

Prispelo/Received: novembra/November 1992

GDK 181.1: 182.5

Math.Subj.Class. (1991) 15A52, 62H20, 92B15

## EVKLIDSKO PRIMERJANJE SESTOJEV PO RASTLINSKIH VRSTAH

Anton CEDILNIK\*, Dušan ROBIČ\*\*

### *Izvleček*

V članku je opisana metoda primerjanja sestojev glede na pojavnost rastlinskih vrst. V nasprotju z metodami, ki so ali so bile že v uporabi, je naše primerjanje čisto evklidsko: sestoji so enakovredni vektorji v mnogorazsežnem evklidskem prostoru (bazne smeri so rastline) in primerjave med njimi se izražajo z njihovimi skalarnimi produkti. Glede na rastlinske vrste in njihove medsebojne odvisnosti imamo sestoje za slučajne vzorce, kar nam omogoči dobiti cenilke za kote med baznimi smermi in s tem tudi za skalarne produkte.

*Ključne besede:* ordinacijska metoda, primerjanje sestojev, evklidska metrika

## EUCLIDEAN COMPARISON OF STANDS ACCORDING TO PLANT SPECIES

Anton CEDILNIK\*, Dušan ROBIČ\*\*

### *Abstract*

In the article we describe a method of comparison of stands according to the appearance of plants. Contrary to methods which are or have been already in use, our comparison is purely euclidean: the stands are vectors in a multidimensional space (base lines are the plants) and the comparisons among them are expressed by their scalar products. We consider the stands in regard to plant species and their interrelations as random samples which enables us to get an estimate for the angles between the base lines and so also for necessary scalar products.

*Key words:* ordination method, comparison of stands, euclidean distance.

---

\* dr.docent A. C., Gozdarski oddelek Biotehniške fakultete, Ljubljana, Večna pot 83, SLO

\*\* mag. D. R., višji predavatelj, Gozdarski oddelek Biotehniške fakultete, Ljubljana, Večna pot 83, SLO

## 1 UVOD

Naloga, ki jo bomo reševali, je povsem klasična. Primerjamo popise danih rastlinskih združb (sestojev, fitocenoz, habitatov)  $F_1, \dots, F_n$  glede na to, ali in kako se v njih pojavljajo rastlinske vrste  $R_1, \dots, R_m$  ( $m, n \geq 2$ ; zaželeno je, da sta čim večja). Pojavnost rastline  $R_i$  v sestoji  $F_j$  naj podaja število  $a_{ij}$ . Ta števila so načeloma lahko poljubna realna števila, edina omejitev je, da so lestvice njihovih vrednosti za vse rastline progresivne in vsaj približno linearne. Zaželeno je še, da je število vrednosti v vsaki lestvici čim večje, da je torej čim bolj podrobno opisano, kako ustrezna rastlina nastopa v opazovanem sestoji. Treba pa je posebej poudariti, da smejo biti lestvice za različne rastlinske vrste, podvrste in celo istovrstne rastline v različnih slojih različne!

Dana je torej vhodna tabela 1 kot edini podatek za primerjanje sestojev. Sestoji so vektorji ali pa točke (odvisno od interpretacije) v  $m$ -razsežnem vektorskem

Tabela 1.

Vrste	Sestoji	$F_1$	$F_2$	...	$F_n$
$R_1$		$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1n}$
$R_2$		$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2n}$
...					
$R_m$		$a_{m1}$	$a_{m2}$	...	$a_{mn}$

prostoru. Definiramo lahko, da je razdalja med dvema vektorjema kot med njima, razdalja med dvema točkama pa običajna razdalja, ki je enaka velikosti razlike ustreznih vektorjev. Vsaka od teh dveh metrik bo imela svojo interpretacijo. Za izračun obeh pa potrebujemo skalarne produkte med sestoji. Ti skalarni produkti so preprosta reč, če je baza že ortogonalna, kar bi pomenilo, da so rastline med seboj neodvisne. Seveda pa to v splošnem ni res in je treba vzajemno odvisnost rastlin še oceniti.

Ocenjevanje odvisnosti med rastlinami je glavni del vsebine te razprave. Doslej je bilo evklidsko ocenjevanje različnosti fitocenoz sicer že standardni del kvantitativne ekologije (PIELOU 1977). Tudi koti med mnogodimenzionalnimi vektorji - fitocenozami so v nekem smislu že bili uporabljeni za klasificiranje fitocenoz (ORLOCI (cit. PIELOU 1977) imenuje tetive lokov, ki pripadajo tem kotom, *standardizirane razdalje*). V glavnem pa so avtorji predpostavili, da rastlinske vrste tvorijo ortonormiran koordinatni sistem. Ortogonalnost so upravičevali s tem, da se negativne in pozitivne korelacije med rastlinami - pri velikem številu upoštevanih rastlinskih vrst in velikem številu sestojev - bolj ali manj anihilirajo; normiranost pa je bila utemeljena s skrbno izbiro lestvic količin rastlin ali pa (pri 0 za odsotnost in 1 za prisotnost rastlinske vrste v sestoji) s tem, da lestvic sploh ni.

Neortogonalni razdalji sta uporabljala Gengerelli in Mahalanobis. Gengerelli je uporabil le korelacije, zaradi česar je lahko za primerjave uporabljal le podobne rastline. Mahalanobis je (pravilneje) uporabil kovariančno matriko, ni pa zmanjšal vpliva nediagonalnih elementov, kar povzroči čudne rezultate, če je primerjanih sestojev malo.

Vrstice v tabeli 1 bomo imeli za slučajne vzorce pojavnosti rastlinskih vrst, korelacije med vrsticami pa uporabili za ocenjevanje kotov med koordinatnimi smermi. Mimogrede bomo podatke še standardizirali, da bodo lestvice pojavnosti rastlin res tako poljubne, kot smo napisali v začetku uvoda.

## 2 PRIPRAVA PODATKOV

Že od vsega začetka se moramo sprijazniti z dejstvom, da so primerjave fitocenoz nujno relativne. Povejmo to s primerom: če se  $F_3, \dots, F_n$  zelo razlikujejo med seboj in tudi od  $F_1$  in  $F_2$ , bomo ugotovili veliko podobnost med njima; če pa so si  $F_3, \dots, F_n$  zelo podobni, nam bo račun pokazal veliko razliko med  $F_1$  in  $F_2$ . Zato bomo že na začetku podatke v tabeli 1 nekoliko popravili. Tiste količine, ki so skupne vsem sestojem, bomo odvrgli kot nebitvene za naše primerjave, upoštevali pa bomo zato le tiste, ki vsaj pri kakšnem sestoju kažejo na različnost.

*Prvi popravek:* vse lestvice količin rastlin bomo premaknili tako, da se bodo začele z 0.

$$(1) \quad z_i := \min \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}\}$$

$(i = 1, \dots, m);$

$$(2) \quad b_{ik} := a_{ik} - z_i$$

$(i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n).$

Na tem mestu bomo za poznejšo rabo izračunali neko novo količino:

$$(3) \quad e_i := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_{ik}$$

$(i = 1, \dots, m).$

*Drugi popravek:* če se neka rastlina v vseh sestojih enako pojavlja, jo izločimo kot nepomembno za primerjave:

$$e_i = 0 \Rightarrow R_i \text{ izločimo.}$$

Pri tem se v splošnem  $m$  zmanjša. Brez nevarnosti za nesporazum bomo novo število rastlinskih vrst spet označili z  $m$ . Tudi ta  $m$  mora imeti 2 za absolutno spodnjo mejo:  $m \geq 2$ .

Pripravimo si še eno serijo novih količin:

$$(4) \quad v_{ij} := \sum_{k=1}^n b_{ik} b_{jk} - n e_i e_j = v_{ji}$$

( $i, j = 1, \dots, m$ ).

Tretji popravek pa bo drugačne vrste. Lestvica vrednosti za določeno rastlino je prirejena naravi te rastline. Zato je treba vse lestvice nekako standardizirati. Prvi popravek je že bil ukrep v tej smeri.

Ponazorimo problem z naslednjim primerom. Pri vseh rastlinah naj števila  $a_{ik}$  pomenijo števila osebkov v opazovanem sestoju. Potem bodo očitno zeli imele neprimerno pomembnejšo vlogo v primerjavah kot drevesa, kar pa zagotovo ni smiselno. Zato se bomo nekaj pozneje vrnili k tej standardizaciji.

Bistveni privzetek v tem sestavku je, da predstavljajo sestoji slučajne vzorce za rastline ter njihove medsebojne relacije in interakcije. Vrstica  $b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in}$  je po tem privzetku slučajni vzorec za pojavnost rastlinske vrste  $R_i$ ; s tem postane  $R_i$  slučajna spremenljivka. Povprečno količino določene vrste da cenilka za povprečno vrednost:

$$(5) \quad \bar{R}_i = e_i$$

( $i = 1, \dots, m$ ). Variabilnost rastlinske vrste podaja cenilka za standardni odklon:

$$(6) \quad s(R_i)^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (b_{ik} - \bar{R}_i)^2 = v_{ii}/(n-1) =: s_i^2$$

( $i = 1, \dots, m$ ). Standardni odklon je nekako naravna enota slučajne spremenljivke in to bomo izkoristili za prej omenjeni *tretji popravek*:

$$(7) \quad c_{ik} = b_{ik}/s_i$$

( $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ ).

### 3 SKALARNI PRODUKTI SESTOJEV

Izračunajmo najprej glavne statistike slučajne spremenljivke  $R_i$ , podane s števili  $c_{ik}$ .

$$(8) \quad \bar{R}_i = e_i/s_i,$$

$$(9) \quad s(R_j) = 1.$$

( $i = 1, \dots, m$ ). Cenilka za kovarianco dveh rastlin je

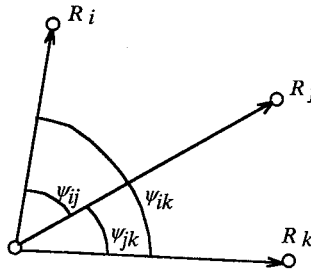
$$(10) \quad K(R_i, R_j) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (c_{ik} - \bar{R}_i)(c_{jk} - \bar{R}_j) = \frac{v_{ij}}{\sqrt{v_{ii}v_{jj}}}$$

( $i, j = 1, \dots, m$ ). Zaradi (9) pa je to tudi cenilka za korelacijski koeficient dveh rastlinskih vrst.

Če imamo rastlinske vrste za smeri v mnogodimenzionalnem evklidskem prostoru, so  $K(R_i, R_j)$  ocene za kosinuse kotov med temi smermi. Ocene za kote so tedaj:

$$(11) \quad \psi_{ij} = \arccos(K(R_i, R_j))$$

$(i, j = 1, \dots, m).$



Slika 1.

Preverimo, če so te ocene dobre. Resda je  $0 \leq \psi_{ij} \leq \pi$ . Treba pa je še pogledati, če velja sferno trikotniško pravilo (slika 1):

$$\forall i, j, k \in \{1, \dots, m\}: \psi_{ik} \leq \psi_{ij} + \psi_{jk}.$$

$v_{ij}$ , za določena  $i$  in  $j$ , je skalarni produkt vektorjev  $[b_{ik} - e_i]_{1 \times n}$  in  $[b_{jk} - e_j]_{1 \times n}$ . Od tod sledi nenegativnost Gramove determinante:

$$\begin{vmatrix} v_{ii} & v_{ij} & v_{ik} \\ v_{ji} & v_{jj} & v_{jk} \\ v_{ki} & v_{kj} & v_{kk} \end{vmatrix} \geq 0.$$

Z nekaj preračunavanja to zapišemo takole:

$$\begin{aligned} (v_{ii}v_{jj} - v_{ij}^2)(v_{ii}v_{kk} - v_{ik}^2) &\geq (v_{ij}v_{ik} - v_{ii}v_{jk})^2 \\ v_{ii}v_{jk} &\geq v_{ij}v_{ik} - \sqrt{(v_{ii}v_{jj} - v_{ij}^2)(v_{ii}v_{kk} - v_{ik}^2)} \end{aligned}$$

Obe strani te ocene delimo z  $v_{ii}\sqrt{v_{jj}v_{kk}}$  in upoštevamo (10):

$$K(R_j, R_k) \geq K(R_i, R_j)K(R_i, R_k) - \sqrt{1 - K(R_i, R_j)^2} \cdot \sqrt{1 - K(R_i, R_k)^2}$$

Iz (11) potem sledi:

$$\cos(\psi_{jk}) \geq \cos(\psi_{ij})\cos(\psi_{ik}) - \sin(\psi_{ij})\sin(\psi_{ik}) = \cos(\psi_{ij} + \psi_{ik}).$$

Kosinus je padajoča funkcija na intervalu  $[0, \pi]$ , zato:

$$\psi_{jk} \leq \psi_{ij} + \psi_{ik}.$$

Naslednja stopnja v abstrakciji problema je v tem, da identificiramo rastlinsko vrsto  $R_i$  s sestojem, v katerem nastopa samo ta rastlina in sicer v količini, ki je

v standardni enoti ravno 1. Sestoji  $F_k$  so potem linearne kombinacije vektorjev  $R_i$ :

$$(12) \quad F_k = \sum_{i=1}^m c_{ik} R_i$$

( $k = 1, \dots, n$ ). Ker poznamo kote med rastlinskimi vrstami, lahko ocenimo njihove skalarne produkte:

$$(13) \quad \langle R_i, R_j \rangle = \|R_i\| \cdot \|R_j\| \cdot \cos(\psi_{ij}) = K(R_i, R_j)$$

( $i, j = 1, \dots, m$ ). Od tod pa že dobimo skalarne produkte sestojev:

$$(14) \quad \langle F_k, F_l \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^m c_{ik} R_i, \sum_{j=1}^m c_{jl} R_j \right\rangle = (n-1) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{b_{ik} b_{jl} v_{ij}}{v_{ii} v_{jj}}$$

( $k, l = 1, \dots, n$ ), pri čemer smo upoštevali enačbe (4), (7), (10) in (13).

Zdi pa se nam potrebno uvesti še dodaten korekcijski faktor (poleg faktorja  $(n-1)/n$ , ki je v izračunu nepristranske cenilke za standardni odklon tudi neke vrste korekcijski faktor). Menimo namreč, da je izračunana korelacija med rastlinami (absolutno) prevelika in da so rastlinske vrste v resnici med seboj bolj neodvisne. Zato bomo  $v_{ij}$  za  $i \neq j$  nadomestili z  $\varepsilon v_{ij}$ , kjer je  $\varepsilon \in [0,1]$ . Kakšen  $\varepsilon$  izberemo, je odvisno od števila sestojev  $n$ ; z manjšanjem števila sestojev se mora zmanjšati tudi  $\varepsilon$ . Predlagamo naslednjo korekcijo:

$$(15) \quad \varepsilon = \frac{(n-2)^2}{n(n-1)}$$

Njena utemeljitev je v računski preprostosti in v tem, da metoda s tem korekcijskim faktorjem dobro funkcionira.

Če torej definiramo

$$(16) \quad p_{ij} = p_{ji} = \begin{cases} (n-1) / v_{ii} & (i = j), \\ \frac{(n-2)^2 v_{ij}}{n v_{ii} v_{jj}} & (i \neq j), \end{cases}$$

( $i, j = 1, \dots, m$ ), so skalarni produkti

$$(17) \quad \langle F_k, F_l \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m b_{ik} b_{jl} p_{ij} = \langle F_l, F_k \rangle$$

( $k, l = 1, \dots, n$ )

Definirajmo naslednje matrike:

$$B := [b_{ik}]_{m \times n}; P := [p_{ij}]_{m \times m}; G_0 := [\langle F_k, F_l \rangle]_{n \times n} =: [g_{kl}]_{n \times n}.$$

Potem je:

$$(18) \quad G_0 = B^T P B.$$

Skalarni produkti sestojev so ključni za računanje njihovih medsebojnih razdalj. To nam da možnost, da ugotovimo relativno pomembnost rastlinskih vrst ali skupin vrst.

Recimo, da sta  $\Gamma$  in  $\Delta$  dve podmnožici rastlinskih vrst, katerih značilnost (signifikantnost) bi radi primerjali. Naj bo  $G_\Gamma$  matrika skalarnih produktov po izločitvi rastlin  $\Gamma$  in analogno  $G_\Delta$ . Sklepamo, da je vrsta ali skupina vrst tem pomembnejša, čim večjo spremembo doživi matrika  $G_0$  potem, ko to vrsto ali skupino vrst izločimo iz računa. Torej:  $\Gamma$  je pomembnejša od  $\Delta$ , če je

$$\|G_0 - G_\Gamma\| \geq \|G_0 - G_\Delta\|.$$

Zato je smiselno definirati: *signifikanca* neke podmnožice rastlinskih vrst  $\Delta$  je kvocient

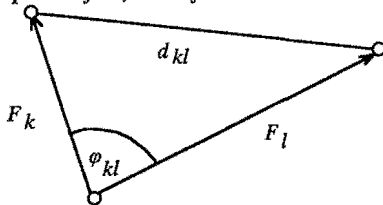
$$(19) \quad \text{sgnf}(\Delta) := \frac{|G_0 - G_\Delta|}{|G_0|}.$$

Sicer je še vprašanje, kakšno normo izberemo. Iz računskih razlogov pa je najboljše, če se odločimo za evklidsko normo:

$$\|[\lambda_{ij}]\| := \sqrt{\sum_{i,j} \lambda_{ij}^2}.$$

#### 4 PRIMERJAVE

Naredili bomo dve primerjavi, kot ju kaže slika 2.



Slika 2.

(A) Prvi tip razdalje podaja kot  $\varphi_{kl} \in [0, \pi]$  oziroma njegov kosinus:

$$(20) \quad r_{kl} := \cos(\varphi_{kl}) = \frac{\langle F_k, F_l \rangle}{[\langle F_k, F_k \rangle \langle F_l, F_l \rangle]^{\frac{1}{2}}} = \frac{g_{kl}}{\sqrt{g_{kk}g_{ll}}} = r_{lk} \in [-1, 1].$$

Pomen teh števil razložimo na običajen način:

- $r_{kl} \approx 1 \Leftrightarrow F_k$  ima v glavnem veliko osebkov katere koli vrste takrat, ko jih ima veliko tudi  $F_l$ ;
- $r_{kl} \approx 0 \Leftrightarrow F_k$  ima veliko določenega rastlinja navadno takrat, ko ga ima  $F_l$  malo;
- $r_{kl} \approx -1 \Leftrightarrow F_k$  je porasel z rastlinskimi vrstami, ki se izključujejo z vrstami iz  $F_l$ .

(Seveda imata izraza "veliko" in "malo" relativni pomen glede na povprečno poraščenost fitocenoz  $F_1, \dots, F_n$  z dotično rastlinsko vrsto). Zato smemo koeficientu  $r_{kl}$  reči *vrstna podobnost*, kotu  $\varphi_{kl} = \arccos(r_{kl})$  pa *vrstna razdalja*.

Kot  $\varphi_{kl}$  ima vrednosti med 0 in 3.1416, če je kotna enota radian. Psihološko pa je ugodnejša enota pravi kot;  $\varphi_{kl}$  je tedaj med 0 in 2 in ohlapno lahko rečemo, da sta si sestoja s kotom pod 1 podobna (po vrstah) in s kotom nad 1 različna (po vrstah).

(B) Drugi tip razdalje je podan z  $d_{kl}$ :

$$(21) \quad d_{kl} = \sqrt{\langle F_k - F_l, F_k - F_l \rangle} = \sqrt{g_{kk} + g_{ll} - 2g_{kl}} = d_{kl}.$$

Razdalja  $d_{kl}$  je majhna tedaj, ko sta sestoja  $F_k$  in  $F_l$  približno enako poraščena s približno istim rastlinjem. Nasprotno pa je  $d_{kl}$  velika v dveh primerih: če imata sestoja različno vegetacijo ali pa sta različno močno poraščena s sicer istimi vrstami. Zato za število  $d_{kl}$  predlagamo naziv *totalna razdalja*.

Treba pa je poudariti, da se lahko zgodi, da je  $g_{kk} = 0$  za kakšen  $k$ . V tem primeru vrstne podobnosti  $r_{kl}$  (za vse  $l$ ) sploh niso definirane. Pa tudi če je  $g_{kk}$  zelo majhen, je  $r_{kl}$  nezanesljiva mera za vrstno podobnost, ker je deljenje z majhnim številom (v enačbi (20)) slabo pogojena operacija.

Totalne razdalje so torej glavni rezultat primerjav, vrstne razdalje pa le dodatna informacija.

Še opomba za konec razdelka! Če k seznamu sestojev dodamo še enega, se spremenijo že prej izračunane razdalje: če je novi sestoj zelo različen od prejšnjih, se razdalje med temi zmanjšajo. Podoben vpliv ima tudi dodajanje novih rastlin k popisom. Skratka, vsako širjenje ali krčenje tabele 1 zahteva ponovno celotno izračunavanje razdalj.

## 5 PRIMER

Primer, ki bo predstavljen samo s povzetkom (celotni popisi bi bili preobširni), torej - le za ponazoritev rezultatov izračunavanja razdalj - z matrikama  $[\varphi_{ij}]$  in  $[d_{ij}]$ , bo pokazal prednost v tem sestavku opisane metode pred izračunavanjem razdalj brez upoštevanja korelacij med rastlinskimi vrstami.

Izbrali smo 6 popisov.

Popisa 1 in 2: Gorjanci (sredogorje v jugovzhodnem delu Slovenije), Pendirjevka; bukove z mrtvo koprivo (*Lamio orvalae Fagetum*).

Popisa 3 in 4: Prekmurje (nižavje v skrajnem vzhodnem delu Slovenije), Mala Polana in Črni log; jelševje (*Carici-Alnetum*).



Popisa 5 in 6: tam kot popisa 3 in 4; hrastovje z gabri (*Quercus-Carpinetum*).

Tabeli 2 in 3 vsebujeta matriki  $[\varphi_{ij}]$  in  $[d_{ij}]$  pri  $\varepsilon = 0$ , torej ob predpostavki, da so rastlinske vrste neodvisne. Tabeli 4 in 5 pa vsebujeta isti matriki pri  $\varepsilon$ , podanem z enačbo (15). Rezultati so z ozirom na podobnost ali različnost popisov v okviru pričakovanj. Že površen pogled na številke pa pove, da sta tabeli 4 in 5 bistveno bolj "kontrastni", torej da precej bolj poudarita podobnost oziroma različnost sestojev.

Tabela 2.

	1	2	3	4	5	6
1	0	0.5614	0.9170	0.9259	0.9201	0.8939
2	0.5614	0	0.8857	0.9055	0.8763	0.8201
3	0.9170	0.8857	0	0.6152	0.7011	0.7622
4	0.9259	0.9055	0.6152	0	0.7210	0.7750
5	0.9201	0.8763	0.7011	0.7210	0	0.6584
6	0.8939	0.8201	0.7622	0.7750	0.6584	0

Tabela 3.

	1	2	3	4	5	6
1	0	11.77	18.62	17.58	17.16	18.21
2	11.77	0	18.85	18.10	17.32	17.64
3	18.62	18.85	0	13.28	14.71	16.94
4	17.58	18.10	13.28	0	14.06	16.27
5	17.16	17.32	14.71	14.06	0	13.90
6	18.21	17.64	16.94	16.27	13.90	0

Tabela 4.

	1	2	3	4	5	6
1	0	0.4312	1.4505	1.5104	1.5365	1.3262
2	0.4312	0	1.4086	1.4868	1.4384	1.1983
3	1.4505	1.4986	0	0.5561	0.7656	0.9283
4	1.5104	1.4868	0.5561	0	0.8007	0.9548
5	1.5365	1.4384	0.7656	0.8007	0	0.6917
6	1.3262	1.1983	0.9283	0.9548	0.6917	0

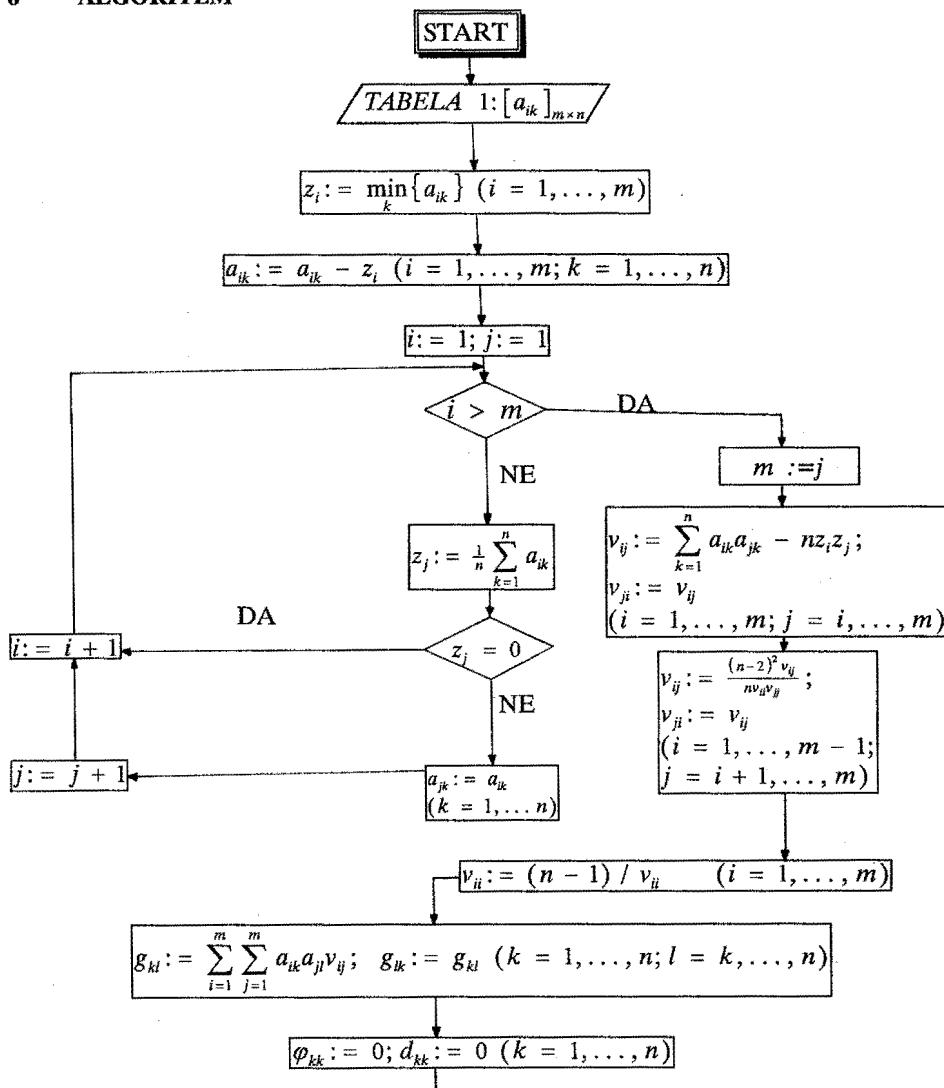
Tabela 5.

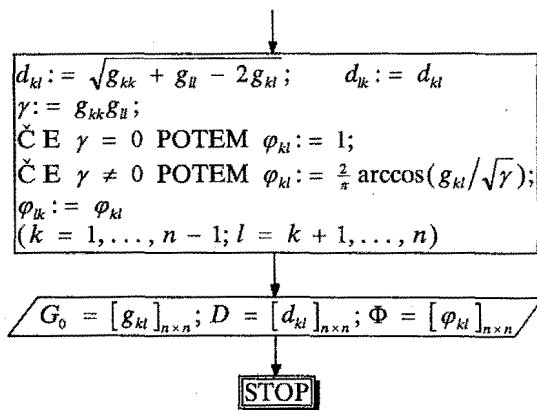
	1	2	3	4	5	6
1	0	33.35	92.22	85.10	80.87	85.05
2	33.35	0	94.11	87.94	81.79	82.67
3	92.22	94.11	0	42.06	53.45	69.30
4	85.10	87.94	42.06	0	48.54	64.43
5	80.87	81.79	53.45	48.54	0	47.11
6	85.05	82.67	69.30	63.43	47.11	0

Tudi drugi testi, ki smo jih naredili, potrjujejo ustreznost metode, ki jo predlagamo. Dokončno sodbo pa bo seveda dalo obsežnejše preskušanje, kajti gornji primer je s samo šest popisi le dokaj nezanesljiv.

ZAHVALA. Avtorja se zahvalujeta ing. T. Levaniču za pomoč pri testiranju metode.

## 6 ALGORITEM





## 7 SKLEP

Za konec naštejmo odprta vprašanja, ki smo se jih dotaknili.

1. Prvi problem so lestvice količin rastlinskih vrst. Gre za to, kaj sploh pomeni, da je lestvica približno linearna. Že število osebkov ni nesporno linearna količina: razlika med enim osebkom in dvema osebkoma na opazovani ploskvi je bistveno manjša kot razlika med enim osebkom in nobenim osebkom, ker nič osebkov lahko pomeni tudi to, da ta rastlinska vrsta na tej ploskvi sploh ne more uspevati. Pri drugačnih lestvicah je problem nelinearnosti še bolj aktualen. Čeprav je že izdelanih nekaj metod, ki upoštevajo to vprašanje (PIELOU 1977), pa zadnja beseda o njem še ni izrečena. V zvezi s tem člankom se je umestno vprašati, kako nelinearnost podatkov upoštevati pri tu opisani ordinacijski metodi.
2. Neposredno s prejšnjim problemom je povezano vprašanje ničelnih točk lestvic količin, ki smo jih v tem članku definirali z enačbo (2). Kjer je ničelna točka res nič - dotične rastline pač ni v opazovanem sestoju - se zdi začetek lestvice "naraven". Če pa ni tako, je utemeljena domneva, da je bolj smiselna ničelna točka manjša od tiste v enačbi (2). To bi tudi odpravilo nezaželeno možnost, da je kateri od  $g_{kk}$  enak 0.
3. Lestvice količin smo standardizirali z enačbo (7). Vendar ima ta standardizacija "luknjo": če dve rastlini nastopata (skoraj) vedno hkrati v vsakem biotopu, imata za ordinacijo le tolikšen pomen, kot ena sama, v računu pa vsaj delno ohranita dvojnost, kar seveda ni prav. Morda bo problem mogoče rešiti s Schmidtovo ortogonalizacijo?
4. Potrebnost faktorja  $\varepsilon$  iz enačbe (15) ni sporna, sama enačba pa je, ker nima vsebinske utemeljitve. Izpeljava takega prepričljivega korekcijskega faktorja iz čisto statističnega premisleka je naloga za naprej.

5. Na koncu omenimo še problem, ki se ga v članku nismo dotaknili: kako iz rezultirajočih matrik  $D$  in  $\Phi$  narediti dejansko ordinacijo sestojev. Metod je veliko in nobenega vzroka ni za domnevo, da ne bi bile vsaj nekatere uporabne na naših rezultatih.

## 8 SUMMARY

If we consider stands as vectors in a multidimensional Euclidean space, where plant species are the base vectors, the distance between two stands is calculated from the scalar products of stands. The essence of our method is that we calculate these scalar products considering estimates of angles between base elements; the estimates are the covariances of pairs of plant species, regarding the stands as random samples for the quantities of those species. We take the covariances into account in accordance with the number of stands.

From the scalar products we derive two types of distances: usual Euclidean metric as *the total distance*, and the angle between two stands as *the variety distance*. This angle is calculated from its cosine which is got in the usual way.

At the end we set the algorithm of the method described.

## 9 REFERENCE

- ORLOCI, L. (1966): Geometric models in ecology: I. The theory and application of some ordination methods. *J. Ecol.*, Vol. 54, No. 1, 193-215.
- ORLOCI, L. (1975): *Multivariate Analysis in Vegetation Research*. Junk, The Hague.
- PIELOU, E.C. (1977): *Mathematical Ecology*. John Wiley & Sons, Toronto.