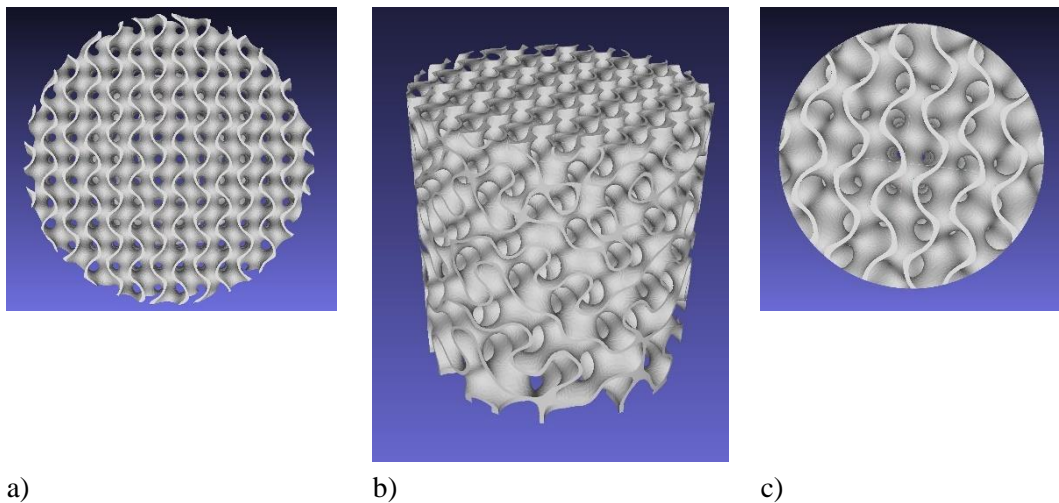
### **2.1 Sample Design**

The bulk specimen geometry was designed using SolidWorks software. It incorporated a gauge length of 5 mm and a gauge diameter of 5 mm to accurately measure deformation. To ensure effective contact with the compression test plates and minimize stress concentration, the specimen's diameter gradually increased towards its ends, allowing for a larger contact surface area of 18 mm in diameter. The overall dimensions of the specimen were precisely set to 16 mm. For a comprehensive understanding of the specimen's dimensions and geometry, please refer to Figure 1.



**Figure 1:** Dimensions of bulk Sample

Cell-graded gyroid structures were generated using the MS Lattice program. A cylindrical gyroid with cell size grading was chosen for the study. The relative density of the structure was set to 20%. The sample had a radius of 10 mm and a height of 20 mm. The initial cell size was set to 2 mm, which gradually decreased to a final size of 1 mm. A mesh density of 10 was employed for the structure. For a comprehensive understanding of the specimen's geometry, please refer to Figure 2.



**Figure 2:** a) Top, b) General, and c) Bottom view of the cell-graded gyroid structure

## 2.2 Sample Fabrication

Designed parts are fabricated using the Stereolithography (SLA). This method was the first invented AM method around 1980s. There are industrial, proconsumer and consumer types of SLA machines in the market. We have used a proconsumer model (Form 2 from Formlabs) to fabricate all the designs. In this machine, the build platform is moving up as opposed to the

conventional and industrial type of SLA machines. Since the complexity of the designs are high and feature sizes are small, we didn't use any support structures or raft underneath the models during fabrication. The stereolithography fabrication parameters for the Grey Pro material from Formlabs include a layer thickness of 50  $\mu\text{m}$ , a laser spot size of 140  $\mu\text{m}$ , and a laser power of 96 mW.

### **2.3 Strain Rate Dependency**

To understand strain rate dependency of the base material, experimental and computational studies have been carried out. To prevent morphology effects and to observe only the base material strain rate dependency, the bulk samples have been compressed at different deformation rates.

To account for the inertial effects that can influence experimental results at different deformation rates, a computational model of the bulk material was developed using LS-Dyna software. The \*Mat\_024 (\*MAT\_PIECEWISE\_LINEAR\_PLASTICITY) material card was selected to accurately capture the nonlinear behavior of the material. Importantly, no strain rate parameters were included in the simulation, and the model was run at different deformation rates to isolate the effect of inertial forces. This approach ensures that any observed differences in response can be attributed solely to inertial effects, with no confounding influence from strain rate dependencies. Although the deformation rates used in this study were relatively low, the effect of inertia was carefully quantified to verify that any observed differences in response to different deformation rates (from experiments) could be attributed to the strain rate sensitivity of the raw material.

It should be emphasized that deformation rates are not equivalent to strain rates. However, since the deformation is uniform, and the gauge length is constant for all bulk samples, the given deformation rates are directly proportional to strain rates. Conversely, for cell-graded gyroid structures, non-uniform deformation is expected, indicating that the strain rate spatially differs along the structure, and it is not possible to state the strain rate with a single value. For consistency, this article only provides the deformation rate, that is, the speed of the upper plate.

#### **2.3.1 Compression Testing**

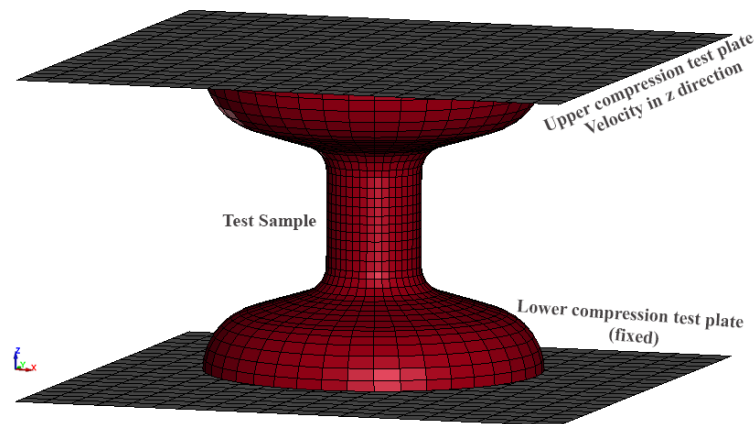
The mechanical response of the specimens was evaluated using an Tinius Olsen H10KS compression testing machine, which facilitated controlled deformation of the specimens at specific deformation rates. This allowed us to collect force-displacement data, providing insights into the material's behavior under compressive loading. To capture a comprehensive understanding of the response, we conducted a series of experiments on bulk and cell-graded gyroid samples, consisting of four different deformation rates: 6 mm/min, 60 mm/min, 120 mm/min, and 500 mm/min. Each deformation rate was investigated through three independent experiments, resulting in a total of 24 experiments. For each experiment, force values were recorded at various displacement levels, enabling us to quantify the force-displacement relationship. To ensure accuracy, the average force values for each displacement level were calculated based on the data obtained from the three experiments conducted at each deformation speed. In the case of cell-graded gyroid samples, the average stress was determined by dividing the applied force by the cross-sectional area. The cross-sectional area of the cell-graded gyroid was assumed to be that of a full cylinder with a radius of 10 mm. To calculate strain, the total deformation was divided by the initial length of the sample.

### 2.3.2 Computational Modelling

In this research, we utilized LS-DYNA software to simulate quasi-static testing through finite element analysis. The upper and lower steel plates were modelled as linear elastic materials using the MAT\_ELASTIC material model. Each plate consisted of 800 Belytschko-Tsay shell elements with dimensions of 30 x 30 mm and a thickness of 2 mm. The material properties of the plates were defined as follows: elastic modulus ( $E$ ) = 210 GPa, Poisson's ratio ( $\nu$ ) = 0.3, and density ( $\rho$ ) = 0.00785 g/mm<sup>3</sup>.

To model the lower compression test plate, we employed the \*BOUNDARY\_SPC\_SET card to select all nodes on the plate and constrain their translational and rotational movement. To account for time constraints in real experiments and computational limitations, higher deformation speeds of 3 m/s and 0.3 m/s were simulated using the \*PRESCRIBED\_MOTION\_RIGID card. By examining the negligible response variations between different speeds and ensuring equilibrium at reaction forces, we validated the assumption that simulating at these speeds would yield comparable results to actual speeds. The \*PRESCRIBED\_MOTION\_RIGID card allowed z-translational motion for upper plate nodes while constraining other degrees of freedom.

To model the contact between the two plates and the test sample, we utilized the AUTOMATIC\_SURFACE\_TO\_SURFACE option. Additionally, static and dynamic friction coefficients of 0.2 and 0.3, respectively, were assigned to account for frictional effects between the plates and the test sample. The test sample was created using 12,600 eight-point hexahedron solid elements. Detailed information regarding the computational model can be found in Figure 3.



**Figure 3:** Computational Model with Meshed Elements

In this study, we characterized the mechanical behavior of the photopolymer base material "Grey Pro" using the MAT\_PIECEWISE\_LINEAR\_PLASTICITY model (MAT\_024). To determine the material's density, we divided the known volume, obtained from computer-aided design (CAD) data, by the measured mass. The Poisson's ratio was estimated through experimental measurements, while the other material parameters were iteratively determined by minimizing the difference between the reaction force predicted by the computational model and experimental data. The elastic modulus ( $E$ ), yield strength ( $\sigma_1$ ), and yield strain ( $\epsilon_{pl,1}$ ) were

defined based on the material's initial linear response, influencing the initial linear increase observed in the stress-strain curve. The remaining material parameters governed the subsequent deformation behavior, capturing the material's response to higher stress or strain levels beyond the initial linear region.

Table 1 provides the material model parameters specific to the photopolymer base material "Grey Pro," encompassing the elastic properties, yield strength, and other relevant parameters that govern its mechanical response.

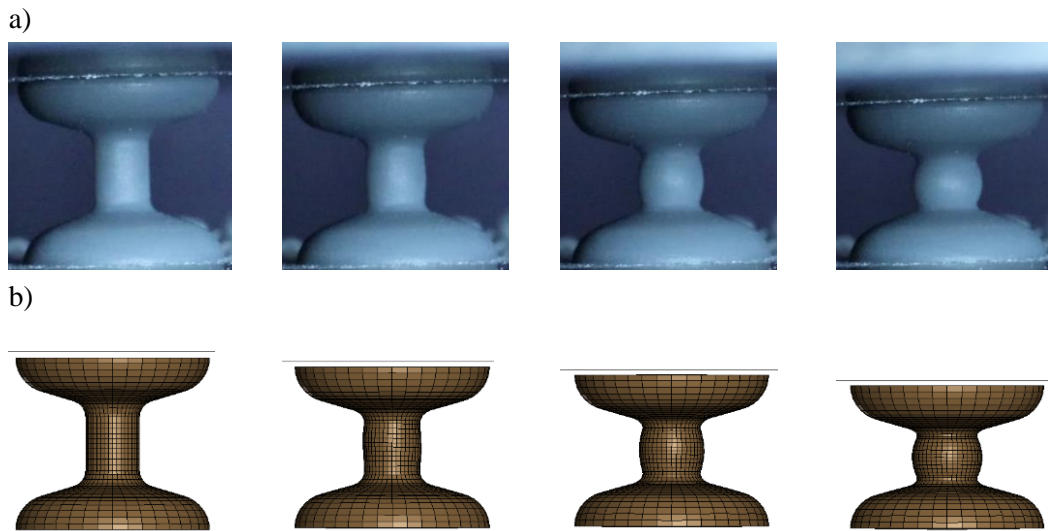
**Table 1: The MAT\_024 material model parameters for photopolymer base grey pro**

$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$E$ [MPa]	$\nu$ [-]	$C$ [MPa]	$P$ [MPa]
1080	1240	0.4	0	0
$\sigma_1$ [MPa]	$\sigma_2$ [MPa]	$\sigma_3$ [MPa]	$\sigma_4$ [MPa]	$\sigma_5$ [MPa]
104	77	78	82	122
$\epsilon_{pl,1}$ [-]	$\epsilon_{pl,2}$ [-]	$\epsilon_{pl,3}$ [-]	$\epsilon_{pl,4}$ [-]	$\epsilon_{pl,5}$ [-]
0	0.07	0.26	0.45	0.68

### 3 Results and Discussion

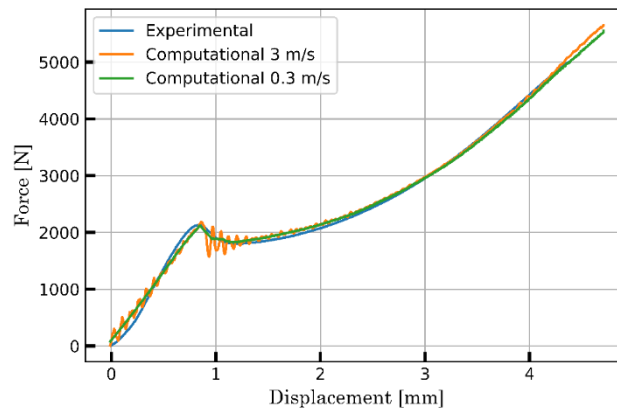
#### 3.1 Base material and inertial effects

To investigate the influence of material parameters on reaction forces, a computational model was constructed for bulk samples, which emulates experimental responses at a deformation rate of 6 mm/min. The details of the computational model have been explained in sections 2.3 and 2.3.2.



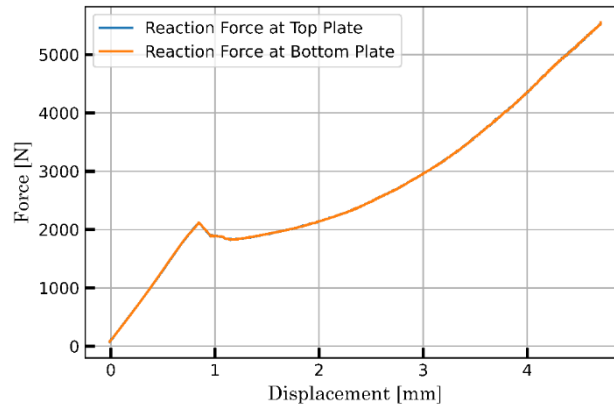
**Figure 4:** Deformation behaviour of Bulk Samples a) Real Experiment at 6 mm/min b) Computational model

Performing simulations using a computational model in real-time is a time-consuming process. To address this, we utilized upper plate velocity to increase the deformation speeds in the computational model, as the real experiments took an extensive duration. However, we observed that at relatively high speeds, there were significant differences between the forces exerted on the top and bottom plates, and we noticed large oscillations in the reaction forces at the top plate. As the speed decreased, the reaction forces became increasingly aligned, the oscillations at the top plate smoothed out, and we achieved a satisfactory response at 3 m/s. The most optimal alignment with experimental results was achieved at a lower speed of 0.3 m/s, where the reaction forces were even more aligned and smoother. Figure 5 indicates a comparison of reaction force from experimental measurement and computational model.



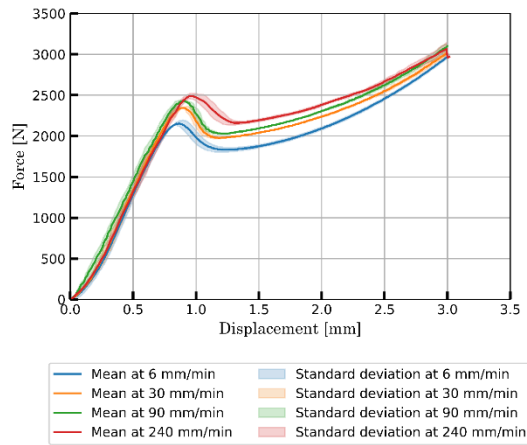
**Figure 5:** Comparison of Experimental Response with Reaction Forces Obtained from Top Plate in Computational Model at 3 m/s and 0.3 m/s.

The results demonstrate that the computational model, utilizing top plate speeds of both 3 m/s and 0.3 m/s, effectively captured the trend observed in the experimental measurements. However, the computational model with a top plate speed of 3 m/s exhibited greater fluctuations. Additionally, errors in the initial response, up until the force reached 2100 N, were attributed to the "S" shaped behavior of the bulk material, despite being modeled with linear elastic modulus. For the verification of computational model reaction forces at top and bottom plate were compared as shown in Figure 6.



**Figure 6:** Comparison of Reaction Forces Obtained from Top Plate and Bottom Plate in Computational Model at 0.3 m/s.

As depicted in Figure-6, the reaction forces exerted on both the top and bottom plates were nearly identical. This indicates that the computational model, using an upper plate velocity of 0.3 m/s, was in a state of equilibrium and accurately reflected the experimental measurements. At this point it is important to understand responses obtained for bulk samples at different deformation speeds. Their responses are shown in Figure-7.



**Figure 7:** Comparison of Experimental Response at different deformation rates.

Prior to the discussion of experimental response, it can be inferred that the computational model at both 3 m/s and 0.3 m/s is valid. Despite the tenfold difference in velocity, the trend of the reaction force curve remained unchanged, with only fluctuations varying. This indicates that inertial forces did not have an effect on the reaction force response trend. However, Figure 7 illustrates a significant change in the bulk material's response at different deformation rates, implying that the increase is primarily due to the strain rate dependency of the base material with minimal inertial effects.

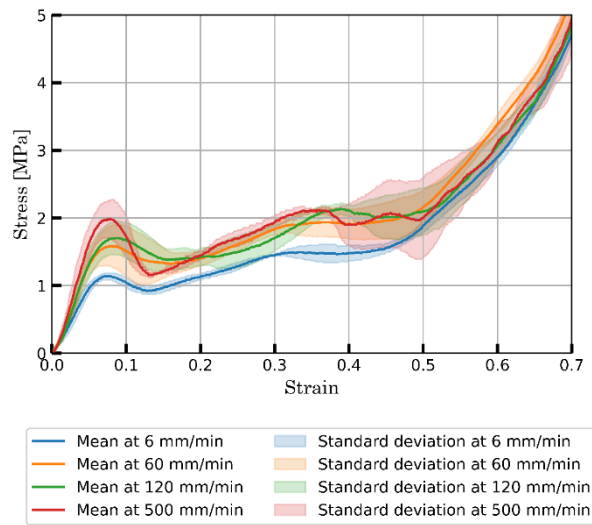
In addition to the aforementioned analyses, experiments were conducted on bulk samples at a rate of 500 mm/min. The material exhibited extreme brittleness, resulting in early fracture and

a lack of proper data collection. Given the 5 mm gauge length, it can be concluded that deformation behavior at a strain rate of  $1.67 \text{ s}^{-1}$  is vastly different than at lower strain rates. As the last recorded ductile behavior was observed at 240 mm/min we can conclude that below  $0.8 \text{ s}^{-1}$  strain rate base material behaves ductile.

### 3.2 Morphology Effects

After investigating the strain rate dependency of the base material, this study proceeded to analyze the response of the cell-graded gyroid structure using experimental analysis. The mechanical properties of the structure at various strain rates are illustrated in Figure 8. As depicted in Figure 8, an increase in the deformation rate yielded a higher overall response, starting from the initiation of collapse stress and subsequently leading to the collapse of cell struts. This increase in deformation can be attributed to the strain rate sensitivity of the base material.

The stress-strain relationships exhibited a decline in stress after the initial peak, particularly noticeable at higher strain rates. Continued deformation caused additional shell collapse, resulting in the densification of the structure. Notably, at a deformation rate of 500 mm/min, significant deviations in the response were observed, which can likely be attributed to brittle failure and the inherent randomness of the system.



**Figure 8:** Mechanical behavior of a cell-graded gyroid structure under different strain rates.

## 4 Conclusions

In conclusion, this study enhances our understanding of the mechanical behavior of cellular structures, with a focus on the strain rate sensitivity of the base material. The photopolymer base “Gray Pro” displayed ductile behavior below  $0.8 \text{ s}^{-1}$  and became highly brittle above  $1.67 \text{ s}^{-1}$ . The response of the base material was primarily influenced by its strain rate dependency rather than inertia effects.

Additionally, the behavior of cell-graded gyroid structures showed that an increase in the deformation rate led to a higher overall response, including collapse of cell struts. This increase



can be attributed to the strain rate sensitivity of the base material. The stress-strain relationships exhibited a decline in stress after the initial peak, particularly noticeable at higher strain rates. Significant deviations in the response were observed at a deformation rate of 500 mm/min, likely due to brittle failure and system randomness.

These findings have implications for material and structural design, emphasizing the importance of considering strain rate sensitivity in optimizing the performance of cellular structures.

## **5 References**

- [1] Bao, S., Ren, X., Qi, Y.J., Li, H.R., Han, D., Li, W., Luo, C. and Song, Z.Z. (2022). Quasi-Static Mechanical Properties of a Modified Auxetic Re-Entrant Honeycomb Metamaterial. *physica status solidi (b)*, 259(12), p.2200270. doi:<https://doi.org/10.1002/pssb.202200270>.
- [2] Galehdari, S.A., Kadkhodayan, M. and Hadidi-Moud, S. (2015). Low velocity impact and quasi-static in-plane loading on a graded honeycomb structure; experimental, analytical and numerical study. *Aerospace Science and Technology*, 47, pp.425–433. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ast.2015.10.010>.
- [3] Li, M., Lu, X., Zhu, X., Su, X. and Wu, T. (2019). Research on In-plane Quasi-Static Mechanical Properties of Gradient Tetra-Chiral Hyper-Structures. *Advanced Engineering Materials*, 21(3), p.1801038. doi:<https://doi.org/10.1002/adem.201801038>.
- [4] Sun, Y. and Li, Q.M. (2018). Dynamic compressive behaviour of cellular materials: A review of phenomenon, mechanism and modelling. *International Journal of Impact Engineering*, [online] 112, pp.74–115. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2017.10.006>.
- [5] Zhang, X., Zhang, K., Zhang, B., Li, Y. and He, R. (2022). Quasi-static and dynamic mechanical properties of additively manufactured Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> ceramic lattice structures: effects of structural configuration. *Virtual and Physical Prototyping*, 17(3), pp.528–542. doi:<https://doi.org/10.1080/17452759.2022.2048340>.



## ***Koncept kirigamija za izboljšanje stabilnosti aktivnih slojevitih kompozitov***

Jan Zavodnik<sup>1</sup>, Miha Brojan<sup>1</sup>

### ***The concept of kirigami for improving stability of layered active composites***

**Povzetek.** V prispevku obravnavamo elastične kompozitne strukture, ki se pod vplivom vnešenih deformacij iz ravninskih struktur preobrazijo v prostorske. Glavni problem takšnih struktur je, da prostorske deformacije v splošnem spreminjajo Gaussovo ukrivljenost, kar povzroča tlačne membranske napetosti in posledično izgubo stabilnosti. Temu se lahko ognemo z odstranjevanjem odvečnega materiala, s čimer v strukturi lokalno zmanjšamo upogibno togost in omogočimo sproščanje tlačnih membranskih napetosti, ki vodijo v nestabilnost. Interakcijo geometrije problema, rezalnih parametrov in elastičnosti analiziramo s teoretičnim modelom, s katerim lahko vnaprej napovemo končno deformacijsko obliko in njeno stabilnost. V teoretičnem modelu smo uporabili teorijo slojevitih kompozitov, Föppl-von Karmanovo teorijo plošč, učinkovite upogibne in membranske togosti, zaradi rezanja v kirigami plasti, pa izračunamo s pomočjo mešalnega pravila. Pri tem pokažemo, da lahko z uporabo kirigami plasti preprečimo izgubo stabilnosti in pripravimo kompozit do tega, da se deformira v željeno obliko. Problem smo analizirali na primeru kompozita v obliki sferične kape.

**Abstract.** In this paper, we discuss elastic composite structures that, under the influence of introduced deformations, transform from planar into three-dimensional structures. The main problem of such structures is that spatial deformations generally change the Gaussian curvature, which causes compressive membrane stresses and consequent loss of stability. This can be countered by removing excess material, thereby locally reducing the bending stiffness in the structure and allowing the release of compressive membrane stresses that lead to instability. The interaction of the geometry of the problem, cutting parameters and elasticity is analyzed with a theoretical model, which can be used to predict the final deformation shape and its stability in advance. In the theoretical model, we used the theory of layered composites, the Föppl-von Karman plate theory, while the effective bending and membrane stiffnesses due to cutting in kirigami layers are calculated using the mixing rule. Here, we show that by using kirigami layers, we can prevent the loss of stability and prepare the composite to deform into the desired shape. We analyzed the problem on the example of a composite in the form of a spherical cap.

---

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Laboratorij za nelinearno mehaniko (LANEM)

## 1 Uvod

Strukture, ki se pod vplivom prepisane deformacije iz ravninske preobrazijo v prostorsko obliko, dobivajo čedalje več pozornosti v številnih aplikacijah, predvsem v aktivnih elastičnih strukturah, kot npr. za uporabo v mehki robotiki, za izdelavo samo-postavljivih bivalnikov, itn. Ta predpisana deformacija je lahko posledica zaostalih napetosti, temperaturnega raztezanja, nabrekanja ali rasti. Primeri iz narave vključujejo Venerino muholovko, rastoče liste in ovijanje plezalk z viticami pri rastlinah ter nastanek možganov, pljuč in črevesja pri živalih, kjer rast ali nabrekanje povzročajo deformacije, ki so odgovorne za spremembo oblike. Poleg deformacij, ki so vnesene s pomočjo naštetih mehanizmov, so lahko vnešene tudi med izdelavo kompozita tako, da tanko (ponavadi elastično) plast prednapnemo in jo pritrdimo na elastično podlago. Zaradi nekompatibilnosti specifičnih deformacij se takšna strukutra iz ravninske upogne v prostorsko obliko. Problem nastane, če želimo strukturo iz ravninske oblike oz. ukrivljene, brez Gausove ukrivljenosti, močno deformirati v prostorsko obliko z veliko Gausovo ukrivljenostjo, kot na primer iz ravne okrogle plošče v polkroglo. Preprost primer tega koncepta je ovijanje ovijalnega papirja okrog krogle, kar vodi v nastanek gub in zmečkanin – glej npr. Grason idr. [4]), Davidovitch idr. [3], Pezzulla idr. [6]. Ta interakcija med nekompatibilnostjo topologij in elastičnostjo, ki je v realnih inženirskih konstrukcijah (ali bioloških sistemih) vnesena v katerikoli del tanke strukture, npr. zaradi segrevanja, rasti ali nabrekanja, lahko drastično vpliva na morfologijo celotnega objekta in povzroči mehanske nestabilnosti. Temu pa se lahko intuitivno ognemo npr. z metodičnim zlaganjem strukture, po načelu npr. starodavne japonske tehnike zlaganja papirja, ki jo poznamo pod imenom *origami* ali pa z metodičnim odstranjevanjem materiala na mestih, kjer bi sicer nastale gube, npr. s tehniko, ki jo Japonci imenujejo *kirigami*.

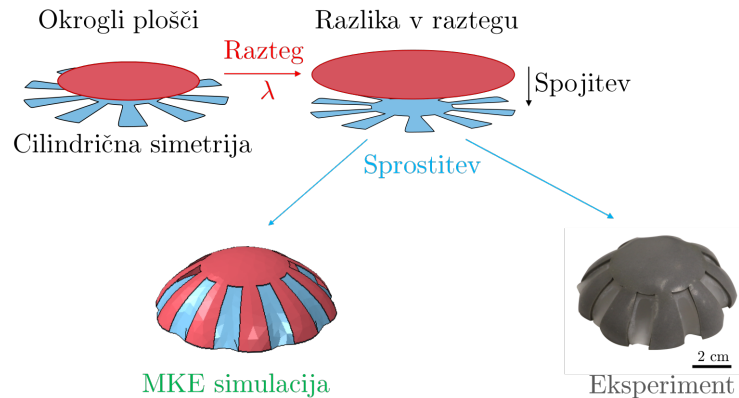
V tem prispevku problem geometrijskih frustracij zaradi nekompatibilnosti ravninske in krogelne topografije rešimo s kirigami tehniko tako, da iz okrogle tanke podlage izrežemo nekaj krožnih izsekov in nanjo pritrdimo raztegnjeno okroglo elastično ploščo, kot kaže slika 1. S tem lokalno v strukturi zmanjšamo upogibno togost in omogočimo sproščanje tlačnih membranskih napetosti, ki vodijo v nestabilnost. Na prvi pogled je problem z geometrijskega stališča videti preprost, saj je potrebno odstraniti le toliko materiala, da se obseg zunanjšega oboda okrogle plošče izenači z obsegom predpisane sferične kape. Vendar pa je v sistemu potrebno upoštevati tudi njegovo elastičnost in zaradi zmanjšanja upogibne togosti tendenco po izgubi stabilnosti. V ta namen bomo predpostavili teoretični model za določitev števila in velikosti izrezov za pridobitev točno želene prostorske oblike, ne da bi pri tem sistem izgubil stabilnost.

V nadaljevanju bomo najprej predstavili matematični model tega problema in postopek reševanja, čemur bodo sledili še rezultati in zaključne misli.

## 2 Matematični model

Radi bi opazovali interakcijo zaostalih napetosti oz. deformacij zaradi raztega  $\lambda$  okrogle plošče in nedeformiranega kirigami vzorca po spojitvi, slika 1. Po sprostitvi tako zgrajenega kirigami kompozita bomo opazovali vzajemni vpliv med obema plastema, ki je v primeru tankih plošč še toliko bolj pomemben, saj sistem privede do izgube stabilnosti in gubanja po obodu.

Za reševanje problema bomo uporabili teorijo tankih kompozitnih plošč. Pri tem bomo



**Slika 1:** Koncept izdelave okrogle kirigami kompozitne plošče z zaostalimi napetostmi v plasteh. Cilj je izdelati sferično kapo predpisane višine in premera.

upoštevali: 1) da lahko učinkovito membransko in upogibno togost kirigami kompozitne strukture izračunamo po tako imenovanem mešalnem pravilu, kot pri izračunu učinkovitih lastnosti kompozitov in 2) da lokalni upogib posameznih delov kompozitne strukture (izrezani del in neizrezani del) povzročata dodatno razbremenitev membranskih napetosti v kirigami kompozitu. Najprej bomo izpeljali teorijo tankih kompozitnih plošč, nato pa upogibne in membranske togosti nadomestili s tistimi, ki so primerne za naš kirigami kompozit.

## 2.1 Tanke kompozitne plošče

Za reševanje problemov tankih plošč lahko uporabimo Kirchhoffovo predpostavko o pravokotnih prerezi in zapišemo izraz za vektor pomika

$$\mathbf{u}(r, \theta, z) = \mathbf{u}^0(r, \theta) - z \nabla w(r, \theta), \quad (1)$$

kjer so  $r, \theta, z$  cilindrične koordinate v radialni in obodni smeri ter debelini,  $\mathbf{u}^0$  je vektor tangentnega pomika točke na nevtralni ploskvi,  $w$  je prečni pomik te točke,  $\nabla$  pa je diferencialni operator v (lokalni) ravnini. S pomočjo Green-Lagrange-ovega (GL) tenzorja  $\mathbf{E}_{\text{FvK}}$  deformacij in Föppl-von Karmanovih (FvK) kinematičnih predpostavk zapišemo

$$\mathbf{E}_{\text{FvK}} = \mathbf{E}_{\text{FvK}}^0 - z \boldsymbol{\kappa}, \quad (2)$$

kjer je  $\mathbf{E}_{\text{FvK}}^0 = (\nabla \mathbf{u}^0 + (\nabla \mathbf{u}^0)^T + \nabla w \otimes \nabla w) / 2$  GL deformacijski tenzor nevtralne ploskve glede na FvK predpostavke, [5]. V teh izrazih so  $\boldsymbol{\kappa} = \nabla \otimes \nabla w$  tenzor ukrivljenosti,  $\nabla w \otimes \nabla w$  pa predstavlja edini nelinearni člen, ki še ostane. V tem modelu bomo zaradi enostavnosti uporabili St. Venant-Kirchhoff-ov materialni model:

$$\boldsymbol{\sigma}_K = \frac{Y_K}{1 - \nu_K^2} ((1 - \nu_K) (\mathbf{E}_{\text{FvK}} - \mathbf{S}_K) + \nu_K \text{sl}(\mathbf{E}_{\text{FvK}} - \mathbf{S}_K) \mathbf{I}), \quad (3)$$

kjer so  $Y_K$ ,  $\nu_K$ ,  $S_K$  Youngov modul, Poissonov količnik in tenzor deformacij zaradi prednapetja, vse v  $K$ -ti plasti kompozitne položče. Pri tem je  $S_K = -I(\lambda - 1)$ , kjer sta  $\lambda$  in  $I$  razteg plošče in enotski tenzor. Kot ponavadi, definiramo tenzorja membranskih sil in upogibnih momentov (na enoto dolžine) takole:  $\mathbf{N} = \int_h \boldsymbol{\sigma} dz$  in  $\mathbf{M} = \int_h \boldsymbol{\sigma} z dz$ , kjer je  $h$  skupna debelina kompozitne plošče. Pokažemo lahko, da so  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\kappa}$ ,  $\mathbf{E}_{\text{FvK}}^0$  in  $\lambda$  povezane takole:

$$\mathbf{N} = \bar{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{E}_{\text{FvK}}^0 + \bar{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{\kappa} + \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\lambda) \quad \text{in} \quad \mathbf{M} = \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{E}_{\text{FvK}}^0 + \tilde{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{\kappa} + \tilde{\boldsymbol{\gamma}}(\lambda). \quad (4)$$

Če izrazimo  $\mathbf{E}_{\text{FvK}}^0$  iz en. (4)<sub>1</sub> in ga vstavimo v en. (4)<sub>2</sub>, dobimo

$$\mathbf{M} = \mathbf{e} \mathbf{N} - \bar{\mathbf{D}} \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\gamma}_0. \quad (5)$$

V zadnjih matematičnih izrazih so  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ ,  $\bar{\boldsymbol{\beta}}$ ,  $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $\bar{\mathbf{D}}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}_0$  pomožni (dolgi) izrazi, ki vsebujejo geometrijske in snovne konstante ter razteg. Definirajmo sedaj Airy-jevo napetostno funkcijo  $\mathcal{F}$ ,

$$\tilde{\nabla} \tilde{\nabla} \mathcal{F} := \Delta \mathcal{F} \mathbf{I} - \nabla \otimes \nabla \mathcal{F} = \mathbf{N}, \quad (6)$$

ki zadosti ravnovesnim enačbam v ravnini  $\nabla \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0}$ , [2]. Vstavimo en. (5) in (6) v ravnovesno enačbo v prečni smeri, da dobimo  $\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{M}) + \nabla \cdot (\mathbf{N} \cdot \nabla w) = 0$  oz. alternativno

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot (\bar{\mathbf{D}} : \nabla \otimes \nabla w)) - \nabla \cdot (\mathbf{N} \nabla w) = 0, \quad (7)$$

kjer smo, brez da bi izgubil vpogled v fizikalno dogajanje, upoštevali  $\nabla \cdot \nabla \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{N}) \approx 0$  in  $\nabla \times (\nabla \times (\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\kappa}))^T \approx 0$ . Podobno lahko zapišemo tudi kompatibilnostno enačbo deformacij  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_{\text{FvK}}^0)^T = \mathbf{0}$ , ki dobi naslednjo obliko

$$-\nabla \times (\nabla \times (\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{-1} : \tilde{\nabla} \tilde{\nabla} \mathcal{F}))^T + \frac{1}{2} [w, w] = 0, \quad (8)$$

kjer je  $[ , ]$  t.i. Monge-Ampere-ov operator, [2].

## 2.2 Efektivna togost kirigami kompozitov in sprostitev membranskih napetosti zaradi lokalnega upogiba

Kot rečeno, bomo efektivne upogibne togosti za radialno in cirkularno smer izračunali kot funkcijo deleža izrezanega materiala  $\alpha = (\text{kot izrezanega materiala}) / (2\pi)$ , števila krožnih izsekov  $n_c$ , upogibne togosti dela kompozita, kjer je ena plast materiala odstranjena in ostaja le še substrat (napeta plast  $D^{\text{sub}}$ ) in upogibne togosti, dela materiala kjer imamo obe plasti  $D^{\text{both}}$ . Tako je v radialni smeri  $D_{rr} = \alpha D^{\text{sub}} + (1 - \alpha) D^{\text{both}}$  (analogno kot vzporedno vezane vzmeti) in v cirkularni smeri  $D_{\theta\theta} = (\alpha / D^{\text{sub}} + (1 - \alpha) / D^{\text{both}})^{-1}$  (analogno kot zaporedno vezane vzmeti). Analogne izraze lahko zapišemo tudi za membransko togost  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  in efektivno Poissonovo razmerje  $\nu_{r\theta} = (\alpha / \nu^{\text{sub}} + (1 - \alpha) / \nu^{\text{both}})^{-1}$ , [1].

Sprostitev membranskih napetosti v kirigami kompozitih se dogaja zaradi upogiba posameznih  $i$ -tih krožnih izsekov, kot je prikazano na sliki 1. Za izračun te sprostitve definiramo  $\zeta_i$ , ki meri kot vzdolž cirkularne koordinate  $\theta$ ,  $\varphi$  pa meri kot vzdolž radialne koordinate  $r$ . V klasični FvK teoriji sta ta kota enaka gradientu navpičnega odmika  $(\varphi, \zeta^i) = \nabla w^i$ . To pomeni, da so za nas pomembne komponente ukrivljenostnega tenzorja  $\boldsymbol{\kappa}^i = \nabla \otimes \nabla w^i$  enaka

$\kappa_{rr}^i = \varphi_{,r}$ , in  $\kappa_{\theta\theta}^i = \varphi/r + \zeta_{,\theta}^i/r$ . Predpostavljamo, da je  $\zeta^i$  odsekovno linearen v cirkularni smeri  $\theta$ , in da je sprememba tega kota v enem krožnem izseku  $\Delta\zeta^i = \zeta_{,\theta}^i\Delta\theta$ . Zaradi  $n_c$ -kratne simetrije strukture mora biti sprememba kota v izseku  $\Delta\zeta^{\text{sub}}$  točno nasprotna spremembi kota  $\Delta\zeta^{\text{both}}$ . To pomeni, da velja  $n_c\Delta\zeta^{\text{sub}} + n_c\Delta\zeta^{\text{both}} = 2\pi r(\alpha\kappa_{\theta\theta}^{\text{sub}} + (1-\alpha)\kappa_{\theta\theta}^{\text{both}} - \varphi/r) = 0$ . Tako lahko izračunamo povprečno normalno ukrivljenost v cirkularni smeri kot  $\kappa_{\theta\theta} := \varphi/r = \alpha\kappa_{\theta\theta}^{\text{sub}} + (1-\alpha)\kappa_{\theta\theta}^{\text{both}}$ , poleg tega pa velja, da sta normalna moment in membranska sila konstantna v cirkularni smeri  $M_{\theta\theta}^{\text{sub}} = M_{\theta\theta}^{\text{both}}$  in  $N_{\theta\theta}^{\text{sub}} = N_{\theta\theta}^{\text{both}}$ . Za večjo enostavnost, brez izgube fizikalnega vpogleda lahko predpostavimo  $e^{\text{sub}} \approx e^{\text{both}}$  in dobimo, da sta  $\zeta_{,\theta}^{\text{both}}/r = C_{\text{both}}\kappa_{\theta\theta} + \delta_{\text{both}}$  in je  $\zeta_{,\theta}^{\text{sub}}/r = C_{\text{sub}}\kappa_{\theta\theta} + \delta_{\text{sub}}$ , kjer so  $C_{\text{both}}$ ,  $C_{\text{sub}}$ ,  $\delta_{\text{both}}$  in  $\delta_{\text{sub}}$  koeficienti, odvisni od števila rezov  $n_c$ , količine izrezanega materiala  $\alpha$  in geometrijskih in materialnih lastnosti. S pomočjo tega izraza lahko iz ukrivljenosti izračunamo člen  $[w, w] = (\varphi_{,r}(\varphi + \zeta_{,\theta}) - \zeta\zeta_{,r})/r$ , ki upošteva spremembo membranskih napetosti zaradi upogibnih deformacij.

### 3 Analitična rešitev in diskusija

V tem poglavju bomo najprej rešili osno simetrični problem upogiba kirigami kompozita in analizirali kako parametri rezanja, kot sta število izrezov  $n_c$  in delež izrezanega materiala  $\alpha$  vplivata na tlačne membranske napetosti, ki so razlog za izgubo stabilnosti. Potem bomo analizirali odpornost kirigami strukture na uklon na alternativnem primeru. Nazadnje bomo pokazali vpliv kombinacije parametrov rezanja na membranske tlačne napetosti in na odpornost proti uklonu ter zapisali smernice za izdelavo stabilnih kirigami kompozitov.

#### 3.1 Rotacijsko simetrična rešitev

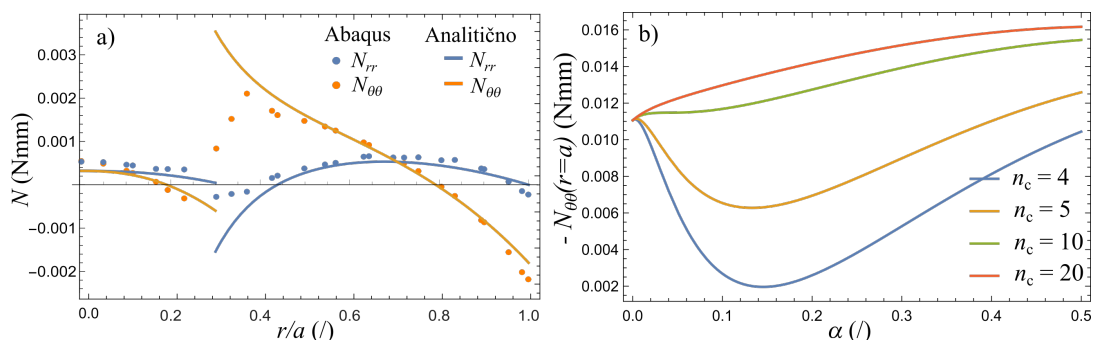
Najprej bomo poiskali rešitev, ko je začetni razteg  $\lambda$  v eni od plasti relativno majhen. Tedaj predvidevamo, da se bo kompozitna plošča deformirala v rotacijsko-simetrično obliko, ki je podobna paraboloidu. S pomočjo substitucije  $\varphi = w_{,r}$  in  $\phi = \mathcal{F}_{,r}$  in dejstva, da je rob plošče prost, lahko izraza (7) and (8) preoblikujemo v

$$\begin{aligned} r \left( D_{rr}\varphi_{,rr} + D_{\theta\theta}\frac{\varphi_{,r}}{r} - D_{\theta\theta}\frac{\varphi}{r^2} \right) - \phi\varphi &= 0, \\ r \left( \Lambda_{\theta\theta}\phi_{,rr} + \Lambda_{rr}\frac{\phi_{,r}}{r} - \Lambda_{rr}\frac{\phi}{r^2} \right) + \frac{1}{4} \left( \varphi^2 - \overline{\zeta^2} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

kjer so  $\Lambda_{kl}$  membranske podajnosti (inverz membranske togosti). Nelinearni člen  $\overline{\zeta^2}$  opisuje sprostitve membranskih napetosti zaradi upogiba krožnih izrezov v cirkularni smeri. Aproksimacija tega člena je izražena kot

$$\begin{aligned} \overline{\zeta^2} &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{2\pi\alpha} (\zeta^{\text{sub}})^2 d\theta + \int_{2\pi(1-\alpha)} (\zeta^{\text{both}})^2 d\theta \right) \\ &= (1-\alpha)(C_{\text{both}}\varphi + \delta_{\text{both}}r)^2(2\pi(1-\alpha)/n_c)^2/12 + \alpha(C_{\text{sub}}\varphi + \delta_{\text{sub}}r)^2(2\pi\alpha/n_c)^2/12. \end{aligned} \quad (10)$$

Uporabimo nastavek  $\varphi(r) = C_1(r/a)^n$ , kjer je koeficient  $C_1 = \gamma_0 a / (D_{\theta\theta} + nD_{rr})$  izračunan iz robnih pogojev  $M_{rr}(r=a) = 0$  in  $N_{rr}(r=a) = 0$ , pri tem pa je  $a$  polmer krožne plošče. Napetostna funkcija  $\phi(r)$  je izračunana iz en. (9)<sub>2</sub>, medtem ko je  $n$  pridobljen z minimizacijo napake



**Slika 2:** a) Primerjava membranskih sil v kirigami kompozitu izračunanih iz teorije in pridobljenih iz simulacije. b) Spreminjanje velikosti tlačnih cirkularnih membranskih sil v odvisnosti od števila in velikosti rezov.

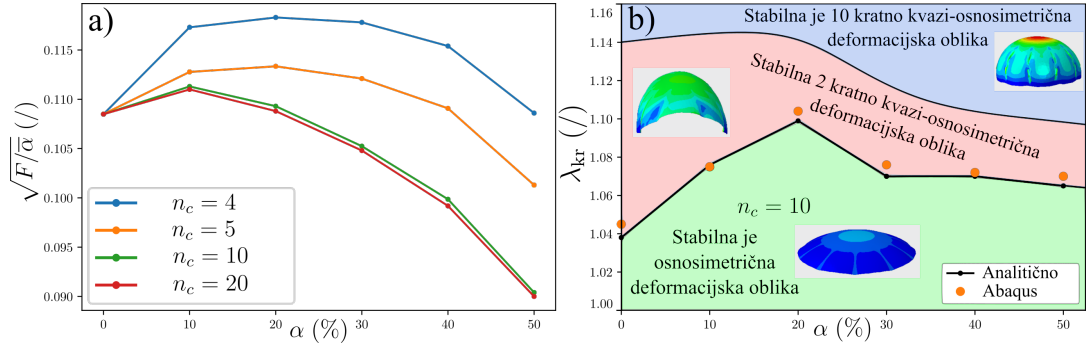
šibke oblike enačbe (9)<sub>1</sub>. Membranske napetosti pridobljene s pomočjo zgornje teorije lahko na sliki 2a) primerjamo z rezultati simulacije v Abaqusu. Pri tem je debelina raztegnjene plasti  $h_{\text{sub}} = 1,0$  mm, Youngov elastični modul  $E_{\text{sub}} = 115,5$  MPa in Poissonov količnik  $\nu_{\text{sub}} = 0,490$ . Neraztegnjena kirigami plast je debela  $h_{\text{kir}} = 1,1$  mm, Youngov elastični modul in Poissonov količnik pa sta  $E_{\text{kir}} = 234,58$  MPa in  $\nu_{\text{kir}} = 0,489$ . Raztegnjen polmer obeh plošč, preden ju zlepimo in razbremenimo, je  $a = 40$  mm.

S pomočjo te teorije lahko vidimo ugotovimo, da pri prostorski strukturi s konstantnim prednapetjem  $\lambda$ , povečevanje deleža izrezanega materiala  $\alpha$  pomeni zmanjšanje upogibnih togosti  $D_{\theta\theta}$  in  $D_{rr}$ . Zmanjšanje upogibnih togosti pomeni, da se povečajo upogibne deformacije zaradi prednapetja (poveča kot  $\varphi$ ), kar pa pomeni povečanje velikost membranskih sil  $\mathbf{N}$ . Po drugi strani, se zaradi zmanjšanja upogibnih togosti poveča lokalni upogib in s tem člen  $\bar{\zeta}^2$ , ki razbremeni membranske sile  $\mathbf{N}$  v enačbi (9)<sub>2</sub>. Za preprečevanje izgube stabilnosti želimo čim bolj zmanjšati tlačne cirkularne membranske sile na obodu kirigami kompozita. V primeru, ko je število izrezov majhno  $n \rightarrow 2$  je efekt razbremenitve sil zaradi lokalnega upogiba skozi člen  $\bar{\zeta}^2$  zelo velik in povečanje količine izrezanega materiala zmanjša membranske sile  $\mathbf{N}$ . V primeru, ko pa je število izrezov veliko  $n \rightarrow \infty$ , je efekt razbremenitve zaradi lokalnega upogiba majhen in prevladuje efekt zaradi povečanja globine strukture. V tem primeru se velikost membranskih sil še poveča in nevarnost za izgubo stabilnosti je še večja. To je prikazano na sliki 2b), kjer je prikazana velikost membranske sile  $N_{\theta\theta}$  na robu kirigami kompozita.

Izkaže se, da le poznavanje pogojev, kjer so tlačne membranske sile  $N_{\theta\theta}$  na robu najmanjše, ne zagotavlja največje odpornosti na izgubo stabilnosti kirigami kompozita. Poleg vpliva parametrov rezanja na velikost membranskih sil moramo upoštevati še kako rezanje spremeni upogibno togost, ki vpliva na odpornost kirigami kompozita na izgubo stabilnosti.

### 3.2 Odpornost kirigami kompozita na izgubo stabilnosti

Odpornost kirigami kompozita na uklon bomo analizirali s postavitvijo alternativnega problema, kjer je kirigami kompozitna lupina brez napetosti obremenjena s homogeno tlačno napetostjo  $\mathbf{N} = \text{diag}(-F, -F)$ . Odpornost kirigamija na uklon lahko v tem alternativnem pro-



**Slika 3:** a) Odpornost kirigami kopozita na uklon, izračunana na alternativnem problemu. b) Fazni prostor, ki prikazuje meje kritičnih prednapetij  $\lambda_{kr}$  za prehod v območje, kjer je stabilna deformacijska oblika v obliki sedla in območje, kjer je stabilna deformacijska oblika s številom gub enakim številu rezov  $n_c$ , v tem primeru 10.

blemu definiramo kot velikost sile  $F$ , ki povzroči uklon. Enačbo, ki opisuje uklon dobimo tako, da okrog dane deformirane lege (predpostavljamo, da je lupina pofsfera) lineariziramo in združimo enačbi (7) in (8), tako dobimo  $D^i \Delta^2 w + F \Delta w + \bar{\alpha}(1 - (v^i)^2) \mathbf{\kappa}_0 : \mathbf{\kappa}_0 w = 0$ . Enačbo rešimo numerično z metodo končnih elementov, kjer uporabimo aproksimacijo po elementu  $w_e(r, \theta) = r^m \phi_e(\theta)$ , kjer je  $\psi_e(\theta_e) = \mathbf{U}_e \cdot \mathbf{\Psi}(\theta_e)$  na elementu  $e$  definiran kot polinom tretje stopnje. Matrike končnih elementov so definirane kot  $\mathbf{K}_D(m, \lambda) - F \mathbf{K}_N(m, \lambda) = 0$ , kjer je  $\mathbf{K}_D(m, \lambda)$  upogibna togost in  $\mathbf{K}_N$ , ki predstavlja membransko togost. Sistem rešimo za različna števila in velikost izrezov  $n_c$  in  $\alpha$ , kot je prikazano na sliki 3a).  $m$  izberemo tako, da je  $F$  najmanjša.

Vidimo, da je odpornost največja pri majhnem številu rezov, z večjim številom in s tem tudi večjo simetričnostjo strukture pa odpornost na uklon pada.

### 3.3 Snovanje stabilne pofsferične oblike

S kombiniranjem znanja o membranskih silah in uklonski odpornosti vidimo, da lahko stabilno polkrogli podobno obliko dobimo, če je število rezov  $n_c$  majhno, delež izrezanega materiala pa  $\alpha \approx 15\%$ . Tako so notranje tlačne membranske sile najmanjše, odpornost na uklon pa največja. Ker pa je takšna struktura slabo osnosimetrična nas zanima kakšne parametre moramo izbrati da bo stabilna struktura z npr.  $n_c = 10$  rezov. V ta namen analiziramo problem lastnih vrednosti podobno kot v prejšnjem podpoglavju, le da tokrat z realnimi membranskimi silami kot obremenitvami. Rešujemo problem lastnih vrednosti  $D^i \Delta^2 w - \mathbf{N}_0(\lambda) : \nabla \nabla w + \bar{\alpha}(1 - (v^i)^2) \mathbf{\kappa}_0(\lambda) : \mathbf{\kappa}_0(\lambda) w = 0$ , ki je tokrat okoli osnosimetrične rešitve linearizirana kombinacija enačb (7) in (8) z  $\mathbf{N}_0 = \text{diag}(\phi/r, \phi_r)$ . Z uporabo enake formulacije končnih elementov sedaj iteracijsko rešujemo enačbo  $\mathbf{K}_D(m, \lambda) + (\lambda - 1)^2 \mathbf{K}_N(m, \lambda) = 0$ . Kritične vrednosti  $\lambda_{kr}$ , kjer struktura izgubi in se deformira v deformacijsko obliko podobno sedlu (pringles čips) so za različne vrednosti  $\alpha$  in  $n_c = 10$ , prikazane na sliki 3b). Tam lahko tudi opazimo, da vrednosti  $\lambda$ , ki so manjše od  $\lambda < \lambda_{kr}$  niso dovolj velike, da bi lahko dosegli stabilno pofsferično obliko. Eksperimenti in numerične simulacije pa so pokazale, da je možno pridobiti pofsfero, saj struktura pri raztegu



$\lambda < \lambda_{\text{polsfera}}$  že spet izgubi stabilnost. Izkazuje se, da je deformacijska oblika v katero pade struktura, taka, da ima toliko gub, kolikor izrezov smo odstranili iz strukture. To pomeni, da je za izdelavo sferične kape boljše, da iz kirigami kompozita izrežemo veliko kosov materiala – za veliko osno simetrijo – in veliko materiala, da se struktura pri čim manjših  $\lambda$  ukloni v želeno uklonsko obliko.

#### 4 Zaključki

V prispevku smo analizirali kako odstranjevanje materiala iz prednapete polkrožne kompozitne lupine vpliva na stabilnost in pridobivanje zelene deformacijske oblike.

Razvili smo teorijo, ki opisuje kako število izrezov in količina izrezanega materiala iz neprednapete plošče vpliva na globino sferične kape in membranske napetosti, ki so odgovorne za izgubo stabilnosti. Teorija temelji na učinkovitem opisu upogibne in membranske togosti kirigami kompozitne plošče po mešalnem pravilu, ki se običajno uporablja pri opisu kompozitnih materialov. Naša teorija prav tako učinkovito opiše lokalno upogibanje posameznih krožnih izsekov, kar povzroča zmanjševanje membranskih napetosti zaradi krožnih izrezov. Teorija se kvalitativno precej dobro ujame s simulacijami in je zato ustrezna za kvalitativno analizo membranskih napetosti pred izgubo stabilnosti.

S pomočjo razvite teorije in analize izgube stabilnosti ugotovimo, da majhno število rezov močno zmanjša membranske napetosti in celo poveča odpornost na uklon, vendar takšna struktura z majhno stopnjo simetrije ni vedno zaželena. Za večjo stopnjo osne simetrije moramo povečati število izrezov, žal pa se s tem povečajo membranske napetosti in zmanjša odpornost na uklon. To pomeni, da ne moremo doseči stabilne sferične kape, razen če toliko povečamo količino izrezanega materiala, da se v želenem stanju struktura ukloni v uklonsko obliko, ki ima enako število gub, kot je število zarez.

#### Literatura

- [1] W. Callister. *Materials Science and Engineering: An Introduction*. Wiley, 1997.
- [2] C. D. Coman. On the compatibility relation for the föppl–von kármán plate equations. *Applied Mathematics Letters*, 25(12):2407–2410, 2012.
- [3] B. Davidovitch, Y. Sun, and G. M. Grason. Geometrically incompatible confinement of solids. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 116(5):1483–1488, 2019.
- [4] G. M. Grason and B. Davidovitch. Universal collapse of stress and wrinkle-to-scar transition in spherically confined crystalline sheets. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 110(32):12893–12898, 2013.
- [5] L. D. Landau, L. P. Pitaevskii, E. M. Lifshitz, and A. M. Kosevich. *Theory of Elasticity*. Butterworth-Heinemann, 3 edition, 1986.
- [6] M. Pezulla, N. Stoop, M. P. Steranka, A. J. Bade, and D. P. Holmes. Curvature-induced instabilities of shells. *Physical review letters*, 120(4):048002, 2018.

# Večnivojski nadomestni model za spremljanje strukturnega stanja na podlagi reduciranega modela in nevronske mreže

Matej Anko<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Strojništvo, Aškerčeva cesta 6, 1000 Ljubljana

(\* matej.anko13@gmail.com)

## Uvod

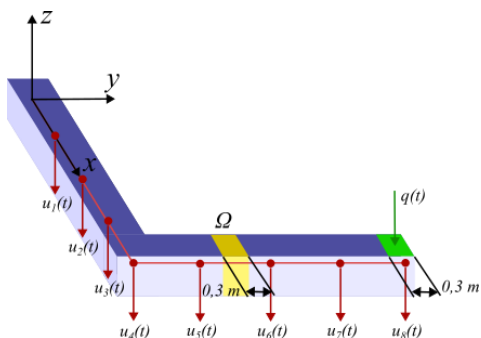
Spremljanje stanja struktur, kot so mostovi, zgradbe, razni stroji, prevozna sredstva in še bi lahko naštevali, je ključnega pomena za zagotavljanje varnosti in trajnostne uporabe teh konstrukcij. Zato je razvoj in izboljšanje metod spremljanja strukturnega stanja eno izmed pomembnejših področij, s katerimi se ukvarjajo inženirji strojništva.

V zadnjih letih so se pojavile nove metode, ki temeljijo na uporabi naprednih računalniških modelov in metod strojnega učenja, kot so nevronske mreže.

V nadaljevanju bomo predstavili metodo, s pomočjo katere lahko pridobimo odzive poškodovane strukture na neko vzbujanje, ki temelji na več različnih numeričnih modelih, in med seboj povezanih nevronske mreže – NM. Le te pa lahko uporabimo za primerjavo z merjenimi odzivi strukture in tako ugotovimo kje in koliko je struktura poškodovana.

## Metode dela

Kot nam pove že samo ime, je nadomestni model sestavljen iz več nivojev, ki se med seboj razlikujejo v natančnosti popisa fizikalnega dogajanja. Osredotočili se bomo na preprost nosilec v obliki črke L (Slika 1).



Slika 1: Prikaz geometrije obravnavanega problema, poškodovanosti strukture  $\Omega$ , vzbujanja  $q(t)$  in obravnavanih mest pomikov  $u$ .

Če predpostavimo, da je sistem linearen in ga diskretiziramo z metodo končnih elementov – MKE, dobimo naslednji sistem enačb:

$$M \ddot{d}(t) + C \dot{d}(t) + K d = f(t)$$

Pri čemer so začetni pogoji naslednji:

$$\dot{d}(0) = 0 \text{ in } d(0) = 0$$

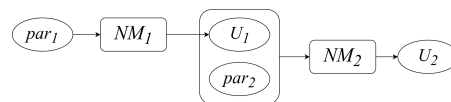
Prvi nivo, ki manj podrobno opiše fizikalno dogajanje ne vključuje dušenja in poškodovanosti strukture. Njegov namen je, da pridobimo odziv strukture v grobem, kasneje pa ga lahko opremimo z več informacijami, ki jih pridobimo iz drugega nivoja. Za učenje NM potrebujemo pare vhodno izhodnih podatkov, ki jih pridobimo iz zgoraj omenjenega sistema enačb. Ker potrebujemo za učenje NM zelo veliko količino odzivov strukture na različna vzbujanja, predvsem prvega nivoja, le tega reduciramo z uporabo tako imenovane metode posnetkov in dekompozicije singularnih vrednosti.

Po redukciji izvedemo 10.000 simulacij modela prvega nivoja, pri čemer spreminjamo parametra vzbujanja  $q(t) = -A Q \sin(2\pi f_{vz} t)$ , ki sta  $Q$  – amplituda tlačne obremenitve in  $f_{vz}$  – frekvenca vzbujanja.

Nato izvedemo še 1.000 simulacij modela drugega nivoja, kjer upoštevamo dušenje (proporcionalno) in poškodovanost strukture  $\Omega$  (lokalna redukcija togosti). Poleg spreminjanja parametrov vzbujanja, v tem primeru spreminjamo mesto poškodovanosti strukture.

Ker je namen metode primerjava odziva strukture z meritvami opravljenimi na realni strukturi, nas zanimajo le določena mesta, označena na sliki 1. Prednost tega pa je tudi hitrejšo učenje NM (manj parametrov).

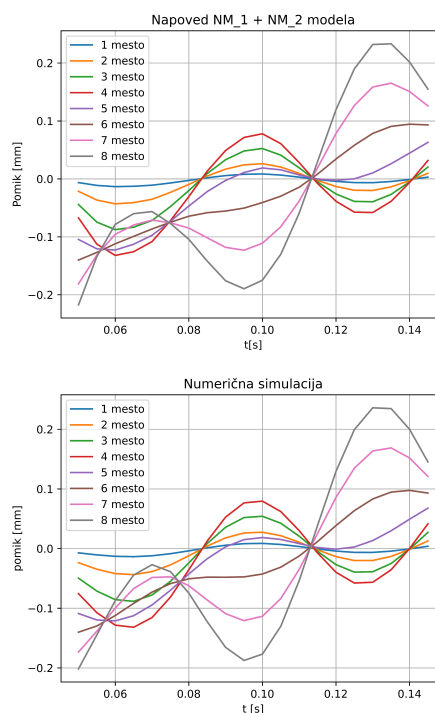
Na sliki 2 je prikazana struktura večnivojske NM.  $NM_1$  je navadna globoka nevronska mreža, katere izhod predstavlja odziv modela, ki ne vključuje dušenja in poškodovanosti.  $NM_2$  pa je nevronska mreža s povratno zanko in izkorišča LSTM (angl. long short term memory) celice, kar ji omogoča napovedovanje časovnih vrst. NM smo implementirali s pomočjo knjižnice Tensorflow.



Slika 2: Prikaz sheme večnivojske NM. Iz  $NM_1$  pridobimo odziv  $U_1$ , ki ga s parametri in  $NM_2$  dopolnimo ter tako dobimo detajlni odziv  $U_2$ .

V nadaljevanju lahko z metodami iskanja in primerjave odzivov poiščemo mesta poškodovanosti strukture, ki nam dajo enake vrednosti pomikov kot meritve na realni strukturi.

## Rezultati



Slika 3: Prikazani odzivi večnivojskega modela (zgoraj) in numerične simulacije (spodaj)

## Zaključek

Izkaže se, da se odziv pridobljen samo s prvo NM s časoma vedno bolj razlikuje od numerične simulacije (ni prikazano). Odziv pridobljen z obema plastema pa je zelo podoben numerični simulaciji, kar nakazuje na prednosti uporabe večnivojskega modela. Nekaj težav se pojavi le, ko vsebuje odziv višje frekvenčne komponente. To je posledica strukture NM in vseh hiperparametrov, saj vse le ni povsem optimalno, ker gre v tem primeru za optimizacijski problem.

## Literatura

[1] M. Torzoni, A. Manzoni in S. Mariani, MSSP, 197 (2023), 110376



# 3D-natisnjena termoaktivna vibroizolacija temelječa na kvazi-ničelni togosti

Gašper Bizjan<sup>1\*</sup>, Janko Slavič, Tilen Košir

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva cesta 6, 1000 Ljubljana

(\*e-mail: gasper212.bizjan@gmail.com)

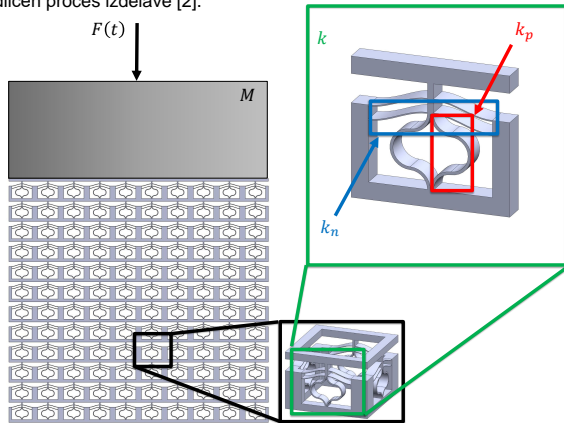
več o raziskavi

## Uvod

Prisotnost nenadzorovanih vibracij v inženjerskih aplikacijah hitro vodi v prekomerno obrabo ali celo v kritično odpoved materiala in strojnih delov. Z implementacijo vibroizolativnega metamateriala (MM) lahko omogočimo zaščito sistema pred dinamičnimi obremenitvami.

## Reprezentativna osnovna celica

MM sestavljajo periodično razporejene podstrukture, ki skupaj tvorijo material s fizikalnimi lastnostmi, ki ga v naravi ne najdemo [1]. Te lastnosti je v celoti možno razbrati iz posamezne reprezentativne osnovne celice (ROC), kot je vidno na sliki 1. Geometrijsko kompleksne podstrukture lahko z aditivno tehnologijo skoraj poljubno postavimo v prostoru in jih na makronivoju formuliramo v MM poljubne oblike, zato se je ta izkazala kot odličen proces izdelave [2].



Slika 1: Vibroizolativni MM, ki ga tvorijo ROC, ločuje sistem mase  $M$  od okolice.

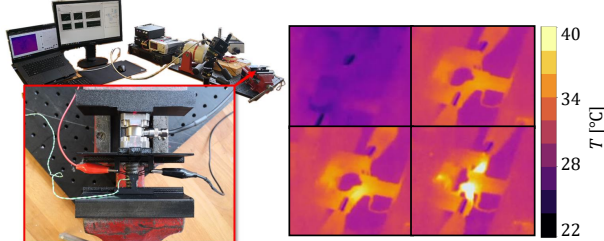
## Kvazi-ničelna togost

V praksi je največkrat uporabljena linearna vibroizolacija, ki je učinkovita le, če je njena lastna frekvenca precej nižja od frekvence vzburjanja. Za odpravo te pomanjkljivosti je bila zasnovana ROC z nelinearno vibroizolacijo  $k(X)$ , ki izkazuje visoko statično togost  $k_1$  in  $k_3$  in veliko nosilnost, medtem ko nizka dinamična togost  $k_2$  pomeni povečano območje izolacije pri nizkih frekvencah. Tako imenovana kvazi-ničelna togost (KNT) omogoča skoraj ničelno dinamično togost v delovni točki  $k_2$ . Kot vidimo na sliki 1, jo tvorimo z združitvijo navpičnih lokov togosti  $k_p$  in z uporabo vodoravnih kosinusnih nosilcev, ki pri pomiku preskočijo in vnašajo negativno togost  $k_n$  [2]. Zadostiti moramo pogoj:

$$k_2 = 2k_p + k_n$$

## Krmiljenje togosti z Joulovim tokom

Dodatno krmiljenje togosti omogoča uporaba prevodnega filameta. S segrevanjem preko električnega toka lahko uporabimo termoelektrični pojav in manjšamo togost ter tako krmilimo delovanje MM (slika 2). Določili smo modul elastičnosti v odvisnosti od temperature  $E(T)$ .

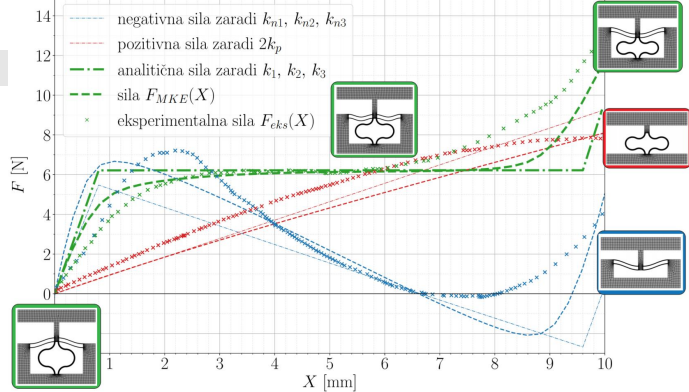


Slika 2: Eksperiment za določanje statične togosti pri različnih temperaturah

## Rezultati

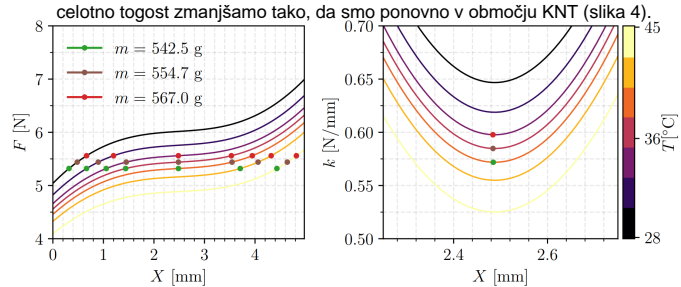
### Statična karakteristika reprezentativne osnovne celice

Z uporabo analitičnih enačb, numeričnih simulacij po metodi končnih elementov in eksperimentalno smo tvorili KNT na sliki 3.



Slika 3: Potek sile  $F$  v odvisnosti od pomika  $X$  za vodoravni in navpični nosilec ter ROC.

Pri spremembi sistema (mase  $m$ , s katero obremenimo posamezno ROC) se ne nahajamo več v območju  $k = 0$ . S spreminjanjem temperature lahko celotno togost zmanjšamo tako, da smo ponovno v območju KNT (slika 4).

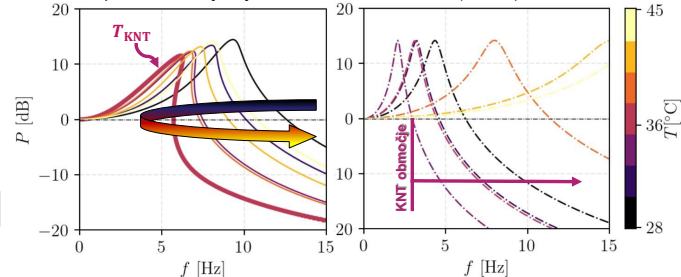


Slika 4: Potek sile  $F$  in togosti  $k$  v odvisnosti od pomika ROC  $X$  ter od temperature  $T$ .

Pri spremembi mase  $m$  lahko z ustrezno temperaturo ostanemo pri minimalni togosti.

### Prenosnost metamateriala

Dinamične lastnosti MM lahko opazujemo na podlagi prenosnosti, pri čemer  $P < 0$  pomeni zmanjšanje dinamične obremenitve (slika 5).



Slika 5: Analitični (levo) in numerični (desno) potek prenosnosti  $P$  pri frekvencah  $f$ . Opazujemo obremenitev  $m = 554.7$  g pri različnih temperaturah. Z ustrezno kombinacijo temperature in mase se nam frekvenčno območje dušenja  $P < 0$  poveča, saj imamo lastnost KNT. Pri spremembi obremenitve lahko prilagodimo temperaturo, da ostanemo pri največjem dušenju.

## Zaključki

V raziskavi smo preučili in dokazali uporabnost 3D tiskane KNT vibroizolacije, ki izkazuje možnost krmiljenja z Joulovim tokom.

## Literatura

- [1] S. Dalela, P.S. Balaji, D. P. Jena, Nonlinear Dyn., 108 (2022) 1931-1971
- [2] H. Fan, L. Yang, Y. Tian, Z. Wang, Composite Structures, 243 (2020), 112-144
- [3] J. Qiu, J.H. Lang, A.H. Stocum, Microelectromech. Sys., 13 (2004) 137-146

# Vpliv kontaktne nelinearnosti na dobo trajanja strukture pri vibracijskem utrujanju

Tim Mušič<sup>1</sup>, Martin Česnik<sup>1\*</sup>, Miha Boltežar<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva cesta 6, 1000 Ljubljana

(\* martin.cesnik@fs.uni-lj.si)

## Uvod

Pri obravnavi utrujanja izdelka, obremenjenega z naključnim signalom z Gaussovo porazdelitvijo, predpostavimo, da bo imel tudi odziv sistema obliko Gaussovega naključnega signala. Na tej predpostavki temeljijo tudi številne metode v frekvenčni domeni [1], vendar pa se je izkazalo, da pogosto odziv nelinearnih sistemov ni Gaussov [2].

Zaradi zračnosti realni izdelki ob prisotnosti dinamske obremenitve pogosto izkazujejo nelinearno naravo. Prisotnost nelinearnosti oz. zračnosti iz vidika zagotavljanja ustrezne dobe trajanja izdelka predstavlja veliko negotovost, tako iz vidika odstopanja med predvidenim in dejanskim dinamskim odzivom sistema kot tudi iz vidika napačne ocene dobe trajanja z uveljavljenimi spektralnimi števničnimi metodami zaradi neveljavnosti predpostavke Gaussovega signala.

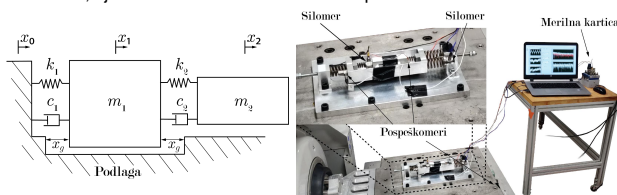
## Metode

Numerično in eksperimentalno smo določili odziv sistema z dvema prostostnima stopnjama in kontaktno nelinearnostjo na prvi prostostni stopnji. Sistem smo vzbujali z naključnim signalom na 8 različnih nivojih. Pri tem smo spreminjali parametre nelinearnosti v obliki različnih materialov kontaktnih površin (Tabela 1). Za izračun parametrov, uporabljenih v numeričnih preračunih, sta se izvedla ločena eksperimenta, s pomočjo katerih so se določili parametri za popis trka in disipacije energije sistema.

Kontakti par	Koeficient trka
aluminij-tehnična guma debeline 2 mm	0,40
aluminij-plastika debeline 5 mm	0,86
aluminij-jeklo	0,96

Tabela 1: Koeficienti trka za kontaktne pare.

Meritve odziva so se izvedle na sistemu, prikazanem na sliki 1, kjer so bile merjene sile na vzmeteh, ki so v nadaljevanju služile kot cenilka poškodbe. Preverila se je zanesljivost spektralnih metod Narrowband in Tovo-Benasciutti, kjer smo kot referenčno metodo uporabili metodo rainflow.



Slika 1: Shema sistema s kontaktno nelinearnostjo na 1. prostostni stopnji (levo) in postavitev eksperimenta (desno).

## Rezultati

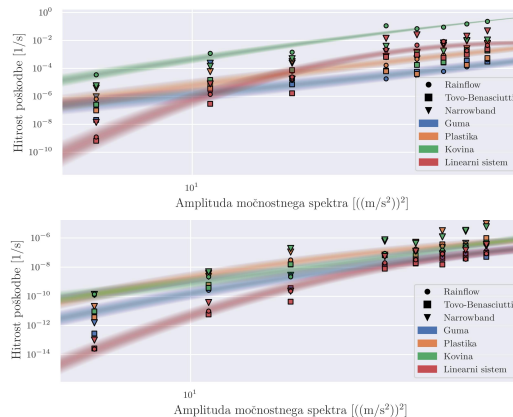
Na sliki 3 so prikazani rezultati odziva sile za kontakt aluminij-jeklo. V tej fazi raziskave prihaja do razhajanja med numeričnimi izračuni in meritvami. To je primarno posledica popisa kontakta, do določene mere pa zavisi tudi od karakterizacije dušenja vodil eksperimentalnega sistema, ter implementacije le-te v numerični model. Posledično se v nadaljevanju osredotočimo na vrednotenje dejanskega odziva pri eksperimentu.



Slika 3: Primerjava meritev sile z rezultati numeričnih preračunov za kontakt aluminij-jeklo. Levo prva prostostna stopnja, desno druga prostostna stopnja.

Na sliki 3 so prikazani rezultati hitrosti akumulacije poškodb v odvisnosti od amplitude vzbujanja za različne kontakte z uporabo različnih števnih metod. Vidimo, da se z višanjem togosti kontakta povečuje hitrost akumulacije poškodb. Na prvi prostostni stopnji pri nižjih amplitudah vsi kontakti negativno vplivajo na dobo trajanja.

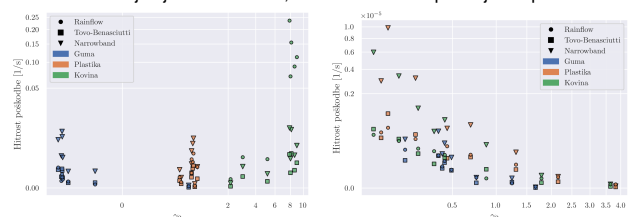
Ko povečujemo amplitudo, se pri kontaktnih aluminij-plastika in aluminij-guma hitrost poškodbe zmanjša in pade hitrost poškodbe pri linearnem sistemu. Na drugi prostostni stopnji pa vsakršen kontakt v celotnem amplitudnem območju negativno vpliva na dobo trajanja.



Slika 3: Hitrost poškodbe v odvisnosti od amplitude močnega spektra. Zgoraj prva prostostna stopnja, spodaj druga prostostna stopnja.

Iz zgornjih rezultatov se vidi konservativnost Narrowband metode; pri večini nivojev (kjer vplivi nelinearnosti niso preveliki) metoda Tovo-Benasciutti poda primerljivo oceno hitrosti poškodbe kot metoda Rainflow.

Na sliki 4 je prikazana primerjava hitrosti poškodbe v odvisnosti od sploščenosti gostote porazdelitve verjetnosti vrhov. Če na prvi prostostni stopnji opazujemo vsak material posebej, vidimo, da se z oddaljevanjem sploščenosti od vrednosti 0 (Gaussov odziv) hitrost akumulacije poškodbe povečuje. Na drugi prostostni stopnji pa se s povečevanjem sploščenosti hitrost akumulacije poškodbe zmanjšuje. Ponovno je vidno, da je metoda Narrowband najbolj konservativna, ostali dve metodi pa bolje sovpadata.



Slika 4: Hitrost poškodbe v odvisnosti od sploščenosti. Levo prva prostostna stopnja, desno druga prostostna stopnja.

## Zaključki

Rezultati meritev kažejo, da kontaktna nelinearnost negativno vpliva na življenjsko dobo na enem delu sistema in pozitivno na drugem delu sistema, kar je iz vidika izdelkov z več podsestavi ključna ugotovitev. Na podlagi rezultatov dodatno sklepamo, da sploščenost gostote porazdelitve vrhov na hitrost akumulacije poškodbe za konkreten primer na prvi prostostni stopnji deluje negativno, na drugi pa pozitivno. Za poljuben nelinearen dinamski sistem dokončnih ugotovitev iz obstoječega dela brez veljavnega numeričnega modela ni možno narediti. Za boljše ujemanje le-tega z rezultati meritev bi bilo potrebno uporabiti natančnejše popise dogajanja v času kontakta in preveriti še drugačne načine dušenja sistema.

## Literatura

- [1] J. Slavič, M. Mršnik, M. Česnik, J. Javh in M. Boltežar, *Vibration fatigue by spectral methods: From structural dynamics to fatigue damage*. Elsevier, 2020.
- [2] V. Kontorovich in V. Lyandres, *Stochastic differential equations: An approach to the generation of continuous non-gaussian processes*, *IEEE Transactions on Signal processing*, let. 43, št. 10, str. 2372-2385, 1995.



### Uvod

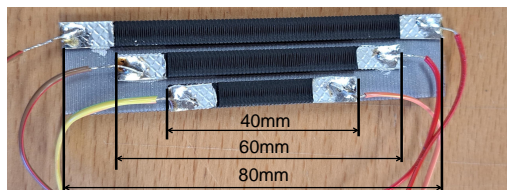
Med vožnjo z gorskim kolesom po hribu navzdol, se v kolesu lahko inducirajo velike dinamične obremenitve, ki vplivajo na dobo trajanja kolesa. Največje obremenitve prenaša vzmetenje – kolesarske vilice. Cilj te raziskave je prikazati princip uporabe 3-D natisnjenih piezoresistivnih zaznaval za zaznavanje prečnih in osnih sil v kolesarskih vilicah. To dosežemo z uporabo več zaznaval in z določevanjem matrike koeficientov. Umerjena zaznavala nam bodo v prihodnje omogočala merjenje zgodovine obremenitev, ki jih lahko uporabimo pri razvoju komponent gorskega kolesa.

Zaznavala smo 3-D natisnili iz dveh filamentov: neprevodne polilaktične kisline (PLA) proizvajalca Prusa in prevodne PLA proizvajalca Protopasta [1]. Električne kontakte smo prispajkali na samolepilne prevodne lističe, ki smo jih prilepili na vsak konec zaznavala (Slika 1).



Slika 1: Shema uporabljenega 3-D natisnjenega zaznavala.

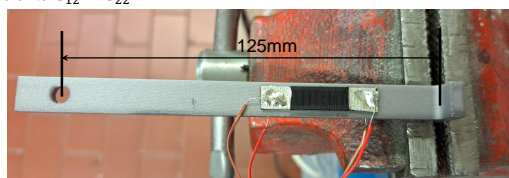
Na isto osnovo, ki je bila kasneje obremenjena, smo natisnili zaznavala treh dolžin (Slika 2). Vsako zaznavalo smo vezali v Wheatstone-ov mostič ter merili spremembe napetosti ob spremembi aplicirane sile na nosilec. Preverili smo vpliv dolžine zaznavala na izmerjeno spremembo napetosti ob isti hipni obremenitvi. Predpostavili smo linearno povezavo med aplicirano silo in spremembo napetosti:  $\Delta U = C \cdot F$ . Ugotovili smo katero zaznavalo ima največjo občutljivost. Vlogo kolesarskih vilic je igral nosilec.



Slika 2: Tri zaznavala različnih dolžin natisnjena na isto osnovo.

Prek teoretičnega izračuna ter meritev smo izračunali materialno piezoresistivno konstanto  $\pi_{11}$ , ki predstavlja razmerje med relativno spremembo upornosti in napetostjo v materialu:  $\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = \pi_{11} \cdot \sigma$  [2]. Preverili smo še ustreznost predpostavke linearne povezave  $\Delta U = C \cdot F$ .

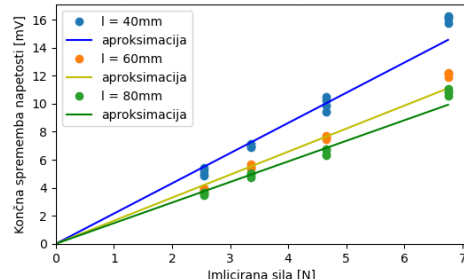
Za določanje prečnih in osnih sil smo sledili enačbi  $\begin{bmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{pr} \\ F_{os} \end{bmatrix}$ . Uporabili smo dve zaznavali dolžine, ki je izkazala najboljšo občutljivost. Prilepili smo ju na različni strani nosilca (Slika 3). Najprej smo nosilec obremenili prečno. Pri vsaki ponovitvi meritve smo zabeležili končno spremembo napetosti, v stanju ko se je nosilec iznihal. S tem smo pridobili koeficienta  $C_{11}$  in  $C_{21}$ . Nato smo ga obremenili še osno, da smo pridobili še koeficienta  $C_{12}$  in  $C_{22}$ .



Slika 3: Nosilec z dvema zaznavaloma, enim na zgornji in enim na spodnji strani.

Za zaznavala treh dolžin smo dobili tri konstante C, ter tri grafe končne spremembe napetosti v odvisnosti od sile obremenitve (Slika 4).

Sprememba napetosti ob obremenitvi pri različnih dožinah senzorzja

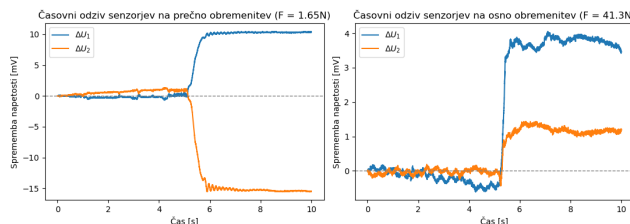


Slika 4: Graf  $\Delta U(F)$ . Ugotovljene konstante:  $C_{40} = 2.16 \frac{mV}{N}$ ,  $C_{60} = 1.64 \frac{mV}{N}$ ,  $C_{80} = 1.47 \frac{mV}{N}$ .

Iz teoretičnega izračuna smo dobili konstanto  $\pi_{11} = 7.87 MPa^{-1}$ .

Pri prečnem in osnem obremenjevanju nosilca smo merili časovni odziv zaznaval (Slika 5). Pridobili smo matriko koeficientov:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.96 & 0.03 \\ -10.27 & 0.11 \end{bmatrix} \frac{mV}{N}$$



Slika 5: Grafa časovnega poteka napetosti v primeru prečnega (levo) in v primeru osnega (desno) obremenjevanja nosilca. Silo smo aplicirali v trenutku  $t = 5s$ .

Ugotovili smo, je občutljivost 3-D natisnjenega zaznavala odvisna od njegove dolžine. Najbolj občutljivo je bilo zaznavalo dolžine 40mm, najmanj pa zaznavalo dolžine 80mm.

Z inverzno matriko matrike koeficientov lahko z merjenjem napetosti  $\Delta U_1$  in  $\Delta U_2$  ugotovimo prečne in osne sile, ki so delovale na kolesarske vilice med vožnjo kolesa:  $\begin{bmatrix} F_{pr} \\ F_{os} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \end{bmatrix}$ .

V našem primeru se pri matriki koeficientov koeficienti za osno in prečno silo razlikujejo za skoraj dva reda velikosti, kar s stališča natančnosti meritev ni najboljše. Že majhna napaka pri meritvah napetosti lahko namreč močno spremeni izmerjeno osno silo. Pri velikih osnih silah pa postane izračun prečnih sil nezanesljiv. Meritve bi lahko izboljšali z namestitvijo na nosilec, ki je bolj odporen na upogib.

[1] M. Arh, J. Slavič, and M. Boltežar, "Design principles for a single-process 3d-printed accelerometer – theory and experiment," Mech Syst Signal Process, vol. 152, May 2021, doi: 10.1016/j.ymssp.2020.107475.

[2] M. Arh, J. Slavič, and M. Boltežar, "Experimental identification of the dynamic piezoresistivity of fused-filament-fabricated structures," Addit Manuf, vol. 36, Dec. 2020, doi: 10.1016/j.addma.2020.101493.

Numerično modeliranje dvofaznega toka v rezervoarju mokrega pralnika dimnih plinov

Nejc Vovk <sup>1</sup>, Jure Ravnik <sup>1\*</sup>

<sup>1</sup> Univerza v Mariboru, Fakulteta za Strojništvo, Smetanova ul. 17, 2000 Maribor

(\* jure.ravnik@um.si)

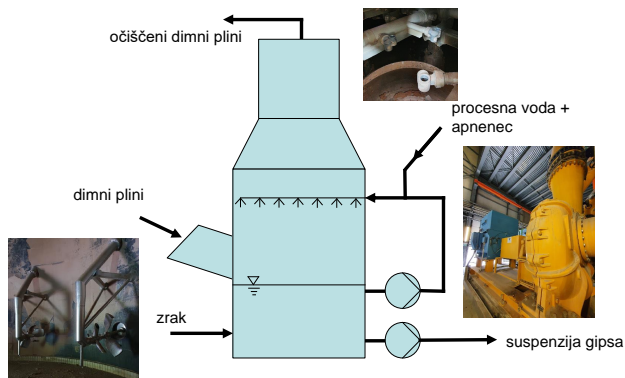
Uvod

Razžvepljanje dimnih plinov iz termoelektrarne poteka po mokrem kalcitem postopku, kjer gre za izločanje SO<sub>2</sub>, ki nastane pri zgorevanju premoga, onesnaženega z žveplom. Tehnologija zahteva izgradnjo procesne zgradbe, t.i. pralnika dimnih plinov, kjer je glavna ideja absorpcija SO<sub>2</sub> v kapljice tekočine, ki jo pršimo v protitek dimnih plinov, ko ti potujejo proti vrhu pralnika. Kapljice generiramo na razpršilnih nivojih v zgornjem delu pralnika. Tekočino sestavlja voda in raztopljen apnenec, ki veže SO<sub>2</sub> v CaSO<sub>3</sub>. Kapljice z absorbiranim SO<sub>2</sub> padajo proti dnu pralnika, v rezervoar. Tam poteka nadaljnja tvorba CaSO<sub>3</sub>.

Naloga rezervoarja je zagotavljanje pogojev za nastanek stabilnega produkta, kar dosežemo z nadaljnjo oksidacijo CaSO<sub>3</sub> v CaSO<sub>4</sub> (gips), ki ob prenasitčenju in vodi tvori kristale. Kroženje suspenzije iz rezervoarja na razpršilne nivoje opravljajo t.i. obtočne črpalke. Oksidacija je izvedena prisilno, z vpihovanjem zraka direktno v rezervoar pralnika. Cilj je doseči čim bolj homogeno disperzijo zraka v rezervoarju, s čim manjšim srednjim premerom mehurčkov.

Predstavljen numerični model rezervoarja pralnika deluje po tehnologiji, ki zahteva uporabo kombinacije razpršilnikov zraka in agitatorjev (mešal), ki skrbijo za homogeno razporeditev zraka po rezervoarju pralnika. Cilj je z numeričnim preračunom določiti homogenost disperzije, zadrževalni čas zraka in ugotoviti vpliv obtočnih črpalk na disperzijo zraka.

Numerični preračun je izveden z uporabo odprtokodne programske opreme OpenFOAM na superračunalniški infrastrukturi v okviru projekta HPC-RIVR.



Slika 1: Procesna shema pranja dimnih plinov

Za izračun srednjega premera mehurčkov zraka je uporabljen populacijski model.

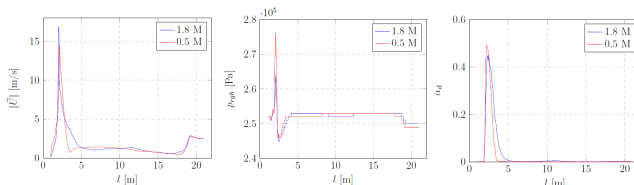
$$(7) \quad \frac{\partial N_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U}_d N_i) = H_i$$

PODMODELI

Za popis interakcije med zvezno in disperzno fazo so vključeni podmodeli za upor, vzgon, turbulentno disperzijo, silo dodatne mase in silo vpliva trdne stene.

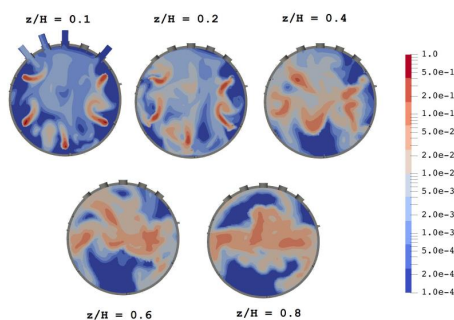
RAČUNSKA MREŽA

Uporabljeni sta dve nestrukturirani tetraedrski računski mreži z 1.8 in 0.5 M celic. Vpliv računске mreže na numerični rezultat prikazujejo profili hitrosti, tlaka in koncentracije, slika 3.



Slika 3: Vpliv gostote računске mreže na profile hitrosti, tlaka in koncentracije

Rezultati



Slika 4: Konture volumskega deleža zraka na različnih višinah rezervoarja

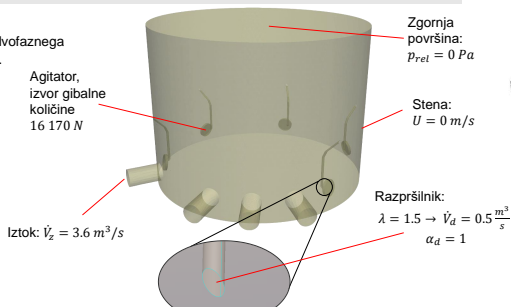
Numerični model

ROBNI POGOJI

Robne pogoje za izvedbo dvofaznega preračuna prikazuje slika 2.

Slika 2: Robni pogoji na rezervoarju pralnika

<p>Lastnosti zvezne faze:</p> <p><math>\rho = 1150 \frac{kg}{m^3}</math></p> <p><math>\mu = 1 Pa \cdot s</math></p>
---



VODILNE ENAČBE

Uporabljen je Euler-Euler pristop, kjer sta obravnavana dva nabora ohranitvenih – po en nabor za vsako fazo  $\varphi$ . Izračun operira z ohranitvenimi enačbami stisljive tekočine [1].

$$(1) \quad \frac{\partial (\alpha_\varphi \rho_\varphi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_\varphi \rho_\varphi \vec{U}_\varphi) = S_{\alpha,\varphi}$$

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \alpha_\varphi \rho_\varphi \vec{U}_\varphi + \vec{U}_\varphi \cdot \nabla (\alpha_\varphi \rho_\varphi \vec{U}_\varphi) = -\alpha_\varphi \nabla p + \nabla \cdot \hat{\tau}_\varphi + \alpha_\varphi \rho_\varphi \vec{g} + \vec{M}_\varphi + \vec{S}_{M,\varphi}$$

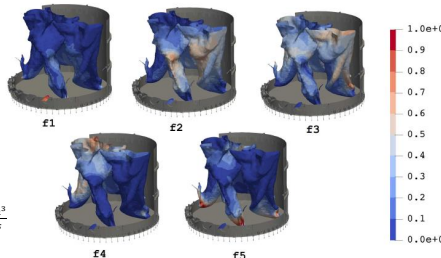
$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho k + \vec{U} \cdot \nabla (\rho k) = \nabla \cdot ((\mu + \sigma_k \mu^t) \nabla k) + P_k \rho - \rho \epsilon$$

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho \epsilon + \vec{U} \cdot \nabla (\rho \epsilon) = \nabla \cdot ((\mu + \sigma_\epsilon \mu^t) \nabla \epsilon) + \frac{C_{1\epsilon}}{k} \left( P + C_{3\frac{2}{3}} k \nabla \cdot \vec{U} \right) - C_{2\epsilon} \frac{\epsilon^2}{k}$$

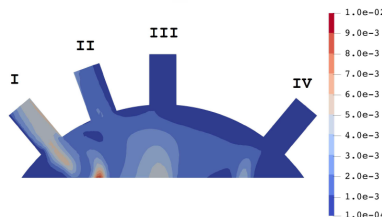
$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho k + \vec{U} \cdot \nabla (\rho k) = \nabla \cdot ((\mu + \sigma_k \mu^t) \nabla k) + P_k \rho - \rho \beta^* k \omega$$

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho \omega + \vec{U} \cdot \nabla (\rho \omega) = \nabla \cdot ((\mu + \sigma_\omega \mu^t) \nabla \omega) + \alpha S^2 - \beta \omega^2 + 2(1 - F_1) \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \nabla k \nabla \omega$$

OpenFOAM®



Slika 5: Deleži velikostnih razredov mehurčkov v rezervoarju pralnika; f1 – 3 mm, f2 – 6 mm, f3 – 10 mm, f4 – 30 mm, f5 – 180 mm.



Slika 6: Volumski delež zraka na iztoku skozi obtočne črpalke.

- Ugotovljen je povprečen volumski delež zraka, ki znaša 1.4 %
- povprečen zadrževalni čas zraka znaša 19 s,
- skozi obtočne cevovode uhaja 1.2 % vpihanega zraka,
- srednji premer mehurčkov znaša 10 mm,
- skozi obtočne cevovode uhajajo najmanjši mehurčki, velikosti < 6 mm.

Literatura

[1] T. Holzmann, Mathematics, Numerics, Derivations and OpenFOAM®.

CIP - Kataložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani

COBISS.SI-ID 164996099

ISBN 978-961-93859-8-2 (PDF)