Narodna in univerzitetna knjižnica
v Ljubljani

112129

$\frac{E}{II}$ No. 5

3:54

Georg Freiherrn von Vega,

Landes-Mitstands des Herzogthums Krain, Ritters des milit. M. Th. Ordens, Oberstlieutenants des k. k. vierten Feldartillerie-Regiments, Mitglieds der gelehrten Gesellschaften zu Berlin, Erfurt, Göttingen und Prag,

Vorlesungen

über die

Mathematik

sowohl

überhaupt zu mehrerer Verbreitung mathematischer Kenntnisse in den k. k. Staaten, als auch insbesondere zum Gebrauche des k. k. Artillerie-Corps.

Erster Band.

Rechenkunst und Algebra.

Sechste Auflage.

Durchgesehen, verbessert und vermehrt von

Wilhelm Matzka,

öffentlichem ordentlichem Professor der Mathematik an der k. k. philosophischen Lehranstalt zu Tarnow, vormaligem Unterlieutenant und Lehrer der höheren Mechanik im k. k. Bombardier-Corps zu Wien.

Wien.

Fr. Beck's Universitäts-Buchhandlung.

1838.

K. K. OBBERBERGAMT ZU KLAGENFURT

112129

112129

Narodna in univerzitetna knjižnica * Ljubljana

FZ 6314 | 1952

W= 352006314

Gedruckt bei J. P. Sollinger.

Vorrede.

Seit der ersten Ausgabe von Vega's Vorlesungen über Rechenkunst und Algebra hat zwar die Anzahl, aber leider nicht immer in gleichem Maße die Brauchbarkeit, ähnlicher deutscher Werke namhaft zugenommen. Schon hierin liegt ein wesentlicher Grund, warum dieses Lehrbuch, trotz seines Alters von 55 Jahren, besonders da, wo die Richtung des Lehrplanes mehr auf das Practische als auf das Scientifische zielt, selbst noch in der gegenwärtigen Zeit, welche durch die Errichtung so vieler, vorzüglich der Bildung von Gewerbsmännern gewidmeter, mathematischer Lehrkanzeln, die Mathematik thatsächlich über alle Lobpreisungen erhebt, mit vielen von ihr in's Leben gerufenen Lehrbüchern in Absicht auf Zweckmäßigkeit vortheilhaft sich messen kann. Noch mehr aber findet diese befremdende Erscheinung ihre Erklärung darin, daß Vega, vorzüglich in den ersten Gründen, sich zu den Vorbegriffen und der Fassungskraft des Anfängers herabläßt, die Erläuterungen und Beweise aus der Natur der Gegenstände selbst schöpft, nicht aber in mystische Zeichenspiele verhüllt; ihn dabei, indem er sich begnügt, das an sich Evidente, mit Übergehung weitläufiger Beweise, blos anzudeuten, nur mit dem wesentlichsten und nöthigsten mathematischen Hausbedarfe ausstattet; dagegen das ausgebreitetere, streng wissenschaftliche Studium der Mathematik dem fähigeren und reiferen Leser selbst überläßt. Bei diesen Vorzügen des Vega'schen Lehrbuches machten es die, seit seinem ersten Auftreten erfolgten ungemeinen Erweiterungen des mathematischen Wissens, der hiedurch vergrößerte Umfang des gewöhnlich zur Anwendung Kommenden, ferner der höhere Stand der allgemeinen Volksbildung in der Österreichischen Monarchie, besonders aber die größere Masse von Vorkenntnissen der in die k. k. Artillerie eintretenden Jünglinge, denen dieses Werk von dem Verfasser zunächst gewidmet ist, wünschenswerth, dasselbe mittels einer umständlichen Durchsicht, theilweisen Überarbeitung und Vermehrung, jedoch mit sorgfältiger Bewahrung seiner mehr practischen als rein scientifischen Haltung, dem jetzigen Stande der mathematischen Wissenschaft näher zu rücken.

Zu diesem zwar ehrenvollen, aber auch schwierigen Geschäfte von der Verlagshandlung aufgefordert, habe ich, mit Beachtung des unerläßlichen Zusammenhanges dieses Lehrbuches mit dem von mir bereits herausgegebenen zweiten Bande, die Anfangsgründe und das zu den gewöhnlichsten Rechnungen Erforderliche, dessen Darstellung sich bisher als hinreichend faßlich bewährte, im Allgemeinen nur wenig zu verdeutlichen mich veranlaßt gesehen; dagegen strebte ich mehr wissenschaftliche Strenge und größere Ausdehnung in diejenigen Parthien zu bringen, welche dem schon mehr vorbereiteten Leser zufallen, und suchte, so viel möglich, Anwendungen des Erlernten auf das Artilleriewesen zu zeigen. In dieser Absicht habe ich der Lehre von der Theilbarkeit der Zahlen einen umfassenderen Abschnitt gewidmet, die Theorie der Kettenbrüche erweitert und strenger begründet, die Extraction der zweiten und dritten Wurzeln aus besonderen Zahlen, so wie die Anwendung der Proportionen faßlicher abgehandelt. Die an dem letzteren Orte aufgenommenen Vergleichungen einiger Maße und Gewichte verdanke ich großen Theils der ausgezeichnet freundschaftlichen Gefälligkeit des Herrn Joseph Jäckel, Oberbeamten des Zimentirungsamtes der k. k. Haupt- und Residenzstadt Wien; ich hoffe ihnen durch Anführung der Gesetze, Quellen und Autoritäten mehr Vertrauen verschaffen zu können. Die für die Artilleristen nothwendigen Berechnungen der Kugelhaufen schmeichle ich mir der erste auf eine besonders leicht faßliche Weise gelehrt zu haben. Aus der Combinationslehre nahm ich nicht viel mehr auf, als zur Aufstellung des binomischen Lehrsatzes, durch welchen ich die entbehrlichen Untersuchungen über das Lottospiel verdrängte, erfordert wird, und wandte diesen Satz auf die allgemeine Lehre von der Wurzelausziehung an. Die Theorie der Logarithmen suchte ich theils mehr zu erläutern, theils für wirkliche Rechnungen brauchbarer darzustellen. Ganz neu und bedeutend ausgedehnter bearbeitete ich den Abriß der Analysis des Endlichen, und glaube mir als Verdienst anrechnen zu dürfen, daß ich das Wichtigste von Fourier's Vervollkommnung der Newton'schen Annäherungsmethode an die irrationellen Wurzeln der Zahlengleichungen der erste ohne Differentialrechnung und ohne geometrische Betrachtungen zusammengestellt habe. Von den das Werk schließenden Tafeln endlich ist die der einfachen Factoren zusammengesetzter Zahlen in eine angemessenere Form gebracht und dabei mehr ausgedehnt worden; die übrigen wurden mit besonderer Genauigkeit auf's Neue berechnet, mit ähnlichen Tafeln verglichen und im Drucke so sorgfältig corrigirt, daß ihre Richtigkeit verbürgt werden kann.

Gelingt es mir, durch die nunmehr bewirkte Überarbeitung der, die reine Mathematik umfassenden, zwei ersten Bände von Vega's Vorlesungen über Mathematik, überhaupt zur Verbreitung des mathematischen Wissens und insbesondere zur Ausbildung der Zöglinge der k. k. Artillerie-Schulen und dadurch mittelbar zur Aufrechthaltung des Ruhmes einer Waffe, unter der durch achtzehn Jahre gedient zu haben, ich mir stets zur Ehre rechnen werde, vortheilhaft mitzuwirken, so ist einer der sehnlichsten meiner Wünsche erfüllt.

Tarnow im October 1837.

Wilhelm Matzka.

Inhalt.

Erstes Hauptstück.

Von den Rechnungsarten in ganzen Zahlen.

I. Abschnitt.

II. Abschnitt.

III. Abschnitt.

IV. Abschnitt.

V. Abschnitt.

VI. Abschnitt.

VII. Abschnitt.

VIII. Abschnitt.

Zweites Hauptstück.

Von den Rechnungsarten mit gebrochenen Größen.

I. Abschnitt.

II. Abschnitt.

III. Abschnitt.

IV. Abschnitt.

Drittes Hauptstück.

Von den Rechnungsarten mit Potenzen und Wurzeln.

I. Abschnitt.

II. Abschnitt.

III. Abschnitt.

Viertes Hauptstück.

Von den Verhältnissen und Proportionen nebst ihrer Anwendung auf die Beantwortung verschiedener Rechnungsfragen.

I. Abschnitt.

II. Abschnitt.

III. Abschnitt.

IV. Abschnitt.

V. Abschnitt.

Fünftes Hauptstück.

Von den Gleichungen des ersten und zweiten Grades nebst ihrer Anwendung auf die Auflösung verschiedener Aufgaben.

I. Abschnitt.

II. Abschnitt.

III. Abschnitt.

Sechstes Hauptstück.

Arithmetische und geometrische Reihen. Combinationslehre. Binomischer Lehrsatz. Logarithmen.

I. Abschnitt.

Anwendung der Lehre von den arithmetischen Progressionen auf Gegenstände der Artillerie.

II. Abschnitt.

III. Abschnitt.

IV. Abschnitt.

V. Abschnitt.

VI. Abschnitt.

VII. Abschnitt.

Siebentes Hauptstück.

Lehre von den Functionen.

I. Abschnitt.

II. Abschnitt.

III. Abschnitt.

IV. Abschnitt.

V. Abschnitt.

Von einigen Umstaltungen (Transformationen) der Functionen einer Veränderlichen.

VI. Abschnitt.

Methode der unbestimmten Coefficienten.

VII. Abschnitt.

Differenz- und Summenreihen. Arithmetische Reihen. Figurirte Zahlen. Potenzreihen. Summirung einiger besonderer Reihen.

VIII. Abschnitt.

Erstes Hauptstück.

Von den Rechnungsarten in ganzen Zahlen.

I. Abschnitt.

Vorläufige Einleitung.

§. 1.

Jedes Ding, für sich betrachtet, ist eine Einheit seiner Art; und mehrere Einheiten der nemlichen Gattung machen eine Zahl von solchen Einheiten aus. Z. B. sechs Menschen sind eine Zahl von Menschen, sieben Klaftern sind eine Zahl von Klaftern; acht Pfunde sind eine Zahl von Pfunden, u. s. w. Hiebei kann es sich fügen, daß manche Einheit aus lauter gleichen Theilen besteht, folglich wieder in Rücksicht ihrer Theile als eine Zahl angesehen werden kann; so ist eine Militär-Compagnie eine Zahl von Soldaten, ein Pfund eine Zahl von Lothen; weil eine Compagnie aus mehreren Soldaten, ein Pfund aus mehreren Lothen besteht.

§. 2.

Die Zahlen, und alle diejenigen Dinge, die aus mehreren gleichartigen Theilen bestehen oder wenigstens bestehend gedacht werden können, folglich durch Zahlen sich vorstellen oder messen lassen, z. B. Gewichte, die sich als Zahlen von Centnern, Pfunden, Lothen; Entfernungen, die sich durch Zahlen von Klaftern, Schuhen, Zollen; Zeiten, die sich als Zahlen von Tagen, Stunden und Minuten u. dgl. vorstellen lassen; überhaupt alle jene Dinge, welche durch Hinzuthun oder Hinwegnehmen eines eben solchen Dinges vergrößert oder verkleinert werden können, pflegt man Größen zu nennen.

§. 3.

Diejenige Wissenschaft, welche die Eigenschaften der Größen untersucht, und hauptsächlich lehrt, aus einigen bekannten Größen andere unbekannte zu finden, die mit jenen in einer gewissen Verbindung stehen, wird überhaupt Mathematik, seltner Größenlehre, genannt. — Ueber ihre Abtheilung mag dem Anfänger Folgendes genügen. In Absicht auf Lehre und Anwendung (Theorie und Praxis) wird sie eingetheilt in reine und angewandte Mathematik. Die erste beschäftigt sich mit der Vergleichung und Bestimmung der Größen, indem sie blos in Erwägung zieht, daß selbe durch Hinwegnehmen oder Hinzuthun eines Gleichartigen kleiner oder größer werden, ohne auf ihre übrigen Eigenschaften Acht zu haben. Die zweite ist eine Anwendung der reinen Mathematik, und zieht nebst der Eigenschaft der Größe auch noch die übrigen physischen Beschaffenheiten mit in Betrachtung. — Zur reinen Mathematik gehört die Arithmetik und die Geometrie; erstere beschäftigt sich mit unstetigen Größen, das ist, mit Größen, welche aus abgesonderten, und durch eigene Grenzen bestimmten Theilen bestehen; letztere aber hat stetige Größen zum Gegenstande: das ist, Größen, deren Theile ununterbrochen an einander hängen. Z. B. Sollte die Zahl der Ziegel auf einem Dache bestimmt werden, so ist dies ein Gegenstand der Arithmetik; sollte aber die Menge des Schnees bestimmt werden, welcher das Dach bedeckt, so ist es ein Gegenstand der Geometrie. — Die angewandte Mathematik begreift in sich die praktische Arithmetik und Geometrie, als Anwendungen der Lehren der reinen Mathematik für die Bedürfnisse des bürgerlichen Lebens, und die mathematische Physik (Naturlehre), deren Haupttheile gegenwärtig die mechanischen, optischen und astronomischen Wissenschaften sind, zu denen sich wohl auch schon die noch in der Ausbildung begriffenen Lehren von der Wärme, Electricität und dem Magnetismus zählen lassen. Die erstern handeln von den Bewegungen der Körper und den Kräften, die sie verursachen oder hemmen, die andern beschäftigen sich mit den Gesetzen des Sehens und den Eigenschaften des Lichtes; und die Astronomie lehrt die Ausmessung der Körperwelt im Großen, und stellt Untersuchungen über die Größe, Zusammenordnung und Verbindung der Weltkörper, und ihre Bewegungen an. Jede dieser Wissenschaften wird wieder in verschiedene willkürliche Theile zertheilt, und mit eigenen Namen belegt. *)

In Rücksicht der Grenzen ihrer Untersuchungen zerfällt die Mathematik in die niedere (elementäre) und höhere. Jene schränkt sich blos auf die faßlichsten Grundlehren ein, während diese als Fortsetzung der ersteren ihre Untersuchungen ins Unendliche ausbreitet. Die Absonderung beider gestattet jedoch manche Willkürlichkeiten.

§. 4.

Wir zählen im gemeinen Leben, nach der uns von Jugend auf bekannten Art, von eins bis zehn; und die Größe dieser Zahl zehn, so wie einer jeden der vorhergehenden, neun, acht, sieben, sechs u. s. w. ist uns sogleich bekannt, sobald wir sie uns nur denken, oder aussprechen hören; sodann zählen wir zehn und eins, zehn und zwei, zehn und drei; oder abgekürzt, eilf, zwölf, dreizehn u. s. f. bis wir auf eine Zahl kommen, die zweimal so groß ist als zehn, und diese nennen wir zwanzig; dann fangen wir wieder von eins an, bis wir auf Zahlen kommen, die drei — vier — fünf — sechs — sieben — acht — neun Mal so groß sind als zehn, und nennen sie dreißig, vierzig, fünfzig, sechszig, siebenzig, achtzig, neunzig; hierauf kommen wir zu einer Zahl, die zehnmal so groß ist als zehn, diese nennen wir Hundert. Dann zählen wir wieder von eins angefangen, und so erhalten wir zwei Hundert, drei Hundert..... neun Hundert. Zehn Hundert nennen wir ein Tausend; tausendmal

*) Außer den angeführten Theilen der Mathematik gibt es noch andere Wissenschaften, die zu den mathematischen gerechnet, und unter dem Namen technische Mathematik verstanden werden; dergleichen sind die Befestigungskunst, die bürgerliche Baukunst, die Wasserbaukunst, die Geschützkunst, die Markscheidekunst, die Steuermannskunst u. dgl. Es sind Anwendungen der reinen und angewandten Mathematik, zu deren Ausübung man aber noch andere Kenntnisse und Künste nöthig hat; weßwegen sich ihre Benennungen in Kunst endigen.

tausend eine Million; eine Million Millionen eine Billion; eine Million Billionen eine Trillion u. s. w. Wollen wir endlich den gänzlichen Mangel von den zu zählenden Dingen doch auch als Zahl andeuten, so bezeichnen wir ihn durch das Wort: Null.

§. 5.

Um die Zahlen nicht mit Worten schreiben zu müssen, hat man auf willkürliche Zeichen gedacht, wodurch man sie vorstellen und kürzer schreiben könnte. Einige Völker, als die Phönicier, Griechen und Hebräer, haben hiezu die Buchstaben ihres Alphabets gewählt, deren zehn ersten sie die Werthe von eins bis zehn beigelegt haben; den eilften ließen sie zwanzig, den zwölften dreißig u. s. f. gelten, so, daß der neunzehnte den Werth hundert bekam, von wo aus sie wieder verschiedene Eintheilungen machten. Die Römer wählten zu ihren Zahlzeichen einige Buchstaben ihres Alphabets,

I,	V,	X,	L,	C,	D oder IↃ,	M oder CIↃ,
eins,	fünf,	zehn,	fünfzig,	hundert,	fünfhundert,	tausend.

Sie zählen die durch diese Zeichen vorgestellten Zahlen, wenn sie gegen die Rechte hin nicht wachsen, zusammen, als II zwei, VI sechs, XXVII sieben und zwanzig; wenn aber ein kleineres links neben einem größern Zeichen steht, so rechnen sie es von dem größern hinweg; als z. B. IV vier, IX neun, XL vierzig u. s. w. Diese Zahlzeichen werden heut zu Tag noch zuweilen bei öffentlichen Aufschriften gebraucht.

§. 6.

Die gewöhnlichsten Zahlzeichen sind die sogenannten Ziffern, die uns so wie die Buchstaben des Alphabets bekannt sind; nemlich 1 bedeutet für sich allein eins, 2 zwei, 3 drei, 4 vier, 5 fünf, 6 sechs, 7 sieben, 8 acht, 9 neun, 0 null. Sie werden die arabischen Ziffern genannt, weil wir sie von den Arabern sollen erhalten haben.

Um mit diesen zehn Ziffern jede Zahl bezeichnen zu können, hat man durch eine allgemeine Übereinstimmung folgendes Gesetz angenommen: Wenn mehrere Ziffern in einer Zeile neben einander stehen, so bedeutet jede Ziffer an der folgenden Stelle gegen die Linke zehnmal so viel, als an der nächst vorhergehenden. Es bedeutet daher bei einer durch die Zusammensetzung der angeführten Ziffern bezeichneten Zahl, z. B. bei 8746295, die erste Ziffer zur Rechten blose Einheiten oder sogenannte Einer, 5 (fünf); die Ziffer an der zweiten Stelle bedeutet Zehner, und zwar so viele Zehner, als sie für sich allein Einheiten bedeuten würde, 9 (neun) Zehner oder abgekürzt neunzig, zusammen 95 (neunzig und fünf, oder nach dem Sprachgebrauche fünf und neunzig); die dritte Ziffer bedeutet Hunderte, oder Einheiten der Hunderte, 295 (zwei Hundert 95); die vierte bedeutet Tausende, 6295 (sechs Tausend 295); die fünfte Zehntausende, 46295 (46 Tausend 295); die sechste Hunderttausende, 746295 (746 Tausend 295); die siebente Einheiten der Millionen, 8746295 (acht Millionen 746 Tausend 295). Nach diesen kommen die Zehner, Hunderte, Tausende, Zehntausende, Hunderttausende der Millionen; endlich an der dreizehnten Stelle Einheiten der Billionen u. s. w.

Das aus den angeführten zehn Zahlzeichen und dem dabei angenommenen Gesetze abgeleitete Lehrgebäude, nach welchem gegenwärtig alle gebildeten Völker die Zahlen anschreiben und lesen, und das auch wir in vorliegendem Lehrbuche ohne Ausnahme immer benützen werden, pflegt man das decadische System, oder die Decadik zu nennen, von dem griechischen Worte Δεκα (zehn).

§. 7.

Die Ziffer 0 (Null) bedeutet für sich allein nichts, sondern erhöht nur den Werth der übrigen bedeutenden Ziffern, wenn diese dadurch weiter links zu stehen kommen. Wenn sich daher bei einer mit Ziffern bezeichneten Zahl Nullen befinden, so ist dies ein Zeichen, daß an denjenigen Stellen, wo Nullen stehen, die dahin gehörigen Einer, Zehner, Hunderte oder Tausende ꝛc. abgehen. Z. B. 10 zehn; 20 zwanzig; 400 vier Hundert; 801 acht Hundert und eins; 60040 sechszig Tausend und vierzig.

In folgendem Schema kann man den Werth der Ziffern, der ihnen vermög ihrer Stelle zugehört, mit einem Blicke übersehen; es bedeutet nemlich

die	21.	20.	19.	18.	17.	16.	15.	14.	13.	12.	11.	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1. Stelle
u. s. w.	Hunderte	Zehner	Einheiten	Hunderttausende	Zehntausende	Tausende	Hunderte	Zehner	Einheiten	Hunderttausende	Zehntausende	Tausende	Hunderte	Zehner	Einheiten	Hunderttausende	Zehntausende	Tausende	Hunderte	Zehner	Einheiten
der Trillionen				der Billionen						der Millionen						blose					

§. 8.

Wer nur einmal die Fertigkeit erlangt hat, jede mit drei Ziffern bezeichnete Zahl richtig auszusprechen, dem wird es auch sehr leicht sein, jede mit wie viel immer Ziffern geschriebene Zahl auszusprechen, und zwar auf folgende Art.

Man theile die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Classen ein, gebe jeder Classe drei Ziffern (die letzte links kann deren auch weniger erhalten); hinter der ersten Classe mache man einen Punct, hinter der zweiten einen Strich, hinter der dritten einen Punct, hinter der vierten zwei Striche, hinter der fünften einen Punct, hinter der sechsten drei Striche: dann lese man jede Classe für sich, als wenn sie allein stände, und setze an der Stelle eines jeden Punctes das Wort Tausend; an der Stelle eines Striches das Wort Million, bei zwei Strichen Billion, bei drei Strichen Trillion u. s. w., übergehe aber jede ganz mit Nullen besetzte Classe mit Stillschweigen, so ist die Zahl richtig ausgesprochen. Z. B. die Zahl 84,,,650.046,,508.700,964.005 heißt: 84 Trillionen, 650 Tausend und 46 Billionen, 508 Tausend und 700 Millionen, 964 Tausend und 5. Eben so 5,,640.000,300.000 heißt 5 Billionen, 640 Tausend Millionen, und 300 Tausend.

Eben so läßt sich jede ausgesprochene Zahl aufschreiben, wenn man bei der höchsten Classe links anfängt, die bedeutenden Ziffern gehörig anschreibt, wo aber keine Hunderte, Zehner, oder Einheiten ausgesprochen werden, Nullen ansetzt, ferner überall, wo die Worte Tausend, Millionen, Billionen 2c. ausgespro=

chen werden, die gehörigen Zeichen macht und nachsieht, ob alle Classen vorhanden sind, und ob jede Classe drei Ziffern habe, wobei jedoch die erste links stehende Classe zuweilen nur zwei, oder auch gar nur eine Ziffer allein haben kann. Z. B. um folgende Zahl mit Ziffern zu bezeichnen: sechs und zwanzig Tausend und vier Millionen, neunmal Hundert und sechs Tausend und acht, schreibe man 26; nach diesen folgen die Hunderte und Zehner der Millionen, weil aber keine solche ausgesprochen worden, so setze man an ihre Stellen zwei Nullen, und sodann die vier Einheiten der Millionen, nemlich 26.004 Millionen; nach den Millionen folgen die Hunderttausende, in dem angeführten Beispiele neun, man setze also 9 an; nach diesen kommen Zehntausende, hier keine, man schreibe also 0; nach diesen kommen sechs Einheiten der Tausende, diese werden auch angesetzt, und dann erhält man 26.004,906 Tausend; endlich schreibe man an die Stellen der nicht ausgesprochenen blosen Hunderte und Zehner zwei Nullen, und setze die acht letzten Einheiten an, so sieht die vorgelegte Zahl so aus 26.004,906.008.

Es mag hier noch bemerkt werden, daß die im vorhergehenden Paragraphen zusammen gestellten Einheiten, auf welche sich die von der Rechten gegen die Linke nach einander folgenden Ziffern der decadisch, d. i. nach dem decadischen Systeme (§. 6), geschriebenen Zahlen beziehen, als: Einer, Zehner, Hunderte, Tausende, Zehntausende u. s. w. decadische Einheiten genannt, und dem eben Erklärten gemäß durch die Zeichen 1, 10, 100, 1000, 10000 u. s. w. vorgestellt werden.

§. 9.

Die Zahlen, deren Einheiten noch mit keinem besondern Namen belegt sind, und welche sich daher noch auf jede Gattung von Größen beziehen können, werden unbenannte Zahlen genannt; z. B. die Zahl 28 ist in so lange eine unbenannte Zahl, als man sich noch alle Gattungen der Größen, als 28 Menschen, 28 Häuser, 28 Klaftern u. s. w. darunter vorstellen kann. Bezieht sich aber eine Zahl auf eine bestimmte Einheit, so ist sie eine benannte Zahl; z. B. 8 Menschen, 17 Gulden, 100 Bücher u. s. w. sind benannte Zahlen.

§. 10.

Zahlen sind gleichnamig, wenn die von ihnen gezählten Einheiten gleiche Namen führen, oder auf gleiche Namen gebracht werden können; im Gegentheile sind sie ungleichnamig. Z. B. 6 Klaftern und 4 Klaftern sind gleichnamige Zahlen; 7 Pfunde und 6 Meilen sind ungleichnamig; 3 Bombardiere und 2 Kanoniere sind zwar ungleichnamig, wenn aber die Rede von Artilleristen ist, so sind sie gleichnamig; auch könnte man 2 Klaftern und 5 Schuh oder 5 Fuß für gleichnamig betrachten, wenn man sich einbildet, daß die Schuhe Theile einer Klafter sind.

§. 11.

Zwei gleichnamige Zahlen oder Größen können auf die einfachste Art mit einander verglichen werden, wenn man untersucht, ob sie gleich groß seien, oder ob eine größer sei als die andere; ungleichnamige Größen hingegen können nicht mit einander verglichen werden. Man kann z. B. untersuchen, welches mehr oder größer sei, 5 Klaftern oder 2 Klaftern; eben so, welches größer sei, 1 Pfund oder 12 Loth, weil man sich einbilden kann, daß ein Pfund aus 32 Lothen bestehe: aber man kann nicht untersuchen, welches größer sei, 4 Klaftern oder 5 Pfund. Man hat, um die Gleichheit zweier Größen auszudrücken, das Zeichen $=$ gewählt, welches zwischen zwei Größen gesetzt wird, die gleich groß sind, das heißt, deren eine für die andere gesetzt werden darf; z. B. 1 Kl. $=$ 6 Sch., und wird gelesen: eine Klafter ist gleich 6 Schuh; 4 Gr. $=$ 12 Kr. Und um die Ungleichheit auszudrücken, bedient man sich des Zeichens $>$, welches zwischen zwei ungleiche Größen gesetzt wird, so, daß die Spitze gegen die kleinere zu stehen kommt; z. B. 1 Fl. $>$ 20 Kr. und wird gelesen: 1 Fl. ist größer als 20 Kr.; eben so 4 Sch. $<$ 1 Kl. heißt 4 Schuh sind kleiner als 1 Klafter.

Dieses ist die erste Vergleichung der Größen, womit die Mathematik ihren Anfang macht: sie gründet ihr Lehrgebäude auf die hieraus entspringenden Grundsätze (Sätze, deren Wahrheit ohne allen Beweis einleuchtend ist), schreitet dann zur Erkenntniß anderer verborgener Wahrheiten fort, und führt uns auf diese Art an die Grenzen unseres Verstandes.

§. 12.

Grundsätze.

I. Jedes Ganze ist seinen Theilen zusammen genommen gleich, und ist größer als jeder seiner Theile; z. B. 1 Kl. = 6 Sch.; 1 Fl. = 20 Gr. Hingegen 1 Kl. > 4 Sch.; 19 Gr. < 1 Fl.

II. Gleiches kann für Gleiches gesetzt werden. Statt 18 Schuh kann man 3 Klafter setzen; statt ein Pfund können 32 Loth gesetzt werden.

III. Wenn zwei Größen einer dritten Größe gleich sind, so sind sie auch unter sich gleich; ist aber eine Größe größer, oder kleiner, als eine von zwei gleichen Größen, so ist sie auch größer, oder kleiner als die andere; z. B.

1 Fl. = 60 Kr.	1 Fl. = 60 Kr.
1 Fl. = 20 Gr.	3 Gr. < 1 Fl.
also auch 60 Kr. = 20 Gr.	3 Gr. < 60 Kr.

II. Abschnitt.

Von der Addition.

§. 13.

Eine Zahl, welche so groß ist, als zwei oder mehrere Zahlen zusammen genommen, wird die Summe dieser Zahlen genannt; so z. B. ist die Zahl 5 die Summe der Zahlen 2 und 3; weil 3 und 2 zusammen genommen 5 gibt. Eben so ist 9 die Summe von 2, 3 und 4 u. s. w.

§. 14.

Die Rechnungsart aber, nach welcher man die Summe mehrerer gegebenen Zahlen findet, wird die Addition genannt: nemlich, addiren heißt die Summe mehrerer gegebenen Zahlen finden.

Die zu addirenden Zahlen heißen Posten oder Summanden und müssen gleichnamig sein, sonst können sie nicht addirt werden; z. B. 3 Pfund und 4 Gulden können unmöglich in eine

Summe gebracht werden; denn die Summe würde weder Pfunde noch Gulden bedeuten. Eben so kann auch von 5 Pfunden und 4 Lothen die Summe weder 9 Pfunde, noch 9 Lothe sein: es wird aber weiter hinten gezeigt werden, wie derlei Zahlen, welche zwar ungleichnamig sind, doch aber auf gleiche Namen gebracht werden können, zu addiren sind.

§. 15.

Das Zeichen, dessen man sich bei der Addition bedient, ist ein aufrecht stehendes Kreuz, nemlich +, welches ausgesprochen wird: mehr (plus), und anzeigt, daß diejenigen Zahlen oder Größen, zwischen welchen es steht, addirt werden sollen; z. B. $4 + 3 = 7$; wird gelesen 4 mehr 3 ist gleich 7; $9 + 5 = 14$; $9 + 8 = 17$ u. s. w.

Anmerkung. Hier muß der Anfänger sich in der Summirung zweier Zahlen, welche beide nur aus einer Ziffer bestehen, oder von denen eine aus zwei, und die andere nur aus einer Ziffer besteht, wohl üben; z. B. 8 und 5 sind 13; 9 und 8 sind 17; 24 und 7 sind 31; 48 und 9 sind 57; 86 und 8 sind 94 u. s. w. Dabei kann man sich gewisse Regeln machen, die einem Ungeübten gut zu Statten kommen können; z. B. man wüßte nicht geschwind, wie viel 26 und 9 sei, so erinnere man sich nur, daß 26 und 10 = 36 sei; also um eins weniger gibt 35. Ingleichen man wüßte nicht gleich, wie viel 48 und 7 sei, so gebe man in Gedanken indessen 2 von 7 zu 48, so hat man 50, und 5 gibt 55; und mehr dergleichen.

§. 16.

Grundsätze.

I. Wenn man zu gleichen Größen Gleiches addirt, so sind die Summen gleich.

Beispiele.

	$4 + 3 = 7$	1 Fl. = 60 Kr.
	$2 + 6 = 8$	1 Gr. = 3 Kr.
also auch	$4+3+2+6=7+8$	1 Fl. + 1 Gr. = 63 Kr.

Es ist daher einerlei, ob man die ganzen Größen oder alle Theile, woraus sie bestehen, zusammen addirt.

II. Addirt man aber zu gleichen Größen Ungleiches, so ist jene Summe größer, wo das Größere addirt worden ist.

Beispiele.

$7 + 8 = 15$	1 Kl. = 6 Sch.
$5 > 4$	1 Sch. > 4 Zoll.
also auch $7+8+5>15+4$;	also auch 1 Kl. + 1 Sch. > 6 Sch. + 4 Z.

§. 17.

Um nun Zahlen, wenn sie auch aus noch so viel Ziffern bestehen, addiren zu können, beobachte man folgende Regeln.

1) Man schreibe die zu addirenden Zahlen so unter einander, daß die Einheiten unter die Einheiten, Zehner unter die Zehner, Hunderte unter die Hunderte u. s. w. zu stehen kommen; nemlich man ordne sie von der Rechten gegen die Linke gehörig unter einander; wodurch bei jenen Zahlen, die aus weniger Ziffern bestehen, die Stellen zur Linken leer bleiben; und ziehe darunter einen Querstrich.

2) Dann addire man erstlich die Columne der Einheiten, und setze die Summe hievon, wenn sie nur aus einer Ziffer besteht (wie hier vorausgesetzt wird), unter den Strich an die Stelle der Einheiten; nemlich im Beispiele Nr. 1 sagt man: 4 und 1 gibt 5, und 3 gibt 8 Einheiten; auf die nemliche Art addire man nun auch die Columne der Zehner, indem man wieder sagt: 6 und 2 gibt 8, und 1 gibt 9, und setze diese Summe, da sie wieder nur aus einer Ziffer besteht, an die Stelle der Zehner; und so addire man ferner die Hunderte, Tausende, Zehntausende u. s. w.; so wird man die verlangte Summe erhalten, wie aus dem Beispiele Nr. 1 zu ersehen ist. Befinden sich in einer Columne lauter Nullen, so wird auch in der Summe eine Nulle an die Stelle gesetzt, damit die folgenden Ziffern ihren Rang behalten (§. 7), wie aus dem Beispiele Nr. 2 zu ersehen ist.

Beispiele.

Nr. 1.	92164	Nr. 2.	7001
Zu addiren	321	Zu addiren	9505
	5413		302
Summe	97898	Summe	16808

3) Besteht aber die Summe einer Columne aus zwei Ziffern, so schreibe man nur die erste Ziffer rechts unter die addirte Columne, und die andere Ziffer addire man zur folgenden Columne; nemlich

im Beispiele Nr. 3 sagt man: 6 und 8 gibt 14, und 9 gibt 23, nemlich 3 Einheiten, und zwei Zehner; man schreibe deßwegen die 3 Einheiten an die Stelle der Einheiten, die 2 Zehner aber übertrage man zur Columne der Zehner, indem man ferner sagt: 2 geblieben und 5 gibt 7, und 6 gibt 13, und 1 gibt 14 Zehner, nemlich 4 Zehner und 1 Hundert; folglich schreibe man die 4 Zehner an die Stelle der Zehner, und übertrage das 1 Hundert zur Columne der Hunderte, und sage ferner: 1 geblieben und 4 gibt 5, und 8 gibt 13, und 7 gibt 20 Hunderte, nemlich kein oder 0 Hundert, und 2 Tausende; man schreibe demnach an die Stelle der Hunderte eine Nulle, damit die folgenden Ziffern ihren Werth behalten, und übertrage die 2 Tausende zur Columne der Tausende; und so fahre man fort, bis keine Columne mehr vorhanden ist, so wird man die richtige Summe haben. Besteht eine Columne aus lauter Nullen, und es ist etwas von der vorigen Columne geblieben, so muß es an diese Stelle gesetzt werden, wie das Beispiel Nr. 4 zeigt.

Beispiele.

Nr. 3. Zu addiren	4456 2868 719	Nr. 4. Zu addiren	8084 2063 8095
Summe	8043	Summe	13242

4) Wenn viele Zahlen zu addiren sind, so kann es sich ereignen, daß die Summe irgend einer Columne aus 3 Ziffern bestehe; da setze man ebenfalls nur die erste Ziffer rechts unter die addirte Columne, und zähle die übrigen zur folgenden Columne; z. B. es wäre die Summe der Columne der Einheiten = 124, so setze man die erste Ziffer 4 an die Stelle der Einheiten, und die übrigen 12 addire man zur Columne der Zehner.

Man kann aber auch in dergleichen Fällen, wo gar viele Zahlen zu addiren sind, und also zu viele Aufmerksamkeit erfordert wird, die Zahlen in zwei oder mehrere Abtheilungen oder Partien zertheilen, jede Partie insbesondere addiren, und die Summen davon in eine Hauptsumme bringen; z. B. es wäre folgende Addition zu verrichten: 87569 + 5498 + 3695 + 95678 + 3097 + 909 + 40895 + 3278 + 78567 + 4039 + 97908 + 21706 + 6537 + 69578 + 59857; so könnte man, wie folgt, schreiben:

87569		
5498	78567	
3695	4039	
95678	97908	
3097	21706	
909	6537	
40895	69578	240619
3278	59857	338192
Summe 240619	Summe 338192	Hauptsumme 578811

Daß man nach diesen vorgeschriebenen Regeln die richtige Summe erhalte, erhellet aus (§. 12, Grundsatz I.), weil man auf diese Art alle Einheiten, Zehner, Hunderte, Tausende u. s. w., als alle Theile des Ganzen, welches hier die Summe heißt, zusammen zählt.

§. 18.

Zweifelt man, ob nicht in der Addition gefehlt worden, so ist die beste **Probe**, wenn man die Addition noch einmal wiederholt, und zwar das zweite Mal addire man von unten hinauf, wenn das erste Mal von oben hinunter addirt worden ist, oder umgekehrt; erhält man nun in beiden Fällen einerlei Summe, so ist die Addition höchst wahrscheinlich richtig.

III. Abschnitt.

Von der Subtraction.

§. 19.

Diejenige Zahl, welche anzeigt, um wie viel eine von zwei gegebenen Zahlen größer ist als die andere, wird die **Differenz** oder der **Unterschied** dieser Zahlen genannt; so z. B. ist 5 die Differenz der Zahlen 9 und 4; weil 9 um 5 größer ist als 4.

§. 20.

Die Rechnungsart, nach welcher die Differenz jeder zwei gegebenen Zahlen gefunden werden kann, wird die **Subtraction** genannt; nemlich **subtrahiren** oder **abziehen** heißt die **Differenz zweier gegebenen Zahlen finden**.

Von den Zahlen selbst wird die größere, von welcher abgezogen wird, der Minuend, und die kleinere, welche abgezogen werden soll, der Subtrahend genannt.

Auch hier müssen beide Zahlen, die von einander subtrahirt werden sollen, gleichnamig sein; denn sonst könnten sie ja gar nicht verglichen werden (§. 11).

§. 21.

Das Zeichen der Subtraction ist ein liegender Strich —, welches ausgesprochen wird: weniger (minus), und wenn es zwischen 2 Zahlen oder Größen steht, anzeigt, daß die hinter dem Zeichen von jener vor dem Zeichen abgezogen werden soll; z. B. $15 - 7 = 8$ wird gelesen: 15 weniger 7 ist gleich 8; $11 - 5 = 6$; $9 - 2 = 7$, u. s. w.

Anmerkung. Die Anfänger müssen sich auch hier üben, um gleich die Differenz zweier Zahlen zu wissen, deren jede nur aus einer einzigen Ziffer besteht, oder von denen der Minuend aus zwei, der Subtrahend aber nur aus einer Ziffer besteht; z. B. $9 - 2 = 7$; $8 - 3 = 5$; $17 - 8 = 9$; $16 - 9 = 7$; $13 - 8 = 5$ u. s. w.

§. 22.

Grundsätze.

I. Wenn man von gleichen Größen Gleiches subtrahirt, so sind die Differenzen gleich.

Beispiele.

$3 + 6 = 9$	1 Fl. = 60 Kr.
$2 + 5 = 7$	1 Gr. = 3 Kr.
also auch $3 + 6 - 2 - 5 = 9 - 7$;	also auch 1 Fl. — 1 Gr. = 57 Kr.

Daher ist es einerlei, ob man die Theile einer Größe von den Theilen einer andern Größe, oder die ganze Größe auf einmal abzieht.

II. Subtrahirt man von gleichen Größen Ungleiches, so sind die Differenzen ungleich, und zwar dort größer, wo am wenigsten subtrahirt worden ist.

Beispiele.

$12 + 6 = 18$	1 Zent. = 100 Pf.
$5 > 4$	30 Loth < 1 Pf.
also auch $12 + 6 - 5 < 18 - 4$;	also auch 1 Z. — 30 L. > 99 Pf.

III. Zieht man von ungleichen Größen Gleiches ab, so ist dort die Differenz größer, wo vorhin Größeres war.

Beispiele.

$6 + 3 > 8$	1 Tag > 20 Stunden
$4 = 4$	60 Min. = 1 Stunde
also auch $6 + 3 - 4 > 8 - 4$.	also auch 1 T. − 60 M. > 19 St.

§. 23.

Sind nun zwei Zahlen, die aus mehreren Ziffern bestehen, von einander abzuziehen, so verfahre man nach folgenden Regeln.

1) Man schreibe die kleinere Zahl unter die größere, so daß die Einheiten unter die Einheiten, die Zehner unter die Zehner u. s. w. zu stehen kommen, wie bei der Addition, und ziehe darunter einen Querstrich.

2) Dann subtrahire man zuerst die Einheiten der untern Zahl von den Einheiten der obern Zahl, so auch die Zehner von den Zehnern, die Hunderte von den Hunderten u. s. w. und schreibe die Differenz jedesmal an eben dieselbe Stelle, so hat man die verlangte Differenz. Im Beispiele Nr. 1 sagt man: 2 von 5 bleiben 3, 3 von 4 bleibt 1, 0 von 9 bleiben 9, 2 von 6 bleiben 4. Bleibt aber irgendwo gar nichts übrig, so muß an die Stelle eine Nulle gesetzt werden; nemlich im Beispiele Nr. 2 sagt man: 1 von 4 bleiben 3, 8 von 8 bleibt 0, 3 von 7 bleiben 4. Besteht die obere Zahl aus mehr Ziffern als die untere, so werden die noch übrigen Ziffern zur Differenz herunter gesetzt, wie im Beispiele Nr. 3 zu ersehen ist.

Beispiele.

	Nr. 1.		Nr. 2.		Nr. 3.
	6945		784		23587
	2032		381		432
Diff.	4913	Diff.	403	Diff.	23155

3) Wenn eine Ziffer, von welcher man abziehen soll, kleiner ist, als die abzuziehende, so borge man von der nächst folgenden links eine Einheit, und bezeichne (so lange man noch wenig Fertigkeit im Rechnen besitzt), diese Ziffer mit einem Puncte, zum Zeichen, daß sie sodann um eins weniger gelte: diese geborgte Einheit gibt 10 Einheiten der vorhergehenden Stelle (§. 6.), deßwegen vermehre man die Ziffer, von welcher abgezogen werden soll, um 10 Einhei-

ten, und ziehe die darunter stehende von ihr ab. So können im Beispiele Nr. 4 die 5 Einheiten von 3 Einheiten nicht abgezogen werden: man borge deßwegen einen Zehner, und sage: 5 von 13 Einheiten bleiben 8 Einheiten, und 3 von 5 bleiben 2 Zehner; ferner 9 Hunderte von 8 Hunderten können nicht abgezogen werden: man borge also ein Tausend oder 10 Hunderte, und sage: 9 Hunderte von 18 Hunderten bleiben 9; und endlich 1 von 4 bleiben 3 Tausende. Kommt eine bedeutende Ziffer von einer Null abzuziehen, so borge man ebenfalls von der folgenden Ziffer eine Einheit, wo sodann aus 0 zehn wird. Ist aber eine Null von einer andern Null abzuziehen, so wird in der Differenz ebenfalls eine Null gesetzt, wie dies aus dem Beispiele Nr. 5 zu ersehen ist. Wäre die Ziffer, von welcher man borgt, ein 1, so muß man sich sodann an dessen Stelle eine Null gedenken, wie es das Beispiel Nr. 6 zeigt.

B e i s p i e l e.

```
        . .                      .                      ..
Nr. 4.  5863          Nr. 5.  6030          Nr. 6.  8115
        1935                  2014                  2057
        ----                  ----                  ----
        3928                  4016                  6058
```

4) Wenn einer Ziffer, von welcher man nicht abziehen kann, eine oder mehrere Nullen nachfolgen, so übergehe man alle Nullen, und borge von der nächsten bedeutenden Ziffer eine Einheit; diese gibt an der Stelle der ersten Null 10 Einheiten: eine davon hinweg geborgt bleibt eine 9; die geborgte Einheit gibt wieder an der Stelle der vorhergehenden Null 10 Einheiten, und eins davon geborgt bleibt wieder an dieser Stelle eine 9 u. s. w., woraus folgende Regel fließt: **Wenn von einer oder mehr nach einander folgenden Nullen eins geborgt werden soll, so borge man von der nächst folgenden bedeutenden Ziffer eine Einheit, und bemerke alle übersprungenen Nullen mit einem Puncte, zum Zeichen, daß dieselben dann lauter 9 sind**; wie es im Beispiele Nr. 7 und 8 zu ersehen ist.

B e i s p i e l e.

```
         ..                     ... .....
Nr. 7.  6704          Nr. 8.  9000800106
        6356                    43491638
        ----                  ----------
         348                  8957308468
```

Die Richtigkeit dieses Verfahrens erhellet daraus, weil es einerlei ist, ob man die Einheiten, Zehner, Hunderte u. s. w. jede insbesondere, oder ob man die ganze kleinere Zahl auf einmal abzieht. (§. 22, Grundsatz I.)

§. 24.

Da (vermög §. 19) die Differenz anzeigt, um wie viel die größere Zahl größer ist, als die kleinere, so können die Differenz und die kleinere Zahl als Theile der größern angesehen werden; addirt man demnach die Differenz zur kleinern Zahl, so muß die größere zum Vorschein kommen; welches zur Probe der Subtraction dienen kann.

Auf denselben Grund fußt sich auch eine in vielen Fällen recht bequeme Ausführung der Subtraction, nemlich die durch das sogenannte Ergänzen des Subtrahends zum Minuend, wobei man eigentlich erforscht, wie viel Einheiten man dem Subtrahend beizuzählen habe, damit man den Minuend erhalte. Während man nemlich, wenn z. B. 7 von 18 abzuziehen sind, bei dem im vorigen Paragraphen gelehrten Verfahren eigentlich von 18 um 7 Einheiten zurückzählt und dadurch auf 11 geführt wird, zählt man bei der Subtraction durch Ergänzung von 7 aus allmählig bis auf 18, wodurch man um 11 Einheiten vorschreitet.

Soll auf diese Weise eine Zahl von einer andern abgezogen werden, so sucht man für jede Ziffer des Subtrahends ihre einziffrige Ergänzung auf jene nächst höhere Zahl, welche auf die gleichstellige Ziffer des Minuends sich endigt, notirt diese ergänzende Ziffer an der gleichnamigen Stelle in der Differenz, und zählt die etwa vorkommenden Zehner der Zahl, auf die man ergänzte, zur nächst höheren Ziffer des Subtrahends, welche man sofort auf dieselbe Weise behandelt. So sagt man im Beispiel Nr. 7: 6 und 8 (schreibe 8) gibt 14, bleibt 1; 1 und 5 gibt 6 und 4 (geschrieben 4) macht 10, bleibt 1; 1 und 3 sind 4 und 3 (schreibe 3) gibt 7; 6 und 0 (hier nicht geschrieben) gibt 6.

Vorzüglich brauchbar ist diese Methode, wenn von einer Zahl mehrere andere zugleich abzuziehen sind. In einem solchen Falle addirt man die gleichnamigen Ziffern der Subtrahende und ergänzt ihre Summe durch eine Ziffer, die man an der gleichnamigen Stelle der Differenz anschreibt, auf die nächst größere und mit der gleichstelligen Ziffer des Minuends sich endigende Zahl, und zählt die bei dieser vorhandenen Zehner zu den Ziffern der nächst höheren Stelle der Subtrahende, mit deren Summe man wie mit der frühern verfährt.

Z. B. Von	367	Hiebei sagt man: 9, 8 und 2 gibt 19
subtrahirt	112	und 8 (angeschrieben) gibt 27, 2 geblie-
	38	ben und 1, 3 und 1 macht 7 und 9 (ge-
	19	schrieben) gibt 16, 1 geblieben und 1
bleiben	198	sind 2 und 1 (geschrieben) sind 3.

§. 25.

Einige **Beispiele** zur Anwendung der Addition und Subtraction.

1. **Frage.** Die Armee einer Monarchie besteht aus 238500 Mann Infanterie, 65840 Mann Cavallerie, 10830 Mann Artillerie, und noch aus verschiedenen andern Corps 12640 Mann; wie stark ist wohl diese Kriegsmacht?

Antwort. 238500 + 65840 + 10830 + 12640 = 327810 Mann.

2, **Frage.** Die Stadt Trier wird in der Geschichte um 1300 Jahre älter als die Stadt Rom angegeben. Da nun Rom 753 Jahr vor Christi Geburt erbaut worden sein soll, wie alt war die Stadt Trier im Jahre 1802?

Antwort. 1300+753+1802=3855 Jahre.

3. **Frage.** Amerika ist von Christoph Columbus im Jahre 1492 entdeckt worden: wie lang war es nun im Jahre 1802, daß wir von diesem vierten Welttheile Wissenschaft haben?

Antwort. 1802—1492=310 Jahre.

4. **Frage.** Eine Armee ist 280000 Mann stark ins Feld gezogen; im ersten Feldzuge verlor sie 25648 Mann; dagegen erhielt sie 36800 Mann Recruten; im zweiten Feldzuge verlor sie 38794 Mann, erhielt aber 40500 Recruten; im dritten Feldzuge verlor sie 8456 Mann, und erhielt einen Zuwachs von 50000 Recruten: wie stark ist wohl die Armee am Ende des dritten Feldzuges?

Antwort. 280000 + 36800 + 40500 + 50000 — 25648 — 38794 — 8456 = 407300 — 72898 = 334402 Mann.

IV. Abschnitt.

Von der Multiplication.

§. 26.

Wenn eine und dieselbe Zahl ein oder mehrere Mal zu sich selbst addirt werden soll, so bedient man sich einer Rechnungsart, durch welche der Betrag viel geschwinder, als durch die gewöhnliche Addition gefunden werden kann; diese Rechnungsart wird die Multiplication genannt. Die Zahl, welche etliche Mal genommen, oder addirt werden soll, nennt man den Multiplicand, und diejenige Zahl, welche anzeigt, wie oft der Multiplicand zu nehmen ist, heißt der Multiplicator; beide zusammen heißen die Factoren, und der Betrag wird hier das Product genannt. Zwei Zahlen mit einander multipliciren heißt demnach eine Zahl so oft nehmen, als die andere Einheiten in sich enthält. Z. B. 4 mit 3 multipliciren heißt die Zahl 4 dreimal, oder welches einerlei ist, die Zahl 3 viermal nehmen. In beiden Fällen kommt 12 zum Vorschein: 3 und 4 sind demnach die Factoren, und 12 ist das Product.

Es ist daher bei der Multiplication gleichgiltig, welchen Factor man als Multiplicator annimmt, weil das Product dasselbe ist; und es zeigt jeder Factor mit seinen Einheiten an, wie oft der andere genommen werden muß, damit das Product zum Vorschein komme; oder, welches einerlei ist, wie oft der andere Factor in dem Producte enthalten ist.

§. 27.

Das Zeichen der Multiplication ist ein liegendes Kreuz ×, oder auch nur ein Punct . ; es wird ausgesprochen: multiplicirt mit, oder Mal, und bedeutet, daß die Zahlen, zwischen welchen es steht, mit einander multiplicirt werden sollen;

z. B. 6 × 8 = 48, wird gelesen: 6 multiplicirt mit 8, oder 6 Mal 8 ist 48; eben so 9 . 4 = 36; 7 . 6 = 42 u. s. w.

Sind 3 oder mehrere Zahlen mit dem Multiplicationszeichen verbunden, so bedeutet dies, daß das Product der vorhergehenden Zahlen immer mit der nachfolgenden zu multipliciren sei; z. B. 2 . 4 . 9 = 8 . 9 = 72.

Anmerkung. Anfänger müssen die Producte von zwei Zahlen, wovon jede nur aus einer Ziffer besteht, deren Zusammenstellung man das Einmaleins nennt, wohl auswendig lernen, wenn sie im Multipliciren Fertigkeit erlangen wollen; und es gibt auch hier gewisse Regeln, die sich ein Ungeübter zu Nutzen machen kann; z. B. man wüßte nicht geschwind, wie viel 9 Mal 7 ist, so kehre man es um, und sage 7 Mal 9, und es wird vielleicht geschwinder einfallen; oder man sage: 10 Mal 7 ist 70, 7 davon ist 63 u. dgl.

Das Einmaleins ist am besten aus folgender Tafel, welche der pythagorische Rechentisch genannt wird, zu erlernen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Der Gebrauch ist folgender: z. B. man wollte das Product von 6 Mal 7 wissen, so suche man einen Factor, z. B. 6 in der ersten verticalen (herab laufenden) Reihe, und den andern 7 in der obersten horizontalen (nach der Breite laufenden) Reihe, und fahre mit dem Finger aus der ersten Reihe horizontal, und aus der andern vertical; und dort, wo beide zusammen treffen, findet man das Product 42.

§. 28.

Benannte Zahlen können nicht mit einander multiplicirt werden, wenn sie auch gleichnamig sind; denn wären z. B. 6 Fl. mit 3 Fl. zu multipliciren, was sollte wohl das Product 18 bedeuten? Wohl aber kann man eine benannte Zahl mit einer unbenannten multipliciren, das heißt, man kann sie so vielmal nehmen, als man will; z. B. 6 Fl. 3 Mal genommen gibt zum Producte 18 Fl.; 4 Kr. × 5 = 20 Kr. u. s. w.

§. 29.

Grundsätze.

I. **Wenn man gleiche Größen mit gleichen multiplicirt, so sind die Producte gleich.**

Beispiele.

$$8 = 5 + 3 \qquad 4 = 4$$
also auch $8 \,.\, 4 = 5.4 + 3.4$
nemlich $32 = 20 + 12$

$$2\text{ Gr.} = 6\text{ Kr.} \qquad 5 = 3 + 2$$
also auch $2\text{ Gr.} \times 5 = 6\text{ kr.} \times 3 + 6\text{ kr.} \times 2$
nemlich $10\text{ Gr.} = 18\text{ kr.} + 12\text{ kr.}$
das ist $10\text{ Gr.} = 30\text{ kr.}$

Man erhält also einerlei Product, wenn man alle Theile einer Größe, oder die ganze Größe mit einer andern Größe multiplicirt.

II. **Multiplicirt man aber gleiche Größen mit ungleichen, oder ungleiche Größen mit gleichen, so erhält man verschiedene Producte; und zwar dort größere, wo die Factoren größer sind.**

Beispiele.

$$8 = 6 + 2 \qquad 4 > 3$$
also auch $8 \,.\, 4 > 6 \,.\, 3 + 2 \,.\, 3$

$$1\text{ Gr.} > 2\text{ Kr.} \qquad 3 = 3$$
also auch $3\text{ Gr.} > 6\text{ Kr.}$

§. 30.

Sind nun zwei Zahlen mit einander zu **multipliciren**, wovon eine nur aus blosen Einheiten, die andere aber aus mehreren Ziffern besteht, so beobachte man Folgendes.

1) Man schreibe den kleinern Factor unter den größern, und multiplicire damit zuerst die Einheiten, dann die Zehner, Hunderte, Tausende des andern Factors, und schreibe die Producte, wenn dieselben nur aus einer Ziffer bestehen, jedesmal an eben dieselbe Stelle, so hat man das verlangte Product (§. 29, Grundsatz I.), wie es das Beispiel Nr. 1 zeigt.

2) Besteht aber ein Product aus zwei Ziffern, so setze man nur, wie bei der Addition, die erste Ziffer rechts, wenn es auch eine Null wäre, an dieselbe Stelle, und addire die andere zum folgenden Producte; nemlich im Beispiele Nr. 2 sagt man: 4 Mal 6 gibt 24 Einheiten, nemlich 4 Einheiten, und 2 Zehner; man setze deßwegen 4 Einheiten an ihre Stelle, und behalte die 2 Zehner im Gedanken (man kann selbe auch an der Seite anmerken); ferner sage man: 4 Mal 7 gibt 28, und 2 gebliebene Zehner dazu geben 30 Zehner,

nemlich keine Zehner, und 3 Hunderte; deßwegen setze man an die Stelle der Zehner eine 0, und behalte die 3 Hunderte wieder in Gedanken; ferner 4 mal 1 gibt 4, und 3 geblieben gibt 7 Hunderte, und 4 Mal 8 gibt 32 Tausende.

3) Befindet sich im obern Factor eine Null, so muß auch im Producte eine Null gesetzt werden; wäre aber vom vorhergehenden Producte etwas geblieben, so wird dies an diese Stelle gesetzt, wie es aus dem Beispiele Nr. 3 zu ersehen ist; indem man sagt: 4 Mal 8 gibt 32, 2 geschrieben, bleibt 3; 4 Mal 0 gibt 0, und 3 geblieben ist 3; 4 Mal 1 gibt 4; 4 Mal 0 gibt 0; und 4 Mal 5 gibt 20.

Beispiele.

Nr. 1.	2341	Nr. 2.	8176	Nr. 3.	50108
	2		4		4
Prod.	4682	Prod.	32704	Prod.	200432

§. 31.

Ist eine Zahl mit 10 zu multipliciren, so hänge man nur rechts eine Null an; denn dadurch erhält jede Ziffer einen zehnfachen Werth (§. 6 und 7), und folglich ist die ganze Zahl mit 10 multiplicirt (§. 29, Grundsatz I). Eben so wird eine Zahl mit 100 multiplicirt, wenn man rechts 2 Nullen anhängt; mit 1000, wenn man 3 Nullen anhängt u. s. w.

§. 32.

Wären aber zwei Zahlen, welche beide aus mehreren bedeutenden Ziffern bestehen, mit einander zu multipliciren, so verfahre man nach folgenden Regeln.

1) Man schreibe den kleinern Factor unter den größern, und multiplicire zuerst mit den Einheiten des untern Factors den ganzen obern Factor (§. 30).

2) Dann multiplicire man auch auf eben diese Art mit den Zehnern des untern Factors den ganzen obern Factor: wornach aber die erste Ziffer dieses Productes nicht mehr Einheiten, sondern Zehner bedeutet; denn im folgenden Beispiele Nr. 1, im 2ten Producte sollte man eigentlich sagen: 20 Mal 3 gibt 60, statt daß man abgekürzt sagt 2 Mal 3 gibt 6; eben deßwegen bedeutet die zweite Ziffer dieses Productes Hunderte, die 3te Tausende u. s. w. Man schreibe daher

dieses Product so unter das vorige, daß die erste Ziffer an die Stelle der Zehner zu stehen kommt.

3) Auf eben diese Art multiplicire man mit den Hunderten des untern Factors den ganzen obern Factor, und schreibe dieses Product so unter die vorigen, daß die erste Ziffer, welche hier schon Hunderte bedeutet, an die Stelle der Hunderte zu stehen kommt. Und so multiplicire man mit jeder Ziffer des untern Factors den ganzen obern Factor, und rücke das Product aus der angeführten Ursache jedesmal um eine Stelle weiter gegen die Linke.

4) Hat der untere Factor eine oder mehrere Nullen in der Mitte, so überspringe man sie, und multiplicire nur mit den folgenden bedeutenden Ziffern, rücke aber das Product um so viele Stellen weiter gegen die Linke, als man Nullen übersprungen hat; wie es das Beispiel Nr. 2 zeigt.

5) Sodann addire man diese *besondern* oder *Partialproducte*, so wie sie unter einander stehen, zusammen, und man erhält das wahre Product (§. 29, Grundsatz I).

6) Hat einer oder beide Factoren am Ende einige Nullen, so multiplicire man sie, als wenn die Nullen hinten nicht da wären, und hänge an das Product rechts so viele Nullen an, als deren beide Factoren zusammen haben; denn es ist im Beispiele Nr. 3 (vermög §. 31), $320 \times 4600 = 32 \times 10 . 46 \times 100 = 32 . 46 . 1000$.

Beispiele.

Nr. 1.	Nr. 2.	Nr. 3.
4523	4809	4600
324	2006	320
18092	28854	92
9046	9618	138
13569	9646854	1472000
1465452		

§. 33.

Die beste *Probe über die Multiplication* ist, wenn man sie noch einmal wiederholt: und man könnte das zweite Mal die Factoren verwechseln, das heißt, jenen zum Multiplicator annehmen, der vorhin der Multiplicand war. Erhält man nun einerlei Product, so ist richtig multiplicirt worden.

Es wird zwar weiter hinten bei der Division (§. 44) noch eine Probe über die Multiplication gezeigt werden, die aber ebenfalls nicht leichter als diese sein wird.

§. 34.

Einige Fragen zur Anwendung der Multiplication.

1. Frage. Wenn eine Klafter 6 Schuh enthält, wie viel Schuh machen 49 Klafter?

Antwort. 6 . 49 = 294 Schuh.

2. Frage. Ein Gulden hat 60 Kreuzer; wie viel Kr. machen 285 Fl. und 45 Kr.?

Antwort. 285 . 60 + 45 = 17145 Kr.

3. Frage. Ein Schuh Länge von einem gewissen Bauholze kostet 45 Kr.; wie viel Kreuzer kostet nun ein Baum, welcher 5 Klafter und 4 Schuh lang ist?

Antwort. 5 Klafter und 4 Schuh machen 5 . 6 + 4 Sch. = 34 Schuh; mithin kostet der Baum 34 . 45 = 1530 Kr.

4. Frage. Wenn ein Soldat monatlich 3 Fl. bekommt, wie viel bekommen 30 Soldaten in einem Jahre?

Antwort. 3 . 12 . 30 = 1080 Fl.

5. Frage. Es soll eine Mauer von Ziegelsteinen errichtet werden: der Länge nach kommen 2600, der Dicke nach 8, und der Höhe nach 150 Ziegel zu liegen; wie viel Ziegel braucht man hiezu?

Antwort. Da der Länge nach 2600, und der Dicke nach 8 Ziegel liegen sollen, so kommen in einer Schichte 8 . 2600 = 20800 Ziegel zu liegen; und da 150 solche Schichten über einander liegen sollen, so kommen zur ganzen Mauer 150 . 20800 = 208 . 15 . 1000 = 3120000 Ziegel.

Mehrere Beispiele kann sich der Anfänger selbst leicht aufgeben.

V. Abschnitt.

Von der Division.

§. 35.

Es kommt zuweilen vor, daß man zu wissen nöthig hat, wie oft eine bekannte Zahl von einer andern bekannten abgezogen werden kann, bis nichts mehr übrig bleibt; oder welches einerlei ist, wie oft eine gegebene Zahl in einer andern gegebenen enthalten ist; z. B. man möchte gern wissen, wie viel 48 Schuh in Klaftern betragen; hier kommt es nur darauf an, daß man untersuche, wie oft 6 in 48 enthalten ist; weil 6 Schuh = 1 Klafter sind.

Um nun dieses leichter, als durch eine öfters wiederholte Subtraction finden zu können, hat man eine besondere Rechnungsart eingeführt, welche die Division (Theilung) genannt wird. Dividiren oder theilen heißt demnach untersuchen, wie oft eine gegebene Zahl in einer andern gegebenen enthalten ist. Die Zahl, welche dividirt werden soll, heißt der Dividend; jene, durch welche dividirt wird, heißt der Divisor oder Theiler; und die zu suchende Zahl, welche anzeigt, wie oft der Divisor in dem Dividend enthalten ist, wird der Quotient genannt. In unserm angeführten Beispiele ist 48 der Dividend, 6 der Divisor, und 8 der Quotient; weil 6 in 48 genau 8 Mal enthalten ist.

§. 36.

Da der Quotient mit seinen Einheiten anzeigt, wie oft der Divisor im Dividend enthalten ist, so kann (vermög §. 26) der Dividend als ein Product, wovon der Quotient und der Divisor die Factoren sind, angesehen werden; und es zeigt also auch der Divisor mit seinen Einheiten an, wie oft der Quotient im Dividend enthalten ist, das heißt, wie viel Theile man aus dem Dividend machen kann, deren jeder so groß, als der Quotient ist. Man kann demnach auch sagen: Dividiren heißt eine gegebene Zahl in so viele gleiche Theile zertheilen, als eine andere gegebene Zahl Einheiten in sich enthält. 48 durch 6 dividiren heißt deßwegen auch, die Zahl 48 in 6 gleiche Theile theilen.

§. 37.

Das Zeichen der Division sind zwei über einander stehende Puncte, nemlich :, und wird ausgesprochen: dividirt oder getheilt durch. Dieses Divisionszeichen, wo es zwischen 2 Zahlen oder Größen steht, zeigt an, daß die links vor dem Zeichen stehende durch jene rechts nach dem Zeichen folgende Größe dividirt werden soll. Unser oben angeführtes Beispiel wird demnach so geschrieben, $48 : 6 = 8$, und gelesen, 48 dividirt durch 6 ist gleich 8.

Man pflegt auch die Division durch einen horizontalen Strich, über welchem der Dividend, und unter welchem der Divisor steht, anzudeuten; so heißt auch $\frac{28}{7} = 4$, die Zahl 28 dividirt durch 7 ist gleich 4.

§. 38.

Eine benannte Zahl kann durch eine andere gleichnamige Zahl dividirt werden; so ist z. B. 12 Pf. : 4 Pf. = 3, und es zeigt hier der Quotient an, wie oft 3 Pf. in 12 Pfunden enthalten sind. Auch kann eine benannte Zahl durch eine unbenannte dividirt werden; z. B. 15 Fl. : 3 = 5 Fl., und hier zeigt der Quotient an, wie groß jeder Theil wird, wenn man 15 Gulden in 3 gleiche Theile theilt; aber eine unbenannte Zahl kann nicht durch eine benannte, oder eine benannte Zahl durch eine gänzlich ungleichnamige dividirt werden.

§. 39.

Grundsätze.

I. Wenn man gleiche Größen durch Gleiches dividirt, so sind auch die Quotienten gleich.

Beispiele.

	$9 = 6 + 3$		6 Gr. = 18 Kr.
	$3 = 3$		2 = 2
also auch	$9 : 3 = 6 : 3 + 3 : 3$	also auch	6 Gr. : 2 = 18 Kr. : 2
nemlich	$3 = 2 + 1$	nemlich	3 Gr. = 9 Kr.

Es ist deßwegen auch einerlei, ob man ein Ganzes oder jeden seiner Theile durch eine und die nemliche Zahl dividirt.

II. Dividirt man aber gleiche Größen durch Ungleiches, so sind die Quotienten ungleich, und zwar dort größer, wo der Divisor kleiner ist.

Beispiele.

$$\frac{\begin{array}{c}12 = 9 + 3 \\ 4 > 3\end{array}}{}$$

also auch $12 : 4 < 9 : 3 + 3 : 3$
nemlich $3 < 3 + 1$

$$\frac{\begin{array}{c}2\ \text{Kl.} = 12\ \text{Sch.} \\ 2 < 3\end{array}}{}$$

also auch $2\ \text{Kl.} : 2 > 12\ \text{Sch.} : 3$
nemlich $1\ \text{Kl.} > 4\ \text{Sch.}$

Nimmt man daher bei ungeändertem Dividend den Divisor 2, 3, 4 . . . Mal größer, oder kleiner an, so wird der Quotient 2, 3, 4 . . . Mal kleiner oder größer sein.

III. Dividirt man hingegen ungleiche Größen durch Gleiches, so ist dort der Quotient größer, wo der Dividend größer ist.

Beispiele.

$$\frac{\begin{array}{c}12 > 8 \\ 4 = 4\end{array}}{}$$

also auch $12 : 4 > 8 : 4$
nemlich $3 > 2$

$$\frac{\begin{array}{c}10\ \text{Gr.} < 35\ \text{Kr.} \\ 5 = 5\end{array}}{}$$

also auch $10\ \text{Gr.} : 5 < 35\ \text{Kr.} : 5$
nemlich $2\ \text{Gr.} < 7\ \text{Kr.}$

Nimmt man daher bei ungeändertem Divisor den Dividend 2, 3, 4 . . . Mal größer oder kleiner an, so wird auch der Quotient 2, 3, 4 . . . Mal größer oder kleiner sein.

§. 40.

Wenn man bei einer Division den Dividend und Divisor mit einer und der nemlichen Größe multiplicirt oder dividirt, so bleibt der Quotient ungeändert.

Denn durch die Multiplication des Dividends wird der Quotient vergrößert (§. 39, III.), und durch die Multiplication des Divisors wird der Quotient verkleinert (§. 39, II.). Wird nun der Dividend und Divisor mit derselben Zahl multiplicirt, so wird der Quotient eben so vielmal vergrößert als verkleinert, und folglich bleibt er ungeändert. Eben so wird auch der Quotient durch die Division des Dividends so vielmal verkleinert, als er durch die

Division des Divisors vergrößert wird, wenn beide durch eine und die nemliche Zahl dividirt werden, und folglich bleibt er ganz ungeändert.

§. 41.

Wenn eine Zahl, die kleiner als hundert ist, durch eine einfache dividirt werden soll, so ist der Quotient schon aus dem Einmaleins bekannt. Ist aber eine Zahl, die aus mehr als 2 Ziffern besteht, durch eine Zahl, die nur blose Einheiten enthält, zu dividiren, so verfahre man auf folgende Art.

1) Man schreibe den Dividend zur Linken, den Divisor zur Rechten, zwischen ihnen das Divisionszeichen, und hinter dem Divisor setze man das Gleichheitszeichen, nach welchem der Quotient zu stehen kommt.

2) Dann untersuche man, wie oft der Divisor in der ersten links stehenden Ziffer des Dividends, oder wenn diese kleiner ist als der Divisor, in den zwei ersten Ziffern des Dividends enthalten sei; (im Beispiele Nr. 1 sagt man: 4 in 9 geht 2 Mal) diesen gefundenen Theil des Quotienten schreibe man hinter das Gleichheitszeichen, multiplicire damit den Divisor, schreibe das Product unter jene Ziffer des Dividends, in welche man dividirt hat, und ziehe es davon ab (man sagt in unserm Beispiele 2 Mal 4 gibt 8; 8 von 9 bleibt 1).

3) Zu dem Reste (1) hänge man die nächst folgende Ziffer des Dividends (4) rechts an (14), und dividire dieses wieder durch den Divisor; (4 in 14 geht 3 Mal); den Quotienten hänge man an den schon gefundenen Theil an, multiplicire damit den Divisor und ziehe das Product wieder von den Ziffern ab, in welche man dividirt hat (3 Mal 4 gibt 12; 12 von 14 bleiben 2). Zu dem Reste setze man wieder die nächst folgende Ziffer des Dividends (8) herunter, und dividire ihn wieder durch den Divisor (4 in 28 geht 7 Mal); den Quotienten wieder an den schon gefundenen angehängt, den Divisor damit multiplicirt, und das Product wieder abgezogen u. s. w.

4) Bleibt irgendwo gar kein Rest übrig, wie im Beispiele Nr. 2, so wird die folgende Ziffer des Dividends allein herunter gesetzt, und wie vorhin dividirt; wäre sie aber kleiner als der Di-

visor, so muß zuerst in dem Quotienten eine Null angesetzt werden; sodann wird die folgende Ziffer des Dividends noch herunter gesetzt, und wieder wie vorhin dividirt, wie es im Beispiele Nr. 3 zu ersehen ist.

5) Hat man nun auf diese Art alle Ziffern des Dividends schon herunter gesetzt, und ist bei der letzten Subtraction gar nichts übrig geblieben, so ist es ein Zeichen, daß der Divisor in dem Dividend genau enthalten sei; und zwar so oft, als der Quotient Einheiten in sich enthält; so ist im Beispiele Nr. 1 der Divisor 4 in 948 genau 237 Mal enthalten. Sollte aber bei der letzten Subtraction noch ein Rest übrig bleiben, so ist es ein Zeichen, daß der Divisor im Dividend nicht genau enthalten sei. So bleibt im Beispiele Nr. 3 bei der letzten Subtraction noch der Rest 2 übrig, welcher anzeigt, daß noch 2 durch 7 zu theilen übrig bleiben. In einem solchen Falle schreibt man den Rest über einen Strich, unter welchen der Divisor zu stehen kommt, und hängt diese angezeigte Division, welche man einen Bruch nennt, mit etwas kleinern Ziffern geschrieben, an den Quotienten an, zum Zeichen, daß der Quotient noch um etwas, welches aber keine ganze Einheit mehr betragen kann, vermehrt werden muß. Wie viel aber dieser Bruch betrage, wird weiter unten, bei der Lehre von den Brüchen, gezeigt werden.

Beispiele.

Nr. 1.	Nr. 2.	Nr. 3.
$948 : 4 = 237.$	$1575 : 5 = 315.$	$1444 : 7 = 206\frac{2}{7}.$
8	15	14
14	7	44
12	5	42
28	25	2
28	25	
0	0	

Daß man durch dieses Verfahren den richtigen Quotienten erhalte, ist aus (§. 39, Grundsatz I.) leicht zu begreifen, weil man durch dasselbe die Einheiten, Zehner, Hunderte, Tausende, .. des Dividends, jede insbesondere, vom Höchsten angefangen, dividirt, und den Rest jedesmal zum Nächstkleinern addirt.

Anmerkung. In der Ausübung pflegt man gemeiniglich die Division, wenn der Divisor nur aus einer Ziffer besteht, zu verrichten, indem man jedesmal den Quotienten mit dem Divisor in

Gedanken multiplicirt, das Product von dem betreffenden Dividend abzieht, und den Rest unterhalb ansetzt: z. B.

$$15776 : 6 = 2629\tfrac{2}{6}$$
$$3151$$

da sagt man:

6 in 15 geht 2 Mal; 2 Mal 6 ist 12; 12 von 15 bleiben 3;
6 in 37 geht 6 Mal; 6 Mal 6 ist 36; 36 von 37 bleibt 1;
6 in 17 geht 2 Mal; 2 Mal 6 ist 12; 12 von 17 bleiben 5;
6 in 56 geht 9 Mal; 9 Mal 6 ist 54; 54 von 56 bleiben 2.

§. 42.

Besteht aber auch der Divisor aus mehreren Ziffern, so beobachte man folgende Regeln:

1) Man ordne die Division wie im Vorigen (§. 41), und dividire mit der ersten linken Ziffer des Divisors in die erste, oder wenn diese zu klein ist, in die zwei ersten Ziffern des Dividends; die gefundene Ziffer setze man an die Stelle des Quotienten hin, multiplicire damit den ganzen Divisor: das Product schreibe man unter so viel Ziffern des Dividends, als der Divisor Ziffern hat, wenn die erste Ziffer des Divisors kleiner ist, als jene des Dividends, wie im Beispiele Nr. 4; hätte man aber die zwei ersten Ziffern des Dividends dividiren müssen, wie im Beispiele Nr. 5, so muß auch das Product um eine Stelle weiter gegen die Rechte gerückt werden; sodann ziehe man dieses Product gehörig ab.

2) Zu dem Reste setze man die folgende Ziffer des Dividends herab, und dividire ihn wieder durch den Divisor; wenn er aber nicht darin enthalten ist, wie im Beispiele Nr. 5, so hänge man im Quotienten eine Null an, setze noch eine Ziffer des Dividends herunter, dividire sodann wie früher in 1) mit dem Divisor, und setze die gefundene Ziffer an die folgende Stelle im Quotienten. Mit dieser gefundenen Ziffer des Quotienten multiplicire man wieder den ganzen Divisor, ziehe das Product gehörig ab, und setze abermal eine Ziffer zum Reste herunter u. s. w.

3) Sollte es sich ereignen, daß irgendwo ein Product zu groß ist, und von den Ziffern, in welche man dividirt hat, nicht abgezogen werden kann, so ist es ein Zeichen, daß der Quotient zu groß angenommen worden, und er muß daher vermindert werden.

Wäre hingegen nach geschehener Subtraction der Rest noch größer als der Divisor, so ist es ein Zeichen, daß der Quotient zu klein angenommen worden ist, und er muß daher größer gemacht werden; worauf jedesmal zu sehen ist, weil nicht immer der ganze Divisor so oft im ganzen Dividend, als die erste Ziffer des Divisors in jener des Dividends enthalten ist.

4) Hat man nun auf diese vorgeschriebene Art alle Ziffern des Dividends schon herunter gesetzt, so ist die Division vollendet und man muß nur dem etwa noch vorhandenen Reste den Divisor unterschreiben, und nach (§. 41. Nr. 5) an den Quotienten anhängen, wie im Beispiele Nr. 5 zu ersehen ist.

Beispiele.

Nr. 4.

$$\begin{array}{l} 738364:2134=346 \\ \underline{6402} \\ \;\;9816 \\ \;\;\underline{8536} \\ \;\;12804 \\ \;\;\underline{12804} \\ \;\;\;\;\;0 \end{array}$$

Nr. 5.

$$\begin{array}{l} 25882891:4257=6080\tfrac{331}{4257} \\ \underline{25542} \\ \;\;\;34089 \\ \;\;\;\underline{34056} \\ \;\;\;\;\;\;331 \end{array}$$

5) Ist eine Zahl durch 10 zu dividiren, so schneide man rechts eine Ziffer ab; dadurch wird jede Ziffer des Dividends 10 Mal kleiner (§. 6), und folglich ist die ganze Zahl durch 10 dividirt (§. 39, Grundsatz I.); eben so wird eine Zahl durch 100 dividirt, wenn man zwei, durch 1000, wenn man drei Ziffern u. s. w. rechts abschneidet; die abgeschnittenen Ziffern aber müssen, wenn es keine Nullen sind, als der Rest mit dem unterschriebenen Divisor an den Quotienten, wie vorhin, angehängt werden; z. B. 6837 Pf. wie viel Centner machen sie? Antwort: $6837 : 100 = 68\frac{3}{100}$ Centner.

6) Haben beide, Divisor und Dividend, am Ende einige Nullen, so schneide man von beiden gleichviel Nullen ab, und dividire dann nach den vorigen Regeln; dadurch werden beide, Divisor und Dividend, durch eine und die nemliche Zahl dividirt; daher bleibt der Quotient ungeändert. (§. 40.) Z. B. $36000 : 600 = 360 : 6 = 60$.

7) Hat aber nur der Divisor allein am Ende Nullen, so schneide man von dem Dividend rechts so viel Ziffern ab, als der

Divisor am Ende Nullen hat, und dividire die übrigen durch die bedeutenden Ziffern des Divisors; dem Reste aber werden die abgeschnittenen Ziffern wieder angehängt, und der ganze Divisor unterschrieben; denn es ist z. B.

$$2367 : 400 = (2300 + 67) : 400 = 2300 : 400 + \tfrac{67}{400} = 23 : 4 + 67 : 400 = 5 + \tfrac{3}{4} + \tfrac{67}{400} = 5 + \tfrac{300}{400} + \tfrac{67}{400} = 5\tfrac{367}{400}.$$

Anmerkung. Man pflegt auch öfters die Division so zu ordnen, daß man den Divisor links, den Dividend in der Mitte, und den Quotienten rechts ansetzt, und alle drei durch lothrechte Striche von einander absondert; übrigens aber wird die Division nach den eben gegebenen Gründen verrichtet, wie im nachstehenden Beispiele zu ersehen ist.

Divis.	Divid.	Quotient.
24	38567	$1606\frac{23}{24}$
	24	
	145	
	144	
	167	
	144	
	23	

Bei der wirklichen Anwendung der Rechenkunst ist es am vortheilhaftesten, die Division jederzeit so anzusetzen, wie es in diesem letzten Beispiele geschehen ist, weil man auf diese Art weniger Platz dazu braucht.

§. 43.

In den Rechnungen, wo mehrere Zahlen durch eine und dieselbe Zahl dividirt, oder auch multiplicirt werden sollen, kann man sich die Arbeit um Vieles erleichtern, wenn man sich die Vielfachen dieser Zahl, am sichersten durch wiederholte Addition, bis zum Neunfachen berechnet und in eine Tafel einträgt: hiedurch kann man nicht nur jedesmal den Theil des Quotienten richtig bestimmen, sondern man erspart auch das jedesmalige Multipliciren, weil man das betreffende Product nur aus der Tafel heraus schreiben darf; z. B. es wären mehrere Zahlen durch 864 zu dividiren, so verfertige man sich nachstehende Tafel.

1	864
2	1728
3	2592
4	3456
5	4320
6	5184
7	6048
8	6912
9	7776

```
2511648 : 864 = 2907.
1728
 7836
 7776
   6048
   6048
      0
```

Es sei nun die Zahl 2511648 durch 864 zu dividiren, so sieht man aus der Tafel, daß die erste Ziffer des Quotienten nicht 3, sondern 2 sein muß; weil bei 3 das Product 2592 größer ist als 2511, in welches man dividirt; man schreibe deßwegen im Quotienten 2, und ziehe das Product aus der Tafel bei 2, nemlich 1728, gehörig ab, setze die folgende Ziffer herunter u. s. w.

§. 44.

Da man (nach §. 36) den Dividend als ein Product ansehen kann, wovon der Quotient und der Divisor die Factoren sind, so kann die Division am besten geprüft werden, wenn man den Quotienten mit dem Divisor multiplicirt, und den etwa gebliebenen Rest zum Producte addirt; kommt nun der Dividend zum Vorschein, so ist die Division gut verrichtet worden. Und so kann man auch umgekehrt die Multiplication durch die Division prüfen, wenn man das Product durch den einen Factor dividirt, wo dann der andere Factor zum Vorschein kommen muß; allein, da die Division etwas beschwerlicher als die Multiplication ist, so wird man lieber die Multiplication durch die Wiederholung, wie im §. 33 gesagt worden, prüfen.

§. 45.

Einige Fragen zur Anwendung der Division.

1. Frage. Wenn 8 Personen 1248 Fl. unter sich gleich vertheilen sollen, wie viel bekommt jede?

Antwort. 1248 Fl. : 8 = 156 Fl.

2. Frage. Eine Klafter hat 6 Schuh, und der Schuh 12 Zoll; wie viel betragen also 23400 Zoll in Klaftern?

Antwort. 23400 : 12 = 1950 Sch., und 1950 : 6 = 325 Kl.

3. Frage. Ein Jahr hat 31556928 Secunden, wie viel macht dieses Tage, Stunden, Minuten und Secunden aus?

Antwort. Da 60 Secunden eine Minute ausmachen, so sind 31556928 Sec. = (31556928 : 60) Min. = 525948 Min. + 48 Sec.; ferner, da 60 Minuten eine Stunde ausmachen, so sind 525948 Min. = (525948 : 60) St. = 8765 St. + 48 Min.; endlich sind 8765 St. = (8765 : 24) T. = 365 Tage + 5 St.; folglich hat das Jahr 365 T. 5 St. 48 M. und 48 Sec.

4. Frage. Es sollen 270000 Ziegelsteine in einen Haufen geschichtet werden, in jeder Schichte sollen der Länge nach 150, der Breite nach aber 60 Ziegel zu liegen kommen, wie viel müssen solche Schichten auf einander gelegt werden?

Antwort. Da der Länge nach 150, und der Breite nach 60 liegen sollen, so kommen in eine Schichte 150 . 60 = 9000, und folglich 270000 : 9000 = 30 Schichten.

5. Frage. Wenn man zu einer Montur 6 Ellen Tuch braucht; wie viele Montirungen wird man aus 20 Stücken von diesem Tuche liefern können, wenn jedes Stück 36 Ellen hat?

Antwort. Da in einem Stücke Tuch 36 Ellen sind, so haben 20 Stück 36 . 20 = 720 Ellen; und weil man zu jeder Montur 6 Ellen braucht, so bekommt man von allen diesen Ellen 720 : 6 = 120 Montirungen.

VI. Abschnitt.

Von den Rechnungsarten mit ungleichnamigen Zahlen, welche gleichnamig gemacht werden können.

§. 46.

Durch die bisher gezeigten vier Rechnungsarten können nun auch ungleichnamige Zahlen, welche auf gleiche Namen gebracht werden können, addirt, subtrahirt, multiplicirt und dividirt werden, wenn man sie vorher auf gleiche Namen, und zwar auf Einheiten der kleinsten Gattungen bringt, wie in einigen Beispielen (§. 34) gezeigt worden ist; z. B. es wären 3 Kl. 5 Sch. 9 Zoll zu addiren zu 4 Kl. 4 Sch. 8 Zoll; so sind 3 Kl. + 5 Sch. + 9 Z. = (216 + 60 + 9) Z. = 285 Z., und 4 Kl. + 4 Sch. + 8 Z. = (288 + 48 + 8) Zoll = 344 Z.; folglich ist die Summe (285 + 344) Z. = 629 Zoll; welches wieder in Klaftern, Schuhen und Zollen ausgedrückt werden kann, wie es in einigen Beispielen (§. 45) gezeigt worden ist.

Allein man hat auch hier besondere Rechnungsweisen eingeführt, durch welche man geschwinder zum Zwecke kommt: es ist aber vorher bei einem wie beim andern nothwendig, daß man bei den Rechnungen, wo solche ungleichnamige Zahlen vorkommen, die Eintheilung wisse, wie viel eine Einheit der größeren Gattung Einheiten der nächst kleineren Gattung enthält. Da jedoch nicht nur diese Eintheilungen selbst, besonders jene der Gewichte, Längenmaße und Münzen, fast in jedem Lande verschieden sind, sondern auch unter einem und dem nemlichen Namen in verschiedenen Ländern ganz ungleiche Dinge verstanden werden (so ist z. B. ein Kaisergulden = 60 Kaiserkreuzer, ein Reichsgulden = 50 Kaiserkreuzer, ein Polnischer Gulden = 15 Kaiserkreuzer u. s. w.); so wollen wir uns hier blos an die in Österreich eingeführten Eintheilungen halten, welche aus Folgendem zu ersehen sind.

I. Längenmaße.

Längen werden mit der Klafter, dem Schuh, Zoll u. s. w., Wege mit der Meile, und Schnittwaren mit der Elle gemessen. Die Klafter theilt man in 6 Schuh oder Fuß; den bürgerlichen Fuß oder Werkschuh, in den Gewerben nach dem Duodecimal-Maße in 12 Zoll, jeden Zoll in 12 Linien, die Linie in 12 Puncte oder Scrupel, und den Punct in 12 Quinten; den geometrischen Fuß bei Ländervermessungen (mit dem Werkschuh von gleicher Länge) nach dem Decimal-Maße in 10 Zolle, jeden Zoll in 10 Linien. Klafter, Schuh, Zoll, Linien, Puncte, Quinten pflegt man oft durch die zur Rechten oben an der Ziffer der Einer beigesetzten Zeichen ^{0}, ^{I}, ^{II}, ^{III}, ^{IV}, ^{V}, anzudeuten. So schreibt man z. B. 5^{0} 4^{I} 9^{II} 10^{III} 7^{IV} 11^{V} statt 5 Klafter, 4 Schuh, 9 Zoll, 10 Linien, 7 Puncte, 11 Quinten.

Große Entfernungen werden durch Meilen gemessen, eine Österreichische Meile beträgt 4000 Wiener Klaftern; eine halbe Meile nennt man eine Stunde Weges.

Das Schnittwarenmaß, die Elle, theilt man in halbe, Viertel-, Achtel-, Sechzehntel-, Zweiunddreißigstel-, oder in Drittel-, Sechstel-, oder endlich in Zehntel-Ellen.

Bei dem Recrutenmaße bedient man sich des Schuhes zu 12 Zoll, theilt aber den Zoll in 4 Strich. — Die Höhe der Pferde wird mit der Faust gemessen, welche 4 Werkzoll beträgt, die auch in 4 Strich untergetheilt werden. — Tragweiten von Feuerwaffen, und andere im Militärwesen vorkommende Strecken, werden in Schritten angegeben, indem man 10 Schritt auf 4 Klafter rechnet.

II. Flächenmaße.

Die Inhalte ebener begrenzter Flächen (Figuren) bestimmt man durch Quadrate (gleichseitige rechtwinklige Vierecke), deren Seiten entweder eine Klafter, einen Schuh, einen Zoll u. s. w. lang sind, und welche darnach eine Quadratklafter, ein Quadratschuh, ein Quadratzoll u. s. w. heißen.

Daher enthält die Quadratklafter 6.6 = 36 Quadratschuh, der Quadratschuh 12.12 = 144 Quadratzoll, der Quadratzoll 12.12 = 144 Quadratlinien, u. s. w.

Grundstücke werden nach dem Joche gemessen, welches 1600 Quadratklafter beträgt. — Weingärten werden an manchen Orten nach Pfunden und Raheln gemessen. 24 Pfund machen ein Joch, und 12 Pfund heißen ein Viertel (Weingarten). 1 Rahel (oder Rachel) oder ein Achtel = 400 Quadratklafter, ein großer Rahen = 600 Quadratklafter; 2 Rähel = ein Viertel Weingarten = 800 Quadratklafter. Das Tagwerk Wiese = 800 bis 1200 Quadratklafter.

III. Körpermaße.

Die Größe der Körper (ihren Rauminhalt) bestimmt man durch Würfel (Kuben, von 6 gleichen Quadraten begrenzte Körper), die zur Seite eine Klafter, einen Schuh, einen Zoll u. s. w. haben, und beziehlich eine Kubikklafter, ein Kubikschuh, ein Kubikzoll, u. s. w. heißen. Sofort enthält die Kubikklafter 6.6.6 = 216 Kubikschuh, der Kubikschuh 12.12.12 = 1728 Kubikzoll, u. s. w.

IV. Hohlmaße.

Getränke, als Wein, Bier u. dgl. werden durch Eimer gemessen. Ein Eimer enthält 40 Maß klaren Getränkes, und eine Maß 4 Seitel. Einige nennen das halbe Seitel auch Pfiff, und 3 Pfiff ein Großseitel.

Getreide wird nach dem Metzen (festgestellt von Leopold I. am 5. Dec. 1689) gemessen; ein Metzen wird in halbe, Viertel- und Achtelmetzen, das Achtel in 2 Maßel (Mühlmaßel), das Maßel in 2 Halbmaßel zu 2 Futtermaßel, jedes zu 2 Becher abgetheilt. 30 Metzen machen einen Muth, welcher kein wirkliches, sondern nur ein Rechnungsmaß ist; als Mehlmaß enthält er 31 Strich.

Kalk mißt man mit dem Mühel.

Kohlen werden mit dem Stübich gemessen.

V. Gewichte.

In der k. k. Österreichischen Monarchie sind gesetzlich fünferlei Gewichte (gewöhnlich Wiener oder Niederösterreichische genannt) im Gebrauche, nemlich:

1) Das Mark- oder Münz-, auch Valvationsgewicht, dessen man sich beim Münzwesen zum Abwägen des Silbers, und der daraus verfertigten Waren bedient.

2) Das Commercial- oder Handelsgewicht, welches im gewöhnlichen Handel gebraucht wird.

3) Das Ducatengewicht, welches beim Abwägen des Goldes, und der aus Gold verfertigten Waren gebraucht wird.

4) Das Juwelengewicht, womit Perlen und Edelsteine gewogen werden.

5) Das Apotheker- oder Medicinalgewicht.

Die Wiener Mark ist nach der von Kaiser Ferdinand I. am 1. August 1560 erlassenen Münzordnung so bemessen, daß 5 Wiener Mark genau 6 wahre Cölnische Mark betragen, deren man sich an vielen Orten Deutschlands bedient; und es wird die Wiener Mark, eben so wie die Cölnische, in 16 Loth, das Loth in 4 Quintel, das Quintel in 4 Pfennig, der Pfennig in 2 Heller, und der Heller in 128 Richtpfennig eingetheilt. Somit ist 1 Mark = 16 Loth = 64 Quintel = 256 Pfennig = 512 Heller = 65536 Richtpfennig.

Ein Wiener Handelspfund wird in 32 Loth, ein Loth in 4 Quintel, und ein Quintel in 60 Gran eingetheilt. Große Lasten werden durch den Centner von 100 Pfund, und Schiffsfrachten durch das Schiffspfund von 3 Centner gewogen. Demgemäß ist 1 Centner = 100 Pfund = 3200 Loth.
1 Pfund = 32 Loth = 128 Quintel = 7680 Gran.
1 Loth = 4 Quintel = 240 Gran.

Dabei ist aber das Wiener Handelsgewicht um etwas Weniges leichter als das Wiener Markgewicht, indem ein Wiener Handelspfund seit dem Jahre 1756 um 298 Wiener Richtpfennig leichter als 2 Wiener Mark ist, daher 130774 solcher Richtpfennige wiegt.

Das Gewicht eines gesetzmäßigen kaiserlichen Ducatens, deren nach der Münzordnung vom 1. Aug. 1560, 670 auf 10 Cölnische Mark, und 804 auf 10 Wiener Mark gehen, ist die Einheit des oben angeführten Ducatengewichts, und wird, nach den landesherrlichen Verordnungen vom 12. April 1753 und 17. April 1771, in 60 gleiche Theile getheilt, die man Ducatengrane nennt. Eine Wiener Mark enthält demnach 4824 Ducatengran.

Das Gewicht der Juwelen wird durch Karate bestimmt; 8 Karat des Wiener Juwelengewichts wiegen 385 Richtpfennig des Wiener Markgewichts; ein Karat wird noch in 4 Juwelengran eingetheilt.

Ein Wiener Apothekerpfund hat, nach der landesherrlichen Verordnung vom 11. April 1761, wie es fast überall gebräuchlich ist, 12 Unzen, und eine solche Unze besteht aus 2 genau eben so schweren Lothen, als das Handelsgewicht deren 32 hat. Eine Unze wird eingetheilt in 8 Drachmen oder Quintel; eine Drachme in 3 Scrupel, und ein Scrupel in 20 Apothekergran.

Sofort ist:

1 Apothekerpfund = 12 Unzen = 24 Loth = 96 Drachmen = 288 Scrupel = 5760 Gran.
1 Unze = 8 Drachmen = 24 Scrupel = 480 Gran.
1 Drachme = 3 Scrupel = 60 Gran.

Das Pfund Chocolategewicht wiegt, kraft des landesherrlichen Edictes vom 6. December 1781, nur 28 Loth des Handelsgewichts.

Bei den Gold- und Silberprobirwagen bedient man sich in ganz Deutschland eines kleinen Gewichts (gemeiniglich eines Pfennigs des Markgewichts), welches eine verjüngte oder symbolische Mark genannt wird; beim Silber theilt man diese verjüngte Mark in 16 Loth, und ein solches verjüngtes Loth in 18 Silbergran; oder auch ein Loth in 4 Quintel, und ein Quintel in 4 Pfennig. Beim Gold aber wird die verjüngte Mark in 24 Goldkarat, und ein solcher Karat in 12 Goldgran eingetheilt.

Zur Prüfung des Metallgehaltes der Erze benützt man als ein symbolisches Gewicht den sogenannten Bergcentner, welcher 1600 Wiener Richtpfennigen gleicht, und in 100 (symbolische) Pfund zu 32 Loth abgetheilt wird.

Das Getreideprobirgewicht ist ein symbolisches Gewicht, mit welchem man, zur Erforschung der Güte des Getreides, das Gewicht eines wirklichen Metzen Getreides nach dem Maße des symbolischen Metzens, von denen 1024 einen eigentlichen Metzen ausmachen, untersucht; es wiegt 2 Loth des Commercialgewichts, und stellt (symbolisch) 64 Pfund vor.

VI. Zeitmaße.

Die Grundeinheit der Zeit ist der Tag; er wird in 24 Stunden, jede Stunde in 60 Minuten, die Minute in 60 Secunden, die Secunde endlich in 60 Terzen eingetheilt. 7 Tage machen eine Woche; 28, 29, 30 oder 31 Tage geben einen Monat; 12 Monate ein Jahr. Ein gemeines Jahr hat 365, ein Schaltjahr 366 Tage. In Geldgeschäften rechnet man das Jahr zu 360 und den Monat zu 30 Tagen. 100 Jahre heißen ein Säculum (Jahrhundert).

VII. Geldrechnung.

Geld rechnet man nach Gulden (Fl.) zu 20 Groschen oder 60 Kreuzer, den Groschen (Gr.) zu 3 Kreuzer (Kr.), und den Kreuzer zu 4 Pfennig (Denar).

Die vorzüglichsten Österreichischen Silbermünzen sind: Groschen zu 3, Fünfer zu 5, Zehner zu 10, Zwanziger zu 20 Kreuzer, Guldenstücke zu 1 Fl., Thaler zu 2 Fl., nach dem Zwanzig-Gulden- oder Conventionsfuß, welchem gemäß in 20 Guldenstücken eine Mark reinen (feinen) Silbers enthalten ist. Goldmünzen sind: Ducaten zu 4 Fl. 30 Kr., Souveraind'or zu 13 Fl. 20 Kr., und halbe Souveraind'or zu 6 Fl. 40 Kr.

VIII. Abzählung einzelner Dinge.

Bei Dingen, die nach der Zahl verkauft werden, pflegt man 12 ein Dutzend, 15 eine Mandel, 30 einen Schilling, 60 ein Schock zu nennen.

Beim Papier machen 24 Bogen ein Buch, 20 Buch ein Rieß, und 10 Rieß einen Ballen. Beim Druckpapier machen 25 Bogen ein Buch.

§. 47.

Sind nun ungleichnamige Zahlen, welche auf gleiche Namen gebracht werden können, zu addiren, so ordne man sie so, daß alle diejenigen, welche gleiche Namen haben, unter einander, und die von der kleinsten Gattung rechts zu stehen kommen; dann fange man bei der kleinsten Gattung zu addiren an; enthält nun die Summe davon einige Einheiten der größern Gattung, so dividire man sie durch die Zahl, welche eine Einheit der größern Gattung ausmacht; den Rest schreibe man unter die addirte Stelle, und den Quotienten zähle man zur folgenden Gattung; und eben so fahre man nun weiter gegen die Linke von Gattung zu Gattung fort, wie es folgende Beispiele zeigen.

Beispiele.

8 Fl.	12 Gr.	2 Kr.	3 Dr.
10 „	18 „	1 „	2 „
2 „	17 „	2 „	3 „
26 „	9 „	1 „	1 „
48 Fl.	18 Gr.	2 Kr.	1 Dr.

22 St.	45 Min.	27 Sec.
13 „	14 „	30 „
6 „	0 „	20 „
42 St.	0 Min.	17 Sec.

Im ersten Beispiele sagt man: 1 und 3, und 2, und 3 sind 9 Dr., das ist 2 Kr. und 1 Dr. (weil 4 in 9 zwei Mal enthalten ist, und 1 übrig bleibt); 1 Dr. wird angesetzt, und 2 Kr. zur folgenden Stelle addirt; 2 und 1, und 2, und 1, und 2 sind 8 Kr., das sind 2 Gr. und 2 Kr. (weil 3 in 8 zwei Mal enthalten ist, und 2 übrig bleiben); darum werden die 2 Kr. an die Stelle der Kreuzer gesetzt, und die 2 Gr. wieder zur Stelle der Groschen addirt, nemlich 2 + 12 + 18 + 17 + 9 = 58 Gr. = 2 Fl. und 18 Gr. (weil 20 in 58 zwei Mal enthalten ist, und noch 18 zum Reste läßt); also 18 wieder an die Stelle der Groschen gesetzt; endlich ist 2 + 8 + 10 + 2 + 26 = 48 Fl.

§. 48.

Sollen ungleichnamige gleichartige Zahlen von einander abgezogen werden, so ordne man selbe wie bei der Addition (§. 47), fange von der kleinsten Gattung an, und subtrahire jede Gattung insbesondere. Ereignet sich aber, daß irgendwo bei einer Gattung die obere Zahl kleiner ist, als die abzuziehende, so borge man von der nächst folgenden Gattung eine Einheit, vermehre dann die Zahl um so viel, als die ausgeborgte Einheit Einheiten dieser Gattung enthält, und verrichte die Subtraction.

Beispiele.

Von	36	Fl.	4	Kr.	3	Dr.	Von	13	St.	0	M.	0	Sec.
abzuziehen	9	„	16	„	1	„	abzuziehen	10	„	29	„	40	„
Diff.	26	Fl.	48	Kr.	2	Dr.	Diff.	2	St.	30	M.	20	Sec.

In dem ersten Beispiele können 16 Kr. von 4 Kr. nicht abgezogen werden; man borge deßwegen einen Gulden, dieser macht 60 Kr., also hat man 64 Kr.; 16 davon bleiben 48 Kr. Eben so muß im zweiten Beispiele von 13 St. 1 geborgt werden: diese an die Stelle der Minuten getragen gibt 60 Min.; dann wieder 1 davon geborgt, und an die Stelle der Secunden getragen, gibt 60 Sec.; wo sodann die Subtraction verrichtet werden kann.

§. 49.

Wenn ungleichnamige Zahlen, die auf einerlei Namen gebracht werden können, mit einer unbenannten Zahl multiplicirt werden sollen, so fange man wieder bei der kleinsten Gattung zu multipliciren an, ziehe aus dem Producte die etwa darin enthaltenen Einheiten der größern Gattung durch die Division heraus, und addire sie zum folgenden Producte; der Rest aber wird an die Stelle gesetzt; und so auch bei den übrigen Gattungen.

Beispiele.

24 Kl. 5 Sch. 7 Zoll	6 Cent. 24 Pf. 18 Loth
multiplicirt mit 4	multiplicirt mit 9
99 Kl. 4 Sch. 4 Zoll	56 Cent. 21 Pf. 2 Loth

Im ersten Beispiele sagt man: 4 Mal 7 sind 28 Zoll, nemlich 2 Sch. und 4 Zoll (weil 12 in 28 immer 2 Mal enthalten ist, und 4 übrig läßt); man setzt deßwegen 4 Zoll an die Stelle der Zolle, und behält die 2 Schuh auf die künftige Stelle; ferner 4 Mal 5 sind 20, und 2 geblieben sind 22 Schuh, nemlich 3 Kl. und 4 Sch. u. s. w.

§. 50.

Sollen dergleichen ungleichnamige Zahlen, durch eine unbenannte Zahl dividirt, das heißt in eine gegebene Anzahl gleicher Theile getheilt werden, so fange man bei der größten Gattung zu dividiren an, jeden Rest addire man zur nächst kleinern Gattung, nachdem man ihn vorher auf Einheiten dieser Gattung gebracht hat, und theile neuerdings, so erhält man den richtigen Quotienten.

Beispiele.

$(10^{0}\ \ 5^{I}\ \ 9^{II}\ \ 8^{III}) : 4 = 2^{0}\ \ 4^{I}\ \ 5^{II}\ \ 5^{III}$

(25 St. 8 Min. 30 Sec.): 6 = 4 St. 11 Min. 25 Sec.

Im ersten Beispiele sagt man: 4 in 10 geht 2 Mal, und es bleiben noch 2^{0} übrig; diese zu Schuhen gemacht geben 12^{I}, und zu 5^{I} addirt sind 17^{I}; 4 in 17 geht 4 Mal u. s. w.

§. 51.

Wären aber solche ungleichnamige Zahlen wieder durch derlei Zahlen, die mit ihnen gleichnamig gemacht werden können, zu dividiren, nemlich zu untersuchen, wie oft diese in jenen enthalten sind, so bringe man beide auf die kleinste Gattung, damit beide gleichnamig werden, und verrichte dann die Division so, als wenn es unbenannte Zahlen wären.

Beispiele.

(12 Fl. 18 Kr. 2 Dr.) : (1 Fl. 45 Kr. 2 Dr.) = 2954 Dr. : 422 Dr.
= 7

$(11^0\ 4^I) : (5^I\ 10^{II}) = 840^{II} : 70^{II} = 12$

3 Centner : 18 Loth = 9600 L. : 18 L. = $533\frac{6}{18}$.

VII. Abschnitt.

Von den Rechnungsarten mit Buchstaben.

§. 52.

Obwohl man durch die Ziffern oder Zahlzeichen jede Menge einer jeden Gattung von Größen vorstellen kann, so sind sie doch noch zu eingeschränkt, um damit allgemeine Rechnungen anlegen zu können, die für jeden ähnlichen Fall gelten; z. B. durch 5 kann ich nur 5 Menschen, 5 Gulden, 5 Pfund, aber keineswegs weder mehr noch weniger als fünf, nemlich weder acht noch eilf oder wie viel immer entweder Menschen oder Gulden oder Pfund, und dergleichen bezeichnen. Man müßte daher die Rechnung so oft von Neuem anfangen, als nur die mindeste Veränderung in der Angabe gemacht würde; ja es gibt Rechnungen und Untersuchungen, die durch blose Zahlzeichen entweder gar nicht, oder nur mit äußerster Schwierigkeit sich verrichten lassen. Man war deßwegen auf allgemeinere Zeichen bedacht, durch welche man nicht nur jede Gattung der Größen, sondern auch jede Menge der Einheiten sich vorstellen kann; und man hat hiezu das kleine lateinische Alphabet gewählt, weil es den meisten Völkern in Europa bekannt ist; durch a z. B. kann man 5, 8 oder 11 Menschen; 5, 11 oder 20 Gulden, 5, 10 oder 100 Pfund u. s. w. vorstellen; und so auch durch b, c, d, . . . x, y, z: nur muß jeder Buchstabe den Werth, den man ihm beim Anfange einer Rechnung beilegt, durch die ganze Rechnung beibehalten.

Zuweilen werden auch die großen Buchstaben dieses Alphabets genommen, A, B, C, . . . X, Y, Z; auch bedienen sich einige Schriftsteller der griechischen Buchstaben *).

Ferner bezeichnet man gewöhnlich Größen, die gemeinsame Merkmale besitzen, durch denselben Buchstaben, indem man ihn jedoch mit verschiedenen Abzeichen, als: Strichen oder Accenten, Puncten, Nummern, (Zeiger, Indices) versieht; wie a, $\dot{a}$, $\bar{a}$, a', a'', a''', a_0, a_1, a_2, a_n.

Zur Unterscheidung der allgemeinen, durch Buchstaben dargestellten Zahlen, welche jede Menge von Einheiten ausdrücken, heißen die von uns früher behandelten, durch Ziffern darstellbaren Zahlen, welche nur eine bestimmte Menge von Einheiten vorstellen, auch noch besondere Zahlen.

§. 53.

Die Wissenschaft mit Buchstaben, oder vielmehr mit allgemeinen durch Buchstaben vorgestellten Zahlen zu rechnen, wird die allgemeine Rechenkunst, oder die Algebra genannt. Hiedurch wird die Arithmetik in zwei Theile, nemlich in die Zahlen-Rechenkunst, oder die gemeine Arithmetik, und in die Buchstaben-Rechenkunst, oder die allgemeine Arithmetik eingetheilt.

§. 54.

Bei den Rechnungsarten mit Buchstaben bedient man sich der nemlichen Operationszeichen, wie bei der Zahlenrechnung; so bedeutet $a + b$, daß der Werth von a zum Werthe von b addirt werden soll; eben so heißt $a + b + c + 5$, daß die Werthe der

---

*) Von den griechischen Buchstaben werden folgende zuweilen in den Rechnungen gebraucht.

α, alpha, a,	κ, kappa, k,	τ, tau, t,
β, ϐ, beta, b,	Λ, λ, lamda, l,	υ, ypsilon, y,
Γ, γ, gamma, g,	μ, mi, m,	Φ, φ, phi, f,
Δ, δ, delta, d,	ν, ni, n,	χ, chi, ch,
ε, epsilon, e,	ξ, xi, x,	Ψ, ψ, psi, ps,
ζ, ζ, zeta, z,	Π, π, ϖ, pi, p,	Ω, ω, omega, o,
η, eta, e,	ρ, ϱ, rho, r,	ς, stigma, st,
Θ, θ, ϑ, theta, th,	Σ, σ, ς, sigma, s,	ȣ, u.

Buchstaben a, b, c, zusammen addirt, und die Summe davon noch um 5 vermehrt werden soll.

Soll ein Buchstabe von einem andern Buchstaben, oder von einer Zahl, oder auch eine Zahl von einem Buchstaben abgezogen werden, so verbindet man selbe durch das Subtractionszeichen (§. 21), als $a-b$, $a-20$, $56-a$; eben so bedeutet $(a+b)-(a+c)$, daß die Summe aus a und c von der Summe aus a und b abgezogen werden soll; z. B. es wäre $a=30$, $b=20$ und $c=8$, so ist der angeführte Ausdruck $(a+b)-(a+c)$ eben so viel als $(30+20)-(30+8)=50-38=12$.

§. 55.

Sind Buchstaben mit einander zu multipliciren, z. B. a mit b, so schreibt man $a\times b$, oder $a.b$; **meistens aber werden die einzelnen Buchstaben, die mit einander zu multipliciren sind, ohne alle Zeichen dicht an einander geschrieben**, nemlich ab; eben so ist $abcd$ das Product der vier Factoren a, b, c und d; ingleichen bedeutet auch $(a+b)(b-c)$, daß die Summe von a und b, mit der Differenz von b und c multiplicirt werden soll; z. B. es sei $a=8$, $b=5$, $c=3$, so ist der angeführte Ausdruck $=(8+5)(5-3)=13.2=26$.

Kommt ein Buchstabe einige Mal mit sich selbst zu multipliciren, so pflegt man Kürze halber den Buchstaben nur einmal zu schreiben, und über demselben rechts eine Zahl zu setzen, welche anzeigt, wie oft dieser Factor eigentlich stehen sollte; so schreibt man z. B. a^4 anstatt $aaaa$; eben so a^3b^2c anstatt $aaabbc$. Die Zahlen, welche über den Buchstaben stehen, werden hier **Exponenten** genannt; und dort, wo keine Zahl ausdrücklich angesetzt ist, wird jederzeit ein 1 darunter verstanden; so ist im letzten Ausdrucke a^3b^2c die Zahl 3 der Exponent von a, 2 der Exponent von b, und 1 der Exponent von c. Das Product a^3b^2c wird gelesen: a der 3ten multiplicirt mit b der 2ten und mit c; und x^n heißt x der $n$ten (Potenz).

Auch die besondern Zahlen, wenn sie mit Buchstaben multiplicirt werden sollen, werden ohne Zeichen, dicht an die Buchstaben vorwärts angeschrieben; z. B. $3a$ heißt a soll mit 3 multiplicirt werden, oder welches einerlei ist, a soll 3 Mal genommen werden; es ist also $3a = a + a + a$; ingleichen $4bx = bx + bx + bx + bx$. Eben so heißt auch $3a(bc - x)$, daß 3 mit a und mit $(bc - x)$ multiplicirt werden soll; z. B. es wäre $a = 5$, $b = 7$, $c = 2$ und $x = 8$; so ist der angeführte Ausdruck $= 3.5(7.2 - 8) = 15(14 - 8) = 15.6 = 90$. Die Zahlen, welche vor den Buchstaben ohne Zeichen stehen, werden Coefficienten genannt; z. B. in dem Ausdrucke $3a$ ist 3 der Coefficient von a; in dem Ausdrucke $8bx$ ist 8 der Coefficient von bx u. s. w. Hat ein Buchstabe keine Zahl vor sich, so kann man sich den Coefficienten 1 dahin denken, weil z. B. $ab = 1ab$ ist.

Die Anfänger müssen sich wohl hüten, die Coefficienten mit den Exponenten zu verwechseln; denn, um den Unterschied zwischen $3a$ und a^3 deutlicher einzusehen, sei $a = 4$, so ist $3a = 3.4 = 12$; und $a^3 = 4.4.4 = 16.4 = 64$.

§. 56.

Soll endlich eine mit Buchstaben geschriebene Größe wieder durch Buchstaben, oder durch eine Zahl, oder auch eine Zahl durch Buchstaben dividirt werden, so verbinde man selbe gehörig durch das Divisionszeichen; z. B. $a : b$, oder $\frac{a}{b}$ heißt, es soll der Werth von a durch den Werth von b dividirt werden; eben so heißt $\frac{a-b}{3}$, man soll b von a abziehen, und die Differenz durch 3 dividiren; ingleichen $\frac{a+x}{b-c}$ heißt, man soll die Summe von a und x durch die Differenz von b und c dividiren.

Noch kommt hier zu erinnern, daß die Buchstaben in Betreff der Stelle, wo sie stehen, gar keinen solchen Rang haben, wie die Ziffern im §. 6 und 7; es ist nemlich einerlei, ob man schreibt $a + b + c$, oder $a + c + b$, oder $b + a + c$ u. s. w.; so wie es auch einerlei ist, ob man schreibt abc, acb, $bca \ldots$; denn es sei z. B. $a = 4$, $b = 7$ und $c = 3$, so ist $4 + 7 + 3 = 3 + 4 + 7 = 14$; und $4.7.3 = 7.3.4 = 84$; wohl aber ist $a - b$ von $b - a$ zu unterscheiden; denn das erste heißt, man soll b von a, und das andere, man soll a von b abziehen. Eben so muß auch $a : b$ von $b : a$ unterschieden werden, weil im ersten Falle a durch b, und im andern b durch a dividirt wird.

Anmerkung. Den Anfänger darf es nicht befremden, daß man mit Buchstaben rechnet, da man doch noch nicht weiß, was jeder Buchstabe für einen Werth habe; denn er darf sich nur erinnern, daß man mit den unbenannten Zahlen und Ziffern auch alle Rechnungsarten anstellt, ohne noch zu wissen, welche Größen als Einheiten ihnen zum Grunde liegen.

§. 57.

Jeder durch Buchstaben angeschriebene Ausdruck wird überhaupt eine algebraische Größe genannt; und zwar heißt sie eine einfache, oder einnamige algebraische Größe (ein Monom), wenn sie nur aus einem, oder auch aus mehreren Buchstaben besteht, welche nicht durch die Zeichen + und — an einander hängen; so sind z. B. die Größen $3a$, $14ab$, $\frac{abd}{c}$ einnamige algebraische Größen. Besteht aber eine Größe aus mehreren Theilen, die durch die Zeichen + und — verbunden sind, so ist sie eine mehrnamige algebraische Größe (ein Polynom), und zwar ist sie eine zwei-, drei-, vier-,.... namige Größe (ein Binom, Trinom, Quadrinom, ...), wenn sie aus 2, 3, 4 ... Theilen besteht; so ist z. B. $a+b$ eine zweinamige, $a+bc-5$ eine dreinamige, $\frac{ac}{b}-18+cd-y$ eine viernamige algebraische Größe u. s. w. Die Theile einer algebraischen Größe werden auch die Glieder dieser Größe genannt; man sagt demnach, eine Größe bestehe aus 1, 2, 3, 4 . . . Gliedern.

§. 58.

Die Glieder einer algebraischen Größe heißen gleichnamig, oder ähnlich, wenn sie einerlei Buchstaben mit den nemlichen Exponenten enthalten; nur die Zeichen und Coefficienten können verschieden sein; so z. B. sind $4ab^2c$, und $-3ab^2c$, gleichnamige Glieder. Eben so sind auch jene Glieder, die nur aus blosen Zahlen bestehen, gleichnamig. Bestehen aber die Glieder nicht vollkommen aus den nemlichen Buchstaben, so sind sie ungleichnamige Glieder.

Es sind daher in der algebraischen Größe

$3ab - 3b^2cd + 5ab - 3bcd$ nur das erste und dritte Glied gleichnamig; hingegen das zweite und vierte ungleichnamig, weil im vierten Gliede b nur den Exponenten 1 hat; so sind auch diese Glieder $3a^2b$ und $3ab^2$ ungleichnamig.

§. 59.

Es kommen in den algebraischen Rechnungen Größen vor, die einander ganz, oder zum Theil tilgen, in Anbetracht dessen, was man durch selbe zu bestimmen sucht. Z. B. man wollte die Verlassenschaft eines Verstorbenen berechnen, und es haben sich a Fl. bares Geld vorgefunden, und für die verkauften Geräthschaften sind gelöst worden b Fl., hingegen haben sich auch c Fl. Schulden vorgefunden, und die Begräbnißkosten betragen d Fl. Hier sieht man nun, daß die Verlassenschaft durch die vier Größen a, b, c und d bestimmt werden muß, welche alle einerlei Einheiten, nemlich Gulden bedeuten, aber in dieser Rechnung einander gerade entgegengesetzt sind, denn die ersten zwei a, b sind der Verlassenschaft zum Vortheil, und die letzten zwei c, d sind derselben zum Nachtheil, nemlich vermindern dieselbe. Solche Größen, deren gleichgroße Theile einander tilgen, werden in einer Rechnung entgegengesetzte Größen genannt, und zwar jene, welche der daraus zu bestimmenden Größe zum Vortheil dienen, oder dieselbe vermehren, heißen positive (bejahende) Größen; und jene, welche der daraus zu bestimmenden Größe zum Nachtheile dienen, oder dieselbe vermindern, werden negative (verneinende) Größen genannt; und damit man in einer Rechnung die positiven Größen von den negativen unterscheiden könne, ist es am natürlichsten, die positiven Größen mit dem Additionszeichen $+$, und die negativen mit dem Subtractionszeichen $-$ zu bezeichnen, weil erstere die zu bestimmende Größe vermehren, nemlich dazu addirt werden müssen, und letztere dieselbe vermindern, und davon subtrahirt werden sollen. In unserm Beispiele ist demnach die Verlassenschaft $= + a + b - c - d$; oder $= a + b - c - d$, weil das Zeichen $+$ im Anfange fast niemals angesetzt, sondern jederzeit schon darunter verstanden wird. Und so werden auch alle diejenigen Glieder einer algebraischen Größe, die das Zeichen $+$ vor sich haben, positive, und die das Zeichen $-$ vor sich haben, negative genannt.

Es sei noch z. B. die Größe eines Bankerotts zu bestimmen, wo sich nur a Fl. Vermögen, hingegen b Fl. Schulden vorgefunden haben; so ist die Größe des Bankerotts $= b - a$ Fl., weil die vorgefundenen a Fl. Vermögen den Bankerott vermindern. Man sieht hieraus, daß auch ein wirkliches Vermögen eine negative Größe sein kann, wenn es der dadurch zu bestimmenden Größe zum Nachtheil ist und eine Verminderung verursacht. Positive und negative Größen sind demnach einander gerade entgegengesetzte Größen in einer Rechnung, so daß, wenn die eine ein Vermögen, eine Erhöhung, eine Bewegung gegen die Rechte, u. dgl. vorstellt, die andere eine dem Vermögen entgegengesetzte Schuld, eine Vertiefung, eine Bewegung gegen die Linke, u. s. w. bedeutet.

§. 60.

Wäre nun in dem letzten angeführten Beispiele das vorgefundene Vermögen $a = 8000$ Fl., und die vorgefundene Schuld b ebenfalls $= 8000$ Fl.; so wäre die Größe des Bankerotts $= 8000 - 8000 = 0$; weil das Vermögen die Schuld gänzlich tilgt. Wäre aber das Vermögen $a = 6000$, und die Schuld $b = 8000$, so wäre der Bankerott $= 8000 - 6000 = 2000$; weil die 6000 Fl. Vermögen eben so viel an der Schuld tilgen. Wäre hingegen das Vermögen $a = 9000$ Fl. und die Schuld $b = 8000$ Fl., so wäre die Größe des Bankerotts $= - 1000$ Fl.; nemlich es blieben dem Schuldner, nach Tilgung aller Schulden, noch 1000 Fl. Vermögen übrig; das heißt, wenn positive und negative Größen in einer Rechnung vorkommen, so tilgt die kleinere in der größern so viele Einheiten, als sie selbst hat; sind aber beide gleich groß, so tilgen sie einander gänzlich.

Befinden sich mehrere positive und negative Größen in einer Rechnung, so tilgt die kleinere Summe in der größern so viele Einheiten, als sie deren selbst hat.

§. 61.

Sind nun algebraische Größen, welche aus positiven und negativen Gliedern bestehen, zu addiren, so verfahre man nach folgenden Regeln.

1) Man schreibe alle Glieder der zu addirenden Größen mit ihren Zeichen in eine Zeile, oder auch in mehreren Zeilen unter einander, weil algebraisch addiren eigentlich nichts anders heißt, als die Größen mit ihren Zeichen zusammen fügen; denn es sei zu $a+b$ die Größe $c-d$ zu addiren, so ist klar, daß die Summe $=a+b+c-d$ ist; denn würde man $+d$ statt $-d$ setzen, so wäre die Größe $a+b$ um die Summe von c und d vermehrt worden, während sie doch eigentlich nur um die Differenz von c und d vermehrt werden soll.

2) Suche man die gleichnamigen Glieder auf (§. 58); und hat man deren zwei gefunden, so sehe man auf ihre Zeichen.

3) Sind die Zeichen gleich, nemlich in beiden gleichnamigen Gliedern + oder in beiden —, so addire man nur die Coefficienten mit Beibehaltung des gemeinschaftlichen Zeichens, und die Buchstaben werden nur einmal mit ihren Exponenten geschrieben; so ist z. B. $3a^2b+5a^2b=8a^2b$; ingleichen $-9d^3x-12d^3x=-21d^3x$. Sind aber die Zeichen verschieden, so ziehe man den kleinern Coefficienten von dem größern ab, mit Beibehaltung des Zeichens des größern (Coefficienten) und der gemeinschaftlichen Buchstaben; z. B. $+5ab-2ab=3ab$;

ingleichen $4ax^2-9ax^2=-5ax^2$.

Haben endlich beide Glieder gleiche Coefficienten und verschiedene Zeichen, so lasse man beide Glieder gänzlich hinweg; z. B. $4ab-4ab=0$. Alles dieses erhellet aus §. 60.

4) Die ungleichnamigen Glieder aber schreibe man in der Summe mit ihren Zeichen hin.

Beispiele.

I. Zu addiren $\left\{\begin{array}{l} 3ab+2ac+3d^2g \\ 2ab-5ac-3dg^2 \end{array}\right.$

Summe $5ab-3ac+3d^2g-3dg^2$

II. Zu addiren $\left\{\begin{array}{l} 8ax-3bc-5dx+12 \\ -ax+7bc+2dx-8 \end{array}\right.$

Summe $7ax+4bc-3dx+4$

III. Zu addiren $\left\{ \begin{array}{l} a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \\ a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array} \right.$

Summe $2a^3+6ab^2$.

IV. $a^3+2ax+x^2-a^3+2ax-x^2=4ax$.

V. $a^m b^2+2c^3x^{m+1}-3c^3x^{m+1}+10a^m b^2$
$=11a^m b^2-c^3x^{m+1}$.

§. 62.

Bei der Subtraction der algebraischen Größen merke man Folgendes.

Man verändere die Zeichen aller Glieder bei der abzuziehenden Größe, nemlich + in —, und — in +, und addire sodann (nach dem vorigen §. 61) diese veränderte Größe zu derjenigen, von welcher sie abzuziehen ist; so wird man die gehörige Differenz haben.

Beispiele.

I.		II.		III.		IV.	
von	a	von	a	von	$-a$	von	$-a$
abzuz.	b	abzuz.	$-b$	abzuz.	$+b$	abzuz.	$-b$
Diff.	$a-b$	Diff.	$a+b$	Diff.	$-a-b$	Diff.	$-a+b$

Daß bei der Subtraction das Zeichen + in — verwandelt werden muß, daran wird Niemand zweifeln: aber auch daß — in + verändert werden müsse, ist leicht einzusehen; denn die Differenz muß (nach §. 24) so beschaffen sein, daß, wenn man selbe zur Größe, welche man abgezogen hat, addirt, die Größe, von welcher man abgezogen hat, zum Vorschein komme, nemlich die Differenz zum Subtrahend (§. 24) addirt, muß den Minuend wieder herstellen; würde man nun in dem Beispiele II. in der Differenz $a-b$ setzen, so wäre $a-b-b=a-2b$; setzt man aber in der Differenz $a+b$, so ist $a+b-b=a=$ der Größe, von welcher man abgezogen hat. Es heißt daher eine Größe algebraisch subtrahiren nichts anders, als eben diese Größe mit verkehrten Zeichen hinzu addiren.

Noch einige Beispiele zur Übung.

V. von a^2b-4c
ist abzuziehen $5a^2b-dc-4c$
die Zeichen geändert $-\quad+\quad+$

Differenz $=-4a^2b+dc$.

VI. von $5ax-x^2-3a-9$
ist abzuziehen $3ax+x^2+30-3a-5b$
die Zeichen geändert $-\quad-\quad-\quad+\quad+$

Differenz $=2ax-2x^2-39+5b$.

VII. von $5a^m x^2-20+7ab^3x-4b^m cx^2$
ist abzuziehen $2b^m cx^2+5a^m x^2+8-2a^3bx$
die Zeichen geändert $-\quad-\quad-\quad+$

Differenz $=-28+7ab^3x-6b^m cx^2+2a^3bx$.

§. 63.

Ist eine mehrnamige algebraische Größe mit einer einnamigen zu multipliciren, so multiplicire man jedes Glied der mehrnamigen Größe mit der einnamigen; weil es einerlei ist, ob man das Ganze oder jeden seiner Theile insbesondere multiplicirt (§. 29, Grundsatz I), wobei man jederzeit die in beiden Factoren verschiedenen Buchstaben in alphabetischer Ordnung dicht hinter einander anschreibt (vermög §. 55), nur beobachte man dabei auch noch folgende Regeln.

1) Sind beide Glieder, die mit einander zu multipliciren sind, positiv, so ist ohne Zweifel auch das Product positiv; z. B. $+a\times+b=+ab$.

2) Ist ein Glied negativ, und das andere positiv, so ist das Product negativ; z. B. $-a\times+b=-ab$, welches aus Folgendem erhellet:

es ist $+a=2a-a$
und $+b=+b$,
also auch $+ab=+2ab-ab$, (vermög §. 29, Grundsatz I);
denn würde man im Producte rechts das letzte Glied $+ab$ setzen, so wäre $+2ab+ab$ nicht gleich $+ab$, welches doch (vermög §. 29, Grundsatz I) sein muß.

3) Sind aber beide Glieder negativ, so ist das Product positiv; z. B. $-a \times -b = +ab$;
denn es ist $a = 2a - a$
und $-b = -b$,
also auch $-ab = -2ab + ab$ (vermög §. 29, Grundsatz I);
denn würde man hier im Producte rechts das letzte Glied $-ab$ setzen; so wäre $-2ab - ab$ nicht gleich $-ab$, welches doch wieder vermög des angeführten Grundsatzes sein muß. Hieraus fließt nun die Regel: gleiche Zeichen geben ein positives, ungleiche aber ein negatives Product.

4) Die Coefficienten beider Glieder werden mit einander multiplicirt; so ist z. B. $2a \times 3cd = 6acd$;

$$4a \times -5b = -20ab; \quad -3a \times -5bc = +15abc.$$

5) Haben beide Glieder gleiche Buchstaben, so wird im Producte jeder gemeinschaftliche Buchstabe nur einmal geschrieben, und die Exponenten dieses Buchstaben werden zusammen addirt; z. B.

$$4a^3 \times 5a^2 = 20a^5; \text{ denn es ist}$$

$4a^3 \times 5a^2 = 4 \,.\, 5 \,.\, aaa \,.\, aa = 20 \,.\, aaaaa = 20a^5$ (§. 55); eben so ist

$$ab^2 \times -4abc = -4a^2b^3c.$$

Beispiele.

I. $(2a - 3a^2b + bc^2) \times 6ab^2d = 12a^2b^2d - 18a^3b^3d + 6ab^3c^2d.$

II. $(a^3 - 3a^2b + 4ab^2) \times -2ab^2c = -2a^4b^2c + 6a^3b^3c - 8a^2b^4c.$

III. $(4a - 30 + b^2c^m) \times 5ab^nc = 20a^2b^nc - 150ab^nc + 5ab^{n+2}c^{m+1}.$

IV. $(4a^r - 5b^p) \times -3a^{2r}b^{3p} = -12a^{3r}b^{3p} + 15a^{2r}b^{4p}.$

V. $(x^{m-n} + y^{n-m}) \times x^ny^m = x^my^m + x^ny^n.$

§. 64.

Sind beide Factoren mehrnamige Größen, so multiplicire man mit jedem Gliede des einen Factors, rechts oder links angefangen, den ganzen andern Factor nach den (im vorigen §. 63) gegebenen Regeln, und man hat das richtige Product (vermög §. 29); wornach man nur noch die etwa darin befindlichen gleichnamigen Glieder reduciren darf.

Beispiele.

I. $$\left.\begin{array}{l}3a^2-2ax+x^2\\2a-3x\end{array}\right\}\text{Factoren.}$$

$$\text{Prod.}=6a^3-4a^2x+2ax^2$$
$$-9a^2x+6ax^2-3x^3$$
$$=6a^3-13a^2x+8ax^2-3x^3$$

II. $$\left.\begin{array}{l}a^m+b^x-2c^n\\2a^m-3b\end{array}\right\}\text{Factoren.}$$

$$\text{Prod.}=2a^{2m}+2a^mb^x-4a^mc^n-3a^mb-3b^{x+1}+6bc^n.$$

III. $$\left.\begin{array}{l}2a^{3+2m}bc^{m-2}-5a^{m-2}b^{m+1}\\3a^{4m-5}b^{2m}c^{3+4m}-6\end{array}\right\}\text{Factoren.}$$

$$\text{Prod.}=6a^{6m-2}b^{2m+1}c^{1+5m}-15a^{5m-7}b^{3m+1}c^{3+4m}$$
$$-12a^{3+2m}bc^{m-2}+30a^{m-2}b^{m+1}.$$

§. 65.

Wenn eine einnamige algebraische Größe wieder durch eine einnamige zu dividiren ist, so kann die Division nur damals wirklich verrichtet werden, wenn sich alle Buchstaben des Divisors in dem Dividend befinden, und zwar nach folgenden Regeln.

1) Gleiche Zeichen geben einen positiven, ungleiche aber einen negativen Quotienten.

2) Der Coefficient des Dividends wird durch den Coefficienten des Divisors dividirt.

3) Die Buchstaben, welche im Divisor und Dividend mit dem nemlichen Exponenten enthalten sind, werden in dem Quotienten ganz hinweg gelassen; sind aber die Exponenten verschieden, so wird der Exponent des Divisors von jenem des Dividends abgezogen.

4) Die übrigen Buchstaben des Dividends, welche der Divisor nicht zugleich gemein hat, werden im Quotienten mit ihren Exponenten angesetzt; so ist z. B.

$$12ab:3a=4b;\ 5a^2b^3cd:-ab^2d=-5abc$$
$$-8a^mb^3c:-2ab^n=+4a^{m-1}b^{3-n}c$$
$$-15a^3b:5a^3b=-3;\ a^mb^{1-n}:a^mb^{1-n}=1.$$

Die Richtigkeit dieser Regeln erhellet daraus, weil das Product aus dem Quotienten in den Divisor jederzeit den Dividend zum Vorschein bringen muß. (§. 44.)

Wären aber nicht alle Buchstaben des Divisors in dem Dividend enthalten, so kann die Division nicht wirklich verrichtet werden, sondern man deutet in diesem Falle die Division durch den liegenden Strich (§. 37) an, und man kann diejenigen Factoren, die der Divisor und Dividend gemein haben, ganz hinweg lassen (§. 40); z. B.

$$5ab^2 : 3b^2c = \frac{5a}{3c}; \qquad 6a^2b : -2ac = -\frac{3ab}{c}.$$

§. 66.

Besteht der Dividend aus mehreren Gliedern, der Divisor aber nur aus einem einzigen Gliede, so dividire man nach den erst gegebenen Regeln jedes Glied durch den Divisor, wenn er in jedem Gliede des Dividends enthalten ist; im Gegentheile kann die Division entweder nur angezeigt, oder zum Theil verrichtet, und zum Theil angezeigt werden; z. B.

$$(6a^2b - 10ax) : 2a = 3ab - 5x;$$

$$(4a^2b - 2x + 3a) : 2b = 2a^2 - \frac{x}{b} + \frac{3a}{2b}.$$

§. 67.

Sind aber beide, Divisor und Dividend, zusammengesetzte Größen, so verfahre man auf folgende Art.

1) Mit dem ersten Gliede des Divisors dividire man in ein Glied des Dividends, so hat man den ersten Theil des Quotienten; mit diesem Quotienten multiplicire man den ganzen Divisor, und ziehe das Product von dem Dividend ab.

2) In dem Reste wähle man wieder ein Glied, in welchem das erste Glied des Divisors enthalten ist, und dividire es, so hat man den zweiten Theil des Quotienten, welcher mit seinem Zeichen zum ersten hinzugefügt wird; mit diesem gefundenen zweiten Theile des Quotienten multiplicire man den ganzen Divisor, und ziehe das Product vom Dividend ab; den Rest dividire man wieder durch das erste Glied des Divisors, u. s. w.

3) Kommt man durch diese Operation einmal zu Ende, so daß alles genau aufgeht, so ist es ein Zeichen, daß der Divisor im Dividend genau enthalten sei; im Gegentheile muß man den noch vorhandenen Rest mit dem unterschriebenen Divisor an den

Quotienten mittels des gehörigen Zeichens + oder — anhängen, wie bei der Division mit Zahlen (§. 41, Nr. 5).

Beispiele.

$$(b^2c^2x^2 - 3b^2cx^3 - 3b^2cx^4 + 9b^2x^5) : (b^2cx - 3b^2x^2) = cx - 3x^3$$
$$\begin{array}{l} +b^2c^2x^2 - 3b^2cx^3 \\ - \quad\; + \\ \hline -3b^2cx^4 + 9b^2x^5 \\ -3b^2cx^4 + 9b^2x^5 \\ + \quad\; - \\ \hline \quad 0 \end{array}$$

$$(12a^4b - 24a^3bc - 3a^2bc^2 + 30abc^3 - 15bc^4) : (3a^2b - 6abc + 3bc^2) = 4a^2 - 5c^2$$
$$\begin{array}{l} +12a^4b - 24a^3bc + 12a^2bc^2 \\ - \quad\; + \quad\; - \\ \hline -15a^2bc^2 + 30abc^3 - 15bc^4 \\ -15a^2bc^2 + 30abc^3 - 15bc^4 \\ + \quad\; - \quad\; + \\ \hline \quad 0 \end{array}$$

$$(a^3 - b^3) : (a - b) = a^2 + ab + b^2$$
$$\begin{array}{l} +a^3 - a^2b \\ - \quad + \\ \hline +a^2b - b^3 \\ +a^2b - ab^2 \\ - \quad + \\ \hline +ab^2 - b^3 \\ +ab^2 - b^3 \\ - \quad + \\ \hline \quad 0 \end{array}$$

$$(6a^2 - ax + ab - x^2) : (3a + x) = 2a - x + \frac{ab}{3a + x}$$
$$\begin{array}{l} +6a^2 + 2ax \\ - \quad - \\ \hline -3ax - x^2 + ab \\ -3ax - x^2 \\ + \quad + \\ \hline +ab \end{array}$$

Die Multiplication und Division zusammengesetzter algebraischer Ausdrücke erleichtert man sich namhaft, wenn man diese Ausdrücke auf gleiche Weise, nemlich entweder beide fallend oder beide steigend und nach dem nemlichen Buchstaben ordnet, d. h. in beiden Ausdrücken die einzelnen Glieder dergestalt auf einander folgen läßt, daß in jedem Gliede der Exponent eines und desselben Buchstaben nicht größer im ersten Falle, oder nicht kleiner im andern Falle als bei dem vorhergehenden Gliede ist. So sind im Beispiele I. §. 64, die Factoren fallend nach a und steigend nach x geordnet, und im zweiten und dritten Beispiele dieses Paragraphen sind Dividend und Divisor nach a fallend geordnet.

Hiebei pflegt man den Rang oder die sogenannte Dimension solcher Ausdrücke nach dem höchsten Exponenten des Buchstaben, nach welchem sie geordnet werden, anzugeben. So ist im letzten Beispiele der Dividend in Bezug auf a von der zweiten, der Divisor aber von der ersten Dimension.

VIII. Abschnitt.

Von der Theilbarkeit der Zahlen.

§. 68.

Erklärungen und Lehrsätze über Theilbarkeit im Allgemeinen.

Eine Zahl heißt durch eine andere theilbar, wenn sie durch diese getheilt keinen Rest (den Rest Null) gibt. Erstere Zahl nennt man in einem solchen Falle ein Vielfaches (Multiplum) der andern, und diese selbst einen Theiler (Divisor), ein Maß von jener. So ist z. B. $32 : 4 = 8$, folglich ist 32 durch 4 theilbar oder ein Vielfaches von 4, und umgekehrt ist 4 ein Theiler von 32. Eben so ist an durch n theilbar oder ein Vielfaches von n, und n ein Theiler von an.

Auf diese Erklärungen gründen sich folgende Lehrsätze.

1. Jede Zahl ist durch 1 und durch sich selbst theilbar; denn sie gibt durch 1 getheilt sich selbst, und durch sich getheilt 1 zum Quotienten ohne Rest.

Aus diesem Grunde pflegt man, wenn von den Theilern einer Zahl die Rede ist, unter ihnen weder 1 noch die Zahl selbst aufzuführen.

2. Null ist durch jede Zahl theilbar.

3. Keine Zahl ist durch eine größere theilbar; denn von keiner läßt sich eine größere weg nehmen.

Folglich liegen alle Theiler einer Zahl zwischen 1 und ihr selbst, und somit hat jede Zahl sowohl einen kleinsten als auch einen größten Theiler.

4. Ist jede von zwei Zahlen durch eine und dieselbe Zahl theilbar, so ist es auch ihre Summe und Differenz.

Denn sind die Zahlen a und b durch n theilbar, indem sie durch diese getheilt α und β zum Quotienten geben, so ist $a=\alpha n$ und $b=\beta n$, daher

$a \pm b = \alpha n \pm \beta n$ und $(a \pm b) : n = (\alpha n \pm \beta n) : n = \alpha \pm \beta$ (nach §. 39, Gr. I und §. 66), woraus man ersieht, daß sowohl die Summe $a+b$ als auch die Differenz $a-b$ durch n theilbar ist.

So sind z. B. die Zahlen 72 und 48 durch 24 theilbar, daher ist es auch ihre Summe 120 und ihr Unterschied 24.

Die nächste Folge hievon ist nachstehender Satz.

5. Sind mehrere Zahlen durch eine und dieselbe Zahl theilbar, und werden einige von ihnen zu einander addirt, die übrigen aber abgezogen, so ist auch die sich ergebende Zahl durch jene nemliche theilbar. So sind z. B. 34, 85, 102, 68 durch 17 theilbar, daher auch

$$34 + 85 + 102 + 68 \text{ oder } 289$$
$$34 + 85 + 102 - 68 \text{ oder } 153$$
$$85 - 102 - 34 + 68 \text{ oder } 17, \text{ u. dgl.}$$

6. Das Product mehrerer Zahlen ist durch jede Zahl theilbar, durch welche auch nur einer der Factoren theilbar ist.

Denn ist von den Zahlen a, b, c, d, ... die eine Zahl a durch n theilbar, folglich ein Vielfaches von n, etwa gleich αn, so ist das Product $abcd$.... jener Zahlen auch gleich $n\alpha . bcd$.... oder $n . \alpha bcd$...., daher gleichfalls ein Vielfaches von der Zahl n.

So ist die Zahl 699720 als das Product der Zahlen 15, 34, 49, 28 durch 17 theilbar, weil 34 es ist, durch 14, weil 28 es ist, u. m. dgl.

7. Sind Dividend und Divisor durch eine und die nemliche Zahl theilbar, so ist auch der Rest durch sie theilbar.

Denn bezeichnet δ den Dividend, d den Divisor, q den Quotienten und r den Rest, so ist (nach §. 41), weil man, um den Rest zu finden, von dem Dividende das Product aus dem Divisor und Quotienten abzieht,

$$r = \delta - dq.$$

Ist nun der Divisor d durch eine Zahl n theilbar, so ist es (nach Nr. 6) das Product dq ebenfalls; läßt sich dann auch noch der Dividend δ durch eben diese Zahl n theilen, so findet (nach Nr. 4) dies auch bei dem Unterschiede $\delta - dq$ d. i. bei dem Reste r Statt. So gibt 96 durch 36 getheilt den Quotienten 2 und den Rest 24, erstere zwei lassen sich durch 12 theilen, und hiedurch ist auch der Rest theilbar.

8. Sind Divisor und Rest durch dieselbe Zahl theilbar, so läßt sich durch diese auch der Dividend theilen.

Denn man findet den Dividend, indem man zu dem Producte des Divisors und Quotienten den Rest addirt, nemlich es ist

$$\delta = dq + r.$$

Läßt sich nun der Divisor d, mithin auch das Product dq, und überdies noch der Rest r durch eine Zahl n theilen, so ist (nach Nr. 4) auch die Summe $dq + r$, d. i. der Dividend δ durch n theilbar.

Z. B. 56 durch 20 getheilt, läßt 16 zum Reste; die beiden letzten Zahlen sind durch 4 theilbar, folglich ist es auch 56.

§. 69. a.

Von den einfachen und zusammengesetzten Zahlen.

Eine Zahl, die durch keine andere (außer durch 1 und durch sich selbst) theilbar ist, heißt eine einfache oder Primzahl, jede andere aber eine **zusammengesetzte**. Sofort sind z. B. 2, 3, 5, 7, 11, 13 Primzahlen; 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15 zusammengesetzte Zahlen.

Von den Primzahlen gelten folgende Sätze.

1. **Das Product mehrerer Zahlen ist durch keine Primzahl theilbar, durch welche keiner der Factoren theilbar ist.**

Wir wollen diesen Satz zunächst für Producte von nur **zwei Factoren** nachweisen, nemlich zeigen, daß, wenn keine der Zahlen α und a durch die Primzahl p theilbar ist, auch ihr Product αa sich durch p nicht theilen lasse.

Nehmen wir, um unsere Behauptung zu erweisen, an, es sei möglich, daß sich das Product αa durch p ohne Rest theilen lasse, und daß die eine der Zahlen, a, durch p getheilt den Quotienten a' und den Rest b gebe, folglich $b<p$ und $b=a-a'p$ sei; dann müßte (nach §. 29, Gr. I) auch $\alpha b=\alpha a-\alpha a'p$ sein. Wäre nun αa durch p theilbar, so müßte, weil $\alpha a'p$ es ohnedies ist, auch die Differenz αb diese Eigenschaft besitzen. — Da ferner $b<p$ ist, so gebe p durch b getheilt, den Quotienten b' und den Rest c, welcher, weil p als Primzahl durch b nicht theilbar ist, nie Null werden kann; dann ist $c<b$ und $c=p-bb'$, folglich auch $\alpha c=\alpha p-\alpha bb'$. Wäre aber αb, somit auch $\alpha bb'$ durch p theilbar, so müßte, da αp es ohnehin ist, αc es gleichfalls sein. Man findet demnach zu der Zahl b, die kleiner als die Primzahl p ist, dadurch, daß man diese durch jene dividirt, an dem Reste c eine noch kleinere Zahl, als b, welche mit α multiplicirt durch p theilbar sein müßte, sobald αa es wäre. — Würde man demnach die Primzahl p auf gleiche Weise durch den letzten gefundenen Rest dividiren und dieses Verfahren wiederholen, so gewänne man nach und nach eine Folge von Resten $b, c, d, e, \ldots$ von denen jeder kleiner als der vorhergehende, aber dabei doch immer von Null verschieden ist, weßwegen einer aus ihnen endlich 1 werden müßte. Allein alle diese Zahlen $b, c, d, e, \ldots 1$ würden mit α multiplicirt, Producte $\alpha b, \alpha c, \alpha d, \alpha e, \ldots \alpha$ liefern, welche durch p theilbar wären, sobald es nur αa sein könnte; mithin müßte auch das letzte von ihnen d. i. die Zahl α

selbst durch p theilbar sein, was jedoch unserer Voraussetzung, daß sie es nicht sei, widerspräche. Da nun aus der zugestandenen Theilbarkeit des Productes aa durch die Primzahl p mittels ganz richtiger Schlüsse etwas Ungereimtes abgeleitet werden kann, so muß diese Theilbarkeit selbst unmöglich sein; folglich läßt sich ein Product zweier Zahlen durch eine Primzahl nur dann theilen, wenn einer der Factoren durch sie theilbar ist.

Ist nun von mehreren Zahlen $a, b, c, d, e, \ldots$ gar keine durch eine bestimmte Primzahl p theilbar, so ist nach dem eben Erwiesenen auch das Product ab zweier Zahlen, folglich wenn man dieses mit einer dritten c multiplicirt, aus gleichem Grunde das Product $ab.c$ oder abc dreier Zahlen, und da man diese Schlußweise bis zu dem Producte $abcde \ldots$ aller jener Zahlen fortsetzen kann, auch dieses durch genannte Primzahl nicht theilbar. Es ist demnach das Product mehrerer Zahlen nur durch eine solche Primzahl theilbar, durch welche sich einer der Factoren theilen läßt.

Z. B. das Product $17 \cdot 21 \cdot 36 \cdot 62$ ist nicht durch 13 theilbar, weil keiner der Factoren es ist, wohl aber durch 7, weil 21 sich hiedurch theilen läßt.

Hieraus folgt:

2. Das Product mehrerer Primzahlen ist durch eine von ihnen verschiedene Primzahl nicht theilbar, und

3. Das Product mehrerer Primzahlen ist durch ein anderes solches Product nur dann theilbar, wenn im erstern alle Factoren des letztern in derselben oder in größerer Anzahl vorkommen.

So ist z. B. das Product $2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11$ weder durch 13, noch durch $3 \cdot 17$, noch durch $2 \cdot 5 \cdot 5$, wohl aber durch $2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 11$ theilbar.

4. Wenn eine Zahl durch mehrere von einander verschiedene Primzahlen theilbar ist, so muß sie auch durch das Product derselben theilbar sein.

Denn damit die Zahl n durch die unter sich verschiedenen Primzahlen a, b, c, d, ... einzeln theilbar sei, muß sie (nach Nr. 3) ein Product von Primzahlen sein, in welchem jede der genannten Primzahlen wenigstens einmal erscheint; dann ist sie aber auch durch das Product aller dieser Primzahlen theilbar.

So ist z. B. 4316130 durch 2, 3, 7, 17, folglich auch durch $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17 = 714$ theilbar. — Ist demnach eine Zahl durch 2 und 3 theilbar, so ist sie auch durch 6 theilbar.

5. Sonach muß eine Zahl, welche durch mehrere einzelne Producte von Primzahlen theilbar ist, deren keines eine in dem andern Producte vorkommende Primzahl enthält, auch durch das Product sämmtlicher Producte theilbar sein.

So ist 11659620 durch $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$, durch $5 \cdot 7 = 35$ und $17 \cdot 23 = 391$, daher auch durch $12 \cdot 35 \cdot 391 = 164220$ theilbar. — Ist demnach eine Zahl durch 3 und $2 \cdot 2$ oder 4 theilbar, so läßt sie sich auch durch 12 theilen.

§. 69. b.

Kennzeichen der Theilbarkeit der Zahlen in einigen besonderen Fällen.

Ob eine Zahl durch eine andere theilbar sei oder nicht, würde man zwar immer durch wirkliche Ausführung der Division erfahren; allein in manchen Fällen, von denen wir nur die am häufigsten vorkommenden herausheben, kann man mittels einer weit einfacheren Untersuchung hierüber entscheiden.

1. Jede Zahl ist durch 2 theilbar, wenn ihre letzte Ziffer 0, 2, 4, 6, 8 ist.

Denn ist die Stelle der Einheiten einer Zahl n mit der Ziffer a, die der Zehner mit b, jene der Hunderte, Tausende, Zehntausende, u. s. w. mit c, d, e, ... besetzt; so besteht sie aus a, $10b$, $100c$, $1000d$, $10000e$ . . . . Einern, nemlich es ist

$$n = a + 10b + 100c + 1000d + 10000e + \ldots.$$

Theilt man nun diese Zahl durch 2, so sieht man, daß, was für welche auch die Ziffern b, c, d, e, ... sein mögen, die

Theilung aller Glieder vom zweiten an, immer ohne Rest ausführbar ist, folglich es nur allein auf die Ziffer a der Einer ankommt, ob die Zahl n durch 2 theilbar ist oder nicht. Ist nun diese Ziffer 0, 2, 4, 6, 8, so findet diese Theilbarkeit Statt; jedoch nicht, falls sie 1, 3, 5, 7, 9 wäre.

Zahlen, die durch 2 theilbar sind, nennt man gerade, die durch 2 untheilbaren aber ungerade.

Man erlaubt sich sogar die Ziffern 0, 2, 4, 6, 8 gerad und 1, 3, 5, 7, 9 ungerad zu nennen, und sagt dann kurz: eine Zahl ist gerad oder ungerad, je nachdem ihre letzte Ziffer gerad oder ungerad ist.

So ist z. B. 374 gerad, 743 ungerad.

2. Eine Zahl ist durch 5 theilbar, wenn ihre letzte Ziffer 0 oder 5 ist;

und sie läßt sich durch 10 theilen, wenn sie mit 0 sich endigt.

Denn auch in diesen Fällen sind alle Glieder des für die Zahl n aufstellbaren Ausdruckes $a+10b+100c+\ldots$ durch die genannten Zahlen theilbar.

Aus diesem Grunde sind z. B. 30 und 45 durch 5, erstere Zahl aber auch durch 10 theilbar.

3. Jede Zahl ist durch 4 theilbar, wenn es die aus ihren zwei letzten Ziffern bestehende ist.

Denn versucht man die Glieder des für die Zahl n aufgeführten Ausdruckes

$$n=a+10b+100c+1000d+10000e+\ldots$$

durch 4 zu dividiren, so findet man, daß die kleinste durch 4 theilbare decadische Einheit 100 ist, und daß alle höheren wie 1000, 10000, ... als Zehnfache der nächst niedrigeren gleichfalls durch 4 theilbar seyn müssen, folglich vom dritten Gliede an, alle folgenden ohne Rücksicht auf die Ziffern c, d, e, ... durch 4 theilbar sind. Ist nun auch noch das Uebrige, nemlich die aus den beiden letzten Ziffern a und b bestehende Zahl $a+10b$, durch 4 theilbar, so ist es auch die Zahl n selbst.

Z. B. 798712 ist durch 4 theilbar, weil die aus ihren zwei letzten Ziffern 1 und 2 bestehende Zahl 12 es ist.

4. **Jede Zahl ist durch 8 theilbar, sobald es die durch ihre drei letzten Ziffern ausgedrückte Zahl ist.**

Denn ist die durch die drei letzten Ziffern a, b, c der Zahl n ausgedrückte Zahl $a+10b+100c$ durch 8 theilbar, so muß, weil alle übrigen Glieder des für n gegebenen Ausdruckes als Vielfache der durch 8 theilbaren Zahl 1000 diese Eigenschaft besitzen, n selbst durch 8 theilbar sein.

So ist z. B. 79872 durch 8 theilbar, weil 872 es ist.

5. **Eine Zahl ist durch 3 oder 9 theilbar, wenn ihre Ziffersumme** (d. i. die Summe der von ihren Ziffern einzeln, ohne Rücksicht auf ihre Stellenwerthe, vorgestellten Zahlen) **durch 3 oder 9 theilbar ist.**

Denn dividirt man in dem Ausdrucke

$$n=a+10b+100c+1000d+\ldots$$

der Zahl n die Coefficienten der einzelnen Glieder, nemlich die nach einander folgenden decadischen Einheiten 1, 10, 100, 1000, ... durch 3 oder 9, so erhält man immer 1 zum Reste. Hievon überzeugt man sich sehr leicht, wenn man bedenkt, daß es einerlei ist, ob man eine gewisse Anzahl von Nullen auf einmal in den Dividend schreibt, oder ob man eben so vielen Resten eine Null anhängt, und daß demnach diese Division in einem Zuge verrichtet werden kann, indem man zuerst 1 theilt und an den Rest 1 eine Null anhängt, wodurch man 10 erhält, welches durch 3 oder 9 getheilt wieder denselben Rest 1 liefert, der, da an ihm dieselbe Operation wie früher wiederholt wird, fortwährend wiederkehren muß. — Lassen jedoch die Coefficienten der einzelnen Glieder insgesammt den Rest 1, so geben diese Glieder selbst die Ziffern a, b, c, d, ... zu Resten, folglich ist der Gesammtrest die Summe $a+b+c+d+\ldots$ dieser Ziffern, und von ihr hängt die Theilbarkeit der gegebenen Zahl n durch 3 oder 9 ab.

So ist z. B. 71480715 durch 3 theilbar, weil die Summe

$$7+1+4+8+7+1+5 \text{ oder } 33$$

durch 3 theilbar ist; eben so ist 209761326 wegen der Ziffersumme 36 sowohl durch 9 als auch durch 3 theilbar.

6. **Eine Zahl ist durch 11 theilbar, wenn sich der Unterschied der Summe ihrer geradstelligen und**

der Summe ihrer ungeradstelligen Ziffern durch 11 theilen läßt.

Denn theilt man hier in dem Ausdrucke

$$n = a + 10b + 100c + 1000d + 10000e + 100000f + \ldots$$

der Zahl n die Coefficienten der Glieder, d. i. die decadischen Einheiten 1, 10, 100, 1000, ... durch 11, so erhält man bei allen ungeradstelligen Gliedern 1, und bei allen geradstelligen -1 zum Reste. Man findet dies leicht, wenn man diese Theilungen ebenfalls im Zusammenhange ausführt, indem man jedem ausfallenden Reste eine Null anhängt, d. h. ihn mit 10 multiplicirt. Denn indem man 1 durch 11 zu theilen versucht, findet man Null zum Quotienten und 1 zum Reste. Hieran eine Null angehängt gibt 10, welche Zahl man durch 11 auch so theilen kann, daß man von ihr nicht, wie es sonst zu geschehen pflegt, das nächst kleinere Vielfache des Divisors, sondern das nächst größere abzieht, indem man sagt: 11 ist in 10 einmal enthalten und bleibt $10 - 11$ d. i. -1 als Rest. Multiplicirt man diesen mit 10, so findet man -10, und dies durch 11 getheilt gibt -1 zum Quotienten, daher ist von -10 abzuziehen -1×11, d. i. -11, folglich bleibt als Rest $-10-(-11)$ oder $-10+11$, nemlich 1. Von nun an müssen, da immer abwechselnd 10 und -10 durch 11 zu dividiren kommt, auch die Reste 1 und -1 fortwährend mit einander abwechseln.

Geben aber die Coefficienten der einzelnen Glieder des Ausdruckes der Zahl n wirklich abwechselnd 1 und -1 zum Reste, so erhält man von den nach einander folgenden Gliedern die Reste $a, -b, c, -d, e, -f, \ldots\ldots$; folglich von der ganzen Zahl den Rest $a-b+c-d+e-f+\ldots\ldots$ oder

$$(a+c+e+\ldots\ldots)-(b+d+f+\ldots\ldots),$$

welcher nichts anders als der Unterschied der Summe $a+c+e+\ldots\ldots$ der ungeradstelligen Ziffern und der Summe $b+d+f+\ldots\ldots$ der geradstelligen Ziffern ist, und im Falle er durch 11 theilbar ist, auch die Zahl n selbst als hiedurch theilbar erklärt.

Z. B. 718964579025 ist durch 11 theilbar, denn die Summe der ungeradstelligen Ziffern 5, 0, 7, 4, 9, 1 ist 26, jene der geradstelligen 2, 9, 5, 6, 8, 7 aber 37, und der Unterschied dieser Summen 11. Eben so ist 84379625 durch 11 theilbar, denn beide genannten Summen sind gleich 22, also ist ihr Unterschied 0 und durch 11 theilbar.

7. Eine Zahl ist theilbar

durch 6, wenn sie sich durch 2 und 3,
" 12, " " " " 3 " 4,
" 14, " " " " 2 " 7,
" 15, " " " " 3 " 5

ohne Rest theilen läßt.

Diese Sätze sind nur besondere Fälle der allgemeinen Lehrsätze 4 und 5 in §. 69. a.

8. Für die von uns übergangenen Primzahlen 7 und 13 lassen sich zwar gleichfalls Kennzeichen ihrer Vielfachen auffinden, allein ihre Untersuchung möchte nur in seltenen Fällen leichter und kürzer als die unmittelbare Division sein. Um sich hievon zu überzeugen, möge eine Untersuchungsweise, welche vielleicht die einfachste bisher aufgefundene ist, in gedrängtester Kürze ein Plätzchen finden.

Soll man untersuchen, ob eine Zahl durch 7 oder 13 theilbar sei, so theile man sie von der Rechten gegen die Linke in Classen von 6 Ziffern ein, schreibe die Classen unter einander, addire wie gewöhnlich, und behandle die Summe, wenn sie mehr als 6 Ziffern enthielte, auf gleiche Weise. Die so gefundene höchstens 6ziffrige Summe theile man wieder von rechts nach links in zwei Classen von 3 Ziffern, und subtrahire die kleinere Classe von der größern. Den ausfallenden höchstens 3ziffrigen Rest versuche man durch 7 oder 13 zu theilen, oder man multiplicire seine Einer mit 2 im ersten, oder mit 9 im zweiten Falle, und suche den Unterschied zwischen dem Producte und der von den übrigen Ziffern gebildeten Zahl. Ist derselbe durch 7 oder 13 theilbar, so ist es auch die gegebene Zahl.

Bei dieser Untersuchung kann man übrigens zu ihrer Vereinfachung, wie es für sich einleuchtet, im ersten Falle, so oft es angeht, die Zahl oder Ziffer 7, im andern die Zahl 13 von den sich ergebenden Classensummen oder Resten weg werfen und die Untersuchung abbrechen, sobald man erkennt, daß eine dieser Summen oder Differenzen die zu erforschende Eigenschaft besitzt oder nicht.

Z. B. So findet man, daß 3649580932649512036751647905 durch 7 theilbar ist, mittels folgender Rechnung.

```
3649|580932|649512|036751|647905
                  36751
                 649512
                 580932
                   3649
              ---------
              1|918749   oder  1|918
                     1             1
            ----------      ---------
               918|750           917
               750
             ------
               168
               16
              ----
                0
```

Die Untersuchung, ob und daß 1695428100923674 durch 13 theilbar sei, geschieht, wie folgt.

```
1695|428 100|923674
     923 674
       1 695
     -------
      53|469
          53
      ------
         416
          54
      ------
          13
```

Auflösung der Zahlen in Factoren.

§. 69. c.

Erklärungen und Lehrsätze.

Eine Zahl in Factoren auflösen oder zerlegen heißt diejenigen Zahlen bestimmen, die mit einander multiplicirt die gegebene Zahl hervorbringen, und deßwegen die Factoren dieser Zahl genannt werden.

Die Factoren der Zahlen können, wie alle andern Zahlen, einfach oder zusammengesetzt sein, daher man sie einfache oder Primfactoren in jenem und zusammengesetzte Factoren in diesem Falle nennt.

Im Einklange mit den in diesem Abschnitte aufgestellten Lehrsätzen von der Theilbarkeit der Zahlen lassen sich nun folgende Lehrsätze über die Auflösung der Zahlen in Factoren erweisen.

1. Die Factoren einer Zahl sind auch Theiler derselben, weil ein Product durch jeden seiner Factoren theilbar ist; und umgekehrt ist jeder Theiler einer Zahl auch einer ihrer Factoren, weil sie ein Vielfaches dieses Theilers ist, d. h. aus der Multiplication desselben mit einer anderen Zahl hervorgeht.

Diese Wahrheit berechtigt uns, die Benennungen Theiler und Factor da, wo es zweckdienlich ist, mit einander zu verwechseln.

2. Der kleinste Theiler (oder Factor) einer Zahl ist eine Primzahl. Denn wäre derselbe zusammengesetzt, also das Product zweier noch kleinerer von 1 verschiedener Zahlen, so müßte die gegebene Zahl durch jeden dieser kleineren Factoren, folglich durch eine Zahl, die kleiner als der möglich kleinste Theiler ist, theilbar sein, was widersinnig ist.

3. Theilt man eine Zahl durch einen ihrer Factoren (oder Theiler), so ist auch der Quotient ein Factor, weil dieser Quotient (vermög des Begriffs der Division) mit dem Divisor multiplicirt die gegebene Zahl zum Producte liefert.

§. 69. d.

Bestimmung der Primfactoren einer Zahl.

I. Soll angegeben werden, ob und welche Primfactoren eine besondere Zahl enthält, so untersuche man an allen Primzahlen, welche kleiner als die gegebene Zahl sind, von der kleinsten 2 anfangend, und der Ordnung nach allmälig zu den höhern übergehend, ob eine und welche von ihnen in der vorgelegten Zahl ohne Rest enthalten ist. Auf diese Weise muß man den kleinsten Theiler dieser Zahl, weil er (vermög §. 69. c, Nr. 2) eine Primzahl ist, nothwendig einmal finden, oder man wird, falls er nur der gegebenen Zahl selbst gleich sein könnte, folglich diese durch keine der ihr vorangehenden Primzahlen theilbar wäre, zu der Ueberzeugung gelangen, daß die vorgelegte Zahl selbst eine Primzahl ist, und daher nicht in Factoren (außer in 1 und sich selbst) zerfällt werden kann. Ist der kleinste Factor der gegebenen Zahl gefunden, so wird man diese durch ihn dividiren, und an dem Quotienten (vermög §. 69. c, Nr. 3) diejenige Zahl erhalten, die mit dem kleinsten Factor multiplicirt die gegebene Zahl hervorbringt, folglich immer kleiner als diese, und ihr zweiter, zugleich aber auch ihr größter Factor ist. Hat man durch dieses Verfahren die gegebene Zahl in zwei Factoren, namentlich in ihren kleinsten und größten, zerlegt, so wird man, da jener schon eine Primzahl ist, nur diesen, wo möglich, wieder auf gleiche Weise (mit der einzigen für sich klaren Bemerkung, daß man die Prüfung mit der zuletzt gebrauchten Primzahl, nicht aber mit einer kleineren beginnt) in seinen kleinsten und größten Factor zerfällen, und dieses Verfahren wiederholen, bis von den nach und nach durch Division gewonnenen größten Factoren, die nothwendig immer kleiner und kleiner ausfallen, und somit den allmälig hervortretenden kleinsten Factoren näher rücken müssen, einer selbst unbedingt eine Primzahl, und dadurch die Operation geschlossen wird. Das eben beschriebene Verfahren selbst weist zugleich nach, daß jede zusammengesetzte Zahl in lauter Primfactoren aufgelöst werden kann, und daß folglich jede Zahl entweder eine Primzahl, oder ein Product von lauter Primzahlen ist.

Man kann, um die Rechnung in einem Zuge zu schreiben, zur Rechten der in Factoren aufzulösenden Zahl einen Strich vertical abwärts ziehen, und hinter ihm neben der Zahl den kleinsten Factor, und unter die gegebene Zahl den durch Division gefundenen größten Factor schreiben; hierauf wird man von diesem wieder den kleinsten Factor suchen, und sowohl in der Rechnung als Schreibung auf die nemliche Weise vorgehen, bis man endlich vor dem Striche eine Primzahl erhält, die man auch hinter demselben anschreibt.

Ist z. B. 265608 in seine Primfactoren aufzulösen, so führt man folgende Rechnung.

265608	2
132804	2
66402	2
33201	3
11067	3
3689	7
527	17
31	31

und es ist 265608 = 2. 2. 2. 3. 3. 7. 17. 31.

Dagegen wird man finden, daß, wenn man 8161 durch alle Primzahlen von 2 bis zu dieser Zahl selbst zu theilen versucht, dies nicht gelingt, folglich diese Zahl eine Primzahl ist. Eine solche Untersuchung wird man jedoch namhaft abkürzen können, wenn man Folgendes bemerkt.

Hat man eine gegebene Zahl durch alle Primzahlen, von der kleinsten 2 an, ohne eine derselben zu übergehen, der Ordnung nach vergebens ohne Rest zu dividiren versucht, und ist man bereits zu einer Primzahl gelangt, welche schon größer als der zuletzt erhaltene Quotient ist, und durch welche also die vorgelegte Zahl getheilt einen Quotienten liefert, der — weil (nach §. 39, Grunds. II) bei unverändertem Dividend und steigendem Divisor der Quotient abnimmt — kleiner als der Divisor ist; so muß auch jede der folgenden höheren Primzahlen einen Quotienten liefern, der kleiner als sie ist; und keine dieser Primzahlen kann in der gegebenen Zahl ohne Rest aufgehen, folglich muß diese eine Primzahl sein. Denn könnte bei der Theilung durch eine der höheren Primzahlen kein Rest übrig bleiben, so müßte der Quotient selbst wieder ein Factor der gegebenen Zahl sein, der aber, weil er kleiner als jene Primzahl ist, entweder eine der kleineren Primzahlen selbst, oder aus solchen zusammengesetzt sein müßte, was jedoch nicht eintreten kann, wenn man wirklich jede dieser Primzahlen versucht, und als Nichtfactor der gegebenen Zahl befunden hat. — So zeigt es sich, daß man die Zahl 8161 durch alle Primzahlen von 2 an bis 89 fruchtlos ohne Rest zu theilen versuchen und bei der letzten Theilung zum Quotienten 91 und zum Reste 62 erhalten wird. Die nächst größere zu versuchende

Primzahl ist nun 97, welche bereits größer als dieser Quotient 91 ist, daher man die Zahl 8161 als Primzahl zu erklären berechtigt ist.

II. Von einem eingliedrigen algebraischen Ausdrucke erhält man die einfachen Factoren, wenn man zuerst jene des Coefficienten durch das eben zergliederte Verfahren bestimmt, und hierauf alle einzelnen Buchstaben oder Factoren als eben so viel einfache, oder nicht ferner auflösbare Factoren nach einander hinschreibt. Z. B.

$$36a^2cxy=2.2.3.3.a.a.c.x.y.$$
$$77abc^2(x+y)(u-z)=7.11.a.b.c.c.(x+y).(u-z).$$

§. 69. c.

Berechnung der zusammengesetzten Factoren einer Zahl.

Hat man nach der im vorhergehenden Paragraphen erörterten Methode sämmtliche einfachen Theiler oder Primfactoren einer Zahl gefunden, so wird man die zusammengesetzten Theiler oder Factoren finden, wenn man erwägt, daß (nach §. 69. a, Nr. 3) jeder zusammengesetzte Factor nur Primfactoren der gegebenen Zahl, jedoch keinen derselben öfter enthalte, als wie oft ihn diese Zahl selbst enthält. Man wird nemlich die gefundenen Primfactoren der Zahl auf alle möglichen Weisen zu je zweien, dreien, vieren, u. s. w. mit einander multipliciren.

Gewöhnlich verbindet man diese Rechnung sogleich mit der im vorigen Paragraphen erklärten Bestimmung der Primfactoren der Zahl selbst, indem man jeden derselben mit jeder über ihm und zur Rechten des Striches stehenden Zahl multiplicirt, und die sich ergebenden Producte — wenn sie sonst nicht etwa schon früher gefunden wurden — ihr zur Rechten beischreibt. Die so gefundenen verschiedenen Zahlen sind dann vereint mit den Primfactoren und der Zahl 1 alle Theiler der gegebenen Zahl ohne Ausnahme.

Sucht man z. B. alle Theiler der Zahl 360, so hat man

360	2,
180	2, 4,
90	2, 8,
45	3, 6, 12, 24,
15	3, 9, 18, 36, 72,
5	5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360;

also sind 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360 sämmtliche Theiler von 360.

Gemeinschaftliche Theiler mehrerer Zahlen, und relative Primzahlen.

§. 69. f.

Erklärungen und Lehrsätze.

Eine Zahl heißt ein *gemeinschaftlicher Theiler* oder ein *gemeinschaftliches Maß* mehrerer anderer, wenn diese insgesammt durch jene theilbar sind.

Da jede Zahl durch 1 theilbar ist, so ist 1 der gemeinschaftliche Theiler aller Zahlen; *deßwegen hat man diesen Theiler 1 zu übergehen, wenn von den gemeinschaftlichen Theilern mehrerer Zahlen die Rede ist.*

Zahlen, welche keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, heißen *Primzahlen unter sich*, wohl auch *relative Primzahlen*, indem man dann zur Unterscheidung die eigentlichen Primzahlen (§. 69. a.) *absolute* nennt.

So haben 72, 120, 288 die gemeinschaftlichen Theiler 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24; dagegen sind 22 und 35 Primzahlen unter sich, obgleich sie einzeln keine Primzahlen, sondern zusammengesetzt sind.

Hieraus folgt:

1. Der gemeinschaftliche Theiler mehrerer Zahlen kann (nach §. 68, Nr. 3) nicht größer als die kleinste von ihnen sein; daher muß es für jede Zusammenstellung von Zahlen einen *größten gemeinschaftlichen Theiler* geben.

2. **Werden mehrere Zahlen durch ihren größten gemeinschaftlichen Theiler getheilt, so sind ihre Quotienten Primzahlen unter sich.** Denn wären sie dies nicht, sondern hätten sie noch einen gemeinschaftlichen Theiler, so müßten sie (vermög §. 69. a, Nr. 5) an dem Producte desselben und des größten gemeinschaftlichen Theilers einen, selbst diesen größten übersteigenden Theiler gemeinsam besitzen, was sich nur dann denken ließe, wenn jener gemeinschaftliche Theiler gegen die Voraussetzung nicht wirklich der größte wäre.

So haben z. B. die Zahlen 36, 54, 72, 90 zum größten gemeinschaftlichen Theiler 18, und in der That sind die bei der Theilung durch ihn ausfallenden Quotienten 2, 3, 4, 5 Primzahlen unter sich.

§. 69. g.

Bestimmung des größten gemeinschaftlichen Theilers mehrerer Zahlen.

Soll von mehreren gegebenen Zahlen der größte gemeinschaftliche Theiler gesucht werden, welcher in den Rechnungen gewöhnlich verwendet wird, und aus dem alle kleineren sich leicht ergeben, da sie nichts anders als seine verschiedenen Theiler sind, so wirft man zuvörderst von den vorgelegten Zahlen alle jene weg, welche Vielfache von einer aus ihnen sind, und daher auf die Bestimmung des größten Theilers keinen Einfluß haben, und bedient sich zur Ermittlung des größten gemeinschaftlichen Theilers der übrigen Zahlen der zweckmäßigeren von folgenden zwei Methoden.

Erste Methode.

Man zerlege jede der gegebenen Zahlen in ihre Primfactoren; notire jede Primzahl, welche in allen gegebenen Zahlen vorkommt, und zwar eben so oft, als wie vielmal sie wenigstens in jeder Zahl erscheint; hierauf multiplicire man diese vorgemerkten Primzahlen mit einander; ihr Product ist (vermög §. 69. f, Nr. 2) der verlangte größte gemeinschaftliche Theiler.

Erstes Beispiel.

Man suche das größte gemeinschaftliche Maß von

$$36,\ 48,\ 60,\ \underline{72},\ \underline{96},\ 924.$$

Hier wird man 72 und 96 weg lassen, weil jene durch 36, diese durch 48 theilbar ist. Ferner hat man

$$36 = 2.2.3.3$$
$$48 = 2.2.2.2.3$$
$$60 = 2.2.3.5$$
$$924 = 2.2.3.7.11,$$

folglich ist, da 2 wenigstens zweimal, und 3 wenigstens einmal in jeder Zahl, von den übrigen aber keine in allen Zahlen vorkommt, ihr größter gemeinschaftlicher Theiler $=2.2.3=12$.

Zweites Beispiel.

Wird der größte gemeinschaftliche Theiler von den algebraischen Ausdrücken $49a^2bcd$, $21a^2cxy$, $56a^3bcdy$, $63a^2cdhu$ gesucht, so ist

$$49a^2bcd = 7.7.a.a.b.c.d$$
$$21a^2cxy = 3.7.a.a.c.x.y$$
$$56a^3bcdy = 2.2.2.7.a.a.a.b.c.d.y$$
$$63a^2cdhu = 3.3.7.a.a.c.d.h.u,$$

folglich $7.a.a.c = 7a^2c$ der verlangte größte gemeinschaftliche Theiler.

Dieser Methode wird man sich mit vielem Vortheile bei der Bestimmung des größten gemeinschaftlichen Theilers kleiner besonderer Zahlen und eingliedriger algebraischer Ausdrücke bedienen, jedoch wird man ihr bei großen Zahlen, deren Primfactoren oft mühsam aufzusuchen sind, folgende Methode vorziehen.

Zweite Methode.

I. Soll nur zu zwei Zahlen der größte gemeinschaftliche Theiler gesucht werden, so dividire man die größere durch die kleinere; bleibt kein Rest, so ist offenbar diese kleinere selbst der verlangte größte gemeinschaftliche Theiler. Erhält man jedoch einen Rest, so theile man durch ihn den eben angewendeten Divisor, und wiederhole die Theilung des zuletzt gebrauchten Divisors durch den sich ergebenden Rest so oft, bis von den Resten einer Null wird, was nothwendig einmal erfolgt, weil sie fortwährend abnehmen;

wornach der letzte Divisor das größte gemeinschaftliche Maß der beiden gegebenen Zahlen ist. — Wäre dieser Divisor 1, so ließe dies erkennen, daß die vorgelegten Zahlen Primzahlen unter sich sind.

Denn ist von den beiden Zahlen a und b das größte gemeinschaftliche Maß zu suchen, und läßt die größere Zahl a, durch die kleinere b getheilt, den Rest c, so muß (nach §. 68, Nr. 7 und 8) jeder dem Dividend a und Divisor b gemeinschaftlich zukommende Theiler auch ein gemeinschaftlicher Theiler des Divisors b und des Restes c sein, und umgekehrt. Sonach muß auch der größte gemeinschaftliche Theiler des einen Zahlenpaares mit dem größten gemeinschaftlichen Theiler des andern Zahlenpaares übereinkommen. Denn könnte er bei dem einen Paare größer als bei dem andern sein, so müßte dieses zweite Paar auch an ihm einen gemeinschaftlichen Theiler haben, der sogar noch größer als der größte gemeinschaftliche Theiler dieses Paares sein müßte, was offenbar widersinnig wäre.

Man vermag demnach statt der gegebenen zwei Zahlen a und b leicht zwei andere kleinere b und c aufzustellen, welche mit jenen einerlei größten gemeinschaftlichen Theiler besitzen. Wiederholt man demnach die zu diesem Zwecke angewendete Division des zuletzt gebrauchten Divisors durch den ausfallenden Rest, so oft es angeht; so erhält man eine Folge von abnehmenden Zahlen

$$a, b, c, d, \ldots x, y, z,$$

von denen zu Folge des Gesagten jede zwei unmittelbar auf einander folgenden, also auch die beiden letzten, den nemlichen größten gemeinschaftlichen Theiler besitzen, wie die zwei ersten. Der größte gemeinschaftliche Theiler des letzten Zahlenpaares ist aber, weil die vorletzte Zahl durch die letzte getheilt den Rest Null darbietet, dieser letzte Divisor selbst; also ist er auch der größte gemeinschaftliche Theiler der beiden gegebenen Zahlen; was wir nachzuweisen hatten.

Bei der wirklichen Ausführung der Rechnung in besonderen Zahlen ist es bequem, die eine der beiden gegebenen Zahlen in zwei abwärts laufende verticale Striche zu fassen, und zu ihrer Linken die andere Zahl, zur Rechten aber die sich darbietenden Quotienten zu schreiben. Manche behalten den gewöhnlichen Ansatz der Division bei, und schreiben den Quotienten über das Divisionszeichen.

Erstes Beispiel.

Wenn der größte gemeinschaftliche Theiler von **166934** und **544042** gesucht wird, so führt man folgende Rechnung.

166934	544042	3
129720	500802	3
37214	43240	1
36156	37214	6
1058	6026	5
736	5290	
322	736	1
276	644	2
46	92	3
	92	2
	0	

Der letzte Divisor **46** ist also der größte gemeinschaftliche Theiler der gegebenen Zahlen.

Zweites Beispiel.

Sucht man zu **1449** und **442** den größten gemeinschaftlichen Theiler, so hat man folgende Rechnung.

	3	3	1	1	2	5	1	3
1449 :	442 :	123 :	73 :	50 :	23 :	4 :	3 :	1
1326	369	73	50	46	20	3	3	
123	73	50	23	4	3	1	0	

Da sich hier **1** als größter gemeinschaftlicher Theiler zeigt, so sind die beiden Zahlen Primzahlen unter sich.

Auf die nemliche Weise kann auch der größte gemeinschaftliche Theiler zweier zusammengesetzter algebraischer Ausdrücke gesucht werden, nur wird man hiebei zur Vereinfachung der Rechnungen noch Folgendes besonders beachten.

1) Nimmt man das Ordnen beider Ausdrücke nach demselben Buchstaben fallend vor.

2) Sucht man nach der ersten Methode den größten gemeinschaftlichen Theiler aller Glieder beider gegebenen algebraischen Ausdrücke; dividirt dann jeden Ausdruck durch diesen gefundenen

gemeinschaftlichen Theiler, und merkt ihn als einen Factor des zu suchenden größten gemeinschaftlichen Theilers beider Ausdrücke vor.

3) Bestimmt man noch von den Gliedern jedes einzelnen der zwei Ausdrücke den größten gemeinschaftlichen Theiler, welche beiden Theiler daher keinen Factor mehr gemein haben, und dividirt (zur Abkürzung) jeden Ausdruck durch den seinen Gliedern gemeinsamen Theiler.

4) Hierauf dividirt man den algebraischen Ausdruck von der höhern Dimension durch jenen von der niederen, bis man einen Rest von geringerer Dimension erhält, als von welcher der Divisor ist.

5) Um hiebei immer ganze Zahlen für die Quotienten zu finden, wird man, nachdem die dritte Regel bereits angewendet worden, den Dividend mit einer solchen Zahl multipliciren, damit sein so gewonnenes höchstes Glied, durch das höchste des Divisors theilbar ausfällt.

Soll z. B. der größte gemeinschaftliche Theiler der Ausdrücke

$$192a^4x^5+6a^4, \text{ und } 24bx^3+3b$$

gesucht werden, so führt man folgende, nunmehr leicht verständliche Rechnung aus.

$:3)$	$192a^4x^5+6a^4$	$24bx^3+3b$	$(:3$	
	$64a^4x^5+2a^4$	$8bx^3+b$		
$:2a^4)$	$32x^5+1$	$8x^3\ +1$	$(:b$	$4x^2$
	$32x^5+4x^2$	$+8x^3\ -2x$		$-2x$
	$-\quad -$	$-\quad +$		
	$-4x^2+1$	$2x\ +1$		$-2x+1$
	$-4x^2-2x$			
	$+\quad +$			
	$2x+1$			
	$2x+1$			
	$-\quad -$			
	0			

Es ist daher 3 der eine, und $2x+1$ der zweite Factor des größten gemeinschaftlichen Theilers dieser Ausdrücke, also dieser Theiler selbst $3(2x+1)$.

Eben so findet man den größten gemeinschaftlichen Theiler $x-1$ von

$$x^3-4x^2+5x-2 \text{ und } 3x^2-8x+5$$

durch folgende Rechnung.

	$x^3-\ 4x^2+\ 5x-2$	$3x^2-8x+5$	
. 3)	$3x^3-12x^2+15x-6$	$3x^2-3x$	x
	$3x^3-\ 8x^2+\ 5x$	$-\ \ +$	2
	$-\ \ +\ \ -$		
		$-5x+5$ (:−5	
:−2)	$-\ 4x^2+10x-6$	$x-1$	$3x$
. 3)	$2x^2-\ 5x+3$	$x-1$	
	$6x^2-15x+9$	$-\ \ +$	1
	$6x^2-16x+10$		
	$-\ \ +\ \ -$	0	
	$x-1$		

II. Ist zu mehreren Zahlen der größte gemeinschaftliche Theiler aufzufinden, so suche man zur ersten und zweiten Zahl den größten gemeinschaftlichen Theiler; dann bestimme man zu ihm und zur dritten Zahl den größten gemeinschaftlichen Theiler, und suche auf dieselbe Weise fortschreitend zu jedem zuletzt gefundenen größten gemeinschaftlichen Theiler, und zur nächst folgenden Zahl den größten gemeinschaftlichen Theiler, bis alle Zahlen der Rechnung beigezogen sind.

Z. B. Wenn von den Zahlen

6825, 15015, 7735, 53599

der größte gemeinschaftliche Theiler zu suchen ist, so findet man zuerst von 6825 und 15015 den größten gemeinschaftlichen Theiler 1365,
dann von 1365 und 7735 = = = = = = 455,
endlich von 455 und 53599 = = = = = = 91,
folglich ist 91 der geforderte gemeinschaftliche Theiler.

§. 69. h.

Auflösung mehrgliedriger algebraischer Ausdrücke in Factoren.

Die Herstellung derjenigen Ausdrücke, durch deren Multiplication ein gegebener eingliedriger algebraischer Ausdruck erzeugt wird, unterliegt, wie wir dies in §. 69 d. und e. kennen lernten, gar keiner Schwierigkeit; allein bei weitem schwieriger, vorzüglich in manchen Fällen gestaltet sich die Ermittlung der Factoren von mehrgliedrigen algebraischen Ausdrücken; weßwegen wir die Auflösung dieses Problems nach der Verschiedenheit dieser Ausdrücke abtheilen, und dort erklären wollen, wo wir bereits die erforderlichen Vorkenntnisse besitzen, und dieses Rechnungsverfahren benöthigen.

I. Das Erste, was mit einem in Factoren aufzulösenden, mehrgliedrigen algebraischen Ausdrucke vorgenommen werden muß, ist die Aufsuchung eines einnamigen Factors, wenn er einen solchen besitzt. In dieser Absicht sucht man (nach §. 69. g.) zu allen Gliedern des aufzulösenden Ausdruckes den größten — oder wenn man es vortheilhafter fände, nur irgend einen — gemeinschaftlichen Theiler, und nimmt ihn mit beliebigem Vorzeichen (+ oder —) als den gesuchten einnamigen Factor an.

Der zweite Factor, welcher nothwendig mit dem gegebenen Ausdrucke gleichviel Glieder enthält, wird dann gefunden, wenn man den gegebenen Ausdruck (nach §. 66) durch diesen einnamigen Factor dividirt.

Beispiele.

$$2abx-3dgx=x(2ab-3dg)$$

$$y+by=y(1+b)$$

$$ax+x^2=x(a+x)$$

$$84abh^2-63a^2h^2+63ach^2-42ah^3=21ah^2(4b-3a+3c-2h)$$

$$36a^3bcx-60a^2cx^2+48a^2c^3x=12a^2cx(3ab-5x+4c^2).$$

II. Es bleiben uns demnach für die Folge nur noch mehrgliedrige algebraische Ausdrücke, welche keinen einnamigen Factor besitzen, in lauter mehrgliedrige Factoren aufzulösen. Von diesen lassen sich manche, wenn sie 4, 6, 8, ... oder 9, 12, 15, ... Glieder enthalten, dadurch in Factoren auflösen, daß man diese Glieder in Partien (Gruppen) zu je 2, 3, 4, ... Gliedern dergestalt abzutheilen versucht, daß jede solche Partie die Herausstellung eines einnamigen Factors von der Beschaffenheit zuläßt, daß die sich ergebenden zweiten und mehrnamigen Factoren sämmtlicher Partien ganz gleich ausfallen. Gelingt dies, so wird man diesen, allen Partien gemeinschaftlichen Factor, wie einen einnamigen, gleichsam als wäre er nur ein einziger Buchstabe, oder ein einziges Zeichen, herausheben, und den ihm angehörigen Mitfactor durch Division bestimmen, was leicht geschieht, wenn man nur die mit ihm verbundenen einnamigen Factoren mit ihren Zeichen nach einander hinschreibt.

Ausdrücke dieser Art und ihre Behandlungsweise sieht man in folgenden Beispielen.

$ac+bc+ad+bd=c(a+b)+d(a+b)=(a+b)(c+d)$,

oder auch, indem man das erste mit dem dritten und das zweite mit dem vierten Gliede verbindet,

$ac+bc+ad+bd=a(c+d)+b(c+d)=(c+d)(a+b)$

$$2ab-3bx-4ay+6xy=b(2a-3x)-2y(2a-3x)$$
$$=(2a-3x)(b-2y)$$

$$6a^2+3ab-2ac-bc=3a(2a+b)-c(2a+b)$$
$$=(2a+b)(3a-c)$$

$$x^2-2xy+2xz-4yz=x(x-2y)+2z(x-2y)$$
$$=(x-2y)(x+2z)$$

$$ad+2bd-3cd-2af-4bf+6cf+ag+2bg-3cg$$
$$=d(a+2b-3c)-2f(a+2b-3c)+g(a+2b-3c)$$
$$=(a+2b-3c)(d-2f+g).$$

Anmerkung. Die weitere Auseinandersetzung dieses Gegenstandes wird in §. 169 folgen.

§. 70.

Anwendung der gemeinschaftlichen Theiler zur Vereinfachung der Divisionen.

Erwägt man, daß (nach §. 40) der Quotient nicht geändert wird, wenn man Dividend und Divisor durch die nemliche Zahl dividirt, so wird man in vielen Fällen die Division sich erleichtern können, wenn man vorher (nach §. 69. b und g) einen gemeinschaftlichen Theiler des Divisors und Dividends sucht, und beide durch ihn dividirt (abkürzt).

So ist $486900:360=48690:36=24345:18=2705:2=1352\frac{1}{2}$, wenn man der Ordnung nach durch 10, 2, 9 abkürzt.

Vorzüglich ereignet es sich bei den algebraischen Divisionen oft, daß der Divisor im Dividend nicht genau enthalten ist, und deßwegen werden auch die algebraischen Divisionen gar selten wirklich verrichtet, sondern meistens nur angezeigt. Um aber die Rechnung doch zuweilen etwas abkürzen zu können, pflegt man den Divisor und Dividend in ihre Factoren zu zerlegen; das heißt, man betrachtet jeden derselben als ein Product, und sucht die Factoren auf, durch deren Multiplication sie entstanden sind, wozu (wenigstens in einigen Fällen) der vorhergehende Paragraph Anleitung gibt. Haben nun Divisor und Dividend einen oder mehrere gleiche Factoren, so kann man diese (vermög §. 40) ganz hinweg lassen, weil dadurch beide durch eine und die nemliche Größe dividirt werden. So ist z. B.

$$(ax-a) : (3bx-3b) = a(x-1) : 3b(x-1) = \frac{a}{3b}$$

$$(6a^2b+3ax^2) : (12ax-9a^2c) = 3a(2ab+x^2) : 3a(4x-3ac)$$
$$= \frac{2ab+x^2}{4x-3ac}$$

$$(2ac-bc-2ad+bd) : (3cf+2bc-3df-2bd)$$
$$= (2a-b)(c-d) : (3f+2b)(c-d) = \frac{2a-b}{3f+2b}.$$

Wegen der mit der Auflösung mehrgliedriger algebraischer Ausdrücke in Factoren meistens verbundenen Schwierigkeiten thut man aber gewöhnlich gut, wenn man die in den Rechnungen vorkommenden Multiplicationen zusammengesetzter algebraischer Factoren nicht wirklich verrichtet, sondern nur andeutet, damit man die Factoren jederzeit vor Augen habe, und sie bei einer vorzunehmenden Abkürzung nicht erst suchen darf.

Zweites Hauptstück.

Von den Rechnungsarten mit gebrochenen Größen.

I. Abschnitt.

Von den Brüchen überhaupt.

§. 71.

Ein Bruch ist eine Größe, welche einen oder mehrere gleiche Theile einer Einheit enthält. Z. B. wenn man einen Gulden, eine Klafter u. dgl. in etliche gleiche Theile theilt, und einige solche Theile nimmt, so wird der Inbegriff dieser Theile in Rücksicht der ganzen Einheit ein Bruch genannt. Um einen Bruch auszudrücken, sind also zwei Zahlen nöthig, wovon eine angibt, in wie viel gleiche Theile man eine ganze Einheit theilen soll, die andere aber, wie viel solche Theile den Bruch ausmachen, oder genommen werden müssen. Jene heißt der Nenner, und diese der Zähler des Bruches. Beide Zahlen trennt man im Schreiben durch einen liegenden Strich, indem man den Zähler über, und den Nenner unter den Strich setzt. So sind z. B. $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{13}{7}$ Brüche, wovon die Zähler 2, 4, 13, und die Nenner 3, 5, 7 sind; und werden ausgesprochen, zwei Drittel, vier Fünftel, dreizehn Siebentel.

Die Brüche heißen so wie die ganzen Zahlen (§. 9) unbenannte Brüche, wenn die Gattung der Einheit, auf welche sich ein Bruch bezieht, noch unbestimmt ist; wenn im Gegentheile es schon bekannt ist, welche Einheit einem Bruche zum Grunde liegt, so ist er ein **benannter** Bruch. Z. B. $\frac{2}{3}$ ist ein unbenannter Bruch, $\frac{2}{3}$ Fl. aber ist ein benannter Bruch, und bedeutet, daß man einen Gulden in drei gleiche Theile theilen, und 2 solche Theile nehmen soll.

§. 72.

Ist nun bei einem Bruche der Zähler kleiner als der Nenner, so ist es ein Zeichen, daß man nicht alle Theile der ganzen Einheit nehmen soll, und daher ist der Bruch < 1; solche Brüche werden **echte** Brüche genannt; so sind z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ echte Brüche, so wie auch alle Reste der Divisionen (§. 41, Nr. 5) echte Brüche des Divisors sind.

Ist aber der Zähler eines Bruches dem Nenner gleich, wie $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \ldots \frac{a}{a}$, so ist es ein Zeichen, daß alle Theile der Einheit genommen werden müssen; daher sind solche Brüche $= 1$.

Wenn endlich der Zähler eines Bruches größer ist, als der Nenner, und folglich mehrere Theile genommen werden müssen, als eine Einheit deren enthält, so werden solche Brüche **unechte** genannt; z. B. $\frac{4}{3}, \frac{11}{2}, \frac{194}{26}, \frac{5a}{3a}$.

Brüche, deren Zähler Vielfache ihrer Nenner sind, und die daher eigentlich eine oder mehrere volle Einheiten darstellen, werden **uneigentliche**, alle anderen aber **eigentliche** genannt. So sind z. B. $\frac{14}{14}, \frac{28}{4}, \frac{ab}{a}$ uneigentliche, dagegen $\frac{7}{3}, \frac{15}{4}$ eigentliche Brüche. Alle echten Brüche sind auch eigentliche.

§. 73.

Ein Bruch, z. B. $\frac{3}{4}$ eines Guldens, bedeutet (vermög §. 71), daß 1 Fl. in vier gleiche Theile zu theilen, und der Quotient dreimal zu nehmen sei, nemlich $\frac{3}{4}\text{ Fl.} = \frac{1\text{ Fl.}}{4} + \frac{1\text{ Fl.}}{4} + \frac{1\text{ Fl.}}{4} = \frac{1\text{ Fl.}}{4} \times 3$; es ist aber (vermög §. 39, Grundsatz I) auch

$\frac{1\text{ Fl.}}{4} + \frac{1\text{ Fl.}}{4} + \frac{1\text{ Fl.}}{4} = \frac{3\text{ Fl.}}{4}$, weil es einerlei ist, ob man das Ganze (1 Fl. + 1 Fl. + 1 Fl. = 3 Fl.), oder jeden Theil (1 Fl.) von eben diesem Ganzen durch 4 dividirt; folglich hat man auch

$= \frac{3}{4}$ Fl. $\frac{3 \text{ Fl.}}{4}$ (vermög §. 12, Grundsatz III), nemlich drei Viertel eines Guldens nehmen, ist eben so viel als drei Gulden in vier gleiche Theile zertheilen, und diesen Quotienten einmal nehmen. Eben dieses gilt von jedem andern Bruche. Der Werth eines jeden Bruches ist daher der Quotient, welcher sich ergibt, wenn man den Zähler durch den Nenner dividirt.

Es ist hieraus zu ersehen, daß überhaupt jede (nach §. 37) durch einen liegenden Strich angezeigte Division als ein Bruch zu betrachten sei, bei welchem der Dividend den Zähler, und der Divisor den Nenner vorstellt.

§. 74.

Wenn man den Zähler eines unechten Bruches durch seinen Nenner wirklich dividirt, so erhält man für den Werth des Bruches eine blose ganze Zahl, wenn der Nenner in dem Zähler genau enthalten ist; im Gegentheile erhält man eine ganze Zahl nebst einem Reste (nach §. 41, Nr. 5), der ein echter Bruch sein wird (§. 72).

Um aber auch den Werth eines echten Bruches jederzeit bestimmt angeben zu können, ist es, so wie bei der Rechnung mit ganzen benannten Zahlen, nothwendig zu wissen, was für eine Einheit ihm eigentlich zum Grunde liegt, und wie viel Einheiten der nächst kleineren Gattung in einer solchen Einheit, worauf sich der Bruch bezieht, enthalten sind. Wenn man nun mit der Anzahl der Einheiten kleinerer Gattung den Zähler des Bruches multiplicirt, und dieses Product durch den Nenner dividirt, so erhält man den Werth des Bruches in bekannten Einheiten kleinerer Gattung ausgedrückt; so z. B. ist

$$\frac{7}{15}\text{ Fl.} = \frac{7 \cdot 60 \text{ Kr.}}{15} = \frac{420 \text{ Kr.}}{15} = 28 \text{ Kr.}$$

$$\frac{11}{24}\text{ Fl.} = \frac{11 \cdot 60 \text{ Kr.}}{24} = \frac{660 \text{ Kr.}}{24} = 27\tfrac{12}{24}\text{ Kr.} = 27 \text{ Kr.} + \frac{12}{24}\text{ Kr.}$$

$$= 27 \text{ Kr.} + \frac{12 \cdot 4 \text{ Dr.}}{24} = 27 \text{ Kr.} + \frac{48}{24}\text{ Dr.} = 27 \text{ Kr. } 2 \text{ Dr.}$$

$$\frac{23}{96}\text{Kl.} = \frac{23 \cdot 6}{96}\text{Sch.} = \frac{138}{96}\text{Sch.} = 1\tfrac{42}{96}\text{Sch.} = 1^{\mathrm{I}} + \frac{42 \cdot 12^{\mathrm{II}}}{96}$$

$$= 1^{\mathrm{I}} + \frac{504^{\mathrm{II}}}{96} = 1^{\mathrm{I}} + 5\tfrac{24}{96}\text{Zoll} = 1^{\mathrm{I}} + 5^{\mathrm{II}} + \frac{24 \cdot 12^{\mathrm{III}}}{96} = 1^{\mathrm{I}}\,5^{\mathrm{II}}\,3^{\mathrm{III}}.$$

$$\frac{31}{64}\text{Pf.} = \frac{31 \cdot 32}{64}\text{Loth} = 15\tfrac{32}{64}\text{Loth} = 15\text{ Loth} + \frac{32 \cdot 4}{64}\text{Quintel.}$$

$$= 15\text{ Loth } 2\text{ Quintel.}$$

$$\frac{2}{240}\text{Stunden} = \frac{2 \cdot 60}{240}\text{Min.} = \frac{120}{240}\text{Min.} = \frac{120 \cdot 60}{240}\text{Sec.} = 30\text{ Sec.}$$

§. 75.

Eine jede ganze Zahl kann zu einem uneigentlichen Bruche von einem verlangten Nenner gemacht werden, wenn man die Zahl mit dem gegebenen Nenner multiplicirt, und den Nenner unterschreibt; so ist z. B. $5 = \frac{5 \cdot 3}{3} = \frac{15}{3}$; $a = \frac{ab}{b}$.

Auch kann jede Zahl als ein Bruch vorgestellt werden, dessen Nenner 1 ist; z. B. $4 = \frac{4}{1}$; $a = \frac{a}{1}$; $m+x = \frac{m+x}{1}$.

So kann auch jede ganze benannte Zahl als ein Bruch vorgestellt werden, der sich auf Einheiten einer größern Gattung bezieht, wenn man ihr diejenige Zahl als Nenner unterschreibt, welche anzeigt, wie viel Einheiten dieser Gattung in einer Einheit der größern Gattung enthalten sind. So ist z. B.

$$25\text{ Kr.} = \frac{25}{60}\text{Fl.}$$

$$5\text{ Schuh} = \frac{5}{6}\text{ Klafter;}$$

$$11\text{ Loth} = \frac{11}{32}\text{Pf.}$$

§. 76.

Eine ganze Zahl nebst einem angehängten Bruche aber wird zu einem unechten Bruche gemacht, wenn man die ganze Zahl mit dem Nenner multiplicirt, zu dem Producte den Zähler des Bruches addirt, und den Nenner unterschreibt. So ist z. B.

$$11\tfrac{3}{5} = 11 + \frac{3}{5} = \frac{11.5}{5} + \frac{3}{5} = \frac{55}{5} + \frac{3}{5} = \frac{58}{5}$$

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$$

$$3\text{ Fl.} + 7\text{ Kr.} = 3\text{ Fl.} + \frac{7}{60}\text{ Fl.} = 3\tfrac{7}{60}\text{ Fl.} = \frac{187}{60}\text{ Fl.}$$

$$4\text{ Pf.} + 9\text{ Loth} = 4\text{ Pf.} + \frac{9}{32}\text{ Pf.} = 4\tfrac{9}{32}\text{ Pf.} = \frac{137}{32}\text{ Pf.}$$

§. 77.

Wenn man bei ungeändertem Nenner den Zähler eines Bruches vermehrt, so wird der Werth des Bruches vergrößert; vermindert man aber den Zähler, so wird der Werth des Bruches verkleinert; und zwar **wird der Bruch** 2, 3, 4, ... n **Mal größer, wenn man den Zähler mit** 2, 3, 4, ... n **multiplicirt; und** 2, 3, 4, ... n **Mal kleiner, wenn man denselben durch** 2, 3, 4, ... n **dividirt.**

Denn der Zähler zeigt (nach §. 71) an, wie viel Theile man für den Werth des Bruches nehmen soll. Vermehrt man nun den Zähler, so werden mehr solche Theile genommen als vorhin; daher wird der Bruch größer; und zwar wird er zweimal so groß, wenn man zweimal so viel Theile, dreimal so groß, wenn man dreimal so viel Theile, und n Mal so groß, wenn man n Mal so viel Theile nimmt, das ist, wenn man den Zähler mit 2, 3, ... n multiplicirt. Und aus der nemlichen Ursache wird der Bruch 2, 3, ... n Mal kleiner, wenn man bei unverändertem Nenner den Zähler durch 2, 3, ... n dividirt, weil man dadurch 2, 3, ... n Mal weniger Theile nimmt.

Es ist darum von 2 Brüchen, welche gleiche Nenner haben, jener größer, der den größern Zähler hat.

$$\text{Z. B. } \frac{8}{9} > \frac{7}{9}; \quad \frac{22}{4} < \frac{23}{4}.$$

§. 78.

Eben so wird auch der Werth eines Bruches vermehrt oder vermindert, je nachdem man bei unverändertem Zähler den Nenner verkleinert oder vergrößert, und zwar wird er 2, 3, 4, ... n **Mal größer,**

wenn man bei unverändertem Zähler den Nenner durch 2, 3, 4, ... n dividirt; hingegen 2, 3, 4, ... n Mal kleiner, wenn man den Nenner mit 2, 3, 4, .. n multiplicirt.

Denn der Nenner zeigt an, in wie viel Theile das Ganze getheilt werden soll (§. 71). Vergrößert man nun den Nenner, so wird das Ganze in eine größere Anzahl Theile getheilt; daher wird jeder Theil kleiner, und zwar zweimal kleiner, wenn das Ganze in zweimal so viel Theile, dreimal kleiner, wenn das Ganze in dreimal so viel getheilt wird, u. s. w.; daher wird auch der ganze Bruch 2, 3, 4, ... n Mal kleiner, wenn man den Nenner mit 2, 3, 4, .. n multiplicirt; und so umgekehrt, wenn man den Nenner dividirt.

Von zwei Brüchen, die gleiche Zähler und verschiedene Nenner haben, ist deßwegen jener größer, welcher den kleinern Nenner hat; z. B. $\frac{4}{7} > \frac{4}{8} > \frac{4}{9}$.

§. 79.

Hingegen bleibt der Werth eines Bruches ungeändert, wenn man Zähler und Nenner mit einer und der nemlichen Zahl multiplicirt, oder dividirt.

Denn durch die Multiplication des Zählers wird der Bruch größer, und durch die Multiplication des Nenners wird der Bruch kleiner; wird nun Zähler und Nenner mit einer und der nemlichen Zahl multiplicirt, so wird der Bruch durch die Multiplication des Zählers so vielmal vergrößert, als er durch die Multiplication des Nenners verkleinert wird; und folglich verbleibt er ungeändert. Eben so wird der Werth des Bruches durch die Division des Zählers eben so vielmal verkleinert, als er durch die Division des Nenners vergrößert wird; folglich bleibt er ebenfalls ungeändert. So ist z. B. $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$; $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$; ingleichen $\frac{25}{10} = \frac{25:5}{10:5} = \frac{5}{2}$.

Die Richtigkeit des angeführten Satzes, so wie die des §. 77 und 78 erhellet auch übrigens aus §. 40, weil ein jeder Bruch als eine angezeigte Division anzusehen ist (§. 73).

§. 80.

Einen Bruch **abkürzen** heißt, ihn ohne Veränderung seines Werthes durch kleinere Zahlen darstellen; und man erreicht dies, wenn man (nach §. 69. g) eine Zahl aufsucht, welche sowohl im Zähler, als auch im Nenner genau enthalten ist, und dann beide dadurch dividirt; z. B.

$$\frac{140}{210} = \frac{14}{21} = \frac{14:7}{21:7} = \frac{2}{3};$$

$$\frac{105}{210} = \frac{105:5}{210:5} = \frac{21}{42} = \frac{21:3}{42:3} = \frac{7}{14} = \frac{7:7}{14:7} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{30a^4b^2}{60a^2b^3c} = \frac{30a^4b^2 : 30a^2b^2}{60a^2b^3c : 30a^2b^2} = \frac{a^2}{2bc}.$$

In der Ausübung kommt man mit der Abkürzung der Brüche am geschwindesten fort, wenn man in der Zerlegung einer vorgelegten Größe in ihre Factoren sich eine Fertigkeit erworben hat. Denn wenn man die im Zähler und Nenner gemeinschaftlich befindlichen Factoren ausstreicht, so ist die Abkürzung schon fertig. Z. B.

$$\frac{210}{1155} = \frac{2.3.5.7}{3.5.7.11} = \frac{2}{11}; \quad \frac{45}{180} = \frac{3.3.5}{2.2.3.3.5} = \frac{1}{2.2} = \frac{1}{4};$$

$$\frac{ax^2 - x^3}{a^2x - ax^2} = \frac{x.x.(a-x)}{ax.(a-x)} = \frac{x}{a}.$$

Läßt sich aber keine Zahl ausfindig machen, die sowohl im Zähler, als auch im Nenner genau enthalten ist, das heißt, haben Zähler und Nenner keinen gemeinschaftlichen Factor oder sind sie Primzahlen unter sich (§. 69. f), so läßt sich auch der Bruch nicht abkürzen; und man sagt dann, der Bruch sei auf seine kleinste Benennung oder auf die möglich einfachste Gestalt gebracht.

§. 81.

Sind Zähler und Nenner des abzukürzenden Bruches besondere Zahlen, so wird man (nach §. 69. g) ihren größten gemeinschaftlichen Theiler berechnen, und durch ihn den Zähler und Nenner des Bruches theilen, wodurch dieser die möglich einfachste Form erlangen wird (§. 69. f). Besäße er diese vielleicht schon, so muß der gesuchte größte gemeinschaftliche Theiler des Zählers und Nenners der Einheit gleich ausfallen.

Soll z. B. der Bruch $\frac{4031}{10147}$ abgekürzt werden, so stellt man zunächst folgende Rechnung an.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 2 & & 1 & & 1 & & 14 \\
10147 & : & 4031 & : & 2085 & : & 1946 & : & 139 \\
8062 & & 2085 & & 1946 & & 139 & & \\
\hline
2085 & & 1946 & & 139 & & 556 & & \\
 & & & & & & 556 & & \\
\hline
 & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

Da nun 139 der gesuchte größte gemeinschaftliche Theiler des Zählers und Nenners ist, so dividire man beide durch ihn.

$$\begin{array}{l}
4031 : 139 = 29, \\
278 \\
\hline
1251 \\
1251 \\
\hline
0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
10147 : 139 = 73. \\
973 \\
\hline
417 \\
417 \\
\hline
0
\end{array}$$

Sonach ist $\frac{4031}{10147} = \frac{29}{73}$.

§. 82.

Wenn zwei oder mehrere Brüche den nemlichen Nenner haben, so werden sie Brüche von gleicher Benennung genannt; im Gegentheile heißen sie Brüche von verschiedener Benennung.

Es können aber Brüche von verschiedener Benennung auf gleiche Benennung gebracht werden, und zwar auf folgende Art.

1) Man multiplicire jeden Zähler mit allen Nennern, nur mit seinem eigenen nicht, so erhält man dadurch bei jedem Bruche den neuen Zähler.

2) Sodann multiplicire man alle Nenner mit einander, so wird dieses Product der gemeinschaftliche Nenner der verwandelten Brüche sein.

Z. B. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5} = \frac{1.3.5}{2.3.5}, \frac{2.2.5}{2.3.5}, \frac{4.2.3}{2.3.5} = \frac{15}{30}, \frac{20}{30}, \frac{24}{30},$

eben so ist $\frac{3}{4}, \frac{a}{b}, \frac{4c}{3a}, \frac{3b}{2} = \frac{18ab}{24ab}, \frac{24a^2}{24ab}, \frac{32bc}{24ab}, \frac{36ab^2}{24ab}.$

Daß auf diese Art die Werthe der Brüche ungeändert bleiben, erhellet aus §. 79; weil der Zähler und Nenner eines jeden Bruches mit einer und der nemlichen Zahl multiplicirt wird.

Man kann demnach auch untersuchen, welcher von zwei Brüchen, die verschiedene Zähler und Nenner haben, der größere sei, indem man sie vorher auf gleiche Benennung bringt. So ist z. B. $\frac{3}{5} > \frac{4}{7}$; weil $\frac{3}{5} = \frac{21}{35}$ und $\frac{4}{7} = \frac{20}{35}$ ist.

§. 83.

Wären viele Brüche auf gleiche Benennung zu bringen, so würde nach der eben vorgeschriebenen Art der allgemeine Nenner zu groß ausfallen, daher suche man ein solches Vielfache vom größten Nenner auf, in welchem alle übrigen Nenner ebenfalls genau enthalten sind. Hat man ein solches Vielfache gefunden, so gibt dieses den allgemeinen Nenner; und um den neuen Zähler bei jedem Bruche zu erhalten, dividire man den allgemeinen Nenner durch den alten Nenner, und multiplicire den Quotienten mit dem alten Zähler, so hat man den neuen Zähler. Z. B. Es wären die Brüche $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}$, auf gleiche Benennung zu bringen; so ist das Dreifache von dem größten Nenner 8, nemlich 24, schon so beschaffen, daß alle Nenner darin enthalten sind; darum nehme man 24 für den allgemeinen Nenner an, und die neuen Brüche sind

$$\frac{12}{24}, \frac{16}{24}, \frac{18}{24}, \frac{20}{24}, \frac{21}{24}.$$

Daß auch hier die Werthe der Brüche ungeändert bleiben, erhellet ebenfalls daraus, weil der Zähler und Nenner eines jeden Bruches mit der nemlichen Zahl multiplicirt wird.

§. 84.

Um aber das kleinste Vielfache mehrerer Nenner, in welchem sie alle genau enthalten sind, finden zu können, so suche man zu den zwei ersten Nennern die möglich kleinste Zahl auf, in welcher beide vollständig enthalten sind, indem man den einen Nenner durch ihr größtes gemeinschaftliches Maß dividirt, und den Quotienten mit dem andern Nenner multiplicirt; zu dieser gefundenen Zahl und zum nächst folgenden Nenner suche man wieder auf eben diese Art die kleinste Zahl auf, in welcher beide enthalten sind; und so fahre man fort, bis kein Nenner mehr übrig ist, und man folglich die verlangte

Zahl gefunden hat. Z. B. Es soll die kleinste Zahl aufgesucht werden, worin die Nenner

8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, genau enthalten sind, so ist

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{8,\ 7}_{56},\ 6}_{168},\ 5}_{840},\ 4}_{840},\ 3}_{840},\ 2}_{840}$$

nemlich 8 und 7 haben keinen gemeinschaftlichen Factor; daher ist $8.7=56$ die kleinste Zahl, in welcher beide genau enthalten sind. Ferner 56 und 6 haben zum größten gemeinschaftlichen Factor 2; 2 in 6 geht 3 Mal; 56 Mal 3 sind 168; 5 und 168 haben keinen gemeinschaftlichen Factor; daher ist $5.168=840$ die kleinste Zahl, in welcher beide genau enthalten sind; übrigens ist 4, 3, 2 auch schon in 840 enthalten; daher ist 840 die gesuchte Zahl.

§. 85.

Wenn ein Bruch in einen andern verwandelt werden soll, dessen Nenner gegeben ist, so multiplicire man den Zähler mit dem gegebenen Nenner, und dividire das Product durch den alten Nenner, so hat man den neuen Zähler. Z. B. es sei $\frac{86}{125}$ in einen andern Bruch zu verwandeln, dessen Nenner $=1000$ sein soll; so ist der neue Zähler $= 86.1000:125=688$; nemlich $\frac{86}{125}=\frac{688}{1000}$. Eben so, wenn der Bruch $\frac{5}{6}$ in einen andern verwandelt werden soll, dessen Nenner 32 ist, so ist der neue Zähler $=5.32:6=26\tfrac{2}{3}$; daher $\frac{5}{6}=\frac{26\frac{2}{3}}{32}$. Sollte hingegen ein gegebener Bruch in einen andern verwandelt werden, dessen Zähler gegeben ist, so multiplicire man den Nenner des Bruches mit dem gegebenen Zähler, und dividire das Product durch den alten Zähler, so hat man den neuen Nenner. Z. B. der Bruch $\frac{3}{4}$ soll in einen andern verwandelt werden, dessen Zähler 12 ist, so ist der Nenner gleich $\frac{12.4}{3}=16$, und der Bruch ist $\frac{12}{16}$.

Daß auf diese Art der Werth des Bruches ungeändert bleibe, erhellet aus §. 79.

§. 86.

Wenn man zum Zähler und Nenner eines Bruches Gleiches addirt, so wird der Werth des Bruches geändert, und zwar vermehrt, wenn er ein echter Bruch, hingegen vermindert, wenn er unecht ist; nemlich es ist $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$, wenn $a < b$, und $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$, wenn $a > b$ ist. Denn man bringe die Brüche auf gleiche Benennung, so hat man $\frac{ab+ac}{b(b+c)}$ statt $\frac{a}{b}$, und $\frac{ab+bc}{b(b+c)}$ statt $\frac{a+c}{b+c}$; wo $ac < bc$, wenn $a < b$; und $ac > bc$, wenn $a > b$ ist. Und umgekehrt ist es, wenn man von dem Zähler und Nenner eines Bruches Gleiches abzieht; es ist nemlich $\frac{a}{b} > \frac{a-c}{b-c}$, wenn $a < b$; hingegen $\frac{a}{b} < \frac{a-c}{b-c}$, wenn $a > b$ ist.

II. Abschnitt.

Von der Addition, Subtraction, Multiplication und Division der Brüche.

§. 87.

Bei der Addition der Brüche beobachte man folgende Regeln.

1) Haben die Brüche gleiche Nenner, so addire man die Zähler, und unterschreibe der Summe den gemeinschaftlichen Nenner; z. B.

$$\frac{2}{7} + \frac{4}{7} + \frac{5}{7} + \frac{6}{7} = \frac{17}{7} = 2\tfrac{3}{7};$$

$$\frac{2a^2}{5b} - \frac{3a^2}{5b} + \frac{x^2}{5b} = \frac{x^2-a^2}{5b}.$$

2) Haben die zu addirenden Brüche verschiedene Nenner, so bringe man sie (nach §. 82 und 83) auf gleiche Benennung, addire dann die Zähler, und unterschreibe der Summe den gemeinschaftlichen Nenner; z. B.

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{6}{7}=\frac{70+84+90}{105}=\frac{244}{105}=2\tfrac{34}{105}$$

$$\frac{7}{8}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{7}{12}+\frac{5}{6}+\frac{3}{4}+\frac{19}{24}$$

$$=\frac{21+16+12+14+20+18+19}{24}=\frac{120}{24}=5$$

$$\frac{2c}{3ab}+\frac{1}{2}+\frac{5a}{4b}=\frac{8c+6ab+15a^2}{12ab}.$$

3) Sind nebst Brüchen auch Ganze zu addiren, so kann man sie entweder besonders addiren, oder vorher in unechte Brüche verwandeln (§. 76), und zu den übrigen Brüchen addiren; so ist z. B.

$$3\tfrac{2}{5}+7\tfrac{1}{2}+\frac{2}{3}=3+7+\frac{2}{5}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$$

$$=10+\frac{12+15+20}{30}=10+\frac{47}{30}=11+\frac{17}{30}$$

$$5\tfrac{2}{3}+6\tfrac{5}{6}+7\tfrac{3}{4}+8\tfrac{1}{2}=26+\frac{8+10+9+6}{12}$$

$$=26+\frac{33}{12}=28\tfrac{3}{4}.$$

$$a+\frac{b}{3}-\frac{2b}{5}+\frac{c}{x}=\frac{15ax+5bx-6bx+15c}{15x}$$

$$=\frac{15ax-bx+15c}{15x}.$$

§. 88.

Bei der Subtraction der Brüche beobachte man Folgendes.

1) Man bringe die Brüche auf gleiche Benennung, wenn sie noch verschiedene Nenner haben sollten, ziehe die Zähler von einander ab, und unterschreibe der Differenz den gemeinschaftlichen Nenner; so ist z. B.

$$\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{5}{12}-\frac{3}{12}-\frac{8}{12}=\frac{5}{12}-\frac{11}{12}=-\frac{6}{12}=-\frac{1}{2};$$

$$\frac{2}{3}-\frac{4}{7}=\frac{14-12}{21}=\frac{2}{21};$$

$$\frac{a}{b}-\frac{2a}{3b}=\frac{3a-2a}{3b}=\frac{a}{3b}.$$

2) Wenn ein echter Bruch von einer ganzen Zahl abzuziehen ist, so borge man von der ganzen Zahl eine Einheit, verwandle selbe in einen Bruch, der mit dem abzuziehenden einerlei Nenner hat, und ziehe dann den Zähler des abzuziehenden Bruches von dem Zähler dieses Bruches ab; z. B.

$$5-\frac{2}{3}=4\tfrac{3}{3}-\frac{2}{3}=4\tfrac{1}{3};$$

$$1-\frac{5}{8}=\frac{8}{8}-\frac{5}{8}=\frac{3}{8};$$

$$8-4\tfrac{3}{5}=7\tfrac{5}{5}-4\tfrac{3}{5}=3\tfrac{2}{5};$$

$$3a-\frac{2a}{5}=\frac{15a-2a}{5}=\frac{13a}{5}.$$

3) Sind ganze Zahlen nebst angehängten Brüchen von einander abzuziehen, so ziehe man die Brüche von einander, und auch die Ganzen von einander ab; z. B.

$$4\tfrac{3}{4}-1\tfrac{1}{4}=4-1+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=3\tfrac{1}{2};$$

$$5\tfrac{3}{4}-3\tfrac{2}{3}=5-3+\frac{9}{12}-\frac{8}{12}=2\tfrac{1}{12};$$

$$\left(6a+\frac{b}{c}\right)-\left(5a+\frac{3b}{4c}\right)=6a-5a+\frac{b}{c}-\frac{3b}{4c}$$

$$=a+\frac{4b-3b}{4c}=a+\frac{b}{4c}.$$

4) Wäre aber der Bruch, von welchem abgezogen werden soll, kleiner als jener, welcher abzuziehen ist, so borge man von der ganzen Zahl des Minuends eine Einheit, mache sie zum Bruche von gleichem Nenner, addire die Zähler zusammen, und verrichte die Subtraction; z. B.

$$8\tfrac{1}{4}-5\tfrac{3}{4}=7\tfrac{5}{4}-5\tfrac{3}{4}=2\tfrac{2}{4}=2\tfrac{1}{2};$$

$$12\tfrac{2}{3}-3\tfrac{4}{5}=12\tfrac{10}{15}-3\tfrac{12}{15}=11\tfrac{25}{15}-3\tfrac{12}{15}=8\tfrac{12}{15}.$$

§. 89.

Bei der Multiplication der Brüche ist Folgendes zu bemerken.

1) Wenn ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden soll, so multiplicire man nur den Zähler des Bruches mit der ganzen Zahl, und lasse den Nenner ungeändert; denn dadurch wird der Bruch so vielmal vergrößert, als die ganze Zahl Einheiten enthält (§. 77); so ist z. B.

$$5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3} = 3\tfrac{1}{3}$$

$$\frac{5}{6} \times 12 = \frac{60}{6} = 10$$

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}.$$

Ein Bruch kann zwar auch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden, wenn man den Nenner durch die ganze Zahl dividirt, weil der Bruch dadurch ebenfalls so vielmal vergrößert wird, als die Zahl Einheiten enthält (§. 78); allein da der Nenner nur sehr selten sich durch die ganze Zahl genau theilen läßt, so ist es besser, sich der ersten Regel zu bedienen.

Ist eine ganze Zahl nebst einem angehängten Bruche mit einer ganzen Zahl zu multipliciren, so multiplicire man mit der ganzen Zahl zuerst den Bruch, und hernach die Ganzen, ziehe aber die im ersten Producte befindlichen Ganzen heraus, und addire selbe zum zweiten Producte; z. B.

$$5\tfrac{3}{4} . 6 = \frac{3}{4} . 6 + 5 . 6 = \frac{18}{4} + 5 . 6$$

$$= 4 + \frac{2}{4} + 30 = 34\tfrac{1}{2}.$$

$$\left(a + \frac{b}{c}\right) . d = ad + \frac{bd}{c}.$$

3) Wäre aber ein Bruch mit einem andern Bruche zu multipliciren, so multiplicire man Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner, so ist dieser neue Bruch das verlangte Product; nemlich $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, welches sich folgender Maßen erweisen läßt.

Soll $\frac{c}{d}$ mit $\frac{a}{b}$ multiplicirt werden, so heißt dies, von dem Betrage des Bruches $\frac{c}{d}$ sollen a $b$te Theile, oder ein $b$ter Theil desselben soll a Mal genommen werden. Allein der $b$te Theil von $\frac{c}{d}$ ist $\frac{c}{d} : b$ oder (nach §. 78) $\frac{c}{bd}$, und dieser a Mal genommen gibt $a \cdot \frac{c}{bd}$ oder (nach §. 77) $\frac{ac}{bd}$; folglich ist wirklich $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15};\ \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8};\ \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{9} = \frac{56}{135}\ ^{*)}.$$

4) Sind beide Factoren ganze Zahlen nebst angehängten Brüchen, so mache man selbe zu unechten Brüchen (§. 76) und verrichte die Multiplication; z. B.

$$5\tfrac{2}{3} \cdot 3\tfrac{4}{5} = \frac{17}{3} \cdot \frac{19}{5} = \frac{323}{15} = 21\tfrac{8}{15};$$

oder man multiplicire mit dem Bruche und mit den Ganzen des einen Factors den Bruch und auch die ganze Zahl des andern Factors; z. B.

$$2\tfrac{3}{4} \cdot 5\tfrac{2}{7} = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{7} \cdot 2 + 5 \cdot \frac{3}{4} + 5 \cdot 2$$

$$= \frac{6}{28} + \frac{4}{7} + \frac{15}{4} + 10 = \frac{6+16+105}{28} + 10$$

$$= 10 + \frac{127}{28} = 14\tfrac{15}{28}$$

$$\left(a + \frac{b}{c}\right) \cdot \left(d + \frac{c}{a}\right) = ad + \frac{bd}{c} + \frac{ac}{a} + \frac{bc}{ac}$$

$$= ad + \frac{bd}{c} + c + \frac{b}{a}.$$

---

*) Anfänger werden wohl thun, wenn sie den hier gegebenen Beweis statt mit allgemeinen Brüchen auch mit besonderen, übrigens ganz auf dieselbe Weise durchführen. Dieser Wink findet auch sonst überall Anwendung, wo die allgemeinen Beweise dem Lernenden nicht wohl einleuchten.

§. 90.

Bei der Division der Brüche ist Folgendes zu merken.

1) Wenn ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt werden soll, so multiplicire man den Nenner mit der ganzen Zahl, und lasse den Zähler ungeändert; denn dadurch wird der Bruch (vermög §. 78) so vielmal kleiner, als die ganze Zahl Einheiten enthält. So ist z. B.

$$\frac{2}{3}:4=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}; \quad \frac{7}{3}:5=\frac{7}{15}; \quad \frac{a}{b}:c=\frac{a}{bc}.$$

2) Soll aber ein Bruch durch einen Bruch dividirt werden, so kehre man den Divisor um, und multiplicire den Dividend mit demselben (nach §. 89, Nr. 3); z. B.

$$\frac{2}{3}:\frac{4}{5}=\frac{2}{3}.\frac{5}{4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6};$$

$$\frac{3}{5}:\frac{1}{2}=\frac{3}{5}.\frac{2}{1}=\frac{6}{5}=1\tfrac{1}{5};$$

und allgemein

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

Denn will man wissen, wie oft der Bruch $\frac{a}{b}$ den Bruch $\frac{c}{d}$ enthält, so kann man beide Brüche auf den gemeinschaftlichen Nenner bd bringen, wodurch der Dividend $\frac{ad}{bd}$ und der Divisor $\frac{bc}{bd}$ wird. Man hat also nur noch zu untersuchen, wie vielmal in ad dieser bdten Theile der Einheit bc solche Theile enthalten sind, oder was dasselbe ist, wie oft ad die Zahl bc in sich begreift. Da dies durch den Quotienten $ad : bc$ oder $\frac{ad}{bc}$ angegeben wird, so ist $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$. Man findet aber den Bruch $\frac{ad}{bc}$ auch, wenn man $\frac{a}{b}$ mit $\frac{d}{c}$ multiplicirt, also ist wirklich $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

3) Ist eine ganze Zahl durch einen Bruch zu dividiren, so kehre man ebenfalls den Divisor um, und verrichte die Multiplication; denn es ist:

$$a:\frac{b}{c}=\frac{a}{1}:\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\cdot\frac{c}{b}=\frac{ac}{b};$$

$$5:\frac{2}{3}=5\cdot\frac{3}{2}=\frac{15}{2}=7\tfrac{1}{2}.$$

4) Kommen ganze Zahlen nebst angehängten Brüchen zu dividiren vor, so verwandle man selbe in unechte Brüche, und verrichte nach obigen Regeln die Division; z. B.

$$3\tfrac{2}{5}:\frac{3}{4}=\frac{17}{5}:\frac{3}{4}=\frac{17}{5}\cdot\frac{4}{3}=\frac{68}{15}=4\tfrac{8}{15};$$

$$3:4\tfrac{1}{2}=3:\frac{9}{2}=3\cdot\frac{2}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3};$$

$$2\tfrac{1}{3}:1\tfrac{3}{4}=\frac{7}{3}:\frac{7}{4}=\frac{7}{3}\cdot\frac{4}{7}=\frac{4}{3}=1\tfrac{1}{3};$$

$$\left(a+\frac{b}{c}\right):\left(b-\frac{a}{d}\right)=\frac{ac+b}{c}:\frac{bd-a}{d}$$

$$=\frac{ac+b}{c}\cdot\frac{d}{bd-a}=\frac{acd+bd}{bcd-ac}.$$

Anmerkung. Der Anfänger, der die Regeln von der Multiplication und Division der Brüche nicht leicht im Gedächtnisse behalten kann, möge sich nur die zwei Regeln (im §. 89, Nr. 3, und hier in §. 90, Nr. 2) merken; nemlich wie ein Bruch mit einem Bruche multiplicirt, und wie ein Bruch durch einen andern Bruch dividirt wird; kommen nun auch ganze Zahlen mit vor, so kann jede ganze Zahl als ein Bruch, dessen Nenner = 1 ist, vorgestellt werden; so ist z. B.

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{c};$$

$$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b}:\frac{c}{1}=\frac{a}{b}\times\frac{1}{c}=\frac{a}{bc};$$

$$c:\frac{a}{b}=\frac{c}{1}:\frac{a}{b}=\frac{c}{1}\times\frac{b}{a}=\frac{bc}{a}.$$

§. 91.

Ein Bruch eines Bruches wird genommen, wenn man die Zähler und Nenner der Brüche mit einander multiplicirt; z. B. $\frac{3}{10}$ des Bruches $\frac{5}{6}$ ist $=\frac{3\cdot5}{6\cdot10}=\frac{15}{60}$; denn $\frac{3}{10}$ des Bruches $\frac{5}{6}$

heißt nichts anders, als daß man den Bruch $\frac{5}{6}$ in 10 gleiche Theile theilen, und 3 solche Theile davon nehmen soll; nun ist $\frac{5}{6} : 10 = \frac{5}{6 \,.\, 10}$, und dieses dreimal genommen gibt $\frac{3 \,.\, 5}{6 \,.\, 10}$.

§. 92.

Durch die Rechnungsarten mit Brüchen können nun auch benannte Zahlen einer kleinern Gattung als Brüche von jeder größern Gattung vorgestellt werden, welches bei der Multiplication und Division der benannten Zahlen oft gute Dienste leisten kann; so ist z. B.

$$5 \text{ Fl.} + 17 \text{ Kr.} = 5\tfrac{17}{60} \text{ Fl.} = \frac{317}{60} \text{ Fl.}$$

$$4 \text{ Sch.} + 8 \text{ Zoll} = 4\tfrac{8}{12} \text{ Sch.} = 4\tfrac{2}{3} \text{ Sch.} = \frac{14}{3} \text{ Sch.}$$

$$2 \text{ Kl.} + 0 \text{ Sch.} + 9 \text{ Z.} = 2 \text{ Kl.} + \frac{9}{12} \text{ Sch.} = 2 \text{ Kl.} + \frac{3}{4} \text{ Sch.}$$

$$= 2\tfrac{3}{24} \text{ Kl.} = 2\tfrac{1}{8} \text{ Kl.} = \frac{17}{8} \text{ Kl.}$$

$$8 \text{ Pf.} + 20 \text{ L.} + 3 \text{ Q.} = 8 \text{ Pf.} + 20\tfrac{3}{4} \text{ L.} = 8 \text{ Pf.} + \frac{83}{4} \text{ L.}$$

$$= 8\tfrac{83}{128} \text{ Pf.} = \frac{1107}{128} \text{ Pf.};$$

$$3 \text{ St.} + 15 \text{ Min.} + 45 \text{ Sec.} = 3 \text{ St.} + 15\tfrac{45}{60} \text{ Min.}$$

$$= 3 \text{ St.} + 15\tfrac{3}{4} \text{ Min.} = 3 \text{ St.} + \tfrac{63}{4} \text{ Min.} = 3\tfrac{63}{240} \text{ St.}$$

$$= 3\tfrac{21}{80} \text{ St.} = \frac{261}{80} \text{ St.}$$

§. 93.

Wenn in einer Rechnung benannte Brüche vorkommen, die sich auf verschiedene Einheiten beziehen, so müssen selbe vorher auf gleiche Einheiten gebracht werden, und dann können erst die bisher gegebenen Rechnungsarten angewendet werden; so ist z. B.

$$\frac{3}{4} \text{ St.} + \frac{2}{5} \text{ M.} = \frac{3}{4} \text{ St.} + \frac{2}{5 \,.\, 60} \text{ St.} = \frac{3 \,.\, 5 \,.\, 15}{4 \,.\, 5 \,.\, 15} \text{ St.} + \frac{2}{5 \,.\, 60} \text{ St.}$$

$$= \frac{227}{300} \text{ St.}$$

$$\frac{3}{5}\text{St.} + \tfrac{2}{3}\text{M.} = \frac{3.60}{5}\text{M.} + \tfrac{2}{3}\text{M.} = 36\tfrac{2}{3}\text{M.}$$

$$\frac{4}{5}\text{Pf.} : \frac{3}{2}\text{L.} = \frac{4}{5}\text{Pf.} : \frac{3}{64}\text{Pf.} = \frac{4}{5}\cdot\frac{64}{3}$$

$$= \frac{256}{15} = 17\tfrac{1}{15};\ \text{oder}$$

$$\frac{4}{5}\text{Pf.} : \frac{3}{2}\text{L.} = \frac{4.32}{5}\text{L.} : \frac{3}{2}\text{L.} = \frac{4.32.2}{5.3}$$

$$= 17\tfrac{1}{15}.$$

§. 94.

Einige Fragen zur Anwendung der Rechnungsarten mit Brüchen.

1. Frage. Zu einer gewissen Montur wird erfordert: zum Rocke $2\frac{1}{6}$ Ellen, zur Weste $\frac{3}{4}$ Ellen, und zu den Hosen $\frac{7}{8}$ Ellen Tuch; wie viel beträgt dieses zusammen?

Antwort. $2\frac{1}{6} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} = 2\frac{4}{24} + \frac{18}{14} + \frac{21}{24} = 2\frac{43}{24}$ $= 3\frac{19}{24}$ Ellen.

2. Frage. Ein massiv gegossenes Kanonenrohr wiegt $56\frac{2}{3}$ Centner, und nach der Bohrung hatte dasselbe nur $51\frac{3}{4}$ Centner; wie viel Metall ist herausgebohrt worden?

Antwort. $56\frac{2}{3} - 51\frac{3}{4} = 56\frac{8}{12} - 51\frac{9}{12} = 55\frac{20}{12} - 51\frac{9}{12}$ $= 4\frac{11}{12}$ Centner.

3. Frage. Wie viel muß man für einen Balken, welcher 11 Kl. 4 Sch. 8 Zoll lang ist, bezahlen, wenn jede Klafter davon 5 Fl. 17 Kr. kostet?

Antwort. Da 11 Kl. 4 Sch. 8 Zoll $= \left(11 + \frac{4}{6} + \frac{8}{6.12}\right)$ Kl. $= \left(11 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9}\right)$ Kl. $= \frac{106}{9}$ Kl., und 5 Fl. 17 Kr. $= \left(5 + \frac{17}{60}\right)$ Fl. $= \frac{317}{60}$ Fl. ist, so kostet der ganze Balken $\frac{106}{9}\cdot\frac{317}{60}$ Fl. $= \frac{33602}{540}$ Fl. $= 62\frac{61}{270}$ Fl. $=$ 62 Fl. $13\frac{5}{9}$ Kr.

4. Frage. Wie viel Patronen können von $3\frac{1}{2}$ Centner Pulver erzeugt werden, wenn jede Patrone mit $1\frac{3}{4}$ Pf. Pulver gefüllt wird?

Antwort. Da $3\frac{1}{2}$ Cent. = 350 Pf., und $1\frac{3}{4}$ Pf. = $\frac{7}{4}$ Pf. ist, so ist die gesuchte Anzahl der Patronen $= 350 : \frac{7}{4} = 200$.

5. Frage. Es ist aus der Erfahrung bekannt, daß das Gold, wenn es ganz ins Wasser getaucht wird, darin beiläufig $\frac{2}{37}$ seines Gewichtes verliere; das Silber aber verliert $\frac{2}{21}$, und das Kupfer $\frac{5}{43}$ seines Gewichtes; wie viel wird nun ein Körper, wobei sich $1\frac{1}{2}$ Pf. Gold, $3\frac{2}{3}$ Pf. Silber, und $2\frac{3}{4}$ Pf. Kupfer befinden, an seinem Gewichte im Wasser verlieren?

Antwort. $\frac{2}{37}$ von $1\frac{1}{2} = \frac{2}{37} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{37}$;

$\frac{2}{21}$ von $3\frac{2}{3} = \frac{2}{21} \cdot \frac{11}{3} = \frac{22}{63}$; und

$\frac{5}{43}$ von $2\frac{3}{4} = \frac{5}{43} \cdot \frac{11}{4} = \frac{55}{172}$; folglich ist der Verlust des Körpers im Wasser $= \frac{3}{37} + \frac{22}{63} + \frac{55}{172} = \frac{300721}{400932}$ Pfund = 24 Loth beinahe.

III. Abschnitt.

Von den Decimalbrüchen.

§. 95.

Wenn man bei einer ganzen Zahl rechts hinter den Einheiten noch mehrere Ziffern anhängt, deren Werthe nach dem decadischen Gesetze, so wie die der übrigen Ziffern (§. 6) von der Linken gegen die Rechte zehnfach abnehmen, so werden sie keine ganzen Einheiten, sondern Brüche vorstellen müssen; und zwar wird die erste neben den Einheiten Zehntel einer Einheit, die zweite Hundertel einer Einheit, die dritte Tausendtel einer Einheit, u. s. w. bedeuten. Solche Brüche werden Decimalbrüche oder zehntheilige Brüche (Decimalen), und die Zahlen, welche Decimalbrüche bei sich führen, oft auch Decimalzahlen genannt. Damit dieselben von den dabei befindlichen Ganzen unterschieden werden können, werden sie von den ganzen Einheiten durch ein Comma (,) abgesondert, wo dann die Ziffern links vor dem Comma ganze Einheiten bedeuten, und jene rechts Decimalstellen oder Decimalziffern genannt werden. So z. B. ist 35,7859 ein Decimalbruch mit vier Decimalstellen, und bedeutet 35 ganze Einheiten, 7 Zehntel, 8 Hundertel, 5 Tausendtel und 9 Zehntausendtel einer Einheit; nemlich es ist

$$35{,}7859 = 35 + \frac{7}{10} + \frac{8}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{9}{10000}$$
$$= 35 + \frac{7000}{10000} + \frac{800}{10000} + \frac{50}{10000} + \frac{9}{10000}$$
$$= 35 + \frac{7859}{10000} = \frac{357859}{10000};$$

ingleichen ist $4{,}09 = 4 + \frac{9}{100} = \frac{409}{100}$. Eben so heißt 0,43 kein Ganzes, 4 Zehntel und 3 Hundertel $= \frac{43}{100}$; ingleichen 0,005 $= \frac{5}{1000}$.

§. 96.

Aus diesem ist zu ersehen, daß man im erforderlichen Falle einem Decimalbruche leicht seinen Nenner unterschreiben kann, indem derselbe jederzeit aus einer Einheit nebst so viel angehängten Nullen besteht, als der Bruch Decimalstellen hat; und man kann daher auch sagen: ein Decimalbruch ist ein solcher Bruch, der eine blose Einheit nebst einigen angehängten Nullen (eine decadische Einheit) zu seinem Nenner hat.

Und umgekehrt, wenn ein mit seinem Nenner versehener Decimalbruch in seiner echten Gestalt, das ist, ohne Nenner geschrieben werden soll, so darf man nur in dem Zähler von der Rechten gegen die Linke so viel Ziffern für Decimalstellen abschneiden, als der Nenner Nullen hat, wobei, wenn der Zähler nicht genug Ziffern enthalten sollte, das links Fehlende durch Nullen ergänzt werden muß. Z. B.

$$\frac{86504}{1000} = 86,504; \quad \frac{56}{100} = 0,56; \quad \frac{4}{10000} = 0,0004.$$

§. 97.

Auch ist hieraus zu ersehen, daß man an einen Decimalbruch rechts so viel Nullen anhängen kann, als man will, ohne daß dadurch der Werth des Bruches geändert wird. Denn es ist z. B. 7,58 = 7,5800. Eben so kann auch eine blose ganze Zahl als ein Decimalbruch vorgestellt werden, indem man nur eine beliebige Anzahl Nullen anhängt, und dieselbe durch ein Comma absondert; z. B. 12 = 12,000.

Es ist daher sehr leicht, Decimalbrüche auf gleiche Benennung zu bringen, indem man an jene, welche weniger Decimalstellen haben, so viel Nullen hinten anhängt, damit jeder aus gleichviel Decimalstellen bestehe.

§. 98.

I. Es ist öfters erforderlich, einen gegebenen gewöhnlichen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, welcher demselben entweder vollkommen, oder auch nur bis auf eine bestimmte Decimalstelle am Werthe gleich ist; dieses geschieht auf folgende Art.

1) Ist er ein unechter Bruch, so dividire man den Zähler durch den Nenner, und man bekommt die ganzen Einheiten; wäre er aber echt, so muß an die Stelle der ganzen Einheiten eine Null gesetzt werden.

2) An den Rest hänge man eine Null, dividire dieses wieder durch den Nenner, so wird der Quotient Zehntel bedeuten; dieser wird mit dem Divisor multiplicirt, und gehörig abgezogen. An den Rest hänge man wieder eine Null, dividire dies wieder durch den Nenner, so hat man die Hundertel, u. s. w.

3) Fährt man nun auf diese Art fort, und die Division geht einmal ohne Rest genau auf, so ist der gegebene Bruch dem gefundenen Decimalbruche vollkommen gleich, welches bei allen denjenigen Brüchen Statt findet, deren Nenner 2, 4, 8, 16, 32, . . .

5, 25, 125, ... oder ein Product von diesen Zahlen ist, nemlich keine andern Primfactoren, als 2 und 5 enthält, welche die einzigen Primfactoren der Zahl 10 sind.

Beispiele.

$$\frac{23}{4}=23:4=5{,}75 \qquad\qquad \frac{76}{125}=76:125=0{,}608$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ \hline 30 \\ 28 \\ \hline 20 \\ 20 \\ \hline 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 760 \\ 750 \\ \hline 100 \\ 1000 \\ 1000 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{694}{32}=694:32=21{,}6875.$$

4) Bei den übrigen Brüchen aber geht die Division zwar niemals zu Ende, doch aber darf man, auf die eben vorgeschriebene Art, die Division nur so lang fortsetzen, bis man zum zweiten Male einen und den nemlichen Rest erhält, wornach die Decimalen in der schon bekannten Ordnung wiederholt ohne Ende fortgehen.

Beispiele.

$$\frac{5}{3}=5:3=1{,}6666\ldots; \qquad\qquad \frac{7}{11}=7:11=0{,}636363\ldots.$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 20 \\ 18 \\ \hline 20 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 70 \\ 66 \\ \hline 40 \\ 33 \\ \hline 70 \end{array}$$

$$\frac{6}{7}=6:7=0{,}857142857142\ldots..$$

Ein solcher Decimalbruch heißt periodisch, und die Gruppe der stets wiederkehrenden Ziffern seine Periode. So sind 6, 63, 857142 die Perioden der eben gefundenen periodischen Decimalbrüche. Es ist bequem, bei periodischen Decimalbrüchen die Periode nur einmal anzuschreiben, und über ihre erste und letzte Ziffer, oder wenn sie nur aus einer Ziffer bestände, blos über diese einen Punct zu setzen. So ist nach obigen Beispielen

$$\frac{5}{3}=1{,}\dot{6}; \qquad \frac{7}{11}=0{,}\dot{6}\dot{3}; \qquad \frac{6}{7}=0{,}\dot{8}5714\dot{2}.$$

5) Von den Decimalstellen der auf diese Weise entstehenden periodischen, oder anderer ohne Ende fortlaufender Decimalbrüche können nun so viel beibehalten werden, als es nur immer die Richtigkeit einer Rechnung erfordern mag, so daß die übrigen ohne merklichen Fehler gänzlich hinweg gelassen werden können; nur kann man, um den Fehler noch kleiner zu machen, die letzte beibehaltene Decimalziffer um eins vermehren, wenn die nachfolgende Ziffer größer als 4 ist; z. B. $\frac{6}{7} = 0{,}85714286$ anstatt $0{,}85714285$, weil die folgende 9te Decimalziffer ein 7 ist.

II. In manchen, wenn gleich seltenen Fällen, verlangt man gegebene Decimalbrüche in gewöhnliche oder gemeine Brüche, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, umzusetzen. Hiebei benimmt man sich auf folgende Weise.

1) Bricht der Decimalbruch von selbst ab, oder wird er, obgleich er eigentlich ohne Ende fortläuft, absichtlich an irgend einer Decimalstelle abgebrochen; so verwandelt man ihn in einen gemeinen Bruch, indem man den Decimalstrich ausstößt, der so erhaltenen ganzen Zahl als Nenner einen Einser (1) mit so viel rechts folgenden Nullen, als der vorgelegte Decimalbruch Decimalstellen besitzt, unterschreibt, und endlich diesen Bruch durch Abkürzung auf die kleinste Benennung bringt. So z. B. ist $3{,}875 = \frac{3875}{1000} = \frac{31}{8}$; der ohne Ende fortlaufende Decimalbruch $3{,}14159 \ldots$ gibt, wenn man nur 2 Decimalstellen beibehält, $3{,}14$ oder $\frac{314}{100} = \frac{157}{50}$.

2) Wenn aber der in einen gemeinen Bruch zu verwandelnde Decimalbruch periodisch ist, so schreibe man seine Periode nur einmal an, beseitige den Decimalstrich, subtrahire von der so gewonnenen ganzen Zahl die aus den, der Periode vorangehenden Ziffern bestehende ganze Zahl, und schreibe unter den Rest als Nenner so viel Neuner (9), als die Periode Ziffern hat, nebst so viel nachfolgenden Nullen, als der Periode Decimalstellen vorangehen. So z. B. ist

$$17{,}52\dot{3}2\dot{4} = \frac{1752324 - 1752}{99900} = \frac{1750572}{99900}.$$

$$= \frac{194508}{11100} = \frac{64836}{3700} = \frac{16209}{925}$$

$$0{,}\dot{1}4285\dot{7} = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}.$$

Um uns von der Richtigkeit dieses Verfahrens zu überzeugen, erwägen wir, daß, wenn der periodische Decimalbruch $17{,}52\dot{3}2\dot{4}$ aus einem gewöhnlichen Bruche, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, die wir vorläufig, so lange wir sie nicht kennen, durch die Buchstaben a und b vorstellen wollen, entstehen soll, bei der Theilung des Zählers a durch den Nenner b da, wo man die letzte Ziffer (4) der Periode (324) als Theilquotienten erhielt, derselbe Rest wie dort bleiben muß, wo man die dieser Periode unmittelbar vorangehende Ziffer (2) im Quotienten fand, oder daß wir, nachdem wir dem Zähler a nach und nach 5 Nullen angehängt, also ihn mit 100000 multiplicirt haben, den nemlichen Rest erhalten müssen, als nachdem wir ihm nur 2 Nullen beigeschrieben, daher ihn mit 100 vervielfältigt haben. Nun gibt aber der 100000fache Zähler a, nemlich $100000a$ durch den Nenner b getheilt zum Quotienten die Zahl 1752324 demnach den Rest $100000a - 1752324b$, ferner liefert der 100fache Zähler, nemlich $100a$ durch den Nenner b dividirt als Quotienten die Zahl 1752, daher als Rest $100a - 1752b$. Setzen wir demnach diese zwei Reste gleich, so ist $100000a - 1752324b = 100a - 1752b$. Ziehen wir ferner von beiden gleichen Resten $100a$ ab, und geben zu beiden $1752324b$, so erhalten wir $99900a = (1752324 - 1752)b$, und wenn wir beide gleichen Zahlen durch $99900b$ dividiren,

$$\frac{a}{b} = \frac{1752324 - 1752}{99900},$$

wodurch der gesuchte gemeine Bruch $\frac{a}{b}$ bestimmt, und obige Regel erwiesen ist *).

*) Die allgemeine Giltigkeit dieser (übrigens nur selten zur Anwendung kommenden) Regel möge für die schon mit dem nächsten

§. 99.

Bei der Addition der Decimalbrüche schreibe man dieselben, so wie auch die ganzen Zahlen, wenn sie dazu addirt werden sollen, dergestalt unter einander, daß die Striche, welche die Decimalstellen von den ganzen Einheiten absondern, gerade unter einander zu stehen kommen, und addire übrigens wie bei den ganzen Zahlen; nur muß in der Summe das Comma ebenfalls an die vorige Stelle gesetzt werden.

Beispiele.

3,04	23,07543	312
26,1735	0,923	25,73
7,5	6,0024	0,364
36,7135	30,00083	338,094

§. 100.

Bei der Subtraction der Decimalbrüche ordne man sie so, wie bei der Addition, und subtrahire wie gewöhnlich;

Hauptstücke etwas vertrauten Leser in Folgendem nur ganz kurz angedeutet werden. Beginnt die erste Periode eines Decimalbruches nach der m^{ten} Decimalstelle, und besitzt jede Periode n Stellen, so muß der zu suchende ganzzahlige Zähler a durch den gleichfalls zu bestimmenden ganzzahligen Nenner b getheilt, dieselben Reste geben, nachdem man an jenen zuerst m und später noch n Nullen angehängt, folglich ihn mit 10^m und 10^{m+n} (welcher Ausdrücke Bedeutung aus den §§. 113 und 121 anticipirt wird), multiplicirt hat. Seien nun p und q die ganzzahligen Quotienten, die man nach Beischreibung jener Nullen oder Verrichtung dieser Multiplication erhalten, so sind $10^m a - bp$ und $10^{m+n} a - bq$ jene Reste, daher $10^{m+n} a - bq = 10^m a - bp$. Addirt man zu beiden Ausdrücken bq, und subtrahirt von beiden $10^m a$, löst dann die Resultate (nach §. 69. h) in Factoren auf, so ergibt sich

$$10^m (10^n - 1) a = (q - p) b,$$

und wenn man beide gleichen Zahlen durch $10^m (10^n - 1) b$ theilt,

$$\frac{a}{b} = \frac{q-p}{(10^n - 1) 10^m},$$

woraus man, wenn man erwägt, daß $10^n - 1$ eine mit n Neunern geschriebene Zahl andeutet, die Richtigkeit der gegebenen Vorschrift allgemein bewiesen sieht.

nur muß man dem Decimalbruche, von welchem ein anderer mit mehr Decimalstellen begabter abgezogen werden soll, so viel Nullen in Gedanken hinzufügen, damit beide gleichviel Decimalstellen haben.

Beispiele.

12,3257	60,57	13
4,56	0,9856	2,346
7,7657	59,5844	10,654

Wenn ein gemeiner Bruch zu einem Decimalbruche zu addiren, oder davon zu subtrahiren ist, so verwandle man selben in einen Decimalbruch (nach §. 98); z. B.

$$3{,}465 + \frac{3}{4} = 3{,}465 + 0{,}75 = 4{,}215;$$

$$\frac{17}{6} - 1{,}34 = 2{,}8333\,.\,. - 1{,}34 = 1{,}4933\,.\,.\,.$$

§. 101.

Hat man Decimalbrüche mit einander, oder Decimalbrüche mit ganzen Zahlen zu multipliciren, so verrichte man die Multiplication, als wenn es lauter ganze Zahlen wären, und schneide im Producte von der Rechten gegen die Linke so viel Decimalstellen ab, als beide Factoren deren haben; indem man, wenn nicht genug Ziffern vorhanden sein sollten, den Abgang links mit Nullen besetzt.

Beispiele.

1,44	3,046	0,337	0,26
1,2	0,32	0,023	17
288	6092	1011	182
144	9138	674	26
1,728	0,97472	0,007751	4,42.

Von der Richtigkeit dieses Verfahrens kann man sich leicht überzeugen, wenn man den zu multiplicirenden Decimalbrüchen ihre Nenner unterschreibt, und sie (nach §. 89, Nr. 3) multiplicirt.

§. 102.

Ist ein Decimalbruch mit einer decadischen Einheit, z. B. mit 10, zu multipliciren, so rücke man nur das Comma um eine Stelle weiter gegen die Rechte; denn dadurch erhält jede Ziffer einen zehnfachen Werth. (§. 6). Ist er mit 100 zu multipliciren, so rücke man das Comma um zwei Stellen rechts, mit 1000 um drei Stellen, u. s. w.

Beispiele.

$4{,}587 \times 10 = 45{,}87$; $9{,}307 \times 100 = 930{,}7$;
$0{,}5386 \times 1000 = 538{,}6$.

Läßt man daher bei einem Decimalbruche das Comma, welches die Decimalstellen absondert, gänzlich hinweg, und betrachtet ihn als eine blose ganze Zahl, so wird dadurch der Decimalbruch mit 1 nebst so viel angehängten Nullen multiplicirt, als Decimalstellen vorhanden waren.

§. 103.

Bei der Division der Decimalbrüche, es möge ein Decimalbruch durch eine ganze Zahl, oder durch einen Decimalbruch, oder auch eine ganze Zahl durch einen Decimalbruch zu dividiren sein, beobachte man folgende Regel.

Man schreibe den Divisor unter den Dividend in Gestalt eines gewöhnlichen Bruches, hänge dem Zähler oder dem Nenner, je nachdem einer oder der andere weniger Decimalstellen hat, so viel Nullen an, daß beide gleichviel Decimalstellen haben, lasse dann das Comma, welches die Decimalstellen absondert, gänzlich hinweg, (indem man sich einbildet, daß Zähler und Nenner mit einer und der nemlichen Zahl multiplicirt werden) und verwandle hierauf diesen Bruch (nach §. 98) in einen Decimalbruch, so hat man den richtigen Quotienten.

Beispiele.

$$3{,}045 : 15 = \frac{3{,}045}{15{,}000} = \frac{3045}{15000} = 0{,}203;$$

$$2{,}134 : 0{,}12 = \frac{2{,}134}{0{,}120} = \frac{2134}{120} = 17{,}7833;$$

$$0{,}0036 : 4{,}8 = \frac{0{,}0036}{4{,}8000} = \frac{36}{48000} = 0{,}00075;$$

$$24 : 0{,}006 = \frac{24{,}000}{0{,}006} = \frac{24000}{6} = 4000.$$

Wenn ein Decimalbruch durch eine ganze Zahl, die auch einige Decimalstellen haben kann, zu dividiren ist, so kann die Division auch kürzer, ohne daß man sie bruchweise ansetzt, verrichtet werden, wie es in folgenden Beispielen zu ersehen ist. Im Beispiele Nr. 1 sagt man nemlich: 6 in 7 Ganzen geht 1 Mal, und bleibt 1; 6 in 13 Zehnteln geht 2 Mal, und bleibt 1; 6 in 15 Hunderteln geht 2 Mal, bleiben 3; 6 in 36 Tausendteln geht 6 Mal. Eben so sagt man im Beispiele Nr. 2: 4 in 0 Ganzen geht 0 Mal; 4 in 0 Zehnteln geht 0 Mal; 4 in 6 Hunderteln geht 1 Mal, 43 von 65 bleiben 22, u. s. w.

Beispiele.

Nr. 1.	Nr. 2.
$7{,}356 : 6 = 1{,}226$	$0{,}06537 : 4{,}3 = 0{,}0152$
	43
	223
	215
	87

Soll endlich ein Decimalbruch durch eine der decadischen Einheiten 10, 100, 1000 2c. dividirt werden, so darf man nur das Comma, um 1, 2, 3, . . . Stellen weiter zur Linken rücken; dadurch erhält jede Ziffer einen zehn-, hundert-, tausend-Mal kleinern Werth (§. 6 und 95); z. B.

$$53{,}436 : 10 = 5{,}3436;$$
$$32{,}43 : 100 = 0{,}3243;$$
$$5{,}38 : 1000 = 0{,}00538.$$

§. 104.

Wäre ein Decimalbruch mit einem gemeinen Bruche zu multipliciren, oder zu dividiren, so verwandle man entweder den Bruch in einen Decimalbruch, oder man sehe den Decimalbruch für eine ganze Zahl an, und verrichte die Multiplication, oder die Division (nach §. 89, Nr. 1; und §. 90, Nr. 1—3); nur muß das Comma jederzeit an die gehörige Stelle gesetzt werden; z. B.

$$2{,}04 \times \frac{3}{4} = \frac{2{,}04 \times 3}{4} = \frac{6{,}12}{4} = 1{,}53;$$

$$\frac{5}{6} : 0{,}342 = \frac{5}{6 \times 0{,}342} = \frac{5}{2{,}052} = \frac{5000}{2052} = 2{,}436.$$

§. 105.

Der Werth eines benannten Decimalbruches wird in Einheiten kleinerer Gattung gefunden, wenn man ihn mit der Zahl multiplicirt, welche anzeigt, wie viel Einheiten kleinerer Gattung in einer Einheit, worauf sich der Decimalbruch bezieht, enthalten sind; so z. B. findet man

4,3 Tag = 4 T. 7 St. 12 M.	3,41 Kl. = 3 Kl. 2 Sch. 5 Zoll.
24	6
7,2 Stunden	2,46 Schuh
60	12
12,0 Minuten	92
	46
	5,52 Zoll u. s. w.

§. 106.

Zuweilen sind Decimalbrüche mit einander zu multipliciren, deren Product man nur mit etlichen Decimalstellen richtig verlangt, oder öfters auch nicht in mehreren richtig erhalten kann. In solchen Fällen kann die sogenannte abgekürzte Multiplication sehr geschwind auf folgende Art verrichtet werden.

1) Man schreibt die Ziffer der Einer des Multiplicators unter jene Stelle des Multiplicands, welche im Producte noch vorkommen soll, oder um das Product genauer zu erhalten, unter die nächst niedrigere rechts, die übrigen Ziffern aber in umgekehrter Folge so an, daß die niedrigste Ziffer die höchste wird. Leere Stellen über dem Multiplicator zur Rechten oder Linken denkt man sich mit Nullen besetzt.

2) Nun multiplicirt man mit jeder Ziffer des Multiplicators einzeln den Multiplicand, von der gerade über ihr stehenden Ziffer anfangend, und schreibt die so erhaltenen Theilproducte wie Additionsposten unter einander; dann ist die Summe das verlangte Product. Um aber die Fehler der letzten Ziffern rechts in den einzelnen Theilproducten einiger Maßen zu verbessern, beginnt man die Multiplication nicht mit der gerade über dem Multiplicator stehenden Ziffer, sondern mit ihrer rechten Nachbarin, setzt jedoch das Product nicht an, sondern zählt in Gedanken bis zu derjenigen nächsten Zahl aufwärts, deren Einerstelle mit der Ziffer 5 besetzt ist, und rechnet die Zehner dieser Zahl als Correctur (Verbesserung) zum ersten wirklich anzusetzenden Producte.

Soll z. B. das Product der Decimalzahlen 3,6498 und 6,937 in 2 Decimalen genau gerechnet werden, so führt man folgende Rechnung.

3,6498
7396
2189
328
11
2
25,30

Es ist nemlich hier bei der Multiplication mit 6, 6×9=54, also 55 die nächst höhere mit 5 endigende Zahl und die Correctur 5, welche zu 6.4=24 addirt 29 gibt; u. s. w.

Die Richtigkeit des Verfahrens erhellet sogleich, wenn man die ausführlichen Theilproducte in umgekehrter Ordnung der Ziffern des Multiplicators berechnet, und hinter der Stelle, welche noch genau gefordert wird, einen Absonderungsstrich zieht.

3,64	98
6,93	7
21 89	88
3 28	482
10	9494
2	55486
25,31	86626

Denn die zur Linken des Striches stehenden Ziffern sind diejenigen, welche durch die abgekürzte Multiplication erhalten werden.

Die angeführte abgekürzte Multiplication der Decimalbrüche wird hauptsächlich in solchen Fällen gebraucht, wo die folgenden Decimalziffern des einen oder des andern Factors oder auch beider nicht bekannt sind.

Eben so kann in dergleichen Fällen auch eine abgekürzte Division bei den Decimalbrüchen mit Vortheil angewendet werden. Man fängt nemlich an, den Dividend durch den Divisor, wie sonst zu dividiren; nach jedesmaliger Multiplication des Divisors mit der gefundenen Ziffer des Quotienten wird aber statt der dem Reste anzuhängenden Null immer eine Ziffer im Divisor rechts ausgestrichen, wie es in nachstehenden Beispielen zu ersehen ist.

Divisor	Dividend	Quot.
0,58432	0,439865	0,75278
	409024	
	30841	
	29216	
	1625	
	1169	
	456	
	409	
	47	
	46	
	1	

Divis.	Divid.	Quot.
0,6437	3,0756	4,778
	2,5748	
	5008	
	4506	
	502	
	450	
	52	
	51	
	1	

Anmerkung. Verschiedene andere nützliche Vortheile und Abkürzungen bei den Rechnungsarten, sowohl mit ganzen als auch mit gebrochenen Zahlen, können beim mündlichen Vortrage beigebracht werden. So z. B. kann die Multiplication, wenn die erste oder die letzte Ziffer des kleinern Factors ein 1 ist, auf folgende Art abgekürzt werden.

Anstatt		abgekürzt	
	5,738		5,738|61
	61		344,28
	5,738		350,018
	344,28		
	350,018		
Anstatt	573,8	abgekürzt	573,8|16
	16		344 2,8
	3442,8		918 0,8
	5738		
	9180,8		

Weil im letzten Beispiele der Multiplicator 16 in die Factoren 4.4 sich zerlegen läßt, so kann die Multiplication auch auf neben stehende Art verrichtet werden. Eine solche Abkürzung findet auch bei der Division Statt, wenn der Divisor in schickliche Factoren sich zerlegen läßt.

573,8|4
2295,2|4
9180,8|

Wäre eine Zahl z. B. 53897 mit 998 zu multipliciren, so fände man das Product 53789206 wegen 998=1000—2 auch auf neben stehende Art.

53897000|2
107794
53789206

§. 106.*

Einige Fragen zur Anwendung der Decimalbrüche.

1. Frage. Bei dem 60 pfündigen Bombenmörser ist das

Kammerstück 13,3520 Zoll, das Mittelstück 4,7435 Z. und das Mundstück 13,1763 Z. lang. Wie lang ist der ganze Mörser?

Rechnung. 13,3520
4,7435
13,1763

Antwort. 31,2718 Zoll.

2. Frage. Der Bohrungsdurchmesser eines 24pfündigen Kanonenrohres ist 5,7926 Zoll, der Durchmesser der Kugel 5,4519 Z.; wie groß ist sein Spielraum?

Rechnung. 5,7926
5,4519

Antwort. 0,3407 Zoll $= 0,3407 \times 12 = 4,09$ Lin.

3. Frage. Das Scheibenpulver besteht aus 80 Gewichtstheilen Salpeter, 12 Theilen Schwefel und 14 Theilen Kohle; wie viel von diesen Ingredienzen befindet sich in einem Pfunde dieses Pulvers? und wie viel bedarf man von jeder, um 725 Pfund Pulver zu erzeugen?

Antwort. Da 80 Pf. Salpeter, 12 Pf. Schwefel und 14 Pf. Kohle, zusammen 106 Pf. Scheibenpulver geben, so befinden sich in einem Pfunde Scheibenpulver $\frac{80}{106} = 0,755$ Pf. Salpeter, $\frac{12}{106} = 0,113$ Pf. Schwefel, und $\frac{14}{106} = 0,132$ Pf. Kohle, was man auch so schreibt: Scheibenpulver $= 0,755$ Salpeter $+ 0,113$ Schwefel $+ 0,132$ Kohle. Man bedarf daher zu 725 Pf. Pulver

$725 \times 0,755 = 547,4$ Pf. Salpeter,
$725 \times 0,113 = 81,9$ Pf. Schwefel und
$725 \times 0,132 = 95,7$ Pf. Kohle.

4. Frage. Im ordinären Schritt macht die Österreichische Infanterie in der Minute 95 Schritt, von denen 10 auf 4 Klafter gehen. Wie viel Fuß durchschreitet dieses Militär in einer Secunde?

Antwort. Weil 10 Schr. $= 4$ Kl. $= 4 \,.\, 6 = 24$ Fuß sind, so ist 1 Schr. $= 2,4$ Fuß, daher 95 Schr. $= 95 \times 2,4 = 228$ Fuß, welche in einer Minute oder in 60 Secunden zurückgelegt werden; mithin durchschreitet die Infanterie in einer jeden Secunde $\frac{228}{60} =$ 3,8 Fuß.

5. Frage. Die Kammer der 7pfündigen Haubitze hat im Durchmesser $\frac{17}{32}$ oder 0,53125 Granatendurchmesser, welcher selbst 5,49407 Zoll hält; wie viel Zoll beträgt der Durchmesser der Kammer?

Antwort. $\frac{17}{32} \times 5{,}49407$, oder $0{,}53125 \times 5{,}49407 = 2{,}9187$ Zoll.

6. Frage. Ein 24pfündiges Kanonenrohr aus Bronce enthält 9,90804 Kubikfuß und wiegt 4964 Pfund; wie viel wiegt ein Kubikfuß dieses Kanonenmetalls?

Antwort. $4964 : 9{,}90804 = 501$ Pfund.

IV. Abschnitt.

Von den zusammenhängenden Brüchen.

§. 107.

I. Theilt man den Zähler und Nenner eines echten Bruches durch seinen Zähler, und ist dieser in dem Nenner genau ohne Rest enthalten, so gleicht der so gewonnene Bruch dem gegebenen im Werthe, und besitzt, da sein Zähler 1 ist, die einfachste mögliche Form. Kürzt man z. B. den Bruch $\frac{13}{78}$ durch seinen Zähler ab, so findet man ihn, weil 13 in 78 vollkommen 6 Mal begriffen ist, dem Bruche $\frac{1}{6}$ gleich, der sich durch keine kleineren ganzen Zahlen darstellen läßt.

Ist aber bei einem echten Bruche, wenn man seinen Zähler und Nenner durch den Zähler dividirt, der Zähler im Nenner nicht genau enthalten, so erhält man einen Bruch, dessen Zähler 1 und der Nenner eine ganze Zahl nebst einem angehängten echten Bruche ist. Verfährt man nun mit diesem echten Bruche eben so, so wird dadurch der vorgelegte Bruch nach und nach in einen zusammenhängenden (continuirlichen) oder Kettenbruch verwandelt, nemlich in einen Bruch, dessen Zähler 1 und der Nenner eine ganze

Zahl nebst einem Bruche, wovon wieder der Zähler 1 und der Nenner eine ganze Zahl nebst einem eben solchen Bruche ist, der wieder nach demselben Gesetze gebildet ist. — Wendet man das hier beschriebene Verfahren z. B. auf den echten Bruch $\frac{210}{1309}$ an, so findet man, weil 1309, durch 210 getheilt, 6 zum Quotienten und 49 zum Reste gibt,

$$\frac{210}{1309}=\cfrac{1}{6+\cfrac{49}{210}}$$

Wiederholt man diese Operation an dem echten Bruche $\frac{49}{210}$, so wird er, weil 210 durch 49 dividirt, 4 zum Quotienten und 14 zum Reste liefert, gleich $\cfrac{1}{4+\cfrac{14}{49}}$

folglich ist $$\frac{210}{1309}=\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4+\cfrac{14}{49}}}$$

Auf demselben Wege fortschreitend findet man allmälig

$$\frac{210}{1309}=\cfrac{1}{6+\cfrac{49}{210}}=\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4+\cfrac{14}{49}}}=\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{7}{14}}}}=\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}$$

und der letzte Bruch ist der dem gegebenen echten Bruche gleiche Kettenbruch.

Dividirt man aber bei einem unechten Bruche so, als wenn man die in ihm begriffenen Ganzen ermitteln wollte, den Zähler durch den Nenner; so ergibt sich, wenn der Bruch ein eigentlicher, also der Zähler durch den Nenner untheilbar ist, als Quotient eine ganze Zahl mit einem ihr folgenden echten Bruche, den man sofort wieder nach der obigen Vorschrift in einen Kettenbruch umstalten kann; wornach der gegebene unechte Bruch einer ganzen Zahl nebst einem sich ihr anschließenden Kettenbruche gleich ausfällt.

So ist z. B. $\frac{6755}{1309} = 5 + \frac{210}{1309}$ und nach dem Vorhergehenden

$$= 5 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}}$$

Einen solchen Verein einer ganzen Zahl mit einem Kettenbruche pflegt man gleichfalls, der Kürze und der größeren Allgemeinheit wegen, geradezu nur einen Kettenbruch zu nennen; daher die allgemeine Form der Kettenbrüche

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \ldots}}}}$$

sein wird, wenn wir unter a, b, c, d, e, ... ganze positive Zahlen verstehen, von denen a auch Null werden kann. Die Brüche $\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \frac{1}{e}$, ... pflegt man Theilbrüche, und ihre Nenner b, c, d, e, ... Theilnenner zu nennen, ja man nennt sogar die ganze Zahl a einen Theilnenner, und zwar den ersten, folglich b den zweiten, u. s. w.

II. Durchgehen wir die Schritte, die wir sowohl zur Verwandlung des unechten Bruches $\frac{6755}{1309}$, als auch des echten $\frac{210}{1309}$, in einen Kettenbruch machten, so ersehen wir, daß wir, in der Absicht, einen gewöhnlichen Bruch $\frac{Z}{N}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, zuvörderst den Zähler durch den Nenner theilen, dann fortwährend durch jeden entfallenden Rest den zuletzt gebrauchten Divisor dividiren, bis endlich einer dieser, nothwendig stets abnehmenden, Reste Null, und dadurch die Theilung beendigt wird, kurz, daß wir uns gerade so benehmen, als wollten wir, nach Anleitung des §. 69. g. das größte gemeinschaftliche Maß des Zählers und Nenners des zu verwandelnden

Bruches bestimmen; endlich, daß wir die, bei dieser Rechnung allmälig hervortretenden, Quotienten $a, b, c, d, e, \ldots$ als die Theilnenner des aufzustellenden Kettenbruches verwenden, von denen jedoch, wenn der gegebene Bruch echt ist, der erste, a, der Null gleich ausfällt und gänzlich übergangen werden kann; darnach erhalten wir

$$\frac{Z}{N}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\ldots}}}}$$

Ist z. B. $\frac{20265}{3927}$ in einen zusammenhängenden Bruch zu verwandeln, so wird man zuerst folgende Bestimmung der Quotienten (beziehungsweise Theilnenner) vornehmen.

20265	3927	5
19635	3780	6
630	147	4
588	126	3
42	21	2
42		
0		

Sofort ist

$$\frac{20265}{3927}=5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}$$

Dagegen wird der umgekehrte, folglich echte Bruch

$$\frac{3927}{20265}=0+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}} \quad \text{oder} = \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}}$$

§. 108.

I. Soll umgekehrt der, einem gegebenen Kettenbruche

$$(1)\qquad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ldots\cfrac{}{+\cfrac{1}{g+\cfrac{1}{h+\cfrac{1}{i+\ldots\cfrac{}{+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p}}}}}}}}}}}$$

gleiche, gemeine Bruch wieder hergestellt werden, so ist diese Reduction offenbar von dem Ende herein vorzunehmen. Hiebei findet man, wenn man die den gegebenen Kettenbruch schließenden Kettenbrüche auf gewöhnliche Brüche reducirt, der Ordnung nach

$$p=\frac{p}{1}$$

$$n+\frac{1}{p}=\frac{np+1}{p}$$

$$m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p}}=m+\frac{1}{\left(\frac{np+1}{p}\right)}=m+\frac{p}{np+1}=\frac{m(np+1)+p}{np+1}$$

u. s. w.

Hat man auf diese Weise bereits den Kettenbruch

$$h+\cfrac{1}{i+\ldots\cfrac{}{+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p}}}}}=\frac{H}{H'}$$

gefunden, so ist der um einen Theilnenner mehr enthaltende Kettenbruch

$$g+\cfrac{1}{h+\cfrac{1}{i+\ldots\cfrac{}{+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p}}}}}=g+\frac{1}{\left(\frac{H}{H'}\right)}=g+\frac{H'}{H}=\frac{gH+H'}{H}$$

Man ersieht demnach leicht, daß der Nenner eines jeden der auf diese Weise nach und nach entspringenden, gewöhnlichen Brüche $\frac{p}{1}$, $\frac{np+1}{p}$, ... $\frac{H}{H'}$, $\frac{gH+H'}{H}$, ... dem Zähler des nächst vorhergehenden gleich sei, und daß daher die Nenner und Zähler dieser Brüche in zusammenhängender Ordnung die Zahlenfolge

$$1,\ p,\ np+1,\ \ldots\ H',\ H,\ gH+H',\ \ldots$$

darstellen, welche mit 1 und dem letzten Theilnenner beginnt, und deren jedes Glied, wie $gH+H'$, gefunden wird, wenn man allmälig mit jedem Theilnenner, wie g, die letzte schon gefundene Zahl, H, multiplicirt und die vorletzte, H', addirt. Somit sind wir zur Aufstellung folgender Regel berechtigt.

Soll ein Kettenbruch auf einen gewöhnlichen Bruch zurückgeführt werden, so schreibe man seine Theilnenner in verkehrter Ordnung, vom letzten bis zum ersten in einer Zeile an. Unter die erste dieser Zahlen (d. i. unter den letzten Theilnenner) setze man dieselbe Zahl nochmals und vor ihr links die Zahl 1. Hierauf multiplicire man fortwährend jeden der nach einander folgenden Theilnenner mit der letzten in der zweiten Zeile angeschriebenen Zahl, zähle zu dem Producte die vorletzte Zahl dieser Zeile, schreibe jedesmal die Summe unter den als Multiplicator verwendeten Theilnenner, und setze diese Rechnung so lange fort, bis alle Theilnenner in Anspruch genommen wurden. Dann ist die letzte der so gefundenen Zahlen der Zähler und die vorletzte der Nenner des dem gegebenen Kettenbruche gleichen gewöhnlichen Bruches. — Steht vor dem Kettenbruche keine ganze Zahl, so kann man entweder 0 als seinen ersten Theilnenner annehmen, oder, diesen gänzlich übergehend, von den berechneten Zahlen die letzte zum Nenner, die vorletzte aber zum Zähler des zu suchenden Bruches machen.

1. Beispiel. Ist der zusammenhängende Bruch

$$5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}$$

auf einen gewöhnlichen zurück zu bringen, so legt man die Rechnung auf folgende Weise an:

$$\begin{array}{cccccc} & 2, & 3, & 4, & 6, & 5 \\ 1, & 2, & 7, & 30, & 187, & 965; \end{array}$$

dabei rechnet man, wie folgt:

$$\begin{aligned} 3.\,2 + 1 &= 7 \\ 4.\,7 + 2 &= 30 \\ 6.\,30 + 7 &= 187 \\ 5.\,187 + 30 &= 965; \end{aligned}$$

sofort ist

$$5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}} = \frac{965}{187}.$$

2. Beispiel. Soll der Kettenbruch

$$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}}$$

reducirt werden, so hat man folgende Rechnung:

$$\begin{array}{ccccccc} & 2, & 3, & 4, & 6, & 5, & 0 \\ 1, & 2, & 7, & 30, & 187, & 965, & 187; \end{array}$$

mithin ist jener Kettenbruch gleich $\frac{187}{965}$.

II. Verweilen wir noch bei der Betrachtung derjenigen gewöhnlichen Brüche, auf die wir bei der Reduction des Kettenbruches

(1) $$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\dots \cfrac{}{+\cfrac{1}{g+\cfrac{1}{h+\cfrac{1}{i+\dots \cfrac{}{+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p}}}}}}}}}}$$

nach und nach stoßen; so erhellet zunächst

1) aus der eben gelehrten Bestimmung ihrer Zähler und Nenner, daß jeder von ihnen allgemein als die Summe $Ap+B$ zweier Zahlen Ap und B sich ansehen läßt, von denen die eine B aus dem letzten Theilnenner p gar nicht, sondern nur aus den übrigen berechnet, oder durch sie bestimmt wird, die andere Ap aber das Product aus einer eben solchen Zahl A und aus dem Theilnenner p selbst ist; weil in keinem der Glieder, aus denen die erwähnten Nenner und Zähler zusammengesetzt werden, ein Theilnenner öfter wie einmal als Factor erscheinen kann. Es ist demnach, wenn A, B, A', B' Zahlen bedeuten, die nicht aus p berechnet werden,

$$(2) \qquad \frac{Ap+B}{A'p+B'}$$

die allgemeine Form eines jeden der angeführten gemeinen Brüche, also auch desjenigen, der dem gegebenen Kettenbruche selbst gleicht.

2) Die vier durch den letzten Theilnenner p nicht bestimmten Zahlen A, B, A', B' stehen jederzeit in dem merkwürdigen Zusammenhange, daß die Differenz

$$AB'-A'B = \pm 1,$$

nemlich gleich $+1$ oder -1 ausfällt, je nachdem der Kettenbruch, aus dem jener gemeine Bruch entsteht, eine ungerade oder gerade Anzahl von Theilnennern enthält.

Daß dies bei den, aus den drei letzten Kettenbruchstheilen

$$p, \qquad n+\frac{1}{p}, \qquad m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p}}$$

gefundenen gewöhnlichen Brüchen

$$\frac{p}{1}, \qquad \frac{np+1}{p}, \qquad \frac{m(np+1)+p}{np+1}$$

der Fall ist, leuchtet auf der Stelle ein, wenn man sie in der oben aufgestellten allgemeinen Form

$$\frac{1.p+0}{0.p+1}, \qquad \frac{n\,p+1}{1.p+0}, \qquad \frac{(mn+1)p+m}{n.p+1}$$

schreibt, weil hier

$$1.1-0.0=+1$$
$$n.0-1.1=-1$$
$$(mn+1).1-n.m=+1$$

ist.

Besitzt jedoch irgend einer dieser gewöhnlichen Brüche, auf welche man bei der Reduction des gegebenen Kettenbruches (1) trifft, z. B. der dem Kettenbruche

$$h+\cfrac{1}{i+\cdots\cfrac{}{+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p}}}} \quad \text{gleiche Bruch} \quad \frac{\alpha p+\beta}{\alpha' p+\beta'}$$

die Eigenschaft, daß $\alpha\beta'-\alpha'\beta=\pm 1$ ist; so wird, da der folgende, einen Theilnenner g mehr auffassende Kettenbruch

$$g+\cfrac{1}{h+\cfrac{1}{i+\cdots\cfrac{}{+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p}}}}} \quad \text{gleich} \quad g+\frac{1}{\left(\frac{\alpha p+\beta}{\alpha' p+\beta'}\right)}=g+\frac{\alpha' p+\beta'}{\alpha p+\beta},$$

also dem gewöhnlichen Bruche $\frac{(g\alpha+\alpha')p+(g\beta+\beta')}{\alpha p+\beta}$ gleich ausfällt, bei diesem die Differenz

$$(g\alpha+\alpha')\beta-\alpha(g\beta+\beta')=\alpha'\beta-\alpha\beta'=\mp 1,$$

nemlich gleichfalls 1, nur erhält sie das entgegengesetzte von dem, bei dem vorhergehenden Bruche bestehenden Vorzeichen.

Da aber diese Differenz $AB'-A'B$ bei dem

1sten,	2ten,	3ten Bruche
$+1$,	-1,	$+1$

ist, so muß sie bei dem

4ten,	5ten,	6sten,	7ten,	8ten, ... Bruche
-1,	$+1$,	-1,	$+1$,	-1,

kurz $+1$ oder -1 sein, je nachdem der Kettenbruch, aus welchem jener gemeine entsteht, eine ungerade oder gerade Anzahl von Theilnennern in sich faßt.

3) Die in dem Bruche $\frac{Ap+B}{A'p+B'}$ befindlichen Zahlen A und A', so wie B und B' sind unter sich Primzahlen. Denn könnten A und A', oder B und B' einen gemeinschaftlichen Theiler besitzen, so müßte dieser (nach §. 68, 4) auch ein Theiler von der Differenz $AB'-A'B$, somit auch von 1 sein, was nur sein

kann, wenn er 1 selbst ist; dann sind aber genannte Zahlen (vermög §. 69. f.) unter sich prim.

4) Der gemeine Bruch, auf welchen ein Kettenbruch zurückgeführt wird, besitzt die einfachste mögliche Form. Denn bezeichnen wir den Zähler und Nenner des dem gegebenen Kettenbruche (1) gleichenden gemeinen Bruches mit P und P', so daß

$$(3) \qquad \frac{P}{P'} = \frac{Ap+B}{A'p+B'}$$

und (4)

$$P = Ap+B$$
$$P' = A'p+B'$$

ist; so hat man

$$\begin{aligned} PA'-P'A &= AA'p+A'B-AA'p-AB' \\ &= A'B-AB' \quad \text{oder (nach 2)} \\ &= \pm 1; \end{aligned}$$

folglich können P und P' keinen von 1 verschiedenen gemeinschaftlichen Theiler haben, weil sonst dieser auch der Zahl 1 zukommen müßte (§. 68).

Man wird dies bereits an dem Kettenbruche

$$5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}$$

bestätigt gesehen haben, da dieser in §. 108 I. auf den, durch die möglich kleinsten Zahlen ausgedrückten Bruch $\frac{965}{187}$ zurückgeführt wurde, während doch auch die, dem letztern gleichen Brüche $\frac{6755}{1309}$ und $\frac{20265}{3927}$ (nach §. 107) auf den nemlichen Kettenbruch führen; woraus man zugleich schließen kann, daß es überflüssig sei, die in Kettenbrüche zu verwandelnden gewöhnlichen Brüche vor dieser Operation auf ihre einfachste Gestalt zu bringen.

5) Unseren Untersuchungen und Annahmen zu Folge können wir den Kettenbruch

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\ldots+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p}}}}}$$

auf den gewöhnlichen Bruch $\frac{Ap+B}{A'p+B'}$ oder $\frac{P}{P'}$ reduciren, wobei die Zahlen A, B, A', B' nicht aus dem letzten Theilnenner, sondern nur aus den übrigen berechnet werden. Erforschen wir nun noch die Bedeutung dieser Zahlen. Hiezu wird uns die Bemerkung behilflich sein, daß, bei der Zurückleitung dieses Kettenbruchs auf einen gewöhnlichen, die besondere Beschaffenheit der durch die Buchstaben b, c, ... m, n, p vorgestellten Theilnenner, ganze positive von Null verschiedene Zahlen zu sein, wie wir dies (§. 107) für die, unseren Betrachtungen vorgelegten, Kettenbrüche voraussetzten, durchaus nirgends in Anwendung gebracht wurde; daher es uns gestattet bleibt, ihnen jeden beliebigen Werth beizulegen, ohne daß wir eine Unrichtigkeit in dem Ausdrucke des reducirten Bruches zu besorgen haben. Setzen wir demnach zuvörderst, um die Bedeutung von $\frac{B}{B'}$ zu ermitteln, den letzten Theilnenner $p=0$, so reducirt sich der Ausdruck $\frac{Ap+B}{A'p+B'}$ blos auf $\frac{B}{B'}$, allein dann übergeht gleichzeitig der vorgelegte Kettenbruch in

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\ldots+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{0}}}}}$$

oder weil $\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{0}}=0$ ist,

in

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\ldots+\cfrac{1}{m}}}$$

Bezeichnen wir nun den diesem Kettenbruche gleichen gemeinen Bruch mit $\frac{M}{M'}$, so daß

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\dots \\ +\cfrac{1}{m}}} = \frac{M}{M'}$$

ist; so stellt der Bruch $\frac{B}{B'}$ nichts anders als den reducirten Werth $\frac{M}{M'}$ desjenigen Kettenbruchs vor, der aus dem gegebenen Kettenbruche durch Wegwerfung der beiden letzten Theilbrüche $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{p}$ entsteht; folglich ist, da (nach 4) beide Brüche die einfachste mögliche Form besitzen, $B=M$ und $B'=M'$.

Ertheilen wir ferner zur Erforschung der Bedeutung des Bruches $\frac{A}{A'}$ dem Ausdrucke $\frac{Ap+B}{A'p+B'}$ die Form $\frac{A+B\cdot\frac{1}{p}}{A'+B'\cdot\frac{1}{p}}$, und nehmen wir die Zahl p so an, daß $\frac{1}{p}=0$ werde, was eintreten wird, wenn wir $p=\frac{1}{0}$ setzen, so verwandelt sich einerseits dieser Ausdruck in $\frac{A}{A'}$, andererseits übergeht der vorgelegte Kettenbruch in

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\dots \\ +\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{\left(\frac{1}{0}\right)}}}}}$$

oder in $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\dots \\ +\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n}}}}$

Stellen wir demnach den diesem Kettenbruche gleichen gemeinen Bruch durch $\frac{N}{N'}$ vor, d. h. setzen wir

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\dots\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n}}}} = \frac{N}{N'},$$

so ist der Bruch $\frac{A}{A'}$ dem reducirten Werthe $\frac{N}{N'}$, desjenigen Kettenbruchs gleichgeltend, der aus dem gegebenen durch Wegwerfung des letzten Theilbruchs $\frac{1}{p}$ hervorgeht; mithin muß, da (nach 4) jeder der beiden gleichen Brüche keine einfachere Gestalt anzunehmen vermag, $A=N$ und $A'=N'$ sein.

Auf diesem Wege gelangen wir zur Erkenntniß der Wahrheit, daß, wenn die Kettenbrüche

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\dots\\ +\cfrac{1}{m}}} \qquad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\dots\\ +\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n}}}} \qquad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\dots\\ +\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p}}}}}$$

von denen die ersteren zwei aus dem letzten entspringen, wenn wir in ihm einmal beide letzten Theilbrüche und dann nur den letzten Theilbruch allein weglassen, auf die gemeinen Brüche

$$\frac{M}{M'} \qquad \frac{N}{N'} \qquad \frac{P}{P'}$$

sich reduciren lassen, immer der letztere Bruch $\frac{P}{P'}$ aus den zwei anderen $\frac{N}{N'}$ und $\frac{M}{M'}$ nach Anleitung des Ausdruckes

$$(5) \qquad \frac{P}{P'} = \frac{pN+M}{pN'+M'}$$

oder der Ausdrücke

$$(6) \qquad \begin{aligned} P &= pN+M \\ P' &= pN'+M' \end{aligned}$$

gefunden werden könne.

§. 109.

I. Wird von einem Kettenbruche

$$K = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{f + \ldots}}}}}$$

in welchem die Theilnenner $a, b, c, d, e, f, \ldots$ ganze positive Zahlen sind, und nur der erste Theilnenner a in besonderen Fällen Null ist, blos das erste Glied a beibehalten, so ist dieses gewiß verschieden von dem Werthe K des gegebenen Kettenbruchs.

Behielte man aber die zwei ersten Glieder bei, so würde der Kettenbruch $a + \frac{1}{b}$ zwar auch nicht den vollen Werth K des gegebenen Kettenbruchs besitzen, allein der hier Statt findende Fehler würde — da man hier das früher Weggelassene, welches immer zwischen 0 und 1 liegt, doch durch etwas, gleichfalls zwischen 0 und 1 Begriffenes ersetzt — geringer als im vorigen Falle sein. Weil auch hier von dem letzten Nenner nur sein ganzzahliger Theil b beibehalten wird, so wird man den hier unterlaufenen Fehler, der sich nicht über 1 erheben kann, mildern, wenn man den folgenden Theilbruch $\frac{1}{c}$, welcher gleichfalls die Einheit nicht übertrifft, hinzufügt und so den zusammenhängenden Bruch $a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}$ nimmt. Da man diese Schlußweise bis zu dem letzten Theilbruche des gegebenen Kettenbruchs ohne Anstand fortsetzen kann, so sieht man leicht ein, daß jeder der Kettenbrüche

$$a, \quad a + \frac{1}{b}, \quad a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}, \quad a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}, \text{ u. s. w. *)}$$

*) Um uns hier kurz fassen zu können, möge es uns gestattet sein, auch die ganze Zahl a allein unter der allgemeinen Benennung Kettenbruch zu begreifen.

die nur aus 1, 2, 3, 4, ... Anfangsgliedern eines Kettenbruchs

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f+\ldots}}}}}$$

bestehen, dem Werthe K dieses Bruches um so näher kommen, je mehr er solcher Glieder enthält, und daß er dem gegebenen Kettenbruche selbst nur dann gleich sein kann, wenn er alle Glieder desselben in sich faßt. Aus diesem Grunde werden die aus einigen ersten Theilbrüchen eines Kettenbruchs gebildeten Kettenbrüche die **Näherungswerthe** oder **Näherungsbrüche** dieses Kettenbruches genannt, und zwar der 1ste, 2te, 3te, 4te, ..., je nachdem er 1, 2, 3, 4, ... Theilnenner des Kettenbruchs enthält.

Hieraus erhellet auch sogleich, daß **jeder Näherungswerth eines Kettenbruchs diesem um so näher liegt, ein je späterer er ist.**

II. Vergleichen wir nun jeden Näherungswerth eines Kettenbruchs sowohl mit diesem als auch mit allen übrigen Näherungswerthen, so finden wir Folgendes.

Der erste Näherungswerth ist nicht nur kleiner als jeder spätere Näherungswerth, sondern auch kleiner als der Kettenbruch. Denn dieser erste Näherungswerth a ist nur ein Theil des Kettenbruchs sowohl, als auch jedes Näherungswerthes.

Der zweite Näherungswerth ist größer als jeder spätere Näherungswerth und als der Kettenbruch. Denn dem eben erwiesenen Satze gemäß ist von den Kettenbrüchen

$$b, \quad b+\frac{1}{c}, \quad b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}, \text{ u. s. w.}$$

der erste der kleinste, folglich muß von den Kettenbrüchen

$$\frac{1}{b}, \quad \cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}, \quad \cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}, \ldots$$

mithin auch von den folgenden

$$a+\frac{1}{b},\quad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}},\quad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}},\ldots\ldots$$

der erste der größte sein.

Es ist demnach der erste Näherungswerth der kleinste, der zweite aber der größte unter allen.

Der dritte Näherungswerth ist kleiner, als jeder spätere Näherungswerth und als der Kettenbruch. Denn dem letzten Satze zu Folge ist von den Kettenbrüchen

$$b+\frac{1}{c},\quad b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}},\quad b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}}},\ \ldots$$

der erste der größte, folglich ist von den Kettenbrüchen

$$\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}},\quad \cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}},\quad \cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}}}},\ \ldots$$

daher auch von den folgenden

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}},\quad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}},\quad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}}}},\ \ldots\ldots$$

der erste der kleinste.

Da diese Schlüsse auf dieselbe Weise sich bis zu dem letzten Näherungswerthe eines Kettenbruchs fortsetzen lassen, so überzeugt man sich:

1) Daß von den Näherungswerthen eines Kettenbruchs der 1ste, 3te, 5te, 7te, ... kurz jeder ungeradstellige kleiner, dagegen der 2te, 4te, 6ste, 8te, ... kurz jeder geradstellige

größer, nicht nur als jeder spätere Näherungswerth, sondern auch als der Kettenbruch selbst ist;

2) Daß demnach der Kettenbruch — weil er größer als jeder ungeradstellige und kleiner als jeder geradstellige Näherungswerth ist — zwischen jedem ungeradstelligen und jedem geradstelligen Näherungswerthe, daher auch zwischen jeden zwei unmittelbar nach einander folgenden Näherungswerthen liegt. — Wollte man sonach sämmtliche Näherungswerthe mit Einschluß des Kettenbruchs in der Ordnung, wie sie vom ersten Näherungswerthe als dem kleinsten, bis zum zweiten als dem größten, zunehmen, in eine Zeile schreiben, so böte sich folgendes Schema dar:

1. Nw. $<$ 3. Nw. $<$ 5. Nw. $<$ . . . $<$ Kettenbr. $<$ . . . $<$ 6 Nw. $<$ 4. Nw. $<$ 2. Nw.

III. Ein Kettenbruch J, welcher zwischen einem gegebenen Kettenbruche K und einem Näherungswerthe

$$E=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cdots+\cfrac{1}{e}}}$$

desselben, mithin auch zwischen diesem und dem nächst folgenden Nähe

rungswerthe $F=a+\cfrac{1}{b+\cdots+\cfrac{1}{f}}$

liegen soll, muß vom Anfange herein, genau dieselben Theilnenner wie dieser spätere Näherungswerth F, und statt des nachfolgenden Theilnenners einen Kettenbruch i besitzen, welcher kleiner als der, im vorgelegten Kettenbruche K an dessen Stelle stehende Kettenbruch $g+\cfrac{1}{h+\cdots}$ oder γ ist; und muß daher von der Form sein

$$J=a+\cfrac{1}{b+\cdots+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f+\cfrac{1}{i}}}}$$

Denn setzen wir den gegebenen Kettenbruch $K=a+\frac{1}{K'}$, seinen Näherungswerth $E=a+\frac{1}{E'}$; so muß, da weder $\frac{1}{K'}$ noch $\frac{1}{E'}$ größer als 1 werden kann, und J zwischen E und K liegen soll, der Kettenbruch J aus demselben ersten Theile a und überdies aus einem die Einheit gleichfalls nicht übersteigenden Bruche $\frac{1}{J'}$ bestehen, der zwischen $\frac{1}{E'}$ und $\frac{1}{K'}$ liegt, was nur möglich ist, wenn J' zwischen E' und K' liegt. Damit nun dies Statt finde, muß, wie sich auf dieselbe Weise zeigen läßt, wenn $K'=b+\frac{1}{K''}$ und $E'=b+\frac{1}{E''}$ gesetzt wird, $J'=b+\frac{1}{J''}$, also $J=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{J''}}$ sein, und zugleich J'' zwischen E'' und K'' liegen. So fortschreitend gelangt man allmälig zur Überzeugung, daß der Bruch J dieselben Theilnenner wie E besitzen muß, und endlich, daß, wenn $e+\cfrac{1}{f+\cfrac{1}{\gamma}}=\overline{K}$ gesetzt wird, die zwischen e und $\overline{K}$ liegen sollende Größe $\overline{J}=e+\frac{1}{(J)}$ sein muß, wofern $(J)>f+\frac{1}{\gamma}$, folglich $=f+1$ und dabei $i<\gamma$ ist.

Da nun ein Kettenbruch einem anderen nur dann näher als ein Näherungswerth des letzteren kommen kann, wenn er ihm auch näher als jeder voraus gehende Näherungswerth kommt; so drückt jeder Näherungswerth eines Kettenbruchs den Werth desselben genauer aus, als jeder andere Kettenbruch, der mit ihm gleichviel Theilnenner besitzt.

Soll insbesondere der Kettenbruch J zwischen E und dem von ihm und von K eingeschlossenen $G=a+\cfrac{1}{b+\cdots\cfrac{}{+\cfrac{1}{g}}}$ fallen; so muß $i<g$ werden.

Nimmt man daher in dem Kettenbruche J für i allmälig alle jene ganzen von Null verschiedenen Zahlen, die nicht größer als der gleichvielte Theilnenner g des Kettenbruchs K sind, nemlich die Zahlen 1, 2, 3, ... $(g-1)$; so nähern sich, wie leicht zu sehen, diese zwischen E und G gelegenen Werthe von J der Reihe nach dem Kettenbruche K und seinem Näherungswerthe G immer mehr und mehr. Die so gebildeten Kettenbrüche nennt man (zwischen einen Näherungswerth und seinen zweiten Nachfolger) eingeschaltete Brüche (fractions intermédiaires), von denen übrigens wegen ihrer äußerst seltenen Anwendung diese ganz kurze Andeutung genügen wird.

§. 110.

Da die Näherungswerthe eines Kettenbruchs selbst wieder Kettenbrüche sind, so könnten alle einzeln nach der in §. 108 ertheilten Anleitung auf gewöhnliche Brüche zurückgeleitet, oder die reducirten Näherungswerthe des gegebenen Kettenbruches gesucht werden. Allein sowohl zur Vereinfachung als auch zur Prüfung der Rechnung wird es vortheilhafter sein, diese Näherungswerthe der Ordnung nach aus einander herzuleiten, wobei wir uns auf die Ergebnisse der im 5ten Artikel des §. 108 gepflogenen Untersuchung fußen werden. Sehen wir nemlich die dort betrachteten drei Kettenbrüche als unmittelbar auf einander folgende Näherungswerthe eines Kettenbruchs an, die auf gemeine Brüche reducirt $\frac{M}{M'}$, $\frac{N}{N'}$, $\frac{P}{P'}$, geben; so können wir, wie in §. 108 gezeigt wurde, den $\frac{\text{Zähler } P}{\text{Nenner } P'}$, des reducirten Näherungswerthes $\frac{P}{P'}$ bestimmen, indem wir mit seinem letzten Theilnenner p den $\frac{\text{Zähler } N}{\text{Nenner } N'}$ des nächst vorhergehenden reducirten Näherungswerthes $\frac{N}{N'}$ multipliciren, und zum Producte den $\frac{\text{Zähler } M}{\text{Nenner } M'}$ des zweiten vorhergehenden reducirten Näherungswerthes $\frac{M}{M'}$ addiren.

Von dieser Regel kann man jedoch, weil dem zu suchenden reducirten Näherungswerthe zwei bereits bestimmte vorangehen müssen, nur von dem dritten Näherungsbruche an Gebrauch machen. Wollte man demnach den zweiten Näherungswerth, welcher $a + \frac{1}{b}$ oder reducirt $\frac{ab+1}{b}$ ist, aus dem ersten a berechnen, so müßte man den Nenner des zweiten auch in zwei Gliedern darstellen, also $\frac{a.b+1}{1.b+0}$ schreiben; welche Form sofort zeigt, daß der zweite reducirte Näherungswerth auch nach derselben Vorschrift gerechnet werden kann, wenn man dem ersten Näherungswerthe die Form $\frac{a}{1}$ anweist, nemlich um ihn zu bilden, dem ersten Theilnenner a einen 1 unterschreibt, und noch vor ihm den Bruch $\frac{1}{0}$ ansetzt, welcher nicht als Näherungswerth, sondern nur als Hilfsbruch anzusehen ist.

Fassen wir nun die Ergebnisse unserer Forschungen zusammen, so erhalten wir zur Bestimmung sämmtlicher reducirten Näherungswerthe eines Kettenbruchs folgende Vorschrift. Man schreibe die Theilnenner des Kettenbruchs vom ersten (welcher immer die dem Kettenbruche vorangehende ganze Zahl ist) angefangen, in einer Zeile neben einander. In die folgende Zeile setze man unter den ersten Theilnenner ihn selbst mit einem unterschriebenen 1, und vor diesen ersten reducirten Näherungswerth den Hilfsbruch $\frac{1}{0}$. Hierauf multiplicire man den $\substack{\text{Zähler}\\\text{Nenner}}$ dieses Näherungswerthes mit dem zweiten Theilnenner, addire zum Producte den $\substack{\text{Zähler}\\\text{Nenner}}$ des vorhergehenden Bruchs und schreibe die Summe als $\substack{\text{Zähler}\\\text{Nenner}}$ des zweiten Näherungswerthes an. Überhaupt multiplicire man fortwährend den $\substack{\text{Zähler}\\\text{Nenner}}$ des zuletzt angeschriebenen Bruchs mit dem nachfolgenden Theilnenner, vermehre das Product um den $\substack{\text{Zähler}\\\text{Nenner}}$ des nächst vorhergehenden Bruchs, und setze die Summe als $\substack{\text{Zähler}\\\text{Nenner}}$ des diesem Theilnenner entsprechenden reducirten Näherungswerthes des Kettenbruchs an.

Sucht man z. B. sämmtliche reducirten Näherungswerthe des Kettenbruchs

$$5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}$$

so legt man nachstehende Rechnung an:

Quotienten		5,	6,	4,	3,	2
Näherungswerthe	$\frac{1}{0}$,	$\frac{5}{1}$,	$\frac{31}{6}$,	$\frac{129}{25}$,	$\frac{418}{81}$,	$\frac{965}{187}$,

und rechnet wie folgt:

$$\begin{array}{ll} 6.5\ +1\ =31, & 6.1\ +0\ =6 \\ 4.31\ +5\ =129, & 4.6\ +1\ =25 \\ 3.129+31\ =418, & 3.25+6\ =81 \\ 2.418+129=965, & 2.81+25=187. \end{array}$$

§. 111.

Von den mannigfaltigen Eigenschaften der reducirten Näherungswerthe eines Kettenbruchs heben wir für unseren Zweck nur folgende heraus.

1. Sowohl die Zähler als auch die Nenner der Näherungsbrüche eines Kettenbruchs sind um so größer, je spätere sie sind. Denn die Theilnenner sind der Voraussetzung gemäß, ganze positive von Null verschiedene Zahlen, daher muß sowohl der Zähler als auch der Nenner eines jeden Näherungsbruchs wegen der eben erklärten Bestimmungsweise derselben jenen des nächst vorhergehenden Bruchs wenigstens einmal, und überdies noch den des zweiten vorhergehenden in sich begreifen.

2. Ein gewöhnlicher Bruch kann einem gegebenen Kettenbruche nur dann näher als einer seiner Näherungsbrüche liegen, wenn er durch größere Primzahlen unter sich dargestellt wird als dieser. Denn würde jener gewöhnliche Bruch in einen Kettenbruch verwandelt, und sollte dieser dem gegebenen Kettenbruche näher als der erwähnte Näherungsbruch liegen, so müßte er nicht nur alle Theilnenner die-

ses Näherungsbruchs, sondern auch wenigstens noch einen mehr haben, mithin (nach dem vorigen Satze) gewiß auf einen, in größeren Zahlen ausgedrückten gewöhnlichen Bruch zurückkommen.

Die nach einander folgenden reducirten Näherungsbrüche eines Kettenbruchs drücken demnach die angenäherten Werthe desselben durch die kleinsten möglichen Zahlen mit der möglich größten Genauigkeit aus.

3. Die Differenz zweier unmittelbar nach einander folgenden Näherungsbrüche eines Kettenbruchs ist, abgesehen vom Zeichen, gleich 1 getheilt durch das Product der beiden Nenner; nemlich von zwei nach einander kommenden Näherungsbrüchen $\frac{M}{M'}$ und $\frac{N}{N'}$ ist der Unterschied $\frac{N}{N'}-\frac{M}{M'}=\frac{1}{M'N'}$.

Denn es ist $\frac{N}{N'}-\frac{M}{M'}=\frac{M'N-MN'}{M'N'}$. Bezeichnet aber $\frac{P}{P'}$ den dem Näherungsbruche $\frac{N}{N'}$ unmittelbar nachfolgenden, und p seinen letzten Theilnenner, so ist nach §. 108. (5), (6),

$$\frac{P}{P'}=\frac{Np+M}{N'p+M'}$$

und zugleich $M'N-MN'=\pm 1$,
daher auch

$$\frac{N}{N'}-\frac{M}{M'}=\pm\frac{1}{M'N'}.$$

4. Da nach §. 109. II. der Kettenbruch zwischen jeden zwei unmittelbar nach einander folgenden seiner Näherungsbrüche liegt, so muß er jedem derselben näher liegen, als der eine dem anderen; daher ist der Näherungsbruch $\frac{M}{M'}$ von dem Kettenbruche K weniger als von $\frac{N}{N'}$ verschieden, oder wenn man von den Vorzeichen absieht, $K-\frac{M}{M'}<\frac{1}{M'N'}$. Zugleich muß der spätere von beiden Nähe-

rungsbrüchen dem Kettenbruche näher liegen, als der frühere, daher muß der Näherungsbruch $\frac{M}{M'}$ von dem Kettenbruche K um mehr als die halbe Differenz der beiden Näherungsbrüche $\frac{M}{M'}$ und $\frac{N}{N'}$ verschieden, oder $K - \frac{M}{M'} > \frac{1}{2M'N'}$ sein. Diese zwei Vergleichungen

$$K - \frac{M}{M'} < \frac{1}{M'N'},$$

$$K - \frac{M}{M'} > \frac{1}{2M'N'},$$

welche aussagen, daß jeder Näherungswerth von seinem Kettenbruche um weniger, als 1 getheilt durch das Product aus seinem Nenner in jenen des folgenden Näherungsbruchs, und um mehr als die Hälfte dieses Unterschiedes verschieden ist, bieten uns ein Mittel dar, über den Grad der Annäherung jedes reducirten Näherungswerthes an den Kettenbruch abzusprechen.

Man sieht zugleich daraus, daß ein Näherungsbruch $\frac{M}{M'}$ um so weniger von dem Kettenbruche K verschieden sein wird, je größer der Nenner N' des folgenden Näherungsbruchs $\frac{N}{N'}$ im Vergleich gegen jenen M' des ersteren, oder je größer der letzte Theilnenner n des folgenden Näherungswerthes $\frac{N}{N'}$ ist.

Weil (nach 1. dieses §.) immer $N' > M'$ ist, so muß

$\frac{1}{N'} < \frac{1}{M'}$ und $\frac{1}{M'N'} < \frac{1}{M'M'}$, daher auch

$$K - \frac{M}{M'} < \frac{1}{M'M'}$$

sein. Es ist demnach von einem Kettenbruche jeder seiner reducirten Näherungswerthe um weniger verschieden als um 1 getheilt durch das Product seines Nenners in sich selbst. Dieser Satz lehrt den Grad der Annäherung eines einzeln, außer Zusammenhang mit den übrigen, vorkommenden Näherungsbruchs schätzen.

§. 112.

Die Lehre von den zusammenhängenden Brüchen erweist sich besonders nützlich bei der näherungsweisen Abkürzung gewöhnlicher Brüche, deren Zähler und Nenner große Zahlen sind, wobei man nemlich solche Brüche mit einer nur geringen Veränderung ihres Werthes durch kleinere Zahlen auszudrücken beabsichtigt.

Dies geschieht, wenn man, gerade so als wollte man den vorgelegten Bruch (ohne sich vorher die Mühe des in §. 80 gelehrten Abkürzens desselben zu geben) in einen zusammenhängenden Bruch verwandeln, nach §. 107 die Theilnenner desselben sucht, und dann die der Ordnung nach auf einander folgenden Näherungswerthe bestimmt. Diese Näherungswerthe sind die gesuchten abgekürzten Brüche, von denen jeder dem wahren Werthe des vorgelegten Bruchs um so näher kommt, ein je späterer er ist. Zugleich sind außer ihnen gar keine anderen Brüche möglich, welche durch kleinere Zahlen ausgedrückt wären und doch dem vorgelegten Bruche am Werthe näher kämen. Bisweilen ist ein nur aus wenigen Theilnennern (Quotienten) abgeleiteter Näherungswerth dem vorgelegten äußerst nahe gleich, und zwar dann, wenn sein Nenner bereits zwei- oder dreiziffrig und der nächst folgende Theilnenner beträchtlich groß ist.

1. Beispiel. Es sei $\frac{100000}{102764}$ ohne merkliche Veränderung seines Werthes abzukürzen. Hier ist

	1		36		5		1		1		2		1		17	
102764	:	100000	:	2764	:	496	:	284	:	212	:	72	:	68	:	4
		8292		2480		284		212		144		68		68		
		17080		284		212		72		68		4		0		
		16584														
		496														

daher auch

$$\begin{array}{cccccccccc} & 0, & 1, & 36, & 5, & 1, & 1, & 2, & 1, & 17 \\ \frac{1}{0}, & \frac{0}{1}, & \frac{1}{1}, & \frac{36}{37}, & \frac{181}{186}, & \frac{217}{223}, & \frac{398}{409}, & \frac{1013}{1041}, & \frac{1411}{1450}, & \frac{25000}{25691}. \end{array}$$

Von diesen Näherungswerthen kann man, wenn keine gar zu große Genauigkeit erforderlich ist, $\frac{36}{37}$ statt des vorgelegten Bruchs $\frac{100000}{102764}$ nehmen, da er von diesem um weniger als $\frac{1}{37.186} = \frac{1}{6882} = 0{,}00015$, aber auch um mehr als $0{,}00007$, differirt.

Wirklich ist $\frac{36}{37} = 0{,}972972$

$$\frac{100000}{102764} = 0{,}973103,$$

daher ihr Unterschied $= 0{,}000131$.

2. Beispiel. Die Zahl $3{,}1415926536$, oder der Bruch

$$\frac{31415926536}{10000000000}$$

werde näherungsweise durch gewöhnliche Brüche dargestellt.

Rechnung.

31415926536	10000000000	3
1415926536	9911485752	7
88514248	88514248	15
530784056	88212816	1
442571240	301432	292
88212816		
602864		
2792641		
2712888		
797536		
602864		
194672	u. s. w.	

$$\begin{array}{lcccccc} \text{Quotienten} & & 3, & 7, & 15, & 1, & 292 \\ \text{Näherungswerthe} & \frac{1}{0}, & \frac{3}{1}, & \frac{22}{7}, & \frac{333}{106}, & \frac{355}{113}, & \frac{103993}{33102}. \end{array}$$

Von diesen Näherungswerthen ist der vierte $\frac{355}{113}$, weil der folgende Quotient 292 sehr groß ist, der vorgelegten Zahl

3,1415926536

sehr nahe gleich, da er von ihr um weniger als

$$\frac{1}{113.33102} = \frac{1}{3740526} = 0{,}0000003$$

verschieden ist.

Um den Grad der Annäherung der einzelnen Näherungswerthe an die gegebene Zahl beurtheilen zu können, verwandeln wir sie in Decimalbrüche, und stellen sie der Ordnung nach zusammen.

Gegebene Zahl = 3,1415926536

			Abstand von der gegebenen Zahl
1. Näherungsbruch	$\frac{3}{1}$	= 3	+0,14
2. "	$\frac{22}{7}$	= 3,1428	—0,0012
3. "	$\frac{333}{106}$	= 3,141509	+0,000083
4. "	$\frac{355}{113}$	= 3,14159292	—0,00000027.

3. Beispiel. Ist der Bruch $\frac{2}{1{,}9129312} = \frac{20000000}{19129312}$ abzukürzen; so hat man

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
 & 1 & & 21 & & 1 & & 32 & \\
20000000 & : & 19129312 & : & 870688 & : & 844864 & : & 25824 \\
\underline{19129312} & & \underline{1741376} & & \underline{844864} & & \underline{77472} & & \\
870688 & & 1715552 & & 25824 & & 70144 & & \\
 & & \underline{870688} & & & & \underline{51648} & & \\
 & & 844864 & & & & 18496 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & 1, & 21, & 1, & 32 \\
\frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{22}{21}, & \frac{23}{22}, & \frac{758}{725},
\end{array}$$

daher der vorgelegte Bruch nahe genug gleich $\frac{23}{22}$.

Drittes Hauptstück.

Von den Rechnungsarten mit Potenzen und Wurzeln.

I. Abschnitt.

Von den Potenzen und Wurzeln überhaupt.

§. 113.

Das Product, welches entsteht, wenn man eine Zahl mehrmal mit sich selbst multiplicirt, heißt eine Potenz oder Dignität dieser Zahl, wobei nothwendig die mit sich selbst zu multipicirende Zahl als unbenannt betrachtet werden muß. Die Zahl, welche mehrmal als Factor in der Multiplication angesetzt wird, um eine Potenz hervorzubringen, heißt die Wurzel der hervorgebrachten Potenz; und die Zahl, welche mit ihren Einheiten anzeigt, wie oft die Wurzel als Factor in der Multiplication anzusetzen sei, um eine Potenz hervorzubringen, heißt der Exponent dieser Potenz.

Insbesondere wird das Product, bei dem eine Zahl zweimal als Factor in der Multiplication angesetzt wird, die zweite Potenz oder das Quadrat dieser Zahl genannt; so ist z. B. 9 das Quadrat von 3; weil $3 . 3 = 9$ ist; 36 ist das Quadrat von 6, und allgemein a^2 ist das Quadrat von a. Das Quadrat einer Zahl wird demnach gefunden, wenn man diese Zahl mit sich selbst multiplicirt. Die Zahl aber, welche mit sich selbst multiplicirt werden muß, um ein gegebenes Quadrat hervorzubringen, wird die Quadratwurzel desselben genannt; so ist z. B. 6 die Quadratwurzel von 36; 7 die Quadratwurzel von 49, und a die Quadratwurzel von a^2.

§. 114.

Wenn man das Quadrat einer Zahl noch einmal mit der Wurzel multiplicirt, so wird das Product die dritte Potenz oder der Cubus (Würfel) dieser Zahl genannt. So ist z. B. 8 die dritte Potenz oder der Cubus von 2; weil $2.2.2 = 4.2 = 8$ ist; 27 ist der Cubus von 3; weil $3.3.3 = 9.3 = 27$; und a^3 ist der Cubus von a; weil $a.a.a = a^2.a = a^3$ ist. Der Cubus einer jeden Zahl wird demnach gefunden, wenn man das Quadrat der Zahl noch einmal mit der Wurzel multiplicirt. Und eben so heißt auch wieder 2 die dritte Wurzel oder die Cubikwurzel von 8; 3 die Cubikwurzel von 27, und a die Cubikwurzel von a^3.

§. 115.

Multiplicirt man ferner den Cubus einer Zahl noch einmal mit der Wurzel, so erhält man die vierte Potenz oder das Biquadrat dieser Zahl; dieses wieder mit der Wurzel multiplicirt, gibt die fünfte Potenz, u. s. w. So heißt $a^4 = a^3.a$ die vierte, $a^5 = a^4.a$ die fünfte, $a^6 = a^5.a$ die sechste, a^m die $m$te Potenz von a; so wie a die vierte Wurzel von a^4, die fünfte Wurzel von a^5, und die $m$te Wurzel von a^m genannt wird.

§. 116.

Eine Zahl auf die $m$te Potenz erheben, heißt sonach nichts anders, als diese Zahl m Mal zur Multiplication ansetzen, wornach das Product die $m$te Potenz dieser Zahl ist; und die Zahl m, welche anzeigt, wie vielmal die gegebene Zahl zur Multiplication als Factor anzusetzen sei, ist der Exponent der Potenz.

Und eben so heißt auch die $m$te Wurzel aus einer gegebenen Zahl ziehen nichts anders, als diese Zahl in m gleiche Factoren zerlegen, und einen solchen Factor nehmen, oder was einerlei ist, eine Zahl finden, die m Mal als Factor zur Multiplication angesetzt, die gegebene Zahl zum Vorschein bringt.

§. 117.

Damit man aber sogleich wisse, welche Wurzel aus einer gegebenen Zahl zu ziehen verlangt wird, bedient man sich des Zeichens $\sqrt{}$, über welches die Zahl gesetzt wird, welche anzeigt, in wie viel gleiche Factoren die hinter diesem Wurzel- oder Radicalzeichen befindliche Zahl zerlegt werden soll; und jene Zahl wird der **Wurzel-Exponent** genannt. So schreibt man z. B. $\sqrt[2]{64} = 8$; $\sqrt[3]{64} = 4$; $\sqrt[4]{81} = 3$; und liest, die Quadratwurzel aus 64 ist gleich 8; die Cubikwurzel aus 64 ist gleich 4; die vierte Wurzel aus 81 ist gleich 3.

Bei den Quadratwurzeln pflegt man selten den Exponenten der Wurzel ausdrücklich anzusetzen, daher wird jederzeit, wenn kein Exponent über dem Wurzelzeichen angesetzt ist, die Quadratwurzel darunter verstanden; so schreibt man z. B. gewöhnlich $\sqrt{a}$ statt $\sqrt[2]{a}$.

Die aus einer Zahl gezogene Wurzel muß demnach so beschaffen sein, daß, wenn man sie auf die Potenz des Wurzel-Exponenten erhebt, die Zahl unter dem Wurzelzeichen wieder zum Vorschein komme.

Anmerkung. Wie Potenzen zu addiren, zu subtrahiren, zu multipliciren, und zu dividiren sind, ist bereits bekannt, da für die Rechnungsarten der algebraischen Größen mit Exponenten allgemeine Regeln festgesetzt worden (§. 61 bis 67), und die Potenzen nichts anders sind, als solche mit Exponenten behaftete algebraische Größen.

§. 118.

Jede Potenz einer positiven Wurzel ist positiv; was unmittelbar aus den (§. 63) aufgestellten Regeln der Multiplication positiver und negativer Zahlen folgt. Erhebt man aber eine negative Zahl, z. B. $-a$, auf die nach einander folgenden Potenzen, so ist

$$(-a)^2 = -a \times -a = +a^2;$$
$$(-a)^3 = (-a)^2 \times -a = +a^2 \times -a = -a^3;$$
$$(-a)^4 = (-a)^3 \times -a = -a^3 \times -a = +a^4, \text{ u. s. w.};$$

nemlich alle geraden Potenzen einer negativen Wurzel sind positiv, und alle ungeraden sind negativ.

Man hat deßwegen $(-a)^2$ von $-a^2$ sorgfältig zu unterscheiden; denn $(-a)^2 = -a \times -a = +a^2$, und $-a^2 = -a \times +a$.

§. 119.

Es folgt hieraus:

I. Jede ungerade Wurzel aus einer positiven Zahl ist positiv, und aus einer negativen Zahl negativ; nemlich

$$\sqrt[3]{+a^3} = +a, \text{ und } \sqrt[3]{-a^3} = -a.$$

II. Hingegen kann jede gerade Wurzel aus einer positiven Zahl sowohl positiv, als auch negativ sein; z. B. $\sqrt{+a^2}$ ist sowohl $+a$, als auch $-a$, weil jedes mit sich selbst multiplicirt $+a^2$ gibt. Man pflegt daher auch bei Ausziehung der geraden Wurzeln jederzeit beide Zeichen vor der Wurzel anzusetzen, wo dann andere Umstände der Rechnungen, in denen sie vorkommen, entscheiden müssen, welches von beiden Zeichen zu nehmen sei; so schreibt man z. B. $\sqrt{a^2} = \pm a$, und zwar $\sqrt{a^2} = +a$, wenn es aus andern Umständen bekannt ist, es sei $+a$ zum Quadrat erhoben worden; hingegen ist $\sqrt{a^2} = -a$, wenn es sonst ausgemacht ist, daß die negative Zahl $-a$ zum Quadrat erhoben worden sei.

III. Sollte aber aus einer negativen Zahl eine gerade Wurzel gezogen werden, so läßt sich gar nicht denken, wie aus der Multiplication einer geraden Anzahl negativer Factoren ein negatives Product entstehen könne, und folglich ist es unmöglich, eine solche Wurzel anzugeben. Solche gerade Wurzeln aus negativen Zahlen werden daher eingebildete (imaginäre) Zahlen genannt; so sind z. B. $\sqrt{-a}$, $\sqrt[4]{-a^4}$ imaginäre Zahlen.

Dagegen nennt man alle übrigen Zahlen mögliche, wirkliche oder reelle.

§. 120.

Ein Product wird auf eine Potenz erhoben, wenn man jeden Factor insbesondere auf die verlangte Potenz erhebt, und diese Potenzen mit einander multiplicirt.

Denn es ist z. B. $(abc)^3 = abc \,.\, abc \,.\, abc = a^3b^3c^3$ (vermög §. 116); eben so ist
$(abc)^m = a^m b^m c^m$;
$(72)^3 = (6 \,.\, 3 \,.\, 4)^3 = 6^3 \,.\, 3^3 \,.\, 4^3 = 216 \,.\, 27 \,.\, 64 = 373248.$

Und eben so kann auch umgekehrt aus einem Producte eine beliebige Wurzel gezogen werden, wenn man aus jedem Factor die Wurzel insbesondere zieht, und diese Wurzeln mit einander multiplicirt. So ist z. B.

$\sqrt[m]{a^m b^m} = \sqrt[m]{a^m} \,.\, \sqrt[m]{b^m} = ab$; $\sqrt[3]{27a^3} = \sqrt[3]{27} \,.\, \sqrt[3]{a^3} = 3a$;
$\sqrt{576} = \sqrt{4.9.16} = \sqrt{4} \,.\, \sqrt{9} \,.\, \sqrt{16} = 2 \,.\, 3 \,.\, 4 = 24.$

§. 121.

Eine Zahl, welche am Ende Nullen hat, kann daher zum Quadrat erhoben werden, wenn man nur die bedeutenden Ziffern zum Quadrat erhebt, und hinten doppelt so viel Nullen anhängt, als deren die Wurzel hat.

So ist z. B. $(90)^2 = (9 \,.\, 10)^2 = 9^2 \,.\, 10^2 = 81 \,.\, 100 = 8100.$

Eben so wird auch eine Zahl, die hinten Nullen hat, zum Cubus erhoben, wenn man nur die bedeutenden Ziffern zum Cubus erhebt, und hinten dreimal so viel Nullen anhängt, als deren die Wurzel hat.

So ist z. B. $(300)^3 = (3 \,.\, 100)^3 = 27 \,.\, 1000000 = 27000000.$

Und so ist auch wieder umgekehrt
$\sqrt{640000} = \sqrt{64} \times \sqrt{10000} = 8 \,.\, 100 = 800,$
$\sqrt[3]{27000} = \sqrt[3]{27} \,.\, \sqrt[3]{1000} = 3 \,.\, 10 = 30.$

Hieraus folgt, daß so oft man ein Quadrat mit 100 multiplicirt, so oft wird dadurch die Wurzel mit 10 multiplicirt, und so oft man den Cubus einer Zahl mit 1000 multiplicirt, so oft wird die dazu gehörige Wurzel mit 10 multiplicirt.

§. 122.

Soll ein Bruch auf eine Potenz erhoben werden, so erhebe man den Zähler und Nenner auf die verlangte Potenz.

So ist z. B.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3} \text{ (vermög §. 116);}$$

$$\left(\frac{a}{x}\right)^m = \frac{a^m}{x^m};\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4};\ \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}.$$

Es wird daher auch umgekehrt aus einem Bruche eine Wurzel gezogen, wenn man aus dem Zähler und aus dem Nenner die verlangte Wurzel zieht.

So ist z. B.

$$\sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}} = \frac{7}{5};\ \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3};\ \sqrt[m]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{a}{b}.$$

§. 123.

Es folgt aus diesem:

I. Daß die Potenzen eines echten Bruches immer kleiner werden, in je höhere Potenzen man den Bruch erhebt; denn wenn $b > a$ ist, so ist $1 > \frac{a}{b}$, also $\frac{a}{b} > \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$, daher auch $\frac{a}{b} > \frac{a^2}{b^2} > \frac{a^3}{b^3}$, u. s. w.

II. Hingegen werden die Potenzen eines Bruches, der > 1 ist, immer größer, in je höhere Potenzen man den Bruch erhebt; denn, wenn $b < a$ ist, so ist $1 < \frac{a}{b}$, folglich $\frac{a}{b} < \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$, und sofort auch $\frac{a}{b} < \frac{a^2}{b^2} < \frac{a^3}{b^3}$, u. s. w.

III. Wäre aber $a=b$, so ist jede Potenz, so wie auch jede Wurzel von $\frac{a}{b}$ immer $= 1$; weil ein solcher Bruch gleich der Einheit, und sowohl jede Potenz, als auch jede Wurzel von 1 immer gleich 1 ist.

IV. Hieraus ist auch zu ersehen, daß keine Potenz eines eigentlichen Bruches eine ganze Zahl werden kann; nemlich, wenn $\frac{a}{b}$ ein eigentlicher Bruch, folglich b in a nicht genau enthalten ist, so kann keine der Potenzen $\frac{a^2}{b^2}, \frac{a^3}{b^3}, \frac{a^4}{b^4}, \ldots \frac{a^m}{b^m}$ eine ganze Zahl sein. Denn denkt man sich den Bruch $\frac{a}{b}$ auf seine kleinste Benennung gebracht, so ist kein Factor von b in a enthalten; sonach kommt auch kein Factor von b^m in a^m vor, und a^m ist durch b^m nicht theilbar (§. 69. *a*. 3).

§. 124.

Soll daher aus einer ganzen Zahl was immer für eine Wurzel gezogen werden, und ist letztere keine ganze Zahl, so kann diese Wurzel auch kein Bruch sein. Z. B. obschon $\sqrt{6} >$ sein muß als 2, und < 3, so kann doch kein Bruch gefunden werden, welcher zu 2 addirt, vollkommen genau die Quadratwurzel aus 6 gibt; denn gäbe es einen solchen Bruch, so müßte die Potenz eines eigentlichen Bruches eine ganze Zahl sein, was doch (vermög §. 123, IV.) nicht sein kann. Daß man sich aber dem Werthe einer solchen Wurzel durch Decimalstellen so weit nähern könne, als es nur immer die Richtigkeit einer Rechnung erfordert, wird in der Folge gezeigt werden.

§. 125.

Alle solchen mit Wurzelzeichen behafteten Zahlen, deren Wurzeln sich nicht vollkommen genau ausziehen lassen, nemlich die Wurzeln aus unvollkommenen Potenzen, werden irrationale Zahlen genannt; so sind z. B. $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{9}$ irrationale Zahlen; im Gegentheile heißen jene rationale Zahlen, wo sich die Wurzel genau ausziehen läßt; so sind $\sqrt{9}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt[3]{64}$ rationale Zahlen.

Auch die algebraischen Größen (Ausdrücke), aus denen sich die angezeigte Wurzel nicht genau ausziehen läßt, werden **algebraische irrationale Größen genannt**; so sind z. B. $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt{(a^2+x^2)}$, $\sqrt[m]{a^n b}$ so lange irrational, bis man für die Größen unter dem Zeichen solche Zahlen annimmt, daß sich die Wurzel genau ausziehen läßt; hingegen sind $\sqrt{a^4}$, $\sqrt[3]{a^6 b^3}$, $\sqrt[m]{a^m}$ algebraisch rationale Größen, weil sich die Wurzel genau ausziehen läßt; man möge für a und b was immer für rationale Zahlen setzen.

§. 126.

Jede Größe, die eine Null zum Exponenten hat, ist einer Einheit gleich zu achten; nemlich $a^0 = 1$.

Denn so lange m eine ganze positive Zahl bedeutet, ist $a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$ (vermög §. 65, Nr. 3); es ist aber auch $a^m : a^m = \frac{a^m}{a^m} = 1$ (vermög §. 72); folglich auch $a^0 = 1$ (vermög §. 12, Grundsatz III).

Da nun a jede, sowohl einfache als zusammengesetzte Größe vorstellen kann, so ist auch jede Größe mit dem Exponenten Null einer Einheit gleich; so ist $\left(\frac{b}{c}\right)^0 = 1$; $(d-x)^0 = 1$.

§. 127.

Jede Größe, die einen negativen Exponenten hat, ist gleich einem Bruche, dessen Zähler die Einheit und der Nenner die nemliche Größe mit dem positiven Exponenten ist; nemlich $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

Denn $a^m : a^{2m} = a^{m-2m} = a^{-m}$ (nach §. 65, Nr. 3);
und auch $a^m : a^{2m} = \frac{a^m}{a^{2m}} = \frac{a^m : a^m}{a^{2m} : a^m} = \frac{1}{a^m}$ (vermög §. 79);
folglich auch $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ (vermög §. 12, Grundsatz III).

Und so ist auch umgekehrt $\frac{1}{a^{-m}} = a^m$; denn $\frac{1}{a^{-m}} = 1 : a^{-m} = 1 : \frac{1}{a^m} = a^m$, wo a und m wie immer beschaffen sein können.

Dieses gibt uns ein Mittel an die Hand, jeden Bruch in Gestalt einer ganzen Zahl vorzustellen, oder auch jeden Factor aus dem Zähler in den Nenner, und aus dem Nenner in den Zähler zu übertragen, wenn man bei den übertragenen Factoren die Zeichen der Exponenten ändert. So ist z. B.

$$\frac{a}{x^2} = a \cdot \frac{1}{x^2} = ax^{-2}; \quad \frac{ab^2}{cx^{-m}} = \frac{b^2x^m}{a^{-1}c};$$

$$\frac{x^3 - ax}{bc^3} = \frac{x(x^2 - a)}{bc^3} = \frac{x^2 - a}{bc^3x^{-1}}; \quad \frac{a^2x(c^2 - x^2)^m}{p} = \frac{a^2x}{p(c^2 - x^2)^{-m}};$$

$$\frac{5}{9} = 5 \cdot \frac{1}{9} = \frac{5}{3^2} = 5 \cdot 3^{-2} = 5 \cdot 9^{-1}.$$

§. 128.

Einnamige Potenzen können wieder zu andern Potenzen erhoben werden, deren Exponenten angegeben sind, wenn man den Exponenten der Potenz mit dem angegebenen Exponenten multiplicirt, nemlich $(a^m)^n = a^{mn}$.

Denn $(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot a^m \ldots = a^{m+m+m+m+\cdots} = a^{mn}$.

Beispiele.

$(a^4)^3 = a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 = a^{4+4+4} = a^{3 \cdot 4} = a^{12}$.

$(a^m b^n)^4 = a^m b^n \cdot a^m b^n \cdot a^m b^n \cdot a^m b^n = a^{4m} b^{4n}$.

$(-a^m bc^3)^2 = -a^m bc^3 \times -a^m bc^3 = +a^{2m} b^2 c^6$.

$\left(\frac{a^2}{b^n}\right)^m = \frac{a^{2m}}{b^{mn}}$; $[a^3(a^2 + x^2)^2]^4 = a^{12}(a^2 + x^2)^8$.

Auch bei den negativen Exponenten gilt diese Regel; denn es ist z. B. $(a^{-m})^3 = \left(\frac{1}{a^m}\right)^3 = \frac{1}{a^{3m}} = a^{-3m}$ (nach §. 127.);

$$(a^m b^{-n})^{-n} = \frac{1}{(a^m b^{-n})^n} = \frac{1}{a^{mn} b^{-nn}} = a^{-mn} b^{nn}.$$

Es ist hier wieder zu merken, daß man bei einer negativen Größe das Zeichen — in + verwandeln müsse, wenn der gegebene Exponent, wie im B. 3, eine gerade Zahl ist. Denn die Bezeichnung $(-a^m)^4$ ist (vermög §. 118) von $-(a^m)^4$ wohl zu unterscheiden; $(-a^m)^4$ ist gleich $+a^{4m}$; hingegen ist $-(a^m)^4 = -a^{4m}$.

§. 129.

Umgekehrt wird aus einer einnamigen Potenz eine Wurzel gezogen, wenn man den Exponenten der Potenz durch den Exponenten der Wurzel dividirt, nemlich $\sqrt[n]{p^a} = p^{\frac{a}{n}}$; so z. B. ist $\sqrt[2]{a^2} = \pm a^{\frac{2}{2}} = \pm a$;

$$\sqrt[3]{b^6} = b^{\frac{6}{3}} = b^2; \quad \sqrt[4]{x^8 y^{12}} = \pm x^{\frac{8}{4}} y^{\frac{12}{4}} = \pm x^2 y^3;$$

weil diese Wurzeln so beschaffen sind, daß, wenn man sie wieder auf die Potenz des Wurzel-Exponenten erhebt, die Größen unter dem Wurzelzeichen, die Potenzen nemlich, zum Vorschein kommen.

§. 130.

Wenn man was immer für eine zweinamige Größe $a+b$ (nach §. 113) zum Quadrat erhebt, so ist

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2$ oder

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

nemlich: das Quadrat einer jeden zweinamigen Größe besteht

1) aus dem Quadrate des ersten Theiles,

2) aus dem doppelten Producte des ersten in den zweiten Theil, und

3) aus dem Quadrate des zweiten Theiles.

Setzt man nun $b = -x$, so ist $2ab = -2ax$ und $b^2 = (-x)^2 = +x^2$; also $(a-x)^2 = a^2 - 2ax + x^2$.

Beispiele.

$(2ax+b)^2=4a^2x^2+4abx+b^2$; $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$;

$(a^2-1)^2=a^4-2a^2+1$; $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2=x^2+ax+\frac{a^2}{4}$;

$\left(bc^2-\frac{a}{b}\right)^2=b^2c^4-2ac^2+\frac{a^2}{b^2}$; $(1-x)^2=1-2x+x^2$;

$(99)^2=(90+9)^2=8100+1620+81=9801$, oder auch

$(99)^2=(100-1)^2=10000-200+1=9801$.

§. 131.

Soll eine mehrnamige Größe ins Quadrat erhoben werden, so kann man sie als eine zweinamige behandeln, indem man alle Glieder außer dem letzten für den ersten, und das letzte Glied selbst für den andern Theil derselben ansieht, diesen zweinamigen Ausdruck sofort nach den Regeln des vorigen Paragraphen quadrirt, und dann das Quadrat des ersten Theils auf dieselbe Weise behandelt. So ist $(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$
$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$, ferner

$\left(a-x+\frac{b}{2}\right)^2=a^2-2ax+x^2+ab-bx+\frac{b^2}{4}$;

$(2a^2-3ax-4x^2)^2=4a^4-12a^3x+9a^2x^2-16a^2x^2+24ax^3$
$+16x^4$.

$(1-x+x^2)^2=1-2x+x^2+2x^2-2x^3+x^4$
$=1-2x+3x^2-2x^3+x^4$.

$(999)^2=(900+99)^2=(900+90+9)^2=810000+162000$
$+8100+16200+1620+81=998001$.

Eben so ist $[(a+b+c)+d]^2=(a+b+c)^2+2(a+b+c)d+d^2$
$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2+2ad+2bd+2cd+d^2$; u. m. dgl.

§. 132.

Man sieht übrigens leicht ein, daß diesem Verfahren zu Folge das Quadrat eines jeden mehrnamigen Ausdruckes besteht

1) aus dem Quadrate eines jeden Gliedes insbesondere, und

2) aus den doppelten Producten eines jeden Gliedes in alle ihm vorangehenden Glieder.

§. 133.

Der Cubus einer jeden zweinamigen Größe $a+b$ besteht

1) aus dem Cubus des ersten Gliedes, a^3;

2) aus dem dreifachen Producte des Quadrats des ersten Gliedes in das zweite, $3a^2b$;

3) aus dem dreifachen Producte des Quadrats des zweiten Gliedes in das erste, $3ab^2$; und

4) endlich aus dem Cubus des zweiten Gliedes, b^3.

Denn es ist (§. 114)

$$(a+b)^3=(a+b)^2 . (a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)$$
$$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Setzt man $b=-x$, so ist $3a^2b=-3a^2x$;
$3ab^2=3a\times(-x)^2=+3ax^2$; und $(-x)^3=-x^3$;
folglich $(a-x)^3=a^3-3a^2x+3ax^2-x^3$.

Beispiele.

$$(2ax-x^2)^3=8a^3x^3-12a^2x^4+6ax^5-x^6.$$
$$(1-x)^3=1-3x+3x^2-x^3.$$
$$\left(3a+\frac{1}{2}\right)^3=27a^3+\frac{27a^2}{2}+\frac{9a}{4}+\frac{1}{8}.$$
$$(11)^3=(10+1)^3=1000+300+30+1=1000+331=1331.$$
$$(99)^3=(90+9)^3=729000+218700+21870+729$$
$$=729000+241299=970299;\text{ oder auch}$$
$$(99)^3=(100-1)^3=1000000-30000+300-1=970299.$$

§. 134.

Ist eine mehrnamige Größe zum Cubus zu erheben, so stelle man sie ebenfalls (wie in §. 131) als eine zweitheilige dar, indem man alle vor dem letzten stehenden Glieder zum ersten, das letzte selbst aber zum zweiten Theil annimmt; erhebe sie nach der eben (§. 133) aufgestellten Regel zur dritten Potenz, und wiederhole dasselbe Verfahren, so lange es nothwendig ist. So ergibt sich

$(a+b+c)^3=[(a+b)+c]^3$

$=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3;$

$(1+x-x^2)^3=1+3x+3x^2+x^3-3x^2-6x^3-3x^4+3x^4$

$+3x^5-x^6=1+3x-5x^3+3x^5-x^6.$

$(999)^3=(900+90+9)^3=729000000+218700000$

$+21870000+729000+26462700+240570+729$

$=997002999.$

§. 137.

Grundsätze.

I. Wenn man gleiche Zahlen zu gleichen Potenzen erhebt, so sind die Potenzen einander gleich; erhebt man aber ungleiche positive Zahlen zu gleichen Potenzen, so ist die Potenz der kleinern Zahl auch kleiner als die andere.

Beispiele.

Es ist	$8 = 5 + 3,$	Wenn $a = b,$
also auch	$8^2 = (5+3)^2,$	so ist auch $a^m = b^m,$
nemlich	$64 = 25 + 30 + 9.$	Ist aber $a > b,$
		so ist auch $a^m > b^m.$

II. Zieht man aus gleichen Zahlen gleiche Wurzeln, so sind auch die Wurzeln einander gleich. Wenn man hingegen aus ungleichen positiven Zahlen gleiche Wurzeln zieht, so ist jene größer, die aus der größern Zahl gezogen wird.

Beispiele.

Es ist	$64=25+30+9,$	Wenn $a= b,$
also auch	$\sqrt{64}=\sqrt{(25+30+9)},$	so ist auch $\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{b}.$
nemlich	$\sqrt{64}=\sqrt{(5+3)^2},$	Ist aber $a> b,$
und	$8=5+3.$	so ist auch $\sqrt[m]{a}>\sqrt[m]{b}.$

II. Abschnitt.

Von der Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel aus zusammengesetzten Größen insbesondere.

§. 138.

Wie aus einer einnamigen algebraischen Größe die Quadrat- und Cubikwurzel ausgezogen werden kann, ist bereits (in §. 129) gesagt worden.

Damit man aber auch die Quadrat- und Cubikwurzel aus einer gegebenen Zahl, wenn die Wurzel nur aus einer einzigen Ziffer besteht, sogleich wissen könne, ist es erforderlich, daß man die zweiten und dritten Potenzen aller einfachen Zahlen von 1 bis 9 im Gedächtniß behalte, wovon die erstern ohnehin schon in dem Einmaleins enthalten sind.

Zur kurzen Übersicht kann folgende Tafel dienen:

Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadratzahlen	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Cubikzahlen	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

woraus schon zu ersehen ist, daß die Quadratwurzel aus einer Zahl von einer oder zwei Ziffern, nur aus einer einzigen Ziffer bestehen könne, und daß diese Wurzel, wenn die gegebene Zahl nicht unter den Quadratzahlen in der Tafel enthalten ist, irrational sein müsse (§. 125); so ist z. B. $\sqrt{72} > 8$, und < 9, folglich irrational. Eben so ist auch daraus zu ersehen, daß die Cubikwurzel aus einer Zahl, die nicht mehr als 3 Ziffern enthält, nur aus einer einzigen Ziffer bestehen könne; so ist z. B.

$\sqrt[3]{999} < 10$, weil $10^3 = 1000$; und > 9, weil $9^3 = 729$ ist; eben so ist $\sqrt[3]{81} > 4$, und < 5.

§. 139.

Wenn aus einer mehrnamigen algebraischen Größe die Quadratwurzel gezogen werden soll, so kann die Größe, wenn sie auch aus noch so viel Gliedern besteht, als das Quadrat einer zweinamigen Wurzel angesehen werden; weil (vermög §. 132) jede mehrnamige Größe, als zweinamig vorgestellt, ins Quadrat erhoben werden kann.

Wenn man sich nun der Theile erinnert, aus welchen das Quadrat einer zweinamigen Größe $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ zusammengesetzt ist, so ergeben sich für die Ausziehung der Quadratwurzel aus einer mehrnamigen Größe, z. B. aus

$$a^4+6a^3b+5a^2b^2-12ab^3+4b^4$$

folgende allgemeine Regeln.

$$\sqrt{(a^4+6a^3b+5a^2b^2-12ab^3+4b^4)}=a^2+3ab-2b^2$$

$$\begin{array}{l} +a^4 \\ - \\ \hline \quad 6a^3b+5a^2b^2-12ab^3+4b^4 \mid :2a^2 \\ +6a^3b+9a^2b^2 \\ -\quad - \\ \hline -4a^2b^2-12ab^3+4b^4 \mid :(2a^2+6ab) \\ -4a^2b^2-12ab^3+4b^4 \\ +\quad +\quad - \\ \hline \quad 0 \end{array}$$

1) Nachdem man den Ausdruck, dessen zweite Wurzel zu suchen ist, nach einem Buchstaben (fallend oder steigend), hier nach a fallend, geordnet hat (§. 67), ziehe man aus seinem ersten Gliede a^4 die Quadratwurzel (gibt a^2); diese setze man als das erste Glied der Wurzel hinter das Gleichheitszeichen; erhebe sie wieder zum Quadrat, und ziehe dies vom ersten Gliede ab, so wird es getilgt.

2) Da nun ferner noch das doppelte Product aus dem ersten und zweiten Gliede, in dem Reste enthalten sein muß, so dividire man das erste Glied $(6a^3b)$ des Restes durch den doppelten gefundenen ersten Theil $(2a^2)$ der Wurzel, dann gibt der Quotient $(3ab)$ das zweite Glied der gesuchten Wurzel. Mit diesem Gliede multiplicire man den Divisor, so hat man das doppelte Product des ersten Theiles in den zweiten $(6a^3b)$; ferner multiplicire man eben dieses Glied der Wurzel noch mit sich selbst, so hat man das Quadrat des zweiten Theiles $(9a^2b^2)$; zieht man nun beide von der gegebenen Größe ab, so hat man das vollständige Quadrat der gefundenen zweinamigen Größe (a^2+3ab) abgezogen.

3) Bleibt noch ein Rest übrig, so ist dies ein Zeichen, daß die gesuchte Wurzel mehr als zwei Glieder habe; man sehe deßwegen die schon gefundenen zwei Glieder als den ersten Theil der Wurzel an; und da das Quadrat dieses Theiles schon abgezogen

ist, so dividire man wieder den Rest durch das Doppelte der schon gefundenen Wurzel (hier nemlich durch $2a^2+6ab$), so wird der Quotient ($-2b^2$) das folgende Glied der Wurzel sein. Mit diesem neuen Gliede multiplicire man wieder den Divisor, erhebe dasselbe auch zum Quadrat, und ziehe sowohl jenes Product als auch dieses Quadrat von dem Dividend ab, so hat man bereits das Quadrat der gefundenen dreinamigen Größe ($a^2+3ab-2b^2$) von der gegebenen Größe abgezogen. Und so könnte man auch, wenn noch ein Rest bliebe, das vierte Glied der Wurzel finden, indem man alle bereits gefundenen Glieder als den ersten Theil der Wurzel betrachtet, und den zweiten durch die Division mittels des Doppelten aller schon gefundenen Glieder der Wurzel sucht, u. s. w.

4) Wenn nun die gegebene Größe ein vollständiges Quadrat ist, so wird die hier vorgeschriebene Operation einmal ein Ende nehmen; im Gegentheile aber, wenn die gegebene Größe kein vollständiges Quadrat sein sollte, so würde man auch mit diesem Verfahren nie zu Ende kommen, sondern die Glieder der Wurzel würden ohne Ende fortgehen, wie es im Beispiele III. zu ersehen ist.

Beispiele.

I. $\sqrt{(4-8y+4y^3+y^4)}=2-2y-y^2.$

$$\begin{array}{l}
+4 \\
- \\
\hline
-8y+4y^3+y^4 \quad | : 4 \\
-8y+4y^2 \\
+ \quad - \\
\hline
-4y^2+4y^3+y^4 \quad | : 4-4y \\
-4y^2+4y^3+y^4 \\
+ \quad - \quad - \\
\hline
0
\end{array}$$

II. $\sqrt{\left(x^2-ax+\frac{a^2}{4}\right)}=x-\frac{a}{2}$

$$\begin{array}{l}
+x^2 \\
- \\
\hline
-ax+\frac{a^2}{4} \quad \Big| : 2x \\
-ax+\frac{a^2}{4} \\
+ \quad - \\
\hline
0
\end{array}$$

III. $\sqrt{(a^2-x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} \ldots\ldots$

$$+a^2$$
$$-$$

$$-x^2 : 2a$$
$$-x^2 + \frac{x^4}{4a^2}$$
$$+ \quad -$$

$$-\frac{x^4}{4a^2} \,\Big|\, : 2a - \frac{x^2}{a}$$
$$-\frac{x^4}{4a^2} + \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{64a^6}$$
$$+ \quad - \quad -$$

$$-\frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6} : 2a - \ldots\ldots$$

§. 140.

Wenn aus einer mehrnamigen algebraischen Größe die Cubikwurzel gezogen werden sollte, so fließen aus den schon bekannten Theilen, aus welchen der Cubus einer zweinamigen Größe $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ zusammengesetzt ist (§. 133), folgende allgemeine Regeln.

1) Aus dem ersten Gliede der gegebenen und (nach §. 67) geordneten Größe z. B. $8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$, nemlich aus ($8a^3$) ziehe man die Cubikwurzel ($2a$), so gibt dieses Glied den ersten Theil der gesuchten Wurzel; den Cubus hievon ziehe man von der gegebenen Größe ab.

2) Da nun in dem Reste das dreifache Product aus dem Quadrate des ersten Theiles, multiplicirt mit dem zweiten enthalten sein muß (§. 133); so dividire man ihn durch das dreifache Quadrat des schon gefundenen ersten Theiles ($12a^2$), dann gibt der Quotient ($3b$) den zweiten Theil der gesuchten Wurzel. Mit diesem Quotienten multiplicire man den Divisor, so ist dieses ($36a^2b$) das dreifache Product aus dem Quadrate des ersten Theiles in den zweiten. Ferner multiplicire man das dreifache Quadrat des zweiten Theiles mit dem ersten (gibt $54ab^2$); dann erhebe man auch noch den zweiten Theil zum Cubus (gibt $27b^3$); und da alles dies in dem Reste enthalten sein muß (§. 133), so ziehe man es von demselben gehörig ab.

3) Bleibt nun noch ein Rest übrig, wie im folgenden Beispiele II., so ist es ein Zeichen, daß die Wurzel aus mehr als zwei Gliedern bestehe. Man sehe daher die schon gefundenen zwei Glieder $(2x^2+x)$ als den ersten Theil der Wurzel an, und suche, wie vorhin, den zweiten; man dividire deßwegen den Rest durch das dreifache Quadrat der schon gefundenen Wurzel, so gibt der Quotient das dritte Glied der Wurzel. Mit diesem Quotienten multiplicire man den Divisor; das dreifache Quadrat dieses Quotienten multiplicire man mit den vorhergehenden Gliedern der Wurzel; endlich erhebe man auch diesen Quotienten zum Cubus, und ziehe diese drei Producte von dem Dividend ab. Und so wird dieses Verfahren bei jedem nachfolgenden Reste wiederholt, indem man jederzeit die schon gefundenen Glieder der Wurzel als den ersten Theil betrachtet und den zweiten sucht.

4) Kommt man nun durch diese Operation einmal zu Ende, so daß kein Rest mehr übrig bleibt, so ist die gegebene Größe ein vollkommener Cubus, wovon die Wurzel gefunden ist; im Gegentheile aber, wenn die gegebene Größe kein vollkommener Cubus sein sollte, wie im folgenden Beispiele III., wird man auch mit dieser Operation nie zu Ende kommen.

Beispiele.

I. $\sqrt[3]{(8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3)} = 2a+3b$

$$
\begin{array}{l}
+8a^3 \\
\underline{-} \\
\quad 36a^2b+54ab^2+27b^3 \mid : 12a^2 \\
\quad +36a^2b+54ab^2+27b^3 \\
\quad \underline{-\qquad\quad -\qquad\quad -} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

II. $\sqrt[3]{(8x^6+12x^5-30x^4-35x^3+45x^2+27x-27)} = 2x^2+x-3$

$$
\begin{array}{l}
+8x^6 \\
\underline{-} \\
12x^5-30x^4-35x^3+45x^2+27x-27 \mid : 12x^4 \\
+12x^5+6x^4+x^3 \\
\underline{-\qquad -\qquad -} \\
-36x^4-36x^3+45x^2+27x-27 \mid : 12x^4+12x^3+3x^2 \\
-36x^4-36x^3-9x^2+54x^2+27x-27 \\
\underline{+\qquad +\qquad +\qquad -\qquad -\qquad +} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

III. $\sqrt[3]{(a^3+x^3)}=a+\frac{x^3}{3a^2}-\frac{x^6}{9a^5}+\frac{5x^9}{81a^8}-\frac{10x^{12}}{243a^{11}}\ldots\ldots$

§. 144.

Um die Regeln zu entdecken, welche uns bei dem Ausziehen der zweiten Wurzel aus besonderen Zahlen leiten, nehmen wir folgenden Weg.

1. Wäre die gegebene Zahl, deren zweite Wurzel wir suchen, eine decadische Einheit von ungerader Ordnung, so daß ihrer einzigen geltenden Ziffer 1 entweder gar keine Null, oder eine gerade Anzahl von Nullen folgt, wie

1, 100, 10000, 1000000, 100000000, ...

so ergäbe sich ihre Wurzel, da (nach §. 121) jeden zwei Nullen zur Rechten einer zweiten Potenz eine Null am Ende ihrer Wurzel entspricht, und weil (nach §. 123, III.), jede Potenz und Wurzel von 1 selbst wieder 1 ist, gleich

1, 10, 100, 1000, 10000, ...

nemlich gleich einer decadischen Einheit, geschrieben mit 1 und der Hälfte der Nullen, welche die gegebene Zahl besitzt.

2. Ist aber die Zahl, deren zweite Wurzel gefunden werden soll, keine decadische Einheit ungeraden Ranges, so liegt sie gewiß zwischen zwei unmittelbar nach einander folgenden solchen decadischen Einheiten, daher befindet sich auch, weil (nach §. 137, Grundsatz II.) der größeren Zahl immer eine größere zweite Wurzel zukommt, ihre zweite Wurzel zwischen den zweiten Wurzeln dieser decadischen Einheiten, und wird, weil jede solche Einheit die kleinste von allen jenen Zahlen ist, welche eben so viel Ziffern wie sie besitzen, mit so viel Ziffern als die kleinere aus diesen Einheiten geschrieben. — Soll z. B. die zweite Wurzel der Zahl 21381376 gesucht werden, so wird sie, da diese Zahl zwischen 1000000 und 100000000 liegt, zwischen 1000 und 10000 liegen, daher mit 4 Ziffern geschrieben werden.

3. Um nun zuvörderst die an der höchsten Stelle, hier an jener der Tausende, stehende Ziffer oder die ganzen Tausende unserer Wurzel zu ermitteln, erheben wir nach und nach die, blos ganze Tausende in sich fassenden Zahlen

1000, 2000, 3000, ... 9000, 10000

zur zweiten Potenz, wobei uns die Tafel der Quadrate einziffriger Zahlen (§. 138) gute Dienste leisten wird, und vergleichen diese Potenzen mit der gegebenen Zahl, immer beachtend, daß (nach §. 137, Grundsatz II.) die zu suchende Wurzel größer oder kleiner als eine dieser Zahlen sein muß, je nachdem die vorgelegte Zahl größer oder kleiner als die zweite Potenz derselben Zahl ist. Hiebei finden wir nun, daß die gegebene Zahl 21381376 zwischen den zweiten Potenzen der Zahlen 4000 und 5000, nemlich zwischen 16000000 und 25000000, daher die verlangte Wurzel selbst zwischen 4000 und 5000 liegen, und sofort aus 4000 nebst einem Anhange, der kein ganzes Tausend beträgt, bestehen muß.

4. Die zweite Potenz dieser aus den zwei Theilen 4000 und dem noch unbekannten Anhange bestehenden Wurzel, muß nun, weil (vermög §. 117) jede Zahl die zweite Potenz ihrer zweiten Wurzel ist, der gegebenen Zahl 21381376 gleichen. Allein diese zweite Potenz besteht (zu Folge §. 130) vorerst aus der zweiten Potenz des ersten und bekannten Theils 4000 der Wurzel, nemlich aus 16000000, welche sonach in der gegebenen Zahl gewiß enthalten sein, und daher von dieser abgezogen, in dem entfallenden Reste 5381376 die beiden noch übrigen Bestandstücke der zweiten Potenz der Wurzel liefern muß.

5. Dem gemäß begreift dieser Rest in sich zunächst das zweifache Product beider Wurzeltheile, oder das Product aus dem zweifachen ersten Theile der Wurzel in den zweiten, folglich ist in ihm dieser zweifache erste Wurzeltheil, hier 2 Mal 4000, nemlich 8000, wenigstens so oft enthalten, als der noch unbekannte zweite Wurzeltheil Einheiten in sich faßt. Bedenken wir zugleich, daß dieser noch zu suchende Wurzeltheil unter Tausend fallen, also der vollen Hunderte nicht mehr als 9 besitzen darf; so werden wir, wenn wir den Rest 5381376 durch den zweifachen bekannten Wurzeltheil 8000 dividiren, und nur den Stellenwerth der höchsten Ziffer des Quotienten bestimmen, an diesem Theilquotienten, hier 600, eine Zahl erhalten, die wenigstens nicht kleiner als der zu suchende Wurzeltheil sein kann. — Sollte hiebei, wie es zuweilen sich ereignet, dieser Theilquotient größer als 900 ausfallen, so würden wir ihn, weil der zu suchende Wurzeltheil nie mehr als 9 volle Hunderte in sich fassen kann, offenbar nur immer gleich 900 annehmen.

6. Bisher fanden wir, daß die zweite Wurzel, welche wir bestimmen sollen, höchstens aus 4000+600 nebst einem Anhange, welcher kein ganzes Hundert mehr beträgt, bestehen kann. Sehen wir den bekannten Wurzeltheil 4000+600 als ihren ersten Theil an, und bedenken wir, daß in der gegebenen Zahl 21381376 zunächst die zweite Potenz dieses Wurzeltheils, und da er selbst wieder aus zwei Theilen 4000 und 600 zusammengesetzt ist, die zweite Potenz seines ersten Theils 4000, nemlich 16000000, folglich, weil wir diese bereits abgezogen, in dem entfallenen Reste 5381376 die zwei weiteren Bestandtheile dieser Potenz enthalten sein müssen: so werden wir gegenwärtig von dem Reste 5381376 sowohl das Product des zweifachen ersten Theils, 8000, mit dem andern Theile 600, nemlich 4800000, als auch die zweite Potenz des andern Theils 600, nemlich 360000, und zwar sogleich beide Stücke mit einander, oder ihre Summe 5160000 abziehen, wodurch der Rest 221376 sich ergibt. Hier machen wir jedoch die Bemerkung, daß von den eben berechneten zwei Subtrahenden, der erste 8000 Mal 600, der andere 600 Mal 600, daher ihre Summe nichts anders, als 8000 und 600 Mal oder 8600 Mal 600 ist; weßwegen wir diese Summe 5160000 leicht finden können, wenn wir zu dem zuletzt verwendeten Divisor 8000 den gefundenen Theilquotienten 600 addiren, und ihre Summe 8600 mit eben diesem Theilquotienten oder neuen Wurzeltheile 600 multipliciren. — Sollte dieses abzuziehende Product, was nicht selten geschieht, größer als der vorige Rest oder gegenwärtige Minuend ausfallen, so wäre daraus zu schließen, daß der als Theilquotient gefundene Wurzeltheil zu groß ist, daher schrittweise um eine Einheit in seiner höchsten Stelle vermindert, und neuerdings der vorbeschriebenen Behandlung unterworfen werden muß.

7. Sehen wir gegenwärtig den Inbegriff der bereits berechneten Wurzeltheile 4000 und 600, nemlich 4600, wieder als den ersten Bestandtheil der zu suchenden Wurzel an, so werden wir durch ihn, da seine zweite Potenz von der gegebenen Zahl 21381376 bereits gänzlich weggenommen worden, aus dem gefundenen Reste 221376 den Stellenwerth der nächst kommenden Wurzelziffer offenbar auf dieselbe Weise bestimmen, wie wir im Vorhergehenden aus dem Wurzeltheile 4000 und dem Reste 5381376 den folgenden

Wurzeltheil 600 berechneten. Denn in dem gegenwärtigen Reste 221376 ist gleichfalls das Product des doppelten schon bekannten Wurzeltheils 4600, nemlich 9200, und des noch zu suchenden, kein volles Hundert betragenden, Anhanges enthalten; daher werden wir nur zu untersuchen haben, wie oft 221376 die Zahl 9200 enthält. Da die hier vorzunehmende Division zum Stellenwerthe der höchsten Ziffer des Quotienten höchstens 20 bietet, so erkennen wir, daß der noch unbekannte Theil der Wurzel nicht mehr als 2 volle Zehner in sich faßt; daher diese Wurzel selbst aus 4600+20 nebst einem Anhange besteht, der keinen ganzen Zehner mehr beträgt. Nehmen wir sonach von der gegebenen Zahl zuvörderst die zweite Potenz des bekannten Theils 4600+20 ihrer zweiten Wurzel, oder da wir von ihr bereits die zweite Potenz des ersten Theils 4600 weggenommen, von dem erhaltenen Reste 221376 das doppelte Product beider bekannten Theile, 2.4600.20 oder 9200.20, und die zweite Potenz des zweiten bekannten Theils, 20.20, also im Ganzen 9220.20 oder 184400 hinweg, so finden wir den Rest 36976.

8. Dividiren wir nun noch zur Bestimmung der letzten Ziffer der zu suchenden zweiten Wurzel, indem wir uns von denselben Gründen wie früher leiten lassen, den Rest 36976 durch den zweifachen bekannten Wurzeltheil 4620, nemlich durch 9240, so erhalten wir den Quotienten 4, welcher die letzte Ziffer der Wurzel gewiß nicht übertreffen kann. Vereinigen wir sofort, zur Bildung der Summe des Productes 2.4620.4 oder 9240.4 und der Potenz 4.4, mit dem Divisor 9240 den ermittelten Quotienten 4, multipliciren mit diesem die gefundene Summe 9244, und ziehen das Product 36976 von dem vorigen Reste 36976 ab, so bleibt uns nichts weiter übrig, zum Zeichen, daß 4624 die verlangte zweite Wurzel der vorgelegten Zahl 21381376 ist.

9. Die hier ausgeführte und erläuterte Rechnung läßt sich folgender Maßen zusammenstellen.

$\sqrt{21381376} = 4000 + 600 + 20 + 4 = 4624$

$$
\begin{array}{rl}
16000000 & \\
\hline
5381376 : & 8000 \\
 & 600 \\
5160000 & \overline{8600} \\
\hline
221376 : & 9200 \\
 & 20 \\
184400 & \overline{9220} \\
\hline
36976 : & 9240 \\
 & 4 \\
36976 & \overline{9244} \\
\hline
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
4000 + 600 = 4600 \\
4600 + 20 = 4620 \\
4620 + 4 = 4624
\end{array}
$$

10. Bedenken wir endlich noch, daß bei den Bestimmungen der einzelnen Ziffern der geforderten zweiten Wurzel die vorkommenden Nullen, weil sie nur dazu dienen, den geltenden Ziffern ihre gehörigen Stellen zu bewahren, gänzlich beseitigt werden können, zumal da sich leicht genau ermitteln läßt, welche Plätze jenen geltenden Ziffern eigentlich gebühren, und daß überdies für die Berechnung einer neuen Wurzelziffer mehrere der Endziffern der gegebenen Zahl gar nicht in Anspruch genommen, und jedesmal von den unmittelbar vorher außer Acht gelassenen Ziffern die beiden höchsten verwendet werden; so können wir obige Rechnung, indem wir die entbehrlichen Ziffern auslassen, auch in folgender, nunmehr für sich verständlicher, Form schreiben.

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{21381376} = 4624 \\
16 \\
\hline
\quad 538 : 86 \\
\quad 516 \\
\hline
\qquad 2213 : 922 \\
\qquad 1844 \\
\hline
\qquad\quad 36976 : 9244 \\
\qquad\quad 36976 \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

§. 145.

Alles dies wohl erwogen, gibt für die Ausziehung der Quadratwurzel aus was immer für einer Zahl (z. B. aus 21381376) folgende allgemeine Regeln.

1) Man theile die vorgelegte Zahl von der Rechten gegen die Linke in Classen von zwei Ziffern ein, nemlich 21|38|13|76; wobei für die letzte Classe links auch nur eine Ziffer übrig bleibt, wenn

die gegebene Zahl eine ungerade Anzahl Ziffern hat; so muß die Quadratwurzel aus so viel Ziffern bestehen, als Classen vorhanden sind, und überdies stehen auch die Ziffern der gegebenen Zahl, wie sie zu je zweien in Gebrauch genommen werden, von einander gesondert da.

2) Da nun das Quadrat von der höchsten Ziffer der Wurzel in der ersten Classe links (21) ganz enthalten sein muß (§. 144, Nr. 3), so ziehe man aus dieser Classe die Quadratwurzel, oder wenn es keine vollkommene Quadratzahl ist, so nehme man die nächst kleinere Quadratzahl (16), und ziehe die Wurzel daraus (4), so hat man auf diese Art die höchste Ziffer der Wurzel gefunden, welche hinter dem Gleichheitszeichen angesetzt wird. Diesen gefundenen Theil der Wurzel erhebe man wieder zum Quadrate, und ziehe es von der ersten Classe ab.

$\sqrt{21|38|13|76} = 4624$

$\begin{array}{l} 16 \\ \hline 538 : 86 \\ 516 \\ \hline 2213 : 922 \\ 1844 \\ \hline 36976 : 9244 \\ 36976 \\ \hline 0 \end{array}$

3) Da in dem Reste (5), nachdem ihm die erste Ziffer der zweiten Classe (3) beigeschrieben, und so die Zahl 53 gebildet worden, das doppelte Product aus der schon gefundenen Ziffer der Wurzel in die nächst folgende Ziffer, ganz enthalten sein muß (§. 144, Nr. 2); so setze man zu dem Reste die erste Ziffer (3) der nächst folgenden Classe herunter, dividire diese Zahl (53) durch das Doppelte der schon gefundenen Ziffer (durch 4.2=8), so ist der Quotient (6) die zweite gesuchte Ziffer der Wurzel, welche nicht blos neben der schon gefundenen Wurzelziffer, sondern auch neben dem Divisor rechts angesetzt wird, wornach man auch noch die übrige Ziffer (8) der zweiten Classe dem Reste beischreibt; den vorher vermehrten Divisor (86) wird man hierauf mit dem Quotienten (6) multipliciren, und das Product (516) von dem ganzen Dividend (538) gehörig abziehen, wie es in dem angeführten Beispiele zu ersehen ist. Man kann das Erklärte aber auch so verrichten, daß man zu dem Reste (5) sogleich beide Ziffern der folgenden Classe (38) auf einmal herunter setzt, und dieses (538) durch das Doppelte der schon gefundenen Wurzel, jedoch dergestalt dividirt, daß die letzte Ziffer (8) von der Division ausgeschlossen bleibt.

4) Besteht nun die Wurzel aus noch mehr Ziffern, so sehe man die schon gefundenen Ziffern (46) als den ersten Theil der Wurzel an, und suche wie vorhin, den zweiten Theil; man setze daher zu dem Reste (22) die folgende Classe (13) herunter, und dividire dies (2213) durch das Doppelte der schon gefundenen Wurzel (92), so daß wieder die letzte Ziffer (3) von der Division frei bleibt; auf diese Art gibt der Quotient (2) die dritte Ziffer der gesuchten Wurzel. Diesen Quotienten hänge man wieder rechts an den Divisor an, multiplicire den vermehrten Divisor (922) mit dem Quotienten (2), und ziehe das Product von dem Dividend gehörig ab.

5) Und so wird zu jedem Reste die nächst folgende Classe herunter gesetzt, durch das Doppelte der schon gefundenen Wurzel so dividirt, daß die letzte Ziffer frei bleibe; der Quotient zu den schon gefundenen Ziffern der Wurzel hinzugefügt, auch rechts an den Divisor angehängt, sodann der vermehrte Divisor mit der gefundenen Ziffer der Wurzel multiplicirt, und das Product von dem Dividend abgezogen.

6) Sollte irgendwo das Product aus dem Quotienten in den vermehrten Divisor zu groß ausfallen, und nicht von dem betreffenden Dividend abgezogen werden können, so ist dies ein Zeichen, daß der Quotient zu groß angenommen worden sei, und vermindert werden müsse. In dem folgenden Beispiele Nr. 1 bei der ersten Division, muß man sagen, 4 in 16 geht 3 Mal, während es doch bei der gewöhnlichen Division 4 Mal ginge. Es ist aber bei der Ausziehung der Quadratwurzel stets rathsam, den Quotienten anfangs lieber zu groß, als zu klein anzunehmen, weil man nach geschehener Subtraction nicht so geschwind, wie bei der gewöhnlichen Division entscheiden kann, ob der Quotient nicht zu klein angenommen worden sei.

7) Sollte irgendwo das Doppelte der schon gefundenen Wurzel in dem betreffenden Dividend nicht enthalten sein, so muß in der Wurzel an der Stelle des Quotienten eine Null gesetzt werden; dann stelle man zu dem Reste noch beide Ziffern der nächsten Classe herunter, und fahre mit der Operation auf die vorgeschriebene Art fort, wie es im Beispiele Nr. 2 zu ersehen ist.

8) Sind nun bereits alle Classen herunter gesetzt, und es geht die letzte Subtraction genau auf, so ist dies ein Zeichen, daß die gegebene Zahl eine vollkommene Quadratzahl sei, wovon die gefundene Zahl die Wurzel ist. Bleibt aber bei der letzten Subtraction noch ein Rest übrig, wie im Beispiele Nr. 1, so ist dies ein Zeichen, daß die gegebene Zahl kein vollkommenes Quadrat, und folglich die Wurzel dieser Zahl eine irrationale Zahl sei (§. 125), dergestalt, daß die gesuchte Wurzel zwischen der gefundenen, 238, und zwischen der um eine Einheit vermehrten Zahl, 239, als zwischen zwei gefundenen Grenzen liegen müsse.

Beispiele.

Nr. 1.

$\sqrt{5|68|76} = 238$
4
168 : 43
129
3976 : 468
3744
232 Rest

Nr. 2.

$\sqrt{65|48|04|64|00} = 80920$
64
148 : 16
14804 : 1609
14481
32364 : 16182
32364
0

§. 146.

Um sich aber auch dem Werthe einer irrationalen Wurzel durch Decimalstellen nach Belieben nähern zu können, verfahre man auf folgende Art.

$\sqrt{14|15} = 37{,}61$
9
515 : 67
469
4600 : 746
4476
12400 : 752

1) Man hänge an die gegebene Zahl (im neben stehenden Beispiele an 1415), oder was einerlei ist, man hänge, nachdem alle vorhandenen Classen schon herunter gesetzt sind, an den letzten Rest (46) eine Classe, d. i. zwei Nullen an, dividire dies (4600) durch das Doppelte der schon gefundenen Wurzel (74), so ist der Quotient (6) abermal eine Ziffer der Wurzel. Da aber diese Wurzel (vermög §. 121) zehnmal so groß ist, als die gesuchte, weil durch das Anhängen zweier Nullen das Quadrat mit 100 multiplicirt worden ist, so dividire man diese

Wurzel durch 10, nemlich man schneide von dieser Wurzel rechts eine Decimalstelle ab, so hat man die gesuchte Wurzel bis in die Zehntel richtig gefunden.

2) Will man dieselbe genauer haben, so hänge man abermal an den Rest (124) eine Classe Nullen an, und dividire dies wieder durch das Doppelte der schon gefundenen Wurzel (752), ohne auf die Decimalstellen Acht zu geben, so wird der Quotient aus erst angeführter Ursache Hundertel bedeuten, und folglich die zweite Decimalstelle der gesuchten Wurzel sein.

3) Und so könnte man sich, ohne Ende fort, der Wurzel immer mehr nähern, wenn man jederzeit an den Rest eine Classe Nullen anhängt, und ihn sodann durch das Doppelte der schon gefundenen Wurzel dividirt, ohne jedoch jemals zu einer solchen Wurzel zu gelangen, die mit sich selbst multiplicirt, die gegebene Größe vollkommen zum Vorschein bringt.

Beispiele.

$\sqrt{3\|46\|95} = 186,2$	$\sqrt{5} = 2,236$
1	4
246 : 28	100 : 42
224	84
2295 : 366	1600 : 443
2196	1329
9900 : 3722	27100 : 4466
7444	26796
2456 Rest.	304 Rest.

Auf diese Art ist nun im letzten Beispiele $\sqrt{5} > 2,236$, aber auch $\sqrt{5} < 2,237$; setzt man die Ausziehung der Wurzel weiter fort, so findet man $\sqrt{5} > 2,23606797$, und $\sqrt{5} < 2,23606798$, u. s. w.

§. 147.

Wäre aus einem Decimalbruche, oder auch aus einer ganzen Zahl nebst einem angehängten Decimalbruche, die Quadratwurzel zu ziehen, so beobachte man Folgendes.

1) Man hänge hinten eine Null an, wenn der Decimalbruch eine ungerade Anzahl Decimalstellen haben sollte; lasse dann das

Comma außer Acht, und ziehe die Quadratwurzel, als wenn man es blos mit einer ganzen Zahl zu thun hätte.

2) Da aber durch die Auslassung des Comma die gegebene Zahl mit 1, nebst so viel angehängten Nullen, als Decimalstellen vorhanden sind, multiplicirt wird (§. 102); so wird eben dadurch die Wurzel mit 1 nebst halb so viel angehängten Nullen multiplicirt (§. 121). Man schneide daher von der gefundenen Wurzel so viel Decimalstellen ab, als in der Zahl Decimalclassen vorhanden sind, so hat man die verlangte Wurzel.

3) Sollte man die Wurzel mit mehr Decimalstellen bestimmen, so hänge man an den letzten Rest eine Classe Nullen, und verfahre übrigens, wie es (in §. 146) gesagt worden ist.

Beispiele.

$\sqrt{5|94,|82|33\,21} = 24,389$

```
4
-----
194 : 44
176
-----
 1882 : 483
 1449
 -----
  43333 : 4868
  38944
  -----
   438921 : 48769
   438921
   ------
        0
```

$\sqrt{0,|94|30} = 0,971$

```
81
-----
1330 : 187
1309
-----
 2100 : 1941
 1941
 -----
  159 Rest.
```

§. 148.

Ist endlich aus einem gewöhnlichen Bruche die Quadratwurzel zu ziehen, so muß dieselbe (§. 122) aus dem Zähler und aus dem Nenner gezogen werden. Nur kann man sich die Arbeit erleichtern, wenn der Nenner irrational ist, indem man den Zähler und Nenner mit dem Nenner multiplicirt, wodurch derselbe rational wird; so ist z. B.

$$\sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{10}{25}} = \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{3,1622}{5} = 0,6324.$$

Oder man verwandle den gegebenen Bruch in einen Decimalbruch, und ziehe die Wurzel (nach §. 147). So ist z. B.

$$\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{0{,}375}=\sqrt{0{,}3750}=0{,}61\,..$$

§. 150.

Zur Feststellung der Vorschriften, nach denen aus besonderen Zahlen die dritte Wurzel gezogen wird, nehmen wir folgende Betrachtungen vor.

1) Ist die Zahl, deren dritte Wurzel verlangt wird, eine decadische Einheit, die mit 1 und einer durch 3 theilbaren Anzahl nachfolgender Nullen geschrieben wird, wie

1, 1000, 1000000, 1000000000, ...

so ist ihre dritte Wurzel, weil (nach §. 121) jeden drei, am Ende einer dritten Potenz stehenden Nullen eine Null am Schlusse ihrer Wurzel entspricht, und (§. 123. III.) die dritte Wurzel aus 1 selbst wieder 1 ist, gleich einer decadischen Einheit mit dem dritten Theile der Anzahl der vorhandenen Nullen, nemlich

1, 10, 100, 1000, ...

2) Wenn aber die Zahl, aus der die dritte Wurzel gezogen werden soll, keine, mit einer durch 3 theilbaren Anzahl von Nullen sich endigende, decadische Einheit ist, so liegt sie sicher zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden solchen Einheiten; daher ihre dritte Wurzel (§. 137, Grundsatz II.) zwischen den dritten Wurzeln dieser Einheiten liegen, folglich aus eben so viel Ziffern als die kleinere von beiden bestehen wird. Ist z. B. die dritte Wurzel aus der Zahl 408518488, welche zwischen 1000000 und 1000000000 liegt, zu ziehen, so wird selbe zwischen 100 und 1000 liegen, folglich mit 3 Ziffern geschrieben werden.

3) Bedeutet aber die höchste Ziffer der zu suchenden Wurzel Hunderte, so wird man ihre Anzahl finden, indem man der Ordnung nach die Zahlen

100, 200, 300, . . . , 900, 1000,

etwa mit Benützung der in §. 138 aufgestellten Tafel der Cubikzahlen von einziffrigen Zahlen, zur dritten Potenz erhebt, und mit diesen die gegebene Zahl 408518488 vergleicht, wobei man erwägt, daß ihre dritte Wurzel zwischen jenen zwei von obigen Zahlen liegen muß, zwischen deren dritten Potenzen diese Zahl fällt.

Da im gegenwärtigen Falle die gegebene Zahl zwischen 343000000 und 512000000, den dritten Potenzen der Zahlen 700 und 800, liegt; so muß die zu suchende dritte Wurzel aus 700 nebst einem Anhange bestehen, der kein volles Hundert beträgt.

4) Der dritten Potenz dieser, aus zwei Theilen, einem bekannten (700) und einem unbekannten, zusammengesetzten dritten Wurzel muß jedoch, weil (zu Folge §. 117) jede Zahl der dritten Potenz ihrer dritten Wurzel gleicht, die gegebene Zahl 408518488 gleich sein; folglich muß in dieser zunächst die dritte Potenz des ersten Wurzeltheils 700, nemlich 343000000, vollständig enthalten sein, und dann werden, wenn man von ihr diese Potenz hinweg nimmt, in dem sich ergebenden Reste 65518488 die noch übrigen drei Bestandstücke jener dritten Potenz vorkommen.

5) Unter diesen drei Bestandstücken befindet sich nun vor allem das Product aus der dreifachen zweiten Potenz des ersten Wurzeltheils, nemlich aus $3 . 700^2$ oder 1470000 in den zweiten Theil. Untersuchen wir daher, wie oft in dem Reste 65518488 die dreifache zweite Potenz des bekannten Wurzeltheils, 1470000, enthalten ist, so finden wir, indem wir jene Zahl durch diese dividiren, den Stellenwerth der höchsten Ziffer des Quotienten gleich 40; daher der noch unbekannte Wurzeltheil nicht mehr als 4 volle Zehner enthält, und die verlangte Wurzel aus 700+40 nebst einem, keinen ganzen Zehner betragenden, Anhange besteht. Sollte bei einer solchen Theilung des Restes durch die dreifache zweite Potenz des bekannten Wurzeltheils der Quotient größer als 90 ausfallen, so würden wir ihn, da der zu suchende Wurzeltheil nicht mehr als 9 volle Zehner in sich halten darf, jederzeit blos gleich 90 annehmen.

6) Da die zu suchende dritte Wurzel aus einem bekannten Theile 700+40 und einem noch unbekannten zusammengesetzt ist, so muß die gegebene Zahl zunächst die dritte Potenz des bekannten Theils, und weil dieser selbst zweitheilig, und die dritte Potenz seines ersten Gliedes 700 bereits abgezogen ist, der Rest 65518488 die drei übrigen Bestandtheile der dritten Potenz des bekannten Wurzeltheils 70 +40 enthalten. Aus diesem Grunde werden wir von besagtem Reste abziehen: erstens das Product der dreifachen

zweiten Potenz des ersten Theils 700, in den zweiten 40, nemlich

$$3 \cdot 700^2 \cdot 40 = 1470000 \cdot 40 = 58800000,$$

welches wir finden, indem wir den gebrauchten Divisor 1470000 mit dem letzt gefundenen Wurzeltheile 40 multipliciren; zweitens das dreifache Product des ersten Theils 700 in die zweite Potenz des anderen 40, nemlich $3 \cdot 700 \cdot 40^2 = 3360000$; und drittens die dritte Potenz des zweiten Theils, nemlich $40^3 = 64000$. Am bequemsten ist es, diese 3 Subtractionen (nach §. 24) durch Ergänzung auf einmal zu verrichten, wornach der Rest 3294488 entfällt. Sollte die hier vorzunehmende Subtraction, was sehr oft geschieht, nicht ausführbar sein, so gibt dies zu erkennen, daß der zuletzt bestimmte Wurzeltheil zu groß ist, folglich allmälig um eine Einheit in seiner höchsten Ziffer zu verringern, und neuerdings zu versuchen kommt, bis sich endlich die Subtraction vollbringen läßt.

7) Da nunmehr die beiden bekannten Theile 700 und 40 der zu suchenden dritten Wurzel wieder in einen einzigen 740 vereinigt, und derselbe als ihr erster Theil angesehen werden kann, so werden wir aus ihm und dem zuletzt erhaltenen Reste 3294488 den nächst kommenden Wurzeltheil auf dieselbe Weise suchen, wie wir aus dem Theile 700 und dem Reste 65518488 den folgenden Wurzeltheil 40 bestimmten. In dieser Absicht werden wir nemlich den letzten Rest 3294488 durch die dreifache zweite Potenz des bekannten Wurzeltheils 740, nemlich durch $3 \cdot 740^2$ oder 1642800 dividiren, wornach wir den erhaltenen Quotienten 2 als nächsten Wurzeltheil betrachten. Aus den schon früher angewendeten Gründen werden wir von demselben Reste wieder folgende drei Zahlen abziehen, nemlich erstens das dreifache Product der zweiten Potenz des ersten Theils 740 mit dem zweiten 2, d. i. $3 \cdot 740^2 \cdot 2$ oder $1642800 \cdot 2 = 3285600$, zweitens das dreifache Product des ersten Theils mit der zweiten Potenz des andern Theils $3 \cdot 740 \cdot 2^2 = 8880$, endlich drittens die dritte Potenz des zweiten Theils, $2^3 = 8$. Da diese Subtraction Null zum Reste gibt, so ersehen wir, daß 742 die verlangte dritte Wurzel der vorgelegten Zahl 408518488 ist.

8) Die hier vollbrachte Rechnung läßt sich auf folgende Weise zusammenstellen.

$\sqrt[3]{408518488} = 700 + 40 + 2 = 742$

343000000   740
65518488 : 1470000   742
58800000
3360000
64000
3294488 : 1642800
3285600
8880
8
0

9) Beseitigen wir noch, indem wir blos mit den geltenden Ziffern rechnen, diejenigen Nullen, die diesen geltenden Ziffern ihre Stellen anweisen, und schreiben wir in den Rest jedesmal von den nachfolgenden Ziffern, nur die drei höchsten in Anspruch zu nehmenden, so stellt sich unsere Rechnung, wie folgt, dar.

$\sqrt[3]{408518488} = 742$

343
65518 : 147
588
336
64
3294488 : 16428
32856
888
8
0

§. 151.

Alles dies in Betrachtung gezogen, gibt für die Ausziehung der Cubikwurzel aus jeder mit noch so viel Ziffern geschriebenen Zahl (z. B. 408518488), folgende Regeln.

1) Man theile die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Classen ein, und gebe jeder Classe drei Ziffern, wo die letzte Classe links auch nur eine, oder zwei Ziffern behalten kann; so wird die Wurzel aus so viel Ziffern bestehen müssen, als Classen vorhanden sind, und es werden die Ziffern so abgesondert sein, wie sie zu je dreien der Rechnung beigezogen werden.

2) Da nun der Cubus der höchsten Ziffer der Wurzel in der ersten Classe links (in 408) enthalten sein muß (§. 150, Nr. 3), so ziehe man aus dieser Classe die Cubikwurzel; oder wenn sie keine vollkommene Cubikzahl ist, so nehme man die nächst kleinere Cubikzahl (343), ziehe die Wurzel daraus (7), so gibt dies die erste Ziffer der gesuchten Wurzel; den Cubus hievon ziehe man von der ersten Classe ab; (343 von 408 bleiben 65).

$$\sqrt[3]{408|518|488} = 742$$

343
65518 : 147
588
336
64
3294488 : 16428
32856
888
8
0

3) Da in dem Reste (65) nebst der linken Ziffer der folgenden Classe (5) das dreifache Product aus dem Quadrate der gefundenen Ziffer in die nächst folgende Ziffer, enthalten sein muß (§. 150, Nr. 5 und 9); so setze man zu dem Reste die erste Ziffer der folgenden Classe herunter (655), und dividire dieses durch das dreifache Quadrat der schon gefundenen Wurzel (147), so ist der Quotient (4) die zweite Ziffer der gesuchten Wurzel, wornach man auch noch die beiden übrigen Ziffern (18) der folgenden Classe herabsetzt. Man kann jedoch auch die ganze folgende Classe (518) auf einmal zu dem Reste (65) herabschreiben, jedoch muß man dann bei der Division die zwei letzten Ziffern (18) des Dividends außer Acht lassen.

Sodann multiplicire man mit dem Quotienten (4) den Divisor ($4 . 147 = 588$); ferner multiplicire man das dreifache Quadrat des Quotienten mit dem schon gefundenen ersten Theil ($3 . 4^2 . 7 = 336$); endlich erhebe man auch den Quotienten (4) zum Cubus (64), setze diese drei Producte, welche dem Früheren (§.150. Nr.6) gemäß in dem Dividende enthalten sein müssen, so unter einander, daß immer das folgende um eine Stelle weiter zur Rechten gerückt wird, und ziehe sie (nach §. 24) durch Ergänzung von dem Dividend ab.

4) Zu dem Reste (3294) setze man die nächst folgende Classe (488) herunter, sehe die schon gefundenen Ziffern (74) als den ersten Theil der Wurzel an, und suche wie vorhin den zweiten

Theil; zu diesem Ende dividire man diesen Rest (3294488) durch das dreifache Quadrat der schon gefundenen Wurzel ($3.74^2 = 16428$) dergestalt, daß wieder die letzten zwei Ziffern (88) von der Division frei bleiben, so ist der Quotient (2) die dritte Ziffer der gesuchten Wurzel; mit diesem Quotienten wird der Divisor multiplicirt ($2.16428=32856$); sodann multiplicire man auch das dreifache Quadrat desselben mit den vorigen schon gefundenen Ziffern der Wurzel ($3.2^2.74=888$); endlich erhebe man auch den Quotienten zum Cubus ($2^3=8$); addire diese drei Producte, wie vorhin, zusammen, und ziehe ihre Summe von dem Dividend ab, u. s. w.

5) Sollte irgendwo die Summe von den drei Producten zu groß ausfallen, und von dem Dividend nicht abgezogen werden können, so ist dies ein Zeichen, daß der Quotient zu groß angenommen worden sei, und daher vermindert werden müsse.

Wäre aber irgendwo der Divisor in dem betreffenden Dividend gar nicht enthalten, so muß in der Wurzel an der Stelle des Quotienten eine Null gesetzt werden; dann schreibe man noch eine Classe herunter, und verrichte die Division nach der erst vorgeschriebenen Art, wie es im folgenden Beispiele Nr. 1 zu ersehen ist.

6) Sind nun auf diese Art alle Classen schon herunter gesetzt, und es geht die letzte Subtraction ohne Rest genau auf, so ist die gegebene Zahl eine vollkommene Cubikzahl; bleibt aber bei der letzten Subtraction noch ein Rest übrig, wie im Beispiele Nr. 2, so ist die gegebene Zahl keine Cubikzahl, und die gesuchte Cubikwurzel daher eine irrationale Zahl, welche hier zwischen der gefundenen Zahl (620), und der um eine Einheit vermehrten (621), als zwischen zwei Grenzen liegen muß.

Beispiele.

Nr. 1.

$\sqrt[3]{131|096|512}=508$

125

6096 : 75

6096512 : 7500

60000

9600

512

0

Nr. 2.

$\sqrt[3]{238|368|596}=620$

216

22368 : 108

216

72

8

40596 : 11532

40596 Rest.

§. 152.

Will man sich einer irrationalen Cubikwurzel durch Decimalstellen nähern, so hänge man an die gegebene Zahl, oder was einerlei ist, an den letzen Rest eine Classe Nullen, und suche auf die vorgeschriebene Art noch eine Ziffer der Wurzel. Da aber durch das Anhängen einer Classe Nullen die Zahl mit 1000 multiplicirt, und folglich dadurch ihre Cubikwurzel zehnmal so groß wird, als die gesuchte (§. 121), so dividire man die gefundene Wurzel durch 10; d. i. man schneide rechts eine Decimalstelle ab, und es ist die Wurzel bis in die Zehntel richtig gefunden. Und so können nach Belieben noch mehr Decimalstellen der Wurzel gefunden werden, indem jedesmal an den Rest eine Classe Nullen angehängt, und die folgende Decimalstelle gesucht wird.

Beispiele.

$\sqrt[3]{4|827} = 16,9$

1

3827 : 3

18

108

216

731000 : 768

6912

3888

729

191 Rest.

$\sqrt[3]{10} = 2,15$

8

2000 : 12

12

6

1

739000 : 1323

6615

1575

125

61625 Rest.

§. 153.

Ist aus einem Decimalbruche, oder aus einer ganzen Zahl nebst einem angehängten Decimalbruche, die Cubikwurzel zu ziehen, so hänge man an den Decimalbruch hinten eine oder zwei Nullen an, so daß immer die Anzahl der Decimalstellen durch 3 theilbar sei; dann ziehe man die Cubikwurzel, als wenn es blos eine ganze Zahl wäre, und schneide in der Wurzel so viel Decimalziffern ab, als Decimalclassen vorhanden sind, so ist dies die verlangte Wurzel. Denn durch die Auslassung des Comma wird die Zahl so oft mit 1000 multiplicirt, als Decimalclassen vorhanden sind; folglich ist die Cubikwurzel eben so oft mit 10 multiplicirt worden (§. 121);

daher muß selbe auch wieder so vielmal durch 10 dividirt werden, was durch die Absonderung so vieler Decimalziffern, als Classen vorhanden sind, bewerkstelligt wird.

Übrigens kann man, wenn die Wurzel mit noch mehr Decimalstellen verlangt werden sollte, selbe nach Belieben bestimmen, indem man an den Rest jedesmal eine Classe Nullen anhängt, und die folgende Decimalziffer (nach §. 152) sucht.

Beispiele.

$\sqrt[3]{70,|957|944} = 4,14$
64
6957 : 48
48
12
1
2036944 : 5043
20172
1968
64
0

$\sqrt[3]{0,|584|600} = 0,836$
512
72600 : 192
576
216
27
12813000 : 20667
124002
8964
216
322944 Rest.

§. 154.

Wenn aus einem Bruche, dessen Nenner ein unvollkommener Cubus ist, die Cubikwurzel gezogen werden soll, so kann der Nenner rational gemacht werden, wenn man Zähler und Nenner mit dem Quadrate des Nenners multiplicirt. So ist z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{5}{4}} = \sqrt[3]{\frac{5 \,.\, 16}{4 \,.\, 16}} = \sqrt[3]{\frac{80}{64}} = \frac{\sqrt[3]{80}}{4} = \frac{4,3088}{4} = 1,0772.$$

Oder man verwandle den Bruch vorher in einen Decimalbruch und ziehe die Cubikwurzel (nach §. 153).

Anmerkung. Wenn man eine Tafel der Quadrat- und Cubikzahlen besitzt, kann die Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel um Vieles erleichtert werden. Denn da dergleichen Tafeln gewöhnlich die Quadrat- und Cubikzahlen aller Wurzeln von 1 bis 1000 enthalten, so findet man in denselben jedesmal die drei ersten Ziffern von der verlangten Wurzel, es möge die vorgelegte Zahl, aus welcher die Wurzel gezogen werden soll, aus was immer für einer Anzahl Ziffern bestehen, und entweder blos eine ganze Zahl sein, oder auch Decimalstellen bei sich führen. Z. B. wenn aus 34,6853 die Cubikwurzel zu ziehen ist, so hänge man hinten so viel Nullen an, daß die Decimalstellen sich genau in Classen eintheilen lassen (§. 153), und sehe sie blos für eine ganze Zahl an, nemlich für 34685300. Nun findet man in den Tafeln die nächst kleinere Cubikzahl 34645976, und ihre Wurzel 326; daher sind die drei ersten Ziffern der gesuchten Wurzel =3,26; subtrahirt man nun diese Cubikzahl 34645976 von 34685300, so ist der Rest 39324. Will man aber diese Wurzel mit noch mehr Decimalstellen haben, so dividire man diesen Rest, nachdem man ihm drei Nullen angehängt hat, durch das dreifache Quadrat der schon gefundenen Wurzel, und verfahre überhaupt nach §. 151 und 153.

III. Abschnitt.

Von den Wurzelgrößen und ihren Rechnungsarten.

§. 155.

Alle diejenigen Größen, welche mit Wurzelzeichen behaftet sind, werden insgesammt **Wurzelgrößen** (Radicale) genannt, und es werden hier vorzüglich jene darunter verstanden, wo sich die Wurzel nicht genau ausziehen läßt, z. B.

$$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{ab^2},\ \sqrt[4]{5c}, \text{ u. dgl.}$$

Wurzelgrößen, bei denen der nemliche Wurzel-Exponent vorkommt, werden **Wurzelgrößen von der nemlichen Benennung** genannt; im Gegentheile sind sie **Wurzelgrößen von verschiedener Benennung**. So sind z. B. $\sqrt{5}$, $\sqrt{ab^3}$, $\sqrt{7y}$ Wurzelgrößen von gleicher Benennung; hingegen sind $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{a}$ von verschiedener Benennung.

§. 156.

Jede Wurzelgröße kann, im erforderlichen Falle, ohne Wurzelzeichen als eine Potenz mit einem gebrochenen Exponenten geschrieben werden, wenn

man dem Exponenten der Größe unter dem Zeichen den Wurzel-Exponenten als Nenner unterschreibt.

Denn es ist (§. 129) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, wo m und n was immer für Zahlen vorstellen können; eben so ist

$\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$; $\sqrt[3]{ab^3} = a^{\frac{1}{3}}b$; $\sqrt[4]{(a^2-x^3)} = (a^2-x^3)^{\frac{1}{4}}$;

$\sqrt[3]{\frac{a}{a^2-x^2}} = \sqrt[3]{a(a^2-x^2)^{-1}} = a^{\frac{1}{3}}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{3}}$.

Und so kann auch wieder umgekehrt jede Größe, die zum Exponenten einen Bruch hat, mit dem Wurzelzeichen geschrieben werden, wenn man den Nenner als Exponenten der Wurzel, und den Zähler als Exponenten der Größe unter dem Wurzelzeichen ansetzt. So ist z. B.

$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$; $b^{\frac{2}{5}}c^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{(b^2c)}$; $(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(a^2-x^2)}$;

$(a^2-x^2)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(a^2-x^2)^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{(a^2-x^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(a^2-x^2)^2}}$.

§. 157.

Wenn man bei einer Wurzelgröße sowohl den Exponenten der Wurzel, als auch den Exponenten der Potenz unter dem Zeichen mit der nemlichen Größe multiplicirt, oder dividirt, so bleibt die Größe ungeändert; nemlich $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$.

Denn $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}} = \sqrt[np]{a^{mp}}$ (vermög §. 156); oder wenn $p = \frac{1}{r}$, so ist $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{r}]{a^{\frac{m}{r}}}$; eben so ist $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{a^4}$; $\sqrt{ab^3} = \sqrt[\frac{2}{3}]{(a^{\frac{1}{3}}b)}$; $\sqrt[4]{a} = \sqrt{a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\sqrt{a}}$; $\sqrt[6]{a} = \sqrt{a^{\frac{1}{3}}} = \sqrt{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a}}$.

Man kann daher auch aus einer gegebenen Zahl die vierte Wurzel ziehen, wenn man zuerst die zweite Wurzel, und aus dieser noch einmal die zweite Wurzel zieht. Und eben so kann die sechste Wurzel gezogen werden, indem man aus der zweiten Wurzel die dritte Wurzel, oder aus der dritten Wurzel die zweite Wurzel zieht, u. s. w.

§. 158.

Wurzelgrößen, bei denen die Größe unter dem Zeichen sich in solche Factoren zerlegen läßt, daß einer oder mehrere von ihnen vollkommene Potenzen nach dem Wurzel-Exponenten sind, können zum Theil rational gemacht werden, wenn man aus den Factoren, welche vollkommene Potenzen sind, die Wurzeln zieht, und selbe als Factoren außer dem Zeichen ansetzt; z. B. $\sqrt[m]{(a^m bc^{2m})} = ac^2 \sqrt[m]{b}$.

Denn $\sqrt[m]{(a^m bc^{2m})} = a^{\frac{m}{m}} b^{\frac{1}{m}} c^{\frac{2m}{m}} = ac^2 b^{\frac{1}{m}}$ (vermög §. 120), und $b^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{b}$ (nach §. 156); folglich $\sqrt[m]{(a^m bc^{2m})} = ac^2 \sqrt[m]{b}$.

Beispiele.

$\sqrt[3]{(16a^4b)} = \sqrt[3]{(2.8.a^3.a.b)} = 2a\sqrt[3]{(2ab)}$;

$3\sqrt{(8a^3b^5)} = 3\sqrt{(2.4.a^2.a.b^4.b)} = 6ab^2\sqrt{(2ab)}$;

$2\sqrt{(a^2x^2 - x^4)} = 2\sqrt{x^2(a^2 - x^2)} = 2x\sqrt{(a^2 - x^2)}$;

$\sqrt{(3a^2c + 6abc + 3b^2c)} = \sqrt{3c(a^2 + 2ab + b^2)} = (a+b)\sqrt{3c}$.

Durch die Abkürzung können zuweilen verschiedene irrationale Größen gleichartig gemacht, das ist, dergestalt verwandelt werden, daß sie unter dem Zeichen vollkommen gleiche, und vor dem Zeichen gleichnamige Größen enthalten. So z. B. scheinen die Ausdrücke $3\sqrt{8a^2b}$ und $4\sqrt{18a^2b}$ ungleichartig zu sein; zerlegt man aber die Größen unter dem Zeichen in Factoren, und zieht aus den rationalen Factoren die Wurzel aus, so ist $3\sqrt{8a^2b} = 3\sqrt{2.4.a^2.b} = 6a\sqrt{2b}$; und $4\sqrt{18a^2b} = 4\sqrt{2.9.a^2.b} = 12a\sqrt{2b}$; folglich sind nun $6a\sqrt{2b}$ und $12a\sqrt{2b}$ gleichartige Glieder, so daß sie in ein Glied zusammen addirt werden können;

$$3\sqrt{8a^2b} + 4\sqrt{18a^2b} = 18a\sqrt{2b}.$$

§. 159.

Und umgekehrt können die Größen vor dem Wurzelzeichen unter das Zeichen gebracht werden, wenn man sie auf die von dem Wurzel-Exponenten angegebene Potenz erhebt, und die Größen unter dem Zeichen damit multiplicirt; es ist nemlich

$$a\sqrt[m]{b}=a^{\frac{m}{m}}.b^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{a^m b};\quad 3a\sqrt{2a}=\sqrt{18a^3};$$

$$2\sqrt[3]{a^2-x^2}=\sqrt[3]{(8a^2-8x^2)};$$

$$(a-x)\sqrt{(a+x)}=\sqrt{(a-x)^2(a+x)}=\sqrt{(a^2-x^2)(a-x)}.$$

Hiedurch läßt sich entscheiden, welche von zwei Wurzelgrößen der nemlichen Benennung, die vor und unter dem Zeichen verschiedene Größen haben, die größere sei; so ist z. B. $2\sqrt{7}>3\sqrt{3}$; weil $2\sqrt{7}=\sqrt{28}$, und $3\sqrt{3}=\sqrt{27}$ ist.

§. 160.

Wurzelgrößen von verschiedener Benennung können ohne Veränderung ihres Werthes auf gleiche Benennung gebracht werden, wenn man sie als Potenzen mit gebrochenen Exponenten vorstellt (§. 156), dann diese gebrochenen Exponenten auf gleiche Benennung bringt, und endlich solche wieder als Wurzelgrößen anschreibt.

Beispiele.

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{6}}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8}\\ \sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{5^2}=\sqrt[6]{25}\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{6}{12}}=\sqrt[12]{3^6}=\sqrt[12]{729}\\ \sqrt[4]{5}=5^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{3}{12}}=\sqrt[12]{5^3}=\sqrt[12]{125}\\ \sqrt[3]{7}=7^{\frac{1}{3}}=7^{\frac{4}{12}}=\sqrt[12]{7^4}=\sqrt[12]{2401}\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\sqrt[n]{ab}=a^{\frac{1}{n}}\,b^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{3m}{3mn}}\,b^{\frac{3m}{3mn}}=\sqrt[3mn]{a^{3m}\,b^{3m}}\\
\sqrt[3]{a^n c}=a^{\frac{n}{3}}\,c^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{mnn}{3mn}}\,c^{\frac{mn}{3mn}}=\sqrt[3mn]{a^{mnn}\,c^{mn}}\\
\sqrt[m]{a^3}=a^{\frac{3}{m}}=a^{\frac{9n}{3mn}}=\sqrt[3mn]{a^{9n}}.
\end{array}\right.$$

Mittels dieser Reduction der Wurzelgrößen läßt sich auch entscheiden, welche von zwei Wurzelgrößen verschiedener Benennung größer sei. So ist z. B. $\sqrt[4]{5}>\sqrt[6]{11}$; weil $\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{125}$, und $\sqrt[6]{11}=\sqrt[12]{121}$.

§. 161.

Wurzelgrößen werden addirt und subtrahirt, wenn man sie durch das gewöhnliche Additions- und Subtractionszeichen mit einander verbindet, und die etwa vorhandenen gleichartigen Glieder (nach §. 61) reducirt; zuweilen werden aber erst dann gleichartige Glieder erhalten, wenn man die Wurzelgrößen von gleicher Benennung (nach §. 158) abkürzt.

Beispiele.

$7\sqrt{8}+5\sqrt{8}=12\sqrt{8}=24\sqrt{2}$

$\sqrt{50}-\sqrt{18}=5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

$\sqrt[3]{16a^3b}+\sqrt{4a^2b}-\sqrt{a^2b}-\sqrt[3]{54a^3b}$

$=2a\sqrt[3]{2b}+2a\sqrt{b}-a\sqrt{b}-3a\sqrt[3]{2b}=a\sqrt{b}-a\sqrt[3]{2b}$

$2\sqrt{(16\sqrt{18})}-\sqrt{(12\sqrt{2})}=2\sqrt{(16.3\sqrt{2})}-\sqrt{(4.3\sqrt{2})}$

$=8\sqrt{(3\sqrt{2})}-2\sqrt{(3\sqrt{2})}=6\sqrt{(3\sqrt{2})}=6\sqrt{\sqrt{18}}=6\sqrt[4]{18}$

$3\sqrt[3]{(8+16\sqrt{5})}-2\sqrt[3]{(1+\sqrt{20})}$

$=3\sqrt[3]{8(1+2\sqrt{5})}-2\sqrt[3]{(1+\sqrt{4.5})}$

$=6\sqrt[3]{(1+2\sqrt{5})}-2\sqrt[3]{(1+2\sqrt{5})}=4\sqrt[3]{(1+2\sqrt{5})}.$

§. 162.

Sind Wurzelgrößen mit einander zu multipliciren, so müssen sie zuerst auf gleiche Benennung gebracht werden; dann multiplicire man sowohl die Größen unter dem Zeichen, als auch die Factoren vor dem Zeichen mit einander; es ist nemlich

$$a\sqrt[m]{b}\,.\,c\sqrt[n]{d} = ab^{\frac{1}{m}}.cd^{\frac{1}{n}} = acb^{\frac{n}{mn}}\,d^{\frac{m}{mn}} = ac\sqrt[mn]{b^n}\,.\,\sqrt[mn]{d^m}$$

$$= ac\sqrt[mn]{(b^n\,d^m)}.$$

Beispiele.

$3\sqrt{6}.4\sqrt{2} = 12\sqrt{12} = 24\sqrt{3}$

$5\sqrt[3]{3}.\sqrt[6]{6} = 5\sqrt[6]{9}\,.\,\sqrt[6]{216} = 5\sqrt[6]{1944}$

$\sqrt[4]{20}.6\sqrt{3} = \sqrt{\sqrt{20}}.6\sqrt{3} = \sqrt{(2\sqrt{5})}.6\sqrt{3} = 6\sqrt{(6\sqrt{5})}$

$3\sqrt{(2\sqrt[3]{10})}.2\sqrt{(5\sqrt[3]{100})} = 6\sqrt{(10\sqrt[3]{1000})} = 6\sqrt{10.10} = 60.$

Dieses Verfahren gilt auch, wenn einer oder beide Factoren mehrnamig sein sollten.

$2\sqrt{3}.(6-\sqrt{7}) = 12\sqrt{3} - 2\sqrt{21}$

$a\sqrt{bc}.(3\sqrt{ab}-\sqrt{c}) = 3a\sqrt{ab^2c} - a\sqrt{bc^2} = 3ab\sqrt{ac} - ac\sqrt{b}$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b}).(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = \sqrt{a^2} - \sqrt{ab} + \sqrt{ab} - \sqrt{b^2} = a-b$

$5\sqrt{2}.3\sqrt{(4+6\sqrt{2})} = 15\sqrt{(8+12\sqrt{2})} = 30\sqrt{(2+3\sqrt{2})}$

$3\sqrt{(2+4\sqrt[3]{3})}\,.\,4\sqrt{(6+2\sqrt[3]{9})}$

$= 12\sqrt{(12+4\sqrt[3]{9}+24\sqrt[3]{3}+8\sqrt[3]{27})}$

$= 12\sqrt{(36+4\sqrt[3]{9}+24\sqrt[3]{3})}$

$= 12\sqrt{(9.4+4\sqrt[3]{9}+6.4\sqrt[3]{3})}$

$= 24\sqrt{[9+(6+\sqrt[3]{3})\sqrt[3]{3}]}.$

§. 163.

Bei der Division der Wurzelgrößen bringe man sie ebenfalls auf gleiche Benennung, schreibe dann den Divisor unter den Dividend in Gestalt eines Bruches, und kürze ihn ab.

Beispiele.

$\sqrt{12}:\sqrt{3} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$

$$(\sqrt{72}-\sqrt{32}):\sqrt{8}=\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}}-\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{72}{8}}-\sqrt{\frac{32}{8}}$$

$$=\sqrt{9}-\sqrt{4}=1.$$

$$2\sqrt{6}:3\sqrt[3]{9}=\frac{2\sqrt[6]{216}}{3\sqrt[6]{81}}=\tfrac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{216}{81}}=\tfrac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{8}{3}}$$

$$\sqrt{(a^2-x^2)}:(a+x)=\frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{\sqrt{(a+x)^2}}=\sqrt{\frac{a^2-x^2}{(a+x)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(a+x)(a-x)}{(a+x)^2}}=\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}=\frac{\sqrt{(a-x)}}{\sqrt{(a+x)}}$$

$$9:\sqrt[3]{6}=\frac{9}{\sqrt[3]{6}}=\frac{\sqrt[3]{9^3}}{\sqrt[3]{6}}=\sqrt[3]{\frac{729}{6}}=\sqrt[3]{\frac{243}{2}}=\tfrac{3}{2}\sqrt[3]{36}.$$

Besteht der Nenner aus zwei Gliedern, und es erscheinen blose Quadratwurzeln darin, wie sich der Fall in der Geometrie öfters ereignen wird; so kann derselbe rational gemacht werden, wenn man im Nenner das Zeichen eines Gliedes ändert, und mit diesem geänderten Nenner sowohl den Zähler als den Nenner des Bruches multiplicirt; so ist

$$\frac{b}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}=\frac{b(\sqrt{a}-\sqrt{x})}{(\sqrt{a}+\sqrt{x})(\sqrt{a}-\sqrt{x})}=\frac{b\sqrt{a}-b\sqrt{x}}{a-x}$$

$$\frac{3+\sqrt{7}}{4-\sqrt{6}}=\frac{(3+\sqrt{7})(4+\sqrt{6})}{(4-\sqrt{6})(4+\sqrt{6})}=\frac{12+3\sqrt{6}+4\sqrt{7}+\sqrt{42}}{10}$$

$$\frac{8}{\sqrt{(3-\sqrt{5})}}=\frac{8\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{3-\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{(3-\sqrt{5})}(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$$

$$=\frac{24\sqrt{(3-\sqrt{5})}+8\sqrt{(15-5\sqrt{5})}}{9-5}$$

$$=6\sqrt{(3-\sqrt{5})}+2\sqrt{(15-5\sqrt{5})}.$$

Wäre der Nenner dreinamig, so ändere man die Zeichen von zwei Gliedern des Nenners, und multiplicire mit diesem geänderten Nenner sowohl den Zähler als den Nenner des Bruches; dadurch erhält man einen zweinamigen Nenner, den man wieder wie vorhin rational machen kann. Z. B.

$$\frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{10}}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{(2\sqrt{6}+3\sqrt{10})(3\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(3\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(3\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}$$
$$=\frac{12\sqrt{3}+18\sqrt{5}-9\sqrt{2}+\sqrt{30}}{10+2\sqrt{15}}$$
$$=\frac{(12\sqrt{3}+18\sqrt{5}-9\sqrt{2}+\sqrt{30})(10-2\sqrt{15})}{(10+2\sqrt{15})(10-2\sqrt{15})}$$
$$=\frac{7\sqrt{30}+27\sqrt{5}-15\sqrt{3}-30\sqrt{2}}{10}.$$

Und auf eine ähnliche Art könnte man auch verfahren, wenn der Nenner mehr Glieder haben sollte.

§. 164.

Die Multiplication und Division der imaginären Größen geschieht zwar nach denselben Regeln, wie die der übrigen Wurzelgrößen; man pflegt aber gewöhnlich die Multiplication der Größen unter dem Wurzelzeichen nicht wirklich zu verrichten, sondern nur anzudeuten, damit man jederzeit vor Augen habe, daß die Wurzel aus dem Producte negativ genommen werden muß. So ist z. B.

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=\sqrt{(-a\times-a)}=\sqrt{(-a)^2}=-a.$$

Würde man aber die Multiplication wirklich verrichten, so wäre $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=\sqrt{+a^2}=+a$, obschon augenscheinlich hier nicht $+a$ angenommen werden darf, weil die Wurzel hieraus $\sqrt{+a}$, und nicht $\sqrt{-a}$ gibt, wie es doch sein sollte. Eben so ist auch

$$a\sqrt{-b}\,.\,c\sqrt{-d}=ac\sqrt{(-b\times-d)}=ac\times-\sqrt{bd}=-ac\sqrt{bd},$$

wo die Quadratwurzel aus bd wieder negativ zu nehmen ist, weil das Product aus zwei negativen Factoren entstanden ist. Überhaupt ist es nur damals willkürlich, die Wurzel eines geraden Exponenten aus einer Größe positiv, oder negativ zu nehmen (§. 119, II), wenn es noch unbestimmt ist, aus welchen Factoren, positiven oder negativen, das Product entstanden sei. Ist es hingegen bestimmt, daß das Product aus zwei negativen Factoren entstanden sei, wie es bei $\sqrt{(-b\times-d)}$ der Fall ist, so muß auch die Wurzel negativ genommen werden, nemlich $\sqrt{(-b\times-d)}=-\sqrt{bd}$; und so müßte auch umgekehrt die Wurzel, $+\sqrt{bd}$, positiv genommen werden, wenn es bekannt wäre, daß das Product bd bei $\sqrt{(+b\times+d)}$ aus positiven Factoren entstanden ist.

Um sich vor Irrungen zu sichern, ist es wohl am rathsamsten, die unter dem Wurzelzeichen eines geraden Wurzel-Exponenten stehenden negativen Zahlen in zwei Factoren, von denen der eine -1 ist, aufzulösen, beiden das Wurzelzeichen vorzusetzen, und wenn es angeht, aus dem andern Factor wirklich die Wurzel zu ziehen. So wird man $\sqrt{a}.\sqrt{-1}$ statt $\sqrt{-a}$, $2\sqrt{-1}$ statt $\sqrt{-4}$ schreiben. Da bei dieser Gestaltung der imaginären Zahlen in vorzunehmenden Multiplicationen beliebig vieler Factoren nur die imaginäre Zahl $\sqrt{-1}$ mit sich selbst mehrmal zu multipliciren sein wird; so hat man nur folgende Potenzen von $\sqrt{-1}$ zu bemerken.

$$(\sqrt{-1})^1 = \sqrt{-1},\ (\sqrt{-1})^2 = -1,\ (\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2 \times \sqrt{-1} = -\sqrt{-1},\ (\sqrt{-1})^4 = [(\sqrt{-1})^2]^2 = (-1)^2 = 1;$$

da man, wenn eine höhere Potenz als die 4te verlangt werden sollte, von dem Exponenten, so oft es angeht, offenbar blos 4 Einheiten wegwerfen wird.

Beispiele.

$$a\sqrt{-bd}.c\sqrt{-d} = a\sqrt{bd}.\sqrt{-1} \times c\sqrt{d}.\sqrt{-1} = ac\sqrt{bd^2}(\sqrt{-1})^2$$
$$= -acd\sqrt{b}$$

$$a\sqrt{bd}.c\sqrt{-d} = a\sqrt{bd} \times c\sqrt{d}.\sqrt{-1} = acd\sqrt{b}.\sqrt{-1}$$

$$(4+\sqrt{-3})(4-\sqrt{-3}) = (4+\sqrt{3}.\sqrt{-1})(4-\sqrt{3}.\sqrt{-1})$$
$$= 16+4\sqrt{3}.\sqrt{-1}-4\sqrt{3}.\sqrt{-1}+3 = 19$$

$$(\sqrt{2}+\sqrt{-2})(3+\sqrt{-6}) = (\sqrt{2}+\sqrt{2}.\sqrt{-1})(3+\sqrt{6}.\sqrt{-1})$$
$$= 3\sqrt{2}+3\sqrt{2}.\sqrt{-1}+2\sqrt{3}.\sqrt{-1}-2\sqrt{3}$$
$$= 3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})\sqrt{-1}$$

$$\sqrt{-ab} : \sqrt{a} = \sqrt{ab}.\sqrt{-1} : \sqrt{a} = \sqrt{b}.\sqrt{-1}$$

$$\sqrt{-ab} : \sqrt{-b} = \sqrt{ab}.\sqrt{-1} : \sqrt{b}.\sqrt{-1} = \sqrt{a}$$

$$\frac{-3+\sqrt{-5}}{3+\sqrt{-5}} = \frac{(-3+\sqrt{5}.\sqrt{-1})(3-\sqrt{5}.\sqrt{-1})}{(3+\sqrt{5}.\sqrt{-1})(3-\sqrt{5}.\sqrt{-1})}$$
$$= \frac{-9+3\sqrt{5}.\sqrt{-1}+3\sqrt{5}.\sqrt{-1}+5}{9+5} = \frac{-4+6\sqrt{5}.\sqrt{-1}}{14}$$
$$= \frac{-2+3\sqrt{5}.\sqrt{-1}}{7}$$

$$(-1+\sqrt{-3})(-1-\sqrt{-3}) = (-1+\sqrt{3}.\sqrt{-1})(-1-\sqrt{3}.\sqrt{-1})$$
$$= 1+3 = 4$$

$(-1+\sqrt{-3})^3=(-1+\sqrt{3}.\sqrt{-1})^3$
$=-1+3\sqrt{3}.\sqrt{-1}+9-3\sqrt{3}.\sqrt{-1}=8$
$(-1-\sqrt{-3})^3=(-1-\sqrt{3}.\sqrt{-1})^3$
$=-1-3\sqrt{3}.\sqrt{-1}+9+3\sqrt{3}.\sqrt{-1}=8.$

§. 165.

Wurzelgrößen werden zu Potenzen erhoben, wenn man die Größen außer und unter dem Zeichen nach dem angegebenen Exponenten zur Potenz erhebt; nemlich $(a\sqrt[m]{b})^n = a^n\sqrt[m]{b^n}$.

Denn es ist $(a\sqrt[m]{b})^n = (ab^{\frac{1}{m}})^n$ (vermög §. 129) $= a^n b^{\frac{n}{m}}$ (vermög §. 128) $=a^n\sqrt[m]{b^n}$ (vermög §. 156). So ist z. B.

$(3\sqrt[3]{2b})^2 = 9\sqrt[3]{4b^2}$; $(\sqrt{3a^2})^3=\sqrt{27a^6}$;

$[(3\sqrt{(a^2-x^2)}]^3=27\sqrt{(a^2-x^2)^3}$

$=27\sqrt{(a^2-x^2)^2.(a^2-x^2)}=27.(a^2-x^2)\sqrt{(a^2-x^2)}$.

Wäre nun eine Wurzelgröße auf die Potenz des Wurzel-Exponenten zu erheben, so erhebe man nur die Größe außer dem Zeichen, und multiplicire dies mit der Größe unter dem Zeichen. So ist z. B.

$(a\sqrt[m]{b})^m= a^m\sqrt[m]{b^m}=a^m.b=a^mb$

$(4\sqrt[3]{2})^3=64.2=128$; $(a\sqrt{b})^2=a^2b$

$(3\sqrt{-3})^2=-27$; $(-3\sqrt{-3})^2=-27$

$(1+\frac{1}{2}\sqrt{5})^2=1+\sqrt{5}+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}+\sqrt{5}$

$(2-\sqrt{2})^3=8-12\sqrt{2}+12-\sqrt{8}=20-14\sqrt{2}$

$(\sqrt[3]{x}-\sqrt{y})^2=\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[6]{(x^2y^3)}+y.$

§. 166.

Und umgekehrt wird aus einer Wurzelgröße wieder eine andere Wurzel gezogen, wenn man aus der Größe vor dem Zeichen, und aus der Größe unter dem Zeichen die verlangte Wurzel zieht; was jedoch kürzer geschehen kann, wenn man vorher die Größe vor dem Zeichen (nach §. 159) unter das Zeichen wirft, und dann den Wurzel-Exponenten der gegebenen Größe mit dem Exponenten der gesuchten Wurzel multiplicirt. So ist z. B.

$$\sqrt[m]{(a\sqrt[n]{b})} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n b}} = \sqrt[m]{a^{\frac{n}{n}} b^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{n}{mn}} b^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a^n b}$$

$$\sqrt[3]{(2\sqrt{120})} = \sqrt[3]{\sqrt{960}} = \sqrt[6]{960} = \sqrt[6]{64.15} = 2\sqrt[6]{15}$$
$$= 2\sqrt{\sqrt[3]{15}}.$$

§. 167.

Da die Größen mit gebrochenen Exponenten als Wurzelgrößen vorgestellt werden können (§. 156), so sind die gefundenen Regeln für die Rechnungsarten mit Wurzelgrößen auch für die Größen mit gebrochenen Exponenten anwendbar; nemlich es ist

$$p^{\frac{a}{n}} \cdot p^{\frac{b}{m}} = \sqrt[n]{p^a} \cdot \sqrt[m]{p^b} = \sqrt[mn]{p^{am}} \cdot \sqrt[mn]{p^{bn}} = \sqrt[mn]{p^{am} \cdot p^{bn}}$$
$$= \sqrt[mn]{p^{am+bn}} = p^{\frac{am+bn}{mn}} = p^{\frac{a}{n}+\frac{b}{m}}$$

$$p^{\frac{a}{n}} : p^{\frac{b}{m}} = \frac{\sqrt[n]{p^a}}{\sqrt[m]{p^b}} = \sqrt[mn]{\frac{p^{am}}{p^{bn}}} = \sqrt[mn]{p^{am-bn}} = p^{\frac{a}{n}-\frac{b}{m}}.$$

Woraus zu ersehen ist, daß die gegebenen allgemeinen Regeln (§. 63, Nr. 5) für die Multiplication, und (§. 65, Nr. 3) für die Division, auch für die Größen mit gebrochenen Exponenten Statt finden.

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^m} = \sqrt[n]{a^{\frac{pm}{q}}} = a^{\frac{pm}{qn}}$$

$$\sqrt[\frac{m}{n}]{a^{\frac{p}{q}}} = \sqrt[m]{a^{\frac{pn}{q}}} = a^{\frac{pn}{qm}} = a^{\frac{q}{p}:\frac{m}{n}}.$$

Wodurch wieder die (im §. 128 und 129) für die Erhebung zu Potenzen, und Ausziehung der Wurzeln gegebenen Regeln auch für die gebrochenen Exponenten bestätigt werden.

Einige Beispiele zur Übung.

$$2a^{\frac{1}{2}}(ab-3a^{\frac{2}{3}})=2a^{\frac{3}{2}}b-6a^{\frac{7}{6}}$$

$$(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+3a^{-\frac{1}{2}}b)(2a^{\frac{1}{2}}-b^{-\frac{2}{3}})=2a^{\frac{5}{6}}b^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{-1}$$
$$+6b-3a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$$

$$(ax^2-x^{-\frac{2}{3}}):x^{\frac{1}{2}}=ax^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{7}{6}}$$

$$(2ax^{-3}-bx^{-\frac{3}{2}}):ax^{-\frac{2}{3}}=2x^{-\frac{7}{3}}-a^{-1}bx^{-\frac{5}{6}}$$

$$(a^{\frac{1}{2}}x^{-1}-3x^{\frac{2}{3}})^2=ax^{-2}-6a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}}+9x^{\frac{4}{3}}.$$

§. 168.

Es wird in der Folge sehr oft nothwendig sein, bei einer zusammengesetzten Potenz, eine Größe aus einem Gliede unter dem Zeichen (innerhalb den Klammern), hinweg zu schaffen; z. B. es wird bei der Größe $(a^m+bx^n)^p$ verlangt, die Größe x^n aus dem zweiten Gliede hinweg zu bringen. Dieses kann auf folgende Art geschehen: Man dividire alle Glieder unter dem Zeichen durch diejenige Größe, welche man aus einem Gliede hinweg schaffen will, und setze eben diese Größe, auf die Potenz des gemeinschaftlichen Exponenten erhoben, als Factor außer dem Zeichen an; nemlich

$$(a^m+bx^n)^p=x^{np}\left(\frac{a^m+bx^n}{x^n}\right)^p=x^{np}(a^mx^{-n}+b)^p.$$

Denn $(a^m+bx^n)^p=\dfrac{(a^m+bx^n)^p}{(x^n)^p}\cdot(x^n)^p=\left(\dfrac{a^m+bx^n}{x^n}\right)^p\cdot(x^n)^p$

$$=x^{np}(a^mx^{-n}+b)^p.$$

Eben so ist $x(a^3x-ax^2)^{\frac{3}{2}}=x.(x^2)^{\frac{3}{2}}(a^3x^{-1}-a)^{\frac{3}{2}}=x^4(a^3x^{-1}-a)^{\frac{3}{2}}.$

Ingleichen $(ay^{\frac{3}{2}}+a^3y)^{-\frac{2}{3}}=(ay^{\frac{3}{2}})^{-\frac{2}{3}}(1+a^2y^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{3}}$

$$=a^{-\frac{2}{3}}y^{-1}(1+a^2y^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{3}}.$$

Und umgekehrt kann bei einer (durch Klammern angezeigten) Potenz einer zusammengesetzten Größe, jeder außer dem Zeichen (außer den Klammern) befindliche Factor hineingeschafft werden, wenn man den Exponenten dieses Factors durch den gemeinschaftlichen Exponenten dividirt, und mit diesem geänderten Factor jedes Glied unter dem Zeichen multiplicirt. So ist z. B.

$$y^p(a^m+bx^n)^q=(y^{\frac{p}{q}})^q.(a^m+bx^n)^q=\left[y^{\frac{p}{q}}.(a^m+bx^n)\right]^q$$
$$=\left(a^m y^{\frac{p}{q}}+bx^n y^{\frac{p}{q}}\right)^q$$

$$x^{-\frac{2}{3}}(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}=\left[x^{-\frac{4}{3}}.(ax-x^2)\right]^{\frac{1}{2}}=(ax^{-\frac{1}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$$

$$ax^{-\frac{1}{2}}(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}=\left[a^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}.(a^2+x^2)\right]^{-\frac{3}{2}}=(a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}})^{-\frac{3}{2}}.$$

§. 169.

Die bisher erworbenen algebraischen Kenntnisse setzen uns in den Stand, in der Zerfällung mehrgliedriger algebraischer Ausdrücke in Factoren, welche wir in §. 69, h begannen, weiter vorzuschreiten.

I. Zunächst lassen sich alle zweitheiligen Ausdrücke, deren Glieder Potenzen nach einerlei positiven und ganzen Exponenten sind, in zwei Factoren auflösen, von denen wenigstens einer zweigliedrig ist. Bedeutet nemlich n eine ganze positive, a und b aber jede beliebige Zahl, so hat man die Differenz

$$a^n-b^n=a^n-a^{n-1}b+a^{n-1}b-a^{n-2}b^2+a^{n-2}b^2\ \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots-a^2b^{n-2}+a^2b^{n-2}-ab^{n-1}+ab^{n-1}-b^n,$$

weil es erlaubt ist, die Glieder $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b^2$, ... ab^{n-1}, abzuziehen und wieder hinzuzugeben; folglich, wenn man nach §. 69, h, aus jeden zwei nach einander folgenden Gliedern ihren gemeinschaftlichen Factor heraushebt,

$$a^n-b^n=a^{n-1}(a-b)+a^{n-2}b(a-b)+a^{n-3}b^2(a-b)+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+ab^{n-2}(a-b)+b^{n-1}(a-b),$$

oder endlich, weil alle Glieder den Factor $a-b$ besitzen,

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

Hiernach ist es leicht, auch die Summe a^n+b^n in zwei Factoren aufzulösen; denn offenbar ist $b^n = -(-b^n)$, oder $= -(b^n.-1)$, oder (nach §. 168) $= -(b\sqrt[n]{-1})^n$, daher wird $a^n+b^n = a^n-(b\sqrt[n]{-1})^n$, und somit erhält man nach dem Vorhergehenden

$$a^n+b^n=(a-b\sqrt[n]{-1})\left[a^{n-1}+a^{n-2}(b\sqrt[n]{-1})+\ldots\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\ldots+a(b\sqrt[n]{-1})^{n-2}+(b\sqrt[n]{-1})^{n-1}\right].$$

Lassen sich in einzelnen Fällen die Zahlen a und b selbst wieder als Potenzen desselben Ranges darstellen, so wird der erste der gefundenen zwei Factoren auf dieselbe Weise noch ferner aufgelöst werden können.

Besonders oft vorkommende Ausdrücke sind jene, in denen zweite, dritte und vierte Potenzen erscheinen, also $n=2$, 3 oder 4 ist.

Dem gemäß beachten wir folgende, aus obigen allgemeinen leicht abzuleitende, besondere Fälle.

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$
$$a^2+b^2=(a-b\sqrt{-1})(a+b\sqrt{-1})$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^4-b^4=(a^2)^2-(b^2)^2=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$$
$$=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$$
$$=(a-b)(a+b)(a-b\sqrt{-1})(a+b\sqrt{-1}).$$

Von diesen Ausdrücken sagt der erste, nemlich

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$

daß die Differenz zweier Quadrate dem Producte der Summe und Differenz ihrer Wurzeln gleich ist, wofern die Wurzel des Subtrahends auch als Subtrahend genommen wird.

Beispiele.

$$a^2-x^2=(a+x)(a-x)$$
$$x^2-1=(x+1)(x-1)$$
$$a^4-y^2=(a^2)^2-y^2=(a^2+y)(a^2-y).$$

II. Zuweilen sollen in algebraischen Rechnungen dreigliedrige, nach einem Buchstaben, von welchem keine höhere Potenz als die zweite vorkommt, geordnete Ausdrücke (quadratische Trinome), welche daher die allgemeine Form ax^2+bx+c besitzen, in Factoren zerlegt werden. Zu diesem Zwecke kann man diesen Ausdruck mit $4a$ multipliciren und dividiren, wodurch er in

$$\frac{4a^2x^2+4abx+4ac}{4a}$$

übergeht. Bedenkt man ferner, daß die beiden ersten Glieder des Zählers die zwei Anfangsglieder der zweiten Potenz

$$4a^2x^2+4abx+b^2$$

des zweitheiligen Ausdruckes $2ax+b$ sind (§. 130), so hat man, indem man b^2 im Zähler addirt und subtrahirt,

$$ax^2+bx+c=\frac{4a^2x^2+4abx+b^2-b^2+4ac}{4a},\text{ oder (nach §. 130)}$$

$$=\frac{(2ax+b)^2-(b^2-4ac)}{4a},\text{ oder (nach §. 117)}$$

$$=\frac{(2ax+b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a};\text{ also ist (nach I.)}$$

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}(2ax+b+\sqrt{b^2-4ac})(2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}).$$

Es läßt sich jedoch bei dieser Zerlegung in Factoren auch auf folgende, nunmehr leicht verständliche Weise verfahren.

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\text{ oder}$$

$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right),\text{ oder (nach §. 130)}$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)\right],\text{ daher}$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}\right)^2\right],\text{ und (nach I.)}$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}\right).$$

Ist hier insbesondere $b^2=4ac$, also $b=2\sqrt{ac}$, so ist ax^2+bx+c eine vollständige zweite Potenz, nemlich

$$ax^2+bx+c=ax^2+2x\sqrt{ac}+c$$
$$=\frac{1}{4a}(2ax+2\sqrt{ac})(2ax+2\sqrt{ac})$$
$$=\frac{1}{4a}.2\sqrt{a}(x\sqrt{a}+\sqrt{c}).2\sqrt{a}(x\sqrt{a}+\sqrt{c})$$
$$=(x\sqrt{a}+\sqrt{c})^2.$$

Beispiele.

$$2y^2+3y+1=\frac{16y^2+24y+8}{8}=\frac{16y^2+24y+9-9+8}{8}$$
$$=\frac{(4y+3)^2-1}{8}=\frac{(4y+3-1)(4y+3+1)}{8}$$
$$=\frac{(4y+2)(4y+4)}{8}=(2y+1)(y+1)$$

$$x^2\pm3x+2=x^2\pm3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+2$$
$$=\left(x\pm\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=\left(x\pm\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=\left(x\pm\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x\pm\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=(x\pm1)(x\pm2)$$

$$2n^2+3mn+3m-2=\frac{1}{8}(16n^2+24mn+24m-16)$$
$$=\frac{1}{8}(4n+3m-3m+4)(4n+3m+3m-4)$$
$$=(n+1)(2n+3m-2)$$

$$2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$$
$$=-a^4+2a^2(b^2+c^2)-b^4+2b^2c^2-c^4$$
$$=-1.\left[a^4-2a^2(b^2+c^2)+b^4-2b^2c^2+c^4\right]$$
$$=-(a^2-b^2-c^2+2bc)(a^2-b^2-c^2-2bc)$$
$$=\left[a^2-(b^2-2bc+c^2)\right](b^2+2bc+c^2-a^2)$$
$$=(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)(b+c+a)$$
$$=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

Viertes Hauptstück.

Von den Verhältnissen und Proportionen nebst ihrer Anwendung auf die Beantwortung verschiedener Rechnungsfragen.

I. Abschnitt.

Von den Verhältnissen.

§. 170.

Das Ergebniß der Vergleichung zweier gleichnamigen Größen gegen einander nennt man ein Verhältniß; und insbesondere heißt das Ergebniß derjenigen Vergleichung, in welcher untersucht wird, um wie viel die eine Größe die andere übersteigt, ein arithmetisches Verhältniß; das Resultat der Vergleichung zweier Größen hingegen, wo man untersucht, wie vielmal, oder wie oft die eine Größe in der andern enthalten ist, wird ein geometrisches Verhältniß genannt. Um wie viel eine Größe eine andere übersteigt, ergibt sich, wenn man ihre Differenz durch die Subtraction der letztern von der erstern bestimmt; hingegen findet man, wie oft die eine Größe in der andern enthalten ist, wenn man diese durch jene dividirt, das ist, wenn man ihren Quotienten aufsucht. Die Differenz bei einem arithmetischen Verhältnisse heißt sonst auch der Name des Verhältnisses, und der Quotient bei einem geometrischen Verhältnisse der Exponent des Verhältnisses.

Das arithmetische Verhältniß zweier Größen, z. B. a und b, kann durch $a-b$, und jenes von 39 und 13, durch $39-13$, und das geometrische Verhältniß eben dieser zwei Paar Größen durch $a:b$, $39:13$, oder durch $\frac{a}{b}$, $\frac{39}{13}$ bezeichnet werden; es wird ausgesprochen: a verhält sich zu b, oder auch abgekürzt, a zu b. Die zuerst angesetzte Größe heißt das erste Glied, oder der Vorsatz, und die folgende Größe das zweite Glied, oder der Nachsatz des Verhältnisses. Ist das zweite Glied eines Verhältnisses größer als das erste, so kann das Verhältniß steigend heißen; im Gegentheile ist es ein fallendes Verhältniß, wenn das zweite Glied kleiner ist als das erste. Bei einem fallenden Verhältnisse ergibt sich die absolute Größe der Differenz, wenn man vom ersten Gliede das zweite abzieht, und so auch der absolute Werth des Quotienten, wenn man das erste Glied durch das zweite dividirt. Bei steigenden Verhältnissen ist es umgekehrt; jedoch ist es erlaubt, auch bei jedem steigenden Verhältnisse die Differenz, und den Quotienten so zu bestimmen, daß man immer vom ersten Gliede das zweite abzieht, und so auch immer nur das erste durch das zweite dividirt, wornach aber in einem solchen Falle die Differenz negativ, und der Quotient ein echter Bruch sein muß. Die Differenz eines arithmetischen Verhältnisses wird daher immer in der Folge durch die Subtraction des zweiten Gliedes vom ersten, und der Quotient eines geometrischen Verhältnisses mittels der Division des ersten Gliedes durch das zweite bestimmt werden. So sind bei den arithmetischen Verhältnissen $39-13$; $15-14$; $12-20$ die Differenzen 26; 1; -8; und bei den geometrischen Verhältnissen $36:12$; $21:14$; $8:18$ sind die Quotienten 3; $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{9}$.

§. 171.

Gleiche arithmetische Verhältnisse sind solche, welche gleiche Differenzen, und gleiche geometrische Verhältnisse sind jene, welche gleiche Quotienten, in der §. 170 angeführten Bedeutung genommen, haben; so sind $15-8$; $10-3$; $8-1$

gleiche arithmetische Verhältnisse, wegen der gleichen Differenz 7; eben so sind 8 : 1; 80:10; 24:3 gleiche geometrische Verhältnisse, wegen des gleichen Quotienten 8; hingegen 8:3, und 9:24 sind keineswegs gleiche Verhältnisse, weil der Quotient im ersten Falle $\frac{8}{3}$ und im zweiten $\frac{3}{8}$ ist.

Es wird nemlich bei der Bestimmung der Größe eines Verhältnisses, bei einem arithmetischen nur auf die Differenz, und bei einem geometrischen Verhältnisse blos auf den Quotienten gesehen, die Glieder mögen sonst wie immer beschaffen sein. Wenn man daher bei zwei oder mehreren Verhältnissen darthun kann, daß sie entweder gleiche Differenzen, oder gleiche Quotienten haben, so sind sie im ersten Falle gleiche arithmetische, im zweiten gleiche geometrische Verhältnisse. Auch ist es einleuchtend, daß zwei Verhältnisse einander gleich sein müssen, wenn jedes einem und dem nemlichen dritten Verhältnisse gleich ist.

§. 172.

Jedes arithmetische Verhältniß kann durch $(a+d)-a$ vorgestellt werden.

Denn jedes zweite Glied eines arithmetischen Verhältnisses kann durch a, und die Differenz, sie möge positiv oder negativ sein, durch d ausgedrückt werden; da nun diese Differenz zum Vorschein kommt, wenn man das zweite Glied von dem ersten subtrahirt, so muß auch das erste Glied zum Vorschein kommen, wenn man das zweite Glied zu der Differenz addirt; es muß also das erste Glied des arithmetischen Verhältnisses $a+d$, und folglich das Verhältniß selbst $(a+d)-a$ sein, wenn man für das zweite Glied a, und für die Differenz d annimmt.

§. 173.

Jedes geometrische Verhältniß kann durch $aq:a$ vorgestellt werden.

Denn das zweite Glied kann man durch a, und den Quotienten eines jeden geometrischen Verhältnisses, er möge eine ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale Zahl sein, durch q ausdrücken. Nun muß der Quotient zum Vorschein kommen, wenn man das erste Glied durch das zweite dividirt; es muß also auch das erste Glied zum

Vorschein kommen, wenn man das zweite Glied mit dem Quotienten multiplicirt (§. 36); folglich muß das erste Glied des geometrischen Verhältnisses aq, und das Verhältniß selbst $aq : a$ sein, wenn man für das zweite Glied a, und für den Quotienten q annimmt.

§. 174.

Ein arithmetisches Verhältniß bleibt ungeändert, wenn man von beiden Gliedern Gleiches abzieht, oder zu beiden Gleiches hinzu addirt.

Denn wenn man in der allgemeinen Formel $(a+d)-a$ zu beiden Gliedern p hinzu addirt, so hat man $(a+d+p)-(a+p)$; oder wenn man von beiden p abzieht, so erhält man $(a+d-p)-(a-p)$, wo jedes wieder die nemliche Differenz d hat; und daher ist

$$(a+d)-a=(a+d+p)-(a+p)=(a+d-p)-(a-p).$$

Ein geometrisches Verhältniß bleibt ungeändert, wenn man das erste und zweite Glied mit einer und der nemlichen Zahl multiplicirt, oder auch beide durch dieselbe Zahl dividirt.

Denn aus $aq{:}a$ wird $aqm{:}am$ durch die Multiplication mit m, und $\frac{aq}{n}{:}\frac{a}{n}$ durch die Division mit n; und es ist $aq{:}a=aqm{:}am$, wie auch $aq{:}a=\frac{aq}{n}{:}\frac{a}{n}$, weil bei jedem dieser drei Verhältnisse der nemliche Quotient q Statt findet, und aus der Gleichheit der Quotienten auch die Gleichheit der Verhältnisse sich ergibt (§. 171).

Es kann daher öfters ein geometrisches Verhältniß, dessen Glieder große Zahlen sind, viel einfacher dargestellt werden, wenn man beide Glieder durch eine und die nemliche Zahl dividirt. Durch die kleinsten Zahlen wird demnach ein Verhältniß dargestellt werden, wenn man seine beiden Glieder durch ihr größtes gemeinschaftliches Maß (§. 69, g) dividirt. Z. B. statt des Verhältnisses 18:63 kann man schreiben 6:21, und am einfachsten 2:7.

Eben so kann auch ein geometrisches Verhältniß, worin ein Glied gebrochen ist, oder auch beide Glieder Brüche sind, zum leichteren Ueberblicke seiner Größe durch ganze Zahlen dargestellt werden, wenn man mit jedem Nenner, oder mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Nenner beide Glieder des Verhältnisses multiplicirt. Z. B. statt des Verhältnisses $\frac{2}{3} : 5$ kann man schreiben $2:15$, und statt $\frac{2}{3}:\frac{5}{4}$ kann man schreiben $8:15$.

Überhaupt finden alle Veränderungen, welche mit den Brüchen vorgenommen werden können, auch bei den geometrischen Verhältnissen Statt, weil jedes geometrische Verhältniß als ein Bruch angesehen werden kann, wovon das erste Glied der Zähler, und das zweite Glied der Nenner ist.

§. 175.

Das Verhältniß der Producte aus den ersten Gliedern zum Producte aus den zweiten Gliedern mehrerer geometrischer Verhältnisse heißt das zusammengesetzte Verhältniß dieser Verhältnisse. So ist z. B. von den Verhältnissen

$$\begin{array}{lrcl|rcl} & 12 & : & 3 & a & : & \alpha \\ & 48 & : & 6 & b & : & \beta \\ & 15 & : & 5 & c & : & \gamma \\ \hline \text{das zusammengesetzte Verhältniß} & 12.48.15 & : & 3.6.5 & abc & : & \alpha\beta\gamma. \\ \text{oder} & 8640 & : & 90. & & & \end{array}$$

§. 176.

Es folgt daraus, daß der Quotient des zusammengesetzten Verhältnisses dem Producte aus den Quotienten der einfachen zusammenzusetzenden Verhältnisse gleich sei. So ist von dem Verhältnisse $8640 : 90$ der Quotient 96, welcher dem Producte der Quotienten 4, 8, 3 der einzelnen Verhältnisse wirklich gleicht.

Sind nun die einfachen zusammenzusetzenden Verhältnisse einander gleich, so ist der Quotient des zusammengesetzten Verhältnisses jederzeit eine Potenz des Quotienten von einem der einfachen Verhältnisse; und zwar das Quadrat desselben, wenn zwei gleiche Verhältnisse, der Cubus, wenn drei gleiche Verhältnisse zusammengesetzt werden, u. s. w.

$$\begin{array}{rcl} aq & : & a \\ bq & : & b \\ cq & : & c \\ dq & : & d \\ \hline abcdq^4 & : & abcd \end{array}$$

Daher ist das aus mehreren gleichen Verhältnissen zusammengesetzte Verhältniß demjenigen Verhältnisse gleich, welches man erhält, wenn man beide Glieder eines der einfachen Verhältnisse auf die Potenz des Exponenten von der Anzahl der zusammenzusetzenden Verhältnisse erhebt. So ist im obigen Beispiele $abcdq^4 : abcd$ dem Verhältnisse $a^4q^4 : a^4$ gleich, weil jedes den Quotienten q^4 hat (§. 171). Man pflegt deßwegen auch die aus zwei, drei oder vier gleichen Verhältnissen zusammengesetzten Verhältnisse quadratische, cubische, biquadratische Verhältnisse zu nennen.

II. Abschnitt.

Von den Proportionen.

§. 177.

Eine Proportion ist die Gleichheit zweier Verhältnisse; und insbesondere wird die Gleichheit zweier arithmetischen Verhältnisse eine arithmetische, und die Gleichheit zweier geometrischen Verhältnisse eine geometrische Proportion genannt. Die zwei gleichen Verhältnisse werden durch das Gleichheitszeichen verbunden; so stellt $7-3=15-11$ eine arithmetische, und $12:4=21:7$, oder $\frac{12}{4}=\frac{21}{7}$ eine geometrische Proportion vor; beide werden ausgesprochen: 7 verhält sich zu 3, gleich wie sich 15 zu 11 verhält; 12 verhält sich zu 4, wie sich 21 zu 7 verhält; oder auch abgekürzt, 7 zu 3, wie 15 zu 11; 12 zu 4, wie 21 zu 7. Die erste Proportion sagt eigentlich: 7 übertrifft die Zahl 3 um eben so viel als 15 die Zahl 11; und der Sinn der geometrischen Proportion ist: 12 enthält in sich die Zahl 4 eben so oft, als 21 die Zahl 7. Die vier Glieder einer Proportion heißen insgesammt Proportionalglieder, und insbesondere werden das erste und vierte Glied der Proportion zusammen die äußern, das zweite und dritte aber die mittleren Glieder genannt.

Wenn in einer Proportion die zwei mittleren Glieder einander gleich sind, so wird sie eine **stetige** oder **zusammenhängende** Proportion genannt. So ist z. B. 4—7=7—10 eine stetige arithmetische, und 4:8=8:16 eine stetige geometrische Proportion.

Bei einer stetigen Proportion wird das vierte Glied die **dritte Proportionalgröße** genannt, weil eigentlich nur drei verschiedene Glieder in der Proportion vorhanden sind; eben deßwegen wird auch das zweite und dritte Glied die **mittlere Proportionalgröße** genannt.

Anmerkung. Die mathematischen Schriftsteller pflegen die Proportionen auf mancherlei Art vorzustellen: so bezeichnen einige die arithmetischen Proportionen mit 3.7 ÷ 11.15, oder auch 3 ÷ 7 = 11 ÷ 15, und die geometrischen Proportionen mit 4:12::7:21, oder auch 4.12 ∸ 7.21; die stetigen arithmetischen mit ÷ 4.7.10, und die stetigen geometrischen mit :: 4.8.16, oder auch 4:8:16. Wir werden aber in der Folge, um allen Irrthum zu vermeiden, uns immer der oben erwähnten Bezeichnungen bedienen.

§. 178.

Durch die Formel $(a+d)-a=(b+d)-b$ kann jede arithmetische Proportion vorgestellt werden.

Denn jede zwei gleichen arithmetischen Verhältnisse, welche zu einer arithmetischen Proportion erforderlich sind, können durch $(a+d)-a$, und $(b+d)-b$ vorgestellt werden; daher kann $(a+d)-a=(b+d)-b$ jede arithmetische Proportion vorstellen.

Soll nun die arithmetische Proportion stetig sein, so muß das dritte Glied mit dem zweiten a einerlei werden, woraus das vierte Glied $a-d$ folgt, wenn man (vermög §. 172) a um die Differenz d vermindert, so, daß daher jede stetige arithmetische Proportion auch insbesondere durch die Formel $(a+d)-a=a-(a-d)$ vorgestellt werden kann.

§. 179.

In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder der Summe der mittleren Glieder gleich.

Denn in der allgemeinen Formel $(a+d)-a=(b+d)-b$ ist offenbar die Summe der äußern Glieder der Summe der mittlern Glieder gleich; weil jede dieser Summen $=a+b+d$ ist; folglich

ist auch in jeder arithmetischen Proportion die Summe der äußern Glieder der Summe der mittlern gleich. So z. B. in der Proportion $7-3=15-11$ ist $3+15=7+11$; ingleichen in der Proportion $2-5=10-13$ ist $5+10=13+2$. Bei einer stetigen arithmetischen Proportion ist daher die Summe der äußern Glieder dem doppelten mittlern Gliede gleich; denn in der allgemeinen Formel $(a+d)-a=a-(a-d)$
ist $(a+d)+(a-d)=a+d+a-d=2a$.

§. 180.

Es kann daher sehr leicht zu drei gegebenen Größen einer arithmetischen Proportion das fehlende vierte Proportionalglied gefunden werden, wenn man, falls das unbekannte Glied ein äußeres ist, die zwei mittleren Glieder zusammen addirt, und das bekannte äußere davon abzieht; dagegen wird in den Fällen, wo ein mittleres Glied unbekannt ist, von der Summe der beiden äußern das bekannte mittlere abgezogen. Denn es sei a das gegebene erste Glied, b das zweite, c das dritte, und das vierte, welches gesucht werden soll, x, so ist $a-b=c-x$; folglich ist nach (§. 179) $a+x=b+c$, daher auch $x=b+c-a$, wenn man beiderseits a subtrahirt (§. 22, Grundsatz I). Z. B. soll zu den drei Gliedern 5, $7\frac{1}{2}$, $12\frac{1}{3}$ das vierte arithmetische Proportionalglied gefunden werden, so ist $5-7\frac{1}{2}=12\frac{1}{3}-x$, also $x+5=7\frac{1}{2}+12\frac{1}{3}$, und $x=7\frac{1}{2}+12\frac{1}{3}-5=19\frac{5}{6}-5=14\frac{5}{6}$, und die Proportion wird dann $5-7\frac{1}{2}=12\frac{1}{3}-14\frac{5}{6}$.

Sollte zu zwei gegebenen Größen die dritte arithmetische Proportionalgröße gefunden werden, so subtrahire man das erste Glied von dem doppelten mittlern Gliede, und diese Differenz ist das gesuchte dritte Proportionalglied. Denn es sei a das gegebene erste, b das mittlere, und x das zu findende dritte Proportionalglied, so ist $a-b=b-x$, daher $2b=a+x$, und $x=2b-a$.

Wäre endlich zwischen zwei gegebenen Gliedern das mittlere arithmetische Proportionalglied zu finden, so addire man die zwei gegebenen äußern Glieder, und dividire diese Summe durch 2. Denn es sei a das gegebene erste Glied, b das gegebene dritte Glied, und x das zu findende mittlere Proportionalglied, so ist $a-x=x-b$; daher findet man $a+b=2x$, und $x=\frac{a+b}{2}$, wenn man beiderseits durch 2 dividirt (§. 39, Grundsatz I). Z. B. es soll zwischen 3 und 9 die mittlere arithmetische Proportionalzahl gefunden werden, so ist selbe $=\frac{3+9}{2}=6$, und die Proportion ist $3-6=6-9$.

Anmerkung. Da die arithmetischen Verhältnisse und Proportionen von keinem erheblichen Nutzen sind, so wollen wir uns auch nicht länger dabei aufhalten, sondern sogleich zu den geometrischen Proportionen übergehen, welche in der Mathematik eine sehr große Anwendung haben. Auch wird in der Folge bei den geometrischen Verhältnissen und Proportionen das Beiwort geometrisch nicht mehr ausdrücklich angesetzt, sondern immer stillschweigend dabei verstanden werden, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich angesetzt ist.

§. 181.

Jede Proportion kann durch die allgemeine Formel $aq:a=bq:b$ vorgestellt werden.

Denn durch $aq:a$ und $bq:b$ können jede zwei gleichen Verhältnisse ausgedrückt werden; nun aber stellen zwei gleiche Verhältnisse eine Proportion vor, es kann demnach durch $aq:a=bq:b$ jede Proportion vorgestellt werden. Setzen wir nun $bq=a$, so ist $b=\frac{a}{q}$; und es kann demnach jede zusammenhängende Proportion durch $aq:a=a:\frac{a}{q}$ angezeigt werden.

§. 182.

In jeder Proportion ist das Product der äußern Glieder dem Producte der mittlern gleich.

Denn es ist in der allgemeinen Formel $aq:a=bq:b$ sowohl das Product der äußern, als auch das Product der mittlern Glieder $=abq$, daher muß auch in jeder Proportion das Product der äußern Glieder dem Producte der mittlern Glieder gleich sein. So z. B. in der Proportion $4:12=7:21$, ist $4.21=7.12$; in der Proportion $9:6=12:8$, ist $9.8=6.12$.

In einer stetigen Proportion ist daher das Quadrat des mittlern Gliedes gleich dem Producte der beiden äußern Glieder; denn in der Formel $aq:a=a:\frac{a}{q}$ ist $aq.\frac{a}{q}=a.a=a^2$.

§. 183.

Und nun sind wir auch im Stande, zu jeden drei gegebenen Gliedern einer Proportion das fehlende vierte Glied zu bestimmen. Ein unbekanntes $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{äußeres}}{\text{mittleres}}$ Glied der Proportion wird nemlich gefunden, wenn man das Product der $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{mittleren}}{\text{äußeren}}$ Glieder durch das bekannte $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{äußere}}{\text{mittlere}}$ dividirt.

Denn es sei a das gegebene erste Glied, b das zweite, c das dritte, und d das vierte Glied, so muß $a:b=c:d$ sein, daher ist $ad=bc$ (§. 182), folglich $a=\frac{bc}{d}$, $d=\frac{bc}{a}$, $b=\frac{ad}{c}$, $c=\frac{ad}{b}$ (§. 39, Gr. I.). Z. B. wenn zu 3, 5 und 12 das vierte Proportionalglied gefunden werden soll, so ist $3:5=12:x$, nemlich $x=\frac{5.12}{3}=20$.

Eben so aus $x:1{,}2=2{,}7:9$ folgt $x=\frac{1{,}2.2{,}7}{9}=1{,}2.0{,}3=0{,}36$,

aus $15:x=3:7$ ist $x=\frac{15.7}{3}=5.7=35$,

und $19:3=x:6$ gibt $x=\frac{6.19}{3}=2.19=38$.

§. 184.

Zu zwei gegebenen Größen wird daher das dritte Proportionalglied gefunden, wenn man das Quadrat des mittlern Gliedes durch das erste dividirt; denn wenn a das erste, b das mittlere, und x das zu findende dritte Proportionalglied ist, so ist $a:b=b:x$, und $b^2=ax$; folglich $x=\frac{b^2}{a}$.

Sollte endlich zwischen zwei gegebenen Größen die mittlere Proportionale gefunden werden, so ziehe man aus dem Producte der äußern Glieder die Quadratwurzel, welche das mittlere Glied sein wird. Denn sei a das erste, b das dritte, und x das zu suchende mittlere Glied, so ist $a:x=x:b$, folglich $x^2=ab$ (§. 182), und $x=\sqrt{ab}$ (§. 137, Grundsatz II). Z. B. es sollte zwischen 4 und 9 das mittlere Proportionalglied x gefunden werden, so ist $4:x=x:9$, nemlich $x^2=36$, und $x=6$; ingleichen aus $2:x=x:12$ folgt $x^2=24$, und $x=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$.

§. 185.

Wenn zwei Producte aus je zwei Factoren gleich sind, so stehen ihre Factoren dergestalt in einer Proportion, daß die zwei Factoren des einen Productes die beiden äußern, und die zwei Factoren des andern Productes die beiden innern Glieder der Proportion bilden.

Denn ist $ab=cd$, so ist auch $\frac{a}{c}=\frac{d}{b}$, wenn man beiderseits durch bc dividirt (§. 39, Grundsatz I); folglich sind die Verhältnisse $a:c$ und $d:b$ einander gleich, und $a:c=d:b$ ist eine richtige Proportion. Eben so ist auch $b:c=d:a$ eine richtige Proportion; denn die Quotienten $\frac{b}{c}$ und $\frac{d}{a}$, welche man erhält, wenn man die als gleich vorausgesetzten Producte ab und cd durch ac dividirt, sind einander gleich.

Daraus ist zu ersehen, daß man auch aus der Gleichheit der Producte der äußern und mittlern Glieder bei vier in Gestalt einer Proportion angesetzten Größen auf die Richtigkeit der Proportion schließen könne.

Beispiele.

Wenn $ax=bcy$, so ist $a:bc=y:x$,
" $abc=x^2$, so ist $ab:x=x:c$,
" $a=yx$, so ist $1:y=x:a$,
" $a^2+ab=ax-x^2$, so ist $a:x=a-x:a+b$.

§. 186.

Wir haben also zwei Kennzeichen, aus denen wir auf die Richtigkeit einer Proportion schließen können;

1tens aus der Gleichheit der Verhältnisse, das ist, aus der Gleichheit der Quotienten,

2tens aus der Gleichheit der Producte der äußern und mittlern Glieder.

Sobald demnach in der Folge eines dieser Kennzeichen bei vier Größen eintritt, so können wir versichert sein, daß selbe in einer Proportion stehen. Z. B.

Wenn $x=a$ und $y=b$ ist, so ist auch $x:y=a:b$; denn auch hier sind die Quotienten $\frac{x}{y}$ und $\frac{a}{b}$ einander gleich, wenn man $x=a$ durch $y=b$ dividirt (§. 39, Grundsatz I).

§. 187.

Mit den 4 Gliedern einer Proportion können nun verschiedene Verwandlungen vorgenommen werden, bei denen die Proportion doch noch richtig bleibt; und zwar, da z. B.

$aq:a=bq:b$, und $5:3=10.6$, so ist

I. Durch Verwechslung der gleichnamigen (äußern oder mittlern) Glieder.

$b:\ a=bq:aq$, $\quad 6:\ 3=10:5$,

$aq:bq=\ a:\ b$, $\quad 5:10=\ 3:6$.

II. Durch Umkehrung der Verhältnisse.

$a:aq=b:bq$, $\quad 3:5=6:10$.

III. Durch übereinstimmende Addition der Glieder.

$aq\ :\ a\ +aq=bq\ :\ b\ +bq$, $\quad 5\ :\ 8=10\ :\ 16$,

$a\ :\ aq+a=\ b\ :\ bq+b$, $\quad 3\ :\ 8=\ 6\ :\ 16$.

IV. Durch übereinstimmende Subtraction.

$a\ :\ aq\ -a=b\ :\ bq-b$, $\quad 3\ :\ 2=6\ :\ 4$,

$a\ -\ aq\ :\ a=b\ -bq:b$, $\quad -2\ :\ 3=-4\ :\ 6$,

$aq-a\ :\ aq\ =bq-b:bq$, $\quad 2\ :\ 5=4\ :\ 10$.

Die Verbindung von III und IV gibt

$a+aq\ :\ a\ -aq=b+bq\ :\ b\ -bq$, $\quad 8:-2=16:-4$

$a+aq\ :\ aq-a\ =b+bq\ :\ bq-b$. $\quad 8:\ 2=16:\ 4$

V. Wenn man ein äußeres und ein mittleres Glied mit der nemlichen Zahl multiplicirt.

$amq\ :\ am=\ bq\ :\ \ b$, $\quad 15\ :\ 9=10\ :\ 6$,

$aq\ :\ am=\ bq\ :\ bm$, $\quad 5\ :\ 9=10\ :\ 18$,

$amq\ :\ \ a=bmq:\ \ b$, $\quad 15\ :\ 3=30\ :\ 6$,

$amq\ :\ ap=bmq:\ bp$, $\quad 15\ :12=30\ :\ 24$.

VI. Wenn man ein äußeres und ein mittleres Glied durch dieselbe Zahl dividirt.

$$\frac{aq}{m} : \frac{a}{m} = bq : b, \quad \text{und} \quad \frac{5}{3} : 1 = 10 : 6,$$

$$aq : \frac{a}{m} = bq : \frac{b}{m}, \qquad 5 : 1 = 10 : 2,$$

$$\frac{aq}{p} : a = \frac{bq}{p} : b, \qquad 1 : 3 = 2 : 6,$$

$$\frac{aq}{n} : \frac{a}{m} = \frac{bq}{n} : \frac{b}{m}, \qquad \frac{5}{2} : 1 = 5 : 2.$$

VII. Wenn man alle 4 Glieder zu derselben Potenz erhebt, oder aus ihnen dieselbe Wurzel zieht,

$$a^2 q^2 : a^2 = b^2 q^2 : b^2, \qquad 25 : 9 = 100 : 36,$$

$$a^m q^m : a^m = b^m q^m : b^m, \qquad 5^m : 3^m = 10^m : 6^m,$$

$$\sqrt[n]{aq} : \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{bq} : \sqrt[n]{b}, \qquad \sqrt[n]{5} : \sqrt[n]{3} = \sqrt[n]{10} : \sqrt[n]{6}.$$

Die Richtigkeit aller dieser Proportionen erhellet aus der Gleichheit der Producte der mittlern und äußern Glieder, oder auch aus der Gleichheit der Quotienten der Verhältnisse.

§. 188.

Die Vortheile, welche alle diese Verwandlungen in der Ausübung öfters verschaffen können, sind folgende.

1) Durch I. und II. kann jedes Glied einer Proportion an jede beliebige Stelle gebracht werden; z. B. wenn man in der Proportion $a:b=c:d$ das Glied a an die vierte Stelle haben wollte, so kann man setzen $d:b=c:a$, oder $d:c=b:a$.

2) Durch III. kann in einer Proportion, worin ein äußeres und ein mittleres Glied unbekannt, ihre Summe aber bekannt ist, jedes Glied insbesondere gefunden werden. Z. B. es sei in der Proportion $6:y=9:x$ sowohl x als y unbekannt, ihre Summe aber sei 25, nemlich $x+y=25$, so kann x und y jedes insbesondere gefunden werden. Denn da $6:y=9:x$, so ist (nach I.) $6:9=y:x$, und (nach III.) $(6+9):9=(x+y):x$, und $(6+9):6=(x+y):y$ nemlich $15:9=25:x$, und $15:6=25:y$; woraus man, nach (§. 183) $x=\frac{9.25}{15}=15$, und $y=\frac{6.25}{15}=10$ findet.

3) Eben so kann durch IV. ein äußeres und ein mittleres Glied in einer Proportion gefunden werden, wenn ihre Differenz bekannt ist.

4) Durch V. kann man die in einer Proportion vorkommenden Brüche hinweg schaffen. Z. B. in der Proportion $8:13\frac{1}{3}=3:5$ wird der Bruch weggeschafft, wenn man dieses Glied, und dabei auch ein äußeres, mit 3 multiplicirt; nemlich

$$8:40=3:15, \text{ oder } 24:40=3:5.$$

5) Durch VI. kann öfters eine Proportion, deren Glieder große Zahlen sind, in kleinern Zahlen dargestellt werden, wenn man ein äußeres und ein mittleres Glied durch einen gemeinschaftlichen Factor dividirt. Z. B. es sollte zu den drei Zahlen 320, 256, 480 eine vierte Proportionale gefunden werden, so ist

$$320:256=480:x,$$

und wenn man das 1ste und 3te Glied durch 160 dividirt,

$$2:256=3:x,$$

und ferner $1:128=3:x$; daher ist $x=3.128=384$.

6) Durch VII. können die in einer Proportion vorkommenden irrationalen Glieder hinweg geschafft werden, wenn man alle Glieder der Proportion auf die Potenz des Wurzel-Exponenten erhebt. Z. B. wenn $a:b=c:\sqrt{d}$ ist, so ist auch $a^2:b^2=c^2:d$; ingleichen wenn $a:b=\sqrt[3]{c}:\sqrt{d}$, so ist $a^2:b^2=\sqrt[3]{c^2}:d$, und $a^6:b^6=c^2:d^3$.

Alle diese Vortheile sollen künftig bei der Anwendung deutlicher gezeigt werden.

§. 189.

Wenn man die gleichvielten Glieder zweier oder mehrerer Proportionen mit einander multiplicirt, so hat auch die daraus entstehende zusammengesetzte Proportion ihre Richtigkeit; nemlich

$$\begin{array}{llll} aq : a = bq : b, & & 5 : 3 = & 10 : 6, \\ cm : c = dm : d, & & 4 : 2 = & 14 : 7, \\ en : e = fn : f, & & 9 : 8 = & 18 : 16, \\ \hline acemnq : ace = bdfmnq : bdf; & & 180 : 48 = & 2520 : 672; \end{array}$$

weil die Quotienten der zwei zusammengesetzten Verhältnisse, oder auch die Producte der äußern und mittlern Glieder einander gleich sind.

§. 190.

Erscheint daher in zwei Proportionen ein und dasselbe Glied, so wird man, um dieses in der zusammengesetzten Proportion nicht erscheinen zu machen, nöthigen Falls durch Umkehrung der Verhältnisse, die Proportionen so anordnen, daß das gleiche Glied in der einen Proportion ein äußeres, in der anderen ein inneres werde, darnach erst die Zusammensetzung der Proportionen, und endlich die Abkürzung der gefundenen zusammengesetzten Proportion, durch blose Auslassung dieses gleichen Gliedes vornehmen.

Ist z. B. $a:b=c:d$, oder $3:5=6:10$,
und $b:e=d:f$, und $5:7=10:14$,
so gibt die Zusammensetzung und Abkürzung unmittelbar
$a:e=c:f$, oder $3:7=6:14$.

Ist dagegen
$a:b=c:d$, oder $3:5=6:10$,
und $a:e=f:d$, und $3:2=15:10$,
so wird man in einer der Proportionen, etwa in der ersten, die Verhältnisse umkehren, wodurch sie in die Proportion
$b:a=d:c$, oder $5:3=10:6$
übergeht, in welcher die gleichen Glieder a und d innere Plätze einnehmen, während sie in der zweiten außen stehen. Setzt man sofort die letzten zwei Proportionen zusammen, und läßt abkürzend die gleichen Glieder hinweg, so erhält man
$b:e=f:c$, oder $5:2=15:6$.

Auf dieselbe Weise wird man sich auch bei mehreren Proportionen benehmen, in denen gleiche Glieder vorkommen.

§. 191.

Bei mehreren gleichen Verhältnissen verhält sich die Summe aller ersten Glieder zur Summe aller zweiten, wie sich jedes erste Glied insbesondere zu seinem zweiten verhält.

Denn mehrere gleiche Verhältnisse können durch $aq:a$, $bq:b$, $cq:c$, $dq:d$, u. s. w. vorgestellt werden. Nun ist aber $(aq+bq+cq+dq\ ...):(a+b+c+d...)=aq:a$; eben so auch $(aq+bq+cq+dq\ ...):(a+b+c+d...)=bq:b$, u. s. w.; weil das Product der mittlern Glieder dem Producte der äußern Glieder gleich ist; folglich bildet das Verhältniß aus der Summe aller ersten Glieder zur Summe aller zweiten Glieder mit jedem einzelnen Verhältnisse eine Proportion.

III. Abschnitt.

Von der einfachen Regel Detri.

§. 192.

Die Lehre von den Proportionen wird von einigen Mathematikern mit Recht die Seele der Mathematik genannt, weil ihr Nutzen so allgemein über alle Theile derselben ausgebreitet ist. Auch im bürgerlichen Leben ist die Anwendung der Proportionen sehr nützlich, wie wir bald sehen werden.

§. 193.

In §. 170 ist zwar gesagt worden, ein Verhältniß (ein geometrisches) sei das Ergebniß der Vergleichung zweier gleichnamigen Größen gegen einander, indem bestimmt wird, wie oft die eine in der andern enthalten sei; so, daß daher das Wort Verhältniß in dieser Bedeutung nur bei gleichnamigen Dingen anzuwenden ist. Man pflegt jedoch das Wort Verhältniß auch noch in einem andern Sinne selbst bei ungleichartigen Größen zu gebrauchen, wenn man erklärt, daß diese Größen mit einander im geraden oder im verkehrten Verhältnisse stehen.

Um die Bedeutung dieses Ausdruckes zu begreifen, bemerken wir vor allem, daß manche Arten von Größen mit einander in einem solchen Zusammenhange stehen, daß einer bestimmten Größe der einen Art nur eine gewisse Größe einer zweiten Art entspricht oder zugehört, weßwegen solche Arten von Größen zusammengehörige genannt werden können. So sind die Quantität einer Ware und ihr Werth, die Zeit und die Zahl der während derselben zu verwendenden Arbeiter, u. dgl. zusammengehörige Größen, weil man für eine gewisse Menge von Waren ein bestimmtes Quantum Geldes zahlt, während einer gegebenen Zeit nur eine gewisse Zahl von Arbeitern anstellt, u. s. w.

Sind nun zwei zusammengehörige Größen von der besonderen Beschaffenheit, daß einem Vielfachen einer Größe der einen Art das Ebensovielfache der zugehörigen Größe der andern Art entspricht, nemlich daß, wenn einer gewissen Größe der ersten Art eine bestimmte Größe der zweiten Art zugehört, dem 2, 3, 4, ... $n$fachen der ersteren Größe auch das 2, 3, 4, ... $n$fache der zweiten Größe zugehört; so sagt man: *diese zwei Arten von Größen stehen mit einander im geraden Verhältnisse*, oder *sind einander direct proportional*. Man will hiemit eigentlich ausdrücken, daß, wenn man aus den zwei mit einander verglichenen Größen der einen Art ein Verhältniß aufstellt, und auch aus den ihnen entsprechenden Größen der anderen Art in derselben Ordnung, (nemlich dergestalt, daß dem Vorsatze des ersten Verhältnisses der Vorsatz des andern, folglich dem Nachsatze des ersten Verhältnisses der Nachsatz des andern entspricht) ein Verhältniß bildet, jederzeit die beiden Verhältnisse, *gerade* so wie sie aufgestellt wurden, einander gleich sind; was offenbar darin begründet ist, daß den Eigenschaften dieser Größen gemäß in beiden Verhältnissen die Nachsätze gleichviel Mal größer oder kleiner als die Vorsätze sind. So steht z. B. die Menge einer Ware mit ihrem Werthe in geradem Verhältnisse; denn wer 2, 3, 4, ... Mal $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{mehr}}{\text{weniger}}$ von einer Ware kauft als ein anderer, der muß auch 2, 3, 4, ... Mal $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{mehr}}{\text{weniger}}$ Geld als dieser erlegen. Kauft demnach Jemand 3 Ellen Tuch um 17 Gulden, so muß ein anderer, welcher 5 Mal so viel, d. i. 15 Ellen kauft, auch 5 Mal so viel, nemlich 85 Gulden zahlen. Die hier mit einander verglichenen Ellen sind 3 und 15, ihr Verhältniß also $3:15$; die ihnen entsprechenden Gulden sind in derselben Ordnung 17 und 85, ihr Verhältniß $17:85$. In beiden Verhältnissen ist der Nachsatz 5 Mal so groß als der Vorsatz, daher sind diese Verhältnisse, gerade so wie sie stehen, einander gleich, nemlich

$$3:15 = 17:85.$$

Besitzen dagegen zwei zusammengehörige Größen die Eigenschaft, daß einem Vielfachen einer Größe der einen Art der ebensovielte Theil der zugehörigen Größe der anderen Art entspricht, nemlich daß, wenn einer gewissen Größe der ersten Art eine bestimmte Größe der zweiten Art zugehört, dem 2, 3, 4, ... $n$fachen der ersteren Größe blos der 2te, 3te, 4te, ... $n$te Theil, oder die Hälfte, das Drittel, das Viertel, ... der anderen Größe zukommt, so sagt man: diese zwei Arten von Größen stehen mit einander im verkehrten Verhältnisse, oder sind einander verkehrt proportional. Dadurch will man eigentlich andeuten, daß, wenn man die zwei mit einander verglichenen Größen der einen Art in ein Verhältniß zusammenstellt, und auch die ihnen entsprechenden Größen der anderen Art in derselben Ordnung in ein Verhältniß schreibt, diese Verhältnisse erst dann einander gleich werden, wenn man eines von ihnen verkehrt, d. h. in ihm Vor- und Nachsatz mit einander vertauscht; was offenbar darin begründet liegt, daß in dem einen Verhältnisse der Nachsatz eben so viel Mal $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{größer}}{\text{kleiner}}$ als der Vorsatz sein muß, als wie oft im anderen Verhältnisse umgekehrt der Vorsatz $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{größer}}{\text{kleiner}}$ als der Nachsatz ist, weßwegen erst nach der Umkehrung eines Verhältnisses in beiden die Vorsätze Gleichvielfache ihrer Nachsätze sind. So steht z. B. die Anzahl der zu einer bestimmten Arbeit anzustellenden Arbeiter mit der Arbeitszeit in verkehrtem Verhältnisse; denn wer 2, 3, 4, ... Mal $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{mehr}}{\text{weniger}}$ Arbeiter anstellt, wird dieselbe Arbeit in 2, 3, 4, ... Mal $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{weniger}}{\text{mehr}}$ Zeit vollenden. Vollbringen demnach 20 Arbeiter eine Arbeit in 11 Tagen, so wird man, wenn nur 4 Mal weniger oder der vierte Theil der Arbeiter, d. i. 5 zu Gebote stehen, erst in 4 Mal mehr, d. i. in 44 Tagen fertig werden. Die hier mit einander verglichenen Arbeiter sind 20 und 5, ihr Verhältniß 20 : 5, die ihnen zugehörigen Tage sind in derselben Ordnung 11 und 44, ihr Verhältniß daher 11 : 44. Im ersten Verhältnisse ist der Nachsatz 4 Mal kleiner, im zweiten dagegen 4 Mal größer als der Vorsatz; kehrt man aber eines der Verhältnisse, etwa das letztere um, wodurch es 44 : 11 wird, so sind die Nachsätze beider Verhältnisse 4 Mal kleiner als die Vorsätze, daher beide Verhältnisse gleich, nemlich 20 : 5 = 44 : 11.

Stehen demnach zwei zusammengehörige Arten von Größen in $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{geradem}}{\text{verkehrtem}}$ Verhältnisse mit einander, so ist das Verhältniß zweier Größen der einen Art dem $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{gerade}}{\text{verkehrt}}$ genommenen Verhältnisse der ihnen entsprechenden Größen der anderen Art gleich, folglich bilden diese Verhältnisse oder diese zwei Paare von Größen, oder vielmehr, wenn die Größen von derselben Art durch einerlei Einheit gemessen sind, die sie vorstellenden Zahlen, eine Proportion.

§. 194.

Wären nun in einer solchen Proportion nur 3 Glieder bekannt, so läßt sich (nach §. 183) auch das fehlende vierte finden; z. B. es wäre die Frage, wenn 3 Ellen Tuch 10 Fl. kosten, wie viel kosten 9 Ellen von diesem Tuche? so bezeichne man die noch unbekannte Anzahl Gulden, welche 9 Ellen kosten müssen, mit x. Dann ist das Verhältniß der Ellen $3:9$, jenes der entsprechenden Gulden $10:x$, folglich findet, weil 5 Mal so viel Ellen auch mit 5 Mal so viel Gulden bezahlt werden, also Ellen und Gulden mit einander im geraden Verhältnisse stehen, die Proportion Statt, $3:9=10:x$, woraus man (nach §. 183) $x=\frac{9.10}{3}=30$ Fl. erhält.

Die Regel, nach welcher man bei einer Rechnungsfrage zu drei gegebenen Gliedern das vierte Proportionalglied findet, wird bei der Anwendung auf die benannten Zahlen von den Rechenmeistern die Regel Detri genannt; und zwar heißt sie die gerade Regel Detri, wenn die zwei ungleichnamigen Größen, welche in der Rechnungsfrage vorkommen, (nach §. 193) im geraden Verhältnisse stehen; im Gegentheile aber, wenn diese zwei Größen im verkehrten Verhältnisse stehen, so heißt sie die verkehrte Regel Detri.

§. 195.

Zur Regel Detri gehören demnach zwei Verhältnisse, wo in dem einen beide Glieder, in dem andern aber nur ein Glied bekannt, und das zweite noch unbekannt ist.

Anmerkung. Übrigens muß bei einer Rechnungsfrage, welche durch die Anwendung der Regel Detri beantwortet wird, aus der Beschaffenheit der Sache bekannt sein, daß die zwei ungleichnamigen Größen in einem richtigen, entweder geraden oder verkehrten Verhältnisse stehen (in der Bedeutung des §. 193); sonst läßt sich die Regel Detri nicht anwenden. Z. B. wenn es bekannt wäre, daß in 2 Minuten durch ein im Boden eines Fasses gebohrtes Loch 5 Eimer Wein ausfließen, so könnte man keineswegs sagen, daß in der doppelten Zeit von 4 Minuten auch doppelt so viel, nemlich

10 Eimer Wein aus diesem Loche fließen werden; weil der Wein immer mit einer kleinern Geschwindigkeit herausfließt; in jeder folgenden Minute fließt demnach weniger heraus als in der vorhergehenden. Man kann daher die Menge des Weines, welche in 4 Minuten aus diesem Loche fließt, nicht durch die Regel Detri finden, obwohl es bekannt ist, daß in 2 Minuten 5 Eimer ausfließen. Hiedurch wird zugleich klar, daß man sich des sonst gewöhnlichen Ausdruckes: „Je mehr oder weniger, desto mehr oder weniger" enthalten müsse; denn schon an diesem Beispiele sieht man, daß zwar desto mehr Wein ausfließt, je längere Zeit das Faß geöffnet ist, daß dies aber keineswegs noch berechtigt zu schließen, die Menge des ausgeflossenen Weines sei der Zeit direct proportional, und zwar offenbar aus dem Grunde, weil in der n fachen Zeit nicht n Mal so viel Wein ausläuft als in der einfachen.

§. 196.

Um nun bei den Rechnungsfragen, wo eine Proportion wirklich Statt findet, sowohl die gerade als auch die verkehrte Regel Detri jederzeit richtig anzuwenden, verfahre man folgender Maßen.

1) Man schreibe die zusammengehörigen Größen von verschiedener Art gerade unter einander, und die Größen von derselben Art in Gestalt eines Verhältnisses neben einander, stelle dabei

2) die unbekannte Größe durch einen Buchstaben, etwa durch x, dar; und drücke

3) die auf verschiedene Einheiten, (z. B. Pfunde, Lothe, Quintel) sich beziehenden benannten Zahlen in beiden Gliedern desselben Verhältnisses durch einerlei Einheit (z. B. durch Pfunde, Lothe oder Quintel) aus, so daß das Verhältniß dieser gleichnamigen Größen durch jenes der sie vorstellenden Absolutzahlen ersetzt werden kann.

4) Man untersuche, ob die zwei ungleichartigen Größen der Rechnungsfrage im geraden oder verkehrten Verhältnisse stehen, nemlich ob es eine gerade oder verkehrte Regel Detri sei, indem man sich frägt, ob, wenn der Größen der einen Art 2, 3, 4, ... Mal mehr werden, der zugehörigen Größen der anderen Art 2, 3, 4, ... Mal mehr oder weniger werden müssen.

5) Stelle man die zwei Verhältnisse entweder gerade so wie sie da stehen, einander gleich, wenn die beiden zusammengehörigen

Größen sich im geraden Verhältnisse befinden, oder verkehre vorher das eine Verhältniß, wenn diese Größen im verkehrten Verhältnisse stehen.

6) Berechne man die unbekannte Zahl, indem man (nach §. 183), wenn sie ein $\substack{\text{inneres}\\\text{äußeres}}$ Glied der Proportion ist, das Product der beiden $\substack{\text{äußeren}\\\text{inneren}}$ Glieder durch das bekannte $\substack{\text{innere}\\\text{äußere}}$ dividirt. Man wird hiebei wohl thun, die Multiplication nur anzuzeigen, und das Resultat in Form eines Bruches darzustellen, bei welchem man, so weit es angeht, die Factoren des Zählers und Nenners durch gemeinschaftliche Theiler dividirt.

Beispiele.

1. Frage. Wenn $3\frac{1}{2}$ Ellen Tuch 16 Fl. kosten; wie viel Ellen von diesem Tuche bekommt man für 100 Fl.?

Vorbereitung. $3\frac{1}{2}$ Ellen : x Ellen
16 Fl. : 100 Fl.

Rechnung. $3\frac{1}{2} : x = 16 : 100$

$$x = \frac{7}{2} \cdot \frac{100}{16} = \frac{7}{2} \cdot \frac{25}{4} = 175 : 8 = 21\tfrac{7}{8}.$$

Antwort. $21\frac{7}{8}$ Ellen.

Denn für 3 Mal so viel Gulden kauft man 3 Mal so viel Ellen; folglich ist hier eine gerade Regel Detri anzuwenden (vermög §. 193 und 194).

2. Frage. Eine gewisse Anzahl Patronen wird in 8 Tagen von 150 Mann verfertigt; man will aber diese Munition in 6 Tagen fertig haben; wie viel Mannschaft muß hiezu angestellt werden?

Vorbereitung.	Rechnung.
:8 Tage : 6 Tage *)	$150 : x = 6 : 8$
150 Mann : x Mann.	$x = \frac{8 \cdot 150}{6} = 8 \cdot 25 = 200.$

Antwort. 200 Mann.

*) Der minder geübte Lernende wird gut thun, wenn er die umzukehrenden Verhältnisse auf eine beliebige Weise, etwa wie hier durch Vorsetzung eines Doppelpunctes bezeichnet, welcher gleichsam andeutet, daß durch das umzukehrende Verhältniß die Einheit dividirt werde.

Denn kann man zu derselben Arbeit 2 Mal so viel Tage verwenden, so braucht man nur 2 Mal weniger Mannschaft; folglich ist hier eine verkehrte Regel Detri anzuwenden (vermög §. 193 und 194).

3. Frage. Wie viel kosten 9 Pf. 24 Loth von einer Ware, wenn man 1 Fl. 30 Kr. für 5 Pf. zahlen muß?

Vorbereitung.	Rechnung.
x Fl. : 1 Fl. 30 Kr. $= x : \frac{3}{2}$	$x : \frac{3}{2} = \frac{39}{4} : 5$
9 Pf. 24 L. : 5 Pf. $= \frac{39}{4} : 5$	$x = \frac{3.39}{2.4.5}$
1 Fl. 30 Kr. $= 1\frac{1}{2}$ Fl. $= \frac{3}{2}$ Fl.	$= 117 : 40 = 2\frac{37}{40}$.
9 Pf. 24 L. $= 9\frac{3}{4}$ Pf. $= \frac{39}{4}$ Pf.	

Antwort. $2\frac{37}{40}$ Fl. oder 2 Fl. $55\frac{1}{2}$ Kr.

4. Frage. Wenn 100 Mann in einer Nacht eine Transchee von 160 Klafter verfertigen können; wie viel Mannschaft muß angestellt werden, wenn in der nemlichen Zeit eine Transchee von 400 Klafter verfertigt werden soll?

Vorbereitung.	Rechnung.
100 Mann : x	$100 : x = 160 : 400$
160 Kl. : 400	$x = \frac{100.400}{160} = 10.25 = 250$.

Antwort. 250 Mann.

5. Frage. Wenn der jährliche Lohn eines Dienstbothen 36 Fl. beträgt, wie viel gebührt ihm für 8 Monat und 12 Tage?

Vorbereitung. 360 Tage : 8 Mon. 12 Tage $= 360 : 252$

36 Fl. : x

Rechnung. $360 : 252 = 36 : x$

$$x = \frac{252.36}{360} = \frac{252}{10} = 25{,}2.$$

Antwort. 25,2 Fl. oder 25 Fl. 12 Kr.

6. Frage. **(Einfache Interessen- oder Zinsrechnung).**

Wenn hundert Gulden Capital jährlich $3\frac{1}{2}$ Fl. Interessen bringen, wie groß muß das Capital sein, wovon man jährlich 1000 Fl. Interessen haben kann?

Antwort. $28571\frac{3}{7}$ Fl.

7. Frage. Eine Rikoschetbatterie in einer Transchee ist mit Patronen so versehen, daß sie durch 24 Stunden jede Stunde 20 Schüsse geben kann; man hat aber 32 Stunden lang keine frische Munition zu hoffen, und muß daher die vorhandenen Patronen für diese Zeit eintheilen; wie viel Schüsse können in jeder Stunde gemacht werden?

Antwort. 15 Schüsse.

8. Frage. Es befinden sich in einer Festung 6000 Mann Besatzung, welche für 2 Monat mit Proviant versehen sind; nun wird die Festung mit einer Blokade bedroht; der Commandant erhält Ordre sich durch 3 Monat und 10 Tage zu halten; es ist die Frage, wie viel er von der Mannschaft aus der Festung fortschicken muß?

Auflösung. Er schicke x Mann fort, so bleiben $6000-x$ Mann; folglich steht die Rechnung so:

$$6000:6000-x=3\tfrac{1}{3}:2$$

$$6000:x=3\tfrac{1}{3}:1\tfrac{1}{3},\ \text{(nach §. 187. IV)}$$

$$\text{daher } x=4.600=2400.$$

Antwort. 2400 Mann.

9. Frage. Nun setze man den Fall, die ganze Mannschaft müßte in der Festung bleiben; dann entsteht die Frage, wie viel Zwieback einem jeden Manne täglich zu geben sei, wenn sie für 2 Monat dergestalt mit Proviant versehen sind, daß jeder Mann täglich 2 Pf. Zwieback erhalten könnte?

$$2:x=3\tfrac{1}{3}:2$$

$$x=\frac{2.2.3}{10}=1,2.$$

Antwort. 1,2 Pf. oder 1 Pf. 6,4 Loth.

§. 197.

Die Regel Detri findet auch vorzüglich ihre Anwendung bei der Verwandlung (Reduction) der Gewichte und Maße eines Ortes in jene eines andern, wenn das Verhältniß, welches sie gegen einander haben, bekannt ist. Z. B. wenn es bekannt ist, daß ein Cölner Pfund sich zu einem alt Pariser Pf. verhält, wie 43 zu 45, nemlich daß 45 Cölner Pf. 43 Pariser Pf. ausmachen, und es würde gefragt; wie viel 94 Pariser Pf. nach dem Cölner Gewichte betragen, so findet folgende Regel Detri Statt:

45 Cölner Pf. : x C. Pf.	$45 : x = 43 : 94$
43 Pariser Pf. : 94 P. Pf.	$x = \frac{94 . 45}{43} = 98\frac{16}{43}$,

daher sind 94 Par. Pf. $= 98\frac{16}{43}$ Cöl. Pf. = 98 Pf. 11,9 L. Cölnisch.

Eben so, wenn es bekannt ist, daß sich eine Prager Elle zu einer Wiener Elle verhält, wie 16 zu 21, oder daß 16 Wiener Ellen 21 Prager Ellen ausmachen, und es wird gefragt, wie viel 30 Wiener Ellen in Prager Ellen verwandelt betragen, so ist

16 Wiener Ellen : 30 Wiener Ellen = 21 Pr. Ell. : x Pr. Ellen;

also $x = \frac{30 . 21}{16} = 39\frac{3}{8}$ Pr. Ell.

§. 198.

Wir wollen bei dieser Gelegenheit einige zuverlässige Vergleichungen der Gewichte, Längen- und Hohlmaße einiger Länder und Orte hieher setzen.

Vergleichung einiger Maße und Gewichte.

Frankreich.

Von besonderer Wichtigkeit sind die Französischen Maße und Gewichte, weil mit ihnen gewöhnlich die übrigen verglichen werden.

Die Grundeinheit der alten Französischen Längenmaße war der Pariser Fuß (*Pied du roi*), eingetheilt in 12 Zoll zu 12 Linien und jede dieser in 12 Scrupel oder Puncte. 6 Fuß machten eine Toise oder Klafter. — Flächenmaße hatte man: *Perche des eaux- et- forêts*, Quadrat von 22 Fuß Seite = 484 Quadratfuß, *Arpent des eaux-et-forêts* zu 100 *Perches* von 22 Fuß Seite = 48400 Quadratfuß, *Perche de Paris*, ein Quadrat von 18 Fuß Seite = 324 Quadratfuß, *Arpent de Paris* zu 100 *Perches* von 18 Fuß Seite = 32400 Quadratfuß = 900 Quadrattoisen. — Das Pariser Markgewicht (*Poids de marc*) hatte als Grundeinheit das Pfund (*Livre*) = 2 *Marcs* = 16 *Onces* = 128 *Gros* = 9216 *Grains*. Einen Pariser Cubikfuß destillirten Wassers bei seiner größten Dichte (4 Grad der hunderttheiligen Thermometerskale von Celsius) fand *Lefévre-Gineau* wiegen 70 Pfund 141 Grains, und bei der Temperatur des schmelzenden Eises (0° *C.*) 70 Pf. 130 Grains. — Das alt Pariser

Hohlmaß für Flüssigkeiten war das *Muid de vin* = 2 *Feuillettes* = 36 *Veltes* = 144 *Pots* = 288 *Pintes*; 1 *Pinte* = 48 alt Pariser Cubikzoll nach Picard; jenes für trockene Waren der *Setier* = 12 *Boisseaux* = 192 *Litrons*; 1 *Muid de blé* = 12 *Setiers*; 1 *Boisseau* = 656 alt Pariser Cubikzoll.

Das seit dem Jahre 1795 eingeführte neue Französische oder metrische Maßsystem hat folgende Anordnung.

Die Grundeinheit des Längenmaßes heißt *Mètre* (Meter), die der Flächenmaße *Are* = 100 Quadratmeter, jene der Körpermaße *Stère*, *Mètre cube*, die der Hohlmaße *Litre* (Liter) = 0,001 Kubikmeter, endlich die der Gewichte *Gramme* (Gramm).

Die Eintheilung und Vervielfachung geschieht durchaus nach der Zahl 10 (decadisch, decimal), und man bildet die Namen des zehnten, hundertsten, tausendsten Theils einer der genannten Grundeinheiten, indem man dem Namen dieser die Französischen Sylben *deci*, *centi*, *milli* vorsetzt, so wie man ihm, um ihr Zehnfaches, Hundertfaches, Tausendfaches, Zehntausendfaches auszudrücken, die Griechischen Sylben *deca*, *hecto*, *kilo*, *myria* vorzusetzen hat. Von diesen abgeleiteten Einheiten sind folgende im Gebrauche:

Décamètre = 10 *Mètres*, *Hectomètre* = 100 *Mètres*,
Kilomètre (Wegmaß, *Mille*) = 1000 *Mètres*,
Myriamètre (Meile, *Lieue*) = 10000 *Mètres*.
Décimètre = 0,1 *Mètre*, *Centimètre* = 0,01 *Mètre*,
Millimètre = 0,001 *Mètre*.
Hectare = 100 *Ares*, *Myriare* = 10000 *Ares*, (Feldmaße)
Centiare = 0,01 *Are*.
Décistère = 0,1 *Stère*.
Décalitre = 10 *Litres*, *Hectolitre* = 100 *Litres*,
Kilolitre = 1000 *Litres* = *Mètre cube*,
Myrialitre = 10000 *Litres*.
Décilitre = 0,1 *Litre*; *Centilitre* = 0,01 *Litre*,
Millilitre = 0,001 *Litre*.
Décagramme = 10 *Grammes*, *Hectogramme* = 100 *Grammes*,
Kilogramme = 1000 *Grammes*.
Décigramme = 0,1 *Gramme*, *Centigramme* = 0,01 *Gramme*,
Milligramme = 0,001 *Gramme*.

Der Meter soll der 10 millionste Theil des nördlichen Quadranten des Erdmeridians, und das Gramm das Gewicht eines Cubikcentimeters des dichtesten destillirten Wassers ($4^0 C$) sein. Anfänglich wurde provisorisch der Meter zu 0,513243 Toisen, und das Gramm (*Gravet*) zu 18,841 Grains angenommen. Nachdem aber sämmtliche Messungen und Berechnungen auf das Sorgfältigste ausgeführt waren, wurde (2. Nov. 1801) der Meter zu 0,513074 Toisen und das Gramm zu 18,82715 Grains definitiv festgesetzt, daher ist gegenwärtig, wenn irgend ein metrisches Maß ohne Zusatz genannt wird, immer das definitive gemeint.

Außer diesem in wissenschaftlichen und ämtlichen Verhandlungen gebräuchlichen metrischen Maßsysteme sind seit 1812 für den bürgerlichen Verkehr noch folgende mit den metrischen in leicht faßlichen Verhältnissen stehende Maße gesetzlich gestattet. Längenmaße: Die Toise, eingetheilt in 6 Fuß (*Pieds*) zu 12 Zoll (*Pouces*) von 12 Linien (*Lignes*), haltend 2 Meter. Schnittwarenmaß: Die Elle (*Aune*) = 12 Decimeter, eingetheilt in $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ und $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$. Trockene Hohlmaße für den Kleinhandel. Das *Boisseau* = $\frac{1}{8}$ *Hectolitre*, eingetheilt in $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$, außerdem noch verdoppelt, *Double boissseau* = $\frac{1}{4}$ *Hectolitre*. Überdies kann der Liter in $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{8}$ abgetheilt werden. Als nasses Hohlmaß für den Ausschank von Getränken kann der Liter in $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ untergetheilt werden. Gewichte: Das Pfund (*Livre*), gleich einem halben Kilogramm, eingetheilt in 16 Unzen (*Onces*) zu 8 *Gros* von 72 *Grains*, wobei noch jede dieser Gewichtseinheiten in $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ untergetheilt werden kann; der *Quintal* (metrische Zentner) = 100 Kilogramm; der *Millier*, (*poids du tonneau de mer*, Schiffstonne) = 1000 Kilogramm.

Dem Obigen und den ämtlich publicirten Reductionstafeln gemäß ist 1 alt Pariser Fuß = 0,3248394 Meter, 1 alt Pariser Quadratfuß = 0,105521 Quadratmeter, 1 alt Pariser Cubikfuß = 0,03427727 Cubikmeter, 1 alt Pariser Pfund = 489,5058 Gramm, 1 alt Pariser *Muid* = 268,220 Liter, 1 alt Pariser *Setier* = 156,100 Liter.

Übrigens haben einzelne Städte auch noch besondere, gesetzlich erlaubte Localmaße als:

Bordeaux. Das *Oxhoft* Bordeaux-Wein = 228,06 Liter; 1 *Tonneau* = 4 *Barriques* (*Oxhoft*) = 6 *Tierçons* = 128 *Veltes*.

Calais. 50 der hier gebräuchlichen Häringmaße sollen, nach dem Gesetze vom 8. October 1810, gehäuft die Vollhäringswrak-Last von 12 Tonnen *(le lest de douze barils en vrac)* betragen.

Dieppe. Das Maß zur Abmessung der frischen Häringe enthält, nach dem Decret vom 8. Oct. 1810, 15 Kilogramm, ist ein abgekürzter Kegel von 330 Millimeter Höhe, 370 Millim. unterem und 310 Millim. oberem Durchmesser, also von 30,039 Liter Inhalt.

Marseille. Das Pfund = 0,408 Kilogramm; die Öl- und Wein - *Millerole* = 60 Liter; die *Millerole* Fabriksöl = 64 Liter.

Endlich besitzt auch die Stadt **Troyes** in Bezug auf das Markgewicht eine Berühmtheit, da von ihr die Französische, Holländische und Englische *Troys* - Mark ihren Namen erhielt. In **Frankreich** war die *Troys* - Mark = 8 *Onces* = 64 *Gros* = 160 *Estelins* = 192 *Deniers* = 320 *Mailles* = 640 *Felins* = 4608 *Grains*. In **Holland**, wo sie im Jahre 1529 von Carl V. in der nemlichen Größe wie die damalige Französische eingeführt wurde, war die *Trogs* - Mark = 8 Unzen = 160 Engels = 1280 *Troyquins* = 2560 *Deusquins* = 5120 *As*; diese Holländische *Troys* - Mark ist zum Theil jetzt noch der gewöhnliche Maßstab zur Vergleichung anderer Gewichte. In **England** ist die *Troys*-Mark = 1 *Pound Troy - Weight* = 12 *Ounces* = 240 *(Dwts) Penny Weights* = 5760 *Grains* = 115200 *Mites*.

Österreich.

Zu der, bereits in §. 46 auseinandergesetzten, Eintheilung der Wiener oder Niederösterreichischen Maße und Gewichte sind noch folgende Vergleichungen beizufügen.

Längenmaße. Die Pariser Klafter fand (1760) der Astronom Liesganig = 1,02764 Wiener Klafter; ferner fand Professor Stampfer (1829) die halbe Toise = 36,99707 Wiener Zoll; daher ist der Wiener Fuß nach Liesganig, dessen Vergleichung auch in dem auf allerhöchsten Befehl in der k. k. Staatsdruckerei zu Mailand 1818 aufgelegten Werke: „Münz - Tariffe und Tabellen zur Vergleichung u. s. w." angenommen wurde, = 0,3161023 Meter, nach Stampfer = 0,316085 Meter. Der in der Artillerie vormals gebrauchte Nürnberger Fuß, eingetheilt in 12 Zoll zu 10 Linien zu 10 Puncten betrug (nach Vega's Angabe) $\frac{1601}{1728}$ Wiener Fuß.

Nach den von Pater Joseph Franz *S. J.* (1756) ausgeführten und in den Gesetzen (1756 & *ssq.*) anerkannten Vergleichungen ist die Wiener Elle = 2,465 Wiener Fuß, der Wiener Metzen = 1,9471 Wiener Cubikfuß, der Eimer = 1,7920 Cubikfuß, die Maß = 0,0448 Cubikfuß. — Der Stübich, Kohlenmaß, ist nach der Verordnung vom 1. Dec. 1570 = 2 Metzen; das Kalkmüthel nach der Verordnung vom 21. März 1755 und 29. August 1772 = $2\frac{1}{2}$ Metzen.

Im Bergwesen benützt man als Längeneinheit die Schemnitzer Bergklafter eingetheilt in 10 Schuh = 100 Zoll = 1000 Linien = 10000 Puncte. Das bei dem k. Nieder-Ungarischen Districtual-Berggerichte aufbewahrte Original der Schemnitzer Bergklafter hat gemäß dem Decrete der hohen Hofstelle vom 15. Juni 1822 bei 13,5^0*R.* 6 Schuh 4 Zoll 10,92 Linien Wiener Maß.

Hohlmaße. Zufolge der von Kaiser Franz I. am 2. März 1817 sanctionirten Zimentirungsamts-Instruction, im Einklange mit der gesetzlichen Bestimmung vom 12. Juli 1762 hält der Wiener Wein-Eimer 40 Wiener Maß mit einem *Calo* von einer Maß, daher im Ganzen 41 Maß; ferner sowohl nach dieser Instruction, als auch nach den landesherrlichen Verordnungen vom 16. Aug. 1775, 3. Mai 1805, und 12. Dec. 1812 faßt der Wiener Bier-Eimer $42\frac{1}{2}$ Maß, ($2\frac{1}{2}$ Maß *Calo*), und vermög eben dieser Instruction der Maisch-Eimer 42 Maß (2 Maß *Calo*). — Das aus massiv gegossenen Messing im Jahre 1826 hergestellte Original des Wiener Wein-Eimers von 41 Maß hält, nach der von Jäckel, Oberbeamten des Wiener Zimentirungsamtes, vorgenommenen Untersuchung, bei + 16^0 *Réaumur*, an destillirtem Wasser 13551279 Wiener Richtpfennig, somit 58,0845 Liter und die Maß 1,4167 Liter.

Gewichte. Vega (Vorlesungen S. 549, 1. Bd. 3. Aufl. Wien 1802, und Natürliches Maßsystem, Wien 1803 §. 2) fand durch unmittelbare Wägung Französischer Gewichts-Etalons das Gramm im Mittel = 13,714 Wiener Apothekergran. Hierauf stützt sich das kaiserliche Münzdecret vom 1. Nov. 1823, indem es die Wiener Mark = 280,644 Gramm, und das Kilogramm = 233520 Wiener Richtpfennig erklärt. Sonach ist das Pfund des Wiener Handelsgewichts = 560,012 Gramm. — Das Nenngewichts-Pfund der vollen eisernen Artillerie-Geschützkugeln beträgt, nach den von der k. k. Oberfeuerwerksmeisterei ausgeführten Rechnungen im Mittel 0,817 Wiener Pfund.

Außer den Wiener oder Niederösterreichischen Maßen, welche gesetzlich vorgeschrieben sind, werden in den Provinzen auch noch eigenthümliche geduldet.

Böhmen. Nach den von P. Franz (1756) ausgeführten Vergleichungen und den gesetzlichen Bestimmungen (1764 und 1765) ist die Böhmische Klafter = 6 Fuß = 5,626 Wiener Fuß, die Prager Elle, eingetheilt in $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, = 1,879 W. Fuß; ein Strich Aussaat beträgt 800 Quadratklafter Ackerland; der Böhmische Strich, Getreidemaß, = 4 Viertel = 16 Metzen = 192 Seitel = 1,5220 Wiener Metzen; die Böhmische Maß (Pinte) = 4 Seitel = 1,350 Wiener Maß, der Eimer = 30 Maß klaren und = 32 Maß trüben Getränkes, das Faß = 4 Eimer; das Böhmische Pfund = 32 Loth = 128 Quentchen = 0,91847 Wiener Pfund, der Zentner = 6 Stein = 120 Pfund.

Galizien. Die Lemberger Elle eingetheilt in $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ ist = 2 Fuß = 263,287 alt Pariser Linien, die Galizische Klafter = 6 Fuß = 3 Ellen; der *Korzec*, Getreidemaß, = 32 *Garniec* = 128 *Kwart* = 2 Wiener Metzen; der *Korzec* wird noch in $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, der *Garniec* und die *Kwart* aber in $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ untergetheilt; das Bierfaß *(Beczka)* = 36 *Garniec* = 144 *Kwart* = $2\frac{1}{4}$ Wiener Metzen. Das gemeine Handelspfund = 32 Loth = 128 Quent = 1 Wiener Apothekerpfund, der Zentner = 100 Pfund.

Kärnthen. Im Lavant-Thale ist ein Eimer = $2\frac{1}{2}$ Wiener Wein-Eimer, der Tagbau, Flächenmaß, = 1200 Wiener Quadratklafter.

Lombardisch-Venetianisches Königreich. Die Grundlage des seit 1803 angenommenen metrischen Maßsystems ist der auch als Schnittwarenmaß dienende *Metro* = 10 *Palmi* = 100 *Diti* = 1000 *Atomi* = dem Französischen Meter. Die Einheit der Hohlmaße ist die *Soma metrica* = 10 *Mine* = 100 *Pinte* = 1000 *Coppi* = dem Hectoliter. Die Gewichtseinheit ist die *Libbra metrica* = 10 *Once* = 100 *Grossi* = 1000 *Denari* = 10000 *Grani* = dem Kilogramm, 1 *Rubo* = 10 *Libbri*, 1 *Centinajo* = 10 *Rubi*. — Im gewöhnlichen Verkehr bedient man sich jedoch meistens noch der alten Maße. Im **Mailänder Gouvernement** ist das Getreidemaß die Mailänder *Moggia* = 8 *Stari* = 32 *Quartari* = 1,462343 metrische Some, das Getränkmaß, die Mailänder *Brenta* = 96 *Boccali* = 0,755544 metrische Some. Nach einem Decrete vom J. 1803 ist die *Libbra di peso grosso* Handelsgewicht = 28 *Once* = 336 *Dinari* = 8064 *Grani* = 762,5171 Gramm, die *Libbra di peso sottile* = = 12 *Once* = 288 *Dinari* = 6912 *Grani* = 326,7931 Gramm, ferner nach diesem Decrete und einem ämtlichen Berichte der Triester Börse-Deputation 1 *Libbra peso grosso* = 1,3616 Wiener Pfund, *Libbra peso sottile* = 0,5835 Wiener Pfund, die *Libbra peso medicinale* = 12 *Once* = 1 Wiener Apothekerpfund. Im **Venetianischen Gouvernement** ist die Seiden-*Braccio*, Schnittwarenmaß, = 283 alt Pariser Linien; nach dem Werke: *Tavole di ragguaglio fra le misure e i pesi nuovi etc. Milano, 1810, dalla stamperia reale* ist die Wollen-, Leinen- und Baumwollen-*Braccio* = 0,680981 Meter; die Klafter (*Pertica lineare*) = 6 Fuß (*Piedi*) = 72 *Once* = 864 *Linee* = 2,0864091 Meter; der *Stajo*, Getreidemaß, = 84,8602 Liter; die *Biconzia*, Weinmaß, = $\frac{1}{4}$ *Amphora* = 2 *Conzi* = 128 *Boccali* = 158,609 Liter; die *Libbra grossa*, Handelsgewicht, = 2 *Marchi* = 12 *Once* = 48 *Quarti* = 2304 *Carati* = 9216 *Grani* = 476,9987 Gramm, die *Libbra sottile* = 12 *Once* = 48 *Quarti* = 1455 *Carati* = 5820 *Grani* = 301,2297 Gramm, die *Marco*, Gold-, Silber- und Juwelengewicht, = 8 *Once* = 32 *Quarti* = 192 *Denari* = 1152 *Carati* = 4608 *Grani* = 238,4994 Gramm, die *Libbra medicinale*, Arznei-Gewicht, = 12 *Once* = 96 *Dramme* = 288 *Scrupoli* = 5760 *Grani* = 1 *Libbra sottile.*

Mähren. Nach P. Franz (1756) die Klafter = 5,617 Wiener Fuß, der Metzen = 1,1482 Wiener Metzen, die Maß = 0,756 Wiener Maß, das Pfund = 0,99992 Wiener Pfund.

Schlesien. Nach P. Franz (1756) die Klafter = 5,493 Wiener Fuß, die Elle = 1,830 Wiener Fuß, der Scheffel = 4 Viertel = 16 Metzen = 64 Maßel = 1,2419 Wiener Metzen, der große Troppauer Scheffel = $2\frac{1}{2}$ Wiener Metzen (Hofkanzleidecret vom 23. Nov. 1820), die Quart = 2 Seitel = 0,496 Wiener Maß, der Eimer = 80 Quart, das Pfund = 32 Loth = 128 Quintel = 0,94619 Wiener Pfund.

Siebenbürgen. Die Elle = 0,8 Wiener Elle, der Kübel = 4 Viertel = 1,6 Wiener Metzen, der Eimer (*Ur*) = 8 Wiener Maß, das Handelsgewichtspfund = 2 Wiener Mark (Jäckel's Angaben), das Piset zur Wägung des Waschgoldes = 1216 Wiener Richtpfennig (Vega's Angabe).

Steiermark. Das Steirische oder Grätzer Viertel, eingetheilt in 8 Maßel, ist nach dem im October 1836 von dem Grätzer Zimentirungsamte erstatteten Berichte = 64 Wiener Maß, der Startin, Getränkmaß, eingetheilt in $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$, nach der Gubernial-Verordnung vom 26. Jänner 1803, = 400 Wiener Maß oder 10 Wiener Eimer.

Tyrol. Nach P. Franz (1756) die Klafter = 6,342 Wiener Fuß, die Elle eingetheilt in $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, = 2,544 Wiener Fuß, der Korn-Star = 0,4972 Wiener Metzen, die Maß = 0,573 Wiener Maß, das Pfund = 1,00516 Wiener Pfund.

Ungarn. Grundeinheit des Hohlmaßes ist gesetzlich die Ungarische Halbe (*Media*, *Icze*) = 2 Seitel (*Meszely*) = 4 Rimpel (*Fél meszely*). Eine beglaubigte Copie des Originals, aus Weißblech verfertigt, enthielt nach Jäckel's Untersuchungen (J. 1827), bei + 15° *R.* 194688 Wiener Richtpfennig (= 833,71 Gramm) destillirten Wassers, daher die Ungar. Halbe = 833,71 × 0,001001567 = 0,8350 Liter. Der Ungarische (Preßburger) Metzen sowohl als der Eimer ist nach dem Reichstagsbeschluße vom Jahre 1807, seit 24. Juni 1808 = 64 Halbe. Außerdem ist der im Biharer Comitate übliche Debrecziner große *Cseber* = 100 Halbe, der kleine *Cseber* = 50 Halbe, der Ödenburger Wein-Eimer (*Akó*) = 84 Halbe, der Pesther Metzen = 96 Halbe, der Kübel zu Knoppern $3\frac{1}{4}$ Wiener Eimer. Das Tokaier Weinfaß (nach dem Reichstagsgesetze von 1807) = $2\frac{3}{4}$ Preßburger Eimer = 176 Halbe, das kleine Tokaier Weinfaß (*Antalak*) = 88 Halbe; und in

Slavonien, die *Kila*, Getreidemaß, = 224 Halbe.

Baden.

Nach dem Gesetze vom 10. Nov. 1810 ist der Fuß = 3 Decimeter, und wird in 10 Zoll zu 10 Linien von 10 Puncten eingetheilt. Die Klafter hält 6, die Ruthe 10, und die Elle 2 Fuß. Der Morgen, Flächenmaß, = 4 Viertel = 400 Quadratruthen.

Der Zuber, Getreidemaß, = 10 Malter = 100 Sester = 1000 Mestlen = 10000 Becher = 15 Hectoliter. Das Fuder, Flüssigkeitsmaß, = 10 Ohm = 100 Stützen = 1000 Maß = 10000 Glas = 15 Kiloliter. Das Pfund = 10 Zehnling = 100 Centaß = 1000 Pfennig = 10000 Aß = $\frac{1}{2}$ Kilogramm; 1 Zentner = 10 Stein = 100 Pfund. Im Handel wird das Pfund in 32 Loth zu 4 Quint getheilt.

Baiern.

Seit dem ersten Jänner 1810 ist nach dem Gesetze vom 28. Febr. 1809 der Fuß = 129,38 alt Pariser Linien, daher = 0,291859 Meter, und wird sowohl decimal als auch duodecimal in Zolle, Linien und Puncte getheilt; die Klafter hält 6, die Ruthe 10 Fuß, die Elle $34\frac{1}{4}$ Duodecimalzoll. Das Tagwerk, Juchert oder der Morgen, Flächenmaß, = 400 Quadratruthen. Die Einheit des Hohlmaßes ist die Maßkanne zu 43 Decimal-Cubikzoll = 1,069027 Liter. Der Scheffel, Getreidemaß, = 6 Metzen = 208 Maßkannen. Der Eimer, Getränkmaß, = 64 Maßkannen. Das Pfund, Handelsgewicht, = 16 Unzen = 32 Loth = 128 Quint = 512 Pfennig = 7680 Gran = 560 Gramm; der Zentner = 100 Pfund. Das Medicinalgewichts-Pfund ist nach dem kön. Decrete vom 30. Jänner 1811 = 360 Gramm, und wird in 12 Unzen = 96 Drachmen = 288 Scrupel = 5760 Grän zertheilt.

England.

Kraft der Parlaments-Acte vom 17. Juni 1824 ist die Grundeinheit des Längenmaßes die Elle (*Imperial Standard Yard*), eingetheilt in 3 Fuß (*Foots*) zu 12 Zoll (*Inches*). Die Klafter (*Fathom*) hält 2, die Ruthe (*Pole* oder *Perche*) $5\frac{1}{2}$, der *Furlong* 220, und die *Mile* (Meile) 1760 *Yards*. Nach *Prony's*, *Legendre's* und *Mechain's* Vergleichungen ist der Meter = 39,371 Engl. Zoll, nach einer Messung *Kater's* = 39,37079, nach einer andern = 39,37062 Engl. Zoll; daher der Englische Fuß im Mittel = 0,304794 Meter. Der *Acre of Land*, Flächenmaß, = 4 *Roods of Land* (Ruthen Landes) = 160 Quadratruthen (*Squarres perches*) = 1210 Quadratklafter = 40,467 Französische *Ares*.

Grundeinheit des Hohlmaßes ist der *Imperial Standard Gallon* = 4 *Quarts* = 8 *Pints*, er enthält 10 Pfund *Avoir-du-pois* destillirten Wassers in der Luft bei 62° *F.* und 30 Z. Barometerstand, ist daher = 4,54346 Liter. 1 *Pick* hält 2; 1 *Bushel* 8 *Gallons*; 1 *Sack* = 3 *Bushels*, 1 *Quarter* = 8 *Bushels*, 1 *Chaldron* = 12 *Sacks*. Grundeinheit des Gewichts ist das Pfund Troygewicht (*Imperial Troy Pound*) = 12 *Ounces* = 240 *Penny-weights* = 5760 *Grains*. (Vergleiche *Troyes* S. 219). Nebstbei gebraucht man noch das Pfund *Avoir-du-pois* = 16 *Ounces* = 256 *Drams* = 7000 *Imperial Troy Grains*. 1 Zentner (*Quintal*) = 112 Pfund *Avoir-du-pois*, 1 Tonne = 20 Zentner. Das *Troy*-Pfund ist nach einer Vergleichung in Paris = 373,233, nach Weber = 373,2484, nach *van Moll* = 373,2531, nach Haßler = 372,2223 Gramm.

Hannover.

Nach dem Gesetze vom 19. Aug. 1836 und den vom Ministerium publicirten Vergleichungen ist die Grundlage des Längen-, Flächen- und Körpermaßes der Fuß, eingetheilt in 12 Zoll zu 12 Linien, = $11\frac{1}{2}$ Zoll Englischen Maßes = 0,2920947 Meter; die Elle hält 2, die Klafter 6, die Ruthe 16, und die Meile 25400 Fuß. Der Morgen, Feldmaß, = 120 Quadratruthen = 26,2101 Are. Der Himten, trockenes Hohlmaß, = $1\frac{1}{4}$ Cubikfuß = 31,15166 Liter; 1 Malter = 6 Himten, 1 Last = 96 Himten. Der Anker, nasses Hohlmaß, = 10 Stübchen = 40 Quartier = $1\frac{1}{4}$ Himter = 38,9396 Liter; der in Ostfriesland geltende Vierup = 16 Krug = $1\frac{3}{5}$ Himten = 49,84266 Liter. Das Pfund, Handelsgewicht, eingetheilt in 32 Loth zu 4 Quentchen, ist dem Preußischen Pfunde oder 467,711 Gramm gleich; der Zentner soll 100, die Schiffslast 4000 Pfund enthalten. Die bei dem Münzwesen geltende Cölnische Mark soll einem halben Pfunde gleich sein. Die Mark wird zum Wägen der edlen Metalle in 288 Gran eingetheilt; das Medicinalgewichts-Pfund = 12 Unzen = 96 Drachmen = 288 Scrupel = 5760 Gran = $\frac{3}{4}$ Handelsgewichts-Pfund; das Karat Juwelengewicht = $3\frac{3}{8}$ Apothekergran = 205,537 Milligramm.

Hessen=Darmstadt.

Seit 1821 ist der Fuß = 10 Zoll = 100 Linien = $\frac{1}{4}$ Meter, die Klafter = 10 Fuß, die Elle = 24 Zoll = 0,6 Meter, wird in $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, . . . eingetheilt. Flächenmaß, der Morgen = 4 Viertel = 400 Quadratklafter = 25 Are. Brennholzmaß, der Stecken = 100 Cubikfuß. Die Maß, Flüssigkeitsmaß, hält 2 Liter; die Ohm = 20 Viertel = 80 Maß = 320 Schoppen = 160 Liter. Das Gescheid, Fruchtmaß, ist der Getränkmaß gleich; der Malter = 4 Simmer = 16 Kumpf = 64 Gescheid = 256 Mäßchen = 128 Liter. Die Kalkbütte = 10 Cubikfuß. Das Pfund = 32 Loth = 128 Quentchen = 512 Richtpfennig = 500 Gramm; der Zentner = 100 Pfund. Bei feinen Wägungen wird die Grundeinheit des Gewichts, das Loth, in 10000 Theilchen getheilt. Das Münzgewicht, die Cölner Mark zu Darmstadt, wiegt, nach der Darmstädter Amtszeitung vom 16. Juni 1820, 14,9670 Loth oder 233,8594 Gramm.

Neapel.

Nach *Luigi di Ruggiero's* Mittheilung vom 12. September 1826 (Jäckel's Münz=, Maß= und Gewichtskunde 2. Bd. S. 151) ist der Fuß (*Palmo*) = 0,26363 Meter, die *Braccio* (Elle) hält $2\frac{2}{3}$, die *Canna* (Klafter) 8 *Palmi*. Das Fruchtmaß, der *Tomolo* = 2 *Mezzeti* = 4 *Quarti* = 8 *Stopelli* = 24 *Misure* wurde durch das Edict vom 19. Mai 1811 für 55,2341 Liter erklärt. Das Weinmaß, die *Caraffa*, ist = 0,727027 Liter; der *Carro* = 2 *Botti* = 24 *Barili* = 1440 *Caraffe*. Die Unze (*Oncia*) ist im ganzen Königreiche = 26,73012 Gramm, allein der *Rottolo*, Handelsgewicht, ist verschieden nach den einzelnen Städten. Der gewöhnlichste, der Neapolitanische *Rottolo* von $33\frac{1}{3}$ *Once* ist = 891,004 Gramm. Der *Cantaro* (Zentner) = 100 *Rottoli*. Als Juwelengewicht wird die *Oncia* in 520 *Grani* eingetheilt. Die *Libbra* wird als Gold=, Silber=, Münz= und Seidengewicht in 12 *Once* = 360 *Trapesi* = 7200 *Acini*, als Medicinalgewicht aber in 12 *Once* = 120 *Dramme* = 360 *Scrupoli* = 7200 *Acini* getheilt und enthält, nach dem Gesetze vom 20. April 1818, 320,7614 Gramm.

Niederlande.

Seit dem 1. Jänner 1821 ist kraft der königl. Verordnungen vom 21. Aug. 1816 und 29. März 1817 das metrische Maßsystem im Gebrauche. Die Längeneinheit ist die Niederländer Elle (*Elle*), welche dem Meter ganz gleicht; sie wird in 10 *Palm* zu 10 *Duim* von 10 *Streep* getheilt; 1 *Roede* = 10 *Elle*, 1 *Mijl* = 1000 *Elle*. Der *Bunder*, Flächenmaß, hält 10 *Vierkante roede* = 100 *Vierkante elle* oder 1 Hectare. Das Holzmaß ist *Wisse* = 1 *Kubiek-elle* = 1 Stere. Die Einheit der Hohlmaße ist der Cubikpalm, gleich dem Liter, und heißt bei trockenen Waren *Kop*, bei nassen aber *Kan*. 1 *Last* = 30 *Mudden*; 1 *Mudde* = 1 *Zak* = 100 *Scheppel* = 1000 *Koppen* = 10000 *Maatjen*. 1 *Kan* = 10 *Maatjen* = 100 *Vingerhoed*; 1 *Vat* = 100 *Kan*. Die Gewichtseinheit, das *Pond* = 10 *Ons* = 100 *Looden* = 1000 *Wigtjes* = 10000 *Korrels*, ist dem Kilogramm gleich. Das Medicinalgewichts-Pfund, *Medicinal Pond*, wiegt laut den kön. Verordnungen vom 30. Nov. 1817, und 21. Oct. 1819, 375 *Wigtjes* (*Grammes*), und wird in 12 *Medicinale Oncen* = 96 Drachmen = 288 *Scrupels* = 5760 *Greinen* eingetheilt. Von dem vormaligen Holländischen Troy-Gewicht (Vergl. *Troyes* S. 219), wurde die Mark in 8 Unzen = 160 Engels = 5120 As getheilt, und das Pfund, welches in 16 Unzen oder 32 Loth getheilt wurde, enthielt 10280 Holländische As. Zu Folge des Gesetzes vom 1. Febr. 1809 wiegt das Kilogramm 2 Pfund $\frac{3}{4}$ Loth 4,95 As, also 20805,8875 As oder 2,0239190 Pfund des Holländischen Troy-Gewichts; hieraus folgt die Holländische Troy-Mark = 246,0842 Gramm. Nach *I. H. van Swinden* „*Verhandeling over volmaákte maaten en Gewichten*, *Amsterdam*, *1802*“, ist diese Mark = 4633,057 *Grains poids de marc de Paris*, also = 246,0840 Gramm.

Preussen.

Nach der königlichen Maß- und Gewichtsordnung vom 16. Mai 1816 ist seit 1. Jän. 1820 das Grundmaß der Längen der bereits seit 28. Oct. 1773 eingeführte sogenannte Rheinländische Werkfuß von 139,13 alt Pariser Linien oder 0,31385354 Meter, welcher in 12

Zoll zu 12 Linien getheilt wird. Die Ruthe beträgt 12, der Faden beim Seewesen 6 Fuß, die Preußische Meile 2000 Ruthen. Das Lachter beim Bergbau = 8 Achtel = 80 Lachterzoll = 800 Primen = 8000 Secunden = 80 Preuß. Zoll. Die Elle hält $25\frac{1}{2}$ Zoll. Der Morgen, Feldmaß, = 180 Quadratruthen. Die Grundeinheit der Hohlmaße ist das Berliner Quart = 64 Cubikzoll = 1,1450313 Liter; der Scheffel, Getreidmaß, = 16 Metzen = 48 Quart; der Eimer, Getränkmaß, = 2 Anker, = 60 Quart; 1 Oxhoft = 3 Eimer, 1 Ohm = 2 Eimer, 1 Biertonne = 100 Quart; die Tonne zum Messen des Salzes, Gypses, u. dgl. = 4 Scheffel; die Leinsaat-Tonne = 113 Quart. Das Preußische Pfund ist der 66ste Theil des Gewichts eines Preußischen Cubikfußes destillirten Wassers im luftleeren Raume bei der Temperatur von + 15 Gr. *Réaumur*, somit = 467,7110 Gramm, es dient als Handels- und Krämergewicht und wird in 32 Loth zu 4 Quentchen getheilt. 1 Zentner = 110 Pfund, 1 Schiffslast = 4000 Pfund. Das Gold-, Silber- und Münzgewicht ist die Preußische Mark, oder das halbe Handelsgewichts-Pfund von 233,8555 Gramm, welches mit der, bei dem Preußischen Münzwesen früher gebrauchten Cölner Mark genau übereinkommt; diese Mark wird bei Gold- und Silberproben in 288 Grän getheilt. Juwelen werden nach Karaten gewogen, von denen 160 auf 9 Quentchen gehen, und welche in $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, . . . getheilt werden. Das Medicinalgewichts-Pfund = 12 Unzen = 96 Drachmen = 288 Scrupel = 5760 Gran = 24 Preußische Loth des Handelsgewichts.

Von der gegenwärtig unter Preußischer Herrschaft stehenden Stadt **Cöln** führt die, von Kaiser Carl V. im Jahre 1524 als allgemeines Münzgewicht des Deutschen Reiches eingeführte und daselbst zur sorgfältigsten Aufbewahrung deponirte, Cölner Mark ihren Beinamen. Da jedoch dieses Grundmuster im Laufe der Zeit verloren ging, und die von ihm abgenommenen und den verschiedenen Deutschen Münzstätten mitgetheilten Copien, trotz ihrer Beglaubigungen, mitunter namhaft von einander differiren, so bleibt die vergleichungsweise Bestimmung des Gewichts der wahren Cölner Mark, ein äußerst schwieriges und nur, durch Ermittlung des Gewichts der in den verschiedenen Städten noch vorhandenen so genannten Cölner Marken, annäherungsweise zu lösendes Problem. Von diesen beträgt nun dem Obigen gemäß die Cölner Mark zu Berlin 233,856, jene zu Darmstadt 233,859 Gramm. Die Cölner Mark zu Wien ist, nach der von Kaiser Ferdinand I. am 1. Aug. 1560 erlassenen Münzordnung = $\frac{5}{6}$ Wiener Mark, welche, laut des kaiserlichen Münzdecretes vom 1. Nov. 1823, = 280,644 Gramm ist, daher die Cölner Mark zu Wien = 233,870 Gramm. *Tillet* fand im Jahre 1766 durch wirkliche Abwägung die Cölner Mark = 4403 alt Pariser Gräns, daher = 233,864 Gramm. Am 16. Jän. 1799 fand die zur Prüfung und Vergleichung der Maße und Gewichte des Ruhrdepartements zusammengesetzte Commission durch eine genau angestellte Untersuchung die Cölner Mark = 23369 provisorische *Centigrammes*, demnach = 233,862 Gramm, welchen Werth auch das Gesetz vom 9. *Frimaire an* VIII (30. Nov. 1799) angibt. Vielleicht dürfte man das letztere Verhältniß als das richtige ansehen.

Rußland.

Der Fuß ist dem Englischen gleich, und wird wie dieser in 12 Zoll getheilt; der Faden (Saschen) = 7 Fuß; die Werst, Wegmaß, = 500 Saschen; die Arschin (Elle), eingetheilt in $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ und in 16 Werschok = $\frac{1}{3}$ Saschen. Die Desätine, Feldmaß, = 3200 Quadratsaschen. Das Getreidemaß, der Tschetwert (Kuhl), eingetheilt in 4 Osmin = 16 Pajok, oder in 8 Tschetwerik = 64 Garnitzen, enthält nach ältern und neuern Beobachtungen 209,732 Liter, also 3,41031 Wiener Metzen; allein im Handel zu Triest, wo man eine Menge Getreideladungen von Odessa erhält, wird der Tschetwert zu $2\frac{1}{2}$ *Staja* oder 3,38692 Wiener Metzen berechnet (Äußerung der Triester Börsedeputation vom 12. Oct. 1832 in Folge der Hofkanzlei-Verordnung vom 24. Aug. 1830). Der Wedro (Eimer), Getränkmaß, eingetheilt in 10 Stoof, = 760 Cubikzoll. Das Pfund, Handels-, Gold-, Silber- und Münzgewicht, eingetheilt in 96 Solotnik oder 9216 Doli, wiegt, nach 208 Vergleichungen einer Copie des Russischen Normalpfundes im Münzhofe zu Petersburg und einer Copie des parlamentarischen Englischen Troy-Pfundes, 6319,962 Engl. Troy-Grain; 1 Pud = 40 Pfund. Das in Rußland gebräuchliche Nürnberger Medicinalpfund enthält 5522,507 Engl. Troy-Grain. (Dove's Repertorium 1837).

§. 199.

I. Mittels der angeführten Vergleichungszahlen der Gewichte und Längenmaße verschiedener Orte ist es nun leicht, eine gegebene Anzahl Pfunde, wie auch Klaftern und Fuße eines Ortes in eine gleichgeltende Anzahl eines andern Ortes zu verwandeln; z. B. da der Londner Fuß 0,304794 Meter, und der Wiener Fuß 0,316102 Meter beträgt, so ist der Wiener Fuß länger, als der Londner; und zwar dergestalt, daß ein Wiener Fuß zu einem Londner Fuß sich verhält, wie 0,316102 : 0,304794, oder wie 316102 : 304794; eben so verhält sich auch der Wiener Zoll zum Londner Zoll, nach der zwölftheiligen Eintheilung: es sind daher 304794 Wiener Fuß oder Zoll = 316102 Londner Fuß oder Zoll (vermög §. 182); was man den Reductionssatz für das Wiener und Londner Fußmaß zu nennen pflegt. Wäre nun eine gewisse Länge, welche, im Londner Fußmaße ausgedrückt, gegeben ist, in das Wiener Fußmaß zu verwandeln; so muß man die gegebene Zahl mit dem Bruche $\frac{304794}{316102}$ multipliciren. Wäre hingegen ein gegebenes Wiener Fußmaß in das Londner zu verwandeln, so muß man die gegebene Zahl mit $\frac{316102}{304794}$ multipliciren. Wenn mehrere gegebene Längenmaße mit einem Bruche zu multipliciren wären, so kann man einen solchen Bruch, oder ein solches Verhältniß $\frac{316102}{304794}$ (nach §. 112) in einen einfachen Ausdruck, ohne merkliche Veränderung des Werthes, verwandeln. Auf diese Art findet man, daß $\frac{316102}{304794}$ sehr nahe $= \frac{28}{27}$ sei; denn es ist $\frac{316102}{304794} = 1{,}03710$, dagegen $\frac{28}{27} = 1{,}03704$, folglich beträgt der Fehler nur 0,00006. Es sind daher nahe 27 Wiener Fuß = 28 Londner Fuß.

II. Die Lehre von der angenäherten Abkürzung der Brüche mit Hilfe der zusammenhängenden Brüche (nach §. 112) findet auch noch ihre Anwendung bei der Vereinfachung der Verhältnisse oder Reductionssätze von Maßen und Gewichten, so wie auch verschiedener anderer Verhältnisse. Z. B. In unserer Artillerie ist festgesetzt, daß sich der Durchmesser einer eisernen Vollkugel zum Durchmesser der Bohrung der sie schießenden Kanone so verhalte, wie sich der Durchmesser einer 7 pfündigen Kugel zum Durchmesser einer 8 pfündigen verhält. Nun lehrt die Geometrie und Mechanik, daß die Durchmesser gleichförmig dichter Vollkugeln von demselben Stoffe (Eisen) sich wie die dritten Wurzeln aus ihren, durch die nemliche Einheit gemessenen, Gewichten verhalten; folglich ist

$$\text{Durchm. der 7 pf. Kugel} : \text{Durchm. der 8 pf. Kugel} = \sqrt[3]{7} : \sqrt[3]{8},$$

daher auch

$$\text{Kugeldurchmesser} : \text{Bohrungsdurchmesser} = \sqrt[3]{7} : \sqrt[3]{8}.$$

Erwägt man nun, daß das Verhältniß $\sqrt[3]{7} : \sqrt[3]{8}$ auch in der Form $1 : \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{7}}$ geschrieben werden kann, so hat man nur mehr den Bruch $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{7}}$ oder $\frac{2}{1,9129312}$ mittels der Kettenbrüche abzukürzen, was bereits in §. 112, 3. Beispiel geschah, wo der angenäherte Werth $\frac{23}{22}$ gefunden wurde. Daher ist jenes Verhältniß auch noch gleich $1 : \frac{23}{22}$ oder $22 : 23$; nemlich

$$\text{Kugeldurchmesser} : \text{Bohrungsdurchmesser} = 22 : 23.$$

Es ist demnach das Verhältniß des Durchmessers der Kugel zum Durchmesser der Bohrung bei unsern Kanonen dem Verhältnisse der zwei Absolutzahlen 22 zu 23 gleich, d. i. wenn man den Durchmesser der Kugel bei einer Kanone in 22 gleiche Theile theilt, so ist der Durchmesser der Bohrung um einen solchen Theil größer, so daß daher der Unterschied zwischen dem Durchmesser der Kugel und der Bohrung (der Spielraum) $= \frac{1}{22}$ des Kugeldurchmessers ist.

Eben so findet man den Spielraum bei unsern metallenen Bombenmörsern $= \frac{1}{21}$ des Bombendurchmessers, weil es festgesetzt ist, daß bei diesen Mörsern der Durchmesser der Bombe sich zum Durchmesser des Flugs verhalte, wie der Durchmesser einer 20 pfündigen Kugel zum Durchmesser einer 23 pfündigen, nemlich wie

$$\sqrt[3]{20} : \sqrt[3]{23} = 1 : \sqrt[3]{\frac{23}{20}} = 1 : \frac{\sqrt[3]{1150}}{10} = 1 : 1{,}04769 = 1 : \frac{22}{21} = 21 : 22.$$

Endlich ist bei den eisernen (Stein-, Cöhornischen und Allarm-) Mörsern Kugeldurchmesser : Flugdurchmesser = Durchmesser einer 5 pfündigen Kugel : Durchmesser einer 6 pfündigen Kugel derselben Materie $= \sqrt[3]{5} : \sqrt[3]{6} = 16 : 17$.

IV. Abschnitt.

Von der zusammengesetzten Regel Detri.

§. 200.

Die Rechnungsfragen, welche wir bisher durch die Regel Detri aufgelöst haben, waren alle so beschaffen, daß in denselben nur zwei eigentliche Verhältnisse in Betrachtung gezogen wurden, weil alle übrigen Umstände vollkommen einerlei waren. Es kommen aber sehr oft Rechnungsfragen vor, wo mehr als zwei Verhältnisse in Erwägung gezogen werden müssen. Z. B. Es würde gefragt: wenn 100 Fl. Capital in 12 Monaten 5 Fl. Zins bringen; wie viel Gulden Zins bringt ein Capital von 836 Fl. in der Zeit von 16 Monaten? Hier sieht man wohl ein, daß in dieser Frage drei verschiedene Verhältnisse vorkommen, nemlich das Verhältniß der Zeit, des Capitals, und des Zinses. Ingleichen: Wenn gefragt würde; 5 Mann verfertigen in 6 Tagen 600 Faschinen, wenn sie täglich 8 Stunden arbeiten; wie viel Faschinen werden 150 Mann in 3 Tagen verfertigen, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten? Es kommen in dieser Frage vier Verhältnisse vor, nemlich das Verhältniß der Mannschaft, der Tage, der täglichen Arbeitsstunden, und der Anzahl der Faschinen.

Die Auflösung solcher Rechnungsfragen, worin mehr als zwei Verhältnisse vorkommen, pflegt man die zusammengesetzte Regel Detri zu nennen, so wie jene, worin blos zwei Verhältnisse vorkommen, die einfache Regel Detri genannt wird.

Jede (einfache sowohl als zusammengesetzte) Regel Detri kann aus zwei Theilen bestehend angesehen werden, von denen jener, worin alle Glieder bekannt sind, der bekannte Fall, und der andere, worin sich die noch unbekannte Zahl befindet, der unbekannte Fall genannt wird. So ist im ersten der gegebenen Beispiele der bekannte Fall, daß 100 Fl. Capital in 12 Monaten 5 Fl. Zins bringen; und im zweiten Beispiele ist der bekannte Fall, daß 5 Mann in 6 Tagen 600 Faschinen verfertigen, wenn sie täglich 8 Stunden arbeiten.

Anmerkung. Die practischen Rechenmeister pflegen insbesondere jene zusammengesetzte Regel Detri, worin drei Verhältnisse vorkommen, die *Regula quinque* zu nennen, weil eigentlich 5 Zahlen gegeben sind, wozu die sechste gefunden werden soll. Aus gleichem Grunde nennen sie die aus vier Verhältnissen zusammengesetzte Regel Detri die *Regula septem*, jene mit 5 Verhältnissen, *Regula novem*, u. s. w.

§. 201.

Jede zusammengesetzte Regel Detri kann durch eine wiederholte einfache Regel Detri aufgelöst werden, indem man jedesmal nur zwei verschiedene Verhältnisse in die Rechnung nimmt, und alle übrigen Umstände für vollkommen einerlei ansieht. Z. B. die oberwähnte Frage, wenn 100 Fl. Capital in 12 Monaten 5 Fl. Zins bringen; wie viel Fl. Zins bringt ein Capital von 836 Fl. in 16 Monaten, kann folgender Maßen aufgelöst werden: Man suche zuerst durch die einfache Regel Detri, wie viel dieses Capital von 836 Fl. in eben der Zeit von 12 Monaten Zins bringt, das ist, man lasse die Zeit gänzlich außer Acht, und ziehe nur das Verhältniß des Capitals und der Zinsen in Betrachtung; so ist 100 Fl. C. : 836 Fl. C. = 5 Fl. Z. : y Fl. Z., daher

$$y = \frac{5 \cdot 836}{100} = \frac{836}{20} = 41\tfrac{4}{5} \text{ Fl. Z.}$$

Da es nun bekannt ist, wie viel dieses Capital 836 Fl. in der Zeit von 12 Monaten Zins bringt, so läßt sich wieder durch die Regel Detri finden, wie viel es in der gegebenen Zeit von 16 Monaten Zins trägt, nemlich

$$12\ \text{M.} : 16\ \text{M.} = 41\tfrac{4}{5}\ \text{Fl. Z.} : x\ \text{Fl. Z.},$$

$$\text{demnach } x = \frac{41\frac{4}{5} \cdot 16}{12} = 55\tfrac{11}{15}\ \text{Fl. Z.}$$

Eben so kann auch das zweite oben erwähnte Beispiel mit vier Verhältnissen durch die dreimal wiederholte einfache Regel Detri aufgelöst werden, indem man jedesmal nur zwei Verhältnisse in Erwägung zieht, und die übrigen außer Acht läßt; nemlich man suche zuerst die Anzahl der Faschinen (z), welche die 150 Mann in eben der Zeit verfertigen werden, in welcher 5 Mann 600 Faschinen zu Stand bringen; so ist $5\ \text{M.} : 150\ \text{M.} = 600\ \text{F.} : z\ \text{F.}$, also $z = \dfrac{150 \cdot 600}{5} = 30 \cdot 600 = 18000$. Da es nun bekannt ist, wie viel Faschinen diese Mannschaft in 6 Tagen verfertigt, so läßt sich auch finden, wie viel Faschinen (y) eben diese Mannschaft in den gegebenen 3 Tagen verfertigen werden, wenn man die täglichen Arbeitsstunden noch außer Acht läßt, nemlich $6\ \text{T.} : 3\ \text{T.} = 18000\ \text{F.} : y\ \text{F.}$, daher $y = \dfrac{3 \cdot 18000}{6} = 9000\ \text{F.}$

Endlich ziehe man auch noch die täglichen Arbeitsstunden mit in die Rechnung; so ist $8\ \text{St.} : 12\ \text{St.} = 9000\ \text{F.} : x\ \text{F.}$, mithin $x = \dfrac{12 \cdot 9000}{8} = 1125 \cdot 12 = 13500$ Faschinen, welche von 150 Mann in 3 Tagen verfertigt werden, wenn diese täglich 12 Stunden arbeiten.

Auf dieselbe Art könnte jede aus noch so viel Verhältnissen zusammengesetzte Regel Detri aufgelöst werden.

§. 202.

Um aber auch zu zeigen, wie jede zusammengesetzte Regel Detri kürzer, als durch die wiederholte einfache aufgelöst werden könne, wollen wir die erste oben erwähnte Frage allgemein so stellen: Wenn c Fl. Capital in m Monaten z Fl. Zins bringen (als der bekannte Fall); wie viel Zins trägt ein Capital von C Fl. in M Monaten (als der unbekannte Fall)?

Benennen wir die Anzahl Gulden Zins, welche C Fl. in m Monaten bringen, mit $\mathfrak{Z}$, und jene, die dieses Capital in M Monaten trägt, mit Z, so hat man drei Reihen zusammengehöriger Größen, nemlich

z Fl. Zins,	c Fl. Capital,	m Monate,
$\mathfrak{Z}$ = =	C = =	m =
Z = =	C = =	M =

und sonach ist wie oben

$z:\mathfrak{Z}=c:C$, wenn die Zeiten gleich und die Capitale verschieden sind;

$\mathfrak{Z}:Z=m:M$, wenn die Capitale gleich, und die Zeiten verschieden sind; folglich auch

$z:Z=cm:CM$, oder

$$z:Z=\begin{array}{l}c:C\\m:M,\end{array}$$

wenn man sich vorstellt, daß die unter einander stehenden Zahlen mit einander zu multipliciren sind. Es verhalten sich nemlich, wenn die Capitale und Zeiten verschieden sind, die betreffenden Zinsen wie die Producte aus den Capitalen in die Zeiten; oder wie man zu sagen pflegt, die Zinsen stehen mit den Capitalen und Zeiten im zusammengesetzten Verhältnisse, d. h. das Verhältniß der Zinsen, $z:Z$, ist dem zusammengesetzten Verhältnisse aus jenem der Capitale, $c:C$, und dem der Zeiten, $m:M$, (beide letztere Verhältnisse gerad genommen) gleich. Setzen wir nun statt der allgemeinen Zahlen wieder die oben gegebenen Werthe, so ist

$$5:Z=\begin{array}{l}100:836\\12:\ 16,\end{array}$$ oder

$5:Z=100.12:836.16$, daher

$$Z=\frac{5.16.836}{12.100}=\frac{836}{3.5}=55\tfrac{11}{15}\text{ Fl. wie vorher.}$$

Um noch ein anderes Beispiel zu geben, stellen wir die zweite oben angeführte Frage allgemein, wie folgt: m Mann verfertigen in t Tagen, wenn sie täglich s Stunden arbeiten, f Faschinen; wie viel Faschinen werden M Mann in T Tagen, wenn sie täglich S Stunden arbeiten, verfertigen?

Benennen wir die Anzahl Faschinen, welche diese M Mann verfertigen würden, wenn sie ebenfalls t Tage, und täglich s Stunden arbeiten, mit $\mathfrak{f}$, die Anzahl Faschinen, die sie in T Tagen verfertigen würden, wenn sie täglich s Stunden arbeiten, mit $\mathfrak{F}$, und endlich jene, die sie in T Tagen verfertigen würden, wenn sie täglich S Stunden arbeiten, mit F; so ergeben sich hier 4 Reihen zusammengehöriger Größen, nemlich

f Faschinen,	m Mann,	t Tage,	s Arbeitsstunden,
$\mathfrak{f}$ „	M „	t „	s „
$\mathfrak{F}$ „	M „	T „	s „
F „	M „	T „	S „

und somit ist

$f:\mathfrak{f} = m:M$, denn 3 Mal so viel Mann verfertigen bei einerlei Umständen 3 Mal so viel Faschinen;

$\mathfrak{f}:\mathfrak{F} = t:T$, denn in 4 Mal so viel Tagen werden unter denselben Umständen 4 Mal so viel Faschinen fertig;

$\mathfrak{F}:F = s:S$, denn wenn der täglichen Arbeitsstunden 2 Mal so viel sind, so werden unter einerlei Umständen auch 2 Mal so viel Faschinen erzeugt; folglich auch

$f:F = mts:MTS$ (vermög §. 190), oder

$$f:F = \begin{array}{l} m:M \\ t:T \\ s:S, \end{array}$$

wenn man die Bedingung fest hält, daß die unter einander stehenden Zahlen zu multipliciren sind.

Es verhalten sich demnach die Zahlen der verfertigten Faschinen gegen einander wie die Producte aus der Anzahl der Mannschaft in die Arbeitstage, und in die täglichen Arbeitsstunden; oder die Anzahl der Faschinen steht mit der Anzahl der Mannschaft, der Arbeitstage, und der täglichen Arbeitsstunden im zusammengesetzten Verhältnisse, oder endlich das Verhältniß der Anzahlen der Faschinen gleicht dem zusammengesetzten Verhältnisse aus den geraden Verhältnissen der Anzahlen der Mannschaft, der Arbeitstage, und der täglichen Arbeitsstunden.

§. 203.

Es kommen aber in manchen Rechnungsfragen auch Größen vor, welche mit den Größen derjenigen Art, von welcher die gesuchte Größe ist, einzeln betrachtet, nicht, wie in den vorstehenden beiden Beispielen, in geradem, sondern in verkehrtem Verhältnisse stehen. Z. B. es wäre die Frage: Wenn $m = 100$ Mann in $t = 5$ Tagen $k = 250$ Klafter von einer Schanze verfertigen; wie viel Mannschaft müßte angestellt werden, wenn man die ganze Länge der Schanze von $K = 1000$ Klafter in $T = 2$ Tagen fertig haben will?

Benennt man nun die Anzahl der Mannschaft, welche diese K Klafter in t Tagen zu Stande bringen würde, mit $\mathfrak{M}$, und die Anzahl der Mannschaft, welche diese Arbeit in T Tagen ausführt, mit M, so finden sich hier drei Reihen von zusammengehörigen Größen vor, nemlich

m Mann, k Klafter, t Tage,
$\mathfrak{M}$ 〃 K 〃 t 〃
M 〃 K 〃 T 〃

daher ist

$m : \mathfrak{M} = k : K$, denn 3 Mal so viel Mann verfertigen in derselben Zeit eine 3 Mal längere Schanze,

$\mathfrak{M} : M = T : t$, und benöthigen zu einerlei Arbeit 3 Mal weniger Tage, folglich

$m : M = kT : Kt$ (§. 190),

oder $m : M = \begin{cases} k : K \\ T : t, \end{cases}$

und $M = \dfrac{mKt}{kT} = \dfrac{1000 . 100 . 5}{2 . 250} = 1000$ Mann.

Nemlich das Verhältniß der Mannschaft ist dann erst dem zusammengesetzten Verhältnisse aus der Anzahl der Klaftern und der Anzahl der Tage gleich, wenn man vorher das Verhältniß der Tage umkehrt, d. h. das Verhältniß der Mannschaften gleicht dem zusammengesetzten Verhältnisse aus dem geraden Verhältnisse der Anzahlen von Klaftern und dem verkehrten der Tage.

Als zweites Beispiel diene folgendes: Eine Festung, deren Besatzung $m = 6000$ Mann beträgt, ist dergestalt mit Proviant versehen, daß durch $t = 90$ Tage jedem Manne täglich $p = 2$ Pf. Brot verabreicht werden können; nun werden 1000 Mann fortgeschickt, und die übrigen $M = 5000$ Mann sollen durch $T = 130$

Tage ernährt werden; wie viel Pfund Brot können jedem Manne täglich gegeben werden?

Benennen wir die Anzahl Pfunde, die jedem Manne gegeben werden könnten, wenn sie mit dem Proviant nur t Tage auskommen dürften, mit $\mathfrak{P}$, und jene, die man jedem Manne geben kann, wenn sie T Tage auskommen müssen, mit P, so hat man hier gleichfalls drei Reihen zusammengehöriger Größen,

nemlich p Pf. Brot, m Mann, t Tage,

$\mathfrak{P}$ „ „ M „ t „

P „ „ M „ T „

und deßwegen ist

$p:\mathfrak{P} = M:m$ und $\mathfrak{P}:P = T:t$

denn man kann 4 Mal so viel Brot täglich jedem Manne geben, sowohl wenn durch die nemliche Zeit 4 Mal weniger Mann zu verproviantiren sind, als auch wenn dieselbe Mannschaft während 4 Mal weniger Tagen zu verpflegen ist; folglich

$p:P = MT:mt$ (vermög §. 190), oder

$$p:P = \begin{cases} M:m \\ T:t, \end{cases}$$ und

$$P = \frac{pmt}{MT} = \frac{2.6000.90}{5000.130} = \frac{2.6\;9}{5.13} = 1\frac{43}{65}\text{ Pf.}$$

$= 1$ Pf. 22 Loth beinahe.

Es steht hier nemlich die Menge Brotes umgekehrt im zusammengesetzten Verhältnisse mit der Anzahl der Mannschaft, und mit der Zeit, oder das Verhältniß der Mengen Brotes gleicht dem zusammengesetzten Verhältnisse aus den umgekehrten Verhältnissen der Mannschaften und der Tage.

§. 204.

Schon aus den hier behandelten Beispielen, mehr noch aber aus dem sogleich zu gebenden allgemeinen Beweise, wird man die Richtigkeit des folgenden Satzes erkennen.

Steht eine Art von Größen mit mehreren andern Arten, einzeln verglichen, theils im geraden, theils im verkehrten Verhältnisse; so ist das Verhältniß jeder zwei Größen der ersten Art gleich dem zusammengesetzten Verhältnisse aus den Verhältnissen der zugehörigen Größen aller übrigen Arten, wofern diese Verhältnisse in der nemlichen oder in umgekehrter Ordnung genommen werden, je nachdem die betreffenden Größen mit jenen der ersten Art im geraden oder verkehrten Verhältnisse stehen.

Um diesen Satz allgemein zu beweisen, seien

$A, B, C, \ldots\ldots K, L, M, \ldots\ldots T, U$

und $a, b, c, \ldots\ldots k, l, m, \ldots\ldots t, u$

zwei Reihen zusammengehöriger Größen verschiedener Arten von der Beschaffenheit, daß die Größen A, a, mit den Größen B, b, dann C, c, u. s. w. bis L, l, im geraden, mit den Größen M, m, u. s. f. bis U, u, aber im verkehrten Verhältnisse stehen. Denkt man sich nun noch andere Reihen zusammengehöriger Größen

$b, C, \ldots\ldots K, L, M, \ldots\ldots T, U,$

ferner $b, c, \ldots\ldots K, L, M, \ldots\ldots T, U,$

u. s. w., von denen jede zwei unmittelbar nach einander folgenden nur in den Quantitäten einer einzigen Art von Größen unterschieden sind, so müssen diesen Reihen gewisse Größen der ersten Art, welche $\beta, \gamma, \ldots\ldots \varkappa, \lambda, \mu, \ldots\ldots \tau$, heißen mögen, zugehören, wornach die Gesammtheit der hier zu betrachtenden Reihen folgende Zusammenstellung zuläßt.

$$\begin{array}{l}
A, B, C, \ldots\ldots K, L, M, \ldots\ldots T, U, \\
\beta, b, C, \ldots\ldots K, L, M, \ldots\ldots T, U, \\
\gamma, b, c, \ldots\ldots K, L, M, \ldots\ldots T, U, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varkappa, b, c, \ldots\ldots k, L, M, \ldots\ldots T, U, \\
\lambda, b, c, \ldots\ldots k, l, M, \ldots\ldots T, U, \\
\mu, b, c, \ldots\ldots k, l, m, \ldots\ldots T, U, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\tau, b, c, \ldots\ldots k, l, m, \ldots\ldots t, U, \\
a, b, c, \ldots\ldots k, l, m, \ldots\ldots t, u.
\end{array}$$

Vergleicht man nun die ersten zwei Reihen mit einander, so zeigt sich, daß blos die ersten zwei Arten von Größen verschieden sind. Da aber der Voraussetzung gemäß diese zwei Arten zusammengehöriger Größen, einzeln verglichen, oder wenn alle übrigen Umstände die nemlichen sind, mit einander im geraden Verhältnisse stehen, so hat man

$$A : \beta = B : b.$$

Ähnliche Proportionen ergeben sich aus der Vergleichung jeder zwei andern unmittelbar nach einander folgenden Reihen, daher im Ganzen nachstehende Proportionen:

$$\begin{array}{l} A : \beta = B : b \\ \beta : \gamma = C : c \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \varkappa : \lambda = L : l \\ \lambda : \mu = m : M \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \tau : a = u : U. \end{array}$$

Multiplicirt man nun die gleichvielten Glieder dieser Proportionen, und kürzt die ersten Verhältnisse (nach §. 187, VI.) durch Division ab, so erhält man die Proportion

$$A : a = BC \ldots L.m \ldots u : bc \ldots l.M \ldots U,$$

welche den aufgestellten Lehrsatz in Zeichen ausdrückt.

Für wirkliche Ausführungen von Rechnungen ist es bequemer und übersichtlicher, diese Proportion in der Gestalt

$$\begin{array}{rl} A : a = & B : b \\ & C : c \\ & \ldots\;\ldots \\ & K : k \\ & L : l \\ & m : M \\ & \ldots\;\ldots \\ & u : U \end{array}$$

zu schreiben, da hier die einzelnen Verhältnisse abgesondert dargestellt sind, wobei man sich jedoch immer zu denken hat, daß die unter einander stehenden Zahlen mit einander multiplicirt werden sollen.

Bedenkt man endlich noch, daß in dieser Proportion (vermög §. 182) das Product der innern Glieder

$$a, B, C, \ldots K, L, m, \ldots u$$

jenem der äußern

$$A,\ b,\ c, \ldots k,\ l,\ M, \ldots U$$

gleich sein muß, so kann man sich auch des folgenden für die Anwendung noch bequemeren Ansatzes (der sogenannten Rees'schen Regel)

$$\begin{array}{r|l} a & A \\ B & b \\ C & c \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ K & k \\ L & l \\ m & M \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ u & U \end{array}$$

bedienen, indem man die Glieder des ersten Verhältnisses in verkehrter, jene der übrigen aber in derselben Ordnung wie in der Proportion vor und hinter einem verticalen Striche (welcher gleichsam die Doppelpunkte sämmtlicher Verhältnisse in sich aufnimmt), anschreibt, wornach vor den Strich alle innern, hinter denselben alle äußern Glieder der Proportion zu stehen kommen, folglich das Product der vor dem Striche befindlichen Zahlen jenem der hinter dem Striche stehenden gleich sein muß.

Sind sonach alle Größen mit Ausnahme einer der zwei Größen der ersten Art bekannt, so kann man diese Unbekannte finden, indem man (nach §. 183), wenn sie ein $\substack{\text{inneres}\\ \text{äußeres}}$ Glied der Proportion ist, das Product aller $\substack{\text{äußeren}\\ \text{inneren}}$ Glieder durch jenes der bekannten $\substack{\text{inneren}\\ \text{äußeren}}$ Glieder dividirt, oder indem man, wenn sie bei der zuletzt angeführten Schreibung $\substack{\text{vor}\\ \text{hinter}}$ dem Striche steht, das Product der $\substack{\text{hinter}\\ \text{vor}}$ dem Striche befindlichen Zahlen durch jenes der übrigen bekannten $\substack{\text{vor}\\ \text{hinter}}$ dem Striche stehenden Zahlen dividirt.

§. 205.

Nun läßt sich eine **allgemeine Regel** geben, wornach jede, aus noch so viel geraden, und verkehrten Verhältnissen zusammengesetzte Regel Detri, ganz einfach aufgelöst werden kann. Man schreibe nemlich

1) alle Glieder des bekannten Falles nach was immer für einer Ordnung gerade unter einander, die Glieder des unbekannten Falles aber schreibe man so neben die vorigen, daß die gleichartigen Glieder, welche man nöthigen Falls noch gleichnamig macht, neben einander zu stehen kommen, und dort, wo die gesuchte Zahl hintrifft, setze man das Zeichen x.

2) Man prüfe das Verhältniß derjenigen Art von Größen, von welcher die Unbekannte x ist, zu jeder der ihr zugehörigen Arten von Größen insbesondere (nach §. 193), ob es nemlich gerade, oder verkehrt sei.

3) Man schreibe das mit der unbekannten Zahl behaftete Verhältniß vor das Gleichheitszeichen, hinter dasselbe aber und gerade unter einander die Verhältnisse der übrigen Größen, und zwar jedes derselben entweder gerade so, wie es angeschrieben steht, oder in umgekehrter Ordnung, je nachdem die betreffende Art von Größen mit jener des ersten Verhältnisses in geradem oder verkehrtem Verhältnisse steht, wobei man die unter einander stehenden Zahlen als mit einander zu multiplicirende ansieht.

4) Ist bei dieser Anordnung die unbekannte Zahl x ein inneres/äußeres Glied der Proportion, so erhält man ihren Werth, indem man das Product aller äußeren/inneren Glieder durch das Product der bekannten inneren/äußeren Glieder theilt. Daß man hiebei immer ein äußeres und ein inneres Glied, so oft es angeht, und für nothwendig erachtet wird, entweder durch Multiplication mit einem gemeinschaftlichen Nenner beide von ihren Nennern befreien, oder mittels Division durch einen gemeinschaftlichen Theiler abkürzen könne, leuchtet aus den bereits vorgetragenen Lehren ein.

Statt des in 3 und 4 enthaltenen Verfahrens kann man aber auch folgendes anwenden. Man setze die Glieder des die Unbekannte x enthaltenden Verhältnisses in umgekehrter Ordnung vor und hinter einen gezogenen verticalen Strich, die Glieder der übrigen Verhältnisse aber, in der nemlichen, oder in verkehrter Ordnung vor und hinter diesen Strich, je nachdem die betreffenden Größen mit jener des ersten Verhältnisses im geraden, oder verkehrten Verhältnisse stehen. Hierauf bestimme man die Unbekannte, indem man durch das Product der mit ihr auf der nemlichen Seite des Striches stehenden Zahlen das Product der auf der andern Seite desselben befindlichen Zahlen dividirt. Übrigens kann man bei dem Anschreiben die Zähler der gebrochenen Zahlen auf die diesen zukommende, die Nenner aber auf die entgegengesetzte Seite des Striches setzen, und vor der Bestimmung der Unbekannten, da, wo es angeht, zwei auf verschiedenen Seiten des Striches stehende Zahlen durch einen gemeinschaftlichen Divisor abkürzen.

1. Beispiel. Wenn 100 Mann in 3 Tagen einen Transcheegraben von 250 Klafter Länge, 7 Schuh Breite und 3 Schuh Tiefe verfertigen; in wie viel Tagen werden 300 Mann eine Transchee, die 600 Klafter lang, 8 Schuh breit und 4 Schuh tief werden soll, verfertigen?

Vorbereitung.

:100	Mann :	300
3	Tage :	x
250	Klafter lang :	600
7	Sch. breit :	8
3	Sch. tief :	4

Man bedarf nemlich 4 Mal so viel Tage, wenn man, unter übrigens gleichen Umständen, entweder 4 Mal weniger Arbeiter hat, oder die Länge, oder die Breite, oder endlich die Tiefe des Grabens 4 Mal so groß ist.

Rechnung mit der Proportion.

$$\begin{array}{r} 3 : x = 300 : 100 \\ 250 : 600 \\ 7 : \;\;8 \\ 3 : \;\;4 \end{array} \quad \text{und } x = \frac{3.100.600.8.4}{300.250.7.3} = \frac{4.8.4}{5.7} = \frac{128}{35} = 3\frac{23}{35} \text{ Tage.}$$

Rechnung nach der Rees'schen Regel.

$$\begin{array}{r|l} x & 3 \\ 300 & 100 \\ 250 & 600 \\ 7 & 8 \\ 3 & 4 \end{array} \quad \text{oder abgekürzt} \quad \begin{array}{r|l} x & 4 \\ 5 & 8 \\ 7 & 4 \end{array} \quad \text{und } x = \frac{4.8.4}{35} = \frac{128}{35} = 3\frac{23}{35} \text{ Tage.}$$

2. Beispiel. Wenn 20 Weber in 8 Wochen, indem sie wöchentlich 5 Tage, und täglich 10 Stunden arbeiten, 100 Stück Leinwand verfertigen, wo jedes Stück 30 Ellen lang, und $1\frac{1}{4}$ Ellen breit ist; wie viel Stück Leinwand werden 80 Weber in 15 Wochen verfertigen, wenn sie wöchentlich 6 Tage, und täglich 12 Stunden arbeiten, und jedes Stück 40 Ellen lang, und 1 Elle breit sein soll?

Vorbereitung.

20 Weber	: 80	Denn es werden 3 Mal mehr Stücke
8 Wochen	: 15	verfertigt, wenn, bei übrigens gleichen Um-
5 Tage	: 6	ständen, entweder der Weber, oder der Arbeits-
10 Stunden	: 12	wochen, oder der wöchentlichen Arbeitstage,
100 Stück	: x	oder der täglichen Arbeitsstunden 3 Mal mehr
: 30 Ell. lang	: 40	werden, oder wenn die Stücke 3 Mal weni-
: $1\frac{1}{4}$ Ell. breit	: 1	ger lang, oder breit erzeugt werden.

Proportion.

$$\begin{array}{r|l} 100 : x = 20 : 80 & x = \dfrac{100.80.15.6.12.30.5}{20.8.5.10.40.4} = \dfrac{3.3.3.3.100}{2.4} \\ 8 : 15 & \\ 5 : 6 & = \dfrac{8100}{8} = 1012\frac{1}{2} \text{ Stück.} \\ 10 : 12 & \\ 40 : 30 & \\ 4 : 5 & \end{array}$$

Rees'sche Regel.

$$\begin{array}{r|l} x & 100 \\ 20 & 80 \\ 8 & 15 \\ 25 & 6 \\ 10 & 12 \\ 40 & 30 \\ 4 & 5 \end{array} \quad \text{abgekürzt} \quad \begin{array}{r|l} x & 100 \\ & 3 \\ 4 & 3 \\ 2 & 3 \\ & 3 \end{array} \quad x = \frac{3.3.3.3.100}{8} = \frac{8100}{8} = 1012\tfrac{1}{2} \text{ St.}$$

§. 206.

Kettenregel.

Die zusammengesetzte Regel Detri findet auch ihre Anwendung, wenn das Verhältniß zweier Größen nicht unmittelbar bekannt, sondern erst durch bekannte Zwischenverhältnisse bestimmt werden muß. Z. B. Es würde gefragt: wie verhält sich der Wiener Fuß zum Berliner, wenn es bekannt ist, daß sich der Wiener zum Pariser Fuß wie 1401 : 1440; der Pariser zum Turiner wie 720 : 1139; der Turiner zum Londner wie 2277 : 1351; und der Londner zum Berliner wie 6756 : 6866 verhält?

Bezeichnen wir einen Wiener Fuß mit W, einen Pariser mit P, einen Turiner mit T, einen Londner mit L, und einen Berliner mit B, so ist nach den Angaben der Aufgabe

$$W : P = 1401 : 1440$$
$$P : T = 720 : 1139$$
$$T : L = 2277 : 1351$$
$$L : B = 6756 : 6866.$$

Suchen wir, zur leichteren Übersicht des Vorgangs zunächst nur das Verhältniß des Wiener Fußes zum Turiner, indem wir bedenken, daß vermög des ersten Verhältnisses der 1401te Theil des Wiener Fußes einem 1440sten Theile des Pariser Fußes, und zu Folge des zweiten Verhältnisses der 720ste Theil des Pariser Fußes dem 1139sten Theile des Turiner Fußes gleicht, folglich

$$\frac{W}{1401} = \frac{P}{1440} \text{ und } \frac{P}{720} = \frac{T}{1139}$$

ist. Theilt man das erste Paar dieser gleichen Brüche durch 720, das andere Paar durch 1440, so wird

$$\frac{W}{1401 . 720} = \frac{P}{1440 . 720}, \quad \frac{P}{720 . 1440} = \frac{T}{1440 . 1139},$$

also auch

$$\frac{W}{1401 . 720} = \frac{T}{1440 . 1139}.$$

Schreibt man diese gleichen Brüche wieder in Gestalt einer Proportion, so hat man

$$W : T = 1401 . 720 : 1440 . 1139,$$

oder auch

$$W : T = \left.\begin{matrix} 1401 : 1440 \\ 720 : 1139, \end{matrix}\right|$$

indem man immer die unter einander stehenden Zahlen als mit einander zu multiplicirende ansieht.

Es ist daher gestattet, die Proportionen

$$W : P = 1401 : 1440$$
$$P : T = 720 : 1139$$

gerade so zusammen zu setzen, als wenn die Buchstaben W, P, T nicht Größen, sondern unbenannte Zahlen vorstellen würden.

Sollen nun die obigen 4 Proportionen zusammengesetzt werden, so liefert die Zusammensetzung der zwei ersten, wie gefunden wurde,

$$\begin{array}{rl} W:T= & 1401:1440 \\ & 720:1139. \end{array}$$

Wird hiemit

$$T:L=2277:1351$$

verbunden, so ergibt sich auf dieselbe Weise

$$\begin{array}{rl} W:L= & 1401:1440 \\ & 720:1139 \\ & 2277:1351, \end{array}$$

und wenn damit auch noch

$$L:B=6756:6866$$

vereinigt wird, erscheint

$$\begin{array}{rl} W:B= & 1401:1440 \\ & 720:1139 \\ & 2277:1351 \\ & 6756:6866; \end{array}$$

woraus ersichtlich ist, daß die Zusammensetzung jeder beliebigen Anzahl von solchen Verhältnissen zwischen Größen gerade so ausgeführt werden könne, als wenn an der Stelle dieser Größen Absolutzahlen ständen.

Man kann sich von der Richtigkeit dieses Verfahrens auch auf folgende Weise Überzeugung verschaffen. Den angegebenen Verhältnissen gemäß ist

$$W=\frac{1401}{1440}P,\ P=\frac{720}{1139}T,\ T=\frac{2277}{1351}L,\ L=\frac{6756}{6866}B,$$

daher auch zunächst $W=\frac{1401}{1440}\cdot\frac{720}{1139}T,$

dann $W=\frac{1401}{1440}\cdot\frac{720}{1139}\cdot\frac{2277}{1351}L,$

und endlich $W=\frac{1401}{1440}\cdot\frac{720}{1139}\cdot\frac{2277}{1351}\cdot\frac{6756}{6866}B,$

was mit der Proportion

$$\begin{array}{rl} W:B= & 1401:1440 \\ & 720:1139 \\ & 2277:1351 \\ & 6756:6866 \end{array}$$

übereinkommt.

Als Endresultat dieser Aufgabe findet man nahe genug (nach §. 112)

$$W:B=51:50,$$

oder $$50\,W=51\,B.$$

Dies ist eigentlich der Grund der so berühmten **Kettenregel**, deren sich die Kaufleute bei der Vergleichung der Gewichte, Maße und Münzen, wie auch bei Wechselreductionen, u. dgl., mit Vortheil bedienen. Wir wollen den Gebrauch derselben durch ein **Beispiel** erläutern.

Wenn ein Stück Holländisches Tuch von 30 Brabanter Ellen 260 Holländische Gulden kostet, und ein Holländischer Gulden = 20 Stüver, 104 Stüver = 1 Holländer Ducaten, 1 Holländer Ducaten = 4 Fl. 28 Kr. Wiener Courant ist; wie viel kostet eine Wiener Elle von diesem Tuche, da 89 Wiener Ellen = 100 Brabanter Ellen sind?

Bezeichnet man mit x die Anzahl Gulden Wiener Courant, welche eine Wiener Elle kostet, so lassen sich die Angaben der Aufgabe auf folgende Weise zusammenstellen.

$$\begin{array}{ll}
x \text{ Fl. W. Cour.} & = 1 \text{ W. Elle} \\
89 \text{ W. Ellen} & = 100 \text{ Brab. Ellen} \\
30 \text{ Brab. Ellen} & = 260 \text{ Holl. Fl.} \\
1 \text{ Holl. Fl.} & = 20 \text{ Stüver} \\
104 \text{ Stüver} & = 1 \text{ Holl. Duc.} \\
1 \text{ Holl. Duc.} & = 4\tfrac{28}{60} \text{ Fl. W. Cour.}
\end{array}$$

Hieraus folgt aber zunächst

$$\begin{array}{ll}
x \text{ Fl. W. Cour.} & = 1 \text{ W. Elle} \\
1 \text{ W. Elle} & = \dfrac{100}{89} \text{ Br. Elle} \\
1 \text{ Br. Elle} & = \dfrac{260}{30} \text{ Holl. Fl.} \\
1 \text{ Holl. Fl.} & = \dfrac{20}{1} \text{ Stüver} \\
1 \text{ Stüver} & = \dfrac{1}{104} \text{ Holl. Duc.} \\
1 \text{ Holl. Duc.} & = \dfrac{4\frac{28}{60}}{1} \text{ Fl. W. C.}
\end{array}$$

Sofort ist offenbar

$$x \text{ Fl. W. C.} = 1 \text{ W. Ell.} = 1 . \frac{100}{89} \text{ B. E.} = 1 . \frac{100}{89} \cdot \frac{260}{30} \text{ H. F.}$$

$$= 1 . \frac{100}{89} \cdot \frac{260}{30} \cdot \frac{20}{1} \text{ St.} = 1 . \frac{100}{89} \cdot \frac{260}{30} \cdot \frac{20}{1} \cdot \frac{1}{104} \text{ H. D.}$$

$$= 1 . \frac{100}{89} \cdot \frac{260}{30} \cdot \frac{20}{1} \cdot \frac{1}{104} \cdot \frac{4\frac{28}{60}}{1} \text{ Fl. W. Cour.}$$

$$\text{also } x = 1 . \frac{100}{89} \cdot \frac{260}{30} \cdot \frac{20}{1} \cdot \frac{1}{104} \cdot \frac{4\frac{28}{60}}{1}.$$

Dieser Werth von x läßt sich aber auch als aus der Proportion

$$\begin{array}{rl} x : 1 = 100 : & 89 \\ 260 : & 30 \\ 20 : & 1 \\ 1 : & 104 \\ 4\frac{28}{60} : & 1 \end{array}$$

bestimmt ansehen, daher man ihn nach der Rees'schen Regel finden wird, wenn man alle $\frac{\text{äußeren}}{\text{inneren}}$ Glieder der Proportion $\frac{\text{vor}}{\text{hinter}}$ den verticalen Strich schreibend, folgenden Ansatz bildet.

$$\begin{array}{r|l} x & 1 \\ 89 & 100 \\ 30 & 260 \\ 1 & 20 \\ 104 & 1 \\ 1 & 4\frac{28}{60}. \end{array}$$

Zu diesem Resultate gelangt man auch durch Auflösung mehrerer einfacher Regel Detrien, indem man sich die Fragen, wie folgt, stellt.

Wie viel (t) Brabanter Ellen beträgt 1 Wiener Elle, wenn 100 Brabanter Ellen 89 Wiener Ellen ausmachen?

Wie viel (u) Holl. Gulden kosten t Brabanter Ellen, wenn um 260 Holl. Gulden 30 Brab. Ellen gekauft werden?

Wie viel (v) Stüver machen u Holl. Gulden, wenn 1 Holl. Gulden 20 Stüver enthält?

Wie viel (w) Holl. Ducaten betragen v Stüver, wenn 104 Stüver 1 Holl. Ducaten ausmachen?

Wie viel (x) Fl. Wiener Courant machen diese w Holländer Ducaten, wenn 1 Holl. Ducaten $4\frac{28}{60}$ Fl. W. Cour. gibt?

Man erhält auf diese Weise nachstehende Proportionen:

t Br. Ell. : 100 Br. Ell. = 1 W. Ell. : 89 W. Ell.
u H. Fl. : 260 H. Fl. = t Br. Ell. : 30 Br. Ell.
v Stüver : 20 Stüver = u H. Fl. : 1 H. Fl.
w H. Duc. : 1 H. Duc. = v Stüver : 104 St.
x Fl. W. C. : $4\frac{28}{60}$ Fl. W. C. = w H. D. : 1 H. D.

Schreibt man diese Proportionen, was gestattet ist, mit Beseitigung der vorkommenden Einheiten von Größen blos in Absolutzahlen, und vertauscht die mittleren Glieder, so erhält man

$$\begin{aligned} t : 1 &= 100 : 89 \\ u : t &= 260 : 30 \\ v : u &= 20 : 1 \\ w : v &= 1 : 104 \\ x : w &= 4\tfrac{28}{60} : 1 \end{aligned}$$

und hieraus $x : 1 = 100 : 89$ oder wie früher

$$\begin{aligned} &260 : 30 \\ &20 : 1 \\ &1 : 104 \\ &4\tfrac{28}{60} : 1 \end{aligned}$$

x	1
89	100
30	260
1	20
104	1
1	$4\frac{28}{60}$.

Man kann daher die vorliegende Aufgabe auf folgende Weise ansetzen und ausrechnen.

Fl. W. Cour.	x	1	Wien. Elle	x	
Wien. Ellen	89	100	Brab. Ellen	89	100
				3	26
Brab. Ellen	30	260	Holl. Fl.	26	5
				60	268
Holl. Fl.	1	20	Stüver		
				x	
Stüver	104	1	Holl. Duc.	89	100
				3	
Holl. Ducaten	1	$4\frac{28}{60}$	Wien. Cour.	12	268

ferner $89 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x = 67 \cdot 100$, nemlich $801 \cdot x = 6700$; und endlich $x = 6700 : 801 = 8$ Fl. $21\frac{3}{4}$ Kr.

Der Rechnungsansatz ist demnach allgemein folgender: Man fängt mit der unbekannten Zahl an, indem man sie oben ansetzt, und neben ihr rechts hinter einen abwärts gezogenen Strich setzt man jene Größe, der sie im Werthe gleich sein soll; sodann kommt links diejenige Zahl, welche mit der zuletzt (rechts) angeschriebenen gleichartig ist, und rechts neben ihr setze man die Zahl, welche in der Angabe mit ihr einerlei Werth hat; ferner wird wieder zur Linken jene Zahl gesetzt, die mit der letzt geschriebenen gleichnamig ist, und neben ihr zur Rechten jene, welche mit ihr einerlei Werth hat; und so weiter bis man endlich rechts eine Zahl erhält, die mit der Unbekannten einerlei Namen führt. Übrigens wird wie bei der Rees'schen Regel (im §. 205) verfahren.

V. Abschnitt.

Von der Theilrechnung.

§. 207.

Wenn ein Ganzes in mehrere ungleiche Theile getheilt werden soll, die ein bestimmtes Verhältniß unter einander haben müssen, so wird die Art, wie dies geschieht, die Theilrechnung, und insbesondere die Gesellschaftsrechnung genannt, wenn sie bei Handlungsgesellschaften angewendet wird, um den Gewinn und Verlust der einzelnen Personen nach einem bestimmten Verhältnisse zu berechnen. Z. B. Drei Kaufleute treten in eine Handlungscompagnie; der erste legt $a=4000$ Fl., der zweite $b=6400$ Fl., der dritte $c=5600$ Fl. ein; sie gewinnen mit dieser ganzen Einlage $g=12000$ Fl.; wie viel gebührt nun einem jeden von ihnen?

Hier ist es klar, daß der ganze Gewinn verhältnißmäßig nach den Einlagen getheilt werden muß, nemlich, daß sich die entfallenden Gewinne wie die gemachten Einlagen verhalten, da derjenige 2, 3, 4, . . . Mal mehr gewinnen muß, welcher 2, 3, 4, . . . Mal mehr als ein Anderer eingelegt hat.

Benennen wir den noch unbekannten Gewinn des ersten mit x, jenen des zweiten mit y, und den des dritten mit z, so ist

$$a:b=x:y, \quad b:c=y:z, \quad c:a=z:x,$$

also auch, wenn man die inneren Glieder dieser Proportionen vertauscht (§. 187, I.)

$$a:x=b:y, \quad b:y=c:z, \quad c:z=a:x,$$

oder

$a:x=b:y=c:z$, und daher (nach §. 191)

$$(a+b+c):(x+y+z)=a:x=b:y=c:z.$$

Es ist aber $a+b+c$ die sämmtliche Einlage, und $x+y+z$ der sämmtliche Gewinn $=g$, (weil alle drei Gewinne zusammen den ganzen Gewinn ausmachen müssen); folglich verhält sich die ganze Einlage zum ganzen Gewinn, wie die Einlage eines jeden einzelnen sich zu seinem einzelnen Gewinn verhält.

Setzen wir nun wieder statt der Buchstaben a, b, c, g ihre Werthe, so ist

$16000:12000=4000:x$,	nemlich $x=3000$ Fl. Gew. d. 1ten
$=6400:y$,	$y=4800$ Fl. Gew. d. 2ten
$=5600:z$,	$z=4200$ Fl. Gew. d. 3ten.

Und eben so könnte man auch verfahren, wenn mehr Personen in der Gesellschaft wären.

Dieselbe Auflösung kann auch angewendet werden, wenn eine Mischung von verschiedenen Ingredienzen gemacht werden soll, wo die Verhältnisse der Ingredienzen gegen einander bekannt sind. Z. B. Zu einem guten Schießpulver gehören 16 Theile Salpeter, 2 Theile Schwefel, und 3 Theile Kohlen; wenn nun 600 Centner von diesem Pulver erzeugt werden sollen, wie viel muß von jedem insbesondere genommen werden?

Da bei jeder Menge Pulver die Menge (x) Salpeter, die Menge (y) Schwefel, und die Menge (z) Kohlen sich gegen einander verhalten müssen wie $16:2:3$, so ist auch hier

$(16+2+3):600=16:x$;	$x=457\frac{1}{7}$ Cent. Salpeter;
$=2:y$;	$y=57\frac{1}{7}$ Cent. Schwefel;
$=3:z$;	$z=85\frac{5}{7}$ Cent. Kohlen.

§. 208.

Es können bei einer Gesellschaftsrechnung nicht nur die Einlagen, sondern auch die Zeiten, durch welche jeder sein Geld in der Handlung liegen läßt, verschieden sein. Z. B. Zwei Personen treten in eine Handlung; der erste legt $E = 6500$ Fl., und läßt dieses Geld durch $Z = 6$ Monate in der Handlung liegen; der andere aber legt $e = 5400$ Fl., und läßt dieses Geld durch $z = 5$ Monate in der Handlung liegen; und sie gewinnen damit $a = 12000$ Fl. Wie viel soll nun jeder bekommen?

Hier müssen sich die Gewinne so gegen einander verhalten, wie die Producte aus den Einlagen in die Zeiten; nemlich der Gewinn steht mit der Einlage und der Zeit im zusammengesetzten Verhältnisse; weil der Gewinn mit der Einlage insbesondere im geraden, und mit der Zeit insbesondere ebenfalls im geraden Verhältnisse steht. Benennen wir daher den Gewinn des ersten mit G, und den Gewinn des andern mit g, so ist $G : g = E . Z : e . z$;

$$\left.\begin{array}{ll}\text{daher} & EZ + ez : EZ = G + g : G \\ \text{und} & EZ + ez : ez = G + g : g\end{array}\right\} \text{§. 187, III.}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{oder} & EZ + ez : G + g = EZ : G \\ & \qquad\qquad\qquad\quad = ez : g\end{array}\right\} \text{§. 187, I.}$$

Es ist aber $G + g = a$ der sämmtliche Gewinn; folglich verhält sich hier die Summe der Producte aus den Einlagen in die Zeiten zum ganzen Gewinn, wie jedes einzelne Product zum betreffenden Gewinn.

Setzen wir in unserm Beispiele statt E, e, Z, z, ihre Werthe, so ist

$$6 . 6500 + 5 . 5400 : 12000 = 6 . 6500 : G; \quad G = 7090\tfrac{10}{11} \text{ Fl.}$$
$$= 5 . 5400 : g; \quad g = 4909\tfrac{1}{11} \text{ Fl.}$$

Es ist übrigens leicht einzusehen, daß dies auch Statt findet, wenn mehr Personen unter diesen Umständen in Gesellschaft wären.

Anmerkung. Wir übergehen hier mit Stillschweigen alle noch übrigen, in den praktischen Rechenbüchern vorfindigen Rechnungsregeln, als: Regula Alligationis, Falsi, Coeci, u. dgl., weil dergleichen Rechnungsfragen durch die Algebra ungemein faßlicher und kürzer, als hier geschehen kann, beantwortet werden können, wie es in der Folge zu ersehen sein wird.

Fünftes Hauptstück.

Von den Gleichungen des ersten und zweiten Grades nebst ihrer Anwendung auf die Auflösung verschiedener Aufgaben.

I. Abschnitt.

Von den Gleichungen und ihrer Auflösung.

§. 209.

Jede algebraische Größe kann auf mannigfaltige Art ausgedrückt oder vorgestellt werden; z. B. die Größe $6a$ kann entweder durch $9a + \sqrt{\frac{12a^2}{3}} - 5a$, oder durch $4 \cdot 9a - \frac{90a}{3}$, u. s. w. vorgestellt werden; und es ist $9a + \sqrt{\frac{12a^2}{3}} - 5a = 4 \cdot 9a - \frac{90a}{3}$.

Eben so ist $6ab + \frac{20}{4} - \frac{14ab}{3} = \frac{1}{4}\left(\frac{28ab}{3} - \frac{40}{7} - 4ab + \frac{180}{7}\right)$, weil jedes nach vorgenommener Reduction die Größe $5 + \frac{4ab}{3}$ zum Vorschein bringt. Eine solche Bezeichnung, wodurch eine Größe auf doppelte Art ausgedrückt wird, z. B.

$9a + \sqrt{\frac{12a^2}{3}} - 5a = 4 \cdot 9a - \frac{90a}{3}$, nennt man eine Gleichung. Die Größen, zwischen welchen das Gleichheitszeichen steht, nennt man Theile der Gleichung; und jene Größen, die auf einer oder der andern Seite des Gleichheitszeichens mit den Zeichen +

oder — verbunden sind, heißen Glieder der Gleichung. Im letzt angeführten Beispiele besteht der eine Theil der Gleichung aus 3, und der andere aus 2 Gliedern.

§. 210.

Solche Gleichungen, deren Richtigkeit durch den blosen Anblick, oder durch die Reduction der Glieder gleich in die Augen fällt, ohne daß es nöthig wäre, in Erwägung zu ziehen, was für Werthe die darin vorkommenden Buchstaben haben, oder wie selbe von einander abhängen müssen, werden identische Gleichungen genannt. Zuweilen aber ist es aus andern Umständen bekannt, daß zwei algebraische Ausdrücke einander gleich sein müssen, ohne daß beide die nemlichen Buchstaben führen, wo dann die Gleichheit der zwei algebraischen Ausdrücke auch keineswegs durch eine blose Reduction der Glieder, ohne auf ihren Werth zu sehen, einleuchten kann. Z. B. Das Gewicht einer Kugelpatrone sei a Pf., die dazu gehörige Kugel wiege b Pf., das Pulver hiezu sei c Pf., und der Sack sammt Bindfaden wiege d Pf.; so ist offenbar, daß $a=b+c+d$ sein muß, welches nicht durch einen blosen Anblick der Gleichung, sondern erst aus der Bedeutung der Buchstaben a, b, c und d folgt. Eine solche Bezeichnung, wo zwei auf verschiedene Art ausgedrückte algebraische Größen einander gleich sind, in so fern man den darin vorkommenden Buchstaben gewisse Werthe beilegt, heißt eine wirkliche algebraische Gleichung. So ist bei den angeführten Umständen $a=b+c+d$ eine wirkliche algebraische Gleichung.

Eben so kann auch $5a-\frac{4c}{5}=a+b+c$ eine wirkliche algebraische Gleichung sein, falls die Größen a, b, c so von einander abhängen, daß diese Gleichung Statt findet.

§. 211.

Die vorzüglichsten Eigenschaften der Gleichungen sind folgende.

1) In jeder Gleichung kann man jedes Glied aus einem Theile der Gleichung hinweg schaffen, wenn man es in den andern Theil der Gleichung mit verändertem Zeichen überträgt. Z. B. In der Gleichung $4a-5b=m+c$ kann das Glied $-5b$ auf die andere

Seite des Gleichheitszeichens geschafft werden, indem man schreibt $4a=m+c+5b$, und so auch $4a-m=c+5b$; (vermög §. 16 und 22, Grundsatz I.) Man kann demnach auch zwei ganz gleiche Größen, welche auf verschiedenen Seiten des Gleichheitszeichens stehen, gänzlich hinweg lassen.

2) Wenn man alle Glieder der Gleichung mit einer und der nemlichen Größe multiplicirt, oder dividirt, so bleibt die Gleichung noch richtig (vermög §. 29 und 39, Grundsatz I.). Man kann demnach in einer Gleichung jeden beliebigen Nenner eines Gliedes hinweg schaffen, wenn man alle Glieder der Gleichung mit diesem Nenner multiplicirt, so wie man auch was immer für ein Glied von einem Coefficienten (oder Factor) befreien kann, wenn man alle Glieder der Gleichung durch diesen Coefficienten (oder Factor) dividirt. Ist z. B.

$$\frac{5ab}{c} - bc = a + 3c$$

eine Gleichung, und soll man darin das erste Glied $\frac{5ab}{c}$ von dem Nenner c, so wie auch von dem Coefficienten 5 befreien, so ist

$$ab - \frac{bc^2}{5} = \frac{ac+3c^2}{5};$$

indem man alle Glieder mit c multiplicirt und durch 5 dividirt, oder mit $\frac{c}{5}$ multiplicirt.

Aus diesem erhellet auch, daß eine Gleichung noch richtig bleibe, wenn man die Zeichen aller Glieder verändert, weil man sich vorstellen kann, man habe die ganze Gleichung mit -1 multiplicirt; wenn also $ab-bc=c+d$ ist, so ist auch

$$bc-ab=-c-d.$$

3) Eben so bleibt eine Gleichung auch noch richtig, wenn man beide Theile auf die nemliche Potenz erhebt, oder aus beiden Theilen dieselbe Wurzel zieht (vermög §. 137, Grundsatz I. und II.). Dadurch sind wir im Stande, jedes Glied in einer Gleichung von seinem Exponenten, oder Wurzelzeichen zu befreien. Soll z. B. in der Gleichung $a+\frac{5b^3}{4} = c$,

b vom Coefficienten, Nenner und Exponenten befreit werden; so ist

$\frac{5b^3}{4} = c - a$ (nach Nr. 1); und $5b^3 = 4c - 4a$, daher

$b^3 = \frac{4c-4a}{5}$ (verm. Nr. 2); und endlich $b = \sqrt[3]{\frac{4c-4a}{5}}$.

Soll in der Gleichung $\frac{a}{2} - \sqrt{bc} = c$ das Glied $\sqrt{bc}$ vom Wurzelzeichen befreit werden, so ist $-\sqrt{bc} = c - \frac{a}{2}$, und

$(-\sqrt{bc})^2 = \left(c - \frac{a}{2}\right)^2$; nemlich $bc = c^2 - ac + \frac{a^2}{4}$.

§. 212.

Eine Größe aus einer vorgelegten Gleichung finden, oder vielmehr den Werth einer Größe aus einer gegebenen Gleichung bestimmen, heißt diese Größe durch die andern in der Gleichung vorkommenden Größen so ausdrücken, daß, wenn man diesen gefundenen Ausdruck, statt der Größe in der vorgelegten Gleichung substituirt, eine identische Gleichung zum Vorschein komme. Z. B. Aus der Gleichung $a + \frac{4b}{3} = ac - 5$ den Werth von b finden, heißt b durch a und c so ausdrücken, daß, wenn man den gefundenen Werth von b in dieser Gleichung substituirt, eine identische Gleichung zum Vorschein komme.

Dieser Werth ist $b = \frac{3ac - 15 - 3a}{4}$; man erhält ihn, wenn man (nach §. 211) trachtet, b ganz allein auf eine Seite des Gleichheitszeichens, und zwar positiv zu erhalten, und es vom Coefficienten, vom Nenner und von dem etwa noch vorfindigen Exponenten befreit, was sich stets thun läßt, wenn nur b nicht in der Gleichung mit zwei verschiedenen Exponenten erscheint, welcher Fall erst später betrachtet werden wird. Wäre nun in der vorgelegten Gleichung a und c in Zahlen bekannt, z. B. $a=7$, $c=4$, und von b wüßte man nur aus gewissen Umständen, b hänge von a und c so ab, daß die angeführte Gleichung $a + \frac{4b}{3} = ac - 5$ Statt finden müsse, ohne noch eigentlich zu wissen, was b in Zahlen gelte, so ist durch diese Operation auch b in Zahlen bestimmt, wenn man in dem gefundenen Werthe von $b = \frac{3ac - 15 - 3a}{4}$ statt a und c ihre Werthe 7 und 4 substituirt; es ist alsdann $b = \frac{3.7.4 - 15 - 3.7}{4} = 12$. In solchen Fällen wird b die unbekannte Größe genannt, und die Operation, selbe zu finden, heißt die Gleichung auflösen.

§. 213.

Wenn die Größe, welche aus einer Gleichung bestimmt werden soll, nur in der ersten Potenz erscheint, so wird die Gleichung eine einfache, oder eine Gleichung vom ersten Grade genannt; die Gleichung heißt eine quadratische, oder eine Gleichung vom 2^{ten} Grade, wenn der höchste Exponent der zu bestimmenden Größe 2 ist; jede andere Gleichung, in welcher der höchste Exponent der Unbekannten größer als 2 ist, wird eine höhere genannt. So ist die Gleichung $3a^2b - c^3 = 4b + ac^3 + c$ eine Gleichung vom ersten Grade, wenn b, und eine quadratische Gleichung, wenn a daraus zu bestimmen wäre.

Eine Gleichung heißt rein, wenn die zu bestimmende Größe nur in einer einzigen Potenz in der Gleichung erscheint. Befindet sich aber die zu bestimmende Größe in der Gleichung zu verschiedenen Potenzen erhoben, so ist diese eine verwickelte Gleichung. So ist die Gleichung $a^3b - a^3 = 4b^2$ eine reine Gleichung, wenn a daraus zu bestimmen ist; wäre hingegen b daraus zu suchen, so ist sie eine verwickelte quadratische Gleichung; weil a, obwohl in zwei Gliedern, doch nur in eben derselben Potenz, b hingegen in der zweiten und ersten Potenz in der Gleichung erscheint.

§. 214.

Wie aus einer einfachen, oder auch aus einer reinen, höhern Gleichung die unbekannte Größe gefunden wird, ist bereits (im §. 212) gesagt worden; nur kommt noch zu erinnern, daß, wenn die zu bestimmende Größe in mehreren Gliedern erscheint, alle Glieder, worin sie sich befindet, auf die eine Seite des Gleichheitszeichens, und die übrigen auf die andere geschafft werden müssen (nach §. 211); sodann zerlege man sie in Factoren, und befreie endlich die zu suchende Größe von ihrem zusammengesetzten Factor (nach §. 39, Grundsatz I).

Beispiele.

1. Soll a aus der Gleichung $2ab=b-ac+d$ gefunden werden, so ist

$2ab+ac=b+d$ (nach §. 211, Nr. 1), und

$a(2b+c)=b+d$ durch Zerlegung in Factoren, und endlich

$a=\frac{b+d}{2b+c}$ (§. 211, Nr. 2).

2. Soll c aus der Gleichung $a^2bc-cd+5=d-2c$ gefunden werden; so ist

$a^2bc-cd+2c=d-5$ durch Übertragung der Glieder, und

$c(a^2b-d+2)=d-5$ durch Zerlegung in Factoren, endlich

$c=\frac{d-5}{a^2b-d+2}$ durch Division.

3. Soll x aus $ax+bc=dc+x$ gefunden werden, so ist

$ax-x=dc-bc$ durch Übertragung der Glieder, und

$x(a-1)=c(d-b)$ durch Zerlegung in Factoren, endlich

$x=\frac{c(d-b)}{a-1}$ durch Division.

4. Ist y aus $\frac{ab}{y}=bc+d+\frac{1}{y}$ zu finden, so ist

$ab=bcy+dy+1$ durch die Multiplication mit y, und

$ab-1=y(bc+d)$ durch Zerlegung in Factoren, endlich

$y=\frac{ab-1}{bc+d}$ durch Division.

5. Ist x aus $a^2-x^2=\frac{ab+bx}{c}$ zu suchen, so ist

$(a+x)(a-x)=\frac{b(a+x)}{c}$ durch Zerlegung in Factoren, und

$a-x=\frac{b}{c}$ durch die Divis. mit $(a+x)$, endlich

$x=a-\frac{b}{c}$ durch Übertragung der Glieder.

6. Ist z aus $az^2-bc+1=35+bz^2$ zu suchen, so ist

$az^2-bz^2=35+bc-1$ durch Übertragung der Glieder, und

$$z^2(a-b)=34+bc$$ durch Zerlegung in Factoren, sodann

$$z^2=\frac{34+bc}{a-b}$$ durch Division, endlich

$$z=\pm\sqrt{\frac{34+bc}{a-b}}$$ durch Ausziehung der zweiten Wurzel.

7. Soll x aus $ax^m+b=bx^m+18-x^m$ gefunden werden, so ist

$$ax^m-bx^m+x^m=18-b$$ durch Übertragung der Glieder, dann

$$x^m(a-b+1)=18-b$$ durch Zerlegung in Factoren, ferner

$$x^m=\frac{18-b}{a-b+1}$$ durch Division, endlich

$$x=\sqrt[m]{\frac{18-b}{a-b+1}}$$ durch Ausziehung der $m$ten Wurzel.

§. 215.

Wäre aber aus einer verwickelten quadratischen Gleichung die unbekannte Größe zu finden, so ordne man die Gleichung dergestalt, daß die unbekannte Größe der zweiten Potenz mit dem positiven Zeichen, ohne Nenner und Coefficienten, und neben ihr die unbekannte Größe in der ersten Potenz (die was immer für Zeichen, Coefficienten und Nenner haben kann), in den einen Theil der Gleichung, und alle übrigen Glieder, worin sich die unbekannte Größe nicht mehr befindet, in den andern zu stehen kommen. Z. B. Wenn aus der Gleichung $ab-bx=d-ax^2$ die Größe x zu suchen wäre, so kann die Gleichung (nach §. 211, Nr. 1 und 2), wie folgt, geordnet werden:

$$x^2-\frac{bx}{a}=\frac{d-ab}{a}.$$

Eben so kann die Gleichung

$$bx-ax^2+d=cx-dx^2+b,$$

wenn x daraus bestimmt werden soll, wie folgt, geordnet werden:

$$dx^2-ax^2+bx-cx=b-d,$$ und

$$x^2(d-a)+(b-c)x=b-d,$$ endlich

$$x^2+\frac{b-c}{d-a}x=\frac{b-d}{d-a}.$$

Man sieht daraus, daß jede verwickelte quadratische Gleichung sich auf die Form $x^2+Ax=B$ bringen läßt, wo x die zu suchende Größe, A und B aber jede positive oder negative Größe vorstellen kann, in der sich x nicht mehr befindet. Betrachtet man nun diese Gleichung, so sieht man sogleich, daß der erste Theil derselben ein vollkommenes Quadrat von $(x+\frac{1}{2}A)$ wäre, wenn er noch das Quadrat dieses zweiten Gliedes $(\frac{1}{2}A)$ enthielte, und daß man dann die Gleichung durch Ausziehung der zweiten Wurzel auf eine einfache reduciren könnte. Man addire demnach bei einer, nach der angeführten Art geordneten, verwickelten quadratischen Gleichung das Quadrat des halben Coefficienten der unbekannten Größe in der ersten Potenz, zu beiden Theilen der Gleichung, und ziehe dann beiderseits die Quadratwurzel, so ist die Gleichung auf eine einfache gebracht, aus der sich die gesuchte Größe finden läßt. Die allgemeine Form für jede geordnete quadratische Gleichung ist nemlich

$$x^2+Ax=B,$$

addirt man hiezu $(\frac{1}{2}A)^2=\frac{1}{4}A^2$,

so wird $x^2+Ax+(\frac{1}{2}A)^2=\frac{1}{4}A^2+B$,

und $\sqrt{[x^2+Ax+(\frac{1}{2}A)^2]}=\sqrt{(\frac{1}{4}A^2+B)}$,

folglich n. Ausz. d. W. $x+\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{(\frac{1}{4}A^2+B)}$,

endlich ist die Unbekannte $x=-\frac{1}{2}A\pm\sqrt{(\frac{1}{4}A^2+B)}$.

Aus einer, nach obiger Vorschrift geordneten, verwickelten quadratischen Gleichung findet man demnach beide Werthe der Unbekannten, indem man den mit entgegengesetztem Zeichen genommenen halben Factor der ersten Potenz der Unbekannten um die zweite Wurzel aus der Summe der zweiten Potenz von diesem halben Factor und des zweiten Theils der Gleichung einmal vermehrt, und ein zweites Mal vermindert.

Daß das Zeichen $\pm$ gesetzt werden müsse, erhellet daraus, weil sowohl eine positive, als negative Wurzel ein positives Quadrat gibt. Welches Zeichen von beiden aber bei der Entwicklung genommen werden soll, müssen andere Umstände entscheiden, wie es weiterhin bei der Auflösung der Aufgaben gezeigt werden wird.

Beispiele.

1. Soll x aus der Gleichung $3x^2-144=6x$ gefunden werden, so ist

$3x^2-6x=144$ (nach §. 211, Nr. 1),

$x^2-2x=48$ durch Division, und

$x=1\pm\sqrt{49}=1\pm7=8$ oder -6.

2. Ist x aus der Gleichung $4ax-bx^2=bx-c$ zu bestimmen, so ist

$-bx^2+4ax-bx=-c$ durch Übertragung der Glieder,

$bx^2+bx-4ax=c$ durch die Multiplication mit -1,

$bx^2+(b-4a)x=c$ durch Zerlegung in Factoren,

$x^2+\frac{b-4a}{b}\cdot x=\frac{c}{b}$ durch die Division mit b, und

$$x=\frac{4a-b}{2b}\pm\sqrt{\left[\frac{c}{b}+\left(\frac{b-4a}{2b}\right)^2\right]}.$$

3. Soll y aus der Gleichung $ay^2-by-c=cy^2-ay$ gesucht werden, so ist

$ay^2-cy^2+ay-by=c$ durch Übertragung der Glieder,

$y^2(a-c)+y(a-b)=c$ durch Zerlegung in Factoren,

$y^2+\frac{a-b}{a-c}y=\frac{c}{a-c}$ durch Division, und

$$y=\frac{b-a}{2(a-c)}\pm\sqrt{\left[\left(\frac{a-b}{2(a-c)}\right)^2+\frac{c}{a-c}\right]}.$$

4. Um aus der Gleichung $ax^{2m}=a^2b-cx^m$ die Größe x zu finden; so ist

$ax^{2m}+cx^m=a^2b$ durch Übertragung der Glieder;

$x^{2m}+\frac{c}{a}x^m=ab$ durch die Division mit a;

$x^{2m}+\frac{c}{a}x^m+\left(\frac{c}{2a}\right)^2=ab+\left(\frac{c}{2a}\right)^2$, Ergänzung des Quad.

$x^m+\frac{c}{2a}=\pm\sqrt{\left(ab+\frac{c^2}{4a^2}\right)}$, Ausz. der Quadratwurzel,

$x^m=-\frac{c}{2a}\pm\sqrt{\left(ab+\frac{c^2}{4a^2}\right)}$, Übertragung der Glieder,

$x=\sqrt[m]{\left[-\frac{c}{2a}\pm\sqrt{\left(ab+\frac{c^2}{4a^2}\right)}\right]}$, Ausz. der $m$ten Wurzel.

Man sieht aus diesem letzten Beispiele, daß alle höheren Gleichungen, in welchen die Unbekannte nur in zwei Potenzen von solchen Exponenten erscheint, daß der eine Exponent der Hälfte des andern gleich ist, als quadratische Gleichungen behandelt werden können.

II. Abschnitt.

Von den algebraischen Aufgaben und ihrer Auflösung.

§. 216.

Eine algebraische Aufgabe ist das Verlangen, aus einigen schon bekannten Größen andere unbekannte, die unter gewissen Bedingungen von jenen abhängen müssen, durch die Rechnung zu finden. Z. B. Das Verlangen, eine Zahl zu finden, die um ihre eigene Hälfte vermehrt, die Zahl 12 zum Vorschein bringt, ist eine Aufgabe, worin die Zahl 12 bekannt, und eine andere von der verlangten Eigenschaft erst gesucht werden muß. Eben so ist das Verlangen, zwei Zahlen zu finden, die zusammen addirt die Summe 17, und von einander abgezogen, die Differenz 7 zum Vorschein bringen, eine Aufgabe, worin zwei Zahlen 17 und 7 bekannt sind, und zwei andere gefunden werden sollen. Erstere heißt eine Aufgabe mit einer unbekannten Größe, weil nur nach einer Größe gefragt wird; die andere aber ist eine Aufgabe mit 2 unbekannten Größen, weil zwei Zahlen gefunden werden sollen. Überhaupt heißt es eine Aufgabe mit 1, 2, 3, 4, . . . unbekannten Größen, wenn in ihr nach 1, 2, 3, 4, . . . unbekannten Größen gefragt wird.

§. 217.

Eine Aufgabe heißt bestimmt, wenn nur ein einziger Werth für jede zu suchende Größe gefunden werden kann, welcher den Bedingungen der Aufgabe Genüge leistet; können aber deren mehrere gefunden werden, welche die verlangten Eigenschaften haben, so ist es eine unbestimmte Aufgabe. So z. B. sind beide oben angeführten Aufgaben bestimmt; denn in der ersten kann die geforderte Zahl nur 8 sein; und in der andern sind die gesuchten Zahlen nur 12 und 5, weil außer diesen keine anderen von der verlangten Eigenschaft gefunden werden können. Hingegen ist folgende Aufgabe: Zwei Zahlen zu finden, die mit einander multiplicirt das Product 12 zum Vorschein bringen, eine unbestimmte Aufgabe, weil verschiedene Zahlen diese Eigenschaft haben, als 3.4, 2.6, 1.12, 24.$\frac{1}{2}$ und so unendlich viele Brüche. Eine Aufgabe hingegen, wo gar kein möglicher Werth gefunden werden kann, welcher der Aufgabe Genüge leistet, heißt eine unmögliche Aufgabe.

§. 218.

Um eine algebraische Aufgabe aufzulösen, pflegt man die Größen, die noch unbekannt sind, mit den letzten Buchstaben des Alphabets z, y, x, . . . und öfters auch, um die Auflösung allgemein zu machen, die schon bekannten Zahlen mit a, b, c, . . . zu bezeichnen; dann ist es nothwendig, daß man die Bedingungen, wie die unbekannten Größen von den bekannten abhängen müssen, wohl überlege, und selbe durch Gleichungen auszudrücken suche, wornach die unbekannten Größen aus den Gleichungen leicht nach den vorhergehenden §§. zu entwickeln sind. Es läßt sich aber keine allgemeine Regel aufstellen, wie aus den gegebenen Bedingungen der Aufgabe, oder aus dem Zusammenhange, den die bekannten und unbekannten Größen unter einander haben müssen, die Gleichungen zu bilden sind; dazu wird ein gewisser Grad von Scharfsinn erfordert, den man durch fleißige Übung erhöhen kann. Es wird aber sehr dienlich sein, die Auflösung verschiedener Arten von Aufgaben hier aus einander zu setzen, wodurch ein fleißiger Anfänger in den Stand gesetzt wird, verschiedene dergleichen, und auch andere vorkommende Aufgaben geschickt aufzulösen.

Auflösung von Aufgaben mit einer unbekannten Größe.

§. 219.

1. Aufgabe. Eine Zahl zu finden, die um ihre eigene Hälfte vermehrt, 12 zur Summe bringt.

Auflösung. Die gesuchte Zahl sei x, so ist $\frac{x}{2}$ die Hälfte, also muß laut Bedingung $x + \frac{x}{2} = 12$ sein, woraus $x=8$ folgt (§. 212).

2. Aufgabe. Eine Zahl von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn man sie durch 3 dividirt, eben so viel erhalten werde, als wenn man 30 von ihr abgezogen hätte.

Auflösung. Die Zahl sei $=x$, diese durch 3 dividirt gibt $\frac{x}{3}$; zieht man aber von ihr 30 ab, so hat man $x - 30$, also ist laut Bedingung $\frac{x}{3} = x - 30$; daraus findet man $x=45$ (nach §. 212).

3. Aufgabe. Es wurde Jemand um seine monatliche Einnahme befragt, und er antwortete: Die Hälfte, das Drittel und das Viertel zusammen genommen, übersteigt die Einnahme selbst um 2 Fl. Wie viel hatte er monatliche Einnahme?

Auflösung. Die monatliche Einnahme sei $= x$ Fl., so ist die Hälfte $\frac{x}{2}$, das Drittel $\frac{x}{3}$, und das Viertel $\frac{x}{4}$, zusammen also $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4}$. Da dies um 2 Fl. größer sein soll, als die ganze Einnahme x, so ziehe man 2 davon ab, und es wird der Rest der ganzen Einnahme gleich sein müssen; also ist laut Bedingung

$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - 2 = x$; woraus $x=24$ folgt (§. 212).

4. Aufgabe. Es wurde Jemand gefragt, wie alt er sei, und er antwortete: Wäre ich noch einmal so alt, als ich wirklich bin, so hätte ich eben so viel über 100 Jahre, als mir jetzt noch hievon abgehen. Wie alt war dieser Mann?

Auflösung. Die Anzahl seiner Jahre sei $=x$; also gehen ihm von hundert noch ab $100-x$; wäre er noch einmal so alt, so hätte er $2x$; dann hätte er über 100 Jahre $2x-100$; also ist

$$100-x=2x-100;$$

woraus man findet $x=66\frac{2}{3}$ Jahre.

5. Aufgabe. Ein Vater bemerkte, daß er jetzt dreimal so alt sei als sein Sohn, und daß er nach 20 Jahren nur noch einmal so alt als dieser sein werde. Wie alt war jeder von beiden?

Auflösung. Des Sohnes Alter sei x Jahre; so ist der Vater $3x$ Jahre alt; in 20 Jahren wird der Sohn $x+20$, und der Vater $3x+20$ Jahre alt sein; da aber der Vater dann noch einmal so alt als der Sohn sein soll, so ist

$$3x+20=2(x+20),$$

woraus $x=20$ folgt; es ist daher der Sohn 20, und der Vater 60 Jahre alt.

6. Aufgabe. Es wurde Jemand von einigen armen Leuten um ein Almosen gebeten: er wollte jedem 5 Kr. geben, hatte aber um 3 Kr. zu wenig in seinem Beutel; darauf gab er jedem nur 4 Kr. und da blieben ihm 2 Kr. übrig. Wie viel waren arme Leute, und wie viel Kreuzer hatte der Mann?

Auflösung. Die Anzahl der Armen sei $=x$; hätte jeder 5 Kr. bekommen, so würde er $5x$ Kr. ausgetheilt haben; da ihm aber 3 Kr. dazu fehlten, so war sein Geld $5x-3$; ferner hat er jedem 4 Kr. gegeben; also hat er ausgetheilt $4x$ Kr., und es blieben ihm 2 Kr. übrig; folglich war sein Geld auch $=4x+2$. Es ist demnach $5x-3=4x+2$;
daraus folgt $x=5=$ der Anzahl der Armen, und $5x-3=22=$ seinem gehabten Gelde in Kreuzern.

7. Aufgabe. Es hat Jemand einen Bedienten gedungen, mit dem Accorde, daß er ihm jährlich eine Livree nebst 150 Fl. geben will; der Bediente blieb nur 8 Monat im Dienste, und der Herr gab ihm, nebst der Livree noch 86 Fl. Wie theuer ist die Livree gerechnet worden?

Auflösung. Die Livree koste x Fl., so gebührte dem Bedienten auf ein ganzes Jahr oder auf 12 Monat 150 Fl. $+\ x$ Fl.;

daher auf 8 Monat $(150+x).\frac{8}{12}$; und da er ihm nebst der Livree nur 86 Fl. gab, so muß

$$x+86=(150+x).\ \frac{8}{12}$$

sein; woraus $x = 42$ Fl. folgt.

8. Aufgabe. Einem Courier der vor 3 Tagen fort ist, und täglich 10 Meilen macht, wird ein anderer nachgeschickt, der täglich 12 Meilen macht. In wie viel Tagen wird er den ersten einholen?

Auflösung. Um diese Aufgabe allgemeiner zu machen, sei die Anzahl der Tage, die der erste Courier voraus hat, $=a$,
die Anzahl der Meilen, die er täglich macht, $=b$,
die Anzahl der Meilen, die der zweite täglich macht, $=c$,
die Anzahl der Tage, nach denen er den ersten einholt, $=x$;
so hat der erste schon voraus $a.b$ Meilen, und während der x Tage macht er noch $b.x$ Meilen; also ist sein ganzer Weg, bis ihn der zweite einholt, $= ab+bx$; der zweite aber macht in x Tagen cx Meilen; und weil er den ersten eingeholt haben soll, so ist

$ab+bx=cx$, woraus $x = \dfrac{ab}{c-b}$ folgt.

In unserem Beispiele ist $a = 3$, $b = 10$, $c = 12$, also

$x = \dfrac{3.10}{2} = 15$ Tage.

Nach dieser Formel können verschiedene Aufgaben aufgelöst werden. Z. B. Es wurde Jemand gefragt, wie viel Uhr es sei; und er antwortete: Ich kann die Abtheilungen der Minuten nicht mehr genau unterscheiden, nur so viel bemerke ich, daß der Minutenzeiger den Stundenzeiger zwischen 7 und 8 Uhr decke. Wie viel Uhr war es wohl?

Hier ist in unserer Formel $a = 7$; weil um 7 Uhr der Stundenzeiger sich schon 7 Stunden lang von 12 hinweg bewegt hat, der Minutenzeiger aber um 7 Uhr genau auf 12 Uhr wies; $b = 1$, weil der Stundenzeiger in einer Stunde nur eine Stundenabtheilung zurücklegt; $c = 12$, weil der Minutenzeiger in jeder Stunde ganz herum läuft; also ist $x = \frac{7}{11}$ Stunden. Es war demnach $7\frac{7}{11}$ Uhr $= 7$ Uhr $38\frac{2}{11}$ Minuten.

Ein feindliches Corps ist vor 2 Tagen aufgebrochen, und macht täglich 3 Meilen: man will demselben nachsetzen, um es in 6 Tagen einzuholen; wie viel Meilen müssen täglich gemacht werden?

Hier ist in der Formel $a = 2$, $b = 3$, $x = 6$, daher findet man $c = \frac{b(a+x)}{x} = \frac{3.8}{6} = 4$ Meilen.

9. Aufgabe. Zwei Regimenter, welche $a = 80$ Meilen von einander entfernt sind, brechen zugleich auf, und marschiren gegen einander, um ihre Garnisonen zu wechseln: das erste macht täglich $b = 4$, und das zweite täglich $c = 3$ Meilen; in wie viel Tagen werden sie einander begegnen?

Auflösung. Die Anzahl der Tage sei $= x$; in dieser Zeit macht das erste Regiment bx Meilen, und das zweite cx Meilen. Da sie aber einander begegnen, so haben beide zusammen den ganzen Weg gemacht, folglich ist $bx + cx = a$, woraus

$x = \frac{a}{b+c} = \frac{80}{7} = 11\frac{3}{7}$ folgt. Sie werden also den zwölften Tag einander begegnen.

10. Aufgabe. Vormals mußte jeder Hauseigenthümer einer Stadt jährlich das 7tel seines Zinserträgnisses als Zinssteuer contribuiren; da er aber jetzt das 6stel hievon jährlich zahlen muß, um wie viel muß er seine Inwohner steigern, damit er sein voriges Einkommen behalte?

Auflösung. Es sei der jährliche Ertrag eines Hauses $= a$ Fl. gewesen; hievon hat er Zinssteuer entrichtet $\frac{a}{7}$ Fl., folglich ist ihm verblieben $\frac{6a}{7}$ Fl. Er steigere nun seine Inwohner um x Fl.; so ist der Ertrag $a + x$, wovon nach Abzug der Zinssteuer $\frac{a+x}{6}$ ihm $\frac{5a+5x}{6}$ bleibt; und da er das nemliche Einkommen behalten soll, so ist

$$\frac{6a}{7} = \frac{5a+5x}{6},$$

woraus $x = \frac{a}{35}$ folgt. Er muß also jeden Inwohner um den 35sten Theil des vorigen Zinses steigern.

11. Aufgabe. Zwei Compagnien werden zu einer Arbeit angestellt; man weiß, daß die erste Compagnie allein in $a = 26$ Tagen, und die zweite allein in $b = 16$ Tagen mit dieser Arbeit fertig würde. Wie viel Tage werden beide zusammen damit zu thun haben?

Auflösung. Da die erste Compagnie in $a = 26$ Tagen mit der Arbeit allein fertig würde, so macht sie täglich den Theil $\frac{1}{a} = \frac{1}{26}$ von der ganzen Arbeit; und die zweite aus der nemlichen Ursache $\frac{1}{b} = \frac{1}{16}$ der ganzen Arbeit. Die Anzahl der Tage, welche sie brauchen, wenn sie beide zusammen arbeiten, sei $= x$, so macht die erste Compagnie in x Tagen den Theil $\frac{x}{a}$, und die zweite den Theil $\frac{x}{b}$ von der ganzen Arbeit; beide Theile müssen aber die ganze Arbeit ausmachen, folglich ist $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$, woraus

$$x = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{ab}{a+b} \text{ folgt; nemlich } x = \frac{26 \cdot 16}{26+16} = 9\tfrac{19}{21} \text{ Tage.}$$

Auf die nemliche Art findet man, daß 3 Wasserröhren ein Behältniß, welches die erste Röhre allein in a, die zweite allein in b, und die dritte allein in c Stunden anfüllen würde, wenn sie alle drei zugleich fließen, in $\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$ oder $\frac{abc}{bc+ca+ab}$ Stunden anfüllen können.

12. Aufgabe. Zwei Bombardiere werfen aus einer Batterie verschiedene Bomben; der erste hatte schon 50 Würfe gemacht, ehe der zweite zu werfen anfing, und macht 7 Würfe, während der zweite deren 5 macht; hingegen braucht der zweite zu 2 Würfen so viel Pulver als der erste zu 3. Die Frage ist, wie viel Würfe wird der zweite machen, bis er so viel Pulver verbraucht hat, als der erste?

Auflösung. Die Anzahl der Würfe, die der zweite machen wird, sei $= x$, so macht der erste während dieser Zeit $\frac{7x}{5}$ Würfe, wegen $5 : 7 = x : \frac{7x}{5}$; also hat der erste in allem $50 + \frac{7x}{5}$ Würfe. Das Pulver, welches der zweite zu einem Wurfe braucht, sei $= a$, so braucht der erste zu jedem Wurfe $\frac{2a}{3}$. Das ganze verwendete Pulver des ersten ist demnach $\left(50 + \frac{7x}{5}\right)\frac{2a}{3}$, und jenes des zweiten ax. Weil sie aber gleichviel Pulver verwendet haben sollen, so ist $\left(50 + \frac{7x}{5}\right)\frac{2a}{3} = ax$; woraus $x = 500$ folgt.

13. Aufgabe. Ein Feuerwerksmeister, welcher gefragt wird, wie stark sein Arbeits-Personale sei, antworte: $\frac{1}{6}$ von seiner Mannschaft schlage Brandröhren, $\frac{1}{3}$ adjustire Granaten, $\frac{2}{5}$ verfertige Haubitz-Patronen, 4 Mann werden mit dem Verpacken von Munition beschäftigt, und 2 Mann seien im Spitale. Wie stark ist dies Personale?

Auflösung. Bezeichnet x die Anzahl der Arbeiter, so sind $\frac{x}{6}$ zum Schlagen der Brandröhren, $\frac{x}{3}$ zum Adjustiren der Granaten, $\frac{2x}{5}$ zur Erzeugung von Patronen angestellt; daher muß $\frac{x}{6} + \frac{x}{3} + \frac{2x}{5} + 4 + 2 = x$, und $x = 60$ sein. Demnach besteht die Abtheilung aus 60 Mann, von denen 10 Mann Brandröhren schlagen, 20 M. Granaten adjustiren, 24 M. Patronen verfertigen, 4 M. Munition packen, und 2 M. im Spitale sind.

14. Aufgabe. Ein sterbender Vater vermacht die Verlassenschaft seinen Söhnen auf folgende Art: Der erstgeborne soll zuerst 1000 Fl., dann den 6sten Theil des Überrestes bekommen; von diesem, was der erste übrig läßt, soll der zweite Sohn 2000 Fl. nebst dem 6sten Theile des Überrestes nehmen; von dem Reste soll der dritte 3000 Fl. nebst dem 6sten Theile des Überrestes nehmen; und so soll die Theilung fort geschehen, bis die Verlassenschaft erschöpft ist. Es fügte sich aber, daß bei dieser Theilung jeder Sohn einen gleichgroßen Theil bekam; wie viel waren Söhne? wie viel erhielt jeder? und wie stark war die Verlassenschaft?

Auflösung. Die Verlassenschaft sei $=x$ Fl.,

so bekommt der erste $1000+\frac{x-1000}{6}=\frac{5000+x}{6}$;

also ließ er übrig $x-\frac{5000+x}{6}=\frac{5x-5000}{6}$;

hievon nahm der zweite

$$2000+\left(\frac{5x-5000}{6}-2000\right):6=\frac{55000+5x}{36}.$$

Da aber beide gleichviel haben sollen, so ist

$$\frac{5000+x}{6}=\frac{55000+5x}{36};$$

woraus $x=25000$ Fl. folgt. Es waren demnach 5 Söhne, und jeder erhielt durch die vorgeschriebene Theilung 5000 Fl.

15. Aufgabe. Eine Weibsperson ging mit Eiern in der Stadt hausiren: im ersten Hause verkaufte sie die Hälfte ihrer Eier, und noch $\frac{1}{2}$ Ei darüber; von dem Reste verkaufte sie im zweiten Hause wieder die Hälfte, mehr $\frac{1}{2}$ Ei, und eben so im dritten Hause, wornach sie ihren ganzen Vorrath an Eiern verkauft sah; wie viel Eier hatte sie anfänglich?

Auflösung. Die Anzahl der Eier, die sie gehabt, sei $=x$, so hat sie im ersten Hause verkauft $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$, folglich blieben ihr noch $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$; hievon verkaufte sie im zweiten Hause $\frac{x-1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{4}$, und es blieben ihr noch

$\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-3}{4}$; hievon verkaufte sie im dritten Hause $\frac{x-3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{8}$; also war ihr Rest $\frac{x-3}{4} - \frac{x+1}{8} = \frac{x-7}{8}$. Da sie aber nun gar nichts mehr im Korbe hatte, so ist $\frac{x-7}{8} = 0$, nemlich $x-7=0$, und $x=7$.

16. Aufgabe. Ein Vater stirbt, und hinterläßt ein Capital von 1100 Fl. nebst 4 Söhnen; nach 10 Monaten wurde das Testament eröffnet, und die Kinder hatten in dieser Zeit das Capital sammt den betreffenden Interessen gänzlich verzehrt. Auf eben diese Art haben 3 Kinder ein Capital von 1200 Fl. in 15 Monaten verzehrt. Die Frage ist, wie lange werden auf diese Art 6 Kinder mit einem Capital von 1650 Fl. auskommen?

Auflösung. Es sei die Anzahl der Gulden, welche 100 Fl. in einem Monate Zins tragen, $=x$, so sind von 1100 Fl. in 10 Monaten die Interessen $110x$; mithin haben im ersten Falle die 4 Söhne in 10 Monaten verzehrt $1100+110\,x$ Fl. und jeder hat in einem Monate verzehrt $\frac{1100+110x}{10.4}$ Fl. Im zweiten Falle haben alle drei Söhne in 15 Monaten $1200+12x.15$ Fl., und folglich hat jeder in einem Monate $\frac{1200+12x.15}{3.15}$ Fl. verzehrt. Da sie aber auf gleiche Art gelebt haben sollen, so ist $\frac{1100+110x}{40} = \frac{1200+12.15x}{45}$, woraus $x=\frac{2}{3}$ gefunden wird; folglich hat in jedem Falle ein Kind in einem Monate $29\frac{1}{3}$ Fl. verzehrt. Nun sei die Anzahl der Monate, während deren 6 Kinder mit 1650 Fl. auskommen, $=y$; dieses Capital trägt monatlich $16\frac{1}{2}.\frac{2}{3} = 11$ Fl. Zins, also in y Monaten $11y$ Fl.; daher ist das Capital sammt Interessen $= 1650+11y$ Fl. Da aber jedes Kind monatlich $29\frac{1}{3}$ Fl. verzehrt, so brauchen 6 Kinder in y Monaten $176y$ Fl.; und weil das Capital sammt Interessen verzehrt sein soll, so ist

$$176y=1650+11y,$$

woraus $y=10$ folgt.

17. Aufgabe. Es ist Jemand 1000 Fl. schuldig, die er nach Verlauf von 18 Monaten ohne Interessen zu zahlen verbunden ist; der Gläubiger wünscht aber sogleich bezahlt zu werden; wie viel kann der Schuldner wohl jetzt für diese Schuld geben, wenn der Gläubiger, so wie der Schuldner mit 100 Fl. jährlich 8 Fl. gewinnen kann?

Auflösung. Es sei die Anzahl der Gulden, die für diese Schuld jetzt bezahlt werden können, $= x$, so könnte der Gläubiger mit diesen x Fl. in 12 Monaten gewinnen $\frac{8x}{100}$ Fl.; denn $100:8 = x:\frac{8x}{100}$; und in 18 Monaten gewinnt er $\frac{12x}{100}$, denn 12 M. : 18 M. $= \frac{8x}{100} : \frac{18 \cdot 8x}{1200} = \frac{12x}{100}$; er hat sodann $x + \frac{12x}{100}$, welches 1000 Fl. betragen soll; folglich ist

$x + \frac{12x}{100} = 1000$; hieraus folgt $x = 892\frac{6}{7}$ Fl.

Will man diese Aufgabe mit Hilfe einer zusammengesetzten Proportion auflösen, so wird man sie so stellen.

Mit 100 Fl. werden in 12 Monaten 8 Fl. gewonnen, und mit x Fl. sollen in 18 Monaten $1000-x$ Fl. gewonnen werden. Hiernach erhält man der Reesschen Regel gemäß

$$\begin{array}{r|l} 1000-x & 8 \\ 100 & x \\ 12 & 18 \end{array} \quad \text{oder abgekürzt} \quad \begin{array}{r|l} 1000-x & 1 \\ 25 & x \\ 1 & 3 \\ \hline 25000-25x & =3x \end{array}$$

$$x = 25000 : 28 = 892\tfrac{6}{7} \text{ Fl.}$$

18. Aufgabe. (**Terminrechnung.**) Ein Kaufmann ist in mehreren Terminen Zahlungen zu leisten schuldig, nemlich nach verflossenen α Monaten a Fl., nach β Monaten b Fl., nach γ Monaten c Fl., u. s. f.; der Gläubiger aber wünscht die ganze Summe $a+b+c+\ldots.$ auf einmal zu erhalten; nach wie viel Monaten muß die Zahlung geschehen?

Auflösung. Man setze das Geld, das der Kaufmann in einem Monate mit 1 Fl. gewinnen kann, $= p$, so kann er mit a Fl. in α Monaten αap, mit b Fl. in β Monaten βbp, mit c

Fl. in γ Monaten γcp, u. s. w. gewinnen; mithin ist der ganze Nutzen, den der Kaufmann noch von diesem Gelde ziehen kann, $= \alpha ap + \beta bp + \gamma cp + \cdots = p(\alpha a + \beta b + \gamma c + \cdots)$.

Es sei nun die Zeit, nach welcher die Zahlung der ganzen Summe $a+b+c+\cdots$ auf einmal geschehen kann, $= x$ Monat, so ist der Nutzen, den der Kaufmann noch in dieser Zeit davon ziehen kann, $= (a+b+c+\ldots)px$; und weil er in einem wie in dem andern Falle gleichen Nutzen haben soll, so ist

$$(a+b+c+\cdots)px = (\alpha a + \beta b + \gamma c + \cdots)p,$$

folglich

$$x = \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c + \cdots}{a+b+c+\cdots};$$

multiplicirt man nemlich jede einzelne Summe mit der Zeit, in welcher sie zahlbar ist, und dividirt die Summe der Producte durch die ganze Schuld, so hat man die Zeit, nach welcher alle Zahlungen auf einmal geschehen können. Soll der Kaufmann z. B. in drei Terminen folgende Zahlungen leisten, als: 2832 Fl. nach 3, 2560 Fl. nach 9 und 1450 Fl. nach 16 Monaten, so kann er dieselbe auch nach $\frac{2832 \cdot 3 + 2560 \cdot 9 + 1450 \cdot 16}{2832 + 2560 + 1450} = 8$ Monaten auf einmal entrichten.

19. Aufgabe. Ein Frauenzimmer wurde um ihr Alter befragt, und sie antwortete: Meine Mutter hat mich im 40sten Jahre ihres Alters geboren; wenn man nun meine Jahre mit den Jahren meiner Mutter multiplicirt, so kommen die Jahre Mathusalems zum Vorschein, der 969 Jahre gelebt hat. Wie alt war jede?

Auflösung. Die Tochter sei x Jahre alt, so ist die Mutter $x+40$ Jahre alt; folglich ist

$$x(x+40) = 969;$$

woraus $x = -20 \pm \sqrt{1369} = 17$ (nach §. 215) gefunden wird, weil der zweite Werth, -57, da x nur positiv sein kann, nicht zulässig ist.

20. Aufgabe. Ein Vater stirbt, und hinterläßt ein Vermögen von $a = 70000$ Fl., und eine gewisse Anzahl Kinder; gleich

nach des Vaters Tode starben 2 Kinder davon, und durch diesen Umstand bekam jedes Kind um 4000 Fl. mehr, als es bekommen hätte, wenn keines gestorben wäre. Wie viel waren anfänglich Kinder vorhanden?

Auflösung. Ihre Anzahl sei $= x$ gewesen; und da 2 davon gestorben, blieben noch $x-2$. Im ersten Falle hätte jedes bekommen $\frac{a}{x}$ Fl., und da 2 gestorben, bekommt jedes $\frac{a}{x-2}$; weil aber letzteres um 4000 Fl. mehr sein soll als das erste, so ist

$$\frac{a}{x-2} - 4000 = \frac{a}{x},$$

eine verwickelte quadratische Gleichung, woraus (nach §. 215) gefunden wird $x = 1 \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2000} + 1\right)} = 1 \pm \sqrt{36} = 7$ oder -5, wo jedoch nur der erste Werth genommen werden kann, da x nicht negativ werden darf.

21. Aufgabe. Ein Oberfeuerwerksmeister hatte unter seinem Commando 20 Unterofficiere, theils Oberfeuerwerker, theils Feuerwerker; er gab jeder Partie 24 Feuerballen zu schnüren, und es ereignete sich, daß jeder Oberfeuerwerker um einen Feuerballen mehr, als ein Feuerwerker schnüren mußte. Wie viel waren Oberfeuerwerker, und wie viel Feuerwerker?

Auflösung. Die Anzahl der Oberfeuerwerker sei $= x$, so ist die Anzahl der Feuerwerker $= 20 - x$. Ein jeder Oberfeuerwerker mußte demnach $\frac{24}{x}$ Feuerballen, und jeder Feuerwerker $\frac{24}{20-x}$ Feuerballen schnüren; weil aber die erste Anzahl der Feuerballen um 1 größer sein soll als die zweite, so ist $\frac{24}{x} - 1 = \frac{24}{20-x}$; hieraus folgt $x = 34 \pm \sqrt{676} = 34 \pm 26 = 8$ Oberfeuerwerker.

Hier sieht man leicht ein, daß das Zeichen $-$ genommen werden müsse; denn würde man das Zeichen $+$ nehmen, so wäre $x = 34 + 26 = 60$, da doch in allem nur 20 Unterofficiere waren. Man muß deßwegen bei algebraischen Rechnungen das doppelte Zeichen $\pm$ vor den Wurzeln (§. 119, II.) bis zu Ende der Rechnung beibehalten, wo sich dann erst entscheiden läßt, welches von beiden genommen werden kann, um nicht auf falsche Resultate geführt zu werden.

22. Aufgabe. Ein Hauptmann des Bombardier-Corps wurde gefragt, wie viel er bei seiner Compagnie Oberfeuerwerker, Feuerwerker und Bombardiere habe, und wie viel jeder täglich Löhnung erhalte? Er sagte: ich habe dreimal so viel Bombardiere, und $\frac{2}{3}$ Mal so viel Oberfeuerwerker als Feuerwerker; jeder Oberfeuerwerker hat täglich so viel Kreuzer als Feuerwerker, jeder Feuerwerker um 4 Kr. mehr, als Oberfeuerwerker, und jeder Bombardier nur den dritten Theil so viel Kr., als Feuerwerker sind; und die tägliche Löhnung aller dieser Leute beträgt 52 Fl. 48 Kr. Wie viel Oberfeuerwerker, Feuerwerker und Bombardiere hatte dieser Hauptmann, und wie viel Löhnung hatte jeder täglich?

Auflösung. Die Anzahl der Feuerwerker sei $=x$, so ist die Zahl der Oberfeuerwerker $=\frac{2x}{3}$, und die der Bombardiere $= 3x$; folglich haben alle Oberfeuerwerker täglich $\frac{2x}{3}\times x=\frac{2x^2}{3}$, alle Feuerwerker $x\left(\frac{2x}{3}+4\right)=\frac{2x^2}{3}+4x$, und alle Bombardiere $3x\cdot\frac{x}{3}=x^2$. Es ist demnach

$$\frac{2x^2}{3}+\frac{2x^2}{3}+4x+x^2=52\cdot 60+48;$$

daraus folgt

$$x=-\frac{6}{7}\pm\sqrt{\left(\frac{9504}{7}+\frac{36}{49}\right)}$$ (§. 215), endlich $x=36$, weil der zweite Werth $x=-37\frac{5}{7}$ für die vorliegende Aufgabe unzulässig ist. Er hatte demnach 36 Feuerwerker, 24 Oberfeuerwerker und 108 Bombardiere; jeder Oberfeuerwerker erhielt täglich 36, jeder Feuerwerker 28, und jeder Bombardier 12 Kr.

23. Aufgabe. Zwei legen zusammen in eine Handlung $a = 2000$ Fl.; der erste ließ sein Geld durch $m = 17$ Monat liegen, und erhielt an Einlage sammt Gewinn $b = 1710$ Fl.; und der andere ließ sein Geld durch $n = 12$ Monat liegen, und erhielt an Einlage sammt Gewinn $c = 1040$ Fl. Wie groß war eines jeden Einlage?

Auflösung. Es sei die Einlage des ersten $= x$ Fl., so ist die Einlage des zweiten $= a - x$, und der Gewinn des ersten $= b - x$; ihr gesammter Gewinn aber ist $= b + c - a$; folglich ist (nach §. 208)

$$mx + n(a - x) : b + c - a = mx : b - x.$$

Es ist demnach $[an + (m - n)x](b - x) = m(b + c - a)x$. Diese Gleichung (nach §. 215) aufgelöst, gibt

$$x = \frac{1}{2}\left[a - \frac{bn + cm}{m - n} \pm \sqrt{\left(a - \frac{bn + cm}{m - n}\right)^2 + 4a\frac{bn}{m - n}}\right],$$

wobei, da das Radical größer als die beiden ersten Glieder zusammen ist, nur das obere Zeichen genommen werden kann; daher ist für den angegebenen besonderen Fall $x = 1200$.

Auflösung der Aufgaben mit mehreren unbekannten Größen.

§. 220.

Wenn in einer Aufgabe nach zwei, oder mehreren Größen gefragt wird, so bezeichne man jede unbekannte Größe mit einem besondern Buchstaben, und suche sodann wieder die Bedingungen der Aufgabe durch Gleichungen auszudrücken. Kann man nun aus den Bedingungen der Aufgabe eben so viel Gleichungen, von denen keine weder die Folge anderer ist, noch anderen widerspricht, ableiten, als man unbekannte Größen angenommen hat, so ist es ein Zeichen, daß die Aufgabe bestimmt sei; reichen hingegen die Bedingungen der Aufgabe nicht zu, so viel Gleichungen ansetzen zu können, als man unbekannte Größen angenommen hat, so ist die Aufgabe unbestimmt. So kann in der unbestimmten Aufgabe (§. 217), zwei Zahlen zu finden, die mit einander multiplicirt das Product $a = 12$ zum Vorschein bringen, wenn man die eine gesuchte Zahl mit x, und die andere mit y benennt, nur folgende Gleichung angesetzt werden, $xy=a$; weiter läßt sich keine Gleichung aus dieser Bedingung mehr ansetzen. Fügt man hingegen zu obiger Bedingung noch die hinzu: daß die zwei gesuchten Zahlen von einander abgezogen die Differenz $d=4$ zum Vorschein bringen müssen, so findet noch folgende Gleichung Statt, $x-y=d$; wo x die größere, und y die kleinere gesuchte Zahl vorstellt, und die Aufgabe ist dann bestimmt.

§. 221.

Hat man nun aus den Bedingungen der Aufgabe so viel Gleichungen abgeleitet, als unbekannte Größen vorhanden sind, so muß man trachten, mit den Gleichungen solche Veränderungen vorzunehmen, und dieselben so unter einander zu verbinden, daß man zuletzt eine Gleichung erhalte, worin sich nur eine einzige unbekannte Größe befindet, die man daraus bestimmen, und durch Substitution in den vorigen Gleichungen eine unbekannte Größe nach der andern entwickeln kann.

Die Art aber, wie dies geschehen kann, ist mannigfaltig, und es wird am besten sein, wenn eine Art nach der andern in wirklichen Beispielen gezeigt wird, weil es ohnehin nur auf die Gestalt der Gleichungen selbst ankommt, welche Art zu wählen ist, damit der Zweck am kürzesten erreicht werde. Aus obigen Gleichungen $xy=a$, und $x-y=d$, können die unbekannten Größen x und y auf folgende Art entwickelt werden.

Man suche aus jeder Gleichung den Werth von einer und derselben unbekannten Größe, z. B. von x, als wenn y schon bekannt wäre; aus der ersten folgt $x=\frac{a}{y}$, und aus der zweiten $x=d+y$; es ist also auch (§. 12, Grunds. III.) $\frac{a}{y}=d+y$, woraus $y=-\frac{d}{2}\pm\sqrt{\left(a+\frac{d^2}{4}\right)}$ folgt; oder wenn man die für a und d oben angenommenen Werthe setzt, so ist $y=2$ oder -6. Diesen Werth substituire man nun in einer der vorhergehenden Gleichungen, so findet man $x=\frac{d}{2}\pm\sqrt{\left(a+\frac{d^2}{4}\right)}=6$ oder -2.

Auf die nemliche Art kann man bei der Auflösung der Aufgaben mit mehreren unbekannten Größen verfahren. Z. B. Unter drei Regimenter, die sich in einem Treffen tapfer hielten, sind $a=1326$ Fl. dergestalt zu theilen, daß von dem Regimente, welches sich am vorzüglichsten auszeichnete, jeder Mann einen Gulden erhalten, und der Überrest unter die Mannschaft der zwei übrigen Regimenter gleich vertheilt werden soll. Wird nun dieser Gulden dem ersten Regimente zuerkannt, so erhält ein jeder Mann der zwei übrigen Regimenter $\frac{1}{2}$ Fl.; gibt man diesen Gulden dem zweiten Regimente, so erhält jeder Mann von den zwei andern Regimentern nur $\frac{1}{3}$ Fl.; fällt endlich dieser Gulden dem dritten Regimente zu, so bekommt ein jeder von der übrigen Mannschaft nur $\frac{1}{4}$ Fl. Wie stark ist jedes dieser drei Regimenter?

Es sei die Anzahl der Mannschaft des ersten Regiments $=x$, die des zweiten $=y$, und jene des dritten $=z$, so erhält im ersten Falle die gesammte Mannschaft des ersten Regiments x Fl., weil jeder Mann einen Gulden erhält; und die sämmtliche übrige Mannschaft der zwei andern Regimenter bekommt $\frac{y+z}{2}$ Fl.; im zweiten Falle bekommt das zweite Regiment y Fl.; und die übrigen beiden zusammen $\frac{z+x}{3}$ Fl.; und im dritten Falle bekommt das dritte Regiment z Fl., und die sämmtliche übrige Mannschaft $\frac{x+y}{4}$ Fl.; also ist, weil jedesmal die ganze Summe von $a=1326$ Fl. genau aufgehen muß,

$$x+\frac{y+z}{2}=a, \qquad (A)$$

$$y+\frac{z+x}{3}=a, \qquad (B)$$

$$z+\frac{x+y}{4}=a. \qquad (C)$$

Aus der Gleichung (A) folgt $x = a - \frac{y+z}{2}$,

aus der Gleichung (B) ist $x = 3a - 3y - z$,
und aus der Gleichung (C) ist $x = 4a - 4z - y$,
also auch

$$a - \frac{y+z}{2} = 3a - 3y - z, \qquad (D)$$

$$3a - 3y - z = 4a - 4z - y. \qquad (E)$$

Aus der Gleichung (D) ist $y = \frac{4a - z}{5}$, und aus der Gleichung (E) ist $y = \frac{3z - a}{2}$, also ist auch $\frac{4a - z}{5} = \frac{3z - a}{2}$;

daraus folgt $z = \frac{13a}{17} = \frac{13.1326}{17} = 13.78 = 1014$.

Diesen gefundenen Werth von z substituire man in der Gleichung (E), so ist $y = \frac{1}{2}\left(\frac{39}{17}a - a\right) = \frac{11}{17}a = 11.78 = 858$.
Diese beiden Werthe von y und z in der Gleichung (B) substituirt, geben $x = 3a - \frac{33}{17}a - \frac{13}{17}a = \frac{5}{17}a = 5 . 78 = 390$. Das erste Regiment hatte daher 390, das zweite 858, und das dritte 1014 Mann.

Aus den drei Fundamentalgleichungen der vorgelegten Aufgabe können die drei unbekannten Größen auch auf folgende Art entwickelt werden.

$$x + \frac{y+z}{2} = a,$$
$$y + \frac{z+x}{3} = a,$$
$$z + \frac{x+y}{4} = a.$$

Man suche den Werth von der einen unbekannten Größe, z. B. von x, aus der ersten Gleichung $\left(\text{es ist } x = \frac{2a - y - z}{2}\right)$, und substituire diesen Werth für x in allen übrigen Gleichungen, dadurch verwandeln sich diese in $5y + z = 4a$, und $7z + y = 6a$; auf diese Art ist aus den drei gegebenen Gleichungen die eine unbekannte Größe x hinweg geschafft, oder wie man zu sagen pflegt, eliminirt, und die Anzahl der Hauptgleichungen um eine vermindert worden.

Sodann suche man wieder aus einer von diesen letztern Gleichungen den Werth für die eine unbekannte Größe (im gegebenen Beispiele folgt aus der letzten Gleichung $y=6a-7z$), und substituire diesen Werth in allen übrigen von diesen letztern Gleichungen statt der nemlichen unbekannten Größe (nemlich $30a-35z+z=4a$, woraus $z=\frac{13a}{17}$ folgt), so wird auf diese Art auch die zweite unbekannte Größe hinweg geschafft (eliminirt), und die Anzahl der Hauptgleichungen um zwei vermindert werden. Wenn man auf diese Art fortfährt, daß man nemlich wieder aus einer von diesen letztern Gleichungen, wenn deren noch mehrere vorhanden wären, den Werth der einen unbekannten Größe sucht, und ihn in allen übrigen dieser letztern Gleichungen statt der nemlichen unbekannten Größe substituirt, so wird man endlich zu einer Gleichung gelangen, in der sich nur eine einzige unbekannte Größe befindet; man wird demnach den Werth dieser unbekannten Größe finden können, so wie im angeführten Beispiele wirklich $z=\frac{13a}{17}$ gefunden wurde.

Wenn einmal eine unbekannte Größe gefunden ist, so werden die übrigen leicht entwickelt, wenn man den Rückweg geht, das ist, wenn man den gefundenen Werth in einer der vorhergehenden Gleichungen substituirt; nemlich, wenn man in der Gleichung $y=6a-7z$ den gefundenen Werth $\frac{13a}{17}$ für z setzt, so ist $y=\frac{11a}{17}$.

Substituirt man endlich diese beiden Werthe für y und z in einer der vorhergehenden Gleichungen (in $x=\frac{2a-y-z}{2}$), so wird auch x gefunden, nemlich $x=\frac{5a}{17}$. Da nun $a=1326$ bedeutet, so ist $x=390$, $y=858$, und $z=1014$, wie vorher.

§. 222.

Diese letzte Auflösung der Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen heißt die Substitutionsmethode, und wird gewöhnlich nur damals angewendet, wenn die unbekannten

Größen entweder mit einander multiplicirt, oder wenn sie in verschiedenen Gleichungen zu verschiedenen Potenzen erhoben sind. Sollten hingegen die unbekannten Größen weder mit einander multiplicirt, noch in verschiedenen Gleichungen zu verschiedenen Potenzen erhoben sein, so können sie durch die blose Addition und Subtraction der Gleichungen eliminirt werden. Auch bedient man sich zuweilen noch anderer Kunstgriffe, theils, um etwas geschwinder zum Ziele zu kommen, bisweilen auch, um höheren Gleichungen auszuweichen, wie man aus folgenden Auflösungen einiger Aufgaben ersehen wird.

1. Aufgabe. Zwei Zahlen zu finden, die zusammen addirt die Summe $s=17$, und von einander abgezogen die Differenz $d=7$ zum Vorschein bringen.

Auflösung. Es sei die größere gesuchte Zahl $= x$, und die kleinere $= y$, so ist laut Bedingung

$$x+y=s, \text{ und } x-y=d.$$

Um hier die Elimination der unbekannten Größen auszuführen, addire man beide Gleichungen, und man erhält

$$2x=s+d; \text{ also } x=\frac{s+d}{2}=\tfrac{1}{2}s+\tfrac{1}{2}d;$$

dann ziehe man die zweite von der ersten ab, wodurch man erhält

$$2y=s-d, \text{ also } y=\frac{s-d}{2}=\tfrac{1}{2}s-\tfrac{1}{2}d.$$

Wenn also zwei Zahlen durch ihre Summe, und durch ihre Differenz bestimmt werden sollen, so ist die größere Zahl gleich der halben Summe mehr der halben Differenz, und die kleinere gleich der halben Summe weniger der halben Differenz.

In unserm Beispiele ist $x=\frac{17}{2}+\frac{7}{2}=12,$

$$\text{und } y=\frac{17}{2}-\frac{7}{2}=5.$$

2. Aufgabe. Ein Wirth wird gefragt, was er für Weine habe? Er antwortete: 2 Maß von der ersten, 2 Maß von der zweiten, und 1 Maß von der dritten Gattung kosten zusammen 1 Fl.; 2 Maß von der ersten, 3 Maß von der zweiten, und 4 Maß von der dritten Gattung kosten 2 Fl.; 10 Maß von der

ersten, 4 Maß von der zweiten, und 2 Maß von der dritten Gattung kosten 3 Fl. Was kostet wohl eine Maß von jeder Gattung?

Auflösung. Es sei der Preis einer Maß von der ersten Gattung $= x$, von der zweiten $= y$, und von der dritten $= z$ Kr., so ist laut Bedingung

$$2x + 2y + z = 60, \quad (A)$$
$$2x + 3y + 4z = 120, \quad (B)$$
$$10x + 4y + 2z = 180. \quad (C)$$

Um die vorhergehende Eliminations-Methode auch hier anwenden zu können, muß man trachten, eine, oder die andere Gleichung so zu verändern, daß durch die Addition oder Subtraction der Gleichungen eine unbekannte Größe nach der andern weggeschafft werde. Dieses könnte hier unter andern auch auf folgende Art geschehen: Man ziehe die Gleichung (A) von der Gleichung (B) ab, so verschwindet x; ferner multiplicire man die Gleichung (A) mit 5, damit x in selber den nemlichen Coefficienten, wie in der Gleichung (C) erhalte, so ist

$y + 3z = 60$ (D) durch Subtrac. (A) von (B),
$6y + 3z = 120$ (E) durch Subtrac. (C) von 5 (A).

Weil hier z schon in beiden Gleichungen den nemlichen Coefficienten hat, so ziehe man (D) von (E) ab, und man erhält $5y = 60$; also $y = 12$. Dieser Werth von y in der Gleichung (D) substituirt, gibt $z = 16$; und beide Werthe in (A) substituirt, geben $x = 10$.

3. Aufgabe. Jemand schuldet 2828 Gulden, und entrichtet die 5 percentigen Interessen für das folgende Jahr nebst einer theilweisen Rückzahlung des Capitals mit 700 Fl. Wie viel zahlt er an Capital zurück? wie viel entrichtet er an Interessen in vorhinein? und wie viel bleibt er noch schuldig?

Auflösung. Bezeichnet x die Rückzahlung an Capital, y die Anticipando-Interessen, so ist zunächst

$$x + y = 700.$$

Ferner bleibt er noch schuldig $2828 - x$ Fl.; diese geben zu 5 von Hundert, $(2828 - x)\frac{5}{100}$ Fl. Interessen, also ist

$$\frac{2828 - x}{20} = y.$$

Aus der Addition beider Gleichungen folgt sogleich

$$\frac{2828-x}{20}+x=700;$$

daraus ist $x=588$, und somit $y=112$.

Er zahlt daher 588 Fl. an Capital zurück, bleibt noch 2240 Fl. schuldig, von denen er in vorhinein 112 Fl. Zinsen entrichtet.

4. Aufgabe. **(Alligations-Rechnung).** Von zwei Dingen derselben Art sollen die Quantitäten a und b, wenn eine Quantitäts-Einheit von dem ersten Dinge den Werth α, und von dem zweiten den Werth β besitzt, zu einem Dinge der nemlichen Art von der Quantität c vereinigt oder gemengt werden, von dem die Quantität 1 den zwischen α und β liegenden Werth γ hat. Man sucht den Zusammenhang der Quantitäten a, b, c mit den Werthen α, β, γ.

Auflösung. Nehmen wir, wie dies gewöhnlich stillschweigend geschieht, an, daß die Quanten a und b zu dem Quantum c ohne Vermehrung und Verminderung sich mengen lassen, folglich c die Summe von a und b ist, so hat man

$$a+b=c.$$

Da ferner α der Werth einer Quantitäts-Einheit des ersten Dinges ist, so muß jener von a Quantitäten αa sein; und auf dieselbe Weise ergibt sich βb als der Werth des zweiten Dinges, und γc als jener ihres Gemenges. Immerhin aber hält man den Werth des Gemenges dem Werthe seiner Bestandtheile gleich; folglich ist $\alpha a+\beta b=\gamma c$.

Aus diesen zwei Gleichungen ergeben sich sofort die Gleichheiten der Verhältnisse

$$\frac{a}{\beta-\gamma}=\frac{b}{\gamma-\alpha}=\frac{c}{\beta-\alpha},$$

welche lehren, daß jede der Quantitäten a, b, c der drei gleichartigen Dinge mit dem Unterschiede der Werthe von den Quantitäts-Einheiten der beiden andern Dinge im geraden Verhältnisse stehe.

Mit Hilfe der letzten Gleichungen lassen sich 2 der 6 Zahlen a, b, c und α, β, γ berechnen, wenn die übrigen 4 gegeben sind. Wir wollen das Gesagte durch folgende Beispiele erläutern.

1. Beispiel. Man will von zweierlei Weinen, wenn eine Maß des ersteren 16 Kr., und eine des andern 36 Kr. kostet, 250 Maß mittleren Weines, die Maß zu 24 Kr., zubereiten; wie viel Maß soll man von jedem nehmen?

Hier hat man

die Quantitäten	die Werthe	also die Differenzen der Preise
$a = x$ Maß	$\alpha = 16$ Kr.	$\beta - \gamma = 12$ Kr.
$b = y$ „	$\beta = 36$ „	$\gamma - \alpha = 8$ „
$c = 250$ „	$\gamma = 24$ „	$\beta - \alpha = 20$ „

folglich ist

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{8} = \frac{250}{20},$$

oder abgekürzt, (indem man mit 4 multiplicirt)

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = 50,$$

sonach ist $x = 150$, und $y = 100$,
d. h. man wird von dem schlechtern Weine 150 Maß, und von dem bessern 100 Maß nehmen.

2. Beispiel. Unter 120 Maß Wein, von dem die Maß 48 Kr. gilt, soll ein anderer Wein, von dem eine Maß 30 Kr. werth ist, gemengt werden, so daß jede Maß des Gemenges 36 Kr. werth wird. Wie viel soll von dem zweiten Weine genommen werden?

Nach diesen Angaben sind
die Quantitäten $a=120$, $b=y$, $c=z$,
die Werthe einer Maß $\alpha=48$, $\beta=30$, $\gamma=36$,
also bestehen die Gleichungen $\frac{120}{6} = \frac{y}{12} = \frac{z}{18}$,

oder wenn man mit 6 multiplicirt, $120 = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$;

somit ist $y = 240$, und $z = 360$; nemlich man wird 240 Maß des schlechtern Weines beimengen, wornach man 360 Maß Gemenge erhält.

3. Beispiel. Ein Silberarbeiter hat zweierlei Silber, ein 10löthiges, und ein 15löthiges; er soll ein 5 Mark schweres Gefäß

machen, welches 13löthiges Silber *) enthält. Wie viel muß er von jeder Silbersorte nehmen.

Hier sind die Quantitäten $a=x$, $b=y$, $c=5$ Mark, die Werthe (Silbergehalte) einer Mark $\alpha=10$, $\beta=15$, $\gamma=13$ Loth, daher $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{5}{5}$, und $x=2$, $y=3$.

Er wird demnach 2 Mark 10löthigen Silbers mit 3 Mark 15löthigen zusammenschmelzen.

4. Beispiel. Man hat zweierlei Brandröhrensätze; der erste, in eine Brandröhre von bestimmter Länge geschlagen, brennt durch 45 Secunden, und der andere, in eben diese Brandröhre geschlagen, nur durch 20 Secunden. Man will von diesen zwei Sätzen 60 Pfund zusammen mengen, so daß eine eben so lange Brandröhre aus dem neuen Satze verfertigt, durch 30 Secunden brenne. Wie viel muß von jedem Satze genommen werden?

Hier hat man $a=x$, $b=y$, $c=60$ Pfund,

$\alpha=45$, $\beta=20$, $\gamma=30$ Secunden, also

$$\frac{x}{10}=\frac{y}{15}=\frac{60}{25}, \text{ oder}$$

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=12, \text{ mithin}$$

$$x=24, \text{ und } y=36;$$

nemlich man wird 24 Pf. des schärfern Satzes mit 36 Pf. des mattern vermengen.

5. Beispiel. Eine ärarische Salpeter-Läuterungsanstalt soll 400 Klafter 36zölliges Brennholz beziehen; der Lieferant hat aber nur 30 und 40zölliges derselben Qualität; wie viel von jeder Sorte hat der Verwalter anzutragen?

Hier ist $a=x$, $b=y$, $c=400$ Klafter,

$\alpha=30$, $\beta=40$, $\gamma=36$ Zoll,

also $\frac{x}{4}=\frac{y}{6}=\frac{400}{10}$, somit $x=160$, und $y=240$;

*) Man nennt ein Silber 10, 13, 15löthig, wenn in einer Mark von 16 Lothen nur 10, 13, 15 Loth reinen Silbers, folglich 6, 3, 1 Loth Zusatz an Kupfer enthalten sind.

nemlich es sind 160 Klafter des 30, und 240 Klafter des 40zölligen anzutragen.

Es wird dem Lernenden nützlich sein, jedes der gegebenen Beispiele auch speciell aufzulösen.

5. Aufgabe. Zwei Kanoniere haben zusammen 1000 Patronen gefüllt, und gleichviel Pulver verwendet; der erste spricht zum zweiten: Hätte ich so viel Patronen, als du gefüllt, so hätte ich 18 Centner Pulver verarbeitet; und der zweite antwortet: Hätte ich blos so viel Patronen wie du gefüllt, so würde ich nur 8 Centner Pulver verarbeitet haben. Wie viel Patronen hat jeder gefüllt, und mit wie viel Pulver?

Auflösung. Die Anzahl der Patronen des ersten sei $= x$, und die des zweiten $= y$; so ist das verwendete Pulver des ersten nach seiner Aussage $\frac{18x}{y}$ Centner; und das verwendete Pulver des zweiten ist nach seiner Aussage $\frac{8y}{x}$ (§. 196). Da aber beide gleichviel verwendet haben sollen, so ist $\frac{18x}{y} = \frac{8y}{x}$. Ferner ist $x+y=1000$, weil beide mit einander 1000 Patronen gefüllt haben sollen. Aus der ersten Gleichung ist $18x^2 = 8y^2$, nemlich $x=\pm\frac{2y}{3}$; wobei jedoch die Natur der Aufgabe nur den positiven Werth zuläßt; substituirt man diesen Werth in der andern Gleichung, so ist $\frac{2y}{3}+y=1000$, woraus $y=600$ folgt. Also $x=1000-600=400$, und das von jedem verwendete Pulver ist $\frac{18x}{y}=\frac{8y}{x}=12$ Centner.

Wäre aber die Bedingung der Aufgabe folgender Maßen gestellt: Der erste spricht zum zweiten: Hätte ich jede Patrone mit so viel Pulver gefüllt, wie du die deinigen, so würde ich nur $a=562\frac{1}{2}$ Pf. Pulver verwendet haben; und der zweite sagt: Hätte ich meine Patronen mit so viel Pulver gefüllt, wie du die deinigen, so hätte ich $b=1562\frac{1}{2}$ Pf. verwendet; so wäre wieder, wenn man die Anzahl der Patronen des ersten mit x, und die des zweiten mit y benennt, $x+y=1000$.

Ferner ist das Pulver, welches der zweite zu einer Patrone verwendet hat, $=\frac{a}{x}$ Pf.; und das Pulver, welches der erste zu einer Patrone verwendet hat, $\frac{b}{y}$ Pf.; folglich hat der erste zu allen Patronen $\frac{bx}{y}$ Pf., und der zweite $\frac{ay}{x}$ Pf. verwendet; es ist demnach $\frac{bx}{y}=\frac{ay}{x}$, weil beide gleichviel Pulver verwendet haben sollen.

Aus der zweiten Gleichung ist $x=\pm y\sqrt{\frac{a}{b}}=\pm y\sqrt{\frac{9}{25}}=\pm\frac{3}{5}y$, wenn man für a und b ihre Werthe setzt. Hierin ist jedoch, weil x eine Anzahl vorhandener Dinge (Patronen) vorstellt, nur das obere Zeichen zulässig. Dieser Werth in der ersten Gleichung substituirt, gibt $\frac{3}{5}y+y=1000$, woraus $y=625$ folgt; also ist $x=1000-625=375$.

6. Aufgabe. Zwei Wasserröhren haben ein Gefäß von $a=21$ Eimer mit Wasser angefüllt, indem die erste $b=2$ Stunden, und die zweite $c=3$ Stunden geöffnet war. Ein anderes Mal haben eben diese 2 Röhren ein Behältniß von $d=51$ Eimer angefüllt, da die erste $f=7$, und die andere $g=6$ Stunden geöffnet war. Wie viel Stunden müssen beide zugleich geöffnet werden, damit selbe ein Behältniß von $h=100$ Eimer anfüllen?

Auflösung. Hier sieht man leicht ein, daß es nur auf die Menge des Wassers ankommt, das jede Röhre in einer Stunde gibt. Es sei darum die Menge des Wassers, welches die erste Röhre in einer Stunde liefert, $=x$ Eimer, so gibt sie in b Stunden bx, und in f Stunden fx Eimer. Die Menge des Wassers, das die zweite Röhre in einer Stunde gibt, sei $=y$, so liefert sie in c Stunden cy, und in g Stunden gy Eimer. Es ist demnach $bx+cy=a$, und $fx+gy=d$. Aus der ersten Gleichung ist $x=\frac{a-cy}{b}$, und aus der zweiten ist $x=\frac{d-gy}{f}$,

also auch $\frac{a-cy}{b}=\frac{d-gy}{f}$, woraus $y=\frac{af-bd}{cf-bg}=\frac{21.7-2.51}{3.7-2.6}=5$ Eimer, und

$x=\frac{21-3.5}{2}=3$ Eimer folgt. Beide Röhren zusammen geben also $5+3=8$ Eimer in einer Stunde; folglich brauchen sie, um 100 Eimer zu füllen, $\frac{100}{8}=12\frac{1}{2}$ Stunden.

7. Aufgabe. Zwei Zahlen zu finden, deren Summe von der Summe ihrer Quadrate abgezogen die Differenz $a=78$, und deren Summe zu ihrem Producte addirt die Zahl $\frac{a}{2}=39$ zum Vorschein bringt.

Auflösung. Es sei die größere Zahl $=x$, und die kleinere $=y$; so ist laut Bedingung

$$x^2+y^2-x-y=a, \qquad (A)$$

$$xy+x+y=\frac{a}{2}. \qquad (B)$$

Wenn man hier, so wie bisher gezeigt worden, arbeiten wollte, so würde man auf eine Gleichung vom vierten Grade stossen; jedoch lassen sich aus diesen Gleichungen die unbekannten Größen auf folgende Art bestimmen.

Man multiplicire die Gleichung (B) mit 2, addire sie dann einmal zur Gleichung (A), und ziehe sie auch von derselben ab, so erhält man durch die Addition

$$x^2+y^2-x-y+2xy+2x+2y=2a,$$

nemlich $(x+y)^2+(x+y)=2a, \qquad (C)$

und durch die Subtraction erhält man

$$x^2+y^2-x-y-2xy-2x-2y=0,$$

nemlich $(x-y)^2-3(x+y)=0,$

oder $(x-y)^2=3(x+y). \qquad (D)$

Nun sehe man $(x+y)$ in der Gleichung (C) für eine einnamige Größe an, und ergänze das Quadrat, so ist

$(x+y)^2+(x+y)+(\frac{1}{2})^2=2a+\frac{1}{4}$, woraus

$$x+y=-\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{(2a+\tfrac{1}{4})}=12 \text{ oder } -13$$

ist. Diese Werthe substituire man in der Gleichung (D), so ist

$$(x-y)^2=3.12 \text{ oder } -39;$$

also $x-y=\pm\sqrt{36}=\pm6$ oder $\pm\sqrt{39}.\sqrt{-1}$.

Da nun $x+y=12$ oder auch -13,

und $x-y=6$; -6; $+\sqrt{39}.\sqrt{-1}$; $-\sqrt{39}.\sqrt{-1}$,

so ist (vermög §. 222, Aufg. 1)

$x=9$; 3; $\frac{1}{2}(-13+\sqrt{39}.\sqrt{-1})$; $\frac{1}{2}(-13-\sqrt{39}.\sqrt{-1})$,

und $y=3$; 9; $\frac{1}{2}(-13-\sqrt{39}.\sqrt{-1})$; $\frac{1}{2}(-13+\sqrt{39}.\sqrt{-1})$,

von denen nur 3 und 9 reelle Werthe sind.

Oder auch: man benenne die halbe Summe der zwei gesuchten Zahlen mit x, und die halbe Differenz dieser Zahlen mit y; so ist (vermög §. 222, Aufg. 1) die größere gesuchte Zahl $=x+y$, und die kleinere $=x-y$; folglich ist laut Bedingung der Aufgabe

$(x+y)^2+(x-y)^2-2x=a$,

nemlich $2x^2+2y^2-2x=a$, $\quad (A)$

und $(x+y)(x-y)+2x=\frac{1}{2}a$,

nemlich $x^2-y^2+2x=\frac{1}{2}a$. $\quad (B)$

Multiplicirt man nun die Gleichung (B) mit 2, und addirt selbe zu der Gleichung (A), so erhält man

$4x^2+2x=2a$,

woraus man (nach §. 215) findet

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{(8a+1)}}{4}=\frac{-1\pm 25}{4}=6 \text{ oder } -6\tfrac{1}{2}.$$

Substituirt man ferner diese gefundenen Werthe in der Gleichung (B), so ergibt sich für den ersteren Werth $y=\pm 3$, und für den anderen $y=\pm\frac{\sqrt{39}}{2}\sqrt{-1}$; folglich ist die größere gesuchte Zahl $x+y=6+3=9$ oder $6-3=3$, und die kleinere $x-y=6-3=3$ oder $6+3=9$, wie vorhin, wenn man nur die reellen Zahlen beachtet.

8. Aufgabe. Es sind drei Klumpen Metall, jeder aus Gold, Silber und Kupfer zusammen geschmolzen:

im ersten sind 2 Loth Gold, 4 Loth Silber, 8 Loth Kupfer,
im zweiten 3 Loth Gold, 9 Loth Silber, 6 Loth Kupfer,
im dritten 10 Loth Gold, 5 Loth Silber, 15 Loth Kupfer.

Wie viel Loth müssen von jedem Klumpen genommen werden, damit man einen vierten Klumpen erhält, worin 4 Loth Gold, 6 Loth Silber und 9 Loth Kupfer enthalten sind?

Auflösung. Man nehme vom ersten Klumpen x Loth, vom zweiten y Loth, und vom dritten z Loth;

so ist beim ersten $\frac{2x}{14}$ L. Gold, $\frac{4x}{14}$ L. Silber, und $\frac{8x}{14}$ L. Kupfer.,

beim zweiten $\frac{3y}{18}$ „ $\frac{9y}{18}$ „ , $\frac{6y}{18}$ „

und beim dritten $\frac{10z}{30}$ „ $\frac{5z}{30}$ „ „ $\frac{15z}{30}$ „

Es ist demnach laut Bedingung

$$\frac{2x}{14}+\frac{3y}{18}+\frac{10z}{30}=4,$$

$$\frac{4x}{14}+\frac{9y}{18}+\frac{5z}{30}=6,$$

$$\frac{8x}{14}+\frac{6y}{18}+\frac{15z}{30}=9,$$

woraus $x=7$, $y=6$, und $z=6$ gefunden wird.

9. Aufgabe. Drei spielten mit einander Pharo: im ersten Spiele hatte der erste die Bank; die zwei übrigen setzten jeder die Hälfte ihres Geldes, und sie gewannen; im zweiten Spiele hatte der zweite die Bank; die beiden übrigen setzten die Hälfte ihres Geldes, und gewannen ebenfalls; hierauf übernimmt der dritte die Bank; die zwei übrigen setzten wieder die Hälfte ihres Geldes, und auch hier verlor der Banquier. Am Ende des dritten Spieles zählten sie ihr Geld, und fanden, daß jeder 27 Ducaten hatte. Wie viel hatte wohl jeder im Anfange?

Auflösung. Es sei die Anzahl der Ducaten, welche der erste beim Anfange des ersten Spieles hatte, $=x$, jene des zweiten $=y$, und die des dritten $=z$; so hat am Ende des ersten Spieles

der erste $x-\frac{y}{2}-\frac{z}{2}=\frac{2x-y-z}{2}$ Ducaten,

der zweite $y+\frac{y}{2}=\frac{3y}{2}$ Ducaten,

der dritte $z+\frac{z}{2}=\frac{3z}{2}$ Ducaten.

Am Ende des zweiten Spieles hat

der erste $\frac{2x-y-z}{2}+\frac{2x-y-z}{4}=\frac{6x-3y-3z}{4}$, der zweite $\frac{3y}{2} - \frac{2x-y-z}{4} - \frac{3z}{4} = \frac{7y-2x-2z}{4}$,

und der dritte $\frac{3z}{2} + \frac{3z}{4} = \frac{9z}{4}$.

Und am Ende des dritten Spieles hat

der erste $\frac{6x-3y-3z}{4} + \frac{6x-3y-3z}{8} = \frac{18x-9y-9z}{8}$,

der zweite $\frac{7y-2x-2z}{4} + \frac{7y-2x-2z}{8} = \frac{21y-6x-6z}{8}$,

und der dritte $\frac{9z}{4} - \frac{6x-3y-3z}{8} - \frac{7y-2x-2z}{8} = \frac{23z-4x-4y}{8}$.

Es ist demnach $\frac{18x-9y-9z}{8} = 27$, (A)

$$\frac{21y-6x-6z}{8} = 27, \quad (B)$$

$$\frac{23z-4x-4y}{8} = 27. \quad (C)$$

Wenn man die Gleichung (B) mit 3 multiplicirt, und zu (A) addirt, so erhält man

$$\frac{54y-27z}{8} = 4.27. \quad (D)$$

Wird ferner die Gleichung (B) mit 2, die Gleichung (C) aber mit 3 multiplicirt, und dann jene von dieser abgezogen, so ist

$$\frac{81z-54y}{8} = 27. \quad (E)$$

Endlich gibt die Summe von (D) und (E)

$\frac{54z}{8} = 5.27$, woraus $z=20$ folgt.

Dieser Werth für z in (E) substituirt, gibt $y=26$; und beide Werthe in (A) substituirt, geben $x=35$. Es hatte demnach im Anfange der erste 35, der zweite 26, und der dritte 20 Ducaten.

10. Aufgabe. Drei Regimenter werden zu einer gewissen Arbeit angestellt: das zweite und dritte Regiment haben eine solche Arbeit mit einander in $a=70$ Tagen, das dritte und erste Regiment in $b=84$, und das erste und zweite in $c=140$ Tagen voll-

endet. Nun ist die Frage, in wie viel Tagen alle drei Regimenter mit einander diese Arbeit vollbringen werden, und wie viel Tage ein jedes insbesondere dazu verwenden würde?

Auflösung. Es sei die Anzahl der Tage, die alle drei Regimenter vereint zu dieser Arbeit verwenden würden, $= u$, die des ersten Regiments allein $= x$, die des zweiten Regiments $= y$, und jene des dritten $= z$; so verrichtet das erste Regiment täglich $\frac{1}{x}$, das zweite $\frac{1}{y}$, das dritte $\frac{1}{z}$, und alle drei zusammen $\frac{1}{u}$ der ganzen Arbeit. Ferner vollenden nach den Bedingungen der Aufgabe

das zweite und dritte zusammen $\frac{1}{a}$,

das dritte und erste zusammen $\frac{1}{b}$, und

das erste und zweite zusammen $\frac{1}{c}$ derselben Arbeit.

Demgemäß gelten die Gleichungen

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a},\qquad \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{1}{b},\qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{c}$$

und $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{u}$.

Die halbe Summe der drei ersten Gleichungen, vereint mit der umgekehrt gedachten vierten, gibt

$$\frac{1}{u}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

und wenn man von der vierten jede der ersten drei Gleichungen abzieht, erhält man

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{u}-\frac{1}{a},\qquad \frac{1}{y}=\frac{1}{u}-\frac{1}{b},\qquad \frac{1}{z}=\frac{1}{u}-\frac{1}{c}.$$

Will man hierin für $\frac{1}{u}$ seinen Ausdruck setzen, so ergibt sich

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right),\ \frac{1}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right),\ \frac{1}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right),$$

woraus u, x, y und z selbst sehr leicht gefunden werden.

Im vorliegenden Falle ist $a=70$, $b=84$, $c=140$, daher

$$\frac{1}{u}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{70}+\frac{1}{84}+\frac{1}{140}\right)=\frac{1}{60},\quad \frac{1}{x}=\frac{1}{60}-\frac{1}{70}=\frac{1}{420},$$

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{60}-\frac{1}{84}=\frac{1}{210},\quad \frac{1}{z}=\frac{1}{60}-\frac{1}{140}=\frac{1}{105},$$

und sonach $u=60$, $x=420$, $y=210$, und $z=105$.

11. Aufgabe. Eine Zahl zu finden, die aus drei Ziffern von solcher Beschaffenheit besteht, daß die Summe der Quadrate der einzelnen Ziffern, ohne auf ihren Rang zu sehen, $=104$, das Quadrat der mittlern Ziffer um 4 größer sei, als das doppelte Product der beiden äußern, endlich daß, wenn man von der gesuchten Zahl die Zahl 594 abzieht, die gesuchten 3 Ziffern, aus welchen die Zahl besteht, in verkehrter Ordnung zum Vorschein kommen. Wie heißt diese Zahl?

Auflösung. Es sei die erste Ziffer links $=x$, die mittlere $=y$, und die letzte $=z$, so ist nach den Bedingungen, und wenn die (durch §. 6) bestimmten Stellenwerthe der einzelnen Ziffern beachtet werden:

(1) $\quad x^2+y^2+z^2=104,$

(2) $\quad y^2-2xz=4,$

(3) $\quad 100x+10y+z-594=100z+10y+x.$

Aus (3) findet man $99x-99z=594$, also

(4) $\quad x-z=6.$

Subtrahirt man die Gleichung (2) von (1), so wird

$$x^2+2xz+z^2=100,$$

folglich, wenn man hieraus die zweite Wurzel zieht, und nur den hier zulässigen positiven Werth beachtet,

(5) $\quad x+z=10.$

Aus der Gleichung (4) und (5) ist sofort

$$x=8,\quad z=2;$$

und mit diesen Werthen liefert die Gleichung (2)

$$y^2=4+2xz=4+32=36,$$

also

$$y=6.$$

Somit ist die gesuchte Zahl 862.

Folgende Beispiele wird ein fleißiger Anfänger nunmehr selbst leicht ausarbeiten können.

I. Pythagoras wurde gefragt, wie viel er Schüler habe. Er antwortete: Zähle ich drei so eben aufgenommene Schüler hinweg, so studirt die Hälfte die Philosophie, der dritte Theil die Mathematik, und die übrigen, welche sich noch im Stillschweigen üben, sammt den drei Schülern, welche ich eben jetzt angenommen habe, machen den vierten Theil meiner vorher gehabten Schüler aus.

Antwort. Pythagoras hatte zur Zeit der an ihn gestellten Frage 39 Schüler; nemlich 3 Neulinge, 18 Philosophen, 12 Mathematiker, und 6 Schweigsame.

II. Eine Heidin ging in den Tempel Jupiters, und bat, er möchte ihr Geld, das sie bei sich hatte, verdoppeln; Jupiter that es, und sie opferte zur Dankbarkeit 2 Drachmen. Mit dem Überreste ging sie in den Tempel des Apollo, bat ein Gleiches, und opferte abermal zur Dankbarkeit für die Verdopplung ihres nunmehrigen Geldes 2 Drachmen, fand aber mit Verwunderung, daß sie der Verdopplungen ungeachtet nichts gewonnen habe. Nun ist die Frage, wie viel sie im Anfang Geld gehabt habe?

Antwort. 2 Drachmen.

III. Ein Sterbender hinterließ eine schwangere Frau, und ein Vermögen von 9000 Fl. Sein letzter Wille war dieser: gebärst du einen Sohn, so soll derselbe von der Verlassenschaft 3 Mal so viel als du haben; gebärst du hingegen eine Tochter, so nimm du 2 Mal so viel wie sie. Nun fügte es sich, daß die Frau einen Sohn und eine Tochter gebar. Wie soll nun das Vermögen im Sinne des Testamentes getheilt werden?

Antwort. Die Frau erhält 2000, der Sohn 6000, und die Tochter 1000 Fl.

IV. Ein Meister dingt einen Gesellen mit den Worten auf: für jeden Tag, den du für mich arbeitest, zahle ich dir 7 Groschen, und für jeden Tag, den du für deine Geschäfte anwendest, zahlest du mir für die Kost 3 Groschen. Nach 50 Tagen trat der Gesell aus diesem Dienste; er machte mit seinem Herrn die Abrechnung, und es fügte sich, daß der Gesell vom Meister zwei Gulden zu fordern hatte. Nun ist die Frage, durch wie viel Tage dieser Gesell für seinen Herrn, und durch wie viel Tage er für sich gearbeitet hat?

Antwort. Der Gesell arbeitete für seinen Meister 19, also für sich 31 Tage.

V. Zwei Bauern säeten mit einander 24 Metzen aus; der erste spricht zum zweiten: wenn mir jeder Metzen so viel wieder bringt, als du gesäet hast, so werde ich 135 Metzen bekommen. Wie viel hatte jeder gesäet?

Antwort. Der eine 15, der andere 9 Metzen.

VI. Ein Kaufmann vermehrt sein Vermögen jährlich um den dritten Theil; nimmt aber am Ende eines jeden Jahres 1000 Fl. zur Erhaltung seiner Familie hinweg; und wird doch dabei am Ende des dritten Jahres doppelt so reich, als er im Anfange des ersten Jahres war. Wie reich war dieser Kaufmann?

Antwort. Er besaß 11100 Fl.

VII. Es hatte Jemand zwei Goldstufen zu verkaufen; er begehrte für jedes Loth des ersten Stückes halb so viel Gulden, als das zweite Stück Lothe wog, und die Anzahl dieser Gulden betrug eben so viel, als beide Stücke zusammen Lothe hatten. Der Käufer nahm beide Stücke, und zahlte für jedes Loth eines jeden Stückes eben so viel Gulden, als Lothe in dem Stücke enthalten waren; und nach diesem Vergleiche betrug die ganze Zahlung 45 Fl. Wie viel Loth wog jedes Stück?

Antwort. Das eine Stück wog 6, das andere 3 Loth.

VIII. Acht Pferde haben in sieben Wochen eine Wiese von 400 Quadratklaftern dergestalt abgeweidet, daß sie sowohl das Gras, welches im Anfange bereits da stand, als auch jenes verzehrten, welches während dieser Zeit nachwuchs. Auf die nemliche Art haben 9 Pferde in 8 Wochen eine Wiese von 500 Quadratklaftern abgeweidet. Wie viel Pferde werden auf eben diese Art durch 12 Wochen auf einer Wiese von 600 Quadratklaftern sich ernähren können?

Antwort. 8 Pferde.

IX. Zwei Zahlen zu finden, deren Summe, Product, und Differenz der Quadrate einander gleich sind.

Antwort. Diese Zahlen sind entweder 0 und 0, oder die größere ist $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, die kleinere $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

§. 223.

Bei den verwickelten quadratischen Gleichungen von der Gestalt $x^4+Ax^2=B$, und auch in verschiedenen anderen Fällen kommt der Ausdruck $x=\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ zum Vorschein; dieser Ausdruck läßt sich noch abkürzen, wenn a^2-b ein vollkommenes Quadrat ist; es ist nemlich

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{(\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2-b})}\pm\sqrt{(\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2-b})}.$$

Um dies einzusehen, erwäge man, daß die zweite Potenz einer Größe von der Form $\sqrt{y}\pm\sqrt{z}$ die Gestalt $y+z\pm2\sqrt{yz}$ besitzt, welche, wenn y und z rational sind, mit der Form $a\pm\sqrt{b}$, in welcher a und b gleichfalls rational gedacht werden, übereinstimmt; daher setze man, indem man sich unter y und z noch ferner zu bestimmende Zahlformen vorstellt,

$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{y}\pm\sqrt{z}$, und es ist

$a\pm\sqrt{b}=(\sqrt{y}\pm\sqrt{z})^2=y\pm2\sqrt{yz}+z.$

Ist nun unseren Annahmen zu Folge sowohl $\sqrt{b}$ als auch $\sqrt{yz}$ irrational, so kann, weil die Differenz ungleicher irrationaler Zahlen nicht Null zu werden vermag, sondern immer irrational ausfallen muß, diese Gleichung nur bestehen, wenn die irrationalen Glieder ihres ersten Theils den irrationalen Gliedern ihres zweiten Theils gleich, und folglich auch die rationalen Glieder den rationalen gleich sind. Demnach ist $\sqrt{b}=2\sqrt{yz}$, und $a=y+z$; aus diesen Gleichungen findet man

$$y=\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2-b},$$

und $z=\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2-b}$;

es ist daher $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{(\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2-b})}\pm\sqrt{(\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2-b})}$.

Z. B. $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{3+\sqrt{8}}=1+\sqrt{2}$,

$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{7+\sqrt{48}}=2+\sqrt{3}$,

$\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{11-\sqrt{72}}=3-\sqrt{2}$.

Von der Auflösung der unbestimmten Aufgaben.

§. 224.

Wenn aus den Bedingungen einer Aufgabe nicht so viel Gleichungen abgeleitet werden können, als unbekannte Größen vorhanden sind, so ist es ein Zeichen, daß die vorgelegte Aufgabe unbestimmt sei; denn es können für jede unbekannte Größe mehrere, ja zuweilen unendlich viele Werthe gefunden werden, die theils positiv, theils negativ, ganz, oder gebrochen sind, und die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Die Art, wie selbe gefunden werden, ist folgende. Man schaffe (nach §. 221) durch Verminderung der Gleichungen so viel unbekannte Größen weg, als es möglich ist, so wird man zuletzt eine Gleichung erhalten, in welcher sich noch eine unbekannte Größe mehr befindet, als anfangs Gleichungen zu wenig waren. In dieser letzten Gleichung sehe man nur eine einzige Größe für unbekannt an, für die übrigen unbekannten Größen aber nehme man beliebige Werthe an, und bestimme erstere dadurch; diese Werthe substituire man in den vorhergehenden Gleichungen (wie §. 221), so werden auch die übrigen weggeschafften unbekannten Größen gefunden. Als Erläuterung dieses Verfahrens mögen folgende Beispiele dienen.

1. Aufgabe. Drei Zahlen zu finden, deren Summe $=15$, die Summe der ersten und dritten aber der Differenz gleich sei, wenn man die erste von der zweiten abzieht.

Auflösung. Benennt man die erste Zahl mit x, die zweite mit y, und die dritte mit z, so ist laut Bedingung

$x+y+z=15$, (A)

und $x+z=y-x$, (B)

Aus der Gleichung (A) ist $x=15-y-z$, und aus (B) ist $x=\frac{y-z}{2}$; also auch $15-y-z=\frac{y-z}{2}$,

woraus $y=10-\frac{1}{3}z$, (C), eine Gleichung, worin noch 2 unbekannte Größen sind; weil aus den Bedingungen der Aufgabe nur 2 statt 3 Gleichungen abgeleitet werden konnten. Man nehme demnach in der Gleichung (C) für z einen beliebigen positiven oder negativen, ganzen oder gebrochenen Werth an, bestimme dadurch y, und substituire beide Werthe in der Gleichung (A), so läßt sich auch x finden.

Es sei $z=1$,	2,	3,	4,	5,	....	$\frac{1}{2}$,	$\frac{1}{3}$,
so ist $y=9\frac{2}{3}$,	$9\frac{1}{8}$,	9,	$8\frac{2}{3}$,	$8\frac{1}{8}$,	....	$9\frac{5}{6}$,	$9\frac{8}{9}$,
und $x=4\frac{1}{3}$,	$3\frac{2}{3}$,	3,	$2\frac{1}{3}$,	$1\frac{2}{3}$,	....	$4\frac{2}{3}$,	$4\frac{7}{9}$.

2. Aufgabe. Vier Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß ihre Summe $=18$ ist, und die Summe aus der ersten, dem Zweifachen der zweiten, dem Dreifachen der dritten, und dem Vierfachen der vierten 50 beträgt.

Auflösung. Es sei die erste Zahl $=x$, die zweite $=y$, die dritte $=z$, und die vierte $=u$, so ist laut Bedingung:

$x+ y+ z+ u=18,$ (A)

und $x+2y+3z+4u=50.$ (B)

Aus der Gleichung (A) ist $x=18-y-z-u$, und aus (B) ist $x=50-2y-3z-4u$; also auch

$18-y-z-u=50-2y-3z-4u,$

woraus folgt $y=32-2z-3u$, (C), eine Gleichung, die noch 3 unbekannte Größen enthält, weil aus den Bedingungen der Aufgabe nur 2 statt 4 Gleichungen abgeleitet werden konnten. Man nehme demnach in der Gleichung (C) für z und u willkürliche Werthe an, bestimme daraus y, und substituire diese Werthe in (A), so läßt sich auch x finden. Es sei nun z. B.

$z=$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	. . .	-1,
und $u=$	2,	3,	4,	5,	6,	7,	. . .	-7,
so ist $y=$	24,	19,	14,	9,	4,	-1,	. . .	$+55$,
und $x=$	-9,	-6,	-3,	0,	3,	6,	. . .	-29.

Und so könnte für z und u jeder beliebige andere Werth angenommen werden, wo sich dann y und x bestimmen läßt. Daraus sieht man, daß eine Aufgabe um so unbestimmter ist, je mehr unbekannte Größen in der letzten Gleichung übrig bleiben.

3. Aufgabe. Ein Kaufmann ist 100 Fl. schuldig; sein Gläubiger begehrt zweierlei Tuch dafür; die Elle vom ersten kostet 9 Fl., und vom zweiten 7 Fl. Wie viel soll er ihm von jeder Gattung geben?

Auflösung. Es sei die Anzahl der Ellen von der ersten Gattung $=x$, und von der zweiten $=y$, so muß $9x+7y=100$ sein, woraus $y=\frac{100-9x}{7}$ folgt; und da keine Gleichung mehr vorhanden ist, so muß wieder für x ein beliebiger Werth angenommen werden. Weil aber hier in dieser Aufgabe keine unbekannte Größe negativ erscheinen darf, so kann x nur so groß angenommen werden, damit $9x < 100$, oder $x < \frac{100}{9}$ ist, weil sonst y negativ ausfallen müßte; setzt man demnach

$$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,$$

so ist $y = 13, \frac{82}{7}, \frac{73}{7}, \frac{64}{7}, \frac{55}{7}, \frac{46}{7}, \frac{37}{7}, 4, \frac{19}{7}, \frac{10}{7}, \frac{1}{7}$.

Und so könnten auch für x was immer für Brüche angenommen werden, wenn sie nur $\frac{100}{9}$ nicht übersteigen.

4. Aufgabe. Es hat Jemand dreierlei Weine: vom ersten kostet die Maß 36 Kr., vom zweiten 24 Kr., und vom dritten 16 Kr.; er will hievon einen Eimer mischen, wovon die Maß 20 Kr. werth ist. Wie viel kann von jedem genommen werden?

Auflösung. Die Anzahl Maß vom ersten sei $= x$, vom zweiten $= y$, und vom dritten $= z$, so ist

$$x + y + z = 40, \qquad (A)$$

und $36x + 24y + 16z = 40 . 20. \qquad (B)$

Aus der Gleichung (A) ist $x = 40 - y - z$, und aus (B) ist

$$x = \frac{40 . 20 - 24y - 16z}{36} = \frac{200 - 4z - 6y}{9}; \text{ also auch}$$

$$40 - y - z = \frac{200 - 4z - 6y}{9}, \text{ woraus}$$

$$y = \frac{160 - 5z}{3}, \text{ und } x = \frac{2z - 40}{3} \text{ folgt.}$$

Weil nun hier ebenfalls keine negativen Größen zugelassen werden können, so muß $5z < 160$, oder $z < 32$ angenommen werden, sonst wäre $y = 0$, oder negativ; es muß aber auch $z > 20$ sein, sonst ist $x = 0$, oder negativ. Man setze demnach

$z = 21, \quad 22, \quad 23, \quad 24, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 30, \quad 31,$

so ist $y = 18\frac{1}{3}, \quad 16\frac{2}{3}, \quad 15, \quad 13\frac{1}{3}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 3\frac{1}{3}, \quad 1\frac{2}{3},$

und $x = \frac{2}{3}, \quad 1\frac{1}{3}, \quad 2, \quad 2\frac{2}{3}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 6\frac{2}{3}, \quad 7\frac{1}{3}.$

§. 225.

Es ist aus dem Vorhergehenden zu ersehen, daß bei den unbestimmten Aufgaben unendlich viele Werthe für die unbekannten Größen gefunden werden können, wodurch die Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden. Allein bei den meisten Aufgaben wird die Anzahl dieser Werthe dadurch ungemein eingeschränkt, daß die gesuchten Größen nicht nur positiv, sondern auch ganze Zahlen sein müssen. Hiebei ereignet sich oft der Fall, daß nur einige wenige, ja zuweilen gar keine Werthe für die unbekannten Größen gefunden werden können, die den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten. Die Art, unter solchen Bedingungen alle möglichen Werthe der unbekannten Größen zu finden, zeigen folgende Beispiele.

5. Aufgabe. Es sollen aus 12 Centner Pulver 1000 Stückpatronen, und zwar die dreipfündigen mit 1, die sechspfündigen mit 2, und die zwölfpfündigen mit 3 Pfund Pulver gefüllt werden. Wie viel kann wohl von jeder Gattung erzeugt werden?

Auflösung. Es sei x die Anzahl der dreipfündigen, y die der sechspfündigen, und z jene der 12pfündigen, so ist

$$x+y+z=1000, \qquad (A)$$
und $$x+2y+3z=1200. \qquad (B)$$

Zieht man die Gleichung (A) von (B) ab, so ist $y+2z=200$; also $y=200-2z$. Man sieht aus dieser Gleichung, daß, wenn man für z eine ganze positive, zwischen 0 und 100 liegende, Zahl annimmt, auch y, und folglich auch x eine ganze positive Zahl sein müsse.

Es sei also $z=$	1,	2,	3,	4,	. . . .	99,
so ist $y=$	198,	196,	194,	192,	. . . .	2,
und $x=$	801,	802,	803,	804,	. . . .	899.

6. Aufgabe. Es sind in einem Gußhause zweierlei Kanonenröhre gegossen worden: von der ersten Gattung wiegt jedes 16, und von der zweiten 25 Centner; und doch hat man zur zweiten Gattung um einen Centner Metall weniger verbraucht, als zur ersten. Wie viel waren von jeder Gattung?

Auflösung. Es sei die Anzahl der Kanonen von der ersten Gattung $=x$, und von der zweiten $=y$, so ist $16x-1=25y$,

$$\text{also } x=\frac{25y+1}{16}=y+\frac{9y+1}{16}.$$

Weil nun x eine ganze Zahl sein muß, so kann hier für y nicht jede beliebige Zahl, sondern nur eine solche angenommen werden, daß $\frac{9y+1}{16}$ eine ganze Zahl wird. Man setze demnach

$$\frac{9y+1}{16}=A, \text{ so ist } y=\frac{16A-1}{9}=A+\frac{7A-1}{9}. \qquad (\mathfrak{A})$$

Da nun y auch eine ganze Zahl sein muß, so muß auch $\frac{7A-1}{9}$ eine ganze Zahl sein. Es sei darum

$$\frac{7A-1}{9}=B\text{, so ist } A=\frac{9B+1}{7}=B+\frac{2B+1}{7}. \quad (B)$$

Ferner sei, weil A eine ganze Zahl sein soll, $\frac{2B+1}{7}=C$,

$$\text{so ist } B=\frac{7C-1}{2}=3C+\frac{C-1}{2}. \quad (C)$$

Und da auch B eine ganze Zahl sein soll, so sei $\frac{C-1}{2}=D$, woraus $C=2D+1$ folgt.

Da nun kein Bruch mehr übrig ist, so substituire man diesen Werth von C in der Gleichung (C), und es ist $B=7D+3$; dieser Werth von B in der Gleichung (B) substituirt, gibt $A=9D+4$; und endlich dieser Werth von A in der Gleichung (A) substituirt, gibt $y=16D+7$, und ferner $x=25D+11$, wo für D jede beliebige ganze positive Zahl gesetzt werden darf. Setzt man nun

$D=$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,..
so ist $y=$	7,	23,	39,	55,	71,	87,	103,	119,	135,	151,	167,..
und $x=$	11,	36,	61,	86,	111,	136,	161,	186,	211,	236,	261,..

7. Aufgabe. Gegen 57 Spanische Bataillons standen in einer Schlacht 62 Französische, doch waren diese im Ganzen nur um 8 Mann stärker als jene; wie stark waren sie, wenn jedes Bataillon mehr als 540 Mann, und weniger als 690 Mann zählte?

Auflösung. Es sei x die Anzahl Mann in jedem Französischen Bataillon, und y jene in einem Spanischen;

so ist $57y=62x-8$, woraus $y=\frac{62x-8}{57}=x+\frac{5x-8}{57}$ folgt.

Da y eine ganze positive Zahl sein muß, so darf man für x nur solche Werthe annehmen, daß $\frac{5x-8}{57}$ eine ganze Zahl wird.

Setzt man daher $\frac{5x-8}{57}=A$, so wird

$$x=\frac{57A+8}{5}=11A+1+\frac{2A+3}{5},$$

und, wenn man aus demselben Grunde $\frac{2A+3}{5}=B$ setzt,

so erscheint $A=\frac{5B-3}{2}=2B-1+\frac{B-1}{2}$,

oder wenn man $\frac{B-1}{2}=C$, daher $B=2C+1$, setzt, $A=5C+1$; mithin ist $x=57C+13$, und $y=62C+14$.

Da nun sowohl x als y zwischen 540 und 690 liegen soll, so muß $57C+13>540$, und $62C+14<690$ sein, folglich kann C nur gleich 10 angenommen werden, wodurch $x=583$, und $y=634$ wird.

Die ganze Stärke der 62 Französischen Bataillons bestand daher aus 36146 Mann, und jene der 57 Spanischen aus 36138 Mann.

8. Aufgabe. Eine Zahl zu finden, welche durch 2 dividirt 1, durch 3 dividirt 2, und durch 4 dividirt 3 zum Reste gibt.

Auflösung. Es sei die gesuchte Zahl $=x$, so müssen die drei Ausdrücke $\frac{x-1}{2}$, $\frac{x-2}{3}$, $\frac{x-3}{4}$ ganze Zahlen sein.

Man setze demnach den ersten Ausdruck $\frac{x-1}{2}=A$,

so ist $$x=2A+1. \qquad (\mathfrak{A})$$

Diesen Werth substituire man in dem zweiten Ausdrucke statt x, so muß $\frac{2A+1-2}{3}$ eine ganze Zahl sein. Es sei

$$\frac{2A-1}{3}=B, \text{ so ist } A=\frac{3B+1}{2}=B+\frac{B+1}{2}. \qquad (\mathfrak{B})$$

Es sei $\frac{B+1}{2}=C$, so ist $B=2C-1$.

Dieser Werth in der Gleichung ($\mathfrak{B}$) substituirt, gibt $A=3C-1$; und dieser Werth in der Gleichung ($\mathfrak{A}$) substituirt, liefert

$$x=6C-1. \qquad (\mathfrak{C})$$

Diesen Werth für x substituire man in dem dritten Ausdrucke $\frac{x-3}{4}$, so muß $\frac{6C-1-3}{4} = \frac{6C-4}{4} = C-1+\frac{C}{2}$ eine ganze Zahl sein; setzt man daher $\frac{C}{2} = D$, so ist $C = 2D$. Schreibt man noch diesen Werth für C in der Gleichung (C), so ist endlich $x = 12D - 1$.

Setzt man nun $D = 1, 2, 3, \ldots$
so ist $x = 11, 23, 35, \ldots$

9. Aufgabe. Ein General wurde gefragt, wie stark sein Regiment sei. Er antwortete: Mein Regiment, das, beiläufig gesagt, nicht 2000 Mann stark ist, kann ich zwar 5, 6 und 7 Mann hoch stellen, ohne daß mir ein Mann übrig bleibt; wollte ich es aber 11 und 13 Mann hoch stellen, so würde ich im ersten Falle 9 Mann zu viel, und im zweiten 8 Mann zu wenig haben. Wie stark war nun das Regiment?

Auflösung. Es sei das Regiment x Mann stark, so muß jede von den Zahlen $\frac{x}{5}$, $\frac{x}{6}$, $\frac{x}{7}$, so wie auch $\frac{x-9}{11}$, und $\frac{x+8}{13}$ ganz und positiv sein.

Die drei ersten Bedingungen werden offenbar erfüllt, wenn man $x = 5.6.7.A = 210A$ setzt.

Um der vierten Bedingung zu genügen, setzen wir
$\frac{x-9}{11} = B$, woraus $x = 11B+9$ folgt;
dieser Werth von x in $\frac{x+8}{13}$ gesetzt, gibt $\frac{11B+17}{13}$, was wieder eine ganze Zahl sein muß; daher setzen wir
$\frac{11B+17}{13} = C$, woraus $B = C-1+\frac{2C-6}{11}$,
oder wenn $\frac{2C-6}{11} = 2D$, also $C = 11D+3$ gesetzt wird,

$$B = 13D+2 \text{ folgt.}$$

Sofort ist $x=143D+31$, mithin $143D+31=210A$,

$$\text{und } D=A+\frac{67A-31}{143},$$

oder wenn man $\frac{67A-31}{143}=E$, also $A=2E+\frac{9E+31}{67}$,

ferner $\frac{9E+31}{67}=F$, daher $E=7F-3+\frac{4F-4}{9}$,

und endlich $\frac{4F-4}{9}=4G$, mithin $F=9G+1$ setzt,

$$D=A+E=3E+F=22F-9+12G=210G+13.$$

Sonach ist $x=30030G+1890$.

Da nun $x<2000$ sein soll, so muß $G=0$, daher $x=1890$ sein.

Das Regiment war also 1890 Mann stark.

Diese Beispiele zeigen deutlich genug, wie man in dergleichen Fällen zu verfahren habe; nur ist noch zu erinnern, daß, wenn in einer solchen Gleichung die Coefficienten von x und y einen gemeinschaftlichen Factor haben, welchen das übrige Glied in der Gleichung nicht besitzt, und folglich die Gleichung sich nicht mehr abkürzen läßt, sich die unbekannten Größen x und y in ganzen Zahlen nicht finden lassen. Denn es sei in der allgemeinen Gleichung $Ax+B=Cy$, wo A, B, C ganze Zahlen vorstellen, A und C durch a theilbar, nemlich $\frac{A}{a}=D$, und $\frac{C}{a}=E$; B aber sei durch a nicht theilbar, so ist $Dx+\frac{B}{a}=Ey$, und $\frac{B}{a}=Ey-Dx$. Wären nun x und y ganze Zahlen, so sind auch Dx und Ey ganze Zahlen, und folglich auch ihre Differenz eine ganze Zahl, welches aber hier nicht ist, da B durch a nicht theilbar ist. So z. B. lassen sich aus der Gleichung $9x=15y-4$ die unbekannten Größen x und y nicht in ganzen Zahlen bestimmen, weil man zuletzt den Ausdruck $A=\frac{6B-4}{3}=2B-\frac{4}{3}$ erhält. Wohl aber lassen sich aus der Gleichung $9x=15y-6$ die Größen x und y in ganzen Zahlen finden, weil die Gleichung durch 3 abgekürzt, $3x=5y-2$ gibt, wo die Coefficienten von x und y keinen gemeinschaftlichen Factor mehr haben.

10. **Aufgabe.** Zwei Quadratzahlen zu finden, deren Summe wieder ein vollkommenes Quadrat ist.

Erste Auflösung. Es sollen x^2, y^2, und $x^2+y^2=z^2$ diese Zahlen sein. Ferner sei $z=A+y$, so ist $x^2+y^2=A^2+2Ay+y^2$, nemlich $x^2=A^2+2Ay$, woraus $y=\frac{x^2-A^2}{2A}$, und also $z=\frac{x^2+A^2}{2A}$ folgt.

Nun kann für x und A jeder beliebige Werth angenommen werden, wodurch sich y und z bestimmen lassen; nur muß, wenn die drei Quadrate lauter ganze Zahlen sein sollen, x ein Vielfaches von A, und $x+A$ eine gerade Zahl sein. Es sei z. B.

	$A=1,$	$1,$	$1,$	. . .	$2,$	$2,$	. . .	$3,$	$3,$ . . .
und	$x=3,$	$5,$	$7,$	. . .	$4,$	$6,$	. . .	$9,$	$15,$ . . .
so ist	$y=4,$	$12,$	$24,$	. . .	$3,$	$8,$	. . .	$12,$	$36,$ . . .
und	$z=5,$	$13,$	$25,$	. . .	$5,$	$10,$	. . .	$15,$	$39,$ . . .

Zweite Auflösung. Aus der Gleichung $x^2+y^2=z^2$ folgt $z^2-y^2=x^2$, oder $(z+y)(z-y)=x^2$, und somit

$$\frac{z+y}{x}\cdot\frac{z-y}{x}=1.$$

Setzt man nun $\frac{z+y}{x}=u$, so wird $\frac{z-y}{x}=\frac{1}{u}$; dann ergibt sich durch Addition und Subtraction dieser Gleichungen $\frac{z}{x}=\frac{u^2+1}{2u}$, $\frac{y}{x}=\frac{u^2-1}{2u}$, und hieraus $\frac{x}{2u}=\frac{y}{u^2-1}=\frac{z}{u^2+1}$, oder wenn man jeden dieser drei gleichen Brüche mit v bezeichnet,

$$\frac{x}{2u}=\frac{y}{u^2-1}=\frac{z}{u^2+1}=v,$$

daher $x=2uv$, $y=(u^2-1)v$, und $z=(u^2+1)v$.

Diese Ausdrücke lösen die Aufgabe, wenn man für u und v beliebige rationale Zahlen schreibt.

Setzt man $u=\frac{m}{n}$, und $v=n^2$, so wird

$$x=2mn,\ y=m^2-n^2,\ \text{und}\ z=m^2+n^2,$$

woraus für x, y, und z ganze rationale Zahlen gefunden werden, wenn man für m und n beliebige, von Null verschiedene, ganze Zahlen annimmt. So z. B. für $m=2$, $n=1$ wird $x=4$, $y=3$, $z=5$.

11. Aufgabe. Drei Zahlen von der Eigenschaft zu finden, daß sowohl die Summe von allen, als auch von je zweien eine vollkommene Quadratzahl sei.

Auflösung. Bezeichnet man die drei gesuchten Zahlen mit x, y, z, und die Wurzeln der vier Quadratzahlen mit u, r, s, t, so hat man $x+y+z=u^2$; $y+z=r^2$, $z+x=s^2$, und $x+y=t^2$.

Aus diesen vier Gleichungen, die sieben unbekannte Größen enthalten, erhält man, wenn zuerst die Summe der drei letzten mit der ersten verglichen, und dann von der ersten jede folgende abgezogen wird,

$r^2+s^2+t^2=2u^2$, $x=u^2-r^2$, $y=u^2-s^2$, und $z=u^2-t^2$.

Hat man für r, s, t, u solche Rationalzahlen gefunden, daß der ersten Gleichung Genüge geleistet wird, so lassen sich x, y und z leicht bestimmen. Solche Zahlen sind z. B. $r=19$, $s=20$, $t=11$, $u=21$, daher $x=80$, $y=41$, $z=320$.

Da nun diese Aufgabe sehr unbestimmt ist, so setze man noch einige willkürliche Bedingungen hinzu, aber doch so, daß die Aufgabe noch immer unbestimmt bleibe. Man nehme z. B. an, daß die Wurzel r um 1 kleiner als u, und s um 1 kleiner als r sei, so erhält man folgende Gleichungen:

$$r=u-1,\ s=u-2, \text{ und } t^2=6u-5,$$

woraus $x=2u-1$, $y=4u-4$,

$$z=u^2-6u+5,\ t=\pm\sqrt{(6u-5)} \text{ folgt.}$$

Und nun muß man trachten, eine solche Zahl für u anzunehmen, daß $\sqrt{(6u-5)}$ eine vollkommene Quadratzahl wird. Setzt man $u=5$, so ist auch $t=\pm5$, und daher $x=9$, $y=16$, und $z=0$; setzt man aber $u=9$, so ist $t=\pm7$, $x=17$, $y=32$, und $z=32$; setzt man ferner $u=21$, so ist $t=\pm11$, $x=41$, $y=80$, und $z=320$. Man kann auch für u gebrochene Zahlen setzen; z. B. für $u=\frac{3}{2}$ ist $t=\pm2$, $x=2$, $y=2$, und $z=-\frac{7}{4}$, u. s. w.

12. Aufgabe. Zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß die Differenz ihrer dritten Potenzen der Differenz der Zahlen selbst gleich sei.

Auflösung. Es sei x die eine, und y die andere Zahl, so ist vermög Bedingung $x^3-y^3=x-y$,

daher $(x-y)(x^2+xy+y^2-1)=0$.

Dieser Gleichung geschieht zunächst Genüge, wenn $x-y=0$, und dann, wenn $x^2+xy+y^2-1=0$ ist.

Im ersteren Falle ist $x=y$, daher sind beide gesuchten Zahlen gleich, jedoch sonst beliebig groß. Im andern Falle findet sich

$$y = \frac{-x \pm \sqrt{(4-3x^2)}}{2}. \quad (A)$$

Um diesen Ausdruck rational zu machen, setze man

$$\sqrt{(4-3x^2)} = nx - 2,$$

so ist $4-3x^2=n^2x^2-4nx+4$, und daraus $x=\frac{4n}{n^2+3}$.

Setzt man ferner diesen Werth für x in (A), so ist

$$y = \frac{n^2-2n-3}{n^2+3} \text{ oder } -\frac{n^2+2n-3}{n^2+3}.$$

Und nun kann man für n jeden beliebigen Werth annehmen, z. B. 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... und dadurch x und y bestimmen; für $n=6$ ist $x=\frac{8}{13}$, und $y=\frac{7}{13}$ oder $-\frac{15}{13}$.

Mehrere hieher gehörige analytische Untersuchungen findet man in L. Eulers vollständ. Anleit. zur Algebra II. Th.

§. 226.

Es gibt Aufgaben, welche bestimmt zu sein scheinen, und doch wirklich unbestimmt sind; z. B. drei solche Zahlen zu finden, daß die Summe der ersten und zweiten $=40$, die Summe der zweiten und dritten $=100$, und die Differenz der dritten und ersten $=60$ sei. Benennt man die drei Zahlen mit x, y, z, so ist laut Bedingung

$$x+y=40,$$
$$y+z=100,$$
und $$z-x=60,$$

wo es scheint, daß die Aufgabe bestimmt sei, weil eben so viel Gleichungen als unbekannte Größen vorhanden sind. Allein die letzte Bedingung zeigt keine neue Eigenschaft der unbekannten Größen an, sondern wiederholt nur dasjenige, was die zwei ersten Bedingungen ausgedrückt haben, oder sie ist eine Folge der beiden anderen; denn man darf nur die erste Gleichung von der zweiten abziehen, so hat man die dritte; folglich hat man eigentlich blos zwei wesentlich verschiedene Gleichungen, und die Aufgabe ist unbestimmt; daher findet man (nach §. 224) die Werthe der unbekannten Größen, nemlich

für $x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ldots\ldots\ 39,$
wird $y=39,\ 38,\ 37,\ 36,\ 35,\ \ldots\ldots\ldots\ 1,$
und $z=61,\ 62,\ 63,\ 64,\ 65,\ \ldots\ldots\ldots\ 99.$

§. 227.

Endlich gibt es Aufgaben, deren Auflösung unmöglich ist, das ist, wo für die unbekannten Größen gar keine zulässigen Werthe gefunden werden können, welche den Bedingungen Genüge leisten. Dieses ereignet sich entweder, wenn die Bedingungen der Aufgabe sich selbst widersprechen, oder auch wenn die Aufgabe rationale, positive, oder ganze Zahlen fordert, und doch nur irrationale, negative, oder gebrochene von der verlangten Eigenschaft gefunden werden können. Sowohl eines als das andere erfährt man (wo die Unmöglichkeit nicht ohnehin schon aus den Bedingungen klar in die Augen fallen sollte), wenn man aus den Gleichungen entweder etwas Ungereimtes, oder für den Werth einer unbekannten Größe eine imaginäre Wurzel (§. 119, III.), oder auch einen negativen, oder gebrochenen Werth findet, den die Natur der Sache nicht zuläßt.

Beispiele.

1. Aufgabe. Drei Zahlen zu finden, wo die Summe der ersten und zweiten $=28$, die Summe der zweiten und dritten $=30$, und die Differenz, wenn die dritte von der ersten abgezogen wird, $=15$ ist.

Auflösung. Benennt man die drei Zahlen mit x, y, z, so ist laut Bedingung $x+y=28$, $y+z=30$, und $x-z=15$. Subtrahirt man die erste Gleichung von der zweiten, so ist $z-x=2$; und diese Gleichung zu der dritten addirt, gibt $x-z+z-x=17$, nemlich $0=17$, welches ungereimt ist; und folglich ist diese Aufgabe unmöglich.

2. Aufgabe. Es kauft Jemand einige Ellen Tuch, und gibt für jede Elle eben so viel Gulden, als Ellen Tuch da sind; er verkauft sie wieder, und bekommt für alle Ellen zweimal so viel Gulden, als Ellen da waren, und gewinnt bei diesem Handel 5 Fl. Wie viel Ellen waren es?

Auflösung. Es sei x die Anzahl Ellen Tuch, so ist x^2 seine Auslage, und $2x$ die Einnahme, folglich ist laut Bedingung

$$x^2=2x-5,$$

woraus man findet $x=1\pm2\sqrt{-1}$. Die Aufgabe ist demnach unmöglich.

3. Aufgabe. In einem Zeughause sind dreimal so viel Kanonen als Mörser; und als man 5 Kanonen und 3 Mörser wegführte, blieben nur noch halb so viel Mörser als Kanonen.

Auflösung. Es sei x die Anzahl der Mörser, so ist $3x$ jene der Kanonen; und nachdem 5 Kanonen und 3 Mörser weggeführt waren, blieben noch $x-3$ Mörser und $3x-5$ Kanonen. Es ist also laut Bedingung $\frac{3x-5}{2}=x-3$, woraus $x=-1$ folgt. Da aber hier keine negative Zahl Statt finden kann, so ist die Aufgabe unmöglich.

4. Aufgabe. Zwanzig Personen, theils Männer, theils Weiber, waren in einer Gesellschaft; es waren aber 5 Männer mehr als Weiber. Wie viel waren Männer, und wie viel Weiber?

Auflösung. Benennt man die Anzahl der Männer mit x, und die der Weiber mit y, so ist $x=12\frac{1}{2}$, und $y=7\frac{1}{2}$. Weil aber hier kein Bruch zugelassen werden kann, so ist die Aufgabe ebenfalls unmöglich.

III. Abschnitt.

Berechnung des Durchschnittes oder Mittels mehrerer Größen.

§. 228.

I. Unter Mittel (Mittelgröße, Mittelwerth, Durchschnitt) mehrerer positiver oder negativer Größen begreift man eine Größe, welche nicht größer als die größte, und nicht kleiner als die kleinste aus ihnen ist, wofern man jede Größe für größer als eine andere erklärt, wenn diese von jener abgezogen, einen positiven Rest übrig läßt. Sind nemlich a, b, c, ... irgend welche Größen, von denen die kleinste k, und die größte g heißen mag, so ist jede Größe m ein Mittel genannter Größen, wenn $m \overline{\gtrless} k$, $m \overline{\lessgtr} g$ ist, oder wenn die Differenzen $m-k$, $g-m$ positiv sind, wobei verschwindende (Null werdende) Differenzen auch für positiv erachtet werden sollen.

Man ersieht hieraus sogleich, daß Größen, welche nicht sämmtlich einander gleich sind, unzählig viele Mittel besitzen, und daß mehreren durchgehends gleichen Größen nur ein Mittel zukommt, welches nichts anderes als jede dieser Größen selbst sein kann.

II. Da nach der obigen Voraussetzung k die kleinste, und g die größte der Größen a, b, c, ... deren Anzahl n sein mag, vorstellt, so müssen sowohl die Differenzen $a-k$, $b-k$, $c-k$, ... als auch $g-a$, $g-b$, $g-c$, ... positiv sein. Somit sind auch die Summen derselben

$$(a+b+c+\cdots)-nk, \text{ und } ng-(a+b+c+\cdots),$$

daher auch die $n$ten Theile dieser

$$\frac{a+b+c+\cdots}{n}-k,\ g-\frac{a+b+c+\cdots}{n}$$

positive Größen, woraus sogleich erhellet, daß

$$\frac{a+b+c+\cdots}{n}$$

ein Mittel der n Größen a, b, c, ... ist. Man nennt selbes das arithmetische Mittel (oder auch nur schlechthin das Mittel) dieser Größen.

Man findet demnach das arithmetische Mittel mehrerer Größen, indem man ihre algebraische (mit Rücksicht, ob diese Größen positiv oder negativ sind, gebildete) Summe durch die Anzahl der Größen dividirt.

III. Bezeichnen ferner α, β, γ, ... irgend welche positive Zahlen, so müssen, wenn mit ihnen die positiven Differenzen $a-k$, $b-k$, $c-k$, ... und $g-a$, $g-b$, $g-c$, ... multiplicirt werden, auch die Differenzen

$$\alpha a-\alpha k,\ \beta b-\beta k,\ \gamma c-\gamma k, \ldots \text{und } \alpha g-\alpha a,\ \beta g-\beta b,\ \gamma g-\gamma c, \ldots$$

positiv ausfallen. Hiernach sind auch ihre Summen

$$(\alpha a+\beta b+\gamma c+\cdots)-(\alpha+\beta+\gamma+\cdots)k,$$

und $(\alpha+\beta+\gamma+\cdots)g-(\alpha a+\beta b+\gamma c+\cdots)$,

folglich, wenn man durch die gleichfalls positive Zahl $\alpha+\beta+\gamma+\cdots$ dividirt, auch die Quotienten

$$\frac{\alpha a+\beta b+\gamma c+\cdots}{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}-k, \quad g-\frac{\alpha a+\beta b+\gamma c+\cdots}{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}$$

positiv, woraus einleuchtet, daß auch

$$\frac{\alpha a+\beta b+\gamma c+\cdots}{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}$$

ein Mittel der Größen $a, b, c, \ldots$ ist, wofern nur $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ positive Zahlen bedeuten. Man nennt dies das zusammengesetzte arithmetische Mittel jener Größen.

IV. Sind ferner $a, b, c, \ldots$ irgend welche positive Zahlen, von denen k die kleinste, g aber die größte ist, und stellen außerdem auch $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ solche positive Zahlen vor, so muß,

weil sowohl $k \leqq a, \quad k \leqq b, \quad k \leqq c, \ldots\ldots$

als auch $g \geqq a, \quad g \geqq b, \quad g \geqq c, \ldots\ldots$

ist, nicht nur $k^\alpha \leqq a^\alpha, \quad k^\beta \leqq b^\beta, \quad k^\gamma \leqq c^\gamma, \ldots\ldots$

sondern auch $g^\alpha \geqq a^\alpha, \quad g^\beta \geqq b^\beta, \quad g^\gamma \geqq c^\gamma, \ldots\ldots$

folglich $k^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots} \leqq a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots$

und $g^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots} \geqq a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots$

sein, woraus man

$$k \leqq \sqrt[\alpha+\beta+\gamma+\cdots]{a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots}, \quad g \geqq \sqrt[\alpha+\beta+\gamma+\cdots]{a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots}$$

erhält, und sich nach der aufgestellten Erklärung überzeugt, daß

$$\sqrt[\alpha+\beta+\gamma+\cdots]{a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots}$$

ein Mittel der Zahlen $a, b, c, \ldots$ ist.

Gibt n die Anzahl dieser Zahlen an, und setzt man $\alpha=\beta=\gamma=\cdots=1$, so wird $\alpha+\beta+\gamma+\cdots=n$, daher ist auch

$$\sqrt[n]{abc\ldots}$$

ein Mittel der n positiven Zahlen $a, b, c, \ldots$ Man pflegt es das geometrische Mittel dieser Zahlen zu nennen, und könnte vorhergehendes das zusammengesetzte geometrische Mittel nennen.

V. Man wendet die Berechnung des Mittels mehrerer Größen vorzüglich dann an, wenn sich für die zu bestimmende Größe mehrere Werthe darbieten, von denen man nicht anzugeben vermag, welcher eigentlich der wahre sei. Solche Fälle ergeben sich bei physikalischen und mechanischen Versuchen, bei practisch-geometrischen Vermessungen, beim Finanzwesen, u. m. dgl. Gewöhnlich nimmt man hier nur das arithmetische Mittel, weil es leichter als das geometrische berechnet werden kann.

Das Gesagte mag durch folgende Beispiele erläutert werden.

1. Beispiel. Ein kais. Österreichischer 60pfündiger Mörser erreichte im August 1783 bei einer Ladung von $1\frac{1}{2}$ Pfund unter 45 Grad Elevation bei dem ersten Bombenwurfe 146, bei dem zweiten 152, bei dem dritten 142, und bei dem vierten 145 Wiener Klafter. Wie groß ist die Wurfweite dieses Mörsers im Mittel?

Antwort. $\frac{146+152+142+145}{4} = \frac{585}{4} = 146$ Klafter.

2. Beispiel. Das reine Erträgniß eines Gutes belief sich im ersten Jahre auf 2145 Fl. 30 Kr., im zweiten auf 3256 Fl. 45 Kr., im dritten auf 2869 Fl. 40 Kr., im vierten auf 2788 Fl. 50 Kr., im fünften auf 2829 Fl. 50 Kr., im sechsten auf 2689 Fl. 36 Kr. Was ist das Erträgniß dieses Gutes im Durchschnitte?

Rechnung.	2145	Fl.	30	Kr.
	3256	"	45	"
	2869	"	40	"
	2788	"	50	"
	2829	"	50	"
	2689	"	36	"
:6)	16580	"	11	"
Antwort.	2763	Fl.	22	Kr.

3. Beispiel. Jemand kauft mehrere Quantitäten Weitzen, und zwar:

von der ersten Sorte	28 Metzen	zu 110	Groschen,
" " zweiten	" 36 "	zu 114	"
" " dritten	" 40 "	zu 108	"
" " vierten	" 25 "	zu 117	"

Was kostet der Metzen im Durchschnitte?

28 M. zu 110 Gr.	kosten	28.110=3080	Gr.
36 M. zu 114 Gr.	=	36.114=4104	=
40 M. zu 108 Gr.	=	40.108=4320	=
25 M. zu 117 Gr.	=	25.117=2925	=
129 Metzen kosten zusammen		14429	Gr.

daher kostet 1 Metzen $\frac{14429}{129}$ = 111 Gr. 2 Kr. 2 Dr.

= 5 Fl. $35\frac{1}{2}$ Kr.

4. Beispiel. Eine kais. Österreichische 6pfündige Kanone erreichte im Mittel aus 11 Schüssen 1211 Schritt, eine zweite eben so construirte, geladene und gerichtete Kanone erreichte bei 13 Schüssen im Mittel 1326 Schritt, und eine dritte eben solche Kanone bei 10 Schüssen im Mittel 1416 Schritt. Welches ist die mittlere Schußweite dieser Geschützgattung?

Rechnung. 11.1211=13321
13.1326=17238
10.1416=14160

34; 44719 : 34=1315.

Antwort. 1315 Schritt.

Sechstes Hauptstück.

Arithmetische und geometrische Reihen. Combinationslehre. Binomischer Lehrsatz. Logarithmen.

I. Abschnitt.

Von den arithmetischen Reihen.

Von den Reihen überhaupt.

§. 229.

Eine Folge von Größen, welche nach einem bekannten Gesetze wachsen, oder abnehmen, wird überhaupt eine Reihe (series), oder Progression, und zwar im ersten Falle eine steigende, und im andern eine fallende Reihe genannt. Die Größen, welche die Reihe bilden, heißen die Glieder der Reihe. So z. B. ist 1, 2, 4, 8, 16 eine steigende Reihe von 5 Gliedern, wo die Glieder nach dem Gesetze, daß jedes nachfolgende Glied doppelt so groß ist, als das nächst vorhergehende, wachsen. Hingegen ist 24, 18, 12, 6 eine fallende Reihe von 4 Gliedern, wo jedes nachfolgende Glied aus dem nächst vorhergehenden entsteht, wenn man dieses um 6 vermindert.

§. 230.

Es ist daraus zu ersehen, daß, wenn einmal das Gesetz einer Reihe bekannt ist, und einige ihrer Anfangsglieder bereits berechnet sind, die Reihe nach Belieben fortgesetzt, und jedes Glied derselben, welches man auch immer will, bestimmt werden könne; wie auch, daß man die Summe von jeder Anzahl Glieder der Reihe durch die Addition finden könne. Allein wie beschwerlich wäre es nicht, wenn man, um z. B. das tausendste Glied einer Reihe zu bestimmen, vorher alle 999 Glieder entwickeln müßte? Noch beschwerlicher wäre es, 1000 Glieder (nach §. 17) zu addiren, um die Summe einer solchen Reihe von 1000 Gliedern zu erhalten.

Es ist deßwegen nothwendig, daß man bei jeder vorkommenden Reihe einen algebraischen Ausdruck ausfindig mache, der in sich diejenige Zahl enthält, welche die Stelle des gesuchten Gliedes angibt, daher der Stellenzeiger (Index) dieses Gliedes genannt wird, und von uns stets mit n bezeichnet werden soll, und der zugleich so beschaffen ist, daß man, wenn in jenem Ausdrucke $n=1$ gesetzt wird, dadurch das erste Glied der Reihe erhalte, und wenn man $n=2$, $n=3$, $n=4$, u. s. f. setzt, dadurch auch das zweite, dritte, vierte Glied der Reihe, u. s. f. zum Vorschein komme. Ein solcher, den Stellenzeiger n enthaltender, algebraischer Ausdruck, der diese Eigenschaft hat, wird deßwegen das allgemeine, oder das $n$te Glied der Reihe genannt. So z. B. ist in der Reihe 2, 5, 8, 11, 14, das allgemeine Glied $=3n-1$; denn setzt man nach einander $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$, u. s. w., so erhält man das erste, zweite, dritte, vierte Glied, u. s. w. der angeführten Reihe. Eben so sind

in den Reihen							die $n$ten Glieder
I.	5,	10,	15,	20,	25,	. . . .	$5n$.
II.	4,	7,	10,	13,	16,	. . . .	$3n+1$.
III.	1,	4,	9,	16,	25,	. . . .	n^2.
IV.	1,	3,	6,	10,	15,	. . . .	$\frac{n^2+n}{2}$.
V.	3,	6,	12,	24,	48,	. . . .	3.2^{n-1}.

Auf gleiche Weise kann man auch bei jeder Reihe einen andern algebraischen, den Stellenzeiger n in sich begreifenden Ausdruck aufsuchen, welcher die Eigenschaft hat, daß, wenn man in ihm nach einander $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$, u. s. w. setzt, dadurch die Summe von einem, von zwei, von drei, von vier Gliedern, u. s. w. der Reihe zum Vorschein komme; ein solcher Ausdruck wird die Summenformel, oder die Summe von n Gliedern der Reihe genannt.

So z. B. ist in der Reihe 2, 5, 8, 11, 14, ... die Summenformel $\frac{3n^2+n}{2}$; denn setzt man in dieser Formel $n=1$, so erhält man blos das erste Glied 2; setzt man ferner $n=2$, dann $n=3$, $n=4$, u. s. w., so erhält man 7, 15, 26, 40, u. s. w. für die Summe von 2, 3, 4, 5, ... Gliedern der Reihe.

Eben so sind die Summenformeln der fünf oben angeführten Reihen folgende:

$\frac{5n^2+5n}{2}$ bei I.; $\frac{3n^2+5n}{2}$ bei II.; $\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$ bei III.;

$\frac{n^3+3n^2+2n}{6}$ bei IV.; $3(2^n-1)$ bei V.;

weil jede dieser Formeln so beschaffen ist, daß sie die Summe so vieler Glieder der betreffenden Reihe zum Vorschein bringt, als man den Buchstaben n Einheiten gelten läßt.

§. 231.

Wäre in einer Reihe die durch den Stellenzeiger, oder durch die Anzahl der addirten Glieder ausgedrückte Summenformel schon bekannt, so ließe sich das $n$te Glied leicht daraus bestimmen. Denn man setze nur $n-1$ in der Summenformel statt n, so wird man die Summe von $n-1$ Gliedern haben; zieht man dann diese Summe von jener von n Gliedern ab, so wird auf diese Art das $n$te Glied erhalten; weil die erste Summe von n Gliedern um dieses $n$te Glied größer ist, als die zweite Summe von $n-1$ Gliedern. Z. B. In der Reihe 3, 7, 11, 15, 19, ... ist die Summe von n Gliedern $=2n^2+n$; folglich ist die Summe von $n-1$ Gliedern $= 2(n-1)^2+(n-1)=2n^2-3n+1$; zieht man nun diese Summe von der Summe von n Gliedern ab, so ist $(2n^2+n)-(2n^2-3n+1)=4n-1=$ dem $n$ten Gliede dieser Reihe.

Diese Regel aus der Summenformel von n Gliedern das allgemeine Glied abzuleiten, ist überall anwendbar, sobald bei was immer für einer Reihe die Summenformel für bekannt angenommen wird. Allein gewöhnlich wird aus dem bekannten Gesetze der Reihe zuerst das $n$te Glied, und aus diesem sodann die Summenformel bestimmt. Wie aber dies zu geschehen habe, muß bei jeder Gattung von Reihen insbesondere gezeigt werden.

Von den arithmetischen Reihen.

§. 232.

Eine Reihe, in welcher gleiche Differenzen erhalten werden, wenn man jedes Glied von dem nächst folgenden abzieht, wird eine arithmetische Reihe oder Progression genannt. Z. B. 1, 4, 7, 10, 13, ... ingleichen 12, 10, 8, 6, ... sind arithmetische Reihen, weil in beiden die Differenzen beständig sind. In der ersten Reihe ist die beständige Differenz $=3$, und in der zweiten $=-2$. Man sieht hieraus, daß bei einer arithmetischen Reihe nur zwei Glieder, oder das erste Glied, und die Differenz hinreichen, um die Reihe, so weit es beliebt, fortsetzen zu können.

Es sei nun das erste Glied einer arithmetischen Reihe $=a$, und die Differenz $=d$, in der Bedeutung, daß jedes Glied vom nächst folgenden abgezogen werde, so ist das zweite Glied $=a+d$; daraus folgt das dritte Glied der Reihe $=a+2d$; ferner das vierte $=a+3d$, das fünfte $=a+4d$, u. s. w. Es kann daher jede sowohl steigende, als auch fallende arithmetische Reihe von gleichen Differenzen durch nachstehende Formel vorgestellt werden:

Stelle	1,	2,	3,	4, ...	n
Reihe	a,	$(a+d)$,	$(a+2d)$,	$(a+3d)$, ...	t
Differenz		d,	d,	d,	

wo d bei einer steigenden Reihe eine positive, und bei einer fallenden eine negative Größe bedeutet. Z. B. Man setze in dieser Formel $a=1$, und $d=3$, so hat man die erste oben angeführte Reihe 1, 4, 7, 10, 13, 16, ...; setzt man aber $a=12$, und $d=-2$, so kommt die zweite oben angeführte Reihe 12, 10, 8, 6, 4, ... zum Vorschein.

Das $n$te, oder allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe, in der angeführten Formel mit t bezeichnet, ist leicht aus dem Gesetze zu bestimmen, nach welchem die Glieder auf einander folgen. Denn da jedes Glied der Reihe, z. B. das 4te aus a und aus so vielen d (aus $3d$) besteht, als demselben Glieder vorhergehen, so ist das $n$te, oder allgemeine Glied, wenn man es mit t bezeichnet,

I. $$t=a+(n-1)d.$$

Nemlich jedes (das $n$te) Glied einer arithmetischen Reihe wird erhalten, wenn man zum ersten

Gliede a die mit der Anzahl der vorhergehenden Glieder $n-1$ multiplicirte Differenz d hinzusetzt. Z. B. In der natürlichen Zahlenreihe $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ ist das $n$te Glied $= 1 + 1(n-1) = n$; wegen $a = 1$, und $d = 1$; das $n$te Glied der ungeraden Zahlen $1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots$ ist $t = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$, wegen $a = 1$, und $d = 2$; das $n$te Glied der Reihe der geraden Zahlen $0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots$ ist $t = 0 + 2(n-1) = 2n - 2$, wegen $a = 0$, und $d = 2$; und in der oben angeführten Reihe $12, 10, 8, 6, \ldots$ ist das $n$te Glied $= 12 - 2(n-1) = 14 - 2n$, wegen $a = 12$, und $d = -2$.

Um nun auch die Summe von jeder beliebigen Anzahl Glieder in der angeführten allgemeinen Form der arithmetischen Reihen zu finden, bezeichne man die Summe von n Gliedern mit s, so ist, wenn die Reihe einmal gerade und sodann verkehrt geschrieben wird,

$$s = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (t-2d) + (t-d) + t,$$
$$s = t + (t-d) + (t-2d) + \cdots + (a+2d) + (a+d) + a,$$

folglich auch durch Addition der zwei Gleichungen

$$2s = (a+t) + (a+t) + (a+t) + \cdots + (a+t) + (a+t) + (a+t)$$
$$= n(a+t), \quad \text{und endlich}$$

$$\text{II.} \qquad s = \frac{a+t}{2} \cdot n.$$

Es wird daher bei jeder arithmetischen Reihe die Summe aller Glieder erhalten, wenn man die halbe Summe des ersten und letzten Gliedes mit der Anzahl der Glieder multiplicirt.

Setzt man aber für t in II. den Werth aus I., so ist

$$s = n\left(a + \frac{n-1}{2}\,d\right),$$

wodurch sich aus dem ersten Gliede, und aus der Differenz bei einer arithmetischen Reihe für jede gegebene Anzahl Glieder die Summe bestimmen läßt. So z. B. ist bei der Reihe der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ die Summe von n Gliedern

$$s = n\left(1 + \frac{n-1}{2}\right) = n\,\frac{n+1}{2}.$$

Eben so ist in der Reihe der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... die Summe von n Gliedern $s=n\left(1+\frac{n-1}{2}\cdot 2\right)=n^2$.

§. 233.

Mittels der im §. 232 angeführten zwei Fundamentalformeln $t=a+(n-1)d$, und $s=\frac{1}{2}n(a+t)$ lassen sich sehr viele, in der Mathematik und im gemeinen Leben vorkommende, Aufgaben auflösen. Weil aber hier nur zwei Gleichungen vorhanden sind, in welchen sich 5 verschiedene Größen befinden, als: das erste Glied a, das letzte Glied t, die Anzahl der Glieder n, die Differenz d, und die Summe s; so müssen drei davon aus den Bedingungen der Aufgabe jederzeit bekannt sein, wodurch sich dann die übrigen zwei aus jenen beiden Gleichungen (nach §. 221) finden lassen; im Gegentheile wäre die Aufgabe unbestimmt.

§. 234.

Einige hieher gehörige Aufgaben.

I. Es spielt Jemand Pharo, und setzt das erste Mal einen Gulden, das zweite Mal 3, das dritte Mal 5, das vierte Mal 7 Fl., nemlich jedes Mal um 2 Fl. mehr. Die Frage ist, wie viel wird er das 30ste Mal, und wie viel insgesammt setzen müssen, wenn er bis dahin immer verspielt?

Da hier $a=1$, $d=2$, $n=30$ gegeben ist, so verwandeln sich unsere Fundamentalformeln

$$t=a+(n-1)d, \qquad s=n\,.\,\frac{a+t}{2}$$

durch Einführung dieser Werthe in

$$t=1+29.2=59, \qquad s=30\,.\,\frac{1+t}{2}=30\,.\,\frac{60}{2}=900.$$

Daher er das 30ste Mal 59, und in Allem 900 Fl. setzen wird.

II. Es ist aus Versuchen bekannt, daß ein frei fallender Körper in der ersten Secunde sehr nahe $15\frac{1}{2}$ Wiener Fuß, und in jeder darauf folgenden Secunde um 31 Fuß mehr, als in der nächst vorhergehenden zurücklege. Nun ist ein Körper von einem Thurme, der 992 Fuß hoch ist, herunter gefallen; wie viel Zeit hat er wohl dazu gebraucht?

Für diese Aufgabe ist $a=15\frac{1}{2}=\frac{31}{2}$, $d=31$, $s=992$, folglich übergehen die Fundamentalformeln in

$$t=\frac{31}{2}+(n-1)31=31n-\frac{31}{2}, \text{ und } 992=\left(\frac{31}{2}+t\right)\frac{n}{2},$$

woraus gegenwärtig blos die Unbekannte n zu suchen ist. Zu diesem Zwecke genügt es, den durch die erste Gleichung dargebotenen Ausdruck von t in der zweiten zu substituiren; dadurch verwandelt sich diese in $992=31n\cdot\frac{n}{2}=31\cdot\frac{n^2}{2}$,

und liefert $n^2=\frac{2}{31}\cdot 992=2.32=64$, also $n=8$.

Der Körper fiel demnach durch 8 Secunden.

III. Unter 5 Kanoniere, welche die Scheibe getroffen, sollen 35 Fl. dergestalt vertheilt werden, daß der vorzüglichste aus ihnen 11 Fl., von den übrigen aber jeder minder vorzügliche um gleich viel Gulden weniger erhalte, als der nächst vorhergehende. Nun ist die Frage, wie viel bekommt der mindest vorzügliche, und um wie viel bekommt jeder folgende mehr?

Hier ist $n=5$, $s=35$, $t=11$, also hat man den Fundamentalformeln gemäß $11=a+4d$, $35=(a+11)\frac{5}{2}$.

Die zweite Gleichung gibt sogleich $a=35\cdot\frac{2}{5}-11=14-11=3$, daher erhält man nach Substitution dieses Werthes aus der ersten Gleichung $d=\frac{11-3}{4}=2$.

Der mindest vorzügliche Kanonier erhielt demnach 3 Fl., und jeder vorzüglichere um 2 Fl. mehr als der vorhergehende.

IV. Es setzt Jemand einen Groschen in die Lotterie, und da er das erste Mal nicht gewinnt, so setzt er das zweite Mal zwei Groschen, das dritte Mal drei Groschen, u. s. w. immer um einen Groschen mehr. Da aber die Lotterie einen einzelnen Treffer 14fach zurückbezahlt, so ist die Frage, wie vielmal kann er auf diese Art spielen, damit er durch einen Treffer doch noch all sein gesetztes Geld zurück erhalte?

Da er das erste Mal 1, das zweite Mal 2, das dritte Mal 3 Groschen setzt, u. s. w., so setzt er das $n$te Mal n Groschen, und wenn er da trifft, so bekommt er $14n$ Groschen zurück; er hat aber in Allem gesetzt $\frac{1}{2}n(1+n)$; folglich ist $\frac{1}{2}n(1+n)=14n$, wenn er weder gewinnen, noch verspielen soll. Hieraus ist $n=27$. Er wird also, wenn er das 27ste Mal gewinnt, all sein gesetztes Geld zurück erhalten.

V. Eine Compagnie Soldaten wurde wegen Erstürmung einer Festung dergestalt belohnt, daß derjenige Mann, welcher den Wall am ersten erstiegen, eine gewisse Summe Geld bekam, der zweite etwas weniger, der dritte wieder um eben so viel weniger, u. s. w. Als das Geld ausgetheilt wurde, konnten zwei dieser Soldaten wegen Blessuren nicht gegenwärtig sein; man gab daher deren Antheil zweien ihrer Cameraden. Diese zwei steckten sowohl ihr eigenes erhaltenes Geld, als auch jenes ihrer zwei Cameraden in einen einzigen Sack zusammen, und wußten in der Folge bei der Vertheilung nicht mehr, was jedem gebühre. Der eine hatte für sich und seinen Cameraden 92 Fl. erhalten, und erinnerte sich noch, daß er der zweite, und sein blessirter Camerad der siebente gewesen sei; der andere hatte für sich und seinen Cameraden 71 Fl. erhalten, und wußte, daß er der eilfte, sein Camerad aber der vierte gewesen sei. Nun ist die Frage, was jedem dieser vier Soldaten gebühre?

Da hier eigentlich weder das erste Glied, noch die Differenz der Reihe bekannt ist, so sei der Theil, welchen der erste Soldat bekommen soll, $=x$, und die Differenz, um welche der zweite weniger bekommen soll, als der erste, sei $=y$; so bekommt der zweite $x-y$, der dritte $x-2y$, der vierte $x-3y$, der siebente $x-6y$, und der eilfte $x-10y$. Es haben aber der zweite und siebente zusammen 92 Fl., und der vierte und eilfte zusammen 71 Fl. erhalten;

folglich ist $x-y+x-6y=92$,

und $x-3y+x-10y=71$;

daraus folgt $x=58\frac{1}{4}$, und $y=3\frac{1}{2}$. Es bekam demnach der zweite $54\frac{3}{4}$ Fl., der vierte $47\frac{3}{4}$ Fl., der siebente $37\frac{1}{4}$ Fl., und der eilfte $23\frac{1}{4}$ Fl.

VI. Es läßt Jemand einen Brunnen graben, mit dem Accorde, daß er für die erste Klafter 5 Fl., für die zweite 11 Fl., für die dritte 17 Fl., und so für jede folgende Klafter, weil die Arbeit immer beschwerlicher wird, um 6 Fl. mehr als für die nächst vorhergehende zahlen wolle. Der Brunnenmeister bringt einen Brunnen zu Stande, welcher $2\frac{1}{2}$ Klafter tief ist. Wie viel Bezahlung gebührt ihm dafür?

Da die Zahlungen der ganzen Klaftern in einer arithmetischen Reihe steigen, so müssen auch jene für die halben Klaftern in einer solchen Reihe zunehmen. Es sei nun x Fl. die Gebühr für die erste halbe Klafter, und y die Differenz, um welche für jede nachfolgende halbe Klafter mehr bezahlt werden muß, als für die vorhergehende; so kostet die zweite halbe Klafter $x+y$, die dritte $x+2y$, die vierte $x+3y$, und die fünfte $x+4y$. Da aber laut Accord für die erste Klafter 5 Fl., und für die zweite 11 Fl. bezahlt werden, so ist $x+(x+y)=5$, und $(x+2y)+(x+3y)=11$;

daraus folgt $x=\frac{7}{4}$, und $y=\frac{6}{4}$.

Es gebühren demnach dem Brunnenmeister

$$\frac{7}{4}+\frac{13}{4}+\frac{19}{4}+\frac{25}{4}+\frac{31}{4}=\frac{31+7}{4}\cdot\frac{5}{2}=23\tfrac{3}{4}\text{ Fl.}$$

Dasselbe erhält man, wenn man in $s=an+\frac{dn}{2}(n-1)$,

$a=5$, $d=6$, und $n=2\frac{1}{2}$ setzt.

Anwendung der Lehre von den arithmetischen Progressionen auf Gegenstände der Artillerie.

I. Berechnung von Pyramiden cylinderförmiger Körper.

§. 235.

Walzen- oder cylinderförmige Körper, wie z. B. Pulverfässer, Geschützpatronen, Kartätschenbüchsen, Würste (aus Reißig verfertigt zu Erdverkleidungen), u. m. dgl. werden in Haufen, Reihen, oder sogenannte Pyramiden dergestalt aufgeschichtet, daß jede einzelne Schichte oder Lage um ein Stück weniger als die unter ihr liegende enthält. Liegen demnach a Stücke in der untersten von n

Schichten, in der obersten dagegen t, und in der ganzen Pyramide s Stücke, so ist, da hier $d=-1$ wird,

$$t=a-n+1, \qquad s=\frac{a+t}{2}\cdot n, \text{ oder } s=an-\frac{n(n-1)}{2}.$$

Befinden sich p solcher Pyramiden von gleichem Inhalte an einander zu einem ganzen Stoße zusammengestellt, so ist, wenn der Gesammtinhalt mit q bezeichnet wird,

$$q=ps.$$

1. Beispiel. Die Fässer eines Pulvermagazins sind in 7 Reihen, zu 3 hoch, und die unterste Schichte zu 237 aufgeschichtet; wie viel Fässer liegen in einer Reihe? wie viel Fässer und Zentner Pulver (2 Centner in jedem Fasse angenommen) enthält das ganze Magazin?

Hier ist $n=3$, $a=237$, $p=7$, also liegen in einer Reihe

$s=3.237-\frac{3.2}{2}=711-3=708$ Fässer, folglich im ganzen Magazin $q=7.708=4956$ Fässer, daher $2.4956=9912$ Centner Pulver.

2. Beispiel. In einem Artillerie-Laboratorium steht eine Pyramide von Kartätschenbüchsen zu drei Reihen, und 10 Lagen hoch, von denen die unterste 50 enthält; wie groß ist der Inhalt der Pyramide?

Hier hat man $n=10$, $a=50$, $p=3$, daher in einer Reihe

$$s=50.10-\frac{10.9}{2}=500-45=455,$$

und im Ganzen $q=455.3=1365$ Büchsen.

3. Beispiel. Auf einem Artillerie-Übungsplatze stehen 12 Pyramiden von Reißig-Würsten zu 5 hoch, und einer Wurst an der Spitze; wie viel Würste sind hier im Ganzen?

Gegenwärtig ist $n=5$, $t=1$, also $a=n=5$, $p=12$, und $s=25-\frac{5.4}{2}=15$; daher befinden sich auf diesem Platze $q=12.15=180$ Würste.

II. Berechnung der Kugelhaufen.

§. 236.

Geschützkugeln von derselben Größe (von einerlei Kaliber) werden in den Laboratorien, Depots und Zeughäusern der Artillerie in Haufen (wohl auch Pyramiden genannt), aufgeschichtet. Die gewöhnlichen Kugelhaufen, von denen wir gegenwärtig nur die vollkommen ausgeschichteten betrachten wollen, bilden regelmäßige, entweder drei- oder vierseitige Pyramiden (Spitzsäulen), oder lange, theils ganz gerade, theils rechtwinklig gebrochene dreiseitige Prismen (meistens lange Kugelhaufen genannt). Die langen Kugelhaufen stehen theils ganz frei, theils sind sie entweder nur mit einem, oder auch mit beiden Enden an solche lange Haufen, oder an vierseitige (nie aber an dreiseitige) Pyramiden angelehnt. In den dreiseitigen Pyramiden ruht jede Kugel auf 3, in allen übrigen Kugelhaufen dagegen auf 4 Kugeln. Bei den dreiseitigen Pyramiden bilden die am Boden, in der Grundfläche, liegenden Kugeln ein regelmäßiges Dreieck, bei den vierseitigen dagegen ein regelmäßiges Viereck (Quadrat); alle Seitenflächen der Pyramiden sind regelmäßige Dreiecke, daher zu oberst blos eine Kugel liegt, und die Spitze bildet. Bei den geraden langen Haufen ist die Grundfläche ein Rechteck, die kleineren Seitenflächen regelmäßige Dreiecke, die größeren aber Trapeze. Die regelmäßigen dreieckigen Seitenflächen, welche bei den Kugelhaufen vorkommen, werden kurz Seitendreiecke genannt. Die oberste Zeile der langen Kugelhaufen heißt der Kamm oder Rücken, die mit ihm gleichlaufenden (parallelen) Zeilen der Grundfläche aber werden Grundzeilen genannt.

Bei allen Haufen heißen die kurzen schief liegenden Kanten die Eckseiten, und enthalten immer so viel Kugeln, als der Haufen Schichten besitzt.

§. 237.

Vor Allem wollen wir die Anzahl der Kugeln, oder den Inhalt eines solchen Seitendreieckes, welcher durch Δ bezeichnet werden soll, bestimmen, wenn n die Anzahl der in einer seiner Seiten liegenden Kugeln, oder die Zahl der Zeilen, aus denen es sich zusammengesetzt betrachten läßt, bezeichnet.

Da in der Spitze oder der ersten Zeile des Dreieckes eine Kugel, in jeder folgenden eine mehr, und in der letzten Zeile n Kugeln liegen, so bilden die Anzahlen der in den nach einander folgenden Zeilen befindlichen Kugeln die natürliche Reihe der Zahlen $1, 2, 3, \ldots n$, welche eine arithmetische ist, und $n \cdot \frac{n+1}{2}$ zur Summe hat.

Somit enthält ein Seitendreieck

$$(1) \qquad \Delta = n \cdot \frac{n+1}{2} \text{ Kugeln,}$$

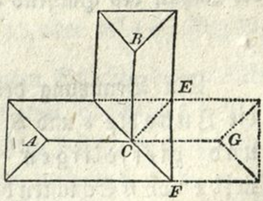
d. h. man findet den Inhalt eines Seitendreieckes, indem man das (arithmetische) Mittel der ersten und letzten Zeile mit der Anzahl der Zeilen multiplicirt.

Z. B. Ein Seitendreieck von 17 Zeilen oder 17 Kugeln Seite enthält $17 \cdot \frac{18}{2} = 17 \cdot 9 = 153$ Kugeln.

§. 238.

Bevor wir noch die in den verschiedenen Kugelhaufen enthaltenen Anzahlen von Kugeln, oder die Inhalte dieser Haufen in allgemeinen Ausdrücken bestimmen, wollen wir uns zur Abkürzung dieser Untersuchung die Bemerkung dienen lassen, daß jeder winkelrecht gebrochene Haufen sehr leicht in einen geraden von demselben Inhalte ausgestreckt werden könne. Denn bricht sich ein Kugelhaufen an einem Ecke, wie in Fig. 1 bei C, so kann man ihn immer so ansehen, als wenn er an dieser Stelle aus zwei geraden Haufen $ACEF$ und $BCED$, von denen der letztere an den ersteren sich anlehnt, bestände, und man sieht sogleich ein, daß man in Gedanken den zweiten Haufen, mit dem ersten in einerlei Richtung, in die Lage $GCFE$ bringen kann, wornach der gerade Haufen ACG denselben Inhalt wie der gebrochene ACB enthält. Verfährt man auf die nemliche Weise mit allen Ecken eines gebrochenen Haufens, so läßt sich jeder durch einen geraden von demselben Inhalte ersetzen, weßwegen zu unserer Untersuchung nur noch gerade, und zwar entweder frei stehende, oder mit einem, oder mit beiden Enden angelehnte, Kugelhaufen übrig bleiben.

Fig. 1.



§. 239.

Wir beginnen diese Inhaltsbestimmungen der Kugelhaufen an dem mit einem Ende angelehnten Kugelhaufen als dem einfachsten. Ein solcher Kugelhaufen läßt sich, wie man an jenem *BCED* in *Fig.* 1 leicht sieht, aus eben so viel, unter sich und mit beiden dreieckigen Endflächen, nicht nur gleich großen, sondern auch gleich liegenden Seitendreiecken zusammengesetzt ansehen, als wie viel Kugeln in seinem Rücken oder in jeder seiner Grundzeilen sich befinden.

Liegen demnach im Rücken oder in einer Grundzeile r, und in jedem Dreiecke Δ Kugeln, so faßt der ganze Haufen r Mal Δ, oder $r\Delta$ Kugeln, folglich ist, wenn s die Anzahl Kugeln, oder den Inhalt dieses Haufens vorstellt,

(2) $s = r\Delta$,

oder wenn man, nach Gleichung (1) für Δ seinen Ausdruck $n \cdot \frac{n+1}{2}$ herstellt,

(3) $$s = \frac{n(n+1)}{2} \cdot r.$$

Z. B. In dem Rücken eines einseitig angelehnten Haufens von 18 Schichten liegen 40 Kugeln, folglich ist $n=18$, $r=40$, und der Inhalt des Haufens $s = \frac{18 \,.\, 19}{2} \cdot 40 = 9 \,.\, 19 \,.\, 40 = 6840$ Kugeln.

§. 240.

Mit Benützung des eben Gefundenen können wir nun leicht die Inhalte s und S einer drei- und vierseitigen Kugelpyramide von n Schichten berechnen; denn stellt *Fig.* 2 eine drei-, und *Fig.* 3 eine vierseitige Pyramide, jede von n Schichten vor, und stellt man in Gedanken die dreiseitige Pyramide *ABCD* auf eine horizontal gehaltene Kante *AB* so auf, daß die mit ihr nicht zusammenstoßende Kante *CD* gleichfalls wagrecht wird, und rückt man die in dieser Lage

Fig. 2.

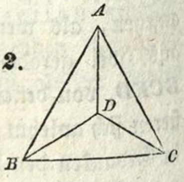
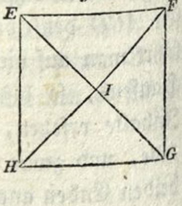
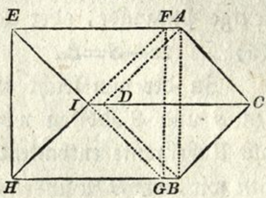


Fig. 3.



erhaltene Pyramide an die vierseitige dergestalt an, daß, wie *Fig.* 4 zeigt, die Kante *AB* der dreiseitigen Pyramide an die Kante *FG* der vierseitigen sich anlegt, folglich die obere Kante *CD* der dreiseitigen an die Spitze *J* der vierseitigen sich anschließt; so bildet man aus dieser drei- und vierseitigen Kugelpyramide einen einseitig angelehnten Kugelhaufen von n Schichten und $n+1$ Kugeln im Rücken, welcher demnach im Ganzen $(n+1)\Delta$ Kugeln in sich faßt; daher ist

Fig. 4.



(4) $\quad s+S=(n+1)\Delta.$

Um nun zu dieser, die beiden Unbekannten s und S enthaltenden Gleichung noch eine zweite zwischen denselben Unbekannten zu finden, erwägen wir, daß in der $m$ten Schichte der dreiseitigen Pyramide, wenn die Schichten von oben nach unten gezählt werden, ein regelmäßiges Dreieck von m Kugeln in der Seite, also (nach §. 237) von $\frac{m(m+1)}{2}$ Kugeln im Ganzen, dagegen in der $m$ten Schichte der vierseitigen Pyramide ein Quadrat von m Kugeln in einer Seite, folglich von m Zeilen zu m Kugeln, und im Ganzen von m Mal m, d. i. von m^2 Kugeln liegt. Sofort befinden sich in den beiden $m$ten Schichten zweier dreiseitigen Pyramiden 2 Mal $\frac{m(m+1)}{2}$, nemlich $m(m+1)$, oder m^2+m Kugeln, folglich um m Kugeln mehr als in der $m$ten Schichte der vierseitigen Pyramide. Da nun sowohl jede der zwei dreiseitigen Pyramiden, als auch die vierseitige aus n Schichten besteht, so enthalten, wie sich leicht ergibt, wenn man m nach und nach $1, 2, 3, 4, \ldots n$ sein läßt, die beiden $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, 3^{\text{ten}}, 4^{\text{ten}}, \ldots n^{\text{ten}}$ Schichten der zwei dreiseitigen Pyramiden um $1, 2, 3, 4, \ldots n$ Kugeln mehr, als die ebensovielte Schichte der vierseitigen Pyramide, mithin begreift das Paar dreiseitiger Pyramiden, um $1+2+3+4+\ldots+n$, oder (nach §. 237) um $\frac{n(n+1)}{2}$, folglich, weil dieser Ausdruck auch den Inhalt eines an den Pyramiden vorkommenden Seitendreieckes angibt, um Δ Kugeln mehr als die vierseitige Pyramide, oder es ist

(5) $2s - S = \Delta$.

Zu der nun leicht ausführbaren Bestimmung der beiden Zahlen s und S addiren wir zuvörderst, um s zu suchen, die zwei, sie als Unbekannte enthaltenden Gleichungen (4) und (5), dann ziehen wir, um S zu finden, von der verdoppelten ersten Gleichung die zweite ab, und theilen jedes Resultat gleichzeitig durch 3. Auf diese Weise ergibt sich der Inhalt der dreiseitigen Pyramide

(6) $s = \frac{n+2}{3}\Delta$, und jener der vierseitigen

(7) $S = \frac{2n+1}{3}\Delta$.

Schreiben wir endlich noch für Δ seinen bekannten Ausdruck $\frac{n(n+1)}{2}$, so ergibt sich

(8) $s = \frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}$, und

(9) $S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2.3}$.

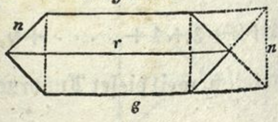
So enthält z. B. eine dreiseitige Pyramide von 15 Schichten $s = \frac{15.16.17}{2.3} = 8.5.17 = 680$ Kugeln, eine vierseitige dagegen von gleichfalls 15 Schichten $S = \frac{15.16.31}{2.3} = 8.5.31 = 1240$ Kugeln.

§. 241.

Gegenwärtig steht der Bestimmung der Anzahl der Kugeln, welche in einem beiderseits angelehnten, oder in einem frei stehenden Kugelhaufen sich befinden, keine Schwierigkeit mehr entgegen.

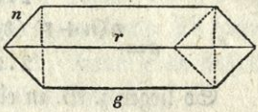
I. Ein beiderseits angelehnter Kugelhaufen von n Schichten und von r Kugeln im Rücken läßt sich entweder, wie die *Fig.* 5 verdeutlichet, dadurch, daß man von einem einseitig angelehnten Kugelhaufen von n Schichten und von $r+1$ Kugeln im Rücken, also von $(r+1)\Delta$

Fig. 5.



Kugeln im Ganzen, an seinem liegenden Ende, eine vierseitige Pyramide von n Schichten, somit von $\frac{2n+1}{3}\Delta$ Kugeln hinwegnimmt, erzeugt, oder wie *Fig.* 6 nachweist, aus einem einseitig angelehnten Kugelhaufen von n Schichten, und von $r-n$ Kugeln im Rücken, also von $(r-n)\Delta$ Kugeln im Ganzen, und aus einer an seinem liegenden Ende angefügten dreiseitigen Pyramide von n Schichten mit zwei wagrecht liegenden Kanten, mithin von $\frac{n+2}{3}\Delta$ Kugeln zusammengesetzt denken. Somit ist die Anzahl der in diesem Haufen vorfindigen Kugeln nach der ersten Vorstellungsweise

Fig. 6.



$$s=(r+1)\Delta-\frac{2n+1}{3}\Delta,$$ und nach der andern

$$s=(r-n)\Delta+\frac{n+2}{3}\Delta,$$ daher nach beiden

(10) $$s=\frac{3r-2n+2}{3}\Delta.$$

Zur fernern Umstaltung dieses Ausdruckes bedenken wir, daß in einem solchen Haufen jede lange Zeile einer jeden Schichte um eine Kugel kürzer als die der auf ihr ruhenden Schichte ist, folglich ist seine Grundzeile um so viel Kugeln kürzer wie der Rücken, als wie viel Schichten über der Grundschichte oder unter dem Rücken liegen, nemlich um $n-1$; und sonach ist, wenn g die Zahl der Kugeln einer Grundzeile vorstellt,

(11) $g=r-(n-1)$, folglich

(12) $r=g+n-1,\quad n=r-g+1.$

Schreiben wir daher in dem für s gefundenen Ausdrucke (10) einmal für r, und ein zweites Mal für n den durch die Gleichungen (12) dargebotenen Ausdruck, so ergeben sich die Gleichungen

(13) $$s=\frac{3g+n-1}{3}\Delta,$$

(14) $$s=\frac{r+2g}{3}\Delta.$$

Ersetzen wir endlich noch in (10) und (13) die Größe Δ durch $\frac{n(n+1)}{2}$, so finden wir die Formen

$$(15)\qquad s=\frac{n(n+1)(3r-2n+2)}{2.3},$$

$$s=\frac{n(n+1)(3g+n-1)}{2.3}.$$

So liegen z. B. in einem langen beiderseitig angelehnten Haufen von 36 Kugeln im Rücken und 17 Schichten, da hier $r=36$, $n=17$ ist, $s=\frac{17.18(108-34+2)}{2.3}=17.3.76=3876$ Kugeln.

II. Ein langer frei stehender Kugelhaufen von n Schichten und r Kugeln im Rücken kann entweder, wie *Fig.* 7 zeigt, aus einem einseitig angelehnten Kugelhaufen von n Schichten und $r-1$ Kugeln im Rücken, daher von $(r-1)\Delta$ Kugeln im Ganzen, und aus einer an sein hängendes Ende angeschobenen vierseitigen Pyramide von n Schichten, folglich von $\frac{2n+1}{3}\Delta$ Kugeln Inhalt zusammengestellt, oder dadurch erzeugt gedacht werden, daß, wie in *Fig.* 8 ersichtlich ist, von einem einseitig angelehnten Kugelhaufen, welcher n Schichten, $r+n$ Kugeln im Rücken, folglich $(r+n)\Delta$ Kugeln im Ganzen enthält, an seinem hängenden Ende eine dreiseitige Pyramide von n Schichten, also von $\frac{n+2}{3}\Delta$ Kugeln weggenommen wird. Nach der ersten Vorstellungsweise ergibt sich der Inhalt dieses Haufens

Fig. 7.

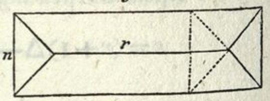
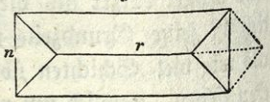


Fig. 8.



$$s=(r-1)\Delta+\frac{2n+1}{3}\Delta,\text{ und nach der zweiten}$$

$$s=(r+n)\Delta-\frac{n+2}{3}\Delta,\text{ somit nach beiden}$$

$$(16)\qquad s=\frac{3r+2n-2}{3}\Delta.$$

Die weiteren Umstaltungen dieses Ausdruckes ergeben sich aus der Betrachtung, daß in einem solchen frei stehenden Kugelhaufen jede längere Zeile einer jeden Schichte um eine Kugel mehr als die der auf ihr liegenden Schichte enthält; daher müssen in der Grundzeile um so viel Kugeln mehr wie im Rücken liegen, als wie viel Schichten über der Grundschichte oder unter dem Rücken sich befinden, folglich um $n-1$ Kugeln. Mithin ist, wenn g die Anzahl der in einer Grundzeile befindlichen Kugeln andeutet,

(17) $g=r+n-1$, und hieraus

(18) $r=g-n+1, \quad n=g-r+1$.

Setzen wir demnach für r oder n diese Ausdrücke in der Gleichung (16), so übergeht diese in die Formen

(19) $$s=\frac{3g-n+1}{3}\Delta,$$

(20) $$s=\frac{r+2g}{3}\Delta.$$

Schreiben wir endlich noch in den Gleichungen (16) und (19) für Δ seinen Ausdruck $\frac{n(n+1)}{2}$, so erscheinen die Gleichungen

(21) $$s=\frac{n(n+1)(3r+2n-2)}{2.\ 3},$$

$$s=\frac{n(n+1)(3g-n+1)}{2.3}.$$

So z. B. befinden sich in einem frei stehenden Kugelhaufen von 17 Schichten und 36 Kugeln im Rücken, wobei $n=17$, $r=36$ ist, $s=\frac{17.18(108+34-2)}{2.3}=17.3.140=7140$ Kugeln.

§. 242.

Äußerst bemerkenswerth ist der Umstand, daß die Berechnung der Inhalte aller Arten von Kugelhaufen auf eine sehr einfache Regel sich zurückführen läßt, welche durch folgende Betrachtung gefunden werden kann.

Vergleichen wir die Ausdrücke (2), (6), (7), welche wir für die Inhalte des einseitig angelehnten Haufens, der dreiseitigen und vierseitigen Pyramide fanden, wenn jeder dieser Kugelhaufen aus n Schichten besteht, also Δ Kugeln in einem Seitendreiecke besitzt, unter einander, indem wir sie dabei in den Formen

$$(r+r+r)\frac{\Delta}{3},\ (n+1+1)\frac{\Delta}{3},\ (1+n+n)\frac{\Delta}{3}$$

schreiben; erwägen wir ferner, daß der einseitig angelehnte Haufen, sowohl in dem Rücken als in jeder mit ihm gleichlaufenden Grundzeile r, folglich in diesen drei parallelen Zeilen $r+r+r$ Kugeln, dann die dreiseitige Pyramide, wenn zwei ihrer nicht zusammenstoßenden Kanten horizontal gedacht werden, im Rücken n und in jeder mit ihm gleichlaufenden Grundzeile nur 1 Kugel, also in diesen drei parallelen Zeilen $n+1+1$ Kugeln, endlich die vierseitige Pyramide, in ihrer Spitze oder in ihrem Rücken blos 1, und jede von den zwei parallelen Grundzeilen aber n, folglich in allen drei parallelen Zeilen $1+n+n$ Kugeln enthält: so leuchtet ein, daß in den letzteren Ausdrücken der Inhalte dieser drei Haufen, der erste Factor die Gesammtzahl der in dem Rücken des betreffenden Haufens und in den mit ihm gleichlaufenden beiden Grundzeilen enthaltenen Kugeln angibt, folglich diese Ausdrücke, sobald man die Summe der erwähnten drei parallelen Zeilen des Kugelhaufens mit a bezeichnet, auf den einzigen Ausdruck $a\frac{\Delta}{3}$ zurückgeführt werden können. Nun läßt sich aber, wie wir nachgewiesen haben, jeder andere, wie immer gestaltete, gerade oder gebrochene, Kugelhaufen aus den erwähnten drei Haufen, theils durch schickliches Aneinandersetzen, theils durch Hinwegnehmen construiren. Bezeichnen daher $a, a', a'', a''', \ldots$ die Summen der drei parallelen Zeilen an den hiezu verwendeten Haufen, so sind

$$a\frac{\Delta}{3},\ a'\frac{\Delta}{3},\ a''\frac{\Delta}{3},\ a'''\frac{\Delta}{3},\ \ldots\ldots$$ die Inhalte dieser Haufen, folglich ist $a\frac{\Delta}{3} \pm a'\frac{\Delta}{3} \pm a''\frac{\Delta}{3} \pm a'''\frac{\Delta}{3} \pm \ldots\ldots$ oder

$(a \pm a' \pm a'' \pm a''' \pm \ldots.)\frac{\Delta}{3}$ der Inhalt des ganzen Kugelhaufens. Allein auch in diesem Ausdrucke stellt der erste Factor $a \pm a' \pm a'' \pm a''' \pm \ldots\ldots$ offenbar nichts anders vor, als die Gesammtzahl der in seinen drei parallelen Zeilen enthaltenen Kugeln, folglich ist, wenn A diese Summe von Kugeln andeutet, der Inhalt jedes Kugelhaufens durch

(22) $\quad s = \frac{A}{3}\Delta$ ausgedrückt. Erwägen wir endlich noch, daß $\frac{A}{3}$ auch das (arithmetische) Mittel der drei parallelen Zeilen angibt, so kann der besagte Inhalt, wofern M dieses Mittel bezeichnet, auch durch

(23) $\quad s = M\Delta$ angegeben werden.

Somit wird der Inhalt jedes Kugelhaufens berechnet, wenn man zu dem Rücken beide mit ihm gleichlaufenden Grundzeilen addirt, diese Summe mit dem Seitendreiecke multiplicirt, und das Product durch 3 theilt; oder kurz, wenn man das Mittel seiner drei parallelen Zeilen mit dem Seitendreiecke multiplicirt.

So liegen z. B. bei einem vierseitigen, in sich zurückkehrenden, Kugelhaufen von n Schichten und r Kugeln im Rücken, in der innern Grundlinie $r-4(n-1)$, und in der äußern $r+4(n-1)$, also ist die Summe der drei parallelen Zeilen

$r+r-4(n-1)+r+4(n-1)=3r$, und ihr Mittel r; ferner ist der Inhalt des Seitendreieckes $\frac{n(n+1)}{2}$, mithin der Inhalt des Kugelhaufens selbst $s=\frac{n(n+1)}{2}r$, wie bei einem einseitig angelehnten Haufen, was man leicht richtig finden wird.

§. 243.

So wie wir die Inhalte der Kugelhaufen aus ihren Constructionen und Abmessungen (Zahl der Schichten oder Eckseite, Rücken und Grundzeile) zu berechnen gelernt haben, eben so läßt sich zeigen, wie die Abmessungen eines Kugelhaufens von gewählter Form, welcher eine gegebene Anzahl von Kugeln enthalten soll, bestimmt werden können.

Bezeichnen wir, wie früher mit s die bekannte Anzahl der Kugeln, die der Haufen fassen soll, mit n die Anzahl seiner Schichten oder die Eckseite, und ertheilen wir ihm

I. die Gestalt einer dreiseitigen Pyramide, so haben wir eigentlich nur aus der Gleichung

$$(8) \qquad s = \frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}$$

die Eckseite n zu suchen. Da diese Gleichung in Bezug auf n vom dritten Grade ist, und deßwegen von uns noch nicht aufgelöst werden kann, so benützen wir ihre besondere Form, um den zu suchenden Werth von n zwischen zwei Grenzen einzuschließen, auf folgende Weise. Ertheilen wir der Gleichung die Form

$$n(n+1)(n+2) = 6s,$$

so lehrt ein einziger Blick, daß, weil im ersten Theile sowohl der zweite als dritte Factor größer als der erste n ist, das ganze Product, welches den Werth $6s$ besitzt, größer als n^3, aber andererseits auch, weil das Product $n(n+2)$, oder n^2+2n der beiden äußern Factoren kleiner als die zweite Potenz $(n+1)^2 = n^2+2n+1$ des mittlern Factors ist, kleiner als $(n+1)^3$ ausfallen, folglich $n^3 < 6s$, und $(n+1)^3 > 6s$ sein muß. Demnach ist

$$(24) \qquad n < \sqrt[3]{6s}, \quad n+1 > \sqrt[3]{6s}.$$

Liegt sofort $\sqrt[3]{6s}$ zwischen den beiden ganzen Zahlen n und $n+1$, so kann die gesuchte Eckseite n von $\sqrt[3]{6s}$ um keine ganze Einheit verschieden sein.

Daher folgende Regel:

Will man die Eckseite einer dreiseitigen Pyramide, welche eine bestimmte Anzahl Kugeln fassen soll, berechnen, so multiplicire man diese Anzahl mit 6, und ziehe daraus die dritte Wurzel nur in ganzen Zahlen. Diese Wurzel kann von der verlangten Eckseite nicht um mehr als eine Einheit differiren. Deßwegen substituire man dieselbe für n in der Formel $\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}$; kommt die gegebene Anzahl der Kugeln zum Vorschein, so läßt sie sich genau in eine dreieckige Pyramide schichten, deren Seite die gefundene dritte Wurzel ist; fällt aber die nach jener Formel berechnete Zahl kleiner als die gegebene Anzahl der Kugeln aus, so würde man noch Kugeln übrig behalten, wenn man der Pyramide die durch jene Wurzel angezeigte Anzahl von Schichten geben wollte; ist endlich die berechnete Zahl größer als die der gegebenen Kugeln, so muß die Eckseite der Pyramide um eine Kugel kürzer, als die dritte Wurzel anzeigt, genommen werden, um eine vollständige Pyramide nebst einem Überschuße an Kugeln zu erhalten.

Sollen z. B. 680 Kugeln in eine dreiseitige Pyramide geschichtet werden, so ist $\sqrt[3]{6.680} = \sqrt[3]{4080} = 15$, und $\frac{15.16.17}{2.3} = 5.8.17 = 680$; folglich lassen sich 680 Kugeln in eine dreiseitige Pyramide von 15 Schichten ganz genau bringen. Wären aber 1332 Kugeln in eine solche Pyramide zu schichten, so hätte man $\sqrt[3]{6.1332} = \sqrt[3]{7992} = 19$, und $\frac{19.20.21}{2.3} = 19.10.7 = 1330$, folglich würden 2 Kugeln übrig bleiben. Hätte man endlich 500 Kugeln in eine derlei Pyramide zu schichten, so wäre $\sqrt[3]{6.500} = \sqrt[3]{3000} = 14$, aber $\frac{14.15.16}{2.3} = 7.5.16 = 560$, folglich könnten nur 13 Kugeln zur Eckseite genommen, und dadurch $\frac{13.14.15}{2.3} = 13.7.5 = 455$ Kugeln in eine Pyramide untergebracht werden, wornach noch $500 - 455 = 45$ Kugeln übrig blieben.

II. Soll die gegebene Anzahl von Kugeln in eine vierseitige Pyramide geschichtet werden, so ist aus der Gleichung

$$(9) \qquad s = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2.3}$$

gleichfalls die Eckseite n zu bestimmen. Schreibt man selbe, um der Auflösung einer Gleichung des dritten Grades auszuweichen, in der Form

$$n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1) = 3s,$$

so zeigt eine der früheren ähnliche Betrachtung, daß

$$n^3 < 3s, \quad \left(n+\frac{1}{2}\right)^3 > 3s, \qquad \text{also}$$

$$(25) \qquad n < \sqrt[3]{3s}, \quad n+\frac{1}{2} > \sqrt[3]{3s} \text{ ist,}$$

daher $\sqrt[3]{3s}$ ebenfalls von der Eckseite n um keine ganze Einheit verschieden sein kann.

Man wird daher die gegebene Anzahl der Kugeln mit 3 multipliciren, daraus die dritte Wurzel blos in ganzen Zahlen ziehen; dann wird entweder diese Wurzel selbst, oder die um eine Einheit von ihr verschiedene Zahl die Eckseite der vierseitigen Pyramide sein; welches, wie vorher (I) bei der dreiseitigen Pyramide, jedoch mittels der Formel $\frac{n(n+1)(2n+1)}{2.3}$ zu untersuchen kommt.

III. Will man eine gegebene Anzahl von Kugeln in einen einseitig angelehnten Haufen bringen, so hat man nicht nur die Eckseite n, sondern auch den Rücken r dieses Haufens aus der Gleichung

(3) $$s = \frac{n(n+1)}{2} \cdot r$$ zu berechnen, welche Aufgabe im Allgemeinen unbestimmt ist, allein dadurch, daß als Werthe von n und r nur ganze positive Zahlen zugelassen werden können, bedeutend eingeschränkt, ja sogar bisweilen unmöglich gemacht wird. Zu ihrer Lösung ertheilen wir dieser Gleichung die Form $n(n+1)r = 2s$, aus der wir leicht erkennen, daß n, $n+1$, und r Factoren von $2s$ sein müssen, und daß die allgemeine Auflösung $n=1$, wodurch $r=s$ wird, für uns nicht brauchbar ist, weil hiebei sämmtliche Kugeln nur in eine Zeile zu bringen wären, was wohl theoretisch, aber nicht practisch zulässig ist. Man wird daher die Anzahl der in einen einseitig angelehnten Haufen zu schichtenden Kugeln verdoppeln, und sämmtliche Theiler dieser Zahl mit Ausschluß der Einheit (nach §. 69, e) aufsuchen. Finden sich unter diesen Theilern zwei nur um eine Einheit verschiedene, so kann der kleinere von ihnen für die Eckseite n angenommen werden. Dividirt man endlich noch die verdoppelte Anzahl durch das Product dieser zwei Theiler, so gibt der Quotient den Rücken oder die ihm gleiche Grundzeile des Haufens.

Z. B. Sollen 364 Kugeln in einen einseitig angelehnten Haufen geschichtet werden, so ist die verdoppelte Anzahl 2.364=728, wovon die Theiler $\dot{2}, \dot{4}, \dot{7}, \dot{8}, 13, 14, 26, 28, 52, 56, \ldots\ldots$ sind, unter denen nur 7, 8, und 13, 14 für unsern Zweck brauchbar sind. Nehmen wir demnach zuerst $n = 7$, so ist

$r = \frac{728}{7.8} = \frac{104}{8} = 13$; wählen wir aber $n = 13$, so wird

$$r = \frac{728}{13.14} = \frac{52}{13} = 4.$$

Es kann somit entweder die Eckseite 7 und der Rücken 13, oder jene 13 und dieser 4 Kugeln erhalten.

In sehr vielen Fällen wird aber diese Auflösungsweise unbrauchbar, weil $2s$ entweder gar keine Theiler von der angegebenen Eigenschaft, oder blos für die wirkliche Anwendung ungeeignete zu liefern vermag. Diese erheischt nemlich, daß die Anzahl der Schichten eines Kugelhaufens nach der Größe und dem Gewichte der zu schichtenden Kugeln so bemessen werde, damit er weder von selbst zusammenrolle, noch ohne Schwierigkeit von Arbeitern aufgeschichtet, und umgekehrt wieder an seinem Kamme abgehoben werden könne. Aus diesen Gründen gibt man im Allgemeinen den Kugelhaufen eine um so geringere Anzahl von Schichten, je größer und schwerer die Kugeln sind; doch ist man hierin bei den kleinsten Kugeln auch durch den Umstand beschränkt, daß die aus ihnen aufgestellten Haufen bei beträchtlicher Höhe sehr leicht zusammenrollen. Aus diesem Grunde pflegt man in der k. k. Artillerie bei den Vollkugeln von kleineren Calibern nicht über 20, und bei den größern nicht über 15 Schichten hinaus zu gehen; die 10pfündigen Granaten höchstens zu 12, die 30pfündigen Bomben höchstens zu 10, und die 60pfündigen Bomben höchstens zu 6 hoch zu schichten.

Hat man sich daher durch die oben erläuterte Untersuchung überzeugt, daß die gegebene Anzahl von Kugeln nicht völlig genau in einen brauchbaren Haufen geschichtet werden könne, so wählt man für die Eckseite n des zu bildenden Haufens eine den angeführten Umständen anpassende Zahl, und berechnet dann den Rücken r, entweder unmittelbar aus der Gleichung

(26) $$r=\frac{2s}{n(n+1)},$$

oder, nachdem man vorerst das Seitendreieck nach der Gleichung

(1) $$\Delta=\frac{n(n+1)}{2}$$

bestimmt hat, vermög der Gleichung (2) aus

(27) $$r=\frac{s}{\Delta}.$$

Da hiebei für r eine ganze Zahl nebst einem angehängten echten Bruche erhalten wird, so kann man diesen entweder ganz weglassen, oder durch eine volle Einheit ersetzen, je nachdem man entweder einige Kugeln übrig behalten, oder den Haufen nicht ganz auszuschichten gesonnen ist.

So z. B. kommen, wenn 800 zwölfpfündige Vollkugeln zu schichten wären, und man 9 Schichten wählt, in ein Dreieck $\frac{9.10}{2}$ $=45$ Kugeln, daher erhält der Kamm $\frac{800}{45}=17\frac{7}{9}$, nemlich entweder 17 oder 18 Kugeln, je nachdem man entweder $800-17.45=35$ Kugeln übrig behalten, oder $18.45-800=10$ Kugeln fehlen lassen will.

IV. Beabsichtigt man eine gegebene Anzahl von Kugeln entweder in einen beiderseitig angelehnten oder frei stehenden Haufen zu schichten, so hat man die Eckseite n und entweder den Rücken r oder die Grundzeile g mit Hilfe der Gleichung

(28) $$s=\frac{n(n+1)}{2.3}A$$

zu bestimmen, wenn man die Gleichungen (15) und (21) auf diese gemeinsame Form stellt, folglich A die Summe der drei parallelen Zeilen des Haufens andeuten läßt. Weil nun diese Gleichung auch

(29) $$n(n+1)A=6s$$

gibt, und die hier vorkommenden Buchstaben nur ganze positive Zahlen vorstellen, so müssen n, $n+1$, und A Factoren oder Theiler von $6s$ sein; wobei jedoch die Auflösung $n=1$, welche den Gleichungen (15) und (21) zu Folge $g=r=s$ liefert, aus denselben Gründen, wie oben unstatthaft bleibt.

Man wird daher, falls man eine gegebene Anzahl von Kugeln in einen beiderseits angelehnten oder frei stehenden Haufen schichten will, alle, die Einheit übertreffenden, Theiler der sechsfachen Anzahl suchen. Finden sich nun unter ihnen zwei blos um eine Einheit differente, so wählt man den kleineren für die Eckseite, und theilt durch das Product beider jene sechsfache Anzahl; der Quotient ist dann die Summe der parallelen Zeilen des Haufens.

Nun ist den Gleichungen (15) und (21) gemäß

(30) $$A = 3r \mp 2(n-1) = 3g \pm (n-1),$$

wobei die obern Zeichen auf den beiderseits angelehnten, die untern dagegen auf den frei stehenden Kugelhaufen sich beziehen; daher findet man den Rücken des Haufens

(31) $$r = \frac{A \pm 2(n-1)}{3},$$ und die Grundzeile

(32) $$g = \frac{A \mp (n-1)}{3},$$

oder wenn man es vorzieht, nur die eine dieser Zahlen auf diesem Wege zu suchen, die andere mit Rückblick auf die Gleichungen (11), (12), (17), (18) nach einer der Gleichungen

(33) $$g = r \mp (n-1), \quad r = g \pm (n-1).$$

Erhält man bei den letzten Rechnungen für den Rücken r und die Grundzeile g eine ganze positive Zahl, so läßt sich die Aufgabe vollständig auflösen.

Um den Sinn der hier erklärten Bestimmung des Rückens und der beiden gleichen Grundzeilen aus der bereits bekannten Summe dieser drei Linien zu verstehen, und dadurch diese Rechnungsweise leichter im Gedächtnisse zu behalten, läßt sich folgende Betrachtung anstellen. Da in dem $\begin{smallmatrix}\text{beiderseits angelehnten}\\\text{frei stehenden}\end{smallmatrix}$ Kugelhaufen der Rücken um so viel Kugeln $\begin{smallmatrix}\text{mehr}\\\text{weniger}\end{smallmatrix}$ wie die Grundzeile enthält, als wie viel Schichten $\begin{smallmatrix}\text{unter jenem}\\\text{über dieser}\end{smallmatrix}$ liegen, oder als wie viel die um eine Kugel verkürzte Eckseite beträgt, so würde man, wenn man diese drei Zeilen (den Rücken und die beiden Grundzeilen) unter sich ausgleichen, d. i. gleich lang denken wollte, entweder, falls zunächst der Rücken des Haufens gefunden werden soll, jeder der zwei Grundzeilen die Kugeln, um welche sie $\substack{\text{kleiner}\\ \text{größer}}$ als der Rücken ist, $\substack{\text{hinzugeben}\\ \text{wegnehmen}}$, daher auch der Summe aller drei Zeilen das Doppelte der $\substack{\text{hinzuzugebenden}\\ \text{wegzunehmenden}}$ Anzahl von Kugeln $\substack{\text{zulegen}\\ \text{abbrechen}}$, wornach der dritte Theil der so $\substack{\text{vergrößerten}\\ \text{verkleinerten}}$ Summe der drei parallelen Zeilen der gesuchte Rücken sein muß, aus dem sonach die Grundzeile durch $\substack{\text{Wegnehmen}\\ \text{Hinzuthun}}$ der $\substack{\text{überschüssigen}\\ \text{fehlenden}}$ Kugeln leicht zu berechnen ist; oder man würde, wofern man die Grundzeilen zuvörderst berechnen wollte, mit ihnen den Rücken dadurch ausgleichen, daß man ihm, folglich auch der Summe der drei parallelen Zeilen, die Kugeln, um welche er $\substack{\text{größer}\\ \text{kleiner}}$ als jede Grundzeile ist, $\substack{\text{entzieht}\\ \text{zufügt}}$, wornach wieder der dritte Theil der so $\substack{\text{verkleinerten}\\ \text{vergrößerten}}$ Summe jener drei Zeilen die Grundlinie angibt, aus der durch $\substack{\text{Zugabe}\\ \text{Wegnahme}}$ der $\substack{\text{mangelnden}\\ \text{überschüssigen}}$ Kugeln der Rücken des Haufens sogleich berechnet ist.

Sollen z. B. 4280 Kugeln in einen beiderseits angelehnten Haufen geschichtet werden, so hat man $6s=25680$; hievon sind die Theiler $\dot{2}$, $\dot{3}$, $\dot{4}$, $\dot{5}$, 6, 8, 10, 12, $\dot{15}$, 16, 20, 24, u. s. w.

Von diesen sind zu untersuchen

$n=$	2,	3,	4,	5,	15,	welche
$A=$	4280,	2140,	1284,	856,	107,	und
$g=$	$1426\frac{1}{3}$,	$712\frac{2}{3}$,	427,	284,	31	liefern, woraus erhellet,

daß nur eine der drei letzten Arten zu schichten zulässig ist, unter denen man daher nach den Umständen wählen wird.

Allein auch hier wird sich in den meisten Fällen die Aufgabe nicht vollständig in ganzen Zahlen auflösen lassen, weßwegen man wieder die Eckseite oder die Anzahl der Schichten n den oben angeführten Rücksichten entsprechend wählt, daraus nach

$A=\dfrac{6s}{n(n+1)}$ die Summe A der drei parallelen Zeilen, oder wegen der Gleichungen (22), (23) zuvörderst den Inhalt der drei des Seitendreiecks $\Delta=\dfrac{n(n+1)}{2}$, hierauf das Mittel parallelen Zeilen $M = \frac{s}{\Delta}$, und dann erst die Summe dieser drei Zeilen $A = 3M$ oder $A = \frac{3s}{\Delta}$ berechnet, sofort aber nach den Gleichungen (31), (32), (33), den Rücken und die Grundzeile bestimmt, wobei man wieder den an den Werthen dieser Linien hängenden echten Bruch entweder beseitigt, oder als eine ganze Einheit rechnet, je nachdem man Kugeln erübrigen, oder den Haufen unausgeschichtet lassen will. Wollte man z. B. 4283 Stück 24pfündige Vollkugeln in einen frei stehenden Haufen schichten, so würde man sich bald von der Unausführbarkeit der ersten Auflösung überzeugen, folglich etwa die Eckseite $n = 14$ wählen, diese gäbe $\Delta = \frac{14.15}{2} = 105$, daher $M = \frac{4283}{105} = 40{,}7$, $A = 122$, oder auch direct $A = \frac{6.4283}{14.15} = \frac{4283}{35} = 122$, somit den Rücken $r = \frac{122 - 2.13}{3} = \frac{96}{3} = 32$ und die Grundzeile $g = 32 + 13 = 45$.

Allein in diesem Haufen würde man nur $105 . \frac{32 + 45 + 45}{3} = 35 . 122 = 4270$ Kugeln unterbringen, folglich noch 13 Kugeln übrig behalten.

V. Auch folgende Bestimmungsweise der Abmessungen langer Kugelhaufen aus ihrem Inhalte dürfte wegen ihrer Leichtfaßlichkeit bemerkenswerth sein. Man wählt die Eckseite des Haufens nach den oben angegebenen Rücksichten, berechnet die ihr entsprechende dreiseitige Pyramide, bildet in Gedanken aus dem zu bestimmenden beiderseits angelehnten / frei stehenden Kugelhaufen durch Wegnahme / Zugabe der dreiseitigen Pyramide einen langen einseitig angelehnten Kugelhaufen, theilt seinen bekannten Inhalt durch den eines Seitendreieckes, und vergrößert / vermindert den Quotienten um 1, damit die Grundlinie des zu bestimmenden Haufens zum Vorschein komme. Auf eine ähnliche Weise läßt sich eine vierseitige Pyramide verwenden, um den Rücken des Haufens zu bestimmen.

VI. Übrigens mag noch erwähnt werden, daß man zur Abkürzung der Bestimmung der Construction und Dimensionen der Kugelhaufen aus ihren Inhalten eigene Tafeln berechnet hat, von denen eine hinreichend ausgedehnte in Vega's logarithmisch-trigonometrischen Tafeln, 2 Bände, Leipzig 1797 aufgenommen ist.

VII. Daß man endlich nicht völlig ausgeschichtete Kugelhaufen entweder zweckmäßig in volle Haufen zertheilt, oder zu solchen Haufen ergänzt, und dann um den Zusatz wieder verkürzt vorstellen, endlich die Bestandstücke einzeln, und aus ihnen den Inhalt des gegebenen Haufens bestimmen müsse, dürfte wohl jedem einleuchten, und leicht ausführbar werden.

II. Abschnitt.

Von den geometrischen Reihen.

§. 244.

Eine Reihe, in welcher man immer gleiche Quotienten erhält, wenn man jedes nachfolgende Glied durch das vorhergehende dividirt, wird eine geometrische Reihe genannt. So z. B. sind 1, 2, 4, 8, 16, 32; . . . ingleichen 81, 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, ... geometrische Reihen; weil in der ersten der beständige Quotient 2, und in der andern $\frac{1}{3}$ erhalten wird, wenn man jedes nachfolgende Glied durch das nächst vorhergehende dividirt. Man erhält demnach bei einer geometrischen Reihe das folgende Glied aus dem nächst vorhergehenden, wenn man dieses mit dem Quotienten multiplicirt. Es erhellet hieraus, daß, wenn das erste Glied und der Quotient einer geometrischen Reihe gegeben sind, die Reihe nach Belieben fortgesetzt werden könne. Es sei z. B. das erste Glied einer Reihe $=2$, und der Quotient $=3$, so ist das zweite Glied $=6$, das dritte $=18$, u. s. w.

Ist nun allgemein das erste Glied $=a$, und der Quotient, mit welchem man jedes vorhergehende Glied multipliciren muß, um das folgende zu erhalten, $=q$, so hat man nachstehende allgemeine Formel für jede geometrische Reihe:

Stellen 1, 2, 3, 4, 5, ... n,

Glieder a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, ... t,

wo q bei einer steigenden Reihe >1, hingegen bei einer fallenden <1 sein muß. Da nun hier jedes Glied aus q auf die Potenz der Anzahl der vorhergehenden Glieder erhoben, multiplicirt mit a besteht, so ist das allgemeine Glied $=aq^{n-1}$. Benennt man das letzte oder allgemeine Glied einer solchen Reihe mit t, und die Anzahl der Glieder mit n, so ist

I. $\quad t=aq^{n-1}$.

Nemlich, das allgemeine Glied einer jeden geometrischen Reihe besteht aus dem Quotienten zur Potenz der um eins verminderten Anzahl der Glieder erhoben, multiplicirt mit dem ersten Gliede.

Benennt man ferner die Summe von n Gliedern mit s; so ist $\quad s=a+aq+aq^2+aq^3+\ldots+aq^{n-1}$.

Um nun diese Formel geschickt abzukürzen, multiplicire man beide Theile der Gleichung mit q, so ist

$$qs=aq+aq^2+aq^3+aq^4+\ldots+aq^n,$$

und ferner durch die Subtraction dieser zwei Gleichungen,

$qs-s=aq^n-a$, oder $s(q-1)=aq^n-a$, daher

$$s=\frac{aq^n-a}{q-1}=\frac{aq^{n-1}.q-a}{q-1};$$

oder wenn man vermög Vorigem t statt aq^{n-1} setzt, so ist

II. $$s=\frac{tq-a}{q-1}.$$

Nemlich, die Summe einer jeden geometrischen Reihe wird erhalten, wenn man das letzte Glied mit dem Quotienten multiplicirt, das erste Glied davon abzieht, und den Rest durch den um eins verminderten Quotienten dividirt.

So z. B. ist die Summe der obigen Reihe

$$1+2+4+8+16+32=\frac{32\,.\,2-1}{2-1}=63;$$ eben so ist

$$81+27+9+3=\frac{3\,.\,\frac{1}{3}-81}{\frac{1}{3}-1}=-80:-\tfrac{2}{3}=+120.$$

Es ist aus diesem letzten Beispiele zu ersehen, daß die fallenden geometrischen Reihen eben so wie die steigenden behandelt werden können, ohne daß man nöthig habe, die Reihe umzukehren, nemlich das letzte Glied für das erste, und das erste für das letzte anzusehen.

Die angeführte Formel II. kann man auch auf folgende Art finden. In der geometrischen Reihe

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ aq^4,\ \ldots\ldots\ t,$$

wovon die Summe aller Glieder $= s$ sei, sind

$$a : aq,\ aq : aq^2,\ aq^2 : aq^3,\ aq^3 : aq^4, \ldots\ldots$$

gleiche Verhältnisse; und es ist bei diesen gleichen Verhältnissen die Summe aller vordern Glieder $=s-t$, und die Summe aller hintern Glieder $=s-a$; es ist daher (vermög §. 191) $s-t : s-a = a : aq$, woraus $s=\frac{tq-a}{q-1}$ folgt.

Bei den geometrischen Reihen sind ebenfalls, wie bei den arithmetischen, 5 Größen in Betrachtung zu ziehen, nemlich das erste Glied a, das letzte t, der Quotient q, die Anzahl der Glieder n, und die Summe von n Gliedern s. Von diesen 5 Größen müssen wieder jedesmal drei bekannt sein, um die übrigen zwei mit Hilfe der gefundenen zwei Gleichungen

$$t=aq^{n-1},\quad s=\frac{tq-a}{q-1}$$

bestimmen zu können. Nur wenn $s, n, a,$ oder s, n, t gegeben wären, lassen sich, wie leicht zu sehen, die zwei übrigen blos durch höhere Gleichungen bestimmen, deren Eigenschaften später vorkommen werden. Die als Exponent auftretende Anzahl von Gliedern n kann zwar in einzelnen Fällen durch Versuche gefunden werden; da aber dies etwas beschwerlich ist, wenn n ein Bruch sein sollte, und die unbekannten Exponenten aus den Gleichungen durch die Lehre von den Logarithmen viel leichter zu bestimmen sind, so wollen wir lieber noch die Kenntniß der Logarithmen abwarten, und hernach sowohl die Lehre von den geometrischen Reihen, als von den Logarithmen auf Beispiele anzuwenden suchen.

III. Abschnitt.

Einiges aus der Combinationslehre.

§. 245.

Mehrere Dinge nach angegebenen Bedingungen neben einander stellen, heißt dieselben **combiniren** im weitesten Sinne dieses Wortes. Jedes solche Ding wird ein **Element**, und ein Verein von an einander gereihten, combinirten Elementen eine **Complexion** (Gruppe) genannt. So können Buchstaben, Sylben, Wörter, Sätze, Zahlen, Personen, Karten, Farben, Eigenschaften, u. dgl. neben einander gedacht oder wirklich gesetzt, folglich combinirt werden.

Die Wissenschaft, welche gegebene Dinge nach vorgeschriebenen Bedingungen folgerecht zusammenstellen oder an einander reihen, d. i. combiniren lehrt, heißt die **Combinationslehre**. Ihr Nutzen verbreitet sich nicht blos über die gesammte Mathematik, sondern auch über viele andere Gegenstände menschlicher Forschungen. Wir werden uns jedoch hier blos auf das Nothwendigste beschränken, daher nicht sowohl die geordnete Aufstellung der Complexionen, sondern vielmehr nur die Bestimmung der Anzahl der, gewissen Bedingungen entsprechenden, Complexionen einer gegebenen Menge von Elementen lehren. *)

§. 246.

1. Das Permutiren.

Gegebene Elemente **permutiren** oder **versetzen** heißt sie auf alle möglichen Weisen in beliebiger Ordnung an einander reihen. Jede solche Complexion wird eine **Permutation** (Versetzung) genannt.

I. Soll man zuvörderst von einer gegebenen Menge **durchaus verschiedener Elemente** die Anzahl ihrer möglichen Versetzungen bestimmen; so sei n die gegebene Anzahl dieser Elemente, und P_n stelle die zu suchende Anzahl ihrer sämmtlichen Ver-

*) Ausführlichere Belehrungen bieten: v. Ettingshausen's combinatorische Analysis, Thibaut's Grundriß der allgemeinen Arithmetik.

setzungen vor. Sondert man nun in Gedanken irgend eines der gegebenen Elemente ab, und versetzt die übrigen $n-1$ Elemente auf alle möglichen Weisen; so ergeben sich, der von uns gewählten Bezeichnung gemäß, P_{n-1} Permutationen von $n-1$ Elementen. Setzt man sofort noch jenes vorher abgesonderte Element in allen diesen P_{n-1} Permutationen auf jede Stelle, die es einzunehmen vermag, so erhält man aus jeder solchen Permutation von $n-1$ Elementen, weil in ihr das hinzutretende $n$te Element nicht nur vor jedem ihrer $n-1$ Elemente, sondern auch noch hinter dem letzten stehen kann, folglich $n-1+1$, d. i. n Plätze einzunehmen vermag, n neue Permutationen zu n Elementen, daher aus allen P_{n-1} Permutationen im Ganzen nP_{n-1} Permutationen, welche zugleich nichts anders als sämmtliche P_n Permutationen der gegebenen n Elemente sind. Demgemäß ist $P_n = nP_{n-1}$.

Erwägt man überdies noch, daß ein einziges Element nur ein Mal angesetzt werden kann, so hat man $P_1 = 1$.

Zu Folge dieser zwei Gleichungen ist sonach für $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$

$$P_2 = 2P_1 = 1.2,$$
$$P_3 = 3P_2 = 1.2.3,$$
$$P_4 = 4P_3 = 1.2.3.4,$$
$$P_5 = 5P_4 = 1.2.3.4.5,$$

und allgemein

(1) $$P_n = 1.2.3.4.\ldots.n.$$

Die Anzahl aller möglichen Versetzungen von n durchgehends verschiedenen Elementen wird demnach durch das Product $1.2.3.4.\ldots.n$ angegeben.

Z. B. Die bei einer achtzehnpfündigen Feldkanone eingetheilten 12 Kanoniere können ihre Nummern und beziehungsweise Verrichtungen auf $1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12 = 479001600$ verschiedene Weisen unter sich vertheilen. — Mit den neun bedeutenden Ziffern lassen sich $1.2.3.4.5.6.7.8.9 = 362880$ verschiedene neunziffrige Zahlen schreiben.

II. Wenn aber unter n Elementen a gleiche, ferner b andere gleiche, dann noch c andere gleiche, u. s. w. vorkommen, die übrigen aber verschieden sind, so denke man sich anfänglich alle n Elemente verschieden, und ihre gesammten $1.2.3\ldots n$ Versetzungen dergestalt in Partien abgetheilt, daß die Complexionen jeder solchen Partie sich blos in der Anordnung jener, einstweilen als verschieden betrachteten, a Elemente von einander unterscheiden, während in ihnen alle übrigen $n-a$ verschiedenen Elemente genau dieselben Stellen in der nemlichen Ordnung einnehmen. Jede Partie erhält hier so viel Complexionen, als genannte a Elemente Versetzungen zulassen, nemlich $1.2.3\ldots a$; daher ist die Anzahl der Partien $= \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots a}$. Läßt man nun die a Elemente wieder einander gleich sein, so werden auch alle Complexionen einer Partie völlig gleich; folglich behält man nur noch so viel verschiedene Versetzungen, als Partien vorhanden sind. Die Anzahl der Versetzungen von n Elementen, unter denen blos a gleiche vorkommen, wird daher durch $\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots a}$ ausgedrückt.

Kommen außer den angeführten a gleichen Elementen noch b andere gleiche Elemente vor, so denke man sie sich vorläufig auch verschieden, und die $\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots a}$ Versetzungen der n Elemente, worunter a gleiche sind, ebenfalls so in Partien abgetheilt, daß jede von ihnen nur solche Complexionen in sich faßt, in denen blos die vor der Hand als verschieden gedachten b Elemente in der gegenseitigen Stellung sich unterscheiden, während die noch übrigen $n-a-b$ Elemente ganz dieselben Plätze inne haben. Auf diese Weise erhält man wieder $1.2.3\ldots b$ Complexionen in einer Partie, folglich $\frac{1.2.3\ldots n}{1.2\ldots a \times 1.2\ldots b}$ Partien. Läßt man nun den zwischen den b Elementen fingirten Unterschied wieder verschwinden, so behält man nur mehr so viel verschiedene Versetzungen, als Partien vorhanden sind; und deßwegen gestatten n Elemente, unter denen sich a gleiche und b andere gleiche befinden, $\frac{1.2.3\ldots n}{1.2\ldots a \times 1.2\ldots b}$ verschiedene Versetzungen. — Die Wiederholung derselben Schlüsse lehrt, daß die Anzahl der Versetzungen von n Elementen, unter denen a gleiche, b andere gleiche, c wieder andere gleiche, u. s. w. vorkommen, durch

(2) $$\frac{1.2.3\ldots n}{1.2\ldots a \times 1.2\ldots b \times 1.2\ldots c \times \ldots}$$ ausgedrückt wird.

Hiebei mag noch bemerkt werden, daß, wenn man diesen Ausdruck als die allgemeinste Form der Versetzungszahl von n Elementen ansehen will, in den Fällen, wo einer der Buchstaben $a, b, c, \ldots$ gleich Null gesetzt werden soll, von den Producten

$$1.2\ldots a,\quad 1.2\ldots b,\quad 1.2\ldots c, \ldots$$

das betreffende aus dem Nenner wegzulassen, oder was dasselbe ist, gleich 1 anzunehmen kommt.

Z. B. Mit 8 geltenden Ziffern, unter denen 3 gleich sind, wie 2, 2, 2, 5, 6, 7, 8, 9, können $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2.3}$ $= 4.5.6.7.8 = 6720$ verschiedene Zahlen geschrieben werden. Sollten darunter noch zwei andere gleiche Ziffern vorkommen, wie unter den Ziffern 2, 2, 2, 5, 6, 6, 8, 9, so würden sich blos $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2.3 \times 1.2} = \frac{6720}{2} = 3360$ verschiedene achtziffrige Zahlen ergeben. Die 6 Geschütze einer Batterie, von denen 4 Kanonen und 2 Haubitzen sind, könnten in $\frac{1.2.3.4.5.6}{1.2 \times 1.2.3.4} = 15$ verschiedenen Gruppirungen in einer Front aufgestellt werden.

§. 247.

2. Das Combiniren im engeren Sinne.

Werden von mehreren Elementen zur Bildung von Complexionen nicht alle, sondern nur einige verwendet; so ergeben sich Combinationen im engeren Sinne, und zwar von der so vielten Classe, als Elemente in eine Complexion aufgenommen werden. Die Combinationen der ersten, zweiten, dritten, vierten, fünften Classe werden auch Unionen, Binionen (Amben), Ternionen (Ternen), Quaternionen (Quaternen), Quinionen (Quinternen) genannt. Erscheint in den Combinationen kein Element öfter als ein Mal, so sind sie Combinationen ohne Wiederholungen, während sie im Gegentheile Combinationen mit Wiederholungen heißen, wenn jedes Element in den Combinationen auch mehrmal, jedoch nicht öfter, als die Classe der Combinationen gestattet, vorkommt.

I. Will man die Anzahl aller aus n Elementen sich ergebenden möglichen Combinationen zur $m$ten Classe ohne Wiederholungen bestimmen, so denke man sich von diesen n Elementen alle möglichen Versetzungen, deren Anzahl $1.2.3\ldots.n$ ist, gebildet, und dergestalt in Partien geordnet, daß in den Versetzungen einer jeden Partie die ersten m Elemente die nemlichen und auf dieselbe Weise gestellt seien, folglich in jeder einzelnen Partie die aus ihren m Anfangs-Elementen bestehende Complexion durchgehends dieselbe bleibe. Jede solche Partie begreift dann in sich eben so viel Versetzungen, als wie oft die übrigen $n-m$ Elemente unter sich versetzt werden können, nemlich $1.2.3\ldots.(n-m)$ Versetzungen; mithin ist die Anzahl der Partien $= \frac{1.2.3\ldots.n}{1.2.3\ldots.(n-m)}$. Hebt man hierauf von jeder Partie die in allen ihren Versetzungen vorkommende Complexion der m ersten Elemente hinweg, so enthalten diese $\frac{1.2\ldots.n}{1.2\ldots(n-m)}$ Complexionen gewiß alle Combinationen der gegebenen n Elemente zur $m$ten Classe. Wenn nun auch noch diese Complexionen auf die Weise in Abtheilungen gebracht werden, daß jede derselben nur solche Complexionen enthält, in denen die nemlichen Elemente, jedoch in allen möglichen verschiedenen Stellungen vorkommen; so besteht jede derlei Abtheilung aus so viel Complexionen, als wie viel Mal sich die in ihr erscheinenden m Elemente versetzen lassen, nemlich aus $1.2.3\ldots m$ Complexionen, und daher ist die Zahl dieser Abtheilungen $= \frac{1.2.3\ldots n}{1.2\ldots(n-m)\times 1.2\ldots m}$. Da es endlich bei der Bildung von Combinationen zu irgend einer Classe nicht auf die Stellung der Elemente ankommt, folglich Combinationen, welche einerlei Elemente, jedoch in verschiedener Ordnung besitzen, für gleich gehalten werden, so ist die Anzahl der verschiedenen Combinationen von den gegebenen n Elementen zur $m$ten Classe nur so groß als die Anzahl der zuletzt gebildeten Abtheilungen. Mithin ist die Anzahl der möglichen Combinationen von n Elementen zur $m$ten Classe ohne Wiederholungen

$$(3) \qquad = \frac{1.\,2.\,3\ldots.n}{1.2\ldots(n-m)\times 1.2\ldots.m}.$$

Schreibt man diesen Ausdruck, da weder m noch $n-m$ größer als n ist, in einer der Formen

$$\frac{1.2.3\ldots.(n-m).(n-m+1)\ldots\ldots(n-1)n}{1.2.3\ldots.(n-m)\times 1.2.3\ldots.m},$$

$\dfrac{1.2.3\ldots..m.(m+1)\ldots.n}{1.2.3\ldots..m\times 1.2\ldots(n-m)}$, und dividirt den Zähler und Nenner dieser Brüche durch $1.2.3\ldots.(n-m)$, und $1.2.3\ldots m$, so läßt sich die gesuchte Anzahl von Combinationen auch durch

$$(4)\qquad \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-m+1)}{1.2.3\ldots.m}, \text{ oder durch}$$

$$(5)\qquad \frac{(m+1)(m+2)\ldots.(n-1)n}{1.2.3\ldots.(n-m)}$$ ausdrücken. Von diesen Ausdrücken wählt man gewöhnlich den ersten oder zweiten, je nachdem m kleiner oder größer als $\frac{n}{2}$ ist; für $m=\frac{n}{2}$ selbst werden beide Ausdrücke identisch (einerlei). Z. B. Aus den 90 Nummern der gewöhnlichen Zahlenlotterie können $\frac{90.89}{1.2}=4005$ Amben, $\frac{90.89.88}{1.\ 2.\ 3}=117480$ Ternen, $\frac{90.89.88.87}{1.\ 2.\ 3.\ 4}=2555190$ Quaternen, $\frac{90.89.88.87.86}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}=43949268$ Quinternen zusammen gestellt werden, während 5 aus ihnen heraus gezogene Zahlen nur $\frac{4.5}{1.2}=10$ Amben, $\frac{5.4.3}{1.2.3}=10$ Ternen, $\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}=5$ Quaternen, $\frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5}=1$ Quinterne geben. — In den Paragraphen 232 und 244 lernten wir, daß von den 5 Größen a, d (oder q), n, t, s, welche bei arithmetischen und geometrischen Reihen gewöhnlich betrachtet zu werden pflegen, immer 2 sich finden lassen, wenn die übrigen 3 bekannt sind. Da nun von 5 Größen 3 auf $\frac{5.4.3}{1.2.3}=10$ verschiedene Weisen gegeben werden können, und durch sie jedes Mal 2 Größen bestimmt sind; so vermag man in Allem $2.10=20$ verschiedene Fragen in Absicht auf erwähnte 5 Größen zu stellen.

Wegen des häufigen Vorkommens des Ausdruckes (4) in sehr vielen mathematischen Untersuchungen pflegt man ihn der Kürze wegen, vielleicht am bequemsten, durch das Symbol (Sinnbild, Zeichen) $\binom{n}{m}$, welches man kurz „n über m" lesen kann, darzustellen. Daher soll in der Folge stets

$$(6)\qquad \binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.\,2.\,3\ldots\ldots m}$$

gehalten werden. Aus der Gleichheit der Ausdrücke (4) und (5) folgt demnach auch noch

$$(7)\qquad \binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(m+1)}{1.\,2.\,3\ldots(n-m)},$$

welche Gleichung, da der letzte Factor $m+1$ im Zähler auch durch $n-(n-m)+1$ dargestellt werden kann, nichts anders ist als $\binom{n}{n-m}$, sonach hat man

$$(8)\qquad \binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$$

II. Soll die Anzahl der aus n Elementen möglichen Combinationen zur $m$ten Classe mit Wiederholungen, wobei m jede beliebige positive ganze Zahl vorstellen kann, gefunden werden, so bezeichne man diese Anzahl von Combinationen einstweilen durch das Symbol C_m, und denke sich aus jenen n Elementen alle möglichen Combinationen der nächst niedrigeren $m-1$ten Classe gleichfalls mit Wiederholungen aufgestellt, deren Anzahl somit durch C_{m-1} zu bezeichnen sein wird. Sofort verbinde man mit jeder dieser C_{m-1} Combinationen nicht nur jedes der gegebenen n Elemente, sondern auch noch jedes ihrer eigenen $m-1$ Elemente; dadurch erhält man zuerst nC_{m-1}, und dann $(m-1)\,C_{m-1}$, folglich im Ganzen $(n+m-1)\,C_{m-1}$ Complexionen, unter denen jede mögliche Combination der n Elemente zur $m$ten Classe nothwendig m Mal vorkommt. Denn dem vorgezeichneten Verfahren gemäß ist sie, wegen jeder in ihr etwa enthaltenen Gruppe von p gleichen Elementen, p Mal entstanden, weil sie, nach Absonderung eines jeden dieser p Elemente, eine $m-1$stellige Complexion zurückläßt, welche dieses Element $p-1$ Mal enthält, und gewiß in obiger $m-1$ten Combinationsclasse erscheint. Diese wurde aber mit dem abgesonderten Elemente ein Mal, in so fern es unter den gegebenen n Elementen vorkommt, und $p-1$ Mal, in so fern es unter den eigenen $p-1$ gleichen Elementen der $m-1$ stelligen Complexion begriffen ist, also in Allem $1+p-1$, d. i. p Mal verbunden. Da dieses eben so von jedem andern Elemente, selbst dann, wenn es nur ein Mal in einer Complexion vorkommt, folglich die obige Zahl p auf 1 sich reducirt, gesagt werden kann; so erhält man jede Complexion der $m$ten Classe so oft, als wie viel Elemente sie besitzt, nemlich m Mal. Man hat demnach $m C_m = (n+m-1) C_{m-1}$, und hieraus $C_m = \frac{n+m-1}{m} C_{m-1}$.

Läßt man hierin den Classenzeiger m nach und nach um eine Einheit abnehmen, oder allmälig in $m-1$, $m-2$, ... 3, 2, 1 übergehen, und erwägt man, daß die Anzahl der Combinationen von n Elementen zur ersten Classe offenbar n ist, so gesellen sich zu obiger Gleichung noch die folgenden:

$$C_{m-1} = \frac{n+m-2}{m-1} C_{m-2},$$

$$C_{m-2} = \frac{n+m-3}{m-2} C_{m-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$C_2 = \frac{n+1}{2} C_1,$$

$$C_1 = n.$$

Multiplicirt man endlich alle diese m Gleichungen mit einander, so erscheint $C_m = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots.m}$; oder nach der in I. gewählten Bezeichnung (6)

$$C_m = \binom{n+m-1}{m};$$

folglich ist die **Anzahl aller möglichen Combinationen von n Elementen zur $m$ten Classe mit Wiederholungen gleich**

$$(9) \qquad \frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots.m}, \text{ oder } \binom{n+m-1}{m}.$$

Z. B. Acht von Null verschiedene Zahlen kann man zu zweien auf $\frac{8.9}{1.2} = 36$ Arten, zu dreien auf $\frac{8.9.10}{1.2.3} = 120$ Arten, zu vieren auf $\frac{8.9.10.11}{1.2.3.4} = 330$ Arten, u. s. w. zu Summen oder Producten verknüpfen, wenn sie sich wiederholen dürfen.

§. 248.

3. Das Variiren.

Wird aus jeder von mehreren abgesonderten Reihen von Elementen, auf alle möglichen Weisen, eines zur Bildung von Complexionen genommen, so heißt diese Operation das **Variiren**; und jede solche Complexion, welche eben so viel Elemente in sich faßt, als Reihen vorhanden sind, wird eine **Variation** genannt.

Sind n Reihen gegeben, von denen die erste p, die zweite q, die dritte r Elemente, u. s. f. enthält, so lassen sich die p Elemente der ersten Reihe mit den q Elementen der zweiten Reihe, da jedes Element der einen Reihe mit einem jeden der anderen verbunden wird, zu pq Complexionen vereinigen, welche selbst wieder, mit jedem der r Elemente der dritten Reihe verknüpft, pqr Complexionen liefern; folglich ist die Anzahl der Variationen sämmtlicher in n Reihen vertheilten $p+q+r+\ldots.$ Elemente gleich dem Producte

$$pqr\ldots. \tag{10}$$

der Elementenmengen dieser Reihen. Z. B. Multiplicirt man vier algebraische Ausdrücke, welche der Ordnung nach aus 5, 7, 9, 11 Gliedern bestehen, mit einander; so enthält das (nicht reducirte) Product $5.7.9.11=3465$ Glieder.

Hat man demnach n Reihen, deren jede m Elemente in sich faßt, so ist die Anzahl aller möglichen Variationen gleich

$$m^n. \tag{11}$$

Bestände z. B. jeder der eben erwähnten vier Ausdrücke aus 9 Gliedern, so enthielte das Product $9^4=6561$ Glieder.

Sind insbesondere die Elementenreihen unter sich vollkommen gleich oder identisch, so sind die Variationen ihrer Elemente eigentlich nichts anders, als die Permutationen aller Combinationen mit Wiederholungen für die Elemente einer einzigen Reihe zur so vielten Classe, als wie viel Reihen gegeben sind.

Z. B. Mit 5 Ziffern, wie 1, 3, 5, 7, 9, können $5^2=25$ zweiziffrige, $5^3=125$ dreiziffrige, $5^4=625$ vierziffrige Zahlen, u. s. f. geschrieben werden, wenn jede Ziffer sich wiederholen darf.

IV. Abschnitt.

Von den Producten binomischer Factoren und dem binomischen Lehrsatze für ganze positive Exponenten.

§. 249.

Bestimmen oder entwickeln wir die einzelnen Glieder des aus n zweigliedrigen (binomischen) Factoren bestehenden Productes

(1) $(x+a)(x+b)(x+c)\ldots.(x+i)(x+k)$,

so sehen wir leicht ein, daß wir diese Glieder finden, indem wir auf alle möglichen Weisen aus jedem Factor ein Glied herausheben, und sämmtliche diese n Glieder mit einander multipliciren, oder was dasselbe ist, von den durchgehends aus zwei Elementen bestehenden n Reihen

$$\begin{array}{ll} x, & a \\ x, & b \\ x, & c \\ \ldots & \\ x, & i \\ x, & k \end{array}$$

alle möglichen Variationen ihrer $2n$ Elemente aufstellen, und die in einer solchen Variation begriffenen n Elemente mit einander multipliciren. Auf diese Weise erhält das Product (1) vermög §. 248 (11) im Ganzen 2^n Glieder, die sich aber, sobald $n>1$ ist, durch folgende Betrachtung auch auf eine geringere Anzahl zusammenziehen lassen. Das erste Glied sämmtlicher Factoren ist nemlich durchaus dasselbe, und zugleich muß jedes Glied des Productes (1) mit Ausnahme eines einzigen, welches nur aus den zweiten Gliedern der gesammten Factoren besteht, das erste Glied eines oder mehrerer Factoren in sich aufnehmen, daher als einen seiner Factoren eine Potenz von x enthalten, deren Exponent, weil das Product (1) aus n Factoren zusammengesetzt ist, höchstens n werden kann. Hebt man demnach aus allen jenen Gliedern dieses Productes, welche die nemliche Potenz von x enthalten, diese als gemeinschaftlichen Factor heraus, und ordnet die so gewonnenen Glieder nach den Potenzen von x, von der $n$ten angefangen bis zur ersten, fallend, und fügt am Schluße noch das oben erwähnte, die Zahl x gar nicht, oder, wenn man dies lieber will, die Potenz x^0 enthaltende Glied bei; so reducirt sich das entwickelte Product auf $n+1$ Glieder, mit deren ausführlicher Bestimmung wir uns gegenwärtig befassen wollen.

1) Was das Anfangsglied oder das die höchste, nemlich $n$te Potenz von x, enthaltende Glied anbelangt, so ist dieses offenbar nichts anders als das Product sämmtlicher ersten Glieder x der n Factoren, folglich $=x^n$.

2) Das erste Glied nach dem Anfangsgliede wird gefunden, indem man auf alle möglichen Weisen nur von einem einzigen Factor den zweiten, von allen $n-1$ übrigen den ersten Bestandtheil zu einem Producte verknüpft. Da man nun einen der n zweiten Bestandtheile $a, b, c, \ldots i, k$ auf n verschiedene Arten wählen kann, so muß das fragliche Glied des zu entwickelnden Productes dem Producte aus der Potenz x^{n-1} in die Summe aller erwähnten zweiten Bestandtheile der binomischen Factoren, also dem Ausdrucke

$$(a+b+c+\cdots+i+k)x^{n-1},$$

oder wenn man, um abzukürzen, die Summe

$$a+b+c+\cdots+i+k=A_1$$

setzt, dem einfacheren Ausdrucke A_1x^{n-1} gleich sein.

3) Zur Bildung des zweiten Gliedes nach dem Anfangsgliede wird man auf alle möglichen Weisen aus zwei Factoren die zweiten Glieder herausheben, und sie mit den ersten Gliedern der übrigen $n-2$ Factoren multipliciren, oder von den n zweiten Gliedern $a, b, c, \ldots i, k$ der Factoren alle möglichen $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Combinationen der zweiten Classe ohne Wiederholung bilden, in jeder solchen Combination die Elemente mit einander multipliciren, und die Summe aller dieser Producte, d. i. $ab+ac+\cdots+ak+bc+\cdots+bk+\cdots+ik$, noch mit der Potenz x^{n-2} multipliciren. Dadurch wird dieses Glied, wenn man mit A_2 die erwähnte Summe bezeichnet, $=A_2x^{n-2}$.

4) Das dritte Glied nach dem Anfangsgliede erhält man, indem man auf alle möglichen Weisen aus drei Facto-

ren die zweiten Glieder nimmt, und mit den ersten Gliedern der übrigen $n-3$ Factoren multiplicirt, oder von sämmtlichen n zweiten Gliedern alle möglichen $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ Combinationen der dritten Classe ohne Wiederholungen aufstellt, in jeder Combination die Elemente mit einander multiplicirt, und die Summe dieser Producte mit der Potenz x^{n-3} multiplicirt. Setzt man sofort diese Summe von Producten $=A_3$, so ist das fragliche Glied $= A_3 x^{n-3}$.

5) Aus dem bisher genommenen Gange dieser Untersuchung läßt sich leicht ersehen, daß allgemein das $m$te Glied nach dem Anfangsgliede, nemlich dasjenige, auf welches — wenn man, wie es hier geschehen und in der Folge noch öfter vorkommen wird, die $n+1$ Glieder des Productes mit den Nummern oder Stellenweisern $0, 1, 2, 3, 4, \ldots \, m-1, m, m+1, \ldots n$ bezeichnet — der Stellenzeiger oder die Nummer m trifft, nach folgender Vorschrift entwickelt werde.

Man nimmt auf alle möglichen Weisen von m Factoren des Productes (1) die zweiten Glieder, und vereinigt sie durch Multiplication mit einander und mit den ersten Gliedern x der übrigen $n-m$ Factoren, oder was dasselbe ist, man bildet sämmtliche Combinationen aus den n zweiten Gliedern der binomischen Factoren zur $m$ten Classe ohne Wiederholungen, multiplicirt in jeder dieser Combinationen, deren Anzahl, nach §. 247 (4), (5), entweder durch $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m}$, oder

$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots(n-m)}$ angegeben wird, die Elemente mit einander, und die Summe dieser Producte noch mit x^{n-m}. Auf diese Weise ergibt sich, wenn die erst erwähnte Summe mit A_m bezeichnet wird, das $m$te, oder, wie man zu sagen pflegt, das allgemeine Glied der Entwicklung des Productes $= A_m x^{n-m}$.

In der That gewinnt man aus ihm die mit den Nummern $1, 2, 3, \ldots$ belegten und schon früher entwickelten Glieder, indem man in ihm für m die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ setzt, weil die Buchstaben A_1, A_2, A_3,.... in beiden Fällen dieselben Summen vorstellen; ja sogar das Anfangsglied erhält man, wenn man $m=0$ nimmt, und $A_0=1$ gelten läßt, folglich zugesteht, daß, wenn man aus den gegebenen n Elementen sogenannte Nullionen, d. i. Combinationen zur Classe 0 ohne Wiederholungen bildet, die Elemente als Zahlen mit einander multiplicirt, und die Producte addirt, das Resultat für jede Anzahl n von Elementen gleich 1 sei, und daß in §. 247 die Ausdrücke (3) und (4) selbst für $m=0$ dem Ausdrucke (5) gleich bleiben, mithin wie dieser in 1 übergehen.

6) Das Schlußglied der Entwicklung des Productes, auf welches die Nummer n trifft, ist, wie wir schon früher nachwiesen, das Product der zweiten Glieder sämmtlicher binomischen Factoren. Auch mit ihm harmonirt obiger Ausdruck $A_m x^{n-m}$ des allgemeinen Gliedes, weil selber für $m=n$ in $A_n x^0$ oder A_n übergeht, welches vermög 5) nichts anderes als das Product sämmtlicher zweiten Glieder der Factoren ist.

Durch die bisher durchgeführte Untersuchung haben wir demnach die Überzeugung gewonnen, daß das Product

(2) $$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+i)(x+k)=$$
$$x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+A_3x^{n-3}+\ldots+A_mx^{n-m}+\ldots+A_{n-1}x+A_n$$

ist, wobei die Coefficienten

$$A_1, A_2, A_3, \ldots A_m, \ldots A_{n-1}, A_n$$

aus den zweiten Gliedern

$$a,\ b,\ c, \ldots i,\ k$$

der binomischen Factoren des Productes gefunden werden, wenn man aus ihnen alle möglichen Combinationen zu den Classen

$$1,\ 2,\ 3, \ldots m, \ldots n-1,\ n$$

ohne Wiederholungen bildet, die Combinationen, deren Anzahlen

$$n,\ \frac{n(n-1)}{1.2},\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}, \ldots \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.\ldots m}, \ldots n,\ 1$$

sind, als Producte ihrer Elemente ansieht, und diese addirt.

Auf diese Weise findet man z. B.

(3) $$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab,$$
$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2$$
$$+(ab+ac+bc)x+abc,$$
$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+(a+b+c+d)x^3$$
$$+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2$$
u. s. w. $$+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd,$$

$$(4)\quad (x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab,$$
$$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc,$$
$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=x^4-(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2-(abc+abd+acd+bcd)x+abcd,$$

u. s. w.

§. 250.

I. Für sehr viele Forschungen im Gebiete der Algebra ist der Fall besonders wichtig, wo die zweiten Glieder a, b, c, ... i, k sämmtlicher n binomischen Factoren gleich sind, folglich das eben untersuchte Product in die Potenz $(x+a)^n$ übergeht. Hier reduciren sich alle Glieder, aus denen die Coefficienten

$$A_1, A_2, A_3, \ldots. A_m \ldots. A_{n-1}, A_n$$

zusammengesetzt sind, auf die Potenzen

$$a,\ a^2,\ a^3, \ldots. a^m, \ldots. a^{n-1},\ a^n;$$

und da die Anzahlen jener Glieder

$$n, \frac{n(n-1)}{1.2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}, \ldots \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots.m}, \ldots n, 1$$

sind, so hat man

$$A_1=na,\ A_2=\frac{n(n-1)}{1.2}a^2,\ A_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3, \ldots$$

$$A_m=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-m+1)}{1.2.3\ldots.m}a^m$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(m+1)}{1.2.3\ldots.(n-m)}a^m,$$

. . . .

$$A_{n-2}=\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2},\ A_{n-1}=na^{n-1},\ A_n=a^n.$$

Demnach ist

$$(5)\quad (x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3x^{n-3}+\ldots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m}a^mx^{n-m}+\ldots$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}x^2+na^{n-1}x+a^n,$$

worin der Factor von $a^m x^{n-m}$, sobald $m > \frac{n}{2}$ ist, gewöhnlich durch den ihm gleichen Ausdruck $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots(n-m)}$ ersetzt wird.

Diese zuerst von Newton aufgestellte Entwicklung jeder durch einen positiven ganzen Exponenten angedeuteten Potenz eines Binoms wird der binomische oder Newton'sche Lehrsatz genannt.

Besondere Fälle, deren Richtigkeit sich auch durch successive Multiplicationen nachweisen läßt, sind folgende:

$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$,

$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$,

$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$,

$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5$,

$(x+a)^6 = x^6 + 6ax^5 + 15a^2x^4 + 20a^3x^3 + 15a^4x^2 + 6a^5x + a^6$,

u. s. w.

II. Zur besseren Auffassung des binomischen Lehrsatzes unterwerfen wir die Glieder

$$x^n,\ nax^{n-1},\ \frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-2}, \ldots \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}x^2,\ na^{n-1}x,\ a^n$$

der Entwicklung der Potenz $(x+a)^n$, deren Anzahl $n+1$ ist, noch einer weitern Untersuchung, welche uns Folgendes erkennen läßt.

1) Jedes Glied enthält nebst einer Potenz des ersten sowohl als des zweiten Theils des potenzirten Binoms noch einen dritten Factor, welcher nicht blos durch den Exponenten der Potenz, sondern auch durch den Stellenzeiger des Gliedes bestimmt wird. Diese Factoren sind der Reihe nach

$$1,\ n,\ \frac{n(n-1)}{1.2},\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}, \ldots \ldots \frac{n(n-1)}{1.2},\ n,\ 1,$$

heißen Binomial-Coefficienten, und werden den Ergebnissen unserer bisherigen Untersuchungen gemäß aus einem der zwei gleichen allgemeinen Ausdrücke

$$(6)\quad \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m},\quad \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots(n-m)}$$

erhalten, wenn man für m der Ordnung nach die $n+1$ Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots n-1, n$ setzt.

Die Exponenten der Potenzen des ersten Theils x des Binoms nehmen in den nach einander folgenden Gliedern von dem Exponenten n des Binoms selbst schrittweise um 1 bis 0 ab, während die des zweiten Theils a von 0 an stets um eine Einheit bis zum Exponenten n des Binoms wachsen. Hiedurch ist man in den Stand gesetzt, nicht nur die Binomial-Coefficienten der einzelnen Glieder, sondern auch die ihnen zukommenden Potenzen der beiden Bestandtheile des zu erhebenden Binoms, somit diese Glieder selbst vollständig zu bestimmen.

2) Die Anzahl der zu berechnenden Binomial-Coefficienten reducirt sich jedoch durch den Umstand, daß die Coefficienten der vom Anfange und Ende gleich weit entfernten Glieder gleich sind, auf die Hälfte. Denn offenbar sind die Potenzen $(x+a)^n$, $(a+x)^n$, in denen blos die Glieder des Binoms ihre Plätze vertauschen, ganz gleich, folglich auch ihre Entwicklungen

$$x^n + nx^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}a^2 + \cdots$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}x^2a^{n-2} + nxa^{n-1} + a^n,$$

und $a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}x^2 + \cdots$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-2} + nax^{n-1} + x^n,$$

von denen jede nur die in umgekehrter Ordnung geschriebene andere ist, woraus die angeführte Gleichheit der Coefficienten erhellet.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ist übrigens auch in der Gleichheit der allgemeinen Ausdrücke (6) der Binomial-Coefficienten begründet; denn bietet der erste dieser Ausdrücke den Coefficienten des $m$ten Gliedes nach dem Anfangsgliede, so liefert der zweite, weil er aus dem ersten entsteht, wenn in ihm m in $n-m$ übergeht, auch den Coefficienten des $n-m$ten Gliedes nach dem Anfangsgliede, welches jedoch, weil in Allem $n+1$ Glieder vorhanden sind, zugleich das $m$te Glied vor dem Schlußgliede ist.

3) Will man, was in vielen Fällen, vorzüglich bei Rechnungen mit besonderen Zahlen, sehr bequem ist, ein Verfahren, jedes Glied mit Ausnahme des Anfangsgliedes, aus dem unmittelbar vorhergehenden zu bestimmen, kennen lernen; so setze man in dem

allgemeinen Ausdrucke des $m$ten Gliedes nach dem Anfangsgliede

$$(7)\qquad \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+2)(n-m+1)}{1.2.3\ldots(m-1)m}x^{n-m}a^m,$$

um das nächst vorhergehende Glied zu erhalten, $m-1$ an die Stelle von m, wodurch man für dieses den Ausdruck

$$(8)\qquad \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+3)(n-m+2)}{1.2.3\ldots(m-2)(m-1)}x^{n-m+1}a^{m-1}$$

findet. Hieraus ergibt sich das Verhältniß jenes $m$ten Gliedes zu diesem $m-1$ten, oder die Zahl, welche angibt, wie oft in jenem $m$ten Gliede dieses $m-1$te enthalten ist, und mit der man demnach das $m-1$te Glied multipliciren muß, um das $m$te zu finden, gleich

$$(9)\qquad \frac{n-m+1}{m}\cdot\frac{a}{x}.$$

Schreibt man hier in dem Bruche $\frac{n-m+1}{m}$ für m die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, \ldots n-1, n$, so ergeben sich die Brüche

$$\frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}, \frac{n-2}{3}, \frac{n-3}{4}, \frac{n-4}{5}, \ldots\ldots \frac{3}{n-2}, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n},$$

deren Zähler von dem Potenz-Exponenten n an bis 1 um eine Einheit abnehmen, während die Nenner von 1 an bis zu jenem Exponenten um eine Einheit wachsen, und mit denen von dem ersten Gliede x^n angefangen, die nach einander folgenden Glieder schrittweise, so wie noch überdies mit dem unveränderlichen Verhältnisse $\frac{a}{x}$ des zweiten Theils des Binoms zum ersten multiplicirt werden.

Bezeichnet man demnach die Glieder, aus denen die entwickelte Potenz des Binoms besteht, mit I, II, III, IV, ... so hat man

$$(10)\qquad (x+a)^n = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV} + \ldots.$$

und zugleich $\mathrm{I} = x^n$, $\mathrm{II} = \mathrm{I}\cdot\frac{n}{1}\,\frac{a}{x}$,

$$\mathrm{III} = \mathrm{II}\cdot\frac{n-1}{2}\,\frac{a}{x},\quad \mathrm{IV} = \mathrm{III}\cdot\frac{n-2}{3}\,\frac{a}{x},$$

u. s. w.

Gewöhnlich pflegt man diesen Ausdruck des binomischen Lehrsatzes folgender Maßen darzustellen:

$$(11)\quad (x+a)^n = x^n + \overset{\text{I}}{\text{I}}\frac{n}{1}\frac{a}{x} + \overset{\text{II}}{\text{II}}\frac{n-1}{2}\frac{a}{x} + \overset{\text{III}}{\text{III}}\frac{n-2}{3}\frac{a}{x} + \overset{\text{IV}}{\cdots}$$

Suchen wir, um den Vorgang durch ein Beispiel zu erläutern, die Potenz $(2+3z^2)^5$, so ist die Reihe der als Multiplicatoren zu verwendenden Brüche $\frac{5}{1}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{5}$, und das Verhältniß des zweiten Theils des Binoms zum ersten $= \frac{3z^2}{2}$, daher

$$\text{I}=2^5=32,\quad \text{II}=32\cdot\frac{5}{1}\cdot\frac{3z^2}{2}=240z^2,$$

$$\text{III}=240z^2\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{3z^2}{2}=720z^4,\quad \text{IV}=720z^4\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{3z^2}{2}=1080z^6,$$

$$\text{V}=1080z^6\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3z^2}{2}=810z^8,\quad \text{VI}=810z^8\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{3z^2}{2}=243z^{10},$$

und somit

$$(2+3z^2)^5 = 32+240z^2+720z^4+1080z^6+810z^8+243z^{10}.$$

4) Aus dem Ausdrucke (9) ersieht man deutlich, daß in der entwickelten Potenz des Binoms der Coefficient des $m$ten Gliedes nach dem Anfangsgliede aus jenem des nächst vorhergehenden $m-1$ten Gliedes durch Multiplication mit dem Bruche

$$(12)\qquad \frac{n-m+1}{m}$$

erhalten werde. Beachtet man zugleich, daß $n-m+1$, zu Folge des Ausdruckes (8), der in dem $m-1$ten Gliede dem ersten Bestandtheile des potenzirten Binoms zufallende Exponent, und m die Anzahl der dem zu suchenden $m$ten Gliede vorangehenden Glieder ist; so wird der Binomial-Coefficient jedes Gliedes gefunden, indem man den des nächst vorangehenden Gliedes mit dem Exponenten, nach welchem in demselben der erste Bestandtheil des Binoms potenzirt wird, multiplicirt, und durch die Anzahl der Glieder, welche dem zu suchenden vorgehen, dividirt.

5) Ferner wollen wir noch bemerken, daß der Bruch (12) so lange größer als 1 ist, als $m < n-m+1$ oder $m < \frac{n+1}{2}$ bleibt, daß er ferner für $m = n-m+1$ oder $m = \frac{n+1}{2}$, was nur bei einem ungeraden Exponenten n eintreten kann, in 1 selbst übergeht, und daß er dann kleiner als 1 ausfällt, sobald $m > n-m+1$ oder $m > \frac{n+1}{2}$ wird. Verbinden wir hiemit noch die durch 2) erkannte Wahrheit, so ist klar, daß die Binomial-Coefficienten vom Anfange und Ende der Entwicklung einer Potenz eines Binoms herein bis gegen die Mitte in völlig gleichen Schritten wachsen, und daß daher bei einem ungeraden Exponenten des Binoms die beiden mittelsten Coefficienten gleich und am größten sind, bei einem geraden Exponenten aber der mittelste Coefficient selbst der größte ist.

6) Die Coefficienten, welche einer bestimmten Potenz des Binoms zukommen, können aus jenen der nächst niedrigeren (deren Exponent um 1 kleiner ist) sehr einfach berechnet werden. Denn setzt man in dem allgemeinen Ausdrucke der Binomial-Coefficienten

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+2)(n-m+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots . (m-1) \quad m}$$

$n-1$ statt n, so übergeht er in

$$\binom{n-1}{m} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-m+1)(n-m)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots . (m-1) \; m}.$$

Subtrahirt man nun diesen Ausdruck von jenem, so erhält man, nach Herausnahme der den beiden Ausdrücken gemeinschaftlichen Factoren die Differenz

$$\binom{n}{m} - \binom{n-1}{m} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-m+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots . (m-1)} = \binom{n-1}{m-1}$$

und somit ist $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$.

Es wird demnach jeder Binomial-Coefficient einer Potenz eines Binoms gefunden, wenn man in der um einen Grad niedrigeren Potenz (deren Exponent nemlich um 1 kleiner ist) den eben so vielten Coefficienten zu dem nächst vorhergehenden addirt.

Da nun die Binomial-Coefficienten der ersten Potenz 1, 1 sind, so lassen sich aus ihnen jene der 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, ... Potenz durch einfache Additionen berechnen und in folgende Tafel bringen.

Exponenten	Coefficienten
1	1, 1
2	1, 2, 1
3	1, 3, 3, 1
4	1, 4, 6, 4, 1
5	1, 5, 10, 10, 5, 1
u. s. w.	

In dieser Tafel wird nemlich jeder Coefficient erhalten, wenn man den über ihn stehenden und den vor diesem links befindlichen addirt; z. B. $5=4+1$; $10=6+4$.

Anmerkung. Da sich jedes Polynom auch als Binom darstellen läßt, indem man eines seiner Glieder zum ersten, und den Inbegriff aller übrigen Glieder zum zweiten Theil des Binoms nimmt; so kann man nach Vorstehendem auch die Glieder jeder Potenz eines beliebigen Polynoms entwickeln, und hiefür sogar eine allgemeine Vorschrift oder Formel, welche der polynomische Lehrsatz genannt zu werden pflegt, aufstellen, wobei wir jedoch, wegen ihrer zu seltenen Anwendung, nicht verweilen.

V. Abschnitt.

Allgemeine Lehre von der Ausziehung der Wurzeln jeden Grades aus besonderen Zahlen.

§. 251.

Das Ausziehen einer Wurzel aus einer besonderen Zahl führt man gewöhnlich auf die Weise aus, daß man 1. die Anzahl der Ziffern der zu suchenden Wurzel, dann 2. entweder blos die höchste Ziffer oder mehrere höchsten Ziffern derselben, und endlich 3. ihre zunächst folgende Ziffer bestimmt.

Als Grundlage der Bestimmungsweise der Anzahl der Ziffern, mit denen die zu suchende Wurzel geschrieben wird, dient nachstehender Lehrsatz.

Die $n$te Potenz einer $r$ziffrigen Zahl besteht höchstens aus nr und wenigstens aus $nr-n+1$ (oder aus mehr als $nr-n$, aber aus nicht mehr als nr) Ziffern.

Denn ist a eine $r$ziffrige Zahl, so muß einerseits, weil die kleinste von solchen Zahlen mit der Ziffer 1 und $r-1$ nachfolgenden Nullen geschrieben wird, mithin $=10^{r-1}$ ist, $a \overline{\gtrless} 10^{r-1}$, und andererseits, weil die kleinste der $r+1$ ziffrigen Zahlen aus 1 und r Nullen besteht, somit 10^r ist, und da eine jede Zahl kleiner als jede andere mit mehr Ziffern geschriebene ist, $a<10^r$ sein.

Hieraus folgt (nach §. 137, Grundsatz I.)

$$a^n \overline{\gtrless} 10^{nr-n}, \quad a^n < 10^{nr}.$$

Da nun 10^{nr-n} mit $nr-n+1$, 10^{nr} aber mit $nr+1$ Ziffern geschrieben wird, so hat man, wenn p die Anzahl Ziffern der Potenz a^n vorstellt,

$$p \overline{\gtrless} nr-n+1 \text{ und } p<nr+1,$$

oder weil hier ganze Zahlen verglichen werden,

$$p>nr-n, \quad \text{und } p \overline{\lessgtr} nr;$$

welches die Aussage obigen Lehrsatzes in Zeichen darstellt.

Für $n=2$ ist $p \overline{\gtrless} 2r-1, \quad p>2r-2,$

$$p<2r+1, \quad p \leqq 2r,$$

und für $n=3$ hat man $p \overline{\gtrless} 3r-2, \quad p>3r-3,$

$$p<3r+1, \quad p \overline{\lessgtr} 3r.$$

So z. B. besteht die 2te Potenz einer 6ziffrigen Zahl wenigstens aus $2.6-1=11$ und höchstens aus $2.6=12$ Ziffern; die 3te Potenz einer 5ziffrigen Zahl aus 13, 14 oder 15 Ziffern; die 7te Potenz einer 2ziffrigen Zahl wenigstens aus 8 und höchstens aus 14 Ziffern.

§. 252.

Sonach ist es leicht, die Anzahl Ziffern, mit denen eine Wurzel einer gegebenen Zahl geschrieben wird, zu berechnen. Theilt man nemlich die Anzahl der Ziffern, woraus die Zahl besteht, deren Wurzel man sucht, durch den Wurzel-Exponenten, und rechnet statt eines im Quotienten etwa vorkommenden echten Bruches eine volle Einheit, so gibt dieser Quotient die verlangte Anzahl Ziffern der Wurzel.

Denn behalten die eben gebrauchten Buchstaben die ihnen beigelegte Bedeutung, so folgt aus den erwiesenen Vergleichungen

$p>n(r-1)$, $p\overset{=}{<}nr$ sogleich $r-1<\frac{p}{n}$, $r\overset{=}{>}\frac{p}{n}$.

Bezeichnet nun q diejenige ganze Zahl, auf die man geführt wird, wenn man p durch n dividirt und den im Quotienten etwa vorkommenden echten Bruch für eine ganze Einheit rechnet; so ist gewiß $\frac{p}{n}\overset{=}{<}q$ und $\frac{p}{n}>q-1$, also auch $r-1<q$ und $r>q-1$, nemlich $r<q+1$ und $r>q-1$, woraus, weil r und q ganze Zahlen sind, $r=q$ folgt, wie behauptet wurde.

Die hier erklärte Bestimmung der Anzahl Ziffern der Wurzel läßt sich offenbar auch ohne Rechnung dadurch ausführen, daß man die Ziffern derjenigen Zahl, deren Wurzel man sucht, von der Rechten gegen die Linke in Abtheilungen (Classen) von so viel Ziffern, als der Wurzel-Exponent Einheiten enthält, absondert, wornach die Anzahl dieser Classen, wenn man eine etwa nicht vollzählige höchste Classe doch auch für eine ganze zählt, die verlangte Anzahl Ziffern der Wurzel angibt.

So z. B. besteht die 2te Wurzel der 7 und 8ziffrigen Zahlen aus 4, die 3te Wurzel der 13, 14, 15ziffrigen Zahlen aus 5, und die 5te Wurzel der 6, 7, 8, 9, 10ziffrigen Zahlen aus 2 Ziffern.

§. 253.

I. Die Bestimmung einer oder einiger höchsten Ziffern der Wurzel einer Zahl gründet sich auf folgenden Satz.

Läßt man von der $n$ten Wurzel einer besonderen Zahl einige, etwa r, von dieser selbst aber n Mal so viel, nemlich nr, niedrigste Ziffern hinweg, so ist die von den durch die übrigen höchsten Ziffern der Wurzel vorgestellte Zahl die Wurzel der größten in derjenigen Zahl enthaltenen ganzzahligen $n$ten Potenz, welche aus den übrig gebliebenen Ziffern jener besonderen Zahl besteht.

Stellt nemlich α' die Zahl vor, welche die r letzten Ziffern der $n$ten Wurzel einer besonderen Zahl besitzt, wornach α' alle ganzen Zahlen von 0 angefangen bis an 10^r (diese ausgeschlossen) bedeuten kann, und bilden ihre übrigen höchsten Ziffern die Zahl α; machen ferner die nr Endziffern derjenigen Zahl, deren $n$te Wurzel verlangt wird, die Zahl a' aus, welche sonach alle ganzen Zahlen von 0 bis an 10^{nr} (mit Ausnahme dieser) vorstellen kann, und bedeutet a die mit ihren übrigen höheren Ziffern geschriebene Zahl, so läßt sich die gegebene Zahl, deren $m$te Wurzel gesucht wird, durch $10^{nr}a+a'$, ihre $n$te Wurzel aber durch $10^r\alpha+\alpha'$ darstellen, und α^n ist die größte in a enthaltene ganzzahlige $n$te Potenz, oder

$$a \overline{>} \alpha^n \quad \text{und} \quad a < (\alpha+1)^n.$$

Denn weil $\sqrt[n]{10^{nr}a+a'} = 10^r\alpha+\alpha'$ sein soll, muß

$$10^{nr}a+a' = (10^r\alpha+\alpha')^n$$

werden. Da aber $a' < 10^{nr}$ und $\alpha' \overline{>} 0$ ist, so wird, wenn man in der ersten Zahl 10^{nr} statt a' und in der zweiten 0 für α' schreibt, die erstere Zahl gewiß vergrößert, die andere aber sicher nie erhöht, somit ist jeden Falls $10^{nr}a + 10^{nr} > 10^{nr}\alpha^n$, und wenn man beide Zahlen durch 10^{nr} dividirt, (vermög §. 39, Grundsatz III.) $a+1 > \alpha^n$; welche Vergleichung, weil a und α^n ganze Zahlen sind, auch durch $a \overline{>} \alpha^n$ ausgedrückt werden kann.

Eben so muß, weil $a' \overline{>} 0$ und $\alpha' < 10^r$ ist, wenn 0 statt a' und 10^r für α' geschrieben wird, $10^{nr}a < (10^r\alpha + 10^r)^n$, folglich, wenn beide verglichenen Zahlen durch 10^{nr} getheilt werden, (nach §. 39, Grundsatz III.) $a < (\alpha+1)^n$ ausfallen; wornach unsere Behauptung gerechtfertigt ist.

II. Sondert man daher die Ziffern einer besonderen Zahl, deren $n$te Wurzel zu suchen ist, von der Rechten gegen die Linke (etwa durch verticale Striche) in Classen von n Ziffern ab, wobei übrigens die höchste Classe auch weniger Ziffern enthalten kann, so enthält die Zahl, welche aus einigen höchsten Classen der gegebenen Zahl besteht, keine höhere ganzzahlige $n$te Potenz in sich, als die derjenigen Zahl, welche aus eben so viel höchsten Ziffern der $n$ten Wurzel zusammengesetzt ist, als wie viel Classen jene Zahl besitzt. — Insbesondere ist sonach die höchste Ziffer der $n$ten Wurzel einer Zahl die Wurzel der größten in ihrer höchsten Classe enthaltenen ganzzahligen $n$ten Potenz.

Man kann demnach 1, 2, 3, 4,.... höchste Ziffern der $n$ten Wurzel aus einer gegebenen Zahl finden, wenn man sämmtliche 1, 2, 3, 4,....ziffrige Zahlen zur $n$ten Potenz erhebt, und diese Potenzen mit jener Zahl vergleicht, die aus 1, 2, 3, 4,.... höchsten Classen der gegebenen Zahl besteht. Diejenige der potenzirten Zahlen nun, deren $n$te Potenz in dieser von 1, 2, 3, 4,.... höchsten Classen gebildeten Zahl noch eben enthalten ist, so daß dieselbe Potenz der nächst größeren Zahl jene Zahl bereits übersteigt, bietet die gesuchten 1, 2, 3, 4,.... höchsten Ziffern der Wurzel dar. Diese Bestimmung der höchsten Ziffer oder einiger höchsten Ziffern der Wurzeln gegebener Zahlen wird durch die Anwendung von Potenztafeln, wie die im Anhange befindlichen Tafeln II, III, IV, bedeutend erleichtert. So z. B. wird man finden, daß, wenn die beiden höchsten Classen einer Zahl, deren 6ste Wurzel zu suchen ist, die Zahl 455914|181645 ausmachen, 87 die von den beiden höchsten Ziffern dieser 6sten Wurzel gebildete Zahl ist.

III. Wir wollen noch darauf aufmerksam machen, daß aus der obigen Vergleichung $a<(\alpha+1)^n$, welche (vermög §. 250) auch in der Form $a<\alpha^n+n\alpha^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\alpha^{n-2}+\ldots.+n\alpha+1$ angesetzt werden kann, da noch gleichzeitig $a\overline{\overline{>}}\alpha^n$, also $a-\alpha^n$ positiv ist, auch $a-\alpha^n<n\alpha^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\alpha^{n-2}+\ldots.+n\alpha+1$ folgt. Läßt man ferner δ eine ganze Zahl bedeuten, welche kleiner als α ist, so muß $\alpha\overline{\overline{>}}\delta+1$, mithin $\alpha^n\overline{\overline{>}}(\delta+1)^n$ sein.

Wird dies mit $a \overset{=}{>} \alpha^n$ verbunden, so fällt

$$a \overset{=}{>} \delta^n + n\delta^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\delta^{n-2} + \ldots + n\delta + 1, \text{ somit auch}$$

$$a - \delta^n \overset{=}{>} n\delta^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\delta^{n-2} + \ldots + n\delta + 1 \text{ aus.}$$

Versucht man daher bei der Ermittlung einiger, etwa r, höchsten Ziffern der $n$ten Wurzel einer Zahl, für die von ihnen vorgestellte Zahl nach und nach immer größere und größere Zahlen, die überhaupt durch δ angedeutet werden mögen, erhebt sie zur $n$ten Potenz, und zieht diese von der durch eben so viel, nemlich r höchste Classen der gegebenen Zahl ausgedrückten Zahl a ab; so ist der entfallende Rest $a - \delta^n$ größer, oder wenigstens eben so groß (kurz nicht kleiner), als

$$n\delta^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\delta^{n-2} + \ldots . + n\delta + 1,$$

so lange die angenommene Zahl δ noch zu klein ist. Erreicht diese Zahl δ die rechte Größe α, so fällt jener Rest kleiner aus als der angegebene Ausdruck. Eine noch weitere Vergrößerung von δ würde endlich zu Potenzen führen, welche a bereits übersteigen.

Bei dem Ausziehen der zweiten Wurzel ist $n=2$, also

$$a - \delta^2 \overset{=}{>} 2\delta + 1 \text{ und } a - \alpha^2 < 2\alpha + 1;$$

folglich ist die als Wurzel zu versuchende Zahl δ so lange zu klein, als der Rest $a - \delta^2$ nicht kleiner als $2\delta + 1$ ausfällt, und die wahre Zahl α erkennt man daran, daß der Rest $a - \alpha^2$ wirklich kleiner als $2\alpha + 1$ wird. Für das Ausziehen der dritten Wurzel hat man $n=3$, daher

$$a - \delta^3 \overset{=}{>} 3\delta^2 + 3\delta + 1 \text{ und } a - \alpha^3 < 3\alpha^2 + 3\alpha + 1,$$

und somit ist die für die Wurzel gewählte Zahl δ so lange zu klein, als der Rest $a - \delta^3$ nicht kleiner als $3\delta^2 + 3\delta + 1 = 3\delta(\delta + 1) + 1$ ist, während jene Zahl α die rechte ist, bei welcher der Rest $a - \alpha^3$ kleiner als $3\alpha^2 + 3\alpha + 1 = 3\alpha(\alpha + 1) + 1$ ausfällt.

§. 254.

Bei der Verwendung der bereits berechneten Ziffern der Wurzel einer besonderen Zahl zur Bestimmung ihrer nächst kommenden

Ziffer hält man sich an folgende Vorschrift. Man erhebe die von den schon berechneten höchsten Wurzelziffern gebildete Zahl α zur Potenz des Wurzel-Exponenten n, und ziehe diese von derjenigen Zahl a ab, welche aus eben so viel höchsten Classen der vorgelegten Zahl besteht, als wie viel solcher Wurzelziffern bekannt sind. Dem Reste $a-\alpha^n$ hänge man rechts die nächst folgende Ziffer b der gegebenen Zahl an, theile den so vergrößerten Rest $10(a-\alpha^n)+b$ durch $n\alpha^{n-1}$, nemlich durch das Product aus dem Wurzel-Exponenten n und der um einen Grad niedrigeren $n-1$ten Potenz des schon bekannten Wurzeltheils α; und nehme für die nächst kommende Ziffer der Wurzel den entfallenden ganzziffrigen Antheil q dieses Quotienten, so oft er nicht größer als 9 ist; setze jedoch, falls er größer als 9 ausfiele, 9 für die gesuchte Ziffer β an, da diese höchstens 9 werden kann.

Um uns von der Richtigkeit dieses Rechnungsverfahrens zu überzeugen, sei γ diejenige Zahl, welche von den, der Ziffer β folgenden niedrigeren, $r-1$ Wurzelziffern gebildet wird, und c die Zahl, welche aus den, nach der Ziffer b der gegebenen Zahl kommenden, $nr-1$ Ziffern besteht; so ist $10^r\alpha+10^{r-1}\beta+\gamma$ der Ausdruck der $n$ten Wurzel aus der gegebenen Zahl $10^{nr}a+10^{nr-1}b+c$, daher $(10^r\alpha+10^{r-1}\beta+\gamma)^n=10^{nr}a+10^{nr-1}b+c.$

Nun hat man aber

$$(10^r\alpha+10^{r-1}\beta+\gamma)^n=[(10^r\alpha+10^{r-1}\beta)+\gamma]^n$$

$$\overline{\overline{>}}(10^r\alpha+10^{r-1}\beta)^n$$

$$\overline{\overline{>}}10^{nr}\alpha^n+10^{nr-1}.n\alpha^{n-1}\beta,$$

wenn man erwägt, daß sowohl $\gamma\overline{\overline{>}}0$, als auch $\beta\overline{\overline{>}}0$ ist, und wenn man von den Entwicklungen der Potenzen der vorkommenden Binome nur die ersten und höchsten Glieder beibehält. Zugleich ist $c<10^{nr-1}$; daher auch

$$10^{nr}\alpha^n+10^{nr-1}n\alpha^{n-1}\beta<10^{nr}a+10^{nr-1}b+10^{nr-1}.$$

Theilt man sofort diese Vergleichung durch 10^{nr-1}, so übergeht sie in $10\alpha^n + n\alpha^{n-1}\beta < 10a+b+1$, oder, weil die hier verglichenen Zahlen ganz sind, in $10\alpha^n + n\alpha^{n-1}\beta < 10a + b$, woraus $\beta < \frac{10(a-\alpha^n)+b}{n\alpha^{n-1}}$ folgt. Bezeichnet demnach q die in dem Quotienten $\frac{10(a-\alpha^n)+b}{n\alpha^{n-1}}$ enthaltene ganze Zahl, so ist die verlangte Ziffer $\beta \overline{\gtrless} q$.

Da dieselbe jedoch auch nie über 9 steigen kann, so muß man sie gleich 9 annehmen, so oft der Quotient q größer als 9 ausfällt.

Insbesondere hat man bei dem Ausziehen der zweiten Wurzel

$$\beta < \frac{10(a-\alpha^2)+b}{2\alpha},$$

und bei jener der dritten Wurzel

$$\beta < \frac{10(a-\alpha^3)+b}{3\alpha^2}.$$

Dem Lernenden wird es gegenwärtig sehr leicht fallen, aus dem hier Gesagten die allgemeinen Regeln für die Ausziehung jeder Wurzel aus besonderen Zahlen auf dieselbe Weise, wie wir sie für die Ausziehung der zweiten und dritten Wurzel in §. 145 und 151 gegeben haben, wohl geordnet, zusammen zu stellen, oder auch, indem er den Exponenten n durch 2 oder 3 ersetzt, die Richtigkeit des eben citirten Verfahrens bei dem Ausziehen der zweiten und dritten Wurzeln in voller Allgemeinheit und Strenge nachzuweisen. Wir verweilen hiebei nicht, da wir noch in der Lehre von den Logarithmen (§. 268) ein weit bequemeres Mittel zur Berechnung der Wurzeln aus besonderen Zahlen kennen lernen werden.

Auch möchte es wenig Schwierigkeiten machen, die allgemeinen Regeln aufzustellen, nach denen jede Wurzel aus einem algebraischen geordneten Polynom gezogen werden kann, da sie den in §. 139 und 140 von der Ausziehung der zweiten und dritten Wurzel gegebenen ähnlich sind.

VI. Abschnitt.

Von den Logarithmen.

§. 255.

Wenn man eine und dieselbe, übrigens beliebige Zahl a nach einander auf verschiedene Potenzen erhebt, so werden die Exponenten die Logarithmen der hervorgebrachten Potenzen genannt. Z. B. Es sei $a^m = b$, $a^n = c$, $a^p = d$, u. s. w., so ist m der Logarithme von b, n der Logarithme von c, p der Logarithme von d, und wird bezeichnet: $m = \log b$, $n = \log c$, $p = \log d$. Und so ist der Logarithme einer jeden andern Zahl f derjenige Exponent, auf welchen a erhoben werden muß, damit wo möglich f zum Vorschein komme. Vermag man die Logarithmen aller Zahlen zu bestimmen, indem man immer nur dieselbe Zahl a erhebt, d. h. lassen sich alle Zahlen als Potenzen einer und der nemlichen Zahl a darstellen; so erhält man ein logarithmisches System, wovon die Zahl a die Grundzahl genannt wird, weil sie den einmal angenommenen Werth beständig beibehält, und das System gleichsam auf derselben erbaut wird.

§. 256.

Es sei nun auch $A^m = q$, $A^n = r$, $A^p = s$, u. s. w.; so hat man wieder ein logarithmisches System, wovon A die Grundzahl und also $m = \log q$, $n = \log r$, und $p = \log s$ ist. Ist nun $A = a$, so ist wegen $a^m = b$ auch $b = q$, wie auch $c = r$, $d = s$, u. s. w. (§. 137, Grundsatz I.), und man hat eben dasselbe System. Ist aber A von a verschieden, so sind es verschiedene Systeme und auch die Zahlen b, c, d sind von q, r, s verschieden, das heißt: Gleiche Zahlen haben in einerlei Systeme auch gleiche Logarithmen, und in verschiedenen Systemen verschiedene Logarithmen. Und umgekehrt, gleichen Logarithmen entsprechen in einerlei Systeme auch gleiche Zahlen, und in verschiedenen Systemen verschiedene Zahlen.

§. 257.

Die merkwürdigsten allgemeinen Eigenschaften der Logarithmen sind folgende.

1) Man setze in der Gleichung $a^m = b$ den Exponenten $m=0$, so ist (vermög §. 126) $b=1$, und also $0=\log 1$; das heißt, in jedem Systeme ist der Logarithme von $1=0$.

2) Setzt man aber $m=1$, so ist $b=a$, und also $1=\log a$, nemlich in jedem Systeme ist der Logarithme von der Grundzahl $=1$.

3) Nimmt man die Grundzahl a reell und positiv, dabei größer als 1, oder kurz $a>1$ an, so ist (vermög §. 123, II) $b>1$, wenn m eine positive Zahl, und (vermög §. 127) $b<1$, wenn m eine negative Zahl bedeutet, zugleich aber auch b reell und positiv; das heißt, in jedem logarithmischen Systeme, wo die Grundzahl reell, positiv und größer als 1 ist, sind die Logarithmen der reellen positiven Zahlen, welche die Einheit übersteigen, positiv, und die Logarithmen der echten reellen positiven Brüche sind negativ.

4) Wäre aber die Grundzahl a reell, positiv und kleiner als 1, so ist (vermög §. 123, I) $b<1$, wenn m positiv; und (vermög §. 127) $b>1$, wenn m negativ und auch hier b reell und positiv ist; nemlich in jedem logarithmischen Systeme, wo die Grundzahl reell, positiv und kleiner als 1 ist, sind die Logarithmen der echten reellen positiven Brüche positiv, und die Logarithmen der reellen positiven Zahlen, welche die Einheit übersteigen, sind negativ. Da es nun, wie in der Folge deutlich zu ersehen sein wird, wünschenswerth bleibt, die Logarithmen der reellen positiven Zahlen reell und zugleich die der ganzen Zahlen positiv zu erhalten; so sieht man hieraus, daß es am zweckmäßigsten ist, für die Grundzahl eine reelle positive Zahl, welche größer als 1 ist, anzunehmen; hiedurch erhalten nur die reellen positiven Zahlen reelle Logarithmen, die Logarithmen der negativen Zahlen hingegen werden dann unmöglich (imaginär); zugleich sind die Logarithmen aller die Einheit übersteigenden Zahlen positiv, während jene der unter der Einheit liegenden negativ ausfallen.

Im Verlaufe unserer weiteren Untersuchungen über die Logarithmen wollen wir daher stets nicht nur die Grundzahl, welche zu verschiedenen Potenzen erhoben werden soll, reell, positiv und größer als 1, sondern auch die Exponenten (Logarithmen), nach denen sie potenzirt wird, wenigstens reell, wenn auch sowohl positiv als negativ annehmen, wornach die hervorgebrachten Potenzen (die Zahlen) gleichfalls immer reell und positiv, jedoch bald größer, bald kleiner als 1 ausfallen. Wir machen diese Bemerkung hier ein für alle Mal, um in der Folge die Beiwörter: **reell** und **positiv** unterdrücken zu können.

Bei diesen Einschränkungen nun ist es leicht, die Möglichkeit nachzuweisen, jede Zahl als Potenz einer anderen darzustellen, oder ihren Logarithmen zu bestimmen, wenn die letztere als seine Grundzahl angenommen wird. Denn ist a eine beliebige Zahl, gleichviel ob größer oder kleiner als 1 (jedoch nie 1 selbst, weil 1 potenzirt keine andere Zahl als wieder 1 selbst gibt), und bildet man alle ihre durch ganze (positive oder negative) Exponenten angegebenen Potenzen

$$\ldots a^{-5},\ a^{-4},\ a^{-3},\ a^{-2},\ a^{-1},\ a^{0},\ a^{1},\ a^{2},\ a^{3},\ a^{4},\ a^{5},\ldots$$

welche in dieser Ordnung fortwährend steigen oder fallen, je nachdem $a > 1$ oder < 1 ist, so muß jede andere Zahl b selbst, so wie auch jede ihrer gleichfalls nach ganzen Exponenten gebildeten Potenzen

$$\ldots b^{-5},\ b^{-4},\ b^{-3},\ b^{-2},\ b^{-1},\ b^{0},\ b^{1},\ b^{2},\ b^{3},\ b^{4},\ b^{5},\ldots$$

also allgemein die Potenz b^p, wenn p eine beliebige ganze Zahl vorstellt, entweder mit einer der obigen Potenzen von a, z. B. wenn n gleichfalls eine ganze Zahl andeutet, mit a^n völlig übereinkommen, oder zwischen zwei unmittelbar nach einander folgenden Potenzen von a, wie a^n und a^{n+1}, liegen. Im ersten Falle ist $b^p = a^n$, und daher $b = a^{\frac{n}{p}}$; folglich ist, wenn m den Exponenten, nach welchen man die Grundzahl a potenziren muß, um die Zahl b zu finden, oder den Logarithmen der Zahl b für die Grundzahl a vorstellt, somit, wenn allgemein $b = a^m$ gesetzt wird, der gewünschte Logarithme $m = \frac{n}{p}$.

Im zweiten Falle aber, wo b^p zwischen a^n und a^{n+1} zu liegen kommt, muß auch b oder a^m zwischen $a^{\frac{n}{p}}$ und $a^{\frac{n}{p}+\frac{1}{p}}$, folglich

m zwischen $\frac{n}{p}$ und $\frac{n}{p}+\frac{1}{p}$ liegen. Man kann demnach für den zu suchenden Logarithmen m immer zwei rationale Zahlen $\frac{n}{p}$ und $\frac{n}{p}+\frac{1}{p}$ finden, welche nur um $\frac{1}{p}$ von einander verschieden sind, zwischen denen jener Logarithme liegt, und von denen er daher einzeln um weniger als $\frac{1}{p}$, ja sogar von demjenigen, dem er näher liegt, um weniger als $\frac{\frac{1}{2}}{p}=\frac{1}{2p}$ absteht. Da sich nun die Zahl p ganz nach Belieben vergrößern, folglich der zwischen $\frac{n}{p}$ und $\frac{n}{p}+\frac{1}{p}$ bestehende Unterschied $\frac{1}{p}$, so weit man es immer wünschen mag, verkleinern läßt; so kann man, wenn man für den verlangten Logarithmen m willkürlich eine der zwei Zahlen $\frac{n}{p}$ und $\frac{n}{p}+\frac{1}{p}$ annimmt, den hiebei unvermeidlichen Fehler jedenfalls unter $\frac{1}{p}$, ja sogar, wenn man die an ihm näher liegende dieser beiden Zahlen ermitteln kann, unter $\frac{1}{2p}$ herabbringen, somit auch immer diesen Logarithmen von b mit jeder verlangten Schärfe, wenn gleich in den meisten Fällen nicht völlig genau, bestimmen.

Hiezu läßt sich noch beifügen, daß, wenn (was wir fortan immer voraussetzen wollen) die Grundzahl a größer als 1 ist, auch, je größer die Zahl ist, desto größer der dazu gehörige Logarithme ausfällt; weil dann b in der Gleichung $a^m=b$ immer um so größer wird, je größer man m annimmt.

5) Wenn $a^m=b$ und $a^n=c$ ist, so ist auch $a^m.a^n=a^{m+n}=bc$ (§. 29, Grundsatz I.), und also $m+n=\log bc$. Es ist aber auch $m=\log b$, und $n=\log c$; folglich $\log bc=\log b+\log c$; das heißt, der Logarithme eines Productes besteht aus der Summe der Logarithmen der Factoren.

Daß dieser Satz sich auch auf ein Produkt mehrerer Factoren erstrecke, ist leicht einzusehen. Denn es sei $c=df$, so ist $\log bc=\log b+\log df=\log b+\log d+\log f$.

6) Da $a^m = b$ und $a^n = c$, so ist auch (§. 39, Grundsatz I.) $a^{m-n} = \frac{b}{c}$; also $m - n = \log\frac{b}{c}$; oder wenn man für m und n die gleichen Werthe $\log b$ und $\log c$ setzt, so ist $\log\frac{b}{c} = \log b - \log c$; nemlich der Logarithme eines Quotienten besteht aus dem Logarithmen des Dividends weniger dem Logarithmen des Divisors; oder der Logarithme eines Bruches besteht aus dem Logarithmen des Zählers weniger dem Logarithmen des Nenners.

7) Da $a^m = b$ ist, so ist auch $b^r = a^{rm}$ (vermög §. 137, Grundsatz I.) und also $\log b^r = rm$; oder $\log b^r = r\log b$; nemlich der Logarithme einer Potenz b^r besteht aus dem Logarithmen der Wurzel b multiplicirt mit dem Exponenten r der Potenz.

8) Da $a^m = b$; so ist auch $\sqrt[r]{b} = a^{\frac{m}{r}}$ (vermög §. 137, Grundsatz II.); daher $\log\sqrt[r]{b} = \frac{m}{r}$, und endlich $\log\sqrt[r]{b} = \frac{\log b}{r}$; nemlich der Logarithme einer Wurzelgröße $\sqrt[r]{b}$ besteht aus dem Logarithmen der Potenz b dividirt durch den Wurzel-Exponenten r.

Aus diesen angeführten Sätzen erhellet nun, daß es bei der Berechnung der Logarithmen nur nöthig sei, die Logarithmen der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, ... zu berechnen, weil die übrigen durch eine blose Addition oder Multiplication leicht daraus zu bestimmen sind.

§. 258.

In dem gewöhnlichen logarithmischen Systeme, welches das gemeine, oder Briggische System genannt, und am meisten in der Mathematik gebraucht wird, hat man die Grundzahl $a = 10$ gesetzt. Es ist sodann, weil

$10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10000$, ... ist,
$\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$, $\log 1000 = 3$, $\log 10000 = 4$, u. s. w.

Eben so ist, weil

$$10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10},\ 10^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{10},\ 10^{\frac{1}{x}}=\sqrt[x]{10},\ 10^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{10^{m}} \text{ ist,}$$

$$\tfrac{1}{2}=\log\sqrt{10},\ \tfrac{1}{3}=\log\sqrt[3]{10},\ \frac{1}{x}=\log\sqrt[x]{10},\ \frac{m}{n}=\log\sqrt[n]{10^{m}}.$$

Hieraus erhellet, daß die Logarithmen der rationalen Potenzen der Grundzahl ganze rationale Zahlen, die Logarithmen der mit gebrochenen Exponenten versehenen Potenzen der Grundzahl rationale Brüche, und die Logarithmen aller übrigen Zahlen irrational sein müssen, weil es nicht möglich ist, eine rationale Grundzahl auf irgend einen Exponenten zu erheben, daß eine solche Zahl vollkommen genau zum Vorschein komme.

§. 259.

Übrigens kann man im Brigg'schen Systeme doch sicher schließen, daß die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10 kleiner als 1, und größer als 0 sein müssen; daß die Logarithmen der Zahlen zwischen 10 und 100 aus einer Einheit nebst einem echten Bruche, die Logarithmen der Zahlen zwischen 100 und 1000 aus zwei Einheiten nebst einem echten Bruche, die Logarithmen der Zahlen zwischen 1000 und 10000 aus drei Einheiten nebst einem echten Bruche, überhaupt, daß der Logarithme einer jeden ganzen Zahl aus so viel ganzen Einheiten, als die Zahl Ziffern hat, weniger 1, nebst einem echten Bruche bestehen müsse, welche Brüche nur näherungsweise durch Decimalbrüche ausgedrückt werden können, die der Wahrheit um so näher kommen, je mehr Decimalstellen man bei denselben zu bestimmen trachtet. Auch wird deßwegen die Ziffer des Logarithmen, welche die ganzen Einheiten anzeigt, die Kennziffer oder Charakteristik genannt; weil man diese sogleich kennt, sobald die Anzahl der Ziffern von der dem Logarithmen zugehörigen Zahl bekannt ist; und umgekehrt, weil man aus der Kennziffer eines Logarithmen sogleich erkennt, aus wie viel Ziffern die demselben entsprechende Zahl bestehen muß. Außerdem nennt man den ganzzahligen Inbegriff der Decimalziffern des Logarithmen die Mantisse. So ist z. B. $\log 726=2{,}8609366$, also 2 die Charakteristik und 8609366 die Mantisse des Logarithmen von 726; eben so hat man $\log 10026=4{,}0011277$, daher ist 4 die Charakteristik und 0011277 die Mantisse dieses Logarithmen. Es begreift sich leicht von selbst, daß man hier bei der Mantisse die an den ersten Decimalstellen befindlichen Nullen zur Begegnung von Mißverständnissen nicht weglassen dürfe, weil die Mantisse 11277 dem aus 5 Decimalziffern bestehenden Logarithmen 4,11277 angehören würde. Deßwegen ist es auch gut, die Mantisse nicht als ganze Zahl zu lesen, sondern ihre Ziffern von links nach rechts einzeln auszusprechen.

Auch ist leicht einzusehen, daß in eben diesem Brigg'schen Systeme der Logarithme einer Zahl, welche hinten Nullen bei sich führt, dem Logarithmen der bedeutenden Ziffern in seinen Decimalstellen vollkommen gleiche, und nur in der Charakteristik um eben so viel Einheiten größer sei, als die Zahl hinten Nullen hat. So z. B. ist $\log 3564000 = \log 3564 \times 1000 = \log 1000 + \log 3564 = 3 + \log 3564$.

Eben so ist auch $\log 654{,}89 = \log \dfrac{65489}{100} = \log 65489 - 2$,

$\log 0{,}0936 = \log \dfrac{936}{10000} = \log 936 - 4$; das heißt, der Logarithme eines Decimalbruches ist in den Decimalstellen dem Logarithmen eben dieser Zahl als einer ganzen Zahl betrachtet, völlig gleich, und nur allein in der Charakteristik um eben so viel Einheiten kleiner, als Decimalstellen bei der vorgelegten Zahl vorhanden sind.

Die Logarithmen aller mit denselben bedeutenden Ziffern geschriebenen ganzen Zahlen und Decimalbrüche, besitzen daher durchgehends dieselbe Mantisse. So z. B. bestehen die Logarithmen der mit den nemlichen bedeutenden Ziffern geschriebenen Zahlen 237000, 2370, 2,37, 0,0237, 0,0000237 aus derselben Mantisse 3747483, wie jener, welcher der aus den nemlichen geltenden Ziffern bestehenden ganzen Zahl 237 angehört, und unterscheiden sich nur in der Kennziffer. Man wird demnach blos die Mantissen der Logarithmen von ganzen Zahlen zu suchen haben.

§. 260.

Man kann sich aber dem Logarithmen einer Zahl, welche keine vollkommene Potenz von der Grundzahl ist, hinreichend nähern, wenn man etwa auf demselben Wege, welcher uns (in §. 257, 4) zur Erkenntniß der Möglichkeit, Logarithmen überhaupt zu bestimmen, leitete, nach und nach eine solche irrationale Potenz der Grundzahl aufsucht, welche von der gegebenen Zahl nur um einen so kleinen Bruch verschieden ist, daß er bei einer vorkommenden Rechnung für nichts geachtet, und der Exponent jener Potenz für den verlangten Logarithmen, ohne einen erheblichen Fehler zu begehen, gesetzt werden darf. Eine andere Methode besteht dem Wesentlichen nach in Folgendem. Wenn z. B. der Briggische Logarithme von 5 zu berechnen wäre, so suche man, da 5 zwischen 10^0, und 10^1 liegt, zwischen diesen zwei Potenzen (nach §. 184) die mittlere geometrische Proportionalzahl $=10^{\frac{1}{2}}=3{,}1622776601$. Da nun $10^{\frac{1}{2}}<5$ ist, so suche man zwischen $10^{\frac{1}{2}}$ und 10 die mittlere Proportionale $=10^{\frac{3}{4}}=5{,}623413251$. Da aber $10^{\frac{3}{4}}>5$ ist, suche man zwischen $10^{\frac{3}{4}}$ und $10^{\frac{1}{2}}$ wieder die mittlere Proportionale $=10^{\frac{5}{8}}=4{,}216965034$. Ferner suche man wieder zwischen $10^{\frac{5}{8}}$ und $10^{\frac{3}{4}}$ die mittlere Proportionale $=10^{\frac{11}{16}}=4{,}869675252$. Auf diese Art fahre man fort, und suche jedesmal zwischen der nächst kleinern und nächst größern schon bekannten Potenz der Grundzahl die mittlere geometrische Proportionale, so wird man sich immer mehr und mehr der Zahl 5 nähern; und man kann die Arbeit so lange fortsetzen, bis man eine Potenz erhält, die nicht mehr merklich von der Zahl 5 verschieden ist. So z. B. würde man, wenn man auf diese Art 22 mittlere Proportionalen sucht, die Potenz $10^{\frac{2931693}{4194304}}$ $=5{,}000000864\ \ldots$ erhalten, welche von der Zahl 5 nicht mehr um $\frac{1}{1000000}$ verschieden ist. Man kann darum in den Rechnungen, wo $\frac{1}{1000000}$ nicht mehr zu achten ist, $\log 5=\frac{2931693}{4194304}$ $=0{,}6989700\ \ldots$ setzen, wo nur die sieben ersten Decimalziffern richtig sind, weil die Potenz der Grundzahl nur bis auf die siebente Decimalstelle übereinstimmt.

Man sieht hieraus, daß man die Arbeit noch weiter fortsetzen, und jede mittlere Proportionale mit mehr als sieben Decimalstellen entwickeln müßte, wenn man den Logarithmen mit mehr als sieben Decimalstellen richtig bestimmen wollte.

Beiläufig auf diesen zwei ungemein beschwerlichen Wegen hat der Engländer Heinrich Briggs und zwar auf dem ersten Wege die Logarithmen von 2 und 7, auf dem zweiten aber die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 20000 und von 90000 bis 100000 mit 14 Decimalstellen berechnet; hernach hat Adrian Vlacq die Lücke von 20000 bis 90000 mit 10 Decimalstellen ausgefüllt, welche Logarithmen sodann in ordentliche Tabellen eingetragen wurden, so, daß man zu jeder Zahl, die zwischen diese Grenzen fällt, den dazu gehörigen Logarithmen, und umgekehrt zu jedem gegebenen Logarithmen die entsprechende Zahl sogleich finden kann. Solche Tabellen sind unter dem Namen logarithmische Tafeln allgemein bekannt.

Weiter hinten, bei der Lehre von den unendlichen Reihen (die aber zu Briggs und Vlacq's Zeiten noch nicht bekannt waren), wird gezeigt werden, wie die Logarithmen aller Zahlen auf eine ungemein kürzere Art hätten berechnet werden können. Übrigens macht die genaue Kenntniß der Wesenheit der Logarithmen, welche beide Gelehrte in ihren Werken an Tag legen, und die kurze Zeit, in der sie so ausgedehnte Tafeln zu Stande brachten, es höchst wahrscheinlich, daß sie sehr zweckmäßige Hilfstafeln und Rechnungsmethoden besaßen, welche jedoch seither in Vergessenheit geriethen.

§. 261.

Der logarithmischen Tafeln gibt es heutigen Tages eine Menge. In den meisten sind die Logarithmen mit sieben Decimalziffern anzutreffen, weil dieselben fast in allen Fällen hinlängliche Genauigkeit gewähren, doch enthalten einige auch blos 6 oder 5, ja sogar nur 4 Ziffern, je nach den Zwecken, für welche sie bestimmt sind. Gewöhnlich geben sie nur die Mantissen der ganzen Zahlen an, weil die Kennziffer leicht aus der Anzahl der Ziffern, womit die Zahl geschrieben wird, durch Verminderung um 1 gefunden werden kann. Die Tafeln von 7stelligen Logarithmen enthalten in der Regel die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 100000 in ihrer natürlichen Folge. Es wäre überflüssig, ausführliche Beschreibungen von verschiedenen logarithmischen Tafeln hier einzurücken, und deren Einrichtungen zu erläutern. Es ist am besten, bei dieser Gelegenheit, eine logarithmische Tafel in die Hand zu nehmen, und deren Einrichtung, wie auch den Gebrauch derselben aus der beigefügten Einleitung zu erlernen. Hiezu dürfte vorzüglich dienlich sein, Vega's Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch, anstatt der kleinen Vlacquischen, Wolfischen, und andern dergleichen meistens sehr fehlerhaften logarithmisch-trigonometrischen Tafeln, für die Mathematik-Beflissenen eingerichtet; Leipzig in der Weidmann'schen Buchhandlung 1800, welches gegenwärtig stereotypirt ist, im Jahre 1837 schon die 16. Auflage erlebte, und bei seiner Vollständigkeit und Richtigkeit in einem verhältnißmäßig sehr billigen Preise steht. Denjenigen, welche sich mit der ausübenden Mathematik beschäftigen, dürften Vega's Logarithmisch-trigonometrischen Tafeln nebst andern zum Gebrauche der Mathematik eingerichteten Tafeln und Formeln in zwei Bänden; Leipzig in der Weidmann'schen Buchhandlung 1797, sehr nützlich sein; so wie diejenigen, die äußerst feine mathematische Berechnungen zu machen haben, Vega's vollständige Sammlung größerer logarithmisch-trigonometrischer Tafeln (*Thesaurus logarithmorum completus*) *in Folio*. Leipzig in der Weidmann'schen Buchhandlung 1794, hiezu geeignet finden werden.

§. 262.

I. Das Allgemeinste, was sich über die Einrichtung der Tafeln der Logarithmen der Zahlen sagen läßt, ist beiläufig Folgendes. In mehreren, vorzüglich älteren Tafeln, laufen sämmtliche Zahlen, von der kleinsten angefangen, in verticalen Columnen (Spalten) in natürlicher Folge bis zur größten fort; zu ihrer Rechten stehen auf denselben (horizontalen) Zeilen die ihnen angehörigen Logarithmen oder auch nur die Mantissen derselben, deren Gesammtheit abermals in verticalen Spalten, ununterbrochen wachsend, fortläuft. Um jedoch solche Tafeln ohne Schmälerung ihres Inhaltes auf einen viel kleinern Raum zusammenstellen zu können, hat man folgende, zwischen den Zahlen und ihren Logarithmen bestehende, Beziehungen benützt. Während die Zahlen von einer bestimmten angefangen bis zu dem Zehnfachen derselben fortlaufen, wachsen dem früher Erläuterten (§. 259) gemäß ihre Logarithmen im Ganzen nur um eine Einheit, zugleich liegen zwischen diesen zwei Grenzen desto mehr Zahlen, je größer sie sind. So z. B.

während die Zahlen	also um	Einheiten fortschreiten, wachsen die Logarithmen
von 1 bis 10	9	von 0 bis 1
= 10 = 100	90	= 1 = 2
= 100 = 1000	900	= 2 = 3
= 1000 = 10000	9000	= 3 = 4
u. s. w.		

Es muß demnach die den Logarithmen zuwachsende Einheit in desto mehr, wenn auch ungleiche Theile zerfällt, und daher jeder solche Theil um so kleiner, folglich auch der Unterschied zwischen den Logarithmen je zweier unmittelbar nach einander folgender Zahlen um so geringer werden, je mehr Zahlen zwischen die beiden Grenzen fallen. So wird in unserem Beispiele die Einheit, um welche die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10 zunehmen, nur in 9 Theile,
bei jenen = 10 = 100 aber in 90 =
bei denen = 100 = 1000 schon in 900 =
u. s. w., kurz in den nach einander folgenden Intervallen immer in 10 Mal mehr Theile getheilt.

Hieraus folgt nothwendig, daß die Logarithmen von nur um einige Einheiten unterschiedenen Zahlen in desto mehr ersten Ziffern, also ihre Mantissen in ihren ersten Decimalziffern übereinstimmen müssen, und daß die Vergrößerung einer solchen Ziffer nach desto mehr, der Zahl zuwachsenden, Einheiten eintritt, je größer diese Zahlen sind.

So z. B. beginnen die Mantissen der Logarithmen aller Zahlen von 100 bis 125 mit 0, jene von 126 bis 158 mit 1, die Mantissen von 399 bis 407 mit 60, jene von 603 bis 616 mit 78, die von 1000 bis 1023 mit 00, die von 3020 bis 3090 mit 48 von 3020 bis 3026 mit 480, von 10000 bis 10023 mit 000, u. s. w., wie man sich leicht mittels einer Logarithmentafel überzeugen kann.

Wegen dieser Eigenschaften der Logarithmen behält man seit Newton in größeren logarithmischen Tafeln die Nebeneinanderstellung der Zahlen- und Logarithmen-Columnen gewöhnlich nur bis zur Zahl 100 oder 1000 bei, je nachdem die Tafel bis 10000 oder 100000 sich erstreckt; in der späteren Abtheilung aber trennt man zur Ersparung von Raum, die immer widerkehrenden Ziffern

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

der Einer der Zahlen ab, und stellt sie in die oberste horizontale Zeile, während man die aus den übrigen Ziffern bestehenden Zahlen in der ersten verticalen Spalte nach der natürlichen Ordnung fortlaufen läßt. Sofort setzt man mit Weglassung der ohnedies leicht bestimmbaren Kennziffern in verticalen Columnen die mit obigen 10 Ziffern überschrieben sind, vor den Mantissen der mit einerlei Ziffer der Einer sich endigenden Zahlen, die letzten 3 oder 4 Ziffern, während man die gleichen 2 oder 3 Anfangsziffern in die mit 0 überschriebene Spalte aufnimmt.

Sonstige besondere und eigenthümliche Einrichtungen der Logarithmentafeln müssen aus der ihnen beigefügten Erläuterung und wirklichen Anschauung derselben erlernt werden.

II. Soll nun zu einer bekannten ganzen Zahl die Mantisse ihres Logarithmen aus einer logarithmischen Tafel entnommen werden, und ist jene Zahl in der zu Gebote stehenden Tafel noch enthalten, so wird man die Zahl aufsuchen und die ihren Logarithmen angehörige Mantisse herausnehmen, was bei genauer Kenntniß der Einrichtung der Tafel und nur einiger Übung äußerst leicht ist.

Wäre aber diese Zahl in der Tafel nicht mehr enthalten, so wird man die oben gemachte Bemerkung über die unmerklichen Änderungen der Zunahme der Logarithmen von benachbarten Zahlen benützen, von denen wir vorläufig noch etwas umständlicher handeln wollen.

Wenn man in den logarithmischen Tafeln die Logarithmen von drei nach einander folgenden Zahlen vergleicht, so findet man, daß die Differenzen immer mehr und mehr einander gleichen, je größer die den Logarithmen entsprechenden Zahlen werden, und zwar so, daß dieselben, wenn die Zahlen schon größer als 1000 sind, nur noch in der siebenten Decimalstelle um einige wenige Einheiten von einander unterschieden sind. Nähern sich aber die Zahlen schon gegen 10000, so beträgt der Unterschied in der siebenten Decimalstelle keine ganze Einheit mehr; als z. B.

Zahlen	Logarithmen	Differenzen
1001	3,0004341	
		0,0004336
1002	3,0008677	
		0,0004332
1003	3,0013009	

Hier sind die Differenzen nur noch in der letzten Decimalstelle um 4 Einheiten verschieden.

Zahlen	Logarithmen	Differenzen
9988	3,9994785	
		0,0000435
9989	3,9995220	
		0,0000435
9990	3,9995655	

Hier sind demnach die Differenzen um keine Einheit in der siebenten Decimalstelle mehr verschieden.

Nimmt man aber drei Zahlen an, die um keine ganze Einheit von einander verschieden sind, so trifft dies schon bei den Zahlen, die nur 1000 übersteigen, so viel als vollkommen überein; als z. B.

Zahlen	Logarithmen	Differenzen
1031	3,0132587	
		0,0002105
$1031\frac{1}{2}$	3,0134692	
		0,0002105
1032	3,0136797	

Man kann demnach den Satz für richtig annehmen, daß, wenn bei Zahlen, die größer als 1000, und um keine Einheit mehr von einander verschieden sind, die Zunahmen (der Zahlen) 2, 3, 4, . . . Mal größer werden, auch die Zunahmen der Mantissen ihrer Logarithmen 2, 3, 4, . . . Mal sich vergrößern, oder daß **die Differenzen der Zahlen sich gegen einander verhalten, wie die Differenzen der den Zahlen zugehörigen Logarithmen, oder wie die Differenzen der Mantissen dieser Logarithmen.** Denn es ist $(1032-1031):(1031\frac{1}{2}-1031)=$
$(\log 1032-\log 1031):(\log 1031\frac{1}{2}-\log 1031)$;
nemlich $1:\frac{1}{2}=0{,}0004210:0{,}0002105$
oder auch $(1032-1031):(1031\frac{1}{2}-1031)=$
$(\text{mant}\log 1032-\text{mant}\log 1031):(\text{mant}\log 1031\frac{1}{2}-\text{mant}\log 1031)$,
nemlich $1:\frac{1}{2}=4210:2105$.

§. 263.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man nun auch den Logarithmen einer Zahl finden, welche die Grenzen der Tafeln übersteigt; z. B. es wäre nach einer Tafel, welche nur die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000 enthält, der Logarithme von 5462389 zu finden, so verfahre man auf folgende Art. Man schneide von der Zahl so viel Ziffern durch ein Komma ab, daß man eine ganze Zahl nebst einem Decimalbruche erhalte, welche zwischen die Grenzen der Tafel fällt. In unserm Beispiele ist sodann 5462,389, wozu eigentlich der Logarithme gesucht wird. Aus dem gefundenen log 5462,389 folgt dann unmittelbar log 5462389, weil (vermög §. 259) diese zwei Logarithmen in den Decimalstellen vollkommen gleich sind, oder dieselbe Mantisse haben. Da nun
$\text{mant}\log 5462,389 > \text{mant}\log 5462$, und auch
$\text{mant}\log 5462,389 < \text{mant}\log 5463$ sein muß; so sei
$\text{mant}\log 5462,389 = \text{mant}\log 5462 + \mu$, wobei man, um bequemer zu rechnen, die Mantissen der Logarithmen einstweilen wie ganze Zahlen behandelt; und es ist (vermög §. 262), weil diese drei Zahlen um keine ganze Einheit von einander unterschieden sind,
$(5463 - 5462) : (5462,389 - 5462) =$
$(\text{mant}\log 5463 - \text{mant}\log 5462) : (\text{mant}\log 5462,389 - \text{mant}\log 5462)$;
nemlich, wenn $\text{mant}\log 5463 - \text{mant}\log 5462 = \Delta$ gesetzt wird, $1 : 0,389 = \Delta : \mu$, folglich $\mu = 0,389\Delta$. Um daher diejenige Zahl zu finden, welche man der Mantisse des Logarithmen der nächst kleineren Zahl zuzugeben hat, um jene des gesuchten Logarithmen zu erhalten, multiplicirt man den von der gegebenen Zahl abgeschnittenen Decimalbruch mit dem Unterschiede der Mantissen der Logarithmen der nächst kleineren und größeren Zahl. Endlich setzt man dieser Mantisse die ihr (vermög §. 259) angehörige Charakteristik vor, so hat man den gesuchten Logarithmen.

In unserem Beispiele ist

mant log $5463=7374312$		
mant log $5462=7373517$		oder abgekürzt
Differenz $\Delta=$ 795	mult.	795
Abgeschnittener Decimalbruch $=$ 0,389		9830
7155		2385
6360		636
2385		71
Product $309,255=\mu$		$309,2=\mu$

daher ist

$$\begin{array}{r} \text{mant log } 5462=7373517 \\ \text{Zugabe } \mu= \quad 309 \\ \hline \text{mant log } 5462389=7373826 \end{array}$$

und folglich log $5462389=6,7373826$.

Soll überhaupt von einer ganzen Zahl, welche in einer bestimmten Logarithmentafel nicht enthalten ist, die Mantisse ihres Logarithmen gesucht werden, und muß man von ihrer Rechten den Decimalbruch a abschneiden, damit die zurückbleibende ganze Zahl A noch in der Tafel vorkomme; so wird die gesuchte Mantisse (nach §. 259) mit jener der Zahl $A+a$ ganz übereinkommen. Nun liefert die Tafel nicht blos die Mantissen des Logarithmen von A, sondern auch jene M des Logarithmen der nächst größeren Zahl $A+1$, daher auch den Unterschied beider, $M-m$, welcher der Kürze wegen mit Δ bezeichnet werden mag. Wächst daher, während die Zahl von A bis $A+1$ um 1 zunimmt, die Mantisse von m bis M um $\Delta=M-m$; so muß, wenn die Zahl von A nur bis $A+a$ um a wächst, die Mantisse von m an, um a Mal Δ oder $a\Delta=\mu$ zunehmen, (welche Zunahme μ man auch mittels der nunmehr leicht anzusetzenden Regeldetri $1:a=\Delta:\mu$ bestimmen kann), folglich wird die gesuchte Mantisse des Logarithmen von $A+a$ gleich $m+\mu$ gefunden.

Daß man bei dieser Division die Ergänzung μ der Mantisse nur in Ganzen ohne weitere Annäherung bestimmen müsse, ist leicht einzusehen; weil diese Ganzen (vermög §. 262) nur zehnmillionte Theilchen sind, und die achte Decimalstelle ohnehin nicht mehr richtig erhalten wird; weßwegen auch die letzte Ziffer um 1 vermehrt werden muß, wenn der Rest größer als $\frac{1}{2}$ ist.

Die angeführte Bestimmung der Ergänzung μ der Mantisse kann auch noch, statt durch eine Regeldetri oder Multiplication, blos durch eine einfache Addition ausgeführt werden. Enthält nemlich der Decimalbruch a, welcher von der gegebenen Zahl abgeschnitten wurde, vom Decimalstriche an die Ziffern α, β, γ, . . ., folglich α Zehntel, β Hundertel, γ Tausendtel, u. s. w.; so ist

$$a = \frac{\alpha}{10} + \frac{\beta}{100} + \frac{\gamma}{1000} + \cdots,$$

mithin die Ergänzung $\mu = \frac{\alpha}{10}\Delta + \frac{\beta}{100}\Delta + \frac{\gamma}{1000}\Delta + \cdots$

oder auch $\mu = \alpha\frac{\Delta}{10} + \frac{1}{10}.\beta\frac{\Delta}{10} + \frac{1}{100}.\gamma\frac{\Delta}{10} + \cdots$

Nun läßt sich aber sehr leicht zu jeder Differenz Δ der Mantissen der Logarithmen von der nächst größeren und nächst kleineren in der Logarithmentafel enthaltenen Zahl ein Täfelchen berechnen, in welchem das 1, 2, 3, . . . 9fache des zehnten Theils dieser Differenz aufgeführt ist, und aus dem sonach zu den bekannten Decimalziffern α, β, γ, . . . die Beträge der Producte $\alpha\frac{\Delta}{10}$, $\beta\frac{\Delta}{10}$, $\gamma\frac{\Delta}{10}$,... entnommen werden können. Solche Täfelchen befinden sich wirklich in den meisten neueren Logarithmentafeln und man pflegt die 1, 2, 3, . . . 9fachen des zehnten Theils der betreffenden Mantissen-Differenz die den Ziffern 1, 2, 3, . . . 9 entsprechenden Proportionaltheile der Differenz (partes proportionales differentiae) zu nennen. *)

Bezeichnen wir nun die obigen Producte $\alpha\frac{\Delta}{10}$, $\beta\frac{\Delta}{10}$, $\gamma\frac{\Delta}{10}$, . . ., welche daher auch die den Ziffern α, β, γ, . . . entsprechenden Proportionaltheile der Mantissen-Differenz Δ sind, der Kürze wegen mit α', β', γ', . . .; so wird die Ergänzung der Mantisse

$$\mu = \alpha' + \frac{1}{10}\beta' + \frac{1}{100}\gamma' + \cdots$$

*) Gewöhnlich sind diese Proportionaltheile mit Weglassung der Zehntel nur in corrigirten ganzen Einheiten berechnet.

Hier kann man die Theilung durch 10, 100, . . . auch sehr leicht dadurch ausführen, daß man bei dem Untereinanderschreiben der Proportionaltheile α', β', γ', . . . jede folgende mit ihrer Endziffer um eine Stelle an der Rechten herausrückt.

Somit wird man, um die Ergänzung der nächst kleineren Mantisse zur gesuchten zu finden, für die von der gegebenen Zahl rechts abgeschnittenen Ziffern, in ihrer Folge von der Linken gegen die Rechte, die entsprechenden Proportionaltheile aus der Tafel herausnehmen, und diese unter der nächst kleineren Mantisse dergestalt ansetzen, daß jede folgende um eine Stelle rechts herausgerückt wird. Hierauf addirt man diese Zusätze zur Mantisse, behält jedoch in der Summe nur eben so viel Ziffern für die gesuchte Mantisse bei, als deren in den Mantissen der Tafel vorkommen, und corrigirt die Endziffer nach der ersten weggelassenen Ziffer. Es leuchtet wohl von selbst ein, daß man in der Herausnahme von Proportionaltheilen nicht weiter zu gehen habe, als bis die höchste Ziffer des zuletzt angeschriebenen Proportionaltheils über die Endziffer (Einer) der Mantisse rechts herausragt, oder an die Stelle der Zehntel zu stehen kommt.

Zur Erläuterung dieses Verfahrens suchen wir mit Hilfe einer Tafel, welche die Logarithmen der Zahlen bis 100000 in 7 Stellen enthält, den Logarithmen von 78423659. Schneiden wir 3 Ziffern am Ende hinweg, und suchen nunmehr nur die Mantisse des Logarithmen der Zahl 78423,659, so gibt die Tafel

$$\begin{array}{r} \text{mant log } 78424 = 8944490 \\ \text{mant log } 78423 = 8944435 \\ \hline \end{array}$$

also ist ihre Differenz		=	55
ferner hat man mant log 78423		=	8944435
Proportionaltheil zur Ziffer	6	=	33
" " "	5	=	28
" " "	9	=	50

daher ist mant log 78423659 = 8944471

und log 78423659 = 7,8944471.

Damit die Rechnung vereinfacht werde, genügt es, blos die letzten 3 oder 4 Ziffern der Mantisse, welche eine Abänderung erfahren, aus der Logarithmentafel abseits zu schreiben, und an sie die Proportionaltheile zu fügen, nachdem man die Differenz der Mantissen, zwischen welche die gesuchte fällt, mittels Subtraction in der Tafel selbst bestimmt hat. Darnach steht die nunmehr leicht begreifliche Rechnung, wie folgt.

$$\begin{array}{lr} \log 78423659 = 7{,}8944471 & 4435 \\ & 33 \\ & 28 \\ & 50 \\ \hline & 4471 \end{array}$$

§. 264.

Wenn man auf diese Art den Logarithmen zu einer Zahl sucht, die aus 8 Ziffern besteht, so findet man, daß wegen der achten Ziffer der Logarithme in der siebenten Decimalstelle höchstens um 4 Einheiten größer werden kann, und zwar nur dann, wenn die erste Ziffer der Zahl ein 1, und die achte ein 9 ist; in den übrigen Fällen aber ist meistens der Logarithme einer Zahl mit 8 Ziffern dem Logarithmen der 7 ersten Ziffern bis in die siebente Decimalstelle vollkommen gleich, oder um eine Einheit in der letzten Decimalstelle verschieden. Wenn demnach zu einer Zahl, welche aus mehr als 8 Ziffern besteht, der Logarithme gesucht werden soll, so suche man denselben nur zu den 7 oder 8 ersten Ziffern auf, und setze die gehörige Charakteristik vor. Z. B. Es wäre log 1009345976 zu suchen; so findet man (nach §. 263) mant log 10093459 = 0040400, und log 1009345976 = 9,0040400. Eben so findet man mant log 7985435 = 9022986 und log 798543598 = 8,9022986.

Hat aber eine Zahl hinten Nullen bei sich, so suche man nur zu den bedeutenden Ziffern den Logarithmen, und vermehre die Charakteristik um so viel Einheiten, als hinten Nullen folgen (vermög §. 259).

§. 265.

Wenn zu einer Decimalzahl, d. i. zu einer ganzen Zahl nebst einem angehängten Decimalbruche, der Logarithme gesucht werden soll, so darf man überhaupt nur (nach §. 263) den Logarithmen aufsuchen, als wenn es lauter Ganze wären, und die Charakteristik um so viel Einheiten vermindern, als Decimalstellen vorhanden sind. Noch einfacher und eben so einleuchtend ist es, die Charakteristik nur nach den Ganzen der Decimalzahl so zu bestimmen, als wenn ihnen keine Decimalen folgten, indem man die Charakteristik um 1 kleiner als die Anzahl der zur Linken des Decimalstriches befindlichen Ziffern nimmt. So ist z. B.

$$\log 798{,}5435 = \log 7985435 - \log 10000 \quad = 2{,}9022986$$

$$\log 7{,}985435 = \log 7985435 - \log 1000000 = 0{,}9022986.$$

Hätte aber der Decimalbruch gar keine Ganzen, wäre er nemlich ein echter Decimalbruch, und die Anzahl der Decimalstellen wäre daher größer als die Charakteristik, so ziehe man so viel Einheiten ab, damit die Charakteristik Null werde; die übrigen noch abzuziehenden Einheiten aber hänge man hinten an den Logarithmen mit dem Zeichen — an. Z. B. Es ist

$$\log 0{,}008432 = \log \frac{8432}{1000000} = \log 8432 - \log 1000000$$

$$= 3{,}9259306 - 6 = 0{,}9259306 - 3.$$

Man kann jedoch auch zur Charakteristik die Ergänzung der Anzahl der am Anfange des echten Decimalbruches stehenden Nullen auf 10 wählen, und dem Logarithmen noch 10 abzuziehende (subtractive) Einheiten anhängen. Im letzten Beispiele ist nemlich auch

$$\log 0{,}008432 = \log 0{,}0084320000 = \log 84320000 - \log 10000000000$$

$$= 7{,}9259306 - 10.$$

Der Grund dieser Bestimmungen der Charakteristik von Decimalzahlen liegt in Folgendem. Es sei allgemein z irgend eine mit c Ziffern decadisch geschriebene Zahl, welche sich mit d Decimalstellen endigt; so ist $10^d z$ eine $c$ziffrige ganze Zahl, deren Logarithme die Mantisse m besitzen mag.

Bei diesen Annahmen ist

$\log 10^d z = c - 1 + m,$ oder (nach §. 257, Nr. 5 und 7)

$\log 10^d + \log z = c - 1 + m,$ oder (vermög §. 258)

$\log z = [c-1] + m - d,$ wenn man die Charakteristik durch eckige Klammern auszeichnet. Durch diese Gleichung wird die erste Bestimmungsweise in Zeichen ausgedrückt.

Schreibt man aber dieselbe Gleichung in der Form

$$\log z = [c - d - 1] + m,$$

so drückt sie die zweite Bestimmungsweise aus, so lange $c > d$ ist, folglich die Decimalzahl noch eine mit $c-d$ Ziffern geschriebene, von Null verschiedene, ganze Zahl bei sich führt. Ertheilt man ihr ferner, wenn $c \gtreqless d$ ist, die Form $\log z = [0] + m - (d+1-c)$, wo die Charakteristik keine (Null) positive, aber $d+1-c$, nemlich so viel negative Einheiten besitzt, als dem echten Decimalbruche Nullen vorangehen.

Schreibt man sie endlich, da die Anzahl $d+1-c$ der den echten Decimalbrüchen vorangehenden Nullen fast nie die Zahl 10 übersteigt, in der Gestalt $\log z = [10-(d+1-c)] + m - 10$, so gibt sie die letzte Bestimmungsweise der Charakteristik von echten Decimalbrüchen an, welche für den wirklichen Gebrauch unstreitig die bequemste, und heut zu Tage auch schon die gewöhnlichste ist.

Man könnte zwar hier die Subtraction verrichten, und es ist $\log 0{,}008432 = 0{,}9259306 - 3{,}0000000 = -2{,}0740694$; allein es ist, wie wir in der Folge sehen werden, viel vortheilhafter im Rechnen, wenn man die negativen Logarithmen vermeidet; der Fall ausgenommen, wo Logarithmen durch einander zu dividiren sind.

Wenn zu einem echten Bruche, oder zu einer ganzen Zahl nebst einem angehängten Bruche der Logarithme zu suchen wäre; so kann man den gegebenen Bruch in einen Decimalbruch verwandeln; oder im letzten Falle kann man auch die ganze Zahl mit dem beigefügten Bruche in einen unechten Bruch verwandeln, und dann den Logarithmen des Nenners von dem Logarithmen des Zählers abziehen (vermög §. 257, Nr. 6). So ist z. B.

$$\log 6\frac{3}{4} = \log \frac{27}{4} = \log 6{,}75 = \log 27 - \log 4;$$

ingleichen $\log \dfrac{5}{11} = \log 5 - \log 11.$

Auch hier bei echten Brüchen kann der negative Logarithme vermieden werden, wenn man zu der Charakteristik des kleinern Logarithmen so viel (am besten 10) Einheiten addirt, daß die Subtraction verrichtet werden könne; und hinten eben so viele Einheiten mit dem negativen Zeichen wieder anhängt. So ist z. B.

$$\log \frac{5}{11} = \log 5 - \log 11 = (0{,}6989700) - 1{,}0413927$$
$$= (1{,}6989700 - 1) - 1{,}0413927 = 0{,}6575773 - 1, \text{ oder}$$
$$= 10{,}6989700 - 1{,}0413927 - 10 = 9{,}6575773 - 10.$$

Überhaupt so oft von einem Logarithmen ein größerer abzuziehen ist, bleibt es immer das Zweckmäßigste, zu dem kleineren 10 Einheiten (oder zuweilen sogar ein Vielfaches von 10) zu addiren, und, nach vollbrachter Subtraction, der Differenz wieder die hinzugegebene Zahl mit dem Subtractionszeichen beizufügen. Ja man kann sogar zur Vereinfachung der Rechnung die abzuziehende Zahl 10 gänzlich hinweg lassen, da hiedurch keine Irrungen veranlaßt werden, weil man doch gewiß immer weiß, ob der Logarithme einer mehrziffrigen ganzen Zahl oder einem echten Decimalbruche zugehört.

§. 266.

Soll umgekehrt zu **einem gegebenen Logarithmen** die **Zahl**, der er angehört, mit Hilfe einer Logarithmentafel gesucht werden; so wird man, weil seine Mantisse nur nach den Ziffern dieser Zahl sich richtet, zuvörderst aus der Mantisse die Ziffern der zu suchenden Zahl, und dann erst, weil die Charakteristik nach der Anzahl der Ziffern der Ganzen oder nach der Stellung des Decimalstriches bestimmt wird, aus der Charakteristik die rechte Stelle für den Decimalstrich festsetzen.

Deßhalb sucht man, wenn z. B. zu dem Logarithmen 2,7109124 die ihm zugehörige Zahl gefunden werden soll, in der Logarithmentafel unter den Mantissen die Mantisse 7109124 des vorgelegten Logarithmen.

Befindet sich die Mantisse in der Tafel genau, wie in diesem gewählten Beispiele, so kennt man auch sogleich diejenige ganze Zahl 51394, deren Logarithme in der Mantisse mit dem vorgelegten übereinkommt, daher auch die Ziffern der zu ermittelnden Zahl. Erwägt man nun noch, daß der gegebene Logarithme die Charakteristik 2 besitzt, so müssen von den erhaltenen Ziffern $2+1=3$ für die Ganzen abgeschnitten werden, weil die Anzahl der Ziffern der Zahl um 1 größer als die Charakteristik ihres Logarithmen ist. Demnach ist 513,94 die dem vorgelegten Logarithmen 2,7109124 entsprechende Zahl, was man auch durch 2,7109124= log 513,94 oder durch num log 2,7109124 = 513,94 anzudeuten pflegt.

Wäre aber die gegebene Mantisse nicht vollständig in der Tafel, wie z. B., wenn die dem Logarithmen 3,8765432 zugehörige Zahl bestimmt werden sollte; so können aus der bekannten Mantisse 8765432 die Ziffern der zu suchenden Zahl mit Hilfe des in §. 262 angeführten Satzes von der Proportionalität der Differenzen der Zahlen mit den Differenzen der Mantissen ihrer Logarithmen gefunden werden. Denn sucht man in der Tafel die zwei Mantissen, zwischen welche die gegebene fällt, nebst den ihnen angehörigen Zahlen, zwischen denen die zu bestimmende Zahl liegen muß, so ergibt sich folgende Zusammenstellung:

	Mantisse	Diff.	Zahlen	Diff.
nächst kleinere	8765411		75256	
		21		a
gegebene	8765432		$75256+a$	
		58		1
nächst größere	8765469		75257	

wo a den abgeschnittenen Decimalbruch vorstellt. Während demnach die Mantisse von der nächst kleineren 8765411 bis zur nächst größeren 8765469 um $8765469-8765411=58$ wächst, nimmt die Zahl von der nächst kleineren 75256 auf die nächst höhere 75257 um 1, sofort mit jeder zunehmenden Einheit der Mantisse um $\frac{1}{58}$ zu; und anderseits, während die Mantisse von der nächst kleineren 8765411 bis zur gegebenen 8765432 um 21 sich vergrößert, steigt die Zahl von der nächst niedrigeren 75256 auf die gesuchte $75256+a$ um a, folglich um 21 Mal $\frac{1}{48}$ oder um $\frac{21}{58}$, nemlich es ist der Zusatz $a=\frac{21}{58}$; oder man hat auch, da einer 2, 3, 4,... Mal so großen Zunahme der Mantisse stets eine 2, 3, 4,... Mal so große Zunahme der Zahl entspricht, die Regeldetri $58:21=1:a$, aus welcher gleichfalls $a=\frac{21}{58}=0{,}36$ sich ergibt. Folglich ist die gesuchte Zahl 75256,36 und diejenige ganze Zahl, deren Logarithme in der Mantisse mit dem gegebenen übereinstimmt, =7525636; aus welcher erst nach Beschaffenheit der Charakteristik die Ganzen von den Decimalstellen abgeschnitten werden müssen. Nun ist die Charakteristik des gegebenen Logarithmen $=3$, daher die ihm angehörige Zahl $=7525{,}636$ (vermög §. 259); wäre aber die Charakteristik $=6$, so wäre die Zahl $=7525636$ ohne Decimalstellen. Sollte hingegen die Charakteristik >6 sein, so muß die dazu gehörige Zahl aus mehr als 7 Ziffern bestehen. Da sich aber die achte Ziffer schon nicht mehr bestimmen läßt, weil (vermög §. 264) die Logarithmen zweier Zahlen, die aus 8 Ziffern bestehen, und nur um einige Einheiten von einander verschieden sind, die 7 ersten Decimalziffern vollkommen gleich haben; so hänge man hinten noch so viel Nullen an, daß man die der Charakteristik entsprechende Anzahl der Ziffern erhält. So z. B. ist $8{,}8765432=\log 752563600$.

Auch hier lassen sich die Tafeln der Proportionaltheile der Differenzen der nach einander folgenden Mantissen mit vielem Vortheile benützen. Denn behalten wir die in §. 263 verwendete Bezeichnung bei, so finden wir aus dem für die Ergänzung μ der Mantisse aufgestellten Ausdrucke

$$\mu=\alpha'+\frac{1}{10}\beta'+\frac{1}{100}\gamma'+\frac{1}{1000}\delta'+\ldots,$$

weil α' der größte in μ enthaltene Proportionaltheil ist, mittels des Täfelchens dieser Proportionaltheile, sogleich die ihm angehörige Ziffer α. Aus diesem Ausdrucke finden wir ferner

$$10(\mu-\alpha')=\beta'+\frac{1}{10}\gamma'+\frac{1}{100}\delta'+\ldots$$

oder wenn wir $10(\mu-\alpha')=\mu_1$ setzen,

$$\mu_1=\beta'+\frac{1}{10}\gamma'+\frac{1}{100}\delta'+\ldots;$$

folglich, da β' der größte in μ_1 enthaltene Proportionaltheil ist, mittels desselben Täfelchens die Ziffer β. Der letzte Ausdruck gibt ferner auch noch $10(\mu_1-\beta')=\gamma'+\frac{1}{10}\delta'+\ldots$

oder wenn $10(\mu_1-\beta')=\mu_2$ gesetzt wird,

$$\mu_2=\gamma'+\frac{1}{10}\delta'+\ldots,$$

folglich finden wir, weil γ' der größte in μ_2 begriffene Proportionaltheil ist, auf dieselbe Weise die Ziffer γ; und wenn wir so fortfahren, auch die etwa noch übrigen Ziffern.

Um demnach diejenige Zahl zu finden, deren Logarithme gegeben ist, wird man von seiner Mantisse die nächst kleinere in der Logarithmentafel enthaltene und zugleich auch diese von der nächst größeren in der Tafel vorkommenden abziehen, und zu der letzteren Differenz das ihr angehörige Täfelchen der Proportionaltheile suchen. Hierauf nimmt man aus diesem den möglich größten in der ersten Differenz enthaltenen Proportionaltheil, zieht ihn von der Differenz ab, und hängt dem Reste rechts eine Null an, die Ziffer aber, welcher dieser Proportionaltheil angehört, schreibt man zu derjenigen Zahl, welche der nächst kleineren Mantisse der Tafel entspricht, rechts bei. Auf dieselbe Weise verfährt man mit dem neuen Reste und jedem späteren allmälig hervortretenden, bis die höchste Ziffer des letzten subtrahirten Proportionaltheils unter die Endziffer (Einer) der Mantisse zu stehen kommt, wo man zuweilen auch den nächst zustimmenden größeren Proportionaltheil nimmt, und die ferneren Bestimmungen von Ziffern einstellt, weil sie nicht mehr richtig sein können.

Z. B. Sucht man die Zahl des Logarithmen 3,8765432, so ist: gegebene Mantisse =8765432
nächst kleinere " =8765411

Rest	21	
nächst größere Mantisse	=8765469	
" kleinere "	=8765411	
Differenz	58	
nächst kleinerer Proportionaltheil	=17,	zugehörige Ziffer 3
neuer Rest	40	
nächst kleinerer Proportionaltheil	35,	" " 6
Rest	5	
Zahl der nächst kleinern Mantisse		75256
also Zahl der gegebenen Mantisse		7525636
und 3,8765432 = log		7525,636.

Auch hier kann man wie in §. 263 nur die letzten 3 oder 4 Ziffern für die Rechnung beibehalten, wornach diese folgende Gestalt erhält.

3,8765432=log 7525,636

Hier wäre zu 40 der nächst zustimmende Proportionaltheil 41 und seine Ziffer 7, welche jedoch von der richtigen 6 um 1 differirt. Dies läßt uns erkennen, daß man mittels der Tafel der Proportionaltheile höchstens 2 Ziffern verläßlich bestimmen könne.

$$\begin{array}{r} 5432 \\ 5411 \\ \hline 21 \\ 17 \\ \hline 40 \\ 35 \\ \hline 5 \end{array}$$

§. 267.

Wäre aber zu einem Logarithmen, dessen Charakteristik 0 ist, und bei welchem hinten noch einige Einheiten mit dem negativen Zeichen angehängt sind (§. 265), die zugehörige Zahl zu suchen; so setze man der Zahl, welche den Decimalstellen des Logarithmen entspricht, so viel Nullen vor, als hinten am Logarithmen Einheiten abgezogen sind, wovon aber eine für die Ganzen abgeschnitten werden muß. Z. B. Es wäre 0,9868747—3 ein gegebener Logarithme; man soll die zugehörige Zahl finden; so entspricht der Mantisse des Logarithmen die Zahl 97023, und folglich ist die gesuchte Zahl 0,0097023. Bestände aber die Charakteristik eines Logarithmen aus einem von Null verschiedenen positiven Theile und aus 10 negativen Einheiten (mögen diese nun wirklich angeschrieben sein oder nicht); so findet man die Anzahl der in dem echten Decimalbruche voran stehenden Nullen gleich der Ergänzung der positiven Charakteristik auf die Zahl 10; z. B. ist 6,9868747—10 oder auch nur 6,9868747=log 0,00097023. Sollte aber der zu einem negativen Logarithmen zugehörige Bruch gefunden werden, so addire man zu ihm eine ganze positive Zahl, die abgesehen vom Zeichen größer als er ist, (am besten 10) ziehe sie wieder ab, nachdem man ihn selbst von jener positiven Zahl subtrahirt hat, und verfahre dann, wie eben gesagt worden; oder man suche die Zahl auf, als wenn der Logarithme positiv wäre, setze selbe zum Nenner eines Bruches, wovon der Zähler 1 ist, so hat man den gesuchten Bruch (§. 257, Nr. 6). Z. B. Es sei —2,4353665 ein gegebener Logarithme; man soll den dazu gehörigen Bruch finden, so ist 2,4353665=log 272,5, und also

$-2,4353665 = \log \frac{1}{272,5}$; oder weil $-2,4353665 = 0,5646335 - 3$, und $5646335 = \text{mant}\log 366972$ ist; so ist $-2,4353665 = \log 0,00366972$, oder endlich $-2,4353665 = 10 - 2,4353665 - 10 = 7,5646335 - 10 = \log 0,00366972$.

§. 268.

I. Wenn man nun mit einer logarithmischen Tafel versehen ist, so können die bei großen Zahlen sehr beschwerlichen Multiplicationen und Divisionen durch eine blose Addition und Subtraction verrichtet werden. Z. B. Es sei in der Gleichung $x = \frac{ab}{c}$, $a = 628723$, $b = 83629$, $c = 567023$, so kann x auf folgende Art in Zahlen gefunden werden. Es ist $\log x = \log \frac{ab}{c}$ (§. 256), und $\log x = \log ab - \log c$ (§. 257, Nr. 6); endlich $\log x = \log a + \log b - \log c$ (§. 257, Nr. 5).

$$\begin{array}{lrl}
\text{Nun ist} & \left.\begin{array}{r}\log a = 5,7984594\\ \log b = 4,9223569\end{array}\right\} & \text{addirt}\\
\hline
& \left.\begin{array}{r}\log ab = 10,7208163\\ \log c = 5,7536007\end{array}\right\} & \text{abgezogen}\\
\hline
& \log x = 4,9672156 & \\
\text{daher} & x = 92729 & \text{die gesuchte Zahl.}
\end{array}$$

II. Eben so kann die Erhebung zu Potenzen mittels der Logarithmen durch eine blose Multiplication, und die Ausziehung der Wurzeln durch eine blose Division geschehen.

Z. B. Es wäre der Bruch $\frac{39543}{8564}$ zur dritten Potenz zu erheben, so setze man der Kürze wegen $x = \left(\frac{39543}{8564}\right)^3$; dann ist (§. 257, Nr. 7) $\log x = 3 . \log \frac{39543}{8564} = 3(\log 39543 - \log 8564)$. Nun ist

$$\begin{array}{lrl}
& \left.\begin{array}{r}\log 39543 = 4,5970696\\ \log 8564 = 3,9326767\end{array}\right\} & \text{subtr.}\\
\hline
& 0,6643929 & \\
& 3 & \text{mult.}\\
\hline
& \log x = 1,9931787 & \\
\text{somit} & x = 98,441622. &
\end{array}$$

Auf dieselbe Art kann aus der Gleichung $x = \sqrt[5]{4a^2b}$, wenn z. B. $a=563,28$, $b=7934$ ist, die Größe x in Zahlen entwickelt werden. Denn es ist $\log x = \frac{\log 4a^2b}{5} = \frac{\log 4 + \log a^2 + \log b}{5}$

$$= \frac{\log 4 + 2 \log a + \log b}{5}.$$

Nun ist $\log a = 2{,}7507243$ (×2

$\log a^2 = 5{,}5014486$
$\log 4 = 0{,}6020600$
$\log b = 3{,}8994922$

$10{,}0030008$ (:5

$\log x = 2{,}0006002$
und $x = 100{,}1383$.

Es sei noch $x = \sqrt[3]{\frac{5}{7}}$ zu entwickeln, so ist

$$\log x = \log \sqrt[3]{\frac{5}{7}} = \frac{\log 5 - \log 7}{3},$$

folglich $\log 5 = 0{,}6989700$
$\log 7 = 0{,}8450980$

$\log \frac{5}{7} = 9{,}8538720 - 10$
$= 29{,}8538720 - 30$ (:3

$\log x = 9{,}9512907 - 10$
und $x = 0{,}8939036$.

In diesem Falle müssen nemlich die negativen Einheiten, welche hinten angehängt sind, so eingerichtet werden, daß die Division ohne Rest aufgeht, weßwegen in unserem Beispiele 20 hinzugegeben und wieder hinweg genommen wurde, um im Quotienten gleichfalls -10 zu erhalten.

Eben so ist zur Berechnung von

$$x = \left(\frac{9}{11}\right)^{\frac{3}{4}},\ \log x = \frac{3}{4} (\log 9 - \log 11)$$

und folglich $\log 9 = 0{,}9542425$
$\log 11 = 1{,}0413927$

$9{,}9128498 - 10$ (×3

$39{,}7385494 - 40$ (:4

$\log x = 9{,}9346373 - 10$ daher $x = 0{,}860275$.

Daß geübte Rechner zur Vereinfachung der Rechnung die subtractiven Zehner sowohl als auch die in der positiven Charakteristik vorkommenden Zehner, ohne Irrungen sich Preis zu geben, weglassen, haben wir bereits (im §. 265) bemerkt; nur mag noch beigefügt werden, daß einem mit —10 behafteten Logarithmen, wenn er durch eine Zahl zu dividiren ist, ein Zehner weniger, als der Divisor Einheiten hat, hinzuzuzählen und wieder abzurechnen ist, wenn der Quotient wieder 10 subtractive Einheiten erhalten soll, was aus den zwei letzten Beispielen deutlich zu ersehen ist.

§. 269.

In den Rechnungen, wo Logarithmen theils zu addiren, theils abzuziehen sind, kann man sich der decadischen Ergänzung bedienen. Die decadische Ergänzung einer Zahl ist der Abgang, den man zu ihr addiren muß, damit die nächst folgende Potenz von 10 zum Vorschein komme; so ist z. B. 3 die decadische Ergänzung von 7, weil 7+3=10, die decadische Ergänzung von 76 ist 24, weil 76+24=100 ist, u. s. w.

Die decadische Ergänzung eines Logarithmen erhält man leicht, ohne denselben aus der Tafel herausschreiben zu dürfen, wenn man ihn von 10 (welche Zahl die gewöhnlich vorkommenden Logarithmen nicht übersteigen) auf die Weise subtrahirt, daß man von der Charakteristik angefangen jede Ziffer des Logarithmen von 9 und die letzte bedeutende Ziffer rechts von 10 abzieht. So z. B. ist die decadische Ergänzung von log 15 = 8,8239087 ; die decadische Ergänzung von log 20=8,6989700, u. s. w.

Wenn nun in einer Rechnung einige Logarithmen zu addiren und wieder einige davon abzuziehen vorkommen, so schreibe man die zu addirenden Logarithmen unter einander, und unter dieselben die decadischen Ergänzungen der zu subtrahirenden Logarithmen; addire dann alles dies zusammen, und lasse bei der Summe der Kennziffern so viel Zehner hinweg, als decadische Ergänzungen vorhanden sind, so hat man das richtige Resultat.

Z. B. Es sei aus der Gleichung $x = \frac{74256.2045.0{,}00347}{2{,}56.203{,}47}$ oder aus

$\log x = \log 74256 + \log 2045 + \log 0{,}00347 - \log 2{,}56 - \log 203{,}47$

die Größe x zu entwickeln; so ist

$$
\begin{array}{lll}
 & \log & 74256 = 4{,}8707316 \\
 & \log & 2045 = 3{,}3106933 \\
 & \log & 0{,}00347 = 0{,}5403295 - 3 \\
\text{dec. Erg.} & \log & 2{,}56 = 9{,}5917600 \\
\text{dec. Erg.} & \log & 203{,}47 = 7{,}6914996 \\
\hline
 & \text{Summe} & 26{,}0050140 - 3 \\
\text{folglich} & \log x & = 6{,}0050140 - 3 \\
 & & = 3{,}0050140 \\
\text{und} & x & = 1011{,}612.
\end{array}
$$

Die zu umständliche Bezeichnung der decadischen Ergänzung von Logarithmen macht es jedoch räthlich, von ihr gar keine Kenntniß zu nehmen, und blos die in §. 267 erörterte Umstaltung eines negativen Logarithmen in einen andern (sogenannten halb-positiven), welcher aus einem positiven Logarithmen und einer negativen Charakteristik besteht, zu benützen. Auf diese Weise gestaltet sich obige Rechnung folgender Maßen:

$$
\begin{array}{ll}
\log & 74256 = 4{,}8707316 \\
\log & 2045 = 3{,}3106933 \\
\log & 0{,}00347 = 7{,}5403295 - 10 \\
-\log & 2{,}56 = 9{,}5917600 - 10 \\
-\log & 203{,}47 = 7{,}6914996 - 10 \\
\hline
 & \log x = 3{,}0050140 \\
 & x = 1011{,}612
\end{array}
$$

wobei noch die subtractiven Zehner von jedem geübten Rechner weggelassen werden.

Übrigens wird man keine dieser zwei nahe verwandten Methoden anwenden, wenn sehr viele Logarithmen abzuziehen sind, weil man dann offenbar schneller mit der Rechnung zu Stande kommt, wenn man die Summe der negativen Logarithmen von jener der positiven abzieht.

§. 270.

Der besondere Vortheil, den die logarithmischen Tafeln gewähren, besteht darin, daß man mit Hilfe derselben die unbekannten Exponenten aus einer Gleichung leicht entwickeln kann; denn es sei z. B. $a^x = b$, so ist $\log a^x = \log b$, und (vermög §. 257, Nr. 7)

$$x \log a = \log b\,; \quad \text{also } x = \frac{\log b}{\log a}.$$

Eben so aus der Gleichung $a^x c^{qx} = b^{mx-n}$ folgt

$$\log a^x c^{qx} = \log b^{mx-n},$$

nemlich $x . \log a + qx . \log c = mx . \log b - n . \log b$,

und $mx . \log b - x . \log a - qx . \log c = n . \log b$;

endlich $$x = \frac{n . \log b}{m . \log b - \log a - q . \log c}.$$

Auch kann aus folgender Gleichung $ac^{mx} - bc^{\frac{mx}{2}} = d$ mittels der Logarithmen x gefunden werden; denn es ist

$$c^{mx} - \frac{b}{a} . c^{\frac{mx}{2}} = \frac{d}{a}, \quad \text{und (nach §. 215)}$$

$$c^{mx} - \frac{b}{a} . c^{\frac{mx}{2}} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{d}{a}, \quad \text{woraus}$$

$$c^{\frac{mx}{2}} = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2} + \frac{d}{a}\right)} \quad \text{folgt.}$$

Ferner ist $\log c^{\frac{mx}{2}} = \log\left\{\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2} + \frac{d}{a}\right)}\right\}$,

nemlich $\frac{mx}{2} . \log c = \log \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4ad}}{2a}$;

endlich $$x = \frac{2}{m . \log c} . \log \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4ad}}{2a}.$$

Übrigens erleichtert man sich auch hier, wie in so vielen andern Fällen, die Rechnung, indem man nicht unmittelbar die Unbekannte x, sondern lieber eine andere Unbekannte vorher, und dann aus ihr erst mittelbar x bestimmt. Man erzielt dieses, wenn man einen, die Unbekannte x in sich begreifenden, Ausdruck als eine eigenthümliche neue Unbekannte durch einen einzelnen Buchstaben, z. B. y, darstellt, dieselbe in die gegebene Gleichung ein-führt, und aus dieser bestimmt, endlich aber aus der zwischen ihr und x bestehenden Gleichung die letztere Größe sucht. So würde man im letzten Beispiele $c^{\frac{mx}{2}}=y$ setzen, wodurch man $ay^2-by=d$, und hieraus $y=\frac{b\pm\sqrt{b^2+4ad}}{2a}$ findet. Überdies hat man

$$\frac{mx}{2}\log c=\log y,\text{ daher } x=\frac{2\log y}{m\log c},$$

und wenn man für y obigen Ausdruck schreibt,

$$x=\frac{2}{m\log c}\log\frac{b\pm\sqrt{b^2+4ad}}{2a},\text{ wie vorher.}$$

§. 271.

Wenn einmal für ein System die Logarithmen berechnet sind, so kann der Logarithme einer jeden Zahl für jedes andere System leicht daraus gefunden werden. Denn es sei in dem berechneten Systeme für die Grundzahl a der Logarithme was immer für einer Zahl b gleich m, und für eine andere Grundzahl A der zu suchende Logarithme eben dieser Zahl gleich x, nemlich $\log b=m$ für die Grundzahl a, und $\log b=x$ für die Grundzahl A; so ist (vermög §. 255) $a^m=b$ und auch $A^x=b$, folglich $A^x=a^m$, und für einerlei System $x\log A=m\log a$; also $x=\frac{m\log a}{\log A}$. Sind die hier gebrauchten Logarithmen aus dem Systeme, dessen Grundzahl a ist, so wird $\log a=1$, also $x=\frac{m}{\log A}=\frac{\log b}{\log A}=\frac{1}{\log A}\times\log b$.

Soll z. B. aus dem berechneten Briggischen Systeme der Logarithme x von jeder Zahl b für die Grundzahl $A=5$ berechnet werden, so ist $x=\frac{1}{\log\text{ brig }5}\times\log\text{ brig }b=\frac{1}{0{,}6989700}\times\log\text{ brig }b$ $=1{,}4306766\times\log\text{ brig }b$.

Man darf demnach nur den Briggischen Logarithmen einer Zahl mit 1,4306766 multipliciren, so hat man den Logarithmen von der nemlichen Zahl für die Grundzahl 5.

VII. Abschnitt.

Anwendung der geometrischen Reihen und der Logarithmen auf die Auflösung verschiedener Aufgaben.

§. 272.

Um den Gebrauch der logarithmischen Tafeln durch eine fleißige Übung sich eigen zu machen, kann folgende Anwendung der geometrischen Reihen und Logarithmen auf die Auflösung einiger Aufgaben nützlich sein.

1. Aufgabe. Es hat Jemand einen Metzen Weitzen ausgesäet; die Ernte hievon säet er im zweiten Jahre wieder ganz aus, und von dieser zweiten Aussaat hat er wieder die ganze Ernte im dritten Jahre ausgesäet, u. s. w. Wie viel würde er wohl auf diese Art im zehnten Jahre ernten, wenn man annimmt, daß jeder Metzen Aussaat jährlich 4 Metzen Ernte bringt?

Auflösung. Da hier die Ernten in einer geometrischen Reihe stehen, indem im ersten Jahre die Ernte 4, im zweiten Jahre 16, im dritten Jahre 64 Metzen, u. s. w. beträgt; so wird in der Gleichung (§. 244, I.) $t=aq^{n-1}$, $a=4$, $q=4$, $n=10$, folglich durch Substitution dieser Werthe $t=4 \,.\, 4^9=4^{10}$, oder $\log t=10 \log 4=6{,}0206000$; daher $t=1048576$ Metzen.

2. Aufgabe. Es setzt Jemand in die Lotterie, und zwar das erste Mal 3 Groschen; dupplirt aber jedesmal seinen vorhergehenden Einsatz. Wie viel wird er wohl durch 12 Setzungen verspielen?

Auflösung. Da hier die nach einander folgenden Einsätze die geometrische Reihe 3, 6, 12, 24,... formiren, so wird in den Gleichungen (§. 244, I. und II.) $t=aq^{n-1}$, $s=\dfrac{tq-a}{q-1}$, $a=3$, $q=2$, $n=12$; folglich durch Substitution dieser Werthe

$$t=3 \,.\, 2^{11}, \text{ und } s=\frac{3 \,.\, 2^{12}-3}{2-1}=3(2^{12}-1).$$

Nun ist $\log 2^{12}=12 \log 2=3{,}6123600$ und also $2^{12}=4096$, folglich $s=3(4096-1)=3.4095=12285$ Groschen $=614\frac{1}{4}$ Fl.

Man sieht aus dieser Auflösung, daß man auch in den Gleichungen, wo die unbekannte Größe sich nicht unmittelbar logarithmisch entwickeln läßt, doch einzelne Glieder derselben mittels der logarithmischen Tafeln entwickeln kann, wodurch sich dann die unbekannte Größe leichter ergibt.

3. Aufgabe. Zwischen 1 und 2 sollen noch 11 Glieder dergestalt eingeschaltet werden, daß eine geometrische Reihe von 13 Gliedern entstehe.

Auflösung. Weil hier das erste Glied der Reihe $a=1$, das letzte Glied $t=2$, und die Anzahl der Glieder $n=13$ sein soll; so ist (§. 244, I.) $2=1.q^{12}$, folglich $q=\sqrt[12]{2}$, und $\log q = \frac{\log 2}{12} = 0{,}0250858$. Nun ist aber die Reihe

$1, q, q^2, q^3, \ldots q^{11}, 2$; folglich ist

$\log q=0{,}0250858$	zugehörige Zahl	$1{,}059\ldots=2^{\text{ten}}$	Gliede
$2\log q=0{,}0501716$	„ „	$1{,}122\ldots=3^{\text{ten}}$	„
$3\log q=0{,}0752574$	„ „	$1{,}189\ldots=4^{\text{ten}}$	„
. . . .	. .	. . .	.
. . . .	. .	. . .	.
$11\log q=0{,}2759438$	„ „	$1{,}888\ldots=12^{\text{ten}}$	„
$12\log q=0{,}3010296$	„ „	$2{,}000\ldots=13^{\text{ten}}$	„

4. Aufgabe. Jedes Glied der geometrischen Reihe $a, aq, aq^2, aq^3, \ldots$ in m solche Theile zu theilen, daß alle Theile wieder in einer zusammenhängenden geometrischen Reihe stehen, und folglich eine Reihe zum Vorschein komme, welche m Mal so viel Glieder hat, als die Hauptreihe.

Auflösung. Es sei x das erste Glied der gesuchten Reihe, und y ihr Quotient, so ist die Reihe

$x, xy, xy^2, \ldots xy^{m-1}; xy^m, xy^{m+1}, \ldots xy^{2m-1}; xy^{2m}, xy^{2m+1}, \ldots$

Da nun die Summe von den m ersten Gliedern dieser Reihe dem ersten Gliede der Hauptreihe gleich sein muß, so ist

$$x + xy + xy^2 + \ldots + xy^{m-1} = a. \qquad (A)$$

Da ferner die Summe von den folgenden m Gliedern dieser Reihe dem zweiten Gliede der Hauptreihe gleich sein muß; so ist $xy^m + xy^{m+1} + xy^{m+2} + \ldots + xy^{2m-1} = aq. \qquad (B)$

Multiplicirt man nun die Gleichung (A) mit y^m, so ist

$$xy^m + xy^{m+1} + xy^{m+2} + \ldots + xy^{2m-1} = ay^m, \qquad (C)$$

folglich auch $aq = ay^m$, (vermög §. 12, Grundſ. III.); nemlich

$$q = y^m \text{ und } y = \sqrt[m]{q}.$$

Nun summire man in der Gleichung (A) den ersten Theil derselben (nach §. 244, II.); so ist die Summe

$$= \frac{xy^{m-1}.y - x}{y-1} = \frac{x(y^m-1)}{y-1}, \text{ mithin}$$

$$\frac{x(y^m-1)}{y-1} = a, \quad \text{woraus } x = \frac{a(\sqrt[m]{q}-1)}{q-1}$$

folgt. Es ist demnach die gesuchte Reihe

$$\frac{a(\sqrt[m]{q}-1)}{q-1}, \ \frac{a(\sqrt[m]{q}-1)\sqrt[m]{q}}{q-1}, \ \frac{a(\sqrt[m]{q}-1)\sqrt[m]{q^2}}{q-1}, \ldots \qquad (D)$$

Soll z. B. in der geometrischen Reihe 7, 56, 448, ... jedes Glied in drei solche Theile getheilt werden, daß wieder eine zusammenhängende geometrische Reihe entstehe; so ist wegen $a = 7$, $q = 8$, und $m = 3$ das erste Glied der gesuchten Reihe

$$= \frac{7(\sqrt[3]{8}-1)}{7} = 1, \text{ und der Quotient } = \sqrt[3]{8} = 2;$$ daher ist die verlangte Reihe 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...

Summirt man ferner n Glieder der angeführten Reihe (D) (nach §. 244), so ist zunächst

$$t = \frac{a(\sqrt[m]{q}-1)}{q-1} . (\sqrt[m]{q})^{n-1} = \frac{a(\sqrt[m]{q}-1)\sqrt[m]{q^{n-1}}}{q-1}$$

$$\text{und } s = \frac{a(\sqrt[m]{q}-1)\sqrt[m]{q^n} - a(\sqrt[m]{q}-1)}{(q-1)(\sqrt[m]{q}-1)}$$

$$= \frac{a(\sqrt[m]{q}-1)(\sqrt[m]{q^n}-1)}{(q-1)(\sqrt[m]{q}-1)} = \frac{a(\sqrt[m]{q^n}-1)}{q-1}.$$

So z. B. ist die Summe von 7 Gliedern der erst gefundenen

Reihe $= \dfrac{7(\sqrt[3]{8^7}-1)}{7} = 8^2\sqrt[3]{8} - 1 = 64.2 - 1 = 127.$

Die nemliche Summe würde man erhalten, wenn man in der Hauptreihe gleichsam $\frac{n}{m}$ Glieder summirt, das ist, wenn man in den Gleichungen I. und II. (§. 244) $\frac{n}{m}$ statt n substituirt.

Man sieht hieraus, in welchem Sinne man in der allgemeinen Summenformel für n eine gebrochene Zahl annehmen kann. Nach dieser Formel läßt sich auch folgende Aufgabe auflösen.

5. Aufgabe. Es bestellt Jemand bei einem Juwelier einen Diamanten mit dem Accorde, daß er ihm für den ersten Karat, den der Diamant wiegt, 40 Fl., für den zweiten Karat 120 Fl., für den dritten Karat 360 Fl., u. s. w., nemlich für jeden folgenden Karat drei Mal so viel, als für den vorhergehenden zahlen wolle. Nun ist das Gewicht des Diamanten $3\frac{1}{4}$ Karat; wie viel muß er dem Juwelier bezahlen?

Auflösung. Da hier die Werthe der ganzen Karate in einer geometrischen Progression steigen, so müssen die Werthe der Theile derselben ebenfalls in einer solchen Reihe wachsen; und es ist, wenn man die obige Formel hier anwendet, $a=40$, $q=3$, $m=4$, und $n=13$; folglich der ganze Werth des Diamanten $s=\frac{40(\sqrt[4]{3^{13}}-1)}{2}=20(\sqrt[4]{3^{13}}-1)$.

Nun ist zur Bestimmung von $\sqrt[4]{3^{13}}$

$$\log\sqrt[4]{3^{13}}=\frac{13\log 3}{4},$$

daher $\log 3=0,4771213 \quad (\times 13$

$$\begin{array}{l} 14313639 \\ \hline 6,2025769 \quad (:4 \\ \hline \end{array}$$

$$\log\sqrt[4]{3^{13}}=1,5506442$$

wozu die Zahl 35,534 gehört; folglich $s=20.34{,}534=690{,}68$ Fl. $=690$ Fl. 41 Kr. Mithin kostet das letzte Viertel Karat

$$\frac{40(\sqrt[4]{3}-1)\sqrt[4]{3^{12}}}{2}=20.3^3(\sqrt[4]{3}-1)=540(\sqrt[4]{3}-1)$$

$=540.0{,}31607=170{,}68$ Fl. $=170$ Fl. 41 Kr.

Würde man aber für dieses letzte Viertel Karat den vierten Theil von $40 . 3^3 = 40 . 27 = 1080$ Fl. rechnen, welche der ganze vierte Karat kosten würde; so hätte man 270 Fl., welches um 99 Fl. 19 Kr. zu viel ist. Weit mehr würde man fehlen, wenn man für den Werth des Diamanten $40 + 40.3 + 40 . 3^2 + 40.3^{\frac{9}{4}}$ rechnen wollte, wo für das letzte Viertel Karat um 303 Fl. 6 Kr. zu viel bezahlt würde.

6. Aufgabe. Es hat Jemand ein Faß Wein, welches $a = 100$ Maß enthält, wovon jede Maß $c = 36$ Kr. kostet; er zapft $b = 1$ Maß ab, und füllt das Faß wieder voll mit Wasser an. Nachdem sich das Wasser mit dem Weine vollkommen vermischt hat, zapft er abermal $b = 1$ Maß ab, und füllt das Faß wieder mit Wasser an. Wie oft kann nun dieses wiederholt werden, damit jede Maß der Vermischung, welche sich noch im Fasse befindet, $d = 24$ Kr. werth sei?

Auflösung. Da hier vorausgesetzt wird, daß sich das Wasser mit dem Weine jederzeit völlig genau vermenge, so läuft bei jedem Abzapfen wieder ein Theil Wasser mit heraus; und zwar verhält sich bei jedesmaligem Abzapfen die ganze Vermischung zu der Menge der Vermischung, die abgezapft wird, wie die Menge Wein, die sich in der ganzen Vermischung befindet, sich zu der Menge Wein verhält, die beim Abzapfen mit herausfließt; nemlich es ist jedesmal $a : b =$ wie die Menge Wein, die noch im Fasse ist, zur Menge Wein, die unter den b Maßen mit abgezapft wird. Nun sind nach dem ersten Abzapfen noch $a - b$ Maß Wein im Fasse; folglich $a : b = (a - b) : \frac{b}{a}(a - b) =$ der Menge Wein, die bei dem zweiten Abzapfen mit herausfließt; und es bleiben also nach dem zweiten Abzapfen noch $(a - b) - \frac{b}{a}(a - b)$ $= \frac{(a - b)^2}{a}$ Maß Wein im Fasse. Ferner ist wieder $a : b$ $= \frac{(a - b)^2}{a} : \frac{b(a - b)^2}{a^2} =$ der Menge Wein, die beim dritten Abzapfen ausfließt; und es bleibt noch im Fasse $\frac{(a - b)^2}{a} - \frac{b(a - b)^2}{a^2}$

$= \frac{(a-b)^3}{a^2}$; eben so findet man, daß nach dem vierten Abzapfen $\frac{(a-b)^4}{a^3}$, nach dem fünften Abzapfen $\frac{(a-b)^5}{a^4}$, und folglich nach dem $n$ten Abzapfen $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$ Maß Wein noch im Fasse verbleiben, wovon jede Maß c Kr. werth ist. Also ist der Werth der ganzen Vermischung $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}} \times c$, weil das Wasser hier keinen Werth haben soll. Da aber jede Maß der Vermischung d Kr. werth sein soll; so ist auch der Werth der Vermischung ad Kr., folglich $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}} \cdot c = ad$, und sofort

$n \log(a-b) + \log c - (n-1) \log a = \log a + \log d$, woraus

$n = \frac{\log c - \log d}{\log a - \log(a-b)}$ folgt.

Nun ist in unserem Beispiele

$a = 100$, $b = 1$, $a-b = 99$, $c = 36$, $d = 24$, mithin

$\log c = 1{,}5563025$	$\log a = 2{,}0000000$
$\log d = 1{,}3802112$	$\log(a-b) = 1{,}9956352$
Diff. $= 0{,}1760913$	Diff. $= 0{,}0043648$

$n = 1760913 : 43648 = 40{,}3$
174592
149930

Folglich ist $n = 40$ nebst einem Bruche.

Wenn nemlich die Abzapfung 40 Mal wiederholt wird, so ist die Vermischung im Fasse noch etwas besser als ein Wein, wovon eine Maß 24 Kr. kostet. Wiederholt man aber die Abzapfung 41 Mal, so ist eine Maß der Vermischung nicht mehr 24 Kr. werth.

7. Aufgabe. Es legt Jemand ein Capital $a = 20000$ Fl. zu $c = 5$ Proc. jährlichen Interessen an, und schlägt mit Ende eines jeden Jahres die Interessen zum Capitale, oder was einerlei ist, er erhebt selbe, und legt sie gleich wieder als ein Capital an. Wie groß wird nun dieses Capital nach der Zeit von $n = 12$ Jahren sein?

Auflösung. Da 100 Fl. Capital in einem Jahre c Fl. Interessen bringen, so bringt jeder Gulden $\frac{c}{100}$ Fl. Interessen während eines Jahres, und mithin ist jeder Gulden des angelegten Capitals nach Verlauf dieses Jahres $1+\frac{c}{100}$ Fl. werth. Setzt man daher $1+\frac{c}{100}=p$, d. h. begreift man unter p den Werth eines Guldens des Capitals mit Zuschlag der Zinsen von einem Jahre, so beträgt der Werth des Capitals a nach einem Jahre ap. Man muß demnach jedesmal das Capital am Anfange des Jahres mit $p=1+\frac{c}{100}$ multipliciren, um das Capital sammt Interessen am Ende dieses Jahres zu erhalten. Es ist sofort das Capital sammt Interessen am Ende des 1ten Jahres $=ap$,

" " " 2ten " $=ap^2$,

" " " 3ten " $=ap^3$;

folglich ist das Capital sammt Interessen am Ende des $n$ten Jahres $s=ap^n$, und $\log s=\log a+n\log p$.

Nun ist in unserem Beispiele $a=20000$, $c=5$, $n=12$, daher $p=1{,}05$, und $\log p=0{,}0211893$ $(\times 12$

$$\log p^n=0{,}2542716$$
$$\log a=4{,}3010300$$
$$\log s=4{,}5553016$$

mithin $s=35917{,}125$ Fl. $=35917$ Fl. $7\frac{1}{2}$ Kr.

Diese Formel kann aber nicht unmittelbar angewendet werden, um den Anwachs des Capitals zu berechnen, wenn die Anzahl der Jahre n ein Bruch sein sollte. Denn es sei in der obigen Aufgabe $n=m+\frac{1}{q}$, so ist der Anwachs des Capitals nach m Jahren $=ap^m$; und dieses als ein Capital betrachtet, trägt noch in der Zeit von $\frac{1}{q}$ Jahren $\frac{c}{100q}\cdot ap^m$ Fl. Interessen, weil eben dieses Capital ap^m Fl. in einem ganzen Jahre $\frac{c}{100}ap^m$ Fl. an Interessen bringt; mithin ist das Capital sammt Interessen nach $m+\frac{1}{q}$ Jahren $s=ap^m+\frac{c}{100q}\cdot ap^m=ap^m\left(1+\frac{c}{100q}\right)$.

Würde man aber, um den Anwachs des Capitals nach $m+\frac{1}{q}$ Jahren zu bestimmen, in der obigen Formel $n=m+\frac{1}{q}$ setzen; so wäre $s=ap^{m+\frac{1}{q}}=ap^m \cdot p^{\frac{1}{q}}$, welches augenscheinlich nicht einander gleich sein kann. Um den Fehler deutlicher durch ein wirkliches Beispiel einzusehen, sei oben $n=12\frac{1}{2}$ Jahre; so ist das Capital nach 12 Jahren angewachsen auf 35917,125 Fl., und dieses trägt noch in $\frac{1}{2}$ Jahre 897,93 Fl., weil 100 Fl. in dieser Zeit $\frac{5}{2}$ Fl. Interessen bringen. Mithin ist die ganze Summe nach $12\frac{1}{2}$ Jahren $s=36815{,}06$ Fl. Würde man aber in der obigen Formel $n=12\frac{1}{2}$ setzen, so wäre $s=20000.(1{,}05)^{\frac{25}{2}}$, was logarithmisch entwickelt, 36804,1 Fl. gibt, daher beinahe um 11 Fl. zu wenig ist. Beträchtlicher würde der Fehler sein, wenn das anfängliche Capital größer wäre, oder wenn es durch eine größere Anzahl Jahre immer auf die angeführte Art vermehrt würde.

In den k. k. Staaten werden die Interessen in den öffentlichen Fonds halbjährig ausbezahlt. Wollte man mit Ende eines jeden halben Jahres die Interessen wieder zum Capitale schlagen (welches hier sehr leicht angeht, weil die Interessen gewöhnlich um 8, auch 14 Tage vor dem verfallenen Termine schon ausgezahlt werden), so würde der Anwachs dieses Capitals beträchtlicher sein, als im vorigen Falle. Z. B. Es legt Jemand in das Wiener Banco-Amt ein Capital von 25000 Fl. zu $3\frac{1}{2}$ Proc. jährlichen Interessen, und mit Ende eines jeden halben Jahres die Interessen wieder als ein Capital an; wie hoch wird dieses Capital in 20 Jahren anwachsen? Wendet man hier obige Formel $s=ap^n$ an, so ist $a=25000$, $n=40$ halbe Jahre, und $c=\frac{3\frac{1}{2}}{2}=\frac{7}{4}=1{,}75$,

daher $\quad p=1{,}0175$

und $\quad \log p=0{,}0075344 \quad (\times 40$

$$\begin{aligned} \log p^n &= 0{,}3013760 \\ \log a &= 4{,}3979400 \\ \hline \log s &= 4{,}6993160 \\ s &= 50039{,}8 \text{ Fl.} \end{aligned}$$

Würde man aber nur mit Ende eines jeden Jahres die Interessen zum Capitale schlagen, so wäre in der Formel $a=25000$, $n=20$, und $c=3\frac{1}{2}=\frac{7}{2}=3{,}5$, nemlich $p=1{,}035$; folglich

$$\begin{array}{rl} \log p & =0{,}0149403 \quad (\times 20 \\ \hline \log p^n & =0{,}2988060 \\ \log a & =4{,}3979400 \\ \hline \log s & =4{,}6967460 \\ s & =49744{,}6 \text{ Fl.,} \end{array}$$

also um 295 Fl. weniger als vorhin.

§. 273.

Aus der Formel I. $\log s=\log a+n\log p$

fließen folgende
$$\left\{\begin{array}{ll} \text{II.} & \log a=\log s-n\log p, \\ \text{III.} & \log p=\dfrac{\log s-\log a}{n}, \\ \text{IV.} & n=\dfrac{\log s-\log a}{\log p}, \end{array}\right.$$

wobei noch $c=100(p-1)$ Statt findet.

Nach jeder dieser Formeln können nun verschiedene hieher gehörige Rechnungsfragen beantwortet werden.

1. Frage. In einer Provinz befinden sich zwei Millionen Menschen; wenn nun diese Summe jährlich um den fünfzigsten Theil, das ist um 2 Proc. zunimmt; wie groß würde wohl die Anzahl der Menschen nach 100 Jahren sein?

Antwort. Hier ist $a=2000000$, $p=1{,}02$, $n=100$, folglich nach der Formel I.

$$\begin{array}{rl} \log p & =0{,}0086002 \\ \hline n\log p & =0{,}8600200 \\ \log a & =6{,}3010300 \\ \hline \log s & =7{,}1610500 \quad \text{und} \\ s & =14490000 \quad \text{beinahe:} \end{array}$$

2. Frage. Es hat Jemand nach 4 Jahren eine Summe von 6000 Fl. ohne Interessen zu fordern; wie viel ist sie jetzt werth, wenn die Interessen zu 4 Proc. und Interessen von Interessen gerechnet werden?

Antwort. Hier ist $s=6000$, $n=4$, und $p=1{,}04$, folglich nach der Formel II.

$$\begin{array}{r l} \log p = & 0{,}0170333 \\ \hline n\log p = & 0{,}0681332 \\ \log s = & 3{,}7781513 \\ \hline \log a = & 3{,}7100181 \end{array}$$

und $a = 5128{,}827$ Fl. $= 5128$ Fl. $49\frac{1}{2}$ Kr.

3. Frage. Ein Wucherer leiht Jemanden 600 Fl. und läßt sich dafür einen Schuldbrief von 800 Fl. ausstellen, die nach drei Jahren ohne Interessen zahlbar sind. Wie viel Interessen nimmt dieser jährlich von 100?

Antwort. Hier ist $a=600$, $s=800$, $n=3$, folglich nach der Formel III.

$$\begin{array}{r l} \log s = & 2{,}9030900 \\ \log a = & 2{,}7781513 \\ \hline n\log p = & 0{,}1249387 \quad (:3 \\ \log p = & 0{,}0416462 \end{array}$$

und $p=1{,}1006$, $p-1=0{,}1006$,

somit $c=10{,}06$; das ist etwas mehr als 10 Proc.

4. Frage. Wie lang muß ein Capital liegen, damit es sammt den Interessen auf eine Summe anwachse, die noch einmal so groß ist, als das anfängliche Capital, wenn die Interessen zu 4 Proc. vorgeschrieben sind, und jährlich zum Capitale geschlagen werden?

Antwort. Hier ist $s=2a$, $p=1{,}04$, folglich nach der Formel IV.

$$n = \frac{\log 2a - \log a}{\log p} = \frac{\log 2}{\log 1{,}04} = \frac{0{,}3010300}{0{,}0170333} = 17 \text{ Jahre}$$

nebst einem Bruche, nemlich nach 18 Jahren wird die Summe schon größer als das Doppelte des anfänglichen Capitals sein.

§. 274.

Aufgabe. Ein Capital a wird angelegt, und nach Verlauf eines jeden Jahres nicht nur um seine gefallenen Interessen zu c Proc., sondern auch überdies um eine Summe b vermehrt. Wie groß wird wohl die ganze Summe s nach n Jahren sein?

Auflösung. Der Anwachs des Capitals a nach n Jahren ist nach der vorigen Aufgabe ap^n, wo p wie vorhin $1+\frac{c}{100}$ ist.

Der Anwachs der Summe b, die nach Verlauf des ersten Jahres, oder mit Anfang des zweiten angelegt wird, ist $=bp^{n-1}$, weil diese Summe nur durch $n-1$ Jahre anliegt.

Der Anwachs der Summe b, die nach Ende des zweiten Jahres angelegt wird, ist bp^{n-2}.

Eben so ist der Anwachs der Summe b, welche mit Ende des dritten Jahres angelegt wird, $=bp^{n-3}$, u. s. w.

Endlich ist der Anwachs der Summe b, welche am Ende des vorletzten, oder mit Anfang des letzten Jahres angelegt wird, $=bp$, weil diese Summe nur ein Jahr liegt.

Es stehen demnach die Summen, auf welche die jährlich zugelegten Theile b anwachsen, in folgender geometrischen Reihe: bp, bp^2, bp^3, ... bp^{n-1}; hievon ist die Summe $=\frac{bp(p^{n-1}-1)}{p-1}$ (nach §. 244, II.).

Addirt man nun zu diesem Betrage noch den Anwachs des Capitals a, so erhält man $s=ap^n+\frac{bp(p^{n-1}-1)}{p-1}$.

Es sei z. B. $a=6000$, $b=500$, $n=10$, und die Interessen seien zu 5 Proc. vorgeschrieben, nemlich $p=1{,}05$;

so ist $ap^n=9773{,}37$
und $p^{n-1}=1{,}551328$ } wenn man jedes insbesondere logarithmisch entwickelt,
also $p^{n-1}-1=0{,}551328$.

Mithin $\frac{bp(p^{n-1}-1)}{p-1}=5788{,}94$, und $s=15562{,}31$ Fl.

Setzt man aber in dieser Aufgabe $b=a$, d. h. nimmt man an, daß die jährliche Zulage dem anfänglichen Capitale gleich ist; so wird

$$s=\frac{ap(p^n-1)}{p-1}$$

und I. $\log s=\log a+\log p+\log(p^n-1)-\log(p-1)$,

II. $\log a=\log s+\log(p-1)-\log p-\log(p^n-1)$,

III. $$n=\frac{\log[ap+s(p-1)]-\log a}{\log p}-1.$$

Jede dieser Formeln löst nun wieder verschiedene hieher gehörige Rechnungsfragen auf, von denen jeder einige nach Belieben in Zahlen aufsetzen, und mit Hilfe der Logarithmen entwickeln kann.

1. Frage. Ein Kaufmann war verpflichtet, durch 6 Jahre hinter einander, mit Anfange eines jeden Jahres 4000 Fl. zu bezahlen; er hat aber gar nichts bezahlt. Wie viel ist er am Ende des sechsten Jahres schuldig, wenn die Interessen zu 4 Proc. und Interessen von Interessen gerechnet werden?

Antwort. Hier ist $a=4000$, $n=6$, $c=4$, nemlich $p=1{,}04$; folglich hat man nachstehende Rechnung.

$\log p = 0{,}0170333$	$\log a = 3{,}6020600$
$\log p^n = 0{,}1021998$	$\log p = 0{,}0170333$
$p^n = 1{,}265318$	$\log(p^n - 1) = 9{,}4237667$
$p^n - 1 = 0{,}265318$	$-\log(p-1) = 1{,}3979400$
$p - 1 = 0{,}04$	$\log s = 4{,}4408000$
	und $s = 27593{,}07$ Fl.

2. Frage. Es hat Jemand nach zwanzig Jahren eine Summe von 10000 Fl. ohne Interessen zu erheben; er will aber dafür während dieser zwanzig Jahre mit Anfang eines jeden Jahres eine dergestalt bestimmte Summe erhalten, daß die Schuld nach zwanzig Jahren ganz getilgt sei. Wie viel kann ihm jährlich gegeben werden, wenn die Interessen zu 4 Proc. vorgeschrieben sind?

Antwort. Hier ist $s=10000$, $n=20$, $c=4$, also $p=1{,}04$, folglich nach der Formel II. auf nachstehende Weise zu rechnen.

$\log p = 0{,}0170333$	$\log s = 4{,}0000000$
$\log p^n = 0{,}3406660$	$\log(p-1) = 8{,}6020600$
$p^n = 2{,}19112$	$-\log p = 9{,}9829667$
$p^n - 1 = 1{,}19112$	$-\log(p^n-1) = 9{,}9240445$
$p - 1 = 0{,}04$	$\log a = 2{,}5090712$
	und $a = 322{,}902$ Fl.,

welches jährlich für diese Schuld bezahlt werden kann, weil diese Summe zu 4 Proc. angelegt, und jährlich auf die angeführte Art vermehrt, in zwanzig Jahren eine Summe von 10000 Fl. zum Vorschein bringt.

§. 275.

Aufgabe. Ein Capital a wird zu c Proc. angelegt und die Interessen werden jährlich zum Capitale geschlagen; dagegen aber wird mit Ende eines jeden Jahres eine Summe b hinweg genommen; wie groß wird der Rest R nach n Jahren noch sein?

Auflösung. Das Capital a, wenn nichts davon genommen wird, bringt in n Jahren die Summe ap^n zum Vorschein (vermög §. 273); und die Summe b, die mit Ende des ersten Jahres hinweg genommen wird, kann ebenfalls als ein Capital angesehen werden, welches in $n-1$ Jahren auf bp^{n-1} anwachsen würde, wenn es durch diese Zeit immer angelegt bliebe. Eben so wächst die Summe b, welche mit Ende des zweiten Jahres hinweg genommen wird, als Capital betrachtet, auf bp^{n-2}, u. s. w. und die Summe b, welche am Ende des vorletzten Jahres hinweg genommen wird, auf bp. Endlich ist, da am Ende des letzten Jahres ebenfalls noch b Fl. hinweg genommen werden, nach n Jahren das Capital ap^n um $b+bp+bp^2+\ldots+bp^{n-1}$ vermindert worden. Diese Reihe (nach §. 244, II.) summirt, gibt $\frac{b(p^n-1)}{p-1}$,

folglich ist I. $R=ap^n-\frac{b(p^n-1)}{p-1}$,

II. $a=\frac{b(p^n-1)}{p^n(p-1)}+\frac{R}{p^n}$,

III. $b=(ap^n-R)\frac{p-1}{p^n-1}$,

IV. $$n=\frac{\log[(p-1)R-b]-\log[(p-1)a-b]}{\log p}$$
$$=\frac{\log[b-(p-1)R]-\log[b-(p-1)a]}{\log p}.$$

Einige Beispiele zur Anwendung dieser Formeln.

1. Frage. Es legt Jemand ein Capital von 30000 Fl. zu 4 Proc. an, und nimmt jährlich von den Interessen 800 Fl. zu seinem Unterhalte weg; den Überrest aber schlägt er zum Capitale. Wie groß wird dieses Capital nach 15 Jahren sein?

Antwort. Hier ist $a=30000$, $b=800$, $n=15$, und $c=4$, nemlich $p=1,04$, daher nach der Formel I. folgende Rechnung auszuführen.

$$\log p = 0{,}0170333$$
$$851665$$
$$\log p^n = 0{,}2554995$$
$$p^n = 1{,}800941$$
$$p^n - 1 = 0{,}800941$$
$$p - 1 = 0{,}04$$
$$ap^n = 54028{,}23$$
$$d = 16018{,}82$$

und $R = 38009{,}41$ Fl.

$$d = b\,\frac{p^n - 1}{p - 1}$$
$$\log b = 2{,}9030900$$
$$\log(p^n - 1) = 9{,}9036005$$
$$-\log(p - 1) = 1{,}3979400$$
$$\log d = 4{,}2046305$$

2. Frage. Es hat Jemand durch sechs Jahre hinter einander eine Rente von 500 Fl. zu genießen, und ist gesonnen, diese Rente zu verkaufen; was wird sie wohl jetzt werth sein, wenn die Interessen zu $3\frac{1}{2}$ Proc. vorgeschrieben sind? Oder was dasselbe ist: Es will Jemand seinem Freunde ein jährliches Auskommen von 500 Fl. bei einer allgemeinen Leihbank durch sechs Jahre anweisen; wie groß muß das Capital sein, welches bei dieser Bank zu erlegen ist, wenn die Interessen zu $3\frac{1}{2}$ Proc. gerechnet werden, und am Ende des sechsten Jahres das Capital sammt den Interessen verzehrt sein soll?

Antwort. Hier ist das unbekannte Capital $=a$, die jährliche Rente $b=500$, $n=6$, $c=3\frac{1}{2}$, mithin $p=1{,}035$; und da am Ende des sechsten Jahres das Capital sammt den Interessen verzehrt sein soll; so ist der Rest $R=0$, folglich nach der Formel II. $a=\frac{b}{p^n}\cdot\frac{p^n-1}{p-1}$ und nachstehender Maßen zu rechnen.

$$\log p = 0{,}0149403$$
$$\log p^n = 0{,}0896418$$
$$p^n = 1{,}229254$$
$$p^n - 1 = 0{,}229254$$
$$p - 1 = 0{,}035$$

$$\log b = 2{,}6989700$$
$$\log(p^n - 1) = 9{,}3603169$$
$$-\log p^n = 9{,}9103582$$
$$-\log(p - 1) = 1{,}4559320$$
$$\log a = 3{,}4255771$$

mithin $a = 2664$ Fl.

3. Frage. Es ist ein Rittergut zu verkaufen, und es melden sich drei Käufer; der erste will dafür 34500 Fl. sogleich bar bezahlen; der zweite bietet 38000 Fl. aber so, daß er 6000 Fl. sogleich, und vier Jahre hinter einander mit Ende eines jeden

Jahres 8000 Fl. erlegen will; der dritte bietet 40000 Fl., jedoch so, daß er 4000 Fl. sogleich, und sechs Jahre hinter einander mit Ende eines jeden Jahres 6000 Fl. erlegen will. Wer hat nun am meisten geboten, wenn die Interessen zu 5 Proc. gerechnet werden?

Antwort. Man untersuche, so wie im vorhergehenden Beispiele, wie viel die 32000 Fl., welche der zweite in vier Terminen bezahlen will, für jetzt werth sind; nemlich man setze in der Formel II. $b=8000$, $n=4$, $p=1{,}05$, $R=0$. Man findet für den jetzigen Werth dieser Zahlungen $a=28367{,}6$. Mithin ist der Anbot des zweiten $=6000+28367{,}6=34367{,}6$ Fl.

Eben so bestimme man aus der Formel II., wie viel die sechs Zahlungen des dritten für jetzt werth sind, indem man $b=6000$, $n=6$, $p=1{,}05$, $R=0$ setzt; und man findet für den jetzigen Werth $a=30454{,}2$. Mithin ist der Anbot des dritten $=4000+30454{,}2$ $=34454{,}2$ Fl.; folglich hat der erste den größten Anbot gemacht.

4. Frage. Es soll eine gegenwärtige Schuld von 1000 Fl. in fünf jährliche Zahlungstermine eingetheilt werden, damit am Ende eines jeden Jahres eine gleiche Summe bezahlt wird. Wie groß muß diese Summe sein, wenn die Interessen zu 5 Proc. vorgeschrieben sind?

Antwort. Man sehe die Summe, welche alle Jahre bezahlt werden soll, als eine Rente an, wovon der gegenwärtige Werth 1000 Fl. ist; also ist hier $a=1000$, $n=5$, $c=5$, $p=1{,}05$, $R=0$; folglich nach der Formel III. $b=230{,}97$ Fl., welche in jedem Termin bezahlt werden müssen.

5. Frage. Es hat Jemand ein Capital von 100000 Fl. zu 5 Proc. anliegen; allein mit den Interessen hievon kann er seinen Aufwand nicht bestreiten; er braucht jährlich eine Summe von 6000 Fl., und ist daher bemüssigt, vom Capitale mit Ende eines jeden Jahres so viel hinweg zu nehmen, daß dieses sammt den gefallenen Interessen 6000 Fl. beträgt. In wie viel Jahren wird wohl der Mann ein Bettler werden, wenn er so fortfährt?

Antwort. Hier ist $a=100000$, $b=6000$, $p=1{,}05$, $R=0$; folglich nach der Formel IV. $n=\dfrac{\log 6000-\log 1000}{\log 1{,}05}=$

$\left(\log\frac{6000}{1000}\right):\log 1{,}05=\frac{\log 6}{\log 1{,}05}=\frac{0{,}7781513}{0{,}0211893}=36$ Jahre beinahe. Wollte man nun wissen, wie viel ihm nach verflossenen 36 Jahren noch übrig bleibt, so setze man in der Formel I. $a=100000$, $b=6000$, $p=1{,}05$, $n=36$; so findet man $R=4163{,}7$ Fl., welche mit Anfang des sieben und dreißigsten Jahres noch vorhanden sind. Dieses bringt in diesem Jahre noch 208,2 Fl. Interessen; mithin hat dieser Mann am Ende des sieben und dreißigsten Jahres 4371,9 Fl. zu empfangen, wo sodann das ganze Capital sammt Interessen verzehrt ist.

Man würde aber fehlen, wenn man $n=\frac{0{,}7781513}{0{,}0211893}=$ 36,724 Jahre = 36 Jahre 264 Tage setzen, nemlich behaupten wollte, daß dieser Mann denselben Aufwand durch 36 Jahre und 264 Tage machen könne; denn der Rest 4163,7 Fl., welcher nach verflossenen 36 Jahren verbleibt, bringt in 264 Tagen 150,6 Fl. Interessen; also hat er nach Verlauf dieser Zeit in Allem 4314,3 Fl.; er braucht aber in dieser Zeit zu seinem Aufwande 4339,7 Fl.; mithin hat er um 25,4 Fl. zu wenig.

6. Frage. Eine Gemeinde hat von ihrer Herrschaft eine Summe von 20000 Fl. ausgeborgt; dagegen hat sie der Herrschaft einen Wald, welcher jährlich 1500 Fl. reinen Nutzen bringt, indessen zum Unterpfand gegeben. Wie viel Jahre kann die Herrschaft diesen Wald mit Recht benützen, wenn die Interessen zu 5 Proc. und Interessen von Interessen gerechnet werden?

Antwort. Hier ist $a=20000$, $b=1500$, $p=1{,}05$, und es wird, weil das ganze Capital durch Benützung des Waldes getilgt sein soll, $R=0$; folglich nach der Formel IV. $n=\frac{\log 1500-\log 500}{\log 1{,}05}=\frac{\log 3}{\log 1{,}05}=\frac{4771213}{211893}=22$ Jahre beinahe, durch welche die Herrschaft den Wald mit Recht benützen darf. Und wenn man nun in der Formel I. $n=22$, $a=20000$, $b=1500$, und $p=1{,}05$ setzt, so findet man $R=747{,}4$ Fl., welche die Gemeinde der Herrschaft nach verflossenen 22 Jahren bei der Zurücknahme des Waldes noch zu bezahlen hat. Gesetzt aber, die Herrschaft hätte das Pfand durch 30 Jahre benützt, und nun sollte liquidirt werden; so wäre, nach der Formel I. $R = -13219{,}4$; nemlich die Herrschaft müßte der Gemeinde nebst dem Walde auch noch eine Summe von 13219,4 Fl. zurückgeben.

Anmerkung. Die hier angeführten Rechnungsaufgaben mögen hinreichen, um den Nutzen einzusehen, welchen die Logarithmen auch bei den, im gemeinen Leben vorkommenden, Rechnungen verschaffen; und wie schwer es einem blos mechanischen Rechner, dem die Theorie der Logarithmen ganz unbekannt ist, fallen müsse, dergleichen Aufgaben aufzulösen. Indessen kann doch der fleißige Leser sich über alle vorhergehenden Formeln verschiedene numerische Beispiele aufsetzen, um sich den Gebrauch der Logarithmen recht geläufig zu machen, und seinen Scharfsinn in der planmäßigen Anlage solcher Rechnungen zu üben, damit er dieselben nicht blos möglichst kurz und einfach, daher zugleich so schnell und sicher als thunlich ausführen, sondern auch durch die möglich leichteste Revision von ihrer Richtigkeit sich überzeugen könne; welche Vortheile ihm jedoch das sonst bei manchen Anfängern gebräuchliche nach einander Anschreiben mehrerer Logarithmen in der laufenden Zeile durchaus nicht gewähren wird.

Siebentes Hauptstück.

Lehre von den Functionen.

I. Abschnitt.

Erklärung und Eintheilung der Functionen.

§. 276.

Bei unseren bisherigen Untersuchungen der Größen oder vielmehr der sie darstellenden Zahlen haben wir da, wo selbe durch allgemeine Zeichen (Buchstaben) vorgestellt werden, zu zeigen uns bemüht, wie der Werth einer oder einiger von solchen Größen aus einer oder mehreren anderen berechnet werden könne, wenn jeder von den letzteren ein einziger bestimmter Werth beigelegt wird. Dieses bereits von uns besichtigte Gebiet der Mathematik nennen wir, wie schon (§. 53) erwähnt, allgemeine Arithmetik (Buchstaben-Rechenkunst), oder wohl auch, in so fern in ihm gelehrt wird, unbekannte Zahlen mit Hilfe von Gleichungen durch bekannte allgemein zu bestimmen, Algebra. Ein noch weit ausgedehnteres Feld von mathematischen Forschungen eröffnet man sich aber dadurch, daß man nicht sowohl die Werthbestimmung der Größen, sondern ihren Zusammenhang unter einander, ihre wechselweise Abhängigkeit, und ihre gleichzeitige Veränderlichkeit zum Gegenstande der Untersuchungen wählt. Dieses Gebiet der Mathematik heißt Analysis, und soll gegenwärtig in einigen der vorzüglichsten Partien von uns betreten werden.

§. 277.

Eine Größe, welche von anderen Größen abhängt, d. h. deren Werth durch die Werthe der letzteren Größen bedingt und bestimmt wird, folglich Änderungen erfahren kann, wenn die Werthe dieser abgeändert werden, heißt eine Function (abhängige, dependente Größe) von den ihr zum Grunde liegenden Größen, welche selbst wieder die Grundgrößen der Function genannt werden. Ist aber eine Größe von der Einwirkung anderer völlig frei, so wird sie von ihnen unabhängig (independent) genannt.

Die Beschaffenheit des Zusammenhangs der Function mit ihren Grundgrößen bedingt die Form der Function. Diese Abhängigkeit einer Function von ihren Grundgrößen kann theils dergestalt ausgesprochen werden, daß sich die abhängige mit ihnen, entweder allein, oder in Gesellschaft von anderen Hilfsgrößen, in Gleichungen bringen läßt, theils kann sie blos überhaupt erkannt werden, ohne daß die Aufstellung solcher Beziehungsgleichungen gelingt. Eine Abhängigkeit der letzteren Art ist jedoch nicht geeignet, Gegenstand analytischer Forschungen zu sein; daher werden wir es in der Analysis nur mit Abhängigkeiten — Functionen — der ersten Art zu thun haben. Bei diesen wird zur Erleichterung der Forschungen unser Streben stets dahin gerichtet sein, nach Beseitigung aller Hilfsgrößen die Function allein in dem einen, die Grundgrößen aber in den anderen Theil einer Gleichung zu bringen, d. h. die Function durch die Grundgrößen auszudrücken. Functionen, bei denen dies geschehen ist, heißen gesonderte, entwickelte (explicite), die andern aber ungesonderte, unentwickelte (implicite). Aus diesem Grunde wird selbst jeder algebraische Ausdruck eine entwickelte Function, oder auch nur schlechthin eine Function der in ihm stehenden allgemeinen Größen genannt.

Z. B. Der Werth eines auf Zinseszinsen anliegenden Capitals wird durch den ursprünglichen Betrag desselben, durch die Procente, und die Zeit seines Anliegens dergestalt bestimmt, daß, wenn a das wirklich angelegte Capital, c die jährlichen Procente, und n die Anzahl der Jahre, während welcher es liegt, vorstellt, der fragliche Werth s des Capitals (nach §. 272, 7. Aufg.) durch die Gleichung $s = a\left(1 + \frac{c}{100}\right)^n$ dargeboten wird. Somit ist s, so wie auch schon der Ausdruck $a\left(1 + \frac{c}{100}\right)^n$ allein, eine Function, und zwar eine gesonderte von den Größen a, c, n. Aber auch jede dieser letzteren

Größen ist wegen dieser Gleichung eine, jedoch ungesonderte Function der beiden übrigen und der Größe *s*. — Eben so hängt die Länge des Weges, den ein sich bewegender Körper durchläuft, von den Stärken und Richtungen der Kräfte, welche auf ihn wirken, und von der Zeit ab, während welcher er sich bewegt; allein diese Abhängigkeit läßt sich in manchen Fällen, namentlich bei den vom Winde oder Wasser fortgetriebenen und bei belebten Körpern, nicht durch Gleichungen aussprechen.

§. 278.

Die Erforschung der Abhängigkeit einer Function von ihren Grundgrößen pflegt man sich gewöhnlich dadurch zu erleichtern, daß man von dem Einfluße einiger derselben gänzlich absieht, indem man ihnen bestimmte Werthe beilegt, während man die übrigen verschiedene Werthe annehmen läßt. In dieser Rücksicht werden die Grundgrößen der Functionen in veränderliche (variable), und in beständige (constante) oder unveränderliche (invariable) abgetheilt, von denen man als eigentliche Grundgrößen gewöhnlich blos die ersteren nennt. — Nach diesen Begriffen pflegt man die Analysis auch als die Lehre von den Functionen anzusehen.

Die beständigen Größen bezeichnet man, so lange es frei steht, mit den ersten, und die veränderlichen mit den letzten Buchstaben des Alphabets. Ferner stellt man die entwickelten Functionen, entweder, in so fern sie gleichfalls veränderlich und zwar relativ (dependent, abhängig) veränderlich sind, wenn man die Grundgrößen als absolut (independent, unabhängig) veränderlich ansehen will, durch die letzten Buchstaben des Alphabets, wie z. B. eine Function von x durch X, eine von y durch Y, eine von x und y durch U, oder, um größere Übersicht in den analytischen Operationen zu gewinnen, dadurch vor, daß man die Zeichen ihrer veränderlichen Grundgrößen, neben einander und durch Beistriche gesondert, hinschreibt, mit Klammern umgibt, und einen der Buchstaben f, f, F, φ, Φ, u. dgl., welche deßwegen Functionszeichen heißen, vorsetzt. So bezeichnen in einer bestimmten Untersuchung die Symbole $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$,.... verschieden geformte (unähnliche) Functionen derselben variablen Größe x, und $f(x, y, z,....)$, $F(x, y, z,....)$ verschieden geformte

Functionen der Veränderlichen $x, y, z, \ldots$; während die Symbole $f(x)$, $f(y)$ ganz gleich gestaltete (ähnliche), nur in der Bezeichnung der veränderlichen Größe sich unterscheidende, Functionen vorstellen. Das Symbol $f(xy)$, worin die veränderlichen Größen durch kein Comma geschieden sind, deutet eine Function des, wie eine einzige Größe betrachteten, Productes xy an.

Der besondere Werth, welchen eine solche allgemeine Function von einer oder mehreren Veränderlichen für bestimmte Werthe dieser Veränderlichen annimmt, wird kurz dadurch vorgestellt, daß diese Werthe in dem Symbole der Function statt der Zeichen der Veränderlichen angesetzt werden. So ist $f(a)$ der Werth der Function $f(x)$ für $x=a$; $f(a, b, c, \ldots)$ der Werth der Function $f(x, y, z, \ldots)$, wenn x in a, y in b, z in c, u. s. w. sich verwandelt. Setzt man z. B. die Function $a+\sqrt{b^2-x^2}=f(x)$, so ist $f(y)=a+\sqrt{b^2-y^2}$, ferner $f(uv)=a+\sqrt{b^2-u^2v^2}$ und $f(b)=a+\sqrt{b^2-b^2}=a$.

In besonderen Fällen setzt man auch constante Größen, auf deren Anwesenheit in dem Ausdrucke der Function man besonders aufmerksam machen will, zwischen die Klammern hinter dem Functionszeichen. So bezeichnet $f(x, a)$ eine Function, in welcher nicht blos die Veränderliche x, sondern auch die Constante a vorkommt.

§. 279.

Die (entwickelten) Functionen theilt man in algebraische und transcendente ein. Jene entstehen aus der Addition, Subtraction, Multiplication und Division veränderlicher Größen unter sich und mit beständigen Größen, aus der Erhebung veränderlicher Größen zu Potenzen von constanten Exponenten, (wovon die Ausziehung der Wurzeln aus veränderlichen Größen nach constanten Wurzelexponenten als ein besonderer Fall zu betrachten ist). Zu den transcendenten Functionen rechnet man die Exponentialgrößen (Exponentiellen), d. i. Potenzen constanter Wurzeln mit veränderlichen Exponenten, die Logarithmen von veränderlichen Zahlen für constante Grundzahlen, und alle übrigen Functionen, welche wir noch in der Folge kennen lernen werden. So sind $a+x$, $b-x+y$, xyz, x^5y^2, $a\sqrt{x+y}$ algebraische, dagegen a^x, x^y, $\log x$, $\log(x+y)$ transcendente Functionen.

Ferner werden die algebraischen Functionen entweder rationale oder irrationale genannt, je nachdem in ihnen die Veränderlichen mit Wurzelzeichen (oder gebrochenen Exponenten) behaftet sind oder nicht; sie heißen ganz oder gebrochen, je nachdem die vorkommenden Nenner von den Veränderlichen frei sind oder nicht. So ist die Function $\frac{ax+by}{c-x}$ rational und gebrochen, $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$ irrational und ganz.

Läßt eine Function für bestimmte Werthe der vorkommenden veränderlichen Größen im Allgemeinen mehrere verschiedene Werthe zu, so heißt sie eine vielförmige oder vieldeutige, und zwar nach der Anzahl dieser Werthe eine zweiförmige, dreiförmige, u. s. w.; im Gegentheil wird sie einförmig genannt, wenn sie nur einen einzigen Werth erhält. So sind alle rationalen algebraischen Functionen einförmig, dagegen ist die Function $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ im Allgemeinen vierförmig, weil sie, nach Verschiedenheit der Vorzeichen der Radicale, $+\sqrt{x}+\sqrt{y}$, $+\sqrt{x}-\sqrt{y}$, $-\sqrt{x}+\sqrt{y}$, $-\sqrt{x}-\sqrt{y}$ sein kann; für $x=0$ oder $y=0$ ist sie blos zweiförmig, endlich für $x=0$ und $y=0$ ist sie sogar einförmig.

II. Abschnitt.

Von den Grenzen der veränderlichen Größen, dem Unendlichen und der Stetigkeit der Variablen.

§. 280.

Wenn eine veränderliche Größe sich fortwährend einer bezeichneten Größe nähert, so daß sie endlich von ihr um weniger als jede beliebig gewählte Größe verschieden sein kann; so heißt jene bezeichnete Größe eine Grenze der veränderlichen Größe. So ist z. B. eine Irrationalzahl die Grenze eines veränderlichen rationalen Bruches, der, während sein Nenner, und nach ihm sich richtend der Zähler ununterbrochen wächst, sich jener irrationalen Zahl, so weit es verlangt werden mag, nähert.

Man sagt ferner von einer veränderlichen Größe, sie wachse unendlich, oder sie werde unendlich groß, wenn sie bei ihrem Wachsen größer werden kann, als jede angegebene noch so große Größe. Eben so sagt man, die veränderliche Größe nehme unendlich ab, werde unendlich klein, wenn sie bei ihrem Abnehmen kleiner werden kann als jede angegebene noch so kleine Größe. Man erlaubt sich deßwegen auch, die Null (0) als die unerreichbare Grenze der unendlich abnehmenden Größen anzusehen, und indem man erwägt, daß bei der unendlichen Abnahme einer veränderlichen Größe x, oder bei ihrer unendlichen Annäherung an die Grenze 0, ihr Umgekehrtes $\frac{1}{x}$ *) unendlich zunimmt, betrachtet man $\frac{1}{0}$ als die unerreichbare Grenze der unendlich wachsenden Größen, wofür man gewöhnlich das Symbol ∞ schreibt. Eine Veränderliche, welche weder unendlich wächst, noch unendlich abnimmt, wird endlich genannt.

Obgleich hier nur vom Unendlichgroß- oder Unendlichkleinwerden, nicht aber vom wirklich Unendlichgroß- oder Unendlichklein sein, und auch keineswegs von dem eigentlichen Erreichen einer Grenze die Sprache ist; so pflegen doch selbst gründliche Analysten, um sich kürzer auszudrücken, von gleichsam wirklich unendlich großen und unendlich kleinen Größen, so wie von einem eigentlichen Erreichen der Grenzen zu sprechen; daher auch wir gewöhnlich ihrem Beispiele folgen werden.

Man ersieht aus den obigen Betrachtungen leicht, daß man ein unbestimmtes, ohne Ende $\frac{\text{Wachsen}}{\text{Abnehmen}}$ einer veränderlichen Größe von dem $\frac{\text{Wachsen}}{\text{Abnehmen}}$ ins Unendliche unterscheiden müsse, da sie im ersten Falle auch einer fixen Grenze zustreben, gegen sie convergiren

---

*) Das Umgekehrte oder der reciproke Werth einer Zahl ist der Werth der durch diese Zahl getheilten Einheit. So ist von a das Umgekehrte $\frac{1}{a}$, von 4 das Umgekehrte $\frac{1}{4}$ und von $\frac{3}{5}$ das Umgekehrte $\frac{5}{3}$.

kann. So nimmt z. B. die Funtion $a+\frac{b}{c+x}$, während x ins Unendliche wächst, zwar ohne Ende aber nicht unendlich ab, weil sie nicht unter die Grenze a herabsinken kann.

Zeigt sich bei Vergleichung zweier unendlich $\substack{\text{großer}\\\text{kleiner}}$ Größen, daß das Verhältniß der einen zur andern auch unendlich $\substack{\text{groß}\\\text{klein}}$ sei, so nennt man die erstere eine unendlich $\substack{\text{große}\\\text{kleine}}$ Größe der zweiten Ordnung, indem man die andere als eine unendlich $\substack{\text{große}\\\text{kleine}}$ Größe der ersten Ordnung ansieht. In demselben Sinne spricht man auch von einer unendlich $\substack{\text{großen}\\\text{kleinen}}$ Größe der 3ten, 4ten, ... $m$ten Ordnung, wenn das Verhältniß einer unendlich $\substack{\text{großen}\\\text{kleinen}}$ Größe der 2ten, 3ten, ... $m-1$ten Ordnung zu einer andern von derselben Ordnung ein unendlich $\substack{\text{Großes}\\\text{Kleines}}$ der ersten Ordnung ist. So ist z. B., wenn x eine unendlich $\substack{\text{große}\\\text{kleine}}$ Größe vorstellt, x^2 eine unendlich $\substack{\text{große}\\\text{kleine}}$ Größe der zweiten Ordnung, x^3 eine der dritten Ordnung, u. s. w.

§. 281.

Aus den bisher gegebenen Erklärungen von den endlichen und unendlichen Größen fließen folgende Lehrsätze.

1) Eine endliche Größe bleibt in ihrem Werthe ungeändert, wenn man ihr eine unendlich kleine addirt oder subtrahirt. Bezeichnet nemlich u eine unendlich kleine, t eine endliche Größe, so ist $t \pm u = t$. Denn der eigentliche Sinn dieses Satzes ist blos der, daß bei der unendlichen Abnahme der Größe u sowohl die Summe $t+u$, als auch die Differenz $t-u$ gegen die Grenze t convergirt, was an sich klar ist.

2) Eine unendlich kleine Größe von was immer für einer Ordnung wird durch eine unendlich kleine Größe einer höheren Ordnung weder vermehrt, wenn sie ihr addirt, noch vermindert, wenn sie von ihr abgezogen wird.

Ist nemlich u ein unendlich Kleines irgend einer Ordnung und v ein unendlich Kleines einer höheren Ordnung, so ist $u \pm v = u$. Denn es ist $u \pm v = u(1 \pm \frac{v}{u})$, und das Verhältniß $\frac{v}{u}$ unendlich klein, weil v eine unendlich kleine Größe von einer höheren Ordnung als u ist; daher muß (nach 1.) $1 \pm \frac{v}{u} = 1$, und somit $u \pm v = u$ sein.

3) Eine unendlich große Größe von was immer für einer Ordnung wird nicht geändert, wenn man ihr eine endliche oder auch eine unendlich große Größe von niedrigerer Ordnung addirt oder subtrahirt. Ist nemlich p eine unendlich große Größe irgend einer Ordnung, q eine endliche oder eine unendlich große Größe niedrigerer Ordnung, so ist $p \pm q = p$. Denn man hat $p \pm q = p\,(1 \pm \frac{q}{p})$, wo jeden Falls, es mag q endlich, oder unendlich groß von niedrigerer Ordnung als p sein, das Verhältniß $\frac{p}{q}$ unendlich groß, daher das umgekehrte $\frac{q}{p}$ unendlich klein, somit (nach 1.) $1 \pm \frac{q}{p} = 1$ ausfällt, wornach $p \pm q = p$ sein muß.

§. 282.

Ändert sich eine absolut veränderliche Größe, indem sie, bei dem Übergange von einem bestimmten Werthe entweder zu einem anderen entfernteren, oder zu einem unmittelbar angrenzenden, benachbarten Werthe, alle denkbaren Zwischenwerthe durchwandert, blos allmälig, nicht aber sprungweise; so sagt man im ersten Falle, sie sei **innerhalb dieser zwei Werthe oder Grenzen**, und im anderen, sie sei **in der Nachbarschaft** (Nähe) **jenes bestimmten Werthes stetig** (continuirlich); im Gegentheile heißt sie **unstetig** (discontinuirlich). Eben so heißt eine Function von einer Veränderlichen x **innerhalb der Grenzen** $x=a$ **und** $x=b$ **stetig**, wenn, während diese Veränderliche von der einen Grenze zur anderen alle denkbaren Zwischenstufen durchgeht, auch die Function stetig, um unendlich kleine Größen, sich ändert. Fallen aber in der Nachbarschaft eines bestimmten Werthes der Veränderlichen $x=h$ die Unterschiede der Werthe der Function nicht unendlich klein aus, oder wird die Function für den bezeichneten Werth selbst unendlich groß, oder springt sie an dieser Stelle plötzlich aus dem Positiven in das Negative, aus dem Reellen in das Imaginäre; so sagt man, sie sei in der Nachbarschaft des Werthes $x=h$ der Veränderlichen x unstetig, oder erleide dort eine Unterbrechung ihrer Stetigkeit.

So ist z. B. $a+bx^{\frac{3}{2}}$ für alle reellen positiven Werthe, welche die Null übersteigen, stetig, aber bei dem Uebergange der Veränderlichen x aus dem Positiven durch Null in das Negative, tritt die Function bei $x=0$ aus dem Reellen in das Imaginäre, und ist daher in der Nähe dieses Werthes unstetig.

III. Abschnitt.

Von den ganzen rationalen Functionen und den höheren algebraischen Gleichungen.

§. 283.

Jede ganze rationale Function einer Veränderlichen x muß eine Summe von Gliedern der Form Ax^m sein, wo A eine von x unabhängige und m eine positive ganze Zahl andeutet. Faßt man die mit derselben Potenz der Veränderlichen behafteten Glieder zusammen, und ordnet sie nach §. 67 fallend, indem man mit der höchsten Potenz, deren Exponent die Dimension, Ordnung, den Rang oder Grad der Function angibt, beginnt; so ist

(1) $A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_{n-1}x+A_n$

die allgemeinste Form einer solchen Function, wenn $A_0, A_1, A_2, \ldots A_{n-1}, A_n$ ihre unveränderlichen Coefficienten heißen. Dieselbe nennt man übrigens vollständig, wenn keine Potenz der Variablen, von der höchsten an bis zur niedrigsten herab, fehlt, sonst unvollständig. Im letzteren Falle kann sie jedoch scheinbar vervollständigt werden, wenn man die abgängigen Potenzen mit dem Coefficienten 0 an ihren zugehörigen Plätzen einreiht. Auch pflegt man ganze rationale Functionen des ersten Grades, wegen ihrer geometrischen Bedeutung, noch lineäre zu nennen.

Soll die ganze rationale Function mehrere Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ enthalten, so muß sie ein Aggregat (Verein) von Gliedern der Form $Ax^m y^n z^p \ldots$ sein, in welcher, wenn die Function von der $i$ten Ordnung sein soll, die Exponenten der Variablen auf alle möglichen Weisen so gewählt und abgeändert werden dürfen, daß ihre Summe $m+n+p+\cdots$ nach und nach allen positiven ganzen Zahlen von 0 bis i gleich werde. So ist z. B.

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F$$

die allgemeinste Form einer ganzen rationalen Function der zweiten Ordnung von den Veränderlichen x und y.

§. 284.

I. Der Werth, den eine ganze rationale Function einer Veränderlichen x, auf welche Art von Functionen unsere gegenwärtigen Untersuchungen sich einschränken werden, für irgend einen angegebenen Werth a dieser Veränderlichen, annimmt, könnte zwar durch Berechnung ihrer einzelnen Glieder gefunden werden; allein leichter geschieht dies auf nachstehende Weise. Bezeichnen wir nemlich die ganze rationale und fallend geordnete Function (1) durch $f(x)$, indem wir

(2) $$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$$

setzen, so übergeht sie für $x=a$ in

(3) $$f(a) = A_0 a^n + A_1 a^{n-1} + A_2 a^{n-2} + \ldots + A_{n-1} a + A_n,$$

und kann, wie leicht zu sehen, nach und nach folgende Gestalten annehmen.

$$\begin{aligned} f(a) &= (A_0 a + A_1) a^{n-1} + A_2 a^{n-2} + A_3 a^{n-3} + \ldots + A_{n-1} a + A_n \\ &= [(A_0 a + A_1) a + A_2] a^{n-2} + A_3 a^{n-3} + \ldots + A_{n-1} a + A_n \\ &= \{[(A_0 a + A_1) a + A_2] a + A_3\} a^{n-3} + \ldots + A_{n-1} a + A_n \end{aligned}$$

u. s. w.

Setzen wir demnach

(4) $$\begin{aligned} B_0 &= A_0, \\ B_1 &= aB_0 + A_1, \\ B_2 &= aB_1 + A_2, \\ B_3 &= aB_2 + A_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{n-1} &= aB_{n-2} + A_{n-1}, \\ B_n &= aB_{n-1} + A_n, \end{aligned}$$

so wird

(5) $f(a) = B_n$,

und wir sehen, daß, wenn wir der Ordnung nach die Größen

$$B_0, B_1, B_2, \ldots B_{n-1}, B_n$$

nach Anleitung der vorstehenden Gleichungen berechnen, die letzte von ihnen der verlangte Werth $f(a)$ der Function ist.

Um daher den Werth einer ganzen rationalen Function für einen gewissen Werth der Veränderlichen zu berechnen, schreibe man, bei fallender Anordnung der Glieder, ihre Coefficienten, nachdem die etwa fehlenden durch Nullen ersetzt worden, mit ihren Qualitätszeichen($+$,$-$) ohne fernere Absonderung in eine Zeile; multiplicire den ersten Coefficienten mit dem bezeichneten Werthe der Veränderlichen und addire zum Producte den zweiten Coefficienten; die Summe multiplicire man wieder mit dem Werthe der Veränderlichen und vermehre das Product um den nächst folgenden Coefficienten; und auf dieselbe Weise fahre man fort, bis man auch den letzten Coefficienten beigezählt und eine Summe gefunden hat, die der verlangte Werth der Function ist. In einem Schema von Zeichen läßt sich diese Rechnung etwa folgender Maßen darstellen.

$$(6)\qquad \begin{array}{l} A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_{n-1} + A_n \\ \quad + aB_0 + aB_1 + aB_2 + \cdots + aB_{n-2} + aB_{n-1} \\ B_0 + B_1 + B_2 + B_3 + \cdots + B_{n-1} + B_n. \end{array}$$

Soll z. B. der Werth der Function

$$f(x) = 2x^4 - x^3 + 8x^2 + 24$$

für $x=2$ berechnet werden, so geschieht dies auf folgende Weise.

$$\begin{array}{r} 2-1+\ 8+\ 0+24 \\ +4+\ 6+28+56 \\ 2+3+14+28+80 \end{array} \qquad f(2) = 80.$$

Hiebei ist

$$\begin{array}{ll} 2.\ 2 = 4, & 4 - 1 = 3, \\ 2.\ 3 = 6, & 6 + 8 = 14, \\ 2.14 = 28, & 28 + 0 = 28, \\ 2.28 = 56, & 56 + 24 = 80. \end{array}$$

II. In manchen Fällen kann es jedoch, weil $f(a) = a^n . \dfrac{f(a)}{a^n}$ ist, auch gut sein, zuerst den Werth des Verhältnisses oder der gebrochenen Function $\dfrac{f(x)}{x^n}$ für $x=a$, nemlich

$$(7)\qquad \frac{f(a)}{a^n}=\frac{A_n}{a^n}+\frac{A_{n-1}}{a^{n-1}}+\frac{A_{n-2}}{a^{n-2}}+\dots+\frac{A_1}{a}+A_0$$

zu berechnen und ihn mit a^n zu multipliciren. Man sieht nemlich auf den ersten Blick, daß man diese gebrochene Function auf die nemliche Art, wie die ganze Function (3) behandeln könne, und daß, wenn man zur Abkürzung

$$(8)\qquad Q_0=\frac{A_n}{a},$$
$$Q_1=\frac{Q_0+A_{n-1}}{a},$$
$$Q_2=\frac{Q_1+A_{n-2}}{a},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$Q_{n-1}=\frac{Q_{n-2}+A_1}{a},$$
$$Q_n=Q_{n-1}+A_0 \quad \text{setzt,}$$

$$(9)\qquad \frac{f(a)}{a^n}=Q_n \quad \text{und} \quad f(a)=a^nQ_n \quad \text{sein werde.}$$

Man wird daher den Werth des Verhältnisses einer ganzen rationalen, fallend geordneten Function zu jenem der höchsten in ihr vorkommenden Potenz der Veränderlichen für einen gegebenen Werth der letzteren berechnen, indem man ihre Coefficienten in verkehrter Ordnung in eine Zeile schreibt, den gegenwärtig ersten von ihnen durch den Werth der Veränderlichen dividirt und zu dem Quotienten den folgenden Coefficienten addirt, hierauf diese Summe wieder durch den Werth der Veränderlichen theilt und den Quotienten um den folgenden Coefficienten vermehrt, und auf diese Weise fortfährt, bis man auch den letzten Coefficienten eingezählt und so das verlangte Verhältniß bestimmt hat.

Multiplicirt man endlich noch dieses Verhältniß mit dem Werthe der höchsten Potenz der Veränderlichen, so hat man auch den geforderten Werth der ganzen Function.

Z. B. Für obige Function nimmt man folgende Rechnung vor.

$$\begin{array}{rrrrr} 24+ & 0+ & 8- & 1+ & 2 \\ & +12+ & 6+ & 7+ & 3 \\ & +12+ & 14+ & 6+ & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2^4=16 \\ 5 \\ \hline 80=f(2). \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 24:2=12, & 12+0=12, \\ 12:2=\ 6, & 6+8=14, \\ 14:2=\ 7, & 7-1=\ 6, \\ 6:2=\ 3, & 3+2=\ 5. \end{array}$$

§. 285.

I. Bei den im gegenwärtigen Abschnitte vorzunehmenden Untersuchungen werden wir öfters in die Lage kommen, eine ganze rationale und nach ihrer Veränderlichen fallend geordnete Function

(2) $$f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\cdots+A_{n-1}x+A_n$$

durch ein Binom von der Form $x-a$, in welcher a eine beliebige, von x unabhängige, Zahl vorstellt, zu dividiren, und sowohl den Quotienten, als auch den von x unabhängigen Rest zu bestimmen. Obgleich hiezu die bereits in §. 67 ertheilten Vorschriften ausreichen würden, so gestattet doch die besondere Gestalt des Dividends und Divisors eine sehr vortheilhafte Vereinfachung derselben, die wir daher kennen lernen wollen. Führen wir nemlich die Division zuerst nach den erwähnten Vorschriften bis dahin aus, wo der Rest von x unabhängig ausfällt; so gestaltet sich die Rechnung, wie folgt.

$$(A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_{n-1}x+A_n):(x-a)=B_0x^{n-1}+B_1x^{n-2}+B_2x^{n-3}+B_3x^{n-4}\;\vdots\;+B_{n-}x_2+B_{n-1}+\frac{B_n}{x-a}$$

$$\begin{array}{l}
A_0x^n-aB_0x^{n-1}\\ \hline
B_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}\\
B_1x^{n-1}-aB_1x^{n-2}\\ \hline
B_2x^{n-2}+A_3x^{n-3}\\
B_2x^{n-2}-aB_2x^{n-3}\\ \hline
B_3x^{n-3}+A_4x^{n-4}\\
\vdots\\ \hline
B_{n-2}x^2+A_{n-1}x\\
B_{n-2}x^2-aB_{n-2}x\\ \hline
B_{n-1}x+A_n\\
B_{n-1}x-aB_{n-1}\\ \hline
B_n
\end{array}$$

Hiebei setzen wir:

(10) $$\begin{aligned}
B_0&=A_0\\
B_1&=aB_0+A_1\\
B_2&=aB_1+A_2\\
B_3&=aB_2+A_3\\
&\vdots\\
B_{n-1}&=aB_{n-2}+A_{n-1}\\
B_n&=aB_{n-1}+A_n.
\end{aligned}$$

Vergleichen wir die Ausdrücke (10) der Coefficienten des, bei dieser Theilung von $f(x)$ durch $x-a$, entfallenden Quotienten, den wir mit $f_1(x)$ bezeichnen, daher

(11) $$f_1(x)=B_0x^{n-1}+B_1x^{n-2}+B_2x^{n-3}+\ldots+B_{n-2}x+B_{n-1}$$

setzen wollen, mit obigen (4) in §. 284 erhaltenen, so zeigt sich, daß sowohl die Coefficienten $B_0, B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$ des Quotienten $f_1(x)$, welcher, wie der Dividend $f(x)$, gleichfalls eine ganze rationale Function, aber von dem nächst niedrigeren, $n-1$ten, Grade wird, als auch der, von der Veränderlichen x unabhängige, Rest B_n genau so berechnet werden, als wollte man nach den in §. 284, I. erörterten Schritten den Werth des Dividends $f(x)$ für $x=a$ bestimmen, und daß darnach jener Rest B_n nichts anders als der für $x=a$ entfallende Werth $f(a)$ der dividirten Function ist. Soll z. B.

$$3x^5-4x^3+2x^2-x+4 \text{ durch } x-3$$

getheilt werden, so nimmt man folgende Rechnung vor:

$$\begin{array}{l} 3+0-\ 4+\ 2-\ \ 1+\ \ 4, \\ \ \ +9+27+69+213+636, \\ 3+9+23+71+212+640; \end{array}$$

demnach ist der Quotient $3x^4+9x^3+23x^2+71x+212$ und der Rest 640.

II. Die hier besprochene Division läßt sich aber auch so ausführen, daß man das steigend geordnete Polynom (2) zuerst durch den mit entgegengesetzten Zeichen genommenen Divisor, d. i. durch $a-x$ bis dahin dividirt, wo das letzte Glied des Dividends zu theilen kommt, und daß man nachher alle Zeichen des Quotienten ändert. Hiebei ist folgende Rechnung zu führen.

$$(A_n + A_{n-1}x + \ldots + A_1x^{n-1} + A_0x^n):(a-x) = +Q_0$$

$$\begin{array}{lll}
\underline{aQ_0 - Q_0x} & (12) \quad Q_0 = \dfrac{A_n}{a} & +Q_1x \\
(Q_0+A_{n-1})x + A_{n-2}x^2 & & +Q_2x^2 \\
\quad \underline{aQ_1x - Q_1x^2} & \quad\ \ Q_1 = \dfrac{Q_0+A_{n-1}}{a} & \quad \vdots \\
(Q_1+A_{n-2})x^2 + A_{n-3}x^3 & & +Q_{n-1}x^{n-1} \\
\quad\quad \vdots & \quad\quad\quad \vdots & + \dfrac{Q_nx^n}{a-x} \\
(Q_{n-2}+A_1)x^{n-1} + A_0x^n & \quad\ \ Q_{n-1} = \dfrac{Q_{n-2}+A_1}{a} & \\
\quad \underline{aQ_{n-1}x^{n-1} - Q_{n-1}x^n} & & \\
(Q_{n-1}+A_0)x^n & \quad\ \ Q_n \ \ = Q_{n-1}+A_0 &
\end{array}$$

Mithin ist

$$(A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n):(x-a) =$$
$$-Q_0 - Q_1x - Q_2x^2 - \ldots - Q_{n-1}x^{n-1} + \frac{Q_nx^n}{x-a}.$$

Die Vergleichung der Ausdrücke (12) und (8) läßt leicht erkennen, daß man die mit entgegengesetzten Zeichen behafteten Coefficienten Q_0, Q_1, ... Q_{n-1} des zu suchenden Quotienten $-Q_0-Q_1x-Q_2x^2-\ldots-Q_{n-1}x^{n-1}$, so wie den Coefficienten Q_n des Restes Q_nx^n gerade so findet, als wollte man den Werth des Verhältnisses $\dfrac{f(a)}{a^n}$ berechnen. Denn die Quotienten, welche bei den in der letzteren Rechnung vorzunehmenden Theilungen durch a entfallen, sind die verlangten Coefficienten, und die letzte Summe Q_n oder $\dfrac{f(a)}{a^n}$ ist der Factor von x^n im Reste. Z. B. Soll

$$2x^3+x^2+18x-24 \text{ durch } x-4$$

getheilt werden, so führt man folgende Rechnung:

$$\begin{array}{lll} -24+18+1+2, & -24:4=-6, & +18-6=+12, \\ \quad -6+3+1, & +12:4=+3, & +\ 1+3=+\ 4, \\ \quad +12+4+3, & +\ 4:4=+1, & +\ 2+1=+\ 3; \end{array}$$

daher ist der Quotient $6-3x-x^2$ und der Rest $3x^3$.

§. 286.

I. Manche Untersuchungen erheischen eine solche Umstaltung einer ganzen rationalen Function

(2) $\quad f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_{n-1}x+A_n,$

daß sie nicht nach Potenzen von ihrer Veränderlichen x, sondern nach den Potenzen einer, von ihr um eine bestimmte Zahl a unterschiedenen Veränderlichen $x-a$ fortläuft. Zu diesem Zwecke benützt man die Bemerkung, daß identisch $x=a+(x-a)$ ist. Substituirt man nemlich in der Function (2) für x das Binom $a+(x-a)$, so verwandelt sie sich (nach §. 250) in eine ganze rationale Function der nemlichen, $n$ten, Ordnung von der Veränderlichen $x-a$, mithin ist

(13) $\quad f(x)=M_0(x-a)^n+M_1(x-a)^{n-1}+M_2(x-a)^{n-2}+\ldots$
$$\ldots+M_{n-1}(x-a)+M_n,$$

wobei die von x und $x-a$ unabhängigen Coefficienten M_0, M_1, M_2, ... M_n entweder durch wirkliche Potenzirung des Binoms $a+(x-a)$ nach dem binomischen Lehrsatze (§. 250), oder aber auch nach folgenden Betrachtungen bestimmt werden können.

Der eben gefundene Ausdruck der Function $f(x)$ gibt, durch $x-a$ dividirt, die Function

$$M_0(x-a)^{n-1}+M_1(x-a)^{n-2}+\ldots+M_{n-2}(x-a)+M_{n-1}$$

zum Quotienten und M_n zum Reste; dieser Quotient selbst aber liefert, durch $x-a$ dividirt, zum Quotienten

$$M_0(x-a)^{n-2}+M_1(x-a)^{n-3}+\ldots+M_{n-3}(x-a)+M_{n-2}$$

und zum Reste M_{n-1}. Setzt man diese Theilung nach der begonnenen Weise fort und erwägt, daß der Ausdruck (13) der Function $f(x)$ nur eine abgeänderte Form des frühern (2) ist; so erhellet, daß, wenn man nicht nur die Function

$$f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_{n-1}x+A_n$$

durch $x-a$ dividirt, sondern auch auf dieselbe Weise die nach einander hervortretenden Quotienten durch dieses Binom theilt, die verlangten Coefficienten $M_0, M_1, M_2, \ldots M_{n-1}, M_n$ der Potenzen von $x-a$ in umgekehrter Ordnung als die von $x-a$ unabhängigen Reste der nach und nach ausgeführten Divisionen gewonnen werden.

Um sonach diese Coefficienten im Zusammenhange zu berechnen, bestimmen wir zunächst (nach §. 285, I.) die, bei der angeführten Theilung von $f(x)$ durch $x-a$ allmälig sich darbietenden, Quotienten, welche mit

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ldots f_{n-1}(x),\ f_n(x)$$

bezeichnet werden sollen und folgende Formen besitzen.

(14)

$$\begin{aligned}
f_1(x)&=B_0x^{n-1}+B_1x^{n-2}+B_2x^{n-3}+\ldots+B_{n-2}x+B_{n-1}\\
&=M_0(x-a)^{n-1}+M_1(x-a)^{n-2}+\ldots+M_{n-2}(x-a)+M_{n-1}\\
f_2(x)&=C_0x^{n-2}+C_1x^{n-3}+C_2x^{n-4}+\ldots+C_{n-3}x+C_{n-2}\\
&=M_0(x-a)^{n-2}+M_1(x-a)^{n-3}+\ldots+M_{n-3}(x-a)+M_{n-2}\\
f_3(x)&=D_0x^{n-3}+D_1x^{n-4}+D_2x^{n-5}+\ldots+D_{n-4}x+D_{n-3}\\
&=M_0(x-a)^{n-3}+M_1(x-a)^{n-4}+\ldots+M_{n-4}(x-a)+M_{n-3}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f_{n-1}(x)&=L_0x+L_1.\\
&=M_0(x-a)+M_1\\
f_n(x)&=M_0.
\end{aligned}$$

Berechnet man nun nach Anleitung der §§. 285 und 284 aus $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n$ die Coefficienten $B_0, B_1, B_2, \ldots B_n$, aus diesem die Coefficienten $C_0, C_1, C_2, \ldots C_n$, u. s. f., bis L_0, L_1 und M_0, wobei $B_0=A_0,\ C_0=B_0, \ldots M_0=L_0$ ist; so läßt sich das ganze Rechnungsgeschäft nach §. 284 (6) im Zusammenhange auf folgende Weise bildlich darstellen.

$$(15)\quad \begin{array}{l}
A_0+\ A_1+\ A_2+\ A_3+\cdots+\ A_{n-2}+\ A_{n-1}+A_n\\
\quad +aB_0+aB_1+aB_2+\cdots+aB_{n-3}+aB_{n-2}+aB_{n-1}\\
B_0+\ B_1+\ B_2+\ B_3+\cdots+\ B_{n-2}+\ B_{n-1}+B_n\\
\quad +aC_0+aC_1+aC_2+\cdots+aC_{n-3}+aC_{n-2}\\
C_0+\ C_1+\ C_2+\ C_3+\cdots+\ C_{n-2}+\ C_{n-1}\\
\quad +aD_0+aD_1+aD_2+\cdots+aD_{n-3}\\
D_0+\ D_1+\ D_2+\ D_3+\cdots+\ D_{n-2}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
J_0+\ J_1+\ J_2+J_3\\
\quad +aK_0+aK_1\\
K_0+\ K_1+K_2\\
\quad +aL_0\\
L_0+L_1\\
M_0\\
M_0+\ L_1+\ K_2+\ J_3+\cdots+\ D_{n-2}+\ C_{n-1}+B_n.
\end{array}$$

Hieraus so wie aus (13) und (14) folgt

$$(16)\quad \begin{array}{lll}
M_n & =B_n & =f\,(a)\\
M_{n-1} & =C_{n-1} & =f_1\,(a)\\
M_{n-2} & =D_{n-2} & =f_2\,(a)\\
M_{n-3} & =E_{n-3} & =f_3\,(a)\\
\ldots & \ldots & \ldots\\
M_3 & =J_3 & =f_{n-3}\,(a)\\
M_2 & =K_2 & =f_{n-2}\,(a)\\
M_1 & =L_1 & =f_{n-1}\,(a)\\
M_0 & =M_0 & =f_n\,(a) \quad \text{und}
\end{array}$$

$$(17)\quad \begin{array}{l} f(x)=f_n(a)\,(x-a)^n+f_{n-1}(a)\,(x-a)^{n-1}+\cdots\\
\qquad +f_2(a)\,(x-a)^2+f_1(a)\,(x-a)+f(a). \end{array}$$

Es sind demnach die verlangten Coefficienten

$$M_0,\ M_1,\ M_2,\ M_3,\ \ldots\, M_{n-3},\ M_{n-2},\ M_{n-1},\ M_n$$

nichts anders als die letzten Glieder

$$M_0,\ L_1,\ K_2,\ J_3,\ \ldots\, E_{n-3},\ D_{n-2},\ C_{n-1},\ B_n$$

der in (15) nach und nach gewonnenen und immer um ein Glied sich verkürzenden Reihen; weßwegen selbe am Ende der Rechnung (15) in einer Zeile angeschrieben zu werden pflegen.

Soll z. B. die Function

$$f(x)=3x^6-4x^5+x^4-x^3+2x^2-3x+1$$

mit der Variablen $x-2$ vorgestellt werden, so führt man folgende Rechnung.

$$\begin{array}{l}
3-4+1-1+2-3+1 \\
\quad +6+4+10+18+40+74 \\
3+2+5+9+20+37+75 \\
\quad +6+16+42+102+244 \\
3+8+21+51+122+281 \\
\quad +6+28+98+298 \\
3+14+49+149+420 \\
\quad +6+40+178 \\
3+20+89+327 \\
\quad +6+52 \\
3+26+141 \\
\quad +6 \\
3+32 \\
3 \\
3+32+141+327+420+281+75.
\end{array}$$

Somit ist die gegebene Function auch

$$f(x)=3(x-2)^6+32(x-2)^5+141(x-2)^4+327(x-2)^3 +420(x-2)^2+281(x-2)+75$$

und die allmälig sich ergebenden Quotienten sind

$$f_1(x)=3x^5+2x^4+5x^3+9x^2+20x+37$$
$$=3(x-2)^5+32(x-2)^4+141(x-2)^3+327(x-2)^2 +420(x-2)+281$$
$$f_2(x)=3x^4+8x^3+21x^2+51x+122$$
$$=3(x-2)^4+32(x-2)^3+141(x-2)^2+327(x-2)+420$$
$$f_3(x)=3x^3+14x^2+49x+149$$
$$=3(x-2)^3+32(x-2)^2+141(x-2)+327$$
$$f_4(x)=3x^2+20x+89$$
$$=3(x-2)^2+32(x-2)+141$$
$$f_5(x)=3x+26$$
$$=3(x-2)+32$$
$$f_6(x)=3.$$

Es dürfte jetzt wohl nicht schwer sein, einzusehen, wie man in der Function $f(x)$ die Veränderliche x schrittweise in $x-a$, $(x-a)-b=x-(a+b)$, $[x-(a+b)]-c=x-(a+b+c),\ldots$ $x-(a+b+c+\ldots)$ umsetzen könne. Hieraus wird dann sogleich einleuchten, daß man, wenn a eine positive ganze Zahl ist, statt von der Veränderlichen x auf $x\mp a$ sogleich zu übergehen, der Reihe nach auf $x\mp 1$, $(x\mp 1)\mp 1 = x\mp 2$, $(x\mp 2)\mp 1 = x\mp 3,\ldots$ $x\mp a$ vorschreiten könne, und dabei den Vortheil habe, daß keine Multiplicationen, sondern blos Additionen und Subtractionen vorzunehmen sind. Nach diesen Betrachtungen lassen sich in obigem Beispiele die Coefficienten auf folgende Weise bestimmen.

3 − 4 + 1 − 1 + 2 − 3 + 1
3 − 1 + 0 − 1 + 1 − 2 − 1
3 + 2 + 2 + 1 + 2 + 0
3 + 5 + 7 + 8 + 10
3 + 8 + 15 + 23
3 + 11 + 26

---

3 + 14 + 26 + 23 + 10 + 0 − 1, Coefficienten für $x-1$.
3 + 17 + 43 + 66 + 76 + 76 + 75
3 + 20 + 63 + 129 + 205 + 281
3 + 23 + 86 + 215 + 420
3 + 26 + 112 + 327
3 + 29 + 141

---

3 + 32 + 141 + 327 + 420 + 281 + 75, Coefficienten für $x-2$.

Das hier erörterte, äußerst vortheilhafte Rechnungsverfahren wurde zuerst von *Budan de Boislaurent* empfohlen.

II. Drückt man die eben vorgekommenen Coefficienten B_0, B_1, $B_2,\ldots B_n$, sonach C_0, C_1, $C_2,\ldots C_{n-1}$, u. s. w. bis M_0, M_1, $M_2,\ldots M_n$ der Reihe nach durch die Coefficienten A_0, A_1, $A_2,\ldots A_n$ der vorgelegten Function $f(x)$, und durch die Zahl a nach Anleitung von (10) und (15) aus; oder bestimmt man, nachdem man in dieser Function anstatt x das Binom $a+(x-a)$ substituirt hat, nach dem binomischen Lehrsatze (§. 250) die Coefficienten M_0, M_1, $M_2,\ldots M_n$ der nach einander folgenden Potenzen von $x-a$; so findet man

$$
\begin{aligned}
(18)\qquad M_n &= A_0 a^n + A_1 a^{n-1} + \ldots + A_{n-2} a^2 + A_{n-1} a + A_n \\
M_{n-1} &= n A_0 a^{n-1} + (n-1) A_1 a^{n-2} + \ldots + 2 A_{n-2} a + A_{n-1} \\
1.2.M_{n-2} &= n(n-1) A_0 a^{n-2} + (n-1)(n-2) A_1 a^{n-3} + \ldots \\
&\qquad \ldots + 3.2\, A_{n-3} a + 2.1 A_{n-2} \\
1.2.3.M_{n-2} &= n(n-1)(n-2) A_0 a^{n-3} + \\
&\qquad + (n-1)(n-2)(n-3) A_1 a^{n-4} + \ldots + 3.2.1 A_{n-3} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
1.2..(n-1) M_1 &= n(n-1)\ldots 3.2 A_0 a + (n-1)(n-2)\ldots 2.1.A_1 \\
1.2\ldots.n M_0 &= n(n-1)\ldots 2.1 A_0.
\end{aligned}
$$

Vergleicht man den zweiten Theil jeder Gleichung mit jenem der unmittelbar vorhergehenden und den ersten noch mit der vorliegenden Function $f(x)$; so entdeckt man in Bezug auf das Bildungsgesetz derselben Folgendes. Leitet man aus dieser Function

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-2} x^2 + A_{n-1} x + A_n$$

eine neue, welche mit $f'(x)$ bezeichnet werden mag, auf die Weise ab, daß man in allen Gliedern den Exponenten der Variablen zum Coefficienten macht, und nachher die Exponenten um eine Einheit verringert; so hat man

$$f'(x) = n A_0 x^{n-1} + (n-1) A_1 x^{n-2} + (n-2) A_2 x^{n-3} + \ldots$$
$$\ldots + 2 A_{n-2} x + A_{n-1}.$$

Diese Function $f'(x)$ nennt man vorzugsweise die *abgeleitete* oder *derivirte Function* (Ableitung, Derivation) der vorgelegten Function $f(x)$.

Bildet man ferner nach demselben Gesetze die abgeleitete Function von $f'(x)$, welche durch $f''(x)$ vorgestellt werden soll und die *zweite abgeleitete* von $f(x)$ heißt; so hat man

$$f''(x) = n(n-1) A_0 x^{n-2} + (n-1)(n-2) A_1 x^{n-3} + \ldots$$
$$\ldots + 3.2\, A_{n-3} x + 2.1 A_{n-2}.$$

Führt man diese Aufstellung der abgeleiteten Functionen von $f(x)$ allmälig bis zur $n$ten aus, von wo an alle folgenden verschwinden, und bezeichnet man im Zusammenhange mit

$f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{\mathrm{IV}}(x)$, $\ldots f^{(n-1)}(x)$, $f^{(n)}(x)$

die 1ste, 2te, 3te, 4te, ... $n-1$te, $n$te Ableitung von $f(x)$, welche in Bezug auf ihre Ableitungen die *primitive* oder *Stammfunction* genannt zu werden pflegt; so sieht man mit einem Blicke, daß, wenn man in der Function $f(x)$ und ihren Ableitungen a für x schreibt, diese besonderen Werthe

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ f'''(a),\ \ldots f^{(n-1)}(a),\ f^{(n)}(a)$$

mit den zweiten Theilen der Gleichungen (18) übereinkommen, und demnach die Coefficienten $M_0, M_1, M_2, \ldots M_{n-1}, M_n$ durch folgende Gleichungen bestimmt werden.

$$(19) \quad M_n = f(a),\ M_{n-1} = f'(a),\ M_{n-2} = \frac{f''(a)}{1.2},$$

$$M_{n-3} = \frac{f'''(a)}{1.2.3}, \ldots M_1 = \frac{f^{(n-1)}(a)}{1.2.3\ldots(n-1)},\ M_0 = \frac{f^{(n)}(a)}{1.2.3\ldots n}.$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit den bereits in (16) gefundenen, so hat man

$$(20) \quad f_1(a) = f'(a),\ f_2(a) = \frac{f''(a)}{1.2},\ f_3(a) = \frac{f'''(a)}{1.2.3}, \ldots$$

$$\ldots f_{n-1}(a) = \frac{f^{(n-1)}(a)}{1.2.3\ldots(n-1)},\ f_n(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{1.2.3\ldots n};$$

woraus jedoch, wie leicht zu sehen ist, nicht gefolgert werden darf, daß dieselben Beziehungen auch zwischen jenen Functionen von x bestehen, aus denen diese Ausdrücke durch die Annahme $x=a$ entstanden sind.

Substituirt man die Ausdrücke (19) in die Gleichung (13), so ergibt sich folgende merkwürdige Darstellung der Function $f(x)$.

$$(21) \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{1.2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{1.2.3}(x-a)^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{1.2\ldots(n-1)}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n}(x-a)^n.$$

Setzt man hierin noch $x-a=z$, also $x=a+z$, so wird

$$(22) \quad f(a+z) = f(a) + f'(a)z + \frac{f''(a)}{1.2}z^2 + \frac{f'''(a)}{1.2.3}z^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{1.2\ldots(n-1)}z^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{1.2.3\ldots n}z^n.$$

Anmerkung. Es dürfte leicht einzusehen sein, daß, wenn man in der letzten Gleichung $f(a)=a^n$ nimmt,
$f(a+z)=(a+z)^n$ und $f'(a)=na^{n-1}$, $f''(a)=n(n-1)a^{n-2}, \ldots$
$\ldots f^{(m)}(a)=n(n-1)\ldots\ldots(n-m+1)a^{n-m}, \ldots$
$f^{(n)}(a)=n(n-1)\ldots 3.2.1$ wird, folglich

$$(a+z)^n = a^n + na^{n-1}z + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}z^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots\ldots m}a^{n-m}z^m + \ldots + z^n$$

ist, und daß man also hierin eine zweite Ableitung des binomischen Lehrsatzes (§. 250) besitzt, sobald man ihn nicht zur Auffindung der Ausdrücke (18) verwendet hat.

§. 287.

Bei den ganzen rationalen Functionen handelt es sich sehr oft um jene Werthe ihrer Variablen, für welche diese Functionen verschwinden, oder auf Null sich reduciren, daher insbesondere bei einer Function von nur einer Veränderlichen x, wie (2), um jene Werthe von x, für welche die Gleichung

(23) $$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = 0$$

Statt findet. Daß wenigstens in einzelnen Fällen solche Werthe gefunden werden können, ersieht man z. B. an der Gleichung

(24) $$2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0,$$

welche besteht, wenn x eine der Zahlen -1, $\frac{1}{2}$, 3 ist.

Eine Gleichung, in der eine ganze rationale algebraische Function einer Veränderlichen der Null gleich gestellt wird, heißt **algebraisch**; der erste Theil derselben wird auch **die Function** oder **das Polynom der Gleichung** genannt. Ein Werth der Veränderlichen x, oder wie man hier gewöhnlicher sagt, der **Unbekannten**, durch welchen die Gleichung realisirt (verwirklicht) wird, folglich ihr Polynom verschwindet, heißt eine **Wurzel** der Gleichung. Die Wurzeln einer Gleichung suchen, heißt dieselbe **auflösen**.

Der höchste Exponent, welchen die Unbekannte in der Gleichung an sich trägt, gibt sowohl den Grad ihres Polynoms, als auch den der Gleichung selbst an, und heißt ihr **Rangs-** oder **Ordnungs-Exponent**.

Ist die Gleichung von einem höheren Grade als vom zweiten, so wird sie eine **höhere** genannt. (Vergl. §. 213). Gleichungen des dritten Grades nennt man auch **cubische**, so wie jene des vierten **biquadratische**. — Ist das Polynom einer Gleichung (nach §. 67) geordnet, so heißt auch sie selbst **geordnet**. Dieses Ordnen wird fallend vorgenommen, außer es würde das Gegentheil ausdrücklich verlangt. — Bevor man aber eine Gleichung, deren beide Theile algebraische Functionen einer Veränderlichen sind, ordnen kann, muß man diese zuerst ganz und rational machen, indem man die Brüche durch Multiplication mit den Nennern und vorkommende Wurzelgrößen meistens dadurch wegbringt, daß man eine nach der andern allein in den einen Theil der Gleichung schafft und beide Theile nach dem Wurzel-Exponenten potenzirt. — Die Gleichung heißt ferner nach Beschaffenheit ihres Polynoms vollständig oder unvollständig. Endlich werden die Coefficienten des Polynoms auch die der Gleichung genannt. Der erste von ihnen (welcher nemlich vor der höchsten Potenz der Unbekannten steht), wird immer positiv und meistens gleich 1 gemacht, indem man, wenn er negativ wäre, alle Zeichen der Gleichung ändert, oder falls er von 1 verschieden wäre, die ganze Gleichung durch ihn dividirt.

Beispiele.

I. Die Gleichung $\frac{4x^2-2x^3}{3}=8-5x$

geordnet, gibt $\frac{2}{3}x^3-\frac{4}{3}x^2-5x+8=0$,

oder $x^3-2x^2-\frac{15}{2}x+12=0$,

und ist daher eine vollständige cubische.

II. Die Gleichung $100-20x^2=\frac{500}{x}-4x^3$

gibt geordnet $x^4-5x^3+25x-125=0$,

und ist somit eine unvollständige biquadratische.

III. Ist die Gleichung $\sqrt{3x}+\sqrt[3]{2x^2}=2$

zu ordnen, so hat man $\sqrt[3]{2x^2}=2-\sqrt{3x}$,

also $2x^2=8-12\sqrt{3x}+18x-3x\sqrt{3x}$,

oder $2x^2-18x-8=-(3x+12)\sqrt{3x}$,

daher $4x^4-72x^3+292x^2+288x+64=27x^3+216x^2+432x$,

endlich $4x^4-99x^3+76x^2-144x+64=0$.

§. 288.

I. Jede ganze rationale Function einer einzigen Veränderlichen verschwindet wenigstens für einen in der allgemeinen Form $p+q\sqrt{-1}$, wo p und q reelle Zahlen vorstellen, begriffenen Werth der Veränderlichen, oder was dasselbe ist, jede algebraische Gleichung von einer Unbekannten hat wenigstens eine Wurzel von der Form $p+q\sqrt{-1}$.

Für diesen Satz haben zwar **Legendre**, **Gauss** und **Cauchy** Beweise geliefert, allein keiner derselben beschränkt sich auf die bisher von uns vorgetragenen Lehren und auf die unserem gedrängten Lehrvortrage eingeräumten Grenzen; weßwegen ihr Studium dem weiter vorgeschrittenen Leser empfohlen bleiben mag.

II. Ist a eine Wurzel einer Gleichung von der Veränderlichen x, so ist ihr Polynom durch $x-a$ (ohne Rest) theilbar, folglich das Product aus $x-a$ und einer um eine Rangsstufe niedrigeren Function von x.

Denn damit a eine Wurzel der Gleichung (23) sei, muß $f(a)=0$ sein; allein $f(a)$ ist nach §. 285 der Rest, welcher überhaupt für jeden Werth von a aus der Theilung von $f(x)$ durch $x-a$ entspringt, und da dieser Rest im gegenwärtigen Falle verschwindet; so ist in der That $f(x)$ durch $x-a$ theilbar, folglich, wenn $f_1(x)$ den entfallenden Quotienten vorstellt, $f(x)=(x-a)f_1(x)$.

Die im Folgenden öfters in Gebrauch kommende Differenz $x-a$ pflegt man den, der Wurzel a zugehörigen, Wurzelfactor zu nennen.

III. Jede Gleichung hat genau so viel Wurzeln, als ihr Ordnungs-Exponent Einheiten enthält, und ihr Polynom läßt sich als das Product des ersten Coefficienten und sämmtlicher Wurzelfactoren darstellen.

Denn nach dem ersten Lehrsatze verschwindet die der Gleichung (23) angehörige Function $f(x)$ des $n$ten Ranges gewiß für einen bestimmten Werth $x=a_1$, folglich gibt sie (nach II.) durch $x-a_1$ getheilt, eine Function $f_{,}(x)$ vom nächst niedrigeren, $n-1$ ten, Range ohne Rest, oder es ist $f(x)=(x-a_1)f_{,}(x)$. Allein vermög I. muß es für die neue Function $f_{,}(x)$ gleichfalls einen sie annullirenden Werth $x=a_2$ geben, folglich $f_{,}(x)$ (nach II.) das Product aus $x-a_2$ und einer Function $f_{,,}(x)$ vom nächst niedrigeren, $n-2$ ten, Range, nemlich $f_{,}(x)=(x-a_2)f_{,,}(x)$ sein. Setzt man diese Schlüsse fort, so gelangt man offenbar, da der Rang der als Quotienten oder zweite Factoren nach und nach auftretenden Functionen ununterbrochen um eine Stufe sinkt, nach $n-1$ Schritten, wofern man diese Functionen mit $f_{,}(x)$, $f_{,,}(x)$, $f_{,,,}(x)$, ... $f_{(n-2)}(x)$, $f_{(n-1)}(x)$ und die sie annullirenden Werthe von x mit a_2, a_3, a_4, ... a_{n-1}, a_n bezeichnet, zu einer Function $f_{(n-1)}(x)$ vom ersten Grade, welche, da A_0 der erste Coefficient der Function $f(x)$ ist, zu Folge §. 285, die Form $A_0 x + B$ oder $A_0(x - a_n)$ annimmt, wenn man $-\frac{B}{A_0} = a_n$ setzt. Die hier gepflogene Untersuchung liefert demnach im Ganzen folgende zwei Serien von Gleichungen.

(25) $$f(a_1)=0,\ f_{,}(a_2)=0,\ f_{,,}(a_3)=0,\ f_{,,,}(a_4)=0, \ldots$$
$$\ldots f_{(n-2)}(a_{n-1})=0,\ f_{(n-1)}(a_n)=0,$$

(26) $$\begin{aligned} f(x) &= (x-a_1)f_{,}(x) \\ f_{,}(x) &= (x-a_2)f_{,,}(x) \\ f_{,,}(x) &= (x-a_3)f_{,,,}(x) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{(n-2)}(x) &= (x-a_{n-1})f_{(n-1)}(x) \\ f_{(n-1)}(x) &= (x-a_n)A_0. \end{aligned}$$

Aus den letzten Gleichungen findet man leicht

(27) $$\begin{aligned} f(x) &= (x-a_1)f_{,}(x) \\ &= (x-a_1)(x-a_2)f_{,,}(x) \\ &= (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)f_{,,,}(x) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})f_{(n-1)}(x) \\ &= (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})(x-a_n)A_0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (25), vereint mit (26), so wie die Gleichungen (27) allein, oder blos die letzte von diesen, nemlich

(28) $$f(x) = A_0(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n),$$

liefern

$$f(a_1)=0,\ f(a_2)=0,\ f(a_3)=0, \ldots f(a_n)=0;$$

folglich verschwindet die Function $f(x)$ der Gleichung (23) für die n Werthe a_1, a_2, a_3, ... a_n ihrer Veränderlichen x, und diese Werthe sind Wurzeln jener Gleichung.

Zugleich sieht man leicht ein, daß dieselbe Gleichung außer den erwähnten n Wurzeln keine mehr haben kann. Denn könnte α noch eine, von jeder aus ihnen verschiedene, Wurzel sein, folglich das Polynom $f(x)$ auch noch für $x=\alpha$ verschwinden; so müßte auch das ihm identisch gleiche Product in (28) für eben diesen Werth $x=\alpha$ in Null übergehen, was unmöglich ist, da ein Product nicht verschwinden kann, wenn keiner seiner Factoren Null ist. Mithin hat die Gleichung (23) weder mehr, noch weniger als n Wurzeln, und ihre Function $f(x)$ läßt sich, der Gleichung (28) zu Folge, als das Product aus ihrem ersten Coefficienten A_0 und aus sämmtlichen Wurzelfactoren darstellen. So z. B. hat §. 287 die Gleichung (24) keine anderen Wurzeln als die drei erwähnten -1, $\frac{1}{2}$, 3, und es ist

$$2x^3-5x^2-4x+3=2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)$$
$$=(x+1)(2x-1)(x-3).$$

Übrigens kann manche Gleichung doch auch weniger verschiedene Wurzeln als ihr Ordnungs-Exponent Einheiten besitzen, wenn nemlich einige derselben, mithin auch ihre Wurzelfactoren gleich sind. Von einer solchen Gleichung sagt man dann: sie besitze gleiche, wiederholte oder mehrfache Wurzeln, und zwar nennt man eine Wurzel 2, 3, 4, ... $r$fach, wenn das Polynom der Gleichung durch die 2te, 3te, 4te, ... $r$te Potenz ihres Wurzelfactors theilbar ist. Wurzeln, welche nicht öfter als einmal in der Gleichung vorkommen, heißen demnach einfache Wurzeln. So ist z. B. 3 eine zweifache oder doppelte Wurzel der Gleichung

(29) $$2x^4-12x^3+17x^2+6x-9=0,$$

weil ihr Polynom durch $(x-3)^2$ ohne Rest sich theilen läßt.

§. 289.

Abhängigkeit der Coefficienten einer Gleichung von ihren Wurzeln.

Da nach dem eben Erwiesenen in der Gleichung (23) das Polynom

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_{n-1}x+A_n$$

dem Producte

$$A_0(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)$$

identisch gleich ist, so sieht man (nach §. 249) leicht ein, daß diejenigen ihrer Coefficienten

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ldots. A_m,\ldots.\ A_{n-1},\ A_n,$$

welche dem ersten A_0 nachfolgen, aus diesem und den Wurzeln

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ldots\ldots\ldots\ldots\ a_{n-1},\ a_n$$

der Gleichung dadurch berechnet werden können, daß man von allen mit entgegengesetzten Vorzeichen genommenen Wurzeln

$$-a_1, -a_2, -a_3, -a_4,\ldots\ldots\ldots\ldots -a_{n-1}, -a_n$$

sämmtliche Combinationen ohne Wiederholungen zu den Classen

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots m,\ldots\ n-1,\ n$$

bildet, in jeder Combination die Elemente mit einander und mit dem ersten Coefficienten A_0 multiplicirt und die Producte von der nemlichen Combinations-Classe addirt.

Dem gemäß gleicht z. B. der Coefficient A_1 des zweiten Gliedes dem Producte aus dem ersten Coefficienten A_0 und der Summe aller mit entgegengesetzten Zeichen genommenen Wurzeln, nemlich es ist

$$A_1 = A_0(-a_1-a_2-a_3-\ldots-a_{n-1}-a_n),$$

und der letzte Coefficient A_n ist dem Producte aus dem ersten Coefficienten A_0 und aus allen entgegengesetzt genommenen Wurzeln gleich, nemlich

$$A_n = (-1)^n A_0 a_1 a_2 a_3 \ldots. a_n.$$

Z. B. In der Gleichung (24) sind die entgegengesetzt genommenen Wurzeln $1,\ -\frac{1}{2},\ -3$ und

$$2\left(1-\frac{1}{2}-3\right) = 2\times-2\frac{1}{2} = -5$$

$$2\left(-1.\frac{1}{2}-1\,.\,3+\frac{1}{2}.\,3\right) = 2\times-2 = -4$$

$$2.1.-\frac{1}{2}.-3 = +3.$$

§. 290.

Umstaltungen (Transformationen) der Gleichungen.

Aus jeder Gleichung können verschiedene andere hergeleitet werden, deren Wurzeln mit jenen der gegebenen in mancherlei Beziehungen stehen. Wir wollen gegenwärtig die wichtigsten von diesen Herleitungen neuer Gleichungen, welche gewöhnlich Transformationen (Umwandlungen, Umstaltungen) der gegebenen genannt werden, kennen lernen. Hiebei pflegt man die gegebene Gleichung die zu transformirende und die aus ihr hergeleitete die transformirte Gleichung zu nennen.

I. Veränderung der Zeichen der Wurzeln. Soll aus einer Gleichung eine andere hergeleitet werden, deren Wurzeln sich von jener der gegebenen blos im Vorzeichen unterscheiden, so ändere man das Zeichen des 2ten, 4ten, 6ten, ... kurz jedes geradstelligen Gliedes. Denn sollen in der Gleichung

(30) $$A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\cdots+A_{n-1}x+A_n=0$$

die Zeichen der Wurzeln geändert werden, so hat man für x offenbar $-x$ zu setzen. Dadurch übergeht diese Gleichung in

$$(-1)^nA_0x^n+(-1)^{n-1}A_1x^{n-1}+(-1)^{n-2}A_2x^{n-2}+\ldots$$
$$\ldots-A_{n-1}x+A_n=0,$$

oder wenn man noch durch $(-1)^n$ dividirt, in

$$A_0x^n-A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}-A_3x^{n-3}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n-1}A_{n-1}x+(-1)^nA_n=0,$$

welche Gleichung das beschriebene Verfahren lehrt. Z. B. Aus der Gleichung (24) erhält man auf dem angedeuteten Wege die folgende: $2x^3+5x^2-4x-3=0$,

welcher die Wurzeln $1, -\frac{1}{2}, -3$, die entgegengesetzten von jenen der gegebenen Gleichungen, zugehören.

Diese Verwandlungsweise der Gleichungen kann mit Vortheil benützt werden, wenn man sich der Bestimmung negativer Wurzeln ganz überheben will, da man diese vorläufig in positive umzusetzen vermag.

II. Vergrößerung oder Verminderung der Wurzeln. Ist aus der, die Unbekannte x enthaltenden, Gleichung (30) eine neue für die Unbekannte y zu schaffen, deren Wurzeln von jener der vorgelegten durchgehends um eine und dieselbe bestimmte Größe a differiren, folglich durch $x-a$ sich vorstellen lassen; so hat man blos nach Anleitung des §. 286 die Function der gegebenen Gleichung für die Variable $x-a$ einzurichten, und dann in der so gewonnenen Gleichung

(31) $$M_0(x-a)^n+M_1(x-a)^{n-1}+M_2(x-a)^{n-2}+\ldots$$
$$\ldots+M_{n-2}(x-a)^2+M_{n-1}(x-a)+M_n$$

statt $x-a$ die neue Unbekannte y zu schreiben.

Z. B. Hat man die Gleichung

$$3x^4-35x^2-22x-4=0$$

in eine andere zu verwandeln, deren Wurzeln um 3 größer sind; so wird man sie zuerst (nach §. 286) für die Unbekannte $x+3$ oder $x-(-3)$ einrichten, wozu folgende Berechnung der Coefficienten vorgenommen wird.

$$\begin{array}{l}
3+\ 0-\ 35-\ 22-\ 4\\
\quad -\ 9+\ 27+\ 24-\ 6\\
3-\ 9-\ \ 8+\ \ 2-10\\
\quad -\ 9+\ 54-138\\
3-18+\ 46-136\\
\quad -\ 9+\ 81\\
3-27+127\\
\quad -\ 9\\
3-36+127-136-10.
\end{array}$$

Auf diese Weise nimmt die gegebene Gleichung die Form

$$3(x+3)^4-36(x+3)^3+127(x+3)^2-136(x+3)-10=0$$

an, folglich ist, wenn man $x+3=y$ setzt, die verlangte Gleichung

$$3y^4-36y^3+127y^2-136y-10=0.$$

III. **Beseitigung des zweiten Gliedes.** Soll die Gleichung (30) in eine andere verwandelt werden, der das zweite Glied fehlt; so wird man ihre Wurzeln (nach II.) um die Zahl $a=-\frac{A_1}{nA_0}$ vermindern.

Denn umsetzt man in der gegebenen Gleichung (30) (nach II. und §. 286) die Variable x in $x-a$, so erhält man

(31) $$M_0(x-a)^n+M_1(x-a)^{n-1}+\ldots+M_n=0,$$

oder wenn man $x-a=y$ annimmt,

$$M_0y^n+M_1y^{n-1}+\ldots+M_n=0.$$

Damit nun hier das zweite Glied fehle, ist a so zu wählen, daß $M_1=0$ werde. Man hat aber nach §. 286 (Gl. 18)

$$M_1=nA_0a+A_1,$$

daher muß $nA_0a+A_1=0$,

nemlich $a=-\frac{A_1}{nA_0}$ werden.

Soll z. B. aus der Gleichung

$$x^3-12x^2+41x-42=0$$

das zweite Glied weggebracht werden, so wird man die Unbekannte x (nach III. und §. 286), weil $A_0=1$, $A_1=-12$, $n=3$, also $a=-\frac{-12}{3}=4$ ist, in $x-4=y$ umsetzen. Hiezu dient folgende Rechnung.

$$\begin{array}{r} 1-12+41-42 \\ +\ 4-32+36 \\ 1-\ 8+\ 9-\ 6 \\ +\ 4-16 \\ 1-\ 4-\ 7 \\ +\ 4 \\ 1+\ 0-\ 7-\ 6. \end{array}$$

Die neue Gleichung, in der das zweite Glied mangelt, ist daher $y^3-7y-6=0.$

IV. **Vervielfachung und Theilung der Wurzeln.** Soll eine Gleichung (30) in eine andere verwandelt werden, deren Wurzeln m Mal so groß sind, als die der gegebenen; so schreibt man unter die Glieder der, nöthigen Falls vervollständigten, Gleichung eine geometrische Reihe, deren erstes Glied 1 und der Quotient m ist, multiplicirt dann je zwei über einander stehende Glieder und schreibt zugleich das Zeichen y der neuen Unbekannten für x.

Denn damit die neu einzuführende Unbekannte $y=mx$ werde, hat man in der gegebenen Gleichung (30) $x=\frac{y}{m}$ zu setzen, wodurch sie in

$$A_0\frac{y^n}{m^n}+A_1\frac{y^{n-1}}{m^{n-1}}+A_2\frac{y^{n-2}}{m^{n-2}}+\ldots+A_{n-1}\frac{y}{m}+A_n=0,$$

oder, wenn mit m^n multiplicirt wird, in die Gleichung

$$A_0y^n+mA_1y^{n-1}+m^2A_2y^{n-2}+\ldots+m^{n-1}A_{n-1}y+m^nA_n=0$$

sich verwandelt, aus der die Richtigkeit des beschriebenen Verfahrens erhellet.

Wenn man z. B. die Gleichung $x^4-5x^2+4=0$, deren Wurzeln $1, 2, -1, -2$ sind, in eine andere verwandeln will, in der die Wurzeln doppelt so groß als die der vorgelegten sind, so schreibt man Folgendes:

$$\begin{array}{l|l} x^4+0x^3-5x^2+0x+4=0 & \\ 1,\quad 2,\quad 4,\quad 8,\quad 16 & \text{multiplicirt und ersetzt } x \text{ durch } y \\ \hline \end{array}$$

$$y^4+0y^3-20y^2+0y+64=0.$$

Die transformirte Gleichung ist daher

$$y^4-20y^2+64=0$$

und besitzt die Wurzeln $2, 4, -2, -4$.

Sollen die Wurzeln der transformirten Gleichung die $p$ten Theile von jenen der gegebenen werden; so kommt blos in der erwähnten geometrischen Reihe der Quotient $m=\frac{1}{p}$ zu nehmen, und übrigens mit ihr wie früher zu multipliciren oder, was dasselbe ist, durch $1, p, p^2, p^3, \ldots p^n$ zu dividiren.

Mittels der Vervielfachung oder Theilung der Wurzeln kann man zuweilen aus einer Gleichung die irrationalen Coefficienten wegschaffen. Z. B. Um aus der Gleichung

$$x^3-4x^2\sqrt{3}+12x-24\sqrt{3}=0$$

die irrationalen Coefficienten zu entfernen, schreibe man unter diese Gleichung die geometrische Reihe

$$1,\quad \sqrt{3},\quad 3,\quad 3\sqrt{3},$$

und dividire oder multiplicire die Glieder der Gleichung mit den gleichstelligen der Reihe. Im ersten Falle erhält man, wenn man die neue Unbekannte mit y bezeichnet,

$$y^3-4y^2+4y-8=0 \text{ und } x=\frac{y}{\sqrt{3}},$$

dagegen im zweiten Falle, wenn z die Unbekannte vorstellt,

$$z^3-12z^2+36z-216=0 \text{ und } x=z\sqrt{3}.$$

V. Wegschaffung der gebrochenen und Abkürzung der zusammengesetzten Coefficienten. Die im vorhergehenden Artikel erklärte Transformation gibt uns ferner noch ein Mittel an die Hand, aus jeder Gleichung, ohne den ersten Coefficienten abzuändern, die gebrochenen Coefficienten zu beseitigen, und zusammengesetzte Coefficienten von überflüssigen Factoren zu befreien. Zum ersten Zwecke sucht man, sobald alle gebrochenen Coefficienten auf die kleinste Benennung gebracht sind, entweder (nach §. 84) ihren kleinsten allgemeinen Nenner, und nimmt diesen zum Quotienten der aufzustellenden geometrischen Reihe von Multiplicatoren; oder man wählt, um zugleich die möglich einfachsten Producte zu erhalten, zu diesem Quotienten zuerst einen Primfactor des ersten Nenners und verrichtet die Multiplication, nimmt dann wieder zum Quotienten einer neuen Reihe einen Primfactor des ersten der noch übrigen Nenner, multiplicirt und wiederholt dasselbe Verfahren, bis alle Nenner entfernt sind. Sofort gibt das Product der Quotienten der einzelnen Reihen jenen der Totalreihe und zeigt an, wie oft die Wurzeln der transformirten Gleichung die der gegebenen enthalten.

Sollen z. B. aus der Gleichung

$$2x^3 - \frac{3}{10}x^2 + \frac{5}{12}x + \frac{4}{15} = 0.$$

die Brüche beseitigt werden, so multiplicire man zuerst mit

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 8,$$

dadurch erhält man die Coefficienten

$$2 - \frac{3}{5} + \frac{5}{3} + \frac{32}{15};$$

multiplicirt man diese mit

$$1, \quad 5, \quad 25, \quad 125,$$

so werden sie $2 - 3 + \frac{125}{3} + \frac{800}{3};$

und multiplicirt man sie endlich noch mit

$$1, \quad 3, \quad 9, \quad 27,$$

so übergehen sie in

$$2 - 9 + 375 + 7200;$$

folglich ist die transformirte Gleichung

$$2y^3 - 9y^2 + 375y + 7200 = 0$$

und $y = 2.5.3x = 30x.$

Verlangt man dagegen, daß zusammengesetzte ganzzahlige Coefficienten von Factoren befreit werden; so wähle man einen Primfactor des ersten nicht verschwindenden Coefficienten nach dem Anfangs-Coefficienten zum Quotienten einer geometrischen Reihe von

Divisoren; dividire, wofern es angeht, auf die bekannte Weise, und wiederhole möglichen Falls diese Operation. Hat man z. B. die Coefficienten der Gleichung

$$3x^3-20x^2+9000x-2000=0$$

zu vereinfachen, so dividirt man durch

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 8;$$

dies verschafft die Coefficienten

$$3-10 \quad +2250 \quad -250$$

die wieder durch $1, \quad 5, \quad 25, \quad 125,$

getheilt $3-2 \quad +90 \quad -2$

geben; daher ist die transformirte Gleichung

$$3y^3-2y^2+90y-2=0 \text{ und } y=\frac{x}{2.5}=\frac{x}{10}.$$

VI. **Ausscheidung der gleichen Wurzeln.** Bezeichnen wir mit a irgend eine von den vielfachen Wurzeln der Gleichung

$$(23) \qquad f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_{n-1}x+A_n=0$$

und richten wir diese Gleichung (nach II.) für die Unbekannte $x-a$ ein, so daß sie die Gestalt

$$(31) \qquad f(x)=M_0(x-a)^n+M_1(x-a)^{n-1}+M_2(x-a)^{n-2}+\ldots$$
$$\ldots+M_{n-1}(x-a)+M_n=0$$

erhält, worin die Coefficienten M_0, M_1, M_2, ... M_n nach §. 286 bestimmt werden; so muß ihr Polynom $f(x)$, weil die Wurzel a, wenn sie mehrfach ist, wenigstens eine zweifache sein wird, mindestens durch die zweite Potenz des Wurzelfactors $x-a$ theilbar sein, oder sich zwei Mal nach einander durch $x-a$ ohne Rest theilen lassen. Damit aber das Polynom durch $x-a$ theilbar sei, muß $M_n=0$ sein, und damit es auch noch der entfallende Quotient $M_0(x-a)^{n-1}+M_1(x-a)^{n-2}+\ldots+M_{n-2}(x-a)+M_{n-1}$ sei, muß gleichzeitig $M_{n-1}=0$ sein. Umgekehrt, wenn für einen bestimmten Werth $x=a$ die Coefficienten M_n und M_{n-1} mit einander verschwinden, ist die Function $f(x)$ der Gleichung (23) oder (31) durch $(x-a)^2$ theilbar, mithin a gewiß eine vielfache und zwar wenigstens eine zweifache Wurzel dieser Gleichung. Da nun a der allgemeine Repräsentant sämmtlicher mehrfachen Wurzeln der vorgelegten Gleichung ist; so werden die von a abhängigen Coefficienten M_n und M_{n-1} nur für jene Werthe von a zugleich verschwinden, für welche ihr größter gemeinschaftlicher Theiler in die Null übergeht, weßwegen im Einklange mit §. 286, Gl. (18) und (19) von den Ausdrücken

$$M_n = f(a) = A_0 a^n + A_1 a^{n-1} + A_2 a^{n-2} + \cdots + A_{n-1} a + A_n$$

$$M_{n-1} = f'(a) = nA_0 a^{n-1} + (n-1)A_1 a^{n-2} + (n-2)A_2 a^{n-3} + \cdots$$
$$\cdots + A_{n-1}$$

der größte gemeinsame Theiler sammt den ihn annullirenden Werthen von a auszumitteln sein wird. Man pflegt jedoch, weil die Bezeichnung der mehrfachen Wurzel auf die Form dieses Theilers keinen Einfluß ausübt, den Buchstaben a durch x selbst ersetzt zu lassen, und daher sogleich von der Function

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots + A_{n-1} x + A_n$$

der aufzulösenden Gleichung (23) und von ihrer Ableitung

$$f'(x) = nA_0 x^{n-1} + (n-1)A_1 x^{n-2} + (n-2)A_2 x^{n-3} + \cdots + A_{n-1}$$

(nach §. 69, g) den größten gemeinschaftlichen Theiler zu suchen. Bezeichnet man ihn mit $\varphi(x)$, so ist jeder Werth $x = a$, für den er verschwindet, d. i. jede Wurzel a der Gleichung

$$\varphi(x) = 0$$

eine mehrfache Wurzel der aufzulösenden Gleichung und kommt in dieser ein Mal öfter als in jener vor.

Dividirt man endlich noch die Function $f(x)$ durch $\varphi(x)$, so müssen alle Werthe von x, für welche die als Quotient erscheinende Function $F(x) = f(x) : \varphi(x)$ verschwindet, oder alle Wurzeln der Gleichung $\qquad F(x) = 0$

unter sich verschieden sein, weil sonst $\varphi(x)$ nicht der größte gemeinschaftliche Theiler von $f(x)$ und $f'(x)$ wäre.

Z. B. Sollen aus der Gleichung

$$x^7 + 5x^6 + 6x^5 - 6x^4 - 15x^3 - 3x^2 + 8x + 4 = 0$$

die etwa vorkommenden gleichen Wurzeln ausgeschieden werden, so findet man von ihrem Polynom und seiner Ableitung

$$7x^6 + 30x^5 + 30x^4 - 24x^3 - 45x^2 - 6x + 8$$

den größten gemeinschaftlichen Theiler

$$x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2,$$

durch welchen jenes Polynom getheilt den Quotienten

$$x^3 + 2x^2 - x - 2$$

liefert, weßwegen die Gleichung

$$x^3+2x^2-x-2=0$$

lauter verschiedene Wurzeln besitzt, so wie die Gleichung

$$x^4+3x^3+x^2-3x-2=0$$

alle gleichen Wurzeln der gegebenen darbietet.

VII. **Befreiung einer Gleichung von den bereits bekannten Wurzeln.** Ist man auf was immer für eine Weise zur Kenntniß einer Wurzel $x=a$ einer Gleichung (23) gelangt; so wird man diese (zu Folge §. 288, II. und III.) von ihr befreien, indem man ihr Polynom durch den Wurzelfactor $x-a$ so viel Mal nach einander dividirt, als eine wievielfache Wurzel a ist. Der Quotient gibt sonach, der Null gleich gestellt, eine neue Gleichung, welche nur noch die übrigen Wurzeln der vorgelegten enthält.

Z. B. Weil die zuletzt gefundene Gleichung

$$x^4+3x^3+x^2-3x-2=0$$

an $x=-1$ eine zweifache Wurzel hat, so befreit man sie von dieser mittels zweimaliger Theilung durch $x+1$. Daraus entspringt die Gleichung $$x^2+x-2=0,$$
von welcher (nach §. 215) die Wurzeln $x=1$ und $x=-2$ sind. Jede von diesen ist (vermög VI.) eine doppelte Wurzel der Gleichung

$$x^7+5x^6+6x^5-6x^4-15x^3-3x^2+8x+4=0,$$

so wie -1 eine dreifache Wurzel derselben ist. Daher sind $-2, -2, -1, -1, -1, 1, 1$ alle 7 Wurzeln dieser Gleichung und ihr Polynom ist $=(x+2)^2(x+1)^3(x-1)^2$.

A.

Allgemeine algebraische Auflösung der Gleichungen.

§. 291.

Eine Gleichung **allgemein algebraisch auflösen** heißt ihre Wurzeln als algebraische Functionen der Coefficienten darstellen. Eine solche Auflösung gelingt jedoch, wie *Ruffini* und *Abel* gezeigt haben, wofern keine besonderen Beziehungen (Relationen) zwischen den Coefficienten Statt finden, durchaus nicht, sobald der Grad der Gleichung den vierten übersteigt, weßwegen wir nur die des dritten und vierten Grades vornehmen können.

I. Auflösung der cubischen Gleichungen.

Soll eine cubische Gleichung allgemein aufgelöst werden, so bringe man sie, wenn es noch nicht geschehen wäre, vorerst mittels Theilung durch den ersten Coefficienten und durch Annullirung des zweiten Gliedes (§. 290, III.) auf die Form

$$x^3+ax+b=0.$$

Um eine Wurzel dieser Gleichung zu bestimmen, setze man

$$x=y+z,$$

indem man selbe aus zwei noch unbekannten Theilen y und z zusammengesetzt ansieht; dadurch erscheint

$$y^3+3y^2z+3yz^2+z^3+a(y+z)+b=0$$

oder $y^3+z^3+b+(y+z)(a+3yz)=0.$

Fügt man nun zu dieser, den Unbekannten y und z vorgezeichneten, Bedingung noch die bei, daß sie auch die Gleichung

$$a+3yz=0$$

erfüllen sollen, so reducirt sich jene Gleichung auf

$$y^3+z^3+b=0.$$

Von diesen zwei Gleichungen bietet die erste $z=-\frac{a}{3y}$,

daher die andere $y^3-\frac{a^3}{27y^3}+b=0$

oder $$y^6+by^3=\frac{a^3}{27};$$

woraus (nach §. 215) $y=\sqrt[3]{\left[-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right)}\right]}$

folgt. Hiedurch wird $z=\dfrac{-\frac{1}{3}a}{\sqrt[3]{\left[-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right)}\right]}}$

oder (nach §. 163) $z=\sqrt[3]{\left[-\frac{b}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right)}\right]}.$

Auf diese Weise findet man

$$x=\sqrt[3]{\left[-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right)}\right]}+\sqrt[3]{\left[-\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right)}\right]}$$

als den Ausdruck einer Wurzel der gegebenen cubischen Gleichung, welche gewöhnlich die Cardan'sche Formel genannt wird.

Dividirt man das Polynom dieser Gleichung, in der Absicht, ihre beiden andern Wurzeln zu finden, durch den Wurzelfactor $x-(y+z)$, so erhält man, (nach §. 285 und §. 290, VII.) die Gleichung $x^2+(y+z)x+a+(y+z)^2=0$, welche durch die Substitution $a=-3yz$ in

$$x^2+(y+z)x+y^2-yz+z^2=0,$$

sich verwandelt und $x=-\frac{y+z}{2}\pm\frac{y-z}{2}\sqrt{-3}$ darbietet.

Setzt man sonach, in der Absicht die Wurzeln der cubischen Gleichung $x^3+ax+b=0$ aufzustellen, zur Abkürzung

$$y=\sqrt[3]{\left[-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right)}\right]},\quad z=\sqrt[3]{\left[-\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}\right)}\right]},$$

ferner $-\frac{y+z}{2}=p,\quad -\frac{y-z}{2}\sqrt{3}=q,$

und bezeichnet die Wurzeln der aufzulösenden Gleichung mit x_1, x_2, x_3; so finden sich für dieselben die Ausdrücke

$$x_1=-2p,\qquad x_2=p+q\sqrt{-1},\qquad x_3=p-q\sqrt{-1}.$$

1. **Beispiel.** Sind die Wurzeln der Gleichung

$$u^3-12u^2+57u-94=0$$

zu suchen, so setze man (nach §. 290, III.) zur Beseitigung des zweiten Gliedes $u-4=x$ oder $u=x+4$; dadurch erhält man $x^3+9x+6=0$, und somit ist $a=9$, $b=6$,

$$y=\sqrt[3]{(-3+\sqrt{27+9})}=\sqrt[3]{3},\quad z=\sqrt[3]{(-3-\sqrt{27+9})}=-\sqrt[3]{9},$$

$p=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}),\quad q=-\frac{1}{2}(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3})\sqrt{3}$; endlich

$$x_1=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9},$$

$$x_2=\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3})-\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3})\sqrt{3}\,.\,\sqrt{-1},$$

$$x_3=\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3})+\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3})\sqrt{3}\,.\,\sqrt{-1},$$

welche Wurzeln um 4 vergrößert die 3 Werthe von u geben.

2. **Beispiel.** Sucht man die Wurzeln der Gleichung

$$x^3+6x+20=0,$$

so findet man $y=\sqrt[3]{(-10+6\sqrt{3})}$, $z=\sqrt[3]{(-10-6\sqrt{3})}$.

Obwohl nun hier alle Werthe von x irrational zu werden scheinen, so zeigt sich doch nach vorgenommener Untersuchung

$$y=-1+\sqrt{3}, \qquad z=-1-\sqrt{3};$$

daher wird $\quad p=1, \qquad q=-3,$

und $\quad x_1=-2, \quad x_2=1-3\sqrt{-1}, \quad x_3=1+3\sqrt{-1}.$

II. Auflösung der biquadratischen Gleichungen.

Hat man eine Gleichung des vierten Grades aufzulösen, so bringe man sie nöthigen Falls vorläufig auf die Form

$$x^4+ax^2+bx+c=0,$$

und setze

$$x=u+v+w,$$

indem man wieder u, v, w die noch zu suchenden Bestandtheile von x sein läßt. Aus dieser Annahme folgt

$$x^2=u^2+v^2+w^2+2(vw+wu+uv),$$

oder, wenn man der Kürze wegen $u^2+v^2+w^2=p$ setzt,

$$x^2=p+2(vw+wu+uv) \text{ und}$$

$$x^2-p=2(vw+wu+uv).$$

Die erneuerte Quadrirung gibt

$$x^4-2px^2+p^2=4(v^2w^2+w^2u^2+u^2v^2)+8uvw(u+v+w),$$

oder wenn man $\quad v^2w^2+w^2u^2+u^2v^2=q, \quad u^2v^2w^2=r$

annimmt und x statt $u+v+w$ schreibt,

$$x^4-2px^2+p^2=4q+8\sqrt{r}.x,$$

oder endlich $\quad x^4-2px^2-8\sqrt{r}.x+p^2-4q=0.$

Diese Gleichung, welche die Wurzel $u+v+w$ besitzt, ist, so wie die aufzulösende, vom vierten Grade und von ihrem zweiten Gliede befreit. Sie wird mit dieser identisch, wenn

$$-2p=a, \quad -8\sqrt{r}=b, \quad p^2-4q=c,$$

nemlich $\quad p=-\frac{a}{2}, \; q=\frac{a^2-4c}{16}, \; r=\frac{b^2}{64}$

gesetzt wird. Da nun obigen Annahmen gemäß, von den drei Größen u^2, v^2, w^2 die Summe p, die Summe ihrer Amben q und ihr Product r ist; so lassen sie sich (vermög §. 289) als die drei Wurzeln der Gleichung $\quad y^3-py^2+qy-r=0$

oder

$$y^3+\frac{a}{2}y^2+\frac{a^2-4c}{16}y-\frac{b^2}{64}=0$$

ansehen. Ist diese aufgelöst, so kennt man die zweiten Potenzen von u, v, w, daher auch diese Größen selbst und die verlangte Wurzel x. Permutirt man dabei, wegen der Gleichung $\sqrt{r}=uvw=-\frac{b}{8}$, die Vorzeichen von u, v, w auf alle jene möglichen Weisen, bei denen sich für ihr Product das entgegengesetzte Zeichen von b ergibt, so gelangt man zu allen 4 Wurzeln der Gleichung.

Z. B. Soll die Gleichung

$$x^4-25x^2+60x-26=0$$

aufgelöst werden, so ist $a=-25$, $b=60$, $c=-26$,

daher $$y^3-\frac{25}{2}y^2+\frac{769}{16}y-\frac{225}{4}=0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind $\frac{9}{4}$, 4, $\frac{25}{4}$, mithin $u=\pm\frac{3}{2}$, $v=\pm 2$, $w=\pm\frac{5}{2}$. Hieraus folgen, weil b positiv ist, sonach uvw negativ werden muß, die 4 zu suchenden Wurzeln

$$x_1=-\frac{3}{2}-2-\frac{5}{2}=-6,$$

$$x_2=-\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}=\ 3,$$

$$x_3=+\frac{3}{2}-2+\frac{5}{2}=\ 2,$$

$$x_4=+\frac{3}{2}+2-\frac{5}{2}=\ 1.$$

B.

Auflösung numerischer Gleichungen.

§. 292.

Aus der eben erläuterten allgemeinen Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades läßt sich zur Genüge entnehmen, mit wie großen Schwierigkeiten man bei noch höheren Graden zu kämpfen haben dürfte, zumal da die Wurzeln sich nicht als algebraische, sondern nur als transcendente Functionen der Coefficienten darstellen lassen. Diese Schwierigkeiten bewogen die Analysten, mehr auf die Auflösung der sogenannten numerischen oder Zahlengleichungen, deren Coefficienten nemlich gegebene besondere Zahlen sind, und auf welche man in den Anwendungen der Analysis auf bestimmte Probleme am Ende immer stößt, ihren Scharfsinn zu werfen. Die wichtigsten der bisher gelungenen Entdeckungen in diesem Gebiete wollen wir, so weit sie unserem Zwecke zusagen und unsere bisherigen Lehren ausreichen, möglichst kurz erörtern, dabei aber zur Vereinfachung der Untersuchungen voraussetzen, daß die Coefficienten durchgehends reell seien. Übrigens richten wir hiebei unser Augenmerk vorzüglich auf die reellen Wurzeln, weil fast immer blos sie, die imaginären dagegen nur äußerst selten, zu suchen sind.

I. Bestimmung der reellen Wurzeln.

a. Grenzen der reellen Wurzeln.

§. 293.

Jede zwei reelle Zahlen, zwischen denen die reellen Wurzeln einer Gleichung liegen, heißen Grenzen und zwar die größere von ihnen die obere, die kleinere aber die untere Grenze dieser Wurzeln. Die Kenntniß solcher Grenzen gewährt desto mehr Vortheil, je enger oder näher dieselben an einander liegen, d. h. je kleiner der absolute Werth (der numerische oder Zahlwerth) ihrer Differenz, nemlich jene Zahl ist, die sich nach Weglassung des Vor- oder Qualitätszeichens (+ oder —) dieser Differenz darbietet. Obgleich es Methoden gibt, die Grenzen der Wurzeln einer Gleichung direct zu berechnen, so findet man es doch meistens bequemer zu erforschen, ob und wie viel reelle Wurzeln innerhalb zwei gewählter Grenzen sich befinden. Hiebei läßt man sich von den Ergebnissen folgender Untersuchungen leiten.

§. 294.

Erhält die Function einer Gleichung, für zwei bestimmte reelle Werthe ihrer Veränderlichen, Werthe von entgegengesetzten Zeichen; so liegt zwischen jenen Werthen der Veränderlichen **wenigstens eine** reelle Wurzel. Sind nemlich bei der Gleichung $f(x)=0$ für $x=a$ und $x=b$ die Zeichen der Werthe $f(a)$ und $f(b)$ der Function $f(x)$ entgegengesetzt; so befindet sich zwischen a und b mindestens eine reelle Wurzel.

Denn läßt man in der Function $f(x)$, welche, weil sie ganz ist, für keinen endlichen Werth von x unendlich werden kann und, wie aus §. 286, Gl. (22) klar zu ersehen ist, um so weniger sich ändert, je geringer die Änderung ihrer Variablen ist, folglich innerhalb der Grenzen $x=a$ und $x=b$ stetig bleibt, die Veränderliche x von der einen Grenze a zur andern b durch alle möglichen Zwischenstufen der Größe fortschreiten; so muß die Function $f(x)$ gleichfalls alle ihre denkbaren Zwischenwerthe von $f(a)$ bis $f(b)$, ohne einen zu übergehen, allmälig durchwandern. Da nun diese Werthe $f(a)$ und $f(b)$ entgegengesetzte Zeichen besitzen, folglich zwischen ihnen die Null sich befindet; so muß es wenigstens einen Werth $x=\alpha$ der Veränderlichen geben, für welchen der entsprechende Zwischenwerth der Function $f(x)$ der Null gleich ausfällt, also $f(\alpha)=0$ wird; dann ist α eine zwischen a und b liegende Wurzel der Gleichung $f(x)=0$.

Aus vorstehendem Lehrsatze und aus dem Umstande, daß die Übergänge der stetigen Function $f(x)$ aus dem Positiven in das Negative nur mit Übergängen aus dem Negativen in das Positive wechseln können, und daß diese Function in einem Bereiche, wo sie keine Zeichenänderung erfährt, zuweilen bis zur Null sich nähern und dann wieder von ihr sich entfernen kann, läßt sich folgern, daß, wofern jede 2, 3, 4, 5, . . . fache Wurzel für 2, 3, 4, 5, . . . verschiedene gezählt wird, zwischen zwei Werthen a und b der Veränderlichen, bei denen die Function $f(x)$ entgegengesetzte Zeichen annimmt, auch 3, 5, 7, . . . kurz eine **ungerade Anzahl** Wurzeln, dagegen, wenn diese zwei Werthe der Function einerlei Zeichen erhalten, entweder gar keine oder 2, 4, 6, . . . überhaupt eine **gerade Anzahl** Wurzeln liegen könne.

Ferner fließen aus demselben Lehrsatze noch nachstehende zwei Folgerungen.

1) Jede Gleichung **ungeraden Ranges** besitzt wenigstens eine reelle Wurzel, und das Zeichen dieser Wurzel ist jenem des letzten Gliedes entgegengesetzt. Denn setzt man in $f(x)$ für x der Ordnung nach $-\infty$, 0, $+\infty$, so übergeht diese Function in $-\infty$, A_n, $+\infty$.

Ist nun A_n positiv, so liegt wenigstens eine Wurzel zwischen 0 und $-\infty$, und ist daher negativ; ist dagegen A_n negativ, so befindet sich zum wenigsten eine Wurzel zwischen 0 und $+\infty$, und ist demnach positiv.

2) Jede Gleichung **geraden Ranges**, in der das letzte Glied **negativ** ist, hat wenigstens zwei reelle Wurzeln, und von diesen ist die eine positiv, die andere negativ. Denn setzt man auch hier in der Function $f(x)$ für x die Werthe $-\infty$, 0, $+\infty$, so erlangt sie die Werthe $+\infty$, A_n, $+\infty$, folglich liegt, wenn A_n negativ ist, gewiß eine reelle Wurzel zwischen 0 und $+\infty$, und eine zweite zwischen 0 und $-\infty$.

§. 295.

Ein Paar gleicher Zeichen zweier unmittelbar nach einander folgender Glieder des Polynoms einer Gleichung heißt eine Zeichenfolge, ein Paar ungleicher Zeichen aber ein Zeichenwechsel. Die Zahl der Zeichenfolgen und Wechsel einer Gleichung zusammen ist offenbar ihrem Rangs-Exponenten gleich. So z. B. hat die Gleichung $x^7-2x^6-3x^5-5x^4-3x^3-x^2+x+1=0$ im Ganzen 2 Zeichenwechsel und 5 Zeichenfolgen.

§. 296.

Sei u eine von x unabhängige veränderliche Größe und man übersetze die in der Gleichung

$$(23)\qquad f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_{n-1}x+A_n=0$$

fungirende Veränderliche x (nach §. 290, II.) in $x-u$. Besieht man die sich darbietende transformirte Gleichung

$$(32)\qquad f(x)=f_n(u)(x-u)^n+f_{n-1}(u)(x-u)^{n-1}+\ldots$$
$$\ldots+f_2(u)(x-u)^2+f_1(u)(x-u)+f(u)=0,$$

indem man auf die in §. 286, I. erörterte Berechnung ihrer Coefficienten, wo man blos u für a zu setzen hat, Rücksicht nimmt, so erkennt man leicht Folgendes.

1) Für $u=0$ reducirt sich die Gleichung (32) auf

$$f(x)=f_n(0)x^n+f_{n-1}(0)x^{n-1}+\cdots+f_2(0)x^2+f_1(0)x+f(0)$$
$$=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_{n-2}x^2+A_{n-1}x+A_n=0;$$

ihre Coefficienten sind demnach die der gegebenen Gleichung (23) selbst.

2) Ist die Größe u $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positiv}}{\text{negativ}}$ und läßt man ihren Zahlwerth von Null an allmälig durch alle denkbaren Zwischenstufen bis ins Unendliche wachsen; so muß, weil der **erste** Coefficient $f_n(u)$ fortwährend ungeändert bleibt und zugleich positiv vorausgesetzt wird, der **zweite** Coefficient $f_{n-1}(u)$, weil er stets $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positive}}{\text{negative}}$ Zusätze erhält, ununterbrochen $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{wachsen}}{\text{abnehmen}}$, folglich endlich einmal $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positiv}}{\text{negativ}}$ werden und von da an auch immer $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positiv}}{\text{negativ}}$ bleiben. Ist dieser Zustand eingetreten, so wird von hier an der **dritte** Coefficient stets positive Zusätze erhalten, mithin ununterbrochen wachsen, folglich gewiß einmal positiv werden und fortan positiv bleiben. Besitzt aber dann der dritte Coefficient dieselbe Eigenschaft wie der erste, so muß er gerade so, wie dieser auf den zweiten und dritten wirkte, auf den vierten und fünften einwirken, folglich endlich einmal den vierten für immer $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positiv}}{\text{negativ}}$ und den fünften ununterbrochen positiv machen. Setzt man diese Art zu schließen fort, so zeigt sich, daß, nachdem der Zahlwerth der $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positiven}}{\text{negativen}}$ Größe u einmal hinreichend groß, wenn auch noch nicht unendlich groß geworden ist, nicht nur sämmtliche Coefficienten von der Null verschieden und insbesondere die ungeradstelligen positiv, die geradstelligen aber $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positiv}}{\text{negativ}}$ ausfallen, folglich die transformirte Gleichung lauter $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Zeichenfolgen}}{\text{Zeichenwechsel}}$ besitzt.

Es sei nun $u=p$ einer der Werthe von u, für welche die transformirte Gleichung mit der Veränderlichen $x-u=x-p$ lauter Zeichenwechsel und durchgehends von Null verschiedene Coefficienten besitzt, und $u=q$ einer derjenigen Werthe, für welche die transformirte Gleichung in $x-u=x-q$ lauter Zeichenfolgen und gleichfalls durchaus von Null verschiedene Coefficienten hat; so ist nicht nur $p<q$, nemlich $q-p$ positiv, sondern auch, weil weder eine fernere Verminderung von u im ersten, noch eine weitere Vergrößerung des Werthes von u im andern Falle ein Verschwinden des letzten Coefficienten $f(u)$ hervorzubringen vermag, p eine untere und q eine obere Grenze der reellen Wurzeln der Gleichung $f(u)=0$ oder der von ihr nur in der Bezeichnung der Unbekannten verschiedenen $f(x)=0$.

Lassen wir demnach die Größe u von p bis q, oder auch von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig wachsen, so müssen alle anfänglich vorhandenen Zeichenwechsel, deren Anzahl durch den Rangs-Exponenten der Gleichung angegeben wird, nach und nach in lauter Zeichenfolgen übergehen. Dabei kann aber während des successiven Aufsteigens der Veränderlichen u von irgend einem Werthe zu einem höheren, in der Reihe der Zeichen der Coefficienten

(33) $\quad f_n(u)\,,\ f_{n-1}(u)\,,\ f_{n-2}(u)\,,\ldots f_2(u)\,,\ f_1(u)\,,\ f(u)$

der transformirten Gleichung, so lange keine Änderung eintreten, als nicht einer dieser Coefficienten zu Null wird, weil er als stetige Function von u nur auf diese Weise sein Zeichen zu ändern vermag.

§. 297.

Erforschen wir gegenwärtig die Änderung der Menge von Zeichenwechseln, welche bei einem bestimmten Werthe $u=h$ der Veränderlichen u durch das Verschwinden von Coefficienten der transformirten Gleichung (32) herbeigeführt wird, und besehen wir

1) den Fall, wo nur der letzte Coefficient $f(u)$ verschwindet, also $f(h)=0$ und somit h eine Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ ist. Bezeichnen i und k zwei essentiell (wesentlich, ihrer Natur nach) positive Größen, so ist leicht einzusehen, daß sich dieselben immer so klein annehmen lassen, damit, während des allmäligen Wachsens der Veränderlichen von $u=h-i$ durch $u=h$ bis $u=h+k$, der letzte Coefficient $f(u)$ blos ein einziges Mal aus dem $\begin{smallmatrix}\text{Positiven}\\ \text{Negativen}\end{smallmatrix}$ in das $\begin{smallmatrix}\text{Negative}\\ \text{Positive}\end{smallmatrix}$ durch Null übergehe, folglich fortwährend $\begin{smallmatrix}\text{abnehme}\\ \text{zunehme}\end{smallmatrix}$, was nur eintreten kann, wenn der vorletzte Coefficient in diesem Bereiche ununterbrochen $\begin{smallmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{smallmatrix}$ bleibt. Dies hat zur Folge, daß an der Stelle $u=h$ ein Zeichenwechsel in eine Zeichenfolge sich verwandelt, oder ein Zeichenwechsel verloren geht, wie man aus folgenden zwei Schemen noch deutlicher ersieht.

	I.		II.	
	$f_1(u)$	$f(u)$	$f_1(u)$	$f(u)$
$u=h-i$	$-$	$+$	$+$	$-$
$u=h$	$-$	0	$+$	0
$u=h+k$	$-$	$-$	$+$	$+$

Die Reihe der Zeichen der Coefficienten der transformirten Gleichung verliert demnach jedes Mal einen Zeichenwechsel, wenn die veränderliche Größe u bei ihrem stetigen Übergange von einer untern Grenze p zu einer obern q, oder von $-\infty$ bis $+\infty$ eine Wurzel der gegebenen Gleichung überschreitet.

2) Nehmen wir an, daß für den Werth $u=h$ der Veränderlichen u von den Coefficienten der transformirten Gleichung in $x-u$ nur ein mittlerer $f_r(u)$, der letzte aber nicht verschwinde, und wählen wir wieder i und k so klein, daß dieser Coefficient $f_r(u)$ in dem Bereiche von $u=h-i$ bis $u=h+k$ nur ein einziges Mal verschwinde, also aus dem $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Positiven}}{\text{Negativen}}$ in das $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Negative}}{\text{Positive}}$ übergehe; so muß der unmittelbar vorhergehende Coefficient $f_{r+1}(u)$ in diesem Intervalle stets $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{negativ}}{\text{positiv}}$ sein. Besitzen nun der dem verschwindenden Coefficienten $f_r(u)$ vorangehende $f_{r+1}(u)$ und der ihm nachfolgende $f_{r-1}(u)$ $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{einerlei}}{\text{verschiedene}}$ Zeichen, so finden bei den drei consecutiven Coefficienten $f_{r+1}(u)$, $f_r(u)$, $f_{r-1}(u)$ vor dem Überschreiten des Werthes $u=h$ $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{zwei}}{\text{ein}}$ und nach demselben $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{kein}}{\text{ein}}$ Zeichenwechsel Statt, folglich gehen an dieser Stelle $u=h$ $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{zwei}}{\text{kein}}$ Zeichenwechsel verloren. Noch deutlicher weisen dieses die nachstehenden vier Schemen aus.

	I.			II.		
	$f_{r+1}(u)$	$f_r(u)$	$f_{r-1}(u)$	$f_{r+1}(u)$	$f_r(u)$	$f_{r-1}(u)$
$u=h-i$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
$u=h$	$-$	0	$-$	$+$	0	$+$
$u=h+k$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$

	III.			IV.		
	$f_{r+1}(u)$	$f_r(u)$	$f_{r-1}(u)$	$f_{r+1}(u)$	$f_r(u)$	$f_{r-1}(u)$
$u=h-i$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
$u=h$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$u=h+k$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$

Verschwindet daher an einer Stelle $u=h$ blos ein einziger mittlerer Coefficient, so gehen, wenn die ihn einschließenden $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{einerlei}}{\text{verschiedene}}$ Zeichen besitzen, $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{zwei}}{\text{kein}}$ Zeichenwechsel verloren.

3) Sollten für einen gewissen Werth $u=h$ der Veränderlichen u mehrere nach einander folgende mittlere Coefficienten, etwa $f_r(u)$, $f_{r-1}(u)$, $f_{r-2}(u)$, . . . $f_{r-\varrho+1}(u)$ verschwinden; so lassen sich auch hier die Größen i und k so klein annehmen, daß in dem Intervalle von $u=h-i$ bis $u=h+k$ keiner dieser ϱ Coefficienten öfter als ein Mal zu Null werde. Geht nun hiebei der erste Coefficient $f_r(u)$ aus dem $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Positiven}}{\text{Negativen}}$ durch Null in das $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Negative}}{\text{Positive}}$ über, so muß der ihm vorangehende $f_{r+1}(u)$ fortwährend $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{negativ}}{\text{positiv}}$ sein, und der ihm folgende zweite Coefficient $f_{r-1}(u)$ vor dem Verschwinden $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{wachsen}}{\text{abnehmen}}$ und nach demselben $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{abnehmen}}{\text{zunehmen}}$, daher, obgleich er verschwindet, immer auch $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{negativ}}{\text{positiv}}$ bleiben, nemlich im $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{negativen}}{\text{positiven}}$ Gebiete zuerst der Null sich nähern und, nachdem er sie erreicht, sich wieder von ihr entfernen. Dies hat zur Folge, daß der dritte Coefficient $f_{r-2}(u)$ wieder aus dem $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Positiven}}{\text{Negativen}}$ in das $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Negative}}{\text{Positive}}$ übergeht, folglich auch der vierte, trotz seines Verschwindens, stets $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{negativ}}{\text{positiv}}$ bleibt. Bei den Zeichen der ϱ verschwindenden Coefficienten $f_r(u)$, $f_{r-1}(u)$, $f_{r-2}(u)$,... $f_{r-\varrho+1}(u)$ wechselt daher, wie die Fortsetzung der begonnenen Reihe von Schlüssen nachweist, vor dem Verschwinden immer das positive mit dem negativen ab, und zwar haben alle ungeradstelligen das entgegengesetzte Zeichen des ersten ihnen vorangehenden nicht verschwindenden Coefficienten $f_{r+1}(u)$, und sind demnach, weil dieser immer $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{negativ}}{\text{positiv}}$ bleibt, $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positiv}}{\text{negativ}}$, während die geradstelligen mit dem vorausgehenden ersten nicht verschwindenden einerlei Zeichen besitzen, also wie er $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{negativ}}{\text{positiv}}$ sind; folglich finden, von dem ersten vorangehenden nicht verschwindenden Coefficienten $f_{r+1}(u)$ an, bis zu dem letzten verschwindenden $f_{r-\varrho+1}(u)$ in Allem ϱ Zeichenwechsel Statt; nach dem Verschwinden aber nimmt jeder Coefficient das Zeichen des

ersten vor ihnen stehenden nicht verschwindenden an, somit gehen bei diesen $\rho+1$ Coefficienten im Ganzen ρ Zeichenwechsel verloren. Ist nun ρ eine ungerade Zahl, so daß der letzte verschwindende Coefficient in dem betrachteten Intervalle sein Zeichen ändert und vor seinem Verschwinden das Zeichen des ersten vorausgehenden nicht verschwindenden besitzt; so vergrößert sich, wenn dieser mit dem ersten nachfolgenden nicht verschwindenden $f_{r-\varrho}(u)$ $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{einerlei}}{\text{verschiedene}}$ Zeichen hat, durch den Beitritt dieses letzteren Coefficienten, vor der Stelle $u=h$, die Anzahl der vorhandenen Zeichenwechsel um $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{keinen}}{\text{einen}}$, nach dieser Stelle aber um $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{einen}}{\text{keinen}}$, oder bei den ρ verschwindenden und den sie begrenzenden nicht verschwindenden 2 Coefficienten finden vor der erwähnten Stelle $\genfrac{}{}{0pt}{}{\varrho+1}{\varrho}$, nach derselben $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{kein}}{\text{ein}}$ Zeichenwechsel Statt, mithin geht bei diesen $\rho+2$ Coefficienten die gerade Zahl $\rho\pm1$ von Zeichenwechseln verloren. Ist dagegen ρ eine gerade Zahl, so daß der letzte verschwindende Coefficient in dem untersuchten Intervalle keine Zeichenänderung erfährt und mit dem ersten vorangehenden nicht verschwindenden fortwährend das nemliche Zeichen beibehält; so erhält die Reihe der Zeichen, falls dieser mit dem ersten nachkommenden nicht verschwindenden $f_{r-\varrho}(u)$ $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{einerlei}}{\text{verschiedene}}$ Zeichen besitzt, durch den Beitritt dieses letzteren Coefficienten, sowohl vor, als nach der Stelle $u=h$, $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{keinen}}{\text{einen}}$ Zeichenwechsel mehr, oder bei den in Betracht genommenen $\rho+2$ Coefficienten bestehen vor der angeführten Stelle $\genfrac{}{}{0pt}{}{\varrho}{\varrho+1}$, nach ihr aber $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{kein}}{\text{ein}}$ Zeichenwechsel, folglich geht hier jedes Mal die gerade Zahl ρ von Zeichenwechseln verloren.

Verschwinden demnach an einer Stelle $u=h$ mehrere unmittelbar auf einander folgende mittlere Coefficienten, so geht immer eine **gerade** Anzahl von Zeichenwechseln verloren, und zwar eben so viel, als Coefficienten verschwinden, wenn die Zahl dieser gerad; oder um eins $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{mehr}}{\text{weniger}}$, wenn die Zahl der verschwindenden Coefficienten ungerad ist und die an sie grenzenden zwei Coefficienten $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{einerlei}}{\text{verschiedene}}$ Zeichen haben.

4) Betrachten wir den Fall, wo für $u=h$ am Ende mehrere, namentlich ρ, nach einander folgende Coefficienten zugleich verschwinden, folglich (vermög §. 288, III.) h eine ρfache reelle Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ ist; so verliert die Reihe der Zeichen des Polynoms der transformirten Gleichung, nach dem eben durchgeführten Beweise, ρ, nemlich eben so viel Zeichenwechsel, als wie viel solcher Coefficienten verschwinden, oder als wie vielfach jene reelle Wurzel ist.

5) Tritt endlich der Fall ein, daß für $u=h$ am Ende ρ, in der Mitte an mehreren getrennten Stellen $\rho', \rho'', \rho''', \ldots$ Coefficienten verschwinden, so wird man die Menge der in den einzelnen Partien verloren gehenden Zeichenwechsel bestimmen und ihre Gesammtzahl berechnen.

§. 298.

Die Ergebnisse dieser Untersuchungen lassen sich nunmehr auf folgende Weise zusammenfassen.

Vermindert man in der Gleichung $f(x)=0$ die Veränderliche x um die von ihr unabhängige Veränderliche u so, daß $x-u$ die Unbekannte der transformirten Gleichung (32) werde, und läßt man diese Variable u von einer untern Grenze p der reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ oder $f(u)=0$ bis zu einer oberen Grenze q, oder, wenn man es vorzieht, von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig wachsen; so treten bei der Reihe der in der transformirten Gleichung vorkommenden Coefficienten, welche sowohl für $u=p$, als auch für alle zwischen $-\infty$ und p gelegenen Werthe von u lauter, also n, Zeichenwechsel, und nicht blos für $u=q$, sondern auch für alle zwischen q und $+\infty$ liegenden Werthe von u lauter, nemlich gleichfalls n, Zeichenfolgen enthält, folgende bemerkenswerthe Umstände ein.

1) Bei dem Durchgange der Variablen u durch jede ein- oder vielfache reelle Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ verliert diese Reihe so viel Zeichenwechsel, als wie vielfach diese Wurzel ist.

2) Dieselbe Reihe kann aber auch bei solchen Werthen von u Zeichenwechsel verlieren, für welche nicht der letzte Coefficient $f(u)$, sondern einer oder einige der mittleren verschwinden, und die

daher keine Wurzeln von $f(x)=0$ sind. In diesem Falle ist die Anzahl der verloren gegangenen Zeichenwechsel stets gerad und zwar eben so groß als die der verschwindenden Coefficienten, wenn diese gerad, oder um eins $\substack{\text{größer}\\ \text{kleiner}}$, wenn diese ungerad und der diesen Coefficienten zunächst vorhergehende mit dem ihnen unmittelbar folgenden $\substack{\text{einerlei}\\ \text{entgegengesetzte}}$ Zeichen besitzt.

3) Kann an einer oder an mehreren getrennten Stellen blos ein Coefficient, dessen benachbarte entgegengesetzte Zeichen haben, auf Null reducirt werden; in diesen Fällen erfolgt in der Zahl der Zeichenwechsel gar keine Änderung.

4) Die Anzahl der Zeichenwechsel in der Coefficientenreihe nimmt beständig ab, nie kann ein neuer Zeichenwechsel zuwachsen, noch ein verlorner zurück gewonnen werden.

5) Besitzt nun die Gleichung $f(x)=0$ lauter, folglich n, reelle Wurzeln, so können von sämmtlichen ursprünglich vorhandenen Zeichenwechseln gar keine durch das Verschwinden von mittleren Coefficienten verloren gehen. Sind aber von ihren n Wurzeln blos ν reell, folglich $n-\nu$ imaginär, so müssen ν Zeichenwechsel wegen des Verschwindens von Schlußcoefficienten, also die übrigen $n-\nu$ wegen des Verschwindens von mittleren Coefficienten, sich verlieren. Da im letzteren Falle die Zeichenwechsel nur zu vollen Paaren verschwinden können, so muß auch die Gesammtzahl $n-\nu$ der durch das Verschwinden von mittleren Coefficienten verloren gehenden Zeichenwechsel, daher auch die ihr gleiche *Anzahl der imaginären Wurzeln gerad* sein.

Erwägt man noch, daß bei denselben Werthen von u, für welche mittlere Coefficienten der transformirten Gleichung (32) verschwinden, auch bei angemessener Abänderung der Coefficienten der ursprünglichen Gleichung (23), Schlußcoefficienten annullirt werden, folglich jene Werthe in einem solchen Falle als reelle Wurzeln der gegebenen Gleichung auftreten können, während sie im Früheren nicht als solche erscheinen, folglich durch imaginäre vertreten sind: so dürfte es immerhin verstattet sein, *imaginäre Wurzeln einer Gleichung als eben so viel verloren gegangene reelle anzusehen*, und daher auch zu sagen, daß bei dem Verschwinden von mittleren Coefficienten eine eben so große Zahl von reellen Wurzeln als von Zeichenwechseln verloren gehe.

6) Fehlen demnach in einer Gleichung einige, etwa ρ, mittlere Glieder, (indem ihre Coefficienten Null sind), so besitzt sie, weil sie sich als transformirte einer andern ansehen läßt, deren Wurzeln von den ihrigen um eine reelle Größe differiren, gewiß imaginäre Wurzeln und zwar entweder ρ, wenn ρ gerade; oder $\rho \pm 1$, wenn ρ ungerade ist, und die an die fehlenden Glieder angrenzenden einerlei / entgegengesetzte Zeichen haben. — Dieser Satz wurde zuerst von *De Gua* gelehrt.

§. 299.

Die eben zusammengestellten Resultate bieten sogleich folgenden, im Wesentlichen zuerst von *Fourier* ausgesprochenen, Satz, und mit ihm ein sehr geeignetes Mittel, die reellen Wurzeln der Gleichungen zu begrenzen.

Sind a und b irgend zwei reelle Zahlen, von denen a die kleinere, mithin $b-a$ positiv ist, und transformirt man eine gegebene Gleichung $f(x)=0$ so, daß ihre Veränderliche einmal $x-a$ und ein zweites Mal $x-b$ wird; so hat die vorgelegte Gleichung nicht mehr zwischen a und b liegende reelle Wurzeln (gleiche auch als verschiedene gezählt), als um wie viel die erste transformirte Gleichung (mit der Veränderlichen $x-a$) in ihren Coefficienten mehr Zeichenwechsel besitzt, wie die zweite (mit der Veränderlichen $x-b$).

Die Richtigkeit dieses Satzes leuchtet sogleich ein, wenn man in obigen Untersuchungen die Veränderliche u, von $-\infty$ bis $+\infty$ alle denkbaren reellen Zahlen, daher auch die beiden gewählten Grenzen a und b durchschreiten läßt. Denn die Anzahl der Zeichenwechsel, um welche die transformirte Gleichung mit der Veränderlichen $x-u$ für $u=a$, d. i. die transformirte mit $x-a$, mehr Zeichenwechsel als die transformirte mit $x-u$ für $u=b$, d. i. die transformirte mit $x-b$ besitzt, kann nie kleiner als die Anzahl der während des Überganges von $u=a$ bis $u=b$ durch das Verschwinden von Schlußcoefficienten verloren gegangenen Zeichenwechsel sein. Da aber jeder dieser verlornen Zeichenwechsel auf eine zwischen a und b liegende reelle Wurzel der Gleichung

$f(u)=0$ oder der von ihr nur in der Bezeichnung der Unbekannten differirenden Gleichung $f(x)=0$ hindeutet; so kann diese Gleichung zwischen genannten Grenzen nicht mehr reelle Wurzeln haben, als Zeichenwechsel in demselben Intervalle verloren gehen, oder als um wie viel Zeichenwechsel die transformirte Gleichung mit $x-a$ mehr besitzt wie die transformirte mit $x-b$.

Bezeichnet demnach α die Anzahl Zeichenwechsel der transformirten Gleichung mit $x-a$, und β die der transformirten mit $x-b$; so ist immer $\alpha \overline{\gtrless} \beta$, und die Menge der zwischen a und b befindlichen reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ nicht größer als die Differenz $\alpha-\beta$ der Anzahlen dieser Zeichenwechsel. Erwägt man noch, daß (nach §. 298, 5) die Zahl der imaginären Wurzeln nur gerad sein kann, so gilt allgemein, daß, wenn $\alpha-\beta$ **ungerade** ist, zwischen a und b wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liegt, und, daß, wenn $\alpha-\beta$ **gerade** ist, entweder eben so viel reelle Wurzeln vorkommen, oder aber alle imaginär oder endlich in geraden Anzahlen einige reell, andere imaginär sein können.

Ist demnach insbesondere

1) Die Differenz $\alpha-\beta=0$, so besitzt die Gleichung $f(x)=0$ zwischen a und b keine reelle Wurzel.

2) Ist aber $\alpha-\beta=1$, so hat die Gleichung eine einzige reelle Wurzel zwischen a und b.

§. 300.

Von obigem Lehrsatze ist der nachstehende, von *Descartes* zuerst aufgestellte, eine einfache Folgerung.

Eine Gleichung hat nicht mehr $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positive}}{\text{negative}}$ reelle Wurzeln als sie $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Zeichenwechsel}}{\text{Zeichenfolgen}}$ besitzt.

Denn die von der Gleichung $f(x)=0$ abstammende transformirte Gleichung (32) mit der Veränderlichen $x-u$ hat (nach §. 296) für $u=0$ dieselben Coefficienten wie die gegebene $f(x)=0$, folglich wie diese w Zeichenwechsel und $\mathfrak{f}$ Zeichenfolgen, wobei $w+\mathfrak{f}=n$ ist. Für $u=-\infty$ besitzt aber diese transformirte Gleichung n Zeichenwechsel, also liegen nach Fourier's Satze zwischen $-\infty$ und 0 nicht mehr als $n-w$, das ist $\mathfrak{f}$ reelle Wurzeln, oder die Gleichung $f(x)=0$ hat nicht mehr als f negative reelle Wurzeln. Für $u=+\infty$ dagegen hat die transformirte n Zeichenfolgen, daher gar keinen Wechsel, folglich liegen, demselben Satze gemäß, zwischen 0 und $+\infty$ nicht mehr als $w-0$, das ist w reelle Wurzeln, oder die Gleichung $f(x)=0$ besitzt nicht mehr als w positive reelle Wurzeln.

§. 301.

Durch Fourier's Satz ist man nun in den Stand gesetzt, die Grenzen der reellen Wurzeln einer Gleichung $f(x)=0$ zu ermitteln. Hiezu bedarf es weiter nichts, als die willkürliche Größe u, um welche man die Veränderliche x der gegebenen Gleichung vermindert, so lange abzuändern, bis die transformirte Gleichung mit $x-u$, von der übrigens blos die Coefficienten, am bequemsten nach Büdan's Methode, (§. 290, II. und §. 286) berechnet werden, einerseits lauter Zeichenwechsel, andererseits lauter Zeichenfolgen erhält. Am bequemsten ist es, hiezu die Null und die sowohl negativ, als positiv genommenen decadischen Einheiten, nemlich die Zahlen 0, ± 1, ± 10, ± 100, . . . zu wählen. Um dann zu erforschen, ob und wie viel reelle Wurzeln zwischen zwei solchen Zahlen liegen, wird man blos in den ihnen entsprechenden transformirten Gleichungen die Zeichenwechsel abzählen, und aus dem Unterschiede dieser Anzahlen auf die Menge der zwischen jenen Zahlen liegenden reellen Wurzeln nach obigen Regeln (§. 299) schließen.

Fügt es sich hiebei, daß für einen gewissen Werth der Veränderlichen u ein oder mehrere Coefficienten in der Mitte oder am Ende in Null übergehen; so wird man die ihnen vor und nach dem Verschwinden zukommenden Zeichen leicht nach folgender, gleichfalls von Fourier zuerst angegebenen und aus den (in §. 297, 2 und 3) gepflogenen Untersuchungen unmittelbar fließenden, Regel vom doppelten Zeichen bestimmen und das erstere über das andere unter die Null setzen. Man schreibt nemlich **unter** alle Nullen der verschwindenden Coefficienten das Zeichen des ihnen zunächst vorhergehenden nicht verschwindenden, ferner **über** die erste Null das entgegengesetzte dieses Zeichens und läßt über den folgenden Nullen die Zeichen ohne Unterbrechung abwechseln. Von diesen Doppelzeichen hat man ferner das $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{obere}}{\text{untere}}$ zu nehmen, wenn man mit dieser Coefficientenreihe die einem $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{kleineren}}{\text{größeren}}$ Werthe der Veränderlichen u entsprechende vergleichen will.

Zur Erläuterung dieses Verfahrens mögen folgende Beispiele dienen.

1. Beispiel. Die Gleichung

$$x^5-3x^4-24x^3+95x^2-46x-101=0 \tag{34}$$

gibt, für folgende in Klammern eingefaßte Verminderungen u ihrer Veränderlichen, nachstehende Zeichen der Coefficienten ihrer transformirten Gleichung.

(−10)	+ − + − + −	5 Z. W.	
			1 Z. W. verloren.
(− 1)	+ − − + − +	4 Z. W.	
			1 Z. W. verloren.
(0)	+ − − + − −	3 Z. W.	
			0 Z. W. verloren.
(1)	+ + − + + −	3 Z. W.	
			3 Z. W. verloren.
(10)	+ + + + + +	0 Z. W.	

Vergleicht man die Mengen von Zeichenwechseln dieser Zeichenreihen, so sieht man, daß (nach §. 299) sowohl zwischen −10 und −1, als auch zwischen −1 und 0 eine reelle Wurzel liegt, dagegen keine zwischen 0 und 1 sich befindet, und daß endlich von den zwischen 1 und 10 angedeuteten drei Wurzeln sicher eine reell ist, jedoch noch unbestimmt bleibt, ob die beiden anderen verloren gegangen und durch imaginäre ersetzt sind oder nicht.

2. Beispiel. Aus der Gleichung

$$x^4-4x^3-3x+23=0 \tag{35}$$

entspringen nach dem bekannten Verfahren folgende Zeichenreihen:

(0)	$+\ -\ \overset{+}{\underset{-}{0}}\ -\ +$	$\left.\begin{matrix}4\\2\end{matrix}\right\}$ Z. W.	2 Z. W. verloren.
(1)	$+\ \overset{-}{\underset{+}{0}}\ -\ -\ +$	$\left.\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right\}$ Z. W.	
			2 Z. W. verloren.
(10)	$+\ +\ +\ +\ +$	0 Z. W.	

Hieraus entnimmt man leicht, daß bei dem Werthe 0 zwei reelle Wurzeln, bei 1 aber keine verloren gehen, folglich die Gleichung gewiß zwei imaginäre Wurzeln besitzt, und daß zwischen 1 und 10 zwei reelle Wurzeln liegen, aber auch verloren gehen können.

§. 302.

Hat man durch das eben erläuterte Verfahren einige von reellen Zahlen begrenzte Intervalle gefunden, in denen mehr als eine reelle Wurzel einer Gleichung liegen können; so wird man, um zu erforschen, ob sie daselbst wirklich vorhanden sind oder verloren gingen, jene Intervalle durch Annahme beliebiger, jedoch wo möglich eine einfache Rechnung gestattender, Zwischenwerthe in kleinere Intervalle so weit unterabtheilen, bis in keinem derselben mehr als eine reelle Wurzel liegt, oder aber mehr als ein Paar reeller Wurzeln verloren geht, folglich sämmtliche reellen Wurzeln von einander getrennt sind. Allein diese Operation kann sich zuweilen sehr in die Länge ziehen und zwar um so mehr, je weniger die in einem bestimmten Intervalle liegenden oder verloren gehenden reellen Wurzeln von einander verschieden sind, und sie könnte sogar nie zu Ende gehen, wenn die vorhandenen reellen Wurzeln völlig gleich sind. Als Mittel, dieses unsichere Probiren abzukürzen, dient theils die Ausscheidung der gleichen Wurzeln, theils eine sogleich zu erörternde Prüfung, ob und wie viel Paar reelle Wurzeln in einem gegebenen Intervalle verloren gehen.

Zur Einleitung dieser Untersuchung zählt man, in den Zeichenreihen der zwei transformirten Gleichungen mit den Veränderlichen $x-a$ und $x-b$, von der Linken gegen die Rechte die bestehenden Zeichenwechsel, zieht nach je gleichviel Zeichen die letztere Anzahl von der ersteren ab und notirt den jedesmaligen Überschuß, welcher Index der Zeichenwechsel genannt zu werden pflegt, zwischen den zwei zuletzt betrachteten Zeichen. Z. B. Die der Veränderlichen $x-1$ und $x-10$ zukommenden transformirten Gleichungen der Gleichung (34) bieten mit einander verglichen folgende Reihe von Indices dar.

(1)	+	+	—	+	+	—
	0	0	1	2	2	3
(10)	+	+	+	+	+	+.

Von diesen Indices, die wir allgemein mit

(36) $$i_n,\ i_{n-1},\ i_{n-2},\ \ldots\ i_{m+1},\ i_m,\ i_{m-1},\ \ldots i_2,\ i_1,\ i_0$$

bezeichnen wollen, kann, wie aus ihrer Berechnungsweise einleuchtet, keiner von seinen beiden Nachbarn um mehr als 1 differiren. Ferner gibt der letzte Index i_0 an, wie viel reelle zwischen

a und b liegende Wurzeln die Gleichung $f(x)=0$ höchstens haben kann. Im Allgemeinen zeigt jeder Index i_m an, durch höchstens wie viel zwischen a und b liegende Werthe von u der Coefficient $f_m(u)$, zu dem er gehört, auf Null gebracht werden kann, oder daß die Gleichung $f_m(u)=0$ oder $f_m(x)=0$ zwischen a und b nicht mehr als i_m reelle Wurzeln habe.

§. 303.

I. Endigt sich demnach bei einem Intervalle, welches von zwei für die Veränderliche u substituirten Zahlen begrenzt wird, die Reihe der Indices mit 1, so ist in demselben eine, aber auch nicht mehr als eine, reelle Wurzel der vorgelegten Gleichung enthalten.

Übersteigt jedoch der letzte Index die Einheit, so bleibt noch zu prüfen, ob nicht durch das Verschwinden von Mittel-Coefficienten ein oder einige Paar reelle Wurzeln in dem zu durchforschenden Intervalle verloren gehen. In dieser Absicht sucht man den letzten oder am meisten rechts stehenden Index 1, welcher, wenn ihm die Bezeichnung i_m zugehört, andeutet, daß die Gleichung $f_m(u)=0$ in dem Intervalle von $u=a$ bis $u=b$ eine einzige reelle Wurzel hat. Auf diesen letzten Index 1 folgt zur Rechten nothwendig der Index 2; denn dieser Index kann von seinem Vorgänger nicht um mehr als 1 differiren, mithin blos 0, 1, 2 werden. Könnte er 1 sein, so wäre man, gegen die Voraussetzung, nicht bei dem letzten Index 1 stehen geblieben; sollte er aber 0 sein können, so müßte ihm unter den späteren Indices ein größerer und namentlich 1 folgen, weil der letzte Index i_0 nach der Voraussetzung größer als 1 ist, und jeder folgende den unmittelbar vorhergehenden höchstens um 1 übertreffen kann; dann hätte man aber wieder nicht, wie es sein soll, den letzten Index 1 gewählt. Vor dem letzten Index 1 kann allerdings einer der Indices 2, 1, 0 stehen. Befindet sich nicht 0 vor ihm, so lassen sich jeden Falls die Grenzen a und b so verengern, daß dies geschieht; wornach die den drei Coefficienten $f_{m+1}(u)$, $f_m(u)$, $f_{m-1}(u)$ entsprechenden drei Indices i_{m+1}, i_m, i_{m-1} die Zahlen 0, 1, 2 sein, und alle späteren Indices die Einheit übersteigen werden. Findet sich in dem schon hinreichend zusammengezogenen Intervalle von $u=a$ bis $u=b$ eine solche Gruppe von Indices 0, 1, 2 wirklich vor; so steht noch zu untersuchen, ob die in demselben angedeuteten zwei Wurzeln der Gleichung $f_{m-1}(u)=0$ existiren oder verloren gehen. Da nun hier dem Coefficienten $f_{m+1}(u)$ der Inder 0 angehört, so kann er in diesem Bereiche von a bis b sein Zeichen nicht ändern; dagegen muß, weil der folgende Coefficient $f_m(u)$ den Inder 1 besitzt, $f_m(a)$ das entgegengesetzte Zeichen von $f_{m+1}(a)$, und $f_m(b)$ das nemliche Zeichen wie $f_{m+1}(b)$, somit das entgegengesetzte von $f_m(a)$ haben. Demnach ändert der Coefficient $f_m(u)$ in dem Intervalle von a bis b gewiß ein Mal, aber auch nur ein einziges Mal, sein Zeichen und geht dabei durch Null. Endlich muß, weil $f_{m-1}(u)$ den Inder 2 besitzt, $f_{m-1}(a)$ das entgegengesetzte Zeichen von $f_m(a)$, und $f_{m-1}(b)$ dasselbe Zeichen wie $f_m(b)$, daher, weil $f_m(b)$ und $f_m(a)$ mit entgegengesetzten Zeichen behaftet sind, $f_{m-1}(b)$ mit $f_{m-1}(a)$ einerlei Zeichen haben. Mithin sind $f_{m+1}(a)$, $-f_m(a)$, $f_{m-1}(a)$, $f_{m+1}(b)$, $f_m(b)$, $f_{m-1}(b)$ gleichbezeichnete Größen.

II. Nehmen wir nun an, c sei eine in dem Intervalle von $u=a$ bis $u=b$ liegende reelle Wurzel der Gleichung $f_{m-1}(u)=0$, oder es sei $f_{m-1}(c)=0$ und sowohl $c-a$, als auch $b-c$ positiv. Übergehen wir zugleich von $u=a$ auf $u=c$ oder von der transformirten Gleichung mit der Veränderlichen $x-a$ auf jene mit $x-c=x-a-(c-a)$, so daß die Veränderliche der ersteren Gleichung noch eine fernere Verminderung um $c-a$ erfährt, und bezeichnen wir die m successiven Summen, welche bei der, nach §. 286, (15), auszuführenden Berechnung der Coefficienten der zweiten transformirten Gleichung unter den, an der $m+1$ten Stelle vom Ende herein befindlichen, Coefficienten $f_m(a)$ und über $f_m(c)$ zu stehen kommen, mit $R_1, R_2, \ldots R_m$; so sind die m Zusätze, welche der folgende $m$te Coefficient (vom Ende gezählt), nemlich $f_{m-1}(a)$, nach und nach bis zu $f_{m-1}(c)$ hin empfängt, $(c-a)R_1$, $(c-a)R_2$, ... $(c-a)R_m$; folglich ist

$$f_{m-1}(c)=f_{m-1}(a)+(c-a)(R_1+R_2+\ldots+R_m).$$

Stellt ferner R das arithmetische Mittel von $R_1, R_2, \ldots R_m$ vor, so ist

$$R=\frac{R_1+R_2+\ldots+R_m}{m}, \text{ also } R_1+R_2+\ldots+R_m=mR,$$

und sofort auch $f_{m-1}(c)=f_{m-1}(a)+m(c-a)R$.

Allein die [nach §. 286, (15)] unter einander stehenden $m+2$ Größen $f_m(a)$, R_1, R_2, ... R_m, $f_m(c)$ bilden, weil nicht nur der Coefficient $f_{m+1}(u)$, sondern auch die zu seiner Darstellung zu berechnenden Zwischensummen, während von $u=a$ auf $u=c$ stetig übergangen wird, immer dasselbe Zeichen behalten, folglich auch die Zusätze, welche $f_m(a)$ empfängt, durchaus einerlei Zeichen haben, eine fortwährend steigende oder fallende Reihe, sonach liegt das genannte arithmetische Mittel R, eben so wie jede der Größen $R_1, R_2, \ldots R_m$, zwischen $f_m(a)$ und $f_m(c)$. Denkt man sich ferner die Veränderliche u von a bis c stetig wachsend, so muß auch der von u abhängige Coefficient $f_m(u)$ von $f_m(a)$ nach $f_m(c)$ stetig übergehen, folglich jeden Zwischenwerth durchwandern, welchen er nemlich für einen zwischen a und c liegenden Werth von u, den wir kurz durch $a \ldots c$ andeuten können, anzunehmen vermag, und welcher Zwischenwerth sonach durch $f_m(a \ldots c)$ zu bezeichnen sein wird; mithin muß einer dieser Zwischenwerthe auch mit dem zwischen $f_m(a)$ und $f_m(c)$ gelegenen arithmetischen Mittel R zusammenfallen, nemlich $R=f_m(a \ldots c)$ sein. Dadurch wird

$$(37) \qquad f_{m-1}(c)=f_{m-1}(a)+m(c-a)f_m(a \ldots c)=0.$$

Auf ähnliche Weise findet man, wenn man von der transformirten Gleichung in $x-b$ auf jene in $x-c=x-b-[-(b-c)]$ übergeht,

$$(38) \qquad f_{m-1}(c)=f_{m-1}(b)-m(b-c)f_m(b \ldots c)=0.$$

Aus diesen zwei Gleichungen folgt sogleich

$$(39) \qquad c-a=-\frac{f_{m-1}(a)}{mf_m(a \ldots c)},$$

$$(40) \qquad b-c=\frac{f_{m-1}(b)}{mf_m(c \ldots b)},$$

und daraus die Differenz

$$(41) \qquad b-a=\frac{f_{m-1}(b)}{mf_m(c \ldots b)}-\frac{f_{m-1}(a)}{mf_m(a \ldots c)}.$$

III. Damit die Gleichungen (39) und (40) bestehen können, muß, weil m essentiell positiv ist, und der Annahme gemäß $c-a$ positiv sein soll, $f_m(a \ldots c)$ mit $-f_{m-1}(a)$ also, da $-f_{m-1}(a)$

und $f_m(a)$ gleiche Zeichen haben, auch $f_m(a\ldots c)$ mit $f_m(a)$ einerlei Zeichen besitzen; ferner muß, weil $b-c$ positiv ausfallen soll, auch $f_m(c\ldots b)$ mit $f_{m-1}(b)$ daher auch mit $f_m(b)$ gleiche Zeichen haben. Somit sind die Quotienten

$$-\frac{f_{m-1}(a)}{mf_m(a\ldots c)} \text{ und } -\frac{f_{m-1}(a)}{mf_m(a)},$$

so wie $$\frac{f_{m-1}(b)}{mf_m(c\ldots b)} \text{ und } \frac{f_{m-1}(b)}{mf_m(b)}$$

positiv, daher nicht nur ihren numerischen Werthen, sondern auch den Quotienten der numerischen Werthe ihrer Dividende und Divisoren gleich.

Da nun aber der Coefficient $f_m(u)$, wenn $f_{m+1}(u)$ immer positiv/negativ bleibt, fortwährend wächst/abnimmt, und seine zwei äußersten Werthe $f_m(a)$ und $f_m(b)$ entgegengesetzte Zeichen besitzen; so muß sein Zahlwerth in dem von a und b begrenzten Intervalle von jenem des Coefficienten $f_m(a)$ bis 0 abnehmen, dann wieder von 0 bis zu dem Zahlwerthe von $f_m(b)$ wachsen; folglich wird, weil $f_m(a\ldots c)$ und $f_m(a)$ einerlei Zeichen haben, also mit einander diesseits 0 liegen, der Zahlwerth von $f_m(a)$ größer als jener von $f_m(a\ldots c)$, somit auch der Quotient $-\frac{f_{m-1}(a)}{mf_m(a)}$ immer kleiner als $-\frac{f_{m-1}(a)}{mf_m(a\ldots c)}$ sein. Eben so ist, weil $f_m(c\ldots b)$ und $f_m(b)$ einerlei Zeichen haben, folglich mit einander jenseits 0 liegen, der Zahlwerth von $f_m(b)$ größer, als der von $f_m(c\ldots\ldots b)$, daher der Quotient $\frac{f_{m-1}(b)}{mf_m(b)}$ stets kleiner als $\frac{f_{m-1}(b)}{mf_m(c\ldots\ldots b)}$.

Demnach ist

$$(42)\qquad \frac{f_{m-1}(b)}{mf_m(c\ldots\ldots b)}-\frac{f_{m-1}(a)}{mf_m(a\ldots\ldots c)} > \frac{f_{m-1}(b)}{mf_m(b)}-\frac{f_{m-1}(a)}{mf_m(a)}$$

und wegen (41) auch

$$(43)\qquad \frac{f_{m-1}(b)}{mf_m(b)}-\frac{f_{m-1}(a)}{mf_m(a)} < b-a.$$

Wenn daher für einen zwischen a und b liegenden reellen Werth von u der Coefficient $f_{m-1}(u)$ verschwindet, oder die Gleichung $f_m(u)=0$ zwischen a und b eine reelle Wurzel hat; so wird jederzeit sowohl die Gleichung (41), als auch die Ungleichung (43) erfüllt. Fällt sonach bei einer Gleichung $f_{m-1}(u)=0$

$$\frac{f_{m-1}(b)}{mf_m(b)} - \frac{f_{m-1}(a)}{mf_m(a)} \text{ nicht } < b-a,$$

nemlich

$$(44) \qquad \frac{f_{m-1}(b)}{mf_m(b)} - \frac{f_{m-1}(a)}{mf_m(a)} \stackrel{=}{>} b-a$$

aus; so kann die Gleichung $f_{m-1}(u)=0$ in dem Intervalle von $u=a$ bis $u=b$ keine reelle Wurzel liegen haben, sondern die zwei in demselben angedeuteten Wurzeln sind sicher verloren gegangen, also durch imaginäre ersetzt.

Hieraus läßt sich jedoch keineswegs der umgekehrte Satz folgern, daß, wenn die Ungleichung (43) erfüllt wird, die zwei Wurzeln der Gleichung $f_{m-1}(u)=0$, welche in dem Intervalle von $u=a$ bis $u=b$ angedeutet werden, reell sind, weil sie, trotz der Erfüllung dieser Ungleichung, verloren gehen, oder imaginär sein können, sondern nur so viel ist gewiß, daß, wenn diese Ungleichung nicht erfüllt wird, keine reelle Wurzel in dem erwähnten Intervalle vorhanden ist, weil, wenn dies denkbar wäre, gerade diese Ungleichung gegen die Voraussetzung Statt haben müßte.

IV. Hat man demnach zwei Grenzen a und b angenommen und die Coefficienten $f_m(a)$, $f_{m-1}(a)$, $f_m(b)$, $f_{m-1}(b)$ berechnet, so wird man, um die Natur der beiden für die Gleichung $f_{m-1}(u)=0$ angedeuteten Wurzeln kennen zu lernen, $f_{m-1}(a)$ durch $mf_m(a)$, und $f_{m-1}(b)$ durch $mf_m(b)$ ohne Rücksicht auf die Vorzeichen dividiren. Fällt dabei einer dieser Quotienten oder wenigstens die Summe beider, eben so groß oder größer, kurz nicht kleiner als der Unterschied $b-a$ der Grenzen aus; so sind die fraglichen Wurzeln gewiß imaginär. Ist aber die Summe erwähnter Quotienten kleiner als die Differenz der Grenzen, so läßt dies erkennen, daß der Abstand dieser Grenzen noch zu groß ist, als daß man mittels des beschriebenen Verfahrens die Natur der Wurzeln ermitteln könnte, weßwegen man diesen Abstand durch Substitution einer zwischen a und b gelegenen Zahl $u=d$ in zwei Theile theilen und den Coefficienten $f_{m-1}(d)$ bestimmen wird.

Erhält dieser das entgegengesetzte Zeichen von dem der Coefficienten $f_{m-1}(a)$ und $f_{m-1}(b)$; so sind beide Wurzeln reell und in besondere Intervalle abgeschieden, eine von ihnen liegt zwischen a und d, die andere zwischen d und b. Ist aber das Zeichen von $f_{m-1}(d)$ mit jenem von $f_{m-1}(a)$ und $f_{m-1}(b)$ gleich, so muß man auch noch die zwei ihm vorangehenden Coefficienten $f_{m+1}(d)$ und $f_m(d)$ suchen und von den beiden neuen Intervallen, deren eines durch a und d, das andere durch d und b begrenzt wird, dasjenige auf vorerwähnte Weise noch weiter prüfen, bei welchem den in Rede stehenden drei Coefficienten wieder die Indices **0, 1, 2** angehören.

Hiebei ist jedoch zu erwägen, daß das bisher beschriebene Verfahren über die Natur der angedeuteten Wurzeln durchaus keinen Aufschluß zu ertheilen vermag, wenn die beiden gesuchten Wurzeln reell, aber gleich sind; weil zu Folge der in **III.** durchgeführten Untersuchung, in welcher c auch eine doppelte Wurzel sein kann, die Summe der bezeichneten zwei Quotienten, wie eng man auch die Grenzen ziehen möge, doch immer kleiner als der Abstand dieser Grenzen werden muß, woraus aber rücksichtlich der Beschaffenheit der fraglichen Wurzeln nichts gefolgert werden kann. Allein dieser besondere Fall läßt sich leicht erkennen, weil man (vermög §. 290, VI.) nur zu untersuchen braucht, ob die Functionen $f_{m-1}(u)$ und $f_m(u)$, oder mit Rücksicht auf §. 286, Gl. (20), ob die Functionen $f^{(m-1)}(u)$ und $f^{(m)}(u)$, nemlich (§. 286, II.) die $m-1$te und $m$te Ableitung von $f(u)$, einen gemeinschaftlichen Theiler besitzen, und ob dieser für einen zwischen a und b liegenden reellen Werth seiner Veränderlichen in Null übergeht. Treffen diese zwei Umstände nicht zusammen; so wird man bei hinreichend weit fortgesetzter Untersuchung entweder finden, daß die fraglichen zwei Wurzeln imaginär sind, oder man wird dieselben trennen, falls sie reell sind.

V. Ergäbe sich nun aus der eben erörterten Untersuchung, daß der Gleichung $f_{m-1}(u)=0$ in dem Intervalle von $u=a$ bis $u=b$ zwei reelle Wurzeln mangeln; so würde bei allen, auf die späteren Coefficienten der transformirten Gleichung in $x-u$ sich beziehenden Gleichungen

$f_{m-2}(u)=0$, $f_{m-3}(u)=0$, ... $f_2(u)=0$, $f_1(u)=0$, $f(u)=0$ dasselbe eintreten. Denn in der Gleichung $f_{m-1}(u)=0$ gehen jene zwei reellen Wurzeln nur deßwegen verloren, weil die Gleichung $f_m(u)=0$ zwischen denselben Grenzen a und b eine reelle Wurzel hat, für welche die Coefficienten $f_{m+1}(u)$ und $f_{m-1}(u)$ einerlei Zeichen annehmen, und bei der sonach die Reihe der Coefficienten der transformirten Gleichung (32) zwei Zeichenwechsel verliert. Dies hat zur Folge, daß auch der Gleichung $f(u)=0$ oder $f(x)=0$ zwischen den nemlichen Grenzen a und b zwei reelle Wurzeln fehlen.

In jedem der Indices, welche den Coefficienten

$$f_{m-1}(u),\ f_{m-2}(u),\ f_{m-3}(u),\ \ldots f_2(u),\ f_1(u),\ f(u)$$

entsprechen, muß demnach ein Theil $=2$ sich befinden, der auf dieses Paar imaginäre Wurzeln sich bezieht. **Man wird folglich bei der ferneren Untersuchung diesen Theil nicht weiter berücksichtigen, und daher alle Indices, welche dem letzten Index 1 zur Rechten nachfolgen, um 2 vermindern, und nur auf die Reste, von denen der erste Null werden muß, das beschriebene Verfahren neuerdings anwenden.**

Wir wollen diese Untersuchungen durch folgendes **Beispiel** erläutern. In §. 301. Beisp. 1. zeigt sich, daß die Gleichung

$$x^5-3x^4-24x^3+95x^2-46x-101=0$$

zwischen 1 und 10 drei reelle Wurzeln haben könne, von denen eine gewiß reell ist. Um nun die zwei andern zu untersuchen, besehen wir die Coefficienten der transformirten Gleichung in $x-1$ und $x-10$

	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1	f
(1)	$+1$	$+2$	-26	$+15$	$+65$	-78
	0	0	1	2	2	3
(10)	$+1$	$+47$	$+856$	$+7575$	$+32654$	$+54939$.

Der letzte Index 1 hat vor sich 0, hinter sich 2, mithin tritt hier die erforderliche Folge 0, 1, 2 von Indices ein. Deßwegen bildet man von den Zahlwerthen der oben angegebenen Coefficienten die Summe der Quotienten $\frac{15}{3.26}+\frac{7575}{3.856}$ oder $\frac{15}{78}+\frac{7575}{2568}$ und untersucht, ob sie das Intervall $10-1=9$ der Grenzen übersteigt. Da aber dieses nicht Statt findet, so hat man zunächst zu erforschen, ob $f_2(u)$ und $f_3(u)$ einen gemeinschaftlichen Theiler besitzen; wozu man folgende Functionen (nach §. 286, II.) sucht.

$$f(u) = u^5 - 3u^4 - 24u^3 + 95u^2 - 46u - 101$$

$$f_1(u) = f'(u) = 5u^4 - 12u^3 - 72u^2 + 190u - 46$$

$$f_2(u) = \frac{1}{1.2} f''(u) = 10u^3 - 18u^2 - 72u + 95$$

$$f_3(u) = \frac{1}{1.2.3} f'''(u) = 10u^2 - 12u - 24.$$

Da nun $f_2(u)$ und $f_3(u)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so sind obige Grenzen noch weiter zusammen zu ziehen, indem man für u eine zwischen 1 und 10 liegende einziffrige Zahl, z. B. 2, setzt. Weil sich jedoch zeigt, daß zwischen 1 und 2 keine reelle Wurzel liegt, so wird man auch noch $u=3$ annehmen, wobei man erkennt, daß zwischen 3 und 10 eine reelle Wurzel liege, und daß nur noch das Intervall von 2 bis 3 zu untersuchen sei. Man erhält nemlich:

	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1	f
(1)	+1	+ 2	− 26	+15	+65	−78
	0	0	0	1	0	0
(2)	+1	+ 7	− 8	−41	+30	−21
	0	0	1	0	1	2
(3)	+1	+12	+ 30	−13	−43	−32
	0	0	0	1	1	1
(10)	+1	+47	+856	+7575	+32654	+54939.

Wendet man demnach auf das von 2 bis 3 sich erstreckende Intervall die obige Regel an, so findet man $\frac{21}{30} + \frac{32}{43} = 0{,}7 + 0{,}7$ $= 1{,}4$, folglich größer als $3 - 2$ oder 1; und sonach sind die angedeuteten 2 Wurzeln imaginär.

b. Berechnung der reellen Wurzeln.

α. Berechnung der rationalen Wurzeln.

§. 304.

Besitzt eine Gleichung blos ganze rationale Coefficienten, so muß jede ihrer Wurzeln ein rationa-

ler Bruch sein, dessen Nenner ein Theiler des ersten Coefficienten ist.

Denn sind in der Gleichung

$$A_0x^n+A\ x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\cdots+A_{n-1}x+A_n=0$$

alle Coefficienten ganze Zahlen, und ist eine ihrer Wurzeln der auf seine kleinste Benennung reducirte Bruch $\frac{p}{q}$, folglich

$$A_0\frac{p^n}{q^n}+A_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}+A_2\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}}+\cdots+A_{n-1}\frac{p}{q}+A_n=0\ ;$$

so ergibt sich, wenn mit q^{n-1} multiplicirt wird,

$$A_0\frac{p^n}{q}+A_1p^{n-1}+A_2p^{n-2}q+\ldots+A_{n-1}pq^{n-2}+A_nq^{n-1}=0.$$

Von den Gliedern des Polynoms dieser Gleichung sind aber mit Ausnahme des ersten, alle entschieden ganze Zahlen; folglich kann sie nicht bestehen, wofern nicht auch das erste eine ganze Zahl, also A_0 durch q theilbar ist.

Ist daher insbesondere der erste Coefficient 1, so hat die Gleichung nur ganzzahlige Wurzeln.

§. 305.

Da jede Wurzel einer Gleichung nicht blos ihr Polynom, sondern auch das Verhältniß desselben zur höchsten Potenz der Veränderlichen auf Null bringt, und da sowohl die Summe als auch die Differenz eines eigentlichen Bruches und einer ganzen Zahl, durch eine ganze Zahl getheilt, immer wieder einen eigentlichen Bruch im Quotienten liefert; so lassen sich die ganzzahligen rationalen Wurzeln einer Gleichung von lauter ganzen rationalen Coefficienten nach folgender Regel bestimmen. Man suche (nach §. 69, *e*) sämmtliche Theiler des letzten Gliedes der Gleichung, nehme sie, etwa von dem kleinsten angefangen, sowohl positiv als negativ zu Werthen der Unbekannten an; berechne (nach §. 284, II.) den Werth des Verhältnisses des Polynoms der Gleichung zur höchsten Potenz der Unbekannten; breche jedoch bei allen jenen, wo eine Division einen Rest übrig läßt, die weitere Rechnung sogleich ab, und erkläre sie als Nichtwurzeln der Gleichung, da nur jene, welche das erwähnte Verhältniß auf Null bringen, Wurzeln der Gleichung sein können. Den Theiler 1 prüft man jedoch einfacher, indem man (nach §. 284, I.) den Werth des Polynoms der Gleichung für $x=\pm 1$ sucht.

Um diese Operation etwas abzukürzen, kann man theils die Grenzen der reellen Wurzeln (nach §. 301) bestimmen, theils die Werthe des Polynoms der Gleichung für $x=\pm 1$, ± 2, ± 3, oder, was dasselbe ist, das letzte Glied derjenigen transformirten Gleichung, deren Wurzeln nur etwa um 1, 2, 3 $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{größer}}{\text{kleiner}}$ als jene der gegebenen sind, sammt seinen Theilern suchen, und diese sofort um 1, 2, 3 $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{vermindern}}{\text{vermehren}}$, weil man dadurch auf jene Theiler des letzten Gliedes der gegebenen Gleichung geleitet wird, die man einer weitern Prüfung zu unterziehen hat.

Findet man auf diesem Wege eine Wurzel der vorgelegten Gleichung, so besitzt man (vermög §. 285, II.) auch sogleich an den allmälig heraustretenden Quotienten in umgekehrter Folge die mit entgegengesetzten Zeichen behafteten Coefficienten der (nach §. 290, VII.) von dieser Wurzel befreiten Gleichung; und man hat daher nur noch diese Gleichung weiter zu untersuchen.

Z. B. Verlangt man die ganzzahligen Wurzeln der Gleichung

$$3x^4-16x^3-33x^2+166x+120=0,$$

so findet man, für $x=+1$ und -1, das Polynom $=240$ und -60; hievon sind die Theiler 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, ... welche, um 1 vergrößert und vermindert, die Zahlen 2, 3, 4, 5, ... geben, welche zugleich Theiler von 120 sind. Untersucht man diese, so hat man folgende leicht verständliche Rechnung.

$x=+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$	-2	-3
+120	+120	+120	+30	+ 6	+ 6	+ 6
(+ 60)	(+ 40)	(+ 30)	(+ 6)	(+ 1)	(− 3)	(− 2)
+166	+166	+166	+49	+11	+11	+11
+226	+206	+196	+55	+12	+ 8	+ 9
(+113)	$+68\frac{2}{3}$	(+ 49)	(+11)	(+ 2)	(− 4)	(− 3)
− 33	N. W.	− 33	+ 4	+ 3	+ 3	+ 3
+ 80		+ 16	+15	+ 5	− 1	0
(+ 40)		(+ 4)	(+ 3)	N. W.	N. W.	W.
− 16		− 16	− 3			
+ 24		− 12	0			
(+ 12)		(− 3)	W.			
+ 3		+ 3				
+ 15		0				
Nichtw.		W.				

Sobald man nemlich gefunden hat, daß $+4$ eine Wurzel der gegebenen Gleichung ist, weiß man (nach §. 290, VII.) auch, daß die Gleichung, welche die übrigen Wurzeln enthält,

$$3x^3-4x^2-49x-30=0$$

ist, wofür man aber bei gegenwärtiger Rechnung auch die mit entgegengesetzten Zeichen begabte

$$-3x^3+4x^2+49x+30=0$$

nehmen kann. Da nun 30 nur die noch nicht untersuchten Theiler 5, 6, 15, 30 hat, so wird man die Zahl $+5$ versuchen, welche sich gleichfalls als Wurzel zeigt, und die herabgesetzte und in den Zeichen geänderte Gleichung

$$3x^2+11x+6=0$$

liefert. Man untersucht nunmehr, weil diese Gleichung keine positiven Wurzeln hat, die negativen Theiler -2 und -3, und findet, daß -3 eine Wurzel ist und endlich die Gleichung

$$-3x-2=0$$

sich ergibt, aus welcher $x=-\frac{2}{3}$ folgt.

Die Wurzeln der gegebenen Gleichung sind daher

$$4,\ 5,\ -3,\ -\frac{2}{3}.$$

§. 306.

Sollten demnach sämmtliche rationale Wurzeln einer Gleichung bestimmt werden, so wird man nöthigen Falls diese Gleichung zuerst durch die in §. 287 und 290 angegebenen Mittel von irrationalen und gebrochenen Coefficienten befreien und den ersten Coefficienten auf $+1$ bringen, sofort von dieser Gleichung alle ganzzahligen Wurzeln berechnen und hieraus jene der gegebenen herleiten.

β. Berechnung der irrationalen Wurzeln.

§. 307.

Hat man jede der reellen Wurzeln einer Gleichung in eigene Grenzen eingeengt, so kann man die Berechnung derselben mit jeder gewünschten Schärfe auf folgende, von Newton angegebene und von Fourier vervollkommnete, Weise ausführen.

Sei a die untere und b die obere Grenze der zu suchenden reellen Wurzel c, und seien dieselben einander bereits so sehr genähert, daß den vier letzten Coefficienten $f_3(u)$, $f_2(u)$, $f_1(u)$, $f(u)$ die Indices 0, 0, 0, 1 zukommen, folglich jeder der drei ersteren in dem erwähnten Intervalle sein Zeichen beibehält, daher fortwährend $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{wächst}}{\text{abnimmt}}$, wenn sein Vorgänger stets $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positiv}}{\text{negativ}}$ ist. Bei diesen Voraussetzungen ist nach den Gleichungen (39) und (40) (in §. 303), wenn man dort $m=1$ setzt,

$$(45) \qquad c=a-\frac{f(a)}{f_1(a\ldots c)} \text{ oder } c=b-\frac{f(b)}{f_1(b\ldots c)}.$$

Bezeichnet man nun mit g diejenige der Grenzen a und b, an welcher der vorletzte Coefficient $f_1(u)$ den größten Zahlwerth erhält; so wird, je nachdem er mit dem ihm vorangehenden $f_2(u)$ verschiedene oder einerlei Zeichen besitzt, $g=a$ oder $g=b$ sein und $f(g)$ dasselbe Zeichen wie $f_2(g)$ haben. Denn bleibt der Coefficient $f_2(u)$ in dem ganzen Intervalle von $u=a$ bis $u=b$ $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positiv}}{\text{negativ}}$, $f_1(u)$ dagegen $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{negativ}}{\text{positiv}}$, so nimmt der letztere ununterbrochen $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{zu}}{\text{ab}}$, und sein Zahlwerth ist für $u=a$ am größten; dann ist aber $f(a)$, weil er mit $f(b)$ sowohl als auch mit $f_1(a)$ entgegengesetzte Zeichen haben muß, mit $f_2(a)$ gleich bezeichnet. Sind hingegen beide Coefficienten $f_2(u)$ und $f_1(u)$ mit einander fortwährend $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positiv}}{\text{negativ}}$; so nimmt der letztere ununterbrochen $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{zu}}{\text{ab}}$, und sein Zahlwerth wird für $u=b$ am größten; dann ist jedoch $f(b)$, weil er mit $f(a)$ entgegengesetzte, mit $f_1(b)$ aber einerlei Zeichen haben muß, mit $f_2(b)$ gleich bezeichnet. Heißt man demnach diese Grenze g, bei welcher der vorletzte Coefficient den größten Zahlwerth besitzt und der letzte Coefficient mit dem drittletzten einerlei Zeichen hat, die äußere; so ist, wofern man nur die Zahlwerthe vergleicht,

$$f_1(a\ldots c)<f_1(g), \qquad f_1(b\ldots c)<f_1(g) \text{ und}$$

$$\frac{-f(a)}{f_1(a\ldots c)}>\frac{-f(a)}{f_1(g)}, \quad \frac{f(b)}{f_1(b\ldots c)}>\frac{f(b)}{f_1(g)},$$

weil diese Quotienten durchaus positiv sind.

Aus vorstehenden Betrachtungen folgt, wenn man

$$(46) \qquad a'=a-\frac{f(a)}{f_1(g)}, \qquad b'=b-\frac{f(b)}{f_1(g)}$$

setzt,

(47) $a < a' < c < b' < b$;

und daher sind die Zahlen a' und b', welche sich mittels der letzten zwei Gleichungen berechnen lassen, engere Grenzen oder mehr genäherte Werthe der gesuchten Wurzel c.

§. 308.

Um den Grad der Annäherung der Grenzen a' und b' an die zu bestimmende Wurzel c schätzen zu können, sei

(48) $b-a=\delta$ und $b'-a'=\delta'$;

dann gibt die Subtraction der Gleichungen (46)

$$\delta'=\delta-\frac{f(b)-f(a)}{f_1(g)}.$$

Sehen wir auf die (nach §. 286, (15) auszuführende) Berechnung der drei Schlußcoefficienten zurück, und stellen wir ähnliche Betrachtungen wie in §. 303, II. an, so erhalten wir, wofern wir zuerst von $u=b$ auf $u=a$ zurückgehen, das Schema:

(49)
$$\begin{array}{lll} f_2(b), & f_1(b), & f(b) \\ \cdots\cdot & -\delta f_2(a\ldots b), & -\delta f_1(b)+\delta^2 f_2(a\ldots b) \\ f_2(a\ldots b), & f_1(b)-\delta f_2(a\ldots b), & f(a) \end{array}$$

und die Gleichung

(50) $f(a)=f(b)-\delta f_1(b)+\delta^2 f_2(a\ldots b)$,

während wir, wenn wir von $u=a$ auf $u=b$ vorschreiten, das Schema

(51)
$$\begin{array}{lll} f_2(a), & f_1(a), & f(a) \\ \cdots\cdot & \delta f_2(a\ldots b), & \delta f_1(a)+\delta^2 f_2(a\ldots b), \\ f_2(a\ldots b), & f_1(a)+\delta f_2(a\ldots b), & f(b) \end{array}$$

und die Gleichung

(52) $f(b)=f(a)+\delta f_1(a)+\delta^2 f_2(a\ldots b)$

finden. Substituiren wir diese Werthe, so wird

im ersten Falle $\delta'=\delta-\dfrac{f_1(b)}{f_1(g)}\delta+\dfrac{f_2(a\ldots b)}{f_1(g)}\delta^2$,

und im zweiten $\delta'=\delta-\dfrac{f_1(a)}{f_1(g)}\delta-\dfrac{f_2(a\ldots b)}{f_1(g)}\delta^2$.

Nimmt man nun $\begin{matrix} g=b \\ g=a \end{matrix}$, so haben $f_1(g)$ und $f_2(a\ldots b)$ $\begin{matrix}\text{einerlei}\\ \text{verschiedene}\end{matrix}$ Zeichen, daher ist

$$\delta'=\pm\frac{f_2(a\ldots b)}{f_1(g)}\delta^2.$$

Bezeichnet noch k die innere von den Grenzen a und b, nemlich jene, bei welcher der Zahlwerth des vorletzten Coefficienten am kleinsten ist, oder der letzte und drittletzte Coefficient entgegengesetzte Zeichen haben; so ist $f_1(k) < f_1(g)$. Bedeutet endlich G diejenige von denselben Grenzen a und b, bei welcher der drittletzte Coefficient $f_2(u)$ den größten Zahlwerth besitzt, nemlich

$$f_2(G) > f_2(a \ldots b)$$

ist, so hat man, wenn man blos auf die Zahlwerthe der verglichenen Größen sieht,

$$\pm \frac{f_2(a \ldots b)}{f_1(g)} < \frac{f_2(G)}{f_1(k)},$$

daher auch immer

(53) $$\delta' < \frac{f_2(G)}{f_1(k)} \delta^2.$$

Sei nun 10^{-p} oder $\frac{1}{10^p}$ die, leicht zu bestimmende, kleinste Decimal-Einheit, welche nicht kleiner als der Quotient $\frac{f_2(G)}{f_1(k)}$ ist, und sei 10^{-q} oder $\frac{1}{10^q}$ diejenige kleinste Decimal-Einheit, welche nicht kleiner als die Differenz $\delta = b - a$ ist; so ist

$$\frac{f_2(G)}{f_1(k)} \overline{\overline{<}} \frac{1}{10^p}, \quad \delta \overline{\overline{<}} \frac{1}{10^q},$$

daher gewiß

(54) $$\delta' < \frac{1}{10^{p+2q}}.$$

Demnach wird jede der Grenzen a' und b' von der zwischen ihnen liegenden Wurzel c um weniger als δ', folglich auch um weniger als eine Decimal-Einheit der $p+2q$ ten Ordnung verschieden sein, oder die Wurzel c wird mit jeder der Grenzen a' und b' gewiß bis zur $p+2q$ ten Decimalstelle übereinkommen.

§. 309.

I. Am zweckmäßigsten ist es, aus der äußeren Grenze g, nach Anleitung der Gleichungen (46) einen, der zu bestimmenden Wurzel c näher liegenden, Werth

(55) $$\Gamma = g - \frac{f(g)}{f_1(g)}$$

zu berechnen. Um aber hiebei genau angeben zu können, wie weit man sich der Wurzel genähert habe, werde der Zahlwerth von $f(g)$ durch jenen von $f_1(g)$ dergestalt getheilt, daß man mit der $p+2q$ ten Decimalstelle die Theilung abbricht und diese Stelle nicht wie gewöhnlich mit der nächst kleineren, sondern mit der nächst größeren Ziffer besetzt, oder, was dasselbe ist, die nach der gewöhnlichen Division erhaltene Endziffer um eine Einheit erhöht.

Stellt nun $\left(\frac{f(g)}{f_1(g)}\right)$ den auf diese Weise abgeänderten Werth des vollständigen Quotienten $\frac{f(g)}{f_1(g)}$ vor, so wird man, wenn man ihn statt dieses letzteren verwendet, einen angenäherten Werth

$$(56) \qquad \gamma = g - \left(\frac{f(g)}{f_1(g)}\right)$$

finden, welcher von der zu bestimmenden Wurzel c gewiß um weniger als eine Decimal-Einheit der $p+2q$ ten Ordnung differirt, jedoch noch untersucht werden muß, ob er größer oder kleiner, oder vielleicht gerade so groß als diese Wurzel ist, welch letzter Fall aber nur bei rationalen Wurzeln, deren Bestimmung sich auch nach derselben Methode ausführen läßt, vorkommen kann. Denn ist g die $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{untere}}{\text{obere}}$ Grenze, mithin $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{kleiner}}{\text{größer}}$ als die gesuchte Wurzel c, so hat man sie, um sie dieser gleich zu machen, noch um etwas zu $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{vermehren}}{\text{vermindern}}$. $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Addirt}}{\text{Subtrahirt}}$ man nun den vollkommen genauen Zahlwerth des Quotienten $\frac{f(g)}{f_1(g)}$, so erhält man eine Größe Γ, welche nur noch um eine Zahl Θ, die weniger als eine Decimal-Einheit der $p+2q$ ten Ordnung beträgt, $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{kleiner}}{\text{größer}}$ als die Wurzel c ist; woraus einleuchtet, daß man, um genau die Wurzel c zu erhalten, einen noch um diese Zahl Θ größeren Zahlwerth hätte $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{addiren}}{\text{subtrahiren}}$ sollen. $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Addirt}}{\text{Subtrahirt}}$ man demnach $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{zu}}{\text{von}}$ g den Zahlwerth des Quotienten $\left(\frac{f(g)}{f_1(g)}\right)$, welcher jenen vollständigen wirklich um eine Zahl η übersteigt, die kleiner als eine solche Decimal-Einheit ist, so findet man einen Werth γ, welcher um diese Zahl η $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{größer}}{\text{kleiner}}$ als Γ ist, und der folglich von der Wurzel c selbst blos noch um den Zahlwerth des Unterschiedes $\Theta-\eta$ jener zwei die genannte Decimal-Einheit nicht erreichenden Zahlen Θ und η, mithin gewiß um weniger als um eine solche Decimal-Einheit differirt, weil man im ersten Falle $\frac{\text{zu}}{\text{von}}$ g um die Zahl Θ mehr $\frac{\text{addiren}}{\text{subtrahiren}}$ sollte, aber im andern Falle um die Zahl η mehr $\frac{\text{addirt}}{\text{subtrahirt}}$ hat. Da man jedoch hiebei entweder eine zu große oder zu kleine oder wohl auch gerade die rechte Zahl $\frac{\text{zugezählt}}{\text{abgezogen}}$ haben kann; so ist es möglich, daß der Näherungswerth γ $\frac{\text{größer}}{\text{kleiner}}$, $\frac{\text{kleiner}}{\text{größer}}$ oder gerade so groß als die gesuchte Wurzel ist, was daher noch weiters zu untersuchen kommt.

Oder deutet man, um diesen Beweis bildlich darzustellen, mit $\left(\frac{f(g)}{f_1(g)}\right)$ den auf die vorbeschriebene Weise abgeänderten Werth des vollständig ausgerechneten Quotienten $\frac{f(g)}{f_1(g)}$ an; so wird man, wenn man ihn statt dieses Quotienten verwendet, und auf diese Art den Werth

$$(56) \qquad \gamma = g - \left(\frac{f(g)}{f_1(g)}\right)$$

berechnet, von dem früher (55) erwähnten Näherungswerthe Γ aus, in derselben Richtung, in welcher man, bei dem Uebergange von der Grenze g zu diesem Näherungswerthe, der Wurzel c näher rückt, mit dem modificirten Näherungswerthe γ über den ersteren Γ hinaus um eine Strecke, die weniger als eine Decimal-Einheit der $p+2q$ ten Ordnung beträgt, gegen die Wurzel c vorschreiten. Weil aber dem früher Gefundenen gemäß der Abstand der Stelle Γ, von der man ausgeht, von dem zu erreichenden Ziele c, eben so wie die Länge des zu machenden Schrittes kleiner als eine solche Decimal-Einheit ist, und weil man nach gemachtem Schritte immer um den Unterschied der Längen jenes Abstandes und dieses Schrittes (welcher Unterschied gleichfalls kleiner als eine solche Decimal-Einheit ausfällt), von dem Ziele abstehen muß; so wird man mit dem abgeänderten Näherungswerthe γ entweder noch vor c stehen bleiben, oder gerade auf c treten, oder endlich über c hinüberschreiten, je nachdem der gemachte Schritt kürzer, gerad so lang, oder länger als der früher vorhandene Abstand vom Ziele ist, und zugleich muß man immer um weniger als eine Decimal-Einheit der $p+2q$ ten Ordnung von dem Ziele abstehen, wenn man es verfehlen sollte.

Fällt, um den Beweis auch noch in algebraischen Zeichen zu führen, die äußere Grenze g mit der $\begin{matrix}\text{unteren } a\\ \text{oberen } b\end{matrix}$ zusammen, so daß sie $\begin{matrix}\text{kleiner}\\ \text{größer}\end{matrix}$ als die zu suchende Wurzel c ist; so ist wegen (55) auch der

Näherungswerth $$\Gamma \lessgtr c,$$

daher $$\Gamma = c \mp \Theta$$

wofern dem Früheren gemäß $\Theta < \frac{1}{10^{p+2q}}$ und positiv ist. Ferner

hat man $\left(\frac{\mp f(g)}{f_1(g)}\right) - \frac{\mp f(g)}{f_1(g)} + \eta$, oder $\frac{f(g)}{f_1(g)} - \left(\frac{f(g)}{f_1(g)}\right) = \pm \eta$

(wo wieder $\eta < \frac{1}{10^{p+2q}}$ und positiv ist), weil die ersteren Quotienten positiv sind. Allein die Subtraction der Gleichung (55)

von (56) gibt $\gamma - \Gamma = \frac{f(g)}{f_1(g)} - \left(\frac{f(g)}{f_1(g)}\right)$,

mithin erfolgt $$\gamma - \Gamma = \pm \eta$$
und hieraus, mit Rücksicht auf die erste Gleichung,
$$\gamma = c \mp (\Theta - \eta).$$

Da nun Θ und η positiv und kleiner als $\frac{1}{10^{p+2q}}$ ist, so ist immer auch ihre Differenz kleiner als $\frac{1}{10^{p+2q}}$, jedoch negativ, positiv oder Null, je nachdem Θ kleiner, größer oder eben so groß als η ist, und demnach ist auch der Näherungswerth γ $\begin{matrix}\text{größer}\\ \text{kleiner}\end{matrix}$, $\begin{matrix}\text{kleiner}\\ \text{größer}\end{matrix}$ oder eben so groß als die gesuchte Wurzel c.

II. Man wird demnach, um sich der zu suchenden Wurzel c zu nähern, aus der äußern Grenze g, welche bis zur q ten Decimalstelle mit der Wurzel übereinkommt, einen bis zur $p+2q$ ten Decimalstelle, mithin um $p+q$ Decimalziffern weiter sich erstreckenden Näherungswerth γ der Wurzel c nach der Gleichung

$$(56) \qquad \gamma = g - \left(\frac{f(g)}{f_1(g)}\right)$$

berechnen, in welcher die Einschließung des Quotienten $\frac{f(g)}{f_1(g)}$ andeuten soll, daß man die Theilung bei der $p+2q$ ten Decimalziffer einstelle und diese Ziffer um 1 vergrößere. Da es jedoch hiebei unbestimmt bleibt, ob dieser Näherungswerth größer oder kleiner als die gesuchte Wurzel ist; so wird man auf die gewöhnliche Weise den Werth $f(\gamma)$ berechnen, und ihm, wenn er sich $\substack{\text{kleiner}\\ \text{größer}}$ als die Wurzel zeigt, eine Decimal-Einheit der letzten Ordnung $\substack{\text{addiren}\\ \text{subtrahiren}}$, um zwei Grenzen zu finden, zwischen denen die Wurzel liegt.

III. Beginnt man die Rechnung mit den zuletzt berechneten Grenzen vom Neuen, so wird man, da der Werth von p bei Verengerung der Grenzen wenigstens nie kleiner als vorher ausfällt, von den bis zur $p+2q$ten Decimale reichenden Näherungswerthen bis zur $p+2(p+2q)=3p+4q$ ten Stelle, daher um $2(p+q)$ weitere Decimalziffern sich nähern. Eine dritte Annäherung gibt bis zur $7p+8q$ ten Stelle, also um $4(p+q)$ mehr, richtige Ziffern, u. s. w. Hieraus wird zugleich ersichtlich, daß eine wirkliche Annäherung nur da erst beginnen kann, wo die Summe $p+q \overline{\gtrdot} 1$ ist.

IV. Um das hier beschriebene Verfahren zu erläutern, wenden wir es auf folgendes Beispiel an. Es sei

$$f(x)=x^3-4x^2-7x+4=0$$

die aufzulösende Gleichung. Da die nach §. 301 leicht vorzunehmende Untersuchung zeigt, daß sie 3 reelle Wurzeln hat, von denen die erste zwischen —10 und —1, die zweite zwischen 0 und 1, die dritte endlich zwischen 1 und 10 liegt; so wollen wir die mittlere bestimmen, und mit der Bildung der hiezu erforderlichen Reihe von Coefficienten und Indices beginnen.

	$f_3(u)$	$f_2(u)$	$f_1(u)$	$f(u)$
(0) Coefficienten:	+1	— 1	— 7	+ 4
	+1	— 3	— 10	— 6
	+1	— 2	— 12	
Indices:	0	0	0	1
(1) Coefficienten:	+1	— 1	— 12	— 6

die Indices sind hier 0, 0, 0, 1; daher können wir die Näherung versuchen. Die untere Grenze ist $a=0$, die obere $b=1$, die äußere $g=b=1$, die innere $k=a=0$, daher $f_1(k)=7$. Ferner ist der größte Zahlwerth des drittletzten Coefficienten $f_2(G)=4$, folglich $\frac{f_2(G)}{f_1(k)}=\frac{4}{7}=0{,}5\ldots$, wozu die nächst höhere Decimal-Einheit 1 gehört. Setzt man daher $1=\frac{1}{10^p}$, so wird $p=0$. Außerdem ist

$\delta=b-a=1-0=1$, folglich $1=\frac{1}{10^q}$ gesetzt, gibt $q=0$, und sofort $p+q=0$; woraus erhellet, daß die Grenzen noch nicht genug zusammengezogen sind.

Nehmen wir daher einen Zwischenwerth $u=0{,}5$ an, so ist folgende Rechnung auszuführen.

	$f_3(u)$	$f_2(u)$	$f_1(u)$	$f(u)$
(0)	+1	— 4	— 7	+4
		+ 0,5	— 1,75	—4,375
	+1	— 3,5	— 8,75	—0,375
		+ 0,5	— 1,50	
	+1	— 3,0	—10,25	
		+ 0,5		
	0	0	0	1
(0,5)	+1	— 2,5	—10,25	—0,375.

Obgleich hieraus erkannt wird, daß die Wurzel zwischen den engeren Grenzen 0 und 0,5 liegt, so würde man doch auch hier noch $p=0$ und $q=0$, also $p+q<1$ finden. Man kann daher, weil $f(0{,}5)=-0{,}375$ weit weniger als $f(0)=4$ von Null differirt, $u=0{,}4$ versuchen, und die Coefficienten gleich als jene für $u=0{,}4=0{,}5-0{,}1$ berechnen.

	$f_3(u)$	$f_2(u)$	$f_1(u)$	$f(u)$
(0,5)	+1	— 2,5	—10,25	—0,375
— 0,1	+1	— 2,6	— 9,99	+0,624
	+1	— 2,7	— 9,72	
(0,4)	+1	— 2,8	— 9,72	+0,624.

Die Wurzel liegt demnach zwischen 0,4 und 0,5. Nun ist hier

$a=0{,}4$; $b=0{,}5$; $k=0{,}4$; $\frac{f_2(G)}{f_1(k)}=\frac{2{,}8}{9{,}72}=0{,}2\ldots<1$, folglich

$p=0$; ferner $\delta=0{,}5-0{,}4=0{,}1=\frac{1}{10}$, mithin $q=1$, $p+q=1$.

Von diesen Grenzen aus kann man sich also der Wurzel wirklich nähern, und zwar allmälig um 1, 2, 4, 8,.... Decimalstellen. Nun ist $g=0{,}5$, $f(g)=-0{,}375$, $f_1(g)=-10{,}25$, folglich bis zur

$p+2q=0+2=2$ten Decimalstelle der Quotient $\left(\frac{f(g)}{f_1(g)}\right)$ $=-0{,}375:-10{,}25=0{,}04$, wenn man sogleich die letzte Ziffer um 1 erhöht. Daraus folgt als der erste Näherungswerth $\gamma=0{,}5-0{,}04=0{,}46$, welcher wenigstens bis 0,01 genau ist.

Weil man aber nicht weiß, ob er größer oder kleiner als die Wurzel ist, so wird man, um auch noch die fernere Annäherung ausführen zu können, die Coefficienten für $u=0{,}46$ berechnen.

	$f_3(u)$	$f_2(u)$	$f_1(u)$	$f(u)$
(0,4)	+1	−2,8	−9,72	+0,624
0,06		+0,06	−0,1644	−0,593064
	+1	−2,74	−9,8844	+0,030936
		+0,06	−0,1608	
	+1	−2,68	−10,0452	
		+0,06		
(0,46)	+1	−2,62	−10,0452	+0,030936.

Da in der gegenwärtigen Aufgabe für alle Werthe von u, welche kleiner als die Wurzel sind, der letzte Coefficient positiv ausfällt, so ist der genäherte Werth 0,46 kleiner als die Wurzel. Wir nehmen daher als untere Grenze $a'=0{,}46$ und als obere $b'=0{,}47$, folglich ist $\delta'=b'-a'=0{,}01$ und $q=2$. Weil jedoch 0,46 die innere Grenze k' ist, so müssen noch die Coefficienten für die äußere Grenze $g'=0{,}47$ durch folgende Rechnung bestimmt werden.

(0,46)	+1	−2,62	−10,0452	+0,030936
0,01	+1	−2,61	−10,0713	−0,069777
	+1	−2,60	−10,0973	
(0,47)	+1	−2,59	−10,0973	−0,069777.

Hieraus folgt $\frac{f_2(G')}{f_1(k')}=\frac{2{,}62}{10{,}0452}=0{,}2\ldots<1$, also wieder $p=0$ wie früher. Ferner ist, bis zur $p+2q=0+4=4$ten Decimalziffer gerechnet und die letzte um 1 erhöht,

$$\left(\frac{f(g')}{f_1(g')}\right)=-0{,}069777:-10{,}0973=0{,}0069+0{,}0001=0{,}0070;$$
91932

folglich erscheint als zweiter Näherungswerth $\gamma'=0{,}47-0{,}0070=0{,}4630$.

Um zu erfahren, ob er größer oder kleiner sei als die Wurzel, und um zu einer dritten Näherung zu übergehen, suchen wir die

Coefficienten für $u=0,4630$, und da sich hiebei zeigt, daß dieser Näherungswerth zu klein und die innere Grenze k'' ist, auch sogleich jene für die äußere Grenze $g''=0,4631$.

(0,46)	$+1$	$-2,62$	$-10,0452$	$+0,030936$
0,0030		$+0,0030$	$-0,00785100$	$-0,030159153000$
	$+1$	$-2,6170$	$-10,05305100$	$+0,000776847000$
		$+0,0030$	$-0,00784200$	
	$+1$	$-2,6140$	$-10,06089300$	
		$+0,0030$		
(0,4630)	$+1$	$-2,6110$	$-10,06089300$	$+0,000776847000$
0,0001		$+0,0001$	$-0,00026109$	$-0,001006115409$
	$+1$	$-2,6109$	$-10,06115409$	$-0,000229268409$
		$+0,0001$	$-0,00026108$	
	$+1$	$-2,6108$	$-10,06141517$	
		$+0,0001$		
(0,4631)	$+1$	$-2,6107$	$-10,06141517$	$-0,000229268409.$

Hieraus folgt $\dfrac{f_2(G'')}{f_1(k'')}=\dfrac{2,611}{10,060}=0,2\ldots<1$, mithin $p=0$, ferner $a''=0,4630$, $b''=0,4631$, $\delta''=0,0001$, $q=4$, $p+2q=8$; daher, bis zur 8ten Decimalstelle gerechnet,

$\left(\dfrac{f(g'')}{f_1(g'')}\right)=\dfrac{0,000229268409}{10,06141517}=0,00002279$; und sofort der dritte Näherungswerth $\gamma''=0,4631-0,00002279=0,46307721$, welcher von der Wurzel höchstens in der 8ten Decimalstelle um eine Einheit differiren kann.

Wir brechen hier die Rechnung ab, da ihr fernerer Gang aus dem Vorstehenden zur Genüge einleuchten dürfte, und bemerken nur noch, daß die andere positive Wurzel 5,19852321... und die negative $-1,66160042\ldots$ ist.

Zur Übung möge der Lernende folgende Beispiele rechnen.

$x^3-7x+7=0$

$x=-3,04891734;\ +1,35689587;\ 1,69202147.$

$x^3-2x-5=0$

$x=2,0945514815423265914823865405793 0.$

$x^3+x^2-7x+3=0$

$x=-3,353855;\ +0,476452;\ +1,877403.$

$x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 200x - 360 = 0$

$x = -5{,}044;\ 3{,}2209;\ 3{,}5093;\ 6{,}314.$

$x^5 + x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$

$x = 0{,}64074598.$

Übrigens wird er sich eine reichliche und nützliche Übung verschaffen, wenn er die hier gelehrte Methode auf die Berechnung der reellen Wurzeln der binomischen oder reinen höheren Zahlengleichung $x^n - a = 0$, d. i. auf die Ausziehung der Wurzeln aus besonderen Zahlen anwendet.

II. Berechnung der imaginären Wurzeln.

§. 310.

Die imaginären Wurzeln algebraischer Gleichungen mit einer unbekannten Größe sind (nach §. 288, I.) immer in der allgemeinen Form $p + q\sqrt{-1}$ enthalten, wofern p und q reelle Zahlen vorstellen. Dieser Form wegen muß, sobald $p + q\sqrt{-1}$ irgend eine imaginäre Wurzel einer Gleichung $f(x) = 0$ von lauter reellen Coefficienten ist, auch $p - q\sqrt{-1}$ eine zweite imaginäre Wurzel derselben Gleichung sein. Denn setzt man in jener Gleichung $x = p \pm q\sqrt{-1}$, so reducirt sich ihr Polynom offenbar auf die Form $P \pm Q\sqrt{-1} = 0$, wobei P nur gerade, Q aber blos ungerade Potenzen von q enthält. Allein diese Gleichung kann nur durch solche reelle Werthe von p und q realisirt werden, für welche $P = 0$ und $Q = 0$ wird. Da es jedoch hiebei nicht auf die Vorzeichen von Q, mithin auch nicht auf jene von q ankommt, so müssen beide Ausdrücke $p + q\sqrt{-1}$ und $p - q\sqrt{-1}$ zugleich Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sein. Solche zwei imaginäre Wurzeln pflegt man conjugirte (gepaarte) zu nennen.

Der vorstehende Lehrsatz bietet zugleich ein Mittel, die imaginären Wurzeln einer Gleichung zu berechnen. Man wird nemlich nach dem sogleich zu beschreibenden Verfahren diejenigen zusammengehörigen reellen Werthe von p und q bestimmen, welche die Gleichungen $P = 0$ und $Q = 0$ zugleich befriedigen.

Diese kurze Andeutung möge hier genügen, da man bei wirklichen Anwendungen nur selten imaginäre Wurzeln zu suchen hat. Sollten sie aber doch in besonderen Fällen gefordert werden, so kann man sich die Bestimmung derselben dadurch erleichtern, daß man vorerst alle reellen Wurzeln sucht, und durch Beseitigung derselben (§. 290, VII.) den Grad der Gleichung so weit als möglich herabsetzt.

Auflösung von Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

§. 311.

I. Sind **zwei** algebraische Gleichungen mit zwei Unbekannten aufzulösen, so wird man aus ihnen eine der beiden Unbekannten eliminiren. Zu diesem Zwecke schafft man, wenn in beiden Gleichungen die nemliche höchste Potenz der einen Unbekannten vorkommt, diese Potenz allein nach den bekannten Methoden hinweg; ist aber die höchste Potenz dieser Unbekannten in der einen Gleichung niedriger als in der andern, so wird man jene Gleichung mit einer solchen Potenz derselben Unbekannten multipliciren, damit die höchsten Potenzen gleich werden, folglich die erstere Elimination sich ausführen läßt. Auf diesem Wege gelangt man schrittweise zu Gleichungen von fortwährend niedrigeren Graden, und beseitigt allmälig sämmtliche Potenzen der zu eliminirenden Unbekannten von der höchsten bis zur niedrigsten, bis man endlich eine Gleichung erhält, in der nur die andere Unbekannte vorkommt. Löst man sonach diese auf, und setzt die gefundenen Wurzeln in eine Gleichung, welche die zuerst eliminirte Unbekannte blos in einer einzigen Potenz enthält, so kennt man auch diese.

Z. B. Soll aus den Gleichungen

(α) $x^2-(y+1)x-2(y^2+2y+1)=0,$

(β) $x^2-(3y-1)x+2y^2-2y=0$

die Größe x eliminirt werden, so zieht man, um x^2 zu beseitigen, (β) von (α) ab; dies gibt

(γ) $(y-1)x-(2y^2+y+1)=0.$

Wird diese mit x multiplicirt, damit sie in

$$(y-1)x^2-(2y^2+y+1)x=0$$

übergehe, folglich aus ihr und aus (α) die Potenz x^2 eliminirt werden könne; so findet man (δ) $(y^2+y+2)x-2(y^3+y^2-y-1)=0.$

Schafft man noch aus den um einen Grad niedrigeren Gleichungen (γ) und (δ) die Größe x hinweg, so ergibt sich die Gleichung

(ε) $3y^3+10y^2+3y=0.$

Hieraus folgt $y=0;\ -3;\ -\frac{1}{3}.$

Endlich ist zu Folge der Gleichung (γ)

$$x=\frac{2y^2+y+1}{y-1},$$

daher $$x=-1;\quad -4;\quad -\frac{2}{3}.$$

II. Bei mehr als zwei Gleichungen mit mehreren Unbekannten schafft man, nach der eben beschriebenen Methode, zuerst eine Unbekannte aus allen Gleichungen weg, wodurch die Anzahl der Gleichungen um eine verringert wird. Hierauf eliminirt man auf dieselbe Weise eine zweite Unbekannte, dann eine dritte, u. s. w., bis man endlich zu einer Gleichung mit einer einzigen Unbekannten gelangt. Kennt man die verschiedenen Werthe dieser Unbekannten, so lassen sich auch nach und nach jene der übrigen finden.

IV. Abschnitt.

Von den unendlichen Reihen und ihrer Convergenz.

§. 312.

Eine Reihe wird unendlich genannt, wenn man die Anzahl der zu betrachtenden Glieder derselben ins Unendliche wachsen läßt. In dieser Hinsicht kann allgemein jede Reihe, selbst eine solche, deren Glieder von einem bestimmten an durchgehends Null sind, und die, wie man sonst zu sagen pflegt, mit diesem Gliede abbricht, wie dies z. B. bei den nach ganzen positiven Exponenten gebildeten Potenzen eines Binoms der Fall ist, als eine unendliche angesehen werden.

Die Summe aller Glieder einer unendlichen Reihe läßt sich blos dazumal als eine bestimmte (determinirte) Größe betrachten, und behandeln, wenn sie von einer gewissen endlichen Größe um so weniger differirt, je mehr von ihren Gliedern summirt werden. Man nennt dann eine solche unendliche Reihe convergirend und jene fixe Größe die Grenze ihrer Summe oder wohl auch die Summe der Reihe selbst. Gibt es dagegen keine derlei endliche Grenze, so heißt die Reihe divergirend. Eine unendliche Reihe convergirt desto rascher, je weniger Anfangsglieder zu summiren sind, um die Summe der ganzen Reihe bis zu einem bezeichneten Grade genau zu finden. Nur solche rasch convergirende Reihen sind zur wirklichen Berechnung der von ihnen dargestellten Größen brauchbar.

Kennt man die von der Anzahl n der summirten Glieder abhängige Summenformel einer Reihe, so kann leicht entschieden werden, ob diese, falls man sie als unendlich ansehen würde, convergire und wie ihre Summe ausgedrückt werde. Denn diese Summe wird die Grenze sein, der sich die Summenformel der Reihe bei der unendlichen Vergrößerung der Anzahl n ihrer Glieder ohne Ende nähert. Je nachdem daher, für $n=\infty$, die Summenform endlich oder unendlich ausfällt, convergirt oder divergirt die zu untersuchende Reihe. So z. B. divergirt die unendliche arithmetische Progression

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots . a+(n-1)d,\ \ldots . \quad ^{*)}$$

weil ihre Summe $s=\frac{2a+(n-1)d}{2}n$, für $n=\infty$, unendlich groß ausfällt. Bei der unendlichen geometrischen Progression

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots\ aq^{n-1},\ \text{etc.}$$

dagegen, deren Summenformel $s=a\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$ ist, hat man, um über ihre Convergenz absprechen zu können, auf den Quotienten q zu sehen. Ist $q>1$, so wächst q^n (nach §. 123) mit n zugleich ins Unendliche, also ist für $n=\infty$ auch $s=\infty$, und die Reihe divergirt. Selbst für $q=1$, wo $s=a+a+a+\ldots=na$ wird, divergirt sie.

---

*) Man pflegt das unendliche Fortlaufen einer Reihe dadurch anzudeuten, daß man, sobald aus den aufgeschriebenen Anfangsgliedern derselben ihr Bildungsgesetz leicht entnommen werden kann, einige Puncte oder ein etc. schreibt.

Nur wenn $q<1$ ist, nimmt q^n (nach §. 123) bei dem unendlichen Wachsen von n unendlich ab, oder hat Null zur Grenze; folglich ist für $q<1$

$$s=a+aq+aq^2+\ldots=\frac{a}{1-q}.$$

§. 313.

Von den Kennzeichen der Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen wird für unsere Zwecke nachstehendes genügen.

Eine unendliche Reihe $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, u_{n+1}, \ldots$ $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{convergirt}}{\text{divergirt}}$, wenn bei dem unendlichen Wachsen von n das Verhältniß $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ einer Grenze A, deren Zahlwerth $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{kleiner}}{\text{größer}}$ als 1 ist, ohne Ende sich nähert.

Denn da der Zahlwerth des Verhältnisses $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, dem von 1 verschiedenen und $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{unter}}{\text{über}}$ 1 liegenden Zahlwerthe der Grenze A unbestimmt sich nähert; so muß er, wenigstens sobald der Stellenzeiger n eine hinreichend große Zahl r erreicht hat, an den Zahlwerth von A so nahe rücken, daß jede beliebige zwischen der Einheit und diesem Zahlwerthe gelegene bestimmte Absolutzahl B, welche daher selbst $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{kleiner}}{\text{größer}}$ als 1 ist, zwischen 1 und den Zahlwerth des Verhältnisses $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ zu stehen kommt, folglich $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{größer}}{\text{kleiner}}$ als dieser Zahlwerth wird; wornach man, abgesehen vom Vorzeichen, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \lesseqgtr B$ oder $u_{n+1} \lesseqgtr Bu_n$ hat.

Hieraus folgt sogleich, daß, wenn man n nach und nach in $r, r+1, r+2, \ldots$ übergehen läßt, die Glieder $u_{r+1}, u_{r+2}, u_{r+3}, \ldots$ der zu prüfenden Reihe $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{kleiner}}{\text{größer}}$ als die gleichstelligen der geometrischen Reihe $Bu_r, B^2u_r, B^3u_r, \ldots$ sind. Allein diese Reihe, deren Quotient B $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{kleiner}}{\text{größer}}$ als 1 ist, $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{convergirt}}{\text{divergirt}}$; mithin muß auch die zu untersuchende Reihe, weil ihre Glieder noch $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{kleiner}}{\text{größer}}$ als die gleichvielten der geometrischen sind, um so mehr $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{convergiren}}{\text{divergiren}}$. So z. B.

werden die unter der allgemeinen Form

$$A_0+A_1x+A_2x^2+\dots+A_nx^n+A_{n+1}x^{n+1}+\dots$$

der ganzen rationalen Functionen in der Folge oft vorkommenden unendlichen Reihen $\frac{\text{convergiren}}{\text{divergiren}}$, wenn bei dem unendlichen Wachsen von n das Verhältniß $\frac{A_{n+1}}{A_n}x$ einer Grenze zustrebt, deren Zahlwerth $\frac{\text{kleiner}}{\text{größer}}$ als 1 ist; zugleich convergiren sie um so rascher und sind daher zur wirklichen Ausrechnung ihrer Summe desto geeigneter, je tiefer der Zahlwerth von x sammt jenem der Grenze von $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ unter 1 liegt.

V. Abschnitt.

Von einigen Umstaltungen (Transformationen) der Functionen einer Veränderlichen.

A. Zerlegung ganzer rationaler Functionen in Factoren.

§. 314.

Nach den (in §. 288, II. III.) aufgestellten Lehrsätzen kann man eine ganze rationale Function

$$f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\dots+A_{n-1}x+A_n$$

in ihre lineären binomischen Factoren auflösen, indem man sie der Null gleich setzt, von der so erhaltenen Gleichung $f(x)=0$ die Wurzeln $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ sucht, und die ihnen zugehörigen Wurzelfactoren aufstellt; denn dann ist die vorgelegte Function

$$f(x)=A_0(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n).$$

Hiernach kann man auch jene Wurzelfactoren $x-p-q\sqrt{-1}$ und $x-p+q\sqrt{-1}$, welche von einem Paare conjugirter imaginärer Wurzeln $p+q\sqrt{-1}$ und $p-q\sqrt{-1}$ herstammen, in ein reelles quadratisches Product $(x-p-q\sqrt{-1})(x-p+q\sqrt{-1})$ $=(x-p)^2+q^2=x^2-2px+p^2+q^2$ vereinigen.

1. Beispiel. Soll $x^4-6x^3+11x^2-6x$ in Factoren zerlegt werden, so bestimmt man die Wurzeln der Gleichung

$$x^4-6x^3+11x^2-6x=0,$$

und da diese 0, 1, 2, 3 sind, so findet man jenes Polynom

$$=x(x-1)(x-2)(x-3).$$

2. Beispiel. Ist $x^3+2x^2+2x^2y+xy+xy^2-3x-y^2-3y$ in Factoren zu zerfällen, so wird die Gleichung

$$x^3+2(y+1)x^2+(y^2+y-3)x-y(y+3)=0$$

aufgelöst, und weil ihre Wurzeln $-y$, 1, $-(y+3)$ sind, findet man den gegebenen Ausdruck $=(x+y)(x-1)(x+y+3)$.

B. Zerfällung rationaler gebrochener Functionen in Partialbrüche.

§. 315.

Nach den für die Addition und Subtraction der Brüche (§. 87 und 88) ertheilten Vorschriften können auch mehrere rationale gebrochene Functionen, sowohl allein als mit einer oder mit mehreren ganzen rationalen Functionen in eine einzige gebrochene Function zusammengezogen werden. Daraus leuchtet, wenigstens für einzelne Fälle, die Möglichkeit ein, umgekehrt eine gegebene rationale gebrochene Function in eine ganze rationale und in mehrere gebrochene Functionen oder sogenannte Partialbrüche zu zerfällen, nemlich als die algebraische Summe dieser darzustellen.

Bei dieser Aufgabe, welche uns gegenwärtig beschäftigen soll, bemerken wir zuvörderst, daß, weil der Nenner der algebraischen Summe mehrerer Brüche durch jeden ihrer Nenner theilbar ist, auch der Nenner eines jeden Partialbruches ein Factor des Nenners der zu zerlegenden gebrochenen Function sein muß, weßwegen vor allem Anderen dieser Nenner (nach §. 314) in seine Factoren aufzulösen kommt. Überdies läßt sich leicht erkennen, daß die Aufgabe allgemein besehen, unbestimmt ist, theils, weil die Anzahl der zu suchenden Partialbrüche von 2 an ins Unbestimmte variiren kann, theils, weil die Wurzelfactoren des Nenners auf unzählig viele Weisen zu Nennern einer bestimmten Anzahl von Partialbrüchen verbunden werden können, theils endlich, weil selbst die bereits gefundenen Partialbrüche dadurch sich abändern lassen, daß man zu dem Zähler des einen eine beliebige ganze rationale Function algebraisch addirt, und den Betrag dieser Zugabe von einem anderen Bruche algebraisch subtrahirt.

Die Aufgabe wird jedoch bestimmt, wenn die Anzahl der Partialbrüche, so festgestellt wird, daß sie nur von 2 bis zu dem höchsten Exponenten des Nenners aufsteigen kann, und wenn man verlangt, daß die Nenner keiner zwei Partialbrüche einen gemeinschaftlichen Theiler besitzen, und daß der Zähler eines jeden Partialbruches von einem niedrigeren Grade als sein Nenner sei, oder kurz, daß die Partialbrüche echt gebrochene Functionen werden sollen; wobei nur noch zu bemerken kommt, daß zu den Partialbrüchen einer unecht gebrochenen Function noch eine ganze rationale Function, deren Dimension die des Nenners zu jener des Zählers ergänzt, sich gesellen müsse.

Denn sei von einer gebrochenen rationalen Function $\frac{n}{N}$ ein echter Partialbruch $= \frac{p}{P}$, dessen Nenner mit keinem der übrigen einen gemeinschaftlichen Theiler besitzt, und sei die Summe aller übrigen Partialbrüche sammt der etwa vorhandenen ganzen Function $= \frac{q}{Q}$; so haben auch P und Q keinen gemeinschaftlichen Theiler. Wären nun die Brüche $\frac{p}{P}$ und $\frac{q}{Q}$ nicht bestimmt, sondern ließen sich noch zwei andere Brüche $\frac{p'}{P}$ und $\frac{q'}{Q}$ von denselben Nennern P und Q, aber von verschiedenen Zählern p' und q' angeben; so wäre

$$\frac{n}{N} = \frac{p}{P} + \frac{q}{Q} = \frac{p'}{P} + \frac{q'}{Q},$$

und hieraus ergäbe sich $$\frac{p-p'}{P} = \frac{q'-q}{Q},$$

folglich auch $$\frac{P}{p-p'} = \frac{Q}{q'-q}.$$

Da nun sowohl p als p', mithin auch ihre Differenz $p-p'$, von niedrigerem Range als P ist, so muß, selbst wenn man alle Theiler, welche $p-p'$ und P mit einander gemein haben sollten, beseitigen möchte, doch noch wenigstens ein lineärer Factor von P im Zähler übrig bleiben. Aus dem nemlichen Grunde muß auch in dem Zähler des zweiten Bruches mindestens ein lineärer Factor von Q stehen bleiben. Noch mehr solcher Factoren müßten in beiden Zählern übrig behalten werden, wenn die Nenner $p-p'$ und $q'-q$ einen gemeinschaftlichen Theiler besäßen. Da aber P und Q, folglich auch die von ihnen stehen gebliebenen Factoren, keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen; so könnte es offenbar Werthe von x geben, für welche entweder P und mit ihm von den beiden, so weit als möglich an sich und gegenseitig abgekürzten, Brüchen der erste, nicht aber der zweite, oder für welche Q und mit ihm der zweite Bruch, nicht aber der erste, auf Null reducirt würde; was mit der gefolgerten Gleichheit dieser Brüche für jeden Werth ihrer Veränderlichen im Widerspruche stände, und die Voraussetzung der Unbestimmtheit von $\frac{p}{P}$ und $\frac{q}{Q}$ als unzulässig erklärt.

Ist insbesondere der Nenner P die einer $r$fachen Wurzel a der Gleichung $N=0$ entsprechende Potenz $(x-a)^r$, so läßt sich der Bruch $\frac{p}{P}$, da man seinen Zähler p (vermög §. 286) auf eine einzige Weise nach den Potenzen von $x-a$ mit constanten Coefficienten entwickeln kann, in r völlig bestimmte Partialbrüche von den Nennern $x-a$, $(x-a)^2$, $(x-a)^3, \ldots (x-a)^r$ auflösen, deren Zähler nicht von x abhängen.

Man kann demnach für einen bezeichneten Factor des Nenners, wofern er mit den übrigen Factoren desselben keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzt, nur einen einzigen Partialbruch, dem er als Nenner dient, bestimmen, was für einen Weg man übrigens auch einschlagen möge. Hat man daher auf was immer für eine Weise diese Partialbrüche und allenfalls auch die noch zu ihnen gehörige ganze rationale Function gefunden; so muß ihre Summe der vorgelegten gebrochenen Function gleich sein.

§. 316.

Um den Vorgang bei der Zerfällung rationaler gebrochener Functionen in Partialbrüche kennen zu lernen, sei $\frac{f(x)}{F(x)}$ eine solche Function, und

1) der Fall zu betrachten, wo der Nenner $F(x)$ das Product eines lineären Factors $x-a$ und eines, durch diesen nicht theilbaren Factors $\varphi(x)$, nemlich $F(x)=(x-a)\varphi(x)$ ist. Multiplicirt man demnach den gegebenen Bruch $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x)}{(x-a)\varphi(x)}$ mit $x-a$, so wird

$$(x-a)\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

und wenn man dem zweiten Theile der Gleichung seinen für $x=a$ entfallenden speciellen Werth $\frac{f(a)}{\varphi(a)}$ subtrahirt und wieder addirt,

$$(x-a)\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)} - \frac{f(a)}{\varphi(a)} + \frac{f(a)}{\varphi(a)} \text{ oder auch}$$

$$= \frac{f(a)}{\varphi(a)} + \frac{f(x) - \frac{f(a)}{\varphi(a)}\varphi(x)}{\varphi(x)}.$$

Der Zähler des letzten Bruches ist eine ganze rationale Function, welche für $x=a$ in Null übergeht, daher (nach §. 288) durch $x-a$ ohne Rest theilbar ist. Sei $\psi(x)$ die aus dieser Theilung als Quotient entspringende ganze rationale Function, nemlich

$$\frac{f(x) - \frac{f(a)}{\varphi(a)}\varphi(x)}{x-a} = \psi(x) \text{ oder } f(x) - \frac{f(a)}{\varphi(a)}\varphi(x) = (x-a)\psi(x);$$

so hat man

$$(x-a)\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(a)}{\varphi(a)} + \frac{(x-a)\psi(x)}{\varphi(x)},$$

folglich, wenn man wieder durch $x-a$ dividirt,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x)}{(x-a)\varphi(x)} = \frac{\frac{f(a)}{\varphi(a)}}{x-a} + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}.$$

2) Kommt aber in dem Nenner $F(x)$ des zu zerlegenden Bruches eine Potenz eines lineären Factors vor, so daß $F(x) = (x-a)^r \varphi(x)$ und $\varphi(x)$ durch $x-a$ nicht ohne Rest theilbar ist; so hat man

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x)}{(x-a)^r\varphi(x)} = \frac{1}{(x-a)^{r-1}} \cdot \frac{f(x)}{(x-a)\varphi(x)}, \text{ oder nach 1.}$$

$$= \frac{1}{(x-a)^{r-1}}\left\{\frac{\frac{f(a)}{\varphi(a)}}{x-a} + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right\},$$

folglich

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x)}{(x-a)^r\varphi(x)} = \frac{\frac{f(a)}{\varphi(a)}}{(x-a)^r} + \frac{\psi(x)}{(x-a)^{r-1}\varphi(x)}.$$

Besteht demnach der Nenner eines in Partialbrüche aufzulösenden Bruches aus irgend einer Potenz eines lineären Factors, (die erste mit einbegriffen), und aus einem zweiten durch ihn nicht theilbaren Factor; so findet man denjenigen Partialbruch, welcher diese Potenz des lineären Factors zum Nenner hat, wenn man dieselbe aus dem gegebenen Bruche hinweg läßt und in dem so abgeänderten Bruche für die Veränderliche denjenigen Werth setzt, bei welchem der weggelassene Factor verschwindet. Subtrahirt man hierauf den gefundenen Partialbruch von dem gegebenen Bruche und kürzt im Reste Zähler und Nenner durch den lineären Factor ab, so erhält man noch den ergänzenden Bruch, welcher selbst wieder auf dieselbe Weise weiter zerlegt werden kann.

Es läßt sich übrigens leicht begreifen, daß dieselbe Regel auch Anwendung findet, wenn die lineären Factoren die Form $a+bx$ besitzen, da $a+bx = b\left[x-\left(-\frac{a}{b}\right)\right]$ ist.

3) Wiederholt man dieses Verfahren, entweder bei allen lineären Factoren des Nenners oder an den nach und nach übrig bleibenden Brüchen; so findet man, nachdem man von der vorgelegten gebrochenen Function allmälig sämmtliche Partialbrüche abgezogen hat, zum Reste entweder eine ganze rationale Function, wenn die zerfällte unecht; oder Null, wenn sie echt gebrochen ist. Im ersten Falle kann man diese ganze rationale Function, aber auch

finden, indem man noch vor dem Aufsuchen der Partialbrüche den Zähler der vorliegenden gebrochenen Function durch den Nenner so weit theilt, bis der Rest von geringerer Dimension als der Divisor ist, wornach nur noch die dem Quotienten beizufügende echt gebrochene Function in Partialbrüche aufzulösen kommt. Endlich läßt sie sich, wie man mit geringer Mühe einsieht, auch noch finden, wenn man den zu zerlegenden Bruch durch diejenige Potenz der Veränderlichen dividirt, deren Exponent den Überschuß der Dimension des Zählers über jene des Nenners um 1 übersteigt, von dem so erhaltenen echten Bruche die den Potenzen der Veränderlichen entsprechenden Partialbrüche sammt dem ergänzenden Bruche bestimmt und diese darnach wieder mit der vorher als Divisor gebrauchten Potenz multiplicirt.

1. Beispiel. Soll der Bruch $\frac{1}{a^2x-x^3}$ zerlegt werden, dessen Nenner $=x(a+x)(a-x)$ ist und der daher auch in der Form $\frac{1}{x(a+x)(a-x)}$ geschrieben werden kann, so wird man aus seinem Nenner einzeln die Factoren

$$x, \qquad a+x, \qquad a-x$$

weglassen und die sie annullirenden Werthe

$$0, \qquad -a, \qquad a,$$

in den abgeänderten Brüchen

$$\frac{1}{(a+x)(a-x)}, \quad \frac{1}{x(a-x)}, \quad \frac{1}{x(a+x)}$$

setzen, woraus für die Zähler die Werthe

$$\frac{1}{a^2}, \quad -\frac{1}{2a^2}, \quad \frac{1}{2a^2}$$

entspringen. Demnach ist

$$\frac{1}{a^2x-x^3}=\frac{1}{x(a+x)(a-x)}=\frac{1}{a^2x}-\frac{1}{2a^2(a+x)}+\frac{1}{2a^2(a-x)}.$$

2. Beispiel. Ist der Bruch $\frac{2x^4-ax^3-2a^2x^2+a^3x+1}{a^2x-x^3}$ in Partialbrüche zu zerlegen, so gibt die Division

$$\frac{2x^4-ax^3-2a^2x^2+a^3x+1}{a^2x-x^3}=-2x+a+\frac{1}{a^2x-x^3},$$

daher nach dem 1. Beispiele

$$= -2x + a + \frac{1}{a^2x} - \frac{1}{2a^2(a+x)} + \frac{1}{2a^2(a-x)}.$$

3. Beispiel. Hat man den Bruch $\frac{3x^2+x-2}{(x-1)^3(x^2+1)}$ in Partialbrüche zu zerfällen, so ist der erste Partialbruch $\frac{3+1-2}{2(x-1)^3} = \frac{1}{(x-1)^3}$, daher seine Ergänzung

$$\frac{3x^2+x-2}{(x-1)^3(x^2+1)} - \frac{1}{(x-1)} = \frac{2x^2+x-3}{(x-1)^3(x^2+1)} = \frac{2x+3}{(x-1)^2(x^2+1)}.$$

Hieraus findet man den zweiten Partialbruch

$$= \frac{2+3}{2(x-1)^2} = \frac{5}{2(x-1)^2},$$

und seine Ergänzung $= -\frac{5x^2-4x-1}{2(x-1)^2(x^2+1)} = -\frac{5x+1}{2(x-1)(x^2+1)}.$

Daraus folgt der dritte Partialbruch $= -\frac{3}{2(x-1)}$, und die Ergänzung desselben

$$= \frac{3x-2}{2(x^2+1)} = \frac{3x-2}{2(x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1})},$$

oder in Partialbrüche aufgelöst $= \frac{3-2\sqrt{-1}}{4(x+\sqrt{-1})} + \frac{3+2\sqrt{-1}}{4(x-\sqrt{-1})}.$

Demnach ist der vorgelegte Bruch gleich

$$\frac{1}{(x-1)^3} + \frac{5}{2(x-1)^2} - \frac{3}{2(x-1)} + \frac{3-2\sqrt{-1}}{4(x+\sqrt{-1})} + \frac{3+2\sqrt{-1}}{4(x-\sqrt{-1})}.$$

C. Entwicklung gebrochener rationaler Functionen in Reihen.

§. 317.

Die Leichtigkeit, mit der sich die Werthe ganzer rationaler Functionen für bestimmte Werthe ihrer Veränderlichen berechnen lassen, trachtet man auch den übrigen Functionen dadurch zu verschaffen, daß man sie, wo möglich, in convergirende unendliche Reihen zu verwandeln oder zu entwickeln sucht, die nach den Potenzen der Veränderlichen fortlaufen. Gelingt dies, so nennt man die Reihe die Entwicklung der Function.

Sei nun $\dfrac{A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots}{B_0+B_1x+B_2x^2+B_3x^3+\cdots}$

eine gebrochene rationale Function, deren Zähler und Nenner entweder eine endliche oder eine unendliche Anzahl von steigend geordneten Potenzen der Veränderlichen enthält, und versuchen wir sie in eine convergirende Reihe zu entwickeln.

Zu diesem Zwecke würde zwar weiter nichts als die ganz gewöhnliche Division auszuführen sein; um aber das Bildungsgesetz der Glieder des Quotienten augenfällig darzustellen, ist es von Vortheil, den Zähler und Nenner der gegebenen Bruchfunction durch das von x freie Glied des Nenners zu dividiren, und in dem sich ergebenden Nenner von dem ersten Gliede, welches jederzeit 1 werden muß, alle folgenden mit veränderten Zeichen zu subtrahiren. Nach dieser Vorbereitung haben wir es demnach nur noch mit gebrochenen Functionen von der Form

$$\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots}{1-(b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4+\cdots)}$$

zu thun.

Theilen wir nun wirklich, so erscheint als erster Theil des Quotienten a_0, und wenn wir diesen, um ihn den folgenden Theilen analog (ähnlich) zu bezeichnen, durch c_0 vorstellen, der Rest $(a_1+b_1c_0)x+(a_2+b_2c_0)x^2+(a_3+b_3c_0)x^3+(a_4+b_4c_0)x^4+\cdots$

Die zweite Division gibt, wenn wir $a_1+b_1c_0=c_1$ setzen, den Quotienten c_1x und den Rest

$(a_2+b_1c_1+b_2c_0)x^2+(a_3+b_2c_1+b_3c_0)x^3+\cdots$

Die dritte Division, bei der wir $a_2+b_1c_1+b_2c_0=c_2$ setzen, liefert den Quotienten c_2x^2 und den Rest

$(a_3+b_1c_2+b_2c_1+b_3c_0)x^3+(a_4+b_2c_2+b_3c_1+b_4c_0)x^4+\cdots$

Setzen wir diese Operation fort, und nehmen dabei zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
c_0&=a_0\\
c_1&=a_1+b_1c_0\\
c_2&=a_2+b_1c_1+b_2c_0\\
c_3&=a_3+b_1c_2+b_2c_1+b_3c_0\\
c_4&=a_4+b_1c_3+b_2c_2+b_3c_1+b_4c_0\\
c_5&=a_5+b_1c_4+b_2c_3+b_3c_2+b_4c_1+b_5c_0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
c_n&=a_n+b_1c_{n-1}+b_2c_{n-2}+b_3c_{n-3}+\cdots+b_{n-1}c_1+b_nc_0;
\end{aligned}$$

so erhalten wir

$$\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots}{1-(b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\ldots)}=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots,$$

wofern der Quotient eine convergirende Reihe ist, nemlich (nach §. 313) der Zahlwerth der Grenze des Verhältnisses $\frac{c_{n+1}}{c_n}x$ kleiner als 1 ausfällt.

Eine genauere Betrachtung obiger Division daß die Glieder des Quotienten und somit auch ihre Coefficienten $c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots$ nach folgendem Gesetze gefunden werden. Sein erstes Glied ist das erste des Zählers. Das zweite Glied, welches die erste Potenz der Veränderlichen in sich schließt, wird gefunden, wenn man sein erstes Glied mit dem ersten des subtractiven Theils des Nenners multiplicirt und zum Producte das zweite Glied des Zählers addirt. Überhaupt wird jedes Glied des Quotienten erhalten, wenn man auf alle möglichen Weisen eines der schon berechneten Glieder des Quotienten mit einem solchen Gliede des subtractiven Theils im Nenner multiplicirt, damit in dem Producte jederzeit diejenige Potenz der Veränderlichen, welche das zu bestimmende Glied des Quotienten führen soll, vorkomme, und die Summe aller dieser Producte noch um das mit derselben Potenz der Veränderlichen begabte Glied des Zählers vermehrt. Hiebei kann man, um Ordnung im Rechnen zu halten, bei den bereits bestimmten Gliedern des Quotienten vom letzten an zurück, dagegen bei jenen des subtractiven Theils des Nenners vom ersten an, vorwärts schreiten.

Weil bei diesen Reihen jedes Glied aus den vorhergehenden berechnet wird, pflegt man dieselben vorzugsweise **recurrirende** (zurücklaufende) zu nennen, obgleich diese Benennung eigentlich allen, nach einem unveränderlichen Gesetze fortschreitenden Reihen zukäme, da, wenn durch die Gleichung $u_n=f(n)$ die Abhängigkeit des allgemeinen Gliedes u_n von dem Stellenzeiger ausgesprochen wird, aus ihr und aus einer oder mehreren ihrer Folgerungen $u_{n-1}=f(n-1)$, $u_{n-2}=f(n-2)$, $u_{n-3}=f(n-3)$, ... die Größe n nebst einer oder einigen Constanten auf verschiedene Weisen eliminirt und so die Abhängigkeit des Gliedes u_n von seinen Vorgängern u_{n-1}, u_{n-2}, u_{n-3}, ... gefunden werden kann.

Die Reihe der Coefficienten b_1, b_2, b_3, b_4,.... des subtractiven Theils des Nenners nennt man die Relations-Skale und die allgemeine Gleichung

$$c_n = a_n + b_1 c_{n-1} + b_2 c_{n-2} + b_3 c_{n-3} + \cdots + b_{n-1} c_1 + b_n c_0$$

das Bildungsgesetz der recurrirenden Reihe.

1. Beispiel. Soll der Bruch

$$\frac{1-x+x^2-x^3+x^4-x^5\ldots.}{2+\frac{x}{2.2}-\frac{1.x^2}{2.4.2^3}+\frac{1.3.x^3}{2.4.6.2^5}-\frac{1.3.5.x^3}{2.4.6.8.2^7}\ldots.}$$

in eine recurrirende Reihe entwickelt werden, so ertheilt man ihm vorläufig die Form

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^4\ldots.}{1-(-\frac{1}{8}x+\frac{1}{128}x^2-\frac{1}{1024}x^3+\frac{5}{32768}x^4\ldots.)}$$

und findet nach und nach als seine Entwicklung die convergirende Reihe

$$\frac{1}{2}-\frac{9}{16}x+\frac{147}{256}x^2-\frac{1181}{2048}x^3+\frac{37827}{65536}x^4\ldots.,$$

indem man die Cofficienten folgender Maßen berechnet.

$$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}=-\frac{9}{16},$$

$$+\frac{1}{2}+\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{128}=\frac{147}{256},$$

$$-\frac{1}{2}-\frac{147}{256}\cdot\frac{1}{8}-\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{128}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1024}=-\frac{1181}{2048},$$

$$+\frac{1}{2}+\frac{1181}{2048}\cdot\frac{1}{8}+\frac{147}{256}\cdot\frac{1}{128}+\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{1024}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{32768}=\frac{37827}{65536};$$

u. s. w.

2. Beispiel. Die Function $\frac{1-2x}{-2+x+x^2}$ gibt zunächst durch -2 abgekürzt, $\frac{-\frac{1}{2}+x}{1-(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2)}$ und ist daher

$$=-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{7}{16}x^3+\frac{9}{32}x^4+\ldots.$$

D. Binomischer Lehrsatz für jeden reellen Exponenten.

§. 318.

Nach Anleitung des §. 250 läßt sich die Potenz $(1+x)^n$, wofern der Exponent n ganz und positiv ist, in eine geschlossene ganze rationale Function verwandeln, indem

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

gefunden wird und diese Reihe mit dem $n+1$ ten Gliede abbricht. Es frägt sich nun aber auch, wie die Entwicklung dieser Potenz sich gestalte, wenn der Exponent in was immer für eine reelle, positive oder negative, ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale Zahl übergeht.

Sei demnach, um dies zu erforschen, erstens n zwar ganz, aber negativ, nemlich $n=-m$, wenn m eine ganze positive Zahl andeutet; dann ist

$$(1+x)^n = (1+x)^{-m} = \frac{1}{(1+x)^m} \text{ oder nach §. 250}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots}$$

Diese gebrochene rationale Function läßt sich (nach §. 317) in eine recurrirende unendliche Reihe verwandeln, und man erhält

$$(1+x)^n = 1 - \frac{m}{1}x + \frac{m(m+1)}{1.2}x^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}x^3 \ldots$$

Daß nicht nur diese Anfangsglieder, sondern auch alle folgenden nach dem leicht zu überschauenden Gesetze fortlaufen, läßt sich zwar fast mit Gewißheit aus dem Umstande erwarten, daß der Dividend nur 1 und der Divisor eine nach einem unveränderlichen Gesetze vorschreitende Reihe ist; allein völlig streng kann dies nur nachgewiesen werden, wenn man das allgemeine Glied der recurrirenden Reihe (nach §. 317) entwickelt. Dieses müssen wir jedoch wegen der Weitläufigkeit der hierauf Bezug nehmenden Untersuchung und wegen der Beschränktheit des uns bemessenen Raumes unterlassen.

Setzen wir in der letzten Gleichung wieder $m=-n$, so erscheint selbst für einen negativen ganzzahligen Exponenten dieselbe Entwicklung

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1}x+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\ldots$$

in welchem Falle jedoch die Reihe nicht, wie bei einem positiven ganzzahligen Exponenten, abbricht, sondern ohne Ende fortläuft.

Ist aber **zweitens** der Exponent n rational gebrochen, übrigens positiv oder negativ, nemlich $n=\frac{i}{k}$, wofern k eine positive, i aber eine positive oder negative ganze Zahl vorstellt; so hat man

$(1+x)^n=(1+x)^{\frac{i}{k}}=\sqrt[k]{(1+x)^i}$ oder nach dem Erwiesenen

$$=\sqrt[k]{\left[1+\frac{i}{1}x+\frac{i(i-1)}{1.2}x^2+\frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3}x^3+\ldots\right]}.$$

Zieht man nun die hier angezeigte Wurzel nach dem, am Schluße von §. 254 angedeuteten, Verfahren; so erhält man

$$(1+x)^n=1+\frac{\frac{i}{k}}{1}x+\frac{\frac{i}{k}\left(\frac{i}{k}-1\right)}{1.2}x^2+\frac{\frac{i}{k}\left(\frac{i}{k}-1\right)\left(\frac{i}{k}-2\right)}{1.2.3}x^3+\ldots,$$

mithin wieder eine unendliche Reihe, die wegen des gesetzmäßigen Fortschreitens der Reihe, aus welcher die Wurzel gezogen wird, und wegen des ununterbrochen regelmäßigen Ganges der Wurzel-Extraction gleichfalls dem vor Augen liegenden Bildungsgesetze gehorcht; wovon wir jedoch den strengen Beweis aus den Gründen, welche wir schon oben anführten, zu übergehen genöthigt sind. Setzt man endlich noch $\frac{i}{k}=n$, so wird wieder

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1}x+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\ldots$$

Ist endlich **drittens** der Exponent n eine irrationale Zahl, so kann er immer als die Grenze angesehen werden, der sich ein rationaler Bruch $\frac{i}{k}$ bei dem angemessenen unendlichen Wachsen des Zählers und Nenners ohne Ende nähert; dann haben aber auch die Glieder im zweiten Theile der vorletzten Gleichung die gleichvielten Glieder in der letzten Gleichung zu Grenzen und daher gilt auch diese.

Die hier aufgestellte Entwicklung der Potenz $(1+x)^n$ in eine unendliche Reihe gilt demnach für alle reellen Werthe des Exponenten n, jedoch blos unter der Voraussetzung, daß sie convergire, was um so rascher geschehen wird, je tiefer der Zahlwerth von x unter 1 liegt.

Setzt man in der letzten Gleichung $x = \frac{b}{a}$, und multiplicirt sie mit a^n, so erfolgt

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2}b^2$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-3}b^3 + \cdots,$$

welche Gleichung der (für jeden reellen Exponenten n giltige) binomische Lehrsatz genannt wird.

Nach ihm kann nicht nur jedes Binom, sondern auch jedes Polynom, wenn es vorher auf die bekannte Weise als ein Binom dargestellt worden ist, nach jedem reellen Exponenten potenzirt werden.

§. 319.

I. Von den besonderen Anwendungen dieser Formel mögen folgende bemerkt werden.

$$\frac{1}{1 \pm x} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp x^5 \ldots$$

$$\sqrt{(a^2 \pm x)} = a \pm \frac{x}{2a} - \frac{1.x^2}{2.4.a^3} \pm \frac{1.3.x^3}{2.4.6.a^5} - \frac{1.3.5\ x^4}{2.4\ 6.8.a^7} \ldots$$

$$= a \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{a} - \frac{1}{8} \cdot \frac{x^2}{a^3} \pm \frac{1}{16} \cdot \frac{x^3}{a^5} - \frac{5}{128} \cdot \frac{x^4}{a^7} \ldots$$

$$\sqrt[3]{(a^3 \pm x)} = a \pm \frac{x}{3a^2} - \frac{2.x^2}{3.6\ a^5} \pm \frac{2.5.x^3}{3.6.9.a^8} - \frac{2.5.8.x^4}{3\ 6.9.12.a^{11}} \ldots$$

$$= a \pm \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{a^2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{x^2}{a^5} \pm \frac{5}{81} \cdot \frac{x^3}{a^8} - \frac{10}{243} \cdot \frac{x^4}{a^{11}} \ldots$$

II. Daß man die beiden letzteren Reihen, vorzüglich, wenn sie rasch convergiren, nemlich, wenn $\frac{x}{a^2}$ oder $\frac{x}{a^3}$ sehr klein ist, zur Berechnung von zweiten und dritten Wurzeln aus ganzen positiven Zahlen verwenden könne und wie dies geschehe, wird aus der Auflösung folgenden Beispieles zur Genüge einleuchten.

Soll $\sqrt{30}$ mittels der vorletzten Reihe berechnet werden, so kann man 30 durch $25+5$ oder durch $36-6$ vorstellen. Das letztere ist zweckmäßiger, weil im ersten Falle

$\frac{x}{a^2}=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$, im anderen aber $\frac{x}{a^2}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ ist.

Setzt man daher $a=\sqrt{36}=6$, $x=6$, so wird

$$\sqrt{30}=6-\frac{1}{2}-\frac{1}{2.4.6}-\frac{1.3}{2.4.6.6^2}-\frac{1.3.5}{2.4.6.8.6^3}-\ldots$$

Eine Reihe von noch schneller abnehmenden Gliedern würde man für $\sqrt{30}$ erhalten, wenn man 30 mit dem Quadrate einer solchen Zahl, hier mit 100, dem Quadrate von 10, multiplicirt, daß das Product, 3000, von einer andern Quadratzahl, $3025=55^2$, nur verhältnißmäßig wenig differirt, und wenn man hinterher die Wurzel aus dem Producte wieder durch jene Zahl 10 dividirt. Auf diese Weise ist nemlich

$$\sqrt{30}=\frac{1}{10}\sqrt{30.100}=\frac{1}{10}\sqrt{3000}=\frac{1}{10}\sqrt{3025-25}$$
$$=\frac{1}{10}\sqrt{55^2-25},$$

daher $a=55$, $x=25$, $\frac{x}{a^2}=\frac{25}{3025}=\frac{1}{121}$, und somit

$$\sqrt{30}=\frac{1}{10}\left(55-\frac{25}{2.55}-\frac{1.25^2}{2.4.55^3}-\frac{1.3.25^3}{2.4.6.55^5}\ldots\right)$$
$$=\frac{55}{10}\left(1-\frac{1}{2.121}-\frac{1}{2.4.121^2}-\frac{1.3}{2.4.6.121^3}-\ldots\right)$$
$$=5{,}4772255761\ldots,$$

wobei es genügt, nur drei Brüche der Reihe zu entwickeln, da die folgenden bis in die zehnte Decimalstelle keine bedeutende Ziffer mehr liefern.

§. 320.

Der Binomialreihe (§. 318) lassen sich noch mancherlei Formen ertheilen, von denen nur folgende angeführt werden möge. Es ist nemlich

$$(a+b)^n=\left(\frac{1}{a+b}\right)^{-n}=a^n\left(\frac{a}{a+b}\right)^{-n}=a^n\left(1-\frac{b}{a+b}\right)^{-n},$$

und wenn man die letzte Potenz (nach §. 318) entwickelt,

$$(a+b)^n=a^n\left[1+\frac{n}{1}\left(\frac{b}{a+b}\right)+\frac{n(n+1)}{1.2}\left(\frac{b}{a+b}\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{b}{a+b}\right)^3+\ldots\right],$$

welche Reihe abbricht, wenn n eine negative ganze Zahl ist.

Auch sie läßt sich zur Berechnung von Wurzeln aus positiven ganzen Zahlen vortheilhaft verwenden. Soll nemlich z. B. die zweite Wurzel aus der Zahl 30 gezogen werden, so stelle man diese durch $25+5=5^2+5$ dar, wodurch $a+b=30$, $a=25$, $b=5$, $n=\frac{1}{2}$, $a^n=\sqrt{25}=5$ wird, und man erhält

$$\sqrt{30}=5\left(1+\frac{1}{2.6}+\frac{1.3}{2.4.6^2}+\frac{1.3.5}{2.4.6.6^3}+\cdots\right).$$

Um die Reihe rascher convergiren zu machen, kann man auch hier wie oben die Wurzel durch eine beliebige Zahl, 10, dividiren, und unter dem Wurzelzeichen mit dem Quadrate dieser Zahl, 100, multipliciren, endlich von diesem Producte 3000 nach derselben Methode die Wurzel suchen. Man findet nemlich

$$\sqrt{30}=\frac{1}{10}\sqrt{30.100}=\frac{1}{10}\sqrt{3000}=\frac{1}{10}\sqrt{3025-25}$$
$$=\frac{1}{10}\sqrt{55^2-25},$$

folglich $n=\frac{1}{2}$, $a+b=3000$, $a=3025$, $a^n=55$, $b=-25$,

$$\sqrt{30}=\frac{55}{10}\left(1-\frac{1}{240}+\frac{3}{2.240^2}-\frac{3.5}{2.3.240^3}\ldots\right),$$

welche Reihe ebenfalls sehr rasch convergirt.

E. Entwicklung der Exponentiellen und Logarithmen in Reihen.

§. 321.

Nach §. 318 hat man, wenn n eine beliebige reelle Zahl, u aber eine reelle oder imaginäre vorstellt,

$$(1+u)^n = 1 + \frac{n}{1}u + \frac{n(n-1)}{1.2}u^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u^3 + \cdots$$

Bezeichnet ferner x das Product dieser zwei Zahlen n und u, ist nemlich $x = nu$, mithin $n = \frac{x}{u}$, so wird

$$(1) \quad (1+u)^{\frac{x}{u}} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x(x-u)}{1.2} + \frac{x(x-u)(x-2u)}{1.2.3} + \cdots$$

Nimmt man hier insbesondere $x = 1$, so erhält man

$$(1+u)^{\frac{1}{u}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-u}{1.2} + \frac{(1-u)(1-2u)}{1.2.3} + \cdots$$

Läßt man nun die Zahl u, sie mag positiv oder negativ sein, unendlich abnehmen, so nähert sich der zweite Theil dieser Gleichung ohne Ende der Grenze

$$1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \cdots,$$

welche Reihe ziemlich rasch convergirt und zur Summe die Zahl 2,7182818 ... hat, die wir, wegen ihrer besonderen Wichtigkeit in der Analysis, von nun an immer mit h bezeichnen wollen, so daß immer

$$(2) \quad h = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \cdots = 2{,}7182818\ldots$$

sein soll, und folglich der Ausdruck $(1+u)^{\frac{1}{u}}$, bei dem unendlichen Abnehmen des Zahlwerthes von u, zur Grenze die Zahl $h = 2{,}7182818\ldots$ besitzt.

Erwägt man ferner, daß die Gleichung (1) auch in der Gestalt

$$\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x(x-u)}{1.2} + \frac{x(x-u)(x-2u)}{1.2.3} + \cdots$$

auftreten kann, und läßt man, während x eine beliebige Zahl vorstellt, u ohne Ende abnehmen, so findet man für diese Gleichung die Grenze

$$(3)\quad h^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

deren Reihe (nach §. 313) für jeden Werth von x convergirt, da hier der Quotient $\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} : \frac{x^n}{1.2\ldots n} = \frac{x}{n+1}$ für jeden Werth von x bei einem hinreichend großen Stellenzeiger n kleiner als 1 ausfällt.

Man hat die Zahl h zur Grundzahl eines logarithmischen Systems angenommen, welches man das natürliche Logarithmensystem zu nennen pflegt, und dessen Logarithmen wir durch das Zeichen Log. nat. (Logarithmus naturalis) oder blos durch L andeuten wollen.

Ist nun a irgend eine reelle positive Zahl, deren natürlicher Logarithme daher $\mathrm{L}a$ sein wird, so hat man immer $a = h^{\mathrm{L}a}$ und sonach $a^x = h^{x\mathrm{L}a}$. Schreibt man demnach in der letzten Gleichung $x\mathrm{L}a$ für x, so ergibt sich

$$(4)\quad a^x = 1 + \frac{(x\mathrm{L}a)}{1} + \frac{(x\mathrm{L}a)^2}{1.2} + \frac{(x\mathrm{L}a)^3}{1.2.3} + \frac{(x\mathrm{L}a)^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

Anmerkung. Die Benennung „natürliche Logarithmen" dürfte sehr angemessen sein, da in der That diejenigen Logarithmen, auf welche die Erfinder derselben, Neper, ein Schotte, und Byrg, ein Deutscher, geriethen, mit den natürlichen Logarithmen so genau, als es die, diesen Mathematikern zu Gebote gestandenen, minder vollkommenen Berechnungsweisen gestatteten, in den Ziffern übereinkommen und (weil man sie sowohl als auch die Zahlen, denen sie zugehören, so viel wie möglich als ganze Zahlen darzustellen suchte) blos in der Stellung des Decimalstriches oder im Vorzeichen von ihnen sich unterscheiden; was darauf hinweist, daß ihre Grundzahl von jener der natürlichen Logarithmen nahe genug eine Potenz ist, welche zum Exponenten eine positive oder negative Decimal-Einheit besitzt. Schneidet man nemlich von den Neper'schen Logarithmen und den Zahlen, denen sie angehören, 7 Decimalstellen ab, und nimmt die Logarithmen negativ, so werden sie natürliche; es ist nemlich

$LN = -\frac{1}{10^7}\log nep\, 10^7 N$ und $\log nep\, N = -10^7 L\frac{N}{10^7}$; folglich läßt sich $h^{-0,0000001}$ für Neper's Grundzahl ansehen. Schneidet man ferner von Byrg's Logarithmen 5, und von den Zahlen, denen sie zugehören, 8 Decimalstellen ab, so verwandeln sich seine Logarithmen in natürliche; nemlich es ist $LN = \frac{1}{10^5}\log byrg\, 10^8 N$ und $\log byrg\, N = 10^5 L\frac{N}{10^8}$; folglich kann man nahe $h^{0,00001}$ für die Grundzahl von Byrg's Logarithmen betrachten.

Um sowohl dieses als auch sonst noch einzusehen, wie die Erfinder der Logarithmen auf die irrationale Grundzahl 2,7182818..., nicht aber auf die Grundzahl 10 geriethen, welche wir (in §. 259), für so vortheilhaft erkannten, möge folgende Erläuterung dienen.

Neper verglich die Glieder einer geometrischen Reihe

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ \ldots\ aq^n = t,\ \ldots$$

mit den gleichstelligen Gliedern einer arithmetischen Reihe

$$\alpha,\ \alpha+\delta,\ \alpha+2\delta,\ \alpha+3\delta,\ \ldots\ \alpha+n\delta = \tau,\ \ldots$$

und nannte jedes Glied der arithmetischen Reihe den Logarithmen des gleichvielten Gliedes der geometrischen; er setzte nemlich $\tau = \log t$. Diese Benennung gründete er darauf, daß einerseits das geometrische Verhältniß $aq^n : a$ oder abgekürzt $q^n : 1$ das $n$fache des Verhältnisses $aq : a$ oder $q : 1$, und andererseits das arithmetische Verhältniß $(\alpha+n\delta)-\alpha$ oder $n\delta - 0$ das $n$fache des Verhältnisses $(\alpha+\delta)-\alpha$ oder $\delta - 0$ ist, folglich $\alpha+n\delta$, oder vielmehr n, als Zahl der Vervielfachung des Verhältnisses $aq : a$ angesehen werden kann, weßwegen er aus den Wörtern λογος (Verhältniß) und αριθμος (Zahl) das Wort λογαριθμος (Zahl der Verhältnisse) zusammensetzte. — Auf dieselbe Weise verglich auch Byrg, den man für den mit Neper gleichzeitigen Entdecker der Logarithmen halten kann, eine geometrische Reihe mit einer arithmetischen, nur gebrauchte er nicht die Benennung „Logarithmen".

Nach dem Obigen ist $n = \frac{\tau-\alpha}{\delta}$, folglich $aq^{\frac{\tau-\alpha}{\delta}} = t$, und hieraus $\left(q^{\frac{1}{\delta}}\right)^{\tau} = \frac{q^{\frac{\alpha}{\delta}}}{a}\,t$. Nun nahmen jedoch beide Gelehrten zum ersten Gliede ihrer arithmetischen Reihe Null, nemlich $\alpha=0$, daher ist $\left(q^{\frac{1}{\delta}}\right)^{\tau} = \frac{t}{a}$; weil aber nach ihnen 0 der Logarithme von a ist, daher $t=a$ mit $\tau=0$ zusammengehört, und dieses auch mit der letzten Gleichung harmonirt; so kann man, nach unserer Erklärung von den Logarithmen (§. 255), immerhin die Grundzahl der Neper'schen und Byrg'schen Logarithmen $g=q^{\frac{1}{\delta}}$ setzen. Ferner wählten sie, um in ihren geometrischen Reihen fast alle reellen positiven Zahlen zu erhalten, den Quotienten q nur wenig von der Einheit verschieden, nemlich $q=1+v$. Insbesondere wählte Byrg q größer als 1, folglich v positiv, Neper dagegen q kleiner als 1, mithin v negativ. Endlich nahmen beide für die Differenz δ der arithmetischen Reihe eine ganze positive Zahl, welche mit dem Zahlwerthe von v in den Ziffern, nicht aber in der Stellung des Decimalstriches übereinkommt, nemlich $\delta=\pm 10^r v$, wobei das obere Zeichen auf Byrg's, das untere auf Neper's Logarithmen sich bezieht. Dadurch wird die Grundzahl $g=(1+v)^{\pm\frac{1}{10^r v}}$ $=[(1+v)^{\frac{1}{v}}]^{\pm\frac{1}{10^r}}$. Hätte man nun v wirklich unendlich klein annehmen können, so wäre $(1+v)^{\frac{1}{v}}=h$, folglich die Grundzahl $g=h^{\pm\frac{1}{10^r}}$ geworden. Weil man aber v nur sehr klein annehmen konnte, so mußte auch nur beinahe die Grundzahl $g=h^{\pm\frac{1}{10^r}}$ werden. Insbesondere nahm Byrg (Arithmetische und Geometrische Progreß-Tabulen. Prag. 1620) zum ersten Gliede seiner geometrischen Reihe $a=100000000$ und zum zweiten $aq=100010000$, daher den Quotienten $q=1{,}0001$ und somit $v=0{,}0001$; ferner setzte er die Differenz der arithmetischen Reihe $\delta=10$, also $=10^5 v$, so daß $r=5$ wurde. Hiernach ist seine Grundzahl

$g = [(1{,}0001)^{\frac{1}{0{,}0001}}]^{0{,}00001}$, oder wenn man $(1{,}0001)^{\frac{1}{0{,}0001}}$ $= 2{,}718146\ldots$, welches (nach §. 255) die Grundzahl der Byrg'schen Logarithmen wäre, wofern man von ihnen 5, und von ihren Zahlen 8 Decimalstellen abschnitte, als ein Näherungswerth von $h = 2{,}7182818\ldots$ ansieht, beinahe $g = h^{0{,}00001}$. Neper dagegen (Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio. Edinburgi. 1614) wählte zum ersten Gliede seiner geometrischen Reihe $a = 10000000$, zur zweiten $aq = 9999999$, daher zum Quotienten $q = 0{,}9999999$ $= 1 - 0{,}0000001$, und sonach $v = -0{,}0000001$; ferner zur Differenz seiner arithmetischen Reihe $\delta = 1$, folglich $= -10^7 v$ und $r = 7$. Somit ist seine Grundzahl $g = \left[(1 - 0{,}0000001)^{\frac{1}{-0{,}0000001}}\right]^{-0{,}0000001}$ oder wenn man die Zahl $(1 - 0{,}0000001)^{\frac{1}{-0{,}0000001}} = 2{,}71828197\ldots$, welche (nach §. 255) die Grundzahl der Neper'schen Logarithmen wäre, falls man dieselben negativ nähme und sowohl von ihnen als auch von den Zahlen 7 Decimalstellen abschnitte, als einen Näherungswerth von h gelten läßt, nahe $g = h^{-0{,}0000001}$.

Übrigens mag noch bemerkt werden, daß einige Schriftsteller selbst jetzt noch die natürlichen Logarithmen aus geometrischen Gründen hyperbolische nennen, obgleich die Unschicklichkeit dieser Benennung schon längst allgemein anerkannt ist.

§. 322.

I. Subtrahirt man von beiden Theilen der Gleichung (4) (in §. 321) die Zahl 1 und dividirt durch x, so übergeht selbe in

$$\frac{a^x - 1}{x} = \mathrm{L}a + \frac{x(\mathrm{L}a)^2}{2} + \frac{x^2(\mathrm{L}a)^3}{2 \cdot 3} + \cdots$$

Läßt man nun x ohne Ende abnehmen, so reducirt sich diese Gleichung auf

$$(5) \qquad \mathrm{L}a = \frac{a^x - 1}{x},$$

woraus man ersieht, daß der natürliche Logarithme einer Zahl a die Grenze ist, der sich das Verhältniß $\frac{a^x - 1}{x}$, bei der unendlichen Abnahme von x, ohne Ende nähert, und daß er demnach näherungsweise berechnet werden könne, indem man aus der Zahl a immer höhere und höhere Wurzeln, etwa wiederholt die zweite Wurzel zieht, und den Überschuß dieser Wurzel über die Einheit mit dem Wurzel-Exponenten multiplicirt.

Zieht man aber aus irgend einer reellen positiven Zahl a allmälig höhere und höhere Wurzeln, so nähern sich diese immer mehr und mehr der Einheit, daher kann man jederzeit einen so großen endlichen Wurzel-Exponenten n finden, daß $\sqrt[n]{a}=1+z$ und der Zahlwerth von z schon kleiner als 1 ausfällt; wornach $a=(1+z)^n$ sein wird.

Setzt man nun in der Gleichung (5)

$$a=(1+z)^n,$$

so übergeht sie in $n\mathrm{L}(1+z)=\frac{(1+z)^{nx}-1}{x}$,

folglich ist $\mathrm{L}(1+z)=\frac{(1+z)^{nx}-1}{nx}$

oder wenn $(1+z)^{nx}$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt wird,

$$\mathrm{L}(1+z)=z+\frac{nx-1}{2}z^2+\frac{(nx-1)(nx-2)}{2\cdot3}z^3$$
$$+\frac{(nx-1)(nx-2)(nx-3)}{2\cdot3\cdot4}z^4+\ldots$$

Da jedoch in dieser Gleichung x unendlich klein und n endlich vorausgesetzt ist, so hat man eigentlich

$$(6)\qquad \mathrm{L}(1+z)=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{4}z^4\ldots.$$

Die hier vorkommende Reihe convergirt (nach §. 313) sicher, wenn der Zahlwerth von z, wie hier vorausgesetzt wurde, kleiner als 1 ist, und eignet sich daher zur Berechnung natürlicher Logarithmen.

II. Wählt man gegenwärtig eine beliebige Zahl a zur Grundzahl eines logarithmischen Systems, welches wir durch Vorsetzung der Sylbe Log bezeichnen wollen, so ist (nach §. 271)

$$\mathrm{Log}\,(1+z)=\frac{1}{\mathrm{L}a}\mathrm{L}(1+z)$$

oder wenn man der Kürze wegen

$$(7) \qquad \frac{1}{La} = A$$

setzt, $\text{Log}(1+z) = A\text{L}(1+z)$, nemlich

$$(8) \qquad \text{Log}(1+z) = A\left(z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \cdots\right).$$

Diese Zahl $A = \frac{1}{La}$, womit die natürlichen Logarithmen zu multipliciren sind, um in Logarithmen desjenigen Systems, dessen Grundzahl a ist, verwandelt zu werden, nennt man den **Modul** des letztern Systems oder der Grundzahl a. Da überdies mit Rücksicht auf die Gleichung (5)

$$(9) \qquad A = \frac{x}{a^x - 1}$$

ist, so leuchtet ein, daß der Modul des logarithmischen Systems welches zur Grundzahl a hat, die Grenze ist, der sich bei dem unendlichen Abnehmen von x, das Verhältniß $\frac{x}{a^x-1}$ ohne Ende nähert, weßwegen er blos von der Grundzahl a allein abhängt. Daß übrigens für $a=h$ der Modul $A = \frac{x}{h^x - 1} = 1$ werde, ist aus $A = \frac{1}{La}$ klar.

III. Aus der Gleichung (8) lassen sich noch andere, mehr convergirende und für die Berechnung von Logarithmen brauchbarere Reihen ableiten. Zu diesem Zwecke setzen wir in ihr $-z$ statt z, wodurch

$$\text{Log}(1-z) = A\left(-z - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 - \cdots\right)$$

erhalten wird, welche Gleichung von (8) subtrahirt die Gleichung

$$(10) \qquad \text{Log}\frac{1+z}{1-z} = 2A\left(z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{7}z^7 + \cdots\right)$$

übrig läßt. Die hier vorkommende Reihe bietet bereits den Vortheil, daß alle ihre Glieder einerlei Vorzeichen besitzen und, sobald z ein kleiner echter Bruch ist, rasch convergiren. Setzt man demnach $z = \frac{1}{u}$, indem man $u > 1$ supponirt, so erfolgt

$$(11) \qquad \text{Log}\frac{u+1}{u-1} = 2A\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{3u^3} + \frac{1}{5u^5} + \cdots\right).$$

Um mit Hilfe dieser Reihe die Logarithmen aller ganzen Zahlen berechnen zu können, wozu es genügt, auf diesem Wege nur jene der Primzahlen zu suchen, weil aus ihnen die der zusammengesetzten Zahlen durch Addition leicht berechnet werden können, setze man $\frac{u+1}{u-1}=\frac{x}{y}$, also $u=\frac{x+y}{x-y}$;

dadurch wird

$$(12)\qquad \mathrm{Log}\frac{x}{y}=2A\left[\frac{x-y}{x+y}+\frac{1}{3}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^5+\ldots\right].$$

Da diese Gleichung auch noch die Gestalt

$$(13)\qquad \mathrm{Log}x=\mathrm{Log}y+2A\left[\frac{x-y}{x+y}+\frac{1}{3}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^5+\ldots\right]$$

anzunehmen vermag, so gibt sie auch Anleitung, wie man aus dem Logarithmen einer Zahl y jenen einer größeren Zahl x berechnen könne; zugleich ist sie die unerschöpfliche Quelle von anderen weit mehr convergirenden Reihen, deren Kenntniß jedoch gegenwärtig, wo die erforderlichen Logarithmentafeln bereits berechnet sind, keinen erheblichen Nutzen darbietet. Deßwegen soll nur noch bemerkt werden, daß man mittels der vorstehenden Reihen $\mathrm{Log\,nat}\,10=2{,}3025851\ldots$, folglich den Modul des Briggischen Systems $=\frac{1}{\mathrm{Log\,nat}\,10}=0{,}4342945\ldots$ findet.

IV. Nimmt man in der Gleichung (13) die Zahl x um eine die Einheit nicht übersteigende Zahl v größer als y, nemlich $x=y+v$ an, so wird $\frac{x-y}{x+y}=\frac{v}{2y+v}=\frac{v}{2y}-\left(\frac{v}{2y}\right)^2+\left(\frac{v}{2y}\right)^3\ldots$,

folglich

$$\mathrm{Log}\;(y+v)=\mathrm{Log}\;y+2A\left[\frac{v}{2y}-\left(\frac{v}{2y}\right)^2+\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{v}{2y}\right)^3\ldots\right]$$

Ist nun die Zahl y so groß, daß schon das zweite Glied $2A\,.\left(\frac{v}{2y}\right)^2=A\,\frac{v^2}{2y^2}$ selbst für $v=1$ auf die letzte zu bestimmende Decimalziffer des Logarithmen keinen Einfluß mehr nimmt, so hat man äußerst nahe

$$\mathrm{Log}\;(y+v)-\mathrm{Log}\,y=\frac{A}{y}v,$$

ja sogar für $v=1$ auch noch

$$\mathrm{Log}\,(y+1)-\mathrm{Log}\,y=\frac{A}{y}.$$

Aus diesen zwei Gleichungen folgt

$$\mathrm{Log}\,(y+v)-\mathrm{Log}\,y=v\,[\mathrm{Log}\,(y+1)-\mathrm{Log}\,y],$$

daher auch

$$\mathrm{Log}\,(y+v)=\mathrm{Log}\,y+v\,[\mathrm{Log}\,(y+1)-\mathrm{Log}\,y],$$

wodurch die in §. 263 erörterte Verwendung der logarithmischen Proportionaltheile begründet ist.

F. Umkehrung der Reihen.

§. 323.

I. Ist eine Potenz einer veränderlichen Größe y durch eine unendliche, nach Potenzen einer anderen Veränderlichen x fortlaufende, convergente Reihe ausgedrückt, und will man umgekehrt eine Potenz der letzteren Veränderlichen x durch eine unendliche convergirende Reihe der ersteren y ausdrücken; so heißt dieses Problem die Umkehrung der Reihen und kann auf folgende Weise gelöst werden.

Seien x und y durch die Gleichung

$$y^k=A_0x^m+A_1x^{m+n}+A_2x^{m+2n}+A_3x^{m+3n}+\cdots$$

verbunden, in welcher der Exponent m von Null verschieden sein, folglich kein constantes Glied vorkommen soll; und man suche die Potenz x^i durch y auszudrücken.

Zur Vereinfachung der Auflösung dieser Aufgabe setze man $x^m=u$, also $x=u^{\frac{1}{m}}$, ferner, nachdem man die vorliegende Beziehungsgleichung durch A_0 getheilt hat,

$$\frac{y^k}{A_0}=v,\ \frac{A_1}{A_0}=a_1,\ \frac{A_2}{A_0}=a_2,\ \cdots$$

und endlich $\frac{n}{m}=r$; dadurch wird

$$v=u+a_1u^{1+r}+a_2u^{1+2r}+a_3u^{1+3r}+\cdots$$

Um die Aufgabe aufzulösen, wird es hinreichen, wo möglich, zuerst u durch v auszudrücken, weil dann die Potenz x^i oder $u^{\frac{i}{m}}$

leicht durch v, folglich wegen $v=\frac{y^k}{A_0}$, auch durch y ausgedrückt werden kann. Zu diesem Zwecke schreiben wir die letzte Gleichung in der Form

$$v=u(1+a_1u^r+a_2u^{2r}+a_3u^{3r}+\cdots)$$

und bestimmen hieraus

$$u=v\cdot\frac{1}{1+a_1u^r+a_2u^{2r}+a_3u^{3r}+\cdots}.$$

Setzen wir noch zur ferneren Vereinfachung $u^r=w$, so haben wir

$$u=v\cdot\frac{1}{1+a_1w+a_2w^2+a_3w^3+\cdots}.$$

Entwickeln wir den letzten Bruch (nach §. 317) in eine unendliche Reihe, so erhalten wir

$$u=v(1+\alpha_1w+\alpha'_1w^2+\alpha''_1w^3+\cdots),$$

wo die Coefficienten α_1, α'_1, α''_1, ... aus den bekannten a_1, a_2, a_3, ... ohne Schwierigkeit berechnet werden können. Setzen wir ferner den letzteren Ausdruck von u in die Gleichung $w=u^r$, so ergibt sich

$$w=v^r(1+\alpha_1w+\alpha'_1w^2+\alpha''_1w^3+\cdots)^r$$

oder, da die letzte Potenz nach dem binomischen Lehrsatze (§. 318) entwickelt die Function

$$1+\rho_1w+\rho_2w^2+\rho_3w^3+\cdots$$

darbietet, in welcher die Coefficienten ρ_1, ρ_2, ρ_3, ... durchgehends bekannte Ausdrücke sind,

$$w=v^r(1+\rho_1w+\rho_2w^2+\rho_3w^3+\cdots).$$

Nun ist nach dem Obigen

$$u=v+vw(\alpha_1+\alpha'_1w+\alpha''_1w^2+\cdots),$$

oder wenn wir für den ersten Factor w seinen Ausdruck schreiben,

$$u=v+v^{1+r}(1+\rho_1w+\rho_2w^2+\cdots)(\alpha_1+\alpha'_1w+\alpha''_1w^2+\cdots)$$

und nach verrichteter Multiplication

$$u=v+v^{1+r}(\alpha_1+\alpha_2w+\alpha'_2w^2+\alpha''_2w^3+\cdots)$$

oder $$u=v+\alpha_1v^{1+r}+v^{1+r}w(\alpha_2+\alpha'_2w+\alpha''_2w^2+\cdots).$$

Setzen wir auch hierin an die Stelle des ersten Factors w seinen Ausdruck, so erhalten wir

$$u=v+\alpha_1v^{1+r}+v^{1+2r}(1+\rho_1w+\rho_2w^2+\cdots)(\alpha_2+\alpha'_2w+\alpha''_2w^2+\cdots)$$

oder nach vollbrachter Multiplication

$$u=v+\alpha_1 v^{1+r}+\alpha_2 v^{1+2r}+v^{1+2r}w(\alpha_3+\alpha'_3 w+\alpha''_3 w^2+\cdots).$$

Wiederholen wir dieses Verfahren so weit als nöthig, so finden wir

$$u=v+\alpha_1 v^{1+r}+\alpha_2 v^{1+2r}+\alpha_3 v^{1+3r}+\alpha_4 v^{1+4r}+\alpha_5 v^{1+5r}+\cdots$$

als Resultat der Umkehrung der Reihe

$$v=u+a_1 u^{1+r}+a_2 u^{1+2r}+a_3 u^{1+3r}+a_4 u^{1+4r}+\cdots$$

Um noch x^i zu bestimmen, erwäge man, daß $x=u^{\frac{1}{m}}$, mithin $x^i=u^{\frac{i}{m}}$, oder, wenn man $\frac{i}{m}=q$ setzt, $x^i=u^q$ ist. Hiernach findet man

$$x^i=(v+\alpha_1 v^{1+r}+\alpha_2 v^{1+2r}+\cdot\cdot\cdot)^q \text{ oder}$$

$$=v^q(1+\alpha_1 v^r+\alpha_2 v^{2r}+\cdot\cdot\cdot)^q$$ oder, wenn man diese Potenz nach dem binomischen Lehrsatze (§. 318) entwickelt,

$$=v^q(1+\beta_1 v^r+\beta_2 v^{2r}+\beta_3 v^{3r}+\cdot\cdot\cdot),$$

nemlich

$$x^i=v^q+\beta_1 v^{q+r}+\beta_2 v^{q+2r}+\beta_3 v^{q+3r}+\cdot\cdot\cdot$$

Schreibt man hierin für v, q, r ihre Ausdrücke und

$$B_0,\ B_1,\ B_2,\ B_3,\cdot\cdot\cdot \text{ statt } \frac{1}{A_0{}^q},\ \frac{\beta_1}{A_0{}^{q+r}},\ \frac{\beta_2}{A_0{}^{q+2r}},\ldots;$$

so hat man endlich die verlangte Potenz

$$x^i=B_0 y^{\frac{k}{m}i}+B_1 y^{\frac{k}{m}(i+n)}+B_2 y^{\frac{k}{m}(i+2n)}+B_3 y^{\frac{k}{m}(i+3n)}+\cdots,$$

wo nur noch (nach §. 313) die Convergenz der gefundenen unendlichen Reihe zu untersuchen ist.

II. Um das hier in Anwendung gebrachte Rechnungsverfahren durch ein B e i s p i e l zu erläutern, soll die Reihe

$$y=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2\,.\,3}+\frac{x^4}{2\,.\,3\,.\,4}+\cdot\cdot\cdot$$

umgekehrt und x durch y ausgedrückt werden.

Hier ist

$$y=x\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2\,.\,3}+\frac{x^3}{2\,.\,3\,.\,4}+\cdot\cdot\cdot\right),$$

also

$$x=y\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2\,.\,3}+\frac{x^3}{2\,.\,3\,.\,4}+\cdots},$$

oder wenn die gebrochene Function in eine Reihe entwickelt wird,

$$x=y(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{720}x^4\ldots).$$

Daraus folgt

$$x=y+yx(-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}x-\frac{1}{720}x^3\ldots),$$ oder wenn man für den ersten Faktor x seinen Ausdruck schreibt,

$$x=y+y^2(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2\ldots)(-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}x-\frac{1}{720}x^3\ldots)$$

$$=y+y^2(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x-\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{180}x^3\ldots)$$ und

$$x=y-\frac{1}{2}y^2+y^2x\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{12}x+\frac{1}{180}x^2\ldots\right).$$

Hieraus findet man wieder

$$x=y-\frac{1}{2}y^2+y^3(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2\cdots)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{12}x+\frac{1}{180}x^2\ldots\right)$$

oder $x=y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+y^4x(-\frac{1}{4}+\frac{3}{40}x\cdots)$.

Die hinreichend ausgedehnte Fortsetzung der Rechnung gibt endlich $x=y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5-\frac{1}{6}y^6\ldots$, welche Reihe sicher convergirt, wenn der Zahlwerth von y kleiner als 1 ist.

Bei diesem Beispiele kann man sich leicht von der Richtigkeit des Resultates überzeugen. Setzt man nemlich in der Gleichung (3), (§. 321) $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}+\cdots=y$,

so verwandelt sie sich in $h^x=1+y$,

folglich ist $x=\mathrm{L}(1+y)$,

oder nach §. 322, Gleichung (6)

$$x=y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4+\cdots$$

III. Enthält die umzukehrende Reihe ein constantes Glied, ist nemlich in der vorgelegten Gleichung $m=0$, folglich

$$y^k=A_0+A_1x^n+A_2x^{2n}+A_3x^{3n}+\cdots,$$

so hat man

$$y^k - A_0 = A_1 x^n + A_2 x^{2n} + A_3 x^{3n} + \cdots,$$

oder wenn man $y^k - A_0 = z$ setzt,

$$z = A_1 x^n + A_2 x^{2n} + A_3 x^{3n} + \cdots,$$

wo die Umkehrung nach der früher beschriebenen Weise ausgeführt werden kann.

VI. Abschnitt.

Methode der unbestimmten Coefficienten.

§. 324.

I. Soll eine in der endlichen Form $Ax^a + Bx^b + Cx^c + \cdots + Mx^m$ auftretende Function einer Veränderlichen x, für jeden zwischen zwei bestimmten Grenzen α und β liegenden reellen Werth ihrer Veränderlichen, ohne daß eines ihrer Glieder unendlich groß ausfällt, verschwinden; so müssen ihre sämmtlichen Coefficienten $A, B, C, \ldots M$ Null sein. Besteht nemlich die Gleichung

$$Ax^a + Bx^b + Cx^c + \cdots + Mx^m = 0$$

für alle zwischen $x = \alpha$ und $x = \beta$ liegenden reellen Werthe von x, so ist $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, ... $M = 0$.

Denn wollte man die Richtigkeit dieser Behauptung nicht zugestehen, so sei r die Anzahl der Glieder der zu betrachtenden Function. Nun könnte man in der bestehenden Gleichung für die Variable x gewiß immer r verschiedene, von einander völlig unabhängige, zwischen α und β liegende Werthe von der Beschaffenheit setzen, daß keine der so gewonnenen Gleichungen eine Folge einer anderen ist. Aus diesen r Gleichungen ließen sich aber die nur in der ersten Potenz vorkommenden r Coefficienten A, B, C, ... M durch jene gewählten r Werthe von x bestimmen und die für sie gefundenen Ausdrücke in die supponirte Gleichung einführen. Könnten nun einige oder alle diese Coefficienten von Null verschieden ausfallen; so müßte die so modificirte Gleichung auch noch für jeden der unzähligen übrigen, zwischen α und β gelegenen, Werthe von x Statt finden und folglich eine Abhängigkeit jedes solchen Werthes von den früher substituirten r Werthen mit Bestimmtheit zu erkennen geben, welche Abhängigkeit jedoch schlechterdings undenkbar und ungereimt ist, weil sämmtliche zwischen α und β liegenden Werthe von x der Gleichung Genüge leisten sollen, mithin nicht von einander abhängig sein können. Werden dagegen alle Coefficienten ohne Ausnahme gleich Null, so tritt keine solche Ungereimtheit ein, folglich kann nur dieser Fall Statt finden.

II. Da dieser Satz nothwendig für jede noch so große Anzahl von Gliedern der Function $Ax^a+Bx^b+Cx^c+\cdots+Mx^m$ bewiesen ist, so läßt sich seine Giltigkeit auch dann noch zugestehen, wenn diese Function aus unendlich viel Gliedern besteht oder eine unendliche Reihe ist, und die Veränderliche x, falls diese Function insbesondere ganz, also keiner der Exponenten a, b, c, ... negativ wäre, alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ anzunehmen vermag. Gilt nemlich die Gleichung

$$Ax^a+Bx^b+Cx^c+\cdots=0,$$

deren erster Theil eine ganze Function ist, für alle möglichen Werthe von x, so hat man stets

$$A=0, \quad B=0, \quad C=0, \ldots$$

§. 325.

I. Sind zwei ganze Functionen, in denen die nach einander folgenden Potenzen der veränderlichen Größe dieselben Exponenten besitzen, für alle reellen Werthe dieser Veränderlichen gleich; so müssen die Coefficienten der gleichhohen Potenzen beider Functionen gleich sein. Ist nemlich für alle möglichen Werthe von x

$$Ax^a+Bx^b+Cx^c+\cdots=\alpha x^a+\beta x^b+\gamma x^c+\cdots,$$

so hat man $A=\alpha$, $B=\beta$, $C=\gamma$, ...

Denn dieser Gleichung läßt sich die Form

$$(A-\alpha)x^a+(B-\beta)x^b+(C-\gamma)x^c+\cdots=0$$

ertheilen, in welcher sie (vermög §. 324, I.) nur für

$$A-\alpha=0,\quad B-\beta=0,\quad C-\gamma=0,\ldots$$

nemlich für $A=\alpha$, $B=\beta$, $C=\gamma$, ... bestehen kann.

II. Auf diesen Satz gründet sich diejenige Verwandlungsweise der Functionen einer Veränderlichen, welche die Methode der unbestimmten Coefficienten heißt. Diese besteht dem Wesentlichen nach darin, daß man die zu verwandelnde Function einer anderen Function von gewählter Form, gewöhnlich einer nach den Potenzen der Variablen, meistens steigend, geordneten unendlichen Reihe gleich stellt, in dieser die vorkommenden unveränderlichen Coefficienten vorerst als unbekannt oder unbestimmt ansieht und nachher dadurch berechnet, daß man auf eigenthümliche Weisen, die jedoch nicht auf völlig bestimmte Regeln zurückgeführt werden können, zwei gleiche ganze Functionen derselben Veränderlichen aufzustellen sucht, sofort die Coefficienten der in ihnen erscheinenden gleichhohen Potenzen der Veränderlichen einander gleich setzt und aus diesen Gleichungen die in ihnen stehenden noch unbestimmten Coefficienten ermittelt.

III. Sollte aber die vorgelegte Function sich nicht auf die willkürlich gewählte Form zurückführen lassen, so wird dieses daraus erkannt, daß man bei Berechnung der unbestimmten Coefficienten auf Widersprüche stößt. Da man jedoch umgekehrt, wenn diese Coefficienten ohne Ungereimtheit sich bestimmen lassen, nicht immer mit voller Sicherheit behaupten kann, daß die gegebene Function die ihr zugedachte Form anzunehmen vermag; so ist es erforderlich, die Zulässigkeit dieser Form auf eine, von der einzuleitenden Rechnung unabhängige, Weise in vorhinein nachzuweisen, weil nur dadurch jeder weitere Zweifel sich beseitigen läßt. Um wenigstens in einigen von jenen Fällen, wo die gegebene Function in eine unendliche Reihe aufgelöst werden soll, diese Form schon voraus mit Bestimmtheit angeben zu können, dient folgender Lehrsatz.

Werden zwei oder mehrere Functionen von der Form $A+Bx^n+Cx^{2n}+Dx^{3n}+\cdots$, wo das von x unabhängige Glied A von Null verschieden und n reell ist, entweder zu einander addirt, oder von einander subtrahirt, oder mit einander multiplicirt, oder wird eine solche Function durch eine zweite dividirt, oder nach einem ganzen positiven Exponenten potenzirt, oder zieht man aus ihr eine durch einen ganzzahligen Exponenten angedeutete Wurzel, oder erhebt man sie zu einer von was immer für einem reellen rationalen oder irrationalen Exponenten angegebenen Potenz, so erhält man jederzeit wieder eine eben so gestaltete Function zum Resultate.

Die Richtigkeit dieses Satzes erhellet aus der unmittelbaren Ausführung und dem ununterbrochen gesetzmäßigen Fortschreiten der angeführten Operationen und läßt sich zu leicht nachweisen, als daß dies nicht dem Leser selbst überlassen bleiben sollte.

§. 326.

Schreiten wir nun zur Anwendung der Methode der unbestimmten Coefficienten und nehmen wir zum ersten Probleme

I. die Bestimmung der Partialbrüche gebrochener Functionen. Nach den in §. 315 gepflogenen Untersuchungen läßt sich die Form der Partialbrüche einer gebrochenen Function bestimmt angeben. Man wählt nemlich zu Nennern der Partialbrüche die Factoren des Nenners des zu zerlegenden Bruches so, daß kein Nenner eines Partialbruches mit jenen der übrigen einen gemeinschaftlichen Theiler habe; zum Zähler eines jeden einzelnen Partialbruches aber schreibt man eine ganze rationale mit unbestimmten Coefficienten ausgestattete Function, deren Dimension nur um 1 geringer als die ihres Nenners ist; endlich schreibt man, falls die zu zerlegende gebrochene Function unecht wäre, zu sämmtlichen Partialbrüchen noch eine ganze rationale Function bei, deren Dimension jene des Nenners zur Dimension des Zählers ergänzt. Bringt man nun aus der Gleichung, welche in dem einen Theile die zu zerlegende gebrochene Function und in dem andern alle ihre Partialbrüche sammt der ganzen Function enthält, die Nenner durch Multiplication hinweg; so gelangt man jeden Falls zur Gleichheit zweier ganzer rationaler Functionen, aus welcher sich die zur Ermittlung der noch unbestimmten Coefficienten erforderlichen Gleichungen folgern lassen. Da in diesen Gleichungen keiner dieser Coefficienten mit einem andern multiplicirt wird, so können diese Coefficienten und somit auch die verlangten Partialbrüche leicht gefunden werden.

1. Beispiel. Hat man den Bruch $\frac{1}{a^2x-x^3}$ in Partialbrüche aufzulösen, so setze man

$$\frac{1}{a^2x-x^3}=\frac{1}{x(a-x)(a+x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{a-x}+\frac{C}{a+x},$$

und beseitige die Nenner, wodurch man

$$1=A(a-x)(a+x)+B(a+x)x+C(a-x)x,$$

oder $1=a^2A+a(B+C)x+(-A+B-C)x^2$,

folglich $a^2A=1,\quad B+C=0,\quad -A+B-C=0,$

und somit $A=\frac{1}{a^2}$, $B=\frac{1}{2a^2}$, $C=-\frac{1}{2a^2}$ erhält.

Darnach ist $\frac{1}{a^2x-x^3}=\frac{1}{a^2x}+\frac{1}{2a^2(a-x)}-\frac{1}{2a^2(a+x)}$.

2. Beispiel. Der Bruch $\frac{1-x+2a^4x+x^2-2x^5}{a^2x-x^3}$ werde in Partialbrüche zerlegt. Hier setzt man

$$\frac{1-x+2a^4x+x^2-2x^5}{a^2x-x^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{a-x}+\frac{C}{a+x}+D+Ex+Fx^2,$$

folglich hat man

$$1-x+2a^4x+x^2-2x^5=a^2A+(aB+aC+a^2D)x+ \\ (-A+B-C+a^2E)x^2+(a^2F-D)x^3-Ex^4-Fx^5$$

und hieraus

$$a^2A=1,\ aB+aC+a^2D=2a^4-1,\ -A+B-C+a^2E=1, \\ a^2F-D=0,\ E=0,\ F=2.$$

Diese Gleichungen geben

$$A=\frac{1}{a^2},\ B=\frac{1-a+a^2}{2a^2},\ C=-\frac{1+a+a^2}{2a^2},\ D=2a^2, E=0, F=2,$$

und somit ist

$$\frac{1-x+2a^4x+x^2-2x^5}{a^2x-x^3}=\frac{1}{a^2x}+\frac{1-a+a^2}{2a^2(a-x)}-\frac{1+a+a^2}{2a^2(a+x)} \\ +2a^2+2x^2.$$

3. Beispiel. Soll der Bruch $\frac{3x^2+x-2}{(x-1)^3(x^2+1)}$ in Partialbrüche aufgelöst werden, so setzt man

$$\frac{3x^2+x-2}{(x-1)^3(x^2+1)}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{Dx+E}{x^2+1}$$

und findet den Bruch

$$=\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{5}{2(x-1)^2}-\frac{3}{2(x-1)}+\frac{3x-2}{2(x^2+1)},$$

somit durchgehends dieselben Resultate wie in §. 316.

II. Die Entwicklung gebrochener rationaler Functionen in recurrente Reihen wird, nach der Methode der unbestimmten Coefficienten, wie folgt, ausgeführt. Soll die Function $\frac{A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots}{B_0+B_1x+B_2x^2+\cdots}$ in eine unendliche Reihe umgestaltet werden, so besitzt diese (nach §. 325, II.) die Form $C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots$, so daß

$$\frac{A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots}{B_0+B_1x+B_2x^2+B_3x^3+\cdots}=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\cdots$$

gesetzt werden darf. Schafft man nun den Nenner weg, so wird

$$\begin{array}{rl|l|l|l}
A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots & & & & \\
=B_0C_0+ & B_0C_1 & x+B_0C_2 & x^2+B_0C_3 & x^3+\cdots \\
 & +B_1C_0 & +B_1C_1 & +B_1C_2 & \\
 & & +B_2C_0 & +B_2C_1 & \\
 & & & +B_3C_0 &
\end{array}$$

und hieraus findet man zur Bestimmung der Coefficienten $C_0, C_1, C_2, C_3, \cdots$ die Gleichungen

$$B_0C_0=A_0$$
$$B_0C_1+B_1C_0=A_1$$
$$B_0C_2+B_1C_1+B_2C_0=A_2$$
$$B_0C_3+B_1C_2+B_2C_1+B_3C_0=A_3$$

u. s. w.

III. Die Entwicklung der Potenz $(1+x)^n$ läßt sich für jeden reellen Exponenten n mit Hilfe unbestimmter Coefficienten auf folgende Weise finden. Vermög §. 325 II. ist man berechtigt,

$$(1+x)^n=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots+A_mx^m+\cdots$$

zu setzen. Das hier vorkommende unveränderliche Glied A_0 läßt sich sehr leicht durch den Umstand bestimmen, daß für $x=0$ die Potenz $(1+x)^n$ in 1^n oder 1, die angenommene Reihe aber in A_0 übergeht, wornach $A_0=1$ sein muß. Dadurch wird

$$(1+x)^n=1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdot\cdot\cdot+A_mx^m+\cdot\cdot\cdot$$

Zur Bestimmung des Coefficienten A_1 subtrahiren wir beiderseits 1 und dividiren durch x; dies gibt

$$\frac{(1+x)^n-1}{x}=A_1+A_2x+A_3x^2+\cdot\cdot\cdot$$

Lassen wir nun in dieser Gleichung x unendlich klein oder auch Null werden, so reducirt sich ihr zweiter Theil auf A_1, folglich ist A_1 der Werth des Verhältnisses $\frac{(1+x)^n-1}{x}$ für einen unendlich kleinen Werth von x oder für $x=0$.

Um aber unter dieser Voraussetzung den Werth dieses Verhältnisses zu finden, sei zuerst n eine ganze positive Zahl; dann gibt (nach §. 169, I.) die Theilung von $(1+x)^n-1$ oder von $[(1+x)-1][(1+x)^{n-1}+(1+x)^{n-2}+\cdots+(1+x)^2+(1+x)+1]$ durch x oder $(1+x)-1$ den Quotienten $(1+x)^{n-1}+(1+x)^{n-2}+\cdots+(1+x)^2+(1+x)+1$, welcher für $x=0$ in $1+1+1+\cdots+1+1+1$ oder n übergeht. Mithin hat man, wenn $x=0$ wird, $\frac{(1+x)^n-1}{x}=n$, so lange n ganz und positiv ist.

Besitzt aber n einen negativen ganzzahligen Werth m, ist nemlich $n=-m$, so wird

$$\frac{(1+x)^n-1}{x}=\frac{(1+x)^{-m}-1}{x}=\frac{1-(1+x)^m}{x(1+x)^m}$$
$$=-\frac{1}{(1+x)^m}\cdot\frac{(1+x)^m-1}{x}.$$

Da nun für $x=0$ der erste Factor des letzten Ausdruckes -1, der zweite aber m wird, so ist für $x=0$, das Verhältniß $\frac{(1+x)^n-1}{x}=-m$ oder $=n$, wie vorher.

Stellt ferner n einen rationalen Bruch $\frac{i}{k}$ vor, in welchem k nur eine positive, i aber eine positive oder negative ganze

Zahl ist, so wird

$$\frac{(1+x)^n-1}{x}=\frac{(1+x)^{\frac{i}{k}}-1}{x}=\frac{(\sqrt[k]{1+x})^i-1}{x}.$$

Da nun immerhin $\sqrt[k]{1+x}=1+u$, also $1+x=(1+u)^k$ und $x=(1+u)^k-1$ gesetzt werden kann, so hat man

$$\frac{(1+x)^n-1}{x}=\frac{(1+u)^i-1}{(1+u)^k-1}=[(1+u)^i-1]:[(1+u)^k-1]$$

oder auch $=\dfrac{(1+u)^i-1}{u}:\dfrac{(1+u)^k-1}{u}$.

Allein für $x=0$ wird auch $u=0$, und für diesen Werth reducirt sich im letzten Verhältnisse der Vorsatz auf i, der Nachsatz auf k, folglich ist für $x=0$ das Verhältniß $\dfrac{(1+x)^n-1}{x}=\dfrac{i}{k}$ oder $=n$, ebenfalls wie früher. — Ist endlich der Exponent n irrational, so dient er dem rationalen Bruche $\frac{i}{k}$ bei dem unendlichen Wachsen des Nenners k und des Zählers i als Grenze, folglich hat auch in diesem Falle das Verhältniß $\dfrac{(1+x)^n-1}{x}$ bei der unendlichen Abnahme von x zur Grenze den Exponenten n. Es ist demnach für $x=0$ bei jedem reellen Exponenten n,

$$\frac{(1+x)^n-1}{x}=n,\text{ daher auch } A_1=n,\text{ und sonach}$$

$$(1+x)^n=1+nx+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\cdots+A_mx^m+\cdots$$

Stellt nun y eine von x völlig unabhängige Veränderliche vor, so erhält man auf die nemliche Weise

$$(1+y)^n=1+ny+A_2y^2+A_3y^3+A_4y^4+\cdots$$

Multiplicirt man die letztere Gleichung mit $(1+x)^n$, so übergeht sie in

$$(1+x)^n(1+y)^n=(1+x)^n+n(1+x)^ny+A_2(1+x)^ny^2+\cdots$$

Allein der erste Theil dieser Gleichung ist auch

$$=[(1+x)(1+y)]^n=[1+x+(1+x)y]^n$$

$$=[1+x(1+\frac{1+x}{x}y)]^n$$

oder, wenn man in dem Ausdrucke von $(1+x)^n$ anstatt x die Größe $x(1+\frac{1+x}{x}y)$ setzt, hat man

$$(1+x)^n(1+y)^n=[1+x(1+\frac{1+x}{x}y)]^n$$
$$=1+nx(1+\frac{1+x}{x}y)+A_2x^2(1+\frac{1+x}{x}y)^2$$
$$+A_3x^3(1+\frac{1+x}{x}y)^3+\cdots+A_mx^m(1+\frac{1+x}{x}y)^m+\cdots$$

Entwickelt man nunmehr die im letzten Ausdrucke befindlichen Potenzen von $1+\frac{1+x}{x}y$ nach dem Muster der für $(1+x)^n$ aufgestellten Entwicklung, und ordnet man den ganzen Ausdruck nach y, so erfolgt

$$(1+x)^n(1+y)^n=1+nx+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_mx^m+\cdots$$
$$+y(1+x)(n+2A_2x+3A_3x^2\ldots+mA_mx^{m-1}+\ldots)$$
$$+y^2(1+x)^2(A_2+\cdots)+\cdots$$

Vergleicht man gegenwärtig die für $(1+x)^n(1+y)^n$ gewonnenen zwei Ausdrücke, in so fern man vorerst blos y als veränderlich, folglich die von ihr unabhängige Größe x als constant ansieht; so liefert die Gleichstellung der Coefficienten von y die Gleichung

$$(1+x)(n+2A_2x+3A_3x^2+4A_4x^3+\ldots+mA_mx^{m-1}+\ldots)=n(1+x)^n$$

oder, wenn man im ersten Theile die Multiplication verrichtet und im zweiten für $(1+x)^n$ seine Entwicklung schreibt,

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
n+2A_2 & x+3A_3 & x^2+4A_4 & x^3+\cdots+\;m\;A_m & x^{m-1}+\cdots \\
\;+\;n & \;+2A_2 & \;+3A_3 & \;+\cdots+(m-1)A_{m-1} & \;+\cdots
\end{array}$$
$$=n+nnx+nA_2x^2+nA_3x^3+\ldots+nA_{m-1}x^{m-1}+\ldots$$

Berücksichtigt man nunmehr die Veränderlichkeit von x, so erhält man hieraus die Gleichungen

$$\begin{array}{lcl}
2A_2+n\;=nn & & 2A_2=n(n-1) \\
3A_3+2A_2=nA_2 & & 3A_3=(n-2)A_2 \\
4A_4+3A_3=nA_3 & \text{oder} & 4A_4=(n-3)A_3 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
mA_m+(m-1)A_{m-1}=nA_{m-1} & & mA_m=(n-m+1)A_{m-1},
\end{array}$$

folglich $A_2 = \frac{n(n-1)}{1.2}$, $A_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$,

$$A_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}, \ldots$$

und allgemein $A_m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m}$.

Substituirt man diese Ausdrücke, so ergibt sich die bekannte Formel

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m}x^m + \ldots$$

IV. Entwicklung der Exponentialgrößen in Reihen. Soll die Exponentielle a^x mit Hilfe der Methode der unbestimmten Coefficienten in eine unendliche Reihe aufgelöst werden, so supponiren wir die Zulässigkeit folgender Gleichung

$$a^x = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n + \ldots,$$

welche für $x=0$, wo $a^0=1$ wird, nur bestehen kann, wenn $A_0=1$ ist, weßwegen

$$a^x = 1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_nx^n + \ldots,$$

sein muß. Vertauschen wir hierin die Veränderliche x mit der von ihr ganz unabhängigen Variablen y, so erhalten wir

$$a^y = 1 + A_1y + A_2y^2 + A_3y^3 + \ldots$$

Das Product dieser zwei Gleichungen ist

$$a^{x+y} = 1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_nx^n + \ldots$$
$$+ yA_1(1 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_{n-1}x^{n-1} + A_nx^n + \ldots)$$
$$+ y^2A_2(1 + A_1x + \ldots) + \ldots$$

Schreiben wir jedoch in obiger Entwicklung von a^x die Summe $x+y$ statt x, so erscheint

$$a^{x+y} = 1 + A_1(x+y) + A_2(x+y)^2 + A_3(x+y)^3 + \ldots$$
$$\ldots + A_n(x+y)^n + \ldots$$

oder, wenn wir die hier vorkommenden Potenzen von $x+y$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickeln und die Glieder nach y ordnen,

$$a^{x+y} = 1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_nx^n + \ldots$$
$$+ y(A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \ldots + nA_nx^{n-1} + \ldots)$$
$$+ y^2(A_2 + \ldots) + \ldots$$

Vergleichen wir nun diese zwei Ausdrücke von a^{x+y}, und nehmen dabei blos auf die Veränderlichkeit von y Rücksicht, indem wir vor der Hand x als unveränderlich betrachten, so liefert die Gleichhaltung der Coefficienten von y die Gleichung

$$A_1+2A_2x+3A_3x^2+\ldots+nA_nx^{n-1}+\ldots$$
$$=A_1+A_1A_1x+A_1A_2x^2+\ldots+A_1A_{n-1}x^{n-1}+\ldots,$$

aus welcher, wenn wir nunmehr die Veränderlichkeit von x eintreten lassen, die Gleichungen

$A_1=A_1$	mithin	$A_1=A_1$
$2A_2=A_1A_1$	die Coefficienten	$A_2=\dfrac{A_1^2}{1.2}$
$3A_3=A_1A_2$		$A_3=\dfrac{A_1^3}{1.2.3}$
. . . . .		. . . . .
$nA_n=A_1A_{n-1}$		$A_n=\dfrac{A_1^n}{1.2.3\ldots n}$

folgen. Dem bisher Gefundenen gemäß ist also

$$a^x=1+\frac{(A_1x)}{1}+\frac{(A_1x)^2}{1.2}+\frac{(A_1x)^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{(A_1x)^n}{1.2..n}+\ldots$$

und somit nur noch der Werth von A_1 zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke setzen wir $A_1x=z$, folglich $x=\frac{z}{A_1}$; dadurch verwandelt sich die letzte Gleichung in

$$a^{\frac{z}{A_1}}=1+z+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{z^4}{1.2.3.4}+\cdots$$

Wird hierin insbesondere $z=1$, so ergibt sich

$$a^{\frac{1}{A_1}}=1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\cdots,$$

in welcher Gleichung (nach §. 321) der zweite Theil nichts anderes als die von uns mit h bezeichnete Zahl 2,7182818 . . . ist, welche den natürlichen Logarithmen als Basis dient, weßwegen $a^{\frac{1}{A_1}}=h$ und $a=h^{A_1}$, mithin $A_1=\mathrm{L}a$ ist. Substituiren wir noch für A_1 diesen Werth La, so folgt endlich

$$a^x=1+\frac{(x\mathrm{L}a)}{1}+\frac{(x\mathrm{L}a)^2}{1.2}+\frac{(x\mathrm{L}a)^3}{1.2.3}+\frac{(x\mathrm{L}a)^4}{1.2.3.4}+\cdots$$

V. Entwicklung der Logarithmen in Reihen. Soll in einem logarithmischen Systeme, dessen Grundzahl a ist, und dessen Logarithmen wir durch Vorsetzung der Sylbe Log bezeichnen werden, der Logarithme des Binoms $1+x$ in eine unendliche Reihe entwickelt werden; so nehme man an, es könne diese Reihe, weil sie für $x=0$, eben so wie $\mathrm{Log}(1+x)$, verschwinden muß, die Form $A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots$ besitzen, folglich die Gleichung

$$\mathrm{Log}(1+x)=A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots+A_nx^n+\cdots$$

bestehen. Ersetzt man hierin die Veränderliche x durch eine von ihr ganz independente Variable y, so muß auch

$$\mathrm{Log}(1+y)=A_1y+A_2y^2+A_3y^3+\cdots,$$

somit, wenn man beide Gleichungen addirt,

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}(1+x)+\mathrm{Log}(1+y)=&A_1x+A_2x^2+\cdots+A_nx^n+\cdots\\&+A_1y+A_2y^2+\cdots\end{aligned}$$

sein. Es ist jedoch auch

$$\mathrm{Log}(1+x)+\mathrm{Log}(1+y)=\mathrm{Log}[(1+x)(1+y)]$$

$$=\mathrm{Log}[1+x+(1+x)y]=\mathrm{Log}[1+x(1+\frac{1+x}{x}y)],$$

und wenn man in der für $\mathrm{Log}(1+x)$ aufgestellten Entwicklung $x(1+\frac{1+x}{x}y)$ statt x schreibt,

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}(1+x)+\mathrm{Log}(1+y)=&A_1x(1+\frac{1+x}{x}y)+A_2x^2(1+\frac{1+x}{x}y)^2\\&+A_3x^3(1+\frac{1+x}{x}y)^3+\ldots+A_nx^n(1+\frac{1+x}{x}y)^n+\ldots\end{aligned}$$

oder endlich, wenn man die im zweiten Theile der Gleichung vorkommenden Potenzen entwickelt, und alles nach y ordnet,

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}(1+x)+\mathrm{Log}(1+y)=&A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_nx^n\\&+y(1+x)(A_1+2A_2x+3A_3x^2+\cdots+nA_nx^{n-1}+\ldots)\\&+y^2(1+x)^2(A_2+\cdots)+\cdots\end{aligned}$$

Hält man diese zwei Ausdrücke von $\mathrm{Log}(1+x)+\mathrm{Log}(1+y)$ an einander und setzt, indem man vorläufig blos y als veränderlich, x aber als constant ansieht, die in ihnen vorkommenden Coefficienten der ersten Potenz von y sich gleich; so hat man

$$(1+x)(A_1+2A_2x+3A_3x^2+\ldots+nA_nx^{n-1}+\ldots)=A_1$$

oder

$$\left.\begin{array}{c|c|c|c|c} A_1+2A_2 & x+3A_3 & x^2+4A_4 & x^3+\cdots+\;n\qquad A_n & x^{n-1}+ \\ +\;A_1 & +2A_2 & +3A_3 & +\cdots+(n-1)A_{n-1} & + \end{array}\right\}=A_1.$$

Läßt man gegenwärtig auch die Größe x veränderlich werden, so erhält man die Gleichungen

$$\begin{array}{lcl} A_1=A_1 & & A_1=\;\;A_1 \\ 2A_2+A_1=0 & \text{und hieraus die} & A_2=-\frac{1}{2}A_1 \\ 3A_3+2A_2=0 & \text{Coefficienten} & A_3=\;\;\frac{1}{3}A_1 \\ 4A_4+3A_3=0 & & A_4=-\frac{1}{4}A_1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ nA_n+(n-1)A_{n-1}=0 & & A_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}A_1. \end{array}$$

Sonach ist

$$\text{Log}\,(1+x)=A_1(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\ldots).$$

Um den Coefficienten A_1 zu bestimmen, bemerke man, daß, weil a die Basis des in Untersuchung stehenden Logarithmen ist,

$$a^{A_1(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\ldots)}=1+x$$

sein müsse; mithin ist auch

$$a^{A_1(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2\ldots)}=(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

oder, wenn die letzte Potenz (nach III.) entwickelt wird,

$$a^{A_1(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2\ldots.)}=1+1+\frac{1-x}{1.2}+\frac{(1-x)(1-2x)}{1.2.3}+\cdots$$

Läßt man hierin x ohne Ende abnehmen oder in Null übergehen, so erfolgt

$$a^{A_1}=1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots=2{,}7182818\ldots=h,$$

wornach $a=h^{\frac{1}{A_1}}$, mithin $\frac{1}{A_1}=\text{L}a$ und $A_1=\frac{1}{\text{L}a}$ wird.

Dem gemäß ist für die Logarithmen, denen die Grundzahl a angehört,

$$\mathrm{Log}(1+x)=\frac{1}{\mathrm{L}a}\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\ldots\right)$$

Für natürliche Logarithmen insbesondere ist $a=h$, $\mathrm{L}a=\mathrm{L}h=1$, daher $\mathrm{L}(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\ldots$

VI. Umkehrung der Reihen. Besteht zwischen einer Veränderlichen x und der von ihr abhängigen Größe y die Relation

$$y^k=A_0x^m+A_1x^{m+n}+A_2x^{m+2n}+A_3x^{m+3n}+\ldots$$

und soll umgekehrt die Potenz x^i durch die Variable y ausgedrückt werden; so kann diese (zu Folge §. 323) nur die Form

$$x^i=B_0y^{k\frac{i}{m}}+B_1y^{k\frac{i+n}{m}}+B_2y^{k\frac{i+2n}{m}}+B_3y^{k\frac{i+3n}{m}}+\ldots,$$

besitzen, in welcher blos noch die Coefficienten B_0, B_1, B_2, B_3,... zu bestimmen sind. In dieser Absicht bilden wir von y^k nach den Exponenten $\frac{i}{m}$, $\frac{i+n}{m}$, $\frac{i+2n}{m}$,... die Potenzen

$$y^{k\frac{i}{m}},\ y^{k\frac{i+n}{m}},\ y^{k\frac{i+2n}{m}},\ y^{k\frac{i+3n}{m}},\ldots$$

dadurch erhalten wir

$$y^{k\frac{i}{m}}=(A_0x^m+A_1x^{m+n}+A_2x^{m+2n}+\ldots)^{\frac{i}{m}}$$
$$=x^i(A_0+A_1x^n+A_2x^{2n}+\ldots)^{\frac{i}{m}}$$

oder weil die letzte Potenz (vermög §. 318 und 325, III.) die Form

$$a_0+a_1x^n+a_2x^{2n}+a_3x^{3n}+\ldots$$

annimmt, in welcher die Coefficienten a_0, a_1, a_2,... aus den Coefficienten A_0, A_1, A_2, ... bestimmt werden,

$$y^{k\frac{i}{m}}=x^i(a_0+a_1x^n+a_2x^{2n}+a_3x^{3n}+\ldots)$$
$$=a_0x^i+a_1x^{i+n}+a_2x^{i+2n}+a_3x^{i+3n}+\ldots$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}
y^{k\frac{i+n}{m}} &= x^{i+n}(A_0+A_1x^n+A_2x^{2n}+A_3x^{3n}+\dots)^{\frac{i+n}{m}}\\
&= x^{i+n}(b_0+b_1x^n+b_2x^{2n}+b_3x^{3n}+\dots)\\
&= b_0x^{i+n}+b_1x^{i+2n}+b_2x^{i+3n}+b_3x^{i+4n}+\dots\\
y^{k\frac{i+2n}{m}} &= x^{i+2n}(A_0+A_1x^n+A_2x^{2n}+A_3x^{3n}+\dots)^{\frac{i+2n}{m}}\\
&= x^{i+2n}(c_0+c_1x^n+c_2x^{2n}+c_3x^{3n}+\dots)\\
&= c_0x^{i+2n}+c_1x^{i+3n}+c_2x^{i+4n}+c_3x^{i+5n}+\dots\\
y^{k\frac{i+3n}{m}} &= x^{i+3n}(A_0+A_1x^n+A_2x^{2n}+\dots)^{\frac{i+3n}{m}}\\
&= x^{i+3n}(d_0+d_1x^n+d_2x^{2n}+\dots)\\
&= d_0x^{i+3n}+d_1x^{i+4n}+d_2x^{i+5n}+\dots
\end{aligned}$$

u. s. w.

Substituirt man nun diese Ausdrücke in jenem von x^i, so ergibt sich

$$x^i = a_0B_0x^i + \begin{array}{r|r|r|l}
a_1B_0 & x^{i+n}+a_2B_0 & x^{i+2n}+a_3B_0 & x^{i+3n}+\dots\\
+b_0B & +b_1B_1 & +b_2B_1 & +\dots\\
 & +c_0B_2 & +c_1B_2 & +\dots\\
 & & +d_0B_3 & +\dots
\end{array}$$

und hieraus folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&a_0B_0=1\\
&a_1B_0+b_0B_1=0\\
&a_2B_0+b_1B_1+c_0B_2=0\\
&a_3B_0+b_2B_1+c_1B_2+d_0B_3=0
\end{aligned}$$

u. s. w.

aus denen, weil $a_0, a_1, a_2, \dots b_0, b_1, b_2, \dots c_0, c_1, c_2, \dots d_0, d_1, d_2, \dots$ u. s. w. durch $A_0, A_1, A_2, \dots$ ausgedrückt sind, die Coefficienten $B_0, B_1, B_2, \dots$ leicht berechnet werden können.

Beispiel. Soll nach der Gleichung

$$y^3=\frac{x}{2}+\frac{1.x^2}{2.4}+\frac{1.3.x^3}{2.4.6}+\frac{1.3.5.x^4}{2.4.6.8}+\dots$$

die Potenz x^2 durch y ausgedrückt werden, so setzt man, weil

$k=3,\ m=1,\ n=1,\ i=2$ ist,

$$x^2=B_0y^6+B_1y^9+B_2y^{12}+B_3y^{15}+\dots$$

Erhebt man aber den Ausdruck von y^3 zur 2ten, 3ten, 4ten, u. s. w. Potenz und setzt die Ausdrücke dieser Potenzen in der letzten Gleichung, so verwandelt sich diese in

$$x^2 = \tfrac{1}{4}B_0 x^2 + \left.\begin{matrix}\tfrac{1}{8}B_0 \\ +\tfrac{1}{8}B_1\end{matrix}\right| x^3 + \left.\begin{matrix}\tfrac{5}{64}B_0 \\ +\tfrac{3}{32}B_1 \\ +\tfrac{1}{16}B_2\end{matrix}\right| x^4 + \left.\begin{matrix}\tfrac{7}{128}B_0 \\ +\tfrac{9}{128}B_1 \\ +\tfrac{1}{16}B_2 \\ +\tfrac{1}{32}B_3\end{matrix}\right| x^5 + \left.\begin{matrix}\tfrac{21}{512}B_0 \\ +\tfrac{7}{128}B_1 \\ +\tfrac{7}{128}B_2 \\ +\tfrac{5}{128}B_3 \\ +\tfrac{1}{64}B_4\end{matrix}\right| x^6 \begin{matrix}+\cdots \\ +\cdots \\ +\cdots \\ +\cdots \\ +\cdots\end{matrix}$$

Hieraus erhält man

$$\begin{array}{lcl}
\tfrac{1}{4}B_0 = 1 & & B_0 = 4 \\
B_0 + B_1 = 0 & \text{oder} & B_1 = -4 \\
5B_0 + 6B_1 + 4B_2 = 0 & & B_2 = 1 \\
7B_0 + 9B_1 + 8B_2 + 4B_3 = 0 & & B_3 = 0 \\
21B_0 + 28B_1 + 28B_2 + 20B_3 + 8B_4 = 0 & & B_4 = 0
\end{array}$$

und wenn man die Rechnung weiter ausdehnt, auch die späteren Coefficienten $=0$.

Sonach ist $x^2 = 4y^6 - 4y^9 + y^{12}$;

was man auch findet, wenn man bedenkt, daß die gegebene Gleichung nichts anders ist als

$$y^3 = 1 - \sqrt{1-x}.$$

VII. Abschnitt.

Differenz- und Summenreihen. Arithmetische Reihen. Figurirte Zahlen. Potenzreihen. Summirung einiger besonderer Reihen.

§. 327.

Differenzreihen.

Zieht man in einer Reihe oder auch in einer blos willkürlichen Folge von Größen, welche durch

(1) $\quad u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, u_{n+1}, \ldots$

bezeichnet werden mögen, jedes Glied von dem unmittelbar nachfolgenden ab; so erhält man eine Reihe von Differenzen, welche die Differenzreihe der vorgelegten Reihe genannt wird. Verfährt man mit dieser Reihe gerade so, wie mit der ersten und wiederholt dieses Verfahren beliebig oft, so gewinnt man nach und nach eine Kette von Reihen. Von diesen nennt man die anfänglich vorhandene die Hauptreihe und die aus ihr auf die vorbeschriebene Weise gewonnenen der Ordnung nach ihre 1ste, 2te, 3te, 4te, ... $r$te, ... Differenzreihe. Deutet man nun die Differenz zweier nach einander folgender Glieder dadurch an, daß man dem Subtrahend den Buchstaben Δ vorschreibt, welcher, wie der Buchstabe L bei der Bezeichnung der natürlichen Logarithmen, keineswegs einen Multiplicator, sondern ein bloses Operationszeichen vorstellt; so erhält man in der ersten Differenzreihe die Glieder

(2) $\Delta u_0,\ \Delta u_1,\ \Delta u_2,\ \Delta u_3,\ \ldots\ \Delta u_n,\ \ldots$

Nach der nemlichen Bezeichnung sind die Glieder der zweiten Differenzreihe

$$\Delta\Delta u_0,\ \Delta\Delta u_1,\ \Delta\Delta u_2,\ \Delta\Delta u_3,\ \ldots\ \Delta\Delta u_n,$$

oder, wenn man zur Abkürzung dem Buchstaben Δ die Anzahl seiner Wiederholungen, den Wiederholungsexponenten, rechts oben beischreibt,

(3) $\Delta^2 u_0,\ \Delta^2 u_1,\ \Delta^2 u_2,\ \Delta^2 u_3,\ \ldots\ \Delta^2 u_n,\ \ldots$

Auf dieselbe Art werden die Glieder der dritten Differenzreihe mit

(4) $\Delta^3 u_0,\ \Delta^3 u_1,\ \Delta^3 u_2,\ \Delta^3 u_3,\ \ldots\ \Delta^3 u_n,\ \ldots$

und allgemein jene der $r$ten Differenzreihe mit

(5) $\Delta^r u_0,\ \Delta^r u_1,\ \Delta^r u_2,\ \Delta^r u_3,\ \ldots\ \Delta^r u_n,\ \ldots$

bezeichnet, und dabei ist

(6)

$$\begin{array}{l|l||l}
\Delta u_0 = u_1 - u_0 & \Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0 & \Delta^r u_0 = \Delta^{r-1} u_1 - \Delta^{r-1} u_0 \\
\Delta u_1 = u_2 - u_1 & \Delta^2 u_1 = \Delta u_2 - \Delta u_1 & \Delta^r u_1 = \Delta^{r-1} u_2 - \Delta^{r-1} u_1 \\
\Delta u_2 = u_3 - u_2 & \Delta^2 u_2 = \Delta u_3 - \Delta u_2 & \Delta^r u_2 = \Delta^{r-1} u_3 - \Delta^{r-1} u \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\Delta u_n = u_{n+1} - u_n & \Delta^2 u_n = \Delta u_{n+1} - \Delta u_n & \Delta^r u_n = \Delta^{r-1} u_{n+1} - \Delta^{r-1} u_n
\end{array}$$

Hier übersieht man mit einem Blicke, was übrigens in der Anordnung der Subtractionen selbst begründet ist, daß jede Vertical-Columne in die nächst rechts folgende übergeht, wenn man allen ihren Gliedern den Buchstaben Δ vorsetzt, und daß jede Zeile in die unmittelbar unter ihr stehende sich verwandelt, wenn man in ihr alle Zeiger des Buchstaben u um 1 vermehrt. Zugleich ist aus dem Gange der Rechnung klar, daß man jede Differenzreihe, z. B. die $r$te, als eine Hauptreihe und die nachfolgende $r+1$te, $r+2$te, $r+3$te, . . . als die 1ste, 2te, 3te, . . . Differenzreihe derselben ansehen könne.

§. 328.

Da die Glieder jeder Differenzreihe aus jenen der nächst vorhergehenden berechnet werden, so müssen sie auch auf die Glieder der Hauptreihe sich zurückführen, folglich durch diese sich ausdrücken lassen, weßwegen wir gegenwärtig irgend ein Glied einer beliebigen Differenzreihe durch die Glieder der Hauptreihe allgemein darstellen wollen. Nach den Gleichungen (6) ist

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n \text{ und } \Delta^2 u_n = \Delta u_{n+1} - \Delta u_n,$$

ferner folgt aus der ersten Gleichung durch Erhöhung der Zeiger von u

$$\Delta u_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1},$$

daher ist

$$\Delta^2 u_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n.$$

Weiters hat man $\Delta^3 u_n = \Delta^2 u_{n+1} - \Delta^2 u_n$ und wegen der eben gefundenen Gleichung

$$\Delta^2 u_{n+1} = u_{n+3} - 2u_{n+2} + u_{n+1},$$

mithin auch

$$\Delta^3 u_n = u_{n+3} - 3u_{n+2} + 3u_{n+1} - u_n.$$

Dann ist $\Delta^4 u_n = \Delta^3 u_{n+1} - \Delta^3 u_n$ und wegen der letzten Gleichung

$$\Delta^3 u_{n+1} = u_{n+4} - 3u_{n+3} + 3u_{n+2} - u_{n+1},$$

folglich

$$\Delta^4 u_n = u_{n+4} - 4u_{n+3} + 6u_{n+2} - 4u_{n+1} + u_n.$$

Verfolgt man den Gang dieser Rechnung, so erkennt man bald, daß der vorhandene Zeichenwechsel ohne Störung fort bestehen muß, und daß, abgesehen von den Vorzeichen, der Coefficient jedes Gliedes in dem Ausdrucke einer Differenz gefunden wird, indem zu dem Coefficienten des eben so vielten Gliedes in dem Ausdrucke der unmittelbar vorhergehenden Differenz der vor demselben stehende addirt wird. Da nun in dem Ausdrucke der ersten Differenz Δu_n die Zahlwerthe der Coefficienten 1, 1 sind; so müssen nach (§.250,6.) die Coefficienten, welche in den Ausdrücken der nach einander kommenden Differenzen $\Delta^2 u_n$, $\Delta^3 u_n$, $\Delta^4 u_n$,... erscheinen, zugleich die den Exponenten 2, 3, 4, ... entsprechenden Binomial-Coefficienten sein. Man hat daher allgemein, wenn man der Kürze wegen die in §. 247 gewählte Bezeichnung der Binomial-Coefficienten anwendet,

$$(7)\quad \Delta^r u_n = u_{n+r} - \binom{r}{1} u_{n+r-1} + \binom{r}{2} u_{n+r-2} \cdots$$
$$+ (-1)^{r-1} \binom{r}{r-1} u_{n+1} + (-1)^r u_n.$$

§. 329.

Soll irgend ein Glied der Hauptreihe durch ein ihm vorangehendes u_m und durch die eben so vielten Glieder der nach einander folgenden Differenzreihen Δu_m, $\Delta^2 u_m$, $\Delta^3 u_m$, ... ausgedrückt werden; so läßt sich dieses auf folgende Weise leisten.

Nach den Gleichungen (6) ist

$$u_{m+1} = u_m + \Delta u_m, \qquad u_{m+2} = u_{m+1} + \Delta u_{m+1},$$

und wenn man jedem Gliede der ersten Gleichung den Buchstaben Δ vorschreibt, $\Delta u_{m+1} = \Delta u_m + \Delta^2 u_m$,

mithin auch $u_{m+2} = u_m + 2\Delta u_m + \Delta^2 u_m$.

Hieraus folgt wieder durch Vorsetzung des Buchstaben Δ

$$\Delta u_{m+2} = \Delta u_m + 2\Delta^2 u_m + \Delta^3 u_m,$$

und weil $u_{m+3} = u_{m+2} + \Delta u_{m+2}$

ist, $u_{m+3} = u_m + 3\Delta u_m + 3\Delta^2 u_m + \Delta^3 u_m$.

Setzt man diese Schlüsse fort und erwägt, daß die hier vorkommenden Coefficienten gerade so, wie die in der vorhergehenden Untersuchung aufgetretenen, gefunden werden, mithin wieder die Binomial-Coefficienten sind; so hat man

$$(8)\quad u_{m+r} = u_m + \binom{r}{1} \Delta u_m + \binom{r}{2} \Delta^2 u_m + \cdots$$
$$+ \binom{r}{r-2} \Delta^{r-2} u_m + \binom{r}{r-1} \Delta^{r-1} u_m + \Delta^r u_m.$$

Wird nun $m+r=n$, also $r=n-m$ gesetzt, so erfolgt, wofern $m<n$ ist,

(9) $u_n = u_m + \binom{n-m}{1}\Delta u_m + \binom{n-m}{2}\Delta^2 u_m + .. + \Delta^{n-m} u_m.$

Soll insbesondere $m=0$ sein; so ergibt sich

(10) $u_n = u_0 + \binom{n}{1}\Delta u_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 u_0 + \binom{n}{3}\Delta^3 u_0 + .. + \Delta^n u_0.$

§. 330.

Es läßt sich auch jedes Glied u_n der Hauptreihe durch ein ihm vorangehendes u_m und durch die eben so vielten Glieder von $r-1$ anfänglichen Differenzreihen, nemlich durch Δu_m, $\Delta^2 u_m$, $\Delta^3 u_m$, . . . $\Delta^{r-1} u_m$ und durch die von dem m ten Gliede bis zum $n-r$ ten fortlaufenden $n-r-m+1$ Glieder der r ten Differenzreihe, nemlich durch $\Delta^r u_m$, $\Delta^r u_{m+1}$, $\Delta^r u_{m+2}$, . . . $\Delta^r u_{n-r}$, ausdrücken. Denn nach den Gleichungen (6) ist

$$u_{m+r+1} = u_{m+r} + \Delta u_{m+r}$$

und aus Gl. (8) folgt durch das Vorschreiben des Buchstaben Δ

$$\Delta u_{m+r} = \Delta u_m + \binom{r}{1}\Delta^2 u_m + \binom{r}{2}\Delta^3 u_m + \cdots$$
$$+ \binom{r}{r-2}\Delta^{r-1} u_m + \binom{r}{r-1}\Delta^r u_m + \Delta^{r+1} u_m.$$

Addirt man diese Gleichung zur Gleichung (8) und berücksichtigt, daß (nach §. 250, 6.) $\binom{r}{p} + \binom{r}{p-1} = \binom{r+1}{p}$ und (nach Gl. 6) $\Delta^r u_m + \Delta^{r+1} u_m = \Delta^r u_{m+1}$ ist, so wird

$$u_{m+r+1} = u_m + \binom{r+1}{1}\Delta u_m + \binom{r+1}{2}\Delta^2 u_m + \cdots$$
$$+ \binom{r+1}{r-1}\Delta^{r-1} u_m + \binom{r}{r-1}\Delta^r u_m + \Delta^r u_{m+1}.$$

Hieraus erhält man wieder

$$\Delta u_{m+r+1} = \Delta u_m + \binom{r+1}{1}\Delta^2 u_m + \binom{r+1}{2}\Delta^3 u_m + \cdots$$
$$+ \binom{r+1}{r-2}\Delta^{r-1} u_m + \binom{r+1}{r-1}\Delta^r u_m + \binom{r}{r-1}\Delta^{r+1} u_m + \Delta^{r+1} u_{m+1},$$

welches, in die Gleichung $u_{m+r+2} = u_{m+r+1} + \Delta u_{m+r+1}$ gebracht, wegen $\Delta^r u_{m+1} + \Delta^{r+1} u_{m+1} = \Delta^r u_{m+2}$, den Ausdruck

$$u_{m+r+2} = u_m + \binom{r+2}{1}\Delta u_m + \binom{r+2}{2}\Delta^2 u_m + \cdots$$
$$+ \binom{r+2}{r-1}\Delta^{r-1} u_m + \binom{r+1}{r-1}\Delta^r u_m + \binom{r}{r-1}\Delta^r u_{m+1} + \Delta^r u_{m+2}$$

liefert. Darnach ergibt sich

$$\Delta u_{m+r+2} = \Delta u_m + \binom{r+2}{1}\Delta^2 u_m + \binom{r+2}{2}\Delta^3 u_m + \cdots$$
$$+ \binom{r+2}{r-2}\Delta^{r-1} u_m + \binom{r+2}{r-1}\Delta^r u_m + \binom{r+1}{r-1}\Delta^{r+1} u_m$$
$$+ \binom{r}{r-1}\Delta^{r+1} u_{m+1} + \Delta^{r+1} u_{m+2},$$

folglich, weil $u_{m+r+3} = u_{m+r+2} + \Delta u_{m+r+2}$ und $\Delta^r u_{m+2} + \Delta^{r+1} u_{m+2} = \Delta^r u_{m+3}$ ist,

$$u_{m+r+3} = u_m + \binom{r+3}{1}\Delta u_m + \binom{r+3}{2}\Delta^2 u_m + \cdots + \binom{r+3}{r-1}\Delta^{r-1} u_m$$
$$+ \binom{r+2}{r-1}\Delta^r u_m + \binom{r+1}{r-1}\Delta^r u_{m+1} + \binom{r}{r-1}\Delta^r u_{m+2} + \Delta^r u_{m+3}.$$

Die Fortsetzung dieser Schlüsse nebst der Bemerkung, daß allgemein $\Delta^r u_{m+i} + \Delta^{r+1} u_{m+i} = \Delta^r u_{m+i+1}$ ist, bietet den Ausdruck

$$u_{m+r+\varrho} = u_m + \binom{r+\varrho}{1}\Delta u_m + \binom{r+\varrho}{2}\Delta^2 u_m + \cdots + \binom{r+\varrho}{r-1}\Delta^{r-1} u_m$$
$$+ \binom{r+\varrho-1}{r-1}\Delta^r u_m + \binom{r+\varrho-2}{r-1}\Delta^r u_{m+1} + \cdots + \Delta^r u_{m+\varrho}.$$

Setzt man in demselben $m+r+\varrho = n$, also $r+\varrho = n-m$ und $m+\varrho = n-r$, so erhält man (11)

$$u_n = u_m + \binom{n-m}{1}\Delta u_m + \binom{n-m}{2}\Delta^2 u_m + \cdots + \binom{n-m}{r-1}\Delta^{r-1} u_m$$
$$+ \binom{n-m-1}{r-1}\Delta^r u_m + \binom{n-m-2}{r-1}\Delta^r u_{m+1} + \cdots + \Delta^r u_{n-r}$$

und insbesondere für $m = 0$,

(12) $$u_n = u_0 + \binom{n}{1}\Delta u_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 u_0 + \cdots + \binom{n}{r-1}\Delta^{r-1} u_0$$
$$+ \binom{n-1}{r-1}\Delta^r u_0 + \binom{n-2}{r-1}\Delta^r u_1 + \cdots + \Delta^r u_{n-r}.$$

§. 331.

Summenreihen.

Wird das in §. 327 beschriebene Verfahren umgekehrt, indem man statt der wiederholten Subtraction die Summirung so ausführt, daß man in der Hauptreihe (1) das erste Glied u_0 allein nimmt, dann hiezu das zweite Glied u_1 addirt, zur Summe $u_0 + u_1$ das dritte Glied u_2 gibt, und so der Ordnung nach immer wieder zur zuletzt erhaltenen Summe das folgende Glied zählt; so entsteht eine neue Reihe, welche die **summirende** oder **Summenreihe** der gegebenen oder Hauptreihe (1) heißt. Diesem Verfahren gemäß ist jedes Glied der Summenreihe die Summe von eben so viel Anfangsgliedern der Hauptreihe, als das wie vielte es ist. — Leitet man nun noch aus der eben gefundenen Summenreihe auf dieselbe Weise wieder ihre Summenreihe ab, so heißt diese die **zweite Summenreihe**, daher jene frühere auch die **erste Summenreihe** der Hauptreihe; und auf die nemliche Weise findet man die **dritte, vierte** Summenreihe, u. s. w.

Ein für die folgenden Untersuchungen wichtiger Satz fließt aus der Betrachtung der ersten Columne der Gleichungen (6), denen gemäß

$$u_1 = u_0 + \Delta u_0$$
$$u_2 = u_1 + \Delta u_1$$
$$u_3 = u_2 + \Delta u_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$u_n = u_{n-1} + \Delta u_{n-1}$$

ist; denn die Summe dieser Gleichungen bietet

$$u_n = u_0 + \Delta u_0 + \Delta u_1 + \Delta u_2 + \cdot \cdot \cdot + \Delta u_{n-1}$$

und für $u_0 = 0$

$$u_n = \Delta u_0 + \Delta u_1 + \Delta u_2 + \cdot \cdot \cdot + \Delta u_{n-1}$$

dar. Diese Gleichung weist nemlich nach, daß eine mit Null beginnende Hauptreihe

$$0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdot\cdot\cdot\cdot\ u_{n-1},\ u_n,\ \cdot\cdot\cdot$$

auch als die Summenreihe ihrer Differenzreihe

$$\Delta u_0,\ \Delta u_1,\ \Delta u_2, \ldots\ \Delta u_{n-1}, \ldots$$

sich ansehen läßt; wobei jedoch jedes Glied der Hauptreihe von den Anfangsgliedern der Differenzreihe um eines weniger in sich vereinigt, als die wie vielte Stelle es in der Hauptreihe einnimmt.

Da man nun auf die nemliche Weise, wie man von der Hauptreihe auf die erste Differenzreihe schloß, von dieser auf die zweite Differenzreihe, und von dieser wieder auf die dritte, u. s. w. schließen kann; so läßt sich leicht einsehen, daß die Hauptreihe (1) als die r te Summenreihe ihrer r ten Differenzreihe $\Delta^r u_0$, $\Delta^r u_1$, $\Delta^r u_2, \ldots$ angesehen werden kann, wenn nicht nur von der Hauptreihe, sondern auch von ihren ersten $r-1$

Differenzreihen das Anfangsglied Null ist, nemlich wenn die Glieder u_0, Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, ... $\Delta^{r-1} u_0$ Null sind, was nach der Gleichung (10) nur einzutreten vermag, wenn die ersten r Glieder $u_0, u_1, u_2, \ldots u_{r-1}$ der Hauptreihe selbst Nullen sind. In diesem Falle ist aber von den $n+1$ Gliedern $\Delta^r u_0$, $\Delta^r u_1$, $\Delta^r u_2, \ldots, \Delta^r u_n$ der $r$ten Differenzreihe die r te Summe das Glied u_{n+r} der Hauptreihe, für welches man der Gleichung (10) gemäß den Ausdruck

$$(13) \qquad u_{n+r} = \binom{n+r}{r} \Delta^r u_0 + \binom{n+r}{r+1} \Delta^{r+1} u_0 + \cdots + \Delta^{r+n} u_0$$

und nach der Gleichung (12) den Ausdruck

$$(14) \qquad u_{n+r} = \binom{n+r-1}{r-1} \Delta^r u_0 + \binom{n+r-2}{r-1} \Delta^r u_1 + \cdots + \Delta^r u_n$$

erhält.

Will man nun von der Hauptreihe (1) auf ihre r te Summenreihe, deren Glieder durch

$$(15) \qquad S^r u_0,\ S^r u_1,\ S^r u_2,\ S^r u_3, \ldots S^r u_n$$

bezeichnet werden mögen, übergehen; so wird man das Glied u_{n+r} in $S^r u_n$, dann in der Gleichung (13) die Differenzen $\Delta^r u_0$, $\Delta^{r+1} u_0$, $\Delta^{r+2} u_0, \ldots \Delta^{r+n} u_0$ in u_0, Δu_0, $\Delta^2 u_0, \ldots \Delta^n u_0$, in der Gleichung (14) aber die Differenzen $\Delta^r u_0$, $\Delta^r u_1$, $\Delta^r u_2, \ldots \Delta^r u_n$ in $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n$ umsetzen; darnach erhält man für das $n+1$ te Glied der r ten Summenreihe der Hauptreihe (1) die Ausdrücke

$$(16) \quad S^r u_n = \binom{n+r}{r} u_0 + \binom{n+r}{r+1} \Delta u_0 + \binom{n+r}{r+2} \Delta^2 u_0 + \cdots + \Delta^n u_0$$

$$(17) \quad S^r u_n = \binom{n+r-1}{r-1} u_0 + \binom{n+r-2}{r-1} u_1 + \binom{n+r-3}{r-1} u_2 + \cdots + u_n.$$

Insbesondere liefert die Gleichung (16) für $r=1$ die Summe von $n+1$ Gliedern der Hauptreihe durch ihr erstes und durch die ersten Glieder von n Differenzreihen ausgedrückt, nemlich

$$(18) \quad S u_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + u_n$$
$$= \binom{n+1}{1} u_0 + \binom{n+1}{2} \Delta u_0 + \binom{n+1}{3} \Delta^2 u_0 + \cdots + \Delta^n u_0.$$

§. 332.

Arithmetische Reihen.

Eine Reihe, bei welcher eine der Differenzreihen lauter gleiche Glieder enthält, heißt eine arithmetische und zwar vom

rten Range, wenn ihre $r$te Differenzreihe aus durchaus gleichen Gliedern besteht. Von einer solchen Reihe $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, \ldots$ läßt sich sowohl das allgemeine Glied u_n, als auch die Summenformel Su_n leicht durch ihr erstes Glied und durch das Anfangsglied ihrer Differenzreihen darstellen, wenn man in den Gleichungen (10) und (18) von der Differenz $\Delta^r u_0$ angefangen alle folgenden verschwinden, nemlich $\Delta^{r+1}u_0 = \Delta^{r+2}u_0 = \Delta^{r+3}u_0 = \cdot\ \cdot\ \cdot = 0$ sein läßt. Es ist nemlich das allgemeine oder $n+1$te Glied

(19) $$u_n = u_0 + \binom{n}{1}\Delta u_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 u_0 + \cdots + \binom{n}{r}\Delta^r u_0$$

und die Summe von $n+1$ Gliedern

(20)
$$Su_n = \binom{n+1}{1}u_0 + \binom{n+1}{2}\Delta u_0 + \binom{n+1}{3}\Delta^2 u_0 + \cdot\cdot + \binom{n+1}{r+1}\Delta^r u_0.$$

Will man mit m den Stellenzeiger des allgemeinen Gliedes der Reihe oder die Anzahl der summirten Glieder andeuten, so wird man $n+1=m$, daher $n=m-1$ setzen. Dann ist von der Reihe $u_0, u_1, u_2, \ldots u_{m-1}$, das $m$te Glied

(21) $$u_{m-1} = u_0 + \binom{m-1}{1}\Delta u_0 + \binom{m-1}{2}\Delta^2 u_0 + \cdots$$
$$+ \binom{m-1}{r}\Delta^r u_0$$

und die Summe von m Gliedern

(22) $$Su_{m-1} = \binom{m}{1}u_0 + \binom{m}{2}\Delta u_0 + \binom{m}{3}\Delta^2 u_0 + \cdot\cdot + \binom{m}{r+1}\Delta^r u_0$$

Verrichtet man in den zweiten Theilen der beiden letzten Gleichungen die Multiplicationen der Factoren der Binomial-Coefficienten und ordnet alles nach den Potenzen von m, so nehmen sie die Form an:

(23) $$u_{m-1} = a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + u_3 m^3 + \cdots + a_r m^r$$

(24) $$Su_{m-1} = A_1 m + A_2 m^2 + A_3 m^3 + A_4 m^4 + \cdots + A_{r+1} m^{r+1}.$$

Hieraus folgt, daß jeder Ausdruck von der Form
$$a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + \ldots + a_r m^r$$
das allgemeine Glied, und jeder Ausdruck von der Form
$$A_1 m + A_2 m^2 + A_3 m^3 + \ldots\ldots + A_{r+1} m^{r+1}$$
die Summe einer arithmetischen Reihe des $r$ten Ranges vorstellen könne. — Diese Bemerkung kann man benützen, um die Ausdrücke des allgemeinen Gliedes und der Summe einer arithmetischen Reihe

zu bestimmen, wenn man den Rang dieser Reihe, und im ersten Falle irgend welche $m+1$ Glieder, im anderen $m+1$ Anfangsglieder kennt. Man setzt nemlich in den allgemeinen Formen (23) und (24), indem man die daselbst vorkommenden Coefficienten für unbekannt ansieht, für den Stellenzeiger m sowohl, als auch für u_{m-1} und Su_{m-1} die $m+1$ zusammengehörigen bekannten Werthe und sucht dann aus diesen $m+1$ Gleichungen die noch unbestimmten $m+1$ Coefficienten, in Bezug auf welche jene Gleichungen durchgehends vom ersten Grade sind.

Zur Erläuterung dieses Paragraphen mögen folgende Beispiele dienen.

1. Beispiel. Man suche das allgemeine Glied und die Summe der arithmetischen Reihe dritten Ranges, welche mit den Gliedern 1, 4, 10, 20 anfängt. Bildet man in der Absicht, die Formeln (21) und (22) anzuwenden, ihre Differenzreihen, so beginnt die erste mit 3, 6, 10, die zweite mit 3, 4, die dritte mit 1; daher ist $u_0=1$, $\Delta u_0=3$, $\Delta^2 u_0=3$, $\Delta^3 u_0=1$. Bezeichnet man ferner das $m$te Glied dieser Reihe mit t_m und die Summe von m Gliedern mit s_m, so wird $u_{m-1}=t_m$, $Su_{m-1}=s_m$.

Substituirt man nunmehr diese Werthe in den Gleichungen (21) und (22), so findet man das allgemeine Glied

$$t_m=1+3(m-1)+3.\frac{(m-1)(m-2)}{2}+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3}$$

$$=\frac{1}{3}m+\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{6}m^3=\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3},$$

und die Summe

$$s_m=m+3\cdot\frac{m(m-1)}{2}+3\cdot\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}$$

$$=\frac{1}{4}m+\frac{11}{24}m^2+\frac{1}{4}m^3+\frac{1}{24}m^4=\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3.4}.$$

Will man sich aber der Gl. (23) und (24) bedienen, so setze man in ihnen $m=1$; 2; 3; 4, dann $u_{m-1}=t_m=1$; 4; 10; 20 und $Su_{m-1}=s_m=1$; 5; 15; 35; dadurch gewinnt man folgende Gleichungen

$$\begin{array}{ll}
1=a_0+a_1+a_2+a_3 & 1=A_1+A_2+A_3+A_4 \\
4=a_0+2a_1+4a_2+8a_3 & 5=2A_1+4A_2+8A_3+16A_4 \\
10=a_0+3a_1+9a_2+27a_3 & 15=3A_1+9A_2+27A_3+81A_4 \\
20=a_0+4a_1+16a_2+64a_3 & 35=4A_1+16A_2+64A_3+256A_4
\end{array}$$

und aus ihnen $a_0=0$, $a_1=\frac{1}{3}$, $a_2=\frac{1}{2}$, $a_3=\frac{1}{6}$;

$$A_1=\frac{1}{4},\ A_2=\frac{11}{24},\ A_3=\frac{1}{4},\ A_4=\frac{1}{24};$$

sofort wie oben $t_m=\frac{1}{3}m+\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{6}m^3$

$$s_m=\frac{1}{4}m+\frac{11}{24}m^2+\frac{1}{4}m^3+\frac{1}{24}m^4.$$

2. Beispiel. Bei einem geraden langen Kugelhaufen von n Schichten oder von der Eckseite n liegen im Rücken r Kugeln; dieser ruht auf 2 Zeilen, von denen jede $r+d$ Kugeln enthält. Dabei ist in einem langen beiderseits angelehnten Haufen $d=-1$, in einem einseitig angelehnten $d=0$, in einem frei stehenden $d=+1$, in einer dreiseitigen Pyramide $d=-1$, $r=n$, und in einer vierseitigen Pyramide $d=+1$, $r=1$. Diese 2 Zeilen ruhen auf 3 anderen von der Länge $r+2d$, die 3 wieder auf 4 Zeilen von der Länge $r+3d$, u. s. w. Man sucht die Anzahl Kugeln in der untersten oder $n$ten Schichte (Grundlage) b, und in dem ganzen Kugelhaufen s.

Hier hat man $u_{m-1}=b$, $Su_{m-1}=s$, $m=n$, $u_0=r$, $u_1=2(r+d)$, $u_2=3(r+2d)$, ...; daher findet man $\Delta u_0=r+2d$, $\Delta^2 u_0=2d$, $\Delta^3 u_0=0$, und wenn man diese Werthe in die Gleichungen (21) und (22) bringt,

$$b=r+(n-1)(r+2d)+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\cdot 2d=n[r+(n-1)d],$$

$$s=nr+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot(r+2d)+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot 2d$$

$$=\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{3r+2(n-1)d}{3}.$$

Setzt man dagegen in den Gl. (23) und (24) $u_{m-1}=b$, $Su_{m-1}=s$, ferner $m=1;\ 2;\ 3;\ u_{m-1}=r;\ 2(r+d);\ 3(r+2d)$ und $Su_{m-1}=r;\ 3r+2d;\ 6r+8d$; so erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} r&=a_0+a_1+a_2 \\ 2r+2d&=a_0+2a_1+4a_2 \\ 3r+6d&=a_0+3a_1+9a_2, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} r&=A_1+A_2+A_3 \\ 3r+2d&=2A_1+4A_2+8A_3 \\ 6r+8d&=3A_1+9A_2+27A_3, \end{aligned}$$

und hieraus $a_0=0,\ a_1=r-d,\ a_2=d,$

$$A_1=\frac{1}{2}r-\frac{1}{3}d,\ A_2=\frac{1}{2}r,\ A_3=\frac{1}{3}d,$$

folglich dieselben Ausdrücke von b und s wie vorher.

Bezeichnet man die Länge der Grundzeile mit g und den Inhalt eines Seitendreieckes mit $\triangle$, so ist bekanntlich $g=r+(n-1)d$, und $\triangle=\frac{n(n+1)}{2}$, mithin ergibt sich auch auf diese Weise die bekannte Formel $s=\triangle\cdot\frac{g+g+r}{3}$.

§. 333.

Figurirte Zahlen.

I. Bildet man von der Reihe

(25) $\quad 1,\ a,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots,$

indem man a irgend eine positive ganze Zahl vorstellen läßt, die nach einander kommenden Summenreihen, so sind diese folgende:

(26)
$$\begin{array}{lllll}
1, & 1+a, & 1+a, & 1+a, & 1+a,\ldots\\
1, & 2+a, & 3+2a, & 4+3a, & 5+4a,\ldots\\
1, & 3+a, & 6+3a, & 10+6a, & 15+10a,\ldots\\
1, & 4+a, & 10+4a, & 20+10a, & 35+20a,\ldots
\end{array}$$
u. s. w.

Diese Summenreihen liefern, von der 2ten angefangen, die figurirten Zahlen und zwar enthält die 2te, 3te, 4te, 5te,... Summenreihe die figurirten Zahlen der 1ten, 2ten, 3ten, 4ten,... Ordnung; man könnte sogar die Glieder der ersten Summenreihe als figurirte Zahlen der 0ten Ordnung ansehen. Soll nun von der Reihe der figurirten Zahlen der $m$ten Ordnung das allgemeine oder $n$te Glied t und die Summe s gesucht werden; so hat man nur zu erwägen, daß diese Reihe die $m+1$te Summenreihe der vorgelegten Hauptreihe, also t das $n$te Glied der $m+1$ten Summenreihe, und ihre Summe das Glied der folgenden $m+2$ten Summenreihe ist. Man wird daher in der Gleichung (17) $u_0=1, u_1=a,\ u_2=0,\ u_3=0,\ u_4=0,\ldots$; $n-1$ statt n, und wenn man $t=S^r u_n$ sucht, $m+1$ statt r, zur Bestimmung von $s=S^r u_n$ aber $m+2$ für r setzen. Auf diese Weise ergibt sich

(26) $t=\binom{n+m-1}{m}+\binom{n+m-2}{m}a,$

$$s=\binom{n+m}{m+1}+\binom{n+m-1}{m+1}a,$$

oder

(27) $t=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,m}+\frac{(n-1)n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,m}a$

$$s=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(m+1)}+\frac{(n-1)n(n+1)\ldots(n+m)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(m+1)}a$$

oder auch

(28) $t=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-2)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots m}[m+(n-1)(a+1)],$

$$s=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(m+1)}[m+1+(n-1)(a+1)].$$

II. Insbesondere nennt man die Reihe der figurirten Zahlen der 2 ten Ordnung

(29) $1,\ 3+a,\ 6+3a,\ 10+6a,\ 15+10a,\ldots\ldots$

auch noch die Reihe der Polygonalzahlen und zwar die Reihe der 3, 4, 5, 6, 7, ... i eckigen Zahlen oder der Trigonal- (Triangular-), Tetragonal- (Quadrat-), Pentagonal-, Hexagonal-, Heptagonal-Zahlen, u. s. w., je nachdem a die Werthe 0, 1, 2, 3, 4, ... $i-3$ erhält. Setzt man daher in der Reihe (29) für a diese Werthe, so findet man die Anfangsglieder, und wenn man in den Gleichungen (28) nicht nur für a die genannten Werthe, sondern auch noch $m=2$ setzt, das allgemeine Glied und die Summe folgender Reihen:

die Dreieck- oder Trigonalzahlen:

$$1+3+6+10+15+\cdots+\frac{n(n+1)}{1.2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3};$$

die Viereck- oder Tetragonalzahlen:

$$1+4+9+16+25+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3};$$

die Fünfeck- oder Pentagonalzahlen:

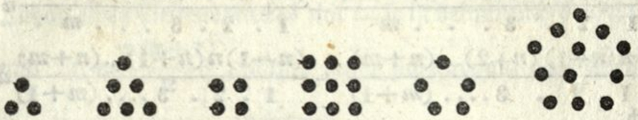
$$1+5+12+22+35+\cdots+\frac{n(3n-1)}{1.2}=\frac{n^2(n+1)}{1.2};$$

und allgemein die i-eckzahlen:

$$1+i+(3i-3)+(6i-8)+(10i-15)+\cdots$$
$$+\frac{n}{1.2}[2+(n-1)(i-2)]=\frac{n(n+1)}{1.2.3}[3+(n-1)(i-2)].$$

Narodna in univerzitetna knjižnica v Ljubljani

Die Benennung dieser Zahlen stammt daher, daß man eine durch eine Dreieck-, Viereck-, Fünfeckzahl, u. s. w. angegebene Menge von Puncten, kreisrunden Platten oder Scheiben, Kugeln, u. dgl. in ein regelmäßiges (gleichseitiges und gleichwinkliges) Dreieck, Viereck, Fünfeck, u. s. f. zusammenstellen kann; wie z. B.



3 6; 4 9; 5 12.

III. Ferner werden die figurirten Zahlen der 3ten Ordnung

(30) $1,\ 4+a,\ 10+4a,\ 20+10a,\ 35+20a, \ldots$ auch noch Pyramidalzahlen und zwar $3, 4, 5, 6, \ldots i$ seitige Pyramidalzahlen genannt, je nachdem a die Werthe $0, 1, 2, 3, \ldots i-3$ annimmt; weil sich eine von einer solchen Zahl angegebene Menge von gleich großen Kugeln in eine regelmäßige $3, 4, 5, 6, \ldots i$ seitige Pyramide, (deren Grundfläche ein regelmäßiges $3, 4, 5, 6, \ldots i$ eck und die Seitenflächen regelmäßige Dreiecke sind) schlichten lassen. Setzt man daher in der Reihe (30) und in den Gleichungen (28) $m=3$ und für a obige Werthe, so findet man

die dreiseitigen Pyramidalzahlen:

$$1+4+10+20+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4},$$

die vierseitigen Pyramidalzahlen:

$$1+5+14+30+\cdots+\frac{n(n+1)(2n+1)}{1\,.\,2\,.\,3}=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{3\,.\,4},$$

die fünfseitigen Pyramidalzahlen:

$$1+6+18+40+\cdots+\frac{n^2(n+1)}{1\,.\,2}=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4},$$

und die $i$seitigen Pyramidalzahlen:

$$1+(i+1)+(4i-2)+(10i-10)+\ldots\ldots$$
$$+\frac{n(n+1)\,[(n-1)i-(2n-5)]}{1\,.\,2\,.\,3}=\frac{n(n+1)(n+2)\,[(i-2)n-(i-6)]}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}.$$

IV. Endlich mag hier noch erwähnt werden, daß mehrere mathematische Schriftsteller unter den Reihen figurirter Zahlen jene verstehen, welche aus den Reihen (26) für den speciellen Werth $a=0$ hervorgehen, indem sie die 2te, 3te, 4te, 5te, ... Summenreihe der Reihe

(31) $\quad 1, \ 0, \ 0, \ 0, \ 0, \ \ldots$

oder die 1ste, 2te, 3te, 4te, ... summirende Reihe der aus lauter gleichen Gliedern bestehenden Reihe

(32) $\quad 1, \ 1, \ 1, \ 1, \ 1, \ \ldots$

die Reihe der figurirten Zahlen der 1sten, 2ten, 3ten, 4ten, ... Ordnung nennen. Nach ihnen ist demnach, wenn man in den Gleichungen (26) $a=0$ setzt, die Reihe der figurirten Zahlen der $m$ten Ordnung

$$1, (m+1), \frac{(m+1)(m+2)}{1.2}, \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3}, \ldots$$

ihr allgemeines Glied $t=\binom{n+m-1}{m}=\binom{n+m-1}{n-1}$

$$=\frac{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+n-1)}{1 \ . \ 2 \ . \ 3\ldots \ (n-1)},$$

und ihre Summe $s=\binom{n+m}{m+1}=\binom{n+m}{n-1}$

$$=\frac{(m+2)(m+3)(m+4)\ldots(m+n)}{1 \ . \ 2 \ . \ 3\ldots \ (n-1)}.$$

Insbesondere hat man, wenn $m=0, 1, 2, 3, \ldots$ gesetzt wird,

$$1+1+\ 1+\ 1+\cdots+1=n$$

$$1+2+\ 3+\ 4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{1.2}$$

$$1+3+\ 6+10+\cdots+\frac{n(n+1)}{1.2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$$

$$1+4+10+20+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$$

u. s. w.

§. 334.

Potenzreihen.

I. In manchen Fällen ist es von Vortheil, die Summe der $m$ten Potenzen einer arithmetischen Progression (ersten Ranges) zu kennen, in welcher a das erste Glied, d die Differenz und t das letzte Glied ist. Stellt man zu diesem Zwecke die erwähnte Summe durch $S(t^m)$ vor, so daß

$$S(t^m)=a^m+(a+d)^m+(a+2d)^m+\cdot\cdot\cdot\cdot+t^m$$

ist, und bezeichnet man für einen Augenblick das zweite Glied der arithmetischen Reihe mit b, das dritte mit c, u. s. w., endlich das vorletzte mit s, so ist

$$b=a+d,\ c=b+d, \dots\ t=s+d,$$

und daher, wenn man die Glieder der Reihe $b, c, \dots t, t+d$ zur $m+1$ten Potenz erhebt,

$$b^{m+1}=(a+d)^{m+1}=a^{m+1}+\binom{m+1}{1}a^m d+\binom{m+1}{2}a^{m-1}d^2 +\binom{m+1}{3}a^{m-2}d^3+\cdots$$

$$c^{m+1}=(b+d)^{m+1}=b^{m+1}+\binom{m+1}{1}b^m d+\binom{m+1}{2}b^{m-1}d^2 +\binom{m+1}{3}b^{m-2}d^3+\cdots$$

. . . .

$$t^{m+1}=(s+d)^{m+1}=s^{m+1}+\binom{m+1}{1}s^m d+\binom{m+1}{2}s^{m-1}d^2 +\binom{m+1}{3}s^{m-2}d^3+\cdots$$

$$(t+d)^{m+1}=t^{m+1}+\binom{m+1}{1}t^m d+\binom{m+1}{2}t^{m-1}d^2 +\binom{m+1}{3}t^{m-2}d^3+\cdots$$

Summirt man diese Gleichungen und bezeichnet die Summe der $m-1$ten, $m-2$ten, $m-3$ten, ... Potenzen der gegebenen arithmetischen Reihe durch $S(t^{m-1})$, $S(t^{m-2})$, $S(t^{m-3})$, ...; so erfolgt

$$(t+d)^{m+1}=a^{m+1}+\binom{m+1}{1}d\,S(t^m)+\binom{m+1}{2}d^2 S(t^{m-1}) +\binom{m+1}{3}d^3 S(t^{m-2})+\cdots$$

mithin auch

$$\binom{m+1}{1}d\,S(t^m)+\binom{m+1}{2}d^2 S(t^{m-1})+\binom{m+1}{3}d^3 S(t^{m-2})+\cdots =(t+d)^{m+1}-a^{m+1}.$$

Ersetzt man hierin den Exponenten m nach und nach durch $m-1$, $m-2$, $m-3$, ... so ergeben sich die Gleichungen

$$\binom{m}{1}d\,S(t^{m-1})+\binom{m}{2}d^2 S(t^{m-2})+\binom{m}{3}d^3 S(t^{m-3})+\cdots =(t+d)^m-a^m$$

$$\binom{m-1}{1}dS(t^{m-2})+\binom{m-1}{2}d^2S(t^{m-3})+\binom{m-1}{3}d^3S(t^{m-4})+$$
$$=(t+d)^{m-1}-a^{m-1}$$

$$\binom{m-2}{1}dS(t^{m-3})+\binom{m-2}{2}d^2S(t^{m-4})+\binom{m-2}{3}d^3S(t^{m-5})+$$
$$=(t+d)^{m-2}-a^{m-2}$$

u. s. w.

Addirt man nun jene Gleichung zu den aus ihr entsprungenen, nachdem man sie der Reihe nach mit solchen Zahlen $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$ multiplicirt hat, welche den Bedingungsgleichungen

$$\binom{m+1}{1}dA_0=1$$
$$\binom{m+1}{2}dA_0+\binom{m}{1}A_1=0$$
$$\binom{m+1}{3}d^2A_0+\binom{m}{2}dA_1+\binom{m-1}{1}A_2=0$$
$$\binom{m+1}{4}d^3A_0+\binom{m}{3}d^2A_1+\binom{m-1}{2}dA_2+\binom{m-2}{1}A_3=0$$

u. s. w.

Genüge leisten, so wird ihre Summe

$$S(t^m)=A_0[(t+d)^{m+1}-a^{m+1}]+A_1[(t+d)^m-a^m]$$
$$+A_1[(t+d)^{m-1}-a^{m-1}]+A_3[(t+d)^{m-2}-a^{m-2}]+\ldots$$

Dazu findet man aber aus den vorstehenden Bedingungsgleichungen

$$A_0=\frac{1}{(m+1)d}, \qquad A_1=-\frac{1}{2}$$
$$A_2=\frac{1}{6}\cdot\frac{d}{2}\binom{m}{1}, \qquad A_3=0$$
$$A_4=-\frac{1}{30}\cdot\frac{d^3}{4}\binom{m}{3}, \qquad A_5=0$$
$$A_6=\frac{1}{42}\cdot\frac{d^5}{6}\binom{m}{5}, \qquad A_7=0$$
$$A_8=-\frac{1}{30}\cdot\frac{d^7}{8}\binom{m}{7}, \qquad A_9=0$$
$$A_{10}=\frac{5}{66}\cdot\frac{d^9}{10}\binom{m}{9}, \qquad A_{11}=0, \quad \text{u. s. w.}$$

daher die letzte Gleichung durch Einführung dieser Werthe in folgende übergeht.

$$S(t^m)=\frac{(t+d)^{m+1}-a^{m+1}}{(m+1)d}-\frac{(t+d)^m-a^m}{2}$$

$$+\frac{1}{6}\cdot\frac{d}{2}\binom{m}{1}[(t+d)^{m-1}-a^{m-1}]-\frac{1}{30}\cdot\frac{d^3}{4}\binom{m}{3}[(t+d)^{m-3}-a^{m-3}]$$

$$+\frac{1}{42}\cdot\frac{d^5}{6}\binom{m}{5}[(t+d)^{m-5}-a^{m-5}]-\frac{1}{30}\cdot\frac{d^7}{8}\binom{m}{7}[(t+d)^{m-7}-a^{m-7}]$$

etc.

Die hier vorkommenden Zahlen

$$\frac{1}{6},-\frac{1}{30},\frac{1}{42},-\frac{1}{30},\frac{5}{66},\ldots.$$

werden die Bernouillischen Zahlen genannt, weil sie von Jakob Bernouilli zuerst in der Analysis entdeckt wurden. Wir wollen sie der Ordnung nach mit

$$B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, \ldots.$$

bezeichnen, so daß wir setzen

$$B_1=\frac{1}{6},\ B_2=-\frac{1}{30},\quad B_3=\frac{1}{42},\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_5=\frac{5}{66},\ldots$$

Trägt man diese Buchstaben in die letzte Gleichung ein, so erhält man die verlangte Summenformel

$$S(t^m)=a^m+(a+d)^m+(a+2d)^m+(a+3d)^m+\cdots+t^m$$

$$=\frac{(t+d)^{m+1}-a^{m+1}}{(m+1)d}-\frac{(t+d)^m-a^m}{2}$$

$$+B_1\frac{d}{2}\binom{m}{1}[(t+d)^{m-1}-a^{m-1}]+B_2\frac{d^3}{4}\binom{m}{3}[(t+d)^{m-3}-a^{m-3}]$$

$$+B_3\frac{d^5}{6}\binom{m}{5}[(t+d)^{m-5}-a^{m-5}]+B_4\frac{d^7}{8}\binom{m}{7}[(t+d)^{m-7}-a^{m-7}]$$

+etc.

Diesem Ausdrucke läßt sich noch eine andere Gestalt ertheilen, indem man erwägt, daß der obigen Bezeichnung gemäß

$$S[(t+d)^m]=a^m+(a+d)^m+(a+2d)^m+(a+3d)^m+\cdots$$
$$+t^m+(t+d)^m$$

$$=S(t^m)+(t+d)^m,$$ daher auch

$$= \frac{(t+d)^{m+1}-a^{m+1}}{(m+1)d} + \frac{(t+d)^m-a^m}{2}$$

$$+ B_1 \frac{d}{2}\binom{m}{1}[(t+d)^{m-1}-a^{m-1}] + \text{etc.}$$

ist, und man folglich gegenwärtig $t+d$ für das letzte Glied ansehen und es gleichfalls mit t bezeichnen, mithin t statt $t+d$ schreiben kann, wornach man erhält

$$S(t^m) = a^m + (a+d)^m + (a+2d)^m + (a+3d)^m + \cdots + t^m$$

$$= \frac{t^{m+1}-a^{m+1}}{(m+1)d} + \frac{t^m-a^m}{2}$$

$$+ B_1 \frac{d}{2}\binom{m}{1}(t^{m-1}-a^{m-1}) + B_2 \frac{d^3}{4}\binom{m}{3}(t^{m-3}-a^{m-3})$$

$$+ B_3 \frac{d^5}{6}\binom{m}{5}(t^{m-5}-a^{m-5}) + B_4 \frac{d^7}{8}\binom{m}{7}(t^{m-7}-a^{m-7})$$

$$+ \text{etc.}$$

II. Diese Reihe bricht für jeden positiven ganzzahligen Exponenten m mit jenem Gliede ab, in welchem der Exponent von t oder von a, für gerade Werthe von m, auf 1 und, für ungerade, auf 2 herabgesunken ist, für jeden anderen Exponenten läuft sie ohne Ende fort. Mit ihrer Hilfe lassen sich auch die Bernouillischen Zahlen berechnen; denn setzt man in der letzten Gleichung $a=0$, $d=1$, $t=1$, $m=2r$, indem man r ganz und positiv supponirt, also $S(t^m)=1$; so erhält man

$$1 = \frac{1}{2r+1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\binom{2r}{1}B_1 + \frac{1}{4}\binom{2r}{3}B_2 + \frac{1}{6}\binom{2r}{5}B_3 + \cdots$$

$$+ \frac{1}{2r-2}\binom{2r}{2r-3}B_{r-1} + B_r,$$

folglich

$$B_r = \frac{1}{2} - \frac{1}{2r+1} - \frac{1}{2}\binom{2r}{1}B_1 - \frac{1}{4}\binom{2r}{3}B_2 - \frac{1}{6}\binom{2r}{5}B_3 - \cdots$$

$$- \frac{1}{2r-2}\binom{2r}{2r-3}B_{r-1},$$

wornach jede Bernouillische Zahl aus allen vorhergehenden bestimmt werden kann.

§. 335.

Aus der gefundenen allgemeinen Summenform der $m$ten Potenzen der Glieder einer arithmetischen Reihe (ersten Ranges) ergibt sich nunmehr leicht die Summe der m ten Potenzen der natürlichen Zahlen, indem man nur $a=0$, $d=1$, $t=n$ setzt. Auf diese Weise erhält man allgemein

$$S(n^m)=1^m+2^m+3^m+\cdots\cdots+n^m$$

$$=\frac{n^{m+1}}{m+1}+\frac{n^m}{2}+B_1\binom{m}{1}\frac{n^{m-1}}{2}+B_2\binom{m}{3}\frac{n^{m-3}}{4}$$

$$+B_3\binom{m}{5}\frac{n^{m-5}}{6}+B_4\binom{m}{7}\frac{n^{m-7}}{8}+\cdots\cdots$$

und insbesondere

$$S(n^0)=n$$

$$S(n^1)=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}=\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}$$

$$S(n^2)=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$S(n^3)=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$S(n^4)=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}=\frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{2\,.\,3\,.\,5},\text{ u. s. w.}$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke läßt sich aus dem allgemeinen Gliede u_n einer Reihe, wenn dasselbe eine ganze und rationale Function des Stellenzeigers n, nemlich

$$u_n=a_0+a_1n+a_2n^2+\cdots+a_mn^m,$$

daher die Reihe selbst eine arithmetische vom m ten Range ist, die Summenformel Su_n leicht finden. Denn schreibt man diese Gleichung in der Form

$$u_n=a_0n^0+a_1n^1+a_2n^2+a_3n^3+\cdots+a_mn^m$$

und setzt für n die Zahlen 0, 1, 2, 3, ... n, so erhält man die Gleichungen

$$u_0=a_0.0^0+a_1.0^1+a_2.0^2+a_3.0^3+\cdots+a_m.0^m$$
$$u_1=a_0.1^0+a_1.1^1+a_2.1^2+a_3.1^3+\cdots+a_m.1^m$$
$$u_2=a_0.2^0+a_1.2^1+a_2.2^2+a_3.2^3+\cdots+a_m.2^m$$
$$u_3=a_0.3^0+a_1.3^1+a_2.3^2+a_3.3^3+\cdots+a_m.3^m$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_n=a_0.n^0+a_1.n^1+a_2.n^2+a_3.n^3+\cdots+a_m.n^m.$$

Die Addition dieser Gleichungen liefert

$$S(a_0+a_1n+a_2n^2+\cdots+a_m\,n^m)=a_0S(n^0)+a_1S(n^1)+a_2S(n^2)+\cdots$$
$$\cdots+a_mS(n^m),$$

worin nur noch für $S(n^0), S(n^1), \dots S(n^m)$ die eben gewonnenen Ausdrücke zu setzen sind.

Beispiel. Bei allen vollständig ausgeschichteten geraden Kugelhaufen liegen in der $n$ten Schichte von oben, wenn sich in der obersten Zeile r und in jeder darunter liegenden um d mehr befinden (vergleiche §. 332) n Zeilen zu $r+(n-1)d$ Kugeln, also zusammen $n[r+(n-1)d]=(r-d)n+dn^2$ Kugeln; daher ist der Inhalt des ganzen Haufens

$$s=S[(r-d)n+dn^2]=(r-d)S(n)+dS(n^2)$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}(r-d)+\frac{n(n+1)(2n+1)d}{2.3}=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{3r+2(n-1)d}{3}.$$

§. 336.

Summirung einiger besonderer Reihen.

I. Wenn jedes Glied einer arithmetischen Progression

$$a, \quad a+d, \quad a+2d, \dots\dots a+(n-1)d,$$

mit dem gleich vielten einer geometrischen Reihe

$$b, \quad bq, \quad bq^2, \quad \dots \quad bq^{n-1}$$

multiplicirt wird, so entsteht eine neue Reihe

$$ab, \; (a+d)bq, \; (a+2d)bq^2, \dots\dots [a+(n-1)d]bq^{n-1},$$

deren Summe s auf folgende Weise sich bestimmen läßt.

Multiplicirt man die Gleichung

$$s=ab+(a+d)bq+(a+2d)bq^2+\dots+[a+(n-1)d]bq^{n-1}$$

mit q und subtrahirt sie von der so entstehenden

$$qs=abq+(a+d)bq^2+(a+2d)bq^3+\dots+[a+(n-1)d]bq^n,$$

so findet man

$$(q-1)s=-ab-bdq-bdq^2-bdq^3-\dots-bdq^{n-1}-bdq^n+abq^n+nbdq^n$$

$$=ab(q^n-1)+nbdq^n-bdq\frac{q^n-1}{q-1}, \text{ (nach §. 244),}$$

folglich ist $s=\dfrac{ab(q^n-1)+nbdq^n}{q-1}-bdq\dfrac{q^n-1}{(q-1)^2}$

Darnach läßt sich z. B. die Summe der Reihe

$$a, \; 2a^2, \; 3a^3, \; 4a^4, \dots \; na^n$$

berechnen, wenn man in der eben gefundenen Formel $a=1$, $d=1$, $b=a$, $q=a$ setzt. Diese Summe ist nemlich

$$s=\frac{na^{n+2}-(n+1)a^{n+1}+a}{(a-1)^2}.$$

II. Wird dagegen die arithmetische Reihe

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots\ a+(n-1)d$$

durch die geometrische $b,\ bq,\ bq^2,\ \ldots\ldots bq^{n-1}$ gliederweise getheilt; so läßt sich die Summe der so entstehenden Reihe

$$\frac{a}{b},\ \frac{a+d}{bq},\ \frac{a+2d}{bq^2},\ \ldots\ldots\ \frac{a+(n-1)d}{bq^{n-1}}$$

aus der oben erhaltenen Summenformel finden, wenn man b in $\frac{1}{b}$ und q in $\frac{1}{q}$ übergehen läßt; dadurch wird nemlich die verlangte Summe $s=\frac{[a(q-1)+d](q^n-1)-nd(q-1)}{bq^{n-1}(q-1)^2}$.

Läßt man diese Reihe unter der Voraussetzung, daß $q>1$ sei, ins Unendliche auslaufen; so findet man ihre Summe, wenn man obigem Ausdrucke die Form

$$s=\frac{a(q-1)+d}{(q-1)^2}\cdot\frac{q}{b}\left(1-\frac{1}{q^n}\right)-\frac{d}{b}\,q(q-1)\frac{n}{q^n}$$

ertheilt und n ohne Ende wachsen läßt. Hiebei nimmt nicht nur $\frac{1}{q^n}$ unendlich ab, sondern auch der Bruch $\frac{n}{q^n}$, weil das Verhältniß $\frac{n+1}{q^{n+1}}:\frac{n}{q^n}$ seines nächst späteren Werthes zu ihm den Quotienten $\frac{1+\frac{1}{n}}{q}$ besitzt, welcher von einem gewißen Index n angefangen, sicher einmal kleiner als 1 ausfällt (§. 313); daher verschwindet das zweite Glied und diese Summe wird

$$s=\frac{a(q-1)+d}{(q-1)^2}\cdot\frac{q}{b}.$$

Beispiele.

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+\cdots=3$$

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}+\cdots=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{4}{6}+\frac{12}{18}+\frac{32}{54}+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{2}{2.\frac{3}{2}}+\frac{3}{2.\frac{9}{4}}+\frac{4}{2.\frac{27}{8}}+\cdots=\frac{9}{2}$$

$$0,\dot{1}2345679\dot{0}=\frac{1}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\cdots+\frac{7}{10^7}+\frac{8}{10^8}+\frac{9}{10^9}+\frac{10}{10^{10}}$$

$$+\cdots=\frac{10}{81}.$$

III. Soll die Summe der Reihe

$$\frac{a}{b(b+d)}, \frac{a}{(b+d)(b+2d)}, \frac{a}{(b+2d)(b+3d)}, \ldots \frac{a}{[b+(n-1)d](b+nd)}$$

gefunden werden; so zerfälle man (nach §. 316) jedes Glied, indem man b als veränderlich ansieht, in zwei Partialbrüche, oder was zu demselben Resultate führt, man zerlege das allgemeine Glied in zwei Partialbrüche und setze in dem so erhaltenen Ausdrucke

$$\frac{a}{d[b+(n-1)d]} - \frac{a}{d(b+nd)}$$

für n der Ordnung nach 1, 2, 3, ... Auf diese Weise nimmt die Summe der Reihe die Gestalt an

$$\begin{aligned} s = & \frac{a}{bd} - \frac{a}{d(b+d)} \\ & + \frac{a}{d(b+d)} - \frac{a}{d(b+2d)} \\ & + \frac{a}{d(b+2d)} - \frac{a}{d(b+3d)} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{a}{d[b+(n-1)d]} - \frac{a}{d(b+nd)} \end{aligned}$$

oder $$s = \frac{a}{bd} - \frac{a}{d(b+nd)} = \frac{na}{b(b+nd)}.$$

Läuft die Reihe ins Unendliche fort, so wird $n=\infty$ und

$$s = \frac{a}{bd}.$$

So ist z. B. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \ldots = 1$

$$\frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \frac{1}{9.11} + \ldots = \frac{1}{6}.$$

IV. Dasselbe Mittel verhilft auch zur Summe der Reihe

$$\frac{a}{b(b+d)(b+2d)}, \frac{a+c}{(b+d)(b+2d)(b+3d)}, \frac{a+2c}{(b+2d)(b+3d)(b+4d)}, \ldots$$

deren allgemeines Glied $t = \frac{a+(n-1)c}{[b+(n-1)d](b+nd)[b+(n+1)d]}$ ist; denn so findet man diese Summe

$$s=\frac{ad-bc}{2d^3b}+\frac{cd+bc-ad}{d^3(b+d)}+\frac{ad-2cd-bc}{2d^3(b+2d)}$$
$$+\frac{ad-bc}{2d^3(b+d)}+\frac{cd+bc-ad}{d^3(b+2d)}+\frac{ad-2cd-bc}{2d^3(b+3d)}$$
$$+\frac{ad-bc}{2d^3(b+2d)}+\frac{cd+bc-ad}{d^3(b+3d)}+\frac{ad-2cd-bc}{2d^3(b+4d)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{ad-bc}{2d^3[b+(n-2)d]}+\frac{cd+bc-ad}{d^3[b+(n-1)d]}+\frac{ad-2cd-bc}{2d^3(b+nd)}$$
$$+\frac{ad-bc}{2d^3[b+(n-1)d]}+\frac{cd+bc-ad}{d^3(b+nd)}+\frac{ad-2cd-bc}{2d^3[b+(n+1)d]}$$

oder

$$s=\frac{ad-bc}{2bd^3}+\frac{2cd+bc-ad}{2d^3(b+d)}+\frac{bc-ad}{2d^3(b+nd)}+\frac{ad-2cd-bc}{2d^3[b+(n+1)d]}$$
$$=\frac{(ad+2ab-bc)n+(ad+bc)n^2}{2b(b+d)(b+nd)[b+(n+1)d]}.$$

Für $n=\infty$ ist $s=\frac{ad+bc}{2bd^2(b+d)}$.

Z. B. $\frac{1}{1.3.5}+\frac{2}{3.5.7}+\frac{3}{5.7.9}+\frac{4}{7.9.11}+\ldots=\frac{1}{8}$

$\frac{1}{2.4.6}+\frac{3}{4.6.8}+\frac{5}{6.8.10}+\frac{7}{8.10.12}+\ldots=\frac{3}{32}$.

Setzt man $c=0$, so ist von der Reihe

$$\frac{a}{b(b+d)(b+2d)},\quad\frac{a}{(b+d)(b+2d)(b+3d)},\ldots$$
$$\frac{a}{[b+(n-1)d](b+nd)[b+(n+1)d]}$$

die Summe $s=\frac{(ad+2ab)n+adn^2}{2b(b+d)(b+nd)[b+(n+1)d]}$

und für $n=\infty$ wird $s=\frac{ad}{2bd^2(b+d)}$.

Z. B. $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\ldots=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{1.3.5}+\frac{1}{3.5.7}+\frac{1}{5.7.9}+\ldots=\frac{1}{12}$.

V. Die Summe der Reihe

$$\frac{a}{a+1}, \quad \frac{a+d}{(a+1)(a+1+d)}, \quad \frac{a+2d}{(a+1)(a+1+d)(a+1+2d)}, \ldots$$

deren allgemeines Glied $t = \dfrac{a+(n-1)d}{(a+1)(a+1+d)\ldots[a+1+(n-1)d]}$ ist, erhält man, wenn man in jedem Gliede zu dem Zähler 1 addirt und wieder abzieht, dann diesen zwei Theilen einzeln den Nenner unterschreibt und den ersten Bruch abkürzt. Es ist nemlich

$$s = 1 - \frac{1}{a+1}$$

$$+ \frac{1}{a+1} - \frac{1}{(a+1)(a+1+d)}$$

$$+ \frac{1}{(a+1)(a+1+d)} - \frac{1}{(a+1)(a+1+d)(a+1+2d)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{1}{(a+1)\ldots[a+1+(n-2)d]} - \frac{1}{(a+1)\ldots[a+1+(n-1)d]}$$

oder $\quad s = 1 - \dfrac{1}{(a+1)(a+1+d)\ldots[a+1+(n-1)d]}.$

Für $n=\infty$ wird $s=1$.

Z. B. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2.3} + \dfrac{3}{2.3.4} + \dfrac{4}{2.3.4.5} + \ldots = 1$

$\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3.5} + \dfrac{6}{3.5.7} + \dfrac{8}{3.5.7.9} + \ldots = 1.$

VI. Die Schwierigkeiten, welche sich der allgemeinen Summation der Reihen entgegenstellen, gaben Veranlassung, auf den in §. 231 angedeuteten Umstand, daß man eine Reihe kennt, sobald ihre Summenformel gegeben ist, eine (jedoch mehr sinnreiche als brauchbare) Summirungsweise von Reihen zu gründen.

Man nimmt nemlich, um sich eine Sammlung von summirten Reihen zu verschaffen, beliebige von dem Stellenzeiger n abhängige Functionen als Summenformeln von Reihen an, die man findet, indem man in diesen Functionen n durch $n-1$ ersetzt, diese Resultate von den angenommenen Functionen abzieht und in den Resten als den Ausdrücken der allgemeinen Glieder jener Reihen $n=1, 2, 3, 4, \ldots$ setzt.

Eine solche Function von n, welche die Summe einer Reihe vorstellen soll, muß aber mit dem Stellenzeiger n zugleich verschwinden. Denn gibt $f(n)$ die Summe einer Reihe an, so ist $f(n)-f(n-1)$ ihr allgemeines Glied, welches für $n=1$ auch die Summe von einem einzigen Gliede darbieten muß; weßwegen $f(1)-f(0)=f(1)$, nemlich $f(0)=0$ wird.

Nimmt man z. B. den mit n verschwindenden Ausdruck $(1+2n+3n^2)2^n-1$ für die Summenformel einer Reihe an, so ist ihr allgemeines Glied

$$t=(1+2n+3n^2)2^n-1-\left\{[1+2(n-1)+3(n-1)^2]\,2^{n-1}-1\right\}$$

oder $t=n(8+3n)2^{n-1}$

und die Reihe selbst beginnt mit 11, 56, 204, 640, 1840, 4992, ...

daher ist $11+56+204+640+1840+4992+\cdot\cdot\cdot+n(8+3n)2^{n-1}$
$=(1+2n+3n^2)2^n-1$.

VIII. Abschnitt.

Interpolation.

§. 337.

I. Sei wieder wie in §. 327

(1) $\quad u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots$

eine beliebige Folge oder Reihe von Größen, und man denke sich zwischen je zwei Glieder dieser Reihe $m-1$ Glieder so eingeschaltet (interpolirt), daß eine neue Reihe entsteht, deren Glieder mit

(2) $\quad v_0, v_1, v_2, \ldots v_{m-1}, v_m, v_{m+1}, \ldots v_{2m-1}, v_{2m}, v_{2m+1}, \ldots v_n, \ldots$

bezeichnet werden sollen, von denen jedoch die Glieder

(3) $\quad v_0,\ v_m,\ v_{2m},\ v_{3m},\ \ldots$

mit jenen der Reihe (1) übereinkommen.

Deutet man, in der Absicht für die zu interpolirenden Glieder einen allgemeinen Ausdruck aufzufinden, die Differenzen der neuen Reihe (2) durch den Buchstaben δ an, so läßt sich jedes beliebige Glied v_n dieser Reihe (nach §. 329, Gl. 10) auf folgende Weise ausdrücken.

(4) $$v_n=v_0+\binom{n}{1}\delta v_0+\binom{n}{2}\delta^2 v_0+\binom{n}{3}\delta^3 v_0+\cdot\cdot\cdot$$

Sollen nun in diesem Ausdrucke die Differenzen $\delta v_0, \delta^2 v_0, \delta^3 v_0, \ldots.$ der Reihe (2) wo möglich durch die Differenzen $\triangle u_0, \triangle^2 u_0, \triangle^3 u_0, \ldots.$ der Reihe (1) ersetzt werden; so erwäge man, daß (nach §. 328, Gl. 7)

$$(5)\ \triangle u_0 = u_1 - u_0 = v_m - v_0$$
$$\triangle^2 u_0 = u_2 - 2u_1 + u_0 = v_{2m} - 2v_m + v_0$$
$$\triangle^3 u_0 = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0 = v_{3m} - 3v_{2m} + 3v_m - v_0$$
$$\triangle^4 u_0 = u_4 - 4u_3 + 6u_2 - 4u_1 + u_0 = v_{4m} - 4v_{3m} + 6v_{2m} - 4v_m + v_0$$
etc.

ferner, daß (nach §. 329, Gl. 10)

$$(6)\ v_m = v_0 + \binom{m}{1}\delta v_0 + \binom{m}{2}\delta^2 v_0 + \binom{m}{3}\delta^3 v_0 + \binom{m}{4}\delta^4 v_0 + \cdots$$
$$v_{2m} = v_0 + \binom{2m}{1}\delta v_0 + \binom{2m}{2}\delta^2 v_0 + \binom{2m}{3}\delta^3 v_0 + \binom{2m}{4}\delta^4 v_0 + \ldots$$
$$v_{3m} = v_0 + \binom{3m}{1}\delta v_0 + \binom{3m}{2}\delta^2 v_0 + \binom{3m}{3}\delta^3 v_0 + \binom{3m}{4}\delta^4 v_0 + \ldots$$
$$v_{4m} = v_0 + \binom{4m}{1}\delta v_0 + \binom{4m}{2}\delta^2 v_0 + \binom{4m}{3}\delta^3 v_0 + \binom{4m}{4}\delta^4 v_0 + \ldots$$
etc.

ist, folglich die Gleichungen (5) durch Substitution der letzten Ausdrücke in folgende übergehen:

$$(7)\quad \triangle u_0 = \binom{m}{1}\delta v_0 + \binom{m}{2}\delta^2 v_0 + \binom{m}{3}\delta^3 v_0 + \binom{m}{4}\delta^4 v_0 + \cdots$$
$$\triangle^2 u_0 = m^2\delta^2 v_0 + m^2 \cdot \frac{3m-3}{3}\delta^3 v_0 + m^2 \cdot \frac{7m^2-18m+11}{3.4}\delta^4 v_0 + \ldots$$
$$\triangle^3 u_0 = m^3\delta^3 v_0 + m^3 \cdot \frac{6m-3}{4}\delta^4 v_0 + \cdots$$
$$\triangle^4 u_0 = m^4\delta^4 v_0 + \cdots$$
. . . .

Subtrahirt man nunmehr, in der oben angedeuteten Absicht, die Gleichung (4) von der Summe der Gleichungen (7), nachdem man diese mit den dergestalt gearteten unbestimmten Multiplicatoren $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ multiplicirt hat, daß sie die Gleichungen

$$(8)\ -\binom{n}{1} + \binom{m}{1}A_1 = 0$$
$$-\binom{n}{2} + \binom{m}{2}A_1 + m^2 A_2 = 0$$
$$-\binom{n}{3} + \binom{m}{3}A_1 + m^2\,\frac{3m-3}{3}A_2 + m^3 A_3 = 0$$
$$-\binom{n}{4} + \binom{m}{4}A_1 + m^2 \cdot \frac{7m^2-18m+11}{3.4}A_2 + m^3 \cdot \frac{6m-3}{4}A_3 + m^4 A_4 = 0$$
. . . .

erfüllen; so erhält man

$$-v_n+A_1\Delta u_0+A_2\Delta^2u_0+A_3\Delta^3u_0+A_4\Delta^4u_0+\cdots=-v_0,$$

daher wegen $v_0=u_0$

$$(9)\qquad v_n=u_0+A_1\Delta u_0+A_2\Delta^2u_0+A_3\Delta^3u_0+A_4\Delta^4u_0+\cdots$$

Die Gleichungen (8) liefern aber für die Multiplicatoren A_1, A_2, A_3, A_4, ... die Ausdrücke

$$(10)\qquad A_1=\frac{n}{m}=\binom{\frac{n}{m}}{1}$$

$$A_2=\frac{n(n-m)}{1.2.m^2}=\binom{\frac{n}{m}}{2}$$

$$A_3=\frac{n(n-m)(n-2m)}{1.2.3.m^3}=\binom{\frac{n}{m}}{3}$$

$$A_4=\frac{n(n-m)(n-2m)(n-3m)}{1.2.3.4.m^4}=\binom{\frac{n}{m}}{4}$$

u. s. w.; deßwegen ist auch

$$(11)\quad v_n=u_0+\binom{\frac{n}{m}}{1}\Delta u_0+\binom{\frac{n}{m}}{2}\Delta^2u_0+\binom{\frac{n}{m}}{3}\Delta^3u_0+\cdots,$$

wofern von einer gewissen Differenzreihe an alle folgenden verschwinden.

Bedenkt man nun einerseits, daß der zweite Theil dieser Gleichung aus jenem der in §. 329 gefundenen Gleichung (10), nemlich aus

$$(12)\quad u_n=u_0+\binom{n}{1}\Delta u_0+\binom{n}{2}\Delta^2u_0+\binom{n}{3}\Delta^3u_0+\binom{n}{4}\Delta^4u_0+\cdots$$

erhalten wird, wenn man hierin n mit $\frac{n}{m}$ vertauscht, und anderseits, daß die Indices der Glieder der Reihe (1) die $m$ten Theile der Indices der Glieder der Reihe (3), nemlich jener Glieder der Reihe (2) sind, deren Indices durch m theilbar sind; so kann man sich erlauben, die aus der Reihe (1), durch Einschaltung von $m-1$ neuen Gliedern zwischen jede zwei unmittelbar auf einander folgende Glieder, erzeugte Reihe (2) auch durch die Zeichen

$$u_0,\ u_{\frac{1}{m}},\ u_{\frac{2}{m}},\ u_{\frac{3}{m}},\ldots u_{1-\frac{1}{m}},\ u_1,\ u_{1+\frac{1}{m}},\ldots u_{2-\frac{1}{m}},\ u_2,\ u_{2+\frac{1}{m}},\ldots u_{\frac{n}{m}},\ldots$$

vorzustellen, indem man nemlich mittels der durch m gebrochenen Zeiger auf die angeführte Einschaltung dergestalt hinweist, daß allgemein das mit $u_{i+\frac{k}{m}}$ bezeichnete Glied eigentlich das $k$te von den zwischen u_i und u_{i+1} eingeschalteten (interpolirten) $m-1$ Gliedern darstellt. Auf diese Weise dehnt man die Giltigkeit der Gleichung $v_n = u_{\frac{n}{m}}$, welche eigentlich nur da, wo n durch m theilbar ist, Statt findet, auf alle, selbst auf jene Fälle aus, wo n durch m nicht ohne Rest sich theilen läßt, und erklärt daher die aus (11), durch Substitution von $u_{\frac{n}{m}}$ statt v_n hervorgehende Gleichung

$$(13)\quad u_{\frac{n}{m}} = u_0 + \binom{\frac{n}{m}}{1}\Delta u_0 + \binom{\frac{n}{m}}{2}\Delta^2 u_0 + \binom{\frac{n}{m}}{3}\Delta^3 u_0 + \cdots$$

für sämmtliche ganzzahligen positiven Werthe von m und n giltig, wenn anders von einer bestimmten Differenzreihe angefangen alle übrigen verschwinden.

II. Will man die Einschaltung nicht nach dem Gliede u_0, sondern erst nach dem Gliede u_r beginnen, so läßt sich dies so ansehen, als interpolirte man nicht in der Reihe (1), sondern in der Reihe

$$u_r,\ u_{r+1},\ u_{r+2},\ u_{r+3},\ldots$$

daher es einleuchtet, daß die zur Darstellung eines eingeschalteten Gliedes dienende Gleichung aus (13) gewonnen werde, wenn man sämmtliche Zeiger von u um r vergrößert, folglich u_0 in u_r und $u_{\frac{n}{m}}$ in $u_{r+\frac{n}{m}}$ übergehen läßt. Auf diese Weise erhält man

$$(14)\quad u_{r+\frac{n}{m}} = u_r + \binom{\frac{n}{m}}{1}\Delta u_r + \binom{\frac{n}{m}}{2}\Delta^2 u_r + \binom{\frac{n}{m}}{3}\Delta^3 u_r + \cdots$$

oder

$$(15)\quad u_{r+\frac{n}{m}} = u_r + \frac{n}{m}\Delta u_r + \frac{n(n-m)}{1.2.m^2}\Delta^2 u_r + \frac{n(n-m)(n-2m)}{1.2.3\,m^3}\Delta^3 u_r + \cdots$$

Diese Gleichung, nach deren Anleitung die in der Reihe (1), von dem Gliede u_r angefangen, zwischen je zwei Nachbarglieder einzuschaltenden $m-1$ Zwischenglieder berechnet werden können, pflegt man die allgemeine Interpolationsformel zu nennen. Sie setzt für ihre Anwendung voraus, daß die Differenzen Δu_r, $\Delta^2 u_r$, $\Delta^3 u_r, \ldots$ der gegebenen Reihe, wenigstens von einer bestimmten an, fortwährend abnehmen, so daß eine von ihnen entweder völlig Null werde oder wenigstens ohne merklichen Fehler der Null gleich geachtet, mithin die vorgelegte Reihe nahe genug für eine arithmetische angesehen werden darf. Ist die Reihe eine arithmetische, also eine dieser Differenzen bestimmt Null, so kann n beliebig groß gewählt werden; wenn dies jedoch blos angenähert richtig ist, so pflegt man, um mehr Sicherheit in das Rechnungsresultat zu bringen, nur immer zwischen die Glieder u_r und u_{r+1} einzuschalten, folglich $n<m$ oder $\frac{n}{m}$ einen echten Bruch sein zu lassen.

Setzt man noch in der Gleichung (14) zur einfacheren Darstellung derselben n statt $r+\frac{n}{m}$, so erhält man

$$(16) \quad u_n = u_r + \binom{n-r}{1}\Delta u_r + \binom{n-r}{2}\Delta^2 u_r + \binom{n-r}{3}\Delta^3 u_r + \cdots,$$

welche mit Gl. (8) in §. 329 der Form nach übereinkommt; wobei nur noch zu bemerken ist, daß die Differenz $n-r$ jeden positiven rationalen Bruch vorzustellen vermag, welcher, wie eben erwähnt wurde, in jenen Fällen echt ist, wo die vorgelegte Reihe nicht vollkommen arithmetisch ist.

§. 338.

Man wendet die Interpolation vorzüglich bei jenen Reihen an, von denen die Art ihres Fortschreitens entweder gar nicht bekannt oder wenigstens sehr verwickelt ist, wenn man einige ihrer Glieder bereits bestimmt hat und noch andere zwischen sie hinein fallende suchen will. Hiebei muß jedoch eine ihrer nach einander kommenden Differenzreihen nahe genug aus gleichen Gliedern bestehen, mithin die nächstfolgende nur Glieder enthalten, die wenig von Null differiren.

1. **Beispiel.** Sollen zwischen jede zwei benachbarte Glieder der Reihe 1, 25, 81, 169, 289, 441, 625, ... drei neue Glieder so eingeschaltet werden, daß dadurch eine nach demselben Gesetze fortlaufende Reihe entstehe; so hat man:

Hauptreihe	1, 25, 81, 169, 289, 441, 625,...
erste Differenzreihe	24, 56, 88, 120, 152, 184, ...
zweite Differenzreihe	32, 32, 32, 32, 32, ...,

daher ist für die Anwendung der Formel (15)

$r=0,\ u_0=1,\ \Delta u_0=24,\ \Delta^2 u_0=32,\ \Delta^3 u_0=\ldots=0,\ m-1=3,\ m=4$

und sonach

$$u_{\frac{n}{4}}=1+\frac{n}{4}\cdot 24+\frac{n(n-4)}{1.2.4^2}\cdot 32=1+6n+n^2-4n$$

oder

$$u_{\frac{n}{4}}=(n+1)^2.$$

Setzt man hierin

$n=(0),\ 1,\ 2,\ 3,\ (4),\ 5,\ 6,\ 7,\ (8),\ 9,\ 10,\ 11,\ (12),\ldots$

so erhält man die Reihe

(1), 4, 9, 16, (25), 36, 49, 64, (81), 100, 121, 144, (169),..

in welcher die eingeklammerten Glieder die der gegebenen Reihe, die übrigen aber die zwischen sie eingeschalteten sind.

2. Beispiel. Man denke sich die Briggischen Logarithmen blos von den unter 100 liegenden ganzen Zahlen in 7 Decimalstellen berechnet und es werde verlangt, daß man die Mantisse von log 9463 mittels der Interpolation suche, ohne die Gesetze des Fortschreitens dieser Mantissen zu kennen oder zu berücksichtigen. Dieser Forderung kann auf folgende Weise entsprochen werden.

Da die Briggischen logarithmischen Mantissen blos von den Ziffern der decadisch geschriebenen Zahlen, nicht aber von der Stellung des Decimalstriches abhängen; so wird man diesen in der gegebenen Zahl 9463 so stellen, daß die zu seiner Linken stehende ganze Zahl unter denjenigen Zahlen sich befindet, deren Logarithmen man kennt, oder was dasselbe ist, man wird von dem Briggischen Logarithmen der Zahl 94,63 die Mantisse suchen. Dem gemäß ist die hier zu betrachtende Hauptreihe die der Mantissen von den Logarithmen der Zahlen

94, 95, 96, 97, 98, ...

nemlich die Reihe

9731279, 9777236, 9822712, 9867717, 9912261, ...

Von ihr ist die erste Differenzreihe

45957, 45476, 45005, 44544, ...

die zweite Differenzreihe

—481, —471, —461, ...

die dritte Differenzreihe

10, 10, ...

Bei dieser kann man stehen bleiben, da ihre Glieder sehr nahe gleich ausfallen. Weil nun hier die Mantisse von log 94,63 oder von $\log\left(94 \frac{63}{100}\right)$ zu suchen ist; so hat man zwischen die Mantissen der Logarithmen von 94 und 95 eigentlich 100—1=99 Glieder einzuschalten und von diesen das 63 ste zu bestimmen; folglich ist für die Formel (15)

$$r=94,\ m=100,\ n=63,\ u_r=9731279,\ \triangle u_r=45957,$$

$$\triangle^2 u_r=-481,\ \triangle^3 u_r=10,\ \triangle^4 u_r=\triangle^5 u_r=\ldots=0,$$

$u_{r+\frac{n}{m}}$=mant log 94,63; daher auch

$$
\begin{array}{rl}
u_r = & 9731279 \\
\frac{n}{m}\triangle u_r = & 28952{,}9 \\
-\frac{n(m-n)}{1.2.m^2}\triangle^2 u_r = & 56{,}0 \\
\frac{n(m-n)(2m-n)}{1.2.3m^3}\triangle^3 u_r = & 0{,}5 \\
\hline
\end{array}
$$

mant log 94,63 = 9760288,

welches Resultat selbst noch in der letzten Stelle richtig ist.

§. 339.

Das Problem der Interpolation läßt sich auch noch von einem anderen Gesichtspuncte aus betrachten. Nach den von uns (in §. 337) gepflogenen Untersuchungen enthält die Formel

$$(16)\quad u_n=u_r+\binom{n-r}{1}\triangle u_r+\binom{n-r}{2}\triangle^2 u_r+\binom{n-r}{3}\triangle^3 u_r+\cdots$$

das allgemeine und vollständige Verfahren der Interpolation, wofern n jede positive Rationalzahl vorstellt, und von einer bestimmten Differenz an alle folgenden Null werden. Entwickelt man nun den zweiten Theil dieser Gleichung nach den Potenzen von n, so erscheint er, wofern die m te Differenzreihe entweder ganz oder wenigstens nahe gleiche Glieder enthält, folglich die gegebene Hauptreihe eine arithmetische vom m ten Range ist, in der Form

$$(17) \qquad u_n = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdot \cdot \cdot + a_m n^m$$

einer ganzen rationalen Function von n, welche endlich und vom m ten Grade ist. Die Aufgabe der Interpolation besteht demnach auch blos in der Auffindung dieser Function, welche entweder völlig oder wenigstens hinreichend genau die gesuchten Glieder der Reihe darstellt.

Wenn sonach allgemein eine veränderliche Größe y von einer anderen x auf irgend eine noch unbekannte Weise abhängt, jedoch für einige Werthe $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ der Grundveränderlichen x die entsprechenden Werthe $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots y_m$ der abhängigen Veränderlichen y bekannt sind; so läßt sich der Sinn des Interpolations-Problems auch so auffassen, daß man die Art der Abhängigkeit der Größe y von x, nemlich in der Gleichung $y=f(x)$ die Form der Function $f(x)$, entweder wo möglich ganz genau oder doch wenigstens mit hinreichender Richtigkeit, ermitteln solle. Zu diesem Zwecke setzt man

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdot \cdot \cdot + a_m x^m,$$

nemlich man wählt für y eine ganze rationale Function von x, welche aus eben so viel Gliedern besteht, als wie viel Paare zusammengehöriger Größen von x und y bekannt sind, und bestimmt ihre unbekannten Coefficienten $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_m$, indem man in der angenommenen Gleichung jene Paare correspondirender Werthe substituirt und die so erhaltenen Gleichungen nach den bekannten Methoden auflöst.

Beispiel. Man habe mit einem Bombenmörser unter einerlei Elevationswinkel mit den Ladungen von
20, 30, 40, 50, 60 Loth Pulver die Wurfweiten von
80, 260, 420, 550, 650 Klafter erreicht, und soll die Wurfweiten bestimmen, welche man mit den zwischen 20 und 60 Lothen liegenden verschiedenen Pulverladungen erreichen würde.

Zu diesem Zwecke bezeichne man mit x irgend eine in Lothen angegebene Pulverladung und mit y die mit ihr zu erreichende Wurfweite, und setze, da zu den hier gegebenen 5 Paaren zusammengehöriger Werthe von x und y (weil ohne Ladung keine Wurfweite erreicht wird) noch das 6ste Paar $x=0$ und $y=0$ sich gesellt,

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5,$$

oder auch, da wegen $x=0$ und $y=0$ auch $A=0$ sein muß, blos

$$y=Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5.$$

Hierin setzt man $x=20;\ 30;\ 40;\ 50;\ 60;$
und $y=80;\ 260;\ 420;\ 550;\ 650;$
dann noch zur Vereinfachung der Bestimmung der Coefficienten

$$B=\alpha,\ C=\frac{\beta}{10},\ D=\frac{\gamma}{100},\ E=\frac{\delta}{1000},\ F=\frac{\varepsilon}{10000};$$

darnach erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
8&=2\alpha+4\beta+8\gamma+16\delta+32\varepsilon\\
26&=3\alpha+9\beta+27\gamma+81\delta+243\varepsilon\\
42&=4\alpha+16\beta+64\gamma+256\delta+1024\varepsilon\\
55&=5\alpha+25\beta+125\gamma+625\delta+3125\varepsilon\\
65&=6\alpha+36\beta+216\gamma+1296\delta+7776\varepsilon.
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$\alpha=-\frac{3456}{144},\ \beta=\frac{3398}{144},\ \gamma=-\frac{883}{144},\ \delta=\frac{106}{144},\ \varepsilon=-\frac{5}{144},$$

daher

$$B=-\frac{3456}{144},\ C=\frac{3398}{1440},\ D=-\frac{883}{14400},\ E=\frac{106}{144000},\ F=-\frac{5}{1440000}$$

und sonach

$$y=\frac{-6912000x+679600x^2-17660x^3+212x^4-x^5}{288000}.$$

So z. B. findet man für die Ladung von 45 Lothen, wenn man $x=45$ setzt, die Wurfweite $y=488$ Klafter.

§. 340.

In der letzt erwähnten Darstellung gestattet das Interpolations-Problem noch eine andere bemerkenswerthe Lösung. Seien wieder

$y_0, \quad y_1, \quad y_2, \ldots \quad y_m$

die $m+1$ Werthe von y, welche den besonderen Werthen

$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \ldots \quad x_m$

der Veränderlichen x entsprechen. Erwägt man nun, daß in der allgemeinen Interpolationsformel (§. 337, Gl. 15) die Größen $y_0, y_1, y_2, \ldots y_m$ in keiner höheren Potenz als in der ersten erscheinen können; so bleibt es immerhin verstattet, den allgemeinen Ausdruck von y in der Gestalt

$$y = X_0 y_0 + X_1 y_1 + X_2 y_2 + \cdot \cdot \cdot + X_m y_m$$

zu schreiben, indem man unter den Factoren $X_0, X_1, X_2, \ldots X_m \ldots$ solche Functionen von x begreift, daß die erste X_0 blos für $x = x_0$ auf 1, für jeden andern Werth von x aber auf Null, die zweite X_1 nur für $x = x_1$ auf 1, für alle übrigen Werthe von x dagegen auf Null sich reducirt, und kurz, daß jede Function X_n nur für $x = x_n$ in 1, für jeden anderen Werth von x aber in Null übergehe.

Soll aber eine Function X_n so bestimmt werden, daß sie, den Werth x_n ausgenommen, bei welchem sie $=1$ wird, für sämmtliche Werthe $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots x_m$ verschwinde; so muß sie (nach §. 288, III.) durch das Product

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})(x - x_{n+1}) \ldots (x - x_m)$$

theilbar sein, folglich, wenn K eine von x unabhängige Größe vorstellt, die Form

$$X_n = K(x - x_0)(x - x_1) \ldots \ldots (x - x_{n-1})(x - x_{n+1}) \ldots \ldots (x - x_m)$$

besitzen. Damit aber für $x = x_n$ auch noch $X_n = 1$ werde, muß

$$1 = K(x_n - x_0)(x_n - x_1) \ldots (x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n+1}) \ldots (x_n - x_m)$$

sein, daher erhält man, indem man die vorhergehende Gleichung durch diese dividirt,

$$X_n = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})(x - x_{n+1}) \ldots (x - x_m)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \ldots (x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n+1}) \ldots (x_n - x_m)}.$$

Setzt man nunmehr in diesem allgemeinen Ausdrucke von X_n für n nach und nach die Zahlen 0, 1, 2, ... m, so findet man die Functionen $X_0, X_1, X_2, \ldots X_m$ und wenn man diese in dem für y angenommenen Ausdrucke substituirt,

$$y=\frac{(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3)\ldots(x-x_m)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\ldots(x_0-x_m)}\cdot y_0$$
$$+\frac{(x-x_0)\,(x-x_2)\,(x-x_3)\ldots(x-x_m)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_m)}\cdot y_1$$
$$+\frac{(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_3)\ldots(x-x_m)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_m)}\cdot y_2$$
$$+\frac{(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)\ldots(x_3-x_m)}\cdot y_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_2)\ldots(x-x_{m-1})}{(x_m-x_0)(x_m-x_1)(x_m-x_2)\ldots(x_m-x_{m-1})}\cdot y_m.$$

Diese Gleichung heißt nach ihrem Erfinder die Lagrange'sche Interpolationsformel und gewährt in der Anwendung den Vortheil, daß sich die einzelnen Bestandtheile derselben mit Hilfe der Logarithmen berechnen lassen.

Anhang einiger Tafeln.

I. Tafel der Primfactoren aller Zahlen von 1 bis 16397.

II. Tafel der Potenzen aller Zahlen von 1 bis 100.

III. Tafel der zweiten Potenzen aller Zahlen von 1 bis 1000.

IV. Tafel der dritten Potenzen aller Zahlen von 1 bis 1000.

V. Tafel der zweiten Wurzeln aller Zahlen von 1 bis 1000.

VI. Tafel der dritten Wurzeln aller Zahlen von 1 bis 1000.

VII. Tafel zur Verwandlung der Fuße, Zolle, Linien und Puncte des zwölftheiligen Maßes in Decimaltheile der Klafter, des Fußes und des Zolles, wie auch umgekehrt.

In der Tafel der Primfactoren sind alle durch 2, 3 und 5 nicht theilbaren zusammengesetzten Zahlen von 1 bis 16397 in ihre einfachen Factoren aufgelöst; weßwegen diese Zahlen nach ihrer natürlichen Folge in verticalen Columnen geordnet, und ihre Primfactoren ihnen rechts beigesetzt sind, wodurch die Aufsuchung dieser Factoren für sich klar wird. Sollte die Zahl, deren Primfactoren man sucht, in der Tafel nicht enthalten sein, so ist dies ein Zeichen, daß selbe eine Primzahl sei. So findet man z. B., daß die Zahl 4199 aus den einfachen Factoren 13. 17. 19 zusammengesetzt sei; sie werden einfach genannt, um sie von den übrigen zusammengesetzten Factoren 221=13.17, 247=13.19, 325=17.19 zu unterscheiden, durch welche die gegebene Zahl gleichfalls theilbar ist. Eben so findet man, daß 4177 eine Primzahl sei. Die durch 2, 3 und 5 theilbaren Zahlen sind in der Tafel weggeblieben, weil die Factoren 2, 3 oder 5 einer Zahl gleich bei ihrem Anblicke in die Augen fallen (§. 69, *b*). Würde nun eine durch 2, 3 oder 5 theilbare Zahl, z. B. 111972 in ihre einfachen Factoren zu zerlegen sein; so sieht man gleich, daß 111972 = 2 . 2 . 3 . 9331 sei; nun findet man in der Tafel 9331=7. 31.43, folglich ist 111972=2.2.3.7.31.43.

Die darauf folgende Tafel der Potenzen enthält die 4te, 5te, 6ste, 7te und 8te Potenz aller Zahlen von 1 bis 100, und kann sowohl bei der Auflösung der höheren Gleichungen, so wie auch bei dem Einschalten oder Interpoliren und in andern Fällen gute Dienste leisten. Mittels dieser Tafel findet man auch die Potenzen von 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; . . . 9,9; so wie die Potenzen von 0,01; 0,02; 0,03; . . . 0,99; wenn man nur für die gesuchte Potenz die gehörigen Decimalziffern in der Tafel absondert.

Die Tafeln der zweiten und dritten Potenzen, wie auch die Tafeln der zweiten und dritten Wurzeln bedürfen keiner Erläuterung. Daß diese Tafeln auch auf einige Decimalbrüche angewendet werden können, wird jeder bei dem ersten Anblicke selbst einsehen. Eben so einfach und deutlich ist die Einrichtung der letzten Tafel.

Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.
49	7·7	629	17·37	1081	23·47	1513	17·89
77	7·11	637	7·7·13	1099	7·157	1517	37·41
91	7·13	649	11·59	**1111**	11·101	1519	7·7·31
119	7·17	667	23·29	1121	19·59	1529	11·139
121	11·11	671	11·61	1127	7·7·23	1537	29·53
133	7·19	679	7·97	1133	11·103	1541	23·67
143	11·13	689	13·53	1139	17·67	1547	7·13·17
161	7·23	697	17·41	1141	7·163	1561	7·223
169	13·13	**703**	19·37	1147	31·37	1573	11·11·13
187	11·17	707	7·101	1157	13·89	1577	19·83
203	7·29	713	23·31	1159	19·61	1589	7·227
209	11·19	721	7·103	1169	7·167	1591	37·43
217	7·31	731	17·43	1177	11·107	**1603**	7·229
221	13·17	737	11·67	1183	7·13·13	1631	7·233
247	13·19	749	7·107	1189	29·41	1633	23·71
253	11·23	763	7·109	1199	11·109	1639	11·149
259	7·37	767	13·59	**1207**	17·71	1643	31·53
287	7·41	779	19·41	1211	7·173	1649	17·97
289	17·17	781	11·71	1219	23·53	1651	13·127
299	13·23	791	7·113	1241	17·73	1661	11·151
301	7·43	793	13·61	1243	11·113	1673	7·239
319	11·29	799	17·47	1247	29·43	1679	23·73
323	17·19	**803**	11·73	1253	7·179	1681	41·41
329	7·47	817	19·43	1261	13·97	1687	7·241
341	11·31	833	7·7·17	1267	7·181	1691	19·89
343	7·7·7	841	29·29	1271	31·41	**1703**	13·131
361	19·19	847	7·11·11	1273	19·67	1711	29·59
371	7·53	851	23·37	**1309**	7·11·17	1717	17·101
377	13·29	869	11·79	1313	13·101	1727	11·157
391	17·23	871	13·67	1331	11·11·11	1729	7·13·19
403	13·31	889	7·127	1333	31·43	1739	37·47
407	11·37	893	19·47	1337	7·191	1751	17·103
413	7·59	899	29·31	1339	13·103	1757	7·251
427	7·61	**901**	17·53	1343	17·79	1763	41·43
437	19·23	913	11·83	1349	19·71	1769	29·61
451	11·41	917	7·131	1351	7·193	1771	7·11·23
469	7·67	923	13·71	1357	23·59	1781	13·137
473	11·43	931	7·7·19	1363	29·47	1793	11·163
481	13·37	943	23·41	1369	37·37	1799	7·257
493	17·29	949	13·73	1379	7·197	**1807**	13·139
497	7·71	959	7·137	1387	19·73	1813	7·7·37
511	7·73	961	31·31	1391	13·107	1817	23·79
517	11·47	973	7·139	1393	7·199	1819	17·107
527	17·31	979	11·89	1397	11·127	1829	31·59
529	23·23	989	23·43	**1403**	23·61	1837	11·167
533	13·41	**1001**	7·11·13	1411	17·83	1841	7·263
539	7·7·11	1003	17·59	1417	13·109	1843	19·97
551	19·29	1007	19·53	1421	7·7·29	1849	43·43
553	7·79	1027	13·79	1441	11·131	1853	17·109
559	13·43	1037	17·61	1457	31·47	1859	11·13·13
581	7·83	1043	7·149	1463	7·11·19	1883	7·269
583	11·53	1057	7·151	1469	13·113	1891	31·61
589	19·31	1067	11·97	1477	7·211	1897	7·271
611	13·47	1073	29·37	**1501**	19·79	**1903**	11·173
623	7·89	1079	13·83	1507	11·137	1909	23·83

Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.
1919	19·101	2317	7·331	2717	11·13·19	3097	19·163
1921	17·113	2321	11·211	2723	7·389	**3101**	7·443
1927	41·47	2323	23·101	2737	7·17·23	3103	29·107
1937	13·149	2327	13·179	2743	13·211	3107	13·239
1939	7·277	2329	17·137	2747	41·67	3113	11·283
1943	29·67	2353	13·181	2759	31·89	3127	53·59
1957	19·103	2359	7·337	2761	11·251	3131	31·101
1961	37·53	2363	17·139	2771	17·163	3133	13·241
1963	13·151	2369	23·103	2773	47·59	3139	43·73
1967	7·281	2387	7·11·31	2779	7·397	3143	7·449
1969	11·179	**2401**	7·7·7·7	2783	11·11·23	3149	47·67
1981	7·283	2407	29·83	**2807**	7·401	3151	23·137
1991	11·181	2413	19·127	2809	53·53	3157	7·11·41
2009	7·7·41	2419	41·59	2813	29·97	3161	29·109
2021	43·47	2429	7·347	2821	7·13·31	3173	19·167
2023	7·17·17	2431	11·13·17	2827	11·257	3179	11·17·17
2033	19·107	2443	7·349	2831	19·149	3193	31·103
2041	13·157	2449	31·79	2839	17·167	3197	23·139
2047	23·89	2453	11·223	2849	7·11·37	3199	7·457
2051	7·293	2461	23·107	2863	7·409	**3211**	13·13·19
2057	11·11·17	2471	7·353	2867	47·61	3223	11·293
2059	29·71	2479	37·67	2869	19·151	3227	7·461
2071	19·109	2483	13·191	2873	13·13·17	3233	53·61
2077	31·67	2489	19·131	2881	43·67	3239	41·79
2093	7·13·23	2491	47·53	2891	7·7·59	3241	7·463
2101	11·191	2497	11·227	2893	11·263	3247	17·191
2107	7·7·43	**2501**	41·61	2899	13·223	3263	13·251
2117	29·73	2507	23·109	**2911**	41·71	3269	7·467
2119	13·163	2509	13·193	2921	23·127	3277	29·113
2123	11·193	2513	7·359	2923	37·79	3281	17·193
2147	19·113	2519	11·229	2929	29·101	3283	7·7·67
2149	7·307	2527	7·19·19	2933	7·419	3287	19·173
2159	17·127	2533	17·149	2941	17·173	3289	11·13·23
2167	11·197	2537	43·59	2947	7·421	3293	37·89
2171	13·167	2561	13·197	2951	13·227	**3311**	7·11·43
2173	41·53	2563	11·233	2959	11·269	3317	31·107
2177	7·311	2567	17·151	2977	13·229	3337	47·71
2183	37·59	2569	7·367	2981	11·271	3341	13·257
2189	11·199	2573	31·83	2983	19·157	3349	17·197
2191	7·313	2581	29·89	2987	29·103	3353	7·479
2197	13·13·13	2587	13·199	2989	7·7·61	3367	7·13·37
2201	31·71	2597	7·7·53	2993	41·73	3377	11·307
2209	47·47	2599	23·113	**3007**	31·97	3379	31·109
2219	7·317	**2603**	19·137	3013	23·131	3383	17·199
2227	17·131	2611	7·373	3017	7·431	3397	43·79
2231	23·97	2623	43·61	3029	13·233	**3401**	19·179
2233	7·11·29	2627	37·71	3031	7·433	3403	41·83
2249	13·173	2629	11·239	3043	17·179	3409	7·487
2257	37·61	2639	7·13·29	3047	11·277	3419	13·263
2261	7·17·19	2641	19·139	3053	43·71	3421	11·311
2263	31·73	2651	11·241	3059	7·19·23	3427	23·149
2279	43·53	2653	7·379	3071	37·83	3431	47·73
2291	29·79	2669	17·157	3073	7·439	3437	7·491
2299	11·11·19	2681	7·383	3077	17·181	3439	19·181
2303	7·7·47	**2701**	37·73	3091	11·281	3443	11·313

Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.
3451	7·17·29	3857	7·19·29	4223	41·103	4589	13·353
3473	23·151	3859	17·227	4237	19·223	**4601**	43·107
3479	7·7·71	3869	53·73	4247	31·137	4607	17·271
3481	59·59	3871	7·7·79	4249	7·607	4609	11·419
3487	11·317	3883	11·353	4267	17·251	4613	7·659
3493	7·499	3887	13·13·23	4277	7·13·47	4619	31·149
3497	13·269	3893	17·229	4279	11·389	4627	7·661
3503	31·113	3899	7·557	4291	7·613	4631	11·421
3509	11·11·29	**3901**	47·83	**4301**	11·17·23	4633	41·113
3521	7·503	3913	7·13·43	4303	13·331	4661	59·79
3523	13·271	3937	31·127	4307	59·73	4667	13·359
3551	53·67	3941	7·563	4309	31·139	4669	7·23·29
3553	11·17·19	3949	11·359	4313	19·227	4681	31·151
3563	7·509	3953	59·67	4319	7·617	4687	43·109
3569	43·83	3959	37·107	4321	29·149	4693	13·19·19
3577	7·7·73	3961	17·233	4331	61·71	4697	7·11·61
3587	17·211	3971	11·19·19	4333	7·619	4699	37·127
3589	37·97	3973	29·137	4343	43·101	**4709**	17·277
3599	59·61	3977	41·97	4351	19·229	4711	7·673
3601	13·277	3979	23·173	4361	7·7·89	4717	53·89
3611	23·157	3983	7·569	4367	11·397	4727	29·163
3619	7·11·47	3991	13·307	4369	17·257	4739	7·677
3629	19·191	3997	7·571	4379	29·151	4741	11·431
3641	11·331	**4009**	19·211	4381	13·337	4747	47·101
3647	7·521	4031	29·139	4387	41·107	4753	7·7·97
3649	41·89	4033	37·109	4393	23·191	4757	67·71
3653	13·281	4037	11·367	4399	53·83	4763	11·433
3661	7·523	4039	7·577	**4403**	7·17·37	4769	19·251
3667	19·193	4043	13·311	4411	11·401	4771	13·367
3679	13·283	4061	31·131	4417	7·631	4777	17·281
3683	29·127	4063	17·239	4427	19·233	4781	7·683
3689	7·17·31	4067	7·7·83	4429	43·103	**4807**	11·19·23
3703	7·23·23	4069	13·313	4433	11·13·31	4811	17·283
3707	11·337	4081	7·11·53	4439	23·193	4819	61·79
3713	47·79	4087	61·67	4453	61·73	4823	7·13·53
3721	61·61	4097	17·241	4459	7·7·7·13	4829	11·439
3731	7·13·41	**4103**	11·373	4469	41·109	4837	7·691
3737	37·101	4109	7·587	4471	17·263	4841	47·103
3743	19·197	4117	23·179	4477	11·11·37	4843	29·167
3749	23·163	4121	13·317	4487	7·641	4847	37·131
3751	11·11·31	4123	7·19·31	4489	67·67	4849	13·373
3757	13·17·17	4141	41·101	4499	11·409	4853	23·211
3763	53·71	4147	11·13·29	**4501**	7·643	4859	43·113
3773	7·7·7·11	4151	7·593	4511	13·347	4867	31·157
3781	19·199	4163	23·181	4529	7·647	4873	11·443
3787	7·541	4169	11·379	4531	23·197	4879	7·17·41
3791	17·223	4171	43·97	4537	13·349	4883	19·257
3799	29·131	4181	37·113	4541	19·239	4891	67·73
3809	13·293	4183	47·89	4543	7·11·59	4897	59·83
3811	37·103	4187	53·79	4553	29·157	**4901**	13·13·29
3817	11·347	4189	59·71	4559	47·97	4907	7·701
3827	43·89	4193	7·599	4571	7·653	4913	17·17·17
3829	7·547	4199	13·17·19	4573	17·269	4921	7·19·37
3839	11·349	**4207**	7·601	4577	23·199	4927	13·379
3841	23·167	4213	11·383	4579	19·241	4939	11·449

Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.
4949	7·7·101	5317	13·409	5687	11·11·47	6041	7·863
4961	11·11·41	5321	17·313	5699	41·139	6049	23·263
4963	7·709	5327	7·761	**5707**	13·439	6059	73·83
4979	13·383	5329	73·73	5713	29·197	6061	11·19·29
4981	17·293	5339	19·281	5719	7·19·43	6071	13·467
4991	7·23·31	5341	7·7·109	5723	59·97	6077	59·103
4997	19·263	5353	53·101	5729	17·337	6083	7·11·79
5017	29·173	5357	11·487	5731	11·521	6097	7·13·67
5027	11·457	5359	23·233	5747	7·821	**6103**	17·359
5029	47·107	5363	31·173	5753	11·523	6107	31·197
5033	7·719	5369	7·13·59	5759	13·443	6109	41·149
5041	71·71	5371	41·131	5761	7·823	6119	29·211
5047	7·7·103	5377	19·283	5767	73·79	6127	11·557
5053	31·163	5383	7·769	5771	29·199	6137	17·19·19
5057	13·389	5389	17·317	5773	23·251	6139	7·877
5063	61·83	**5401**	11·491	5777	53·109	6149	11·13·43
5069	37·137	5411	7·773	5789	7·827	6157	47·131
5071	11·461	5423	11·17·29	5797	11·17·31	6161	61·101
5083	13·17·23	5429	61·89	**5803**	7·829	6167	7·881
5089	7·727	5447	13·419	5809	37·157	6169	31·199
5093	11·463	5453	7·19·41	5819	11·23·23	6179	37·167
5111	19·269	5459	53·103	5831	7·7·7·17	6181	7·883
5117	7·17·43	5461	43·127	5833	19·307	6187	23·269
5123	47·109	5467	7·11·71	5837	13·449	6191	41·151
5129	23·223	5473	13·421	5863	11·13·41	6193	11·563
5131	7·733	5489	11·499	5873	7·839	**6209**	7·887
5137	11·467	5491	17·17·19	5887	7·29·29	6223	7·7·127
5141	53·97	5497	23·239	5891	43·137	6227	13·479
5143	37·139	**5509**	7·787	5893	71·83	6233	23·271
5149	19·271	5513	37·149	5899	17·347	6239	17·367
5159	7·11·67	5533	11·503	**5909**	19·311	6241	79·79
5161	13·397	5537	7·7·113	5911	23·257	6251	7·19·47
5173	7·739	5539	29·191	5917	61·97	6253	13·13·37
5177	31·167	5543	23·241	5921	31·191	6259	11·569
5183	71·73	5549	31·179	5929	7·7·11·11	6281	11·571
5191	29·179	5551	7·13·61	5933	17·349	6283	61·103
5201	7·743	5561	67·83	5941	13·457	6289	19·331
5203	11·11·43	5567	19·293	5947	19·313	6293	7·29·31
5207	41·127	5579	7·797	5951	11·541	**6307**	7·17·53
5213	13·401	5587	37·151	5957	7·23·37	6313	59·107
5219	17·307	5593	7·17·47	5959	59·101	6319	71·89
5221	23·227	5597	29·193	5963	67·89	6331	13·487
5239	13·13·31	5599	11·509	5969	47·127	6341	17·373
5243	7·7·107	**5603**	13·431	5971	7·853	6347	11·577
5249	29·181	5609	71·79	5977	43·139	6349	7·907
5251	59·89	5611	31·181	5983	31·193	6371	23·277
5257	7·751	5617	41·137	5989	53·113	6377	7·911
5263	19·277	5621	7·11·73	5993	13·461	6383	13·491
5267	23·229	5627	17·331	5999	7·857	6391	7·11·83
5269	11·479	5629	13·433	**6001**	17·353	**6401**	37·173
5287	17·311	5633	43·131	6013	7·859	6403	19·337
5291	11·13·37	5663	7·809	6017	11·547	6407	43·149
5293	67·79	5671	53·107	6019	13·463	6409	13·17·29
5299	7·757	5677	7·811	6023	19·317	6413	11·11·53
5311	47·113	5681	13·19·23	6031	37·163	6419	7·7·131

Zahl.	Factoren	Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.
6431	59·109	6767	67·101	7133	7·1019	7447	11·677
6433	7·919	6769	7·967	7139	11·11·59	7453	29·257
6437	41·157	6773	13·521	7141	37·193	7463	17·439
6439	47·137	6787	11·617	7147	7·1021	7469	7·11·97
6443	17·379	6797	7·971	7153	23·311	7471	31·241
6457	11·587	6799	13·523	7157	17·421	7483	7·1069
6461	7·13·71	**6809**	11·619	7163	13·19·29	7493	59·127
6463	23·281	6811	7·7·139	7169	67·107	**7501**	13·577
6467	29·223	6817	17·401	7171	71·101	7511	7·29·37
6479	11·19·31	6821	19·359	7181	43·167	7513	11·683
6487	13·499	6839	7·977	7183	11·653	7519	73·103
6493	43·151	6847	41·167	7189	7·13·79	7531	17·443
6497	73·89	6851	13·17·31	7199	23·313	7543	19·397
6499	67·97	6853	7·11·89	**7201**	19·379	7553	7·13·83
6503	7·929	6859	19·19·19	7217	7·1031	7567	7·23·47
6509	23·283	6877	13·23·23	7223	31·233	7571	67·113
6511	17·383	6881	7·983	7231	7·1033	7579	11·13·53
6517	7·7·7·19	6887	71·97	7241	13·557	7597	71·107
6523	11·593	6889	83·83	7249	11·659	**7601**	11·691
6527	61·107	6893	61·113	7259	7·17·61	7609	7·1087
6533	47·139	**6901**	67·103	7261	53·137	7613	23·331
6539	13·503	6913	31·223	7267	13·13·43	7619	19·401
6541	31·211	6919	11·17·37	7271	11·661	7627	29·263
6557	79·83	6923	7·23·43	7273	7·1039	7631	13·587
6559	7·937	6929	13·13·41	7277	19·383	7633	17·449
6583	29·227	6931	29·239	7279	29·251	7637	7·1091
6587	7·941	6937	7·991	7289	37·197	7651	7·1093
6589	11·599	6941	11·631	7291	23·317	7657	13·19·31
6593	19·347	6943	53·131	**7301**	7·7·149	7661	47·163
6601	7·23·41	6953	17·409	7303	67·109	7663	79·97
6611	11·601	6973	19·367	7313	71·103	7667	11·17·41
6613	17·389	6979	7·997	7319	13·563	7679	7·1097
6617	13·509	6989	29·241	7327	17·431	7693	7·7·157
6623	37·179	**7003**	47·149	7337	11·23·29	7697	43·179
6629	7·947	7007	7·7·11·13	7339	41·179	**7709**	13·593
6631	19·349	7009	43·163	7343	7·1049	7711	11·701
6641	29·229	7021	7·17·59	7357	7·1051	7721	7·1103
6643	7·13·73	7031	79·89	7361	17·433	7729	59·131
6647	17·17·23	7033	13·541	7363	37·199	7733	11·19·37
6649	61·109	7037	31·227	7367	53·139	7739	71·109
6667	59·113	7049	7·19·53	7373	73·101	7747	61·127
6671	7·953	7051	11·641	7379	47·157	7751	23·337
6677	11·607	7061	23·307	7381	11·11·61	7763	7·1109
6683	41·163	7063	7·1009	7387	83·89	7769	17·457
6697	37·181	7067	37·191	7391	19·389	7771	19·409
6707	19·353	7073	11·643	7397	13·569	7777	7·11·101
6713	7·7·137	7081	73·97	7399	7·7·151	7781	31·251
6721	11·13·47	7087	19·373	**7403**	11·673	7783	43·181
6727	7·31·31	7091	7·1013	7409	31·239	7787	13·599
6731	53·127	7093	41·173	7421	41·181	7799	11·709
6739	23·293	7097	47·151	7423	13·571	**7801**	29·269
6743	11·613	7099	31·229	7427	7·1061	7807	37·211
6749	17·397	**7111**	13·547	7429	17·19·23	7811	73·107
6751	43·157	7117	11·647	7439	43·173	7813	13·601
6757	29·233	7123	17·419	7441	7·1063	7819	7·1117

Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.
7831	41·191	8173	11·743	8507	47·181	8891	17·523
7837	17·461	8177	13·17·37	8509	67·127	8897	7·31·41
7843	11·23·31	8183	7·7·167	8519	7·1217	8899	11·809
7847	7·19·59	8189	19·431	8531	19·449	**8903**	29·307
7849	47·167	8197	7·1171	8533	7·23·53	8909	59·151
7859	29·271	**8201**	59·139	8549	83·103	8911	7·19·67
7861	7·1123	8203	13·631	8551	17·503	8917	37·241
7871	17·463	8207	29·283	8557	43·199	8921	11·811
7889	7·7·7·23	8213	43·191	8561	7·1223	8927	79·113
7891	13·607	8227	19·433	8567	13·659	8939	7·1277
7897	53·149	8239	7·11·107	8569	11·19·41	8947	23·389
7903	7·1129	8249	73·113	8579	23·373	8953	7·1279
7909	11·719	8251	37·223	8587	31·277	8957	13·13·53
7913	41·193	8257	23·359	8591	11·11·71	8959	17·17·31
7921	89·89	8261	11·751	8593	13·661	8977	47·191
7931	7·11·103	8267	7·1181	**8603**	7·1229	8981	7·1283
7939	17·467	8279	17·487	8611	79·109	8983	13·691
7943	13·13·47	8281	7·7·13·13	8617	7·1231	8987	11·19·43
7957	73·109	8299	43·193	8621	37·233	8989	89·101
7961	19·419	**8303**	19·19·23	8633	89·97	8993	17·23·23
7967	31·257	8309	7·1187	8639	53·163	**9017**	71·127
7969	13·613	8321	53·157	8651	41·211	9019	29·311
7973	7·17·67	8323	7·29·41	8653	17·509	9023	7·1289
7979	79·101	8327	11·757	8657	11·787	9031	11·821
7981	23·347	8333	13·641	8659	7·1237	9037	7·1291
7987	7·7·163	8339	31·269	8671	13·23·29	9047	83·109
7991	61·131	8341	19·439	8683	19·457	9053	11·823
7997	11·727	8347	17·491	8687	7·17·73	9061	13·17·41
7999	19·421	8351	7·1193	**8701**	7·11·113	9071	47·193
8003	53·151	8357	61·137	8711	31·281	9073	43·211
8021	13·617	8359	13·643	8717	23·379	9077	29·313
8023	71·113	8371	11·761	8723	11·13·61	9079	7·1297
8027	23·349	8381	17·17·29	8729	7·29·43	9083	31·293
8029	7·31·37	8383	83·101	8743	7·1249	9089	61·149
8033	29·277	8393	7·11·109	8749	13·673	9097	11·827
8041	11·17·43	8399	37·227	8759	19·461	**9101**	19·479
8047	13·619	**8401**	31·271	8767	11·797	9107	7·1301
8051	83·97	8407	7·1201	8771	7·7·179	9113	13·701
8057	7·1151	8411	13·647	8773	31·283	9119	11·829
8063	11·733	8413	47·179	8777	67·131	9121	7 1303
8071	7·1153	8417	19·443	8789	11·17·47	9131	23·397
8077	41·197	8437	11·13·59	8791	59·149	9139	13·19·37
8083	59·137	8441	23·367	8797	19·463	9143	41·223
8099	7·13·89	8449	7·17·71	**8801**	13·677	9149	7·1307
8107	11·11·67	8453	79·107	8809	23·383	9163	7·7·11·17
8113	7·19·61	8459	11·769	8813	7·1259	9167	89·103
8119	23·353	8471	43·197	8827	7·13·97	9169	53·173
8129	11·739	8473	37·229	8833	11·11·73	9179	67·137
8131	47·173	8477	7·7·173	8843	37·239	9191	7·13·101
8137	79·103	8479	61·139	8851	53·167	9193	29·317
8141	7·1163	8483	17·499	8857	17·521	9197	17·541
8143	17·479	8489	13·653	8869	7·7·181	**9211**	61·151
8149	29·281	8491	7·1213	8873	19·467	9217	13·709
8153	31·263	8497	29·293	8879	13·683	9223	23·401
8159	41·199	**8503**	11·773	8881	83·107	9229	11·839

Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.
9233	7·1319	9589	43·223	9959	23·433
9247	7·1321	9593	53·181	9961	7·1423
9251	11·29·29	9599	29·331	9971	13·13·59
9253	19·487	**9607**	13·739	9977	11·907
9259	47·197	9611	7·1373	9979	17·587
9263	59·157	9617	59·163	9983	67·149
9269	13·23·31	9637	23·419	9989	7·1427
9271	73·127	9641	31·311	9991	97·103
9287	37·251	9647	11·877	9997	13·769
9289	7·1327	9653	7·7·197	**10001**	73·137
9299	17·547	9659	13·743	10003	7·1429
9301	71·131	9667	7·1381	10013	17·19·31
9307	41·227	9671	19·509	10019	43·233
9313	67·139	9673	17·569	10021	11·911
9317	7·11·11·11	9683	23·421	10027	37·271
9329	19·491	9691	11·881	10031	7·1433
9331	7·31·43	**9701**	89·109	10033	79·127
9347	13·719	9703	31·313	10043	11·11·83
9353	47·199	9707	17·571	10049	13·773
9359	7·7·191	9709	7·19·73	10051	19·23·23
9361	11·23·37	9713	11·883	10057	89·113
9367	17·19·29	9727	71·137	10063	29·347
9373	7·13·103	9731	37·263	10073	7·1439
9379	83·113	9737	7·13·107	10081	17·593
9383	11·853	9751	7·7·199	10087	7·11·131
9389	41·229	9757	11·887	10097	23·439
9401	7·17·79	9761	43·227	**10109**	11·919
9407	23·409	9763	13·751	10117	67·151
9409	97·97	9773	29·337	10121	29·349
9427	11·857	9779	7·11·127	10123	53·191
9443	7·19·71	9793	7·1399	10127	13·19·41
9449	11·859	9797	97·101	10129	7·1447
9451	13·727	9799	41·239	10147	73·139
9457	7·7·193	**9809**	17·577	10153	11·13·71
9469	17·557	9821	7·23·61	10157	7·1451
9481	19·499	9823	11·19·47	10171	7·1453
9487	53·179	9827	31·317	10183	17·599
9493	11·863	9841	13·757	10187	61·167
9499	7·23·59	9847	43·229	10189	23·443
9503	13·17·43	9853	59·167	10199	7·31·47
9509	37·257	9863	7·1409	**10201**	101·101
9517	31·307	9869	71·139	10207	59·173
9523	89·107	9877	7·17·83	10213	7·1459
9527	7·1361	9881	41·241	10217	17·601
9529	13·733	9889	11·29·31	10219	11·929
9541	7·29·47	9893	13·761	10229	53·193
9553	41·233	9899	19·521	10231	13·787
9557	19·503	**9911**	11·17·53	10237	29·353
9559	11·11·79	9913	23·431	10241	7·7·11·19
9563	73·131	9917	47·211	10249	37·277
9569	7·1367	9919	7·13·109	10261	31·331
9571	17·563	9937	19·523	10277	43·239
9577	61·157	9943	61·163	10279	19·541
9581	11·63·67	9947	7·7·7·29	10283	7·13·113
9583	7·37·37	9953	37·269	10291	41·251

Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.
10297	7·1471	10633	7·7·7·31	10967	11·997
10307	11·937	10637	11·967	10969	7·1567
10309	13·13·61	10643	29·367	10981	79·139
10319	17·607	10649	23·463	10991	29·379
10327	23·449	10661	7·1523	10997	7·1571
10339	7·7·211	10669	47·227	10999	17·647
10349	79·131	10673	13·821	**11009**	101·109
10351	11·941	10679	59·181	11011	7·11·11·13
10361	13·797	10681	11·971	11017	23·479
10363	43·241	10693	17·17·37	11021	103·107
10367	7·1481	10697	19·563	11023	73·151
10373	11·23·41	10699	13·823	11029	41·269
10379	97·107	**10703**	7·11·139	11033	11·17·59
10381	7·1483	10717	7·1531	11039	7·19·83
10387	13·17·47	10721	71·151	11041	61·181
10393	19·547	10727	17·631	11051	43·257
10397	37·281	10741	23·467	11053	7·1579
10403	101·103	10747	11·977	11063	13·23·37
10409	7·1487	10751	13·827	11077	11·19·53
10411	29·359	10757	31·347	11081	7·1583
10417	11·947	10759	7·29·53	11089	13·853
10421	17·613	10763	47·229	11099	11·1009
10423	7·1489	10769	11·11·89	**11101**	17·653
10439	11·13·73	10777	13·829	11107	29·383
10441	53·197	10783	41·263	11111	41·271
10447	31·337	10787	7·23·67	11123	7·7·227
10451	7·1493	10793	43·251	11129	31·359
10469	19·19·29	**10801**	7·1543	11137	7·37·43
10471	37·283	10807	101·107	11141	13·857
10481	47·223	10811	19·569	11143	11·1013
10483	11·953	10813	11·983	11147	71·157
10489	17·617	10817	29·373	11153	19·587
10493	7·1499	10819	31·349	11167	13·859
10507	7·19·79	10823	79·137	11179	7·1597
10511	23·457	10829	7·7·13·17	11183	53·211
10517	13·809	10841	37·293	11189	67·167
10519	67·157	10843	7·1549	11191	19·19·31
10523	17·619	10849	19·571	**11201**	23·487
10537	41·257	10871	7·1553	11203	17·659
10541	83·127	10873	83·131	11207	7·1601
10543	13·811	10877	73·149	11209	11·1019
10547	53·199	10879	11·23·43	11219	13·863
10549	7·11·137	10897	17·641	11221	7·7·229
10553	61·173	**10901**	11·991	11227	103·109
10561	59·179	10907	13·839	11231	11·1021
10571	11·31·31	10913	7·1559	11233	47·239
10573	97·109	10919	61·179	11237	17·661
10577	7·1511	10921	67·163	11249	7·1607
10579	71·149	10927	7·7·223	11263	7·1609
10583	19·557	10931	17·643	11267	19·593
10591	7·17·89	10933	13·29·29	11269	59·191
10603	23·461	10943	31·353	11281	29·389
10609	103·103	10951	47·233	11291	7·1613
10619	7·37·41	10961	97·113	11293	23·491
10621	13·19·43	10963	19·577	11297	11·13·79

Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.
11303	89·127	11629	29·401	11983	23·521
11309	43·263	11639	103·113	11989	19·631
11323	13·13·67	11641	7·1663	11993	67·179
11327	47·241	11647	19·613	11999	13·13·71
11333	7·1619	11651	61·191	**12001**	11·1091
11339	17·23·29	11653	43·271	12013	41·293
11341	11·1031	11659	89·131	12017	61·197
11347	7·1621	11663	107·109	12019	7·17·101
11357	41·277	11669	7·1667	12023	11·1093
11359	37·307	11671	11·1061	12029	23·523
11363	11·1033	11683	7·1669	12031	53·227
11371	83·137	11687	13·29·31	12047	7·1721
11377	31·367	11693	11·1063	12053	17·709
11381	19·599	**11707**	23·509	12059	31·389
11387	59·193	11711	7·7·239	12061	7·1723
11389	7·1627	11713	13·17·53	12067	11·1097
11401	13·877	11723	19·617	12077	13·929
11407	11·17·61	11729	37·317	12079	47·257
11413	101·113	11737	11·11·97	12083	43·281
11417	7·7·233	11741	59·199	12089	7·11·157
11419	19·601	11747	17·691	12091	107·113
11429	11·1039	11749	31·379	**12103**	7·7·13·19
11431	7·23·71	11753	7·23·73	12121	17·23·31
11441	17·673	11759	11·1069	12127	67·181
11449	107·107	11761	19·619	12131	7·1733
11453	13·881	11767	7·41·41	12133	11·1103
11459	7·1637	11771	79·149	12137	53·229
11461	73·157	11773	61·193	12139	61·199
11473	7·11·149	11791	13·907	12151	29·419
11477	23·499	11797	47·251	12167	23·23·23
11479	13·883	**11803**	11·29·37	12169	43·283
11501	7·31·53	11809	7·7·241	12173	7·37·47
11507	37·311	11819	53·223	12179	19·641
11509	17·677	11837	7·19·89	12181	13·937
11513	29·397	11843	13·911	12187	7·1741
11521	41·281	11849	17·17·41	12191	73·167
11531	13·887	11851	7·1693	12193	89·137
11533	19·607	11857	71·167	12199	11·1109
11537	83·139	11861	29·409	**12209**	29·421
11539	11·1049	11869	11·13·83	12217	19·643
11543	7·17·97	11873	31·383	12221	11·11·101
11557	7·13·127	11879	7·1697	12223	17·719
11561	11·1051	11881	109·109	12229	7·1747
11563	31·373	11891	11·23·47	12233	13·941
11567	43·269	11893	7·1699	12247	37·331
11569	23·503	11899	73·163	12257	7·17·103
11573	71·163	**11911**	43·277	12259	13·23·41
11581	37·313	11917	17·701	12271	7·1753
11591	67·173	11921	7·13·131	12283	71·173
11599	7·1657	11929	79·151	12287	11·1117
11603	41·283	11947	13·919	12293	19·647
11609	13·19·47	11951	17·19·37	12299	7·7·251
11611	17·683	11957	11·1087	**12307**	31·397
11623	59·197	11963	7·1709	12311	13·947
11627	7·11·151	11977	7·29·59	12313	7·1759

Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.
12317	109·113	12683	11·1153	13031	83·157
12319	97·127	12691	7·7·7·37	13039	13·17·59
12331	11·19·59	**12701**	13·977	13051	31·421
12337	13·13·73	12707	97·131	13057	11·1187
12341	7·41·43	12709	71·179	13061	37·353
12349	53·233	12719	7·23·79	13067	73·179
12353	11·1123	12727	11·13·89	13069	7·1867
12359	17·727	12731	29·439	13073	17·769
12361	47·263	12733	7·17·107	13079	11·29·41
12367	83·149	12737	47·271	13081	103·127
12371	89·139	12749	11·19·61	13087	23·569
12383	7·29·61	12751	41·311	13091	13·19·53
12389	13·953	12761	7·1823	13097	7·1871
12397	7·7·11·23	12767	17·751	**13111**	7·1873
12403	79·157	12769	113·113	13117	13·1009
12407	19·653	12773	53·241	13123	11·1193
12419	11·1129	12779	13·983	13129	19·691
12427	17·17·43	12787	19·673	13133	23·571
12431	31·401	12793	11·1163	13139	7·1877
12439	7·1777	12797	67·191	13141	17·773
12443	23·541	**12803**	7·31·59	13153	7·1879
12449	59·211	12811	23·557	13157	59·223
12461	17·733	12817	7·1831	13169	13·1013
12463	11·11·103	12827	101·127	13181	7·7·269
12467	7·13·137	12833	41·313	13189	11·11·109
12469	37·337	12839	37·347	13193	79·167
12481	7·1783	12847	29·443	13199	67·197
12493	13·31·31	12851	71·181	**13201**	43·307
12499	29·431	12857	13·23·43	13207	47·281
12509	7·1787	12859	7·11·167	13211	11·1201
12521	19·659	12863	19·677	13213	73·181
12523	7·1789	12869	17·757	13223	7·1889
12529	11·17·67	12871	61·211	13231	101·131
12533	83·151	12877	79·163	13237	7·31·61
12551	7·11·163	12881	11·1171	13243	17·19·41
12557	29·433	12883	13·991	13247	13·1019
12559	19·661	12887	7·7·263	13253	29·457
12563	17·739	**12901**	7·19·97	13261	89·149
12571	13·967	12913	37·349	13271	23·577
12581	23·547	12929	7·1847	13273	13·1021
12587	41·307	12931	67·193	13277	11·17·71
12593	7·7·257	12937	17·761	13279	7·7·271
12599	43·293	12943	7·43·43	13283	37·359
12607	7·1801	12947	11·11·107	13289	97·137
12617	11·31·37	12949	23·563	**13301**	47·283
12623	13·971	12961	13·997	13303	53·251
12629	73·173	12971	7·17·109	13307	7·1901
12631	17·743	12977	19·683	13319	19·701
12643	47·269	12989	31·419	13321	7·11·173
12649	7·13·139	12991	11·1181	13333	67·199
12661	11·1151	12997	41·317	13343	11·1213
12667	53·239	**13013**	7·11·13·13	13349	7·1907
12673	19·23·29	13019	47·277	13351	13·13·79
12677	7·1811	13021	29·449	13357	19·19·37
12679	31·409	13027	7·1861	13361	31·431

Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.
13363	7·23·83	13699	7·19·103	14041	19·739
13369	29·461	**13703**	71·193	14047	11·1277
13373	43·311	13717	11·29·43	14053	13·23·47
13379	17·787	13727	7·37·53	14059	17·827
13387	11·1217	13733	31·443	14063	7·7·7·41
13391	7·1913	13739	11·1249	14069	11·1279
13393	59·227	13741	7·13·151	14077	7·2011
13403	13·1031	13747	59·233	14089	73·193
13409	11·23·53	13753	17·809	14093	17·829
13423	31·433	13769	7·7·281	14099	23·613
13427	29·463	13771	47·293	**14101**	59·239
13429	13·1033	13777	23·599	14111	103·137
13433	7·19·101	13783	7·11·179	14113	11·1283
13439	89·151	13787	17·811	14117	19·743
13447	7·17·113	13793	13·1061	14119	7·2017
13453	11·1223	**13801**	37·373	14123	29·487
13459	43·313	13811	7·1973	14129	71·199
13471	19·709	13813	19·727	14131	13·1087
13481	13·17·61	13817	41·337	14137	67·211
13483	97·139	13819	13·1063	14141	79·179
13489	7·41·47	13823	23·601	14147	7·43·47
13493	103·131	13837	101·137	14161	7·7·17·17
13501	23·587	13843	109·127	14167	31·457
13507	13·1039	13847	61·227	14171	37·383
13511	59·229	13849	11·1259	14179	11·1289
13517	7·1931	13853	7·1979	14183	13·1091
13519	11·1229	13861	83·167	14189	7·2027
13529	83·163	13867	7·7·283	14191	23·617
13531	7·1933	13871	11·13·97	**14201**	11·1291
13541	11·1231	13889	17·19·43	14203	7·2029
13543	29·467	13891	29·479	14209	13·1093
13547	19·23·31	13897	13·1069	14213	61·233
13549	17·797	**13909**	7·1987	14219	59·241
13559	7·13·149	13919	31·449	14227	41·347
13561	71·191	13927	19·733	14231	7·19·107
13571	41·331	13937	7·11·181	14233	43·331
13573	7·7·277	13939	53·263	14237	23·619
13579	37·367	13943	73·191	14239	29·491
13583	17·17·47	13949	13·29·37	14257	53·269
13589	107·127	13951	7·1993	14261	13·1097
13601	7·29·67	13957	17·821	14263	17·839
13603	61·223	13961	23·607	14267	11·1297
13607	11·1237	13969	61·229	14269	19·751
13609	31·439	13973	89·157	14273	7·2039
13621	53·257	13979	7·1997	14279	109·131
13631	43·317	13981	11·31·41	14287	7·13·157
13637	13·1049	13987	71·197	14291	31·461
13639	23·593	13991	17·823	14297	17·29·29
13643	7·1949	13993	7·1999	14299	79·181
13651	11·17·73	**14003**	11·19·67	**14309**	41·349
13657	7·1951	14017	107·131	14311	11·1301
13661	19·719	14021	7·2003	14317	103·139
13663	13·1051	14023	37·379	14329	7·23·89
13667	79·173	14027	13·13·83	14333	11·1303
13673	11·11·113	14039	101·139	14339	13·1103

Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.
14351	113·127	14689	37·397	15041	13·13·89
14353	31·463	14693	7·2099	15043	7·7·307
14357	7·7·293	**14701**	61·241	15047	41·367
14359	83·173	14707	7·11·191	15049	101·149
14363	53·271	14711	47·313	15059	11·37·37
14371	7·2053	14719	41·359	15067	13·19·61
14377	11·1307	14729	11·13·103	15071	7·2153
14381	73·197	14743	23·641	15079	17·887
14383	19·757	14749	7·7·7·43	15089	79·191
14393	37·389	14761	29·509	15097	31·487
14399	7·11·11·17	14773	11·17·79	**15103**	11·1373
14413	7·29·71	14777	7·2111	15109	29·521
14417	13·1109	14789	23·643	15113	7·17·127
14429	47·307	14791	7·2113	15119	13·1163
14441	7·2063	**14801**	19·19·41	15127	7·2161
14443	11·13·101	14803	113·131	15133	37·409
14453	97·149	14807	13·17·67	15143	19·797
14459	19·761	14809	59·251	15151	109·139
14467	17·23·37	14819	7·29·73	15157	23·659
14471	29·499	14833	7·13·163	15163	59·257
14473	41·353	14837	37·401	15167	29·523
14477	31·467	14839	11·19·71	15169	7·11·197
14483	7·2069	14849	31·479	15179	43·353
14491	43·337	14857	83·179	15181	17·19·47
14497	7·19·109	14861	7·11·193	15191	11·1381
14501	17·853	14863	89·167	15197	7·13·167
14507	89·163	14873	107·139	**15203**	23·661
14509	11·1319	14881	23·647	15209	67·227
14513	23·631	14893	53·281	15211	7·41·53
14521	13·1117	14899	47·317	15221	31·491
14527	73·199	**14903**	7·2129	15223	13·1171
14531	11·1321	14909	17·877	15229	97·157
14539	7·31·67	14911	13·31·37	15239	7·7·311
14567	7·2081	14917	7·2131	15247	79·193
14569	17·857	14921	43·347	15251	101·151
14573	13·19·59	14927	11·23·59	15253	7·2179
14579	61·239	14933	109·137	15257	11·19·73
14581	7·2083	14941	67·223	15281	7·37·59
14587	29·503	14953	19·787	15283	17·29·31
14597	11·1327	14959	7·2137	15293	41·373
14599	13·1123	14963	13·1151	**15301**	11·13·107
14603	17·859	14971	11·1361	15311	61·251
14609	7·2087	14977	17·881	15317	17·17·53
14611	19·769	14981	71·211	15323	7·11·199
14617	47·311	14987	7·2141	15337	7·7·313
14623	7·2089	14989	13·1153	15341	23·23·29
14641	11·11·11·11	14993	11·29·47	15343	67·229
14647	97·151	14999	53·283	15347	103·149
14651	7·7·13·23	**15001**	7·2143	15353	13·1181
14659	107·137	15007	43·349	15367	11·11·127
14663	11·31·43	15011	17·883	15371	19·809
14671	17·863	15019	23·653	15379	7·13·13·13
14677	13·1129	15023	83·181	15389	11·1399
14681	53·277	15029	7·19·113	15397	89·173
14687	19·773	15037	11·1367	**15403**	73·211

Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.	Zahl.	Factoren.
15407	7·31·71	15751	19·829	16093	7·11·11·19
15409	19·811	15757	7·2251	16099	17·947
15419	17·907	15763	11·1433	**16109**	89·181
15421	7·2203	15769	13·1213	16117	71·227
15431	13·1187	15779	31·509	16121	7·7·7·47
15433	11·23·61	15781	43·367	16123	23·701
15437	43·359	15793	17·929	16129	127·127
15449	7·2207	15799	7·37·61	16133	13·17·73
15457	13·29·41	**15811**	97·163	16147	67·241
15463	7·47·47	15821	13·1217	16151	31·521
15469	31·499	15827	7·7·17·19	16153	29·557
15479	23·673	15829	11·1439	16157	107·151
15481	113·137	15833	71·223	16159	11·13·113
15487	17·911	15839	47·337	16163	7·2309
15491	7·2213	15841	7·31·73	16169	19·23·37
15499	11·1409	15847	13·23·53	16171	103·157
15503	37·419	15851	11·11·131	16177	7·2311
15509	13·1193	15853	83·191	16181	11·1471
15517	59·263	15857	101·157	16199	97·167
15521	11·17·83	15863	29·547	**16201**	17·953
15523	19·19·43	15869	7·2267	16207	19·853
15529	53·293	15871	59·269	16211	13·29·43
15533	7·7·317	15883	7·2269	16213	31·523
15539	41·379	15893	23·691	16219	7·7·331
15547	7·2221	15899	13·1223	16237	13·1249
15553	103·151	**15911**	7·2273	16241	109·149
15557	47·331	15917	11·1447	16243	37·439
15563	79·197	15929	17·937	16247	7·11·211
15571	23·677	15931	89·179	16259	71·229
15577	37·421	15941	19·839	16261	7·23·101
15587	11·13·109	15943	107·149	16271	53·307
15589	7·17·131	15947	37·431	16277	41·397
15593	31·503	15949	41·389	16279	73·223
15599	19·821	15953	7·43·53	16283	19·857
15611	67·233	15961	11·1451	16289	7·13·179
15613	13·1201	15967	7·2281	16291	11·1481
15617	7·23·97	15977	13·1229	16297	43·379
15623	17·919	15979	19·29·29	**16303**	7·17·137
15631	7·7·11·29	15983	11·1453	16307	23·709
15637	19·823	15989	59·271	16309	47·347
15653	11·1423	15997	17·941	16313	11·1483
15659	7·2237	**16003**	13·1231	16321	19·859
15673	7·2239	16009	7·2287	16327	29·563
15677	61·257	16013	67 239	16331	7·2333
15689	29·541	16019	83·193	16337	17·31·31
15691	13·17·71	16021	37·433	16343	59·277
15697	11·1427	16027	11·31·47	16351	83·197
15701	7·2243	16031	17·23·41	16357	11·1487
15703	41·383	16037	7·29·79	16367	13·1259
15707	113·139	16039	43·373	16373	7·2339
15709	23·683	16043	61·263	16379	11·1489
15713	19·827	16049	11·1459	16387	7·2341
15719	11·1429	16051	7·2293	16391	37·443
15721	79·199	16079	7·2297	16393	13·13·97
15743	7·13·173	16081	13·1237	16397	19·863

x	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
1	1	1	1	1	1
2	16	32	64	128	256
3	81	243	729	2187	6561
4	256	1024	4096	16384	65536
5	625	3125	15625	78125	390625
6	1296	7776	46656	279936	1679616
7	2401	16807	117649	823543	5764801
8	4096	32768	262144	2097152	16777216
9	6561	59049	531441	4782969	43046721
10	10000	100000	1000000	10000000	100000000
11	14641	161051	1771561	19487171	214358881
12	20736	248832	2985984	35831808	429981696
13	28561	371293	4826809	62748517	815730721
14	38416	537824	7529536	105413504	1475789056
15	50625	759375	11390625	170859375	2562890625
16	65536	1048576	16777216	268435456	4294967296
17	83521	1419857	24137569	410338673	6975757441
18	104976	1889568	34012224	612220032	11019960576
19	130321	2476099	47045881	893871739	16983563041
20	160000	3200000	64000000	1280000000	25600000000
21	194481	4084101	85766121	1801088541	37822859361
22	234256	5153632	113379904	2494357888	54875873536
23	279841	6436343	148035889	3404825447	78310985281
24	331776	7962624	191102976	4586471424	110075314176
25	390625	9765625	244140625	6103515625	152587890625
26	456976	11881376	308915776	8031810176	208827064576
27	531441	14348907	387420489	10460353203	282429536481
28	614656	17210368	481890304	13492928512	377801998336
29	707281	20511149	594823321	17249876309	500246412961
30	810000	24300000	729000000	21870000000	656100000000
31	923521	28629151	887503681	27512614111	852891037441
32	1048576	33554432	1073741824	34359738368	1099511627776
33	1185921	39135393	1291467969	42618442977	1406408618241
34	1336336	45435424	1544804416	52523350144	1785793904896
35	1500625	52521875	1838265625	64339296875	2251875390625
36	1679616	60466176	2176782336	78364164096	2821109907456
37	1874161	69343957	2565726409	94931877133	3512479453921
38	2085136	79235168	3010936384	114415582592	4347792138496
39	2313441	90224199	3518743761	137231006679	5352009260481
40	2560000	102400000	4096000000	163840000000	6553600000000
41	2825761	115856201	4750104241	194754273881	7984925229121
42	3111696	130691232	5489031744	230539333248	9682651996416
43	3418801	147008443	6321363049	271818611107	11688200277601
44	3748096	164916224	7256313856	319277809664	14048223625216
45	4100625	184528125	8303765625	373669453125	16815125390625
46	4477456	205962976	9474296896	435817657216	20047612231936
47	4879681	229345007	10779215329	506623120463	23811286661761
48	5308416	254803968	12230590464	587068342272	28179280429056
49	5764801	282475249	13841287201	678223072849	33232930569601
50	6250000	312500000	15625000000	781250000000	39062500000000

x	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
51	6765201	345025251	17596287801	897410677851	45767944570401
52	7311616	380204032	19770609664	1028071702528	53459728531456
53	7890481	418195493	22164361129	1174711139837	62259690411361
54	8503056	459165024	24794911296	1338925209984	72301961339136
55	9150625	503284375	27680640625	1522435234375	83733937890625
56	9834496	550731776	30840979456	1727094849536	96717311574016
57	10556001	601692057	34296447249	1954897493193	111429157112001
58	11316496	656356768	38068692544	2207984167552	128063081718016
59	12117361	714924299	42180533641	2488651484819	146830437604321
60	12960000	777600000	46656000000	2799360000000	167961600000000
61	13845841	844596301	51520374361	3142742836021	191707312997281
62	14776336	916132832	56800235584	3521614606208	218340105584896
63	15752961	992436543	62523502209	3938980639167	248155780267521
64	16777216	1073741824	68719476736	4398046511104	281474976710656
65	17850625	1160290625	75418890625	4902227890625	318644812890625
66	18974736	1252332576	82653950016	5455160701056	360040606269696
67	20151121	1350125107	90458382169	6060711605323	406067677556641
68	21381376	1453933568	98867482624	6722988818432	457163239653376
69	22667121	1564031349	107918163081	7446353252589	513798374428641
70	24010000	1680700000	117649000000	8235430000000	576480100000000
71	25411681	1804229351	128100283921	9095120158391	645753531245761
72	26873856	1934917632	139314069504	10030613004288	722204136308736
73	28398241	2073071593	151334226289	11047398519097	806460091894081
74	29986576	2219006624	164206490176	12151280273024	899194740203776
75	31640625	2373046875	177978515625	13348388671875	1001129150390625
76	33362176	2535525376	192699928576	14645194571776	1113034787454976
77	35153041	2706784157	208422380089	16048523266853	1235736291547681
78	37015056	2887174368	225199600704	17565568854912	1370114370683136
79	38950081	3077056399	243087455521	19203908986159	1517108809906561
80	40960000	3276800000	262144000000	20971520000000	1677721600000000
81	43046721	3486784401	282429536481	22876792454961	1853020188851841
82	45212176	3707398432	304006671424	24928547056768	2044140858654976
83	47458321	3939040643	326940373369	27136050989627	2252292232139041
84	49787136	4182119424	351298031616	29509034655744	2478758911082496
85	52200625	4437053125	377149515625	32057708828125	2724905250390625
86	54700816	4704270176	404567235136	34792782221696	2992179271065856
87	57289761	4984209207	433626201009	37725479487783	3282116715437121
88	59969536	5277319168	464404086784	40867559636992	3596345248055296
89	62742241	5584059449	496981290961	44231334895529	3936588805702081
90	65610000	5904900000	531441000000	47829690000000	4304672100000000
91	68574961	6240321451	567869252041	51676101935731	4702525276151521
92	71639296	6590815232	606355001344	55784660123648	5132188731375616
93	74805201	6956883693	646990183449	60170087060757	5595818096650401
94	78074896	7339040224	689869781056	64847759419264	6095689385410816
95	81450625	7737809375	735091890625	69833729609375	6634204312890625
96	84934656	8153726976	782757789696	75144747810816	7213895789838336
97	88529281	8587340257	832972004929	80798284478113	7837433594376961
98	92236816	9039207968	885842380864	86812553324672	8507630225817856
99	96059601	9509900499	941480149401	93206534790699	9227446944279201
100	100000000	10000000000	1000000000000	100000000000000	10000000000000000

	0	100	200	300	400
1	1	10201	40401	90601	160801
2	4	10404	40804	91204	161604
3	9	10609	41209	91809	162409
4	16	10816	41616	92416	163216
5	25	11025	42025	93025	164025
6	36	11236	42436	93636	164836
7	49	11449	42849	94249	165649
8	64	11664	43264	94864	166464
9	81	11881	43681	95481	167281
10	100	12100	44100	96100	168100
11	121	12321	44521	96721	168921
12	144	12544	44944	97344	169744
13	169	12769	45369	97969	170569
14	196	12996	45796	98596	171396
15	225	13225	46225	99225	172225
16	256	13456	46656	99856	173056
17	289	13689	47089	100489	173889
18	324	13924	47524	101124	174724
19	361	14161	47961	101761	175561
20	400	14400	48400	102400	176400
21	441	14641	48841	103041	177241
22	484	14884	49284	103684	178084
23	529	15129	49729	104329	178929
24	576	15376	50176	104976	179776
25	625	15625	50625	105625	180625
26	676	15876	51076	106276	181476
27	729	16129	51529	106929	182329
28	784	16384	51984	107584	183184
29	841	16641	52441	108241	184041
30	900	16900	52900	108900	184900
31	961	17161	53361	109561	185761
32	1024	17424	53824	110224	186624
33	1089	17689	54289	110889	187489
34	1156	17956	54756	111556	188356
35	1225	18225	55225	112225	189225
36	1296	18496	55696	112896	190096
37	1369	18769	56169	113569	190969
38	1444	19044	56644	114244	191844
39	1521	19321	57121	114921	192721
40	1600	19600	57600	115600	193600
41	1681	19881	58081	116281	194481
42	1764	20164	58564	116964	195364
43	1849	20449	59049	117649	196249
44	1936	20736	59536	118336	197136
45	2025	21025	60025	119025	198025
46	2116	21316	60516	119716	198916
47	2209	21609	61009	120409	199809
48	2304	21904	61504	121104	200704
49	2401	22201	62001	121801	201601
50	2500	22500	62500	122500	202500

	500	600	700	800	900
1	251001	361201	491401	641601	811801
2	252004	362404	492804	643204	813604
3	253009	363609	494209	644809	815409
4	254016	364816	495616	646416	817216
5	255025	366025	497025	648025	819025
6	256036	367236	498436	649636	820836
7	257049	368449	499849	651249	822649
8	258064	369664	501264	652864	824464
9	259081	370881	502681	654481	826281
10	260100	372100	504100	656100	828100
11	261121	373321	505521	657721	829921
12	262144	374544	506944	659344	831744
13	263169	375769	508369	660969	833569
14	264196	376996	509796	662596	835396
15	265225	378225	511225	664225	837225
16	266256	379456	512656	665856	839056
17	267289	380689	514089	667489	840889
18	268324	381924	515524	669124	842724
19	269361	383161	516961	670761	844561
20	270400	384400	518400	672400	846400
21	271441	385641	519841	674041	848241
22	272484	386884	521284	675684	850084
23	273529	388129	522729	677329	851929
24	274576	389376	524176	678976	853776
25	275625	390625	525625	680625	855625
26	276676	391876	527076	682276	857476
27	277729	393129	528529	683929	859329
28	278784	394384	529984	685584	861184
29	279841	395641	531441	687241	863041
30	280900	396900	532900	688900	864900
31	281961	398161	534361	690561	866761
32	283024	399424	535824	692224	868624
33	284089	400689	537289	693889	870489
34	285156	401956	538756	695556	872356
35	286225	403225	540225	697225	874225
36	287296	404496	541696	698896	876096
37	288369	405769	543169	700569	877969
38	289444	407044	544644	702244	879844
39	290521	408321	546121	703921	881721
40	291600	409600	547600	705600	883600
41	292681	410881	549081	707281	885481
42	293764	412164	550564	708964	887364
43	294849	413449	552049	710649	889249
44	295936	414736	553536	712336	891136
45	297025	416025	555025	714025	893025
46	298116	417316	556516	715716	894916
47	299209	418609	558009	717409	896809
48	300304	419904	559504	719104	898704
49	301401	421201	561001	720801	900601
50	302500	422500	562500	722500	902500

	0	100	200	300	400
51	2601	22801	63001	123201	203401
52	2704	23104	63504	123904	204304
53	2809	23409	64009	124609	205209
54	2916	23716	64516	125316	206116
55	3025	24025	65025	126025	207025
56	3136	24336	65536	126736	207936
57	3249	24649	66049	127449	208849
58	3364	24964	66564	128164	209764
59	3481	25281	67081	128881	210681
60	3600	25600	67600	129600	211600
61	3721	25921	68121	130321	212521
62	3844	26244	68644	131044	213444
63	3969	26569	69169	131769	214369
64	4096	26896	69696	132496	215296
65	4225	27225	70225	133225	216225
66	4356	27556	70756	133956	217156
67	4489	27889	71289	134689	218089
68	4624	28224	71824	135424	219024
69	4761	28561	72361	136161	219961
70	4900	28900	72900	136900	220900
71	5041	29241	73441	137641	221841
72	5184	29584	73984	138384	222784
73	5329	29929	74529	139129	223729
74	5476	30276	75076	139876	224676
75	5625	30625	75625	140625	225625
76	5776	30976	76176	141376	226576
77	5929	31329	76729	142129	227529
78	6084	31684	77284	142884	228484
79	6241	32041	77841	143641	229441
80	6400	32400	78400	144400	230400
81	6561	32761	78961	145161	231361
82	6724	33124	79524	145924	232324
83	6889	33489	80089	146689	233289
84	7056	33856	80656	147456	234256
85	7225	34225	81225	148225	235225
86	7396	34596	81796	148996	236196
87	7569	34969	82369	149769	237169
88	7744	35344	82944	150544	238144
89	7921	35721	83521	151321	239121
90	8100	36100	84100	152100	240100
91	8281	36481	84681	152881	241081
92	8464	36864	85264	153664	242064
93	8649	37249	85849	154449	243049
94	8836	37636	86436	155236	244036
95	9025	38025	87025	156025	245025
96	9216	38416	87616	156816	246016
97	9409	38809	88209	157609	247009
98	9604	39204	88804	158404	248004
99	9801	39601	89401	159201	249001
100	10000	40000	90000	160000	250000

	500	600	700	800	900
51	303601	423801	564001	724201	904401
52	304704	425104	565504	725904	906304
53	305809	426409	567009	727609	908209
54	306916	427716	568516	729316	910116
55	308025	429025	570025	731025	912025
56	309136	430336	571536	732736	913936
57	310249	431649	573049	734449	915849
58	311364	432964	574564	736164	917764
59	312481	434281	576081	737881	919681
60	313600	435600	577600	739600	921600
61	314721	436921	579121	741321	923521
62	315844	438244	580644	743044	925444
63	316969	439569	582169	744769	927369
64	318096	440896	583696	746496	929296
65	319225	442225	585225	748225	931225
66	320356	443556	586756	749956	933156
67	321489	444889	588289	751689	935089
68	322624	446224	589824	753424	937024
69	323761	447561	591361	755161	938961
70	324900	448900	592900	756900	940900
71	326041	450241	594441	758641	942841
72	327184	451584	595984	760384	944784
73	328329	452929	597529	762129	946729
74	329476	454276	599076	763876	948676
75	330625	455625	600625	765625	950625
76	331776	456976	602176	767376	952576
77	332929	458329	603729	769129	954529
78	334084	459684	605284	770884	956484
79	335241	461041	606841	772641	958441
80	336400	462400	608400	774400	960400
81	337561	463761	609961	776161	962361
82	338724	465124	611524	777924	964324
83	339889	466489	613089	779689	966289
84	341056	467856	614656	781456	968256
85	342225	469225	616225	783225	970225
86	343396	470596	617796	784996	972196
87	344569	471969	619369	786769	974169
88	345744	473344	620944	788544	976144
89	346921	474721	622521	790321	978121
90	348100	476100	624100	792100	980100
91	349281	477481	625681	793881	982081
92	350464	478864	627264	795664	984064
93	351649	480249	628849	797449	986049
94	352836	481636	630436	799236	988036
95	354025	483025	632025	801025	990025
96	355216	484416	633616	802816	992016
97	356409	485809	635209	804609	994009
98	357604	487204	636804	806404	996004
99	358801	488601	638401	808201	998001
100	360000	490000	640000	810000	1000000

	0	100	200	300	400
1	1	1030301	8120601	27270901	64481201
2	8	1061208	8242408	27543608	64964808
3	27	1092727	8365427	27818127	65450827
4	64	1124864	8489664	28094464	65939264
5	125	1157625	8615125	28372625	66430125
6	216	1191016	8741816	28652616	66923416
7	343	1225043	8869743	28934443	67419143
8	512	1259712	8998912	29218112	67917312
9	729	1295029	9129329	29503629	68417929
10	1000	1331000	9261000	29791000	68921000
11	1331	1367631	9393931	30080231	69426531
12	1728	1404928	9528128	30371328	69934528
13	2197	1442897	9663597	30664297	70444997
14	2744	1481544	9800344	30959144	70957944
15	3375	1520875	9938375	31255875	71473375
16	4096	1560896	10077696	31554496	71991296
17	4913	1601613	10218313	31855013	72511713
18	5832	1643032	10360232	32157432	73034632
19	6859	1685159	10503459	32461759	73560059
20	8000	1728000	10648000	32768000	74088000
21	9261	1771561	10793861	33076161	74618461
22	10648	1815848	10941048	33386248	75151448
23	12167	1860867	11089567	33698267	75686967
24	13824	1906624	11239424	34012224	76225024
25	15625	1953125	11390625	34328125	76765625
26	17576	2000376	11543176	34645976	77308776
27	19683	2048383	11697083	34965783	77854483
28	21952	2097152	11852352	35287552	78402752
29	24389	2146689	12008989	35611289	78953589
30	27000	2197000	12167000	35937000	79507000
31	29791	2248091	12326391	36264691	80062991
32	32768	2299968	12487168	36594368	80621568
33	35937	2352637	12649337	36926037	81182737
34	39304	2406104	12812904	37259704	81746504
35	42875	2460375	12977875	37595375	82312875
36	46656	2515456	13144256	37933056	82881856
37	50653	2571353	13312053	38272753	83453453
38	54872	2628072	13481272	38614472	84027672
39	59319	2685619	13651919	38958219	84604519
40	64000	2744000	13824000	39304000	85184000
41	68921	2803221	13997521	39651821	85766121
42	74088	2863288	14172488	40001688	86350888
43	79507	2924207	14348907	40353607	86938307
44	85184	2985984	14526784	40707584	87528384
45	91125	3048625	14706125	41063625	88121125
46	97336	3112136	14886936	41421736	88716536
47	103823	3176523	15069223	41781923	89314623
48	110592	3241792	15252992	42144192	89915392
49	117649	3307949	15438249	42508549	90518849
50	125000	3375000	15625000	42875000	91125000

	500	600	700	800	900
1	125751501	217081801	344472101	513922401	731432701
2	126506008	218167208	345948408	515849608	733870808
3	127263527	219256227	347428927	517781627	736314327
4	128024064	220348864	348913664	519718464	738763264
5	128787625	221445125	350402625	521660125	741217625
6	129554216	222545016	351895816	523606616	743677416
7	130323843	223648543	353393243	525557943	746142643
8	131096512	224755712	354894912	527514112	748613312
9	131872229	225866529	356400829	529475129	751089429
10	132651000	226981000	357911000	531441000	753571000
11	133432831	228099131	359425431	533411731	756058031
12	134217728	229220928	360944128	535387328	758550528
13	135005697	230346397	362467097	537367797	761048497
14	135796744	231475544	363994344	539353144	763551944
15	136590875	232608375	365525875	541343375	766060875
16	137388096	233744896	367061696	543338496	768575296
17	138188413	234885113	368601813	545338513	771095213
18	138991832	236029032	370146232	547343432	773620632
19	139798359	237176659	371694959	549353259	776151559
20	140608000	238328000	373248000	551368000	778688000
21	141420761	239483061	374805361	553387661	781229961
22	142236648	240641848	376367048	555412248	783777448
23	143055667	241804367	377933067	557441767	786330467
24	143877824	242970624	379503424	559476224	788889024
25	144703125	244140625	381078125	561515625	791453125
26	145531576	245314376	382657176	563559976	794022776
27	146363183	246491883	384240583	565609283	796597983
28	147197952	247673152	385828352	567663552	799178752
29	148035889	248858189	387420489	569722789	801765089
30	148877000	250047000	389017000	571787000	804357000
31	149721291	251239591	390617891	573856191	806954491
32	150568768	252435968	392223168	575930368	809557568
33	151419437	253636137	393832837	578009537	812166237
34	152273304	254840104	395446904	580093704	814780504
35	153130375	256047875	397065375	582182875	817400375
36	153990656	257259456	398688256	584277056	820025856
37	154854153	258474853	400315553	586376253	822656953
38	155720872	259694072	401947272	588480472	825293672
39	156590819	260917119	403583419	590589719	827936019
40	157464000	262144000	405224000	592704000	830584000
41	158340421	263374721	406869021	594823321	833237621
42	159220088	264609288	408518488	596947688	835896888
43	160103007	265847707	410172407	599077107	838561807
44	160989184	267089984	411830784	601211584	841232384
45	161878625	268336125	413493625	603351125	843908625
46	162771336	269586136	415160936	605495736	846590536
47	163667323	270840023	416832723	607645423	849278123
48	164566592	272097792	418508992	609800192	851971392
49	165469149	273359449	420189749	611960049	854670349
50	166375000	274625000	421875000	614125000	857375000

	0	100	200	300	400
51	132651	3442951	15813251	43243551	91733851
52	140608	3511808	16003008	43614208	92345408
53	148877	3581577	16194277	43986977	92959677
54	157464	3652264	16387064	44361864	93576664
55	166375	3723875	16581375	44738875	94196375
56	175616	3796416	16777216	45118016	94818816
57	185193	3869893	16974593	45499293	95443993
58	195112	3944312	17173512	45882712	96071912
59	205379	4019679	17373979	46268279	96702579
60	216000	4096000	17576000	46656000	97336000
61	226981	4173281	17779581	47045881	97972181
62	238328	4251528	17984728	47437928	98611128
63	250047	4330747	18191447	47832147	99252847
64	262144	4410944	18399744	48228544	99897344
65	274625	4492125	18609625	48627125	100544625
66	287496	4574296	18821096	49027896	101194696
67	300763	4657463	19034163	49430863	101847563
68	314432	4741632	19248832	49836032	102503232
69	328509	4826809	19465109	50243409	103161709
70	343000	4913000	19683000	50653000	103823000
71	357911	5000211	19902511	51064811	104487111
72	373248	5088448	20123648	51478848	105154048
73	389017	5177717	20346417	51895117	105823817
74	405224	5268024	20570824	52313624	106496424
75	421875	5359375	20796875	52734375	107171875
76	438976	5451776	21024576	53157376	107850176
77	456533	5545233	21253933	53582633	108531333
78	474552	5639752	21484952	54010152	109215352
79	493039	5735339	21717639	54439939	109902239
80	512000	5832000	21952000	54872000	110592000
81	531441	5929741	22188041	55306341	111284641
82	551368	6028568	22425768	55742968	111980168
83	571787	6128487	22665187	56181887	112678587
84	592704	6229504	22906304	56623104	113379904
85	614125	6331625	23149125	57066625	114084125
86	636056	6434856	23393656	57512456	114791256
87	658503	6539203	23639903	57960603	115501303
88	681472	6644672	23887872	58411072	116214272
89	704969	6751269	24137569	58863869	116930169
90	729000	6859000	24389000	59319000	117649000
91	753571	6967871	24642171	59776471	118370771
92	778688	7077888	24897088	60236288	119095488
93	804357	7189057	25153757	60698457	119823157
94	830584	7301384	25412184	61162984	120553784
95	857375	7414875	25672375	61629875	121287375
96	884736	7529536	25934336	62099136	122023936
97	912673	7645373	26198073	62570773	122763473
98	941192	7762392	26463592	63044792	123505992
99	970299	7880599	26730899	63521199	124251499
100	1000000	8000000	27000000	64000000	125000000

	500	600	700	800	900
51	167284151	275894451	423564751	616295051	860085351
52	168196608	277167808	425259008	618470208	862801408
53	169112377	278445077	426957777	620650477	865523177
54	170031464	279726264	428661064	622835864	868250664
55	170953875	281011375	430368875	625026375	870983875
56	171879616	282300416	432081216	627222016	873722816
57	172808693	283593393	433798093	629422793	876467493
58	173741112	284890312	435519512	631628712	879217912
59	174676879	286191179	437245479	633839779	881974079
60	175616000	287496000	438976000	636056000	884736000
61	176558481	288804781	440711081	638277381	887503681
62	177504328	290117528	442450728	640503928	890277128
63	178453547	291434247	444194947	642735647	893056347
64	179406144	292754944	445943744	644972544	895841344
65	180362125	294079625	447697125	647214625	898632125
66	181321496	295408296	449455096	649461896	901428696
67	182284263	296740963	451217663	651714363	904231063
68	183250432	298077632	452984832	653972032	907039232
69	184220009	299418309	454756609	656234909	909853209
70	185193000	300763000	456533000	658503000	912673000
71	186169411	302111711	458314011	660776311	915498611
72	187149248	303464448	460099648	663054848	918330048
73	188132517	304821217	461889917	665338617	921167317
74	189119224	306182024	463684824	667627624	924010424
75	190109375	307546875	465484375	669921875	926859375
76	191102976	308915776	467288576	672221376	929714176
77	192100033	310288733	469097433	674526133	932574833
78	193100552	311665752	470910952	676836152	935441352
79	194104539	313046839	472729139	679151439	938313739
80	195112000	314432000	474552000	681472000	941192000
81	196122941	315821241	476379541	683797841	944076141
82	197137368	317214568	478211768	686128968	946966168
83	198155287	318611987	480048687	688465387	949862087
84	199176704	320013504	481890304	690807104	952763904
85	200201625	321419125	483736625	693154125	955671625
86	201230056	322828856	485587656	695506456	958585256
87	202262003	324242703	487443403	697864103	961504803
88	203297472	325660672	489303872	700227072	964430272
89	204336469	327082769	491169069	702595369	967361669
90	205379000	328509000	493039000	704969000	970299000
91	206425071	329939371	494913671	707347971	973242271
92	207474688	331373888	496793088	709732288	976191488
93	208527857	332812557	498677257	712121957	979146657
94	209584584	334255384	500566184	714516984	982107784
95	210644875	335702375	502459875	716917375	985074875
96	211708736	337153536	504358336	719323136	988047936
97	212776173	338608873	506261573	721734273	991026973
98	213847192	340068392	508169592	724150792	994011992
99	214921799	341532099	510082399	726572699	997002999
100	216000000	343000000	512000000	729000000	1000000000

	0	100	200	300	400
0	0	10,0000000	14,1421356	17,3205081	20,0000000
1	1,0000000	10,0498756	14,1774469	17,3493516	20,0249844
2	1,4142136	10,0995049	14,2126704	17,3781472	20,0499377
3	1,7320508	10,1488916	14,2478068	17,4068952	20,0748599
4	2,0000000	10,1980390	14,2828569	17,4355958	20,0997512
5	2,2360680	10,2469508	14,3178211	17,4642492	20,1246118
6	2,4494897	10,2956301	14,3527001	17,4928557	20,1494417
7	2,6457513	10,3440804	14,3874946	17,5214155	20,1742410
8	2,8284271	10,3923048	14,4222051	17,5499288	20,1990099
9	3,0000000	10,4403065	14,4568323	17,5783958	20,2237484
10	3,1622777	10,4880885	14,4913767	17,6068169	20,2484567
11	3,3166248	10,5356538	14,5258390	17,6351921	20,2731349
12	3,4641016	10,5830052	14,5602198	17,6635217	20,2977831
13	3,6055513	10,6301458	14,5945195	17,6918060	20,3224014
14	3,7416574	10,6770783	14,6287388	17,7200451	20,3469899
15	3,8729833	10,7238053	14,6628783	17,7482393	20,3715488
16	4,0000000	10,7703296	14,6969385	17,7763888	20,3960781
17	4,1231056	10,8166538	14,7309199	17,8044938	20,4205779
18	4,2426407	10,8627805	14,7648231	17,8325545	20,4450483
19	4,3588989	10,9087121	14,7986486	17,8605711	20,4694895
20	4,4721360	10,9544512	14,8323970	17,8885438	20,4939015
21	4,5825757	11,0000000	14,8660687	17,9164729	20,5182845
22	4,6904158	11,0453610	14,8996644	17,9443584	20,5426386
23	4,7958315	11,0905365	14,9331845	17,9722008	20,5669638
24	4,8989795	11,1355287	14,9666295	18,0000000	20,5912603
25	5,0000000	11,1803399	15,0000000	18,0277564	20,6155281
26	5,0990195	11,2249722	15,0332964	18,0554701	20,6397674
27	5,1961524	11,2694277	15,0665192	18,0831413	20,6639783
28	5,2915026	11,3137085	15,0996689	18,1107703	20,6881609
29	5,3851648	11,3578167	15,1327460	18,1383571	20,7123152
30	5,4772256	11,4017543	15,1657509	18,1659021	20,7364414
31	5,5677644	11,4455231	15,1986842	18,1934054	20,7605395
32	5,6568542	11,4891253	15,2315462	18,2208672	20,7846097
33	5,7445626	11,5325626	15,2643375	18,2482876	20,8086520
34	5,8309519	11,5758369	15,2970585	18,2756669	20,8326667
35	5,9160798	11,6189500	15,3297097	18,3030052	20,8566536
36	6,0000000	11,6619038	15,3622915	18,3303028	20,8806130
37	6,0827625	11,7046999	15,3948043	18,3575598	20,9045450
38	6,1644140	11,7473401	15,4272486	18,3847763	20,9284495
39	6,2449980	11,7898261	15,4596248	18,4119526	20,9523268
40	6,3245553	11,8321596	15,4919334	18,4390889	20,9761770
41	6,4031242	11,8743421	15,5241747	18,4661853	21,0000000
42	6,4807407	11,9163753	15,5563492	18,4932420	21,0237960
43	6,5574385	11,9582607	15,5884573	18,5202592	21,0475652
44	6,6332496	12,0000000	15,6204994	18,5472370	21,0713075
45	6,7082039	12,0415946	15,6524758	18,5741756	21,0950231
46	6,7823300	12,0830460	15,6843871	18,6010752	21,1187121
47	6,8556546	12,1243557	15,7162336	18,6279360	21,1423745
48	6,9282032	12,1655251	15,7480157	18,6547581	21,1660105
49	7,0000000	12,2065556	15,7797338	18,6815417	21,1896201

	500	600	700	800	900
0	22,3606798	24,4948974	26,4575131	28,2842712	30,0000000
1	22,3830293	24,5153013	26,4764046	28,3019434	30,0166620
2	22,4053565	24,5356883	26,4952826	28,3196045	30,0333148
3	22,4276615	24,5560583	26,5141472	28,3372546	30,0499584
4	22,4499443	24,5764115	26,5329983	28,3548938	30,0665928
5	22,4722051	24,5967478	26,5518361	28,3725219	30,0832179
6	22,4944438	24,6170673	26,5706605	28,3901391	30,0998339
7	22,5166605	24,6373700	26,5894716	28,4077454	30,1164407
8	22,5388553	24,6576560	26,6082694	28,4253408	30,1330383
9	22,5610283	24,6779254	26,6270539	28,4429253	30,1496269
10	22,5831796	24,6981781	26,6458252	28,4604989	30,1662063
11	22,6053091	24,7184142	26,6645833	28,4780617	30,1827765
12	22,6274170	24,7386338	26,6833281	28,4956137	30,1993377
13	22,6495033	24,7588368	26,7020598	28,5131549	30,2158899
14	22,6715681	24,7790234	26,7207784	28,5306852	30,2324329
15	22,6936114	24,7991935	26,7394839	28,5482048	30,2489669
16	22,7156334	24,8193473	26,7581763	28,5657137	30,2654919
17	22,7376340	24,8394847	26,7768557	28,5832119	30,2820079
18	22,7596134	24,8596058	26,7955220	28,6006993	30,2985148
19	22,7815715	24,8797106	26,8141754	28,6181760	30,3150128
20	22,8035085	24,8997992	26,8328157	28,6356421	30,3315018
21	22,8254244	24,9198716	26,8514432	28,6530976	30,3479818
22	22,8473193	24,9399278	26,8700577	28,6705424	30,3644529
23	22,8691933	24,9599679	26,8886593	28,6879766	30,3809151
24	22,8910463	24,9799920	26,9072481	28,7054002	30,3973683
25	22,9128785	25,0000000	26,9258240	28,7228132	30,4138127
26	22,9346899	25,0199920	26,9443872	28,7402157	30,4302481
27	22,9564806	25,0399681	26,9629375	28,7576077	30,4466747
28	22,9782506	25,0599282	26,9814751	28,7749891	30,4630924
29	23,0000000	25,0798724	27,0000000	28,7923601	30,4795013
30	23,0217289	25,0998008	27,0185122	28,8097206	30,4959014
31	23,0434372	25,1197134	27,0370117	28,8270706	30,5122926
32	23,0651252	25,1396102	27,0554985	28,8444102	30,5286750
33	23,0867928	25,1594913	27,0739727	28,8617394	30,5450487
34	23,1084400	25,1793566	27,0924344	28,8790582	30,5614136
35	23,1300670	25,1992063	27,1108834	28,8963666	30,5777697
36	23,1516738	25,2190404	27,1293199	28,9136646	30,5941171
37	23,1732605	25,2388589	27,1477439	28,9309523	30,6104557
38	23,1948270	25,2586619	27,1661554	28,9482297	30,6267857
39	23,2163735	25,2784493	27,1845544	28,9654967	30,6431069
40	23,2379001	25,2982213	27,2029410	28,9827535	30,6594194
41	23,2594067	25,3179778	27,2213152	29,0000000	30,6757233
42	23,2808935	25,3377189	27,2396769	29,0172363	30,6920185
43	23,3023604	25,3574447	27,2580263	29,0344623	30,7083051
44	23,3238076	25,3771551	27,2763634	29,0516781	30,7245830
45	23,3452351	25,3968502	27,2946881	29,0688837	30,7408523
46	23,3666429	25,4165301	27,3130006	29,0860791	30,7571130
47	23,3880311	25,4361947	27,3313007	29,1032644	30,7733651
48	23,4093998	25,4558441	27,3495887	29,1204396	30,7896086
49	23,4307490	25,4754784	27,3678644	29,1376046	30,8058436

	0	100	200	300	400
50	7,0710678	12,2474487	15,8113883	18,7082869	21,2132034
51	7,1414284	12,2882057	15,8429795	18,7349940	21,2367606
52	7,2111026	12,3288280	15,8745079	18,7616630	21,2602916
53	7,2801099	12,3693169	15,9059737	18,7882942	21,2837967
54	7,3484692	12,4096736	15,9373775	18,8148877	21,3072758
55	7,4161985	12,4498996	15,9687194	18,8414437	21,3307290
56	7,4833148	12,4899960	16,0000000	18,8679623	21,3541565
57	7,5498344	12,5299641	16,0312195	18,8944436	21,3775583
58	7,6157731	12,5698051	16,0623784	18,9208879	21,4009346
59	7,6811457	12,6095202	16,0934769	18,9472953	21,4242853
60	7,7459667	12,6491106	16,1245155	18,9736660	21,4476106
61	7,8102497	12,6885775	16,1554944	19,0000000	21,4709106
62	7,8740079	12,7279221	16,1864141	19,0262976	21,4941853
63	7,9372539	12,7671453	16,2172747	19,0525589	21,5174348
64	8,0000000	12,8062485	16,2480763	19,0787840	21,5406592
65	8,0622577	12,8452326	16,2788206	19,1049732	21,5638587
66	8,1240384	12,8840987	16,3095064	19,1311265	21,5870331
67	8,1853528	12,9228480	16,3401346	19,1572441	21,6101828
68	8,2462113	12,9614814	16,3707055	19,1833261	21,6333077
69	8,3066239	13,0000000	16,4012195	19,2093727	21,6564078
70	8,3666003	13,0384048	16,4316767	19,2353841	21,6794834
71	8,4261498	13,0766968	16,4620776	19,2613603	21,7025344
72	8,4852814	13,1148770	16,4924225	19,2873015	21,7255610
73	8,5440037	13,1529464	16,5227116	19,3132079	21,7485632
74	8,6023253	13,1909060	16,5529454	19,3390796	21,7715411
75	8,6602540	13,2287566	16,5831240	19,3649167	21,7944947
76	8,7177979	13,2664992	16,6132477	19,3907194	21,8174242
77	8,7749644	13,3041347	16,6433170	19,4164878	21,8403297
78	8,8317609	13,3416641	16,6733320	19,4422221	21,8632111
79	8,8881944	13,3790882	16,7032931	19,4679223	21,8860686
80	8,9442719	13,4164079	16,7332005	19,4935887	21,9089023
81	9,0000000	13,4536240	16,7630546	19,5192213	21,9317122
82	9,0553851	13,4907376	16,7928556	19,5448203	21,9544984
83	9,1104336	13,5277493	16,8226038	19,5703858	21,9772610
84	9,1651514	13,5646600	16,8522995	19,5959179	22,0000000
85	9,2195445	13,6014705	16,8819430	19,6214169	22,0227155
86	9,2736185	13,6381817	16,9115345	19,6468827	22,0454077
87	9,3273791	13,6747943	16,9410743	19,6723156	22,0680765
88	9,3808315	13,7113092	16,9705627	19,6977156	22,0907220
89	9,4339811	13,7477271	17,0000000	19,7230829	22,1133444
90	9,4868330	13,7840488	17,0293864	19,7484177	22,1359436
91	9,5393920	13,8202750	17,0587221	19,7737199	22,1585198
92	9,5916630	13,8564065	17,0880075	19,7989899	22,1810730
93	9,6436508	13,8924440	17,1172428	19,8242276	22,2036033
94	9,6953597	13,9283883	17,1464282	19,8494332	22,2261108
95	9,7467943	13,9642400	17,1755640	19,8746069	22,2485955
96	9,7979590	14,0000000	17,2046505	19,8997487	22,2710575
97	9,8488578	14,0356688	17,2336879	19,9248588	22,2934968
98	9,8994949	14,0712473	17,2626765	19,9499373	22,3159136
99	9,9498744	14,1067360	17,2916165	19,9749844	22,3383079

	500	600	700	800	900
50	23,4520788	25,4950976	27,3861279	29,1547595	30,8220700
51	23,4733892	25,5147016	27,4043792	29,1719043	30,8382879
52	23,4946802	25,5342907	27,4226184	29,1890390	30,8544972
53	23,5159520	25,5538647	27,4408455	29,2061637	30,8706981
54	23,5372046	25,5734237	27,4590604	29,2232784	30,8868904
55	23,5584380	25,5929678	27,4772633	29,2403830	30,9030743
56	23,5796522	25,6124969	27,4954542	29,2574777	30,9192497
57	23,6008474	25,6320112	27,5136330	29,2745623	30,9354166
58	23,6220236	25,6515107	27,5317998	29,2916370	30,9515751
59	23,6431808	25,6709953	27,5499546	29,3087018	30,9677251
60	23,6643191	25,6904652	27,5680975	29,3257566	30,9838668
61	23,6854386	25,7099203	27,5862284	29,3428015	31,0000000
62	23,7065392	25,7293607	27,6043475	29,3598365	31,0161248
63	23,7276210	25,7487864	27,6224546	29,3768616	31,0322413
64	23,7486842	25,7681975	27,6405499	29,3938769	31,0483494
65	23,7697286	25,7875939	27,6586334	29,4108823	31,0644491
66	23,7907545	25,8069758	27,6767050	29,4278779	31,0805405
67	23,8117618	25,8263431	27,6947648	29,4448637	31,0966236
68	23,8327506	25,8456960	27,7128129	29,4618397	31,1126984
69	23,8537209	25,8650343	27,7308492	29,4788059	31,1287648
70	23,8746728	25,8843582	27,7488739	29,4957624	31,1448230
71	23,8956063	25,9036677	27,7668868	29,5127091	31,1608729
72	23,9165215	25,9229628	27,7848880	29,5296461	31,1769145
73	23,9374184	25,9422435	27,8028775	29,5465734	31,1929479
74	23,9582971	25,9615100	27,8208555	29,5634910	31,2089731
75	23,9791576	25,9807621	27,8388218	29,5803989	31,2249900
76	24,0000000	26,0000000	27,8567766	29,5972972	31,2409987
77	24,0208243	26,0192237	27,8747197	29,6141858	31,2569992
78	24,0416306	26,0384331	27,8926514	29,6310648	31,2729915
79	24,0624188	26,0576284	27,9105715	29,6479342	31,2889757
80	24,0831892	26,0768096	27,9284801	29,6647939	31,3049517
81	24,1039416	26,0959767	27,9463772	29,6816442	31,3209195
82	24,1246762	26,1151297	27,9642629	29,6984848	31,3368792
83	24,1453929	26,1342687	27,9821372	29,7153159	31,3528308
84	24,1660919	26,1533937	28,0000000	29,7321375	31,3687743
85	24,1867732	26,1725047	28,0178515	29,7489496	31,3847097
86	24,2074369	26,1916017	28,0356915	29,7657521	31,4006369
87	24,2280829	26,2106848	28,0535203	29,7825452	31,4165561
88	24,2487113	26,2297541	28,0713377	29,7993289	31,4324673
89	24,2693222	26,2488095	28,0891438	29,8161030	31,4483704
90	24,2899156	26,2678511	28,1069386	29,8328678	31,4642654
91	24,3104916	26,2868789	28,1247222	29,8496231	31,4801525
92	24,3310501	26,3058929	28,1424946	29,8663690	31,4960315
93	24,3515913	26,3248932	28,1602557	29,8831056	31,5119025
94	24,3721152	26,3438797	28,1780056	29,8998328	31,5277655
95	24,3926218	26,3628527	28,1957444	29,9165506	31,5436206
96	24,4131112	26,3818119	28,2134720	29,9332591	31,5594677
97	24,4335834	26,4007576	28,2311884	29,9499583	31,5753068
98	24,4540385	26,4196896	28,2488938	29,9666481	31,5911380
99	24,4744765	26,4386081	28,2665881	29,9833287	31,6069613

	0	100	200	300	400
0	0	4,6415888	5,8480355	6,6943295	7,3680630
1	1,0000000	4,6570095	5,8577660	6,7017594	7,3741979
2	1,2599210	4,6723287	5,8674643	6,7091729	7,3803227
3	1,4422496	4,6875481	5,8771307	6,7165700	7,3864373
4	1,5874011	4,7026694	5,8867653	6,7239508	7,3925418
5	1,7099759	4,7176940	5,8963685	6,7313155	7,3986362
6	1,8171206	4,7326235	5,9059406	6,7386641	7,4047206
7	1,9129312	4,7474594	5,9154817	6,7459967	7,4107951
8	2,0000000	4,7622032	5,9249921	6,7533134	7,4168595
9	2,0800838	4,7768562	5,9344721	6,7606143	7,4229141
10	2,1544347	4,7914199	5,9439220	6,7678995	7,4289588
11	2,2239801	4,8058955	5,9533418	6,7751690	7,4349937
12	2,2894285	4,8202845	5,9627320	6,7824229	7,4410189
13	2,3513347	4,8345881	5,9720926	6,7896613	7,4470342
14	2,4101423	4,8488076	5,9814240	6,7968844	7,4530399
15	2,4662121	4,8629441	5,9907264	6,8040921	7,4590359
16	2,5198421	4,8769990	6,0000000	6,8112846	7,4650223
17	2,5712816	4,8909732	6,0092450	6,8184619	7,4709991
18	2,6207414	4,9048681	6,0184617	6,8256242	7,4769664
19	2,6684016	4,9186847	6,0276502	6,8327715	7,4829241
20	2,7144176	4,9324242	6,0368107	6,8399038	7,4888724
21	2,7589242	4,9460874	6,0459435	6,8470213	7,4948112
22	2,8020393	4,9596757	6,0550489	6,8541240	7,5007407
23	2,8438670	4,9731898	6,0641270	6,8612120	7,5066607
24	2,8844991	4,9866310	6,0731779	6,8682855	7,5125715
25	2,9240177	5,0000000	6,0822020	6,8753443	7,5184730
26	2,9624961	5,0132979	6,0911993	6,8823888	7,5243652
27	3,0000000	5,0265257	6,1001702	6,8894188	7,5302482
28	3,0365890	5,0396842	6,1091147	6,8964345	7,5361220
29	3,0723168	5,0527743	6,1180332	6,9034359	7,5419867
30	3,1072325	5,0657970	6,1269257	6,9104232	7,5478423
31	3,1413807	5,0787531	6,1357924	6,9173964	7,5536888
32	3,1748021	5,0916434	6,1446337	6,9243556	7,5595263
33	3,2075343	5,1044687	6,1534495	6,9313008	7,5653548
34	3,2396118	5,1172299	6,1622401	6,9382321	7,5711743
35	3,2710663	5,1299278	6,1710058	6,9451496	7,5769849
36	3,3019272	5,1425632	6,1797466	6,9520533	7,5827865
37	3,3322219	5,1551367	6,1884628	6,9589433	7,5885793
38	3,3619754	5,1676493	6,1971544	6,9658198	7,5943633
39	3,3912114	5,1801015	6,2058218	6,9726826	7,6001385
40	3,4199519	5,1924941	6,2144650	6,9795320	7,6059049
41	3,4482172	5,2048279	6,2230843	6,9863680	7,6116626
42	3,4760266	5,2171034	6,2316797	6,9931907	7,6174116
43	3,5033981	5,2293215	6,2402515	7,0000000	7,6231519
44	3,5303483	5,2414828	6,2487998	7,0067961	7,6288836
45	3,5568933	5,2535879	6,2573247	7,0135791	7,6346067
46	3,5830479	5,2656374	6,2658266	7,0203490	7,6403213
47	3,6088261	5,2776321	6,2743054	7,0271058	7,6460272
48	3,6342412	5,2895725	6,2827613	7,0338497	7,6517247
49	3,6593057	5,3014592	6,2911946	7,0405806	7,6574137

	500	600	700	800	900
0	7,9370053	8,4343267	8,8790400	9,2831777	9,6548938
1	7,9422931	8,4390098	8,8832661	9,2870440	9,6584684
2	7,9475739	8,4436877	8,8874882	9,2909072	9,6620403
3	7,9528476	8,4483605	8,8917063	9,2947672	9,6656096
4	7,9581144	8,4530281	8,8959204	9,2986239	9,6691763
5	7,9633742	8,4576906	8,9001305	9,3024775	9,6727403
6	7,9686271	8,4623479	8,9043366	9,3063278	9,6763017
7	7,9738731	8,4670001	8,9085387	9,3101750	9,6798604
8	7,9791122	8,4716472	8,9127369	9,3140190	9,6834166
9	7,9843444	8,4762892	8,9169311	9,3178598	9,6869701
10	7,9895697	8,4809261	8,9211214	9,3216975	9,6905211
11	7,9947883	8,4855579	8,9253078	9,3255320	9,6940694
12	8,0000000	8,4901847	8,9294902	9,3293634	9,6976152
13	8,0052049	8,4948065	8,9336687	9,3331916	9,7011583
14	8,0104031	8,4994233	8,9378433	9,3370167	9,7046989
15	8,0155946	8,5040350	8,9420140	9,3408386	9,7082369
16	8,0207793	8,5086417	8,9461809	9,3446575	9,7117723
17	8,0259574	8,5132435	8,9503438	9,3484732	9,7153051
18	8,0311287	8,5178403	8,9545029	9,3522858	9,7188354
19	8,0362934	8,5224321	8,9586581	9,3560952	9,7223631
20	8,0414515	8,5270190	8,9628095	9,3599016	9,7258883
21	8,0466030	8,5316009	8,9669570	9,3637049	9,7294109
22	8,0517479	8,5361780	8,9711007	9,3675051	9,7329309
23	8,0568862	8,5407501	8,9752406	9,3713022	9,7364484
24	8,0620180	8,5453174	8,9793766	9,3750963	9,7399634
25	8,0671432	8,5498797	8,9835089	9,3788873	9,7434758
26	8,0722620	8,5544372	8,9876373	9,3826752	9,7469857
27	8,0773742	8,5589899	8,9917620	9,3864601	9,7504931
28	8,0824800	8,5635377	8,9958829	9,3902419	9,7539979
29	8,0875794	8,5680807	9,0000000	9,3940206	9,7575003
30	8,0926723	8,5726189	9,0041133	9,3977964	9,7610001
31	8,0977589	8,5771523	9,0082229	9,4015691	9,7644974
32	8,1028390	8,5816809	9,0123288	9,4053387	9,7679922
33	8,1079128	8,5862047	9,0164309	9,4091054	9,7714845
34	8,1129803	8,5907237	9,0205293	9,4128690	9,7749743
35	8,1180414	8,5952380	9,0246239	9,4166297	9,7784617
36	8,1230962	8,5997476	9,0287149	9,4203873	9,7819465
37	8,1281447	8,6042524	9,0328021	9,4241420	9,7854289
38	8,1331870	8,6087526	9,0368857	9,4278936	9,7889087
39	8,1382230	8,6132480	9,0409655	9,4316423	9,7923861
40	8,1432528	8,6177388	9,0450417	9,4353880	9,7958611
41	8,1482764	8,6222248	9,0491142	9,4391307	9,7993336
42	8,1532939	8,6267062	9,0531831	9,4428704	9,8028036
43	8,1583051	8,6311830	9,0572482	9,4466072	9,8062711
44	8,1633102	8,6356551	9,0613098	9,4503411	9,8097363
45	8,1683092	8,6401226	9,0653677	9,4540719	9,8131989
46	8,1733020	8,6445855	9,0694220	9,4577999	9,8166592
47	8,1782888	8,6490437	9,0734726	9,4615249	9,8201169
48	8,1832695	8,6534974	9,0775197	9,4652470	9,8235723
49	8,1882441	8,6579465	9,0815631	9,4689661	9,8270252

	0	100	200	300	400
50	3,6840315	5,3132928	6,2996052	7,0472987	7,6630943
51	3,7084298	5,3250740	6,3079935	7,0540041	7,6687665
52	3,7325112	5,3368033	6,3163596	7,0606967	7,6744303
53	3,7562858	5,3484812	6,3247035	7,0673766	7,6800857
54	3,7797631	5,3601084	6,3330255	7,0740440	7,6857328
55	3,8029525	5,3716854	6,3413257	7,0806988	7,6913717
56	3,8258624	5,3832126	6,3496042	7,0873411	7,6970023
57	3,8485011	5,3946907	6,3578612	7,0939709	7,7026246
58	3,8708766	5,4061202	6,3660968	7,1005885	7,7082388
59	3,8929964	5,4175015	6,3743111	7,1071937	7,7138448
60	3,9148676	5,4288352	6,3825043	7,1137866	7,7194426
61	3,9364972	5,4401218	6,3906765	7,1203674	7,7250324
62	3,9578916	5,4513618	6,3988279	7,1269360	7,7306141
63	3,9790572	5,4625556	6,4069586	7,1334925	7,7361877
64	4,0000000	5,4737037	6,4150687	7,1400370	7,7417533
65	4,0207258	5,4848066	6,4231583	7,1465695	7,7473109
66	4,0412400	5,4958647	6,4312276	7,1530901	7,7528605
67	4,0615481	5,5068784	6,4392767	7,1595988	7,7584023
68	4,0816551	5,5178484	6,4473057	7,1660957	7,7639361
69	4,1015659	5,5287748	6,4553148	7,1725809	7,7694620
70	4,1212853	5,5396583	6,4633041	7,1790544	7,7749801
71	4,1408177	5,5504991	6,4712736	7,1855162	7,7804904
72	4,1601676	5,5612978	6,4792236	7,1919663	7,7859928
73	4,1793392	5,5720547	6,4871541	7,1984050	7,7914875
74	4,1983365	5,5827702	6,4950653	7,2048321	7,7969745
75	4,2171633	5,5934447	6,5029572	7,2112479	7,8024538
76	4,2358236	5,6040787	6,5108301	7,2176522	7,8079253
77	4,2543209	5,6146724	6,5186839	7,2240451	7,8133892
78	4,2726587	5,6252263	6,5265189	7,2304268	7,8188455
79	4,2908404	5,6357408	6,5343351	7,2367972	7,8242942
80	4,3088694	5,6462162	6,5421326	7,2431564	7,8297353
81	4,3267487	5,6566528	6,5499116	7,2495045	7,8351688
82	4,3444815	5,6670511	6,5576722	7,2558415	7,8405948
83	4,3620707	5,6774114	6,5654144	7,2621674	7,8460134
84	4,3795191	5,6877340	6,5731385	7,2684824	7,8514244
85	4,3968297	5,6980192	6,5808444	7,2747863	7,8568280
86	4,4140050	5,7082675	6,5885323	7,2810794	7,8622242
87	4,4310476	5,7184791	6,5962023	7,2873616	7,8676130
88	4,4479602	5,7286543	6,6038545	7,2936330	7,8729944
89	4,4647451	5,7387935	6,6114890	7,2998937	7,8783684
90	4,4814047	5,7488971	6,6191059	7,3061436	7,8837352
91	4,4979414	5,7589652	6,6267054	7,3123828	7,8890946
92	4,5143574	5,7689983	6,6342874	7,3186114	7,8944468
93	4,5306549	5,7789966	6,6418522	7,3248294	7,8997917
94	4,5468359	5,7889604	6,6493998	7,3310369	7,9051294
95	4,5629026	5,7988900	6,6569302	7,3372339	7,9104599
96	4,5788570	5,8087857	6,6644437	7,3434205	7,9157832
97	4,5947009	5,8186479	6,6719403	7,3495966	7,9210994
98	4,6104363	5,8284767	6,6794200	7,3557624	7,9264084
99	4,6260650	5,8382725	6,6868831	7,3619178	7,9317104

	500	600	700	800	900
50	8,1932127	8,6623911	9,0856030	9,4726824	9,8304757
51	8,1981753	8,6668310	9,0896392	9,4763957	9,8339238
52	8,2031319	8,6712665	9,0936719	9,4801061	9,8373695
53	8,2080825	8,6756974	9,0977010	9,4838136	9,8408127
54	8,2130271	8,6801237	9,1017265	9,4875182	9,8442536
55	8,2179658	8,6845456	9,1057485	9,4912200	9,8476920
56	8,2228985	8,6889630	9,1097669	9,4949188	9,8511280
57	8,2278254	8,6933759	9,1137818	9,4986148	9,8545617
58	8,2327463	8,6977843	9,1177931	9,5023078	9,8579929
59	8,2376614	8,7021882	9,1218010	9,5059981	9,8614218
60	8,2425706	8,7065877	9,1258053	9,5096854	9,8648483
61	8,2474740	8,7109827	9,1298061	9,5133700	9,8682724
62	8,2523715	8,7153734	9,1338034	9,5170516	9,8716941
63	8,2572633	8,7197596	9,1377971	9,5207304	9,8751135
64	8,2621492	8,7241413	9,1417874	9,5244063	9,8785305
65	8,2670294	8,7285187	9,1457743	9,5280794	9,8819451
66	8,2719038	8,7328917	9,1497576	9,5317497	9,8853574
67	8,2767725	8,7372604	9,1537375	9,5354172	9,8887673
68	8,2816355	8,7416246	9,1577139	9,5390818	9,8921749
69	8,2864928	8,7459846	9,1616869	9,5427437	9,8955801
70	8,2913443	8,7503401	9,1656565	9,5464027	9,8989830
71	8,2961902	8,7546914	9,1696226	9,5500589	9,9023835
72	8,3010305	8,7590383	9,1735852	9,5537124	9,9057817
73	8,3058651	8,7633809	9,1775445	9,5573630	9,9091776
74	8,3106941	8,7677192	9,1815003	9,5610108	9,9125712
75	8,3155175	8,7720532	9,1854527	9,5646559	9,9159624
76	8,3203353	8,7763830	9,1894018	9,5682982	9,9193513
77	8,3251475	8,7807084	9,1933474	9,5719377	9,9227379
78	8,3299542	8,7850296	9,1972897	9,5755745	9,9261222
79	8,3347553	8,7893466	9,2012286	9,5792085	9,9295042
80	8,3395509	8,7936593	9,2051641	9,5828397	9,9328839
81	8,3443410	8,7979679	9,2090962	9,5864682	9,9362613
82	8,3491256	8,8022721	9,2130250	9,5900939	9,9396364
83	8,3539047	8,8065722	9,2169505	9,5937170	9,9430092
84	8,3586784	8,8108681	9,2208726	9,5973372	9,9463797
85	8,3634466	8,8151598	9,2247914	9,6009548	9,9497479
86	8,3682094	8,8194473	9,2287068	9,6045696	9,9531138
87	8,3729668	8,8237307	9,2326189	9,6081817	9,9564775
88	8,3777187	8,8280099	9,2365277	9,6117911	9,9598389
89	8,3824653	8,8322850	9,2404333	9,6153977	9,9631981
90	8,3872065	8,8365559	9,2443355	9,6190017	9,9665549
91	8,3919424	8,8408227	9,2482344	9,6226030	9,9699095
92	8,3966729	8,8450854	9,2521300	9,6262016	9,9732619
93	8,4013981	8,8493440	9,2560224	9,6297975	9,9766120
94	8,4061180	8,8535985	9,2599115	9,6333907	9,9799599
95	8,4108326	8,8578489	9,2637973	9,6369812	9,9833055
96	8,4155419	8,8620952	9,2676798	9,6405691	9,9866486
97	8,4202459	8,8663375	9,2715592	9,6441542	9,9899900
98	8,4249447	8,8705757	9,2754352	9,6477368	9,9933289
99	8,4296383	8,8748099	9,2793081	9,6513166	9,9966656

Verwandlung der Fuße, Zolle, Linien und Puncte des zwölftheiligen Maßes in Decimaltheile der Klafter, des Fußes und des Zolles; wie auch umgekehrt.

Fuß.	Klafter.	Zoll.	Klafter.	Lin.	Klafter.	Punct.	Klafter.
1	0,1666666	1	0,0138888	1	0,0011574	1	0,0000965
2	0,3333333	2	0,0277777	2	0,0023148	2	0,0001929
3	0,5000000	3	0,0416666	3	0,0034722	3	0,0002894
4	0,6666666	4	0,0555555	4	0,0046296	4	0,0003858
5	0,8333333	5	0,0694444	5	0,0057870	5	0,0004823
6	1,0000000	6	0,0833333	6	0,0069444	6	0,0005787
7	1,1666666	7	0,0972222	7	0,0081019	7	0,0006752
8	1,3333333	8	0,1111111	8	0,0092593	8	0,0007716
9	1,5000000	9	0,1250000	9	0,0104167	9	0,0008681
10	1,6666666	10	0,1388888	10	0,0115741	10	0,0009645
11	1,8333333	11	0,1527777	11	0,0127315	11	0,0010610

Zoll.	Fuß.	Lin.	Fuß.	Punct.	Fuß.	Quint.	Fuß.
1	0,0833333	1	0,0069444	1	0,0005787	1	0,0000482
2	0,1666666	2	0,0138888	2	0,0011574	2	0,0000965
3	0,2500000	3	0,0208333	3	0,0017361	3	0,0001447
4	0,3333333	4	0,0277777	4	0,0023148	4	0,0001929
5	0,4166666	5	0,0347222	5	0,0028935	5	0,0002411
6	0,5000000	6	0,0416666	6	0,0034722	6	0,0002894
7	0,5833333	7	0,0486111	7	0,0040509	7	0,0003376
8	0,6666666	8	0,0555555	8	0,0046296	8	0,0003858
9	0,7500000	9	0,0625000	9	0,0052083	9	0,0004340
10	0,8333333	10	0,0694444	10	0,0057870	10	0,0004823
11	0,9166666	11	0,0763888	11	0,0063657	11	0,0005305

Lin.	Zoll.	Punct.	Zoll.	Quint.	Zoll.	Sext.	Zoll.
1	0,0833333	1	0,0069444	1	0,0005787	1	0,0000482
2	0,1666666	2	0,0138888	2	0,0011574	2	0,0000965
3	0,2500000	3	0,0208333	3	0,0017361	3	0,0001447
4	0,3333333	4	0,0277777	4	0,0023148	4	0,0001929
5	0,4166666	5	0,0347222	5	0,0028935	5	0,0002411
6	0,5000000	6	0,0416666	6	0,0034722	6	0,0002894
7	0,5833333	7	0,0486111	7	0,0040509	7	0,0003376
8	0,6666666	8	0,0555555	8	0,0046296	8	0,0003858
9	0,7500000	9	0,0625000	9	0,0052083	9	0,0004340
10	0,8333333	10	0,0694444	10	0,0057870	10	0,0004823
11	0,9166666	11	0,0763888	11	0,0063657	11	0,0005305

Berichtigungen.

Seite 30 Zeile 4 von oben statt 3151 setze man 3152

— 31 — 9 v. unten st. $\frac{3}{100}$ s. m. $\frac{37}{100}$

— 84 — 1 v. o. st. $= \frac{3}{4}$ Fl. s. m. $\frac{3}{4}$ Fl. $=$

— 100 — 11 v. o. st. 14 s. m. 24

— 187 — 4 v. u. st. $\frac{q}{p}$ s. m. $\frac{p}{q}$

— 220 — 16 v. o. st. 2 s. m. 16

— 220 — 18 v. o. st. 12 s. m. 21

— 393 — 7 v. u. st. $\frac{1}{48}$ s. m. $\frac{1}{58}$

— 458 — 7 u. 8 v. o. st. 26 s. m. 36

— 537 — 7 v. o. st. a^{xy+} s. m. a^{x+y}.

Narodna in univerzitetna knjižnica * Ljubljana