

# PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 22 (1994/1995)

Številka 1

Strani 18-24

Peter Legiša:

## MATEMATIČNI UČBENIKI JURIJ VEGA

Ključne besede: matematik, zgodovina matematike, Jurij Vega, učbeniki.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/22/1208-Legisa.pdf>

© 1994 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

## MATEMATIČNI UČBENIKI JURIIJA VEGE

Letos slavimo dvestoletnico prve izdaje Vegove Popolne zakladnice logaritmov, to je velikih desetmestnih tabel logaritmov. Poleg sedemmestnih tabel logaritmov je to najbolj znano Vegovo delo.

Prva Vegova knjiga pa je imela naslov Predavanja iz matematike in je bila izdana že leta 1782. To je bil začetek serije štirih učbenikov, ki so bili zelo uspešni. Letnice zadnjih (deloma prirejenih) izdaj so: za prvo knjigo 1850, za drugo knjigo 1848, za tretjo knjigo 1835, za četrto knjigo 1819.

Poglejmo si nekaj vtisov o prvih dveh zvezkih Vegovih matematičnih predavanj. Knjigi sta manjšega formata, vendar prva obsega 550 strani, druga pa približno 660 strani in čez 200 slik. Tretja in četrta knjiga obsegata bolj fizikalno snov, zato o njiju tu ne bomo govorili podrobneje.

Prva knjiga ima naslov: Računstvo in algebra. Avtor, Jurij baron plemeniti Vega, je v četrti izdaji (1821) naveden z vsemi svojimi nazivi: član deželnih stanov Vojvodine Kranjske, vitez vojaškega reda Marije Terezije, podpolkovnik cesarsko-kraljevega četrtega pehotnega topniškega polka, član znanstvenih družb v Berlinu, Erfurtu, Göttingenu in Pragi. Uradni naslov knjige je: Predavanja iz matematike, tako za širjenje matematičnih znanj v cesarsko-kraljevih deželah kot tudi posebej za uporabo v cesarsko-kraljevem artilerijskem korpusu.

V uvodu, naslovljenem na celotni artilerijski korpus, pravi med drugim: "Moj namen je dati v roke trdno nit tistim, ki imajo željo v prostem času osvojiti nujno potrebno znanje iz višje in uporabne matematike... Ne dajem novih poti; tako delo ne dopušča novosti, razen tistih, ki imajo izvor v razliki povezav, razvoju in uporabi nekaterih izrekov... Če Vam bo (knjiga) všeč, je moj trud poplačan in moj zagon za nadaljevanje tega dela podvojen. Dunaj, februarja 1782."

V uvodu k drugi izdaji (1792) se Vega pohvali, da je s knjigo imel uspeh tudi pri ljudeh brez prave izobrazbe in da so nekateri s tem učbenikom prišli celo tako daleč, da so lahko inštruirali druge.

V uvodu k tretji izdaji pove, da so knjigo uspešno prodajali tudi v tujino in da jo uporabljajo v mornariški šoli. Zanimiva je tudi izjava, da je po 13 letih vojskovanja ugotovil "da je matematika najtrdnejša osnova prave vojne znanosti" in da so to spoznali vsi kulturni narodi. V vojnih pohodih proti Visoki porti in Franciji je ugotovil, da so se študenti, ki so se zagnano

lotili študija matematike, odlikovali tudi na bojišču s pametno vztrajnostjo in pogumom.

Knjige so, zlasti v začetku, dejansko predavanja, sestavljena iz obširne razlage in mnogih zgledov, medtem ko je vaj sorazmerno malo.

Zanimivo je, da so potence in koreni vpeljani obenem. Tu so seveda postopki za računanje kvadratnih in kubičnih korenov, ki pa danes niso več posebno aktualni. Vpeljana so tudi kompleksna števila.

Obširno poglavje je posvečeno razmerjem in procentom. Zgledi so predvsem v preračunavanju raznih mer. Na tem področju je namreč takrat vladala prava zmešnjava. Vsako večje italijansko mesto je imelo svoje mere. V Genovi so imeli celo dva funta: težkega in lahkega. V Padovi pa so se ponašali z velikim in malim funtom. Odgovor na vprašanje, zakaj je sedanja italijanska država tako centralizirana, lahko iščemo prav v upravni zmedi, ki je vladala pred združitvijo italijanskih pokrajin in mest. Drugod ni bilo dosti boljše. Tudi v Avstriji so se mere razlikovale od pokrajine do pokrajine.

Naslednja obravnavana tema so enačbe prve in druge stopnje ter uporaba, nato pa sistemi enačb prve stopnje. Navedimo nekaj zanimivih zgledov in nalog:

\* Prej je moral lastnik hiše na Dunaju od dobljene najemnine letno dajati eno sedmino davka. Zdaj pa mora za davek dajati eno šestino najemnine. Za kakšen delež mora povečati najemnino, da bo imel enake dohodke kot prej?

Odgovor: Za eno petintridesetino.

\* Poganka je šla v Jupitrov tempelj in ga prosila, naj ji podvoji denar, ki ga je imela pri sebi. Jupiter ji je ugodil. V zahvalo je darovala dva zlatnika. Z ostankom denarja je šla v Apolonov tempelj, spet prosila za podvojitev, bila uslišana in darovala dva zlatnika. Ko je prišla domov, je imela le en zlatnik. Koliko denarja je imela na začetku?

Odgovor: Zlatnik in tričetrt.

\* Umirajoči je zapustil nosečo ženo in 9000 goldinarjev. Njegova zadnja želja je bila: Če boš rodila sina, naj dobi trikrat toliko kot ti; če pa boš rodila hčerko, si vzemi dvakrat toliko kot ona. Žena je rodila sina in hčerko. Kako naj se razdeli premoženje?

Odgovor: Sin dobi 6000, žena 2000, hčerka 1000 goldinarjev.

\* Dva kmeta sta skupaj porabila 24 mernikov semena. Prvi reče drugemu: Če mi vsak mernik prinese toliko, kot si ti posejal, bom pridelal 135 mernikov. Koliko je posejal vsak?

Odgovor: Eden 9, drugi 15 mernikov.



\* Trgovec letno poveča svoje premoženje za tretjino. Konec vsakega leta pa vzame 1000 goldinarjev za preživljanje svoje družine. Na koncu tretjega leta ima dvakrat tolikšno premoženje kot na začetku prvega leta. Kolikšno premoženje je imel na začetku prvega leta?

Odgovor: 11100 goldinarjev.

\* Osem konjev je v sedmih tednih do golega popaslo travnik, ki je meril 400 kvadratnih sežnjev (t.j., popasli so vso travo, ki je tam že bila, pa tudi tisto, ki je medtem zrastle). V enakih pogojih je devet konjev v osem tednih popaslo travnik v izmeri 500 kvadratnih sežnjev. Koliko konjev bi na ta način preživel za 12 tednov travnik s 600 kvadratnimi sežnji?

Odgovor: Osem.

Šesto poglavje ima naslov: O vrstah in uporabi. Na začetku imamo končne vsote. Med "uporabnimi" nalogami so posebej opazne tiste o sestavljanju piramid iz topovskih krogel. Te so bile namreč takrat res okrogle in so jih sestavljali v umetelno narejene kopice.

Tu imamo tudi kar nekaj snovi iz kombinatorike. Primeri so predvsem iger na srečo.

Za računanje so bili takrat izredno pomembni logaritmi, ki jim je posvečeno precej prostora. Zanimive so "uporabne" naloge:

\* Nekdo ima sod vina s prostornino 100 veder. Vsako vedro stane 32 krajcarjev. Iztoči eno vedro vina in dotoči 1 vedro vode. Spet iz soda iztoči vedro in dotoči vedro vode. Kolikokrat lahko to ponovi, ne da bi vrednost vedra iz soda padla pod 24 krajcarjev?

Odgovor: Največ štiridesetkrat.

\* V neki pokrajini je dva milijona ljudi. Če se zdaj to število letno poveča za eno petdesetino, t.j. za 2 procenta, koliko bo ljudi čez 100 let?

Odgovor: Približno 14 490 000.

\* Banka posodi nekemu 600 goldinarjev in si da za to izstaviti zadolžnico za 800 goldinarjev, izplačljivo čez tri leta brez obresti. Kolikšne so odgovarjajoče letne obresti?

Odgovor: Dobrih 10 procentov.

\* Koliko časa mora ležati kapital, naložen s štiri procentno obrestno mero, da se bo podvojil?

Odgovor: Približno 18 let.

\* Trgovec se je obvezal, da bo 6 let zaporedoma v začetku vsakega leta plačal 4000 goldinarjev. Ni pa plačal ničesar. Koliko je dolžan na koncu šestega leta, če je obrestna mera 4 procente?

Odgovor: 27593 goldinarjev.

Knjiga vsebuje tudi neskončne vrste. Avtor brez posebne zadrege uporablja tudi vrste iz potenc spremenljivke  $x$ , kar bi danes uvrstili v višjo matematiko, in to ne prav na njen začetek. Takrat so se pač držali načela, da je važno, da stvar deluje, pa čeprav morda ni povsem jasno, kako.

Sledi še obravnava interpolacije in enačb višjih redov. K temu je Vega dodal še razlago matematične indukcije. Na koncu pa imamo tablice prafaktorjev števil do 10000, tablice kvadratov, kubov, kvadratnih in kubičnih korenov. Namesto kazala je kratek pregled vsebine.

Čeprav je knjiga vsebovala precej osnovnošolske in srednješolske snovi, je bila namenjena odraslim in je ponekod krepko preseгла srednješolski nivo. Simpatično je bilo predvsem, da si je avtor prizadeval svoje učence brez večjih ovinkov pripeljati do dokaj zahtevne in raznolike uporabe matematike. Sodeč po več izdajah mu je to tudi uspevalo.

Druga knjiga predavanj vsebuje po avtorju: teoretično in praktično geometrijo, navadno in sferično trigonometrijo, višjo geometrijo in infinitezimalni račun. Zanimivo je rešen problem slik. Zelo lepi bakrorezi so prilepljeni na koncu knjige, tako da jih lahko razvijemo izven nje. V tekstu pa imamo ob strani navedene številke ustreznih slik. Poleg nemških imamo pogosto navedena tudi latinska imena za nove izraze.

Od zanimivejših tem navedimo: Obodni in središčni kot, pitagorejske trojice, konstrukcijo pravilnega petkotnika in pravilnega desetkotnika, potenco točke glede na krog, Heronov obrazec, konstrukcijo daljice z dolžino  $bc/a$ .

Precej prostora je posvečenega praktičnemu merjenju - s posebnim poučkom na potrebah topništva. Vodoravne razdalje so merili z napeto verigo. Sicer pa je bila glavna pozornost namenjena merjenju kotov. Tu so uporabljali vodno tehtnico, daljnogleda z nitnim križem in natančna kotna merila.

Merjenje ploščin je bilo oteženo zaradi raznih mer. V nekaterih primerih uporablja Vega za računanje neskončne vsote. Pri tem računa s simbolom za neskončno na način, s katerim se danes ne bi mogli strinjati. Rezultati pa so seveda pravilni.

Precej strani je namenjenih računanju števila  $\pi$ . Približek  $355/113$  si je po Vegi lahko zapomniti: 11 33 55 (prva tri liha števila, vsako dvakrat).

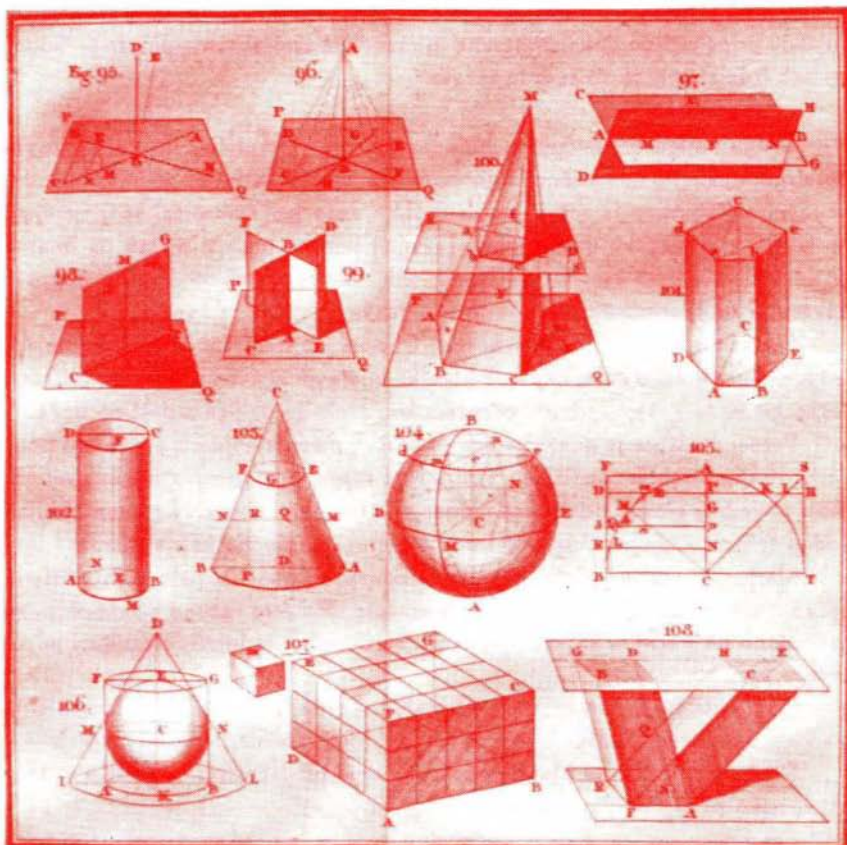
Sledi delitev lika na ploščinsko enake dele ter transformacija lika v drug lik z enako ploščino.

Ravnine v prostoru so obravnavane po Evklidu, se pravi približno tako kot danes. Pri prostorninah teles so spet težave z merami.



V skladu s svojim nagljenjem do računstva Vega podrobno razloži računanje vrednosti za sinus (tako kot je v prvi knjigi razložil svojo metodo za računanje logaritmov). Prav tako je tu Vegov izračun števila  $\pi$ . Z njim je odkril napako v prejšnjih izračunih, in sicer na 113. decimalki. Omenili smo že, da je Vega dolgo imel svetovni rekord v številu izračunanih decimalk števila  $\pi$ .

Zanimivo je, da je v okviru obravnave kotnih funkcij sorazmerno malo govora o pravokotnem trikotniku.



Bakrez iz druge Vegove knjige o geometriji.

Tudi tu imamo primere iz topničarstva. Kaže, da (nekateri) takratni topovi niso imeli nobene muhe, vizirja ali česa podobnega, in so topničarji merili kar čez skrajne točke cevi, kar se je križalo z osjo topa. Izmere topa pa so računali v večkratnikih premera krogle (kalibra, kot bi rekli danes).

Mnogo prostora je posvečeno sfernim trikotnikom in uporabi na površju zemeljske krogle. Močno je poudarjena zveza s krajevnim časom, saj je bilo to za orientacijo in navigacijo izrednega pomena. Točnost tovrstnih meritev pa je bila prvovrsten tehnični izziv. Knjiga vsebuje tudi veliko praktičnih napotkov za geodetske meritve - določanje horizonta itd. Opisan imamo tudi barometer in pa barometrično enačbo, ki so jo uporabljali za ocenjevanje nadmorske višine. V zadnjem delu knjige imamo zemljevid Evrope, ki je v zahodnem delu odličen. Avstrija je takrat segala še do Milana. Opazno pa je, da so jadranski otoki vrisani zelo pomanjkljivo, notranjost balkanskega polotoka pa je - kot preostali osmanski imperij - bolj ali manj prazna. V tem delu je vrisanih le nekaj najvažnejših pristanišč. Sklepamo lahko, da so na Zahodu takrat že izvedli natančne meritve, ki pa so na Vzhod segle le do za Zahod najbolj pomembnih prometnih vozlov.

Preostali del knjige je posvečen matematični analizi. To je snov, ki se večinoma obravnava v četrtem letniku srednje šole ali pa šele na univerzi, zato morebitne neznane pojme kar preskočite. Citirajmo začetne stavke: "Krivulja je pot, ki jo opiše točka, ko se giblje po določenem zakonu, vendar brez smeri... Zakon je treba podati z enačbo, ki se ji pokorava točka pri gibanju."

Obravnavane so znane krivulje, kot so elipsa, hiperbola, parabola, nekatere spirale ter cikloida, to je krivulja, ki jo opiše točka na obodu kroga, ki se kotali po premici v ravnini.

Diferencialni račun vpelje neskončno majhne količine in diferenciale. Današnje pisave odvodov pravzaprav ni.

Izpeljana je tudi formula za ukrivljenost ravninskih krivulj.

Naslednji razdelek ima latinski podnaslov "De maximis et minimis" in govori o največjih in najmanjših vrednostih. Tu imamo vrsto zanimivih primerov. Vega je očitno najboljši, ko ima opravka z uporabo matematike:

\* Iz krožne plošče izrezati plašč stožca z maksimalno prostornino.

Odgovor: Središčni kot meri  $\frac{2}{3}\pi\sqrt{6}$  radianov, to je približno 293 stopinj, 56 minut, 20 sekund.

\* Iz okroglega debla izrezati najmočnejši tram, če veš, da je trdnost trama sorazmerna produktu kvadrata višine in vodoravnega prereza.

Odgovor: Širina trama proti višini je kakor  $1 : \sqrt{2}$ .

\* Določiti obliko valja, ki ima pri dani prostornini minimalno površino.

Odgovor: Tak valj je enakostraničen.

\* Daljico razdeliti na tri dele, tako da ima dani trikotnik maksimalno ploščino.

\* Včrtati v kroglo stožec (valj) z največjo prostornino.

\* Včrtati v stožec valj z največjo prostornino.

\* Določiti obliko zgoraj odprte valjaste posode z minimalno notranjo površino pri dani prostornini.

\* Iz danega pokončnega stožca izrezati parabolični presek z največjo mogočo ploščino.

Naslednja tema je integral. Knjiga vsebuje zelo veliko formul za integracijo. Imamo tudi reševanje diferencialnih enačb.

Mnogo je uporabe integrala: ploščine pod (med) krivuljami, dolžina krivulj, obseg elipse, sploščenost zemeljske krogle (sferoida) in pa površina in prostornina vrtenin.

Dodan imamo širši pregled formul za kotne funkcije, sinuse vseh večkratnikov kota 3 stopinje ( od 0 do 90 stopinj) ter zelo obsežen seznam trigonometričnih formul tako za navadne kot za sferne trikotnike.

Na koncu knjige avtor omeni, da bi lahko infinitezimalni račun izpeljal tudi brez neskončno majhnih količin, vendar naj si to zainteresirani raje ogledajo drugje. Zanimiva je tudi pripomba: Tisti, ki jim tak infinitezimalni račun ni všeč in ki mislijo, da so sami sposobni napraviti boljšega, naj svoje rezultate preverijo pri računanju dolžin lokov in prostornin rotacijskih teles. Očitno je mnoge motila ohlapnost takratnih dokazov (ki pa skoraj nikoli ni vplivala na natančnost računov). Bistvene korake k večji preciznosti je napravil šele francoski matematik Cauchy več desetletij kasneje.

Tretja knjiga ima naslov: Mehanika trdnih teles. Dodani so ji lepi bakrorezi, ki kažejo škripčevja, zobata kolesa in mehanizme. Četrta knjiga je Mehanika tekočin. Slikovne priloge so bakrorezi veznih posod in raznih črpalk, med katerimi je ena tudi na paro. Več o teh knjigah bo lahko povedal mehanik ali fizik.

Iz povedanega je jasno, da sta prvi dve knjigi vsebovali dobršen del tega, kar še danes učimo pri matematiki tako na srednjih šolah kot na tehničnih in nekaterih drugih fakultetah. V nekaterih poglavjih posredovano znanje je bilo praktično enakovredno tistemu, kar zahtevamo danes. Knjige so tudi dokaj pregledne, avtor pa se je očitno potrudil matematiko približati bralcu. Značilni so tudi obširni komentarji, ki naj bi olajšali obvladovanje nelahke snovi. Posebno simpatična pa je, kot sem že rekel, avtorjeva usmeritev v uporabo, ki je tudi danes eden poglavitnih čarov teh knjig.

*Peter Legiša*